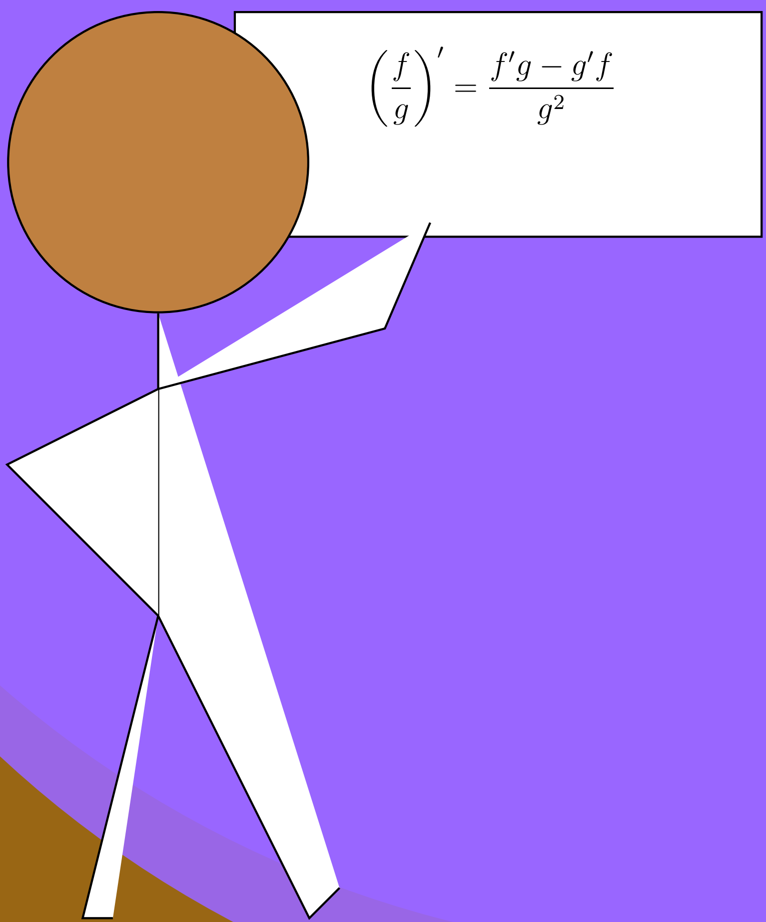
Notes de Cours de MATHÉMATIQUES

AGOSSEME Kokou Anani
baudespoir@yahoo.fr
Tél : 92 47 81 85 / 99 68 64 43



Première D

Résumé

Ce document est une ébauche d'harmonisation de mes fiches de cours dispensé dans les classes de première sciences expérimentales (série D) et est basé sur l'Harmonisation des Programmes de Mathématiques (HPM) édition 2004 en vigueur dans l'enseignement des mathématiques au TOGO.

Sommaire

Première partie

Algèbre-Analyse

FICHE N°
AGOSSEME Kokou Anani

Tél: (+228) 92 47 81 85 / 99 68 64 43

Date :
Spécialité : *Analyse*
Durée : *10 heures*
Classe : $1^{ère}$ D
Effectif :

Leçon

FONCTIONS POLYNÔMES-ÉQUATIONS-INÉQUATIONS-SYSTÈMES

Objectifs pédagogiques : (Confère programmes HPM page 34)

À la fin de la leçon, l'élève doit être capable de :

- trouver le quotient d'une fonction polynôme f par une fonction polynôme g non nulle sachant que g divise f ;
  — soit par la méthode des cœfficients indéterminés,
  — soit en effectuant la division euclidienne de f par g ;
- sur des exemples simples, décomposer en éléments simples une fonction rationnelle,
- résoudre une équation du second degré à l'aide du discriminant et discuter lorsqu'elle comporte un paramètre ;
- trouver un zéro d'une fonction polynôme du second degré connaissant l'autre en utilisant la somme ou le produit ;
- déterminer deux nombres réels dont on connaît la somme et le produit ;
- trouver le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x où f est une fonction polynôme du second degré ;
- résoudre dans $\mathbb{R}$ des équations ou inéquations se ramenant au second degré :
  — équations bicarrées
  — équations avec radicaux du type : $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$, $\sqrt{f(x)} = ax + b$ où a et b sont deux réels, f et g deux fonctions polynômes de degrés au plus égaux 2
  [0.1cm]
- inéquations correspondants aux cas précédents
- résoudre un système de deux équations du premier degré dans $\mathbb{R}^2$ par la méthode de Cramer et discuter lorsqu'il comporte un paramètre ;
- résoudre algébriquement une équation, un système de deux équations, un système de trois équations linéaires dans $\mathbb{R}^3$;
- mettre un problème en équation et le résoudre ;
- résoudre graphiquement une inéquation, un système d'inéquation du premier degré dans $\mathbb{R}^2$. Application : programmation linéaire

Documentation : HPM édition 2004 , CIAM $1^{ère}$ SE

Matériel et supports pédagogiques : craie, tableau, livre CIAM $1^{ère}$ S, instruments de géométrie

Pré-requis :

- Définition de polynômes et de fonctions rationnelles
- Zéro d'une fonction polynôme, factorisation d'un polynôme

- Forme canonique d'une fonction polynôme du second degré
- Division euclidienne, méthode des coefficients indéterminés
- Simplifications des fonctions rationnelles

Fonctions polynômes-Équations-Inéquations-Systèmes

Contenus

1 Révision des acquis

EXERCICE 1.1
On considère le polynôme suivant : $P(x) = 2x^3 - 6x + 4$.
1- Vérifier que 1 est un zéro (ou une racine) de $P(x)$ et déterminer par la méthode de division euclidienne le quotient $Q(x)$ de $P(x)$ par $x + 1$.
2- Déterminer la forme canonique de $Q(x)$ puis le factoriser si possible. En déduire une factorisation de $P(x)$.

1- $P(1) = 0$ donc 1 est un zéro (ou une racine) de $P(x)$.$Q(x) = 2x^2 + 2x - 4$.
2- $Q(x) = 2[(x + \frac{1}{4})^2 - \frac{9}{4}]$, $Q(x) = -2(x-1)(x+2)$ et $P(x) = -2(x-1)^2(x+2)$

Remarque 1.1

➢ Dans la factorisation de $P(x)$ le facteur $(x-1)$ est à l'exposant 2, ont dit que 1 est un zéro d'ordre de multiplicité 2 ou encore zéro double alors que -2 est un zéro simple.
➢ Généralement la forme canonique de $ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$), est $a[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}]$.
Le réel $b^2 - 4ac$ est appelé discriminant du polynôme et noté Δ

EXERCICE 1.2
1- On considère la fonction rationnelle f définie par $f(x) = \frac{x^3 - 5x + 10}{x - 4}$.Déterminer un polynôme $P(x)$ et un réel c tels que :$f(x) = P(x) + \frac{c}{x-4}$.
2- Soit $f(x) = \frac{3x^2 - x + 2}{-x + 2}$. Déterminer les réels a, b et c tels que :$f(x) = ax + b + \frac{c}{-x+2}$
3- Déterminer les réels a et b tels que : $\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1}$.

EXERCICE 1.3
Soit le polynôme $P(x) = -2x^2 + 2x + 4$.
1) Calculer le discriminant de $P(x)$ puis donner sa forme canonique,
2) Déterminer les cordonnées du sommet S de la représentation graphique de P puis la construire dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
3) Résoudre l'équation $P(x) = 0$ graphiquement puis par calcul.
4) Résoudre les inéquations $P(x) < 0$ graphiquement puis par calcul.

Solution:
3)

Remarque 1.2

Si $\Delta > 0$ alors l'équation $ax^2+bx+c=0$ admet deux solutions distinctes x_1 et x_2 et on a $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$.
Si $\Delta = 0$ alors l'équation $ax^2+bx+c=0$ admet une solution double et on a $ax^2+bx+c = a(x-x_0)^2$.
Si $\Delta < 0$ alors l'équation $ax^2+bx+c=0$ n'admet pas de solution et ax^2+bx+c n'est pas factorisable.

4)

Remarque 1.3

Signe de $P(x) = ax^2+bx+c$

Si $\Delta > 0$ alors on a (en supposant $x_1 < x_2$) :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
signe de ax^2+bx+c		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

Si $\Delta = 0$ alors on a :

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
signe de ax^2+bx+c		signe de a	0	signe de a	

Si $\Delta < 0$ alors on a :

x	$-\infty$		$+\infty$
signe de ax^2+bx+c		signe de a	

EXERCICE D'APPLICATION 1.1

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes à l'aide du discriminant :
$(E_1) : x^2-4x+50=0$, $(E_2) : 6x^2-x-5=0$, $(E_3) : 2x^2+2x-7=0$, $(E_4) : x^2+x+1=0$, $(E_5) : \sqrt{2}x^2+(1-\sqrt{2})x-1=0$.
2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
$(E_1) : (3x+2)^2 = 4(2x-5)^2$, $(E_2) : x^2-49=0$, $(E_3) : -x^3+x^2+-x=0$, $(E_4) : x(x-1)^2+2(x-1)(x+3)+8-8x=0$
3) Résoudre dans $\mathbb{R}$
$(I_1) : 2x^2-3x+2 \geqslant 0$, $(I_2) : \sqrt{2}m^2+4m+\dfrac{1}{\sqrt{2}} < 0$, $(I_3) : y^2-y+1<0$, $(I_4) : y^2-y+1>0$

$*$ **Somme et produit des solutions d'une équation du second degré**

Activité 1.1

1) Soit $x \in \mathbb{R}$, $ax^2+bx+c=0$ une équation du second degré. On suppose que l'équation admet deux solutions x_1 et x_2.
Calculer leur somme S et leur produit P en fonction de a, b et c.

2) Soit à déterminer deux nombres x et y connaissant leur somme S et leur produit P. Montrer que ces deux nombres sont solution de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$

EXERCICE D'APPLICATION 1.2

1) Dans chacun des cas suivants, sans calculer le discriminant, trouver l'autre solution x_2.
a) $4x^2 - 20x + 9 = 0$; $x_1 = 1/2$ b) $x^2 - 9x - 90 = 0$; $x_1 = -6$
2) Déterminer une équation du second degré ayant pour solution :
a) 11 et -15 b) $2 + \sqrt{13}$ et $2 + \sqrt{13}$

2 Équations et Inéquations du second degré avec paramètre

EXERCICE 2.1

1) On considère l'équation $(E_m) : x \in \mathbb{R}, (2-m)x^2 + 2mx + 1 - m = 0$ où m est un paramètre réel.
a-Pour quelle valeur de m l'équation n'est-elle pas du second degré ? Résoudre l'équation pour cette valeur de m.
On suppose dans la suite que $m \neq 2$.
b-Calculer le discriminant m de l ?équation (E_m) en fonction de m.
c-Étudier le signe de m suivant les valeurs de m. En déduire les solutions de(E_m) suivant les valeurs de m.
2) Résoudre les équations suivantes suivant les valeurs de m en utilisant la même démarche que dans la question 1).
a) $(m-1)x^2 - 2mx + m + 2 = 0$ b) $x^2 - (m+1)x + m = 0$ c) $mx^2 + (m-1)x + m/2 = 0$
3) Déterminer m pour que l'équation $mx^2 - (m+2)x + \dfrac{m-1}{4} = 0$ admette :
a) deux solutions distinctes
b) deux solutions de signes contraires
c) deux solutions strictement positives

3 Équations et inéquations se ramenant au second degré

EXERCICE 3.1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes :
1) Équations et inéquations bicarrées :
$(E_1) : x^4 - 13x^2 + 36 = 0$, $(E_2) : -x^4 + 18x^2 - 32 = 0$, $(E_3) : x^4 + x^2 + 1 = 0$,
$(I_1) : x^4 - 2x^2 - 15 < 0$, $(I_2) : 4x^4 - 4x^2 + 1 \geqslant 0$.
2) Équations et inéquations avec radicaux. $(E_1) : \sqrt{x+2} = \sqrt{3x-4}$, $(E_2) : \sqrt{2x^2 + 5x - 7} = \sqrt{x^2 - x - 2}$
$(I_1) : x + \sqrt{2x-2} \leqslant 4$, $(E_1) : \sqrt{x^2 - 3x} = \sqrt{3x-8}$

4 Équations et systèmes d'équations dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

EXERCICE 4.1

1) Résoudre les systèmes suivants par la méthode de Cramer (méthode du déterminant :

$(\sigma_1):\begin{cases} 2x+2y = 1 \\ 3x+4y = 6 \end{cases}$, $(\sigma_2):\begin{cases} -x-9y = 0 \\ 3x+y = 8 \end{cases}$ $(\sigma_3):\begin{cases} 3x+2y = 1 \\ 2x+\frac{4}{3}y = \frac{2}{3} \end{cases}$ $(\sigma_4):\begin{cases} \frac{1}{3}x-\frac{1}{2}y = 1 \\ -x+\frac{3}{2}y = \frac{2}{3} \end{cases}$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ suivant les valeurs du paramètre m :

$(\sigma_1):\begin{cases} mx+y = 1 \\ x-y = 3 \end{cases}$, $(\sigma_2):\begin{cases} 2x-my = m-1 \\ (5-m)x-3y = 11-5m \end{cases}$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ les systèmes suivants :

$(\sigma_1):\begin{cases} x+10y-3z = 5 \\ 2x-y+2z = 2 \\ -x+y+z = -3 \end{cases}$, $(\sigma_2):\begin{cases} 3x+4y+z = 7 \\ x+2y-z = 13 \\ 2x-y+2z = 5 \end{cases}$, $(\sigma_3):\begin{cases} 2x+5y-6z = 8 \\ x+y-6z = 0 \end{cases}$, $(\sigma_4):$ $\begin{cases} x+y+z = 0 \\ 2x-3y = 0 \end{cases}$

- **Programmation linéaire**

EXERCICE 4.2

1) Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}^2$ l'inéquation $2x+y<5$.

2) a) Représenter graphiquement l'ensemble (S) des points $M(x,y)$ tels que : $\begin{cases} x > 0 \\ 2x+y < 4 \\ y \leqslant 1 \end{cases}$

b) Déterminer le point de (S) qui rend maximale la somme $x+y$. Trouver la valeur maximale de cette somme sur (S).

FICHE N°
AGOSSEME Kokou Anani

Tél: (+228) 92 47 81 85 / 99 68 64 43

Date :
Spécialité : *Analyse*
Durée : *6 heures*
Classe : $1^{ère}$ D
Effectif :

Leçon

FONCTIONS-APPLICATIONS

Objectifs pédagogiques : (Confère programmes HPM page 33)

À la fin de la leçon, l'élève doit être capable de :

- trouver un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ sur lequel deux fonctions coïncident,
- déterminer la restriction, le prolongement d'une fonction,
- reconnaître si une application est ou non injective,
- reconnaître si une application est ou non surjective,
- reconnaître si une application est ou non bijective,
- étant donnée une application non surjective, réduire l'ensemble d'arrivée pour obtenir une application surjective,
- étant donnée une application non injective, trouver éventuellement des intervalles sur lesquels les restrictions sont injectives,
- déterminer la composée de deux fonctions,
- trouver l'image directe, l'image-réciproque d'un intervalle par une fonction,
- déterminer graphiquement dans un repère orthonormé ou par calcul, la réciproque d'une bijection donnée.

Intentions pédagogiques : Utiliser des exemples précis pour illustrer les notions d'injection, surjection et bijection.

Documentation : HPM édition 2004 , CIAM $1^{\text{ère}}$ SE

Matériel et supports pédagogiques : craie, tableau, livre CIAM, instruments de géométrie

Pré-requis :

- notions de fonctions (définitions, ensemble de définitions)
- notions de représentation graphique d'une fonction
- image d'un intervalle par une fonction
- image-réciproque d'un réel par une fonction

Fonctions - Applications

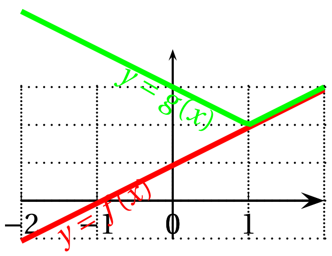
Contenus

1 Exemples d'applications injectives, surjectives et bijectives

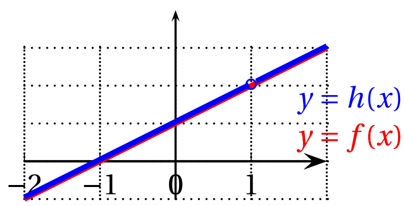
1.1 Fonctions égales sur un ensemble,restriction et prolongement

EXERCICE 1.1
Soient f, g et h trois fonctions définies de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x+1$, $g : x \mapsto |x-1|+2$ et $h : x \mapsto \dfrac{x^2-1}{x-1}$.
1) Préciser l'ensemble de définition de chacune d'elles.
2) Écrire $g(x)$ sans le symbole de valeur absolue et simplifier $h(x)$.
3) Construire (C_f) et (C_g) sur la même figure puis (C_f) et (C_h) sur une autre.
4) Déterminer graphiquement le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R}$ sur lequel f et g coïncident.
Même question pour f et h.

Solution:



f et g coïncident sur $]1, +\infty[$



f et h coïncident sur $]-\infty; 1[\cup]1, +\infty[= D_h$

On a $D_h \subset D_f$ et f coïncident avec h sur D_h : on dit alors que h est la restriction de f à D_h.

Définition 1.1 Rappels
Soit $f : A \to B$ une fonction.$E \subset D_f, E \neq \varnothing$.
*On appelle **restriction de** f **à** E toute application g de E dans B telle que $\forall x \in E, g(x) = f(x)$*
On note $g = f_{/E}$.

Remarque 1.1

Si g est la restriction de f à E alors on dit que f est un prolongement de g à D_f.

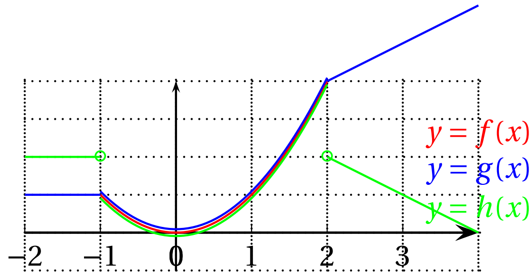
EXERCICE D'APPLICATION 1.1
1) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto |x|+|1-x|-|x-3|$.Définir et représenter graphiquement la restriction de f à l'intervalle $[0\,;1]$.
2) Soit $f : [-1;2] \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$.
a) Construire (C_f).
b) Définir et représenter graphiquement deux prolongements de f à $\mathbb{R}$.

Solution:

1) $f_{/[0;1]}(x) = x-2$.
2) Deux prolongements de f à $\mathbb{R}$

$$g(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in]-\infty;-1[\\ x^2 & si \quad x \in [-1;2] \\ x+2 & si \quad x \in]2;+\infty[\end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} 2 & si \quad x \in]-\infty;-1[\\ x^2 & si \quad x \in [-1;2] \\ -x+4 & si \quad x \in]2;+\infty[\end{cases}$$



1.2 Exemples d'applications

Définition 1.2

Soit $f : A \to B$ une application.
➢ *On dit que f est injective si : $\forall x_1, x_2 \in A; (x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.*
➢ *On dit que f est surjective si tout élément de B admet au moins antécédent par f dans A.*
f est surjective $\Leftrightarrow \forall b \in B$ l'équation $f(x) = b$ admet au moins une solution
➢ *On dit que f est bijective si tout élément de B admet un et un seul antécédent par f dans A*
f est surjective $\Leftrightarrow \forall b \in B$ l'équation $f(x) = b$ admet une unique solution

Remarque 1.2

f est bijective $\Leftrightarrow$ f est injective et surjective.

EXERCICE D'APPLICATION 1.2

1) Soit la fonction $f : A \to B$ définie par le tableau de valeurs suivant :
$A = \{-3;-2;-1;0;1;2;3;4;5;6;1/2\}$, $B = \{-3;-2;-1;0;1/4;1/5;2.5;4;7;8;9\}$

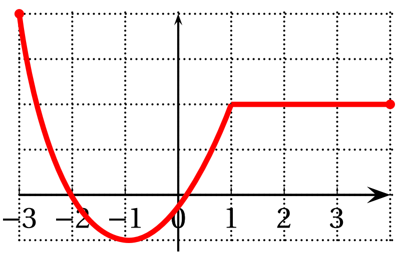
x	-3	-1	0	1	2	3	4	5	6	1/2
$f(x)$	-2	-1	4	7	0	1	1/4	2.5	8	-3

f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

2) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$.
a) Montrer que g est non surjective.
b) Réduire l'ensemble d'arrivée pour obtenir une application surjective.

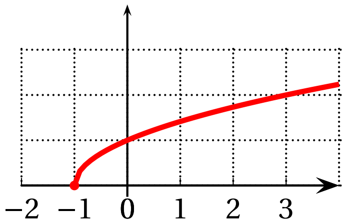
EXERCICE D'APPLICATION 1.3

On considère l'application f définie sur [-3 ;4] par sa représentation graphique ci-contre.
1) Montrer que f est non injective.
2) Déterminer des intervalles sur lesquels f est injective.



EXERCICE D'APPLICATION 1.4

On considère l'application f définie par la représentation graphique ci-contre.
1) Préciser les ensembles de départ et d'arrivée de f
2) Montrer que f est bijective puis construire et $(C_{f^{-1}})$.



EXERCICE D'APPLICATION 1.5

1) Soit l'application $f : \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{3}{2}\right\} \to \left\{\dfrac{1}{2}\right\}, x \mapsto \dfrac{x-1}{2x+3}$.
a) Montrer que f est bijective et déterminer f^{-1}.
b) Construire (C_f) et $(C_{f^{-1}})$.
2) Même question pour $g : [1;+\infty[\to [2;+\infty[, x \mapsto x^2 - 2x + 3$.
2) Même question pour $g : [-2;+\infty[\to [0;+\infty[, x \mapsto \sqrt{x+2}$.

2 Composition d'applications

Définition 2.1

Soit $f : A \to B$ une fonction d'ensemble de définition D_f, $f : B \to C$ une fonction d'ensemble de définition D_g.
On appelle composée de f suivie de g, la fonction $x \mapsto g[f(x)]$. On la note $g \circ f$.
On a $D_{g\circ f} = \{x / x \in D_f \text{ et } f(x) \in D_g\}$.

Propriété 2.1

Si f et g sont deux applications bijectives alors $g \circ f$ est aussi une application bijective.

Propriété 2.2

Soit $f : A \to B$, $g : B \to C$ et $h : C \to D$ des applications.Alors $h \circ (g \circ f)$ et $(h \circ g) \circ f$ définies de A vers D sont égales. On note $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f = h \circ g \circ f$.

EXERCICE D'APPLICATION 2.1

Soit $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x-3 \end{array}$, $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$ et $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$

1) a) Déterminer D_f, D_g, $D_{f\circ g}$ et $D_{g\circ f}$.
b) Calculer $(g \circ f)(x)$ et $(f \circ g)(x)$.

2) Écrire la fonction i définie par $i(x) = \sqrt{\dfrac{1-3x}{x}}$ comme composée de f,g et h.

3 Images directes,Images réciproques

Rappels

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. I et J des intervalles de $\mathbb{R}$.

➢ On appelle image directe de I par f et on note $f(I)$ l'ensemble des images des éléments de $I \cap D_f$. $f(I) = \left\{f(x)/x \in I \cap D_f\right\}$.

➢ On appelle image réciproque de J par f et on note $f^{-1}(J)$ l'ensemble des éléments de D_f qui ont une image dans J. $f^{-1}(J) = \left\{x \in D_f / f(x) \in J\right\}$.

EXERCICE D'APPLICATION 3.1

Soit $\begin{array}{llll} f: &]-4;10] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sqrt{2x+2} \end{array}$

1) Déterminer D_f.

2) Soit $I_1 = \left\{-3; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 5\right\}$ et $I_2 = [-\frac{3}{2}; 2]$. Déterminer les images de I_1 et de I_2 par f.

3) Soit $J_1 = \{2; 5\}$ et $J_2 = [0; 2]$. Déterminer les images de J_1 et de J_2 par f.

4 Opérations sur les fonctions

4.1 Somme,produit et quotient de fonctions

Soit f et g des fonctions numériques d'ensembles de définition D_f et D_g. On appelle :

➢ **somme de** f **et** g, la fonction notée $f+g$ telle que $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$. On a $D_{f+g} = D_f \bigcap D_g$

➢ **produit de** f **et** g, la fonction notée fg telle que $(fg)(x) = f(x)\times g(x)$. On a $D_{fg} = D_f \bigcap D_g$

➢ **quotient de** f **et** g, la fonction notée $\frac{f}{g}$ telle que $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. On a $D_{\frac{f}{g}} = \left\{x/x \in D_f, x \in D_g \text{ et } g(x) \neq 0\right\}$

EXERCICE 4.1

Soit $\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{2}{x}+3 \end{array}$ et $\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2-1 \end{array}$

Déterminer les fonctions $f+g$, fg et $\frac{f}{g}$. (ensembles de définition inclus)

4.2 Comparaison de fonctions

On dit que f est inférieure ou égale à g sur un ensemble E et on note $f \neq g$ sur E, si $\forall x \in E, f(x) \neq g(x)$.

EXERCICE 4.2

Soit $\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 2x+3 \end{array}$ et $\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2-1 \end{array}$.

Étudier le signe de $f(x)-g(x)$ suivant les valeurs de x. En déduire une comparaison de f et g.

FICHE N°
AGOSSEME Kokou Anani

Tél: (+228) 92 47 81 85 / 99 68 64 43

Date :	
Spécialité :	*Analyse*
Durée :	*10 heures*
Classe :	$1^{ère}$ D
Effectif :	

Leçon

REPRÉSENTATIONS GRAPHIQUES DE FONCTIONS ASSOCIÉES

Objectifs pédagogiques : (Confère programmes HPM page 64)

À la fin de la leçon, l'élève doit être capable de :

- comparer deux fonctions numériques ;
- montrer qu'un nombre réel donné est un majorant ou un minorant d'une fonction ;
- étant donné la courbe représentative d'une fonction f, construire celle d'une des fonctions suivantes $x \mapsto |f(x)|$, $x \mapsto f(x)+b$, $x \mapsto f(x-a)$, $x \mapsto f(x-a)+b$, $x \mapsto -f(x)$, $x \mapsto f(-x)$ où a et b sont des constantes réelles ;
- reconnaître si une fonction est paire, impaire, périodique ; utiliser ces résultats pour restreindre l'ensemble d'étude de f ;
- étant donné un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, démontrer :
  — qu'un point est centre de symétrie de la courbe représentative d'une fonction f,
  — qu'une droite d'équation $x = a$ est axe de symétrie de la courbe représentative d'une fonction f ;
- la représentation graphique d'une bijection étant donnée dans un repère orthonormé, tracer dans ce repère la représentation graphique de sa bijection réciproque.

Documentation : HPM édition 2004 , CIAM $1^{ère}$ SE

Matériel et supports pédagogiques : craie, tableau, livre CIAM $1^{ère}$ S, instruments de géométrie

Pré-requis :

- inéquation
- transformations élémentaires du plan (symétries, translations)

Représentations graphiques de fonctions associées

Contenus

1 Fonctions associées

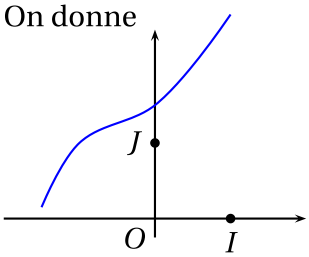
Définition 1.1

Soit f une fonction ; $a, b \in \mathbb{R}$.
Les fonctions $x \mapsto f(x)+b$, $x \mapsto f(x-a)$, $x \mapsto f(x-a)+b$, $x \mapsto -f(x)$, $x \mapsto |f(x)|$, $x \mapsto f(-x)$, $x \mapsto f(x)+b$ et $x \mapsto f(|x|)$ sont appelées fonctions associées à f.

1.1 Fonction g : $x \mapsto f(x-a)$

Activité 1.1

On donne



$(\mathscr{C})$ est la représentation graphique d'une fonction f. Soit $\vec{u} = 2\overrightarrow{OI}$.
1) Marquer cinq points M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 sur $(\mathscr{C})$ puis construire leurs images par $t_{\vec{u}}$. En déduire l'image $\mathscr{C}'$ de $\mathscr{C}$ par $t_{\vec{u}}$.
2) Soit $M(x,y) \in (\mathscr{C})$ et $M'(x',y') \in (\mathscr{C}')$ tels que $M' = t_{\vec{u}}(M)$.
a) Exprimer x' et y' en fonction de x et y.
b) En déduire la fonction g qui admet $(\mathscr{C}')$ pour représentation graphique.

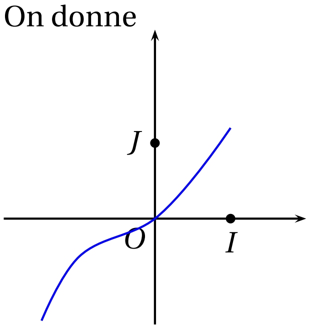
Propriété 1.1

Soit une fonction f de représentation graphique $(\mathscr{C}_f)$. Alors la représentation graphique $(\mathscr{C}_g)$ de la fonction $g : x \mapsto f(x-a)$ est l'image de $(\mathscr{C}_f)$ par la translation de vecteur $a\overrightarrow{OI}$: $(\mathscr{C}_g) = t_{\vec{u}(a,0)}(\mathscr{C}_f)$

1.2 Fonction g :$x \mapsto f(x)+b$

Activité 1.2

On donne



$(\mathscr{C})$ est la représentation graphique d'une fonction f. Soit $\vec{u} = 3\overrightarrow{OJ}$.
1) Marquer cinq points M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 sur $(\mathscr{C})$ puis construire leurs images par $t_{\vec{u}}$. En déduire l'image $\mathscr{C}'$ de $\mathscr{C}$ par $t_{\vec{u}}$.
2) Soit $M(x,y) \in (\mathscr{C})$ et $M'(x',y') \in (\mathscr{C}')$ tels que $M' = t_{\vec{u}}(M)$.
a) Exprimer x' et y' en fonction de x et y.
b) En déduire la fonction g qui admet $(\mathscr{C}')$ pour représentation graphique.

Propriété 1.2

Soit une fonction f de représentation graphique $(\mathscr{C}_f)$. Alors la représentation graphique $(\mathscr{C}_g)$ de la fonction $g : x \mapsto f(x)+b$ est l'image de $(\mathscr{C}_f)$ par la translation de vecteur $b\overrightarrow{OJ}$: $(\mathscr{C}_g) = t_{\vec{u}(0,b)}(\mathscr{C}_f)$

1.3 Fonction g : $x \mapsto f(x-a)+b$

Des deux propriétés précédentes on déduit que :

Propriété 1.3

Soit une fonction f de représentation graphique $(\mathscr{C}_f)$. Alors la représentation graphique $(\mathscr{C}_g)$ de la fonction $g : x \mapsto f(x-a)+b$ est l'image de $(\mathscr{C}_f)$ par la translation de vecteur $a\overrightarrow{OI}+b\overrightarrow{OJ}$: $(\mathscr{C}_g) = t_{\vec{u}(a,b)}(\mathscr{C}_f)$

EXERCICE D'APPLICATION 1.1

1. Soit $g : x \mapsto 2x^2 - 2x + \dfrac{1}{4}$
   (a) Montrer que $g(x) = 2(x-\alpha)^2 + \beta$ où α et β sont à déterminer.
   (b) Construire la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto 2x^2$. En déduire celle de la fonction g.
2. Soit $g : x \mapsto \dfrac{6x-4}{2x-2}$.
   (a) Montrer que $g(x) = \dfrac{k}{x-\alpha} + \beta$ où k, α et β sont à déterminer.
   (b) Construire la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{k}{x}$. En déduire celle de la fonction g.

1.4 Fonction g : $x \mapsto -f(x)$

Propriété 1.4

Soit une fonction f de représentation graphique $(\mathscr{C}_f)$. Alors la représentation graphique $(\mathscr{C}_g)$ de la fonction $g : x \mapsto -f(x)$ est l'image de $(\mathscr{C}_f)$ par la symétrie orthogonale d'axe (OI) : $(\mathscr{C}_g) = S_{(OI)}(\mathscr{C}_f)$

1.5 Fonction g : $x \mapsto f(-x)$

Propriété 1.5

Soit une fonction f de représentation graphique $(\mathscr{C}_f)$. Alors la représentation graphique $(\mathscr{C}_g)$ de la fonction $g : x \mapsto f(-x)$ est l'image de $(\mathscr{C}_f)$ par la symétrie orthogonale d'axe (OJ) : $(\mathscr{C}_g) = S_{(OJ)}(\mathscr{C}_f)$

Remarque 1.1

On en déduit les propriété suivantes :

➢ Fonctions du type h : $x \mapsto f(|x|)$

On a $\begin{cases} h(x) = f(x) & \text{si } x \in D_f \cap \mathbb{R}_+ \\ h(x) = f(-x) & \text{si } x \in D_f \cap \mathbb{R}_- \end{cases}$

Donc $(\mathscr{C}_h) = (\mathscr{C}_{f,x\geqslant 0}) \cup S_{(OJ)}(\mathscr{C}_{f,x\geqslant 0})$

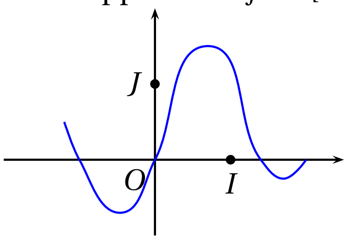
➢ Fonctions du type k : $x \mapsto |f(x)|$

On a $\begin{cases} k(x) = f(x) & \text{si } f(x) \geqslant 0 \\ k(x) = -f(x) & \text{si } f(x) \leqslant 0 \end{cases}$

Donc $(\mathscr{C}_k) = (\mathscr{C}_{f,y\geqslant 0}) \cup S_{(OI)}(\mathscr{C}_{f,y\leqslant 0})$

EXERCICE D'APPLICATION 1.2

On considère la représentation graphique d'une application f de [-3 ;3] vers $\mathbb{R}$.



Tracer la représentation graphique des fonctions suivantes définies sur [-3 ;3] :

$g : x \mapsto -f(x)$

$h : x \mapsto f(-x)$

$k : x \mapsto |f(x)|$

$l : x \mapsto f(|x|)$

2 Représentation graphique de la réciproque d'une fonction bijective

Propriété 2.1

Soit f une bijection de E vers F, E et F étant des parties de $\mathbb{R}$.
Dans le plan muni d'un repère orthonormé, les courbes représentatives respectives de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

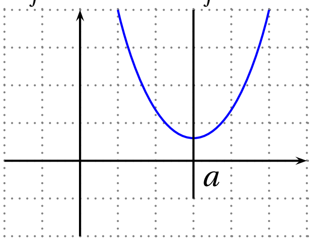
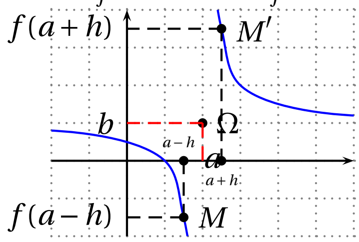
EXERCICE D'APPLICATION 2.1

Soit la fonction f définie de $[-2, +\infty[$ vers $[0, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x+2}$.

1. Représenter graphiquement $\mathscr{C}_f$.
2. Justifier graphiquement que f est bijective.
3. Construire $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ à partir de $\mathscr{C}_f$.

3 Propriétés d'une représentation graphique

3.1 Axe de symétrie et Centre de symétrie d'une courbe

Axe de symétrie	Centre de symétrie
la droite $(\Delta): x = a$ est axe de symétrie est de $(\mathscr{C}_f)$ lorsque : $f(a+h) = f(a-h)$ pour tout h tel que. $a+h \in D_f$ et $a-h \in D_f$ 	le point $\Omega(a,b)$ est axe de symétrie est de $(\mathscr{C}_f)$ lorsque : $f(a+h) + f(a-h) = 2b$ pour tout h tel que. $a+h \in D_f$ et $a-h \in D_f$ 

Remarque 3.1

En posant $x = a+h$, on a $h = x-a$ et donc $a-h = a-x+a = 2a-x$. On peut donc écrire que la droite

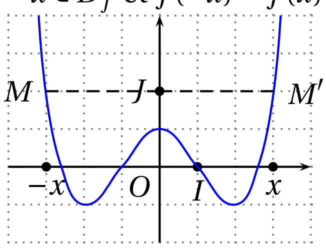
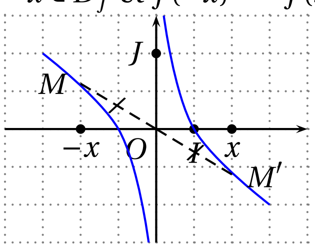
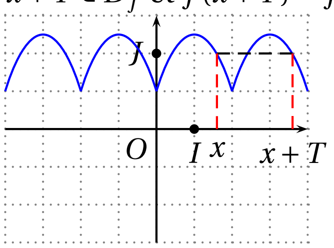
$$\boxed{(\Delta): x = a \text{ est axe de symétrie de } \mathscr{C}_f \Longleftrightarrow \forall x \in D_f, 2a-x \in D_f \text{ et } f(2a-x) = f(x).}$$

Et que :

$$\boxed{\Omega(a,b) \text{ est centre de symétrie de } \mathscr{C}_f \Longleftrightarrow \forall x \in D_f, 2a-x \in D_f \text{ et } f(2a-x) + f(x) = 2b.}$$

3.2 Parité,périodicité, ensemble d'étude

Soit une fonction f définie sur D_f par $f(x)$ et $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative

Fonction paire	Fonction impaire	Fonction périodique
pour tout $x \in D_f$: $-x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$  l'axe des ordonnées est un axe de symétrie de $(\mathscr{C}_f)$	pour tout $x \in D_f$: $-x \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$  l'origine est un centre de symétrie de $(\mathscr{C}_f)$	il existe T tq. pour tout $x \in D_f$: $x+T \in D_f$ et $f(x+T) = f(x)$  la courbe $(\mathscr{C}_f)$ est invariante par translation de vecteur $kT\overrightarrow{OI}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Remarque 3.2

• Si une fonction f est paire (respectivement impaire), on peut l'étudier sur $D_f \cap [0,+\infty[$ et on obtient la courbe sur $D_f \cap]-\infty,0[$ en faisant la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées (respectivement par rapport à O).
• Si une fonction f est périodique de période T, on peut l'étudier sur $D_f \cap [-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]$ et on obtient la courbe sur D_f en faisant la translation de vecteur $kT\overrightarrow{OI},\quad k \in \mathbb{Z}$.
• Si une fonction f est paire (respectivement impaire) et périodique de période T, on peut l'étudier sur $D_f \cap [0,\frac{T}{2}]$ et on obtient la courbe sur D_f en faisant d'abord la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées (respectivement par rapport à O) puis la translation de vecteur $kT\overrightarrow{OI},\quad k \in \mathbb{Z}$.

EXERCICE D'APPLICATION 3.1

1. Soit la fonction f définie de $\mathbb{R}$ -{1} vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$. Montrer que le point $\Omega(1;-2)$ est un centre de symétrie pour la courbe représentative de f.
2. Soit la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(\frac{x}{2})$.
   (a) Montrer que f est paire.
   (b) Montrer que f est périodique de période 2π. Donner trois autres périodes de f.
   (c) Donner l'ensemble d'étude E de f.
   (d) Construire $\mathscr{C}_f$ sur E. En déduire $\mathscr{C}_f$ sur $\mathbb{R}$.

4 Opérations sur les fonctions

4.1 Somme,produit et quotient de fonctions

Soit f et g des fonctions numériques d'ensembles de définition D_f et D_g. On appelle :
➢ **somme de** f **et** g, la fonction notée $f+g$ telle que $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$. On a $D_{f+g} = D_f \bigcap D_g$
➢ **produit de** f **et** g, la fonction notée fg telle que $(fg)(x) = f(x)\times g(x)$. On a $D_{fg} = D_f \bigcap D_g$
➢ **quotient de** f **et** g, la fonction notée $\dfrac{f}{g}$ telle que $(\dfrac{f}{g})(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$. On a $D_{\frac{f}{g}} = \{x / x \in D_f, x \in D_g \text{ et } g(x) \neq 0\}$

EXERCICE 4.1

Soit $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{2}{x}+3 \end{array}$ et $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2-1 \end{array}$

Déterminer les fonctions $f+g$, fg et $\frac{f}{g}$. (ensembles de définition inclus)

4.2 Comparaison de fonctions

Définition 4.1

On dit que f est inférieure ou égale à g sur un ensemble E et on note $f \leq g$ sur E, si $\forall x \in E, f(x) \leq g(x)$.

Définition 4.2

Soit f une fonction définie sur un ensemble E.

- *f est minorée sur E s'il existe un nombre réel m tel que, pour tout $x \in E$, on : $f(x) \geq m$.*
- *f est majorée sur E s'il existe un nombre réel M tel que, pour tout $x \in E$, on : $f(x) \leq M$*
- *f est bornée si elle est à la foi minorée et majorée*

EXERCICE 4.2

On considère les fonctions f et g suivantes : $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2+4x+4 \end{array}$ et $g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x+1 \end{array}$.

1. Construire $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$
2. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$ puis l'inéquation $f(x) \geq g(x)$.
3. Étudier le signe de $f(x)-g(x)$ suivant les valeurs de x puis vérifier les résultats de la question précédente.
4. Montrer que f est minorée par 4.

FICHE N°
AGOSSEME Kokou Anani

Tél: (+228) 92 47 81 85 / 99 68 64 43

Date :
Spécialité : *Analyse*
Durée : *12 heures*
Classe : $1^{ère}$ D
Effectif :

Leçon

LIMITE - CONTINUITÉ - DÉRIVATION D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE

Objectifs pédagogiques : (Confère programmes HPM page 35)

À la fin de la leçon, l'élève doit être capable de :

- établir dans des cas simples une majoration du type $|g(x_o+h)-l| \leq k|j(h)|$ où j est l'une des fonctions de référence (l étant donné ou découvert intuitivement) pour conclure que la limite de $g(x)$ est égale à l quand x tend vers x_o (ceci uniquement dans quelques cas où les théorèmes sur les limites ne permettent pas de conclure) ;
- déterminer la limite d'une fonction en un point, en $+\infty$, en $-\infty$ en utilisant les théorèmes sur les limites (somme, produit, inverse, quotient de fonction) ;
- étudier la continuité d'une fonction en un point et déterminer éventuellement le prolongement par continuité ;
- étudier la dérivabilité d'une fonction en un point en utilisant la définition ;
- calculer le nombre dérivé en un point x_0 d'une fonction en utilisant les formules usuelles de dérivation (dérivée de $f+g$, $\alpha f : \alpha \in \mathbb{R}$, fg, $\frac{1}{g}$, $\frac{f}{g}$, f^n, $\sqrt{f}$, $x \mapsto f(ax+b)$) ;
- effectuer des calculs approchés à partir de l'approximation affine d'une fonction en un point ;
- connaissant le nombre dérivé en x_0 d'une fonction f, tracer la tangente au point d'abscisse x_0 à la courbe représentative de f sans utiliser l'équation de cette tangente,
- connaissant le nombre dérivé à droite (à gauche) en x_0 d'une fonction f, tracer la demi-tangente au point d'abscisse x_0 ;
- une fonction numérique f étant donnée par une formule ou sa représentation graphique :
  — synthétiser sur un tableau les variations de f obtenues à partir du singe de $f'(x)$ ou observées sur sa représentation graphique ;
  — déterminer les points en lesquels f dérivable sur $]a,b[$, possède extremum sur cet intervalle

Documentation : HPM édition 2004 , CIAM $1^{ère}$ S

Matériel et supports pédagogiques : craie, tableau, livre CIAM $1^{ère}$ S, instruments de géométrie

Limites-Continuité-Dérivabilité d'une fonction numérique

Contenus

1 Limites et continuité

1.1 Limite d'une fonction en a

Quand peut-on parler de limite en a ?

Soit f une fonction d'ensemble de définition D_f et a un nombre réel. On parlera de limite en a si f est définie "de part et d'autre de a".C'est-à-dire que :

- ou bien $a \in D_f$ et f est définie sur un intervalle ouvert I centré en a ;
- ou bien $a \notin D_f$ mais $D_f \cup \{a\}$ contient un intervalle ouvert centré en a.

Exemple 1.1

Pour la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ on a $D_f = [0,+\infty[$. La fonction racine carrée est donc définie seulement à droite de 0, elle n'est pas définie de part et d'autre de 0. On ne peut donc parler de limite de la fonction racine carrée en 0.

Par contre on peut parler de la limite de la fonction $g : x \mapsto \sqrt{|x|}$ en 0 car $D_g =]-\infty,+\infty[$ contient l'intervalle $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ qui est un intervalle ouvert centré en 0 et contenu dans D_g.

1.1.1 Fonctions de référence

Activité 1.1

Soit $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{|x|} \end{array}$.

Étudions le comportement de f autour de 0.

1) Compléter le tableau suivant :

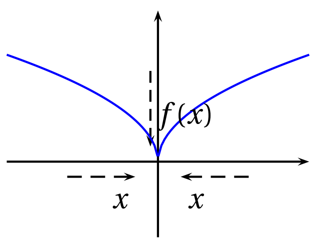
x	-1	-0,5	-0,25	-0,1	-0,01	-0,001	0	0,01	0,1	0,25	0,5	1
$f(x)$												

2) Tracer la représentation graphique de f. Que peut-on dire sur les valeurs de $f(x)$ lorsque x prend des valeurs très poches de zéro ?

3) Répondre aux même questions pour les fonctions suivantes :

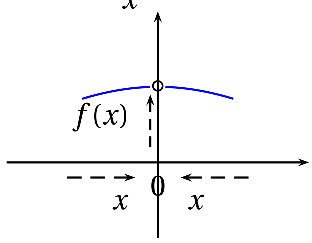
$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array}$, $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1 \end{array}$ et $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\sin x}{x} \end{array}$.

Solution:



On peut dire que lorsque x prend des valeurs très proches de 0, $f(x)$ prend des valeurs très proches de 0. On dit alors que **f(x) tend vers 0, lorsque x tend vers 0** ou que **la limite de f(x) en 0 est égale à 0** et on écrit $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ ou $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{|x|} = 0$

$g(x) = \dfrac{\sin x}{x}$



On peut dire que lorsque x prend des valeurs très proches de 0, $f(x)$ prend des valeurs très proches de 1. On dit alors que **f(x) tend vers 1, lorsque x tend vers 0** ou que **la limite de f(x) en 0 est égale à 1** et on écrit $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1$ ou $\lim\limits_{x} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

Les quatre fonctions précédentes sont appelées **fonctions de référence** pour le calcul des limites.

1.1.2 Limite nulle en 0

Soit f une fonction telle que $D_f \cup \{0\}$ contient un intervalle ouvert centré en 0. Si on peut trouver :

- une fonction de référence j telle que $\lim_{x\to 0} j(x) = 0$
- un intervalle I centré en 0
- un nombre réel strictement positif k tel que $\forall x \in I \cup D_f, \quad |f(x)| \leq k|j(x)|$

  alors $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

Exemple : On sait que : $\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \quad |\sin x| \leq |x|$ et $\lim_{x\to 0} x = 0$ donc $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$.

EXERCICE D'APPLICATION 1.1

1. Soit $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{x}{1-x} \end{array}$

   (a) Donner un encadrement de $|\frac{1}{1-x}|$ pour $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

   (b) En déduire que : $\forall x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}], \quad |f(x)| \leq k|j(x)|$ où k et j sont à préciser.

   (c) Conclure.

2. Démontrer que $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$ puis que $\lim_{x\to 0} x^n = 0$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1.1.3 Limite l en a

Définition 1.1

On dit qu'une fonction f a pour limite l en a si la fonction $g : x \mapsto f(x+a) - l$ a pour limite 0 en 0.

EXERCICE D'APPLICATION 1.2

Montrer que la limite en 1 de la fonction $f : x \mapsto \frac{x-3}{1+x}$ est -1.

Remarque 1.1

On a dans l'exo précédent $\lim_{x\to 1} f(x) = -1$ et $f(1) = -1$, donc $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$.
Plus généralement, on a la propriété suivante.

Propriété 1.1

Soit f une fonction définie en a. Si f admet une limite en a, alors $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

Propriété 1.2

Pour tout $a, c \in \mathbb{R}$, on a : $\lim_{x\to a} x = x$ et $\lim_{x\to a} c = c$.

Remarque 1.2

- Lorsqu'une fonction admet une limite en a, cette limite est **unique**.
- Une fonction définie en a n'admet pas nécessairement une limite en a.

1.1.4 Limite à gauche, limite à droite

Soit $g : x \mapsto \sqrt{|x|}$ et $f : x \mapsto \sqrt{x}$. On a $D_f = [0, +\infty[$.
La fonction f n'est pas définie de part et d'autre de 0. Donc on ne peut à priori parler de limite de f en 0. Mais f coïncide sur $[0, \frac{1}{2}[$ avec la fonction g et $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$.
Alors on convient de dire que « la limite de f en 0 par valeurs supérieures à 0 est 0 » et on écrit : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = 0$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = 0$..

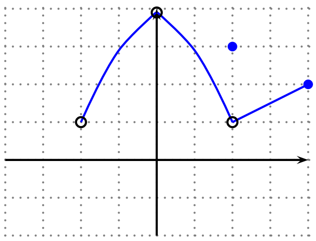
Définition 1.2

Si f définie sur $]a, a + r[$, $\quad (r > 0)$ coïncide sur cet intervalle avec une fonction g de limite l en a, alors on dit que la fonction f admet la limite l à droite en a, et on écrit $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = l$.

On définit de même la limite à gauche en a.

EXERCICE D'APPLICATION 1.3

Soit f la fonction f définie par la représentation graphique ci-contre.



1. Donner l'ensemble de définition de f
2. Donner si elles existent les limites de f à gauche et à droite en -2 ; -1 ; 0 ; 2 et 4.
3. f admet-elle une limite en -2 ; -1 ; 0 ; 2 et 4.

1.2 Extension de la notion de limite

1.2.1 Limite finie à l'infini

Définition 1.3

Soit $l \in \mathbb{R}$ et f définie sur $]a, +\infty[$, $(a > 0)$. Soit $g : x \mapsto f(\frac{1}{x})$; g est alors définie sur un intervalle de la forme $]0, r[$, $(r > 0)$.
On dit que f a pour limite l en $+\infty$ et on écrit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ si, et seulement si $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} g(x) = l$.

On définie de même $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$.

Exemple : On a $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$ et $\dfrac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{\dfrac{1}{x}}$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$.

Propriété 1.3

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$
- Si $n\in\mathbb{N}^*$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^n}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^n}=0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}(c)=c$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(c)=c$

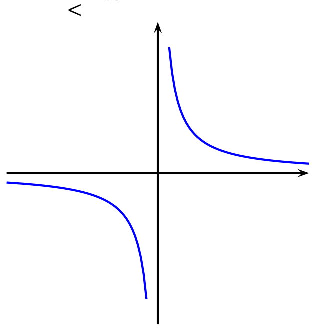
1.2.2 Limite infinie en *a*

Définition 1.4

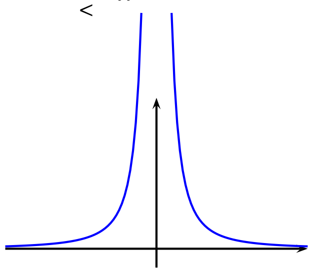
Soit f une fonction définie ainsi que sa fonction inverse sur un intervalle de la forme $]a-r,a[\cup]a,a+r[$, ($a\in\mathbb{R}, r>0$).
On a $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=+\infty$ si, et seulement si $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)}=0$.

On définie de même les limites infinies à gauche et à droite en a.
Exemple : On a $\lim\limits_{x\to 0}x=0$ et $\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$ donc $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{|x|}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{|x^2|}=+\infty$.
Or $|x|=x$ si $x>0$, $|x|=-x$ si $x<0$ et $|x^2|=x^2$, $\quad\forall x\in\mathbb{R}$.
On en déduit alors que :

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\dfrac{1}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}}\dfrac{1}{x}=-\infty$



$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$



Plus généralement :

Propriété 1.4

- Si n est impair alors $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\dfrac{1}{x^n}=+\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}}\dfrac{1}{x^n}=-\infty$
- Si n est pair alors $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\dfrac{1}{x^n}=+\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}}\dfrac{1}{x^n}=+\infty$

1.2.3 Limite infinie à l'infini

Définition 1.5

Soit f une fonction définie ainsi que sa fonction inverse sur un intervalle de la forme $]a,+\infty[$, ($a>0$).
On a $\lim\limits_{x\to+\infty}|f(x)|=+\infty$ si, et seulement si $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f(x)}=0$.

On définie de même $\lim\limits_{x\to+\infty} |f(x)|$.

Exemple : On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} |x^n| = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} |x^n| = +\infty$.
On en déduit que :

Propriété 1.5

- Si n est impair alors $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = -\infty$
- Si n est pair alors $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = +\infty$

1.3 Calculs de limites

1.3.1 Propriété de comparaison

Soient f, g, et h des fonctions.

- **Comparaison des limites**
  Si $f < g$ sur un intervalle $]a,+\infty[$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = l'$ alors $l \le l'$.
- **Encadrement (théorème des gendarmes)**
  Si $g < f < h$ sur un intervalle $]a,+\infty[$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = l$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$.
- **Majoration**
  Si $f < g$ sur un intervalle $]a,+\infty[$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.
- **Minoration**
  Si $f > g$ sur un intervalle $]a,+\infty[$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Remarque 1.3

On a des résultats analogues lorsque x tend vers $-\infty$ ou a.

1.3.2 Limite et opérations sur les fonctions

- **Somme de fonctions**

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	l'	l'	l'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} (f(x)+g(x))$	l+l'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\boxed{?}$

- **Produit de fonctions**

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$ ou $+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	l'	l' $(l' \neq 0)$	l' $(l' \neq 0)$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} (f(x)g(x))$	l×l'	$\begin{cases} +\infty & \text{si } l' > 0 \\ -\infty & \text{si } l' < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} +\infty & \text{si } l' > 0 \\ -\infty & \text{si } l' < 0 \end{cases}$	$\boxed{?}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

- **Inverse d'une fonctions**

$\lim_{x\to a} f(x)$	$l\ (l \neq 0)$	$-\infty$ ou $+\infty$	0 et $f(x) < 0$	0 et $f(x) > 0$
$\lim_{x\to a} 1/f(x)$	$1/l$	0	$-\infty$	$+\infty$

Remarque 1.4

- Si $\lim_{x\to a} f(x) = l$ alors $\lim_{x\to a} f^n(x) = l^n$.
- Ces résultats sont valables si x tend vers $-\infty$ ou $+\infty$.
- $\boxed{?}$ signifie qu'on ne peut pas conclure directement.

EXERCICE D'APPLICATION 1.4

Calculer les limites suivantes :

$\lim_{x\to+\infty}(x^2+x)$ $\lim_{x\to 2}(x^2+x)$ $\lim_{x\to-\infty}(-3x^5)$ $\lim_{x\to+\infty}(-3x^5)$ $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2+x}$

$\lim_{x\to 2}\dfrac{1}{-x+2}$ $\lim_{x\to 3}\dfrac{x+2}{x-3}$ $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{-x^2+3x-2}$

1.3.3 Limites à l'infini de fonctions polynômes et de fonctions rationnelles

- La limite à l'infini d'une fonction polynôme est égale à la limite à l'infini de son monôme du plus haut degré.
  $\lim_{x\to+\infty} a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = \lim_{x\to+\infty} a_nx^n$ et
  $\lim_{x\to-\infty} a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = \lim_{x\to-\infty} a_nx^n$
- La limite à l'infini d'une fonction rationnelle est égale à la limite à l'infini du quotient du monôme du plus haut degré du numérateur sur le monôme du plus haut degré du dénominateur.
  $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0}{b_mx^m + b_{m-1}x^{b-1} + \cdots + b_1x + b_0} = \lim_{x\to+\infty}\dfrac{a_nx^n}{b_mx^m}$

EXERCICE D'APPLICATION 1.5

Calculer les limites suivantes :

$\lim_{x\to-\infty}(x^2+x)$ $\lim_{x\to+\infty}(-3x^3+5x^2-2x^4)$ $\lim_{x\to+\infty}(-3x^3+5x^2-2x^4)$

$\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+x}{x-2}$ $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{-x^2+x}{2x^2-2}$ $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x+1}{x^3-3}$

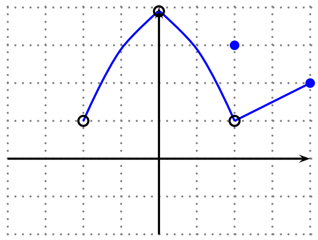
1.4 Continuité d'une fonction en a

1.4.1 Propriété-Définition

Définition 1.6

Soit f une fonction d'ensemble de définition D_f. On dit que f est continue en a si $a \in D_f$ et $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

EXERCICE D'APPLICATION 1.6



Soit f la fonction f définie par la représentation graphique ci-contre.

1. f est-elle continue en -2 ; -1 ; 0 ; 2 et 4 ?

Propriété 1.6

- Les fonctions élémentaires de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ suivantes sont continues en tout point de leur ensemble de définition :
  $x \longmapsto c \quad x \longmapsto x+b \quad x \longmapsto ax \quad x \longmapsto x^n \quad x \longmapsto \sqrt{x} \quad x \longmapsto \frac{1}{x} \quad x \longmapsto \cos x \quad x \longmapsto \sin x$
- Toute fonction qui est somme, produit ou quotient de fonctions élémentaires est continue en tout élément de son ensemble de définition.
  En particulier les fonctions polynômes et les fonctions rationnelles.

1.4.2 Prolongement par continuité

Définition 1.7

Soit f une fonction d'ensemble de définition D_f ; $x_0 \notin D_f$ mais x_0 est une borne de D_f. On dit que f est prolongeable par continuité en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0} = l$ avec $l \neq -\infty$ et $x_0 \neq +\infty$.

*La fonction g définie par $\begin{cases} g(x) & = & f(x) \text{ si } x \neq x_0 \\ g(x_0) & = & l \end{cases}$ est alors appelée **prolongement par continuité de** f en x_0.*

<u>**EXERCICE D'APPLICATION 1.7**</u>

Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2}{x^2 - 1}$.

1. f est-elle prolongeable par continuité en 1 ? en -1 ?
2. Si oui donner le prolongement par continuité de f.

2 Dérivation

2.1 Nombre dérivé d'une fonction en a et interprètation géométrique

<u>***Activité 2.1***</u>

Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 3x$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1. Construire $\mathscr{C}$.
2. Placer le point A de $\mathscr{C}$ d'abscisse 2.

3. Soit M un point de $\mathscr{C}$ distinct de A et d'abscisse x. Construire la droite (AM). Calculer son coefficient directeur.
4. Que fait la droite (AM) lorsque x tend vers 2. Déterminer le coefficient directeur de la droite (AM) quand elle atteint sa position limite (T).

Remarque 2.1

Ce coefficient directeur est appelé nombre dérivé de f en 2 et $(\mathscr{C})$ est appelé tangente à $\mathscr{C}$ en $\mathcal{A}$.

Définition 2.1

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert K $x_0 \in K$.
*Si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et est finie alors on dit que f est **dérivable en** x_0 et cette limite est appelée nombre dérivé de f en x_0 et notée $f'(x_0)$. On a donc $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.*

« Quelle est l'équation de (T) »

Propriété 2.1 Interprètation géométrique

Si f est dérivable en x_0 alors $\mathscr{C}$ admet une tangente (T) au point de $\mathscr{C}$ d'abscisse x_0. Une équation de (T) est $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Propriété 2.2

Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.

EXERCICE D'APPLICATION 2.1

1. Soit $f(x) = x^2$. Montrer que f est dérivable en -3 et déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse -3.
2. Soit $f(x) = |x|$. Étudier la dérivabilité de f en 0

2.2 Nombre dérivé à gauche, Nombre dérivé à droite

Dans l'exercice précédent $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ existe et est finie en 0 par valeurs inférieures et supérieures mais pas en 0. On dit alors que f est dérivable à gauche et à droite en 0 mais pas en 0.

Définition 2.2

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert K et $x_0 \in K$. On appelle nombre dérivé à gauche

en x_0 de f, le nombre $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ >}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ s'il existe. On note $f'_g(x_0) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ <}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ et on dit que f est dérivable à gauche en x_0.
Le nombre dérivé à droite est $f'_d(x_0) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ >}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Propriété 2.3

f est dérivable en x_0 si, et seulement si $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$.

EXERCICE D'APPLICATION 2.2
Soit f la fonction définie par $f(x) = |x^2-4|$.

1. Construire la courbe de la fonction $x \mapsto x^2-4$. En déduire celle de f.
2. Montrer que f est dérivable à gauche et à droite en -2. Construire les demi-tangentes à gauche et à droite en -2.
3. Mêmes questions pour $x = 2$.

Remarque 2.2

Si $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ >}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty($ ou $-\infty$) alors f n'est pas dérivable en x_0 et la courbe de f admet au point d'abscisse x_0 une demi-tangente verticale.
Exemple de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ pour $x = 0$.

2.3 Dérivabilité sur un intervalle-Fonction dérivée

On dit que f est dérivable sur un intervalle K si elle est dérivable en tout $x_0 \in K$.
La fonction $f' \begin{array}{ccc} K & \to & \mathbb{R} \\ x_0 & \mapsto & f'(x_0) \end{array}$ est appelée fonction dérivée de f.

EXERCICE D'APPLICATION 2.3

1. Soit f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et $x_0 \in \mathbb{R}$.
   Calculer $f'(x_0)$. En déduire la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$.
2. Même question pour les fonctions $x \mapsto -3x$ et $x \mapsto cos(x)$.

Dérivée de fonctions élémentaires

$f(x)$	D_f	Ensemble où f est dérivable	$f'x)$
c, $c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0
x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	1
x^n, $n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	nx_{n-1}
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$	$\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$	$1 + \tan^2(x)$

2.4 Règles de dérivation

Activité 2.2

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert K et $x_0 \in K$.

1. En ajoutant et retranchant $f(x_0)g(x)$ au numérateur, montrer que :
$\frac{(fg)(x) - (fg)(x_0)}{x - x_0} = g(x)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + f(x)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$
2. En déduire la dérivée de fg

Propriété 2.4

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert K, c un nombre réel et n un entier naturel.
Alors les fonctions $f+g$, fg, cf, $\frac{1}{g}$, $\frac{f}{g}$, f^n sont dérivables sur leur ensemble définition.
Si $f > 0$ alors la fonction $\sqrt{f}$ est dérivable sur K.

On a les formules suivantes :

Fonctions	Fonctions dérivées
$f+g$	$f'+g'$
fg	$f'g+g'f$
cf	cf'
$\frac{1}{g}$	$-\frac{g'}{g^2}$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f'g-g'f}{g^2}$
f^n	$nf'f^{n-1}$
$\sqrt{f}$	$\frac{f'}{2\sqrt{f}}$

Propriété 2.5

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert K. Alors la fonction $g : x \mapsto f(ax+b)$ est dérivable sur K et on a $g'(x) = af'(ax+b)$.

EXERCICE D'APPLICATION 2.4

Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :
a) $f(x) = x^3 - 2x - 5$ b) $f(x) = \dfrac{1}{2x+6}$ c) $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ d) $f(x) = \cos^3(x)$ e) $f(x) = sin(2x - \dfrac{\pi}{3})$.

2.5 Dérivé et sens de variation

Propriété 2.6

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert K.

- f est croissante sur K si, et seulement si f' est positive sur K
- f est décroissante sur K si, et seulement si f' est négative sur K.
- f est constante sur K si, et seulement si f' est nulle sur K.

Remarque 2.3

Si f' a un signe constant sur K et ne s'annule qu'en un nombre fini d'éléments de K alors f est strictement monotone sur K.

EXERCICE D'APPLICATION 2.5

Soit la fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

1. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.
2. En déduire le sens de variation de f.
3. Dresser le tableau de variation de f.

2.6 Autre utilisation de la dérivée

2.6.1 Extremum relatif d'une fonction

Propriété 2.7

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $]a,b[$ et $x_0 \in]a,b[$.
Si f' s'annule et change de signe en x_0 alors f admet un extremum relatif en x_0.

x	a		x_0		b
$f'(x)$		+	0	-	
			M		
$f(x)$		↗		↘	

f admet un maximum relatif M en x_0

x	a		x_0		b
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		↘		↗	
			m		

f admet un minimum relatif m en x_0

2.6.2 Meilleur approximation affine d'une fonction

FICHE N°
AGOSSEME Kokou Anani

Tél: (+228) 92 47 81 85 / 99 68 64 43

Date :
Spécialité : *Analyse*
Durée : *10 heures*
Classe : $1^{ère}$ D
Effectif :

Leçon

ÉTUDE DE FONCTIONS

Objectifs pédagogiques : (Confère programmes HPM page 35)

À la fin de la leçon, l'élève doit être capable de :

- étudier et représenter graphiquement une fonction polynôme, une fonction rationnelle ;
- déterminer éventuellement les asymptotes parallèles aux axes à la représentation graphique d'une fonction ;
- montrer qu'une droite donnée est asymptote oblique à la représentation graphique d'une fonction ;
- trouver le nombre de points d'intersection de la courbe représentative de f et de la droite d'équation $y = ax + b$:
  — soit, quand cette droite garde une direction donnée (a fixé),
  — soit, quand cette droite passe par un point donné de l'axe des ordonnées (b fixé)
- résoudre graphiquement des équations du type $f(x) = g(x)$ et des inéquations du type $f(x) < g(x)$.

Documentation : HPM édition 2004 , CIAM $1^{\text{ère}}$ SE

Matériel et supports pédagogiques : craie, tableau, livre CIAM $1^{\text{ère}}$ S, instruments de géométrie

Pré-requis :

-

Étude de fonctions

Contenus

1 Plan d'étude d'une fonction

L'étude d'une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ se fait selon le plan suivant :

1. Variations de la fonction f
   - Ensemble de définition
   - Ensemble d'étude
   - Calcul des limites
   - Détermination de la dérivée
   - Tableau de variation
2. Représentation graphique de f
   - Points et droites remarquables
   - Tableau de valeurs
   - Tracé de la représentation graphique

2 Étude d'une fonction polynôme

EXERCICE 2.1

1. Étudier la fonction suivante. $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1 \end{array}$.
2. Construire dans le même repère que $\mathscr{C}_f$ la droite d'équation $y = 3x$.
3. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 3x$ et l'inéquation $f(x) > 3x$.

3 Étude d'une fonction rationnelle

EXERCICE 3.1

Étudier la fonction $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{x+1}{x-2} \end{array}$

Définition 3.1

Soit f une fonction et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

- *Lorsque f a une limite finie l en $+\infty$ ou en $-\infty$ on dit que la droite d'équation $y = l$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.*
- *Lorsque f a une limite infinie à gauche ou à droite en x_0, on dit que la droite d'équation $x = x_0$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.*
- *Lorsque la fonction fonction $x \mapsto f(x) - (ax + b)$ a pour limite 0 en $+\infty$ ou en $-\infty$ on dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.*

EXERCICE 3.2

Soit la fonction $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{x^2+x+1}{x} \end{array}$

1. Étudier les variations de la fonction f.

2. Déterminer les réels a, b et c tels que $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x}$ pour tout $x \neq -1$
3. Montrer que la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$. Préciser l'autre asymptote.
4. Construire $\mathscr{C}_f$.
5. Soit $m \in \mathbb{R}$. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = m$ suivant les valeurs de m.
6. (a) Discuter suivant les valeurs du réel b le nombre de points d'intersection de la droite d'équation $y = x + b$ avec la courbe $\mathscr{C}_f$.

   (b) Même question pour la droite $y = ax + 1$ avec $a \in \mathbb{R}$.

FICHE N°
AGOSSEME Kokou Anani

Tél: (+228) 92 47 81 85 / 99 68 64 43

Date :
Spécialité : *Analyse*
Durée : *12 heures*
Classe : $1^{ère}$ D
Effectif :

Leçon

SUITES NUMÉRIQUES

Objectifs pédagogiques : (Confère programmes HPM page 35)

À la fin de la leçon, l'élève doit être capable de :

- étant donné la formule de récurrence d'une suite U, trouver éventuellement la fonction f telle que $U_{n+1} = f(U_n)$;
- étant donnée la représentation graphique de f et un terme de la suite, trouver les termes suivants ;
- reconnaître et justifier éventuellement si une suite croissante, décroissante, constante ou stationnaire ;
- montrer dans quelques cas simples par récurrence qu'une proposition est vraie ;
- montrer qu'une suite donnée est une suite arithmétique ou non ;
- calculer un terme de rang quelconque connaissant un autre terme et la raison d'une suite arithmétique ;
- calculer la somme des n premiers termes d'une suite arithmétique ;
- donner le sens de variation d'une suite arithmétique ;
- montrer qu'une suite donnée est une suite géométrique ou non ;
- calculer un terme de rang quelconque connaissant un autre terme et la raison d'une suite géométrique ;
- calculer la somme des n premiers termes d'une suite géométrique ;
- donner le sens de variation d'une suite géométrique ;
- une suite étant donnée, conjecturer si elle convergente ou non, et dans l'affirmative, pressentir la valeur de la limite ;
- montrer qu'une converge ou non vers un nombre réel l ;
- encadrer suite donnée par deux suites de même limite pour démontrer que cette suite est convergente (théorème des « gendarmes ») ;
- une suite géométrique étant donnée, dire si elle est convergente ou non

Documentation : HPM édition 2004 , CIAM $1^{ère}$ SE

Matériel et supports pédagogiques : craie, tableau, livre CIAM $1^{ère}$ S, instruments de géométrie

Suites numériques

Contenus

1 Généralités sur les suites numériques

1.1 Mode de détermination d'une suite numérique

Activité 1.1

On lâche un ballon d'une hauteur de 4 m au-dessus du sol où il rebondit. On suppose que la hauteur de chaque rebond est la moitié de la hauteur du rebond précédent.

1. Compléter le tableau ci-dessous.

Rebond	0	1	2	3	4	5	6
Hauteur (cm)	400						

2. Calculer la hauteur du 10^e rebond.
3. À tout entier naturel n, numéro d'ordre du rebond, on associe un nombre réel h_n, la hauteur de ce rebond.
   (a) Donner h_0, h_1 et h_2
   (b) Exprimer h_{n+1} en fonction h_n.
   (c) Conjecturer l'expression de h_n en fonction de n.

Définition 1.1

On appelle suite numérique toute fonction de $\mathbb{N}$ *vers* $\mathbb{R}$.

Si E désigne l'ensemble de définition d'une suite numérique u, on a les notations suivantes :

$\begin{array}{rcl} u:\mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & u(n) \end{array}$, c'est la notation fonctionnelle et $(u_n)_{n\in E}$, c'est la notation indicielle.

$u(n)$ ou u_n est l'image de n par u et est appelé *terme d'indice* n ou terme générale de la suite u.
On peut définir une suite par une formule explicite : $u_n = f(n)$, ou par une formule de récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$ et u_0 donné ; f étant une fonction numérique

1.2 Représentation graphique des termes, sens de variation et convergence d'une suite numérique

Activité 1.2

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \frac{1}{2}n + 2$.

1. Quel est le mode de détermination de cette suite ? Trouver la fonction f.
2. Construire la représentation graphique de f.
3. En déduire une représentation des quatre premiers termes de la suite sur l'axe des ordonnées.
4. Que peut-on dire sur le sens de variation de la suite puis sa limite lorsque n tends vers $+\infty$.

Activité 1.3

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 7$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Quel est le mode de détermination de cette suite ? Trouver la fonction f.

2. Construire la représentation graphique de f.
3. En déduire une représentation des quatre premiers termes de la suite sur l'axe des abscisses.
4. Que peut-on dire sur le sens de variation de la suite puis sa limite lorsque n tends vers $+\infty$.

Propriété 1.1

Soit $(u_n)_{n\in E}$ une suite numérique.

- Si $\forall n \in E$, $u_n < u_{n+1}$ alors la suite u est croissante.
- Si $\forall n \in E$, $u_n > u_{n+1}$ alors la suite u est croissante.
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ avec $l \in \mathbb{R}$, alors on dit que la suite u est convergente sinon elle est divergente.
- Si $u_n = f(n)$ pour tout $n \in E$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

EXERCICE D'APPLICATION 1.1

On donne les suites u et v suivantes :

$u_n = 2n+3, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad$ et $\quad \begin{cases} v_0 &= 2 \\ v_{n+1} &= v_n - 4 \end{cases}$

1. Étudier le sens de variation des suites u et v.
2. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

2 Raisonnement par récurrence

Activité 2.1

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 7$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Montrer que $u_4 > 4$ puis que $u_6 > 4$.
3. Soit p un entier naturel quelconque. Montrer que si $u_p > 4$, alors $u_{p+1} > 4$.
4. Peut-on conjecturer que l'inégalité $u_{101} > 4$ est vraie ?

Propriété 2.1 Principe de récurrence

Pour démontrer qu'une proposition $P(n)$, qui concerne un nombre entier naturel n, est vraie pour tout $n \geq n_0$, on procède en deux étapes :

- on démontre que : $P(n_0)$ est vraie.
- on démontre que : pour tout $k \geqslant n_0$, si (P_k) est vraie alors $P(k+1)$ est vraie.

On conclut que pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, $P(n_0)$ est vraie.

EXERCICE D'APPLICATION 2.1

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 7$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} < u_n$.

3 Suites particulières

3.1 Suites arithmétiques

Activité 3.1

La route qui sépare deux villages A et B est vide d'arbre. Une ONG dans son action de reboisement veut planter des cocotiers au long de cette route. Après consultation du chef canton du village A, ce dernier décide que le premier cocotier doit se situer à 40 m du palais royal situé au bord de la route. Les cocotiers sont distant deux à deux de 15 m.

1. Quelle est la distance qui sépare le premier, deuxième et le troisième cocotier du palais.
2. On désigne par d_n la distance qui sépare le n^{ieme} cocotier du palais. Exprimer d_{n+1} en fonction de d_n.
3. Trouver une formule explicite donnant d_n en fonction de n.

Remarque 3.1 (orale)

La suite (d_n) est telle que chaque terme (excepté d_n1) est obtenu en ajoutant 15 au terme précédent $(d_{n+1} = d_n + 15)$: on dit que (d_n) est une suite arithmétique de raison 15 et de premier terme d_1.

Définition 3.1

Soit u une suite numérique, $a \in \mathbb{R}$. On dit que u est une suite arithmétique de raison a si, et seulement si pour tout n, $u_{n+1} = u_n + a$.

Propriété 3.1 Expression de u_n en fonction de n

Soit u une suite arithmétique de raison a.

- Si le premier terme est u_0 alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + na$.
- Si le premier terme est u_k alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_k + (n-k)a$

Propriété 3.2 Somme des termes consécutifs

Soit u une suite arithmétique de raison a.

- Si le premier terme est u_0 alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,
  $u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n)$.
- Pour tout entier k, $u_k + u_{k+1} + \cdots + u_n = \frac{n-k+1}{2}(u_k + u_n)$

Propriété 3.3 Sens de variation

Soit u une suite arithmétique de raison a.
- Si $a > 0$ alors la suite u est croissante.
- Si $a < 0$ alors la suite u est décroissante.
- Si $a = 0$ alors la suite u est constante.

EXERCICE D'APPLICATION 3.1

1. Montrer que la suite u définie par $u_n = 2n + 5$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est arithmétique.
2. On considère la suite de l'activité.
   (a) Exprimer la somme $S_n = d_1 + d_2 + \cdots + d_n$ en fonction de n.
   (b) Combien de cocotier plantera-t-on si les deux villages sont distantes de 1000 m.

3.2 Suites géométriques

Activité 3.2

On juxtapose des carrés de sorte que le premier a pour côté 2 cm, le second a pour côté le double de celui du premier et ainsi de suite. On note a_n l'aire du $n^{\text{ième}}$ carré.

1. Calculer a_1, a_2.
2. Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n.
3. Montrer que pour $n \geq 1$, $a_n = 4^n$.

Remarque 3.2 (orale)

La suite (a_n) est telle que chaque terme (excepté d_1) est obtenu en multipliant par 2 le terme précédent $\left(a_{n+1} = 4a_n\right)$: on dit que (a_n) est une suite géométrique de raison 4

Définition 3.2

Soit v une suite numérique, $q \in \mathbb{R}$. On dit que v est une suite géométrique de raison q si, et seulement si pour tout n, $v_{n+1} = qu_n$.

Propriété 3.4 Expression de v_n en fonction de n

Soit v une suite géométrique de raison q.
- Si le premier terme est v_0 alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad v_n = v_0 q^n$.
- Si le premier terme est v_k alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad v_n = v_k q^{(n-k)}$

Propriété 3.5 Somme des termes consécutifs

Soit v une suite géométrique de raison q.

- Si $q \neq 1$ alors pour tout entier k, $v_k + v_{k+1} + \cdots + v_n = v_k \dfrac{1-q^{n-k+1}}{1-q}$.

  En particulier $v_0 + v_1 + \cdots + v_n = v_0 \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.
- Si $q = 1$ alors pour tout entier k, $v_k + v_{k+1} + \cdots + v_n = (n-k+1)v_k$

Propriété 3.6 Sens de variation

Soit v une suite géométrique de raison $q > 0$ et de premier terme $v_0 > 0$.

- Si $q > 1$ alors la suite v est croissante.
- Si $0 < q < 1$ alors la suite v est décroissante.
- Si $q = 1$ alors la suite v est constante.

Propriété 3.7 Limite de la suite géométrique (q^n)

Soit $q > 0$.

- Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.
- Si $0 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.
- Si $q = 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$.

EXERCICE D'APPLICATION 3.2

1. Montrer que la suite v définie par $v_n = 2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est géométrique.
2. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 7$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que la suite v définie par $v_n = u_n - 4$ est géométrique. Préciser son premier terme et sa raison.
   (b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
   (c) Exprimer la somme $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ puis la somme $S'_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ en fonction de n.

Deuxième partie

Organisation des données

FICHE N°
AGOSSEME Kokou Anani

Tél: (+228) 92 47 81 85 / 99 68 64 43

Date :
Spécialité : *Organisation de données*
Durée : *8 heures*
Classe : $1^{ère}$ D
Effectif :

Leçon

DÉNOMBREMENT

Objectifs pédagogiques : (Confère programmes HPM page 41)

À la fin de la leçon, l'élève doit être capable de :

- dénombrer selon les situations en utilisant :
  - — soit les modèles mathématiques vus au cours (nombre d'applications, nombre d'injections, nombre de bijections, nombre de parties, nombre de parties ayant p éléments d'un ensemble à n éléments)
  - — soit un schéma arborescent (arbre de choix). On se limitera à des situations qui autorisent, de façon simple, l'une ou l'autre de ces approches ;
- trouver sans faire appel aux formules les cœfficients du binôme de Newton et aussi les C_p^n (triangle de Pascal)

Documentation : HPM édition 2004 , CIAM 1ère SE

Matériel et supports pédagogiques : craie, tableau, livre CIAM 1ère S, instruments de géométrie

Dénombrement

Contenus

1 Révision des acquis

EXERCICE 1.1
Madame Ouattara a 5 foulards, 3 boubous et 4 paires de chaussures. Pour aller à une fête du village elle veut porter un foulard, un boubou et une paire de chaussures.
De combien de façons différentes peut-elle s'habiller ?

EXERCICE 1.2
Chacun des 50 élèves d'une classe étudie l'anglais ou l'espagnol. On sait que 40 élèves étudient l'espagnol et que 20 élèves étudient l'anglais. Déterminer le nombre d'élèves qui étudient :

1. les deux langues
2. uniquement l'espagnol
3. uniquement l'anglais.

2 Parties d'un ensembles finis

Activité 2.1
Soit $E = \{a, b, c\}$ un ensemble.

1. Donner un sous-ensemble de E ayant un élément ; deux éléments ; puis trois éléments.
2. Quel est le sous-ensemble de E n'ayant aucun éléments ?
3. Donner tous les sous-ensembles de E. Il y a en a combien ?

Remarque 2.1

L'ensemble des parties (ou sous-ensembles) de E est noté $\mathscr{P}(E)$. Si $Card(E) = n$ alors $Card\mathscr{P}(E) = 2^n$.

Propriété 2.1

Pour toute partie A d'un ensemble fini E on a : $Card(A) + Card(E - A) = Card(E)$
Pour toutes parties A et B d'un ensemble fini E, on a : $Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B)$.

EXERCICE D'APPLICATION 2.1
A et B sont deux ensembles finis tels que $Card(A) = 7$, $Card(B) = 8$ et $Card(A \cup B) = 10$. Calculer $Card(A \cap B)$

3 Dénombrement de listes

3.1 Produit cartésien d'ensembles finis

Activité 3.1
Soit $A = \{a, b, c\}$ et $B = \{1, 2\}$. À l'aide d'un tableau, déterminer tous les éments de $A \times B$.

Définition 3.1 Produit cartésien

*Soit A et B deux ensembles. On appelle **produit cartésien** de A par B, l'ensemble des couples (a, b) tels que $a \in A$ et $b \in B$.*
Cet ensemble est noté $A \times B$ et se lit "A croix B".
On a $Card(A \times B) = Card(A) \times Card(B)$.

Remarque 3.1

On peut généraliser la définition précédente à p ensembles :

- pour tous ensembles finis E_1, E_2, $\cdots$, E_p, on a $Card(E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p) = Card(E_1) \times Card(E_2) \times \cdots \times Card(E_p)$
- dans le cas où $E_1 = E_2 = \cdots = E_p = E$ et $Card(E) = n$ on note $E^p = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p$ et on a $Card(E^p) = n^p$
  Les éléments de E^p sont appelés listes d'éléments de E ou p-uplets d'éléments de E.

• Nombre d'applications de A dans E
Une application d'un ensemble A dans un ensemble E peut être vue comme une liste d'élément de E.
Exemple :
On en déduit donc que :

Propriété 3.1 Nombre d'applications de A dans E
Le nombre d'applications d'un ensemble A à p éléments dans un ensemble E à n éléments est n^p.

EXERCICE D'APPLICATION 3.1
Une urne contient 5 boules numérotées de 1 à 5. On tire successivement 3 boules de l'urne en remettant à chaque la boule tirée dans l'urne. Combien y a-t-il de résultats possibles ?

EXERCICE 3.1
On lance un dé rouge et un dé vert, chacun ayant ses faces numérotées de 1 à 6. Le résultats d'un lancer est le couple de nombre apparaissant sur la face supérieure de chaque dé.

1. Combien y a-t-il de résultats possibles ?
2. Combien y a-t-il de résultats pour lesquels la somme des deux nombres est supérieure à 9 ?

3.2 Arrangements et permutations

Définition 3.2

Soit E un ensemble à n éléments, et p un entier naturel non nul inférieur ou égal à n.

- *On appelle arrangement de p éléments de E, tout p-uplets d'éléments de E*
- *Lorsque $p = n$ l'arrangement est appelé permutation.*

Activité 3.2 **Dénombrement de p-arrangements de E**

Soit $E = \{a, b, c, d\}$.

1. À l'aide d'un arbre de choix, déterminer tous les 3-arrangements d'éléments de E.
2. Combien y en a-t-il ? Trouver une formule pour les dénombrer.

Propriété 3.2

- Le nombre d'arrangements de p éléments d'un ensemble à n éléments E, noté A_n^p est tel que : $A_n^p = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)$.
- Le nombre de permutations d'éléments de d'un ensemble E à n éléments est $A_n^n = n \times (n-1) \times \cdots \times (2) \times (1)$ qu'on note $n!$

Remarque 3.2

Par convention $A_n^0 = 1$ et $0! = 1$.

Propriété 3.3 Nombre d'applications injectives et bijectives de A dans E

- Le nombre d'applications injectives d'un ensemble A à p, éléments dans un ensemble E à n éléments ($p \leq n$) est A_n^p.
- Le nombre d'applications bijectives d'un ensemble A à n, éléments dans un ensemble E à n éléments ($p \leq n$) est $n!$.

EXERCICE D'APPLICATION 3.2

Une urne contient 5 boules numérotées de 1 à 5. On tire successivement 3 boules de l'urne sans remise. Combien y a-t-il de résultats possibles ?

EXERCICE 3.2

On dispose de 5 cartons portant de nombre les chiffres 0, 1, 2, 3, et 4. Combien de nombre de 5 chiffres peut-on former avec les cartons ? (un nombre ne pouvant commencer par le chiffre 0).

EXERCICE 3.3

Un concours de beauté, qui rassemble 12 concurrentes, attribue un premier prix, un second prix et un troisième prix.

1. Quel est le nombre de résultats possibles, sachant qu'il n'y a pas d'ex aequo ?
2. Quel est le nombre de résultats possibles, sachant qu'il y a deux premières d'ex aequo ?

4 Combinaisons

Définition 4.1

Soit E un ensemble à n éléments, et p un entier naturel non nul inférieur ou égal à n. On appelle combinaison de p éléments de E, tout sous-ensemble de E ayant p éléments.
Le nombre d'arrangements de p éléments d'un ensemble à n éléments E, noté C_n^p est tel que : $C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!}$.

Activité 4.1

Soit $E = \{a, b, c, d\}$.

1. Donner tous les sous-ensembles de E ayant trois éléments. Quel est leur nombre n_1.
2. Avec chacun de ces sous-ensembles, déterminer le nombre n_2 d'arrangements de trois éléments de E peut-on avoir ?
3. Comparer A_4^3 et le produit $n_1 \times n_2$. En déduire une expression de n_1 en fonction de 3! et A_4^3.

EXERCICE D'APPLICATION 4.1

1. Une urne contient 5 boules numérotées de 1 à 5 dont deux bleues et trois rouges. On tire simultanément 3 boules de l'urne.
   (a) Combien y a-t-il de résultats possibles ?
   (b) Combien y a-t-il de résultats comportant une boule bleue et une boule rouge.
2. (a) Exprimer C_n^p en fonction de n et p.
   (b) Montrer que $C_n^{n-p} = C_n^p$.
   (c) Calculer C_n^p pour $0 \leq n \leq 5$ et mettre les résultats dans un tableau.

Remarque 4.1

- Dans une liste (ou p-uplet) et dans un p-arrangements les éléments sont ordonnés alors que dans une combinaison les éléments ne sont pas ordonnés.
- Dans un p-uplet, les éléments ne sont pas forcément distincts.
- Dans un p-arrangement, les éléments ont distincts.

FICHE N°
AGOSSEME Kokou Anani

Tél: (+228) 92 47 81 85 / 99 68 64 43

Date :
Spécialité : *Analyse*
Durée : *6 heures*
Classe : $1^{ère}$ D
Effectif :

Leçon

STATISTIQUES

Objectifs pédagogiques : (Confère programmes HPM page 71)

À la fin de la leçon, l'élève doit être capable de :

- calculer les caractéristiques de position et de dispersion d'une distribution statistique et interpréter les résultats

Documentation : HPM édition 2004 , CIAM $1^{\text{ère}}$ SE

Matériel et supports pédagogiques : craie, tableau, livre CIAM $1^{\text{ère}}$ S, instruments de géométrie

Statistiques

Contenus

1 Consolidation des acquis

EXERCICE 1.1
Dans une classe de première, on a demandé à chacun des élèves d'indiquer le nombre de ses frères et sœurs. Les résultats ont été enregistrés :

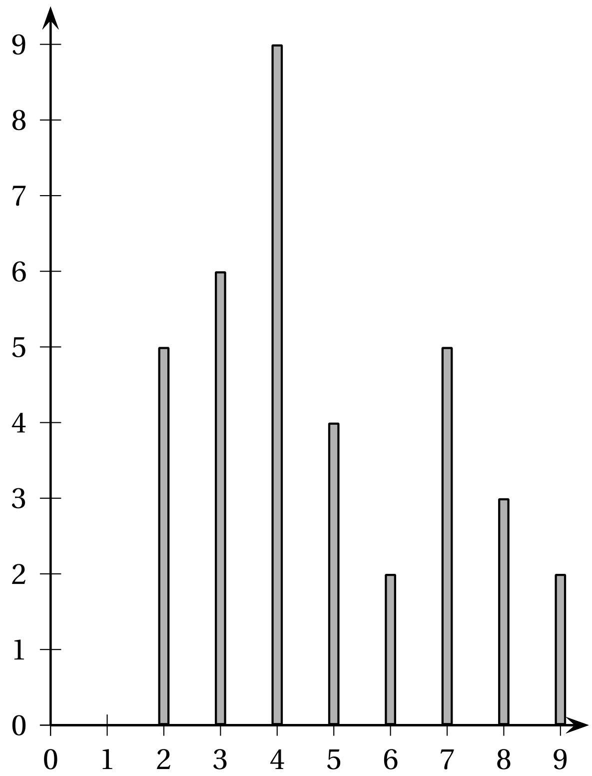
3	5	2	2	4	5	2	4	7
4	7	2	3	4	9	2	4	6
7	8	4	5	3	8	3	9	4
5	7	4	7	8	3	6	3	4

1. Établir le tableau statistiques où apparaissent les modalités, les effectifs, les fréquences exprimées en pourcentages et les effectifs cumulés.
2. Quel(s) est(sont) le(s) modes de cette série ?
3. Combien d'élèves ont :
   (a) moins de trois frères et sœurs ?
   (b) plus de cinq frères et sœurs ?
   (c) au moins trois frères et sœurs ?
4. Construire le diagramme en bâton de cette série.
5. Combien de frères et sœurs les élèves de cette classe ont-ils en moyenne ?
6. Calculer l'écart moyen de cette série.
7. Calculer la variance et l'écart-type de cette série.

Solution:
1°

Modalités(x_i)	2	3	4	5	6	7	8	9
Effectifs (n_i)	5	6	9	4	2	5	3	2
Fréquence (f_i) en %	13,89	16,67	25	11,11	5,56	13,89	8,33	5,56
Effectifs cumulés croissant	5	11	20	24	26	31	34	36
Effectifs cumulés décroissant	36	31	25	16	12	10	5	2

2° Le mode est 4. 3°a : 5 ; 3°b : 12 ; 3°c : 31
4° Diagramme en bâton



5° Moyenne : $\overline{x} = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=N} x_i n_i =$

6° Écart-moyen : $E_m = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=N} |x_i - \overline{x}| n_i =$

7° Variance : $V = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=N} (x_i - \overline{x})^2 n_i =$

Écart-type : $\sigma = \sqrt{V} =$

2 Séries statistiques groupées en classes

2.1 Regroupement en classe, histogramme et polygone des effectifs

Le tableau qui suit donne les moyennes des notes obtenues par les 50 candidats à un concours :

3	15	12	2	4	6	11	9	17	7
14	7	6	8	8	19	1	3	16	5
10	8	12	10	9	9	5	6	5	16
10	8	7	9	15	8	16	11	9	10
12	8	7	9	11	6	6	9	13	7

Pour faciliter l'étude de cette série on peut regrouper les modalités dans des intervalles disjoints deux à deux appelés *classes de modalités* : [0 ;8[, [8 ;10[, [10 ;12[, [12 ;16[, [16 ;20[.

- L'**effectif d'une classe [a,b[** est le nombre d'individus de la population dont les modalités appartiennent à [a,b[.
- La *fréquence* d'une classe est le quotient de son effectif par l'effectif total :

$$\text{fréquence de la classe} = \frac{\text{effectif de la classe}}{\text{effectif total}}$$

.

- Le *centre* d'une classe [a,b[est le nombre $\dfrac{a+b}{2}$.
- L'*amplitude* d'une classe [a,b[est le nombre $b-a$.
- La *densité* d'une classe est le quotient de l'effectif par son amplitude :

$$\text{densité} = \frac{\text{effectif de la classe}}{\text{amplitude de la classe}}$$

.

- L'*histogramme des effectifs* est un diagramme constitué de rectangles juxtaposés dont les largeurs sont proportionnelles aux amplitude des classes et les hauteurs sont proportionnelles aux densités des classes (en d'autres termes l'aire d'un rectangle est proportionnelle à l'effectif de la classe correspondante).

Activité 2.1

1. Pour la série statistique des notes précédentes, compléter le tableau suivant :

Classe	[0 ;8[	[8 ;10[	[10 ;12[	[12 ;16[	[16 ;20[
Amplitude					
Effectif					
Fréquence					
Densité					

2. Construire l'histogramme des effectifs pour cette série.
3. Pour la distribution statistique précédente, dresser le tableau des effectifs cumulés.
4. Combien de candidats ont obtenu au plus 10 ? Au moins 10 ? Au moins 12 ?
5. (a) Construire le diagramme des effectifs cumulés décroissants.
   (b) En déduire une estimation (graphiquement puis par calcul) du nombre des candidats ayant obtenu au moins 11,5.
6. (a) Construire le diagramme des effectifs cumulés croissants.
   (b) En déduire une estimation (graphiquement puis par calcul) du nombre des candidats ayant obtenu au plus 9,5.

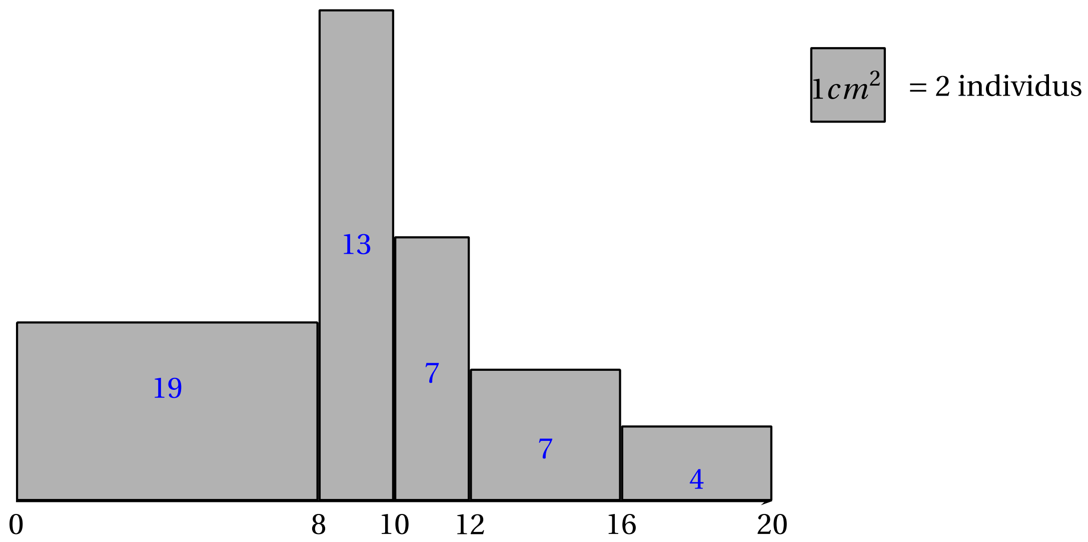
Solution:

1.

Classe	[0 ;8[	[8 ;10[	[10 ;12[	[12 ;16[	[16 ;20[
Amplitude	8	2	2	4	4
Effectif	19	13	7	7	4
Fréquence (f_i)	38%	26%	14%	14%	8%
Densité	2,375	6,5	3,5	1,75	1

2. Construction de l'histogramme
   Échelle : 1 cm pour 0,5 unité en amplitude et 1 cm pour une unité en densité

Classe	[0 ;8[	[8 ;10[	[10 ;12[	[12 ;16[	[16 ;20[
Largeur du rectangle	4 cm	1 cm	1 cm	2 cm	2 cm
Hauteur du rectangle	2,375 cm	6,5 cm	3,5 cm	1,75 cm	1 cm



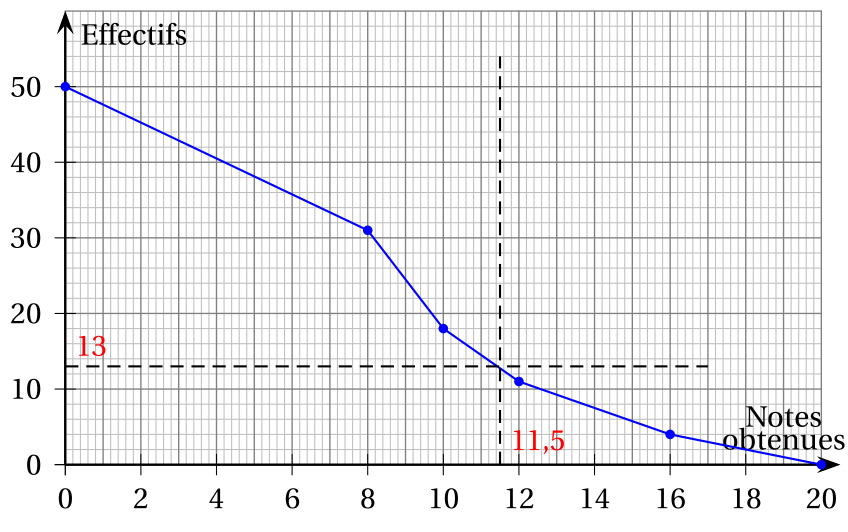
3.

Classe	[0 ;8[	[8 ;10[	[10 ;12[	[12 ;16[	[16 ;20[
Effectif	19	13	7	7	4
Effectif cumulé croissant	19	32	39	46	50
Effectif cumulé décroissant	50	31	18	11	4

4. Au plus 10 : 32 Au moins 10 : 24 Au moins 12 : 11

5. a)

Borne	0	8	10	12	16	20
Effectif cumulé décroissant	50	31	18	11	4	0



Soit y_1 le nombre de candidats ayant obtenu au moins 11,5.

Graphiquement :

Le point d'abscisse 11,5 de la ligne brisée du graphique des effectifs cumulés décroissants a pour ordonnée 13. On estime donc que $y_1 = 13$

Par calcul :

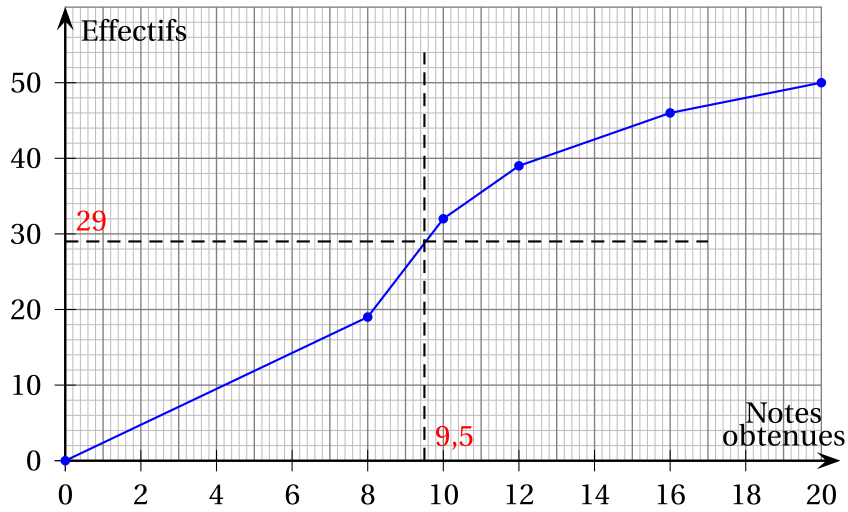
11,5 est compris entre 10 et 12 dont les effectifs cumulés croissants sont 18 et 11 respectivement. Alors $\dfrac{y_1 - 18}{11,5 - 10} = \dfrac{11 - 18}{12 - 10}$. D'où $y_1 = 12,75$.

Remarque 2.1

> Cette méthode s'appelle <u>interpolation linéaire</u>.

(6) (a)

Bornes	0	8	10	12	16	20
Effectif cumulé croissant	0	19	32	39	46	50



(b) Le point d'abscisse 9,5 de la ligne brisée du graphique des effectifs cumulés croissants a pour ordonnée 29. On estime donc à 29 le nombre de candidats ayant obtenu au plus 9,5.

Remarque 2.2

> Pour une série statistique groupée en classe $([a_i, b_i[, n_i)_{1\leq i\leq p}$ avec p le nombre de classes :
>
> - l'effectif cumulé croissant de la classe $[a_k, b_k[$ est $\sum_{i=1}^{i=k} n_i = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$
> - l'effectif cumulé décroissant de la classe $[a_k, b_k[$ est $\sum_{i=k}^{i=p} n_i = n_k + n_{k+1} + \cdots + n_p$

2.2 Caractéristiques de position

Il s'agit de : *la classe modale, le mode,la moyenne et la médiane.*
Pour une série statistique d'effectif total N groupée en p classes de centres x_i, on appelle :

- classe modale, toute classe présentant un effectif maximal ;
- mode, le centre de toute classe de densité maximale ;
- moyenne, la moyenne de la série statistique des centres : $\overline{x} = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=p} x_i n_i =$
- médiane, le nombre réel M tel que le nombre d'individus de modalité supérieure à M et le nombre d'individus de modalité inférieure à M soient tous égaux à $\dfrac{N}{2}$.

EXERCICE D'APPLICATION 2.1

1. Toujours pour la série précédente, déterminer la classe modale, le mode, la moyenne.

2. (a) Construire sur le même graphique les polygones des effectifs cumulés croissants et décroissants.

   (b) En déduire la médiane de cette série.

3. Utiliser les effectifs cumulés croissants uniquement pour calculer la médiane. A-ton le même résultat ?

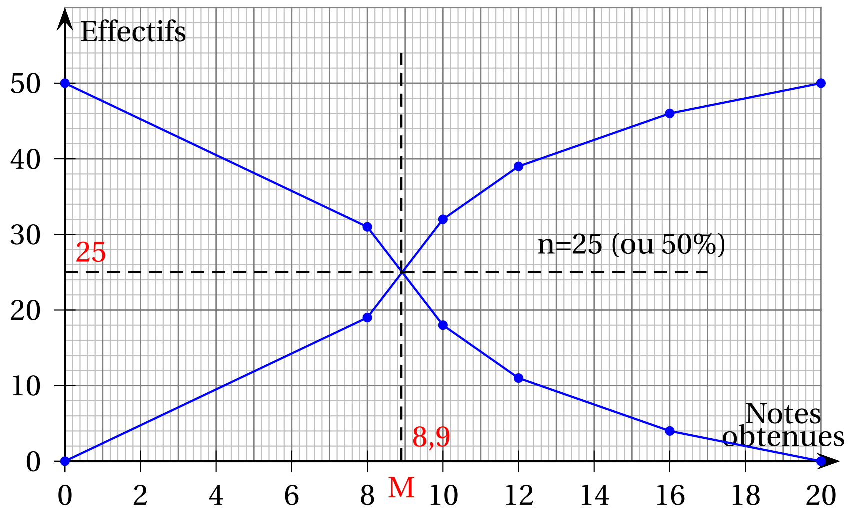
Solution:

1°) La classe modale est : [0 ;8[

Le mode est : 9

La moyenne est : $\overline{x} = \dfrac{4\times19+9\times13+11\times7+14\times7+18\times4}{50} = 13,6$

2°) a)



b) La médiane est donc graphiquement égale à 8,9.

Calculons :

25 (soit 50% de l'effectif total) est compris entre les effectifs cumulés (croissants) 19 et 32 correspondant à 8 et 10 respectivement. Alors $\dfrac{25-19}{M-8} = \dfrac{32-19}{10-8}$. D'où $M = 8,8$.

2.3 Caractéristiques de dispersion

Il s'agit de : *l'écart-moyen, la variance et l'écart-type.*

Pour une série statistique d'effectif total N groupée en p classes de centres x_i :

- l'écart-moyen est : $E_m = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=N}|x_i-\overline{x}|n_i$
- la variance est : $V = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=p}(x_i-\overline{x})^2 n_i$
- l'écart-type est : $\sigma = \sqrt{V}$

Remarque 2.3

On montre que $V = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=p}(x_i)^2 n_i - \overline{x}^2$.

EXERCICE D'APPLICATION 2.2

1. Pour notre série compléter le tableau suivant.
2. En déduire l'écart-moyen, la variance et l'écart-type.

Solution:

1.

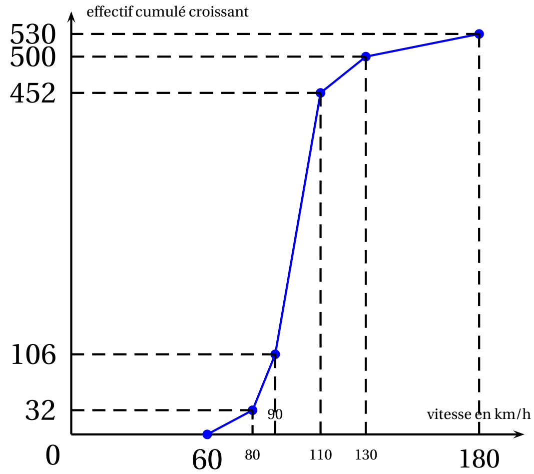
Classe	Centre (x_i)	Effectif (n_i)	$\lvert x_i - \overline{x}\rvert$	$n_i\lvert x_i - \overline{x}\rvert$	x_i^2	$n_i x_i^2$
[0 ;8[						
[8 ;10[						
[10 ;12[						
[12 ;16[						
[16 ;20[						
Total						

2. On a donc $E_m =$ $V =$ et $\sigma = \sqrt{V}$

EXERCICE 2.1

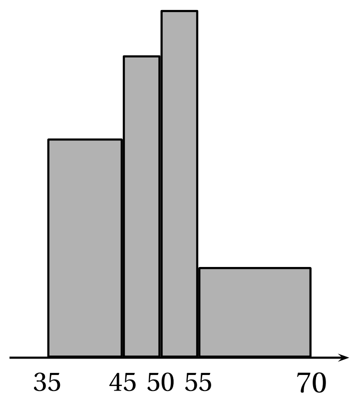
Un contrôle de vitesse a été effectué sur une autoroute où la vitesse est limitée à 130 km/h. La série statistique obtenue est représentée ci-contre par son diagramme des effectifs cumulés croissants.

1. Établir le tableau des effectifs de cette série statistique.
2. Construire l'histogramme de cette série.
3. (a) Quel est le pourcentage des véhicules en infraction ?
   (b) On a décidé de ne verbaliser que les conducteurs roulant à une vitesse strictement supérieure à 140 km/h. Combien d'amendes va-t-on donner ?
4. Déterminer la classe modale, le mode, la moyenne, la variance et l'écart-type de cette série.



EXERCICE 2.2

Dans un lycée, on a interrogé 400 élèves sur le nombre d'heures de travail qu'ils effectuent chaque semaine (y compris les heures de cours). Les résultats de cette enquête sont représentées par l'histogramme ci-contre.



1. Calculer l'effectif de chaque classe.
2. Évaluer le nombre d'élèves dont le temps de travail hebdomadaire est compris entre 40h et 50h.
3. Évaluer le nombre d'élèves dont le temps de travail hebdomadaire est inférieur à 60h.
4. Construire le diagramme des effectifs cumulés croissants.
5. Déterminer la classe modale, le mode, la médiane, la moyenne, la variance et l'écart-type de cette série.

Troisième partie

Géométrie

FICHE N° 2
AGOSSEME Kokou Anani

Tél: (+228) 92 47 81 85 / 99 68 64 43

Date :
Spécialité : *Géométrie*
Durée : *15 heures*
Classe : $1^{ère}$ D
Effectif :

Leçon

GÉOMÉTRIE MÉTRIQUE PLANE

Objectifs pédagogiques : (Confère programmes HPM page 69)

À la fin de la leçon, l'élève doit être capable de :

- utiliser les propriétés des vecteurs pour justifier les propriétés de certaines figures du plan,
- donner une écriture vectorielle du barycentre,
- connaître la condition d'existence du barycentre,
- retrouver le barycentre à partir de l'égalité vectorielle,
- placer le barycentre,
- calculer les cordonnées du barycentre de 2, 3, 4 points pondérés,
- utiliser les propriétés (non unicité des cœfficients, associativité) dans une construction ou une démonstration,
- appliquer la notion de barycentre à des exercices de physique (centre d'inertie ...),
- déterminer les lignes de niveau étudiées en classe de seconde et les lignes de niveau de $M \mapsto aAM^2 + bBM^2$; $M \mapsto aAM^2 + bBM^2 + cMC^2$,
- mettre en œuvre des propriétés géométriques, vectorielles (barycentre, produit scalaire) pour déterminer des lieux géométriques,
- établir une représentation paramétrique d'un cercle

Documentation : HPM édition 2004 , CIAM $1^{ère}$ SE

Matériel et supports pédagogiques : craie, tableau, livre CIAM $1^{ère}$ S, instruments de géométrie

Pré-requis :

- vecteurs (somme, combinaison linéaire, colinéarité)
- certaines lignes de niveau
- équation cartésienne d'un cercle

Géométrie métrique plane

Contenus

1 Barycentre

1.1 Révision des acquis

EXERCICE 1.1
Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O.
1) Démontrer que : $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}$.
2) Démontrer que pour tout point M du plan, on a : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MO}$.
3) Y a-t-il un autre point $M\in\mathscr{P}$ tel que $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{0}$.
4) Déterminer et construire le point $M\in\mathscr{P}$ tel que $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{BD}$.

EXERCICE 1.2
ABC est un triangle et I le milieu de [BC]. On considère le point G tels que $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$.
1) Placer le point G. Déterminer deux réels a et b tels que $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GI}=\overrightarrow{0}$.
2) Calculer la somme $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}$. Que représente le point G pour le triangle ABC.
3) Montrer que pour tout point M du plan $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$.

Rappels

Soit A, B et C trois points distincts du plan. ➢ I est milieu de [AB] si, et seulement si $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{0}$.
➢ G est centre de gravité du triangle ABC si, et seulement si $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$.
➢ **Relation de Chasles :** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.
➢ **Règle du parallélogramme :** $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$ si, et seulement si OACB est un parallélogramme.

1.2 Barycentre de deux points pondérés

Remarque 1.1

Le point G de l'exercice précédent est donné par la relation $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GI}=\overrightarrow{0}$: on que G est le barycentre des points A et I affectés des coefficients α et β.

Définition 1.1

Soit A et B deux points du plan et $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.
➢ *Les couples (A,α) et (B,β) sont appelés des points pondérés.*
➢ *Si $\alpha+\beta\neq 0$ alors il existe un unique point G tel que $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0}$.*
Le point G est appelé barycentre des points pondérés (A,α) et (B,β) et on note $G=bary\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$.

Activité 1.1
Soit A et B deux points du plan. Soit $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ tels que $\alpha+\beta\neq 0$. Soit G le barycentre des points pondérés (A,α) et (B,β)
1) Exprimer pour tout point M du plan le vecteur $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}$ en fonction de $\overrightarrow{MG}$.
2) En déduire $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{BG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.

3) On suppose de plus que $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ dans (O, I, J). Déterminer x_G et y_G.

Propriété 1.1 Homogénéité du barycentre

Soit $k \in \mathbb{R}, k \neq 0$. Alors $G = bary\{(A,\alpha);(B,\beta)\} \Leftrightarrow G = bary\{(A,k\alpha);(B,k\beta)\}$.

Remarque 1.2

Les relations de la question 2) de l'activité signifient que $G \in (AB)$. On retient donc que l'ensemble des barycentres de A et B est la droite (AB).

EXERCICE D'APPLICATION 1.1

1) Soit A et B deux points distincts du plan. Déterminer et construire le barycentre des points pondérés $(A,-2)$ et $(B,5)$ puis de $(A,1)$ et $(B,3)$.
2) On muni le plan d'un repère (O,I,J) et on considère A(-1 ;4) et B(2 ;0).
a) Déterminer l'ensemble E des valeurs de m pour que le barycentre G_m des points (A,m^2) et $(B;-2m-3)$ existe.
b) Pour tout $m \in E$; calculer les coordonnées de G_m en focntion de m.

2 Barycentre de plus de deux points pondérés

Définition 2.1

Soit (A,α) ; (B,β) et (C,γ) trois points pondérés.
Si $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$ alors il existe un unique point G tel que $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$.
Ce point G est appelé barycentre des points pondérés (A,α) ; (B,β) et (C,γ).

On définie de même le barycentre de quatre points pondérés.

Propriété 2.1

$G = bary\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$ si, et seulement si l'une des propriétés suivantes est vérifiée :

- $$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC} \quad (3)$$
- $$\overrightarrow{BG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{BA} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{BC} \quad (4)$$
- $$\overrightarrow{CG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{CA} + \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{CB} \quad (5)$$
- Pour tout point M du plan $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$.
- Si $A(x_A, y_A)$; $B(x_B, y_B)$ et $C(x_C, y_C)$ dans (O, I, J) alors $x_G = \dfrac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma}$ et $y_G = \dfrac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}$.

Propriété 2.2 Homogénéité du barycentre

Soit $k \in \mathbb{R}, k \neq 0$. Alors $G = bary\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\} \Leftrightarrow G = bary\{(A,k\alpha);(B,k\beta);(C,k\gamma)\}$.

Propriété 2.3 Barycentre partiel

Soit $G = bary\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$. Si $G_1 = bary\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ alors $G = bary\{(G_1,\alpha+\beta);(C,\gamma)\}$
Le point G_1 est appelé barycentre partiel des points (A,α) ; (B,β) (C,γ).

Remarque 2.1

Les relations (3) , (4) et (5) montrent que l'ensemble des barycentres de trois points A , B et C deux à deux distincts est le plan tout entier.

Remarque 2.2 Isobarycentre

En vertu de l'homogénéité, pour tout $\alpha \neq 0$ le barycentre de (A,α) et (B,α) est aussi le barycentre de $(A,1)$ et $(B,1)$. Il est appelé isobarycentre des points A et B.

➢ L'isobarycentre de deux points A et B est le milieu du segment [AB].

➢ L'isobarycentre de trois points A , B et C est le centre de gravité du triangle ABC.

EXERCICE D'APPLICATION 2.1

ABC est un triangle tel que AB=3 ; BC=7 et AC=5. Construire le barycentre des points (A,α) ; (B,β) et (C,γ) dans chacun des cas suivants. 1) $\alpha = 5$; $\beta = 4$; $\gamma = 3$. 2) $\alpha = 625$; $\beta = 125$; $\gamma = 375$.

EXERCICE D'APPLICATION 2.2

ABC est un triangle M,N et O sont tels que : $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$ et O le milieu de [CM]. 1) Montrer que $M = bary\{(A,1);(B,2)\}$ et $N = bary\{(A,1);(C,3)\}$.
2) Déterminer le barycentre des points (A,1) ; (B,2) et (C,3).
3) Montrer que les points O ; N et B sont alignés.

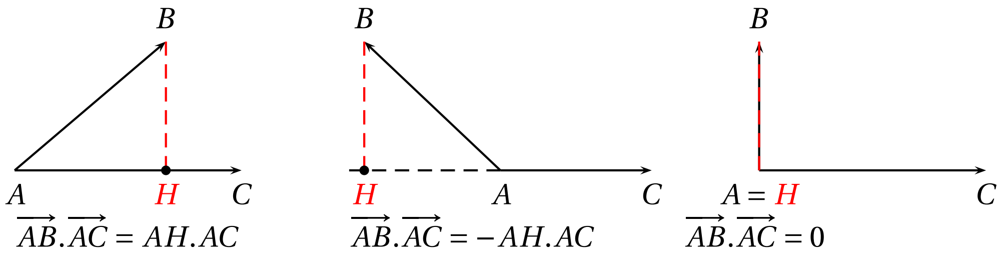
Solution:

3 Application du produit scalaire et du barycentre

3.1 Révision des acquis

EXERCICE 3.1
Le plan est muni d'un repère orthonormé (O,I,J). Soit A, B et C trois points du plan.
1) Donner trois définitions du produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.
2) On suppose que le triangle ABC est de sens direct et équilatéral de coté 4. Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}$.
3) Soit P(1 ;2), Q(4 ;3), R(-1 ;5) et S(0 ;2). Démontrer que $(RQ) \perp (RS)$.

Solution:
1) • $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC.\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) = AB.AC\cos(\widehat{BAC})$
• Soit H le projeté orthogonal de B sur (AC). Orientons la droite (AC) dans le sens du vecteur $\overrightarrow{AC}$. Alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overline{AH}.\overline{AC} = \overline{AH}.AC$.



• Si $\overrightarrow{AB}(x, y)$ et $\overrightarrow{AC}(x', y')$ alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = xx' + yy'$.

3.2 Lignes de niveau

3.2.1 Déinition

Définition 3.1
Soit f une application du plan $\mathscr{P}$ dans $\mathbb{R}$ et k un réel. On appelle ligne de niveau k de f, l'ensemble des points dont l'image par f est k.

Dans la suite, une ligne de niveau k sera natée $(\mathscr{L}_k)$.

3.2.2 Lignes de niveau de l'application $M \mapsto \vec{AM}.\vec{AB}$

Soit A et B deux points du plan tels que AB=2.
Soit $f : \mathscr{P} \to \mathbb{R}$; $M \mapsto \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}$; I le milieu de [AB], A'=S_B(A), B'=S_A(B), et I'=S_B(I).
1) Calculer $f(A)$, $f(B)$, $f(I)$, $f(A')$, $f(B')$ et $f(I')$.
2) Trouver un point $M \notin (AB)$ tel que $f(M) = -4$. Quel est l'ensemble des points M tels $f(M) = 6$.
3) Soit $k \in \mathbb{R}$. Déterminer la ligne de niveau k de f.

Solution:

3)

$$\begin{aligned} f(M) = k &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = k \\ &\Leftrightarrow \overline{AH}.\overline{AB} = k \text{ où H est le projeté orth. de M sur (AB)} \\ &\Leftrightarrow \overline{AH} = \frac{k}{AB} \text{ si (AB) est orientée dans le sens de } \overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

Donc la ligne de niveau k de f est la droite perpendiculaire à (AB) passant par H tel que $\overline{AH} = \frac{k}{AB}$

3.2.3 Lignes de niveau de l'application $M \mapsto AM^2 - BM^2$

On a

$$\begin{aligned} AM^2 - BM^2 = k &\Leftrightarrow (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IM})^2 - (\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IM})^2 = k \text{ où I est le milieu de [AB]} \\ &\Leftrightarrow 4\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AI} = k \\ &\Leftrightarrow \overline{IH} = \frac{-k}{4\overline{IA}} \text{ où H est le projeté orth. de M sur (AB)} \end{aligned}$$

$\mathscr{L}_k$ est donc la perpendiculaire à (AB) en H tel que $\overline{IH} = \frac{-k}{4\overline{IA}}$.

3.2.4 Lignes de niveau de l'application $M \mapsto \vec{M}A.\vec{M}B$

Soit I le milieu de [AB].

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = k &\Leftrightarrow (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}).(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = k \\ &\Leftrightarrow MI^2 = k + \frac{AB^2}{2} \end{aligned}$$

• Si $k + \frac{AB^2}{2} < 0$ alors $(\mathscr{L}_k) = \emptyset$.
• Si $k + \frac{AB^2}{2} = 0$ alors $(\mathscr{L}_k) = \{I\}$.
• Si $k + \frac{AB^2}{2} > 0$ alors $(\mathscr{L}_k) = \mathscr{C}_{(I, \sqrt{k + \frac{AB^2}{2}})}$

<u>**EXERCICE D'APPLICATION 3.1**</u>
Soit A et B deux points. Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que : a) $AM^2 - BM^2 = 0$ b) $AM^2 - BM^2 = -12$ avec AB = 6.

3.2.5 Lignes de niveau de l'application $M \mapsto aAM^2 + bBM^2$

★ 1^{er} **cas** : $a + b \neq 0$
On prend $G = bary\{(A, a), (B, b)\}$.

$$\begin{aligned} aAM^2 + bBM^2 = k &\Leftrightarrow a(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GM})^2 + b(\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GM})^2 = k \\ &\Leftrightarrow MG^2 = \frac{k - aAG^2 - bBG^2}{a + b} = \lambda \end{aligned}$$

• Si $\lambda < 0$ alors $(\mathscr{L}_k) = \emptyset$.
• Si $\lambda = 0$ alors $(\mathscr{L}_k) = \{G\}$.

• Si $\lambda > 0$ alors $(\mathscr{L}_k) = \mathscr{C}_{(G,\sqrt{\lambda})}$.

★ $2^{\text{ème}}$ **cas** : $a+b=0$

$$\begin{aligned} aAM^2+bBM^2=k &\Leftrightarrow aAM^2+b(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM})^2=k \\ &\Leftrightarrow (a+b)AM^2+b(BA^2+2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AM})=k \\ &\Leftrightarrow 2b\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AM}=k-bAB^2 \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(bBA^2-k)=k' \text{ avec } \overrightarrow{AC}=b\overrightarrow{AB}. \end{aligned}$$

Ce qui revient au cas 2.2

3.2.6 Lignes de niveau de l'application $M \mapsto aAM^2+bBM^2+cMC^2$

Se résoud de la même manière que précédemment.

<u>**EXERCICE D'APPLICATION 3.2**</u>

1)
c) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=13$ d) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=-36$ avec AB = 12.
e) $3MA^2+2MB^2=60$ f) $3MA^2-3MB^2=-48$ avec AB = 12.
2) ABC est triangle équilatéral de côté 4. Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que :
a) $2MA^2-MB^2+2MC^2=16$ b) $-MA^2-MB^2+2MC^2=16$

3.3 Cercle

3.3.1 Équation cartésienne d'un cercle

EXERCICE 3.2

Le plan est muni d'un repère orth. normé (O,I,J). Déterminer l'équation cartésienne du cercle $(\mathscr{C})$ dans chacun des cas suivants :
a) $(\mathscr{C})$ a pour centre $\Omega(1;2)$ et pour $R=\sqrt{2}$.
b) $(\mathscr{C})$ a pour diamètre [AB] avec $A(-1;3)$ et $B(2;4)$.
c) $(\mathscr{C})$ a pour centre $\Omega(1;2)$ et passe par $C(-1;-3)$.

<u>***Solution:***</u>

3.3.2 Représentation paramétrique d'un cercle

<u>***Activité 3.1***</u>

Le plan est muni d'un repère orth. normé $(O,\vec{i},\ \vec{j})$.
Soit $(\mathscr{C})$ un cercle de centre $\Omega(a,b)$ et de rayon R ; $M(x,y)$ un point de $(\mathscr{C})$.
1) Démontrer qu'il existe un réel $\theta \in]-\pi,\pi]$ tel que $\cos\theta=\dfrac{x-a}{R}$ et $\sin\theta=\dfrac{y-b}{R}$.
2) En déduire que $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& a+R\cos\theta \\ y &=& b+R\sin\theta \end{array}\right.$; $\theta \in]-\pi,\pi]$

C'est une représentation représentation paramétrique du cercle $(\mathscr{C})$.

EXERCICE D'APPLICATION 3.3

1) Déterminer une représentation paramétrique du cercle $(\mathscr{C})$ de centre $\Omega(1,2)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

2) Déterminer l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan tels que $\left\{\begin{array}{lcr} x & = & -1+\cos\theta \\ y & = & \sin\theta \end{array}\right. \quad ; \theta \in]-\pi, \pi]$

3.3.3 Equation de la tangente à un cercle en un point $A(x_o, y_o)$

Activité 3.2

Soit $(\mathscr{C}) : x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ un cercle, $A(x_o, y_o) \in (\mathscr{C})$ et (T) la tangente à $(\mathscr{C})$ en A.

1) Préciser les coordonnées du centre Ω de $(\mathscr{C})$.

2) Soit $M(x, y)$ un point du plan. Montrer que $M \in (T) \Leftrightarrow xx_o + yy_o + a(x + x_o) + b(y + y_o) + c = 0$.

Solution:

1) $\Omega(-a, -b)$ 2) $M \in (T) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{A\Omega} = 0$.

EXERCICE D'APPLICATION 3.4

Soit $(\mathscr{C}) : x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0$. Déterminer une équation cartésienne de la tangente à $(\mathscr{C})$ en :
a) $A(1; -2)$ b) $B(0; 1)$.

FICHE N°
AGOSSEME Kokou Anani

Tél: (+228) 92 47 81 85 / 99 68 64 43

Date :
Spécialité : *Géométrie*
Durée : *12 heures*
Classe : $1^{ère}$ D
Effectif :

Leçon

TRIGONOMÉTRIE

Objectifs pédagogiques : (Confère programmes HPM page 38)

À la fin de la leçon, l'élève doit être capable de :

- connaissant une détermination de la mesure en radians d'un angle orienté, trouver l'ensemble de toutes les déterminations de cet angle orienté (c'est-à-dire sa mesure en radians), en particulier sa détermination principale ;
- connaissant une détermination de la mesure en radians d'un angle orienté, placer approximativement cet angle sur le cercle trigonométrique ;
- trouver une détermination de la mesure en radians de la sommes de deux angles orientés non nuls et d'un angle orienté dont on connaît la mesure en radians ;
- trouver les angles orienté en « divisant »par un nombre entier naturel non nul, un angle orienté dont on connaît la détermination de la mesure en radians ;
- calculer le sinus, le cosinus, la tangente d'un nombre réel (à l'aide des tables trigonométrique, de calculatrices ou non) ;
- représenter à l'aide de l'introduction de la mesure d'un angle orienté, l'image d'un nombre réel quelconque par les fonctions trigonométriques sin, cos, tan ;
- retrouver les formules usuelles de trigonométrie, soit par calcul, soit en faisant un dessin (cercle trigonométrique ou représentation graphique) ;
- résoudre dans $]-\pi,\pi]$, puis dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations trigonométriques ;
- discuter et résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations : $\cos x = m$, $\sin x = m$ et $\tan x = m$ où m est un paramètre réel ;
- résoudre dans $]-\pi,\pi]$, puis dans $\mathbb{R}$ en choisissant la méthode la plus performante, les équations du type $a\cos x + b\sin x + c = 0$, ou des équations se ramenant à ce cas, a, b et c étant des nombres réels donnés.

Documentation : HPM édition 2004 , CIAM $1^{ère}$ SE

Matériel et supports pédagogiques : craie, tableau, livre CIAM $1^{ère}$ S, instruments de géométrie

Pré-requis :

- Définition d'un angle orienté
- Mesure principale d'un angle orienté
- Image d'un angle orienté sur le cercle trigoométrique
- Cosinus et sinus d'un angle orienté (pour sa mesure principale)

Trigonométrie

Contenus

Dans tout le chapitre le plan est muni d'un repère (O, I, J).

1 Mesure d'un angle orienté

1.1 Révision des acquis

EXERCICE 1.1
Soit $ABCD$ un carré de sens direct.
1) a) Calculer la mesure principale de chacune des angles orientés suivants : $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}})$, $(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}})$, $(\widehat{\overrightarrow{BD}, -\overrightarrow{BD}})$, $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA}})$, $(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BC}})$.
b) Construire les points E et F tels que $Mes(\widehat{\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DE}}) = \dfrac{\pi}{3}$ et $(\widehat{\overrightarrow{FC}, \overrightarrow{AB}}) = -\dfrac{\pi}{6}$.
2) Soit $\alpha = Mes(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$. Placer sur le cercle trigonométrique le point-image de α.

Remarque 1.1

- La mesure principale de la somme de deux angles orientés n'est pas toujours la somme des mesures principales.
- A chaque point M du cercle trigonométrique, on associe un nombre réel $\alpha \in]-\pi, \pi]$. C'est la mesure principale de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}})$; et réciproquement.

1.2 Mesures d'un angle orienté

Activité 1.1 **(orale)**
Soit $(\hat{\alpha})$ un angle orienté de mesure principale α et A le point-image de α sur le cercle trigonométrique.
Imaginons un point M se déplaçant sur le cercle en partant de I. À chaque passage au point A on associe à M :
- la distance parcourue si le dśplacement se fait dans le sens direct,
- l'opposé de la distance parcourue si le déplacement se fait dans le sens indirect.
Donner les résultats pour les quatre premiers passages au point A (dans chaque sens).

1.2.1 Définition

Définition 1.1

*Soit $(\hat{\alpha})$ un angle orienté de mesure principale α.Les nombres réels de la forme $\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ sont appelés **mesures** de l'angle $(\hat{\alpha})$.*
Sur le cercle trigonométrique le point-image de α est aussi le point-image de chacun des nombres réels $\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Propriété 1.1

♣ L'angle orienté nul a pour mesures $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
♣ L'angle orienté plat a pour mesures $x = \pi + 2k\pi = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$
♣ L'angle orienté droit direct a pour mesures $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
♣ L'angle orienté droit indirect a pour mesures $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
♣ L'angle orienté droit a pour mesures $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

1.2.2 Détermination de la mesure principale d'un angle orienté

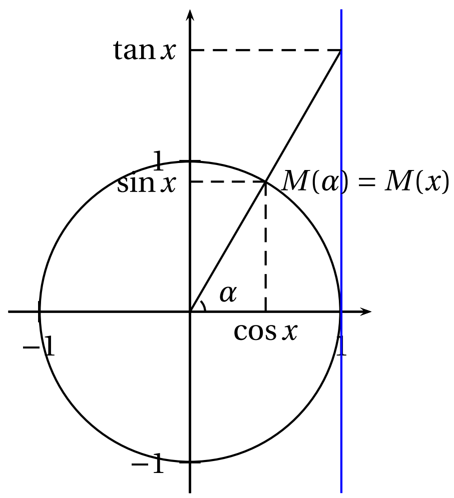
Soit $(\hat{x})$ et $(\hat{y})$ deux angles orientés de mesures respectives $\frac{43\pi}{7}$ et $\frac{37\pi}{7}$. Déterminer les mesures principales de $(\hat{x})$ et $(\hat{y})$.
• Méthode de la division euclidienne
$43 = 6 \times 7 + 1$ donc $\frac{43\pi}{7} = 6\pi + \frac{\pi}{7}$. $6\pi = 2 \times 3 \times \pi$ et $\frac{\pi}{7} \in]-\pi, \pi]$ d'où $Mes(\hat{x}) = \frac{\pi}{7}$.
• Méthode d'encadrement
Posons $x = \alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ avec $\alpha \in]-\pi, \pi]$. On a $\alpha = x - 2k\pi = \frac{43\pi}{7} - 2k\pi$.
$-\pi < \alpha \leqslant \pi \Leftrightarrow \frac{18}{7} \leqslant k < \frac{25}{7}$ donc $k = 3$. D'où $\alpha = \frac{\pi}{7}$.

2 Représentation graphique des fonctions cosinus et sinus Exemples de fonctions associées

2.1 Cosinus et sinus d'un nombre réel

Définition 2.1

Soit $x \in \mathbb{R}$ et α la mesure principale de l'angle orienté dont x est une mesure. Le cosinus et le sinus de x sont respectivement le cosinus et le sinus de α : $\cos x = \cos\alpha$ *et* $\sin x = \sin\alpha$.
Si $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ alors la tangente de x définie par $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$



On a $M(\cos x, \sin x)$ dans (O, I, J).
EXERCICE 2.1
Calculer le cosinus et le sinus de chacun des réels suivants : $x = \frac{16\pi}{3}$, $y = \frac{73\pi}{6}$.

Solution:

$\cos x = \cos(-\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$ et $\cos y = \cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Propriété 2.1

$\forall x \in \mathbb{R}$, on a :
♣ $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
♣ $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$
♣ $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$
♣ $\cos(x+2k\pi) = \cos x$ et $\sin(x+2k\pi) = \sin x$ et si $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ alors $\tan(x+k\pi) = \tan x$.

2.2 Fonctions cosinus et sinus

On appelle fonction cosinus (respectivement fonction sinus) notée cos (respectivement sin) la fonction : $\begin{array}{rccc} \cos : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \cos x \end{array}$; (respectivement $\begin{array}{rccc} \cos : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sin x \end{array}$)

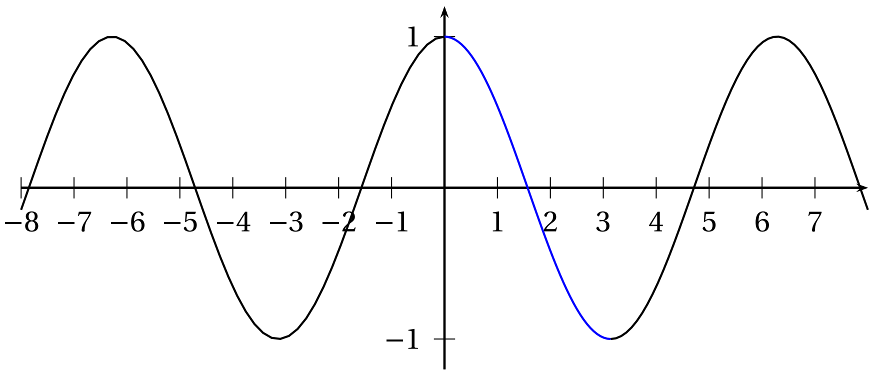
Propriété 2.2

♣ On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(x+2k\pi) = \cos x$ et $\sin(x+2k\pi) = \sin x$ donc les fonctions cos et sin sont périodiques de période 2π.
♣ On a $\forall x \in \mathbb{R}$,$\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$ donc la fonction cos est paire et la fonction sin est impaire.

EXERCICE 2.2

1) Donner l'ensemble d'étude de la fonction cos.
2) Construire $\mathscr{C}_{\cos}$ sur cet ensemble. En déduire $\mathscr{C}_{\cos}$ sur $\mathbb{R}$.
3) Sachant que $\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin x$, comment obtient-on $\mathscr{C}_{\sin}$ à partir de $\mathscr{C}_{\cos}$?
4) Construire dans le même repère la représentation graphique de la fonction $g : x \mapsto \cos(|x|)$

Solution:



2.3 Équation et inéquation avec sinus ou cosinus

2.3.1 Équation du type $sin(x) = a$ - Inéquation du type $sin(x) < a$

Propriété 2.3

♣ Soient x et y deux nombres réels. $\sin x = \sin y$ si, et seulement si il existe un nombre entier k tel que $x = y + 2k\pi$.
♣ Soit l'équation $\sin x = a$ où $a \in \mathbb{R}$. Alors :
- si $|a| > 1$ alors l'équation n'a pas de solution
- si $|a| \leqslant 1$ alors en désignant par α le réel de $]-\pi, \pi]$ tel que $\sin\alpha = a$,l'ensemble solution de l'équation est $\{\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

EXERCICE D'APPLICATION 2.1

2.3.2 Équation du type $cos(x) = a$ - Inéquation du type $cos(x) < a$

Propriété 2.4

♣ Soient x et y deux nombres réels. $\cos x = \sin y$ si, et seulement si il existe un nombre entier k tel que $x = y + 2k\pi$.
♣ Soit l'équation $\cos x = a$ où $a \in \mathbb{R}$. Alors :
- si $|a| > 1$ alors l'équation n'a pas de solution
- si $|a| \leqslant 1$ alors en désignant par α le réel de $]-\pi, \pi]$ tel que $\cos\alpha = a$,l'ensemble solution de l'équation est $\{\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

EXERCICE D'APPLICATION 2.2

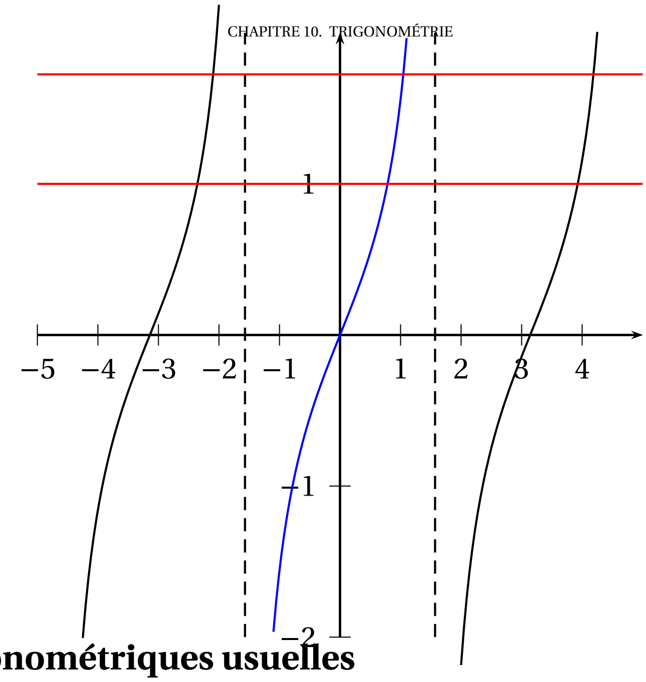
3 Fonction tangente Équation du type $tan(x) = a$ Inéquation du type $tan(x) < a$

Définition 3.1

On appelle fonction tangente la fonction : $\begin{array}{rccc} \tan : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{\sin x}{\cos x} \end{array}$

EXERCICE 3.1
1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction tan puis montrer qu'elle est périodique de période π
2) Donner l'ensemble d'étude de la fonction tan.
3) Construire $\mathscr{C}_{\tan}$ sur cet ensemble. En déduire $\mathscr{C}_{\tan}$ sur $\mathbb{R}$.
4) Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes :
$\tan x = 1$; $\tan x = \sqrt{3}$;$\tan(2x) = 1$; $\tan x \leqslant -\sqrt{3}$
5) Construire dans le même repère la représentation graphique de la fonction $g : x \mapsto |\tan x|$.

Solution:



4 Formules trigonométriques usuelles

Activité 4.1

Soit M et N les images respectives de deux nombres réels a et b sur le cercle trigonométrique.

1) Calculer $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}$ de deux manières différentes.

2) En déduire que $cos(a-b) = cos(a)cos(b) + sin(a)sin(b)$

3) En remplaçant b par $-b$ trouver une expression similaire pour $cos(a+b)$.

4) En utilisant la relation $\sin(x) = \cos(\frac{\pi}{2} - x$ montrer que $sin(a-b) = sin(a)cos(b) - cos(a)sin(b)$.

Propriété 4.1

$\forall a, b \in \mathbb{R}; cos(a-b) = cos(a)cos(b) + sin(a)sin(b)$

De la propriété précédente on déduit que :

Propriété 4.2

On a de même les formules suivantes :

$\forall a, b \in \mathbb{R}$

♣ $cos(a+b) = cos(a)cos(b) - sin(a)sin(b)$

♣ $sin(a-b) = sin(a)cos(b) - cos(a)sin(b)$

♣ $sin(a+b) = sin(a)cos(b) + cos(a)sin(b)$

Propriété 4.3 Formules de duplication

♣ $\cos^2 a = \dfrac{1 + cos(2a)}{2}$

♣ $\sin^2 a = \dfrac{1 - cos(2a)}{2}$

Propriété 4.4 Formules de Simson

♣ $\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a+b)]$

♣ $\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$

♣ $\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a-b) + \sin(a+b)]$

En posant $p = a + b$ et $q = a - b$ on $a = \frac{p+q}{2}$ et $b = \frac{p-q}{2}$. On déduit des formules précédentes que :

♣ $\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$

♣ $\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$

♣ $\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$

♣ $\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$

Propriété 4.5 Tangente de la somme

♣ $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$

FICHE N°
AGOSSEME Kokou Anani

Tél: (+228) 92 47 81 85 / 99 68 64 43

Date :	9-02-2015
Spécialité :	*Géométrie*
Durée :	*18 heures*
Classe :	$1^{ère}$ D
Effectif :	

Leçon

TRANSFORMATIONS PLANES

Objectifs pédagogiques : (Confère programmes HPM page 39-40)

À la fin de la leçon, l'élève doit être capable de :

- construire l'image d'une figure par une translation, une homothétie, une symétrie orthogonale, une rotation
- déterminer l'expression analytiques de ces transformations
- une transformation f étant définie analytiquement :
  - — trouver l'expression analytique de sa réciproque,
  - — trouver une expression de $f(E)$, où E est une partie du plan donnée par son équation dans un repère,
- un déplacement (ou un retournement) étant défini par deux points distincts et leurs images, le caractériser et déterminer graphiquement l'image d'un point quelconque du plan
- deux figures isométriques F et F' étant données, préciser si l'isométrie f qui transforme F en F' est un déplacement, ou un retournement et la caractériser (on se limitera au où f est unique)
- une application ponctuelle étant définie analytiquement dans un repère orthonormé, reconnaître s'il s'agit d'une translation :
  - — reconnaître s'il s'agit d'une autre isométrie,
  - — si c'est une isométrie, la caractériser à partir de l'ensemble des points invariants (*on se limitera au cas où cet ensemble est non vide*),
- montrer que deux triangles sont semblables et reconnaître la nature de la similitude qui les échange ;
- utiliser les propriétés des applications ponctuelles pour résoudre des problèmes de géométrie plane (construction de figures, recherche de lieux géométriques)

Documentation : HPM édition 2004 , CIAM $1^{ère}$ SE

Matériel et supports pédagogiques : craie, tableau, livre CIAM $1^{ère}$ S, instruments de géométrie

Pré-requis :

-
-

Transformations planes

Contenus

1 Translations, Symétries, Rotations

1.1 Translations

1.1.1 Révision des acquis

EXERCICE 1.1 (Translation)
Soit ABCD un rectangle.$\vec{u}$ désigne le vecteur $\overrightarrow{DC}$ et $\vec{v}$ le vecteur $\overrightarrow{DA}$. Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$. Soit P l'image de B par t.

1. (a) Construire P.
   (b) Quelle est l'image de A par t.
   (c) En déduire une relation entre $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CP}$.
2. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
3. On munit le plan du repère (D, $\vec{u}$, $\vec{v}$). Soit $M(x, y)$ et $M'(x', y')$ deux points du plan tels que $M' = t(M)$. Exprimer x' et y' en fonction de x et y.
4. Soit $(\mathscr{D})$ la droite d'équation $2x - y + 3 = 0$ et $(\mathscr{D}')$ son image par t. Déterminer une équation cartésienne de $(\mathscr{D}')$
5. Quel est l'ensemble des points invariant par une translation de vecteur nul ? de vecteur non nul ?

Propriété 1.1

Dans le plan muni d'un repère, l'expression analytique de la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est

$$\begin{cases} x' &= x + a \\ y' &= y + b \end{cases}$$

Propriété 1.2 Caractéristique d'une translation

Soit f une application du plan P dans lui-même.
f est une translation si, et seulement si pour tous points M, N d'images respectives M' et N' par f, on a : $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$.

1.1.2 Composée de deux translations

<u>Activité 1.1</u>
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. Soit M un point du plan, M_1 son image par $t_{\vec{u}}$ et M' l'image de M_1 par $t_{\vec{v}}$.

1. Quelle est l'image de M par $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}}$? Faire une figure.
2. Montrer que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u} + \vec{v}$.
3. Que peut-on en conclure ?

Propriété 1.3

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.
La composée $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}}$ des translations de vecteurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est la translation de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.

Remarque 1.1

- On a $\vec{u}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{u}$ donc $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}}$: on dit que la composition des translations est commutative.
- Si $\vec{v} = -\vec{u}$ on a $t_{\vec{u}} \circ t_{-\vec{u}} = t_{-\vec{u}} \circ t_{\vec{u}} = Id$. On en déduit que toute translation est une transformation du plan et la transformation réciproque de $t_{\vec{u}}$ est $t_{-\vec{u}}$.

EXERCICE D'APPLICATION 1.1

Soit $ABCD$ un parallélogramme et M un point du plan.

1. Construire les points M_1' et M_2' images respectives de M par $t_{\overrightarrow{AC}} \circ t_{\overrightarrow{BD}}$ et $t_{\overrightarrow{AD}} \circ t_{\overrightarrow{BC}}$. Que constate-t-on ?
2. Démontrer que $t_{\overrightarrow{AC}} \circ t_{\overrightarrow{BD}} = t_{\overrightarrow{AD}} \circ t_{\overrightarrow{BC}}$.

1.2 Symétries orthogonales

1.2.1 Révision des acquis

EXERCICE 1.2 (Symétrie orthogonale)

Soit ABC un triangle et (Δ) une droite passant par B et différente de (AB) et (BC). On note s_Δ la symétrie orthogonale d'axe (Δ).

1. Construire l'image A'B'C' du triangle ABC par s_Δ.
2. Soit $(\mathscr{D})$ la droite perpendiculaire à (Δ) passant par C. Quelle est l'image $(\mathscr{D}')$ de $(\mathscr{D})$ par s_Δ.
3. Quel est l'ensemble des points invariants par s_Δ ?

Propriété 1.4

Soit O un point du plan, $\vec{u}$ un vecteur non nul et Δ la droite passant par O et dirigée par $\vec{u}$.

$$M' = s_\Delta(M) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} OM' & = & OM \\ \widehat{(\overrightarrow{OM}, \vec{u})} & = & \widehat{(\vec{u}, \overrightarrow{OM'})} \end{array} \right.$$

1.2.2 Expression analytique d'une symétrie orthogonale

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé du plan, (Δ) une droite $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux points du plan

n'appartenant pas à (Δ). $M' = s_\Delta(M)$ si, et seulement si (Δ) est la médiatrice du segment $[MM']$.
On en déduit que :

- le milieu H du segment $[MM']$ appartient à (Δ)
- $\overrightarrow{MH}$ est normal à (Δ)
- étant donné $A \in (\Delta)$, $\vec{u}$ un vecteur directeur de (Δ), alors $\overrightarrow{AH}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires et $\overrightarrow{MH}$ est orthogonal à $\vec{u}$.

Ces considérations permettent de faire une traduction vectorielle puis analytique de la symétrie orthogonale d'axe (Δ).

<u>EXERCICE D'APPLICATION 1.2</u>

Trouver dans chaque cas l'expression analytique de la symétrie orthogonale d'axe (Δ) :

1. (Δ) passant par $A\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ et dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.
2. $(\Delta) : x + 2y - 1 = 0$

1.3 Rotations

1.3.1 Révisions des acquis

EXERCICE 1.3

Soit ABC un triangle équilatéral de sens direct et de centre O.

1. Construire les images A' et B' de A et B respectivement par la rotation r de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.
2. Donner une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}})$.
3. Construire l'image C' de C par r^{-1}.
4. Quel est l'ensemble des points invariants par une rotation d'angle nul ? d'angle non nul ?

Propriété 1.5 Caractéristique d'une rotation

Soit f une application du plan et $\hat{\alpha}$ un angle de mesure non nul. f est une rotation d'angle α si, et seulement si pour tous points M et N du plan d'images respectives M' et N', on a $NM = M'N'$ et $(\widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}}) = \hat{\alpha}$

1.3.2 Expression analytique d'une rotation

<u>Activité 1.2</u>

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

1. Soit r la rotation de centre O et d'angle α. Soit $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $M\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ tels que $M' = r(M)$. Soit α_0 une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}})$.
   (a) Déterminer une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM'}})$.

(b) Déterminer x et y en fonction OM et α_0 puis x' et y' en fonction OM, α et α_0.

(c) En déduire x' et y' en fonction de x, y, α.

(d) Donner l'expression analytique de la symétrie centrale de centre O.

2. Soit $\Omega\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ un point du plan.

(a) En utilisant les décompositions $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M}$ et $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M'}$, déterminer les cordonnées de M et M' dans le repère $(\Omega, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.

(b) En déduire l'expression analytique de la rotation de centre Ω et d'angle α.

(c) Donner l'expression analytique de la symétrie centrale de centre Ω.

2 Isométries

2.1 Définitions et propriétés

Définition 2.1

On appelle isométrie toute transformation i du plan qui conserve la distance, c'est-à-dire pour tous points M et N d'images respectives M' et N' on a $MN = M'N'$.

$$\overset{i}{\curvearrowright}\quad \begin{array}{c|c} M & M' \\ N & N' \end{array} \Longrightarrow M'N' = MN$$

Propriété 2.1

Toute isométrie conserve :
- l'alignement des points
- le parallélisme des droites
- la mesure géométrique des angles
- le barycentre des points pondérés
- les longueurs et les aires.

2.2 Déterminaton des isométries

Propriété 2.2

Soit ABC et $A'B'C'$ deux triangles tels que $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ et $BC = B'C'$.
- Les triangles ABC et $A'B'C'$ sont dits isométriques ou superposables
- Il existe une et une seule isométrie qui applique A sur A', B sur B' et C sur C'.

Une isométrie est alors déterminée par la donnée de trois points et leurs images.

2.3 Classification des isométries

2.3.1 Effet sur les angles orientés

Activité 2.1

1. On donne un triangle ABC et O un point du plan. Construire l'image $A'B'C'$ de ABC par la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$.
2. On donne un triangle ABC et (Δ) une droite. Construire l'image $A'B'C'$ de ABC par la symétrie orthogonale d'axe (Δ).
3. Comparer les sens des triangles ABC et $A'B'C'$ dans les deux cas.

Définition 2.2

On appelle déplacement toute isométrie qui conserve les angles orientés.
On appelle retournement toute isométrie qui transforme un angle orienté en son opposé.

Propriété 2.3

Tout déplacement est une translation ou bien une rotation.

Remarque 2.1

Soit ABC et $A'B'C'$ deux triangles isométriques. Si les deux triangles ont même sens alors l'isométrie qui applique l'un sur l'autre est un déplacement sinon c'est un retournement.

2.3.2 Classification par les points invariants

- Une isométrie du plan qui laisse invariant trois points non alignés est l'application identique.
- Une isométrie du plan qui laisse invariant deux points A et B distincts et qui n'est pas l'application identique est la symétrie orthogonale d'axe (AB).
- Une isométrie du plan qui laisse invariant un seul point A est une rotation de centre A.

EXERCICE D'APPLICATION 2.1

On donne le segment $[AB]$. Trouver un déplacement et un retournement tels que l'image du segment $[AB]$ soit le segment $[AB]$ lui-même.

Solution:

La symétrie centrale de centre le milieu de $[AB]$ et $S_{(AB)}$

2.4 Composition d'isométries

Propriété 2.4

La composée de deux isométries est une isométrie et la composée de deux déplacement est un déplacement.

Activité 2.2

Soit ABC un triangle et O un point du plan. On note r_1 la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et r_2 la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1. Construire l'image $A'B'C'$ du triangle ABC par $r_2 \circ r_1$. On notera $A_1 = r_1(A)$, $B_1 = r_1(B)$ et $C_1 = r_1(C)$.
2. Montrer que $OA' = OA$ et calculer $mes(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}})$.
   En déduire une transformation qui applique A sur A'.

Propriété 2.5 Rotations de même centre

Soit r et r' deux rotations de centre O et d'angles respectifs α et α'. Alors $r' \circ r$ est la rotation de centre O et d'angle $\alpha + \alpha'$

On démontre de même la propriété suivante :

Propriété 2.6

La composée d'une rotation d'angle non nul α et d'une translation est une rotation d'angle α.

Exercice d'application 2.2

On considère ABCD un carré de sens direct et de centre O. Soit M le milieu de $[AB]$ et P le milieu de $[CD]$. On note t la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$ et r la rotation de centre P et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1. Montrer que les triangles AMO et OPD sont superposables.
2. Construire le point O' image de O par t. Montrer que l'image du triangle AMO par t est le triangle DPO'.
3. Montrer que $r(O') = D$ et $r(D) = O$. En déduire la nature de l'isométrie i qui transforme AMO en OPD.
4. Préciser tous ses éléments caractéristiques.

3 Homothéties

3.1 Révision des acquis

EXERCICE 3.1
Soit ABC un triangle et G son centre de gravité. Soit O le milieu de $[AB]$

1. Construire les points A', B' et C' images respectives des points A, B et C par l'homothétie h de centre O et de rapport 2.

2. Comment obtient-on à partir de G le centre de gravité G' du triangle $A'B'C'$?
3. Le plan est muni du repère (A,B,C). Déterminer l'expression analytique de h.

Propriété 3.1

- Dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ l'expression analytique d'une homothétie de centre $\Omega\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$ et de rapport k est $\begin{cases} x' &= kx+(1-k)x_0 \\ y' &= ky+(1-k)x_0 \end{cases}$

— Soit f une application du plan P dans lui-même dont l'expression analytique est sous la forme $\begin{cases} x' &= kx+p \\ y' &= ky+q \end{cases}$

— si $k=1$ alors $f = t_{\vec{u}\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}}$

— si $k \neq 1$ alors f est l'homothétie de rapport k et de centre $A\begin{pmatrix}\dfrac{p}{1-k}\\ \dfrac{q}{1-k}\end{pmatrix}$.

EXERCICE 3.2

1. Soit ABC trois points alignés, deux à deux distincts. M et N sont deux points tels que $M \notin (AB)$ et $N \in (AB)$. Construire les images des points M et N par l'homothétie de centre A, transformant B en C.
2. ABCD est un trapèze tel que : CD=2AB. Déterminer le centre et le rapport de l'homothétie h dans les deux cas suivants :
   (a) A et B ont pour images respectives D et C par h.
   (b) A et B ont pour images respectives C et D par h.

Propriété 3.2 (Caractéristique d'une homothétie)

Soit f une application du plan P dans lui-même, k un nombre réel différent de 0 et 1. f est une homothétie de rapport k si, et seulement si pour tous points M, N d'images respectives M' et N' par f, on a : $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$.

3.1.1 Composition d'homothéties

- **Homothéties de même centre**

Propriété 3.3

Soit h l'homothétie de centre O et de rapport k puis h' l'homothétie de centre O et de rapport k'. Alors la composée $h' \circ h$ est l'homothétie de centre O et de rapport $k'k$.

Remarque 3.1

On a $k'k = kk'$ donc $h' \circ h = h \circ h'$.

- **Homothéties de centre différents**

Propriété 3.4

Soit h l'homothétie de centre O et de rapport k puis h' l'homothétie de centre O' et de rapport k'.
— Si $kk' = 1$ alors $h' \circ h$ est une translation.
— Si $kk' \neq 1$ alors $h' \circ h$ est une homothétie de rapport kk'.

Remarque 3.2

La droite (OO') est globalement invariante par h et par h'. Elle est donc globalement invariante par $h' \circ h$. On en déduit que :
– Si $kk' = 1$ alors $h' \circ h$ est une translation de vecteur $\vec{u}$ colinéaire à $\overrightarrow{OO'}$.
– Si $kk' \neq 1$ alors $h' \circ h$ est une homothétie de centre Ω telle que $\Omega \in (OO')$.

<u>**EXERCICE D'APPLICATION 3.1**</u>
Soit ABC un triangle. Soit h et h' les homothéties de centres respectifs B et C et de rapports respectifs $\dfrac{2}{3}$ et $\dfrac{3}{2}$.

1. Démontrer que $h' \circ h$ est une translation.
2. Construire l'image de A par $h' \circ h$ et en déduire une détermination du vecteur de cette translation.
   Exprimer ce vecteur en fonction de $\overrightarrow{BC}$

- **Composition d'une homothéties et d'une translation**

Propriété 3.5

Soit h l'homothétie de centre O et de rapport k $(k \neq 1)$, t est la translation de vecteur $\vec{u}$.
Alors $h \circ t$ et $t \circ h$ sont des homothéties de rapport k.

<u>***Activité 3.1***</u>
Cet activité se propose de situer les centres de $h \circ t$ et $t \circ h$ sur un exemple. Soit h l'homothétie de centre O et de rapport 2, t est la translation de vecteur $\vec{u}$. Soit Ω le centre de $h \circ t$

et ω celui de $t \circ h$.

1. (a) Soit M' l'image d'un point M par $h \circ t$. Exprimer $\overrightarrow{OM'}$ en fonction de $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{u}$.
   (b) Exprimer $\overrightarrow{O\Omega}$ en fonction de $\vec{u}$.
2. Mêmes questions pour $t \circ h$

Remarque 3.3

— Soit Ω le centre de $h \circ t$ alors $\overrightarrow{O\Omega} = \dfrac{k}{1-k}\vec{u}$

— Soit ω le centre de $t \circ h$ alors $\overrightarrow{O\omega} = \dfrac{1}{1-k}\vec{u}$

Si $(\mathscr{D})$ est la droite passant par O et dirigée par $\vec{u}$ alors $(\mathscr{D})$ est globalement invariante par $h \circ t$ et $t \circ h$.

Soit $M' = h \circ t(M)$ et $M'' = t \circ h(M)$. Alors $\{\Omega\} = (\mathscr{D}) \cap (MM')$ et $\{\omega\} = (\mathscr{D}) \cap (MM'')$.

4 Similitudes planes

4.1 Définition et propriétés

Définition 4.1

Soit k un nombre réel positif non nul. On appelle similitude s de rapport k , toute transformation du plan telle que pour tous points M et N d'images respectives M' et N' on a $M'N' = kMN$

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{s}{\curvearrowright}} \\ M & M' \\ N & N' \end{array} \Longrightarrow M'N' = kMN$$

Deux figures sont dits semblables lorsque l'une est l'image de l'autre par une similitude.

Exemple de similitude

- — Toute isométrie est une similitude de rapport 1.
- — Toute homothétie de rapport k est une similitude de rapport $|k|$.
- — Toute composée d'une homothétie de rapport k et d'une isométrie est une similitude de rapport $|k|$.

Propriété 4.1

Toute similitude est la composée d'une isométrie et d'une homothétie.

Propriété 4.2

- Toute similitude conserve l'alignement des points, le parallélisme et la perpendicularité des droites, la mesure des angles et le barycentre des points pondérés.
- Toute similitude multiplie les longueurs par son rapport et les aires par le carré de son rapport.

4.2 Détermination d'une similitude

Propriété 4.3

Soit ABC et $A'B'C'$ deux triangles tels que $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC}\frac{B'C'}{BC} = k$, $AC = A'C'$ et $BC = B'C'$.
Il existe une et une seule isométrie qui applique A sur A', B sur B' et C sur C'.

EXERCICE 4.1

On considère deux triangles équilatéraux OAP et OBQ de sens direct tel que B est le projeté orthogonal de O sur (AP).
Déterminer une similitude s telle que les points O, A et P ont pour images respectives par s les points O, B et Q

EXERCICE 4.2

Soit ABC un triangle. Soit h l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{1}{2}$ et t la translation de vecteur $\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

1. Justifier que $t \circ h$ est une homothétie h' et préciser son rapport.
2. Construire l'image de A par h' et en déduire une détermination du centre de h'.