Centre de Formation Scientifiques L'Immortalité

CFSI

TERMINALE "S"

TOME I

Version 1

MATHEMATIQUES

Recueil Réalisé par Darnel KOUA
Aimé par Théo OBAMBI

Table des matières

O.T.G cerveau penseur

Avant propos

Les exercices suivants ont été recueillis aux sujets de concours, bac, et composition des différentes écoles d'ici et d'ailleurs. Ils sont classés par thèmes correspondant grosso-modo aux différents chapitres des programmes de maths CAPES. Ce document propose des exercices illustrant le cours d'analyse, d'algèbre, de probabilité et de statistique.

Ce tome a été créé, entre autres, pour répondre aux besoins mathématiques des élèves de la terminale scientifique et couvre les notions générales enseignées sur ces thèmes à ce niveau d'études. C'est en terminale que se constituent les bases à partir desquelles un élève pourra, soit aborder un parcours type mathématique à la faculté, soit abordé les différentes concours. De nombreuses notions nouvelles sont abordées et il est indispensable que l'élève les fasses siennes, se les appropries.

Nous vous proposerons dans les prochaines éditions le tome II consacré à la géométrie. Je remercie la personne de **MORO Dalina** pour son soutient indéniable à la réalisation de ce recueil.

N'hésitez donc pas à faire part de vos remarques pour signaler les lacunes ou les parties inutiles de ce tome au 06 528 01 71.

Darnel KOUA

ALGEBRE

LES NOMBRES COMPLEXES

Exercice 1 :

1. On considère le nombre complexe $z = 1 - i\sqrt{3}$.
   a. Ecrire z sous forme trigonométrique.
   b. Calculer z^2 , z^3.
   c. En déduire z^{1992} et z^{1994}.
2. a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^3 + 8 = 0$.
   (On remarquera que l'équation admet une racine réelle évidente.)
   b. En déduire les solutions, dans $\mathbb{C}$, de l'équation :
   $$(iz - 1)^3 + 8 = 0.$$
   Donner les solutions sous forme algébrique.

Exercice 2 :

1. on considère le polynôme P de la variable complexe z défini par :
   $$P(z) = z^3 + (-6 - 2i)z^2 + (10 + 12i)z - 20i.$$
   a. Calculer $P(2i)$.
   b. En déduire que pour tout complexe z on a : $P(z) = (z - 2i)Q(z)$ où Q est un polynôme du second degré que l'on déterminera.
   c. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal (0 ; $\vec{u}; \vec{v}$) placer les points $A, B, et\ C$ images respectives des nombres complexes
   $$z_1 = 3 + i, z_2 = 3 - i\ et\ z_3 = 2i.$$
   a. Mettre sous forme algébrique le complexe :
   $$Z = \frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2}.$$
   b. Mettre Z sous forme trigonométrique. En déduire une mesure en radians de l'angle $(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC})$.

Exercice 3 :

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère l'équation

$$(E): Z^3 + (3 - 2i)Z^2 + (1 - 4i)Z - 1 - 2i = 0$$

1. a. Vérifier que (E) admet une solution réelle

   b. Achever la résolution de l'équation (E)

2. Dans le plan complexe on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $Z_A = -1$; $Z_B = -2 + i$; $Z_C = i$
   a. Déterminer le module et l'argument de $\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A}$
   b. En déduire la nature du triangle ABC.
   c. Donner le centre, le rapport et l'angle de la similitude plane directe qui laisse invariant A et transforme B en C.

Exercice 4 :

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue Z : $Z^3 - 12Z^2 + 48Z - 128 = 0$, (E)

1. Vérifier que 8 est solution de cette équation.
2. Déterminer les nombres réels $\alpha, \beta, et\ \gamma$ tels que pour tout complexe Z on ait : $Z^3 - 12Z^2 + 48Z - 128 = (Z - 8)(\alpha Z^2 + \beta Z + \gamma)$
3. Résoudre l'équation (E).
4. $(0, \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormal direct du plan orienté, l'unité graphique est 1 cm. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 2 - i2\sqrt{3},\ b = 2 + i2\sqrt{3},\ C = 8$
   a. Calculer le module de a, noté $|a|$ et son argument θ, placer les points $A, B, et\ C$.
   b. Calculer le complexe $q = \frac{a-c}{b-c}$
   c. Déterminer le module de q et son argument φ. En déduire la nature du triangle ABC
5. Déterminer le barycentre D des points pondérés $(A, |a|), (B, |b|), (C, |c|)$. Placer D.
6. Déterminer l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\|$ Tracer (Γ).

Exercice 5 :

1. Calculer le module et l'argument du nombre complexe $U = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$, en déduire ses racines carrées.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $Z^2 + (\sqrt{3} - 7i)Z - 4(3 + i\sqrt{3}) = 0$.
3. Soit Z_1 imaginaire pure, et Z_2 ses solutions, vérifier que $Z_2 - 2i = U(Z_1 - 2i)$.

Exercice 6 :

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :
    a. $Z^2 - 2Z + 5 = 0$
    b. $Z^2 - 2(1+\sqrt{3})Z + 5 + 2\sqrt{3} = 0$
2. On considère dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ les points $A, B, C\ et\ D$ d'affixes respectives :
   $Z_A = 1 + 2i,\ Z_B = 1 + \sqrt{3} + i,\ Z_C = 1 + \sqrt{3} - i\ ,\ et\ Z_D = 1 - 2i$
    a. Placer les points $A, B, C\ et\ D$ dans le repère et précisez la nature du quadrilatère $ABCD$
    b. Vérifier que $\frac{Z_D - Z_B}{Z_A - Z_B} = i\sqrt{3}$. Que pouvez-vous en conclure pour les droites $(AB)\ et\ (BD)$?
    c. Prouvez que les points $A, B, C\ et\ D$ appartient à un cercle (μ) dont vous préciserez le centre et le rayon.

Exercice 7 :(BAC "C" 2013)

On considère l'équation (E) telle que :

$$(E) : Z^3 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)Z^2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)Z + 1 = 0$$

1. Montrer que -1 est solution de (E)
2. Démontrer que si Z_0 est solution de (E) alors son inverse $\frac{1}{Z_0}$ est aussi solution de (E)
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E') telle que : $(E') : Z^2 - \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i\right)Z + 1 = 0$
4. Déterminer toutes les solutions de l'équation (E).

Exercice 8 :

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ en utilisant la forme trigonométrique, l'équation (E) définie par
   $(E) : Z^3 - 4\sqrt{2}(-1 + i) = 0.$
2. Montrer que $Z_0 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ est une solution de l'équation (E).
3. On pose $t = \frac{Z}{Z_0}$.
    a. Montrer que si Z est solution de (E) alors t est solution de l'équation (F) définie par $(F) : t^3 - 1 = 0$.
    b. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (F) on donnera les solutions sous la forme algébrique.
    c. Déduire de ce qui procède, la valeur exacte de $\cos\frac{11\pi}{12}$ et de $\sin\frac{11\pi}{12}$

Exercice 9 :

Soit P l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :
$P(Z) = Z^3 - (1 - 2sin\alpha)Z^2 + (1 - 2sin\alpha)Z - 1$ où α est un paramètre réel appartenant à l'intervalle $[0, \pi]$.

1. a. Calculer $P(1)$. Déterminer les réels a, b, c tels que : $P(Z) = (Z - 1)(aZ^2 + bZ + c)$.

   b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(Z) = 0$. On notera Z_1, Z_2, Z_3 les trois solutions avec $Z_1 = 1$

2. a. Déterminer le module et un argument des nombres complexes $Z_1, Z_2,$ et Z_3

   b. Pour quelles valeurs de α, les réels $|Z_2 + 1|, |Z_1|, |Z_3 - 1|$ pris dans cet ordre forment-ils une progression géométrique ?

Exercice 10 :

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère l'équation
$(E): Z^3 + (3 - 2i)Z^2 + (1 - 4i)Z - 1 - 2i = 0$

1. a. Vérifier que (E) admet une solution réelle
   b. Achever la solution de l'équation (E)
2. Dans le plan complexe, on désigne par A, B, C les points d'affixes respectives $Z_A = -1, Z_B = -2 + i, Z_C = i$
   a. Déterminer le module et un argument de $\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A}$
   b. En déduire la nature du triangle ABC
   c. Donner le centre, le rapport et l'angle de la similitude plan directe qui laisse invariant A et qui transforme B en C .

Exercice 11 :

On se propose de résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{C}$: $Z^3 - 3iZ^2 - 3Z + 8 + i = 0$

1. Montrer que Z est solution de (E) si, et seulement si $t = Z - i$ est solution de l'équation (E') : $t^3 + 8 = 0$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E'). On déterminera le module et un argument de chacune des solutions de (E').

3. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E).
4. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(0,\vec{u},\vec{v})$. Soit A,B et C les points d'affixes respectives $Z_A = 1 + i\sqrt{3}, Z_B = -2\ et\ Z_C = 1 - i\sqrt{3}$.
   a. Placer les points $A, B, et\ C$ dans le repère
   b. Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier.
5. Soit S la similitude plane directe définie telle que $S(A) = C$ et $S(C) = B$.
   a. Déterminer l'expression complexe de S
   b. Déterminer le rapport k, une mesure θ de l'angle de S et le centre ω de S.

<u>Exercice 12</u> :

Soit P le polynôme défini sur $\mathbb{C}$ par : $P(z) = z^3 - 4(1+i)z^2 + 12iz + 8 - 8i$

1. Montrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution imaginaire z_0 et une solution réelle z_1 à déterminer. En déduire l'autre solution z_2.
2. Dans le plan (P), on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = 2i$; $z_B = 2$ et $z_C = 2 + 2i$.
   a. Déterminer le module et un argument de $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$. En déduire la nature du triangle ABC.
   b. Soit (C) le cercle circonscrit au triangle ABC et N un point de (C) distinct de A, B et C. On désigne par A', B' et C' les projetés orthogonaux respectifs de N sur $(BC), (AC)$ et (AB). Donner le nom de la droite passant par ces trois points.
3. Soit S l'application de (P) dans (P) telle que $S(A) = A$ et $S(B) = C$.
   Donner la nature et les éléments caractéristiques de S.

<u>Exercice 13</u> :

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$.
On considère les points A, B, C, D d'affixes respectives
$Z_A = 1\ , Z_B = -1 + i\ , Z_C = 2 + i\ , Z_D = 1 + 3i$.
Soit $\bar{S}$ la similitude plane indirecte qui transforme A en B et C en D

1. Donner l'écriture complexe de $\bar{S}$
2. Donner les éléments caractéristique de $\bar{S}$

<u>Exercice 14</u> :

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $Z^3 - \sqrt{2}Z^2 - 4\sqrt{2}Z - 16 = 0$, sachant qu'elle admet deux solutions imaginaires pures.
2. On considère dans le plan complexe muni d'un repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, les points A, B, C et D d'affixes respectives :$Z_A = 2i$, $Z_B = -\sqrt{2}$, $Z_C = -2i$ et $Z_D = 2\sqrt{2}$.
   a. Représenter les points A, B, C et D dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$
   b. Montrer que les points A, B, C et D appartiennent à un meme cercle (C) dont on précisera le rayon et le centre.

Exercice 15 :(BAC "C" 2014)

1. Soit (E) l'équation d'inconnue Z :$Z^2 - (2ie^{i\theta}cos\theta)Z - e^{i2\theta} = 0$ ou $\theta \in R$
   Résoudre dans $\boldsymbol{C}$ l'équation (E). On présentera les solutions sous forme exponentielle.
2. Dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, soient A et B les points d'affixes respectives $Z_A = e^{i\frac{\pi}{2}}$ et $Z_B = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2\theta\right)}$ on note Z_0 l'affixe de O
   a. Exprimer $Arg\left(\frac{Z_B - Z_O}{Z_A - Z_O}\right)$ en fonction de θ
   b. En déduire l'ensemble des valeurs de θ pour lesquelles
   $$\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$$
3. On suppose que $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Ecrire le conjugué de $Z_A + Z_B$ sous forme exponentielle.

Exercice 16 :

1. On considère dans le corps $\boldsymbol{C}$ des nombres complexes l'équation $Z^3 + 8 = 0$. La résoudre. Calculer le module et l'argument de chacune des racines. Construire les images de ces racines dans le plan complexe.
2. Identifier les transformations f_1 et f_2 qui au point M d'affixe Z font correspondre respectivement les points M_1 d'affixe Z_1 et M_2 d'affixe Z_2 avec
   $Z_1 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)Z \qquad Z_2 = \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)Z$
3. Que devient le point $(-2, 0)$ après la transformation f_1 ?
4. Donner la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $f_1 \circ f_2$.

Exercice 17 :

1. Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C, D, d'affixes respectives
   $Z_A = 4 - 2i,\ Z_B = 2i,\ Z_C = 2 - 2i,\ Z_D = 3 + i$
   a. Donner l'écriture complexe de la rotation r qui transforme B en C et O en A.
   b. Préciser les éléments caractéristiques de la rotation r
2. Dans l'ensemble $\boldsymbol{C}$ on considère l'équation
   $$(E): Z^3 - (5 + i)Z^2 + (10 + 6i)Z - 8 - 16i$$
   a. Montrer que (E) admet une racine imaginaire pure Z_0 que l'on précisera
   b. Résoudre l'équation (E) dans $\boldsymbol{C}$

<u>Exercice 18</u> :

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $(E): Z^2 - 2e^{2i\theta}Z - \left(2 + e^{-4i\theta}\right) = 0$, où $\theta \in \left[0,\ \frac{\pi}{4}\right]$. on désignera par Z_1 et Z_2 les solutions de (E) écrites sous la forme algébrique.
2. Soit A et B deux points d'affixes respectives Z_1 et Z_2 dans le plan complexe muni d'un repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
   Déterminer les valeurs de θ pour lesquelles le triangle OAB est isocèle en O.

<u>Exercice 19</u> :

On considère l'équation $Z^2 - 2(1 + i)Z + 4i = 0 \quad (E)$

1. Montrer que l'équation (E) a une solution réelle Z_1 et une solution imaginaire Z_2 que l'on déterminera.
2. On donne les points A, B et C d'affixes $Z_A = 2 + 4i\ \ Z_B = 2i\ \ Z_C = 2$
   a. Placer les points A, B, C dans le plan
   b. Calculer : $\frac{Z_A - Z_B}{Z_C - Z_B}$, en déduire la nature du triangle ABC.
3. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe $Z = x + iy$ tels que $|Z - 2 - 2i| = 2$
4. $k \in \mathbb{R}$, mettre sous la forme $x + iy$ le nombre complexe : $Z = \frac{1 + ki}{2k + (k^2 - 1)i}$

<u>Exercice 20</u> :

Dans le plan rapporté au repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ on considère les points $A,B,$ et C d'affixes respectives : $Z_A=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$, $Z_B=1-i$, $Z_C=\frac{Z_A}{Z_B}$

1. Ecrire Z_C sous forme algébrique et trigonométrique , en déduire les valeurs exactes de $coos\frac{\pi}{12}$ et $sin\frac{\pi}{12}$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation d'inconnue x ;
$$(\sqrt{6}+\sqrt{2})cosx+(\sqrt{6}-\sqrt{2})sinx=2$$
3. Déterminer les images de B et I le point d'affixe $Z_I=1$ dans la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{12}$

Exercice 21 :

1. Résoudre dans $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ le système :
$$\begin{cases} u+v=-\dfrac{1}{2} \\ uv=-\dfrac{1}{4} \end{cases}$$
2. On pose $\omega=e^{i\frac{2\pi}{5}}$. Démontrer que $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4=0$.
En déduire que $\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}=-\frac{1}{2}$.
3. Démontrer que :
$$\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{4\pi}{5}+\sin\frac{2\pi}{5}\sin\frac{4\pi}{5}=\cos\frac{2\pi}{5}$$
Et
$$\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{4\pi}{5}-\sin\frac{2\pi}{5}\sin\frac{4\pi}{5}=\cos\frac{4\pi}{5}$$
4. En déduire que $\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{4\pi}{5}=-\frac{1}{4}$
5. Démontrer alors que :
$$\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4} \text{ et } \cos\frac{4\pi}{5}=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$$
6. Pour cette question, on admettra que pour tout nombre a,
$\cos 2a=2\cos^2 a-1$.
Déduire de la question précédente que
$$\cos^2\frac{\pi}{5}=\frac{3+\sqrt{5}}{8},$$
Puis en déduire la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{5}$.

Exercice 22 :

Soit Z_1,Z_2,Z_3 trois nombres complexes tels que :

$Z_1=[r_1,\theta_1]$, $Z_2=[r_2,\theta_2]$, $Z_3=[r_3,\theta_3]$.

Déterminer les trois nombres tels que :

- Leurs arguments $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ pris dans cet ordre forment une progression arithmétique de raison $\frac{\pi}{2}$
- Leurs modules r_1, r_2, r_3 pris dans cet ordre sont en progression géométrique de raison 2

Leurs produits : $Z_1 \times Z_2 \times Z_3 = 4 + 4i\sqrt{3}$.

Exercice 23 :

On considère l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes et on rappelle que $i^2 = -1$.

1) Déterminer les racines carrées du nombre complexe $U = 6 + 6i\sqrt{3}$
2) Soit l'équation (E) definie dans $\mathbb{C}$ telle que
$$(E) : 4Z^3 - 6i\sqrt{3}Z^2 - (9 + 3i\sqrt{3})Z - 4 = 0$$
   a) Vérifier que $Z_0 = -\frac{1}{2}$ est solution de l'équation (E)
   b) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E).
3) Le plan complexe $\mathbb{C}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On donne les points A, B, C d'affixes respectives
$$Z_A = -\frac{1}{2};\ Z_B = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}i;\ Z_C = 1 + i\sqrt{3}$$
   a) Déterminer l'écriture complexe de la similitude plane directe S qui transforme A en B et B en C.
   b) Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude S.

Exercice 24 :

Le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique $2\ cm$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :
$$z^3 - 8 = 0$$
2. On considère dans le plan (P) les points A, B et C d'affixes respectives :
$$z_A = -1 + i\sqrt{3} \quad z_B = 2 \quad z_C = -1 - i\sqrt{3}$$
   (a) Ecrire z_A et z_C sous la forme trigonométrique.
   (b) Placer les points A, B et C.
   (c) Déterminer la nature du triangle ABC.
3. On considère l'application f du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M d'affixe $' = e^{i\frac{2\pi}{3}}z$.
   (a) Caractériser géométriquement l'application f .

(b) Déterminer les images des points A et C par f.
En déduire l'image de la droite (AC) par f.

ALGEBRE LINEAIRE

Exercice 1 :

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$, $\begin{cases} f(\vec{\imath}) = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath} \\ f(\vec{\jmath}) = -3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} \end{cases}$.

1. Démontrer que f est une bijection de E.
2. Déterminer les réels λ tels que $f(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$ où $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
3. On donne $H = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^2; f(\vec{u}) = -\vec{u}\}$ et $G = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^2; f(\vec{u}) = 4\vec{u}\}$.
   a. Montrer que H est une droite vectorielle. En donner une base $\vec{e}_1$.
   b. Montrer que G est une droite vectorielle. En donner une base $\vec{e}_1$.
   c. Montrer que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Donner la matrice A de f dans cette base.

Exercice 2 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 muni de la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ canonique. On considère f un endomorphisme de E qui au vecteur $\vec{u}(x, y, z)$ associe le vecteur $\overrightarrow{u'}(x', y', z')$;

$$\begin{cases} x' = x + 2y - 2z \\ y' = y \\ z' = 2y - z \end{cases}$$

1. Donner la matrice de l'endomorphisme f dans $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ puis en déduire les images de $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$, et $\vec{k}$ par f.
2. Déterminer l'ensemble P des vecteurs invariants par f. En donner une base puis préciser la nature de P.
3. Déterminer l'ensemble D des vecteurs transformés en leurs opposés par f. En donner une base puis préciser la nature de D.
4. a. Montrer que l'endomorphisme f est une symétrie vectorielle de E.
   b. Caractériser f.

Exercice 3 :(BAC C 2003)

Soit un espace vectoriel E muni d'une base $B(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et f l'endomorphisme de E défini dans la base B par la matrice,

$$A=\begin{bmatrix}-\frac{1}{4} & -\frac{3}{2}\\ \frac{1}{4} & 1\end{bmatrix}$$

Soit $\lambda\in\mathbb{R}$, on désigne par E_λ l'ensemble des vecteurs $\vec{u}$ tels que $f(\vec{u})=\lambda\vec{u}$.

1. Montrer que si $\lambda\notin\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right\}$, alors $E_\lambda=\{\vec{0}\}$.
2. Montrer que $E_{\frac{1}{2}}$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{e}_1=-2\vec{\imath}+\vec{\jmath}$ et que $E_{\frac{1}{4}}$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{e}_2=-3\vec{\imath}+\vec{\jmath}$.
3. Vérifier que $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ est une base B' de E.
4. a. Exprimer le vecteur $\vec{u}_0=-5\vec{\imath}+2\vec{\jmath}$ dans la base B'.
   b. Déterminer la matrice de f dans la nouvelle base B'.
   c. On définit une suite de vecteurs par la relation $\vec{u}_{n+1}=f(\vec{u}_n)$. Quelles sont dans la base B' les coordonnées de $\vec{u}_n$?
   d. Quelles sont dans la base B les coordonnées de $\vec{u}_n$?.

Exercice 4 :(BAC E 2017)

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ défini dans la base $B=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4\}$, analytiquement par :

$$\begin{cases}x'=-x+3y-z\\ y'=2x-y+4z\\ z'=3x+2y-3z\\ t'=x+4y+2z+4t\end{cases}$$

1. Donner la matrice M de f dans la base B.
2. Exprimer $f(\vec{e}_1)$, $f(\vec{e}_2)$, $f(\vec{e}_3)$ et $f(\vec{e}_4)$ en fonction de $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$, et $\vec{e}_4$.
3. Trouver le déterminant de M.
4. f est-il un endomorphisme ?

Exercice 5 :

Dans le plan vectoriel $\mathbb{R}^2$, muni de sa base canonique $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère les droites vectorielles E_1 et E_2, engendrées respectivement par les vecteurs :

$$\vec{u} = -2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} \text{ et } \vec{v} = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$$

1. Vérifier que le couple $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que E_1 et E_2 sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^2$.
3. Soit p, la projection vectorielle de base E_1 et de direction E_2.
   a. Ecrire $p(\vec{u})$ et $p(\vec{v})$ comme combinaison linéaire de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.
   b. Exprimer $p(\vec{\imath})$ et $p(\vec{\jmath})$ en fonction de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.
   c. En déduire la matrice de p dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
4. On pose $\vec{w} = \vec{\imath} - \vec{\jmath}$.
   a. Calculer $p(\vec{w})$.
   b. Montrer que $p \circ p(\vec{w}) = p(\vec{w})$.

Exercice 6 :

L'espace vectoriel E est rapporté à une base $B = (o, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On considère f de E qui à tout vecteur $\vec{u}(x, y, z)$ associe le vecteur $\vec{u'}(x', y', z')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = 2x - 3x + 5z \\ y' = -x + 4y + z \\ z' = x + 6y + 13z \end{cases}$$

1) Calculer $f(\vec{\imath})$; $f(\vec{\jmath})$; $f(\vec{k})$.
2) Donner la matrice de f dans la base B.
3) f est-elle bijective ?
4) Déterminer le noyau de f et donner une base $\vec{e_1}$.
5) Déterminer l'image de f et donner sa base $(\vec{e_2}, \vec{e_3})$.
6) Montrer que $B' = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ est une base de E et donner la matrice de f dans la base B'.

Exercice 7 :

$\mathbb{R}^3$ est rapporté à sa base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

On considère l'application : $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \longrightarrow (2x, 2y + z, z)$.

1) Montrer que f est une application linéaire
2) Quelle est la matrice de f dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$?

3) Déterminer le noyau de f
4) Déterminer l'ensemble E des vecteurs $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^3$ qui sont invariants par f en donner une base $\overrightarrow{e_1}$.
5) On pose $F = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^3; f(\vec{u}) = 2\vec{u}\}$.
   Déterminer F est en donner une base $(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$
6) Vérifier que $(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ est une base de $\mathbb{R}^3$
7) Déterminer la matrice de f dans la base $(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$, puis donner son expression analytique.

<u>Exercice 8</u> :(BAC D 2014)

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ qui associe à tout élément (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ l'élément (x', y', z') de $\mathbb{R}^3$ définies par :

$$\begin{cases} x' = y + z \\ y' = x + y + z \\ z' = x \end{cases}$$

1. Défermer $f(\vec{\imath}), f(\vec{\jmath})$ et $f(\vec{k})$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de $\mathbb{R}^3$.
2. Déduire la matrice de f dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
3. (a) Quelles conditions faut-il remplir pour qu'un ensemble E soit un sous espace vectorielle de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Montrer alors que l'ensemble $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + z = 0\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
4. Déterminer le noyau de f et en donner une base $\overrightarrow{e_1}$.
5. Déterminer l'image de f puis une base $B = (\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$.

<u>Exercice 9</u> :(BAC D 2015)

Sur l'espace vectoriel E muni de la base canonique $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et f l'endomorphisme de E tel que :

$$\begin{cases} f(\vec{\imath}) = \dfrac{1}{4}(\vec{\imath} - \vec{\jmath}) \\ f(\vec{\jmath}) = \dfrac{3}{4}(-\vec{\imath} + \vec{\jmath}) \end{cases}$$

1. f est-elle bijective ?

2. Soit $\overrightarrow{u'} = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath}$ image de $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ par l'endomorphisme f.
    a. En ce servant de $f(\vec{\imath})$ et $f(\vec{\jmath})$, montrer que
    $$\left(\frac{1}{4}x - \frac{3}{4}y\right)\vec{\imath} + \left(-\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}y\right)\vec{\jmath} = x'^{\vec{\imath}} + y'\vec{\jmath}$$
    b. En déduire les expressions de x' et de y' en fonction de x et y.
3. Montrer que f est une projection vectorielle.
4. Donner la base E_1 de f.
5. Déterminer un vecteur $\overrightarrow{e_1}$ qui engendre E_1.
6. Donner la direction E_2 de f.
7. Déterminer un vecteur $\overrightarrow{e_2}$ qui engendre E_2.
8. On donne $\vec{u} = -\vec{\imath} + \vec{\jmath}$ et $\vec{v} = 3\vec{\imath} + \vec{\jmath}$
    a. Montrer que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de E.
    b. Déterminer la matrice de f dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$.

Exercice 10 :(BAC D 2011)

Soit $\mathbb{R}^3$ un espace vectoriel muni d'une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On considère l'application f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ qui à tout vecteur $\vec{u}(x, y, z)$ associe le vecteur $\overrightarrow{u'} = f(\vec{u})$ dont les composantes (x', y', z') dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ sont définies par :

$$\begin{cases} x' = -x + ay + 2z \\ y' = x + 2y + z \qquad (a \epsilon \mathbb{R}) \\ z' = x + y \end{cases}$$

1. Ecrire la matrice de f dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Pour quelles valeurs de a f est-elle bijective ?
3. Dans la suite, on suppose que $a = 1$
    a. Déterminer l'ensemble des vecteurs invariants par f
    b. Déterminer $Kerf$ et Imf, noyau et image de f.
4. Soit $\vec{u}$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$ de composantes $(1, \alpha, \beta)$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Calculer α et β pour que $\vec{u} \in Kerf$.

Exercice 11 :(BAC D 2015 session de remplacement)

Soit E le plan vectoriel rapporté à sa base canonique $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On considère les vecteurs

$$\overrightarrow{e_1} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} \text{ et } \overrightarrow{e_2} = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$$

On considère l'endomorphisme f de E telle que $f(\overrightarrow{e_1}) = \overrightarrow{e_1}$ et $f(\overrightarrow{e_2}) = \vec{0}$.

1. Vérifier que $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est une base de E.
2. Ecrire la matrice de f dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.
3. Soit $\overrightarrow{u'} = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath}$ image de $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ par l'endomorphisme f : $f(\vec{u}) = \overrightarrow{u'}$
   a. Montrer que $f(\vec{\imath}) = 3\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$ et $f(\vec{\jmath}) = -2\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$.
   b. Exprimer les coordonnées x' et y' de $\overrightarrow{u'}$ en fonction des coordonnées x et y de $\vec{u}$.
   c. Calculer $f \circ f(\vec{u})$.
   d. En déduire la nature de f.
   e. Déterminer les éléments caractéristiques de f.

Exercice 12 :

E est un espace vectoriel de base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère l'endomorphisme f de E défini par :

$$\begin{cases} f(\vec{U}) = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} \\ f(\vec{V}) = \frac{1}{2}\vec{\imath} + \frac{1}{2}\vec{\jmath} \end{cases} \text{ où } \vec{U} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} \text{ et } \vec{V} = -\frac{1}{2}\vec{\imath} - \frac{1}{2}\vec{\jmath}$$

1. Déterminer $f(\vec{\imath})$ et $f(\vec{\jmath})$ en fonction des vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$
2. Donner la matrice de f dans la base $(\vec{U}, \vec{V})$ puis dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
3. Calculer $f \circ f(\vec{\imath})$ et $f \circ f(\vec{\jmath})$. En déduire la nature de l'endomorphisme f.
4. Donner la base E_1 de f. Préciser un vecteur $\overrightarrow{e_1}$ qui engendre E_1.
5. Donner la direction E_2 de f. Préciser un vecteur $\overrightarrow{e_2}$ qui engendre E_2.

Exercice 13 :

E est un espace vectoriel de base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère l'endomorphisme f de E défini par :

$$\begin{cases} f_a(\vec{\imath}) = (a-1)\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} \\ f_a(\vec{\jmath}) = \vec{\imath} + (1-a)\vec{\jmath} \end{cases} \text{ où } a \text{ est un paramètre réel.}$$

1. Déterminer la matrice de f_a dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
2. Déterminer l'expression analytique de f_a.
3. Déterminer l'ensemble des valeurs de a pour lesquelles f_a n'est pas bijectif
4. On pose $a = 3$

a. Déterminer le noyau $Kerf_3$ et l'image Imf_3.
b. Montrer que f_3 est une symétrie vectorielle. Préciser ces éléments caractéristiques.

Exercice 14 :

Dans un espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ dans la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère l'endomorphisme f défini par :

$$\begin{cases} f(\vec{\imath}) = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} \\ f \circ f(\vec{\jmath}) = f(\vec{\imath}) \end{cases}$$

1. Déterminer $f(\vec{\jmath})$ en fonction des vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.
2. Donner la matrice de f dans la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
3. Calculer $f \circ f(\vec{\jmath})$. En déduire que f est une projection vectorielle.
4. Déterminer les éléments caractéristiques de f puis préciser leur base.

Exercice 15 :

Dans le plan vectoriel E, muni de la base canonique $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère les droites vectorielles (D_1) et (D_2) définies par : $(D_1) = \{\vec{U}(x,y) \in E / 2x - y = 0\}$ et $(D_2) = \{\vec{U}(x,y) \in E / x + y = 0\}$

1. Montrer que les droites (D_1) et (D_2) sont respectivement engendrées par les vecteurs :
   $$\overrightarrow{e_1} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} \text{ et } \overrightarrow{e_2} = \vec{\imath} - \vec{\jmath}.$$
2. Vérifier que $(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$ est une base de E.
3. Soit f la symétrie vectorielle de base (D_1) et de direction (D_2).
   a. Calculer $f(\overrightarrow{e_1})$ et $f(\overrightarrow{e_2})$ en fonction de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.
   b. Calculer $f(\vec{\imath})$ et $f(\vec{\jmath})$ en fonction de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.
   c. Ecrire la matrice de f dans la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Exercice 16 :

Dans un espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, muni de la base canonique $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère les droites vectorielles F et G engendrées respectivement par les vecteurs

$$\vec{U} = 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} \text{ et } \vec{V} = \vec{\imath} - \vec{\jmath}.$$

1. Déterminer les droites F et G telles que :
   $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / ax + by = 0\}$ et $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / ax + by = 0\}$
2. Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^2$.
3. Déterminer la matrice M de la symétrie vectorielle f par rapport à F parallèlement à G.
4. On donne les vecteurs $\overrightarrow{e_1} = -\vec{\imath}$ et $\overrightarrow{e_2} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$.
   a. Montrer que $B = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
   b. Ecrire la matrice M' de f dans la base B.

Tel : 06 528 01 71 / 05 022 56 55

ARITHMETIQUES

EXERCICE 1 :

1. On considère $x\ et\ y$ des entiers relatifs et l'équation (E): $91x + 10y = 1$.
   a. Enoncé un théorème permettant de justifier l'existence d'une solution de l'équation (E).
   b. Déterminer une solution particulière de l'équation (E) et en déduire une solution particulière de l'équation (E'): $91x + 10y = 412$.
   c. Résoudre (E').
2. Montrer que les nombres entiers $A_n = 3^{2n} - 1$ où n est un entier naturel non nul, sont divisibles par 8.
3. On considère l'équation (E''): $A_3x + A_2y = 3296$.
   a. Déterminer les couples d'entier relatifs (x, y) solutions de l'équation (E'').
   b. Montrer que (E'') admet pour solution un couple unique d'entiers naturels. Le déterminer.

EXERCICE 2 :

1.
   a. Pour $1 \leq n \leq 6$, calculer les restes de la division euclidienne de 3^n par 7.
   b. Démontrer que pour tout n $3^{n+6} - 3^n$ est divisible par 7. En déduire que $3^{n+6}\ et\ 3^n$ ont le même reste dans la division euclidienne par 7.
   c. A l'aide des résultats précédents, calculer le reste de la division euclidienne de 3^{100} par 7.
   d. De manière générale, comment peut-on calculer le reste de la division euclidienne de 3^n par 7, pour n quelconque ?
   e. En déduire que, pour tout entier naturel n, 3^n est premier avec 7.
2. Soit $U_n = 1 + 3 + 3^2 \ldots\ldots\ldots. +3^{n-1}$.
   a. Montrer que $U_n = \frac{1}{2}(3^n - 1)$.
   b. Déterminer la valeur de n telles que U_n soit divisible par 7.
   c. Déterminer tous les diviseurs de U_6.

EXERICE 3 :

1. On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E_1): $11x + 8y = 79$.
   a. Montrer que si (x, y) est solution de (E_1) alors $y \equiv 3[11]$.

   b. Résoudre alors (E_1).
2. Soit dans $\mathbb{Z}^2$l'équation (E_2)$: 3y + 11z = 372$.
   a. Montrer que si (y, z) est la solution de (E_2) alors $z = 0[3]$.
   b. Résoudre alors l'équation (E_2).
3. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E_3)$: 3x - 8z = -249$.
4. Le prix total de 41 pièces détachées, réparties en trois lots, est de 480 FCFA.
   Le prix d'une pièce du premier lot est de 48 FCFA.
   Le prix d'une pièce du deuxième lot est de 36 FCFA.
   Le prix d'une pièce du troisième lot est de 4 FCFA.
   Déterminer le nombre de pièces de chaque lot.

<u>EXERCICE 4</u> :

On considère la suite (V_n) définie par :

$$V_0 = 1;\ V_1 = 2 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, V_{n+2} + V_{n+1} - 6V_n = 0$$

1 . a. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, V_n = 5^{n-1}V_1[6]$.

b. En déduire les restes de la division euclidienne de V_n par 6 suivant les valeurs de n.

2. soit $S_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_n$.

   a. Déterminer le reste de la division euclidienne de S_n par 6 suivant les valeurs de n.
   b. En déduire le reste de la division euclidienne de la somme de S_{1956} par 6.

<u>EXERCICE 5</u> :

On considère l'anneau $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, +, .)$.

1. Donner les tables d'addition et de multiplication dans $\mathbb{Z} / 5\mathbb{Z}$.
2. Soit une suite ; $U_0 = \dot{1}\ et\ U_{n+1} = \dot{3}U_n + \dot{1}\ \forall n \in \mathbb{N}$.
   a. Calculer $U_1, U_2, U_3\ et\ U_4$.
   b. On pose $V_n = U_n + \dot{3}$.
      Démontrer que (V_n) est une suite géométrique que l'on caractérisera. Calculer U_{2015}.

EXERCICE 6 :

On se propose de résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E'): $34x - 15y = 2$.

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation(E'): $34x - 15y = 0$.
2. Déterminer une solution (x_0, y_0) de (E').
3. Résoudre (E').

EXERCICE 7 :

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système (S_1) : $\begin{cases} x = -1\ [34] \\ x = 1\ \ \ [15] \end{cases}$
2. Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ le système (S_2): $\begin{cases} PGCD(x; y) = 12 \\ x + y = 60 \end{cases}$

EXERCICE 8 :

1. Démontrer que $4\mathbb{Z}$ est un idéal de $\mathbb{Z}$.
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, l'équation $x^2 - 4x + 3 = 0$.
3. Quel est le reste de la division euclidienne par 4 du nombre 35^{2017}.

Exercice 9 :(BAC "C" 2015)

1. La division euclidienne d'un entier naturel non nul a par un entier naturel non nul b, donne un reste r, quel est l'intervalle des valeurs possibles de r.
2. Déterminer le reste de la division euclidienne de 3^n, $n \in \mathbb{N}$ par 11.
3. Déterminer les entiers naturels n tels que :$3^{2n} + 3^n = 3^2[11]$.
4. En déduire le reste de la division euclidienne par 11 du nombre entier naturel $p = 14501^{2015} + 132^{2016}$.
5. Soit la suite numérique (u_n) definie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_{n=1+3+3^2+3^3+\cdots+3^{n-1}}$$

   a. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a : $2U_n = 3^n - 1$.
   b. En déduire que u_{2015} est divisible par 11.

Exercice 10 :(BAC Blanc "C" 2015-2016)

1. Trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur les entiers a, b et c pour que l'ensemble des solutions de l'équation $ax + by = c$ (appelée équation diophantienne) ne soit pas vide.

2. a. Démontrer que le couple $(1,-1)$ est une solution de l'équation
$$8x+5y=3.$$
   b. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation : $8x+5y=3$.
3. a. Enoncer le théorème de Gauss .
   b. Trouver les $\mathrm{PGCD}(1152\,;720)$ et $\mathrm{PPCM}(1152\,;720)$.
   c. En déduire la solution dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation :$1152\mathrm{x}+720\mathrm{y}=432$.

<u>Exercice 11</u> :

x et y sont deux entiers naturels non nuls vérifiant $x<y$. S est l'ensemble des couples $(x;y)$ tels que : $PGCD(x;y)=y-x$.

1. Déterminer $PGCD(363;484)$.
2. Le couple $(363;484)$ appartient-il à S ?
3. Soit n un entier naturel non nul, le couple $(n;n+1)$ appartient-il à S ? justifier la réponse.
4. Montrer que $(x;y)$ appartient à S si, et seulement si, il existe un entier k non nul tel que $x=k(y-x)$ et $y=(k+1)(y-x)$.
5. En déduire que pour tout couple $(x;y)$ de S, on a :
$$PPCM(x;y)=k(k+1)(y-x).$$
6. Déterminer l'ensemble des entiers naturels diviseurs de 228.
7. En déduire des couples $(x;y)$ de S tels que : $PGCD(x;y)=228$.

<u>Exercice 12</u> :(BAC "C" 2016)

On donne $\mathbb{Z}$ l' équation $(E)\colon 2688x+3024y=-3360$

1. Déterminer le $PGCD(2688,3024)$, puis en déduire que l'équation (E), admet des solutions dans $\mathbb{Z}^2$.
2. Montrer que l'équation (E) est équivalente à l'équation $(E_1)\colon 8x+9y=-10$.
3. a. Montrer que l'équation (E_1) peut s'écrire $(E_2)\colon 8x\equiv -10[9]$.
   b. Résoudre l'équation (E_2).
   c. En déduire les solutions de l'équation (E).

<u>Exercice 13</u> :(BAC "C" session de remplacement 2015)

Le but de l'exercice est de résoudre l'équation $(E)\colon 21x-17y=4$.

1. a. Montrer que cette équation admet au moins une solution.

b. Montrer que l'équation (E) est équivalente à l'équation $(E'): 21x = 4[17]$.

2. On se propose de résoudre l'équation (E'). On rappelle que l'entier relatif a est l'inverse modulo $n(n \in \mathbb{N})$ de l'entier relatif b si $ab = 1[n]$.
   a. Déterminer l'inverse modulo 17 de 21.
   b. Montrer que les solutions de l'équation (E') sont les entiers relatifs x tels que $x = 1 + 17k$; $k \in \mathbb{Z}$.
3. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 14 :

1. Déterminer le plus grand commun diviseur des nombres $a = 21590$ et $b = 9525$.
2. Déterminer l'ensemble des entiers relatifs x pour lesquels on a :$34x \equiv 2[15]$.
3. On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $(E): 21590x + 9525y = 1270$.
   a. Montrer que cette équation admet des solutions dans $\mathbb{Z}^2$.
   b. Résoudre (E) dans $\mathbb{Z}^2$. La deuxième question fournira une solution particulière de l'équation simplifiée.
4. On note (D) la droite d'équation :$34x + 15y = 2$.
   Déterminer l'ensemble des points $M(x; y)$ de (D) à coordonnées entières, comprises dans l'intervalle : $[-100; 100]$.

Exercices 15 :(BAC Blanc ''C'' 2016-2017)

x et y désignent des entiers relatifs.

1. Montrer que l'équation (E) : $65x - 40y = 1$ n'a pas de solution.
2. Montrer que l'équation $(E'): 17x - 40y = 1$ admet au moins une solution.
3. Déterminer, à l'aide de l'algorithme d'Euclide, un couple d'entiers relatifs solution de l'équation (E').
4. Résoudre l'équation (E').
5. En déduire qu'il existe un unique entier naturel x_0 inferieur à 40 tel que $17x_0 \equiv 1[40]$.
6. Pour tout entier naturel a, démontrer que, si $a^{17} \equiv b[55]$ et si $a^{40} \equiv 1[55]$, alors $b^{33} \equiv a[55]$.

ANALYSE

FONCTIONS NUMERIQUES

Exercice 1 :

Partie A :

Soit m un paramètre réel non nul, et g_m la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_m(x) = \frac{mx}{x^2+1}$$

1. Déterminer le point fixe $A(x_0;\ y_0)$ aux courbes (c_m) de g_m
2. Discuter suivant les valeurs de m les variations de g_m
   Distinguez deux cas : $m < 0$ et $m > 0$
   On dressera un tableau de variation pour chaque cas.
3. On pose $m = -1$. Dresser le tableau de variation de g_{-1}.

Partie B :

Soit f la fonction définie par :

$$f : \begin{cases} f(x) = \dfrac{-x}{x^2+1} & si\ x \leq 0 \\ f(x) = x^2\sqrt{1+x} & si\ x > 0 \end{cases}$$

(C) désigne la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ du plan.

4. a) Déterminer l'ensemble de définition de f
   b) Etudier la continuité de f en $x = 0$
   c) Etudier la dérivabilité de f en $x = 0$
5. a) Dresser le tableau de variation de f
   b) Etudier les branches infinies de (C).
   c) Tracer la courbe (C) de f

Partie C :

Soit h la restriction de f à l'intervalle $I = [-1; 0]$

6. a) Montrer que h admet et une bijection réciproque h^{-1} dont on dressera le tableau de variation.
   b) Calculer $h^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)$ puis $(h^{-1})'\left(\frac{2}{5}\right)$
   c) Exprimer h^{-1} en fonction de x.
   d) Construire la courbe (C') de h^{-1} dans le même repère que (C).

Partie D :

Soit t la fonction telle que $t(x) = -f(x)$ pour $x > 0$

7. sans étudier t dresser le tableau de variation de t.
8. a) Par quelle transformation passe-t-on de (C) à la courbe (C'') de t.
   b) Tracer (C'').

Exercice 2 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a\sin(bx + c)$ où a, b, c sont trois réels ; $0 < b \leq 3$ et $0 < c \leq \frac{\pi}{2}$.

1. Déterminer les réels a, b, c pour que la courbe (C) de f passe par $A(0, \sqrt{3})$ et admette une tangente horizontale au point $I\left(\frac{\pi}{12}, 2\right)$.
2. On définit sur $\mathbb{R}$, la fonction g ; $g(x) = \sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = f(x)$.
3. Montrer que f est périodique de période π. En déduire que f peut être étudier sur l'intervalle $I = \left[-\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$.
4. Etudier le sens de variations de f sur I puis dresser son tableau de variation.
5. Montrer que $B\left(-\frac{\pi}{6}; 0\right)$ est centre de symétrie de (C).
6. Montrer que B est un point d'inflexion de (C). On déterminera l'équation de la tangente à (C) au point A.
7. Construire (C) pour $x \in I$ et sur E_f, ensemble de définition de f.
8. Soit g la restriction de f à $J = \left[-\frac{5\pi}{12}; \frac{\pi}{12}\right]$.
   a) Prouver que g admet une bijection réciproque g^{-1} dont on précisera le tableau de variation.
   b) Donner une équation de la tangente à (C'), courbe de g^{-1} , au point $C\left(0, -\frac{\pi}{6}\right)$.
   c) Construire (C') dans le même repère que (C).
   d) Calculer $(g^{-1})'(0)$.
   e) Démontrer que $\forall x \in J,\ (g^{-1})'(x) = \frac{1}{2\sqrt{4-x^2}}$. Vérifier le résultat de d).

Exercice 3 :

On donne $\begin{cases} f(x) = 1 + (3 + x)\sqrt{-x} & si\ x < 0 \\ f(x) = \frac{(1+x)^2}{1-x} & si\ x \geq 0 \end{cases}$

Où (C) désigne sa courbe représentative dans $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ orthonormé.

Partie A :

1. Déterminer l'ensemble de définition de f

2. Etudier la continuité et la dérivabilité de f au voisinage de $x_0 = 0$. Interpréter géométriquement ce résultat.
3. Etudier les variations de f.
4. Déterminer les réels a, b, c ; $\forall x \geq 0, f(x) = ax + b + \frac{c}{1-x}$.
5. a) Montrer que la droite $(\Delta), y = ax + b$ est asymptote oblique à (C) au voisinage de $+\infty$. Donner la position de (C) par rapport à (Δ).
   b) Etudier les autres branches infinies de (C)
6. montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α tel que $-4 < \alpha < -\frac{7}{2}$. Interpréter ce résultat.
7. Tracer la courbe (C).

Partie B :

Soit g la fonction ; $\forall x < 0, g(x) = -f(x)$.

8. Sans étudier g, dresser son tableau de variation.
9. Par quelle transformation du plan peut-on tracer la tracer la courbe (C') de g par rapport à (C). Tracer alors (C').

Partie C :

Soit h la restriction de f à $[-1, 0]$.

10. Montrer que h réalise une bijection et que sa bijection réciproque h^{-1} existe, est continue sur un intervalle I à valeurs dans J. On précisera I et J.
    h^{-1} est telle dérivable sur I ? Dresser le tableau de variation de h^{-1}.
11. Tracer la courbe (Γ) de h^{-1}.

Exercice 4 :

Partie A :

Soit la fonction g à réelle x, définie dans $\mathbb{R}$ par :$g(x) = x^3 - 3x - 3$

1. Etudier les variations de la fonction g, on dressera un tableau de variations de g.
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]2, 3[$.
3. Déduire de ce qui procède, le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Partie B :

On considère la fonction numérique f à variable réelle x, définie telle que :

$$\begin{cases} f(x) = 2\left[1 + cos\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{3}\right)\right] & , si\ x \leq 0 \\ f(x) = \frac{2x^2+3}{1-x^2} & , si\ x > 0 \end{cases}$$

(C) désigne la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan. Unité graphique 1cm.

4. a) Déterminer l'ensemble de définition de f.
   b) Montrer que pour $x \leq 0, f$ est périodique puis préciser sa période.
   c) Montrer que f peut etre étudiée sur l'intervalle $I = [-4, 1[\cup]1, +\infty[$.
5. a) Etudier la continuité de f en $x = 0$.
   b) Etudier la dérivabilité de f en $x = 0$ puis précisé les conséquences à (C).
6. a) Pour $x > 0$; exprimer la dérivée f' de f en fonction de $g(x)$, puis déduire le signe de f'.
   b) Etudier les variations de f, on dressera le tableau de variations de f.
   c) Préciser la branche infinie à (C).
   d) De $2 < \alpha < 3$ l'inégalité. Trouver un encadrement de $f(\alpha)$ à 10^{-2} près, puis tracer (C).

Partie C :

Soit h la restriction de f à l'intervalle $J = \left[-\frac{8}{3}; -\frac{2}{3}\right]$.

7. a) Montrer que h admet une bijection réciproque h^{-1} dont on dressera le tableau de variations.
   b) Soit (C') la courbe représentative de h^{-1}. Ecrire l'équation cartésienne de la tangente (T) à (C') en $x = 1$.
   c) Tracer (C') dans le même repère que (C) de f.

Exercice 5 :

On définit la fonction f: $\begin{cases} f(x) = x - \sqrt{|x^2 - 4|} & si\ x \leq 2 \\ f(x) = 2\cos \pi x & si\ x > 2 \end{cases}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ orthonormé.

Partie A :

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Démontrer que $x > 2$, f est périodique de période à déterminer.
3. Justifier que f peut être étudier sur $E =]-\infty, 4]$.

Partie B :

4. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en $x_0 = -2$ et $x_1 = 2$. En donner une interprétation géométrique.
5. Etudier les variations de f sur E.
6. Etudier la branche infinie de (C) au voisinage de $-\infty$.
7. Tracer (C) sue E puis sur E_f .

Partie *C* :

On définit h ; $h(x) = -f(x)$ pour $x \leq 2$.

8. Par quelle transformation du plan passe-t-on de (C) à la courbe $(C^{'})$ de h ? Tracer $(C^{'})$ dans $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Exercice 6 :

Soit la fonction numérique à variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 2x + \sqrt{x^2 - 1} & si\ x < -1 \\ f(x) = 2\sin\dfrac{\pi}{2}x & si - 1 \leq x \leq 1 \\ f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x - 2} & si\ x > 1 \end{cases}$$

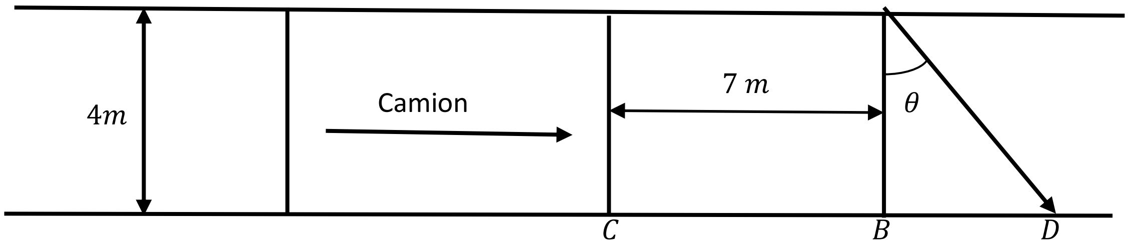
1. Préciser l'ensemble de définition de f.
2. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en $x_0 = -1$ et $x_1 = 1$.
3. Etudier les variations de f.
4. Faire une étude des branches infinies et préciser la position des asymptotes obliques par rapport à la courbe (C) de f.
5. Construire la courbe (C) dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ unité 2 cm.
6. Soit h la restriction de f à l'intervalle $[-1, 1]$.
   a) Montrer que h admet une bijection réciproque h^{-1} dont on dressera le tableau de variation.

   On désigne par (C') la courbe de h^{-1}.

   b) Ecrire l'équation de la tangente (T) à $(C^{'})$ au point d'abscisse nulle.
   c) Tracer $(C^{'})$ dans le même repère que (C).

Exercice 7 :

Un lapin désire traverser une route de 4 mètres de largeur. Un camion, occupant toute la route, arrive à sa rencontre à la vitesse de $60\ km/h$. Le lapin décide au dernier moment de traverser, alors que le camion n'est plus qu'à 7 mètres de lui. Son démarrage est foudroyant et on suppose qu'il effectue la traversée en ligne droite au maximum de ses possibilités, c'est-à-dire à $30\ km/h$. L'avant du camion est représenté par le segment $[CC']$ sur le schéma suivant :



Le lapin part du point A en direction de D.
Cette direction est repérée par l'angle $\theta = \widehat{BAD}$ avec $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ (en radians).

1. Déterminer les distances AD et CD en fonction de θ et les temps t_1 et t_2 mis par le lapin et le camion pour parcourir respectivement les distances AD et CD.
2. On pose $f(\theta) = \frac{7}{2} + 2\tan\theta - \frac{4}{\cos\theta}$.
   Montrer que le lapin aura traversé la route avant le passage du camion si et seulement si $f(\theta) > 0$.
3. Etudier la fonction f sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$.

<u>Exercice 8</u> :

On considère la fonction f définie sur $]-1, 1[$ par :

$$f(x) = \frac{|2x^2 - x - 1|}{\sqrt{1 - x^2}}$$

1) Etudier la continuité de f en -1 et 1.
2) Etudier la dérivabilité de f en -1 et 1.
3) La fonction f est-elle dérivable en $-\frac{1}{2}$?
4) a. Montrer que, sur$\left]-1, -\frac{1}{2}\right[$, la dérivée de f s'exprime par :
$$f'(x) = \frac{-2x^3 + 3x - 1}{(1 - x^2)\sqrt{1 - x^2}}$$
   b. En déduire le signe de $f'(x)$, puis les variations de f sur $\left]-1, -\frac{1}{2}\right[$.
5) a. Montrer que, sur $\left]-\frac{1}{2}, 1\right[$, la dérivée de f s'exprime par :
$$f'(x) = \frac{2x^3 - 3x + 1}{(1 - x^2)\sqrt{1 - x^2}}$$
   b. En déduire le signe de $f'(x)$, puis les variations de f sur $\left]-\frac{1}{2}, 1\right[$.

6) Dresser un tableau de variation complet de f sur $]-1, 1[$.
   Tracer alors la courbe représentative de f en mettant en valeur les tangentes et asymptotes caractéristiques.

Exercice 9 :

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \cos^3 x \cos(3x)$$

1) Montrer que l'on peut réduire le domaine d'étude de f à l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
2) Déterminer le sens de variation de f sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
3) Résoudre sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ l'équation $f(x) = 0$.
4) Dessiner alors la courbe représentative de f sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 10 :

On définit la fonction f par :

$$f(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$$

1) Déterminer le domaine de définition D_f de f
2) Montrer que f est périodique
3) Déterminer $f'(x)$, puis en déduire les variations de f sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$.

Exercice 11 :

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sin^3 x \cos(3x)$$

1) Montrer que l'on peut réduire le domaine d'étude de f à l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
2) A l'aide de la formule $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$, déterminer une valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{8}$ et de $\sin\frac{\pi}{8}$.
3) Montrer que $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$.
4) Déterminer le sens de variations de f sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, puis dresser le tableau de variation de f sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ en indiquant la valeur exacte de $f(\frac{\pi}{8})$.

On admettra que $f\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{-3-2\sqrt{2}}{8}$.

5) Résoudre sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ l'équation $f(x) = 0$
6) Dessiner alors la courbe représentative de f sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 12 :

Le but de l'exercice est de démontrer que pour tout réel x, on a

$$1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

1) On pose $f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$.
   A l'aide des fonctions $f'(x)$ et $f''(x)$, montrer que $f(x) \geq 0$ pour tout réel x.
2) On pose $g(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}$.
   En dérivant quatre fois $g(x)$, montrer que $g(x) \leq 0$ pour tout réel x.
3) Conclure.
4) Application : Donner un encadrement de $\cos\frac{\pi}{5}$.

Exercice 13 :

On considère la fonction numérique f à variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{2 - x}, & si\ x \leq 0 \\ f(x) = \dfrac{1 - 2\cos x}{\cos x}, & si\ x > 0 \end{cases}$$

On note (C) la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Déterminer E_f l'ensemble de définition de f.
2) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en $x_0 = 0$
3) Etudier les sens de variations de f
4) a) Montrer que la droite (D) d'équation $y = -x - 3$ est asymptote oblique à (C)
   b) Tracer (C) sur $]-\infty, 2\pi]$
5) soit g la restriction de f à l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

a) Montrer que g admet une bijection réciproque g^{-1} dont en dressera le tableau de variation
b) Calculer $(g^{-1})(-2+\sqrt{2})$ et $(g^{-1})'(-2+\sqrt{2})$
c) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $]-1;\ +\infty[$
d) Montrer que $\forall x \in\ ]-1;\ +\infty[, (g^{-1})'(x) = \frac{1}{(x+2)\sqrt{x^2+4x+3}}$, puis vérifier le résultat obtenu en b)
e) Tracer (C') courbe de g^{-1} dans le même repère que (C).

Exercice 14 :

On considère la fonction numérique f à variable réelle x, telle que :

$$\begin{cases} f(x) = x^3 - \dfrac{1}{3}x & si\ x < 1 \\ f(x) = \dfrac{x^2+2x-1}{x+2} & si\ x \geq 1 \end{cases}$$

(C) désigne la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
Unité graphique :2 Cm

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en $x = 1$.
3) Calculer la fonction dérivée f' de f, étudier son signe et dresser le tableau de variations de f.
4) Pour $x \geq 1$, déterminer les réels a et b, tels que l'on ait : $f(x) = ax + \frac{b}{x+2}$.
5) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à (C), étudier la position relative de (C) par rapport à (D) et préciser les branches infinies à (C).
6) Tracer (C) et (D).
7) Soit g la restriction de f à l'intervalle $I = [1;3]$, montrer que la fonction g admet une bijection réciproque g^{-1} dont on dressera le tableau de variations.
8) Calculer $g(2)$ et $(g^{-1})'(\frac{7}{4})$, déduire la courbe (C^{-1}) de g^{-1} dans le même repère que (C) de f.

Exercice 15 :

On considère la fonction numérique f à variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 2\sin(\frac{\pi}{2}x), & si\ x \leq 1 \\ f(x) = -x + \sqrt{x^2+8}, & si\ x > 1 \end{cases}$$

On note (C_f) la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) Déterminer E_f, l'ensemble de définition de f .
2) Montrer que la fonction f peut être étudier sur $[-2;\ +\infty[$
3) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en $x_0 = 1$
4) Etudier les variations de f sur $[-2;\ +\infty[$
5) Préciser la branche infinie de (C_f) en $+\infty$ et tracer (C_f) sur $[-2;\ +\infty[$
6) Soit g la restriction de f à l'intervalle $[1;2]$:
   a) Montrer que si $x \in [1;2]$, alors $g(x) \in [1;2]$
   b) Démontrer que l'équation $g(x) = x$ admet une solution unique α appartenant à l'intervalle $[1;2]$.
   c) On pose $\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, vérifier que $g(\alpha) = \alpha$
7)
   a) Déterminer $g''(x)$ et étudier les variations de la fonction g'
   b) Montrer que pour tout $x \in [1;2]$, $|g'(x)| \leq \frac{2}{3}$
   c) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que :
   $$|g(x) - g(\alpha)| \leq \frac{2}{3}|x - \alpha|$$
8) Soit (U_n) la suite numérique définie par $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = g(U_n)$
   a) Montrer que pour tout entier naturel n, $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3}|U_n - \alpha|$
   b) Montrer que pour tout entier naturel n, $|U_n - \alpha| \leq (\frac{2}{3})^n$
   c) En déduire la limite de la suite (U_n).

FONCTIONS LOGARITHMES et EXPONENTIELLES

Exercice 1 :

L'objectif de cet exercice est d'étudier la fonction f définie sur $]0;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x \ln x}{x^2 + 1}$$

Pour cela, on considère les fonctions g et h définies sur $]0;\ +\infty[$ par :

$$g(x) = (1 - x^2)\ln x + x^2 + 1 \text{ et } h(x) = x^2(1 - 2\ln x)$$

1. a. Calculer $h'(x)$ puis en déduire les variations de la fonction h sur $]0;\ +\infty[$.
   b. Montrer qu'il existe une unique valeur $\alpha > 1$ telle que $h(\alpha) = 0$. Donner une valeur approchée de α à 10^{-3} près.
   c. En déduire le signe de $h(x)$ sur $]0;\ +\infty[$.
2. a. En vous aidant de la question précédente, trouver les variations de g sur $]0;\ +\infty[$.
   b. En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions β et γ telles que $0 < \beta < 1$ et $\gamma > \alpha$, avec $\gamma = \frac{1}{\beta}$.
3. Déduire de la question précédente les variations de f sur $]0;\ +\infty[$.
4. Montrer que $f(\beta) = -f(\gamma)$.

Exercice 2 :

PARTIE A :

1. Démontrer que pour tout réel positif ou nul x :

$$e^x - \frac{x^2}{2} \geq 1$$

2. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x}$.

PARTIE B :

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 2e^x - x - 2\,.$$

1. Déterminer la limite de g en $-\infty$ puis en $+\infty$.
2. Etudier le sens de variations de g puis dresser son tableau de variations.
3. a. Montrer que $x = 0$ est solution de l'équation $g(x) = 0$.
   b. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une deuxième solution α sur l'intervalle $]-1{,}6\,;\ -1{,}5[$.

PARTIE C :

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = e^{2x} - (x+1)e^{x}.$$

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$ puis en $+\infty$.
2. Calculer $f'(x)$. Déduire de la partie B le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que :
$$f(\alpha) = -\frac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}.$$
Où α est définie dans la partie précédente.
En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.
4. Dresser un tableau de variations de f.
5. Tracer la courbe $\mathcal{C}$, représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité graphique $2\ cm$).

<u>Exercice 3</u> :

<u>PARTIE A</u> :

On considère la fonction h définie sur $]0;\ +\infty[$ par :

$$h(x) = \ln x + \frac{x^2 - x + 1}{2x^2}.$$

1. Montrer que sa dérivée est : $h'(x) = \frac{2x^2+x-2}{2x^3}$.
2. Etudier le signe de $h'(x)$ sur $]0;\ +\infty[$.
3. Dresser un tableau de variation de h sur $]0;\ +\infty[$. En déduire le signe de $h(x)$ sur $]0;\ +\infty[$.

<u>PARTIE B</u> :

On considère la fonction f définie sur $]0;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = (x^2 + 1)\ln x - x\ .$$

1. Calculer sa dérivée puis montrer l'équivalence suivante :
$$f'(x) > 0 \ \Leftrightarrow h(x) > 0$$
2. En déduire les variations de f sur $]0;\ +\infty[$.
3. a. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.
   b. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
   c. Dresser le tableau de variation complet de la fonction f sur $]0;\ +\infty[$.
4. a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution, que l'on notera α, sur $]0;\ +\infty[$.
   b. Montrer que α appartient à l'intervalle $]1; 2[$.

c. Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

Exercice 4 :

PARTIE A :

Soit le polynôme $P(x) = x^3 + x^2 + x - 1$.

1. Déterminer $P'(x)$, puis en déduire les variations de P sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que l'équation $P(x) = 0$ admet une unique solution, notée, α sur $\left]\frac{1}{5}; 1\right[$.
3. En déduire le signe de $P(x)$ sur $\mathbb{R}$.

PARTIE B :

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2\ln x}{x[(\ln x)^2 + 1]}.$$

1. Montrer que la dérivée de f est
$$f'(x) = -2\frac{(\ln x)^3 + (\ln x)^2 + (\ln x) - 1}{x^2[(\ln x)^2 + 1]^2}$$
2. A l'aide de la partie A, montrer que $f'(x)$ est négatif sur $]e^{\alpha}; +\infty[$.
3. Calculer la limite de $f(x)$ en 0 puis en $+\infty$.
4. Dresser un tableau de variation complet de la fonction f sur $]0; +\infty[$ (on calculera pas $f(\alpha)$).
5. En remarquant que $f(x) = \frac{2\frac{\ln x}{x}}{(\ln x)^2+1}$, déterminer une expression en fonction du réel t supérieur ou égal à 1 l'intégrale :
$$I(t) = \int_1^t f(x)dx .$$
6. Déterminer la valeur exacte puis approchée à 0,01 près de t tel que $I(t) = 1$.

Exercice 5 :

Soit k un réel strictement positif. On définit alors la fonction g_k par :

$$g_k(x) = e^{-kx^2} .$$

1. Etudier la parité de la fonction g_k.

2. Démontrer que g_k est dérivable et donner sa dérivée g'_k.
3. Etudier le signe de $g'_k(x)$ puis dresser le tableau de variation de g_k.
4. Exprimer $g''_k(x)$ et résoudre l'équation $g''_k(x) = 0$.
5. Tracer la courbe de $g_{\frac{1}{2}}, g_{1,}$ et g_2.
6. Démontrer que, sur $\mathbb{R}$: $h \leq k \;\; \Leftrightarrow \;\; g_h \geq g_k$.
7. Dans cette question, $k = \frac{1}{2}$. Soit α la solution positive de l'équation $g''_k(x) = 0$.
   Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe g_k au point d'abscisse α. Tracer (T).

<u>**Exercice 6**</u> :(BAC Blanc "c" 2015-2016)

Soit la fonction numérique f à variable réelle x, définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = 100\left(\frac{\ln x}{x}\right)^4.$$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni de repère orthonormé $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Unité graphique : $2\ cm$.

1. a. Calculer la dérivée f' de la fonction f, puis étudier le signe de cette dérivée.
   b. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
2. Tracer (C), on admettra que les droites d'équations $x = 0$ et $y = 0$ sont asymptotes à la courbe (C) de la fonction f.
3. On se propose de calculer l'aire A du domaine plan délimité par la courbe (C) de f, et les droites d'équations $x = 1; x = e$ et $y = 0$, pour cela on se propose de calculer l'intégrale $I_n = \int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x^4}\, dx$; $n \in \mathbb{N}$.
   a. Calculer I_1.
   b. Par une intégration par parties, montrer que l'on a :
   $$I_n = -\frac{1}{3e^3} + \frac{n}{3} I_{n-1}.$$
   c. En déduire I_2 et I_3.
   d. Calculer alors l'aire A.

<u>Exercice 7</u> :

On considère la fonction numérique f à variable x, définie telle que $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$

(C) désigne la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan.

1) Montrer que f est définie sur $]0;1[\cup]1;+\infty[$
2) Vérifier que la dérivée f' de f est :

$$f'(x) = \frac{-1-\ln x}{(x\ln x)^2}$$

3) a) Etudier le signe de f'
   b) Dresser le tableau de variations de f
   c) Etudier les branches infinies à (C)
4) Tracer (C)
5) a) Montrer que f peut encore s'écrire

$$f(x) = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}$$

   b) Calculer l'intégrale $I = \int_e^3 f(x)dx$
   c) En déduire l'aire A du domaine plan limité par la courbe (C) de f, l'axe (Ox) des abscisses et les droites d'équation $x = e; x = 3$ unité graphique $2\ cm$.

Exercice 8 :

Soit la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = -\frac{x}{2} + \ln\frac{x-1}{x}$

1) Etudier les variations de f
2) On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le repère orthonormée $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$
   a) Montrer que la droite(D) d'équation $y = -\frac{x}{2}$ est une asymptote oblique à la courbe (C).
   b) Préciser la position de la courbe (C) par rapport à (D).
3) a) Montrer que le point $I(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$ est un centre de symétrie de (C)
   b) Donner l'équation de la tangente en I à la courbe (C)
4) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique x_0 et que $\frac{2}{5} < x_0 < \frac{9}{20}$ (on donne $\ln 2 = 0{,}69$; $\ln 3 = 0{,}99$; $\ln 11 = 2{,}398$)
   b) Construire la courbe (C) dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Exercice 9 :

Le plan est rapporté a un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ unité graphique 2 Cm.

Partie A :

On considère la fonction f, définie sur $]0;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 2)$$

Et on désigne par C sa courbe représentative relativement au repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et 0.
2. Montrer que f est dérivable sur $]0;\ +\infty[$ et calculer $f'(x)$.
3. Soit u la fonction définie sur $]0;\ +\infty[$ par :
$$u(x) = \ln x + x - 3$$
(a) Etudier les variations de u.
(b) Montrer que l'équation $u(x) = 0$ possède une solution unique α dans l'intervalle $[2; 3]$. Montrer que $2{,}20 < \alpha < 2{,}21$.
(c) Etudier le signe de $u(x)$ sur $]0;\ +\infty[$.
4. (a)Etudier les variations de f.
(b)Exprimer $\ln \alpha$ comme polynôme en α. Montrer que
$$f(\alpha) = -\frac{(\alpha - 1)^2}{\alpha}$$
En déduire un encadrement de $f(\alpha)$ à 10^{-2} près.

5) a)Etudier le signe de $f(x)$.
(b)Tracer C.

Partie B :

Soit F la primitive de f sur $]0;\ +\infty[$ qui s'annule pour $x = 1$. On appelle Γ la courbe représentative de F relativement au repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) (a)Sans calculer $F(x)$, étudier les variations de F sur $]0;\ +\infty[$.
(b) Que peut-on dire des tangentes à Γ en ses points d'abscisses 1 et e^2 ?
2) *Calcul de* $F(x)$.
(a) x étant un réel strictement positif, calculer l'intégrale
$$\int_1^x \ln t \; dt$$
(on pourra faire une intégration par parties).

(b) Montrer que, $\forall\, x > 0$:

$$f(x) = \ln x - \frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x} - 2$$

(c) En déduire l'expression de $F(x)$ en fonction de x.

3) (a) Montrer que $\lim\limits_{x \to 0}(x \ln x) = 0$. En déduire la limite de F en 0.

(b) Montrer que, pour x strictement supérieur à 1,

$$F(x) = x \ln x \left(1 - \frac{1}{2} \times \frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x} - \frac{3}{\ln x}\right) + 3$$

En déduire la limite de F en $+\infty$

(c) Dresser le tableau de variation de F.

(d) Tracer Γ sur le même graphique que C.

4) *Calcul d'une aire .*

Calculer, en cm^2, l'aire du domaine limité par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e^2$.

Exercice 10 :

Partie A :

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$$

1. Déterminer la fonction dérivée de la fonction f et étudier le sens de variation de f.
2. Calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 et lorsque x tend vers $+\infty$.
3. Donner le tableau de variations de la fonction f et en déduire le signe de $f(x)$ pour tout x appartenant à $]0;\ +\infty[$.
4. Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, l'unité graphique est $5cm$. Tracer la courbe C représentative de la fonction f.

Partie B :

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0;\ +\infty[$ par :

$$g(x) = x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

1. Déterminer la fonction dérivée de la fonction g. Déduire de la partie A le sens de variation de g sur $]0;\ +\infty[$.

2. Vérifier que $g = h \circ k$ avec h et k les fonctions définies sur $]0;\ +\infty[$ par :
$$h(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} \text{ et } k(x) = \frac{1}{x}$$
En déduire la limite de g en $+\infty$ et en 0.
3. Donner le tableau des variations de g sur $]0;\ +\infty[$.

Exercice 11 :

Partie A :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x - e^{2x-2}$$

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On prendra $5\ cm$ comme unité.

1. (a) Déterminer la limite de f en $-\infty$.
(b) vérifier que pour tout réel x non nul :
$$f(x) = x\left[1 - 2e^{-2} \times \left(\frac{e^{2x}}{2x}\right)\right]$$
Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. Déterminer f'. Etudier le signe de $f'(x)$ et calculer la valeur exacte du maximum de f.
3. Démontrer que la droite (D) d'équation : $y = x$ est asymptote à la courbe (C). Etudier la position relative de (C) et de (D).
4. On note A le point de la courbe (C) d'abscisse 1.
Déterminer une équation de la tangente (T) en A à la courbe (C).
5. (a) On note I l'intervalle $[0; 0{,}5]$.
Démontrer que l'équation : $f(x) = 0$ admet dans l'intervalle I une unique solution qu'on notera α .
(b) Déterminer une valeur approchée à 10^{-1} près de α.
6. Construire la courbe (C), l'asymptote (D) et la tangente (T).

Partie B :

On définie dans $\mathbb{R}$ la suite (u_n) par :

$u_0 = 0$ et $u_{n+1} = e^{2u_n - 2}$

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^{2x-2}$
   Démontrer que l'équation : $f(x) = 0$ est équivalente à : $g(x) = x$.
   En déduire $g(a)$.
2. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle I on a :
$$|g'(x)| \leq \frac{2}{e}$$
3. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle I, $g(x)$ appartient à I.
4. Utiliser l'inégalité des accroissements finis pour démontrer que, pour tout entier naturel n :
$$|u_{n+1} - a| \leq \frac{2}{e}|u_n - a|$$
5. Démontrer, par récurrence que :
$$|u_n - a| \leq \left(\frac{2}{e}\right)^n$$
6. En déduire que la suite (u_n) converge et donner sa limite.
7. Déterminer un entier naturel p tel que :$|u_p - a| < 10^{-5}$.
8. En déduire une valeur approchée de a à 10^{-5} près.

Exercice 12 :

On désigne par n un entier supérieur ou égal à 2 et on considère les fonctions, notées f_n, qui sont définies pour x appartenant à l'intervalle $]0, +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{1 + n\ln(x)}{x^2}$$

Partie A :

1. Calculer $f'_n(x)$ et montrer que l'on peut écrire le résultat sous la forme d'un quotient dont le numérateur est $n - 2 - 2n\ln(x)$.
2. Résoudre l'équation $f'_n(x) = 0$. Etudier le signe de $f'_n(x)$.
3. Déterminer la limite de f_n en $+\infty$.
4. Etablir le tableau de variation de la fonction f_n et calculer sa valeur maximale en fonction de n.

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité graphique :$5\ cm$). On note (C_n) la courbe représentative de la fonction f_n dans ce repère.

5) Tracer (C_2) et (C_3).
6) (a) Calculer $f_{n+1}(x) - f_n(x)$. Cette différence est-elle dépendante de l'entier n ?
   (b) Expliquer comment il est possible de construire point par point la courbe (C_4) à partir de (C_2) et (C_3).

Partie B :

1) Calculer, en intégrant par parties, l'intégrale :
$$I = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\, dx$$
2) En déduire l'aire, en unités d'aire, du domaine plan limité par les courbes (C_n) et (C_{n+1}) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.
3) On note A_n l'aire, en unité d'aire, du domaine limité par la courbe (C_n) et les droites d'équations $y = 0, x = 1$ et $x = e$.
   (a) Calculer A_2.
   (b) Déterminer la nature de la suite (A_n) en précisant l'interprétation graphique de sa raison.

Exercice 13 :

1) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = -xe^{2x+1}.$$
   (a) Quel est, suivant les valeurs de x, le signe de $f(x)$?
   (b) Etudier le sens de variation de f.
   (c) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
   (d) Dresser le tableau de variation de f.
   (e) On appelle (C) la représentation graphique de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité graphique : $4\ cm$).
   Quelle est la tangente à (C) au point O ?
   Ecrire une équation de la tangente T à (C) au point d'abscisse (-1).
   (f) On appelle (Γ) la représentation graphique dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$g(x) = e^x.$$

Quelle est la tangente à (Γ) au point d'abscisse (-1) ?

2) On appelle h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = 1 + exe^x.$$

   (a) Etudier le sens de variation de h .
   En déduire le signe de $h(x)$ suivant les valeurs de x.
   (b) Etudier la position de (C) par rapport à (Γ).
   (c) Tracer, sur le même graphique, les courbes T, (C) et (Γ).

3) m désigne un réel quelconque et M désigne le point de la courbe (Γ) d'abscisse m.
   (a) Ecrire une équation de la tangente D à (Γ) en M.
   (b) La tangente D coupe les axes de coordonnées en A et B.
   Calculer, en fonction de m, les coordonnées du milieu J du segment $[AB]$.
   (c) Prouver que J appartient à (C).
   (d) Tracer D et J pour $m = 0$.

Partie B :

1) Soit x un réel quelconque.
   A l'aide d'une intégration par partie, calculer l'intégrale :

$$I(x) = \int_0^x te^{2t}\, dt.$$

2) Soit x un réel négatif.
   Calculer l'aire $A(x)$, exprimée en cm^2, de l'ensemble des points N du plan dont les coordonnées (u, v) vérifient :

$$\begin{cases} x \leq u \leq 0 \\ 0 \leq v \leq f(x) \end{cases}$$

3) Calculer $A(-1)$.
4) $A(x)$ admet-elle une limite quand x tend vers moins l'infini ? Si oui laquelle ?

Exercice 14 :

Partie A :

Soit la fonction g, définie sur $\mathbb{R}$, qui à tout x, associe :

$$g(x) = e^x(x - 1) + x^2.$$

1. a. Montrer que la dérivée de la fonction g sur $\mathbb{R}$ est :

$$g'(x) = x(e^x + 2).$$

b. Déterminer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.

c. Etudier le signe de $g'(x)$ sur $\mathbb{R}$, et dresser le tableau de variation de g sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution α et une seule sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
   Montrer que α est dans l'intervalle $I = \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

Partie B :

Soit la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x + x}.$$

1. Montrer que les équations $f(x) = x$ et $g(x) = 0$ sont équivalentes sur $[0, +\infty[$, et que, par la suite, l'équation $f(x) = x$ admet une solution α pour solution unique sur I.
2. a. Calculer la dérivée de f et en déduire le sens de variation de f sur $[0, +\infty[$.
   b. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   c. Dresser le tableau de variation de f.
   d. Construire la courbe représentative C de f sur $[0, +\infty[$ dans un repère orthonormal (unité $2\ cm$). On indiquera en particulier les tangentes à C aux points d'abscisses 0 et 1.

Partie C :

1. montrer que, pour tout x appartenant à I, $f(x)$ appartient à I.
2. Soit la suite $(u_n)_{n>1}$ définie par :

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_n = f(u_{n-1}) \ \forall\, n > 1 \end{cases}$$

   a. Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in I$.
   b. Montrer que, pour tout $x \in I$,

$$|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$$

   c. En appliquant le théorème de l'inégalité des accroissements finis, démontrer que :

$$\forall\, n > 1, |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_{n-1} - \alpha|.$$

d. En déduire, par un raisonnement par récurrence, que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

e. En déduire que (u_n) converge vers α.

f. A priori, combien suffit-il de calculer de termes de la suite pour obtenir une valeur approchée de α à 10^{-7}.

Exercice 15 :

Partie A :

Soit la fonction φ définie dans $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = e^x + x + 1$.

1. Etudier le sens de variation de φ est ses limites en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Montrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ a une solution et une seule α et que l'on a :
$$-1{,}28 < \alpha < -1{,}27$$
3. En déduire le signe de $\varphi(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie B :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{xe^x}{e^x + 1}$$

et (C) sa courbe représentation dans un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan (unité graphique :$4\ cm$).

1. Montrer que :
$$f(x) = \frac{e^x \varphi(x)}{(e^x + 1)^2}$$
En déduire le sens de variation de f.
2. Montrer que $f(\alpha) = \alpha + 1$ et en déduire un encadrement de $f(\alpha)$.
3. Soit T la tangente à (C) au point d'abscisse 0. Donner une équation de T et étudier la position de (C) par rapport à T.
4. Chercher les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
Démontrer que la droite D d'équation $y = x$ est asymptote à (C) et étudier la position de (C) par rapport à D.

5. Faire le tableau de variation de f.
6. Tracer sur un même dessin (C), T et D. La figure demandée fera apparaitre les points de (C) dont les abscisses appartiennent à $[-2; 4]$.

<u>Exercice 16</u> :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x - 1 + (x^2 + 2)e^{-x}$$

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ unité graphique $2\ cm$.

<u>Partie A</u> :

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 1 - (x^2 - 2x + 2)e^{-x}$$

1. Etudier les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Calculer la dérivée de g et déterminer son signe.
3. En déduire le tableau de variation de g.
4. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ puis justifier que :
$$0{,}35 \leq \alpha \leq 0{,}36$$
5. En déduire le signe de g.

<u>Partie B</u> :

1. Etudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Déterminer $f'(x)$ pour tout x réel.
3. En déduire, à l'aide de la partie A, les variations de f et donner son tableau de variation.
4. (a) Démontrer que :
$$f(\alpha) = \alpha(1 + 2e^{-\alpha})$$
(b) A l'aide de l'encadrement de α déterminer un encadrement de $f(\alpha)$ à 10^{-2} près.
5. Démontrer que la droite Δ d'équation $y = x - 1$ est asymptote à (C) en $+\infty$.

Préciser la position de (C) par rapport à Δ.

6. Donner une équation de la tangente T à (C) au point d'abscisse 0.
7. Tracer Δ, T puis (C).
8. (a) Déterminer les réels a, b et c tels que la fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$P(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$$
soit une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \to (x^2 + 2)e^{-x}$.
(b) Calculer en fonction de α l'aire A en cm^2 de la partie du plan limitée par (C), Δ et les droites d'équations $x = -\alpha$ et $x = 0$.
(c) Justifier que :
$$A = 4e^{2\alpha} + 8e^{\alpha} - 16.$$

Exercice 17 :

Pour tout entier n strictement positif, on considère la fonction f_n définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{(\ln x)^n}{x^2}$$

On note C_n la courbe représentative de f_n dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ orthogonal (unités graphiques : $2\ cm$ sur l'axe des abscisses, $10\ cm$ sur l'axe des ordonnées).

Partie A :

1. Déterminer la limite de $f_1(x)$ en 0 et en $+\infty$. Que peut-on en déduire pour C_1 ?
2. Etudier le sens de variation de f_1 et donner le tableau de variations de f_1.
3. Déterminer une équation de la tangente en $x_0 = 1$ à la courbe C_1.
4. Déterminer la limite de f_2 en 0 et en $+\infty$. Que peut-on en déduire pour C_2 ?
5. Calculer $f'_2(x)$ et donner le tableau de variations de f_2.

Partie B :

1. Etudier le signe de $f_1(x) - f_2(x)$; en déduire la position de relative de C_1 et C_2.

2. Tracer C_1 et C_2.

Partie C :

n étant un entier naturel non nul, on pose :

$$I_n = \int_1^e f_n(x)dx$$

1. On pose :
$$F(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$$
Calculer $F'(x)$, en déduire I_1.
2. En utilisant une intégration par parties, montrer que :
$$I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n$$
3. Calculer I_2 puis l'aire en cm^2 du domaine compris entre les courbes C_1 et C_2 et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

Partie D :

1. En utilisant la question 2. de la partie C, montrer par récurrence que pour tout n entier naturel non nul :
$$\frac{1}{n!}I_n = 1 - \frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)$$
2. En utilisant un encadrement de $\ln x$ sur $[1; e]$, montrer que pour tout n entier naturel non nul :
$$0 \leq I_n \leq 1$$
3. En déduire :
$$\lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)$$

Exercice 18 :

Partie A :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2e^{-x}$$

Ainsi que sa courbe représentative C dans un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Calculer la dérivée de f.
2. En déduire le tableau de variation de f. Préciser les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Tracer C. On choisira une unité graphique de $4\ cm$.

Partie B :

1. Calculer $J = \int_0^1 xe^{-x}\, dx$.
2. Vérifier que f est telle que : $f'(x) + f(x) = 2xe^{-x}$.
3. En déduire que
$$\int_0^1 f(x)\, dx = 2J - f(1)$$
(Jest définie à la question $B - 1$.)

Partie C :

L'équation $f(x) = f(2)$ admet une seconde solution, notée α, et appartenant à l'intervalle $I = [-1, 0]$.

1. Soit $g(x) = \left(-\frac{2}{e}\right) e^{\frac{x}{2}}$. Montrer que $f(\alpha) = f(2)$ équivaut à $g(\alpha) = \alpha$.
2. Montrer que $g(I)$ est inclus dans I et que $|g'(x)| \leq \frac{1}{e}$ pour tout x appartenant à I.
3. En déduire que $|g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{e}|x - \alpha|$ pour tout x appartenant à I.
4. On définit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par
$$\begin{cases} U_0 = -0{,}5 \\ U_n = g(U_n)\ \forall\, n \geq 0 \end{cases}$$
On admet que U_n appartient à I pour tout entier $n \geq 0$.
Montrer que
$$|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{e^n}|U_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2e^n}$$

Pour tout entier $n \geq 0$.

5. Déterminer le plus petit entier n tel que l'inégalité précédente fournisse une valeur approchée de α à 10^{-6} près.

Exercice 19 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{3\}$ par :

$$f(x) = (x + 1)\ln|x - 3|$$

Où ln désigne le logarithme népérien. (C) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité graphique 1 cm)

Partie A :

1. (a) Vérifier que si x appartient à D, alors :
$$f'(x) = \frac{x+1}{x-3} + \ln|x - 3|$$
(b) Pour x appartenant à D, calculer $f''(x)$, où f'' désigne la dérivée seconde de f. En déduire les variations de f'.
(c) Calculer les limites de f' en $-\infty$ et en 3 à gauche.
(d) Montrer que f' s'annule sur $]-\infty; 3[$ pour une seule valeur α. Donner un encadrement de α d'amplitude $0{,}1$. Etudier le signe de $f'(x)$ sur $]-\infty; 3[$.
(e) Etudier le signe de $f'(x)$ sur $]3;\ +\infty[$.
(f) Dresser le tableau de variation de f.
2. Etudier les limites de f aux bornes de D. Préciser les asymptotes éventuelles à (C).
3. Calculer les coordonnées des points d'intersection de (C) et de l'axe des abscisses.
4. Tracer la courbe (C).

Partie B :

A désigne l'aire en cm^2 de la région comprise entre la courbe (C), l'axe des abscisses, des droites d'équations $x = -1$ et $x = 2$.

1. Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout réel x différent de 3 :
$$\frac{x^2 + 2x}{3 - x} = ax + b + \frac{c}{3 - x}$$
2. En déduire la valeur exacte de :
$$I = \int_{-1}^{2} \frac{t^2 + 2t}{3 - t}\, dt$$
3. Grace à une intégration par parties, et en utilisant la question précédente, calculer la valeur exacte de l'aire A.

Exercice 20 :

Partie A :

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 - \frac{1}{x^2} - 4\ln x$$

1. Etudier les variations de g. Préciser $g(1)$.
2. En déduire le signe de la fonction g sur chacun des intervalles $]0,1[$ et$]1;\ +\infty[$.

Partie B :

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4x^2} - (\ln x)^2$$

1. Montrer que, pour tout réel $x > 0$, $f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$ (on pourra mettre x^2 en facteur) dans l'expression de $f(x)$.
   Déterminer la limite de f en 0.
3. Montrer que pour tout réel $x > 0$, $f(x) = \frac{1}{2x}g(x)$.
   En utilisant la partie A, étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0,+\infty[$.
4. On nomme C_f la représentation graphique de f dans un repère orthonormé ; unité graphique 5 cm. Tracer C_f.

Partie C :

1. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une seule solution sur l'intervalle $]0,1]$. on nomme cette solution α .
2. Monter que l'équation $f(x) = \frac{1}{x}$ admet une solution sur l'intervalle $[1,+\infty[$. On nomme β cette solution.
3. Déterminer un encadrement de β d'amplitude 10^{-2}. En déduire un encadrement de α.

Exercice 21 :

Soit la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = 3^x - 1 - x$

1) Etudier les variations de f.
2) Démontrer que $\forall\, x \geq 0; 1 + x \leq 3^x$.
3) On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{3^2}\right) \ldots \left(1 + \frac{1}{3^n}\right)$
   a) Démontrer que $\frac{U_{n+1}}{U_n} > 1$; Que dire de la suite (U_n).
   b) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq \sqrt{3}$ (On pourra utiliser le résultat de la question 2)
   c) La suite (U_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.

Darnel KOUA 2017-2018
Tel : 06 528 01 71 / 05 022 56 55

INTEGRALES

Exercice 1 :

On considère les intégrales suivantes, définies pour tout entier naturel n :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} sinx\, dx \ ; J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} cosx\, dx$$

1. Calculer I_0 et J_0.
2. Soit n un entier naturel non nul.
   a. On pose $F_n(x) = -e^{-nx} sinx$.
   Calculer $F'_n(x)$ et en déduire que :
   $$nI_n - J_n = -e^{-n\frac{\pi}{2}}.$$
   b. On pose $G_n(x) = -e^{-nx} cosx$.
   Calculer $G'_n(x)$ et en déduire que :
   $$I_n + nJ_n = 1.$$
   c. En déduire la valeur de I_n et J_n en fonction de n.
3. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$.

Exercice 2 :

On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$I_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{e^x + 1}$$

1. a. Calculer I_1 et $I_0 + I_1$. En déduire I_0.
   b. Exprimer $I_n + I_{n+1}$ pour tout entier naturel non nul n.
2. a. Montrer que (I_n) est croissante.
   b. Montrer que pour tout réel x compris entre 0 et 1, on a :
   $$\frac{e^{nx}}{e+1} \leq \frac{e^{nx}}{e^x+1} \leq \frac{1}{2} e^{nx}.$$
   En déduire un encadrement de I_n.
3. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{I_n}{e^n}$.

Exercice 3 :

On pose pour tout entier naturel n non nul :

$$I_n = \int_1^e x^2 (\ln x)^n \ dx$$

Où ln désigne la fonction logarithme népérien, et

Pour $n = 0 \quad I_0 = \int_1^e x^2\, dx.$

1. Calculer I_0 .
2. En utilisant une intégration par parties, calculer I_1.
3. En utilisant une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel n non nul :
$$3I_{n+1} + (n+1)I_n = e^3. \qquad (1)$$
En déduire I_2.
4. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, I_n est positive.
(b) Déduire de l'égalité de (1) que, pour tout entier naturel n non nul,
$$I_n \leq \frac{e^3}{n+1}$$
(c) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.

<u>Exercice 4</u> :

Les questions 1 et 2 sont indépendantes. Pour tout entier naturel n, on considère l'intégrale :

$$I_n = \int_1^e (\ln x)^n \ dx$$

1. (a) Démontrer que pour tout x dans l'intervalle $]1, e[$ et pour tout entier naturel n, on a :
$$(\ln x)^n - (\ln x)^{n+1} > 0$$
(b) En déduire que la suite (I_n) est décroissante.
2. (a) calculer I_1 à l'aide d'une intégration par parties.
(b) Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$I_{n+1} = e - (n+1)I_n$$
(c) En déduire I_2, I_3 et I_4. Donner les valeurs exactes, exprimées en fonction de ***e***
et les valeurs approchés à 10^{-3} près par défaut.
3. (a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n \geq 0$
(b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $(n+1)I_n \leq e$
(c) En déduire la limite de I_n.
(d) Déterminer la valeur de $nI_n + (I_n + I_{n+1})$ et en déduire la limite de nI_n.

Exercice 5 :

On considère la fonction ϕ définie sur $[1;\ +\infty[$ par :

$$\phi(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{(1+t)^3}\ dt.$$

1. Justifier l'existence de ϕ.
2. Montrer que $\frac{1}{t(t+1)^2} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t+1} + \frac{C}{(t+1)^2}$, où a, b et c sont trois réels que l'on précisera.
3. Soit $x \geq 1$.
   a. Exprimer en fonction de x la valeur de $\int_1^x \frac{dt}{t(t+1)^2}$.
   b. On pose $\phi(t) = -\frac{\ln t}{2(t+1)^2}$.
   Calculer $\phi'(t)$ et en déduire une expression de $\phi(x)$ en fonction de x.
   c. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^2} = 0$.
   En déduire que :
$$\lim_{x\to+\infty} \phi(x) = \frac{1}{2}\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right).$$

Exercice 6 :

1. On considère deux fonctions u et v dérivables sur un intervalle $[a\,; b]$. On pose alors $f(x) = u(x)v(x)$.
   A l'aide de $f'(x)$, montrer que :
$$\int_a^b u'(x)v(x)\ dx = f(b) - f(a) - \int_a^b u(x)v'(x)\ dx.$$

On considère alors la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$I_n = \int_1^e (\ln x)^n\ dx.$$

2. Pour tout entier naturel n, quel est le signe de I_n ?
3. Montrer que (I_n) est décroissante. Que peut-on alors en déduire ?
4. En écrivant $(\ln x)^n$ sous la forme $x \times \frac{1}{x}(\ln x)^n$ et à l'aide de la question 1, montrer que pour tout entier naturel n :
$$I_{n+1} + (n+1)I_n = e.$$
5. a. En considérant cette dernière relation de récurrence pour $n = 0$ et $n = 1$, montrer que $I_2 = I_0 - I_1$.

b. Calculer I_0.

c. Montrer que la fonction L définie par $L(x) = x \ln x - x$ est une primitive de la fonction ln.

En déduire la valeur de I_1, puis celle de I_2.

Exercice 7 :

PARTIE A :

On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $[1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x+1} + \ln(\frac{x}{x+1})$$

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$
2. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle :

$$f'(x) = \frac{1}{x(x+1)^2}$$

Dresser le tableau de variation de la fonction f.

3. En déduire le signe de la fonction f sur l'intervalle $[1; +\infty[$.

PARTIE B :

On considère la suite (U_n) définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$U_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$$

1. Démontrer que pour tout entier strictement positif n :

$$U_{n+1} - U_n = f(n)$$

Où f est la fonction définie dans la partie A.

En déduire le sens de variation de la suite (U_n).

2. a. Soit k un entier strictement positif. Justifier l'inégalité :

$$\int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x}\right) dx \geq 0$$

En déduire que $\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\, dx \leq \frac{1}{k}$.

Démontrer l'inégalité : $\ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$

b. Ecrire l'inégalité précédente en remplaçant successivement k par $1, 2, \ldots, n$ et

démontrer que pout tout entier strictement positif n :

$$\ln(n+1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

c. En déduire que pour tout entier strictement positif n :

$$U_n \geq 0$$

3. Prouver que la suite (U_n) est convergente. On ne demande pas de calculer sa limite.

Exercice 8 :

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2e^{1-x}$.

On désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité graphique $2\ cm$.

   a. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$; quelles conséquences graphique pour $\mathcal{C}$ peut-on en tirer ?
   b. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Déterminer sa fonction dérivée f'.
   c. Dresser le tableau de variations de f et tracer la courbe $\mathcal{C}$.

2. Soit n un entier naturel. On considère l'intégrale I_n définie par :

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x}\, dx.$$

   a. Etablir une relation entre I_{n+1} et I_n.
   b. Calculer I_1, puis I_2.
   c. Donner une interprétation graphique du nombre I_2. On le fera apparaitre sur le graphique de la question 1.c.

3.
   a. Démontrer que pour tout nombre réel x de $[0; 1]$ et pour tout entier naturel n non nul, on a l'inégalité suivante :

$$x^n \leq x^n e^{1-x} \leq x^n e\,.$$

   b. En déduire un encadrement de I_n puis la limite de I_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 9 :

On considère les suites (X_n) et (Y_n) définies pour tout entier naturel n non nul par :

$$X_n = \int_0^1 t^n \cos t\ dt \text{ et } Y_n = \int_0^1 t^n \sin t\ dt.$$

1. a. Montrer que la suite (X_n) est à terme positifs.

b. Etudier les variations de la suite (X_n) .

c. Que peut-on en déduire quant à la convergence de la suite (X_n) ?

2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $X_n \leq \frac{1}{n+1}$.

   b. En déduire la limite de la suite (X_n).

3. a. A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que, pour tout entier naturel n no nul, $X_{n+1} = -(n+1)Y_n + \sin(1)$

   b. En déduire que $\lim_{n\to+\infty} Y_n = 0$.

4. On admet que, pour tout entier naturel n non nul, $Y_{n+1} = (n+1)X_n - \cos(1)$. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} nX_n$ et $\lim_{n\to+\infty} nY_n$.

SUITES NUMERIQUES

<u>Exercice 1</u> :

On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = -4 \\ U_{n+1} = \frac{3}{4}U_n + 1 \end{cases}$

1. Représenter graphiquement les cinq premier termes de la suite (U_n) sur l'axe des abscisses.
2. On pose $V_n = U_n - \alpha$. $(\alpha \in \mathbb{R})$
    a. Déterminer α pour que (V_n) soit une suite géométrique.
    b. En déduire que $\forall\, n \in \mathbb{N}$; $U_n = 4 - 8\left(\frac{3}{4}\right)^n$.
    c. $\forall\, n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$. Trouver l'expression de S_n en fonction de n.
    d. Déterminer les limites des suites (U_n) et (S_n).

<u>Exercice 2</u> :

On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 1 + \sqrt{2} \\ U_{n+1} = 1 + \sqrt{U^2{}_n - 2U_n + 4} \end{cases}$

1. Calculer U_1 et U_2.
2. Justifier que $\forall\, n > 1$; $U_n \geq 1$.
3. On pose $V_n = (U_n - 1)^2$.
    a. Montrer que (V_n) est une suite arithmétique.
    b. Calculer V_n puis U_n en fonction de n.

<u>Exercice 3</u> :

On considère la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = U_n + \left(\frac{2}{3}\right)^n \end{cases}$

1. Calculer les termes U_1; U_2; U_3.
2. On pose $V_n = U_{n+1} - U_n$; la suite (V_n) est-elle géométrique ?
3. Soit $S_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_n$
    a. Calculer S_n en fonction de n.
    b. Montrer que $S_n = U_{n+1} - U_0$.
    c. En déduire l'expression de U_{n+1} puis celle de U_n en fonction de n.

Tel : 06 528 01 71 / 05 022 56 55

Exercice 4 :

I. On considère la suite (V_n) définie par : $\begin{cases} V_1 = 1 \\ 5V_n = V_n + 8 \end{cases}$

1. Calculer V_2; V_3; V_4.
2. On pose $U_n = V_n - 2$. Démontrer que (U_n) est convergente et trouver sa limite.
3. Calculer $S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n$
4. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

II. Soient $a; b; c; d; e$ cinq termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison r tel que $\begin{cases} a + b + d + e = 60 \\ d + e = 42 \end{cases}$

1. Exprimer $a; b; d;$ et c en fonction de c et r.
2. Déterminer les nombres réels $a; b; c; d; e$.

Exercice 5 :

Soit (V_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} V_0 = 2 \\ V_{n+1} = \frac{V_n - 2n - 3}{2} \end{cases}$

1. Calculer V_1; V_2; V_3 .
2. Soit (W_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $W_n = V_n + 2n - 1$.
   Montrer que (W_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison q et le premier terme W_0.
3. En déduire les expressions de W_n et V_n en fonction de n.
4. Calculer $K_n = W_0 + W_1 + \cdots + W_n$ en fonction de n.
5. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} K_n$.

Exercice 6 :

On considère la suite (U_n) définie par :

$$\begin{cases} U_0 \in \mathbb{R} \\ U_{n+1} = \lambda U_n + P(n), \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Où P est un polynome et où $\lambda \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$.
On pose alors la suite (V_n) définie par :

$$V_n = U_n + Q(n),$$

Où Q est un polynôme.

1. Montrer l'équivalence suivante :

(V_n) est une suite géométrique $\Leftrightarrow \ \forall n \in \ \mathbb{N}, P(n) = \lambda Q(n) - Q(n+1)$.

On suppose maintenant que $P(n) = an + b$, a et b étant deux réels non nuls.

2. Trouver, en fonction de λ, a et b, l'expression du polynôme Q.
3. En déduire en fonction de λ, V_0, a, b et n, une expression de V_n, puis de U_n.
4. Déterminer l'expression du terme général de la suite (U_n) définie par son premier terme $U_0 = 5$ et par la relation $U_{n+1} = 2U_n - 3n + 7$.
   Vérifier la formule trouvée pour les premiers termes de (U_n).

<u>Exercice 7</u> :

Soit la suite (U_n) définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n + 6}{U_n + 2} \end{cases} \qquad \forall n \in \ \mathbb{N}.$$

1. Montrer que si (U_n) converge vers un nombre l, alors l est la racine du polynôme :
   $P(x) = x^2 + x - 6$.
2. Déterminer les racines de P. On les noteras α et β , avec $\alpha > \beta$.

Pour tout entier naturel n, on pose $V_n = \frac{U_n - \alpha}{U_n - \beta}$.

3. Montrer que la suite (V_n) est géométrique. On précisera alors son premier terme et sa raison.
4. En déduire la limite de la suite (U_n).

<u>Exercice 8</u> :

Le plan complexe est rapporté au repère $(o;\ \vec{\imath};\vec{\jmath})$ unité graphique 2cm. Soient A_0 le point d'affixe 2 ; A'_0 le point d'affixe $2i$ et A_1 le milieu du segment $[A_0A'_0]$.

Plus généralement si A_n est un point d'affixe Z_n ; on désigne par A'_n le point d'affixe iZ_n et par A_{n+1} le milieu de $[A_nA'_n]$.

On note P_n et θ_n le module et l'argument de Z_n.

1. Déterminer les affixes des points $A_1;\ A_2;$ et A_3.
   Calculer $P_1;\ P_2;\ P_3$ et $\theta_1;\ \theta_2;\ \theta_3$.
2. a. Pour tout entier n ; exprimer Z_{n+1} en fonction de Z_n.
   b. Exprimer P_n et θ_n en fonction de n.
   c. Déterminer la limite de la suite (P_n).
   Interpréter géométriquement le résultat.

d. Comparer les modules et les arguments de Z_n et Z_{n+8}.

3. Etablir que $A_nA_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}A_{n-1}A_n$.
4. Après avoir exprimé A_nA_{n+1} en fonction de n ; déterminer en fonction de n la longueur D_n de la ligne brisée $A_0A_1A_3 \ldots . A_{n-1}A_nA_{n+1}$. Déterminer la limite de la suite (D_n).

Exercice 9 :

Soit la suite numérique de terme général u_n , n appartenant à $\mathbb{N}^*$, définie par :

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{n+1}{2n} u_n \end{cases}$$

1. Calculer u_2, u_3 et u_4.
2. Montrer que, pour tout entier naturel non nul, on a : $0 < u_{n+1} < u_n$
   En déduire que la suite u_n converge.
3. a. Montrer que la suite de terme général v_n définie par $v_n = \frac{u_n}{n}$ $(n > 0)$ est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier v_1.
   b. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.
   c. En déduire également l'expression de u_n en fonction de n et calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 10 :

Soit g la fonction numérique définie par $g(x) = \ln(x+3)$.

1. Etudier les variations de g et construire sa courbe représentative dans un repère orthonormal.
2. Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \ln(u_n + 3) \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
   a. En utilisant le sens de variation de g, étudier le sens de variation de la suite (u_n).
   b. Montrer que la suite (u_n) est majorée par 2.
   c. En déduire que cette suite est convergente. Soit l sa limite.
3. Soit (v_n) la suite définie par : $\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \ln(v_n + 3) \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   a. En utilisant le sens de variation de g, étudier le sens de variation de la suite (v_n).

b. Montrer que la suite (v_n) est minorée par 1.

c. En déduire que cette suite est convergente. Soit l' sa limite.

4. Montrer que $l = l'$.
5. a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n - u_n = \int_{u_{n-1}}^{v_{n-1}} \frac{1}{t+3} dt$.

   b. Montrer que : pour tout n$n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n - v_n \leq \frac{1}{4^n}$.

   c) En déduire une valeur approchée de l à 10^{-3} près.

<u>Exercice 11</u> :

On définit la suite réelle (u_n) par :
$u_0 = 0, u_1 = a$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = pu_{n+1} - (p-1)u_n$ où p est un réel différent de $0; 1$ et 2.

1. On pose : pour tout $n \in \mathbb{N}, w_n = u_{n+1} - u_n$.
   Montrer que (w_n) est une suite géométrique et calculer w_n en fonction de p, n, a.
2. On pose : pour tout $n \in \mathbb{N}, t_n = u_{n+1} - (p-1)u_n$.
   Montrer que (t_n) est une suite constante et calculer t_n en fonction de a.
3. Calculer u_n en fonction de w_n et t_n, puis en fonction de p, n, a.
4. On définit une suite (v_n) par : $v_0 = 1, v_1 = e^a$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $v_{n+2} = \frac{(v_{n+1})^p}{(v_n)^{p-1}}$.
   Justifier la définition en montrant que : pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n > 0$.
   Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}, \ln v_n = u_n$.
   En déduire v_n en fonction de p, n, a et déterminer, suivant les valeurs de p, et a, la limite de v_n quand n tend vers $+\infty$.

<u>Exercice 12</u> :

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ définie par : $u_2 = \cos(\frac{\pi}{2^2})$ et $u_{n+1} = u_n \cos(\frac{\pi}{2^{n+1}})$ pour tout $n \geq 2$.

1. Etablir que, pour tout $n \geq 2$:$0 < u_n < 1$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est convergente.
3. On introduit la suite $(v_n)_{n\geq 2}$ définie par : $v_n = u_n \sin(\frac{\pi}{2^n})$ pour tout $n \geq 2$.
   a. Vérifier que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
   b. Calculer v_2. En déduire l'expression de u_n en fonction de n, pour tout $n \geq 2$.
4. Déterminer la limite l de la suite (u_n).

<u>Exercice 13</u> :

Dans cet exercice, par soucis de simplification des raisonnements, on admettra que toutes les fractions sont définies.

On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies par leur premiers termes u_0 et v_0 et par les relations de récurrences suivantes :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = \alpha u_n + \beta v_n \\ v_{n+1} = \lambda u_n + \mu v_n \end{cases} \qquad \alpha, \beta, \lambda, \mu \text{ étant 4 réels no nuls.}$$

On pose alors :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_n = p_1 u_n + q_1 v_n \\ b_n = p_2 u_n + q_2 v_n \end{cases}$$

1. Montrer l'équivalence suivante :
$$(a_n) \text{ est constante} \Leftrightarrow \begin{cases} p_1 = \frac{\mu-\lambda}{\alpha\mu-\beta\lambda} \\ q_1 = \frac{\alpha-\beta}{\alpha\mu-\beta\lambda} \end{cases}$$
2. a. Montrer l'équivalence suivante :
$$(b_n) \text{ est géométrique} \Leftrightarrow \frac{p_2}{q_2} = \frac{\alpha p_2+\lambda q_2}{\beta p_2+\mu q_2}.$$
   b. En déduire que (b_n) est géométrique équivaut à :
$$(p_2 + \frac{\mu-\alpha}{2\beta} q_2)^2 = \frac{(\mu-\alpha)^2+4\beta\lambda}{4\beta^2} {q_2}^2.$$

On suppose que $(\mu-\alpha)^2 + 4\beta\lambda \geq 0$.

   c. En déduire que
$$p_2 = \frac{\sqrt{(\mu-\alpha)^2+4\beta\lambda}+\alpha-\mu}{2\beta} q_2 \text{ Ou } p_2 = \frac{\sqrt{(\mu-\alpha)^2+4\beta\lambda}-\alpha-\mu}{2\beta} q_2$$
   d. Montrer que si $p_2 = q_2$ alors $\beta + \mu = \alpha + \lambda$.
3. En prenant $= 0{,}6$, $\beta = 0{,}3$, $\lambda = 0{,}4$ et $\mu = 0{,}7$, déterminer la valeur de p_1, q_1 et p_2 sachant que l'on pose $q_2 = -3$.

<u>Exercice 14</u> :(BAC "C" 2004, BAC "E" 2017)

1. Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$.
2. Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = e^x \sin x$.
   Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f'(x) = 0$ (1), f' étant la dérivée de f.
3. Soit (u_n) et (v_n) deux suites numériques définies par :

$$u_n = -\frac{\pi}{4} + n\pi \quad \text{et} \quad v_n = f(u_n), \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

a. Montrer que u_n est une solution de l'équation (1).
b. Montrer que (u_n) est une suite arithmétique et que (v_n) est une suite géométrique. On précisera la raison et le premier terme de chaque suite.
c. Calculer en fonction de n, $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$.

LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Exercice 1 :

Intégrer les équations différentielles suivantes :

1) $y' - 5y = 0$; $2y' = -\frac{y}{2}$; $3y' + 5y = 0$; $9y^2 = (y')^2$; $(y')^2 - 2yy' = 0$.
2) $2y'' - 14y' + 20y = 0$; $y'' + 8y' + 16y = 0$; $3y'' + 9y' - 12y = 0$.
3) $y'' - 16y = 0$; $y'' + 25y = 0$; $9y'' + 64y = 0$; $3y'' + 9y' - 12y = 0$.
4) $y'' + 9y = 0$ sachant que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 2$
5) $4y'' + 49y = 0$ sachant que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 2$.

Trouver la solution de chacune des équations différentielles vérifiant les conditions initiales ci-dessous :

1) $(E_1): y'' + y' - 6y = 0$ sachant que $f(0) = 1$ et $f'(0) = -8$
2) $(E_2): y'' + 6y' + 9y = 0$ sachant que $f(0) = 4$ et $f'(0) = 1$
3) $(E_3): y'' - 6y' + 13y = 0$ sachant que $f(0) = 3$ et $f'(0) = 5$
4) $(E_4): y'' - 3y' - 4y = 0$ sachant que $f(0) = 2$ et $f'(0) = 4$
5) $(E_5): 4y'' + 4y' + 65y = 0$ sachant que $f(\pi) = 2$ et $f'(\pi) = 0$.

Exercice 2 :

On se propose de calculer la solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$(E)\ y'' + 2y' - 8y = -8x^2 - 12x - 18$$

telle que $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.

1. Déterminer les nombres réels a, b, c tels que la fonction polynome P définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = ax^2 + bx + c$ soit de l'équation (E).
2. f étant une fonction définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ on pose $g = f - P$.
   a. Montrer que f est solution de l'équation (E) si et seulement si g est solution de l'équation $y'' + 2y' - 8y = 0$.
   b. Résoudre cette équation et en déduire les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E).
   c. Déterminer la solution φ de l'équation (E) telle que $\varphi(0) = 0$ et $\varphi'(0) = 0$.

Exercice 3 :

Partie A :

1. Soit à résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation différentielle $(E): y' + 2y = cosx$.
   a) Déterminer deux réels a et b tels que la fonction g définie par $g(x) = acosx + bsinx$ soit la solution de (E) .
   b) Soit f la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Démontrer que $(f + g)$ est une solution de (E) si et seulement si f est solution de l'équation différentielle $(E_1): y' + 2y = 0$.
   c) Intégrer (E_1) et en déduire les solutions de (E) dans $\mathbb{R}$.
2. Soit à résoudre l'équation différentielle $(F): y'' - 2y + 5y = e^{-2x}$
   a) Déterminer le nombre réel k tel que la fonction g définie par $g(x) = ke^{-2x}$ soit solution de (F).
   b) Résoudre $(F_1): y'' - 2y' + 5y = 0$.

Partie B :

Soit l'équation différentielle $(E): y' + 2y = (x - 3)e^{-x}$.

1. Résoudre $(E): y' + 2y = 0$.
2. Trouver les réels a et b pour $f(x) = (ax + b)e^{-x}$ soit solution de (E).
3. Démontrer que h est solution de (E) implique que $(h - f)$ est solution de (E_1).
4. En déduire toutes les solutions de (E) et trouver celle qui passe par le point de coordonnées $(0, 1)$.

Exercice 4 :

1. Soit l'équation différentielle $(E): y'' - 3y' + 2y = 0$. Déterminer la solution de (E) sachant que $g(0) = -\frac{7}{2}$ et $g'(0) = -3$.
2. Soit la fonction f définie par $f(x) = g(x) + 3x$. Soit (C_f) la courbe de f dans un repère d'unité graphique $2cm$.
   Etudier les variations de f.
3. Montrer que (C_f) admet en $-\infty$ une asymptote oblique (D) dont en donnera une équation.
4. Etudier les positions relatives de (C_f) par rapport à (D)
5. Tracer (D) et (C_f).

6. Soit $\propto$ un réel négatif ou nul. On désigne par $A(\propto)$ l'aire, en cm^2 du domaine plan limité par (C_f), l'asymptote oblique (D) et les droites d'équations $x = \propto$ et $x = 3ln2$.
   a) Calculer $A(\propto)$
   b) En déduire $A(0)$
   c) Calculer la limite de $A(\propto)$ lorsque $\propto$ tend vers $-\infty$

   N.B : on donne $ln3 = 1,09$; $3ln3 - \frac{15}{2} = -4,20$, $ln2 = 0,69$.

<u>Exercice 5</u> :

Soit les équations différentielles :
$(E): y'' + 4y' + 4y = 4x + 12$; $(E_1): y'' + 4y' + 4y = 0$.

1. Trouver les réels a et b pour que la fonction g définie par $g(x) = ax + b$ soit solution de (E).
2. Pour toute fonction f solution de (E) ; montrer que si $(f + g)$ est solution de (E) alors f est solution de (E_1).
3. Intégrer sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E_1).
4. Déterminer la solution f de (E_1) sachant que $f(0) = 2$ et $f'(0) = 0$.
5. Etudier la fonction f et tracer sa courbe (C_f).
6. Calculer l'aire A du domaine plan limité par la courbe (C_f) l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.

<u>Exercice 6</u> :

Soit l'équation différentielle $(E): my'' + ny' + \frac{1}{4}y = 0$; où m et n répresentent respectivement la partie réelle et imaginaire du nombre complexe Z de module $\sqrt{2}$ et dont un argument est $\frac{7\pi}{4}[2\pi]$

1. Déterminer m et n.
2. Résoudre l'équation (E)
3. Déterminer la solution particulière dont la courbe passe par $A(0,1)$ et admet en particulier en ce point une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

Exercice 7 :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation différentielle $(E): y^{''} + 2y^{'} + 5y = 0$.
2. Déterminer la solution f qui vérifie :$f(0) = 1$ et $f^{'}(0) = -1$
3. On pose $F(x) = -\frac{1}{5}\left[f^{'}(x) + 2f(x)\right]$
   a) Démontrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. Expliciter F.
   b) En déduire le calcul de l'intégrale $I = \int_0^{\pi/2} f(x)dx$

Exercice 8 :

On considère l'équation différentielle $(1): y^{''} + y^{'} + y = cosx$

1. Déterminer les réels a et b tels que la fonction g définie par $g(x) = acosx + bsinx$ soit solution de (1)
2. On note $h = f - g$. Démontrer que f est solution de l'équation (1), si et seulement si h est solution de l'équation $(2): y^{''} + y^{'} + y = 0$
3. Résoudre l'équation différentielle(2). En déduire la solution générale de l'équation(1).

Exercice 9 :

1) Résoudre l'équation différentielle :$y^{''} - 3y^{'} + \frac{5}{2}y = 0$ (1).
2) Soit l'équation différentielle $y^{''} - 3y^{'} + \frac{5}{2}y = e^{3X}$ (2)
   a) Montrer que la fonction h définie par $h(x) = \frac{2}{5}e^{3x}$ est solution de (2).
   b) On admettra qu'une fonction f est solution de (2) si et seulement si $(f - h)$ est solution de (1). En déduire les solutions de (2).
3) Déterminer la solution f de (2) dont la courbe représentative (C_f) dans le repère orthonormé $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ passe le point $A(0, \frac{2}{5})$ et dont la tangente en A à (C_f) a pour coefficient directeur 2.

Exercice 10 :

On considère l'équation différentielle $(E): y^{''} - 2y^{'} + y = 0$.

1) Intégrer cette équation différentielle(E).
2) Déterminer la solution f de cette équation différentielle sachant que :

a) La courbe (C_f) passe par le point d'abscisse $A(0,4)$
b) La tangente à (C_f) au point d'abscisse O a pour coefficient directeur 2.

3) Etudier la fonction f déterminée ci-dessus et tracer sa courbe (C_f).
4) Calculer l'aire du domaine plan limité par l'axe des abscisses, la courbe (C_f) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

Exercice 11 :

Partie A :

On considère l'équation différentielle (E_1): $y'' - 3y' + 2y = 8x^2 - 24x$.

1) Déterminer les nombres a, b, c pour que la fonction numérique g définie par $g(x) = ax^2 + bx + c$ soit solution de (E_1) sur $\mathbb{R}$.
2) Démontrer que la fonction f est solution de l'équation (E_1) si et seulement si la fonction $h = (f - g)$ est solution de l'équation différentielle (E_2): $h'' - 3h' + 2h = 0$.
3) Intégrer l'équation différentielle (E_2). En déduire les solutions de l'équation différentielle (E_1) sur $\mathbb{R}$.
4) Déterminer la solution particulière φ de (E_1) telle que $\varphi(0) = 0$ et $\varphi'(0) = 0$.

Partie B :

On considère la fonction numérique φ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x) = -4e^{2x} + 8e^{x} + 4x^2 - 4.$$

1. a. Calculer $\varphi'(x)$ et $\varphi''(x)$. On vérifiera que $\varphi''(x) = -8(2e^x + 1)(e^x - 1)$ Etudier les variations de la fonction φ'. En déduire le signe de $\varphi'(x)$ et le sens de variation de φ.

   b. Déterminer les limites de φ en $-\infty$ et $+\infty$; on pourra remarquer : $\varphi(x) = -4e^{2x}\left(1 - \frac{2}{e^x} - \frac{x^2}{e^{2x}}\right) - 4$

2. Dresser le tableau de variation de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 4x^2 - 4$.
3. On désigne respectivement par (C_f) et (C_g) les courbes représentatives des fonctions φ et g dans le plan muni d'un repère orthonormé.

a. Montrer que pour tout x, $\varphi(x) - gx) = -4e^{x}(e^{x} - 2)$
b. En déduire la position relative des courbes (C_f) et (C_g).
c. Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} (\varphi(x) - g(x))$.

4. Tracer les courbes (C_f) et (C_g) dans le même repère.
5. Calculer l'intégrale $\int_{\alpha}^{ln2} (-4e^{2x} + 8e^{x})dx$ où α est un réel tel que $(\alpha < ln2)$.
6. On note $A(\alpha)$ l'aire en cm^2 du domaine limité par les courbes (C_f), (C_g) et les droites d'équations respectives $x = \alpha$ et $x = ln2$.
   a. Mettre en évidence le domaine sur le graphique.
   b. Calculer en cm^2 l'aire $A(\alpha)$
   c. Calculer la limite de $A(\alpha)$ lorsque α tend vers $-\infty$.

COURBES PARAMETRES

<u>Exercice 1</u> :

Etudier les courbes paramétrés définies par :

$\begin{cases} x = \cos 3t \\ y = \sin 2t \end{cases}$ $\begin{cases} x(t) = 2\cos 2t \\ y(t) = \sin 3t \end{cases}$

$\begin{cases} x = (1-t^2)\,/\,(1+t^2) \\ y = t^3(1+t^2) \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1/t \\ y = (t^3+2)\,/\,t \end{cases}$

$\begin{cases} x = e^t \\ y = t^2 \end{cases}$

<u>Exercice 2</u> :

Etudier les courbes représentatives des fonctions f définies ci-dessous.

a) $f(t) = (\cos t\,, \sin\frac{t}{3})$ b) $f(t) = (\sin t\,, \frac{\sin t}{2+\cos t})$
c) $f(t) = (\sin^3 t\,, \cos 3t)$ d) $f(t) = (4\cos^2 t \sin^3 t\,, (3-2\cos^2 t)\cos^2 t)$.

<u>Exercice 3</u> :

Le plan P est rapporté au repère orthonormal direct $(o, \vec{u}, \vec{v})$. On prendra $4\ cm$ comme unité sur les deux axes. On considère l'application F du plan dans lui-même qui à tout point m, d'affixe Z, associe le point M d'affixe $\frac{1}{2}Z^2 - Z$
L'objet de cette exercice est de tracer la courbe Γ décrite par M lorsque m décrit le cercle de centre O de rayon 1.
Soit t un réel de $[-\pi, \pi]$ et m le point de C d'affixe $Z = e^{it}$.

1. Montrer que l'image M de m par F est le point de coordonnées :
$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{2}\cos 2t - \cos t \\ y(t) = \dfrac{1}{2}\sin 2t - \sin t \end{cases}$$
Ces relations constituent une représentation paramétrique de la courbe Γ.
2. Comparer $x(-t)$ et $x(t)$ d'une part, $y(-t)$ et $y(t)$ d'autre part. en déduire que Γ admet un axe de symétrie que l'on précisera.
3. Montrer que $x'(t) = \sin t\,(1 - 2\cos t)$. Etudier les variations de x sur $[0, \pi]$.
4. Montrer que $y'(t) = (\cos t - 1)(1 + 2\cos t)$. Etudier les variations de y sur $[0, \pi]$.
5. Dans un même tableau faire figurer les variations de x et y sur $[0, \pi]$.

6. Placer les points de Γ correspondant aux valeurs $0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ et π du paramètre t et tracer les tangentes en ces points (on admettra que pour tout $t = 0$ la tangente à Γ est horizontale). Tracer la partie de Γ obtenue lorsque t décrit $[0, \pi]$ puis tracer Γ complètement.

<u>Exercice 4</u> : (BAC Blanc "c" 2016-2017)

PARTIE A :

1. Résoudre, dans l'ensemble des fonctions deux fois dérivables, l'équation différentielle $(E): y'' + 9y = 0$.
2. Déterminer la solution particulière f de (E) qui vérifie : $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 6$.

PARTIE B :

On considère dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, la courbe paramétrée (Γ) dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x(t) = 2\cos 3t \\ y(t) = 3\cos 2t \end{cases} t \in \mathbb{R}.$$

1. Définir la fonction vectorielle F associée à (Γ).
2. Montrer que F est périodique, de période 2π.
3. Comparer $M(t)$ et $M(-t)$. En déduire que l'on peut restreindre le domaine d'étude à l'intervalle $I = [0, \pi]$.
4. Etudier les variations de la fonction x sur I.
5. Etudier les variations de la fonction y sur I.
6. Dresser le tableau conjoint des variations de x et y sur I.
7. Tracer (Γ).

<u>Exercice 5</u> :

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère les points M, A, B, Q et N d'affixes respectives $Z = e^{it}$, 1, -1, Z^2 et $\frac{1}{Z}$.

1) Donner le module et l'argument de chaque nombre complexe. Montrer que ces points sont sur un même cercle qu'on déterminera une équation cartésienne.
2) Soit S un point d'affixe $Z^2 + Z + \frac{1}{Z}$

a) Montrer que $\overrightarrow{BS} = 2\cos t\,\overrightarrow{BM}$

b) On pose $(x(t), y(t))$ les coordonnées du point S, montrer que :

$$\begin{cases} x(t) = 2\cos^2 t + 2\cos t - 1 \\ y(t) = \sin 2t \end{cases}$$

3) On appelle (Γ) la courbe que parcourt le point S. Tracer cette courbe (appelée courbe poisson de Descartes).

<u>Exercice 6</u> :

Dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère la courbe (Γ) dont la représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x(t) = 2\cos t - \cos 2t \\ y(t) = 2\sin t - \sin 2t \end{cases} \quad t \in [-\pi, \pi]$$

1) Montrer que les points $M(t)$ et $M(-t)$ sont symétrique par rapport à l'axe des abscisses.
2) Construire (Γ).

Tel : 06 528 01 71 / 05 022 56 55

LES PROBABILITES

Exercice 1 :

On lance un dé pipé à six faces numéroté de 1 à 6. On désigne par P_i la probabilité de la face non visible telle que $P_i \in \left\{-2; -1; 0; \frac{4}{3}; 2; 3; 4\right\}$. Les réels P_i sont en progression arithmétique.

1. Démontrer que $P_1 = 0$, puis déterminer la raison r de cette progression.
2. Déterminer les probabilités P_2, P_3, P_4, P_5, P_6.
3. On désigne par X la variable aléatoire qui à chaque lancer du dé on associe le numéro de la face non visible.
   a. Déterminer la loi de probabilité de X.
   b. Calculer l'espérance mathématiques $E(x)$ et la variance $V(x)$ de X.
   c. Définir la fonction F de répartition de X, puis la construire .

Exercice 2 :

On jette simultanément deux dés cubiques D et D', les faces de chacun d'eux sont numérotés de 1 à 6. A chaque jet apparait un couple de nombre, tous ces couples sont équiprobables ; on désigne par S la somme des deux nombres apparus.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir :
   a. $S = 11$?
   b. $S = 12$?
2. On jette n fois les deux dés.
   Quelle est la probabilité P_n d'obtenir au moins une face $S = 12$.
3. a. Quelle est la limite de P_n quand n tend vers ∞ ?
   b. Comment faut-il choisir n pour avoir $P_n > 0{,}9$?

Exercice 3 :

Un dé cubique est pipé, pour un lancé, les probabilités : $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ d'avoir respectivement les faces $1, 2, 3, 4, 5, 6$ sont dans cet ordre les terme d'une suite arithmétique de raison $\frac{1}{18}$.

1. Calculer $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$.
2. On considère maintenant la variable aléatoire X, prenant les valeurs $X = -1; X = 0;\ X = 1$ avec les probabilités respectives

$P(X=-1)=a,\ P(X=0)=b,\ P(X=1)=c$, sachant que l'espérance mathématique de X est égale à $E(X)=\frac{1}{2}$.

a. Déterminer a,b,c ; pris dans cet ordre sont les termes d'une progression arithmétique, calculer alors la variance de X.

b. Déterminer a,b,c ; pris dans cet ordre sont des termes d'une progression géométrique, calculer alors la variance de X.

Exercice 4 :

Une urne contient quatre jetons sur lesquels sont inscrits respectivement les nombres les nombres $1,2,3,X$(supposés tous différents)

A. On considère l'épreuve consistant à tirer un jeton au hasard. Les probabilités des événements "tirer le jeton marqué 1", " tirer le jeton marqué 2", " tirer le jeton marquer 3", " tirer le jeton marquer X", sont respectivement notés P_1,P_2,P_3 et P_X et constituant dans cet ordre quatre termes d'une consécutif d'une suite arithmétique de raison $\frac{1}{8}$.
   1. Calculer P_1,P_2,P_3, et P_X
   2. Soit Y la variable aléatoire réelle prenant les valeurs $1,2,3,X$ avec les probabilités respectives P_1,P_2,P_3,P_X. Sachant que l'espérance mathématique de Y est 2 calculer X

B. Dans la suite de l'exercice, on donne à X la valeur obtenue à la question 2 du A.
   1. Définir la fonction de répartition de Y puis la représenter graphiquement.
   2. On procède à cinq tirage successif d'un jeton avec remise. Donner à 10^{-3} près par défaut la probabilité d'obtenir cinq fois un même jeton.

Exercice 5 :

On considère une urne contenant 5 jetons numérotés $1,2,3,4,5$.

On tire au hasard deux jetons de l'urne.

Soit X la variable aléatoire réelle définie par :

$$X=\{\text{ moyenne arithmétique de deux numéros sortis}\}.$$

1. On suppose que le tirage est successif avec remise.
    a. Donner la loi de probabilité de X.
    b. Calculer l'espérance mathématique et l'écart type de X.
2. On suppose maintenant que le tirage est successif sans remise.
    a. Donner la loi de probabilité de X.
    b. Calculer l'espérance mathématique et l'écart type de X.
    c. Comparer ces résultats à ceux de 1.b)

Exercice 6 :

Une urne contient 6 boules noires, 3 boules blanches et une boule verte, indiscernable au toucher.

A. On procède avec un tirage simultané de 3 boules.
1. Quelle est la probabilité de tirer une boule de chaque couleur ?
2. Quelle la probabilité de tirer trois de la même couleur ? (on donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles)

B. On procède toujours a un tirage simultané de 3 boules.
Soit X la variable aléatoire qui, à tout tirage, associe le nombre de boules noires tirées. Déterminer la loi de probabilité de X.

C. On procède maintenant au tirage d'une boule ; on note la couleur, puis on la remet dans l'urne, on fait 3 fois de suite cette expérience.
Soit Y la variable aléatoire qui à chaque ensemble de 3 tirages successifs, on associe le nombre de boules noirs tirées. Déterminer la loi de probabilité de Y . on donnera les résultats sous forme décimale (3 décimales).

Exercice 7 :

On lance deux dés cubiques D_1 et D_2 dont les faces sont numérotés de 1 à 6. On appelle a le nombre apparaissant sur la face supérieure de D_1 et b le nombre apparaissant sur la face supérieure de D_2.
Le résultat de l'expérience est le couple (a, b). On admet l'équiprobabilité des résultats.

1. Donner tous les résultats possible.
2. A chaque couple (a, b) on fait correspondre la valeur absolue de la différence $(a - b)$. On définit ainsi une variable aléatoire X par :

$$X = |a - b|$$

a) Déterminer les valeurs prises par X.

b) Déterminer la loi de probabilité de X.

3. Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart type de X. Pour chaque réponse, on donnera la valeur exacte et une approximation décimale à 10^{-2} près.

Exercice 8 :

Une urne contient 10 boules indiscernable au toucher, 5 boules rouges, 3 boules jaunes et 2 boules vertes. Dans les questions 1) et 2) on tire simultanément au hasard 3 boules de l'urne. On donnera les réponses sous forme de fractions irréductibles.

1. a. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
   A= « Les 3 boules sont rouges »
   B= « Les 3 boules sont de la même couleur »
   C= « Les 3 boules sont chacune d'une couleur différente ».
   b. On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque tirage associe le nombre de couleurs obtenues.
   Déterminer la loi de probabilité de X. Calculer l'espérance mathématique de X.
2. Dans cette question on remplace les 5 boules rouges par n boules rouges où n est un entier supérieur où égale à 2.
   L'urne contient donc $(n + 5)$ boules, c'est-à-dire, n rouges, 3 jaunes et 2 vertes.
   On tire au hasard et simultanément deux boules de cette urne. Soit les événements suivants :
   D : « Tirer deux boules rouges », E : « Tirer deux boules de la même couleur »
   a. Montrer que la probabilité de l'événement D est $P(D) = \frac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)}$
   b. Calculer la probabilité de l'événement E, $P(E)$ en fonction de n.

Exercice 9 :

On dispose d'un dé cubique parfait dont les faces sont numérotés de 1 à 6. On jette le dé deux fois de suite et on note les nombres a et b obtenus. On admet que les deux jets sont indépendants. On définit une variable aléatoire X de la manière suivante :

- Si $a = b$, $X(a = b) = a = b$;
- Si $a \neq b$, avec a divisible par b ou b divisible par a,
  $X(a, b) = \frac{a}{b}$ si $a > b$ et $X(a, b) = \frac{b}{a}$ si $b > a$.
- Dans tous les autres cas, $X(a, b) = a + b$.

Déterminer la loi de probabilité de X et calculer sa variance.

Exercice 10 :

Un ensemble TUR contient X déplacements de deux types : 4 rotations et les translations. On effectue au hasard 5 tirages successifs d'un déplacement avec remise.

1. Quelle est la probabilité P_1, de tirer 3 rotations exactement ?
2. Quelle est la probabilité P_2, de tirer 4 translations exactement ?
3. Dans le cas ou $P_1 = 8P_2$, calculer le nombre X de déplacement contenus dans l'ensemble TUR.
   N.B : On notera R la rotation et T la translation

Exercice 11 :

On lance deux dés non truqué et on considère la variable aléatoire qui à chaque lancé associé :

- La différence $a - b$ si $a > b$ où a est le numéro obtenue au premier dé et b celui du deuxième dé.
- La moyenne arithmétique de a et b si $a \leq b$.

1. a. Déterminer la loi de probabilité de X.
   b. Déterminer et représenter sa fonction de répartition F.
2. On appelle succès la réalisation de l'événement $(X < 3)$ et on répète l'épreuve 6 fois de plus. On désigne par Y la variable aléatoire associé au nombre de fois où on obtient le succès.
   a. Calculer la loi de probabilité de Y.
   b. Calculer $E(Y)$ et $\sigma(Y)$.
   c. Calculer la probabilité d'obtenir au plus un succès.
   d. Calculer la probabilité d'obtenir au moins un succès.

Exercice 12 :

Une urne contient 3 boules noires et 4 boules blanches indiscernable au touché. On tire simultanément 2 boules dans l'urne.

1. Quelle est la probabilité pour que les boules soient de même couleurs ?
2. Quelles est la probabilité pour que les 2 boules soient blanches ?
3. Quelle est la probabilité pour que les deux boules soit noires ?
4. Quelle est la probabilité pour que les deux boules soit de couleurs différentes ?
5. En suppose que le tirage est successif avec remise c'est-à-dire on tire dans l'urne une première boule puis on la remet avant de tirer la seconde. Reprendre les questions $1, 2, 3\ et\ 4$.
6. Le tirage est successif sans remise c'est-à-dire on tire une première boule puis sans la remettre en tire la seconde. Reprendre les questions $1, 2, 3, 4$.

Exercice 13 :

Soit X la variable aléatoire dont l'univers est :$X(\Omega) = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ et tel que $\forall\ k \in X(\Omega);\ P(X = k)$ est proportionnelle à k.

1. Déterminer la loi de probabilité X.
2. Définir la fonction de répartition de X et tracer sa courbe représentative.
3. Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$.

Exercice 14 :

Une urne contient 3 boules rouges et 4 boules bleu. On tire deux boules simultané et au hasard. On désigne par X la variable aléatoire qui à chaque boule rouge tiré est gagné 100f.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Déterminer sa fonction de répartition et tracer sa courbe.
3. Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$.

Tel : 06 528 01 71 / 05 022 56 55

Exercice 15 :

Une urne U contient une boule contenant le numéro 1 et 2 boules contenant le numéro 2 ; une urne contient V contient une boule portant le numéro 4 et n boules portant le numéro 3. On tire au hasard une boule de V et une boule de U, et on désigne par X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe la somme des numéros portés par les deux boules.

1. Déterminer en fonction de n la loi de probabilité.
2. Calculer en fonction de n l'espérance mathématique $E(X)$.
3. Combien de boules portant le numéro 3 a-t-on $E(X) = \frac{59}{12}$.
4. Déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle $E(X) < 4{,}8$.
   Déterminer et représenté alors la fonction de répartition de X. Calculer aussi $\sigma(X)$.

Exercice 16 :(BAC Blanc "C" 2016-2017)

Kevin possède un lecteur MP4, dans lequel il a stocké 90 morceaux de rumba et 110 morceaux de couper-décaler. Un tiers des 90 morceaux de rumba est composées par des auteurs congolais. Un dixième des 110 morceaux de couper-décaler est composé par des auteurs congolais.

1. Afin d'écouter un morceau de musique, Kevin lance une lecture aléatoire sur son lecteur MP4. On admet que cela revient à choisir un morceau de musique de manière équiprobable. On note :
   R l'événement « le morceau de musique écouté est un morceau de rumba » ;
   D l'événement « le morceau de musique écouté est un morceau de couper-décaler» ;
   C l'événement « l'auteur du morceau de musique écouté est un congolais »
   a. Quelle est la probabilité que le morceau de musique écouté par Kevin soit un morceau de rumba ?
   b. Sachant que Kevin a écouté un morceau de rumba, quelle est la probabilité que l'auteur soit congolais ?

c. Calculer la probabilité que le morceau de musique écouté par Kevin soit un morceau de rumba composé par un auteur congolais ?
d. Quelle est la probabilité que le morceau de musique écouté par Kevin soit composé par un auteur congolais ?

2. Afin d'écouter trois morceaux de musique, Kevin lance trois fois une lecture aléatoire sur son lecteur MP4. Calculer la probabilité qu'il ait écouté au moins un morceau de rumba.

Darnel KOUA 2017-2018
Tel : 06 528 01 71 / 05 022 56 55

LES STATISTIQUES

Exercices 1 :

L'étude du point P de la base de l'insecte ténébrion Molitor en fonction de l'âge X a conduit au tableau suivant :

X	$]0;\ 2]$	$]2;\ 6]$	$]6;\ 12]$	$]12;\ 20]$	$]20;\ 30]$
P	7	13	25	47	88

1. Tracer le nuage des points représentant la série $(X; P)$.
2. a) On pose $Y = lnP$. Calculer les différentes valeurs prise par le variable Y_i. Tracer les nuages des points représentant les couples $(X; Y)$.
   b) Déterminer l'équation de la droite de régression de Y en X.
3. Si l'évolution se poursuivait de la même manière, quel serait le poids de la larve au bout de 6 mois ?

Exercice 2 :

Un pharmacien observe, durant les 6 premiers mois de son officine le chiffre d'affaire en millions de francs CFA. Le résultat de l'observation est résumé dans le tableau suivant où x est le numéro du mois et y le chiffre d'affaire correspondant

x	1	2	3	4	5	6
y	12	13	15	19	21	22

1. Calculer les moyennes X et Y, représentatives de variable x et y.
2. Représenter graphiquement le nuage de point de cette série statistique double ainsi le point moyen G (unité 2cm d'abscisse et 1cm d'ordonnées).
3. Calculer la variance $V(x)$ et la covariance $cov(x, y)$ de x et y (les résultats seront donnés sous formes de fractions irréductible)
4. Démontrer qu'une équation de la droite de régression (D) de y en fonction de x est $= \frac{78}{35}x + 9{,}2$.
5. Tracer la droite (D).
6. En utilisant la droite (D), calculer une estimation du chiffre d'affaire de cette pharmacie à la fin de 7 mois.

Darnel KOUA 2017-2018
Tel : 06 528 01 71 / 05 022 56 55

<u>Exercice 3</u> :

Une série statistique double, ajustée par la méthode de moindre carrés a donnée ces deux droites de régression définie par :

$y = 0{,}9x + 3{,}2$

$x = 1{,}02y - 3{,}1$

a. Calculer les coordonnées du point moyen G de ce nuage.
b. Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre x et y.

On donne une autre série statistique double

x_i	1	2	1	b	4	2
y_j	1	a	2	0	2	3

a. Trouver a et b pour que le point moyen G ait pour coordonnées $(2, 2)$.
b. Calculer l'inertie du nuage par rapport au point $A(1, 1)$.

<u>Exercice 4</u> :

Le tableau ci-dessous donne la charge maximale y_i , en tonnes, qu'une grue peut lever pour une longueur x_i en mètre, de la flèche

Longueur x_i	16,5	18	19,8	22	25	27	29	32	35	39	41,7
Charge y_i	10	9	8	7	6	5,5	5	4,5	4	3,5	3,2

Les réponses numériques à cette question seront données à 10^{-2} près.

1. a. Représenter le nuage de points $(x_i;\ y_i)$ à l'aide d'un repère orthonormal $(0, \vec{i}, \vec{j})$ d'unités 1cm pour 2 mètre en abscisses et 1 cm pour une tonne en ordonnées.

   b. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire entre x et y.

c. Déterminer une équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés, construire cette droite sur le graphique précédent.

d. Utiliser cette équation pour déterminer la charge maximale que peut lever la grue avec une flèche de 26 mètres. Que peut-on dire?

2. On pose $z_i = \frac{1}{y_i}$.
   a. Recopier et compléter le tableau suivant (les z_i seront arrondis à 10^{-3} près)

x_i	16,5	18	19,8	22	25	27	29	32	35	39	41,7
z_i	0,100										

   b. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire entre x et z puis une équation de la droite de régression de z en x par la méthode des moindres carrés(les résultats numériques seront arrondis à 10^{-4} près)
   c. En se fondant sur les résultats obtenus en 2.b calculer la valeur de z correspondant à $x = 26$, en déduire la charge maximale que peut lever la grue avec une flèche de 26 mètres.
   Ce résultat vous parait-il satisfaisant que celui de 1.d ?pourquoi ?

<u>Exercice 5</u> :

Le tableau ci-dessous donne l'évolution du chiffre d'affaires réalisé à l'exportation par une entreprise

Année	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998
x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y_i	100	101	107	122	127	139	136	157	165

x_i désigne le rang de l'année, y_i désigne l'indice d'affaires à l'exportation rapporté à la base 100 en 1990.

1. a. Représenter le nuage de points $M_i(x_i, y_i)$ associé à la série double dans un repère orthogonal. On prendra :
   – Pour origine (0, 100)
   – Pour unités 1,5 cm sur l'axe des abscisses, 2 cm par 10 points d'indice sur l'axe des ordonnées.
   b. Calculer les cordonnées du point moyen G associé à cette série statistique et placer ce point sur le graphique.(on donnera la valeur décimale arrondie au dixième de l'ordonnée de G)
2. Déterminer la valeur arrondie au centième du coefficient de corrélation linéaire de la série double. Ce résultat permet-il d'envisager un ajustement affine ?pourquoi ?
3. Soit D la droite d'ajustement de y en x obtenue par la méthode des moindres carrées.
   a. Donner la valeur décimale arrondie au dixième du coefficient directeur de la droite D.
   b. En utilisant les coordonnées du point moyen G donner une équation de la droite d. Tracer cette droite sur le graphique précédent.
   c. En supposant que l'évolution du chiffre d'affaires se poursuive de la même façon au cours des années suivantes, estimer l'indice d'affaire en l'an 2016 (on donnera la valeur arrondie à l'unité.)

<u>Exercice 6</u> :

Durant les premiers jours de sa vie un nourrisson est pesé quotidiennement. On note le tableau suivant où les x_i représentent le nombre de jours après la naissance et les y_i représentent le poids en kg

x_i	4	5	6	8	10	12	16	20
y_i	3,62	3,66	3,78	3,80	3,84	3,87	4	4,15

1) Préciser les coordonnées du poids moyen G du nuage de points $M(i, j)$
2) Calculer le coefficient de corrélation linéaire ρ
3) Que peut-on en déduire ?
4) Déterminer $D_{y/x}$ la droite d'ajustement par la méthode des moindres carrés de y par rapport à x

5) Quelle pourrait être une estimation du poids du nourrisson le $25^{\text{ème}}$ jour après sa naissance ?

Exercice 7 :

On veut étudier le comportement des séries d'effectifs en Congo en millions de salariés. Ces effectifs sont donnés chaque trimestre pour les années 2001, 2002 et 2003. On note le tableau suivant où les x_i représentent l'effectif des services industriels et les y_i représentent les effectifs des services marchands

x_i	7,10	7,08	7,07	7,06	7,04	7,03	6,98	6,92	6,86	6,78	6,71	6,67
y_j	6,76	6,81	6,84	6,86	6,89	6,89	6,91	6,94	6,98	6,97	6,98	7,04

1) Préciser les coordonnées du point moyen G du nuage de points $M(i,j)$
2) Calculer les variances, les écart-types et les covariance de cette série
3) Calculer le coefficient de corrélation linéaire ρ
4) Que peut-on déduire ?
5) Déterminer $D_{y/x}$ la droite de régression de y en x
6) Déterminer $D_{x/y}$ la droite de régression de x en y

Exercice 8 :

Le tableau suivant donne l'évolution du chiffre d'affaires y (en millions de francs) d'une entreprise au cours de huit années ?

Année	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Rang de l'année : x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
y_i	119	136	160	185	200	240	243	265

1. Calculer le coefficient de corrélation linéaire. On donnera le résultat à 1/1000 près par défaut. Que peut-on en conclure ?
2. Déterminer par la méthode des moindres carrés une équation de la droite D de régression de y en x. On donnera les coefficients de la droite D a 10^{-2} près par défaut.
3. En supposant que le chiffre d'affaires de l'entreprise continue à évoluer de façon régulière :
   a. Evaluer le chiffre d'affaires pour l'année 2010.
   b. Estimer en quelle année le chiffre d'affaires dépassera 480 millions de francs.

Exercice 9 :(BAC ''C'' 2013)

Les caractères X et Y sont distribués suivant le tableau ci-dessous.

X	-2	-2	-1	-2	-1	0	-1	-2	-1	-2	0	-1	-1	-1
Y	-1	2	2	-1	2	2	0	-1	0	2	-1	-1	0	-1

1. Transformer ce tableau en un tableau à double entrées d'effectifs n_i.
2. Déterminer le point moyen $G(\bar{X}, \bar{Y})$
3. Calculer les variances $V(X)$ et $V(Y)$ de X et Y.
4. Calculer la covariance $cov(\bar{X}, \bar{Y})$.

Exercice 10 :(BAC ''C'' 2004)

Le tableau ci-dessous représente le couple (X, Y) de deux caractères statistiques :

Y \ X	1	2	3
0	2	0	2
2	4	2	0

1. Représenter le nuage de points de cette série.
2. Calculer les coordonnées du point moyen G.
3. Calculer l'inertie du nuage par rapport au point $O(0,0)$, puis par rapport au point G.

FORMULAIRE

I. COMBINAISON-DÉNOMBREMENTS

$card(A \cup B) = cardA + cardB - card(A \cap B)$
$card(A \cup B) = cardA \times cardB$
Soit E un ensemble de n éléments
Nombre de permutations de E : $n! = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times n$; $0! = 1$
Nombre d'arrangements de p éléments de E : $A_n^p = n(n-1)\ldots(n-p+1)$
Nombre de sous-ensembles de p éléments de E : $C_p^n = \binom{n}{p} = \frac{A_p^n}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$
$C_n^p = C_n^{n-p}$; $C_{n+1}^{p+1} = C_n^p + C_n^{p+1}$

II. PROBABILITÉS

si A et B sont incompatibles : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
Dans le cas général : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$; $P(\Omega) = 1$; $P(\emptyset) = 0$
Si $A_1, \ldots, A_n$ forment une partition de A, $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.
Dans le cas d'équiprobabilité : $P(A) = \frac{card\ A}{card\ \Omega}$.

Probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalisé
$P(A \cap B) = P(A/B)P(B)$; $P(A/B)$ se note aussi $P_B(A)$.
Cas où A et B sont indépendants : $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Formule des probabilités totales
Si les événements $B_1, B_2, \ldots, B_n$ forment une partition de Ω, alors
$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \cdots + P(A \cap B_n)$.

Variable aléatoire
Fonction de répartition : $F(x) = P(X \leq x)$
Espérance mathématique : $E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$
Variance : $V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i {x_i}^2 - (E(X))^2$
Ecart-type : $\sigma_x = \sqrt{V(X)}$

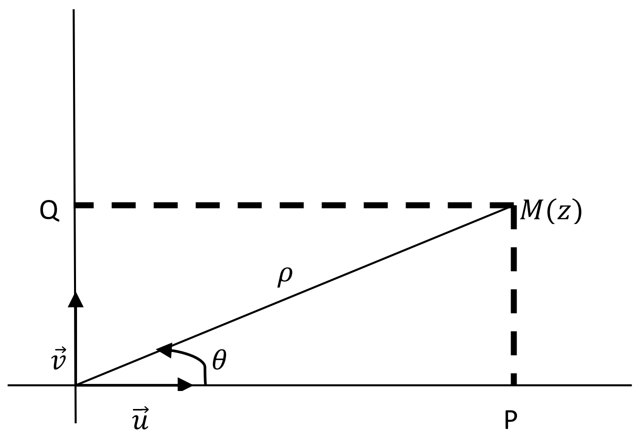
Loi de probabilité

$B(n,p)$ Où n est le nombre d'épreuves réalisés et p le succès de probabilité
Avec $p+q=1$ q échec de probabilité
Loi de probabilité : $P(X=k)=C_n^k P^k q^{n-k}$ où $k \in \{0,1,2\ldots,n\}$
Espérance mathématique : $E(X)=np$
Variance : $V(X)=npq$
Ecart-type : $\delta(X)=\sqrt{npq}=\sqrt{V(X)}$

III. ALGEBRE

A. NOMBRES COMPLEXES

Forme algébrique : $z=x+iy$
Forme trigonométrique : $z=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)=\rho e^{i\theta}, \rho>0$
$\overrightarrow{OM}=x\vec{u}+y\vec{v}$
$\overrightarrow{OP}=x=Re(z)=\rho\cos\theta$
$\overrightarrow{OQ}=y=Im(z)=\rho\sin\theta$
$OM=\rho=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$



Opérations algébriques

$z+z'=(x+iy)+(x'+iy')=(x+x')+i(y+y')$
$zz'=(x+iy)(x'+iy')=(xx'-yy')+(xy'+x'y)$

Conjugué
$z=x+iy=\rho e^{i\theta}$; $\bar{z}=x-iy=\rho e^{-i\theta}$
$x=\frac{1}{2}(z+\bar{z})$; $y=\frac{1}{2i}(z-\bar{z})$
$\overline{z+z'}=\bar{z}+\overline{z'}$; $\overline{zz'}=\bar{z}\overline{z'}$
$z\bar{z}=x^2+y^2=|z|^2$
$\frac{1}{z}=\frac{\bar{z}}{z\bar{z}}=\frac{x}{x^2+y^2}+i\frac{-y}{x^2+y^2}=\frac{1}{\rho}e^{-i\theta}$

Module et argument d'un produit, d'un quotient

$zz' = \left(\rho e^{i\theta}\right)\left(\rho' e^{i\theta'}\right) = \rho\rho' e^{i(\theta+\theta')}$
$|zz'| = |z||z'|$
$\frac{z}{z'} = \frac{\rho e^{i\theta}}{\rho' e^{i\theta'}} = \frac{\rho}{\rho'} e^{i(\theta-\theta')}$
$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$
$z^n = \left(\rho e^{i\theta}\right)^n = \rho^n e^{in\theta}, n \in \mathbb{Z}$

Inégalité triangulaire
$\big||z| - |z'|\big| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|$

B. IDENTITES REMARQUABLES
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$; $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + \cdots + C_n^k a^{n-k}b^k + \cdots + b^n$
$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$; $a^2 + b^2 = (a+ib)(a-ib)$

C. TRIGONOMETRIE

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$
$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

Formules d'Euler
$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)$; $\sin\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)$
Formules d'addition
$e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib}$
$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$
$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$
$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$
$\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b$
$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a\tan b}$, $\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a\tan b}$
$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$
$\sin 2a = 2\sin a\cos a$
$\cos^2 a = \frac{1}{2}(1 + \cos 2a)$; $\sin^2 a = \frac{1}{2}(1 - \cos 2a)$

Formules de transformation

$\cos a\cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$
$\sin a\sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$
$\sin a\cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$
$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$

$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$
$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$
$\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$

Valeurs remarquables

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
Sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
Cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
Tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0

Formule de Moivre et applications
Pour tout entier naturel non nul n, $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$
soit encore $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$.

Racines $n^{ièmes}$ de l'unité
$u_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, où $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.
Les solutions de $z^n = a$ où $a = \rho e^{i\alpha}$, sont $z_k = z_0 u_k$, où $z_0 = \rho^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\alpha}{n}}$.

D. EQUATION DU SECOND DEGRE

Soit a, b, c des nombres réels, $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$.
L'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet :

- Si $\Delta > 0$, deux solutions réelles

$$z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta = 0$, une solution réelle double

$$z_1 = z_2 = -\frac{b}{2a}$$

- Si $\Delta < 0$, deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Dans tous les cas : $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}, \quad z_1 z_2 = \frac{c}{a}$$

E. SUITES ARITHMETIQUES-SUITES GEOMETRIQUES

(formules valables sur $\mathbb{C}$ et donc sur $\mathbb{R}$)

Suites arithmétiques
Premier terme u_0; $u_{n+1} = u_n + a$; $u_n = u_0 + na$
$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Suites géométriques
Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = bu_n$; $u_n = u_0 b^n$
Si $b \neq 1$, $s_n = 1 + b + b^2 + \cdots + b^n = \frac{1-b^{n+1}}{1-b}$
Si $b = 1$, $s_n = n + 1$

IV. ANALYSE

A. PROPRIETES ALGEBRIQUES DES FONCTIONS USUELLES

1. Fonction logarithme et exponentielle

$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}$ $(x > 0)$
$\ln 1 = 0$
$\ln ab = \ln a + \ln b$
$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$ pour $a > 0$ et $b > 0$
Si $x \in]-\infty;\ +\infty[$ et $\in]0;\ +\infty[$,
$y = \exp x = e^x$ équivaut à $x = \ln y$
$e^0 = 1$
$e^{a+b} = e^a e^a$
$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$
$a^x = e^{x \ln a}$ $(a > 0)$
$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$
$\ln a^x = x \ln a$ pour $a > 0$
$e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x)$.

2. Fonctions puissances

$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ $(x > 0)$
$e^0 = 1$
$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$ $x^{\alpha-\beta} = \frac{x^\alpha}{x^\beta}$ $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$
Si $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0;\ +\infty[$ et $y \in [0;\ +\infty[$,
$y = \sqrt[n]{x}$ équivaut à $x = y^n$.

B. LIMITES USUELLES DE FONCTIONS ET SUITES

1. Fonctions

Comportement à l'infini

$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = 0$.

Croissances comparées à l'infini

$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} xe^x = 0$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

Pour $\alpha > 0$,

$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$

Comportement à l'origine

$\lim_{x\to0} \ln x = -\infty$

$si\ \alpha > 0,\quad \lim_{x\to0} x^\alpha = 0$

$si\ \alpha < 0\quad \lim_{x\to0} x^\alpha = +\infty.$

Comportement à l'origine de $\ln(1+x)$, e^x, $\sin x$, $(1+x)^\alpha$

$\lim_{h\to0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$

$\lim_{h\to0} \frac{e^h-1}{h} = 1$

$\lim_{h\to0} \frac{\sin h}{h} = 1$

$$\begin{cases}(1+h)^\alpha = 1+\alpha h + h\varepsilon(h) \quad (\alpha \neq 0)\\ \lim_{h\to0} \epsilon(h) = 0\end{cases}$$

Croissances comparées à l'origine

$\lim_{x\to0} x\ln x = 0$

$si\ \alpha > 0\quad \lim_{x\to0} x^\alpha \ln x = 0$

2. Suites

$si\ \alpha > 0,\ \lim_{n\to+\infty} n^\alpha = +\infty;\qquad si\ \alpha < 0,\ \lim_{n\to+\infty} n^\alpha = 0$

$si\ a > 1,\ \lim_{n\to+\infty} a^n = +\infty\qquad si\ 0 < a < 1,\ \lim_{n\to+\infty} a^n = 0$

$si\ \alpha > 0,\quad a > 1,\quad \lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n^\alpha} = +\infty.$

C. DERIVEES ET PRIMITIVES

(Les formules ci-dessous peuvent servir à la fois pour calculer et des primitives)

1. Dérivées et primitives des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	$intervalle\ de\ validité$
k	0	$]-\infty;\ +\infty[$
x	1	$]-\infty;\ +\infty[$
$x^n, n \in \mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$]-\infty;\ +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty; 0[\cup]0;\ +\infty[$
$\frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty; 0[\cup]0;\ +\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;\ +\infty[$
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$]0;\ +\infty[$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$]0;\ +\infty[$
e^x	e^x	$]-\infty;\ +\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$]-\infty;\ +\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$]-\infty;\ +\infty[$
$e^{rx}, r = \alpha + i\beta$	re^{rx}	$]-\infty;\ +\infty[$

2. Opérations sur les dérivées

$(f+g)' = f' + g'$

$(kf)' = kf'$

$(fg)' = f'g + fg'$

$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$

$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

$(g \circ f)' = (g' \circ f)f'$

$(e^u)' = e^u u'$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives

$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$

D. CALCUL INTEGRAL

formules fondamentales

Si F est une primitive de f, alors $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

Si $g(x) = \int_a^x f(t)dt$, alors $g'(x) = f(x)$.

$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt$

Formule de chasles

$\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt$

$\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$

Linéarité

$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))\, dt = \alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b g(t)dt$

Positivité

Si $a \leq b$ et $f \geq 0$, alors $\int_a^b f(t)dt \geq 0$.

Intégration d'une inégalité

Si $a \leq b$ et $f \leq g$, alors $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$.

Si $a \leq b$ et $m \leq f \leq M$, alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(t)dt \leq M(b-a)$.

Valeur moyenne de f sur $[a;b]$: $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$

Intégration par parties

$\int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt$

E. EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Equation	*solution sur* $]-\infty, +\infty[$
$y' - ay = 0$	$f(x) = ke^{ax}$
$y'' + ay' + by = 0$ Equation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$ De discriminant Δ	- si $\Delta > 0, f(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$ Où r_1 et r_2 sont les racines de l'équation caractéristique - Si $\Delta = 0, f(x) = (\lambda x + \mu)e^{rx}$ Où r est la racine double de l'équation caractéristique - Si $\Delta < 0, f(x) = (\lambda \cos \beta x + \mu \sin \beta x)e^{\alpha x}$ Où $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ sont les racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique.