

Exercices et Problèmes Corrigés et détaillés

Cours et Points Méthodes



MATHÉMATIQUES EN AFRIQUE
EN TERMINALES C,D&SI

COLLECTION MATHS EN AFRIQUE
ÉDITION 2023

© 2023, Antoine Gildas Mba Obiang

Cette œuvre est protégée par le droit d'auteur et strictement réservée à l'usage privé du client. Toute reproduction ou diffusion au profit de tiers, à titre gratuit ou onéreux, de tout ou une partie de cette œuvre, est strictement interdite et constitue une contrefaçon prévue par les articles L 335-2 et suivant du code de la propriété intellectuelle. L'auteur se réserve le droit de poursuivre toute atteinte à ses droits de propriété intellectuelle devant les juridictions civiles ou pénales.



AVANT PROPOS

Dans le souci d'apporter un ouvrage adapté au programme en vigueur en terminales scientifiques, j'avais à coeur de mettre à disposition des lycéens du Gabon et des pays d'Afrique francophone cet outil de travail : **Mathématiques en Afrique tome 1**.

Celui-ci participe d'une collection intitulée **Collection maths en Afrique** qui ambitionne de donner à chaque lycéen du Gabon et d'Afrique francophone des outils d'assimilation du cours, de le soutenir dans son travail personnel pour une préparation efficace et sereine à l'épreuve de mathématiques au baccalauréat.

Le présent volume, de la collection, est rédigé à l'attention des élèves de terminales séries C,D et SI. Il a pour objectifs de :

- fournir des outils permettant d'organiser une préparation optimale à l'épreuve de mathématiques au baccalauréat;
- permettre aux futurs étudiants d'acquérir une culture mathématique très solide afin de faciliter la transition lycée - université;
- proposer des exercices de synthèse, ceux-ci permettent de vérifier si les notions présentées sont assimilées et de déjouer les pièges qui s'y rapportent.

Les mathématiques sont, comme toute autre discipline à caractère scientifique, à la portée de l'élève qui veut non seulement les apprivoiser, mais aussi et surtout faire les efforts constants afin de combler ses propres lacunes, d'approfondir ses acquis et d'affermir ses aptitudes. Mon souhait le plus cher est de contribuer à l'amélioration des performances de chaque élève de terminale avant et après le baccalauréat.

L'auteur

Si l'esprit d'un homme s'égaré, faites-lui étudier les mathématiques car dans les démonstrations, pour peu qu'il s'écarte, il sera obligé de recommencer.

Francis BACON philosophe, scientifique (1561- 1626).

Problème. Module - inégalité triangulaire - minimum : vers le supérieur

Partie A - Soit $n \in \mathbb{N} - \{0\}$. On note : $\llbracket 1, n \rrbracket = \{k \in \mathbb{N} / 1 \leq k \leq n\}$

- I. 1) Justifier que, pour tout nombre complexe z , $\operatorname{Re} z \leq |z|$ et étudier le cas d'égalité.
 - 2) Démontrer que pour tout couple $(z_1, z_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.
 - 3) On suppose z_1 et z_2 sont deux nombres complexes non nuls. Montrer que l'inégalité précédente est une égalité si et seulement s'il existe un réel positif λ tel que $z_2 = \lambda z_1$. Interpréter ce résultat en terme d'argument.
- II. 1) Démontrer que, pour tout n -uplet (z_1, z_2, \dots, z_n) de nombres complexes,

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k|$$

- 2) Montrer que, si z_1, z_2, \dots, z_n sont des nombres complexes tous non nuls, l'inégalité précédente est une égalité si et seulement si

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \exists \lambda_k \in \mathbb{R}_+, z_k = \lambda_k z_1$$

Interpréter ce résultat en terme d'argument.

Partie B - On se place désormais dans le plan complexe \mathcal{P} , d'origine O . Soit un entier $n \geq 3$. On considère n points A_1, A_2, \dots, A_n d'affixes respectives z_1, z_2, \dots, z_n tels que :

- i. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, A_k est distinct de O .
 - ii. Les A_k sont deux à deux distincts.
 - iii. Il n'existe aucune droite du plan \mathcal{P} contenant tous les A_k .
 - iv. $\sum_{k=1}^n \frac{z_k}{|z_k|} = 0$.
- I. Donner un exemple de n -uplet (z_1, z_2, \dots, z_n) vérifiant l'égalité précédente.
- II. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose $u_k = \frac{z_k}{|z_k|}$. Soit M un point de \mathcal{P} d'affixe z .

1) Vérifier que $\sum_{k=1}^n \overline{u_k}(z - z_k) = -\sum_{k=1}^n |z_k|$.

2) En déduire l'égalité (\star) : $\sum_{k=1}^n |z - z_k| \geq \sum_{k=1}^n |z_k|$

3) En utilisant la question II.2 de la partie A, démontrer que l'inégalité (\star) est une égalité si et seulement si, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\overline{u_k}(z - z_k)$ est un réel négatif.

4) En déduire que l'inégalité (\star) est une égalité si et seulement si $z = 0$.

5) Etablir que la somme $\sum_{k=1}^n MA_k$ atteint son minimum en un point M que l'on précisera.

Réciproquement, supposons que $\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| = \sum_{k=1}^n |z_k|$ et montrons par récurrence que l'on a : $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \exists \lambda_k \in \mathbb{R}_+, z_k = \lambda_k z_1$.

- **Initialisation** : pour $n=2$, on est dans le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire démontré en A.I.3. Donc, (H_2) est vraie.
- supposons l'hypothèse vraie au rang n .
On choisit le $(n+1)$ -uplet (z_1, z_2, \dots, z_n) , de nombres complexes non nuls tels que $\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| = \sum_{k=1}^n |z_k|$. On a :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^{n+1} z_k \right| &= \left| \sum_{k=1}^n z_k + z_{n+1} \right| \\ \left| \sum_{k=1}^{n+1} z_k \right| &\leq \left| \sum_{k=1}^n z_k \right| + |z_{n+1}| \\ \left| \sum_{k=1}^{n+1} z_k \right| &\leq \sum_{k=1}^{n+1} |z_k| + |z_{n+1}| \\ \left| \sum_{k=1}^{n+1} z_k \right| &\leq \sum_{k=1}^{n+1} |z_k| = \left| \sum_{k=1}^{n+1} z_k \right| \end{aligned}$$

d'ou $\left| \sum_{k=1}^{n+1} z_k \right| = \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|$. On en déduit

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| + |z_{n+1}| = \sum_{k=1}^n |z_k| + |z_{n+1}|$$

D'après l'hypothèse de récurrence à l'ordre n , pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, il existe $\lambda_k \in \mathbb{R}_+$ tel que $z_k = \lambda_k z_1$. De l'égalité

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k + z_{n+1} \right| = \sum_{k=1}^{n+1} |z_k| + |z_{n+1}|$$

on en déduit d'après l'hypothèse de récurrence à l'ordre 2, qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $z_{n+1} = \lambda \sum_{k=1}^n z_k$. Donc, $z_{n+1} = \lambda \sum_{k=1}^n z_k = \left(\lambda \sum_{k=1}^n z_k \right) z_1$.
En posant $\lambda_{n+1} = \sum_{k=1}^n \lambda_k$ qui est positif comme somme de termes positifs, on a

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \exists \lambda_k \in \mathbb{R}_+, z_k = \lambda_k z_1$$

L'hypothèse reste donc encore vraie au rang $n+1$.
On en conclut donc que (H_n) est vraie pour tout $n \geq 2$. Ainsi, on a montré si z_1, z_2, \dots, z_n sont des nombres complexes tous non nuls,

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| = \sum_{k=1}^n |z_k| \Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \exists \lambda_k \in \mathbb{R}_+, z_k = \lambda_k z_1$$

On vient de démontrer que $\forall k \in [1, n], \bar{u}_k(z - z_k) \in \mathbb{R}_- \Leftrightarrow z = 0$, et en vertu de la question B.II.3., on obtient :

$$\sum_{k=1}^n |z - z_k| = \sum_{k=1}^n |z_k| \Leftrightarrow z = 0$$

5) On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n MA_k &= \sum_{k=1}^n |z - z_k| \\ &\geq \sum_{k=1}^n |z_k| \end{aligned}$$

Donc, l'expression $\sum_{k=1}^n MA_k$ atteint son minimum en un point unique d'affixe $z=0$.

☞ La somme $\sum_{k=1}^n MA_k$ atteint son minimum en l'unique point O, origine du repère.

Problème. Image et antécédent

Soit f la fonction qui à un complexe z associe, lorsque c' est possible,

$$f(z) = \frac{z^2}{z - 2i}$$

1. Déterminer le domaine de définition \mathcal{D} de f .
2. a) Déterminer les racines carrées complexes de $8 - 6i$.
b) En déduire tous les antécédents de $1 + i$ par f .
3. Soit h un nombre complexe. Discuter, suivant les valeurs de h , le nombre d'antécédents de h par f .
4. On désigne par $f(\mathcal{D})$ l'ensemble des éléments de z' de \mathbb{C} tel qu'il existe $z \in \mathbb{C}$ tel qu'il existe $z \in \mathcal{D}$ vérifiant $z' = f(z)$.
Si $f(\mathcal{D}) = \mathbb{C}$, on dit que f surjective.
a) Déterminer l'ensemble $f(\mathcal{D})$.
b) La fonction f est-elle surjective ?
5. On dit que f est injective lorsque, pour tous nombres z et z' de \mathcal{D} , si

$$f(z) = f(z') \text{ alors } z = z'$$

La fonction f est-elle injective ?

Soit g la fonction définie sur \mathcal{D} à valeurs dans \mathbb{C} et telle que, pour tout

$$z \in \mathcal{D}, g(z) = |z - 2i|^2 \frac{z^2}{z - 2i} + z^3.$$

6. Soit $z = x + iy$ un nombre complexe appartenant à \mathcal{D} .
a) Montrer que la partie réelle de $g(z)$ est $2x^3 - 2xy^2 - 4xy$.
b) Déterminer la partie imaginaire de z .

Exercice 77. Problème bac C Togo 2023

Partie A

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite définie par son premier terme u_0 et par la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n^2 + u_n$.

1. a) Démontrer que (u_n) est une suite croissante.
 b) Démontrer que si (u_n) est convergente alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
2. Démontrer que si $u_0^2 + u_0 > 0$ alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.
3. Démontrer par récurrence que si $u_0^2 + u_0 < 0$ alors $\forall n \in \mathbb{N}, -1 < u_n < 0$.
4. Conclure sur la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Partie B

Le plan complexe est rapporté d'un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . Soit F l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe $z' = z^2 + z$.

1. Déterminer l'ensemble des points invariants par F , puis l'ensemble des points invariants par $F \circ F$.
2. Soit A, B et I les points d'affixes respectifs $i, -1 - i$ et $-\frac{1}{2}$.
 a) Déterminer $F(A)$ et $F(B)$.
 b) Soit M_0 un point du plan. Démontrer que $F(M) = F(M_0)$ si, et seulement si $M = M_0$ ou $M = S(M_0)$ où S est une transformation simple du plan que l'on précisera.

Partie C

Le plan complexe est rapporté d'un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) (pour les figures prendre $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 4\text{cm}$).

1. Soit \mathcal{H} l'ensemble des points du plan dont les coordonnées (x, y) vérifient $x^2 - y^2 + x + 1 = 0$ et \mathcal{P} l'ensemble des points du plan dont les coordonnées (x, y) vérifient $y^2 + x = 0$.
 a) Donner la nature des coniques \mathcal{H} et \mathcal{P} .
 b) Préciser les éléments caractéristiques et les asymptotes éventuelles.
2. Représenter ces coniques sur une même figure. (On admettra qu'elles sont tangentes au points d'abscisse $x = -1$).
3. Soient \mathcal{H}_1 et \mathcal{P}_1 les ensembles des points du plan dont les coordonnées vérifient : $\mathcal{H}_1 \begin{cases} -1 < x < 0 \\ x^2 - y^2 + x + 1 > 0 \end{cases}$ et $\mathcal{P}_1 \begin{cases} -1 < x < 0 \\ y^2 + x < 0 \end{cases}$
 a) Hachurer \mathcal{H}_1 et \mathcal{P}_1 sur la figure précédente. (On ne cherchera pas à le justifier par calcul).
 b) Démontrer que \mathcal{P}_1 est inclus dans \mathcal{H}_1 puis que \mathcal{P}_1 est inclus dans $D(K, 1)$, ensemble des points M tels que $KM < 1$, K étant le point d'affixe -1 .
 c) Démontrer que si M appartient à \mathcal{H}_1 alors $F(M)$ appartient à \mathcal{P}_1 .
4. Soit M_0 un point de \mathcal{H}_1 . On définit la suite de points $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $M_{n+1} = F(M_n)$. En utilisant les questions 3b) et 3c), montrer que la suite $(|z_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, z_n étant l'affixe de M_n .

Exercice 89. Extrait bac C Gabon 2021

Le but de l'exercice est de déterminer la forme du développement d'un nombre rationnel en fraction continue simple finie.

1. On considère les nombres $a = 49$, $b = 17$ et les égalités (1) et (2) suivantes

$$(1) \quad 49 = 17 \times 2 + 15 \qquad (2) \quad \frac{49}{17} = 2 + \frac{1}{\frac{17}{15}}$$

- a) Expliquer simplement pourquoi l'égalité (1) implique l'égalité (2).
 b) Soit l'égalité suivante : $17 = 15 \times 1 + 2$

Expliquer simplement cette égalité implique les égalités (3) et (4) suivantes :

$$(3) \quad \frac{17}{15} = 1 + \frac{2}{15} = 1 + \frac{1}{\frac{15}{2}} \qquad (4) \quad \frac{49}{17} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{15}{2}}}$$

- c) Soit l'égalité : $15 = 2 \times 7 + 1$

Expliquer simplement cette égalité implique les égalités (5) et (6) suivantes :

$$(5) \quad \frac{15}{2} = 7 + \frac{1}{2} \qquad (6) \quad \frac{49}{17} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{7 + \frac{1}{2}}}$$

L'égalité (6) est nommée développement de $\frac{49}{17}$ en fraction continue simple finie. Ce développement, noté $[2; 1; 7; 2]$, permet d'écrire plus simplement l'égalité (6) : $\frac{49}{17} = [2; 1; 7; 2]$

2. a) Calculer le nombre rationnel r tel que : $r = [3; 2; 5; 7]$
 b) Calculer le nombre rationnel s dont le développement est $[3; 2; 5; 6; 1]$.
 c) Le développement d'un nombre rationnel en fraction continue simple finie est-il unique ? Justifier.
3. a) Ecrire le développement de $\frac{16}{9}$ en fraction continue simple finie.
 b) Ecrire le développement de $\frac{2021}{2019}$ en fraction continue simple finie.
4. Soit a et b deux entiers naturels premiers entre eux. L'application de l'algorithme d'Euclide au couple (a, b) permet d'écrire les égalités suivantes où n est un entier naturel tel que $n \geq 3$:

$$\begin{aligned} a &= b q_1 + r_1 \\ b &= r_1 q_2 + r_2 \\ r_1 &= r_2 q_3 + r_3 \\ &\vdots \\ r_{n-2} &= r_{n-1} q_n + r_n \\ r_{n-1} &= r_n q_{n+1} + 0 \end{aligned} \qquad 0 = r_{n+1} < r_n < \dots < r_2 < r_1 < b$$

- a) Que veut l'entier naturel r_n ? Justifier.
 b) Ecrire le développement de $\frac{a}{b}$ en fraction continue simple finie. On déterminera une égalité analogue à l'égalité (6).

Exercice 91. Indicatrice d'Euler

Pour tout entier naturel $n \geq 2$, On appelle indicateur d'Euler de n , et on note $\varphi(n)$, le cardinal de l'ensemble des entiers premiers avec n compris entre 0 et $n-1$. On pose $\varphi(1) = 1$.

1. Déterminer $\varphi(i)$ pour $i \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.
2. Soit p un nombre premier. Montrer que :
 - a) $\varphi(p) = p - 1$
 - b) Pour tout entier $\alpha \geq 2$, $\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1} = p^{\alpha-1}(p - 1)$
3. On admet que pour tout entiers n et m premiers entre eux :

$$\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$$

Déterminer $\varphi(465696)$.

4. Pour tout $n \geq 2$, on note $E(n)$ l'ensemble de tous les entiers naturels inférieurs ou égaux à n tels que leur plus grand diviseur commun (pgcd) avec n soit le nombre 1. Par exemple, $E(4) = \{1; 3\}$ et $E(8) = \{1; 3; 5; 7\}$. Par suite, on considère le nombre $S(n)$ égal à la somme des valeurs de $\cos\left(k \times \frac{2\pi}{n}\right)$ lorsque k décrit l'ensemble $E(n)$. On peut noter :

$$S(n) = \sum_{k \in E(n)} \cos\left(k \times \frac{2\pi}{n}\right)$$

- a) Calculer $S(4)$ et $S(8)$.
- b) Pour chacune des valeurs de n suivantes, décomposer n en produit de facteurs premiers puis déterminer $E(n)$: $n = 3$, $n = 9$, $n = 12$, $n = 14$, $n = 15$, $n = 30$, $n = 54$.
- c) Conjecturer les valeurs prises par $S(n)$ en fonction de n .

Solution.

1. $\varphi(2) = 1$; $\varphi(3) = \text{card}\{1, 2\} = 2$; $\varphi(4) = \text{card}\{1, 3\} = 2$;
 $\varphi(5) = \text{card}\{1, 2, 3, 4\} = 4$; $\varphi(6) = \text{card}\{1, 5\} = 2$; $\varphi(7) = \text{card}\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = 6$;
 $\varphi(8) = \text{card}\{1, 3, 5, 7\} = 4$.
2. Soit p un nombre premier.
 - a) Tout entier k compris entre 1 et $p - 1$ est premier à p d'où on a l'égalité $\varphi(p) = \text{card}(1, \dots, p - 1) = p - 1$.
 - b) Soit α un entier supérieur ou égal à 2.
 Les entiers premiers à p^α sont ceux qui ne sont pas multiples de p . Comptons les multiples de p compris entre 1 et p^α : ce sont les entiers kp , où k est compris entre 1 et $p^{\alpha-1}$, donc il y a $p^{\alpha-1}$ multiples de p entre 1 et p^α . On en déduit qu'il y a $p^\alpha - p^{\alpha-1}$ entiers non multiples de p compris entre 1 et p^α d'où $\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1} = p^{\alpha-1}(p - 1)$.
3. $465696 = 11 \times 2^5 \times 3^3 \times 7^2$
 Puisque $\varphi(11) = 11 - 1 = 10$, $\varphi(2^5) = 2^4$, $\varphi(3^3) = 2 \times 3^2$ et $\varphi(7^2) = 6 \times 7$ alors on en déduit :

$$\varphi(465696) = \varphi(11)\varphi(2^5)\varphi(3^3)\varphi(7^2) = 10 \times 2^4 \times 2 \times 3^2 \times 6 \times 7 = 120960$$

4. a) On a $E(4) = \{1; 3\}$.

3. En remarquant que la fonction $x \mapsto 1 + 2x + 3x^2 + \dots + x^{n-1}$ est la dérivée de la fonction f_n pour tout $x \neq 1$. On en déduit que pour tout $x \neq 1$,

$$1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} = \frac{(n-1)x^n - nx^{n-1} + 1}{(1-x)^2}$$

4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$, $x + x^2 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1} - x}{x-1}$
 donc $\sum_{k=1}^n kx^{k-1} = \left(\frac{x^{n+1} - x}{x-1} \right)' = \frac{[(n+1)x^n - 1](x-1) - x^{n+1} + x}{(x-1)^2}$.

En évaluant l'égalité précédente en $x = \frac{1}{2}$ on en déduit

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k \left(\frac{1}{2} \right)^{k-1} &= \sum_{k=1}^n \frac{2k}{2^k} = \frac{\left[\frac{(n+1)}{2^n} - 1 \right] \times \left(-\frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2} \right)^2} \\ &= 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}} \end{aligned}$$

Du coup,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{2k-1}{2^k} &= \sum_{k=1}^n \frac{2k}{2^k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \\ &= 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}} - \frac{1}{2} \times \frac{\frac{1}{2^n} - 1}{\frac{1}{2} - 1} \\ &= 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} - 1 \\ &= 3 - \frac{3+2n}{2^n} \end{aligned}$$

Exercice 104. Dérivée successive

On considère deux fonctions f et g dérivables jusqu'à l'ordre n sur un intervalle K .

1. Déterminer $(fg)'$ et $(fg)''$.
2. Démontrer que : $(fg)^{(3)} = f^{(3)}g + 3f''g' + 3f'g'' + fg^{(3)}$.
3. En utilisant un raisonnement par récurrence, donner une expression de $(fg)^{(n)}$.
4. **Application**—déterminer la dérivée n -ième des fonctions suivantes.
 - a) $x \mapsto x \cos x$
 - b) $x \mapsto x^2 \cos x$
 - c) $x \mapsto (x^2 + 3x - 1) \sin x$
 - d) $x \mapsto \frac{1}{x}$

Exercice 105. Suite récurrente linéaire d'ordre 1

Soient u_0 , a et b trois réels. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels définie par u_0 et la relation de récurrence : $u_{n+1} = au_n + b$

1. Comment appelle-t-on la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lorsque $a = 1$? Lorsque $b = 0$ et $a \neq 1$?
2. Exprimer u_n dans les deux cas particulier de la question 1.
3. Dans le cas général, calculer u_1 , u_2 et u_3 en fonction de u_0 , a et b .
4. Démontrer par récurrence que le terme général de la suite est donné par pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = a^n u_0 + b \sum_{k=1}^n a^{n-k}$$

5. On suppose que $a \neq 1$. Démontrer que $\sum_{k=1}^n a^{n-k} = \frac{a^n - 1}{a - 1}$.
6. Dédurre de ce qui précède que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \frac{(u_1 - u_0)a^n - b}{a - 1}$
7. On suppose dans cette question que $a > 1$ et que $au_0 + b > u_0$. Montrer que la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a pour limite $+\infty$.
8. On suppose dans cette question que $0 < a < 1$, montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et que sa limite dépend de u_0 .

Application – Etudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et et la relation de récurrence : $u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + 1$.

Solution.

1. Lorsque $a = 1$ alors $u_{n+1} = u_n + b$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison b .
Lorsque $b = 0$ et $a \neq 1$ alors $u_{n+1} = au_n$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison a .
2. Lorsque $a = 1$ alors $u_{n+1} = u_0 + nb$.
Lorsque $b = 0$ et $a \neq 1$ alors $u_{n+1} = a^n u_0$ (remarque, si $a = 1$ cela ne change rien).
3. On en déduit :

$$\begin{aligned} u_1 &= au_0 + b \\ u_2 &= a(au_0 + b) + b = a^2u_0 + (a + 1)b \\ u_3 &= a(a^2u_0 + (a + 1)b) + b = a^3u_0 + (a^2 + a + 1)b \end{aligned}$$

4. Pour $n = 1$ l'égalité est vérifiée (c'est même la définition de u_1), on peut aussi remarqué que la relation est aussi vérifiée pour $n = 2$ et $n = 3$ d'après la question 3.

Montrer que l'égalité au rang n entraîne celle au rang $n + 1$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= au_n + b \\ u_{n+1} &= a \left(a^n u_0 + b \sum_{k=1}^n a^{n-k} \right) + b \\ u_{n+1} &= a(a^n u_0 + b(a^n + a^{n-1} + \dots + a + 1)) + b \end{aligned}$$

Comme la suite (u_{2n+1}) est décroissante et majorée par $u_1 = 0,25$, il s'ensuit que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = 0$$

à l'aide d'un raisonnement analogue on montre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = 1$.

Les deux limites de ces suites extraites sont différentes, on conclut que la suite (u_n) diverge.

Exercice 107. Une preuve de l'irrationalité de e

Étant donné deux suites réelles $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on dit qu'elles sont dites adjacentes si l'une des deux est croissante, l'autre décroissante et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n - b_n) = 0$.

Partie A – On suppose dans cette question que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et que la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

1. Montrer que la suite $(a_n - b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone et en déduire que pour tout entier naturel n , $a_n \leq b_n$.
2. Justifier que les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes vers une même limite ℓ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq \ell \leq b_n$.
3. On suppose de plus que les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont strictement monotones. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n < \ell < b_n$.

Partie B – Pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$$a_n = \sum_{p=0}^n \frac{1}{p!} \quad \text{et} \quad b_n = a_n + \frac{1}{nn!}$$

1. Montrer que les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier non nul n :

$$e - a_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-t)^n e^t dt$$

3. En déduire que pour tout entier naturel n non nul, $0 < e - a_n < \frac{1}{nn!}$. En déduire la limite de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
Indication : on pourra étudier les variations de la fonction $t \mapsto (1-t)e^t$.
4. En déduire une valeur de n telle que a_n soit une valeur approchée de e à 10^{-5} près.
5. On suppose que e est un nombre rationnel.
 - a) Montrer qu'il existe un entier naturel non nul q tel que le nombre $eq!$ soit un entier naturel.
 - b) Montrer que $x = q! \left(e - \sum_{p=0}^n \frac{1}{p!} \right)$ est un entier naturel.
 - c) Montrer que $0 < x < 1$.
 - d) Conclure.