Poute Hore 02/02/2020

20

"POUTOU NZALI David"

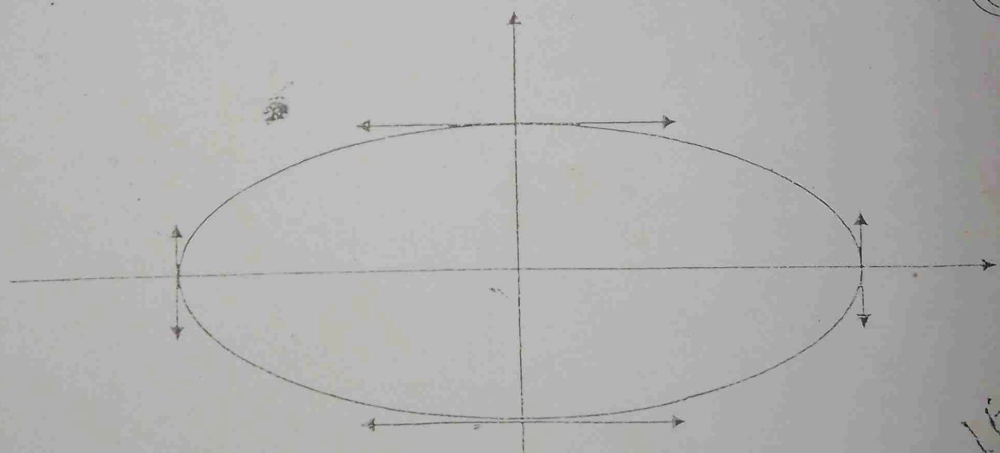
NGOKA Osspie

Nuphi

Mangue 43-44

Exercices et Problèmes de Mathématiques

Corrigés Au Baccalaureat C



16

27

32

28

Tome 3

*** WITH GOD ALL THINGS ARE POSSIBLE ***   THANKS "LORD"

1ère Partie

Exercices et Problèmes

Tome 3

Exercices et Problèmes de Mathématiques Corrigés

Terminale C

Avant Propos

Ce fascicule de Mathématiques qui n'est pas un manuel de cours, est destiné aux élèves de terminale C, mais de part sa conception il peut également convenir aux élèves de terminale E.

Nous avons choisi de traiter l'ensemble des questions du programme susceptibles d'apparaitre à l'examen, en insistant particulièrement sur des diverses techniques nécessaires à la résolution des exercices et problèmes du baccalauréat.

Les exercices et problèmes choisis ont été empruntés pour la plupart des sujets examens et d'évaluations donnés ces dernières années, intégralement résolus.

On ne saurait trop insister sur le fait qu'une bonne préparation à un examen repose sur l'étude et la compréhension des parties fondamentales du cours et sur la résolution des nombreux exercices et problèmes.

C'est pourquoi nous conseillons aux lecteurs de revoir avant toute autre chose son cours et d'essayer de résoudre seul les exercices et problèmes. La consultation si nécessaire des solutions proposées ne doit pas être passive : les solutions ne doivent pas seulement être lues mais doivent permettre de reprendre seul les exercices et problèmes. Le lecteur pourra ensuite vérifier sa compréhension au moyen des exercices et problèmes non résolus.

Nous espérons que ce fascicule rendra service à tous nos lecteurs et leur permettra d'aborder ce vaste domaine des mathématiques.

Toutes remarques et critiques visant à l'amélioration de la rédaction de ce fascicule seront reçues avec le plus grand intérêt.

Les auteurs

Exercice n°1

On se propose de calculer la valeur approchée de $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-x}}{1-x}\,dx$

1) En étudiant les variations de la fonction $f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$ sur $[0\ \frac{1}{2}]$; montrer que $1 \leq f(x) \leq \frac{2}{\sqrt{2}}$

2) a) Démontrer que pour tout $x \in [0,\ \frac{1}{2}]$ $\frac{1}{1-x} = 1 + x + \frac{x^2}{1-x}$

b) Déduire que $I \int_0^{\frac{1}{2}}(1+x)e^{-x}dx + \int_0^1 x^2 f(x)dx$

d) Déduire de (1) que $\frac{1}{24} \leq \int_0^1 x^2 f(x)dx \leq \frac{1}{12\sqrt{2}}$

e) Déduire des questions précédentes une valeur de I à 0 ,01.

Exercice n°2

On considère la suite (Un) par :

$$\forall n \in IN*;\ U_n = \frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{n} \ln(n+k)\right] - \ln(n)$$

où ln désigne le logarithme népérien

1) Démontrer que :

$$\forall n \in IN*;\ U_n = \frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{n} \ln\left(n + \frac{k}{n}\right)\right]$$

2) a) Pour $k \in [0, \ldots n-1]$

Démontrer que

$$\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right) \leq \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \ln(x)\,dx \leq \frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{k+1}{n}\right)$$

b) En déduire que $U_n - \frac{1}{n}\ln 2 \leq \int_1^2 \ln(x)\,dx \leq U_n$

3) Déduire de ce qui précède un encadrement de Un et sa limite quand n tends vers l'infini.

Exercice n°3

On considère pour tout n une suite $U_n = \int_0^{\pi} \frac{\cos nx}{\frac{5}{4} - \cos x}\,dx$

1) Justifier l'existence de (Un) (on ne cherche pas à calculer Un)

2) On admet que $Uo = \frac{4\pi}{3}$. Démontrer que $U_1 = \frac{2\pi}{3}$

3) a) Transformer cos(n + 2)x + cosnx en un produit de cosinus.

b) Utiliser le résultat précédent pour démontrer que $U_n + U_{n+2} = \frac{5}{2}U_{n+1}$

c) En déduire que pour tout $n \in IN$, $U_n = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

4) On pose $Sn = Uo + U_1 + \ldots + Un$.

Calculer Sn en fonction de n puis sa limite quand n tends vers l'infini.

Exercice n°4

L'objet de l'exercice est d'étudier la suite (In) définie par :

$I_0 = \int_0^1 \sqrt{1+t}\,dt$, $I_1 = \int_0^1 t\sqrt{1+t}\,dt, \ldots, I_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1+t}\,dt$

1) Calculer I_0 : calculer I_1 à l'aide d'une intégration par parties

2) Comparer t^n et t^{n+1} lorsque $0 \leq t \leq 1$; en déduire que la suite (In) est décroissante.

3) Grâce à un encadrement de $\sqrt{1+t}$, établir que

$\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}$

4) Montrer que pour tout t de $[0, 1]$

$0 \leq \sqrt{2} - \sqrt{1+t} \leq \frac{1}{2}(1-t)$

En déduire que

$\frac{\sqrt{2}}{n+1} - \frac{1}{2n^2} < I_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}$ et déterminer la limite de In.

Exercice n°5

Soit la fonction numérique de la variable x définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1+2\ln x}{x^2}$ On admettra que pour tout réel x au moins égal à 4, $f'(x) \leq \frac{1}{x}$

1) Soit la suite (In) définie par $I_n = \int_n^{n+1} f(x)dx$.

a) Montrer que $\forall\, n \geq 4,\ 0 \leq I_n \leq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$.

b) En déduire que la suite (In) converge puis déterminer sa limite

2) Soit $S_n = I_1 + I_2 + \cdots + I_n$

a) Démontrer que $S_n = \int_1^{n+1} f(x)dx$

b) Calculer Sn puis sa limite.

Exercice n°6

Soit la suite (I_k) définie par : $I_k = \int_0^1 \frac{x^k}{\sqrt{1+x^2}}dx$

1) Montrer que (I_k) est décroissante

2) Démontrer que la fonction $x \longrightarrow \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ est une primitive de la fonction $x \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ En déduire la valeur de I_0

3) Calculer I_1

4) Démontrer que pour entier $k \geq 2$, on a la relation :

$kI_k = \sqrt{2} - (k-1)I_{k-2}$. En déduire I_2 et I_3

5) Démontrer que $I_k \leq \frac{1}{k+1}$ et en déduire la limite de la suite (I_k)

Exercice n°7 : Les questions 1 et 2 sont indépendantes

1) On considère les intégrales suivantes :

$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2x \cos^4x\,dx$ et $K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4x \cos^2x\,dx$

Calculer successivement $I + K$; $I - K$ puis déduire la valeur de I et de K

2) On considère les intégrales suivantes : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4x\,dx$, $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4x\,dx$

$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^2x \cos^2x\,dx$

a) Calculer $I - J$ et $I + J + K$

b) Exprimer cos4x en fonction de cosx et sinx

En déduire la valeur de $I + J - 3K$ puis celle de I, J et K

Exercice n°8

On pose $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^n x\,dx$ Quelque soit l'entier n

1) Calculer W_0

2) A l'aide d'une intégration par parties, trouver une relation entre W_n et W_{n-2} (on pourra écrire $\sin^n x = \sin^{n-1}x \sin x$)

3) Calculer W_4

Exercice n° 9

1) Calculer $F(x) = \int_0^x e^{-t}\sin t\,dt$

2) On pose $B_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)\,dt$ où k est un entier et $f(t) = e^{-t}\sin t$

Soit $S_n = B_0 + B_1 + \ldots + B_n$

Exprimer S_n à l'aide de la fonction F.

En déduire que la suite (S_n) admet une limite que l'on déterminera.

3)a) Donner sans calculer l'intégrale le signe de B_k suivant la parité de k

b) Calculer B_0, puis B_k pour $k \in IN$

Vérifier que $B_k = (-1)^k e^{-k\pi} B_0$

c) Calculer $T_n = |B_0| + |B_1| + \ldots + |B_n|$.

Calculer :

$\lim_{n\to+\infty} T_n$

d) On pose :

$S = \lim_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim_{n\to+\infty} T_n$. Vérifier que $\frac{1}{S} + \frac{1}{T} = \frac{2}{B_0}$

Exercice n° 10

Soit la fonction numérique de la variable réelle x définie par $f(x) = 3^x - 1 - x$

1) Etudier les variations de f

2) Démontrer que $\forall\, x \geq 0$; $1 + x \leq 3^x$

3) On considère la suite (Un) définie par $U_n = (1 + \frac{1}{3})(1 + \frac{1}{3^2})\ldots(1 + \frac{1}{3^n})$

a) Démontrer que $\frac{U_{n+1}}{U_n} > 1$; Que dire de la suite (U_n)

b) Démontrer que $\forall\, n \in IN$, $U_n \leq \sqrt{3}$ (On pourra utiliser le résultat de la question 2)

c) La suite (U_n) est – elle convergente ? Justifier la réponse.

Exercice n° 11

1) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère les courbes (Cf) et (Cg) des fonctions f et g définies par $f(x) = e^{-x}\sin x$, $g(x) = -e^{-x}$

a) On note (x_k, y_k) les coordonnées des points M_k d'intersection de (Cf) et (Cg).

Déterminer x_k, et y_k.

b) Pour $n \in IN$; on pose $S_n = x_0 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ et $T_n = y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_n$

Exprimer S_n et T_n en en fonction de n

2) Soit h la fonction définie par
$$\begin{cases} h(x) = 4^x + 2^x - 2, & \text{si } x < 0 \\ h(x) = e^{-x}\sin x, & x \geq 0 \end{cases}$$

a) Etudier la continuité et la dérivabilité de h en $x = 0$

b) Etudier les variations de h sur $]-\infty,\ 2\pi]$

c) Calculer $I = \int_0^{\pi} h(x)dx$ (on pourra utiliser une intégration par parties)

Donner une interprétation géométrique du réel I.

Exercice n° 12

Soit (U_n) la suite définie par $U_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^n x}{\cos^2 x} dx$; quelque soit $n \in IN$

1) Calculer U_0, U_1 et U_2

2)a) Démontrer que (Un) est décroissante et positive.

b) Démontrer que (U_n) est convergente vers une limite l

3) Démontrer que $\forall\ n \in IN$; $0 \leq U_n \leq \frac{\pi}{2}(\frac{\sqrt{2}}{2})^n$. Préciser alors l

Exercice n° 13

1) Déterminer les réels a et b tels que
$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n+1} + \frac{b}{n+2} \quad (1)$$

2) Soit $J_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ et $S_n = J_0 + J_1 + J_2 + \ldots + J_n$; $\forall\ n \in IN$

En exploitant la formule (1) exprimer S_n en fonction de n.

3) Soit $I_n = \int_0^1 2(1-\sqrt{x})^n dx$, $\forall\ n \in IN$

a) Justifier l'existence de I_n

b) Par une intégration par parties montrer que $I_n = \frac{n}{n+2} I_{n-1}$; $\forall\ n \in IN^*$

c) Calculer I_0, I_1 et I_2

d) Exprimer I_n en fonction de n [On rappelle que $n! = 1.2.3\ldots(n-1)n$]

4) On pose $T_n = I_0 + I_1 + I_2 + \ldots + I_n$ .Exprimer Tn en fonction de n puis démontrer que
$$\lim_{n\to+\infty} 2\int_0^1 \left[1 + (1-\sqrt{x}) + (1-\sqrt{x})^2 + \cdots + (1-\sqrt{x})^n\right] dx = 2$$

Exercice n° 14

On définit deux suites (Xn) et (Yn) par : $X_0 = Y_0 = 2$ et quelque soit n ; $X_n = \frac{1}{4} Y_{n-1}$ et $Y_n = \frac{3}{4} X_{n-1} + \frac{1}{2} Y_{n-1}$

1) Soit $(V_n)_{n\in IN}$ tel que quelque n $V_n = X_n + Y_n$

a) Donner la nature de la suite (Vn)

b) Démontrer que $X_n > 0$ et $Y_n > 0$

2) On pose $U_n = \frac{X_n}{Y_n}$. Démontrer que $\forall$ n on a : $U_{n+1} = \frac{1}{3U_n + 2}$

3) On considère la suite (Wn) telle que : $W_{n+1} = \frac{U_n - \frac{1}{3}}{U_n + 1}$

Donner la nature et les éléments caractéristiques de la suite (Wn).

4) Ecrire Xn et Yn en fonction de n, puis déduire leur limite quand n tend vers $+\infty$.

Exercice n° 15

1) Montrer que $\forall\ x \in IR$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$

Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = e^x \sin x$.

Résoudre dans IR l'équation $f'(x) = 0$ (1), f' étant la dérivée de f

2) Soit (U_n) et (V_n) deux suites numériques définies par $U_n = -\frac{\pi}{2} + n\pi$ et $V_n = f(U_n)$, $\forall n \in IN$

a) Montrer que Un est une solution de l'équation (1)

b) Montrer que (Un) est une suite arithmétique et que (Vn) est une suite géométrique. On précisera la raison et premier terme de chaque suite

c) Calculer en fonction de n, $S_n = V_0 + V_1 + \ldots + V_n$

Exercice n° 16

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x})$; 2) $\lim_{x\to\infty} x^2\left(a^{\frac{1}{x}} - a^{\frac{1}{x+1}}\right)$;

3) $\lim_{x} x^{\frac{3}{2}}\left[\sqrt{(x+a)(x+b)} - x\right]$; 4) $\lim_{x\to1} \frac{x^2-1}{\sqrt{3-x} - \sqrt{1+x}}$

5) $\lim_{x\to7} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9} - 2}$; 6) $\lim_{x\to2} \frac{\sqrt[3]{(10-x)^2} - 4}{x-2}$

7) $\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{(x+1)^3} - 1}{(x+1)\sqrt[3]{(x+1)^2} - 1}$; 8) $\lim_{x\to a} x^{\frac{1}{5}}\left[(1+x)^{\frac{4}{5}} - (x-1)^{\frac{4}{5}}\right]$

9) $\lim_{x\to a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a}$

Exercice n° 17

Soit une fonction f définie pour tout x réelle par :
$$\begin{cases} (x) = \frac{1}{2} x e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ f(x) = 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1) Donner son ensemble de définition

2) Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur son ensemble de définition.

3) Etudier les variations de f

4) Soit $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$, montrer que cette droite est une asymptote de au voisinage de $\pm\infty$, donner sa position par rapport à la courbe. Tracer cette courbe dans un repère orthonormé (unité 1 cm)

Exercice n° 18

Soit f une fonction définie par : $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x^2+1}}$

1) Calculer la dérivée de la fonction f et montrer que cette dérivée vérifie la relation $f(x) = 2f'(x)\sqrt{x^2+1}$

2) En déduire que la dérivée seconde de f vérifie l'équation suivante :

$$4(1+x^2)f''(x) + 4xf'(x) - f(x) = 0$$

Exercice n° 19

On donne une fonction h définie par $h(x) = xe^{\frac{-x}{2}}$

1) Démontrer que quelque soit x positif on a : $0 < h(x) < 1$

2) Déduire que pour x positif on a : $0 < xe^{\frac{x}{2}} < e^x$

3) On donne $F(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt$

a) On pose $f(x) = F(x) - \ln x$. Montrer que $f(x) = \int_1^x \frac{e^t - 1}{t}\,dt$.

b) Etudier le signe de f'

c) En déduire :

$\lim_{x \to 0^+} F(x)$ *et* $\lim_{x \to +\infty} F(x)$

Exercice n° 20

On désigne par θ un réel $\in [0, \pi]$

1) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ de nombres complexes l'équation suivante :

$Z^2 - (2^{\theta+1}\cos\theta)Z + 2^{2\theta} = 0$

2) Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives $Z_A = 2^{\theta}(\cos\theta - i\sin\theta)$ et $Z_B = 2^{\theta}(\cos\theta + i\sin\theta)$ Déterminer le réel θ pour que le triangle OAB soit équilatéral.

Exercice n° 21

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes l'équation

$$Z^8 - 2(1 + 2i\sqrt{3})Z^4 - 2(1 + i\sqrt{3}) = 0$$

2) Représenter les images des solutions de cette équation dans le plan complexes rapporté au repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Exercice n° 22

Dans le plan complexe, on considère une application f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$f(z) = \frac{2Z}{Z^2 - 1}$ Avec $z \neq 1$

1) Montrer que $f(e^{i\theta})$ est imaginaire pur

2) Montrer que quelque soit $z \neq 1$; $f(z) = \frac{2Z(\overline{Z}^2 - 1)}{|Z^2 - 1|^2}$

3) On pose $Z = X + iY = 2Z(\overline{Z}^2 - 1)$ et $Z = x + iy$, déterminer les réels X et Y en fonction de x et y.

4) Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M d'affixe z tels f(z) soit imaginaire pur

5) Résoudre l'équation $f(z) = \frac{1}{2}i$

Exercice n° 23

On considère un polynôme de 3ème degré des nombres complexes défini par

$P(Z) = 3Z^3 + (-5\sqrt{3} + 10i)Z^2 + (5 - 15i\sqrt{3})Z + 24i$

1) Montrer l'équation $P(Z) = 0$ admet une solution imaginaire pur qu'on notera Z_0.

2) Achever la résolution de l'équation $P(Z) = 0$, on notera Z_1 et Z_2 ces racines qui seront telles que $R_e(Z_1) > R_e(Z_2)$.

3) Calculer l'argument et le module de chaque racine puis écrire sous la forme trigonométrique.

4) Montrer que les racines Z_0, Z_1 et Z_2 pris dans cet ordre sont en progression géométrique. Déterminer la raison de cette progression.

Exercice n° 24 (les deux questions sont indépendantes)

1) On donne deux nombres complexes Z_1 et Z_2 définis par $Z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$ et $Z_2 = 1 - i$

a) Calculer le module et l'argument du complexe $Z = \frac{Z_1}{Z_2}$, donner ses formes algébrique et trigonométriques puis en déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$

b) Résoudre l'équation : $(\sqrt{6} - \sqrt{2})\cos x + (\sqrt{6} + \sqrt{2})\sin x = 2$

2) On donne le nombre complexe $U = -3 + 3i$

a) calculer le module et l'argument de U

b) Déterminer le nombre complexe Z tel que $U.Z = \cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}$ puis déduire les valeurs de $\cos\frac{17\pi}{12}$ et $\sin\frac{17\pi}{12}$.

Exercice n° 25

1) On considère le polynôme P défini par $P(Z) = Z^3 - 6Z^2 + 12Z - 16$

a) Calculer P(4)

b) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $P(Z) = 0$

2) Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ tel que $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 2$ cm

Soit A, B et C les points d'affixes respectives $a = 4$, $b = 1 + i\sqrt{3}$ et $c = 1 - i\sqrt{3}$

Soit A, B et C sur la figure que l'on complétera tout au long de l'exercice.

a) Placer les points A, B et C sur la figure que l'on complétera tout au long de l'exercice.

b) Montrer que le triangle ABC est équilatéral.

3) Soit K le point d'affixe $k = -\sqrt{3} + i$

On appelle F l'image de K par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et G l'image de K par la translation de vecteur $\overrightarrow{OB}$.

a) Quelles sont les affixes respectives de F et G ?

b) Montrer que les droite (OC) et (OF) sont perpendiculaires.

4) Soit H le quatrième sommet du parallélogramme COFH.

a) Montrer que le quadrilatère COFH est un carré.

b) Calculer l'affixe du point H

c) Le triangle AGH est – il équilatéral ? Justifier la réponse.

Exercice n° 26

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère l'équation (E) :

$$Z^2 - 2(\cos x + i\sin x)Z + 1 = 0 \text{ où } x \in [0,\pi]$$

1) Démontrer que :

$Z' = e^{ix} + \sqrt{2\sin x}\, e^{i\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$ et $Z'' = e^{ix} - \sqrt{2\sin x}\, e^{i\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$ sont solutions de l'équation (E)

2) a) Mettre sous la forme trigonométrique le nombre complexe $u = i + e^{ix}$

b) Démontrer que $Z' + i$ et $Z'' + i$ ont même argument.

3) On désigne par A, B, C, M' et M'' les points d'affixes respectives e^{ix}, i, $-i$, Z' et Z''

a) Démontrer que M' est le symétrique de M'' par rapport à A.

b) Démontrer que A, M', M'' et C sont alignés

4) Démontrer que $Z'' - i$ et $Z' - i$ ont même module.

Exercice n° 27

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ (unité graphique 4cm)

1) On considère les points A, B, C, D et E d'affixes respectives $Z_A = e^{i\frac{\pi}{6}}$, $Z_B = e^{i\frac{2\pi}{3}}$, $Z_C = -1$, $Z_D = -i$ et $Z_E = e^{-i\frac{\pi}{6}}$

a) Faire la figure

b) Montrer que EA = ED et EB = EC. Montrer que (OE) est la médiatrice du segment [AD] et du segment [BC].

c) Déterminer les points K et L images respectives de A et B par la translation t de vecteur $\overrightarrow{OI}$. Placer les points K et L sur la figure.

2) On considère l'application f qui à tout point M d'affixe Z associe le point M' d'affixe Z' tel que $Z' = (\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})\bar{Z}$ (où $\bar{Z}$ est le conjugué de Z).

a) Justifier l'égalité f = RoS où S est la réflexion d'axe (OI) et R une rotation dont on précisera le centre et l'angle.

b) Montrer que F est une réflexion dont on précisera l'axe.

3) Soit G l'application qui à tout point M d'affixe Z associe le point M'' d'affixe Z'' défini par la formule : $Z'' = (\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})\bar{Z} + 1$

Déterminer une application T telle que G = ToF, en déduire que G est un antidéplacement.

Exercice n° 28

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On note (C) le cercle de centre O et de rayon R. On désigne par A le point de (C) d'affixe R et par M_k un point de (C) d'affixe Z_k

On considère des points (M_K) de (C) définie par : $\begin{cases} M0 = A \\ MK + 1 = r(Mk) \end{cases}$ où r est la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{n}$, $n \geq 2$

1)a) Exprimer Z_{k+1} en fonction de Z_k

b) En déduire l'expression de Z_k en fonction de k, n, et Z_0.

c) Comparer M_n et M_0

d) Faire une figure lorsque n = 16 (on prendra R = 4 cm)

2) a) Prouver que $\forall\, k \geq 0$, $M_k M_{k+1} = 2R\sin\frac{\pi}{n}$

b) On note $L_n = M_0 M_1 + M_1 M_2 + \ldots + M_{n-1} M_n$

Calculer

$$\lim_{x \to +\infty} L_n$$

Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

Exercice n° 29

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$; Soit $\mathbb{C}_1$ l'ensemble $\mathbb{C} - \{-i, i\}$ et f l'application définie par :

Pour tout $z \in \mathbb{C}_1$, $f(z) = \frac{z}{z^2+1}$

1) Résoudre l'équation $f(z) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

2) a) Montrer que pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}_1 \times \mathbb{C}_1$, $f(z) = f(z') \Leftrightarrow z = z'$ ou $zz' = 1$

b) Soit $(z, z') \in \mathbb{C}_1 \times \mathbb{C}_1$ tel que $|z| < 1$ et $|z'| < 1$; montrer que si $f(z) = f(z')$ alors $z = z'$.

3) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $z \in \mathbb{C}_1$ et f(z) soit réel.

4) Dans cette question $z = e^{i\theta}$, $\theta \in [-\pi, \pi] - \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$

a) Montrer que f(z) est réel et le calculer en fonction de $\cos\theta$.

b) Soit (U_n) la suite réelle telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = 1 + [f(z)] + [f(z)]^2 + \ldots + [f(z)]^n$

Pour quelles valeurs de θ cette suite converge – t- elle ?.

Exercice n° 30

Soit P un plan rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1) Déterminer et construire l'ensemble H des points M de P d'affixe complexe Z tels que :

$$Z\bar{Z} - (Z^2 + \bar{Z}^2) + 1 = 0$$

Préciser les sommets, les foyers et les asymptotes. Donner une mesure de l'angle de chacune des asymptote avec la droite $(O, \vec{u})$

2) Soit M un point de H d'affixe complexe Z. On pose $|Z| = r$ et on désigne par θ l'argument de Z.

Calculer r en fonction de $\cos\theta$.

Exercice n° 31

Soit la fonction f :]−π, π[dans IR telle que $f(\theta) = \frac{3}{1+\cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta}$

1) Montrer que $\cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta = 2\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$ et déduire l'ensemble de définition D de f.

Déterminer le sens de variations de f en déduire le signe de f(θ).

2) Soit un repère orthonormé $(0, \vec{u}, \vec{v})$. On considère le point M de coordonnées $x = f(\theta)\cos\theta$ et $y = f(\theta)\sin\theta$. Soit M' l'image de M par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

On pose z = x + iy (l'affixe de M) et Z = X + iY (l'affixe de M')

a) Calculer Z en fonction de z puis X et Y en fonction de θ.

b) Etablir l'égalité $f(\theta) + 2X - 3 = 0$

c) Déterminer l'équation cartésienne de la courbe (Γ) à laquelle appartient le point M.

Exercice n° 32

Dans l'ensemble ℂ des nombres complexes. On considère les points M, A, B, Q et N d'affixes respectives $Z = e^{it}$, 1, −1 , Z^2 et $\frac{1}{Z}$.

1) Donner le module et l'argument de chaque nombre complexe. Montrer que ces points sont sur un cercle qu'on déterminera une équation cartésienne.

2) Soit S un pont d'affixe $Z^2 + Z + \frac{1}{Z}$

a) Montrer que $\overrightarrow{BS} = 2\cos t\,\overrightarrow{BM}$

b) On pose (x(t), y(t)) les coordonnées du point S Montrer que

$$\begin{cases} x(t) = 2\cos 2t + 2\cos t - 1 \\ y(t) = \sin 2t \end{cases}$$

3) On appelle (Γ) la courbe que parcourt le point S. Tracer cette courbe (appelée poisson de Descartes).

Exercice n° 33

Soit un carré direct ABCD de centre O. Les points E, P, G et K désignent les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD] et [DA].

1) On considère une rotation r de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{4}$ qui transforme A en D

a) Construire Ω

b) Caractériser $g = r(\Omega, \frac{\pi}{4})$ or $(A, \frac{3\pi}{4})$.

2) On rapporte le plan au repère orthonormé $(P, \overrightarrow{PC}, \overrightarrow{PO})$. f est la fonction définie par $f(x) = 2^x$ et $T = S_{PG} o t_{\overrightarrow{OD}}$

a) Reconnaitre et caractériser T

b) Etudier les variations de f et construire sa courbe (C) dans le repère $(P, \overrightarrow{PC}, \overrightarrow{PO})$.

c) Construire la courbe (C') image de (C) par T puis T(K) = K'; T(D) = D'; T(O) = O' et T(G) = G' puis placer ces points.

d) Calculer l'aire limitée par la courbe (C') les droites (K'O') ; (P'G') et (D'G').

e) Donner l'expression de la fonction h associée a (C').

Exercice n° 34

Le plan P est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé direct. Soit f l'application de P dans P qui à tout point M de coordonnées (x, y) associe le point M' de coordonnées (x', y') telles que

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = -\frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{1}{2}y \end{cases}$$

1) Montrer que f est une bijection et déterminer l'ensemble des points invariants par f.

2) On désigne par M_1 et M_2 les projections orthogonales du point M(x, y) respectivement sur les droites $(O\,\vec{i})$ et $(O, \vec{j})$

a) Calculer en fonction de x et y, $\left\|\overrightarrow{M_2M'}\right\|$ et $\left\|\overrightarrow{M_2M_1}\right\|$

b) Montrer que M'est le transformé de M_1 par la rotation de centre M_2 dont on déterminera une mesure de l'angle.

Exercice n° 35

Le plan (P) est rapporté au repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$.On considère l'application f(P) qui à tout point M(x, y) associe le point M'(x', y') telle que

$$\begin{cases} x' = \frac{5}{2}x + y + \frac{5}{2} \\ y' = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}y - \frac{5}{4} \end{cases}$$

1) Montrer que f est une bijection de (P) dans (P).

2) Déterminer l'expression analytique de l'application réciproque de f^{-1} de f

3) Déterminer l'ensemble Inv(f) des points invariants de f.

4) Démontrer que $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe $\vec{v}(a, b)$

5) Soit $H(x_H, y_H)$ le projeté de M(x, y) sur Inv(f) parallèlement à $\vec{v}$.

a) Déterminer les coordonnées (x_H, y_H) en fonction de celles de M.

b) Trouver une relation entre les vecteurs $\overrightarrow{HM'}$ et $\overrightarrow{HM}$.

6) Déduire que f est une affinité dont on déterminera, le rapport k , la base et la direction.

Exercice n° 36

Dans le plan orienté, OBCA est un rectangle tel que $OB = \sqrt{2}\,OA = 1$ et $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$. I est le milieu [OB] et K celui de [BC].

On note S la similitude directe telle S(O) = B et S(A) = I

1) Préciser son rapport k et son angle θ

2) Démontrer que S(B) = C et S(I) = K

3) On pose f = SoS.

a) Prouver que f est une homothétie de rapport $-\frac{1}{2}$ dont le centre est celui de S.

b) Préciser f(O) et f(A) et déduisez – en une construction du centre Ω de S.

4) On choisit un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ tel que B a pour affixe $\sqrt{2}$ et A apour affixe i

a) Quelle est l'écriture complexe de S

b) Déduisez – en l'affixe de Ω

Exercice n° 37

On considère un triangle ABC tel que AB = 7, BC = 8 et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$. I est le milieu de [BC]. (C) est le cercle circonscrit au triangle ABC. Les droites (T) et (Δ) sont respectivement les perpendiculaires à (OB) en B et (OC) en C. On appelle E le point d'intersection de (T) et (Δ).

1) Faites la figure sur une page en respectant les mesures données.

2) On affecte à A, B et C les coefficients – 1, 2 et 2 respectivement.

a) Montrer que les points A, B et C on un barycentre G.

b) Montrer A, I et G sont alignés.

c) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AD}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ lorsque G est confondu à D.

3) Soit M un point du plan. Exprimer en fonction du vecteur $\overrightarrow{MG}$ le vecteur $\vec{V} = -\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$.

4) Construire le point G barycentre et F tel que $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, donner la nature du quadrilatère ABCF.

5) Reconnaitre et construire l'ensemble des points M du plan tels que $\|\vec{V}\| = 3BO$.

Exercice n° 38

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. : unité graphique 1 cm.

1) Construire le cercle (C) de centre A(0, – 8) tangent en O à l'axe $(O, \vec{i})$.

2) Construire le point M image de O par la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

3) Construire la tangente (T) à (C) en M.

4) Construire le projeté orthogonal H de M sur l'axe $(O, \vec{i})$.

5) On désigne par N l'intersection des droites (T) et $(O, \vec{i})$. Démontrer que les points O, N, M et A appartiennent à un cercle (C_1) à construire.

6) Soit S_1 la similitude plane direct de centre O qui transforme (C) en (C_1). Déterminer son rapport k_1 et son angle θ_1.

7) Soit S_2 la similitude plane directe de centre N qui transforme M en H.

a) Déterminer son rapport k_2 et son angle θ_2.

b) Construire les images des points A et O par $S_2 o S_1$

c) En déduire la construction du centre Ω de $S_2 o S_1$

On note I le milieu du segment [GH], on se propose de démontrer par deux méthodes que la médiane (OI) du triangle OGH est une hauteur du triangle OAB.

1) Placer ces différents éléments sur la figure.

2) On rapporte le plan complexe à u n repère orthonormal direct d'origine O, tel que l'affixe du point G est égale à 1. On note Z l'affixe du point H.

a) Calculer les affixes des points I, A et B en fonction de Z.

b) Montrer que la droite (OI) est perpendiculaire à la droite (AB).

3) On désigne par h l'homothétie de centre G et de rapport 2.

a) Déterminer les images par h des points O et I.

b) Déterminer l'image par R' du point E.

c) Conclure.

Exercice n° 43

L'espace vectoriel E est rapporté à une base $B = (0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère f de E qui à out vecteur $\vec{u}(x, y, z)$ associe le vecteur $\vec{u}'(x', y', z')$ telque :

$$\begin{cases} x' = 2x - 3y + 5z \\ y' = -x + 4y + z \\ z' = x + 6y + 13z \end{cases}$$

1) Calculer $f(\vec{i})$, $f(\vec{j})$ et $f(\vec{k})$

2) Donner la matrice de f dans la base B

3) f est – elle bijective ?

4) Déterminer le noyau de f et donner une base $\vec{e_1}$

5) Déterminer l'image de f et donner sa base $(\vec{e_2}, \vec{e_3})$

6) Montrer que B' = $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ est un base de E et donner la matrice de f dans la base B'.

Exercice n° 44

Dans l'espace vectoriel (C, +, .) des nombres complexes muni d'une base $\mathcal{B} = (1, i)$ où i est le nombre complexe tel que $i^2 = -1$, on définit l'application f qui à tout complexe Z de C associe le complexe f(Z) de C défini par : $f(Z) = (2x + 3yi)\bar{Z}$.

1) Démontrer f est un endomorphisme de l'espace vectoriel (C, +, .)

2) Déterminer la matrice de f relativement à la base $\mathcal{B} = (1, i)$.

Dans le plan complexe (P) rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$, on défini l'ensemble (E) des points M(x ; y) d'affixe Z = x + yi tels que f soit une symétrie vectorielle.

des points M(x ; y) d'affixe Z = x + yi tels que f soit une symétrie vectorielle. est $4x^2 + 9y^2 - 1 = 0$

3)a) Démontrer que l'équation cartésienne de (E) est $4x^2 + 9y^2 - 1 = 0$

b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de (E)

c) Construire (E) dans le repère $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ unité graphique 6cm

Exercice n° 39

L'espace étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On considère l'application f qui à tout point M(x, y, z) associe le point M'(x', y', z') définie par :

$$\begin{cases} x' = x + 4 \\ y' = x - 5 \\ z' = y + 6 \end{cases}$$

1) Démontrer que f est une isométrie
2) f étant un vissage, déterminer ses éléments caractéristiques.

Exercice n° 40

ABCD est un carré direct de centre O. R est la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$. T la translation du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et H l'homothétie de centre C et de rapport $\sqrt{3}$.
On pose g = ToR, f = goH
1) Montrer que g est une rotation dont on précisera l'angle.
2) En utilisant la décomposition judicieuse de R et de T, déterminer le centre de la rotation g.
3) On note I le centre de la similitude plane directe f. Donner l'angle et le rapport de f
4) Quelle et l'image de C par f
5) Déterminer et construire (ξ) l'ensemble des points M tels que $\left(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MD}\right) = \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$
6) Montrer que $I \in (\xi)$
7) En utilisant le triangle IDC, déterminer l'angle $(\widehat{\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CI}})$, puis construire I.

Exercice n° 41

Soit P un plan rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, m un réel et f l'application de P dans lui-même qui au point M(x, y) fait correspondre le point M'(x', y') tel que :

$$\begin{cases} x' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + m \\ y' = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + 2 \end{cases}$$

1) Démontrer que f est un antidéplacement.
2) Pour quelle valeur de m, f est – elle une symétrie orthogonale par rapport à une droite (D) dont on précisera l'équation.
3) Lorsque m = 0, Déterminer une droite (Δ) et un vecteur $\vec{u}$ tel que $\vec{u}$ soit élément de la direction de (Δ) et f = SoT = ToS où S est la symétrie orthogonale de base (Δ) et T la translation de vecteur $\vec{u}$.

Exercice n° 42

Dans le plan orienté, on considère quatre points E, F, G, H non alignés tels que EFGH soit un parallélogramme de centre O.
On désigne par A l'image de G par la rotation R de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
On désigne par B l'image de H par la rotation R' de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Exercice n° 45

Soit E un espace vectoriel sur IR^3 muni d'une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ directe. F un endomorphisme de E défini analytiquement dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ par

$$f: \begin{cases} x' = x \\ y' = -2x + 2y - 2x \\ z' = -2x + y - z \end{cases}$$

1) Donner la matrice de f dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
2) Démontrer que f est un projecteur de E
3) Donner les éléments caractéristiques de f.

Exercice n° 46

Dans IR^3 muni de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère l'endomorphisme f défini par :

$$\begin{cases} f(\overrightarrow{e_1}) = \overrightarrow{e_1} \text{ avec } \overrightarrow{e_1} = \vec{i} + 2\vec{k}\,;\ \overrightarrow{e_2} = \vec{j} - \vec{k} \text{ et } \overrightarrow{e_3} = -2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \\ f(\overrightarrow{e_2}) = \overrightarrow{e_2} \\ f((\overrightarrow{e_3}) = \overrightarrow{e_3} \end{cases}$$

1) Déterminer $f\vec{i})$, $f(\vec{j})$ et $f(\vec{k})$
2) Déterminer la matrice de f dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
3) Vérifier si f est bijectif
4) Déterminer l'expression analytique de f dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
5) Déterminer l'ensemble des vecteurs invariants par f et en donner un base B_1.
6) Déterminer l'ensemble des vecteurs transformés par leur opposés par f et en donner une base B_2
7) Montrer que $B_1 \cup B_2$ est une base de IR^3
8) Donner la nature de f et les éléments caractéristiques.

Exercice n° 47

IR^3 est rapporté à sa base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On considère l'application $f : IR^3 \to IR^3$
$(x, y, z) \to (2x, 2y + z, z)$
1) Montrer que f est une application linéaire
2) Quelle est la matrice de f dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$?
3) Déterminer le noyau de f
4) Déterminer l'ensemble E des vecteurs $\vec{u}$ de IR^3 qui sont invariants par f en donner une base $\vec{e}_1$
5) On pose $F = \{ \vec{u} \in IR^3$ telque $f(\vec{u}) = 2\vec{u} \}$ Déterminer F et en donner une base $(\vec{e}_2, \vec{e}_3)$
6) Vérifier que $(\vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base de IR^3
7) Déterminer la matrice de f dans la base $(\vec{e}_2, \vec{e}_3)$, puis donner son expression analytique.

Exercice n° 48

Soit un espace vectoriel E muni d'une base $B(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et f l'endomorphisme de E défini dans la base B par la matrice. $A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on désigne par E_λ l'ensemble des vecteurs $\vec{u}$ tels que $f(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$.

1) Montrer que si $\lambda \in \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right\}$, alors $E_\lambda = \{\vec{0}\}$

2) Montrer que $E_{\frac{1}{2}}$ est une droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{e}_1 = -2\vec{i} + \vec{j}$ et $E_{\frac{1}{4}}$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{e}_2 = -3\vec{i} + \vec{j}$.

3) Vérifier que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est une base B' de E

4) a) Exprimer le vecteur $\vec{u_0} = -5\vec{i} + 2\vec{j}$ dans la base B'

b) Déterminer la matrice de f dans la nouvelle base B'

c) On définit une suite de vecteurs par la relation $\vec{u}_{n+1} = f(\vec{u}_n)$. Quelles sont dans la base B' les coordonnées de $\vec{u}_n$?

d) Quelles sont dans la base B les coordonnées de $\vec{u}_n$?

Exercice n° 49

1) Résoudre l'équation différentielle (E) $y'' + 2y' + 5y = 0$

2) Déterminer la solution f de l'équation (E) telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = -1$.

3) On pose $F(x) = -\frac{1}{5}[f'(x) + 2f(x)]$

a) Démontrer F est une primitive de f sur IR. Expliciter F(x).

b) En déduire le calcul de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$.

Exercice n° 50

On donne un entier naturel n strictement positif, et on considère l'équation différentielle :

$$(En) : y' + y = \frac{x^n}{n!}e^{-x}$$

1) On fait l'hypothèse que deux fonctions g et h, définies et dérivables sur IR vérifient, pour tout x réel : $g(x) = h(x)\, e^{-x}$

a) Montrer que g est solution de (En) si, et seulement si, pour tout x réel :

$$h'(x) = \frac{x^n}{n!}$$

b) En déduire la fonction h associée à une solution g de (En), sachant que $h(0) = 0$. Quelle est alors la fonction g ?

2. Soit φ une fonction définie sur IR.

a) Montrer que φ est une solution de (En) si, et seulement si, $\varphi - g$ est solution de l'équation

$$(F) : y' + y = 0$$

b) Résoudre (F)

c) Déterminer la solution générale φ de l'équation (En).

d) Déterminer la solution f de l'équation (En) vérifiant $f(0) = 0$

Exercice n° 51

On considère l'équation différentielle

$$(\mathcal{E}) : y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$$

1) Déterminer le réel λ sachant que la fonction $y_0 = \lambda x^2 e^{-x}$.

2) Montrer qu'une fonction y est solution de $(\mathcal{E})$ si, et seulement si, $z = y - y_0$ est solution de l'équation différentielle

$$(\mathcal{E}_1) : y'' + 2y' + y = 0$$

3) Résoudre l'équation différentielle $(\mathcal{E}_1)$ puis déduire la solution générale de l'équation différentielle $(\mathcal{E})$.

4) Déterminer la solution de $(\mathcal{E})$ dont la courbe passe par le point A(- 1, 0)

Exercice n° 52

Un sac contient 10 jetons. 6 jetons portent le n°1 et 4 jetons le n°3. On tire 3 jetons simultanément. On considère X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe la somme des numéros inscrits sur les jetons tirés.

On suppose que les tirages sont équiprobables.

1) Donner les valeurs de X

2) Donner la loi de probabilité

3) Calculer E(X), V(X) et σ(X)

4) Calculer la probabilité p pour que la somme des numéros soit strictement inférieure à 7

5) On répète 4 fois successivement, quelle est la probabilité que le nombre 7 sorte 2 fois exactement.

Exercice n° 53

Isabelle débute un jeu dans lequel elle a autant de chance de gagner que de perdre la première partie. On admet que, si elle gagne une partie, la probabilité qu'elle gagne la partie suivante est de 0,6, et si elle perd une partie, la probabilité de perdre la partie suivante est 0,7.

On note, pour tout entier naturel n non nul :

Gn : L'évènement " Isabelle gagne la $n^{ième}$ partie"

Pn : L'évènement " Isabelle perd la $n^{ième}$ partie"

Partie A

1) Déterminer les probabilité $P(G_1)$, $P(G_2/G_1)$ et $P(G_2/P_1)$.

2) Calculer $P(G_2)$.

Partie B

On pose, pour tout n entier naturel non nul $X_n = P(G_n)$ et $Y_n = P(P_n)$

1) Déterminer, pour tout entier naturel non nul, les probabilités $P(P_{n+1}/G_n)$ et $P(G_{n+1}/P_n)$

2) Montrer que pour tout n entier naturel non nul :

$$\begin{cases} X_{n+1} = 0,6X_n + 0,3Y_n \\ Y_{n+1} = 0,4X_n + 0,7Y_n \end{cases}$$

Exercice n° 48

Soit un espace vectoriel E muni d'une base $B(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et f l'endomorphisme de E défini dans la base B par la matrice. $A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$

Soit $\lambda \in IR$, on désigne par E_λ l'ensemble des vecteurs $\vec{u}$ tels que $f(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$.

1) Montrer que si $\lambda \in \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right\}$, alors $E_\lambda = \{\vec{0}\}$

2) Montrer que $E_{\frac{1}{2}}$ est une droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{e}_1 = -2\vec{i} + \vec{j}$ et $E_{\frac{1}{4}}$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{e}_2 = -3\vec{i} + \vec{j}$.

3) Vérifier que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est une base B' de E

4) a) Exprimer le vecteur $\vec{u_0} = -5\vec{i} + 2\vec{j}$ dans la base B'

b) Déterminer la matrice de f dans la nouvelle base B'

c) On définit une suite de vecteurs par la relation $\vec{u}_{n+1} = f(\vec{u}_n)$. Quelles sont dans la base B' les coordonnées de $\vec{u}_n$?

d) Quelles sont dans la base B les coordonnées de $\vec{u}_n$?

Exercice n° 49

1) Résoudre l'équation différentielle (E) $y'' + 2y' + 5y = 0$

2) Déterminer la solution f de l'équation (E) telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = -1$.

3) On pose $F(x) = -\frac{1}{5}[f'(x) + 2f(x)]$

a) Démontrer F est une primitive de f sur IR. Expliciter F(x).

b) En déduire le calcul de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$.

Exercice n° 50

On donne un entier naturel n strictement positif, et on considère l'équation différentielle :

$$(En) : y' + y = \frac{x^n}{n!}e^{-x}$$

1) On fait l'hypothèse que deux fonctions g et h, définies et dérivables sur IR vérifient, pour tout x réel : $g(x) = h(x)\,e^{-x}$

a) Montrer que g est solution de (En) si, et seulement si, pour tout x réel :

$$h'(x) = \frac{x^n}{n!}$$

b) En déduire la fonction h associée à une solution g de (En), sachant que $h(0) = 0$. Quelle est alors la fonction g ?

2. Soit φ une fonction définie sur IR.

a) Montrer que φ est une solution de (En) si, et seulement si, $\varphi - g$ est solution de l'équation

$$(F) : y' + y = 0$$

b) Résoudre (F)

c) Déterminer la solution générale φ de l'équation (En).

d) Déterminer la solution f de l'équation (En) vérifiant $f(0) = 0$

Exercice n° 51

On considère l'équation différentielle

$$(\mathcal{E}) : y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$$

1) Déterminer le réel λ sachant que la fonction $y_0 = \lambda x^2 e^{-x}$.

2) Montrer qu'une fonction y est solution de $(\mathcal{E})$ si, et seulement si, $z = y - y_0$ est solution de l'équation différentielle

$$(\mathcal{E}_1) : y'' + 2y' + y = 0$$

3) Résoudre l'équation différentielle $(\mathcal{E}_1)$ puis déduire la solution générale de l'équation différentielle $(\mathcal{E})$.

4) Déterminer la solution de $(\mathcal{E})$ dont la courbe passe par le point A(- 1, 0)

Exercice n° 52

Un sac contient 10 jetons. 6 jetons portent le n°1 et 4 jetons le n°3. On tire 3 jetons simultanément. On considère X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe la somme des numéros inscrits sur les jetons tirés.

On suppose que les tirages sont équiprobables.

1) Donner les valeurs de X

2) Donner la loi de probabilité

3) Calculer E(X), V(X) et σ(X)

4) Calculer la probabilité p pour que la somme des numéros soit strictement inférieure à 7

5) On répète 4 fois successivement, quelle est la probabilité que le nombre 7 sorte 2 fois exactement.

Exercice n° 53

Isabelle débute un jeu dans lequel elle a autant de chance de gagner que de perdre la première partie. On admet que, si elle gagne une partie, la probabilité qu'elle gagne la partie suivante est de 0,6, et si elle perd une partie, la probabilité de perdre la partie suivante est 0,7.

On note, pour tout entier naturel n non nul :

Gn : L'événement " Isabelle gagne la $n^{ième}$ partie"

Pn : L'événement " Isabelle perd la $n^{ième}$ partie"

Partie A

1) Déterminer les probabilité $P(G_1)$, $P(G_2/G_1)$ et $P(G_2/P_1)$.

2) Calculer $P(G_2)$.

Partie B

On pose, pour tout n entier naturel non nul $X_n = P(G_n)$ et $Y_n = P(P_n)$

1) Déterminer, pour tout entier naturel non nul, les probabilités $P(P_{n+1}/G_n)$ et $P(G_{n+1}/P_n)$

2) Montrer que pour tout n entier naturel non nul :

$$\begin{cases} X_{n+1} = 0{,}6X_n + 0{,}3Y_n \\ Y_{n+1} = 0{,}4X_n + 0{,}7Y_n \end{cases}$$

3) Pour tout entier naturel, on pose $V_n = X_n + Y_n$ $W_n = 4X_n - 3Y_n$

a) Donner la nature de la suite (Vn)

b) Montrer que la suite (Wn) est géométrique et exprimer son terme général en fonction de n.

c) Calculer la limite de cette suite.

d) Déduire les termes généraux des suite (Xn) et (Yn) puis leur limite.

Exercice n° 54

On considère la famille (S) des suites (Vn) de premiers termes Vo et V_1 définie par $\forall$ n$\in$ IN, $V_{n+2} + V_{n+1} - 6V_n = 0$

1)a) Déterminer les suites géométriques (a_n) et (b_n) de (S) de premier terme 1

b) Démontrer que la suite (U_n) définie par : $Un = \alpha a_n + \beta b_n$ est dans la famille (S), α et β des réels.

2)a) Déterminer les entiers α et β solutions de l'équation $8\alpha - 7\beta = -11$

b) Démontrer l'entier relatif k pour le couple (x ; y) défini par x = 110 +27k et y = 33 + 8k soit solution de l'équation $4\alpha + 9\beta = 17$

c) En déduire les valeurs des entiers relatifs α et β pour lesquelles $U_2 = 17$ et $U_3 = -11$

d) Démontrer que $\forall n \in IN$, $Un = 3.2^n[5]$

e) En déduire le reste dans la division euclidienne du terme V_{1956} par 5

3) Soit $W_n = 2^{n+1} + (-3)^n$ et $S_n = Wo + W_1 + \dots + W_n$

a) Déterminer le reste dans la division euclidienne de Sn par 5 suivant les valeurs de n

b) En déduire le reste dans la division de la somme S_{1956} par 5.

Exercice n° 55

On considère la suite (V_n) par : Vo = 1 ; $V_1 = 2$ et $\forall n \in IN$, $V_{n+2} + V_{n+1} - 6V_n = 0$

1)a) Démontrer que $\forall n \in IN$, $V_n = 5^{n-1} V_1[6]$.

b) En déduire les restes dans la division euclidienne de V_n par 6 suivant les valeurs de n

2) Soit $Sn = Vo + V_1 + \dots + V_n$

a) Déterminer le reste dans la division euclidienne de S_n par 6 suivant les valeurs de n

b) En déduire le reste dans la division euclidienne de la somme de S_{1956} par 6

Exercice n° 56

A) Résoudre dans Z le système modulaire suivant : $\begin{cases} x \equiv 2[7] \\ x \equiv 1[8] \\ x \equiv 3[9] \end{cases}$

B) On considère la suite définie par Vo = 1 et $\forall n \in IN$, $V_{n+1} + V_n - 5 = 0$

1) Calculer V_1, V_2, V_3 et V_4

2)On considère la suite (U_n) définie par $U_n = V_n + 5$

a) Démontrer que la suite (U_n) est une suite géométrique.

b) Exprimer U_n puis V_n en fonction de n

c) Exprimer $Sn = Uo + U_1 + \dots + U_n$ puis $S'_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_n$ en fonction de n

3) a) Déterminer les restes de la division euclidienne de 2^n par 5 suivant les valeurs de n

b) Démontrer que $\forall n \in IN$, $V_n \equiv 2^n[5]$. En déduire le reste de la division euclidienne par 5 de l'entier V_{1956}.

Exercice n° 57

n étant un entier naturel, on pose $A_n = 2^n + 2^{2n} + 2^{3n}$

1) Déterminer suivant les valeurs de n les restes dans la division par 7 de 2^n et de 4^n

2) En déduire que pour tout entier naturel n, $Ao = A_{n+3}[7]$.

3) Déterminer suivant les valeurs de n les restes dans la division euclidienne par 7 de A_n.

4) En déduire les entiers n tels que A_n soit divisible par 7.

5) Ecrire A_n en base 2 pour $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Exercice n° 58

On se propose de résoudre l'équation différentielle $xy' - 3y = 3\ln x$ (E) où ln désigne le logarithme népérien.

1) Trouver toutes les fonctions polynômes P du troisième degré telles que pour tout x réel :
$xP'(x) - 3P(x) = 0$

2) Soit f une fonction f définie et dérivable sur]0 ; +∞[telle que f(1) = 0,et h une fonction définie sur]0 ; ∞[par la relation $f(x) = x^3h(x)$

a) Calculer h(1)

b) Calculer f'(x) en fonction de h(x) et h'(x)

c) Montrer que f vérifie (E) si et seulement si pour tout x positif $h'(x) = \frac{3}{x^4}\ln x$

d) On suppose que f vérifie (E). Montrer que h est définie par : $h(x) = \int_1^x \frac{3}{x^4} \ln t dt$

Déterminer h(x) à l'aide d'une intégration par parties.

3) Montrer qu'il existe une fonction f et une seule du problème posé et en donner l'expression

Problème 1

Dans le plan (P), on considère un carré ABCD de sens direct et centré en O tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$ On désigne par :

R : la rotation de centre A et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$

T : La translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ et H : l'homothétie de centre C et de rapport $\sqrt{3}$

1) Prouver que l'application R' = ToR est une rotation dont on précisera l'angle θ, puis déterminer le centre de la rotation R'.

2) Déterminer les images des points A et B par R', puis en déduire lez point invariant par la rotation R'.

3) On se propose d'étudier l'application f définie f = R'oH

a) Montrer que f est une similitude plane directe dont on précisera l'angle et le rapport.

b) Déterminer l'image du point C par l'application f.

c)Soit I, le centre de la similitude f, prouver que l'on a $(\overrightarrow{IC}; \overrightarrow{ID}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $ID = \sqrt{3}IC$.

4) Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M du plan tels que $(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MD}) = \frac{\pi}{2}[\pi]$, puis vérifier que le point I appartient à (E). Donner une mesure de l'angle $(\widehat{CD, CI})$.

5) On considère les points pondérés (D, 1) et (C, −3) du plan

a) Déterminer et construire le point G barycentre des points D et C affectés des coefficients 1 et − 3.

b) Déterminer et construire l'ensemble (F) des points du plan M tels $MD^2 - 3MC^2 = 0$

c) Vérifier que cet ensemble (F) est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

d) Vérifier que le point I appartient à l'ensemble (F).

6) Déterminer l'intersection des ensembles (E) et (F), puis déduire que le point I est le centre de la similitude plane f, caractériser f.

7) Déterminer l'ensemble (F') image de (F) par la similitude plane directe f, puis déduire en unité internationale l'aire de (F').

Problème 2

Dans le plan (P) orienté, on considère un triangle ABC rectangle et isocèle en A de sens direct. Les points J et F sont les milieux respectifs des segments [BC] et [JB].

1) On désigne par P et Q les projetés orthogonaux de F sur les droites (AC) et (AB) respectivement.

a) Montrer qu'il existe une rotation R qui transforme A en B et P en Q, préciser une mesure de l'angle de cette rotation.

b) Construire Ω_1 le centre de la rotation R.

c) Montrer que les points J, P, A, Q et F appartiennent à un même cercle (C) que l'on tracera.

d) Déterminer le rapport k_1 de l'homothétie de centre A et qui transforme C en P.

2) Soit D le point du plan (P) tel que DB = DA et $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{6}[2\pi]$ les droites (DB) et (AC) se coupent en I. On définit une similitude plane directe S transformant C en B et A en D

a) Déterminer une mesure de l'angle de la similitude plane directe.

b) Calculer le rapport k_2 de la similitude plane directe S.

c) Soit le point E projeté orthogonal de J sur la droite (AC), construire les points B' = S(B) et E' = S(E).

d) Montrer que le point D est milieu du segment [IB].

f) Calculer le rapport $\frac{IB}{IC}$.

3) Soit Ω_2 le centre de la similitude S.

a) Montrer que les points (Ω_2, I, A, D) d'une part et (Ω_2, I, B, C) d'autre part sont cocycliques.

b) Construire Ω_2

4) a) Montrer qu'il existe une similitude plane indirecte S' de centre A et qui transforme B en P.

b) On rapporte le plan (P) au repère (O, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OJ}$). O étant le milieu du segment [AB], écrire l'expression analytique de la similitude plane indirecte S'

Problème 3

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC tel que AC = 2AB et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{6}[2\pi]$, où AC = 6cm.

On construit à l'extérieur de ce triangle les carrés ACFG et ABDE. On désigne par K le point tel que $\overrightarrow{GK} = \overrightarrow{AE}$

a) Démontrer qu'il existe une rotation R_1 qui transforme (A,B,C) en (E,A,K).

b) Construire Ω_1 le centre de R_1.

c) Démontrer que les droites (BK) et (DC) sont perpendiculaires et que les segments [BK] et [DC] ont même longueur.

2) Démontrer qu'il existe une rotation R_2 qui transforme (A,B,C) en (G, K, A). Construire Ω_2 le centre de R_2.

3) Soit $f = R_1 o R_2$

a) Trouver f(C)

b) Caractériser f

4) Les droites (AK) et (BC) se coupent en I, les droites (AB) et (KG) se coupent en J.

a) Démontrer que les points A, B, I, Ω_1 sont situés sur un cercle (C) de centre O que l'on tracera.

b) Démontrer que les points A,G,J, Ω_2 sont situés sur un cercle (C') de centre O' que l'on tracera.

5) a) Donner les caractéristiques de la similitude plane directe de centre A qui transforme (C) en (C').

b) Determiner S(B), S(E), S(Ω_1) et S(D)

c) On note L le point d'intersection de (C) et (C'). ? Démontrer que L∈ ($\Omega_1\Omega_2$)

Problème 4

Partie A

Le plan P est orienté, non rapporté à un repère.

On considère un triangle équilatéral ABC de sens direct, inscrit dans un cercle (C) de centre O. On note A', B' et C' les milieux respectifs des segments [BC], [AC] et [AB].

1)La parallèle à la droite ('AC) passant par O coupe (C) en D de tel sorte que le triangle ADB soit direct. On note E le point d'intersection des droites (OC) et (BD). Déterminer que les points O, D, E, A sont cocycliques.

2) Les droites (OD) et (AB) se coupent en I. On note I' le projeté orthogonal de I sur (BC).

a) Démontrer que $AI = \frac{1}{3}AB$

b) Démontrer qu'il existe une rotation unique R qui transforme A en B et I en I' ? Construire le centre de cette rotation.

3) a) Déterminer le rapport k et une mesure θ de l'angle de la similitude plane directe de centre B qui transforme D en O

b) Soit (M_n) la suite des points définie par :

$$\begin{cases} M_0 = D \\ M_{n+1} = S(M_n) \end{cases}$$

Placer les point (M_i), i =0, 1, 2, 3, 4, 5 après avoir énoncé le principe de construction de ces points.

c) Démontrer les point O, B et M_5 sont alignés.

Problème 1

Dans le plan (P), on considère un carré ABCD de sens direct et centré en O tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$ On désigne par :

R : la rotation de centre A et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$

T : La translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ et H : l'homothétie de centre C et de rapport $\sqrt{3}$

1) Prouver que l'application R' = ToR est une rotation dont on précisera l'angle θ, puis déterminer le centre de la rotation R'.

2) Déterminer les images des points A et B par R', puis en déduire les point invariant par la rotation R'.

3) On se propose d'étudier l'application f définie f = R'oH

a) Montrer que f est une similitude plane directe dont on précisera l'angle et le rapport.

b) Déterminer l'image du point C par l'application f.

c)Soit I, le centre de la similitude f, prouver que l'on a $(\overrightarrow{IC}\,;\,\overrightarrow{ID}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $ID = \sqrt{3}IC$.

4) Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M du plan tels que $(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MD}) = \frac{\pi}{2}[\pi]$, puis vérifier que le point I appartient à (E). Donner une mesure de l'angle $(\widehat{CD, CI})$.

5) On considère les points pondérés (D, 1) et (C, −3) du plan

a) Déterminer et construire le point G barycentre des points D et C affectés des coefficients 1 et − 3.

b) Déterminer et construire l'ensemble (F) des points du plan M tels $MD^2 - 3MC^2 = 0$

c) Vérifier que cet ensemble (F) est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

d) Vérifier que le point I appartient à l'ensemble (F).

6) Déterminer l'intersection des ensembles (E) et (F), puis déduire que le point I est le centre de la similitude plane f, caractériser f.

7) Déterminer l'ensemble (F') image de (F) par la similitude plane directe f, puis déduire en unité internationale l'aire de (F').

Problème 2

Dans le plan (P) orienté, on considère un triangle ABC rectangle et isocèle en A de sens direct. Les points J et F sont les milieux respectifs des segments [BC] et [JB].

1) On désigne par P et Q les projetés orthogonaux de F sur les droites (AC) et (AB) respectivement.

a) Montrer qu'il existe une rotation R qui transforme A en B et P en Q, préciser une mesure de l'angle de cette rotation.

b) Construire Ω_1 le centre de la rotation R.

c) Montrer que les points J, P, A, Q et F appartiennent à un même cercle (C) que l'on tracera.

d) Déterminer le rapport k_1 de l'homothétie de centre A et qui transforme C en P.

2) Soit D le point du plan (P) tel que DB = DA et $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{6}[2\pi]$ les droites (DB) et (AC) se coupent en I. On définit une similitude plane directe S transformant C en B et A en D

a) Déterminer une mesure de l'angle de la similitude plane directe.

b) Calculer le rapport k_2 de la similitude plane directe S.

c) Soit le point E projeté orthogonal de J sur la droite (AC), construire les points B' = S(B) et E' = S(E).

d) Montrer que le point D est milieu du segment [IB].

f) Calculer le rapport $\frac{IB}{IC}$.

3) Soit Ω_2 le centre de la similitude S.

a) Montrer que les points (Ω_2, I, A, D) d'une part et (Ω_2, I, B, C) d'autre part sont cocycliques.

b) Construire Ω_2

4) a) Montrer qu'il existe une similitude plane indirecte S' de centre A et qui transforme B en P.

b) On rapporte le plan (P) au repère (O, $\overrightarrow{OB}$,$\overrightarrow{OJ}$). O étant le milieu du segment [AB], écrire l'expression analytique de la similitude plane indirecte S'

Problème 3

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC tel que AC = 2AB et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{6}[2\pi]$, où AC = 6cm.

On construit à l'extérieur de ce triangle les carrés ACFG et ABDE. On désigne par K le point tel que $\overrightarrow{GK} = \overrightarrow{AE}$

a) Démontrer qu'il existe une rotation R_1 qui transforme (A,B,C) en (E,A,K).

b) Construire Ω_1 le centre de R_1.

c) Démontrer que les droites (BK) et (DC) sont perpendiculaires et que les segments [BK] et [DC] ont même longueur.

2) Démontrer qu'il existe une rotation R_2 qui transforme (A,B,C) en (G, K, A). Construire Ω_2 le centre de R_2.

3) Soit $f = R_1 o R_2$

a) Trouver f(C)

b) Caractériser f

4) Les droites (AK) et (BC) se coupent en I, les droites (AB) et (KG) se coupent en J.

a) Démontrer que les points A, B, I, Ω_1 sont situés sur un cercle (C) de centre O que l'on tracera.

b) Démontrer que les points A,G,J, Ω_2 sont situés sur un cercle (C') de centre O' que l'on tracera.

5) a) Donner les caractéristiques de la similitude plane directe de centre A qui transforme (C) en (C').

b) Determiner S(B), S(E), S(Ω_1) et S(D)

c) On note L le point d'intersection de (C) et (C'). ? Démontrer que L∈ ($\Omega_1\Omega_2$)

Problème 4

Partie A

Le plan P est orienté, non rapporté à un repère.

On considère un triangle équilatéral ABC de sens direct, inscrit dans un cercle (C) de centre O. On note A', B' et C' les milieux respectifs des segments [BC], [AC] et [AB].

1)La parallèle à la droite ('AC) passant par O coupe (C) en D de tel sorte que le triangle ADB soit direct. On note E le point d'intersection des droites (OC) et (BD). Déterminer que les points O, D, E, A sont cocycliques.

2) Les droites (OD) et (AB) se coupent en I. On note I' le projeté orthogonal de I sur (BC).

a) Démontrer que $AI = \frac{1}{3}AB$

b) Démontrer qu'il existe une rotation unique R qui transforme A en B et I en I' ? Construire le centre de cette rotation.

3) a) Déterminer le rapport k et une mesure θ de l'angle de la similitude plane directe de centre B qui transforme D en O

b) Soit (M_n) la suite des points définie par :

$$\begin{cases} M_0 = D \\ M_{n+1} = S(M_n) \end{cases}$$

Placer les point (M_i), i =0, 1, 2, 3, 4, 5 après avoir énoncé le principe de construction de ces points.

c) Démontrer les point O, B et M_5 sont alignés.

4) Soit S_1 la similitude plane directe de centre C, de rapport $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et d'angle de mesure $-\frac{\pi}{6}$

a) Démontrer que $S_1(I') = O$

b) Démontrer que les droites (OI') et (AB) sont parallèles (on pourra montrer que les droites (OI') et (Oc) sont perpendiculaires)

c) Caractériser l'application f définie par $f = R_{\left(0;\frac{\pi}{3}\right)} o S_{AC}$

5) a) Par quelle symétrie axiale d'axe passant par C, le point A est – il transformé en B ?

b) Par quelle homothétie ce centre C le point B est – il transformé en I' ?

c) Démontrer qu'il existe une similitude plane directe S_2 de centre C qui transforme A en I'.

6) A tout point de (C) on construit le point N' de telle sorte que le triangle B'NN' soit équilatéral de sens direct. Déterminer l'ensemble décrit par N' quand N décrit (C).

Partie B

Le plan P est rapporté au repère orthonormé $(A', \vec{i}, \vec{j})$, avec $\vec{i} = \overrightarrow{A'C}$

Ecrire l'expression analytique de S_2.

Problème 5

Partie A

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC et (Γ) son cercle circonscrit de centre O.

On appelle L, M et N les projetés orthogonaux de O respectivement sur (BC), (CA) et (AB)

1) Montrer que les points L, M et N sont les milieux respectifs des segments [BC], [CA] et [AB].

2) Montrer que les points O, L, B et N sont situés sur un même cercle (Γ_B) dont on précisera un diamètre.

3) Soient R_1, R_2, et R_3 trois rotations de centres respectifs L, Me et N dont une mesure de l'angle est $\frac{\pi}{4}$.

On désigne par (Δ_1) (Δ_2) (Δ_3) les droites telles que $R_1(BC) = (\Delta_1)$, $R_2(CA) = (\Delta_2)$ et $R_3(AB) = (\Delta_3)$. On pose $(\Delta_1) \cap (\Delta_2) = \{C'\}$, $(\Delta_1) \cap (\Delta_3) = \{B'\}$, $(\Delta_2) \cap (\Delta_3) = \{A'\}$

a) Montrer que B' appartient au cercle (Γ_B)

b) Montrer que OBB' est un triangle rectangle isocèle. Par un raisonnement analogue, préciser la nature des triangles OCC' et OAA'.

c) Déterminer les caractéristiques de la similitude directe S telle que S(O) = O et S(B) = B'.

d) Déterminer S(A) et S(C)

e) Quel est le cercle circonscrit au triangle A'B'C' ?

Partie B

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (Unité 3 cm).

1) Placer sur le cercle (Γ) de centre O et de rayon r = 2. Les points A(0, 2), $B(-1\,;\sqrt{3})$ et $C(\sqrt{3}\,;1)$

2) Soit H l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et R la rotation de centre O et d'angle dont une mesure est $\frac{\pi}{4}$

a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de RoH.

b) Déterminer A' = RoH(A), B' = RoH(B) et C' = RoH(C).

c) Placer les points A', B' et C' dans le repère et montrer qu'ils sont situés sur un cercle (Γ') de centre O.

3) Construire la courbe d'équation cartésienne $x^2 + 2y^2 = 8$. Préciser sa nature et ses éléments caractéristiques.

Problème 6

Dans un plan (P) orienté, on considère le triangle ABC, tel que 2AB = 3AC et $\overline{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} = \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

On appelle (OC') la médiatrice de [AB], le point C étant le milieu de [AB], (OA) la bissectrice de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$ et (OB') la hauteur du triangle ABC issue du sommet B, le point B' étant sur [AC]. Pour la figure prendre AB = 12cm.

Partie A

1) Démontrer qu'il existe deux isométries laissant le point A invariant qui transforme le point C' en B'.

2) On note R_1 celle des deux isométries de 1) qui est un déplacement. Reconnaître et caractériser l'application $R_2 o R_1$ où R_2 est la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$

3) Démontrer que la composée $S_{(C'B')} o S_{(OC)}$ des symétries axiales respectives (C'B') et (OC) est une translation de vecteur $\vec{u}$ à préciser.

4) En notant T la translation déterminée au 3), caractériser la transformation ToR où R est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$

Partie B

1) On appelle f la similitude plane directe de centre A qui au point B associe le point B', Caractériser f.

2) La transformation g étant la similitude de centre A de rapport 2 et d'axe (OA), caractériser l'application fog. A t – on fog = gof ?

3) La droite (OC') coupe la droite (AC) au point D. Soit E le point du cercle (C) de centre O et de rayon OA, appartenant à la demie droite [OC). La droite (AE) rencontre la droite (BB') au point F.

a) Démontrer que les points O,D, F et E sont sur un cercle (C') de centre O'. Construire (C')

b) Soit la similitude plane directe de centre D qui transforme le cercle (C) en (C'). Démontrer que l'image M du point M' de (C') par S est telle : M, M' et E sont alignés. Caractériser alors S.

Partie C

Soit l'application du plan dans lui-même qui au point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{IM'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IM}$, le point I étant le projeté orthogonal du point M sur la droite (OC).

1) Construire l'image (Γ) du cercle (C) par cette application

2) Construire l'image (Γ') de (Γ) par S.

Problème 7

Dans le plan (P) orienté, on considère les points A, O, B, dans ce sens tels que AB = 6 et $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OB}$

Partie A Construction du centre d'une similitude plane directe.

I. 1) Construire les points I et J tels $2\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IA} = \vec{0}$ et $2\overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JA} = \vec{0}$

2) Que représentent I et J pour les points A et B

3) Construire le cercle (C_2) de diamètre [IJ].

II. 1) Construire la droite (T) passant par A telle que $\overline{(T, AB)} = \frac{\pi}{3}[\pi]$

2) Construire le cercle (C_1) passant par A et B, dont la tangente en A est (T)

3) Démontrer que les cercles (C_1) et (C_2) ont deux points communs Ω_1 et Ω_2 situés de par et d'autre de la droite (AB). On notera Ω_1 celui situé dans la plan de frontière (AB) contenant le centre E du cercle (C_1)

III. 1) démontrer que le centre de la similitude S d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$, de rapport $\frac{1}{2}$ et qui transforme A et B est le point Ω_1.

2) Démontrer que les points A, E et Ω_1 sont alignés.

Partie B

Soit K le centre du cercle (C_2)

I. 1) Démontrer que EJ = BK et $(\overrightarrow{EJ}, \overrightarrow{BK}) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$

2) Démontrer que les médiatrices des segments [EB] et [JK] se rencontrent en Ω_1. En déduire le centre de R.

II. Soit $g = T_{\overrightarrow{BA}} o R$ où R est la rotation de centre Ω_1 et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$ et $T_{\overrightarrow{BA}}$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$

1) Soit F le symétrique de Ω_1 par rapport à la droite (EB). Démontrer que les points Ω_1, J et F sont alignés.

2) a) Déterminer la droite (D) telle que $T_{\overrightarrow{BA}} = S_D 0 S_D$ et $R = S_D o S_{D_2}$

b) En prenant $(D) = (B\Omega_1)$, Déterminer les droites (D_1) et (D_2) telles que $T_{\overrightarrow{BA}} = S_D 0 S_D$ et $R = S_D o S_{D_2}$

c) En déduire que le centre de la rotation g est F.

Partie C Construction point par point d'une Ellipse

Soit (E) une ellipse de foyers J et K où K est le centre de (C_2), passant par Ω_1

1) Construire les quatre sommets de (E)

2) Construire les points de (E) situés sur les droites (JF) et (KE).

3) On désigne par (E') l'image de (E) par S

a) Démontrer que l'excentricité e de (E) est $\frac{1}{2}$

b) Déterminer les images J' et K' des foyers de (E') par S.

Partie D

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé des sens direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec $\vec{i} = \overrightarrow{OJ}$

Déterminer l'expression analytique de la similitude plane directe S ainsi que l'équation cartésienne de l'ellipse (E) dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Problème 8

Dans le plan, on considère deux (2) segments [AC] et [BD] tels que AC = BD et $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$. On désigne par M le milieu de [AC] par N celui de $[B(C_1D]$. On appelle (C_1) (C_2), (C_3) et (C_4) les cercles de diamètre respectifs [AB], [BC], [CD] et [DA].

1. a) Montrer que qu'il existe une rotation R qui transforme A en B et C en D puis déterminer son angle.

b) Montrer que le centre I de R appartient à (C_1) et (C_3)

2. a) Montrer que qu'il existe une rotation R' qui transforme A en D et C en B puis déterminer son angle..

b) Montrer que le centre J de R' appartient à (C_2) et (C_4)

3. Quelle est la nature du quadrilatère INJM.

4. On désigne par P et R les points diamétralement opposé sur respectivement (C_1) et (C_3) et par Q et S les points diamétralement opposé à J sur respectivement (C_2) et (C_4).

Soit S la similitude directe de centre I, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$

a) Construire les images par S des points D, N et B

b) En déduire que J est le milieu de [PR].

Problème 9

On considère deux points B et C tels que BC = a. Montrer que l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = 0$ est un cercle dont on donnera les caractéristiques et la construction pour a = 6cm. On trace la tangente au point C à ce cercle, cette tangente passe par un point A tel que $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ soit direct et dans le sens positif ; la perpendiculaire à (BA) passant par C coupe la parallèle à (BC) passant par A en D. H est le point de rencontre de (BA) et (CD).

On pose CA = b et BC = a

1) Soit S la similitude plane directe qui transforme C en A et B en C.

a) Déterminer le rapport et l'angle de cette similitude plane directe.

b) Montrer que le centre de cette similitude est le point H

c) Quelle est l'image de A par cette similitude ?

2) Montrer en utilisant la similitude que $HC^2 = HA \times HB$

3) Soit I le milieu du segment [BC], J le milieu du segment de [CA] et K celui de [AD]. Démontrer que le triangle IJK est rectangle en J et que dans ce triangle, H est le pied de la hauteur issue de J.

Problème 10

Dans le plan orienté, on considère un carré direct ABCD de centre O tel que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$

Soit P le point du segment [BC] distinct de B. On note Q l'intersection de (AP) avec (CD). La perpendiculaire (Δ) à (AP) passant par A coupe (BC) en R et (CD) en K.

1) Faire la figure (prendre BC = 3 cm et PB = 1 cm et placer AB horizontalement)

2) Soit R la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a) Préciser l'image de (BC) par cette rotation

b) Déterminer les images de R et P par la rotation

c) Donner la nature des triangles RAQ et PAK.

3) On note N le milieu de [PK] et M celui de [QR], S est la similitude de centre A qui transforme R en M.

a) Déterminer le rapport et l'angle de cette similitude

b) Déterminer les images de P et B pat cette similitude

c) Montrer que les points M, O, N et D sont alignés.

Problème 11

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, unité 3 cm, on considère les points A et I tels que $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i}$, $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$. La parallèle à l'axe des ordonnées passant par I coupe le cercle de centre O et de rayon OA en B et C tel que le triangle ABC soit dans le sens direct.

1) Placer les points A, I, B et C puis donner la nature du triangle ABC

2) Déterminer les coordonnées des points B et C

3) On considère deux rotations R_B et R_C de centres respectifs B et C et d'angle $\frac{\pi}{3}[2\pi]$

a) Caractériser la transformation $f = R_B o R_C$

b) Donner les images des points A, B et C par f

4) Soit D le milieu du segment [OB] et L un point du plan tel que $\overrightarrow{OL} = \overrightarrow{OD}$. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{OD}$ et $\overrightarrow{OL}$ sont orthogonaux. Placer le point L et montrer qu'il appartient au cercle de diamètre OA.

5) Déterminer et caractériser la transformation $g = S_{(OL)} o S_{(AC)}$. Montrer que l'image de O par g est le point B

Problème 12

On considère un triangle équilatéral ABC direct de centre E, D le symétrique de A par rapport à E et I le milieu de [AB].

Faites la figure, prendre AB horizontalement et AC = 8 cm

S_1 est la similitude de centre A qui transforme B en E

S_2 est la similitude fixant E qui transforme B en D

1) Donner les caractéristiques de S_1 et S_2.

2) On considère le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF})$ avec F le point tel que $\overline{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF})} = \frac{\pi}{2}[2\pi]$

a) Donner les coordonnées des points A, B, I, E, F, C, D

b) Donner l'expression complexe des similitudes S_1 et S_2.

3) On pose $f = S_2 o S_1$

a) Calculer f(B)

b) Donner la nature et les caractéristiques de f

4) On note C' le symétrique de E par rapport à I

a) Donner la nature, les caractéristiques et la représentation de la courbe (E) définie par :

(E): $\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{4} + y^2 = \frac{1=}{12}$

b) Vérifier que les points A, E, B et C' appartiennent à (E)

c) Soit (E') l'image de (E) par S_1, donner sa représentation dans le même repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF})$ que (E).

Problème 13

Le plan affine euclidien est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Unité graphique 2 cm

Partie A

1) Soit F et F' les points de coordonnées respectives $(\sqrt{5}, 0)$ et $(-\sqrt{5}, 0)$. Déterminer une équation cartésienne de l'hyperbole (Γ) de foyers F et F' et d'excentricité $\frac{\sqrt{5}}{2}$

2) Construire la courbe (H) d'équation $x^2 - 4y^2 = 4$; Donner sa nature et ses éléments caractéristiques.

3) On considère la fonction numérique f de la variable réelle x, définie par :

$$\begin{cases} f(x) = (2-x)\ln(2-x) & \text{si } x < 2 \\ f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x^2-4} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

On appelle (C) la courbe représentative de f.

a) Prouver que la restriction de la fonction f à l'intervalle $[2, +\infty[$ a pour représentation graphique une partie de la courbe (H) que l'on précisera.

b) Etudier la continuité de f sur IR.

c) Etudier la dérivabilité de f au point d'abscisse x = 2

d) Etudier les variations de f et construire la courbe représentative (C) de f dans le même repère que (H).

4) Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses, les droites x = 0 et x = 1.

Partie B

Soit g la fonction numérique définie par : $g(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{5}$, t ∈ IR.

1) Montrer que g(t) = t admet une solution unique t_o, $t_o \in]0, 1[$

2) Etudier sur [0, 1] les variations de g et celles de la dérivée g' de g. En déduire.
$\forall t, t \in [0, 1]$, $|g'(t)| \leq \frac{1}{2}$ et $g(t) \in]0, 1[$.

3) Soit (Un) la suite définie par $U_o = \frac{1}{2}$ et $\forall n$, $U_{n+1} = g(U_n)$

Montrer que $U_n \in]0, 1[$ et $|U_{n+1} - t_0| \leq \frac{1}{2}|U_n - t_0|$, $\forall n \in IN$.

En déduire que $|U_n - t_0| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - t_0|$ et $|U_n - t_0| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

En déduire la convergence de la suite (U_n).

Problème 14

Partie A

On considère la fonction g de la variable réelle x définie sur$]-\infty, 0]$

1) Dresser le tableau de variations de $g(x) = 2\ln(1-x)\frac{x}{x-1}$

2) En déduire le signe de g sur l'intervalle$]-\infty, 0]$.

Partie B

Soit la fonction numérique f_a de la variable x définie par

$$\begin{cases} f_a(x) = a + x^2\ln(1-x) \; si \; x < 0 \\ f_a(x) = a + (ax+a)e^{-x} si \; x \geq 0 \; où \; a \text{ est réel strictement positif} \end{cases}$$

On désigne par (C_a) la courbe représentative de la fonction f_a dans le plan P rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (Unité d'axes 2 cm)

1) Etudier la continuité et la dérivabilité en $x_0 = 0$

2) Dresser le tableau de variations de f_a. En déduire la nature du point $J(0, f_a(0))$

3) Etudier les branches infinies de (C_a)

Partie C

On prendra a = 1

1) Construire la courbe (C_1) ? (on calculera $f_1(1)$ et $f_1(-1)$)

2) Calculer l'aire A du domaine plan limité par (C_1), l'axe des abscisses, les droites d'équation x = 1 et x = 2.

3) Construire l'ellipse (E) de foyers $F(0, \frac{\sqrt{3}}{2})$ et $F'(0, -\frac{\sqrt{3}}{2})$.

Dont un des sommets est le point J(0, 1).

4) Soit S la similitude plane directe qui laisse invariant le point J et qui transforme le point O en le milieu de [IJ], I étant le point de coordonnées (1, 0).

a) Caractériser S

b) Construire l'image (C') par S de la partie de (C_1) relative à l'intervalle $[0, +\infty[$.

5) On définit la suite (An) par $A_0 = A$, $A_{n+1} = S(A_n)$ où A est l'aire calculée au 1) de la partie C.

a) Exprimer A_1 en fonction de A_0 puis A_n en fonction de A_0 et de n.

b) On note $S_n = A_0 + A_1 + \ldots + A_n$. Quelle est la limite de S_n quand n tend vers plus l'infini.

Problème 15

Partie A

Soit f la fonction numérique définie sur IR* par $f(x) = x - 4 + \cancel{4}\frac{1}{4}ln|x|$

1) Etudier les variations de f

2) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]3, 4[$.

3) Déduire de ce qui précède le signe de f(x) sur chacun des intervalles
$]-\infty, 0[\ ;\ ]0, \alpha[$ et $]\alpha, +\infty[$

Partie B

On considère la fonction h définie par

$$\begin{cases} \forall x \in IR^*, & h(x) = x + 1 - \frac{31}{16}x^2 - \frac{1}{8}x^2 ln|x| \\ & h(0) = 1 \end{cases}$$

1) Etudier la dérivabilité de h au point 0

2) Montrer que $\forall x \in IR^*$, $h'(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$

3) Etudier, en utilisant *la partie A* 3), le signe de h'(x)

4) Tracer la représentation graphique (Γ) de la restriction de h à l'intervalle $[-1, \frac{3}{2}]$, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Et préciser la tangente à (Γ) au point de cette courbe d'abscisse $x = 0$

5) On appelle A(λ), l'aire du domaine limité par (Γ), (x'ox) et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \lambda$ où $0 < \lambda < 1$.

a) Calculer A(λ) en fonction de λ.

b) A(λ) admet – elle une limite lorsque $x \longrightarrow 0^+$ si oui, calculer cette limite.

Partie C

1) Soit g la fonction numérique définie sur IR* par $g(x) = 4 - \frac{1}{4}ln|x|$

a) Etudier les variations de g. Montrer que $g([3, 4]) \subset [3, 4]$.

b) Montrer que α est l'unique solution de l'équation $g(x) = x$.

3) On considère la suite $(U_n)_{n \in IN}$ définie par $\begin{cases} \forall \in IN, U_0 = 3 \\ U_n + 1 = g(U_n) \end{cases}$

a) Démontrer que, ∀∈ IN, on a $3 \leq U_n \leq 4$

b) Montrer que, ∀∈ [3, 4], on a $|g'(x) \leq| \leq \frac{1}{12}$

c) Montrer que, ∀∈ IN : $|U_{n+1} - U_{n+1}| \leq |U_{n+1} - U_n|$ puis que, $|U_{n+1} - U_n| \leq \frac{1}{12^n}$

d) En déduire que la suite (Un) est convergente et préciser sa limite.

Problème 16

Partie A

On considère la fonction g définie par $g(x) = x^2 + 3 - 2lnx$

1) Etudier les variations de la fonction g

2) En déduire le signe de g(x) sur son ensemble de définition

Partie B

Soit la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = cos^2\pi x + 2cos\pi x + 1 & si \ \in [-1; 1] \\ f(x) = \frac{lnx}{x} + \frac{x^2 - 1}{2x} & si \ x > 1 \end{cases}$$

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en $x_0 = 1$

2) Etudier les variations de f.

3) Soit la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{2}x$ Interpréter graphiquement la différence $T(x) = f(x) - \frac{1}{2}x$ puis l'exprimer en fonction de x (pour $x > 1$)

4) Montrer (C) et (D) se coupent au point d'abscisse $x = \sqrt{e}$

5) Tracer (C) et (D).

6) Calculer l'aire de la surface comprise entre la courbe (C) les droites (D) et d'équation $x = \sqrt{e}$ et $x = e$.

7) On considère la similitude plane directe S de centre O, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

a) Montrer que ∀ M∈P, OMM' est un triangle rectangle isocèle avec M' = S(M)

b) Construire pour $x \in [1, +\infty[$, l'image (C') de (C) par S

Problème 17

Dans le plan orienté (P) rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, d'unité graphique 1cm, on considère la courbe (C) dont l'équation cartésienne est : (C) : $2y + 2x\sqrt{y} - ln\cancel{x}y = 0$

Partie A.

Soit r la rotation de centre O et d'angle de mesure $-\frac{\pi}{2}$

1) Ecrire l'expression analytique de r.

2) On désigne par (C'), l'image par r de (C) démontrer que l'équation cartésienne de (C') est :
(C') : $y = \sqrt{x} - \frac{1}{2}\frac{lnx}{\sqrt{x}}$

Partie B

On se propose de tracer la courbe (C') dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit f la fonction numérique de la variable réelle définie par : $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{2}\frac{lnx}{\sqrt{x}}$

1) Préciser son ensemble de définition E_f et démontrer que $\forall x \in E_f$, $f'(x) = \frac{g(x)}{4x\sqrt{x}}$, où g est une fonction que l'on précisera.

2) Etudier les variations de g

3) Calculer g(1). En déduire le signe de g sur son ensemble de définition.

4) a) Achever l'étude des variations de f.

b) Démontrer que la courbe (P) d'équation $y = \sqrt{x}$ est asymptote à la courbe (C') de f. Etudier la position de (C') par rapport à (P).

5) a) Tracer les courbes (C') et (P) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

b) En déduire le tracé de la courbe (C) dans le même repère que (C')

6) Calculer, en cm², l'aire du domaine (D_1) limité par la courbe (C'), l'axe des abscisses, les droites d'équations $x = 1$ et $x = 4$.

En déduire le calcul de l'aire du domaine limité par la courbe (C), l'axe des ordonnées, les droites d'équations : $y = 1$ et $y = 4$.

Problème 18

Le plan est orienté. Soit ABCD un carré tel que $\overline{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})} = \frac{\pi}{2}[2\pi]$. On note O le centre du carré, I et J les milieux respectifs des segments [CD] et [AD].

Partie A

1) Tracer la droites (T) passant par A tel que $\overline{(T, AC)} = \frac{\pi}{3}[2\pi]$. Construire l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que $\overline{(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MC})} = \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

2) Soit (Δ) l'image de (T) par la symétrie axiale d'axe (AC). On note C le point de concours de (Δ) et (Γ). Quelle est la nature du triangle EAC. En déduire qu'il existe une rotation R de centre E qui transforme A en C. Donner l'angle de R.

3) On appelle Ω le centre de gravité du triangle EAC. La parallèle à (AC) passant par Ω coupe les droites (EA) et (EC) respectivement en G et F.
a) Démontrer qu'il existe une homothétie h de centre E qui transforme A en G et C en F. Prouver que le rapport de h est égal à $k = \frac{2}{3}$
b) En déduire qu'il existe deux similitudes planes de centre commun E, l'une directe f et l'autre indirecte g qui transforme A en F.

Partie B

On rapporte maintenant le plan au repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, avec $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$
1) Donner les coordonnées des points A, B, C, D dans ce repère.
2) On appelle E' le projeté orthogonal de E sur l'axe des abscisses.
a) Exprimer OE en fonction de AC
b) Calculer le cosinus de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{OE'}, \overrightarrow{OE}}\right)$. En déduire l'abscisse de E' puis les coordonnées de E.
c) Donner l'expression analytique de la similitude f de la partie A

Problème 19

On considère la fonction f définie sur [0 ; 1] par : f(0) = 0, f(1) = 1 et $f(t) = \frac{t-1}{lnt}$. On appelle (C) la courbe représentative de f dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. Le but du problème est d'étudier f et de calculer l'intégrale $I = \int_0^1 f(t)dt$.

Partie A : Etude de f

1) a) Montrer que f est continue en 0 et en 1
b) Montrer que f est dérivable sur]0 ; 1[.
Calculer f'(t) et montrer que f'(t) a le même signe que φ(t), où φ est la fonction définie sur]0, 1[par : $\varphi(t) = lnt - 1 + \frac{1}{t}$
c) Etudier les variations puis le signe de φ ; en déduire le signe de f'
2) Etudier la dérivabilité de f en 0 ; que peut – on en déduire pour la tangente à C au point 0 ?
3) a) Prouver que, pour tout élément u de $\left[0;\frac{1}{2}\right]$:

$$0 \leq \frac{1}{1-u} - (1+u)2u.$$

En déduire que :

$$0 \leq -\ln(1-u) - (u + \frac{u^2}{2}) \leq \frac{2u^3}{3}$$

b) Soit g la fonction définie sur]0, 1[par : $g(x) = \frac{1}{f(x)}$. Prouver, que pour tout élément h de

$$\left[-\frac{1}{2};0\right]: \quad 0 \leq g(1+h) - g(h) + \frac{h}{2} \leq \frac{2h^2}{3}$$

En déduire que g est dérivable en 1 et préciser g'(1)
c) En déduire que f est dérivable en 1 et prouver que $f'(1) = \frac{1}{2}$
4) Tracer la courbe C (unité graphique 10cm).

Partie B : Calcul de l'intégrale I

Pour tout élément x de]0 ; 1[, on pose :$I(x) = \int_x^1 f(t)dt$ et $J(x) = \int_x^1 \frac{f(t)}{t} dt$.
(on ne cherche pas à calculer ces intégrales.)
1) Soit K la fonction définie sur]0 ; 1[par $K(x) = J(x^2) - J(x)$
a) Montrer que K est dérivable sur]0 ; 1[et que $K'(x) = \frac{1}{x}[f(x) - 2f(x^2)]$
b) Prouver que, pour tout élément x de]0 ; 1] : $f(x) - 2f(x^2) = -xf(x)$
c) En déduire que, pour tout élément x de]0 ; 1[: $I(x) = \int_{x^2}^{x} \frac{t-1}{lnt} dt$ (1)
2) Calculer la dérivée de la fonction $t \to \ln(-lnt)$t sur]0 ; 1[. En déduire que pour tout élément x de]0 ; 1[: $I(x) = \int_{x^2}^{x} \frac{1}{tlnt} dt = ln2$ (2)
3) Prouver que, pour tout élément x de]0 ; 1[et tout élément t de]0 ; x[:

$$0 \leq \frac{1}{lnt} \leq \frac{-1}{lnx}$$

En déduire que, pour tout élément x de]0 ;1[:

$$0 \leq \left|\int_{x^2}^{x} \frac{dt}{lnt}\right| \leq \frac{-x}{lnx} \qquad (3)$$

4) A partir de (1), (2) et (3) déterminer la limite de I(x) lorsque x tend vers 0.
5) Etablir que, pour tout élément x de]0 ;1[: $I - I(x) = \int_0^x f(t)dt$ En déduire que, $0 \leq I - I(x) \leq x$
6) Prouver finalement que I = ln2.

Problème 20

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. Soit n un entier naturel non nul et f_n une famille de fonctions définies par :

$$f_n(x) = \begin{cases} e^{n(x-1)} - x + 1 & si\ x \leq 1 \\ \frac{1}{3}(cos\pi x + 1) & si\ x > 1 \end{cases}$$

Partie A

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f_n sur IR.
2) Etudier suivant les valeurs de n les variations de f_n.
3) Trace la courbe (C_1) représentative de $f_1$dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. (unité 1cm)

Partie B

Dans cette partie, x est strictement supérieur à 1
1) Montrer que l'équation f(x) = x admet une solution unique x_0 que l'on déterminera.
2) On considère la suite numérique (U_n) définie par :

$$\begin{cases} U_{n+1} = f_1(U_n) \\ U_1 = a \end{cases} \quad \text{où a est réel fixé.}$$

a) Pour quelle valeur de a, cette suite est- elle constante ?
b) Pour $U_1 = \frac{4}{3}$, démontrer que pour tout n∈IN*, $1 \leq U_n \leq \frac{5}{3}$
c) Démontrer en utilisant le théorème de l'inégalité des accroissements finis que :
n∈IN*, $|U_{n+1} - x_0| \leq \frac{1}{3}|U_n - x_0|$
d) en déduire que la suite (Un) est convergente et préciser sa limite.

Partie C

Soit r, la transformation ponctuelle définie par r : $\begin{cases} x' = y \\ y' = 2 - x \end{cases}$

1) Déterminer l'image (H) de la courbe (K) d'équation : $-4x^2 + 9y^2 - 4y - 128 = 0$ par l'application réciproque r^{-1} de r.
2) Construire (H).
3) Démontrer que (K) est une hyperbole dont on déterminera le centre, les sommets, les asymptotes et l'excentricité.

Problème 21

Le plan orienté est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$. On nomme D la droite $(O, \vec{i})$ et (Δ) la droite $(O, \vec{j})$, soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que la mesure angles $(\vec{i}, \vec{u})$ et $(\vec{j}, \vec{v})$ soit $\frac{\pi}{6}$ modulo (2π)

Pour tout point M du plan, on fait passer les droites (D_M) et (Δ_M) de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ respectivement. (D_M) coupe (D) en K et (Δ_M) coupe (Δ) en P. On désigne par M' le point dont les projections orthogonales sur (D) et (Δ) sont respectivement K et P. Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M associe le point M'.

Partie A

1) Quelle est l'image de O par f, après avoir fait la figure correctement.
2) montrer que les points O, M, K, M' et P sont cocycliques.
3) Montrer que le triangle OMM' est rectangle et l'angle$\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$; Déduire que f est une similitude plane directe que l'on caractérisera.

Partie B

M étant un point quelconque du plan, on note (x, y) ses coordonnées. On désigne par y_o l'ordonnée de P et x_o l'abscisse de K.

1) Déterminer y_o et x_o en fonction de x et y, puis déduire que les coordonnées de M' sont :

$$\begin{cases} x' = x - \sqrt{3}y \\ y' = \sqrt{3}x + y \end{cases}$$

2) Déterminer l'expression analytique de f

Partie C

Dans cette partie on fera une autre figure, l'unité de longueur 2cm et on pourra se servir de l'expression analytique de f

1) Soit (H) l'hyperbole d'équation : $x^2 - 3y^2 = 3$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$; déterminer ses asymptotes, son foyer d'abscisse positive, la directrice associée, son excentricité et sa construction.

2) a) Soit (H') = f(H), calculer l'excentricité de (H').
b) Démontrer que (H') est la représentation graphique de la fonction g définie par

$$g(x) = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{6}{x} + x\right)$$

3) Soit (L) la droite d'équation x = 2 et (L') = f(L). Déterminer les points d'intersection de (L) et (H). Calculer l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe (H') et la droite (L')

4) Déduire par des considérations d'aires l'intégrale $\int_{\sqrt{3}}^{2} \sqrt{\frac{x^2}{9} - 1}\,dx$

Problème 22

Partie A :

On considère la fonction numérique f définie par :

$$f(x) = \sqrt{\frac{2 - x^2}{2}}$$

1) a) Etudier les variations de f
b) Tracer la courbe (C_f) représentative de f dans un plan (P) rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. Unité : 2cm.
c) En déduire la construction de l'ensemble (E) des points de (P) de coordonnées (x,y) telles que : $x^2 + 2y^2 - 2 = 0$.

2) Soit A le point de coordonnées (0,2), M un point quelconque de (P) et m son projeté orthogonal sur l'axe des abscisses.
a) Déterminer une équation cartésienne de l'ensemble (Γ) des points de (P) tels que :

$$MA^2 + Mm^2 = 4$$

b) Démontrer qu'il existe une transformation ponctuelle simple qui permet de passer de (E) à (Γ). Quels sont les points communs à (E) et (Γ) ?

3) Soit T la transformation ponctuelle qui à tout point M(x, y) fait correspondre le point M'(x', y') tel que :

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x}{x-1} \\ y' = \dfrac{y}{x-1} \end{cases} \quad avec\ x \neq 1$$

a) Montrer que T est involutive ($ToT = I_{d(P)}$.)
b) Démontrer que les points O, M et M' sont alignés.
c) Déterminer une équation cartésienne de (E') image de (E) par T. construire (E') dans le même repère que (E).

Partie B

Soit P le polynôme défini sur C par : $P(Z) = z^3 - 4(1+i)z^2 + 12iz + 8 - 8i$

1) Montrer que l'équation P(z) = 0 admet une solution imaginaire z_0 et une solution réelle z_1 à déterminer. En déduire l'autre solution z_2.

2) Dans le plan (P), on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = 2i$; $z_B = 2$ et $z_C = 2 + 2i$.
a) Déterminer le module et l'argument de $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$. En déduire la nature du triangle ABC.
b) Soit (C) le cercle circonscrit au triangle ABC et N un point de (C) distinct de A, B, et C. On désigne par A', B' et C' les projetés orthogonaux respectifs de N sur (BC), (AC) et (AB). Donner le nom de la droite passant par ces trois points.

3) Soit S l'application de (P) dans (P) telle que S(A) = A et S(B) = C.
Donner la nature et les éléments caractéristiques de S.

4) Soit K un point de (P) tel que $\overrightarrow{OK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$ et K' le point de concours de la parallèle à (OC) passant par K avec (AC)
a) Placer K et K'
b) Démontrer qu'il existe une homothétie h qui transforme O en K et C en K'. Préciser son centre et son rapport.
c) Soit g la symétrie orthogonale qui transforme O en C. On pose φ = gof
Donner la nature et les élément caractéristiques de φ.

Problème 23 (Les parties A et B sont indépendantes)

Partie A

Dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, on considère la courbe (Γ) dont la représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x(t) = 2\cos t - \cos 2t \\ y(t) = 2\sin t - \sin 2t \end{cases} \quad t \in [-\pi; \pi]$$

1) Montrer que les points M(t) et M(-t) sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

2) Construire (Γ)

Partie B

Le plan (P) est rapporté au repère direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, Unité 3cm. On considère l'application S de (P) dans (P) qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = (1+i)z - i$

1) Caractériser S (On notera A son point invariant).

2) Donner une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{MM'})$

3) Déterminer le point B distinct de A et son image B' par S tels que leurs affixes z_B et $z_{B'}$ soient liées par la relation $z_B.z_{B'} = 1$

4) Soit D le point d'affixe $z_D = -z_A$. Placer les points A, B, B' et D dans le plan (P) puis démontrer que les points A, B, B' et D sont cocycliques.

5) Soit (C) le cercle de centre O et de rayon égal à 1. P est un point de (C) tel que $\overline{(\vec{u},\overrightarrow{OP})} = \theta[2\pi]$. Q et R sont les points définis par $z_Q = {z_P}^2$ et $z_R = 2z_P$.
Après avoir donné le module et un argument de z_P, déterminer le module et un argument de z_Q et z_R

6) Soit F : P $\longrightarrow$ P
M(z) $\longrightarrow$ M'(z) tel que $z' = 2z - z^2$

a) On désigne par P' l'image de P par F. Démontrer que les diagonales [OR] et [QP'] du quadrilatère OP'QR ont le même milieu.

b) P étant sur le cercle (C), placer son image P' par F dans le plan (P)(on placera P dans le premier cadrant).

b) Démontrer que les droites (OP) et (QA) sont perpendiculaires.

7) On prend $\theta \in [-\pi ; \pi]$. En utilisant la relation $z_{P'} = 2z_p - {z_p}^2$, montrer que l'image du cercle (C) par F est la courbe (Γ) d'équation :

$$\begin{cases} x(\theta) = 2\cos\theta - \cos 2\theta \\ y(\theta) = 2\sin\theta - \sin 2\theta \end{cases} \quad \theta \in [-\pi ; \pi]$$

Problème 24

Partie A

m étant un réel non nul, on considère l'ensemble E des fonctions g_m telles que

g_m : IR⟶IR
x⟶ $x - \ln|e^x - m|$

On appelle (C_m) la courbe représentative de la fonction g_m dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$;

1) Etudier la fonction g_1. Montrer que sa courbe représentative (C_1) admet la droite (D) d'équation y = x comme asymptote. Préciser la position de (C_1) par rapport à (D).

a) Construire la courbe (C_1). Indiquer les coordonnées du point d'intersection de (C_1) avec l'axe des abscisses.

b) Soit h et l les restrictions de g1 respectivement aux intervalles]- ∞, 0[et]0, +∞[. Montrer que h et l admettent chacune une fonction réciproque dont on précisera l'ensemble de départ.

2) Soit h^{-1} la fonction réciproque de h et l^{-1} la fonction réciproque de l. Montrer que $h^{-1} = g_{-1}$ et $l^{-1} = l$

Construire dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, les courbes de h^{-1} et l^{-1}.

Partie B

Le nombre n est un entier naturel, on considère la famille des fonctions f_n de IR dans IR par :
$f_n(x) = x^n e^{-x^2}$ pour tout n non nul et $f_0(x) = e^{-x^2}$

1) Etudier les variations de f_n suivant les valeurs du paramètre n. Préciser les cas n = 0, n = 1, n = 2 et n = 3.

2) Le plan étant rapporté au repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, (unité 3cm), on appelle (C_n) la courbe représentative de f_n.

a) Déterminer les coordonnées des points de (C_n) ayant une tangente de vecteur directeur $\vec{i}$.

b) Déterminer pour n = 0, 1, 2 et 3 les abscisses des points où la dérivée seconde s'annule et change de signe.

c) Montrer que toutes les courbes (C_n), pour $n \geq 0$ ont un point commun et un seul A que toutes les courbes (C_{2p}), $p \geq 0$ ont exactement deux points communs A et B et que toutes les courbes (C_{2p+1}), $p \geq 0$ ont exactement trois points communs A, O et C.
Donner les coordonnées des trois points A, O et C. O l'origine du repère.

Les parties A et B sont indépendantes.

Problème 25

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$,

Partie A

Soit f la fonction définie sur]0 ; + ∞[par $f(x) = \frac{1+2\ln x}{x^2}$, (C) est la courbe représentative de f et (C') est celle de la fonction h définie sur]0 ; + ∞[par $h(x) = \frac{1}{x}$.

1) Etudier les variations de f

2) Déterminer les coordonnées du point d'intersection I de (C) avec l'axe des abscisses.

3) Pour tout $x \in]0 ; +\infty[$, on pose $g(x) = 1 - x + 2\ln x$

a) Etudier les variations de g

b) Montrer que l'équation g(x) = 0 admet 2 solutions l'une $\alpha \in]2 ; 4[$ et l'autre que l'on déterminera.

4) Montrer que (C) et (C') se coupent en deux (2) points.

5) Tracer les courbes (C) et (C').

Partie B

1) Soit D la partie du plan définie par : $\begin{cases} 1 \leq x \leq \alpha \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$

2) A) Montrer que l'aire de D est A($\alpha = 2 - \frac{2}{\alpha}$)

Soit la tube (In) définie par : In $\int_n^{n+1} f(x)dx$

a) Montrer $\forall n \geq 4$, on a $0 \leq I_n \leq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

b) En déduire que (In) converge puis déterminer sa limite

c) Soit $S_n = I_1 + I_2 + \ldots + I_n$, calculer pris sa limite

d) on pose : $f_n(x) = \frac{1+2\ln x}{x^{2n}}$

1- calculer la dérivée f'_n de la fonction f_n

2- Résoudre l'équation f'_n (x)=0

3- Soit x_n la solution de cette équation, déterminer la limite de la suite (x_n).

Problème 26

Partie A

Soit p le polynôme défini par : $p(x) = x^2 - ax + 1$

Déterminer les valeurs du réel a pour lesquelles

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $p(x) > 0$
2. $p(x)$ admette une racine double que l'on déterminera.

Partie B

Soit g_a la fonction définie, continue et dérivable sur $]0 ; +\infty[$ par :

$g_a(x) = a\ln(x) + \frac{1}{x} - x$ où $a \in [-2 ; 2]$; et on note (Ca) la courbe représentative de (g_a) dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$; unité graphique : 2cm.

1) Démontrer que

2) Dresser le tableau de variation de g_a pour $a \in [-2 ; 2[$, $a = 2$, $a = -2$

3) Etudier suivant les valeurs de a le signe de g_a sur $]0 ; 1[$.

Partie C

Dans la suite du problème on prendra $a = 2$.

1) Dresser le tableau de variation de la fonction r définie, continue et dérivable sur $]0 ; +\infty[$ par : $r(x) = 2\ln x - x$; puis démontrer que la courbe (H) de r est asymptote à la courbe

2) Construire les courbes (C_2) et (H) dans le même repère.

Partie D

On considère la fonction définie sur l'intervalle $I =]0 ; 1[$ par $f(x) = \int_0^x \frac{t\ln t}{t^2-1}\,dt$

1) Déduire du signe de g_2 sur I que $\forall x \in I$, $0 < \frac{x\ln x}{x^2-1} < \frac{1}{2}$, $0 < f'(x) < \frac{1}{2}$ et $0 < f(x) < \frac{1}{2}$.

2) Soit h la fonction définie sur I de manière suivante : $\forall x \in I$, $h'(x) = f'(x)$ et $0 < h(x) < \frac{1}{2}$

Démontrer que l'équation $h(x) = x$ admet une solution unique x_0 appartenant à I.

3) Soit (Un) la suite numérique définie par $\forall x \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = h(U_n)$

a) Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{N}$, $0 < U_n < \frac{1}{2}$; $|U_{n+1} - x_0| \leq \frac{1}{2}|U_n - x_0|$.

b) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{N}$, $|U_n - x_0| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - x_0|$

c) En déduire que (U_n) est convergente et calculer sa limite.

d) Déterminer le plus petit entier n_0 pour que U_{n_0} ait une valeur approchée à 10^{-2} près de x_0.

Problème 27

Partie A

Le plan est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ unité 2cm.

A. On donne une fonction f définie par $f(x) = (x-1)e^x + x + 2$

1. Etudier les variations de f' dérivée de la fonction f

b) Déduire les variations de f.

2. a) Montre que la fonction f admet une solution unique $\alpha \in]-2 ; -1[$ tel que $f(\alpha) = 0$

b) Montrer que la droite $y = x + 2$ est asymptote oblique au voisinage de $-\infty$. Tracer la courbe (C_f).

3. Calcul l'aire A limitée les droites $x = -2$; $x = 0$ la droite $y = x + 2$ et la courbe.

Partie B

On considère dans l'ensemble de nombre complexes le polynôme

$P(z) = z^3 - 2iz^2 - 4z + 8i$

1. Montrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution imaginaire à déterminer
2. Résoudre $P(z) = 0$

C- On donne les points $I(0; 2)$; $J(-2; 0)$ et $K(2; 0)$ trois points du plan.

S la similitude de centre J qui transforme K en I.

1. Donne les caractéristiques de S.
2. Construire les images par S des points O(0 ;0) ; I(0 ;2) ; M(0 ;1) R(1 ;3).
3. Construire la courbe (C') image de (C) par S
4. Calcule l'aire A' image de l'aire A par S

D- Soit $E_0 = E$, et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $E_{n+1} = S(E_n)$, (U_n) la famille des aires associées à (E_n).

1. Donner la nature et les caractéristiques de la suite (U_n).
2. On considère la suite (V_n) définie par $\forall n$

$$V_n = U_n + 1993$$

a) Calculer $S_n = V_5 + V_6 \dots + V_{n-1}$

Calculer

$\lim_{+\infty} S_n$

E- Soit $f = SOS$, I'' image de I par S

a) Donner les caractéristiques de f

b) tracer l'hyperbole de centre S(O), de sommet I'' et dont l'une des asymptote est la droite $y = x + 2$

Problème 28

Un triangle équilatéral ABC de sens direct, inscrit dans un cercle (C). A' est le milieu de [BC], se projette orthogonalement en K sur (AB) et en H sur (AC).

1) a) Montrer que $(\overline{KA', KH}) = (\overline{AA', AH})[\pi]$

b) Montrer que $(\overline{KB, KH}) = \frac{2\pi}{3}[\pi]$

2) Montrer que les points B, K, H et C sont cocycliques.

3) La droite (A'K) coupe le cercle (C) en D et E de façon que le triangle BKD soit direct. On désigne par F le milieu de [AE].

a) Montrer que KFA est isocèle en F

b) En déduire que $(\overline{KF, KA}) = (\overline{AB, DE})[\pi]$

c) Montrer que les droites (KF) et (DB) sont perpendiculaires

4) a) Montrer qu'il existe une rotation R_1 qui transforme B en C et K en H. Donner la mesure θ_1 de l'angle de R_1.

b) Construire Ω_1 le centre de R_1.

5) f est une transformation définie par $f = R_2 o S_{AA'} o t_{\overrightarrow{AC}}$ où $R_2 = R\left(A, \frac{\pi}{3}\right)$

a) Calculer f(A')

b) Caractériser f.

6) $(A', \vec{i}, \vec{j})$, un repère tel que $\vec{i} = \overrightarrow{A'C}$ donner l'expression analytique de R_2

Problème 29

ABC un triangle isocèle en A tel que $AB = AC = 6cm$ et $\overline{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} = \frac{\pi}{6}[2\pi]$.

E est le symétrique de C par rapport à (AB), F celui de B par rapport à (AC), O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

1) Faites la figure (prendre AB horizontalement)

2) Montrer que les points E, B, C et F sont sur un même cercle (C_1) qu'on caractérisera.

3) Soit S la similitude plane directe de centre B qui transforme O en A et (C) en (C_1).

a) Donner l'angle et le rapport de cette similitude S

b) Montrer que si un point M appartient (C), M' = S(M) appartient à (C_1) alors les points C, M et M sont alignés.

c) Construire les antécédents des points F et E notés respectivement F_1 et E_1.

4) Montrer que le triangle ABF est équilatéral. Tracer le cercle circonscrit à ce triangle noté (C_2) et $(C_2') = S(C_2)$.

5) Soit H le point de rencontre de droites (FE) et (AC) ; montrer que H est l'orthocentre du triangle A_1FB avec A_1 le symétrique de C par rapport à A.

Problème 30

Dans un plan (P) orienté, on considère le carré ABCD de sens direct, de centre O tels que : $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) = 90°$. I, J et L désignent les milieux respectifs des segments [AB], [CD] et [AD].

Soit K le symétrique de I par rapport à A.

Partie A

I.1) Faire la figure.

2)a) Démontrer qu'il existe une homothétie h qui transforme A en I et L en J.

II. On considère la similitude plane directe S qui transforme B en J et O en K. Les droites (KL) et (BD) se coupent au point P.

1) Démontrer que les points P, O, I et K d'une part, P, J, B et I d'autre part, sont cocycliques.

2) En déduire le centre S. Déterminer une mesure de son angle.

3) On considère la transformation ponctuelle g définie par $g = h^{-1} o S_{AB}$ où h^{-1} désigne l'homothétie de centre K et de rapport $\frac{1}{2}$; S_{AB} désigne la symétrie axiale d'axe la droite (AB). Déterminer la nature de g. Déterminer ses éléments caractéristiques.

4) a) Déterminer la nature de la transformation T telle que $T = goS$.

b) Déterminer ses éléments caractéristiques.

Partie B

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé de sens direct $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ avec $\vec{\imath} = \overrightarrow{OJ}$

I. On considère la fonction numérique u de la variable réelle x définie, continue et dérivable sur R_+* par $u(x) = x^2 + 2 - 2\ln x$.

1) Dresser le tableau de variation de la fonction u

2) Démontrer que : $\forall x \in IR_+^*$, $u(x) > 0$.

II. Soit la fonction numérique f de la variable réelle x définie, continue et dérivable sur IR_+^* , par $f(x) = x + 2\frac{\ln x}{x}$. On note (C) sa courbe représentative dans le repère $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) Démontrer que : $\forall x \in R_+*$, la dérivée $f'(x)$ est telle que $f'(x) = \frac{u(x)}{x^2}$.

2) a) Etudier les variations de f .

b) Démontrer que les droites (BD) et (OL) sont les asymptotes de la courbe (C).

c) Démontrer que la courbe (C) coupe la droite (IJ) en un point de l'intervalle]OQ[où Q est le milieu du segment [OJ].

3)a) Construire l'arc (C_1) de la courbe (C) logé dans le triangle BCD.

b) Construire l'image (C'_1) de l'arc (C_1) par la symétrie d'axe la droite (IJ).

c) Calculer l'aire a_0 de la portion (E_0) du plan limitée par les droites d'équations $x = \frac{1}{2}$, $x = 1$ et les courbes (C_1) et (C'_1).

Problème 31

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé de sens direct $\left(O, \overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OA}\right)$unité graphique 6cm.

Partie A

1. Placer les points C, B et D sachant que : C est le symétrique de O par rapport à A ; B et D appartiennent à la droite $\left(O, \overrightarrow{OH}\right)$ et, $\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB}\right) = 35°$,$\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}\right) = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et AC = BD

2. Construire les cercles (C_1), (C_2), (C_3) et (C_4) de diamètres respectifs [AB], [BC], [CD] et [DA].

3. Démontrer que tous les cercles (C_1), (C_2), (C_3) et (C_4) passent par O.

Partie B

1.a) Démontrer qu'il existe une rotation r qui transforme A en B et C en D que l'on déterminera l'angle.

b) Démontrer que le centre I de r est le deuxième point d'intersection de (C_1) et (C_3) autre que O

2. Soit r' la rotation qui transforme A en D et C en B.

a) Démontrer que son angle a pour mesure $\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

b) Démontrer que le centre J de r' est le deuxième point d'intersection de (C_2) et (C_4) autre que O.

3.a) Placer les points M et N milieux respectifs des segments [AC] et [BD]

b) Démontrer que le quadrilatère INJM est un carré.

Partie C

Soit f la similitude plane directe de centre I, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle de mesure $\frac{\pi}{4}[2\pi]$.

1. Placer les points P et R diamétralement opposés à I respectivement sur (C_1) et (C_3).

2. a) Déterminer f(D), f(N), f(B).

b) En déduire que J est le milieu du segment [PR].

3.a) Placer les points Q et S diamétralement opposés à J sur (C_2) et (C_4)

b) Démontrer que les points O, P, J et R sont alignés.

c) Démontrer que les points Q, I, O et S sont situés sur une droite perpendiculaire à la droite (OJ).

Partie D

On désigne par (P) la parabole de directrice la droite (OI) et de foyer P.

1.a) Démontrer que la droite (OJ) est l'axe focal de la parabole (P).Construire le sommet Ω de (P).

b) Soit P_0 le point diamétralement opposé à O sur (C_1). Démontrer que la médiatrice du segment [IP] est une tangente à (P) puis placer le point P_0 de (P) situé sur la droite(IP_0).

2. Soit P_1 le point diamétralement opposé à O sur (C_2). Démontrer que $(QP_1) \perp (OI)$.

a) Placer le point P'_1 de (P) situé sur (QP_1).

b) Tracer l'arc de (P) d'extrémités p'_1 et Ω.

Problème 32

On considère les fonctions f et g définies par :

$f(x) = \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1|$ et $g(x) = x - \ln x$

1. Dresser le tableau de variation de f
2. Déterminer le signe de $f(x)$ sur $[-1; +\infty[$
3. En déduire que : $\forall x \in [0; +\infty[\ ; x - \ln(x+1) \leq \frac{x^2}{2}$

$\forall x \in [0; 1], x - \ln(x+1) < \frac{x^2}{2}$

4. Démontrer que : $\forall x \geq 1\ ; g(x) \geq 1$
5. Démontrer que la courbe (C) de f admet deux points d'intersections A et B.
6. Prouver que sur $]-\infty; 1[$ (C) coupe l'axe des abscisses en un point unique dont l'abscisse $x_0 \in]-2; -1[$
7. Soit h la restriction de f à l'intervalle $]-1; +\infty[$

a) Montrer que h admet une réciproque notée h^{-1} dont on dressera le tableau de variation.

b) Montrer qu'il existe un réel $a \in]0; 2[$ tel que $h'(a) = \ln(\sqrt{3})$ en utilisant le théorème des accroissements finis.

c) En déduire qu'il existe un réel $b \in]0; \ln 3[$ tel que $(h^{-1})(b) = \frac{2}{\ln 3}$

d) (C') désigne la courbe de h^{-1}. Tracer (C) et (C') dans un repère orthonormé $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan.

Partie B

Dans cette partie on pourra utiliser les résultats de la partie A.

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = U_n - \ln(U_n) \end{cases}$

1. a) Démontrer que $\forall n \in IN; U_n \geq 1$

b) En déduire le sens de variation de la suite (u_n) puis sa convergence vers une limite l que l'on calculera.

2) On pose $V_n = U_n - 1$

a) Montrer que (V_n) est une suite positive, puis exprimer V_{n+1} en fonction de V_n

b) Etudier le sens de variation de la suite (V_n).

En déduire que $\forall n \in IN, 0 \leq V_n \leq 1$

c) Démontrer que $\forall n \in IN, V_{n+1} \leq \frac{1}{2} V_n$. En déduire la limite de la suite(V_n).

Problème 33

I- On notera IN l'ensemble des entiers naturels, IN* l'ensemble des entiers naturels non nuls, IN* l'ensemble des entiers naturels privés de 0 et 1

1) On considère les suites U et V définies sur IN* par $U_1 = 1$ et $V_1 = 1$ et pour tout élément n de IN*

$$U_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \quad et \quad V_n = 1 + \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{(n+1)n}$$

a) Trouver deux réels A et B tels que pour tout n élément de IN* $\frac{1}{(n+1)n} = \frac{A}{n-1} + \frac{B}{n}$

En déduire que pour tout n élément de IN* $V_n = 2 - \frac{1}{n}$

b) Montrer que la suite U est croissante, que pour tout n élément IN* $U \leq V_n$ et que la suite U est majorée.

I. On rappelle que si q est un nombre complexe différent de 1 et n un élément de IN.

$$1 + q + q^2 + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

1°) Soit f un élément de $[0, \pi]$, on pose pour n élément de IN
En déduire que si t est un élément de

$$c_n(t) = \sum_{k=1}^{n} coskt \ \ et\ S_n(t) = \sum_{k=1}^{n} sinkt$$

a) Calculer le nombre complexe $c_n(t) + iS_n(t)$ En déduire que si t est un élément de $]0, \pi]$

$$c_n(t) = \frac{sin\frac{nt}{2}cos\frac{n+1}{2}t}{sin\frac{t}{2}} \quad et\ si\ t = 0 \quad C_n(0) = n$$

b) l'application C_n de $[0, \pi]$ dans IN est elle continue sur $[0, \pi]$?
2°) Vérifier que pour tout t élément de $]0, \pi]$

$$1 + 2C_n(t) = \frac{sin\frac{2n+1}{2}t}{sin\frac{t}{2}}$$

Et montrer que l'application de $]0, \pi]$ dans IR qui à t associe : $\frac{sin\frac{2n+1}{2}t}{sin\frac{t}{2}}$ peut être prolongée en une fonction g_n continue sur $[0, \pi]$

3°) Montrer que pour tout n élément de IN* $\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)cosntdt = \frac{1}{n^2}$

En déduire que :

$$U_n = \int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)c_n(t)dt$$

Vérifier que $\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(t - \frac{t^2}{2\pi} - t\right)dt = \frac{\pi^2}{6}(t)dt$ et pour tout n élément de IN*

$$\frac{\pi^2}{6} - U_n = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(t - \frac{t^2}{2\pi}\right)g_n(t)dt$$

III- On considère la fonction numérique f définie sur $]0, \pi]$ par : $f(x) = \begin{cases} \frac{t - \frac{t^2}{2\pi}}{sin\frac{t}{2}} & si\ t \in]0; \pi] \\ 2 & Si\ t = 0 \end{cases}$

1°) Montrer que f est continue sur $[0, \pi]$. En déduire l'existence d'un réel M tel que pour tout t élément de $[0, \pi]$ $0 \le f(t) \le M$

2°) Soit x un réel fixé tel que $0 < \alpha < \pi$
Montrer que pour tout n élément de IN

$$\left|\int_0^{\alpha} f(t)sin\frac{2n+1}{2}tdt\right| \le \alpha M$$

Problème 34

Partie A

On considère la fonction numérique g définie sur l'intervalle $I = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$ par :

$$g(x) = \ln(1+x) + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$$

1) Démontrer que pour tout t de I on a : $g'(t) = \frac{-t^3}{1+t}$

2) Déduire de 1) que pour tout t de I, on a :

$$\begin{cases} -2t^3 \leq g'(t) \leq 0 \ si \ t \geq 0 \\ 0 \leq g'(t) \leq -2t^3 \ \ si -\frac{1}{2} \leq t \leq 0 \end{cases}$$

Puis, en intégrant, démontrer que pour tout x de I, on a : $-\frac{1}{2x^4} \leq g(t) \leq 0$

Partie B

Soit f la fonction numérique définie sur]- 1, +∞[par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x - \ln(1+x)}{x^2}, & x \neq 0 \\ f(0) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Soit la fonction numérique représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (Unité : 2cm).

1) a) Vérifiez que pour tout $x \geq -\frac{1}{2}$ et $x \neq 0$, $f(x) = -\frac{g(x)}{x^2} + \frac{1}{2} - \frac{x}{3}$

b) En utilisant l'inégalité trouver en partie A 2), démontrer que f est dérivable en 0 et déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.

c) f est – elle continue en 0 ? Justifier votre réponse.

1) Soit h la fonction définie sur]– 1, +∞[par : $h(x) = \frac{-x^2-2x}{1+x} + 2\ln(1+x)$

a) Etudier le sens de variation de h. Calculer h(0) et déduire le signe de h sur]−1, +∞[.

b) Démontrer que pour tout x appartenant à]−1, 0[∪]0,+∞[, on a $f'(x) = \frac{h(x)}{x^3}$

c) Dresser le tableau de variation de f en précisant les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

3) Construire la courbe (C) et la tangente (T). Préciser les asymptotes à (C).

4) Calculer en cm^2 l'aire A(λ) du domaine plan milité par les droites d'équation x = 1, x = λ(λ>1), l'axe des abscisses et courbe (C).

Déterminer

$$\lim_{x \to +\infty} A(\lambda)$$

Partie C

1)a) Démontrer que la fonction φ définie sur]– 1, +∞[par : φ(x) = f(x) – x, est continue et strictement croissante.

b) En déduire que l'équation f(x) = x, admet une solution unique α dans]– 1, +∞[et $\frac{1}{4} \leq \alpha \leq 1$

2) Sachant que pour tout x ≥ 0 on a : $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x)$, démontrer que pour tout x ≥ 0 on a $-\frac{1}{1+x} \leq f'(x) \leq 0$ puis que pour tout $x \in \left[\frac{1}{4}, 1\right]$, $f'(x) \leq \frac{4}{5}$. En déduire que $\forall x \in \left[\frac{1}{4}, 1\right]$;

$$|f(x) - 1 + ln2| \leq \frac{1}{5}(4x - 1)$$

Problème 35

Partie A

Dans l'espace vectoriel E de dimension 2 rapporté à la base $(\vec{i}, \vec{j})$. On considère l'endomorphisme φ_a défini pour tout réel non nul a par sa matrice M_a dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$:

$$M_a = \begin{bmatrix} a & a - \frac{1}{a} \\ -a & -a \end{bmatrix}$$

1) Montrer que φ_a est une symétrie vectorielle dont on précisera la base et la direction.

2) Donner dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ la matrice de l'endomorphisme $\varphi_a o \varphi_b$ (a et b réels non nuls)

Partie B

Dans le même espace vectoriel E, on considère l'ensemble F des endomorphismes f_a ayant pour matrice A_α dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ défini par :

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha - \frac{1}{\alpha} \\ 0 & \frac{1}{\alpha} \end{bmatrix}$$ Où α est un réel non nul.

1) Montrer que F muni de la loi de composition des applications est un groupe commutatif.

2) Etudier l'ensemble des vecteurs invariants par f_α.

3) On appelle S la symétrie vectorielle de matrice $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

4) Montrer qu'il existe un unique réel a non nul tel $f_\alpha = \varphi_a o S$

Partie C

On suppose maintenant que E est un espace vectoriel euclidien dont $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base orthonormée. Dans un plan affine euclidien E associé à E de repère orthonormé$(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère la courbe (Γ) d'équation : $x^2 + 25y^2 - 6xy - 40x + 248y + 556 = 0$

1) Etablir dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ l'expression analytique de l'application f de E d'endomorphisme associé à f_{-2} et qu'il laisse le point O invariant.

2) Montrer que (Γ) est l'image par f d'une conique (C) que l'on déterminera. Montrer que cette conique passe par les points A(– 6, 11) et B(−14, 5).

3) On désigne par P et Q les points de (C) où la tangente à (C) qui admet pour vecteur directeur $\vec{i}$ et R et S les points de (C) où la tangente à (C) qui admet pour vecteur directeur $\vec{j}$. Faire la figure pour les placer. Déterminer l'allure de (Γ) en transformant par f les points P,Q, R, S, A et B et les tangentes à (C).

Problème 36

Pour chaque entier k strictement positif, on définit une application f_k de IR dans IR qui à tout x associe $f_k = \frac{x^k}{\sqrt{x^2+1}}$. On appelle f_0 l'application de IR dans IR qui à tout x associe b

$$f_0 = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

1) a)Démontrer que pour chaque k ≥ 1, la fonction f_k est croissante sur IR^+. En déduire suivant la parité de l'entier k, le sens de variation des fonctions f_k

b) Etudier en discutant suivant les valeurs de k ≥ 1, les limites de $f_k(x)$ et de $\frac{f_k(x)}{x}$ quand x tends vers + ∞. Que peut – on en déduire pour les branches infinies des courbes représentatives (C_k) des fonctions f_k?

c) Démontrer que les courbes (C_k) passent par deux points fixes.

Construire dans un même repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (Unité 2cm) les courbes (C_1) et $(C_{k,t})$

2) Soit $(I_k)k \in IN$ la suite réelle définie par $I_k = \int_0^1 f_k(x)dx$

a) Démontrer que la fonction $x \to \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ est la primitive de la fonction $x \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

En déduire la valeur de I_0

b) Calculer I_1

c) Démonter que pour tout entier $k \geq 2$, on a la relation $kI_k = \sqrt{2} - (k+1)I_{k-2}$.

En déduire I_2 et I_3

d) Démontrer que $I_k \leq \frac{1}{k+1}$ en déduire la limite de la suite (I_k) quand k tends vers $+\infty$.

3) Soit U_0 un nombre réel tel que $0 < U_0 < 1$. On définit par récurrence une suite $(U_n)n \in IN$ en posant pour $k > 0$ fixé, $U_1 = f_k(U_0)$ et pour $n \geq 1$, $U_n = f_k(U_{n-1})$

a) Démontrer par récurrence que la suite $(U_n)n \in IN$ est décroissante

b) On suppose $k \geq 2$.

Vérifier que pour tout $n \geq 1$, on a $U_n < \frac{U_{n-1}}{\sqrt{2}}$

En déduire que la suite $(U_n)n \in IN$ a une limite (que l'on précisera) quand n tends vers $+\infty$.

Problème 37

Partie A

1) Déterminer les réels a, b et c tels que :

$$\frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1}$$

2) x étant un réel strictement positif, on considère la fonction h définie par :

$$h(x) = \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{t^2}{t+1}dt$$

a) Exprimer h(x) en fonction de x

b) Démontrer que $\forall x \in IR_+^*$, $0 < h(x) < \frac{1}{3x^3}$

3) On considère la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $g(x) = x^2 ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - x + \frac{1}{2}$

a) Montrer que $g(x) = x^2 h(x)$

b) Calculer

$$\lim_{x \to +\infty} g(x)$$

Partie B

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = e^{2x} - 4x + 3\,, \; si\, x \leq 0 \\ f(x) = x^2 ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\,, \; si\, x > 0 \end{cases}$

1) a) Etudier la continuité de f en $x_0 = 0$, après avoir précisé son ensemble de définition.

b) Etudier la dérivabilité de f en $x_0 = 0$,

2) a) Montrer que pour tout $x > 0$ la dérivée de f peut se mettre sous la forme $f'(x) = x\,k(x)$ où $k(x) = aln\left(\frac{u(x)}{x}\right) - \frac{1}{u(x)}$, $a \in IR^*$, u une fonction à préciser.

b) Etudier sur $]0, +\infty[$ les variations de k. En déduire son signe sur $]0, +\infty[$.

c) Dresser le tableau de variations de f

3) Démontrer que la courbe (C) de f admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote oblique (Δ). Etudier la position de (C) par rapport à (Δ). Donner l'équation cartésienne de l'autre asymptote. (On pourra utiliser les résultats de la partie A)

4) Tracer (C) dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

Problème 38

Partie A

Dans le plan orienté (P), on considère le triangle équilatéral direct ABC de centre I

1) a) Construire l'ensemble (Γ_1) des points M tels que $(\overline{MB, MC}) = -\frac{\pi}{3}[\pi]$

b) Soit O_1 le centre de (Γ_1). Démontrer que O_1 appartient au cercle (C_1) circonscrit au triangle ABC.

2) a) Construire l'ensemble (D) des centres des rotations qui transforment I en C.

b) La droite (BI) recoupe (C_1) en D, démontrer que les points O_1 et D appartiennent à (D).

3) a) La droite (DO_1) coupe (Γ_1) en E, Démontrer qu'il existe une rotation r_1 qui transforme E en C et O_1 en I.

b) Construire Ω_1 le centre de R_1.

c) Démontrer que $(\overline{C\Omega 1, CE}) = (\overline{O_1 I, O_1\Omega_1})[\pi]$

4) a) Construire l'ensemble (Γ_2) des points N tels que $(\overline{NB, NA}) = \frac{\pi}{3}[\pi]$

b) Soit O_2 le centre de (Γ_2), démontrer qu'il existe une translation T, dont on déterminera le vecteur qui transforme la droite (CD) en la droite (BO_2)

c) Soit R_2 la rotation de centre B et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ reconnaître et caractériser R_2oT

d) Déterminer $R_2oT(C)$.

5) a) Soit (C_2) le cercle de centre O_2 et de rayon $[BO_2]$ et r_3 la rotation de centre B et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$, démontrer que (C_2) est l'image de (C_1) par R_3

b) Soit P un point de (C_1) et P' son image par R_3. Montrer que les points A, Pet P' sont alignés.

c) Soit Q un point quelconque du plan (P), Q' son image par R_3, déterminer l'ensemble des points Q tels que C, Q et Q' soient alignés.

6) On distingue par J, R, et L les milieux respectifs des côtés [BC], [AC] et [AB] et U le milieu de [AL], la parallèle à (BC) passant par I coupe (AC) en K. $(\overline{O_1 I, O_1\Omega_1}$

a) Trouver le rapport $\frac{AR}{AC}$

b) Reconnaître et caractériser $g = S(BC)oR(I, \frac{\pi}{3})$

c) Déterminer $g(O_1)$ et $gog(I)$.

Partie B

1) Déterminer le rapport et une mesure de l'angle de la similitude plane directe S_1 de centre C qui transforme A en I.

2) Construire le centre Ω_2 de la similitude directe S_2 de rapport 2 et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$, qui transforme B en O_2.

3) Construire l'ellipse (E) de rectangle fondamental ADO_1B et ses foyers F_1 et F_2.

4) Construire l'hyperbole (H) dont le rectangle fondamental est ADO_1B et l'axe non focal est la droite (IC) et ses foyers F'_1 et F'_2. Calculer son excentricité.

Partie C

Dans le repère orthonormé direct $(I, \overrightarrow{IS}, \overrightarrow{IL})$, donner :

a) Les équations de (E) et (H)

b) Trouver l'expression analytique de S_1

Problème 39

Partie A

Dans un plan orienté, on considère un triangle équilatéral direct ABC de centre O, H et F sont les pieds des hauteurs issues de A et B respectivement. On désigne par A' le symétrique de O par rapport à H et B' celui de O par rapport à F.

1) Montrer que les points A, B, C et A' appartiennent à un même cercle (C_1) que l'on tracera. En déduire l'appartenance de B au cercle (C_1).

2) La demi droite d'origine O parallèle à (BC) coupe (C_1) et la droite (AC) en D et I respectivement. On désigne par J le projeté orthogonal de I sur la droite (AB). Les droites (OB) et (AD) se coupent en E.

a) Donner une mesure des angles $\left(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CB'}}\right)$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AE}}\right)$.

b) Démontrer qu'il existe une rotation R_1 qui transforme C en A et I en I, construire son centre

c) Démontrer que la composée $S_{(OJ)} o S_{(AC)}$ des réflexions d'axes respectifs (OJ) et (AC) est une translation de vecteur $\vec{u}$ à préciser.

d) Démontrer que les points O, C, B et E sont cocycliques.

3) a) Démontrer qu'il existe une rotation R_2 transformant A' en I et O en J, construire son centre.

b) Démontrer qu'il existe une rotation R_3 telle que $R_3(E) = A$ et $R_3(B) = C$.

c) Construire les centres O_2 et O_3 des rotations R_2 et R_3.

d) Soit $f = R_2 o t_{-OF}$. Montrer que f est une rotation dont on précisera le centre Ω_4 et une mesure de son angle.

e) Montrer que les points Ω_2, B, Ω_4 et O sont cocycliques à un cercle (C_2) que l'on tracera en précisant son centre O'

f) Soit g l'application ponctuelle définie par $g = R(\Omega_2, \frac{\pi}{3}) o R(B, -\frac{\pi}{3})$; Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de g.

Partie B

Soit a et b deux réels tels que $a + b + 1 \neq 0$; on définit l'application affine h du plan privé de la droite (AB) dans lui-même qui au point G barycentre du système $\{(A, a), (B, b), (C, 1)\}$ associe le point G' barycentre du système $\{(A, b), (B, a), (C, 1)\}$

1) Déterminer l'ensemble des points invariants par g.

2) Montrer que $\overrightarrow{GG'}$ garde une direction indépendante de G

3) Le plan est rapporté au repère $(A, \overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AC'})$

a) Montrer que les coordonnées du point K milieu de [GG'] sont:

$$x_k = \frac{-b-a}{2(a+b+1)} \quad \text{et} \quad y_k = \frac{-1}{a+b+1}$$

b) En éliminant a et b entre x_k et y_k, montrer que le point K appartient à une droite fixe. Déterminer alors la nature de h.

Problème 40

Dans tout le problème on se place dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.(l'unité graphique est de 2 cm)

Partie A

Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = x\ln x - x + 1$

1) Etudier les variations de g

2) Etablir le signe de g(x) sur son ensemble de définition.

3) On note (T) la représentation graphique de la fonction f définie par $t(x) = \ln x$

Montrer que (G) et (T) ont deux points communs d'abscisses respectives 1 et 2 et que pour tout $x \in [1, 2]$ on a : $x\ln x - x + 1 \leq \ln x$ (on ne demande pas de représenter (G) et (T).

4) Soit (Δ) le domaine du plan définie par

$\Delta = \{M(x, y) : 1 \leq x \leq 2 \text{ et } g(x) \leq y \leq \ln x\}$ Déterminer l'aire en cm^2 de Δ

Partie B

Soit la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln x}{x-1} & si\ ]0, 1[\cup]1\ ; +\infty[\\ f(1) = 1 \end{cases}$$

1) Démontrer que $\forall\ t \in IR_+ \quad 0 \leq \frac{1}{t+1} - 1 + t \leq t^2$.

En déduire que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

2) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en $x_0 = 1$

3) Etudier les variations de f

4) Tracer la courbe (C) de f dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Partie C

1) Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet une racine unique solution notée α et que $3.5 < \alpha < 3.6$.

2) Soit h la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par $h(x) = \ln x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

a) Montrer que α est solution de l'équation $h(x) = x$

b) Etudier les variations de h

c) On pose $I = [3, 4]$, montrer que pour tout $x \in I$, on a $h(x) \in I$ et $|h'(x)| \leq \frac{5}{6}$

3) On définit la suite (U_n) par $U_0 = 3$ et pour $n \geq 0$, $U_{n+1} = h(U_n)$

Justifier successivement les 3 propriétés suivantes

a) Pour tout $n \in IN$; $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{5}{6}|U_n - \alpha|$

b) Pour tout $n \in IN$; $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{5}{6}\right)^n$

c) La suite (Un) converge vers α

Problème 41

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. (unité graphique 2 cm)

Partie A

1) Soit f la fonction numérique définie sur IR par $f(x) = 1 + x - e^{-x}$ et soit (C) la courbe représentative de f

a) Etablir le tableau de variations de f

b) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe (C) et préciser la position de (C) par rapport à (Δ).

c) Tracer la courbe (C)

2) a) Déterminer les positions relatives de (C) et la droite d'équation $y = x - 2$

b) Calculer l'aire A de la partie (E) du plan limité par la courbe (C) et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $y = x - 2$.

Problème 39

Partie A

Dans un plan orienté, on considère un triangle équilatéral direct ABC de centre O, H et F sont les pieds des hauteurs issues de A et B respectivement. On désigne par A' le symétrique de O par rapport à H et B' celui de O par rapport à F.

1) Montrer que les points A, B, C et A' appartiennent à un même cercle (C_1) que l'on tracera. En déduire l'appartenance de B au cercle (C_1).

2) La demi droite d'origine O parallèle à (BC) coupe (C_1) et la droite (AC) en D et I respectivement. On désigne par J le projeté orthogonal de I sur la droite (AB). Les droites (OB) et (AD) se coupent en E.

a) Donner une mesure des angles $(\widehat{\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB'}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AE}})$.

b) Démontrer qu'il existe une rotation R_1 qui transforme C en A et I en I, construire son centre

c) Démontrer que la composée $S_{(OJ)}oS_{(AC)}$ des réflexions d'axes respectifs (OJ) et (AC) est une translation de vecteur $\vec{u}$ à préciser.

d) Démontrer que les points O, C, B et E sont cocycliques.

3) a) Démontrer qu'il existe une rotation R_2 transformant A' en I et O en J, construire son centre.

b) Démontrer qu'il existe une rotation R_3 telle que $R_3(E) = A$ et $R_3(B) = C$.

c) Construire les centres O_2 et O_3 des rotations R_2 et R_3.

d) Soit $f = R_2 o t_{-OF}$. Montrer que f est une rotation dont on précisera le centre Ω_4 et une mesure de son angle.

e) Montrer que les points Ω_2, B, Ω_4 et O sont cocycliques à un cercle (C_2) que l'on tracera en précisant son centre O'

f) Soit g l'application ponctuelle définie par $g = R(\Omega_2, \frac{\pi}{3}) o R(B, -\frac{\pi}{3})$; Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de g.

Partie B

Soit a et b deux réels tels que $a + b + 1 \neq 0$; on définit l'application affine h du plan privé de la droite (AB) dans lui-même qui au point G barycentre du système $\{(A, a), (B, b), (C, 1)\}$ associe le point G' barycentre du système $\{(A, b), (B, a), (C, 1)\}$

1) Déterminer l'ensemble des points invariants par g.

2) Montrer que $\overrightarrow{GG'}$ garde une direction indépendante de G

3) Le plan est rapporté au repère $(A, \overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AC'})$

a) Montrer que les coordonnées du point K milieu de [GG'] sont:

$$x_k = \frac{-b-a}{2(a+b+1)} \quad \text{et} \quad y_k = \frac{-1}{a+b+1}$$

b) En éliminant a et b entre x_k et y_k, montrer que le point K appartient à une droite fixe. Déterminer alors la nature de h.

Problème 40

Dans tout le problème on se place dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.(l'unité graphique est de 2 cm)

Partie A

Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = x\ln x - x + 1$

1) Etudier les variations de g

2) Etablir le signe de g(x) sur son ensemble de définition.

3) On note (T) la représentation graphique de la fonction f définie par $t(x) = \ln x$

Montrer que (G) et (T) ont deux points communs d'abscisses respectives 1 et 2 et que pour tout $x \in]1, 2[$ on a : $x\ln x - x + 1 \leq \ln x$ (on ne demande pas de représenter (G) et (T).

4) Soit (Δ) le domaine du plan définie par

$\Delta = \{M(x, y) ; 1 \leq x \leq 2 \text{ et } g(x) \leq y \leq \ln x\}$ Déterminer l'aire en cm^2 de Δ

Partie B

Soit la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln x}{x-1} & si \ ]0, 1[\cup]1 ; +\infty[\\ f(1) = 1 \end{cases}$$

1) Démontrer que $\forall\, t \in IR_+ \quad 0 \leq \frac{1}{t+1} - 1 + t \leq t^2$.

En déduire que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

2) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en $x_0 = 1$

3) Etudier les variations de f

4) Tracer la courbe (C) de f dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie C

1) Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet une racine unique solution notée α et que $3.5 < \alpha < 3.6$.

2) Soit h la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par $h(x) = \ln x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

a) Montrer que α est solution de l'équation $h(x) = x$

b) Etudier les variations de h

c) On pose $I = [3, 4]$, montrer que pour tout $x \in I$, on a $h(x) \in I$ et $|h'(x)| \leq \frac{5}{6}$

3) On définit la suite (U_n) par $U_0 = 3$ et pour $n \geq 0$, $U_{n+1} = h(U_n)$

Justifier successivement les 3 propriétés suivantes

a) Pour tout $n \in IN$; $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{5}{6}|U_n - \alpha|$

b) Pour tout $n \in IN$; $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{5}{6}\right)^n$

c) La suite (Un) converge vers α

Problème 41

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (unité graphique 2 cm)

Partie A

1) Soit f la fonction numérique définie sur IR par $f(x) = 1 + x - e^{-x}$ et soit (C) la courbe représentative de f

a) Etablir le tableau de variations de f

b) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe (C) et préciser la position de (C) par rapport à (Δ).

c) Tracer la courbe (C)

2) a) Déterminer les positions relatives de (C) et la droite d'équation $y = x - 2$

b) Calculer l'aire A de la partie (E) du plan limité par la courbe (C) et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $y = x - 2$.

Partie B

Dans cette partie à tout point M de coordonnées (x ; y) on associe son affixe $z = x + iy$

Soit S l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = (-1 - i)z + 1$

1) Reconnaître et caractériser S
2) Calculer les coordonnées x et y du point M en fonction des coordonnées x' et y' de M'
3) Déterminer les équations des transformés par S des droites $x = 0$ et $y = x - 2$.
4) Soit la fonction numérique f_1 définie sur $]-\infty, -2[$ par $f_1(x) = 1 - x - 2\ln(x-2)$ et soit (C_1) sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Montrer que $S(C) = C_1$

Partie C

1) Etablir le tableau de variation de f_1
2) Tracer la courbe (C_1)
3) On appelle (E_1) la partie du plan délimitée par la courbe (C_1) et les droites d'équations $y = 1 - x$ et $x = -1$. On admet que (E) est transformé en (E_1) par S. Calculer l'aire A_1 de la partie (E_1)

Problème 42

On considère la fonction f définie par

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x|x|}{x+1}, & si\ x < -1 \\ f(x) = \dfrac{x^2}{2} - x + \ln(1+x), & si\ > -1 \end{cases}$$

Partie A :

1) Etudier les variations de f
2) En déduire que
   a) $\forall\ x \in [0, +\infty[\ ; x + \ln(1+x) \le \frac{x^2}{2}$
   b) $\forall\ x \in [0, 1]\ ; x + \ln(1+x) \le \frac{x}{2}$
3) Montrer que l'origine du repère est un point d'inflexion de la courbe (C) représentative de f.
4) Tracer (C).
5) Soit h la restriction de f à l'intervalle $]-1\ ; +\infty[$
   a) Montrer que h admet une réciproque notée h^{-1} dont on dressera le tableau de variations
   b) Montrer qu'il existe un réel $\alpha \in]0, 2[$ tel que $h'(\alpha) = ln\sqrt{3}$
   c) En déduire qu'il existe un réel $b \in]0, \ln 3[$ tel que $(h^{-1})'(b) = \frac{2}{ln2}$
   d) Tracer (C') courbe de h^{-1} dans le même repère que (C)

Partie B

On pose $g(x) = x - \ln x$

1) Démontrer que $\forall\ x \in]1, +\infty[, g(x) \ge 0$
2) Soit (U_n) la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = U_n - \ln(U_n) \end{cases}$
   a) Démontrer que $\forall n \in IN$, $U_n \ge 1$
   b) En déduire le sens de variation de (U_n) puis sa convergence.
3) On pose $V_n = -1 + U_n$
   a) Montrer que (V_n) est positive puis exprimer V_{n+1} en fonction de V_n.
   b) Etudier le sens de variation de (V_n), en déduire $\forall n \in IN$, $0 \le V_n \le 1$
   c) Démontrer que $\forall n \in IN$, $V_{n+1} \le \frac{1}{2}V_n$. En déduire la limite de la suite (V_n).

Problème 43

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$

Partie A

Soit le polynôme de la variable complexe Z défini par :

$P(Z) = Z^3 + (2 - 3i)Z^2 + (-7 - 8i)Z - 11i + 10$

1) Calculer $P(-i)$ qu'en déduire ?
2) Déterminer les nombres complexes u et v tels que $P(Z) = (Z + i)(Z^2 + uZ + v)$
3) Résoudre alors l'équation $P(Z) = 0$ dans C
4) On désigne par I, B et C les points d'affixes respectives $Z_I = -i$; $Z_B = 2 + 3i$ et $Z_C = -4 + i$

Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude plane directe qui laisse I invariant et transforme B en C.

Partie B

On considère dans le plan complexe P, les points A d'affixe 1 ; M d'affixe Z et M_1 d'affixe $Z_1 = iZ - 1 - i$. On désigne par T_α l'application qui à tout point d'affixe Z associe le point M' barycentre des points pondérés (M, α) ; $(M_1, -\alpha)$ et (A, 1) où α est un réel non nul.

1) a) Montrer que $Z' = \alpha(1 - i)Z + \alpha(1 + i) + 1$
   b) Démontrer que T_α est une similitude plane directe dont on précisera l'affixe du centre Ω, le rapport et l'angle de T_α. pour quelles valeurs de α, T_α est une rotation
   c) Soit M'(x', y') l'image de M(x, y) par T_α. Exprimer les coordonnées (x', y') de M' en fonction de celles de M.
2) On suppose α est strictement positif. Soit le point $N(-\ln\alpha\ ; \ln\alpha)$ et N' son image par T_α.
   a) Déterminer les coordonnées de N' en fonction de α.
   b) Démontrer que lorsque α décrit IR_+^*, l'ensemble des points N' est la courbe (Γ) d'équation $y = 2(x-1)\ln(x-1) + (x-1)$

Partie C

Soit la fonction numérique définie et continue sur IR_+ par : $\begin{cases} f(x) = 2x\ln x & si\ \ x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

On note (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormal $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$: unité graphique 10cm.

1) a) Etudier la dérivabilité de f en $x = 0$. Qu'en déduire.
b) Résoudre les équations $f(x) = 0$ et $f(x) = x$. Interpréter géométriquement.
2) Dresser le tableau de variation de f.
3)a) Tracer (C)
b) Par quelle transformation du plan (Γ) se déduit – elle de (C) ? Tracer (Γ).
4) On considère la restriction g de f à l'intervalle $[e^{\frac{-3}{2}}\ ; +\infty[$.
a) Montrer que g admet une réciproque g^{-1} dont on dressera le tableau de variation
b) Tracer la courbe (C') de g^{-1} dans le même repère que (C).
c) Calculer l'aire du domaine (D') du plan délimité par la courbe (C'), la droite (Δ) d'équation $y = x$ ainsi que les droites d'équation $y = e^{\frac{-3}{2}}$ et $y = 1$

Problème 44

Partie A

On considère la suite (V_n) par : $V_0 = 1$; $V_1 = 2$ et $\forall n \in IN$, $V_{n+2} + V_{n+1} - 6V_n = 0$

1)a) Démontrer que $\forall n \in IN$, $V_n = 5^{n-1} V_1[6]$.

b) En déduire les restes dans la division euclidienne de V_n par 6 suivant les valeurs de n

2) Soit $S_n = V_0 + V_1 + \ldots + V_n$

a) Déterminer le reste dans la division euclidienne de S_n par 6 suivant les valeurs de n

b) En déduire le reste dans la division euclidienne de la somme de S_{1956} par 6

Partie B

Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $g(x) = x - 2 - \ln(x^2 - 2x + 1)$. On note (C_g) sa courbe représentative dans le plan P rapporté au repère orthonormé de sens direct $(O, \vec{OI}, \vec{OJ})$ où $I(1 ; 0)$ et $J(0 ; 1)$

1) Dresser le tableau de variations de g

2) Calculer $g(0)$, $g(2)$, $g(4)$ et $g(5)$. En déduire que la courbe (C_g) coupe l'axe des abscisses en trois points d'abscisses x_1, x_2 et x_3 telle que $x_1 \in]0 ; 1[$ $x_2 \in]4 ; 5[$. On donnera la valeur exacte de x_3.

3)a) Etudier les branches infinies de (C_g).

b) Trouver les points d'intersection de (C_g) avec la droite (D) d'équation $y = x$.

c) Tracer (C_g) dans le repère $(O, \vec{OI}, \vec{OJ})$

Partie C

Le plan P est identifié au plan complexe. On considère les points A, B, Ω d'affixes respectives $Z_A = 1 + i$, $Z_B = -i$ et $Z_\Omega = 1 - i$. Soit S la similitude plane directe de centre Ω telle que $S(O) = A$.

1) Déterminer l'écriture complexe de S. Préciser son rapport k et une mesure θ de son angle.

2) Montrer que pour tout point M d'affixe Z et M' d'affixe Z' où $M' = S(M)$, $Z' - Z = -i(Z - Z_\Omega)$.

3) a) Montrer que pour tout point M distinct de Ω le triangle ΩMM' est rectangle isocèle en M.

b) Placer le point C tel que $C = (SoSoS)(B)$

4) Trouver l'expression analytique de S.

5) Soit (C_f) la courbe représentative de la fonction f définie par : $f(x) = -x + e^{x-1}$.

a) Montrer que l'image de (C_f) par S est une partie de (C_g) que l'on précisera.

b) En déduire, sans étude de variation de f, le tracé de (C_f) dans le même repère que (C_g).

Problème 45

On considère la fonction f définie par $f(x) = 1 - x + \frac{\ln ex}{xe^2}$ où e désigne la base des logarithmes népériens

Partie A

1) Etudier la continuité de f sur son ensemble de définition

2) Montrer que la fonction dérivée f' à le même signe que la fonction g définie par : $g(x) = -(x^2 + e^{-2}\ln x)$.

Dresser le tableau de variation de g. Calculer $g(e^{-1})$; en déduire, le signe de $f'(x)$.

3) Achever l'étude de la fonction f

4) Construire la courbe (C) représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (Unité graphique 4cm).

Partie B

Soit un réel m, $m > e^{-1}$.

1) Calculer l'aire $\mathscr{A}(m)$ de la partie du plan limité par la courbe (C), la droite d'équation et les droites d'équations $x = e^{-1}$ et $x = m$.

2) Calculer la limite de $\mathscr{A}(m)$ lorsque m tend vers $+\infty$

Partie C

On considère l'application ponctuelle h définie analytiquement par :

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = e^2ky + (1 - ke^2)(1 - x) \end{cases}$$ où k est un réel strictement positif

1) Déterminer l'ensemble des points invariants par h.

2) Si on note $M' = h(M)$, montrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire à un vecteur fixe.

3) Soit H tel que (MM') ∩ (D). (D) la droite d'équation $y = 1 - x$

a) Déterminer une relation entre les vecteurs $\overrightarrow{HM}$ et $\overrightarrow{HM'}$

b) En déduire une construction géométrique de M' et faire le dessin pour $k = e^{-1}$

Partie D

On appelle (C_k) l'image par h de la courbe (C)

1) Donner l'équation cartésienne de (C_k).

2) Montrer que la famille des courbes (C_k) a un point fixe.

GARDE TOUJOURS A L'ESPRIT QUE TA VOLONTE DE REUSSIR EST PLUS IMPORTANT***

2ème Partie

Solutions

*** WITH GOD ALL THINGS ARE POSSIBLE***

Nzali

Exercice n°1

$I=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^2e^{-x}}{1-x}dx$

1) Etude de la fonction $f(x)=\frac{e^{-x}}{(1-x)^2}$ sur $x\in[0,\frac{1}{2}]$

Calcul de $f'(x)$. On a : $f'(x)=\frac{xe^{-x}}{(1-x)^2}$

comme $x\in[0,\frac{1}{2}]$ on a $f'(x)\geq 0$

x	0	$\frac{1}{2}$
f'(x)	+	
f(x)	1 ↗	$\frac{2}{\sqrt{2}}$

Par la suite on a pour tout $x\in[0,\frac{1}{2}]$:

$1\leq f(x)\leq\frac{2}{\sqrt{2}}$

2) a) $1+x+\frac{x^2}{1-x}=\frac{1-x^2+x^2}{1-x}$

$=\frac{1}{1-x}$

b) $f(x)=\frac{e^{-x}}{(1-x)^2}=e^{-x}\left(\frac{1}{1-x}\right)$

$=e^{-x}\left(1+x+\frac{x^2}{1-x}\right)$

$=e^{-x}(1+x)+\frac{x^2e^{-x}}{1-x}$

$I=\int_0^{\frac{1}{2}}(1+x)e^{-x}dx+\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^2e^{-x}}{1-x}dx$ donc

$I=\int_0^{\frac{1}{2}}(1+x)e^{-x}dx+\int_0^{\frac{1}{2}}x^2f(x)dx$

c) Calcul de $J=\int_0^{\frac{1}{2}}(1+x)e^{-x}dx$

Après intégration par parties on trouve

$J=2-\frac{5}{2\sqrt{e}}$

d) D'après le 1) on a $1\leq f(x)\leq\frac{2}{\sqrt{2}}$

comme $x^2\geq 0$

on a : $x^2\leq x^2f(x)\leq\frac{2x^2}{\sqrt{2}}$

En intégrant sur $[0,\frac{1}{2}]$ on aura :

$x^2\leq x^2f(x)\leq\frac{2x^2}{\sqrt{2}}$

$\int_0^{\frac{1}{2}}x^2dx\leq\int_0^{\frac{1}{2}}x^2f(x)dx\leq\frac{2}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{1}{2}}x^2dx$

$\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{2}}\leq\int_0^{\frac{1}{2}}x^2f(x)dx\leq\frac{2}{\sqrt{2}}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{2}}$

$\frac{1}{24}\leq\int_0^{\frac{1}{2}}x^2f(x)dx\leq\frac{1}{12\sqrt{2}}$

Or d'après b) du 2) $\int_0^{\frac{1}{2}}x^2f(x)dx=I-J$

$\frac{1}{24}\leq I-J\leq\frac{1}{12\sqrt{2}}$

$\frac{1}{24}+J\leq I\leq\frac{1}{12\sqrt{2}}+J$

Après remplacement on trouve

$I=0.53$

Exercice n°2

1) $U_n=\frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\right]-\ln n$

$U_n=\frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)-n\ln n\right]$

$U_n=\frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{n}\ln(n+k)-n\ln n\right]$

$=\frac{1}{n}[\ln(1+n)+\ln(2+n)+\dots+\ln(2n)-nl(n)]$

$=\frac{1}{n}[\ln(1+n)-\ln(n)+\ln(2+n)-\ln(n)+\dots+\ln(2n)-l(n)]$

$=\frac{1}{n}\left[\ln\left(\frac{1+n}{n}\right)+\ln\left(\frac{2+n}{n}\right)+\dots+\ln\left(\frac{2n}{n}\right)\right]$

$=\frac{1}{n}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)+\dots+\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]$

$=\frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\right]$. Donc

$U_n=\frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\right]\ \forall n\in\mathbb{N}^*$

2) a) Pour tout $x\in\left[1+\frac{k}{n},1+\frac{k+1}{n}\right]$ Nous avons

$1+\frac{k}{n}\leq x\leq 1+\frac{k+1}{n}$

$\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\leq\ln x\leq\ln\left(1+\frac{k+1}{n}\right)$

Si on intègre sur $\left[1+\frac{k}{n},1+\frac{k+1}{n}\right]$ on a :

$\int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)dx\leq$

$\leq\int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}}\ln x\,dx\leq$

$\leq\int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}}\ln\left(1+\frac{k+1}{n}\right)dx$

On pose $I=\int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}}\ln x\,dx$ on a :

$\int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)dx$

$\leq I\leq\int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}}\ln\left(1+\frac{k+1}{n}\right)dx$

$\left[x\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\right]_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}}\leq I\leq\left[x\ln\left(1+\frac{k+1}{n}\right)\right]_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}}$

$\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\leq I\leq\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{k+1}{n}\right)$ pour $k\in[0,n+1]$

b) Déduisons que $U_n-\frac{1}{n}\ln 2\leq\int_1^2\ln(x)dx\leq U_n$

Pour $k=0$ on a : $\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{0}{n}\right)\leq I\leq\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{0+1}{n}\right)$

Pour $k=1$ on a : $\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\leq I\leq\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1+1}{n}\right)$

Pour $k=n-1$ on a : $\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{n-1}{n}\right)\leq I\leq\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{n-1+1}{n}\right)$

En faisant la somme membre à membre on aura

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right) \leq \sum_{k=0}^{n-1} I \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(1+\frac{k+1}{n}\right)$$

Nous savons que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right) \leq \sum_{k=0}^{n-1} I = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\ln\left(1+\frac{k+1}{n}\right) - \frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\right]$$

On aura

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\ln\left(1+\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right] \leq \int_1^2 \ln x\,dx \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\right]$$

Or $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\right] = U_n$

Donc on aura

$U_n - \frac{1}{n}\ln 2 \leq \int_1^2 \ln x\,dx \leq U_n$.

Par une intégration par parties on a :

$\int_1^2 \ln x\,dx = [x\ln x - x]_1^2$

$= 2\ln 2 - 1$

On a : $U_n - \frac{1}{n}\ln 2 < \int_1^2 \ln x\,dx \leq U_n$.

$$U_n - \frac{1}{n}\ln 2 \leq 2\ln 2 - 1 \leq U_n$$

$$-\frac{1}{n}\ln 2 \leq 2\ln 2 - 1 - U_n \leq 0$$

$$0 \leq U_n - 2\ln 2 + 1 < \frac{1}{n}\ln 2$$

D'après le théorème des Gendarmes on a :

$\lim\limits_{x\to+\infty} U_n - 2\ln 2 + 1 = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} U_n = 2\ln 2 - 1$

Exercice n°3

1) La fonction $x \mapsto \frac{\cos nx}{\frac{5}{4}-\cos x}$ est définie et continue sur $[0\,;\pi]$ car $\forall\, x \in [0\,;\pi]$, $\frac{5}{4} - \cos x \neq 0$ donc cette fonction est intégrable.

2) $U_0 = \frac{5\pi}{3}$ donc $\int_0^\pi \frac{1}{\frac{5}{4}-\cos x}dx = \frac{5\pi}{3}$

Démontrons que $U_1 = \frac{2\pi}{3}$

$U_1 = \int_0^\pi \frac{\cos x}{\frac{5}{4}-\cos x}dx$.

On sait que $\frac{\cos x}{\frac{5}{4}-\cos x} = -1 + \frac{\frac{5}{4}}{\frac{5}{4}-\cos x}$

$$\text{Donc}\quad U_1 = \int_0^\pi\left(-1 + \frac{\frac{5}{4}}{\frac{5}{4}-\cos x}\right)dx$$

$$= -\int_0^\pi dx + \frac{5}{4}\int_0^\pi \frac{1}{\frac{5}{4}-\cos x}dx$$

$$= -\pi + \frac{5}{4}U_1$$

Donc $U_1 = \frac{2\pi}{3}$

3) a) On sait que $\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$

Donc $\cos(n+2)x + \cos nx = 2\cos\frac{nx+2x+nx}{2}\cos\frac{nx+2x-nx}{2}$

$$= 2\cos(n+1)x.\cos x$$

b) $U_n + U_{n+2} = \int_0^\pi \frac{\cos nx}{\frac{5}{4}-\cos x}dx + \int_0^\pi \frac{\cos(n+1)x}{\frac{5}{4}-\cos x}dx$

$$= \int_0^\pi \frac{\cos(n+2)x + \cos nx}{\frac{5}{4}-\cos x}dx$$

$$= \int_0^\pi \frac{2\cos(n+1)x\cos x}{\frac{5}{4}-\cos x}dx$$

$$= \int_0^\pi 2\cos(n+1)\frac{\cos x}{\frac{5}{4}-\cos x}dx$$

D'après le 2) on a : $\frac{\cos x}{\frac{5}{4}-\cos x} = -1 + \frac{5}{4}\frac{1}{\frac{5}{4}-\cos x}$

$$U_n + U_{n+2} = \int_0^\pi 2\cos(n+1)\left(-1 + \frac{5}{4}\frac{1}{\frac{5}{4}-\cos x}\right)dx$$

$$= -\int_0^\pi 2\cos(n+1)dx + \frac{5}{2}\int_0^\pi \frac{\cos(n+1)}{\frac{5}{4}-\cos x}dx$$

$$= -\frac{2}{n+1}\underbrace{[\sin(n+1)x]_0^\pi}_{=0} + \frac{5}{2}U_{n+1}$$

$U_n + U_{n+2} = \frac{5}{2}U_{n+1}\quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

c) Montrons que $U_n = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Il ya deux possibilités pour montrer cette relation

1ère possibilité : Par le raisonnement par récurrence

$U_0 = \frac{5\pi}{3}$ vraie

$U_1 = \frac{5\pi}{3}\cdot\frac{1}{2}$ on a bien $U_1 = \frac{2\pi}{3}$

Supposons que cela est vraie au rang n c'est-à-dire

$U_n = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Prouvons que cela est aussi vrai au rang n + 1

$$U_{n+1} = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

Nous savons que $U_{n+1} = \frac{5}{2}U_n - U_{n-1}$

$$= \frac{5}{2}\frac{4\pi}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{4\pi}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$= \frac{4\pi}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left[\frac{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right) - 1\right]$$

$$= \frac{4\pi}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{4\pi}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$U_{n+1} = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\quad \text{vraie}$$

Donc $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $U_n = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

2ème possibilité : Par la méthode des suites récurentes

$U_{n+2} - \frac{5}{2}U_{n+1} + U_n = 0$; $U_0 = \frac{5\pi}{3}$ et $U_1 = \frac{2\pi}{3}$

Equation caractéristique. $r^2 - \frac{5}{2}r + 1 = 0$

$2r^2 - 5r + 2 = 0$

On a $r_1 = \frac{1}{2}$ et $r_2 = 2$

On a : $U_n = A(2)^n + B\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$\begin{cases} U_0 = A + B \\ U_1 = 2A + \frac{1}{2}B \end{cases}$$

On trouve $A = 0$ et $B = \frac{4\pi}{3}$

Donc $\quad U_n = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

4) $S_n = U_0 + U_2 + \cdots + U_n$

$$= U_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$$= \frac{4\pi}{3}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\qquad S_n = \frac{8\pi}{3}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$$

$$\lim_{x\to+\infty} S_n = \frac{8\pi}{3}$$

Exercice n°4

1) Calcul de I0 et I1 a l'aide d'une intégration par parties

On a $I_0 = \int_0^1 \sqrt{1+t}\,dt$

$= \frac{2}{3}\left[(1+t)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1) \Rightarrow I_0 = \frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$

Calcul de I_1

$I_1 = \int_0^1 t\sqrt{1+t}\,dt$

On pose $u = t$ $\quad u' = 1$

$v' = \sqrt{1+t}$ $\quad v = \frac{3}{2}(1+t)^{\frac{3}{2}}$

$I_1 = \frac{2}{3}\left[t(1+t)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 - \frac{2}{3}\int_0^1 (1+t)^{\frac{3}{2}}dt$

$= \frac{2}{3}\left[t(1+t)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 - \frac{1}{5}\left[(1+t)^{\frac{5}{2}}\right]_0^1$

$I_1 = \frac{1}{15}(8\sqrt{2}-1)$

2) On sait que $0 \le t \le 1$, on a

$t^{n+1} \le t^n$

comme $\sqrt{1+t} > 0 \Rightarrow t^{n+1}\sqrt{1+t} \le t^n\sqrt{1+t}$

On intègre sur $[0, 1]$ on a :

$\int_0^1 t^{n+1}\sqrt{1+t}\,dt \le \int_0^1 t^n\sqrt{1+t}\,dt \Rightarrow I_{n+1} \le I_n$ on déduit que (In) est décroissante.

3) Nous savons que :

$0 \le t \le 1 \Rightarrow 1 \le 1+t \le 2 \Rightarrow 1 \le \sqrt{1+t} \le \sqrt{2}$ En multipliant par t^n $(t^n > 0)$ et intégrant sur $[0, 1]$

$t^n \le t^n\sqrt{1+t} \le t^n\sqrt{2}$

$\int_0^1 t^n dt \le \int_0^1 t^n\sqrt{1+t}\,dt \le \sqrt{2}\int_0^1 t^n dt$

$\frac{1}{n+1}[(t)^{n+1}]_0^1 \le I_n \le \frac{1}{n+1}\sqrt{2}[(t)^{n+1}]_0^1$

$\frac{1}{n+1} \le I_n \le \frac{\sqrt{2}}{n+1}$

4) Montrons que pour tout t de $[0, 1]$ on a :

$0 \le \sqrt{2} - \sqrt{1+t} \le \frac{1}{2}(1-t)$

$t \in [0, 1] \Rightarrow 0 \le t \le 1;$

$0 \le \sqrt{1+t} \le \sqrt{2} \Rightarrow 0 \le \sqrt{2} - \sqrt{1+t}$ (1)

$\sqrt{2} - \sqrt{1+t} \le \frac{1}{2}(1-t)$ (2)

(1) et (2) on a :

$0 \le \sqrt{2} - \sqrt{1+t} \le \frac{1}{2}(1-t)$

Déduisons $\frac{\sqrt{2}}{n+1} - \frac{1}{2n^2} \le I_n \le \frac{\sqrt{2}}{n+1}$

Nous savons que $\sqrt{2} - \sqrt{1+t} \le \frac{1}{2}(1-t)$

On multiplie par t^n

On a $t^n\sqrt{2} - t^n\sqrt{1+t} \le \frac{1}{2}t^n(1-t)$ en intégrant sur $[0, 1]$; on a :

$\int_0^1 [t^n\sqrt{2} - t^n\sqrt{1+t}]dt \le \int_0^1 \frac{1}{2}t^n(1-t)\,dt$

$\frac{\sqrt{2}}{n+1}[(t)^{n+1}]_0^1 - I_n \le \frac{1}{2}\frac{1}{n+1}[(t)^{n+1}]_0^1 - \frac{1}{2}\frac{1}{(n+2)}[(t)^{n+2}]_0^1$

$\frac{\sqrt{2}}{n+1} - I_n \le \frac{1}{2}\frac{1}{(n+1)} - \frac{1}{2}\frac{1}{(n+2)} = \frac{1}{2}\frac{1}{(n+1)(n+2)} \le \frac{1}{2n^2}$

$\frac{\sqrt{2}}{n+1} - I_n \le \frac{1}{2n^2}$

$\frac{\sqrt{2}}{n+1} - \frac{1}{2n^2} \le I_n$ or d'après le 3) $I_n \le \frac{\sqrt{2}}{n+1}$

Donc $\frac{\sqrt{2}}{n+1} - \frac{1}{2n^2} \le I_n \le \frac{\sqrt{2}}{n+1}$

En appliquant le théorème des Gendarmes on déduit que

$\lim_{x\to+\infty} I_n = 0$

Exercice n°5

$I_n = \int_n^{n+1} f(x)dx$

a) Montrons que $\forall\, n \ge 4,\ 0 \le I_n \le \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

Nous savons que pour tout réel x au moins égal à 4,

$0 \le f(x) \le \frac{1}{x}$

On intègre sur $[n, n+1]$ on a

$0 \le \int_n^{n+1} f(x)dx \le \int_n^{n+1} \frac{1}{x}dx$

$0 \le I_n \le [\ln x]_n^{n+1}$

$0 \le I_n \le \ln(n+1) - \ln(n)$

$0 \le I_n \le \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

b) En calculant sa limite on a

$0 \le \lim_{n\to+\infty} I_n \le \lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

$0 \le \lim_{n\to+\infty} I_n \le 0$, *donc* $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$

La suite (In) converge.

2) on pose $S_n = I_1 + I_2 + \cdots + I_n$

a) Montrons que $S_n = \int_1^n f(x)dx$

On sait que $I_n = \int_n^{n+1} f(x)dx$

On calcule successivement

$I_1 = \int_1^2 f(x)dx$

$I_2 = \int_2^3 f(x)dx$

.

.

.

$I_n = \int_n^{n+1} f(x)dx$

En faisant la somme membre à membre et en appliquant la relation de Chasles pour les intégrales on a :

$S_n = \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx + \ldots + \int_n^{n+1} f(x)dx$

$= \int_1^{n+1} f(x)dx$

$S_n = \int_1^{n+1} f(x)dx$

b) Calcul de la limite de (Sn)

Nous savons que $0 \le I_n \le \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

On a successivement

$0 \le I_1 \le \ln(1+1) - \ln(1)$

$0 \le I_2 \le \ln(2+1) - \ln(2)$

.

.

.

$0 \le I_n \le \ln(n+1) - \ln(n)$

La somme membre à membre nous donne

$0 \le S_n \le \ln(n+1)$

$0 \leq \lim\limits_{n \to +\infty} S_n \leq \lim\limits_{n \to +\infty} \ln(n+1)$

$\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty$

Exercice n°6

$$I_k = \int_0^1 \frac{x^k}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

Montrons que (I_k) est décroissante

Il suffit d'étudier le signe de $I_{k+1} - I_k$. On a :

$$I_{k+1} - I_k = \int_0^1 \frac{x^{k+1}}{\sqrt{1+x^2}}dx - \int_0^1 \frac{x^k}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^k(x-1)}{\sqrt{1+x^2}}dx \quad \text{or} \quad 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow x-1 \leq 0$$

Par conséquent $\int_0^1 \frac{x^k(x-1)}{\sqrt{1+x^2}}dx \leq 0$ donc la suite (I_k) est décroissante.

2) Il suffit de calculer sa dérivée.

$f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ on a : $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

Donc f est la primitive de $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Déduisons I_0.

$I_0 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$

$= [\ln(x + \sqrt{1+x^2})]_0^1 \Rightarrow I_0 = \ln(1+\sqrt{2})$

3) Calcul de I_1.

$I_1 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$

On intègre par changement de variable

On pose $u = 1 + x^2$ $\quad du = 2xdx$

$I_1 = \int_1^2 \frac{du}{2\sqrt{u}}$

$= [\sqrt{u}]_1^2$ donc $I_1 = \sqrt{2} - 1$

4) Démontrons que pour entier $k \geq 2$, on a la relation : $\quad kI_k = \sqrt{2} - (k-1)I_{k-2}$

$$I_k = \int_0^1 \frac{x^k}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

$= \int_0^1 \frac{x^{k-1}x}{\sqrt{1+x^2}}dx$

On intègre par partie

On pose $u = x^{k-1}$ $\quad u' = (k-1)x^{k-2}$

$v' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ $\quad v = \sqrt{1+x^2}$

$I_k = [x^{k-1}\sqrt{1+x^2}]_0^1 - (k-1)\int_0^1 x^{k-2}\sqrt{1+x^2}dx$

$I_k = [x^{k-1}\sqrt{1+x^2}]_0^1 - (k-1)\int_0^1 x^{k-2}\frac{(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}}dx$

$I_k = \sqrt{2} - (k-1)\left[\int_0^1 \frac{x^{k-2}}{\sqrt{1+x^2}}dx + \int_0^1 \frac{x^k}{\sqrt{1+x^2}}dx\right]$

$I_k = \sqrt{2} - (k-1)[I_{k-2} + I_k]$

On trouve après calcul que

$kI_k = \sqrt{2} - (k-1)I_{k-2}$

On déduit les valeurs de I_2 et I_3

$2I_2 = \sqrt{2} - I_0 \Rightarrow I_2 = \frac{1}{2}[\sqrt{2} - I_0]$

$3I_3 = \sqrt{2} - 2I_1 \Rightarrow I_3 = \frac{1}{3}[\sqrt{2} - 2I_1]$

5) Démontrons que $I_k \leq \frac{1}{k+1}$

On peut raisonner par récurrence

$I_0 = \sqrt{2} - 1 \leq \frac{1}{1}$ vraie

Supposons que cela est vraie au rang n c'est-à-dire $I_k \leq \frac{1}{k+1}$

Montrons que cela est aussi vraie au rang $n+1$

$I_{k+1} \leq \frac{1}{k+2}$

D'après l'hypothèse de récurrence $I_k \leq \frac{1}{k+1}$

Or $\frac{1}{k+2} \leq \frac{1}{k+1} \Rightarrow$

$I_{k+1} \leq \frac{1}{k+1}$ donc $\forall$ k on a: $I_k \leq \frac{1}{k+1}$

En passant à la limite on a

$\lim\limits_{k \to +\infty} I_k = 0$

Exercice n°7

$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2x\cos^4x dx$ et $K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\sin^4x\cos^2x dx$

1) Calculons $I + K$ et $I - K$

On a facilement avec les formules trigonométriques

$I + K = \frac{\pi}{32}$ et $I - K = \frac{1}{24}$;

On déduit $I = \frac{\pi}{64} + \frac{1}{48}$ et $K = \frac{\pi}{64} - \frac{1}{48}$

2) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4x\, dx$, $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4x\, dx$

$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2x\cos^2x dx$

a) Calcul de $I - J$ et $I + J + K$

$I - J = 0$ et $I + J + K = \frac{\pi}{2}$

b) $\cos4x = \cos^4x + \sin^4x - 6\sin^2x\cos^2x$

$I + J - 3K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos4x\, dx$

$I + J - 3K = 0$

On déduit $I = J = \frac{3\pi}{16}$ et $K = \frac{\pi}{8}$

Exercice n°8

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^n x dx$$

1) Calcul de W_0

$W_0 = \frac{\pi}{4}$

2) Intégrons par parties $\quad \sin^n x = \sin^{n-1}x\sin x$

$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^{n-1}x\sin x dx$

$u = \sin^{n-1}x \quad \Rightarrow \quad u' = (n-1)\cos x.\sin^{n-2}x$

$v' = \sin x \quad \Rightarrow \quad v = -\cos x$

$W_n = [-\cos x\sin^{n-1}x]_0^{\frac{\pi}{4}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2x\sin^{n-2}x dx$

$W_n = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \sin^2x)\sin^{n-2}x dx$

$= (n-1)[W_{n-2} - W_n]$

$W_n = \frac{n-1}{n}W_{n-2}$

3) $W_4 = \frac{3}{4}W_0 \Rightarrow W_4 = \frac{3\pi}{16}$

1) Calcul de $F(x) = \int_0^x e^{-t}\,\text{sint}\,dt$.

On intègre par parties deux fois

$u = e^{-t} \rightarrow u' = -e^{-t}$

$v' = \text{sint} \rightarrow v = -\text{cost}$

$F(x) = [-e^{-t}\text{cost}]_0^x - \int_0^x e^{-t}\,\text{cost}\,dt$

$u = e^{-t} \rightarrow u' = -e^{-t}$

$v' = \text{cost} \rightarrow v = \text{sint}$

$F(x) = [-e^{-t}\text{cost}]_0^x - [e^{-t}\text{sint}]_0^x - \int_0^x e^{-t}\,\text{sint}\,dt$

$2F(x) = [-e^{-t}\text{cost} - e^{-t}\text{sint}]_0^x$

$F(x) = -\frac{1}{2}e^{-t}[\text{cost} + \text{sint}]_0^x$

$F(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-x}(\cos x + \sin x)$

2) On pose $B_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)\,dt$ avec $f(t) = e^{-t}\text{sint}$

Soit $S_n = B_0 + B_1 + \ldots + B_n$

a) Exprimons Sn en fonction de F

$S_n = \int_0^{\pi} f(t)\,dt + \int_{\pi}^{2\pi} f(t)\,dt + \ldots + \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)\,dt$

$S_n = \int_0^{(n+1)\pi} f(t)\,dt \Rightarrow S_n = F[(n+1)\pi]$

$S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-(n+1)\pi}[\cos(n+1)\pi + \sin(n+1)\pi]$

$S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-(n+1)\pi}(\cos n\pi + \sin n\pi)$

$S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-(n+1)\pi}(-1)^n$

b) Déduisons la limite de Sn

$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{2}$

3) a) Sans calculer donnons le signe de B_k en fonction de la parité de k

Si k est pair $B_k < 0$

Si k est impair $B_k > 0$

b) Calcul de B_0

$B_0 = \int_0^{\pi} f(t)\,dt$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-\pi}(\cos\pi + \sin\pi) \Rightarrow B_0 = \frac{1}{2}(e^{-\pi} + 1)$

$B_k = -\frac{1}{2}e^{-t}[\text{cost} + \text{sint}]_{k\pi}^{(k+1)\pi}$

$= -\frac{1}{2}e^{-(k+1)\pi}[\cos(k+1)\pi + \sin(k+1)\pi] + \frac{1}{2}e^{-k\pi}[\cos k\pi + \sin k\pi]$

$= \frac{1}{2}e^{-(k+1)\pi}[\cos k\pi] + \frac{1}{2}e^{-k\pi}[\cos k\pi]$

$= \frac{1}{2}e^{-(k+1)\pi}(-1)^k + \frac{1}{2}e^{-k\pi}(-1)^k$

$B_k = \frac{1}{2}e^{-k\pi}(-1)^k[e^{-\pi} + 1]$

On a bien $B_k = (-1)^k e^{-k\pi} B_0$

c) Calculer $T_n = |B_0| + |B_1| + \ldots + |B_n|$

$T_n = B_0(e^0 + e^{-\pi} + e^{-2\pi} + \ldots + e^{-n\pi})$

$= B_0 \frac{1 - e^{-(n+1)\pi}}{1 - e^{-\pi}}$ car c'est une progression géométrique.

$\lim_{n\to+\infty} T_n = \frac{B_0}{1 - e^{-\pi}}$

d) On pose $S = \lim_{n\to+\infty} S_n$ *et* $S = \lim_{n\to+\infty} T_n$

Vérifions que $\frac{1}{S} + \frac{1}{T} = \frac{2}{B_0}$

$\frac{1}{S} + \frac{1}{T} = \frac{1}{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\frac{B_0}{1 - e^{-\pi}}}$

$= 2 + \frac{1 - e^{-\pi}}{B_0}$

$= \frac{2B_0 + 1 - e^{-\pi}}{B_0}$

$= \frac{2}{B_0}$

Donc $\frac{1}{S} + \frac{1}{T} = \frac{2}{B_0}$

Exercice n°10

$f(x) = 3^x - 1 - x$

1) Etude des variations de f

$Ef =]-\infty, +\infty[$

La fonction est continue et dérivable sur IR car somme des fonctions continues et dérivables.

Dérivée $f'(x)$ et signe

$f'(x) = 3^x \ln 3 - 1$

signe de $f'(x)$

x	$-\infty$		$-\ln(\ln 3)$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	+		+	
$f(x)$	$+\infty$	↘		↗	0	↗	$+\infty$

2) Démontrons que $\forall x \geq 0$; $1 + x \leq 3^x$

$\forall x \geq 0$, $f(x) \geq 0 \Rightarrow 3^x - 1 - x \geq 0 \Rightarrow 1 + x \leq 3^x$

3) $Un = (1 + \frac{1}{3})(1 + \frac{1}{3^2})\ldots(1 + \frac{1}{3^n})$

a) Montrons que $\frac{U_{n+1}}{U_n} > 1$

$U_{n+1} = (1 + \frac{1}{3})(1 + \frac{1}{3^2})\ldots(1 + \frac{1}{3^n})(1 + \frac{1}{3^{n+1}})$,

$\frac{U_{n+1}}{U_n} = 1 + \frac{1}{3^{n+1}} > 1$ donc $\frac{U_{n+1}}{U_n} > 1$ la suite (Un) est croissante.

b) Démontrons que $\forall n \in IN$, $U_n \leq \sqrt{3}$

$Un = (1 + \frac{1}{3})(1 + \frac{1}{3^2})\ldots(1 + \frac{1}{3^n})$

D'après la question 2) $1 + x \leq 3^x$

On aura :

$1 + \frac{1}{3} \leq 3^{\frac{1}{3}}$

$1 + \frac{1}{3^2} \leq 3^{\frac{1}{3^2}}$

.

.

.

$1 + \frac{1}{3^n} \leq 3^{\frac{1}{3^n}}$

En faisant le produit membre à membre on a

$Un \leq 3^{\frac{1}{3^0} + \frac{1}{3^1} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{3^n}}$

$\leq 3^{\frac{1}{3}\frac{1 - (\frac{1}{3})^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}}}$

$\leq 3^{\frac{1}{2}[1 - (\frac{1}{3})^{n+1}]} \leq 3^{\frac{1}{2}}$

On a finalement $U_n \leq \sqrt{3}$ la suite (Un) est majorée par $\sqrt{3}$

La suite étant croissante et majorée elle converge d'après le théorème de convergence d'une suite

Exercice n°9

1) Calcul de $F(x) = \int_0^x e^{-t}\sin t\,dt$.

On intègre par parties deux fois

$u = e^{-t} \rightarrow u' = -e^{-t}$

$v' = \sin t \rightarrow v = -\cos t$

$F(x) = [-e^{-t}\cos t]_0^x - \int_0^x e^{-t}\cos t\,dt$

$u = e^{-t} \rightarrow u' = -e^{-t}$

$v' = \cos t \rightarrow v = \sin t$

$F(x) = [-e^{-t}\cos t]_0^x - [e^{-t}\sin t]_0^x - \int_0^x e^{-t}\sin t\,dt$

$2F(x) = [-e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t]_0^x$

$F(x) = -\frac{1}{2}e^{-t}[\cos t + \sin t]_0^x$

$F(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-x}(\cos x + \sin x)$

2) On pose $B_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)\,dt$ avec $f(t) = e^{-t}\sin t$

Soit $S_n = B_0 + B_1 + \dots + B_n$

a) Exprimons Sn en fonction de F

$S_n = \int_0^{\pi} f(t)\,dt + \int_{\pi}^{2\pi} f(t)\,dt + \dots + \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)\,dt$

$S_n = \int_0^{(n+1)\pi} f(t)\,dt \Rightarrow S_n = F[(n+1)\pi]$

$S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-(n+1)\pi}[\cos(n+1)\pi + \sin(n+1)\pi]$

$S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-(n+1)\pi}(\cos n\pi + \sin n\pi)$

$S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-(n+1)\pi}(-1)^n$

b) Déduisons la limite de Sn

$\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{1}{2}$

3) a) Sans calculer donnons le signe de B_k en fonction de la parité de k

Si k est pair $B_k < 0$

Si k est impair $B_k > 0$

b) Calcul de B_0

$B_0 = \int_0^{\pi} f(t)\,dt$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-\pi}(\cos\pi + \sin\pi) \Rightarrow B_0 = \frac{1}{2}(e^{-\pi} + 1)$

$B_k = -\frac{1}{2}e^{-t}[\cos t + \sin t]_{k\pi}^{(k+1)\pi}$

$= -\frac{1}{2}e^{-(k+1)\pi}[\cos(k+1)\pi + \sin(k+1)\pi] + \frac{1}{2}e^{-k\pi}[\cos k\pi + \sin k\pi]$

$= \frac{1}{2}e^{-(k+1)\pi}[\cos k\pi] + \frac{1}{2}e^{-k\pi}[\cos k\pi]$

$= \frac{1}{2}e^{-(k+1)\pi}(-1)^k + \frac{1}{2}e^{-k\pi}(-1)^k$

$B_k = \frac{1}{2}e^{-k\pi}(-1)^k[e^{-\pi} + 1]$

On a bien $B_k = (-1)^k e^{-k\pi} B_0$

c) Calculer $T_n = |B_0| + |B_1| + \dots + |B_n|$

$T_n = B_0(e^0 + e^{-\pi} + e^{-2\pi} + \dots + e^{-n\pi})$

$= B_0 \frac{1 - e^{-(n+1)\pi}}{1 - e^{-\pi}}$ car c'est une progression géométrique.

$\lim_{n \to +\infty} T_n = \frac{B_0}{1 - e^{-\pi}}$

d) On pose $S = \lim_{n \to +\infty} S_n$ et $S = \lim_{n \to +\infty} T_n$

Vérifions que $\frac{1}{S} + \frac{1}{T} = \frac{2}{B_0}$

$\frac{1}{S} + \frac{1}{T} = \frac{1}{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\frac{B_0}{1 - e^{-\pi}}}$

$= 2 + \frac{1 - e^{-\pi}}{B_0}$

$= \frac{2B_0 + 1 - e^{-\pi}}{B_0}$

$= \frac{2}{B_0}$

Donc $\frac{1}{S} + \frac{1}{T} = \frac{2}{B_0}$

Exercice n°10

$f(x) = 3^x - 1 - x$

1) Etude des variations de f

$Ef =]-\infty, +\infty[$

La fonction est continue et dérivable sur IR car somme des fonctions continues et dérivables.

Dérivée $f'(x)$ et signe

$f'(x) = 3^x \ln 3 - 1$

signe de $f'(x)$

x	$-\infty$	$-\ln(\ln 3)$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0 $+$		$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	↗	0 ↗	$+\infty$

2) Démontrons que $\forall x \geq 0$; $1 + x \leq 3^x$

$\forall x \geq 0$, $f(x) \geq 0 \Rightarrow 3^x - 1 - x \geq 0 \Rightarrow 1 + x \leq 3^x$

3) $U_n = (1 + \frac{1}{3})(1 + \frac{1}{3^2})\dots(1 + \frac{1}{3^n})$

a) Montrons que $\frac{U_{n+1}}{U_n} > 1$

$U_{n+1} = (1 + \frac{1}{3})(1 + \frac{1}{3^2})\dots(1 + \frac{1}{3^n})(1 + \frac{1}{3^{n+1}})$,

$\frac{U_{n+1}}{U_n} = 1 + \frac{1}{3^{n+1}} > 1$ donc $\frac{U_{n+1}}{U_n} > 1$ la suite (Un) est croissante.

b) Démontrons que $\forall n \in IN$, $U_n \leq \sqrt{3}$

$U_n = (1 + \frac{1}{3})(1 + \frac{1}{3^2})\dots(1 + \frac{1}{3^n})$

D'après la question 2) $1 + x \leq 3^x$

On aura :

$1 + \frac{1}{3} \leq 3^{\frac{1}{3}}$

$1 + \frac{1}{3^2} \leq 3^{\frac{1}{3^2}}$

.

.

.

$1 + \frac{1}{3^n} \leq 3^{\frac{1}{3^n}}$

En faisant le produit membre à membre on a

$U_n \leq 3^{\frac{1}{3^0} + \frac{1}{3^1} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n}}$

$\leq 3^{\frac{1}{3}\frac{1 - (\frac{1}{3})^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}}}$

$\leq 3^{\frac{1}{2}[1 - (\frac{1}{3})^{n+1}]} \leq 3^{\frac{1}{2}}$

On a finalement $U_n \leq \sqrt{3}$ la suite (Un) est majorée par $\sqrt{3}$

La suite étant croissante et majorée elle converge d'après le théorème de convergence d'une suite

x	0	$\frac{\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{4}$		2π
$x + \frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{9\pi}{2}$
h'(x)	+		−		+	
h(x)	↗		↘		↗	

Tableau de variation

x	$-\infty$	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{4}$		2π
h'(x)	+		+		−		+	
h(x)	↗		↗		↘		↗	

c) Calculons $I = \int_0^{\pi} h(x)dx$

$I = \int_0^{\pi} e^{-x}\sin x dx$

On intègre par parties

$u = e^{-x} \rightarrow u' = -e^{-x}$

$v' = \sin x \rightarrow v = -\cos x$

$I = [-e^{-x}\cos x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^{-x}\cos x dx$

$u = e^{-x} \rightarrow u' = -e^{-x}$

$v' = \cos x \rightarrow v = \sin x$

$I = [-e^{-x}\cos x]_0^{\pi} - [e^{-x}\sin x]_0^{\pi} - \int_0^{x} e^{-x}\sin x dx$

$I = [-e^{-x}\cos x]_0^{\pi} - [e^{-x}\sin x]_0^{\pi} - I$

$2I = [-e^{-x}\cos x - e^{-x}\sin x]_0^{\pi}$

Exercice n°11

$f(x) = e^{-x}\sin x$ et $g(x) = -e^{-x}$

On note (x_k, y_k) les coordonnées des points M_k d'intersection de (Cf) et (Cg). Déterminons x_k et y_k.

$e^{-x}\sin x = -e^{-x} \Rightarrow \sin x = -1$ or $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$

$\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_k = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x_k = \pi - \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \quad k \in Z$

$\Rightarrow x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$; $k \in Z$

$y_k = -e^{-(\frac{\pi}{2}+k\pi)}$

$M_k\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\ ;\ -e^{-(\frac{\pi}{2}+k\pi)}\right)$

b) $\forall\ n \in IN$; on pose $S_n = x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ et $T_n = y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_n$

Exprimons S_n et T_n en en fonction de n

$S_n = (n+1)\frac{\pi}{2} + \frac{n(n+1)}{2}\pi$

$S_n = \frac{(n+1)(n+1)}{2}\pi$

$T_n = -e^{-\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1-(e^{-\pi})^{n+1}}{1-e^{-\pi}}\right]$

2)

$\begin{cases} h(x) = 4^x + 2^x - 2, \text{ si } x < 0 \\ h(x) = e^{-x}\sin x,\ x \geq 0 \end{cases}$

a) Etudions la continuité et la dérivabilité de h en $x_0 = 0$

Continuité

$h(o) = 0$

$\lim\limits_{n \to 0^+} h(x) = 0$ et $\lim\limits_{n \to 0^-} h(x) = 0$

h est continue en $x_0 = 0$

Dérivabilité de f en 0

$\lim\limits_{n \to 0^+} \frac{h(x)-h(0)}{x} = 1 \quad \lim\limits_{n \to 0^-} \frac{h(x)-h(0)}{x} = 3\ln 2$

La fonction n'est pas dérivable en 0.

b) Etude des variations de f sur $]-\infty\ ; 2\pi]$

$\lim\limits_{n \to -\infty} h(x) = -2$, $h(2\pi) = 0$

Dérivée et signe de h'(x)

Pour $x < 0$; $h(x) = 4^x + 2^x - 2$

$h'(x) = 4^x\ln 4 + 2^x\ln 2$

h'(x) est positive

X	$-\infty$	0
h'(x)	+	
h(x)	-2 ↗	0

Pour $x \in]0\ ; 2\pi]$; $h(x) = e^{-x}\sin x$

$h'(x) = e^{-x}(\cos x - \sin x)$

Signe de h'(x)

$h'(x) = 0 \Rightarrow \cos x - \sin x = 0$

$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad k \in Z$

comme $x \in]0\ ; 2\pi]$ on a : $x = \frac{\pi}{4}$ et $x = \frac{5\pi}{4}$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	
$x + \frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	[illegible]	
h'(x)	+	−		
h(x)	↗	↘		

Tableau de variation

x	$-\infty$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$
h'(x)	+	+	−	+
h(x)	↗	↗	↘	

c) Calculons $I = \int_0^{\pi} h(x)dx$

$I = \int_0^{\pi} e^{-x}\sin x dx$

On intègre par parties

$u = e^{-x} \rightarrow u' = -e^{-x}$

$v' = \sin x \rightarrow v = -\cos x$

$I = [-e^{-x}\cos x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^{-x}\cos x dx$

$u = e^{-x} \rightarrow u' = -e^{-x}$

$v' = \cos x \rightarrow v = \sin x$

$I = [-e^{-x}\cos x]_0^{\pi} - [e^{-x}\sin x]_0^{\pi} - \int_0^{x} e^{-x}\sin x dx$

$I = [-e^{-x}\cos x]_0^{\pi} - [e^{-x}\sin x]_0^{\pi} - I$

$2I = [-e^{-x}\cos x - e^{-x}\sin x]_0^{\pi}$

$I = -\frac{1}{2}e^{-x}[\cos x + \sin x]_0^{\pi}$

$I = -\frac{1}{2}e^{-\pi}[\cos\pi + \sin\pi] - \frac{1}{2}e^{0}[\cos 0 + \sin 0]$

$I = \frac{1}{2}e^{-\pi} - \frac{1}{2} \Rightarrow I = \frac{1}{2}(e^{-\pi} - 1)$

I est l'aire du domaine limité par les droites $x = 0$, $x = \pi$ et la courbe de la fonction h.

Exercice n°12

$U_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^n x}{\cos^2 x} dx$

1) Calculons U_0 U_1 et U_2

$U_0 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx$

$= [\tan x]_0^{\frac{\pi}{4}} \Rightarrow \qquad U_0 = 1$

$U_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$

$= \left[\frac{1}{\cos x}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \Rightarrow \qquad U_1 = \sqrt{2} - 1$

$U_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx$

$= U_0 - \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx \Rightarrow \qquad U_2 = 1 - \frac{\pi}{4}$

2) a) Montrons que la suite est décroissante et posit

$U_{n+1} - U_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^{n+1} x}{\cos^2 x} dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^n x}{\cos^2 x} dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^{n+1} x - \sin^n x}{\cos^2 x} dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^n x(\sin x - 1)}{\cos^2 x} dx < 0$

Exercice n°11

$f(x) = e^{-x}\sin x$ et $g(x) = -e^{-x}$

On note (x_k, y_k) les coordonnées des points M_k d'intersection de (Cf) et (Cg). Déterminons x_k et y_k.

$e^{-x}\sin x = -e^{-x} \Rightarrow \sin x = -1$ or $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$

$\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_k = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x_k = \pi - \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \quad k \in Z$

$\Rightarrow x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi \ ; \ k \in Z$

$y_k = -e^{-(\frac{\pi}{2} + k\pi)}$

$M_k\left(\frac{\pi}{2} + k\pi \ ; \ -e^{-(\frac{\pi}{2} + k\pi)}\right)$

b) $\forall\ n \in IN$; on pose $S_n = x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_n$ et $T_n = y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_n$

Exprimons S_n et T_n en en fonction de n

$S_n = (n+1)\frac{\pi}{2} + \frac{n(n+1)}{2}\pi$

$S_n = \frac{(n+1)(n+1)}{2}\pi$

$T_n = -e^{-\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1-(e^{-\pi})^{n+1}}{1-e^{-\pi}}\right]$

2)

$\begin{cases} h(x) = 4^x + 2^x - 2, \ si\ x < 0 \\ h(x) = e^{-x}\sin x, \ x \geq 0 \end{cases}$

a) Etudions la continuité et la dérivabilité de h en $x_0 = 0$

Continuité

$h(o) = 0$

$\lim_{n\to 0^+} h(x) = 0$ et $\lim_{n\to 0^-} h(x) = 0$

h est continue en $x_0 = 0$

Dérivabilité de f en 0

$\lim_{n\to 0^+} \frac{h(x)-h(0)}{x} = 1 \quad \lim_{n\to 0^-} \frac{h(x)-h(0)}{x} = 3\ln 2$

La fonction n'est pas dérivable en 0.

b) Etude des variations de f sur $]-\infty\ ; 2\pi]$

$\lim_{n\to -\infty} h(x) = -2$, $h(2\pi) = 0$

Dérivée et signe de h'(x)

Pour $x < 0$; $h(x) = 4^x + 2^x - 2$

$h'(x) = 4^x\ln 4 + 2^x\ln 2$

h'(x) est positive

X	$-\infty$	0
h'(x)	+	
h(x)	-2 ↗	0

Pour $x \in\ ]0\ ; 2\pi]$; $h(x) = e^{-x}\sin x$

$h'(x) = e^{-x}(\cos x - \sin x)$

Signe de h'(x)

$h'(x) = 0 \Rightarrow \cos x - \sin x = 0$

$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad k \in Z$

comme $x \in\ ]0\ ; 2\pi]$ on a : $x = \frac{\pi}{4}$ et $x = \frac{5\pi}{4}$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$
$x + \frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$
h'(x)	+	−	+
h(x)	↗	↘	↗

Tableau de variation

x	$-\infty$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$
h'(x)	+	+	−	+
h(x)	↗	↗	↘	↗

c) Calculons $I = \int_0^{\pi} h(x)dx$

$I = \int_0^{\pi} e^{-x}\sin x dx$

On intègre par parties

$u = e^{-x} \ \to u' = -e^{-x}$

$v' = \sin x \ \to v = -\cos x$

$I = [-e^{-x}\cos x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^{-x}\cos x dx$

$u = e^{-x} \ \to u' = -e^{-x}$

$v' = \cos x \ \to v = \sin x$

$I = [-e^{-x}\cos x]_0^{\pi} - [e^{-x}\sin x]_0^{\pi} - \int_0^{x} e^{-x}\sin x dx$

$I = [-e^{-x}\cos x]_0^{\pi} - [e^{-x}\sin x]_0^{\pi} - I$

$2I = [-e^{-x}\cos x - e^{-x}\sin x]_0^{\pi}$

$I = -\frac{1}{2}e^{-x}[\cos x + \sin x]_0^{\pi}$

$I = -\frac{1}{2}e^{-\pi}[\cos\pi + \sin\pi] - \frac{1}{2}e^{0}[\cos 0 + \sin 0]$

$I = \frac{1}{2}e^{-\pi} - \frac{1}{2} \Rightarrow I = \frac{1}{2}(e^{-\pi} - 1)$

I est l'aire du domaine limité par les droites $x = 0$, $x = \pi$ et la courbe de la fonction h.

Exercice n°12

$U_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^n x}{\cos^2 x} dx$

1) Calculons U_0 U_1 et U_2

$U_0 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx$

$= [\tan x]_0^{\frac{\pi}{4}} \Rightarrow \qquad U_0 = 1$

$U_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$

$= \left[\frac{1}{\cos x}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \Rightarrow \qquad U_1 = \sqrt{2} - 1$

$U_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx$

$= U_0 - \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx \Rightarrow \qquad U_2 = 1 - \frac{\pi}{4}$

2) a) Montrons que la suite est décroissante et posit...

$U_{n+1} - U_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^{n+1} x}{\cos^2 x} dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^n x}{\cos^2 x} dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^{n+1} x - \sin^n x}{\cos^2 x} dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^n x(\sin x - 1)}{\cos^2 x} dx < 0$

$U_{n+1} - U_n < 0$; décroissante

Démontrons qu'elle est positive.

On fera cela par un raisonnement par récurrence.

$U_0 = 1 > 0$ vraie

Supposons que $U_n > 0$

Montrons que cela est aussi vrai au rang n + 1

$$U_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^{n+1}x}{\cos^2 x} dx$$

$\frac{\sin^n x}{\cos^2 x} > 0$ d'après l'hypothèse de récurrence

$\sin x > 0$ car $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$

En faisant le produit membre à membre et en intégrant sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ on a :

$\frac{\sin^{n+1}x}{\cos^2 x} > 0 \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^{n+1}x}{\cos^2 x} dx > 0 \Rightarrow U_{n+1} > 0$

Donc $\forall n \in IN$; $U_n > 0$

b) Montrons que la suite converge.

La suite est décroissante et positive, c'est-à-dire minorée par 0, donc elle converge vers une limite l (D'après le théorème sur la convergence des suites : « toute décroissante et minorée converge »)

3) Démontrons que $0 \le U_n \le \frac{\pi}{2}(\frac{\sqrt{2}}{2})^n$

On sait que $0 \le x \le \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 \le \sin x \le \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{1}{2} \le \cos^2 x \le 1$.

$1 \le \frac{1}{\cos^2 x} \le 2$

$0 \le \sin^n x \le \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$

$1 \le \frac{1}{\cos^2 x} \le 2$

On fait le produit membre à membre on aura :

$0 \le \frac{\sin^n x}{\cos^2 x} \le 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$

Intégrons sur $[0, \frac{\pi}{4}]$

$0 \le \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^n x}{\cos^2 x} dx \le \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n dx$

$0 \le U_n \le 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n [x]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$0 \le U_n \le \frac{\pi}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$

Précisons la limite

Appliquons le théorème des Gendarmes

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = 0$ on a : $0 \le \lim\limits_{n \to +\infty} U_n \le 0$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$ (l= 0)

Exercice n°13

1) Déterminons les réels a et b tels que

$\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n+1} + \frac{b}{n+2}$

On trouve $a = 1$, $b = -1$

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

2) $J_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ et $S_n = J_0 + J_1 + J_2 + \dots + J_n$

Exprimons Sn en fonction de n

$S_n = (\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}) + (\frac{1}{1+1} - \frac{1}{1+2}) + \dots + (\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2})$

$S_n = 1 - \frac{1}{n+2}$

3) Soit $I_n = \int_0^1 2(1 - \sqrt{x})^n dx$, $\forall n \in IN$

a) $x > 0 \Rightarrow \sqrt{x}$ existe donc In existe

b) Montrons en intégrant par parties que $\forall n \in IN$; $I_n = \frac{n}{n+2} I_{n-1}$

$$I_n = \int_0^1 2(1 - \sqrt{x})^n dx$$

$u = 2(1 - \sqrt{x})^n \rightarrow u' = -\frac{n}{\sqrt{x}}(1 - \sqrt{x})^{n-1}$

$v' = 1 \rightarrow v = x$

$I_n = \left[2x(1 - \sqrt{x})^n\right]_0^1 + n\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x}}(1 - \sqrt{x})^{n-1} dx$

$I_n = \left[2x(1 - \sqrt{x})^n\right]_0^1 + n\int_0^1 \sqrt{x}(1 - \sqrt{x})^{n-1} dx$

$I_n = n\int_0^1 (1 - 1 + \sqrt{x})(1 - \sqrt{x})^{n-1} dx$

$I_n = \frac{1}{2}[nI_{n-1} - nI_n]$

$I_n = \frac{n}{n+2} I_{n-1}$

c) Calcul de Io, I_1 et I_2

$Io = \int_0^1 2\,dx \Rightarrow Io = 2$

$I_1 = \frac{1}{2} I_0 \Rightarrow I_1 = 1$ et $I_2 = \frac{2}{3}$

d) Exprimons In en fonction de n

$I_2 = \frac{2}{3} I_1 \Rightarrow I_2 = \frac{2}{3}\frac{1}{2} I_0$

$I_3 = \frac{3}{4}\frac{2}{3}\frac{1}{2} I_0$

.

.

$I_n = \frac{n}{(n+2)} \cdots \frac{3}{4}\frac{2}{3}\frac{1}{2} I_0$

$I_n = \frac{n!}{(n+2)!} I_0$

$I_n = \frac{1}{(n+2)(n+1)} I_0$

4) $T_n = I_0 + I_1 + I_2 + \dots + I_n$.

Exprimons Tn en fonction de n

$Tn = 2 - \frac{2}{n+2}$

Démontrons que

$$\lim_{n \to +\infty} 2\int_0^1 [1 + (1 - \sqrt{x}) + (1 - \sqrt{x})^2 + \dots + (1 - \sqrt{x})^n] dx = 2$$

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 T_n dx = \int_0^1 (2 - \frac{2}{n+2}) dx = 2$$

Donc

$$\lim_{n \to +\infty} 2\int_0^1 [1 + (1 - \sqrt{x}) + (1 - \sqrt{x})^2 + \dots + (1 - \sqrt{x})^n] dx =$$

$U_{n+1} - U_n < 0$; décroissante

Démontrons qu'elle est positive.

On fera cela par un raisonnement par récurrence.

$U_0 = 1 > 0$ vraie

Supposons que $Un > 0$

Montrons que cela est aussi vrai au rang $n + 1$

$$U_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^{n+1}x}{\cos^2 x} dx$$

$\frac{\sin^n x}{\cos^2 x} > 0$ d'après l'hypothèse de récurrence

$\sin x > 0$ car $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$

En faisant le produit membre à membre et en intégrant sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ on a :

$$\frac{\sin^{n+1}x}{\cos^2 x} > 0 \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^{n+1}x}{\cos^2 x} dx > 0 \Rightarrow U_{n+1} > 0$$

Donc $\forall n \in IN$; $Un > 0$

b) Montrons que la suite converge.

La suite est décroissante et positive, c'est-à-dire minorée par 0, donc elle converge vers une limite l (D'après le théorème sur la convergence des suites : « toute décroissante et minorée converge »)

3) Démontrons que $0 \leq U_n \leq \frac{\pi}{2}(\frac{\sqrt{2}}{2})^n$

On sait que $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 \leq \sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\frac{1}{2} \leq \cos^2 x \leq 1$$

$$1 \leq \frac{1}{\cos^2 x} \leq 2$$

$$0 \leq \sin^n x \leq \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$$

$$1 \leq \frac{1}{\cos^2 x} \leq 2$$

On fait le produit membre à membre on aura :

$$0 \leq \frac{\sin^n x}{\cos^2 x} \leq 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$$

Intégrons sur $[0, \frac{\pi}{4}]$

$$0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^n x}{\cos^2 x} dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n dx$$

$$0 \leq U_n \leq 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n [x]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$0 \leq U_n \leq \frac{\pi}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$$

Précisons la limite

Appliquons le théorème des Gendarmes

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = 0 \quad \text{on a : } 0 \leq \lim_{n\to+\infty} U_n \leq 0$$

Donc $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$ $(l = 0)$

Exercice n°13

1) Déterminons les réels a et b tels que

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n+1} + \frac{b}{n+2}$$

On trouve $a = 1$, $b = -1$

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

2) $J_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ et $S_n = J_0 + J_1 + J_2 + \dots + J_n$

Exprimons Sn en fonction de n

$$S_n = \left(\frac{1}{0+1} - \frac{1}{0+2}\right) + \left(\frac{1}{1+1} - \frac{1}{1+2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+2}$$

3) Soit $I_n = \int_0^1 2(1-\sqrt{x})^n dx$, $\forall n \in IN$

a) $x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x}$ existe donc In existe

b) Montrons en intégrant par parties que $\forall n \in IN$; $I_n = \frac{n}{n+2} I_{n-1}$

$$I_n = \int_0^1 2(1-\sqrt{x})^n dx$$

$u = 2(1-\sqrt{x})^n \quad \rightarrow \quad u' = -\frac{n}{\sqrt{x}}(1-\sqrt{x})^{n-1}$

$v' = 1 \quad \rightarrow \quad v = x$

$$I_n = \left[2x(1-\sqrt{x})^n\right]_0^1 + n\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x}}(1-\sqrt{x})^{n-1} dx$$

$$I_n = \left[2x(1-\sqrt{x})^n\right]_0^1 + n\int_0^1 \sqrt{x}(1-\sqrt{x})^{n-1} dx$$

$$I_n = n\int_0^1 (1 - 1 + \sqrt{x})(1-\sqrt{x})^{n-1} dx$$

$$I_n = \frac{1}{2}[nI_{n-1} - nI_n]$$

$$I_n = \frac{n}{n+2} I_{n-1}$$

c) Calcul de Io, I_1 et I_2

$Io = \int_0^1 2\,dx \Rightarrow Io = 2$

$I_1 = \frac{1}{2} I_0 \Rightarrow I_1 = 1$ et $I_2 = \frac{2}{3}$

d) Exprimons In en fonction de n

$I_2 = \frac{2}{3} I_1 \Rightarrow I_2 = \frac{2}{3}\frac{1}{2} I_0$

$I_3 = \frac{3}{4}\frac{2}{3}\frac{1}{2} I_0$

.

.

.

$$I_n = \frac{n}{(n+2)} \cdots \frac{3}{4}\frac{2}{3}\frac{1}{2} I_0$$

$$I_n = \frac{n!}{(n+2)!} I_0$$

$$I_n = \frac{1}{(n+2)(n+1)} I_0$$

4) $T_n = I_0 + I_1 + I_2 + \dots + I_n$.

Exprimons Tn en fonction de n

$Tn = 2 - \frac{2}{n+2}$

Démontrons que

$$\lim_{n\to+\infty} 2\int_0^1 [1 + (1-\sqrt{x}) + (1-\sqrt{x})^2 + \dots + (1-\sqrt{x})^n] dx = 2$$

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 T_n dx = \int_0^1 (2 - \frac{2}{n+2}) dx = 2$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} 2\int_0^1 [1 + (1-\sqrt{x}) + (1-\sqrt{x})^2 + \dots + (1-\sqrt{x})^n] dx =$$

Exercice n°15

1) Montrons que : $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\sin x$

Rappel: $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos\frac{\pi}{2}\sin x - \sin\frac{\pi}{2}\sin x$ or $\cos\frac{\pi}{2} = 0$

d'où $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\sin x$

2) $f(x) = e^x\sin x$

Calcul de la dérivée de f.

$f'(x) = (\cos x + \sin x)e^x$

Résolvons l'équation $f'(x) = 0 \Rightarrow \cos x + \sin x = 0$

$\cos x = -\sin x \Rightarrow \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$

$x = \pm\left(\frac{\pi}{2}+x\right) + 2k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}$

$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}$

$S = \left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

2) on donne $U_n = -\frac{\pi}{2} + n\pi$ et $V_n = f(U_n)$, $\forall n\in\mathbb{N}$

a) Montrons que Un est solution de (1)

On a $[\cos(-\frac{\pi}{2}+n\pi) + \sin(-\frac{\pi}{2}+n\pi)] = 0$

$\Rightarrow \cos(-\frac{\pi}{2}+n\pi) = -\sin(-\frac{\pi}{2}+n\pi)$

Donc Un est solution de (1)

b) Montrons que Un est une suite arithmétique et (Vn) suite géométrique

$U_{n+1} = -\frac{\pi}{2} + (n+1)\pi$

$U_{n+1} = U_n + \pi$ donc (Un) est une suite arithmétique de raison π et premier terme $U_0 = -\frac{\pi}{2}$

$V_n = f(U_n) \Rightarrow V_n = e^{U_n}\sin U_n$

$V_{n+1} = e^{U_{n+1}}\sin U_{n+1}$

$= e^{U_n+\pi}\sin(U_n+\pi)$

$= -e^{\pi}e^{U_n}\sin U_n$

$= -e^{\pi}V_n$

La suite (Vn) est géométrique de raison $-e^{\pi}$ et de premier terme $V_0 = -e^{-\frac{\pi}{2}}$

c) Calcul de $S_n = V_0 + V_1 + \ldots + V_n$

(Vn) étant une suite géométrique on a :

$S_n = V_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

$S_n = -e^{-\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1-(-e^{\pi})^{n+1}}{1-e^{\pi}}\right]$

Exercice n°16 :

Calcul des limites

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x})$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}}[\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}-2)]$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} x^2[\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}-2)$

On fait un changement de variables en posant $t=\frac{1}{x}$

Qd $x\to+\infty$; $t\to 0$ et $x=\frac{1}{t}$

La limite devient :

$\lim\limits_{x\to+0}\frac{1}{t^2}(\sqrt{1+t}+\sqrt{1-t}-2)$

$= \lim\limits_{x\to+0}\frac{1}{t^2}[(1+t)^{\frac{1}{2}}+(1-t)^{\frac{1}{2}}-2)$

$= \lim\limits_{x\to+0}\frac{1}{t^2}[(1+\frac{1}{2}t+\frac{1}{8}t^2)+(1-\frac{1}{2}t+\frac{1}{8}t^2)-2)$

$= \frac{1}{4}$ donc on a :

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}) = \frac{1}{4}$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2(a^{\frac{1}{x}}-a^{\frac{1}{x+1}})$

On sait que $a^x = e^{x\ln a}$ avec $a>0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2(a^{\frac{1}{x}}-a^{\frac{1}{x+1}}) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2(e^{\frac{1}{x}\ln a}-e^{\frac{1}{x+1}\ln a})$

On fait un changement de variables en posant $t=\frac{1}{x}$

Qd $x\to+\infty$; $t\to 0$ et $x=\frac{1}{t}$ et la limite devient

$\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{t^2}(e^{t\ln a}-e^{\frac{t}{t+1}\ln a})$

$= \lim\limits_{x\to0}\frac{1}{t^2}(e^{t\ln a}-e^{t(t+1)^{-1}\ln a})$

$= \lim\limits_{x\to0}\frac{1}{t^2}(e^{t\ln a}-e^{t(t+1)^{-1}\ln a}) =$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{t^2}(e^{t\ln a}-e^{t(1-t)\ln a}) = \lim\limits_{x\to0}\frac{1}{t^2}[1+t\ln a-1-\ldots$

$= \ln a$

D'où

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2(a^{\frac{1}{x}}-a^{\frac{1}{x+1}}) = \ln a$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{(x+a)(x+b)}-x$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} x\sqrt{(1+\frac{a}{x})(1+\frac{b}{x})}-x = \lim\limits_{x\to+\infty} x[\sqrt{(1+\frac{a}{x})(1+\ldots}$

On fait un changement de variables en posant $t=\ldots$

Qd $x\to+\infty$; $t\to 0$ et $x=\frac{1}{t}$ et la limite devient

$\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{t}[\sqrt{(1+at)(1+bt)}-1] = \lim\limits_{x\to0}\frac{1}{t}[(1+at)^{\frac{1}{2}}(1+bt)\ldots$

$= \lim\limits_{x\to0}\frac{1}{t}[(1+\frac{1}{2}at)(1+\frac{1}{2}bt)-1]$

$= \lim\limits_{x\to0}\frac{1}{t}[(1+\frac{1}{2}at+\frac{1}{2}bt+\frac{1}{4}abt^2)-1]$

$= \lim\limits_{x\to0}\frac{1}{t}(\frac{1}{2}at+\frac{1}{2}bt+\frac{1}{4}abt^2) = \frac{a+b}{2}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{(x+a)(x+b)}-x = \frac{a+b}{2}$

Exercice n°15

1) Montrons que : $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$

Rappel : $\cos(a + b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos\frac{\pi}{2}\sin x - \sin\frac{\pi}{2}\sin x$ or $\cos\frac{\pi}{2} = 0$

d'où $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$

2) $f(x) = e^x \sin x$

Calcul de la dérivée de f.

$f'(x) = (\cos x + \sin x)\,e^x$

Résolvons l'équation $f'(x) = 0 \Rightarrow \cos x + \sin x = 0$

$\cos x = -\sin x \Rightarrow \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

$x = \pm\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 2k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}$

$x = -\frac{\pi}{2} + k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}$

$S = \left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

2) on donne $U_n = -\frac{\pi}{2} + n\pi$ et $V_n = f(U_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$

a) Montrons que Un est solution de (1)

On a $[\cos(-\frac{\pi}{2} + n\pi) + \sin(-\frac{\pi}{2} + n\pi)] = 0$

$\Rightarrow \cos(-\frac{\pi}{2} + n\pi) = -\sin(-\frac{\pi}{2} + n\pi)$

Donc Un est solution de (1)

b) Montrons que Un est une suite arithmétique et (Vn) suite géométrique

$U_{n+1} = -\frac{\pi}{2} + (n + 1)\pi$

$U_{n+1} = U_n + \pi$ donc (Un) est une suite arithmétique de raison π et premier terme $U_0 = -\frac{\pi}{2}$

$V_n = f(U_n) \Rightarrow V_n = e^{U_n}\sin U_n$

$V_{n+1} = e^{U_{n+1}}\sin U_{n+1}$

$= e^{U_n+\pi}\sin(U_n + \pi)$

$= -e^{\pi}e^{U_n}\sin U_n$

$= -e^{\pi}V_n$

La suite (Vn) est géométrique de raison $-e^{\pi}$ et de premier terme $V_0 = -e^{-\frac{\pi}{2}}$

c) Calcul de $S_n = V_0 + V_1 + \ldots + V_n$

(Vn) étant une suite géométrique on a :

$S_n = V_0\,\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

$S_n = -e^{-\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1-(-e^{\pi})^{n+1}}{1-e^{\pi}}\right]$

Exercice n°16 :

Calcul des limites

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x})$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}}[\sqrt{1+\frac{1}{x}} + \sqrt{1-\frac{1}{x}} - 2)]$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} x^2[\sqrt{1+\frac{1}{x}} + \sqrt{1-\frac{1}{x}} - 2)$

On fait un changement de variables en posant $t = \frac{1}{x}$

Qd $x \to +\infty$; $t \to 0$ et $x = \frac{1}{t}$

La limite devient :

$\lim\limits_{x\to+0} \frac{1}{t^2}(\sqrt{1+t} + \sqrt{1-t} - 2)$

$= \lim\limits_{x\to+0} \frac{1}{t^2}[(1+t)^{\frac{1}{2}} + (1-t)^{\frac{1}{2}} - 2)$

$= \lim\limits_{x\to+0} \frac{1}{t^2}[(1 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{8}t^2) + (1 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{8}t^2) - 2)$

$= \frac{1}{4}$ donc on a :

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x}) = \frac{1}{4}$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2(a^{\frac{1}{x}} - a^{\frac{1}{x+1}})$

On sait que $a^x = e^{x\ln a}$ avec $a > 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2(a^{\frac{1}{x}} - a^{\frac{1}{x+1}}) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2(e^{\frac{1}{x}\ln a} - e^{\frac{1}{x+1}\ldots}$

On fait un changement de variables en posant $t = \ldots$

Qd $x \to +\infty$; $t \to 0$ et $x = \frac{1}{t}$ et la limite devient

$\lim\limits_{x\to0} \frac{1}{t^2}(e^{t\ln a} - e^{\frac{t}{t+1}\ln a})$

$= \lim\limits_{x\to0} \frac{1}{t^2}(e^{t\ln a} - e^{t(t+1)^{-1}\ln a})$

$= \lim\limits_{x\to0} \frac{1}{t^2}(e^{t\ln a} - e^{t(t+1)^{-1}\ln a}) =$

$\lim\limits_{x\to0} \frac{1}{t^2}(e^{t\ln a} - e^{t(1-t)\ln a}) = \lim\limits_{x\to0} \frac{1}{t^2}[1 + t\ln a - 1 - \ldots$

$= \ln a$

D'où

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2(a^{\frac{1}{x}} - a^{\frac{1}{x+1}}) = \ln a$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{(x+a)(x+b)} - x$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} x\sqrt{(1+\frac{a}{x})(1+\frac{b}{x})} - x = \lim\limits_{x\to+\infty} x[\sqrt{(1+\frac{a}{x})(1+\ldots}$

On fait un changement de variables en posant $t = \ldots$

Qd $x \to +\infty$; $t \to 0$ et $x = \frac{1}{t}$ et la limite devient

$\lim\limits_{x\to0} \frac{1}{t}[\sqrt{(1+at)(1+bt)} - 1] = \lim\limits_{x\to0} \frac{1}{t}[(1+at)^{\frac{1}{2}}(1+bt)\ldots$

$= \lim\limits_{x\to0} \frac{1}{t}[(1 + \frac{1}{2}at)(1 + \frac{1}{2}bt) - 1]$

$= \lim\limits_{x\to0} \frac{1}{t}[(1 + \frac{1}{2}at + \frac{1}{2}bt + \frac{1}{4}abt^2) - 1]$

$= \lim\limits_{x\to0} \frac{1}{t}(\frac{1}{2}at + \frac{1}{2}bt + \frac{1}{4}abt^2) = \frac{a+b}{2}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{(x+a)(x+b)} - x = \frac{a+b}{2}$

4) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x^2-1)(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})}{(\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x})(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x^2-1)(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})}{2(1-x)}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x+1)(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})}{2(1-x)}=-\sqrt{2}$

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}=-\sqrt{2}$

5) $\lim\limits_{x\to7}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}$

On fait le changement de variable

$X=x-7$; qd $x\to7$; $X\to0$ et $x=X+7$

La limite devient :

$=\lim\limits_{X\to0}\dfrac{\sqrt{X+9}-\sqrt[3]{X+27}}{\sqrt[4]{X+16}-2}=$

$\lim\limits_{X\to0}\dfrac{3(1+\frac{X}{9})^{\frac{1}{2}}-3(1+\frac{X}{27})^{\frac{1}{3}}}{2(1+\frac{X}{16})^{\frac{1}{4}}-2}=\lim\limits_{X\to0}\dfrac{3[(1+\frac{X}{9})^{\frac{1}{2}}-1-(1+\frac{X}{27})^{\frac{1}{3}}+1}{2[(1+\frac{X}{16})^{\frac{1}{4}}-1]}$

$\dfrac{3}{2}\lim\limits_{X\to0}\dfrac{\dfrac{(1+\frac{X}{9})^{\frac{1}{2}}-1}{X}-\dfrac{(1+\frac{X}{27})^{\frac{1}{3}}-1}{X}}{\dfrac{(1+\frac{X}{16})^{\frac{1}{4}}-1}{X}}=\dfrac{3}{2}\,\dfrac{\frac{1}{18}-\frac{1}{81}}{\frac{1}{64}}$

$\lim\limits_{x\to7}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}=\dfrac{16}{27}$

6) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt[3]{(10-x)^2}-4}{x-2}$

On fait le changement de variable

$X=x-2$; qd $x\to2$; $X\to0$ et $x=X+2$

La limite devient

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{(8-X)^2}-4}{X}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4(1-\frac{X}{8})^{\frac{2}{3}}-4}{X}$

$=\lim\limits_{X\to0}\dfrac{4}{X}=\lim\limits_{X\to0}4\dfrac{(1-\frac{X}{8})^{\frac{2}{3}}-1}{X}=-\dfrac{1}{3}$

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt[3]{(10-x)^2}-4}{x-2}=-\dfrac{1}{3}$

7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{(x+1)^3}-1}{(x+1)\sqrt[3]{(x+1)^2}-1}=$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^{\frac{3}{2}}-1}{(x+1)^{\frac{5}{3}}-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{(1+x)^{\frac{3}{2}}-1}{x}}{\dfrac{(x+1)^{\frac{5}{3}}-1}{x}}=\dfrac{9}{10}$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{(x+1)^3}-1}{(x+1)\sqrt[3]{(x+1)^2}-1}=\dfrac{9}{10}$

8) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{5}}[(1+x)^{\frac{4}{5}}-(x-1)^{\frac{4}{5}}]=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}x[(1+\frac{1}{x})^{\frac{4}{5}}-(1-\frac{1}{x})^{\frac{4}{5}}]$

On fait un changement de variable en posant

$X=\dfrac{1}{x}$ qd $x\to+\infty$; $X\to0$ et $x=\dfrac{1}{X}$

La limite devient

$\lim\limits_{X\to0}\dfrac{1}{X}[(1+X)^{\frac{4}{5}}-(1-X)^{\frac{4}{5}}]=$

$\lim\limits_{X\to0}\dfrac{(1+X)^{\frac{4}{5}}-1}{X}-\dfrac{(1-X)^{\frac{4}{5}}-1}{X}=\dfrac{8}{5}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{5}}[(1+x)^{\frac{4}{5}}-(x-1)^{\frac{4}{5}}]=\dfrac{8}{5}$

9) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln x-\ln a}{x-a}$

On fait un changement de variable en posant

$X=x-a$, qd $x\to a$; $X\to0$ et $x=X+a$

La limite devient

$\lim\limits_{X\to0}\dfrac{\ln(X+a)-\ln a}{X}=$

$\lim\limits_{X\to0}\dfrac{\ln a(1+\frac{X}{a})-\ln a}{X}=\lim\limits_{X\to0}\dfrac{\ln a+\ln(1+\frac{X}{a})-\ln a}{X}$

$\lim\limits_{X\to0}\dfrac{\ln(1+\frac{X}{a})}{X}=\dfrac{1}{a}$

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln x-\ln a}{x-a}=\dfrac{1}{a}$

4) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x^2-1)(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})}{(\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x})(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x^2-1)(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})}{2(1-x)}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x+1)(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})}{2(1-x)}=-\sqrt{2}$

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}=-\sqrt{2}$

5) $\lim\limits_{x\to7}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}$

On fait le changement de variable

$X=x-7$; qd $x\to7$; $X\to0$ et $x=X+7$

La limite devient :

$=\lim\limits_{X\to0}\dfrac{\sqrt{X+9}-\sqrt[3]{X+27}}{\sqrt[4]{X+16}-2}=$

$\lim\limits_{X\to0}\dfrac{3(1+\frac{X}{9})^{\frac12}-3(1+\frac{X}{27})^{\frac13}}{2(1+\frac{X}{16})^{\frac14}-2}=\lim\limits_{X\to0}\dfrac{3[(1+\frac{X}{9})^{\frac12}-1-(1+\frac{X}{27})^{\frac13}+1]}{2[(1+\frac{X}{16})^{\frac14}-1]}$

$\dfrac32\lim\limits_{X\to0}\dfrac{\dfrac{(1+\frac{X}{9})^{\frac12}-1}{X}-\dfrac{(1+\frac{X}{27})^{\frac13}-1}{X}}{\dfrac{(1+\frac{X}{16})^{\frac14}-1}{X}}=\dfrac32\,\dfrac{\frac{1}{18}-\frac{1}{81}}{\frac{1}{64}}$

$\lim\limits_{x\to7}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}=\dfrac{16}{27}$

6) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt[3]{(10-x)^2}-4}{x-2}$

On fait le changement de variable

$X=x-2$; qd $x\to2$; $X\to0$ et $x=X+2$

La limite devient

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{(8-X)^2}-4}{X}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4(1-\frac{X}{8})^{\frac23}-4}{X}$

$=\lim\limits_{X\to0}\dfrac{4}{X}=\lim\limits_{X\to0}4\,\dfrac{(1-\frac{X}{8})^{\frac23}-1}{X}=-\dfrac13$

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt[3]{(10-x)^2}-4}{x-2}=-\dfrac13$

7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{(x+1)^3}-1}{(x+1)\sqrt[3]{(x+1)^2}-1}=$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^{\frac32}-1}{(x+1)^{\frac53}-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{(1+x)^{\frac32}-1}{x}}{\dfrac{(x+1)^{\frac53}-1}{x}}=\dfrac{9}{10}$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{(x+1)^3}-1}{(x+1)\sqrt[3]{(x+1)^2}-1}=\dfrac{9}{10}$

8) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac15}[(1+x)^{\frac45}-(x-1)^{\frac45}]=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}x[(1+\frac1x)^{\frac45}-(1-\frac1x)^{\frac45}]$

On fait un changement de variable en posant

$X=\dfrac1x$ qd $x\to+\infty$; $X\to0$ et $x=\dfrac1X$

La limite devient

$\lim\limits_{X\to0}\dfrac1X[(1+X)^{\frac45}-(1-X)^{\frac45}]=$

$\lim\limits_{X\to0}\dfrac{(1+X)^{\frac45}-1}{X}-\dfrac{(1-X)^{\frac45}-1}{X}=\dfrac85$

$\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac15}[(1+x)^{\frac45}-(x-1)^{\frac45}]=\dfrac85$

9) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln x-\ln a}{x-a}$

On fait un changement de variable en posant

$X=x-a$, qd $x\to a$; $X\to0$ et $x=X+a$

La limite devient

$\lim\limits_{X\to0}\dfrac{\ln(X+a)-\ln a}{X}=$

$\lim\limits_{X\to0}\dfrac{\ln a(1+\frac{X}{a})-\ln a}{X}=\lim\limits_{X\to0}\dfrac{\ln a+\ln(1+\frac{X}{a})-\ln a}{X}$

$\lim\limits_{X\to0}\dfrac{\ln(1+\frac{X}{a})}{X}=\dfrac1a$

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln x-\ln a}{x-a}=\dfrac1a$

Exercice n°17

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2}xe^{\frac{1}{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ f(x) = 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1) Ensemble de définition
$Ef =]-\infty ; +\infty[$
2) La fonction est continue et dérivable sur IR^* (car produit des fonctions continues et dérivables sur IR^*)
Régardons la continuité et la dérivabilité, en $x_0 = 0$
On a $f(0) = 0$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{2}xe^{\frac{1}{x}}$$

On pose $t = \frac{1}{x}$ qd $x \to 0^-$; $t \to -\infty$

La limite devient

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{2}\frac{1}{t}e^{t} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{2t}e^{t} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2}xe^{\frac{1}{x}} = +\infty$$

f n'est pas continue en $x_0 = 0$
f n'est pas aussi dérivable en 0 regardons la dérivabilité à gauche de 0

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{2}e^{\frac{1}{x}} = 0$$

La fonction n'est continue et dérivable en $x_0 = 0$
3) les variations de f
Dérivée f'

$$f'(x) = \frac{x-1}{2x}e^{\frac{1}{x}}$$

Signe de f'(x)
Le signe dépend de $\frac{x-1}{2x}$ car quelque soit x $e^{\frac{1}{x}} > 0$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f'(x)		+	‖	−	0	+	
f(x)	$-\infty$	↗	0 ‖ $+\infty$	↘	$\frac{1}{2}e$	↗	$+\infty$

Calcul des limites

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty \; ; \; \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

4) Démontrons que la droite $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe au voisinage de $\pm\infty$
Il faut calculer :

$$\lim_{x\to -\infty} [f(x)-y] = \lim_{x\to\pm\infty} [\frac{1}{2}xe^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}]$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} [\frac{1}{2}x(e^{\frac{1}{x}} - 1) - \frac{1}{2}]$$

On pose $t = \frac{1}{x}$ qd $x \to \pm\infty$; $t \to 0^{\pm}$

la limite devient $\lim_{x\to +\infty}$ ...

Donc la droite $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe au voisinage de $\pm\infty$
Donnons sa position par rapport à la courbe
Etude du signe de $f(x) - y$
On a : $f(x) - y = \frac{1}{2}xe^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$
On retrouve aisément :
* pour x inférieur à 0 ; $f(x) - y < 0 \Rightarrow y/(Cf)$
* Pour x supérieur à 0 ; $f(x) - y > 0 \Rightarrow (Cf)/y$

Exercice n°18 :

$f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x^2+1}}$
1) Calcul de la dérivée de la fonction f

$$f'(x) = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}} \Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}}$$

$f(x) = 2f'(x)\sqrt{1+x^2}$ (1)
2) Déduisons que la dérivée seconde f'' vérifie la relation : $4(1+x^2)f''(x) + 4xf'(x) - f(x) = 0$
Il suffit de dériver membre la relation (1). On aura :
$[f(x)]' = [2f'(x)\sqrt{1+x^2}]'$
$f'(x) = 2[f''(x)\sqrt{1+x^2} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}f'(x)]$
$\sqrt{1+x^2}f'(x) = 2[f''(x)(1+x^2) + xf'(x)]$
Or d'après (1) $f(x) = 2f'(x)\sqrt{1+x^2}$
On a : $f(x) = 4f''(x)(1+x^2) + 4xf'(x) \Rightarrow$
$4(1+x^2)f''(x) + 4xf'(x) - f(x) = 0$

Exercice n°19

$h(x) = xe^{\frac{-x}{2}}$
1) Démontrons que $\forall x > 0$ on a : $0 < h(x) < 1$
On étudie les variations de h
$Eh =]-\infty ; +\infty[$
$h'(x) = \frac{1}{2}(2-x)e^{-\frac{x}{2}}$

Tableau de variations

x	$-\infty$		2		$+\infty$
h'(x)		+	0	−	
h(x)	$-\infty$	↗	h(2)	↘	0

Limites aux bornes $\lim_{x\to -\infty} h(x) = -\infty$ $\lim_{x\to +\infty} h(x) = 0$
et $h(2) = 2e^{-1}$, $h(0) = 0$ on a bien
$\forall x > 0$; $0 < h(x) < 1$
2) On sait que $0 < h(x) < 1$ on multiplie par e^x (qui est positif donc ne modifie pas l'inégalité)
$0 < h(x) < 1 \Rightarrow 0 < xe^{\frac{-x}{2}} < 1$
$0 < xe^{\frac{x}{2}} < e^x$

Exercice n°17

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2}xe^{\frac{1}{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ f(x) = 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1) Ensemble de définition

$E_f =]-\infty\ ;\ +\infty[$

2) La fonction est continue et dérivable sur IR^* (car produit des fonctions continues et dérivables sur IR^*)

Regardons la continuité et la dérivabilité, en $x_0 = 0$

On a $f(0) = 0$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{2}xe^{\frac{1}{x}}$$

On pose $t = \frac{1}{x}$ qd $x \to 0^-$; $t \to -\infty$

La limite devient

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{2}\frac{1}{t}e^t = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{2t}e^t = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{2}xe^{\frac{1}{x}} = +\infty$$

f n'est pas continue en $x_0 = 0$

f n'est pas aussi dérivable en 0 regardons la dérivabilité à gauche de 0

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{2}e^{\frac{1}{x}} = 0$$

La fonction n'est continue et dérivable en $x_0 = 0$

3) les variations de f

Dérivée f'

$$f'(x) = \frac{x-1}{2x}e^{\frac{1}{x}}$$

Signe de f'(x)

Le signe dépend de $\frac{x-1}{2x}$ car quelque soit x $e^{\frac{1}{x}} > 0$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f'(x)		+	‖	−	0	+	
f(x)	$-\infty$	↗	0 ‖ $+\infty$	↘	$\frac{1}{2}e$	↗	$+\infty$

Calcul des limites

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty\ ;\ \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

4) Démontrons que la droite $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe au voisinage de $\pm\infty$

Il faut calculer :

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \to \pm\infty} [\frac{1}{2}xe^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}]$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} [\frac{1}{2}x(e^{\frac{1}{x}} - 1) - \frac{1}{2}]$$

On pose $t = \frac{1}{x}$ qd $x \to \pm\infty$; $t \to 0^{\pm}$

la limite devient $\lim_{x \to \pm\infty} [\frac{1}{2}\frac{1}{t}(e^t - 1) - \frac{1}{2}] = 0$

Donc la droite $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe au voisinage de $\pm\infty$

Donnons sa position par rapport à la courbe

Etude du signe de $f(x) - y$

On a : $f(x) - y = \frac{1}{2}xe^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

On retrouve aisément :

* pour x inférieur à 0 ; $f(x) - y < 0 \Rightarrow y/(C_f)$
* Pour x supérieur à 0 ; $f(x) - y > 0 \Rightarrow (C_f)/y$

Exercice n°18 :

$$f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x^2 + 1}}$$

1) Calcul de la dérivée de la fonction f

$$f'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{2\sqrt{x + \sqrt{x^2+1}}} \Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2}}}{2\sqrt{x + \sqrt{x^2+1}}}$$

$$f(x) = 2f'(x)\sqrt{1 + x^2} \qquad (1)$$

2) Déduisons que la dérivée seconde f'' vérifie la relation : $4(1 + x^2)f''(x) + 4xf'(x) - f(x) = 0$

Il suffit de dériver membre la relation (1). On aura :

$$[f(x)]' = [2f'(x)\sqrt{1 + x^2}]'$$

$$f'(x) = 2[f''(x)\sqrt{1 + x^2} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}f'(x)]$$

$$\sqrt{1 + x^2}f'(x) = 2[f''(x)(1 + x^2) + xf'(x)]$$

Or d'après (1) $f(x) = 2f'(x)\sqrt{1 + x^2}$

On a : $f(x) = 4f''(x)(1 + x^2) + 4xf'(x) \Rightarrow$

$4(1 + x^2)f''(x) + 4xf'(x) - f(x) = 0$

Exercice n°19

$$h(x) = xe^{\frac{-x}{2}}$$

1) Démontrons que $\forall\ x > 0$ on a : $0 < h(x) < 1$

On étudie les variations de h

$E_h =]-\infty\ ;\ +\infty[$

$$h'(x) = \frac{1}{2}(2 - x)e^{-\frac{x}{2}}$$

Tableau de variations

x	$-\infty$		2		$+\infty$
h'(x)		+	0	−	
h(x)	$-\infty$	↗	h(2)	↘	0

Limites aux bornes $\lim_{x \to -\infty} h(x) = -\infty$ $\lim_{x \to +\infty} h(x) = 0$

et $h(2) = 2e^{-1}$, $h(0) = 0$ on a bien

$\forall\ x > 0$: $0 < h(x) < 1$

2) On sait que $0 < h(x) < 1$ on multiplie par e^x (qui est positif donc ne modifie pas l'inégalité)

$$0 < h(x) < 1 \Rightarrow 0 < xe^{\frac{-x}{2}} < 1$$

$$0 < xe^{\frac{x}{2}} < e^x$$

3) On donne $F(x) = \int^x \frac{e^t}{t}dt$

a) On pose $f(x) = F(x) - \ln x$

Montrons que $f(x) = \int^x \frac{e^t - 1}{t}dt$

On sait que $\ln x = \int^x \frac{1}{t}dt$

Donc $F(x) - \ln x = \int^x \frac{e^t}{t}dt - \int^x \frac{1}{t}dt$

On sait que la somme des intégrales de mêmes bornes est l'intégrale de la somme.

$F(x) - \ln x = \int^x \frac{e^t - 1}{t}dt$ donc $f(x) = \int^x \frac{e^t - 1}{t}dt$

b) Etudions le signe de f.

$f'(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ le signe de $f'(x)$ dépend de $e^x - 1$ car x est positif

$\forall x > 0$; $e^x - 1 \geq 0$ Donc $f'(x)$ est positive

x	0	$+\infty$
f'(x)	+	
f(x)	0 ↗	$+\infty$

c) $\lim_{x \to 0^+} F(x) = -\infty$ $\lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$

Exercice n°20

1) Résoudre l'équation : $Z^2 - (2^{\theta+1}\cos\theta)Z + 2^{2\theta} = 0$

On calcule $\Delta = b^2 - 4ac$ avec $a = 1, b = 2^{\theta+1}\cos\theta)$ et $c = 2^{2\theta}$

$\Delta = i^2 2^\theta \sin\theta$

On a $Z_1 = 2^\theta(\cos\theta + i\sin\theta)$ et

$Z_2 = 2^\theta(\cos\theta - i\sin\theta)$ avec $\theta \in [0, \pi]$

$S = \{ Z_1 ; Z_2 \}$

2) On donne $Z_A = 2^\theta(\cos\theta + i\sin\theta)$

$Z_B = 2^\theta(\cos\theta - i\sin\theta)$ les affixes des points A et B respectivement.

Déterminons θ pour que le triangle OAB soit équilatéral

On aura $OA = OB = AB$

$AB = 2^{\theta+1}\sin\theta$ $OA = OB = 2^\theta$

$AB = OA \Rightarrow 2^{\theta+1}\sin\theta = 2^\theta \Rightarrow 2\sin\theta = 1$

$\begin{cases} \theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \theta = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$ $k \in Z$

Exercice n°21 :

1) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes

$Z^8 - 2(1 + 2i\sqrt{3})Z^4 - 2(1 + i\sqrt{3}) = 0$

On fait un changement de variable en posant $X = Z^4$ et l'équation devient :

$X^2 - 2(1 + 2i\sqrt{3})X - 2(1 + i\sqrt{3}) = 0$

On trouve les racines de cette équation ; ensuite les racines quatrièmes de chaque racine.

Puis on les représente dans le plan complexe .

Exercice n°22 :

$f(z) = \frac{2Z}{Z^2 - 1}$ Avec $z \neq 1$

1) Montrons que $f(e^{i\theta})$ est imaginaire pur

$f(e^{i\theta}) = \frac{2e^{i\theta}}{(e^{i\theta})^2 - 1}$

$= \frac{2e^{i\theta}}{e^{i\theta}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})}$

$= \frac{2}{2i\sin\theta}$

$= -\frac{1}{\sin\theta}i$

$f(e^{i\theta})$ est imaginaire pur

2) Montrons que $\forall z \neq 1$ $f(z) = \frac{2Z(\bar{Z}^2 - 1)}{|Z^2 - 1|}$

On sait que $f(z) = \frac{2Z}{Z^2 - 1}$ on multiplie par le complexe conjugué du dénominateur

$f(z) = \frac{2z(\bar{z}^2 - 1)}{(Z^2 - 1)(\bar{z}^2 - 1)}$ Rappel $z\bar{z} = |z|^2$ on a donc :

$f(z) = \frac{2Z(\bar{Z}^2 - 1)}{|Z^2 - 1|}$

3) On pose $Z = X + iY$ et $z = x + iy$ et

$Z = 2Z(\bar{z}^2 - 1)$

Déterminons X et Y en fonction de x et y

On a :

$X + iY = 2(x^3 + xy^2 - x) + 2i(y^3 + y + yx^2)$

On a : $X = 2x(x^2 + y^2 - 1)$

$Y = 2y(y^2 + x^2 + 1)$

4) Déterminons l'ensemble des points M d'affixe z tels que f(z) soit imaginaire pur

f(z) est imaginaire pur si sa partie réelle est nulle.

On a : $f(z) = \frac{X + iY}{|Z^2 - 1|}$

$= \frac{X}{|Z^2 - 1|} + i\frac{Y}{|Z^2 - 1|}$

$\frac{X}{|Z^2 - 1|} = 0 \Rightarrow 2x(x^2 + y^2 - 1) = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 1 = 0$. (Γ) est le cercle trigonométrique.

5) Résolvons l'équation $f(z) = \frac{1}{2}i$

$f(z) = \frac{1}{2}i \Rightarrow \frac{2Z}{Z^2 - 1} = \frac{1}{2}i \Rightarrow iz^2 - i = 4z \Rightarrow$

$iz^2 - 4z - i = 0$

On calcule

$\Delta = 3$

$z_1 = -(2 + \sqrt{3})i$; $z_2 = -(2 - \sqrt{3})i$

$S = \{z_1 ; z_2\}$

La Photocopie tue le livre

Exercice n°24

$Z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$ et $Z_2 = 1 - i$

1) Calcul de du module et l'argument de $Z = \frac{Z_1}{Z_2}$

Module $|Z| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ on a $|z_1| = \sqrt{2}$ et $|z_2| = \sqrt{2}$

$|Z| = 1$

$\arg Z = \arg Z_1 - \arg Z_2 \Rightarrow \arg Z = \frac{\pi}{12}\,[2\pi]$

Donnons sa forme algébrique :

$Z = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

Forme trigonométrique

$Z = \cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}$

Par identification on retrouve

$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ et $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

2) Résolvons l'équation :

$(\sqrt{6} - \sqrt{2})\cos x + (\sqrt{6} + \sqrt{2})\sin x = 2$

$4\cos\frac{\pi}{12}\cos x + 4\sin\frac{\pi}{12}\sin x = 2$

$\cos\frac{\pi}{12}\cos x + \sin\frac{\pi}{12}\sin x = \frac{1}{2}$

$\cos(\frac{\pi}{12} - x) = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ x = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi \end{cases} k \in \mathbb{Z}$

2) U = - 3 + 3i

a) Calcul du module et l'argument de U

$|U| = 3\sqrt{2}$; $\arg U = \frac{2\pi}{3}\,[2\pi]$

b) Déterminons le nombre complexe

$U.Z = \cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}$

$Z = (\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4})(-3 + 3i)$

Exercice n°32

1) $z_M = e^{it} \to Z_M = [1; t]$

$Z_A = 1 \to Z_A = [1; 0]$

$Z_B = -1 \to Z_B = [1; \pi]$

$Z_Q = Z^2 = e^{2it} \to Z_Q = [1; 2t]$

$Z_N = \frac{1}{t} = e^{-it} \to [1; -t]$

Comme tous les modules sont égaux, alors les points $\mathbb{C}$ au cercle de centre O et rayon 1.

Equation cartésienne (C) : $x^2 + y^2 - 1 = 0$

2) $Z_S = Z^2 + Z + \frac{1}{Z}$

a) Montrons que $\overrightarrow{BS} = 2\cos t\overrightarrow{BM}$

$= Z_S - Z_B$

$= e^{2it} + e^{it} + e^{-it} + 1$

Rappel $= e^{it} + e^{-it} = 2\cos t$ (F. Euler)

$= e^{2it} + 1 + 2\cos t$

$= e^{it}(e^{it} + e^{-it}) + 2\cos t$

$= e^{it}.2\cos t + 2\cos t$

$= 2\cos t(e^{it} + 1)$

$Z_M - Z_B$

$= 2\cos t\overrightarrow{BM}$

On a $\overrightarrow{BS} = 2\cos t\overrightarrow{BM}$

b) On sait que $S(x(t); y(t))$; $B(-1; 0)$

$M(\cos t; \sin t)$

On a $\overrightarrow{BS}\begin{pmatrix} x(t) + 1 \\ y(t) \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} \cos t + 1 \\ \sin t \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BS} = 2\cos t\overrightarrow{BM} \to \begin{pmatrix} x(t) + 1 \\ y(t) \end{pmatrix} = 2\cos t\begin{pmatrix} \cos t + 1 \\ \sin t \end{pmatrix}$

$\begin{cases} x(t) + 1 = 2\cos t + 2\cos t \\ y(t) = 2\cos t\sin t \end{cases}$

$\Rightarrow S: \begin{cases} x(t) = 2\cos^2 t + 2\cos t - 1 \\ y(t) = \sin 2t \end{cases}$

3) Etude (Γ)

Ensemble de définition : $]-\infty; +\infty[$

Périodicité :

$T_1 = 2\pi$; $T_2 = \pi$

$PPCM(T_1 T_2) = 2\pi$

L'étude se fait sur un intervalle de longueur 2π par exemple $[-\pi; \pi]$

Symétrie :

$x(-t) = x(t)$

$y(-t) = -y(t)$

La courbe admet une symétrie axiale d'axe (ox)

On peut donc étudier sur $[0; \pi]$puis déduire l'autre partie par symétrie axiale $E_t = [0; \pi]$

Calcule de valeur

$x(0) = 3, y(0) = 0$

$x(\pi) = -1$; $y(\pi) = 0$

Dérivée :

$x'(t) = -\sin t^{\cos t} - 2\sin t$

$= -2\sin t(2\cos t + 1)$

Pour $t \in [0; \pi]$ sin >0, le signe dépend de $-(2\cos t + 1)$

Posons $(2\cos t + 1) = 0$

$2\cos t = -1$

$\cos t = -\frac{1}{2} \to t = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi.$

$0 \leq \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \leq \pi$

$-\frac{2}{3} \leq 2k \leq 1 - \frac{2}{3}$

$-\frac{1}{3} \leq k \leq \frac{1}{6}$

$k = 0; t = \frac{2\pi}{3}$

X	0	$\frac{2\pi}{3}$	π
$2\cos t + 1$	+		−
$x'(t)$	−		+

$y(t) = \sin 2t$; $y'(t) = 2\cos 2t$

$y'(t) = 0 \to \cos 2t = 0 \to 2t = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$t = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$

$0 \leq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \leq \pi$

$0 \leq \pi + 2k\pi \leq 4\pi$

$0 \leq 1 + 2k \leq 4$

$-1 \leq 2k \leq 3$

$-\frac{1}{2} \leq k \leq \frac{3}{2}$

$k = \{0; 1\}$

Exercice n°24

$Z_1 = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $Z_2 = 1 - i$

1) Calcul de du module et l'argument de $Z = \frac{z_1}{z_2}$

Module $|Z| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ on a $|z_1| = \sqrt{2}$ et $|z_2| = \sqrt{2}$

$|Z| = 1$

$\arg Z = \arg Z_1 - \arg Z_2 \Rightarrow \arg Z = \frac{\pi}{12}\,[2\pi]$

Donnons sa forme algébrique :

$Z = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

Forme trigonométrique

$Z = \cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}$

Par identification on retrouve

$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

2) Résolvons l'équation :

$(\sqrt{6}-\sqrt{2})\cos x + (\sqrt{6}+\sqrt{2})\sin x = 2$

$4\cos\frac{\pi}{12}\cos x + 4\sin\frac{\pi}{12}\sin x = 2$

$\cos\frac{\pi}{12}\cos x + \sin\frac{\pi}{12}\sin x = \frac{1}{2}$

$\cos(\frac{\pi}{12} - x) = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ x = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi \end{cases}$ $k \in Z$

2) U = - 3 + 3i

a) Calcul du module et l'argument de U

$|U| = 3\sqrt{2}$; $\arg U = \frac{2\pi}{3}\,[2\pi]$

b) Déterminons le nombre complexe

$U.Z = \cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}$

$Z = (\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4})(-3+3i)$

Exercice n°32

1) $z_M = e^{it} \to Z_M = [1;t]$

$Z_A = 1 \to Z_A = [1;0]$

$Z_B = -1 \to Z_B = [1;\pi]$

$Z_Q = Z^2 = e^{2it} \to Z_Q = [1;2t]$

$Z_N = \frac{1}{t} = e^{-it} \to [1;-t]$

Comme tous les modules sont égaux, alors les points ℂ au cercle de centre O et rayon 1.

Equation cartésienne (C) : $x^2 + y^2 - 1 = 0$

2) $Z_S = Z^2 + Z + \frac{1}{Z}$

a) Montrons que $\overrightarrow{BS} = 2\cos t\overrightarrow{BM}$

$= Z_S - Z_B$

$= e^{2it} + e^{it} + e^{-it} + 1$

Rappel $= e^{it} + e^{-it} = 2\cos t$ (F. Euler)

$= e^{2it} + 1 + 2\cos t$

$= e^{it}(e^{it} + e^{-it}) + 2\cos t$

$= e^{it}.2\cos t + 2\cos t$

$= 2\cos t(e^{it} + 1)$

$Z_M - Z_B$

$= 2\cos t\overrightarrow{BM}$

On a $\overrightarrow{BS} = 2\cos t\overrightarrow{BM}$

b) On sait que $S(x(t);y(t))$; $B(-1;0)$

$M(\cos t;\sin t)$

On a $\overrightarrow{BS}\begin{pmatrix} x(t)+1 \\ y(t) \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} \cos t + 1 \\ \sin t \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BS} = 2\cos t\overrightarrow{BM}$; $\begin{pmatrix} x(t)+1 \\ y(t) \end{pmatrix}$ $2\cos t\begin{pmatrix} \cos t + 1 \\ \sin t \end{pmatrix}$

$\begin{cases} x(t) + 1 = 2\cos^2 t + 2\cos t \\ y(t) = 2\cos t\sin t \end{cases}$

$\Rightarrow S: \begin{cases} x(t) = 2\cos^2 t + 2\cos t - 1 \\ y(t) = \sin 2t \end{cases}$

3) Etude (Γ)

Ensemble de définition : $]-\infty;+\infty[$

Périodicité :

$T_1 = 2\pi$; $T_2 = \pi$

$PPCM(T_1T_2) = 2\pi$

L'étude se fait sur un intervalle de longueur 2π par exemple $[-\pi;\pi]$

Symétrie :

$x(-t) = x(t)$

$y(-t) = -y(t)$

La courbe admet une symétrie axiale d'axe (ox)

On peut donc étudier sur $[0;\pi]$puis déduire l'autre partie par symétrie axiale $E_t = [0;\pi]$

Calcule de valeur

$x(0) = 3, y(0) = 0$

$x(\pi) = -1$; $y(\pi) = 0$

Dérivée :

$x'(t) = -\sin t^{\cos t} - 2\sin t$

$= -2\sin t(2\cos t + 1)$

Pour $t \in [0;\pi]$ sin >0, le signe dépend de $-(2\cos t + 1)$

Posons $(2\cos t + 1) = 0$

$2\cos t = -1$

$\cos t = -\frac{1}{2} \to t = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi.$

$0 \leq \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \leq \pi$

$-\frac{2}{3} \leq 2k \leq 1 - \frac{2}{3}$

$-\frac{1}{3} \leq k \leq \frac{1}{6}$

$k = 0; t = \frac{2\pi}{3}$

X	0	$\frac{2\pi}{3}$	π
2cost + 1	+		−
x'(t)	−		+

$y(t) = \sin 2t$; $y'(t) = 2\cos 2t$

$y'(t) = 0 \to \cos 2t = 0 \to 2t = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$t = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$

$0 \leq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \leq \pi$

$0 \leq \pi + 2k\pi \leq 4\pi$

$0 \leq 1 + 2k \leq 4$

$-1 \leq 2k \leq 3$

$-\frac{1}{2} \leq k \leq \frac{3}{2}$

$k = \{0;1\}$

$k = 0;\quad t = \frac{3\pi}{4}$

t	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
2t	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π
cos2t	+	−	+	
y'(t)	+	−	+	

Tableau de variation

T	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
x'(t)	0	−	$-2-\sqrt{2}$	−	0	+	$2+\sqrt{2}$	+	
x(t)	3		$\sqrt{2}$	↘	$-\frac{3}{2}$	↗	$-\sqrt{2}$	↗	−1
y'(t)	2	+	0	−	−1	−	0	+	2
y(t)	0	↗	1	↘	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	↘	−1	↗	0
$\frac{y'(t)}{x'(t)}$	∞		0		∞		0		∞

Exercice n°33 :

1°/ $R_{(\Omega;\frac{\pi}{4})}(A) = D$

a) Caractérisons Ω

$$R_{(\Omega;\frac{\pi}{4})}(A) = D \Rightarrow \begin{cases} \Omega D = \Omega A \\ (\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega D}) = \frac{\pi}{4}[2\pi] \end{cases}$$

ΩD=ΩA→Ω∈ à la médiatrice de [AD]

$(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega D}) = \frac{\pi}{4}[2\pi] \Leftrightarrow \Omega \in$ à l'arc capable sommet Ω et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

Ω=Méd. [AD]∩arc $\frac{\pi}{4}$

b) caractérisons : $g = r(\Omega, \frac{\pi}{4}) \circ (A, \frac{3\pi}{4})$.

Soit $R_{(\Omega,\frac{\pi}{4})=S_\Delta OS_{\Omega A}} \to (\Delta) \cap (\Omega A) = \{\Omega\}$

$(\overline{\Omega A};\Delta) = \frac{\pi}{8}[2\pi] \to$ Donc $(\Delta) = (\Omega K)$

$R_{(A;\frac{3\pi}{8})} = S_{\Omega A} OS'_{\Delta'} \to (\Omega) \cap (\Delta') = \{A\}$

$(\overline{\Delta', \Omega A}) = \frac{3\pi}{8}[2\pi]$

Donc $(\Delta') = (AK)$

Alors

$g = S_\Delta OS_{\Omega A} OS_{\Omega A} OS_{\Delta'}$
$= S_\Delta OS_{\Delta'}$ or $S_\Delta OS_{\Delta'} = R_{(K;2(\Delta'\Delta))}$

Avec $S_{\Omega K} OS_{AK}$ le centre est K

D'où on a : $R_{(K;\pi)}$ or une rotation d'angle π est une symétrie centrale. Soit $R_{(K;\pi)} = S_K$

2°/ $f(x) = e^x$ et $T = S_{PG} Ot_{\overrightarrow{OD}}$

a) Reconnaissons puis caractérisons T :

T est une symétrie glissée car (PG)//(OD)

Droite : (PG)

Vecteur : $\overrightarrow{OD}$

b) Etudions les variations de f et construisons (Cf)

$f(x) = 2^x$

$f(x)\exists \Leftrightarrow \forall x \in IR \quad E_f =]-\infty; +\infty[$

Dérivée

$f(x) = 2^x$

$f(x) = e^{\ln 2^x}$

$= e^{x\ln 2} \Rightarrow f'(x) = \ln 2 e^{x\ln 2}$

Signe :

$f'(x) > 0 \Rightarrow f'(x)$ ↗

Tableau de variation

X	$-\infty$		$+\infty$
f'(x)		+	
f(x)	0	↗	$+\infty$

Branches infinies

$\lim_{+\infty} f(x) = +\infty$ Possibilité d'une asymptote oblique.

$a = \lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{+\infty} \frac{2^x}{x}$

$a = +\infty$

La courbe (Cf) admet une branche parabolique de direction (oy).

d) Calcul de l'aire limitée par (C'), les droites (K'O') ou (P'O') ; (P'G') et (D'G')

$A = \int_0^1 (f(x) - y)dx$

$= \int_0^1 (e^{x\ln 2} - x)\,dx$

$= \frac{1}{\ln 2}[e^{x\ln 2}]_0^1 - [\frac{x^2}{2}]_0^1 UA$

$= \frac{1}{\ln 2}(e^{\ln 2} - 1) - (\frac{1}{2} - 0)$

$= \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{2}$

$= \frac{\ln e}{\ln 2} - \frac{\ln 2^{\frac{1}{2}}}{\ln 2} \to \log_2^e - \log_2^{1/2} = \log_2 \frac{e}{\sqrt{2}}$

$A = \log_2 \frac{e}{\sqrt{2}}$ U.A

e) Expression analytique de T

$T = S_{\overline{PG}} Ot_{\overline{OD}}$

$M' = S_{\overline{PG}} Ot_{\overline{OD}}(M)$

$= S_{PG}[t_{\overline{OD}}(M)]$

$= S_{PG}(M_1)$ avec $M_1 = t_{\overline{OD}}(M)$

$(PG): y = x$

$\overrightarrow{OD}\binom{1}{1} \quad M_1(x_1; y_1) = t_{\overline{OD}}(M) \quad M(x; y)$

$\to \begin{cases} x_1 = x + 1 \\ y_1 = y + 1 \end{cases}$

$M' = S_{PG}(M_1) \to \begin{cases} x' = y_1 \\ y' = x_1 \end{cases}$

$\to T: \begin{cases} x' = y + 1 \\ y' = x + 1 \end{cases} \quad y = 2^x$

$: y = 2^x$

$T: \begin{cases} x' = y + 1 \\ y' = x + 1 \end{cases} \to \begin{cases} y = x' - 1 \\ x = y' - 1 \end{cases}$

$x' - 1 = 2^{y'-1}$

$\ln(x' - 1) = (y' - 1)\ln 2$

$\ln X = Y\ln 2$

$y = \frac{\ln X}{\ln 2} \to \log_2 X \to h(x) = \log_2 x$

$k = 0; \quad t = \frac{3\pi}{4}$

t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
2t	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
cos2t		+		−		+	
y'(t)		+		−		+	

Tableau de variation

T	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
x'(t)	0	−	$-2-\sqrt{2}$	−	0	+	$2+\sqrt{2}$	+	
x(t)	3	↘	$\sqrt{2}$	↘	$-\frac{3}{2}$	↗	$-\sqrt{2}$	↗	−1
y'(t)	2	+	0	−	−1	−	0	+	2
y(t)	0	↗	1	↘	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	↘	−1	↗	0
$\frac{y'(t)}{x'(t)}$	∞		0		∞		0		∞

Exercice n°33 :

1°/ $R_{(\Omega;\frac{\pi}{4})}(A) = D$

a) Caractérisons Ω

$$R_{(\Omega;\frac{\pi}{4})}(A) = D \Rightarrow \begin{cases} \Omega D = \Omega A \\ \left(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega D}\right) = \frac{\pi}{4}[2\pi] \end{cases}$$

$\Omega D = \Omega A \rightarrow \Omega \in$ à la médiatrice de $[AD]$

$\left(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega D}\right) = \frac{\pi}{4}[2\pi] \Leftrightarrow \Omega \in$ à l'arc capable sommet Ω et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

Ω=Méd. $[AD] \cap$ arc $\frac{\pi}{4}$

b) caractérisons : $g = r(\Omega, \frac{\pi}{4})$ o $(A, \frac{3\pi}{4})$.

Soit $R_{(\Omega;\frac{\pi}{4})} = S_\Delta OS_{\Omega A} \rightarrow (\Delta) \cap (\Omega A) = \{\Omega\}$

$(\overline{\Omega A}; \Delta) = \frac{\pi}{8}[2\pi] \rightarrow$ Donc $(\Delta) = (\Omega K)$

$R_{(A;\frac{3\pi}{8})} = S_{\Omega A} OS'_{\Delta'} \rightarrow (\Omega) \cap (\Delta') = \{A\}$

$(\overline{\Delta', \Omega A}) = \frac{3\pi}{8}[2\pi]$

Donc $(\Delta') = (AK)$

Alors

$g = S_\Delta OS_{\Omega A} OS_{\Omega A} OS_{\Delta'}$

$= S_\Delta OS_{\Delta'}$ or $S_\Delta OS_{\Delta'} = R_{(K;2(\Delta'\Delta))}$

Avec $S_{\Omega K} OS_{AK}$ le centre est K

D'où on a : $R_{(K;\pi)}$ or une rotation d'angle π est une symétrie centrale. Soit $R_{(K;\pi)} = S_K$

2°/ $f(x) = e^x$ et $T = S_{PG} Ot_{\overrightarrow{OD}}$

a) Reconnaissons puis caractérisons T :

T est une symétrie glissée car (PG)//(OD)

Droite : (PG)

Vecteur : $\overrightarrow{OD}$

b) Etudions les variations de f et construisons (Cf)

$f(x) = 2^x$

$f(x) \exists \Leftrightarrow \forall x \in IR \quad E_f =]-\infty; +\infty[$

Dérivée

$f(x) = 2^x$

$f(x) = \ldots \ln x$

$= e^{x\ln 2} \Rightarrow f'(x) = \ln 2 e^{x\ln 2}$

Signe :

$f'(x) > 0 \Rightarrow f'(x)$ ↗

Tableau de variation

X	$-\infty$		$+\infty$
f'(x)		+	
f(x)	0	↗	$+\infty$

Branches infinies

$\lim_{+\infty} f(x) = +\infty$ Possibilité d'une asymptote oblique.

$a = \lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{+\infty} \frac{2^x}{x}$

$a = +\infty$

La courbe (Cf) admet une branche parabolique de direction (oy).

d) Calcul de l'aire limitée par (C'), les droites (K'O') ou (P'O') ; (P'G') et (D'G')

$A = \int_0^1 (f(x) - y)dx$

$= \int_0^1 (e^{x\ln 2} - x)\, dx$

$= \frac{1}{\ln 2}\left[e^{x\ln 2}\right]_0^1 - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 UA$

$= \frac{1}{\ln 2}\left(e^{\ln 2} - 1\right) - \left(\frac{1}{2} - 0\right)$

$= \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{2}$

$= \frac{\ln e}{\ln 2} - \frac{\ln 2^{\frac{1}{2}}}{\ln 2} \rightarrow \log_2^e - \log_2^{1/2} = \log_2 \frac{e}{\sqrt{2}}$

$A = \log_2 \frac{e}{\sqrt{2}}$ U.A

e) Expression analytique de T

$T = S_{\overline{PG}} Ot_{\overline{OD}}$

$M' = S_{\overline{PG}} Ot_{\overline{OD}}(M)$

$= S_{PG}\left[t_{\overline{OD}}(M)\right]$

$= S_{PG}(M_1)$ avec $M_1 = t_{\overline{OD}}(M)$

(PG): y = x

$\overline{OD}\binom{1}{1} \qquad M_1(x_1; y_1) = t_{\overline{OD}}(M) \qquad M(x;y)$

$\rightarrow \begin{cases} x_1 = x + 1 \\ y_1 = y + 1 \end{cases}$

$M' = S_{PG}(M_1) \rightarrow \begin{cases} x' = y_1 \\ y' = x_1 \end{cases}$

$\rightarrow T: \begin{cases} x' = y + 1 \\ y' = x + 1 \end{cases} \qquad y = 2^x$

$: y = 2^x$

$T: \begin{cases} x' = y + 1 \\ y' = x + 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = x' - 1 \\ x = y' - 1 \end{cases}$

$x' - 1 = 2^{y'-1}$

$\ln(x' - 1) = (y' - 1)\ln 2$

$\ln X = Y \ln 2$

$y = \frac{\ln X}{\ln 2} \rightarrow \log_2 X \rightarrow h(x) = \log_2 x$

Exercice n°35 :

$$\begin{cases} x' = \frac{5}{2}x + y + \frac{5}{2} \\ y' = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}y - \frac{5}{4} \end{cases}$$

1) Montrons que f est une bijection de (P) dans (P)
f est une bijection si $\det f \neq 0$

$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{5}{2} & 1 \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$ $\Delta = 2 \neq 0$ f est bijective

2) Expression analytique de f^{-1} réciproque de f

$\begin{cases} 2x' = 5x + 2y + 5 \quad (1) \\ 4y' = -3x + 2y - 5 \ (2) \end{cases}$

$(1) - (2) \to 8x + 10 = 2x' - 4y'$
$4x = x' - 2y' - 5$
$x = \frac{1}{4}x' - \frac{1}{2}y' - \frac{5}{4}$

$3(1) + 5(2) \to 16y - 10 = 6x' + 20y'$
$8y = 3x' + 10y' + 5$
$y = \frac{3}{8}x' + \frac{5}{4}y' + \frac{5}{8}$

$$f^{-1} : \begin{cases} x = \frac{1}{4}x' - \frac{1}{2}y' - \frac{5}{4} \\ y = \frac{3}{8}x' + \frac{5}{8}y' + \frac{5}{8} \end{cases}$$

3) Déterminons l'ensemble des points invariants
$f(M) = M; \quad x = x'; \quad y = y'$

$$\begin{cases} x = \frac{5}{2}x + y + \frac{5}{2} \\ y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}y - \frac{5}{4} \end{cases} \to \begin{cases} x - \frac{5}{2}x \\ y - \frac{1}{2}y \end{cases}$$

Ou encore

$\begin{cases} 2x = 5x + 2y + 5 \\ 4y = -3x + 2y - 5 \end{cases} \to \begin{cases} 2x - 5x - 2y - 5 = 0 \\ 4y - 2y + 3x + 5 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 3x + 2y + 5 = 0 \\ -3x - 2y - 5 = 0 \end{cases}$

$I_m(f)$ est la droite d'équation $3x + 2y + 5 = 0$

4) Démontrons que $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe $\vec{V}(a, b)$

$$\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2}x + y + \frac{5}{2} - x \\ -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}y - \frac{5}{4} - y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{2}x + y + \frac{5}{2} \\ -\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}y - \frac{5}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\left(-\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}y - \frac{5}{4}\right) \\ -\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}y - \frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

$= \begin{pmatrix} -2\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$ avec $\alpha = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}y - \frac{5}{4}$

$= \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{v}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

5) $H(x_H \, y_H)$
$\overrightarrow{MH}$ est colinéaire à $\vec{v}$
$\det(\overrightarrow{MH}, \vec{v}) = 0$

$H \in \mathrm{Inv}(f) \Leftrightarrow 3x_H + 2y_H + 5 = 0 \quad (1)$

$\overrightarrow{MH}\begin{pmatrix} x_H - x_M \\ y_H - y \end{pmatrix} \quad \vec{v}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\det(\overrightarrow{MH}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x_H - x & -2 \\ y_H - y & 1 \end{vmatrix}$

$x_H - x + 2y_H - 2y = 0$

$x_H + 2y_H = x + 2y \ (2)$

$\begin{cases} 3x_H + 2y_H = -5 \quad (1) \\ x_H + 2y_H = x + 2y \ (2) \end{cases}$

$(1) - (2) \to 2x_H = -x - 2y - 5$
$x_H = -\frac{1}{2}x - y - \frac{5}{2}$

$(1) - 3(2) \to -4y_H = -3x - 6y - 5$
$y_H = \frac{3}{4}x + \frac{3}{2}y + \frac{5}{4}$

$$H \begin{cases} x_H = -\frac{1}{2}x - y - \frac{5}{2} \\ y_H = \frac{3}{4}x + \frac{3}{2}y + \frac{5}{4} \end{cases}$$

b) Relation entre $\overrightarrow{HM'}$ et $\overrightarrow{HM}$

$$\overrightarrow{HM'}\begin{pmatrix} x' - x_H \\ y' - y_H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2}x + y + \frac{5}{2} + \frac{1}{2}x + y + \frac{5}{2} \\ -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}y - \frac{5}{4} - \frac{3}{4}x - \frac{3}{2}y - \frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3x + 2y + 5 \\ -\frac{3}{2}x - y - \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{HM}\begin{pmatrix} x' - x_H \\ y' - y_H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \frac{1}{2}x + y + \frac{5}{2} \\ y - \frac{3}{4}x - \frac{3}{2}y - \frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{2}x + y + \frac{5}{2} \\ -\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}y - \frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3x + 2y + 5 \\ -\frac{3}{2}x - y - \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{HM'} = 2\overrightarrow{HM}.$$

6) Déduisons que f est une affinité.
Comme H est la projection de M sur $I_{nv}(f)$ suivant la direction $\vec{v}$ et que $\overrightarrow{HM'} = 2\overrightarrow{HM}$ alors f est une affinité de rapport $k = 2$ de direction $\vec{v}$ et de base $I_{nv}(f)$

Exercice n°36 :

$S(O) = B$ et $S(A) = I$

1°/ Précisons son rapport k et son angle θ

$$\begin{matrix} S(O) = B \\ S(A) = I \end{matrix} \to \begin{cases} k = \frac{IB}{AO} \ (1) \\ (\overrightarrow{AO}; \overrightarrow{IB}) = \theta[2\pi] \quad (2) \end{cases}$$

Rapport :

$k = \frac{IB}{AO}$ or $IB = \frac{BO}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \to k = \frac{\sqrt{2}}{2}$
et $AO = 1$

(2) Angle :
$(\overrightarrow{AO}; \overrightarrow{IB}) = \theta[2\pi]$ or $\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{OI}$
$(\overrightarrow{-OA}; \overrightarrow{OI}) = (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OI}) + \pi[2\pi]$
$= -\frac{\pi}{2} + \pi[2\pi]$
$\to (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OI}) = \theta = \frac{\pi}{2}[2\pi] \to$ Donc $S_{\left(\Omega; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\pi}{2}\right)}$

2°/ Démontrons que $S(B) = C$; $S(I) = K$

Exercice n°35 :

$$\begin{cases} x' = \frac{5}{2}x + y + \frac{5}{2} \\ y' = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}y - \frac{5}{4} \end{cases}$$

1) Montrons que f est une bijection de (P) dans (P)

f est une bijection si $\det f \neq 0$

$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{5}{2} & 1 \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$ $\quad \Delta = 2 \neq 0$ f est bijective

2) Expression analytique de f^{-1} réciproque de f

$\begin{cases} 2x' = 5x + 2y + 5 \quad (1) \\ 4y' = -3x + 2y - 5 \ (2) \end{cases}$

$(1) - (2) \rightarrow 8x + 10 = 2x' - 4y'$

$4x = x' - 2y' - 5$

$x = \frac{1}{4}x' - \frac{1}{2}y' - \frac{5}{4}$

$3(1) + 5(2) \rightarrow 16y - 10 = 6x' + 20y'$

$8y = 3x' + 10y' + 5$

$y = \frac{3}{8}x' + \frac{5}{4}y' + \frac{5}{8}$

$f^{-1} : \begin{cases} x = \frac{1}{4}x' - \frac{1}{2}y' - \frac{5}{4} \\ y = \frac{3}{8}x' + \frac{5}{8}y' + \frac{5}{8} \end{cases}$

3) Déterminons l'ensemble des points invariants

$f(M) = M; \quad x = x'; \quad y = y'$

$\begin{cases} x = \frac{5}{2}x + y + \frac{5}{2} \\ y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}y - \frac{5}{4} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - \frac{5}{2}x \\ y - \frac{1}{2}y \end{cases}$

Ou encore

$\begin{cases} 2x = 5x + 2y + 5 \\ 4y = -3x + 2y - 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x - 5x - 2y - 5 = 0 \\ 4y - 2y + 3x + 5 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 3x + 2y + 5 = 0 \\ -3x - 2y - 5 = 0 \end{cases}$

$I_m(f)$ est la droite d'équation $3x + 2y + 5 = 0$

4) Démontrons que $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe $\vec{V}(a, b)$

$$\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2}x + y + \frac{5}{2} - x \\ -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}y - \frac{5}{4} - y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{2}x + y + \frac{5}{2} \\ -\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}y - \frac{5}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\left(-\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}y - \frac{5}{4}\right) \\ -\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}y - \frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

$= \begin{pmatrix} -2\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$ avec $\alpha = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}y - \frac{5}{4}$

$= \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{v}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

5) $H(x_H \ y_H)$

$\overrightarrow{MH}$ est colinéaire à $\vec{v}$

$\det(\overrightarrow{MH}, \vec{v}) = 0$

$H \in Inv(f) \Leftrightarrow 3x_H + 2y_H + 5 = 0 \quad (1)$

$\overrightarrow{MH}\begin{pmatrix} x_H - x_M \\ y_H - y \end{pmatrix} \quad \vec{v}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\det(\overrightarrow{MH}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x_H - x & -2 \\ y_H - y & 1 \end{vmatrix}$

$x_H - x + 2y_H - 2y = 0$

$x_H + 2y_H = x + 2y \ (2)$

$\begin{cases} 3x_H + 2y_H = -5 \quad (1) \\ x_H + 2y_H = x + 2y \ (2) \end{cases}$

$(1) - (2) \rightarrow 2x_H = -x - 2y - 5$

$x_H = -\frac{1}{2}x - y - \frac{5}{2}$

$(1) - 3(2) \rightarrow -4y_H = -3x - 6y - 5$

$y_H = \frac{3}{4}x + \frac{3}{2}y + \frac{5}{4}$

$H \begin{cases} x_H = -\frac{1}{2}x - y - \frac{5}{2} \\ y_H = \frac{3}{4}x + \frac{3}{2}y + \frac{5}{4} \end{cases}$

b) Relation entre $\overrightarrow{HM'}$ et $\overrightarrow{HM}$

$$\overrightarrow{HM'}\begin{pmatrix} x' - x_H \\ y' - y_H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2}x + y + \frac{5}{2} + \frac{1}{2}x + y + \frac{5}{2} \\ -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}y - \frac{5}{4} - \frac{3}{4}x - \frac{3}{2}y - \frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3x + 2y + 5 \\ -\frac{3}{2}x - y - \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{HM}\begin{pmatrix} x' - x_H \\ y' - y_H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \frac{1}{2}x + y + \frac{5}{2} \\ y - \frac{3}{4}x - \frac{3}{2}y - \frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{2}x + y + \frac{5}{2} \\ -\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}y - \frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3x + 2y + 5 \\ -\frac{3}{2}x - y - \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{HM'} = 2\overrightarrow{HM}.$

6) Déduisons que f est une affinité.

Comme H est la projection de M sur $I_{nv}(f)$ suivant la direction $\vec{v}$ et que $\overrightarrow{HM'} = 2\overrightarrow{HM}$ alors f est une affinité de rapport $k = 2$ de direction $\vec{v}$ et de base $I_{nv}(f)$

Exercice n°36 :

$S(0) = B$ et $S(A) = I$

1°/ Précisons son rapport k et son angle θ

$$\begin{matrix} S(0) = B \\ S(A) = I \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} k = \frac{IB}{AO} \ (1) \\ \left(\overrightarrow{AO}; \overrightarrow{IB}\right) = \theta[2\pi] \quad (2) \end{cases}$$

Rapport :

$k = \frac{IB}{AO}$ or $IB = \frac{BO}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow k = \frac{\sqrt{2}}{2}$

et $AO = 1$

(2) Angle :

$\left(\overrightarrow{AO}; \overrightarrow{IB}\right) = \theta[2\pi]$ or $\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{OI}$

$\left(-\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OI}\right) = \left(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OI}\right) + \pi[2\pi]$

$= -\frac{\pi}{2} + \pi[2\pi]$

$\rightarrow \left(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OI}\right) = \theta = \frac{\pi}{2}[2\pi] \rightarrow$ Donc $S_{\left(\Omega; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\pi}{2}\right)}$

2°/ Démontrons que $S(B) = C$; $S(I) = K$

$S(B) = C$, $S(I) = K \rightarrow \begin{cases} \frac{CK}{BI} = \frac{\sqrt{2}}{2} \ (1) \\ (\overrightarrow{BI}; \overrightarrow{CK}) = \frac{\pi}{2}[2\pi] \ (2) \end{cases}$

$\frac{CK}{BI} = \frac{1/2}{\sqrt{2}/2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$(\overrightarrow{BI}; \overrightarrow{CK}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$

$(\overrightarrow{BI}; -\overrightarrow{BK}) = (\overrightarrow{BI}; \overrightarrow{BK}) + \pi[2\pi]$

$= -\frac{\pi}{2} + \pi[2\pi]$

$\theta = \frac{\pi}{2}[2\pi]$

3°/ On pose $f = SoS$

a) Prouvons que f est une homothétie de rapport $-\frac{1}{2}$ dont le centre est celui de S :

$f = SoS = S_{(\Omega\,;\,k^2;\,2\theta)}$

Rapport. $k^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \rightarrow fs_{(\Omega\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\pi)} = H_{(\Omega\,;\,-\frac{1}{2})}$

Angle : $2\theta = 2.\frac{\pi}{2}[2\pi]$

$2\theta = \pi[2\pi] \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}[2\pi]$

b) Précisons f(0) et f(A) et déduisons une construction du centre r de S

$$f(0) = SoS(0) = S[\underbrace{S(0)}_{B}]$$

$$= S(B) = C \rightarrow f(0) = C$$

$$f(A) = SoS(A) = S[\underbrace{S(A)}_{I}]$$

$$= S(I) = K \rightarrow f(A) = k$$

Construction de Ω :

$f(0) = C \rightarrow \overrightarrow{\Omega C} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{\Omega O} \rightarrow \Omega \in (CO)$

$f(A) = K \rightarrow \overrightarrow{\Omega K} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{\Omega A} \rightarrow \Omega \in (KA)$

Donc $(CO) \cap (KA) = \{\Omega\}$

4°/ Le repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$/$B(\sqrt{2}; 0)$ et $A(0; 1)$

a) L'écriture complexe de S :

$z' = az + b$

$a = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\pi}{2}\right] = \frac{\sqrt{2}}{2}.e^{\frac{\pi}{2}i}$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}i$

$z' = \frac{\sqrt{2}}{2}iz + b$

$z_B = \frac{\sqrt{2}}{2}iz_0 + b \rightarrow b = z_B - \frac{\sqrt{2}}{2}iz_0$

$\rightarrow b = z_B = \sqrt{2}$

$\rightarrow z' = \frac{\sqrt{2}}{2}iz + \sqrt{2}$

b) Déduisons l'application de Ω :

Ω étant le centre $S(\Omega) = \Omega$ alors on a :

$z_\Omega = \frac{\sqrt{2}}{2}iz_\Omega + \sqrt{2}$

$z_\Omega - \frac{\sqrt{2}}{2}iz_\Omega = \sqrt{2}$

$z_\Omega\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2} \rightarrow z_\Omega = \frac{\sqrt{2}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}i}$

$\rightarrow z_\Omega = \frac{\sqrt{2}}{2 - \frac{\sqrt{2}}{2}i} = \frac{2\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}i} = \frac{4\sqrt{2} + 4i}{6} = \frac{2}{3}(\sqrt{2} + i)$

$$z_\Omega = \frac{2}{3}(\sqrt{2} + i)$$

Exercice n° : 44

1) Prouvons que f est un endomorphisme.

Il suffit de montrer que f est linéaire c'est-à-dire $\forall(\lambda_1, \lambda_2) \in IR2$; $\forall(Z_1, Z_2) \in \mathbb{C}^2$.

$f(\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2) = \lambda_1 f(Z_1) + \lambda_2 f(Z_2)$

$f(\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2) = (2x + 3yi)\overline{(\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2)}$

$= (2x + 3yi)(\overline{\lambda_1 Z_1} + \overline{\lambda_2 Z_2})$

$= \lambda_1(2x + 3yi)\overline{Z_1} + \lambda_1(2x + 3yi)\overline{Z_2}$

$= \lambda_1 f(Z_1) + \lambda_1 f(Z_2)$

Donc f est linéaire

Comme f est définie de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$, f est un endomorphisme

2) Matrice de relative à la base $\mathscr{B} = (1, i)$

$f(1) = (2x + 3yi)\overline{1}$

$= (2x)1 + (3y)i$

$f(i) = (2x + 3yi)\overline{i}$

$= (2x + 3yi)(-i)$

$= (3y)1 + (-2x)i$

Donc la matrice est $M = \begin{bmatrix} 2x & 3y \\ 3y & -2x \end{bmatrix}$

3) a) Prouvons que l'équation de (E) est $4x^2 + 9y^2 - 1 = 0$

f est une symétrie vectorielle si et seulement si $M \times M = M_{id}$ on a :

$\begin{bmatrix} 2x & 3y \\ 3y & -2x \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2x & 3y \\ 3y & -2x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Autrement dit

$$\begin{bmatrix} 4x^2 + 9y^2 & 0 \\ 0 & 4x^2 + 9y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Donc $4x^2 + 9y^2 = 1$ d'où l'équation de (E) est $4x^2 + 9y^2 - 1 = 0$

b) Nature et éléments caractéristiques de (E)

L'équation de (E) peut s'écrire

$$\frac{x^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = 1$$

Nature : (E) est une ellipse

Eléments caractéristiques :

Sommets $A(\frac{1}{2}, 0)$ $A'(-\frac{1}{2}, 0)$; $B(0, \frac{1}{3})$; $B'(0, -\frac{1}{3})$

Centre est $O(0, 0)$

Foyers $F(\frac{\sqrt{5}}{6}; 0)$ $F'(-\frac{\sqrt{5}}{6}; 0)$ avec $c^2 = \frac{5}{36}$

Excentricité $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$

Les directrices $(D) : x = \frac{3\sqrt{5}}{10}$ et (D') à $x = -\frac{3\sqrt{5}}{10}$

Exercice n° : 46

Soit f un endomorphisme défini par :

$f(\vec{e_1}) = \vec{e_1}$ $\quad \vec{e_1} = \vec{i} + 2\vec{k}$

$f(\vec{e_2}) = \vec{e_2}$ $\quad \vec{e_2} = \vec{j} - \vec{k}$

$f(\vec{e_3}) = \vec{e_3}$ $\quad \vec{e_3} = -2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$

Déterminons $f(\vec{i})$, $f(\vec{j})$ et $f(\vec{k})$

$$f(\vec{e_1}) = \vec{e_1} \rightarrow f(\vec{e_1}) = \vec{i} + 2\vec{k}$$
$$f(\vec{i} + 2\vec{k}) = \vec{i} + 2\vec{k}$$
$$f(\vec{i}) + f(2\vec{k}) = \vec{i} + 2\vec{k} \quad (1)$$
$$f(\vec{e_2}) = \vec{e_2} \rightarrow f(\vec{e_2}) = \vec{j} - \vec{k}$$
$$f(\vec{j} - \vec{k}) = \vec{j} - \vec{k}$$
$$f(\vec{j}) - f(\vec{k}) = \vec{j} - \vec{k} \quad (2)$$
$$f(\vec{e_3}) = \vec{e_3} \rightarrow f(\vec{e_3}) = -2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$
$$f(-2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) = -2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$
$$-2f(\vec{i}) + f(\vec{j}) + f(\vec{k}) = -2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \quad (3)$$

$$\begin{cases} f(\vec{i}) + f(2\vec{k}) = \vec{i} + 2\vec{k} \quad (1) \\ f(\vec{j}) - f(\vec{k}) = \vec{j} - \vec{k} \quad (2) \\ \times -1 \quad -2f(\vec{i}) + f(\vec{j}) + f(\vec{k}) = -2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \quad (3) \end{cases}$$

$$3f(\vec{i}) = -\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$$
$$f(\vec{i}) = \frac{1}{3}(-\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k})$$
$$f(\vec{i}) = -\frac{1}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k}$$

$$(1)\ f(\vec{i}) + 2f(\vec{k}) = \vec{i} + 2\vec{k}$$
$$2f(\vec{k}) = \vec{i} + 2\vec{k} - f(\vec{i})$$
$$= \vec{i} + 2\vec{k} + = \frac{1}{3}\vec{i} - \frac{2}{3}\vec{j} - \frac{2}{3}\vec{k}$$
$$= \frac{4}{3}\vec{i} + \frac{4}{3}\vec{k} - \frac{2}{3}\vec{j}$$

$$f(\vec{k}) = \frac{1}{2} = \left(\frac{4}{3}\vec{i} + \frac{4}{3}\vec{k} - \frac{2}{3}\vec{j}\right)$$
$$f(\vec{k}) = \frac{1}{3}(2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k})$$
$$f(\vec{j}) - f(\vec{k}) = \vec{j} - \vec{k}$$
$$f(\vec{j}) - f(\vec{k}) = \vec{j} - \vec{k}$$
$$f(\vec{j}) = \vec{j} - \vec{k} + f(\vec{k}) \rightarrow f(\vec{j}) = f(\vec{k}) + \vec{j} - \vec{k}$$
$$f(\vec{j}) = \frac{1}{3}(2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}) + \vec{j} - \vec{k}$$
$$f(\vec{j}) = \frac{1}{3}(2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k})$$

2. Déterminons la matrice de f dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$$f(\vec{i}) = \frac{1}{3}(-\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k})$$

$$f(\vec{j}) = \frac{1}{3}(2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k})$$

$$(\vec{k}) = \frac{1}{3}(2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k})$$

$$M_f = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

3. Vérifions si f est bijectif

Calcul du déterminant

$\Delta = -9 \neq 0$ f est bijectif.

4. Expression analytique

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$f: \begin{cases} x = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z \\ y = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z \\ z = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}y \end{cases}$$

5. L'ensemble des vecteurs invariants.

$f(u) = u'$, $x = x'$ $\ y = y'$ et $z = z'$

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z \\ y = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z \\ z = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -3x = -x + 2y + 2z \\ 3y = 2x + 2y - z \\ 3y = 2x - y + 2z \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x + 2y + 2z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases}$$

Le système se réduit en une équation :

$$2x - y - z = 0$$

L'ensemble des points invariants est un plan

On a

$$2x - y - z = 0 \rightarrow z = 2x - y$$

$$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2x - y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ -y \end{pmatrix}$$

$$x = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\vec{u_1}} + y\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\vec{u_2}}$$

L'ensemble des points invariants est un plan engendré par

$$\vec{u_1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{u_2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Donnons sa base

$B_1(\vec{u_1}, \vec{u_2})$

6. l'ensemble des vecteurs transformés en leurs opposées par f

$$f(\vec{u}) = -\vec{u} \Rightarrow x' = -x; \ \ y' = -y; \ \ z' = -z$$

$$\begin{cases} -x = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z \\ -y = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z \\ -z = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -3x = -x + 2y + 2z \\ -3y = 2x + 2y - z \\ -3z = 2x - y + 2z \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 2y + 2z = 0 \\ 2x + 5y - z = 0 \\ 2x - y + 5z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 & (1) \\ 2x + 5y - z = 0 & (2) \\ 2x - y + 5z = 0 & (3) \end{cases}$$

$(2) - (3) = 6y - 6z = 0$

$y = z \quad (4)$

dans (1) on a $x + 2y = 0 \rightarrow x = -2y$

$$\begin{cases} x = -2y \\ y = z \end{cases}$$

Est une droite vectorielle engendrée par

$$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y \\ y \\ y \end{pmatrix} \rightarrow y\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{u_3}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Base : $B_2(\overrightarrow{u_3})$

7. Montrons que $B_1 \cup B_2$ est une base de IR^3

Calcul du déterminant

$$\det(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$\det(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}) = 6 \neq 0$

$(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ est une base de IR^3

8. Nature de f

$$M_f = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$M_f \times M_f = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$M_f \times M_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ (Matrice identité) $\Rightarrow$ f est une symétrie vectorielle.

Caractéristiques :

Direction : l'ensemble des vecteurs transformés en leurs opposés est la droite engendrée par $\overrightarrow{u_3}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Base : l'ensemble des vecteurs invariant, c'est le plan engendré par les vecteurs

$\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Exercice n° : 50

1)a) Montrons que g est solution de (E_n).

h et g sont dérivables par hypothèse.

On a $g(x) = h(x)\,e^{-x}$

Ce qui signifie que

$g'(x) = h'(x)e^{-x} - h(x)\,e^{-x}$

g est solution de (En) ce qui équivaut à

$g'(x) + g(x) = \frac{x^n}{n!}e^{-x}$

ce qui entraine

$h'(x)e^{-x} - h(x)\,e^{-x} + h(x)\,e^{-x} = \frac{x^n}{n!}e^{-x}$

Donc $h'(x) == \frac{x^n}{n!}$ car $e^{-x} \neq 0$

b) D'après le a), $h'(x) == \frac{x^n}{n!}$

Donc $h(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + K$

Or $h(0) = 0$, donc $K = 0$

Finalement $h(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$

De plus $g(x) = h(x)e^{-x}$

D'où $g(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{-x}$ pour tout x réel

2)a) φ est solution de (En) ona

$\varphi'(x) + \varphi(x) = \frac{x^n}{n!}e^{-x} \quad (1)$

$g'(x) + g(x) = \frac{x^n}{n!}e^{-x} \quad (2)$ car $g \in (E_n)$

(1) – (2) on a $[\varphi'(x) - g'(x)] + [\varphi(x) - g(x)] = 0$ donc

$\varphi - g$ est solution de l'équation $y' + y = 0$ (F)

b) Résolvons (F)

$y' + y = 0$ on a $y = ke^{-x}$.

c) D'après a) et b) on a $(\varphi - g)(x) = ke^{-x}$

Donc $\varphi(x) = g(x) + ke^{-x}$

$\varphi(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{-x} + ke^{-x}$ pour tout r éel x

d) f est solution de (En) en conséquence f est de la forme $f(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{-x} + ke^{-x}$

De plus $f(0) = 0$; par la suite $k = 0$

On en déduit que $f(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{-x}$

Toute Nor... 18/07/...

Exercice n° : 51

(E) : $y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$

1) $y_0 = \lambda x^2 e^{-x}$

y_0 est une solution de (E) si $y''_0 + 2y' + y_0 = 2e^{-x}$

$y_0 = \lambda x^2 e^{-x}$, $y'_0 = \lambda[2xe^{-x} - x^2 e^{-x}]$

$y'_0 \lambda(2x - x^2)e^{-x}$

Calcul de y''_0

$y''_0 = \lambda(x^2 - 4x + 2)e^{-x}$

En remplaçant y_0, y'_0 et y''_0 dans (E).

On trouve $\lambda = 1$

Donc $y_0 = x^2 e^{-x}$

2) Montrons qu' une fonction y est solution de (E).

$Z = y - y_0$ est solution de $y'' + 2y' + y = 0$

$y \in (E) \to y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$ (1)

$y_0 \in (E) \to y''_0 + 2y'_0 + y_0 = 2e^{-x}$ (2)

$(1) - (2) \to y'' - y''_0 + 2(y' - y'_0) + y - y_0 = 0$

$Z'' + 2Z' + Z = 0 \to Z$ est solution de (E_1).

3) Résolvons (E_1).

$y'' + 2y' + y = 0$

Équation caractéristique :

$$r^2 + 2r + 1 = 0 \to (r+1)^2 = 0$$
$$r_1 = r_2 = -1$$
$$Z(C_1 + C_2 x)e^{-x}.$$

On sait que $Z = y - y_0 \to y = Z + y_0$

$$\cancel{y =} (C_1 + C_2 x)e^{-x} + x^2 e^{-x}$$
$$y = (C_1 + C_2 x + x^2)e^{-x}$$

4) Déterminons $f \in (E)$ telle que $f(-1) = 0$
$f'(-1) = 0$

$f(x) = (C_1 + C_2 x + x^2)e^{-x}$

$f(-1) = (C_1 - C_2 + 1)e$

$f(-1) = 0 \to C_1 - C_2 + 1 = 0$ (1)

Calculons $f'(x)$

$f'(x) = (C_2 + 2x - C_1 - C_2 x - x^2)e^{-x}$

$f'(-1) = (2C_2 - C_1 - 3)e$

$f'(-1) = 0 \to 2C_2 - C_1 - 3 = 0$ (2)

Formons le système de (1) et (2)

$$\begin{cases} C_1 - C_2 + 1 = 0 \\ -C_1 + 2C_2 - 3 = 0 \end{cases}$$

Après résolution, on trouve :

$$C_2 = 2 \text{ et } C_1 = 1$$
$$f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$$

5) Les variations de f

$$E_f =]-\infty; +\infty[$$

Limites aux bornes

$$\lim_{-\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{+\infty} f(x) = 0$$

Dérivée et signe de f

$$f'(x) = (1 - x^2)e^{-x}$$

Le signe de f' dépend de $1 - x^2$ car $e^{-x} > 0$ $\forall x \in IR$

Posons $f'(x) = 0 \to 1 - x^2 = 0 \to x = 1$ ou $x = -1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4e^{-1}$	$\searrow$	0

Calcul des images

$f(-1) = 0$; $f(1) = 4e^{-1}$

Exercice n°52

1) Les valeurs que doit prendre X

$X(\Omega) = \{3, 5, 7, 9\}$

2) Donnons la lio de probabilité

On sait $\text{card}\Omega = C_{10}^3 = 120$

$\text{Card}(X = 3) = C_6^3 = 20$

$\text{Card}(X = 5) = C_6^2 x C_4^1 = 60$

$\text{Card}(X = 7) = C_6^1 x C_4^2 = 36$

$\text{Card}(X = 9) = C_4^3 = 4$

On a par définition $P(X = i) = \frac{\text{Card}(X=i)}{\text{Card}\Omega}$

x_i	3	5	7	9
$P(X = i)$	$\frac{5}{30}$	$\frac{15}{30}$	$\frac{9}{30}$	$\frac{1}{30}$

3) Calcul de $E(X)$, $V(X)$ et $\rho(X)$

On applique les formules

$$E(X) = \sum x_i p(X = i)$$
$$V(X) = \sum x_i^2 p(X = i) - (E(X))^2$$
$$\rho(X) = \sqrt{V(X)}$$

4) Calcul de la probabilité tel que la somme des nombres soit inferieur à 7

$P(X < 7) = p(X = 3) + p(X = 5)$

5) On repète 4 fois, calcul de la probabilité pour que le nombre 7 sorte 2 fois exactement.

Il faut utiliser la loi binomiale

$n = 4$, $k = 2$, $p = p(X = 7)$ et $q = 1 - p$

$P = C_4^2 p^2 q^2$

Exercice n°53

Partie A

1) Calcul de $P(G_1)$, $P(G_2/G_1)$ et $P(G_2/P_1)$.

Elle a autant de chance de gagner que de perdre une partie. Donc pour la première partie on a :

$P(G1) = P(P1) = \frac{1}{2}$

$P(G_2/G_1) = 0,6$ et $P(G_2/P_1) = 1 - P(P_2/P_1)$
$= 0,3$

$P(G_2/P_1) = 1 - P(G_2/G_1) = 0,4$

2) Calcul de la probabilité de gagner la deuxième pa

$P(G_2)$

Or G_2 : Isabelle gagne la deuxième partie.

Elle gagne la première partie et la gagne aussi la deuxième partie ou elle perd la première partie et gagne la deuxième

Donc $G2 = G_1 \cap G_2$ ou bien $P_1 \cap G_2$.

$P(G_2) = P(G_1 \cap G_2) + P(P_1 \cap G_2)$

Or $P(G_1 \cap G_2) = P(G_1)P(G_2/G_1)$ et
$P(P_1 \cap G_2) = P(P_1)P(G_2/P_1)$

$P(G_2) = P(G_1)P(G_2/G_1) + P(P_1)P(G_2/P_1)$

D'où $P(G_2) = 0,45$

Partie B

On pose, pour tout n entier naturel non nul

$X_n = P(G_n)$ et $Y_n = P(P_n)$

a) Calculons $P(P_{n+1}/G_n)$ et $P(G_{n+1}/P_n)$

$P(P_{n+1}/G_n) = 0{,}4$

et $P(G_{n+1}/P_n) = 0{,}3$

b) Montrons que quelque soit un entier naturel n

on a : $\begin{cases} X_{n+1} = 0{,}6X_n + 0{,}3Y_n \\ Y_{n+1} = 0{,}4X_n + 0{,}7Y_n \end{cases}$

Nous savons que $X_{n+1} = P(G_{n+1})$ et $Y_{n+1} = P(P_{n+1})$

$P(G_{n+1}) = P(G_n)P(G_{n+1}/G_n) + P(P_n)P(G_{n+1}/P_n)$

$X_{n+1} = 0{,}6X_n + 0{,}3Y_n$ (1)

$P(P_{n+1}) = P(P_n)P(P_{n+1}/P_n) + P(G_n)P(G_{n+1}/G_n)$

$Y_{n+1} = 0{,}4X_n + 0{,}7Y_n$ (2)

(1) et (2) on a : $\begin{cases} X_{n+1} = 0{,}6X_n + 0{,}3Y_n \\ Y_{n+1} = 0{,}4X_n + 0{,}7Y_n \end{cases}$

3) Pour tout entier naturel,

On pose $V_n = X_n + Y_n$ et $W_n = 4X_n - 3Y_n$

a) Donnons la nature de la suite (V_n)

On compare V_{n+1} et V_n

$V_{n+1} = X_{n+1} + Y_{n+1}$

$= 0{,}6X_n + 0{,}3Y_n + 0{,}4X_n + 0{,}7Y_n$

$V_{n+1} = V_n$, la suite (V_n) est constante

b) Montrons que la suite (W_n) est géométrique

$W_{n+1} = 4X_{n+1} - 3Y_{n+1}$

$= 4(0{,}6X_n + 0{,}3Y_n) - 3(0{,}4X_n + 0{,}7Y_n)$

$= 0{,}3(4X_n - 3Y_n)$

$W_{n+1} = 0{,}3\, W_n$, la suite (Wn) est une suite géométrique de raison 0,3 et de premier terme

$W_1 = 4X_1 - 3Y_1 \Rightarrow W_1 = \frac{1}{2}$

Le terme général de la suite est $W_n = (0{,}3)^{n-1}W_1$

$Wn = = \frac{1}{2}(0{,}3)^{n-1}$

c) Calcul de la limite de (W_n)

$$\lim_{\infty} W_n = 0$$

d) Déduisons les expressions de Xn et Yn en fonction de n

On sait que $V_n = X_n + Y_n$ (1)

$W_n = 4X_n - 3Y_n$ (2)

3(1) + (2) on a : $7X_n = 3V_n + W_n$

$X_n = \frac{1}{7}(3V_n + W_n)$

4(1) – (2) on a : $7Y_n = 4V_n - W_n$

$Yn = \frac{1}{7}(4V_n - W_n)$

En fonction de n

$$X_n = \frac{1}{7}[3 + \frac{1}{2}(0{,}3)^{n-1}]$$

$$Y_n = \frac{1}{7}[4 - \frac{1}{2}(0{,}3)^{n-1}]$$

Calcul des limites

$$\lim_{\infty} X_n = \frac{3}{7} \text{ et } \lim_{\infty} Y_n = \frac{4}{7}$$

Exercice n°55

$\forall n \in IN,\ V_{n+2} + V_{n+1} - 6V_n = 0$

$k^2 + k - 6 = 0$

On trouve $k = 2$ ou $k = -3$

$Vn = \lambda 2^n + \mu(-3)^n$

$V_0 = 1$ et $V_1 = 2$ ce qui donne que $\lambda = 1$; $\mu = 0$ donc

$V_n = 2^n$ c'est une suite géométrique de raison $q = 2$

1)a) Montrons par récurrence que

$\forall n \in IN^*,\ V_n = 5^{n-1} V_1[6]$.

$n = 1$; $V_1 = V_1[6]$ vraie

Supposons que la relation est vraie au rang k c'est-à-dire $V_k = 5^{k-1} V_1[6]$.

Montrons qu'il est aussi vraie au rang k+1

$V_{k+1} = 2V_k$ or $V_k = 5^{k-1} V_1[6]$.

$V_{k+1} = 2.5^{k-1} V_1[6]$

$= (5 - 3)\, 5^{k-1} V_1[6]$

$= 5.\, 5^{k-1} V_1 - 3.V_1 5^{k-1} V_1[6]$ or $V_1 = 2$

$V_{k+1} = 5^k V_1|[6]$ vraie

Donc $\forall n \in IN^*,\ V_n = 5^{n-1} V_1[6]$.

b) Déduisons les restes dans la division de Vn par 6 suivant les valeurs de n.

$\forall n \in IN^*,\ V_n = 5^{n-1} V_1[6]$.

On a : $5 \equiv 5[6]$

$5^2 \equiv 1[6]$

$\Rightarrow\ 5^{2k} \equiv 1[6]$

$\Rightarrow\ 5^{2k+1} V_1 \equiv 5V_1[6]$ $V_1 = 2$

$\Rightarrow\ 5^{n-1} V_1 \equiv 10[6]$

$\equiv 4[6]$ le reste est donc 4

Si n est pair $n = 2k + 1 \Rightarrow n - 1 = 2k$

$5^{2k+2} \equiv 5^2[6]$

$5^2 5^{2k} V_1 \equiv V_1[6]$ or $5^2 \equiv 1[6]$

$5^{2k} V_1 \equiv V_1[6]$

$5^{2n-1} V_1 \equiv 2[6]$ le reste est 2

Finalement si n est pair le reste est 4

Si n est impaire le reste est 2

2)a) $Sn = V_1 + V_2 + \ldots + V_n$

$S_n = V_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \Rightarrow S_n = \frac{1-2^{n+1}}{1-2} \Rightarrow Sn = 2^{n+1} - 1$

Si n = 0 $S_0 = 1 \equiv 1[6]$

Si n = 1 $S_1 = 3 \equiv 3[6]$

Si n = 2 $S_2 = 7 \equiv 1[6]$

Si n = 3 $S_3 = 15 \equiv 1[6]$

De proche en proche, on a :

Si n est pair $S_n \equiv 1[6]$ le reste es 1

Si n est impair $S_n \equiv 3[6]$ le reste est 3

b) Déduisons le reste dans la division de S_{1956} par 6

1956 est un nombre pair donc le reste est 1

$S_{1956} \equiv 1[6]$

Problème I

$R = R_{(A,\frac{\pi}{2})}$; $T = t_{\overrightarrow{AB}}$; $H = h_{(C,\sqrt{3})}$

1°/ Prouvons que $R' = ToR$ est une rotation :

On a $T = S_{\Delta_1} o S_{\Delta_2} \Rightarrow (\Delta_1)//(\Delta_2)$

et $R = S_{\Delta_2} o S_{\Delta_3} \Rightarrow (\Delta_2) \cap (\Delta_3) = \{A\}$

$\rightarrow ToR = (S_{\Delta_1} o S_{\Delta_2}) o (S_{\Delta_2} o S_{\Delta_3})$

$= S_{\Delta_1} o \underbrace{S_{\Delta_2} S_{\Delta_2}}_{Id} o S_{\Delta_3}$

$= S_{\Delta_1} o S_{\Delta_3}$ or (Δ_1) et (Δ_2) sont sécantes

$\rightarrow S_{\Delta_1} o S_{\Delta_3} = R'$

D'où $ToR = R'$ est une rotation d'angle

$2(\overline{\Delta_3, \Delta_1}) = \frac{\pi}{2}[\pi]$

Détermination du centre de R'

On at$_{\overrightarrow{AB}} = S_{\Delta_1} o S_{\Delta_2}$, soit $H_2 \in (\Delta_2)$ et $H_1 \in (\Delta_1)$

On a : $2\overrightarrow{H_2H_1} = \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{H_2H_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \rightarrow (\Delta_2) = (AD)$ et $(\Delta_1) = (OH_1)$

et $R_{(A,\frac{\pi}{2})} = S_{\Delta_2} o S_{\Delta_3} \rightarrow 2(\overline{\Delta_3 \Delta_2}) = \frac{\pi}{2}[\pi]$

$2(\overline{\Delta_3 AD}) = \frac{\pi}{2}[\pi] \rightarrow (\overline{\Delta_3 AD}) = \frac{\pi}{4}[\pi] \rightarrow (\Delta_3) = (AC)$

On a : $R' = S_{(OH_1)} o S_{(AC)}$

$\rightarrow (OH_1) \cap (AC) = \{0\}$

R' a pour centre le point O $R'_{(O,\frac{\pi}{2})}$

2°/ Détermination des images

$R'_{(O,\frac{\pi}{2})}(A) = B$

$R'_{(O,\frac{\pi}{2})}(B) = C$

On a :

$R'_{(O,\frac{\pi}{2})}(O) = 0 \rightarrow 0$ est le point invariant.

3. $f = R'oH$

a) Montrons que f est une similitude :

$f = R'oH \Rightarrow f = R'_{(O,\frac{\pi}{2})} oH_{(C,\sqrt{3})}$ est une similitude plane directe, S d'angle $\frac{\pi}{2}$, et de rapport $\sqrt{3}$; car elle est composée d'une homothétie et d'une rotation

b) Déterminons l'image du point C par l'application f

$f(C) = R'oH(C) = D$

$f(C) = D$

C° / Soit I centre de la similitude :

Prouvons que

$(\overrightarrow{IC}; \overrightarrow{ID}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et que $ID = \sqrt{3}IC$

On a : $f(C) = D \Rightarrow S_{(I,\sqrt{3},\frac{\pi}{2})}(C) = D$

$$\leftrightarrow \begin{cases} \frac{ID}{IC} = \sqrt{3} \\ (\overrightarrow{IC}; \overrightarrow{ID}) = \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$$

4°/ Déterminons et construisons l'ensemble

$(E)/(\overline{MC, MD}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$

L'ensemble (E) est un cercle de diamètre [CD] privé de C et D.

Vérifions que I appartient à €

$I \in (E) \rightarrow (\overline{IC, ID}) = \frac{\pi}{2}[\pi]$ Vrai $\rightarrow I \in (E)$

Donnons une mesure de l'angle $(\overline{CD, CI})$

Calculons

$\cos(\overline{CD, CI}) = \frac{IC}{DC}$ avec $DC = 2IC$

$\cos(\overline{CD, CI}) = \frac{IC}{2IC} \rightarrow \cos(\overline{CD, CI}) = \frac{1}{2}$

$\sin(\overline{CD, CI}) = \frac{ID}{DC}$ avec $DC = \frac{2ID}{\sqrt{3}}$

$\sin(\overline{CD, CI}) = \frac{ID}{\frac{2ID}{\sqrt{3}}} \rightarrow \sin(\overline{CD, CI}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\rightarrow (\overline{CD, CI}) = \frac{\pi}{3}[\pi]$

C°/ a) Déterminons et construisons G barycentre $\{(D, 1); (C, -3)\}$

$\overrightarrow{GD} - 3\overrightarrow{GC} = \vec{O}$

$\overrightarrow{DG} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DC}$ et $GC^2 = \frac{1}{4}DC^2$ avec $\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{BG} = \frac{a}{a+b}\overrightarrow{BA}$

$DG^2 = \frac{9}{4}DC^2$ $\overrightarrow{GC} = \frac{1}{2}CD$

b) Déterminons et construisons l'ensemble

$(F)/ MD^2 - 3MC^2 = 0$

$f(M) = MD^2 - 3MC^2$

$-2MG^2 + f(G) = 0$

$-2MG^2 = -f(G)$

$\rightarrow MG^2 = \frac{1}{2}f(G)$

$\rightarrow MG^2 = \frac{3}{4}DC^2$

Déterminons f(G)

$f(G) = GD^2 - 3GC^2$

or $GD^2 = \frac{9}{4}DC^2$ et $GC^2 = \frac{1}{4}DC^2$

$f(G) = \frac{9}{4}DC^2 - \frac{3}{4}DC^2$

$f(G) = \frac{3}{2}DC^2$

$\rightarrow MG = \sqrt{\frac{3}{4}DC^2} \Rightarrow MG = \frac{DC}{2}\sqrt{3}$ L'ensemble des points M

c) L'ensemble (F) est un cercle de centre G et de rayon $\frac{DC}{2}\sqrt{3}$

d) Vérifions que $I \in (F)$

$ID = \sqrt{3}IC \rightarrow ID^2 = 3IC^2 = 0 \Rightarrow I \in (F)$

6° /$(E) \cap (F) = \{I\}$

Déduisons I centre de la similitude.

I étant le point d'intersection de (E) et (F), I est le centre de la similitude f, d'angle $\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et de rapport $\sqrt{3}$. $f = S_{(I,\ \sqrt{3},\ \frac{\pi}{2})}$

7°/ Déterminons et construisons l'ensemble

$(F')/(F') = S(F)$

$F' = S(F)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{IG'}{IG} = \sqrt{3} \\ \overrightarrow{IG}; \overrightarrow{IG'} = \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$$

$A_{(F')} = (\sqrt{3})^2 . AF$

$= 3\pi IG^2$ avec $\pi R^2 = S$

or IG on connait

$= R$ (𝒞 de centre) x k^2 avec $k = \sqrt{3} \Rightarrow k^2 = 3$

$\rightarrow 3\pi\left(\frac{DC.\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$A_{(F')} = \frac{2\pi}{4}DC^2 . m^2$

Problème 2

1°/ a) Montrons qu'il existe $R(A)=B$ et $R(P)=Q$.

Mesure de l'angle

$R(A) = B$
$R(P) = Q$ $\Rightarrow BQ = AP$

$$\left(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{BQ}\right) \neq 0[2\pi]$$

or $AP = QF$

$$\left(\overrightarrow{QF}; \overrightarrow{BQ}\right) = \left(\overrightarrow{QF}; -\overrightarrow{QB}\right)[2\pi]$$
$$= \left(\overrightarrow{QF}; \overrightarrow{QB}\right) + \pi[2\pi]$$
$$= -\frac{\pi}{2} + \pi[2\pi]$$
$$\theta = \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

Donc $\left(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{BQ}\right) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$

b) Construisons Ω_1 centre de R

$$R_{(A)} = B \to \begin{cases} \Omega_1 B = \Omega_1 \\ \left(\overrightarrow{\Omega_1 A}, \overrightarrow{\Omega_1 B}\right) = \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$$

$\Omega_1 = J$

C°/ Montrons que P ;J ;A ;Q et F sont cocycliques.

APFQ est un rectangle donc inscriptible. De plus les triangles APF et AJF sont respectivement rectangle en P et J de même hypoténuse [AF]. Le point J ∈ au cercle circonscrit au rectangle APFQ.

d) Déterminons k_1 de $H_{(A;k_1)}(C) = P$

on a : $\frac{AP}{4AP} = k_1$ or $AC = 4AP$

$$k_1 = \frac{AP}{4AP} \Rightarrow k_1 = \frac{1}{4}$$

2°/ $A \in (P)/DB = DA$ et $\left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}\right) = \frac{\pi}{6}[2\pi]$

$S(C) = B$ et $S(H) = D$

a) Mesure de l'angle:

$$\begin{matrix} S(C) = B \\ S(A) = D \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{BD}{CA} = k_2 \quad (1) \\ \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BD}\right) = \theta[2\pi](2) \end{cases}$$

(2) $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}\right) = \theta[2\pi]$

or $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{IA}$

$\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{ID}$

$\Rightarrow \left(\overrightarrow{IA}; \overrightarrow{ID}\right) = -\frac{\pi}{3}[2\pi]$

b) Calculons k_2 :

$k_2 = \frac{BD}{CA}$. Considérons le triangle rectangle OAB, rectangle en O.

$$\cos\widehat{B} = \frac{OB}{DB} \Rightarrow DB = \frac{OB}{\cos\widehat{B}}$$

or $OB = \frac{\frac{AB}{2}}{DB} = \frac{AC}{2}$

$$DB = \frac{AC}{2\cos\widehat{B}}$$

$$\text{Donc : } k_2 = \frac{\frac{AC}{2\cos\widehat{B}}}{AC} \Rightarrow k_2 = \frac{1}{2\cos\widehat{B}} \Rightarrow$$

$$k_2 = \frac{1}{\frac{2\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow k_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

C°/ Construisons les points : $B' = S(B)$; $E' = S(E)$

$$\begin{matrix} S(C) = B \\ S(B) = B' \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{BB'}{CB} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (1) \\ \left(\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{BB'}\right) = -\frac{\pi}{3}[2\pi]\ (2) \end{cases}$$

(2) $\left(\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{BB'}\right) = \left(-\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BB'}\right)[2\pi]$

$$= \left(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BB'}\right) + \pi[2\pi]$$
$$-\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3}[2\pi]$$

(1) $BB' = \frac{CB\sqrt{3}}{3}$

$$\frac{BB'}{BC} = \frac{1}{\sqrt{3}} \to BB' = \frac{BC}{\sqrt{3}} \text{ or } \sqrt{3} = 2\cos\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow BB' = \frac{BC}{2\cos\frac{\pi}{6}} \to BB' = \frac{BC}{2 \times \frac{\frac{AB}{2}}{DB}}$$

$$\Rightarrow BB' = \frac{BC.DB}{AB}$$

or en considérant le triangle rectangle isocèle en A.

$BC = AB\sqrt{2}$

Alors $BB' = \frac{AB.DB.\sqrt{2}}{AB} \Rightarrow BB' = DB\sqrt{2}$

$$\begin{matrix} S(C) = B \\ S(A) = D \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} S([AC] = [DB] \\ S(E) = E' \text{ milieu } [DB] \end{matrix}$$

d) Montrons que D est milieu de [IB]

J milieu de [BC]

(JD)//(IC)

D'après Thalès, on a :

$\frac{BD}{BI} = \frac{BJ}{BC}$ or $BC = 2BJ$

$$\frac{BD}{BI} = \frac{BJ}{2BJ} \Rightarrow \frac{BD}{BI} = \frac{1}{2} \Rightarrow BI = 2BD$$

Conclusion : D est milieu de [BI].

e) Montrons que (IB') ⊥ (BB')

Evaluons l'angle $\left(\overline{B'I; B'B}\right)[\pi]$

$\left(\overline{B'I; B'B}\right) = \left(\overline{B'I; B'D}\right) + \left(\overline{B'D; B'B}\right)[\pi]$

Or les triangles IDB' et B'DB sont respectivement isocèle rectangle en D.

Donc $\left(\overline{B'I; B'D}\right) = \left(\overline{B'D; B'B}\right) = \frac{\pi}{4}[\pi]$

D'où $\left(\overline{B'I; B'B}\right) = \frac{2\pi}{4}[\pi]$

$\left(\overline{B'I; B'B}\right) = \frac{\pi}{2}[\pi]$. Les droites (IB') et (BB') sont perpendiculaires.

f) calculons le rapport $\frac{IB}{IC}$

D'après Thalès

$$\frac{ID}{IB} = \frac{CJ}{CB} = \frac{ID}{IC}$$
$$\frac{ID}{JD} = \frac{IB}{IC}$$

Evaluons $IC^2 = \left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AC}\right)^2$

$$= IA^2 + 2\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{AC} + AC^2$$

or $IA = IB\sin\widehat{B}$

$$\to \frac{1}{4}IB^2 - 2\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AC} + AC^2$$
$$= \frac{1}{4}IB^2 + 2AI.AC + AC^2$$
$$= \frac{1}{4}IB^2IB.AB + AB^2$$

or $\cos\widehat{B} = \frac{AB}{IB} \to AB = IB\cos\frac{\pi}{6}$

$IC^2 = \frac{1}{4}IB^2 + IB^2\cos\frac{\pi}{6} + IB^2\cos^2\frac{\pi}{6}$

$= \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{4}\right)IB^2$

$= \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)IB^2$

$IC^2 = \left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)IB^2 \to IB^2 = \frac{2}{2+\sqrt{3}}IC^2$

$\frac{IB}{IC} = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$

$\frac{IB}{IC} = \sqrt{(1-\sqrt{3})^2} = |1-\sqrt{3}| = \sqrt{3} - 1$

$\frac{IB}{IC} = \sqrt{3} - 1$

3°/ (Ω_2, I, A, D)

$$\begin{matrix} \delta(\Omega_2) = (\Omega_2) \\ \delta(A) = D \end{matrix} \to \begin{matrix} (\overrightarrow{IA}; \overrightarrow{ID}) = -\frac{\pi}{3}[2\pi] \\ (\overrightarrow{\Omega_2 A}, \overrightarrow{\Omega_2 D}) = -\frac{\pi}{3}[2\pi] \end{matrix}$$

$(\overrightarrow{IA}; \overrightarrow{ID}) = \overline{(\overrightarrow{\Omega_2 A}, \overrightarrow{\Omega_2 D})}[2] \to \Omega_2, I, A$ et D sont cocycliques.

D'autre part :

$\delta(\Omega_2) = \Omega_2$

$\delta(\Omega_2) = \Omega_2$

$\delta(C) = B$ $\to \overline{(\overrightarrow{\Omega_2 C}, \overrightarrow{\Omega_2 B})} = -\frac{\pi}{3}[2\pi]$

or $(\overrightarrow{IA}; \overrightarrow{ID}) = (\overrightarrow{IC}; \overrightarrow{IB})[2\pi]$: l'alignement

$(\overrightarrow{\Omega_2 C}, \overrightarrow{\Omega_2 B}) = \overline{\overrightarrow{IC}; \overrightarrow{IB}}[2\pi] \to \Omega_2, C, I, B$ sont cocycliques.

$\Omega_2 \in \mathscr{C}_{(IAD)} \cap \mathscr{C}_{(IBC)}$

4°/ $B(1;0)$; $P\left(-1;\frac{1}{2}\right)$; $A(-1;0)$; $J(0;1)$

$\begin{cases} x' = Ax + By + x_A \\ y' = -Bx + Ay + y_A \end{cases}$

Comme $\delta'(B) = P$

$\begin{cases} x_P = Ax_B + By_B + x_A \\ y_P = -Bx_B + Ay_B + y_A \end{cases}$

$\to \begin{cases} -1 = A - 1 \\ \frac{1}{2} = -B \end{cases} \to \begin{cases} A = 0 \\ B = -\frac{1}{2} \end{cases}$

$\delta' \begin{cases} x' = -\frac{1}{2}y - 1 \\ y' = \frac{1}{2}x \end{cases}$

Problème 3

1°/ Démontrons que $\exists$:

$r_1(ABC) = BAK$

$r_1(A) = E$

$r_1(B) = A$

$r_1(C) = K$

$EA = AB$, $\overline{\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{EA}} \neq 0[2\pi]$

$\exists r_1; E = r_1(A)$ et $A = r_1(B)$

De même $BC = AK$

$\overline{\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{AK}} \neq 0[2\pi]$

Finalement :

$EK = AC$; $AK = BC$: $AB = EA$

$r_1(ABC) = EAK$

b) Le centre Ω_1 est le point d'intersection des médiatrices des segments [AE] et [AB] qui est le centre du carré ABDE.

L'angle:

$\theta = \overline{(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{EA})}[2\pi]$

$= \overline{(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AE})} + \pi[2\pi]$

$\theta = \frac{\pi}{2}[2\pi] \Rightarrow r_1\left(\Omega_1; \frac{\pi}{2}\right)$

c) Démontrons que $(KB) \perp (DC)$

Par r_1, on a : $r_1(D) = B$

$r_1(C) = K$

$\overline{(\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{BK})} = \frac{\pi}{2}[2\pi]$

$\Rightarrow$Les droites (DC) et (BK) sont $\perp$

2°/ $r_2(ABC) = GKA$

$r_2(A) = G$

$r_2(B) = K$

$r_2(C) = A$

$AB = GK$; $BC = KA$; $AC = GA$

$$\overline{(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{GK})} \neq \overline{(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{KA})} \neq \overline{(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{GA})} \neq 0[2\pi]$$

Donc $\exists r_2 / r_2(ABC) = (GKA)$

Le centre Ω_2 de r_2 est le point d'intersection des médiatrices [AC] et [AG]. Qui est le centre du carré ACFG.

L'angle :θ

$\theta = \overline{(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{GA})}[2\pi]$

$= \overline{(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AG})} + \pi[2\pi]$

$= \frac{8\pi}{2}[2\pi]$

$\theta = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

$r_2\left(\Omega_2; -\frac{\pi}{2}\right)$

3°/. $f = r_1 o r_2$

a) Calcul de f(c)

$f(c) = r_1 o r_2(c)$

$= r_1[r_2(c)]$

$= r_1(A)$

$= E \quad \rightarrow f(c) = E$

b) Caractérisons f :

On sait que :

$r_1 = S_{\Omega_1 x} o \Omega_1\Omega_2 \Rightarrow \begin{cases} (\Omega_1 x) \cap (\Omega_1\Omega_2) = \{\Omega_1\} \\ \overline{(\Omega_1\Omega_2, \Omega_1 x)} = \frac{\pi}{4}[\pi] \end{cases}$

$r_2 = S_{\Omega_1\Omega_2} o S_{\Omega_2 y} \Rightarrow \begin{cases} (\Omega_1\Omega_2) \cap (\Omega_1 y) = \{\Omega_1\} \\ \overline{(\Omega_2 y, \Omega_2\Omega_1)} = \frac{\pi}{4}[\pi] \end{cases}$

$f = S_{\Omega_1 x} o S_{\Omega_1\Omega_2} o S_{\Omega_1\Omega_2} o S_{\Omega_2 y}$

$= S_{\Omega_1 x} o S_{\Omega_2 y}$

$\overline{(\Omega_2 y, \Omega_1 x)} = 0[\pi] \Rightarrow$ Les droites $(\Omega_2 y)$ et $(\Omega_1 x)$ sont parallèles. Donc f est une translation de vecteur $2\overrightarrow{H_1H_2}$ avec $H_1 \in (\Omega_2 y)$ $H_2 \in (\Omega_1 x)$

Comme f(c) = E

$$\Rightarrow 2\overrightarrow{H_1H_2} = \overrightarrow{CE}$$
$$f = t_{\overrightarrow{CE}}$$

4°/ Montrons que A, B, Ω_1 et I sont cocycliques.

$$(IB) \perp (IA)$$
$$(\Omega_1 B) \perp (\Omega_1 A)$$
$$\Rightarrow \left(\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{B\Omega_1}\right) = \left(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{A\Omega_1}\right)[2\pi]$$

$\Rightarrow$ B, I, Ω_1 et A appartiennent à un même cercle.

Ou bien les triangles Ω_1AB et IAB sont respectivement rectangles en Ω_1 et I de même hypoténuse [AB]. Les points sont cocycliques.

Ou bien :

$r_1(BC) = AK$ et $\{I\} = (BC) \cap (AC)$

$\Rightarrow \left(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IA}\right) = \frac{\pi}{2}[\pi] \Rightarrow I \in (\mathscr{C})$ de diamètre [AB]

$$r_1(BC) = A \Rightarrow \left(\overrightarrow{\Omega_1 B}, \overrightarrow{\Omega_1 A}\right) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

$\Rightarrow \Omega_1 \in \mathscr{C}$ de diamètre AB.

Les points I, Ω_1 appartiennent au cercle de diamètre [AB].

A, B, I, Ω_1 sont cocycliques.

b) par un raisonnement analogue, on montre que A, Ω_2, G et J appartiennent à un cercle. C'est-à-dire : les triangles G$A\Omega_2$ et AJG sont rectangles respectivement en Ω_2 et J de même hypoténuse [AG]. Les points appartiennent au cercle de diamètre [AG].

5°/ a) donnons les caractéristiques de la SPD telle que

$S(\mathscr{C}) = \mathscr{C}'$

$$S(A) = A$$

$S(\mathscr{C}) = \mathscr{C}' \Rightarrow S(O) = O'$

Rapport :

$$k = \frac{AO'}{AO} = \frac{AG}{AB} = \frac{AG}{AB}$$
$$k = 2$$

L'angle :

$\theta = \left(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AO'}\right)[2\pi]$

$= \left(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AC}\right) + \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AO'}\right)[2\pi]$

$= \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}[2\pi]$

$\text{Sim}\left(A; 2; \frac{2\pi}{3}\right)$

b) images :

$$S(B) = G$$
$$S(E) = C$$
$$S(\Omega_1) = \Omega_2$$
$$S(D) = F$$

c) L le point $\cap$ de $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$; $M_g L \in (\Omega_1; \Omega_2)$

$\Rightarrow \overline{(\Omega_1 L, \Omega_2 L)} = \overline{(\Omega_1 L, AL)} + \overline{(AL, \Omega_2 L)}[\pi]$

$= \overline{(L\Omega_1, LA)} + \overline{(LA, L\Omega_2)}[\pi]$

Angle au centre et angle inscrit $\Rightarrow$:

$$\frac{1}{2}\overline{(O\Omega_1, OA)} + \frac{1}{2}\overline{(O'A, O'\Omega_2)}$$

or $S(\Omega_1) = \Omega_2$

$S(O) = O'$ et $S(A) = A$

$\Rightarrow \overline{(O\Omega_1, OA)} = \overline{(O'\Omega_2, O'A)}[\pi]$

$$\overline{(\Omega_1 L, \Omega_2 L)} = \frac{1}{2}[\overline{(O\Omega_1 OA)} + \overline{(OA, O\Omega_1}][\pi]$$
$$= 0[\pi]$$

$\Rightarrow$ Les points L, Ω_1 et Ω_2 sont alignés.

Problème 4 :

1) les points A, C, B et D sont cocycliques on a :

$$\overline{\left(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}\right)} + \overline{\left(\overrightarrow{DB}; \overrightarrow{DA}\right)} = \pi[2\pi] \Rightarrow$$

$\overline{\left(\overrightarrow{DB}; \overrightarrow{DA}\right)} = \frac{2\pi}{3}[\pi]$

Les points D, E et B sont alignés donc $\overline{\left(\overrightarrow{DE}; \overrightarrow{DA}\right)} = \frac{2\pi}{3}[\pi]$ (1)

O étant le centre du cercle

on a $\overline{\left(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OE}\right)} = \frac{\pi}{3}[\pi]$ (2)

En faisant la somme de (1) et (2) on a

$$\overline{\left(\overrightarrow{DE}; \overrightarrow{DA}\right)} + \overline{\left(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OE}\right)} = \pi[2\pi]$$

Ce qui donne :

$$2\overline{\left(\overrightarrow{DE}; \overrightarrow{DA}\right)} = 2\overline{\left(\overrightarrow{OE}; \overrightarrow{OA}\right)}[2\pi]$$

Les points D, E, O et A sont cocycliques

2°/-a) Démontrons que $AI = \frac{1}{3}AB$

$$(IO)//(AB')$$

$\frac{AI}{AB} = \frac{B'O}{B'B}$ or $B'O = \frac{1}{3}BB'$

$$\frac{AI}{AB} = \frac{1}{3} \Rightarrow AI = \frac{1}{3}AB$$

b) Démontrons que $\exists r(A) = B$ et $r(I) = I'$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{BI'}{AI} = k \quad (1) \quad \text{avec } k = 1 \Rightarrow BI' = AI \\ \left(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{BI'}\right) = \theta[2\pi] \quad (2) \end{cases}$$

D'après Thalès

$$\frac{AI}{AB} = \frac{A'I'}{A'B}$$

Or $\dfrac{AI}{AB} = \dfrac{1}{3}$

$$\frac{AI}{AB} = \frac{A'I'}{A'B} = \frac{1}{3}$$

On sait que :

$$BI' = BA' - A'I'$$

$$= BA' - \frac{1}{3}B'A \text{ avec } A'I' = \frac{1}{3}A'B$$

$$= \frac{AB}{2} - \frac{AB}{6}$$

$$BI' = \frac{1}{3}AB$$

$$\frac{BI'}{BA} = \frac{1}{3} \; ; \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{AI}{AB} = \frac{BI'}{AB}$$

$$\Rightarrow AI = BI'$$

$$\left(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{BI'}\right) = \left(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{BI'}\right)$$

$$= \left(-\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BI'}\right)[2\pi]$$

$$= \left(\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BI'}\right) + \pi[2\pi]$$

$$= -\frac{\pi}{3} + \pi[2\pi]$$

$$\left(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{BI'}\right) = \frac{2\pi}{3}[2\pi]$$

$$\text{D'où} \begin{cases} AI = BI' \\ \left(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{BI'}\right) = \frac{2\pi}{3}[2\pi] \end{cases} \exists\, r$$

Construction du centre de r :

Le centre de r : O

$$3°/\text{ a) } \begin{matrix} S(B) = B \\ S(D) = O \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{BO}{BD} = k \quad (1) \\ \left(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BO}\right) = \theta[2\pi] \end{cases}$$

$$\frac{BO}{BD} = k \quad (1)$$

Considérons le triangle : BDO rectangle isocèle en O.

$$BD^2 = 2BO^2$$

$$\Rightarrow BO^2 = \frac{1}{2}BD^2$$

$$\Rightarrow BO = \frac{\sqrt{2}}{2}BD$$

Dans (1) $\Rightarrow \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}BD}{BD} = k$

$$\Rightarrow k = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Détermination de θ

On sait que : $\theta = \left(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BO}\right)[2\pi]$

$$\left(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA}\right) + \left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BO}\right) = [2\pi]$$

Or $\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BO}\right) = \dfrac{\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right)}{2}[2\pi]$

$\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BO}\right) = -\frac{\pi}{6}[2\pi]$ et $\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BO}\right)$ angle inscrit intercepte le même arc $\widehat{DA}$ quel angle au centre $\left(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OA}\right)$

$$\left(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OA}\right) \Rightarrow \left(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OA}\right)[2\pi]$$

$$\left(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA}\right) = \frac{-\frac{\pi}{6}}{2}[2\pi]$$

$$\theta = -\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{12}[2\pi]$$

$$\theta = -\frac{\pi}{4}[2\pi]$$

Problème 5

1) Montrons que L, M et N sont milieu respectifs de [BC] ; [AC] et [AB].

O étant centre du cercle, il est le point d'intersection des médiatrices des côtés du triangle. Une médiatrice est la droite qui coupe le segment en son milieu perpendiculairement, donc L, M et N sont les milieux respectifs de [BC], [AC].

2) Montrons O, L, B, N sont cocycliques :

1ère possibilité : Les triangles ONB et OLB sont rectangles respectivement en N et L de même hypoténuse [OB]. ⇒ Les points O,L,B et N ∈ au cercle de diamètre [OB].

2ème Possibilité :

$$\begin{matrix} LO \perp LB \\ NO \perp NB \end{matrix} \Rightarrow (\overline{OL}, \overline{ON}) = (\overline{BL}, \overline{BN})[\pi]$$

3) $r_1 = R_{\left(L, \frac{\pi}{4}\right)}$ $\quad r_1(BC) = (\Delta_1)$ et $(\Delta_1) \cap (\Delta_2) = \{C'\}$

$r_2 = R_{\left(M, \frac{\pi}{4}\right)}$ $\quad r_2(CA) = (\Delta_2)$ et $(\Delta_1) \cap (\Delta_3) = \{B'\}$

$r_3 = R_{\left(N, \frac{\pi}{4}\right)}$ $\quad r_3(AB) = (\Delta_3)$ et $(\Delta_2) \cap (\Delta_3) = \{A'\}$

Avec $r_1(BC) = (\Delta_1) \Longrightarrow (\overline{BC}, \overline{\Delta_1}) = \frac{\pi}{4}[\pi]$

a) Montrons que $B' \in (\Gamma_B)$

$$B' \in (\Delta_1) \cap (\Delta_3)$$

$\left(\overline{LB}, \overline{LB'}\right) = \frac{\pi}{4}[\pi]$ car $r_1(LB) = LB'$ (1)

$\left(\overline{NB}, \overline{NB'}\right) = \frac{\pi}{4}[\pi]$ car $r_3(NB) = NB'$ (2)

$(1) - (2) \Longrightarrow \left(\overline{LB}, \overline{LB'}\right) - \left(\overline{NB}, \overline{NB'}\right) = 0[\pi]$

$\Longrightarrow \left(\overline{LB}, \overline{LB'}\right) = \left(\overline{NB}, \overline{NB'}\right)[\pi] \Longrightarrow B' \in (\Gamma_B)$

b) Montrons que OBB' est rectangle isocèle.

$B' \in (\Gamma_B) \Longrightarrow OBB'$ est rectangle en B', car [OB] est diamètre de (Γ_B)

De plus, on a $\left(\overline{LB}, \overline{LB'}\right) = \left(\overline{OB}, \overline{OB'}\right) = \frac{\pi}{4}[\pi]$

$\Longrightarrow \left(\overline{OB}, \overline{OB'}\right) = \frac{\pi}{4}[\pi]$ et $\left(\overline{BB'}, \overline{BO}\right) = \frac{\pi}{4}[\pi]$

Donc OBB' est rectangle isocèle en B'

Par analogie les triangles OCC' et OAA' sont rectangles isocèles respectivement en C' et A'.

c) $S(O) = 0$ et $S(B) = B'$

b) Démontrons que $\exists r(A) = B$ et $r(I) = I'$ avec $k = 1 \Rightarrow BI' = AI$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{BI'}{AI} = k \quad (1) \\ \left(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{BI'}\right) = \theta[2\pi] \quad (2) \end{cases}$$

D'après Thalès

$$\frac{AI}{AB} = \frac{A'I'}{A'B}$$

Or $\frac{AI}{AB} = \frac{1}{3}$

$$\frac{AI}{AB} = \frac{A'I'}{A'B} = \frac{1}{3}$$

On sait que :

$$BI' = BA' - A'I'$$

$$= BA' - \frac{1}{3}B'A \text{ avec } A'I' = \frac{1}{3}A'B$$

$$= \frac{AB}{2} - \frac{AB}{6}$$

$$BI' = \frac{1}{3}AB$$

$$\frac{BI'}{BA} = \frac{1}{3}\ ;\ \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{AI}{AB} = \frac{BI'}{AB}$$

$$\Rightarrow AI = BI'$$

$$\left(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{BI'}\right) = \left(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{BI'}\right)$$

$$= \left(-\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BI'}\right)[2\pi]$$

$$= \left(\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BI'}\right) + \pi[2\pi]$$

$$= -\frac{\pi}{3} + \pi[2\pi]$$

$$\left(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{BI'}\right) = \frac{2\pi}{3}[2\pi]$$

$$\text{D'où} \begin{cases} AI = BI' \\ \left(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{BI'}\right) = \frac{2\pi}{3}[2\pi] \end{cases} \exists\, r$$

Construction du centre de r :

Le centre de r : O

$$3°/\text{ a) } \begin{matrix} S(B) = B \\ S(D) = O \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{BO}{BD} = k \ (1) \\ \left(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BO}\right) = \theta[2\pi] \end{cases}$$

$$\frac{BO}{BD} = k \quad (1)$$

Considérons le triangle : BDO rectangle isocèle en O.

$$BD^2 = 2BO^2$$

$$\Rightarrow BO^2 = \frac{1}{2}BD^2$$

$$\Rightarrow BO = \frac{\sqrt{2}}{2}BD$$

$$\text{Dans (1)} \Rightarrow \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}BD}{BD} = k$$

$$\Rightarrow k = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Détermination de θ

On sait que : $\theta = \left(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BO}\right)[2\pi]$

$$\left(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA}\right) + \left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BO}\right) = [2\pi]$$

Or $\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BO}\right) = \frac{\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right)}{2}[2\pi]$

$\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BO}\right) = -\frac{\pi}{6}[2\pi]$ et $\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BO}\right)$ angle inscrit intercepte le même arc $\overset{\frown}{DA}$ quel angle au centre $\left(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OA}\right)$

$$\left(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OA}\right) \Rightarrow \left(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OA}\right)[2\pi]$$

$$\left(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA}\right) = \frac{-\frac{\pi}{6}}{2}[2\pi]$$

$$\theta = -\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{12}[2\pi]$$

$$\theta = -\frac{\pi}{4}[2\pi]$$

Problème 5

1) Montrons que L, M et N sont milieu respectifs de [BC] ; [AC] et [AB].

O étant centre du cercle, il est le point d'intersection des médiatrices des côtés du triangle. Une médiatrice est la droite qui coupe le segment en son milieu perpendiculairement, donc L, M et N sont les milieux respectifs de [BC], [AC].

2) Montrons O, L, B, N sont cocycliques :

1ère possibilité : Les triangles ONB et OLB sont rectangles respectivement en N et L de même hypoténuse [OB]. ⇒ Les points O,L,B et N ∈ au cercle de diamètre [OB].

2ème Possibilité :

$$\begin{matrix} LO \perp LB \\ NO \perp NB \end{matrix} \Rightarrow \left(\overline{OL}, \overline{ON}\right) = \left(\overline{BL}, \overline{BN}\right)[\pi]$$

3) $r_1 = R_{\left(L, \frac{\pi}{4}\right)}$ $r_1(BC) = (\Delta_1)$ et

$(\Delta_1) \cap (\Delta_2) = \{C'\}$

$r_2 = R_{\left(M, \frac{\pi}{4}\right)}$ $r_2(CA) = (\Delta_2)$ et $(\Delta_1) \cap (\Delta_3) = \{B'\}$

$r_3 = R_{\left(N, \frac{\pi}{4}\right)}$ $r_3(AB) = (\Delta_3)$ et $(\Delta_2) \cap (\Delta_3) = \{A'\}$

Avec $r_1(BC) = (\Delta_1) \Longrightarrow \left(\overline{BC}, \overline{\Delta_1}\right) = \frac{\pi}{4}[\pi]$

a) Montrons que $B' \in (\Gamma_B)$

$$B' \in (\Delta_1) \cap (\Delta_3)$$

$\left(\overline{LB}, \overline{LB'}\right) = \frac{\pi}{4}[\pi]$ car $r_1(LB) = LB'$ (1)

$\left(\overline{NB}, \overline{NB'}\right) = \frac{\pi}{4}[\pi]$ car $r_3(NB) = NB'$ (2)

$(1) - (2) \Longrightarrow \left(\overline{LB}, \overline{LB'}\right) - \left(\overline{NB}, \overline{NB'}\right) = 0[\pi]$

$\Longrightarrow \left(\overline{LB}, \overline{LB'}\right) = \left(\overline{NB}, \overline{NB'}\right)[\pi] \Longrightarrow B' \in (\Gamma_B)$

b) Montrons que OBB' est rectangle isocèle.

$B' \in (\Gamma_B) \Longrightarrow OBB'$ est rectangle en B', car [OB] est diamètre de (Γ_B)

De plus, on a $\left(\overline{LB}, \overline{LB'}\right) = \left(\overline{OB}, \overline{OB'}\right) = \frac{\pi}{4}[\pi]$

$\Longrightarrow \left(\overline{OB}, \overline{OB'}\right) = \frac{\pi}{4}[\pi]$ et $\left(\overline{BB'}, \overline{BO}\right) = \frac{\pi}{4}[\pi]$

Donc OBB' est rectangle isocèle en B'

Par analogie les triangles OCC' et OAA' sont rectangles isocèles respectivement en C' et A'.

c) $S(O) = O$ et $S(B) = B'$

Les caractéristiques de S

Rapport : $K = \frac{OB'}{OB}$ or $OB^2 = 2OB'^2 \Rightarrow \frac{OB'^2}{OB^2} = \frac{1}{2}$

$$\frac{OB'}{OB} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow k = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

L'angle: $\theta = (\overline{OB, OB'})[\pi] \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}[\pi]$

$$Sim\left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\pi}{4}\right)$$

d) Déterminons :

$S(A) = A'$
$S(C) = C'$

e) Le cercle circonscrit au triangle A'B'C' est l'image de (Γ) par S.

B/ $h_{\left(0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$ $\quad r\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$

a) $roh = S\left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\pi}{4}\right)$

roh Est une similitude plane directe de centre O, de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

b) Déterminons :

$A' = roh(A) \Rightarrow OAA'$ est un triangle rectangle isocèle en A.

De même pour OBB' et OCC'.

Comme $A' = S(A)$
$B' = S(B) \Rightarrow (\Gamma') = S(\Gamma)$
$C' = S(C)$

3°/ $x^2 + 2y^2 = 8$

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$$

C'est une ellipse de centre O.

Sommets : $(2\sqrt{2}; 0)$; $(0; 2)$; $(0; 2)$

Demi-distance focale : $C^2 = a^2 - b^2$
$C = 2$

Foyers : $F(2; 0)$; $F'(-2; 0)$

Excentricité : $e = \frac{c}{a} \Rightarrow e = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow e = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Directrice : $(\mathscr{D})$: $x = 4$; : $(\mathscr{D}')$ $x = -4$

Problème 6

Partie A :

1°/ Démontrons qu'il existe deux isométries laissant le point A invariant :

$B' \neq C'$, $AB' = AC'$

et $(\overline{\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{AB'}}) = \frac{\pi}{3}[2\pi] \Rightarrow \exists$ une rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ qui transforme C' en B' notée : R_1; $R_1(A) = A$

$AB' = AC'$
$(AO) \perp (B'C')$ $\Rightarrow \exists$ une symétrie axiale d'axe (AO), qui transforme C' en B' notée S_{AD}; $S_{(AO)}(A) = A$

2°/ $R_2 o R_1$; $\quad R_2 = R_{\left(0; \frac{2\pi}{3}\right)}$

$R_1 = R_{\left(A; \frac{\pi}{3}\right)}$

$$R_2 = S_{ox} o S_{AO} \Rightarrow \begin{cases} (\overline{AO, Ax}) = \frac{\pi}{3}[\pi] \\ (AO) \cap (Ax) = \{0\} \\ (Ox) = (Oc') \end{cases}$$

$$R_1 = S_{AO} o S_{Ay} \Rightarrow \begin{cases} (\overline{Ay, AO}) = \frac{\pi}{6}[\pi] \\ (Oy) \cap (AO) = \{A\} \\ (Ay) = (AB) \end{cases}$$

$$R_2 o R_1 = S_{ox} o S_{Ay} \Rightarrow \begin{cases} (ox) \cap (Ay) = C' \\ (\overline{Ay, Ax}) = \frac{\pi}{2}[\pi] \end{cases}$$

$\Rightarrow R_{(C', \pi)} = S_{C'}$

3. Démontrons que $S_{(C'B')} o S_{(OC)} = t_{\vec{u}}$ avec $\vec{u}$ à préciser.

Comme $(C'B')//(OC) \Leftrightarrow S_{(C'B')} o S_{(OC)} = t_{2\overrightarrow{H_1H_2}}$

Avec $(H_1H_2) \perp (C'B')$

$H_1 \in (OC)$, $H_2 \in (C'B')$

On a : $0 = H_1$

$\overrightarrow{OH_2} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OA}$; Donc $S_{(C'B')} o S_{(OC)} = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}}$

$t_{2\overrightarrow{H_1H_2}} = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}}$

4. $T = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}}$; $R = R_{\left(0; \frac{\pi}{3}\right)}$

Caractérisons ToR

$T = S_{(C'B')} o S_{(OC)}$; $R = S_{OC} o S_{oz}$

$$R = S_{OC} o S_{oz} \Rightarrow \begin{cases} (\overline{oz, oc}) = \frac{\pi}{6}[\pi] \\ (ox) \cap (oc) = \{0\} \end{cases} \quad oz = (oc')$$

$ToR = S_{(C'B')} o S_{OC'}$
$= R_{\left(C'; 2(\overline{OC', C'B'})\right)}$

$R_{\left(C'; \frac{\pi}{3}\right)}$

ToR est une rotation de centre C' et l'angle $\frac{\pi}{3}$

Partie B

f = sim Telle que :

$S(A) = A$
$S(B) = B'$

1°/ Caractérisons f

$k = \frac{AB'}{AB}$ or $AB' = AC'$ et $AC' = \frac{1}{2}AB \rightarrow k = \frac{1}{2}$

L'angle :

$\theta = (\overline{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB'}})[2\pi]$

$= (\overline{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})[2\pi]$: Alignement des points A'B' et C

$\theta = \frac{\pi}{3}[2\pi]$

$$f = sim\left(A; \frac{1}{2}; \frac{\pi}{3}\right)$$

2°/ $g = sim(A; 2; (OA))$

Caractérisons fog

$fog = (R_A oh) o (h' o S_{OA})$
$= R_A o (hoh') o S_{OA}$
$= R_A o S_{OA}$ Car $hoh' = h_{(A;1)} = Id$
$= R_A o S_{OA}$
$= (S_{At} o S_{OA}) o S_{OA}$
$= S_{At}$ Avec $(\overline{AO; At}) = \frac{\pi}{6}[\pi]$
$(At) \cap (OA) = \{A\}$
$(At) = (AC)$

$fog = S_{AC}$
$\Rightarrow gof = (S_{OA} oh') o (ho R_A)$

Les caractéristiques de S

Rapport : $K = \frac{OB'}{OB}$ or $OB^2 = 2OB'^2 \Rightarrow \frac{OB'^2}{OB^2} = \frac{1}{2}$

$$\frac{OB'}{OB} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow k = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

L'angle: $\theta = (\overline{OB, OB'})[\pi] \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}[\pi]$

$$Sim\left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\pi}{4}\right)$$

d) Déterminons :

$$S(A) = A'$$
$$S(C) = C'$$

e) Le cercle circonscrit au triangle A'B'C' est l'image de (Γ) par S.

B/ $h_{\left(0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$ $\quad r\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$

a) $roh = S\left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\pi}{4}\right)$

roh Est une similitude plane directe de centre O, de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

b) Déterminons :

$A' = roh(A) \Rightarrow OAA'$ est un triangle rectangle isocèle en A.

De même pour OBB' et OCC'.

Comme $\quad A' = S(A)$

$B' = S(B) \Rightarrow (\Gamma') = S(\Gamma)$

$C' = S(C)$

3°/ $x^2 + 2y^2 = 8$

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$$

C'est une ellipse de centre O.

Sommets : $(2\sqrt{2}; 0)$; $(0; 2)$; $(0; 2)$

Demi-distance focale : $C^2 = a^2 - b^2$

$C = 2$

Foyers : $F(2; 0)$; $F'(-2; 0)$

Excentricité : $e = \frac{c}{a} \Rightarrow e = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow e = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Directrice : $(\mathscr{D})$: $x = 4$; : $(\mathscr{D}')$ $x = -4$

Problème 6

Partie A :

1°/ Démontrons qu'il existe deux isométries laissant le point A invariant :

$B' \neq C'$, $\quad AB' = AC'$

et $\left(\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{AB'}\right) = \frac{\pi}{3}[2\pi] \Rightarrow \exists$ une rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ qui transforme C' en B' notée : R_1; $R_1(A) = A$

$AB' = AC'$

$(AO) \perp (B'C') \Rightarrow \exists$ une symétrie axiale d'axe (AO), qui transforme C' en B' notée S_{AD}; $S_{(AO)}(A) = A$

2°/ R_2oR_1; $\quad R_2 = R_{\left(0;\frac{2\pi}{3}\right)}$

$R_1 = R_{\left(A;\frac{\pi}{3}\right)}$

$$R_2 = S_{0x}oS_{AO} \Rightarrow \begin{cases} (\overline{AO, Ax}) = \frac{\pi}{3}[\pi] \\ (AO) \cap (Ax) = \{0\} \\ (Ox) = (Oc') \end{cases}$$

$$R_1 = S_{AO}oS_{Ay} \Rightarrow \begin{cases} (\overline{Ay, AO}) = \frac{\pi}{6}[\pi] \\ (Oy) \cap (AO) = \{A\} \\ (Ay) = (AB) \end{cases}$$

$$R_2oR_1 = S_{ox}oS_{Ay} \Rightarrow \begin{cases} (ox) \cap (Ay) = C' \\ (\overline{Ay, Ax}) = \frac{\pi}{2}[\pi] \end{cases}$$

$\Rightarrow R_{(C',\pi)} = S_{C'}$

3. Démontrons que $S_{(C'B')}oS_{(OC)} = t_{\vec{u}}$ avec $\vec{u}$ à préciser.

Comme $(C'B')//(OC) \Leftrightarrow S_{(C'B')}oS_{(OC)} = t_{\overrightarrow{2H_1H_2}}$

Avec $(H_1H_2) \perp (C'B')$

$H_1 \in (OC)$, $\quad H_2 \in (C'B')$

On a : $0 = H_1$

$\overrightarrow{OH_2} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OA}$ $\quad$; Donc $S_{(C'B')}oS_{(OC)} = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}}$

$t_{\overrightarrow{2H_1H_2}} = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}}$

4. $T = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}}$; $\quad R = R_{\left(0;\frac{\pi}{3}\right)}$

Caractérisons ToR

$T = S_{(C'B')}oS_{(OC)}$; $R = S_{OC}oS_{oz}$

$$R = S_{OC}oS_{oz} \Rightarrow \begin{cases} (\overline{oz, oc}) = \frac{\pi}{6}[\pi] \\ (ox) \cap (oc) = \{0\} \end{cases} \quad oz = (oc')$$

$ToR = S_{(C'B')}oS_{OC'}$

$= R_{\left(C'; 2(\overline{OC', C'B'})\right)}$

$R_{\left(C';\frac{\pi}{3}\right)}$

ToR est une rotation de centre C' et l'angle $\frac{\pi}{3}$

Partie B

f = sim $\quad$ Telle que :

$S(A) = A$

$S(B) = B'$

1°/ Caractérisons f

$k = \frac{AB'}{AB}$ or $AB' = AC'$ et $AC' = \frac{1}{2}AB \rightarrow k = \frac{1}{2}$

L'angle :

$\theta = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB'}\right)[2\pi]$

$= \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)[2\pi]$: Alignement des points A'B' et C

$$\theta = \frac{\pi}{3}[2\pi]$$

$$f = sim\left(A; \frac{1}{2}; \frac{\pi}{3}\right)$$

2°/ $g = sim(A; 2; (OA))$

Caractérisons fog

$fog = (R_Aoh)o(h'oS_{OA})$

$= R_Ao(hoh')oS_{OA}$

$= R_AoS_{OA}$ $\quad$ Car $hoh' = h_{(A;1)} = Id$

$= R_AoS_{OA}$

$= (S_{At}oS_{OA})oS_{OA}$

$= S_{At}$ $\quad$ Avec $(\overline{AO; At}) = \frac{\pi}{6}[\pi]$

$(At) \cap (OA) = \{A\}$

$(At) = (AC)$

$fog = S_{AC}$

$\Rightarrow gof = (S_{OA}oh')o(hoR_A)$

$= S_{OA} o R_A$ $\Rightarrow gof = S_{AC}$
$= S_{OA} o S_{OA} o S_{AC}$
Avec $(\overrightarrow{AI};\overrightarrow{AO}) = \frac{\pi}{6}[\pi]$
$AI = AB$
$= S_{AB}$
$fog \neq gof$

3°/ a) Montrons que les points O,D,E et F sont cocycliques
$$(\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{6}[\pi]$$
Les angles $(\overrightarrow{FD},\overrightarrow{FE})$ et $(\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OE})$ interceptent le même arc de cercle $\overset{\frown}{ED}$ donc ils sont égaux ; c'est-à-dire :
$(\overrightarrow{FD},\overrightarrow{FE}) = (\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OE})[\pi] \Rightarrow$O,D,E et F sont cocycliques.
Donc $(\overrightarrow{FD},\overrightarrow{FE}) = \frac{\pi}{6}[\pi]$
b) S(D)=D
$S(\mathscr{C})=\mathscr{C} \Rightarrow S(O') = 0$
$M \in \mathscr{C}$. $M' = S(M') \in \mathscr{C}$
Montrons que les points M, M' et E sont alignés
S(D)=D
S(O')=O
S(M')=M
$(\overrightarrow{BM'},\overrightarrow{EM}) = (\overrightarrow{BM'},\overrightarrow{ED}) + (\overrightarrow{BD},\overrightarrow{EM'})\,[2\pi]$
D'après théorème de l'angle au centre et inscrit:
$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{O'M'},\overrightarrow{OD}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OM})\,[2\pi]$
$= \frac{1}{2}[(\overrightarrow{O'M'},\overrightarrow{O'D}) + (\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OM})]$
Or $(\overrightarrow{O'M'},\overrightarrow{O'D}) = (\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OD})\,[2\pi]$
$= \frac{1}{2}\underbrace{[(\overrightarrow{O'M'},\overrightarrow{O'D}) - (\overrightarrow{O'M'},\overrightarrow{O'D})]}_{0[2\pi]}$
$(\overrightarrow{EM},\overrightarrow{EM'}) = 0[2\pi]$
E, M,M' sont alignés.
Caractéristiques de f
$S(D) = D$
$S(O') = 0 \Rightarrow k = \frac{DO}{DO'}$
$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\frac{DO}{2}}{DO'} \Rightarrow \frac{DO}{2DO'}$
$\frac{DO}{Do'} = 2\cos\frac{\pi}{12} \Rightarrow k = 2\cos\frac{\pi}{12}$
L'angle: $(\overrightarrow{DO'},\overrightarrow{DO}) = \frac{\pi}{12}[2\pi]$
$$S = \text{sim}\left(D; 2\cos\frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{12}\right)$$

Partie C
$\overrightarrow{IM'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IM}$
1) L'image (Γ) par f est un cercle

2) sur la figure dans la partie des figures

Problème 7

Partie A

I 1°/ $2\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IA} = \vec{O}$; $2\overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JA} = \vec{O}$
(1); $2\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IA} = \vec{O} \Rightarrow 2\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{IA} = \vec{0}$
$\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{AB} = \vec{O}$
$\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AB}$
(2) : $2\overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JA} = \vec{O}$
$3\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{AB} = \vec{O}$
$\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$
2°/ Les points I et J représentent les barycentres.
3°/ Construction de ($\mathscr{C}_2$)
II 1°/ construction de (T)
2°/ Construction de ($\mathscr{C}_1$)
Pour tracer ($\mathscr{C}_1$), on trace la perpendiculaire à (T) passant par A et la médiatrice à [AB]. Le point de rencontre E est le centre du cercle.
3° Démontrons que ($\mathscr{C}_1$) et ($\mathscr{C}_2$) ont 2 points communs Ω_1 et Ω_2
($\mathscr{C}_1$) passe par A et B, ($\mathscr{C}_2$) a pour diamètre[IJ].
J ∈ [AB], donc ($\mathscr{C}_1$) et ($\mathscr{C}_2$) ont deux points communs.
III. Démontrons que le centre de S est la similitude de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$ est Ω_1
$$S(\Omega_1) = \Omega_1$$
Ω_1 est un cercle (C 1) forme avec A et B un angle inscrit.
D'après le théorème de la tangente, on a :
$$(\overrightarrow{\Omega_1 A},\overrightarrow{\Omega_1 B}) = (\vec{T},\overrightarrow{AB})\,[2\pi]$$
$(\overrightarrow{\Omega_1 A},\overrightarrow{\Omega_1 B}) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$ d'une part.
D'autre part :
$$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\Omega_1 B}{\Omega_1 A} = \frac{1}{2}$$
$$\begin{cases} \frac{\Omega_1 B}{\Omega_1 A} = \frac{1}{2} \\ (\overrightarrow{\Omega_1 A},\overrightarrow{\Omega_1 B}) = \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases} \Rightarrow \Omega_1 \text{ est le centre de la}$$
similitude de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$
$$\text{sim}\left(\Omega_1; \frac{1}{2}; \frac{\pi}{3}\right)$$
2°/- Démontrons que A,B, Ω_1 sont alignés.
Soit M le milieu de $[A\Omega_1]$, le triangle $MB\Omega_1$ est équilatéral car $(\overrightarrow{\Omega_1 A},\overrightarrow{\Omega_1 B}) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$, et le triangle

AMB est isocèle en M donc $(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{6}[2\pi]$ ainsi
$(\overrightarrow{B\Omega_1},\overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$

Le triangle AB Ω_1 est rectangle en B.

Le centre de cercle ($\mathscr{C}_1$) est le milieu de $[A\Omega_1]$ qui est M ; or d'après la construction le centre de ($\mathscr{C}_1$) est E$\Rightarrow$ E ≡ M donc A,E,Ω_1 sont alignés.

Partie B

1. Démontrons que EJ = BK et $\left(\overrightarrow{EJ},\overrightarrow{BK}\right)=\frac{\pi}{3}[2\pi]$

E et J sont milieu respective des segments $[A\Omega_1]$ et $[AK] \Rightarrow$ (EJ) est la droite des milieux donc // à $(\Omega_1 K)$

D'après le théorème de Thalès

$\frac{AE}{A\Omega_1}=\frac{AJ}{AK}=\frac{EJ}{\Omega_1 K}$

$\frac{EJ}{\Omega_1 K}=\frac{1}{2}\Rightarrow \Omega_1 K=2EJ$

$2EJ = JK$ or B milieu de [JK]

$2EJ=2BK \Rightarrow EJ=BK$

Montrons que $\left(\overrightarrow{EJ},\overrightarrow{BK}\right)=\frac{\pi}{3}[2\pi]$

$\left(\overrightarrow{EJ},\overrightarrow{BK}\right)=\left(\overrightarrow{EJ},\overrightarrow{JB}\right)[2\pi]$

$=\left(-\overrightarrow{JE},\overrightarrow{JB}\right)[2\pi]$

$=\left(\overrightarrow{JE},\overrightarrow{JB}\right)+\pi[2\pi]$

Les triangles $J\Omega_1 K$ et $EB\Omega_1$ sont équilatéraux car $\Omega_1 K=\Omega_1 J=JK$ et $EB=E\Omega_1=\Omega_1 B$

L'angle $\left(\overrightarrow{JE},\overrightarrow{JB}\right)=\left(\overrightarrow{JE},\overrightarrow{J\Omega_1}\right)+\left(\overrightarrow{J\Omega_1},\overrightarrow{JB}\right)[2\pi]$

$=\frac{-2\pi}{3}[2\pi]$

Donc $\left(\overrightarrow{EJ},\overrightarrow{BK}\right)=-\frac{-2\pi}{3}+\pi[2\pi]$

$\Longrightarrow \left(\overrightarrow{EJ},\overrightarrow{BK}\right)-\frac{\pi}{3}[2\pi]$

2- Déduisons R

Comme EJ=BK et $\left(\overrightarrow{EJ},\overrightarrow{BK}\right)\neq 0[2\pi]$

Donc ∃ une rotation

$R/\begin{matrix}R(E)=B\\R(J)=K\end{matrix}\Longrightarrow\begin{cases}EJ=BK\\\left(\overrightarrow{EJ},\overrightarrow{BK}\right)=\frac{\pi}{3}[2\pi]\end{cases}$

3- Démontrons que $[EB]\cap[JK]=\{\Omega_1\}$

Le triangle $EB\Omega_1$ est équilatéral, la droite $(J\Omega_1)$ est la médiatrice de [EB].

De même la droite $(\Omega_1 B)$ est la médiatrice du segment [JK].

$\Rightarrow$ Les droites $(\Omega_1 B)$ et $(J\Omega_1)$ se coupent en Ω_1

Med $[EB]\cap$ Med $[JK]=\{\Omega_1\}$.

Déduction du centre de R Ω_1 est le centre de la rotation.

II. $g=T_{\overrightarrow{BA}}$ or

$r\left(\Omega_1;\frac{\pi}{3}\right)$; $T_{\overrightarrow{BA}}$

1- Démontrons que Ω_1, J et F sont alignés.

Les triangles JEB er $EB\Omega_1$ sont respectivement isocèle en J, et équilatéral.

Les sommets J et $\Omega_1 \in$ donc à la droite (Ω_1, J). Or F est le symétrique de Ω_1 par rapport à (EB). Donc Ω_1, J et F sont alignés.

2. a) Déterminons D tel que $T_{\overrightarrow{BA}}=S_{D_1}oS_D$ et

$r=S_D oS_{D_2}$

On a $t_{\overrightarrow{BA}}=S_{D_1}oS_D \Longrightarrow (D_1)//(D)$ et $\overrightarrow{BA}$ est le vecteur normal $r=S_D oS_{D_2}\Longrightarrow$ (D) passe par Ω_1 donc (D) est la droite perpendiculaire à (BA) passant par Ω_1 qui est $(\Omega_1 B)$

b) $(D)=(\Omega_1 B)$. Déterminons (D_1) et (D_2)

$T_{\overrightarrow{BA}}=S_{D_1}oS_D \Rightarrow D_1=t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}}(D)$

$=(OE)$

(D_1) est la médiatrice de [AB]

$r=S_D oS_{D_2}\Rightarrow (D_2 D)=\frac{\pi}{6}[\pi]$

$\rightarrow (D_2)=(F\Omega_1)$

c) $g=T_{\overrightarrow{BA}}\, o\, r=S_{D_1}oS_{D_2}$

Comme $(D_1)\cap(D)=\{\Omega_1\}\Rightarrow g$

$g=R_{\left(F;\frac{\pi}{3}\right)}$

Le centre de g est F.

Partie C

L'ellipse. $C=2$; $a=4$

$b=2\sqrt{3}$.

1) Les sommets sont :

$(4,0)$; $(-4,0)$; $(0,2\sqrt{3})$; $(0,-2\sqrt{3})$

2) Les points de (E) situés sur (JF) est (KE) sont F et E.

Partie D

$\text{sim}\left(\Omega_1;\frac{1}{2};\frac{\pi}{3}\right)$

$z'=az+b$

$a=\frac{1}{4}e^{i\frac{\pi}{3}}\Rightarrow a=\frac{1}{4}(1+i\sqrt{3})$

$z'=\frac{1}{4}(1+i\sqrt{3})z+b$

$z_\Omega=\frac{1}{4}(1+i\sqrt{3})z_\Omega+b$

$b=z_\Omega\left[1-\frac{1}{4}(1+i\sqrt{3})\right]$

$=z_\Omega\left(\frac{3-i\sqrt{3}}{4}\right)$

$=\frac{1}{4}(3+2i\sqrt{3})(3-i\sqrt{3})$

$b=\frac{4}{4}(5+i\sqrt{3})$

Donc

$z'=\frac{1}{4}(1+i\sqrt{3})z+\frac{3}{4}(5+i\sqrt{3})$

Ou $z'=x'+iy'$, $z=x+iy$

$z'=\frac{1}{4}(1+i\sqrt{3})(x+iy)+\frac{3}{4}(5+i\sqrt{3})$

$=\frac{1}{4}(x+iy+ix\sqrt{3}-\sqrt{3}y)+\frac{3}{4}(5+i\sqrt{3})$

$=\frac{1}{4}x-\frac{\sqrt{3}}{4}y+\frac{15}{4}+i\left(\frac{1}{4}y+\frac{\sqrt{3}}{4}x+\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$

$$\begin{cases}x'=\frac{1}{4}x-\frac{\sqrt{3}}{4}y+\frac{15}{4}\\y'=\frac{\sqrt{3}}{4}x+\frac{1}{4}y+\frac{3\sqrt{3}}{4}\end{cases}$$

L'équation de l'ellipse

$(E):\frac{(x-x_B)^2}{a^2}+\frac{(y-y_B)^2}{b^2}=1$

$B(3;0)$ $a=4$; $b=2\sqrt{3}$

$(E):\frac{(x-3)^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$

Problème 8

1°/a) Montrons qu'il existe $r(A) = B$ et $r(C) = D$

On a : $AC = BD$ et

$$\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}\right) = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$$

$\Rightarrow r(AC) = BD \Longrightarrow$ Donc il existe r

Angle: on a :

$$\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}\right) = \theta = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$$

$$\theta = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$$

b) Montrons que I centre der $\in (\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$

On a $r_I(A) = B \Leftrightarrow IB = IA$

$$\left(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}\right) = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$$

$\Rightarrow I \in$ au cercle de diamètre $[AB] \Rightarrow I \in (\mathscr{C}_1)$

$r_I(C) = D \Rightarrow ID = IC$ et

$$\left(\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{ID}\right) = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$$

$\Rightarrow I \in$ au cercle de diamètre $[CD]$, $I \in (\mathscr{C}_3)$

Conclusion : $I \in (\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_3)$

2°/a) Montrons qu'il existe une rotation $r'/r'(A) = D$ et $r'(C) = B$

$AC = DB$ et $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB}\right) = \left(\overrightarrow{AC}, -\overrightarrow{BD}\right) + \pi[2\pi]$

$$= -\frac{\pi}{2} + \pi$$

$\Rightarrow \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}\right) = \frac{\pi}{2}[2\pi] \Rightarrow \exists\, r''$

b) Montrons que J centre de $r' \in (\mathscr{C}_2)$ et $(\mathscr{C}_4)$

On a : $r'_J(A) = D \Longrightarrow JD = JA$

$$\left(\overrightarrow{JA}, \overrightarrow{JD}\right) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

$\Longrightarrow J \in$ au cercle de diamètre $[AD] \Rightarrow$

$J \in (\mathscr{C}_4) : r'_J(C) = B \Longrightarrow JB = JC$

$$\left(\overrightarrow{JC}, \overrightarrow{JB}\right) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

$\Longrightarrow J \in$ au cercle de diamètre $[BC] \Rightarrow J \in (\mathscr{C}_2)$

Conclusion : $J \in (\mathscr{C}_2)$ et $(\mathscr{C}_4)$

3°/ Nature de INJM :

INJM est un carré.

Preuve : $N = r_I(M) \Longrightarrow IN = IM \Rightarrow (IMN)$ est un triangle rectangle isocèle en I d'hypoténuse [MN].

$M = r_J(N) \Longrightarrow JM = JN \Rightarrow (JNM)$ est un triangle rectangle isocèle en J d'hypoténuse [MN].

(IMN) et (JNM)ont même hypoténuse

$[MN] \Rightarrow IN = IM = JM = JN$

INJM est un carré.

4°/

$$S_{\left(I; \sqrt{2}; \frac{\pi}{4}\right)}$$

a) Construction des images par S des D,N et B

$$S_I(D) = D' \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{ID'}{ID} = \sqrt{2} \\ \left(\overrightarrow{ID}, \overrightarrow{ID'}\right) = \dfrac{\pi}{4}[2\pi] \end{cases}$$

$\Rightarrow ID' = ID\sqrt{2} \Rightarrow D' = R \quad S(D) = R$

$$S_I(N) = N' \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{IN'}{IN} = \sqrt{2} \\ \left(\overrightarrow{IN}, \overrightarrow{IN'}\right) = \dfrac{\pi}{4}[2\pi] \end{cases}$$

$\Rightarrow INN'$ est un triangle rectangle isocèle en N.

$N \equiv J \Rightarrow S(N) = J$

$$S_I(B) = B' \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{IB'}{IB} = \sqrt{2} \\ \left(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IB'}\right) = \dfrac{\pi}{4}[2\pi] \end{cases}$$

$\Rightarrow IBB'$ est un triangle rectangle isocèle en $B \Rightarrow B' \equiv P$

$\Rightarrow S(B) = P$

c) Déduisons que J milieu de [PR]

N milieu de [BD]

Or S[BD]=[PR] et S(N)=J

$\Rightarrow$ J Milieu de [PR]

Problème 9

1°/ S(C)=A et S(B)=C

a) Déterminons le rapport k

$$\begin{matrix} S(C) = A \\ S(B) = C \end{matrix} \Rightarrow k = \frac{AC}{CB} \Rightarrow k = \frac{b}{a}$$

L'angle. $\theta = \left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AC}\right)[2\pi]$

$$= \left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}\right) + \pi[2\pi]$$

$$= -\frac{\pi}{2} + \pi[2\pi]$$

$$\theta = -\frac{\pi}{2} + \pi[2\pi]$$

c) Montrons que le point inscrit est le point H

$$\begin{matrix} S(C) = A \\ S(H) = H \end{matrix} \Rightarrow k = \frac{AH}{HC} \Rightarrow k = \frac{b}{a}$$

$$= \left(\overrightarrow{HC}, \overrightarrow{HA}\right) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

Comme $(BA)\perp(CD)$ en $H \Rightarrow \left(\overrightarrow{HC}, \overrightarrow{HA}\right) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$

$$\frac{AH}{HC}$$

Considérons le triangle ABC rectangle en C.

$$\text{Cotan } A = \frac{BC}{CA} \Rightarrow \text{Cotan } A = \frac{b}{a}$$

Dans le triangle HAC rectangle en H.

$$\tan C = \frac{HA}{HC}$$

Or les angles $\widehat{A}$ et $\widehat{C}$ sont complémentaires

$\Longrightarrow \tan C = \text{Cotan } A$

$$\Longrightarrow \frac{HA}{HC} = \frac{b}{a}$$

$\Longrightarrow$H est le centre de cette similitude

$$S\left(H; \frac{b}{a}; \frac{\pi}{2}\right)$$

c) $S(A) = A' \Rightarrow \frac{HA'}{HA} = \frac{b}{a}$

$$\left(\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HA'}\right) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

$\tan A = \frac{HD}{HA}$ dans le triangle HAD rectangle en H

$\text{Cotan } A = \frac{b}{a}$ dans le triangle ABC rectangle en C

$$\tan A = \cot A \Rightarrow \frac{HD}{HA} = \frac{b}{a}$$
$$\left(\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HD}\right) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$$
$$\Rightarrow S(A) = D$$

2°/ Montrons que $HC^2 = HA \times HB$

$$S(C) = A \Longrightarrow \frac{HA}{Hc} = \frac{b}{a}$$
$$S(B) = C \Rightarrow \frac{Hc}{HB} = \frac{b}{a}$$
$$\Rightarrow \frac{HA}{HC} = \frac{HC}{HB}$$
$$HC^2 = HA \times HB$$

3°/ La similitude conserve le milieu.

$\Rightarrow S(I) = J$ et $S(J) = K$

$\Rightarrow \frac{JK}{JI} = \frac{b}{a}$ et $\left(\overrightarrow{JI}, \overrightarrow{JK}\right) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$

$\Rightarrow$ le triangle J,I,K est rectangle en J.

H est le centre de la similitude

$$\begin{matrix} S(H) = H \\ S(I) = K \end{matrix} \Rightarrow \left(\overrightarrow{HJ}, \overrightarrow{HK}\right) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

$\Rightarrow$HJ est une hauteur dans le triangle IJK.

Problème 10

1. Figure

ABCD est un carré de centre O.
P est un point de [BC] distinct de B
Q est le point d'intersection des droites (AP) et (CD).
La perpendiculaire Δà (AP) passant par A coupe (BC) en R et (CD) en S.

2.a) Soit $r$la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

L'image de B par $r$est D car AB=AD et

$\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}\right) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

La droite image de (BC) est donc la droite orthogonale à (BC) passant par D, c'est-à-dire (CD).

De plus, $(AR)\perp(AQ)$.

Donc l'image de la droite (AR) par r est la droite (AQ).

b) $R \in (BC)$, donc $r(R) \in (CD)$.

$(AQ) \cap (CD) = \{Q\}$, donc $r(A) = S$

De même $(AP) \perp (AS)$ et $r(P) \in (CD)$, donc $r(P) = S$

c) Comme AR=AQ et $(AR)\perp(AQ)$, le triangle RAQ est rectangle isocèle en A.

de la même façon, on montre que APS est rectangle isocèle en A.

3.a) Soit N le milieu du segment [PS] et M celui du segment [QR].

On considère la similitude directe S de centre A, d'angle $\frac{\pi}{4}$, et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(AM) est médiatrice et bissectrice du triangle isocèle rectangle ARQ.

$\left(\overrightarrow{AR}; \overrightarrow{AM}\right) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$ et $\frac{AM}{AR} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Donc $s(R) = M$.

De même, en considérant le triangle isocèle rectangle APS, on montre que $s(P) = N$.

c) L'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{4}$ est le point B' de [AC] tel que AB'=AB. L'image de B' par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$est le point B" de [AC] tel que $\frac{AB"}{AB'} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Donc $s(B) = O$.

Comme on a $\left(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{OD}\right) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$ et $\frac{OD}{BC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, l'image du segment [BC] privé du point B est donc le segment [OD] privé du point O.

c) $s(B) = O$ et $s(R) = M$, donc a $\left(\overrightarrow{BR}; \overrightarrow{OM}\right) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$

Et donc$M \in (OB)$. Par conséquent, les points M, B, N et D sont alignés

Problème 11

1. Plaçons les points A,B,C et I
Le triangle est équilatéral
2. Les coordonnées des points B et C

$$C(x_C, y_c) \Rightarrow x_c = 1$$

Calcul de $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{IC}{OC} = \frac{y}{2}$

$$y_c = 2\sin\frac{\pi}{3} \Rightarrow y_c = \sqrt{3}$$
$$C(1; \sqrt{3})$$

On déduit $B(1; -\sqrt{3})$ car $B = S_{ox}(C)$

3. $R_{\left(B;\frac{\pi}{3}\right)}$; $R_{\left(C;\frac{\pi}{3}\right)}$

a) $f = R_B o R_C = R(\Omega, \alpha)$

$$R_B = S_\Delta o S_{BC} \Rightarrow \begin{cases} (\Delta) \cap (BC) = \{B\} \\ \left(\overrightarrow{BC}, \Delta\right) = \frac{\pi}{6}[\pi] \end{cases} \Rightarrow (\Delta) = (OB)$$

$$R_C = S_{BC} o S_\Delta \Rightarrow \begin{cases} (\Delta') \cap (BC) = \{C\} \\ \left(\overrightarrow{\Delta', BC}\right) = \frac{\pi}{6}[\pi] \end{cases} \Rightarrow (\Delta') = (OC)$$

$$f = (S_{OB} o S_{BC}) o (S_{BC} o S_{OC})$$
$$= S_{OB} o S_{OC}$$

$R_{\left(0; 2\left(\overline{OC, OB}\right)\right)}$ or $\left(\overline{OC, OB}\right) = -\frac{2\pi}{3}[\pi]$

$R_{\left(0; -\frac{4\pi}{3}\right)} = R_{\left(0; \frac{2\pi}{3}\right)}$

$f = R_{\left(0; \frac{2\pi}{3}\right)}$

c) Les images de A, B et C par f

$f(A) = R_0(A) = A'$

$$\Rightarrow \begin{cases} OA' = OA \\ \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}\right) = \frac{2\pi}{3}[2\pi] \end{cases} \qquad A' = B$$

$f(B) = C$; $\quad f(C) = A$

4) D milieu de [OB] ; $\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{OD}$

$$D\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Les coordonnées de L

$$\begin{pmatrix} x_L - x_A \\ y_L - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_D \\ y_D \end{pmatrix}$$
$$x_L = x_D + x_A \Rightarrow x_L = -3/2$$
$$y_L = y_D + y_A \Rightarrow y_L = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Montrons que $\overrightarrow{OL} \perp \overrightarrow{OD}$

$$\begin{pmatrix} \frac{-3}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = 0$$

$\overrightarrow{OL} \perp \overrightarrow{OB}$

On sait que $\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{OD}$

$\overrightarrow{OL} \perp \overrightarrow{AL} \Rightarrow$le triangle OLA est rectangle en L.

b)$g = S_{AL} o S_{AC}$

Comme $(OL)//(AC) \Rightarrow g = t_{\vec{u}}$

$\vec{u} = 2\overrightarrow{AL}$(Vecteur normal)$\Rightarrow \overrightarrow{OB}$

$g = t_{\overrightarrow{OB}}$

$t_{\overrightarrow{OB}}(O) = O' \Rightarrow \overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{OB} \Rightarrow O' \equiv B$

$t_{\overrightarrow{OB}}(O) = B$

Problème 12

$S_1 = S(A; k_1, \theta_1)$: $S_1(A) = A$, $S_1(B) = E$

$S_2 = S(E; k_2, \theta_2)$: $S_2(A) = E$, $S_2(B) = D$

1°/ Caractérisons S_1 et S_2

$S_1(A) = A$, $S_1(B) = E \Rightarrow$ Le rapport $k_1 = \dfrac{AE}{AB}$

L'angle $\theta_1 = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}\right)[2\pi]$

Considérons le triangle AIC rectangle en I

$AC^2 = AI^2 + IC^2$

$AB^2 = \frac{AB^2}{4} + \frac{9}{4}EC^2$ car $EC = AE$

$\frac{3}{4}AB^2 = \frac{9}{4}AE^2 \Rightarrow AB^2 = 3AE^2$

$3AE^2 = AB^2$

$$\frac{AE^2}{AB^2} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow k_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Autres possibilités

Le triangle étant équilatéral (AE) est la bissectrice de $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right)$

$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}\right) = \frac{\pi}{6}[2\pi]$

$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{AI}{AE} \Rightarrow \cos\frac{\pi}{6} = \frac{AB}{2AE}$ dans le triangle AEI⊥en I

$$\frac{AE}{AB} = \frac{1}{2\cos\frac{\pi}{6}} \Rightarrow \cos\frac{AE}{AB} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$S_1 = S\left(A; \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\pi}{6}\right)$$

$S_2 = S(E) = E$

$S_2 = S(B) = D$

$$k_2 = \frac{ED}{EB} \Rightarrow k_2 = 1$$

$$\theta_2 = \left(\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{ED}\right)[2\pi]$$

On sait que $\left(\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{EC}\right) = 2\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)[2\pi]$

(L'angle inscrit et l'angle au centre interceptant le même arc de cercle)

$\left(\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{EC}\right) = \frac{2\pi}{3}[2\pi]$

Or $\left(\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{EC}\right) = 2\left(\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{ED}\right)[2\pi]$ car (ED) est une bissectrice $\left(\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{ED}\right) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$

$$S_2 = S\left(E; 1, \frac{\pi}{3}\right) = R_{\left(E; \frac{\pi}{3}\right)}$$

2°/ a) Les coordonnées des points A, B, I,E,F,C.D

$A(0,0)$; $B(1,0)$ $F(0,1)$ $I(\frac{1}{2};0)$

$$E\left(\frac{1}{2}; y_E\right); \tan\frac{\pi}{6} = \frac{y_E}{x_I} \Longrightarrow y_E = \frac{1}{2}\tan\frac{\pi}{6}$$

$y_E = \frac{\sqrt{3}}{6}$ $\quad E\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$

$$C\left(\frac{1}{2}; y_C\right); \tan\frac{\pi}{3} = \frac{y_C}{x_I} \Rightarrow y_C = \frac{1}{2}\tan\frac{\pi}{3} \Rightarrow y_c = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$C\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $D(1; y_D) = \left(1; \tan\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow D\left(1; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

b) Donnons les expressions complexes de S_1 et S_2

$$S_1: z' = az + b$$

$$a: \begin{cases} \varphi = k \\ \arg a = \theta[2\pi] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \theta = \frac{\pi}{6}[2\pi] \end{cases}$$

$$a = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2}i\right)$$

$$z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z + b$$

On sait que $S_1(A) = A \Rightarrow z_A = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z_A + b$

$$z_A = 0 \quad \Longrightarrow b = 0 \quad \Longrightarrow z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i\right)z$$

$$S_2: z' = az + b$$

$$a = e^{i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow a = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z + b$$

$$S_2(B) = D \Rightarrow z_D = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z_B + b$$

$$1 + \frac{1}{2}i = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + b \Rightarrow b = \frac{1}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}i$$

$$z' = \left(\frac{1}{2}i = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + \frac{1}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}i$$

3°) $f = S_2 o S_1$

a) Calcul de $f(B)$

$f(B) = S_2 o S_1(B)$

$= S_2[S_1(B)]$
$= S_2(E)$
$= E$

$f(B) = E$

b) Caractéristiques de f

f est la composée de deux similitudes et une similitude.
Le Rapport est le produit des rapports

$$k = k_1 \times k_2 = k_1 \Rightarrow k = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

L'angle : La somme des angles :

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

Le centre $\Omega : f(\Omega) = \Omega$

$$f: z' = az + b$$

$$z' = \frac{\sqrt{3}}{3} iz + b$$

$$f(B) = E \Longrightarrow z_E = \frac{\sqrt{3}}{3} iz_B + b$$

$$\Longrightarrow b = z_E - \frac{\sqrt{3}}{3} iz_B = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} i$$

$$z' = \frac{\sqrt{3}}{3} iz + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} i$$

$$f(\Omega) = \Omega \Rightarrow z_\Omega = \frac{\sqrt{3}}{3} iz_\Omega + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} i$$

$$z_\Omega = \frac{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} i}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3} i} = \frac{3 - \sqrt{3}i}{6 - 2\sqrt{3}i} = \frac{1}{2}$$

$$z_\Omega = \frac{1}{2} \Rightarrow \Omega\left(\frac{1}{2}; 0\right) \Rightarrow \Omega \equiv I$$

$$f = S_{\left(I; \frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$\frac{4}{9}(\varepsilon): \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}{3} + y^2 = \frac{1}{12}$$

$$4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 12y^2 = 1$$

$$(\varepsilon): \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{4}} + \frac{y^2}{\frac{1}{12}} = 1$$

(ε) est une ellipse : centre : $I\left(\frac{1}{2}; 0\right)$

Sommets : $\left(\frac{1}{2}; 0\right); \left(-\frac{1}{2}; 0\right); \left(0; \frac{\sqrt{3}}{6}\right); \left(0; -\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$

$$C = \sqrt{a^2 - b^2} \Rightarrow C = \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{12}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

L'axe focal : (AB)

$$F\left(\frac{\sqrt{6}}{6}; 0\right) \quad F'\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}; 0\right)$$

Directrice : $x = \frac{a^2}{C} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$

$$x = \frac{\sqrt{6}}{4}; \quad x' = -\frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$e = \frac{C}{a} \Rightarrow e = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

b) Vérification

$A \in (\varepsilon); B \in (\varepsilon); \ E \in (\varepsilon), C' \in (\varepsilon)$

Problème : 13

Partie A

1. $F(\sqrt{5}; 0) \quad F'(-\sqrt{5}; 0) \quad e = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$$e = \frac{c}{a} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{5}}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{5} \times \frac{2}{\sqrt{5}} = 2.$$

$$C^2 = 4 + b^2 \Rightarrow b^2 = 5 - 4 = 1$$

Donc $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$

$(H) : \frac{x^2}{4} - y^2 = 1$

2. $x^2 - 4y^2 = 4$ est une hyperbole de centre (0 ;0) :

$F(\sqrt{5}; 0) \ F'(-\sqrt{5}; 0)$

$$e = \frac{\sqrt{5}}{2}; \quad y = \frac{1}{2}x \ ; \ y' = -\frac{1}{2}x.$$

Directrices. (D) : $x = \frac{4}{\sqrt{5}} \Rightarrow x = \frac{4\sqrt{5}}{5}$ (D'). $x = \frac{4\sqrt{5}}{5}$

3. $\begin{cases} f(x) = (2 - x)\ln(2 - x) & \text{si } x < 2 \\ f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 - 4} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

a) $y = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 - 4} \Rightarrow y^2 = \frac{x^2 - 4}{4} \Rightarrow x^2 - 4y^2 = 4$

Pour $x \geq 2$; $C_f = (H)$.

b) Continuité de f sur IR

la fonction f $x \to (2 - x)\ln(2 - x)$ est continue sur $]-\infty; 2[$.

La fonction f $x \to \frac{1}{2}\sqrt{x^2 - 4}$ est continue sur $[2; +\infty[$.

f est continue sur $IR - \{2\}$

Etudions la continuité de f sur 2.

$f(2) = 0 \quad \lim_{2^-} f(x) = 0 \quad \lim_{2^-} f(x) = 0$, f est continue en $x_0 = 2$ donc continue sur IR.

c) Dérivabilité de f en $x_0 = 2$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{2^-} \frac{(2 - x)\ln(2 - x)}{x - 2} = \lim_{2^-} -\ln(2 - x) = +\infty$$

$$\lim_{2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{2^+} \frac{\frac{1}{2}\sqrt{x^2 - 4}}{x - 2} = \lim_{2^+} \frac{1}{2} \frac{x+2}{\sqrt{x^2 - 4}} = +\infty$$

f n'est pas dérivable en $x_0 = 2$. (C_f) présente une tangente verticale.

d) les variations de f

On s'occupera de la partie $x < 2$ car l'autre partie est déjà faite à la partie A

Pour $x < 2$.

$f(x) = (2 - x)\ln(2 - x)$.

$E_f =]-\infty; 2[$ $\quad \lim\limits_{-\infty} f(x) = +\infty$

$$f'(x) = -\ln(2 - x) - \frac{1}{2 - x}(2 - x)$$

$$f'(x) = -\ln(2 - x) - 1$$

Signe de $f'(x)$

$$f'(x) \geq 0 \Rightarrow -\ln(2 - x) - 1 \geq 0$$
$$\Rightarrow x \geq 2 - e^{-1}$$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$-e^{-1}$	0

Branches infinies

$$\lim_{-\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{-\infty} f(x) = \frac{f(x)}{x} = \lim_{-\infty} \frac{(2 - x)\ln(2 - x)}{x} = -\infty$$

(C_f) Présente une branche parabolique de direction $(oy) \to -\infty$.

$x = 0 \quad y = 2\ln 2$

$y = 0 \quad x = 1; \; x = 2$

4. Calcul de l'aire.

$A = \int_0^1 (2 - x)\ln(2 - x)\,dx$

Posons : $X = 2 - x \Rightarrow dx = -dx$

$x = 2 - X$

$x = 0, \quad X = 2$

$x = 1 \quad X = 1$

$$-\int_2^1 X\ln X dX \Rightarrow \int_1^2 X\ln X dX$$

$$U' = X \to U = \frac{X^2}{2}$$

$$V = \ln X \to V' = \frac{1}{X}$$

$$A = \left[\frac{X^2}{2}\ln X\right]_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 X dX$$

$$= \left[\frac{X^2}{2}\ln X - \frac{1}{4}X^2\right]_1^2.$$

$$A = 2\ln 2 - 1 + \frac{1}{4}\ U.a \Rightarrow A = 2\ln 2 - \frac{3}{4}\ U.a$$

Partie B

$$g(x) = \frac{e^t + e^{-t}}{5} \quad t \in IR$$

1. Montrons que $g(t) = t$ admet une solution unique $t_0 \in]0; 1[$.

On pose $h(t) = g(t) - t$.

Continue et dérivable sur $]0; 1[$.

$$h'(t) = g'(t) - 1 \Rightarrow h'(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{5} - 1$$

$$h'(t) = \frac{e^t - e^{-t} - 5}{5}$$

$$h'(t) = \frac{1}{5e^t}(e^{2t} - 5e^t - 1)$$

$$h'(t) = 0 \Rightarrow e^{2t} - 5e^t - 1 = 0$$

On pose $X = e^t$ on a $X^2 - 5X - 1 = 0$

$\Delta = 29$ On a $X_1 = \frac{5 - \sqrt{29}}{2}$; $X_2 = \frac{5 + \sqrt{29}}{2}$

$$X_1 < 0 \Rightarrow X_2 = \frac{5 + \sqrt{29}}{2} \Rightarrow e^t = X_2 \Rightarrow t = \ln X_2$$

t	0	1
$h'(t)$	−	
$h(t)$	$\frac{2}{5}$	$h(1)$

h est continue et dérivable sur $[0; 1]$ h est décroissante de plus $h(0).h(1) < 0 \Rightarrow \exists t_0 \in]0; 1[$; tel que

$$h(t_0) = 0$$
$$h(t_0) = g(t_0) \Rightarrow g(t_0) = t_0$$

Donc t_0 est l'unique solution.

2. Variation de g et celle de g' sur $]0; 1[$.

$$g(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{5}$$

$$g'(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{5} \Rightarrow g'(t) = \frac{e^{2t} - 1}{5e^t}$$

Signe de $g'(t)$

$$g'(t) \geq 0 \Rightarrow e^{2t} - 1 \geq 0 \Rightarrow e^{2t} > 0$$
$$2t > 0 \Rightarrow t > 0$$

x	$-\infty$		0
$g'(x)$	0	+	$\frac{e^2-1}{5e}$
$g(x)$	$\frac{2}{5}$		$\frac{e^2+1}{5e}$

$$g'(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{5} \Rightarrow g''(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{5}$$

x	0	1
$g''(t)$	+	
$g'(t)$	0	$\frac{e^2-1}{5e}$

$$\forall\ t \in [0; t],\ 0 \leq g'(t) \leq \frac{e^2-1}{5e} \leq \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} \leq g'(t) \leq \frac{1}{2}$$

$$\forall t \quad |g'(t)| \leq \frac{1}{2}.$$

$t \in [0; 1]$: g est croissante ; $g(0) \leq g(t) \leq g(1)$

$$0 \leq \frac{2}{5} \leq g(t) \leq \frac{e^2 + .1}{5e} \leq 1$$

$$0 \leq g(t) \leq 1 \Rightarrow g(t) \in [0; 1]$$

3. $U_0 = \frac{1}{2}$; $U_{n+1} = g(U_n)$

Montrons que $U_n \in [0;1]$

Montrons que $U_{n+1} \in [0;1]$

On sait que $0 \leq U_n \leq 1$

$$g(0) \leq g(U_n) \leq g(1)$$
$$0 \leq g(U_n) \leq 1$$
$$0 \leq U_{n+1} \leq 1 \Rightarrow U_{n+1} \in [0;1]$$

Donc $\forall n, U_n \in [0;1]$

La fonction g est continue et dérivable sur $]0;1[$et comme pour $t \in [0;1]$: $|g'(t)| \leq \frac{1}{2}$ alors pour tout$U_n \in [0;1]$, et $t_0 \in [0;1]$, on peut appliquer l'inégalité des accroissements finis .

$$|g(U_n) - g(t_0)| \leq \frac{1}{2}|U_n - t_0|$$

or $g(U_n) = U_{n+1}$ et $g(t_0) = t_0$ d'après 1. Partie B on a donc

$$|U_{n+1} - t_0| \leq \frac{1}{2}|U_n - t_0|$$

Déduisons que $\forall$ n $|U_n - t_0| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - t_0|$ et $|U_n - t_0| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

On sait que

$$|U_{n+1} - t_0| \leq \frac{1}{2}|U_{n-1} - t_0|$$
$$|U_{n-1} - t_0| \leq \frac{1}{2}|U_{n-2} - t_0|$$

.

.

.

$$|U_n - t_0| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - t_0|$$

Montrons que $|U_n - t_0| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

Faisons un raisonnement par récurrence.

$|U_0 - t_0| \leq \frac{1}{2}$ Vraie

Supposons que cela est vraie au rang n c.-à-d.

$|U_n - t_0| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

Montrons que cela est aussi vraie au rang $n+1$

$$|U_{n+1} - t_0| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$$
$$|U_n - t_0| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

Or $|U_{n+1} - t_0| \leq \frac{1}{2}|U_n - t_0|$

$$\leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

Donc $\forall n \in IN$ $\leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$ vraie

$$|U_n - t_0| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

Déduisons la convergence de (U_n)

$$|U_n - t_0| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \Longrightarrow -\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \leq U_n - t_0 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

D'après le théorème de gendarmes on a

$$\lim_{\infty} -\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \lim_{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0 \Longrightarrow$$
$$\lim_{\infty}(U_n - t_0) = 0 \Longrightarrow \lim_{+\infty} U_n = t_0$$

Problème 14

Partie A:

$g(x) = 2\ln(1-x) + \frac{x}{x-1}$ $E_g =]-\infty;0]$

1°/ Tableau de variation :

$\lim_{-\infty} g(x) = +\infty$

$g(0) = 0$

Dérivée : $g'(x) = \frac{2x-3}{(x-1)^2}$

Le signe dépend de $2x - 3$ car $(x-1)^2 > 0$

Posons $2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

x	$-\infty$ $\qquad$ 0
$g'(x)$	$-$
$g(x)$	$+\infty \searrow 0$

2°/ $\forall x \in]-\infty;0]$, $g(x) > 0$

Partie B.

$$\begin{cases} f_a(x) = a + x^2\ln(1-x) \text{ si } x < 0 \\ f_a(x) = (ax+a)e^{-x} \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

1°/ Etude de la continuité et de la dérivabilité en $x_0 = 0$

$Ef =]-\infty;+\infty[$

Continuité :

$f(0) = a$

$\lim_{0^-} f(x) = a;$ $\quad \lim_{0^+} f(x) = a$

f est continue en $x_0 = 0$

Dérivabilité :

$$\lim_{0^-}\frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{0^-}\frac{x^2\ln(1-x)}{x} = 0$$

$$\lim_{0^+}\frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{0^+}\frac{(ax+2)e^{-x} - a}{x} = 0$$

f est dérivable en $x_0 = 0$ $(\mathcal{C}f)$ admet en ce point une tangente horizontale.

2° Dressons le tableau de variation

$]-\infty;+\infty[$

Limites aux bornes :

$\lim_{-\infty} f(x) = +\infty ; \lim_{+\infty} f(x) = 0$

Dérivée :

$x \in]-\infty;0]$; $\quad f(x) = a + x^2\ln(1-x)$

$f'(x) = xg(x)$

$\forall x \in]-\infty;0]$; $g(x) > 0$, le signe dépend de x

Comme $x < 0$, donc $\forall x \in]-\infty;0[$, $f'(x) < 0$

$x \in [0;+\infty[$; $f'(x) = -axe^{-x}$

$\forall x \in [0;+\infty[$; $f'(x) < 0$

Tableau de variation

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'(x)	$-$	0	$+$
f(x)	$+\infty$ ↘	a ↘	0

Branches infinies

La droite $y = 0$ est asymptote horizontale à $+\infty$

à $-\infty$ la courbe (Cf) admet une branche parabolique de direction (oy)

Partie C : a = 1

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'(x)	$-$	0	$+$
f(x)	$+\infty$ ↘	1 ↘	0

$f_1(x) = 2e^{-1} = 0{,}73$

$f_1(x) = 1 + \ln 2 = 1{,}7$

2. $A = \int_1^2 (x+1)e^{-x}\,dx$

$A = 4(-4e^{-2} + 3e^{-1})cm^2$

3°/ (C) : $F\left(0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $F'\left(0; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $J(0;1)$ sommet.

L'axe focale de l'ellipse est (oy) et $b > a$

Déterminons les sommets :

On a :

$J(0;1)$; $(0;-1)$

$(a;0)$; $(-a;0)$

Avec $a = \sqrt{b^2 - c^2}$

4°/ $S = Sim(J) = J$

$S(J) = J$

$S(0) = 0'$ O' milieu de [IJ]

$I(1;0)$

a) Caractéristique S

Le centre J :

Le rapport $k = \frac{JO'}{JO}$

Le triangle OIJ est rectangle isocèle en O.

D'après le théorème de Pythagore

$JI^2 = 2JO^2$ or $JI = 2JO''$

$4JO'^2 = 2JO^2$

$\frac{JO'^2}{JO^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{JO'}{JO} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow k = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Angle:

$\left(\overrightarrow{JO}, \overrightarrow{JO'}\right) = \theta[2\pi]$

$\left(\overrightarrow{JO}, \overrightarrow{JO'}\right) = \left(\overrightarrow{JO}, \overrightarrow{JI}\right)[2\pi]$.

$= \frac{\pi}{4}[2\pi]$

$S = Sim\left(J; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\pi}{4}\right)$

b) $(\mathcal{C}') = S(\mathcal{C}f)$: $[0;+\infty[$

5°/ $A_0 = A$, $\forall n \in IN$, $A_{n+1} = S(A_n)$

a) $A_1 = S(A_0) \Leftrightarrow A_1 = k^2 A_0$

$A_1 = \frac{1}{2}A_0$

$A_2 = A_1 = \frac{1}{2}A_1 \Rightarrow A_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 A_0$

.

.

.

$A_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n A_0$

b) $S_n = A_0 + A_1 + A_2 + \cdots + A_n$

S_n est la somme des termes d'une suite géométrique

$$S_n = A_0 = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$S_n = 2A_0 = \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$$

$$\lim_{+\infty} S_n = 2A_0$$

Problème 16

Partie A

$g(x) = x^2 + 3 - 2\ln x$

1) Etude des variations de g

$Eg =]0 ; +\infty[$

$\lim_{0^+} f(x) = +\infty$ $\lim_{+\infty} f(x) = +\infty$

Dérivée g'(x)

$g'(x) = \frac{2(x^2-1)}{x}$

x	0	1	$+\infty$
g'(x)	$-$	0	$+$
g(x)	$+\infty$ ↘	4	↗ $+\infty$

2) Quelque soit x apparte,nant à Eg, $g(x) > 0$

Partie B

$$\begin{cases} f(x) = \cos^2 \pi x + 2\cos \pi x + 1 \text{ si } x \in [-1;1] \\ f(x) = \frac{\ln x}{x} + \frac{x^2 - 1}{2x} \qquad \text{si } x > 1 \end{cases}$$

1) $Ef = [-1 ; +\infty[$

Continuité et dérivabilité

Continuité

$\lim_{1^-} f(x) = 0$ $\lim_{1^+} f(x) = 0$, f est continue en $x_0 = 1$

Dérivabilité

$$\lim_{1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 0 \text{ et } \lim_{1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 2$$

La fonction n'est pas dérivable en 1, la courbe admet deux demi tangentes dont l'une est horizontale à gauche et une oblique de pente 2 à droite. C'est un point anguleux. $Ed = Ef - \{1\}$

2) Etude des variations

Pour $x \in [-1\,;1[$, $f(x) = \cos^2\pi x + 2\cos\pi x + 1$

$f'(x) = -2\pi\sin\pi x(\cos\pi x + 1)$

Signe et tableau des variations

Le signe dépend de $-2\pi\sin\pi x$ car $\forall\, x \in [-1\,;1[$, $\cos\pi x + 1 > 0$

Posons $-2\pi\sin\pi x = 0 \Rightarrow \pi x = k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$ on a $x = k$ $(x = -1;\ x = 0\,;\ x = 1)$

x	-1		0		1
πx	$-\pi$		0		π
$\sin\pi x$	0	−	0	+	0
$f'(x)$	0	+	0	−	0
f(x)	0	↗	4	↘	0

Pour $x \in]1\,;+\infty[\,;\ f(x) = \frac{\ln x}{x} + \frac{x^2-1}{2x}$

$$f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}$$

Le signe de $f'(x)$ dépend de $g(x)$ et d'après la partie A $f'(x) > 0$

On a :

x	1		$+\infty$
$f'(x)$		+	
f(x)	0	↗	$+\infty$

Tableau de varition de f

x	-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+		− 0	2	+	
f(x)	0	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

3)Montrons que la droite (D) : $y = \frac{1}{2}x$ est une asymptote

Il suffit de calculer $\lim_{+\infty}[f(x) - y]$

On a $\lim_{+\infty}[f(x) - y] = \lim_{+\infty}\left(\frac{\ln x}{x} + \frac{x^2-1}{2x} - \frac{1}{2}x\right) = 0$

Donc la droite (D) est une asymptote.

Position $f(x) - y = \frac{2\ln x - 1}{x}$

x	1		$\sqrt{e}$		$+\infty$
f(x)-y		−	0	+	

Vers l'infini la courbe est au dessus de la droite (D)

4) Montrons que la courbe et la droite se coupent au point $x = \sqrt{e}$

Si on pose $T(x) = f(x) - y$ on a $T(\sqrt{e}) = 0$ donc $x = \sqrt{e}$ est la racine de $T(x) = 0$. On a le point $(\sqrt{e};\ \frac{1}{2}\sqrt{e})$

5) La courbe et la droite (D)

6) Calculons l'aire de la partie comprise entre (C), les droites (D), $x = \sqrt{e}$ et $x = e$

$\mathscr{A} = \int_{\sqrt{e}}^{e}[f(x) - y]dx$

$= \int_{\sqrt{e}}^{e}\left(\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{2x}\right)dx$

$\mathscr{A} = \frac{1}{8}\text{ua}$

7) Soit $S(\,O\,;\sqrt{e}\ ;\ \frac{\pi}{4}\,)$

a) Montrons que le triangle MM'O est rectangle isocèle avec $M' = S(M)$

$$M' = S(M) \Rightarrow \begin{cases} OM' = \sqrt{2}OM \\ \left(\widehat{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}}\right) = \frac{\pi}{4}[2\pi] \end{cases}$$

Montrons M'M = MO

$M'M^2 = \left(\overrightarrow{M'O} + \overrightarrow{OM}\right)^2$

$= M'O^2 + OM^2 - 2\,\overrightarrow{OM'}.\overrightarrow{OM}$

Or $OM' = \sqrt{2}OM$ et

$\overrightarrow{OM'}.\overrightarrow{OM} = OM.OM'\cos\left(\widehat{\overrightarrow{OM}:\overrightarrow{OM'}}\right)$

Avec $\left(\widehat{\overrightarrow{OM}:\overrightarrow{OM'}}\right) = \frac{\pi}{4}$

En remplaçant on a facilement $M'M^2 = OM^2 \Rightarrow$ M'M = OM, le triangle est isocèle (1)

D'une part

$\overrightarrow{MM'}.\overrightarrow{MO} = \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OM'}\right)\overrightarrow{MO}$

$= MO^2 + \overrightarrow{OM'}.\overrightarrow{MO}$

Or $\overrightarrow{OM'}.\overrightarrow{OM} = OM.OM'\cos\left(\widehat{\overrightarrow{OM}:\overrightarrow{OM'}}\right)$

$\overrightarrow{MM'}.\overrightarrow{MO} = 0$

Les vecteurs sont orthogonaux (2)

(1) et (2) montrent que le triabngle MM'O est rectangle en M.

b) Construction de l'image (C) par S. Il suffit de construire les images des points A, B, la droite (D).La courbe qui passera par ces points images sera la courbes image.

Problème 17

$(\mathscr{C})$:$2y + 2x\sqrt{y} - \ln y = 0$

I/ $R = r\left(0; -\frac{\pi}{2}\right)$

Donnons l'expression analytique de R

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

$$\theta = -\frac{\pi}{2};\ \cos\theta = 0, \sin\theta = -1$$

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases} \quad R_{\left(0;-\frac{\pi}{2}\right)}$$

$(\mathscr{C}') = R(\mathscr{C})$

2°/ Démontrons que l'équation $(\mathscr{C}')$ est :

$(\mathscr{C}')$:$y = \sqrt{x} - \frac{1}{2}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

$\begin{matrix} y = x' \\ x = -y' \end{matrix}$, La courbe devient :

$$2x' - 2y'^{\sqrt{x}} - \ln x' = 0$$

$\Rightarrow (\mathscr{C}')$:$y' = \sqrt{x'} - \frac{1}{2}\frac{\ln x'}{\sqrt{x'}}$

1°/ Précisons l'ensemble de définition E_f :

$E_f]0; +\infty[$

Démontrons que $f'(x) = \frac{g(x)}{4x\sqrt{x}}$

Avec $g(x) = 2x - 2 + \ln x$

gauche et une oblique de pente 2 à droite. C'est un point anguleux. Ed = Ef $-\{1\}$

2) Etude des variations

Pour $x\in[-1\,;1[$, $f(x) = \cos^2\pi x + 2\cos\pi x + 1$

$f'(x) = -2\pi\sin\pi x(\cos\pi x + 1)$

Signe et tableau des variations

Le signe dépend de $-2\pi\sin\pi x$ car $\forall\, x\in[-1\,;1[$, $\cos\pi x + 1 > 0$

Posons $-2\pi\sin\pi x = 0 \Rightarrow \pi x = k\pi \quad k\in\mathbb{Z}$ on a $x = k$ ($x = -1$; $x = 0$; $x = 1$)

x	−1		0		1
πx	−π		0		π
sinπx	0	−	0	+	0
f'(x)	0	+	0	−	0
f(x)	0	↗	4	↘	0

Pour $x\in]1\,;+\infty[$; $f(x) = \frac{\ln x}{x} + \frac{x^2-1}{2x}$

$$f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}$$

Le signe de $f'(x)$ dépend de $g(x)$ et d'après la partie A $f'(x) > 0$

On a :

x	1		+∞
f'(x)		+	
f(x)	0	↗	+∞

Tableau de varition de f

x	−1		0		1		+∞
f'(x)		+		− 0	2	+	
f(x)	0	↗	4	↘	0	↗	+∞

3)Montrons que la droite (D) : $y = \frac{1}{2}x$ est une asymptote

Il suffit de calculer $\lim_{+\infty}[f(x) - y]$

On a $\lim_{+\infty}[f(x) - y] = \lim_{+\infty}\left(\frac{\ln x}{x} + \frac{x^2-1}{2x} - \frac{1}{2}x\right) = 0$

Donc la droite (D) est une asymptote.

Position $f(x) - y = \frac{2\ln x - 1}{x}$

x	1		$\sqrt{e}$		+∞
f(x)-y		−	0	+	

Vers l'infini la courbe est au dessus de la droite (D)

4) Montrons que la courbe et la droite se coupent au point $x = \sqrt{e}$

Si on pose $T(x) = f(x) - y$ on a $T(\sqrt{e}) = 0$ donc $x = \sqrt{e}$ est la racine de $T(x) = 0$. On a le point $(\sqrt{e};\ \frac{1}{2}\sqrt{e})$.

5) La courbe et la droite (D)

6) Calculons l'aire de la partie comprise entre (C) , les droites (D), $x = \sqrt{e}$ et $x = e$

$\mathscr{H} = \int_{\sqrt{e}}^{e}[f(x) - y]dx$

$= \int_{\sqrt{e}}^{e}\left(\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{2x}\right)dx$

$\mathscr{H} = \frac{1}{8}$ ua

7) Soit $S(\,O\,;\sqrt{e}\,;\,\frac{\pi}{4}\,)$

a) Montrons que le triangle MM'O est rectangle isocèle avec M' = S(M)

$$M' = S(M) \Rightarrow \begin{cases} OM' = \sqrt{2}OM \\ \left(\widehat{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}}\right) = \frac{\pi}{4}[2\pi] \end{cases}$$

Montrons M'M = MO

$M'M^2 = \left(\overrightarrow{M'O} + \overrightarrow{OM}\right)^2$

$= M'O^2 + OM^2 - 2\,\overrightarrow{OM'}.\overrightarrow{OM}$

Or OM' $= \sqrt{2}OM$ et

$\overrightarrow{OM'}.\overrightarrow{OM} = OM.OM'\cos\left(\widehat{\overrightarrow{OM}:\overrightarrow{OM'}}\right)$

Avec $\left(\widehat{\overrightarrow{OM}:\overrightarrow{OM'}}\right) = \frac{\pi}{4}$

En remplaçant on a facilement $M'M^2 = OM^2 \Rightarrow$ $M'M = OM$, le triangle est isocèle (1)

D'une part

$\overrightarrow{MM'}.\overrightarrow{MO} = \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OM'}\right)\overrightarrow{MO}$

$= MO^2 + \overrightarrow{OM'}.\overrightarrow{MO}$

Or $\overrightarrow{OM'}.\overrightarrow{OM} = OM.OM'\cos\left(\widehat{\overrightarrow{OM}:\overrightarrow{OM'}}\right)$

$\overrightarrow{MM'}.\overrightarrow{MO} = 0$

Les vecteurs sont orthogonaux (2)

(1) et (2) montrent que le triabngle MM'O est rectangle en M.

b) Construction de l'image (C) par S. Il suffit de construire les images des points A, B, la droite (D).La courbe qui passera par ces points images sera la courbes image.

Problème 17

$(\mathscr{C})$:$2y + 2x\sqrt{y} - \ln y = 0$

I/ $R = r\left(0;-\frac{\pi}{2}\right)$

Donnons l'expression analytique de R

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

$$\theta = -\frac{\pi}{2}; \cos\theta = 0, \sin\theta = -1$$

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases} \quad R_{\left(0;-\frac{\pi}{2}\right)}$$

$(\mathscr{C}') = R(\mathscr{C})$

2°/ Démontrons que l'équation ($\mathscr{C}'$) est :

($\mathscr{C}'$) :$y = \sqrt{x} - \frac{1}{2}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$,

$y = x'$, $x = -y'$ La courbe devient :

$$2x' - 2y'\sqrt{x} - \ln x' = 0$$

$\Rightarrow(\mathscr{C}')$:$y' = \sqrt{x'} - \frac{1}{2}\frac{\ln x'}{\sqrt{x'}}$

1°/ Précisons l'ensemble de définition E_f :

$E_f]0;+\infty[$

Démontrons que $f'(x) = \frac{g(x)}{4x\sqrt{x}}$

Avec $g(x) = 2x - 2 + \ln x$

2) Etude des variations

$E_g =]0; +\infty[$

Dérivée :

$$g'(x) = \frac{2x+1}{x}$$

$$x > 0 \Longrightarrow g'(x) > 0$$

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

$\lim_{x\to 0^+} g(x) = -\infty$; $\lim_{+\infty} g(x) = +\infty$

3°/ Calculons $g(1)$: $g(1) = 0$

Déduisons le signe de g

$x \in]0; 1[; g(x) < 0$

$x \in]1; +\infty[; g(x) > 0$

4°/ a) $f'(x) = \frac{g(x)}{4x\sqrt{x}}$

Car $4x\sqrt{x} > 0\ \forall x \in IR_+^*$

X	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	$+\infty$ ↘	1	↗ $+\infty$

$\lim_{0^+} f(x) = +\infty$ $\lim_{+\infty} f(x) = +\infty$

$$f(1) = 1$$

b) Démontrons que (P) :$y = \sqrt{x}$ est asymptote

$$\lim_{+\infty}[f(x) - y] = \lim_{+\infty}\left[-\frac{1}{2}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right]$$

$$= 0; y \text{ est asymptote}$$

Etude de la position

$$f(x) - y$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\ln x}{\sqrt{x}} < 0 \rightarrow f(x) - y < 0$$

5°/ a) Tracés de ($\mathscr{C}$')

b) Déduction

$$6°/\ \mathscr{A} = \int_1^4 \left[[y - f(x)]dx + \frac{3}{2}x\sqrt{x}\right]_1^4$$

$$= \int_1^4 \frac{1}{2}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$$

$$= \int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x\, dx$$

On intègre par partie en posant :

$u' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow u = \sqrt{x}$

$v = \ln x \Rightarrow v' = \frac{1}{x}$

On trouve : $\mathscr{A} = 2(2\ln 2 - 1)$u. a

Problème 18

1) la figure est dans la partie figure

2) le triangle EAC est équilatéral car AC = EC = CE

L'angle (EA, EC) $= \frac{\pi}{3}$

Comme AE = EC

(EA, EC) ≠ O donc il existe une rotation de centre E et d'angle $\frac{\pi}{3}$ c'est-à-dire $R(E, \frac{\pi}{3})$

3) a) h(A)= G et h(C) = F les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{GF}$ sont colinéaires donc il existe une homothétie qui transforme A en G et C en F.

Déterminons son rapport.

On considère le triangle EOA avec $(G\Omega)//(AO)$ d'après le théorème de Thalès on a : $\frac{EG}{EA} = \frac{E\Omega}{EO}$, Ω étant le centre de gravité on $E\Omega = \frac{2}{3}EO \Longrightarrow \frac{E\Omega}{EO} = \frac{2}{3}$ donc $\frac{E\Omega}{EO} = \frac{2}{3}$ d'où $h(E, \frac{2}{3})$

b) On sait que la similitude est la composée d'une rotation et d'une homothétie c'est-à-dire S = Roh.

On calcule S(A)

S(A) = Roh(A) or h(A) = G et R(G) = F donc S(A) = F ce qui signifie que $S = S(E, \frac{2}{3}\ \frac{\pi}{3})$

Partie B :

On pose $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$

1) Donnons les coordonnées des points A, B, C et D :

On a facilement A(- 1, 1), B(- 1, -1) , C(1, - 1) et D(1, 1)

2) E' est le projeté orthogonal de E sur l'axe des abscisses

a) Exprimons OE en fonction de AC. On considère le triangle OEC rectangle en O, on a $\tan(EO, EC) = \frac{OC}{OE}$ or $OC = \frac{1}{2}AC$ on a donc $\tan(EO, EC) = \frac{AC}{2OE} \Rightarrow \frac{AC}{2OE} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$OE = \frac{\sqrt{3}}{2}AC$

b) calcul du cosinus de l'angle (OE', OE)

$\cos(\overrightarrow{OE'}; \overrightarrow{OE}) = \frac{OE'}{OE} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ce qui signifie que

$OE' = \frac{\sqrt{2}}{2}OE$, or $OE = \sqrt{6}$ donc $OE' = \sqrt{3}$ et $E'(\sqrt{3}; 0)$

Les coordonnées de E seront $E(\sqrt{3}, \sqrt{3})$

c) Donnons l'expression analytique de S , similitude plane directe du b) de la partie A.

$$S : \begin{cases} x' = \frac{1}{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3}y + \sqrt{3} \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{1}{3}y - \sqrt{3} \end{cases}$$

Problème 19

Partie A : Etude de la fonction f

1)a) Etude de la continuité de f aux points 0 et 1

$$\lim_{x\to 0} f(t) = \lim_{x\to 0}\frac{t-1}{\ln t} = 0 \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0}(t-1) = -1 \\ \lim\limits_{x\to 0}\ln t = -\infty \end{cases}$$

Donc f est continue en 0

$$\lim_{x\to 1}\frac{t-1}{\ln t} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{\frac{\ln t}{t-1}} = 1 \text{ f est continue en 1}$$

b) calcul de le dérivée de f
sur]0, 1[la fonction est dérivable car quotient de fonction dérivables sur]0, 1[avec $t \neq 0$ pour tout $t \in]0, 1[$. On a donc $f'(t) = \frac{1}{(\ln t)^2}(\ln t - 1 + \frac{1}{t})$

$$f'(t) = \frac{1}{(\ln t)^2} \times \varphi(t) \text{ avec } \varphi(t) = \ln t - 1 + \frac{1}{t}$$

donc pour tout t appartenant à]0, 1[f'(t) a le même signe que $\varphi(t)$

c) Etudions les variations de la fonction φ

On a $\varphi'(t) = \frac{t-1}{t^2}$

Comme $t \in]0,1[$ on a $\varphi'(t) < 0$

Tableau de variation de φ

t	0		1
$\varphi'(t)$		−	
$\varphi(t)$		$+\infty \searrow 0$	

Par rapport au tableau de variations de φ nous avons quelque soit $t \in]0 ; 1[$, $\varphi(t)$ est positif
Donc f'(t) est positif sur]0 ; 1[
On déduit le tableau de variation de f

t	0		1
f'(t)		+	
f(t)		$0 \nearrow 1$	

Etude de la dérivabilité de f en 0

$$\lim_{t\to 1}\frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \lim_{t\to 0}\frac{t-1}{t\ln t} = +\infty$$

f n'est pas dérivable en 0, la courbe admet en ce point une tangente parallèle à l'axe des ordonnées.

3)

a) Prouvons que quelque soit $u \in [0, \frac{1}{2}]$

que $0 \leq \frac{1}{1-u} - (1+u) \leq 2u^2$

On sait que $1 - u > 0$ et $2u - 1 < 0$

Evaluons le signe de $\frac{1}{1-u} - (1+u) - 2u^2$

$\frac{1}{1-u} - (1+u) - 2u^2 = \frac{u^2(2u-1)}{1-u} \leq 0$

On a : $\frac{1}{1-u} - (1+u) - 2u^2 \leq 0 \Rightarrow \frac{1}{1-u} - (1+u) \leq 2u^2$

De plus $\frac{1}{1-u} - (1+u) = \frac{u^2}{1-u} \geq 0$

Donc $0 \leq \frac{1}{1-u} - (1+u) \leq 2u^2$

Ou encore $0 \leq \frac{1}{1-t} - (1+t) \leq 2t^2$

Pour $t \in [0, \frac{1}{2}]$

Déduisons que $0 \leq \ln(1-u) - \left(u + \frac{u^2}{2}\right) \leq \frac{2u^3}{3}$

Il suffit d'intégrer sur [0, u] l'inégalité suivante $0 \leq \frac{1}{1-t} - (1+t) \leq 2t^2$ on a

$0 \leq \int_0^u \left(\frac{1}{1-t} - (1+t)\right)dt \leq \int_0^u 2t^2\,dt$

$0 \leq -\ln(1-u) - \left(u + \frac{u^2}{2}\right) \leq \frac{2u^3}{3}$ pour $u \in [0, \frac{1}{2}]$

b) $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ pour $h \in [-\frac{1}{2}, 0]$. Prouvons que $0 \leq g(1+h) - g(1) + \frac{h}{2} \leq \frac{h^2}{3}$

On calcule $g(1+h) - g(1) + \frac{h}{2} = \frac{1}{f(1+h)} - 1 + \frac{h}{2}$

$= \frac{\ln(1+h)}{h} - 1 + \frac{h}{2}$

$= \frac{1}{h}(\ln(1+h) - h + \frac{h^2}{2})$

Posons $h = -u$ nous avons

$g(1-u) - g(1) - \frac{u}{2} = \frac{1}{u}(-\ln(1-u) - u - \frac{u^2}{2})$

D'après a) nous avons

$0 \leq \ln(1-u) - \left(u + \frac{u^2}{2}\right) \leq \frac{2u^3}{3}$

Par suite on a : $0 \leq g(1-u) - g(1) - \frac{u}{2} \leq \frac{1}{u}.\frac{2u^3}{3}$

$0 \leq g(1-u) - g(1) - \frac{u}{2} \leq \frac{2u^2}{3}$ pour $u \in [0, \frac{1}{2}]$ donc

$0 \leq g(1+h) - g(1) + \frac{h}{2} \leq \frac{h^2}{3}$ pour $h \in [-\frac{1}{2}, 0]$

Par conséquent si $h \neq 0$ on a

$-\frac{h}{2} \leq g(1+h) - g(1) \leq \frac{h^2}{3} - \frac{h}{2}$

$\frac{2h}{3} - \frac{1}{2} \leq \frac{g(1+h) - g(1)}{h} \leq -\frac{1}{2}$ car h est négatif

En passant à la limite on a $\lim\limits_{h\to 0}\frac{g(1+h) - f(0)}{h} = \frac{-1}{2}$

Il s'ensuit que g est dérivable en 1 et $g'(1) = -\frac{1}{2}$

c) g est dérivable en 1 et comme $f(x) = \frac{1}{g(x)}$ et $g'(1) \neq 0$ donc f est aussi dérivable en 1 et $f'(1) = \frac{1}{2}$

4) La courbe

Partie B : Calcul de l'intégrale I

Pour $x \in]0, 1[$, on pose $I(x) = \int_0^1 f(t)dt$ et

$J(x) = \int_0^1 \frac{f(t)}{t}dt$

1) soit K la fonction définie par $K(x) = J(x^2) - J(x)$

a) Montrons que K est dérivable sur]0 ; 1[
J est parfaitement définie sur]0, 1[et J est sur ce même intervalle dérivable avec $J(x) = -\frac{f(x)}{x}$ donc K est

dérivable sur]0, 1]. De plus $K'(x) = 2xJ'(x^2) - J'(x)$

$K'(x) = 2x\left(-\frac{f(x^2)}{x^2}\right) + \frac{f(x)}{x}$

$K'(x) = \frac{1}{x}[f(x) - 2f(x^2)]$

b) Prouvons que $f(x) - 2f(x^2) = -xf(x)$

Pour tout $x \in]0 ; 1[$

$f(x) - 2f(x^2) = \frac{x-1}{\ln x} - 2\frac{x^2-1}{\ln(x^2)}$

$f(x) - 2f(x^2) = \frac{x-x^2}{\ln(x)}$ car $\ln(x^2) = 2\ln x$

$f(x) - 2f(x^2) = -x\frac{x-1}{\ln(x)}$

$f(x) - 2f(x^2) = -xf(x)$ pour tout $x \in]0 ; 1[$

de plus $f(1) - 2f(1) = -1 \times f(1)$ donc finalement

$f(x) - 2f(x^2) = -xf(x)$ pour tout $x \in]0 ; 1]$

c) Pour tout $t \in]0 ; 1[$ on a d'après le b).

$f(t) - 2f(t^2) = -tf(t)$

$\Rightarrow \frac{1}{t}\left(f(t) - 2f(t^2)\right) = -f(t)$ or d'après a)

$\frac{1}{t}\left(f(t) - 2f(t^2)\right) = K'(t)$ donc $K'(t) = -f(t)$

$x \in]0 ; 1]$ on $x^2 < x$

On peut donc intégrer sur $[x^2 ; x]$

$$J(x) - J(x^2) = \int_x^1 \frac{f(t)}{t}dt - \int_{x^2}^1 \frac{f(t)}{t}dt$$

$$= \int_{x^2}^x \frac{t-1}{t\ln t}dt = -K(x)$$

Or $K(x) = \int_1^x K'(t)dt$ avec $K(1) = 0$

Donc $\int_{x^2}^x \frac{t-1}{t\ln t}dt = -\int_1^x K'(t)dt = \int_1^x f(t)dt$
$= I(x)$

Finalement $I(x) = \int_{x^2}^x \frac{t-1}{t\ln t}dt$ (1))

2) Calcul de la dérivée de la fonction $\varphi : t \longrightarrow \ln(-\ln t)$

$\varphi'(t) = \frac{1}{t\ln t}$

Déduisons

$$\int_{x^2}^x \frac{-1}{t\ln t}dt = \ln 2$$

$$\int_{x^2}^x \frac{-1}{t\ln t}dt = [-\varphi(t)]_{x^2}^x$$

$= \ln(-\ln x^2) - \ln(-\ln x)$

$= \ln[-2\ln x] - \ln(-\ln x)$

$= \ln\frac{-2\ln x}{\ln x}$

$= \ln 2$

Finalement

$\int_{x^2}^x \frac{-1}{t\ln t}dt = \ln 2$ (2)

3) Prouvons que pour tout x de $]0 ; 1[$ et tout t de $]0 ; x[$

$0 \le t \le x \le 1 \Rightarrow \ln t \le \ln x \le 0$ soit $0 \le -\ln t \le -\ln x$

$0 \le \frac{-1}{\ln t} \le \frac{-1}{\ln x}$. Intégrons sur $[x^2 ; x]$ on a :

$$0 \le \int_{x^2}^x \frac{-1}{\ln t}dt \le \int_{x^2}^x \frac{-1}{\ln x}dt$$

$$0 \le -\int_{x^2}^x \frac{dt}{\ln t} \le (x - x^2)\left(\frac{-1}{\ln x}\right) \le \frac{-x}{\ln x}$$

Avec $\frac{x^2}{\ln x} < 0$

En passant en valeur absolue on a :

$$0 \le \left|\int_{x^2}^x \frac{dt}{\ln t}\right| \le \frac{-x}{\ln x} \quad (3)$$

4) Déterminons la limite de $I(x)$ lorsque x tend vers 0

On sait que

$$I(x) = \int_{x^2}^x \frac{t-1}{t\ln t}dt$$

$$= \int_{x^2}^x \frac{1}{\ln t}dt - \int_{x^2}^x \frac{1}{t\ln t}dt$$

D'après le (2) $-\int_{x^2}^x \frac{1}{t\ln t}dt = \ln 2$

$I(x) = \ln 2 + \int_{x^2}^x \frac{1}{\ln t}dt$

$I(x) - \ln 2 = \int_{x^2}^x \frac{1}{\ln t}dt$

$|I(x) - \ln 2| = \left|\int_{x^2}^x \frac{1}{\ln t}dt\right| \le \frac{-x}{\ln x}$ d'après le (3)

Mais $\lim_{x\to 0} \frac{-x}{\ln x} = 0$

Donc

$\lim_{x\to 0} |I(x) - \ln 2| = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0} I(x) = \ln 2$

5) Etablissons que pour tout x de]0; 1[on a

$I - I(x) = \int_1^x f(t)dt$

On sait que $I - I(x) = \int_0^1 f(t)dt - \int_1^x f(t)dt$

$I - I(x) = \int_0^x f(t)dt$ à l'aide de la relation de Chasles pour les intégrales.

Or pour tout $t \in]0; 1]$ $\Rightarrow 0 \le t \le 1 \Rightarrow 0 \le f(t) \le 1$, On intègre sur $]0 ; x]$ on aura $0 \le \int_0^x f(t)dt \le \int_0^x dt$

$0 \le I - I(x) \le x$ pour $x \in]0 ; 1]$

6) En passant à la limite on a :

$$0 \le \lim_{x\to 0}(I - I(x)) \le 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0}(I - I(x)) = 0$$

D'où $\lim_{x\to 0} I = \lim_{x\to 0} I(x)$ soit $I = \ln 2$

Problème 20

$$f_n(x) = \begin{cases} e^{n(x-1)} - x + 1 & \text{si } x \le 1 \\ \frac{1}{3}(\cos\pi x + 4) & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Partie A

$E_{f_n} =]-\infty; +\infty[$

1°) La fonction est la reunion des fonctions continue et dérivable su IR donc continue et dérivable sur IR

Vérifions la continuité en $x_0 = 1$

$f_n(1) = 1$; $\lim_{1^+} f(x) = 1$; $\lim_{1^-} f_n(x) = 1$

f est continue en $x_0 = 1$.

Dérivabilité

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$\lim_{1^-}\frac{e^{n(x-1)}-x+1-1}{x-1}$$

$$\lim_{1^-}\frac{e^{n(x-1)}-x}{x-1}$$

Posons : $X = x-1$; $\begin{matrix}X\to 0^-\\ x\to 1^-\end{matrix}$

$$=\lim_{0^-}\frac{e^{nX}-X-1}{X}$$

$$=\lim_{0^-}\left(\frac{e^{nX}-1}{X}-1\right)$$

$$=n-1$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$=\lim_{1^+}\frac{\frac{1}{3}(\cos\pi x+4)-1}{x-1}$$

Posons : Posons : $X = x-1$; $\begin{matrix}X\to 0^+\\ x\to 1\end{matrix}$

$$=\lim_{0^+}\frac{\frac{1}{3}(\cos\pi(X+1)+4)-1}{X}$$

$$=\lim_{0^+}\frac{\frac{1}{3}(\cos(\pi X+\pi)+4)-1}{X}$$

$$=\lim_{0^+}\frac{\frac{1}{3}(\cos\pi X+1)}{X}$$

$$=\lim_{0^+}\frac{\frac{1}{3}(1-\cos\pi X)}{X}=0$$

f_n n'est pas dérivable en $x_0 = 1$

2°/ Etude des variations

$$E_{f_n} =]-\infty;+\infty[$$

$\lim_{-\infty} f_n(x) = +\infty$

$\lim_{+\infty} f_n(x) = +\infty$

Pour $x > 1$; $T = 2$, l'étude peut se faire sur un intervalle de longueur 2.

Exemple : $[1,3]$et l'autre partie sera déduite par la translation de veteur $k\vec{T}$

Derivée :

Pour $x < 1$; $f(x) = e^{n(x-1)} - x + 1$

$$f'_n(x) = ne^{n(x-1)} - 1$$

Signe de $f'(x)$

Posons $f'(x) = 0$

$ne^{n(x-1)} - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 - \frac{1}{n}\ln n$ avec n un entier naturel non nul

Si $n \leq 1$ on a $1 - \frac{1}{n}\ln n > 1$

x	$-\infty$	1
$f'(x)$		
$f(x)$	$+\infty$ ↘	1

Si $n > 1$ on a $1 - \frac{1}{n}\ln n < 1$

x	$-\infty$		$1-\frac{1}{n}\ln n$		1
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(1-\frac{1}{n}\ln n)$	↗	1

Pour $x > 1$ $f(x) = \frac{1}{3}(\cos\pi x + 4)$ la fonction est périodique de période 2, on a $E\acute{e}t = [1;3]$

$f'(x) = -\frac{1}{3}\pi\sin\pi x$

Signe de $f'(x)$

Posons $f'(x) = 0 \Rightarrow \sin\pi x = 0 \Rightarrow \pi x = k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

On a $x = k$ avec $k \in \mathbb{Z}$ ($x = 1, x = 2, x = 3$)

x	1		2		3
πx	π		2π		3π
$\sin \pi x$	0	−	0	+	0
$f'(x)$	0	+	0	−	0
$f(x)$	1	↗	$\frac{5}{3}$	↘	1

Tableau de variation de f

Pour $n \leq 1$

x	$-\infty$		1		2		3
$f'(x)$							
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$\frac{5}{3}$	↘	1

Pour $n > 1$

x	$-\infty$		$1-\frac{1}{n}\ln n$		1		2		3
$f'(x)$									
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(1-\frac{1}{n}\ln n)$	↗	1	↗	$\frac{5}{3}$	↘	1

Avec $f(1-\frac{1}{n}\ln n) = \frac{1}{n}(1+\ln n)$

3) La courbe pour $n = 1$

Son tableau de variation est :

x	$-\infty$		1		2		3
$f'(x)$		−		+	0	+	0
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$\frac{5}{3}$	↘	1

Branches infinies : La droite (D) : $y = -x+1$ est asymptote à la courbe au voisinage de $-\infty$ car $\lim_{-\infty}[f(x)-y] = 0$

La courbe dans la partie des figures

Partie B

~~Dans cette partie x > 1~~

1) Montrons que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique x_0 qu'on déterminera

On pose $h(x) = f(x) - x$

Calcul de $h(1)$

$h(1) = 0$ donc la solution unique est $x_0 = 1$

2) Soit la suite $\begin{cases} U_1 = a \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

a) La valeur pour laquelle la suite est constante, il suffit de trouver la solution unique de $U_n = f(U_n)$ d'après le 1) cette valeur est $a = 1$

b) On pose $U_1 = \frac{4}{3}$ démontrons que $1 \leq Un \leq \frac{5}{3}$

Faisons cela par un raisonnement par reccurence

$n = 1$ que $1 \leq \frac{4}{3} \leq \frac{5}{3}$ vraie

Supposons que cela est vraie au rang n c'est-à-dire

$$1 \leq Un \leq \frac{5}{3}$$

Démontrons que cela est aussi vraie au rang n + 1

$1 \leq U_{n+1} \leq \frac{5}{3}$

On sait que $1 \leq Un \leq \frac{5}{3}$

$$\pi \leq \pi Un \leq \frac{5}{3}\pi$$

$$\cos\pi \leq \cos\pi Un \leq \cos\frac{5}{3}$$

$4 + \cos\pi \leq 4 + \cos\pi Un \leq 4 + \cos\frac{5\pi}{3}$

$\frac{1}{3}(4 + \cos\pi) \leq \frac{1}{3}(4 + \cos\pi Un) \leq \frac{1}{3}(4 + \cos\frac{5}{3}\pi)$

$1 \leq \frac{1}{3}(4 + \cos\pi Un) \leq \frac{3}{2} \leq \frac{5}{3}$

$1 \leq U_{n+1} \leq \frac{5}{3}$ Vraie

Donc quelque soit l'entier naturel n on a :

$$1 \leq Un \leq \frac{5}{3}$$

c) Démontrons en utilisant l' inégalité des accroissements finis que

$\forall n \in IN^*\ |U_{n+1} - x_o| \leq \frac{1}{3}|U_n - x_o|$

On sait que pour $x \in [1 ; \frac{5}{3}]$ $|f'(x)| \leq \frac{1}{3}$

La fonction étant continue et dérivable sur $[1 ; \frac{5}{3}]$ on peut donc appliquer l'inégalité des accroissement finis pour tout x_o et Un appartenant à cette intervalle. On a donc $|f(U_n) - f(x_o)| \leq \frac{1}{3}|U_n - x_o|$ Or $f(U_n) = U_{n+1}$ et $f(x_o) = x_o$

Finalement

$$|U_{n+1} - x_o| \leq \frac{1}{3}|U_n - x_o|$$

c) Déduisons que la suite (Un) converge.

On sait que

$$|U_n - x_o| \leq \frac{1}{3}|U_{n-1} - x_o|$$

$$\leq \left(\frac{1}{3}\right)^2 |U_{n-2} - x_o|$$

$$\leq \left(\frac{1}{3}\right)^3 |U_{n-3} - x_o|$$

$$|U_n - x_o| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} |U_1 - x_o|$$

$$-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} |U_0 - x_o| \leq U_n - x_o \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} |U_0 - x_o|$$

$$\lim_{\infty} U_n - x_o = 0$$

Donc

$$\lim_{\infty} U_n = x_o$$

Partie C

Soit r la transformation définie par : $\begin{cases} x' = y \\ y' = 2 - x \end{cases}$

1) Déterminons l'image (H) de la courbe (K) d'équation $-4x^2 + 9y^2 - 4y - 128 = 0$ par la l'application réciproque r^{-1}

On a : $r^{-1}\begin{cases} x = 2 - y' \\ y = x' \end{cases}$

En remplacant ona : $\dfrac{\left(x-\frac{2}{9}\right)^2}{\frac{1156}{81}} - \dfrac{(y-2)^2}{\frac{289}{9}} = 1$

C'est une hyperbole. Comme r est une rotation donc (K) est aussi une hyperbole dont les éléments caratéristiques sont les antécédents de ceux de (H) qui est l'image.

Problème 21

Partie A

1°/ f: $\begin{array}{l} P \to P \\ M \to f'(M) = M' \end{array}$

Calcul de f(0)

$f(0) = 0$,Car 0 est le seul qui appartient à toutes les droites

$(D_0) = (o\vec{u})$

$(\Delta_0) = (o\vec{v})$

2°/ Montrons que les points O,M,K,M' et P sont cocycliques

Les triangles OKP, PM'K, MPK sont rectangles respectivement en O,M' et M. de même hypoténuse (PK) donc M,O,K,P et M' sont cocycliques.

3°/ Montrons que le triangle OMM' est rectangle

(OM') étant le diamètre du cercle, $M \in (C)$; $(\overrightarrow{MM'}; \overrightarrow{MO})$ est un angle inscrit qui intercepte le demi cercle ; il est droit .

$\Rightarrow$ Le triangle OMM' est rectangle en M

Montrons que $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$

Les points O,M,K,M' sont cocycliques, les angles $(\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{MO'})$et $(\overrightarrow{KM'}; \overrightarrow{KM})$ = sont inscrits, opposés et soutenus par la même corde (MM').

$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) + (\overrightarrow{KM'}, \overrightarrow{KM}) = \pi[2\pi]$

Or $(\overrightarrow{KM'}, \overrightarrow{KM}) = (\overrightarrow{KM'}, \overrightarrow{KO}) + (\overrightarrow{KO}, \overrightarrow{KM})[2\pi]$

Comme $(o\vec{u})//(D_M) \Rightarrow (\overrightarrow{KO}, \overrightarrow{KM}) = (\vec{i}, \vec{u})[2\pi]$

Finalement : $(\overrightarrow{KM'}, \overrightarrow{KM}) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}[2\pi] = \frac{2\pi}{3}[2\pi]$

Donc : $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \pi - \frac{2\pi}{3}[2\pi]$

$\Rightarrow \left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$

On sait que $f(0) = 0$

$\Rightarrow$ O est le point invariant $\Rightarrow \left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$

De plus on a $\frac{OM'}{OM} \neq 1 \rightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \\ \left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right) = \frac{\pi}{3}[2\pi] \\ \frac{OM'}{OM} \neq 1 \end{cases} \rightarrow$ f est une similitude.

Caractéristiques

Centre : O

Rapport : $k = \frac{OM'}{OM}$, on sait que le triangle OMM' est rectangle en M.

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{OM}{OM'} \Rightarrow \frac{OM'}{OM} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{3}} = 2 \Rightarrow k = 2$$

L'angle : $\theta = \frac{\pi}{3}[2\pi]$

$$f = \mathrm{Sim}\left(0; 2; \frac{\pi}{3}\right)$$

Partie B : $M(x, y)$; $P(0; y_0)$; $K(x_0, 0)$

Déterminons y_0 et x_0 en fonction de x et y

Considérons le triangle PMJ rectangle en J.

$\left(\overrightarrow{PJ}, \overrightarrow{PM}\right) = \frac{\pi}{6}[2\pi]$

$\tan\frac{\pi}{6} = \frac{OI}{PJ} \Rightarrow \tan\frac{\pi}{6} = \frac{x}{y_0 - y} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{y_0 - y} \Rightarrow y_0 - y = \sqrt{3}x$

$y_0 = \sqrt{3}x + y$

Considérons KIM rectangle en I.

$\tan\frac{\pi}{6} = -\frac{IM}{IK} = -\frac{y}{x_0 - x}$

$\Rightarrow \frac{-y}{x_0 - x} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x_0 - x = -\sqrt{3}y \Rightarrow x_0 = x - \sqrt{3}y$

$\Rightarrow \begin{cases} x_0 = x - \sqrt{3}y \\ y_0 = \sqrt{3}x + y \end{cases}$

Comme K et P sont les projetés orthogonales de M' sur (D) et (Δ) resp. On a $M'(x', y')$

$\begin{matrix} x' = x_0 \\ y' = y_0 \end{matrix} \Longrightarrow \begin{matrix} x' = x - \sqrt{3}y \\ y' = \sqrt{3}x + y \end{matrix}$

Donnons l'expression complexe de f

$Z' = x' + iy'$

$= \left(x - \sqrt{3}y\right) + i\left(\sqrt{3}x + y\right)$

$= x + iy - \sqrt{3}y + i\sqrt{3}x$

$= x + iy + i\sqrt{3}(x + iy)$

$= (x + iy)\left(1 + i\sqrt{3}\right)$

$Z' = \left(1 + i\sqrt{3}\right)Z$

Partie C

1°/(H): $x^2 - 3y^2 = 3$

$\frac{x^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2} - y^2 = 1$

$a = \sqrt{3}$; $b = 1$

Les asymptotes :

$y = \frac{b}{a}x$; $y = -\frac{b}{a}x$

Foyer :

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \sqrt{4} = 2$

$F(2; 0)$; (D): $x = \frac{a^2}{c} \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

$e = \frac{c}{a} \Rightarrow e = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

2°/ a) $(H') = f(H)$

$e = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

b) $H' = f(H)$ $(H) = x^2 - 3y^2 = 3$

$g(x) = \frac{\sqrt{3}}{x}\left(\frac{6}{x} + x\right)$

$\begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix} \begin{cases} x' = x - \sqrt{3}y \\ y' = \sqrt{3}x + y \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} y = \frac{1}{4}\left(\sqrt{3}x' + y'\right) \\ x = \frac{1}{4}\left(x' + \sqrt{3}y'\right) \end{matrix}$

On remplace dans (H) :

$\frac{1}{16}\left(x' + \sqrt{3}y'\right)^2 - \frac{3}{16}\left(-\sqrt{3}x' + y'\right)^2 = 3$

$\frac{1}{16}\left(-8x'^2 + 8\sqrt{3}x'y'\right) = 3$

$-x'^2 + \sqrt{3}x'y' = 6$

$\sqrt{3}x'y' = 6 + x'^2 \Rightarrow y' = \frac{6 + x'^2}{\sqrt{3}x'} \Rightarrow y' = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{6}{x'} + x'\right)$

3°/ (L) $x = 2$ $L' = f(L)$

(L) ∩ (H) $x = 2 \Rightarrow 4 - 3y^2 = 3$

$-3y^2 = -1 \Rightarrow y^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow$

$y = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\Omega_1\left(2; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ $\Omega_2\left(2 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

Calcul de l'aire :

$(L'): \begin{cases} x' = 2 - \sqrt{3}y \\ y' = 2\sqrt{3} + y \end{cases}$

$x' + \sqrt{3}y' = 8$

$y' = \frac{\sqrt{3}}{3}(8 - x)$

$\int_{2\sqrt{3}}^{4} [y' - g(x)]dx$

$= \int_{2\sqrt{3}}^{4}\left[\frac{\sqrt{3}}{3}(8 - x) - \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{6}{x} + x\right)\right]dx$

$= \frac{\sqrt{3}}{3}\int_{2\sqrt{3}}^{4}\left(8 - x - \frac{6}{x} - x\right)dx$

$= \frac{\sqrt{3}}{3}\left[8x - 6\ln x - x^2 - x\right]_{2\sqrt{3}}^{4}$

$\mathcal{A} = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(28 - 16\sqrt{3} + \ln\frac{27}{64}\right) \cdot 4cm^2$

Déduisons

$\mathcal{A} = f(a) \Rightarrow \mathcal{A} = k^2 a \Rightarrow a = \frac{A}{k^2}$

Problème 22

Partie A

$f(x) = \sqrt{\frac{2 - x^2}{2}}$

1.a) Etude des variations de f

$E_f = [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$

$f(-\sqrt{2}) = f(\sqrt{2}) = 0$

Dérivée : $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{4-2x^2}}$

x	$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$
f'(x)		+	0	−	
f(x)	0	↗	1	↘	0

b) Courbe

c) Déduisons la construction de (E) $x^2 + 2y^2 - 2 = 0$

$2y^2 = 2 - x^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{2 - x^2}{2}}$

(E) Sera donc la réunion de la courbe($\mathcal{C}$f) avec son opposé c'est à dire ($\mathcal{C}$-f).

2. A (0 ; 2) ; M(x ; y) m(x ; 0)

$MA^2 + Mm^2 = 4$

$(x - 0)^2 + (y - 2)^2 + (0)^2 + y^2 = 4$

$x^2 + 2y^2 - 4y = 0$

$x^2 + 2[(y-1)^2 - 1] = 0$

$x^2 + 2(y-1)^2 - 2 = 0$

$x^2 + 2(y-1)^2 = 2$

Il suffit de faire un changement de variable.

$\begin{cases} X = x \\ Y = y - 1 \end{cases}$ Donc c'est une translation de vecteur $\vec{u}(0; -1)$

Les points communs

$(E) = (\Gamma) \Rightarrow x^2 + 2y^2 - 2 = x^2 + 2(y-1)^2 - 2$

$y = \frac{1}{2}$; $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$

Les points sont donc $\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}; \frac{1}{2}\right)$; $\left(\frac{\sqrt{6}}{2}; \frac{1}{2}\right)$

3. Soit T la transformation

$$T: \begin{cases} x' = \frac{x}{x-1} \\ y' = \frac{y}{x-1} \end{cases}$$

a) Montrons que T est involutive

Il faut montrer que ToT = id

Soit M $\in \mathcal{P}$

$$ToT(M) = T[T(M)]$$

$T(M')$ avec $M' = T(M)$

$= M''$

$$\begin{cases} x'' = \frac{x'}{x'-1} \\ y'' = \frac{y'}{x'-1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x'' = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1} - 1} \\ y'' = \frac{\frac{y}{x-1}}{\frac{x}{x-1} - 1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{x}{x-x+1} \Rightarrow x'' = x \\ y'' = \frac{y}{1} \Rightarrow y'' = y \end{cases}$$

ToT(M) = M ⇒ T est involutive.

b) Montrons que O,M et M' sont alignés.

$\det(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = 0$ $\overrightarrow{OM}\binom{x}{y}$ $\overrightarrow{OM'}\binom{x'}{y'}$

$\Rightarrow xy' - x'y = 0$

$x\left(\frac{y}{x-1}\right) - \frac{x}{x-1}y = 0$

$\frac{xy-xy}{x-1} = 0 \Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow$ O, M, M' sont alignés car les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont colinéaires.

c) (E') image de (E) par T

$(T): \begin{cases} x' = \frac{x}{x-1} \\ y' = \frac{y}{x-1} \end{cases} \Rightarrow$

(T) étant une involution $T = T^{-1}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{x'}{x'-1} \\ y' = \frac{y'}{x'-1} \end{cases}$

Or (E) $x^2 + 2y^2 - 2 = 0$

$\Rightarrow \left(\frac{x'}{x'-1}\right)^2 + 2\left(\frac{y'}{x'-1}\right)^2 - 2 = 0$

$(x' - 2)^2 - 2y'^2 = 2$

(E') $\frac{(x'-2)^2}{2} - y'^2 = 1$

(E') est une hyperbole de centre (2 ;0)

Sommets $(\sqrt{2}, 0)$, $(-\sqrt{2}, 0)$, (0,1), (0; −1)

Asymptote : $y = \frac{1}{\sqrt{2}}x$;$y' = -\frac{1}{\sqrt{2}}x$

Partie B

$P(Z) = Z^3 - 4(1+i)Z^2 + 12iZ + 8 - 8i$

1. Solution imaginaire $z_0 = bi$

$P(ib) = 0 \Rightarrow (ib)^3 - 4(1+i)(ib)^2 + 12i(ib) + 8 - 8i = 0$

$= 4b^2 - 12b + 8 + i(-b^3 + 4b^2 - 8)$

$\Rightarrow \begin{cases} b^2 - 3b + 2 = 0 \ (1) \\ -b^3 + 4b^2 - 8 = 0 \ (2) \end{cases}$

(1) $b^2 - 3b + 2 = 0$ b = 1 ou b = 2

Pour b = 1 dans (2) on a⇒ $-1 + 4 + 8 \neq 0$

Pour b = 2 dans (2) on a $-8 + 16 - 8 = 0$

Donc b = 2

D'où $Z_0 = 2i$

Solution réelle $Z_1 = a$

$P(Z) = (Z - 2i)(aZ^2 + bZ + C)$

$P(Z) = (Z - 2i)(Z^2 - (4 + 2i)Z + 4i + 4)$

On pose $Q(Z) = Z^2 - 2(2 + i)Z + 4i + 4$

$Q(Z) = 0 \Rightarrow \alpha^2 - 2(2 + i)\alpha + 4i + 4 = 0$

$\alpha^2 - 4\alpha - 2i\alpha + 4i + 4$

$$\begin{cases} \alpha^2 - 4\alpha + 4 \ (1) \\ -2\alpha + 4 = 0 \ (2) \end{cases} \Rightarrow \alpha = 2$$

$$Z_1 = 2$$

$$Q(Z) = (Z-2)(dZ+e)$$

$$Q(Z) = (Z-2)(Z-2-2i)$$

Donc les solutions de $Q(Z) = 0$ sont

$Z_0 = 2i$; $Z_1 = 2$ et $Z_2 = 2 + 2i$

2. $Z_A = 2i$; $Z_B = 2$ et $Z_C = 2 + 2i$

a) Déterminons le module et l'argument de

$$Z = \frac{Z_B - Z_C}{Z_A - Z_C} \Rightarrow Z = \frac{2-2-2i}{2i-2-2i} = i$$

$|Z| = 1$, $\arg Z = \frac{\pi}{2}[2\pi]$. Le triangle ABC est rectangle isocèle en C.

b) $(\mathcal{C})$ le cercle circonscrit au triangle ABC. $N \in \mathcal{C}$

A', B' et C' protégés orthogonaux de N sur resp (BC), (AC) et (AB). Les points appartiennent sur une droite appelée droite de Simson.

3. $S(A) = A$ et $S(B) = C$

Déterminons la nature et les caractéristiques de S

S est une similitude de centre A.

Le rapport

$k = \left|\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right| = \left|\frac{1}{1-i}\right|$

$$k = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

L'angle

$$\arg\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$$

$$\arg\frac{1}{1-i} = \arg\frac{1+i}{2} = \frac{\pi}{4}[2\pi]$$

Donc $S\left(A; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\pi}{4}\right)$

4. $\overrightarrow{OK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$

a) Plaçons K et K'

b) $\begin{matrix} h(O) = K \\ h(C) = K' \end{matrix}$ on tant $(KK')//(OC)$

$\Rightarrow \exists h / \begin{matrix} h(O) = k \\ h(C) = k' \end{matrix}$ $\quad \frac{kk'}{OC} \neq 1 \Rightarrow$

Le centre est A car

$$\frac{AK}{AO} = \frac{AK'}{AC} = \frac{2}{3}$$

Ce rapport est :

$\frac{KK'}{OC} = \frac{AK}{AO}$ car $(KK')//(CO)$

Ce rapport est $\frac{2}{3}$

$$h\left(A; \frac{2}{3}\right)$$

c) $g(O) = C \Rightarrow g = S_{AB}$

$\varphi = g \circ h \Rightarrow \varphi$ est une similitude plane indirecte car composée d'une première symétrie orthogonale avec une homothétie. $\varphi = \overline{S}$

Problème 23

Partie A

Soit la courbe (Γ) suivante :

$\begin{cases} x(t) = 2\cos t - \cos 2t \\ y(t) = 2\sin t - \sin 2t \end{cases}$ $t \in [-\pi; \pi]$

1) Montrons que $M(t)$ et $M(-t)$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

$\begin{cases} x(-t) = x(t) \\ y(-t) = y(t) \end{cases}$ la courbe admet l'axe des abscisses comme axe de symétrie. On peut donc étudier la fonction vectorielle sur $[0 ; \pi]$et déduire l'autre partie par symétrie axiale d'axe la 'axe des abscisses.

2) Construction de la courbe. Il faut étudier la fonction.

$\begin{cases} x'(t) = -2\sin t + 2\sin 2t \\ y(t) = 2\cos t - 2\cos 2t \end{cases}$

Signe de x'(t)

Posons $x'(t) = 0 \Rightarrow \sin t - \sin 2t = 0$

$\sin t(1 - 2\cos t) = 0$

Le signe dépend de $1 - 2\cos t$ car pout tout $t \in [0 ; \pi]$, $\sin t \geq 0$.

Posons $1 - 2\cos t = 0$, On a $t = \frac{\pi}{3}$

T	0	$\frac{\pi}{3}$	π
$1 - 2\cos t$	−		+
x'(t)	+		−
x(t)	1 ↗	$\frac{3}{2}$	↘ −3

Signe de y'(t)

Posons $y'(t) = 0 \Rightarrow \cos t - \cos 2t = 0$

$\Rightarrow \cos t - 2\cos^2 t = 0$

On pose $X = \cos t$, l'équation dévient

$-2X^2 + X + 1 = 0$

En résolvant l'équation on aura le tableau suivant.

T	0	$\frac{2\pi}{3}$	π
y'(t)	+		−
y(t)	0 ↗	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↘ 0

Tableau de variation

T	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$x'(t)$	0	+	0	−	$-2\sqrt{3}$	−	0
$x(t)$	1	↗	$\frac{3}{2}$	↘	$-\frac{1}{2}$	↘	-3
$y'(t)$	0	+	2	+	0	−	-4
$y(t)$	0	↗	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↘	0
$\frac{y'(t)}{x'(t)}$	0		∞		0		∞

Partie B

Soit S l'application définie par $Z' = (1 - i)Z - i$

1) Caractérisons S. S est une similitude plane directe de centre A de rapport $k = \sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$ Donc

$$S(A, \sqrt{2}\ ;\ \tfrac{\pi}{4}) \quad \text{Avec } A(1\ ;0)$$

2) La mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AM};\ \overrightarrow{MM'}\right)$

$\left(\overrightarrow{AM};\ \overrightarrow{MM'}\right) = \left(\overrightarrow{AM};\ \overrightarrow{AM'}\right) + \left(\overrightarrow{AM'};\ \overrightarrow{MM'}\right)[2\pi]$

Relation de Chasles

Comme M' = S(M) ce qui signifie que le triangle AMM' est isocèle rectangle en M, on a :

$\left(\overrightarrow{AM};\ \overrightarrow{AM'}\right) = \left(\overrightarrow{M'A};\ \overrightarrow{M'M'}\right) = \frac{\pi}{4}\ [\pi]$

Donc $\left(\overrightarrow{AM};\ \overrightarrow{MM'}\right) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$

3) Déterminons le point B tel que son image B' par tels que leurs affixe Z_B et $Z_{B'}$ soient liées par la relation $Z_B.Z_{B'} = 1$

On sait que $Z_{B'} = (1 + i)\,Z_B - i$

Or $Z_{B'} = \frac{1}{Z_B}$ On a facilement

$(1 + i)Z_B^2 - iZ_B - 1 = 0$

Calcul du discriminant

$\Delta = 3 + 4i$

Racine carrée de Δ

On a $\delta = x + iy$ tel que $\delta^2 = \Delta$

$\begin{cases} x = \pm 2 \\ y = \pm 1 \end{cases}$

Donc $Z_B = 1\ ;\quad Z_B = \frac{1}{2}(1 + i)$

Comme B est distinct de A donc $Z_B = \frac{1}{2}(-1 + i)$ et

$Z_{B'} = -1 - i$

4) D est le point d'affixe $Z_D = -Z_A$ Montrons que les points A, B, B' et D sont cocycliques.

Les triangles BB'A et DB'A sont respectivement rectangles en B et D de même hypoténuse [B'A] donc les points A, B, B' et D sont cocycliques.

5) On rapporte le repère $(O, \vec{u}\ ; \vec{v})$ et soit P un point tel que $\left(\vec{u};\ \overrightarrow{OP}\right) = \theta[2\pi]$

Les points Q et R sont tels que $Z_Q = Z_P^2$ et $Z_R = 2Z_P$

Module et argument de Z_Q et Z_R.

$|Z_Q| = 1$ et $\arg Z_Q = 2\arg Z_P \Rightarrow \arg Z_Q = 2\theta[2\pi]$

$|Z_R| = 2$ et $\arg Z_R = \arg Z_P \Rightarrow \arg Z_Q = \theta[2\pi]$

6) On considère la fonction $F : Z' = 2Z - Z^2$

a) P' image de P par F

I milieu de $[OR] \Rightarrow Z_I = \frac{1}{2}(Z_O + Z_R)$ on a : $Z_I = Z_P$

J milieu de $[QP'] \Rightarrow Z_J = \frac{1}{2}(Z_Q + Z_{P'})$ on a :

$Z_J = Z_P$ on a $I \equiv J$ les segments [OR] et [QP'] ont le même milieu donc le quadrilatère OP'QR est un parallélogramme

b) sur la figure

c) Montrons que (OP) et QA) sont perpendiculaires

Evaluons l'angle $(\widehat{OP\ ;QA})$

$$\overline{(OP\ ;QA)} = \arg\frac{Z_{QA}}{Z_{OP}}$$

$$= \arg\frac{1 - Z_P^2}{Z_P}$$

$$= \arg(1 - Z_P^2) - \arg Z_P$$

On sait $Z_P^2 = (\cos\theta + i\sin\theta)^2$

$= \cos 2\theta + \sin 2\theta$

$1 - Z_P^2 = 2\sin\theta(\sin\theta + i\sin\theta)$ or $\cos\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ et $\sin\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

$1 - Z_P^2 = 2\sin\theta\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right]$

$\arg(1 - Z_P^2) = \left(-\frac{\pi}{2} + \theta\right)[2\pi]$

$\arg Z_P = \theta[2\pi]$

$\overline{(OP\ ;QA)} = \arg\frac{Z_{QA}}{Z_{OP}} = \frac{\pi}{2}[2\pi]$

Les droites (OP) et (QA) sont perpendiculaires

7) $Z_{P'} = 2Z_P - Z_P^2$

$X' + Y' = 2(\cos\theta + i\sin\theta) - (\cos\theta + i\sin\theta)^2$

$= 2\cos\theta + 2i\sin\theta - \cos 2\theta - i\sin 2\theta$

$= 2\cos\theta - \cos 2\theta + i(\sin\theta - \sin 2\theta)$

Par identification

$\begin{cases} X(\theta) = 2\cos\theta - \cos 2\theta \\ Y(\theta) = 2\sin\theta - \sin 2\theta \end{cases}$

Problème 24

$g(x) = x - \ln|e^x - m|$ m est un paramètre réel

Les variations de g_1

$g_1(x) = x - \ln|e^x - 1|$

$E_{g_1} =]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$

$\lim\limits_{-\infty} g_1 = -\infty\,;\ \lim\limits_{0^-} g_1 = +\infty\,;$

$\lim\limits_{0^+} g_1 = +\infty\,;\ \lim\limits_{+\infty} g_1 = 0$

Dérivée

Pour $x < 0\,;\ g_1(x) = x - \ln(1 - e^x)$

$$g_1'(x) = \frac{1}{1-e^x}$$

x	$-\infty$	0
$g_1'(x)$	+	‖
$g_1(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$	‖

Pour $x > 0\,;\ g_1(x) = x - \ln(e^x - 1)$

$$g_1'(x) = \frac{-1}{e^x-1}$$

x	0	$+\infty$
$g_1'(x)$	‖	−
$g_1(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow 0$

Tableau de variations de g_1

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g_1'(x)$	+	‖	−
$g(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$	‖	$+\infty \searrow 0$

Montrons que la droite $y = x$ est asymptote au voisinage de moins l'infini.

Il suffit de calculer la

$$\lim_{-\infty}[g(x) - y]$$

On a

$\lim\limits_{-\infty}[g(x) - y] = 0$

Position au voisinage de moins l'infini. la courbe est en dessus de la droite car $g(x) - y > 0\,;\ \forall\, x < 0$

b) Sur les intervalles$]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$ la fonction est définie, continue et strictement croissante et décroissante respectivement. Elle réalise une bijection resp. sur $]-\infty\,;+\infty[$ et $]0\,;+\infty[$. Par conséquent elle admet les fonctions réciproques qui sont définies continues et strictement croissante et décroissante de $]-\infty\,;+\infty[$ et $]0\,;+\infty[$ vers respectivement $]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$

x	$-\infty$	$+\infty$
$(h^{-1})'(x)$	+	
$(h^{-1})(x)$	$-\infty \nearrow$	0

x	0	$+\infty$
$(l^{-1})'(x)$	−	
$(l^{-1})(x)$	$+\infty \searrow$	0

Partie B

$f_n(x) = x^n e^{-x^2}$ pour tout n et $f_o(x) = e^{-x^2}$

Etude des variations suivant les valeurs de n

$Ef_n =]-\infty;+\infty[$

Limites aux bornes

$$\lim_{-\infty} f_n(x) = 0 \quad \lim_{+\infty} f_n(x) = 0$$

Dérivée et signe de f

$$f_n'(x) = x^{n-1}(n - 2x^2)e^{-x^2}$$

Le signe dépend de $x^{n-1}(n - 2x^2)$ car $\forall\, x\,;\ e^{-x^2} > 0$

Posons $f_n'(x) = 0 \Rightarrow x^{n-1}(n - 2x^2) = 0$

Pour $x < 0$:

Si n est pair x^{n-1} est négatif

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{2n}}{2}$	$\frac{\sqrt{2n}}{2}$	$+\infty$
$f_n'(x)$	+	−	+	
$f_n(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

Si n est impair x^{n-1} est positif

x	$-\infty$	$\frac{\sqrt{2n}}{2}$	$\frac{\sqrt{2n}}{2}$	$+\infty$
$f_n'(x)$	$-$	$+$	$-$	
$f_n(x)$	↘	↗	↘	

Pour $x > 0$; x^{n-1} est positif

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{2n}}{2}$	$\frac{\sqrt{2n}}{2}$	$+\infty$
$f_n'(x)$	$-$	$+$	$-$	
$f_n(x)$	↘	↗	↘	

On déduit aisément les cas $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$

2) a) Déterminons les coordonnées des points ayant une tangente de vecteur directeur $\vec{i}$. Ce sont des points où la dérivée s'annule

$[-\frac{\sqrt{2n}}{2}\,;\left(-\frac{n}{2e}\right)^{\frac{n}{2}}]$ et $[\frac{\sqrt{2n}}{2}\,;\left(\frac{n}{2e}\right)^{\frac{n}{2}}]$

b) Il suffit de calculer pour chaque valeur la dérivée seconde et étudier le signe de celle-ci.

c) les points communs il suffit de résoudre l'équation

$f_{n+1}(x) = f_n(x)$ pour les (C_n)

$f_{2(p+1)}(x) = f_{2p}(x)$ pour les (C_{2p}) et

$f_{2(p+1)+1}(x) = f_{2p+1}(x)$ pour les (C_{p+1})

On trouve aisément les coordonnées des points A, B, C, et O.

Problème 27

$$f(x) = (x-1)e^x + x + 2$$

A- 1) Etude des variations de $f'(x)$ fonction dérivée de f

On a $f'(x) = xe^x + 1$

f' est définie sur $]-\infty;+\infty[$, f' est continue et dérivable sur IR car produit et somme des fonction continue et dérivable sur IR.

Limites aux bornes :

$\lim\limits_{-\infty} f(x) = 1$; $\lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty$

$$f''(x) = (x+1)e^x$$

Signe de f''

$x \in]-\infty;-1]$; $f''(x) \leq 0$

$x \in [-1;+\infty[$: $f''(x) \geq 0$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+\infty$ ↘	$1-e^{-1}$	↗ $+\infty$

a) Déduisons le signe de f' ; $\forall x \in$ IR; $f' > 0$, les variations de f ; sur IR ; $f > 0$

x	$-\infty$	0
$g'(x)$	$-$	
$g(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

b) il suffit de calculer $f(-2)$ et $f(-1)$ on constate que $f(-2).f(-1) < 0$, la fonction étant continue sur$]-2;-1[$, il existe $\alpha \in]-2;-1[$ tel que $f(\alpha) = 0$

Construction de la courbe

On a la droite $y = x + 2$ est asymptote oblique au voisinage de $-\infty$ et une branche parabolique de direction (oy) $\longmapsto +\infty$

Points d'intersection avec les axes

$x = 0; y = 1$ $(0;1)$; $y = 0; x = \alpha$; $(\alpha;0)$

$x = 1$; $y = 3$ $(1;3)$

3. Calcul de l'aire $\mathcal{A}$ limité par :

$x = -2; x = 0$ et $y = x + 2$

$\mathcal{A} = \int_{-2}^{0}[y - f(x)]dx = \int_{-2}^{0}(x-1)e^x dx$; intégrons par parties.

$\mathcal{A} = [(x-1)e^x]_{-2}^{0} - [e^x]_{-2}^{0} = [(x-2)e^x]_{-2}^{0}$

$\mathcal{A} = -8(2e^{-2} - 1)cm^2$

B $P(Z) = Z^3 - 2iZ^2 - 4Z + 8i = 0$

$Z_1 = 2i$; $Z_2 = 2$; $Z_3 = -2$

c) $I(0;2)$; $J(-2;0)$; et $K(2;0)$ trois points du plan.

s

1. Déterminons-le $S(J) = J$ et $S(K) = I$

Méthode géométrique

$$\begin{cases} S(J) = J \\ S(K) = I \end{cases} \Rightarrow k = \frac{IJ}{KJ} = \frac{\|\vec{JI}\|}{\|\vec{JK}\|}$$

$$\vec{JI}\binom{2}{2} \quad \vec{JK}\binom{4}{0}^{[2\pi]\,\theta = (\vec{JK};\vec{JI})} \Rightarrow k = \frac{\sqrt{2^2+2^2}}{4} = \frac{2\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos(\vec{JK};\vec{JI}) = \frac{\vec{JK}.\vec{JI}}{\|\vec{JI}\|\|\vec{JK}\|} = k = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{8}{2\sqrt{2}.4} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\sin(\vec{JK};\vec{JI}) = \frac{\det\left((\vec{JK};\vec{JI})\right)}{\|\vec{JI}\|\|\vec{JK}\|}$$

$$\sin(\vec{JK};\vec{JI}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}[2\pi]$$

D'où $S = Sim\left(J;\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\pi}{4}\right)$

Méthode complexe

$Z' = aZ + b$

$S(J) = J \Rightarrow -2 = -2a + b$ (1)

$S(K) = I \Rightarrow 2i = 2a + b$ (2)

$\Rightarrow (1) + (2) \Rightarrow b = i - 1$

$(2) - (1) \Rightarrow 4a = 2i + 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}(1 + i)$

D'où $Z' = \frac{1}{2}(1 + i)Z + i - 1$

On a bien $|a| = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\theta = \frac{\pi}{4}$

$$S = \mathrm{Sim}\left(J; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\pi}{4}\right)$$

2. Construction des images des points O, I,V,M et R.

Avec O(0 ;0) I(0 ;2) ; V(α; 0) ; M(0,1) ; R(1 ;3)

3. La courbe ($\mathcal{C}'$) = S($\mathcal{C}$) se construit très facilement.

4.$E' = S(E) \Rightarrow \mathcal{A}' = S(\mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{A}' = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \mathcal{A}$

D'où $\mathcal{A}' = 4(2e^{-2} - 1)cm^2 \approx 2{,}917cm^2$

D. $E_0 = E$; $E_{n+1} = S(E_n)$ (U_n) la famille des aires associées à (E_n).

1. $A_1 = S(A_1) = A_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} A_0$

$$U_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} U_0 \Rightarrow U_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) U_0 \Rightarrow U_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n A$$

2. $V_n = U_n + 1993$.

Calcul de $S_n = V_5 + \cdots + V_{n-1}$

$$N = n - 1 - 5 + 1 = n - 5$$

$$S_n = U_5 + U_6 + U_7 + \cdots + U_{n-1} + (n - 5)(-1993)$$

$$= U_0 \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-5}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} - (n - 5)1993.$$

$$\lim_{+\infty} S_n = -\infty$$

E). $I'' = SOS(I)$ or $SOS = \mathrm{Sim}\left(J; \frac{1}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

$$I'' = S^2(I) \Rightarrow \begin{cases} \frac{JI''}{JI} = \frac{1}{2} \\ (\vec{JI}; \vec{JI''}) = \frac{\pi}{2}[\pi] \end{cases}$$

L'hyperbole de centre $S(O) = O'$ de sommet I'' et d'asymptote la droite $y = x + 2$

Problèmé 28

1) a) Montrons que $\overline{(KA', KH)} = \overline{(AA', AH)}[\pi]$

On sait K et H sont les projections orthogonales de A' sur respectivement (AB) et (AC) donc on a :

KA'⊥ AK

et HA' ⊥ AH ce qui signifie que

$\overline{(A'K, A'H)} = \overline{(AK, AH)}[\pi]$ les points A' K, H et A sont cocycliques.

(ou bien les triangles AKA' et AHA' sont respectivement rectangles en K et H d'hypothénuse commune [AA'], les points A, K, A' et H sont cocylciqes)

On peut utiliser la relation de Chasles pour les angles orientés

$\overline{(KA', KH)} + \overline{(KH, A'H)} = \overline{(AK, A'A)} + \overline{(AA', AH)}[\pi]$

Or $\overline{(KH, A'H)} = \overline{(AK, A'A)}[\pi]$ à cause de la cocylcicité des points

Donc

$\overline{(KA', KH)} = \overline{(AA', AH)}[\pi]$

b) Montrons que $\overline{(KB, KH)} = \frac{2\pi}{3}[\pi]$

$\overline{(KB, KH)} = \overline{(KB, KA')} + \overline{(KA', KH)}[\pi]$

$= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}[\pi]$

$= \frac{2\pi}{3}[\pi]$

$$\overline{(KB, KH)} = \frac{2\pi}{3}[\pi]$$

2) Montrons que les points B, K, H et C sont cocylciques

Le triangle ABC étant équilatéral

On a :

$\overline{(CH, CB)} = \frac{\pi}{3}[\pi]$ (1)

$\overline{(KB, KH)} = \frac{2\pi}{3}[\pi]$ (2)

On additionne (1) + (2) on a :

$$\overline{(CH, CB)} + \overline{(KB, KH)} = 0[\pi]$$

$\overline{(CH, CB)} = \overline{(KH, KB)}[\pi]$ les points C, H, B et K sont cocycliques.

3) a) Montrons que le triangle KFA est isocèle en F

Le triangle AKE est rectangle en K, AE est l'hypothénuse. F est le milieu de [AE] ce qui signifie que FA = FE

F est aussi le centre du cercle circonscrit au triangle AEK donc FA = FK = R

Comme FK = FA le triangle AFK est isocèle en F.

b) Déduisons que $\overline{(KF, KA)} = \overline{(DB, DH)}[\pi]$

Le triangle AFK étant isocèle en F on a :

$\overline{(KF, KA)} = \overline{(AK, AF)}[\pi]$

$= \overline{(AB, AE)}[\pi]$ (1) car les points sont alignés A, K, et B et A, F et E respectivement.

De plus les points A, E, D et B sont cocylciques

$\overline{(AB, AE)} = \overline{(DB, DE)}[\pi]$ (2)

On donc (1) et (2)

$\overline{(KF, KA)} = \overline{(DB, DE)}[\pi]$

c) Montrons que (KF) ⊥ (DB)

On sait que d'après le b)

$\overline{(KF, KA)} = \overline{(DB, DE)}[\pi]$

Utilisons la relation de Chasles en inserant la droite (DB) ;

$\overline{(KF, DB)} + \overline{(DB, KA)} = \overline{(DB, DE)}[\pi]$

$\overline{(KF, DB)} = \overline{(KA, DB)} + \overline{(DB, DE)}[\pi]$

$\overline{(KF, DB)} = \overline{(KA, DE)}[\pi]$

$\overline{(KF, DB)} = \frac{\pi}{2}[\pi]$ donc les droites (KF) et (DB) sont perpendiculaires.

4) a) Montrons qu'il existe une rotation R_1 qui transforme B en C et K en H

Le triangle ABC est équilatéral, A' est le milieu de [BC] les projections de A' sur respectivement (AB) et (AC) sont à égale distance de B et C respectivement c'est-à-dire que HC = BK de plus $\overline{(BK, CH)} \neq 0[\pi]$

Donc il existe une rotation R_1 telle que $R_1(B) = C$ et $R_1(K) = H$

Donnons l'angle de la rotation R_1.

$\theta_1 = \overline{(\overrightarrow{BK}, \overrightarrow{CH})}[\pi]$

$= \overline{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}[\pi]$

$= \frac{\pi}{3}[\pi]$ car le triangle est équilatéral.

b) Construction du centre

Soit Ω_1 le centre de R_1

Comme l'image de B est C donc ona :

$$\begin{cases} \Omega_1 B = \Omega_1 C \\ \overline{(\overrightarrow{\Omega_1 B}, \overrightarrow{\Omega_1 C})} = \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$$

Donc $\Omega_1 \in$ m.d$[BC] \cap$Cerclecapable dangle $\frac{\pi}{3}$ relatif au segment [BC]. Donc $\Omega_1 \equiv A$

5) On pose $f = R_2 o S_{AA'} o t_{\overrightarrow{A'C}}$ avec $R_2(A, \frac{\pi}{3})$

a) Calcul de f(A')

f(A') = A'' qui est le milieu du segment [AB].

b) Caractérisons f : f est une translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

6) On rapport à un repère $(A', \vec{i}, \vec{j})$ avec $\vec{i} = \overrightarrow{A'C}$

Donnons l'expression analytique de $R_2(A, \frac{\pi}{3})$

$$R_2(A, \tfrac{\pi}{3}) : \begin{cases} x' = (x - x_o)\cos\frac{\pi}{3} - (y - y_o)\sin\frac{\pi}{3} + x_o \\ y = (x - x_o)\sin\frac{\pi}{3} + (y - y_o)\cos\frac{\pi}{3} + y_o \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - (y - \sqrt{3})\frac{\sqrt{3}}{2} \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}(y - \sqrt{3})c + \sqrt{3} \end{cases}$$

Problème 29

1) La figure est dans la parties des figures. (C) est le cercle circonscrit au triangle ABC.

2) Montrons que E, B, C et F appartiennent à un cercle (C_1).

E est le symétrique de C par rapport à (AB)

De B par rapport à (AC)

Les triangles AFB et AEC sont respectivement isocéles en A donc AE = AB = AC = AF. Ces points sont à egale distance de A donc sont un cercle (C_1) de centre A et de rayon R = A

3) S est la similitude de centre B qui transforme (C) en (C_1)

a) Donnons l'angle et le rapport de cette similitude.

On sait que S(B) = B et S(O) = A on a facilement $\theta = \overline{(\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BA})}[\pi]$ et $k = \frac{BA}{BO}$

O est le centre du cercle (C) donc le triangle BAO est isocèle en O.

$\overline{(\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BA})} = \overline{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO})} = \frac{1}{2}\overline{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}[2\pi]$

$\theta = \frac{\pi}{12}[2\pi]$

$k = \frac{BA}{BO}$ ce qui signifie que $k = 2\cos\frac{\pi}{12}$

D'où $S\left(B\,;\, 2\cos\frac{\pi}{12}\,;\, \frac{\pi}{12}\right)$

b) Montrons que si $M \in (C)$, $M' = S(M)$ appartient à (C_1) alors les points C, M et M' sont alignés.

Il suffit d'évaluer l'angle $\overline{(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CM'})}$

On a : $\overline{(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CM'})} = \overline{(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CB})} + \overline{(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CM'})}[2\pi]$

En appliquant le théorème des angles incrits et de l'angle au centre dans un cercle on a:

$\overline{(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CB})} = \frac{1}{2}\overline{(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OB})}[2\pi]$ et

$\overline{(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CM'})} = \frac{1}{2}\overline{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM'})}[2\pi]$

$\overline{(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CM'})} = \frac{1}{2}\overline{(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OB})} + \frac{1}{2}\overline{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM'})}[2\pi]$ (1)

Par la similitude on a : S(B) = B, S(O) = A et S(M) = M'. La similitude conserve les angle orientés donc

$\overline{(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OB})} = \overline{(\overrightarrow{AM'}, \overrightarrow{AB})}[2\pi]$ (2)

(2) dans (1) on a : $\overline{(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CM'})} = 0[2\pi]$.

Donc les points C, M et M' sont alignés.

Ce qui signifie que si un point appartient à (C) son image est sur (C_1) tel que ces points soient alignés avec le point C.

c) Les antécédents de F et E sont donc les points F_1 et E_1 tels que (F, F_1, C) et (E, E_1, C) sont respectievement alignés.

4) Montrons que le triangle ABF est equilatéral.

On sait que AF = AB le triangle est isocèle en A.

F est le symétrique de B par rapport à (AC) donc la droite (AC) est la médiatrice de [BF]. On a :

$\overline{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF})} = 2\overline{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}[2\pi]$

$\overline{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF})} = \frac{\pi}{3}[2\pi]$ Le triangle est donc équilatéral car la mesure de tous les angles est égale à $\frac{\pi}{3}[2\pi]$.

(C_2) est son cercle circonscrit.

Traçons le cercle image de (C_2).

$(C_2') = S(C_2) \Rightarrow S(O_2) = O_2'$ est le centre de (C_2')

S(B) = B, S(C) = F

$S(A) = A_1$ c'est-à-dire A, C et A_1 sont alignés

$A_1 \in (C_1)$ donc A_1 est le symétrique de C par rapport à A. Soit I milieu de [AB].

$\{O_2\} = (AC) \cap (OI)$ donc

$S(O_2) = S[(AC) \cap (OI)]$

$= S(AC) \cap S(OI)$

$= (A_1F) \cap (AI_1)$ avec I_1 le milieu de $[BA_1]$ car la similitude conserve les milieux des segments

Donc $\{O_2'\} = (A_1F) \cap (AI_1)$

5) Soit H le point d'intersection de (FE) et (AC).

Montrons que H est l'orthocentre du triangle A_1FB

Dans ce triangle la droite (A_1C) est une hauteur

$(AC) \perp (BF)$

Or $(AB) \perp (CE_1)$ car E est le symétrique de C par rapport à (AB).

La similitude conserve l'orthogonalité on a donc $S(AB)\perp S(CE_1) \Rightarrow (A_1B)\perp(FE)$ donc (FE) est une hauteur dans le triangle A_1FB

Or $(A_1C)\cap(FE)=\{H\}$ donc H est l'orthocentre dans le triangle A_1FB car point de rencontre des hauteurs.

Problème 30

2.a) Montrons l'existence de l'homothétie h qui transforme A en I et L en J.

$$h(A) = I$$
$$h(L) = J$$

Comme $(AL)//(IJ)$, alors il existe une homothétie h telle que $h(A) = I$ et $h(L) = J$

b). Détermination du centre et du rapport.

- Centre Ω
  $(LJ) \cap (IA) = \{\Omega\} \Rightarrow \Omega = K$
- Rapport k

$$k = \frac{IJ}{AL} = 2 \Rightarrow k = 2$$

II. S similitude plane directe

$S(B) = J$ et $S(O) = K$

1) Démontrons que les points P, O, I, K d'une part et P, J, B, I d'autre part sont cocycliques.

* Le quadrilatère POIK est formé de deux triangles rectangles KIO et KPO de même hypoténuse [KO]. il est donc inscriptible. D'où la cocyclicité des points P, J, B, I.

* Le quadrilatère PJBI est formé de deux triangles rectangles PJB et IJB de même hypoténuse[BJ]. Il est donc inscriptible. D'où la cocyclicité des points P,J,B,I

2. centre de S

Le centre de S est l'intersection autre que P des cercles circonscrits des quadrilatères POIK et PJBI.

Le centre de S est donc le point I.

* Mesure de l'angle de S

$$S(B) = J \qquad \theta = (\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{JK})[2\pi]$$
$$S(O) = K$$
$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

3.$g = h^{-1}oS_{AB}$, $h^{-1} = h\left(K; \frac{1}{2}\right)$

Nature de g

g est la similitude plane indirecte de centre K, de rapport $k = \frac{1}{2}$ et d'axe (AB)

4. a) Nature de T

$T = goS$ est une similitude plane indirecte.

$k \times k' = 1$ alors T est une réflexion

$$T = Sim\left(K; \frac{1}{2}; (AB)\right) oSim\left(I; 2; \frac{\pi}{2}\right)$$

$T = S_{\mathcal{D}}$; $T(I) = A$ T

$\mathcal{D}$est la médiatrice de [AI]

$$u(x) = x^2 + 2 - 2\ln x$$

1. Tableau de variation

x	0		1		$+\infty$
u'(x)		$-$	0	$+$	
u(x)	$+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

2. Signe de u

$$\forall x \in E_u, U(x) > 0$$

III. $\forall x \in IR*+; f(x) = x + 2\frac{\ln x}{x}$

1. f est dérivable sur IR^*+ et $f'(x) = \frac{u(x)}{x^2}$

2. Variation de f

x	0	$+\infty$
f'(x)	+	
f(x)	$-\infty$ ↗	$+\infty$

b) Montrons que (BD) et (OL) sont asymptotes à $(\mathcal{C})$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$, alors (OL) est asymptote verticale.

* $f(x) = x + \frac{2\ln x}{x}$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2\ln x}{x} = 0$, alors (BD) d'équation $y = x$ est asymptote oblique à $(\mathcal{C})$.

c) Démontrons que $(\mathcal{C})$ coupe (IJ) en un point de JOQI, Q milieu de [OJ].

f est continue su$]0;+\infty[$, en particulier sur

$JOQI = \left]0;\frac{1}{2}\right[$. De plus $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\times f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ alors

$\exists\alpha! \in]OQ[$.

3.a) construction de $\mathcal{C}_1$ et

b) construction de $(\mathcal{C}'_1)$

$\mathcal{C}'_1 = S_H(\mathcal{C}1)$

c) calcul d'aire a_0

$$a_0 = \int_{1/2}^{1} 2f(x)dx\, u.a$$
$$a_0 = \frac{3}{4} + 2\ln^2 2.\, u.a$$

Problème 31

Les triangles sont tous rectangle en O. donc tous les cercles passent par le point O.

Partie B.

1.a) $r(A) = B$, $r(C) = D$ $\Rightarrow \theta = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD})[2\pi]$

$$\theta = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$$

b) si I est le centre$\Rightarrow (\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}) = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$. Le triangle IAB est rectangle en I. I $\in$C1

Le triangle ICD est rectangle en I. I $\in$C3.

de I $\in$ (C1)$\cap$(C3) mais distinct de O, d'où I est le 2ème point d'intersection de(C1) et (C3)

2. $r'(A) = D$; $r'(C) = B$

a) $\theta' = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB})\,[2\pi]$

$= (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD})\,[2\pi]$

$= (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) + \pi[2\pi]$

$= -\frac{\pi}{2} + \pi[2\pi]$

$\theta' = \frac{\pi}{2}[2\pi]$

b) J est le centre de r' ⇒ JAD est rectangle en J ⇒ J∈(C4) et JCB est rectangle en ⇒ J∈(C2) J ∈ (C2)∩ (C4) distinct de O.

3.a) N ≡ O ; M milieu de [BD]

b) Montrons que INJM est un carré.

Les points I et J sont sur les cercles (C_1) et (C_2)

Les triangles NBA et NCB sont rectangles et semblables en O.⇒ $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OJ}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$,le triangle IOJ est rectangle isocèle en O.

M ∈ [BD]. M ∈ de la médiatrice de [IJ]. Donc le triangle MIJ est isocèle en M.

M milieu de [BD]. N milieu de [AC],MJI est rectangle isocèle en M.

Donc INJM est un carré.

Partie C

$$S\left(I; \sqrt{2}; \frac{\pi}{4}\right)$$

1. Figure

2. $f(D) = D' \Rightarrow \begin{cases} \frac{ID'}{ID} = \sqrt{2} \\ (\overrightarrow{ID}; \overrightarrow{ID'}) = \frac{\pi}{4}[2\pi] \end{cases}$ ⇒le triangle IDD' est rectangle isocèle en D donc D' ≡ R.

f(N) = N' ⇒ le triangle INN' est rectangle isocèle en N ; N' ∈ (AD).

f(B) = B' ⇒ le triangle IBB' est rectangle isocèle en B donc B' ≡ P.

$(\overline{DM}, \overline{DB}) = (\overline{RM'}, \overline{RP})[2\pi]$,les points M

Or $(\overline{DM}, \overline{DB}) = 0[\pi] \Rightarrow$

$(\overline{RM'}, \overline{RP}) = 0[\pi]$ ⇒les points R,M'P sont alignés

$$S(D) = R$$
$$S(M) = M'$$
$$S(B) = P$$

La similitude conserve le milieu des bipoints

Car M est milieu de [DB] alors son image M' sera milieu de [RP]

f(M) = M' ⇒ IMM' rectangle isocèle en M. donc M' ≡ J donc J est milieu de [RP]

3.a) Q et S ; dans la figure.

b) Démontrons que OP,J et R sont alignés

o est le point commun de tous les cercles.

J,P, R sont alignés car J est milieu de [RP]

I et R sont diamétralement opposés.

$$(\overrightarrow{MR}, \overrightarrow{MI}) = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$$

De même I,M ,P est un triangle rectangle en I.

$$(\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{MP}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

$$(\overrightarrow{MR}, \overrightarrow{MI}) + (\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{MP}) = 0[2\pi]$$

$$(\overrightarrow{MR}, \overrightarrow{MP}) = 0[2\pi]$$

Or O ≡ M

$(\overrightarrow{OR}, \overrightarrow{OP}) = 0[\pi] \Rightarrow$ O, R, P sont alignés, O ∈ (RP)

Donc O,P,J et R sont alignés.

c) $(\overrightarrow{MJ}, \overrightarrow{MQ}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$

$$(\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{MJ}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

$(\overrightarrow{MS}, \overrightarrow{MQ}) = \pi[2\pi] \Rightarrow$ les points M, S, Q sont alignés.

$(\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{MJ}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$, $(MS, MJ) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$

$$(\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{MJ}) = (\overrightarrow{MS}, \overrightarrow{MJ})[2\pi]$$
$$(\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{MJ}) + (\overrightarrow{MJ}, \overrightarrow{MS}) = 0[2\pi]$$
$$(\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{MS}) = 0[2\pi] \Rightarrow I \in (MJ)$$

I, M, S sont alignés

Donc Q, I, O et S sont alignés avec M ≡ O

Partie D

1. le foyer est P la directrice est (VI)

a) l'axe focale est perpendiculaire à la directrice. or (OI) ⊥ (OJ) donc (OJ) est l'axe focale.

Le sommet de la parabole sera milieu de [JP]

b) P_O est diamétralement opposé à sur C_1

la médiatrice de IP est la droite (AΩ) qui passe par Ω.

Ω et le sommet de (AΩ) est tangent à la parabole.

P'_O sur (IP_O) tel que

2. P_1, Q, O est rectangle en Q ⇒

$(\overline{QP_1 QO}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$ d'autre part

$(\overline{QM, MJ}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$

Or QO = QM.

$$(\overline{QP_1 QO}) = (\overline{QO, MJ})[\pi]$$
$$(\overline{QP_1, OJ}) = 0[\pi] \Rightarrow (QP_1)//(OJ)$$

Donc $(QP_1) \perp (OI)$

a) $h' \in (QP_1)$.

Problème 32

$f(x) = \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1|$; $g(x) = x - \ln x$

1. Tableau de variation de f

$$E_f = IR - \{-1\}$$

$$\lim_{\pm\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{1^{\pm}} f(x) = -\infty$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} - x + \ln(-x-1) \text{ si } x < -1 \\ \frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1) \text{ si } x > -1 \end{cases}$$

$$x < -1;\ f(x) = \frac{x^2}{2} - x + \ln(-x-1)$$

$$f'(x) = \frac{x^2}{x+1}$$

$$\forall x \in x < -1; f'(x) < 0$$
$$x > -1; f'(x) > 0$$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$ $-\infty$	‖	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

2. signe de $f(x)$ sur $]-1;+\infty[$
On sait que $f(0) = 0$

$$x \in]-1;0[;\ f(x) < 0$$
$$x \in [0;+\infty[;\ f(x) \geq 0$$

3. Déduisons que $\forall x \in [0;+\infty[;\ f(x) \geq 0$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1) \geq 0$$

$$x - \ln(x+1) \leq \frac{x^2}{2}$$

$$\forall x \in [0;1];\ x^2 < x \Rightarrow \frac{x^2}{2} < \frac{x}{2}$$

Donc $x - \ln(x+1) < \frac{x}{2}$

4. $\forall x \geq 1$ Montrons que $g(x) \geq 1$

$$\begin{matrix} x \geq 1 \\ \ln x > 1 \end{matrix} \Rightarrow x - \ln x \geq 1 \Rightarrow g(x) \geq 1$$

5. Points d'inflexion.

$$f''(x)=0 \Rightarrow f''(x) = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$$

$f''(x)=0 \Rightarrow \begin{matrix} x = 0 \\ x = -2 \end{matrix}$ donc les points d'inflexion sont $(0,0)$ et $(-2\ ;4)$

6. Prouvons que sur $]-2;-1[:\exists x_0/f(x_0) = 0$

Sur $[-2;-1]$ f est continue et strictement décroissante de plus $f(-2).\lim\limits_{-1^-} f(x) < 0 \Rightarrow \exists\, x_0 \in]-2;-1[$ tel que $f(x_0) = 0$.

f) h la restriction de f à l'intervalle $]-1;+\infty[$.

a) h est définie, continue et croissante, elle réalise une bijection de $]-1;+\infty[$ sur $]-\infty;+\infty[$. Elle admet une bijection réciproque notée h^{-1} qui est continue, strictement croissante de $]-\infty;+\infty[$ vers $]-1;+\infty[$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$h'^{-1}(x)$	$+$	
$h^{-1}(x)$	-1 $\nearrow$	$+\infty$

b) Montrons que $\exists a \in]0;2[,/h'(a) = \ln\sqrt{3}$ (théorème des A- f)

h est continue sur $[0;2]$, dérivable sur $]0;2[$ alors $\exists a \in]0;2[\ /h(2) - h(0) = h'(a)(2-0)$

Or $h(2) = \ln 3\ ;\ h(0) = 0$

$$2h'(a) = \ln 3 \Rightarrow h'(a) = \ln\sqrt{3}$$

c) On déduit sur la fonction réciproque que sur $[0;\ln 3]$

$$h^{-1}(\ln 3) - h^{-1}(0) = (h^{-1})'(b)(\ln 3 - 0)$$

Or $h^{-1}(\ln 3) = 2$

$$2 = (h^{-1})'(b)\ln 3 \Rightarrow (h^{-1})'(b) = \frac{2}{\ln 3}$$

d) Traçons (C) et (C') courbe de h et h^{-1}

Branches infinies

$\lim\limits_{\pm\infty} f(x) = +\infty$ Possibilité d'une asymptote oblique.

On calcul $\lim\limits_{\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{\pm\infty}\left(\frac{x}{2} - 1 + \frac{\ln|x+1|}{x}\right) = \pm\infty$

La courbe admet une branche parabolique de direction (oy).

$\lim\limits_{1^\pm} f(x) = -\infty$, la droite $x = -1$ est asymptote verticale à la courbe.

Partie B

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = U_n - \ln(U_n) \end{cases}$$

1.a) $U_n \geq 0$ par récurrence

$U_0 = 2 > 1$ Vrai

Supposons que $U_n \geq 1$

Prouvons que $U_{n+1} \geq 0$

$$U_{n+1} = U_n - \ln U_n$$

$$\begin{matrix} U_n \geq 1 \\ \ln U_n \geq 0 \end{matrix} \Rightarrow U_n - \ln U_n \geq 1 \Rightarrow U_{n+1} \geq 1$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N};\ U_n \geq 1$.

b) Déduisons le sens de variation de (U_n)

$U_{n+1} - U_n = -\ln U_n$ or $\ln(U_n) > 0 \Rightarrow -\ln U_n < 0$

$U_{n+1} - U_n < 0 \Rightarrow$ la suite (U_n) est décroissante

La suite étant minorée et décroissante elle converge.

$$\lim_{+\infty} Un = 1$$

2. $V_n = U_n - 1$

a) On sait que $\forall n;\ U_n \geq 1 \Rightarrow U_n - 1 \geq 0$ de $V_n \geq 0$ donc la suite (U_n) est positive

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= U_{n+1} - 1 \\ &= U_n - \ln U_n - 1 \\ &= U_n - 1 - \ln U_n \\ &= V_n - \ln(V_n + 1) \end{aligned}$$

$$V_{n+1} = V_n - \ln(V_n + 1)$$

b) Variation

$$V_{n+1} - V_n = -\ln(V_n + 1)$$

Or $V_{n+1} > 1$

$\ln(V_n + 1) > 0$

$V_{n+1} - V_n < 0 \Rightarrow$ La suite (V_n) est décroissante.

$\forall n \in \mathbb{N};\quad 0 \leq V_n \leq 1.$

$V_0 = U_0 - 1$ Or $U_0 = 2 \Rightarrow V_0 = 1$

$0 \leq V_0 \leq 1$ Vrai

Supposons que $0 \leq V_n \leq 1$ vraie au rang n

Démontrons que

$0 \leq V_{n+1} \leq 1$

$0 \leq V_n \leq 1$

$0 \leq V_{n+1} \leq 2$

$0 \leq \ln(V_{n+1}) \leq \ln 2 \leq 1$

$0 = V_n - \ln(V_{n+1}) \leq 0 \leq 1$

$0 = V_n - \ln(V_{n+1}) \leq 1 \Rightarrow 0 \leq V_{n+1} \leq 1$ Vraie

Donc $\forall n;\ \in \mathbb{N}$

$0 \leq V_n \leq 1.$

c) Montrons que $\forall n;\ \in \mathbb{N}\ U_{n+1} \leq \frac{1}{2}V_n$

D'après la partie A

$U_n - \ln(V_n + 1) < \frac{V_n}{2}$ Car $V_n \in [0;1]$

Donc $U_{n+1} < \frac{1}{2}V_n$ donc $V_n < \left(\frac{1}{2}\right)^n V_0$, $V_n < \frac{1}{2^n}$

$\lim\limits_{+\infty} U_n = 0$

Problème 43

Partie A

$P(Z) = Z^3 + (2-3i)Z^2 + (-7-8i) - 11i + 10$

1) calcul de $p(-i)$

$P(-i) = 0 \Rightarrow Z_o = -i$ est une racine

2) Déterminons U et V deux nombres complexes tels que $P(Z) = (Z+i)(Z^2 + UZ + V)$

On trouve

$U = 2-4i$; $V = -11-10i$

Donc $P(Z) = (Z+i)[Z^2 + 2(1-2i)Z - 11 - 10i]$

3) Résolvons $P(Z) = 0$

On a $\begin{cases} Z = -I & (1) \\ Z^2 + 2(1-2i)Z - 11 - 10i = 0 & (2) \end{cases}$

(2): $Z^2 + 2(1-2i)Z - 11 - 10i = 0$

Calcul de Δ

$\Delta' = (1-2i)(1-2i)^2 - (-11-10i)$
$= 8 + 6i$

Déterminons la racine carrée de Δ'

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x^2 - y^2 = 8 \\ xy = 3 \end{cases} \Rightarrow x = \pm 3 \text{ et } y = \pm 1$

Donc $Z_1 = 2 + 3i$ et $Z_2 = -4 + i$

$S = \{-i; 2+3i; -4+i\}$

4) On désigne par I, B et C les points d'affixes respectives $-i$; $2+3i$; $-4+i$

Donnons les caractéristiques de la similitude plane directe qui laisse invariant I et transforme B en C

$S(I) = I$ et $S(B) = C$

On a Le centre I

Le rapport $K = \frac{IC}{IB}$ $K = 1$

L'angle $\overline{(\overrightarrow{IB}; \overrightarrow{IC})} = \arg \frac{Z_{\overrightarrow{IC}}}{Z_{\overrightarrow{IB}}} \Rightarrow$

$\overline{(\overrightarrow{IB}; \overrightarrow{IC})} = \frac{\pi}{2}[2\pi]$

Donc $S\left(I;\ 1; \frac{\pi}{2}\right) = R(I; \frac{\pi}{2})$

Partie B

1) Soit A, M et M_1 les points d'affixes respectives 1 ; Z et Z_1 tel que $Z_1 = iZ - 1 - i$

a) M' est le barycentre des points pondérés (M, α) : $(M_1 ; -\alpha)$ et $(A ; 1)$

On a : (T_α) $Z' = \alpha(1-i)Z + \alpha(1+i) + 1$

b) Démontrons que (T_α) est une similitude plane directe

Il suffit de calculer le module de $\alpha(1-i)$. On a

$|\alpha(1-i)| = |\alpha|\sqrt{2} \neq 1$ donc (T_α) est une similitude dont l'affixe de son centre est

$Z_\Omega = \frac{1}{(1-\alpha)^2+\alpha^2} + \frac{-\alpha^2}{(1-\alpha)^2+\alpha^2} i$

L'angle est $\theta = = -\frac{\pi}{4}[2\pi]$

Pour que (T_α) soit une rotation il faut et il suffit que $|\alpha|\sqrt{2} = 1 \Rightarrow |\alpha| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) Exprimons les coordonnées du point M' image de M par la transformation (T_α)

On a $Z' = \alpha(1-i)Z + \alpha(1+i) + 1$

$x' + iy' = \alpha(1-i)(x+iy) + \alpha(1+i) + 1$

$\begin{cases} x' = \alpha x + \alpha y + \alpha + 1 \\ y' = -\alpha x + \alpha y + \alpha \end{cases}$

2) On suppose que α est positif, soit le point $N(-\ln\alpha ; \ln\alpha)$ et N' son image par (T_α)

a) Déterminons les coordonnées de N' en fonction de α

On a : $N' = (T_\alpha)(N)$ ce qui signifie que :

$\begin{cases} x' = \alpha(-\ln\alpha) + \alpha(\ln\alpha) + \alpha + 1 \\ y' = -\alpha(-\ln\alpha) + \alpha(\ln\alpha) + \alpha \end{cases}$

$N' : \begin{cases} x' = \alpha + 1 \\ y' = 2\alpha\ln\alpha + \alpha \end{cases}$

b) Démontrons que quand α est positif N' parcourt la courbe d'équation $y = 2(x-1)\ln(x-1) + (x-1)$

Il suffit de déterminer la trajectoire du point N'

On a : $\begin{cases} x' = \alpha + 1 & (1) \\ y' = 2\alpha\ln\alpha + \alpha & (2) \end{cases}$

(1) $\alpha = x' - 1$

(1) Dans (2) $\Rightarrow y' = 2(x'-1)\ln(x'-1) + (x'-1)$

Donc $(\Gamma) : y = 2(x-1)\ln(x-1) + (x-1)$

Partie C

Soit f la fonction définie et continue sur $\mathbb{R}^+$ par :

$\begin{cases} f(x) = 2x\ln x + x & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1) a) Dérivabilité de f en $x_0 = 0$

$\lim\limits_{0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{0} \frac{2x\ln x - x}{x}$

$= -\infty$

La fonction n'est pas dérivable. La courbe admet en ce point une tangente verticale.

b) Résolvons les équations $f(x) = 0$ et $f(x) = x$

$f(x) = 0 \Rightarrow x(2\ln x + 1) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$

$f(x) = x \Rightarrow 2x\ln x + x = x \Rightarrow x = 0$ ou $x = 1$

Les points d'intersection de la courbe et la droite y = x sont $x = 0$ et $x = 1$

c) Variation de f

$E_f = [0\,;+\infty[$

$f(0) = 0 \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Dérivée

$x \in]0\,;+\infty[\,;\quad f(x) = 2x\ln x + x$

$f'(x) = 2\ln x + 3$

Signe de $f'(x)$ et variations de f

x	0	$e^{\frac{-3}{2}}$	$+\infty$
$f'(x)$	−		+
$f(x)$	0 ↘	$-2e^{\frac{-3}{2}}$	↗ $+\infty$

3) a) Tracer la courbe

Branche infinie

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ possibilité d'une asymptote oblique. On calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ la courbe présente une branche parabolique de direction (Oy) au voisinage de $+\infty$

b) Il suffit de poser $X = x - 1$ et $Y = y$

Donc la courbe (Γ) se déduit par une translation de vecteur de coordonnées $(-1\,;0)$

4) Soit g la restriction de f sur $[e^{\frac{-3}{2}}\,;+\infty[$

a) Sur cet intervalle, la fonction g est définie, continue et strictement croissante. Elle réalise une bijection de $[e^{\frac{-3}{2}}\,;+\infty[$ sur $[-2e^{\frac{-3}{2}}\,;+\infty[$. Par conséquent elle admet une bijection réciproque g^{-1} qui est définie, continue et strictement croissante de $[-2e^{\frac{-3}{2}}\,;+\infty[$ vers $[e^{\frac{-3}{2}}\,;+\infty[$.

Tableau de variation g^{-1}

x	$-2e^{\frac{-3}{2}}$	$+\infty$
$(g^{-1})'(x)$	+	
$(g^{-1})(x)$	$e^{\frac{-3}{2}}$ ↗	$+\infty$

La courbe sera le symétrique par rapport à la droite $y = x$ de la première courbe sur l'intervalle défini

Problème 44

Partie A

$\forall n \in \mathbb{N},\ V_{n+2} + V_{n+1} - 6V_n = 0$

$k^2 + k - 6 = 0$

On trouve $k = 2$ ou $k = -3$

$V_n = \lambda 2^n + \mu(-3)^n$

$V_0 = 1$ et $V_1 = 2$ ce qui donne que $\lambda = 1\,;\ \mu = 0$ donc $V_n = 2^n$ c'est une suite géométrique de raison $q = 2$

1)a) Montrons par récurrence que

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ V_n \equiv 5^{n-1} V_1[6]$.

$n = 1\,;\ V_1 \equiv V_1[6]$ vraie

Supposons que la relation est vraie au rang k c'est-à-dire $V_k \equiv 5^{k-1} V_1[6]$.

Montrons qu'il est aussi vraie au rang k+1

$V_{k+1} = 2V_k$ or $V_k \equiv 5^{k-1} V_1[6]$.

$V_{k+1} \equiv 2.5^{k-1} V_1[6]$

$\equiv (5-3)\,5^{k-1} V_1[6]$

$\equiv 5.\,5^{k-1} V_1 - 3.V_1 5^{k-1} V_1[6]$ or $V_1 = 2$

$V_{k+1} \equiv 5^k V_1[6]$ vraie

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ V_n \equiv 5^{n-1} V_1[6]$.

b) Déduisons les restes dans la division de Vn par 6 suivant les valeurs de n.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ V_n \equiv 5^{n-1} V_1[6]$.

On a : $5 \equiv 5[6]$

$5^2 \equiv 1[6]$

$\Rightarrow\ 5^{2k} \equiv 1[6]$

$\Rightarrow\ 5^{2k+1} V_1 \equiv 5V_1[6] \quad V_1 = 2$

$\Rightarrow\ 5^{n-1} V_1 \equiv 10[6]$

$\equiv 4[6]$ le reste est donc 4

Si n est pair $n = 2k + 1 \Rightarrow n - 1 = 2k$

$5^{2k+2} \equiv 5^2[6]$

$5^2 5^{2k} V_1 \equiv V_1[6]$ or $5^2 \equiv 1[6]$

$5^{2k} V_1 \equiv V_1[6]$

$5^{2n-1} V_1 \equiv 2[6]$ le reste est 2

Finalement si n est pair le reste est 4

Si n est impaire le reste est 2

2)a) $S_n = V_1 + V_2 + \ldots + V_n$

$S_n = V_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \Rightarrow S_n = \frac{1-2^{n+1}}{1-2} \Rightarrow S_n = 2^{n+1} - 1$

Si n = 0 $\quad S_0 = 1 \equiv 1[6]$

Si n = 1 $\quad S_1 = 3 \equiv 3[6]$

Si n = 2 $\quad S_2 = 7 \equiv 1[6]$

Si n = 3 $\quad S_3 = 15 \equiv 1[6]$

De proche en proche , on a :

Si n est pair $S_n \equiv 1[6]$ le reste es 1

Si n est impair $S_n \equiv 3[6]$ le reste est 3

b) Déduisons le reste dans la division de S_{1956} par 6

1956 est un nombre pair donc le reste est 1

$S_{1956} \equiv 1[6]$

Partie B

$g(x) = x - 2 - \ln(x^2 - 2x + 1)$

1) Variations de g

$E_g = IR - \{1\}$

g est continue et dérivable sur Eg

$\lim\limits_{-\infty} g(x) = -\infty, \lim\limits_{1^+} g(x) = +\infty, \lim\limits_{+\infty} g(x) = +\infty$

Dérivée et signe

$$g'(x) = \frac{x-3}{x-1}$$

Tableau de variation

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		+	‖	−	0	+	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$1 - 2\ln 2$	↗	$+\infty$

$g(0) = -2$; $g(2) = O$; $g(4) = 2 - 2\ln 3$; $g(5)\ 3 - 4\ln 2$

g est continue et strictement croissante sur $]0, 1[$ et sur $]4, 5[$

De plus $g(0)\lim\limits_{1} g(x) < 0$ alors il existe $x_1 \in]0,1[$ tel que $g(x_1) = 0$

De même $g(4).g(5) < 0$; alors il existe $x_2 \in]4, 5[$ tell que $g(x_2) = 0$

D'autre part $g(2) = 0$ donc $x_3 = 2$

3) a) Etude des branches infinies

La droite $x = 1$ est une asymptote verticale

La droite $y = x$ est une direction asymptotique à la courbe au voisinage de $\pm\infty$

b) Les points d'intersection de la courbe avec la droite $y = x$. On a : $g(x) = y \Rightarrow x - 2 - \ln(x-1)^2 = x$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 - e^{-1} \\ x = 1 + e^{-1} \end{cases}$$

Les points sont donc $I_1(1 - e^{-1} ; 0)$ et $I_2(1 - e^{-1} ; 0)$

Partie C

$Z_A = 1 + i$, $Z_B = -1$ et $Z_\Omega = 1 - i$

1) Déterminons l'écriture complexe de la similitude plane directe de centre Ω qui transforme O en A

On a : $Z' = aZ + b$

Or $S(\Omega) = \Omega \Rightarrow Z_\Omega = aZ_\Omega + b$ (1)

$S(O) = A \Rightarrow Z_A = Z_O + b$ (2)

On trouve $a = 1 - i$ et $b = 1 + i$

D'où $Z' = (1 - i)Z + 1 + i$

Rapport $k = \sqrt{2}$

Angle $\theta = -\frac{\pi}{4}[2\pi]$

2) Montrons pour tout point M d'affixe Z et M' d'affixe Z' on ait $Z' - Z = -i(Z - Z_\Omega)$

$Z' - Z = (1 - i)Z + 1 + i - Z$

$= -i(Z + i - 1)$

$= -i(Z - Z_\Omega)$

Donc $Z' - Z = -i(Z - Z_\Omega)$

3)a) Montrons que pour tout point M distinct de Ω, le triangle $\Omega MM'$ est rectangle isocèle en M.

On sait que $Z' - Z = -i(Z - Z_\Omega) \Rightarrow \frac{Z'-Z}{Z_\Omega - Z} = i$

$\left|\frac{Z'-Z}{Z_\Omega - Z}\right| = 1 \Rightarrow MM' = M\Omega$ le triangle est isocèle en M

b) plaçons le point C tel que $C = SoSoS(B)$

On sait $SoSoS = Sim(\Omega ; k^3 ; 3\theta)$

$= Sim(\Omega ; 2\sqrt{2} ; -\frac{3\pi}{4})$

$Sim(\Omega ; 2\sqrt{2} ; -\frac{3\pi}{4})(B) = C \Rightarrow \begin{cases} \Omega C = \Omega B \\ (\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega C}) = -\frac{3\pi}{4}[2\pi] \end{cases}$

On place le point C dans le repère aisément.

4) Donnons l'expression analytique de S

$Z' = (1 - i)Z + 1 + i$

$$\begin{cases} x' = x + y + 1 \\ y' = -x + y + 1 \end{cases}$$

5) soit la fonction $f(x) = -x + e^{x-1}$ et (Cf) sa courbe représentative.

a) Montrons que l'image de (Cf) est une partie de (Cg).

$\begin{cases} x' = x + y + 1 \\ y' = -x + y + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(x' - y') \\ y = \frac{1}{2}(x' + y' - 2) \end{cases}$

$y = -x + e^{x-1}$ on a :

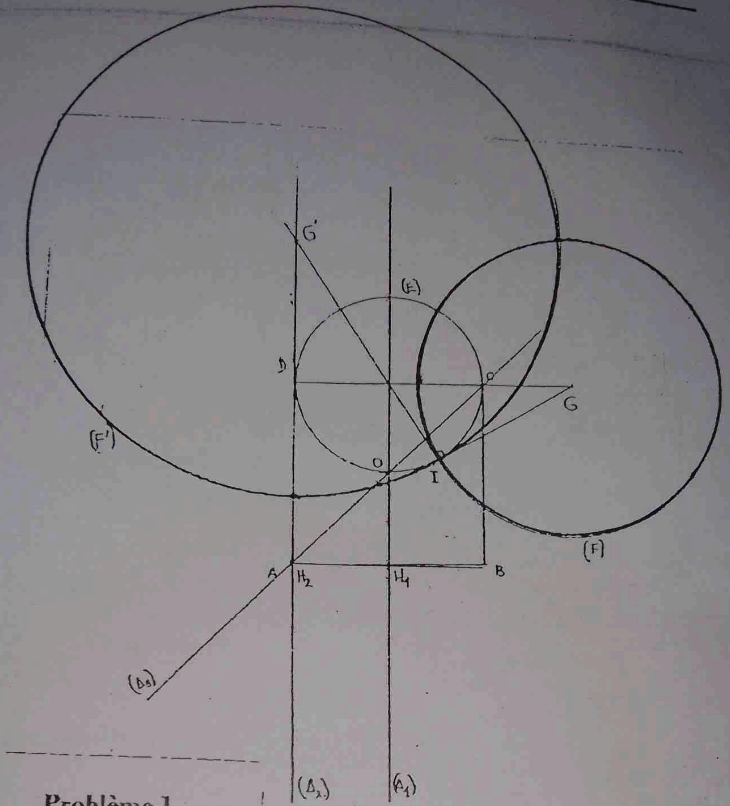
$\frac{1}{2}(x' + y' - 2) = -\frac{1}{2}(x' - y') + e^{\frac{1}{2}(x'-y') - 1}$

$x' > 1$

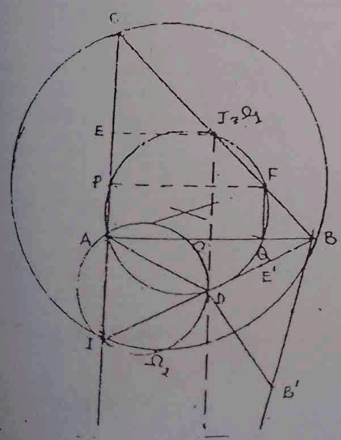
$$\begin{cases} y' = x' - 2 - \ln(x'^2 - 2x + 1) \\ x > 1 \end{cases}$$

b) On construit (Cf) en appliquant la similitude plane directe de centre Ω, de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}[2\pi]$

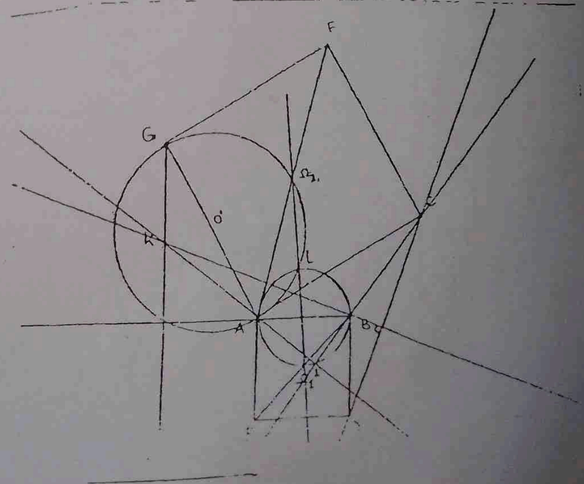
$(Cf) = Sim(\Omega ; \frac{\sqrt{2}}{2} ; \frac{\pi}{4})(Cg)$



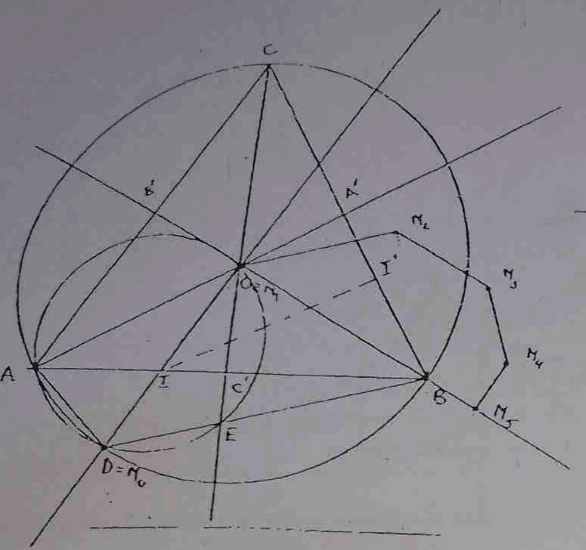
Problème 1



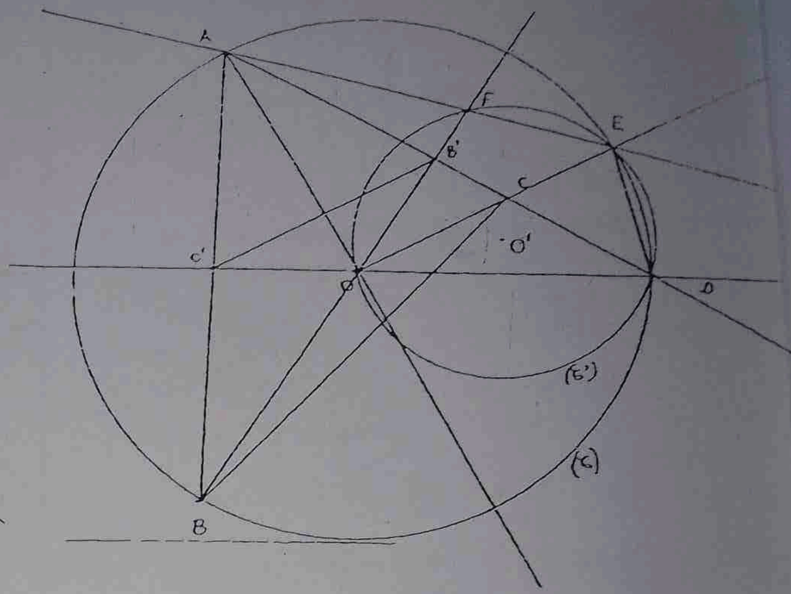
Problème 2



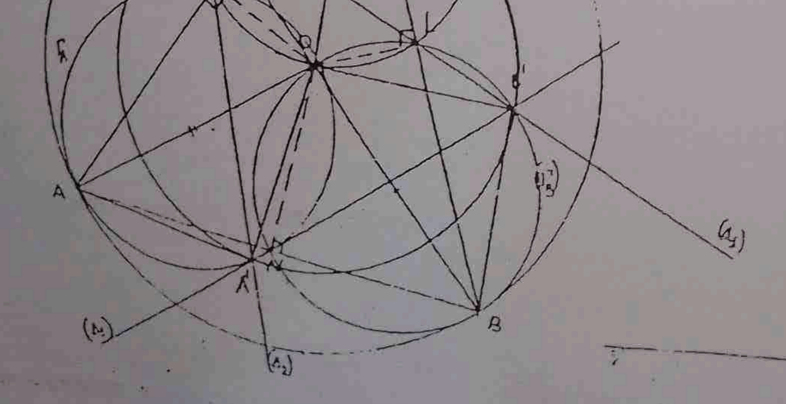
Problème 3

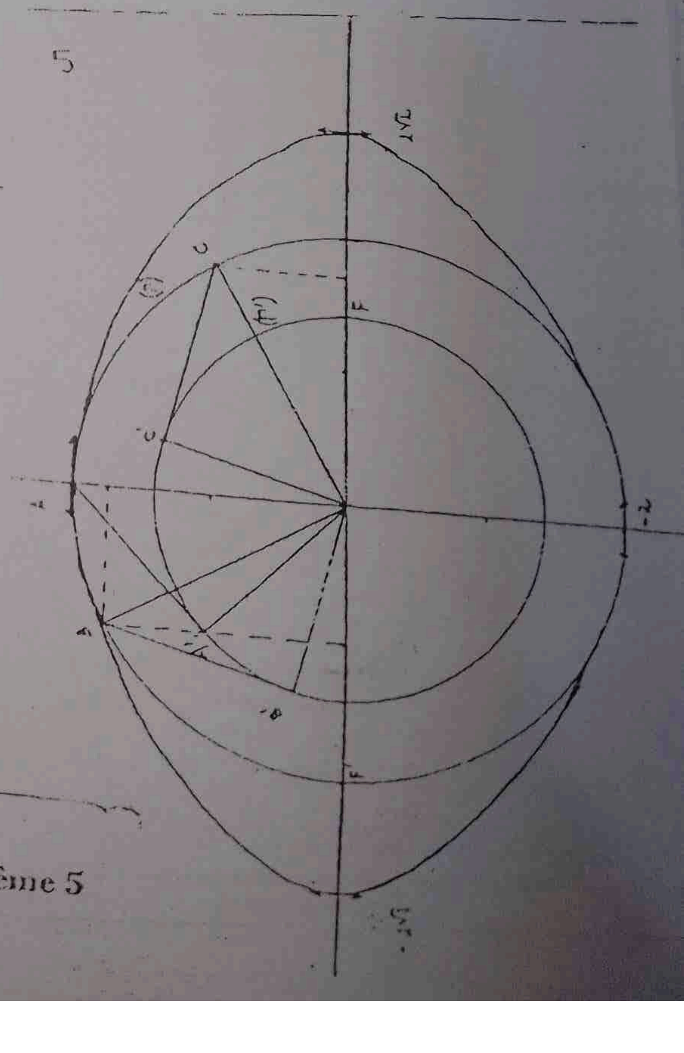


Problème 4

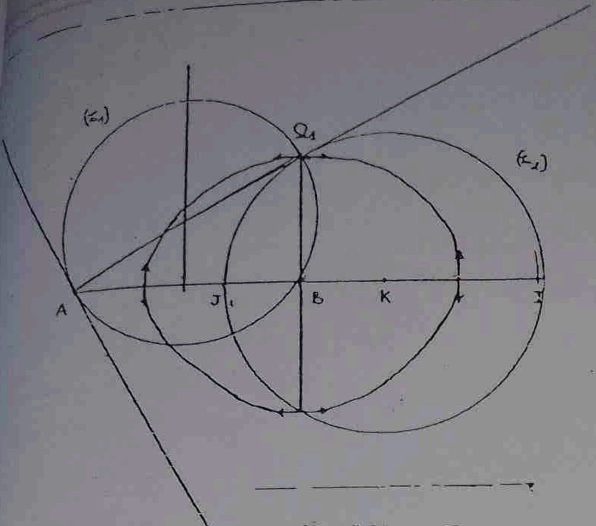


Problème 6

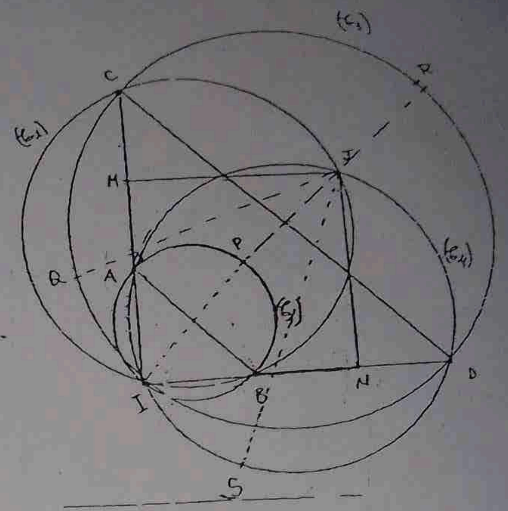




Problème 5

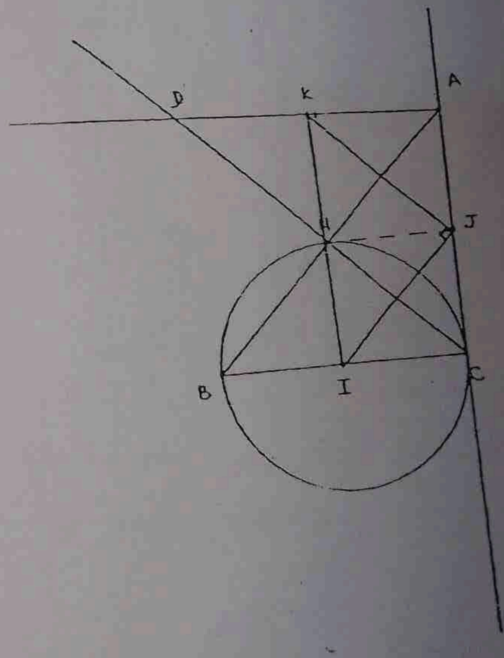


Problème 7

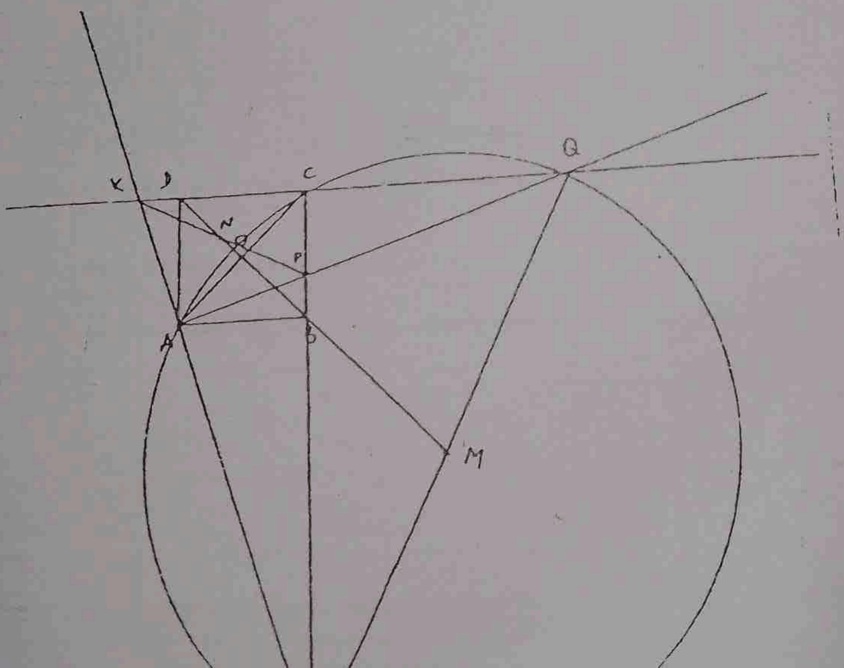


Problème 8

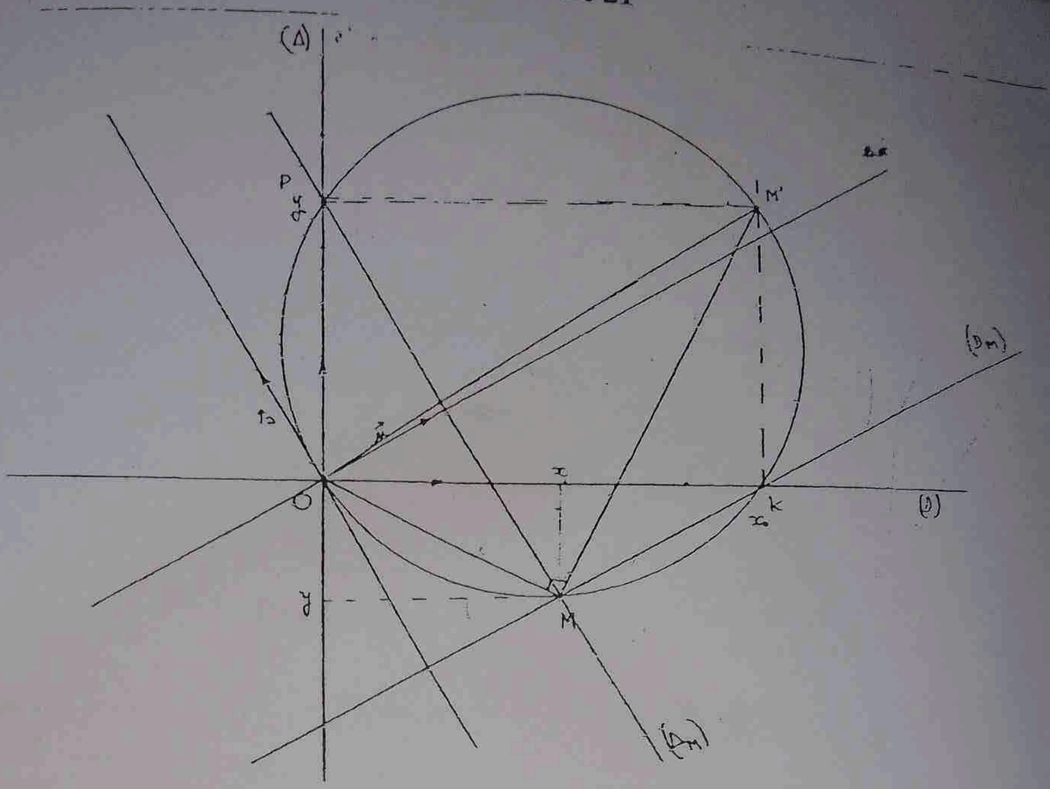
Problème 9

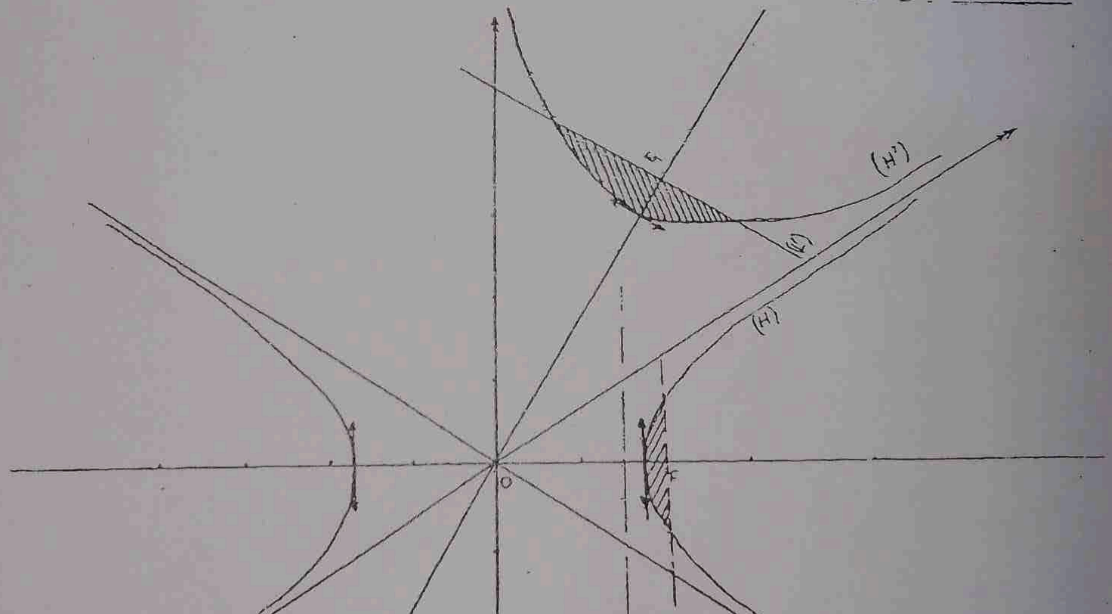


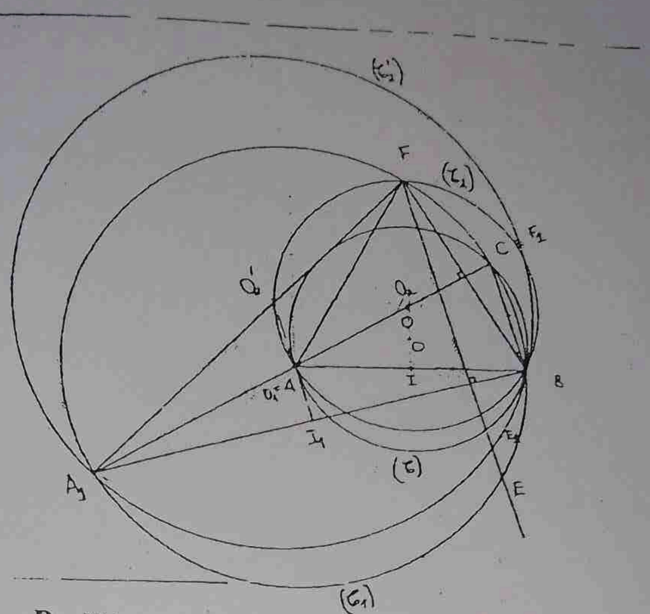
Problème 10



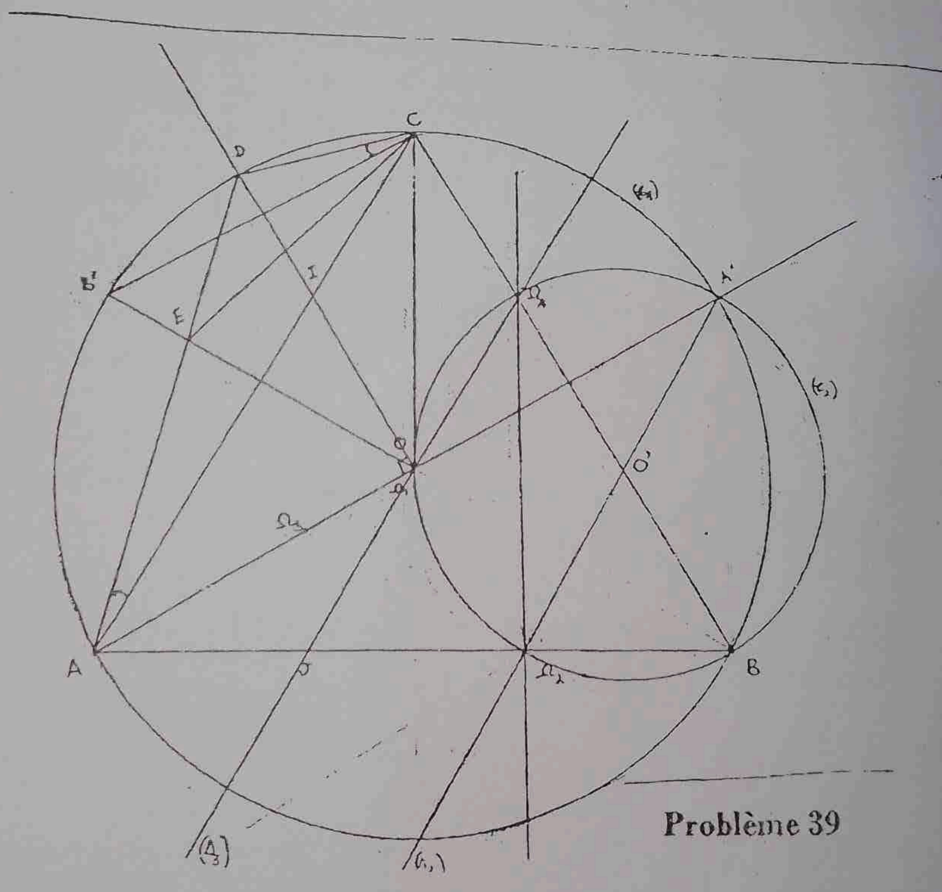
Problème 21







Problème 29



Problème 39