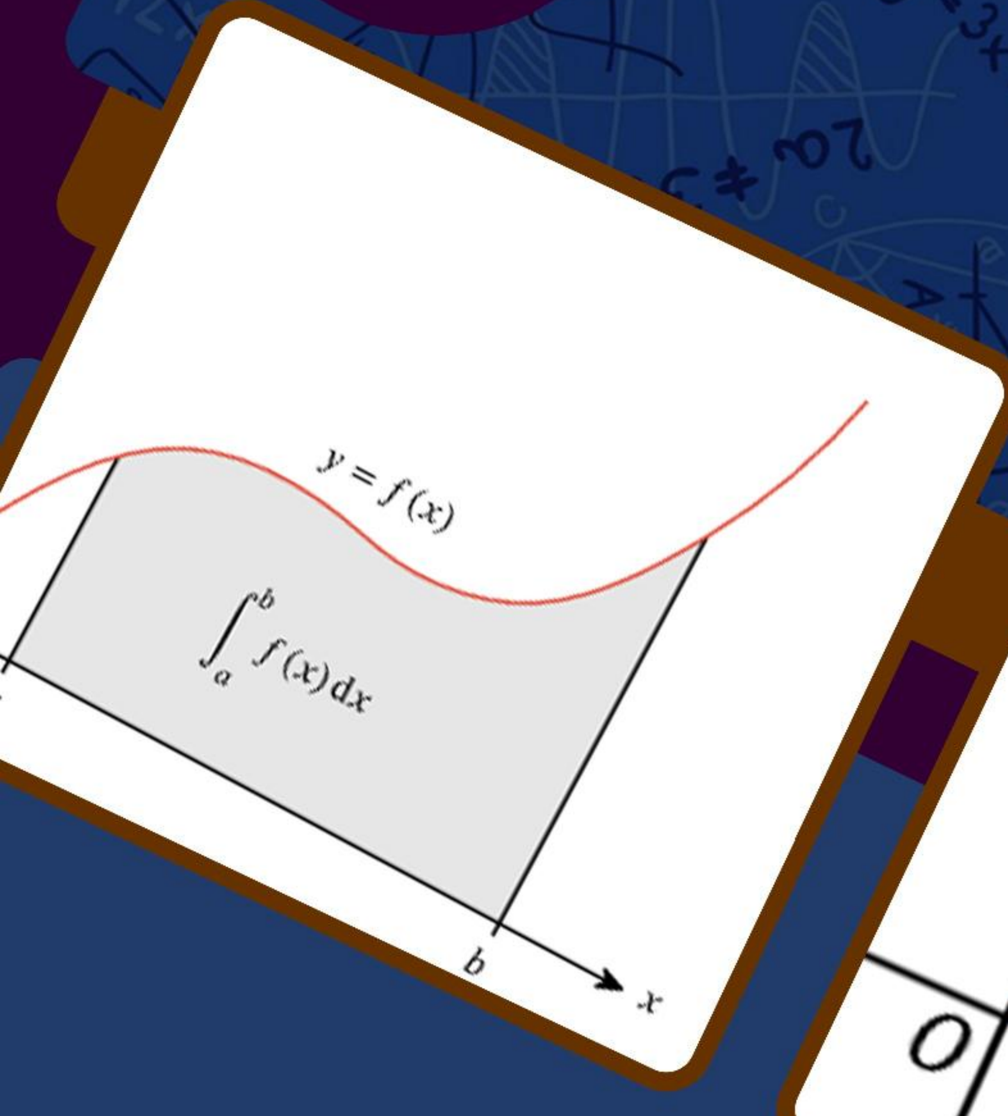
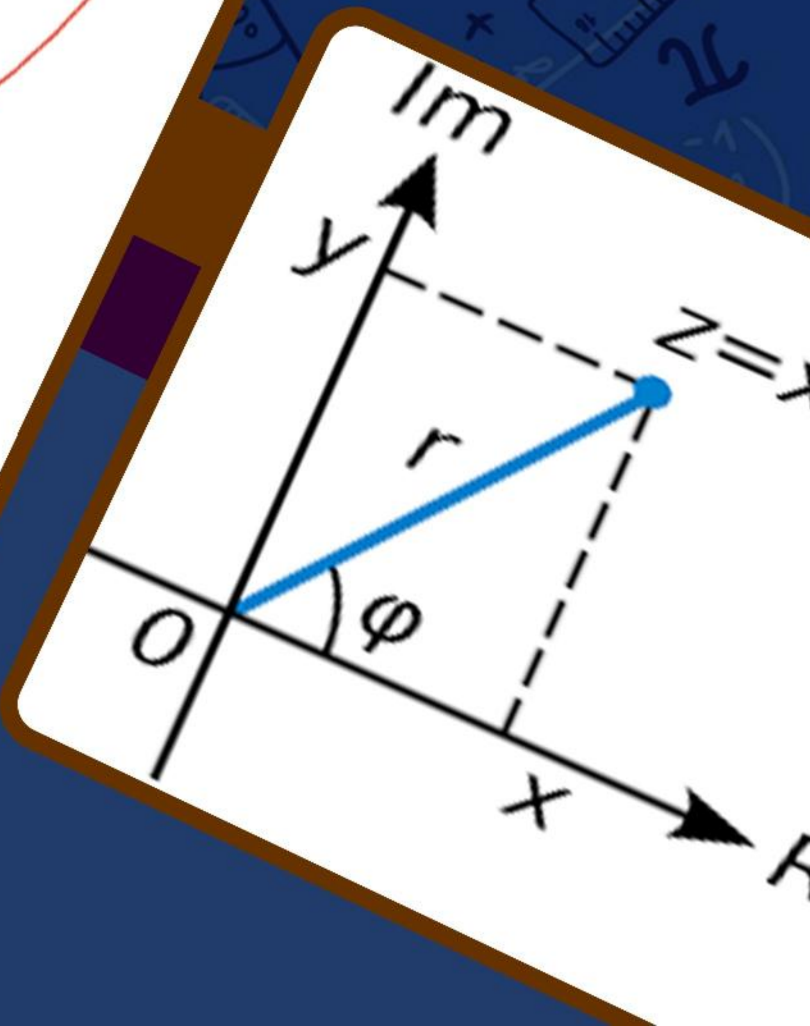
TRAVAUX DIRIGÉS SPÉCIAUX

T^{le}D

GPM 5ÈME EDITION

GRATUIT 100%





AVANT PROPOS

Les systèmes éducatifs en Afrique francophone en général et au Cameroun en particulier connaissent de nos jours de nombreux problèmes parmi lesquels la préparation de l'une des étapes les plus importantes qu'est l'évaluation. Cette étape est prise en tenaille à cause de la qualité des ressources pédagogiques nécessaires pour préparer les apprenants à réagir de façon optimale aux évaluations. Chose qui ne facilite pas l'acquisition de savoir ou savoir-faire véritables, encore moins les compétences.

Face à de telles situations, un collège d'enseignants camerounais, réuni dans un forum WhatsApp dénommé ''Grandprofs de maths (GPM)'' a décidé de faire de sa 5ème édition, la confection des fiches de travaux dirigés spéciaux la 6ème en Tle toutes séries confondues de l'enseignement général. Chaque fiche, pour un chapitre donné est constituée de quatre parties à savoir : les exercices de fixation, les exercices de consolidation, l'apprentissage à l'intégration qui prépare le terrain pour la dernière partie qui est l'activité d'intégration.

Conformes au nouveau programme en vigueur au Cameroun et destinés à mesurer et à consolider les ressources installées pendant la séance d'enseignement/apprentissage en vue de rendre les apprenants compétents, les documents de l'édition 5 n'ont pas pour objectif de substituer les livres inscrits au programme par la haute hiérarchie, mais d'être plutôt le complémentaire de ces derniers. Nous sommes persuadés que cette ressource pédagogique sera sans doute un catalyseur qui mettra en évidence le meilleur qui somnole en chaque apprenant.

Dans un écosystème où le bien-être des enseignants n'est pas encore une effectivité, il a fallu de l'amour, du professionnalisme, de la détermination et de la témérité de ce groupe d'enseignants motivés de bout en bout par les administrateurs de GPM dont en premier *M. POUOKAM LEOPOLD LUCIEN*. **Difficile de ne pas mentionner les collègues** *M. NTAKENDO EMMANUEL ; M. TSOPMO WILFRIED ; M. FANLEU EDDY ; M. OUAFEU TOKAM GUY PAULIN PAULIN ; M. TACHAGO WILFRIED ; M. SIYAPDJE HENRI ; M. NGUETSE ARNAUD ; M. BAYIHA GHISLAIN* **et** *M.GUELA KAMDEM PIERRE* **dont l'apport dans la fusion et les couvertures ont été capitale ; un coup de chapeau à tous les collègues qui ont cru en la réussite de ce nouveau projet en réalisant au moins une fiche de travaux dirigés sur l'un des 185 chapitres et en apportant des critiques et suggestions qui ont permis de faire tendre le fond et la forme de ces documents vers la perfection**

Nous sommes convaincus que ces productions seront d'un apport certain pour la communauté éducative en général et que les apprenants pourront mieux faire face aux nombreux défis qui les attendent au sortir du secondaire. Nous vous seront gré de nous faire parvenir via l'une des adresses mails suivantes : leopouokam@gmail.com ou gkppedro@yahoo.fr vos remarques, suggestions et critiques constructives pour l'optimisation de la qualité du contenu de ces documents.

Tous les enseignants ou passionnés de mathématiques désirant faire partie de la famille « GPM » et disponibles à participer aux futurs projets du groupe peuvent écrire via WhatsApp à l'un des administrateurs ci-dessous : M. GUELA KAMDEM Pierre (697 473 953/ 678 009 612), M. POUOKAM NGUEGUIM Léopold Lucien (696 090 236/ 651 993 749) et M. TACHAGO WABO Wilfried Anderson (699 494 671).

NB : Toute utilisation d'un document de cette collection à but lucratif est formellement proscrite.

Les auteurs.

TABLE DES MATIERES

MINISTÈRE DES ENSEIGNEMENTS SECONDAIRES
LES GRANDPROFS DE MATHS « GPM »
ENSEIGNANT*:* **M. TSOPMO MOUAFO Wilfried F.**
TEL **690303392 / 674910207** ……….

ANNEE SCOLAIRE : 2022-2023
TD : MATHEMATIQUES
CLASSE : TLE D&TI
DUREE : ……. HEURES

FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGES

CHAPITRE 1 : NOMBRES COMPLEXES (approche algébrique)

Savoir-faire :

- ✓ **Donner la partie réelle et la partie imaginaire d'un nombre complexe à partir de son écriture algébrique.**
- ✓ **Reconnaitre un nombre complexe réelle et un nombre complexe imaginaire pur.**
- ✓ **Déterminer l'écriture algébrique du conjugué d'un nombre complexe donné.**
- ✓ **Déterminer l'écriture algébrique d'un quotient, d'une somme et d'un produit de nombres complexes.**
- ✓ **Calculer le module d'un nombre complexe de forme algébrique connue.**
- ✓ **Calculer le module d'un quotient de deux nombres complexes.**
- ✓ **Calculer le module d'un produit de plusieurs nombres complexes.**
- ✓ **Déterminer les racines carrées d'un nombre complexe non nul.**
- ✓ **Résoudre une équation du second degré dans ℂ.**
- ✓ **Reconnaitre une racine d'un polynôme de degré 3 à variable complexe.**
- ✓ **Factoriser un polynôme à variable complexe de degré 3 soit par division euclidienne soit par la méthode des coefficients indéterminés.**

I. Exercices de fixation

✍ **Ressource 1 :** *partie réelle, partie imaginaire d'un nombre complexe à partir de son écriture algébrique (somme et produit de nombres complexes).*

🕮 EXERCICE 1 :

Voici une liste de nombres : $2-i$; $1+i$; $\frac{3}{8}+2i$; $-2i$; $\frac{-\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$; $\cos\theta+i\sin\theta$; $\sqrt{2+\sqrt{3}}-i\sqrt{2-\sqrt{3}}$; $i\sqrt{2}$; -3 ; $1+\cos\varphi+i\tan\varphi$; $\frac{2}{3}$; $\sqrt{5}$; $2-7i$; $-\frac{1}{2}i$; $-3i\sqrt{11}$; $x^2-x+2+(x-2)i$.

1- Parmi ces nombres lesquels sont :
   a) Des nombres réels ? b) Des imaginaires purs ?
2- Tous les nombres de cette liste sont-ils des nombres complexes ? justifier.

🕮 EXERCICE 2 :

On considère les nombres complexes suivants :

$z_1=x^2-x-2+(x-2)i\,, x\in\mathbb{R}$; $z_2=\left(\frac{1}{x}+y^2\right)+\left(\frac{3}{x}-2y^2\right)i,\ x\in\mathbb{R}^*, y\in\mathbb{R}$;

1- Pour quelle valeur de x, z_1 est – il nul ?
2- Existe-t-il un couple de nombres réels tels que z_2 soit égal à $1+i$?

🕮 EXERCICE 3 :

Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$z_1 = (2-3i)^2$; $z_2 = (2-i)(3+i)$; $z_3 = (\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}+i)$; $z_4 = (1+3i)+(2-i)$;
$z_5 = (\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}\,)^2$; $z_6 = 3i(2+8i) - 7(5-2i) + (7-3i)(1+5i)$; $z_7 = (-3+2i)^3$

✍ **Ressource 2 :** *Ecriture algébrique de l'expression conjuguée d'un nombre complexe (somme, produit, quotient de nombres complexes).*

📖 **EXERCICE 1 :**

1- Pour chacun des nombres complexes suivants, déterminer l'écriture algébrique de son expression conjuguée : $2+4i$; $1-5i$; $2i(4-i)$; $(3+i)(-5i+3)$; $\frac{1}{2+i}$; $\frac{3-i}{6i-2}$; $\frac{-5i}{4}$; $\frac{2+i}{8-i}$.

2- Ecrire sous forme algébrique l'inverse de chacun des nombres complexes suivants :
$1-i$; $\sqrt{3}+2i$; $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $2-2i$.

📖 **EXERCICE 2 :**

1- Ecrire sous forme algébrique chacun des quotients suivants :
a) $\frac{1+i}{1-i}$; b) $\frac{2+i}{5+3i}$; c) $\frac{8i-1}{2-3i}$; d) $\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2$; e) $\frac{4-i}{2+3i} - \frac{i}{3+i}$

2- On donne : $z_1 = \frac{5-i}{3+2i}$ et $z_2 = \frac{5+i}{3-2i}$.
Montrer que $z_1 + z_2 \in \mathbb{R}$ et que $z_1 - z_2$ est un imaginaire pur.

✍ **Resource 3** : *Calculer le module d'un nombre complexe de forme algébrique connue.*

📖 **EXERCICE 1 :**

1- **QCM.** Pour chacune des questions ci-dessous quatre réponses sont proposées parmi lesquelles une seule est juste. Préciser là.
a) Soit z un nombre complexe et $\bar{z}$ sont conjugué alors $z\bar{z}$ est égale à :
i) z^2 ; ii) $z|z|$; iii) $|z|^2$; iv) $\bar{\bar{z}}$.
b) si z et z' sont deux nombres complexes alors
i)$|z+z'| = |z| + |z'|$; ii) $|z+z'| \leq |z| + |z'|$; iii) $|z+z'| < |z| + |z'|$; iv) $|z+z'| \geq |z| + |z'|$

2- Calculer le module de chacun des nombres complexes suivant :
a)$2-3i$; b) $-\sqrt{3}+i$; c) $1-5i$; d) $-1-3i$; e) $-6i$; f) -8.

✍ **Resource 4** : Calculer le module d'un quotient de deux nombres complexes.

📖 **EXERCICE 1 :**

1- Soient z et z' sont deux nombres complexes $z' \neq 0$. Ecrire $\left|\frac{z}{z'}\right|$ en fonction de $|z|$ et $|z'|$.
A quoi est égal $\left|\frac{1}{z'}\right|$?

2- Calculer le module de chacun des nombres suivants :
(a) $\frac{1+i}{1-i}$; (b) $\frac{3-2i}{2-3i}$; (c) $\frac{1}{-1+i\sqrt{2}}$; (d) $\frac{\sqrt{3}+2i}{1-i}$; (e) $\frac{1}{2-7i}$.

✍ **Resource 5** : *Calculer le module d'un produit de plusieurs nombres complexes.*

📖 **EXERCICE 1 :**

1- Soient z et z' sont deux nombres complexes et $n \in \mathbb{N}$. Compléter les pointillés ci-dessous.

a) $|z \times z'| = \cdots$ b) $|z^n| = \cdots$

2- Calculer le module de chacun des nombres complexes suivants :

$\left(1+i\sqrt{3}\right)^3$; $(1+i)(2-i)$; $(\sqrt{2}+i\sqrt{3})(\sqrt{3}+i\sqrt{5})$; $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^4$.

✍ **Resource 6** *: Déterminer les racines carrées d'un nombre complexe non nul.*

🕮 **EXERCICE 1 :**

Calculer les racines carrées des nombres complexes suivants :

$z_1 = -1$; $z_2 = i$; $z_3 = 1+i$; $z_4 = -1-i$; $z_5 = 1+i\sqrt{3}$; $z_6 = 3+4i$; $z_7 = 7+24i$; $z_8 = 3-4i$; $z_9 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

✍ **Resource 7** : *Résoudre une équation du second degré dans* $\mathbb{C}$.

🕮 **EXERCICE 1 :**

Résoudre dans $\mathbb{C}$: (a) $z^2+z+1=0$; (b) $z^2-(5i+14)z+2(5i+12)=0$;

(c) $4z^2-2z+1=0$; (d) $z^2-(1+2i)z+1-i=0$; (e) $z^2-\sqrt{3}z-i=0$;

(f) $iz^2+(1-5i)z+6i-2=0$; (g) $z^2=8-6i$.

🕮 **EXERCICE 2** :

1- Développer et réduire $(3-i)^2$

2- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2+(-5-3i)z+2+9i=0$.

🕮 **EXERCICE 3** :

1- Montrer que $(1+i)^6=-8i$.

2- En déduire une solution de l'équation $(E): z^2=-8i$.

3- Ecrire toutes les solutions de (E) sous forme algébrique.

✍ **Resource 8** : *Reconnaitre une racine d'un polynôme de degré 3 à variable complexe.*

🕮 **EXERCICE 1** :

On considère le polynôme P de la variable complexe z définie par :

$P(z) = z^3+(-5-2i)\ z^2+(5+4i)z+2i-9.$

Justifier que le polynôme P a une racine complexe imaginaire pur que l'on précisera.

🕮 **EXERCICE 2** :

Pour chacune des questions ci-dessous, quatre réponses sont proposées parmi lesquelles une seule est juste. Préciser la réponse juste.

1- Une des racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme $z^3-(6+5i)z^2+(3+20i)z+10-15i$ est :

(a) $10-15i$; (b) $3-15i$; (c) $3+2i$; (d) $15i$.

2- Le polynôme $p(z) = z^3+\left(-9+4\sqrt{3}\right)z^2+\left(43-24\sqrt{3}\right)z-75+36\sqrt{3}$ admet une racine réelle qui est égale à :

(a) 0 ; (b) 4 ; (c) $5i$; (d) 3.

✍ **Resource 9** : *Factoriser un polynôme à variable complexe de degré 3 soit par division euclidienne soit par la méthode des coefficients indéterminés.*

🕮 **EXERCICE 1** :

On considère le polynôme P de la variable complexe z définie par :

$P(z) = z^3 + (2+2i)\ z^2 - 2z + 8 - 4i.$

1- Montrer $P(z)$ admet une racine imaginaire pure que l'on déterminera.
2- Déterminer a, b et $c \in \mathbb{C}$ tels que $P(z) = (z - z_1)(az^2 + bz + c)$.
3- Ecrire $P(z)$ en produit de facteurs premier degré.

🕮 **EXERCICE 2** :

On considère le polynôme Q de la variable complexe z définie par :

$Q(z) = z^3 + (-6+i)\ z^2 + (12-2i)z - 4 + 12i.$

1- Calculer $Q(-i)$ et conclure.
2- Déduire que $Q(z) = (z+i)(z^2 - 6z + 12 + 4i)$.
3- Ecrire $Q(z)$ en produit de facteurs de premier degré.

II. Exercices de consolidation

🕮 **EXERCICE 1** :

On considère les nombres complexes z et z' tels que $z' = \frac{z-i}{z+2i}$.

1- En posant $z = x + iy$, déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de z'.
2- Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que :
   a) z' soit réel. b) $|z'| = 1$. c) $|z'| = 2$.
3- Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan d'affixe z vérifiant :
   a) $|iz+3| = |z+4+i|$.
   b) $\left|\bar{z} + \frac{1}{3}i\right| = 3$.
   c) $|1+iz| = 2$.

🕮 **EXERCICE 2** :

On considère la fonction polynôme P de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$P(z) = z^4 - 4z^3 + 9z^2 - 4z + 8.$

1- Comparer $P(\bar{z})$ et $\overline{P(z)}$. $\bar{z}$ étant le conjugué de z et $\overline{P(z)}$ celui de $P(z)$.
2- Calculer $P(i)$ et déterminer a, b et c tels que $(z) = (z+1)(az^2 + bZ + c)$.
3- Déduire toutes les solutions de l'équation $P(z) = 0$.

🕮 **EXERCICE 3**

1- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 1$. (On pourra utiliser l'identité $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$) et écrire les solutions sous forme algébrique.
2- On pose $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
   a) Montrer que $\bar{j} = j^2$ et que $\frac{1}{j} = j^2$.
   b) Montrer que $1 + j + j^2 = 0$.

III. Apprentissage à l'intégration

🕮 **EXERCICE 1** :

Sur un plan rapporté à un repère orthonormé, un appareil de conversion d'image au point $M(x;y)$ et la place au point $M'(x';y')$ tel que : si $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, si $z \neq -2$ alors $z' = \frac{z-1}{z+2}$. Pour positionner M' en fonction de M, il faut introduire la partie réelle et la partie imaginaire de z' dans cet appareil.

Tache 1 : déterminer le lieu des points M pour lesquels les points M' décrit le cercle trigonométrique.

Indication : remplacer z par $x + iy$ et poser $|z'| = 1$ pour avoir une relation entre x et y.

Tache 2 : déterminer le lieu des points M pour lesquels les points M' décrit la première bissectrice.

Indication : *remplacer z par $x + iy$, exprimer x' et y' en fonction de x et y ; poser $x' = y'$ et trouver une relation entre x et y.*

IV. Activités d'intégration

📖 **Situation 1** :

M. SALIOU possède trois terrains non encore exploités qu'il voudrait absolument sécuriser à cause des personnes mal intentionnées qui utilisent ces espaces à des mauvaises fins.il décide donc d'acheter du fil barbelé pour clôturer entièrement chacun de ces trois terrains, le rouleau de cinq mètres de ce fil lui est vendu à 3500 FCFA. Il devra en plus remettre 3000FCFA pour les piquets et la main d'œuvre pour chacun des terrains.

Le terrain 1 est formé de l'ensemble des points $M(z)$ du plan complexe tels que :

$$|2iz - 1 - 3i| = 8.$$

Le terrain 2 est de forme rectangulaire et ses dimensions sont la partie réelle et la partie imaginaire de la solution z de l'équation : $(1 + 4i)z + (3 - 4i)\bar{z} = 4 - 8i$,

$\bar{z}$ étant le conjugué de z.

Le terrain 3 quant à lui est formé de l'ensemble des points $M(z)$ du plan tel que le nombre complexe $\frac{z}{z+2i}$ soit imaginaire pur. On prendra une unité égale à 10 mètres.

Tache 1 : Déterminer la dépense de M. SALIOU pour le terrain1.

Tache 2 : Déterminer la dépense de M. SALIOU pour le terrain2.

Tache 3 : Déterminer la dépense de M. SALIOU pour le terrain3.

📖 **Situation 2** :

Le plan d'un village est représenté par un quadrilatère ABCD avec $A(-1 + 3i), B(4 + 3i), C(z_1)$ et $D(z_2)$ dans le plan muni d'un repère orthonormé directe R d'unité 1km sur les axes. z_1 et z_2 étant les solution de l'équation $z^2 - (1 + 10i)z - 27 + 5i = 0$ telle que $Re(z_1) > Re(z_2)$. La densité de la population de ce village est de 500 habitants au km^2 . une maladie contagieuse M fait son apparition dans ce village, causée par l'infection d'un virus α . un jour avant l'apparition de cette maladie, on a constaté que 40% de la population est constituée des personnes du troisième âge. .

. Par ailleurs une ONG veut doter un GIC du village d'un silo de forme cylindrique et creux en acier inoxydable de faible épaisseur. Ce silo servira à conserver des graines sèches de maïs. Une base de ce silo est obtenue d'un domaine plan délimité par l'ensemble des points M d'affixes z d'un plan muni d'un repère R' orthonormée directe d'unité sur les axes 1 m. avec $4\bar{z} + |z|^2$imaginaire pur. La hauteur de ce silo devra être de 5 m. on note que pour un volume d'un mètre cube, on a une masse de 600 Kg de mais sec en grains.

Taches :

1- Quel est le nombre de personnes du troisième âge de ce village un jour avant l'apparition de la maladie M dans le village ?

2- Quelle masse de grains de maïs sec peut contenir le silo lorsqu'il est plein de grains ?

Situation 3 :

Une élite organise dans le but d'encourager les couples mariés officiellement un jeu concours en mathématiques qui se déroule de la manière suivante :

On définit sur l'ensemble des nombres complexes la propriété (E) : **'' pour tout polynôme P et pour tout nombre complexe non nul z_0, si z_0 est racine de P alors $\overline{z_0}$, et $\frac{1}{z_0}$, sont aussi racines de P''**

Etape1 : le conjoint imagine un polynôme de degré supérieur à 3 à coefficients complexes devant automatiquement vérifier la propriété (E) ;

Etape2 : la conjointe imagine une racine z_0 du polynôme choisi par son époux ;

Etape3 : l'époux déduit toutes les autres racines du polynôme.

La réussite à l'étape1 fait gagner au couple 10000 FCFA ; la réussite à l'étape 2 fait gagner au couple 5000 FCFA ; et la réussite à l'étape 3 fait gagner au couple 8000 FCFA.

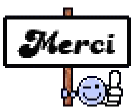
Règle du jeu : pour passer à l'étape supérieure il faut automatiquement gagner l'étape précédente sinon le jeu s'arrête. La participation à ce jeu est gratuite.

M. et Mme MBA se présentent à ce jeu. M. MBA choisit le polynôme défini par :$P(z) = -6z^4 + 18z^3 - 27z^2 + 18z - 6$ et Mme MBA choisit $z_0 = 1 + i$ et enfin M. MBA propose $\frac{1}{2}(1 - i)$; $\frac{1}{2}(1 + i)$ et $1 - i$ comme les autres racines de P.

Tache1 : le couple MBA passe-t-il l'étape1 ?

Tache2 : le couple MBA passe-t-il l'étape2 ?

Tache3 : le montant gagné par couple MBA est-il supérieur à 20000 FCFA .



« La première règle de la réussite, ne jamais remettre au lendemain l'exécution d'un travail. ».

MINISTÈRE DES ENSEIGNEMENTS SECONDAIRES
LES GRANDPROFS DE MATHS « GPM »
ENSEIGNANT : …… TSANGOU METSIM ………
TEL : …… 698613868 ……….

ANNEE SCOLAIRE : 2022-2023
TD : MATHEMATIQUES
CLASSE : 1ERE D&TI
DUREE : ……. HEURES

FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGES

CHAPITRE 2 : FONCTIONS NUMERIQUES D'UNE VARIABLE REELLE

Savoir-faire :

- ✓ **Déterminer l'image d'un intervalle par une fonction continue.**
- ✓ **Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour justifier l'existence dans un intervalle donné des solutions d'une équation de la forme $(x) = c$ et établir l'unicité de x quand c'est possible.**
- ✓ **Montrer que la restriction d'une fonction a un intervalle est bijective à partir de sa courbe ou de son tableau de variations.**
- ✓ **Etudier la continuité et la dérivabilité, le sens de variation de l'application réciproque d'une application bijective.**
- ✓ **Dériver la bijection réciproque d'une fonction numérique.**
- ✓ **Représenter graphiquement les courbes de deux fonctions réciproques l'une de l'autre.**
- ✓ **Résoudre des équations de la forme : $x^n = a$ avec $n \in \mathbb{N}$.**
- ✓ **Utiliser les inégalités des accroissements finis pour établir certaines inégalités.**
- ✓ **Lever les indéterminations issues des limites des fonctions trigonométriques et des fonctions irrationnelles.**
- ✓ **Déterminer les branches infimes à une courbe.**
- ✓ **Etudier et représenter graphiquement certaines fonctions rationnelles, irrationnelles et trigonométriques**

I. Exercices de fixation

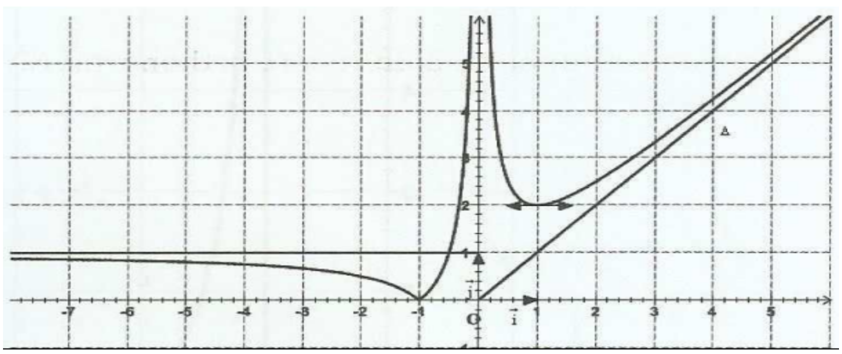
Ressource 1 : *Déterminer l'image d'un intervalle par une fonction continue*

EXERCICE 1 :

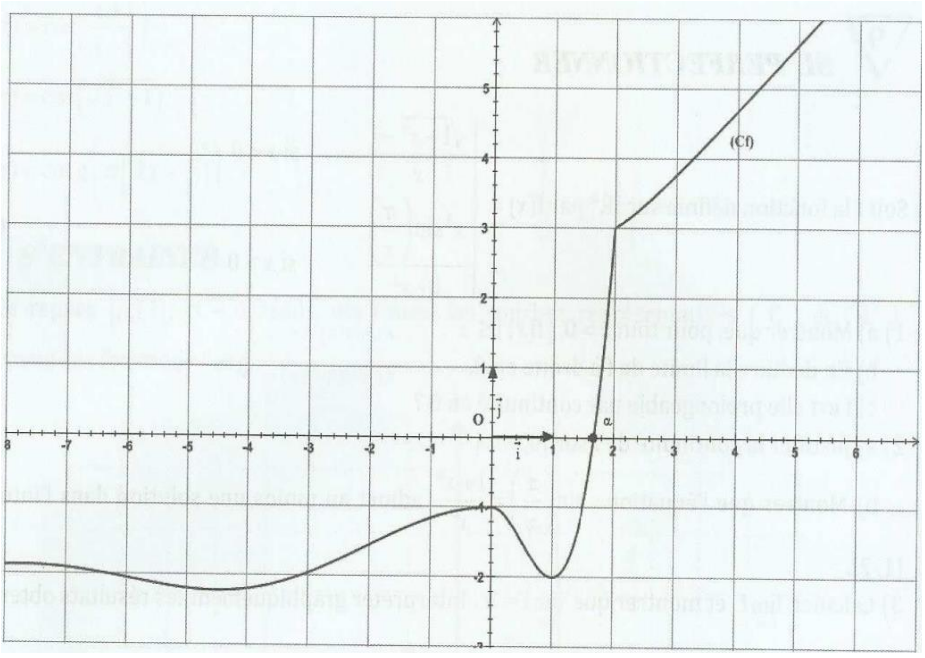
Dans chacun des cas suivants, déterminer par lecture graphique l'ensemble $f(I)$ image par f de l'intervalle I.

1)

A) $\mathrm{I} =]-\infty; 0[$
B) $\mathrm{I} =]0; +\infty[$



2)



📖 EXERCICE 2 :

1- Le tableau de variation suivant est celui d'une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	3

Déterminer les images par f de chacun des intervalles suivants : $]-\infty; 0]$, $]2; +\infty[$, $[0; 2]$; $[0; +\infty[$ et $]-\infty; +\infty[$

2- On donne ci-dessous le tableau des variations d'une fonction f. f est continue sur $]-\infty; 8[$ et sur $]8; +\infty[$.

x	$-\infty$		0		8		$+\infty$
$f(x)$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Déterminer les images par f des intervalles suivants : $]-\infty; 8[$ et sur $]8; +\infty[$.

3- Soit f une fonction définie sur l'intervalle $]-3; +\infty[$ dont le tableau de variation est :

x	-3		-1		0		8		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	-2	$\nearrow$	1	$\searrow$	-5

Déterminer les images par f des intervalles suivants : $]-3;\ -1]$; $]-1;0[$; $[0;\ +\infty[$; $]-3;\ +\infty[$ et $[-1;8]$.

🕮 EXERCICE 3 :

I- Dans chacun des cas suivants déterminer l'image de l'intervalle K par la fonction f.

a) $f: x \mapsto \frac{x+2}{x-3}$; $K =]3;\ +\infty[$.

b) $f: x \mapsto x^3 - 3x + 1$; $K = [-1;+\infty[$

c) $f: x \mapsto x^2 - 3x + 2$; $K = [2;1]$

d) $f: x \mapsto \frac{-2x+5}{x-3}$; $K = [-4;-1]$

e) $f: x \mapsto \sqrt{x^2 + 3x + 2}$; $K = [0;+\infty[$

f) $f: x \mapsto |3x^2 - 1|$; $K =]-\infty;0]$.

g) $f: x \mapsto \sqrt{|x^2 - 4|}$; $K = [-2;2]$

II- Soit f une fonction numérique définie sur l'intervalle $[-3;\ +\infty[$ par : $f(x) = 2x - 2\sqrt{x+3}$.
Déterminer les images par la fonction f des intervalles $[-3;0]$; $[-2;1]$ et $]0;6[$.

✍ **Ressource 2 :** *Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour justifier l'existence dans un intervalle donné des solutions d'une équation de la forme $f(x) = c$ et établir l'unicité de x quand c'est possible.*

🕮 EXERCICE 1 :

Le tableau suivant est le tableau des variations d'une fonction définie et continue sur l'intervalle $I = [-5;8]$.

x	-5		0		8
$f(x)$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	-6

1- Déterminer le nombre de solutions dans I des équations suivantes :

a) $f(x) = 0.$; b) $f(x) = 3$; c) $f(x) = 1{,}5$.

2- Déterminer le signe de $f(x)$ suivante les valeurs de x.

3- Soit m un nombre réel. Discuter en fonction de la valeur de m du nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

🕮 EXERCICE 2 :

On considère une fonction définie sur l'intervalle $[-4; 4]$ admettant le tableau de variation suivant :

x	-4		2		4
Variation de f	3	$\searrow$	$-\frac{9}{2}$	$\nearrow$	-1

1- Justifier que la fonction f s'annule une unique fois sur son ensemble de définition.
2- Déterminer le signe de $f(x)$ suivante les valeurs de x.
3- Soit m un nombre réel. Discuter en fonction de la valeur de m du nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

🕮 EXERCICE 3 :

I- Démontrer que l'équation $x^3 - 6x - 6 = 0$ admet une solution réelle et donner la valeur approchée de cette solution a 10^{-2} près.
II- Démontrer que l'équation $x^3 - 12x + 10 = 0$ admet dans $]0; 1[$ une solution unique α et déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.
III- Monter que l'équation $\left|x\sqrt{1-x}\right| = \frac{1}{3\sqrt{3}}$ admet trois solutions x_1, x_2 et x_3 telles que : $-\frac{1}{3} < x_1 < 0$; $0 < x_2 < \frac{2}{3}$ et $\frac{2}{3} < x_3 < 1$.
IV- Un cube a une arrête de $x\,cm$, un parallépipede rectangle a pour dimensions : $1cm$; $3cm$ et $(x+1)cm$.

1- Démontrer qu'il existe une seule valeur de x pour laquelle les deux solides ont le même volume.
2- Donner un encadrement de cette valeur a $0{,}1$ pres.

🕮 EXERCICE 4 :

I- Soit la fonction $f: x \mapsto \frac{x+1}{\sqrt{x^2+4}}$

1- Etudier les variations de f.
2- Préciser le nombre de solutions des équations suivantes et déterminer une valeur approchée a 10^{-1} de chacune d'elles.

$f(x) = 1{,}1$; b) $f(x) = 0{,}75$; c) $f(x) = -0{,}5$.

II- On considère le polynôme p définie pour tout réel x par $p(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.

1- Etudier les variations de p.
2- Montrer que l'équation $p(x) = 0$ admet une unique solution $\beta \in]1{,}6; 1{,}7[$.
3- Dresser le tableau de signe de $p(x)$.

III- Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \longmapsto x^2 - x\sqrt{x} - 2$$

1- Déterminer l'ensemble de définition D de f et calculer les limites aux bornes de D.
2- On admet que f est dérivable sur $]0; +\infty[$.

a) Démontrer que pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{\sqrt{x}(4\sqrt{x}-3)}{2}$.
b) En déduire les variations de f et dresser son tableau de variation.

3- Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]0;\ +\infty[$ une solution unique β.
4- En déduire le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

✍ **Resource 3** : *Montrer que la restriction d'une fonction a un intervalle est bijective à partir de sa courbe ou de son tableau de variations ; Etudier la continuité et la dérivabilité, le sens de variation de l'application réciproque d'une application bijective et Dériver la bijection réciproque d'une fonction numérique.*

🕮 EXERCICE 1 :

I- Soit la fonction $f : [0;\ +\infty[\ \to\ [0; 1[$

$$x \longmapsto \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

a) Sans étudier ses variations, démontrer que f est une bijection.
b) Déterminer la bijection réciproque f^{-1} de f.

II- Soit la fonction f: $x \longmapsto \frac{1}{3}x^3 + x + 1$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

a) Démontrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$. Vers $\mathbb{R}$.
b) Justifier que sa bijection réciproque f^{-1} est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
c) Calculer $(f^{-1})'(13)$.

🕮 EXERCICE 2 :

Soit la fonction f ; $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right] \to \left[\frac{3}{4}; +\infty\right[$

$$x \longmapsto x^2 + x + 1.$$

1.

a) Sans étudier ses variations, justifier que f est une bijection.
b) Déterminer sa bijection réciproque f^{-1}.
c) Jusitifer que f^{-1} est dérivable sur $\left[\frac{3}{4}; +\infty\right[$ et calculer $(f^{-1})'(x)$ pour tout $x \in \left[\frac{3}{4}; +\infty\right[$.

2.

a) Justifier par l'étude des variations que f est une bijection.
b) Calculer par une autre méthode que celle du 1) le nombre $(f^{-1})'(a)$ pour tout $a \in \left[\frac{3}{4}; +\infty\right[$.

🕮 EXERCICE 3 :

I- Soit g la fonction définie sur $[0;\ +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \sqrt{x^2+1}$.

1- Montrer que g est une bijection de $[0;\ +\infty[$ vers $[1;\ +\infty[$.
2- Montrer que pour tout $x \in [1;\ +\infty[$, $g^{-1}(x) = \sqrt{x^2-1}$.
3- g^{-1} est-elle dérivable sur $[1;\ +\infty[$? Justifier votre réponse.

II- Soit la fonction numérique g définie sur $[1;\ +\infty[$ par : $g(x) = (x-1)\sqrt{x-1}$.

1- Montrer que g admet une bijection réciproque g^{-1} , dont on déterminera l'ensemble de définition.
2- Déterminer l'ensemble J sur lequel g^{-1} est dérivable.
3- Déterminer de deux facons différentes la dérivée de g^{-1} sur J.

🕮 EXERCICE 4 :

I- Soit la fonction f définie sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ par : $f(x) = sin^2 x$.

1- Montrer que f réalise une bijection de $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ vers un intervalle J que l'on déterminera.

2-

a) Déterminer l' ensemble K sur lequel, f^{-1} est continue .

b) Déterminer l' ensemble I sur lequel, f^{-1} est dérivable.

c) Dresser le tableau de variation de la fonction f^{-1}

d) Démontrer que poiur tout $x \in I$, $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$.

II- Soit la fonction f définie sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right[$ par : $f(x) = \frac{1}{1-tanx}$.

1- Montrer que f réalise une bijection de $\left[0;\frac{\pi}{4}\right[$ vers un intervalle J que l'on déterminera.

2- Soit g la fonction réciproque de f.

a) Monttrer que g est dérivable sur $[1; +\infty[$ et que $g'(x) = \frac{1}{2x^2-2x+1}$.

III- Soit f la fonction définie sur $[0; \pi]$ par : $f(x) = cosx$.

1- Montrer que f est une bijection de $[0; \pi]$ vers un intervalle J que l'on déterminera.

2- Justifier que f^{-1} est dérivable sur $]-1;1[$ et dresser son tableau de variation.

3- Démontrer que pour tout $x \in]-1;1[$, on a $(f^{-1})'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

✍ **Resource 4** : *Résoudre des équations de la forme :* $x^n = a$ *avec* $n \in \mathbb{N}$.

🕮 EXERCICE 1 :

I- Simplifier : $A = \frac{\sqrt[3]{1024}\times\sqrt{\sqrt{64}}\times\sqrt[5]{7776}}{\sqrt{18}\times\sqrt{\sqrt[3]{256}}}$; $B = \frac{\sqrt[3]{2}\times\sqrt[6]{9}\times\sqrt{6}}{\sqrt[3]{\sqrt{6}}}$; $C = \frac{\sqrt[5]{2}\times\sqrt{8}}{\sqrt{\sqrt[5]{128}}}$.

II- Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $x^3 + 27 = 0$; b) $x^5 - 1024 = 0$; c) $(\frac{1-\sqrt[3]{x}}{3-\sqrt[3]{x}})^3 + 125 = 0$.

III- Mettre sous forme d'un quotient dont le dénominateur est rationnel :

$A = \frac{10^{\frac{3}{2}}\times 8^{-\frac{4}{3}}}{5\times 4^{-\frac{7}{3}}}$; $B = \frac{1}{\sqrt[4]{5}-1}$; $C = \frac{1}{1+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}}$.

IV- Soient a et b deus réels.

a) Exprimer a en fonction de b pour que : $a^{\frac{4}{5}} - 2a^{\frac{2}{5}}b^2 + b^4 = 0$.

b) Simplifier : $\frac{a^{\frac{6}{5}}-3a^{\frac{4}{5}}b^2+3a^{\frac{2}{5}}b^4-b^4}{a^{\frac{4}{5}}-2a^{\frac{2}{5}}b^2+b^4}$.

V- Soit $A = \sqrt[3]{28+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{5290}{3}}} + \sqrt[3]{28-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{5290}{3}}}$. On se propose de déterminer la valeur exacte de A sans utiliser la calculatrice. On pose $m = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{5290}{3}}$, $a = \sqrt[3]{28+m}$ et $b = \sqrt[3]{28-m}$, de ce fait $A = a + b$.

1- a) montrer que $A^3 = 56 + 3abA$.

b) Calculer a^3b^3 et en déduire que $A^3 = 56 + 2A$.

2- Etudier la fonction $f: x \longmapsto x^3 - 2x - 56$ et montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution positive.
3- Calculer $f(4)$ et en déduire la valeur exacte de A.

✍ **Resource 5** : *Utiliser les inégalités des accroissements finis pour établir certaines inégalités*.

🕮 **EXERCICE 1** :

I- On considere la fonction $f: x \longmapsto \sqrt{x} + x$.

1- Démontrer que pour tout $t \in [1; 4]$, on a $\frac{5}{4} \leq f'(t) \leq \frac{3}{2}$.
2- Soit $x \in [1; 4]$
   a) en appliquanr l'inégalité des accroissements finis montrer que $\frac{5}{4}(x-1) \leq f(x) - f(1) \leq \frac{3}{2}(x-1)$.
   b) Donner alors un encadrement de f par deux fonctions affines sur
   c) Montrer que $\left|\sqrt{x} + x - 6\right| \leq \frac{3}{2}|x - 4|$.

II-

1- Démontrer que pour tout nombre réel a d l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, on a : $a \leq \tan a \leq 2a$.
2- Démontrer que pour tout nombre réel a et b de l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$, on a :
$$\frac{b-a}{cos^2 a} \leq \tan b - \tan a \leq \frac{b-a}{cos^2 b}$$

🕮 **EXERCICE 2 :**

1- Démontrer que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0; 1]$ on a :
   a) $\frac{x\sqrt{2}}{4} + 1 \leq \sqrt{x+1} \leq \frac{x}{2} + 1$; b) $\left|\sqrt{x+1} - 1\right| \leq \frac{x}{2}$.
2- Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $\frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$.
3- Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, et pour tout x de l'intervalle $[0; 1]$:
   $\frac{1}{n} - \frac{x}{n^2} \leq \frac{1}{x+n} \leq \frac{1}{n}$.
4- Démontrer que pour tout nombre réel x de l'intervalle $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ on a : $1 - \frac{x}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{1-x} \leq 1 - \frac{x}{2}$.

✍ **Resource 6** : *Lever les indéterminations issues des limites des fonctions trigonométriques et des fonctions irrationnelles.*

🕮 **EXERCICE 1** :

Calculer les limites suivantes : $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$; $\lim_{x\to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{9-x}$; $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}$; $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{5+x^2}-\sqrt{5}}{4x^2}$;
$\lim_{x\to 0} x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$; $\lim_{x\to 3_>} \frac{\sqrt{x-3}}{4-\sqrt{6x-2}}$; $\lim_{x\to 1_>} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1}$; $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+3x}-1}{x}$

🕮 **EXERCICE 2 :**

Calculer les limites suivantes :

$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2sinx-1}{6x-\pi}$; $\lim_{x\to 1}\frac{sin\pi x}{x-1}$; $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{sinx-1}{2x-\pi}$; $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2cosx-1}{3x-\pi}$; $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{sinx-cosx}{2x-\frac{\pi}{2}}$; $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{3}cosx-sinx}{x-\frac{\pi}{3}}$;
$\lim_{x\to 0}\frac{1+sinx-cosx}{1-sinx-cosx}$; $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1+tanx}{1-tanx}$; $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-sinx+cosx}{1-sinx-cosx}$; $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{cosx}{1-sinx}$.

🕮 EXERCICE 3 :

I- Dans chacun des cas suivants, calculer la limitre de f en 0.

a) $f(x)=\frac{sinx}{\sqrt{x}}$; b) $f(x)=\frac{tan^2x}{x}$; c) $f(x)=\frac{x^3cos^2x}{sin^2x}$; d) $f(x)=xsin(\frac{1}{x})$; e) $f(x)=\frac{\sqrt{cosx}-1}{x}$; f) $f(x)=\frac{1-cos2x}{sin^2x}$; g) $f(x)=\frac{1-cos3x}{x^2}$; h) $f(x)=\frac{\sqrt{1+sinx}-1}{sin2x}$; i) $f(x)=\frac{sinx-x}{x^3}$.

II- Dans chacun des cas suivants, calculer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

a) $f(x)=\sqrt{2x^2-x+3}$; b) $f(x)=2x+\sqrt{x^2+1}$; c) $f(x)=x-\sqrt{x^2-4}$; d) $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$; e) $f(x)=\sqrt{x^2-3x}-x$; f) $f(x)=\sqrt{4x^2-2x+1}-2x+1$; g) $f(x)=3x+\sqrt{5x^2+3}$; h) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; i) $f(x)=\cos(\frac{\pi x+1}{x+2})$

🕮 EXERCICE 4 :

I-

1- Démontrer que pour tout x de l'intervalle $[1;+\infty[$, on a : $\frac{1}{2}\leq\frac{x}{x+1}\leq 1$

2- En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{x}}{x+1}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x}(x+1)}$.

II- On considere la fonction $f: x\mapsto\frac{2x+sinx}{x-1}$.

1- Démontrer que pour tout x de l'intervalle $]1;+\infty[$, on a : $\frac{2x-1}{x-1}\leq f(x)\leq\frac{2x+1}{x-1}$.

2- En déduire la limite de f en $+\infty$.

III- Demontrer que pour tot réel x, $|cosx+sinx|\leq 2$ et en déduire les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction f définie par $f(x)=\frac{cosx+sinx}{x^2}$.

IV- On considere les fonctions $f: x\mapsto x^2-3sinx$ et $g: x\mapsto 3x+2\,cosx$

Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$.

V-

1- Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x ; $f(x)\geq x^2$. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

2- Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$ sachant que pour tout réel x, $|f(x)-2|\leq\frac{1}{x}$.

VI- On considere la fonction f définie sur $[2;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{3x+sinx}{x-1}$.

1- Montrer que pour tout $x\geq 2$, on a ; $|f(x)-3|\leq\frac{4}{x-1}$.

2- En déduire la limite de f en $+\infty$.

✍ **Resource 7 :** *Déterminer les branches infinies*

🕮 EXERCICE 1 :

Le plan est muni d'un repere orthogonal, (C) est la représentation graphique de la fonction f. Dans chacun des cas suivants, calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et donner une interprétation graphique de chaque limite s'il y a lieu.

1- f est définie sur $]-\infty;\ -1[\cup]1;\ +\infty[$ par $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}$.

2- f est définie sur $]-\infty;\ 1[\cup]1;\ +\infty[$ par $f(x)=\frac{3x^2}{x-1}$.

3- f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sqrt{1+x^2}-x$

4- f est définie sur $]-\infty;\ -2[\cup]-2;\ +\infty[$ par $f(x)=\frac{x^2+1}{(x+2)^2}$

📖 **EXERCICE 2** :

Le plan est muni d'un repere orthogonal, (C) est la représentation graphique de la fonction f. Dans chacun des cas suivants, démontrer que la droite (Δ) est asymptote a (C) en l'nedroit indiqué.

a) $f: x\mapsto -3x+1+\frac{1+x}{x^2+2}$; $(\Delta): y=-3x+1$, en $+\infty$ et en $-\infty$.

b) $f: x\mapsto 2+\sqrt{1+4x^2}-x$; $(\Delta): y=x+2$ en $+\infty$.

c) $f: x\mapsto \frac{-2x^3+4x^2-2x+1}{(x-1)^2}$; $(\Delta): y=-2x$ en $+\infty$.

📖 **EXERCICE 3 :**

I- Etudier les branches infinies des fonctions suivantes :

$f(x)=x^2+2cos2x$; $f(x)=\sqrt{x^2-4}$; $f(x)=2x-\sqrt{4x^2-3x+2}$; $f(x)=\sqrt{x+2}$; $f(x)=\frac{x^3+1}{x-2}$

II- Etudier les branches infinies des fonctions suivantes :

$f(x)=2x-\sqrt{x}$; $f(x)=x\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$; $f(x)=\frac{x^3-3x^2+6}{x^2+1}$; $f(x)=\sqrt{x^2+2x+3}-x$;

$f(x)=2x-sinx$; $f(x)=\frac{x^2+sinx}{x}$; $f(x)=3x-3\sqrt{x}$

II. Exercices de consolidation

📖 **EXERCICE 1** :

I- Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=2x^3+x^2-1$.

1- Dresser le tableau de variation de la fonction g.

2- Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α avec $\alpha\in]0;1[$.

II- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x)=\frac{x^3+x^2+1}{3x}$.

1- Montrer que pour tout réel x de $]-\infty;0[$ et $]0;\ +\infty[$, on a : $f'(x)=\frac{g(x)}{3x^2}$.

2- Dresser le tableau de variations de f.

3- Montrer que $f(\alpha)=\frac{\alpha}{6}+\frac{1}{2\alpha}$. Et en déduire que $0\le f(\alpha)\le\frac{2}{3}$

4- Etudier les branches infinies de la fonction f.

5- Construire la courbe de la fonction f dans un repere orthonormé.

📖 **EXERCICE 2** :

Le plan est muni d'un repere orthonormé $(O,\vec{i};\ \vec{j})$.

<u>Partie A :</u>

Soit g la fonction définie sur $D=]-\infty;\ -2[\cup]0;\ +\infty[$ par : $g(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}-1$.

1- Dreseer le tableau de variation de g pour tout $x \in D$.
2- En déduire le signe de $g(x)$ pour tout $x \in D$.

Partie B :

Soit f la fonction définie sur $]-\infty;\ -2]\ \cup [0;\ +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x^2+2x} - x$ et (C) sa courbe représentative dans le repere $(O, \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

1- Etudier la dérivabilité de f a droite de 0 et a gauche de -2. Interpréter les résultats obtenus.
2- Montrer que $f'(x) = g(x)$ et dresser le tableau de variations de f.
3- Etudier les branches infinies de la fonction f.
4- Construire (C).
5- Soit h la restriction de f sur $[0;\ +\infty[$.
   a) Montrer que h réalise une bijection de $]0;\ +\infty[$ vers un intervalle J que l'on précisera.
   b) Expliciter $h^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.
   c) Construire la courbe (C') de h dans le repere $(O, \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

🕮 EXERCICE 3 :

I- Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 - 3x - 3$.
1) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.
2) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution β tel que $2{,}10 < \alpha < 2{,}11$.
3) Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

II- On définit sur $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ la fonction f par : $f(x) = \frac{2x^3+3}{x^2-1}$.
1) Montrer que $f'(x) = \frac{2xg(x)}{(x^2-1)^2}$ et étudier le signe de $f'(x)$.
2) Dresser le tableau de variation de la fonction f.
3) Donner un encadrement de $f(\alpha)$.
4) Montrer que la droite (D) d'équation $y = 2x$ est asymptote a la courbe (C) de f, puis étudier les positions relatives de (C) par rapport a (D) et préciser les autres asymptotes.
5) Construire la courbe (C) de f dans un repère orthonormal.

🕮 EXERCICE 4 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{\sqrt{4x^2+1}}$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repere orthonormé $(O, \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

1)
   a) Etudier les variations de f.
   b) Montrer que le point $I(0, \frac{1}{2})$ est un centre de symétrie.

2)
   a) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique β tel que $\beta \in \left]\frac{3}{4}, 1\right[$.
   b) Etudier les positions relatives de la courbe (C) et de la droite (Δ) d'équation $y = x$.
   c) Tracer dans le repere $(O, \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ l a courbe (C) et de la droite (Δ).

3) On considere la fonction h définie sur $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ par : $h(x) = \begin{cases} 2f\left(\frac{1}{2}\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right) \\ h\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \\ h\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \end{cases}$.

Montrer que h est continue sur $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$

🕮 EXERCICE 5 :

f est la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$.

1- Déterminer l'ensemble de définition D de f.
2- Déterminer les limites aux bornes de D.
3- Etudier la dérivabilité de f en -1 et en 1, puis donner une interprétation graphique des résultats.
4- Justifier pourquoi on peut étudier la fonction f sur$]0;1]$.
5- Démontrer que pour tout $x \in]0;1[$, $f'(x) = \frac{-1-\sqrt{1-x^2}}{x^2\sqrt{1-x^2}}$.
6- Dresser le tableau de variation de f sur $]0;1]$.
7- Soit $k \in]1;+\infty[$. Démontrer que l'équation $f(x) = k$ admet une solution unique $\alpha \in]0;1[$.
8- Tracer (C) sur D.

🕮 EXERCICE 6 :

Soit f la fonction définie sur par $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 1 + \frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repere orthonormé $(O, \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

1- Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction f et donner une interpréy=tation graphique pour chacunes d'elles.
2- Etudier les branches infinies si possibles.
3- Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
4- Tracer la courbe de la fonction f dans le repere $(O, \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.
5- On désigne par g la bijection réciproque de f.
   a) Démontrer que g existe et déterminer son ensemble de définition.
   b) Montrer que g est dérivable sur son ensemble de définition.
   c) Tarcer dans le meme repere la courbe de la fonction g.
   d) Expliciter $g(x)$.

🕮 EXERCICE 7 :

On considere la fonction f définie sur $[-1;1] - \{0\}$ par : $f(x) = 1 + \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repere orthonormé $(O, \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

Partie A :

1- Calciuler $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim_{x\to 0^-} f(x)$, puis interpréter les résultats obtenus.
2- Etudier la dérivabilité de f en -1 et 1 puis interpréter les résultats obtenus.
3- Dresser le tableau de variayion de la fonction f.
4- Montrer que f réalise une bijection de $]0;1[$ vers un intervalle J que l'on précisera.
5- Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.
6- Représenter dans le meme repere orthonormé $(O, \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ la courbe (C) et (C') de f^{-1}.

Partie B :

Soit φ la fonction définie sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ par : $\varphi(x) = f(cosx)$.

1- Montrer que pour tout $x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[$, $\varphi(x) = 1 + \tan(x)$.
2- Etudier le sens de variation de la fonction φ sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$.
3- Montrer que l'équation $\varphi(x) = x$ admet une unique solution α dans $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ et vérifier que : $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$.

4- Montrer que φ réalise une bijection de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ vers un intervalle K que l'on précisera.

5- Montrer que φ^{-1} est dérivable sur K et que pour tout $x \in K$, $(\varphi^{-1})'(x) = \frac{1}{x^2-2x+2}$.

📖 EXERCICE 8 :

Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{3(x^2+2)}{x^2+6}$.

I- On considere dans $\mathbb{R}$, l'équation $(E): 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} = 0$.

1- a. Démontrer que l'équation (E) admet une unique solution β dans $\mathbb{R}$.

b. Donner un encadrement de β d'amplitude 10^{-2}.

2- On pose $\alpha = -\beta$.

a. Démontrer que $f(\alpha) = \alpha$.

b. Donner un encazdrement de α par deux entiers consécutifs.

II-

1- Démontrer que pôur tout réel x, $f''(x) = \frac{-72(x^2-2)}{(x^2+6)^3}$.

2- Dresser le tableau de variation de f' sur $\mathbb{R}$ et en déduire que pour tout réel x appartenant a l'intervalle $]0; +\infty[$, on a : $|f'(x)| \leq \frac{2}{3}$.

3- Démontrer que pour tout $x \in [1; +\infty[$, $|f(x) - \alpha| \leq |x - \alpha|$

📖 EXERCICE 9 :

Soit la fonction f définie sur $[1; +\infty[$ par : $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$.

1- Etufier la dérivabilité de f a droite de 1 et interpréter le résultat obtenu.

2- Monttrer que f est dérivable sur $]1; +\infty[$ et calculer $f'(x)$.

3- Dresser le tableau de variation de f.

4- Montrer que f tréalise une bijection de $]1; +\infty[$ vers un intervalle J que l'on précisera.

5- Montrer que pour tout x appartenant a l'intervalle J, $f^{-1}(x) = \frac{1+x^2}{2x}$.

6- On désigne par (C) et (C')les courbes de f et f^{-1} dans le meme repere orthonormé.

a. Montrer que la droite $(D): y = 2x$ est asymptote oblique a (C).

b. Tracer (C) et (C').

7- Soit g la fonction définie sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ par : $g(x) = f(\frac{1}{\cos x})$.

a. Montrer que pour tout x de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$, $g(x) = \frac{1+sinx}{cosx}$.

b. Montrer que g réalise une bijection de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ vers un intervalle K que l'on précisezra.

c. Montrer que g^{-1} est dérivable sur K et que pour tout x de K ; $(g^{-1})'(x) = \frac{2}{1+x^2}$.

📖 EXERCICE 10 :

On considere la fonction $f: x \longmapsto \frac{3}{4}\sqrt{|-x^2 + 4x + 12|}$ et (C) sa courbe représentative dans un repere orthonormé.

1- Déterminer l'ensemble de définition de f.

2- Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définiion.

3- Etudier les branches infinies de la fonction f.

4- Exprimer $f(x)$ sans barre de valeur absolue.

5- Etudier la dérivabilité de f en -2 et en 6, puis ionterpréter les résultats obtenus.

6- Etudiuer les variations de f et dresser son tableau de variations.
7- Construire (C) en faisant ressortir :
   - Les démi-tangentes en -2 et en 6.
   - Les branches infinies.
   - Les extréma.

🕮 EXERCICE 11 :

On considere la fonction numérique f définie par : $f(x) = \frac{sinx}{2+cosx}$.

1- Justifier que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.
2- Montrer que f est impaire et $2\pi -$ périodique.
3- Sur quel intervalle suffit-il d'étudier la fonction f.
4- Etudier les variations de f sur l'intervalle trouvé a la question 3.
5- Représenter graphiquement la courbe représentative (C) de f dans l'intervalle $[-2\pi\colon 2\pi]$

🕮 EXERCICE 12 :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{4sin^2x-3sinx}{sinx-1}$ et (C) sa coiurbe représentative dans un repere orthogonale. ***Unités graphiques :*** $4cm$ *en abscisse pour* π, *et* $1cm$ *par unité en ordonné*.

1- Déterminer l'ensemble de définition D de f.
2- Démontrer que les droites d'équations $x = \frac{\pi}{2}$ et $x = \frac{3\pi}{2}$ sont des axes de symétries a (C).
3- Dans toute la suite, pour des rauisons de symétries on choisit pour domaibne d'étude $D = \left[0; \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.
   a) Montrer qiue pour tout $x \in D$, $f'(x) = \frac{(cosx)(4sin^2x-8sinx+3)}{(sinx-1)^2}$.
   b) Dresser le tableau de variations de f sur D.
   c) Construire la courbe (C) sur $[-2\pi; 2\pi] - \left\{-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\}$.
4- Soit h la restriction de f sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right[$. montrer que h réalise une bijection de $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right[$ vers un intervalle J a préciser, puis construire dans le meme repere la courbe $(C_{h^{-1}})$ de sa réciproque.

🕮 EXERCICE 13 :

f est la fonction définie sur l'intervalle $I = \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x) = 2sinx + tanx - 3x$ de courbe représentative (C).

1- Démontrer que la fonction $u: t \longmapsto 2t^3 - 3t^2 + 1$ est positive sur l'intervalle $[0; 1]$.
2- Justifier que f est dérivable sur l'intervalle I et que $\forall\, x \in I$, $f'(x) = \frac{u(cosx)}{cos^2x}$.
3- En déduire le sens de variations de f et dresser son tableau de variations sur l'intervalle I.
4- Montrer que l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution $\beta \in I$.
5- Montrer que pour tout $x \in I$, $2sinx + tanx \geq 3x$.

🕮 EXERCICE 14 :

I- Soit g la fonction définie sur $[0; \pi]$ par : $g(x) = xsinx + cosx - 1$.
   1- Etudier les variations de g sur $[0; \pi]$.
   2- Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution δ sur $]0; \pi]$, et que $\delta \in \left]\frac{2\pi}{3}; \pi\right[$.
   3- Préciser le signe de $g(x)$ pour x élément de $[0; \pi]$.

II- Soit f la fonction telle que $f(x) = \begin{cases} \frac{1-cosx}{x} \; si \; x \in]0;\ \pi], \\ 0 \; si \; x = 0. \end{cases}$

1- Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.
2- Etudier les variations de f sur $]0;\ \pi]$.
3- Vérifier que $f(\delta) = sin\delta$.
4- On donne $\delta = 2{,}34$ et $f(\delta) = 0{,}72$. Construire (C) la courbe de f.

IV. Activités d'intégration

Situation 1 :

Trois usines A, B et C fabriquent des machines agricoles. L'usine A peut produire en un mois entre 0 et 40 machines ; L'usine B peut produire en un mois entre 0 et 50 machines ; L'usine C peut produire en un mois entre 40 et 160 machines. On a modélisé le bénéfice de chaque usine A, B et C exprimé en milliers de francs par les fonctions respectives $f; g \; et \; h$. Le bénéfice réalisé par l'usine A est modélisé par la fonction f définie pour tout nombre réel $x \in [0; 40]$ par : $f(x) = -30x^2 + 1200x + 4000$. Le bénéfice réalisé par l'usine B est modélisé par la fonction g définie pour tout nombre réel $x \in [0; 50]$ par $g(x) = x^3 - 96x^2 + 248x - 10000$. Le bénéfice réalisé par l'usine C est modélisé par la fonction h définie pour tout nombre réel $x \in [40; 160]$ par $h(x) = -x + 2000 - \frac{6400}{x}$.

Taches :

1- Déterminer le bénéfice maximal de l'usine A ainsi que le nombre de machines produites pour réaliser ce bénéfice.
2- Déterminer le bénéfice maximal de l'usine B ainsi que le nombre de machines produites pour réaliser ce bénéfice.
3- Déterminer le bénéfice maximal de l'usine C ainsi que le nombre de machines produites pour réaliser ce bénéfice

Situation 2 :

Une voiture placée en un point M se déplace sur une route. Marie décide d'étudiée le mouvement sur un intervalle de 0 à 4h de temps. L'abscisse de la voiture a l'instant t est donnée par : $f(t) = -t^3 + t^2 + 8t + 1$; sa vitesse par : $v(t) = f'(t)$ et son accélération $a(t) = f''(t)$. Marie se rappelle que sur un intervalle de temps, le mouvement est accéléré si $v(t) \times a(t) \geq 0$ et retardé si $v(t) \times a(t) \leq 0$.

Taches :

1- Démontrer que l'abscisse de M est nulle a un instant $t_0 \in [0; ,4]$. (Vous préciserez exactement l'intervalle de deux temps consécutifs ou t_0 appartient).
2- Déterminer l'abscisse et l'accélération de la voiture a l'instant ou sa vitesse est maximale.
3- Déterminer les intervalles de temps sur lesquels le mouvement de la voiture est accéléré ou retardé.

« La première règle de la réussite, ne jamais remettre au lendemain l'exécution d'un travail. ».

MINISTÈRE DES ENSEIGNEMENTS SECONDAIRES
LES GRANDPROFS DE MATHS « GPM »
ENSEIGNANT : MISSI MEBANGA ISIDORE PACÔME
TEL : …… 679180967 ……….

ANNEE SCOLAIRE : 2022-2023
TD : MATHEMATIQUES
CLASSE : T^LE^ D
DUREE : ……. HEURES

FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGES

CHAPITRE 3 : SUITES NUMERIQUES

Savoir-faire :

- ✓ **Utiliser le raisonnement par récurrence pour démontrer certaines propriétés sur IN.**
- ✓ **Etudier la monotonie d'une suite numérique.**
- ✓ **Justifier qu'une suite numérique est majorée ou minorée.**
- ✓ **Etudier la convergence de certaines suites définies par $U_{n+1} = (U_n)$, puis en utilisant les inégalités des accroissements finis, donner une valeur approchée de sa limite.**

I. Exercices de fixation

Ressource 1 : *Démonstration par récurrence*

Rappel :

Pour démontrer qu'une proposition $P(n)$ qui concerne un entier naturel n, est vraie pour tout n supérieur ou égal à n_0, on procède en deux étapes :

- On démontre que $P(n_0)$ est vraie : **initialisation**
- On démontre que pour tout k supérieur ou égal à n_0 , si $P(k)$ est vraie alors $P(k+1)$ est vraie : **hérédité**

EXERCICE 1 :

a. Démontre par récurrence que pour tout entier naturel n :
$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=(1+2+3+\cdots+n)^2$

b. Démontre par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 4 : $n^2 \leq 2n$

c. Démontre par récurrence que pour tout entier naturel n non nul :

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

d. Démontre par récurrence que pour tout entier naturel n non nul on a : $n! \geq 2^{n-1}$

e. Démontre par récurrence que pour tout entier naturel n non nul on a :

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

f. Démontre que pour tout entier naturel n non nul on a :

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

g. Démontre par récurrence que pour tout entier naturel n non nul on a :

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

h. Démontre par récurrence que pour tout entier naturel n non nul on a :

$$\sum_{k=1}^{n} k(n-k) = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}$$

i. Démontre par récurrence que pour tout entier naturel n non nul on a : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

j. Démontre par récurrence que pour tout entier naturel n non nul on a :

$$\sum_{k=1}^{n} k2^{k-1} = (n-1)2^n + 1$$

k. Démontre par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 5 : $2^n > 5(n+1)$

l. Démontre par récurrence que pour tout entier naturel n non nul et pour tout $x \geq -1$:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

m. Démontre par récurrence que pour tout entier naturel n non nul et $x \neq -1$; on a :

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^n}{1 - x}$$

n. Démontre par récurrence que pour tout entier naturel n non nul on a :

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n} = 3 - \frac{3+2n}{2^n}$$

p. Démontre par récurrence que pour tout entier naturel n non nul on a :$\sum_{k=1}^{n} k \times k! = (n+1)! - 1$

q. Démontre par récurrence que pour tout entier naturel n non nul on a :$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$

r. Démontre par récurrence que pour tout entier naturel n non nul on a :$n! \geq 2^{n-1}$

s. Démontre par récurrence que pour tout entier naturel n non nul on a :

$$1^3+3^3+5^3+\ldots+(2n-1)^3=2n^4 - n^2$$

t. Démontrer par récurrence que : $\forall n \geq 4$, $2^n \leq n!$

u. Démontrer par récurrence que : $\forall n \geq 5$, $3^n \leq n^3$

✍ **Ressource 2 :** *Etudier la monotonie d'une suite numérique.*

RAPPEL :

Soit $(U_n)_{n\in E}$ une suite numérique.

- La suite est **croissante** si pour tout n élément de E, $U_n \leq U_{n+1}$
- La suite est **décroissante** si pour tout n élément de E, $U_n \geq U_{n+1}$
- La suite est **constante** si pour tout n élément de E, . $U_n = U_{n+1}$
- Si pour tout n élément de E, $U_n < U_{n+1}$ (respectivement $U_n > U_{n+1}$), alors la suite est strictement croissante (strictement décroissante).
- Une suite est **monotone** lorsqu'elle est soit croissante, soit décroissante.
- Une suite est **stationnaire** si elle est constante à partir d'un certain rang.

METHODE :

Pour étudier la monotonie d'une suite numérique, on peut étudier le signe de $U_{n+1} - U_n$.

Si $U_{n+1} - U_n. \geq 0$ la suite est croissante. Si $U_{n+1} - U_n. \leq 0$ la suite est décroissante.

🕮 EXERCICE 1 :

Etudier le sens de variation de la suite u dans chacun des cas suivants :

1. $u_n = \frac{3n-1}{3n-2}$;   n≥1 ;
2. $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2n} - n$ n≥1 ;
3. $U_n = \frac{5}{(-2)^n}$ n≥1 ;
4. $U_n = n^2 + 7n$

🕮 EXERCICE 2 :

Soit la suite numérique (U_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}$: $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{2U_n - 1}{2U_n + 5} \end{cases}$

a) Démontre que pour tout entier naturel n on a : $U_n \geq -\frac{1}{2}$

b) Etudier les variations de la suite (U_n)

🕮 EXERCICE 3 :

Soit la suite$(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \frac{3}{5}U_n + 1 \end{cases}$

1.a) Démontre par récurrence que la suite (U_n) est majorée par $\frac{5}{2}$:

b) Démontre que la suite (U_n) converge.

2. Soit la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$ $V_n = U_n - \frac{5}{2}$

a) Démontre que la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n

c) Etudier la convergence de la suite (U_n)

✍ **Resource 3** : *Justifier qu'une suite numérique est majorée ou minorée.*

RAPPEL :

Soit E une partie non vide de ℕ, soit $(U_n)_{n\in E}$une suite numérique.

- $(U_n)_{n\in E}$ est minorée s'il existe un nombre réel m tel que, pour tout n élément de E, on a : $U_n \geq m$
- $(U_n)_{n\in E}$ est majorée s'il existe un nombre réel M tel que, pour tout n élément de E, on a : $U_n \leq M$
- $(U_n)_{n\in E}$ est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

N.B : On dit que m est un minorant de et M un majorant de (U_n) .

- Une suite est positive (respectivement négative) si tous ses termes sont positifs (respectivement négatifs).

🕮 EXERCICE 1 :

Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \frac{2U_n + 1}{U_n + 2} \end{cases}$

Montre que pour tout entier naturel n, $0 \leq U_n < 2$.

📖 **EXERCICE 2 :**

Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \frac{2}{1+U_n} \end{cases}$

Montre que pour tout entier naturel n, $0 \leq U_n$.

📖 **EXERCICE 3 :**

Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} U_0 = \frac{1}{4} \\ U_{n+1} = -U_n{}^2 + 2U_n \end{cases}$

Montre que pour tout entier naturel n, $0 \leq U_n \leq 1$

✍ **Resource 4** : *Etudier la convergence de certaines suites définies par $U_{n+1} = f(U_n)$, puis en utilisant les inégalités des accroissements finis, donner une valeur approchée de sa limite.*

📖 **EXERCICE 1 :**

La fonction numérique f est définie sur $[-1;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$

1. Etudier les variations de f.
2. Soit (U_n) la suite numérique telle que $\begin{cases} U_0 \in [0;1] \\ U_{n+1} = \sqrt{\frac{1+U_n}{2}} \end{cases}$

2. 1.

a) Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}\ 0 \leq U_n \leq 1$

b) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}\ U_{n+1} - U_n = \frac{1+U_n-2U_n{}^2}{2\left(\sqrt{\frac{1+U_n}{2}}+U_n\right)}$

c) En déduire que la suite (U_n) est croissante.

2. 2. on pose $U_0 = \cos\theta$ où $\theta \in [0;\frac{\pi}{2}]$

Montre par récurrence que $U_n = \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$ et en déduire la limite de la suite (U_n)

2.3 a) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} - 1 = \frac{1}{2}\frac{U_n-1}{\sqrt{\frac{1+U_n}{2}}+1}$

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}\ |U_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{2}|U_n - 1|$

c) Démontre par récurrence que pour tout entier naturel n non nul on a :

$$|U_n - 1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - 1|$$

d) En déduire de nouveau la limite de la suite (U_n)

📖 **EXERCICE 2 :**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$

1. a) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on : $f'(x) = \frac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{2x^2}$
   b) En déduire le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}^*$ (on fera apparaitre le calcul des limites)
2. On considère la suite numérique (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = \frac{3}{2} \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{2}{U_n}\right) \end{cases}$
   a) CalculerU_1 et U_2. On donnera les résultats sous forme de fraction, puis sous forme décimale arrondis à 10^{-5}
   b) Démontrer par récurrence que :
      i. pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\sqrt{2} < U_n \leq \frac{3}{2}$
      ii. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_{n+1} < U_n$
      iii. En déduire la nature de la suite.
3. Résoudre l'équation $f(x) = x$ et en déduire la limite l de la suite (U_n)
4. a) démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $U_{n+1} - \sqrt{2} < \frac{1}{2}(U_n - \sqrt{2})$
   b) En déduire, par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < U_n - \sqrt{2} < \left(\frac{1}{2}\right)^n (U_0 - \sqrt{2})$
   c) en déduire de nouveau la limite de la suite (U_n)

📖 EXERCICE 3 :

Soit $f : [0 ; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \frac{e^x}{x+2}$

Soit la suite (U_n) définie par $\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

1. a) Etudier les variations de f et dresser le tableau des variations.
   b) Prouver que $\forall\ x \in [0 ; 1]$ on a $\frac{1}{4} \leq f'(x) \leq \frac{2}{3}$
2. Montrer que l'équation f(x) = x admet dans [0 ; 1] une seule solution notée α.
3. a) Montrer que pour tout entier naturel n ; $0 \leq U_n \leq 1$.
   b) Montrer que pour tout entier naturel n, $U_{n+1} \geq U_n$
   c) Quel conjecture pouvez-vous faire sur la convergence de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. a) Démontrer que pour tout entier naturel n, $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3}|U_n - \alpha|$.
   b) Monter que pour tout entier naturel n $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n |U_0 - \alpha|$.
   c) En déduire la limite de la suite (U_n)

II. Exercices de consolidation

📖 EXERCICE 1 :

On considère la suite de terme générale Un définie par : $U_n = \frac{3U_{n-1}-1}{U_{n-1}1}$, $n \geq 3$ et par son premier terme $U_2 = 3$.

1. Calculer U_3 ; U_4 et en déduire que la suite (U_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.
2. a. Montrer que (U_n) est minorée par 1
   b. Montrer que (U_n) est décroissante

c. En déduire que (U_n) converge et déterminer sa limite.

3. On pose $V_n = \frac{U_n+1}{U_n-1}$

a. Montrer que (V_n) est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison *(On pourra exprimer V_n et V_{n-1} en fonction de U_{n-1})*

b. Exprimer V_n , puis U_n en fonction de n.

c. Déterminer la limite de (U_n)

🕮 EXERCICE 2 :

Soit (V_n) la suite numérique définie sur IN* par $V_1 = \frac{1}{2}$ et $V_{n+1} = \frac{n+1}{2n} V_n$

1°) Calculer V_2, V_3 et V_4

2°) a) Démontrer que pour tout entier n > 0, on a $V_n > 0$

b) Démontrer que la suite (V_n) est décroissante.

c) En déduire que la suite (V_n) est convergente.

3°) Soit (U_n) la suite numérique définie par $U_n = \frac{V_n}{n}$ $\forall n > 0$

a) Montrer que la suite (U_n) est géométrique. Préciser la raison et le premier terme.

b) Exprimer U_n puis V_n en fonction de n.

c) Calculer $\lim_{n\to\infty} U_n$ et $\lim_{n\to\infty} V_n$

🕮 EXERCICE 3 :

On considère la suite numérique définie par $0 \leq U_1 \leq \frac{1}{2}$ et pour tout entier naturel non nul n,

$$U_{n+1} = U_n - (U_n)^2$$

1. Démontrer que la suite (U_n) est décroissante.
2. Soit $f(x) = x - x^2$

a. Dresser le tableau de variation de f sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$

b. Déduire en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}*$, $0 \leq U_n \leq \frac{1}{2}$

c. Montrer que la suite (un) converge vers 0.

3. On pose pour tout entier naturel n non nul, V_n=n×U_n

a. Vérifier que pour tout entier n, $f\left(\frac{1}{n+1}\right) < \frac{1}{n+2}$ puis que $\forall n \in \mathbb{N}*$, $0 \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$

b. Déduire que (V_n) est une suite majorée.

c. Montrer que $V_{n+1} - V_n$= U_n [1-(n+1) U_n] puis déduire le sens de variation de la suite (V_n).

🕮 EXERCICE 4 :

Soit la suite numérique (U_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}$: $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{2U_n-1}{2U_n+5} \end{cases}$

1. a) Démontre que pour tout entier naturel n on a : $U_n \geq -\frac{1}{2}$

b) Etudier les variations de la suite (U_n)

c) Déduire des questions précédentes que (U_n) converge ; puis calculer sa limite.

2. On désigne par (V_n) la suite définie par $V_n = \frac{2U_n+1}{U_n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

a) Démontrer que (V_n) est géométrique puis préciser la raison et le premier terme

b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n

c) Etudier la convergence de la suite (U_n)

III. Apprentissage à l'intégration

🕮 EXERCICE 1 :

Une banque propose à ses clients deux contrats de placement sur un compte bloqué. (c'est -à-dire sans retrait possible d'argent pendant la durée du contrat) avec intérêts cumulés annuellement. Selon ces contrats la somme s enregistrée sur le compte rapporte :
8% par an si $1\ 000\ 000 \leq S < 5\ 000\ 000$ (contrat C1), t% par an (où $t \geq 10$, est à négocier à l'ouverture du compte) si $S \geq 5\ 000\ 000$ (contrat C2).

1°) Un client P1 a déposé 1 000 000 F le 1er Janvier 2007. On désigne par S(n) la somme figurant au compte de ce client au 1er janvier de l'année 2007 + n.

a) Calculer S(1) et S(2).

b) Calculer S(n + 1) ─ S(n) en fonction de S(n).
En déduire l'expression de S(n) en fonction de n.

c) A partir de quelle année P1 aura-t-il doublé son dépôt initial ?

2°) Un client P2 dispose au 1er Janvier 2007 d'une somme de 5 000 000 F il aura besoin de 7 500 000 F le 1er Janvier 2010. Pour cela, il négocie un contrat C2 sur la base d'un taux annuel de t%.
On désigne par V(n) le montant du compte de P2 au 1er Janvier de l'année 2007 + n.

a) Calculer V(n + 1) ─ V(n) en fonction de V(n) et de t.
En déduire l'expression de V(n) en fonction de n et t.

b) Quel est le plus petit entier t permettant à P2 de réaliser son projet ?

🕮 EXERCICE 2 :

Une source sonore émet un son dont l'intensité est de 1000 décibels. Une plaque d'isolation phonique absorbe 45% de l'intensité du son. Soit f(n) l'intensité du son, mesurée en décibels, après la traversée de n plaques du type précédent [donc f(0) = 1000 ; f(1) est l'intensité du son mesurée en décibels après la traversée d'une plaque, …etc.].

1°) Calculer f(1), f(2) et f(3).

2°) Calculer f(n + 1) en fonction de f(n). Reconnaître la suite $n \mapsto f(n)$.

3°) La suite est-elle croissante ? Décroissante ?

4°) Déterminer le nombre minimal de plaques que doit traverser le son pour que son intensité soit inférieure ou égale au dixième de sa valeur initiale.

🕮 EXERCICE 3 :

Une personne loue une maison à partir du 1er janvier 2006. Elle a le choix entre deux formules de contrat. Dans les deux cas, le loyer initial est de 120 000F et le locataire s'engage à occuper la maison pendant neuf années complètes.

1. Contrat 1

Le locataire accepte une augmentation annuelle de 5% du loyer de l'année précédente.

a) Calculer le loyer U_1 payé lors de la deuxième année.

b) Exprimer un (loyer payé lors de la (n + 1) ième année en fonction de n. Calculer U_8.

c) Calculer la somme payée à l'issue des neuf années de contrat.

2. Contrat 2

Le locataire accepte une augmentation annuelle forfaitaire de 1500 F du loyer de l'année précédente.

a) Calculer le loyer V_1 payé lors de la deuxième année.

b) Exprimer V_n (loyer payé lors de la (n + 1)ième année en fonction de n. Calculer V_8.
c) Calculer la somme payée à l'issue des neuf années de contrat.
Quel est le contrat le plus avantageux pour le locataire ?

IV. Activités d'intégration

Situation 1

Abdoulaye est un chercheur en biologie végétale. Il voudrait étudier les vertus thérapeutiques d'une plante. Pour cela, En mars 2021, il achète un échantillon de cette plante mesurant 80 cm. On lui conseille de la tailler tous les ans, au mois de mars, en coupant un quart de sa hauteur. La plante poussera alors de 30 cm au cours des douze mois suivants. Dès qu'il rentre dans son laboratoire, il taille sa plante. Il note dans son calepin de suivi de croissante hn la hauteur de la plante, avant qu'il ne la taille, en mars de l'année $2021 + n$; avec n entier naturel. Il souhaite savoir si la hauteur de la plante va augmenter indéfiniment avec le temps ou alors avoir une idée de la hauteur limite de cette plante.

Situation 2 :

Une villa terrain en bordure de la mer coûte 50 millions de francs. Sa valeur augmente de 10% chaque année. Au bout de combien d'années la valeur du terrain aura doublé ?

Situation 3 :

Une balle rebondit en avançant chaque fois d'une longueur égale à la moitié de la précédente. Sachant que le premier bond mesurait 1m, quelle est la distance parcourue au bout de 10 rebonds ?

Situation 4 :

Afin de conserver au fil des années le bon état et la variété de son petit élevage, un éleveur camerounais se sépare en fin de chaque année de 20% de ses bêtes et comptabilise à chaque année 35 nouveaux porcelets. On suppose que le 1er janvier 2022, il possède 150 porcs. Quel est le nombre maximal de porcs que son élevage pourra contenir ?

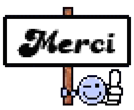
Situation 5 :

Un jeune bachelier camerounais se rend dans la ville de Yaoundé, où il compte s'inscrire à l'Université de Yaoundé, afin d'y obtenir une licence en Mathématiques. A cet effet, il compte louer une chambre aux environs du campus universitaire. Il obtient deux types de bail.

1er contrat : Un loyer de 20000f le premier mois, puis une augmentation de 500f tous les mois jusqu'à la fin du bail.

2eme contrat : Un loyer de 20000f le premier mois, puis une augmentation de 2% tous les mois jusqu'à la fin du bail.

Quel est le contrat globalement le plus avantageux jusqu'à l'obtention de sa licence (3ans) ?



« La première règle de la réussite, ne jamais remettre au lendemain l'exécution d'un travail. ».

MINISTÈRE DES ENSEIGNEMENTS SECONDAIRES
LES GRANDPROFS DE MATHS « GPM »
ENSEIGNANT : **GUY FOGANG**………
TEL : **699702951**

ANNEE SCOLAIRE : 2022-2023
TD : MATHEMATIQUES
CLASSE : T^{le} D&TI
DUREE : ……. HEURES

FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGES

CHAPITRE 4 : STATISTIQUES

Savoir-faire :

- ✓ **Regrouper les données d'une série statistique à deux caractères quantitatifs dans un tableau à double entrée.**
- ✓ **Dresser les tableaux marginaux d'une série à deux caractères, puis calculer les paramètres marginaux.**
- ✓ **Calculer les coordonnées du point moyen d'un nuage d'une série à deux caractères**
- ✓ **Construire le nuage des points d'une série**
- ✓ **Déterminer une équation cartésienne de la droite d'ajustement par la méthode de Mayer puis l'utiliser pour donner approximativement en prévision la valeur d'une variable connaissant celle de l'autre.**
- ✓ **Calculer la covariance, puis le coefficient de corrélation d'une série double.**
- ✓ **Déterminer les équations des droites de régression par la méthode des moindres carrés.**
- ✓ **Apprécier la quantité de la corrélation entre deux variables d'une série double, puis donner approximativement en prévision la valeur d'une variable connaissant celle de l'autre.**

I. Exercices de fixation

Ressource 1 : *présenter le tableau à double entrée, dresser le tableau des séries marginales et représenter le nuage de point d'une série double.*

EXERCICE 1 :

Dans une maternité, on a relevé, pour chaque naissance, l'âge de la mère et le poids du nouveau-né. Pour les quinze premières naissances du mois de janvier 202, les résultats sont regroupés dans le tableau ci-dessous

Age x	21	19	22	22	20	18	21	24	19	22	19	22
Poids y	3,3	2,9	3,1	2,8	3,5	2,9	3,3	3,5	3	2,8	3,3	2,8

a) Présenter ces données dans un tableau à double entrée.
b) Déterminer les séries marginales à ces deux caractères x et y
c) Représenter le nuage de points associé de cette série double.

Ressource 2 : *calculer les paramètres marginaux et déterminer les coordonnées du point moyen d'une série à deux caractères.*

EXERCICE 2 :

Le tableau suivant donne la production annuelle de cacao (en tonne) d'un agriculteur entre 2015 et 2020

Année	2015	2016	2017	2018	2019	2020
Rang x_i de l'année	1	2	3	4	5	6
Production y_i en tonne	43	45	48	50	53	55

a) Représenter dans un repère orthogonal le nuage de points de coordonnées $(x_i\,;y_i)$ associé à cette série.
b) Ce nuage laisse-t-il entrevoir un ajustement linéaire ?
c) Déterminer les coordonnées du point moyen G de ce nuage.
d) Dresser le tableau associé à la série marginale du caractère x ; puis celui du caractère y
e) Déterminer les moyennes et écart-type respectives de ces séries marginales

✍ **Resource 3 :** *Déterminer une équation cartésienne de la droite d'ajustement par la méthode de Mayer puis l'utiliser pour donner approximativement en prévision la valeur d'une variable connaissant celle de l'autre.*

📖 **EXERCICE 1 :**

Le tableau suivant donne la masse x en grammes et la taille y en cm en fonction de la masse pour une population donnée

Masse x	10	25	40	50	55	60	65	70	75	80
Taille y	11	20	35	45	50	53	60	63	73	75

1) Représenter le nuage de points associés à cette série statistique dans un repère orthogonal
Echelle : 1 cm pour 10g et 1 cm pour 10 cm
2) Déterminer les coordonnées du point moyen G de ce nuage.
3) On divise cette série en deux sous séries A et B ainsi qu'il suit :

Masse x	10	25	40	50	55
Taille y	11	20	35	45	50

Sous série A

Masse x	60	65	70	75	80
Taille y	53	60	63	73	75

Sous série B

a) Calculer les coordonnées des points G1 et G2, point moyen respectif des sous série A et B.
b) Placer les points G1 et G2 dans le repère orthogonal et tracer la droite (G1G2).
c) Que représente cette droite pour la série étudiée ?
d) Déterminer une équation cartésienne de cette droite
4) En utilisant cette équation, estimer :
a) La taille d'une personne ayant une masse de 97 gramme
b) La masse d'une personne de taille 151 cm.

✍ **Resource 4 :** *Calculer la covariance, puis le coefficient de corrélation d'une série double et déterminer les équations des droites de régression par la méthode des moindres carrés*.

📖 EXERCICE

Afin d'orienter ses investissements, une chaine d'hôtel réalise des analyses sur le taux d'occupation des chambres. Une analyse établit un lien entre le taux d'occupation (en %) et le montant de la publicité (en milliers de FCFA).

frais publicité (x_i)	**30**	**27**	**32**	**25**	**35**	**22**	**24**	**35**
Taux d'occupation (y_i)	**52**	**45**	**67**	**55**	**76**	**48**	**32**	**72**

1) Déterminer les coordonnées du point moyen de cette série
2) Calculer la covariance
3) Calculer le coefficient de corrélation linéaire r de cette série double . que peut-on en déduire ?
4) Déterminer les deux droite de régression de y en x puis de x en y
5) Quelle estimation peut-on faire du taux d'occupation des chambres de cet hôtel si les dépenses de publicité étaient de 3000000 FCFA ?

II. Exercices de consolidation

🕮 **Exercice 1** :

Les notes sur 20 de dix élèves d'une classe de Tle D aux épreuves de SVTEEHB et de CHIMIE sont consignées dans le tableau suivant :

Svteehb x	9	12	5	6	9	14	3	6	12	14
Chimie y	10	13	8	10	13	17	5	8	16	16

Choisir la bonne réponse :

1) La covariance de cette série statistique est :
   a) 13.8 c) 14.64
   b) 0.957 d) 13.6
2) La troncature d'ordre 2 du coefficient de corrélation linéaire de cette série est :
   a) 0.95 c) 0.97
   b) 0.96 d) 0.98
3) Une équation de la droite de régression de y en x ou de x en y est :
   a) $y = x + 2,6$ c) $x = 0,9y + 1,8$
   b) $x = y + 2,6$ d) $y = 0,96x + 2,73$

🕮 **Exercice 2** :

Le tableau suivant indique pour chaque année donnée, le nombre de mariages en milliers contractés au Cameroun :

Années	1994	1996	1998	2000	2002	2004	2006
Rang de l'année x	1	2	3	4	5	6	7
Nombre de mariage y	395	374	**P**	334	312	**q**	266

Les nombres de mariages contractés en 1998 et 2004 ont été égarés. Ces valeurs avaient permis par la méthode des moindres carrées d'obtenir une équation (D) :$\boldsymbol{y = -22x + 419}$ comme équation de la droite de regression de y en x .

1) Déterminer la moyenne de x et la variance de x.
2) Exprimer en fonction de **P** et **q** la moyenne de y et la covariance de x et y.
3) En deduire les valeurs de **p** et **q.**

III. Activités d'intégration

Situation 1 :

Le tableau suivant nous présente la taille x en cm et la pointure y en cm de 10 élèves d'une classe de Terminale

Taille x	150	159	158	160	165	168	170	172	175	171
Pointure y	40	41	43	43	42	44	44	44,5	44,5	44

Talla est un élève de cette classe qui n'a pas pris part à cette enquête. Il a une taille de **163 cm** et rencontre le statisticien qui a fait cette enquête. Ce statisticien l'informe que la covariance de cette série double **(x ;y)** est **9,6** ; l'écart-type de la série marginalisée **x** est de **7,4** et celui de la série marginalisée **y** vaut 1,4. En supposant que le comportement général de la classe de Talla est proche de l'échantillon choisi :

Tâche 1 : la corrélation entre la taille et la pointure dans cette classe est-elle bonne ?

Tâche 2 : en utilisant la méthode des moindres carrées, estimez la pointure de Talla.

Tâche 3 : en utilisant la méthode de Mayer, estimez la pointure de Talla.

Situation 2 :

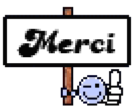
Une étude statistuque portant sur le montant des ventes y_i suivant les frais de publicité x_i engagés dans plusieurs PME a permis de dresser le tableau suivant :

Frais pub x_i	25000	17000	28000	22000
Montant vente y_i	280000	250000	292000	280000

On pose $X_i = \frac{x_i - 20000}{1000}$ et $Y_i = \frac{y_i - 250000}{1000}$

Ali détenteur d'une PME de la place a effectué une vente de 282000.

1) Construire le nuage de point correspondant à la série double (X ;Y).
2) Peut-on affirmer qu'il y a une bonne corrélation linéaire pour la série double (X ;Y) ?
3) Evaluer le frais de publicité engagés par Ali correspondant à la vente dans sa PME



« La première règle de la réussite, ne jamais remettre au lendemain l'exécution d'un travail. ».

MINISTÈRE DES ENSEIGNEMENTS SECONDAIRES
LES GRANDPROFS DE MATHS « GPM »
ENSEIGNANT : TUAYO ZOYEM LIONEL
TEL : …697243446……….

ANNEE SCOLAIRE : 2022-2023
TD : MATHEMATIQUES
CLASSE : T^ERE^ D&TI
DUREE : ……. HEURES

FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGES

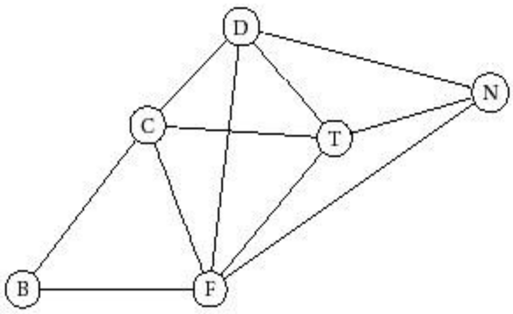
CHAPITRE 5 : THEORIES DES GRAPHES

Savoir-faire :

- ✓ **Identifier / Déterminer un arbre couvrant d'un graphe connexe (BFS)**
- ✓ **Identifier / Déterminer un arbre couvrant de poids minimum d'un graphe pondéré (Prim)**
- ✓ **Déterminer un chemin de poids minimum (plus court chemin) entre deux sommets d'un graphe pondéré (Dijkstra)**

I. Exercices de fixation

Ressource 1 : Identifier / Déterminer un arbre couvrant d'un graphe connexe (BFS)



EXERCICE N°1 :

1) a) Recopier et compléter le tableau suivant :

Sommets	B	C	D	F	N	T
Degré des sommets du graphe						

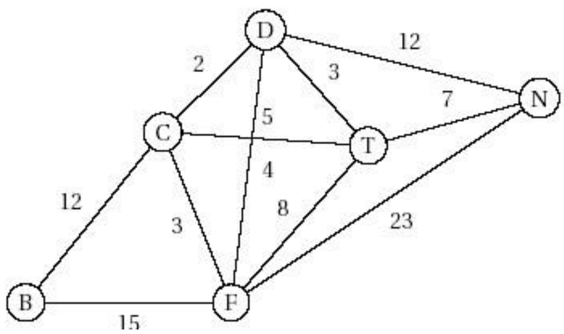
b) Justifier que le graphe est connexe.

2) On souhaite passer par les six sommets en passant une fois et une seule par chaque chemin. Démontrer que c'est réalisable. Donner un exemple de trajet possible.

3) On souhaite associer chaque sommet à une couleur de sorte que les sommets reliés par un chemin n'ont pas la même couleur. On note n le nombre chromatique du graphe.

a) Montrer que $4 \leq n \leq 6$

b) Proposer un coloriage du graphe permettant de déterminer son nombre chromatique.



4) On souhaite partir du sommet B pour le sommet N. Les distances en kilomètres entre chaque sommet ont été ajoutées sur le graphe.

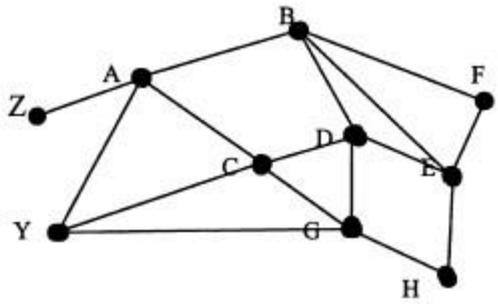
Indiquer une chaîne qui minimise la distance du trajet. Justifier la réponse.

5) Déterminer l'arbre couvrant connexe en utilisant l'algorithme de parcours en largeur (BFS).

📖 EXERCICE N°2 :

Première partie : Etude d'un graphe

On considère le graphe ci-contre.



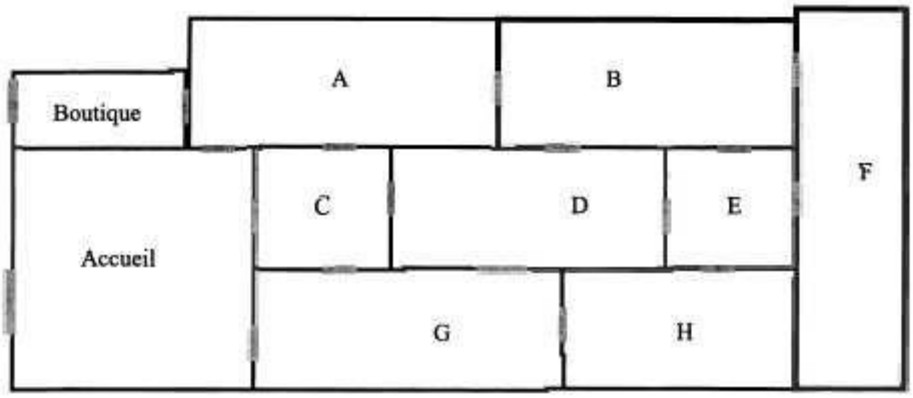
1) a) Ce graphe est-il connexe ?

b) Déterminer le degré de chacun des sommets. *On pourra donner le résultat sous forme d'un tableau*

c) Justifier l'existence d'une chaîne eulérienne.

2)Extraire deux sous graphes complet de ce graphe.

Deuxième partie : Visite d'un musée



Voici le plan d'un musée : les parties grisées matérialisent les portes et les visiteurs partent de l'accueil, visitent le musée et doivent terminer leur visite à la boutique.

1) Représenter la situation à l'aide d'un graphe en précisant ce que représentent arêtes et sommets.

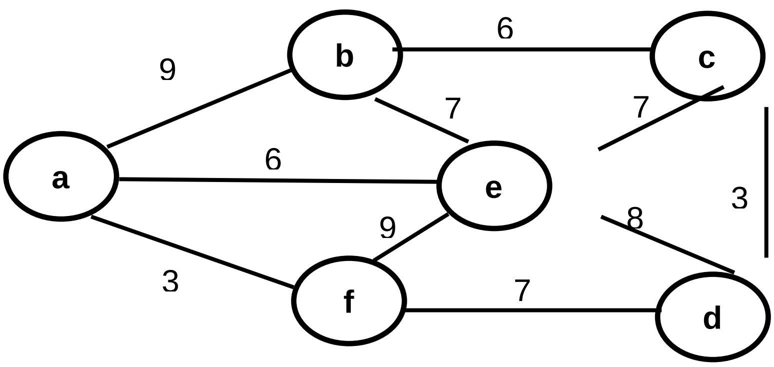
2) a) Pourquoi est-il possible de trouver un circuit où les visiteurs passent une fois et une seule par toutes les portes ?

b) Donner un exemple d'un tel circuit.

✍ **Ressource 2 : Identifier / Déterminer un arbre couvrant de poids minimum d'un graphe pondéré (Prim)**

📖 EXERCICE 1 **:**

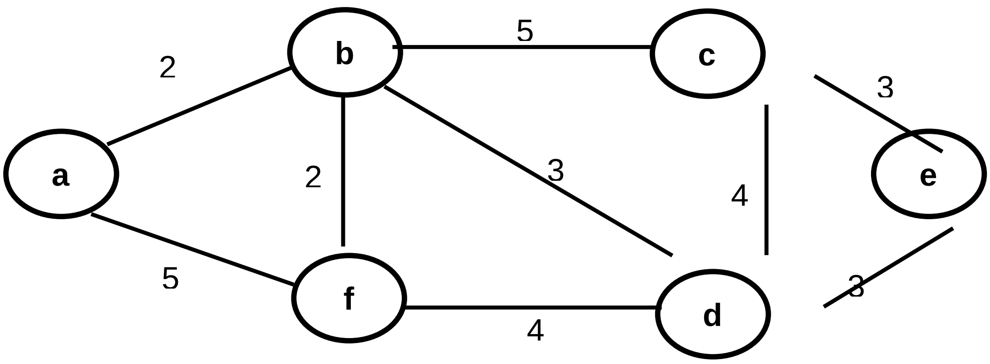
Utiliser l'algorithme de prim pour retrouver l'arbre couvrant de poids minimum du graphe suivant :



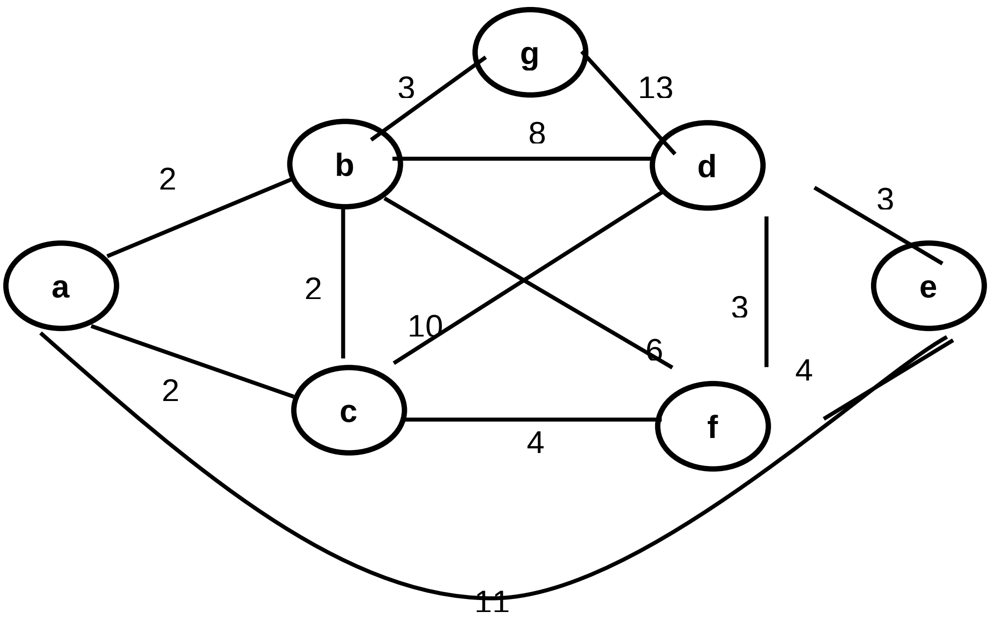
Resource 3 : **Déterminer un chemin de poids minimum (plus court chemin) entre deux sommets d'un graphe pondéré (Dijkstra)**

EXERCICE 1 **: Utiliser l'algorithme de Dijkstra pour retrouver les plus courts chemins entre le sommet a et le sommet e de graphes suivants :**

a)

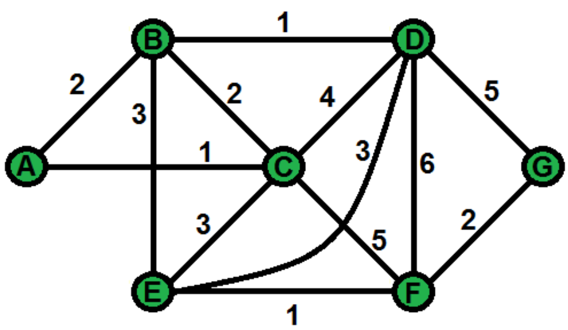


b)



II. Exercices de consolidation

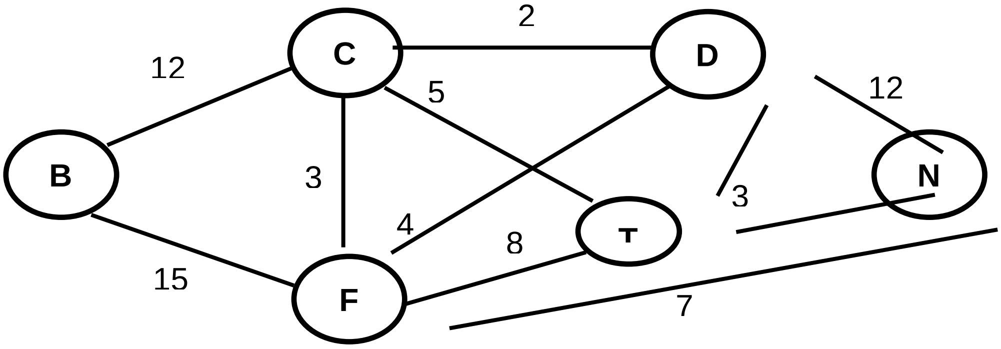
EXERCICE 1 :



1)Ce graphe est-il connexe ? Pourquoi ?
2)Ce graphe est-il complet ? Pourquoi ?
3)Ce graphe comporte t'il une chaîne eulérienne ? Si oui préciser
4)Ce graphe comporte t'il un cycle eulérien ? Si oui préciser
5)Utiliser l'algorithme de Dijkstra pour déterminer le plus court chemin entre les points A et G.

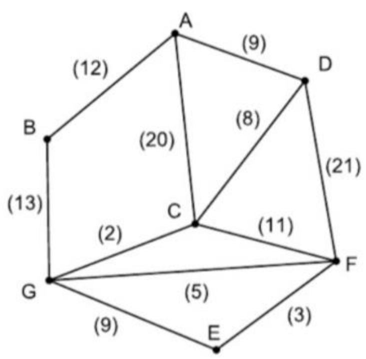
III. Activités d'intégration

📖 **Situation 1** : Une agence de tourisme organise une randonnée sur le mont Bamboutos proche de Bangang au Cameroun. Les différents lieux par lesquelles les touristes peuvent passer ont été représentés par le graphe ci-dessous où les sommets B, C, D, F, T, N représentent ces lieux. Une arête entre deux sommets coïncide avec l'existence d'un chemin entre les deux sommets



1.Pour deux lieux quelconque du graphe, peut-on trouver un chemin les reliant ? Comment appelle-t-on ce type de graphe ?
2.Est-il possible de partir de n'importe quel lieux et rejoindre les autres lieux du graphe ?
3.Les coûts de transport entre deux lieux ont été représentées sur le graphe. Un touriste désire aller du lieux B au lieux N en minimisant le coût de transport.
   a)Déterminer le chemin pour lequel le coût de transport sera minimal
   b)Quel est la valeur de ce coût

📖 **Situation 2** : Des chercheurs de trésors sont logés dans un hôtel nommé A. Ils doivent visiter six sites qui se trouvent sur leur carte nommés B, C, D, E, F et G. Les tronçons de route qu'ils peuvent emprunter sont représentés sur le graphe ci-dessous. Le long de chaque arête figure la longueur en kilomètres des différents tronçons.



1.L'un des chercheurs souhaite découvrir tous les sites en empruntant le moins de routes possibles

a)Est-ce possible ? si oui, proposer un extrait de routes qu'il peut emprunter

b)Peut-on partir de l'hôtel, parcourir tous les sites et y revenir en parcourant chaque route une seule fois ? Si oui, illustrer par un graphe les routes à emprunter.

2.Un chercheur se trouvant sur le site D souhaite récupérer un objet se trouvant sur le site G en empruntant chaque route une seul fois.

a)Proposer 04 cycles qu'il peut emprunter

b) Existe-t-il une autre boucle qui soit plus courte que les précédentes ? Préciser

3.Ce graphe est-il complet ?

4.Utiliser l'algorithme de Djikstra pour déterminer le plus court chemin entre D et G

5.Utiliser l'algorithme de Prim pour déterminer le circuit à distance totale est minimale.

Situation 3 :

Dans une ville du Cameroun, Le conseil municipal comprend 7 commissions, qui obéissent aux règles Suivantes :

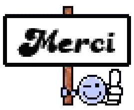
Règle 1 : tout conseiller municipal fait partie de 2 commissions exactement.

Règle 2 : deux commissions quelconques ont exactement un conseiller en commun

1) Modéliser le problème à l'aide d'un graphe (préciser les sommets et les liaisons)

2) Combien y a-t-il de membres dans le conseil municipal ?

3) En déduire le nombre de membre de chaque commission.



« La première règle de la réussite, ne jamais remettre au lendemain l'exécution d'un travail. ».

MINISTÈRE DES ENSEIGNEMENTS SECONDAIRES
LES GRANDPROFS DE MATHS « GPM »
ENSEIGNANT : **ROGER STIVE TABI A NDEM**
TEL : **693528925/679687120**

ANNEE SCOLAIRE : 2022-2023
TD : MATHEMATIQUES
CLASSE : Tle D&TI
DUREE : ……. HEURES

FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGES

CHAPITRE 6 : GEOMETRIE DES NOMBRES COMPLEXES

Savoir-faire :

- ✓ **Utiliser les nombres complexes pour la démonstration des points alignes, la détermination de la nature des figures. géométriques, démontrer la cocyclicité des points.**
- ✓ **Donner l'écriture complexe des transformations usuelles.**
- ✓ **Reconnaitre les applications usuelles du plan : homothétie, rotation, translation, similitude.**
- ✓ **Ressortir l'expression analytique d'une similitude plane et vise versa.**
- ✓ **Reconnaitre la forme algébrique, trigonométrique et exponentielle d'un nombre complexe non nul et les propriétés des nombres complexes.**
- ✓ **Reconnaitre les éléments caractéristiques des applications usuelles du plan.**
- ✓ **Donner composer deux applications usuelles du plan.**

I. Exercices de fixation

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$

Exercice 1

1- On donne les points A, B et C d'affixes respectives $-2-2i\,;1-i \;et\; 10+2i$. Démontrer que les points A, B et C sont alignés

2- On donne les points A, B et C d'affixes respectives $3;\frac{5+7i}{2}\;et\;\frac{-1-i}{2}$. Démontrer que le triangle ABC est rectangle isocèle en A.

3- Les points A, B, C et D ont pour affixes respectives $a=2-2i, b=-1+7i$
$c=4+2i\;et\;d=-4-2i$. Ω est le point d'affixe $-1+2i$. Démontrer que A, B, C et D appartiennent au cercle de centre Ω et de rayon 5.

4- On a quatre points A, B, C et D d'affixe respectives $8;8i;32i\;et\;12+32i$. Démontrer que les points A, B, C et D sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 2

Déterminer dans chacun des cas suivants, l'écriture complexe de la transformation F

a) F est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$
b) F est l'homothétie de centre O et de rapport –2
c) F est la similitude direct de centre O de rapport 2 et d'angle π
d) F est la similitude directe de centre $\Omega(1-i)$, de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{3}$
e) Les points A, B, C et D d'affixe respectives $a = 2 - 2i, b = -1 + 7i, c = 4 + 2i$ et $d = -4 - 2i$. Ω est le point d'affixe $-1 + 2i$. Démontrer que A, B, C et D appartiennent au cercle de centre Ω et de rayon 5.

II. Exercices de consolidation

Exercice 4 :
Soient A, B et C des points non alignes d'affixe respectives a, b et c

1- Préciser la nature du triangle ABC dans chacun des cas suivants :
   a) $\frac{c-a}{b-a} = -i$
   b) $\frac{c-a}{b-a} = e^{i\frac{\pi}{3}}$
   c) $\left|\frac{c-a}{b-a}\right| = 1$
2- Déterminer la position des droites (AC) et (AB) dans chacun des cas suivants :
   a) $\frac{c-a}{b-a}$ est réel non nul
   b) $Arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \frac{\pi}{2}$

Exercice 5 :

Dans le plan complexe (P) rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère les points M, N, P et Q images des nombres complexes respectifs $m = -2 + 4i$, $n = -2 - 4i$, $p = 2 + 3i$ et $q = 2 - 3i$

1) Déterminer le nombre complexe z tel que $\frac{z-p}{z-m} = i$, affixe d'un point K du plan (P).
2) Quelle est la nature du triangle MPK.
3) Déterminer l'affixe L du quatrième sommet du quadrilatère MKPL
4) Déterminer l'abscisse du point d'intersection R de la droite (KL) et de l'axe des abscisses
5) Montrer que les points M, N, P et Q appartiennent à un même cercle dont on donnera le centre et le rayon

Exercice 6 :

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère les points A, B, A' et B' d'affixes respectives : $z_A = 2 - i, z_B = -1 + 2i$
$z_{A'} = 1$ et $z_{B'} = 1 + 6i$. Détermine le centre, le rapport et l'angle de la similitude directe transformant A en A' et B en B'

Exercice 7 :
Soit le plan P rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On considère la transformation t de P dans P qui a tout point M d'affixe $z = x + iy$ associe le point M' d'affixe $z' = x' + iy'$ tel que : $z' = z + 1 + i\sqrt{3}$

1-a) Déterminer x' et y' en fonction de x et y.
   a) Déterminer la nature et l'élément caractéristique de la transformation t

2- Soit la transformation r, qui au point M d'affixe z associe le point M_1 d'affixe z_1 tel que : $Z_1 = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation r.

3- Soit la transformation $s = r\ o\ t$ qui au point M(x;y) d'affixe z, associe le point $M_2(x_2, y_2)$ d'affixe z_2.

a) Exprimer z_2 en fonction de z

b) Déterminer les coordonnées de l'image C' du point $C(1; -\sqrt{3})$

4- Soit la droite (D) dont une équation est : $x + y\sqrt{3} + 2 = 0$

a) Montrer que le point C appartient à (D).

b) Soit (D') l'image de (D) par s. Déterminer le point d'intersection de (D) et (D').

Exercice 8 :

Le plan est rapporte à un repère orthonormé direct (O,I,J). Soient les complexes $z = x + iy\ et\ z^{\prime\prime} = x' + iy'$.

On considère la transformation r definie par : pour tout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' tel que :$\begin{cases} 2x' = x - y\sqrt{3} + \sqrt{3} \\ 2y' = x\sqrt{3} + y + 1 \end{cases}$

1- a) Donner l'écriture complexe de r

c) En déduire la nature exacte et les éléments géométriques de r

2- Soit h l'application du plan qui a tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = -2z + 3i$. Montrer que h est une homothétie de centre Ω(0 ;1).

3- On considère $s = h\ o\ r$

a) Déterminer la nature et les éléments géométriques de s

b) Donner l'expression exponentielle de s

III. Apprentissage à l'intégration

Exercice 9 :

Soit f l'application de ₵ \ $\{-3\}$ dans ₵ définie par : $f(z) = \frac{z+1-i}{z+3}$. On désigne par A, B et M les points d'affixes respectives $-3;\ -1 + i\ et\ z$.

1. Donne une interprétation géométrique du module et d'un argument de $f(z)$.
2. Détermine et construis :

a) l'ensemble (C_1) des points M tels que $|f(z)| = 1;$

b) l'ensemble (C_2) des points M tels que $f(z)$ soit une réel strictement négatif ;

c) l'ensemble (C_3) des points M tels que $f(z)$ soit imaginaire pur.

Exercice 10

Dans le plan complexe, on donne les quatre points A, B, C et D d'affixe respectives :$z_A = -2 + 6i, z_B = 1 - 3i, z_C = 5 + 5i, z_D = 2 + 4i.$

1. Soit S la similitude qui a tout point M d'affixe z, fait correspondre le point M' d'affixe z' définie par : $z' = 3iz + 13 - 9i.$

a) Donne les éléments de cette similitude
b) Détermine l'image par S du point C, du point D. Démontre que les vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{S(C)S(D)}$ sont orthogonaux.

2. Soit R la similitude déterminé par R(B)=C et R(D)=A.
   a) Trouve la relation liant l'affixe z d'un point M et l'affixe z' de son image R(M).
   b) Donne les éléments de cette similitude.
   c) Démontre que les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont orthogonaux.
   d) Que représente le point D pour le triangle ABC ?

Exercice 11

On considère le plan complexe muni d'un repère orthogonal $(O, I,\ J)$. On fera une figure et a compléter au fur et à mesure des questions. On prendra 3 cm comme unité de longueur. A tout point M du plan distinct de J d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' definie par : $z' = \frac{z^2}{i-z}$.

1- Déterminer les points M confondus avec leur image M'.
2- Etant un nombre complexe z, distinct de i, on pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ avec x, y, x' et y' reels. Montrer que : $x' = \frac{-x(x^2+y^2-2y)}{x^2+(1-y)^2}$. En déduire l'ensemble E des points M dont l'image M' est situé sur l'axe des imaginaires purs et construire E.
3- Trouver une relation simple liant les longueurs OM, JM et OM'. En déduire l'ensemble F des points M du plan tels que M et M' soient situés sur un même cercle de centre O. Dessiner l'ensemble F.
4- Dans toute cette question, on considère un point M d'affixe z, situé sur le cercle de centre J et de rayon $\frac{1}{2}$, M' est le point d'affixe z' correspondant et G l'isobarycentre des points J, M et M'.
   a) Calculer l'affixe z_0 de G en fonction de z.
   b) Montrer que G est situé sur un cercle de centre O dont on précisera le rayon.
   c) Apres avoir comparé les angles $\left(\widehat{\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OG}}\right)$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{OI};\overrightarrow{JM}}\right)$. Effectuer la construction de G et déduire celle de M

Exercice 12 :

Le complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OJ})$. Soit f l'application qui a tout point M de P d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z' = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$. On nomme A et B les points d'affixes respectives 1 et -1. On suppose M distinct des points O, A et B.

1- Déterminer l'ensemble des points invariants par f
2- a) Montrer que pour tout nombre complexe z différent de 0;1 et -1

on a :$\frac{z'+1}{z'-1} = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$

   c) Exprimer $\frac{M'B}{M'A}$ en fonction de $\frac{MB}{MA}$ puis $\left(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B}\right)$ en fonction de $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)$
3- Soit (d) la médiatrice de $[AB]$. Montrer que si M est un point de (d), alors le point M' est un point de (d).
4- Soit (C) le cercle de diamètre $[AB]$. Montrer que si M est un point de (C) alors M' appartient à la droite (AB).

5- On considère les points F et G du plan d'affixe respectives 3 ; 6i et -9+9i. Soit S la transformation du plan qui applique E en F et F en G par t la translation de vecteur d'affixe -6.
   a- Donner l'écriture complexe de s et de t puis caractériser s
   b- On veut étudier l'ensemble (H) des points M d'affixe z tels que $|(1+i)z-3+3i|^2+|z-6|^2=54$. Donner les antécédents respectifs S et T de O par s et t.
   c- Montrer que (H) est l'ensemble des points M du plan tels que $MG^2=8$ ou G est le barycentre des points pondérés (S ; 2) et (T;1)
   d- Déduis la nature et les éléments caractéristiques de (H).

Exercice 13 :

1) Résoudre dans ℂ l'équation $z^2-(3+i\sqrt{3})z+2+2i\sqrt{3}=0$
2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$. On considère le point A d'affixe 2 et le cercle de centre O passant par A. dans la suite α est le nombre complexe tel que
3) $\alpha=1+i\sqrt{3}$.
   a- Démontrer que $\alpha^2-4\alpha=2\overline{\alpha}-8$
   b- Démontrer que les points B et C d'affixe respectives α et $\overline{\alpha}$ appartient au cercle (C).
4) Soit D un point de (C) d'affixe $2e^{i\theta}$avec $\theta\in]-\pi;\pi[$ E est l'image de D par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Donner l'affixe du point E et construire le point E.
5) On désigne par F et G les milieux de $[BD]$ et de $[CE]$
   a- Exprimer en fonction de α et de θ les affixes de F et G
   b- Démontrer que $\frac{z_G-2}{z_F-2}=\frac{\alpha}{2}$
   c- Démontrer que le triangle AFG est équilatéral
6) A l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique. On conjecture qu'il existe une position du point D, défini à la question 3 pour laquelle la longueur du coté AF du triangle AFG est minimale.
   a- Démontrer que $AF^2=4-3cos\theta+\sqrt{3}sin\theta$
   b- Déterminer la valeur de θ pour laquelle la longueur du coté AF est minimale.

IV. Activités d'intégration

📖 **Situation 1** :

Dans une collectivité, les membres ont décidé de se construire un grand grenier pour garder leurs. Ils veulent que celui-ci ait un volume compris entre 154m^3 et 156m^3 avec une ouverture circulaire sur sa face supérieur d'au plus 1m de rayon situe au centre ce cette face. Ils font appel à un élève de Tle pour leur dresser un plan. Celui-ci munit le plan complexe d'un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$ ou il choisit pour unité 1m. il veut alors construire un grenier ayant la forme du pave ABCDEFGH pour construire la face centrale. Il choisit dans ce repère deux points A et B d'affixes respectives $-2+5i\ et\ -2+i$. Le point C est l'image de A par la translation t de vecteur $\vec{w}$ d'affixe $4-4i$, et le point D est l'image de C par la similitude de centre B de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$. Le point G est pris tel que G soit l'image de C par l'homothétie de centre P d'affixe $4+3i$ et de rapport -2. Enfin la face EFGH est l'image de la face ABCD par la translation de vecteur $\overrightarrow{CG}$. Il modélise enfin l'ouverture par l'ensemble des points M du plan tels que $|z+2-5i|^2+|z-8-11i|^2\le 64$

Tache 1 : Le grenier obtenu aura-t-il un volume correct ?

Tache 2 : L'ouverture répond-elle aux contraintes ?

Situation 2 : Votre père dispose d'un grand champ dans lequel il veut délimiter des zones de pâturages. Il a fait appel à son fils, élève de classe de Tle pour délimiter. Vous décidez de délimiter, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$ ou l'unité est le mètre. Cette zone par un ensemble D des points M d'affixe z tels que $|z-6-7i| \leq 4\sqrt{2}$. Mais la commune décide de faire une route et l'ingénieur chargé de ces travaux de route qui est l'ami de votre de votre père matérialise la route par un ensemble (L) des points M d'affixes z tels que $|z-4-5i| = |z-8-9i|$. Votre père est furieux, car pour lui, ses bêtes seront en danger. Mais il réussit finalement à s'entendre avec son ami entrepreneur : L'entrepreneur va maintenir sa route, mais votre père doit créer un deuxième pâturages modéliser par l'ensemble C des points M d'affixes z du plan tels que $2|z-4+5i|^2 - |z-2+9i|^2 \leq 25$. Votre père se satisfait alors parce que ses deux zones de pâturages ont une région en commun délimiter par deux points P et Q.

Tache 1 : Justifier les inquiétudes de votre père sur le passage de cette route

Tache 2 : Justifier la satisfaction finale de votre père et calculer l'aire de la zone que les deux pâturages ont en commun.

« La première règle de la réussite, ne jamais remettre au lendemain l'exécution d'un travail. ».

MINISTÈRE DES ENSEIGNEMENTS SECONDAIRES
LES GRANDPROFS DE MATHS « GPM »
ENSEIGNANT : **M. MBA WAFO ALEXANDRE.**
TEL **655595681 / 679446655** ……….

ANNEE SCOLAIRE : 2022-2023
TD : MATHEMATIQUES
CLASSE : TLED&TI
DUREE : ……. HEURES

FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGES

CHAPITRE 7 : PRIMTIVE D'UNE FONCTION CONTINUE SUR UN INTERVALLE

Savoir-faire :

- ✓ **Montrer qu'une fonction F est une primitive sur l'intervalle I, d'une fonction f continue sur I.**
- ✓ **Déterminer la primitive d'une fonction continue sur un intervalle I, qui prend la valeur a en b.**
- ✓ **Déterminer une primitive de :**
  $x \mapsto a\,x^r (r \in Q - \{-1\})$; $x \mapsto A\cos(ax+b)$; $x \mapsto A\sin(ax+b)$; $x \mapsto \cos^n(x)$; $x \mapsto \sin^n(x)$;
  $x \mapsto \frac{a}{(cx+d)^r} (r \in Q - \{-1\})$; $au'u^r (r \in Q - \{-1\})$

I- Exercices de fixation

Ressource 1 : Montrer qu'une fonction F est une primitive sur l'intervalle I, d'une fonction f continue sur I.

EXERCICE 1:

Pour chacune des fonctions f ci-dessous, justifier que F est une primitive de f sur I ou non.

a) $F(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 20$ avec $f(x)= 3x^2-4x+5$ sur I=IR ;

b) $F(x) = \frac{1}{15}(3x+2)^5$ avec $f(x)= (3x+2)^4$ sur I=IR ;

c) $F(x) = \frac{1}{3}\sqrt{x^3-3x+2}$ avec $f(x)= (x^2-1)\sqrt{x^3-3x+2}$ sur I=IR

d) $F(x) = x^2 + x^3 - 7x + 50$ avec $f(x) = 2x + 3x^2 - 7$ sur I=IR ;

e) $F(x) = x^2 - x^4 - 1$ avec $f(x) = x - 4x^3$ sur I=IR ;

f) $F(x) = \sin x + 2\cos x$ avec $f(x) = \cos x - 2\sin x$ sur I=$[0;\pi[$;

g) $F(x) = 3\cos x + \tan x + 20$ avec $f(x) = -3\sin x + 1 + \tan^2 x$ sur I= $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

h) $F(x) = 2\sqrt{x} + \frac{1}{x} + \sin x + \frac{7\pi}{6}$ avec $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} + \cos x$ sur I=$]0;2\pi[$.

EXERCICE 2:

Après avoir justifié que les fonctions suivantes sont continues sur I ; déterminer leur primitive sur I.

1- $f : x \mapsto 2x(x^2+3)^3$ sur I=IR

2- $g : x \mapsto \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+2}}$ sur I=IR

3- $h : x \mapsto \cos x \sin^3 x$ sur I=$]0;2\pi[$

4- $i: x \mapsto \frac{3x^2}{(x^3+1)^3}$ sur I= $]-1;\ +\infty[$

5- $f: x \mapsto \frac{x^4+2x^2-1}{x^2}$ sur I= $]0;\ +\infty[$

6- $g: x \mapsto (x+1)(2x-3)^2$ sur I=IR

7- $h: x \mapsto \sqrt{x+1}$ sur I= $]-1;\ +\infty[$

8- $i: x \mapsto \frac{x^2-3x+2}{x-3}$ sur I= $]3;\ +\infty[$

Ressource 2 : Déterminer la primitive d'une fonction continue sur un intervalle I, qui prend la valeur a en b

EXERCICE 1 :

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes qui prend la valeur 4 en 1:

f(x)= 3x ; g(x)= $5x^3$-3x+2 ; h(x)= $4(2x-7)^2$; i(x)= $\frac{5}{(5x+3)^2}$; l(x)= $\frac{x^4-x+1}{x^4}$

m(x)= $\frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}}$

EXERCICE 2 :

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes qui prend la valeur a en b

1- $f: x \mapsto \frac{x}{(x^2+1)^3}$ avec a= ¼ et b = 2

2- $g: x \mapsto (x^2+1)(x^3+3x-2)^4$ avec a= 12 et b = 0

3- $h: x \mapsto sinx cos^2 x$ avec a= 1/8 et b = $\frac{\pi}{4}$

4- $i: x \mapsto \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$ avec a= 1 et b = 0.

II- Exercices de consolidation

EXERCICE 1 :

1) Déterminer les primitives F de f sur l'intervalles K indiqué dans chacun des cas :

a) $f(x)=3x^2-x+7$ K=IR**;** **b)** $f(x)=\cos x-5\sin x$ $K=[0;2\pi]$; **c)** $f(x)=\sin\frac{x}{2}-5\cos 4x$ $K=[0;2\pi]$;

d) $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}-1$ $K=]0;+\infty[$

2) On considère les fonctions f et g définies par $f(x)=\cos x - x\sin x$ et $g(x)=x\cos x$

a) Justifier que f admet une primitive sur IR.

b) Calculer la dérivée de g sur IR. En déduire une primitive de f sur IR.

c) Déterminer la primitive de f sur IR qui la valeur 1 en $\frac{-\pi}{3}$

EXERCICE 2 :

1) Déterminer les primitives F de f sur l'intervalles K indiqué dans chacun des cas :

a) $f(x)=3\cos\left(-2x+\frac{\pi}{3}\right)$ K=IR**;** **b)** $f(x)=7\sin\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)$ $K=[0;2\pi]$; **c)** $f(x)=\frac{3}{8}\sin 12x$ $K=[0;2\pi]$; d) $f(x)=2x\cos^2 x$ K=IR

e) $f(x)=\sin^2 x \quad K=]0;+\infty[$

2) On considère les fonctions f et g définies par $f(x)=\sin^4 x$ et $g(x)=\cos^5 x$

a) Linéariser f et g.

b) Déduire une primitive de f puis une primitive de g sur IR.

c) Déterminer la primitive de f sur IR qui la valeur 1 en $\frac{\pi}{2}$

🕮 EXERCICE 3

1) Déterminer les primitives F de f sur l'intervalle K indiqué dans chacun des cas :

a) $f(x)=3x^2(x^3+1)^4$ **,** $K=]0;+\infty[$ **;** **b)** $f(x)=\cos x\sin^3 x$, $K=[0;2\pi]$; **c)** $f(x)=\dfrac{4x+6}{(x^2+3x-1)^{\frac{3}{2}}}$,

$K=]1;+\infty[$;

d) $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{-x+1}}$, $K=]-\infty;1[$; **e)** $f(x)=\dfrac{2}{(4x-3)^5}$, $K=\left]\frac{3}{4};+\infty\right[$.

2) On considère la fonction f définie par $f(x)=(1+\tan^2 2x)\tan 2x$

a) Déterminer les primitives de f sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right[$.

b) Déduire la primitive de f sur $\left]-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right[$ qui prend la valeur 1 en 0.

🕮 EXERCICE 4

I- f est une fonction définie sur $[1;+\infty[$ par $f(x)=\frac{4x^3-3x}{(2x-1)^2}$

1- Ecrire f sous la forme $f(x)=ax+b+\frac{c}{(2x-1)^2}$

2- Déterminer les primitives de f sur $[1;+\infty[$

1- En déduire la primitive de f qui s'annule en 1.

II- Soit $f: x\to sin^2xcos^3x$

1- Démontrer que $pour\ tout\ x\epsilon IR,\ f(x)=cosx(sin^2x-sin^4x)$

2- Déterminer alors toutes les primitives de f sur IR

3- En déduire la primitive F de f sur IR qui prend la valeur $-\sqrt{2}$ en $-$

III- Apprentissage à l'intégration

🕮 EXERCICE 1 :

L'expression de l'accélération d'un automobiliste est définie par la fonction $\boldsymbol{a(t)=2t+1}$ à un instant t donné. ($\boldsymbol{t}$ étant le temps en secondes et $a(\boldsymbol{t})$ **en m/s^2**).

1) Détermine l'expression de la vitesse instantanée v(t) de l'automobiliste avec $v(0)=25$.
2) Détermine l'expression de la distance x(t) parcourue par l'automobiliste à un instant.
3) Détermine alors la distance parcourue par l'automobiliste 1heure après son départ.

IV- Activités d'intégration

SITUATION 1

On appelle couverture réseau de rayon r la surface de disque de rayon r et de centre le point de fixation d'un pilonne. Le plan terrestre est muni d'un repère complexe $(O;\ \vec{u};\vec{v})$. La couverture réseau d'une société de téléphonie au quartier Yassa est donnée par l'ensemble (C) des points M d'affixes z tel que $\boldsymbol{|z-4-3i|\leq 3}$. Par ailleurs, dans ce quartier, le bloc 1 est délimité par un espace de forme triangulaire dont les sommets sont les solutions de l'équation $\boldsymbol{z^3-(5+7i)z^2-(4-25i)z-12i+30=0}$ l'un des sommets ayant pour affixe 2i.
Alex, un habitant de ce quartier a commencé à enregistrer sa consommation journalière de mégabits (données mobiles). L'évolution journalière de cette consommation modélisée par la fonction $\boldsymbol{f(x)}=\boldsymbol{5\sqrt{x^2-4}}$ où f(x) est le nombre de centaine de mégabits consommé x jours $\boldsymbol{x}\in[\boldsymbol{2},+\infty[$. Un matin Alex décide de faire du footing la loi horaire d'évolution de sa vitesse en fonction du temps ($\boldsymbol{t\ en\ heure}$) est définie par : $\boldsymbol{V(t)=50-25t}$. $(V\ en\ dam/h)$.

TACHES

1. Le BLOC 1 est -il entièrement couvert par le réseau de cette société ?
2. Existe-t-il un nombre limité de mégabits journalier que pourra consommer Alex au fils du temps ?
3. Déterminer la distance totale en Km qu'aura parcouru Alex à la fin du footing.

« La première règle de la réussite, ne jamais remettre au lendemain l'exécution d'un travail. ».

MINISTÈRE DES ENSEIGNEMENTS SECONDAIRES

LES GRANDPROFS DE MATHS « GPM »

ENSEIGNANT : ………………

TEL : …… …………

ANNEE SCOLAIRE : 2022-2023

TD : MATHEMATIQUES

CLASSE : Tle D&TI

DUREE : ……. HEURES

FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGES

CHAPITRE 8 : FONCTIONS LOGARITHMES

Savoir-faire :

- ✓ **Résoudre les équations et inéquations dans lesquelles intervient ln.**
- ✓ **Déterminer les limites des fonctions dans lesquelles intervient ln.**
- ✓ **Dériver des fonctions contenant ln.**
- ✓ **Déterminer sur un intervalle des primitives des fonctions dans lesquelles intervient ln.**
- ✓ **Etudier et représenter graphiquement des fonctions contenant ln.**

I. Exercices de fixation

(Concevoir des exercices mettant en exergue une ressource particulière de niveau facile et moyen, graduellement : on pourra utiliser les QCM, QRO, ROC,….)

Ressource 1 Résoudre les équations et inéquations dans lesquelles intervient ln.

EXERCICE 1 **:**

a. Exprimer en fonction de ln 2 les nombres suivants :

$A = ln8$ $\qquad B = ln\frac{1}{16}$ $\qquad C = \frac{1}{2}ln16.$

b. Exprimez en fonction de ln 2 et ln 3 les réels suivants :

$A = ln24$ $\qquad B = ln144$ $\qquad C = ln\frac{8}{9}$

EXERCICE 2 **:** Précisez les contraintes puis résoudre les équations suivantes :

A) $\ln(2+5x) = \ln(x+6)$ B) $\ln(x-1) + \ln(x-3) = ln3$ C) $\ln(x) = 2$

D) $(lnx)^2 + lnx - 6 = 0$ E) $\ln(2x-5) = 1$ F) $\ln(|x-1|) = \ln(2x-1)$

G) $\ln(\frac{x-1}{2x-1}) = 0$

📖 EXERCICE 2

Précisez les contraintes puis résoudre les équations suivantes :

A) $\ln(2+5x) \leq \ln(x+6)$ B) $\ln(x-1)+\ln(x-3) < ln3$ C) $\ln(x) \geq 2$

D) $(lnx)^2 + lnx - 6 \leq 0$ E) $\ln(2x-5) > 1$ F) $(1{,}2)^n \geq 4, n \epsilon \mathbb{N}$

G) $\frac{2(1+lnx)}{x} > 0$ H) $(0{,}8)^n \leq 0.1, n \epsilon \mathbb{N}$

📖 EXERCICE 3

Résoudre les systèmes d'équations suivant :

A) $\begin{cases} x-y=\frac{2}{3} \\ lnx+\ln y=0 \end{cases}$ B) $\begin{cases} 5lnx+2lny=26 \\ 2lnx-3\ln y=-1 \end{cases}$ C) $\begin{cases} \ln(xy)=4 \\ (lnx)(\ln y)=-12 \end{cases}$

D) $\begin{cases} \ln(xyz)=0 \\ \ln\left(\frac{x^2}{yz^3}\right)=-7 \\ \ln\left(\frac{x^2}{z}\right)=0 \end{cases}$

📖 **EXERCICE 4**

Soit p(x) = 2x3 + x2 − 7x − 6.

1) Calculer p(−1).
2) Déterminer les réel a, b et c tels que : $p(x) = (x-2)(ax^2 + bx + c)$.
3) Résoudre dans R l'équation p(x) = 0.
4) Résoudre dans R l'équation $2(\ln x + 2)^3 + (\ln x + 2)^2 - 7(\ln x + 2) - 6 = 0$.
5) Résoudre dans R l'équation $2(\ln x)^3 + (\ln x)^2 - 7(\ln x) - 6 = 0$.

✍ **Ressource 2 :** Déterminer les limites des fonctions dans lesquelles intervient ln.

📖 EXERCICE 5

Déterminer les limites suivantes :

A) $\lim_{x\to+\infty} x^2 + lnx$ B) $\lim_{x\mapsto+\infty}(x-1)lnx$ C) $\lim_{x\mapsto+\infty}(ln2-3lnx)$ D) $\lim_{x\mapsto+\infty} lnx^2$

E) $\lim_{x\mapsto0} \frac{lnx}{x}$ F) $\lim_{x\mapsto+\infty} x - lnx$ G) $\lim_{x\mapsto+\infty} xln(1+\frac{1}{x})$ (poser $X=\frac{1}{x}$)

H) $\lim_{x\mapsto0}\frac{\ln(1+2x)}{x}$ (poser $X = 2x$)

✍ **Resource 3 :** Dériver des fonctions contenant ln.

📖 **EXERCICE 6**

Déterminer les ensembles de définition et de dérivabilité puis calculer les dérivées des fonctions ci-dessous

A) $f(x) = \frac{-x}{2} + 1 + 2lnx$ B) $f(x) = xlnx - x$ C) $f(x) = \ln(-3x + 1)$

D) $f(x) = \ln(4 - x) + lnx$ E) $f(x) = x^2 lnx$ F) $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$

G) $f(x) = \ln(\frac{x-1}{x+1})$ H) $f(x) = x\ln(2x - 3)$ I) $f(x) = 2x(1 - \ln x)$

J) $f(x) = \frac{lnx}{x}$ K) $f(x) = \frac{x-lnx}{x^2}$ L) $f(x) = (lnx)^2 - 2lnx - 4$

Resource 4 : Déterminer sur un intervalle des primitives des fonctions dans lesquelles intervient ln.

EXERCICE 7

Déterminez une primitive de la fonction f proposée sur l'intervalle I donné :

A) $f(x) = x^2 - 5x + \frac{1}{x}$ sur $I =]0;\ +\bowtie[$ B) $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x}$ sur $I =]0;\ +\bowtie[$

C) $f(x) = \frac{7}{x} + \frac{5}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}$ sur $I =]0;\ +\bowtie[$ D) $f(x) = \frac{3}{3x-4}$ sur $I = \left]\frac{4}{3};\ +\bowtie\right[$

E) $f(x) = \frac{1}{3x-5}$ sur $I = [2;\ +\bowtie[$ F) $f(x) = \frac{1}{x+1}$ sur $I =]-1;\ +\bowtie[$

G) $f(x) = \frac{1}{x+1}$ sur $I =]-\bowtie;\ -1[$ H) $f(x) = \frac{2x}{x^2-4}$ sur $I =]2;\ +\bowtie[$

I) $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ sur $I =]-1;\ 1[$ J) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x+2}$ sur $I = \mathbb{R}$

EXERCICE 8

On considère la fonction définie sur $I =]4;\ +\bowtie[$ par $f(x) = \frac{2x^2-3x-4}{x-2}$

a) Trouver trois réels a, b et c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$.

b) En déduire une primitive de f sur I

Resource 5 : Etudier et représenter graphiquement des fonctions contenant ln.

Exercice 9

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O; I; J) déduire de la courbe représentative de la fonction ln, les courbes représentatives des fonctions suivantes :

$f(x) = \ln(x + 1)$; $g(x) = \ln|x|$; $f(x) = \ln(x + 1)$ $h(x) = 1 + \ln x$; $i(x) = |\ln x|$

Exercice 10

Etudier et tracer les courbes représentatives des fonctions suivantes.

A) $f(x) = 2x - 1 - lnx$ B) $f(x) = \frac{1}{x} - lnx$ C) $f(x) = \ln(x + 2) - \ln(x - 1)$

D) $f(x) = \frac{lnx}{x}$ E) $f(x) = x + \ln(x^2 - 1)$

II. Exercices de consolidation

🕮 Exercice 11

Partie A :

On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)-\frac{2}{x^2+1}$.

1) a) Calculer la dérivée g' de g. Montrer que pour tout >0 $g'(x)=\frac{2(x^2-1)}{x(x^2+1)^2}$.
   c) Etudier le signe de $g'(x)$ selon les valeurs de x.
2) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ puis $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)$.
3) a) Dresser le tableau de variation de g.
   b) En déduire qu'il existe un unique nombre réel α>0 tel que g(α)=0, puis vérifier que $0{,}5<$ α$<0{,}6$.

4) Déduire des questions précédentes le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$.

Partie B :

On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x)=xln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) si\ x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

On note (Cf) la courbe représentative de f dans le plan rapporté au repère orthonormé d'unité graphique 5cm.

1) a) Montrer que pour tout x ϵ $]0;+\infty[$, on a $f'(x)=g(x)$.
   b) En déduire les variations de f sur $]0;+\infty[$.
2) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)$ en déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.
3) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} xln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=0$.
   b) Etudier la dérivabilité de f en 0 et préciser la tangente à la courbe (Cf) de f en $x=0$.
4) a) prouver que, pour tout élément de x de $[0{,}5;\alpha]$; $0\leq f'(\text{x})\leq f'(0{,}5)$.
   b) En déduire que pour tout élément x de $[0{,}5;\alpha]$:
   $0\leq f(\alpha)-f(0{,}5)\leq(\alpha-0{,}5)f'(0{,}5)$; Puis que $0\leq f(\alpha)-f(0{,}5)\leq\frac{1}{10}\text{f}'(0{,}5)$.
   d) En déduire une valeur approchée de $f(\alpha)$ à 10^{-3}.
4) Dresser le tableau de variation de f puis tracer (Cf).
5) Déterminer l'aire du domaine du plan délimité par la courbe de f, l'axe des abscisses, les droites d'équation $x=0$ et $x=1$.

Exercice 12

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ telle que pour tout réel x de cet intervalle $f(x)=(1+lnx)(2-lnx)$ et dont la courbe représentative (Cf). est donnée ci-dessous.

1) Calculer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
2) a) On note f'la fonction dérivée de la fonction f. Calculer f '(x) et vérifier que $f'(x)=\frac{1-2lnx}{x}$ pour tout réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$.

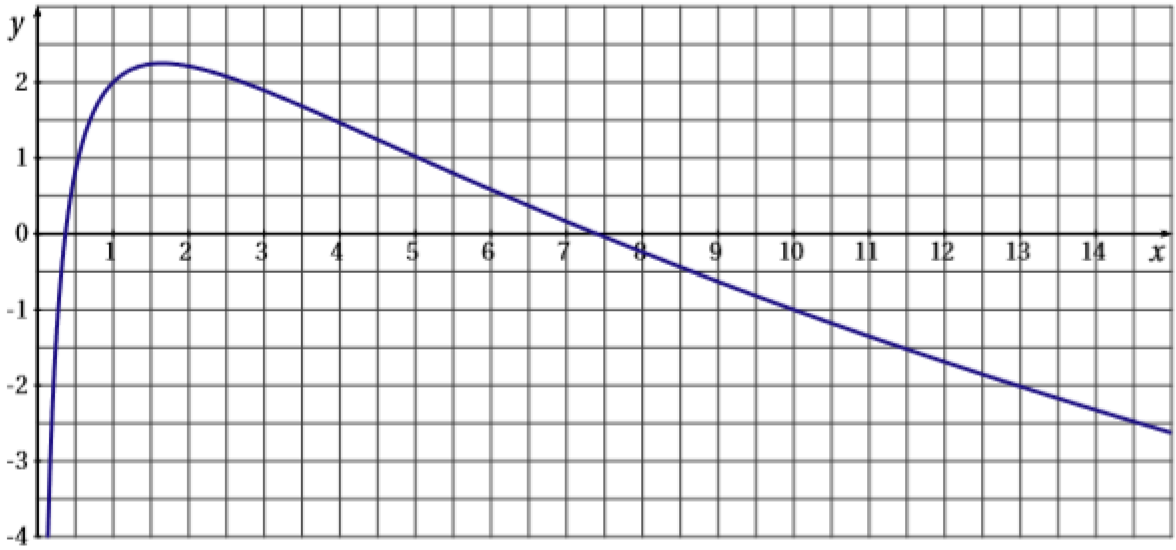
b) Étudier les variations de f. On précisera la valeur exacte du maximum de f et la valeur exacte de x pour laquelle il est atteint.

3) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe (Cf) au point d'abscisse 1 et la tracer sur le graphique.

4) a) Donner le nombre de solutions de l'équation f (x)=2.

b) Résoudre dans R l'équation $(1+X)(2-X)$ =2.

c) En déduire les solutions de l'équation f (x)=2.



Apprentissage à l'intégration

Exercice 13 :

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1; +\bowtie[$ par : $f(x) = 40 + 7ln(x + 1)$.

1) Calculer la limite de f en +∞ et en -1.
2) La droite (D) d'équation x = −1 est-elle asymptote verticale à la courbe?
3) a) Déterminer la dérivée f' de la fonction $f$et montrer que la dérivée est $f'(x) = \frac{7}{x+1}$.

   b) Donner le signe de la dérivée sur l'intervalle$]-1; +\bowtie[$.

   c) En déduire le sens de variation et le tableau de variation de la fonction $f$sur l'intervalle$]-1; +\bowtie[$.

4) Calculer $f(0)$ et $f(150)$ puis représenter (D), (C) dans un repère orthonormé. Echelle : 1 cm pour 10 unités sur les axes.

5) Le gérant d'un restaurant fixe le prix du repas à 850 FCFA. La recette hebdomadaire (par semaine) est alors en milliers de FCFA : R(x) = 0,85x où x est le nombre de clients par semaine. Il prévoit que son coût de production hebdomadaire exprimé en milliers de FCFA, est fonction du nombre x de clients est donné par : $f(x) = 40 + 7ln(x + 1)$.

   a) Tracer dans le même graphique la droite d'équation y = 0,85 x.

b) Déterminer à l'aide du graphique le nombre de repas à partir duquel le gérant réalise un bénéfice.

Exercice 14 :

Une entreprise fabrique un produit en quantité x, exprime en milliers de tonnes. Le coût total de fabrication pour tout élément x de $[0; 5]$ est $C(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{9}{2}\ln(x+1)$. Les coûts sont exprimés en millions de francs.

A) Etude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur $[0; 5]$ par : $g(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{9x}{x+1} - \ln(x+1)$.

1) Calculer $g'(x)$. Vérifier que $g'(x) = \frac{x(x-2)(x+4)}{(x+1)^2}$.
2) Etablir le tableau de variation de g.
3) En déduire que g s'annule sur $[0; 5]$ pour une valeur unique l.
4) Déterminer des résultats précédents le signe de g.

B) Etude d'un coût moyen.

La fonction coût moyen est définie sur $[0; 5]$ par $Cm(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{x}{2} + \frac{9}{2}\frac{\ln(x+1)}{x}$.

1) Calculer $Cm'(x)$. Vérifier que l'on peut écrire $Cm'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.
2) Etudier le sens de variation de Cm sur $]0; 5]$.
3) Pour quelle production l'entreprise a-t-elle un coût moyen minimal exprimée en francs par tonnes ?
   Quel est ce coût.

III. Activités d'intégration

Situation 1 :

Un restaurateur voudrait faire une étude sur le coût unitaire de fabrication d'un menu proposé dans sa carte. Le coût total de fabrication de x menus en milliers de FCFA, est donné par la fonction:

$g(x) = x^2 + 50x - 18x\ln x$.

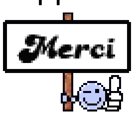
Déterminer le nombre de menus qu'il faut servir pour que le coût unitaire soit minimal. Quel est ce coût ?

Situation 2 :

Une entreprise fabrique des objets dont le coût de production en centaines de FCFA est donnée par :

C(q)=20 ln(3q+1). On suppose que chaque objet est vendu à 3 centaines de FCFA.

Déterminer la quantité minimale d'objets que doit vendre l'entreprise pour être bénéficiaire en supposant qu'elle vend toute sa production.



« La première règle de la réussite, ne jamais remettre au lendemain l'exécution d'un travail. ».

MINISTÈRE DES ENSEIGNEMENTS SECONDAIRES

LES GRANDPROFS DE MATHS « GPM »

ENSEIGNANT : Pascal Blaise TIKENG YONTA

TEL : 676472028/690990519

ANNEE SCOLAIRE : 2022-2023

TD : MATHEMATIQUES

CLASSE : T[LE] D&TI

DUREE : ……. HEURES

FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGES

CHAPITRE 9 : PROBABILITES

Savoir-faire :

- ✓ **Donner à partir des exemples d'expériences aléatoires, tirés de la vie courante des éventualités, l'univers de toutes les possibilités, les évènements, etc…**
- ✓ **Calculer la probabilité d'un évènement dans une situation d'équiprobabilité par l'égalité** $\mathbf{P}(A) = \frac{Nombre\ de\ cas\ favorables\ à\ A}{Nombre\ de\ cas\ possibles}$
- ✓ **Appliquer la formule** $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) + \mathrm{P}(\mathrm{B}) - \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$ **pour calculer les probabilités de certains évènements.**
- ✓ **Résoudre des problèmes liés aux probabilités conditionnelles**
- ✓ **Utiliser la propriété** $\mathrm{P}(A) = P(B)P(A/B) + P(\overline{B})P(A/\overline{B})$**, B étant un évènement de probabilité non nulle et différente de 1**

I. Exercices de fixation

✍ **Ressource 1 :** Dénombrement et vocabulaire des évènements

🕮 EXERCICE 1**:**

5) Définir chacun des termes suivants : expérience aléatoire ; univers ; évènement certain ; évènement élémentaire ; évènement contraire ; équiprobabilité.
6) Une urne contient 1 boule verte (V), 1 boule rouge (R) et 2 boules jaunes (J_1 et J_2). On tire simultanément et au hasard 2 boules de cette urne pour former un couple, **par exemple (V ;R).** Déterminer tous les éléments de l'univers Ω associé à cette expérience.

🕮 EXERCICE 2**:**

Une expérience consiste à jeter deux fois de suite un dé cubique parfaitement équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et d'écrire un couple formé des chiffres obtenus (dans l'ordre) sur la face supérieure à l'issue des deux jets.

1. Déterminer le cardinal de l'univers Ω associé à cette expérience.
2. Quel est le nombre de résultats possibles dont la somme des chiffres obtenus est égale à 6 ?
3. Quel est le nombre de résultats possibles dont le produit des chiffres obtenus est un multiple de 4 ?
4. Donner à partir de cette expérience un exemple de votre choix d'évènement certain.
5. Donner à partir de cette expérience un exemple de votre choix d'évènement impossible.

6. Donner à partir de cette expérience deux exemples (de votre choix) d'évènements dont l'un est le contraire de l'autre.
7. Donner à partir de cette expérience deux exemples (de votre choix) d'évènements incompatibles.

✍ **Ressource 2 :** Calcul de probabilités

🕮 EXERCICE 1**:**

Un sachet contient 2 bonbons à la menthe, 3 à l'orange et 5 au citron. On tire au hasard 1 bonbon du sachet et on définit les évènements suivants :

A :<< le bonbon est à la menthe >>

B :<< le bonbon est à l'orange >>

C : :<< le bonbon est au citron >>

1. Déterminer les probabilités $p(A), p(B)$ et $p(C)$.
2. Représenter cette expérience par un arbre pondéré (on fera figurer sur chaque branche la probabilité associée)

🕮 EXERCICE 2 **:**

Un joueur de tennis a droit à deux tentatives pour réussir sa mise en jeu.

Gwladys réussit sa première balle de service dans 65% des cas. Quand elle échoue, elle réussit la seconde dans 80% des cas.

Déterminer la probabilité pour qu'elle commette une double faute (c'est à dire qu'elle échoue deux fois de suite)

✍ **Resource 3** : opérations sur les probabilités

🕮 **EXERCICE 1 :**

Soient A et B deux évènements tels que $p(A) = \frac{1}{5}$ et $p(A \cup B) = \frac{1}{2}$.

1. Supposant que A et B sont incompatibles, calculer $p(B)$.
2. Supposant que A et B sont indépendants, calculer $p(B)$.
3. Calculer $p(B)$ sachant que $p(A \cap B) = p(A)$

🕮 **EXERCICE 2 :**

Un centre de réunion comporte deux salles numérotées 1 et 2. On note S_1 l'évènement **<< la salle numéro 1 est occupée >>** et S_2 l'évènement **<< la salle numéro 2 est occupée >>.** On sait que :

- Les deux salles ont autant de chance d'être occupées l'une que l'autre ;
- La probabilité que l'une des deux salles soit occupée est égale à $0{,}9$;
- La probabilité que les deux salles soient occupées en même temps est égale à $0{,}5$.

Exprimer chacun des évènements suivants à l'aide des évènements S_1 et S_2 puis calculer leur probabilité :

a) La salle numéro 1 est libre ;
b) Les deux salles sont libres ;
c) L'une des salles au moins est libre ;
d) Une seule salle est libre.

Resource 4 : probabilités conditionnelles

EXERCICE 1

Une usine de fabrication industrielle dispose de deux machines qui fonctionnent simultanément. Les techniciens en maintenance ont estimé à :

- 0,002 la probabilité pour que la première machine tombe en panne ;
- 0,003 la probabilité pour que la deuxième machine tombe en panne ;
- 0,6 la probabilité pour que la deuxième machine tombe en panne lorsque la première est en panne.

1. Calculer la probabilité pour que les deux machines tombent simultanément en panne.
2. Calculer la probabilité pour que la première machine tombe en panne lorsque la deuxième est en panne.

EXERCICE 2

Une usine fabrique des stylos à bille. Une étude statistique a montré que 90% de la production ne présente pas de défaut. Chaque stylo est soumis à un contrôle de fabrication ; ce contrôle refuse 94% des stylos avec défaut et accepte 92% des stylos sans défaut. On choisit au hasard un stylo avant son passage au contrôle. On désigne par A l'évènement << le stylo est accepté à l'issue du contrôle >>
Calculer la probabilité des évènements suivants :

$$E_1 : le\ stylo\ est\ accepté\ et\ n'a\ pas\ de\ défaut ;$$
$$E_2 : le\ stylo\ est\ accepté\ et\ a\ un\ défaut$$

Resource 5 : variable aléatoire

EXERCICE 1

Une urne contient sept boules numérotées 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 toutes indiscernables au toucher. On tire une boule de l'urne, on note son numéro. On tire une seconde boule parmi les six boules restantes dans l'urne, et on écrit son numéro à droite du premier numéro. On extrait enfin une troisième boule parmi les cinq dernières et son numéro est écrit à droite du deuxième. On forme ainsi un nombre de trois chiffres.

1. Combien de nombres différents peut-on obtenir ainsi ?
2. Déterminer la probabilité d'obtenir à la fin des trois tirages un nombre impair.
3. On gagne 200 FCFA chaque fois qu'on tire un numéro pair, et on perd 100 FCFA sinon. Soit X la variable aléatoire qui définit le gain algébrique du joueur à l'issue des trois tirages.
   a) Définir la loi de probabilité de X.
   b) Déterminer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de X.

c) Construire la fonction de répartition associée à la variable aléatoire X.

📖 EXERCICE 2

Un joueur tire sur une cible de $10cm$ de rayon, constituée de couronnes concentriques, délimitées par des cercles de rayon $1,2, \dots 10\ cm$ et numérotées respectivement de 1 à 10. La probabilité d'atteindre la couronne k est proportionnelle à l'aire de cette couronne, et on suppose que le joueur atteint sa cible à chaque lancer. Soit X la variable aléatoire qui à chaque lancer associe le numéro de la cible.

1. Quelle est la loi de probabilité de X ?
2. Le joueur gagne k euros s'il atteint la couronne numérotée k pour k allant de 6 à 10, tandis qu'il perd 2 euros s'il atteint l'une des couronnes périphériques numérotées de 1 à 5. Le jeu est-il favorable au joueur ?

📖 EXERCICE 3

On considère un dé cubique truqué dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on note X la variable aléatoire donnée par le numéro de la face du dessus. On suppose que le dé est truqué de sorte que la probabilité d'obtenir une face est proportionnelle au numéro inscrit sur cette face.

1. Déterminer la loi de probabilité de X puis déterminer son espérance.
2. On pose $Y = \frac{1}{X}$. Déterminer la loi de probabilité de Y puis déterminer son espérance.

Resource 6 : Schéma de Bernoulli et loi Binomiale

📖 EXERCICE 1

Les trois questions sont indépendantes.

1) On considère une variable aléatoire X suivant une loi Binomiale de paramètres n et p inconnus, et vérifiant $E(X) = 43,2$ et $V(X) = 27,648$.
   a) Montrer que $1 - p = 0,64$.
   b) En déduire p puis n.
2) On considère une variable aléatoire Y suivant une loi Binomiale de paramètres $n = 25$ et p inconnu, et vérifiant $\sigma(Y) = 1,5$. Déterminer la ou les valeurs possibles de p.
3) On considère une variable aléatoire Z suivant une loi Binomiale de paramètres n et p inconnus, et vérifiant $E(Z) = 2$ et $0,15 \leq p \leq 0,16$.
   Déduire la valeur exacte de n puis elle de p.

II. Exercices de consolidation

(Concevoir des exercices de synthèse mettant en exergue plusieurs ressources, d'un niveau élevé et très élevé, de façon graduelle. on pourra utiliser les QCM, …)

📖 EXERCICE 1

On constitue un questionnaire comportant 5 questions

Pour chacune des 5 questions, trois réponses sont proposées (A,B et C), une seule d'entre elles est juste. Un candidat répond à toutes les questions posées en écrivant un mot-réponse de cinq lettres ; par exemple le mot **BBAAC** signifie que le candidat a répondu ''**B**'' aux première et deuxième questions, ''**A**'' aux troisième et quatrième questions puis ''**C**'' à la cinquième question.

1. Combien y'a-t-il de mot-réponses possibles à ce questionnaire ?
2. On suppose que le candidat répond au hasard à chacune des cinq questions de ce questionnaire. Calculer la probabilité des évènements suivants :
   E :<< le candidat a une seule réponse juste >>
   F :<< le candidat n'a aucune réponse juste >>
   G :<< le mot réponse du candidat est un palindrome >>. (On précise que le palindrome est un mot qui peut se lire indifféremment de gauche à droite ou de droite à gauche. Par exemple : **BACAB** est un palindrome)
3. Un professeur décide de soumettre ce questionnaire à ses 28 élèves en leur demandant de répondre au hasard à chacune des cinq questions de ce questionnaire. On désigne par X le nombre d'élèves dont le mot-réponse ne comporte aucune réponse juste.
   a) Justifier que la variable aléatoire X suit la loi binomiale puis déterminer ses paramètres.
   b) Déterminer la probabilité, arrondie à 10^{-2} près, qu'au moins un élève ait donné toutes les réponses fausses.

EXERCICE 2

Un joueur dispose d'un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et de trois urnes U_1, U_2 et U_3 contenant chacune k boules, où k est un entier naturel supérieur ou égal à 3. Il y a trois boules noires dans U_1, deux boules noires dans U_2 et une boule noire dans U_3. Toutes les autres boules dans les urnes sont blanches. Les boules sont indiscernables au toucher.
Une partie se déroule de la manière suivante :
Le joueur lance le dé,

- S'il obtient le numéro 1, il prend au hasard une boule dans l'urne U_1, note sa couleur et la remet dans U_1.
- S'il obtient un multiple de 3, il prend au hasard une boule dans l'urne U_2, note sa couleur et la remet dans U_2.
- Si le numéro amené par le dé n'est ni 1 ni un multiple de 3, il prend au hasard une boule dans l'urne U_3, note sa couleur et la remet dans U_3.

On désigne par A,B,C et N les évènements suivants :
A :<< le dé amène le numéro 1 >>
B :<< le dé amène un multiple de 3 >>
C :<< le dé amène un numéro qui n'est ni 1 ni un multiple de 3 >>
N :<< la boule tirée est noire >>.

1. Le joueur joue une partie.
   a) Montrer que la probabilité qu'il obtienne une boule noire est égale à $\frac{5}{3k}$.
   b) Calculer la probabilité que le dé ait amené le numéro 1 sachant que la boule tirée est noire.
   c) Déterminer k pour que la probabilité d'obtenir une boule noire soit supérieure à $\frac{1}{2}$.
   d) Déterminer k pour que la probabilité d'obtenir une boule noire soit égale à $\frac{1}{30}$.

2. Dans cette question, k est choisi pour que la probabilité d'obtenir une boule noire en jouant une partie soit égale à $\frac{1}{30}$. Le joueur fait 20 parties, indépendantes les unes des autres.

Calculer sous forme exacte, puis arrondi à 10^{-3} près la probabilité qu'il obtienne au moins une fois une boule noire.

…………..

III. Activités d'intégration

Situation 1 : **Très faibles chances de gagner le tiercé au Cameroun**

Le tiercé est un jeu qui intéresse plusieurs Camerounais en ce sens ou beaucoup veulent se faire assez d'argent pour financer leur projet personnel. Le jeu consiste à mettre 30 chevaux (Numérotés de 1 à 30) en course et s'intéresser à l'arrivée des trois(3) premiers. On rappelle que sur la ligne de départ, tous les chevaux ont la même chance d'arriver en tête de course. Gagner le tiercé consiste donc à trouver les numéros dans l'ordre d'arrivée des trois(3) premiers chevaux.

Mr TIKENG est un Camerounais courageux qui s'engage à jouer à ce jeu, les promoteurs lui demandent de miser une symbolique somme de 400 FCFA pour enfin remporter en cas de gain, la cagnotte qui s'élève à 5000000 (cinq millions) de FCFA. Sachant qu'il lui est permis de faire autant de mises qu'il peut au fin d'augmenter ses chances de gain.

Tache1 :

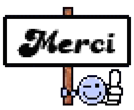
Démontrer de deux manières différentes, que les chances pour Mr TIKENG de gagner ce jeu sont extrêmement faibles, voire quasiment nulles. On donnera la valeur à 10^{-8} près.

Tache2 :

Proposer à Mr TIKENG une formule lui permettant (sans doute) de trouver le podium gagnant, puis justifier que cette formule lui coutera plus d'argent que la cagnotte mise en jeu.

Tache3 :

Déterminer les chances pour Mr TIKENG de trouver le podium gagnant dans le désordre.



« La première règle de la réussite, ne jamais remettre au lendemain l'exécution d'un travail. ».

MINISTÈRE DES ENSEIGNEMENTS SECONDAIRES
LES GRANDPROFS DE MATHS « GPM »
ENSEIGNANT : YOSSA ALAIN
TEL : 691 72 24 98 / 681 36 35 29

ANNEE SCOLAIRE : 2022-2023
TD : MATHEMATIQUES
CLASSE : Tle D&TI
DUREE : ……. HEURES

FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGES

CHAPITRE 10: SIMILITUDES DIRECTES DU PLAN

Savoir-faire :

- ✓ **Reconnaitre l'écriture complexe d'une translation, d'une homothétie, d'une rotation, de manière générale d'une similitude directe du plan .**
- ✓ **Déterminer les éléments numériques et les éléments géométriques qui caractérisent une similitude directe du plan à partir de son écriture complexe.**
- ✓ **Passer de l'écriture analytique à l'écriture complexe d'une similitude directe du plan.**
- ✓ **Passer de l'écriture complexe à l'écriture analytique d'une similitude directe du plan.**
- ✓ **Déterminer l'image par une similitude directe d'une droite.**
- ✓ **Déterminer l'image par une similitude directe d'un cercle.**

I. Exercices de fixation

Ressource 1 :

- **Reconnaitre l'écriture complexe d'une translation**
- **Reconnaitre l'écriture complexe d'une homothétie**
- **Reconnaitre l'écriture complexe d'une rotation**
- **Reconnaitre l'écriture complexe d'une similitude directe**

EXERCICE 1

Déterminer en justifiant la nature des transformations du plan suivantes :

a) $z' = z + 1 - 2i$; **b)** $z' = iz + 1$; **c)** $z' = 3z - 1 + i$ **d)** $z' = (1+i)z - 1 + i$

EXERCICE 2

Déterminer l'écriture complexe des transformations suivantes :

a) Translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $-2+3i$.

b) Rotation de centre A d'affixe $-i$ et d'angle $\frac{3\pi}{4}$.

c) Homothétie de centre A d'affixe $-1+i$ et de rapport $\frac{1}{2}$.

d) Similitude directe de centre A d'affixe – 2, de rapport 2 et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$

EXERCICE 3

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'écriture complexe de la similitude directe de centre ω, de rapport τ et d'angle θ.

a) $\omega = 0, \quad \tau = 2, \quad et \ \theta = \frac{\pi}{6}$ **b)** $\omega(1\,,0), \quad \tau = \sqrt{2}, \quad et \ \theta = \frac{\pi}{2}$

c) $\omega(2\,,-1), \quad \tau = 1, \quad et \ \theta = \frac{5\pi}{6}$ **d)** $\omega(-1\,,1), \quad \tau = 3, \quad et \ \theta = \mathbf{0}$

Ressource 2 : Déterminer les éléments numériques et les éléments géométriques qui caractérisent une similitude directe du plan à partir de son écriture complexe.

🕮 EXERCICE 1 **:**

Déterminer les éléments caractéristiques de chaque transformation du plan suivante :

a) $z' = 3iz - 9 - 3i$ **b)** $z' = (\sqrt{3} + i)z$ **c)** $z' = (\sqrt{3} - i)z + 1 + i(\sqrt{3} - 1)$

d) $z' = -2z + i$ **e)** $z' = \frac{3+i\sqrt{3}}{4}z + \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$

🕮 EXERCICE 2 **:**

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'écriture complexe, puis la nature et les éléments caractéristiques des transformations $s_2 O s_1$ et $s_1 O s_2$.

a) $s_1 : z' = 2iz + 1 - 2i$ **et** $s_2 : z' = \frac{1}{2}iz + 1 - \frac{1}{2}i$

b) $s_1 : z' = (1 - i)z + 1 + i$ **et** $s_2 : z' = -2z$

✓ **Ressource 3** : **Passer de l'écriture analytique à l'écriture complexe d'une similitude directe du plan.**

🕮 EXERCICE 1 **:**

Soit f l'application du plan dans lui-même d'expression analytique $\begin{cases} x' = x + y + 2 \\ y' = -x + y + 1 \end{cases}$

a) Déterminer l'écriture complexe de f.
b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.

🕮 EXERCICE 2 :

Soit s l'application du plan dans lui-même d'expression analytique $\begin{cases} x' = x - y\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \\ y' = x\sqrt{3} + y - \sqrt{3} \end{cases}$

a) Déterminer l'écriture complexe de s.
b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de s.

🕮 EXERCICE 3:

Soit t l'application du plan dans lui-même d'expression analytique $\begin{cases} x' = -3y - 1 \\ y' = 3x - 7 \end{cases}$

a) Déterminer l'écriture complexe de t.
b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de t.

Resource 4 : **Passer de l'écriture complexe à l'écriture analytique d'une similitude directe du plan.**

🕮 EXERCICE :

Déterminer les expressions analytiques des transformations suivantes.

$\boldsymbol{a})\ \boldsymbol{z' = z + 3i}$ **b)** $\boldsymbol{z' = z - 3i}$ **c)** $\boldsymbol{z' = 21z}$

d) $\boldsymbol{z' = 2z + 3i}$ **e)** $\boldsymbol{z' = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}z}$

✓ **Resource 5** : **Déterminer l'image par une similitude directe d'une droite.**

🕮 **EXERCICE 1 :**

Dans le plan complexe, on considère les A et C d'affixe respectives $-1 + i\sqrt{3}$ et $-1 - i\sqrt{3}$ et l'application f définie par $z' = e^{2i\frac{\pi}{3}}z$

a) Déterminer les images des points A et C par f.
b) En déduire l'équation de limage de la droite (AC).

🕮 **EXERCICE 2 :**

Soit le plan muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{u}, \vec{v})$, Ω est le point de coordonnées (2,1), S est la similitude de centre Ω e, de rayon $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$, D est la droite d'équation $3x + 3y - 4 = 0$.

a) Soit M(x, y) un point du plan et M'(x', y') son image par S. Exprimer x' et y' en fonction de $x\ et\ y$.
b) En déduire l'équation de D' image de D par S.

✓ **Resource 6** : **Déterminer l'image par une similitude directe d'un cercle.**

🕮 **EXERCICE 1 :**

Soit le plan muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{u}, \vec{v})$, on considère S la similitude directe d'écriture complexe : $z' = 3iz - 9 - 3i$, déterminer l'image par S de :

a) Du cercle de centre K$(1 - 3i)$ et de rayon 1 .
b) La droite D d'équation $= 1$.

🕮 **EXERCICE 2 :**

Soit le plan muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{u}, \vec{v})$, Ω est le point de coordonnées (2,1), S est la similitude de centre Ω e, de rayon $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$, C le cercle de centre O et de rayon 3.

c) Soit M(x, y) un point du plan et M'(x', y') son image par S. Exprimer x' et y' en fonction de $x\ et\ y$.
d) En déduire l'équation de C' image de C par S.

II. Exercices de consolidation

🕮 **Exercice 1** :

Dans le plan complexe, on considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$Z_A = 2i$, $Z_B = -\sqrt{3} + 2i$ et $Z_C = -2\sqrt{3} - i$

a) Donner l'écriture complexe de la similitude directe qui transforme le point A en B et le pont B en C.
b) Déterminer l'affixe du centre, dub rapport et de l'angle de cette similitude.

🕮 **Exercice 2** :

A et B sont deux points d'affixes respectives $Z_A = 3i$ et $Z_B = 4 + i$, on note r la rotation qui laissera le point A invariant et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1) Montrer que l'écriture complexe de r est $\boldsymbol{z' = iz + 3 + 3i}$ **.**
2) r(B) =C. Montrer que $Z_C = 2 + 7i$.
3) Montrer que le triangle ABC est rectangle isocèle en A.
4) D est le milieu du segment $[AC]$, h est la transformation du plan dans lui-même dont l'écriture complexe est $\boldsymbol{z' = \frac{1}{2}z + \frac{3}{2}i}$ **.**
   a) Vérifier que h(C)=D
   b) Exprimer $\boldsymbol{z' - 3i}$ **en fonction** $\boldsymbol{z - 3i}$ **et en déduire la nature et les éléments caractéristiques de h.**
5) S est la similitude directe de centre A, de rapport $\boldsymbol{\frac{1}{2}}$ **et d'angle** $\frac{\pi}{2}$. En déduire l'écriture complexe de S.

🕮 **Exercice 3** :

Le plan complexe est rapporté à un repère ortho normal $(o, \vec{u}, \vec{v})$. On donne trois points A, B et C d'affixes respectives $Z_A = -1 - i$, $Z_B = 2 - i$ et $Z_C = -1 + 2i$

On considère la similitude directe S de centre B qui transforme A en C.

a) Déterminer le rapport et l'angle de la similitude S.
b) Donner l'écriture complexe de la similitude S.
c) © est le cercle circonscrit au triangle ABC, déterminer les caractéristiques de ©' image de © par S.

🕮 **Exercice 4**:

On considère les points φ et A d'affixes respectives $\boldsymbol{2 + 3i}$ **et** $-2 + 2i$ puis la transformation s du plan d'expression analytique $\begin{cases} x' = -2x - 2y + 11 \\ y' = 2x - 2y + 5 \end{cases}$.

a) Démontrer que l'affixe du pont B tel que le triangle B φA soit rectangle isocèle en A et de sens direct est $= -1 - 2i$.
b) Déterminer l'écriture complexe de s du plan et en déduire la nature et ses éléments caractéristiques.

🕮 **Exercice 5**:

Le plan complexe est rapporté à un repère ortho normal $(o, \vec{u}, \vec{v})$. On donne trois points A et B d'affixes respectives $Z_A = 1 - 3i$, et $Z_B = 6 + 2i$ puis la transformation F du plan dont l'expression analytique est donnée par $\begin{cases} x' = -x + y\sqrt{3} + 1 \\ y' = x\sqrt{3} - y - 2 \end{cases}$

1) Déterminer la nature exacte du triangle OAB.
2) Déterminer l'écriture complexe de la transformation F puis la nature et les éléments caractéristiques.
3) Montrer que le point I d'affixe $\boldsymbol{\frac{7}{2} - \frac{1}{2}i}$ **est milieu du segment** $[AB]$.
4) Soit © l'ensemble des points M d'affixes z tel que $\left|z - \frac{7}{2} + \frac{1}{2}i\right| = \frac{5\sqrt{2}}{2}$
   a) Montrer que le point A appartient à © .
   b) Déterminer la nature puis les éléments caractéristiques de © puis le construire.
   c) Construire l'image ©' de © par la transformation F ci-dessus.

III. Apprentissage à l'intégration

📖 **Exercice 1** :

Sieur YOSSA dispose d'un terrain ayant la forme d'un triangle délimité par trois arbres fruitiers. L'arbre A est repéré par le plan complexe $(o, \vec{u}, \vec{v})$ par son affixe $Z_A = 40 - 30i$ et les deux autres arbres faisant office de bornes son reperés par les points B et C solutions de l'équation complexe (E): $z^2 + (1 + i\sqrt{3})z - 1 = 0$. Il souhaite clôturer son terrain à laide de cinq tours de grillages dont le mètre coute 2 200 FCFA.
Tache 1 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ des nombres complexes (E).
Tache 2 : Calculer les distances qui séparent deux arbres consécutifs puis en déduire la longueur totale.
Tache 3 : Déterminer le montant à prévoir par sieur YOSSA pour clôturer son terrain.

📖 **Exercice 2** :
Monsieur Laurent vient de prendre sa retraite. Il décide d'aller s'installer dans son village natal ; afin d'éviter les ennuis et la nostalgie de la maison, il décide d'exploiter le terrain que ses grands parents ont laissé. Pour éviter tout litige, il veut déplacer un poteau électrique qui jonche son terrain. Ce Poteau est en fait l'image par l'homothétie h de centre O et de rayon $\frac{1}{2}$, du milieu des deux arbustes reperés par les points A et B dont les affixes sont solution de l'équation(E).
$\boldsymbol{z^2 + (3 - 3i)z - 2 - 6i = 0}$ **.**

Tâche 1 : Repérez les deux arbres en trouvant les affixes des points A et B
Tâche 2 : Retrouvez la position exacte du point O.
Tâche 3 : Donnez l'écriture complexe de h.

IV. Activités d'intégration

📖 **Situation 1** :

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(o, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ d'unité 10m.
La cour de la maison de Pierre vérifie l'ensemble C_1 des ponts M du plan tel que $\boldsymbol{z^3 = 8}$**. Il décide de mettre du gazon sur toute la cour. 10 mètres carrées de gazon coutent 15 000 fcfa. Celle de Jacques** vérifie l'ensemble C_2 des ponts M du plan tel que $|4z + 4 - 4i\sqrt{3}| = |2 - 2i|$. Il décide de verser du gravier sur sa cour et un camion de gravier peut recouvrir 314 mètres carrées. Jacques achète le camion de gravier à 70 000 fcfa.
Christophe quant à lui veut entourer sa concession avec du fil barbelé en faisant trois tours autour de la concession. Sa concession vérifie l'ensemble C_3 des ponts M du plan tel que $\boldsymbol{[z^2 + (1 + 6i)z - 10 + 6i][z^2 + (1 - 6i)z - 10 - 6i]} = 0$.
Cinq mètres de fil barbelé coutent 6 000 fcfa.

Tâche 1 : Combien Christophe dépensera-t-il ?
Tâche 2 : Combien Jacques dépensera-t-il ?
Tâche 3 : Combien Pierre dépensera-t-il ?

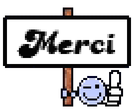
Situation 2 :
M. SOH habite une maison A située du coté droit d'une route D_1 à 20 mètres d'un carrefour de centre O dans un quartier de la ville de Bafoussam (Voir figure 1). Son petit frère Yannick décide de construire à gauche de la route D_2 du même carrefour de telle sorte que l'angle formé par la maison, le point O et la maison de M. SOH soit deux fois ∂ où ($\partial = \frac{\pi}{4}$) et est l'angle formé par les routes D_1 et D_2 .Il veut que la maison soit de même plan et de même forme mais réduite du tiers de celle de M. SOH. La maison de M. SOH est représentée par la figure 2. Le repère qu'il ont choisi est $(o, \vec{u}, \vec{v})$.
Tâche 1 : Expliquez clairement avec schéma à l'appui la procédure à suivre par Yannick pour trouver l'endroit où il doit construire sa maison.
Tâche 2 : Représentez la maison A de M. SOH puis celle B de Yannick en expliquant la méthode utilisée.
Tâche 3 : Donnez l'expression analytique et l'écriture complexe de l'application qui a permis de retrouver le lieu de construction de la maison de Yannick dans le repère$(o, \vec{u}, \vec{v})$ du plan du sol, sachant que le centre dans ce repère est le point $(2; 3)$.

Solution indicative de la compétence 2

Tâche 1 : Pour trouver l'endroit où la maison de Yannick sera construite, nous allons faire une double symétrie orthogonale. La première suivant la droite (D_1) et la deuxième suivant la droite (D_2) . cette double symétrie est par conséquent la rotation de centre θ et d'angle 2∂=2$\frac{\pi}{4}$

Tâche 2 : La représentation des deux maisons se fera en utilisant une homothétie de centre θ et de rapport $k = \frac{1}{3}$

Tâche 3 : L'écriture complexe qui a permis de retrouver la maison de Yannick est celle de la rotation de centre $\theta(2; 3)$ et d'angle 2∂=2$\frac{\pi}{4}$ soit $\frac{\pi}{2}$



« La première règle de la réussite, ne jamais remettre au lendemain l'exécution d'un travail. ».

MINISTÈRE DES ENSEIGNEMENTS SECONDAIRES

LES GRANDPROFS DE MATHS « GPM »

ENSEIGNANT : **Siryle GEUFO**

TEL : **671 97 39 55**

ANNEE SCOLAIRE : 2022-2023

TD : MATHEMATIQUES

CLASSE : T^{le} D&TI

DUREE : ……. HEURES

FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGES

CHAPITRE 11 : LA FONCTION EXPONENTIELLE

Savoir-faire :

- ✓ **Résoudre les équations, inéquations et systèmes faisant intervenir la fonction exponentielle.**
- ✓ **Calculer des limites de certaines fonctions faisant intervenir la fonction exponentielle**
- ✓ **Calculer les dérivées de certaines fonctions faisant intervenir la fonction exponentielle**
- ✓ **Déterminer les primitives sur un intervalle de $\mathbb{R}$ de certaines fonctions faisant intervenir la fonction exponentielle.**
- ✓ **Représenter graphiquement les fonctions faisant intervenir la fonction exponentielle**

I- Exercices de fixation

Ressource 1 : Equations et inéquations avec la fonction exponentielle

EXERCICE 1 :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

a) $e^{\sin x} = e^{\frac{1}{2}}$; b) $e^{x^2} \leq \frac{1}{e^2}$; c) $e^x \leq \frac{1}{e^x}$; d) $e^{2x} < e^x$; e) $3e^{2x} + e^x - 4 < 0$;

f) $2e^{-x} = \frac{1}{e^x+2}$; g) $(e^x - 1)e^x > e^x - 1$; h) $e^{-2x} - 5e^{-x} + 6 = 0$; i) $e^{2x} - 5e^x + 4 = 0$;

2. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants : $\begin{cases} e^x - \frac{1}{e}e^y = 1 \\ 2e^x + e^y = 4 + e \end{cases}$; $\begin{cases} x + y = 1 \\ 3e^x - e^{y+3} - 2e^2 = 0 \end{cases}$

Ressource 2 : Calcul des limites

EXERCICE 2 :

Dans chacun des cas suivants calculer les limites :

a) $\lim_{x\to0^+} e^x \ln x$ b) $\lim_{x\to-\infty} e^{-x}$; c) $\lim_{x\to+\infty} e^{-x^5+3x^3-1}$; d) $\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}}$;
e) $\lim_{x\to0^+} e^{\frac{1}{x}}$

f) $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{3x}}{e^{6+4x}}$; **g)** $\lim_{x\to+\infty}(e^{4x}-e^{2x})$; **h)** $\lim_{x\to-\infty} xe^{-x}$; **i)** $\lim_{x\to+\infty} xe^{-x}$;
j) $\lim_{x\to+\infty}(x-e^{2x})$
k) $\lim_{x\to-\infty}(x-e^{2x})$ **l)** $\lim_{x\to0^+} e^{-x}\ln x$; **m)** $\lim_{x\to+\infty} e^{-x}\ln x$; **n)** $\lim_{x\to+\infty}\frac{3e^{x}-2}{e^{x}+2}$;
o) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2}{x}e^{x}$

Resource 3 : Calcul des dérivées

🕮 **EXERCICE 3:**

Dans chacun des cas suivants déterminer la dérivé de fonction numérique d'une variable réelle f sur l'intervalle I indiqué :

a) $f(x)=(x^2-2x)e^{x}\,;I=\mathbb{R}$ **b)** $f(x)=\frac{1}{x}e^{x}\,;I=\mathbb{R}\backslash\{0\};$ **c)** $f(x)=\frac{e^{x}}{e^{x}-x}\,;I=\mathbb{R}$;
d) $f(x)=xe^{\frac{1}{x}}\,;I=\mathbb{R}\backslash\{0\};$ **e)**$f(x)=(\cos x)e^{\sin x}$ $I=\mathbb{R}$ **f)** $f(x)=e^{\frac{x+1}{x^2+2}}\,;I=\mathbb{R}$

g) $f(x)=e^{-x}\ln x\,;I=]0,+\infty[;$ **h)** $f(x)=e^{x\ln x};I=]0,+\infty[;$

✍ **Resource 4** : Calcul des primitives

🕮 **EXERCICE 4:**

Donner une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f dans chacun des cas suivants :

a) $f(x)=e^{3x-5}$ **b)** $f(x)=(-2x+3)e^{-x^2+3x}$; **c)** $f(x)=6x^4e^{3x^5}$;
d) $f(x)=\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$; **e)**$f(x)=(\cos x)e^{\sin x}$ **f)** $f(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$;

✍ **Resource 5** : Représenter graphiquement une fonction comportant l'exponentielle

🕮 **EXERCICE 4:**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $(x)=\frac{e^{x}+1}{e^{x}-1}+x-1$, (C) sa courbe représentative et D_f son domaine de définition.

1. Justifie que $D_f=\mathbb{R}^*$.
2. Justifie que le point $I(0;-1)$ est centre de symétrie de (C).
3. Montre que pour tout x de (D_f), $f(x)-(x-2)=\frac{2}{1-e^{-x}}$.
4. Justifie que la droite $(D_1): y=x-2$ est asymptote à (C).
5. Justifie que la courbe (C) est au-dessous de (D_1) sur $]-\infty;0[$.
6. Justifie que la droite $(D_2): y=x$ est asymptote à (C).
7. Justifie que l'axe des ordonnées est asymptote à (C).
8. Montre que pour tout x de (D_f), $f'(x)=\frac{e^{2x}-4e^{x}+1}{(e^{x}-1)^2}$.
9. Dresse le tableau de variation de f.
10. Construis la courbe (C).

II- Exercices de consolidation

📖 **Exercice 1** :

On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=x^2e^{-x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ d'unité $1cm$ en abscisses et $4cm$ en ordonnées.

1. a. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
   b. Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation
   c. Construire (C) dans le repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
2. a. Déterminer les réels a, b et c pour que la fonction F définie par $F(x)=(ax^2+bx+c)e^{-x}$ soit une primitive de f.
   b. soit λ un réel strictement positif. Calculer le réel $\int_0^\lambda f(x)dx$.
   c. $A(\lambda)$ est l'aire du domaine plan délimité par la courbe de f et l'axe des abscisses d'une part, les droites d'équations $x=0$ et $x=\lambda$ d'autre part. déterminer $A(\lambda)$ et calculer $\lim_{x\to+\infty} A(\lambda)$.

📖 **Exercice 2** :

Partie 1 :

Soit la fonction $g$définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=1+(1-x)e^{-x}$.

1. Calculer $g'(x)$ et dresser le tableau de variation de g.
2. Montrer que pour tout réel $x, g(x)\geq 1-e^2$.
3. En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Partie 2 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x-1+xe^{-x}$ et on note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Montrer que la droite (D) d'équation $y=x-1$est asymptote à (C) à $+\infty$puis étudier les positions de (C) par rapport à cette droite.
3. Calculer la limite en $-\infty$ de $\frac{f(x)}{x}$. Que peut-on en déduire ?
4. Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f.
5. a. Montrer que l'équation$f(x)=0$ admet une solution unique β.
   b. Vérifier que $0{,}6<\beta<0{,}7$.
6. Tracer (C). ***(unité sur axes :1cm)***

Partie 3 :

1. Déterminer à l'aide d'une intégration par parties les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction h définie par $h(x)=xe^{-x}$.
2. Soit t un réel strictement positif. On note $A(t)$ l'aire de la potion du plan limitée par la courbe de f, la droite (D) et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=t$.
   a. Calculer $A(t)$
   b. Calculer $\lim_{x\to+\infty} A(t)$.

III- Activités d'intégration

Situation 1 :

Un biologiste sait que la population féline d'une ville croît selon une fonction exponentielle du type $q(t) = q_0 e^{it}$ où t représente le temps. Une enquête faite il y a 10 ans montre qu'il y avait alors 2500 chats. Aujourd'hui on sait qu'il y a 18200 chats. Ces chats seraient à l'origine d'une infection (l'infection aux Bartonella, aussi connue sous le nom de « maladie des griffes du chat »).

Pierre, un habitant de cette ville a contracté cette maladie. Le nombre de bactéries contenues dans son organisme en fonction du temps (en heure) a été modélisé par la fonction f définie sur [0,10] par $f(x) = 5000 \times 1{,}15^x$.

Pour lutter contre les bactéries, un laboratoire fabrique des kits de désinfection. Le coût total de fabrication, en millions de francs, de x centaines de kits est modélisé par la fonction C définie par $C(x) = 0{,}5 + e^{-0{,}5x+0{,}4}$.

Tâche 1 : dans combien de temps la population féline de cette ville sera-t-elle de $49\,100$ chats ?

Tâche2 : Au bout de combien de temps le nombre de bactéries a-t-il doublé ?

Tâche3 : Quel nombre de kits faut-il pour que le coût total de fabrication soit minimum ?

Situation 2 :

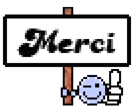
Une société de fabrication des moteurs vend des moteurs dont le coût est donné par la fonction $m(x) = 2x + 1 - xe^{x-1}$ où x est le nombre de moteurs et $m(x)$ le montant tout taxe compris. On admet que cette société ne peut vendre qu'une quantité de moteurs comprise entre $]0;5]$ par jour et $m(x)$ est exprimé en millions de de francs. M KOUDJOU achète un moteur dans cette société qu'il fait monter dans sa voiture ; par la suite il veut se rendre dans une station la plus proche de la société, mais ne connaissant pas le trajet ; le vendeur lui indique que pour arriver à la station le trajet est donné par la fonction $t(x) = xe^{-x} + 2x$ où $x \in [0;5]$.

Au cours d'un jour d'activité, le vendeur de moteur de cette société constate qu'après son premier moteur vendu à 2 millions de francs, le reste des ventes suit une progression géométrique de raison e. A la fin de cette journée il réalise une recette de 63 millions de francs.

Tâche 1 : Quel est le coût maximal de production de moteur dans cette entreprisse ?

Tâche2 : Représenter par un schéma le trajet à suivre par M KOUDJOU pour arriver à la station.

Tâche3 : Combien de voiture cette entreprise a-t-elle vendue le jour où elle a réalisé une recette de 63 millions de francs ?



« La première règle de la réussite, ne jamais remettre au lendemain l'exécution d'un travail. ».

MINISTÈRE DES ENSEIGNEMENTS SECONDAIRES
LES GRANDPROFS DE MATHS « GPM »
ENSEIGNANT : TCHIO SERGE
TEL : 676 27 39 40 // 695 81 00 26

ANNEE SCOLAIRE : 2022-2023
TD : MATHEMATIQUES
CLASSE : T^{LE} D
DUREE : ……. HEURES

FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGES

CHAPITRE 12: CALCUL INTEGRAL

Savoir-faire :

- ✓ **Calculer l'intégrale d'une fonction usuelle.**
- ✓ **Calculer l'intégrale d'une somme de plusieurs fonctions et/ou d'un produit d'une fonction par un réel.**
- ✓ **Donner le signe de $\int_a^b f(x)dx$ sur $[a,b]$ à partir de celui de f.**
- ✓ **Etudier le sens de variation des fonctions $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ sur un intervalle contenant a et sur lequel f est continue sans utiliser une primitive de f.**
- ✓ **Calculer l'intégrale d'une valeur absolue.**
- ✓ **Déterminer la valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle.**
- ✓ **Calculer une intégrale par l'utilisation directe des primitives, par une intégration par parties, par un changement de variable affine.**
- ✓ **Utiliser le calcul d'intégrales dans la détermination des aires, de volumes.**
- ✓ **Déterminer une valeur approchée d'une intégrale par la méthode des rectangles.**

I. Questions de cours

1. Si F est une primitive de f sur un intervalle I, alors pour tous éléments a et b de I, $\int_a^b f(x)dx = \cdots$

2. Répondre par vrai ou faux aux affirmations suivantes, justifier si possible celles qui sont fausses

a. L'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ est indépendante de la primitive choisie.

b. $\int_1^2 \frac{1}{x}\, dx = [\ln x + 2]_1^2$

c. $\int_1^2 \ln t\, dt = \int_2^1 \ln\left(\frac{1}{t}\right)\, dt$

d. Si f et g sont deux fonctions continues sur $[a,b]$ alors $\int_a^b (f \times g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx \times \int_a^b g(x)dx$

e. Si $\int_a^b f(x)dx \geq 0$, alors la fonction f est positive sur $[a,b]$.

f. Si F est une fonction telle que $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ alors pour tout $x > a$, $F'(x) = f(x)$

3. Donner une interprétation géométrique de $I = \int_a^b f(x)dx$

4. Enoncer la relation de Chasles sur les intégrales et l'inégalité de la moyenne.

II. Exercices de fixation

✍ Ressource 1 : **Calcul direct à l'aide d'une primitive**

📖 **EXERCICE :**

Calculer chacune des intégrales suivantes en utilisant une primitive usuelle :

$$A = \int_{-1}^{2} (2t^2 - 3t + 1)dt$$

$$B = \int_{1}^{4} \frac{x^3 + 2x^2 + 4x - 1}{x^2} dx$$

$$C = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t \, dt$$

$$D = \int_{0}^{1} \frac{t^2}{(t^3 + 1)^2} \, dt$$

$$E = \int_{0}^{1} e^x(e^x - 1)dx$$

$$F = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos^4 t \, dt$$

$$G = \int_{e}^{e^2} \frac{dt}{tlnt}$$

$$H = \int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{\sin 2t}{\cos t} \, dt$$

$$I = \int_{0}^{1} \frac{1}{1 + e^x} \, dx$$

$$K = \int_{-1}^{0} u\sqrt{u^2+1}\,du$$

✍ Ressource 2 : **Linéarisation – Chasles – Comparaison**

📖 **EXERCICE :**

1. Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{x+1} + \int_1^2 \frac{dx}{x+1} + \int_2^3 \frac{dx}{x+1}$$

$$J = \int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx$$

$$K = \int_{-1}^{2} |2x+1|dx$$

$$L = \int_1^2 \left(-2e^x + \frac{4}{x}\right)dx$$

2. Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$

a. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $\frac{x^2}{2} \leq f(x) \leq x^2$

b. En déduire un encadrement de $I = \int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx$

3. On se propose de donner un encadrement de $A = \int_1^3 \ln(1+t^2)\ dt$

a. Etudier les variations de la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x^2)$ sur l'intervalle $[1,3]$

b. En déduire un encadrement de A.

✍ Resource 3 : **Calcul d'une intégrale à l'aide d'une intégration par parties**

📖 **EXERCICE :**

A l'aide d'une intégration par parties, calculer chacune des intégrales suivantes :

$$A = \int_1^2 x\ln x\,dx$$

$$B = \int_0^1 (2x-1)e^x\,dx$$

$$C = \int_0^{\pi} e^{2x}\sin x\,dx$$

$$D = \int_{1}^{2} (2-x)e^{-x}\,dx$$

✍ **Resource 4** : **Calcul d'une intégrale à l'aide d'un changement affine**

🕮 **EXERCICE :**

1. Calculer les intégrales suivantes en utilisant un changement affine :

$$A = \int_{0}^{1} x\sqrt{x+1}\,dx$$

$$B = \int_{1}^{2} \frac{2t}{(t+1)^2}\,dt$$

$$C = \int_{-3}^{0} \frac{x}{\sqrt{1-x}}\,dx$$

2. En utilisant un changement de variable affine, justifier l'égalité suivante :

$$\int_{-2}^{-1} \ln(-x)\,dx = \int_{1}^{2} \ln u\,du$$

✍ **Resource 5** : **Valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle**

🕮 **EXERCICE :**

1. Calculer la valeur moyenne de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle indiqué :

a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ sur $I = [0, 8]$

b) $f(x) = \cos x$ sur $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

c) $f(x) = \frac{x}{(x^2-3)^2}$ sur $I = [e\,, 4]$

2. On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x$

Déterminer la valeur du réel c tel que $f(c)$ soit la valeur moyenne de f sur $[1, 3]$.

✍ **Resource 6** : **Intégration des fonctions particulières**

🕮 **EXERCICE 1 : Intégrale de fonctions rationnelles**

1. a. Déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout $x \neq -2$, $\frac{2x^2+3x}{x+2} = ax + b + \frac{c}{x+2}$

b. En déduire le calcul de $A = \int_0^2 \frac{2x^2+3x}{x+2}\,dx$

2. Déterminer deux réels a et b tels que $\forall x > 1$, $\frac{x}{(x-1)^4} = \frac{a}{(x-1)^3} + \frac{b}{(x-1)^4}$ puis en déduire le calcul de $B = \int_2^3 \frac{x}{(x-1)^4}\,dx$

3. a. Déterminer les réels a, b et c tels que $\frac{1}{x(x^2-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}$

b. En déduire une primitive de $f : x \mapsto \frac{x}{x(x^2-1\,)}$

c. A l'aide d'une intégration par parties, calculer $I = \int_2^3 \frac{x\ln x}{(x^2-1)^2}\,dx$

4. a. Déterminer a et b tels que $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$

b. Calculer $\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)}\,dx$

c. En utilisant une intégration par parties, calculer $I = \int_1^2 \frac{\ln x}{(1+x)^2}\,dx$ (remarquer que $\left(\frac{1}{x+1}\right)' = \frac{1}{(x+1)^2}$)

📖 **EXERCICE 2 : Intégrale de fonctions trigonométriques**

1. Calculer chacune des intégrales suivantes :

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\,dx$$

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x\,dx$$

2. Démontrer que $\cos^5 x = \cos x(1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x)$ et déduire le calcul de $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x\,dx$

📖 **EXERCICE 3 : Intégrale – parité – périodicité**

1. Calculer chacune des intégrales suivantes en utilisant la parité ou la périodicité :

$$A = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2t\,dt$$

$$B = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^4 \sin x\,dx$$

$$C = \int_{-3}^{3} \frac{1-e^x}{1+e^x}\,dx$$

$$D = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos 2x\,dx$$

$$E = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \ln\left(\frac{1-x^3}{1+x^3}\right) dx$$

2. En utilisant la parité de la fonction $x \mapsto \ln(\cos x)$, montrer que :

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x)\, dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \ln(1-\sin^2 x)\, dx$$

✍ Resource 7 : **Fonction définie à l'aide d'une intégrale**

📖 **EXERCICE 1 :**

Soit F la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $F(x) = \int_0^x \ln(2+t)\ dt$. Répondre par vrai ou faux

1. $F(0) = \ln 2$
2. $F'(x) = \frac{1}{2+x}$
3. F est une fonction croissante sur $[0,+\infty[$

📖 **EXERCICE 2 :**

F est la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par $F(x) = \int_1^x \frac{5t}{1+t}\ dt$

1. Justifier l'existence de F
2. Calculer $F(1)$
3. Calculer la dérivée F' de la fonction F puis déduire le sens de variation de F

📖 **EXERCICE 3 :**

Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2}\ dt$

1. Justifier l'existence de la fonction f
2. Justifier que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour tout réel $x > 0$
3. Déduire le sens de variation de f

✍ Ressource 8 : **Calculs d'aires et de volumes**

📖 **EXERCICE 1 :**

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O,I,J) tel $OI = 2\ cm$ et $OJ = 1\ cm$. $\left(C_f\right)$ est la représentation graphique de la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2-x+2}{x-2}$

1. Déterminer une équation de la droite (D) sous la forme $y = ax+b$ asymptote à $\left(C_f\right)$.
2. Etudier les positions relatives de $\left(C_f\right)$ et de la droite (D).
3. Calculer l'aire de la partie limitée par $\left(C_f\right)$, la droite (D), les droites d'équations $x = -3$ et $x = -1$

📖 **EXERCICE 2 :**

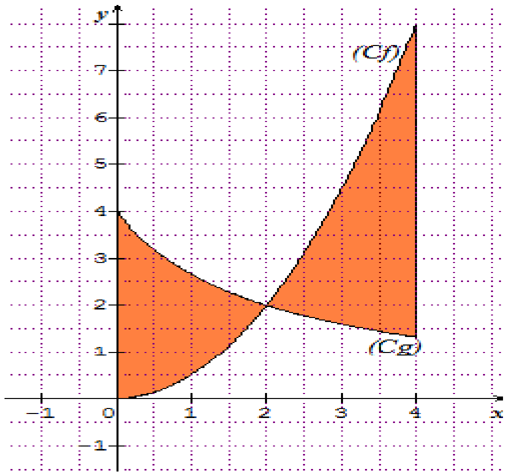
Le repère (O,I,J) est orthonormé. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1-e^x}{1+e^x}$ et $\left(C_f\right)$ désigne sa courbe représentative dans le repère précédent.

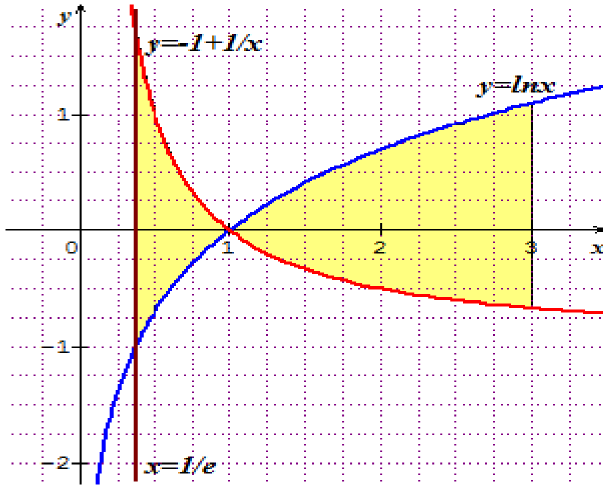
1. Montrer que la fonction f est impaire
2. Etudier la position de $\left(C_f\right)$ et l'axe des abscisses
3. Déterminer toutes les primitives de f

4. Calculer l'aire en unité d'aire, du domaine délimité par (C_f), l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$

📖 **EXERCICE 3 :**

Dans chacun des cas suivants, calculer l'aire de la partie coloriée.





✍ **Ressource 9 : Valeur approchée d'une intégrale**

📖 **EXERCICE :**

En utilisant la méthode des rectangles, déterminer une valeur approchée de $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx$ (on pourra partager l'intervalle $[0,1]$ en 10 intervalles de même amplitude)

III. Exercices de consolidation

(Concevoir des exercices de synthèse mettant en exergue plusieurs ressources, d'un niveau élevé et très élevé, de façon graduelle. on pourra utiliser les QCM, …)

📖 **EXERCICE 1 :**

1. Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{2\ln x}{x^2+x}$

a. Montrer que pour tout $x \geq 1$, $\frac{\ln x}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{\ln x}{x}$

b. Calculer $\int_1^{\frac{3}{2}} \frac{\ln x}{x^2}\,dx$ et déduire un encadrement de $I = \int_1^{\frac{3}{2}} f(x)dx$

2. On donne $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2 x\,dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin^2 x\,dx$

a. Calculer $I + J$

b. En utilisant une intégration par parties, calculer $I - J$ puis déduire les valeurs de I et J

3. On considère les intégrales $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\,dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\,dx$

a. Calculer $I + J$ et $I - J$

b. En déduire les valeurs exactes I et J.

4. On pose $I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}\,dx$ $J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}\,dx$ $K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}\,dx$ et $f(x) = \ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)$

a. Calculer pour tout réel $x \in [0,1]$, $f'(x)$ et en déduire la valeur exacte de I.

b. Sans calculer J et I, montrer que $J + 2I = K$

c. A l'aide d'une intégration par parties sur K, montrer que $K = \sqrt{3} - J$

d. En déduire les valeurs de J et K.

📖 **EXERCICE 2 :**

1. On définit pour tout entier naturel n, $I_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x}\, dx$
   a. Calculer I_1 puis $I_0 + I_1$ et en déduire la valeur de I_0
   b. Calculer pour tout entier naturel n, $I_n + I_{n+1}$
   c. En déduire le sens de variation de la suite (I_n)
   d. Prouver que pour tout réel $x \in [0,1]$, $\frac{e^{nx}}{1+e} \leq \frac{e^{nx}}{1+e^x} \leq \frac{e^{nx}}{2}$
   e. En déduire un encadrement de I_n puis calculer $\lim_n \left(\frac{I_n}{e^n}\right)$
2. On pose pour tout entier naturel n, $u_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x)\, dx$
   a. Calculer u_0 et u_1 à l'aide d'une intégration par parties.
   b. Démontrer que pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}$
   c. En déduire la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$
3. On pose pour tout entier naturel n, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\mathrm{n}} x\, dx$
   a. Calculer I_0, I_1 et I_2
   b. Montrer que pour tout entier naturel n, $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ et déduire les valeurs de I_3 et I_4
4. On définit pour tout entier naturel n la suite (I_n) par $I_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1+t}\, dt$
   a. Calculer I_0 et I_1
   b. Montrer que la suite (I_n) est décroissante
   c. Montrer que pour tout entier naturel n, $I_n > 0$ et déduire que (I_n) est convergente.
   d. Encadrer $\sqrt{1+t}$ sur $[0,1]$ et déduire que $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}$ puis calculer $\lim_n I_n$

IV. Apprentissage à l'intégration

📖 **Exercice 1** :

Une entreprise est équipée de 100 machines toutes identiques. On a constaté que le coût instantané d'entretien d'une machine d'âge x $(0 \leq x \leq 6)$ est donné par $c(x) = \frac{1}{2}e^{0{,}5x}$. Le coût moyen d'entretien d'une machine exprimé en milliers de FCFA depuis son achat et pour une durée t d'utilisation est donné par $c_m(x) = \int_0^t c(x)\, dx$ $(0 \leq t \leq 6)$.

Estimer le coût moyen d'entretien pour toutes les machines de cette entreprise après trois années d'utilisation.

📖 **Exercice 2** :

Dans le cadre de la promotion du tourisme, la communauté de Yaoundé a entrepris la réfection d'une route et la construction d'un musée d'architecture moderne.
La route est modélisable par une portion de la courbe (Γ) de la fonction numérique f de la variable réelle $x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$ telle que $f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}$. L'unité de longueur étant le kilomètre (Km). On

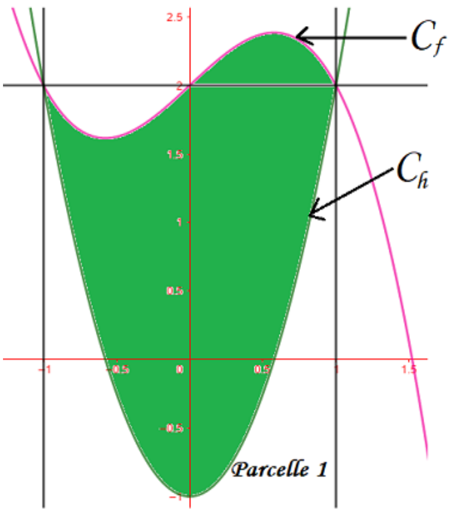
admet que la longueur de cette route est $L = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx$. On estime que 10 mètres de réfection de cette coûtera 300 000 FCFA.

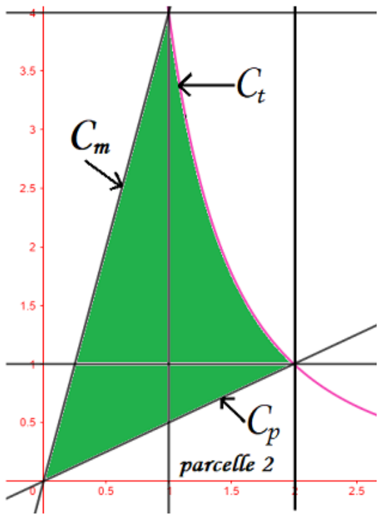
Donner une estimation du coût pour la réfection complète de cette route.

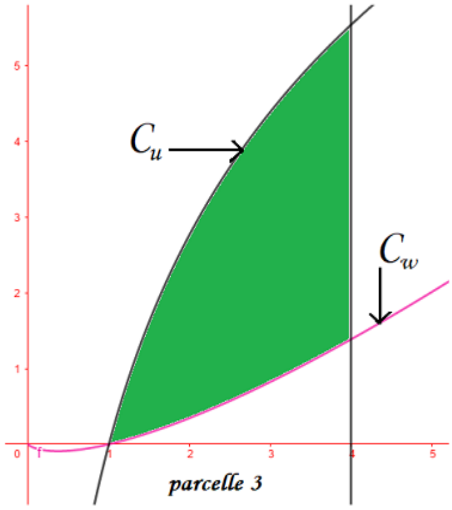
V. Activités d'intégration

🕮 **Situation** :

M. GOUFAN dispose de trois parcelles de terrain comme l'indique les figures ci-dessous. Il souhaite y pratiquer de l'agriculture mais pour cela il doit désherber les lieux car l'herbe a envahi toutes ces 3 parcelles. Il fait donc appel à un groupe de jeunes qui acceptent faire le boulot pour la somme de 100 FCFA par mètre-carré de terrain défriché. Ces parcelles sont représentées dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unité sur les axes 10 m. Les fonctions f, t, w et u sont définies respectivement par $f(x) = -x^3 + x + 2$, $t(x) = \frac{4}{x^2}$, $w(x) = \frac{1}{4}xlnx$ et $u(x) = 4lnx$. (C_h) est la parabole de sommet $S(0, -1)$. (C_m) et (C_p) sont des droites. On prendra $ln4 \cong 1{,}4$.

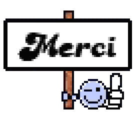






Tâches :

1. Estimer le montant total à dépenser pour le défrichage de la parcelle 1
2. Estimer le montant total à dépenser pour le défrichage de la parcelle 2
3. Estimer le montant total à dépenser pour le défrichage de la parcelle 3



« La première règle de la réussite, ne jamais remettre au lendemain l'exécution d'un travail. ».

MINISTÈRE DES ENSEIGNEMENTS SECONDAIRES
LES GRANDPROFS DE MATHS « GPM »
ENSEIGNANT : *TAGAGOUM* Colince Yanick
TEL :679588972/695165158

ANNEE SCOLAIRE : 2022-2023
TD : MATHEMATIQUES
CLASSE : T[LE] D&TI
DUREE : ……. HEURES

FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGES

CHAPITRE 13 : EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Savoir-faire :

- ✓ **Vérifier qu'une fonction est solution d'une équation différentielle.**
- ✓ **Résoudre une équation différentielle du type : $af' = f$**
- ✓ **Déterminer une équation caractéristique de l'équation différentielle du type : $af'' + bf' + cf = 0$**
- ✓ **Trouver une solution de l'équation $af'' + bf' + cf = d$ à partir de l'équation caractéristique de l'équation $af'' + bf' + cf = 0$**
- ✓ **Déterminer la solution de l'équation différentielle $af'' + bf' + cf = d$ qui obéit à des conditions initiales données.**

I. Exercices de fixation

Ressource 1 : Vérifier qu'une fonction est solution d'une équation différentielle.

EXERCICE :

1) Montrer que la fonction f est solution de l'équation différentielle (E)

(E) :$y" = 16y$	$f(x) = \cos(2x+3)$
(E) :$y" + 3y + 2sinxcosx = 0$	$f(x) = \sin(2x)$
(E) :$y' = y + e^x$	$f(x) = xe^x$
(E) :$y - 2y' + y" = \frac{-e^x}{x^2}$	$f(x) = (lnx)e^x$

Ressource 2 : Résoudre une équation différentielle du type $ay' = y$

EXERCICE :

1- Déterminer l'ensemble des fonctions vérifiant chacune des équations différentielles

a- $y' = 4y$
b- $3y' + 6y = 0$
c- $5y' = y$
d- $-5y' + 2y = 0$

Resource 3 : Déterminer une équation caractéristique de l'équation différentielle du type $ay" + by' + cy = 0$

EXERCICE : Déterminer une équation caractéristique de chacune des équations différentielles suivantes. On déterminera les éventuelles solutions

a- $2y" - 3y' - 2y = 0$
b- $y" + y' + y = 0$

c- $4y" - 4y' + y = 0$
d- $y" - 5y' + 6y = 0$
e- $9y" + 6y' + y = 0$
f- $y" - 3y' + 5y = 0$

Resource 4 : Résoudre une équation différentielle du type $ay" + by' + cy = 0$

EXERCICE

1-) Déterminer l'ensemble des fonctions solutions de chacune des équations différentielles :

i) : $2y" - 3y' - 2y = 0$
ii) :$y" + y' + y = 0$
iii) :$4y" - 4y' + y = 0$
iv) :$y" - 5y' + 6y = 0$
v) $9y" + 6y' + y = 0$
vi) :$y" - 3y' + 5y = 0$

2-) Donner l'ensemble des solutions des ´équations différentielles suivantes :
1. y'' −3y' +2y = 0
2. y'' +2y' +2y = 0
3. y'' −2y' +y = 0

Resource 5 : Trouver une solution de l'équation différentielle du type $ay" + by' + cy = d$

EXERCICE

1-) Résoudre chacune des équations différentielles suivantes :

a- y″−3y′+2y=1 ;
b- y″−2y′+y=x, y(0)=y′(0)=0
c- y″+9y=x+1 , y(0)=0
d- y″+2y′+4y=xe^x, avec y(0)=1 et y(0)=1

II. Exercices de consolidation

(Concevoir des exercices de synthèse mettant en exergue plusieurs ressources, d'un niveau élevé et très élevé, de façon graduelle. on pourra utiliser les QCM, …)

Exercice 1 :

1-)On cherche à résoudre sur R+∗ l'équation déférentielle : (E) :$x^2y''-3xy'+4y=0$.

1. Cette équation est-elle linéaire ? Qu'est-ce qui change par rapport au cours ?
2. Analyse. Soit y une solution de (E) sur R+∗. Pour t ∈ IR, on pose z(t)=y(e^t).
   a- Calculer pour t ∈ IR, z′(t) et z″(t).
   b- En déduire que z vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coéfficients constants que l'on précisera (on pourra poser x=e^t dans(E)).
   c- Résoudre l'équation différentielle trouvée à la question précédente.
   d- En déduire l'ensemble solution de (E)

2-) Trouver une équation différentielle de la forme y ′ = ay + b pour laquelle f est solution.
a) f est la fonction définie sur R par : f(x) = 3e^{-3x}.

b) f est la fonction définie sur R par : f(x) = $3e^{-2x} - 4$

📖 **Exercice 2** :

Soit l'équation différentielle (E) : $y' + 3y = e^{2x}$

1) Déterminer le réel a tel que la fonction p définie sur R par p(x) = ae^{2x} soit une solution particulière de (E).

2) Résoudre sur R l'équation (E).

3) Déterminer la solution de (E) vérifiant y(0) = 1.

III. Apprentissage à l'intégration

📖 **Exercice 1** :

1-)On a étudié l'évolution d'une population de petits rongeurs. La taille de la population, en centaine d'individus, au temps t, en années, est notée g(t). La fonction g, définie de l'intervalle [0 ; +∞[dans R, modèle choisi pour décrire cette évolution , est une solution de l'équation différentielle : (E1) : $y' = \frac{y}{4}$. a) Résoudre l'équation différentielle (E1).

b) Déterminer l'expression de g(t) sachant que à la date t = 0, la population comprend 100 rongeurs, c'est-à-dire g(0) = 1.

c) Après combien d'années la population dépassera-t-elle 300 rongeurs pour la première fois ?

2-) En réalité, dans un secteur observé d'une région donnée, un prédateur empêche une telle croissance en tuant une certaine quantité de rongeurs. On note u(t) le nombre de rongeurs vivants au temps t (exprimé en années) dans cette région, et on admet que la fonction u, ainsi définie, satisfait aux conditions (E2) : $u'(t) = \frac{u(t)}{4} - \frac{u^2(t)}{12}$ $\forall t > 0$ $(u(0) = 1)$

a) On suppose que u ne s'annule pas pour t > 0. Soit la fonction h définie sur [0 ; +∞[par h = $\frac{1}{u}$. Démontrer que la fonction u satisfait aux conditions (E2) si, et seulement si, la fonction h satisfait aux conditions : (E3) : $h'(t) = -\frac{1}{4}h(t) + \frac{1}{12}$ $\forall t > 0$ $(h(0) = 1)$

b) Donner les solutions de l'équation différentielle : $y' = -\frac{1}{4}y + \frac{1}{12}$. En déduire l'expression de la fonction h, puis celle de la fonction u.

c) Dans ce modèle, comment se comporte la taille de la population étudiée lorsque t tend vers +∞

📖 **Exercice 2** :

Dans un circuit (L,R) ;à t = 0, l'intensité i est nulle. La force électromotrice aux bornes du circuit est constante et égale à E.

On sait que l'intensité i(t) est telle que, à l'instant t > 0 on a : $Li'(t) + Ri(t) = E$

1) Résoudre cette équation différentielle. Trouver la fonction i telle que i(0) = 0.

2) Déterminer la limite de i(t) lorsque t tend vers +∞. Commenter ce résultat expérimentalement

IV. Activités d'intégration

📖 **Situation 1** :

Le nombre de bactéries N(t) d'une culture initialement à 600 passe au boût de 2 heures à 1 800. On suppose que le taux de croissance est proportionnel au nombre de bactéries présentes.

a) Donner une équation différentielle qui traduit le problème puis déterminer N(t) à l'aide des conditions imposées.

b) Déterminer le nombre de bactéries après 4 heures.

c) Déterminer le temps t nécessaire pour que le nombre de bactéries dépasse 12 000.

« La première règle de la réussite, ne jamais remettre au lendemain l'exécution d'un travail. ».

MINISTÈRE DES ENSEIGNEMENTS SECONDAIRES
LES GRANDPROFS DE MATHS « GPM »
ENSEIGNANT : ……FOTSA FRANCIS………
TEL : …… 677670770 ……….

ANNEE SCOLAIRE : 2022-2023
TD : MATHEMATIQUES
CLASSE : TLE D&TI
DUREE : ……. HEURES

FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGES
CHAPITRE 14 : ARITHMETIQUES

Savoir-faire :

- ✓ **Utiliser la compatibilité de la relation de congruence avec l'addition et la multiplication pour démontrer les propriétés.**
- ✓ **Utiliser les règles de calcul sur les Congruences pour déterminer le reste d'une division Euclidienne et pour établir les critères de divisibilité en base dix**
- ✓ **Justifier qu'un nombre est Premier ou non**
- ✓ **Déterminer les nombres premiers en utilisant le crible d'Eratosthène.**
- ✓ **Déterminer le PGCD de Deux nombres entiers en Utilisant l'algorithme d'Euclide**
- ✓ **Déterminer le PGCD et le PPCM de deux entiers en Utilisant la décomposition En produit de facteurs premiers.**

.

I. Exercices de fixation

Ressource 1 : Compatibilité de la relation de congruence avec l'addition, la multiplication et démonstration de propriétés

EXERCICE 1:

On considère les nombres a et b tels que a=137 et b=73

7) Choisir la bonne réponse :(i) $a+b\equiv 45(25)$ (ii) $a+b\equiv 10(25)$ (iii) $a+b\equiv 10(25)$ (iv) $a+b\equiv 109(25)$
8) Répondre par vraie ou faux : (i) ab-1 est un multiple de 25 ; (ii) $3a-2b\equiv 15(25)$; (iii) $b^8\equiv 6(25)$ (iv) $a^2+3b^3\equiv 20(25)$

EXERCICE 2:

Utiliser les congruences pour démontrer que pour tout entier naturel n, on a :

1) $n(n^4-1)$ est un multiple de 5
2) $5^{2n}-3^n$ est divisible par 11
3) $3^{2n}-2^n$ est divisible par 7
4) $10^{9n+2}+10^{6n+1}+1$ est divisible par 111
5) $3\times 5^{2n+1}+2^{3n+1}$ est divisible par 17

Ressource 2 : Relation de congruence et reste d'une division Euclidienne/ Critère de divisibilité

EXERCICE 1 :

1) On considère les nombres a et b tels que a=137 et b=73.

En utilisant les congruences, déterminer les restes de divisions euclidienne de a+b ; ab ; 3a-2b et a^2+3b^2 par 25

2) Déterminer le reste de la division euclidienne de $5^{3n}-6^n\ par\ 17$ pour tout entier naturel n

3) Déterminer le reste de la division euclidienne de $451\times 6^{43}-912$ par 7 (on pourra remarquer que $6^{42}\equiv 1[7]$)

4) Soit n un entier naturel. Déterminer suivant les valeurs de n le reste de la division Euclidienne de :

a) 5^n par 13

b) 7^n par 10

c) 6^n par 7

EXERCICE 2 :

1. On donne les nombres 23157, 90244, 34587,72450 et 27015.Sans effectuer la division euclidienne indiquer ceux qui sont multiples de :

   a) 9 b) 11 c) 3 d) 4

2. Déterminer les chiffres x et y tels que le nombre d'écriture décimale 724xy soit multiple de 9

Resource 3 : Nombres premiers

EXERCICE 1 :

1. **Répondre par vrai ou faux**

   a) Les dix premiers nombres premiers sont : 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23

   b) Tout nombre entier naturel non nul et pair est non premier

   c) Tout nombre entier naturel impair et diffèrent de 1 est premier

   d) Tout entier naturel n tel que $n\geq 2$ admet un diviseur premier

   e) Tout entier naturel n tel que $n\geq 2$ qui n'admet aucun diviseur premier inferieur à $\sqrt{n}$ est premier

   f) Il existe une infinité de nombres premiers

2. Vérifier si les nombres suivants sont premiers : 649 ; 1001 ; 1999 ; 2003 ; 71487 ; 257323

3. En vous servant du crible d'Eratosthène dresser la liste des nombres premiers inferieurs à 200

EXERCICE 2 :

1. Démontrer que pour tout entier naturel n tel que : $n\geq 3$, n^2+4n-5 est non premier (On pourra factoriser)

2. a) Pour tout entier naturel n non multiple de 5, le nombre 6n+5 est-il premier ?

   b) Pour tout entier naturel n, le nombre n^2-n+41 est-il premier ?

✍ **Resource 4** : Déterminer le PGCD de deux nombres à l'aide d'algorithme d'Euclide

🕮 EXERCICE

A l'aide de l'algorithme d'Euclide déterminer le PGCD de 2867 et 3431 et le PGCD de 300 et 26

Resource 5 : Déterminer le PGCD et le PPCM de deux entiers naturels en utilisant la décomposition en produit de facteurs premiers

🕮 EXERCICE 1

En utilisant la méthode de la décomposition en facteurs premiers, déterminer le PPCM et le PGCD de :

1) **2867 et 3431**
2) **888 et 558**
3) **46269 et 16854**
4) **-507 et -9991**

🕮 EXERCICE 2

On veut déterminer les entiers naturels n tels que PPCM (n,18)=288

1) Soit $\delta = PGCD(n, 18)$. Montrer que n= 16 δ
2) Dresser la liste des diviseurs de 18
3) En déduire les entiers naturels n tels que PPCM(n, 18)=288

II. Exercices de consolidation

🕮 **Exercice 1** :

1) Soit n un entier naturel non nul. Choisir la bonne réponse pour chacune des deux questions:
   a) Le reste de la division euclidienne n^2+n-1 par n est : (i) -1 ; (ii) n ; (iii) n-1 ; (iv) n+1
   b) Le PGCD de n et n^2+n-1 est : (i) -1 ; (ii) n ; (iii) 3 ; (iv) n-1
2) Déterminer les entiers relatifs a tels que : $600 \leq |a| < 1100$ et PGCD(a, 630)=105

🕮 **Exercice 2** :

On donne les nombre $A=2^n+3^n$ et $B=1098^n+4567^n$ où n est un entier naturel.

1) Déterminer suivant les valeurs de n le reste de la division Euclidienne par 5 de 2^n, 3^n puis de A
2) En déduire les valeurs de n pour lesquelles B est un multiple de 5

🕮 **Exercice 3**

On donne le nombre $E=1+7+7^2+7^3+\ldots7^n$ où n est un entier naturel.

1) Déterminer suivant les valeurs de n le reste de la division Euclidienne par 10 de 7^n puis de E
2) En déduire les chiffres des unités des nombres entiers suivants : $a= 1+7+7^2+7^3+\ldots7^{10}$; $b= 7^2+7^3+\ldots7^{10}$; $c= 7^{1005}+7^{1006}+\ldots7^{1000009}$ et $d=c\times(77)^{'405}$
3) Déterminer les valeurs de n pour lesquelles E est un multiple de 10 sachant que, n est un entier naturel premier de 3 chiffres inférieur à 120

🕮 **Exercice 4**

I. Dire si les nombres suivants sont premiers entre eux dans les cas suivants
   a) 171 et 361

b) -136 et 285
c) 253 et 247

II. Déterminer les entiers naturels a et b dans les cas suivants :
a) PGCD(a,b)= 338 et a+b=3042
b) PPCM(a,b)=4732 et ab=1599416

NB : On pourra chercher d'abord a' et b' premiers entre eux diviseurs respectifs de a et b et de quotient commun PGCD (a,b)

III. Soit n un entier naturel. En vous servant de la congruence, démontrer que :
a) $10^{9n+2} + 10^{6n+1} + 112$ est un multiple de 111
b) $+23^{2n+1} - 8^{2n+1}$ est divisible par 15

Exercice 5

a, b et c sont des entiers relatifs ;

Rappel :

Théorème de Bézout : a et b sont premiers entre eux si et seulement s'ils existent deux entiers x et y tels que ax + by=1

Théorème de Gauss : soient a, b et c trois entiers relatifs. Si c divise ab et est premier avec a alors c divise b

1) Démontrer à l'aide du théorème de Bézout que Si a est premier avec b et avec c alors a est premier avec bc
2) Démontrer à l'aide du théorème de Gauss que si a et b divise c et PGCD (a et b)=1 alors ab divise c
3) (i) En vous servant de l'algorithme d'Euclide, trouver deux entiers a et b tels que 9a+2b=1 puis en déduire PGCD de 2 et 9

(ii) l'écriture décimale d'un nombre est X01Y. Déterminer les chiffres X et Y pour que 18 divise ce nombre
[On pourra utiliser (i) et 2)]

4) Soit n un entier relatif
(i) Justifier que n et n+1 sont premiers entre eux
(ii) En déduire les entiers relatifs n tels que n^2+n divise 2n+6
5) Démontrer que pour tout entier naturel $n, (2n + 1)(7n + 1)$ est divisible par 6
6) Soit n un entier naturel. On donne A= n^5-n
(i) Démontrer que A est multiple de 2, 3, et 5
(ii) En déduire que A est un multiple de 30 [On pourra utiliser 2)]

Exercice 6

On veut résoudrai dans $\mathbb{Z}$ l'équation (E) : $x^2 - 7x + 77 \equiv 0[107]$

1) Soit p un nombre premier, a et b deux entiers relatifs. Montrer que p divise ab si et seulement si p divise a ou p divise b
2) Démontrer que 107 est un nombre premier
3) Montrer que $x^2 - 7x + 77 \equiv 0[107]$ est équivalente à $x^2 - 7x - 30 \equiv 0[107]$
4) Développer $(x + 3)(x - 10)$
5) puis résoudre (E) [On pourra utiliser les questions 1) et 4)]

III. Apprentissage à l'intégration

📖 **Exercice 1**

Trois amis Franck, Loïc et Fernande se rendent régulièrement au marché respectivement après 30 jours, 45 jours et 36 jours pour les achats. Les trois amis se sont rencontrés au marché le 15 Janvier, à quelle date doivent-ils se rencontrer à nouveau pour la seconde fois ?

📖 **Exercice 2**

Atangana est directeur de la banque FYFA. Absent de son poste depuis 10 Mois pour cause maladie, il ne se souvient plus du code du coffre-fort de la banque. Il contacte alors l'informaticien concepteur et celui-ci l'informe que le code en question est un nombre premier de trois chiffres inférieur à 130 et solution de l'équation$x^2 + 2x + 8 \equiv 0[11]$. Retrouver le code en question

…………..

IV. Activités d'intégration

📖 **Situation 1** :

Monsieur Fotsa est un fermier dans la ville de Bandjoun. IL se rend au marché avec 2000 poules. A peine garer son véhicule, 6 clients fidèles se présentent et le dernier des besoins exprimés de ces clients est de 600 poulets. Pour conserver sa clientèle, il effectue un partage équitable des 2000 poules. Mais après ce partage, un 7éme client fidèle se pointe et sollicite le même nombre de poules que les 6 précédents autres clients. Il fait alors recours à son collègue voisin de comptoir pour satisfaire ce dernier client.

Une fois à la maison, il veut déposer sa recette dans son coffre-fort, mais le code l'échappe un tout petit peu. Mais il se rappelle que ce code s'écrit : 25n3 où n est le plus grand entier tel que : $2n + 6 \equiv 0(n - 1)$.

Avant de se coucher en soirée, il demande à son fils le nombre de poules restants à la ferme. Celui-ci de répondre à son père que ce nombre s'écrit en base 7 : X431 et que 6 divise ce nombre en base décimale.

TACHE 1 Déterminer la quantité de poules nécessaire que Monsieur Fotsa doit prendre chez son voisin pour satisfaire le 7éme client.

TACHE 2 Déterminer le code du coffre-fort de Monsieur Fotsa

TACHE 3 Déterminer le nombre de poules restantes à la ferme

📖 **Situation 2** :

Le code ISBN (International Book Standard Number) est un code qui permet d'identifier un livre de façon unique dans le monde entier. Il sert aussi de référence dans les bases de données informatique. Un ISBN est constitué de dix chiffres (a_1 , a_2 , a_3, a_4 , a_5, a_6 , a_7, a_8 , a_9 et E) placés de la gauche vers la droite et repartis en quatre groupe séparés par des tirets. Le premier groupe correspond au pays de l'éditeur, le deuxième groupe est le numéro de l'éditeur, le troisième groupe est celui du livre et le dernier chiffre E est une clé sert à vérifier que l'on n'a pas effectué d'erreur en rentrant le code dans l'ordinateur. On note S= $a_1+2a_2+3a_3+4a_4+\ldots+8a_8+9a_9$ il y'a pas d'erreur lorsque S$\equiv E[11], E$ pouvant être 10 le cas échéant, auquel cas le noté X. Exemple 2-244-00612-3, 0-86623-490-X sont des ISBN.

On désigne par G_2 et G_3 les nombres formés par les chiffres du deuxième et du troisième groupe respectivement. Une maison d'édition est située en zone CEMAC si et seulement si PGCD (G_2,G_3)$\equiv a_1[5]$.

TACHE 1 Un bibliothécaire, lors de la saisie a versé de l'encre sur la feuille et les clés des codes ISBN suivants : 0-7136-6020-**** 2-7562-4970-**** 0-752-49702-**** et 0-19-857505-**** sont invisibles. Retrouver les clés correspondantes.

TACHE 2 Un ISBN est tel que en retirant les tirets, on obtient le nombre : 37008911yz où y et z sont des chiffres. Déterminer les codes possibles sachant que y est un nombre premier.

TACHE 3 Un bibliothécaire voudrait repérer les livres édités dans la zone CEMAC parmi les livres dont les codes sont les suivantes : 4-7136-6020-5 , 2-244-00612-3, 0-86623-490-X. Y-a-t-il parmi ces codes ceux de la zone CEMAC ? Justifier votre démarche.

« La première règle de la réussite, ne jamais remettre au lendemain l'exécution d'un travail. ».

MINISTÈRE DES ENSEIGNEMENTS SECONDAIRES
LES GRANDPROFS DE MATHS « GPM »
ENSEIGNANT : Dgoumtsop Tindo Telesphore
TEL : 676401806 / 694986113

ANNEE SCOLAIRE : 2022-2023
TD : MATHEMATIQUES
CLASSE : T^{le} TI
DUREE : ……. HEURES

FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGES

CHAPITRE 15 : ESPACES VECTORIELS

Savoir-faire :

- ✓ **Traduire la présentation des données par une matrice ;**
- ✓ **Calculer la somme de deux matrices, le produit d'une matrice par un réel, le produit de deux matrices (on pourra ici faire le lien avec les systèmes d'équations dans $\mathbb{R}^2$);**
- ✓ **Calculer le déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2 ;**
- ✓ **Montrer qu'une matrice carrée d'ordre 2 est inversible ;**
- ✓ **Déterminer l'inverse d'une matrice carrée inversible ;**
- ✓ **Résoudre d'autres problèmes tels que les systèmes de deux équations linéaires dans $\mathbb{R}^2$**
- ✓ **Ecrire la matrice d'une application linéaire dans une base donnée ;**
- ✓ **Calculer les coordonnées de l'image d'un vecteur en utilisant un produit de deux matrices ;**
- ✓ **Déterminer la matrice : de la somme de deux applications linéaires ; du produit d'une application linéaire par un réel ; de la composée de deux applications linéaires ;**
- ✓ **Donner la matrice de l'automorphisme réciproque d'un automorphisme du plan**

I. Exercices de fixation

Ressource 1 : Présentation des matrices

EXERCICE 1 :

9) Quelles sont parmi les matrices suivantes celles qui sont égales ? :

(i) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 11 \\ 2 & 6 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$; (ii) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 1 \\ 11 & 3 & 5 \end{pmatrix}$; (iii) $\begin{pmatrix} 5 & 11 & 0 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$; (iv) $\begin{pmatrix} 10/2 & 0 & 11 \\ 2 & 6 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

10) La société Hilton possède trois hôtels (Annecy, Lyon et Mâcon). Chacun d'eux dégage des bénéfices dans trois types d'activité : hôtellerie, restauration et soins du corps. Ces bénéfices apparaissent dans le tableau ci-dessous :

en euros	Hôtellerie	Restauration	Soins du corps
Annecy	21 000	45 000	30 000
Lyon	36 000	150 000	6 000
Mâcon	9 000	90 000	6 000

Traduire ces données par une matrice.

11) Dans une réserve africaine s'ébattent joyeusement 290 grands mammifères : 250 éléphants dont 120 mâles, 36 lions dont les deux tiers sont des lionnes et 4 rhinocéros dont une seule femelle. Traduire ces données sous forme matricielle.

Ressource 2 : Opérations sur les matrices

EXERCICE 2 :

1) Effectuer les additions de matrices suivantes :

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

2) Effectuer les opérations suivantes :

a) $2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; b) $4 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; c) $0 \cdot \begin{pmatrix} 7 & 0 & 3 \\ 1 & -5 & 2 \end{pmatrix}$

EXERCICE 3 :

1) Vérifier les égalités suivantes :

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 13 & 6 \end{pmatrix}$

2) Effectuer les produits suivants de matrices :

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

3) Effectuer les produits de matrices suivantes :

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

📖 **EXERCICE 4 :**

1) Soient a et b deux nombres réels vérifiant l'égalité ci-dessous :
$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -11 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs des réels a et b.
2) Déterminer le déterminant des matrices suivantes :
$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

📖 **EXERCICE 5** :

1) Etablir que chacune des matrices ci-dessous sont inversibles et déterminer l'expression de leurs matrices inverses :
a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
2) Déterminer les inverses des matrices suivantes :
a) $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$
3) Résoudre les systèmes linéaires suivants en utilisant l'écriture matricielle des systèmes :
a) $\begin{cases} x + y = 3 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ x - 3y = 2 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x + 2z = 1 \\ -x + z = 2 \end{cases}$; d) $\begin{cases} z - 3t = 1 \\ -z + t = -1 \end{cases}$

✍ **Resource 3** : Matrice d'une application linéaire dans une base donnée

📖 EXERCICE 6 :

1) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :
$$f\big((x,y,z)\big) = (2x + y + z, -y + z, x + y) \quad ((x,y,z) \in \mathbb{R}^3)$$
   a) Ecrire la matrice de f dans la base canonique.
   b) Calculer les coordonnées des images respectives des vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
2) Soit S et T les deux endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ définis par :
$S(x,y) = (2x - 5y, -3x + 4y)$ et $T(x,y) = (-8y, 7x + y)$.
   a) Déterminer les matrices de S et T dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
   b) Déterminer les applications linéaires $S + T$, $4S$, $-3T$, $S \circ T$, $T \circ S$ et $S \circ S$ ainsi que leurs matrices dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

✍ **Resource 4** : Matrice de la réciproque d'un automorphisme

📖 EXERCICE 7 :

1) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :
$f\big((x,y,z)\big) = (x - z, 2x + y, x + 3y + 2z) \quad ((x,y,z) \in \mathbb{R}^3)$.
Vérifier que c'est un automorphisme puis donner la matrice de son automorphisme réciproque.

II. Exercices de consolidation

(Concevoir des exercices de synthèse mettant en exergue plusieurs ressources, d'un niveau élevé et très élevé, de façon graduelle. on pourra utiliser les QCM, …)

📖 **Exercice 8** :

On considère les deux matrices suivantes :

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

1. Démontrer que : $A \cdot B = 0$
2. Déterminer la matrice produit $B \cdot A$.

Exercice 9 :

On considère les deux matrices suivantes :

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

1. Calculer $A + B$.
2. a. Calculer $(A + B)^2$
   b. Calculer $A^2 + 2 \cdot A \cdot B + B^2$
3. En tenant compte des propriétés algébriques du produit matriciel, donner le développement de l'expression $(A + B)^2$.

Exercice 10 :

Soit A une matrice carrée d'ordre n et la matrice unité I_n d'ordre n.

1. Développer les expressions suivantes :
2. Evaluer chacune de ces deux expressions dans le cas où :
   $n = 2$; $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

III. Apprentissage à l'intégration

Exercice 11 :

1. Soit n un entier naturel non-nul. On considère *A* et *B* deux matrices carrées d'ordre *n* inversible et λ un nombre réel non-nul.
   a. Montrer que le produit $A \cdot B$ est une matrice inversible dont on précisera l'inverse.
   b. Monter que la matrice $\lambda \cdot B$ est une matrice inversible dont on précisera l'inverse.
2. On considère les deux matrices A et B suivantes :

$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

Montrer que la relation suivante est fausse :
$(A + B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$

Exercice 12 :

1. Résoudre de quatre manières différentes le système suivant (par substitution, par la méthode du pivot de Gauss, en inversant la matrice des coefficients, par la formule de Cramer) :

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x + 7y = -2 \end{cases}$$

2. Choisir la méthode qui vous parait la plus rapide pour résoudre, selon les valeurs de a, les systèmes suivants :

$$\begin{cases} ax + y = 2 \\ (a^2 + 1)x + 2ay = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} (a + 1)x + (a - 1)y = 1 \\ (a - 1)x + (a + 1)y = 1 \end{cases}$$

Exercice 13 :

1. Soit la matrice carrée réelle d'ordre deux : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   Calculer A^2, A^3, A^4, et plus généralement A^n pour tout entier naturel non nul n.
2. Trouver toutes les matrices carrées M réelles d'ordre deux telles que :

$M^2 = \begin{pmatrix} -11 & 9 \\ -15 & -14 \end{pmatrix}$.

IV. Activités d'intégration

Situation 1 :

Un concepteur de logiciels fabrique trois logiciels. La conception de chaque logiciel nécessite le passage par trois postes de travail. Le tableau 1 indique le nombre d'heures nécessaires par modèle et par poste pour réaliser les logiciels et le tableau 2 indique le coût horaire par poste de travail.

Tableau 1	Poste 1	Poste 2	Poste 3
Modèle 1	8 h	10 h	14 h
Modèle 2	6 h	6 h	10 h
Modèle 3	12 h	10 h	18 h

Tableau 2	
Poste 1	25 € /h
Poste 2	20 € /h
Poste 3	15 € /h

1- *Soit H et C les deux matrices suivantes :*

$$\mathrm{H} = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 14 \\ 6 & 6 & 10 \\ 12 & 10 & 18 \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{C} = \begin{pmatrix} 25 \\ 20 \\ 15 \end{pmatrix}$$

a. Donner la matrice produit $P=H\times C$

b. Que représentent les coefficients de la matrice $P=H\times C$ *?*

2- *Après une étude de marché, le concepteur souhaite que les prix de revient par modèle soient les suivants : Modèle 1 : 500 € ; Modèle 2 : 350 € ; Modèle 3 : 650 €.*

Il cherche à déterminer les nouveaux coûts horaires par poste, notés a, b *et* c, *permettant d'obtenir ces prix de revient.*

a. Montrer que les réels a, b *et* c *doivent être solutions du système* $\mathrm{H} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 \\ 350 \\ 650 \end{pmatrix}$

b. Déterminer les réels a, b *et* c puis conclure.

Situation 2 :

Une entreprise nécessite chaque année des fournitures de bureau pour faire fonctionner ses départements "*administratifs*" et "*productions*". Le tableau ci-dessous recense ses besoins pour une année en milliers d'unités :

	Rames de feuilles (M_1)	Stylo (M_2)	Tubes de colle (M_3)
Administration (D_1)	3	4	1
Production (D_2)	1	2	3

Un appel d'offres est lancé auquel répondent deux entreprises. Le tableau ci-dessous représente le prix unitaire en euros de chacun des fournitures nécessaires à cette entreprise :

	Rames de feuilles (M_1)	Stylo (M_2)	Tubes de colle (M_3)
Fournisseur PasTropCher (F_1)	2	3	1
Fournisseur BonPrix (F_2)	3	1	2

1. a) Ecrire la matrice $A = (a_{ij})$ où le coefficient a_{ij} est la quantité du matériel M_j nécessaire au département D_i.
   b) Ecrire la matrice $B = (b_{ij})$ où le coefficient b_{ij} est le prix proposé par le fournisseur F_j pour le matériel M_i.
2. Effectuer le produit matriciel suivant : $A.B$.
3. a) Afin de réaliser des économies, quel fournisseur l'entreprise doit choisir ?

c) Pour ce fournisseur, donner le montant de l'achat des fournitures de bureau.

Situation 3 :

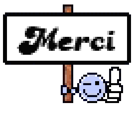
Une entreprise désire fabriquer de nouveaux jouets pour Noël : une poupée B et une poupée K. Elle désire commander les matières premières nécessaires pour la fabrication de ces jouets. On dispose des informations suivantes :

- La fabrication d'une poupée B nécessite 0,094kg de coton biologique, 0,2kg de plastique végétal et 0,4kg de pièces métalliques.
- La fabrication d'une poupée K nécessite 0,08kg de coton biologique, 0,3kg de plastique végétal et 0,1kg de pièces métalliques.

Par ailleurs, l'entreprise a réalisé les prévisions de ventes suivantes :

- Elle pense vendre 1000 poupées B et 800 poupées K en novembre ;
- Elle pense vendre 2500 poupées B et 1200 poupées K en décembre.

1. Disposer les informations obtenues sous la forme de deux tableaux.
2. En effectuant un produit matriciel, déterminer la quantité de coton biologique à commander pour le mois de décembre, la quantité de plastique végétal pour le mois de novembre.



« La première règle de la réussite, ne jamais remettre au lendemain l'exécution d'un travail. ».