

République tunisienne

Année scolaire : 2022-2023

3^{ème} Maths-Sciences

Exercices

Premier Trimestre

Généralités sur les fonctions

Produit scalaire

Continuité

Angles orientés

Limites et continuité

Trigonométrie

Limites et comportement asymptotiques

Rotations

Mr : Hamdi Hssin

Exercice N°1 :

Pour chacune des questions suivantes une seule des réponses proposées est exacte.

Choisir la réponse exacte

I) La fonction f définie sur $[-1, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{3x}{1+|x|}$

- a) est paire ; b) est impaire
- c) n'est ni paire ni impaire

II) Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^2}{|x+1|-|x-1|}$

- 1) Le domaine de définition de f est :
 - a) $] -\infty; -1[\cup]1; +\infty[$; b) $] -1; 1[$; c) \mathbb{R}^*

- 2) La fonction f est :
 - a) Paire ; b) Impaire ;
 - c) Ni paire ni impaire

- 3) L'ensemble de définition de la fonction : $x \rightarrow \sqrt{|4-2x|}$ est :
 - a) $] -\infty, 2]$; b) $[2, +\infty[$; c) \mathbb{R}

III/ 1) Soit f la fonction définie sur $[1, +\infty[$

par : $f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x}}$ alors :

- a) 0 est un minimum de f ; b) 1 est un maximum de f ;
- c) f est bornée.

2) Si g est une fonction impaire tel que :

$g(-2) = 2$ alors :

- a) $g(2) = -2$; b) $g(2) = 2$;
- c) 2 n'admet pas d'image par g

3) La fonction : $x \rightarrow \frac{x^2-1}{|x-2|-1}$ est définie sur :

- a) $\mathbb{R} \setminus \{2\}$; b) $\mathbb{R} \setminus \{1; 3\}$; c) $\mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$

4) L'ensemble de définition de la fonction

$f : x \mapsto \frac{1}{E(x)-2012}$ est :

- a) \mathbb{R}^* ; b) $\mathbb{R} \setminus \{2012\}$;
- c) $] -\infty, 2012[\cup] 2013, +\infty[$

Exercice N°2 :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^2\sqrt{x-2}$

- 1) Vérifier que l'ensemble de définition D_f de la fonction f est $[2; +\infty[$
- 2) Montrer que f croissante sur D_f .
- 3) Soit g la restriction de f sur l'intervalle $[2, 3]$
 - a) Déterminer un encadrement de $g(x)$.
 - b) Montrer alors que g est majoré par 9.
 - c) La fonction g est elle minoré par -1 ? Justifier ?

Exercice N°3 :

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} paire et admet 5 comme minimum absolu sur $[0, +\infty[$.

- 1) Déterminer le signe de $f(x) - 5$ sur $[0, +\infty[$
- 2) Déterminer le signe de $f(x) - 5$ sur \mathbb{R}
- 3) Déterminer le domaine de définition de la fonction g définie par : $g(x) = \sqrt{f(x) - 5}$

Exercice N°4 :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{2}{3}x^2$

- 1) Étudier f et tracer sa courbe représentative (ζ_f) relativement à un repère orthonormé
- 2) En déduire la courbe représentative (ζ_g) de la fonction g qui à x associe $-\frac{2}{3}x^2$
- 3) a) Montrer que la courbe (C_h) de la fonction h définie par $h(x) = 3 - \frac{2}{3}x^2$ se déduit de (ζ_g) par une translation dont on précisera le vecteur
b) Déterminer les coordonnées des points communs à (ζ_f) et (ζ_h)
- 4) a) Tracer la courbe (ζ_k) représentative de la fonction k définie par : $k(x) = \sup(f(x), h(x))$
b) Déterminer suivant les valeurs du réel m le nombre des solutions de l'équation : $k(x) = m$

Exercice N°5 :

On considère la fonction f définie par : $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f
- 2) Étudier la parité de la fonction f
- 3) Démontrer que la fonction f admet un maximum $M = 2$
On pourra déterminer le signe de $[f(x)]^2 - 4$

Exercice N°6 :

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x^2 - 2$

- 1) Étudier la parité de f
- 2) Étudier les sens de variation de f sur $]-\infty, 0]$ et sur $[0, +\infty[$
- 3) Tracer la courbe de f
- 4) Tracer la courbe de (ζ_{-f}) et expliquer comment obtient-on la courbe de (ζ_{-f}) à partir (ζ_f)
- 5) Soit la fonction $g(x) = x^2 + 4x + 5$
 - a) Vérifier que $g(x) = (x + 2)^2 + 1$
 - b) Montrer que g est minorée par 1.
 - c) Montrer que g admet un minimum en $x_0 = -2$.

Exercice N°7 :

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(-x) + 3f(x) = 4x^3 + 2x$$

1) Montrer que f est impaire.

2) a) Expliciter $f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

b) Etudier les variations de f sur \mathbb{R}

3) On pose $g(x) = \frac{1}{\sqrt{f(x)}}$

a) Préciser D_g puis étudier les variations de g

b) Montrer que g est bornée sur $[1, +\infty[$.

4) Soit h la fonction définie par : $h(x) = \frac{x^2}{f(x)}$

a) Déterminer D_h l'ensemble de définition de h
puis étudier la parité de h .

b) Montrer que $\frac{\sqrt{2}}{4}$ est le maximum de h sur D_h ,
Pour quelle valeur est-il atteint ?

c) En déduire le minimum de h sur D_h

d) Résoudre alors $E(h(x)) = 0$ et $E(h(x)) = -1$

Exercice N°8 :

Soit la fonction f définie sur $[-2; 2]$ par : $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$

1) Etudier la parité de f

2) a) Déterminer le signe de $(f(x))^2 - 4$
En déduire que f est bornée sur $[-2, 2]$

b) Montrer que 2 est un maximum de f sur $[-2, 2]$

c) En déduire le minimum de f sur $[-2, 2]$; Justifier

3) a) Montrer que $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 ; f(a) - f(b) = \frac{(a^2-b^2)(4-b^2-a^2)}{a\sqrt{4-a^2}+b\sqrt{4-b^2}}$

b) En déduire les variations de f sur : $[0, \sqrt{2}]$ et
sur $[\sqrt{2}, 2]$

c) En utilisant la parité de f en déduire les
variations de f sur $[-2, 2]$

4) Soit g la fonction définie par : $g(x) = \frac{1}{f(x)}$

a) Déterminer D_g ensemble de définition de g

b) Déterminer les variations de g sur D_g

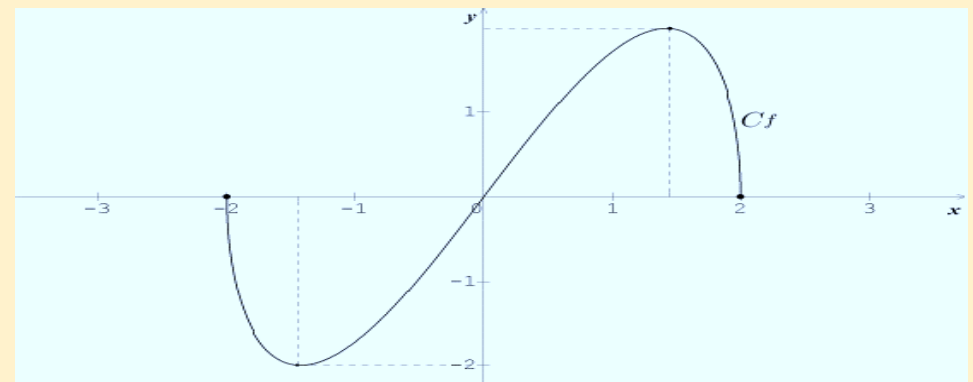
5) On a représenté ci-dessous la courbe de f

a) Déduire la construction des courbes des
fonctions h, k définies sur \mathbb{R} par :

$$h(x) = |f(x)|$$

$$k(x) = f(-x)$$

b) Etudier graphiquement la parité de h et k



Exercice N°9 :

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

- 1) a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; 2|x| \leq x^2 + 1$
b) En déduire que f est bornée sur \mathbb{R}
c) Déterminer les extremums de f
- 2) Soient a et b deux réels distincts
a) Montrer que : $f(a) - f(b) = \frac{2(a-b)(1-ab)}{(a^2+1)(b^2+1)}$
b) En déduire les variations de f sur $[0,1]$ et sur $[1; +\infty[$
- 3) Soit g la fonction définie par : $f(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2+1}$
a) vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $g(x) = f(x) + 1$
b) Expliquer la construction de la courbe de g à partir de la courbe de f

Exercice N°10 :

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{a+|x|}{b|x|+2}$

- 1) Déterminer a et b pour que (ζ_f) passe par les points $A(4,-4)$ et $B(1,5)$
- 2) a) Pour les valeurs trouvées dans 1) déterminer D_f
b) Etudier la parité de f
- 3) Soit g la fonction définie par : $g(x) = x\sqrt{f(x)}$
Déterminer D_g , puis étudier la parité de g

Exercice N°11 :

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1} - |x| + 2x$$

- 1) a) Montrer que f est une fonction affine par intervalles
b) Tracer (ζ_f) , courbe représentation graphique de f dans un repère orthonormé
- 2) Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = -x^2 + 1$
a) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $f(x) = g(x)$
b) Tracer (ζ_g) , courbe représentation graphique de f dans le même repère
c) Résoudre graphiquement l'équation :
$$x^2 + x - 1 = |x| - |x - 1| - x$$
- 3) On donne $\forall x \in]-1; +\infty[; h(x) = \begin{cases} 1 + \frac{x^2 - xE(x)}{x+1} & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Montrer que h est une fonction affine par intervalles

Exercice N°12 :

Soit F la fonction définie par : $F: x \mapsto \sqrt{3 - 2x - x^2}$

- 1) Déterminer l'ensemble de définition D de F
- 2) Montrer que F est décroissante sur $[-1,1]$
- 3) Prouver que F admet un maximum M et un minimum m sur $[-3,1]$ que l'on déterminera.

4) U et V deux fonctions définies sur $[-1,1]$ par :

$$\begin{cases} U(x) = \frac{1}{2}(F(x) + F(-x)) \\ V(x) = \frac{1}{2}(F(x) - F(-x)) \end{cases}$$

Montrer que U est paire et que V est impaire

Exercice N°13 :

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2}$

1) a) Déterminer D_f l'ensemble de définition de f

b) Montrer que f est paire

2) a) Montrer que, pour tout $x \neq 0$, on a : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+1}$

b) En déduire que f est bornées sur D_f

c) Déterminer le sens de variation de f sur $]0, +\infty[$

d) En déduire les variations de f sur $]-\infty; 0[$

3) Soit g une fonction définie par : $g(x) = \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+1} - 2}{x}$

a) Montrer que : $(\forall x > 0) ; g(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x+1}} + \frac{2}{1+\sqrt{2x+1}}$

b) Montrer que g est décroissante sur $]0, +\infty[$

Exercice N°14 :

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = x + \frac{1}{x}$

1) a) Montrer que f est minorée par 2

b) Déduire que $f(x)$ admet un minimum à préciser

c) Montrer que : pour tous réels strictement

$$\text{positifs } a \text{ et } b : f(a) - f(b) = \frac{(a-b)(ab-1)}{ab}$$

d) Déduire les variations de f sur les intervalles $]0,1]$ et $[1, +\infty[$

2) Soit g la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par $g(x) = \sqrt{\frac{x^2+1}{x}}$

a) Montrer que g admet un minimum relatif sur $]0, +\infty[$ à préciser

b) Etudier les variations de f sur les intervalles $]0,1]$ et $[1, +\infty[$

Exercice N°15 :

On donne la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 - 4$

1) a) Etudier la parité de f

b) Etudier les variations de f sur \mathbb{R}_+

En déduire les variations de f sur \mathbb{R}_-

c) En déduire que f admet un minimum

d) Tracer (ζ_f)

2) Soit g la fonction définie par : $g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

a) Déterminer graphiquement l'ensemble de définition de g . Vérifier ce résultat par le calcul

b) Etudier la parité de g

c) Etudier les variations de g sur $[2, +\infty[$

d) Déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < g\left(2 + \frac{1}{n+1}\right) < g\left(2 + \frac{1}{n}\right) \leq \sqrt{5}$

e) Résoudre $E(g(x)) = 0$

3) Soit h la fonction définie par : $h(x) = x^3 - 3x$

a) Etudier la parité de h

b) Etudier les variations de h sur $[-1,0]$ et sur $]-\infty,-1]$

Exercice N°16 :

On donne : $f(x) = \begin{cases} (x-3)^2 - 2 & \text{si } x \geq 0 \\ (x+3)^2 - 2 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} ; x \in \mathbb{R}$

1) Montrer que f est paire.

2) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R};$ on a : $f(x) \geq -2$

3) Etudier les variations de f sur $[0,3]$ puis sur $[3,+\infty[$

Tracer la courbe (ζ_f) de f

Exercice N°17 :

1) Soit la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -x^2 + 2x + 6$

a) Déterminer les variations de f sur $]-\infty,1]$ et sur $[1,+\infty[$.

b) Construire ζ_f dans un repère orthonormé

2) Soit g la fonction sur \mathbb{R}_+ par : $g(x) = -\sqrt{x}$

a) Déterminer le sens de variation de g sur \mathbb{R}_+

b) Soit A le point de (ζ_f) d'abscisse 4

Vérifier que $A \in (\zeta_g)$

c) Construire alors (ζ_g) et résoudre graphiquement :

$$-x^2 + 2x + \sqrt{x} > -6$$

3) Soit $h(x) = \frac{1}{2}(f(x) + g(x)); x \geq 1$

a) Déterminer les variations de h sur D_h .

b) Donner l'allure de (ζ_h)

Exercice N°18 :

On donne : $f(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{si } x \in]-\infty, -1[\\ xE(x) - 1 & \text{si } [-1, 2] \\ -x + 4 & \text{si } x \in]2, +\infty[\end{cases} ; x \in \mathbb{R}$

1) Montrer que f est une fonction affine par intervalle

2) Représenter f dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j})

3) a) Résoudre graphiquement : $f(x) + 1 = 0$

b) Résoudre graphiquement : $f(x) - |x| + 1 \geq 0$

4) Trouver l'expression de g définie par :

- Si $x \in]-\infty, 2]$ alors $(\zeta_g) = t_{-2j}(\zeta_f)$
- Si $x \in]2, +\infty[$ alors $(\zeta_g) = [AB]$ tel que : $A(2, -1), B(4, 0)$.

Exercice N°19 :

On considère les fonctions f et g définie sur \mathbb{R} et tels que : $g(x) = 2f(-x) + f(x) = 2x^4 - x^2$

1) Montrer que g est paire et en déduire que f est paire

2) Déduire l'expression de $f(x)$

Exercice N°20 :

f et g les fonctions définies par :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}; g(x) = \sqrt{x^2 - 1} \quad \text{et la droite } \Delta: y = x$$

1) Identifier (ζ_f) et (ζ_g) sur le graphique ci suit :

2) Etudier la parité des fonctions f et g

3) a) Soit $M(x, y)$ un point du plan et $M'(x', y') = S_{\Delta}(M)$

Exprimer x' et y' en fonction de x et y

b) Montrer que les

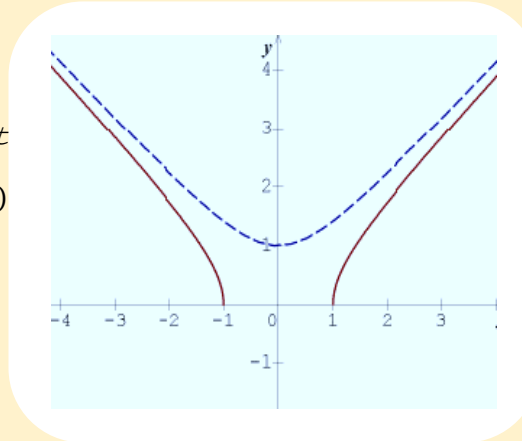
restrictions de (ζ_f)

et (ζ_g) sur \mathbb{R}_+ sont symétriques par rapport à Δ

c) En déduire que les restrictions de (ζ_f) et

(ζ_g) sur \mathbb{R}_+ sont symétriques par rapport à

une droite Δ' que l'on précisera



Exercice N°21 :

1) Montrer que la fonction $u(x) = \frac{3x^2 + 5}{2x^2 + 1}$ est minorée par $\frac{3}{2}$ sur \mathbb{R}

2) Montrer que la fonction $v(x) = \frac{5x}{4x + 8}$ est majorée par $\frac{5}{4}$ sur $]-2, +\infty[$

3) Déterminer un majorant et un minorant de la fonction donnée sur l'intervalle I dans les cas suivants :

a) $f_1(x) = x^3 - 2x + 3; I = [0, 3]$

b) $f_2(x) = x^2 + 6x + 5; I = [-5, 0]$

c) $f_3(x) = \frac{-3}{x-1}; I = [2, +\infty[$ d) $f_4(x) = \frac{2}{x^2+1}; I = \mathbb{R}$

4) Majorer et minorer les fonctions suivantes :

a) $f(x) = \frac{2\sqrt{x}}{1+x}$ sur \mathbb{R} .

b) $g(x) = \frac{1}{1+x^2} \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ sur $[1, +\infty[$

c) $h(x) = \frac{1}{2-\cos x}$ sur $[0, \pi]$

Exercice N°22 :

Soit la fonction telle que $f(x) = x^2 - 12x$

1) Etudier la parité de f sur \mathbb{R} .

2) Déterminer $(\zeta_f) \cap (0x)$ et $(\zeta_f) \cap (0y)$

3) Montrer que f est bornée sur $[0, 2]$

Exercice N°23 :

1) E étant la fonction partie entière ; montrer que pour tout réel y on a : $y - 1 < E(y) \leq y$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit la fonction f_n définie sur

$$\left[\frac{n}{2}, \frac{n+1}{2}\right] \text{ par : } f_n(x) = 1 - xE(x)$$

Déterminer suivant n , la fonction f_n

Continuité

3^{ème} Maths-Sciences

Exercice N°1 :

Soit $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}} - x + 1$

- 1) a) Montrer que f est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$
- b) Montrer que g est continue sur $]0; +\infty[$
- 2) a) Montrer que la fonction $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]1,2[$
- b) Donner un encadrement de α d'amplitude 0,25 près
- c) Vérifier que $\alpha^3 - 2\alpha^2 + \alpha - 1 = 0$.
- 3) Montrer que α est l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$ sur $]0; +\infty[$
- 4) Donner le signe de $f(x)$ sur $]0; +\infty[$

Exercice N°2 :

Soit la fonction définie par $\begin{cases} f(x) = x^2 + 2x & \text{si } x < 1 \\ f(x) = \sqrt{x+3} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de f
- 2) Montrer que la fonction f est continue sur chacun des intervalles : $]-\infty; 1[$ et $[1; +\infty[$.
- 3) a) Tracer la courbe ζ_f courbe représentative de la fonction f dans un rond $(0; \vec{i}, \vec{j})$.
- b) f est-elle continue sur \mathbb{R} .

c) Déterminer les images par f des intervalles

- 4) Soit $g : x \rightarrow \sqrt{x+3} - x$
 - a) Montrer que g est continue sur $[2,3]$.
 - b) Montrer que la fonction $f(x) = x$ admet au moins une solution γ dans $[2,3]$
 - c) Donner une valeur approchée par défaut de γ à 10^{-1} près
 - d) Vérifier que $\gamma^2 - \gamma - 3 = 0$.
 - e) Donner la valeur exacte de γ

Exercice N°3 :

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 & \text{si } 0 < x < 1 \\ x - 1 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

- 1) Tracer (ζ_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé
- 2) Justifier que f est continue sur chacun des intervalles : $]-\infty, 0]$; $]0, 1[$ et $[1; +\infty[$.
- 3) f est-elle continue en 1 ? en 0 ?
- 4) f est-elle continue sur \mathbb{R} ?
- 5) Résoudre graphiquement l'équation : $f(x) = 1$ puis $f(x) = -1$

Exercice N°4 :

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

- 1) a) Déterminer l'ensemble de définition de f
b) Montrer que f est impaire
- 2) Soit g la restriction de f sur $[1; +\infty[$
a) Montrer que $g(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$
b) Montrer que pour tout $x \in [1; +\infty[$; on a : $1 \leq g(x) \leq \sqrt{2}$
- 3) a) Montrer que g est continue sur $[1; +\infty[$
b) Montrer que g est décroissante sur $[1; +\infty[$
c) En déduire $g < [1; 2] >$
- 4) Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet au moins une solution α dans l'intervalle $]1; 2[$
- 5) a) Montrer que α est une solution de l'équation :
$$x^4 - x^2 - 1 = 0$$

b) Donner alors la valeur exacte de α

Exercice N°5 :

- 1) Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par :
$$g(x) = x^3 - x^2 + x - 2$$

a) En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution $\alpha \in]1; 2[$.
b) Vérifier que : $\alpha = \frac{\alpha^2+2}{\alpha^2+1}$
- 2) Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1}$
a) Montrer que f est bornée sur \mathbb{R} .
b) Etudier la parité de la fonction f .

- c) Montrer que f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$
 - d) En déduire le sens de variation de f sur $]-\infty; 0]$.
- 3) Détermine, en justifiant, les images par f des intervalles : $[1; 3]$, $[-3; -1]$ et $[-1; 1]$

Exercice N°6 :

- 1) Montrer que pour tout x de \mathbb{R} ; $\sqrt{x^2+1} + x > 0$
- 2) Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1+x}} - 2x$
a) Déterminer le domaine de définition de f
b) Montrer que f est continue sur \mathbb{R}
c) Montrer que f est décroissante sur $[0; 1]$
- 3) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution $x_0 \in [0; 1]$
b) Donner un encadrement de x_0 à 10^{-1} près
- 4) Déterminer le signe de $f(x)$ pour $x \in [0; 1]$

Exercice N°7 :

On donne : $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x-2)^2 - 3 & \text{si } x \geq -1 \\ |x| - 2|x-2| & \text{si } x \in]-1, 3[; x \text{ réel} \\ 1 + \sqrt{x-3} & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

- 1) Justifier que f est continue sur chacun des intervalles $]-\infty; -1]$; $]-1; 3[$ et $[3; +\infty[$
- 2) a) Tracer dans la courbe représentative de la fonction f
b) A l'aide du graphique, f est-elle continue en -1

c) Déterminer graphiquement par f l'image de chacun des intervalles : $I =]-2; 2[$; $J = [-3; 0]$ et $K = [0; +\infty[$

2) Soit g la restriction de f à l'intervalle $]-1; 3[$

Est-ce que g est minorée ? g admet-elle un minimum

Exercice N°8 :

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \geq 1 \\ x^2 - 1 & \text{si } x \in]-2, -1[\\ x + 1 & \text{si } x \leq 2 \end{cases}$$

1) a) Justifier que f est continue sur chacun des intervalles $]-\infty; -1]$; $]-1; 3[$ et $[3; +\infty[$

b) Tracer dans \mathbb{R} la courbe représentative de f

c) Préciser l'ensemble de continuité de f

2) Le nombre 3 est-il majorant de f ? est-il maximum de f

3) En utilisant le graphique :

a) Déterminer suivant les valeurs du paramètre réel m le nombre de solutions de l'équation $E_m: f(x) = m$

b) Préciser le sens de variation de f

c) Calculer $E(f(x))$ pour tout $x \in [-1; 1]$

Où E est la fonction partie entière

d) Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes

$$G: x \mapsto \sqrt{f(2x)} \quad \text{et} \quad H: x \mapsto \frac{1}{E(f(x))}$$

Exercice N°9 :

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{\frac{1-|x|}{|x|}}$

1) a) Déterminer D_f l'ensemble de définition de f

b) Vérifier que f est paire

2) Montrer que f est continue sur D_f

a) Montrer que f est croissante sur $]0; 1]$

b) En déduire le sens de variation de f sur $[-1, 0[$

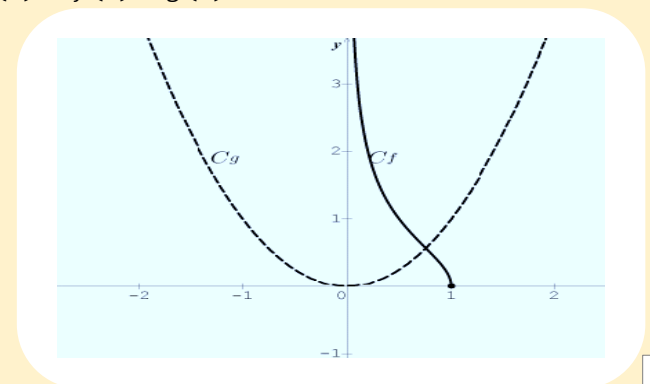
c) Déterminer $f\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right]\right)$ et $f\left(\left[-1; -\frac{1}{2}\right]\right)$

d) Montrer que l'équation $f(x) = x^2$ admet une unique solution a dans $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$

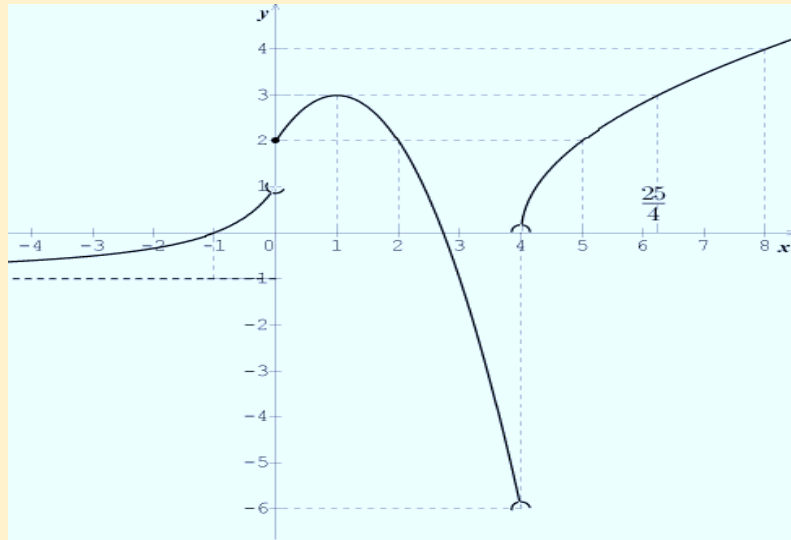
3) On donne ci-dessous une partie de la courbe C_f de la fonction f (en gras) et la représentation graphique de la fonction $g: x \mapsto x^2$ (en pointillée)

a) Compléter la courbe C_f

b) Tracer dans le même repère la courbe représentative de la fonction h définie sur $]0; 1]$ par : $h(x) = f(x) + g(x)$



Exercice N°10 :



I) On a représenté dans la figure ci-avant ζ_f , courbe représentative d'une fonction f définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{4\}$.

1) a) f admet elle un majorant ? un minorant ? sur \mathbb{R}

b) Déterminer le maximum de f sur $[0,3]$

2) f est t- elle continue en 0 ? justifier

3) a) Peut - on parler de la continuité de f en 4 ? Justifier.

b) Déterminer les intervalles sur les quelles f est continue.

c) Montrer que l'équation : $f(x) = 0$ admet une solution α dans $[2;3]$.

d) Déterminer $f <]-\infty; 0[>$; $f <]-\infty; 4[>$ et $f < [0; 1[>$

4) Déterminer les variations de f sur D

5) Résoudre $E(f(x)) = 2$, $E(f(x)) = 3$

Où E désigne la fonction partie entière.

II) On admet que la fonction f est définie par :

$$\begin{cases} -\frac{x+1}{x-1} & \text{si } x < 0 \\ -x^2 + ax + b & \text{si } 0 \leq x < 4 \\ 2\sqrt{x-4} & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

1) Déterminer les réels a et b

2) Etudier la continuité de f sur chacun des intervalles suivants : $]-\infty; 0[$; $[0; 4[$ et $]4; +\infty[$

III) On donne la fonction h définie par $h(x) = f(|x|)$

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction h

2) Montrer que la fonction g est paire.

3) Construire ζ_h courbe représentative de la fonction h

IV) On considère la fonction k définie par $k(x) = \frac{1}{\sqrt{f(x)}}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $k(x)$.

2) Déterminer les variations de la fonction k sur l'intervalle $[1;2]$.

Limites et continuité1^{ère} Maths-SciencesExercice N°1 :

Dans chacun des cas suivants étudier la continuité de la fonction f en a :

$$a) \begin{cases} f(x) = \frac{|x|\sqrt{|x|}}{x} ; (a = 0) \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} f(x) = \sqrt{1+x} - 2 \text{ si } x \neq 3 ; \\ f(3) = 1 \end{cases} ; a = 3$$

$$c) \begin{cases} f(x) = 1 + \sqrt{x} & \text{si } x > 0 \\ f(x) = -1 - \sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \\ f(0) = 1 \end{cases} ; a = 3$$

$$d) \begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{(x-1)^2 - (x-1)^4}}{x-1} & \text{si } x \in]1; 2] \\ f(x) = |x| & \text{si } x \in]-\infty; 1] \end{cases} ; (a = 1)$$

Exercice N°2 :

Dans chacun des cas suivants étudier la continuité de f sur son domaine de définition :

$$a) \begin{cases} f(x) = \sqrt{x+1} & \text{si } x \geq 1 \\ f(x) = \frac{-|x|^3 + x^2}{x+1} & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2 - 1} & \text{si } x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[\\ f(x) = \frac{1-x^2}{1-x^3} & \text{si } x \in [-1; 1[\end{cases}$$

$$c) \begin{cases} f(x) = \frac{-x^2+x}{x^2-1} & \text{si } x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[\\ f(x) = \frac{\sqrt{x^2-x+1}-x}{x-1} & \text{si } x \in [-1; 1[\\ f(1) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Exercice N°3 :

Dans chacun des cas suivants la fonction f est elle prolongeable par continuité en x_0 ?
Si oui, définir ce prolongement.

$$a) f: x \mapsto \frac{|x|-3}{x^2+3x} ; \quad x_0 = -3$$

$$b) f: x \mapsto \frac{x}{x+|x|} ; \quad x_0 = 0$$

$$c) f: x \mapsto \frac{x^2+x-2}{x^2-1} ; \quad x_0 = 1$$

$$d) f: x \mapsto \frac{8x^3-1}{x-|x-1|} ; \quad x_0 = \frac{1}{2}$$

Exercice N°4 :

Soit f la fonction définie par $\begin{cases} f(x) = \frac{x^3-1}{x^2-3x+2} & \text{si } x < 1 \\ f(x) = \sqrt{x^2-3x+2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Montrer que f est continue en 1

Exercice N°5 :

Soit f la fonction définie par $\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} & \text{si } x \neq 3 \\ f(3) = a & (a \text{ réel}) \end{cases}$

Déterminer a pour que f soit continue en 3.

Exercice N°6 :

On considère la fonction f définie par $x \mapsto \frac{\sqrt{x^2+1}+x-1}{x}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f

2) Montrer que f est continue en tout réel non nul

3) a) Montrer que pour tout réel x non nul :

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{x^2+1}-x+1}$$

b) En déduire que f admet un prolongement par

continuité en 0

Exercice N°7 :

Soit f la fonction définie par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{4x+5}-2x-1}{x-x^2} & \text{si } x \neq 1 \\ f(3) = m & (m \text{ réel}) \end{cases}$$

- 1) Déterminer l'ensemble de définition D_f
- 2) Déterminer m pour que f soit continue en 0
- 3) Donner alors suivant les valeurs de m , l'ensemble de continuité de f
- 4) Etudier la continuité de $g(x) = (x-1)^2 \cdot f(x)$ en 1

Exercice N°8 :

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2 - |x|}$

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de f
- 2) Peut-on parler de la continuité de f en 0 ?
- 3) Vérifier que f est continue à droite en 1 et continue à gauche en (-1)

Exercice N°9 :

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}

$$\text{par : } \begin{cases} f(x) = -1 + \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & \text{si } x < 0 \\ f(x) = 1 + \frac{x^2+3x}{x+1} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

- 1) Etudier la continuité de f en 0
- 2) Soit g la fonction définie par $g(x) = |x| \cdot f(x)$
Montrer que g est continue en 0

Exercice N°10 :

Soit la fonction définie

$$\text{par : } \begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2 - x - 6} + ax & \text{si } x \leq -2 \text{ (a paramètre réel)} \\ f(x) = \frac{x+1}{x} & \text{si } -2 < x \leq 2 \\ f(x) = \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de f
- 2) Montrer que f est continue en 2
- 3) Déterminer le réel a pour que f soit continue en -2.

Exercice N°11 :

On donne le tableau de variations de la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x^3 - x^2 - x - 1$

| | | | | |
|--------|-----------|-----------------|----|-----------|
| x | $-\infty$ | $-\frac{1}{3}$ | 1 | $+\infty$ |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $-\frac{22}{7}$ | -2 | $+\infty$ |

- 1) Déterminer $f\left(\left[-\frac{1}{3}; 1\right]\right)$ et $f(]-\infty; 1])$
- 2) a) Montrer qu'il existe un réel $\alpha \in [1; 2]$ tq $f(\alpha) = 0$
b) Vérifier que $\frac{1}{\alpha} = \alpha^2 - \alpha - 1$
- 3) Montrer que pour tout réel x , on a :

$$f(x) = (x - \alpha) \left[x^2 + (\alpha - 1)x + \frac{1}{\alpha} \right]$$

- 4) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\alpha\}$ par :

$$h(x) = \frac{x^3 - x^2 - x - 1}{x - \alpha}$$

Montrer que h est prolongeable par continuité en α et déterminer ce prolongement

Exercice N°12 :

I) Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3 - 3x + \frac{1}{2}$

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution α dans $[0,1]$

II) On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par :

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{\sqrt{2x^2+1}+x-1}{x} & \text{si } 0 < x \leq 2 \quad ; \text{Où } a \text{ paramètre réel} \\ (a^2 - a)x - 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

1) a) Montrer que pour tout $x \in]0;2]$ on a :

$$g(x) = \frac{x+2}{\sqrt{2x^2+1}+x-1}$$

b) Etudier la fonction g en 0.

2) Déterminer les valeurs du paramètre a pour lesquelles la fonction g est continue en 2

3) Sachant que $a = -1$

a) Montrer que la fonction g est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

b) En déduire que la fonction $h: x \mapsto |x|g(x)$ est continue sur \mathbb{R}

Exercice N°13 :

A) On considère la fonction φ définie par :

$$\varphi(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$$

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction φ

a) Vérifier que φ est une fonction paire

b) Montrer que pour tout $x \neq 0$; $\varphi(x) = \frac{1}{2}(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})$

c) En déduire que φ est prolongeable par continuité en 0

2) Montrer que l'équation $\varphi(x) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ admet au moins deux solutions dans $] -1,1[$

B) Soit f la fonction définie sur $[-1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{si } x \in [-1; 0[\\ \frac{x^2+m^2}{x+1} & \text{si } x \in [0,1] \\ \frac{x^2+x-2}{x-1} & \text{si } x \in]1; +\infty[\end{cases}$$

1) Déterminer m pour que f soit continue en 0.

2) Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

3) Montrons que si f est continue en 0 alors f est discontinue en 1

4) Discuter suivant les valeurs de m la continuité de la fonction f sur $[-1, +\infty[$

Exercice N°14 :

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{2(x+1)} & \text{si } x < -1 \\ (m-1)x^3 + (5-m^2)x + 1 & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{x}{4(\sqrt{x+4}-2)} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1) Montrer que pour tout réel m , f est continue en 0

2) Déterminer les valeurs de m pour que f soit continue en -1

Dans la suite on prend $m = 2$

- 1) a) Montrons que f est strictement croissante sur $[-1; 0]$
b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $[-1; 0]$ une seule solution α
c) Donner un encadrement de α d'amplitude 0,5
d) Vérifier que $\alpha^2 + \frac{1}{\alpha} = -1$
e) Montrer que $\forall x \in [-1; 0]$ on a : $f(x) = (x - \alpha)(x^2 + \alpha x - \frac{1}{\alpha})$

1) Soit g la fonction définie sur $[-1; 0] \setminus \{\alpha\}$ par :

$$g(x) = \frac{x^3 + x + 1}{x - \alpha}$$

Montrer que g est prolongeable par continuité en α puis déterminer son prolongement

Exercice N°15 :

I) Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}-1}{x^2-2x}$
1) a) Déterminer l'ensemble de définition de f

b) Étudier la continuité de f sur son ensemble de définition

2) Montrer que f est prolongeable par continuité en 2 et définir son prolongement.

II) Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x(\sqrt{x-1}+1)} & \text{si } x \geq 1 \\ \frac{1}{2-x} - \sqrt{1-x} & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

- 1) Justifier la continuité de g en $a = 2$, $b = 0$, sur $]-\infty; 1[$ et sur $]1; +\infty[$.
2) a) Montrer que g est strictement décroissante sur $]1; +\infty[$
b) Dédire que g est majorée sur $]1; +\infty[$
3) Montrer que g est strictement croissante sur $]-\infty; 1[$
4) a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[0; 1]$
b) Donner un encadrement de α d'amplitude 0,5
c) Donner le signe de g sur \mathbb{R}
d) Vérifier que $\alpha^3 - 5\alpha^2 + 8\alpha - 3 = 0$

Exercice N°16 :

A) Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + x - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ (x-3)E(x) + \frac{1}{4} & \text{si } 1 < x \leq 3 \\ \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

- 1) a) Montrer que $\forall x \leq 1$, on a : $f(x) + \frac{3}{4} = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$
b) En déduire que f est majorée sur $]-\infty; 1]$
2) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$
b) f est-elle continue en 3
3) Étudier la continuité de f en 1

B) Soit g la fonction définie sur $]-\infty; 1]$ par :

$$g(x) = 2x^3 + f(x)$$

1) Montrer que g est continue sur $]-\infty; 1]$

2) a) Soit deux réels de l'intervalle $]-\infty; 1]$.

Montrer que :

$$g(b) - g(a) = (b - a) \left[(b + a)^2 + \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \right]$$

b) En déduire que g est strictement décroissante sur $]-\infty; 1]$

3) a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]0; 1[$

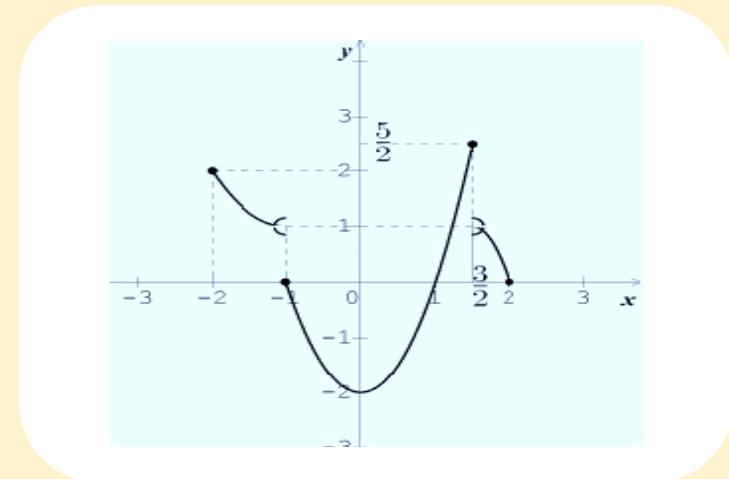
b) En déduire que α est l'unique solution de l'équation $g(x) = 0$ sur $]-\infty; 1]$

c) Montrer que $\frac{1}{\alpha^3} - \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha} = 2$

d) Donner le signe de $g(x)$ sur $]-\infty; 1]$

Exercice N°17 :

La figure ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction g définie sur $[-2, 2]$



1) Déterminer graphiquement :

a) $g\left(\frac{3}{2}\right)$; $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^+} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)$

$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x)$

b) $g([-2; 2])$; $g([-2; 0[)$; $g([-2; 1[)$ et $g([-1; 2])$

c) $g(x) = 0$

d) Le nombre des solutions de l'équation : $g(x) = m$; où m paramètre réel

2) Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

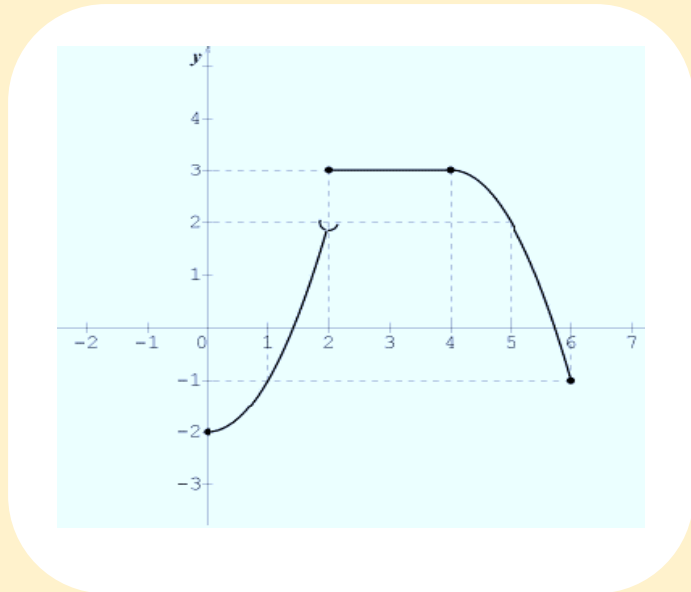
$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2+4x}{2x^2+4} & \text{si } x < -2 \\ g(x) & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ \frac{\sqrt{5x-1}-3}{x-2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

a) Montrer que f est continue sur $]-\infty; -2[$ et sur $]2; +\infty[$

b) Etudier la continuité de f en -2 et en 2

Exercice N°18 :

La figure ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f



1) Déterminer graphiquement :

a) D_f : ensemble de définition de la fonction f

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

c) Les intervalles où f est continue

d) $f([0,2])$ et $f([1,4])$

2) Résoudre graphiquement l'inéquation :

$$-2 < f(x) < 2 \text{ et } -1 < f(x) < 3$$

3) Soit h la fonction définie par :

$$h(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{10x^2-6x+1}-1}{x} & \text{si } x < 0 \\ f(x) & \text{si } 0 \leq x \leq 6 \\ \frac{2x^2-13x+6}{x^2-5x-6} + 1 & \text{si } x > 6 \end{cases}$$

a) Montrer que h est continue sur $]-\infty; 0[$ et sur $]6; +\infty[$

b) Montrer que pour tout $x < 0$; on a :

$$h(x) = \frac{10x-6}{\sqrt{10x^2-6x+1}+1}$$

c) Etudier la continuité de h en 0 et en 6

Exercice N°1 :

A) Soit h la fonction définie par $h(x) = \sqrt{x^2 - 3} - x + 1$

On désigne par (ζ_h) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1) Déterminer l'ensemble de définition de h

2) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

Interpréter graphiquement ce résultat.

3) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{h(x)}{x}$

4) Montrer que la droite d'équation $y = -2x + 1$ est une asymptote oblique à (ζ_h)

B) Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$g(x) = xE(x) - E(x)$$

1) Soit k un entier, déterminer l'expression de $g(x)$ pour $x \in [k; k + 1[$ Puis pour $x \in [k - 1; k[$

2) Déterminer s'il existe, la valeur de k pour que g soit continue en k

3) Tracer la représentation graphique de la restriction de g sur $[-1; 2[$

C) Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1} & \text{si } x < -1 \\ g(x) & \text{si } -1 \leq x < 2 \\ \frac{h(x)}{x - 2} & \text{si } x > 2 \\ f(2) = 1 \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue en (-1) .

2) Etudier la continuité de f en 2 .

3) a) Montrer que l'équation $f(x) = -x$ admet une solution β dans l'intervalle $]-2; -1[$

b) Montrer que β est une solution de l'équation $x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0$

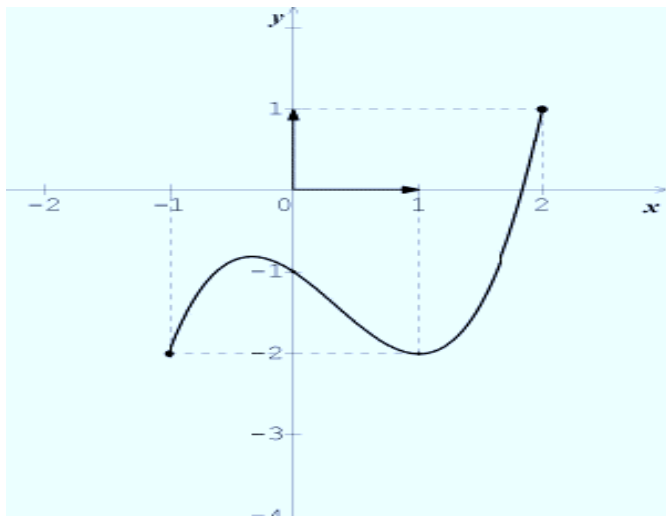
c) En déduire la valeur exacte de β .

4) Montrer que la droite d'équation $y = -2x + 1$ est une asymptote oblique à (ζ_h)

Exercice N°2 :

A) On donne (ζ_g) courbe représentative d'une fonction g définie sur $[-1; 2]$ par :

$$g(x) = x^3 + ax^2 + bx + c, \text{ où } a; b \text{ etc trois réels.}$$



Par lecture graphique :

- 1) Déterminer : $g([-1; 2])$
- 2) Le nombre des solutions de chacune des équations :
 $g(x) = 0$ et $g(x) = -1$

3) Les réels a ; b etc

- 4) Soit α la solution de l'équation $g(x) = 0$
Donner un encadrement de α d'amplitude 0,5

B) Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}-2} & \text{si } x < -1 \\ g(x) & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ \sqrt{x^2-x+2} + mx & \text{si } x > 2 \end{cases} .$$

(ζ_f) sa courbe représentative dans un ron $(0; \vec{i}, \vec{j})$

- 1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f
 - 2) Montrer que f est continue en -1
 - 3) Déterminer le réel m pour que f soit continue en 2
- C) Dans la suite on prend $m = -\frac{1}{2}$
- 1) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, Interpréter graphiquement ce résultat
 - 2) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
 - 3) a) Montrer que pour tout $x > 0$; on a :

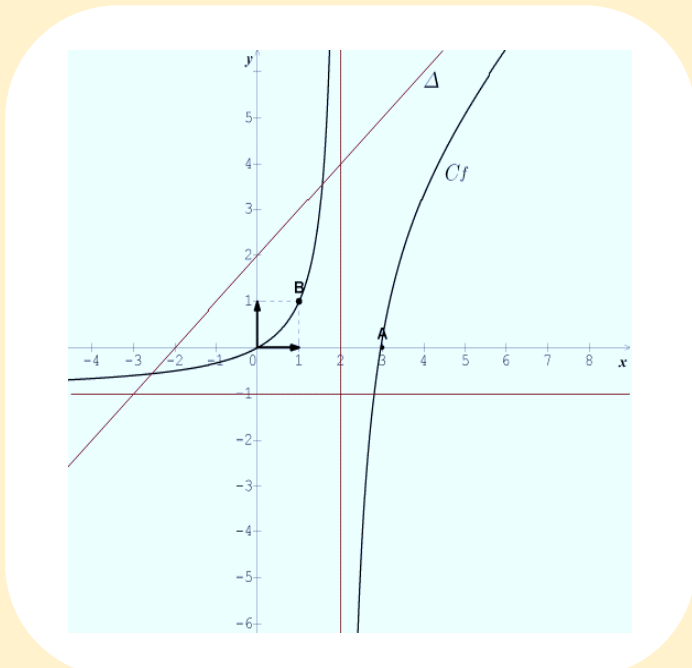
$$\sqrt{x^2 - x + 2} - x = \frac{(-1 + \frac{2}{x})}{\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + 1}}$$

- b) Calculer alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 2} - x)$

Exercice N°3 :

On donne sur le graphique ci-dessous ζ_f la courbe représentative d'une fonction : f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

- * On admet que $\Delta: y = x + 2$ est une asymptote à ζ_f au voisinage de $+\infty$.
- * La droite d'équation $y = -1$ est une asymptote à ζ_f au voisinage de $-\infty$.
- * ζ_f passe par les points : $O(0; 0)$; $B(1; 1)$ et $A(3; 0)$



1) Par lecture graphique, déterminer :

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x - 2)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 3x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x) - x - 2}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{2x+1}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \sqrt{x^2 + 1})$.

2) Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{1}{\sqrt{f(x)}}$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de g noté D_g

b) On pose pour tout $x \in D_g \setminus \{1\}$, $h(x) = \frac{g(x)-1}{f(x)-1}$

Montrer que pour tout $x \in D_g \setminus \{1\}$, $h(x) = \frac{-g(x)}{\sqrt{f(x)+1}}$

c) En déduire que h est prolongeable par continuité en 1, définir son prolongement.

Exercice N°4 :

Soit a et b deux réels et la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(a+3)x^2+3x-2a}{x+2} & \text{si } x < -1 \\ \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x + b & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ \sqrt{4x^2 - 6x + bx} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

On désigne par ζ_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f .

2) Déterminer les réels a et b pour que f soit continue en (-1) et en 2

3) Pour $b = -\frac{3}{2}$, montrer que ζ_f admet une asymptote Δ d'équation : $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ au $(v_{+\infty})$

4) Pour $a = 1$ montrer que ζ_f admet une asymptote Δ' d'équation : $y = 4x - 5$ au $(v_{-\infty})$

Exercice N°5 :

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2-x}$,

(C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1) Déterminer D_f

2) a) Déterminer les limites suivantes :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

b) Montrer que : $\forall x \in D_f$; on a : $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x}$

c) i) Calculer :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (x+1)) \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x+1))$$

ii) Etudier la limite de f au voisinage de 0

iii) Déterminer alors toutes les asymptotes qu'on admet (\mathcal{C}_f)

iv) f est-elle prolongeable par continuité en 1

3) Montrer que l'équation $f(x) = x^2$ admet dans $[\sqrt{2}; 2]$ au moins une solution α

4) Soit la fonction g définie par :

$$g(x) = f(x) + ax + b \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont deux réels}$$

Déterminer a et b pour que la courbe représentative de g admette au voisinage de $(+\infty)$ la droite $\Delta: y = 2$ comme asymptote horizontale

5) Soit h la fonction définie par :

$$h(x) = \begin{cases} \sqrt{f(x)} + 1 & \text{si } x \geq \alpha \\ \frac{x^3+1}{g(x)} & \text{si } x < \alpha \end{cases}; (\alpha \text{ donnée dans 3})$$

Montrer que h est continue en α

Exercice N°1 :

Calculer les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + x - 6);$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3+8}{x^3-x-6};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3+8}{x^2-x-6};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+8}{x^3-x-6};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{3x^2+x} - 2x;$$

$$6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2-2} - 2x$$

$$7) \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2+2x+3} + x + 2$$

$$8) \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-1}$$

$$9) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x}};$$

$$10) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}+x}{x+1};$$

$$13) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3+8}{x^3-x-6};$$

$$14) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-8}{\sqrt{4x+1}-3};$$

$$15) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{\sqrt{4-x^2}};$$

$$16) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}$$

Produit scalaire

3^{ème} Maths-Sciences

Exercice N°1 :

Les questions : I) II) III) et IV) sont indépendantes

I) ABC étant un triangle isocèle en A avec $BC = 4$

I milieu du segment [BC]

ABIJ étant un parallélogramme

Calculer :

$$\vec{BC} \cdot \vec{BA}; \quad \vec{BC} \cdot \vec{JC}; \quad \vec{BC} \cdot \vec{AJ}; \quad \vec{BC} \cdot \vec{JA}; \quad \vec{BJ} \cdot \vec{BI}; \quad \vec{BC} \cdot \vec{CI}$$

II) ABCD un trapèze isocèle de bases [AB] et [CD]

tel que $AB = 3$ et $DC = 7$

Calculer :

$$\vec{AB} \cdot \vec{CD}; \quad \vec{AD} \cdot \vec{DC}; \quad \vec{CD} \cdot \vec{BD}; \quad \vec{BC} \cdot \vec{AD} - \vec{AC} \cdot \vec{BD}.$$

III) Soit ABCD un carré

I le milieu de [AB] ; J le milieu de [AD]

K le milieu de [ID]

Montrer que les droites (AK) et (BJ) sont perpendiculaires.

IV) On considère un triangle ABC rectangle en A

H le pied de la hauteur issue de A

1) Vérifier que : $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AH^2 - HB \cdot HC$

2) En déduire que : $AH^2 = HB \cdot HC$

Exercice N°2 :

Soient A et B deux points du plan, g L'application du plan dans lui-même, définie par : $g(M) = \vec{MA} \cdot \vec{MB}$

1) Déterminer l'ensemble des points M du plan

tels que : $g(M) = 0$

2) Soit I le milieu de [AB]

a) Montrer que : $g(M) = IM^2 - IA^2$

b) Déterminer l'ensemble des points M du plan

tel que : $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 12$

3) Retrouver le résultat de 2. b) avec $A(-1,2)$ et $B(1,0)$

Exercice N°3 :

I) On considère un repère orthonormé du plan et

les points $A(3, -5)$ et $B(1,4)$

1) Déterminer une mesure de l'angle \widehat{AOB} .

2) Ecrire une équation du cercle de centre A et

tangent à la droite $\Delta: 4x + 3y - 2 = 0$

II) Soit ABCD un carré avec :

*$I = A * B; J = A * D$ et $K = I * D$*

Montrer que (AK) \perp (BJ)

III) Soit I milieu de $[AB]$

1) a) Montrer que : $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$.

b) Dédurre l'ensemble : $E = \{M \in P / \vec{MA} \cdot \vec{MB} = 2\}$.

2) Montrer que $\forall M \in P$, on a : $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$

Exercice N°4 :

$ABCD$ un carré tel que $AB = 3$, E le symétrique de C par rapport à B ,

J le point de $[DC]$ tel que $CJ = 1$

K le point de $[BE]$ tel que $EK = CJ$

1) a) Calculer : $\vec{AD} \cdot \vec{AK}$ et $\vec{JD} \cdot \vec{AK}$

b) En déduire que $(AJ) \perp (AK)$

2) Calculer $\cos(\widehat{DKJ})$ et en déduire $\vec{KJ} \cdot \vec{KD}$.

3) a) Soit I le milieu de $[JK]$, Calculer DI .

b) Soit $\xi = \{M, M \in P \text{ tel que: } 2\vec{MJ} \cdot \vec{MK} = 6\}$

Montrer que ξ est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Construire ζ

c) Soit $D' = S_I(D)$: Montrer que $\vec{KD'} \cdot \vec{KD} = -6$

Exercice N°5 :

Soient A et B deux points distincts du plan et I le milieu du segment $[AB]$

1) a) Montrer que : $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$

b) En déduire l'ensemble $E = \{M \in P / \vec{MA} \cdot \vec{MB} = 2\}$

2) Soit l'ensemble : $F = \{M \in P / \frac{MA}{MB} = 2\}$

Soit $G = \text{bary}[(A, 1); (B, -4)]$

a) Montrer que : $MA^2 - 4MB^2 = -3MG^2 + GA^2 - 4GB^2$

b) Montrer que : F est l'ensemble des points

$M \in P$, tel que : $MG^2 = \frac{1}{3}(GA^2 - 4GB^2)$

c) En déduire que F est un cercle dont-on précisera le centre et le rayon. Soit $(AB = 2)$

3) Montrer que : $\forall M \in P ; MA^2 + MB^2 = 2IM^2 + \frac{AB^2}{2}$

4) Montrer que : $\forall M \in P ; MA^2 - MB^2 = 2\vec{IM} \cdot \vec{AB}$

Exercice N°6 :

Soit ABC un triangle tel que :

$AB = 4$; $AC = 6$ $BC = 8$ et I le milieu de $[BC]$

1) a) Montrer que : $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$

b) Calculer alors la distance AI

2) a) Placer le point H de à la droite (AB) tel

que : $\vec{AH} \cdot \vec{AB} = -8$

b) Déterminer l'ensemble des points M du plan

tel que : $\vec{AM} \cdot \vec{AB} = -8$

3) Soit G le centre de la gravité du triangle

ABC

Déterminer l'ensemble des points M du plan tel

que : $(\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}) \cdot \vec{MC} = 0$

4) a) Montrer que G est le barycentre des points

pondérées : $(A,1)$ et $(I,2)$.

b) Montrer que pour tout point M du plan

On a : $MA^2 + 2MI^2 = 3MG^2 + \frac{20}{3}$

c) Déterminer l'ensemble des points M du plan

tels que : $MA^2 + 2MI^2 = \frac{29}{3}$

Exercice N°7 :

Dans le plan orienté, on considère un triangle AIC

isocèle rectangle en C et de sens direct

On donne $AI = 4$ cm

Soit B le symétrique de A par rapport à I et H le

projeté orthogonale de B sur (AC)

1) a) Calculer $\vec{IA} \cdot \vec{IB}$ et $\vec{CA} \cdot \vec{CB}$

b) Calculer CI et CB

c) Montrer que $\cos(\widehat{BCI}) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

2) Déterminer et construire l'ensemble des points

M du plan suivant :

a) $E = \{M \in P / \vec{MA} \cdot \vec{MC} = 0\}$

b) $F = \{M \in P / MA^2 + 3MB^2 = 64\}$

3) Le plan est muni du repère $(C; \vec{CA}, \vec{CI})$

a) Calculer les coordonnées du point B

b) Déterminer une équation cartésienne de la droite de la droite (BC)

c) En déduire la distance du point I à la droite (BC)

Exercice N°8 :

I) A et B deux points du plan tels que :

$$AB = 2 \text{ et } I = A * B$$

1) Montrer que l'ensemble des points M du plan tel que : $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ est la médiatrice du segment [AB]

2) Déterminer et construire l'ensemble suivant

$$E = \{M; M \in P / 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{AB}\}$$

$$F = \{M; M \in P / 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} - MB^2 = 0\}$$

$$G = \{M; M \in P / 2MA^2 - MB^2 = 8\}$$

On suppose dans la suite que : $AB = 4$

II) Déterminer et construire chacune des ensembles :

$$A = \{M \in P / \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 24\}; \quad B = \{M \in P / \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = -8\}$$

$$C = \{M \in P / MA^2 + MB^2 = 40\}; \quad D = \{M \in P / MA^2 - MB^2 = 24\}$$

$$K = \{M \in P / \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 12\}$$

Exercice N°9 :

Soit ABC un triangle isocèle tel que :

$$AB = AC = 5 \text{ et } BC = 4$$

Soit : H le projeté orthogonal de A sur (BC)

Et K le milieu de [AC]

1) Calculer : $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$, puis en déduire $\cos \widehat{ABC}$

2) Calculer : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

3) Montrer que : $BA^2 + BC^2 = 2BK^2 + \frac{AC^2}{2}$

En déduire BK

4) Soient E et D deux points tels que :

* $E \in [CB]$ avec $HE = HA$

* $D \in [AH] \setminus [AH]$ avec $HD = HC$

a) Montrer que : $\overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{ED} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HD})$

b) En déduire la position relative des droites (HK) et (ED)

5) Soit G le centre de gravité du triangle ABC et

L'application $f: P \rightarrow P / M \mapsto MA^2 + MB^2 + MC^2$

a) Calculer $f(B)$ et $f(K)$

b) Montrer que pour tout point M du plan :

$$f(M) = 3MG^2 + 22$$

c) En déduire l'ensemble des points M du plan

$$\text{tel que : } f(M) = 28$$

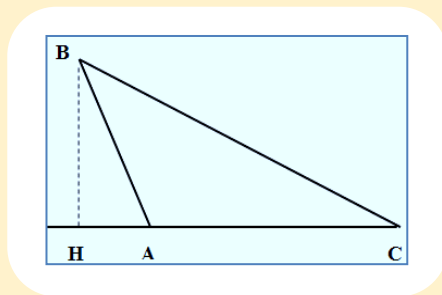
Exercice N°10 :

Dans la figure ci-contre :

On donne un triangle ABC

tel que :

$$AB = 4; AC = 6 \text{ et } BC = 2\sqrt{19}$$



1) a) Montrer que : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -12$

b) En déduire $\cos(\widehat{BAC})$ et l'angle \widehat{BAC}

2) Soit H le projeté orthogonal de B sur (AC)

Calculer AH

3) Soit I le milieu de [AC] et $\Gamma = \{M \in P / MA^2 + MC^2 = 36\}$.

Montrer que Γ est le cercle de diamètre [AC]

4) Soit $\Delta = \{M \in P / MA^2 - MC^2 = -60\}$

a) Vérifier que $B \in \Delta$

b) Montrer que $MA^2 - MC^2 = 2\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AC}$

c) En déduire l'ensemble Δ

Exercice N°11 :

Soit ABCD un triangle tel que $AB = 4$ et $AD = 2$

E le point tel que $C = D * E$

1) a) Montrer $AC = 2\sqrt{5}$

b) Calculer $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CE}$ et en déduire $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE}$

2) Déterminer et construire l'ensemble :

$$\zeta = \{M \in P / \overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{ME} = -12\}$$

3) Soit H et K les projetés orthogonaux respectives des points A et C sur (BD)

a) Montrer que : $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = -12$

b) En déduire la distance HK

4) Le plan est rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$

On donne $A(2; 2); B(6; 2); C(6,0)$ et $D(2,0)$

a) Vérifier que ABCD est un rectangle

b) Soit : $\Delta = \{M(x,y) / \overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{AB} = 16\}$

i. Déterminer une équation cartésienne de Δ

ii. En déduire la position relative de Δ et ζ

Exercice N°12 :

1) On considère deux points A et B du plan tel que

$$AB = 2 \text{ et } I = A * B$$

a) Montrer que l'ensemble des points du plan

tel que : $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ est la médiatrice de [AB]

b) Montrer que l'ensemble des points M du plan

tels que $(MA^2 + MB^2) = \frac{42}{5}$ est le cercle ζ de centre I et de rayon que l'on précisera

2) Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

On donne les points : $A(1, -1)$; $B(1, 3)$ et $J(0, 1)$

a) Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AJ}$ et en déduire $\cos(\widehat{BAJ})$

b) Déterminer l'ensemble Δ des points $M(x, y)$ du plan tel que : $\overrightarrow{JM} \cdot \vec{i} = 0$

c) Soit la droite $D : x - 2y + 5 = 0$

i. Calculer $d(I, D)$

ii. En déduire que ζ et D sont tangents

d) Soit $D' : x + 2y + 1 = 0$ vérifier que D' est tangente à ζ et préciser le point de contact.

e) Déterminer l'ensemble des points $M(x, y)$ tel que $d(M, D) = d'(M, D')$.

Exercice N°13 :

Dans l'annexe ci-contre ABC est un triangle rectangle et isocèle en A tel que $AB = a > 0$

On désigne par I et J les milieux respectifs des segments $[BC]$ et $[AB]$

Soit G le centre de gravité du triangle ABC

Et A' le symétrique de A par rapport à (CJ)

1) On donne : $\zeta = \{M \in P / MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2a^2\}$

a) Vérifier que $A \in \zeta$

b) M_G : $(\forall M \in P) ; MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + \frac{4}{3}a^2$

c) Déterminer et construire l'ensemble ζ

2) Déterminer et construire l'ensemble ζ' des points M tel que : $MA^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$

3) Déterminer l'intersection $\zeta' \cap \zeta$

4) Soient E et F les points du plan tels que :

$$\overrightarrow{AE} = \frac{5}{4}\overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + (a^2 + a - 1)\overrightarrow{AC}$$

Trouver le réel a pour que (IE) et (JE) soient Perpendiculaires

Angles orientés3^{me} Maths-SciencesExercice N°1 :

Soit ABC un triangle tel que :

$$AC = 5 ; AB = 6 \text{ et } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{23\pi}{3} [2\pi]$$

F est le milieu du segment [AC]

1) a) Déterminer la mesure principale de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ puis construire le triangle ABC

b) Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ puis $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

2) Soit ζ le cercle circonscrit au triangle ABC

On désigne par O son centre

La perpendiculaire à (AB) passant par C coupe (AB) en I et recoupe ζ en D

a) Donner une mesure de $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB})$ puis de $(\overrightarrow{ID}, \overrightarrow{IF})$

b) Evaluer $(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{IF})$ et en déduire que : $(IF) \perp (BD)$

c) Définir l'ensemble I des points du plan tels que $(\overrightarrow{MD}, \overrightarrow{MF}) \equiv \frac{5\pi}{6} [2\pi]$ et le construire

Exercice N°2 :

Soit ABCD un parallélogramme de centre O tel que :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{83\pi}{4} [2\pi] \text{ et } (\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA}) \equiv \frac{-79}{8} [2\pi]$$

1) a) Déterminer les mesures principales des deux angles orientés $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ et $(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA})$

b) Construire ABCD

2) Montrer que ABCD est un losange.

3) Soit E le point défini par :

$$(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DA}) \equiv \frac{13\pi}{2} [2\pi] \text{ et } DE = DA$$

Montrer que les points A ; B et E sont alignés

4) Déterminer une mesure de chacun des angles orientés $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AE})$ et $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BD})$.

Exercice N°3 :

A) Soit ABC un triangle du plan orienté dans le sens direct.

Déterminer et construire l'ensemble des points M dans chacun des cas suivants :

$$1) (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MB}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$$2) (\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CB}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$$3) (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MC}) \equiv -\frac{45\pi}{4} [2\pi]$$

B) Soient A et B deux points distincts du plan orienté. Déterminer et construire les ensembles suivants :

$$1) E = \left\{ M \in P ; (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi] \right\};$$

$$2) F = \left\{ M \in P ; (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv -\frac{\pi}{3} [2\pi] \right\}$$

Exercice N°4 :

[AB] et [CD] sont deux cordes perpendiculaires

d'un cercle (C) du plan orienté dans le sens direct

On désigne par :

*) I le point d'intersection des droites (AB) et (CD),

*) J le milieu du segment [AD]. (Voir figure ci-dessous)

1) a) Quelle est la nature du triangle JAI ?

b) En déduire que $(\vec{JI}, \vec{JA}) \equiv \pi - 2(\vec{AB}, \vec{AD}) [2\pi]$.

c) Montrer alors que $(\vec{JI}, \vec{JD}) \equiv 2(\vec{AB}, \vec{AD}) [2\pi]$.

d) Prouver que (IJ) et (BC) sont perpendiculaires

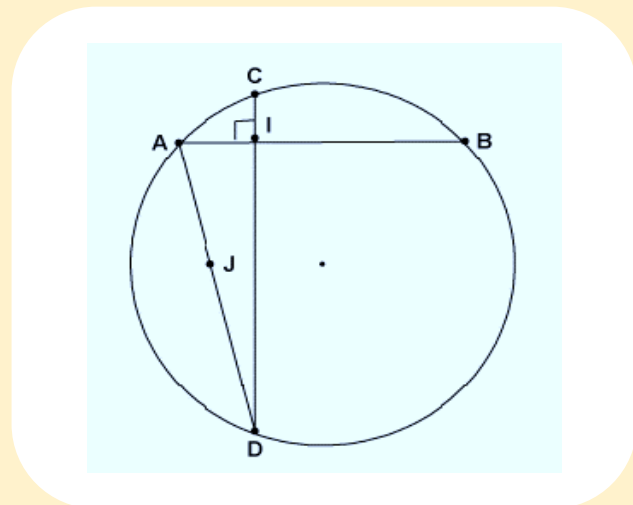
2) Déterminer puis construire l'ensemble des points

tels que $(\vec{MB}, \vec{MC}) \equiv \frac{19\pi}{2} [2\pi]$

3) La droite (IJ) coupe (Γ) en un point K .

a) Montrer qu'il existe un entier relatif $k \in \mathbb{Z}$ tel

que $(\vec{AJ}, \vec{AB}) = (\vec{KJ}, \vec{KB}) + k\pi$.



Exercice N°5 :

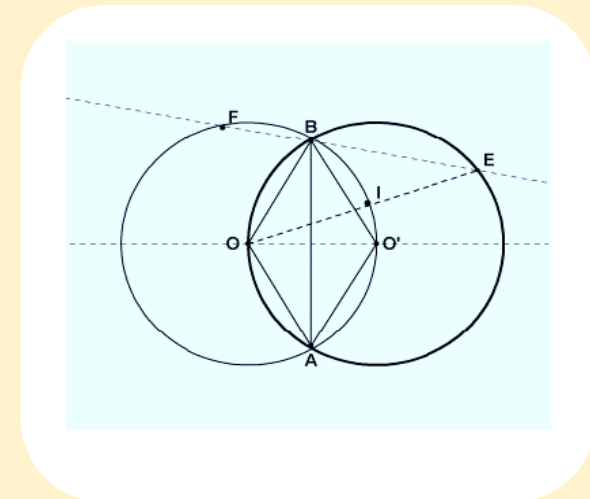
On considère :

*) un losange $OA'O'B$ tel que : $(\vec{OA}, \vec{OB}) \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]$,

*) (ζ) le cercle de centre O et de rayon OA ,

*) (ζ') le cercle de centre O' et de rayon $O'A$

*) E le point de l'arc orienté direct \widehat{AB} du cercle (ζ') distinct de A et B



1) a) Déterminer la mesure principale de chacun

des deux angles orientés : $(\vec{O'A}, \vec{O'B})$ et (\vec{EA}, \vec{EB})

b) Déterminer les deux ensembles :

$$(E_1) = \left\{ M \in P / (\vec{MA}, \vec{MB}) \equiv \frac{-\pi}{3} [2\pi] \right\}$$

$$(E_2) = \left\{ M \in P / (\vec{MA}, \vec{MB}) \equiv \frac{-2\pi}{3} [2\pi] \right\}$$

2) le cercle (ζ) et le segment $[OE]$ se coupent en I

a) Montrer que :

$$\left(\widehat{EB, EI}\right) = \left(\widehat{EI, EA}\right) [2\pi] \text{ et que } \left(\widehat{BA, BE}\right) = 2 \left(\widehat{BA, BI}\right) [2\pi]$$

b) Dédurre que I est le centre du cercle inscrit dans le triangle ABE

3) La droite (BE) recoupe le cercle (ζ) en F

Montrer que $(EI) \perp (AF)$

Exercice N°6 :

Soit ABC un triangle isocèle de sommet principale A tel que : $\left(\widehat{BC, BA}\right) \equiv \frac{5\pi}{12} [2\pi]$

1) Déterminer la mesure principale de l'angle orienté

$$\left(\widehat{AB, AD}\right)$$

2) Soit D un point du plan tel que $\left\{ \begin{array}{l} \left(\widehat{AB, AD}\right) \equiv -\frac{65\pi}{6} [2\pi] \\ AB = AD \end{array} \right.$

a) Déterminer la mesure principale de l'angle orienté $\left(\widehat{AB, AD}\right)$

b) En déduire que A est le milieu du segment $[CD]$

3) a) Déterminer une mesure de l'angle orienté $\left(\widehat{BA, BD}\right)$

b) En déduire que le triangle BCD est rectangle en B

4) Soit C le cercle circonscrit au triangle BCD

a) Justifier que (ζ) est de centre A .

b) Soit E un point de (ζ) tel que $E \in \widehat{DB} \setminus \{B, D\}$

Déterminer une mesure de l'angle orienté $\left(\widehat{EB, ED}\right)$

5) Déterminer et construire l'ensemble des points M

du plan tel que $\left(\widehat{MA, MC}\right) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$

6) Calculer en fonction de AB , $\det(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB})$

Exercice N°7 :

Soit ABC un triangle isocèle de sommet principal A tel que $\left(\widehat{AB, AC}\right) \equiv -\frac{39\pi}{5} [2\pi]$

1) Déterminer la mesure principale de l'angle orienté

$$\left(\widehat{CA, CB}\right) \text{ puis tracer le triangle } ABC$$

2) Les bissectrices des secteurs $[AB, AC]$ et $[CA, CB]$ se coupent en O

Soit I le symétrique de O par rapport à la droite (BC)

Donner une mesure de chacun des angles orientés : $\left(\widehat{BI, BC}\right)$; $\left(\widehat{CA, IB}\right)$ et $\left(\widehat{BI, OA}\right)$

3) La droite (BI) coupe la droite (AC) en D .

Montrer que le triangle BDC est isocèle.

4) Soient (ζ) le cercle circonscrit au triangle BCD
 E le point diamétralement opposé à C sur (ζ)
 F le point d'intersection de (BD) et (CE)
 J le milieu du segment $[ED]$

a) Quelle est la nature de chacun des triangles :
 EFD et JFD ?

b) Déterminer une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{FJ}, \overrightarrow{FD})$.
 En déduire que les droites (AO) et (FJ) sont
 parallèles.

Exercice N°8 :

Soit ABC un triangle isocèle en A tel que :

$$(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$$

1) Donner la mesure principale de chacun des angles
 orientés $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

Soit (ζ) le cercle circonscrit au triangle ABC
 On considère les ensembles suivants :

$$(C_1) = \left\{ M \in \mathcal{P}; (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}) \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi] \right\}$$

$$(C_2) = \left\{ M \in \mathcal{P}; (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}) \equiv -\frac{\pi}{3} [2\pi] \text{ et } MB < MC \right\}$$

a) Vérifier que $A \in (C_1)$,

Déduire alors que les ensembles (C_1) et (C_2)

b) Soit D un point de (C_2) , E et F les projetés
 orthogonaux respectifs de D sur (BC) et sur (AC)
 Montrer que $E ; F ; C$ et D appartiennent à un même
 cercle

c) Montrer que $(\overrightarrow{FE}, \overrightarrow{FD}) \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) [2\pi]$

3) Soit (ζ') le cercle de diamètre $[AD]$.
 (ζ') recoupe la droite (AB) en G

a) Montrer que $(\overrightarrow{FE}, \overrightarrow{FG}) \equiv -(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}) [2\pi]$.

b) Montrer alors que les points $E ; F$ et G sont
 alignés

Exercice N°9 :

Soient (ζ) un cercle de centre O .

$ABCD$ un quadrilatère inscrit dans le cercle (ζ)

1) a) Donner une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC})$
 en fonction de $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$.

b) En déduire que les seuls parallélogrammes
 inscriptibles dans un cercle sont les
 rectangles

2) Le cercle (ζ') passant par A et D et tangent à (AB)
 en A

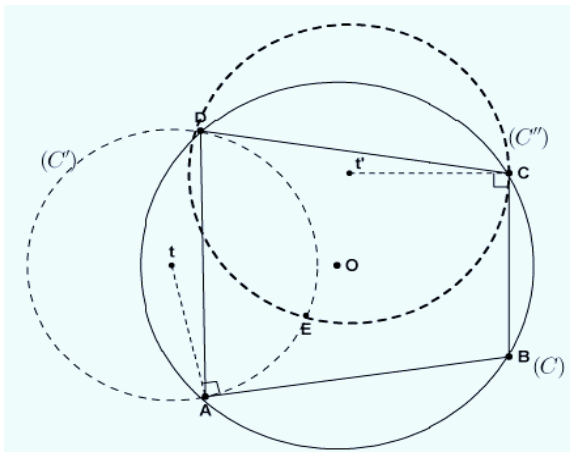
Le cercle (ζ'') passant par C et D et tangent à (CB)
 en C

(ζ') et (ζ'') se recoupent en E

Les points t et t' désignent les centres respectifs des cercles (ζ') et (ζ'')

a) Montrer que $(\widehat{AB, AE}) + (\widehat{CE, CB}) \equiv \pi + (\widehat{BA, BC}) [2\pi]$

b) En déduire que les points A, C et E sont alignés



Exercice N°10 :

Dans la figure ci-dessous : (ζ) et (ζ') sont deux cercles de centres respectifs O et O', qui se coupent en A et B.

C et D sont deux points sur (ζ) et (ζ') respectivement tels que B, C et D soient alignés

Enfin, Γ est le cercle circonscrit au triangle AOO'

1) a) Montrer que $(\widehat{BO', BO}) \equiv (\widehat{AO, AO'}) [2\pi]$.

b) Montrer que $2(\widehat{AC, AB}) \equiv \pi + 2(\widehat{BC, BO}) [2\pi]$

c) En déduire que $2(\widehat{AC, AD}) \equiv 2(\widehat{AO, AO'}) [2\pi]$

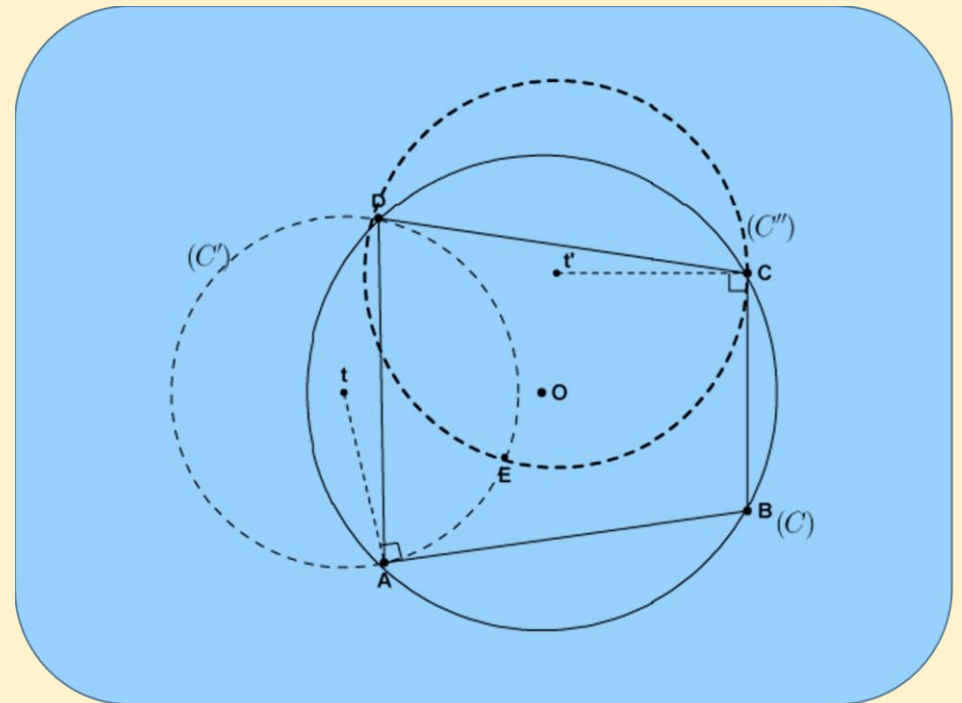
2) Les droites (OC) et (O'D) se coupent en M.

On désigne C₁ le symétrique de C par rapport à O et par D₁ le symétrique de D par rapport à O'

a) Montrer que B ; C₁ et D₁ sont alignés

b) Montrer que $2(\widehat{MO, MO'}) \equiv 2(\widehat{AC, AD}) [2\pi]$

3) Montrer que le point M appartient au cercle Γ



Exercice N°11 :

Soit $ABCD$ un trapèze isocèle inscrit dans un cercle (ζ) de centre O tel que : $(\widehat{CA, CB}) \equiv -\frac{77\pi}{9} [2\pi]$.

Voir figure dans ci-contre que l'on complètera progressivement.

1) Déterminer la mesure principale de :

$$(\widehat{CA, CB}) \text{ et de } (\widehat{OA, OB})$$

2) Les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en M .

a) Montrer que $(\widehat{MA, MB}) \equiv (\widehat{CA, CB}) + (\widehat{DA, DB}) [2\pi]$.

Déduire que : $(\widehat{MA, MB}) \equiv (\widehat{OA, OB}) [2\pi]$.

b) On suppose que A et B sont fixes, et que C et D varient sur l'arc orienté \widehat{BA} privé de A et B .
Déterminer l'ensemble des points M .

3) Soit (ζ_1) le cercle circonscrit au triangle OAB .

La parallèle à (BC) passant par M recoupe (ζ_1) en I

a) Déterminer la mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{IA, IB})$.

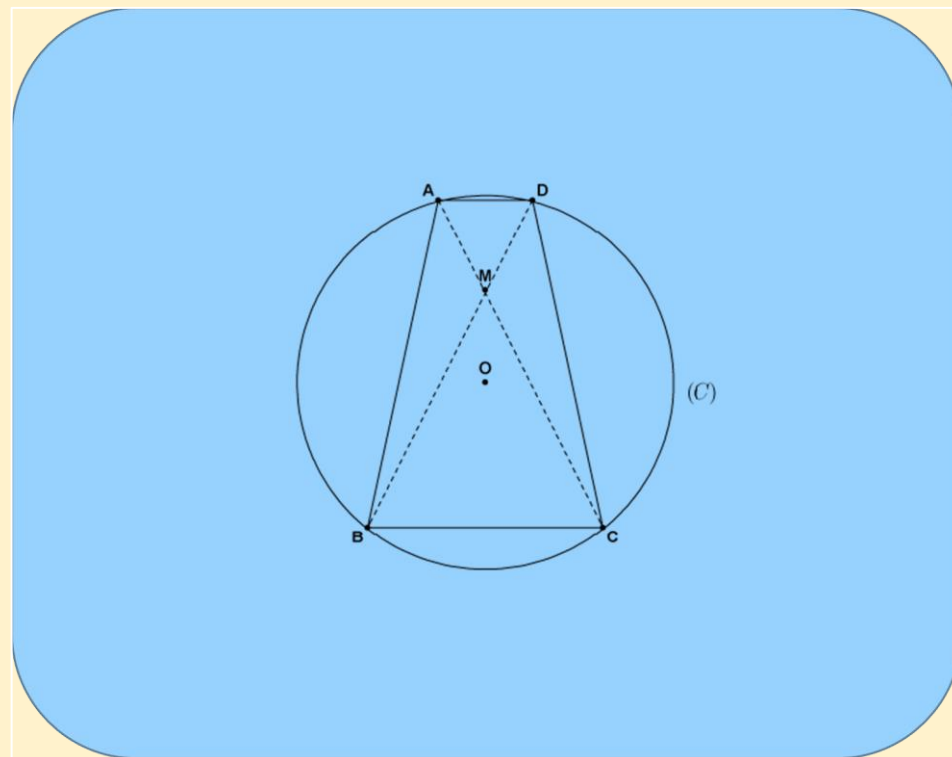
b) Justifier pourquoi a-t-on :

(i) $(\widehat{MB, MI}) \equiv (\widehat{AB, AI}) [2\pi]$?

(ii) $(\widehat{MB, MI}) \equiv (\widehat{BD, BC}) [2\pi]$?

(iii) $(\widehat{CB, CA}) \equiv (\widehat{BD, BC}) [2\pi]$?

c) Dédurre de (b) que la droite (AI) est tangente au cercle (C) .



Trigonométrie• Exercices d'entraînementExercice N°1 :

1) a) Montrer que $\cos x + \sqrt{3} \sin x = 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.

b) Dédire alors que $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + \sqrt{3} \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{2}$

2) Soit $f(x) = 1 + \cos(2x) + \sqrt{3} \sin(2x)$

a) Vérifier que $f(x) = 2 \cos^2 x + 2\sqrt{3} \cos x \sin x$

b) Montrer alors que $f(x) = 4 \cos x \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

c) Calculer de deux manières différentes $f\left(\frac{\pi}{12}\right)$

En déduire $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$

Exercice N°2 :

$x \in \mathbb{R}$ tel que $1 - \cos x - \sin x \neq 0$ et $\sin x - \sin(2x) \neq 0$

1) Montrer que : $\frac{\sin x + \sin(2x)}{\sin x - \sin(2x)} = \frac{1 + 2 \cos x}{1 - 2 \cos x}$

2) Montrer que : $\frac{1 + \cos x - \sin x}{1 - \cos x - \sin x} = -\cot\left(\frac{x}{2}\right)$

3) Soit $A(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{3} \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

a) Montrer que $A(x) = 2 \cos\left(2x - \frac{7\pi}{12}\right)$

b) Calculer $A(0)$ de deux manières différentes.

c) En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

Exercice N°3 :

Soit $f(x) = 2 + \sqrt{2}(\cos(2x) - \sin(2x))$

1) Transformer en $r \cos(2x - \varphi)$ l'expression : $\cos(2x) - \sin(2x)$.

2) Montrer alors que $f(x) = 4 \cos^2\left(x + \frac{\pi}{8}\right)$.

3) Calculer alors $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$, en déduire $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Exercice N°5 :

Soit $A(x) = \sqrt{3} \cos(3x) + \sin(3x)$.

1) Calculer $A\left(\frac{2\pi}{3}\right)$, $A(7\pi)$ et $A\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

2) a) Montrer alors que $A(x) = 2 \cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$.

b) Résoudre alors dans \mathbb{R} , l'équation $A(x) = \sqrt{3}$.

Exercice N°6 :

Soit $f(x) = \sin(2x) - 2\sqrt{3} \sin^2 x$.

1) a) Montrer que $\cos x - \sqrt{3} \sin x = 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

b) En déduire que $f(x) = 4 \sin x \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

2) Soit $g(x) = \cos(2x) - \frac{1}{2}$

a) Calculer $g\left(-\frac{\pi}{12}\right)$

b) Montrer que $g(x) = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

c) En déduire que $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

• Equations et inéquations trigonométriquesExercice N°7 :

I) 1) Montrer que pour tout réel x ;

$$\sin x - \cos x = \sqrt{3} \cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$$

2) Résoudre dans $]-\pi; \pi]$: $\sin x - \cos x \geq 0$

3) Résoudre dans $]-\pi; \pi]$: $(\sin x - \cos x)(1 + \frac{1}{2} \sin 2x) \geq 0$

II) 1) Résoudre dans $]-\pi, \pi]$ puis dans \mathbb{R}

a) $\sin x + \cos x = 0$; b) $2 - \cos x < 1$

c) $2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0$; d) $2 \cos^2 x > 1$

2) Résoudre dans $[0; 2\pi[: 2 \cos(2x) - 2\sqrt{3} \sin(2x) = 2$

3) Résoudre dans $[0; 2\pi[:$

a) $\cos(3x - \pi) < -\pi;$ b) $\sin\left(-2x + \frac{2\pi}{5}\right) > \frac{3}{2}$

Exercice N°8 :

I) Résoudre dans $]-\pi; \pi]$ les équations suivantes :

a) $4\cos^2x - 3 = 0$; b) $\sin^2x - \frac{1}{2} = 0$; c) $\tan^2x = 3$

II) A l'aide du cercle trigonométrique sur lequel on représentera les solutions,

Résoudre les inéquations suivantes :

1) Dans $]-\pi; \pi]$:

a) $\sin x \geq 0$; b) $\cos x < 0$; c) $\cos x \geq 0$

2) Dans $[0; 2\pi[:$

a) $\sin x < 0$; b) $\cos x < 0$; c) $\cos x \geq 0$

III) 1) Résoudre dans $]-\pi; \pi[$ les inéquations suivantes :

a) $\cos x \leq -\frac{1}{2}$; b) $\sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$; c) $\cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $\sin x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$

2) Même question en donnant les solutions dans $[0; 2\pi[:$

a) $\cos x \leq -1$; b) $\frac{1}{2} \leq \sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$; c) $-\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos x < \frac{1}{2}$

Exercice N°9 :

1) Résoudre dans \mathbb{R} puis dans $[0, 2\pi[$

a) $(2 \cos(2x) - \sqrt{3})\left(\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1\right) = 0$

b) $\tan^2 x - (1 + \sqrt{3}) \tan x + \sqrt{3} = 0$

c) $\sqrt{3} \cos x - \sin x \leq 1;$ d) $(\sqrt{2} \cos x - 1)(2 \sin x - \sqrt{3}) \leq 0.$

Exercice N°10 :

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $x \mapsto 1 + \cos(2x) - \sin(2x)$

1) a) Montrer que $f(x) = 2\sqrt{2} \cos x \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

b) Résoudre dans $[0, \pi]$: $f(x) = 0$ et $f(x) > 0$

2) On donne $g: [0; \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $x \mapsto \frac{\sin(2x) - 1}{1 + \cos(2x) - \sin(2x)}$

a) Déterminer D_g : ensemble de définition de g

b) Résoudre dans $[0, \pi]$: $g(x) \geq 0$

3) a) Montrer que pour tout $x \in D_g$: $g(x) = \frac{1}{2}(\tan x - 1)$

b) En déduire que $\tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$

Exercice N°11 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j})

Soient $A(-\sqrt{3}, -1)$ et $B(-1, -1)$

1) Déterminer les coordonnées polaires de A et B

2) Déterminer $\cos \widehat{AOB}$ et $\sin \widehat{AOB}$

3) Soit C le point de coordonnées polaires $\left(2, -\frac{2\pi}{3}\right)$

Déterminer les coordonnées cartésiennes de C

4) Déterminer la mesure principale de $(\widehat{CO}, \widehat{OA})$

Exercice N°1 : (Pilote)

1) Montrer que pour tous réels a et b :

$$\sin(a) \cdot \cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$$

2) Soit $A = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$

a) Calculer $2A \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ puis déduire que $A = -\frac{1}{2}$

b) Montrer que $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ est solution de l'équation

$$4x^2 - 2x - 1 = 0, \text{ déduire la valeur de } \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

Exercice N°2 : (Pilote)

(O, \vec{i}, \vec{j}) rond. On considère les points $A(1;0)$ et $B(0;1)$

Soit $\theta \in \left]0; \frac{\pi}{4}\right[$

On désigne par M , le point du cercle trigonométrique (ζ) tel que l'on ait $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) \equiv 2\theta[2\pi]$

1) Montrer que $AM = 2 \sin(\theta)$ et que $BM = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)$

2) a) Montrer que pour tous réels a et b :

$$\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2 \sin(a) \cos(b)$$

b) En déduire que pour tous réels x et y :

$$\sin(x) + \sin(y) = 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

c) On désigne par K le point de (ζ) ; $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OK}) \equiv \frac{\pi}{8}[2\pi]$

H le projeté orthogonal de K sur (OA) .

Déterminer la valeur de θ pour que l'on ait :

$$AM + BM = 4.HK.$$

Exercice N°3 : (Pilote)

Soit $A(x) = \cos(4x) + 2 \cos(2x) + 1$ où $x \in \mathbb{R}$.

1) a) Vérifier que $A(x) = 2 \cos^2(2x) + 2 \cos(2x)$.

b) Résoudre alors dans \mathbb{R} puis dans $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ l'équation $A(x) = 0$.

2) Soit $B(x) = \frac{\cos(2x) \cdot \cos(x)}{\cos^2(2x) + 2 \cos(2x)}$; où $x \in \mathbb{R}$

On désigne par E l'ensemble des réels x pour les quels $B(x)$ est définie

a) Montrer que $\forall x \in E, B(x) = \frac{1}{2 \cos(x)}$.

b) Résoudre dans $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, l'inéquation :

$$B(x) \leq 2 \cdot \sin(x)$$

Exercice N°4 : (Pilote)

1) Montrer que pour tous réel x ;

$$\sin(x) (8 \cos^3(x) - 4 \cos(x)) = \sin(4x)$$

2) Déduire que $8 \cos^3\left(\frac{\pi}{5}\right) - 4 \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - 1 = 0$

3) a) Vérifier que $8x^3 - 4x - 1 = (2x+1)(4x^2 - 2x - 1)$

puis résoudre dans \mathbb{R} l'équation : $8x^3 - 4x - 1 = 0$

b) En déduire que $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$

Exercice N°5 : (Pilote)

On donne (O, \vec{i}, \vec{j}) repère orthonormé direct

(ζ) est le cercle trigonométrique de centre O

M et N sont les points de (ζ) :

$$(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) \equiv \theta[2\pi], (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi], \text{ où } \theta \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Soient E et F les points tels que :

$$\overrightarrow{OE} = -\cos(\theta) \cdot \overrightarrow{OM} \text{ et } \overrightarrow{OF} = \sin(\theta) \cdot \overrightarrow{ON}.$$

1) a) Montrer que les coordonnées de E sont :

$$(-\cos^2(\theta); -\cos(\theta) \cdot \sin(\theta))$$

b) Montrer que les coordonnées de F sont :

$$(-\sin^2(\theta); \cos(\theta) \sin(\theta))$$

2) Soient A le point de coordonnées $(-1; 0)$

(Γ) le cercle diamètre $[OA]$

a) Montrer que E et F appartiennent à (Γ)

b) Construire dans l'annexe les points E et F

c) Montrer que la quadrilatère $OEAF$ est rectangle

d) Déterminer les réels θ pour lesquels $OEAF$ est un carré

Exercice N°6 : (Pilote)

Soit $g(x) = \cos(2x) + \sin(2x)$; où $x \in \mathbb{R}$

1) Calculer $g\left(\frac{\pi}{6}\right)$ et $g\left(-\frac{9\pi}{8}\right)$

2) Montrer que $g(x) = \sqrt{2} \cdot \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

$$\text{En déduire que } \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

3) Résoudre dans \mathbb{R} , puis dans $[0; \pi]$ l'équation $g(x) = 0$

4) Montrer que $g(x) = 2\sqrt{2} \cos(x) \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

$$\text{Déduire que } \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

5) Résoudre dans \mathbb{R} , l'inéquation : $g(x) - \frac{\sqrt{6}}{2} \geq 0$

Exercice N°7 : (Pilote)

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cos(2x) - \frac{1}{4} \sin(2x) - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

1) a) Vérifier que $f\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{4}$

b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \cos(x) \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

c) En déduire que $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

d) Résoudre dans \mathbb{R} , puis dans $[0; 2\pi]$, l'équation

$$4f(x) = (\sqrt{6} + \sqrt{2}) \cdot \cos(x)$$

2) Soit g la fonction définie par : $g(x) = \frac{f(x)}{\cos(x)}$

a) Déterminer le domaine de définition de g

b) Résoudre dans $[0; 2\pi]$, l'équation $g(x) = \frac{1}{2}$

Exercice N°8 : (Pilote)

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{\sin(4x)}{4\sin(x)}$

Déterminer D_f et résoudre dans \mathbb{R} l'équation $f(x) = \frac{1}{4}$

1) Montrer que pour tout $x \in D_f$ on a :

$$f(x) = 2\cos^3(x) - \cos(x).$$

2) a) Vérifier que $-\frac{1}{2}$ et $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ sont deux solutions de l'équation : $8x^3 - 4x - 1 = 0$.

b) En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et celle de $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$

3) Résoudre dans \mathbb{R} puis dans $[0; 2\pi]$ l'inéquation :

$$(1 + \sqrt{5})\cos(2x) + \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}\sin(2x) = 2$$

Exercice N°9 : (Pilote)

1) a) Rappeler les formules de duplication de $\cos(2\alpha)$

b) En déduire que $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

c) Ecrire $\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x)$ sous la forme $r\cos(x - \varphi)$.

d) Résoudre dans \mathbb{R} , l'équation :

$$\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

e) Résoudre dans $[0; 2\pi]$ $\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) \leq 1$

2) Soit $f(x) = \sin(2x) - \sqrt{3}\cos(2x) - 2\sin(x) + \sqrt{3}$

a) Montrer que pour tout réel x , on a :

$$f(x) = 2\sin(x)(\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) - 1).$$

b) Etudier le signe de $f(x)$ sur $[0; 2\pi]$ puis

déterminer l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \leq 0$ dans l'intervalle $[0; 2\pi]$

Exercice N°10 : (Pilote).

1) On pose $A(x) = \sqrt{2}\cos(2x) - \sqrt{2}\sin(2x)$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $A(x) = 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$.

b) Prouver que $A(x) = 4\cos^2\left(x + \frac{\pi}{8}\right) - 2$

En déduire que $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

c) Résoudre dans \mathbb{R} , puis dans $[0; 2\pi[$, l'équation

$$A(x) = \sqrt{2 + \sqrt{2}}.$$

2) On considère un triangle ABC isocèle en A tel que

$AB = 4$ et $(\widehat{AB, AC}) \equiv \frac{63\pi}{4} [2\pi]$. (ζ) est le cercle de

centre O et rayon r , est circonscrit à ABC

La droite perpendiculaire à (AB) en A , recoupe (ζ) en un point D

a) Calculer $(\widehat{DA, DB})$. Prouver que : $(\widehat{BD, BA}) \equiv \frac{\pi}{8} [2\pi]$

b) En déduire les valeurs de r et de $\det(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA})$.

c) Soit A' le symétrique de A par rapport à (BC) .

Déterminer la mesure principale de $(\widehat{A'B, A'C})$

En déduire et représenter l'ensemble Γ des

points M du plan tel que : $(\widehat{MB, MC}) \equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi]$

Rotations3^{me} Maths-SciencesExercice N°1 :

Dans le plan orienté on considère un triangle ABC rectangle et isocèle en A et de sens direct

On pose I le milieu du segment [BC]

Δ la droite perpendiculaire à [BC] et passant par C, coupe (AB) en D

Soit R la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$

- 1) a) Déterminer R(B)
b) Déterminer R((BC)) et R((AC)), déduire R(C)
- 2) Caractériser RoR, déduire que A est le milieu du segment [BD]
- 3) Soit E le point tel que le triangle AEB est équilatéral direct
a) Montrer qu'il existe une unique rotation R' transformant B en A et E en D
b) préciser l'angle de R' et construire son centre Ω
- 4) Soit M \in [BE] et N \in [AD] tel que BM = AN
Montrer que la médiatrice de [MN] passe par un point fixe, préciser la nature du triangle ΩMN

Exercice N°2 :

Le plan est orienté dans le sens direct

Soit ABC un triangle équilatéral tel que :

$(\widehat{AB, AC}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ et J le milieu du segment [BC]

Soit D le symétrique de A par rapport à (BC) et E symétrique de C par rapport à B

R la rotation de centre D et d'angle $\frac{\pi}{3}$

- 1) Montrer que $R(C) = B$ et $R(A) = E$
- 2) a) Construire les points E et I' images respectives de B et J par la rotation R
b) Montrer que I' est le milieu de [BF]
c) Soit G le point défini par $\overrightarrow{BG} = 2\overrightarrow{BF}$, montrer que $R(E) = G$
- 3) Soit R' la rotation de centre B et d'angle $\frac{2\pi}{3}$, montrer que $R'(A) = E$
- 4) Soit M un point du plan,
On pose $R(M) = N$ et $R'(N) = M'$
Montrer que I, M et M' sont alignés

Exercice N°3 :

On considère un parallélogramme ABCD de sens direct

1) Construire le triangle IAD rectangle et isocèle en I tel que $(\widehat{IA, ID}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et le triangle DCE

rectangle isocèle en D tel que $(\widehat{DC, DE}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

- 2) Soit r la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$
a) Quelle est l'image de A par r ?
b) Montrer que $r(B) = E$
- 3) Soit A' le symétrique de A par rapport à r
a) Justifier que $A' = r(D)$
b) Montrer que $A'E = BD$ et que les droites (A'E) et (BD) sont perpendiculaires.

Exercice N°4 :

Le plan est orienté dans le sens direct

Soit ABC un triangle isocèle en A tel que :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]$$

- 1) Soit E un point de $[AB]$ et F un point de $[AC]$ tel que $AF = BE$
 - a) Montrer qu'il existe une unique rotation r transformant A en B et F en E
 - b) Montrer que $\frac{\pi}{3}$ est l'angle de cette rotation
 - c) Montrer que le centre de r est le point O centre du cercle Γ circonscrit au triangle ABC
 - d) Dédurre $r(C)$
- 2) Soit D l'image de B par r .
Montrer que $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$
- 3) On désigne par r_1 la rotation réciproque de r ,
 $P = S_A(B)$ et $Q = r_1(P)$
 - a) Montrer que C est le milieu de $[AQ]$
 - b) Montrer que le triangle AOQ est rectangle en O
- 4) Soit (ζ) le cercle de diamètre $[AQ]$ et (ζ') son image par r
 - a) Montrer que P est un point de (ζ)
 - b) Déterminer et construire le cercle (ζ')
 - c) Soit M un point ξ distinct de P et N son image par r
Montrer que M, N et P sont alignés

Exercice N°5 :

Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral direct ABC de côté 4

On désigne par I ; J et K les milieux respectifs de $[AB]$; $[BC]$ et $[CA]$

- 1) a) Montrer qu'il existe une unique rotation R qui envoie I en C et B en J
 - b) Préciser l'angle de R et construire le centre de R
 - c) Montrer que B, I et C sont situés sur un même cercle (ζ)
 - 2) Soit B' le symétrique de I par rapport à B
 - a) Montrer que $R^{-1}(B) = B'$
 - b) Montrer que $(\Omega I')$ est tangente à ξ $I' = R^{-1}(I)$
- Dans la suite on munit le plan du repère orthonormé direct $(A; \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\overrightarrow{AB} = 4\vec{i}$
- 3) a) Déterminer les coordonnées polaires du point C
En déduire ses coordonnées cartésiennes
 - b) Déterminer les coordonnées cartésiennes des points I ; J et K

4) Soit $f : P \rightarrow P / M(x; y) \mapsto M'(x'; y')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}(x + y\sqrt{3}) \\ y' = \frac{1}{2}(-x\sqrt{3} + y + 4\sqrt{3}) \end{cases}$$

a) Montrer que f est une isométrie du plan

b) Vérifier que le point J est invariant par f

c) Soit $M(x; y)$ un point distinct de J et $M'(x'; y')$ son image par f

Déterminer $\cos(\widehat{JM, JM'})$

d) Déduire la nature et les éléments

Caractéristiques de f

5) Soit M un point variable du plan.

On pose $R(M) = M_1$ et $f(M) = M_2$

a) Démontrer que si M est distinct de J et de Ω

alors on a : $(\widehat{M\Omega, MJ}) \equiv (\widehat{MM_1, MM_2})$

b) En déduire le lieu géométrique du point M

lorsque les points $M; M_1$ et M_2 sont alignés.

Exercice n° 6 :

Dans le plan orienté P

On considère un triangle ABC rectangle et isocèle en A et de sens direct

On désigne par I le milieu de $[BC]$ et par Δ la perpendiculaire à (BC) menée de C

Δ coupe (AB) en K

1) Soit R la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$

a) Déterminer $R(B)$; $R((AC))$ et $R((BC))$

b) Déduire $R(C)$ et $R(I)$

2) On désigne par (ζ) cercle circonscrit au triangle ABC

a) Déterminer $(\zeta') = R(\zeta)$

b) Déterminer $(\zeta') \cap (\zeta)$

3) Soit M un point du plan tel que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv \frac{5\pi}{4} [2\pi]$

a) Déterminer l'ensemble F des points M

b) On pose $R(M) = M'$; déterminer F' l'ensemble des points M' lorsque M décrit F

c) On pose $R(I) = J$,

Montrer que $IM = JM'$ et $(BM) \perp (CM')$