

# **MATHEMATIQUES 1re.SM**

**p2-Logique mathématique**

**p12-Ensembles et applications**

**p23-Généralités sur les fonctions**

**p39-Produit scalaire dans le plan**

**p46-Produit scalaire:Le cercle**

**p54-Calcul trigonométrique**

**p67-Les suites numériques**

**p80-Limites d'une fonction**

**p92-Rotation dans le plan**

**p101-La dérivation**

**p113-Étude des fonctions**

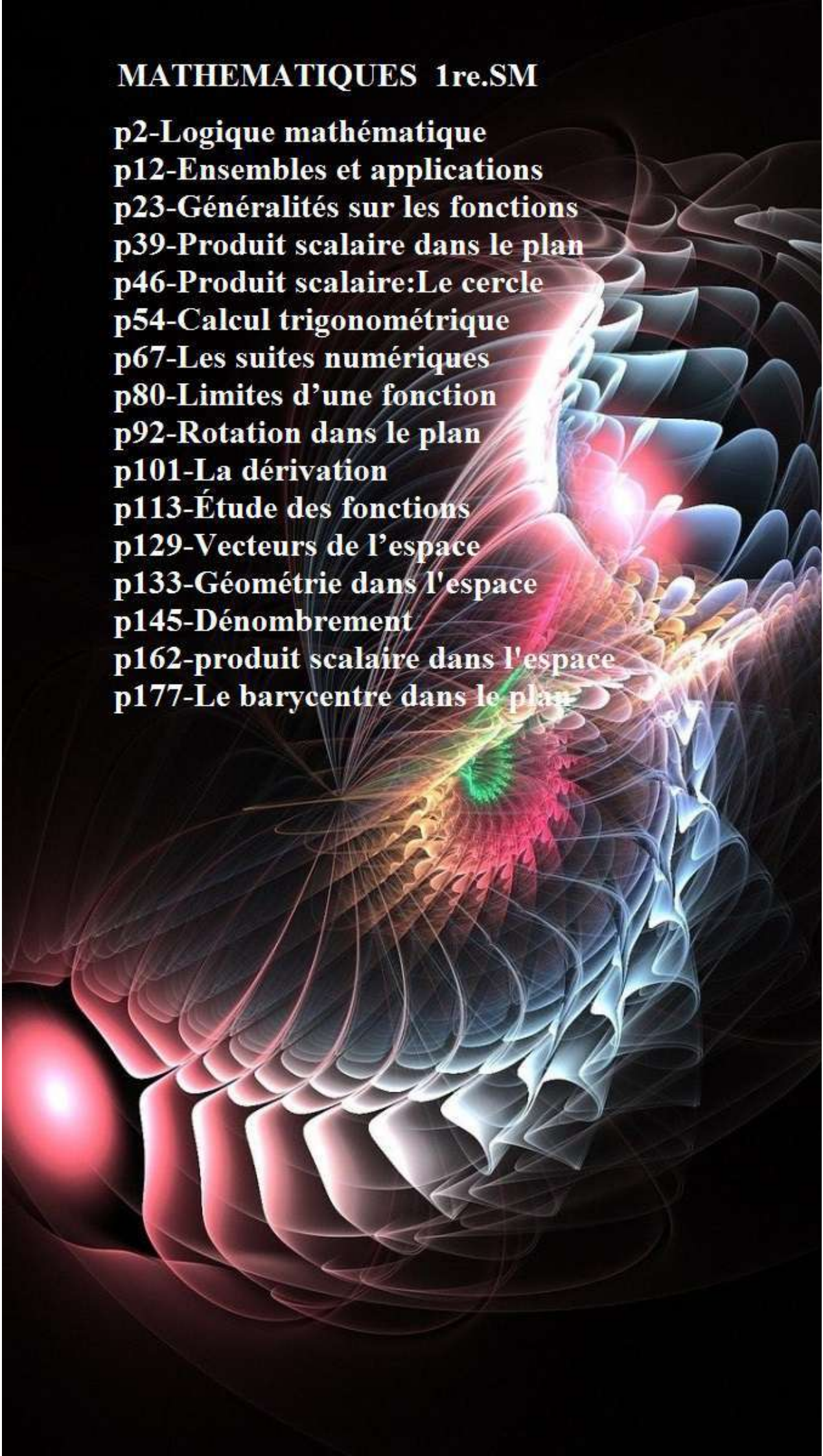
**p129-Vecteurs de l'espace**

**p133-Géométrie dans l'espace**

**p145-Dénombrément**

**p162-produit scalaire dans l'espace**

**p177-Le barycentre dans le plan**





2- donner une valeur  $a_2$  qui vérifie  $P(a_2)$  est vraie.

3- Que pouvez-vous dire de la proposition  $Q$  " **pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R}$  on a ;  $3x^2 - 2x - 1 = 0$**  "

4- Que pouvez-vous dire de la proposition  $R$  " **il existe au moins  $x$  dans  $\mathbb{R}$  tel que ;  $3x^2 - 2x - 1 = 0$**  "

#### **Activité 4 :**

Soit  $P(x)$  une fonction propositionnelle sur un ensemble  $E$  et  $\mathcal{V}_{P(x)} = \{x \in E / P(x) \text{ est vraie}\}$

Déterminer  $\mathcal{V}_{P(x)}$  dans les cas suivants :

1-  $P(x)$  "  $x \in \mathbb{R} ; 4x^2 + x - 5 \leq 0$  "

2-  $P(x)$  "  $x \in \mathbb{R} ; |3x^2 + x| + x = 0$  "

### 1.2 Définitions

#### **Définition 1 :**

Une **proposition** est un énoncé formé d'un assemblage de symboles et de mots, auquel une valeur de vérité *vrai* ou *faux* peut être attribuée

#### **Exemple :**

Les énoncés suivants sont des propositions :

$p_1$  " 3 est un entier pair "

$p_2$  "  $\sqrt{2}$  est nombre positif "

$p_3$  " Un carré est un parallélogramme "

$p_4$  " Dans l'espace si deux droites sont perpendiculaire toute perpendiculaire à l'une est parallèle à l'autre.

Déterminer la valeur de vérité de chaque proposition.

#### **Définition 2 :**

Une fonction propositionnelle sur un ensemble  $E$  est une expression contenant une ou plusieurs variables libres dans  $E$  et qui est susceptible de devenir une proposition vraie ou fausse si l'on attribue à ces variables certaines valeurs particulières de l'ensemble  $E$ .

## 2) Les quantificateurs

### 2.1 Quantificateur universel

#### **Activité 1 :**

Soit la fonction propositionnelle

$P(x)$ : "  $x \in \mathbb{R}^{**} ; x + \frac{1}{x} \geq 2$  "

Vérifier que  $\mathcal{V}_{P(x)} = \mathbb{R}^{**}$

On peut dire que : "**Quel que soit**  $x \in \mathbb{R}^{**} ; x + \frac{1}{x} \geq 2$  "

L'expression " Quel que soit " s'appelle **le quantificateur universel** et se note  $\forall$

#### **Remarque :**

- ✓ Si on lie la variable d'une fonction propositionnelle par **le quantificateur universel** on obtient une proposition.
- ✓ La proposition "  $(\forall x \in E)(P(x))$  est de valeur vraie si et seulement si  $\mathcal{V}_{P(x)} = E$ .

#### **Exercice :**

Etudier la vérité des propositions suivantes :

1.  $(\forall x \in \mathbb{R})(2x^2 + x + 3 > 0)$
2.  $(\forall (a, b) \in \mathbb{Q}^{*2})(a\sqrt{2} + b \neq 0)$
3.  $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\left(\frac{n+1}{n} \notin \mathbb{N}\right)$

### 2.2 Quantificateur existentiel

#### **Activité 1 :**

Considérons l'équation  $(E) : 3x^2 + x - 2 = 0$

1. Montrer que l'équation  $(E)$  admet au moins une solution dans  $\mathbb{R}$ .
2. Que peut-on dire de l'énoncé " il existe au moins un réel tel que :  $3x^2 + x - 2 = 0$
3. Déterminer  $\mathcal{V}_{Q(x)}$ .

L'expression " il existe au moins " s'appelle **le quantificateur existentiel** et se note  $\exists$

#### **Remarque :**

- ✓ Si on lie la variable d'une fonction propositionnelle par **le quantificateur existentiel** on obtient une proposition.
- ✓ La proposition "  $(\exists x \in E)(P(x))$  est de valeur vraie si et seulement si  $\mathcal{V}_{P(x)} \neq \emptyset$ .

#### **Exercice :**

Etudier la vérité des propositions suivantes :

1.  $(\exists x \in \mathbb{R})(|x^2 - x| + 3x = 0)$
2.  $(\exists x > 0)(x^2 + 3x = 0)$

### 2.3 Proposition avec plusieurs quantificateurs.

Considérons sur  $\mathbb{R}^2$  la fonction propositionnelle  $P_{(x,y)}$  "  $3x + y - 1 = 0$  "

Les expressions :

1.  $(\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(3x + y - 1 = 0)$
2.  $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(3x + y - 1 = 0)$
3.  $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(3x + y - 1 = 0)$
4.  $(\forall \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(3x + y - 1 = 0)$

Sont des propositions

#### **Exercice**

Déterminer les valeurs de vérité des propositions 1. 2. 3.

#### **Remarque :**

On admet que toute proposition est soit vraie soit fautive ; c'est **le principe de tiers exclus**

Une proposition vraie se note par 1 ou  $V$  ; une proposition fautive se note par 0 ou  $F$

## II) OPERATIONS SUR LES PROPOSITIONS.

### 1. La négation

#### **Définition**

La négation d'une proposition  $P$  est la proposition qui est vraie si  $P$  est fautive ; et qui est fautive si  $P$  est vraie on la note :  $\bar{P}$  ou  $\neg P$

$P$	$\bar{P}$
1	0
0	1

*Ce tableau s'appelle le tableau de vérité de la négation*

### 2. La conjonction

#### **Définition :**

La conjonction de deux propositions  $P$  et  $Q$  est la proposition qui est vraie uniquement si les deux propositions  $P$  et  $Q$  sont vraies en même temps on la note ( **$P$  et  $Q$** ) ou ( **$P \wedge Q$** ).

On peut résumer la définition précédente sur un tableau comme suite :

$P$	$Q$	$P \wedge Q$
<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>
1	0	0
0	1	0
0	0	0

*Ce tableau s'appelle le tableau de vérité de la conjonction*

#### **Exercice :**

Déterminer les valeurs de vérité des propositions suivantes :

- (3 est un nombre impair) et (6 est un nombre premier)
- ( $\sqrt{2}$  est un nombre irrationnelle) et  $[(\forall x \in \mathbb{R})(1 + 2x < x^2)]$
- (5 est positif) et (3 divise 18)

### 3 La disjonction

#### **Définition :**

La disjonction de deux propositions  $P$  et  $Q$  est la proposition qui est vraie si au moins l'une des deux propositions est vraie on la note ( **$P$  ou  $Q$** ) ou ( **$P \vee Q$** ).

On peut résumer la définition précédente sur un tableau comme suite :

$P$	$Q$	$P \vee Q$
<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>
<b>1</b>	<b>0</b>	<b>1</b>
<b>0</b>	<b>1</b>	<b>1</b>
0	0	0

*Tableau de vérité de la disjonction.*

#### **Exercice :**

Déterminer les valeurs de vérité des propositions suivantes :

- (3 est un nombre impair) ou (6 est un nombre premier)
- ( $\sqrt{2}$  est un nombre irrationnelle) ou  $[(\forall x \in \mathbb{R})(1 + 2x < x^2)]$
- (5 est positif) ou (3 divise 18)

*Un nombre irrationnelle est réel qui n'appartient pas à  $\mathbb{Q}$ .*

## 4. L'implication

**Exercice :** Déterminer le tableau de vérité de la proposition ( $\bar{P}$  ou  $Q$ ).

**Définition :**

A partir de deux propositions  $P$  et  $Q$  on obtient la proposition ( $\bar{P}$  ou  $Q$ ) qui est fausse si  $P$  est vrai et  $Q$  est fausse et vraie dans les autres cas. La proposition ( $\bar{P}$  ou  $Q$ ) s'appelle  **$P$  implique  $Q$**  et se note  **$P \Rightarrow Q$** .

$P$	$Q$	$P \Rightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Tableau de vérité de l'implication.

**Exemple :**

Déterminer les valeurs de vérité des propositions suivantes :

- $(3 \text{ est un nombre impair}) \Rightarrow (6 \text{ est un nombre premier})$
- $(\sqrt{2} \text{ est un nombre irrationnel}) \Rightarrow [(\forall x \in \mathbb{R})(1 + 2x < x^2)]$
- $(5 \text{ est positif}) \Rightarrow (3 \text{ divise } 18)$

**Remarque :**

Les propositions suivantes ont la même signification :

- si  $ABCD$  est un carré **alors**  $ABCD$  est un parallélogramme.
- $ABCD$  est un carré **implique**  $ABCD$  est un parallélogramme.
- Pour que  $ABCD$  soit un parallélogramme **il suffit** qu'il soit un carré.
- Pour que  $ABCD$  soit un carré **il faut** qu'il soit un parallélogramme

En générale : si on a :  $P \Rightarrow Q$  on peut dire que :

$Q$  est une condition nécessaire pour  $P$

$ABCD$  un parallélogramme est nécessaire pour que  $ABCD$  soit un carré

$P$  est une condition suffisante pour  $P$

$ABCD$  un carré est suffisante pour que  $ABCD$  soit un parallélogramme

**Applications :**

Donner une condition nécessaire et pas suffisante pour :

- $x \in [1,2]$
- $n$  divise 6

Donner une condition suffisante et pas nécessaire pour :

- $x \in [1,2]$
- $n$  divise 6.

## 5 l'équivalence

**Activité :**

1- Dresser le tableau de vérité de  $[(P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow P)]$

2- Quand est ce que la proposition  $[(P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow P)]$  est vraie ?

**Définition :**

L'équivalence de deux propositions  $P$  et  $Q$  est la proposition qu'on note  $(P \Leftrightarrow Q)$  est qui est vraie si  $P$  et  $Q$  ont la même valeur de vérité

$P$	$Q$	$P \Leftrightarrow Q$
<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>
1	0	0
0	1	0
<b>0</b>	<b>0</b>	<b>1</b>

Tableau de vérité de l'équivalence.

**Remarques :**

1- Les propositions  $(P \Leftrightarrow Q)$  et  $[(P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow P)]$  ont les même valeurs de vérité, on dit que les deux propositions sont équivalente.

L'implication  $(Q \Rightarrow P)$  s'appelle l'implication inverse de l'implication  $(P \Rightarrow Q)$

2-  $(P \Leftrightarrow Q)$  se lit  $P$  **équivalent** à  $Q$  elle se lit encore  $P$  **si et seulement si**  $Q$

**6) Opérations sur les fonctions propositionnelles.**

Si  $P(x)$  et  $Q(x)$  sont deux fonctions propositionnelles sur un ensemble  $E$  alors :

$(P(x) * Q(x))$  est une fonction propositionnelle sur  $E$  et sa valeur de vérité pour tout élément  $a$  de  $E$  est la valeur de vérité de  $(P(a) * Q(a))$

Où  $*$  peut-être replacer par l'une des connexions logiques :  $\text{et} ; \text{ou} ; \Rightarrow ; \Leftrightarrow$

**Application :**

Soient  $P(x): 2x^2 + 1 \leq 5$   $Q(x): x \in [1,3]$  deux fonctions propositionnelles sur  $\mathbb{R}$

Déterminer les valeurs de vérités des propositions suivantes :

1-  $P(0)$  et  $Q(0)$ .

2-  $P(3) \Rightarrow Q(3)$ .

3- pour que  $P(2)$  il suffit  $Q(2)$

4- pour que  $P(1)$  il faut  $Q(1)$

**Remarque :** Pour montrer qu'une implication  $(\forall x \in E)(P(x) \Rightarrow Q(x))$  est vraie on suppose que  $P(x)$  est vraie et on montre que  $Q(x)$  est vraie.

**III) LES LOIS LOGIQUES****1 Activités****Activité 1 :**

En utilisant les tableaux de vérité ; déterminer les valeurs de vérité des propositions suivantes :

1-  $( [(P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow P)] \Leftrightarrow (P \Leftrightarrow Q) )$

2-  $\left[ \begin{matrix} P \Rightarrow Q \\ Q \Rightarrow R \end{matrix} \Rightarrow (P \Rightarrow R) \right]$  où l'accolade "{" représente la conjonction *et*.

**Définition :**

On appelle une loi logique toute proposition constituée par des propositions liées entre elles par des connexions logiques est qui est toujours vraie quel que soit la valeur de vérité des propositions qui la constituent.

Une loi logique s'appelle aussi une **tautologie**.

**2. Quelques lois logiques**La commutativité

- $(P \text{ et } Q) \Leftrightarrow (Q \text{ et } P)$
- $(P \text{ ou } Q) \Leftrightarrow (Q \text{ ou } P)$
- $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (Q \Leftrightarrow P)$

La distributivité

- $[P \text{ et } (Q \text{ ou } R)] \Leftrightarrow [(P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R)]$
- $[P \text{ ou } (Q \text{ et } R)] \Leftrightarrow [(P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R)]$

**Application :** Résoudre dans  $\mathbb{R}^2$  le système :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ (x + y)(5x + 4y - 3) = 0 \end{cases}$$

Loi de Morgan

- $\overline{(P \text{ et } Q)} \Leftrightarrow (\bar{P} \text{ ou } \bar{Q})$
- $\overline{(P \text{ ou } Q)} \Leftrightarrow (\bar{P} \text{ et } \bar{Q})$

**Application :** Déterminer  $\overline{(P \Rightarrow Q)}$ .

**3. lois logiques et raisonnement :**

Les lois logiques servent à déterminer la valeur de vérité d'une proposition :

**Activité :**

Montrer que :  $\left[ (x \neq y \text{ et } xy \neq 1) \Rightarrow \frac{x}{x^2+x+1} \neq \frac{y}{y^2+y+1} \right]$

La contraposition

- $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\bar{Q} \Rightarrow \bar{P})$

**Application :** Si  $x$  est un nombre réel tel que  $x^3 + x^2 - 2x < 0$  alors  $x < 1$ .

La transitivité

- $\begin{cases} P \Rightarrow Q \\ Q \Rightarrow R \end{cases} \Rightarrow (P \Rightarrow R)$

Cette loi est la base du raisonnement **par déduction** ; en générale

$$\left[ \begin{array}{l} P \Rightarrow Q_1 \\ Q_1 \Rightarrow Q_2 \\ \vdots \\ Q_n \Rightarrow Q \end{array} \right] \Rightarrow (P \Rightarrow Q) \quad \text{On écrit} \quad \begin{array}{l} P \Rightarrow Q_1 \\ \Rightarrow Q_2 \\ \vdots \\ \Rightarrow Q \end{array}$$

**Application :**

Montrer que :  $|x| < 1 \Rightarrow |2x^2 - x - 1| < 2$

$$\triangleright \begin{cases} P \Leftrightarrow Q \\ Q \Leftrightarrow R \end{cases} \Rightarrow (P \Leftrightarrow R)$$

Cette loi est la base du raisonnement par les **équivalences successives** ; en générale

$$\left[ \begin{array}{l} P \Leftrightarrow Q_1 \\ Q_1 \Leftrightarrow Q_2 \\ \vdots \\ Q_n \Leftrightarrow Q \end{array} \right] \Rightarrow (P \Leftrightarrow Q) \quad \text{On écrit} \quad \begin{array}{l} P \Leftrightarrow Q_1 \\ \Leftrightarrow Q_2 \\ \vdots \\ \Leftrightarrow Q \end{array}$$

### Application :

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :  $\sqrt{x^2 + 1} = 2x$

### Raisonnement par disjonction des cas :

$$\triangleright \begin{cases} \bar{P} \Rightarrow Q \\ P \Rightarrow Q \end{cases} \Rightarrow Q$$

Si on montre que les deux applications  $\bar{P} \Rightarrow Q$  et  $P \Rightarrow Q$  sont vraies (et puisque la dernière proposition est une loi logique) on peut conclure que  $Q$  est vraie.

### Application :

Montrer que le reste de la division de  $n^2$  par 3 ne peut jamais être égale à 2.

### Raisonnement par absurde.

$$\triangleright \begin{cases} \bar{P} \Rightarrow Q \\ \bar{P} \Rightarrow \bar{Q} \end{cases} \Rightarrow P$$

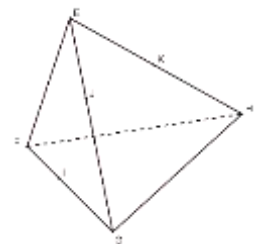
Si on veut montrer qu'une proposition  $P$  est vraie. On suppose que c'est sa négation  $\bar{P}$  qui est vraie et on montre que cela entraîne une proposition fautive. On en conclut que  $P$  est vraie (puisque  **$Q$  est fautive\*\***, l'implication  $(\bar{P} \Rightarrow Q)$  ne peut être vraie que si  $\bar{P}$  est fautive ou encore si  $P$  est vraie).

\*\*Si  $Q$  est vraie ; puisque on a une loi logique donc les deux propositions :  $\bar{P} \Rightarrow Q$  et  $\bar{P} \Rightarrow \bar{Q}$  doivent être vraies en même temps d'où (puisque  $\bar{P}$  est vraie)  $Q$  et  $\bar{Q}$  doivent être vraies en même temps d'où  $Q$  est fautive

### Application :

1- Sachant que  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$  Montrer que  $(\forall (h, k) \in \mathbb{Q}^{*2})(h\sqrt{2} + k \notin \mathbb{Q})$ .

2- Soit  $EFGH$  un tétraèdre ;  $I$  un point de  $]FG[$  ;  $J$  un point de  $]EG[$  et  $K$  un point de  $]EH[$ . Montrer que les droites  $(EI)$  et  $(JK)$  ne sont pas concourantes.



### Raisonnement par récurrence

#### Principe de récurrence :

Soit  $P(n)$  une fonction propositionnelle sur  $\mathbb{N}$ .

- S'il existe  $n_0$  tel que  $P(n_0)$  est vraie
- et si pour tout  $n \geq n_0$  on a :  $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Alors on peut conclure que :  $(\forall n \geq n_0)(P(n))$  est vraie.

En pratique pour montrer que  $(\forall n \geq n_0)(P(n))$  est vraie ; On suit les étapes suivantes :

- On montre que  $P(n_0)$  est vraie
- On suppose que  $P(n)$  est vraie ( ça s'appelle l'hypothèse de récurrence : HR)
- On montre que  $P(n+1)$  est vraie.

**Application :**

Montrer par récurrence les assertions suivantes :

$$1- (\forall n \in \mathbb{N}^*)(1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2})$$

$$2- (\forall n \in \mathbb{N}^*)(3 \mid (3^n + 4^n - 1)).$$

**IV) NEGATION D'UNE PROPOSITION QUANTIFIEE.****1) Complémentaire d'un ensemble.****Définition :**

Soit  $E$  un ensemble et  $A \subset E$  on appelle complémentaire de  $A$  l'ensemble noté  $\bar{A}$  et qui vérifie :  $A \cap \bar{A} = \emptyset$  et  $A \cup \bar{A} = E$ .

**Exemple :**

$$\bar{\bar{E}} = \emptyset \text{ et } \bar{\emptyset} = E$$

**2) Négation d'une proposition quantifiée.**

On sait que si  $P(x)$  est une fonction propositionnelle sur  $E$  alors et si  $\mathcal{V}_{P(x)} = \{x \in E / P(x) \text{ est vraie}\}$  alors :

$$\overline{\mathcal{V}_{P(x)}} = \{x \in E / P(x) \text{ est fausse}\} = \{x \in E / \overline{P(x)} \text{ est vraie}\} = \mathcal{V}_{\overline{P(x)}}$$

$$\text{Or on sait que : } (\forall x \in E)(P(x) \text{ est vraie}) \Leftrightarrow \mathcal{V}_{P(x)} = E \quad \text{et } (\exists x \in E)(P(x) \text{ est vraie}) \Leftrightarrow \mathcal{V}_{P(x)} \neq \emptyset$$

$$\text{et que } (P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (\bar{P} \Leftrightarrow \bar{Q})$$

donc :

$$\begin{aligned} \neg[(\forall x \in E)(P(x) \text{ est vraie})] &\Leftrightarrow \neg[\mathcal{V}_{P(x)} = E] \\ &\Leftrightarrow \mathcal{V}_{P(x)} \neq E \\ &\Leftrightarrow \overline{\mathcal{V}_{P(x)}} \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow \mathcal{V}_{\overline{P(x)}} \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow (\exists x \in E)(\overline{P(x)} \text{ est vraie}) \end{aligned}$$

**Théorème :**

Si  $P(x)$  est une fonction propositionnelle sur un ensemble  $E$  alors :

- ❶  $\neg[(\forall x \in E)(P(x) \text{ est vraie})] \Leftrightarrow [(\exists x \in E)(\overline{P(x)} \text{ est vraie})]$
- ❷  $\neg[(\exists x \in E)(P(x) \text{ est vraie})] \Leftrightarrow [(\forall x \in E)(\overline{P(x)} \text{ est vraie})]$

**Applications**

Donner les négations des propositions suivantes :

$$1-P_1: (\forall x \in \mathbb{R})[(3x^2 + 1 > 0 \text{ et } \frac{x^2}{x+1} \leq 7)]$$

$$2-P_2: (\exists x \in [1,2])(x + 1 < x^2 \Rightarrow x \in [2,3])$$

$$3-P_3: (\forall x > 1)(\text{pour que } x \text{ soit positif il suffit que } x^2 + x + 1 \text{ soit positif})$$

$$3-P_4: (\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(2x + y + 1 = 0)$$

Montrer que  $\bar{P}_4$  est vraie en déduire la valeur de vérité de  $P_4$

**Exercice 1 :**

Après avoir déterminé la valeur de vérité de  $P_4$  ; déterminer la valeur de vérité de

$$(\forall y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R})(2x + y + 1 = 0)$$

Que remarquez-vous.

**Exercice 2 :**

Montrer que  $(\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2)(a = b \Leftrightarrow [(\forall \varepsilon > 0)(|a - b| < \varepsilon)])$ .

**Propriété :**

- |   |  |
|---|--|
| ❶ | $[(\forall x \in E)(P(x)) \text{ et } (\forall x \in E)(Q(x))] \Leftrightarrow (\forall x \in E)(P(x) \text{ et } Q(x))$ |
| ❷ | $[(\exists x \in E)(P(x)) \text{ ou } (\exists x \in E)(Q(x))] \Leftrightarrow (\exists x \in E)(P(x) \text{ ou } Q(x))$ |

**Propriété :**

- |   |  |
|---|--|
| ❸ | $[(\forall x \in E)(P(x)) \text{ ou } (\forall x \in E)(Q(x)) \Rightarrow (\forall x \in E)(P(x) \text{ ou } Q(x))]$ |
| ❹ | $[(\exists x \in E)(P(x) \text{ et } Q(x)) \Rightarrow (\exists x \in E)(P(x)) \text{ et } (\exists x \in E)(Q(x))]$ |

**Remarque :**

L'implication inverse de ❸ n'est pas vraie

$(\forall n \in \mathbb{N})(n \text{ est pair ou } n \text{ est impair})$  (cette proposition est vraie) ceci n'implique pas que

$(\forall n \in \mathbb{N})(n \text{ pair})$  ou  $(\forall n \in \mathbb{N})(n \text{ impair})$  (cette proposition est fausse).

L'implication inverse de ❹ n'est pas vraie.

$[(\exists x \in \mathbb{R})(x > 0) \text{ et } (\exists x \in \mathbb{R})(x < 0)]$  (cette proposition est vraie) ceci n'implique pas que

$(\exists x \in \mathbb{R})(x > 0 \text{ et } x < 0)$  (cette proposition est fausse).

# ENSEMBLES ET APPLICATIONS

## I) LES ENSEMBLES

### 1) Activité et définition

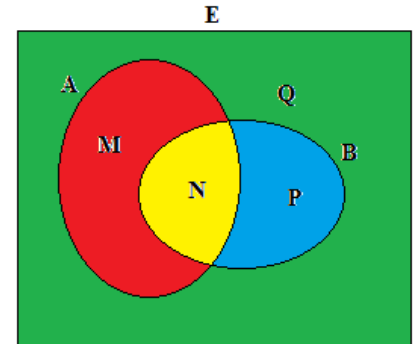
#### 1.1 Activités :

##### Activité 1 :

Le diagramme ci-contre s'appelle le diagramme de Venn.

On a :  $M = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \notin B\}$

- 1- Définir de la même façon les ensembles  $N, P$  et  $Q$  en fonction de  $A$  et  $B$ .
- 2- Déterminer les ensembles  $A$  et  $B$  en fonction des ensembles  $M, N, P$  et  $Q$
- 3- Que pouvez-vous dire des ensembles  $P$  et  $M$ .



##### Activité 2 :

Soient les ensembles :  $H = \{y \in \mathbb{R} / y = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} ; \text{où } x \in \mathbb{R}\}$  et  $G = \{y \in \mathbb{R} / y = \frac{1}{1+\sqrt{x^2+1}} ; \text{où } x \in \mathbb{R}\}$

- 1-On se propose de montrer que :  $H = ]0,1]$ .
  - a- Considérer un élément  $y_0 \in H$  et montrer que  $y_0 \in ]0,1]$
  - b- Considérer un élément  $y_0 \in ]0,1]$  et montrer que  $y_0 \in H$
- 2- Montrer que  $G \subset H$
- 3- Est-ce que  $G = H$  ?

##### Activité 3 :

Soient  $A = \{\frac{5n+8}{8n-1} / n \in \mathbb{N}\}$  et  $B = \{\frac{2n+4}{2n+1} / n \in \mathbb{N}\}$

- 1- Est ce que :  $\frac{17}{3} \in A$  ? ;  $\frac{43}{25} \in B$  ? ;  $\frac{38}{47} \in B$  ?
- 2- Déterminer les éléments communs entre  $A$  et  $B$ .
- 3- Déterminer tous les entiers naturels qui appartiennent à  $B$ .

#### 1.2 Vocabulaires

- Un ensemble  $E$  est une **collection** ou un **groupement** d'objets distincts ; ces objets s'appellent les **éléments** de cet ensemble.
- Si  $x$  est élément d'un ensemble  $E$ , on dit que  $x$  **appartient** à  $E$  et on écrit :  $x \in E$ ,
- $\emptyset$  est l'ensemble qui ne contient aucun élément, on peut le définir comme suite :  $\{x \in E \text{ et } x \notin E\}$ .
- Un ensemble peut être défini
  - **En extension**, c'est-à-dire en donnant la liste de ses éléments entre accolades.  
Par exemple :  $E = \{a, b, n, p\}$
  - **En compréhension** c'est-à-dire par une propriété caractérisant ses éléments.  
Par exemple :  $E = \{x \in \mathbb{Z} / |3k + 1| \leq 5\}$

## 2) Egalité ; inclusion ; ensemble des partie d'un ensemble

### Définition :

On dit que deux ensembles  $E$  et  $F$  sont égaux s'ils ont exactement les mêmes éléments ; on écrit  $E = F$   
 $(E = F) \Leftrightarrow (x \in E \Leftrightarrow x \in F)$

### Exemple :

$$A = \{k \in \mathbb{Z} / |2k + 1| \leq 3\} \quad B = \{-2, -1, 0, 1\}; A = B$$

### Définition :

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles quelconques.  $E$  est dit **inclus** dans  $F$  si tout élément de  $E$  est un élément de  $F$ . On dit aussi que  $E$  est un **sous-ensemble** de  $F$  ou encore que  $E$  est une **partie** de  $F$ . On note  $E \subset F$   
 $(E \subset F) \Leftrightarrow (x \in E \Rightarrow x \in F)$ .

### Activité :

Soit  $E = \{1, 2, 3\}$  déterminer tous les ensembles inclus dans  $E$ .

### Définition :

Soit  $E$  un ensemble, les parties de  $E$ , constituent un ensemble qui s'appelle ensemble des parties de  $E$  et se note  $\mathcal{P}(E)$ .

$$\mathcal{P}(E) = \{X / X \subset E\}$$

### Remarque :

$A$  est une partie de  $E$  ( $A \subset E$ ) si et seulement si  $A$  est un élément de  $\mathcal{P}(E)$

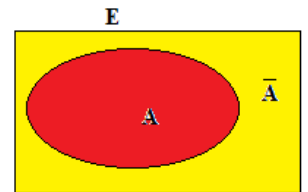
**Exercice :** Déterminer  $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{1\})))$

## 3) Complémentaire d'un ensemble

### Définition :

Soit  $A$  une partie de  $E$ , le complémentaire de  $A$  est l'ensemble constitué par tous les éléments de  $E$  qui n'appartiennent pas à  $A$ , on le note  $\bar{A}$  ou  $C_E A$ .

$$\bar{A} = \{x \in E / x \notin A\}$$



### Exemples :

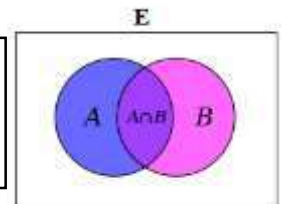
- Si  $E$  un ensemble quelconque :  $\bar{\bar{E}} = E$  et  $\bar{\emptyset} = E$
- $C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q} = \mathbb{I}$  (ensembles des irrationnelles).

## 4) Intersection ; réunion , différence de deux ensembles.

### Définition :

Soient  $A$  et  $B$  deux parties d'un ensemble  $E$  ; l'**intersection** de  $A$  et  $B$  est l'ensemble constitué par les éléments qui appartiennent à la fois à  $A$  et à  $B$ . On le note par  $A \cap B$ .

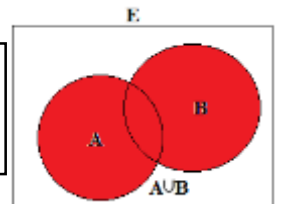
$$A \cap B = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \in B\}$$



### Définition :

Soient  $A$  et  $B$  deux parties d'un ensemble  $E$  ; la **réunion** de  $A$  et  $B$  est l'ensemble constitué par les éléments qui appartiennent à  $A$  ou à  $B$ . On le note par  $A \cup B$ .

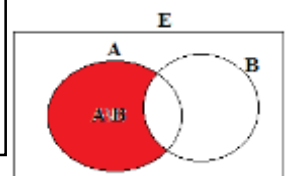
$$A \cup B = \{x \in E / x \in A \text{ ou } x \in B\}$$



### Définition :

Soient  $A$  et  $B$  deux parties d'un ensemble  $E$  ; la **différence** de  $A$  et  $B$  est l'ensemble constitué par les éléments qui appartiennent à  $A$  et qui n'appartiennent pas à  $B$ . On le note par  $A \setminus B$  ou  $A - B$

$$A \setminus B = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \notin B\}$$



## 5) Propriétés

### 5.1 Propriétés d'inclusion.

Soient  $E$ , un ensemble,  $A, B$  et  $C$  des parties de  $E$ .

- $(A = B) \Leftrightarrow \begin{cases} A \subset B \\ B \subset A \end{cases}$
- $\begin{cases} A \subset B \\ B \subset C \end{cases} \Rightarrow (A \subset C)$  *la transitivité*

### 5.2 Intersection et réunion

- $A \cap A = A$
- $A \cup A = A$
- Si  $A \subset B$  alors  $A \cap B = A$  et  $A \cup B = B$
- $A \cap B \subset A \subset A \cup B$
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$  *L'associativité*
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$  *L'associativité*
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$  *la distributivité*
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$  *la distributivité*

### 5.3 Le complémentaire

- $\bar{A} = E/A$
- $\bar{\bar{A}} = A$
- $\bar{\emptyset} = E$   $\bar{E} = \emptyset$
- $\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$  *loi de Morgan*
- $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$  *loi de Morgan*
- $(A \subset B) \Leftrightarrow (\bar{B} \subset \bar{A})$

**Exercice :** Démontrer les deux dernières assertions.

### 5.4 La différence

- $A/B = A/(A \cap B)$
- $A/B = (A \cap \bar{B})$

## 6) Notations généralisées.

Soient  $A_1, A_2 \dots A_n$  une famille de parties d'un ensemble  $E$ , (qu'on peut noter  $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ )

L'ensemble :  $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$  se note :  $\bigcup_{i=1}^n A_i$

L'ensemble :  $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$  se note :  $\bigcap_{i=1}^n A_i$

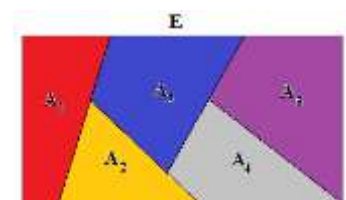
**Définition :**

Une famille  $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$  de parties d'un ensemble  $E$  s'appelle **une partition** de l'ensemble  $E$  si elle vérifie :

- $\bigcup_{i=1}^n A_i = E$
- $(i \neq j) \Rightarrow (A_i \cap A_j = \emptyset)$  on dit que les ensembles sont disjoints deux à deux.

**Exemple :**

- Les  $(A_i)_{1 \leq i \leq 5}$  dans le diagramme ci-contre, forment une partition de  $E$
- Les intervalles  $]k, k + 1]$  où  $k \in \mathbb{Z}$  forment une partition de  $\mathbb{R}$



## 7) Produit cartésien

### Définition :

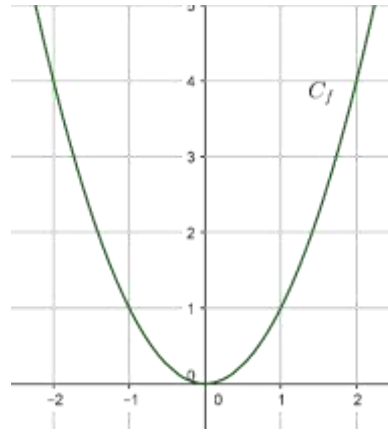
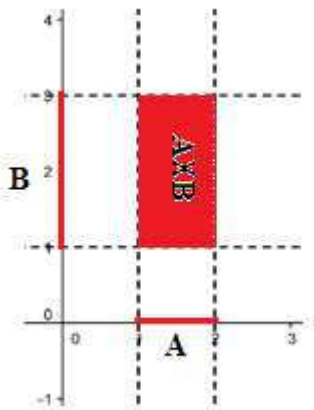
Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles ; le **produit cartésien de  $A$  et  $B$**  est l'ensemble des couples  $(x, y)$  tels que  $x \in A$  et  $y \in B$ , On le note par  $A \times B$ .

$$A \times B = \{(x, y) / x \in A \text{ et } y \in B\}$$

Le carré cartésien d'un ensemble  $A$  est l'ensemble  $A \times A$  noté  $A^2$

### Exemples

$$A = [1, 2] ; B = [1, 3]$$



$C_f$  est la courbe représentative de la fonction  $f(x) = x^2$

$$C_f = \{(x, y) / x \in \mathbb{R} \text{ et } y = x^2\}$$

### Généralisation :

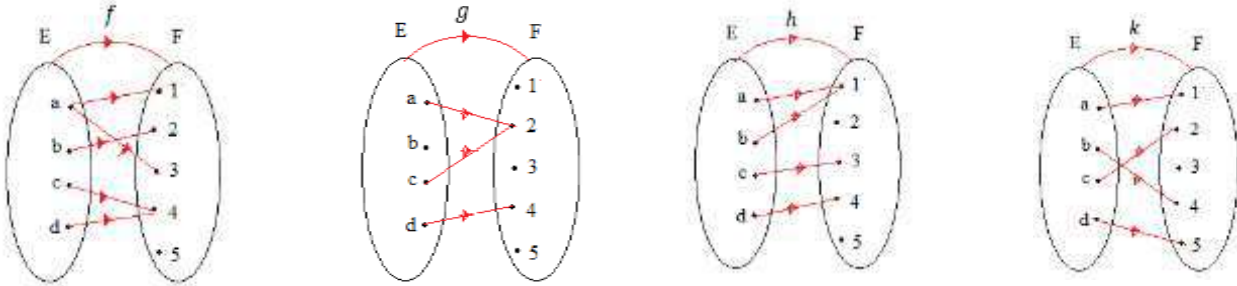
- Soit  $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$  une famille d'ensembles ;  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$  se note  $\prod_{i=1}^n A_i = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) / x_i \in A_i\}$ .
- $A \times A \times \dots \times A = A^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) / x_i \in A\}$ .

## II) LES APPLICATIONS

### 1) Activités

#### Activité 1 :

Considérons les ensembles  $E = \{a, b, c, d\}$  et  $F = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $f, g, h$  et  $k$  sont des relations de  $E$  dans  $F$ .



Que pouvez-vous dire des relations ci-dessus ?

#### Activité 2 :

Soit la fonction  $f$  définie par :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{x}{1+x^2}$$

1- Montrer que chaque élément de  $\mathbb{R}$  a une image.

2- l'implication suivante est-elle vraie : (P)  $(a \neq b) \Rightarrow (f(a) \neq f(b))$

3- Montrer que  $(\forall x \in \mathbb{R}) (f(x) \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right])$

4- Montrer que  $(\forall y \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]) (\exists x \in \mathbb{R}) (f(x) = y)$

## 2) Définitions et vocabulaires

### 2.1 Application

#### Définition :

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles non vides, on appelle application toute relation  $f$  de  $E$  dans  $F$  tel que : tout élément  $x$  de  $E$  est relié à un unique élément  $y$  de  $F$ .

#### Vocabulaire :

$$f: E \rightarrow F$$

$$x \mapsto y = f(x)$$

- L'ensemble  $E$  s'appelle **ensemble de départ** de l'application  $f$ .
- L'ensemble  $F$  s'appelle **ensemble d'arrivée** de l'application  $f$ .
- $y = f(x)$  s'appelle **l'image de  $x$**  par l'application  $f$ .
- $x$  s'appelle **l'antécédent** de  $y$  par l'application  $f$ .

### 2.2 Egalité de deux applications

#### Activité :

Soient les deux applications suivantes:

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$n \mapsto (-1)^n \cdot n$$

$$g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$n \mapsto \begin{cases} n & \text{si } n \text{ est pair} \\ -n & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Vérifier que  $(\forall n \in \mathbb{N})(f(n) = g(n))$

### Définition :

On dit que deux applications  $f$  et  $g$  sont égales si :

- Elles ont le même ensemble de départ  $E$
- Elles ont le même ensemble d'arrivée  $F$
- $(\forall x \in E)(f(x) = g(x))$ .

### Remarque :

Les 3 applications :

$$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^2$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$x \mapsto x^2$$

$$h: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$x \mapsto x^2$$

Sont différentes.

### Définition :(injection)

Soit  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ , on dit que  $f$  est **injective** de  $E$  dans  $F$  si :

$$(\forall (x_1, x_2) \in E^2)(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)) \text{ (P)}$$

Par contraposition on peut dire que :

$$(\mathbf{f \text{ est injective}}) \Leftrightarrow (\forall (x_1, x_2) \in E^2)(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$$

### Exemples :

❶  $f: \mathbb{R}/\{2\} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto \frac{3x+1}{x-2}$  Montrer que  $f$  est injective

❷  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto x^2 + 4$   $g$  est-elle injective ?

❸  $h: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{Q}$   
 $n \mapsto 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$

1- déterminer les images des entiers 1, 2, 3

2- Montrer que  $n > m \Rightarrow h(n) > h(m)$

3- En déduire que  $h$  est injective.

### Définition :(surjection)

Soit  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ , on dit que  $f$  est **surjective** de  $E$  dans  $F$  si tout élément  $y$  de  $F$  admet un antécédent dans  $E$ .

$$(\forall y \in F)(\exists x \in E)(f(x) = y)$$

Autrement dit : Pour tout  $y$  dans  $F$  l'équation  $f(x) = y$  admet au moins une solution dans  $E$ .

**Exercices :**

$$\textcircled{1} \quad f: \mathbb{R}/\{2\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{3x+1}{x-2}$$

1-  $f$  est-elle surjective de  $\mathbb{R}/\{2\}$  vers  $\mathbb{R}$ .

2- Modifier l'ensemble d'arrivée pour définir une application surjective.

$$\textcircled{2} \quad g: \mathbb{R} \rightarrow [2, +\infty[$$

$$x \mapsto x^2 - 2x + 3$$

1- Montrer que la fonction  $g$  est surjective.

2-  $g$  est-elle injective ?

$$\textcircled{3} \quad h: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{Q} \cap [1, +\infty[$$

$$n \mapsto 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \quad h \text{ est-elle surjective ?}$$

**Définition : (bijection)**

Soit  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ , on dit que  $f$  est une **bijection** de  $E$  dans  $F$  si elle **injective et surjective**

**Propriété :**

Une application est une bijection de  $E$  dans  $F$  si et seulement si :

$$(\forall y \in F)(\exists! x \in E)(f(x) = y)$$

Autrement dit : Pour tout  $y$  dans  $F$  l'équation  $f(x) = y$  admet une unique solution dans  $E$ .

**Exercice :**

$$f: [1, +\infty[ \rightarrow [2, +\infty[$$

$$x \mapsto x^2 - 2x + 3$$

1- Montrer que  $f$  est une bijection de  $[1, +\infty[$  vers  $[2, +\infty[$ .

2- Soit  $y$  un élément de  $[2, +\infty[$ , déterminer (en fonction de  $y$ ) l'élément  $x$  dans  $[1, +\infty[$  tel que  $f(x) = y$

L'application qui lie l'élément  $y$  de  $[2, +\infty[$ , à l'élément unique  $x$  de  $[1, +\infty[$  et solution de l'équation  $f(x) = y$  s'appelle : **la bijection réciproque de la bijection  $f$**  et se note :  $f^{-1}$

**Définition :**

Si  $f$  est une bijection de  $E$  dans  $F$ ; L'application de  $F$  dans  $E$  qui lie chaque élément  $y$  par l'élément  $x$  de  $E$  qui est solution unique de l'équation  $f(x) = y$  s'appelle la bijection réciproque de la bijection  $f$  et se note  $f^{-1}$ .

$f$  bijection de  $E$  dans  $F$ ;  $f^{-1}$  sa bijection réciproque on a :  $\begin{cases} f^{-1}(y) = x \\ y \in F \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = y \\ x \in E \end{cases}$

**Exercice 1:**

Déterminer la fonction réciproque de la fonction

$$f: [1, +\infty[ \rightarrow [2, +\infty[$$

$$x \mapsto x^2 - 2x + 3$$

**Exercice 2 :**

Soit la fonction :  $g: [1, +\infty[ \rightarrow ]0, \frac{1}{2}]$   
 $x \mapsto \frac{x}{1+x^2}$

Montrer que  $g$  est une application

Montrer que l'application  $g$  est une bijection de  $[1, +\infty[$  vers  $]0, \frac{1}{2}]$  puis déterminer sa bijection réciproque.

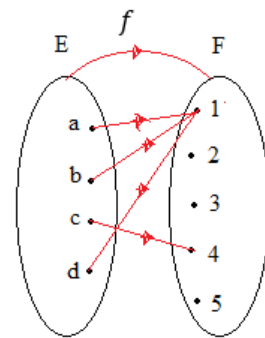
**3) L'image directe et l'image réciproque d'un ensemble par une application**

**3.1 Activité**

**Activité 1 :**

Soit  $f$  l'application dont le diagramme sagittal est représenté ci-contre

- Déterminer les images directes des ensembles  $\{a, b, c\}$ ,  $\{b, c\}$  et  $E$
- Déterminer les antécédents des éléments qui appartiennent aux ensembles :  $\{1\}$ ;  $\{1,3\}$ ;  $\{2,3\}$   $\{1,4\}$



**Activité 2 :**

Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto 2x^2 - x$

- Montrer que :  $(\forall x \in [-1,1])(f(x) \in [-\frac{3}{16}, 3])$
- Montrer que :  $(\forall y \in [-\frac{3}{16}, 3])(\exists x \in [-1,1])(f(x) = y)$

on dit que l'image de l'intervalle  $[-1,1]$  par l'application  $f$  est l'intervalle  $[-\frac{3}{16}, 3]$  et on écrit :  $f([-1,1]) = [-\frac{3}{16}, 3]$

**Activité 3 :**

Soit  $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$   
 $(x, y) \mapsto \frac{1}{x^2+y^2}$

- Déterminer les couples  $(x, y)$  qui vérifient  $h((x, y)) = 1$
- Représenter dans le plan muni d'un repère orthonormé les points  $M(x, y)$  qui vérifient  $h((x, y)) = 1$ .

**Définition :**

Soit  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ ,  $A$  une partie de  $E$  et  $B$  une partie de  $F$ .

- L'image directe de l'ensemble  $A$  est l'ensemble  $f(A) = \{f(x) \in F / x \in A\}$
- L'image réciproque de l'ensemble  $B$  est l'ensemble  $f^{-1}(B) = \{x \in E / f(x) \in B\}$

**Remarque :**

❶ Soit  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ ,  $A$  une partie de  $E$  et  $B$  une partie de  $F$ .

$$f(A) = B \Leftrightarrow \begin{cases} f(A) \subset B \\ B \subset f(A) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\forall x \in A)(f(x) \in B) \\ ((\forall y \in B)(\exists x \in A)(f(x) = y)) \end{cases}$$

②  $f(A) = \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset$  mais si  $f^{-1}(B) = \emptyset$ , on ne peut pas dire que  $B = \emptyset$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 2x^2 + 1 \quad \text{on a : } f^{-1}(\mathbb{R}^-) = \emptyset$$

③ Pour parler de l'image réciproque **d'un élément** par une application, il faut que  $f$  soit **bijective** mais on peut considérer l'image réciproque d'un ensemble quel que soit la nature de l'application  $f$ .

#### Propriété :

Soit  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ .

$f$  est surjective de  $E$  dans  $F$ , si et seulement si  $f(E) = F$ .

#### Preuve :

On a :  $f$  une application de  $E$  dans  $F$  donc :  $f(E) \subset F$  ; si de plus  $f$  est surjective alors :

$$(\forall y \in F)(\exists x \in E)(f(x) = y) \quad \text{et donc } F \subset f(E). \text{ D'où } f(E) = F$$

Réciproquement si  $f(E) = F$  alors  $F \subset f(E)$  et par suite :  $(\forall y \in F)(\exists x \in E)(f(x) = y)$  donc  $f$  est surjective.

#### Exercice

Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto \frac{3}{1+x^2}$  déterminer  $f^{-1}([1,2])$

### 4) Restriction ; Prolongement d'une application

#### Activité 1:

Soit l'application  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto 3|1 - x^2| + x$

Ecrire l'expression de  $f$  sur  $[-1,1]$

#### Activité 2 :

Soit l'application  $g: \mathbb{R}/\{1\} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto \frac{3x+1}{x-1}$

1-  $g$  est-elle bijective ?

2- A partir de  $g$ , définir une bijection de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$

#### Définition :

Soit  $f$  une application de  $E$  dans  $F$

- Soit  $A$  une partie de  $E$ , l'application définie de  $A$  vers  $F$ , qui associe à tout élément  $x$  de  $A$  l'élément  $f(x)$ , s'appelle **la restriction de  $f$  sur l'ensemble  $A$** .
- Soit  $\Gamma$  un ensemble tel que  $E \subset \Gamma$ , l'application définie de  $\Gamma$  vers  $F$ , qui associe à tout élément  $x$  de  $E$  l'élément  $f(x)$ , s'appelle **un prolongement de  $f$  sur l'ensemble  $\Gamma$** .

### 7) La partie entière d'un réel.

#### Théorème :

On admet la proposition suivante :  $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists ! k \in \mathbb{Z})(k \leq x < k + 1)$ .

**Définition :**

L'entier relatif  $k$  qui vérifie le théorème précédent s'appelle **la partie entière du réel  $x$**  ; on le note  $[x]$  ou  $E(x)$ .  
L'application qui lie chaque élément  $x$  de  $\mathbb{R}$  à  $E(x)$  dans  $\mathbb{Z}$  s'appelle l'application partie entière.

**Exemple :**

$$E(\sqrt{2}) = 1 ; E(\pi) = 3 ; E(-\pi) = -4 ; (\forall n \in \mathbb{N}^*) \left( E\left(\frac{1}{n}\right) = 0 \right) ; (\forall k \in \mathbb{Z})(E(k) = k)$$

**Exercices :**

❶ Montrer que :  $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall m \in \mathbb{Z})(E(m+x) = m + E(x))$ .

❷ Vérifier par un contre-exemple que :  $E(x+y) \neq E(x) + E(y)$

❸ Soit l'application 
$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto E\left(3x + \frac{1}{2}\right) + 1$$

1- Vérifier que  $h$  n'est pas injective.

2- Donner la restriction de  $h$  sur l'intervalle  $[0, \frac{1}{3}[$ .

3- Déterminer :  $h^{-1}\{4\}$  et  $h^{-1}\{2\}$  ;  $h$  est-elle surjective ?.

**8) Composition de deux applications.****Activité :**

Soient les deux applications :

$$f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad g: \mathbb{R}/\{1\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{1}{x^2} \quad \text{et} \quad x \mapsto \frac{x}{x-1}$$

1- Déterminer  $f(g(3)) ; f(g(-1)) ; g(f(3))$

2- Donner la condition sur  $x$  pour que le réel  $g(f(x))$  existe.

3- Donner la condition sur  $x$  pour que le réel  $f(g(x))$  existe.

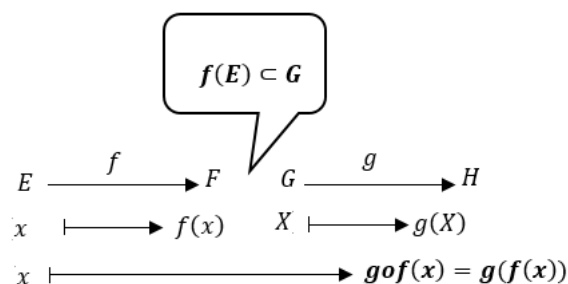
4- Déterminer les application  $f \circ g$  et  $g \circ f$ .

**Définition :**

Soient  $f$  une application de  $E$  dans  $F$  et  $g$  une application de  $G$  dans  $H$  tel que :  $f(E) \subset G$ , l'application  $h$  définie de  $E$  vers  $H$  par : pour tout  $x$  dans  $E$ ,  $h(x) = g(f(x))$  s'appelle la composition des deux applications  $f$  et  $g$  et se note  $g \circ f$ .

$$(\forall x \in E)((g \circ f)(x) = g(f(x)))$$

On peut représenter la composition par :



**Propriété :**

- La composition de deux applications injectives est une application injective
- Si  $F = G$  alors La composition de deux applications surjectives est une application surjective
- La composition de deux bijections  $f$  et  $g$  est une bijection et  $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$

**Preuves :** En exercice.

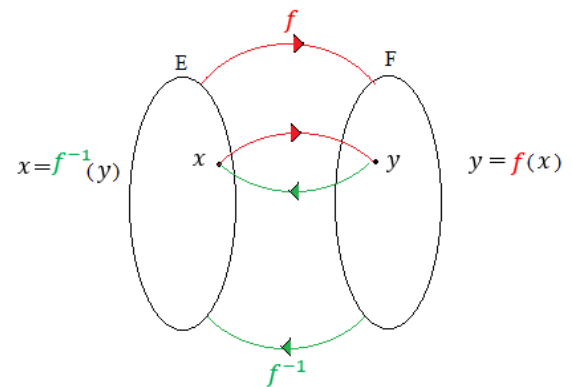
**Propriété :**

- La composition des applications est associative :  $(fog)oh = fo(goh)$
- La composition des applications n'est pas commutative :  $fog \neq gof$

**Propriété :**

Si  $f$  est une bijection de  $E$  dans  $F$  et  $f^{-1}$  sa bijection réciproque :

- $(\forall x \in E)((f^{-1}of)(x) = x)$  ,  $f^{-1}of$  s'appelle **l'identité de  $E$**  et s note  $\mathcal{I}d_E$
- $(\forall x \in F)(fof^{-1})(x) = x)$  ,  $fof^{-1}$  s'appelle **l'identité de  $F$**  et s note  $\mathcal{I}d_F$
- Si  $E = F$  alors :  $f^{-1}of = fof^{-1} = \mathcal{I}d_E$



# GENERALITES SUR LES FONCTIONS

## I) ACTIVITES ET RAPPELLES

### 1.1 Ensemble de définition

#### Activités 1:

Déterminer les ensembles de définition des fonctions suivantes définies de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  :

1.  $f(x) = \frac{2\sqrt{x+1}}{3x^2+x-4}$
2.  $g(x) = \frac{\sqrt{2x+1}+3x}{\sqrt{x-x^2}}$
3.  $h(x) = \frac{\tan x}{2\sin x+1}$
4.  $k(x) = \frac{3x+1}{x-E(x)}$
5.  $u(x) = \sqrt{E(x) - x}$
6.  $v(x) = \sqrt{x-1} - \sqrt{1-x}$ .

#### Activité 2 :

Soit  $ABCD$  un rectangle tel que :  $AB = 5\text{cm}$  et  $BC = 3\text{cm}$

$M$  un point qui part de  $A$  et se déplace sans arrêt sur  $ABCD$  ; considérons  $f(x)$  la distance  $MC$ .

1- Calculer :  $f(0), f(5), f(13)$  et  $f(16)$ .

2- a) Déterminer graphiquement les variations de  $f$  sur  $[0,16]$ .

b) Dresser le tableau de variation de  $f$  sur  $[0,16]$ .

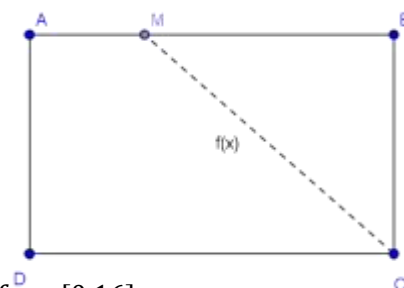
c) Déterminer –suivant le tableau de variation- les extremums de la fonction  $f$  sur  $[0,16]$ .

3- Montrer que la restriction de  $f$  sur des intervalles de  $[0,16]$ , sont des fonctions affines et déterminer ses expressions.

4- Ecrire les expressions de  $f$  sur  $[0,5]$  et sur  $[13,16]$ .

5- a) Vérifier que  $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(f(x+16) = f(x))$

b) Déterminer  $f(100), f(1000)$  et  $f(2017)$ .



#### Activité 3 :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{Soit } x \mapsto \frac{x^2+1}{|x|-1}$$

1- Déterminer  $\mathcal{D}_f$ .

2- Etudier la parité de  $f$ .

3- Donner la restriction de  $f$  sur  $\mathbb{R}^+$ .

4- Déterminer les variations de  $f$  sur  $[0,1[$  sur  $]1; 1 + \sqrt{2}]$  et sur  $[1 + \sqrt{2}, +\infty[$ .

5- Dresser le tableau de variation de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

## II) NOTIONS DE BASE

### 1) Ensemble de définition

**Définition :**(fonction)

On appelle **fonction numérique à variable réel** toute relation d'une partie  $E$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  tel que chaque élément  $x$  de  $E$  à **au plus une image dans  $\mathbb{R}$** .

Si  $f(x) = y$  alors :

- $y$  est l'image de  $x$  par la fonction  $f$
- $x$  est l'antécédent de  $y$  par la fonction  $f$ .

**Définition :**(Ensemble de définition d'une fonction)

Soit  $f$  une fonction numérique à variable réel de  $E$  dans  $\mathbb{R}$ , les éléments de  $E$  qui ont une image par  $f$  forment un ensemble qu'on appelle ensemble de définition de  $f$  et on le note  $\mathcal{D}_f$

$$\mathcal{D}_f = \{x \in E / f(x) \in \mathbb{R}\}$$

**Exercice :**

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction :  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto \sqrt{x - \sqrt{x + 1}}$

**Remarque :**

Si  $f$  est une fonction dont l'ensemble de définition est  $\mathcal{D}_f$ , l'application définie de  $\mathcal{D}_f$  vers  $\mathbb{R}$  s'appelle **l'application associée à la fonction  $f$** .

**2) Représentation graphique d'une fonction.**

**Définition :**(Graphe d'une fonction)

Soit  $f$  une fonction numérique à variable réel, **le graphe de la fonction  $f$**  est l'ensemble des couples  $(x, f(x))$  tels que  $x \in \mathcal{D}_f$  ; on le note  $\mathcal{G}_f$ .

$$\mathcal{G}_f = \{(x, f(x)) / x \in \mathcal{D}_f\}$$

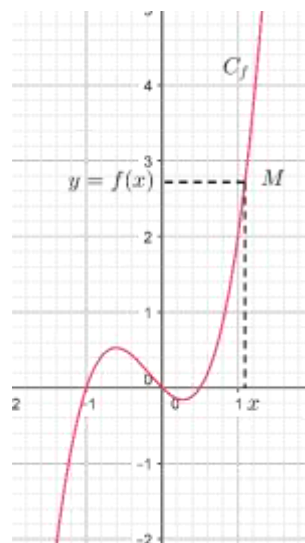
Si le plan est rapporté à un repère (souvent orthogonal), chaque couple du graphe de  $f$  peut être représenté par un point  $M$ , l'ensemble des points ainsi définie forme une **courbe** dans le plan qu'on appelle **la courbe représentative de la fonction  $f$** , ou encore **la représentation graphique de la fonction  $f$**  on la note par  $\mathcal{C}_f$

**Définition :**

Le plan étant rapporté à un repère  $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j})$ , la représentation graphique de la fonction  $f$  est l'ensemble des points  $M(x, f(x))$  tels que  $x \in \mathcal{D}_f$ .

$$\mathcal{C}_f = \{M(x, f(x)) / x \in \mathcal{D}_f\}$$

$$M(x, y) \in \mathcal{C}_f \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathcal{D}_f \\ y = f(x) \end{cases}$$

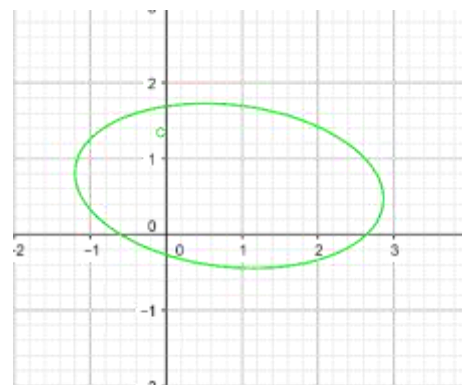
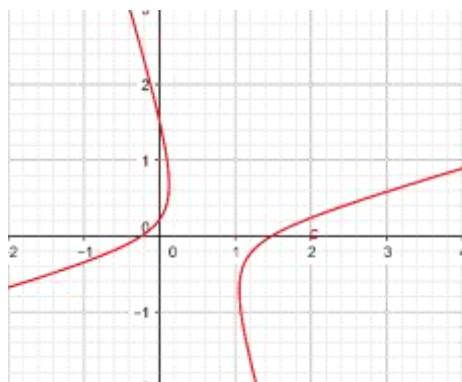


**Remarque :**

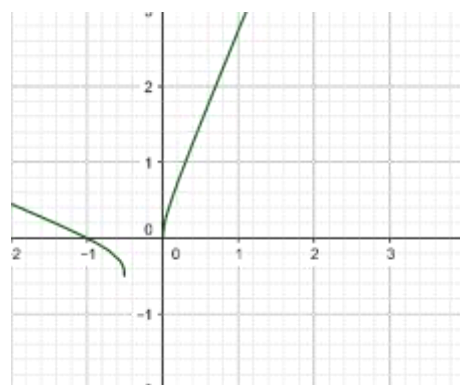
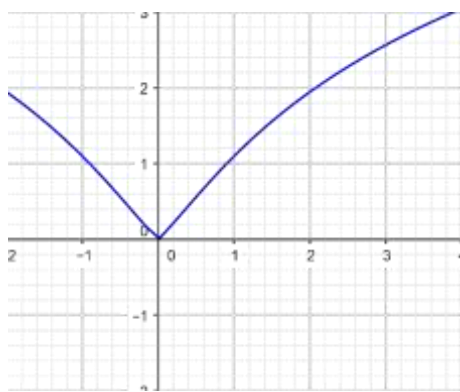
Pour qu'une courbe dans le plan soit une courbe d'une fonction numérique à variable réelle il faut et il suffit que **chaque parallèle à l'axe des ordonnées coupe cette courbe en au plus un point.**

**Exemples :**

Les courbes suivantes ne sont pas les courbes des fonctions numériques à variable réelle.



Les courbes suivantes sont les courbes des fonctions numériques à variable réelle.



III) FONCTIONS : PAIRE ; IMPAIRE ; PERIODIQUE

1) Activités :

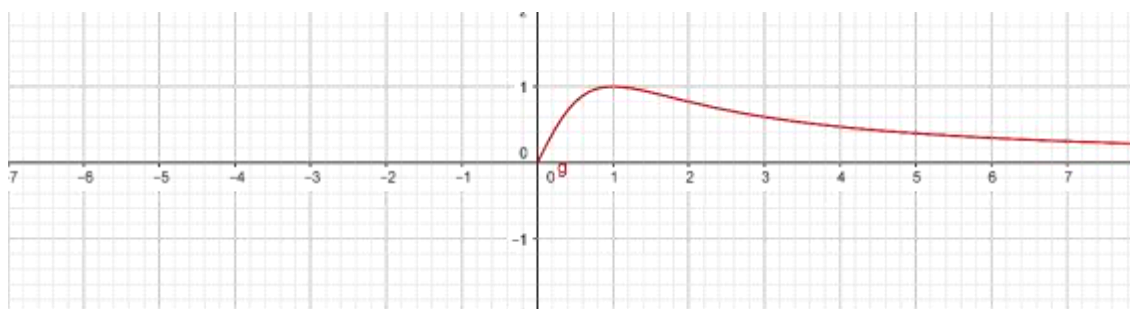
**Activité :**

Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto 3x - E\left(3x + \frac{1}{2}\right)$  où  $E$  désigne la partie entière.

- 1- a) Supposons qu'il existe un réel  $T$  qui vérifie (P):  $(\forall x \in \mathbb{R})(f(x + T) = f(x))$  ; montrer que  $3T \in \mathbb{Z}$ .
- b) En déduire la valeur  $p$  du plus petit réel strictement positif qui vérifie (P)
- 2- Inversement pour la valeur  $p$  trouvée en 1-b) : montrer que  $(\forall x \in \mathbb{R})(f(x + p) = f(x))$

**Activité 2 :**

Compléter la courbe ci-dessous de la fonction  $h$  sachant que :  $h(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ .



**Activité 3 :**

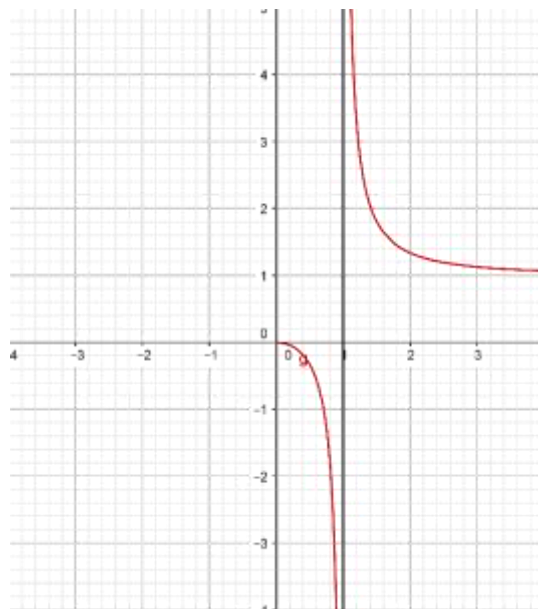
La courbe ci-contre est une partie de la courbe de la fonction

$$\text{définie par : } h(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$$

1- Déterminer l'ensemble définition de la fonction  $h$

2- Déterminer la nature de  $h$ .

3- Compléter la courbe  $C_h$

**2) Fonction paires, fonctions impaires****2.1 Fonction paire :****Définition :**

Soit  $f$  une fonction dont l'ensemble de définition est  $D_f$ , on dit que la fonction  $f$  est paire si :

- $(\forall x \in \mathbb{R})(x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f)$
- $(\forall x \in D_f)(f(-x) = f(x))$

**Propriété :**

Dans le plan muni d'un repère orthogonal, la courbe représentative d'une fonction paire est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées**.

**Preuve :** (en exercice)

**2.2 Fonctions impaire :****Définition :**

Soit  $f$  une fonction dont l'ensemble de définition est  $D_f$ , on dit que la fonction  $f$  est impaire si :

- $(\forall x \in \mathbb{R})(x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f)$
- $(\forall x \in D_f)(f(-x) = -f(x))$

**Propriété :**

La courbe représentative d'une fonction impaire est **symétrique par rapport à l'origine du repère**.

**Preuve :** (en exercice).

**3) Fonctions périodiques :****Définition :**

Soit  $f$  une fonction dont l'ensemble de définition est  $D_f$ , on dit que la fonction  $f$  est **périodique** s'il existe un réel  $T$  non nul qui vérifie :

- $(\forall x \in \mathbb{R}) \left( x \in D_f \Rightarrow \begin{cases} x + T \in D_f \\ x - T \in D_f \end{cases} \right)$
- $(\forall x \in D_f)(f(x + T) = f(x))$

Tout réel  $T$  qui vérifie la définition s'appelle **une période de la fonction  $f$** .

Le plus petit réel  $p$  **strictement positif** qui vérifie la définition s'appelle **la période de la fonction  $f$** .

**Exemples :**

➤ Dans l'activité précédente :  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto 3x - E\left(3x + \frac{1}{2}\right)$   $f$  est périodique de période  $\frac{1}{3}$

➤ Soit la fonction  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)+1}$

- 1- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction  $g$ .
- 2- Montrer que la fonction  $g$  est périodique et déterminer sa période.

**Propriété :**

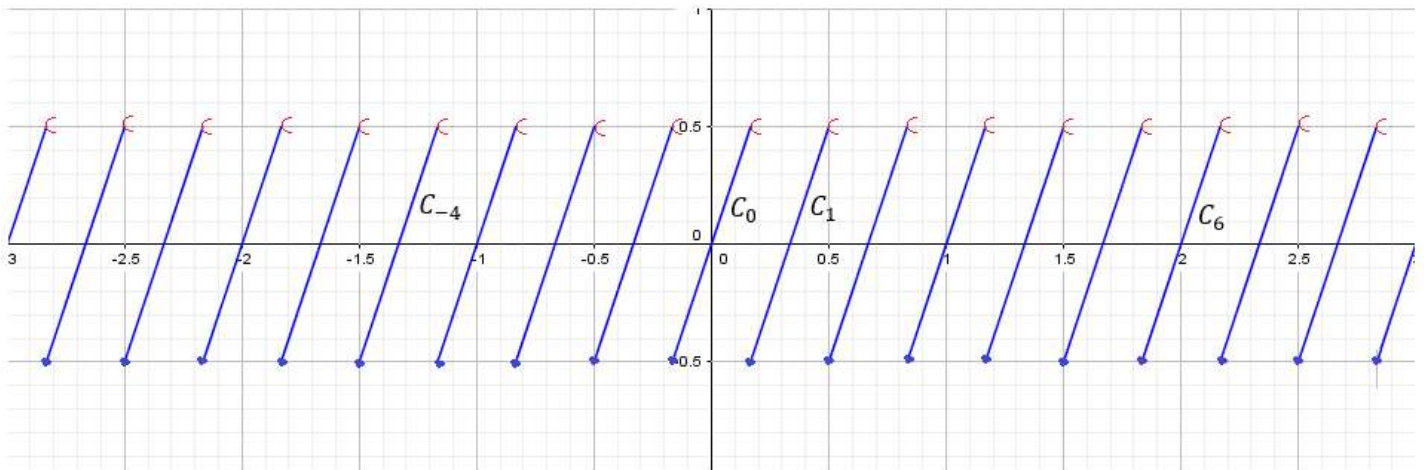
Si  $f$  est une fonction périodique de période  $T$  alors pour tout  $k$  dans  $\mathbb{Z}$ ,  $kT$  est une période de  $f$ .

**Exercice :** Démontrer par récurrence sur  $k$  la propriété précédente.

Envisager deux cas :  $k = n$  et  $k = -n$  où  $n$  est un entier naturel.

**Courbe d'une fonction périodique :**

**Activité :** La courbe ci-dessous est la courbe de la fonction  $f(x) = 3x - E\left(3x + \frac{1}{2}\right)$  qui est périodique de période  $\frac{1}{3}$



$C_k$  est la courbe représentative de la restriction de la fonction  $f$  sur  $D_k = \left[-\frac{1}{6} + k \times \frac{1}{3}; \frac{1}{6} + k \times \frac{1}{3}\right[$

- 1- Quelle est la longueur de  $D_k$ .
- 2- Déterminer graphiquement les transformations qui transforment  $C_0$  en  $C_1$ , en  $C_6$  et  $C_{(-4)}$
- 3- Conjecturer la transformation qui transforme  $C_0$  en  $C_k$ .

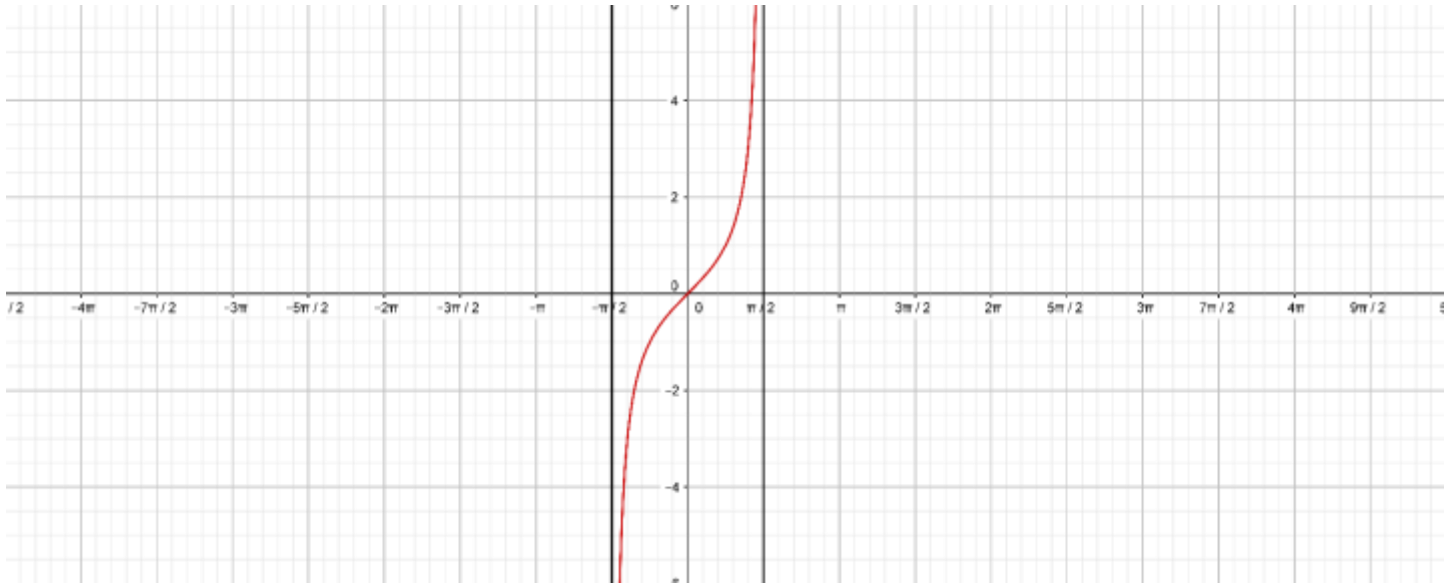
**Théorème :**

Soit  $f$  une fonction périodique de période  $p$  et dont l'ensemble de définition  $D_f$ . On pose :  
 $D_k = [a_0 + kT, a_0 + (k + 1)T[ \cap D_f$  où  $a_0$  est un élément de  $D_f$  et  $C_k$  la courbe de la restriction de  $f$  sur  $D_k$ .  
 $C_k$  est l'image de  $C_0$  par la translation  $t_k$  de vecteur  $\vec{u}_k \begin{pmatrix} kT \\ 0 \end{pmatrix}$

**Preuve :** En exercice.

**Remarque :**

La courbe  $C_f$  est la réunion de toutes les courbes  $C_k$  où  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $C_f = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} C_k$

**Exercice :**

La courbe ci-dessus est la courbe de la restriction de la fonction  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)+1}$  sur l'intervalle  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

On a montré que cette fonction est périodique de période  $\pi$ , continuer à tracer la courbe  $C_f$  sur  $[-2\pi, 2\pi]$

**IV) FONCTION MAJOREE, MINOREE, BORNEE****1) Activité**

**Activité 1 :** Soit la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$

En utilisant la forme canonique du trinôme  $f$ , montrer que  $(\forall x \in \mathbb{R})(f(x) \geq -1)$

**Activité 2 :**

Soit la fonction  $h$  définie par :  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$

1- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction  $h$  et étudier sa parité.

2- Construire la courbe de la restriction de  $h$  sur  $[0, +\infty[$ , puis construire  $C_f$

3-Montrer que  $(\forall x \in \mathbb{R})(h(x) < 1)$  et que  $(\forall x \in \mathbb{R})(h(x) > -1)$

4- La fonction  $h$  admet-elle un maximum absolu ?

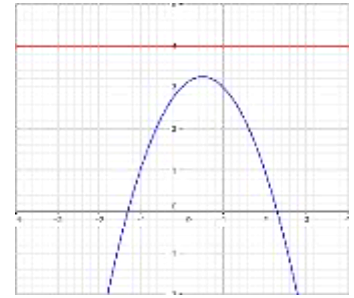
**Définitions**

Soit  $f$  une fonction numérique dont l'ensemble de définition est  $D_f$ , et  $D$  une partie de  $D_f$ .

- On dit que :  $f$  est **majorée** sur  $D$  si  $(\exists M \in \mathbb{R})(\forall x \in D)(f(x) \leq M)$
- On dit que :  $f$  est **minorée** sur  $D$  si  $(\exists m \in \mathbb{R})(\forall x \in D)(f(x) \geq m)$
- On dit que  $f$  est **bornée** sur  $D$  si elle est majorée et minorée sur  $D$ .

**Remarque :**

- Quand une fonction est majorée sur son ensemble de définition, on se contente de dire qu'elle est majorée.
- Un majorant  $M$  d'une fonction  $f$  sur  $D_f$  n'est pas nécessairement extremum absolu. Dans la courbe ci-contre 4 est un majorant de  $f$  mais pas un extremum absolu (Il n'y a pas de réel  $\alpha$  qui vérifie que  $f(\alpha) = 4$ )



**Exemple :**

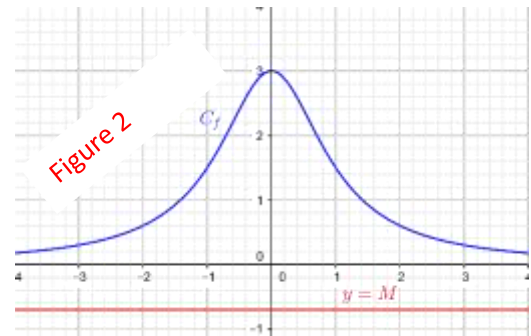
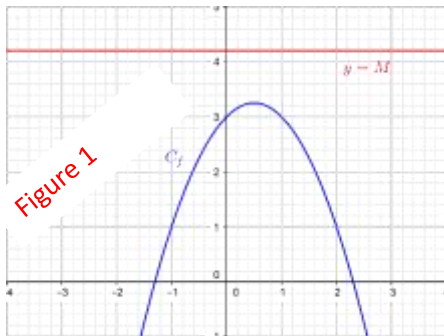
- La fonction  $h$  dans l'activité 2 est majorée par 1 et minorée par  $-1$ .
- La fonction  $f$  dans l'activité 1 est minorée.  
Montrer par absurde que  $f$  ne peut pas être majorée.

**Propriété :**

- Si  $f$  est une fonction majorée par  $M$  alors elle majorée par tout nombre  $M'$  tel que :  $M' \geq M$ .
- Si  $f$  est une fonction minorée par  $m$  alors elle majorée par tout nombre  $m'$  tel que :  $m' \leq m$ .

**Interprétations géométriques :**

- La courbe d'une fonction majorée par  $M$  est au-dessous de la droite  $D: y = M$  (figure 1)
- La courbe d'une fonction minorée par  $m$  est au-dessus de la droite  $D: y = m$  (figure 2)



**Propriété :**

Soit  $f$  une fonction numérique dont l'ensemble de définition est  $D_f$  ;  $f$  est bornée si et seulement si :  
 $(\exists \alpha \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D_f)(|f(x)| \leq \alpha)$

**Preuve :** (en exercice)

V) COMPARAISON DE DEUX FONCTIONS

1) Signe d'une fonction

**Activité :**

Soit la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = 2x^2 + x + 1$   
 Montrer que  $(\forall x \in \mathbb{R})(f(x) \geq 0)$

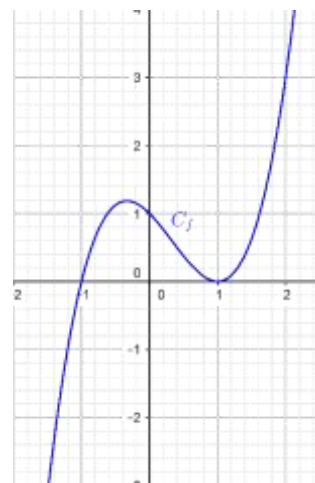
**Définition :**

Soit  $f$  une fonction dont l'ensemble de définition est  $D_f$ , et  $D$  une partie de  $D_f$ .

- On dit que :  $f$  est positive sur  $D$  si  $(\forall x \in D)(f(x) \geq 0)$ .
- On dit que :  $f$  est négative sur  $D$  si  $(\forall x \in D)(f(x) \leq 0)$ .

**Remarque :**

- Si  $f$  est positive sur  $D_f$  on dit que  $f$  est positive et on écrit :  $f \geq 0$
- Si  $f$  est négative sur  $D_f$  on dit que  $f$  est négative et on écrit :  $f \leq 0$
- Une fonction positive est minorée par 0, par contre une fonction négative est majorée par 0.



**Exemple :**

Sur la courbe ci-contre la fonction  $f$  change de signe :  
 $f$  est négative sur  $] - \infty, -1]$  et positive sur  $[-1, +\infty[$

**Définition :**

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions dont les domaines de définitions sont respectivement  $D_f$  et  $D_g$  et  $D$  une partie commune entre  $D_f$  et  $D_g$  ( $D \subset D_f \cap D_g$ )

On dit que  $f$  est plus grande que  $g$  sur  $D$  si  $(\forall x \in D)(f(x) \geq g(x))$  et on écrit  $f \geq g$  sur  $D$

**Interprétation géométrique :**

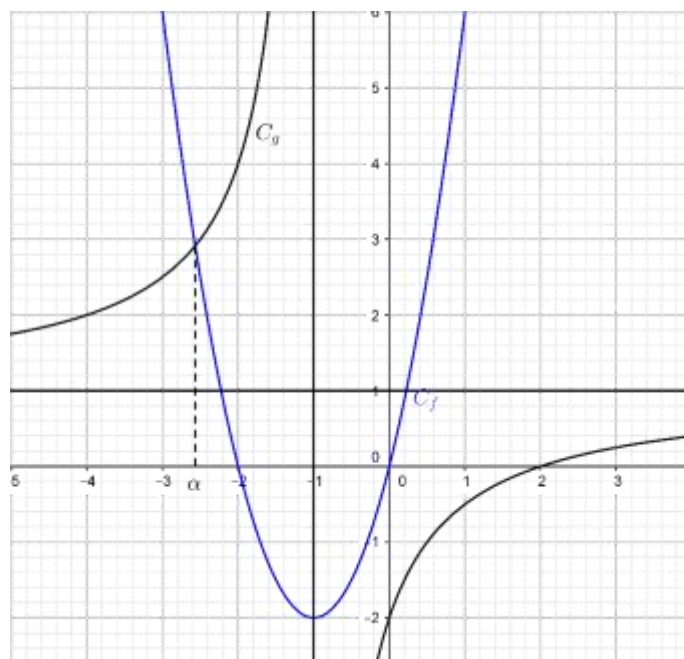
Si  $f \geq g$  sur  $D$  alors  $C_f$  est au-dessus de  $C_g$

**Exemple :**

Sur la figure ci-contre  $C_f$  est la courbe de la fonction  
 $f(x) = 2x^2 + 4x$  et  $C_g$  est la courbe représentative de

la fonction  $g(x) = \frac{x-2}{x+1}$

- Sur  $[\alpha, -1[$  on a :  $g \geq f$ .
- Sur  $] - \infty, \alpha] \cup ] - 1, +\infty[$  on a  $f \geq g$



**Exercice :**

Considérons les fonctions  $f(x) = x^2 - 2x$  et  $g(x) = \frac{2x}{x-1}$

- 1- Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $f(x) = g(x)$
- 2- Construire les courbes  $C_f$  et  $C_g$
- 3- Nous définissons le réel  $Sup(a, b)$  par :  $Sup(a, b) = a$  si  $a \geq b$ .

Soit la fonction  $h$  définie par :

$$h(x) = \sup(f(x), g(x))$$

- a) Donner une expression de  $h$  en fonction de  $x$
- b) Construire la courbe représentative de  $h$ .

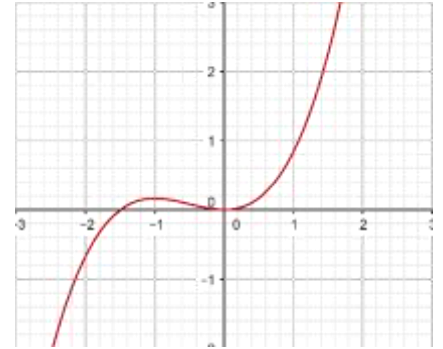
## VI) VARIATION D'UNE FONCTION ET EXTREMUMS

### 1) Activités et définition.

#### Activité 1 :

A partir de la courbe ci-contre d'une fonction  $f$ ,

- 1-Déterminer la monotonie de  $f$  sur les intervalles  $]-\infty, -1]$ ;  $[-1, 0]$  et sur  $[0, +\infty[$
- 2-Dresser le tableau de variations de la fonction  $f$ .
- 3-Déterminer les extremums de la fonction  $f$  et leurs natures.



#### Activité 2 :

Soit la fonction

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto |x^2 + x - 2|$$

- 1- Ecrire des expressions de la fonction  $g$  sans la valeur absolue.
- 2- Etudier la monotonie de la fonction  $g$
- 3- Dresser le tableau de variation de la fonction  $g$ .
- 4- Déterminer les extremums de la fonction  $f$  et leurs natures.

#### Activité 3 :

Soit la fonction

$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 + 4x + 1$$

Montrer que la fonction  $h$  n'admet pas de maximum absolu.

#### Définitions : (Monotonie d'une fonction)

Soit  $f$  une fonction numérique à variable réelle dont l'ensemble de définition est  $D_f$ .  $I$  un intervalle de  $D_f$ .

- On dit que :  $f$  est **croissante** sur  $I$  si :  $(\forall (a, b) \in I^2)(a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b))$
- On dit que :  $f$  est **strictement croissante** sur  $I$  si :  $(\forall (a, b) \in I^2)(a < b \Rightarrow f(a) < f(b))$
- On dit que :  $f$  est **décroissante** sur  $I$  si :  $(\forall (a, b) \in I^2)(a \leq b \Rightarrow f(a) \geq f(b))$
- On dit que :  $f$  est **strictement décroissante** sur  $I$  si :  $(\forall (a, b) \in I^2)(a < b \Rightarrow f(a) > f(b))$
- On dit que  $f$  est **monotone** sur l'intervalle  $I$  s'il est croissante ou bien décroissante sur  $I$ .
- On dit que  $f$  est **strictement monotone** sur l'intervalle  $I$  s'il est strictement croissante ou bien strictement décroissante sur  $I$ .

### 2) Taux de variation d'une fonction

#### 2.1 Définition

##### Définition :

Soit  $f$  une fonction dont  $D_f$  est son ensemble de définition ;  $I$  un intervalle inclus dans  $D_f$ .  $a$  et  $b$  deux éléments distincts de  $I$  ; le nombre  $T_{(a,b)} = \frac{f(a)-f(b)}{a-b}$  s'appelle **le taux d'accroissement de la fonction  $f$  entre  $a$  et  $b$** .

##### Théorème :

Soit  $f$  une fonction dont  $D_f$  est son ensemble de définition ;  $I$  un intervalle inclus dans  $D_f$ .

- la fonction  $f$  est **croissante sur  $I$**  si et seulement si  $(\forall (a, b) \in I^2)(a \neq b \Rightarrow T_{(a,b)} \geq 0)$
- la fonction  $f$  est **décroissante sur  $I$**  si et seulement si  $(\forall (a, b) \in I^2)(a \neq b \Rightarrow T_{(a,b)} \leq 0)$

**Preuve :** En exercice

**Exercices :**

- 1- Etudier la monotonie de la fonction  $f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{x}$  sur  $\mathbb{R}$ .
- 2- Etudier la monotonie de la fonction  $g(x) = \frac{x}{x^2+1}$  sur  $[0,1]$  et sur  $[1, +\infty[$

**2.2 Monotonie et parité :**

**Propriété :**

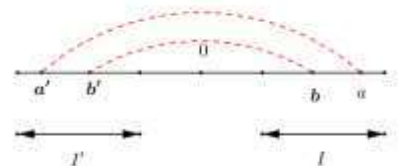
- Soit  $f$  une fonction **paire** dont le domaine de définition est  $D_f, I$  un intervalle dans  $D_f \cap \mathbb{R}^+$ , et  $I'$  son symétrique par rapport à 0.
  - si  $f$  est croissante sur  $I$  alors elle est décroissante sur  $I'$
  - si  $f$  est décroissante sur  $I$  alors elle est croissante sur  $I'$
- Soit  $f$  une fonction **impaire** dont le domaine de définition est  $D_f, I$  un intervalle dans  $D_f \cap \mathbb{R}^+$ , et  $I'$  son symétrique par rapport à 0.
  - si  $f$  est croissante sur  $I$  alors elle est croissante sur  $I'$
  - si  $f$  est décroissante sur  $I$  alors elle est décroissante sur  $I'$

**Preuve :**

On suppose que  $f$  est paire : soit  $I$  un intervalle dans  $D_f \cap \mathbb{R}^+$ , et  $I'$  son symétrique par rapport à 0.

Soient  $a'$  et  $b'$  deux éléments de  $I'$  alors il existe  $a$  et  $b$  dans  $I$  tels que  $a' = -a$  et  $b' = -b$

$$\begin{aligned}
 T_{f_{I'}} &= \frac{f(a')-f(b')}{a'-b'} = \frac{f(-a)-f(-b)}{(-a)-(-b)} \\
 &= \frac{f(a)-f(b)}{-(a-b)} \quad (\text{car } f \text{ est paire}) \\
 &= -T_{f_I}
 \end{aligned}$$



**3) Extremums**

**3.1 Extremums absolues**

**Activité :** Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{2}{1+x^2}$  ; Montrer que  $(\forall x \in \mathbb{R})(f(x) \leq f(0))$

**Définition :**

- Soit  $f$  une fonction numérique dont l'ensemble de définitions est  $D_f$
- On dit que  $f$  admet un maximum absolu en  $\alpha$  si :  $(\forall x \in D_f)(f(x) \leq f(\alpha))$ . On écrit :  $\max_{x \in D_f} f(x) = f(\alpha)$
  - On dit que  $f$  admet un minimum absolu en  $\alpha$  si :  $(\forall x \in D_f)(f(x) \geq f(\alpha))$ . On écrit :  $\min_{x \in D_f} f(x) = f(\alpha)$

**Remarque :**

Si  $f$  admet un maximum absolu en  $\alpha$  alors  $f(\alpha)$  est un majorant de  $f$ .

Si  $f$  admet un minimum absolu en  $\alpha$  alors  $f(\alpha)$  est un minorant de  $f$

**3.2 Extremums relatifs**

**Activité :** Soit la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = \frac{x}{1+x^2}$

- 1- Etudier la parité de la fonction  $g$ .
- 2- Etudier les variations de la fonction  $g$  sur  $[0,1]$  et sur  $[1, +\infty[$
- 3- Dresser le tableau de variation de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Définition :**

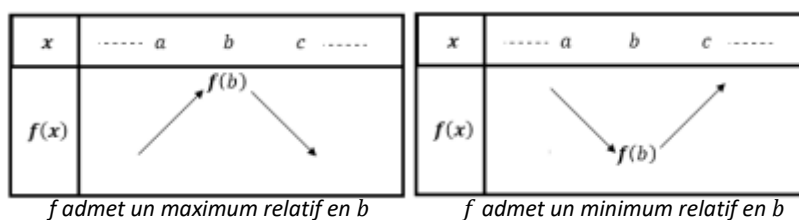
Soit  $f$  une fonction numérique dont l'ensemble de définitions est  $D_f$

- On dit que  $f$  admet un **maximum relatif** en  $\alpha$  s'il existe un **intervalle ouvert inclus dans  $D_f$**  et qui contient  $\alpha$  tel que :  $(\forall x \in I)(f(x) \leq f(\alpha))$ .
- On dit que  $f$  admet un **minimum relatif** en  $\alpha$  s'il existe un **intervalle ouvert inclus dans  $D_f$**  et qui contient  $\alpha$  tel que :  $(\forall x \in I)(f(x) \geq f(\alpha))$ .

**Propriété :**

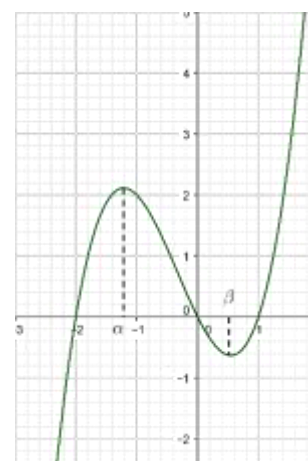
Soit  $f$  une fonction dont l'ensemble de définition est  $D_f$ ,  $a, b$  et  $c$  trois éléments de  $D_f$  tels que  $a < b < c$  et  $[a, c] \subset D_f$

- Si  $f$  est croissante sur  $[a, b]$  et décroissante sur  $[b, c]$  alors  $f$  admet un **maximum relatif en  $b$**
- Si  $f$  est décroissante sur  $[a, b]$  et croissante sur  $[b, c]$  alors  $f$  admet un **minimum relatif en  $b$**



**Interprétation géométrique :**

Sur la figure ci-contre on a :  
 $f$  admet un maximum relatif en  $\alpha$   
 et admet un minimum relatif en  $\beta$



VII) ETUDE DES FONCTIONS USUELLES (RAPPELLES)

**1)  $f(x) = ax^2 + bx + c$**

**Propriété :**

Soit  $f(x) = ax^2 + bx + c$  un trinôme ( $a \neq 0$ )

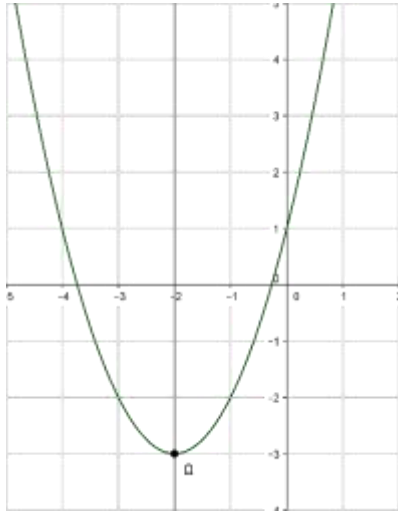
- En posant  $\alpha = \frac{-b}{2a}$  et  $\beta = f\left(\frac{-b}{2a}\right)$  on obtient pour tout réel  $x$  ;  $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$  c'est la forme canonique du trinôme  $f(x)$ .
- La courbe  $C_f$  est l'image de la courbe de la fonction  $g(x) = ax^2$  par la translation  $t$  de vecteur  $\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ .
- La courbe  $C_f$  dans un repère orthogonal est **une parabole de sommet  $\Omega(\alpha, \beta)$  et d'axe la droite  $(\Delta): x = \alpha$**

Les variations de  $f$  et sa représentation graphique peut être définies suivant le signe de  $a$  comme suite :

En posant  $\alpha = \frac{-b}{2a}$  et  $\beta = f\left(\frac{-b}{2a}\right)$

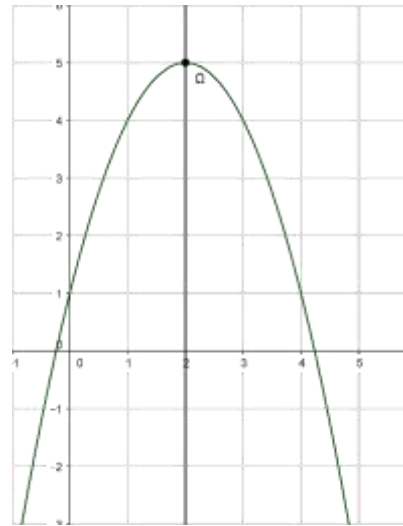
Si  $a > 0$  :

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$



Si  $a < 0$  :

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	$-\infty$



2)  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$

Propriété :

Soit  $f$  la fonction homographique définie sur  $\mathbb{R} - \{-\frac{d}{c}\}$  par  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$  où  $c \neq 0$  et  $ad - bc \neq 0$

Ils existent trois réels  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  tels que pour tout  $x$  dans  $D_f$  on a :  $f(x) = \beta + \frac{\gamma}{x-\alpha}$

La courbe  $C_f$  est l'image de la courbe  $(\Gamma)$  représentative de la fonction  $x \rightarrow \frac{\gamma}{x}$  par la translation  $t$  de vecteur  $\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ . La courbe  $C_f$  dans un repère orthogonal est une hyperbole de centre  $\Omega(\alpha, \beta)$  et d'asymptotes les droites  $(\Delta): x = -\frac{d}{c}$  et  $(\Delta'): y = \frac{a}{c}$ .

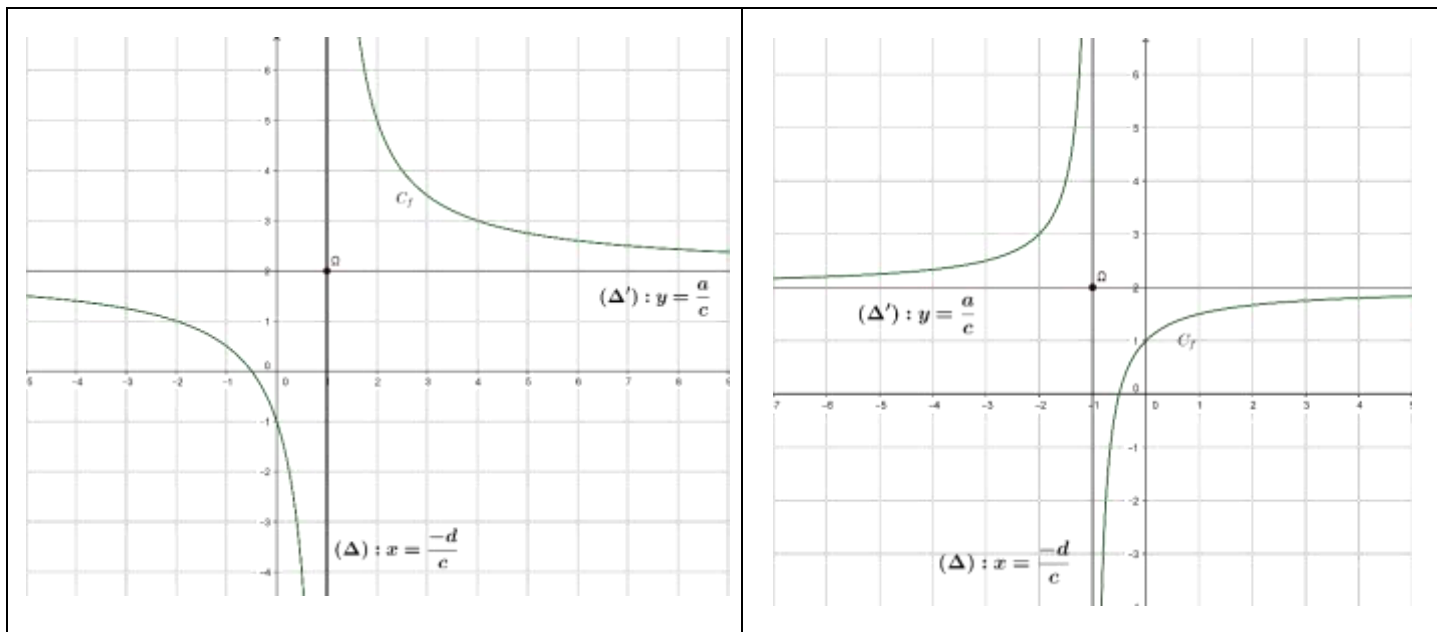
Pour les variations de  $f$  on envisage les deux cas suivants :

Si  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} < 0$  :

$x$	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$
$f(x)$	$\frac{a}{c}$	$-\infty$	$\frac{a}{c}$

Si  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} > 0$  :

$x$	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$	$\frac{a}{c}$



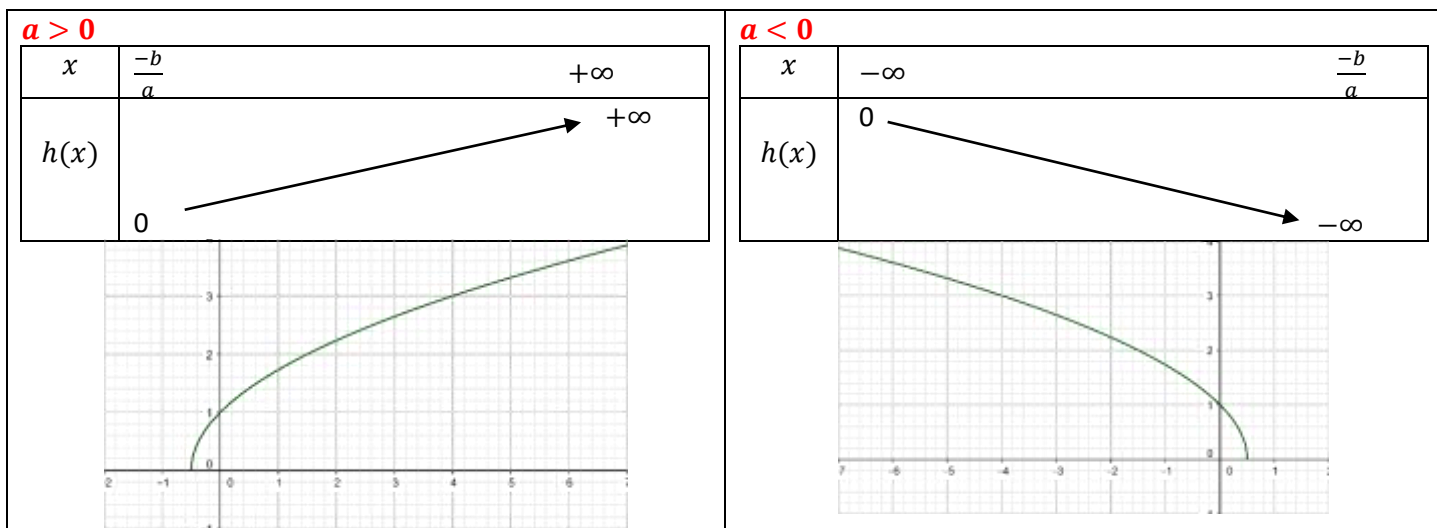
### 3) $f(x) = \sqrt{ax + b}$

**Activité :**

Soit  $g$  la fonction définie par :  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto \sqrt{ax + b}$  où  $a \neq 0$

- 1- Déterminer suivant les valeurs de  $a$  l'ensemble de définition de  $g$ .
- 2- Déterminer le taux d'accroissement de la fonction  $g$  en deux réels  $x_1$  et  $x_2$  de  $D_g$
- 3- Dresser suivant les valeurs de  $a$  le tableau de variation de la fonction  $g$ .

**Propriété :**



### 4) $f(x) = ax^3$

**Activité :**

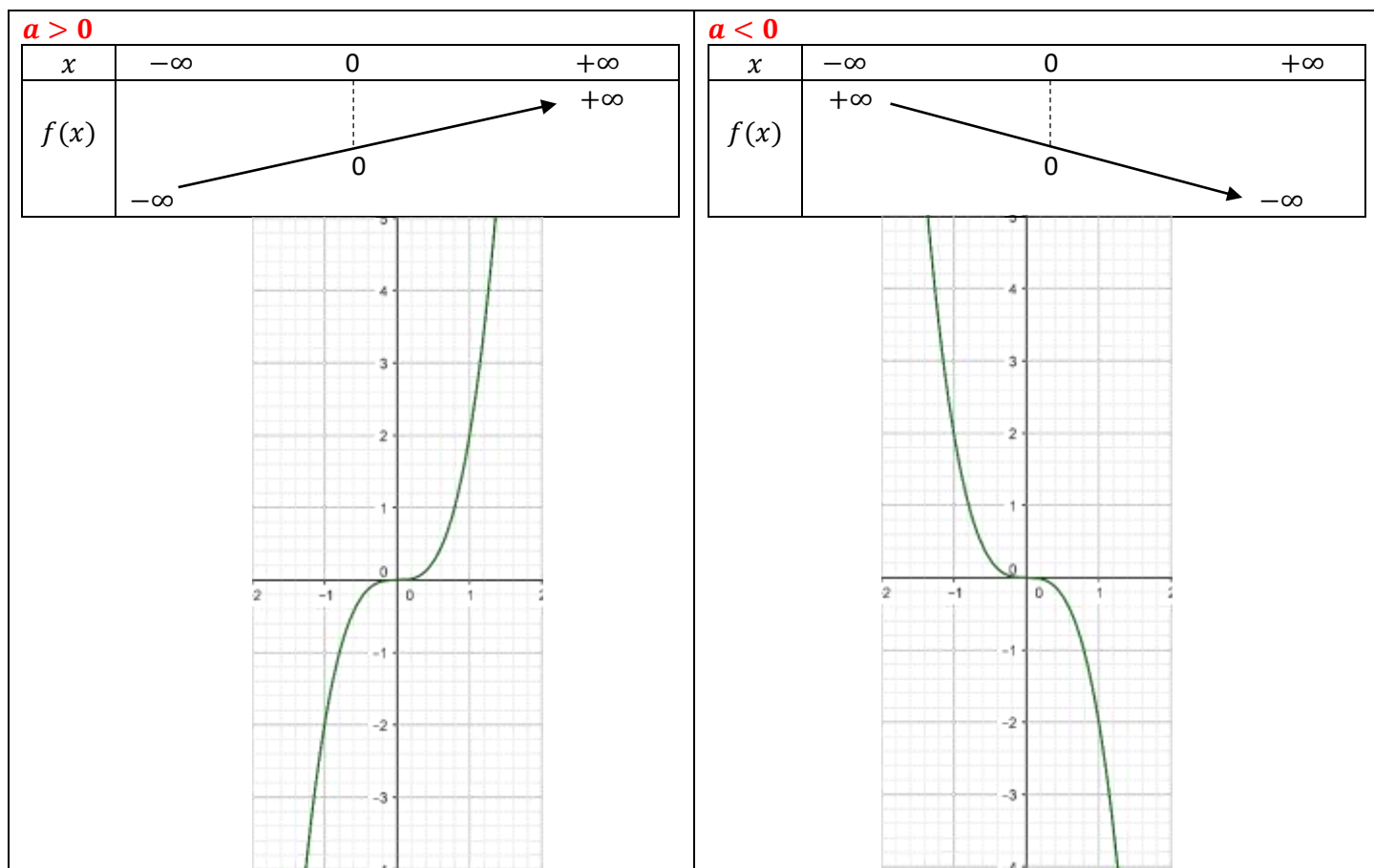
Soit  $h$  la fonction définie par :  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto ax^3$  où  $a \neq 0$

- 1- Montrer que  $h$  est une fonction impaire.

2- Montrer que le signe du taux d'accroissement de  $h$  sur  $\mathbb{R}^+$  est le signe de  $a$

3- Dresser suivant les valeurs de  $a$  le tableau de variation de  $h$

**Propriété :**



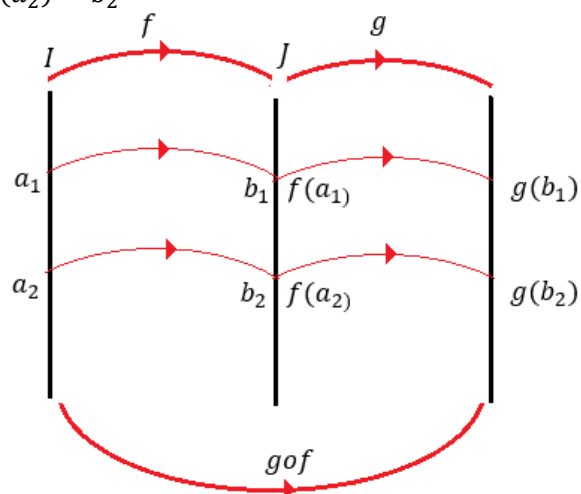
### VIII) MONOTONIE DE LA COMPOSITION DE DEUX FONCTION.

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions dans les ensembles des définitions respectifs  $D_f$  et  $D_g$  ;  $I$  un intervalle de  $D_f$  et  $J$  un intervalle de  $D_g$  tels que :  $f(I) = J$

Soient  $a_1$  et  $a_2$  deux éléments de  $I$  tels que :  $f(a_1) = b_1$  et  $f(a_2) = b_2$

On a :

$$\begin{aligned}
 T_{g \circ f} &= \frac{(g \circ f)(a_1) - (g \circ f)(a_2)}{a_1 - a_2} \\
 &= \frac{g(f(a_1)) - g(f(a_2))}{a_1 - a_2} \\
 &= \frac{g(b_1) - g(b_2)}{b_1 - b_2} \times \frac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2} \\
 &= \frac{g(b_1) - g(b_2)}{b_1 - b_2} \times \frac{f(a_1) - f(a_2)}{a_1 - a_2} \\
 &= T_g \times T_f
 \end{aligned}$$



**Propriété :**

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions dans les ensembles des définitions respectifs  $D_f$  et  $D_g$  ;  $I$  un intervalle de  $D_f$  et  $J$  un intervalle de  $D_g$  tels que  $f(I) = J$

- Si  $f$  est **croissante** sur  $I$  et  $g$  est **croissante** sur  $J = f(I)$  alors  $g \circ f$  est **croissante** sur  $I$ .
- Si  $f$  est **décroissante** sur  $I$  et  $g$  est **décroissante** sur  $J = f(I)$  alors  $g \circ f$  est **croissante** sur  $I$ .
- Si  $f$  est **croissante** sur  $I$  et  $g$  est **décroissante** sur  $J = f(I)$  alors  $g \circ f$  est **décroissante** sur  $I$ .
- Si  $f$  est **décroissante** sur  $I$  et  $g$  est **croissante** sur  $J = f(I)$  alors  $g \circ f$  est **décroissante** sur  $I$ .

**Exercice 1 :**

Soient les fonctions :  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto \frac{2x+1}{x+1}$  et  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto \sqrt{2x+1}$  et  $h = f \circ g$

- 1- Exprimer  $h(x)$  en fonction de  $x$ .
- 2- Déterminer  $D_h$  ensemble de définition de  $h$ .
- 3- Dresser les tableaux de variation de  $f$  et  $g$ .
- 4- En déduire les variations de  $h$ .

**Exercice 2 :**

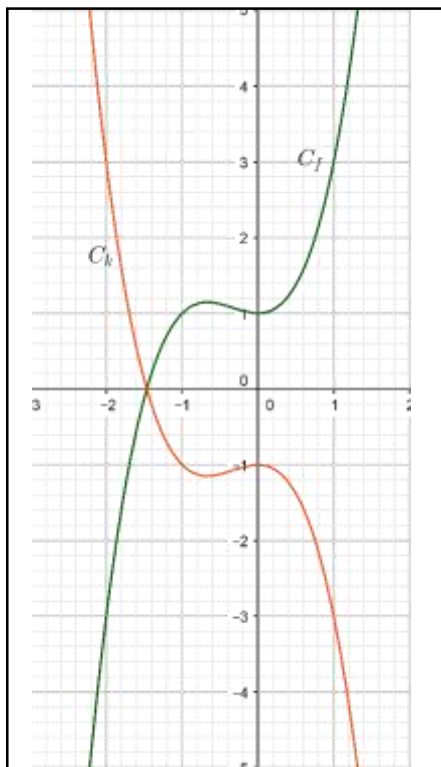
Soit la fonction  $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x + 3$

- 1- Montrer que  $(\forall x \in \mathbb{R})(u(x) = (v \circ t)(x))$  où  $t(x) = -x^2 + 2x$  et  $v(x) = x^2 + 2x + 3$
- 2- Dresser les tableaux de variation de  $v$  et  $t$
- 3- En déduire les variations de  $u$ .

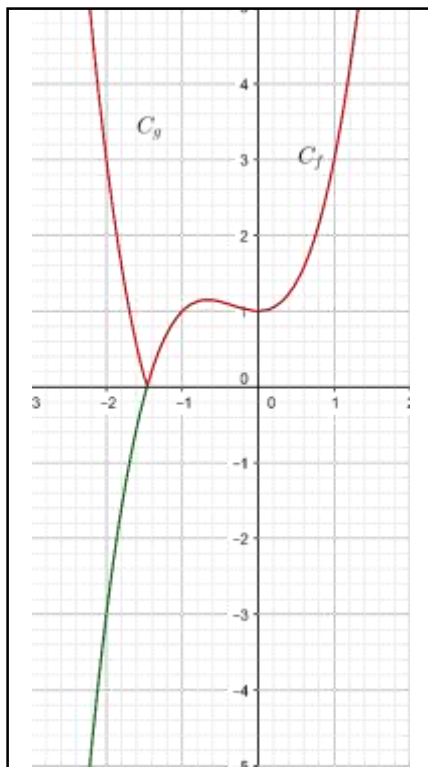
**IX) REMARQUES SUR LES GRAPHES.****1) Nombre de solution de l'équation  $f(x) = k$** 

Soit  $f$  une fonction dont la courbe représentative est  $C_f$ . Le nombre de solutions de l'équation  $f(x) = k$  est le nombre de points d'intersection de la courbe  $C_f$  avec la droite  $(\Delta): y = k$ .

Soit  $f$  une fonction numérique dont la courbe représentative  $C_f$

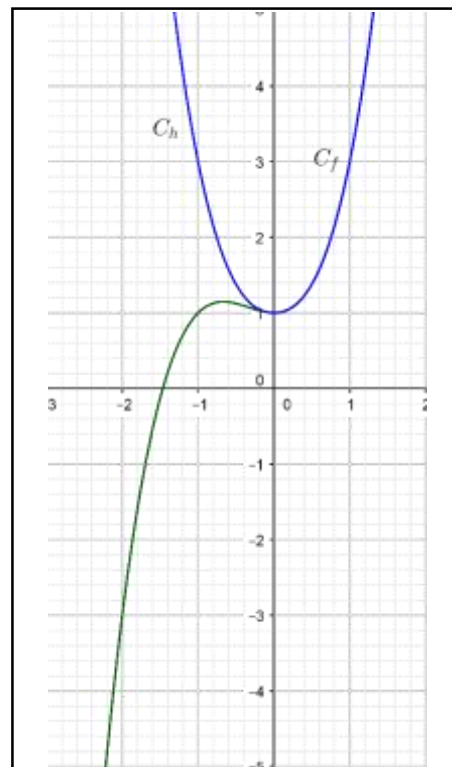


$k(x) = -f(x)$   
 $C_k$  et  $C_f$  sont symétrique  
 par rapport à l'axe ( $Ox$ )



$g(x) = |f(x)|$

- Si  $f(x) \geq 0$  alors  
 $g(x) = f(x)$  et dans ce cas  
 $C_g$  et  $C_f$  seront confondues.
- Si  $f(x) \leq 0$  alors  
 $g(x) = -f(x)$  et dans ce  
 cas  $C_g$  et  $C_f$  seront  
 symétriques par rapport à  
 l'axe ( $Ox$ )



$h(x) = f(|x|)$

Si  $x \geq 0$  alors  
 $h(x) = f(x)$  et dans ce  
 cas  $C_h$  et  $C_f$  sont  
 confondues.

La fonction  $h$  étant paire alors  
 $C_h$  est symétrique par rapport à  
 l'axe ( $Oy$ )

# **PRODUIT SCALAIRE DANS $V_2$**

## **Etude analytique (1)**

### **I) BASE ET REPERE ORTHONORMES**

**Définitions :** Soit  $B(\vec{i}; \vec{j})$  une base de  $V_2$ .

- 1) La base  $B$  est dite **orthogonale** si  $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$
- 2) La base  $B$  est dite **normée** si  $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$
- 3) Une base orthogonale et normée s'appelle une base orthonormée.
- 4) Soit  $O$  un point du plan

Soit  $\mathcal{R}(O; \vec{i}; \vec{j})$  un repère du plan ( $\mathcal{P}$ )

On dit que le repère  $\mathcal{R}$  est orthonormé si la base  $B(\vec{i}; \vec{j})$  associé à  $\mathcal{R}$  est orthonormée.

On pose :  $\vec{i} = \vec{OI}$  et  $\vec{j} = \vec{OJ}$

### **II) EXPRESSION ANALYTIQUE DU PRODUIT SCALAIRE.**

Soit  $B(\vec{i}; \vec{j})$  une base orthonormée de  $V_2$ .

Soient :  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$  et  $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$  deux vecteurs de  $V_2$  ; on a :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = (x\vec{i} + y\vec{j}) \cdot (x'\vec{i} + y'\vec{j})$

Et d'après la bilinéarité du produit scalaire on a :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx'\vec{i} \cdot \vec{i} + yy'\vec{j} \cdot \vec{j}$  car  $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$  puisque :  $\|\vec{i}\| = 1$  et  $\|\vec{j}\| = 1$

On a donc la propriété suivante :

**Propriété :** L'espace  $V_2$  est rapporté à une base orthonormée  $B(\vec{i}; \vec{j})$

Soient :  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$  et  $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$  deux vecteurs de  $V_2$  ; on a :

- 1)  $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$
- 2)  $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- 3)  $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$

Si  $A(x_A; y_A)$  et  $B(x_B; y_B)$  alors

$$AB = \|\vec{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

**Exercice :** dans Le plan ( $\mathcal{P}$ ) est rapporté à un repère orthonormé  $\mathcal{R}(O; \vec{i}; \vec{j})$  Considérons les

points  $A(1; -3)$  et  $B(3; 7)$  et  $C(-3; 1)$

- 1) Montrer que le triangle ABC est rectangle en C
- 2) Calculer la surface du triangle ABC

**Solution :** 1)

*Methode1 :*  $\vec{BC}(-6; -6)$  et  $\vec{AC}(-4; 4)$  et  $\vec{AB}(2; 10)$

$$AB = \|\vec{AB}\| = \sqrt{2^2 + 10^2} = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}$$

$$AC = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$$

Puisque :  $AC^2 + BC^2 = 32 + 72 = 104$  et  $AB^2 = 104$

Donc :  $AC^2 + BC^2 = AB^2$

Donc : le triangle ABC est rectangle en C

*Methode2 :*  $\vec{BC}(-6; -6)$  et  $\vec{AC}(-4; 4)$

Donc :  $\vec{AC} \cdot \vec{BC} = 24 - 24 + 0$  Donc :  $\vec{AC} \perp \vec{BC}$

Donc : le triangle ABC est rectangle en C

2) puisque le triangle ABC est rectangle en C alors :

$$S = \frac{1}{2} CA \times CB = \frac{1}{2} 4\sqrt{2} \times 6\sqrt{2} = 24$$

**Exercice :**

Le plan ( $\mathcal{P}$ ) est rapporté à un repère orthonormé

$\mathcal{R}(O; \vec{i}; \vec{j})$

Considérons la droite ( $D$ ):  $2x - y + 1 = 0$  et  $N$  un point sur la droite ( $D$ ) d'abscisse  $\alpha$ .

- 1- Déterminer les coordonnées de  $N$ .
- 2- Déterminer la distance  $ON$ .
- 3- Déterminer pour quelle valeur de  $\alpha$  la distance  $ON$  est minimale.



### III) PRODUIT SCALRE ET LIGNES TRIGONOMETRIQUES.

#### 1) L'expression de cos :

Le plan ( $\mathcal{P}$ ) est rapporté à un repère orthonormé  $\mathcal{R}(O; \vec{i}; \vec{j})$

Soient :  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$  et  $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$  deux vecteurs de  $V_2$  ; on a :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}; \vec{v}) = xx' + yy'$

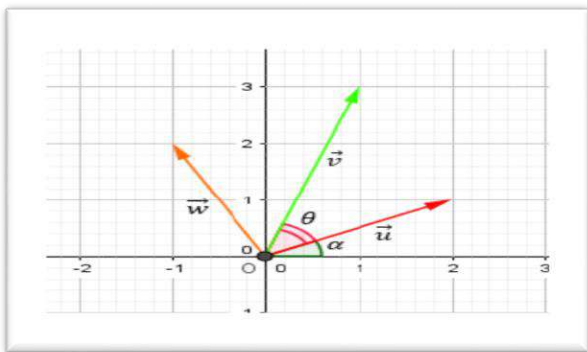
$$\text{Par suite : } \cos(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2} \times \sqrt{x'^2 + y'^2}}$$

#### 2) L'expression de sin :

##### 2.1 L'écriture trigonométrique d'un vecteur.

L'espace  $V_2$  est rapporté à une base orthonormée

$$B(\vec{i}; \vec{j})$$



$\vec{u}(x; y)$  et  $\alpha$  la mesure de l'angle polaire  $(\vec{i}; \vec{u})$

Puisque  $\vec{i}(1;0)$  alors :  $\vec{u} \cdot \vec{i} = x$  et puisque  $\vec{j}(0;1)$  alors

$$\vec{u} \cdot \vec{j} = y \text{ D'autre part: } \vec{u} \cdot \vec{i} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{i}\| \cos(\vec{u}; \vec{i}) = \|\vec{u}\| \cos \alpha$$

$$\vec{u} \cdot \vec{j} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{j}\| \cos(\vec{u}; \vec{j}) = \|\vec{u}\| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{j} = \|\vec{u}\| \sin \alpha$$

$$\text{On peut conclure que : } \begin{cases} x = \|\vec{u}\| \cos \alpha \\ y = \|\vec{u}\| \sin \alpha \end{cases}$$

Et par suite:  $\vec{u} = \|\vec{u}\| \cos \alpha \vec{i} + \|\vec{u}\| \sin \alpha \vec{j} = \|\vec{u}\| (\cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j})$

Cette écriture s'appelle l'écriture trigonométrique du vecteur  $\vec{u}$ .

##### 2.2 L'expression de sin :

$\vec{u}(x; y)$  et  $\alpha$  la mesure de l'angle polaire  $(\vec{i}; \vec{u})$

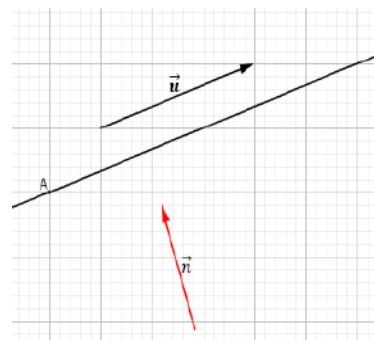
et  $\vec{w}$  le vecteur tel que :  $\|\vec{u}\| = \|\vec{w}\|$  et  $(\vec{u}; \vec{w}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

D'après l'écriture trigonométrique du vecteur  $\vec{w}$

$$\text{on a : } \vec{w} = \|\vec{w}\| \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \vec{i} + \|\vec{w}\| \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \vec{j}$$

$$\vec{w} = -\|\vec{w}\| \sin \alpha \vec{i} + \|\vec{w}\| \cos \alpha \vec{j} = -\|\vec{u}\| \sin \alpha \vec{i} + \|\vec{u}\| \cos \alpha \vec{j}$$

$$(\text{car : } \|\vec{u}\| = \|\vec{w}\|) \quad \vec{w} = -y\vec{i} + x\vec{j}$$



Par suite  $\vec{w}(-y; x)$

D'où on peut conclure que :

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = -x'y + xy'$$

et on a :

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cos \theta$$

où :  $(\vec{u}; \vec{v}) \equiv \theta [2\pi]$  Ce qui nous permet de confirmer

$$\text{que : } \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \sin \theta = -x'y + xy'$$

$$\text{et donc : } \sin \theta = \frac{xy' - x'y}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} = \frac{\det(\vec{u}; \vec{v})}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$$

**Théorème :** L'espace  $V_2$  est rapporté à une base orthonormée  $B(\vec{i}; \vec{j})$  Soient  $\vec{u}(x; y)$  et  $\vec{v}(x'; y')$

$$\cos(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2} \times \sqrt{x'^2 + y'^2}}$$

$$\sin \theta = \frac{xy' - x'y}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} = \frac{\det(\vec{u}; \vec{v})}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$$

**Exercice:** dans Le plan ( $\mathcal{P}$ ) est rapporté à un repère orthonormé  $\mathcal{R}(O; \vec{i}; \vec{j})$  Considérons les points

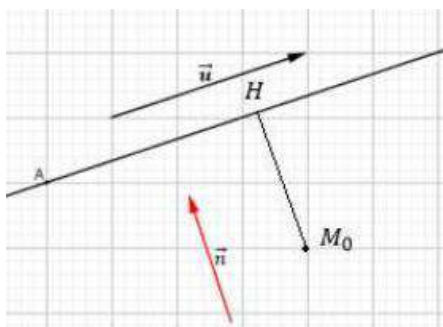
$A(5;0)$  et  $B(2;1)$  et  $C(6;3)$

1) Calculer  $\cos(\overline{AB}; \overline{AC})$  et  $\sin(\overline{AB}; \overline{AC})$

2) en déduire une mesure de l'angle  $(\overline{AB}; \overline{AC})$



**Solution : 1)**



$$\cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\|} \text{ et}$$

$$\sin(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})}{\|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\|}$$

et on a :  $\overrightarrow{AB}(-3;1)$  et  $\overrightarrow{AC}(1;3)$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -3 \times 1 + 1 \times 3 = -3 + 3 = 0$$

$$\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -10$$

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{10} \text{ et } AC = \sqrt{10}$$

$$\cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{0}{\sqrt{10} \times \sqrt{10}} = 0$$

$$\sin(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{-10}{\sqrt{10} \times \sqrt{10}} = -1$$

2) on a :  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$  et  $AB = AC$  donc le triangle ABC est rectangle et isocèle en A

$$\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right) = \frac{-\pi}{2} [2\pi] \text{ car : } \left(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{BC}\right) = \frac{-\pi}{4} [2\pi] \text{ et}$$

$$\sin(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = -1$$

$$\text{Donc : } \left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{BC}\right) = \left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right) + \left(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{BC}\right) [2\pi]$$

$$\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{BC}\right) = \frac{-\pi}{2} - \frac{\pi}{4} [2\pi] = -\frac{3\pi}{4} [2\pi]$$

## IV) DISTANCE D'UN POINT PAR RAPPORT A UNE DROITE.

### 1) Vecteur normal sur une droite.

**Définition :** Soit  $D(A; \vec{u})$  la droite passante par A et de vecteur directeur  $\vec{u}$  ; tout vecteur  $\vec{n}$  non nul et orthogonal à  $\vec{u}$  s'appelle un vecteur normal sur la droite (D).

**Remarque :**

Si  $\vec{n}$  est normal sur une droite (D) ; Tout Vecteur non nul colinéaire avec  $\vec{n}$  est aussi

Normal sur la droite (D).

Si (D):  $ax + by + c = 0$  est une droite dans le plan alors  $\vec{u}(-b; a)$  est un vecteur directeur de la droite (D), et le vecteur  $\vec{n}(a; b)$  est non nul et orthogonal à  $\vec{u}$  donc normal sur la droite (D).

### 2) Equation d'une droite définie par un point donné et un vecteur normal.

Soient  $A(x_A; y_A)$  un point donné, et  $\vec{v}(a; b)$  un vecteur non nul. Soit (D) la droite qui passe par A et qui admet  $\vec{v}$  comme vecteur normal.

$$M(x; y) \in (D) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0 \\ \Leftrightarrow ax + by - (ax_A + by_A) = 0$$

**Propriété :** Soient  $A(x_A; y_A)$  un point donné, et  $\vec{n}(a; b)$  un vecteur non nul. La (D) la droite qui

passe par A et qui admet  $\vec{n}$  comme vecteur normal a une équation cartésienne de la forme :

$$(D): a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$$

**Exercice :** déterminer une équation cartésienne de la droite (D) qui passe par  $A(0;1)$  et qui admet  $\vec{n}(2;1)$  comme vecteur normal

**Solution :** on a (D) qui passe  $A(0;1)$  et  $\vec{n}(2;1)$  un vecteur normal donc : une équation cartésienne de la droite (D) est :  $2(x-0) + 1(y-1) = 0$

$$\text{donc : } (D) : 2x + y - 1 = 0$$

**Exercice :** donner un vecteur normal a la droite (D) dans les cas suivants : 1) (D) :  $x - 2y + 5 = 0$

$$2) (D) : 2y - 3 = 0 \quad 3) (D) : x - 1 = 0$$

**Solution :** un vecteur normal a la droite (D) d'équation cartésienne :  $ax + by + c = 0$

Est  $\vec{n}(a; b)$

$$1) (D) : x - 2y + 5 = 0 : \vec{n}(1; -2) \text{ un vecteur normal}$$

$$2) (D) : 0x + 2y - 3 = 0 : \vec{n}(0; 2) \text{ un vecteur normal}$$

$$2) (D) : 1x + 0y - 1 = 0 : \vec{n}(1; 0) \text{ un vecteur normal}$$

**Exercice :** dans Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé  $\mathcal{R}(O; \vec{i}; \vec{j})$  Considérons les

points  $A(-3;0)$  et  $B(3;0)$  et  $C(1;5)$

1) déterminer une équation cartésienne



de la droite  $(D)$  perpendiculaire à la droite  $(AB)$  passant par  $C$

2) déterminer une équation cartésienne de la droite  $(\Delta)$  parallèle à la droite  $(AB)$  passant par  $C$

**Solution :** 1) soit  $M$  un point du plan  $(\mathcal{P})$   
 $M \in (D) \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow 6(x-1) - (y-5) = 0$   
 $\Leftrightarrow 6x - y - 1 = 0$

Donc :  $(D) : 6x - y - 1 = 0$

1) soit  $M(x; y)$  un point du plan  $(\mathcal{P})$

$M \in (\Delta) \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \cdot \vec{n} = 0$

Avec  $\vec{n}$  un vecteur normal à la droite  $(AB)$

Le vecteur :  $\overrightarrow{AB}(6, -1)$  est un vecteur directeur de la droite  $(AB)$  et on a :  $\vec{n}(1, 6)$

On a donc :  $M \in (\Delta) \Leftrightarrow (x-1) + 6(y-5) = 0$   
 $\Leftrightarrow x + 6y - 31 = 0$  Donc :  $(\Delta) : x + 6y - 31 = 0$

**Exercice :** dans Le plan  $(\mathcal{P})$  est rapporté à un repère orthonormé  $\mathcal{R}(O; \vec{i}; \vec{j})$  Considérons les points  $A(1; 2)$  et  $B(-2; 3)$  et  $C(0; 4)$

1) déterminer une équation cartésienne de la droite  $(D)$  médiatrice du segment  $[AB]$   
 2) déterminer une équation cartésienne de la droite  $(\Delta)$  la hauteur du triangle  $ABC$  passant par  $A$

**Solution :** 1)  $(D) : ax + by + c = 0$

Avec  $\overrightarrow{AB}(a, b)$  un vecteur normal à  $(D)$

$\overrightarrow{AB}(-3, 1)$  donc :  $(D) : -3x + y + c = 0$

Or  $I \in (D)$   $I$  est le milieu du segment  $[AB]$

$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$  donc  $I\left(\frac{-1}{2}, \frac{5}{2}\right)$

Donc :  $-3\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{5}{2} + c = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2} + \frac{5}{2} + c = 0 \Leftrightarrow c = -4$

Par suite :  $(D) : -3x + y - 4 = 0$

2)  $(\Delta)$  la hauteur du triangle  $ABC$  passant par  $A$

Donc :  $(\Delta)$  perpendiculaire à  $(BC)$  passant par  $A$

Donc  $\overrightarrow{BC}(2, 1)$  un vecteur normal à  $(\Delta)$  donc

$(\Delta) : 2x + y + c = 0$  et on a  $A \in (\Delta)$  donc

$$2 \times 1 + 2 + c = 0 \Leftrightarrow c = -4$$

$$(\Delta) : 2x + y - 4 = 0$$

**Exercice :** Considérons le triangle  $ABC$  où  $A(2, 1)$   $B(5, 0)$  et  $C(7, 6)$

1- a) Montrer que le triangle  $ABC$  est rectangle en  $B$ .  
 b) En déduire les coordonnées du point  $\Omega$  le centre du cercle circonscrit au triangle  $ABC$

2) Déterminer les coordonnées du point  $G$  centre de gravité de  $ABC$ .

3) Déterminer les coordonnées du point  $H$ , orthocentre du triangle  $ABC$ .

4) Vérifier que les points  $\Omega$ ,  $G$  et  $H$  sont alignés

**3) droites perpendiculaires**

**proposition :** Le plan  $(\mathcal{P})$  est rapporté à un repère orthonormé  $\mathcal{R}(O; \vec{i}; \vec{j})$

on considère les deux droites :  $(D) : ax + by + c = 0$

et  $(D') : a'x + b'y + c' = 0$

$$(D) \perp (D') \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{n}' \Leftrightarrow aa' + bb' = 0$$

Avec  $\vec{n}$  le vecteur normal de  $(D)$  et  $\vec{n}'$  le vecteur normal de  $(D')$

**Exercice :**  $(D) : 2x + 3y - 1 = 0$  et  $(D') : \frac{3}{2}x - y + 4 = 0$

Etudier la position relative de  $(D)$  et  $(D')$

**Solution :**

$\vec{n}(2; 3)$  est un vecteur normal de  $(D)$

$\vec{n}'\left(\frac{3}{2}; -1\right)$  est un vecteur normal de  $(D')$

$$\vec{n} \cdot \vec{n}' = 2 \times \frac{3}{2} + 3 \times (-1) = 3 - 3 = 0 \text{ donc } \vec{n} \perp \vec{n}'$$

donc  $(D) \perp (D')$

**4) Distance d'un point par rapport à une droite.**

**Définition :** Soient  $(D)$  une droite et  $M_0$  un point dans le plan. La distance du point  $M_0$  à la droite  $(D)$  est la distance  $M_0H$  où  $H$  est la projection orthogonal de  $M_0$  sur  $(D)$ . On la note :  $d(M_0; (D))$

**Remarque :** La distance d'un point  $M_0$  à une droite  $(D)$  est la plus petite distance de  $M_0$  à un point  $M$

$$\text{de } (D) \quad d(M_0; (D)) = \min_{M \in (D)} (M_0M)$$



**Preuve :** Soit la droite  $(D): ax + by + c = 0$  et  $M_0(x_0; y_0)$ ; Soit  $H$  la projection orthogonale de  $M_0$  sur  $(D)$ ,  $\vec{n}(a; b)$  est normal sur  $(D)$ .

On a pour tout point  $A(x_A; y_A)$  de la droite  $(D)$  :

$$\overrightarrow{M_0A} \cdot \vec{n} = (\overrightarrow{M_0H} + \overrightarrow{HA}) \cdot \vec{n} = \overrightarrow{M_0H} \cdot \vec{n} + \overrightarrow{HA} \cdot \vec{n} = \overrightarrow{M_0H} \cdot \vec{n}$$

Donc :  $\overrightarrow{M_0H} \cdot \vec{n} = \overrightarrow{M_0A} \cdot \vec{n}$

On conclue que  $|\overrightarrow{M_0H} \cdot \vec{n}| = |\overrightarrow{M_0A} \cdot \vec{n}|$  par suite

$$\|\overrightarrow{M_0H}\| \|\vec{n}\| = |\overrightarrow{M_0A} \cdot \vec{n}| \text{ et finalement : } M_0H = \frac{|\overrightarrow{M_0A} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$

En passant à l'expression analytique :

$$\vec{n}(a; b) \text{ et } \overrightarrow{M_0A}(x_A - x_0; y_A - y_0)$$

par suite :  $M_0H = \frac{|a(x_A - x_0) + b(y_A - y_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$$M_0H = \frac{|ax_A - ax_0 + by_A - by_0|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$M_0H = \frac{|ax_A + by_A - ax_0 - by_0|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Or  $A \in (D) \Leftrightarrow ax_A + by_A + c = 0$

$\Leftrightarrow ax_A + by_A = -c$

D'où  $M_0H = \frac{|-c - ax_0 - by_0|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

**Théorème :** Soient la droite  $(D): ax + by + c = 0$  et  $M_0(x_0; y_0)$  un point dans le plan.

La distance du point  $M_0$  à la droite  $(D)$  est :

$$M_0H = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

**Exercice :** Soient la droite  $(D)$  d'équation :

$$(D): 3x + 4y + 5 = 0$$

- 1) Déterminer les coordonnées du point  $H$  la projection orthogonale de  $O$  sur  $(D)$
- 2) calculer La distance du point  $O$  à la droite  $(D)$
- 3) Déterminer les coordonnées du point  $O'$  le symétrique de  $O$  par rapport à la droite  $(D)$

**Solution :** 1) puisque  $H$  est la projection orthogonale de  $O$  sur  $(D)$  alors  $H$  est le point d'intersection de la droite  $(D)$  et la droite  $(\Delta)$  qui passe par  $O$  et perpendiculaire à  $(D)$  on va donc résoudre le

système suivant :  $\begin{cases} (D): 3x + 4y + 5 = 0 \\ (\Delta): 4x - 3y = 0 \end{cases}$  On trouve :

$$x = \frac{-3}{5} \text{ et } y = \frac{-4}{5} \text{ donc } H\left(\frac{-3}{5}; \frac{-4}{5}\right)$$

**Autre méthode :** Soit  $H(x_H; y_H)$  on a

$$H \in (D) \Leftrightarrow 3x_H + 4y_H + 5 = 0$$

$\overrightarrow{OH}$  est normal à la droite  $(D)$  donc colinéaire avec

$$\vec{u}(3; 4) \text{ Donc : } \exists k \in \mathbb{R} / \overrightarrow{OH} = k\vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = 3k \\ y_H = 4k \end{cases}$$

Pour déterminer  $x_H$  et  $y_H$  on va donc résoudre le

$$\text{système suivant : } \begin{cases} (1) x_H = 3k \\ (2) y_H = 4k \\ (3) 3x_H + 4y_H + 5 = 0 \end{cases}$$

On remplace (1) et (2) dans (3) on trouve :

$$k = \frac{-1}{5} \text{ Donc : } \begin{cases} x_H = \frac{-3}{5} \\ y_H = \frac{-4}{5} \end{cases}$$

$$2) d(O; (D)) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|3 \times 0 + 4 \times 0 + 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{5}{5} = 1$$

3)  $O'$  le symétrique de  $O$  par rapport à la droite  $(D)$   
Donc  $H$  est le milieu du segment  $[OO']$

Donc :  $\overrightarrow{O'H} = -\overrightarrow{OH}$  on pose :  $O'(x; y)$

$$\text{Donc : } \begin{cases} \frac{-3}{5} - x = \frac{3}{5} \\ \frac{-4}{5} - y = \frac{4}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{6}{5} \\ y = -\frac{8}{5} \end{cases} \text{ Donc : } O'\left(-\frac{6}{5}; -\frac{8}{5}\right)$$

**Exercice :** Considérons la parabole d'équation :

$$(P): y = x^2 \text{ et la droite } (D): y = x - 1$$

- 1- Tracer la droite  $(D)$  et la parabole  $(P)$ .
- 2- Soit  $N\alpha$  un point d'abscisse  $\alpha$  et varie sur la parabole  $(P)$ 
  - a) Déterminer en fonction de  $\alpha$  la distance  $d(N\alpha, (D))$ .
  - b) Pour quelle valeur de  $\alpha$  la distance  $d(N\alpha, (D))$  est minimale.

**V) L'INTERPRETATION ANALYTIQUE DE L'INEGALITE DE CAUCHY-SCHWARZ**



**Activité 1:** Considérons deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  non nuls et le trinôme  $f(x) = (x\vec{u} + \vec{v})^2$

- 1- Développer  $f(x)$ .
- 2- Déterminer le signe de  $f(x)$ .
- 3- Déterminer le discriminant de  $f(x)$ .
- 4- en déduire que pour tout vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  on a :  $\vec{u} \cdot \vec{v} \leq |\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$

5- Quand est ce qu'on a l'égalité ?

**Activité 2 :** On sait que pour trois points donnés dans le plan on a :  $MA + MB \geq AB$  le but de cette activité c'est de démontrer ce résultat.

Considérons deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  non nuls.

- 1- Développer  $(\vec{u} + \vec{v})^2$
- 2- En utilisant l'inégalité précédente montrer que  $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ .
- 3- Quand est ce qu'on a l'égalité ?

**L'inégalité de Cauchy-Schwarz**

a) Pour tout vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  on a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \leq |\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$$

b) l'égalité est vérifiée si et seulement si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires.

**L'inégalité triangulaire.**

a) Pour tout vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  on a :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$$

b) l'égalité est vérifié si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires et de même sens.

**Propriétés :** L'espace  $V_2$  est rapporté à une base orthonormée  $B(\vec{i}; \vec{j})$  Soient  $\vec{u}(x; y)$  et  $\vec{v}(x'; y')$  on a

1) L'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \leq |\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \Leftrightarrow$$

$$xx' + yy' \leq |xx' + yy'| \leq \sqrt{x^2 + y^2} \times \sqrt{x'^2 + y'^2}$$

2) L'inégalité triangulaire.

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{(x+x')^2 + (y+y')^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x'^2 + y'^2}$$

**Exercice:** dans Le plan  $(P)$  est rapporté à un repère orthonormé et direct  $\mathcal{R}(O; \vec{i}; \vec{j})$  Considérons les

points  $A(1; -1)$  et  $B(4; -1)$  et  $C(-2; 2)$

1) Calculer :  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  et  $\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$

2) en déduire une mesure de l'angle  $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$

3) Calculer la surface du triangle ABC

4) déterminer une équation cartésienne de la hauteur du triangle ABC passant par A

5) déterminer une équation cartésienne de la bissectrice de l'angle  $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$

**Solution :** 1) on a :  $\overrightarrow{AB}(3; 0)$  et  $\overrightarrow{AC}(-3; 3)$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \times (-3) + 0 \times 3 = -9$$

$$\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 9$$

2) soit  $\alpha$  une mesure de l'angle  $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$  on a :

$$\cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\|} \text{ et } \sin(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})}{\|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\|}$$

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{3^2 + 0^2} = 3 \text{ et } AC = 3\sqrt{2}$$

$$\text{Donc : } \cos \alpha = \frac{-9}{9\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \text{ et } \sin \alpha = \frac{9}{9\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Donc : } \alpha = \frac{3\pi}{4}$$

3) on a :  $S = \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})| = \frac{9}{2} \text{ cm}^2$

4) soit  $(\Delta)$  la hauteur du triangle ABC passant par A

Donc :  $(\Delta)$  perpendiculaire a  $(BC)$  passant par A

Donc  $\overrightarrow{BC}(-6, 3)$  un vecteur normal a  $(\Delta)$  donc

$(\Delta) / -6x + 3y + c = 0$  et on a  $A(1; -1) \in (\Delta)$  donc

$$-6 \times 1 - 3 + c = 0 \Leftrightarrow c = 9$$

$(\Delta) / -6x + 3y + 9 = 0$  donc :  $(\Delta) / 2x - y - 3 = 0$

4) soit  $(D)$  la bissectrice de l'angle  $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$

Pour Chaque point  $M(x, y)$  de la droite  $(D)$

On a :  $d(M; (AB)) = d(M; (AC))$

$$\text{D'où } \frac{|y+1|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = \frac{|x+y|}{\sqrt{0^2 + 1^2}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}|y+1| = |x+y|$$

On remarque que  $(D)$  se trouve dans le demi plan tel

$$\text{que : } \begin{cases} y+1 \geq 0 \\ x+y \geq 0 \end{cases} \text{ donc : } \sqrt{2}(y+1) = x+y$$



donc : l'équation cartésienne de  $(D)$  est :

$$\begin{cases} x + (1 - \sqrt{2})y - \sqrt{2} = 0 \\ y + 1 \geq 0 \end{cases} (D) \text{ est un demi droite}$$

**C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.**

**C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices**

**Que l'on devient un mathématicien**



## **PRODUIT SCALAIRE DANS $\mathcal{V}_2$**

### **Etude analytique (2) -Applications- : cercle**

Dans tout ce qui va suivre le plan ( $\mathcal{P}$ ) est rapporté à un repère  $\mathcal{R}(\vec{O}; \vec{i}; \vec{j})$  orthonormé.

#### **1) EQUATION D'UN CERCLE**

**Définition :** Soient  $\Omega$  un point et  $r$  un réel positif, le cercle de centre  $\Omega$  et de rayon  $r$  est l'ensemble des points  $M$  dans le plan ( $\mathcal{P}$ ) qui vérifient :  $\Omega M = r$  on le note,  $\mathcal{C}(\Omega, r) : \mathcal{C}(\Omega; r) = \{M \in (\mathcal{P}) / \Omega M = r\}$

#### **Remarque :**

On peut considérer le point comme étant un cercle de rayon nul.

#### **1) Cercle défini par son centre et son rayon.**

Soient  $\Omega(a, b)$  un point et  $r$  un réel positif,

$$M(x, y) \in \mathcal{C}(\Omega; r) \Leftrightarrow \Omega M = r$$

$$\Leftrightarrow \Omega M^2 = r^2$$

$$\Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

**Exemple :** déterminer l'équation cartésienne du cercle de centre  $\Omega(-1; 2)$  et de rayon  $r = 3$

**Solution :** l'équation cartésienne du cercle est :

$$\mathcal{C}(\Omega, r): (x+1)^2 + (y-2)^2 = 3^2$$

$$\text{C a d : } x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$$

**Propriété :** Soient  $\Omega(a, b)$  un point et  $r$  un réel positif, le cercle  $\mathcal{C}(\Omega, r)$  à une équation cartésienne de la

$$\text{forme : } \mathcal{C}(\Omega, r): (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

#### **2) Equation réduite d'un cercle**

$$\text{On a : } M(x, y) \in \mathcal{C}(\Omega, r) \Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 - r^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \text{ où : } \alpha = -2a ; \beta = -2b \text{ et } \gamma = a^2 + b^2 - r^2$$

**Propriété1 :** Tout cercle dans le plan à une équation de la forme :  $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$  où  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  sont des réels.

**Propriété2 :** Soit  $(C)$  L'ensemble des points

$M(x, y)$  du plan tel que :

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

avec  $a$ ;  $b$ ;  $c$  des réelles

- Si :  $a^2 + b^2 - c > 0$

alors  $(C)$  est une cercle de centre

$$\Omega(a; b) \text{ et de rayon } R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$$

- Si :  $a^2 + b^2 - c = 0$  alors  $(C) = \{\Omega(a; b)\}$

- Si :  $a^2 + b^2 - c < 0$  alors  $(C) = \emptyset$

**PREUVE :**  $M(x; y) \in (C) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 + c - a^2 - b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2 + b^2 - c = 0$$

- Si :  $a^2 + b^2 - c > 0$  alors  $(C)$  est une cercle de centre  $\Omega(a; b)$  et de rayon  $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$

- Si :  $a^2 + b^2 - c = 0$  alors  $(C) = \{\Omega(a; b)\}$

- Si :  $a^2 + b^2 - c < 0$  alors  $(C) = \emptyset$

**Exemples :** Déterminer L'ensemble  $(E)$  dans les cas suivants :

1)  $(E): x^2 + y^2 - x + 3y - 4 = 0$

2)  $(E): x^2 + y^2 - 6x + 2y + 10 = 0$

3)  $(E): x^2 + y^2 - 4x + 5 = 0$

**Solutions :** 1)  $a = \frac{1}{2}; b = -\frac{3}{2}; c = -4$

$$\text{On a : } a^2 + b^2 - c = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - (-4) = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} + 4 = \frac{13}{2} > 0$$

Donc :  $\Omega\left(\frac{-a}{2}; \frac{-b}{2}\right)$  donc  $\Omega\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$

$$R = \sqrt{a^2 + b^2 - c} = \frac{\sqrt{26}}{2}$$

alors  $(E)$  : est une cercle de centre

$$\Omega\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right) \text{ et de rayon } \frac{\sqrt{26}}{2}$$

2)  $a = 3; b = -1; c = 10$   $a^2 + b^2 - c = 3^2 + (-1)^2 - 10 = 9 + 1 - 10 = 0$

alors  $(E) = \{\Omega(3; -1)\}$

3)  $a = 2; b = 0; c = 5$

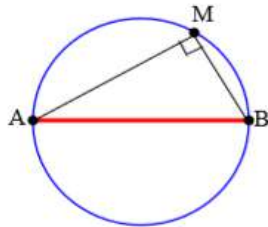
$$a^2 + b^2 - c = 4 - 5 = -1 < 0 \text{ alors } (E) = \emptyset$$

### 3) Cercle définie par son diamètre.

#### Propriété : (Rappelle)

Soient  $A$  et  $B$  deux points distincts dans le plan l'ensemble des points  $M$

qui vérifient  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$  est le cercle de diamètre  $[AB]$ . Ce qui nous permet d'énoncer la propriété suivante :



**Propriété :** Soient  $A(x_A; y_A)$

et  $B(x_B; y_B)$  deux points distincts dans le plan, le cercle de diamètre  $[AB]$  à pour équation :

$$(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0$$

**Exemple :** Déterminer une équation du cercle de diamètre  $[AB]$  avec  $A(1; 2)$  et  $B(-3; 1)$

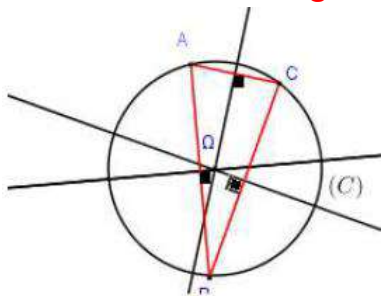
**solution :**  $M(x; y) \in (C) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

$$\overrightarrow{MA}(1 - x; 2 - y) \text{ et } \overrightarrow{MB}(-3 - x; 1 - y)$$

$$M(x; y) \in (C) \Leftrightarrow (-3 - x)(1 - x) + (1 - y)(2 - y) = 0$$

$$\text{Donc : } (C) : x^2 + y^2 + 2x - 3y - 1 = 0$$

### 4) cercle définie par trois points ou Cercle circonscrit à un triangle



Soit  $ABC$  un triangle, les médiatrices du triangle  $ABC$  se coupent en  $\Omega$  le Centre du cercle circonscrit du triangle  $ABC$

**Exemple :** le plan  $(P)$  est rapporté à un repère

$\mathcal{R}(O; \vec{i}; \vec{j})$  orthonormé. Soient les points

$$A(2; 3) \quad B(0; 1); \quad C(-4; 5); \quad E(5; 2) \text{ et } F(2; 4)$$

1) Ecrire l'équation du cercle circonscrit au Triangle  $ABC$ .

2) Ecrire l'équation du cercle circonscrit au triangle

OE $F$ . **Solution :** 1) Soient  $I(1; 2)$  et  $J(-1; 4)$  le

milieu respectivement du segments :  $[AB]$  et  $[AC]$

Et soit  $(\Delta)$  la médiatrice de  $[AB]$  donc  $(\Delta)$  passe par

$I(1; 2)$  et  $\overrightarrow{AB}$  un vecteur normal a  $(\Delta)$

Et on a :  $\overrightarrow{AB}(-2; -2)$  donc une équation de  $(\Delta)$  est :

$$(\Delta) : -2(x - 1) - 2(y - 2) = 0$$

Donc :  $(\Delta) : -2x + 2 - 2y + 4 = 0$  donc  $(\Delta) : -2x - 2y + 6 = 0$

donc  $(\Delta) : x + y - 3 = 0$  (après simplifications)

Et soit  $(\Delta')$  la médiatrice de  $[AC]$  donc  $(\Delta')$  passe par  $J(-1; 4)$  et  $\overrightarrow{AC}$  un vecteur normal a  $(\Delta')$  et on

a :  $\overrightarrow{AC}(-6; 2)$  donc une équation de  $(\Delta')$  est :

$$(\Delta') : -6(x + 1) + 2(y - 4) = 0 \text{ donc : } (\Delta') : 3x - y + 7 = 0$$

On a  $\Omega$  est le Centre du cercle circonscrit du triangle  $ABC$  donc le point d'intersection de  $(\Delta)$  et  $(\Delta')$  on va

donc résoudre le système :

$$\begin{cases} (\Delta) : x + y - 3 = 0 \\ (\Delta') : 3x - y + 7 = 0 \end{cases}$$

Et la solution de ce système est :  $(-1; 4)$  donc

$\Omega(-1; 4)$  est le centre du cercle circonscrit du triangle  $ABC$  et le rayon est :

$$r = A\Omega = \sqrt{(-1 - 2)^2 + (4 - 3)^2} = \sqrt{10}$$

Et l'équation du cercle est :  $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 10$

$$(C) : x^2 + y^2 + 2x - 8y + 7 = 0$$

2) déterminons l'équation du cercle circonscrit au triangle OE $F$ .

On sait que l'équation du cercle s'écrit sous la forme :

$$(C') : x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

Et on a :  $O \in (C') \Leftrightarrow c = 0$

$$E(5; 2) \in (C') \Leftrightarrow 25 + 4 - 10a - 4b = 0$$

$$F(2; 4) \in (C') \Leftrightarrow 4 + 16 - 4a - 8b = 0$$

on va donc résoudre le système :

$$\begin{cases} 10a + 4b = 29 \\ a + 2b = 5 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{19}{8} \\ b = \frac{21}{16} \\ c = 0 \end{cases}$$

Et l'équation du cercle est :

$$(C') : x^2 + y^2 - \frac{19}{4}x - \frac{21}{8}y = 0$$

## II) L'INTERIEUR ET L'EXTERIEUR D'UN CERCLE.

**Définition :** Soit  $C(\Omega; r)$  un cercle dans le plan.

a) L'ensemble des points  $M$  dans le plan qui vérifient  $\Omega M \leq r$  s'appelle la boule fermée de centre  $\Omega$  et de rayon  $r$ , il s'appelle aussi l'intérieur du cercle  $C(\Omega; r)$

b) L'ensemble des points  $M$  dans le plan qui vérifient  $\Omega M > r$  s'appelle l'extérieur du cercle  $C(\Omega; r)$

**Application :** La résolution graphique de quelques systèmes d'inéquation

**Exemple :** Nous allons résoudre graphiquement le système :

$$(S) \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y + \frac{11}{4} < 0 \\ x^2 + y^2 + 2x - 4 > 0 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + \frac{11}{4} = 0$$

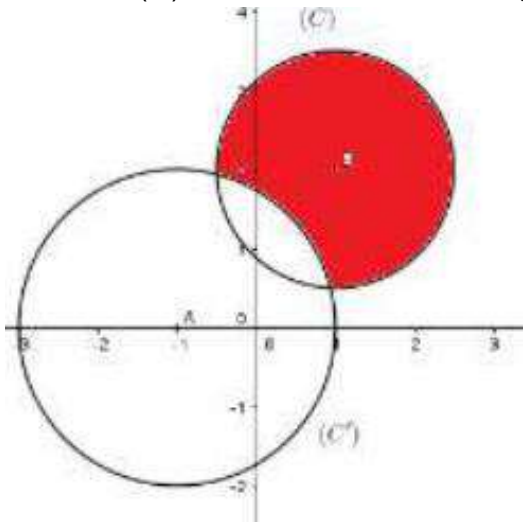
est l'équation du cercle  $(C)$

de centre  $B(1, 2)$  et de rayon  $r = \frac{3}{2}$

$x^2 + y^2 + 2x - 4 = 0$  est l'équation du cercle  $(C')$

de centre  $A(-1, 0)$  et de rayon  $r' = 2$ .

L'ensemble des points  $M$  qui vérifient  $(S)$  est l'extérieur de  $(C')$  intersection l'intérieur de  $(C)$



**Exercice1 :** résoudre graphiquement le système :

$$(S) \begin{cases} (1): x^2 + y^2 - 4x < 0 \\ (2): x - y - 1 > 0 \end{cases}$$

Solution :

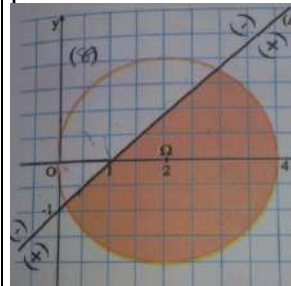
- (1):  $x^2 + y^2 - 4x < 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 < 2^2$

Donc les solutions de cette inéquation c'est les couples  $(x; y)$  des points qui se trouvent à l'intérieurs du cercle  $(C)$  de centre  $\Omega(2; 0)$  et de rayon  $r = 2$

- (2):  $x - y - 1 > 0$  : les solutions de cette inéquation c'est les couples  $(x; y)$  des points qui se trouvent au-dessous de la droite d'équation :  $(\Delta): x^2 + y^2 - 4x = 0$  (demi plan qui contient  $\Omega(2; 0)$ )

$$\text{Car : } 2 - 0 - 1 = 1 > 0$$

Finalement l'ensemble des solutions du système c'est les couples  $(x; y)$  des points qui appartiennent à la partie colorée.



**Exercice2 :** Résoudre graphiquement  $(x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9)(2x - y + 1) \leq 0$

## III) POSITIONS RELATIVES D'UN CERCLE EST D'UNE DROITE.

### 1) Propriété

Soit  $C(O; r)$  un cercle de rayon  $r$  strictement positif et  $(D)$  une droite dans le plan. Pour étudier les positions relatives du cercle  $C(O; r)$  de  $(D)$ , il suffit de déterminer la distance de  $O$  à  $(D)$ . soit  $H$  la projection orthogonal de  $O$  sur  $(D)$

**1) Si  $d(O; (D)) = OH > r$**

Soit  $M$  un point de la droite  $(D)$  on a :  
 $OM \geq OH > r$  donc tout point de la droite  $(D)$  est strictement à l'extérieur du cercle  $(C)$

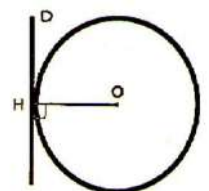
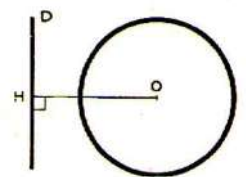
$$(C) \cap (D) = \emptyset$$

**2)  $d(O; (D)) = OH = r$**

Puisque  $OH = r$  alors  $H$  est un point commun entre  $(D)$  et  $(C)$ .

Soit  $M$  un point de la droite  $(D)$  Différent de  $H$  on a :

$$OM > OH = r$$

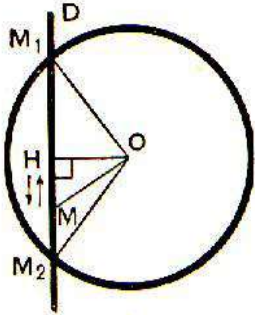


Donc tout point de la droite (D) différent de H est strictement à l'extérieur du cercle (C).

$(C) \cap (D) = \{H\}$  Ont dit que la droite (D) est tangente au cercle (C) en H

**3)  $d(O, (D)) = \Omega H < r$**

Dans ce cas le cercle (C) et la droite(D) se coupent en deux points  $M_1$  et  $M_2$  et H est le milieu du segment  $[M_1M_2]$



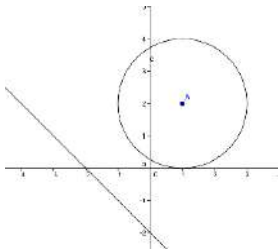
**Exemple1** :Etudier la position du cercle de centre  $\Omega(1;2)$  et de rayon  $R = 2$

avec la droite d'équation (D):  $x + y + 2 = 0$

Solution : on calcul  $d(\Omega, (P))$  ?

$$d(\Omega, (P)) = \frac{|1+2+2|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{|5|}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} > R=2$$

Donc : droite (D) est à l'extérieur du cercle (C)  
 $(C) \cap (D) = \emptyset$



**Exemple2** :Etudier la position du cercle (C) de centre  $\Omega(1;2)$  et de rayon  $R = 2$  avec la droite d'équation

(D):  $x - y + 2 = 0$

Solution : on calcul  $d(\Omega, (P))$  ?

$$d(\Omega, (P)) = \frac{|1-2+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{|1|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} < R=2$$

Donc : le cercle (C) et la droite (D) se coupent en deux points A et B  
 Déterminons les coordonnées des points d'intersections ?

On va résoudre le système suivant :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1) (x-1)^2 + (y-2)^2 = 2^2 \\ (2) x - y + 2 = 0 \end{cases}$$

On a : (2)  $\Leftrightarrow x + 2 = y$

On remplaçant dans (1)  $y = x + 2$

On trouve :  $(1) (x-1)^2 + (x+2-2)^2 = (2)^2$

Donc :  $(x-1)^2 + (x)^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + x^2 = 4$

Donc :  $2x^2 - 2x - 3 = 0 \quad \Delta = 28$

Donc :  $x_1 = \frac{2+2\sqrt{7}}{4}$  et  $x_2 = \frac{2-2\sqrt{7}}{4}$

Donc :  $x_1 = \frac{1+\sqrt{7}}{2}$  et  $x_2 = \frac{1-\sqrt{7}}{2}$

Si :  $x_1 = \frac{1+\sqrt{7}}{2}$  on remplace dans  $x + 2 = y$

On trouve :  $y_1 = \frac{1+\sqrt{7}}{2} + 2 = \frac{5+\sqrt{7}}{2}$

Si :  $x_2 = \frac{1-\sqrt{7}}{2}$  on remplace dans  $x + 2 = y$

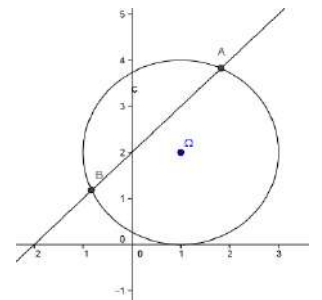
On trouve :

$$y_2 = \frac{1-\sqrt{7}}{2} + 2 = \frac{5-\sqrt{7}}{2}$$

Donc : les points d'intersections sont :

A  $\left(\frac{1+\sqrt{7}}{2}; \frac{5+\sqrt{7}}{2}\right)$  et

B  $\left(\frac{1-\sqrt{7}}{2}; \frac{5-\sqrt{7}}{2}\right)$



**Exemple3** :Etudier la position du cercle (C) de centre  $\Omega(1;2)$  et de rayon  $R = 1$  avec la droite d'équation

(D):  $y = 3$

Solution : on calcul  $d(\Omega, (P))$  ?

(D):  $0x + 1y - 3 = 0$

$$d(\Omega, (P)) = \frac{|0+2-3|}{\sqrt{0^2+1^2}} = \frac{|-1|}{\sqrt{1}} = 1 = R$$

Donc : la droite (D) est tangente au cercle (C) en A  
 Déterminons les coordonnées du point d'intersection ou point de tangence ?

L'équation de (C) est  $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1^2$

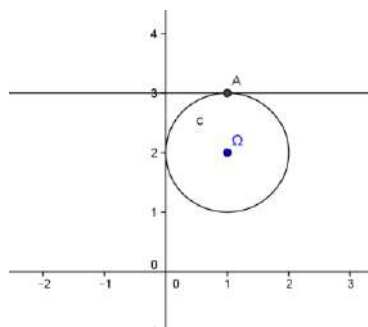
On va résoudre le système suivant :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1) (x-1)^2 + (y-2)^2 = 1 \\ (2) y = 3 \end{cases}$$

On remplaçant dans  $y = 3$  dans (1)

On aura :

$$(1)(x-1)^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x-1 = 0$$



Donc :  $x=1$  donc point de tangence est  $A(1;3)$

## 2) Droite tangente à un cercle.

### 2.1 Définition

Dans tous ce qui suit le rayon du cercle est strictement positif.

**Définition :** Une droite  $(D)$  est dite tangente à un cercle  $(C)$  s'ils se coupent en un seul point.

**Propriété :** Une droite  $(D)$  est dite tangente au cercle  $C(\Omega, r)$  si et seulement si  $d(\Omega, (D)) = r$

### 2.2 Equation de la tangente à un cercle en un de ses points.

Soit  $C(\Omega, r)$  un cercle dans le plan où  $\Omega(a, b)$  et  $A$  l'un de ses points.

Soit la droite  $(T)$  la tangente à  $C(\Omega, r)$  en  $A$

$$M(x; y) \in (T) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{A\Omega} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - x_A)(y - y_A) + (a - x_A)(b - y_A) = 0$$

**Propriété :** Soient  $\Omega(a, b)$  un point et  $C(\Omega, r)$  un cercle dans le plan et  $A$  l'un de ses points. La droite  $(T)$  tangente à  $C(\Omega, r)$  en  $A$  a pour équation :

$$(x - x_A)(y - y_A) + (a - x_A)(b - y_A) = 0$$

**exemple :** Soit  $(C)$  le cercle d'équation :

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0 \quad (1)$$

1) Vérifier que  $A(0; 1) \in (C)$

2) Ecrire l'équation de la tangente au cercle  $(C)$  en  $A$ .

**Solution :** 1) On a :  $0^2 + 1^2 - 4 \times 0 - 2 \times 1 + 1 = 0$

Donc  $A(0; 1) \in (C)$

2) L'équation de la tangente au cercle  $(C)$  en  $A$ . ??

$$a = 2; b = 1; c = 1 : a^2 + b^2 - c = 2^2 + 1^2 - 1 = 4 > 0$$

Donc  $(C)$  cercle de centre  $\Omega(\frac{-a}{2}; \frac{-b}{2})$  cad  $\Omega(2; 1)$

$$\overrightarrow{A\Omega}(-2; 0) \text{ et } \overrightarrow{AM}(x-0; y-1)$$

$$M(x; y) \in (D) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{A\Omega} = 0$$

$$-2(x-0) = 0 \Leftrightarrow -2(x-0) + 0(y-1) = 0 \Leftrightarrow M(x; y) \in (D)$$

$$M(x; y) \in (D) \Leftrightarrow x = 0$$

Donc : L'équation de la tangente au cercle  $(C)$  en  $A$  est :  $(D) : x = 0$

**Application :** Soit  $(C)$  le cercle d'équation :

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 6 = 0$$

- 1) Vérifier que le point  $A(3, -1)$  appartient au cercle
- 2- Ecrire l'équation de la tangente au cercle  $(C)$  en  $A$ .

### 2.3 Tangente à un cercle $(C)$ passant par un point à l'extérieure de $(C)$

**Exercice :**

Soient le cercle  $(C) : (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$  et  $A(5, 6)$

- 1- Vérifier que le point  $A$  est à l'extérieure de  $(C)$
- 2- a) Déterminer l'équation de la droite  $(\delta)$  passant par  $A$  et parallèle à l'axe des ordonnées.  
b) Vérifier que  $(\delta)$  n'est pas tangente à  $(C)$ .
- 3- Soit  $(\Delta)$  une droite qui passe par  $A$  et qui n'est pas parallèle à l'axe  $(Oy)$  et dont l'équation réduite est :

$$(\Delta) y = mx + p$$

a) Déterminer l'équation de  $(\Delta)$  en fonction de  $m$  uniquement.

b) Déterminer  $m$  pour que  $(\Delta)$  soit tangente au cercle  $(C)$ .

4- Soit  $B(4, 5)$

a) Montrer que la droite passant par  $B$  et parallèle à l'axe des ordonnées est tangente au cercle  $(C)$ .

b) Soit  $(\Delta')$  une droite qui passe par  $A$  et qui n'est pas parallèle à l'axe  $(Oy)$  et dont l'équation réduite est :  $(\Delta') y = mx + p$  ; Déterminer  $m$  pour que  $(\Delta)$  soit tangente au cercle  $(C)$ .

### 2.3 Tangente à un cercle et de direction déterminée.

Soit  $(C)$  le cercle de centre  $\Omega(-1, 2)$  et de rayon 3.

Déterminer les équations des tangentes à  $(C)$  et de vecteur directeur  $\vec{u}(-2; 1)$ .

## 3) Equation paramétrique d'un cercle.

le plan  $(P)$  est rapporté à un repère  $\mathcal{R}(O; \vec{i}; \vec{j})$

orthonormé.

Considérons  $(C)$  le cercle de centre  $\Omega(a, b)$  et de

rayon  $r$ . On a :  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M}$  (1)

Si  $M(x, y)$  dans  $\mathcal{R}$  et  $M(X, Y)$  dans  $\mathcal{R}'$  où :

$$\mathcal{R}(O; \vec{i}; \vec{j}) \text{ et } \mathcal{R}'(O; \vec{i}; \vec{j})$$

Alors (1) se traduit analytiquement par :  $\begin{cases} x = a + X \\ y = b + Y \end{cases}$

$$\text{or } \begin{cases} X = r \cos \alpha \\ Y = r \sin \alpha \end{cases} \text{ et par suite : } \begin{cases} x = a + r \cos \alpha \\ y = b + r \sin \alpha \end{cases}$$

Réciproquement l'ensemble

$$(C) = \left\{ M(x; y) \in (P) / \begin{cases} x = a + r \cos \alpha \\ y = b + r \sin \alpha \end{cases} \right\}$$

où  $a$  et  $b$  sont des réels et  $r$  un réel positif est le cercle de centre  $\Omega(a, b)$  et de rayon  $r$

**Exemple1** : Déterminer l'équation paramétrique du cercle  $(C)$  de centre  $\Omega(1; -2)$  et de rayon  $r = \sqrt{2}$

**Solution** : l'équation paramétrique du cercle  $(C)$  de centre  $\Omega(1; -2)$  et de rayon  $r = \sqrt{2}$  est :

$$\begin{cases} x = 1 + \sqrt{2} \cos \theta \\ y = -2 + \sqrt{2} \sin \theta \end{cases} \text{ avec } (\theta \in \mathbb{R})$$

**Exemple2** : Déterminer l'ensemble  $(C)$  des points

$M(x; y)$  du plan tel que :

$$\begin{cases} x = 3 + \sqrt{3} \cos \theta \\ y = 1 + \sqrt{3} \sin \theta \end{cases} \text{ avec } (\theta \in \mathbb{R})$$

$$\text{Solution : } \begin{cases} x - 3 = \sqrt{3} \cos \theta \\ y - 1 = \sqrt{3} \sin \theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + \sqrt{3} \cos \theta \\ y = 1 + \sqrt{3} \sin \theta \end{cases}$$

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = (\sqrt{3} \cos \theta)^2 + (\sqrt{3} \sin \theta)^2 \Leftrightarrow$$

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 3((\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2) \Leftrightarrow$$

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = \sqrt{3}^2$$

Donc l'ensemble  $(C)$  des points  $M(x; y)$  du plan est le cercle  $(C)$  de centre  $\Omega(3; 1)$  et de rayon  $R = \sqrt{3}$

**Exercice1** : le plan  $(P)$  est rapporté à un repère  $\mathcal{R}(O; \vec{i}; \vec{j})$  orthonormé.  $(C)$  l'ensemble des points

$$M(x; y) \text{ du plan tel que : } \begin{cases} x = 2 + 2 \cos \theta \\ y = 2 \sin \theta \end{cases} \text{ avec } (\theta \in \mathbb{R})$$

1) montrer que  $(C)$  est le cercle  $(C)$  dont on déterminera de centre  $\Omega$  et de rayon  $R$  et une équation cartésienne

2) soit le point  $A(-1; 0)$  ; montrer que  $A$  est à

l'extérieur du cercle  $(C)$  et déterminer les équations des deux tangentes au cercle  $(C)$  passant par  $A$

3) déterminer les équations des deux tangentes au cercle  $(C)$  et qui sont parallèles à la droite :

$$(D) : 3x - 4y = 0$$

4)a) soit la droite  $(\Delta)$  d'équation :  $y = x$

Montrer que  $(\Delta)$  coupe le cercle  $(C)$  en deux points à déterminer

4)b) déterminer graphiquement l'ensemble des points  $M(x; y)$  du plan tel que :  $\frac{x^2 + y^2}{4} \leq x \leq y$

$$\text{Solution : 1) } \begin{cases} x = 2 + 2 \cos \theta \\ y = 2 \sin \theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 2 \cos \theta \\ y - 0 = 2 \sin \theta \end{cases}$$

$$(x-2)^2 + (y-0)^2 = (2 \cos \theta)^2 + (2 \sin \theta)^2 \Leftrightarrow$$

$$(x-2)^2 + (y-0)^2 = 4((\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2) \Leftrightarrow$$

$$(x-2)^2 + (y-0)^2 = 2^2$$

Donc l'ensemble  $(C)$  des points  $M(x; y)$  du plan est le cercle  $(C)$  de centre  $\Omega(2; 0)$  et de rayon  $R = 2$

$$2) A(-1; 0) ; (C) : (x-2)^2 + (y-0)^2 = 2^2$$

On a :  $(-1-2)^2 + (0-0)^2 - 4 = 9 - 4 > 0$  donc  $A$  est à l'extérieur du cercle  $(C)$

Soit  $(T)$  une droite qui passe par  $A$  et tangente au cercle  $(C)$  et soit :  $ax + by + c = 0$  une équation cartésienne de  $(T)$  avec  $(a; b) \neq (0; 0)$

Puisque  $(T)$  est tangente au cercle  $(C)$  alors :

$$d(\Omega, (T)) = R \text{ cad } \frac{|2a + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 2 :$$

Et on a :  $A \in (T)$  donc :  $-a + c = 0$  donc on trouve :

$$b = \frac{a\sqrt{5}}{2} \text{ ou } b = -\frac{a\sqrt{5}}{2} \text{ et l'équation cartésienne de}$$

$$(T) \text{ est : } 2x - \sqrt{5}y + 2 = 0 \text{ ou } 2x + \sqrt{5}y + 2 = 0$$

Par suite les équations des deux tangentes au cercle  $(C)$  passant par  $A$  sont :

$$(T_1) : 2x - \sqrt{5}y + 2 = 0 \text{ ou } (T_2) : 2x + \sqrt{5}y + 2 = 0$$

$$3) (D) : 3x - 4y = 0 \quad \Omega(2; 0)$$

Puisque  $(T) \parallel (D)$  donc on pose :

$$(T) : 3x - 4y + c = 0 \text{ et } (T) \text{ tangentes au cercle } (C)$$

$$\text{Donc : } d(\Omega, (T)) = R \Leftrightarrow \text{cad } \frac{|6 + c|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 2 :$$

$$\Leftrightarrow \frac{|6 + c|}{5} = 2 \Leftrightarrow |6 + c| = 10 \Leftrightarrow 6 + c = 10 \text{ Ou } 6 + c = -10$$

$$c = 4 \text{ ou } c = -16$$

Donc les tangentes au cercle (C) sont :

$$(T_1') : 3x - 4y + 4 = 0 \text{ ou } (T_2') : 3x - 4y - 16 = 0$$

4)a) on va résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-0)^2 = 2^2 \\ y = x \end{cases} \text{ donc : } y = x \text{ et } 2x^2 - 4x = 0$$

donc :  $(x=0 \text{ ou } x=2)$  et  $y = x$

donc :  $(\Delta)$  coupe le cercle (C) aux points :

$$O(0;0) \text{ et } B(2;2)$$

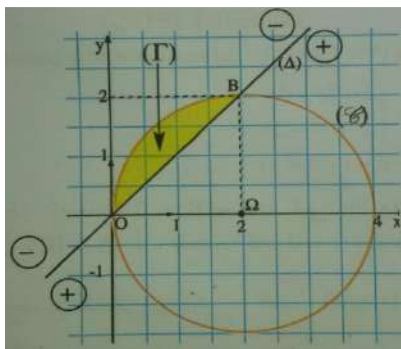
$$4)b) \frac{x^2 + y^2}{4} \leq x \leq y \Leftrightarrow \begin{cases} x - y \leq 0 \\ x^2 + y^2 - 4x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y \leq 0 \\ (x-2)^2 + y^2 - 4 \leq 0 \end{cases}$$

L'inéquation :  $(x-2)^2 + y^2 - 4 \leq 0$  détermine

l'ensemble des points  $M(x; y)$  du plan qui se trouve à l'intérieur du cercle (C) ou sur le cercle (C)

Et l'inéquation :  $x - y \leq 0$  détermine l'ensemble des points  $M(x; y)$  du plan qui se trouve au-dessus de la droite  $(\Delta)$  ou sur la droite  $(\Delta)$

Voire la figure ci-dessus :



**Exercice2** : le plan (P) est rapporté à un repère

$\mathcal{R}(O; \vec{i}; \vec{j})$  orthonormé. Soient les points

$$A(3;4) \quad B(4;1); \quad C(2;-3)$$

1) montrer que les points A ; B et C sont non alignés

2) Ecrire l'équation du cercle (C) passant

par A ; B et C

**Solution** : 1) on a :  $\vec{AB}(1;-3)$  et  $\vec{AC}(-1;-7)$

$$\det(\vec{AB}; \vec{AC}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -7 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$$

Donc les points A ; B et C sont non alignés

1) Soient  $I\left(\frac{7}{2}; \frac{5}{2}\right)$  et  $J(3;-1)$  le milieu

respectivement du segments :  $[AB]$  et  $[BC]$

Et soit (D) la médiatrice de  $[AB]$  donc (D) passe par I et  $\vec{AB}$  un vecteur normal a (D)

$$M(x; y) \in (D) \Leftrightarrow \vec{IM} \cdot \vec{AB} = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{7}{2}\right) - 3\left(y - \frac{5}{2}\right) = 0 \\ \Leftrightarrow x - 3y + 4 = 0$$

Donc : (D) :  $x - 3y + 4 = 0$

Et soit  $(\Delta)$  la médiatrice de  $[BC]$  donc  $(\Delta)$  passe par J et  $\vec{BC}$  un vecteur normal a  $(\Delta)$

$$M(x; y) \in (\Delta) \Leftrightarrow \vec{JM} \cdot \vec{BC} = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 1 = 0$$

Donc :  $(\Delta)$  :  $x + 2y - 1 = 0$  (après simplifications)

soit  $\Omega$  est le Centre du cercle circonscrit du triangle ABC donc le point d'intersection de  $(\Delta)$  et (D) on va donc résoudre le système :

$$\begin{cases} x - 3y + 4 = 0 \\ x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

Et la solution de ce système est :  $\Omega(-1;1)$  donc

$\Omega(-1;1)$  est le centre du cercle circonscrit du triangle

ABC et le rayon est :  $r = A\Omega = \sqrt{(3+1)^2 + (4-1)^2} = 5$

Et l'équation du cercle est :  $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 25$

$$(C) : x^2 + y^2 + 2x - 2y - 23 = 0$$

**Exercice 3**: le plan (P) est rapporté à un repère

$\mathcal{R}(O; \vec{i}; \vec{j})$  orthonormé.  $(C_m)$  l'ensemble des points

$M(x; y)$  du plan tel que :

$$(C_m) : x^2 + y^2 - 2mx + 2y + 2m = 0 \text{ avec } m \text{ Paramètre réel}$$

1) déterminer l'ensemble  $(C_1)$

2) a) montrer que  $\forall m \in \mathbb{R} - \{1\}$   $(C_m)$  est un cercle dont déterminera le centre  $\Omega_m$  et de rayon  $R_m$

2) b) déterminer l'ensemble des centres  $\Omega_m$  lorsque  $m \in \mathbb{R} - \{1\}$

2) b) montrer que tous les cercles  $(C_m)$  passent par un point fixe I dont déterminera et tracer

$(C_0); (C_2); (C_3)$

3) a) montrer que la droite  $(\Delta) : x=1$  est tangente à toutes les cercles  $(C_m)$

3) b) soit  $m > \frac{-3}{2}$  et  $m \neq 1$  et le point  $A(0;1)$

Vérifier que  $A$  est à l'extérieur des cercles  $(C_m)$  et que la droite  $(AI)$  n'est pas tangente aux cercles  $(C_m)$

**solution :** 1)  $(C_1)$  ? pour  $m=1$  on a :

$$(C_1) : x^2 + y^2 - 2x + 2y + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x-1=0 \text{ et } y+1=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ et } y=-1$$

Donc :  $(C_1)$  est le point  $E(1;-1)$

2) a)  $(C_m) : x^2 + y^2 - 2mx + 2y + 2m = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x-m)^2 + (y+1)^2 = (m-1)^2$$

Donc :  $(C_m)$  est un cercle de centre  $\Omega_m(m;-1)$  et de rayon  $R_m = |m-1| \quad \forall m \in \mathbb{R} - \{1\}$

2) b) on pose :  $x=m$  et  $y=-1$  avec  $m \in \mathbb{R} - \{1\}$

on a donc : l'ensemble des centres  $\Omega_m$  lorsque

$m \in \mathbb{R} - \{1\}$  est la droite d'équation :  $y = -1$  privé du

Point  $E(1;-1)$

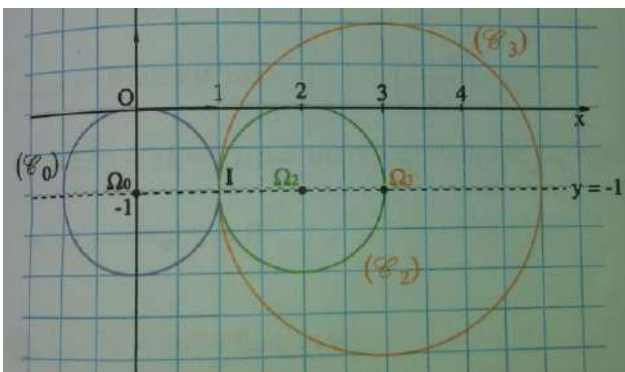
2) b)  $I(a;b) \in (C_m) \quad \forall m \in \mathbb{R} - \{1\}$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ma + 2b + 2m = 0$$

$$\Leftrightarrow m(2-2a) + a^2 + b^2 + 2b = 0 \quad \forall m \in \mathbb{R} - \{1\}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-2a=0 \\ a^2 + b^2 + 2b=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=1 \text{ et } b=-1 \text{ Donc : tous les}$$

cercles  $(C_m)$  passent par un point fixe  $I(1;-1)$



3) a) L'équation de  $(\Delta)$  est :  $x+0y-1=0$

$$\text{Et } d(\Omega_m, (\Delta)) = \frac{|m-1|}{\sqrt{1^2+0^2}} = |m-1| = R_m$$

Donc : la droite  $(\Delta)$  est tangente à toutes les

cercles  $(C_m)$  (on peut montrer que  $(\Delta)$  coupe en  $(C_m)$  un point unique)

3) b) on a :  $x^2 + y^2 - 2mx + 2y + 2m = 2m + 3$

Et puisque :  $m > \frac{-3}{2}$  alors :  $x^2 + y^2 - 2mx + 2y + 2m > 0$

donc  $A$  est à l'extérieur des cercles  $(C_m)$

$$\text{Montrons que : } d(\Omega_m, (AI)) = \frac{|2m-2|}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} R_m$$

Donc :  $(AI)$  n'est pas tangente aux cercles  $(C_m)$

Car :  $\frac{2}{\sqrt{5}} R_m \neq R_m$

**Exercice 1 :** Déterminer les ensembles :

$$(\Gamma_1) = \{M(x, y) \in (\mathcal{P}) / x^2 + y^2 - 2x + y + 1 = 0\}$$

$$(\Gamma_2) = \{M(x, y) \in (\mathcal{P}) / x^2 + y^2 - x + 2y + 4 = 0\}$$

**Exercice 1 :**

Soient les points  $A(-1,0)$ ,  $B(1,2)$  et  $C(5, -2)$

1- Montrer que les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  ne sont pas alignés

2- Ecrire l'équation du cercle circonscrit au Triangle  $ABC$ .

**Exercice 2 :** Soit l'ensemble :

$$(C_m) = \{M(x, y) \in (\mathcal{P}) / x^2 + y^2 - 2mx + 4my + 4m^2 - 1 = 0\}$$

où  $m$  est un réel.

1- Montrer que pour tout  $m$  dans  $\mathbb{R}$ , l'ensemble  $(C_m)$

est un cercle et déterminer ses éléments.

2- Déterminer l'équation cartésienne du plus petit cercle  $(C_m)$ .

3- Déterminer l'ensemble dans lequel varient les centres  $\Omega_m$  quand  $m$  décrit  $\mathbb{R}$

4- a) Déterminer pour quelles valeurs de  $m$  le point  $A(-1,2)$  appartient-il à  $(C_m)$

b) Soit  $M_0(x_0; y_0)$  un point donné dans le plan, existent-ils toujours des réels  $m$

qui vérifient  $M_0 \in (C_m)$

5- Déterminer s'il existe l'intersection de tous les cercles  $(C_m)$

**C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.**

**C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices**

**Que l'on devient un mathématicien**



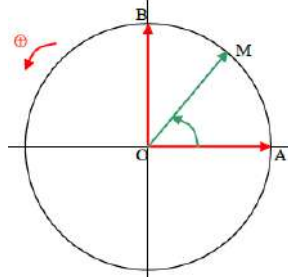
# CALCUL TRIGONOMETRIQUE

## Formules de transformations

### I) RAPPELLES

#### 1) Cercle trigonométrique

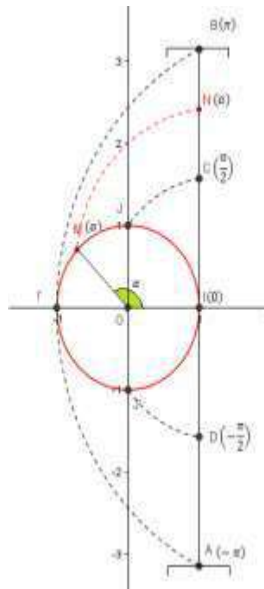
**Définition :** Le cercle trigonométrique est un cercle de centre  $O$  l'origine du plan de rayon  $R = 1$  orienté une orientation positive. et admet une origine  $I$



#### 2) Les abscisses curvilignes

##### 1.1 L'abscisse curviligne principale d'un point sur le C.T

Soit  $(C)$  le cercle trigonométrique d'origine  $I$ ; considérons l'intervalle  $]-\pi, \pi]$  tel que  $O$  l'abscisse de  $I$  sur l'axe perpendiculaire sur  $(OI)$ . Si on fait enrouler le segment qui représente  $]-\pi, \pi]$  au tour du cercle  $(C)$  on remarque que chaque point  $N$  d'abscisse  $\alpha$  de l'intervalle  $]-\pi, \pi]$  s'associe avec un point unique  $M$  du cercle trigonométrique.



#### Le réel $\alpha$ s'appelle l'abscisse curviligne principale du point $M$

et inversement si  $\alpha$  est un réel de l'intervalle  $]-\pi, \pi]$ , alors il existe un point  $M$  unique de  $(C)$  qui s'associe avec le point  $N(\alpha)$ . Le réel  $\alpha$  représente aussi la mesure de l'angle géométrique centrique  $[IOM]$

##### 1.2 Les abscisses curvilignes d'un point sur le cercle trigonométrique

Considérons le cercle trigonométrique  $(C)$  d'origine  $I$ .  $(\Delta)$  est la droite passant par  $I$  et perpendiculaire à  $(OI)$  et d'unité égale à  $OJ$ .

Soit  $M$  un point sur le cercle  $(C)$  et d'abscisse curviligne principale  $\alpha$ .

Si on suppose que la droite  $(\Delta)$  est un fil qu'on peut enrouler autour du cercle  $(C)$  on remarque que le point  $M$  du cercle  $(C)$  coïncide avec une infinité de points de la droite  $(\Delta)$ ; et qui ont pour abscisses

$\dots (\alpha - 6\pi), (\alpha - 4\pi), (\alpha - 2\pi), (\alpha), (\alpha + 2\pi) \dots$

En générale : chaque point  $N_k$  de la droite  $(\Delta)$  qui coïncidera avec le point  $M$  aura pour abscisse  $\alpha + k2\pi$ . Ces réels s'appellent les abscisses curvilignes du point  $M$  sur le cercle  $(C)$ .

**Définition :** Soit  $M$  un point sur le cercle  $(C)$  et d'abscisse curviligne principale  $\alpha$ . Les réels qui s'écrivent de la forme  $\alpha + 2k\pi$  où  $k$  est un entier relatif s'appellent les abscisses curvilignes du point  $M$  sur le cercle  $(C)$ .

### II) TRANSFORMATION DE $\cos(x - y)$ ET CONSEQUENCES.

#### 1) Formules de l'addition :

**Activité :** Soit  $M$  et  $N$  deux points sur le cercle trigonométrique d'abscisses curvilignes respectifs  $x$  et  $y$ .

- 1- Calculer  $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}$  de deux façons différentes.
- 2- En déduire  $\cos(x - y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$
- 3- Calculer  $\cos(x + y)$  en fonction des valeurs trigonométriques de  $x$  et de  $y$ .
- 4- Calculer  $\sin(x + y)$  et  $\sin(x - y)$  en fonction des valeurs trigonométriques de  $x$  et de  $y$ .

**Propriété 1 :** Pour tous réels  $x$  et  $y$  on a :

- $\cos(x - y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$  (1)
- $\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$  (2)
- $\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$  (3)
- $\sin(x - y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y$  (4)

**Exemple :** 1) Calculer  $\cos \frac{\pi}{12}$  et  $\sin \frac{\pi}{12}$

2) Calculer  $\cos \frac{5\pi}{12}$  et  $\sin \frac{5\pi}{12}$

3) monter que :  $\cos x = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

4) monter que :  $\sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) + \sin x = 0$

**Solution :**

1)  $\cos \frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6}$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\sin \frac{\pi}{12} = \sin \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) = \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$2) \cos \frac{5\pi}{12} = \cos \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \right) = \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\sin \frac{5\pi}{12} = \sin \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \right) = \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$3) \left( \cos \left( x + \frac{\pi}{3} \right) + \cos \left( x - \frac{\pi}{3} \right) \right) = \cos x \text{ ?}$$

$$\cos \left( x + \frac{\pi}{3} \right) + \cos \left( x - \frac{\pi}{3} \right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos x - \sin \frac{\pi}{3} \sin x + \cos \frac{\pi}{3} \cos x + \sin \frac{\pi}{3} \sin x$$

$$= \frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x = 2 \times \frac{1}{2} \cos x = \cos x$$

$$4) \sin \left( x + \frac{2\pi}{3} \right) = \sin x \cos \frac{2\pi}{3} + \sin \frac{2\pi}{3} \cos x = \sin x \cos \left( \pi - \frac{\pi}{3} \right) + \sin \left( \pi - \frac{\pi}{3} \right) \cos x$$

$$\sin \left( x + \frac{2\pi}{3} \right) = -\sin x \cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{3} \cos x$$

$$\sin \left( x - \frac{2\pi}{3} \right) = \sin x \cos \frac{2\pi}{3} - \sin \frac{2\pi}{3} \cos x = \sin x \cos \left( \pi - \frac{\pi}{3} \right) - \sin \left( \pi - \frac{\pi}{3} \right) \cos x$$

$$\sin \left( x - \frac{2\pi}{3} \right) = -\sin x \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{3} \cos x$$

$$\sin \left( x + \frac{2\pi}{3} \right) + \sin \left( x - \frac{2\pi}{3} \right) + \sin x = -2 \sin x \cos \frac{\pi}{3} + \sin x = -\sin x + \sin x = 0$$

### Exercice1 :

$$\text{Soient : } 0 < a < \frac{\pi}{2} \text{ et } 0 < b < \frac{\pi}{2} \text{ et } \cos a = \sin b = \frac{1}{2}$$

1) Calculer :  $\sin a$  et  $\cos b$

2) Calculer :  $\sin(a+b)$

**Solution :** calcul de  $\cos b$  :

$$\text{on a } \cos^2 b + \sin^2 b = 1 \Leftrightarrow \cos^2 b = 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^2$$

$$\cos^2 b = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \cos b = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } \cos b = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Or : } 0 < b < \frac{\pi}{2} \text{ donc : } \cos b = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

calcul de :  $\sin a$

$$\text{on a : } \cos^2 b + \sin^2 b = 1 \Leftrightarrow \sin^2 a = 1 - \cos^2 a \Leftrightarrow \sin^2 a = 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^2$$

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

donc :  $\sin^2 a = \frac{3}{4}$  donc

$$\sin a = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou}$$

$$\sin a = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{or } 0 < a < \frac{\pi}{2} \text{ donc : } \sin a = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

2) on a :  $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$$\text{Donc : } \sin(a+b) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

**Exercice2 :** Calculer  $\cos \frac{11\pi}{12}$  et  $\sin \frac{11\pi}{12}$

### 2) Formules d'angle double.

D'après propriété 1 ligne (2) on a :

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x \text{ et on sait que } \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$$

$$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x.$$

D'après Propriété 1 ligne (3) on a :

$$\sin(2x) = 2\sin x \cos x$$

**Propriété 2 :** Pour tout réel  $x$  on a :

$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 \quad (1)$$

$$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x \quad (2)$$

$$\sin(2x) = 2\sin x \cos x \quad (3)$$

**Exemple :** calculer  $\cos \frac{\pi}{8}$  et  $\sin \frac{\pi}{8}$

**Solution :** on a  $\frac{\pi}{4} = 2 \frac{\pi}{8}$  donc  $\cos \frac{\pi}{4} = \cos \left( 2 \frac{\pi}{8} \right)$

D'après :  $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 \quad (1)$

$$\text{On a Donc : } \cos \frac{\pi}{4} = 2\cos^2 \frac{\pi}{8} - 1 \text{ donc :}$$

$$\cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$$

$$\text{donc : } \cos \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}} \text{ ou } \cos \frac{\pi}{8} = -\sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}}$$

$$\text{Or } 0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2} \text{ donc : } \cos \frac{\pi}{8} > 0 \text{ donc : } \cos \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}}$$

$$\text{donc : } \cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

D'après :  $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x \quad (2)$

On a Donc :  $\cos \frac{\pi}{4} = 1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{8}$  donc :

$$\sin^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1 - \cos \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$$

$$\text{donc : } \sin \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}} \text{ ou } \sin \frac{\pi}{8} = -\sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}}$$

$$\text{Or } 0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2} \text{ donc : } \sin \frac{\pi}{8} > 0 \text{ donc : } \sin \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}}$$

$$\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

**Exercice3 :** Sachant que  $\sin x = \frac{1}{2}$  et  $0 < x < \frac{\pi}{2}$

calculer :  $\cos(2x)$  et  $\sin(2x)$

**Solution :** on a :  $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$

$$\text{Donc : } \cos(2x) = 1 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{2}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Et on a :  $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$  il faut Calculer  $\cos x$  ?

$$\text{on a : } \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \text{ Donc : } \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$\text{Donc : } \cos^2 x = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \text{ donc : } \cos^2 x = \frac{3}{4}$$

$$\text{donc : } \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{or } 0 < x < \frac{\pi}{2} \text{ donc : } \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{donc : } \sin(2x) = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

**Exercice4 :** Montrer que :  $\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = 2 \forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$

**Solution :**

$$\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = \frac{\sin 3x \cos x - \sin x \cos 3x}{\sin x \cos x} = \frac{\sin(3x - x)}{\sin x \cos x}$$

$$= \frac{\sin(2x)}{\sin x \cos x} = \frac{2 \sin x \cos x}{\sin x \cos x} = 2$$

### 3) Formules du demi-angle.

D'après : propriété 2 ligne (1) et (2) on a :

**Propriété 3 :** Pour tous réels  $x$  et  $y$  on a :

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \quad (1)$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \quad (2)$$

D'après propriété 2

$$\text{Propriété 4 : } \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1 \quad (1)$$

$$\cos x = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} \quad (2) \quad \sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \quad (3)$$

**Exemple :** montrer que :

$$1) 1 - \cos x + \sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \left( \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)$$

2) si  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $\sin \alpha \neq -1$  alors

$$\frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha} = \tan^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)$$

**Solution :**

$$1) \text{ on a : } 1 - \cos x + \sin x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$$

$$\text{Car : } \cos x = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} \quad (2) \text{ et } \sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \quad (3)$$

$$\text{Donc : } 1 - \cos x + \sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \left( \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)$$

$$2) \text{ on a : } 1 - \sin \alpha = 1 - \cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) \text{ et } 1 + \sin \alpha = 1 + \cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right)$$

$$\text{Donc : } 1 - \sin \alpha = 2 \sin^2 \left( \frac{\frac{\pi}{2} - \alpha}{2} \right) \text{ et } 1 + \sin \alpha = 2 \cos^2 \left( \frac{\frac{\pi}{2} - \alpha}{2} \right)$$

$$\text{Donc : } 1 - \sin \alpha = 2 \sin^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) \text{ et } 1 + \sin \alpha = 2 \cos^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)$$

$$\text{Donc : } \frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha} = \frac{\left( \sin \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) \right)^2}{\left( \cos \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) \right)^2} = \tan^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)$$

**Exercice 5 :** Montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}$

$$1) \sin^2 2x - \cos 2x - 1 = -2 \cos^2 x \cos 2x$$

$$2) 2 \sin^2 x + 12 \cos^2 x = 5 \cos 2x + 7$$

**Solution :**

$$1) \sin^2 2x - \cos 2x - 1 = (2 \cos x \sin x)^2 - 2 \cos^2 x - 1 - 1$$

$$4 \cos^2 x \sin^2 x - 2 \cos^2 x = -2 \cos^2 x \cos 2x$$

$$2) 2 \sin^2 x + 12 \cos^2 x = 2 \sin^2 x + 12(1 - \sin^2 x) = -10 \sin^2 x + 12$$

$$= \frac{-10}{2}(1 - \cos 2x) + 12 = -5(1 - \cos 2x) + 12 = 5 \cos 2x + 7$$

### 4) Formules de la tangente.

Soient  $x$  et  $y$  deux réels tels que:  $(x + y) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  on a

$$\tan(x + y) = \frac{\sin(x + y)}{\cos(x + y)} = \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y}$$

si  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  et  $y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  alors :  $\cos x \cdot \cos y \neq 0$

$$\tan(x+y) = \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y} = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \times \tan y}$$

$$\text{si } x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \text{ et } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

On en déduit que : si  $x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$  et  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

$$\text{Si } (x-y) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ et } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ et } y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \times \tan y}$$

**Propriété 5:** Soient  $x$  et  $y$  deux réels tels que :

$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ et } y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ on a :}$$

$$1) \text{ Si } (x+y) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ alors } \tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \times \tan y} \quad (1)$$

$$2) \text{ si } x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \text{ alors : } \tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} \quad (2)$$

$$3) \text{ Si } (x-y) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ alors :}$$

$$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \times \tan y} \quad (3)$$

**Applications :** Calculer  $\tan \frac{\pi}{12}$  et  $\tan \frac{5\pi}{12}$

**Solution :**

$$\tan \frac{\pi}{12} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan \frac{\pi}{6}}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \tan \frac{\pi}{6}} = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = 2 - \sqrt{3}$$

$$\tan \frac{5\pi}{12} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan \frac{\pi}{6}}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \tan \frac{\pi}{6}} = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = 2 + \sqrt{3}$$

**Exercice6 :** Calculer  $\tan \frac{11\pi}{12}$

**Exercice7 :**

1- Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $x^2 + 2x - 1 = 0$

2- En déduire  $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$

**Solution :** 1) utiliser le déterminant  $\Delta$

2) utiliser :  $\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$  (2) on remplaçant :  $x = \frac{\pi}{8}$

**5) Les valeurs trigonométrique en fonction de :**

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

1) D'après Propriété 5 (2) et si  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

et  $x \neq \pi + 2k\pi$

$$\tan x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan^2 \frac{x}{2}} \quad \text{On posant : } t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\text{on en déduit : } \tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$

2) D'après Propriété 4 (1) on a :  $\cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1$

$$\text{et on sait : } 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\text{par suite : } \cos x = \frac{2}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} - 1$$

si  $x \neq \pi + 2k\pi$  alors : on peut conclure que :

$$\cos x = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}$$

$$\text{On posant } t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \text{ on en déduit : } \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\text{D'après Propriété 4 (3) on a : } \sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$$

si  $x \neq \pi + 2k\pi$

$$\text{Alors on peut conclure que : } \sin x = 2 \tan \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}$$

$$\text{d'où : } \sin x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} \quad \text{On posant : } t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \text{ on}$$

$$\text{en déduit : } \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

**Propriété 6:** Soit  $x$  un réel tel que :  $x \neq \pi + 2k\pi$  on a :

$$1) \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad (1)$$

$$2) \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad (2)$$

Si de  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  et  $x \neq \pi + 2k\pi$

$$3) \tan x = \frac{2t}{1-t^2} \quad (3)$$

**Application:** soit  $a \in \mathbb{R}$  tel que :  $\tan \frac{a}{2} = \sqrt{2}$

Calculer  $\cos a$  et  $\sin a$  et  $\tan a$

**Solution :** on a  $\cos a = \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{1-\sqrt{2}^2}{1+\sqrt{2}^2} = -\frac{1}{3}$

$$\sin a = \frac{2t}{1+t^2} = \frac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\tan a = \frac{2t}{1-t^2} = \frac{2\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}^2} = -2\sqrt{2}$$

**Exercice 8 :** 1- Montrer que  $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3}$

2- Considérons l'équation :

$$(E): 2\cos x - 2\sin x - 1 - \sqrt{3} = 0$$

a) Vérifier que  $\pi + 2k\pi$  n'est pas une solution de l'équation (E)

b) en posant :  $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ , résoudre l'équation (E)

(remarquer que  $4 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} - 1)^2$ )

3- Représenter les images des solutions sur le cercle trigonométrique.

### 6) Transformations des sommes en produits

De la propriété 1 et de (1)+(2) on peut conclure que :

$$\cos(x-y) + \cos(x+y) = 2\cos x \cdot \cos y$$

Si on pose :  $x-y = p$  et  $x+y = q$  alors on peut

$$\text{déduire : } x = \frac{p+q}{2} \text{ et } y = \frac{p-q}{2}$$

On peut conclure que :

$$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

De la propriété 1 et de (1)-(2) on peut conclure que :

$$\cos(x-y) - \cos(x+y) = -2\sin x \cdot \sin y$$

Si on pose :  $x-y = p$  et  $x+y = q$  alors on peut

$$\text{déduire : } x = \frac{p+q}{2} \text{ et } y = \frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

De la même façon on peut montrer les autres propriétés :

**Propriété 7:** Pour tous réels  $p, q$ , on a :

$$\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin p - \sin q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

**Application :** Transformer en produits les expressions suivantes :

$$1) A(x) = \sin 2x + \sin 4x$$

$$2) B(x) = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x$$

**Solution :1)**

$$A(x) = \sin 2x + \sin 4x = 2\sin\left(\frac{2x+4x}{2}\right)\cos\left(\frac{2x-4x}{2}\right)$$

$$\sin 2x + \sin 4x = 2\sin 3x \cos(-2x) = 2\sin 3x \cos 2x$$

2) on a :

$$\cos x + \cos 3x = 2\cos\left(\frac{3x+x}{2}\right)\cos\left(\frac{3x-x}{2}\right) = 2\cos 2x \cos x$$

$$\cos 2x + \cos 4x = 2\cos\left(\frac{4x+2x}{2}\right)\cos\left(\frac{4x-2x}{2}\right) = 2\cos 3x \cos x$$

$$\text{Donc : } B(x) = 2\cos 2x \cos x + 2\cos 3x \cos x = 2\cos x (\cos 2x + \cos 3x)$$

$$\text{Et on a : } \cos 2x + \cos 3x = 2\cos \frac{x}{2} \cos \frac{5x}{2}$$

$$\text{Donc : } B(x) = 4\cos x \cos \frac{x}{2} \cos \frac{5x}{2}$$

**Exercice 9 :** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :

$$\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x = 0$$

### 8) Transformations des produits en sommes.

De la propriété 1 et de (1)+(2) on peut conclure que :

$$\cos(x-y) + \cos(x+y) = 2\cos x \cdot \cos y \text{ d'où :}$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x-y) + \cos(x+y)]$$

De la même façon on peut montrer les autres égalités :

**Propriété :** Pour tous réels  $x, y$  on a :

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\sin x \cdot \sin y = -\frac{1}{2} [\cos(x+y) - \cos(x-y)]$$

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

**La linéarisation** d'une expression c'est de l'écrire sous la forme d'une somme.

**Application :** écrire sous la forme d'une somme

$$1) \cos 2x \times \sin 4x \quad 2) \sin x \times \sin 3x \quad 3) \cos 4x \times \cos 6x$$

**Solution :**

$$1) \cos 2x \times \sin 4x = \frac{1}{2} (\sin(2x+4x) - \sin(2x-4x)) = \frac{1}{2} (\sin 6x - \sin(-2x))$$

$$= \frac{1}{2} (\sin 6x + \sin 2x) = \frac{1}{2} \sin 6x + \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$2) \sin x \times \sin 3x = \frac{1}{2} (\cos(x+3x) - \cos(x-3x)) = \frac{1}{2} (\cos 4x - \cos(-2x))$$

$$\sin x \times \sin 3x = \frac{1}{2} (\cos 4x - \cos(2x)) = \frac{1}{2} \cos 4x - \frac{1}{2} \cos(2x)$$

$$3) \cos 4x \times \cos 6x = \frac{1}{2}(\cos(4x+6x) + \cos(4x-6x)) = \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos(-2x))$$

$$\cos 4x \times \cos 6x = \frac{1}{2} \cos 4x - \frac{1}{2} \cos(2x)$$

**Exercice 10 :** calculer

$$1) \cos \frac{7\pi}{12} \times \cos \frac{5\pi}{12} \quad 2) \sin \frac{7\pi}{12} \times \cos \frac{5\pi}{12}$$

**Solution :**

$$1) \cos \frac{7\pi}{12} \times \cos \frac{5\pi}{12} = \frac{1}{2} \left( \cos \left( \frac{7\pi}{12} + \frac{5\pi}{12} \right) + \cos \left( \frac{7\pi}{12} - \frac{5\pi}{12} \right) \right)$$

$$\cos \frac{7\pi}{12} \times \cos \frac{5\pi}{12} = \frac{1}{2} \left( \cos \pi + \cos \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2} \left( -1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}-2}{4}$$

$$2) \sin \frac{7\pi}{12} \times \cos \frac{5\pi}{12} = \frac{1}{2} \left( \sin \left( \frac{7\pi}{12} + \frac{5\pi}{12} \right) + \sin \left( \frac{7\pi}{12} - \frac{5\pi}{12} \right) \right)$$

$$\sin \frac{7\pi}{12} \times \cos \frac{5\pi}{12} = \frac{1}{2} \left( \sin \pi + \sin \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2} \left( 0 + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4}$$

**Exercice 11 :** Montrer que

$$1) \sin \frac{3\pi}{11} + \sin \frac{7\pi}{11} = 2 \sin \left( \frac{5\pi}{11} \right) \cos \left( \frac{2\pi}{11} \right)$$

$$2) \sin \frac{3\pi}{11} - \sin \frac{7\pi}{11} = -2 \cos \left( \frac{5\pi}{11} \right) \sin \left( \frac{2\pi}{11} \right)$$

$$3) \text{ en d\u00e9duire que: } \frac{\sin \frac{3\pi}{11} + \sin \frac{7\pi}{11}}{\sin \frac{3\pi}{11} - \sin \frac{7\pi}{11}} = - \frac{\tan \left( \frac{5\pi}{11} \right)}{\tan \left( \frac{2\pi}{11} \right)}$$

**Solution :**

$$1) \sin \frac{3\pi}{11} + \sin \frac{7\pi}{11} = 2 \sin \left( \frac{\frac{3\pi}{11} + \frac{7\pi}{11}}{2} \right) \cos \left( \frac{\frac{3\pi}{11} - \frac{7\pi}{11}}{2} \right)$$

$$\sin \frac{3\pi}{11} + \sin \frac{7\pi}{11} = 2 \sin \left( \frac{5\pi}{11} \right) \cos \left( -\frac{2\pi}{11} \right) = 2 \sin \frac{5\pi}{11} \cos \frac{2\pi}{11}$$

$$2) \sin \frac{3\pi}{11} - \sin \frac{7\pi}{11} = 2 \cos \left( \frac{\frac{3\pi}{11} + \frac{7\pi}{11}}{2} \right) \sin \left( \frac{\frac{3\pi}{11} - \frac{7\pi}{11}}{2} \right)$$

$$\sin \frac{3\pi}{11} - \sin \frac{7\pi}{11} = 2 \cos \left( \frac{5\pi}{11} \right) \sin \left( -\frac{2\pi}{11} \right) = -2 \cos \frac{5\pi}{11} \sin \frac{2\pi}{11}$$

$$3) \frac{\sin \frac{3\pi}{11} + \sin \frac{7\pi}{11}}{\sin \frac{3\pi}{11} - \sin \frac{7\pi}{11}} = - \frac{2 \sin \left( \frac{5\pi}{11} \right) \cos \left( \frac{2\pi}{11} \right)}{-2 \cos \left( \frac{5\pi}{11} \right) \sin \left( \frac{2\pi}{11} \right)}$$

$$= - \frac{\sin \left( \frac{5\pi}{11} \right) \cos \left( \frac{2\pi}{11} \right)}{\cos \left( \frac{5\pi}{11} \right) \sin \left( \frac{2\pi}{11} \right)} = - \tan \left( \frac{5\pi}{11} \right) \times \frac{1}{\tan \left( \frac{2\pi}{11} \right)} = - \frac{\tan \left( \frac{5\pi}{11} \right)}{\tan \left( \frac{2\pi}{11} \right)}$$

**Exercice 12 :** Montrer que  $\frac{\cos 2x - \cos 4x}{\cos 2x + \cos 4x} = \tan 3x \times \tan x$

**Solution :** on a :

$$\cos 2x - \cos 4x = -2 \sin \left( \frac{2x+4x}{2} \right) \sin \left( \frac{2x-4x}{2} \right) = 2 \sin(3x) \sin x$$

$$\text{et } \cos 2x + \cos 4x = 2 \cos \left( \frac{2x+4x}{2} \right) \cos \left( \frac{2x-4x}{2} \right) = 2 \cos 3x \cos x$$

$$\text{donc : } \frac{\cos 2x - \cos 4x}{\cos 2x + \cos 4x} = \frac{2 \sin 3x \sin x}{2 \cos 3x \cos x} = \frac{\sin 3x}{\cos 3x} \times \frac{\sin x}{\cos x} = \tan 3x \times \tan x$$

car :  $\cos(-x) = \cos x$  et  $\sin(-x) = -\sin x$

**Exercice 13 :** Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\cos^2 \frac{5x}{2} - \cos^2 \frac{3x}{2} = -\sin 4x \times \sin x$$

**Solution :**

$$\cos^2 \frac{5x}{2} - \cos^2 \frac{3x}{2} = \left( \cos \frac{5x}{2} + \cos \frac{3x}{2} \right) \left( \cos \frac{5x}{2} - \cos \frac{3x}{2} \right)$$

$$\cos \frac{5x}{2} + \cos \frac{3x}{2} = 2 \cos \left( \frac{\frac{5x}{2} + \frac{3x}{2}}{2} \right) \cos \left( \frac{\frac{5x}{2} - \frac{3x}{2}}{2} \right) = 2 \cos(2x) \cos \left( \frac{x}{2} \right)$$

$$\cos \frac{5x}{2} - \cos \frac{3x}{2} = -2 \sin \left( \frac{\frac{5x}{2} + \frac{3x}{2}}{2} \right) \sin \left( \frac{\frac{5x}{2} - \frac{3x}{2}}{2} \right) = -2 \sin(2x) \sin \left( \frac{x}{2} \right)$$

$$\text{Donc : } \cos^2 \frac{5x}{2} - \cos^2 \frac{3x}{2} = 2 \cos(2x) \cos \left( \frac{x}{2} \right) \times -2 \sin(2x) \sin \left( \frac{x}{2} \right)$$

$$= -2 \cos(2x) \times \sin(2x) 2 \cos \left( \frac{x}{2} \right) \sin \left( \frac{x}{2} \right) = -\sin(4x) \sin x$$

**Exercice 14 :** Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}$

$$1) \sin 3x = \sin x \times (3 - 4 \sin^2 x)$$

$$2) \cos 3x = \cos x (4 \cos^2 x - 3)$$

$$3) c \cos(4x) = 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1$$

$$4) \sin(4x) = 4 \sin x (2 \cos^3 x - \cos x)$$

$$5) \cos^3 x = \frac{1}{4} (3 \cos x + \cos 3x)$$

**Solution : 1)**  $\sin 3x = \sin(2x+x) = \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x$

$$= 2 \sin x \cos^2 x + (1 - 2 \sin^2 x) \sin x = 2 \sin x (1 - \sin^2 x) + (1 - 2 \sin^2 x) \sin x$$

$$= 2 \sin x - 2 \sin^3 x + \sin x - 2 \sin^3 x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x = \sin x (3 - 4 \sin^2 x)$$

$$2) \cos 3x = \cos(2x+x) = \cos x \cos 2x - \sin 2x \sin x$$

$$= \cos x (2 \cos^2 x - 1) + \sin x \times 2 \cos x \sin x = 2 \cos^3 x - \cos x - 2 \cos x \sin^2 x$$

$$= 2 \cos^3 x - \cos x - 2 \cos x (1 - \cos^2 x) = 2 \cos^3 x - \cos x - 2 \cos x + 2 \cos^3 x$$

$$= 4 \cos^3 x - 3 \cos x = \cos x (4 \cos^2 x - 3)$$

$$3) c \cos(4x) = c \cos(2 \times 2x) = 2 \cos^2 2x - 1 = 2(2 \cos^2 x - 1)^2 - 1$$

$$= 2(4 \cos^4 x - 4 \cos^2 x + 1) - 1 = 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1$$

$$4) \sin(4x) = 4 \sin x \cos x (2 \cos^2 x - 1) = 4 \sin x (2 \cos^3 x - \cos x)$$

$$\sin(4x) = \sin(2 \times 2x) = 2 \sin 2x \cos 2x = 2 \times 2 \sin x \cos x (2 \cos^2 x - 1)$$

$$5) \cos^3 x = \frac{1}{4} (3 \cos x + \cos 3x) \quad \text{?}$$

**Methode 1:**

$$\frac{1}{4} (3 \cos x + \cos 3x) = \frac{1}{4} (3 \cos x + \cos(x+2x)) = \frac{1}{4} (3 \cos x + \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x)$$

$$= \frac{1}{4} (3 \cos x + \cos x (2 \cos^2 x - 1) - 2 \sin x \sin x \cos x)$$

$$= \frac{1}{4}(2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2\cos^3 x + 3\cos x) = \frac{1}{4}(4\cos^3 x) = \cos^3 x$$

Methode2:  $\cos^3 x = \cos^2 x \times \cos x = \frac{1+\cos 2x}{2} \times \cos x = \frac{1}{2}(\cos x + \cos 2x \times \cos x)$

$$\cos^3 x = \frac{1}{2}\left(\cos x + \frac{1}{2}(\cos 3x + \cos x)\right) = \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{1}{4}\cos x = \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x$$

$$\cos^3 x = \frac{1}{4}(3\cos x + \cos 3x)$$

**Exercice 15:**  $P(x) = \sin 2x - \sin x$  et  $Q(x) = 1 + \cos x + \cos 2x$

Montrer que :  $P(x) = \sin x(2\cos x - 1)$  et

$$Q(x) = \cos x(2\cos x + 1)$$

**Solution :**

$$Q(x) = 1 + \cos x + \cos 2x = 1 + \cos x + 2\cos^2 x - 1 = \cos x + 2\cos^2 x = \cos x(1 + 2\cos x)$$

$$P(x) = \sin 2x - \sin x = 2\sin x \cos x - \sin x = \sin x(2\cos x - 1)$$

**Exercices 16:**

1- Linéariser :  $2\cos^2 x \cdot \sin(2x)$

2- Linéariser :  $\cos^3 x$

### III) LES EQUATIONS TRIGONOMETRIQUES.

#### 1) Rappelles

##### 1.1 $\cos x = a$

**Propriété :** Considérons l'équation (E)  $\cos x = a$  où  $a$  est un réel :

1) si  $a < -1$  ou  $a > 1$  alors l'équation (E) n'admet pas de solutions.

2) les solutions de l'équation  $\cos x = 1$  sont les réels  $2k\pi$  où  $k \in \mathbb{Z}$

3) les solutions de l'équation  $\cos x = -1$  sont les réels  $\pi + 2k\pi$  où  $k \in \mathbb{Z}$

4) Si  $-1 < a < 1$  alors il existe un seul réel  $\alpha$  dans  $]0, \pi[$  qui vérifie  $\cos \alpha = a$  et l'ensemble de solutions de l'équation (E) sera :

$$S_{\mathbb{R}} = \{\alpha + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\alpha + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}\}.$$

5) En générale : les réels qui vérifient l'équation  $\cos(A(x)) = \cos(B(x))$  sont les solutions des équations  $A(x) = B(x) + 2k\pi$  où  $k \in \mathbb{Z}$  ou  $A(x) = -B(x) + 2k\pi$  où  $k \in \mathbb{Z}$

**Exercices17 :** 1. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Représenter les images des solutions sur le cercle trigonométrique.

2. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$$

Déterminer les solutions dans l'intervalle  $] -\pi, \pi ]$

##### 1.2 $\sin x = a$

**Propriété :**

Considérons l'équation (E')  $\sin x = a$  où  $a$  est un réel :

1) si  $a < -1$  ou  $a > 1$  alors l'équation (E') n'admet pas de solutions.

2) les solutions de l'équation  $\sin x = 1$  sont les réels :

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

3) les solutions de l'équation  $\sin x = -1$  sont les réels-

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

4) Si  $-1 < a < 1$  alors il existe un seul réel  $\alpha$  dans

$$\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[ \text{ qui vérifie } \sin \alpha = a \text{ et l'ensemble des}$$

solutions de l'équation (E') sera :

$$S_{\mathbb{R}} = \{\alpha + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \alpha + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}\}.$$

5) En générale : les réels qui vérifient l'équation  $\sin(A(x)) = \sin(B(x))$  sont les solutions des équations :  $A(x) = B(x) + 2k\pi$  où  $k \in \mathbb{Z}$  Ou  $A(x) = \pi - B(x) + 2k\pi$  où  $k \in \mathbb{Z}$

**Exercices18 :**

1. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :  $\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Représenter les images des solutions sur le cercle trigonométrique.

2. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :

$$-\cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

Déterminer les solutions dans l'intervalle  $] -\pi, \pi ]$

##### 1.3 $\tan x = a$

**Propriété :** Pour tout réel  $a$ , il existe un et un seul réel

$$\alpha \text{ dans l'intervalle } \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[ \text{ qui vérifie } \tan \alpha = a ,$$

et l'équation  $\tan x = a$  aura comme ensemble de solutions  $S_{\mathbb{R}} = \{\alpha + k\pi ; k \in \mathbb{Z}\}$ .

En général l'équation :  $\tan(A(x)) = \tan(B(x))$  est définie pour les réel  $x$  tels que :

$$A(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ et } B(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ et a pour solution}$$

l'ensemble des réels  $x$  solution de l'équation :

$$A(x) = B(x) + k\pi$$

**Exercices19 :**

1) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  , l'équation  $\tan\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -1$

2) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  , l'équation  $\cos x - \sqrt{3} \sin x = 0$

**Exercices20 :1)** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équations

$$\text{suivantes : } \cos 2x = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

2) Résoudre dans  $[0; \pi]$  l'équations suivantes :

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

3) Résoudre dans  $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$  l'équations suivantes :

$$\tan\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = 1$$

**Solution :** 1) on a  $\cos 2x = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$  ssi

$$2x = x - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } 2x = -\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi$$

Ssi  $2x - x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$  ou  $2x + x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$  Ssi

$$x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \text{ et } k \in \mathbb{Z}$$

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

2) on a  $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$  ssi

$$2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} - x + 2k\pi \text{ ou } 2x - \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{4} + x + 2k\pi$$

ssi  $3x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi$  ou  $x = \pi - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

$$\text{Donc } x = \frac{7\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{13\pi}{12} + 2k\pi$$

- Encadrement de  $\frac{7\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}$  :  $0 \leq \frac{7\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3} \leq \pi$

et  $k \in \mathbb{Z}$

$$\text{Donc } 0 \leq \frac{7}{36} + \frac{2k}{3} \leq 1 \quad \text{donc } -\frac{7}{24} \leq k \leq \frac{29}{36} \quad \text{Donc}$$

$$-0,29 \leq k \leq 1,2 \text{ et } k \in \mathbb{Z} \quad \text{Donc } k = 0 \text{ ou } k = 1$$

Pour  $k = 0$  on trouve  $x_1 = \frac{7\pi}{36}$

Pour  $k = 1$  on trouve  $x_2 = \frac{7\pi}{36} + \frac{2\pi}{3} = \frac{31\pi}{36}$

- Encadrement de  $x = \frac{13\pi}{12} + 2k\pi$

$$0 \leq \frac{13\pi}{12} + 2k\pi \leq \pi \quad \text{et } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Donc } 0 \leq \frac{13}{12} + 2k \leq 1 \quad \text{Donc } -\frac{13}{24} \leq k \leq -\frac{1}{24} \quad \text{Donc}$$

$$-0,54 \leq k \leq 0,04 \text{ et } k \in \mathbb{Z}$$

Donc  $k$  n'existe pas

- Donc  $S_{[0,\pi]} = \left\{ \frac{7\pi}{36}; \frac{31\pi}{36} \right\}$

3) on a  $\tan\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = 1$  est définie ssi

$$2x - \frac{\pi}{5} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ssi } 2x \neq \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5} + k\pi$$

$$\text{ssi } 2x \neq \frac{7\pi}{10} + k\pi \text{ ssi } x \neq \frac{7\pi}{20} + \frac{k\pi}{2} \quad \text{Donc}$$

$$D = \mathbb{R} - \left\{ \frac{7\pi}{20} + \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

or on sait que :  $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$  Donc

$$\tan\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

Donc  $2x - \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{4} + k\pi$  ssi  $2x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{5} + k\pi$  ssi

$$2x = \frac{9\pi}{20} + k\pi \text{ ssi } x = \frac{9\pi}{40} + \frac{k\pi}{2}$$

Encadrement de  $\frac{9\pi}{40} + \frac{k\pi}{2}$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{9\pi}{40} + \frac{k\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{et } k \in \mathbb{Z} \quad \text{donc}$$

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{9}{40} + \frac{k}{2} \leq \frac{1}{2} \quad \text{donc } -\frac{29}{40} \leq \frac{k}{2} \leq \frac{11}{40}$$

$$\text{donc } -\frac{29}{40} \leq \frac{k}{2} \leq \frac{11}{40} \quad \text{donc } -\frac{29}{20} \leq k \leq \frac{11}{20} \quad \text{Donc}$$

$$-1,45 \leq k \leq 0,55 \text{ et } k \in \mathbb{Z} \quad \text{donc } k = 0 \text{ ou } k = -1$$

Pour  $k = 0$  on trouve  $x_1 = \frac{9\pi}{40}$

Pour  $k = -1$  on trouve  $x_2 = \frac{9\pi}{40} - \frac{\pi}{2} = -\frac{11\pi}{40}$

$$\text{Donc } S = \left\{ -\frac{11\pi}{40}; \frac{9\pi}{40} \right\}$$

2) L'équation : (E) :  $a \cos x + b \sin x + c = 0$

Si  $abc \neq 0$  l'équation (E) se ramène à une équation usuelle.

2.1 Transformation de  $a \cos x + b \sin x$

Soient  $a$  et  $b$  deux réels non nuls on a :

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x \right)$$

$$\text{Or : } \left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left( \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = 1$$

donc : Il existe un réel  $\varphi$  tel que :

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{et} \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Par suite :

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} (\cos \varphi \cos x + \sin \varphi \sin x)$$

et d'après la formule d'addition

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \varphi)$$

### 2.2 L'équation : (E): $a \cos x + b \sin x + c = 0$

Soit  $a, b$  et  $c$  trois réels non nuls :

$$a \cos x + b \sin x + c = 0 \Leftrightarrow a \cos x + b \sin x = -c$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \varphi) = -c$$

$$\text{où } \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ et } \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\Leftrightarrow \cos(x - \varphi) = \frac{-c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

ça revient à l'étude d'une équation usuelle.

**Propriété :** Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que :

$(a, b) \neq (0, 0)$  on a pour tout réel  $x$  :

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \varphi) \text{ où le réel } \varphi \text{ est}$$

$$\text{déterminer par : } \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ et } \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

L'équation  $a \cos x + b \sin x + c = 0$  se ramène à :

$$\cos(x - \varphi) = \frac{-c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

**Exemple1 :**  $\cos x - \sin x$   $a=1$  et  $b=-1$

$$\text{calculons : } \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x \right) = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} \cos x - \sin \frac{\pi}{4} \sin x \right)$$

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos \left( \frac{\pi}{4} + x \right)$$

**Exemple2 :** Résoudre dans  $[0; 2\pi]$  l'équation :

$$\sqrt{3} \cos x + \sin x = \sqrt{3}$$

**Solution :** Transformation de :  $\sqrt{3} \cos x + \sin x$

$$b=1 \text{ et } a=\sqrt{3}$$

$$\text{Donc : } \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\sqrt{3} \cos x + \sin x = 2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x \right) = 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} \cos x + \sin \frac{\pi}{6} \sin x \right)$$

$$\sqrt{3} \cos x + \sin x = 2 \cos \left( x - \frac{\pi}{6} \right)$$

$$2 \cos \left( x - \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{3} \cos x + \sin x = \sqrt{3}$$

$$\cos \left( x - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \left( \frac{\pi}{6} \right) \Leftrightarrow 2 \cos \left( x - \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Donc : } S = \left\{ 0; \frac{\pi}{3}; 2\pi \right\}$$

**Exercices21 :** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :

$$\sqrt{3} \cos(3x) + \sin(3x) + 2 = 0$$

## IV) LES INEQUATIONS TRIGONOMETRIQUES

### 1) Rappelles

#### 1.1) Inéquations avec cos

**Exemple :** Considérons l'inéquation  $\cos x \geq \frac{1}{2}$

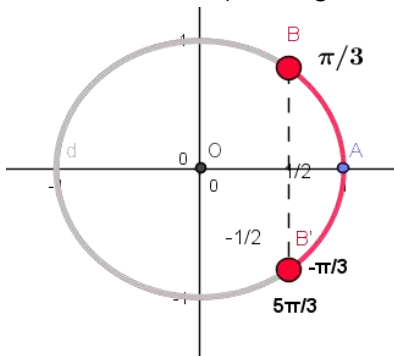
Tout d'abord il faut résoudre l'équation  $\cos x = \frac{1}{2}$

les images des solutions de cette équation sont :

$M\left(\frac{\pi}{3}\right)$  et  $M'\left(-\frac{\pi}{3}\right)$  et on constate que les réels qui

vérifient l'inéquation  $\cos x \geq \frac{1}{2}$

sont les abscisse curvilignes des points qui se situent sur l'arc  $M'M$  (en rouge sur la figure)



et par suite on peut conclure que  $S_{[-\pi, \pi]} = \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$

les solutions dans  $[0, 2\pi]$  sont :

$$S_{[0, 2\pi]} = \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right]$$

**Exercices22 :** Résoudre dans  $[0, 3\pi]$  l'inéquation :

$$2 \cos x + \sqrt{3} \leq 0$$

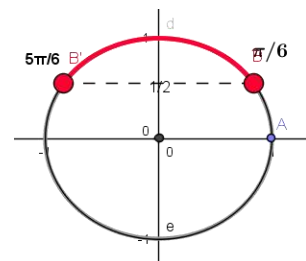
#### 1.2) Inéquations avec sin

**Exemple :** Résoudre dans  $[0, 2\pi[$  l'inéquation

suivante :  $\sin x \geq \frac{1}{2}$

$$\sin x \geq \frac{1}{2} \text{ ssi } \sin x \geq \sin \frac{\pi}{6}$$

$$\text{donc } S = \left[ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right]$$



#### 1.3) Inéquation avec tan

**Exemple1 :** Résoudre dans  $[0; 2\pi]$  l'inéquation

suivante :  $\tan x - 1 \geq 0$

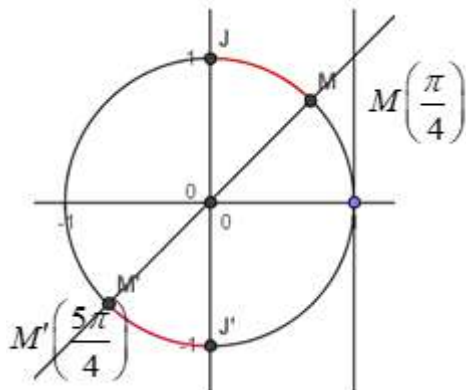
On a  $\tan x - 1 \geq 0$  ssi  $\tan x \geq 1$

On sait que :  $\tan \frac{\pi}{4} = 1$  Les arcs  $MJ$  et  $M'J'$  en rouge

correspondent à tous les points  $M(x)$  tq  $x$  vérifie

$\tan x - 1 \geq 0$  Donc

$$S = \left[ \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right] \cup \left[ \frac{5\pi}{4}; \frac{3\pi}{2} \right]$$

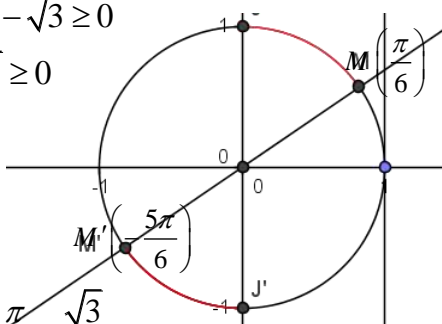


**Exemple 2 :** Résoudre dans  $[-\pi; \pi]$  l'inéquation

suivante :  $3 \tan x - \sqrt{3} \geq 0$

On a  $3 \tan x - \sqrt{3} \geq 0$

ssi  $\tan x \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$



On sait que :  $\tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Les arcs  $MJ$  et  $M'J'$  en rouge correspondent à tous

les points  $M(x)$  tq  $x$  vérifie  $3 \tan x - \sqrt{3} \geq 0$  Donc

$$S = \left[ -\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{2} \right] \cup \left[ \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2} \right]$$

**Exercices 23 :** 1) Résoudre dans  $[-\pi; \pi]$  l'équation :

$$\sqrt{3} \cos x - \sin x = 1$$

2) Résoudre dans  $[-\pi; \pi]$  l'inéquation :

$$\sqrt{3} \cos x - \sin x \geq 1$$

**Solution :** Transformation de :  $\sqrt{3} \cos x + \sin x$

$b = -1$  et  $a = \sqrt{3}$

$$\text{Donc : } \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\sqrt{3} \cos x - \sin x = 2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x \right) = 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} \cos x - \sin \frac{\pi}{6} \sin x \right)$$

$$\sqrt{3} \cos x - \sin x = 2 \cos \left( x + \frac{\pi}{6} \right)$$

$$\sqrt{3} \cos x - \sin x = 1 \Leftrightarrow 2 \cos \left( x + \frac{\pi}{6} \right) = 1$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos \left( x + \frac{\pi}{6} \right) = 1 \Leftrightarrow \cos \left( x + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2} = \cos \left( \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

• Encadrement de  $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$  :

$$-\pi \leq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq \pi \quad \text{et } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Donc } -1 \leq -\frac{1}{2} + 2k \leq 1$$

$$\text{Donc } -\frac{1}{4} \leq k \leq \frac{3}{4} \text{ et } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Donc } k = 0 \text{ on trouve } x_1 = -\frac{\pi}{2}$$

• Encadrement de  $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$

$$-\pi \leq \frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq \pi$$

$$\text{Donc } -1 \leq \frac{1}{6} + 2k \leq 1$$

$$\text{Donc } -\frac{7}{6} \leq 2k \leq \frac{5}{6} \quad \text{Donc } -\frac{7}{12} \leq k \leq \frac{5}{12}$$

$$\text{Donc } k = 0 \text{ on trouve } x_2 = \frac{\pi}{6}$$

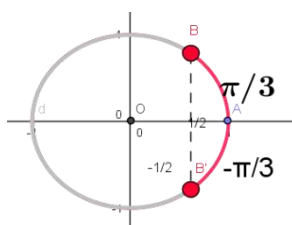
$$\text{Donc } S_{[-\pi; \pi]} = \left\{ -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6} \right\}$$

2) Résoudre dans  $[-\pi; \pi]$  l'inéquation :

$$\sqrt{3} \cos x - \sin x \geq 1?$$

$$\sqrt{3} \cos x - \sin x \geq 1 \Leftrightarrow 2 \cos \left( x + \frac{\pi}{6} \right) \geq 1 \Leftrightarrow \cos \left( x + \frac{\pi}{6} \right) \geq \frac{1}{2}$$

On pose :  $X = x + \frac{\pi}{6}$  donc  $\cos X \geq \frac{1}{2}$



$$\cos X \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} \leq X \leq \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} \leq x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{6}$$

$$S_{[-\pi; \pi]} = \left[ -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6} \right]$$

**Exercices 24 : 1) a)** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation suivantes :  $2\sin^2 x - 9\sin x - 5 = 0$  et en déduire les solutions dans  $[0; 2\pi]$

b) résoudre dans  $[0; 2\pi]$  l'inéquation suivante :

$$2\sin^2 x - 9\sin x - 5 \leq 0$$

**2)** Résoudre dans  $[0; \pi]$  l'inéquation suivante :

$$(2\cos x - 1)(\tan x + 1) \geq 0$$

**solution: 1) a)** on pose  $t = \sin x$

$$2\sin^2 x - 9\sin x - 5 \leq 0 \text{ ssi } 2t^2 - 9t - 5 \leq 0$$

On cherche les racines du trinôme  $2t^2 - 9t - 5$  :

$$\text{Calcul du discriminant : } \Delta = (-9)^2 - 4 \times 2 \times (-5) = 121$$

$$\text{Les racines sont : } t_1 = \frac{9 - \sqrt{121}}{2 \times 2} = -\frac{1}{2} \text{ et}$$

$$t_2 = \frac{9 + \sqrt{121}}{2 \times 2} = 5 \text{ Donc } \sin x = -\frac{1}{2} \text{ et } \sin x = 5$$

Or on sait que  $-1 \leq \sin x \leq 1$  donc l'équation  $\sin x = 5$  n'admet pas de solutions dans  $\mathbb{R}$

$$\sin x = -\frac{1}{2} \text{ ssi } \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \text{ ssi } x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou}$$

$$x = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi$$

$$\text{ssi } x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \text{ et } k \in \mathbb{Z}$$

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{ -\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{7\pi}{6} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

• Encadrement de  $-\frac{\pi}{6} + 2k\pi$  :  $0 \leq -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq 2\pi$

et  $k \in \mathbb{Z}$

$$\text{Donc } 0 \leq -\frac{1}{6} + 2k \leq 2 \quad \text{Donc } \frac{1}{12} \leq k \leq \frac{13}{12} \quad \text{Donc}$$

$$0,08 \leq k \leq 1,02 \text{ et } k \in \mathbb{Z}$$

Donc  $k = 1$

Pour  $k = 1$  on remplace on trouve

$$x_1 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{11\pi}{6}$$

• Encadrement de  $\frac{7\pi}{6} + 2k\pi$  :  $0 \leq \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \leq 2\pi$

et  $k \in \mathbb{Z}$

$$\text{Donc } 0 \leq \frac{7}{6} + 2k \leq 2 \quad \text{Donc } -\frac{7}{12} \leq k \leq \frac{5}{12} \quad \text{Donc}$$

$$-0,5 \leq k \leq 0,41 \text{ et } k \in \mathbb{Z}$$

Donc  $k = 0$  on remplace on trouve  $x_2 = \frac{7\pi}{6}$

$$\text{Donc } S_{[0; 2\pi]} = \left\{ \frac{11\pi}{6}; \frac{7\pi}{6} \right\}$$

**1) b)**  $2\sin^2 x - 9\sin x - 5 \leq 0$  ssi

$$2\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)(\sin x - 5) \leq 0$$

Or on sait que  $-1 \leq \sin x \leq 1$  donc  $-1 \leq \sin x \leq 1 < 5$

Donc  $\sin x - 5 < 0$

Puisque  $\sin x - 5 < 0$  et  $2 > 0$  alors

$$2\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)(\sin x - 5) \leq 0 \text{ ssi } \sin x + \frac{1}{2} \geq 0$$

$$\text{ssi } \sin x \geq -\frac{1}{2} \text{ ssi } \sin x \geq \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

L'arc en rouge correspond a tous les points  $M(x)$

tq  $x$  vérifie  $\sin x \geq -\frac{1}{2}$

$$\text{donc } S = \left[ 0; \frac{7\pi}{6} \right] \cup \left[ \frac{11\pi}{6}; 2\pi \right]$$

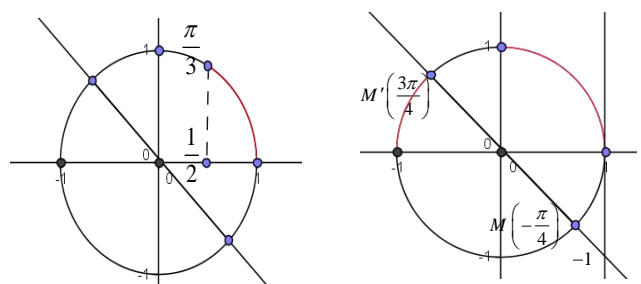
2) l'inéquation  $(2\cos x - 1)(\tan x + 1) \geq 0$  est définie

dans  $[0; \pi]$  ssi  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$$\text{Donc } D = [0; \pi] - \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$$

$$2\cos x - 1 \geq 0 \text{ ssi } \cos x = \frac{1}{2} \text{ ssi } \cos x \geq \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\tan x + 1 \geq 0 \text{ ssi } \tan x \geq -1 \text{ ssi } \tan x \geq \tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$



$x$	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\pi$
$2\cos x - 1$	+	0	-	-	-
$\tan x + 1$	+	+	-	0	+
$(2\cos x - 1)(\tan x + 1)$	+	-	-	+	-

$$\text{donc } S = \left[ 0; \frac{\pi}{3} \right] \cup \left[ \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4} \right]$$

**Exercice25 :**1. Résoudre dans  $[-\pi, \pi]$  l'inéquation :

$$\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \leq -\frac{1}{2}$$

2. Résoudre dans  $[-\pi, \pi]$  l'inéquation :

$$4\cos^2 x - 2(1 + \sqrt{2})\cos x + \sqrt{2} \leq 0$$

3. Résoudre dans  $[-\pi, \pi]$  l'inéquation :  $\frac{1 + \tan x}{\sin 2x} \geq 0$ **Exercice26 :**Résoudre dans  $[-\frac{11\pi}{5}, \frac{14\pi}{5}]$  l'équation  $\sin 3x \geq \frac{1}{2}$ **Exercice27 ::** soit  $x \in \mathbb{R}$  on pose :

$$A(x) = \cos 3x - 3\sin x + 3\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

1) calculer  $\cos 3x$  en fonction de  $\cos x$ Et calculer  $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$  en fonction de  $\cos x$  et  $\sin x$ 2) en déduire une écriture simple de  $A(x)$ 3)a) Résoudre dans  $I = [-\pi, \pi]$  l'équation:  $A(x) = \frac{1}{2}$ 3)b) Résoudre dans  $I$  l'inéquation:  $A(x) \leq \frac{1}{2}$ **Solution : 1)**

$$\begin{aligned} \cos 3x &= \cos(2x + x) = \cos x \cos 2x - \sin 2x \sin x \\ &= \cos x(2\cos^2 x - 1) + \sin x \times 2\cos x \sin x = 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x \sin^2 x \\ &= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x(1 - \cos^2 x) = 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2\cos^3 x \\ &= 4\cos^3 x - 3\cos x = \cos x(4\cos^2 x - 3) \end{aligned}$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x + \cos x)$$

$$\begin{aligned} \text{2) } A(x) &= \cos 3x - 3\sin x + 3\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \\ &= 4\cos^3 x - 3\cos x - 3\sin x + 3(\sin x + \cos x) = 4\cos^3 x \end{aligned}$$

$$\text{3)a) } A(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4\cos^3 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos^3 x - \frac{1}{8} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos x - \frac{1}{2}\right)\left(\cos^2 x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{4}\right) = 0$$

$$\text{Car : } a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$\cos^2 x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X^2 + \frac{1}{2}X + \frac{1}{4} = 0 \\ X = \cos x \end{cases}$$

Puisque :  $\Delta < 0$  alors cette équation n'admet pas de solutions dans  $\mathbb{R}$  donc :

$$A(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{3}$$

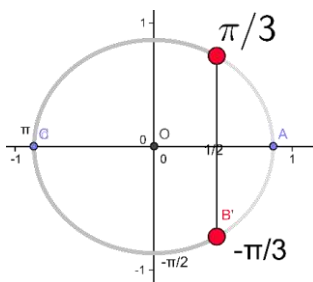
$$x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ et } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Donc : } S_{[-\pi, \pi]} = \left\{-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right\}$$

$$\text{3)b) } A(x) \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(\cos x - \frac{1}{2}\right)\left(\cos^2 x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{4}\right) \leq 0$$

Puisque :  $\Delta < 0$  alors  $\cos^2 x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{4} > 0$ 

$$\text{Donc : } A(x) \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x \leq \cos \frac{\pi}{3}$$



$$\text{donc } S = \left[0; \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}; \pi\right]$$

**Exercice28 :** on pose :

$$A = \sin \frac{\pi}{9} \times \sin \frac{2\pi}{9} \times \sin \frac{3\pi}{9} \times \sin \frac{4\pi}{9}$$

$$1) \text{ monter que : } \sin \frac{\pi}{9} \times \sin \frac{4\pi}{9} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \cos \frac{5\pi}{9}\right)$$

$$2) \text{ monter que : } \cos \frac{5\pi}{9} \times \sin \frac{2\pi}{9} = \frac{1}{2} \left(\sin \frac{7\pi}{9} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$3) \text{ en déduire que : } A = \frac{3}{16}$$

**Solution :**

$$\text{On a : } \sin a \times \sin b = -\frac{1}{2}(\cos(a+b) - \cos(a-b))$$

$$1): \sin \frac{\pi}{9} \times \sin \frac{4\pi}{9} = -\frac{1}{2} \left(\cos\left(\frac{5\pi}{9}\right) - \cos\left(-\frac{3\pi}{9}\right)\right)$$

$$\sin \frac{\pi}{9} \times \sin \frac{4\pi}{9} = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} - \cos \frac{5\pi}{9}\right)$$

$$\text{Donc : } \sin \frac{\pi}{9} \times \sin \frac{4\pi}{9} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \cos \frac{5\pi}{9}\right)$$

$$2) \text{ On a : } \cos a \times \sin b = -\frac{1}{2}(\sin(a+b) - \sin(a-b))$$

$$\cos \frac{5\pi}{9} \times \sin \frac{2\pi}{9} = \frac{1}{2} \left(\sin \frac{7\pi}{9} - \sin \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\text{Donc : } \cos \frac{5\pi}{9} \times \sin \frac{2\pi}{9} = \frac{1}{2} \left(\sin \frac{7\pi}{9} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

3) déduction :  $A = \frac{3}{16}$  ?

$$A = \left( \sin \frac{\pi}{9} \times \sin \frac{4\pi}{9} \right) \times \sin \frac{2\pi}{9} \times \sin \frac{\pi}{3}$$

$$A = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - \cos \frac{5\pi}{9} \right) \times \sin \frac{2\pi}{9} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4} \left( \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{9} - \cos \frac{5\pi}{9} \sin \frac{2\pi}{9} \right) = \frac{\sqrt{3}}{4} \left( \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{9} - \frac{1}{2} \left( \sin \frac{7\pi}{9} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right)$$

$$A = \frac{\sqrt{3}}{8} \left( \sin \left( \pi - \frac{7\pi}{9} \right) - \sin \frac{7\pi}{9} + \frac{\sqrt{3}}{9} \right)$$

$$A = \frac{\sqrt{3}}{8} \left( \sin \frac{7\pi}{9} - \sin \frac{7\pi}{9} + \frac{\sqrt{3}}{9} \right) = \frac{3}{16} \text{ Donc : } A = \frac{3}{16}$$

**Exercice 29:** soit :  $\theta \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[$  tel que :  $3 \sin \theta + 5 \cos \theta = 5$

1) monter que :  $5 \sin \theta - 3 \cos \theta = 3$

2) déduire la valeur de :  $\cos \theta$  et  $\sin \theta$

**Solution :** 1)  $3 \sin \theta + 5 \cos \theta = 5 \Leftrightarrow 3 \sin \theta = 5 - 5 \cos \theta$

$$\Leftrightarrow 3 \sin \theta = 5(1 - \cos \theta) \Leftrightarrow 3 \sin \theta = 5 \times 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$\text{Car : } 1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$\text{Donc : } 3 \sin \theta + 5 \cos \theta = 5 \Leftrightarrow 3 \sin \theta = 10 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$3 \sin \theta + 5 \cos \theta = 5 \Leftrightarrow 6 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = 10 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$\text{Car : } \sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$$

$$3 \sin \theta + 5 \cos \theta = 5 \Leftrightarrow 6 \cos \frac{\theta}{2} = 10 \sin \frac{\theta}{2} \text{ car } \sin \frac{\theta}{2} \neq 0$$

$$\text{Donc : } 3 \sin \theta + 5 \cos \theta = 5 \Leftrightarrow \tan \frac{\theta}{2} = \frac{3}{5}$$

$$\text{Or on sait que : } \sin \theta = \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}} \text{ et } \cos \theta = \frac{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}}$$

$$\text{Donc : } 3 \sin \theta + 5 \cos \theta = \frac{5 \left( 2 \tan \frac{\theta}{2} \right)}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}} - \frac{3 \left( 1 - \tan^2 \frac{\theta}{2} \right)}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}}$$

$$3 \sin \theta + 5 \cos \theta = \frac{10 \times \frac{3}{5}}{1 + \frac{9}{25}} - \frac{3 \left( 1 - \frac{9}{25} \right)}{1 + \frac{9}{25}} = \frac{102}{34} = 3$$

2) on a le système:  $\begin{cases} 3 \sin \theta + 5 \cos \theta = 5 \\ 5 \sin \theta - 3 \cos \theta = 3 \end{cases}$  on le résolvant on

$$\text{trouve : } \cos \theta = \frac{8}{17} \text{ et } \sin \theta = \frac{15}{17}$$

**C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.  
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices**

**Que l'on devient un mathématicien**

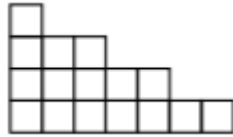


# LES SUITES NUMERIQUES

## 1) ACTIVITES

**Activité 1** : suite définie par une formule explicite ou une formule de récurrence

Des gradins sont constitués de poutres comme ceci (voir dessin)



On considère la suite  $U$  des nombres de poutres par niveau en commençant par le haut qui sera appelé le rang 0, le nombre de poutres de rang  $n \in \mathbb{N}$  est noté  $U_n$ .

### 1) formule de récurrence

- donner les valeurs de  $U_0, U_1, U_2, U_3$
- comment passe-t-on de  $U_n$  à  $U_{n+1}$  ?  
(Donner une relation entre ces deux termes)
- en déduire les valeurs de  $U_4, U_5, U_6$
- utiliser la calculatrice pour obtenir les valeurs de  $U_{10}, U_{100}$  puis  $U_{200}$
- utiliser la calculatrice pour trouver la plus petite valeur de  $n$  telle que  $U_n \geq 500$

### 2) formule explicite

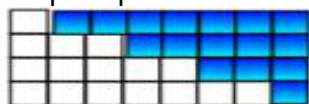
- trouver une formule qui donne directement  $U_n$  en fonction de  $n$   
(commencer par  $U_1, U_2, U_3, U_4$  puis généraliser à  $n$ )
- retrouver les valeurs de  $U_{10}, U_{100}$  puis  $U_{200}$
- retrouver algébriquement la plus petite valeur de  $n$  telle que  $U_n \geq 500$

### 3. pour aller un peu plus loin :

soit  $S_n = u_0 + u_1 + u_1 + \dots + u_n$  la somme des nombres de poutres qu'il faut au total du rang 0 au rang  $n$

- donner les valeurs de  $S_0, S_1, S_2$  et  $S_3$
- observer la figure et expliquer pourquoi

$$S_3 = 4 \left( \frac{u_0 + u_3}{2} \right)$$



puis vérifier que l'on retrouve bien  $S_3$

- calculer  $S_{10}$  par un raisonnement analogue
- montrer que  $S_n = (n+1)^2$

e) en déduire la hauteur maximale de gradin que l'on peut construire avec 1000 poutres au total et préciser le nombre de poutres qui restent

**Activité 2** : Suite définie uniquement par une formule de récurrence :

soit la suite  $U$  définie par :  $U_{n+1} = 0.95U_n + 5$

et  $U_1 = 200$

- calculer :  $U_1, U_2, U_3, U_{10}, U_{100}, U_{200}$
- essayer de trouver la plus petite valeur de  $n$  telle que  $U_n < 100$
- un club à 200 membres inscrits le premier mois, Chaque mois, 5% des membres partent, mais le responsable arrive toujours à obtenir 5 nouvelles inscriptions
  - montrer que le nombre d'inscrit le  $n$ ème mois est un
  - que semble devenir le nombre d'inscrits à long terme ?

**Activité 3** : suite définie uniquement par une formule explicite

Soit la suite  $V$  définie par :  $U_{n+1} = 100 + 100 \times 0.95^{n-1}$

- calculer :  $V_1, V_2, V_3, V_{10}, V_{100}$  et  $V_{200}$
- que semble-t-il pour les suites  $V$  et  $U$  où  $U$  est la suite de l'Activité 2 précédent ?

**Activité 4** : Une personne a reçu deux offres de deux sociétés commerciales pour une durée de 4 ans.

La société  $\mathcal{A}$  propose un salaire de 4500 Dh pour le premier mois et une augmentation de salaire de 75 Dh chaque mois.

La société  $\mathcal{B}$  propose un salaire de 3500 Dh pour le premier mois et une augmentation de salaire de 3% chaque mois.

Soient  $a_n$  et  $b_n$  les salaires proposés respectivement par les sociétés  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  pour le  $n$ ème mois.

1- Calculer les salaires des 4 premiers mois pour les deux sociétés.

2- Trouver une relation entre  $a_{n+1}$  et  $a_n$  puis entre

$b_{n+1}$  et  $b_n$ .

3- Calculer les salaires du 10ème mois pour les deux sociétés.

4- Quelle est la société la plus bénéfique pour la personne ?

## II) GENERALITES

### 1) Définitions et notations.

**Définition :** On appelle suite numérique toute application de  $\mathbb{N}$  (ou une partie  $I$  de  $\mathbb{N}$ ) vers  $\mathbb{R}$   
 $u : I \rightarrow \mathbb{R}$

$$n \mapsto u(n) = u_n$$

**Notation :** Si  $u$  est une suite numérique définie sur  $\mathbb{N}$

l'image de l'entier  $n$  par  $u$  se note  $u_n$  et s'appelle le terme de rang  $n$  de la suite

L'entier  $n$  s'appelle l'**indice du terme**  $u_n$

La suite numérique  $u$  se note :  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ou  $(u_n)_n$

**Remarque :** On peut aussi définir une suite à partir d'un certain rang.

**Exemple :**  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $u_n = \frac{1}{n+2}$

$$u_0 = \frac{1}{2}; u_1 = \frac{1}{3}; u_2 = \frac{1}{4}; u_3 = \frac{1}{5}; \dots$$

2/  $(v_n)_{n \geq 3}$  définie pour tout  $n \geq 3$  par  $v_n = \frac{1}{n-2}$

$$v_3 = 1; v_4 = \frac{1}{2}; v_5 = \frac{1}{3}; v_6 = \frac{1}{4}; \dots$$

### 2) Comment générer une suite

Une suite numérique peut être définie de deux manières différentes :

#### a) Suite définie par : une expression explicite

Dans laquelle le terme  $u_n$  de la suite  $(u_n)_n$  est définie en fonction de  $n$

**Exemple :** soit  $(u_n)_n$  la suite définie par :

$$u_n = 2n + 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1) Calculer : les quatre 1<sup>er</sup>s termes de la suite  $(u_n)_n$

2) Calculer:  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n$

**Solution :** 1)  $u_0 = 2 \times 0 + 3 = 3 \quad u_1 = 2 \times 1 + 3 = 5$

$$u_1 = 2 \times 1 + 3 = 5 \quad u_3 = 2 \times 3 + 3 = 9$$

2)  $u_{n+1} - u_n = (2(n+1) + 3) - (2n + 3)$

$$u_{n+1} - u_n = 2n + 2 + 3 - 2n - 3 = 2$$

#### b) Une suite définie par : une expression récurrente

Ces suites s'appellent des suites récurrentes, elles sont définies par le (ou les) premier (s) terme (s) et une relation entre deux ou plusieurs termes consécutifs.

### Exemple1 : Suites récurrente du premier ordre

soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite récurrente définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 5u_n - 7 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Calculer :  $u_1; u_2; u_3$

**Solution :** on a  $u_{n+1} = 5u_n - 7$

Pour  $n=0$  on a :  $u_{0+1} = 5u_0 - 7$  donc  $u_1 = 5 \times 2 - 7$

Donc :  $u_1 = 3$

Pour  $n=1$  on a :  $u_{1+1} = 5u_1 - 7$  donc  $u_2 = 5 \times 3 - 7$

Donc :  $u_2 = 8$

Pour  $n=2$  on a :  $u_{2+1} = 5u_2 - 7$  donc  $u_3 = 5 \times 8 - 7$

Donc :  $u_3 = 33$

**Remarque :** Il faut bien écrire les indices :  $u_{n+1}$  n'est pas  $u_n + 1$

### Exemple2 : Suites numériques du second ordre.

soit  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite récurrente définie par :

$$\begin{cases} v_0 = 1; v_1 = -1 \\ v_{n+2} = 2v_{n+1} - 3v_n \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Calculer :  $v_2; v_3; v_4$

**Solution :** on a  $v_{n+2} = 2v_{n+1} - 3v_n$

Pour  $n=0$  on a :  $v_{0+2} = 2v_{0+1} - 3v_0$  donc  $v_2 = 2v_1 - 3v_0$

Donc :  $v_2 = 2 \times (-1) - 3 \times 1 = -5$

Pour  $n=1$  on a :  $v_{1+2} = 2v_{1+1} - 3v_1$  donc  $v_3 = 2v_2 - 3v_1$

Donc :  $v_3 = 2(-5) - 3(-1) = -7$

Pour  $n=2$  on a :  $v_{2+2} = 2v_{2+1} - 3v_2$  donc  $v_4 = 2v_3 - 3v_2$

Donc :  $v_4 = 2(-7) - 3(-5) = -14 + 15 = 1$

### 3) Suites majorées, suites minorées, suites bornées.

**Activité1 :** soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :

$$u_n = \frac{n+1}{2n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N} : \frac{1}{2} < u_n \leq 1$

**Solution :1)** Montrons que :  $u_n \leq 1$  ??

$$1 - u_n = 1 - \frac{n+1}{2n+1} = \frac{(2n+1) - (n+1)}{2n+1} = \frac{n}{2n+1} \geq 0$$

Donc  $u_n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2) Montrons que :  $\frac{1}{2} < u_n$  ??

$$u_n - \frac{1}{2} = \frac{n+1}{2n+1} - \frac{1}{2} = \frac{2(n+1) - (2n+1)}{2n+1} = \frac{1}{2n+1} > 0$$

Donc  $\frac{1}{2} < u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Par suite :  $\forall n \in \mathbb{N} : \frac{1}{2} < u_n \leq 1$

On dit que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est majorée par 1 car  $u_n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

On dit que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est minorée par  $\frac{1}{2}$  car

$$\frac{1}{2} < u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

On dit que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée car :  $\forall n \in \mathbb{N} :$

$$\frac{1}{2} < u_n \leq 1$$

**Activité 2** : soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite récurrente définie

$$\text{par : } \begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1- Calculer les 3 premiers termes.

2- Montrer par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq u_n$

3- Montrer par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \leq 2$

**Solution : 1)** on a  $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$

$$\text{Pour } n=0 \text{ on a : } u_1 = \sqrt{u_0 + 2} \text{ donc } u_1 = \sqrt{2}$$

$$\text{Pour } n=1 \text{ on a : } u_2 = \sqrt{u_1 + 2} \text{ donc } u_2 = \sqrt{\sqrt{2} + 2}$$

$$\text{Pour } n=2 \text{ on a : } u_3 = \sqrt{u_2 + 2} \text{ donc } u_3 = \sqrt{\sqrt{\sqrt{2} + 2} + 2}$$

2) Montrons par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq u_n$

1 étapes : l'initialisation : Pour  $n=0$  nous avons  $u_0 = 0$

donc  $0 \leq u_0$ .

Donc la proposition est vraie pour  $n=0$

2 étapes : d'hérédité ou Hypothèse de récurrence :

Supposons que :  $0 \leq u_n$

3 étapes : Montrons alors que :  $0 \leq u_{n+1}$  ??

$$\text{Or on a : } u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \geq 0$$

donc :  $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq u_n$

3) Montrons par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \leq 2$

1 étapes : l'initialisation : Pour  $n=0$  nous avons  $u_0 = 0$

donc  $u_0 \leq 2$ .

Donc la proposition est vraie pour  $n=0$

2 étapes : d'hérédité ou Hypothèse de récurrence :

Supposons que :  $u_n \leq 2$

3 étapes : Montrons alors que :  $u_{n+1} \leq 2$  ??

$$\text{on a : } u_n \leq 2 \text{ donc } u_n + 2 \leq 4 \Rightarrow \sqrt{u_n + 2} \leq \sqrt{4} \\ \Rightarrow u_{n+1} \leq 2$$

donc :  $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq u_n$

Par suite :  $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq u_n \leq 2$

On dit que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est majorée par 2 car

$$u_n \leq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

On dit que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est minorée par 0 car  $0 \leq u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

On dit que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée car :  $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq u_n \leq 2$

**Définition** : Soit  $(u_n)_{n \in I}$  une suite numérique. ( $I \subset \mathbb{N}$ )

• On dit que la suite  $(u_n)_{n \in I}$  est majorée s'il existe un réel  $M$  tel que :  $\forall n \in I \quad u_n \leq M$

• On dit que la suite  $(u_n)_{n \in I}$  est minorée s'il existe un réel  $m$  tel que :  $\forall n \in I \quad m \leq u_n$

• On dit que la suite  $(u_n)_{n \in I}$  est bornée si elle est majorée et minorée.

**Exemple** : soit  $(v_n)_{n \geq 1}$  la suite définie par :

$$v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

1) Montrer que  $(v_n)_{n \geq 1}$  est minorée par 0

2) Montrer que  $(v_n)_{n \geq 1}$  est majorée par  $\frac{1}{2}$

3) Que peut-on déduire ?

**Solution : 1)** Montrons que :  $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 \leq v_n$  ??

$$v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \quad (\text{Le conjugué})$$

$$v_n = \frac{(\sqrt{n+1})^2 - (\sqrt{n})^2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \geq 0$$

Donc :  $0 \leq v_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Donc :  $(v_n)_{n \geq 1}$  est minorée par 0

2) Montrons que :  $v_n \leq \frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$v_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} - \frac{1}{2} = \frac{2 - (\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

On a :  $n \geq 1$  et  $n+1 \geq 2$  donc  $\sqrt{n} \geq 1$  et  $\sqrt{n+1} \geq \sqrt{2}$

Donc :  $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \geq 1 + \sqrt{2}$  donc

$$-(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) \leq -1 - \sqrt{2}$$

donc  $2 - (\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) \leq 1 - \sqrt{2}$  et puisque :  $1 - \sqrt{2} < 0$

Donc  $v_n - \frac{1}{2} < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Donc  $v_n < \frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Donc la suite  $(v_n)_{n \geq 1}$  est majorée par  $\frac{1}{2}$

3) Donc la suite  $(v_n)_{n \geq 1}$  est bornée car :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : 0 < v_n < \frac{1}{2}$$

**Exercice1:** Soit la suite récurrente  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n^2 + 2u_n + 2 \\ u_0 = -1 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Calculer  $u_1$  et montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est minorée par 1

**Solutions :**

$$u_{0+1} = u_0^2 + 2u_0 + 2 = (-1)^2 + 2 \times (-1) + 2 = 1 - 2 + 2 = 1$$

$$u_n - 1 = u_n^2 + 2u_n + 2 - 1 = u_n^2 + 2u_n + 1 = (u_n + 1)^2 \geq 0$$

Donc :  $1 \leq u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Donc :  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est minorée par 1

**Exercice2:** Soit la suite récurrente  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{7u_n}{2u_n + 1} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est minorée par 1 et majorée par 3.

**Solutions :** Montrons par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N} : 0 < u_n < 3$

$$0 < u_n < 3$$

1 étapes :  $n=0$  on a :  $0 < u_0 < 3$  car  $0 < 1 < 3$

Donc la proposition est vraie pour  $n=0$

2 étapes : d'hérédité ou Hypothèse de récurrence :

Supposons que :  $0 < u_n < 3$

3 étapes : Montrons alors que :  $0 < u_{n+1} < 3$  ??

On a :  $0 < u_n$  donc  $0 < 2u_n + 1$  et  $0 < 7u_n$

Donc  $0 < u_{n+1}$  (1)

$$\text{Et on a : } u_{n+1} - 3 = \frac{7u_n}{2u_n + 1} - 3 = \frac{7u_n - 3(2u_n + 1)}{2u_n + 1}$$

$$u_{n+1} - 3 = \frac{u_n - 3}{2u_n + 1} \quad \text{et puisque on a : } 0 < u_n < 3$$

on a donc :  $u_n - 3 < 0$  et  $0 < 2u_n + 1$

Donc  $u_{n+1} - 3 < 0$  Donc  $u_{n+1} < 3$  (2)

De (1) et (2) en déduit que :  $0 < u_{n+1} < 3$

D'où  $\forall n \in \mathbb{N} : 0 < u_n < 3$

**Exercice3 :** Soit la suite récurrente  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$u_n = 3n^2 + 6n - 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est minorée

**Solutions :** Soit  $n \in \mathbb{N}$  on a :

$$u_n = 3n^2 + 6n - 4 = 3(n^2 + 2n) - 4 = 3((n+1)^2 - 1) - 4$$

$$u_n = 3(n+1)^2 - 7$$

on a :  $\forall n \in \mathbb{N} (n+1)^2 \geq 0$

donc :  $3(n+1)^2 \geq 0$  donc  $(n+1)^2 - 7 \geq -7$

donc :  $u_n \geq -7$  par suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est minorée par -7

**Exercice4 :** Soit la suite récurrente  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie

$$\text{par : } u_n = \frac{2 + \cos n}{3 - \sin \sqrt{n}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée

**Solutions :** Soit  $n \in \mathbb{N}$  on a :

$$-1 \leq \cos n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad -1 \leq \sin \sqrt{n} \leq 1$$

donc :  $1 \leq 2 + \cos n \leq 3$  et  $-1 \leq -\sin \sqrt{n} \leq 1$

donc :  $1 \leq 2 + \cos n \leq 3$  et  $2 \leq 3 - \sin \sqrt{n} \leq 4$

donc :  $1 \leq 2 + \cos n \leq 3$  et  $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{3 - \sin \sqrt{n}} \leq \frac{1}{2}$

donc :  $\frac{1}{4} \leq \frac{2 + \cos n}{3 - \sin \sqrt{n}} \leq \frac{3}{2}$

cad :  $\frac{1}{4} \leq u_n \leq \frac{3}{2}$  donc :  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée

**Propriété :** Une suite  $(u_n)_{n \in I}$  est bornée si et

seulement s'il existe un réel positif  $M$  tel que :

$$\forall n \in I \quad |u_n| \leq M$$

**Exemple :** Soit la suite récurrente  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$u_n = (-1)^n \sin \sqrt{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée

**Solutions :** Soit  $n \in \mathbb{N}$  on a :

$$|u_n| = |(-1)^n \sin \sqrt{n}| = |(-1)^n| |\sin \sqrt{n}| = |\sin \sqrt{n}| \leq 1$$

donc  $|u_n| \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

donc :  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée

#### 4) Monotonie d'une suite.

**Activité 1 :** Soit la suite récurrente  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie

$$\text{par : } u_n = \frac{-n}{n+2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Montrer que :  $u_{n+1} - u_n \leq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

**Solutions :** Soit  $n \in \mathbb{N}$  on a :

$$u_{n+1} - u_n = \left( \frac{-(n+1)}{n+1+2} \right) - \left( \frac{-n}{n+2} \right) = \frac{-n-1}{n+3} + \frac{n}{n+2}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(-n-1)(n+2) + n(n+3)}{(n+3)(n+2)} = \frac{-2}{(n+3)(n+2)} < 0$$

Donc :  $u_{n+1} - u_n \leq 0$  donc  $u_{n+1} \leq u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

On dira que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante

**Activité 2 :** soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite récurrente définie

$$\text{par : } \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Montrer par récurrence que  $u_n \leq u_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

**Solutions :** 1 étapes : on a  $u_1 = \sqrt{u_0 + 2} = \sqrt{2}$

Pour  $n=0$  nous avons  $u_0 = 1$  donc  $u_0 \leq u_1$ .

Donc la proposition est vraie pour  $n=0$

2 étapes : Supposons que :  $u_n \leq u_{n+1}$

3 étapes : Montrons alors que :  $u_{n+1} \leq u_{n+2}$  ??

on a :  $u_n \leq u_{n+1}$  donc  $u_n + 2 \leq u_{n+1} + 2$

donc :  $\sqrt{u_n + 2} \leq \sqrt{u_{n+1} + 2}$  donc  $u_{n+1} \leq u_{n+2}$

Par suite :  $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \leq u_{n+1}$

On dit que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante

**Définition :** Soit  $(u_n)_{n \in I}$  une suite numérique. ( $I \subset \mathbb{N}$ )

On dit que la suite  $(u_n)_{n \in I}$  est croissante si :  $\forall n \in I$

$$\forall m \in I : m \leq n \Rightarrow u_m \leq u_n$$

On dit que la suite  $(u_n)_{n \in I}$  est décroissante si :

$$\forall n \in I \quad \forall m \in I : m \leq n \Rightarrow u_m \geq u_n$$

On dit que la suite  $(u_n)_{n \in I}$  est monotone si elle est croissante ou décroissante sur  $I$ .

**Théorème :** Soit  $(u_n)_{n \in I}$  une suite numérique. ( $I \subset \mathbb{N}$ )

• La suite  $(u_n)_{n \in I}$  est croissante si et seulement si :

$$\forall n \in I \quad u_{n+1} \geq u_n : \text{(P)}$$

• La suite  $(u_n)_{n \in I}$  est décroissante si et seulement

$$\text{si : } \forall n \in I \quad u_{n+1} \leq u_n$$

**Démonstration :**

On suppose que la suite  $(u_n)_{n \in I}$  est croissante donc

$$\forall n \in I \quad \forall m \in I : m \leq n \Rightarrow u_m \leq u_n$$

d'où (et puisque  $n+1 \geq n$ ) alors :  $u_{n+1} \geq u_n$

Inversement : On suppose que la suite  $(u_n)_{n \in I}$  vérifie la propriété (P).

Soit  $n$  et  $m$  deux entiers tels que  $n \geq m$  on a :

$$u_m \leq u_{m+1} \leq u_{m+2} \leq \dots \leq u_n \quad \text{Donc la suite : } (u_n)_{n \in I}$$

est croissante.

**Exemple 1 :** soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite récurrente définie

$$\text{par : } \begin{cases} u_0 = 1; u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n - 2 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Montrer que suite :  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante.

**Solutions :** montrons par récurrence que  $u_{n+1} \leq u_n$

1 étapes : on a  $u_1 \leq u_0$

Donc la proposition est vraie pour  $n=0$

2 étapes : Supposons que :  $u_{n+1} \leq u_n$

3 étapes : Montrons alors que :  $u_{n+2} \leq u_{n+1}$  ??

$$\text{on a : } u_{n+2} - u_{n+1} = 2u_{n+1} - u_n - 2 - u_{n+1}$$

$$\text{donc } u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n - 2 \quad \text{et on a : } u_{n+1} - u_n \leq 0$$

$$\text{donc : } u_{n+1} - u_n - 2 \leq 0 \quad \text{donc } u_{n+2} - u_{n+1} \leq 0$$

$$\text{Par suite : } \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} \leq u_n$$

Donc la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante

**Exemple 2 :** soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  la suite définie par :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{k} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Etudier la monotonie de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

**Solutions :**

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^k}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{k} + \frac{2^{n+1}}{n+1} - \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{k}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2^{n+1}}{n+1} > 0 \quad \text{Donc : } u_n \leq u_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

donc la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement croissante

**Exemple3 :** soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  la suite définie par :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Etudier la monotonie de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

**Solutions :**  $u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$

Et on a :  $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k} = \sum_{k'=2}^{n+2} \frac{1}{n+k'}$  on pose  $k' = k+1$

Et puisque  $k'$  est un variable on peut l'appeler  $k'$

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k} = \sum_{k'=2}^{n+2} \frac{1}{n+k'} = \sum_{k=2}^{n+2} \frac{1}{n+k}$$

Donc :

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=2}^{n+2} \frac{1}{n+k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2^{n+1}}{n+1} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

donc la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement croissante

**Exercice5 :** soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite récurrente définie

par : 
$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{8(u_n - 1)}{u_n + 2} & \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 3 \end{cases}$$

1) Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est minorée par 2

2) Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est majorée par 4

3) Etudier la monotonie de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

**Solutions :** 1) Montrons que  $2 \leq u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$  ????

1étapes :  $n=0$  on a :  $2 \leq u_0$  car  $2 < 3$

Donc la proposition est vraie pour  $n=0$

2étapes : Hypothèse de récurrence :

Supposons que:  $2 \leq u_n$

3étapes : Montrons alors que :  $2 \leq u_{n+1}$  ??

$$u_{n+1} - 2 = \frac{8(u_n - 1)}{u_n + 2} - 2 = \frac{8(u_n - 1) - 2(u_n + 2)}{u_n + 2} = \frac{6u_n - 12}{u_n + 2}$$

$$u_{n+1} - 2 = \frac{6(u_n - 2)}{u_n + 2} \quad \text{et puisque on a : } 2 \leq u_n$$

Donc :  $u_n - 2 \geq 0$  et  $u_n + 2 > 0$

Donc :  $u_{n+1} - 2 \geq 0$

donc  $2 \leq u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2) Montrons que  $u_n \leq 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}$  ????

1étapes :  $n=0$  on a :  $u_0 \leq 4$  car  $3 < 4$

Donc la proposition est vraie pour  $n=0$

2étapes : Hypothèse de récurrence :

Supposons que:  $u_n \leq 4$

3étapes : Montrons alors que :  $u_{n+1} \leq 4$  ??

$$4 - u_{n+1} = 4 - \frac{8(u_n - 1)}{u_n + 2} = \frac{4(u_n + 2) - 8(u_n - 1)}{u_n + 2} = \frac{-4u_n + 16}{u_n + 2}$$

$$4 - u_{n+1} = \frac{4(4 - u_n)}{u_n + 2} = \frac{4(4 - u_n)}{u_n + 2} \quad \text{et puisque on a :}$$

$$u_n \leq 4$$

Donc :  $4 - u_n \geq 0$  et  $u_n + 2 > 0$

Donc  $u_{n+1} \leq 4$  par suite  $u_n \leq 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$3) u_{n+1} - u_n = \frac{8(u_n - 1)}{u_n + 2} - u_n = \frac{8(u_n - 1) - u_n(u_n + 2)}{u_n + 2} = \frac{-u_n^2 + 6u_n - 8}{u_n + 2}$$

On va factoriser  $-u_n^2 + 6u_n - 8$  :  $\Delta = 36 - 32 = 4 > 0$

$$x_1 = \frac{-6+2}{-2} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-6-2}{-2} = 4 \quad \text{donc :}$$

$$-u_n^2 + 6u_n - 8 = -(u_n - 2)(u_n - 4)$$

$$\text{Donc : } u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n - 2)(u_n - 4)}{u_n + 2}$$

Or on a :  $u_n \geq 2$  et  $u_n \leq 4$

Donc :  $u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n - 2)(u_n - 4)}{u_n + 2} \geq 0$  donc la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

est strictement croissante

### III) SUITES ARITHMETIQUES ; SUITES GEOMETRIQUES

#### 1) Suite arithmétique.

##### 1.1 Définition

**Activité1** Compléter les suites de nombres suivantes :

-5 ; -2 ; 1 ; 4 ; ... ; ... ; ... ; 16

10 ; 5 ; 0 ; -5 ; ... ; ... ; ... ; -25

**Activité2 :** soit  $(u_n)_n$  la suite définie par :

$$u_n = 3n + 8 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Calculer  $u_{n+1} - u_n$

**Solution :**  $u_{n+1} - u_n = (3(n+1) + 8) - (3n + 8)$

$$u_{n+1} - u_n = 3n + 3 + 8 - 3n - 8 = 3 = \text{constante}$$

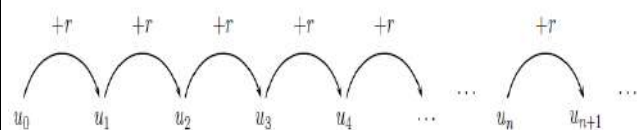
On dit que la suite  $(u_n)_{n \in I}$  est une suite arithmétique

**Définition :** On appelle suite **arithmétique** toute suite  $(u_n)_{n \in I}$  définie par son premier terme et par la relation

$$\text{récurrente : } \forall n \in I \quad u_{n+1} = u_n + r$$

Où  $r$  est un réel fixe. Le réel  $r$  s'appelle **la raison** de

la suite  $(u_n)_{n \in I}$ .



**Exemple :** soient Les suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$

définies par :  $u_{n+1} = u_n - 3$  et  $u_0 = 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$v_n = n^2 + 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1) La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est arithmétique de raison  $r = -3$

et de premier terme  $u_0 = 2$

2)  $v_0 = 2; v_1 = 3; v_2 = 6$

Ainsi :  $v_1 - v_0 = 1$  et  $v_2 - v_1 = 3$

La suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'est donc pas arithmétique

### 1.2 propriété caractéristique d'une suite arithmétique

Trois termes consécutifs d'une suite arithmétique.

$(u_n)_{n \geq p}$  est suite arithmétique si et seulement si

$$2u_{n+1} = u_n + u_{n+2} \quad \forall n \geq p$$

**Preuve :** soit  $(u_n)_{n \geq p}$  suite arithmétique de raison  $r$

On a donc :  $u_{n+1} = u_n + r$  et  $u_{n+2} = u_{n+1} + r$

Donc :  $u_{n+2} - u_{n+1} = r$  et  $u_{n+1} - u_n = r$  donc :

$$u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n \quad \text{donc : } u_{n+2} + u_n = 2u_{n+1}$$

Inversement : soit  $(u_n)_{n \geq p}$  suite tel que :

$$2u_{n+1} = u_n + u_{n+2} \quad \forall n \geq p$$

Montrons que  $(u_n)_{n \geq p}$  est une suite arithmétique ??

On a :  $2u_{n+1} = u_n + u_{n+2}$  donc  $u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n \quad \forall n \geq p$

Donc la suite :  $(u_{n+1} - u_n)_{n \geq p}$  est une suite constante

Soit  $r$  cette constante donc :  $u_{n+1} - u_n = r$

Donc  $(u_n)_{n \geq p}$  est une suite arithmétique

**Application :** Déterminer le réel  $x$  pour que les nombres  $(3x - 1); (1 - 4x)$  et  $(x - 5)$  soient les termes consécutifs d'une suite Arithmétique pour laquelle il faut déterminer la raison.

**Solution :**  $(3x - 1); (1 - 4x)$  et  $(x - 5)$  soient les Termes consécutifs d'une suite Arithmétique

$$\text{Ssi } 2(1 - 4x) = (3x - 1) + (x - 5)$$

$$-8x + 2 = 4x - 6 \Leftrightarrow -12x = -8 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$

Donc les termes de la suite sont :

$$3 \times \frac{2}{3} - 1 = 1 \quad \text{et} \quad 1 - 4 \times \frac{2}{3} = -\frac{5}{3} \quad \text{et} \quad \frac{2}{3} - 5 = -\frac{13}{3}$$

$$\text{Donc : } -\frac{5}{3} - 1 = -\frac{8}{3} = r$$

### 1.3. Terme général d'une suite arithmétique.

Soit  $(u_n)_{n \in I}$  une suite arithmétique de raison  $r$  et  $u_p$

l'un de ses termes. Soit  $n$  un entier naturel

~~$$u_{p+1} = u_p + r$$~~

~~$$u_{p+2} = u_{p+1} + r$$~~

⋮

~~$$u_n = u_{n-1} + r$$~~

$$u_n = u_p + \underbrace{(r + r + \dots + r)}_{(n-p) \text{ termes}}$$

En faisant la somme membre à membre on obtient :

$$\text{D'où : } u_n = u_p + (n - p)r$$

**Propriété :** Soit  $(u_n)_{n \in I}$  une suite arithmétique de

raison  $r$  et  $u_p$  l'un de ses termes

$$\text{on a : } \forall n \in I \quad u_n = u_p + (n - p)r$$

**Remarque :** Si  $u_0$  est le premier terme d'une suite

arithmétique de raison  $r$  alors :  $u_n = u_0 + nr$

Si  $u_1$  est le premier terme d'une suite arithmétique de

raison  $r$  alors :  $u_n = u_1 + (n - 1)r$

**Application :** Soit  $(u_n)_n$  une suite arithmétique tel que

$$u_1 = 3 \text{ et } u_5 = 9$$

1) Déterminer sa raison  $r$

2) Déterminer son premier terme  $u_0$ .

3) écrire  $u_n$  en fonction de  $n$

**Solutions :** 1) la raison  $r$  ??

$$\text{on a : } \forall (n; p) \in \mathbb{N}^2 \quad u_n = u_p + (n - p)r$$

$$\text{Pour } n=5 \text{ et } p=1 \text{ on a : } u_5 = u_1 + (5-1)r$$

$$\text{Donc : } 9 = 3 + 4r \Leftrightarrow 4r = 6 \Leftrightarrow r = \frac{3}{2}$$

2) le terme  $u_0$  ??

$$u_1 = u_0 + (1-0)r \Leftrightarrow 3 = u_0 + \frac{3}{2} \Leftrightarrow u_0 = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

3)  $u_n$  en fonction de  $n$  ?

$$u_n = u_1 + \frac{3}{2}(n-1) \Leftrightarrow u_n = 3 + \frac{3}{2}(n-1)$$

$$u_n = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

**Exercice6 :** soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite récurrente définie

$$\text{par : } \begin{cases} u_{n+1} = \frac{2u_n - 1}{u_n} \\ u_0 = 2 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ et on considère la suite}$$

$(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$v_n = \frac{1}{u_n - 1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1) Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite arithmétique

2) écrire  $u_n$  en fonction de  $n$

Solution :

$$1) v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1} - 1} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{1}{\frac{2u_n - 1}{u_n} - 1} - \frac{1}{u_n - 1}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n}{u_n - 1} - \frac{1}{u_n - 1} = 1$$

Donc  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite arithmétique de raison

$$r = 1 \text{ et de premier terme } v_0 = \frac{1}{u_0 - 1} = \frac{1}{2 - 1} = 1$$

2) écrire  $u_n$  en fonction de  $n$

On a  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite arithmétique de raison

$r = 1$  et de premier terme  $v_0 = 1$

$$\text{Donc : } v_n = v_0 + nr = 1 + n \times 1 = 1 + n$$

$$\text{Puisque : } v_n = \frac{1}{u_n - 1} \text{ donc } u_n - 1 = \frac{1}{v_n} \text{ donc } u_n = \frac{1}{v_n} + 1$$

$$\text{donc } u_n = \frac{v_n + 1}{v_n} = \frac{1 + (n+1)}{n+1} = \frac{n+2}{n+1}$$

#### 1.4 La somme des termes successifs d'une suite arithmétique.

**propriété :** Soient  $(u_n)_n$  une suite arithmétique

$p$  un entier naturel et  $S_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_n$

$$\text{On a : } s_n = \frac{(n - p + 1)}{2} (u_p + u_n)$$

Avec :  $n - p + 1$  le nombre des termes de la somme

$u_p$  : le premier terme de la somme

$u_n$  : le dernier terme de la somme

**Preuve :** Soient  $(u_n)_n$  une suite arithmétique de raison  $r$  et  $p$  un entier naturel et

$$S_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n$$

$$\text{Donc : } S_n = u_n + u_{n-1} + u_{n-2} + \dots + u_{p+2} + u_{p+1} + u_p$$

En faisant la somme membre à membre on obtient :

$$2S_n = (u_n + u_p) + (u_{n-1} + u_{p+1}) + \dots + (u_{n-1} + u_{p+1}) + (u_n + u_p)$$

$$\text{Et on a : } u_{n+k} + u_{p+k} = (u_p + kr) + u_p + (n - k - p)r$$

$$\text{Donc : } u_{n+k} + u_{p+k} = u_p + u_p + (n - p)r$$

$$\text{Donc : } u_{n+k} + u_{p+k} = u_p + u_n$$

Et par suite :

$$2S_n = (u_n + u_p) + (u_n + u_p) + \dots + (u_n + u_p) + (u_n + u_p)$$

Donc :

$$2S_n = \underbrace{(u_n + u_p) + (u_n + u_p) + \dots + (u_n + u_p) + (u_n + u_p)}_{n-p+1}$$

$$\text{Donc : } 2S_n = (n - p + 1)(u_n + u_p)$$

$$\text{Donc : } S_n = \frac{(n - p + 1)}{2} (u_p + u_n)$$

**Remarque :** On note la somme :

$$S_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n \text{ par :}$$

$$S_n = \sum_{k=p}^{k=n} u_k$$

$$\text{Si } p=0 \text{ on a : } S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = \frac{n+1}{2} (u_0 + u_n)$$

$$\text{Si } p=1 \text{ on a : } S_n = \sum_{k=1}^{k=n} u_k = \frac{n}{2} (u_1 + u_n)$$

**Exemple** : calculer en fonction de n les sommes suivantes :

$$1) s_n = \sum_{k=1}^{k=n} k = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

$$2) s'_n = \sum_{k=0}^{k=n} (2k+1) = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n+1)$$

**Solutions** : 1) on pose :  $u_n = n$

On a :  $(u_n)_n$  une suite arithmétique de raison  $r=1$

Car :  $u_{n+1} - u_n = 1$

$$\text{Donc : } s_n = \sum_{k=1}^{k=n} k = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$$

$$\text{Donc : } s_n = \frac{n}{2}(1+n)$$

1) on pose :  $v_n = 2n+1$

On a :  $(v_n)_n$  une suite arithmétique de raison  $r=2$

Car :  $v_{n+1} - v_n = 2$

Donc :

$$s'_n = \sum_{k=0}^{k=n} (2k+1) = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n = \frac{n+1}{2}(v_0 + v_n)$$

Donc :

$$s'_n = \frac{n+1}{2}(1+2n+1) = \frac{n+1}{2}(2n+2) = (n+1)^2$$

**Exercice7** : Une entreprise de transport possède 40 camions en décembre 1991.



L'évolution de l'entreprise est telle que celle-ci doit acheter 8 camions supplémentaires chaque année.

1) Calculer le nombre de camions que possède l'entreprise en 1992, en 1993 et en 1994.

2) Ces nombres forment une suite.

a) Donner la nature de cette suite.

b) Préciser le premier terme  $u_1$  et la raison de cette suite.

c) Donner l'expression du nombre Un de camions que possède l'entreprise l'année n.

3) Quel est le nombre de camions que possède l'entreprise en 2002 ?

## 2) Suite géométrique.

**Activité1** Compléter les suites de nombres suivantes :

1 ; 2 ; 4 ; 8 ; ... ; ... ; ... ; 128

1 ; 3 ; 9 ; 27 ; ... ; ...

1,  $\frac{-1}{2}$ ,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{-1}{8}$ , ... ; ... ; ...

**Définition** : On appelle suite géométrique toute suite  $(u_n)_n$  définie par son premier terme et par la relation récurrente :  $u_{n+1} = qu_n \quad \forall n \in I$  où  $q$  est un réel fixe.

Le réel  $q$  s'appelle **la raison** de la suite  $(u_n)_n$ .

Le premier terme et la raison d'une suite géométrique s'appellent aussi les éléments de la suite géométrique.

**Exemple1** : soit la suite  $(u_n)_n$  définie par :  $u_{n+1} = \frac{u_n}{2}$

$\forall n \in \mathbb{N}$  et  $u_0 = 2$

la suite  $(u_n)_n$  est une suite géométrique de raison

$q = \frac{1}{2}$  et de premier terme  $u_0 = 2$

**Exemple2** : soit la suite  $(v_n)_n$  définie par :

$$v_n = 2 \times 3^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2 \times 3^{n+1}}{2 \times 3^n} = 3 = q$$

donc la suite est géométrique de raison  $q = 3$

## 1.2 Terme général d'une suite géométrique

Soit  $(u_n)_n$  une suite géométrique de raison  $q$  et  $p$  un entier naturel on a :

$$u_{p+1} = qu_p$$

$$u_{p+2} = qu_{p+1}$$

⋮

$$u_n = qu_{n-1}$$

En faisant les produits membre à membre on obtient :

$$u_n = \underbrace{q \times q \times q \times \dots \times q}_{n-p} u_p$$

$$\text{d'où } u_n = q^{n-p} u_p$$

**Propriété** : Si  $(u_n)_{n \in I}$  est une suite géométrique de raison  $q$  et si  $p$  est un entier naturel alors :

$$u_n = q^{n-p} u_p \quad \forall n \in I$$

**Cas particuliers** :

1) si  $p=0$  alors :  $u_n = q^n u_0$  2) si  $p=1$  alors :  $u_n = q^{n-1} u_1$

**Exemple1** : Soit  $(u_n)_n$  une suite géométrique tel que

$$u_1 = \frac{3}{2} \text{ et } u_4 = \frac{3}{16} \quad 1) \text{ Déterminer sa raison } q$$

2) écrire  $u_n$  en fonction de n

**Solutions :** 1) la raison  $q$  ??

$$\text{on a : } \forall (n; p) \in \mathbb{N}^2 \quad u_n = q^{n-p} u_p$$

$$\text{Pour } n=4 \text{ et } p=1 \text{ on a : } u_4 = q^{4-1} u_1$$

$$\text{Donc : } \frac{3}{16} = q^3 \frac{3}{126} \Leftrightarrow q^3 = \frac{1}{8} \Leftrightarrow q = \frac{1}{2}$$

2)  $u_n$  en fonction de  $n$  ?

$$u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times u_1 \Leftrightarrow u_n = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

**Exemple2 :** soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n}{3-u_n} \\ u_0 = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{et on considère la suite}$$

$$(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ définie par : } v_n = 1 - \frac{2}{u_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1) Montrer que  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique

2) écrire  $u_n$  en fonction de  $n$

$$\text{Solution :1) } v_{n+1} = 1 - \frac{2}{u_{n+1}} = 1 - \frac{2}{\frac{u_n}{3-u_n}} = 1 - \frac{6-2u_n}{u_n}$$

$$v_{n+1} = 3 \left(1 - \frac{2}{u_n}\right) \text{ donc } v_{n+1} = 3v_n$$

Donc  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique de raison

$$q = 3 \text{ et de premier terme } v_0 = -3$$

2) écrire  $u_n$  en fonction de  $n$

On a  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique de raison

$$q = 3 \text{ et de premier terme } v_0 = -3$$

$$\text{Donc : } v_n = u_0 \times q^n \Leftrightarrow v_n = -3 \times 3^n = -3^{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{Puisque : } v_n = 1 - \frac{2}{u_n} \text{ donc } u_n = \frac{2}{1-v_n} \text{ donc } u_n = \frac{2}{1+3^{n+1}}$$

### 1.3 La somme des termes consécutifs d'une suite géométrique.

**Proposition :** Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite géométrique

de raison  $q$ , et  $u_p$  l'un de ses termes.

$$\text{Et } s_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n$$

$$\text{Si } q = 1 \text{ alors : } s_n = (n-p+1)u_p$$

$$\text{Si } q \neq 1 \text{ alors : } s_n = u_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$$

**Preuve :** Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite géométrique de raison  $q$ , et  $u_p$  l'un de ses termes.

$$\text{soit } s_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n$$

**Si**  $q = 1$  tous les  $u_i$  sont égaux

$$\text{et } s_n = u_p + u_p + u_p + \dots + u_p \text{ (n-p+1) termes}$$

$$\text{donc : } s_n = (n-p+1)u_p$$

**Si**  $q \neq 1$

$$\text{On a : } s_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n$$

$$\text{Donc : } qs_n = qu_p + qu_{p+1} + qu_{p+2} + \dots + qu_{n-2} + qu_{n-1} + qu_n$$

Donc :

$$qs_n = qu_{p+1} + qu_{p+2} + qu_{p+3} + \dots + qu_{n-1} + qu_n + qu_{n+1}$$

$$s_n - qs_n = u_p - u_{n+1}$$

$$\text{Par suite : } s_n(1-q) = u_p - u_p q^{n-p+1}$$

$$s_n = u_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$$

**Application :**

**Exemple1 :** Un jeune homme se préparait à l'examen du baccalauréat ; son père, pour l'encourager, lui demanda ce qu'il désirait en récompense

Mon examen devant avoir lieu le 20 juin, répond-t-il, donne-moi seulement 1 centime le 1<sup>er</sup> juin, 2 centimes le lendemain, 4 centimes le surlendemain, en doublant chaque jour jusqu'au 20 inclusivement. Et donne moi la somme. J'emploierai cet argent pour faire un voyage pendant les vacances.

Le père pensa qu'avec cette somme son fils n'irait pas loin ; mais au bout de quelques jours, il commença à s'apercevoir de son erreur.

Avec quelle somme le fils va-t-il pouvoir partir en vacances ?

**Solution :** Les nombres de centimes à payer chaque jour sont les termes d'une suite géométrique de 20 termes dont le premier est :

$$u_1 = 1 \text{ et la raison } q = 2$$

$$u_2 = 2 \text{ (La somme à donner le 2 iem jour) ....}$$

$$u_{20} = \dots \text{ (La somme à donner le 20e jour)}$$

$$\text{Donc : } u_n = u_1 \times q^{n-1} = 1 \times 2^{n-1} = 2^{n-1}$$

$$u_{20} = 2^{20-1} = 2^{19} = 524288 \text{ Centimes}$$

La somme totale à payer serait :

$$s_{20} = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{20} = u_1 \frac{1 - 2^{20-1+1}}{1-2}$$

$$s_{20} = 2^{20} - 1 = 10485.75$$

centimes  $s_{20} \approx 1 \text{million } 500 \text{dh}$  Joli voyage !

**Exemple2** : calculer en fonction de n la somme suivante :

$$s_n = \sum_{k=0}^{k=n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

**Solutions :1)** on pose :  $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

On a :  $(u_n)_n$  une suite géométrique de raison  $q = \frac{1}{2}$

Car :  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2}$  Donc :  $s_n = \sum_{k=0}^{k=n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$

**Propriété** :  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique

si et seulement si  $b^2 = a \times c$

**Preuve** : (En exercice)

**Application** :

Déterminer le réel  $x$  pour que les nombres :  $(1 + x^2)$  ;  $(3 + x)$  et 10 soient les termes consécutifs d'une suite géométrique dans cet ordre et déterminer sa raison.

**Solution** :  $(1 + x^2)$  ;  $(3 + x)$  et 10 sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique

si et seulement si  $(3 + x)^2 = 10 \times (1 + x^2)$

$$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 = 10x^2 + 10 \Leftrightarrow 9x^2 - 6x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (3x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

Donc les termes sont :  $\frac{10}{9}$  et  $\frac{10}{3}$  et 10 donc :  $q = \frac{10/3}{10/9} = 3$

**Exercice8** : soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+2} = \frac{1}{27}(12u_{n+1} - u_n) \\ u_0 = 2; u_1 = \frac{4}{9} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

et on considère la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$v_n = u_n - \frac{1}{3^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1) Montrer que  $u_{n+1} = \frac{1}{9}u_n + \frac{2}{3^{n+2}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2) a) Montrer que  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme

b) écrire  $v_n$  et  $u_n$  en fonction de n

c) calculer la somme :  $s_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

**Solution :1)** montrons par récurrence que

$$u_{n+1} = \frac{1}{9}u_n + \frac{2}{3^{n+2}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1 étapes :  $n=0 \quad u_1 = \frac{1}{9}u_0 + \frac{2}{3^{0+2}} = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$

Donc la proposition est vraie pour  $n=0$

2 étapes : Supposons que :  $u_{n+1} = \frac{1}{9}u_n + \frac{2}{3^{n+2}}$

3 étapes : Montrons alors que :  $u_{n+2} = \frac{1}{9}u_{n+1} + \frac{2}{3^{n+3}} ??$

on a :  $u_{n+1} = \frac{1}{9}u_n + \frac{2}{3^{n+2}}$  donc  $u_n = 9 \left( u_{n+1} - \frac{2}{3^{n+2}} \right)$

et on a :  $u_{n+2} = \frac{1}{27}(12u_{n+1} - u_n)$

$$u_{n+2} = \frac{1}{27} \left( 12u_{n+1} - 9 \left( u_{n+1} - \frac{2}{3^{n+2}} \right) \right)$$

$$u_{n+2} = \frac{1}{27} \left( 3u_{n+1} + \frac{2}{3^n} \right) \text{ donc } u_{n+2} = \frac{1}{9}u_{n+1} + \frac{2}{3^{n+2}}$$

Par suite :  $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \frac{1}{9}u_n + \frac{2}{3^{n+2}}$

2)a) on a :  $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{3^{n+1}}$

Donc :  $v_{n+1} = \frac{1}{9}u_n + \frac{2}{3^{n+2}} - \frac{1}{3^{n+1}} = \frac{1}{9}u_n - \frac{1}{3^{n+2}}$

$$v_{n+1} = \frac{1}{9} \left( u_n - \frac{1}{3^n} \right) \text{ donc } v_{n+1} = \frac{1}{9}v_n$$

Donc  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique de raison

$$q = \frac{1}{9} \text{ et de premier terme } v_0 = 1$$

2) b) écrire  $v_n$  et  $u_n$  en fonction de n

On a  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique de raison

$$q = \frac{1}{9} \text{ et de premier terme } v_0 = 1$$

Donc :  $v_n = v_0 \times q^n \Leftrightarrow v_n = \left(\frac{1}{9}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Puisque :  $u_n = v_n + \frac{1}{3^n}$  donc  $u_n = \left(\frac{1}{9}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n$

$$2) c) s_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n ??$$

$$u_n = v_n + w_n \text{ avec } w_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

on a  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont deux suites

géométriques de raison  $q = \frac{1}{9}$  et  $q' = \frac{1}{3}$  donc

$$\text{donc } s_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = \sum_{k=0}^{k=n} v_k + \sum_{k=0}^{k=n} w_k$$

$$s_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = v_0 \frac{1 - \left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{9}} + w_0 \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{9}{8} \left(1 - \left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}\right) + \frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

$$\sum_{k=0}^{k=n} u_k = \frac{21}{8} - \frac{1}{8} \left(\frac{1}{9}\right)^n - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

**Exercice9** : soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n + 2}} & \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 \in ]-1; 0[ \end{cases}$$

1) Montrer que  $-1 < u_n < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2) Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite strictement croissante

3) Montrer que  $u_{n+1} \geq \frac{u_n}{\sqrt{u_n + 2}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Et en déduire que :  $u_n \geq \frac{u_0}{(\sqrt{u_0 + 2})^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

**Solution** : 1) montrons par récurrence que

$$-1 < u_n < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1 étapes :  $n=0$  on a :  $-1 < u_0 < 0$

Donc la proposition est vraie pour  $n=0$

2 étapes : Supposons que :  $-1 < u_n < 0$

3 étapes : Montrons alors que :  $-1 < u_{n+1} < 0$  ??

On a :  $-1 < u_n < 0$  donc :  $1 < u_n + 2 < 2$

$$\text{donc : } 1 < \sqrt{u_n + 2} < \sqrt{2} \text{ donc : } \frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{1}{\sqrt{u_n + 2}} < 1$$

$$\text{et puisque : } 0 < -u_n < 1 \text{ alors : } 0 < \frac{-u_n}{\sqrt{u_n + 2}} < 1$$

$$\text{donc : } -1 < \frac{u_n}{\sqrt{u_n + 2}} < 0 \text{ donc } -1 < u_{n+1} < 0$$

d'où :  $-1 < u_n < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2) Montrons que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite strictement croissante

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{\sqrt{u_n + 2}} - u_n = \frac{u_n}{\sqrt{u_n + 2}} (1 - \sqrt{u_n + 2})$$

et puisque :  $1 - \sqrt{u_n + 2} < 0$  et  $\frac{u_n}{\sqrt{u_n + 2}} < 0$

alors :  $u_{n+1} - u_n > 0$  donc  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite strictement croissante

3) Montrons que  $u_{n+1} \geq \frac{u_n}{\sqrt{u_n + 2}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Soit  $n \in \mathbb{N}$  on a :  $u_n \geq u_0$  car  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  croissante

$$\text{Donc : } \sqrt{2 + u_n} \geq \sqrt{2 + u_0} \text{ cad } \frac{1}{\sqrt{2 + u_n}} \leq \frac{1}{\sqrt{2 + u_0}}$$

$$\text{et puisque : } u_n < 0 \text{ alors : } \frac{u_n}{\sqrt{2 + u_n}} \geq \frac{u_n}{\sqrt{2 + u_0}}$$

$$\text{Donc : } u_{n+1} \geq \frac{u_n}{\sqrt{2 + u_0}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

3) Soit  $n \in \mathbb{N}$  on a :  $0 > u_{n+1} \geq \frac{u_n}{\sqrt{2 + u_0}}$

$$\text{Donc : } 0 \leq -u_{n+1} \leq \frac{-u_n}{\sqrt{2 + u_0}}$$

En donnant à  $n$  des valeurs on trouve :

$$0 \leq -u_1 \leq \frac{-u_0}{\sqrt{2 + u_0}}$$

$$0 \leq -u_2 \leq \frac{-u_1}{\sqrt{2 + u_1}}$$

.....

$$0 \leq -u_{n-1} \leq \frac{-u_{n-2}}{\sqrt{2 + u_{n-2}}}$$

$$0 \leq -u_n \leq \frac{-u_{n-1}}{\sqrt{2 + u_{n-1}}}$$

$$\text{Le produit des inégalités donne : } 0 < -u_n \leq \frac{-u_0}{(\sqrt{u_0 + 2})^n}$$

$$\text{Donc : } u_n \geq \frac{u_0}{(\sqrt{u_0 + 2})^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

## Activités sur les suites

### Activité 1 :

#### Jeu d'échec et suite géométrique.

Le jeu d'échec fut inventé par un mathématicien indien. Le Roi le communiqua en fut si émerveillé qu'il dit à l'inventeur de choisir lui-même la récompense qu'il désirait.

Or l'échiquier se compose de 64 case.

Le mathématicien demanda 1 grain de blé pour la première case, 2 grains pour la deuxième, 4 grains pour la troisième et ainsi de suite en doublant toujours le nombre de grains d'une case à la suivante jusqu'à la dernière.

Tout le monde fut étonné de la modicité d'une pareille demande ; mais on fut bien plus surpris quand le mathématicien, ayant fait son calcul, prouva au roi que son royaume ne suffirait pas à produire en plusieurs années tout le blé qu'il demanderait.

En effet, si on se sert de la formule pour avoir le nombre de grains, on obtient

$$S = 2^{64} - 1 = 18\ 446\ 774\ 073\ 709\ 551\ 615.$$

On peut savoir à peu près combien il a de grains dans un kilo de blé et combien un hectare de terrain produit en moyenne de kilogrammes et donc combien d'hectares il faudrait pour produire le nombre demandé.

On trouve que la surface entière de la terreensemencée ne serait pas suffisante.

On a aussi calculé que cette quantité de grains couvrirait à la hauteur de 1 m la surface de la France considérée comme plane.

### Activité 2 :

1) La population d'un village de montagne diminue tous les ans de 20 %. Sachant qu'en 1996 elle était de 1 875 habitants, compléter le tableau suivant :

Année	1996	1997	1998	1999	2000
Nombre d'habitants					

2) Montrer que les nombres d'habitants sont des termes d'une suite dont on déterminera la nature et la raison.

3) À l'aide de la calculatrice ou d'un tableur :

- Déterminer la population de ce village en 2010
- Donner l'année d'extinction de ce village si on suppose la diminution de la population constante

## La célèbre suite du mathématicien italien Fibonacci

La **suite de Fibonacci** tient son nom du mathématicien italien Leonardo Fibonacci, qui a vécu à Pise au XII<sup>ème</sup> siècle (1175-1240), d'où son nom de Léonard de Pise, en référence à Léonard de Vinci.

La suite de Fibonacci se construit facilement : chaque terme de la suite, à partir du rang 2, s'obtient en additionnant les deux précédents, les deux premiers termes étant 0 et 1. Le troisième terme est donc 1 ( $0 + 1 = 1$ ), le quatrième terme 2 ( $1 + 1 = 2$ ), le cinquième 3 ( $1 + 2 = 3$ ), le sixième 5 ( $2 + 3 = 5$ ), et ainsi de suite. Le début de la suite du célèbre mathématicien Fibonacci est donc : 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 ...

Appelons  $(u_n)$  la suite de Fibonacci. On a donc  $u_0 = 0$  ;  $u_1 = 1$  et pour tout  $n$  entier naturel,

$$\text{on a alors } u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

Chaque terme de cette suite, à partir du rang 2, est donc la somme des deux termes précédents.

#### **La suite de Fibonacci n'est ni arithmétique, ni géométrique.**

En effet,  $u_1 - u_0 = 1 - 0 = 1$  et  $u_2 - u_1 = 1 - 1 = 0$ . La différence entre deux termes consécutifs de cette suite n'est pas constante donc la suite de Fibonacci n'est pas arithmétique.

Son premier terme étant 0, elle ne peut être géométrique.

On remarque également par exemple que  $u_4/u_3 = 3/2$  et que  $u_5/u_4 = 5/3$ . En définissant une suite en prenant les termes de la suite de Fibonacci à partir du terme de rang 2, on obtient donc une suite qui n'est pas géométrique : le rapport entre 2 termes consécutifs de cette suite n'est pas constant.

**C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.**

**C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien**



## **LIMITE D'UNE FONCTION**

### **I) RAPPELLES ET COMPLEMENTS.**

$$]a, b[ = \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$$

1) Le centre de l'intervalle  $]a, b[$  est le réel

$$x_0 = \frac{a+b}{2}$$

2) Le rayon de l'intervalle  $]a, b[$  est le réel positif

$$r = \frac{b-a}{2}$$

**Activité :** Déterminer les bornes d'un intervalle ouvert de centre  $x_0$  et de rayon  $r$

(deux réels données)

**Définition :** L'ensemble : "

$]a; b[* = \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\} - \{x_0\}$  où  $x_0$  est le centre de l'intervalle  $]a, b[$  :

S'appelle l'intervalle Pointé de bornes  $a$  et  $b$ .

**Remarque :** Si  $r$  est le rayon de l'intervalle  $]a, b[$  et

$x_0$  son centre alors :  $]a; b[* = ]x_0 - r; x_0 + r[ - \{x_0\}$

$$x \in ]x_0 - r; x_0 + r[ - \{x_0\} \Leftrightarrow |x - x_0| < r$$

**Activité1 :** Montrer que

$$x \in ]x_0 - r; x_0 + r[ - \{x_0\} \Leftrightarrow |x - x_0| < r$$

**Activité2 :**

1- Rappeler l'image d'un ensemble par une application.

2- Rappeler  $f(A) \subset B$

3- Traduire en utilisant les valeurs absolues :

$$f(]x_0 - r; x_0 + r[ - \{x_0\}) \subset ]l - \beta; l + \beta[$$

### **II) LIMITE NULLE EN 0.**

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

**Activité3 :** Considérons la fonction :

$$x \mapsto \frac{x^3}{|x|}$$

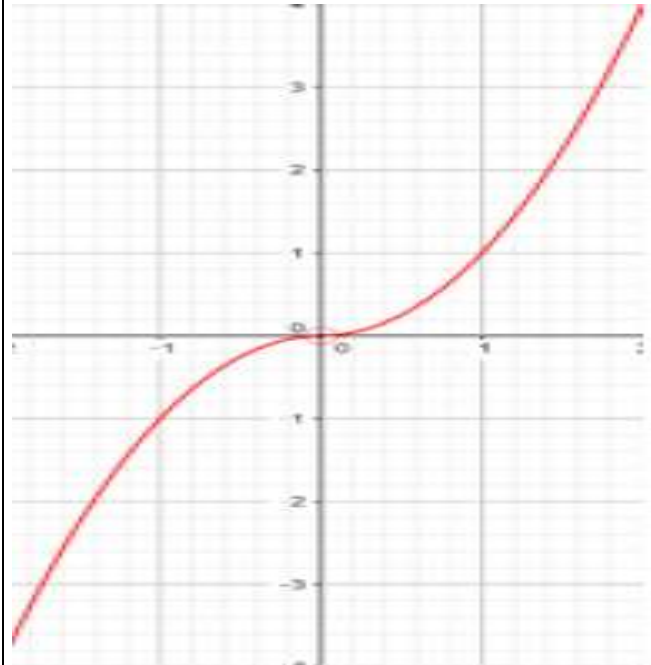
1- Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ .

2- Ecrire des expressions de  $f$  sur des intervalles sans valeur absolue.

3- La courbe de  $f$  est ci-contre :

a)- Déterminer un réel  $\alpha$  tel que :

$$f(]-\alpha; \alpha[ - \{0\}) \subset ]-2; 2[$$



b)- Déterminer un réel  $\alpha$  tel que :

$$f(]-\alpha; \alpha[ - \{0\}) \subset ]-10^2; 10^2[ [$$

c)- Déterminer un réel  $\alpha$  tel que :

$$f(]-\alpha; \alpha[ - \{0\}) \subset ]-\varepsilon; \varepsilon[$$

En répondant à la question 3-c) on peut

Conclure que :

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in Df)(0 < |x| < \alpha \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$$

On dit que la fonction  $f$  admet 0 comme limite

en 0. et on écrit :  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

**Définition :** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle pointé de centre 0. On dit que  $f$  admet la limite 0 en 0 si elle vérifie la propriété suivante  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in Df)(0 < |x| < \alpha \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$ .

On écrit :  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

**Remarques :** 1) Le fait que  $f$  est définie sur un

intervalle pointé est essentielle.  $g(x) = \sqrt{x} + \sqrt{-x}$

est définie en 0 et n'admet pas de limite en 0.

$Dg = \{0\}$ .

**Propriété :** Si  $f$  et  $g$  sont confondues sur un intervalle pointé de centre 0 et si  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$  alors  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$

**Propriété :** Les fonctions :  $x \mapsto x^n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) ;  
 $x \mapsto \sqrt{|x|}$  ;  $x \mapsto kx$   
 Tendents vers 0 quand  $x$  tend vers 0.

**Exercice :** Soit la fonction :  $f : x \mapsto \frac{x}{x+1}$

Montrer en utilisant la définition que :  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

**Solution :** Montrons que :

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in Df)(0 < |x| < \alpha \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$  ?

Soit :  $x \in ]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[$  donc  $|f(x)| = \left| \frac{x}{x+1} \right| \leq 2|x|$

Soit  $\varepsilon > 0$  on cherche  $\alpha > 0$  tel que :

$0 < |x| < \alpha \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$

Pour avoir  $|f(x)| < \varepsilon$  il suffit d'avoir  $2|x| < \varepsilon$  et

$|x| < \frac{\varepsilon}{2}$  cad  $|x| < \frac{\varepsilon}{2}$  et  $|x| < \frac{1}{2}$

Il suffit de prendre  $\alpha$  le plus petit des

nombre :  $\frac{\varepsilon}{2}$  et  $\frac{1}{2}$

donc :  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

### III) LIMITE FINIE L EN a.

**Définition :** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle pointé de centre  $a$  et  $l$  un réel. On dit que la fonction  $f$  tend vers  $l$

quand  $x$  tend vers  $a$  si :  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) - l = 0$ . c.-à-d. :

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in Df)(0 < |x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

**Propriété :** Si  $P$  est une fonction polynôme alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$$

Une fonction polynôme  $P$  c'est une fonction qui s'écrit de la forme :

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

**Exemple :**  $\lim_{x \rightarrow 2} 3x^2 + 2x + 1 = 3 \times 2^2 + 2 \times 2 + 1 = 17$

**Propriété :** Si sur un intervalle pointé de centre  $a$

on a :  $|f(x) - l| \leq u(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = 0$  alors

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$$

**Exemple1 :** 1) monter que :  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos\left(\frac{2}{x}\right) = 0$

2a) monter que :  $\forall x \in ]-1; 1[ : |x^2 + 5x| \leq 6|x|$

b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 + 5x$

**Solution :** 1)  $x \in \mathbb{R}^* \left| \cos\left(\frac{2}{x}\right) \right| \leq 1$

donc  $\left| x^2 \cos\left(\frac{2}{x}\right) \right| \leq x^2$  et on a  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$

Donc :  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos\left(\frac{2}{x}\right) = 0$

2a) on a :  $|x^2 + 5x| = |x(x+5)| = |x||x+5|$

Et puisque :  $x \in ]-1; 1[$  alors :  $4 < x+5 < 6$

alors :  $|x+5| < 6$  donc  $|x^2 + 5x| \leq 6|x|$

b) puisque :  $\lim_{x \rightarrow 0} 6|x| = 0$  alors :  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 + 5x$

**Exemple2 :** monter que :  $\lim_{x \rightarrow 0} 2 + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 2$

**Solution :**  $x \in \mathbb{R}^* \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq 1$  donc :

$|f(x) - 2| = x^2 \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq x^2$  et on a  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$

Alors :  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$

**Exemple3 :** monter que :  $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{2x+1} = 3$

**Solution :**  $\forall x \in \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$

$$|f(x) - 3| = \left| \sqrt{2x+1} - 3 \right| = \frac{2|x-4|}{\sqrt{2x+1} + 3}$$

et on a  $\sqrt{2x+1} + 3 \geq 3$  donc :  $|f(x) - 3| \leq \frac{2}{3}|x-4|$

et puisque :  $\lim_{x \rightarrow 4} |x-4| = 0$  Alors :  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 3$

**Propriété :** Si  $f$  et  $g$  sont confondues sur un intervalle pointé de centre  $a$  et si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$

alors  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$

**Exemple :** On se propose d'étudier la limite de la

fonction :  $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x}$  en 0.

On remarque que :  $(\forall x \in \mathbb{R}^*) :$

$$f(x) = \frac{(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1+x^2}+1)}{x(\sqrt{1+x^2}+1)} = \frac{1+x^2-1}{x(\sqrt{1+x^2}+1)}$$

(on a multiplié par le conjugué)

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1} \text{ D'autre part :}$$

( $\forall x \in \mathbb{R}^*$ ) ( $|f(x)| \leq |x|$ ) et puisque  $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$  alors

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

**Propriété :** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle pointé de centre  $a$  et  $l$  un réel. la fonction  $f$  tend vers  $l$  quand  $x$  tend vers  $a$  si : la fonction  $h \rightarrow f(a+h) - l$  tend vers 0 quand  $x$  tend vers 0

**Exemple1 :**  $f(x) = x^2 + 3x + 2$

montrer que :  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 6$

**Solution :**  $f(-1+h) - 6 = h^2 - 5h$

$$|f(-1+h) - 6| = |h^2 - 5h| = |h||h - 5|$$

Si  $h \in ]-1; 1[$  alors :  $|f(-1+h) - 6| \leq 6|h|$

puisque :  $\lim_{h \rightarrow 0} 6|h| = 0$  alors :  $\lim_{h \rightarrow 0} f(-1+h) - 6 = 0$

donc :  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 6$

**Exemple2 :**  $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$

montrer que :  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{1}{3}$

**Solution :**  $f(2+h) - \frac{1}{3} = h^2 - 5h$

$$f(2+h) - \frac{1}{3} = \frac{2h}{3+h}$$

Si  $h \in ]-1; 1[$  alors :  $\left| f(2+h) - \frac{1}{3} \right| = \left| \frac{2h}{3+h} \right| \leq |h|$

puisque :  $\lim_{h \rightarrow 0} |h| = 0$  alors :  $\lim_{h \rightarrow 0} f(2+h) - \frac{1}{3} = 0$

donc :  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{1}{3}$

**Propriété :** Si sur un intervalle pointé de centre  $a$  on a :  $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$  et si

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = l \text{ alors } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$$

**Propriété :** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle pointé de centre  $a$

on a :  $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$

**Remarque :**

$$\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \text{ ou } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -l$$

**Propriété :** Si  $f$  admet une limite  $l$  en  $a$  alors cette limite est **unique**.

## IV) LIMITE A DROITE, LIMITE A GAUCHE.

### 1) Définition

**Activité :** Soit la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto x - E(x)$

Où  $E$  désigne la partie entière.

- 1- Ecrire les expressions de  $f$  sans utiliser la partie entière sur les intervalles  $]0, 1[$  et  $]1, 2[$ .
- 2- Construire la courbe de la restriction de  $f$  sur  $[0, 2]$ .
- 3- La fonction  $f$  admet-elle une limite en 1.
- 4- Soit la fonction  $g(x) = x$  et  $h(x) = x - 1$ 
  - a) Remarquer que  $f$  et  $g$  sont confondues sur  $]0, 1[$  et que  $f$  et  $h$  sont confondues sur  $]1, 2[$
  - b) déterminer les limites de  $g$  et de  $h$  en 1.

**Définition1 :** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle de la forme  $]a, a + r[$  où  $r > 0$  et  $l$  un réel. On dit que la fonction  $f$  tend vers  $l$  quand  $x$  tend vers  $a$  à droite si la proposition suivante est vraie :

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in Df)(a < x < a + \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Et on écrit :  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = l$  ou  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l$

**Définition2 :** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle de la forme  $]a - r, a [$  où  $r > 0$  et  $l$  un réel. On dit que la fonction  $f$  tend vers  $l$  quand  $x$  tend vers  $a$  à gauche si la proposition suivante est vraie :

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in Df)(a - \alpha < x < a \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Et on écrit :  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = l$  ou  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l$

**Exemple :** Soit la fonction  $f : x \mapsto \frac{|x-1|x}{x^2-1}$

Déterminer  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x)$  et  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x)$

**Solution :**  $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$

$$\text{Si : } x > 1 : f(x) = \frac{(x-1)x}{(x-1)(x+1)} = \frac{x}{x+1}$$

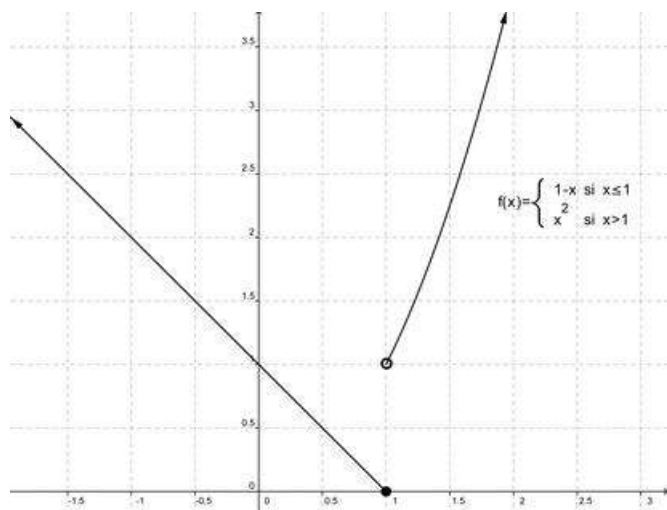
$$\text{Donc : } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Si : } x < 1 : f(x) = \frac{-(x-1)x}{(x-1)(x+1)} = -\frac{x}{x+1}$$

$$\text{Donc : } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} -\frac{x}{x+1} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Remarque : } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) \neq \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x)$$

**Exercice1 :**



La courbe ci-contre est la courbe de la fonction définie par Morceaux comme suite :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 1 - x \text{ si } x \leq 1$$

$$x \mapsto x^2 \text{ si } x > 1$$

Déterminer graphiquement les limites de la fonction  $f$  à droite et à gauche de 1.

**Exercice2 :** Soit la fonction  $g$  définie par :

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 2x^2 - x + 3 \text{ si } x \geq 1$$

$$x \mapsto -x^2 + x + \alpha \text{ si } x < 1$$

Déterminer  $\alpha$  pour que la fonction  $g$  admette une limite en 1.

**Théorème :** Une fonction  $f$  admet une limite  $l$  en  $a$  si et seulement si elle admet une limite à droite de  $a$  égale à sa limite à gauche de  $a$  égale à  $l$ .

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = l \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = l$$

$$\text{Exemple : Soit la fonction } f : x \mapsto \frac{(x+1)^2}{|x^2-1|}$$

Etudier la limite de  $f$  en  $x_0 = -1$

**Solution :**

Déterminons  $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x)$  et  $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x)$  ?

Solution :  $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$

$$\text{Si : } -1 < x < 1 : f(x) = \frac{(x+1)^2}{|x+1||x-1|} = -\frac{x+1}{x-1}$$

$$\text{Donc : } \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} -\frac{x+1}{x-1} = 0$$

$$\text{Si : } x < -1 : f(x) = \frac{(x+1)^2}{|x+1||x-1|} = \frac{x+1}{x-1}$$

$$\text{Donc : } \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \frac{x+1}{x-1} = 0$$

$$\text{donc : } \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = 0 \text{ donc : } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0$$

## 2) Propriétés

Toutes les propriétés mentionnées au paravent sont vraies à droite et à gauche de  $a$  en tenant compte des conditions

**Propriété :** Si sur un intervalle de la forme

$$]a, a + r[ \text{ on a : } |f(x) - l| \leq u(x) \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} u(x) = 0$$

$$\text{alors } \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = l$$

**Propriété :** Si  $f$  et  $g$  sont confondues sur un intervalle de la forme  $]a, a + r[$  et si  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = l$

$$\text{alors } \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} g(x) = l$$

## 3) Opérations sur les limites finies.

**Propriété :** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions tels que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = l' \text{ on a :}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = l + l' \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} (f \times g)(x) = l \times l' \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} |f|(x) = |l| \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{1}{g} \right)(x) = \frac{1}{l'} \text{ si } l' \neq 0$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{f}{g} \right)(x) = \frac{l}{l'} \text{ si } l' \neq 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{f}(x) = \sqrt{l} \text{ si } l > 0$$

Ces propriétés sont vraies à droite et à gauche d'un réel  $a$ .

$$\text{Exemple : } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+3}+1}{2x-1} = \frac{3}{1} = 3$$

## V) EXTENSION DE LA NOTION DE LIMITE.

1) Limite infinie à droite (à gauche) de  $a$ .

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

**Activité** : Soit la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$

La courbe représentative de  $f$  est l'hyperbole de centre  $O(0,0)$

1- Compléter le tableau suivant :

$x$	$10^{-2}$	$10^{-6}$	$10^{-20}$	...	$10^{-p}$
$f(x)$					

Que remarquer-vous ?

Considérons  $A = 10100$  déterminer un réel  $\alpha$  tel que si  $0 < x < \alpha$

Alors  $f(x) > 10100$ .

Montrer que :

(P) :  $(\forall A > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in Df)(0 < x < \alpha \Rightarrow f(x) > A)$

La propriété (P) veut dire qu'on peut rendre  $f(x)$  aussi grand qu'on

veut ; on dit que la limite de  $f$  est  $+\infty$  quand  $x$  tend vers 0 à droite et

on écrit :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$

**Définition** : Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle de la forme  $]a, a + r[$  où  $r > 0$ , on dit que la fonction  $f$  tend vers  $+\infty$  quand  $x$  tend vers  $a$  adroite si :

$(\forall A > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in Df)(0 < x - a < \alpha \Rightarrow f(x) > A)$

On écrit :  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$

**Propriété** : Les fonctions :  $x \mapsto k|x|$ ;  $x \mapsto k\sqrt{|x|}$ ;

$x \mapsto k|x|^n$  Tendent vers 0 quand  $x$  tend vers 0.

**Propriétés** :

l'inverse des fonctions  $x \mapsto k|x|$ ;  $x \mapsto k\sqrt{|x|}$ ;

$x \mapsto k|x|^n$  où  $k$  un réel strictement positif et  $n \in \mathbb{N}^*$ , tendent vers  $+\infty$  quand  $x$  tend vers 0.

**Définitions** : 1)  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$  :

$(\forall A > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in Df)(0 < x - a < \alpha \Rightarrow f(x) < -A)$

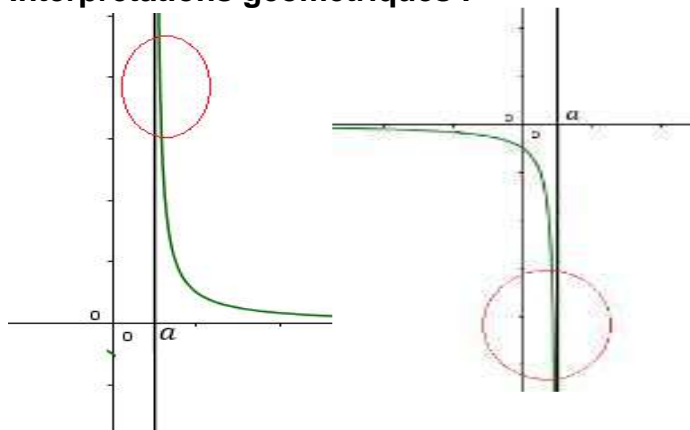
2)  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$  :

$(\forall A > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in Df)(0 < a - x < \alpha \Rightarrow f(x) > A)$

3)  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$  :

$(\forall A > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in Df)(0 < a - x < \alpha \Rightarrow f(x) < -A)$

Interprétations géométriques :



$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$

**Exercice** : Compléter l'interprétation géométrique.

**Définition** : Si la fonction  $f$  vérifie l'une des limites suivantes :

$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$  ou  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$  ou

$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$  ou  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$  Alors

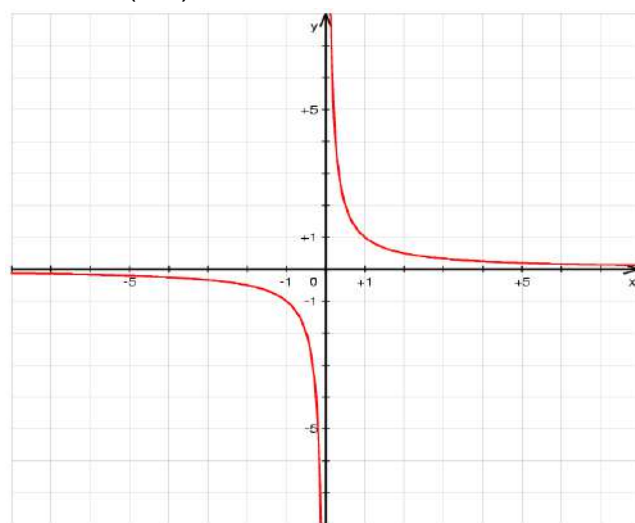
On dit que la droite  $(\Delta): x = a$  est une Asymptote verticale.

2) Limites finies en  $\pm\infty$

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

**Activité** : Soit la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$

La courbe représentative de  $f$  est l'hyperbole de centre  $O(0,0)$



1- Compléter le tableau suivant :

$x$	$10^2$	$10^6$	$10^{20}$	...	$10^p$
$f(x)$					

Que remarquer-vous ?

Considérons  $\varepsilon = 10^{-100}$  déterminer un réel  $B$  tel que si  $x > B$  alors  $|f(x)| < \varepsilon$ .

En général, montrer que :

(P) :  $(\forall \varepsilon > 0) (\exists B > 0) (\forall x \in Df)(x > B \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon)$

**Définition :** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle de la forme  $]a, +\infty[$

( $a$  un réel quelconque) et  $l$  un réel, on dit que la fonction  $f$  tend  $l$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$  si :

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists B > 0)(\forall x \in Df)(x > B \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$

On écrit :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$

**Propriétés :** les fonctions  $x \mapsto \frac{k}{|x|}$ ;  $x \mapsto \frac{k}{\sqrt{|x|}}$ ;

$x \mapsto \frac{k}{|x|^n}$  où  $k$  un réel donné et  $n \in \mathbb{N}^*$

Tendent vers 0 quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .

**Définitions :** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle de la forme  $] - \infty, a[$  ( $a$  un réel quelconque) et  $l$  un réel, on dit que

la fonction  $f$  tend  $l$  quand  $x$  tend vers  $-\infty$  si :

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists B > 0)(\forall x \in Df)(x < -B \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$

On écrit :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$

**Propriété :**

- Soit  $f$  et  $u$  deux fonctions définies sur un intervalle de la forme :  $I = ]a, +\infty[$

Si  $\forall x \in I : |f(x)| \leq u(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 0$

alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

- Soit  $f$  et  $u$  deux fonctions définies sur un intervalle de la forme :  $I = ] - \infty, a[$

Si  $\forall x \in I : |f(x)| \leq u(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = 0$

alors  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

**Exemple1 :** Soit la fonction :  $f : x \mapsto \frac{-3}{x^2 + 2}$

déterminer :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

**Solution :**  $\forall x \in \mathbb{R}^*$  on a  $x^2 + 2 \geq x^2$  donc

$|f(x)| \leq \frac{3}{x^2}$  et on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x^2} = 0$  donc :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

**Exemple2 :** Soit la fonction :  $f : x \mapsto \frac{1 + \sin x}{1 + \sqrt{x}}$

déterminer :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

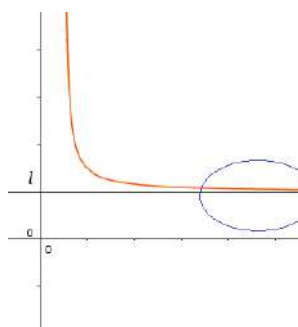
**Solution :**  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$  on a  $1 + \sqrt{x} \geq \sqrt{x}$  et

$0 \leq 1 + \sin x \leq 2$  donc  $\left| \frac{1 + \sin x}{1 + \sqrt{x}} \right| \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$  donc

$|f(x)| \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$  et on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$  donc :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

**Interprétation géométrique :**



$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$

Compléter les autres interprétations.

**Définition :** Si la fonction  $f$  vérifie l'une des limites suivantes :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$  ou  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$

Alors, on dit que la droite  $(\Delta) : y = l$  est une asymptote horizontale.

**Remarque :** La position de la courbe  $C_f$  par rapport à son asymptote horizontale se détermine par le signe de  $f(x) - l$  :

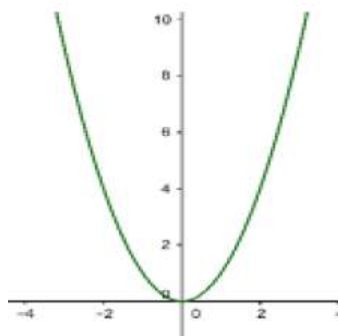
1) Si  $f(x) - l \geq 0$  alors  $C_f$  est au-dessus de  $(\Delta) : y = l$

2) Si  $f(x) - l \leq 0$  alors  $C_f$  est au-dessous de  $(\Delta) : y = l$

3) **Limite infinies en  $\pm\infty$**

**Activité :** Considérons la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto x^2$

La courbe représentative de  $f$  est la parabole de centre  $O(0,0)$



1- Compléter le tableau suivant :

$x$	$10^2$	$10^6$	$10^{20}$	...	$10^p$
$f(x)$					

Que remarquer-vous ?

Considérons  $A = 10100$  déterminer un réel  $B$  tel que si  $x > B$  alors  $f(x) > A$ .

En général, montrer que :

(P) :  $(\forall A > 0)(\exists B > 0)(\forall x \in Df)(x > B \Rightarrow f(x) > A)$

**Définition :** Soit  $f$  une fonction  $]a, +\infty[$  (où  $a$  est un réel quelconque) on dit que la fonction  $f$  tend vers  $+\infty$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$  si :

$(\forall A > 0)(\exists B > 0)(\forall x \in Df)(x > B \Rightarrow f(x) > A)$

on écrit :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

**Propriété :** Les fonctions :

$x \mapsto x^2$ ;  $x \mapsto x^n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ );  $x \mapsto \sqrt{x}$ ;  $x \mapsto |x|$

tendent vers  $+\infty$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$

**Définitions :**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  si

$(\forall A > 0)(\exists B > 0)(\forall x \in Df)(x > B \Rightarrow f(x) > A)$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$  si

$(\forall A > 0)(\exists B > 0)(\forall x \in Df)(x > B \Rightarrow f(x) < -A)$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  si

$(\forall A > 0)(\exists B > 0)(\forall x \in Df)(x < -B \Rightarrow f(x) > A)$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  si

$(\forall A > 0)(\exists B > 0)(\forall x \in Df)(x < -B \Rightarrow f(x) < -A)$

**Remarque :** Pour l'interprétation géométrique, il y a plusieurs cas qu'on va étudier par la suite (Etude de fonction).

## VI) OPERATIONS SUR LES LIMITES.

### 1) Limites et ordres.

**Propriété :** Si sur un intervalle pointé de centre  $a$  on a :  $|f(x) - l| \leq u(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = 0$  alors

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$

(On peut citer les mêmes propriétés à gauche et adroites de  $a$  ou  $+\infty$  ou  $-\infty$ .)

**Propriété :** Si  $f$  et  $g$  sont confondues sur un intervalle pointé de centre  $a$  et si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$

alors  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$

**Propriété :** 1) soit  $f$  est une fonction définie sur un intervalle de la forme  $I = ]a - r; a + r[ - \{a\}$  avec  $a \in \mathbb{R}$  et  $r > 0$

Si  $f$  admet une limite en  $a$  et  $f$  positif sur  $I$  alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \geq 0$

2) soit  $f$  est une fonction définie sur un intervalle de la forme  $I = ]a - r; a + r[ - \{a\}$  avec  $a \in \mathbb{R}$  et  $r > 0$

Si  $f$  admet une limite en  $a$  et  $g$  admet une limite en  $a$  et  $f \leq g$  sur  $I$  alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

3) si on a :  $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$  et si  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$  et  $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = l$  alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$

Les propriétés précédentes sont vraies si  $x$  tend vers  $a$  à droite, ou  $a$  à gauche, ou  $+\infty$  ou  $-\infty$  en tenant compte des conditions pour chaque cas.

(On peut citer les mêmes propriétés à gauche de  $a$ .)

$]a - r; a + r[ - \{a\}$

**Propriété :** 1) Si sur un intervalle de la forme  $]a, a + r[$  on a :  $u(x) \leq v(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow a^+} u(x) = +\infty$

alors :  $\lim_{x \rightarrow a^+} v(x) = +\infty$

2) Si sur un intervalle de la forme  $]a, a + r[$  on a :  $u(x) \leq v(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow a^+} v(x) = -\infty$

alors :  $\lim_{x \rightarrow a^+} u(x) = -\infty$

La propriété précédente est vraie si  $x$  tend vers  $a$  à gauche, ou  $+\infty$  ou  $-\infty$  en tenant compte des conditions pour chaque cas.

**Exemple 1 :** Soit la fonction :

$f : x \mapsto (x^2 + x^4) \sin \frac{1}{x}$  déterminer :  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

**Solution :**  $\forall x \in \mathbb{R}^*$  on a  $-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$  et  $x^2 + x^4 \geq 0$

donc  $-x^2 - x^4 \leq (x^2 + x^4) \sin \frac{1}{x} \leq x^2 + x^4$  et puisque :

$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 + x^4 = \lim_{x \rightarrow 0} -x^2 - x^4 = 0$  alors :  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

**Exemple 2 :** Soit la fonction :  $f : x \mapsto 3x^2 + 5x + 1$

déterminer :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

**Solution :**  $\forall x \in \mathbb{R}^+$  on a  $3x^2 \leq 3x^2 + 5x + 1$  et et  
 puisque :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 = +\infty$  alors :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

**Exemple3 :** Soit la fonction :  $f : x \mapsto x + \sin x - 1$   
 déterminer :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

**Solution :**  $\forall x \in \mathbb{R}$  on a  $-1 \leq \sin x \leq 1$  donc :  
 $x - 2 \leq f(x) \leq x$  et puisque :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \text{ alors : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

**Exercice :** Soit  $f(x) = \frac{2 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}$

1- Montrer que  $(\forall x \in \mathbb{R}^*) f(x) \geq \frac{1}{x^2}$

2- En déduire  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

**2) Opérations sur les limites**

Toutes les propriétés qui seront citées dans ce paragraphe sous forme de tableau sont admises et on peut les démontrer en utilisant les définitions des limites.

**1) Limite de la somme**

$\lim f$	$\ell$	$\ell$	$\ell$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g$	$\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim f + g$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Forme ind

Ces propriétés sont vraies si  $x$  tend vers  $a+$  ;  $a-$  ;  $+\infty$  ou  $-\infty$

**Formes indéterminées :** Veut dire qu'on ne peut pas calculer la limite directement, il faut faire d'autres calculs car il y a plusieurs cas.

**Exemple1 :**  $f(x) = 2 + x^2$  ,  $g(x) = 5 - x^2$  on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + g(x) = -7$$

2)  $f(x) = 2 + x^2$  ,  $g(x) = 5 - x$  on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - x + 7 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{7}{x^2}\right) = +\infty$$

Dans les deux exemples on a le même cas que dans la dernière colonne du tableau mais on a deux résultats différents

**Exemple2 :** déterminer :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - \sqrt{x}$

on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\sqrt{x} = -\infty$

Donc Formes indéterminée : " $+\infty - \infty$ "

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - \sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{1}{x\sqrt{x}}\right)$$

puisque :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$

alors :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - \sqrt{x} = +\infty$

**2) Limites des produits**

$\lim f$	$\ell$	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g$	$\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim f \times g$	$\ell \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	Forme ind	Forme ind	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

**3) Limites des inverses**

$\lim f$	$\ell \neq 0$	$0^+$	$0^-$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim \frac{1}{f}$	$\frac{1}{\ell}$	$+\infty$	$-\infty$	0	0

**4) Limites des quotients**

$\lim f$	$\ell$	$\ell$	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$
$\lim g$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	0	$\ell$	0	$\pm\infty$
$\lim \frac{f}{g}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$\pm\infty$	$\pm\infty$	?	?

**Exemple1 :** déterminer :  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 + x + 2 + \frac{1}{x^2}$

**Solution :** on a :  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 + x + 2 = 2$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

Donc :  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 + x + 2 + \frac{1}{x^2} = +\infty$

**Exemple2 :** déterminer :

1)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 1}{(x-1)^2}$       2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 1}{(x-1)^2}$

3)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} 2x^3 + x^2 - x + 4$

**Solution : 1)** on a :  $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 = 0^+$  et

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^3 + 1 = 2 \text{ Donc : } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 1}{(x-1)^2} = +\infty$$

2) on a :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3+1}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \left(1 + \frac{1}{x^3}\right)}{x^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \frac{1 + \frac{1}{x^3}}{\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2}$

et on a :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x^3} = 1$

et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{x} = 1$  Donc :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3+1}{(x-1)^2} = +\infty$  car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 + x^2 - x + 4 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 \left(1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{2}{x^3}\right)$

on a :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x} = 0$  et

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 + x^2 - x + 4 = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 + x^2 - x + 4 = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 \left(1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{2}{x^3}\right)$

on a :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x} = 0$  et

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$  donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 + x^2 - x + 4 = -\infty$

**Exemple 3 :** On veut déterminer

$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x+1}{x^2+x-2}$

on a :  $\lim_{x \rightarrow 1^+} 3x+1 = 4$

on a :  $\lim_{x \rightarrow 1^+} x^2+x-2 = 0^+$

$x$	$-\infty$	$-2$	$1$	$+\infty$
$x^2+x-2$	$+$	$0$	$-$	$0$

Donc  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x+1}{x^2+x-2} = +\infty$

**Remarque :** 1) Eviter d'écrire ces expressions

qui n'ont pas de sens mathématique :  $\frac{?}{0^+}$  et  $\frac{?}{0^-}$

2) Ne pas utiliser  $+\infty$  ou  $-\infty$  dans les opérations dans  $\mathbb{R}$  ( $+\infty$  et  $-\infty$  ne sont pas des réels)

**Exercices :** Déterminer les limites suivantes :

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2-x}{2x^3+2x-4}$        $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1}-3}{x^2-3x+2}$

3) **Limites d'une fonction polynôme en  $\pm\infty$**

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Soit  $f$  une fonction polynôme de degré  $n$  tel que :

$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$

avec  $a_n \neq 0$  On a :

$f(x) = a_nx^n \left( \frac{a_0}{a_nx^n} + \frac{a_1}{a_nx^{n-1}} + \frac{a_2}{a_nx^{n-2}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_nx} + 1 \right)$

puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_0}{a_nx^n} + \frac{a_1}{a_nx^{n-1}} + \frac{a_2}{a_nx^{n-2}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_nx} + 1 = 1$

alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} a_nx^n$

Même chose si  $x$  tend vers  $-\infty$

**Propriété :** La limite d'une fonction polynôme en  $+\infty$  ( $-\infty$ ) est la limite de son plus grand terme en  $+\infty$  ( $-\infty$ )

**Exemple :**

$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 + x^2 - x + 4 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 = +\infty$

4) **Limites d'une fonction rationnelle en  $\pm\infty$**

Une fonction rationnelle est le rapport de deux

fonctions polynômes :  $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$  avec  $a_n \neq 0$

$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m$  avec  $b_m \neq 0$

$h(x) = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m}$

$h(x) = \frac{a_nx^n \left( \frac{a_0}{a_nx^n} + \frac{a_1}{a_nx^{n-1}} + \frac{a_2}{a_nx^{n-2}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_nx} + 1 \right)}{b_mx^m \left( \frac{b_0}{b_mx^m} + \frac{b_1}{b_mx^{m-1}} + \frac{b_2}{b_mx^{m-2}} + \dots + \frac{b_{m-1}}{b_mx} + 1 \right)}$

et puisque :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{a_0}{a_nx^n} + \frac{a_1}{a_nx^{n-1}} + \frac{a_2}{a_nx^{n-2}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_nx} + 1}{\frac{b_0}{b_mx^m} + \frac{b_1}{b_mx^{m-1}} + \frac{b_2}{b_mx^{m-2}} + \dots + \frac{b_{m-1}}{b_mx} + 1} = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_nx^n}{b_mx^m}$

Même chose si  $x$  tend vers  $-\infty$

**Propriété :** La limite d'une fonction rationnelle en  $+\infty$  ( $-\infty$ ) est la limite du rapport des termes de plus grand degré en  $+\infty$  ( $-\infty$ )

**Exemples :**

1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+5x^2-7x^4}{x-10x^2+14x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-7x^4}{14x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{2} = -\infty$

2)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+8x^2-2x^5}{x^2+2x^6} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^5}{2x^6} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{x} = 0$

**Remarque :** La propriété précédente n'est vraie que si  $x$  tend vers  $+\infty$  ou  $-\infty$

**Exercice :** Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \sqrt{x} - x \sqrt{x}}{x^3 + 2x \sqrt{x}}$  vous

pouvez poser  $\sqrt{x} = t$

**5) Limites des fonctions trigonométriques.**

**Activité :** Dans le plan muni d'un repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

On considère le cercle

Trigonométrique d'origine  $A(1,0)$ .  $x \in ]0, \frac{\pi}{2}[$

et  $B$  le point sur le cercle

trigonométrique tel que :  $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) \equiv x [2\pi]$

1-Déterminer en fonction de  $x$  la surface du domaine circulaire  $\mathcal{D}$  limité par

$[OA]$ ,  $[OB]$  et l'arc géométrique  $AB$

2- Soit  $H$  la projection orthogonale de  $B$  sur  $(OA)$ .

a) Déterminer en fonction de  $x$  l'aire du triangle  $OAB$

b) Comparer les aires du domaine  $\mathcal{D}$  et du triangle, que peut-on conclure ?

3- Montrer que :  $(\forall x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]) (|\sin x| \leq |x|)$ .

4- Déterminer les limites  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x$  et  $\lim_{x \rightarrow a} \sin x$

et  $\lim_{x \rightarrow a} \cos x$

5- Considérons la droite  $(\Delta)$  la droite tangente au cercle  $(\mathcal{C})$  en  $A$

a) Soit  $T$  l'intersection de  $(\Delta)$  et  $(OB)$ , Déterminer en fonction de  $x$  la surface de  $OAT$ .

b) En déduire que  $(\forall x \in ]0; \frac{\pi}{2}[) (x \leq \tan x)$

c) En déduire que  $(\forall x \in ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[) (|x| \leq |\tan x|)$

6- En utilisant les résultats précédents. Montrer

que : a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

**Propriété :** Soit  $a$  un réel on a :

1)  $\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$

2)  $\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$

3) si  $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$   $\lim_{x \rightarrow a} \tan x = \tan a$

**Propriété :** Soit  $a \in \mathbb{R}^*$

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} = 1$  b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{ax} = 1$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

**Exemples :** Déterminer les limites suivantes :

1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$  2)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos \sqrt{x} - 1}{x}$  3)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3} \sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{6}}$

**Solution :** 1)

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \times \frac{3x}{\sin 3x} \times \frac{2}{3} = 1 \times 1 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

2)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos \sqrt{x} - 1}{x}$  directement on trouve une

forme indéterminée :  $\frac{0}{0}$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos \sqrt{x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{2} \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{(\frac{\sqrt{x}}{2})^2} = \lim_{h \rightarrow 0^+} -\frac{1}{2} \frac{1 - \cosh}{\frac{h^2}{2}} = -\frac{1}{2} \times 1 = -\frac{1}{2}$

(On pose  $\sqrt{x} = h$ )

3)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3} \sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{6}}$

On montre que :  $\sqrt{3} \sin x - \cos x = 2 \sin \left( x - \frac{\pi}{6} \right)$

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3} \sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{6}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin \left( x - \frac{\pi}{6} \right)}{x - \frac{\pi}{6}}$

On pose  $x - \frac{\pi}{6} = h$  donc  $x \rightarrow \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow h \rightarrow 0$

Donc :  $= 2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 2 \times 1 = 2$

**Exercice :** Déterminer les limites suivantes :

1)  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x}$  2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x^3}$  3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \sin x}{x^2 (2 + \cos x)}$

4)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \frac{x}{2 + \sqrt{x^4 + 1}}$

**Solution :** 1) on pose :  $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$

$\forall x \in \mathbb{R}^* \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq 1$  donc :  $|f(x)| \leq x^2$  et on a

$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$  Alors :  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x^3}$  ? on pose :  $f(x) = \frac{\cos x}{x^3}$

$\forall x \in \mathbb{R}^* |\cos x| \leq 1$  donc :  $|f(x)| \leq \frac{1}{|x|^3}$  et on a

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{|x|^3} = 0$  Alors :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \sin x}{x^2(2 + \cos x)}$  ? on pose :  $f(x) = \frac{1 + \sin x}{x^2(2 + \cos x)}$

$\forall x \in \mathbb{R}^* -1 \leq \cos x \leq 1$  et  $-1 \leq \sin x \leq 1$  donc :

$0 \leq \frac{1 + \sin x}{2 + \cos x} \leq 2$  donc  $0 \leq f(x) \leq \frac{2}{x^2}$

Et puisque :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 0 = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^2} = 0$  Alors :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

4)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \frac{x}{2 + \sqrt{x^4 + 1}}$  ? on pose :  $f(x) = 1 + \frac{x}{2 + \sqrt{x^4 + 1}}$

$\forall x \in \mathbb{R}^* 2 + \sqrt{x^4 + 1} \geq \sqrt{x^4}$  cad  $2 + \sqrt{x^4 + 1} \geq x^2$

donc :  $\frac{1}{2 + \sqrt{x^4 + 1}} \leq \frac{1}{x^2}$  donc :  $|f(x) - 1| \leq \frac{1}{|x|}$

Et puisque :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{|x|} = 0$  Alors :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$

**Exercice :** Soient les fonctions tels que :

$f(x) = \sqrt{2x+1}(-3x^2 + x)$  et  $g(x) = \frac{-2x^2+1}{(x-3)^2}(\sqrt{x}+1)$

$k(x) = \frac{-3x+1}{x(x-2)}$  et  $h(x) = \frac{x^2+1}{x^3} \sin x$

1) Déterminer :  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2) Déterminer :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$

3) Déterminer :  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$

4) Déterminer les limites aux bornes du domaine de définition de  $k$

**Solution :**

1) Déterminer :  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  et  $f(x) = \sqrt{2x+1}(-3x^2 + x)$

$\lim_{x \rightarrow 2} 2x+1 = 5$  et  $\lim_{x \rightarrow 2} -3x^2 + x = -10$

Donc :  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \sqrt{5} \times (-10) = -10\sqrt{5}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x+1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$

Donc :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x+1} = +\infty$

Et on a :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -3x^2 + x = \lim_{x \rightarrow +\infty} -3x^2 = -\infty$

Donc :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

• 2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  ? et  $g(x) = \frac{-2x^2+1}{(x-3)^2}(\sqrt{x}+1)$

On a :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$  donc :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}+1 = +\infty$

Et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2+1}{(x-3)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2}{x^2} = -2$  donc :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$

• 2)  $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$  ? et  $g(x) = \frac{-2x^2+1}{(x-3)^2}(\sqrt{x}+1)$

$\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x}+1 = \sqrt{3}+1$  et  $\lim_{x \rightarrow 3} -2x^2+1 = -17$  et

$\lim_{x \rightarrow 3} (x-3)^2 = 0^+$  donc :  $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = -\infty$

3)  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$  ?

$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+1}{x^2} \frac{\sin x}{x}$

Or  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  et puisque :  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2+1 = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0^+$

et  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+1}{x^2} = +\infty$  alors :  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = +\infty$

4)  $k(x) = \frac{-3x+1}{x(x-2)}$  donc :  $D_k = ]-\infty; 0[ \cup ]0; 2[ \cup ]2; +\infty[$

•  $\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x+1}{x^2-2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3}{x} = 0$

•  $\lim_{x \rightarrow -\infty} k(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x+1}{x^2-2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3}{x} = 0$

•  $\lim_{x \rightarrow 0} -3x+1 = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2-2x = 0$

Etude du signe de :  $x^2 - 2x$

$x$	$-\infty$	$0$	$2$	$+\infty$
$x(x-2)$	$+$	$0$	$-$	$+$

Donc :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 - 2x = 0^-$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 - 2x = 0^+$

Donc :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} k(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^-} k(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 2} -3x+1 = -5$  et  $\lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 - 2x = 0^+$  et  $\lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 - 2x = 0^-$

Donc :  $\lim_{x \rightarrow 2^+} k(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 2^-} k(x) = +\infty$

**Exercice :** calculer les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x} - 2}{x^2 + 3x - 10} \quad 2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 + 3x^2 - 4x - 1}{x^3 - 1}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} - x \quad 4) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$$

**Solution :** 1)  $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{2x} - 2 = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 + 3x - 10 = 0$

on trouve une formes indéterminée : " $\frac{0}{0}$ "

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x} - 2}{x^2 + 3x - 10} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{2x} - 2)(\sqrt{2x} + 2)}{(x^2 + 3x - 10)(\sqrt{2x} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2x - 4)}{(\sqrt{2x} + 2)(x - 2)(x + 5)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{(\sqrt{2x} + 2)(x + 5)} = \frac{2}{14} \end{aligned}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 + 3x^2 - 4x - 1}{x^3 - 1} ?$$

On a :  $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$

Et  $2x^3 + 3x^2 - 4x - 1 = (x - 1)(2x^2 + 5x + 1)$

Donc :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 + 3x^2 - 4x - 1}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(2x^2 + 5x + 1)}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 5x + 1}{x^2 + x + 1} = \frac{8}{3}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} - x ?$$

On a :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + x = +\infty$  donc :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} = +\infty$

Et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty$

on trouve une formes indéterminée : " $+\infty - \infty$ "

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} - x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x} - x)(\sqrt{x^2 + x} + x)}{(\sqrt{x^2 + x} + x)} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} - x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)} + x} \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{|x| \sqrt{\left(1 + \frac{1}{x}\right)} + x} \quad \text{or } x \rightarrow +\infty \text{ donc } |x| = x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x \left( \sqrt{\left(1 + \frac{1}{x}\right)} + 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{1}{x}\right)} + 1} = \frac{1}{2}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$$

On pose  $x - \frac{\pi}{4} = h$  donc  $x \rightarrow \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow h \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan \left( h + \frac{\pi}{4} \right)}{h}$$

$$\text{or : } \tan \left( h + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\tan h + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan h \times \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\tan h + 1}{1 - \tan h}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{1 - \tan h} \times \frac{\tan h}{h} = \frac{2}{1} \times 1 = 2$$

**C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.**

**C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien**

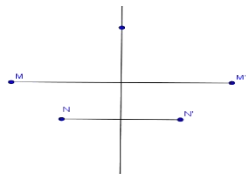


# LA ROTATION DANS LE PLAN

## 1) RAPPELLES ET COMPLEMENTS

### 1) La symétrie axiale.

**Définition/** Soit  $(D)$  une droite donnée. On dit que le point  $M'$  est le symétrique du point  $M$  par rapport à  $(D)$



1° si  $M' = M$  si  $M \in (D)$

2°  $(D)$  est la médiatrice du segment  $[MM']$  si  $M \notin (D)$ .

La relation qui lie le point  $M$  à  $M'$  s'appelle :

**la symétrie axiale d'axe  $(D)$**  ; se note par  $S_{(D)}$ .

On écrit :  $S_{(D)}(M) = M'$ .

### Remarques :

1) Si  $M \notin (D)$  alors  $M' = S_{(D)}(M) \neq M$  et  $(D)$  est la médiatrice du segment  $[MM']$

C'est-à-dire passe par  $I$  milieu de  $[MM']$  et perpendiculaire à  $(MM')$ .

2) Si  $N \in (D)$  alors  $S_{(D)}(N) = N$  on dit que  $N$  est invariant par  $S_{(D)}$

3) Inversement si un point  $N$  est invariant par  $S_{(D)}$  alors  $N \in (D)$

**Propriétés :** La symétrie axiale conserve :

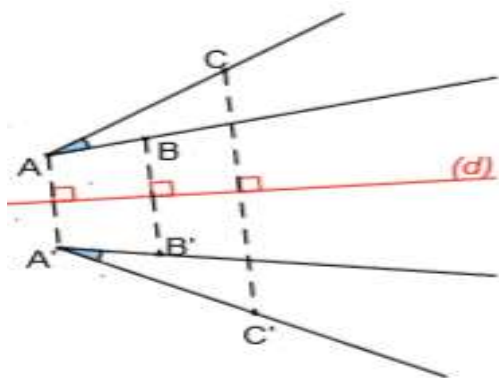
1) Les distances : si  $M' = S_{(D)}(M)$  et  $N' = S_{(D)}(N)$  alors  $MN = M'N'$

2) Le milieu d'un segment et en générale le barycentre d'un système pondéré.

3) les mesures des angles **géométriques**

4) Le coefficient de colinéarité de deux vecteurs.

La symétrie axiale inverse les mesures des



angles orientés :  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv -(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) [2\pi]$

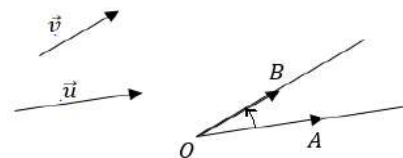
**Propriété :** La symétrie axiale  $S_{(D)}$  est une bijection et sa bijection réciproque est elle-même

**Preuve :**  $S_{(D)}(M) = M' \Leftrightarrow S_{(D)}(M') = M$

### 2) Les angles orientés

**Définition :**

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non nuls et soient  $A$  et  $B$



deux points du plan orienté tels que  $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$  l'angle orienté des demis droites  $[OA)$  ;

$[OB)$  s'appelle aussi angle orienté des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  et on le note par :  $(\vec{u}; \vec{v})$ . la mesure de l'angle

orienté  $(\vec{u}; \vec{v})$  est la mesure de l'angle orienté

$([OA), [OB))$  et se note par  $(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$ .

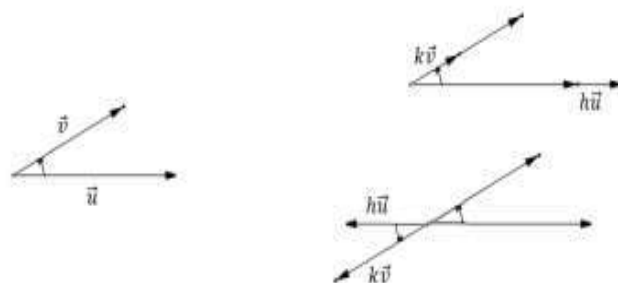
**Propriétés :**

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non nuls et  $h$  et  $k$  deux réels non nuls ; on a :

$$(\overrightarrow{v}; \overrightarrow{u}) \equiv -(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}) [2\pi]$$

$$1) \text{ si } hk > 0 \text{ alors : } (\overrightarrow{k\vec{u}}; \overrightarrow{h\vec{v}}) \equiv (\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}) [2\pi]$$

$$2) \text{ si } hk < 0 \text{ alors : } (\overrightarrow{k\vec{u}}; \overrightarrow{h\vec{v}}) \equiv \pi + (\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}) [2\pi]$$



## II) LA ROTATION DANS LE PLAN

### 1) Définition :

#### 1.1 Composition de deux symétries axiales

**Activité :** Soient  $(\Delta)$  et  $(\Delta')$  deux droites sécantes en  $O$  ;  $M_1 = S_{(\Delta)}(M)$  et  $M' = S_{(\Delta')}(M_1)$  et soit

$(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \alpha [2\pi]$  où  $\vec{u}$  vecteur directeur de  $(\Delta)$  et  $\vec{v}$  vecteur directeur de  $(\Delta')$

1- Quelle est l'application qui transforme  $M$  en  $M'$ .

2- Montrer que  $OM = OM'$

3- Montrer que pour tout  $M$  dans le plan on a :

$$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) \equiv 2\alpha [2\pi]$$

**Propriété :** Soient  $(\Delta)$  et  $(\Delta')$  deux droites sécantes en  $O$  ;  $S_{(\Delta)}$  et  $S_{(\Delta')}$  les symétries axiales d'axes respectifs  $(\Delta)$  et  $(\Delta')$

soit  $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \alpha [2\pi]$  où  $\vec{u}$  vecteur directeur de  $(\Delta)$  et  $\vec{v}$  vecteur directeur de  $(\Delta')$ .

L'application  $S_{(\Delta')} \circ S_{(\Delta)}$  transforme le point  $M$  en  $M'$

$$\text{tel que : } \begin{cases} OM = OM' \\ (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) \equiv 2\alpha [2\pi] \end{cases}$$

L'application  $S_{(\Delta')} \circ S_{(\Delta)}$  s'appelle la rotation de centre  $O$  et d'angle  $2\alpha$

#### 1.2 Définition de la rotation.

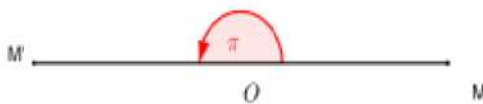
**Définition :** Soit  $\Omega$  un point dans le plan et  $\theta$  un nombre réel, la rotation de centre  $\Omega$  et d'angle  $\theta$  est l'application qui transforme tout point  $M$  en  $M'$  tel que :

$$\begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta [2\pi] \end{cases}$$

On la note par :  $R(\Omega, \theta)$

**Remarque :** Si l'angle de la rotation est non nul, son centre est le seul point invariant.

**Exemples :** 1) La symétrie centrale  $S_O$  est la Rotation de centre  $O$  et d'angle  $\pi$



2) L'identité  $Id_P$  est la rotation d'angle nul.

(Tous les points de  $(P)$  sont centre de cette rotation)

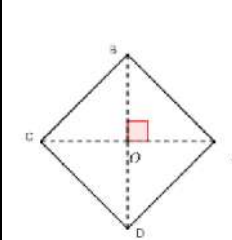
**Exercice1 :** ABCD est un carré de centre O tel que :  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$  positif. Soit  $r_A$  la rotation de centre A

et d'angle  $\frac{\pi}{2}$  et  $r_O$  une rotation de centre O et d'angle  $\alpha$ .

1) Déterminer  $r_A(A)$ ;  $r_A(B)$ ;  $r_A(D)$ ,

2) Comment choisir  $\alpha$  pour avoir  $r_O(A) = B$ ?

Comment choisir  $\alpha$  pour avoir  $r_O(A) = C$ ?



**Solution :**  $r_A\left(A; \frac{\pi}{2}\right)$  et

$r_O(O; \alpha)$

•  $r_A(A) = A$  Car le centre est le seul point invariant.

•  $r_A(B) = D$  Car  $\begin{cases} AB = AD \\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$

•  $r_A(D) = B'$  avec  $B'$  le symétrique de  $B$  par rapport à  $A$

$$2) r_O(A) = B \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$r_O(A) = C \Leftrightarrow \alpha = \pi$$

### 2) Propriétés de la rotation

Figure 1

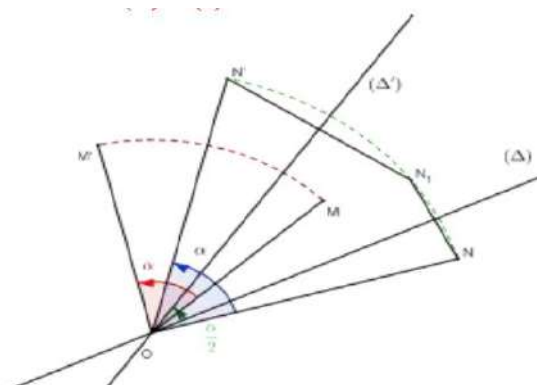
#### 2.1 La décomposition d'une rotation

Soit  $R$  la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\alpha$

1)  $(\Delta)$  une droite quelconque qui passe par  $O$  et  $(\Delta')$  l'image de  $(\Delta)$  par la rotation  $r$  de centre  $O$  et d'angle  $\frac{\alpha}{2}$

D'après ce qui précède  $(S_{(\Delta')} \circ S_{(\Delta)})$  est la rotation de centre  $O$  et d'angle  $2 \frac{\alpha}{2} = \alpha$

**Donc :**  $S_{(\Delta')} \circ S_{(\Delta)} = R$ . (Figure 1)



2)  $(\Delta)$  une droite quelconque qui passe par  $O$  et  $(\Delta')$  l'image de  $(\Delta)$  par

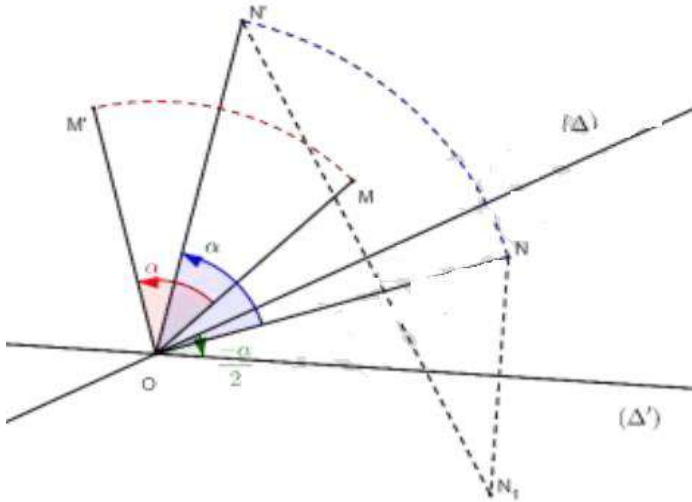
la rotation  $r$  de centre  $O$  et d'angle  $-\frac{\alpha}{2}$

D'après ce qui précède (composition de deux symétries axiales)

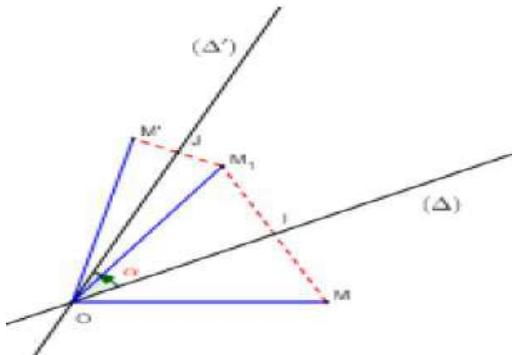
$S_{(\Delta)} \circ S_{(\Delta')}$  est la rotation de centre  $O$

et d'angle  $2\frac{\alpha}{2} = \alpha$

**Donc :**  $S_{(\Delta)} \circ S_{(\Delta')} = R$ . (figure 2)



**Propriété :** Soit  $R$  la rotation de centre  $O$  et



d'angle  $\alpha$  ; la rotation  $R$  peut-être décomposée comme suite :

1)  $R = S_{(\Delta')} \circ S_{(\Delta)}$  où  $(\Delta')$  l'image de  $(\Delta)$  par la rotation  $r$  de centre  $O$  et d'angle :  $\frac{\alpha}{2}$

2)  $R = S_{(\Delta)} \circ S_{(\Delta')}$  où  $(\Delta')$  l'image de  $(\Delta)$  par la rotation  $r$  de centre  $O$  et d'angle :  $-\frac{\alpha}{2}$

**Exercice2 :**

ABCD est un carré tel que :  $(\overline{AB}, \overline{AD})$  positif et Soit

$r$  la rotation de centre A et d'angle  $\pi/2$

Décomposer la rotation  $r$  en composée de deux symétries orthogonales

**Solution :**  $r = S_{(AD)} \circ S_{(AC)}$  car  $(AD) \cap (AC) = \{A\}$

$$\text{et } (\overline{AC}, \overline{AD}) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$$

OU  $r = S_{(AC)} \circ S_{(AB)}$  car  $(AB) \cap (AC) = \{A\}$

$$\text{et } (\overline{AB}, \overline{AC}) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$$

## 2.2 Propriété d'une rotation.

Puisque toute rotation est la composition de deux symétries axiales on peut en déduire les propriétés suivantes :

1) La rotation est une isométrie (elle conserve les distances) : si  $R(A) = A'$  et  $R(B) = B'$

Alors  $A'B' = AB$

2) La rotation conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs et par suite conserve la linéarité des points

3) La rotation conserve le milieu et le barycentre d'un système pondéré.

4) La rotation conserve les mesures des angles géométriques

5) La rotation conserve les mesures des angles orientés (les deux symétries qui composent la rotation inversent les mesures des angles orientés)

**Applications :**

**Exercice3 :** ABC est un triangle.

On construit à l'extérieur deux triangles ABD et ACE isocèles et rectangles en A

1) Montrer que :  $BE = CD$

2) Montrer que :

$(BE) \perp (CD)$

**Solution :**

Soit  $r$  la rotation de

centre A et d'angle  $\frac{\pi}{2}$

$$\text{On a : } \begin{cases} AD = AB \\ (\overline{AD}, \overline{AB}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$$

donc :  $r(D) = B$  ❶

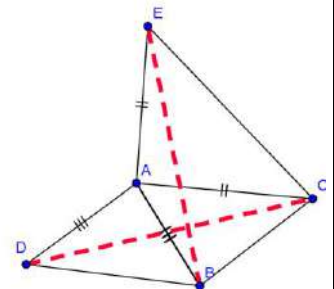
$$\text{On a : } \begin{cases} AC = AE \\ (\overline{AC}, \overline{AE}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases} \text{ donc : } \text{❷ } r(C) = E$$

Et puisque la rotation conserve les distances

Alors de ❶ et ❷ en déduit que  $BE = CD$

2) on a  $r(D) = B$  et  $r(C) = E$

Donc :  $(\overline{CD}, \overline{EB}) \equiv \frac{\pi}{2}$  par suite :  $(BE) \perp (CD)$



**Exercice4 :** ABC est un triangle tel que :  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$  positif. On construit à l'extérieur les carrés ABDE et ACFG

Soit  $r$  la rotation de centre A et d'angle  $\frac{\pi}{2}$

déterminer :  $r(E)$  et  $r(C)$

Et Montrer que :  $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CE}) \equiv (\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB}) [2\pi]$

**Solution :**

on a :  $\begin{cases} AE = AB \\ (\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$

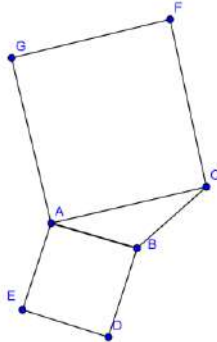
Donc :  $r(E) = B$  ❶

Et on a :  $\begin{cases} AC = AG \\ (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AG}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$

Donc : ❷  $r(C) = G$

Et on a :  $r(A) = A$  ❸ car A le centre de la rotation

De ❶ et ❷ et ❸ en déduit que  $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CE}) \equiv (\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB}) [2\pi]$



**Exercice5 :** ABCD est un carré de centre O tel que :  $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$  positif.

I et J deux points tels que :  $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AB}$  et

$\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4} \overrightarrow{BC}$

Montrer que  $(OI) \perp (OJ)$  et  $OI = OJ$

**Solution :** il suffit de montrer

que :  $r(I) = J$  ????

On pose :  $r(I) = I'$

On a :  $\begin{cases} OA = OB \\ (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$  donc

$r(A) = B$

Et on a :  $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AB}$  donc :  $\overrightarrow{BI'} = \frac{1}{4} \overrightarrow{BC}$  ❶ car la

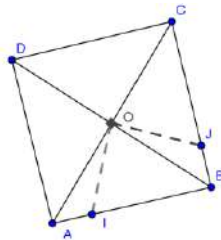
rotation conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs

Et on sait que :  $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4} \overrightarrow{BC}$  ❷

De ❶ et ❷ en déduit que  $\overrightarrow{BI'} = \overrightarrow{BJ}$  donc  $I' = J$

Donc  $r(I) = J$  par suite :  $\begin{cases} OI = OJ \\ (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$

**Exercice6 :** ABCD est un carré de centre O tel que :  $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$  positif. Soit (D) la droite



parallèle à (BD) et coupe (AD) en M et coupe (AB) en N et Soit  $r$  la rotation de centre O et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ . E et F les images M et N respectivement

Par la rotation  $r$

1) Faire une figure et Montrer que  $(EF) \perp (MN)$

2) Déterminer l'image de la droite (BD) par la rotation  $r$

3) Montrer que  $DN = FA$  et  $(EF) \parallel (AC)$

**Solution :**

on a : ❶  $r(M) = E$

et :  $r(N) = F$  ❷

de ❶ et ❷ en déduit que :

$(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{EF}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

donc :  $(EF) \perp (MN)$

2) on a :  $\begin{cases} OB = OC \\ (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$

Donc :  $r(B) = C$  ❸

Et on a :  $\begin{cases} OD = OA \\ (\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OA}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$  donc  $r(D) = A$  ❹

de ❸ et ❹ en déduit que :  $r((BD)) = (AC)$

3)  $DN = FA$  ???

on a : ❶  $r(D) = A$  et ❷  $r(N) = F$

donc :  $DN = FA$

$(EF) \parallel (AC)$  ???

On a :  $(MN) \parallel (BD)$  et  $r((BD)) = (AC)$  et

$r((MN)) = (EF)$

Donc :  $(EF) \parallel (AC)$  car la rotation conserve le parallélisme

**Exercice7 :** ABC est un triangle isocèles et rectangles en A tel que :  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$  positif et O le milieu du segment [BC]. D et E

deux points tels que :  $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{CE} = \frac{2}{3} \overrightarrow{CA}$

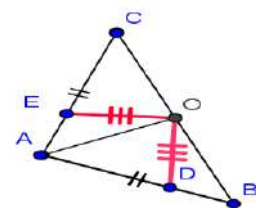
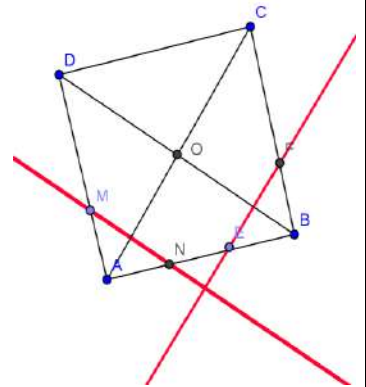
Montrer que ODE est un triangle isocèles et rectangles en O

**Solution :** il suffit de

montrer que :  $r(E) = D$  ????

On pose :  $r(E) = E'$

On a :  $\begin{cases} OA = OC \\ (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$



Donc :  $r(C) = A$  ❶

Et on a :  $\begin{cases} OA = OB \\ (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$  donc :  $r(A) = B$  ❷

Et on a :  $\overrightarrow{CE} = \frac{2}{3} \overrightarrow{CA}$  ❸

De ❶ et ❷ et ❸ : en déduit que :  $\overrightarrow{AE'} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB}$  ❹ car la

rotation conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs

Et on sait que :  $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB}$  ❺

De ❹ et ❺ en déduit que :  $\overrightarrow{AE'} = \overrightarrow{AD}$  cad  $E' = D$

Donc :  $r(E) = D$  par suite :  $\begin{cases} OE = OD \\ (\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OD}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$

Donc  $ODE$  est un triangle isocèles et rectangles en  $O$

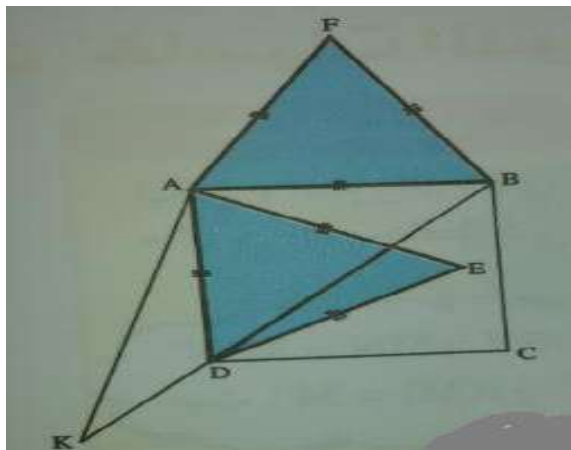
**Exercice 8** : ABCD est un carré tel que :  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$

positif. et AED et AFB deux triangles équilatéraux

Montrer que les points : E et C et F sont alignés

**Solution** : soit  $r$  la rotation de centre A

et



d'angle  $\frac{\pi}{3}$  :  $r\left(A; \frac{\pi}{3}\right)$

et soit K l'antécédent de C par  $r$

On a :  $r(B) = F$

Car  $\begin{cases} AB = AF \\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \end{cases}$

Et on a :  $r(D) = E$  Car  $\begin{cases} AD = AE \\ (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \end{cases}$

Et on a :  $r(K) = C$

donc :  $AK = AC$  et  $(\overrightarrow{AK}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$

puisque :  $AB = BC$  donc B appartient à la médiatrice du segment  $[AC]$

et  $AD = DC$  donc D appartient à la médiatrice du segment  $[AC]$

et on a :  $AK = AC$  et  $(\overrightarrow{AK}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$

donc : AKC est équilatéral donc K appartient à la médiatrice du segment  $[AC]$

Donc les points : K et B et D sont alignés

Et puisque la rotation conserve les alignement des points alors : les points : E et C et F sont alignés

**Propriété** : La rotation  $R(\Omega, \theta)$  est une bijection et sa bijection réciproque est la bijection  $R(\Omega, -\theta)$

**Preuve** :  $R(\Omega, \theta)(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta [2\pi] \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ (\overrightarrow{\Omega M'}, \overrightarrow{\Omega M}) \equiv -\theta [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow R(\Omega, -\theta)(M') = M$

**Propriété** : (Propriété fondamentale de la rotation)

Soit  $R(\Omega, \theta)$  la rotation de centre  $\Omega$  et d'angle  $\theta$

si  $R(M) = M'$  et  $R(N) = N'$  alors  $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}) \equiv \theta [2\pi]$

**Preuve** : On a :

$(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}) \equiv (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{\Omega M}) + (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) + (\overrightarrow{\Omega M'}, \overrightarrow{M'N'}) [2\pi]$

$\equiv (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) [2\pi]$  car :  $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{\Omega M}) \equiv (\overrightarrow{M'N'}, \overrightarrow{\Omega M'}) [2\pi]$

(la rotation conserve la mesure des angles orientés)

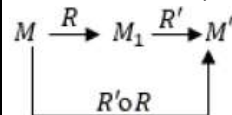
D'où :  $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{\Omega M}) + (\overrightarrow{\Omega M'}, \overrightarrow{M'N'}) \equiv 0 [2\pi]$

### III) COMPOSITION DE DEUX ROTATIONS

#### 1) Composition de deux rotations de même centre

Soient  $R(\Omega, \alpha)$  et  $R'(\Omega, \beta)$  deux rotations de centre  $\Omega$  ; Posons  $R(M) = M_1$  et  $R(M_1) = M'$

$R(M) = M_1$  et  $R(M_1) = M'$



$R(M) = M_1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M = \Omega M_1 \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M_1}) \equiv \alpha [2\pi] \end{cases}$

$R(M_1) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M_1 = \Omega M' \\ (\overrightarrow{\Omega M_1}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \beta [2\pi] \end{cases}$

On en déduit que :  $\begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \alpha + \beta [2\pi] \end{cases}$

Et par suite :  $R''(\Omega, \alpha + \beta)(M) = M'$

et  $(R'(\Omega, \beta) \circ R(\Omega, \alpha))(M) = M'$

Donc  $R'(\Omega, \beta) \circ R(\Omega, \alpha) = R''(\Omega, \alpha + \beta)$ .

**Propriété :** La composition de deux rotations  $R(\Omega, \alpha)$  et  $R'(\Omega, \beta)$  de même centre  $\Omega$  est la rotation de centre  $\Omega$  et d'angle  $(\alpha + \beta)$  :

$$R'(\Omega, \beta) \circ R(\Omega, \alpha) = R''(\Omega, \alpha + \beta).$$

**Remarque :** On sait que la rotation  $R(\Omega, \alpha)$  est une bijection et sa bijection

Réciproque est  $R'(\Omega, -\alpha)$

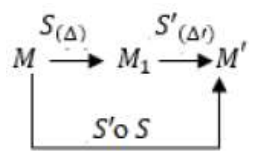
$$\text{Donc : } R'(\Omega, -\alpha) \circ R(\Omega, \alpha) = R''(\Omega, 0) = Id_P$$

## 2) Composition de deux rotations de centres différents.

### 2.1 Composition de deux symétries axiales d'axes parallèles

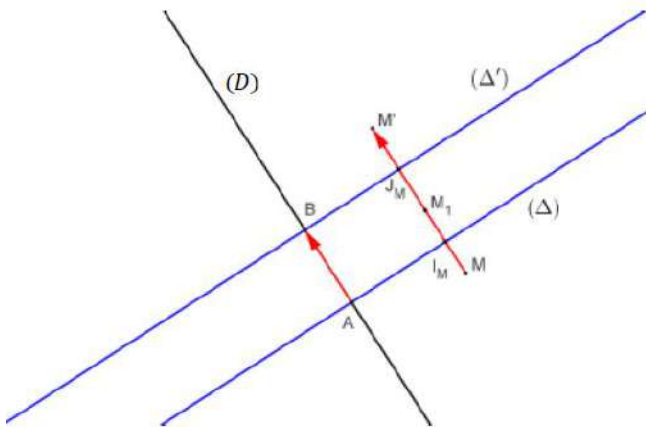
Soient  $(\Delta)$  et  $(\Delta')$  deux droites parallèles dans le plan.  $S_{(\Delta)}$  et  $S'_{(\Delta')}$  les symétries

Axiales d'axes respectifs  $(\Delta)$  et  $(\Delta')$  On a :



Soit  $(D)$  une droite perpendiculaire à  $(\Delta)$

$A$  et  $B$  les intersections respectives de  $(D)$  et  $(\Delta)$  et de  $(D)$  et  $(\Delta')$



Soient  $I_M$  et  $J_M$  les milieux respectifs de  $[MM_1]$  et  $[M_1M']$ , on a :

$$\overline{MM'} = \overline{MM_1} + \overline{M_1M'} = 2\overline{I_M M_1} + 2\overline{M_1 J_M}$$

$$\overline{MM'} = 2\overline{I_M J_M} = 2\overline{AB}$$

**Propriété :** La composition de deux symétries axiales  $S_{(\Delta)}$  et  $S'_{(\Delta')}$

d'axes parallèles est la translation de vecteur  $\overline{AB}$  où  $A$  et  $B$  les intersections respectives de  $(D)$  et

$(\Delta)$  et de  $(D)$  et  $(\Delta')$  avec  $(D)$  une droite perpendiculaire à  $(\Delta)$

si  $(\Delta) \parallel (\Delta')$  alors :  $S'_{(\Delta')} \circ S_{(\Delta)} = t_{\overline{AB}}$

### 2.2 Composition de deux rotations de centres différents.

Soient  $R(O, \alpha)$  et  $R(\Omega, \beta)$  deux rotations dans le plan où  $\Omega \neq O$  on

S'intéresse à la nature de la transformation  $R' \circ R$

On sait que toute rotation peut être décomposée en composée

de deux symétries axiales.

Posons  $(\Delta) = (O\Omega)$

On a :  $R = S_{(\Delta_2)} \circ S_{(\Delta_1)}$  où  $(\Delta_1)$  est l'image de la droite  $(\Delta)$  par la

rotation  $r_1$  de centre  $O$  et d'angle  $-\frac{\alpha}{2}$

D'autre part :  $R' = S_{(\Delta_2)} \circ S_{(\Delta_1)}$  où  $(\Delta_2)$  est l'image de la droite  $(\Delta)$  par la

rotation  $r_2$  de centre  $\Omega$  et d'angle  $\frac{\beta}{2}$

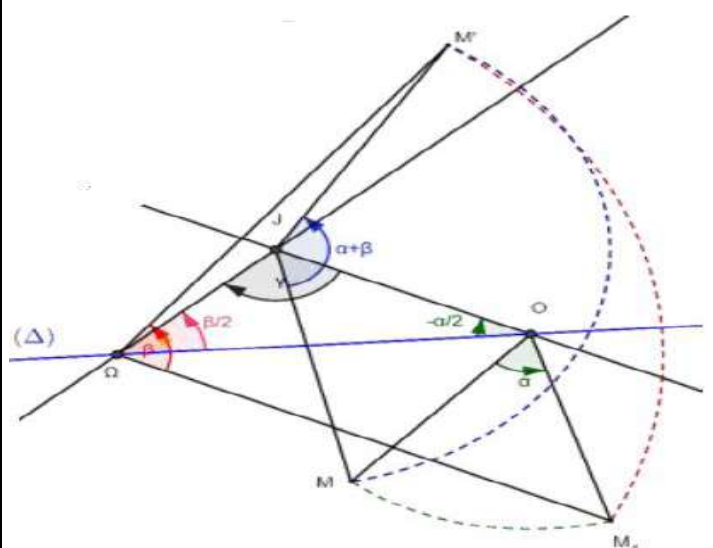
$$\text{D'où : } R' \circ R = (S_{(\Delta_2)} \circ S_{(\Delta_1)}) \circ (S_{(\Delta)} \circ S_{(\Delta_1)})$$

$R' \circ R = (S_{(\Delta_2)} \circ (S_{(\Delta)} \circ S_{(\Delta_1)}) \circ S_{(\Delta_1)})$  (La composition est associative)

$$R' \circ R = S_{(\Delta_2)} \circ S_{(\Delta_1)} \text{ car } S_{(\Delta)} \circ S_{(\Delta_1)} = \mathcal{I}_P$$

La nature de  $R' \circ R$  **dépend de la position relative de  $(\Delta)$  et  $(\Delta')$**

**Si  $(\Delta)$  et  $(\Delta')$  se coupent en  $J$  (figure 1)**



Dans ce cas  $R' \circ R = S_{(\Delta_2)} \circ S_{(\Delta_1)}$  est une rotation de centre  $J$  et d'angle  $2\left(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}\right)$  modulo  $2\pi$  où  $\vec{u}$  vecteur directeur de  $(\Delta_1)$  et  $\vec{v}$  vecteur directeur de  $(\Delta_2)$ .

Détermination de l'angle de la rotation :  $2\gamma$

On a :  $-\gamma - \frac{-\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \equiv \pi [2\pi]$  (lire tous les angles dans le sens trigonométrique)

d'où :  $\gamma \equiv \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} - \pi [2\pi]$  car  $(-\pi \equiv \pi [2\pi])$

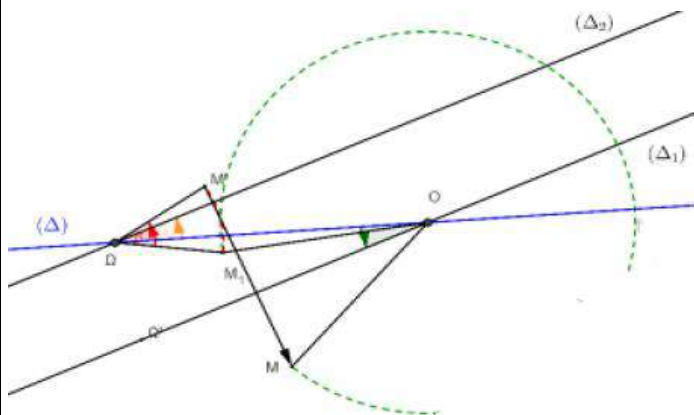
Finalement :  $2\gamma = \alpha + \beta [2\pi]$  car  $(2\pi \equiv 0 [2\pi])$

Si  $(\Delta)$  et  $(\Delta')$  sont parallèles (figure 2)

Dans ce cas  $R' \circ R = S_{(\Delta_2)} \circ S_{(\Delta_1)}$  est une translation.

Quand est ce que  $(\Delta)$  et  $(\Delta')$  sont parallèles ?

$(\Delta) \parallel (\Delta') \Leftrightarrow -\frac{\alpha}{2} \equiv \frac{\beta}{2} [2\pi] \Leftrightarrow \alpha + \beta \equiv 0 [2\pi]$



(Figure 2)

**Théorème** : Soient  $R(O, \alpha)$  et  $R(\Omega, \beta)$  deux rotations dans le plan où  $\Omega \neq O$

1° Si  $\alpha + \beta \neq 2k\pi$  alors  $R' \circ R$  est une **rotation d'angle  $\alpha + \beta$**

2° Si  $\alpha + \beta = 2k\pi$  alors  $R' \circ R$  est une **translation dans le plan.**

**Remarque** : Pour déterminer les éléments de la rotation ou de la translation il est indispensable de maîtriser toutes les étapes de la démonstration.

**Exercice9** : ABCD est un carré tel que :  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$

positif et Soit  $r$  la rotation de centre A et

d'angle  $\frac{\pi}{2}$

1) déterminer la nature de la transformation

suivante :  $S_{(AD)} \circ S_{(AB)}$

1) on considère les rotations suivantes :  $r\left(A; \frac{\pi}{2}\right)$

et  $r'\left(B; \frac{\pi}{2}\right)$  et  $r''\left(C; -\frac{\pi}{2}\right)$

déterminer la nature des transformations suivante :  $r \circ r'$  et  $r \circ r''$

**Solution : 1)**  $S_{(AD)} \circ S_{(AB)} = r\left(A; 2\frac{\pi}{2}\right) = r(A; \pi) = S_A$

2) a)  $r \circ r'$  on a  $A \neq B$  et  $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi \neq 2k\pi$  donc c'est

une rotation  $r\left(?, \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = r(?, \pi)$  cad une symétrie

central

Déterminons le centre de la rotation  $r \circ r'$  ?

On a :  $r \circ r' = S_{(AC)} \circ S_{(AB)} \circ S_{(AB)} \circ S_{(BD)} = S_{(AC)} \circ S_{(BD)}$

Et puisque :  $(AC) \cap (BD) = \{O\}$

Alors le centre de la rotation est le point O

2) b)  $r \circ r''$  ???

on a  $A \neq C$  et  $\frac{\pi}{2} + \left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$  donc c'est une

translation

Déterminons le vecteur de la translation  $r \circ r''$  ?

On a :  $r \circ r''(C) = r(r''(C)) = r(C) = C'$

Avec :  $\begin{cases} AC = AC' \\ (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC'}) = \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$

Donc  $r \circ r''$  est une translation de vecteur  $\overrightarrow{CC'}$

**Exercice10** : ABCD est un carré de centre O

tel que :  $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$  négatif. Soient M, N, P et Q quatre

points dans le plan tels que :  $\overrightarrow{DQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$  et

$\overrightarrow{CP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$  et  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

la droite  $(AN)$  coupe les droites  $(DM)$  et  $(BP)$

Respectivement en E et F

la droite  $(CQ)$  coupe les droites  $(DM)$  et  $(BP)$

Respectivement en H et G

Soit  $r$  la rotation de centre O et d'angle  $-\pi/2$

1) Faire une figure dans le cas où :  $AB = 6cm$

2) Montrer que :  $r(M) = N$  et  $r(N) = P$  et  $r(P) = Q$

et  $r(Q) = M$

3) a) Montrer que :  $r(F) = G$

b) en déduire que : le triangle  $FOG$  est isocèle et rectangle en O

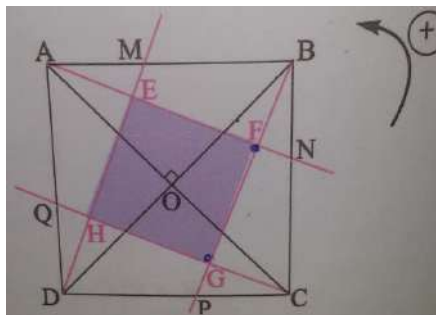
4) a) calculer :  $(r \circ r)(F)$  et  $(r \circ r)(E)$

4) b) en déduire que : les segments  $[EG]$  et  $[FH]$  ont

le même milieu

5) Montrer que : EFGH est un carré

**Solution :1)**



2) on a  $\begin{cases} OA = OB \\ (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$  donc :  $r(A) = B$

$\begin{cases} OB = OC \\ (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$  donc :  $r(B) = C$

Et puisque  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$  et la rotation conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs

Alors :  $r(A)r(M) = \frac{1}{3}r(A)r(B)$

cad :  $r(M) = \frac{1}{3}r(B)$  et on a :  $r(B) = C$

donc :  $r(M) = N$

de meme : on montre que :  $r(N) = P$  et  $r(P) = Q$  et  $r(Q) = M$

3) a) on montre que :  $r(F) = G$  ?

Puisque :  $r(N) = P$  et  $r(A) = B$  alors :  $r((AN)) = (BP)$

Et Puisque :  $r(P) = Q$  et  $r(A) = B$  alors :

$r((AN)) = (BP)$

Et puisque :  $r(P) = Q$  et  $r(B) = C$  alors :

$r((BP)) = (QC)$

Donc :  $r((AN) \cap (BP)) = r((AN)) \cap r((BP))$  car  $r$  est une application injective

Donc :  $r(\{F\}) = (BP) \cap (QC) = \{G\}$  par suite :  $r(F) = G$

3)b) On a :  $r(F) = G$  donc :  $\begin{cases} OF = OG \\ (\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{OG}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

Donc : le triangle  $FOG$  est isocèle et rectangle en  $O$

4)a) On a :  $r(C) = D$  et  $r(Q) = M$  et  $r(B) = C$

donc :  $r((CQ)) = (DM)$  et puisque :  $r((BP)) = (QC)$

alors :  $r((CQ) \cap (BP)) = (DM) \cap (QC)$  cad :

$r(\{G\}) = \{H\}$  donc :  $r(G) = H$

on a :  $(r \circ r)(F) = r(r(F)) = r(G) = H$  et on a :

$r((AN)) = (BP)$  et  $r((DM)) = (AN)$

donc :  $r((AN) \cap (DM)) = (AN) \cap (BP)$

donc :  $r(E) = F$

On a :  $(r \circ r)(EF) = r(r(E)) = r(F) = G$

4)b) puisque  $r$  est une rotation d'angle :  $-\pi/2$

alors :  $r \circ r$  est une rotation d'angle :

$2 \times (-\pi/2) = -\pi$  donc  $r \circ r$  est une symétrie central et soit  $K$  son centre

Puisque on a :  $(r \circ r)(F) = H$  et  $(r \circ r)(E) = G$

Alors :  $K$  est le milieu des segments  $[EG]$  et  $[FH]$

Donc : les segments  $[EG]$  et  $[FH]$  ont les mêmes milieux

4) puisque les segments  $[EG]$  et  $[FH]$  ont les mêmes milieux alors :  $EFGH$  est un parallélogramme et on a aussi :  $r(F) = G$  et

$r(E) = F$  donc :  $EF = FG$  et  $(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{FG}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

Donc :  $EFGH$  est un carré.

**Exercice11** :  $ABCD$  est un carré de centre  $O$

tel que :  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \pi/2[2\pi]$ . Soient  $I, J, K$  et  $L$  les milieux respectivement des segments  $[AB]$  et  $[BC]$  et  $[CD]$  et  $[DA]$ .

1) Déterminer les mesures des angles suivants :

a)  $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$  b)  $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})$  c)  $(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CA})$  d)  $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD})$

2) soit  $S_{(AB)}$  la symétrie axiale d'axe  $(AB)$

soit  $r_{(A; \pi/2)}$  la rotation de centre  $A$  et d'angle  $\pi/2$

et  $t_{\vec{u}}$  la translation de vecteur  $\vec{u}$

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations suivantes :

a)  $F = S_{(AC)} \circ S_{(BD)}$  b)  $G = S_{(AC)} \circ S_{(AB)}$

c)  $H = r_{(D; \pi)} \circ r_{(A; \pi)}$  d)  $K = r_{(C; \pi/2)} \circ r_{(D; \pi)} \circ r_{(A; \pi/2)}$

**Solution :1)** a) les droites  $(AC)$  et  $(BD)$  et  $(JL)$  et  $(IK)$  sont des axes de symétries du carré  $ABCD$

On a :  $S_{(AC)}(A) = A$  et  $S_{(AC)}(C) = C$  et  $S_{(AC)}(B) = D$

Donc on deduit que :  $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) \equiv -(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})[2\pi]$

Donc :  $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})[2\pi]$

Donc :  $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

b) On a :  $S_{(LJ)}(A) = D$  et  $S_{(LJ)}(C) = B$  et  $S_{(LJ)}(B) = C$

Donc on deduit que :  $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) \equiv -(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC})[2\pi]$

Donc :  $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) \equiv (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})[2\pi]$

$$\text{Donc : } (\overline{DA}, \overline{DB}) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$$

Puisque la rotation conserve la mesure de l'angle orienté et on a :  $r_{(O;\pi)}(A) = C$  et  $r_{(O;\pi)}(B) = D$  et

$$r_{(O;\pi)}(C) = A \text{ alors : } (\overline{CD}, \overline{CA}) \equiv (\overline{AB}, \overline{AC}) [2\pi]$$

$$\text{Donc : } (\overline{CD}, \overline{CA}) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$$

$$\text{d) puisque : } (\overline{CD}, \overline{CA}) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi] \text{ alors : } (\overline{CA}, \overline{CD}) \equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi]$$

$$2)a) F = S_{(AC)} \circ S_{(BD)} \quad ??$$

$$\text{On a : } (AC) \cap (BD) = \{O\}$$

Donc  $F$  est la composé de deux symétries orthogonales d'axes qui se coupent en  $O$

Donc :  $F$  est rotation de centre  $O$

Et puisque :  $(AC) \perp (BD)$  alors :  $F$  est une symétrie central de centre  $O$  ou  $F = r_{(O;\pi)}$

$$2)b) G = S_{(AC)} \circ S_{(AB)} \quad ??$$

$$\text{On a : } (AB) \cap (AC) = \{A\} \text{ et } (\overline{AB}, \overline{AC}) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$$

Donc  $G$  est la composé de deux symétries orthogonales d'axes qui se coupent en  $A$

Donc :  $G$  est rotation de centre  $A$

$$G = r_{(O;2\frac{\pi}{4})} = r_{(O;\frac{\pi}{2})}$$

$$2)c) H = r_{(D;\pi)} \circ r_{(A;\pi)} \quad ??$$

Puisque toute rotation est le composé de deux symétries axiales on peut en déduire :

$$r_{(D;\pi)} = S_{(DC)} \circ S_{(DA)} \text{ et } r_{(A;\pi)} = S_{(DA)} \circ S_{(AB)}$$

$$\text{Donc : } H = r_{(D;\pi)} \circ r_{(A;\pi)} = S_{(DC)} \circ S_{(DA)} \circ S_{(DA)} \circ S_{(AB)}$$

$$\text{Et puisque : } S_{(DA)} \circ S_{(DA)} = I_P \text{ alors : } H = S_{(DC)} \circ S_{(AB)}$$

Et puisque :  $(DC) \parallel (AB)$  alors :  $H$  est une translation et puisque :  $A \in (AB)$  et  $D$  la projection du point  $D$  sur la droite  $(DC)$  alors :

$$S_{(DC)} \circ S_{(AB)} = t_{2\overline{AD}} \text{ donc : } H = t_{2\overline{AD}}$$

$$\text{d) } K = r_{(C;\frac{\pi}{2})} \circ r_{(D;\pi)} \circ r_{(A;\frac{\pi}{2})} \quad ??$$

Puisque toute rotation est le composé de deux symétries axiales on peut en déduire :

$$r_{(C;\frac{\pi}{2})} = S_{(CA)} \circ S_{(CD)} \text{ et } r_{(D;\pi)} = S_{(DC)} \circ S_{(DA)} \text{ car}$$

$$(\overline{CD}, \overline{CA}) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$$

$$\text{Et on a : } r_{(A;\frac{\pi}{2})} = S_{(AD)} \circ S_{(AC)}$$

Donc :

$$K = S_{(CA)} \circ S_{(CD)} \circ S_{(DC)} \circ S_{(AD)} \circ S_{(AC)} = S_{(CA)} \circ I_P \circ I_P \circ S_{(AC)}$$

$$K = S_{(CA)} \circ S_{(AC)} = I_P$$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »  
Dit un proverbe.  
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs  
et exercices

Que l'on devient un mathématicien



# LA DERIVATION

## I) DERIVATION EN UN POINT

### 1) Activité

Déterminer la limite quand  $x$  tend vers  $a$  de

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ Dans les cas suivants :}$$

1-  $f(x) = 3x^2 - x + 5$  et  $a = -2$

2-  $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x - 1}$  et  $a = 2$

3-  $f(x) = \sin 3x$  et  $a = \frac{\pi}{6}$

4-  $f(x) = |2x^2 + x - 3|$  et  $a = 1$ .

### 2) Définition :

**Définition :** Soit  $f$  une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert de centre  $a$ .

On dit que  $f$  est dérivable en  $a$  si la limite

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ existe et est finie. Dans ce cas on}$$

appellera cette limite le nombre dérivé de la fonction  $f$  en  $a$  et se note  $f'(a)$ .

**Exemple :** On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2 + x - 3$ . Justifier que  $f$  est dérivable en  $-2$  et préciser  $f'(-2)$

**Solution :**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x - 3 + 1}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x - 2}{x + 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x + 2)(x - 1)}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} x - 1 = -3 = f'(-2) \end{aligned}$$

Donc  $f$  est dérivable en  $-2$  et  $f'(-2) = -3$

**Remarque :** Si  $f$  est dérivable en  $a$  et

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

On pose :  $h = x - a$  si  $x$  tend vers  $a$  alors  $h$  tend vers  $0$  et on obtient

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

**Application :** Calculer le nombre dérivé de

$f(x) = x^3 + x$  en  $a = 1$  en utilisant la deuxième formulation de la dérivation

$$\begin{aligned} \text{Solution : } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1 + h)^3 + 1 + h - 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3 + 3h^2 + 3h + 1 + h - 2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3 + 3h^2 + 4h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h^2 + 3h + 4 = 4 = f'(1) \end{aligned}$$

### 3) Dérivé à droite / dérivé à gauche.

**Activité :** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{cases} f(x) = 3x^2 + x; & x < 0 \\ f(x) = -2x^2 + 3x; & x \geq 0 \end{cases}$$

Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 3$  et que  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$

Que peut-on conclure ?

**Solution :**

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2x^2 + 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -2x + 3 = 3 = f'_d(0)$$

3 s'appelle le nombre dérivé de la fonction  $f$  à droite de 0

On dit que  $f$  est dérivable à droite en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3x^2 + x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} 3x + 1 = 1 = f'_g(0)$$

1 s'appelle le nombre dérivé de la fonction  $f$  à gauche de 0

On dit que  $f$  est dérivable à gauche en 0

Mais on a :  $f'_d(0) \neq f'_g(0)$

Donc :  $f$  n'est pas dérivable en 0.

**Définition : 1)** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle de la forme  $[a, a + r[$  où  $r > 0$

On dit que  $f$  est dérivable à droite de  $a$  si la limite

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ existe et est finie, dans ce cas on}$$

appelle cette limite ; le nombre dérivé de la fonction  $f$  à droite de  $a$  et on le note :  $f'_d(a)$

2) Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle de la forme  $]a - r, a]$  où  $r > 0$

On dit que  $f$  est dérivable à gauche de  $a$  si la

limite  $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  existe et est finie, dans ce

cas on appelle cette limite ; le nombre dérivé de la fonction  $f$  à gauche de  $a$  et on le note :  $f'_g(a)$

**Théorème :** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle ouvert de centre  $a$ .

$f$  est dérivable en  $a$  si et seulement si elle est dérivable à droite et à gauche de  $a$  et  $f'_d(a) = f'_g(a)$

**Preuve :** En exercice.

**Exemple1 :** soit  $f$  une fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x} \dots x \geq 1 \\ f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4} \dots x < 1 \end{cases}$$

étudier la dérivabilité de  $f$  en  $x_0 = 1$

**Solution :** on a  $f(1) = \sqrt{1} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x})^2 - 1^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2} = f'_d(1)$$

Donc  $f$  est dérivable à droite en 1

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{4}(x+1) = \frac{1}{2} = f'_g(1)$$

Donc  $f$  est dérivable à gauche en 1

et on a :  $f'_d(1) = f'_g(1)$

Donc  $f$  est dérivable en 1 et  $f'(1) = \frac{1}{2}$

**Exemple2 :** soit  $f$  une fonction définie par :

$$f(x) = x^2 - |x|$$

étudier la dérivabilité de  $f$  en  $x_0 = 0$

**Solution :**

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x - 1 = -1 = f'_d(0)$$

donc  $f$  est dérivable à droite en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x + 1 = 1 = f'_g(0)$$

Donc  $f$  est dérivable à gauche en 0

Mais on a :  $f'_d(0) \neq f'_g(0)$

Donc :  $f$  n'est pas dérivable en 0.

**Exercice1 :** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{cases} f(x) = 3x^2 + x; x < 0 \\ f(x) = -2x^2 + 3x; x \geq 0 \end{cases}$$

1- Montrer que  $f$  est dérivable en  $a = -2$ .

2-  $f$  est-elle dérivable en 0.

**Exercice2 :** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = |x^2 - 2x - 3| + 2x$$

1- Ecrire une expression de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  sans valeur absolu.

2- Etudier la dérivabilité de  $f$  à droite et à gauche de -1.

3-  $f$  est-elle dérivable en -1.

## II) INTERPRETATIONS GEOMETRIQUES.

### 1) Rappelles

Déterminer l'équation réduite de la droite qui passe par  $A(-1,3)$  et de le

Coefficient directeur -2

### 2) La fonction affine tangente à une fonction.

Soit  $f$  une fonction dérivable en  $a$  et  $f'(a)$  son nombre dérivé en  $a$ .

$$\text{Posons : } \begin{cases} \phi(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a); x \neq 0 \\ \phi(x) = 0; x = 0 \end{cases}$$

On a :  $(x - a)\phi(x) = -f'(a)(x - a) + f(x) - f(a)$

et par suite :  $f(x) = f'(a)(x - a) + f(a) + (x - a)\phi(x)$

Posons :  $u(x) = f'(a)(x - a) + f(a)$  on aura :

$$f(x) = u(x) + (x - a)\phi(x)$$

La fonction  $u$  est une fonction affine et s'appelle la fonction affine tangente en  $a$ .

**Propriété :** Soit  $f$  une fonction dérivable en  $a$ .  $f$  admet une fonction affine tangente en  $a$  de la forme :  $u(x) = f'(a)(x - a) + f(a)$

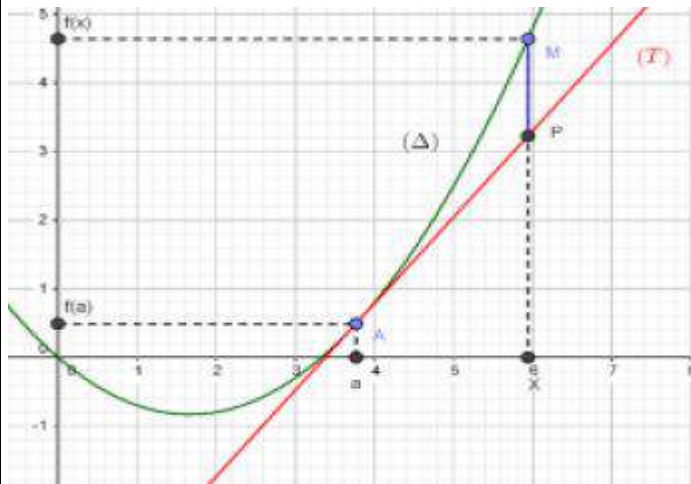
**Application :** Déterminer une fonction affine

tangente en -3 de la fonction  $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ .

**Propriété :** Toute fonction dérivable en  $a$  est continue en  $a$ .

**Preuve :** Puisque  $f$  est dérivable en  $a$  alors :

$$f(x) = f'(a)(x - a) + f(a) + (x - a)\phi(x)$$



en passant à la limite :  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  donc  $f$  est continue en  $a$

La réciproque de la propriété précédente n'est pas vraie :  $f(x) = |x|$  est continue en 0 mais pas dérivable en 0.

**Remarques :** 1) La fonction affine tangente en  $a$  d'une fonction dérivable en  $a$  est une approximation de  $f$  au voisinage de  $a$   
On peut écrire alors :  $f(x) \sim f'(a)(x - a) + f(a)$  au voisinage de  $a$

2) Si on pose  $x = a + h$  ; on aura :

$f(a + h) \sim f'(a)h + f(a)$  qui dit que si on ne connaît pas  $f(a + h)$  et si  $h$  est petit, on peut "essayer de mettre"  $f'(a)h + f(a)$  à la place de  $f(a + h)$ .

**Exemple :** donner une approximation de  $\sin 3$

**Solution :** Si on veut une approximation de  $\sin 3$ ,

on peut prendre :  $f(x) = \sin x$  et  $a = \pi$  (car  $\pi$  est l'élément le plus proche de 3 dont le sinus est connu)  $h = 3 - \pi$  (pour avoir :  $3 = \pi + h$ )

On a alors  $f(a) = \sin \pi = 0$  et  $f'(a) = \cos \pi = -1$

(à prouver) ce qui donne :

$\sin 3 = \sin(\pi + h) \sim -1 \times (3 - \pi) = \pi - 3$ .

**Exercice 3 :** soit  $f$  une fonction définie sur

$$]-\pi; \pi[ \text{ par : } \begin{cases} f(x) = \frac{x^2}{\tan \frac{x}{2}} \dots \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1) étudier la dérivabilité de  $f$  en 0

2) Donner une valeur approchée

du nombre :  $f(10^{-5})$

$$\text{Solution : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{\tan \frac{x}{2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan \frac{x}{2}}$$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{2}}{\tan \frac{x}{2}} = 2 \times 1 = 2$$

Donc  $f$  est dérivable en 0 et  $f'(0) = 2$

2) on a  $f(a + h) \sim f'(a)h + f(a)$

Donc  $f(0 + 10^{-5}) \sim f(0) + 10^{-5} f'(0)$   $a = 0$  et  $h = 10^{-5}$

$f(0) = 0$  et  $f'(0) = 2$

Donc  $f(10^{-5}) \sim 2 \times 10^{-5}$

### 3) Interprétations géométriques.

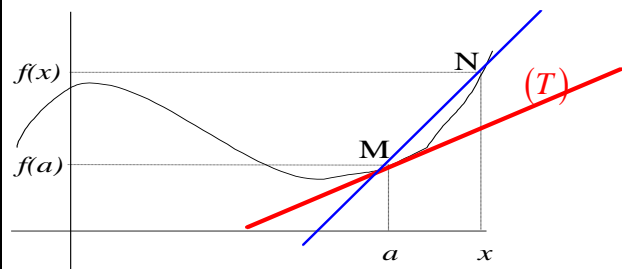
#### 3.1 Tangente en un point.

Soit  $f$  une fonction dérivable en  $M(a, f(a))$

Soit  $x$  un élément de  $Df$  différent de  $a$

et  $N(x, f(x))$   $(\Delta) = (MN)$  ; le coefficient directeur

de  $(\Delta)$  est le réel :  $m = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$



En faisant tendre  $x$  vers  $a$  et à la position limite une droite  $(T)$  qui

passse par  $M(a, f(a))$  et qui a pour coefficient

directeur :  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  qui n'est que  $f'(a)$

(car  $f$  est dérivable en  $a$ )

Donc :  $(T): y = f'(a)x + p$  et puisque  $(T)$  passe par  $A(a, f(a))$

alors :  $f(a) = f'(a)a + p$  donc  $p = f(a) - f'(a)a$  et on peut conclure que :

$(T): y = f'(a)x + f(a) - f'(a)a$

Finalemnt ;  $(T): y = f'(a)(x - a) + f(a)$

La droite  $(T)$  s'appelle la tangente à la courbe  $Cf$  en  $A(a, f(a))$

**Théorème :** Si  $f$  est dérivable en  $a$  alors sa courbe représentative  $C_f$  admet une tangente  $(T)$  en  $A(a, f(a))$  d'équation :

$$(T): y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

**Exemple :**

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de la fonction  $f(x) = \sin x$  en  $A(0, f(0))$

**Solution :**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = f'(0)$

Donc  $f$  est dérivable en  $0$

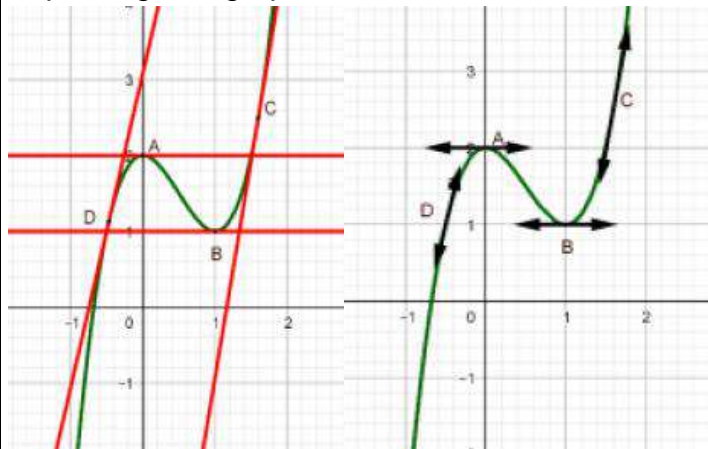
$$(T): y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

L'équation de la tangente à la courbe en  $A(0, f(0))$  est :  $(T): y = x$

**Remarque :** 1) La tangente  $(T)$  à la courbe  $C_f$  en  $A(a, f(a))$  ce n'est que la droite qui représente la fonction affine tangente à la fonction  $f$  en  $a$  et qui est  $u(x) = f'(a)(x - a) + f(a)$  et :

$$\overline{PM} = f(x) - (f'(a)(x - a) + f(a)) = \varphi(x)(x - a)$$

2) En pratique au lieu de représenter la droite  $(T)$  on Représente seulement une partie de  $(T)$  avec deux flèches de direction et ceci afin de ne pas trop charger le graphe.



a) Cas particulier si  $f$  est dérivable en  $a$  et  $f'(a) = 0$  alors l'équation de la tangente est :  $(T): y = f(a)$  c'est une droite parallèle à l'axe  $(Ox)$

b) Le vecteur directeur de la tangente en

$$A(a, f(a)) \text{ est } \vec{u}(1; f'(a))$$

Donc pour tracer une tangente on peut  
Seulement à partir de  $A$  tracer le vecteur  $\vec{u}$

### 3.2 Demi-tangente.

Par la même façon que le paragraphe précédent on peut montrer le théorème suivant :

**Théorème :** 1) Si  $f$  est une fonction dérivable à droite de  $a$ , alors son graphe admet une demi-tangente à droite de  $a$  :

$$(T_d): y = f'_d(a)(x - a) + f(a) : x \geq a$$

2) Si  $f$  est une fonction dérivable à gauche de  $a$ , alors son graphe admet une demi-tangente à gauche de  $a$  :

$$(T_g): y = f'_g(a)(x - a) + f(a) : x \leq a$$

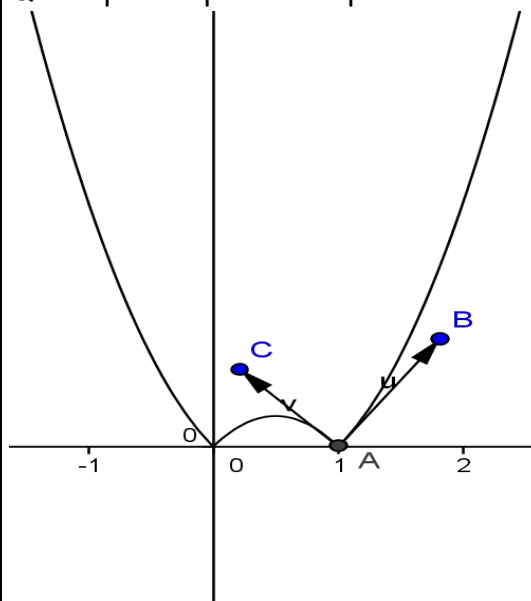
**Exemple :**  $f(x) = |-2x^2 + x + 1|$

On a :  $f$  est dérivable à droite de  $1$  et  $f'_d(1) = 3$  (à prouver) et est dérivable à gauche de  $1$  et  $f'_g(1) = -3$  donc la courbe représentative de  $f$  admet deux demi-tangentes en  $A(1, f(1))$ .

$$(T_d): y = 3(x - 1) \quad x \geq 1$$

$$(T_g): y = -3(x - 1) \quad x \leq 1$$

Qu'on peut représenter par :



**Remarque :**

Dans cet exemple, au voisinage de  $a$ , on ne peut pas confondre la courbe avec un segment ( $f$  n'est pas dérivable en  $a$ ) on dit que la courbe représente un **point anguleux** en  $A(1, f(1))$

**Exercice 4:** soit  $f$  une fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = (1+x)\sqrt{1-x^2} \dots 0 \leq x \leq 1 \\ f(x) = \sqrt{x^3 - x} \dots x > 1 \end{cases}$$

1) déterminer le domaine de définition de  $f$

2)étudier la dérivabilité de  $f$  à droite en  $x_0 = 0$  et donner une interprétation géométrique du résultat  
 3)étudier la dérivabilité de  $f$  à droite et à gauche en  $x_0 = 1$  et donner une interprétation géométrique

**Solution :1)**  $x \in D_f \Leftrightarrow 1-x^2 \geq 0$  et  $0 \leq x \leq 1$

ou  $x^3 - x \geq 0$  et  $x > 1$

$x \in D_f \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$  ou  $x > 1$

$x \in D_f \Leftrightarrow x \in [0; +\infty[$  donc :  $D_f = [0; +\infty[$

2) étude de la dérivabilité de  $f$  à droite de  $x_0 = 0$

On a :  $f(0) = 1$

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{(1+x)\sqrt{1-x^2}-1}{x} = \frac{x\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-x^2}-1}{x}$$

$$= \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{x(\sqrt{1-x^2}+1)} = \sqrt{1-x^2} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}+1}$$

Donc :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1 = f'_d(0)$

Donc  $f$  est dérivable à droite en 0

Interprétation géométrique du résultat :

La courbe de  $f$  admet un demi tangent en  $A(0, 1)$ .de coefficient directeur  $1 = f'_d(0)$

3)a)étudie de la dérivabilité de  $f$  à gauche en

$x_0 = 1$  On a :  $f(1) = 0$  soit  $0 \leq x \leq 1$

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{(1+x)\sqrt{1-x^2}}{x-1} = \frac{(1+x)(1-x^2)}{(x-1)\sqrt{1-x^2}} = \frac{-(1+x)^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

Et puisque :  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{1-x^2} = 0^+$  et  $\lim_{x \rightarrow 1^-} -(1+x)^2 = -4$

Alors :  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(1+x)^2}{\sqrt{1-x^2}} = -\infty$  donc :  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\infty$

Donc  $f$  n'est pas dérivable à gauche en  $x_0 = 1$

b)soit  $x > 1$

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{\sqrt{x^3-x}-0}{x-1} = \frac{x(x+1)(x-1)}{(x-1)\sqrt{x^3-x}} = \frac{x^2+x}{\sqrt{x^3-x}}$$

Et puisque :  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x^3-x} = 0^+$  et  $\lim_{x \rightarrow 1^+} x^2+x = 2$

Alors :  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2+x}{\sqrt{x^3-x}} = +\infty$  donc :  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = +\infty$

Donc  $f$  n'est pas dérivable à droite en  $x_0 = 1$

Interprétation géométrique du résultat :

La courbe de  $f$  admet un demi tangent en  $A(1,0)$  parallèle à l'axe des ordonnées dirigé vers le haut

**Exercice5 :** soit  $f$  une fonction définie par :

$$f(x) = |x^2 - 1|$$

1)étudier la dérivabilité de  $f$  à droite en  $x_0 = 1$  et donner une interprétation géométrique du résultat

2)étudier la dérivabilité de  $f$  à gauche en  $x_0 = 1$  et donner une interprétation géométrique du résultat

3)étudier la dérivabilité de  $f$  en  $x_0 = 1$  et donner une interprétation géométrique du résultat

4)donner l'équation de la demie tangente à droite a la courbe de  $f$  en en  $x_0 = 1$

4)donner l'équation de la demie tangente à gauche a la courbe de  $f$  en en  $x_0 = 1$

**Solution :1)**  $f(x) = |x^2 - 1|$

étude du signe de :  $x^2 - 1$

$$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = 1$$

Donc :  $\begin{cases} f(x) = x^2 - 1; x \in ]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[ \\ f(x) = -(x^2 - 1); x \in [-1; 1] \end{cases}$  et

$$f(1) = |1^2 - 1| = 0$$

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$	
$x^2-1$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$

1)étude de la dérivabilité de  $f$  à droite en  $x_0 = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2-1-0}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} x+1 = 2$$

Donc  $f$  est dérivable à droite en  $x_0 = 1$  et  $f'_d(1) = 2$

Interprétation géométrique du résultat :

La courbe de  $f$  admet un demi tangent à droite en  $A(1, 0)$ .de coefficient directeur  $f'_d(1) = 2$

2)

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x^2-1)-0}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} -(x+1) = -2$$

Donc  $f$  est dérivable à gauche en  $x_0 = 1$  et  $f'_g(1) = -2$

Interprétation géométrique du résultat :

La courbe de  $f$  admet un demi tangent à gauche en  $A(1, 0)$ .de coefficient directeur  $f'_g(1) = -2$

3) $f$  n'est pas dérivable en  $x_0 = 1$  car :  $f'_d(1) \neq f'_g(1)$

**Interprétation géométrique du résultat :**

La courbe admet un point anguleux en  $A(1, 0)$ .

4) l'équation de la demie tangente à droite a la courbe de  $f$  en en  $x_0 = 1$  est :

$$y = f(x_0) + f'_d(x_0)(x - x_0)$$

5) l'équation de la demie tangente à gauche a la courbe de  $f$  en en  $x_0 = 1$  est :

$$y = f(x_0) + f'_g(x_0)(x - x_0)$$

$$y = f(1) + f'_g(1)(x - 1) \Leftrightarrow y = 0 - 2(x - 1) \Leftrightarrow (\Delta_g): y = -2x + 2$$

### III) FONCTION DERIVEE D'UNE FONCTION.

#### 1) Introduction

**Exemple :** Soit  $f$  la fonction définie par :

$$f(x) = 2x^2 + x.$$

Soit  $x$  un réel quelconque, déterminons le nombre dérivé de  $f$  en  $x$  ( il est préférable d'utiliser la deuxième définition de la dérivation en un point)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(x+h)^2 + x+h - 2x^2 - x}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 4xh + 2h^2 + x+h - 2x^2 - x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(4x + 2h + 1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} 4x + 2h + 1 = 4x + 1 = f'(x)$$

On peut remarquer donc que  $f$  est dérivable en tout point  $x$  de  $\mathbb{R}$ , la fonction qui associe à  $x$  son nombre dérivé  $f'(x)$

S'appelle la fonction dérivée de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$  et se note par  $f'$ .

**Activités :** 1- Déterminer la fonction dérivée de la fonction  $\sin$  sur  $\mathbb{R}$ .

2- Déterminer la fonction dérivée de la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{x} \text{ sur } \mathbb{R}^{*+} \text{ et sur } \mathbb{R}^{*-}$$

#### 2) Dérivabilité sur un intervalle.

**Définition :** Soit  $f$  une fonction dont l'ensemble de définition est  $Df$ ,  $a$  et  $b$  deux éléments de  $Df$  tels que :  $a < b$

1) On dit que  $f$  est dérivable sur l'ouvert  $]a, b[$  si elle est dérivable en tout point de  $]a, b[$

2) On dit que  $f$  est dérivable sur le semi-ouvert  $[a, b[$  si elle est dérivable sur  $]a, b[$  et dérivable à droite de  $a$

3) On dit que  $f$  est dérivable sur le fermé  $[a, b]$  si elle est dérivable sur  $]a, b[$  et dérivable à droite de  $a$  et à gauche de  $b$

**Remarque :** Une fonction qui est dérivable sur  $[a, b]$  et dérivable  $[b, c]$  n'est pas nécessairement dérivable sur  $[a, c]$  sauf si  $f'_d(b) = f'_g(b)$

#### 3) Fonction dérivée d'une fonction.

**Définition :** Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle ouvert  $I$ . La fonction qui associe à tout élément  $x$  son nombre dérivé  $f'(x)$  s'appelle la fonction dérivée de la fonction  $f$  sur  $I$ .

#### Fonctions dérivées de quelques fonctions usuelles.

**Exercices :** Déterminer les fonctions dérivées des fonctions :

1.  $x \mapsto C$  sur  $\mathbb{R}$  2.  $x \mapsto x^2$  sur  $\mathbb{R}$ .

3.  $x \mapsto \sqrt{x}$  sur  $\mathbb{R}^{*+}$

4.  $x \mapsto \frac{1}{x}$  sur  $\mathbb{R}^{*+}$  et sur  $\mathbb{R}^{*-}$ . 5.  $x \mapsto \sin x$  sur  $\mathbb{R}$ .

6.  $x \mapsto \cos x$  sur  $\mathbb{R}$ .

#### Tableau des dérivées des fonctions usuelles

$f'$	Fonction $f$
$f'(x) = 0$	$f(x) = k$
$f'(x) = 1$	$f(x) = x$
$f'(x) = a$	$f(x) = ax$
$f'(x) = a$	$f(x) = ax + b$
$f'(x) = nx^{n-1} \quad n \in \mathbb{Z}^*$	$f(x) = x^n$
$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$f(x) = \frac{1}{x}$
$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$f(x) = \sqrt{x}$
$f'(x) = -\sin x$	$f(x) = \cos x$
$f'(x) = \cos x$	$f(x) = \sin x$
$f'(x) = -a \sin(ax + b)$	$f(x) = \cos(ax + b)$
$f'(x) = a \cos(ax + b)$	$f(x) = \sin(ax + b)$
$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$f(x) = \tan x$

**Exemples :** Déterminer les fonctions dérivées

des fonctions suivantes : 1)  $f(x)=11$

2)  $f(x)=7x+15$  3)  $f(x)=x^3$  4)  $f(x)=\sin(5x-1)$

**Solution :** 1)  $f'(x)=(11)'=0$  2)  $f'(x)=(7x+15)'=7$

3)  $f'(x)=(x^3)'=3x^{3-1}=3x^2$

4)  $f'(x)=(\sin(5x-1))'=(5x-1)'\cos(5x-1)=5\cos(5x-1)$

#### IV) OPERATIONS SUR LES FONCTIONS DERIVEES.

**Rappelle :** A partir de deux fonctions  $f$  et  $g$  on peut définir :

1) la somme :

$$(\forall x \in D_f \cap D_g) (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

2) Le produit :

$$(\forall x \in D_f \cap D_g) (f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$$

3) L'inverse :  $(\forall x \in D_f)$  si  $x \neq 0$  alors

$$\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)}$$

4) Le quotient :  $(\forall x \in D_f \cap D_g)$  si  $x \neq 0$  alors

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

5) La racine :  $(\forall x \in D_f)$  si  $x \geq 0$  alors

$$(\sqrt{f})(x) = \sqrt{f(x)}$$

##### 1) La somme

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions dérivables en  $a$ , étudions la dérivabilité de la fonction  $(f + g)$  en  $a$ .

On a :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) + g(x) - f(a) - g(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) + g(x) - g(a)}{x - a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

$$= f'(a) + g'(a) = (f' + g')(a)$$

En général : Si  $f$  et  $g$  sont dérivables sur un intervalle ouvert  $I$  alors la fonction  $(f + g)$  est dérivable sur  $I$  et  $(f + g)' = f' + g'$

**Exemple :** Déterminer la fonction dérivée de la

fonction suivante :  $f(x) = x^2 + 7x + 15 - \frac{1}{x} + \sqrt{x}$

**Solution :**

$$f'(x) = \left(x^2 + 7x + 15 - \frac{1}{x} + \sqrt{x}\right)' = (x^2)' + (7x+15)' - \left(\frac{1}{x}\right)' + (\sqrt{x})'$$

$$f'(x) = \left(x^2 + 7x + 15 - \frac{1}{x} + \sqrt{x}\right)' = 2x + 7 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

**2) Le produit :** Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions dérivables en  $a$ , étudions la dérivabilité de la fonction  $(f \times g)$  en  $a$ .

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) \times g(x) - f(a) \times g(a)}{x - a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) \times g(x) - f(x) \times g(a) + f(x) \times g(a) - f(a) \times g(a)}{x - a}$$

(on a ajouté et retranché le même nombre)

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)(g(x) - g(a)) + g(a)(f(x) - f(a))}{x - a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} f(x) \frac{(g(x) - g(a))}{x - a} + \lim_{x \rightarrow a} g(a) \frac{(f(x) - f(a))}{x - a}$$

$$= g'(a) \times f(a) + f'(a) \times g(a) = (f'g + g'f)(a)$$

( $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  car  $f$  est continue)

En général : Si  $f$  et  $g$  sont dérivables sur un intervalle ouvert  $I$  alors la fonction  $(f \times g)$  est dérivable sur  $I$  et :

$$(f \times g)' = f'g + g'f$$

En particulier : Si  $f$  est dérivable sur un intervalle ouvert  $I$  et  $k \in \mathbb{R}$  alors la fonction  $kf$  est dérivable sur  $I$  et :  $(kf)' = k f'$

**Exemples :** Déterminer la fonction dérivée de la fonction suivante :  $f(x) = (5x^2 + 1)(3x - 1)$

On utilise la formule :  $(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$

$$f'(x) = ((5x^2 + 1)(3x - 1))' = (5x^2 + 1)' \times (3x - 1) + (5x^2 + 1) \times (3x - 1)'$$

$$f'(x) = 10x \times (3x - 1) + 3(5x^2 + 1) = 30x^2 - 10x + 15x^2 + 3$$

$$f'(x) = 45x^2 - 10x + 3$$

##### 3) Puissance

On utilisant la propriété précédente et par récurrence prouver que :

$$(f^n)' = n f' f^{n-1}$$

**Exemple :** Déterminer la fonction dérivée de la fonction :  $f(x) = (3x + 4)^3$

On utilise la formule :  $(u^n)' = n u^{n-1} \times u'$

$$f'(x) = ((3x + 4)^3)' = 3 \times (3x + 4)^{3-1} \times (3x + 4)' = 3 \times 3 \times (3x + 4)^{3-1} = 9(3x + 4)^2$$

**4) L'inverse** : Soit  $f$  une fonction dérivable en  $a$  et  $f(a) \neq 0$  étudions la dérivabilité de la fonction

$$\frac{1}{f} \text{ en } a. \text{ On a : } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(a)}}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{-(f(x)-f(a))}{f(x)f(a)(x-a)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{-(f(x)-f(a))}{x-a} \times \frac{1}{f(x)f(a)} = -\frac{f'(a)}{f(a)^2} = \left(-\frac{f'}{f^2}\right)(a)$$

En général si  $f$  est dérivable sur un intervalle ouvert  $I$  et  $f$  ne s'annule pas sur  $I$  alors :

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$$

**Exemple** : Déterminer la fonction dérivée de la fonction :  $f(x) = \frac{1}{\sin x}$

On utilise la formule :  $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{\sin x}\right)' = -\frac{(\sin x)'}{(\sin x)^2} = -\frac{\cos x'}{(\sin x)^2}$$

**5) Quotient** : En remarquant que :  $\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g}$

et en utilisant les propriétés du produit et de l'inverse on peut montrer que :

Si  $f$  et  $g$  sont dérivables sur un intervalle ouvert  $I$

et  $g$  ne s'annule pas sur  $I$  alors :  $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$

**Exemple** : Déterminer la fonction dérivée de la fonction :  $f(x) = \frac{3x-1}{x+2}$

On utilise la formule :  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$$f'(x) = \left(\frac{3x-1}{x+2}\right)' = \frac{(3x-1)'(x+2) - (3x-1)(x+2)'}{(x+2)^2} = \frac{3(x+2) - 1 \times (3x-1)}{(x+2)^2} = \frac{7}{(x+2)^2}$$

**Application** :

Montrer que la fonction  $\tan$  est dérivable sur les intervalles de la forme

$I_k = ]-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi[$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) et que

$(\forall x \in I_k)(\tan'x = 1 + \tan^2x)$ .

**6) La racine** :

Soit  $f$  une fonction dérivable en  $a$  et  $f(a) > 0$

étudions la dérivabilité de la fonction  $\sqrt{f}$  en  $a$ .

On a :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(a)}}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(a)})(\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(a)})}{(\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(a)})(x-a)}$$

(On a multiplié par le conjugué)

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{(\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(a)})(x-a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)} \frac{1}{(\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(a)})}$$

$$= \frac{f'(a)}{2\sqrt{f(a)}} = \left(\frac{f'}{2\sqrt{f}}\right)(a)$$

En générale ; si  $f$  est dérivable sur un intervalle ouvert  $I$  et **strictement positif sur  $I$**  alors  $\sqrt{f}$

est dérivable sur  $I$  et  $(\sqrt{f})' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$

**Exemple** : Déterminer la fonction dérivée de la fonction :  $f(x) = \sqrt{x^2 + 8x}$

On utilise la formule :  $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

$$f'(x) = (\sqrt{x^2 + 8x})' = \frac{(x^2 + 8x)'}{2\sqrt{x^2 + 8x}} = \frac{2x + 8}{2\sqrt{x^2 + 8x}} = \frac{x + 4}{\sqrt{x^2 + 8x}}$$

**Exercice 6** : Soit  $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$

Etudier le domaine de dérivation de  $f$  et déterminer sa fonction dérivée.

**Solution** :  $D_f = ]-\infty; 0] \cup [1; +\infty[$

On a :  $f(x) = \sqrt{u(x)}$  avec  $u(x) = x^2 - x$

Et on a :  $u(x) > 0 \quad \forall x \in D_f - \{0; 1\}$

Donc  $f$  est dérivables sur  $D_f - \{0; 1\}$

$$\forall x \in D_f - \{0; 1\} : f'(x) = (\sqrt{x^2 - x})' = \frac{(x^2 - x)'}{2\sqrt{x^2 - x}} = \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x}}$$

**Remarque** :

Pour calculer la dérivée de  $|f|$ , on procède comme suit :

-Exprimer  $|f|$  sans le symbole de la valeur absolue sur des intervalles de  $D_f$

-Calculer la dérivée des fonctions obtenues sur ces intervalles.

Déterminer la dérivée de la fonction

$$f(x) = |3x^2 + x - 4|$$

**Propriété :**

- 1) Toute fonction polynôme est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .
- 2) Toute fonction rationnelle est dérivable sur tout intervalle inclus dans son domaine de définition

**Tableau des opérations sur les fonctions dérivées**

$f'$	Fonction $f$
$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$f(x) = \tan x$
$f'(x) = u' + v'$	$f(x) = u + v$
$f'(x) = u' - v'$	$f(x) = u - v$
$f'(x) = k u'$	$f(x) = k u$
$f'(x) = u' \times v + u \times v'$	$f(x) = u \times v$
$f'(x) = m u^n \times u'$	$f(x) = u^n$
$f'(x) = -\frac{u'}{u^2}$	$f(x) = \frac{1}{u}$
$f'(x) = \frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$	$f(x) = \frac{u}{v}$
$f'(x) = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$f(x) = \sqrt{u}$

**Exercice7 :** Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

- 1)  $f(x) = 4x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x + 1$
- 2)  $f(x) = \frac{3}{x}$
- 3)  $f(x) = 4\sqrt{x} - 1$
- 4)  $f(x) = \cos 2x + 3\sin 3x$
- 5)  $f(x) = (3x^2 + 2)(7x + 1)$
- 6)  $f(x) = \frac{1}{5x + 7}$
- 7)  $f(x) = \frac{7x}{x^3 + 1}$

**Solutions :**

$$1) f'(x) = \left(4x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x + 1\right)' = 4 \times 4x^{4-1} - \frac{1}{3} \times 3x^{3-1} - 1 + 0 = 16x^3 - x^2 - 1$$

$$2) f'(x) = \left(\frac{3}{x}\right)' = \left(3 \times \frac{1}{x}\right)' = 3 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{3}{x^2}$$

$$3) f'(x) = (4\sqrt{x} - 1)' = 4 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} - 0 = \frac{2}{\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}}{x}$$

$$4) f'(x) = (\cos 2x + 3\sin 3x)' = -2\sin 2x + 3 \times 3 \cos 3x = -2\sin 2x + 9\cos 3x$$

$$5) f(x) = (3x^2 + 2)(7x + 1)$$

On utilise la formule :  $(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$

$$f'(x) = \left((3x^2 + 2) \times (7x + 1)\right)' = (3x^2 + 2)' \times (7x + 1) + (3x^2 + 2) \times (7x + 1)'$$

$$f'(x) = 6x \times (7x + 1) + 7(3x^2 + 2) = 42x^2 + 6x + 21x^2 + 14 = 63x^2 + 6x + 14$$

$$7) f(x) = \frac{7x}{x^3 + 1}$$

On utilise la formule :  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$$f'(x) = \left(\frac{7x}{x^3 + 1}\right)' = \frac{(7x)'(x^3 + 1) - 7x(x^3 + 1)'}{(x^3 + 1)^2} = \frac{7(x^3 + 1) - 7x \times 3x^2}{(x^3 + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{7x^3 + 7 - 21x^3}{(x^3 + 1)^2} = \frac{7 - 14x^3}{(x^3 + 1)^2}$$

**Exercice8 :** Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes ;

$$1. f(x) = -2x^4 + x^3 + 5x^2 + x + 1$$

$$2. f(x) = (3x^2 + 1)(2x + 3)$$

$$3. f(x) = \frac{3x^2 + x}{5x^2 + 1}$$

$$4. f(x) = \frac{3x^2 + x}{5x^2 + 1}$$

$$5. f(x) = \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{x^2 + 1}$$

$$6. f(x) = \frac{\sin 2x}{\cos 3x + 1}$$

**Exercice9 :** déterminer  $f'(x)$  dans les cas suivants :

$$1) f(x) = 9x + 2 \quad 2) f(x) = 5x^2 - 3x + 2$$

$$3) f(x) = x + \frac{2}{x} \quad 4) f(x) = \frac{5x + 2}{3x - 1}$$

$$5) f(x) = \frac{x}{x^2 + 1} \quad 6) f(x) = \frac{1}{(2x + 1)^5}$$

$$7) f(x) = (5x^3 - 3)^4 \quad 8) f(x) = \sqrt{2x^2 - 6x + 4}$$

$$9) f(x) = \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \quad 10) f(x) = x + \frac{x^2}{x-1}$$

$$11) f(x) = \sqrt{\frac{2x+1}{x-3}} \quad 12) f(x) = x \cos x$$

$$13) f(x) = \tan^2 x \quad 14) f(x) = \cos x \times \sin x$$

$$15) f(x) = \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} \quad 16) f(x) = \frac{(1+2x+x^2)^5}{4}$$

$$17) f(x) = 1+x + \frac{x-1}{\sqrt{2+x^2}} \quad 18) f(x) = \frac{\sin 2x}{1-\cos 2x}$$

**Exercice 10:** Etudier le domaine de dérivation de  $f$  et déterminer sa fonction dérivée dans les cas suivants :

$$1) f(x) = x^2 + 3x - 1 \quad 2) f(x) = 4 \sin x$$

$$3) f(x) = x^4 \cos x \quad 4) f(x) = \sqrt{x} + x^3$$

$$5) f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad 6) f(x) = \frac{6}{4x^2 + 3x - 1}$$

$$7) f(x) = \frac{4x-3}{2x-1} \quad 8) f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$$

$$9) f(x) = (2x+3)^5$$

**Solution :** 1)  $f(x) = x^2 + 3x - 1$   $D_f = \mathbb{R}$

$f$  est une fonction polynôme donc dérivable sur  $\mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = (x^2)' + (3x-1)' = 2x+3$$

$$2) f(x) = 4 \sin x \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$f(x) = 4u(x) \text{ avec } u(x) = \sin x$$

Puisque  $u$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  alors  $f$  est une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 4(u(x))' = 4 \cos x$$

$$3) f(x) = x^4 \cos x \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$f(x) = u(x) \times v(x) \text{ avec } u(x) = x^4 \text{ et } v(x) = \cos x$$

Puisque  $u$  et  $v$  sont dérivables sur  $\mathbb{R}$  alors  $f$  est une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$

On utilise la formule :  $(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$

$$f'(x) = ((x^4) \times (\cos x))' = (x^4)' \times (\cos x) + (x^4) \times (\cos x)'$$

$$f'(x) = 4x^3 \times (\cos x) - x^4 \times \sin x = 4x^3 \cos x - x^4 \sin x$$

$$4) f(x) = \sqrt{x} + x^3 \quad D_f = \mathbb{R}^+ = ]0; +\infty[$$

$$f(x) = u(x) + v(x) \text{ avec } u(x) = \sqrt{x} \text{ et } v(x) = x^3$$

Puisque  $u$  est dérivables sur  $\mathbb{R}_+^*$  et  $v$  est dérivables en particulier sur  $\mathbb{R}_+^*$  alors  $f$  est une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* : f'(x) = (u(x))' + (v(x))' = \frac{2}{2\sqrt{x}} + 3x^2$$

$$5) f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad D_f = \mathbb{R}^{*+} = ]0; +\infty[$$

$$\text{On a : } f(x) = \frac{1}{u(x)} \text{ avec } u(x) = \sqrt{x}$$

Puisque  $u$  est dérivables sur  $\mathbb{R}_+^*$

Donc  $f$  est dérivables sur  $\mathbb{R}_+^*$

$$\text{On utilise la formule : } \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* : f'(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

$$6) f(x) = \frac{6}{4x^2 + 3x - 1} \quad D_f = \mathbb{R} - \left\{-1; \frac{1}{4}\right\}$$

Puisque  $f$  est une fonction rationnelle alors il

dérivable sur  $D_f = \mathbb{R} - \left\{-1; \frac{1}{4}\right\}$

$$\text{est on a : } f(x) = \frac{6}{u(x)} \text{ avec } u(x) = 4x^2 + 3x - 1$$

$$f'(x) = 6 \left(\frac{1}{u(x)}\right)' = 6 \left(-\frac{u'}{u^2}\right) = -6 \frac{(4x^2 + 3x - 1)'}{(4x^2 + 3x - 1)^2} = -6 \frac{8x + 3}{(4x^2 + 3x - 1)^2}$$

$$7) f(x) = \frac{4x-3}{2x-1} \quad D_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

Puisque  $f$  est une fonction rationnelle alors il

dérivable sur  $D_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$

$$f(x) = u(x)/v(x) \text{ avec } u(x) = 4x-3 \text{ et}$$

$$v(x) = 2x-1$$

$$\text{On utilise la formule : } \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$f'(x) = \frac{(4x-3)'}{(2x-1)} - \frac{(4x-3)(2x-1)'}{(2x-1)^2} = \frac{4(2x-1) - 2 \times (4x-3)}{(2x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4(2x-1) - 2 \times (4x-3)}{(2x-1)^2} = \frac{8x-4-8x+6}{(2x-1)^2} = \frac{2}{(2x-1)^2}$$

$$8) f(x) = \sqrt{x^2 - 4} \quad : D_f = ]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[$$

$$\text{On a : } f(x) = \sqrt{u(x)} \text{ avec } u(x) = x^2 - 4$$

Et on a :  $u(x) > 0 \quad \forall x \in D_f - \{-2; 2\}$

Donc  $f$  est dérivable sur  $D_f - \{-2; 2\}$

$\forall x \in D_f - \{-2; 2\} :$

$$f'(x) = (\sqrt{x^2 - 4})' = \frac{(x^2 - 4)'}{2\sqrt{x^2 - 4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}$$

9)  $f(x) = (2x+3)^5 \quad D_f = \mathbb{R}$

$f(x) = (u(x))^5$  avec  $u(x) = 2x+3$

On utilise la formule :  $(u^n)' = nu^{n-1} \times u'$

$$f'(x) = ((2x+3)^5)' = 5 \times (2x+3)^{5-1} \times (2x+3)' = 5 \times 2 \times (2x+3)^4 = 10(2x+3)^4$$

**Exercice 11** : soit  $f$  une fonction définie sur

$$I = ]-\pi; \pi[ \text{ par : } \begin{cases} f(x) = 2 \frac{\cos x - 1}{\sin x}; \text{ si } \dots 0 < x < \pi \\ f(x) = \frac{x|x+1|}{x-1}; \text{ si } \dots -\pi < x \leq 0 \end{cases}$$

1) montrer que  $f$  est dérivable en  $x_0 = 0$   
et donner l'équation de la tangente à la courbe de  $f$  en  $x_0 = 0$

2) a) étudier la dérivabilité de  $f$  en  $x_0 = -1$   
b) donner les équations des demies tangentes à la courbe de  $f$  en en  $x_0 = -1$

**Solution** : 1) étude de la dérivabilité de  $f$  à droite en  $x_0 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2 \frac{\cos x - 1}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -2 \frac{1 - \cos x}{x^2} \times \frac{1}{\sin x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -2 \times \frac{1}{2} \times 1 = -1 = f'_d(0)$$

Donc  $f$  est dérivable à droite en  $x_0 = 0$  et  $f'_d(0) = -1$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x+1|}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+1}{x-1} = -1 = f'_g(0)$$

Donc  $f$  est dérivable à gauche en  $x_0 = 0$  et

$$f'_g(0) = -1$$

Et puisque :  $f'_d(0) = f'_g(0)$

Donc  $f$  est dérivable à en  $x_0 = 0$  et  $f'(0) = -1$

*Interprétation géométrique du résultat :*

La courbe de  $f$  admet une tangente en  $O(0, 0)$ . de coefficient directeur  $f'(0) = -1$

l'équation de la tangente à la courbe de  $f$  en

$$x_0 = 0 \text{ est : } y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$y = f(0) + f'(0)(x - 0)$$

$$y = 0 - 1(x - 0) \Leftrightarrow (T) : y = -x$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{x - 1} = \frac{1}{2} = f'_d(-1)$$

Donc  $f$  est dérivable à droite en  $x_0 = -1$  et  $f'_d(-1) = \frac{1}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{-x}{x - 1} = -\frac{1}{2} = f'_g(-1)$$

Donc  $f$  est dérivable à gauche en  $x_0 = -1$  et

$$f'_g(-1) = -\frac{1}{2} \text{ mais on a : } f'_d(-1) \neq f'_g(-1)$$

Donc  $f$  n'est pas dérivable en  $x_0 = -1$

*Interprétation géométrique du résultat :*

La courbe admet un point anguleux en  $A(-1, 0)$ .

b) l'équation de la demie tangente à droite à la courbe de  $f$  en en  $x_0 = -1$  est :

$$y = f(-1) + f'_d(-1)(x + 1) \text{ avec } x \geq -1$$

$$y = 0 + \frac{1}{2}(x + 1) \Leftrightarrow (T_d) : y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \text{ avec } x \geq -1$$

l'équation de la demie tangente à gauche à la courbe de  $f$  en en  $x_0 = -1$  est :

$$y = f(-1) + f'_g(-1)(x + 1) \text{ avec } x \leq -1$$

$$y = 0 - \frac{1}{2}(x + 1) \Leftrightarrow (T_g) : y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \text{ avec } x \leq -1$$

**Exercice 12** : soit  $f$  une fonction définie par :

$$f(x) = \sqrt{3x - 2} \left( \frac{2x + 1}{x - 1} \right)^3$$

1) déterminer le domaine de définition  $D_f$  de  $f$

2) déterminer le domaine de dérivation de  $f$  et déterminer sa fonction dérivée

**Solution** : 1)  $x \in D_f \Leftrightarrow 3x - 2 \geq 0$  et  $x - 1 \neq 0$

$$\text{Donc : } D_f = \left[ \frac{2}{3}; 1[ \cup ]1; +\infty[$$

2) on a  $f(x) = g(3x - 2) \times h(x)$

$$\text{Avec : } h(x) = \left( \frac{2x + 1}{x - 1} \right)^3 \text{ et } g(x) = \sqrt{x}$$

On sait que :  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_*^+$  et la fonction polynôme  $D_f \quad x \rightarrow 3x-2$  est dérivable sur  $D_f$

$3x-2 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{2}{3}$  donc la fonction  $x \rightarrow g(3x-2)$

est dérivable sur  $D_f - \left\{ \frac{2}{3} \right\}$

donc :  $f$  est dérivable sur  $D_f - \left\{ \frac{2}{3} \right\}$  cad  $D_{f'} = D_f - \left\{ \frac{2}{3} \right\}$

$\forall x \in D_{f'} :$

$$f'(x) = (g(3x-2))' \times h(x) + g(3x-2) \times (h(x))'$$

$$(g(3x-2))' = (3x-2)' \times g'(3x-2) = 3 \times \frac{1}{2\sqrt{3x-2}}$$

$$\text{Car : } g'(x) = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(h(x))' = 3 \left( \frac{2x+1}{x-1} \right)' \times \left( \frac{2x+1}{x-1} \right)^2$$

$$\left( \frac{2x+1}{x-1} \right)' = \frac{(2x+1)'(x-1) - (2x+1)(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2}$$

Donc :

$$f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x-2}} \times \left( \frac{2x+1}{x-1} \right)^3 + \sqrt{3x-2} \frac{-9}{(x-1)^2} \left( \frac{2x+1}{x-1} \right)^2$$

**Exercice 13** : en utilisant la dérivée calculer les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+2)^{2018} - 1}{x+1} \quad 2) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin x - 1}{x - \frac{\pi}{6}}$$

Solution: 1) on pose :  $f(x) = (x+2)^{2018}$  on a :  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  en particulier en -1 et

$$f(-1) = (-1+2)^{2018} = 1$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+2)^{2018} - 1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = f'(-1)$$

Et puisque :  $f'(x) = 2018(x+2)^{2017} (x+2)' = 2018(x+2)^{2017}$

$$\text{Donc : } f'(-1) = 2018 \times 1^{2017} = 2018$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+2)^{2018} - 1}{x+1} = 2018$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin x - 1}{x - \frac{\pi}{6}} \quad \text{on pose } f(x) = 2 \sin x$$

on a :  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  en particulier en

$$\frac{\pi}{6} \quad \text{et } f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \sin \frac{\pi}{6} = 1$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin x - 1}{x - \frac{\pi}{6}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{x - \left(\frac{\pi}{6}\right)} = f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

Et puisque :  $f'(x) = 2 \cos x$

$$\text{Donc : } f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \cos \frac{\pi}{6} = 2 \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin x - 1}{x - \frac{\pi}{6}} = \sqrt{3}$$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »  
Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux  
calculs et exercices Que l'on devient un  
mathématicien



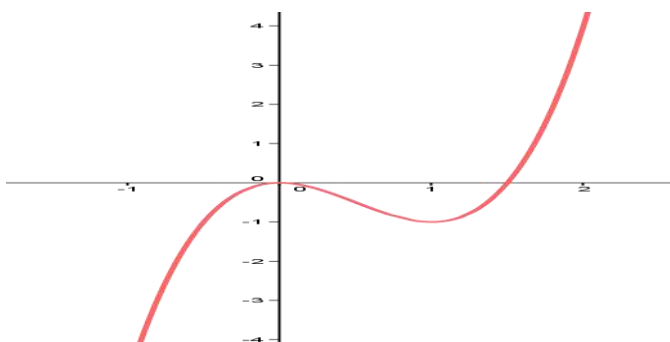
# ETUDE DES FONCTIONS

## 1) CONCAVITE ; CONVEXITE ; POINTS D'INFLEXION

1) **Activité** : Soit la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$g(x) = 2x^3 - 3x^2$$

- Déterminer les dérivées première et seconde de la fonction  $g$ .
- Dresser le tableau de signe de  $g''(x)$ .



3. La courbe représentative de  $g$  est représentée ci-contre

Étudier graphiquement La position relative de la courbe  $cg$  par rapport à ses tangentes.

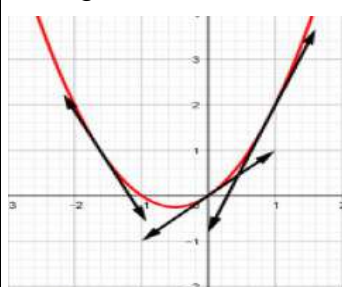
4. Que peut-on conclure ?

## 2) Définition et propriétés.

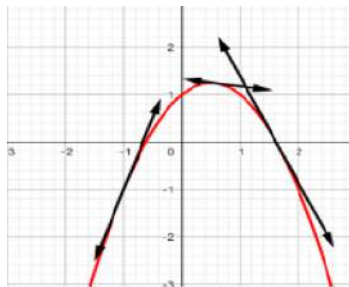
### 2.1 Définitions :

**Définition** : Soit  $f$  une fonction dont la courbe représentative est  $C_f$ .

- On dit que la courbe est convexe si elle se trouve au-dessus de toutes ses tangentes
- On dit que la courbe est concave si elle se trouve au-dessous de toutes ses tangentes.
- Un point d'inflexion est un point où s'opère un changement de concavité de la courbe  $C_f$



Graphes d'une fonction convexe



Graphes d'une fonction concave



Point d'inflexion en A

**Remarque** : Si  $f$  est dérivable en  $a$  et  $C_f$  traverse sa tangente en  $A$  alors le point  $A$  est un point d'inflexion

### 2.2 Dérivée seconde et concavité.

**Théorème** : Soit  $f$  une fonction deux fois dérivable sur un intervalle  $I$ .

- Si  $f''$  est positive sur  $I$  alors  $C_f$  est convexe sur  $I$ .
- Si  $f''$  est négative sur  $I$  alors  $C_f$  est concave sur  $I$ .
- Si  $f''$  s'annule en  $a$  en changeant de signe alors  $C_f$  admet un point d'inflexion en  $A(a, f(a))$

**Remarque** : Les conditions du théorème précédent sont suffisantes ; on peut avoir une courbe convexe, concave ou un point d'inflexion sans l'existence même de la dérivée seconde.

**Exemple** : Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \frac{1}{12}x^4 - 2x^2 + x + \frac{2}{3}$$

- Déterminer les dérivées première et seconde de la fonction  $f$ .
- Dresser le tableau de signe de  $f''(x)$ . et étudier la concavité de la courbe de  $f$  et déterminer les points d'inflexions s'ils existent

**Solution : 1)**

$$f'(x) = \left( \frac{1}{12}x^4 - 2x^2 + x + \frac{2}{3} \right)' = \frac{1}{12}4x^3 - 4x + 1 = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 1$$

$$f''(x) = \left( \frac{1}{3}x^3 - 4x + 1 \right)' = x^2 - 4$$

$$2) f''(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2^2 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2) = 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow x = -2 \text{ ou } x = 2$$



$x$	$-\infty$	$-2$	$2$	$+\infty$	
$x^2-4$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$

$(C_f)$  est convexe sur  $]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[$   
 $(C_f)$  est concave sur  $[-2, 2]$  et  $A(1, f(1))$  et  $B(-1, f(-1))$  sont les points d'inflexions de  $(C_f)$

**Exercice 1 :** Soit la fonction  $f$  définie sur  $I = [0; \pi]$  par :  $f(x) = \sin^2 x$  Étudier la concavité de la courbe de  $f$  et déterminer les points d'inflexions s'ils existent sur  $I$

**Solution :**  $\forall x \in [0; \pi]$

$$f'(x) = (\sin^2 x)' = 2(\sin x)' (\sin x)^{2-1} = 2 \cos x \sin x$$

$$f'(x) = \sin 2x \Rightarrow f''(x) = 2 \cos 2x \quad \forall x \in [0; \pi]$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$$

Et  $k \in \mathbb{Z}$  donc les solutions sont :  $x = \frac{\pi}{4}$  et  $x = \frac{3\pi}{4}$

$$x \in [0; \pi] \Rightarrow 2x \in [0; 2\pi]$$

$2x$	$0$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$	
$\cos 2x$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$

On a donc :

$x$	$0$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\pi$	
$f''(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$

Donc :  $(C_f)$  est convexe sur  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$

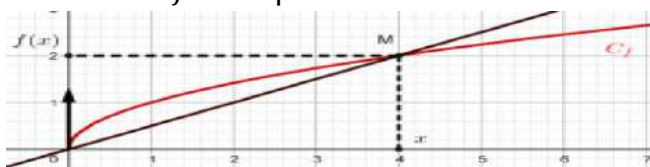
$(C_f)$  est concave sur  $\left[\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$  et  $A\left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\right)$  et  $B\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{1}{2}\right)$  sont les points d'inflexions de  $(C_f)$

## II) DEMI-TANGENTE VERTICALE

**Introduction :** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^+$  par :  $(\forall x \in \mathbb{R}^+) f(x) = \sqrt{x}$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

La fonction  $f$  n'est pas dérivable à droite de 0.



Soient  $x \neq 0$  et  $M(x, f(x))$  un point de la courbe  $C_f$  la droite  $(OM)$  à pour coefficient directeur

$$m = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

donc elle a pour vecteur directeur  $\vec{u}\left(1; \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$  et le vecteur  $\vec{v}(\sqrt{x}; 1)$  est aussi vecteur

directeur de la droite  $(OM)$  si on fait tendre  $x$  vers 0 (à droite) La droite  $(OM)$  "tend" pour une position limite vers une droite  $(T)$  de vecteur directeur  $\vec{j}(0;1)$  Donc sera parallèle à l'axe  $(Oy)$ .

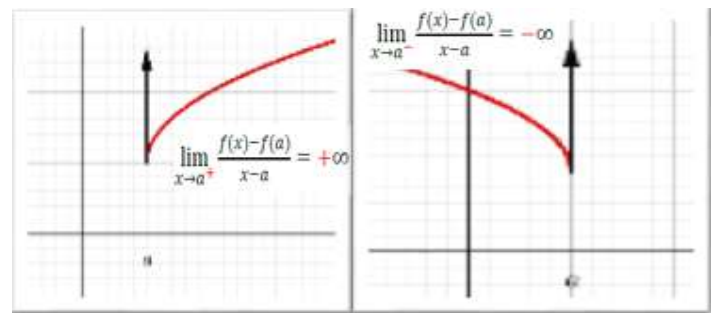
**Propriété :** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle de la forme  $[a, a + r[$

Si  $f$  est continue à droite de  $a$  et

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \pm\infty$$

Alors la courbe  $C_f$  admet une demi-tangente verticale à droite de  $a$ .

## Interprétation géométriques



**Exemple :** Soit  $f$  la fonction définie par :

$$f(x) = x^2 \sqrt{1+x}$$

- étudier la dérivabilité de  $f$  à droite en  $x_0 = -1$ .
- donner une interprétation géométrique

**Solution :**  $D_f = [-1, +\infty[$

$$\begin{aligned} 1) \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 \sqrt{1+x} - 0}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 \sqrt{1+x}}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 (\sqrt{1+x})^2}{(x+1)\sqrt{1+x}} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 (1+x)}{(x+1)\sqrt{1+x}} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2}{\sqrt{1+x}} = \frac{1}{0^+} = +\infty \end{aligned}$$

Donc  $f$  n'est pas dérivable à droite en  $x_0 = -1$ .

2) Interprétation géométrique :

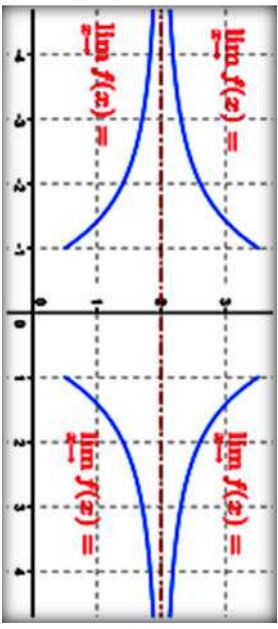
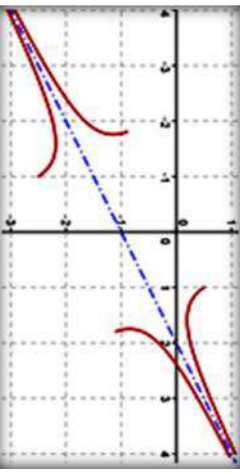
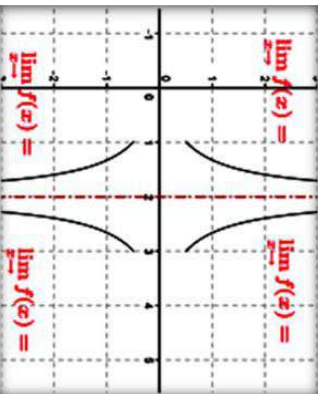
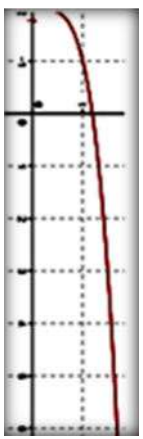
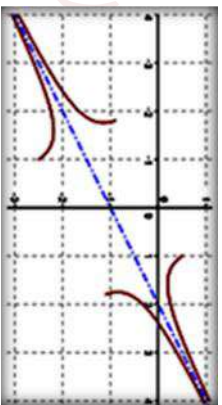
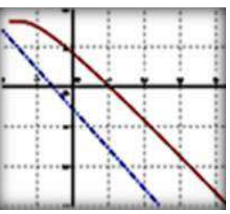
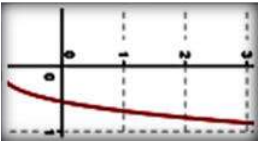
La courbe  $C_f$  admet une demi-tangente verticale à droite du point  $A(-1; f(-1))$  dirigée vers le haut

$$\text{Car : } \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = +\infty \quad (+ \times + = +)$$

## III) BRANCHES INFINIES.



**II) BRANCHES INFINIES.**

<p><b>Si :</b> <math>\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b</math></p>	<p><b>Si :</b> <math>\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty</math></p>	<p><b>Si :</b> <math>\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty</math></p>
<p>La droite (<math>\Delta</math>) d'équation <math>y = b</math> est une Asymptôte à (<math>C_f</math>) au voisinage de <math>\infty</math></p> 	<p>La droite (<math>\Delta</math>) : <math>y = ax + b</math> est une Asymptôte oblique à (<math>C_f</math>) signifie que : <math>\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0</math></p> <p>(<math>C_f</math>) est au dessus de (<math>\Delta</math>) <math>\Leftrightarrow (f(x) - (ax + b)) &gt; 0</math>          (<math>C_f</math>) est en dessous de (<math>\Delta</math>) <math>\Leftrightarrow (f(x) - (ax + b)) &lt; 0</math></p> 	<p>La droite (<math>\Delta</math>) d'équation <math>x = a</math> est une Asymptôte à (<math>C_f</math>) au voisinage de <math>a</math></p> 
<p>Détermination de la nature de la branche infinie dans le cas : <math>\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty</math></p>		
<p><b>Si :</b> <math>\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0</math></p>	<p><b>Si :</b> <math>\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0</math></p>	<p><b>Si :</b> <math>\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty</math></p>
<p>La courbe (<math>C_f</math>) admet une branche parabolique de direction (<math>Ox</math>)</p> 	<p><math>\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax) = b</math></p> <p>La droite (<math>\Delta</math>) d'équation <math>y = ax + b</math> est une Asymptôte à (<math>C_f</math>) au voisinage de <math>\infty</math>.</p> 	<p><math>\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax) = \infty</math></p> <p>La courbe (<math>C_f</math>) admet une branche parabolique de direction la droite (<math>D</math>), d'équation <math>y = ax</math></p> 
<p>La courbe (<math>C_f</math>) admet une branche parabolique de direction (<math>Oy</math>)</p> 		

**Exemples :**

**Exemple1 :** Soit  $f$  la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{2x-1}{3x-6}$$

déterminer les limites aux bornes de  $D_f$  et (Donner une interprétation géométrique des résultats)

**Solution :**  $D_f = \mathbb{R} - \{2\} = ]-\infty; 2[ \cup ]2; +\infty[$

$$1) \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x-1}{3x-6}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} 2x-1 = 3 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} 3x-6 = 0^+ \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} 3x-6 = 0^-$$

$x$	$-\infty$	$2$	$+\infty$
$3x-6$	$-$	$0$	$+$

**Donc :**  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$

*Interprétation géométrique des résultats :*

La droite  $(\Delta)$ :  $x = 2$  est une asymptote vertical a la courbe  $C_f$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{3x-6} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{3x-6} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$$

*Interprétation géométrique des résultats :*

La droite  $(\Delta)$ :  $y = \frac{2}{3}$  est une asymptote

horizontal a la courbe  $C_f$

**Exemple2 :**

Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

$$\text{On a : } f(x) = \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}}{x} = \frac{|x| \sqrt{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = 1$$

( $|x| = x$  car  $x \rightarrow +\infty$ )

La droite  $(\Delta)$ :  $y = 1$  est une asymptote horizontal a la courbe  $C_f$  au voisinage de  $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = -1$$

La droite  $(\Delta')$ :  $y = -1$  est une asymptote horizontal a la courbe  $C_f$  au voisinage de  $-\infty$

**Exemple3 :** Soit  $f$  la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* : f(x) = 2 + \frac{x-1}{x^2}$$

On a :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$  car :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

Donc : La droite  $(\Delta)$ :  $y = 2$  est une asymptote horizontal a la courbe  $C_f$  au voisinage de  $\infty$   
étudions la position de courbe  $(C_f)$  et la droite  $(\Delta)$  ?

$$f(x) - 2 = \frac{x-1}{x^2} \quad \text{le signe et celui de } x-1$$

$x$	$-\infty$	$0$	$1$	$+\infty$
$f(x)-2$	$-$	$0$	$+$	$+$

Donc la courbe  $C_f$  est au-dessous de  $(\Delta)$ :  $y = 2$

Sur l'intervalle  $]-\infty; 0[ \cup ]0; 1[$  et la courbe  $C_f$  est

au-dessus de  $(\Delta)$ :  $y = 2$  Sur l'intervalle  $]1; +\infty[$

$C_f$  coupe  $(\Delta)$  au point  $I(1;2)$

**Exemple4:** Soit  $f$  la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* - \{3\} : f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{x-3}$$

montrer que la courbe  $C_f$  que la fonction  $f$  admet une asymptote oblique au voisinage de  $+\infty$  et au voisinage de  $-\infty$  que l'on déterminera

$$\text{Solution } f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{x-3} \Leftrightarrow f(x) - (2x-1) = \frac{1}{x-3}$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (2x-1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-3} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Donc : la droite  $(\Delta)$ :  $y = 2x - 1$  est une asymptote oblique à la courbe  $C_f$  au voisinage de  $+\infty$

$$\text{Et on a : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (2x-1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x-3} = 0$$

Donc : la droite  $(\Delta)$ :  $y = 2x - 1$  est une asymptote oblique à la courbe  $C_f$  au voisinage de  $-\infty$

**Exemple5 :** Soit la fonction définie par :

$f(x) = \sqrt{x}$  étudier les branches paraboliques au voisinage de  $+\infty$



**Solution :** On a :  $Df = \mathbb{R}^+$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

Donc la courbe  $C_f$  admet une branche parabolique vers l'axe  $(Ox)$  au voisinage de  $+\infty$

**Exemple6 :** Soit la fonction définie par :

$f(x) = x^3$  étudier les branches paraboliques au voisinage de  $+\infty$

**Solution :** On a :  $Df = \mathbb{R}^+$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

Donc la courbe  $C_f$  admet une branche parabolique vers l'axe  $(Oy)$  au voisinage de  $+\infty$

**Exemple7:** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^+$  par :

$$f(x) = x + \sqrt{x}$$

**Solution :** On a :  $Df = \mathbb{R}^+$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} = 1$$

$$\text{Mais } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 1x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

Donc la courbe de la fonction admet une branche parabolique vers la droite  $(\Delta): y = x$ .

**Propriété :** Soit  $f$  une fonction définie au voisinage de  $+\infty$ . La droite  $(\Delta): y = ax + b$  ( $a \neq 0$ ) est une asymptote oblique au voisinage de  $+\infty$  si et seulement si :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad (a \neq 0) \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - ax = b$$

**Preuve :** D'après la propriété précédente : On peut écrire  $f(x) = ax + b + h(x)$  où  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax + b + h(x)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a + \frac{b}{x} + \frac{h(x)}{x} = a$$

$$\text{D'autre part : } f(x) - ax = b + h(x) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - ax = b$$

**Exemple:** Soit  $f$  la fonction définie par :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

1) Déterminer  $D_f$

2) montrer que la courbe  $C_f$  que la fonction  $f$  admet une asymptote oblique au voisinage de  $+\infty$  et au voisinage de  $-\infty$  que l'on déterminera

**Solution :1)** On a :  $x^2 + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

donc  $D_f = \mathbb{R}$

$$2)a) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} = +\infty$$

$$\text{Et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x} \quad |x| = x \text{ car } x \rightarrow +\infty$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = 1 = a$$

$$\text{Et on a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 1x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} - x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 0$$

Donc : la droite  $(\Delta): y = 1x$  est une asymptote oblique à la courbe  $C_f$  au voisinage de  $+\infty$

b) De même on a :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 1} = +\infty$$

$$\text{Et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x} \quad |x| = -x \text{ car } x \rightarrow -\infty$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = -1 = a$$

$$\text{Et on a : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + 1x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 1} + x$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} - x} = 0$$

Donc : la droite  $(\Delta): y = -x$  est une asymptote oblique à la courbe  $C_f$  au voisinage de  $-\infty$



#### IV) LES ELEMENTS DE SYMETRIE D'UNE COURBE.

##### 1) Axe de symétrie :

**Activité :** Soit la fonction

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \sqrt{2x^2 - 4x - 6}$$

1. Déterminer  $D_f$  ensemble de définition de la fonction  $f$ .

2. Montrer que  $(\forall x \in D_f) (2 - x \in D_f)$

3. Montrer que  $(\forall x \in D_f) (f(2 - x) = f(x))$

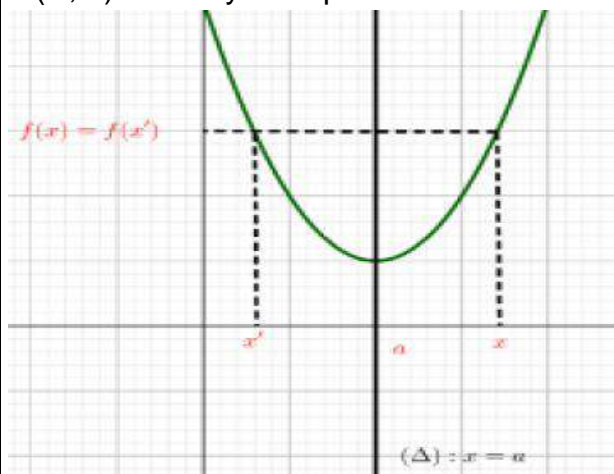
**Propriété :** Soit  $f$  une fonction numérique dont l'ensemble de définition est  $D_f$ .

La droite  $(\Delta): x = a$  est un axe de symétrie de la courbe  $C_f$  si et seulement si :

a)  $(\forall x \in D_f) (2a - x \in D_f)$

b)  $(\forall x \in D_f) (f(2a - x) = f(x))$

**Preuve :** Soit  $x$  un élément de  $D_f$  et  $A(x, 0)$ , si  $A'(x', 0)$  est le symétrique



de  $A$  par rapport à  $(\Delta) x = a$  alors

$$\frac{x + x'}{2} = a \quad (a \text{ est le centre de l'intervalle de}$$

bornes  $x$  et  $x'$ )

d'où :  $x' = 2a - x$  et puisque  $(\Delta) \perp (AA')$  alors

$f(x) = f(x')$  ce que signifie :  $f(2a - x) = f(x)$

**Exemple :** Soit  $f$  la fonction définie par :

$$f(x) = \sqrt{x - x^2}$$

1) Déterminer  $D_f$

2) montrer que la La droite  $(\Delta): x = \frac{1}{2}$  est un axe

de symétrie de la courbe  $C_f$

**Solution :** 1) On a :  $f(x) = \sqrt{x - x^2}$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x - x^2 \geq 0\}$$

$$x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(1 - x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 0$$

Tableau de signe :

$x$	$-\infty$	$0$	$1$	$+\infty$	
$x - x^2$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$

donc :  $D_f = [0, 1]$

2) a) montrons que : si  $x \in D_f = [0, 1]$  alors

$1 - x \in D_f$  ?

$$x \in D_f = [0, 1] \Rightarrow 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -x \leq 0 \Rightarrow 1 - 1 \leq 1 - x \leq 1$$

Donc :  $x \in D_f \Rightarrow 0 \leq 1 - x \leq 1 \Rightarrow 1 - x \in D_f$

b) montrons que :  $f(1 - x) = f(x)$  ?????

$$\begin{aligned} f(1 - x) &= \sqrt{(1 - x) - (1 - x)^2} = \sqrt{1 - x - (1 - 2x + x^2)} \\ &= \sqrt{1 - x - 1 + 2x - x^2} = \sqrt{x - x^2} = f(x) \end{aligned}$$

Donc : La droite  $(\Delta): x = \frac{1}{2}$  est un axe de symétrie de la courbe  $C_f$

**Exercice2 :** Soit  $f$  la fonction définie par :

$$f(x) = 3x^2 - 2x + 5$$

montrer que la La droite  $(\Delta): x = \frac{1}{3}$  est un axe de symétrie de la courbe  $C_f$

**Solution :** On a :  $D_f = \mathbb{R}$

a) si  $x \in D_f = \mathbb{R}$  alors  $\frac{2}{3} - x \in \mathbb{R}$

b) montrons que :  $f\left(\frac{2}{3} - x\right) = f(x)$  ?????

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2}{3} - x\right) &= 3\left(\frac{2}{3} - x\right)^2 - 2\left(\frac{2}{3} - x\right) + 5 \\ &= 3x^2 - 2x + 5 = f(x) \end{aligned}$$

Donc : La droite  $(\Delta): x = \frac{1}{3}$  est un axe de symétrie de la courbe  $C_f$

**Exercice3 :** Soit  $f$  la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x - 3}$$

montrer que la La droite  $(\Delta): x = 2$  est un axe de symétrie de la courbe  $C_f$

**Solution :** On a :  $D_f = \mathbb{R} - \{1, 3\}$

a) si  $x \in \mathbb{R} - \{1, 3\}$  alors  $4 - x \in \mathbb{R} - \{1, 3\}$  en effet :

$$x \in \mathbb{R} - \{1, 3\} \Rightarrow x \neq 1 \text{ et } x \neq 3$$



$\Rightarrow -x \neq -1$  et  $-x \neq -3 \Rightarrow 4-x \neq 4-1$  et  $4-x \neq 4-3$

$\Rightarrow 4-x \neq 3$  et  $4-x \neq 1$  alors  $4-x \in \mathbb{R} - \{1; 3\}$

b) montrons que :  $f(4-x) = f(x) \forall x \in \mathbb{R} - \{1; 3\}$  ????

$$f(4-x) = \frac{1}{4-x-1} - \frac{1}{4-x-3} = \frac{1}{3-x} - \frac{1}{1-x} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-3}$$

donc  $f(4-x) = f(x) \forall x \in \mathbb{R} - \{1; 3\}$

donc la droite ( $\Delta$ ):  $x = 2$  est un axe de symétrie de la courbe  $C_f$

**Exercice4:** Soit  $f$  la fonction définie par :

$$f(x) = \cos x$$

montrer que la La droite ( $\Delta$ ):  $x = k\pi$  ;  $k \in \mathbb{Z}$  est un axe de symétrie de la courbe  $C_f$

**Solution :** On a :  $D_f = \mathbb{R}$

a) si  $x \in \mathbb{R}$  alors  $2k\pi - x \in \mathbb{R}$

b) montrons que :  $f(2k\pi - x) = f(x) \forall x \in \mathbb{R}$  ????

$$f(2k\pi - x) = \cos(2k\pi - x) = \cos(-x) = \cos x$$

donc  $f(2k\pi - x) = f(x) \forall x \in \mathbb{R}$

donc la droite ( $\Delta$ ):  $x = k\pi$  ;  $k \in \mathbb{Z}$  est un axe de symétrie de la courbe  $C_f$

## 2) Centre de symétrie.

**Propriété :** Soit  $f$  une fonction numérique dont l'ensemble de définition est  $D_f$ .

Le point  $\Omega(a, b)$  est un centre de symétrie de la courbe  $C_f$  si et seulement si :

a)  $(\forall x \in D_f)(2a - x \in D_f)$

b)  $(\forall x \in D_f)(f(2a - x) = 2b - f(x))$

**Preuve :**  $\Omega(a, b)$  étant centre de symétrie de la courbe  $C_f$ , si  $M(x, f(x))$  est un point de  $C_f$  alors sont symétrique  $M'$  par rapport à  $\Omega$  est un point

de  $C_f$ . soit  $M'(x', f'(x'))$  on a :  $\frac{x+x'}{2} = a$

$$\text{et } \frac{f(x) + f(x')}{2} = 2b$$

car  $a$  est le centre de l'intervalles de bornes

$x$  et  $x'$  et  $b$  est le centre de L'intervalles de bornes

$f(x)$  et  $f(x')$  Par suite :  $x' = 2a - x$  et  $f(x') = 2b - f(x)$

et finalement :  $f(2a - x) = 2b - f(x)$

**Exemple:** Soit  $f$  la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x+1}$$

1) montrer que :  $\forall x \in D_f : f(x) = x - 2 + \frac{2}{x+1}$

2) montrer que le point  $\Omega(-1; -3)$  est un centre de symétrie de  $(C_f)$

**Solution :** 1) On a :  $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$

$$x - 2 + \frac{2}{x+1} = \frac{(x-2)(x+1)+2}{x+1} = \frac{x^2 - x}{x+1} = f(x)$$

2)a) montrons que si  $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$  alors

$-2-x \in \mathbb{R} - \{-1\}$  en effet :

$$x \in \mathbb{R} - \{-1\} \Leftrightarrow x \neq -1 \Leftrightarrow -x \neq 1 \Leftrightarrow -2-x \neq -2+1$$

$$\Leftrightarrow -2-x \neq -1 \Leftrightarrow -2-x \in \mathbb{R} - \{-1\}$$

b) montrons que :  $f(-2-x) + f(x) = -6 = 2b$  ??

$$\begin{aligned} f(-2-x) + f(x) &= -2-x-2 + \frac{2}{-2-x+1} + x-2 + \frac{2}{x+1} \\ &= -6 + \frac{2}{-x-1} + \frac{2}{x+1} = -6 - \frac{2}{x+1} + \frac{2}{x+1} = -6 \end{aligned}$$

donc  $f(-2-x) + f(x) = -6 = 2b \forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}$

donc le point  $\Omega(-1; -3)$  est un centre de symétrie de  $(C_f)$

**Exercice5 :** Soit  $f$  la fonction définie par :

$$f(x) = \sin x - \cos x$$

montrer que le point  $\Omega\left(\frac{\pi}{4}; 0\right)$  est un centre de

symétrie de  $(C_f)$

**Solution :**

a) on a si  $x \in \mathbb{R}$  alors  $2\frac{\pi}{4} - x = \frac{\pi}{2} - x \in \mathbb{R}$

b) montrons que :  $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2 \times 0 - f(x)$  ??

$$f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x - \sin x$$

donc  $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2 \times 0 - f(x) \forall x \in \mathbb{R}$

donc le point  $\Omega\left(\frac{\pi}{4}; 0\right)$  est un centre de symétrie

de  $(C_f)$

**Exercice6 :** Soit  $f$  la fonction définie par :

$$f(x) = \sqrt{4x^2 + 2x - 2}$$

1) Déterminer  $D_f$

2) Déterminer le domaine de dérivabilité de  $f$  et calculer  $f'(x)$



3) calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

4) montrer que la courbe  $C_f$  que la fonction  $f$  admet une asymptote oblique au voisinage de  $-\infty$  que l'on déterminera

**Solution :** 1)  $D_f = \{x \in \mathbb{R} / 4x^2 + 2x - 2 \geq 0\}$

$$4x^2 + 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + x - 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 1 + 8 = 9 = (3)^2 > 0$$

$$x_1 = \frac{-1+3}{2 \times 2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-4}{4} = -1$$

$x$	$-\infty$	$-1$	$1/2$	$+\infty$	
$4x^2+2x-2$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$

$$\text{Donc : } D_f = ]-\infty; -1] \cup \left[ \frac{1}{2}; +\infty[$$

$$4x^2 + 2x - 2 > 0 \Leftrightarrow \forall x \in ]-\infty; -1[ \cup \left[ \frac{1}{2}; +\infty[$$

Donc :

$$f'(x) = \left( \sqrt{4x^2 + 2x - 2} \right)' = \frac{(4x^2 + 2x - 2)'}{2\sqrt{4x^2 + 2x - 2}} = \frac{8x + 2}{2\sqrt{4x^2 + 2x - 2}}$$

$$f'(x) = \frac{4x + 1}{\sqrt{4x^2 + 2x - 2}} \quad \forall x \in ]-\infty; -1[ \cup \left[ \frac{1}{2}; +\infty[$$

3) calculons :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4x^2 + 2x - 2}$$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow -\infty} 4x^2 + 2x - 2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} 4x^2 = +\infty$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 2x - 2}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 \left( 4 + \frac{2x}{x^2} - \frac{2}{x^2} \right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{4 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}}}{x} \quad x \rightarrow -\infty \text{ donc } |x| = -x$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{4 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{4 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}} = -\sqrt{4} = -2 = a$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + 2x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4x^2 + 2x - 2} + 2x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{4x^2 + 2x - 2} + 2x)(\sqrt{4x^2 + 2x - 2} - 2x)}{(\sqrt{4x^2 + 2x - 2} - 2x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 + 2x - 2 - 4x^2}{|x| \sqrt{4 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}} - 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 2}{-x \sqrt{4 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}} - 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 2}{-x \sqrt{4 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}} - 2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left( 2 - \frac{2}{x} \right)}{-x \left( \sqrt{4 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}} + 2 \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - \frac{2}{x}}{-\left( \sqrt{4 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}} + 2 \right)} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} = b$$

Donc : donc la droite  $y = -2x - \frac{1}{2}$  est une

asymptote oblique au voisinage de  $-\infty$  a la courbe  $C_f$

**Exercice7 :** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = x^3 - 3x + 3$$

- Déterminer les limites de  $f$  aux bornes de  $D_f$
  - étudier les branches infinies de la courbe  $(C_f)$
  - dresser le tableaux de variation de  $f$
  - Étudier la concavité de la courbe de  $(C_f)$  et déterminer les points d'inflexions s'ils existent sur  $\mathbb{R}$
  - montrer que le point  $I(0;3)$  est un centre de symétrie de  $(C_f)$  et déterminer l'équation de la tangente  $(T)$  a la courbe  $(C_f)$  en  $I(0;3)$
  - on utilisant le tableaux de variation de  $f$  montrer que l'équation :  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  tel que :  $\alpha < -1$  et vérifier que  $-2.2 < \alpha < -2.1$  et déterminer le signe de  $f(x)$
  - Tracer la courbe  $C_f$  et discuter suivant les valeurs du paramètre  $m$  le nombre de solutions de l'équation :  $x^3 - 3x + 3 = m$
- Solution :** 1) On a :  $D_f = \mathbb{R} = ]-\infty; +\infty[$  car  $f$  est une fonction polynôme

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - 3x + 3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - 3x + 3 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

2) étude des branches infinies de la courbe  $(C_f)$  :

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x^3 - 3x + 3}{x} = x^2 - 3 + \frac{3}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 3 + \frac{3}{x} = +\infty$$

$$\text{Et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 - 3 + \frac{3}{x} = +\infty$$

Donc la courbe  $C_f$  admet une branche parabolique vers l'axe  $(Oy)$  au voisinage de  $+\infty$  et  $-\infty$

3) le tableaux de variation de  $f$  ?



$\forall x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = (x^3 - 3x + 3)' = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x-1)(x+1)$$

Le signe de  $f'(x)$  est celui de  $(x-1)(x+1)$

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$5$	$1$	$+\infty$	

4) Étude de la concavité de la courbe de  $(C_f)$  ?

$$\forall x \in \mathbb{R} ; f'(x) = 3(x^2 - 1) \text{ donc : } f''(x) = 6x$$

le tableaux de signe de  $f''(x)$  est :

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	$0$	$+$

Donc :  $(C_f)$  est convexe sur  $\mathbb{R}_+^*$

$(C_f)$  est concave sur  $\mathbb{R}_-^*$  et  $f''(x)$  s'annule en changeant de signe 0 donc  $I(0,3)$  est un point d'inflexion de  $(C_f)$

5) montrons que le point  $I(0;3)$  est un centre de symétrie de  $(C_f)$  ?

a) on a si  $x \in \mathbb{R}$  alors  $2 \times 0 - x = -x \in \mathbb{R}$

b) montrons que :  $f(-x) = 2 \times 3 - f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} ?$

$$f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) + 3 = -x^3 + 3x + 3$$

$$2 \times 3 - f(x) = 6 - f(x) = 6 - (x^3 - 3x + 3) = -x^3 + 3x + 3$$

donc  $f(-x) = 2 \times 3 - f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$  donc le

point  $I(0,3)$  est un centre de symétrie de  $(C_f)$

l'équation de la tangente  $(T)$  a la courbe  $(C_f)$  en

$$I(0;3) \text{ est : } (T) : y = f'(0)x + f(0) = -3x + 3$$

6) du tableaux de variation de  $f$

On deduit que  $f$  admet une valeur minimal en 1 sur l'intervalle  $[-1; +\infty[$  et c'est :  $f(1) = 1$

$$\text{Donc : } f(x) \geq f(1) = 1 \quad \forall x \in [-1; +\infty[$$

Et l'image de l'intervalle  $]-\infty; -1]$  par  $f$  est

l'intervalle  $]-\infty; 5]$  et  $0 \in ]-\infty; 5]$  donc il existe un

$\alpha$  de  $]-\infty; -1]$  tel que  $f(\alpha) = 0$  et puisque  $f$  est

strictement croissante sur  $]-\infty; -1]$  alors quelque

soit  $x \neq \alpha$  on a  $x < \alpha$  ou  $\alpha < x < -1$  donc

$$f(x) < f(\alpha) \text{ ou } f(\alpha) < f(x) < f(-1)$$

Donc :  $f(x) < 0$  ou  $0 < f(x) \leq 5$

Donc :  $\forall x \in ]-\infty; -1] - \{\alpha\}$  on a  $f(x) \neq 0$  donc  $\alpha$

est unique et on utilisant la calculatrice en vérifie

$$\text{que : } f(-2.2) \approx -1.04 \text{ et } f(-2.1) \approx 0.03$$

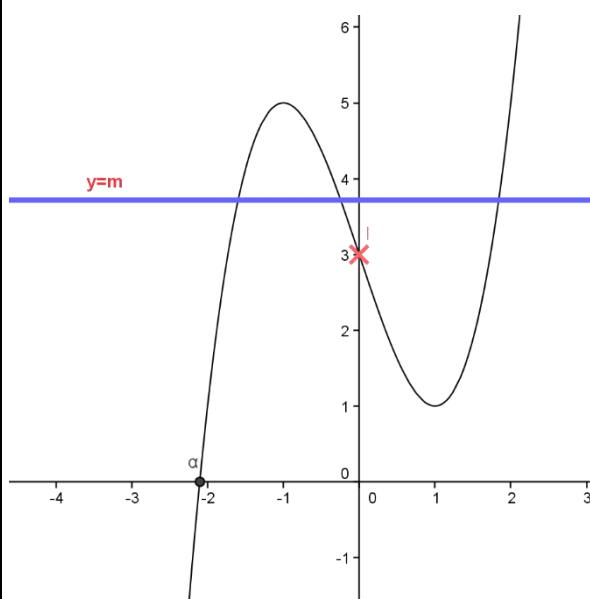
Donc d'après l'étude précédent on a alors :

$$-2.2 < \alpha < -2.1$$

On deduit que :  $f(x) > 0 \quad \forall x \in ]\alpha; +\infty]$  et

$$f(x) < 0 \quad \forall x \in ]-\infty; \alpha]$$

7) Tracer la courbe  $C_f$



Remarque : le signe de  $f(x)$  partir de  $(C_f)$  ?

a) sur  $]-\infty; \alpha]$   $f(x) \leq 0$  car  $(C_f)$  est au-dessous de l'axe des abscisses

b) sur  $]\alpha; +\infty]$   $f(x) \geq 0$  car  $(C_f)$  est au-dessus de l'axe des abscisses

$$7) x^3 - 3x + 3 = m \Leftrightarrow f(x) = m$$

Les solutions de l'équation :  $f(x) = m$  sont les

abscisses des points d'intersections de  $(C_f)$

avec la droite d'équation :  $y = m$

$m$	$m \in ]5; +\infty[ \cup ]-\infty; 1[$	$m = 1$ ou $m = 5$	$m \in ]1; 5[$
nombre de solutions	1	2	3



**Exercice 8** : soit  $f$  une fonction définie par :



$$f(x) = 2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}$$

- 1) déterminer  $D_f$  ensemble de définition de  $f$
- 2) étudier les branches infinies de la courbe  $(C_f)$
- 3) étudier la position de courbe  $(C_f)$  avec son asymptote horizontal
- 4) étudier les variations de  $f$  et dresser le tableaux de variation de  $f$
- 5) déterminer les points d'intersections de  $(C_f)$  avec l'axe des abscisses  $f$
- 6) montrer que la droite d'équation  $x = \frac{1}{2}$  est un axe de symétrie de  $(C_f)$
- 7) tracer la courbe  $(C_f)$

**Solution** : 1)  $x \in D_f \Leftrightarrow x \neq 0$  et  $x \neq 1$

donc :  $D_f = ]-\infty; 0[ \cup ]0; 1[ \cup ]1; +\infty[$

2) étude des branches infinies de la courbe  $(C_f)$

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} = 2$$

$$\text{Car : } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} = 0$$

Donc :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$

La droite  $(\Delta)$ :  $y = 2$  est une asymptote horizontal a la courbe  $C_f$  au voisinage de  $\pm\infty$

b) on a  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$  et

$$\lim_{x \rightarrow 0} 2 - \frac{1}{x-1} = 3$$

donc  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$

donc La droite  $(\Delta')$ :  $x = 0$  est une asymptote a la courbe  $C_f$

c) on a  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-1}{x-1} = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-1}{x-1} = +\infty$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow 1} 2 + \frac{1}{x} = 3$$

donc  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$

donc La droite  $(\Delta'')$ :  $x = 1$  est une asymptote a la courbe  $C_f$

3) étude de la position de courbe  $(C_f)$  avec son asymptote horizontal :  $(\forall x \in D_f)$

$$f(x) - 2 = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} = \frac{x-1-x}{x(x-1)} = \frac{-1}{x(x-1)}$$

si  $x \in ]0; 1[$  alors  $f(x) - 2 > 0$

Donc la courbe  $C_f$  est au-dessus de  $(\Delta)$ :  $y = 2$

si  $x \in ]-\infty; 0[ \cup ]1; +\infty[$  alors  $f(x) - 2 < 0$

Donc la courbe  $C_f$  est au-dessous de  $(\Delta)$ :  $y = 2$

5) déterminons les points d'intersections de  $(C_f)$

avec l'axe des abscisses :  $(\forall x \in D_f)$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - x - 1}{x(x-1)} = 0$$

$$2x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \text{ ou } x = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$$

Donc les points d'intersections de  $(C_f)$  avec

l'axe des abscisses sont :  $A\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}; 0\right)$  et  $B\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}; 0\right)$

6) montrons que la droite d'équation  $x = \frac{1}{2}$  est un

axe de symétrie de  $(C_f)$  :

On a :  $D_f = ]-\infty; 0[ \cup ]0; 1[ \cup ]1; +\infty[$

a) si  $x \in D_f$  alors  $1-x \in D_f$  en effet :

$$x \in \mathbb{R} - \{0; 1\} \Rightarrow x \neq 0 \text{ et } x \neq 1$$

$$\Rightarrow -x \neq 0 \text{ et } -x \neq -1 \Rightarrow 1-x \neq 1 \text{ et } 1-x \neq 0$$

$$\text{alors } 1-x \in \mathbb{R} - \{0; 1\}$$

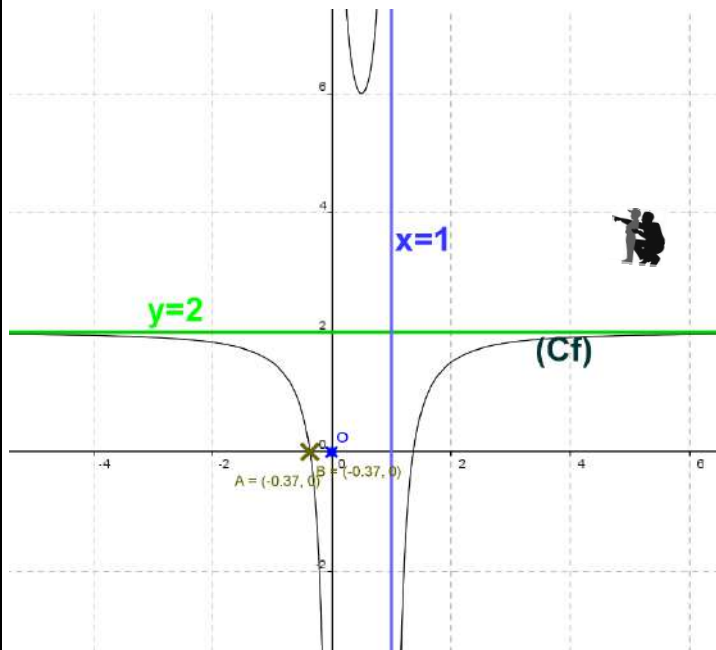
b) montrons que :  $f(1-x) = f(x) \forall x \in \mathbb{R} - \{0; 1\}$  ????

$$f(1-x) = 2 + \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x-1} = 2 + \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x} = 2 - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x}$$

donc  $f(1-x) = f(x) \forall x \in \mathbb{R} - \{0; 1\}$

donc la droite  $x = \frac{1}{2}$  est un axe de symétrie de la courbe  $C_f$





**Exercice9** : soit  $f$  une fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 3}$$

1) déterminer les limites aux bornes de  $D_f$

2) déterminer les réels  $a$  et  $b$  tel que :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 3} \quad \forall x \in D_f$$

3) étudier les branches infinies de la courbe  $(C_f)$

4) étudier les variations de  $f$  et dresser le tableau de variation de  $f$

5) montrer que le point  $\Omega(3;4)$  est un centre de symétrie de  $(C_f)$

6) calculer  $f''(x) \quad \forall x \in D_f$  et étudier la concavité de la courbe de  $f$

7) étudier la position de courbe  $(C_f)$  et son asymptote oblique  $(\Delta)$

8) Déterminer les points d'intersection de la courbe  $(C_f)$  avec les axes du repère

9) déterminer l'équation de la tangente  $(T)$  à la courbe  $(C_f)$  en  $x_0 = 2$

9) tracer la courbe  $(C_f)$

**Solution** : 1)  $x \in D_f \Leftrightarrow x \neq 3$

$$\text{donc : } D_f = \mathbb{R} - \{3\} = ]-\infty; 3[ \cup ]3; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 3} = \frac{4}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 3} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

2) on fait la division euclidienne de  $x^2 - 3x + 6$  par  $x - 3$  on trouve :  $x^2 - 2x + 1 = (x - 3)(x + 1) + 4$

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 3} = \frac{(x - 3)(x + 1) + 4}{x - 3} = x + 1 + \frac{4}{x - 3}$$

Donc :  $a = 1$  et  $b = 1$  et  $c = 4$

3) Les branches infinies de la courbe  $(C_f)$

a)  $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty$

donc La droite  $x = 3$  est une asymptote à la courbe  $C_f$

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

on a :  $f(x) = x + 1 + \frac{4}{x - 3} \Leftrightarrow f(x) - (x + 1) = \frac{4}{x - 3}$

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x - 3} = \frac{4}{+\infty} = 0$

Donc : la droite  $y = x + 1$  est une asymptote oblique à la courbe  $C_f$  au voisinage de  $+\infty$

d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x - 3} = \frac{4}{-\infty} = 0$

Donc : la droite  $y = x + 1$  est une asymptote oblique à la courbe  $C_f$  au voisinage de  $-\infty$

4) les variations de  $f$  et le tableau de variation ?

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{3\} : f'(x) = \left( x + 1 + \frac{4}{x - 3} \right)' = 1 - \frac{4}{(x - 3)^2} = \frac{(x - 3)^2 - 4}{(x - 3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(x - 3)^2 - 2^2}{(x - 3)^2} = \frac{(x - 3 - 2)(x - 3 + 2)}{(x - 3)^2} = \frac{(x - 5)(x - 1)}{(x - 3)^2}$$

Le signe de  $f'(x)$  est celui de  $(x - 5)(x - 1)$

$$(x - 5)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x - 5 = 0 \text{ OU } x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 5 \text{ OU } x = 1$$

Le tableau de signe :

$x$	$-\infty$	1	3	5	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+

Le tableau de variation

$x$	$-\infty$	1	3	5	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ 0 $\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$ 8 $\nearrow$	$+\infty$

5) Montrons que le point  $\Omega(3;4)$  est un centre de symétrie de  $(C_f)$  ??



a) Montrons que si  $x \in \mathbb{R} - \{3\}$  alors

$$6-x \in \mathbb{R} - \{3\} ?$$

$$x \in \mathbb{R} - \{3\} \Leftrightarrow x \neq 3 \Leftrightarrow -x \neq -3 \Leftrightarrow 6-x \neq 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6-x \in \mathbb{R} - \{3\}$$

b) Montrons que :  $f(6-x) + f(x) = 8 = 2b$  ?

$$f(6-x) + f(x) = 6-x+1 + \frac{1}{6-x-3} + x+1 + \frac{1}{x-3}$$

$$= 8 + \frac{1}{-x+3} + \frac{1}{x-3} = 8 - \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-3} = 8$$

Donc :  $\Omega(3;4)$  est un centre de symétrie de  $(C_f)$

6) étudie la concavité de la courbe de  $f$  ?

$$\forall x \in D_f : f'(x) = 1 - \frac{4}{(x-3)^2}$$

$$\text{Donc : } f''(x) = \frac{2(x-3)4}{(x-3)^4} = \frac{8(x-3)}{(x-3)^4}$$

Le signe de  $f''(x)$  est celui de  $x-3$

Si  $x > 3$   $(C_f)$  est convexe

Si  $x < 3$   $(C_f)$  est concave

$$7) f(x) - (x+1) = \frac{4}{x-3}$$

Si  $x > 3$  alors  $f(x) - (x+1) > 0$

Donc la courbe  $C_f$  est au-dessus de  $(\Delta)$

Si  $x < 3$  alors  $f(x) - (x+1) < 0$

Donc la courbe  $C_f$  est au-dessous de  $(\Delta)$

8) a) intersections avec l'axe des abscisses

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x + 1}{x-3} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{3\} :$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \quad \Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4 \times 1 \times 1 = 0$$

$$x = \frac{-b}{2a} = 1 \text{ donc le point d'intersection de la}$$

courbe  $(C_f)$  avec l'axe des abscisses est  $A(1;0)$

a) intersections avec l'axe des ordonnées

$$f(0) = -\frac{1}{3} \text{ donc le point d'intersection de la}$$

courbe  $(C_f)$  avec l'axe des ordonnées est  $C\left(0; -\frac{1}{3}\right)$

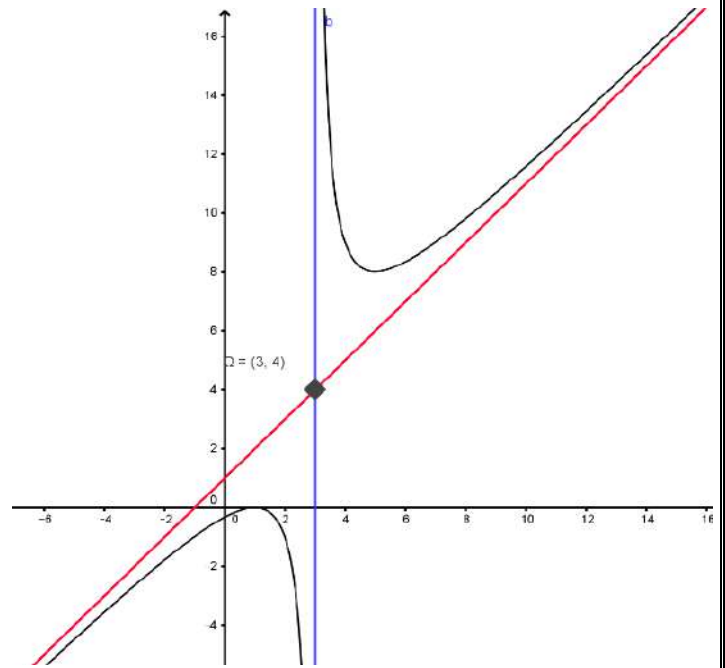
9) l'équation de la tangente  $(T)$  a la courbe  $(C_f)$

$$\text{en } x_0 = 2 \text{ est } y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$f'(2) = \frac{(2-5)(2-1)}{(2-3)^2} = \frac{-3}{1} = -3 \text{ et } f(2) = \frac{2^2 - 2 \times 2 + 1}{2-3} = -1$$

$$y = f(2) + f'(2)(x-2) \Leftrightarrow y = -1 - 3(x-2) \Leftrightarrow y = -3x + 5$$

9) La courbe  $(C_f)$  :



**Exercice 10:** Soit  $f$  la fonction définie par :

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}$$

1) Déterminer  $D_f$

2) Déterminer les limites aux bornes de  $D_f$

3) étudier les branches infinies de la courbe  $(C_f)$

4) étudier la dérivabilité de  $f$  adroite de 2 et à gauche de -1

5) étudier les variations de  $f$  et dresser le tableaux de variation de  $f$

6) tracer la courbe  $(C_f)$

**Solution :** 1)  $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - x - 2 \geq 0\}$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 1 + 8 = 9 = (3)^2 > 0$$

$$x_1 = -1 \text{ et } x_2 = 2$$

$x$	$-\infty$	$-1$	$2$	$+\infty$	
$x^2 - x - 2$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$

$$\text{Donc : } D_f = ]-\infty; -1] \cup [2; +\infty[$$

2) on a :  $\forall x \in D_f - \{0\}$

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2} = |x| \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}$$

$$\text{Et puisque : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} = 1$$

$$\text{Alors : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$



3) étude des branches infinies de la courbe ( $C_f$ )  
au voisinage de  $-\infty$  et  $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - x - 2} + x)(\sqrt{x^2 - x - 2} - x)}{\sqrt{x^2 - x - 2} + x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x - 2}{\sqrt{x^2 - x - 2} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1 - \frac{2}{x}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} + 1} = -\frac{1}{2}$$

Donc : la droite  $y = x - \frac{1}{2}$  est une asymptote

oblique à la courbe  $C_f$  au voisinage de  $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - x - 2} + x)(\sqrt{x^2 - x - 2} - x)}{\sqrt{x^2 - x - 2} - x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x - 2}{\sqrt{x^2 - x - 2} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1 - \frac{2}{x}}{-\sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} - 1} = \frac{1}{2}$$

Donc : la droite  $y = -x + \frac{1}{2}$  est une asymptote

oblique à la courbe  $C_f$  au voisinage de  $-\infty$

4) étude de la dérivabilité de  $f$  adroite de 2 et à gauche de -1

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\sqrt{x^2 - x - 2}}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 - x - 2}} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x^2 - x - 2}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 - x - 2}} = +\infty$$

Donc  $f$  n'est pas dérivable à droite de 2

et à gauche de -1

Alors la courbe  $C_f$  admet une demi-tangente verticale aux points  $A(-1, 0)$  et  $B(2, 0)$

5) étude des variations de  $f$  et le tableaux de variation de  $f$  ?

$$x^2 - x - 2 > 0 \Leftrightarrow \forall x \in ]-\infty; -1[ \cup ]2; +\infty[$$

Donc :

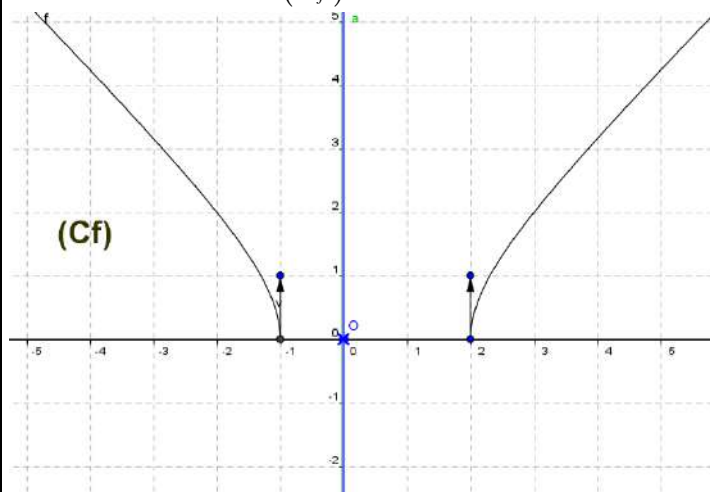
$$f'(x) = (\sqrt{x^2 - x - 2})' = \frac{(x^2 - x - 2)'}{2\sqrt{x^2 - x - 2}} = \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x - 2}}$$

$$f'(x) = \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x - 2}} \quad \forall x \in ]-\infty; -1[ \cup ]\frac{1}{2}; +\infty[$$

Le signe de  $f'(x)$  est celui de :  $2x - 1$

$x$	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	-			+
$f(x)$	$+\infty$			$+\infty$

6) tracer la courbe ( $C_f$ )



**Exercice 11:** soit  $f$  une fonction définie par :

$$f(x) = 2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

1) déterminer  $D_f$  ensemble de définition de  $f$

2) montrer que  $f$  est périodique de période

$T = \pi$  et en déduire le domaine d'étude de  $f$

3) déterminer  $f'(x)$  et dresser le tableaux de variation de  $f$

4) tracer la courbe ( $C_f$ ) sur l'intervalle  $[-\pi; \pi]$

**Solution :**

1)  $D_f = \mathbb{R}$

2) a) si  $x \in \mathbb{R}$  alors  $\pi + x \in \mathbb{R}$

b)

$$f(\pi + x) = 2 \cos\left(2(\pi + x) + \frac{\pi}{4}\right) = 2 \cos\left(2x + 2\pi + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$f(\pi + x) = 2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = f(x)$$

Donc :  $f$  est périodique de période  $T = \pi$

Remarque : la fonction :  $x \rightarrow \cos(ax + b)$  est

périodique de période  $T = \frac{2\pi}{|a|}$  si  $a \neq 0$

Un domaine d'étude de  $f$

il suffit d'étudier  $f$  sur un intervalle de longueur  $T = \pi$

donc par exemple :  $D_E = [0; \pi]$



3)  $f'(x)$  et le tableaux de variation de  $f$  ?

$f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $\forall x \in \mathbb{R}$  on a :

$$f'(x) = 2 \times -2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -4 \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

Etude du signe de  $f'(x)$  sur  $D_E = [0; \pi]$

$$x \in [0; \pi] \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} \leq 2x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{9\pi}{4}$$

On utilisant le cercle trigo en deduit le signe de

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

Le tableau de signe de  $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$  est :

$2x + \frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\pi$	$2\pi$	$\frac{9\pi}{4}$	
$\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$	+	0	-	0	+

le tableau de variation de  $f$  :

$x$	0	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	$\pi$			
$f'(x)$	-	0	+	0	-		
$f(x)$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	$-2$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$\sqrt{2}$

4) du tableau de variation de  $f$  : on deduit que Que  $f$  change de signe en sur les intervalles

$\left[0; \frac{3\pi}{8}\right]$  et  $\left[\frac{3\pi}{8}; \frac{7\pi}{8}\right]$  cad  $(C_f)$  coupe l'axe des

abscisses

On va résoudre dans  $I = \left[0; \frac{7\pi}{8}\right]$  l'équation :

$$f(x) = 0$$

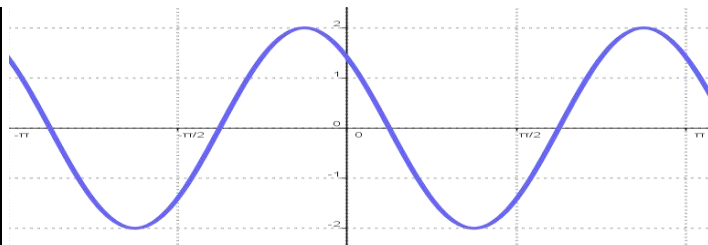
$$\text{On a : } \begin{cases} f(x) = 0 \\ x \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \frac{\pi}{4} \leq 2x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{9\pi}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \text{ ou } 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{2} \\ x \in I \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{8}$$

On trace la courbe  $(C_f)$  sur l'intervalle

$$D_E = [0; \pi]$$

Et on deduit le reste par les translations de vecteurs  $k\pi \vec{i}$   $k \in \mathbb{Z}$



**Exercice12:** soit  $f$  une fonction définie par :

$$f(x) = 4 \sin x + \cos 2x$$

- déterminer  $D_f$  ensemble de définition de  $f$
- montrer que  $f$  est périodique de période  $T = 2\pi$  et en déduire le domaine d'étude de  $f$
- déterminer  $f'(x)$  et dresser le tableaux de variation de  $f$
- donner l'équation de la tangente  $(T)$  a la courbe de  $f$  en en  $x_0 = 0$

5) calculer  $f''(x)$  en fonction de  $\sin x$

6) déterminer les points d'inflexions de la courbe  $(C_f)$

7) tracer la courbe  $(C_f)$  sur l'intervalle  $[-2\pi; 4\pi]$

**Solution :** 1)  $D_f = \mathbb{R}$

2)a) si  $x \in \mathbb{R}$  alors  $2\pi + x \in \mathbb{R}$

$$b) f(2\pi + x) = 4 \sin(x + 2\pi) + \cos(2(x + 2\pi))$$

$$f(2\pi + x) = 4 \sin x + \cos(2x) = f(x)$$

Donc :  $f$  est périodique de période  $T = 2\pi$

Un domaine d'étude de  $f$

il suffit d'étudier  $f$  sur un intervalle de longueur  $T = 2\pi$

donc par exemple :  $D_E = [0; 2\pi]$

$f$  est dérivable sur  $D_E = [0; 2\pi]$  et  $\forall x \in D_E$

on a :

$$f'(x) = 4 \cos x - 2 \sin(2x) = 4 \cos x - 4 \cos x \sin x$$

$$f'(x) = 4 \cos x (1 - \sin x)$$

Etude du signe de  $f'(x)$  sur  $D_E = [0; 2\pi]$

On a :  $1 - \sin x \geq 0$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x (1 - \sin x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \text{ ou } 1 - \sin x = 0$$

$$1 - \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} \quad \text{Donc :}$$



$x$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	1	3	-5	1	

4) l'équation de la tangente ( $T$ ) a la courbe de  $f$  en en  $x_0 = 0$  est :  $y = f(0) + f'(0)(x - 0)$

Avec :  $f'(0) = 4$  et  $f(0) = 1$  donc :  $y = 4x + 1$

5) calcule de  $f''(x)$  en fonction de  $\sin x$  :

On a  $f'(x) = 4\cos x - 2\sin(2x)$

**Donc** :  $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f''(x) = -4\sin x - 4\cos(2x) = -4\sin x - 4(1 - 2\sin^2 x)$$

$$f''(x) = 8\sin^2 x - 4\sin x - 4 = 4(\sin^2 x - \sin x - 1)$$

Etude du signe de  $f''(x)$  sur  $D_E = [0; 2\pi]$

On pose :  $X = \sin x$  donc :  $X \in [-1; 1]$  et l'équation

$$\sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \text{ devient : } X^2 - X - 1 = 0$$

$\Delta = 9$  les solutions sont :  $X_1 = -\frac{1}{2}$  et  $X_2 = 1$

$$\text{Donc : } f''(x) = 8(\sin x - 1) \left( \sin x + \frac{1}{2} \right)$$

On a :  $\sin x - 1 \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

En utilisant le cercle trigo en deduit que :

$$\sin x + \frac{1}{2} \leq 0 \Leftrightarrow \sin x \leq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left[ \frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6} \right]$$

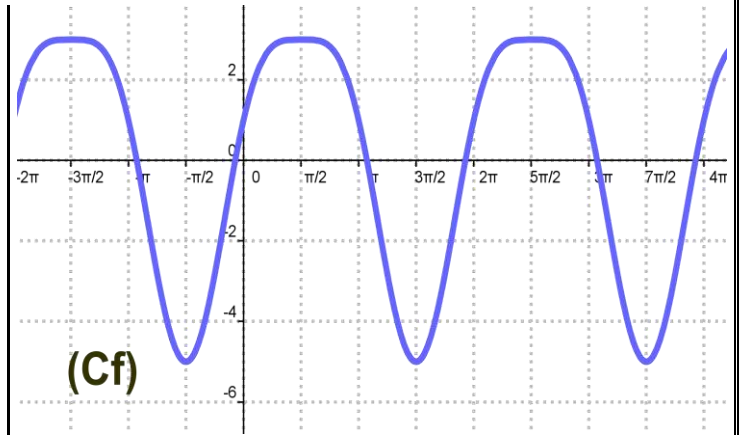
$x$	0	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$	
$f''(x)$	-	0	+	0	-

Donc :  $(C_f)$  est convexe sur  $\left[ \frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6} \right]$

$(C_f)$  est concave sur  $\left[ 0; \frac{7\pi}{6} \right] \cup \left[ \frac{11\pi}{6}; 2\pi \right]$  et  $A \left( \frac{7\pi}{6}; -\frac{3}{2} \right)$

et  $B \left( \frac{11\pi}{6}; -\frac{3}{2} \right)$  sont les points d'inflexions de  $(C_f)$

7) La courbe  $(C_f)$  sur l'intervalle  $[-2\pi; 4\pi]$



**Exercice13:** soit  $f$  une fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$$

1) déterminer  $D_f$  ensemble de définition de  $f$

2) montrer qu'il suffit d'étudier  $f$  sur  $[0; \pi]$

3) déterminer  $f'(x)$  et dresser le tableaux de variation de  $f$

4) tracer la courbe  $(C_f)$  sur l'intervalle  $[-2\pi; 2\pi]$

**Solution :** 1)  $D_f = \mathbb{R}$  car  $2 + \cos x \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2) Un domaine d'étude de  $f$

a) si  $x \in \mathbb{R}$  alors  $2\pi + x \in \mathbb{R}$

$$f(2\pi + x) = \frac{\sin(2\pi + x)}{2 + \cos(2\pi + x)} = \frac{\sin x}{2 + \cos x} = f(x)$$

Donc :  $f$  est périodique de période  $T = 2\pi$

il suffit d'étudier  $f$  sur un intervalle de longueur

$T = 2\pi$  donc par exemple :  $D = [-\pi; \pi]$

Etudions la parité de  $f$  ?

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{2 + \cos(-x)} = -\frac{\sin x}{2 + \cos x} = -f(x)$$

Donc  $f$  est impair

Donc il suffit d'étudier  $f$  sur  $D_E = [0; \pi]$

3)  $f$  est dérivable sur  $D_E = [0; \pi]$  et  $\forall x \in D_E$

on a :

$$f'(x) = \frac{\cos x (2 + \cos x) + \sin x \times \sin x}{(2 + \cos x)^2} = \frac{2\cos x + 1}{(2 + \cos x)^2}$$

Etude du signe de  $f'(x)$  sur  $D_E = [0; \pi]$

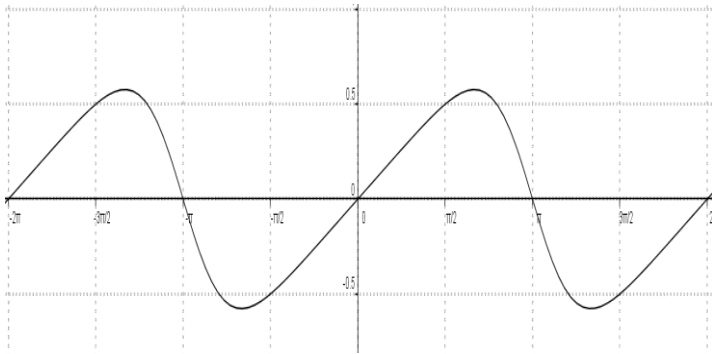
Le signe de  $f'(x)$  est celui de :  $2\cos x + 1$

$$2\cos x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \cos x \geq -\frac{1}{2} \quad \text{Et } x \in [0; \pi] \text{ Donc :}$$

$$2\cos x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left[ 0; \frac{2\pi}{3} \right]$$



$x$	0	$\frac{2\pi}{3}$	$\pi$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0



### Autre exercices

**Exercice1** : Soit  $f$  la fonction définie par :

$$f(x) = 2x^2 + 2x - 1$$

- Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ .
- Déterminer les limites de  $f$  aux bornes de  $D_f$ .
- Interpréter géométriquement les résultats obtenus.

**Exercice2** : Soit  $g$  la fonction définie par :

$$g(x) = \frac{2x^2 - x}{x-1}$$

- Déterminer l'ensemble de définition  $D_g$ .
- Déterminer les limites aux bornes de  $D_g$
- Effectuer la division de

$$P(x) = 2x^2 - x \text{ sur } (x - 1)$$

puis en déduire que  $(\forall x \in D_g) g(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x-1}$

- Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) - (2x + 1)$

On dit que la droite  $(\Delta): y = 2x + 1$  est une asymptote oblique à la courbe  $C_f$  au voisinage de  $+\infty$

**Exercice3** : Soit la fonction  $h$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$h(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

- Déterminer le domaine de définition de  $h$  et étudier sa parité.
- Etudier les limites en  $+\infty$  et  $-\infty$
- Déterminer la fonction dérivée de la fonction  $h$  et dresser le T.V
- Déterminer l'équation de la tangente en  $O(0,0)$
- Etudier les positions relatives de  $T$  et la courbe
- Tracer la courbe  $C_f$

**Exercice4** : Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = x - E(x)$$

- Tracer la courbe de la fonction  $f$  sur  $[0,2[$ .
- Etudier la limite  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1}$
- Que remarquer vous ?

**C'est en forgeant que l'on devient forgeron »  
Dit un proverbe.**

**C'est en s'entraînant régulièrement aux  
calculs et exercices**

**Que l'on devient un mathématicien**



# VECTEURS DE L'ESPACE

## I) DEFINITION : Vecteur de l'espace

**Définition :** Soient  $A, B$  deux points dans l'espace  $\mathcal{E}$

Si  $A$  et  $B$  sont distinctes alors Pour tout point  $M$  dans l'espace  $\mathcal{E}$  il existe un point unique  $N$  dans l'espace  $\mathcal{E}$  tel que :  $MABN$  est un

parallélogramme et est écrit :  $\vec{u} = \vec{AB} = \vec{MN}$

Si  $A$  et  $B$  sont confondues alors :  $\vec{0} = \vec{AA} = \vec{MN}$  (vecteur nul)

**Remarques :** Si  $O$  un point dans l'espace  $\mathcal{E}$  alors pour tout vecteur  $\vec{u}$  de l'espace il existe un point unique  $M$  dans l'espace  $\mathcal{E}$  tel que :  $\vec{OM} = \vec{u}$

L'application :  $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow V_3$

$$M \mapsto \vec{OM} = \vec{u} \text{ est une bijection}$$

L'ensemble des vecteurs se note  $V_3$

Un vecteur non nul  $\vec{u} = \vec{AB}$  est caractérisé par :

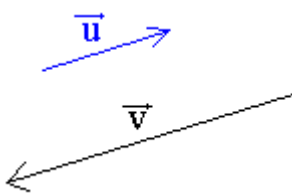
Sa direction : c'est la direction de la droite  $(AB)$

Son sens : de  $A$  à  $B$

Sa norme :  $\|\vec{u}\| = \|\vec{AB}\| = AB$

Deux vecteurs sont **égaux** s'ils ont la même direction, le même sens, la même norme.

Deux vecteurs peuvent avoir la **même direction** de tels vecteurs sont **colinéaires**



$\vec{AB} = \vec{MN}$  ssi  $ABNM$  est un parallélogramme

## II) LES OPERATIONS DANS $V_3$ .

### 1) L'addition.

**Définition :**  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non nuls de  $V_3$  ; Soient les points  $O : A ; B$

tel que  $\vec{u} = \vec{OB}$  et  $\vec{v} = \vec{OC}$

la somme des deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est le vecteur  $\vec{u} + \vec{v} = \vec{OD}$  tel que :  $OBDC$  est un parallélogramme

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OD}$$

**Propriété :** L'addition dans  $V_3$  a les propriétés suivantes :

L'addition dans  $V_3$  est **commutative** :

$$\forall \vec{u} \in V_3 \text{ et } \forall \vec{v} \in V_3 \quad \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$$

L'addition dans  $V_3$  est **associative**  $\forall \vec{u} \in V_3$  et

$$\forall \vec{v} \in V_3 \text{ et } \forall \vec{w} \in V_3$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{v} + (\vec{u} + \vec{w})$$

$\vec{0}$  Est l'**élément neutre** pour l'addition dans

$$V_3. \forall \vec{u} \in V_3 : \vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$$

Tout vecteur  $\vec{u}$  de  $V_3$  admet un **opposé**

$$\text{noté } -\vec{u} : \vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$$

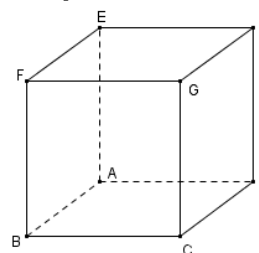
Puisque la somme de deux vecteurs vérifie les quatre propriétés précédentes on dit que :

$(V_3, +)$  est un groupe commutatif.

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de  $V_3$  la différence des deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est la somme de  $\vec{u}$  et de  $(-\vec{v})$  et se note :  $\vec{u} - \vec{v}$

$$\text{et on a donc : } \vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$$

### Exemple :



ABCDEFGH un cube on pose :

Simplifier :

$$\vec{t} = \vec{DC} + \vec{DE} + \vec{FH}$$

**Solution :**

$$\text{On a : } \vec{AB} = \vec{DC}$$

$$\vec{t} = \vec{DC} + \vec{DE} + \vec{FH} = \vec{AB} + (\vec{DA} + \vec{AE}) + \vec{FH}$$

(Relation de Chasles)

$$\vec{t} = \vec{DA} + \vec{AB} + \vec{AE} + \vec{FH} = \vec{DB} + \vec{AE} + \vec{BD} \text{ Car}$$

$\vec{FH} = \vec{BD}$  (FHDB est un parallélogramme)

$$\vec{t} = \vec{BD} + \vec{DB} + \vec{AE} = \vec{BB} + \vec{AE} = \vec{0} + \vec{AE} = \vec{AE}$$

### 2) Produit d'un vecteur par un réel.

**Définition :**  $\forall \vec{u} \in V_3$  et  $\forall \vec{v} \in V_3$

Soit  $\vec{u}$  un vecteur non nul et  $k$  un réel non nul et on pose :  $\vec{u} = \vec{AB}$

sur la droite  $(AB)$  il existe un seul point  $C$  tel que  $\vec{AC} = k\vec{u}$

Le vecteur  $\vec{v} = k\overrightarrow{AB} = k\vec{u}$  s'appelle le produit du réel  $k$  et du vecteur  $\vec{u}$

on pose pour tout  $k$  dans  $\mathbb{R}$  :

$$k\vec{0} = \vec{0} \text{ et } \forall \vec{u} \in V_3 \quad 0\vec{u} = \vec{0}$$

$$\text{on a : } k\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } k = 0$$

**Propriété :** Le produit d'un vecteur par un réel a les propriétés suivantes :

$$\forall \vec{u} \in V_3 \text{ et } \forall \vec{v} \in V_3 \text{ et } \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall \beta \in \mathbb{R}$$

$$1) \alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v} \quad 2) (\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$$

$$3) 1\vec{u} = \vec{u} \quad 4) \alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u}$$

Puisque  $(V_3, +)$  est un groupe commutatif et le produit d'un réel par un vecteur vérifie les quatre propriétés précédente on dit que :

**$(V_3, +, \cdot)$  est un espace vectoriel réel.**

**Remarque :**

$$\forall \vec{u} \in V_3 \text{ et } \forall \vec{v} \in V_3 \text{ et } \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall \beta \in \mathbb{R}$$

$$1) \alpha(\vec{u} - \vec{v}) = \alpha\vec{u} - \alpha\vec{v} \quad 2) (\alpha - \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} - \beta\vec{u}$$

$$3) \alpha(-\beta\vec{u}) = (-\alpha)(\beta\vec{u}) = -\alpha\beta\vec{u}$$

### III) VECTEURS COLINEAIRES.

#### 1) Vecteur colinéaires

**Définition :** On dit que deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires s'il existe un réel  $k$  tel que :

$$\vec{v} = k \cdot \vec{u}$$

**Remarque :** Tout vecteur est colinéaire avec lui-même :  $\vec{u} = k \cdot \vec{u}$

Tout vecteur est colinéaire avec  $\vec{0}$

$$\text{car : } \vec{u} \cdot 0 = \vec{0}$$

On a :  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$  alors  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires ssi  $(AB) \parallel (CD)$

Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont non colinéaires alors  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont non nuls

A et B et C non alignés ssi  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  sont colinéaires

A et B et C non alignés  $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} / \overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$

**Exemple :** ABCDEFGH un cube et K milieu du segment  $[EF]$  et L milieu du segment  $[CF]$  et

M un point du segment  $[CD]$  tel que :

$$\overrightarrow{CM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CD} \text{ Montrer que : } (ML) \parallel (DK)$$

**Solution :** en utilisant la Relation de Chasles

On a :  $\overrightarrow{ML} = \overrightarrow{CL} - \overrightarrow{CM}$  et puisque : L milieu du

segment  $[CF]$  Alors :  $\overrightarrow{CL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CF}$

$$\text{donc : } \overrightarrow{ML} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CF} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}\right) \quad (1)$$

D'autre part On a :  $\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FK}$  et

$$\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{CK} - \overrightarrow{CD} \text{ Donc : } \overrightarrow{DK} = \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FK} - \overrightarrow{CD}$$

et puisque : K milieu du segment  $[EF]$

$$\text{Alors : } \overrightarrow{FK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FE} \text{ donc : } \overrightarrow{FK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} \text{ (car : } \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{CD}\text{)}$$

$$\text{Donc : } \overrightarrow{DK} = \overrightarrow{CF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CF} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} \quad (2)$$

$$\text{De (1) et (2) on a : } \overrightarrow{ML} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DK}$$

donc  $\overrightarrow{DK}$  et  $\overrightarrow{ML}$  sont colinéaires

Donc :  $(ML) \parallel (DK)$

**Propriété :** Si on a :  $a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{0}$  avec

$a \neq 0$  ou  $b \neq 0$  alors  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires

**Exemple :**  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non colinéaires

Déterminer les réels  $x$  et  $y$  tels que :

$$x(\vec{u} + 2\vec{v}) + y(\vec{u} + 3\vec{v}) = 2\vec{u} + 5\vec{v}$$

$$\text{Solution : } x(\vec{u} + 2\vec{v}) + y(\vec{u} + 3\vec{v}) = 2\vec{u} + 5\vec{v} \Leftrightarrow$$

$$(x + y - 2)\vec{u} + (2x + 3y - 5)\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 2x + 3y - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

#### 2) Droite vectorielle

**Définition :** Soit  $\vec{u}$  un vecteur non nul, l'ensemble des vecteurs colinéaires avec le vecteur  $\vec{u}$  s'appelle : **la droite vectorielle**

**engendrée par le vecteur  $\vec{u}$  et se note  $\Delta_{\vec{u}}$**

$$\Delta_{\vec{u}} = \left\{ \vec{v} \in V_3 / \exists k \in \mathbb{R} / \vec{v} = k\vec{u} \right\}$$

$$\Delta_{\vec{u}} = \Delta_{\vec{v}} \Leftrightarrow \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires}$$

Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ne sont pas colinéaires

$$\text{alors } \Delta_{\vec{u}} \cap \Delta_{\vec{v}} = \left\{ \vec{0} \right\}$$

#### 3) Détermination vectorielle d'une droite

**Définition :** Soient  $\vec{u}$  un vecteur non nulle et A un point de l'espace affine  $\mathcal{E}$ . L'ensemble des points M dans l'espace  $\mathcal{E}$  qui vérifient  $\overrightarrow{AM} = k\vec{u}$

où  $k$  est un réel s'appelle la droite qui passe par  $A$  et de vecteur directeur  $\vec{u}$ . On la note par  $D(A; \vec{u})$  :

$$D(A; \vec{u}) = \{M \in \mathcal{E} / \exists k \in \mathbb{R} / \overrightarrow{AM} = k\vec{u}\}$$

**Remarque :**

- Le couple  $(A, \vec{u})$  détermine un repère sur la droite  $D(A; \vec{u})$
- Tout vecteur non nul et colinéaire avec  $\vec{u}$  est aussi vecteur Directeur de la droite  $D(A; \vec{u})$

#### IV) VECTEURS COPLANAIRES.

##### 1) vecteurs coplanaires.

**Rappelle :**

Un plan est défini par :

- Trois points non alignés
- Deux droites sécantes ou strictement parallèles.
- Une droite et un point extérieur à cette droite.

**Définition :** Soient  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  trois vecteurs et  $A$  un point l'espace

on pose  $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ ,  $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$  et  $\overrightarrow{AD} = \vec{w}$

On dit que : les vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont coplanaires ssi les points  $A, B, C$  et  $D$  sont coplanaires

**Propriété :** Soient  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  trois vecteurs dans l'espaces vectoriel

Les vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont coplanaires si et seulement s'ils existent deux réels  $x$  et  $y$  tels que  $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$

**Remarque :** si  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  sont deux vecteurs colinéaires alors les vecteurs  $\vec{w}$  et  $\vec{v}$  et  $\vec{u}$  sont coplanaires

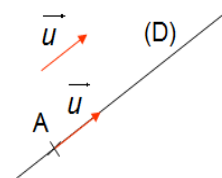
##### 2) Plan vectoriel

**Définition :** Soient  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  deux vecteurs non colinéaires ; l'ensemble des vecteurs  $\vec{w}$  dans  $V_3$  qui s'écrivent de la forme :  $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$  où  $x$  et  $y$  sont des réels s'appelle le plan vectoriel engendré par  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$

##### 3) Détermination vectoriel d'un plan.

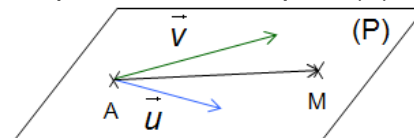
**Définition :** Soient  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  deux vecteurs non colinéaires et  $A$  un point de l'espace  $\mathcal{E}$  l'ensemble des point  $M$  dans l'espace qui vérifient  $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$  est le plan qui passe par  $A$  et de vecteurs directeurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ , on le note

par :  $P(A; \vec{u}; \vec{v})$



$$P(A; \vec{u}; \vec{v}) = \{M \in \mathcal{E} / \exists x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} / \overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}\}$$

Le triplet  $R(A; \vec{u}; \vec{v})$  s'appelle un repère du plan (P) et le couple  $(x, y)$  s'appelle les coordonnées du point  $M$  dans le plan (P) muni du repère  $R$



**Exemple :** ABCDEFGH un parallélépipède de centre O et I milieu du segment  $[AD]$

on pose  $\overrightarrow{EG} = \vec{u}$ ,  $\overrightarrow{FC} = \vec{v}$  et  $\overrightarrow{IO} = \vec{w}$

Montrer que :  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont coplanaires

**Solution :** On a :  $\overrightarrow{EG} = \vec{u}$  et on a  $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC}$  donc  $\overrightarrow{AC} = \vec{u}$

On considère le triangle ADF

et puisque : I milieu du segment  $[AD]$

et O milieu du segment  $[FD]$

on trouve :  $\overrightarrow{IO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AF}$  Donc :  $\overrightarrow{IO} = \overrightarrow{AK}$

et puisque : K milieu du segment  $[AF]$

cad  $\overrightarrow{AK} = \vec{w}$

et On considérons le point L tel que AFCL est un parallélogramme on trouve :  $\vec{v} = \overrightarrow{AL}$

Alors :  $\overrightarrow{AC} = \vec{u}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{AL}$  et  $\overrightarrow{AK} = \vec{w}$

Donc :  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont coplanaires

**Exemple :** ABCDEFGH un cube

M milieu du segment  $[HE]$  et N milieu du

segment  $[HG]$

Les vecteurs  $\overrightarrow{MN}$ ,  $\overrightarrow{CH}$  et  $\overrightarrow{AC}$  sont-ils coplanaires ? justifier

**Solution :** On considérons le triangle HEG et puisque : M milieu du segment  $[HE]$  N milieu du segment  $[HG]$  on trouve :  $\overrightarrow{EG} = 2\overrightarrow{MN}$

et puisque  $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC}$  : alors  $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{MN}$  donc

Les vecteurs  $\overrightarrow{MN}$  et  $\overrightarrow{AC}$  sont colinéaires et par suite Les vecteurs  $\overrightarrow{MN}$ ,  $\overrightarrow{CH}$  et  $\overrightarrow{AC}$  sont coplanaires

#### V) PARALLELISME DANS L'ESPACE

##### 1) Parallélisme de deux droites

**Définition :** Soient  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  deux vecteurs et et A et B deux points de l'espace

1)  $D(A; \vec{u}) \parallel D(B; \vec{v}) \Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v}$  sont colinéaires

2) A et B et C et D des points tels que :  $A \neq B$  et  $C \neq D$  :  $(AB) \parallel (CD) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}; \overline{CD} = \overline{AB}$

**Exercice 01:** ABCD un tétraèdre et E le milieu du [BC] et soit les points Q ; P ; N ; M tel que :

$$\overline{AN} = 2\overline{AD} \quad \overline{CQ} = 3\overline{CB} \quad \overline{CP} = 3\overline{CD} \quad \overline{AM} = 2\overline{AB}$$

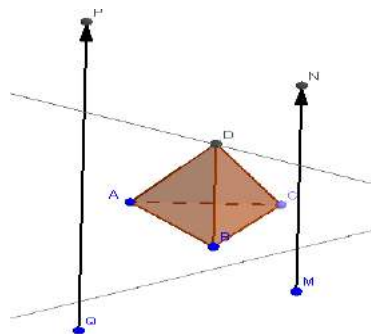
1) Tracer une figure

2) Ecrire  $\overline{MN}$  et  $\overline{PQ}$  en fonction de  $\overline{BD}$

3) En déduire que  $\overline{MN}$  et  $\overline{PQ}$  sont colinéaires

4) Que peut-on dire des droites (MN) et (PQ)

**Solution :1)**



$$2) \overline{MN} = \overline{MA} + \overline{AN} = -\overline{AM} + \overline{AN} = -2\overline{AB} + 2\overline{AD}$$

$$\overline{MN} = 2\overline{BA} + 2\overline{AD} = 2(\overline{BA} + \overline{AD}) = 2\overline{BD}$$

$$\overline{PQ} = \overline{PC} + \overline{CQ} = -\overline{CP} + \overline{CQ} = -3\overline{CD} + 3\overline{CB} = -3(\overline{CD} - \overline{CB})$$

$$\overline{PQ} = -3(\overline{CD} + \overline{BC}) = -3(\overline{BC} + \overline{CD}) = -3\overline{BD}$$

$$3) \text{ on a } \overline{MN} = 2\overline{BD} \text{ donc } \overline{BD} = \frac{1}{2}\overline{MN} \text{ ①}$$

$$\text{on a } \overline{PQ} = -3\overline{BD} \text{ donc } \overline{BD} = -\frac{1}{3}\overline{PQ} \text{ ②}$$

$$\text{de ① et ② on trouve : } \frac{1}{2}\overline{MN} = -\frac{1}{3}\overline{PQ} \text{ donc } \overline{MN} = -\frac{2}{3}\overline{PQ}$$

donc :  $\overline{MN}$  et  $\overline{PQ}$  sont colinéaires

4) on a  $\overline{MN}$  et  $\overline{PQ}$  sont colinéaires

Donc (MN) et (PQ) sont parallèles

**Exercice 02 :** ABCD un tétraèdre et E le milieu du [BC] et soit les points K ; L tel que :

$$\overline{CL} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC}) \text{ et } \overline{DK} = \frac{1}{4}\overline{CB} - \frac{1}{2}\overline{AD}$$

Montrer que (LD)  $\parallel$  (EK)

**Solution :** pour montrer que (LD)  $\parallel$  (EK) il suffit

de montrer que :  $\overline{LD}$ ,  $\overline{EK}$  sont colinéaires ??

On a :  $\overline{DK} = \frac{1}{4}\overline{CB} - \frac{1}{2}\overline{AD}$  on utilisant la Relation de

Chasles

$$\text{Donc : } \overline{AK} - \overline{AD} = \frac{1}{4}\overline{AB} - \frac{1}{4}\overline{AC} - \frac{1}{2}\overline{AD}$$

$$\text{Donc : } \overline{EK} = \left( \frac{1}{4}\overline{AB} - \frac{1}{4}\overline{AC} + \frac{1}{2}\overline{AD} \right) - \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC}) \text{ et}$$

puisque :  $\overline{EK} = \overline{AK} - \overline{AE}$

$$\text{Donc : } \overline{EK} = \left( \frac{1}{4}\overline{AB} - \frac{1}{4}\overline{AC} + \frac{1}{2}\overline{AD} \right) - \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC})$$

$$\text{Alors : } \overline{EK} = \frac{1}{4}\overline{AB} - \frac{1}{4}\overline{AC} + \frac{1}{2}\overline{AD} \text{ ①}$$

$$\text{On a : } \overline{AL} = \overline{AC} + \overline{CL} = \overline{AC} + \frac{1}{2}\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{AC} = \frac{1}{2}\overline{AB} + \frac{3}{2}\overline{AC}$$

$$\text{et puisque : } \overline{LD} = \overline{AD} - \overline{AL} = -\frac{1}{2}\overline{AB} - \frac{3}{2}\overline{AC} + \overline{AD} \text{ ②}$$

$$\text{de ① et ② on déduit que : } \overline{EK} = \frac{1}{2}\overline{LD}$$

donc : (LD)  $\parallel$  (EK)

**2) Parallélisme d'une droite et d'un plan.**

**Propriété :** La droite  $D(A; \vec{u})$  et le plan P

$P(B; \vec{v}; \vec{w})$  sont parallèles si et seulement si les

vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont coplanaires

$$D(A; \vec{u}) \parallel P(B; \vec{v}; \vec{w}) \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} / \vec{u} = x\vec{v} + y\vec{w}$$

**Exemple :** ABCDEFGH un cube

K est le symétrique du point D par rapport a H

Montrer que (AK)  $\parallel$  (BCG)

**Solution : on a :**  $\overline{AK} = \overline{AD} + 2\overline{DH} = \overline{BC} + 2\overline{CG}$

donc : Les vecteurs  $\overline{AK}$ ,  $\overline{CB}$  et  $\overline{CG}$  sont coplanaires

on déduit que :  $\exists x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} / \overline{AK} = x\overline{CB} + y\overline{CG}$

donc : (AK)  $\parallel$  (BCG)

**3) Parallélisme de deux plans**

**Propriété :** Deux plans  $P(A; \vec{u}; \vec{v})$  et  $Q(B; \vec{u}'; \vec{v}')$

sont parallèles si et seulement si

$\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{u}'$  sont coplanaires et  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{v}'$  sont coplanaires aussi

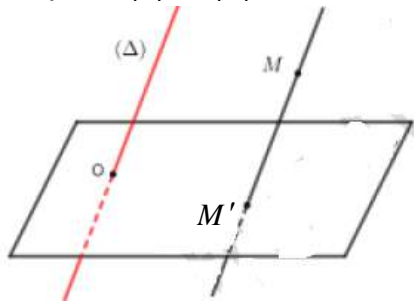
**Remarque :** Une seule condition n'est pas suffisante

# Géométrie analytique de l'espace

## I) LE REPERE DANS L'ESPACE et LA BASE DANS $V_3$

### 1) La projection sur un plan parallèlement à une droite.

1.1 Définition : Considérons un plan  $(P)$  dans l'espace  $(\mathcal{E})$  et  $(\Delta)$  une droite qui coupe



$(P)$  en  $O$ . Soit  $M$  un point dans l'espace  $(\mathcal{E})$ ; on sait que par  $M$  passe une seule droite parallèle à  $(\Delta)$ , donc elle coupe

le plan  $(P)$  en un seul point  $M'$ . Le point  $M'$  s'appelle la projection du point  $M$  sur le plan  $(P)$  parallèlement à la droite  $(\Delta)$ .

Ainsi ; on définit l'application :

$$p: (\mathcal{E}) \rightarrow (P)$$

$$M \mapsto M' = p(M)$$

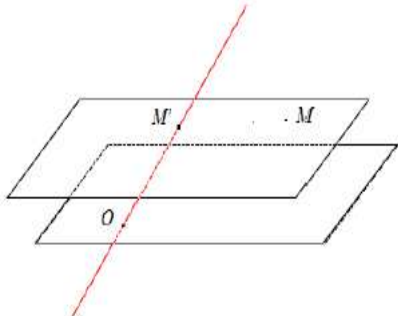
L'application  $p$  s'appelle la projection sur le plan  $(P)$  parallèlement à  $(\Delta)$

#### 1.2 Propriété de la projection $p$ .

- Si on remplace la droite  $(\Delta)$  par une droite qui lui est parallèle, la projection  $p$  ne varie pas, ce qui nous permet de dire que  $p$  est la projection sur le plan  $(P)$  dans la direction de  $(\Delta)$ .
- L'application  $p$  est surjective, mais pas injective.
- L'image de la droite  $(\Delta)$  par l'application  $p$  est le singleton  $\{O\}$ .
- L'ensemble des points invariants par la projection  $p$  est le plan  $(P)$ .

### 2) La projection sur une droite parallèlement à un plan.

2.1 Définition : Considérons un plan  $(P)$  dans l'espace  $(\mathcal{E})$  et  $(\Delta)$  une droite qui coupe  $(P)$  en  $O$ .



Soit  $M$  un point dans l'espace  $(\mathcal{E})$ ; on sait que par  $M$  passe un seul plan parallèle à

$(P)$ , donc il coupe la droite  $(\Delta)$  en un seul point  $M'$ .

Le point  $M'$  s'appelle la projection du point  $M$  sur la droite  $(\Delta)$  parallèlement au plan  $(P)$ .

Ainsi ; on définit l'application :

$$q: (\mathcal{E}) \rightarrow (\Delta)$$

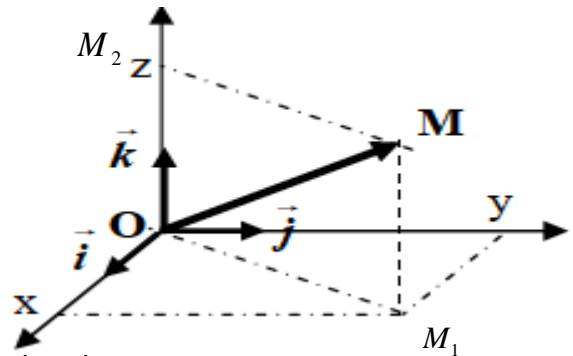
$$M \mapsto M' = q(M)$$

L'application  $q$  s'appelle la projection sur la droite  $(\Delta)$  parallèlement au plan  $(P)$ .

#### 2.2 Propriété de la projection $q$ .

- Si on remplace le plan  $(P)$  par un plan qui lui est parallèle, la projection  $q$  ne varie pas, ce qui nous permet de dire que  $q$  est la projection sur la droite  $(\Delta)$  dans la direction de  $(P)$ .
- L'application  $q$  est surjective, mais pas injective.
- L'ensemble des points invariants par la projection  $q$  est la droite  $(\Delta)$ .

3) Le repère dans l'espace  $(\mathcal{E})$  Soit  $O$  un point dans l'espace  $(\mathcal{E})$  et  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  et  $\vec{k}$  trois vecteurs



non coplanaires

On pose :  $\vec{OI} = \vec{i}$  et  $\vec{OJ} = \vec{j}$  et  $\vec{OK} = \vec{k}$

Soient  $M$  un point dans l'espace, la droite qui passe par  $M$  et parallèle à  $(OK)$  coupe le plan  $(OIJ)$  en  $M_1$

On a :  $M_1 \in (OIJ)$  donc  $\vec{OM}_1$  et  $\vec{OI}$  et  $\vec{OJ}$  sont non coplanaires

Donc : il existe un et un seul couple  $(x, y)$  tel que :  $\vec{OM}_1 = x\vec{OI} + y\vec{OJ}$  donc :  $\vec{OM}_1 = x\vec{i} + y\vec{j}$

la droite qui passe par  $M$  et parallèle au plan  $(OIJ)$  coupe la droite  $(OK)$  en  $M_2$

On a :  $M_2 \in (OK)$  donc  $\overline{OM_2}$  et  $\overline{OK}$  sont colinéaires

Donc il existe un et un seul réel  $z$  tel que :

$$\overline{OM_2} = z\overline{OK} = z\vec{k}$$

Et puisque  $OM_1MM_2$  est un parallélogramme

$$\overline{OM} = \overline{OM_1} + \overline{OM_2} \quad \text{et par suite :}$$

$$(\forall M \in (\mathcal{E}))(\exists! (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathbb{R}^3 / \overline{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$$

**Propriété et définition:** Soit  $O$  un point dans l'espace  $(\mathcal{E})$ ,  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  et  $\vec{k}$  trois vecteurs non coplanaires :

$$(\forall M \in (\mathcal{E}))(\exists! (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathbb{R}^3 / \overline{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$$

Le quadruplet  $R(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  s'appelle un repère

dans l'espace  $(\mathcal{E})$  ; on écrit  $M(x, y, z)$

- Le réel  $x$  s'appelle l'abscisse du point  $M$  dans le repère  $R$

- Le réel  $y$  s'appelle l'ordonnée du point  $M$  dans le repère  $R$

- Le réel  $z$  s'appelle la cote du point  $M$  dans le repère  $R$

**Remarque :** Pour définir un repère de l'espace il suffit d'un point et de 3 vecteurs non coplanaires

#### 4) La base dans l'espace vectoriel $V_3$ .

$\vec{i}$  et  $\vec{j}$  et  $\vec{k}$  trois vecteurs non coplanaires et  $\vec{u}$  un vecteur donné

Si  $O$  est un point dans l'espace  $(\mathcal{E})$  alors on sait qu'il existe un seul point  $M$  dans  $(\mathcal{E})$  tel que :

$$\vec{u} = \overline{OM} \quad \text{et d'après la propriété précédente :}$$

$$\exists! (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathbb{R}^3 / \overline{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

On peut conclure donc qu'il existe un unique

$$\text{triplet } (x, y, z) \text{ tel que } \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

**Propriété et définition:** Soit  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  et  $\vec{k}$  trois vecteurs non coplanaires dans  $V_3$

$$\text{On a : } (\forall \vec{u} \in V_3)(\exists! (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathbb{R}^3 /$$

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$$

Le triplet  $B(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  s'appelle une base de

l'espace vectoriel  $V_3$  on écrit  $\vec{u}(x; y; z)$

- Le réel  $x$  s'appelle la première composante du vecteur  $\vec{u}$  dans la base  $\beta$

- Le réel  $y$  s'appelle la deuxième composante du vecteur  $\vec{u}$  dans la base  $\beta$

- Le réel  $z$  s'appelle la troisième composante du vecteur  $\vec{u}$  dans la base  $\beta$

**Remarque :** Pour définir une base de l'espace vectoriel  $V_3$ , il suffit de trois vecteurs non coplanaires.

#### 5) Les opérations dans $V_3$ .

- $\vec{u}(x; y; z)$  et  $\vec{v}(x'; y'; z')$  deux vecteurs dans l'espace vectoriel  $V_3$  muni de la base

$B(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  on a donc :  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  et

$$\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k} \quad \text{par suite :}$$

$$\vec{u} + \vec{v} = (x + x')\vec{i} + (y + y')\vec{j} + (z + z')\vec{k}$$

$$\text{D'où : } \vec{u} + \vec{v}(x + x'; y + y'; z + z')$$

De même on montre que si  $k$  est un réel

$$\text{alors : } k\vec{u}(kx; ky; kz)$$

Si  $I$  est le milieu du segment  $[AB]$

$$\text{alors : } I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$$

- Dans l'espace muni d'un repère  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ ,

Si  $A(x_A; y_A; z_A)$  et  $B(x_B; y_B; z_B)$  alors

$$\overline{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$$

$\vec{u}(x; y; z)$  et  $\vec{v}(x'; y'; z')$  sont égaux si et

seulement si :  $x = x'$ ,  $y = y'$  et  $z = z'$ .

#### II) CONDITIONS ANALYTIQUE DE COLINEARITE DE DEUX VECTEURS.

Soient  $B(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  une base de  $V_3$  et  $\vec{u}(x; y; z)$

et  $\vec{v}(x'; y'; z')$  Deux vecteurs non nuls.

On sait que  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires si et seulement s'il existe un réel  $k$  tel que :  $\vec{v} = k\vec{u}$  et ceci est équivalent à :

$$x' = kx \quad \text{et} \quad y' = ky \quad \text{et} \quad z' = kz$$

et puisque  $\vec{u} \neq \vec{0}$  on peut supposer l'un des réels non nul  $x$  par exemple

$$\text{et on aura : } k = \frac{x'}{x} \quad (1) \quad \text{et} \quad y' = \frac{x'}{x} y \quad (2)$$

$$\text{et} \quad z' = \frac{x'}{x} z \quad (3)$$

ce qui est équivalent à :

$$k = \frac{x'}{x} \text{ et } xy' - yx' = 0 \text{ et } xz' - zx' = 0$$

et de (2) et (3) on peut conclure :

$$y'z = \frac{x'}{x} yz \text{ et } z'y = \frac{x'}{x} zy$$

d'où :  $yz' - zy' = 0$  et finalement :

$$yz' - zy' = 0 \text{ et } xy' - yx' = 0 \text{ et } xz' - zx' = 0 \text{ ce}$$

$$\text{qui se traduit par : } \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} = 0 \text{ et } \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{et } \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = 0 \text{ et Les trois déterminants s'appelle}$$

$$\text{les déterminants extraits de } \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}$$

**Remarque :** les déterminants extraits on les trouve par la suppression des lignes

Donc : Si deux vecteurs sont colinéaires alors tous les déterminants extraits sont nuls.

Remarque que : cette propriété reste vraie si l'un des vecteurs est nul.

**Inversement :** Soient  $\vec{u}(x; y; z)$  et  $\vec{v}(x'; y'; z')$  deux vecteurs non nuls.

$$\text{Tels que : } yz' - zy' = 0 \text{ et } xy' - yx' = 0 \text{ et } xz' - zx' = 0$$

montrons que  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires.

et puisque  $\vec{u} \neq \vec{0}$  on peut supposer l'un des réels non nul,  $y$  par exemple on aura :

$$y' = \frac{y'}{y} y \text{ et } x' = \frac{y'}{y} x \text{ et } z' = \frac{y'}{y} z \text{ donc, on posant :}$$

$$k = \frac{y'}{y} \text{ on obtient : } y' = ky \text{ et } x' = kx \text{ et } z' = kz$$

ce qui est équivalent à :  $\vec{v} = k\vec{u}$

par suite  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires.

**Théorème :** Soient  $\vec{u}(x; y; z)$  et  $\vec{v}(x'; y'; z')$  deux vecteurs non nuls.

les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires si et seulement tous les déterminants extraits de

$$\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \text{ sont nuls c'est-à-dire :}$$

$$yz' - zy' = 0 \text{ et } xy' - yx' = 0 \text{ et } xz' - zx' = 0$$

**Remarques :**  $\vec{u}(x; y; z)$  et  $\vec{v}(x'; y'; z')$  sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont des triplets proportionnels.

**Exemple:**  $\vec{u}(1; -1; 2)$  et  $\vec{v}(-2; 2; -4)$  et  $\vec{w}(1; 1; 2)$

1) étudier la colinéarité des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$

2) étudier la colinéarité des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{w}$

$$\text{Solution : 1) } \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0 \text{ et } \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -4 + 4 = 0$$

$$\text{et } \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0 \text{ Donc } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires}$$

$$2) \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 2 = -4 \neq 0$$

Donc  $\vec{u}$  et  $\vec{w}$  sont non colinéaires

**Exercice :** Soit l'espace  $(\mathcal{E})$  muni d'un repère  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ ; et considérons les points

$$A(1; 2; 1) \text{ et } B(2; 1; 3) \text{ et } C(-1; 4; -3) \text{ et } D(2; 3; 3)$$

1. étudier l'alignement des points  $A, B$  et  $C$

2. étudier l'alignement des points  $A, B$  et  $D$

**Solution : 1)**  $\vec{AB}(2-1; 1-2; 3-1) \Leftrightarrow \vec{AB}(1; -1; 2)$

$$\vec{AC}(-1-1; 4-2; -3-1) \Leftrightarrow \vec{AC}(-2; 2; -4)$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0 \text{ et } \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -4 + 4 = 0 \text{ et } \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0$$

Donc  $A, B$  et  $C$  sont alignés

2)  $\vec{AD}(2-1; 1-2; 3-1) \Leftrightarrow \vec{AD}(1; -1; 2)$

$$\vec{AD}(2-1; 3-2; 3-1) \Leftrightarrow \vec{AD}(1; 1; 2)$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 2 = -4 \neq 0 \text{ Donc } A, B \text{ et } D \text{ ne sont pas}$$

alignés

**Exercice :** Soit l'espace  $(\mathcal{E})$  muni d'un repère  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ ; et considérons les points

$$A(1, -2, 1); B(-1, 0, 1); C(0, 1, 0) \text{ et } E(7, 6, 1)$$

1. Vérifier que les points  $A, B$  et  $C$  sont non alignés

Que pouvez-vous dire des points  $A, B$  et  $E$ .

2. Déterminer le point  $D$  pour que le quadrilatère  $ABCD$  soit un parallélogramme.

3. Déterminer le centre de ce parallélogramme.

### ///) CONDITIONS ANALYTIQUE DE COPLANARITE DE TROIS VECTEURS.

**Définition :** Soient  $B(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  une base de  $V_3$

$\vec{u}(x; y; z)$  et  $\vec{v}(x'; y'; z')$  et  $\vec{w}(x''; y''; z'')$

trois vecteurs

le déterminant des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  se

note :  $\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w})$  et on a :

$$\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} x' & x'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}$$

(On a développé suivant la première colonne)

**Exemple :**

$$\begin{aligned} &+ \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = +1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + (-3) \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -4 + 12 - 9 \\ &= -1 \end{aligned}$$

**Méthode de Sarrus** (Pierre-Frédéric Sarrus 1798-1861)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 6 & 1 & 1 & 6 & 1 \\ -3 & 2 & -2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = (-2 - 6 - 12) - (3 + 2 - 24) = -1$$

**Théorème :** Soient  $B(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  une base de  $V_3$

et  $\vec{u}(x; y; z)$  et  $\vec{v}(x'; y'; z')$  et  $\vec{w}(x''; y''; z'')$  trois

vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont coplanaires si et

seulement si  $\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) = 0$

**Remarque :** Pour calculer le déterminant de 3 vecteurs, on développe suivant n'importe quelle ligne ou n'importe quelle colonne en tenant compte des signes :  $+-+$

**Exemple :**  $B(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  une base et Soient

$\vec{u}(2; -4; 3)$  et  $\vec{v}(-1; 1; 2)$  et  $\vec{w}(3; 1; -1)$

trois vecteurs

Est-ce que les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont coplanaires ?

**Solution :**

$$\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - (-4) \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) = 2(-1-2) + 4(1-6) + 3(-1-3) = -38 \neq 0$$

Donc les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont non coplanaires

**Exercice :** Considérons les vecteurs

$\vec{u}(2m+1; 3; 2-m)$  et  $\vec{v}(-1; 2; 3)$  et  $\vec{w}(-3; 1; 2)$

déterminer le réel  $m$  pour que les vecteurs

$\vec{u}$  et  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  soient coplanaires.

**Solution :**

$\vec{u}$  et  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont coplanaires ssi

$$\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) = 0$$

$$\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) = \begin{vmatrix} 2m+1 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2-m & 3 & 2 \end{vmatrix} = (2m+1) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (2-m) \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{Ssi } 1(2m+1) - 21 + 5(2-m) = 0 \Leftrightarrow -3m = 10 \Leftrightarrow m = -\frac{10}{3}$$

**Application :** Résolution des systèmes de 3 équations à 3 inconnus :

Résoudre dans  $\mathbb{R}^3$  le système :

$$\begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ x - y + 3z = 3 \\ -x + 2y + z = -1 \end{cases}$$

1) On calcul:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -15 \neq 0$$

On a :  $\Delta \neq 0$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-25}{-15} = \frac{5}{3}$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta} = -\frac{2}{15}$$

$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-12}{-15} = \frac{4}{5}$$

$$\text{Donc : } S = \left\{ \left( \frac{5}{3}; \frac{-2}{15}; \frac{4}{5} \right) \right\}$$

#### IV) Représentation paramétrique d'une droite dans l'espace

l'espace  $(\mathcal{E})$  est muni d'un repère  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  soit la droite (D) passant par le point

$A(x_A; y_A; z_A)$  et de vecteur directeur  $\vec{u}(a; b; c)$

$$M(x; y; z) \in (D) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} / \overline{AM} = k\vec{u}$$

$$\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_A + k \times a \\ y = y_A + k \times b \\ z = z_A + k \times c \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$$

point d'attache
vecteur directeur

Ce système est appelé représentation paramétrique de la droite (D) passant par le point  $A(x_A; y_A; z_A)$  et de vecteur

directeur  $\vec{u}(a; b; c)$

**Remarques :** Prenons l'exemple de la droite (D)

$$\text{de représentation } \begin{cases} x = -3 + 2k \\ y = -k \\ z = 4 + 4k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R}) :$$

1) Le réel  $k$  est appelé le paramètre.

A chaque point de (D) correspond une et une seule valeur de  $k$  et inversement.

D'un point de vue pratique,  $B(3; 2; 5)$  appartient à (D) si et seulement si il existe  $k$  tel que :

$$\begin{cases} 3 = -3 + 2k \\ 2 = -k \\ 5 = 4 + 4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 3 \\ k = -2 \\ k = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Ce qui est impossible donc B n'appartient pas à (D).

2) Le paramètre est souvent également noté à l'aide de la variable  $t$ .

3) Une droite admet une infinité de

représentations paramétriques.

Il suffit en effet de changer de point d'attache ou de vecteur directeur pour obtenir un système de représentation différent.

4) la droite (D) passe par le point  $A(-3; 0; 4)$

et  $\vec{u}(2; -1; 4)$  est un vecteur directeur de (D)

#### V) deux équations cartésiennes d'une droite dans l'espace

**Propriété et définition :** l'espace  $(\mathcal{E})$  est muni d'un repère  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  et (D) la droite passant par le point  $A(x_A; y_A; z_A)$  et de vecteur

directeur  $\vec{u}(a; b; c)$

Si  $abc \neq 0$  alors : le système :

$$\frac{x - x_A}{a} = \frac{y - y_A}{b} = \frac{z - z_A}{c}$$

s'appelle deux équations cartésiennes de la droite (D)

Si  $ab \neq 0$  et  $c = 0$  alors : le système :

$$\begin{cases} \frac{x - x_A}{a} = \frac{y - y_A}{b} = \frac{z - z_A}{c} \\ z - z_A = 0 \end{cases} \quad \text{s'appelle deux équations cartésiennes de la droite (D)}$$

**Preuve :** soit (D) la droite passant par le point

$A(x_A; y_A; z_A)$  et de vecteur directeur  $\vec{u}(a; b; c)$

et soit  $M(x; y; z) \in (D)$

$$M(x; y; z) \in (D) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} / \overline{AM} = k\vec{u} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x - x_A = ka \\ y - y_A = kb \\ z - z_A = kc \end{cases}$$

Si  $abc \neq 0$  donc  $a \neq 0$  et  $b \neq 0$  et  $c \neq 0$  alors :

$$\frac{x - x_A}{a} = \frac{y - y_A}{b} = \frac{z - z_A}{c} = k$$

Si  $ab \neq 0$  et  $c = 0$  alors :

$$\frac{x - x_A}{a} = \frac{y - y_A}{b} \quad \text{et} \quad z - z_A = 0$$

**Exemple :** soient les points  $A(-1; 1; 0)$

et  $B(2; -1; 1)$  et  $C(0; -1; 2)$

1) Déterminer deux équations cartésiennes de la droite (AB)

Est-ce que point  $C(0; -1; 2) \in (AB)$  ?

**Solution** :  $\overline{AB}(3; -2; 1)$

Donc :  $\frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1}$  les deux équations

cartésiennes de la droite (AB)

On remplace les coordonnées de C dans les équations de la droite (AB)

Et puisque :  $\frac{0+1}{3} \neq \frac{-1-1}{-2}$  donc  $C \notin (AB)$

**Exercice** : soit la droite (D) définie par les deux

équations cartésiennes :  $\frac{2x-1}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{3-4z}{4}$

1) déterminer un point et un vecteur directeur  $\vec{u}$  de la droite (D)

2) déterminer une représentation paramétrique de la droite (D)

**Solution** : 1)  $\frac{2x-1}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{3-4z}{4} \Leftrightarrow$

$$\frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}{3} = \frac{y-(-1)}{4} = \frac{\left(z-\frac{3}{4}\right)}{-1} \Leftrightarrow$$

$$\frac{x-\frac{1}{2}}{6} = \frac{y-(-1)}{8} = \frac{\left(z-\frac{3}{4}\right)}{-2}$$

(D) la droite passant par le point  $A\left(\frac{1}{2}; -1; \frac{3}{4}\right)$  et

de vecteur directeur  $\vec{u}(6; 8; -2)$

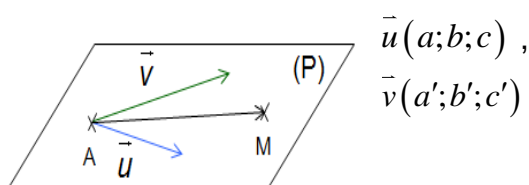
1) une représentation est : 
$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} + 6k \\ y = -1 + 8k \\ z = \frac{3}{4} - 2k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R}) :$$

### V/) Représentation paramétrique d'un PLAN dans l'espace

L'espace est muni d'un repère  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ .

Soit  $P(A; \vec{u}; \vec{v})$  le plan qui passe par

$A(x_A; y_A; z_A)$  et de vecteurs directeurs



$\vec{u}(a; b; c)$ ,  
 $\vec{v}(a'; b'; c')$

$M \in P(A; \vec{u}; \vec{v}) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : \exists k' \in \mathbb{R} / \overrightarrow{AM} = k\vec{u} + k'\vec{v}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-x_A \\ y-y_A \\ z-z_A \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + k' \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_A + k \times a + k' \times a' \\ y = y_A + k \times b + k' \times b' \\ z = z_A + k \times c + k' \times c' \end{cases}$$

point d'attache
premier vecteur directeur
second vecteur directeur

Ce système est appelé représentation paramétrique du plan  $P(A; \vec{u}; \vec{v})$

**Exemple1** : déterminer une représentation paramétrique du plan passant par les points :  $A(2; -1; -3)$  et  $B(0; 1; 4)$  et  $C(-3; 0; 0)$

**Solution** :  $ABC$  est le plan passant par  $A(2; -1; -3)$  et  $\overline{AB}(-2; 2; 7)$  et  $\overline{AC}(-5; 1; 3)$

Sont deux vecteurs directeurs

Donc une représentation paramétrique du plan

$ABC$  est : 
$$\begin{cases} x = 2 - 2t - 5t' \\ y = -1 + 4t + t' \\ z = -3 + 7t + 3t' \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \text{ et } (t' \in \mathbb{R})$$

Le dernier système est une représentation paramétrique du plan (ABC) c'est à dire que les coordonnées  $(x; y; z)$  d'un point quelconque du plan dépendent de paramètres qui sont ici  $t$  et  $t'$ , mais il existe d'autre représentation paramétrique pour ce plan.

**Exemple2** : déterminer les coordonnées d'un point de ce plan ainsi que les coordonnées de deux vecteurs directeurs du plan suivant définit par une représentation paramétrique:

$$\begin{cases} x = 3 + 2t - 4s \\ y = 2 + t - s \\ z = 5t - 5s \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 + 2t - 4s \\ y = 2 + 1t - 1s \\ z = 0 + 5t - 5s \end{cases}$$

vous pouvez alors en déduire que c'est un plan passant par le point

A et de vecteurs directeurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  :

$$A \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \vec{v} \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

## V//) EQUATION CARTESIENNE D'UN PLAN dans l'espace

### Définition :

L'espace est muni d'un repère  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ .

Soit  $P(A; \vec{u}; \vec{v})$  le plan qui passe par  $A(x_A; y_A; z_A)$

et de vecteurs directeurs  $\vec{u}(\alpha; \beta; \delta)$ ,  $\vec{v}(\alpha'; \beta'; \delta')$

l'équation cartésienne du plan  $(P)$  s'écrit sous forme:  $ax + by + cz + d = 0$  Avec :  $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$

**Exemple :** Déterminer l'équation cartésienne du plan  $P(A; \vec{u}; \vec{v})$  qui passe par  $A(1; -3; 1)$  et de vecteurs directeurs  $\vec{u}(-2; 4; 1)$  et  $\vec{v}(-1; 0; 2)$

**solution :**  $M(x; y; z) \in P(A; \vec{u}; \vec{v}) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}; \vec{u}; \vec{v}) = 0$

$$\overrightarrow{AM}(x-1; y+3; z-1)$$

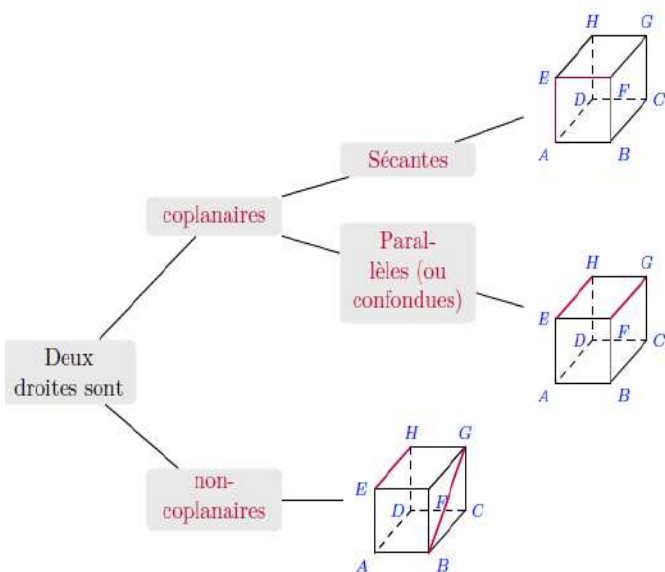
$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & -2 & -1 \\ y+3 & 4 & 0 \\ z-1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x-1) \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - (y+3) \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (z-1) \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$8(x-1) + 3(y+3) + 4(z-1) = 0 \Leftrightarrow 8x - 8 + 3y + 9 + 4z - 4 = 0$$

$$(P): 8x + 3y + 4z - 3 = 0$$

## V///) Position relative de deux droites dans l'espace

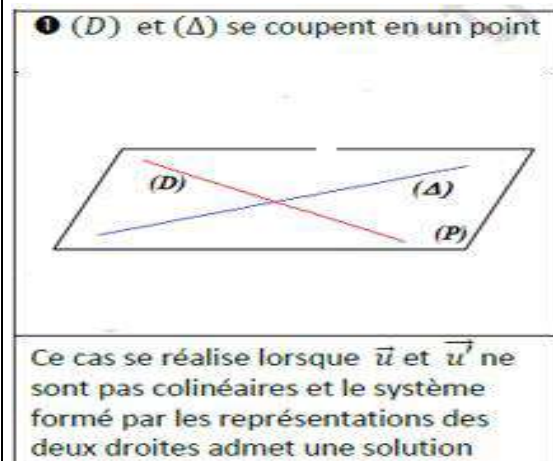
### 1/ Position relative de deux droites dans l'espace



Soient  $D(A; \vec{u})$  et  $\Delta(B; \vec{v})$

On a 3 positions pour  $(D)$  et  $(\Delta)$  :

### Position n° 1



**Exemple 1** Soient les droites  $(D_1)$  et  $(\Delta_1)$  de représentations paramétriques respectives

$$(D_1) \begin{cases} x = -2 + k \\ y = 2 - 2k \\ z = 4 + k \end{cases} (k \in \mathbb{R}) \quad (\Delta_1) \begin{cases} x = -1 - t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

Etudier la position relative de  $(\Delta_1)$  et  $(D_1)$

**Solution :** on a :  $\vec{u}(1; -2; 1)$  un vecteur directeur de  $(D_1)$  et  $\vec{v}(-1; 2; 1)$  un vecteur directeur de  $(\Delta_1)$

et puisque :  $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$  les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont

non colinéaires donc les droites  $(\Delta_1)$  et  $(D_1)$

sont non parallèles

on va déterminer l'intersection de  $(\Delta_1)$  et  $(D_1)$

Donc on va résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} -2 + k = -1 - t \\ 2 - 2k = 2t \\ 4 + k = 1 + t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t + k = 1 \\ t + k = 1 \\ t - k = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t + k = 1 \\ t - k = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2t = 4 \\ t - k = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ k = -1 \end{cases} \text{ On remplaçant } t = 2 \text{ dans}$$

l'équation paramétriques de  $(\Delta_1)$  On trouve :

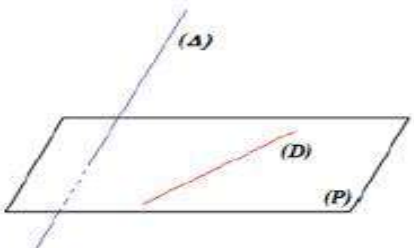
$$\begin{cases} x = -3 \\ y = 4 \\ z = 3 \end{cases} \text{ Donc les droites } (\Delta_1) \text{ et } (D_1) \text{ se coupent}$$

en  $E(-3; 4; 3)$

**Position n° 2:** deux droites peuvent être non coplanaires. Donc Il n'existe alors aucun plan

contenant ces deux droites.  
 Pour le montrer, il suffit de montrer que les deux droites ne sont ni parallèles, ni sécantes.

② (D) et (Δ) ne sont pas coplanaires



Ce cas se réalise lorsque  $\vec{u}$  et  $\vec{u}'$  ne sont pas colinéaires et le système formé par les représentations des deux droites n'admet pas de solution

**Exemple 2 :** Soient les droites  $(D_2)$  et  $(\Delta_2)$  de représentations paramétriques respectives

$$(D_2) \begin{cases} x = 1 + k \\ y = -2 - k \\ z = 2 + 3k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R}) \quad (\Delta_2) \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - t \\ z = 3 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Etudier la position relative de  $(D_2)$  et  $(\Delta_2)$

**Solution :** on a  $\vec{u}(1; -1; 3)$  un vecteur directeur de  $(D_2)$  et  $\vec{v}(2; -1; 1)$  un vecteur directeur de  $(\Delta_2)$

et puisque :  $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$  les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont

non colinéaires donc les droites  $(D_2)$  et  $(\Delta_2)$  sont non parallèles

on va déterminer l'intersection de  $(\Delta_1)$  et  $(D_1)$

Donc on va résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 1 + k = 2t \\ -2 - k = 1 - t \\ 2 + 3k = 3 + t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k - 2t = -1 \\ k - t = -3 \\ 3k - t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k - 2t = -1 \\ k - t = -3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = -5 \\ t = -2 \end{cases} \text{ mais le couple } (k; t) = (-5; -2) \text{ ne}$$

vérifie pas l'équation  $3k - t = 1$

$$\text{Car : } 3(-5) - (-2) = -13 \neq 1$$

Donc le système n'admet pas de solutions

Donc les droites  $(\Delta_1)$  et  $(D_1)$  sont non

coplanaires

**Methode 2 :** on a  $(D_2)$  passe par  $A(1; -2; 2)$  et de vecteur directeur de  $\vec{u}(1; -1; 3)$

et :  $(\Delta_2)$  passe par  $B(0; 1; 3)$  et de vecteur directeur de  $\vec{v}(2; -1; 1)$  et  $\vec{AB}(-1; 3; 1)$  on va voir si les Les vecteurs  $\vec{u}(1; -1; 3)$  et  $\vec{v}(2; -1; 1)$  et  $\vec{AB}(-1; 3; 1)$  sont coplanaires ??

$$\det(\vec{AB}; \vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$$


$$\det(\vec{AB}; \vec{u}; \vec{v}) = 14 \neq 0 \text{ Donc les vecteurs } \vec{u} \text{ et } \vec{v}$$

et  $\vec{AB}$  sont non coplanaires

Donc les droites  $(\Delta_1)$  et  $(D_1)$  sont non coplanaires

### Position n° 3

③ (D) et (Δ) sont coplanaires et disjoints



Ce cas se réalise lorsque  $\vec{u}$  et  $\vec{u}'$  sont colinéaires et le système formé par les représentations des deux droites n'admet pas de solution

**Exemple 3 :** Soient les droites  $(D_3)$  et  $(\Delta_3)$  de représentations paramétriques respectives

$$(D_3) \begin{cases} x = 1 + k \\ y = -2 \\ z = 2 - 1k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R}) \quad (\Delta_3) \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 \\ z = 3 - 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Etudier la position relative de  $(D_3)$  et  $(\Delta_3)$

**Solution :** on a  $(D_3)$  passe par  $A(1; -2; 2)$

et de vecteur directeur de  $\vec{u}(1; 0; -1)$

et :  $(\Delta_3)$  passe par  $B(0; 1; 3)$  et de vecteur

directeur de  $\vec{v}(2; 0; -2)$

on peut voir que les Les vecteurs  $\vec{u}(1; 0; -1)$

et  $\vec{v}(2; 0; -2)$  sont colinéaires

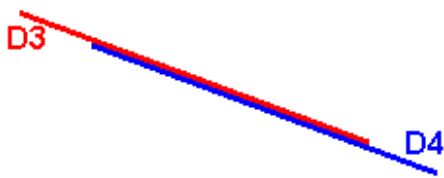
Car :  $\vec{v} = 2\vec{u}$  Donc les droites  $(D_3)$  et  $(\Delta_3)$  sont parallèles

On remarque aussi que :  $A \notin (\Delta_3)$

$$\text{car } \begin{cases} 1 = 2t \\ -2 = 1 \\ 2 = 3 - 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} = t \\ -\frac{1}{2} = t \\ 2 = 3 - 2t \end{cases}$$

Donc les droites  $(D_3)$  et  $(\Delta_3)$  sont strictement parallèles

**Position n° 4 :** les droites sont confondues



**Exemple 4 :** L'espace est muni d'un repère  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ .

Soient les droites  $(D_3)$  et  $(D_4)$  de représentations paramétriques respectives

$$(D_3) \begin{cases} x = k - 3 \\ y = -k + 3 \quad (k \in \mathbb{R}) \\ z = 2 \end{cases} \quad (D_4) \begin{cases} x = -2t + 1 \\ y = 2t - 1 \\ z = 2 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Etudier la position relative de  $(D_3)$  et  $(D_4)$

**Solution :** on a  $(D_3)$  passe par  $A(-3; 3; 2)$  et de

vecteur directeur de  $\vec{u}(1; -1; 0)$

et  $(D_4)$  passe par  $B(1; -1; 2)$  et de vecteur

directeur de  $\vec{v}(-2; 2; 0)$

on peut voir que les Les vecteurs  $\vec{u}(1; -1; 0)$

et  $\vec{v}(-2; 2; 0)$  sont colinéaires

Car :  $\vec{v} = -2\vec{u}$  Donc les droites  $(D_3)$  et  $(D_4)$

sont parallèles

On remarque aussi que :

$$A \in (D_4) \text{ car } \begin{cases} -3 = -2t + 1 \\ 3 = 2t - 1 \\ 2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = t \\ 2 = t \\ 2 = 2 \end{cases}$$

Donc les droites  $(D_3)$  et  $(D_4)$  sont confondues

**Exercice :** Soient les droites  $(D)$  et  $(D')$  de représentations paramétriques respectives :

$$(D) \begin{cases} x = k \\ y = 1 - k \\ z = 3 - 2k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R}) \quad (D') \begin{cases} x = 2 + 6k' \\ y = -3 - 12k' \\ z = 4 + 3k' \end{cases} \quad (k' \in \mathbb{R})$$

Etudier la position relative de  $(D)$  et  $(D')$

**Solution :**

$M(x; y; z)$  appartient à  $(D)$  et  $(D')$  si et seulement si il existe  $k$  et  $k'$  réels tels que :

$$\begin{cases} k = 2 + 6k' \\ 1 - k = -3 - 12k' \\ 3 - 2k = 4 + 3k' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 + 6k' \\ 1 - 2 - 6k' = -3 - 12k' \\ 3 - 2k = 4 + 3k' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 0 \\ k' = -\frac{1}{3} \\ 3 - 2k = 4 + 3k' \end{cases}$$

Cette dernière égalité sert à vérifier notre résultat :

$$3 - 2k = 3 - 0 = 3 \quad \text{et} \quad 4 + 3k' = 4 - 1 = 3.$$

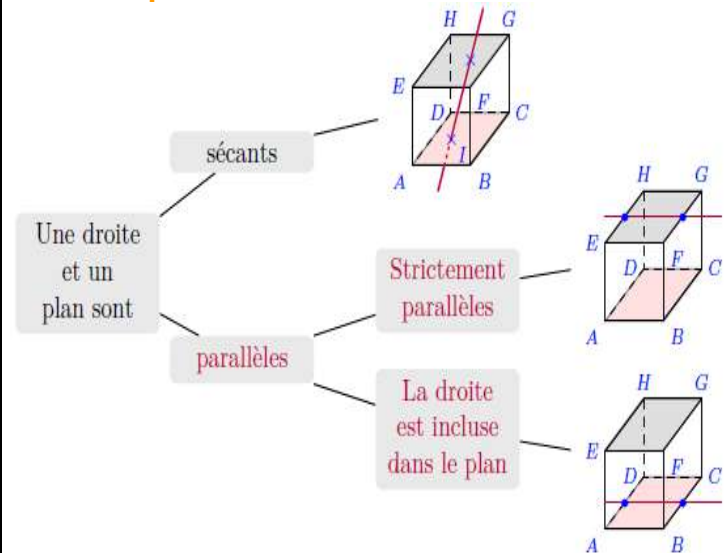
$k = 0$  et  $k' = -\frac{1}{3}$  donc  $(D)$  et  $(D')$  possèdent un unique point commun  $C$

Dont les coordonnées peuvent être calculées à l'aide de  $k$  ou  $k'$  :  $C(0; 1; 3)$

$(D)$  et  $(D')$  sont alors contenues dans le plan  $(P)$  passant par  $C$  et de vecteurs directeurs

$\vec{u}(1; -1; -2)$  et  $\vec{v}(6; -12; 3)$

**2/ Position relative d'une droites et d'un plan dans l'espace**



L'espace est muni d'un repère  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ .

**Proposition 1 :** La droite  $D(A; \vec{u})$  et le plan

$P(B; \vec{v}; \vec{w})$  sont parallèles si et seulement si les

vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont coplanaires et dans le cas contraire la droite coupe le plan

**Proposition 2** : soit la droite (D) passant par le point  $A(x_A; y_A; z_A)$  et de vecteur directeur  $\vec{u}(\alpha; \beta; \gamma)$  et un plan (P) d'équation cartésienne:  $ax + by + cz + d = 0$

(D) // (P) si et seulement si  $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$

(D) coupe (P) si et seulement si  $a\alpha + b\beta + c\gamma \neq 0$

**Preuve** : une représentation paramétrique de La

droite  $D(A; \vec{u})$  est (D) 
$$\begin{cases} x = k\alpha + x_A \\ y = k\beta + y_A \\ z = k\gamma + z_A \end{cases} (k \in \mathbb{R})$$

$M(x; y; z)$  appartient à (D) et (P) si et seulement si il existe k tels que :

$$\begin{cases} x = k\alpha + x_A \\ y = k\beta + y_A \\ z = k\gamma + z_A \\ ax + by + cz + d = 0 \end{cases}$$

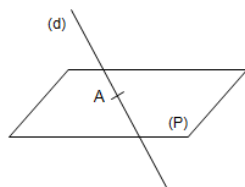
donc :  $a(k\alpha + x_A) + b(k\beta + y_A) + c(k\gamma + z_A) + d = 0$

donc :  $k(a\alpha + b\beta + c\gamma) = -(ax_A + by_A + cz_A) - d$

▪ si :  $a\alpha + b\beta + c\gamma \neq 0$  alors :

$$k = \frac{-(ax_A + by_A + cz_A) - d}{a\alpha + b\beta + c\gamma}$$

donc (D) coupe (P) en un point unique



▪ si :  $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$  et

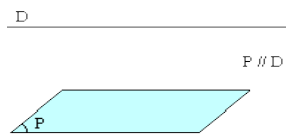
$ax_A + by_A + cz_A + d = 0$  alors :  $(D) \subset (P)$

▪ si :  $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$  et

$ax_A + by_A + cz_A + d \neq 0$

alors :  $(D) \cap (P) = \emptyset$

Donc (D) strictement parallèles a (P)



**Exemple 1** : Soient la droite  $(D_1)$  de

représentations paramétrique  $(D_1)$  
$$\begin{cases} x = -4t + 2 \\ y = 2t - 1 \\ z = 3t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

et le plan  $(P_1)$  d'équation cartésienne:

$$(P_1) : 3x + 2y + z + 1 = 0$$

Etudier la position relatif de  $(D_1)$  et  $(P_1)$

**Solution** :

on a  $(D_1)$  est de vecteur directeur  $\vec{u}(-4; 2; 3)$

Et on a :  $3(-4) + 2 \times 2 + 3 \neq 0$

donc  $(D_1)$  coupe  $(P_1)$  en un point unique

on a  $M(x; y; z) \in (D_1) \cap (P_1) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} /$

$$\begin{cases} x = -4t + 2 \\ y = 2t - 1 \\ z = 3t \\ 3x + 2y + z + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4t + 2 \\ y = 2t - 1 \\ z = 3t \\ 3(-4t + 2) + 2(2t - 1) + 3t + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ x = -2 \\ y = 1 \\ z = 3 \end{cases} \text{ donc } (D_1) \text{ coupe } (P_1)$$

au point  $A(-2; 1; 3)$

**Exemple 2** :

Soient la droite  $(D_2)$  de représentations

paramétrique  $(D_2)$  
$$\begin{cases} x = -4 + 5t \\ y = -1 - 2t \\ z = -3 + t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

et le plan  $(P_2)$  d'équation cartésienne:

$$(P_2) : x + 3y + z + 4 = 0$$

Etudier la position relatif de  $(D_2)$  et  $(P_2)$

**Solution** : on a  $(D_2)$  est de vecteur directeur

$\vec{u}(5; -2; 1)$  et on a :  $5 + 3(-2) + 1 = 0$

donc  $(D_2)$  est parallèle a  $(P_2)$

on va déterminer l'intersection de  $(D_2)$  et  $(P_2)$

Donc on va résoudre le système suivant :

on a  $M(x; y; z) \in (D_2) \cap (P_2) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} /$  
$$\begin{cases} x = -4 + 5t \\ y = -1 - 2t \\ z = -3 + t \\ x + 3y + z + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 + 5t \\ y = -1 - 2t \\ z = -3 + t \\ (-4 + 5t) + 3(-1 - 2t) + (-3 + t) + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 + 5t \\ y = -1 - 2t \\ z = -3 + t \\ -6 = 0 \end{cases}$$

Donc le système n'admet pas de solutions

donc  $(D_2)$  ne coupe pas le plan  $(P_2)$

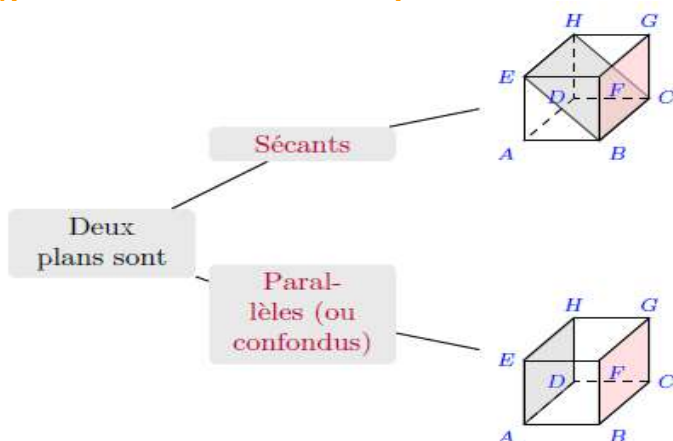


Donc  $(D_2)$  strictement parallèles à  $(P_2)$

**Remarque1 :** si  $(D) // (P)$  alors Tout vecteur directeur de  $(D)$  est alors un vecteur directeur de  $(P)$

**Remarque2:** Il existe plusieurs façons de montrer qu'une droite  $(D)$  est incluse dans un plan  $(P)$ . Une première méthode consiste à montrer dans un premier temps que  $(D)$  est parallèle à  $(P)$  puis dans un deuxième temps qu'un point de  $(D)$  appartient à  $(P)$ .

### 3) position relative de deux plans :



**Proposition :** Soient deux plans  $(P)$  et  $(P')$  d'équations cartésiennes:

$$(P): ax + by + cz + d = 0 \text{ et}$$

$$(P'): a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

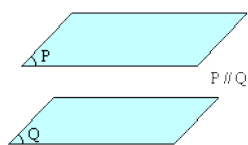
1)  $(P)$  et  $(P')$  se coupent si et seulement si

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0 \text{ ou } \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} \neq 0 \text{ ou } \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} \neq 0$$

et leur intersection est une droite

2)  $(P) // (P')$  si et seulement si  $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0$  et

$$\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = 0 \text{ et } \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} = 0$$



si  $a \neq 0$  et  $b \neq 0$  et  $c \neq 0$

$$(P) // (P') \Leftrightarrow \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$$

### Exemple1 :

L'espace est muni d'un repère  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

Soient deux plans  $(P)$  et  $(P')$  d'équations cartésiennes:

$$(P): 2x + y - z + 2 = 0 \text{ et } (P'): 3x + y + 4z - 1 = 0$$

Etudier la position relative de  $(P)$  et  $(P')$

**Solution :** on a :  $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$  donc  $(P)$  et  $(P')$

se coupent suivant une droite  $(D)$

Déterminons une représentation paramétrique de la droite  $(D)$  intersection de  $(P)$  et  $(P')$

$(D)$  a pour système d'équations cartésiennes :

$$M(x; y; z) \in (D) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - z + 2 = 0 \\ 3x + y + 4z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y = z - 2 \\ 3x + y = -4z + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3z + 3 \\ y = -5z - 8 \end{cases} \text{ et on pose } (z = t)$$

$$\text{Donc : } (D) \begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = -8 - 5t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = t \end{cases}$$

$(D)$  est la droite qui passe par le point

$A(-3; -8; 0)$  et de vecteur directeur  $\vec{u}(3; -5; 1)$

### Exemple2 :

L'espace est muni d'un repère  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

Soient deux plans  $(Q)$  et  $(Q')$  d'équations cartésiennes:

$$(Q): (1 - \sqrt{2})x - \frac{\sqrt{2}}{2}y + z - \sqrt{2} = 0 \text{ et}$$

$$(Q'): (\sqrt{2} - 2)x - y + \sqrt{2}z - 2 = 0$$

Etudier la position relative de  $(Q)$  et  $(Q')$

**Solution :** on a :  $\begin{vmatrix} 1 - \sqrt{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sqrt{2} - 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$  et

$$\begin{vmatrix} 1 - \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} - 2 & \sqrt{2} \end{vmatrix} = 0 \text{ et } \begin{vmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \\ -1 & \sqrt{2} \end{vmatrix} = 0$$



donc  $(Q) \parallel (Q')$

et puisque :  $-\sqrt{2} \neq -2$

$(Q)$  et  $(Q')$  sont strictement parallèles

#### 4/ Droite d'intersection de deux plans

Il est souvent demandé dans les exercices de trouver la représentation paramétrique d'une droite qui est l'intersection de deux plans.

Ou encore de montrer qu'une droite dont on connaît la représentation paramétrique est l'intersection de deux plans donnés. Voyons les différentes stratégies qu'il est possible d'employer :

**Exemple:** Soient les plans (P) et (Q) d'équations cartésiennes respectives :

$$(P): x - y - 3z - 2 = 0 \quad (Q): 2x + y + z - 1 = 0$$

Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) intersection de (P) et de (Q).

Solutions : (D) a pour système d'équations cartésiennes :

$$\begin{cases} x - y - 3z - 2 = 0 \\ 2x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

Il va donc falloir être capable de passer de ce système à une représentation paramétrique:

$$\begin{cases} x - y - 3z - 2 = 0 \\ 2x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

Une technique consiste à prendre une des coordonnées comme paramètre, par exemple puis à exprimer les deux autres coordonnées en fonction de z.

$$\begin{cases} x = y + 3z + 2 \\ 2(y + 3z + 2) + y + z - 1 = 0 \\ z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 3z + 2 \\ 3y + 7z + 3 = 0 \\ z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 - \frac{7}{3}z + 3z + 2 \\ y = -1 - \frac{7}{3}z \\ z = z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \frac{2}{3}z \\ y = -1 - \frac{7}{3}z \\ z = z \end{cases}$$

Une représentation paramétrique de (D) est

$$\text{donc : } (D) \begin{cases} x = 1 + \frac{2}{3}k \\ y = -1 - \frac{7}{3}k \\ z = 0 + 1k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$$

(D) passe donc par le point A ( 1 ; -1 ; 0 ) et a

pour vecteur directeur  $\vec{u} \left( \frac{2}{3}; -\frac{5}{3}; 1 \right)$

#### 5/ Intersection de trois plans(méthodes)

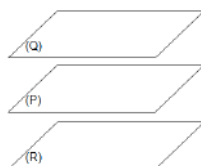
Soient (P), (Q) et (R), 3 plans de l'espace.

**Cas n° 1 :** les plans (P) et (Q) sont parallèles.

**Sous cas n° 1.1 :** (P) et (R) sont parallèles.

Alors, (R) est également parallèle à (Q).

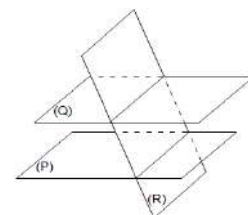
L'intersection entre (P), (Q) et (R) est alors l'ensemble vide.



**Sous cas n° 1.2 :** (P) et (R) sont sécants.

Alors, (R) et (Q) sont également sécants

L'intersection entre (P), (Q) et (R) est alors l'ensemble vide.



**Cas n° 2 :** les plans (P) et (Q) sont sécants suivant la droite (D)

**Sous cas n° 2.1 :** (D) est parallèle à (R).

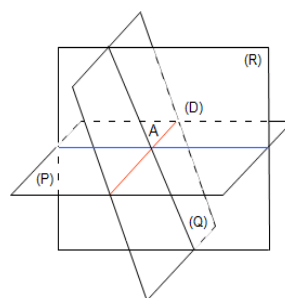
**Sous cas n° 2.1.1 :** (D) est contenue dans (R).

L'intersection entre (P), (Q) et (R) est alors la droite (D).

**Sous cas n° 2.1.2 :** (D) est strictement parallèle à (R).

L'intersection entre (P), (Q) et (R) est alors l'ensemble vide.

**Sous cas n° 2.2 :** (D) et (R) sont sécants.



L'intersection entre (P)

et (Q) est alors un point.

Pour trouver les

coordonnées de ce point, on pourra commencer par trouver une représentation paramétrique de (D) puis, chercher le point d'intersection entre (D) et (R).

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien



## **DENOMBREMENT**

**Dénombrer**, c'est compter des objets.

### **I. Ensemble fini : introduction**

**Définition** : Un ensemble qu'on peut dénombrer ses éléments est dit un ensemble **fini** et Le nombre d'éléments distincts d'un ensemble E est appelé le **cardinal** de E, on le note :  $\text{Card}(E)=n$

Dans le cas contraire, on dit qu'il est infini.

**Exemples** : 1)  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{a, b, c\}$

$\text{Card}(A)=2$  et  $\text{card}(B)=3$

$$2) A = \left\{ E \left( \frac{11}{n} \right); n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

A est un ensemble fini :  $A = \{0;1;2;3;5;11\}$  et

$$\text{card}A = 6$$

### **Remarques** :

1°L'ensemble vide, noté  $\emptyset$  est un ensemble de cardinal 0 :  $\text{card}\emptyset = 0$

2°Soit un A ensemble Si  $\text{card}A = n$  et  $n \in \mathbb{N}^*$  alors il existe une bijection entre A

et l'ensemble  $\{1;2;3;\dots;n\}$  donc on peut écrire

l'ensemble A sous forme :

$$A = \{x_1; x_2; x_3; \dots; x_n\}$$

3°Soient A et B deux ensembles finis

$\text{card}A = \text{card}B$  si et seulement si il existe une bijection entre A et B

**Propositions** : Soient E et F deux ensembles finis

$$1) \text{card}(E \cup F) = \text{card}(E) + \text{card}(F) - \text{card}(E \cap F)$$

2) Si E et F sont disjoints ( $E \cap F = \emptyset$ ) alors :

$$\text{card}(E \cup F) = \text{card}(E) + \text{card}(F)$$

Si  $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$  est une famille d'ensembles disjoints deux

a deux ( $X_i \cap X_j = \emptyset$  si  $(i \neq j)$ ) alors :

$$\text{card} \left( \bigcup_{i=1}^{i=n} X_i \right) = \sum_{i=1}^{i=n} \text{card}(X_i)$$

3) Si  $E \subseteq F$  alors :  $\text{card}(E) \leq \text{card}(F)$  et

$$\text{card}(F - E) = \text{card}(C_F^E) = \text{card}(F) - \text{card}(E)$$

**Démonstration** : 1) Si on ajoute  $\text{Card}(E)$  et  $\text{Card}(F)$ , on compte deux fois les éléments de  $E \cap F$ . On doit

donc retrancher  $\text{card}(E \cap F)$  pour obtenir le cardinal de  $E \cup F$

2) puisque :  $E \cap F = \emptyset$  on donc  $\text{card}(E \cap F) = 0$  et on utilise 1)

3) Si  $E \subseteq F$  alors  $F = E \cup \bar{E}$  et  $E \cap \bar{E} = \emptyset$  et de 2) on aura :

$$\text{card}(F) = \text{card}(E) + \text{card}(\bar{E})$$

$$\text{donc : } \text{card}(F - E) = \text{card}(C_F^E) = \text{card}(F) - \text{card}(E)$$

**Exercice1** : Soient A et B et C trois ensembles finis.

1) Calculer  $\text{card}(A - B)$  et  $\text{card}(A \Delta B)$  en fonction de

$\text{card}(A)$  et  $\text{card}(B)$  et  $\text{card}(A \cap B)$

2) Montrer que

$$\text{card}(A \cup B \cup C) = \text{card}(A) + \text{card}(B) + \text{card}(C)$$

$$- \text{card}(A \cap B) - \text{card}(A \cap C) + \text{card}(A \cap B \cap C)$$

(Formule de Poincaré (cas particuliers) :  $n=3$ )

**Solutions** : 1) a) Calcul de :  $\text{card}(A - B)$

$$(A - B) \cup (A \cap B) = A \text{ et } (A - B) \cap (A \cap B) = \emptyset$$

$$\text{Donc : } \text{card}(A - B) = \text{card}A - \text{card}(A \cap B)$$

1) b) Calcul de :  $\text{card}(A \Delta B)$

$$\text{On a : } A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

On sait que : Si  $B \subseteq A$  alors :

$$\text{card}(A - B) = \text{card}(B) - \text{card}(A)$$

$$\text{Donc } \text{card}(A \Delta B) = \text{card}(A \cup B) - \text{card}(A \cap B)$$

$$\text{Donc : } \text{card}(A \Delta B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - 2\text{card}(A \cap B)$$

2) Montrer que  $\text{card}(A \cup B \cup C) = \text{card}((A \cup B) \cup C)$

$$\text{card}(A \cup B \cup C) = \text{card}(A \cup B) + \text{card}(C) - \text{card}((A \cup B) \cap C)$$

Après les calculs on trouve :

$$\text{card}(A \cup B \cup C) = \text{card}(A) + \text{card}(B) + \text{card}(C)$$

$$- \text{card}(A \cap B) - \text{card}(A \cap C) + \text{card}(A \cap B \cap C)$$

**Exercice2** : Dans un lycée de 100 élèves, 53 pratiquent le football et 15 le football et basket-ball et 20 pratiquent seulement basket-ball sans football

1) Quelle est Le nombre d'élèves qui pratiquent le basket-ball ?

- 2) Quelle est Le nombre d'élèves qui pratiquent au moins un sport ?  
 3) Quelle est Le nombre d'élèves qui ne pratiquent pas Les deux sports ?

**Solution :** soit E l'ensemble de tous les élèves  
 soit F l'ensemble des élèves qui pratiquent le football  
 et B l'ensemble des élèves qui pratiquent le basket-ball

D'après les hypothèses on a :  $cardE = 100$   
 $cardF = 53$  et  $card(F \cap B) = 13$  et  
 $card(B \cap \overline{F}) = 20$

1)  $card(B) = card(B \cap F) + card(B \cap \overline{F})$

Donc :  $card(B) = 13 + 20 = 33$

2) l'ensemble des élèves qui pratiquent au moins un sport est  $F \cup B$

$card(F \cup B) = cardF + cardB - card(F \cap B)$   
 $card(F \cup B) = 53 + 33 - 13 = 73$

3) l'ensemble des élèves qui ne pratiquent pas Les deux sports est :

$\overline{F \cap B} = \overline{F} \cap \overline{B}$

On a :  $\overline{F \cap B} \cup (F \cap B) = E$

Donc :  $card(\overline{F \cap B}) + card(F \cap B) = cardE$

Donc :  $card(\overline{F \cap B}) = cardE - card(F \cap B)$

Donc :  $card(\overline{F \cap B}) = 100 - 13 = 87$

**Exercice 3:** Dans une promotion de 36 étudiants, 22 maîtrisent le C++, 22 le C# et 18 le Java. De plus, 10 étudiants maîtrisent à la fois le C++ et le C#, 9 maîtrisent à la fois le C# et le Java, et 11 à la fois le C++ et le Java.

Combien d'étudiants maîtrisent les trois langages de programmation ?

**Solution :** Soit A l'ensemble des étudiants qui maîtrisent le C++, B l'ensemble de ceux qui maîtrisent le C# et C l'ensemble de ceux qui maîtrisent le Java.

On cherche à calculer  $card(A \cap B \cap C)$ .  
 Or les hypothèses signifient que  $card(A \cup B) = 36$ ,  
 $card(A) = 22$ ,  $card(B) = 22$ ,  $card(C) = 18$ ,  
 $card(A \cap B) = 10$ ,  $card(B \cap C) = 9$ ,  $card(A \cap C) = 11$ .

On utilise alors la formule de Poincaré avec trois ensembles :

$card(A \cup B \cup C) = card(A) + card(B) + card(C) - card(A \cap B) - card(A \cap C) - card(B \cap C) + card(A \cap B \cap C)$   
 On en déduit facilement que  $card(A \cap B \cap C) = 4$ .

## II. Théorème fondamental du dénombrement

### Ou principe multiplicatif

#### 1) Activités

**Activité1 :** Les localités X et Y sont reliées par trois routes (a, b et c) et les localités Y et Z par deux routes (d et e). Combien y a-t-il de trajets de X à Z en passant par Y ?

Solution :

Il y a 6 (= 3·2) trajets possibles : (a, d), (a, e), (b, d), (b, e), (c, d), (c, e).

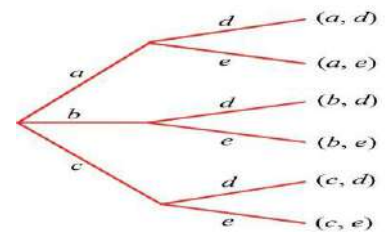
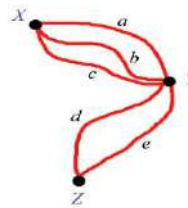
**Activité2 :** Combien de nombres de trois chiffres qu'on peut former avec les chiffres

Suivants : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; .. ; 9 ?

Solution :

Il y'a 9 possibilités pour le chiffre des unités

Il y'a 10 possibilités pour le



chiffre des dizaines  
 Il y'a 10 possibilités pour le chiffre des centaines

D'après le **principe général dénombrement** le nombres de possibilités est :  $n = 9 \times 10 \times 10 = 900$

**Activité3:** On lance une pièce de monnaie 2 fois de suite. Quelle est le nombre de possibilités ?

Solution :

Il y'a 2 possibilités pour la 1 fois : P (pile) ou F (face)

1ere fois	2ere fois
2	2

Il y'a 2 possibilités pour la 2 fois : P (pile) ou F (face)

D'après le **principe général dénombrement** le nombres

de possibilités est :

L'ensemble des possibilités est :

$\Omega = \{PP; FF; PF; FP\}$

$n = 2 \times 2 = 4$

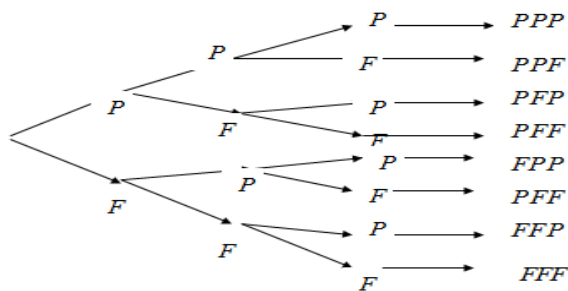
**Activité4 :** On lance une pièce de monnaie trois fois de suite. Quelle est le nombre de possibilités ?

Il y'a 2 possibilités pour la 1 fois : P (pile) ou F (face)

Il y'a 2 possibilités pour la 2 fois : P (pile) ou F (face)

Il y'a 2 possibilités pour la 3 fois : P (pile) ou F (face)

1ere fois	2ere fois	3ere fois
2	2	2



D'après le **principe général dénombrement** le nombres de possibilités est :

L'ensemble des possibilités est :

$$\Omega = \{PPP; PPF; PFP; PFF; FPP; FPF; FFP; FFF\}$$

2) Si un événement  $C_1$  peut se produire de  $n_1$  façons différentes

et un événement  $C_2$  peut se produire de  $n_2$  façons différentes et .... et un événement  $C_p$

peut se produire de  $n_p$  façons différentes

et Tous ces événements étant indépendants,

**Alors** : Le total  $n$  des possibilités de l'événement combiné  $C_1, C_2; \dots C_p$  est le produit des possibilités de chaque événement.

$$\text{Cad} : n_1 \times n_2 \times n_3 \dots \times n_p$$

**Exemple1** : Une classe de 15 garçons et 12 filles.

Il faut un garçon et une fille pour représenter la classe.

Combien de possibilités de choix ?

**Solution** : 15 possibilités pour choisir un garçon, et

12 possibilités pour choisir la fille.

Il y a  $15 \times 12 = 180$  possibilités.

**Exemple2** : L'association de 20 membres souhaite élire :

- Le président,
- Le secrétaire, et
- Le trésorier.

$n = 2 \times 2 \times 2 = 8$  Combien Ya-t-il de possibilités d'avoir ces trois responsables. Pas de cumul de fonction.

**Solution** :

Pour le président : 20 possibilités (20 membres).

Pour le secrétaire : 19 possibilités (19 membres restants).

Pour le trésorier : 18 possibilités (18 membres restants).

Le total des possibilités  $n$  est le produit :

$$n = 20 \times 19 \times 18 = 36342$$

**Propositions** : Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles finis et non vides :  $\text{card}(A \times B) = \text{card}A \times \text{card}B$

**Preuve** : soient :  $\text{card}A = p$  et  $\text{card}B = q$

On pose donc :  $A = \{x_1; x_2; \dots; x_p\}$   $B = \{y_1; y_2; \dots; y_q\}$

Soit :  $(x_i; y_j)$  un élément de  $A \times B$  avec :

$$i \in \{1; 2; \dots; p\} \text{ et } j \in \{1; 2; \dots; q\}$$

Le nombre de choix possibles de  $x_i$  est  $p$

Le nombre de choix possibles de  $y_j$  est  $q$

D'après le **principe général dénombrement** le nombres de choix possibles est :

$$p \times q \text{ donc : } \text{card}(A \times B) = \text{card}A \times \text{card}B = p \times q$$

**Exemple1** : Combien de nombres de deux chiffres tels que : Le chiffre des unités est 0 ou 1 ou 2 et le Le chiffre des dizaines est 5 ou 6 ou 7 ou 8 ?

**Solution** : Le nombre de chiffres c'est le nombre

Des éléments de l'ensemble  $A \times B$  avec :

$$A = \{0; 1; 2\} \text{ et } B = \{5; 6; 7; 8\}$$

$$\text{Donc : } \text{card}(A \times B) = \text{card}A \times \text{card}B = 3 \times 4 = 12$$

**Exemple2** : si On lance un dé deux fois de suite.

Quelle est le nombre de possibilités ?

**Solution** : Le nombre de possibilités c'est le nombre

Des éléments de l'ensemble  $A \times A$  avec :

$$A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$$

$$\text{Donc : } \text{card}(A \times A) = \text{card}A \times \text{card}A = 6 \times 6 = 36$$

**Exemple3** : Combien de menus peut-on composer si on a le choix entre 3 entrées, 5 plats et 4 desserts ?

**Solution** : On a ici 3 sous-expériences : le choix de l'entrée, puis le choix du plat et enfin le choix du dessert. D'après le principe multiplicatif on aura donc  $3 \times 5 \times 4$  menus possibles, c'est-à-dire 60.

### III. le nombre d'applications d'un ensemble dans un autre

Soient  $M$  et  $N$  deux ensembles finis et non vides.

L'ensemble des applications de  $N$  dans  $M$  est :

$$(\text{card}M)^{\text{card}N} = m^n \text{ avec : } \text{card}M = m \text{ et } \text{card}N = n$$

**Preuve** : on a :  $\text{card}M = m$  et  $\text{card}N = n$

On pose donc :  $N = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$  et

$$M = \{y_1; y_2; \dots; y_m\}$$

Soit :  $(x_i; y_j)$  un élément de  $A \times B$  avec :

$$i \in \{1; 2; \dots; p\} \text{ et } j \in \{1; 2; \dots; q\}$$

Le nombre des applications de N dans M est Le nombre de choix possibles des images de chaque éléments  $x_i$  de N avec :  $i \in \{1; 2; \dots; n\}$

Puisque on a : m choix possibles pour chaque  $x_i$

D'après le **principe général dénombrement** le nombres de choix possibles des images est :

$$\underbrace{m \times m \times m \times \dots \times m}_{n \text{ fois}} = m^n$$

**Exemple1** : Soit l'ensemble  $M = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$

1) Combien de nombres de 3 chiffres on peut former avec les éléments de E ?

2) Combien de nombres de 3 chiffres différents deux a deux on peut former avec les éléments de E ?

**Solutions** :

2) le nombre cherché est Le nombre des applications de  $N = \{U; D; C\}$  dans  $M = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$  avec

U le chiffre des unités et D le chiffre des dizaines et C le chiffre des centaines

Donc le nombre est :  $\underbrace{9 \times 9 \times 9}_{3 \text{ fois}} = 9^3 = 729$

1) le nombre des nombres CDU est  $9 \times 8 \times 7 = 504$

**Exemple2** :

1) de Combien de façons différentes peut - on ranger 5 boules de couleurs différentes dans 4 cases sachant que chaque case peut contenir tous les boules

**Solutions** :

le nombre de façons : est Le nombre des applications de  $N = \{C_1; C_2; C_3; C_4\}$  dans  $M = \{1; 2; 3; 4; 5\}$  avec  $C_i$  la case i

Donc le nombre est :  $\underbrace{5 \times 5 \times 5 \times 5}_{4 \text{ fois}} = 5^4 = 625$

## IV.L'ensembles de tous les parties d'un ensemble fini

**Activité** :  $E = \{A, B, C\}$  soit  $P(E)$  l'ensembles de tous les parties de E

Déterminer en extension  $P(E)$  et calculer :  $cardP(E)$

**Solution** : Les sous-ensembles de  $E = \{a, b, c\}$  sont l'ensemble vide  $\emptyset$ , les trois singletons  $\{a\}$ ,  $\{b\}$ ,  $\{c\}$ , les trois paires  $\{a, b\}$ ,  $\{a, c\}$ ,  $\{b, c\}$ , et l'ensemble  $E = \{a, b, c\}$  lui-même donc :

$$P(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, E\}$$

$$cardP(E) = 8 = 2^3$$

**Proposition** : Soit E un ensemble fini et non vide et  $cardE) = n$   $n \in \mathbb{N}$  et soit  $P(E)$  l'ensembles des parties de E on a :  $cardP(E) = 2^n$

**Preuve** : En effet : pour constituer une partie A de E, il y a un choix à

Faire pour chaque élément de E : soit on le met dans B,

Soit on ne l'y met pas (2 possibilités).

S'il y a n éléments dans E, cela donne  $2^n$  possibilités pour A, soit  $2^n$  parties différentes.

## V. Arrangements

**1) Définition** : Soit E un ensemble fini de cardinal n Un arrangement de p éléments de E est une suite ordonnée de p éléments de E

C'est-à-dire : un élément de la forme :

$$(x_1; x_2; \dots; x_p) \in E \times E \times \dots \times E = E^p$$

Il est fondamental de bien comprendre que dans la notion d'arrangement l'ordre des éléments importe et on distinguera :

- Les arrangements **avec répétitions**
- Les arrangements **sans répétitions**

### 2) Arrangements avec répétitions

**2-1 Définition** : Soit E un ensemble fini de Cardinal n.

Un arrangement avec répétitions de p éléments de E est un arrangement de p éléments de E non nécessairement distincts. On utilise également le terme de p-liste d'éléments de E .

### 2-2 Nombre d'arrangements avec répétitions

Soit E un ensemble fini de cardinal n.

Le nombre d'arrangements avec répétitions de p éléments de E est égal à  $n^p$  .

**Démonstration** :

Il faut donc constituer une suite ordonnée de p éléments de E .

Pour le premier élément on a n choix possibles.

Pour le second on a aussi n choix possibles car les répétitions sont autorisées.

Et ainsi de suite.

D'après le principe multiplicatif, on a donc un nombre de possibilités égal à  $\underbrace{n \times n \times \dots \times n}_{p \text{ fois}} = n^p$

Nous pouvons maintenant répondre à la première des cinq questions énoncées dans la sous partie 2.1.

**Exemple 1** : Arrangements avec répétitions

Combien de numéros de téléphone à 8 chiffres peut-on former ? **Solution** :

Il s'agit clairement d'une situation d'arrangements avec répétitions puisque l'ordre des chiffres importe et qu'un numéro de téléphone peut comporter plusieurs fois le même chiffre.

Avec les notations précédentes, l'ensemble E est constitué des chiffres utilisables pour composer un

numéro de téléphone, *i.e.*  $E=\{0,1,\dots,9\}$ , et on a alors  $n=\text{card}(E)=10$


On s'intéresse aux arrangements avec répétitions de  $p=8$  éléments de  $E$ .

D'après le résultat ci-dessus, il y en a  $10^8$

### 3) Arrangements sans répétitions

**3-1 Définition :** Soit  $E$  un ensemble fini de cardinal  $n$ .

Un arrangement sans répétitions de  $p$  éléments de  $E$  est un arrangement de  $p$  éléments de  $E$  tous distincts.

 Dans ce cas a nécessairement  $p \leq n$  puisque les répétitions sont interdites.

### 3-2 Nombre d'arrangements sans répétitions

Soit  $E$  un ensemble fini de cardinal  $n$ .

Le nombre d'arrangements sans répétitions de  $p$  éléments de  $E$  se note :

$A_n^p$  et est égal à :

$$A_n^p = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-p+1)$$

**Démonstration :** Il faut donc constituer une suite ordonnée de  $p$  éléments de  $E$ .

Pour le premier élément on a  $n$  choix possibles.

Pour le second on a cette fois  $n-1$  choix possibles car les répétitions ne sont pas autorisées.

Et ainsi de suite.

D'après le principe multiplicatif, on a donc un nombre de possibilités égal à

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-p+1).$$

### Exemple 1 : Arrangements sans répétitions

Quel est le nombre de mots comportant 5 lettres distinctes ? (Sans se préoccuper du sens des mots)

**Solution :** Il s'agit clairement d'une situation d'arrangements sans répétitions puisque l'ordre des lettres importe et que l'on requiert qu'elles soient distinctes.

Avec les notations précédentes, l'ensemble  $E$  est constitué des lettres de l'alphabet, *i.e.*  $E = \{a, b, \dots, z\}$ , et on a alors  $n=\text{card}(E)=26$

On s'intéresse aux arrangements sans répétitions de  $p=5$  éléments de  $E$ .

D'après le résultat ci-dessus, il y en a :

$$A_{26}^5 = 26 \times 25 \times 24 \times 23 \times 22 = 7893600$$

**Remarque :** Le nombre d'applications injectives d'un ensemble à  $p$  éléments dans un ensemble à  $n$  éléments est  $A_n^p$

**Exemple 2 :** dans un tournoi il Ya 10 participants Déterminer le nombre de classements des 3 premiers places (on suppose que 2 coureurs ne peuvent pas prendre le même classement

**Solution :** Il s'agit d'une situation d'arrangements sans répétitions donc :  $A_{10}^3 = 10 \times 9 \times 8 = 720$

**Exemple 3 :** Une urne contient 9 boules numérotées de 1 à 9.

1) On tire 3 boules de l'urne Successivement avec remise

Et on construit un nombre de trois chiffres Quel est le nombre de nombres possibles ?

2) On tire 3 boules de l'urne Successivement sans remise

Quel est le nombre de nombres possibles ?

**Solution :1)** Il s'agit clairement d'une situation d'arrangements avec répétitions

(Successivement avec remise)

il y en a donc :  $9^3 = 9 \times 9 \times 9 = 729$

**2)** Il s'agit d'une situation d'arrangements sans répétitions (Successivement sans remise)

il y en a donc :  $A_9^3 = 9 \times 8 \times 7 = 504$

## VI. Permutations

### 1) permutations sans répétitions

**Activité :** Quelle est le nombre de mots de 4 lettres (avec un sens ou non) du mot « AID » qu'on peut former ?

**Solution :** « ADI » s'appelle une permutation

Les mots sont : « AID » et « ADI » « IAD » « IDA » « DAI » « DIA »

il y en a donc :  $6 = 3 \times 2 \times 1$  permutations

$3 \times 2 \times 1$  se note  $3!$

**5-1 Définition et Théorème :** Soit  $E$  un ensemble fini de cardinal  $n$ .  $n \in \mathbb{N}^*$

Une **permutation** des éléments de  $E$  est une liste ordonnée d'éléments de  $E$  sans répétitions et le nombre de permutations d'un ensemble fini  $E$  à  $n$  éléments est le nombre  **$n!$  (factorielle  $n$ )** défini par  $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1$

**preuve :** puisque le nombre de permutations d'un ensemble fini  $E$  c'est le nombre d'arrangements sans répétitions de  $n$  élément de  $E$  ( $n = p$ ) donc :

$$A_n^n = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-n+1) = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 1$$

**Remarque :**

- Dans les notations avec parenthèses du type  $\{a ; b ; c\}$  l'ordre est pris en compte. (il s'agit d'une liste ordonnée)

- Dans les notations avec accolades du type  $\{a ; b ; c\}$  l'ordre n'est pas pris en compte. (il s'agit d'un ensemble)

- Par convention on pose  $0! = 1$

**Exemple 1:** De combien de façons pouvez-vous ranger 10 livres sur une étagère ?

Réponse :  $10! = 3628800$

**Exemple 2:** De combien de façons peut-on mélanger un jeu de 36 cartes ?

Réponse :  $36! = 3.72 \times 10^{41}$

## 2) permutations avec répétitions

Le nombre de permutations que l'on peut constituer si certains des éléments sont identiques est évidemment plus petit que si tous les éléments sont distincts.

Lorsque seuls  $k$  éléments sont distincts ( $k \leq n$ ), chacun d'eux apparaissant  $n_1, n_2, \dots, n_k$  fois, avec  $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$  et  $n_i \geq 1$ , on a :

$$P_n = \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \dots \times n_k!} \quad (P_n \text{ permutations avec}$$

répétitions)

En effet, si chacune des  $n_i$  places occupées par des éléments identiques

( $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ ) était occupée par des éléments différents, le nombre de permutations serait alors à multiplier par  $n_i!$ , d'où :

$$P_n \times n_1! \times n_2! \times \dots \times n_k! = n!$$

**Exemple 1:** Les  $\frac{5!}{2! \times 1! \times 2!}$  permutations des 5

éléments a, a, b, c, c :

aabcc aacbc aaccb abacc abcac abcca acabc

acacb acbac acbca

accab accba baacc bacac bacca bcaac bcaca

bccaa caabc caacb

cabac cabca cacab cacba cbaac cbaca cbcaa

ccaab ccaba ccbaa

**Exemple 2:** Combien d'anagrammes peut-on

former avec les lettres du mot :

« excellence » ?

Réponse :  $\frac{10!}{4! \times 1! \times 2! \times 2! \times 1!} = 37800$

Car e se répète 4 fois et x une fois et c deux fois L deux fois et n une fois

## VII. Combinaisons

**Activité :** soit  $\Omega = \{a, b, c, d, e\}$  un ensemble

Quelle est le nombre de sous-ensembles à 2 éléments ?

Les sous-ensembles de  $\Omega$  à 2 éléments sont :

$\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, e\},$

$\{b, c\}, \{b, d\}, \{b, e\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{d, e\}$

Il y a : 10 sous-ensembles

Sous-ensembles à 2 éléments s'appelle une 2-COMBINAISON

**1 Définition :** Soit E un ensemble non vide de n éléments ( $n \neq 0$ ) :

Et un entier  $p : 0 \leq p \leq n$

On appelle combinaison de p éléments d'un ensemble fini E de n éléments, tout sous-ensemble A de p éléments de E.

**Remarque :** « combinaison » est donc synonyme de sous-ensemble et aussi de partie.

(Ce sont les façons de choisir p éléments parmi n éléments

**2 Propriété :** Quels que soient les entiers naturels n et p tels que  $0 \leq p \leq n$  on a :

Le nombre de combinaisons de p éléments parmi n éléments est le nombre que l'on note par :  $C_n^p$  et on

$$a : C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} \quad \text{et on a aussi : } C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

$$C_n^0 = 1 ; C_n^1 = n ; C_n^n = 1$$

**Démonstration :** Pour chaque sous-ensemble de p éléments de E, il y a  $p!$  façons d'ordonner ses p éléments. Il s'agit en effet du nombre de permutations sans répétitions d'un ensemble de p éléments.

Le nombre d'arrangements sans répétitions de p éléments de E est donc égal au nombre de sous-ensemble de p éléments de E multiplié par  $p!$

Ainsi :  $A_n^p = C_n^p p!$

$$\text{Donc : } C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} \quad \text{donc : } C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

• Le nombre de combinaisons de 0 éléments parmi n éléments est :

$$C_n^0 = 1 \text{ (L'ensemble vide)}$$

• Le nombre de combinaisons de 1 éléments parmi n éléments est :

$$C_n^1 = n \text{ (les singletons)}$$

• Le nombre de combinaisons de n éléments parmi n éléments de E est :

$$C_n^n = 1 \text{ (L'ensemble E)}$$

**Exemple 1 :** Une urne contient 7 boules numérotées de 1 à 7.

On tire 2 boules de l'urne simultanément

1. Quel est le nombre de tirages possibles ?

2. Quel est le nombre de tirages pour que la somme des numéros des boules tirées soit pair ?

3. Quel est le nombre de tirages pour que la somme des numéros des boules tirées soit impair ?

**Solution : 1)** Il s'agit clairement d'une situation de combinaisons puisque chaque tirage est une

permutation de 2 éléments dans un ensemble de 7 éléments (simultanément) donc le nombre de tirages

$$\text{possibles est : } C_7^2 = \frac{A_7^2}{2!} = \frac{7 \times 6}{2 \times 1} = 21$$

2) pour que la somme des numéros des boules tirées soit pair il suffit de tirer 2 boules pairs **ou** tirer 2 boules impairs

Donc : le nombre est :

$$C_4^2 + C_3^2 = \frac{A_4^2}{2!} + \frac{A_3^2}{2!} = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} + \frac{3 \times 2}{2 \times 1} = 6 + 3 = 9$$

Car il ya 3 boules pairs et 4 boules impairs

3) pour que la somme des numéros des boules tirées soit impair il suffit de tirer une boules pairs **et** tirer une boules impairs :

$$\text{Donc : le nombre est : } C_4^1 \times C_3^1 = 4 \times 3 = 12$$

**Exemple2 :** UN tournoi sportif compte 8 équipes engagées. Chaque équipe doit rencontrer toutes les autres une seule fois

Combien doit-on organiser de matchs ?

**Solution :** Une rencontre est déterminée par le choix de deux équipes parmi 8

Comme il n'y a qu'un match entre deux équipes (pas d'aller-retour), le choix (équipe A, équipe B) est identique au choix (équipe B, équipe A). Il y a donc

$$C_8^2 = \frac{8!}{2!(8-2)!} = 28 \text{ rencontres possibles}$$

**Exemple3 :** Le bureau d'une association contient 4 hommes et 5 femmes et on souhaite élire un comité de 2 hommes et 3 femmes

1) Combien de comités peut-on élire ?

2) on suppose que le président H1 et Madame la secrétaire F1 doivent être présent

Combien de comités peut-on élire ?

**Solution :1)** Il s'agit d'une situation de combinaisons de 5 éléments dans un ensemble de 9 éléments (simultanément)

donc le nombre de comités qu'on peut élire est :

$$C_4^2 \times C_5^3 = 6 \times 10 = 60$$

2) le nombre est :  $C_3^2 \times C_4^3 = 3 \times 4 = 12$

**Exercice1 :** À la fin de l'année scolaire, tous les élèves se serre la main. S'il y a 30 élèves, combien de poignées de mains sont échangées ?

**Exercice 2:** Dans une classe de 20 élèves, on compte 12 garçons et 8 filles.

On doit élire 5 délégués

1) Quel est le nombre de choix possibles ?

2) Quel est le nombre de choix de délégués de même sexe ?

3) Quel est le nombre de choix de délégués de sexe différents ?

4) Quel est le nombre de choix de délégués qui contient 3 garçons et 2 filles ?

5) Quel est le nombre de choix qui contient au plus une fille ?

6) On suppose que dans cette classe il existe un élève x et sa sœur y

a) Quel est le nombre de choix de délégués de 5 élèves qui ne contiennent ni x ni y

b) Quel est le nombre de choix de délégués de 5 élèves qui contiennent x mais pas y

**Exercice3 :** Combien de diagonales contient un polygone convexe à n côtés (une diagonale relie deux sommets non adjacents) ?

**Synthèse :** Récapitulons les différentes questions que l'on doit se poser confronté à un problème de dénombrement. Cela nous permettra de savoir choisir le concept à utiliser en fonction de la situation.

1) L'ordre des éléments est-il important ?

• Si oui il s'agit d'arrangements ou de permutations.

• Si non il s'agit de combinaisons.

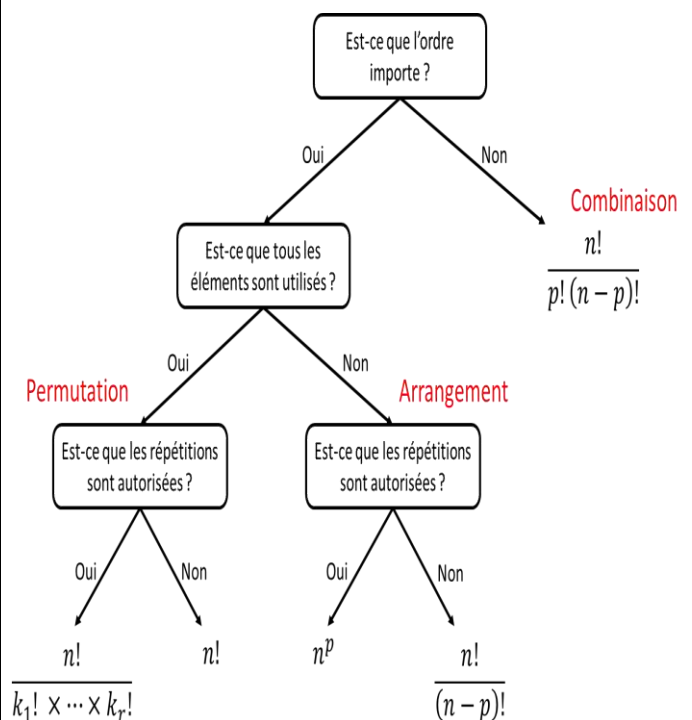
2) Si l'ordre importe, est-ce que tous les éléments sont utilisés ?

• Si non il s'agit d'arrangements.

• Si oui il s'agit de permutations.

3) Les répétitions sont-elles ou non autorisées ?

Nous pouvons représenter par un arbre de décision ces différentes alternatives.



**3) Propriétés :** Quels que soient les entiers naturels  $n$  et  $p$  tels que  $0 \leq p \leq n$  on a :

$$1) C_n^p = C_n^{n-p} \quad 2) C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$$

Preuve : 1) on a  $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

$$C_n^{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!(n-(n-p))!} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = C_n^p$$

2) Soit  $E$  un ensemble fini de cardinal  $n$ .  $n \in \mathbb{N}^*$  et soit  $a \in E$

Le nombre de combinaisons de  $E$  de  $p$  éléments est la somme des combinaisons de  $E$  de  $p$  éléments qui contiennent  $a$  qui ne contiennent pas  $a$

$$\text{Donc : } C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$$

### Applications : Triangle de Pascal

La relation de Pascal permet de construire facilement un triangle qu'on nomme triangle de Pascal :

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

Ce tableau est appelé le Triangle de Pascal.

## VIII. Formule du binôme de Newton

**Proposition :**  $a \in \mathbb{R}$  et  $b \in \mathbb{R}$

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + C_n^n b^n$$

ce qui peut également être noté :

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^n C_n^p a^{n-p} b^p$$

**remarque :** La somme des exposants de chaque monôme vaut toujours  $n$ .

En raison de leur rôle dans cette formule, ils sont aussi appelés coefficients binomiaux.

**Démonstrations :** Cette formule se démontre rigoureusement à l'aide d'un raisonnement par récurrence.

**Exemple :** Développer  $(1+x)^5$  et  $(1-x)^5$  à l'aide de la formule du binôme.

$$\text{Solution : } (1+x)^5 = \sum_{p=0}^5 C_n^p 1^{5-p} x^p$$

$$(1+x)^5 = C_5^0 x^0 + C_5^1 x^1 + C_5^2 x^2 + C_5^3 x^3 + C_5^4 x^4 + C_5^5 x^5$$

Remarque :

Les coefficients binomiaux peuvent également être trouvés en remplissant le triangle de Pascal jusqu'à la ligne 5 :

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

$$\text{Donc : } (1+x)^5 = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$$

$$(1+x)^5 = (1+(-x))^5 = \sum_{p=0}^5 C_n^p 1^{5-p} (-x)^p$$

$$\text{Donc : } (1-x)^5 = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1$$

**Exercice 1 :** Dans une entreprise, il y a 800 employés. 300 sont des hommes, 352 sont membres d'un syndicat, 424 sont mariés, 188 sont des hommes syndiqués, 166 sont des hommes mariés, 208 sont syndiqués et mariés, 144 sont des hommes mariés syndiqués. Combien y a-t-il de femmes célibataires non syndiquées ?

**Solution :** Notons  $E$  ;  $H$ ,  $M$  et  $S$  les ensembles constitués respectivement des employés, des employés hommes, des employés mariés, des employés syndiqués.

L'énoncé donne :

$$\text{card}(E)=800, \text{card}(H)=300, \text{card}(S)=352, \text{card}(M)=424, \text{card}(H \cap S) = 188, \text{card}(H \cap M) = 166, \text{card}(S \cap M) = 208, \text{card}(H \cap M \cap S) = 144$$

$$\text{On cherche : } \text{card}(\overline{H} \cap \overline{M} \cap \overline{S})$$

où  $\overline{A}$  désigne le complémentaire de  $A$  dans  $E$ . D'après les lois de Morgan

$$\text{card}(\overline{H} \cap \overline{M} \cap \overline{S}) = \text{card}(\overline{H \cup M \cup S})$$

applique la formule du crible de Poincaré :

$$\text{card}(H \cup M \cup S) = \text{card}(H) + \text{card}(M) + \text{card}(S) - \text{card}(H \cap M) - \text{card}(H \cap S) - \text{card}(M \cap S) + \text{card}(H \cap M \cap S)$$

On en déduit :

$$\text{card}(H \cup M \cup S) = 658$$

$$\text{card}(\overline{H} \cap \overline{M} \cap \overline{S}) = 800 - 658 = 142$$

Il y a donc 142 femmes célibataires non syndiquées

**Exercice2.** Une femme a dans sa garde-robe : 4 jupes, 5 chemisiers et 3 vestes. Elle choisit au hasard une jupe, un chemisier et une veste. De combien de façons différentes peut-elle s'habiller ?

**Solution :**

Cette femme peut s'habiller de  $4 \times 5 \times 3 = 60$  façons

**Exercice3 :** A l'occasion d'une compétition sportive groupant 18 athlètes, on attribue une médaille d'or, une d'argent, une de bronze. Combien y-a-t-il de distributions possibles (avant la compétition, bien sûr...)?

**Solution :** Un tel podium est un arrangement de 3 athlètes choisis parmi l'ensemble des 18 athlètes (l'ordre compte et il ne peut y avoir de répétition, un athlète ne pouvant remporter deux médailles simultanément). Il existe donc :

$$A_{18}^3 = \frac{18!}{(18-3)!} = \frac{18!}{15!} = 18 \times 17 \times 16 = 4896 \text{ Podiums}$$

différents

**Exercice4 :** Un questionnaire à choix multiples, autorisant une seule réponse par question, comprend 15 questions. Pour chaque question, on propose 4 réponses possibles. De combien de façons peut-on répondre à ce questionnaire ?

**Solution :** Une réponse à ce QCM peut être désignée par une 15-liste de 15 chiffres choisis dans l'ensemble  $\Omega = \{1; 2; 3; 4\}$ . Le nombre de ces

15-listes est donc de cardinal  $(\text{card}\Omega)^{15} = 4^{15}$

**Exercice5 :** Six personnes choisissent mentalement un nombre entier compris entre 1 et 6.

1) Combien de résultats peut-on obtenir ?

2) Combien de résultats ne comportant pas deux fois le même nombre peut-on obtenir ?

**Solution**

1) Un tel choix est donné par un 6-uplet (sextuplé) de 6 chiffres, chacun choisi entre 1 et 6. Pour connaître le nombre de choix, on effectue le produit cartésien de l'ensemble  $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$  6

fois par lui-même. Il y donc

$6^6 = 46656$  choix possibles.

2) Si les six chiffres doivent être distincts, un tel choix sera donné par un arrangement de 6 chiffres choisis parmi 6, c'est à-dire une permutation des 6 chiffres. Il aura donc  $6! = 720$  choix possibles

**Exercice6:** Soit A l'ensemble des nombres de quatre chiffres, le premier étant non nul.

1) Calculer le nombre d'éléments de A.

2) Dénombrer les éléments de A :

a) composés de quatre chiffres distincts

b) composés d'au moins deux chiffres identiques

c) composés de quatre chiffres distincts autres que 5 et 7

**Solution :**

1) Les éléments de A sont tous les nombres de 1000 à 9999. Il y en a donc 9000. Ainsi  $\text{Card A} = 9000$

2) a) Un nombre de A est un élément du produit cartésien :

- d'un élément de  $\Omega_1 = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$  en guise de premier chiffre. Il y a 9 possibilités.

- Une fois cet élément choisi, il va falloir choisir les 3 chiffres restants parmi 9 seulement (aucun ne pouvant être égal au premier chiffre choisi). On doit donc choisir un arrangement de trois éléments pris dans un ensemble de 9 chiffres. Il y

$$a) A_9^3 = \frac{9!}{(9-3)!} = \frac{9!}{6!} = 9 \times 8 \times 7 = 504 \text{ tels arrangements.}$$

Le nombre d'éléments de A composés de quatre chiffres distincts vaut donc  $9 \times 504 = 4536$

b) Le contraire de « au moins deux chiffres identiques » est « quatre chiffres distincts » Le nombre d'éléments de A possédant « au moins deux chiffres identiques » est égal au nombre total d'éléments de A diminué du nombre d'éléments de A possédant leurs quatre chiffres distincts, nombre qui a été calculé dans la question précédente. Le nombre d'éléments de A possédant « au moins deux chiffres identiques » vaut donc  $9000 - 4536 = 4464$

c) Un nombre de A composé de quatre chiffres distincts autres que 5 et 7 est un élément du produit cartésien :

- d'un élément de  $\Omega_2 = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$  en guise de premier chiffre. Il y a 7 possibilités.

- Une fois cet élément choisi, il va falloir choisir les 3 chiffres restants parmi 7 seulement (aucun ne pouvant être égal au premier chiffre choisi, ni égal à 5 ou 7). On doit donc choisir un arrangement de trois éléments pris dans un ensemble de 7 chiffres. Il y a

$$A_7^3 = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = 7 \times 6 \times 5 = 210 \text{ tels arrangements. Le}$$

nombre d'éléments de A composés de quatre chiffres distincts autres que 5 et 7 vaut donc  $7 \times 210 = 1470$

**Exercice7:** Quatre garçons et deux filles s'assoient sur un banc.

- 1) Quel est le nombre de dispositions possibles ?
- 2) Même question si les garçons sont d'un côté et les filles de l'autre.
- 3) Même question si chaque fille est intercalée entre deux garçons.
- 4) Même question si les filles veulent rester l'une à côté de l'autre

**Solution :**

Désignons par  $G = \{G_1; G_2; G_3; G_4\}$  l'ensemble des 4 garçons et  $F = \{F_1; F_2\}$  l'ensemble des 2 filles.

1) L'ensemble des dispositions possibles de ces 6 personnes sur les six places d'un banc correspond à l'ensemble des permutations des six éléments de l'ensemble. Il a donc  $6! = 720$  dispositions différentes.

2) Si les garçons sont d'un côté et les filles de l'autre, il y a deux « configurations possibles » : 4 garçons 2 filles ou 2 filles 4 garçons. Au sein de chaque configuration, il y a  $2! = 2$  manières de permuter les 2 filles, et  $4! = 24$  manières de permuter les 4 garçons. Il y aura au total  $2 \times 4! \times 2! = 96$  manières de placer ainsi ces six personnes.

3) Si chaque fille est intercalée entre deux garçons, il y a trois configurations possibles : G F G F G G ou G G F G F G ou G F G G F G. Une fois la configuration « choisie », il y a  $2! = 2$  manières de permuter les 2 filles, et  $4! = 24$  manières de permuter les 4 garçons. Il y aura au total  $3 \times 2! \times 4! = 144$  manières de placer ainsi ces six personnes.

4) Si les filles veulent rester l'une à côté de l'autre, il y a cinq configurations possibles : F F G G G G ou G F F G G G ou G G F F G G ou G G G F F G ou G G G G F F. Une fois la configuration « choisie », il y a  $2! = 2$  manières de permuter les 2 filles, et  $4! = 24$  manières de permuter les 4 garçons. Il y aura au total  $5 \times 2! \times 4! = 240$  manières de placer ainsi ces six personnes.

**Exercice8 :** On trace dans un plan  $n \geq 3$  droites en position générale (c'est-à-dire que deux droites ne sont jamais parallèles, et 3 droites ne sont jamais concourantes). Combien de triangles a-t-on ainsi tracé ?

**Solution :** Un triangle est déterminé par 3 droites (ses côtés). Il y a autant de triangles que de possibilités de choisir 3 droites parmi  $n$ , c'est-à-dire :

$$C_n^3 = \frac{n!}{3!(n-3)!} = \frac{n \times (n-1)(n-2)(n-3)!}{3!(n-3)!} = \frac{n \times (n-1)(n-2)}{6}$$

**Exercice9 :** Dans une classe de 32 élèves, on compte 19 garçons et 13 filles. On doit élire deux délégués

- 1) Quel est le nombre de choix possibles ?
- 2) Quel est le nombre de choix si l'on impose un garçon et une fille ?
- 3) Quel est le nombre de choix si l'on impose 2 garçons ?

**Solution :** Les délégués sont choisis sans ordre

1) Les choix simultanés de 2 délégués parmi les 32 élèves sont au nombre de  $C_{32}^2 = 496$

2) Si on impose d'avoir un garçon et une fille, alors le choix des deux délégués est un élément du produit cartésien entre :

- l'ensemble des choix simultanés de 1 délégué parmi les 19 garçons, soit  $C_{19}^1 = 19$  choix

- l'ensemble des choix simultanés de 1 délégué parmi les 13 filles, soit  $C_{13}^1 = 13$

L'ensemble des choix est donc de cardinal

$$C_{19}^1 \times C_{13}^1 = 19 \times 13 = 247$$

3) Si on impose d'avoir 2 garçons comme délégués, le nombre de choix des deux délégués est donc « réduit » au nombre de choix de 2 délégués parmi les 19 garçons, au nombre de  $C_{19}^2 = 171$

**Exercice10 :** Au service du personnel, on compte 12 célibataires parmi les 30 employés. On désire faire un sondage : pour cela on choisit un échantillon de quatre personnes dans ce service.

1) Quel est le nombre d'échantillons différents possibles ?

2) Quel est le nombre d'échantillons ne contenant aucun célibataire ?

3) Quel est le nombre d'échantillons contenant au moins un célibataire ?

**Solution :**

1) Le nombre de d'échantillons différents est égal au nombre de choix de 4 personnes parmi les 30, soit  $C_{30}^4 = 27405$

2) Le nombre d'échantillons ne contenant aucun célibataire est égal au nombre de choix de 4 personnes parmi les  $30 - 12 = 18$  non célibataires, soit  $C_{18}^4 = 3060$

3) Le contraire de « au moins un célibataire » est « aucun célibataire ».

Le nombre d'échantillons contenant au moins un célibataire est égal au nombre total d'échantillons diminué du nombre d'échantillons ne contenant aucun célibataire. Ces deux nombres ayant été déterminés dans les deux questions précédentes,

on conclut que le nombre d'échantillons contenant au moins un célibataire est égal à

$$C_{30}^4 - C_{18}^4 = 27405 - 3060 = 24345$$

**Exercice11** : Un sac contient 5 jetons verts (numérotés de 1 à 5) et 4 jetons rouges (numérotés de 1 à 4).

1) On tire successivement et au hasard 3 jetons du sac, sans remettre le jeton tiré. Calculer les possibilités :

- De ne tirer que 3 jetons verts ;
- De ne tirer aucun jeton vert
- De tirer au plus 2 jetons verts ;
- De tirer exactement 1 jeton vert.

2) On tire simultanément et au hasard 3 jetons du sac.

Reprendre alors les questions a), b), c) et d).

**Solution :**

1) Tirages successifs sans remise de 3 jetons

a) Notons A l'événement « Tirer 3 jetons verts ».

$$\text{On a } \text{card}(A) = A_5^3$$

b) Notons B l'événement « Ne tirer aucun jeton vert ». On a  $\text{card}(B) = A_4^3$

c) Notons C l'événement « Tirer au plus 2 jetons verts » cad : Ne tirer aucun vert ou Tirer exactement 1 vert ou Tirer exactement 2 verts

$$\text{card}(C) = A_5^3 + 3A_5^1 A_4^2 + 3A_5^2 A_4^1$$

2) a) Notons A l'événement « Tirer 3 jetons verts ».

$$\text{On a } \text{card}(A) = C_5^3$$

b) Notons B l'événement

« Ne tirer aucun jeton vert ». On a  $\text{card}(b) = C_4^3$

c) Notons C l'événement « Tirer au plus 2 jetons verts »

cad Ne tirer aucun vert ou Tirer exactement 1 vert ou Tirer exactement 2 vert :  $C_9^3 + C_5^1 C_4^2 + C_5^2 C_4^1$

d) Soit D l'événement « Tirer exactement 1 jeton vert ».  $C_5^2 C_4^1$

**Exercice12**: Christian et Claude font partie d'un club de 18 personnes. On doit former un groupe constitué de cinq d'entre elles pour représenter le club à un spectacle.

1) Combien de groupes de 5 personnes peut-on constituer ?

2) Dans combien de ces groupes peut figurer Christian ?

3) Christian et Claude ne pouvant se supporter, combien de groupes de 5 personnes peut-on constituer de telle façon que Christian et Claude ne se retrouvent pas ensemble ?

**Solution :**

1) Le nombre de choix de 5 personnes parmi les 18 est égal à  $C_{18}^5 = 8568$

2) Le nombre de groupes dans lequel figure Christian est égal (une fois lui choisi) au nombre de groupes de 4 personnes choisies parmi 17, soit  $C_{17}^4 = 2380$

3) Afin que Christian et Claude ne se retrouvent pas ensemble, il faut : - constituer un groupe de 5 personnes contenant Christian mais pas Claude.

Le nombre de groupes dans lequel figure Christian mais pas Claude est égal (une fois lui choisi) au nombre de groupes de 4 personnes choisies parmi 16 (pour ne pas qu'y figure Claude), soit  $C_{16}^4 = 1820$  OU - constituer un

groupe de 5 personnes contenant Claude mais pas Christian. De façon analogue à ce qui précède (Christian et Claude jouent des rôles similaires), il y a  $C_{16}^4 = 1820$  possibilités Il y a donc  $C_{16}^4 + C_{16}^4 = 3640$  répondant à cette condition

**Exercice13**: Une course oppose 20 concurrents, dont Ahmed.

1. Combien Ya-t-il de podiums possibles ?

2. Combien Ya-t-il de podiums possibles où Ahmed est premier ?

3. Combien Ya-t-il de podiums possibles dont Ahmed fait partie ?

4. On souhaite récompenser les 3 premiers en leur offrant un prix identique à chacun.

Combien Ya-t-il de distributions de récompenses possibles ?

Solution : 1) Pour le premier, on a 20 choix possibles, pour le second 19, pour le troisième 18. Le nombre de podiums possibles est donc égal à  $20 \times 19 \times 18 = 6840$ .

2) Le premier concurrent est Ahmed. Pour les autres places, il y a 19 puis 18 choix possibles ; Le nombre de podiums ainsi constitués est de  $19 \times 18$ .

3) Il y a trois choix possibles pour la place D'Ahmed. Une fois ce choix fixé, il y a 19 choix possibles pour la première des deux autres places, puis 18 choix possibles pour la seconde des deux autres places. Le nombre de podiums vérifiant ces conditions est donc de  $3 \times 19 \times 18$ .

4) L'ordre n'est plus important, et on cherche le nombre de choix de 3 concurrents parmi 20, c'est-à-dire  $C_{20}^3 = 1140$

**Exercice 14 :** Dans une pièce, il y a deux tables. La première dispose de 3 chaises, numérotées de 1 à 3, la seconde dispose de 4 chaises, numérotées de 1 à 4. Sept personnes entrent. Combien Ya-t-il de possibilités de les distribuer autour de ces deux tables ?

**Solution :** On commence par choisir les personnes qui vont s'installer autour de la première table. Il y a  $C_7^3$  possibilités. Ensuite, les 3 personnes qui sont autour de la première table peuvent choisir librement leur place. Il y a 3! choix (autant que de permutations des 3 chaises). De même, il y a 4! choix pour les personnes qui s'installent autour de la deuxième table. Le

nombre total de possibilités est donc  $C_7^3 \times 3! \times 4!$   
Le fait de trouver 7! montre que le dénombrement que nous avons fait, qui suit les données de l'énoncé, peut être simplifié. En effet, le fait d'imposer deux tables ne change en réalité rien au problème : on doit placer 7 personnes sur 7 chaises, et il y a 7! façons différentes de le faire.

**Exercice 15 :** Un cadenas possède un code à 3 chiffres, chacun des chiffres pouvant être un chiffre de 1 à 9.

1) 1-1) Combien y-a-t-il de codes possibles ?

1-2) Combien Ya-t-il de codes se terminant par un chiffre pair ?

1-3) Combien y-a-t-il de codes contenant au moins un chiffre 4 ?

1-4) Combien y-a-t-il de codes contenant exactement un chiffre 4 ?

2) Dans cette question on souhaite que le code comporte obligatoirement trois chiffres distincts.

2-1) Combien y-a-t-il de codes possibles ?

2-2) Combien y-a-t-il de codes se terminant par un chiffre impair ?

2-3) Combien y-a-t-il de codes comprenant le chiffre 6 ?

**Solution :**

1) 1-1) Il y a  $9^3 = 9 \times 9 \times 9 = 729$  codes possibles.

1-2) Pour chacun des deux premiers chiffres, il y a 9 choix possibles. Pour le dernier, il y a 4 choix possibles (on peut choisir 2, 4, 6, 8). Il y a donc  $9 \times 9 \times 4 = 324$  tels codes.

1-3) On va compter par différence. Il y a  $8 \times 8 \times 8$  codes ne contenant pas du tout le chiffre 4. Il y a donc  $9 \times 9 \times 9 - 8 \times 8 \times 8 = 217$  codes comprenant au moins une fois le chiffre 4.

1-4) Il y a 3 choix pour la place dans le nombre où se situe le chiffre 4. Pour chacun des deux autres chiffres, il y a 8 choix possibles. Il y a donc  $3 \times 8 \times 8 = 192$  tels codes.

2) 2-1) On cherche cette fois un arrangement de 3 chiffres parmi 9. Il y a donc  $9 \times 8 \times 7 = 504$  choix possibles

2-2) Il y a cinq choix pour le dernier chiffre. Celui-ci choisi, il reste huit choix pour le premier chiffre, puis sept pour le deuxième. Il y a donc  $8 \times 7 \times 5 = 280$  tels codes

2-3) Il y a 3 choix pour la place dans le nombre où on place le chiffre 6. Pour les autres chiffres, il y a d'abord 8 choix, puis 7 choix possibles. Le nombre de tels codes est donc de  $8 \times 7 \times 3 = 168$ .

**Exercice 16 :** Ali et Fatima font partie d'une équipe de 8 joueurs (6 garçons et 2 filles). On décide de fabriquer un comité de 3 joueurs.

1) Combien y-a-t-il de comités possibles ?

2) Combien y-a-t-il de comités contenant exactement 2 garçons et 1 fille ?

3) Combien y-a-t-il de comités contenant au moins deux garçons ?

4) On veut que Ali et Fatima soient ensemble dans le comité. Combien y-a-t-il de comités possibles ?

5) On ne veut pas que Ali et Fatima soient ensemble dans le comité. Combien y-a-t-il de comités possibles ?

**Solution :** 1) Il s'agit de choisir trois joueurs parmi 8. Le nombre de comités possibles est donc de  $C_8^3 = 56$

2) Il s'agit de choisir deux garçons parmi 6, puis une fille parmi 2. Le nombre de choix possibles est donc de  $C_6^2 \times C_2^1$

3) On compte le nombre de comités comprenant 3 garçons : il vaut  $C_6^3$  (il faut choisir trois garçons parmi 6). On a déjà compté le nombre de comités comprenant exactement deux garçons. Donc le nombre de comités comprenant au moins deux garçons vaut  $C_6^2 \times C_2^1 + C_6^3$

4) Il ne reste qu'à choisir le dernier membre du comité : il y a 6 comités comprenant à la fois Ali et Fatima

On compte les comités comprenant Ali, mais pas Fatima, et les comités comprenant Fatima, mais pas Fred. Dans le premier cas, on trouve  $C_6^2$

comités (il reste à choisir deux joueurs parmi 6, puisqu'on ne peut plus prendre ni Ali, ni Fatima).

Dans le second cas, on a aussi  $C_6^2$  comités. On compte enfin les comités ne comprenant ni Ali, ni Fatima. Il y en a  $C_6^3$ . Finalement, le nombre total de comités ne comprenant pas simultanément

Fatima et Ali est  $C_6^2 + C_6^2 + C_6^3 = 50$ . Plus simplement, on pouvait aussi soustraire du nombre total de comités 56, cf question 1) le nombre de comités comprenant à la fois Fred et Émile (6, cf question 4), et on retrouve bien 50 comités ne comprenant pas simultanément Ali et Fatima.

**Exercice17** On souhaite ranger sur une étagère 4 livres de mathématiques (distincts), 6 livres de physique, et 3 de chimie. De combien de façons peut-on effectuer ce rangement:

si les livres doivent être groupés par matières.  
si seuls les livres de mathématiques doivent être groupés.

**Solution :** Il y a  $3!$  façons de choisir l'ordre des matières. Une telle façon choisie, il y a  $4!$  façons de ranger les livres de mathématiques,  $6!$  façons de ranger les livres de physique, et  $3!$  façons de ranger les livres de chimie. Le nombre de rangements possible est donc :  $3!4!6!3!$

Il peut y avoir  $0, 1, \dots, 9$  livres placés avant les livres de mathématiques. Il y a donc 10 choix du nombre de livres placés avant le livre de mathématiques. Ce choix fait, il y a  $4!$  façons d'ordonner les livres de mathématiques, et  $9!$  façons d'ordonner les autres : il y a donc en tout  $10 \times 4!9!$  rangements différents.

**Exercice18 :** Dénombrer les anagrammes des mots suivants : MATHS, RIRE, ANANAS.

Corrigé

Un anagramme correspond à une permutation des lettres d'un mot. Mais si on permute deux lettres identiques, on trouve le même mot

On doit donc diviser le nombre total de permutations par le nombres de permutations entre lettres identiques. On trouve donc :

- MATHS :  $5!$
- RIRE :  $\frac{4!}{2!}$
- ANANAS :  $\frac{6!}{2!3!}$

**Exercice19 :** Soit  $p$  points du plan distincts non aligner 3 par 3.

1) Combien de polygones à  $n \leq p$  côtés peut-on réaliser à partir de ces points ?

2) On fixe un tel polygone à  $n$  côtés. Combien de diagonales ce polygone comporte-t-il?

**Solution :**

1) Il faut d'abord choisir  $n$  points parmi ces  $p$  points. Il y a  $C_p^n$  tels choix. Ces points  $A_1, \dots, A_n$  étant choisis, on fixe un premier sommet comme origine. On choisit ensuite le sommet suivant pour lequel il y a  $n-1$  choix, puis le troisième sommet, pour lequel il y a  $n-2$  choix, etc... Il y a donc  $(n-1)!$  possibilités pour ordonner les

sommets. Mais attention, procédant ainsi, on compte chaque polygone deux fois car l'ordre global des points n'importe pas (par exemple, le polygone  $ABCD$  est le même que le polygone  $ADCB$ ). Finalement, on trouve qu'il y a  $\frac{1}{2}(n-1)!C_p^n$  polygones possibles à  $n$

sommets choisis parmi  $p$  points du plan.

2) Une diagonale est définie par deux sommets consécutifs. On choisit donc d'abord un premier sommet  $A$  parmi les  $n$  sommets du polygone. On choisit ensuite un deuxième sommet parmi les sommets du polygone qui ne sont ni  $A$  ni un sommet adjacent à  $A$ . Il y a  $n-3$  choix. Mais ce faisant, on compte deux fois chaque diagonale (la diagonale  $(AB)$  est comptée en choisissant  $A$ , puis  $B$ , et en choisissant  $B$ , puis  $A$ ). Le nombre de diagonales est donc  $\frac{n}{2}(n-3)$ .

**Exercice20:** Dans une urne se trouvent 9 boules : 4 rouges numérotées 0 ; 1 ; 1 ; 2 et 3 vertes numérotées 1 ; 2 ; 2 et deux noires numérotées 1 ; 3

On en tire 3 boules

Et on considère les événements suivants :

A « obtenir trois boules de trois couleurs différentes. Deux à deux »

B « obtenir trois boules qui portent le même numéro

C « la somme des numéros des boules tirées est égale à 4 »

D « obtenir au moins une boule rouge »

Trouver le nombre de possibilités des événements A ; B ; C ; D dans les cas suivants :

1) Tirage de 3 boules simultanément

2) Tirage de 3 boules Successivement Avec remise

3) Tirage de 3 boules Successivement sans remise

**Solutions :** on note les couleurs par : R ; V ; N

1) **Tirage de 3 boules simultanément**

a) A « obtenir trois boules de trois couleurs différentes.

Deux à deux » si on tire une boule rouge et une boule verte et une noire et on obtient la combinaison :

$\{R; V; N\}$  et le nombre de possibilités

Est  $C_4^1 \times C_3^1 \times C_2^1 = 4 \times 3 \times 2 = 24$  donc :  $cardA = 24$

b) B « obtenir trois boules qui portent le même numéro »

Tous les numéros : 0 ; 1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 2 ; 2 ; 2 ; 3

Donc : 3 boules qui portent 1 ou

3 boules qui portent 2 donc le nombre de possibilités

est  $C_4^3 + C_3^3 = 4 + 1 = 5$  donc :  $cardB = 5$

c) C « la somme des numéros des boules tirées est égale à 4 » les possibilités sont :

$3+1+0=4$  ou  $0+2+2=4$  ou  $2+1+1=4$  cad les

combinaisons :  $\{0; 1; 3\}$  ou  $\{0; 2; 2\}$  ou  $\{1; 1; 2\}$

donc le nombre de possibilités

est  $cardC = C_1^1 C_4^1 C_1^1 + C_1^1 C_3^2 + C_4^2 C_3^1 = 4 + 3 + 6 \times 3 = 25$

d) methode1 :

D « obtenir au moins une boule rouge »

Obtenir au moins une boule rouge si :

On tire 1 rouge et 2 non rouges **ou** 2 rouges et 1 non rouges **ou** 3 rouges

cad les combinaisons :  $\{R; \bar{R}; \bar{R}\}$  **ou**  $\{R; R; \bar{R}\}$  **ou**

$\{R; R; R\}$  avec :  $\bar{R}$  « ne pas tirer une boule rouge »

$cardD = C_4^1 C_5^2 + C_4^2 C_5^1 + C_4^3 = 4 \times 10 + 6 \times 5 + 4 = 74$

Methode2 :

$\bar{D}$  «ne pas obtenir de boules rouges »

Donc les 3 tirés sont non rouges

$card\bar{D} = C_3^3 = 10$

**Donc**  $cardD = C_9^3 - card\bar{D} = 84 - 10 = 74$

**2) Tirage de 3 boules successivement Avec remise**

a) A « obtenir trois boules de trois couleurs différentes.

Deux à deux » si on tire une boule rouge et une boule verte et une noire et on obtient une l'arrangement

avec répétition de type:  $(R; V; N)$  (avec l'ordre)

et le nombre de possibilités est :

$cardA = 6 \times (4 \times 3 \times 2) = 144$

b) B « obtenir trois boules qui portent le même numéro »

Donc : 3 boules qui portent 1 ou

3 boules qui portent 2

on obtient une l'arrangement avec répétition de type:

$(0; 0; 0)$  **ou**  $(1; 1; 1)$  **ou**  $(2; 2; 2)$  **ou**  $(3; 3; 3)$  donc le

nombre de possibilités est  $cardB = 1^3 + 4^3 + 3^3 + 1^3 = 93$

c) C « la somme des numéros des boules tirées est

égale a 4 » les possibilités sont :

$3+1+0=4$  ou  $0+2+2=4$  ou  $2+1+1=4$  cad on obtient une

l'arrangement avec répétition de type:  $(1; 1; 2)$  **ou**

$(0; 2; 2)$  **ou**  $(0; 1; 3)$  (avec l'ordre)

Donc le nombre de possibilités

est  $cardC = 3! \times 1 \times 4 \times 1 + C_3^2 \times 1 \times 3^2 + C_3^2 \times 4^2 \times 3 = 195$

d)  $\bar{D}$  «ne pas obtenir de boules rouges »

Donc les 3 tirés sont non rouges

le nombre de tous possibilités est :  $cardE = 9^3$

**Donc**  $cardD = 9^3 - 5^3 = 604$

**3) Tirage de 3 boules successivement sans remise**

a) A « obtenir trois boules de trois couleurs différentes.

on obtient une l'arrangement de type:  $(R; V; N)$  (avec

l'ordre) et le nombre de possibilités est :

$cardA = 3! \times A_4^1 \times A_3^1 \times A_2^1 = 6 \times (4 \times 3 \times 2) = 144$

b) B « obtenir trois boules qui portent le même numéro »

Donc : 3 boules qui portent 1 ou

3 boules qui portent 2

on obtient une l'arrangement de type:  $(0; 0; 0)$  **ou**

$(1; 1; 1)$  **ou**  $(2; 2; 2)$  donc le nombre de possibilités est

$cardB = A_4^3 + A_3^3 = 24 + 6 = 30$

c) C « la somme des numéros des boules tirées est égale a 4 » les possibilités sont :

$3+1+0=4$  ou  $0+2+2=4$  ou  $2+1+1=4$  cad on obtient une

l'arrangement de type:  $(1; 1; 2)$  **ou**  $(0; 2; 2)$  **ou**  $(0; 1; 3)$

(avec l'ordre)

Donc le nombre de possibilités est

$cardC = 3! \times A_4^1 \times A_4^1 \times A_1^1 + C_3^2 \times 1 \times A_3^2 + C_3^2 \times A_4^2 \times A_3^1 = 150$

d)  $\bar{D}$  «ne pas obtenir de boules rouges »

Donc les 3 tirés sont non rouges

le nombre de tous possibilités est :  $cardE = A_9^3$

**Donc**  $cardD = A_9^3 - card\bar{D} = A_9^3 - A_5^3 = 564$

**Exercice 21:**  $k \in \mathbb{N}$  et  $n \in \mathbb{N}$  et  $0 \leq k \leq n$

1) Montrer que :  $A_{n+1}^k = A_n^k + kA_n^{k-1}$

2)  $k \in \mathbb{N}$  et  $p \in \mathbb{N}$  et  $n \in \mathbb{N}$  et  $0 \leq k \leq p \leq n$

Montrer que :  $C_n^k C_{n-k}^{p-k} = C_p^k C_n^p$  et déterminer la valeur

de la somme suivante :  $S = \sum_{k=0}^p C_n^k C_{n-k}^{p-k}$

3) Déterminer le nombre entier  $3 \leq n$  tel que :

$C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 = 5n$

4) Montrer que :  $2^n \geq 1+n$  et  $3^n \geq 1+2n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

5) a) Montrer que :  $\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

5) b) calculer :  $S_n = \sum_{k=0}^n k C_n^k$  en fonction de n

6) quelle est le coefficient de  $x^7 y^3 z^2$  dans l'identité remarquable  $(x + 2y + 3z)^{12}$

**solution :**

1) on a La relation de Pascal :  $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$

Donc :  $k! C_{n+1}^k = k! (C_n^k + C_n^{k-1})$  donc

$k! C_{n+1}^k = k! C_n^k k! + k! C_n^{k-1}$

donc  $k! C_{n+1}^k = k! C_n^k k! + k \times (k-1)! C_n^{k-1}$

or on a :  $C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} \Leftrightarrow A_n^k = k! C_n^k$

donc  $A_{n+1}^k = A_n^k + k A_n^{k-1}$

2) Montrons que :  $C_n^k C_{n-k}^{p-k} = C_p^k C_n^p$

On a :

$$C_n^k C_{n-k}^{p-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{(n-k)!}{(p-k)!(n-p)!} = \frac{n!}{k!(p-k)!(n-p)!}$$

Et on a :

$$C_p^k C_n^p = \frac{p!}{k!(p-k)!} \times \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{k!(p-k)!(n-p)!}$$

$$\text{Donc } C_n^k C_{n-k}^{p-k} = C_p^k C_n^p$$

$$S = \sum_{k=0}^p C_n^k C_{n-k}^{p-k} = \sum_{k=0}^p C_n^k C_n^p \text{ car } C_n^k C_{n-k}^{p-k} = C_p^k C_n^p$$

$$\text{Donc : } S = C_n^p \sum_{k=0}^p C_p^k \text{ et on d'après le binôme de}$$

$$\text{newton on a : } (a+b)^p = \sum_{p=0}^p C_p^k a^k b^{p-k}$$

Pour : a=1 et b=1 on a :

$$(1+1)^p = \sum_{k=0}^p C_p^k 1^k \times 1^{p-k} = \sum_{k=0}^p C_p^k = 2^p$$

$$\text{Donc : } S = 2^p C_n^p$$

3) on a :

$$C_n^2 = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n \times (n-1)(n-2)!}{2!(n-2)!} = \frac{n \times (n-1)}{2}$$

$$C_n^3 = \frac{n!}{3!(n-3)!} = \frac{n \times (n-1)(n-2)(n-3)!}{3!(n-3)!} = \frac{n \times (n-1)(n-2)}{6}$$

$$C_n^1 = n$$

$$\text{Donc } C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 = 5n \Leftrightarrow$$

$$n + \frac{n \times (n-1)}{2} + \frac{n \times (n-1)(n-2)}{6} = 5n \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} n^2 - 25 = 0 \\ n \geq 3 \end{cases} \text{ donc } S = \{5\}$$

4) D'après le binôme de newton on a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$$

$$\text{Pour : a=1 et b=1 on a : } (1+1)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n$$

$$\text{Donc : } 2^n = C_n^0 + C_n^1 + \sum_{k=2}^n C_n^k$$

$$\text{Donc : } 2^n = 1 + n + \sum_{k=2}^n C_n^k \text{ donc } 2^n \geq 1 + n$$

$$\text{Pour : a=2 et b=1 on a : } (1+2)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k 2^k$$

$$\text{Donc : } 3^n = C_n^0 2^0 + C_n^1 2^1 + \sum_{k=2}^n C_n^k 2^k$$

$$\text{Donc : } 3^n = 1 + 2n + \sum_{k=2}^n C_n^k 2^k \text{ donc } 3^n \geq 1 + 2n$$

$$5) \text{ a) Montrons que : } \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{D'après le binôme de newton on a : } (1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k$$

$$\text{Pour : } x=-1 \text{ on a : } (1+(-1))^n = \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^k = 0$$

$$\text{Donc } \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$5) \text{ b) calculons: } S_n = \sum_{k=0}^n k C_n^k \text{ en fonction de } n$$

$$\text{on a : } (1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k$$

du calcul de la dérivée on trouve :

$$n(1+x)^{n-1} (1+x)' = \sum_{k=1}^n C_n^k k x^{k-1}$$

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^n C_n^k k x^{k-1}$$

$$\text{Pour : } x=1 \text{ on a : } \sum_{k=1}^n k C_n^k = n 2^{n-1}$$

6) d'après le binôme de newton on a :

$$(x+2y+3z)^{12} = (x+(2y+3z))^{12} = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k x^{12-k} (2y+3z)^k$$

Et de cette identité en déduit que :

$$\text{Pour : } k=5 \quad C_{12}^5 x^7 (2y+3z)^5$$

$$\text{Or : } (2y+3z)^5 = \sum_{p=0}^5 C_5^p (2y)^{5-p} (3z)^p$$

$$\text{Pour : } p=2 \quad C_5^2 (2y)^3 (3z)^2 = C_5^2 2^3 3^2 y^3 z^2$$

le coefficient de  $x^7 y^3 z^2$  dans l'identité remarquable

$$(x+2y+3z)^{12} \text{ est : } C_{12}^5 C_5^2 2^3 3^2 = 570240$$

**Exercice 22:** Soit E l'ensemble à 12 éléments

{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l}.

1) Dénombrer les parties de E à 5 éléments qui

contiennent

- A et b ;
- a mais pas b
- b mais pas a
- ni a , ni b

2) En déduire la relation :  $C_{12}^5 = C_{10}^3 + 2C_{10}^4 + C_{10}^5$

3) Généraliser le résultat obtenu en prouvant, par un

dénombrement, que pour  $2 \leq p \leq n$ , on a

$$C_n^p = C_{n-2}^{p-1} + 2C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^p$$

4) Retrouver le résultat précédent en appliquant la formule du triangle de Pascal.

**Solution :**

1)a) Puisque deux éléments sont fixés, il reste à choisir 3 éléments parmi 10. Le nombre recherché est  $C_{10}^3$

b) Un élément est déjà choisi, il reste à en choisir 4 parmi 10 (puisque  $b$  est exclu et qu'on ne peut bien sûr par reprendre  $a$ ). Il y a donc  $C_{10}^4$  telles parties.

c) Idem.

d) On doit cette fois choisir 5 éléments parmi 10 : il y a  $C_{10}^5$  parties ne comprenant ni  $a$  ni  $b$ .

2) Il y a  $C_{12}^5$  parties à 5 éléments de  $E$ . Mais on a réalisé une partition de ces parties : celles qui contiennent  $a$  et  $b$ , celles qui contiennent seulement un des deux éléments, celles qui ne contiennent aucun des deux. D'où la formule demandée.

3) On part cette fois d'un ensemble à  $n$  éléments dont on fixe deux éléments  $a$  et  $b$ . Le nombre de parties à  $p$  éléments de cet ensemble est  $C_n^p$ . On réalise une partition de ces parties en les parties :

- contenant  $a$  et  $b$  : il y a en a  $C_{n-2}^{p-2}$  (il reste  $p-2$  éléments à choisir parmi  $n-2$ );

- contenant  $a$  mais pas  $b$  : il y en a  $C_{n-2}^{p-1}$

- contenant  $b$  mais pas  $a$  : il y en a  $C_{n-2}^{p-1}$

- ne contenant ni  $a$ , ni  $b$  : il y en a  $C_{n-2}^p$

Faisant la somme, on trouve bien la formule voulue.

4) On applique trois fois la relation du triangle de Pascal : une fois dans la première ligne, deux fois dans la deuxième :

$$C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = C_{n-2}^{p-2} + C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^p$$

ce qui après regroupement donne la formule voulue.

**Exercice23 :** Soit  $1 \leq p \leq n$ . On considère  $n$  boules et deux boîtes A et B. Un échantillon est constitué d'une boule dans la boîte A et de  $p-1$  boules dans la boîte B. En dénombrant de deux façons différentes ces échantillons, établir la formule

$$nC_{n-1}^{p-1} = pC_n^p$$

Retrouver cette formule par le calcul.

**Solution :**

Voici deux façons de compter le nombre d'échantillons.

- On choisit d'abord une boule à mettre dans la boîte A : il y a  $n$  choix possibles. Puis on choisit  $p-1$  boules parmi les  $n-1$  boules restantes pour

mettre dans la boîte B. Il y a donc  $nC_{n-1}^{p-1}$  échantillons.

- On choisit d'abord les  $p$  boules parmi  $n$  qui seront dans les deux boîtes : il y a  $C_n^p$  choix possibles. Puis on choisit parmi ces  $p$  boules celle à mettre dans la boîte A : il y a  $p$  choix possibles, et donc le nombre d'échantillons recherché est  $pC_n^p$

Puisqu'on compte de deux façons différentes le même nombre d'échantillons, on obtient bien le résultat escompté.

Par le calcul, on a :

$$nC_{n-1}^{p-1} = n \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-1-(p-1))!} = p \frac{n!}{p!(n-p)!} = pC_n^p$$

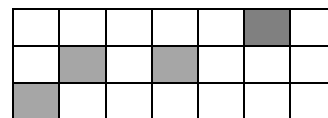
Soit  $E$  un ensemble à  $n$  éléments ; Combien y-a-t-il de couples  $(X, Y)$  de parties de  $E$  tels que  $X \subset Y$ ?

Pour  $p$  parcourant  $0, \dots, n$  il y a  $C_n^p$  choix possibles pour  $Y$  une partie de  $E$  à  $p$  éléments.  $Y$  étant fixé,  $X$  est une partie quelconque de  $Y$ , qui compte  $p$  éléments, il y a donc  $2^p$  choix pour  $X$ . Le nombre recherché est donc égal à

$$\sum_{p=0}^n C_n^p 2^p = (1+2)^n = 3^n$$

**Exercice24 :** On a une grille de :  $7 \times 3 = 21$

(voire le schéma)



1) On colore par le

noire 4 carreaux de la grille

a. Quel est le nombre de cas possibles ?

b. Quel est le nombre de cas possibles tel que tous les carreaux noirs soient sur la même horizontal ?

c. Quel est le nombre de cas possibles tel que 3 carreaux noirs soient sur la même vertical ?

2) maintenant on colore 4 carreaux de la grille par les couleurs : noire, rouge et vert et jaune

a. Quel est le nombre de façons possibles ?

b. Quel est le nombre de façons possibles pour que les carreaux colorés soient sur la même horizontal

**Solution :** 1)a) dans ce cas Il s'agit clairement d'une situation de combinaisons puisque on colore par le noire seulement (pas d'ordre) donc : Les choix simultanés de 4 carreaux parmi les 21 carreaux sont au nombre de  $C_{21}^4 = 5985$

1)b) on choisit entre 3 horizontaux on a  $C_3^1 = 3$  possibilités et choisi entre 7 carreaux et colore 4 donc  $C_7^4$  possibilités donc au total il Ya :

$$C_3^1 \times C_7^4 = 105$$

1)c) 3 carreaux noirs soient sur la même vertical on choisit entre 7 verticaux on a  $C_7^1 = 7$  possibilités et choisi entre 1 carreaux parmi 18 qui restent et on colore donc  $C_{18}^1$  possibilités donc au total il Ya :  $C_7^1 \times C_{18}^1 = 7 \times 18 = 126$

2)a) dans ce cas Il s'agit clairement d'une situation d'arrangement puisque on colore par des couleurs différentes (l'ordre) donc : Les choix de 4 carreaux parmi les 21 carreaux sont au nombre de  $A_{21}^4 = 143640$

1)b) on choisit entre 3 horizontaux on a  $C_3^1 = 3$  possibilités et choisi entre 7 carreaux et colore 4 donc  $A_7^4$  possibilités donc au total il Ya :

$$C_3^1 \times A_7^4 = 3 \times 840 = 2520$$

**Exercice 25 :**  $n \in \mathbb{N}$  et  $p \in \mathbb{N}$  tq  $0 \leq p \leq n$

1) Montrer que :  $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$

2) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation suivante :

$$x^2 - C_n^p x + C_{n-1}^{p-1} C_{n-1}^p = 0$$

**Solution : 1°**  $C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1} = \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!} + \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!}$

$$= \frac{(n-p)(n-1)!}{(n-p)p!(n-1-p)!} + \frac{p(n-1)!}{p(p-1)!(n-p)!}$$

$$= \frac{(n-p)(n-1)!}{(n-p)!p!} + \frac{p(n-1)!}{(n-p)!p!} = \frac{(n-p)(n-1)! + p(n-1)!}{(n-p)!p!}$$

$$= \frac{(n-1)!(n-p+p)}{(n-p)!p!} = \frac{n(n-1)!}{(n-p)!p!} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = C_n^p$$

2)  $x^2 - C_n^p x + C_{n-1}^{p-1} C_{n-1}^p = 0$

$$\Delta = (C_n^p)^2 - 4C_{n-1}^{p-1} C_{n-1}^p = (C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1})^2 - 4C_{n-1}^{p-1} C_{n-1}^p$$

$$\Delta = (C_{n-1}^p)^2 + 2C_{n-1}^{p-1} C_{n-1}^p + (C_{n-1}^{p-1})^2 - 4C_{n-1}^{p-1} C_{n-1}^p$$

$$\Delta = (C_{n-1}^p - C_{n-1}^{p-1})^2$$

$$x_1 = \frac{-C_n^p + C_{n-1}^p - C_{n-1}^{p-1}}{2} = \frac{-C_{n-1}^p - C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p - C_{n-1}^{p-1}}{2} = -C_{n-1}^{p-1}$$

$$x_2 = \frac{-C_n^p - C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}}{2} = \frac{-C_{n-1}^p - C_{n-1}^{p-1} - C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}}{2} = -C_{n-1}^p$$

$$S = \{-C_{n-1}^{p-1}; -C_{n-1}^p\}$$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien



# PRODUIT SCALAIRE de l'espace

## Leçon : PRODUIT SCALAIRE dans l'espace

### Présentation globale

- 1) Le produit scalaire de deux vecteurs dans l'espace
- 2) Vecteurs orthogonaux
- 3) Produit scalaire et norme
- 4) repère orthonormé de l'espace base orthonormé de l'espace
- 5) analytique du produit scalaire dans l'espace
- 6) L'ensemble des points dans l'espace tq :  $\vec{u} \cdot \vec{AM} = k$
- 7) Equation cartésienne d'un plan définie par un point et un vecteur normal
- 8) positions relatifs de deux plans dans l'espace
- 9) distance d'un point à un plan
- 10) Etude analytique de LA SPHERE



La notion de produit scalaire est apparue pour les besoins de la physique. Le concept relativement récent et a été introduit au milieu du XIXe siècle par le mathématicien allemand *Hermann Grassmann* (1809 ; 1877), ci-contre.

Il fut baptisé produit scalaire par *William Hamilton* (1805 ; 1865) en 1853.

## 1) Le produit scalaire de deux vecteurs l'espace

**Définition 1 :** Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de l'espace. Et soient  $A ; B$  et  $C$  trois points l'espace tel que :  $\vec{u} = \vec{AB}$  et  $\vec{v} = \vec{AC}$

le produit scalaire de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  dans l'espace est le produit scalaire de  $\vec{AB}$  par  $\vec{AC}$  dans le plan  $ABC$ , noté  $\vec{u} \cdot \vec{v}$

**remarques:** 1)  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  est un **nombre réel** défini par

Si  $\vec{u} = \vec{0}$  ou  $\vec{v} = \vec{0}$  alors  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

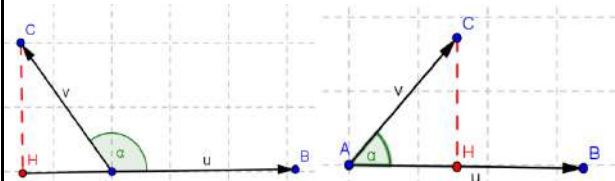
Si  $\vec{u} \neq \vec{0}$  et  $\vec{v} \neq \vec{0}$  alors soit  $H$  le projeté orthogonal de  $C$  sur la droite  $(AB)$  et alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AH} \times \vec{AB} \quad \text{c a d}$$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AH} \times \vec{AB}$  si  $\vec{AB}$  et  $\vec{AH}$  ont le même sens

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{AB} \cdot \vec{AC} = -\vec{AH} \times \vec{AB}$  si  $\vec{AB}$  et  $\vec{AH}$  ont un sens contraire

2) toutes les propriétés du produit scalaire dans le plan sont aussi vraies dans l'espace



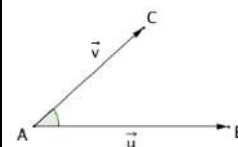
**Définition 2 :** Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de l'espace.

On appelle **produit scalaire** de  $\vec{u}$  par  $\vec{v}$ , noté  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ , le nombre réel défini par :

-  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ , si l'un des deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est nul

-  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v})$ , dans le cas contraire.

$\vec{u} \cdot \vec{v}$  se lit " $\vec{u}$  scalaire  $\vec{v}$ ".



## 2° Vecteurs orthogonaux

**Définition :** On dit que les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux dans l'espace si  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Et on écrit :  $\vec{u} \perp \vec{v}$

**Exemples :** Soit ABCDEFGH un cube de côté a  
Calculer les produits scalaires suivants :

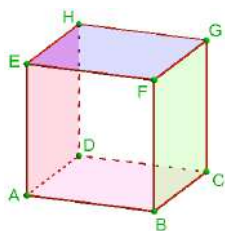
$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{GC}$  ;  $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{CD}$  et  $\overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{DC}$  et  $\overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{GC}$  et  $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DB}$

**Réponse :** 1) calcul de  $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{GC}$  : on a :  $\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{EA}$   
car ABCDEFG cube

$$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{EA} = -\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AE} = -AE \times AE = -a^2$$

(car E est le projeté

orthogonales de F sur (AE)



2) calcul de  $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{CD}$  :

Puisque ABCD est un carré

on a :  $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$

$$\text{donc : } \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BA} = -AB \times AB = -a^2$$

(car B est le projeté orthogonales de F sur (AB))

3) calcul de  $\overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{DC}$  : Puisque DCGH est un carré

on a :  $\overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{DC} = 0$  ( $\overrightarrow{DH} \perp \overrightarrow{DC}$ )

4) calcul de  $\overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{GC}$  :

$$\overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{HD} = 0 \quad (\overrightarrow{DH} \perp \overrightarrow{EH})$$

donc :  $\overrightarrow{EH} \perp \overrightarrow{GC}$

5) calcul de  $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DB}$  :

On a :  $(AE) \perp (ABC)$  donc  $(AE) \perp (DB)$  car

$(DB) \subset (ABC)$  donc :  $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$

## 3) Produit scalaire et norme

**3-1 Définition :** Soit un vecteur  $\vec{u}$  de l'espace et deux points A et B tels que  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ . La norme du vecteur  $\vec{u}$ , notée  $\|\vec{u}\|$  est la distance AB.

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{u^2} = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$$

$$u^2 = \|\vec{u}\|^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$$

### 3-2) propriétés

Pour tous vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  de l'espace., on a

$$1) \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

$$2) \vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k\vec{u} \cdot \vec{v}, \text{ avec } k \text{ un nombre réel.}$$

$$3) \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

$$4) (\vec{u} + \vec{v})^2 = u^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + v^2$$

$$5) (\vec{u} - \vec{v})^2 = u^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + v^2$$

$$6) (\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = u^2 - v^2$$

$$7) \|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$$

$$8) \|k\vec{u}\| = |k| \|\vec{u}\|$$

$$9) \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2) \text{ et}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

$$10) \|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$$

$$11) |\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$$

12) Soit A, B et C trois points de l'espace.

$$\text{On a : } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} (AB^2 + AC^2 - BC^2)$$

**Application :** 1) Soit A, B et C des points de

l'espace tel que  $AB = \sqrt{5}$  et  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3$

Calculer  $(-2\overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{BC}$  :

$$\begin{aligned} (-2\overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{BC} &= -2\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = -2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2AB^2 - 2 \times 3 \\ &= 2AB^2 - 2 \times 3 = 2 \times 5 - 6 = 4 \end{aligned}$$

2) sachant que  $\|\vec{u}\| = 2$  et  $\|\vec{v}\| = 3$  et  $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 5$

Calculer :  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  :

$$\text{On a : } \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) = \frac{1}{2} (5^2 - 4 - 9) = 6$$

## 4) repère orthonormé de l'espace base orthonormé de l'espace

Soit O un point de l'espace

On pose :  $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$  et  $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$  et  $\vec{k} = \overrightarrow{OK}$

**Définition1 :** on dit qu'un triplet  $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  de vecteur

dans l'espace est base orthonormé si et

seulement si les vecteurs  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  et  $\vec{k}$  sont non

coplanaires et normés et orthogonaux deux a

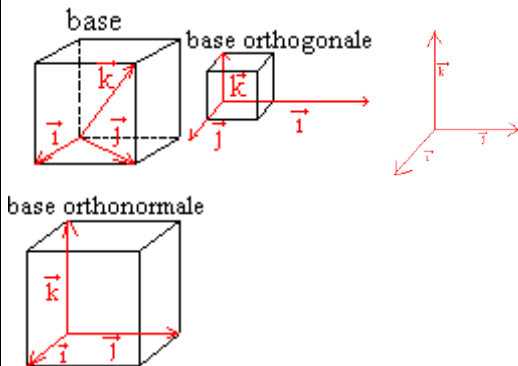
deux c a d :  $\|\vec{i}\| = 1$  et  $\|\vec{j}\| = 1$  et  $\|\vec{k}\| = 1$  et  $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$  et

$\vec{j} \cdot \vec{k} = 0$  et  $\vec{i} \cdot \vec{k} = 0$

**Définition 2 :** on dit que  $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  est un repère orthonormé dans l'espace et seulement si  $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  est une base orthonormé

**Exemples :**

(La figure représente un cube dans les trois cas)



**Coordonnées d'un vecteur relativement à une base :**

si  $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  est une base orthonormé et  $\vec{u}$  un vecteur de l'espace

Il existe un triplet unique  $(x; y; z)$  de réels tels que :  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

Ce triplet  $(x; y; z)$  est appelé coordonnées du vecteur  $\vec{u}$  relativement à la base  $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

Voyons maintenant comment exprimer le produit scalaire dans l'espace à l'aide des coordonnées des vecteurs.

### 5) analytique du produit scalaire dans l'espace :

$(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  Est une base orthonormé (dans tout ce qui va suivre)

Soient :  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  et  $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$  deux vecteurs de l'espace

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \cdot (x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k})$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz' \text{ car } \vec{i} \cdot \vec{j} = 0 \text{ et } \vec{j} \cdot \vec{k} = 0 \text{ et } \vec{i} \cdot \vec{k} = 0$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz' \text{ puisque : } \|\vec{i}\| = 1 \text{ et } \|\vec{j}\| = 1 \text{ et } \|\vec{k}\| = 1$$

On a donc la propriété suivante :

**Propriété :**

Dans une base orthonormé on considère deux vecteurs  $\vec{u}(x; y; z)$  et  $\vec{v}(x'; y'; z')$  alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

**Exemple :** si, dans un repère orthonormé, on considère les vecteurs  $\vec{u}(1; 2; 3)$  et  $\vec{v}(5; -1; 4)$  alors  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times 5 + 2 \times (-1) + 3 \times 4 = 15$  et  $\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$ .

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé, soient A et B de coordonnées respectives  $(x_A; y_A; z_A)$  et  $(x_B; y_B; z_B)$

alors

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

L'ensemble  $\mathcal{E}$  des points

### 6) L'ensemble des points dans l'espace

$$\text{tq : } \vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = k$$

**Propriété :**

soit  $\vec{u}(a; b; c)$  un vecteur et  $A(x_A; y_A; z_A)$  un point de l'espace et  $k \in \mathbb{R}$

L'ensemble des points  $M(x; y; z)$  dans l'espace

tq :  $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = k$  c'est un plan d'équation qui s'écrit sous la forme :  $ax + by + cz + d = 0$

Cette équation est appelée équation cartésienne du plan  $\mathcal{P}$ .

**RPEUVE :**  $\overrightarrow{AM}(x - x_A; y - y_A; z - z_A)$

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = k \Leftrightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = k$$

$$\Leftrightarrow ax + by + cz - (ax_A + by_A + cz_A + k) = 0$$

L'ensemble des points dans l'espace tq :

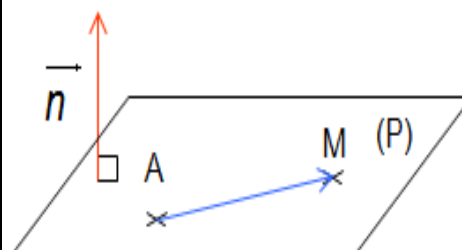
$\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = k$  c'est un plan d'équation qui s'écrit sous la forme :  $ax + by + cz + d = 0$  avec :

$$d = -(ax_A + by_A + cz_A + k)$$

### 7) Equation cartésienne d'un plan défini par un point et un vecteur normal

**Définition :**

Un vecteur non nul  $\vec{n}$  est dit **normal** au plan  $\mathcal{P}$  si, pour tous points A et M de  $\mathcal{P}$ , on a  $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$



**Remarque :** Il existe évidemment une infinité de vecteurs normaux à un plan : ce sont tous les vecteurs colinéaires au vecteur  $\vec{n}$ .

### Propriété :

Un vecteur est dit normal à un plan si, et seulement si, il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan.

Cette propriété va nous permettre d'une part de vérifier facilement qu'un vecteur est normal à un plan et, d'autre part, de déterminer les coordonnées d'un vecteur normal à un plan.

### Démonstration :

La propriété directe découle de la définition. Nous n'allons donc prouver que la réciproque.

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non colinéaires d'un plan  $\mathcal{P}$ ,  $\vec{w}$  un vecteur de  $\mathcal{P}$  et  $\vec{n}$  un vecteur orthogonal à  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ . Il existe donc deux réels  $a$  et  $b$  tels que  $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ .

$$\text{Ainsi } \vec{w} \cdot \vec{n} = a\vec{u} \cdot \vec{n} + b\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$$

Le vecteur  $\vec{n}$  est donc orthogonal à tous les vecteurs du plan  $\mathcal{P}$ . Il lui est par conséquent orthogonal.

**Exemple1 :** On souhaite déterminer les coordonnées d'un vecteur  $\vec{n}$  normal à un plan dirigé par  $\vec{u}(2, -1, 3)$  et  $\vec{v}(4, 0, 2)$ .

Ces deux vecteurs ne sont clairement pas colinéaires : une coordonnée est nulle pour l'un mais pas pour l'autre.

On note  $\vec{n}(x, y, z)$ .

Puisque  $\vec{n}$  est normal au plan dirigé par  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  alors  $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$  et  $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ .

On obtient ainsi les deux équations

$$2x - y + 3z = 0 \text{ et } 4x + 2z = 0$$

A l'aide de la deuxième équation, on obtient

$z = -2x$ . On remplace dans la première :

$$2x - y - 6x = 0 \Leftrightarrow -4x - y = 0 \Leftrightarrow y = -4x$$

On choisit, par exemple  $x = 1$  et on trouve ainsi :

$$\vec{v}(1; -4; -2)$$

On vérifie :  $\vec{u} \cdot \vec{n} = 2 + 4 - 6 = 0\checkmark$  et

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 4 + 0 - 4 = 0\checkmark$$

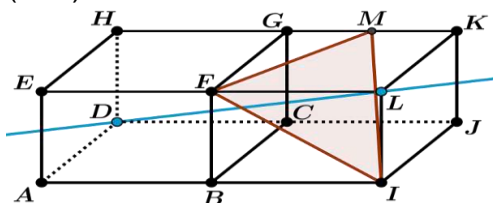
Un vecteur normal au plan dirigé par les vecteurs

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ est } \vec{n}(1; -4; -2)$$

**Exemple2 :** Deux cubes d'arête 1, sont disposés comme indiqué sur la figure.

M est le milieu du segment [GK].

La droite (DL) est-elle perpendiculaire au plan (FMI)?



**Solution :** on se place dans le repère

$(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$  orthonormé

Voyons si  $\overrightarrow{DL}$  est un vecteur normal au plan (FMI)

Il suffit de calculer:  $\overrightarrow{DL} \cdot \overrightarrow{FM}$  et  $\overrightarrow{DL} \cdot \overrightarrow{FI}$

On a :  $\overrightarrow{DL} = -\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$  donc :  $\overrightarrow{DL}(2; -1; 1)$

On a :  $\overrightarrow{FM} = \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GM} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$  donc :  $\overrightarrow{FM}\left(\frac{1}{2}; 1; 0\right)$

On a :  $\overrightarrow{FI} = \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BI} = -\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB}$  donc :  $\overrightarrow{FI}(1; 0; -1)$

$$\overrightarrow{DL} \cdot \overrightarrow{FM} = 0 \text{ et } \overrightarrow{DL} \cdot \overrightarrow{FI} = 1 \neq 0$$

Donc : (DL) n'est pas perpendiculaire au plan (FMI)

**Exercice1:** ABCDEFGH un cube tel que :  $AB = 1$  avec I le milieu du segment [EH] et J le milieu de [EF]

1) Montrer que  $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{EB} = 0$  et que  $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{ED} = 0$

2) En déduire que le vecteur  $\overrightarrow{EG}$  est normal au plan (BDE)

3) Montrer que les vecteurs  $\overrightarrow{FI}$  et  $\overrightarrow{CJ}$  sont orthogonaux

4) l'espace étant rapporté au repère

$(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$

a) déterminer les coordonnées des points F ; C ; I et J

B) Montrer que  $\overrightarrow{FI} \cdot \overrightarrow{CJ} = 0$

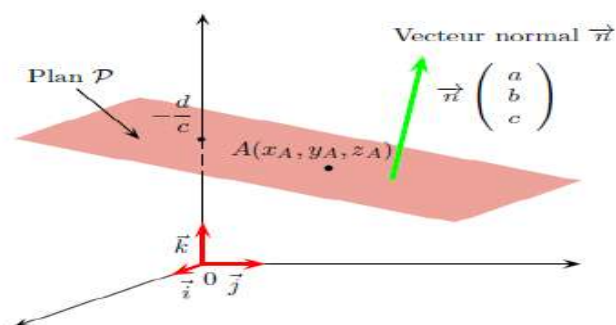
et en déduire que  $\overrightarrow{FI}$  et  $\overrightarrow{CJ}$  sont orthogonaux

### Propriété :

Soient  $a$  et  $b$  et  $c$  des réels tous nuls quelconque

. L'ensemble (P) des points  $M(x; y; z)$  tels que

$ax + by + cz + d = 0$  est un plan dont un vecteur normal est  $\vec{n}(a; b; c)$ .



**Exemple1 :** On considère le plan d'équation

$4x - 2y + 3z - 1 = 0$ . Un vecteur normal à ce plan



est  $\vec{n}(4; -2; 3)$ . Le point  $A(2; -1; -3)$  appartient au plan car :  $4 \times 2 - 2 \times (-1) + 3 \times (-3) - 1 = 0$ .

**Exemple2 :** On cherche une équation du plan  $\mathcal{P}$  passant par  $A(4; 2; -3)$  dont un vecteur normal est  $\vec{n}(1; -2; -1)$  :

Une équation du plan  $\mathcal{P}$  est de la forme .  
 $x - 2y - z + d = 0$

Le point  $A$  appartient au plan. Ses coordonnées vérifient donc l'équation :

$$4 - 2 \times 2 - (-3) + d = 0 \Leftrightarrow 3 + d = 0 \Leftrightarrow d = -3$$

Une équation de  $\mathcal{P}$  est donc  $x - 2y - z - 3 = 0$

**Exemple3:**  $ABCDEFGH$  un cube tel que :  $AB = 1$  avec  $I$  le milieu du segment  $[AE]$

On se place dans le repère  $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$

1) déterminer un vecteur normal au plan  $(CHI)$

2) En déduire une équation cartésienne du plan  $(CHI)$

**Solution :1)** soit un  $\vec{n}(x; y; z)$  un vecteur normal au

plan  $(CHI)$  donc  $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{CH} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{CI} = 0 \end{cases}$

On a :  $\overrightarrow{CH}(-1; 0; 1)$  et  $\overrightarrow{CI}(-1; -1; \frac{1}{2})$

$$\text{Donc : } \begin{cases} -x + z = 0 \\ -x - y + \frac{1}{2}z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x \\ -x - y + \frac{1}{2}x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = x \\ y = -\frac{1}{2}x \end{cases} \text{ Puisque on veut un seul vecteur normal}$$

Alors on donne par exemple :  $x = 2$  on trouve

$$\begin{cases} z = 2 \\ y = 1 \end{cases} \text{ donc un vecteur normal est } \vec{n}(2; -1; 2)$$

2) l'équation du plan s'écrit sous forme :

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$\text{Donc : } 2x - y + 2z + d = 0$$

Et puisque :  $C(1; 1; 0) \in (CIH)$  donc :

$$2 - 1 + 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -1$$

$$\text{Donc : } (CIH) : 2x - y + 2z - 1 = 0$$

## 8) positions relatifs de deux plans dans l'espace

Proposition :

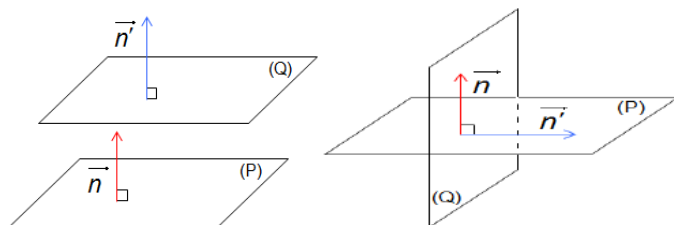
Soient :  $(P) : ax + by + cz + d = 0$  et  $(P)' : a'x + b'y + c'z + d' = 0$  deux plans dans l'espace

Et  $\vec{n}(a; b; c)$  et  $\vec{n}'(a'; b'; c')$  deux vecteurs normaux respectivement a  $(P)$  et  $(P)'$

1) Les plans  $(P)$  et  $(P)'$  sont parallèles ssi  $\vec{n}$  et  $\vec{n}'$  sont colinéaires

2) Les plans  $(P)$  et  $(P)'$  sont sécants ssi  $\vec{n}$  et  $\vec{n}'$  sont non colinéaires

3) Les plans  $(P)$  et  $(P)'$  sont perpendiculaires ssi  $\vec{n}$  et  $\vec{n}'$  sont orthogonaux



**Exemple1 :** On considère les plans d'équations :

$$(P) 2x - 4y + z + 1 = 0 \text{ et } (P') x + y + 2z - 3 = 0$$

1) Montrer que :  $(P) \perp (P')$

2) Déterminer l'équation cartésienne du plan  $(Q)$  parallèle au plan  $(P)$  passant par le point

$$A(1; -1; 1)$$

Solutions : 1)  $\vec{n}(2; -4; 1)$  et  $\vec{n}'(1; 1; 2)$  les deux

vecteurs normaux respectivement de  $(P)$  et  $(P)'$

$$\text{On a : } \vec{n} \cdot \vec{n}' = 2 - 4 + 2 = 0$$

Donc  $\vec{n} \perp \vec{n}'$  par suite :  $(P) \perp (P')$

2)  $(P) \parallel (Q)$  et  $\vec{n}$  est normal a  $(P)$  donc est un vecteur normal a  $(Q)$

Donc une équation cartésienne du plan  $(Q)$  est :

$$2x - 4y + z + d = 0$$

Et puisque :  $A(1; -1; 1) \in (Q)$  donc :

$$2 + 4 + 1 + d = 0 \Leftrightarrow d = -7$$

$$\text{Donc : } (Q) : 2x - 4y + z - 7 = 0$$

## 9) distance d'un point à un plan

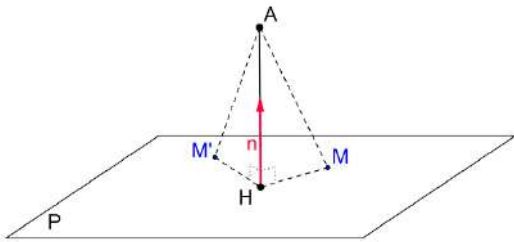
### Proposition :

Soient :  $A(x_A; y_A; z_A)$  un point et  $(P) : ax + by + cz + d = 0$  un plan dans l'espace avec  $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$  et H est le projeté orthogonal de A sur le plan

la distance du point A au plan  $(P)$  est la

distance AH et on a :  $d(A; (P)) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

**Remarque :** pour tout point M du plan  $(P)$  on a  $AH \leq AM$



**RPEUVE :**  $\vec{n}(a; b; c)$  est normal a  $(P)$  pour tout

point M du plan on a  $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = \vec{n} \cdot \overrightarrow{AH} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = \|\vec{n}\| \times \|\overrightarrow{AH}\| \times \cos(\vec{n}; \overrightarrow{AH})$$

$$\Leftrightarrow ax + by + cz - ax_A - by_A - cz_A = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \times \|\overrightarrow{AH}\| \times \cos(\vec{n}; \overrightarrow{AH})$$

Or  $M \in (P)$  donc  $ax + by + cz + d = 0$

Donc :  $ax + by + cz = -d$

$$\Leftrightarrow -ax_A - by_A - cz_A = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \times \|\overrightarrow{AH}\| \times \cos(\vec{n}; \overrightarrow{AH})$$

$$\Leftrightarrow -ax_A - by_A - cz_A - d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \times \|\overrightarrow{AH}\| \times (\mp 1)$$

$$\Rightarrow |-ax_A - by_A - cz_A - d| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \times AH \times |(\mp 1)|$$

$$\Rightarrow AH = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

**Exercice :** L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ .

On considère le plan  $(P)$  d'équation

$$x + 2y - z - 1 = 0$$

1) Les points  $A(1; 1; 2)$  et  $B(2; 1; 1)$  appartiennent-ils au plan  $(P)$  ?

2) Calculer la distance AB puis les distances de ces deux points A et B au plan  $(P)$ .

3) Le point A est-il le projeté orthogonal de B sur le plan  $(P)$  ?

**Solution :**  $1 + 2 \times 1 - 2 - 1 = 0$  donc les coordonnées du point A vérifient l'équation de  $(P)$ . On en déduit que A appartient au plan  $(P)$  et donc que  $2 + 2 \times 1 - 1 - 1 = 2 \neq 0$

donc les coordonnées du point B ne vérifient pas l'équation de  $(P)$  On en déduit que B n'est pas un point de  $(P)$ .

$$2) AB = \sqrt{(2-1)^2 + 1(2-1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{2}$$

Calculons  $d(A; (P))$  et  $d(B; (P))$ .

On a :  $A \in (P)$  donc :  $d(A; (P)) = 0$

$$d(B; (P)) = \frac{|2 + 2 \times 1 - 1 - 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{|2|}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

on a :  $\overrightarrow{AB}(1; 0; -1)$

3) Un vecteur normal au plan  $(P)$  est  $\vec{n}(1; 2; -1)$

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc  $\overrightarrow{AB}$  n'est pas orthogonal au plan  $(P)$ .

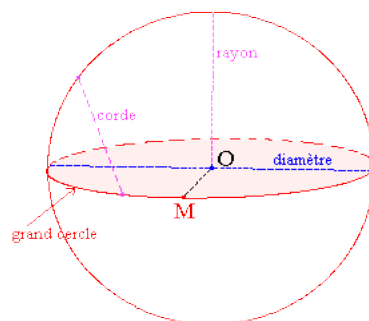
Le point A n'est donc pas le projeté orthogonal de B sur  $(P)$ .

## 10) Etude analytique de LA SPHERE

Dans tout ce qui va suivre, l'espace euclidien  $(\mathcal{E})$  est muni d'un repère  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  orthonormé.

### 10-1) Définition d'une sphère.

**Définition :** Soit  $\Omega$  un point dans l'espace  $(\mathcal{E})$ ,  $R$  et un réel positif. La sphère de centre  $\Omega$  et de rayon  $R$  est l'ensemble des points  $M$  dans  $(\mathcal{E})$ , tels que  $\Omega M = R$



On la note par :  $S(\Omega, R)$ .

$$S(\Omega, R) = \{M \in \mathcal{E} / \Omega M = R\}$$

### 10-2) Equation cartésienne d'une sphère.

Soit  $\Omega(a, b, c)$  un point dans l'espace et  $r \geq 0$

$$M(x, y, z) \in S(\Omega, R) \Leftrightarrow \Omega M = R$$

$$\Leftrightarrow \Omega M^2 = R^2$$

$$\Leftrightarrow (x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 + (z - z_\Omega)^2 = R^2$$

### Propriété :

Soit  $\Omega(a, b, c)$  un point dans l'espace et  $R \geq 0$ , la sphère  $S(\Omega, R)$  a une équation cartésienne de la forme :  $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$  (1)

### Exemple :

1) Déterminer l'équation cartésienne de la sphère de centre  $\Omega(1, -1, 2)$  et de rayon  $R = 3$

2) Déterminer l'équation cartésienne de la sphère de centre  $\Omega(0, -3, 0)$  et qui passe par  $A(2, 1, -1)$ .

**Solution :** 1) l'équation cartésienne de la sphère est :  $(x - 1)^2 + (y - (-1))^2 + (z - 2)^2 = 3^2 \Leftrightarrow$

$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 3 = 0$$

2)  $S(\Omega, R)$  la sphère de centre  $\Omega(1, -2, 0)$  et qui passe par  $A(2, 1, -1)$ .

Donc :  $\Omega A = R$

$$= \sqrt{(x_A - x_\Omega)^2 + (y_A - y_\Omega)^2 + (z_A - z_\Omega)^2}$$

$$\Omega A = R = \sqrt{2^2 + 4^2 + (-1)^2} = \sqrt{21}$$

Donc l'équation cartésienne de la sphère est :

$$(x - 0)^2 + (y - (-3))^2 + (z - 0)^2 = \sqrt{21}^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + (y + 3)^2 + z^2 = 21 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 6y - 12 = 0$$

### 10-3) REPRESENTATION PARAMETRIQUE D'UNE SPHERE

#### Proposition :

Soient :  $S(\Omega; R)$  la sphère de centre  $\Omega(a; b; c)$  et de rayon  $R$

$$\text{Le système } \begin{cases} x = a + R \sin \varphi \cos \theta \\ y = b + R \sin \varphi \sin \theta \\ z = c + R \cos \varphi \end{cases} \quad (\varphi; \theta) \in \mathbb{R}^2$$

s'appelle une représentation paramétrique du sphère  $(S)$

**Exemple1 :** Déterminer une représentation paramétrique de la sphère de centre  $\Omega(-1, 0, 2)$  et de rayon  $R = 3$

$$\text{Solution : Le système } \begin{cases} x = -1 + 3 \sin \varphi \cos \theta \\ y = 3 \sin \varphi \sin \theta \\ z = 2 + 3 \cos \varphi \end{cases}$$

$(\varphi; \theta) \in \mathbb{R}^2$  une représentation paramétrique de la sphère

**Exemple2 :** Déterminer  $(S)$  L'ensemble des points  $M(x; y; z)$  tels que

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} + 2 \sin \varphi \cos \theta \\ y = -1 + 2 \sin \varphi \sin \theta \\ z = 1 + 2 \cos \varphi \end{cases} \quad (\varphi; \theta) \in \mathbb{R}^2$$

**Solution :** soit  $M(x; y; z) \in (S)$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } & \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y - (-1))^2 + (z - 1)^2 = \\ & = (2 \sin \varphi \cos \theta)^2 + (2 \sin \varphi \sin \theta)^2 + (2 \cos \varphi)^2 \\ & = 4 \sin^2 \varphi (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + 4 \cos^2 \varphi \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y - (-1))^2 + (z - 1)^2 = 2^2$$

$(S)$  L'ensemble des points  $M(x; y; z)$  est donc la sphère de centre

$\Omega(1/2, -1, 1)$  et de rayon  $R = 2$

**10-4 L'ensemble  $(S)$  des points  $M(x; y; z)$  tels que :  $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$**

#### Proposition :

Soit :  $(S)$  L'ensemble des points  $M(x; y; z)$  de l'espace tel que :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0 \text{ avec}$$

$a ; b ; c$  et  $d$  des réelles

• Si :  $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$  alors  $(S)$  est une sphère de centre

$$\Omega(a; b; c) \text{ et de rayon } R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$$

• Si :  $a^2 + b^2 + c^2 - d = 0$  alors  $S = \{\Omega(a; b; c)\}$

• Si :  $a^2 + b^2 + c^2 - d < 0$  alors  $S = \emptyset$

**PREUVE :**  $M(x; y; z) \in (S) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 + z^2 - 2cz + c^2 + d - a^2 - b^2 - c^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - d = 0$$

• Si :  $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$  alors  $(S)$  est une sphère de centre

$$\Omega(a; b; c) \text{ et de rayon } R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$$

• Si :  $a^2 + b^2 + c^2 - d = 0$  alors  $S = \{\Omega(a; b; c)\}$

• Si :  $a^2 + b^2 + c^2 - d < 0$  alors  $S = \emptyset$

**Exemple :** Déterminer  $(S)$  L'ensemble des points

$M(x; y; z)$  dans les cas suivants :

1)  $(S_1) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y - 4z = 0$

2)  $(S_2) : x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y + 6z + 22 = 0$

3)  $(S_3) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 3y + z + 7 = 0$

**Solution :** 1) soit  $a=1$  et  $b=3$  et  $c=2$  et  $d=0$

$$a^2 + b^2 + c^2 - d = 1 + 9 + 4 = 14$$

Puisque  $a^2 + b^2 + c^2 - d = 14 > 0$

Donc : L'ensemble des points  $M(x; y; z)$  est donc

la sphère  $(S_1)$  de centre

$$\Omega(1, 3, 2) \text{ et de rayon } R = \sqrt{14}$$

2)  $(S_2) : x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y + 6z + 22 = 0$

$$M(x; y; z) \in (S_2)$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 6x) + (y^2 + 4y) + (z^2 + 6z) + 22 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x-3=0 \text{ et } y+2=0 \text{ et } z+3=0$$

$$\Leftrightarrow x=3 \text{ et } y=-2 \text{ et } z=-3$$

alors  $S_2 = \{\Omega(3; -2; -3)\}$

3)  $(S_3) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 3y + z + 7 = 0$

$$M(x; y; z) \in (S_3)$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x) + (y^2 + 3y) + (z^2 + z) + 7 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-1)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{7}{2} \text{ alors } S_3 = \emptyset$$

### 10-5 L'ensemble $(S)$ des points $M(x; y; z)$

tels que :  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

**Proposition :**

Soit :  $A(x_A; y_A; z_A)$  et  $B(x_B; y_B; z_B)$  deux points de l'espace

L'ensemble  $(S)$  des points  $M(x; y; z)$  de l'espace

tel que :  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$  est la sphère  $(S)$  d'équation

cartésienne :

$$(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) + (z - z_A)(z - z_B) = 0$$

Avec  $[AB]$  un diamètre du sphère  $(S)$

**PREUVE :**  $M(x; y; z) \in (S) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AI}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) = 0$$

$$(\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IA} \text{ Car } I \text{ le milieu du segment } [AB])$$

$$M \in (S) \Leftrightarrow MA^2 - IA^2 = 0 \Leftrightarrow MA = IA$$

Donc  $(S)$  est la sphère de centre le milieu du

segment  $[AB]$  et de rayon :  $IA$

Soient les points :  $A(x_A; y_A; z_A)$  et  $B(x_B; y_B; z_B)$  et

$M(x; y; z)$

$$\overrightarrow{MA}(x_A - x; y_A - y; z_A - z) \text{ et}$$

$$\overrightarrow{MB}(x_B - x; y_B - y; z_B - z)$$

$$M \in (S) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) + (z - z_A)(z - z_B) = 0$$

C'est l'équation cartésienne de la sphère de

diamètre  $[AB]$

**Exemple :** Soit :  $A(-1; 2; 1)$  et  $B(1; -1; 0)$  deux points de l'espace

Déterminer l'ensemble  $(S)$  des points  $M(x; y; z)$

de l'espace tel que :  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

**Solution :**  $(x+1)(x-1) + (y-2)(y+1) + (z-1)z = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1 + y^2 - y - 2 + z^2 - z = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - y - z - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{7}{2}$$

Donc  $(S)$  est la sphère de centre  $\Omega\left(0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$  et de

rayon  $R = \sqrt{\frac{7}{2}}$

### 10-6 L'intersection d'une sphère $(S)$ et une droite $(D)$

**Exemple1 :** Soient  $(S)$  une sphère :

$$(S) : (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 9$$

$$\text{et } (D) \text{ une droite : } \begin{cases} x = 1-t \\ y = 1+t \\ z = 1+t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

Étudier la position relative de la sphère et la droite

**Solution :**

$$M(x; y; z) \in (S) \cap (D) \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} / \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + t \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 9 \end{cases}$$

Donc :  $t^2 + t^2 + (t-1)^2 = 9 \Leftrightarrow 2t^2 - 2t - 8 = 0$

$\Leftrightarrow t = 2$  ou  $t = -\frac{4}{3}$

$x = \frac{7}{3}; y = -\frac{1}{3}; z = -\frac{1}{3}$  ou  $x = -1; y = 3; z = 3$

la droite (D) coupe la sphère (S) en deux points

$A\left(\frac{7}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$  et  $B(-1; 3; 3)$

**Exemple2 :** Soient (S) une sphère :

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z = 0$

et (D) une droite :  $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 4 + t \\ z = -2 + 5t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

Étudier la position relative de la sphère et la droite

**Solution :**

$$M(x; y; z) \in (S) \cap (D) \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} / \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 4 + t \\ z = -2 + 5t \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z = 0 \end{cases}$$

Donc :

$(2+3t)^2 + (4+t)^2 + (-2+5t)^2 - 2(2+3t) - 4(4+t) + 2(-2+5t) - 8 = 0$

$\Leftrightarrow 25t^2 = 0 \Leftrightarrow t = 0$  Donc :  $x = -2; y = 4; z = -2$

la droite (D) coupe la sphère (S) en un seul point

$A(2; 4; -2)$  on dit que la droite (D) est tangente à (S) en  $A(2; 4; -2)$

**Exemple3 :** Soient (S) une sphère :

$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y - 1 = 0$

et (D) une droite :  $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

Étudier la position relative de la sphère et la droite

**Solution :**

$$M(x; y; z) \in (S) \cap (D) \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} / \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

Donc :  $(-1+t)^2 + (1+2t)^2 + 2^2 + 2(-1+t) - 2(1+2t) - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 5t^2 + 1 = 0$  Pas de solutions

Donc la droite (D) et la sphère (S) n'ont pas de points en commun, l'intersection est vide.

**Proposition :**

Soient (D) une droite de l'espace et (S) une sphère de centre O et de rayon R, H le projeté orthogonal du point O sur la droite (D).

Notons  $d = OH$  :

Si  $d > R$  alors la droite (D) et la sphère (S) n'ont pas de points en commun, l'intersection est vide.

Si  $d = R$  alors la droite (D) et la sphère (S) ont un unique point en commun et dans ce cas on dit que la droite (D) est tangente en H à (S)

Si  $d < R$  alors la droite (D) et la sphère (S) en deux points en commun A et B symétriques par rapport au point H, dans ce cas on dit que la droite (D) est sécante à (S). ( $OA = OB = R$ )

**10-7) L'intersection d'une sphère (S) et un plan (P)**

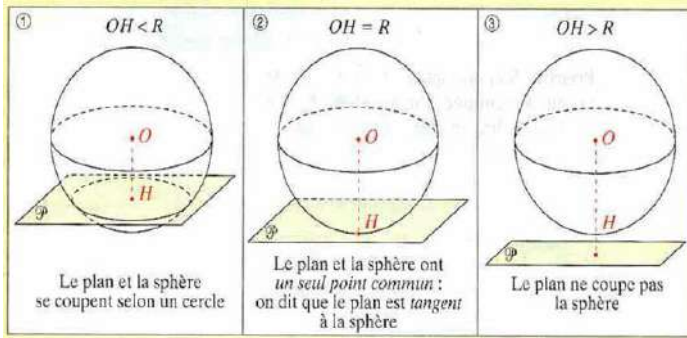
**Proposition :**

Soient (S) une sphère de centre O et de rayon R, (P) un plan de l'espace, nommons H le projeté orthogonal de O sur le plan (P)

et  $d = OH$ , la distance du point O au plan (P).

- Si  $d > R$  alors le plan (P) et la sphère (S) n'ont pas de points en commun, l'intersection est vide.

- Si  $d = R$  alors le plan  $(P)$  et la sphère  $(S)$  ont un unique point en commun et dans ce cas on dit que le plan  $(P)$  est tangent en  $H$  à  $(S)$
- Si  $d < R$  alors l'ensemble des points commun au plan  $(P)$  et la sphère  $(S)$  est le cercle du plan  $(P)$  de centre  $H$  et de rayon  $\sqrt{R^2 - d^2}$  (Théorème de Pythagore), dans ce cas on dit le plan  $(P)$  est sécant à  $(S)$ .



**Exemple1** : Soient  $(S)$  une sphère :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 14 = 0$$

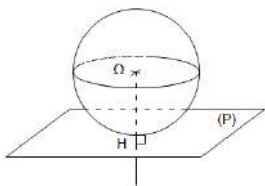
Et le plan d'équation  $(P) : 2x - y - z + 5 = 0$

Étudier la position relative de la sphère  $(S)$  et le plan  $(P)$

**Solution** : Déterminons le centre et le rayon de la sphère : On a :  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 14 = 0$  donc

$$(S) : (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = \sqrt{6}^2$$

$(S)$  est donc une sphère de centre  $\Omega(1;1;0)$  et de rayon  $R = \sqrt{6}$



Et puisque :  $d(\Omega; (P)) = R = \sqrt{6}$

Alors le plan  $(P)$  et la sphère  $(S)$  ont un unique point en commun donc le plan  $(P)$  est tangent en  $H$  à  $(S)$

Déterminons le point de tangence  $H$  qui est la projection de  $\Omega$  sur le plan  $(P)$

Soit  $\vec{n}(2; -1; -1)$  Un vecteur normal à ce plan  $(P)$

$$\exists k \in \mathbb{R} / \begin{cases} \overrightarrow{\Omega H} = k\vec{n} \\ H \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = 1 - k \\ z = -k \\ 2x - y - z + 5 = 0 \end{cases}$$

Donc :  $2(1+2k) - (1-k) - (-k) + 5 = 0 \Leftrightarrow k = -1$  Donc :  
 $x = -1; y = 2; z = 1$  Donc  $H(-1; 2; 1)$

**Exemple2** : Soient  $(S)$  une sphère :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z + 1 = 0$$

Et le plan d'équation  $(P) : x - y + z - 3 = 0$

Étudier la position relative de la sphère  $(S)$

et le plan  $(P)$

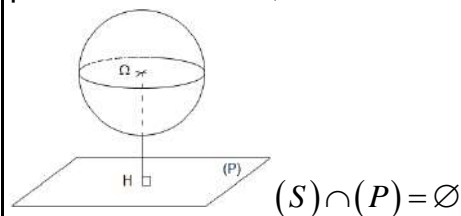
**Solution** : Déterminons le centre et le rayon de la sphère : On a :  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z + 1 = 0$  donc

$$(S) : (x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 1^2$$

$(S)$  est donc une sphère de centre  $\Omega(1; 0; -1)$  et de rayon  $R = 1$

Et puisque :  $d(\Omega; (P)) = \frac{|1-0-1-3|}{\sqrt{1+1+1}} = \sqrt{3} > R$

Alors le plan  $(P)$  et la sphère  $(S)$  n'ont pas de points en commun, l'intersection est vide.



**Exemple3** : Soient  $(S)$  une sphère :

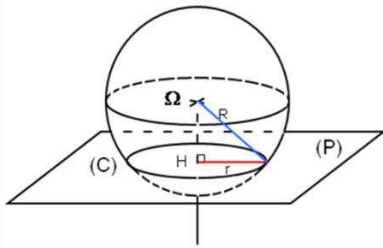
$$(S) : (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 9$$

Et le plan d'équation  $(P) : 2x - y + 3z - 2 = 0$

Étudier la position relative de la sphère  $(S)$  et le plan  $(P)$

**Solution** :  $(S)$  est donc une sphère de centre  $\Omega(2; 1; -3)$  et de rayon  $R = 3$

Et puisque :  $d(\Omega; (P)) = \frac{|4-1-9-2|}{\sqrt{4+1+9}} = \frac{8}{\sqrt{14}} < R$



Alors la sphère  $(S)$  coupe le plan  $(P)$  suivant un cercle de centre  $H$  qui est la projection orthogonal du point  $\Omega$  sur le plan  $(P)$  et de rayon

$$r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{14}$$

Déterminons le centre  $H(x; y; z)$  du cercle

Soit  $\vec{n}(2; -1; 3)$  Un vecteur normal à ce plan  $(P)$

$$\exists k \in \mathbb{R} / \begin{cases} \vec{\Omega H} = k\vec{n} \\ H \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + 2k \\ y = 1 - k \\ z = -3 + 3k \\ 2x - y + 3z - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Donc : } 2(2+2k) - (1-k) + 3(-3+3k) - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{4}{7} \text{ Donc : } x = \frac{22}{7}; y = \frac{3}{7}; z = -\frac{9}{7}$$

$$\text{Donc } H\left(\frac{22}{7}; \frac{3}{7}; -\frac{9}{7}\right)$$

**10-8) le plan  $(P)$  tangent a une sphère  $(S)$  en un point :**

**Proposition :**

Soient  $(S)$  une sphère de centre  $\Omega$  et  $A \in (S)$

Il existe un plan  $(P)$  unique de l'espace tangent a la sphère en  $A$  et définie par :

$$M \in (P) \Leftrightarrow \vec{AM} \cdot \vec{A\Omega} = 0$$

**Exemple :** Soie  $(S)$  une sphère :

$$(S): x^2 + y^2 + (z+2)^2 = 3$$

Et soit le point  $A(1; -1; -1)$

Vérifier que  $A \in (S)$  et Déterminer l'équations cartésienne du plan  $(P)$  tangent a la sphère  $(S)$  en  $A$

**Solution :**  $1^2 + (-1)^2 + (-1+2)^2 = 1+1+1=3$   
donc  $A \in (S)$

$\Omega(0; 0; -2)$  est le centre de la sphère  $(S)$  et de

rayon  $R=3$  Et on a :  $\vec{A\Omega}(-1; 1; -1)$

Donc :  $M(x; y; z) \in (P) \Leftrightarrow \vec{AM} \cdot \vec{A\Omega} = 0$

$$\Leftrightarrow -(x-1) + (y+1) - (z+1) = 0$$

Donc l'équation de :  $(P): x - y + z - 1 = 0$

**Exercice1:** on considère les plans d'équations respectives  $(P) x - y + z = 0$  et  $(Q)$

$$2x + 3y + z - 6 = 0$$

et la sphère  $(S)$  de centre  $\Omega(1; 2; 4)$  et tangente au plan  $(P)$  et soit la droite  $(\Delta)$  qui passant par  $\Omega$  et perpendiculaire au plan  $(Q)$

1) monter que les plans  $(P)$  et  $(Q)$  sont orthogonaux

2)a) déterminer l'équation cartésienne de la sphère  $(S)$

b) déterminer le point de tangence de  $(P)$  et  $(S)$

3)a) déterminer le point d'intersection de  $(\Delta)$  et  $(Q)$

b) Montrer que le plan  $(Q)$  coupe la sphère  $(S)$  suivant une cercle dont on déterminera le centre et le rayon

**Solutions :** 1) On a :  $\vec{n}(1; -1; 1)$  Un vecteur normal

à  $(P)$  et  $\vec{n}'(2; 3; 1)$  Un vecteur normal à  $(Q)$

$$\text{Et on a : } \vec{n} \cdot \vec{n}' = 1 \times 2 + (-1) \times 3 + 1 \times 1 = 0$$

Donc  $\vec{n} \perp \vec{n}'$  donc  $(P)$  et  $(Q)$  sont orthogonaux

2)a) puisque la sphère  $(S)$  est tangente

au plan  $(P)$  Alors :  $d(\Omega; (P)) = R$

$$\text{Et on a : } d(\Omega; (P)) = \frac{|1 - 2 + 4|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \sqrt{3}$$

$$\text{Donc : } R = \sqrt{3}$$

Donc l'équation cartésienne de la sphère  $(S)$

$$\text{est : } (S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2 = 3$$

2)b) le point de tangence  $H$  de  $(P)$  et  $(S)$  est la projection orthogonal  $\Omega$  sur le plan  $(P)$

donc H est le point d'intersection entre la droite (D) perpendiculaires a (P) passant par  $\Omega$  et on a :  $\vec{n}(1;-1;1)$  Un vecteur normal à (P) donc c'est un vecteur directeur de la droite (D)

la représentation paramétrique de (D) est

$$(D): \begin{cases} x=1+t \\ y=2-t \\ z=4+t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

$$H \in (D) \cap (P) \text{ Donc : } (1+t) - (2-t) + 4+t = 0$$

$$\Leftrightarrow t = -1 \text{ donc : } H(0;3;3)$$

3)a) puisque  $(\Delta) \perp (Q)$  alors :

$\vec{n}(1;-1;1)$  Un vecteur directeur de  $(\Delta)$

Et on a :  $\Omega \in (\Delta)$  donc la représentation

$$\text{paramétrique de } (\Delta) \text{ est } (\Delta): \begin{cases} x=1+2t \\ y=2+3t \\ z=4+t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

$$W(x; y; z) \in (\Delta) \cap (Q)$$

$$\text{donc : } 2(1+2t) + 3(2+3t) + 4+t - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = -\frac{3}{7} \text{ donc : } W\left(\frac{1}{7}; \frac{5}{7}; \frac{18}{7}\right)$$

3°b) Montrons que le plan (Q) coupe la sphère (S) suivant une cercle dont on déterminera le centre et le rayon

$$\text{on a : } d(\Omega; (Q)) = \frac{|2+6+4-6|}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}} = \frac{6}{\sqrt{13}} < \sqrt{3}$$

le plan (Q) coupe la sphère (S) suivant une cercle de centre H qui est la projection orthogonal du point  $\Omega$  sur le plan (Q)

et puisque  $(\Delta)$  passe par  $\Omega$  est perpendiculaires

a (Q) en W alors  $W\left(\frac{1}{7}; \frac{5}{7}; \frac{18}{7}\right)$  est le centre du

cercle (C) et le rayon du cercle (C) est  $r = \sqrt{R^2 - d^2}$

$$\text{avec } d = d(\Omega; (Q)) \text{ Donc : } r = \sqrt{\frac{3}{13}}$$

**Exercice2:** on considère l'ensemble  $(S_m)$  des points  $M(x; y; z)$  de l'espace qui vérifient l'équations :

$$(S_m) : mx^2 + my^2 + mz^2 - 2(m-1)x + 2y + 2z = 0$$

Avec  $m$  un paramètre non nul

1) monter que  $(S_m)$  est une sphère pour tout  $m \in \mathbb{R}^*$

2) monter que tous les sphères se coupent suivant un seul cercle dont on déterminera le centre et le rayon

**Solution :** 1)  $mx^2 + my^2 + mz^2 - 2(m-1)x + 2y + 2z = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2\left(\frac{m-1}{m}\right)x + \frac{2}{m}y + \frac{2}{m}z = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2\left(1 - \frac{1}{m}\right)x + \frac{2}{m}y + \frac{2}{m}z = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - 1 + \frac{1}{m}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{m}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{m}\right)^2 - \left(1 - \frac{1}{m}\right)^2 - \frac{2}{m^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - 1 + \frac{1}{m}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{m}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{m}\right)^2 = \left(1 - \frac{1}{m}\right)^2 + \frac{2}{m^2}$$

$$\text{Et puisque : } \left(1 - \frac{1}{m}\right)^2 + \frac{2}{m^2} > 0$$

Alors :  $(S_m)$  est une sphère pour tout  $m \in \mathbb{R}^*$

de centre  $\Omega_m\left(1 - \frac{1}{m}; -\frac{1}{m}; -\frac{1}{m}\right)$  et de rayon

$$R_m = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{m}\right)^2 + \frac{2}{m^2}}$$

2) soit  $M(x; y; z) \in (S_m) \quad \forall m \in \mathbb{R}^*$

$$\text{Donc : } mx^2 + my^2 + mz^2 - 2(m-1)x + 2y + 2z = 0 \Leftrightarrow$$

$$m(x^2 + y^2 + z^2 - 2x) + (2x + 2y + 2z) = 0 : \forall m \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

Donc le cercle chercher et l'intersection entre :

la sphère (S) :  $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1$  et le plan (P) :

$$2x + 2y + 2z = 0$$

en effet le cercle existe car :

$$d(\Omega; (Q)) = \frac{|1+0+0|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} < 1$$

le centre H du cercle est l'intersection entre (P) et la droite (Δ) qui passe par Ω est perpendiculaires a (P) et puisque (Δ) ⊥ (P) alors :  $\vec{n}(1;1;1)$  Un vecteur directeur de (Δ) Et on a :  $\Omega \in (\Delta)$  donc la représentation paramétrique de (Δ) est

$$\begin{cases} x=1+t \\ y=t \\ z=t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$H(x; y; z) \in (\Delta) \cap (P)$$

$$\text{donc : } (1+t)+t+t=0$$

$$\Leftrightarrow t = -\frac{1}{3} \text{ donc : } H\left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$$

et le rayon du cercle (C) est :

$$r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Donc : tous les sphères se coupent suivant le cercle (C)

**Exo2:** dans l'espace (E) est muni d'un repère  $(0; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  orthonormé On considère les plan  $(P_m)$  d'équations  $x + y - z - m = 0$  avec m paramètre réel Et la sphère (S) de centre  $\Omega(1; 2; 1)$  et le rayon  $R = \sqrt{3}$

1) Etudier et discuter suivant le paramètre m la position relative de la sphère (S) et les plan  $(P_m)$

2) soit (E) l'ensemble des réels m tels que :  $(P_m)$  coupe la sphère (S) suivant un cercle  $(C_m)$

Déterminer l'ensemble des centres des cercles  $(C_m)$  lorsque m varie dans (E)

**Solution :** 1)  $(P_m) : x + y - z - m = 0$

$$d_m = d(\Omega; (P_m)) = \frac{|1+2-1-m|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{|2-m|}{\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow |2-m| < 3 \Leftrightarrow -3 < 2-m < 3 \Leftrightarrow -5 < -m < 1$$

$$\Leftrightarrow -1 < m < 5$$

le plan  $(P_m)$  coupe la sphère (S) suivant des cercles de centre  $C_m$  qui est la projection orthogonal du point  $\Omega$  sur le plan  $(P_m)$

soit (Δ) la droite qui passe par Ω est perpendiculaires a  $(P_m)$  et puisque  $(\Delta) \perp (P_m)$  alors :  $\vec{n}(1;1;-1)$  Un vecteur directeur de (Δ) Et on a :  $\Omega \in (\Delta)$  donc la représentation

$$\text{paramétrique de } (\Delta) \text{ est } \begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ z=1-t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

le centre  $C_m$  est le point d'intersection de (Δ) et  $(P_m)$

$$\text{on va donc résoudre le system } \begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ z=1-t \\ x+y-z-m=0 \end{cases}$$

$$1+t+2+t-(-t+1)-m=0 \Leftrightarrow 3t+2-m=0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{m-2}{3} \text{ donc les coordonnées du centre du cercle}$$

$$\text{d'intersection est } \begin{cases} x=1+\frac{m-2}{3} = \frac{m+1}{3} \\ y=2+\frac{m-2}{3} = \frac{m+4}{3} \\ z=1-\frac{m-2}{3} = \frac{-m+5}{3} \end{cases}$$

$$C_m\left(\frac{m+1}{3}; \frac{m+4}{3}; \frac{-m+5}{3}\right) \text{ et le rayon est :}$$

et le rayon du cercle (C) est :

$$r = \sqrt{R^2 - d_m^2} \text{ avec } d_m = \frac{|2-m|}{\sqrt{3}} \text{ et } R = \sqrt{3}$$

$$r_m = \sqrt{3 - \left(\frac{|2-m|}{\sqrt{3}}\right)^2} \Leftrightarrow r_m = \sqrt{3 - \frac{|2-m|^2}{3}}$$

$$\Leftrightarrow r_m = \sqrt{\frac{9 - (2-m)^2}{3}} = \sqrt{\frac{9 - (m^2 - 4m + 4)}{3}} = \sqrt{\frac{-m^2 + 4m + 5}{3}}$$

$$\text{2cas : Si } d(\Omega; (P_m)) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{|2-m|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow |2-m| = 3 \Leftrightarrow 2-m = 3 \text{ ou } 2-m = -3$$

$$\Leftrightarrow m = -1 \text{ ou } m = 5$$

la sphère (S) de centre  $\Omega(1; 2; 4)$  et tangente au plan  $(P_m)$

si  $m = -1$  : le point de tangence  $T_1$  est le point d'intersection de  $(\Delta)$  et  $(P_{-1})$

$$\text{on va donc résoudre le system } \begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ z=1-t \\ x+y-z+1=0 \end{cases}$$

$$1+t+2+t-(-t+1)+1=0 \Leftrightarrow 3t+2+1=0$$

$\Leftrightarrow t = -1$  donc les coordonnées du point de

$$\text{tangence est } \begin{cases} x=0 \\ y=1 \\ z=2 \end{cases} \text{ donc } T_1(0;1;2)$$

si  $m = 5$  : le point de tangence  $T_2$  est le point d'intersection de  $(\Delta)$  et  $(P_5)$

$$\text{on va donc résoudre le system } \begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ z=1-t \\ x+y-z-5=0 \end{cases}$$

$$1+t+2+t-(-t+1)-5=0 \Leftrightarrow 3t+2-5=0$$

$\Leftrightarrow t = 1$  donc les coordonnées du point de

$$\text{tangence est } \begin{cases} x=2 \\ y=3 \\ z=0 \end{cases} \text{ donc } T_2(2;3;0)$$

**3cas** : Si  $d(\Omega; (P_m)) > \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{|2-m|}{\sqrt{3}} > \sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow |2-m| > 3 \Leftrightarrow 2-m > 3 \text{ ou } 2-m < -3$$

$$\Leftrightarrow m < -1 \text{ ou } m > 5$$

$$(P_m) \cap (S) = \emptyset$$

2) les coordonnées des centres des cercles

$$\text{d'intersections sont } \begin{cases} x = \frac{m+1}{3} \\ y = \frac{m+4}{3} \\ z = \frac{-m+5}{3} \end{cases} \text{ et } -1 < m < 5$$

c'est une portion de droite

**Exo3**: dans l'espace  $(\mathcal{E})$  est muni d'un repère

$(0; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  orthonormé on considère l'ensemble

$(S_m)$  des points  $M(x; y; z)$  tq :  $(S_m)$ :

$$x^2 + y^2 + z^2 + mx + 2(m-1)y + (m+4)z + 1 = 0$$

avec  $m$  paramètre réel

1) Montrer que  $(S_m)$  est une sphère  $\forall m \in \mathbb{R}$

2) Déterminer l'ensemble des centres des  $(S_m)$  lorsque  $m$  varie dans  $\mathbb{R}$

3) Montrer qu'il existe un cercle  $(C)$  incluse dans tous les sphères  $(S_m) \forall m \in \mathbb{R}$  et Déterminer le plan  $(P)$  qui contient ce cercle  $(C)$

4) Soit un point  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  dans l'espace tq  $M_0 \notin (P)$

Montrer qu'il existe une sphère unique qui passe par  $M_0$

5) Montrer qu'il existe deux sphères  $(S_m)$  tangentes au plan  $(O; x; y)$

**Solution : 1)**

$$x^2 + y^2 + z^2 + mx + 2(m-1)y + (m+4)z + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2\frac{m}{2}x + \left(\frac{m}{2}\right)^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^2 + 2(m-1)y + (m-1)^2 - (m-1)^2$$

$$+ 2\left(\frac{m+4}{2}\right)z + \left(\frac{m+4}{2}\right)^2 - \left(\frac{m+4}{2}\right)^2 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{m}{2}\right)^2 + (y+m-1)^2 + \left(z + \frac{m+4}{2}\right)^2 = \left(\frac{m}{2}\right)^2 + \left(\frac{m+4}{2}\right)^2 + (m-1)^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{m}{2}\right)^2 + (y+m-1)^2 + \left(z + \frac{m+4}{2}\right)^2 = \frac{4(m-1)^2 + (m+4)^2 + m^2 - 4}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{m}{2}\right)^2 + (y+m-1)^2 + \left(z + \frac{m+4}{2}\right)^2 = \frac{6m^2 + 16}{4} = R^2$$

$$\text{Et puisque : } \frac{6m^2 + 16}{4} > 0$$

Alors :  $(S_m)$  est une sphère pour tout  $m \in \mathbb{R}$

de centre  $\Omega_m\left(-\frac{m}{2}; 1-m; -\frac{m+4}{2}\right)$  et de rayon

$$R_m = \sqrt{\frac{6m^2 + 16}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{6m^2 + 16}$$

2) Déterminons l'ensemble des centres des  $(S_m)$

lorsque  $m$  varie dans  $\mathbb{R}$

les coordonnées des centres des cercles

$$\text{d'intersections sont } \begin{cases} x = -\frac{1}{2}m \\ y = -m+1 \\ z = -\frac{1}{2}m-2 \end{cases} \quad (m \in \mathbb{R})$$

c'est une droite de vecteur directeur

$$\vec{u} \left( -\frac{1}{2}; -1; -\frac{1}{2} \right) \text{ et qui passe par } A(0;1;-2)$$

3) Montrons qu'il existe un cercle  $(C)$  incluse dans tous les sphères  $(S_m) \forall m \in \mathbb{R}$  :

$$x^2 + y^2 + z^2 + mx + 2(m-1)y + (m+4)z + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + mx + 2my - 2y + mz + 4z + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 4z + 1 + m(x + 2y + z) = 0 \quad \forall m \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 4z + 1 = 0 \\ (P) : x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

Donc le cercle cherché et l'intersection entre :

la sphère  $(S) : x^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 2^2$  et le plan

$$(P) : x + 2y + z = 0$$

en effet le cercle existe car :  $\Omega(0;1;-2)$

$$d(\Omega; (P)) = \frac{|0+2-2|}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}} = 0 < 2 \text{ donc } \Omega \in (P)$$

donc le centre du cercle  $(C)$  est :  $\Omega(0;1;-2)$

et le rayon est :  $R = 2$

et tous les sphères se coupent suivant le cercle  $(C)$

et le plan  $(P)$  qui contient ce cercle  $(C)$  est :

$$(P) : x + 2y + z = 0$$

4) soit  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  dans l'espace tq  $M_0 \notin (P)$  :

$$x + 2y + z = 0 \text{ donc } x_0 + 2y_0 + z_0 \neq 0$$

Montrons qu'il existe une sphère unique qui

passe par  $M_0$  : c d a l'existence d'un unique  $m$  ?

$$M_0 \in (S) \Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + mx_0 + 2(m-1)y_0 + (m+4)z_0 + 1 = 0$$

$$M_0 \in (S) \Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + mx_0 + 2(m-1)y_0 + (m+4)z_0 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - 2y_0 + 4z_0 + 1 + m(x_0 + 2y_0 + z_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow m(x_0 + 2y_0 + z_0) = -(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - 2y_0 + 4z_0 + 1)$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{-(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - 2y_0 + 4z_0 + 1)}{x_0 + 2y_0 + z_0}$$

6) Montrons qu'il existe deux sphères  $(S_m)$

tangentes au plan  $(O; x; y)$  :

L'équation du plan  $(O; x; y)$  est :  $z = 0$  donc

$$d(\Omega_m; (O; x; y)) = \frac{1}{2} \sqrt{6m^2 + 16} \Leftrightarrow \frac{\left| \frac{m+4}{2} \right|}{\sqrt{1}} = \frac{1}{2} \sqrt{6m^2 + 16}$$

$$\Leftrightarrow |m+4| = \sqrt{6m^2 + 16} \Leftrightarrow (m+4)^2 = 6m^2 + 16$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 8m + 16 = 6m^2 + 16$$

$$\Leftrightarrow 5m^2 - 8m = 0 \Leftrightarrow m(5m - 8) = 0$$

$$\Leftrightarrow m = 0 \text{ ou } m = \frac{8}{5} \text{ donc il existe deux sphères}$$

$(S_m)$  tangentes au plan  $(O; x; y)$  :

$$(S_0) : x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 4z + 1 = 0$$

$$\left( S_{\frac{8}{5}} \right) : x^2 + y^2 + z^2 + \frac{8}{5}x + 2\left(\frac{8}{5}-1\right)y + \left(\frac{8}{5}+4\right)z + 1 = 0$$

$$\text{Cad : } x^2 + y^2 + z^2 + \frac{8}{5}x + \frac{6}{5}y + \frac{28}{5}z + 1 = 0$$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »

Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et

exercices

Que l'on devient un mathématicien

**Prof : Atmani najib**



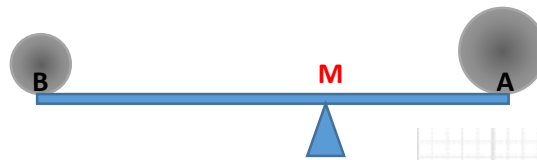
# BARYCENTRE

## I) ACTIVITES

### Activité 1 :

Sur une barre rigide de poids négligeable et de longueur  $1m$  on considère deux boules métalliques de  $500 g$  en  $A$  et de  $350 g$  en  $B$ .  $M$  un point sur la barre.

Déterminer la position de  $M$  sachant que le système est en équilibre.



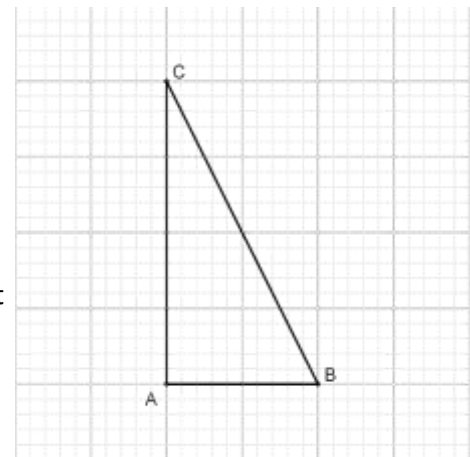
### Activité 2 :

Soit  $ABC$  un triangle rectangle en  $A$  et  $AC = 2AB$ .

1- Montrer qu'il existe un et un seul point  $G$  tel que :  $2\vec{AG} - 3\vec{BG} + 2\vec{CG} = \vec{0}$

2- Tracer le point  $G$ .

3- Si le plan est rapporté au repère  $(A, \vec{AB}, \vec{AI})$  où  $I$  est milieu de  $[AC]$ , quels seront les coordonnées du point  $G$ .



### Activité 3 :

Soit  $(A_i)_{i \leq 4}$  une famille de 4 points, et  $(\alpha_i)_{i \leq 4}$  4 réels dont la somme est non nulle. Montrer que l'application :

$$\varphi: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{V}_2$$

$$M \mapsto \sum_{i=1}^4 \alpha_i \vec{MA}_i$$

est une bijection. L'application  $\varphi$  s'appelle **l'application de Leibniz**

(Wilhelm Leibniz 1646-1716)

## II) DEFINITIONS ET PROPRIETES :

### 1) Vocabulaires

#### Définitions :

- Soit  $A$  un point et  $\alpha$  un réel non nul ; le couple  $(A, \alpha)$  s'appelle un **point pondéré**.
- Plusieurs points pondérés constituent un **système pondéré**

### 2) Barycentre de deux points pondérés.

#### 2.1 Définitions.

#### Propriété :

Soit  $\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$  un système pondéré, tel que  $\alpha + \beta \neq 0$  l'application

est une bijection. Il existe un et un seul point  $G$  qui vérifie  $\varphi_2(G) = \vec{0}$

$$\varphi_2: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{V}_2$$

$$M \mapsto \alpha \vec{AM} + \beta \vec{BM}$$

**Preuve :**  $\varphi_2$  est l'application de Leibniz pour deux points

**Définition :**

Soit  $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$  un système pondéré, tel que  $\alpha + \beta \neq 0$  ; le barycentre du système pondéré  $\Sigma$  est le point  $G$  qui vérifie :  $\alpha \overrightarrow{AG} + \beta \overrightarrow{BG} = \vec{0}$ .

On écrit :  $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$

**2.2 Propriétés de barycentre de deux points pondérés.**

Soit  $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$  un système pondéré, tel que  $\alpha + \beta \neq 0$  et  $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$

On a donc  $\alpha \overrightarrow{AG} + \beta \overrightarrow{BG} = \vec{0}$  et par suite : pour tout réel  $k$  non nul on a :  $k\alpha \overrightarrow{AG} + k\beta \overrightarrow{BG} = \vec{0}$

et donc  $G = \text{Bar}\{(A, k\alpha); (B, k\beta)\}$ .

**Propriété :**

Le barycentre d'un système pondéré de deux points ne varie pas si on multiplie les poids par le même réel non nul

- Si  $\alpha = \beta$  le barycentre du système pondéré  $\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$  s'appelle **l'isobarycentre de A et B** qui n'est que la milieu du segment  $[AB]$ .

• **Construction :**

Construire  $G = \text{Bar}\{(A, 3); (B, 2)\}$

- Soit  $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$  un système pondéré, tel que  $\alpha + \beta \neq 0$  et  $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$

On a donc :  $\alpha \overrightarrow{AG} + \beta \overrightarrow{BG} = \vec{0}$

par suite :  $\alpha \overrightarrow{AO} + \alpha \overrightarrow{OG} + \beta \overrightarrow{BO} + \beta \overrightarrow{OG} = \vec{0}$  où  $O$  est un point quelconque dans le plan ( $\mathcal{P}$ )

d'où :  $(\alpha + \beta) \overrightarrow{OG} + \alpha \overrightarrow{AO} + \beta \overrightarrow{BO} = \vec{0}$

on conclut que :  $\overrightarrow{OG} = \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right) \overrightarrow{OA} + \left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right) \overrightarrow{OB}$ . (car  $\alpha + \beta \neq 0$ )

**Propriété :**

Soit  $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$  un système pondéré, tel que  $\alpha + \beta \neq 0$  et  $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ .

Pour tout point  $O$  du plan ( $\mathcal{P}$ ) on a :  $\overrightarrow{OG} = \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right) \overrightarrow{OA} + \left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right) \overrightarrow{OB}$ .

Cette propriété s'appelle **la propriété caractéristique** du barycentre.

**Propriété :**

Si  $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$  alors les points  $A, B$  et  $G$  sont alignés.

**Preuve :**

Il suffit d'utiliser la propriété précédente en posant  $A = O$  dans la propriété ; On aura  $\overrightarrow{AG} = \left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right) \overrightarrow{AB}$

D'où les vecteurs  $\overrightarrow{AG}$  et  $\overrightarrow{AB}$  sont colinéaires et par suite : les points  $A, B$  et  $G$  sont alignés.

**Propriété :**

Le plan ( $\mathcal{P}$ ) et rapporté à un repère  $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j})$ , Soient  $A(x_A, y_A)$  et  $B(x_B, y_B)$  et  $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$  on a :

$$\begin{cases} x_G = \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta}\right) x_A + \left(\frac{\beta}{\alpha + \beta}\right) x_B \\ y_G = \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta}\right) y_A + \left(\frac{\beta}{\alpha + \beta}\right) y_B \end{cases}$$

**Preuve :** Il suffit d'utiliser la propriété caractéristique du barycentre.

**Exercice :**

Considérons les applications  $f(x) = x^2 + 1$  et  $g(x) = 2x$  définies sur  $\mathbb{R}$  soient  $C_f$  et  $C_g$  leurs courbes respectives dans un repère orthonormé. Pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R}$ , on pose  $M_x$  le point de  $C_f$  d'affixe  $x$  et  $N_x$  le point d'affixe  $x$  de  $C_g$ .

- 1- Déterminer les coordonnées du point  $G_x$  isobarycentre de  $M_x$  et  $N_x$ .
- 2- Déterminer et tracer l'ensemble dans lequel varie  $G_x$  quand  $x$  varie dans  $\mathbb{R}$ .

**3) Barycentre de trois points pondérés****3.1 Définition****Propriété :**

Soit  $\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$  un système pondéré, tel que  $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$  l'application :

$\varphi_3: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{V}_2$

$$M \mapsto \alpha \overrightarrow{AM} + \beta \overrightarrow{BM} + \gamma \overrightarrow{CM}$$

est une bijection. Il existe un et un seul point  $G$  qui vérifie  $\varphi_3(G) = \vec{0}$

c est à dire :  $\alpha \overrightarrow{AG} + \beta \overrightarrow{BG} + \gamma \overrightarrow{CG} = \vec{0}$

**Preuve :**  $\varphi_3$  est l'application de Leibniz pour trois points

**Propriété :**

Soit  $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$  un système pondéré, tel que  $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$  et  $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$

On a pour tout point  $O$  du plan ( $\mathcal{P}$ ):  $\overrightarrow{OG} = \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta + \gamma}\right) \overrightarrow{OA} + \left(\frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma}\right) \overrightarrow{OB} + \left(\frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma}\right) \overrightarrow{OC}$

**Preuve :** Même démonstration que dans le cas précédent.

**Propriété :**

Le plan ( $\mathcal{P}$ ) et rapporté à un repère  $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j})$ , Soient  $A(x_A, y_A)$ ;  $B(x_B, y_B)$   $C(x_C, y_C)$

et  $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$  on a :

$$\begin{cases} x_G = \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta + \gamma}\right) x_A + \left(\frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma}\right) x_B + \left(\frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma}\right) x_C \\ y_G = \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta + \gamma}\right) y_A + \left(\frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma}\right) y_B + \left(\frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma}\right) y_C \end{cases}$$

**Propriété :**

Le barycentre d'un système pondéré de trois points ne varie pas si on multiplie les poids par le même nombre non nul :  $\text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\} = \text{Bar}\{(A, k\alpha); (B, k\beta); (C, k\gamma)\}$  pour  $k \neq 0$

**Exercice :**

Soit  $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$  où  $\alpha + \beta \neq 0$  et  $G' = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$

Montrer que  $G = \text{Bar}\{(G', (\alpha + \beta)); (C, \gamma)\}$

**Propriété :**

Si  $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$  avec  $\alpha + \beta \neq 0$  et  $G' = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$   
 Alors :  $G = \text{Bar}\{(G', (\alpha + \beta)); (C, \gamma)\}$

**Remarque :**

La propriété d'associativité nous permet de construire le barycentre de trois points pondérés.

**Application :**

Construire le barycentre du système pondéré  $\{(A, -2); (B, 3); (C, 1)\}$

**Cas particulier**

Si les poids  $\alpha; \beta$  et  $\gamma$  sont égaux le barycentre de  $\{(A, \alpha); (B, \alpha); (C, \alpha)\}$  s'appelle **le centre de gravité** du triangle  $ABC$ .

**Exercice 1 :**

Soit  $ABC$  un triangle. Pour tout point  $M$  on pose

$$\begin{cases} \vec{u} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + 2\overrightarrow{CM} \\ \vec{v} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} - 2\overrightarrow{CM} \end{cases}$$

- 1- Réduire l'écriture de  $\vec{u}$ .
- 2- Montrer que le vecteur  $\vec{v}$  est constant.
- 3- Déterminer l'ensemble des points  $M$  tel que les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  soient colinéaires.

**Exercice 2 :**

Déterminer les ensembles suivants :

$$\Delta = \{M \in (\mathcal{P}) / \|4\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{CM}\| = \|\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{BM} + 2\overrightarrow{CM}\|\}$$

$$\Gamma = \{M \in (\mathcal{P}) / \|\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + 2\overrightarrow{CM}\| = \|3\overrightarrow{AM} - 2\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{CM}\|\}$$

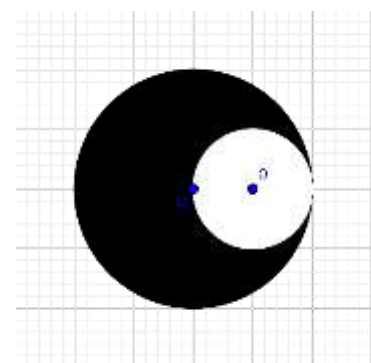
**Exercice 3 :**

Le solide  $(S)$  est constitué d'un disque  $(\mathcal{D})$  dont on a enlevé le disque  $(\mathcal{D}')$

$(\mathcal{D})$  est le disque de centre  $O$  et de rayon  $2R$

$(\mathcal{D}')$  est le disque de centre  $\Omega$  et de rayon  $R$

Déterminer et tracer le centre de gravité du solide.



**5) Barycentre de quatre points pondérés**

**3.1 Définition**

**Propriété :**

Soit  $\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma); (D, \delta)\}$  un système pondéré, tel que  $\alpha + \beta + \gamma + \delta \neq 0$  l'application :

$$\varphi_4: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{V}_2$$

$$M \mapsto \alpha\overrightarrow{AM} + \beta\overrightarrow{BM} + \gamma\overrightarrow{CM} + \delta\overrightarrow{DM}$$

est une bijection. Il existe un et un seul point  $G$  qui vérifie  $\varphi_4(G) = \vec{0}$

**Preuve :**  $\varphi_4$  est l'application de Leibniz pour quatre points

**Propriété :**

Soit  $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma); (D, \delta)\}$  un système pondéré, tel que  $\alpha + \beta + \gamma + \delta \neq 0$  et

$G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma); (D, \delta)\}$  On a pour tout point  $O$  du plan  $(\mathcal{P})$ :

$$\overrightarrow{OG} = \left(\frac{\alpha}{S}\right) \overrightarrow{OA} + \left(\frac{\beta}{S}\right) \overrightarrow{OB} + \left(\frac{\gamma}{S}\right) \overrightarrow{OC} + \left(\frac{\delta}{S}\right) \overrightarrow{OD} \text{ où } S = \alpha + \beta + \gamma + \delta$$

**Preuve :** Même démonstration que dans les cas précédents.

**Propriété :**

Le plan  $(\mathcal{P})$  et rapporté à un repère  $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j})$ , Soient  $A(x_A, y_A)$ ;  $B(x_B, y_B)$ ;  $C(x_C, y_C)$  et  $D(x_D, y_D)$

et  $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma); (D, \delta)\}$  on a :

$$\begin{cases} x_G = \left(\frac{\alpha}{S}\right) x_A + \left(\frac{\beta}{S}\right) x_B + \left(\frac{\gamma}{S}\right) x_C + \left(\frac{\delta}{S}\right) x_D \\ y_G = \left(\frac{\alpha}{S}\right) y_A + \left(\frac{\beta}{S}\right) y_B + \left(\frac{\gamma}{S}\right) y_C + \left(\frac{\delta}{S}\right) y_D \end{cases} \quad \text{Où } S = \alpha + \beta + \gamma + \delta$$

**Propriété :**

Le barycentre d'un système pondéré de quatre points ne varie pas si on multiplie les poids par le même nombre non nul :  $\text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma); (D, \delta)\} = \text{Bar}\{(A, k\alpha); (B, k\beta); (C, k\gamma); (D, k\delta)\}$  pour  $k \neq 0$

**Exercice :**

Soit  $G = \text{Bar}\{\text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}; (C, \gamma); (D, \delta)\}$  où  $\alpha + \beta \neq 0$  et  $\gamma + \delta \neq 0$

Si  $G' = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$  et  $G'' = \text{Bar}\{(C, \gamma); (D, \delta)\}$

Montrer que :  $G = \text{Bar}\{(G', (\alpha + \beta)); (G'', \gamma + \delta)\}$

**Propriété :**

Si  $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma); (D, \delta)\}$  avec  $\alpha + \beta \neq 0$  et  $\gamma + \delta \neq 0$

Si  $G' = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$  et  $G'' = \text{Bar}\{(C, \gamma); (D, \delta)\}$

Alors  $G = \text{Bar}\{(G', (\alpha + \beta)); (G'', \gamma + \delta)\}$

**Remarque :**

La propriété d'associativité nous permet de construire le barycentre de quatre points pondérés.

**Application :**

$ABCD$  un rectangle tel que :  $AB = 2BC$  Construire le barycentre du système pondéré  $\{(A, -2); (B, 3); (C, 1); (D, 1)\}$

**Cas particulier**

Si les poids  $\alpha$ ;  $\beta$  et  $\gamma$  sont égaux le barycentre de  $\{(A, \alpha); (B, \alpha); (C, \alpha); (D, \delta)\}$  s'appelle le **centre de gravité** du quadrilatère  $ABCD$ .

**Exercice :**

Déterminer des poids  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  et  $\delta$  pour les points  $A, B, C$  et  $D$  pour que  $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma); (D, \delta)\}$  dans la figure ci-dessous

