

**R\_ONE**

**PREPA-BAC**

**MATHEMATIQUES**

**SERIE C ET E : R2**

**COURS DES REMISES A NIVEAU :**

**“COLLECTION DE MATHS-PHYSIQUE : TD ”**

**<< DEUX MOIS DE CONCENTRATION ET DE TRAVAIL**

**ACHARNÉ VOUS DONNENT CINQ ANS D'AVANCE**

**DANS LA VIE >> RAYEZ**


**Proposé par : M. RAYEZ**

**Tel : 672 50 50 48 / 693 88 88 39**

**EDITION : Av 2023**

**« LA RENAISSANCE POUR UN  
NOUVEL HORIZON »**



<b>COLLÈGE François-Xavier VOGT</b> <b>B.P. : 765 Ydé – Tél. : 222 31 54 28</b> <b>e-mail : <a href="mailto:collegevogt@yahoo.fr">collegevogt@yahoo.fr</a></b>		<b>Année scolaire 2022-2023</b>
		<b>Du 19-11-2022</b>
<b>CONTRÔLE</b>		<b>Classe : Tle C</b>
<b>EPREUVE DE MATHÉMATIQUES</b>		<b>Durée : 4H</b>

## PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES (15,50 POINTS)

### EXERCICE 1 : (03,50 POINTS)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ . Soit la transformation  $f$  du plan qui à tout point  $M$  d'affixe  $z$  associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  définie par :  $z' = ze^{i\frac{5\pi}{6}}$ . On définit la suite de points  $M_n$  de la manière suivante :  $M_0$  a pour affixe  $z_0 = e^{i\frac{\pi}{2}}$  et pour tout entier naturel  $n$  :  $M_{n+1} = f(M_n)$ . On appelle  $z_n$  l'affixe de  $M_n$ .

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de  $f$ . 0,75pt
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ , on a l'égalité :  $z_n = e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{6})}$ . 0,75pt
3. Soient deux entiers  $n$  et  $p$  tels que  $n$  soit supérieure ou égal à  $p$ . Démontrer que deux points  $M_n$  et  $M_p$  sont confondus si et seulement si  $(n - p)$  est multiple de 12. 0,75pt
4. a. On considère l'équation (E) :  $12x - 5y = 3$  où  $x$  et  $y$  sont des entiers relatifs. Après avoir vérifié que le couple  $(4; 9)$  est solution, résoudre l'équation (E). 0,75pt  
b. En déduire l'ensemble des entiers naturels  $n$ , tels que  $M_n$  appartienne à la demi-droite  $[O, \vec{u})$ . 0,5pt

### EXERCICE 2 : (05, 00 POINTS)

**A-** On considère la fonction  $h$  définie sur  $[0; \frac{\pi}{3}]$  par  $h(t) = \sqrt[3]{2 \cos t - 1}$ .

1. Montrer que pour tout réel  $t$ , on a :  $2 \cos t - 1 = -4 \sin\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \sin\left[\frac{1}{2}\left(t - \frac{\pi}{3}\right)\right]$ . 0,75pt

2. Montrer que pour tout  $t \in [0; \frac{\pi}{3}]$ ,  $\frac{h(t)}{t - \frac{\pi}{3}} = -\sqrt[3]{\frac{4 \sin\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{6}\right)}{\left(t - \frac{\pi}{3}\right)^2}} \times \sqrt[3]{\frac{\sin\left[\frac{1}{2}\left(t - \frac{\pi}{3}\right)\right]}{t - \frac{\pi}{3}}}$ . 0,5pt

3. En déduire  $\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt[3]{2 \cos t - 1}}{t - \frac{\pi}{3}}$ . 0,5pt

**B-** On considère les fonctions numériques définie sur  $D = ]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$  par  $j(x) = \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}$  et  $k(x) = (\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}) \sin(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1})$

1. Démontrer que pour tout  $x \in D$ ,  $k(x) = 2 \frac{\sin(j(x))}{j(x)}$ . 0,5pt

2. Déterminer la valeur exacte des limites  $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} j(x)$  et  $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} k(x)$ . 0,5pt

**C-** Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = x^3 - 3x - 4$ .

1. Étudier le sens de variation de  $g$  sur  $\mathbb{R}$  et dresser le tableau de variation. 1pt
2. Démontrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  dont on donnera un encadrement à 0,1 près. 0,75pt
3. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation  $g(x) \leq 0$ . 0,5pt

### EXERCICE 3 : (07,00 POINTS)

**A-** Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ . On donne quatre points d'affixes respectives :  $Z_A = -2 + 6i$ ;  $Z_B = 1 - 3i$ ;  $Z_C = 5 + 5i$  et  $Z_D = 2 + 4i$ .

1. Déterminer l'écriture complexe de la similitude  $s$  qui transforme  $C$  et  $D$  respectivement en  $A$  et  $B$ . 1pt
2. On considère la similitude  $s'$  définie par :  $z' = 2iz + 13 + i$ .  
a) Montrer que  $s'$  est une homothétie  $h$  dont on précisera le rapport. 0,75pt

- b) Quel est l'image de  $C$  par  $h$  ? 0,5pt
3. On considère la rotation  $r$  d'écriture complexe  $z' = iz + 2 + 4i$ .
- a) Déterminer l'image de  $B$  par  $r$ . 0,5pt
- b) Montrer, sans calcul, que la transformation  $roh$  admet le point  $C$  pour point invariant. 0,5pt
- B-** Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ , on considère le point  $A$  d'affixe 2 et le cercle  $(\mathcal{C})$  de centre  $O$  et de rayon 2. On note  $\alpha = 1 + i\sqrt{3}$  et  $\bar{\alpha}$  le nombre complexe conjugué de  $\alpha$ .
1. Démontrer que  $\alpha^2 - 4\alpha = 2\bar{\alpha} - 8$ . 0,5pt
2. Démontrer que  $B$  et  $C$  d'affixes respectives  $\alpha$  et  $\bar{\alpha}$  appartiennent à  $(\mathcal{C})$ . 0,5pt
3. Soit  $D$  un point de  $(\mathcal{C})$  d'affixe  $2e^{i\theta}$  où  $\theta \in ]-\pi, \pi]$ .
- a) Construire le point  $E$  image du point  $D$  par rotation  $r$  de centre  $O$  et d'angle  $\frac{\pi}{3}$ . 1pt
- b) Justifier que le point  $E$  a pour affixe  $z_E = \alpha e^{i\theta}$ . 0,5pt
4. Soit  $F$  et  $G$  les milieux respectifs des segments  $[BD]$  et  $[CE]$ .
- a) Justifier que les affixes de  $F$  et  $G$  sont respectivement :  $z_F = \frac{\alpha}{2} + e^{i\theta}$  et  $z_G = \frac{\bar{\alpha} + \alpha e^{i\theta}}{2}$  0,5pt
- a) Démontrer que  $\frac{z_G - 2}{z_F - 2} = \frac{\alpha}{2}$ . 0,5pt
- b) Justifier que le triangle  $AFG$  est équilatéral. 0,25pt

## PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES (04,50 POINTS)

### SITUATION :

M. ESSOMBA est un fonctionnaire proche de la retraite salariale. Pour mieux préparer sa prochaine nouvelle vie, il décide d'acheter une grande parcelle de terrain pour construire sa maison de retraite dans une zone côtière. Le vendeur de terrain lui présente le titre foncier de la zone sur laquelle est marquée certaines informations complémentaires « AFED est un carré de côté 1, BCEF dans cet ordre l'image de ABCD par une similitude directe bien définie et l'unité de mesure est le décimètre », malheureusement la valeur de la longueur de ce terrain  $AB$  ne figure plus sur le titre et le mètre carré de terrain dans la zone est de 20.000 Francs.

YANN fils aîné de la famille ESSOMBA souhaite participer à un jeu concours qui consiste à choisir une boule, ensuite l'immerger dans de l'eau contenue dans un récipient cylindrique de rayon 12 cm. La hauteur de l'eau est de 5 cm. On gagne le jeu lorsque la surface de l'eau est tangente à la boule après immersion. Les boules disponibles pour le jeu sont toutes distinctes et ont un rayon compris entre 1 cm et 26 cm.

Pour les travaux d'aménagement de sa cour de 100 mètres carrés, M. ESSOMBA souhaite utiliser des dalles sous forme de

pavés obtenus en plaçant les points images dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé d'unité 2 cm, les solutions l'équation  $z^6 = 1$ . On suppose que l'écart entre deux dalles consécutives est négligeable.

**On suppose que :**  $2,236 < \sqrt{5} < 2,238$  et  $1,732 < \sqrt{3} < 1,736$

**Tâche 1 :** Quelle somme doit-il au moins prévoir pour l'achat de cette parcelle ?

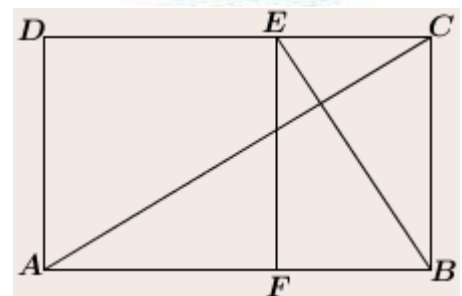
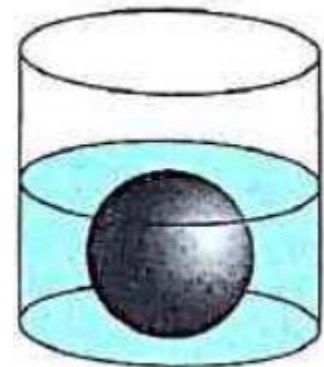
1,5pt

**Tâche 2 :** Déterminer le nombre de gagnants de ce jeu concours.

1,5pt

**Tâche 3 :** Quel est le nombre de pavé que pourra utiliser M. ESSOMBA ?

1,5pt



# COLLEGE PRIVE LAIC YMELT

Examen	Epreuve	Coef	Durée	Classe	Année Scolaire
Séquence 2	Mathématiques	07	4h00	TleC	2022/2023

présentation et le soin apportés à la copie seront pris en compte dans l'évaluation de la copie.

## PARTIE A : Utilisation des ressources

(15,5 points)

### Exercice 1 : 3.25pts (Arithmétique-Nombres complexes)

I- 1. On appelle nombre parfait tout entier naturel égal à la somme de ses diviseurs stricts (distinct de lui-même). Le nombre 28 est-il parfait ? 0,25pt

2. Détermine tous les couples d'entiers naturels  $(a; b)$  tels que :

i)  $ppcm(a; b) + pgcd(a; b) = a + 9$  ii)  $2 \times 18^b = 3 \times 6^a$ . 0,75 pt + 0,5 pt

3. Détermine les valeurs possibles de l'entier naturel  $a$  tel que  $ppcm(a; 6) = 72$ . 0,5 pt

II-On désigne par  $\mathbb{C}$  l'ensemble des nombres complexes.

1. Résous dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $z^2 - 4\sqrt{3}z + 16 = 0$ . 0,5 pt

2. Ecris les solutions de cette équation sous la forme exponentielle. 0,5 pt

3. En déduis que le point  $O$  et les images ponctuelles des solutions de l'équation ci-dessus forment un triangle équilatéral. 0,25 pt

### Exercice 2: 3.5pts (Espaces vectoriels)

On définit dans  $\mathbb{R}^3$  les ensembles  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y = 0 \text{ et } z = 0\}$  ;

$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, -y + z = 0 \text{ et } x = 0\}$  et  $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 - y = 0\}$ .

1.  $H$  est-il un sous espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$  ? 0,25pt

2. Montre que  $F$  et  $G$  sont chacun une droite vectorielle dont on précisera une base. 1pt

3. La somme  $F + G$  est-elle directe ? Peut-on dire que les sous espaces vectoriels  $F$  et  $G$  sont supplémentaires ? 0,5pt

4. Détermine  $F + G$  puis donner sa dimension , une base et une équation. 1pt

5. On considère les vecteurs  $u_1 = (0,1,1)$  et  $u_2 = (1,10)$  de  $\mathbb{R}^3$ .

a) Justifie qu'ils n'engendrent pas  $\mathbb{R}^3$ . 0,25pt

b) Détermine  $u_3$  pour que la famille  $\{u_1, u_2, u_3\}$  soit une famille génératrice de  $\mathbb{R}^3$ . 0,5pt

### Exercice 3: 4,75pts (Applications linéaires-Calcul vectoriel)

I-  $E$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  dont une base est  $\mathcal{B} = (\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ . Soit  $f$  l'application de  $E$  dans  $E$  qui à tout vecteur  $\vec{u}(x; y; z)$  de  $E$  associe le vecteur  $f(\vec{u}) = (-x + 3y + 2z)\vec{i} + (-x + z)\vec{j} + (-x + 3y + 2z)\vec{k}$ .

1.a) Montre  $f$  est une application linéaire . 0,5 pt

Détermine le noyau  $\text{Ker } f$  de  $f$  (on précisera une base de  $\text{Ker } f$  ). 0,5 pt

b) Détermine l'image  $\text{Im } f$  de  $f$  (on précisera une base de  $\text{Im } f$ ). 0,5 pt

c)  $f$  est-elle bijective ? Justifie ta réponse.

d) A-t-on  $\text{Im } f \oplus \text{ker } f = E$  ? 0,5 pt

2. Détermine la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}' = (\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$  où  $\vec{e}_1 = -\vec{i}$ ;  $\vec{e}_2 = \vec{i} + \vec{j}$  et  $\vec{e}_3 = -\vec{i} + \vec{k}$  sont des vecteurs de  $E$ . 1 pt

II- Dans l'espace orienté et rapporté à un repère orthonormé direct  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . On considère les points  $A(1; 1; 0)$ ;  $B(2; 0; -1)$  et  $C(1; -2; 1)$ .

1. Définis le produit vectoriel de deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  de l'espace puis donne 3 applications du produit vectoriel. 1 pt

2. Calcule  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$  puis en déduire l'aire du parallélogramme  $ABCD$ , où  $D$  est un point de l'espace. 0,75 pt

## Exercice 4: 4pts (Fonctions continues et strictement monotones-Etude de fonctions)

Soit  $f$  la fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 2x - \sin x$ .

1. Montre que  $f$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$ . 0,5 pt
2. Dresse le tableau de variation de  $f$  et celui de sa fonction réciproque. 0,75 pt
3. Justifie que sa dérivée réciproque  $(f^{-1})'$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ . 0,25 pt
4. Montre que l'équation  $f(x) = 4$  admet une unique solution  $\alpha$  dans  $]2,2 ; 2,4[$ . 0,5 pt
5. Soit  $g$  la fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = 2 + \frac{1}{2}\sin x$ . 0,5 pt
  - a-Vérifie que  $g(\alpha) = \alpha$ . 0,5 pt
  - b- Montre que pour tout réel  $x$ , on a  $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$ . 0,5 pt
  - c- En déduire que pour tout réel  $x$ , on a :  $|g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$ . 0,5 pt

## PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES (4,5 points)

Etre capable de déployer un raisonnement logique et communiquer à l'aide du langage mathématique en faisant appel aux statistiques, aux nombres complexes et à l'arithmétique pour évaluer ou faire des prévisions d'un budget.

M.TENKEU est un sponsor du club de Mathématiques de l'université des Montagnes.

Le tableau ci-dessous donne la liste des adhérents à ce club jusqu'en 2022.

Rang de l'année $x_i$	1	2	3	4	5	6	7	8
Nombre d'adhérents $y_i$	95	195	240	280	305	320	340	420

Il souhaite octroyer une aide financière à ce club si le nombre d'adhérents dépasse 800 étudiants au cours d'une année.

Michel, l'un des étudiants de ce club est chaudronnier. Il a été sollicité pour participer à la construction d'un gazoduc. Son travail consiste à souder des têtes de tuyau de gazoducs (voir figures) dont les extrémités des tuyaux sont caractérisées dans le plan par le lieu des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que  $|4i\bar{z} + 16 - 12i| = |\overline{6 + 8i}|$ .

La soudure d'une dimension d'un mètre coûte 20000fcfa.

Michel a soudé 29 têtes de gazoduc. Après ce chantier, il souhaite se servir de l'argent qu'il y a gagné pour acheter une voiture de 1 500 000fcfa pour le travail.

Pour construire une mini cité joutant le campus de l'université des montagnes, M. TENKEU souhaite acheter une parcelle de terre ayant la forme d'un trapèze isocèle de hauteur 20 mètres dont les autres dimensions en mètres sont deux entiers naturels  $a$  et  $b$  vérifiant le

$$\text{système} \begin{cases} ppcm(a; b) = 440 \\ a^2 + b^2 = 4625. \end{cases}$$

Le mètre carré de ce terrain coûte 7500 fcfa.

Sur cette parcelle, il souhaite construire une ferme, cependant il dispose d'un montant de 7 130 000 fcfa pour l'achat de ce terrain.



### Tâches :

1. A partir de quelle année M. TENKEU pourra-t-il octroyer une aide financière à ce club? 1,5 pt
2. Michel pourra-t-il acheter cette voiture ? 1,5 pt
3. M. TENKEU pourra-t-il acheter ce terrain ? 1,5 pt

Jean Rostand a dit « Attendre d'en savoir assez pour agir en toute lumière, c'est se condamner à l'inaction. »

**LYCEE DE BANGOULAP**

*Évaluation de la Deuxième séquence*

<b>Classe :</b>	<b>TERMINALE C</b>	<b>Durée :</b>	04 heures	<b>Année scolaire :</b>	2022/2023
<b>Épreuve :</b>	<b>MATHÉMATIQUES</b>	<b>Coef. :</b>	7	<b>Par</b>	DJOUTSOP Emile

**EVALUATION DES RESSOURCES** (15,5 points)

**EXERCICE 01:** (05 points)

*Les questions de cet exercice sont indépendantes*

- 1- La division euclidienne de 900 par un entier  $b$  a pour quotient 14 et pour reste  $r$ .  
Quelles sont les valeurs de  $b$  et  $r$  ? 0,5 pt
- 2- Soit  $n$  un entier naturel, montrer que  $2n+5$  et  $3n+7$  sont premiers entre eux. 0,5 pt
- 3- Déterminer tous les couples d'entiers naturels tels que  $x^2 = y^2 + 17$ . 0,75 pt
- 4- Déterminer les entiers naturels  $n$  tels que le nombre  $\frac{3n-4}{2n-1}$  soit un entier. 0,5 pt
- 5- Déterminer tous les couples  $(x; y)$  tels que le nombre  $x43y$  écrit dans le système décimal soit divisible par 2 et par 9. 0,75 pt
- 6- Démontrer en utilisant les congruences que  $3^{2n+1} + 2^{n+2}$  est divisible par 7. 0,5 pt
- 7- Résoudre dans  $\mathbb{N}^2$  le système  $\begin{cases} PGCD(a;b)=12 \\ a^2 - b^2 = 7344 \end{cases}$ . 0,75 pt
- 8- Déterminer le chiffre des unités de  $7^{1999}$ . 0,75 pt

**EXERCICE 02 :** (03,5 points)

Soit la fonction numérique  $f$  de la variable réelle  $x$  définie par :  $f(x) = \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x}$ .

- 1- Montrer que l'ensemble de définition  $D_f$  de  $f$  est  $[-1 ; 0[ \cup ]0 ; 1]$ . 0,25 pt
- 2- Déterminer les limites de  $f$  aux bornes de son  $D_f$ . 0,5 pt
- 3- Etudier la dérivabilité de  $f$  en  $-1$  et en  $1$ , puis donner une interprétation graphique des résultats obtenus. 0,25 pt
- 4- Démontrer pour tout  $x \in D_f$   $f'(x) = \frac{-1 - \sqrt{1-x^2}}{x^2 \sqrt{1-x^2}}$ . 0,5 pt
- 5- Dresser le tableau de variation de  $f$  sur  $D_f$ . 0,25 pt
- 6- Démontrer que l'équation  $f(x) = 2$  admet une solution unique  $\alpha \in ]0;1]$ . 0,75 pt
- 7- Construire la courbe de  $f$  sur son  $D_f$ . 0,5 pt

**EXERCICE 03 :** (03,5 points)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on donne les points  $A(2;0;1)$ ;  $B(3;-2;0)$  et  $C(2;8;-4)$ .

1. Soit  $M(x; y; z)$  un point de l'espace. Exprimer en fonction de  $x, y$  et  $z$  les coordonnées du produit vectoriel  $\overline{AM} \wedge \overline{BM}$ . 0,75 pt
2. Résoudre dans  $\mathbb{R}^3$  le système suivant :  $\begin{cases} -x + y - 2z = -4 \\ -x - y - z = -11 \\ 2x + y - z = 8 \end{cases}$ . 0,5 pt
3. Montrer qu'il existe un unique point  $N$  vérifiant :  $\overline{AN} \wedge \overline{BN} = \overline{CN}$  et donner les coordonnées du point  $N$ . 0,5 pt

4. On rappelle que le volume d'un tétraèdre est  $V = \frac{\text{Surface de base} \times \text{hauteur}}{3}$ .

- a) Le point N étant défini à la question précédente, montrer que le volume du tétraèdre ABCN est égal à  $\frac{1}{6}CN^2$ ; puis calculer V. 1 pt
- b) En utilisant le résultat du 1) et en prenant M=C, calculer l'aire du triangle ABC.
- c) En déduire la distance du point N au plan (ABC). 0,5 pt

**EXERCICE 04 :** (03 points)

L'espace vectoriel W des vecteurs est muni d'une base orthonormée directe

$B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . On considère les vecteurs  $\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$ ;  $\vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} - \vec{j})$  et  $\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2$

1- Soit  $f$  une application du plan de W dans W qui à tout vecteur  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  de W associe le vecteur  $f(\vec{u}) = (\vec{e}_1 \wedge \vec{u}) \wedge \vec{e}_2$ .

a) Montrer que  $f$  est un endomorphisme de W. 0,5 pt

b) Montrer que  $f(\vec{u}) = \frac{1}{\sqrt{6}}[(y-x)\vec{i} + (y-x)\vec{j} + (y-x)\vec{k}]$ . 0,5 pt

2- Démontrer que  $\ker f$  est un plan vectoriel de W dont-on donnera une base. 0,5 pt

3- Démontrer que  $\text{Im } f$  est une droite vectorielle de W dont-on donnera une base.

4- Calculer les coordonnées de  $\vec{e}_3$  et montrer que  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  est une base orthonormée directe de W. 0,5 pt

5- Ecrire la matrice de  $f$  dans la base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ . 0,5 pt

**PARTIE B :** **EVALUATION DES COMPETENCES:** (04,5 points)

Un jeune ingénieur veut créer un jardin sur un domaine ABCD où les sommets A, B et C ont pour affixes respectives  $Z_A = 3 - i$ ;  $Z_B = -1 + i$  et  $Z_C = 1 + 5i$ . Le point D est l'image du point A par la similitude directe de centre C qui transforme B en A. Il souhaite recouvrir ce jardin avec des pavés dont le carton coûte 15 000F et peut recouvrir une superficie de  $5m^2$ .

Il dispose également une plantation sur laquelle il veut y planter des avocatiers et des manguiers. Au démarrage du projet, le jeune ingénieur dispose de 149 500 F et veut faire une pépinière pour ses arbres fruitiers. Un centre de recherche lui propose d'acheter le plan d'avocatier à 3 500 F et le plant de manguiers à 5 000 F et dans ce cas il aura plus de 12 plants de chaque type.

Les récoltes annuelles de chaque sorte de fruit sont conditionnées dans les sacs et sont vendues au même prix. En un an, la production varie entre 40 et 160 sacs de fruits et le bénéfice réalisé par ce jeune ingénieur exprimé en milliers de francs est modélisé par la fonction  $g(x) = \frac{-2x^2 + 2000x - 6400}{x}$  où  $x$  représente le nombre de sacs de fruits par an.

Tâches

- 1- Déterminer le montant minimum nécessaire pour l'achat des pavés 1,5pt
- 2- Déterminer le nombre exact de plants d'avocatiers et de manguiers si l'ingénieur décide de traiter avec le centre de recherche. 1,5 pt
- 3- Déterminer le nombre de sacs de fruits à produire en un an pour réaliser un bénéfice maximal. 1,5 pt

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

PARTIE A : Évaluation des ressources

EXERCICE 01: (06 points)

- A- 1- a) Résoudre dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation (E):  $13x - 7y = 2$  0,75 pt
- b) En déduire la solution dans  $\mathbb{Z}$  de  $\begin{cases} x \equiv 5[7] \\ x \equiv 3[13] \end{cases}$ . 0,5 pt
- 2- Démontrer par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}, 9^{n+1} + 2^{6n+1}$  est divisible par 11. 0,75 pt
- 3- a) Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division euclidienne de  $7^n$  par 9. 0,5 pt
- b) En déduire le reste de la division euclidienne de  $34^{2009}$  par 9. 0,5 pt
- B- 1- a) Déterminer les racines carrées du nombre complexe  $2 + 2i\sqrt{3}$ . 0,5 pt
- b) Résoudre dans  $\mathbb{C}$ , l'équation  $z^2 + (1 + i\sqrt{3})z - 1 = 0$ . 0,5 pt
- 2- Soit P le polynôme à variable complexe z défini par  $P(z) = z^4 + 2z^3 + 2z^2 - 2z + 1$ .
- a) Démontrer que  $z_0$  est une solution de l'équation  $P(z) = 0$ , alors  $\overline{z_0}$  est aussi solution de l'équation  $P(z) = 0$ . 0,5 pt
- b) Justifier que 0 n'est pas solution de l'équation  $P(z) = 0$ . 0,25 pt
- c) Déterminer les nombres complexes a et b tels que  $P(z) = z^2 \left[ \left( z - \frac{1}{z} \right)^2 + a \left( z - \frac{1}{z} \right) + b \right]$
- d) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $Z^2 + 2Z + 4 = 0$ , puis déduire l'ensemble solution de l'équation  $P(z) = 0$ . 1,25 pt

EXERCICE 02: (04 points)

Soit  $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  une base d'un espace vectoriel E. soit f un endomorphisme de E.

- 1- Pour tout réel  $\lambda$ , on considère l'ensemble  $E_\lambda$  des vecteurs  $\vec{u}$  de E tels que  $f(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$
- a) Démontrer que  $E_\lambda$  est un sous-espace vectoriel de E. 0,75 pt
- b) On suppose que f vérifie l'égalité  $f \circ f = 2f$ . Démontrer que  $\vec{u} \in \text{Im } f \Leftrightarrow \vec{u} \in E_2$
- 2- On suppose ici qu'on a :  $f(\vec{i} + \vec{j}) = 2\vec{i} + 2\vec{j}$ ,  $f(\vec{i} - \vec{j}) = 2\vec{i} - 2\vec{j}$  et  $f(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) = \vec{0}$ .
- a) Démontrer que  $f(\vec{i}) = 2\vec{i}$ ,  $f(\vec{j}) = 2\vec{j}$  et  $f(\vec{k}) = -2\vec{i} + 2\vec{j}$ . 0,75 pt
- b) Donner la matrice M de f dans la base  $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . 0,25 pt
- c) Démontrer que  $f \circ f = 2f$ . 0,5 pt
- d) Déterminer le noyau  $\text{Ker } f$  et  $\text{Im } f$  ainsi que chacune de ses bases. 1 pt

**EXERCICE 03:** (05,5 points)

A- Soit a et b deux nombres réels. f la fonction définie par  $f(x) = ax + b - \sqrt{x^2 + 1}$ .

1- Etudier la limite de f en  $-\infty$  (On discutera suivant les valeurs de a). 1 pt

2- Déterminer a et b pour que la droite d'équation  $2x - y + 5 = 0$  soit asymptote à la courbe représentative de f en  $-\infty$ . 0,5 pt

B- Soit la fonction g définie sur  $I = \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$  par  $g(x) = \frac{1}{\cos x}$ .

1- Etudier les variations de la fonction g sur I et dresser son tableau de variation. 1pt

2- Démontrer que  $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right], |g'(x)| \leq \sqrt{2}$  ; puis déduire que  $|g(x) - \sqrt{2}| \leq \sqrt{2} \left| \frac{\pi}{4} - x \right|$ . 1 pt

3- Montrer que g réalise une bijection de I vers un intervalle J à préciser. 0,25 pt

4- On désigne par  $g^{-1}$  la bijection réciproque de g.

a) Dresser le tableau de variation de  $g^{-1}$ . 0,25 pt

b) Calculer  $g^{-1}(1)$ ;  $g^{-1}(2)$  et  $g^{-1}(\sqrt{2})$ . 0,75 pt

c) Montrer que  $g^{-1}$  est dérivable sur  $[1; +\infty[$  et que  $(g^{-1})'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$ . 0,75 pt

**PARTIE B :** **EVALUATION DES COMPETENCES:** (04,5 points)

**SITUATION :** M. NANA a un chantier qui n'est pas desservi par une voie que peut emprunter un engin à moteur. Il a acheté le sable et a versé chez son voisin situé non loin du chantier. Ce sable est livré par une société et est acheté à raison de 1 500F le mètre cube et est contenu dans un bac plein de forme parallélépipédique de volume

$V = 3ab$  où a et b vérifient en mètre le système  $\begin{cases} \text{pgcd}(a, b) = 7 \\ a^2 - b^2 = 343 \end{cases}$ .

Ce terrain a une forme rectangulaire dont ses dimensions sont la partie réelle et la partie imaginaire de la solution z de l'équation  $(1 + 4i)z + (3 - 4i)\bar{z} = 4 - 8i$  où  $\bar{z}$  est le conjugué de z. M. NANA décide donc d'acheter du fil barbelé pour clôturer ce terrain. Le rouleau de 5 mètres de fil barbelé est vendu à 3 500 frs.

Le portail de la barrière de M. NANA a trois phares A, B et C. Ils lancent un signal lumineux respectivement toutes les 25 secondes, 30 secondes et les 35 secondes. Un signal simultané se produit à 22 heures.

Tâche 1 : Déterminer le prix du sable. 1,5 pt

Tâche 2 : Quel est le montant à dépenser par M. NANA pour l'achat du fil barbelé permettant de clôturer entièrement ce terrain ? 1,5 pt

Tâche 3 : A quelle heure se produira le premier signal simultané après minuit ? 1,5 pt

LYCEE BILINGUE DE BAMYANGA			
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES			
Deuxième Évaluation	Classe : T <sub>c</sub>	Année scolaire 2022-2023	Date :
Épreuve de mathématiques	Durée : 4h	Coef : 7	22 /11/ 2022

### PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES/15.5 points

#### EXERCICE 1 (2.75 points)

1. Dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes, on considère l'équation (E) :

$$z^3 + (6 + 2i)z^2 + (6 + 8i)z + 8 + 12i = 0.$$

a) Démontrer que (E) admet une solution imaginaire pure. 0.5pt

b) Déterminer les nombres complexes a et b tels que : 0.5pt

$$(E) \Leftrightarrow (z + 2i)(z^2 + az + b) = 0.$$

c) Déduire la résolution dans  $\mathbb{C}$  de l'équation (E). 1pt

2. Soit  $\alpha$  un nombre réel de l'intervalle  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$$\text{Résoudre dans } \mathbb{C} \text{ l'équation (E) : } z^2 \cos^2 \alpha - z \sin 2\alpha + 2 - \cos^2 \alpha = 0$$

0,75pt

#### EXERCICE 2 (2.75 points)

1. Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = x\sqrt{1+x^2} - 1$ .

a) Démontrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  sur  $\mathbb{R}$ . 1pt

b) Donner un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude  $10^{-2}$ . 0.75pt

2. Démontrer que pour tout nombre réel  $x$  de l'intervalle  $[0; \frac{1}{2}]$ , on a :

$$1 - \frac{x}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{1-x} \leq 1 - \frac{x}{2}.$$

1pt

#### EXERCICE 3 (4 points)

1. Soit  $p$  un nombre premier.

a) Démontrer que pour tout entier  $k$  tel que  $1 < k < p$ ,  $C_p^k$  est un multiple de  $p$ . 0.75pt

b) En déduire que pour tous entiers relatifs  $a$  et  $b$ , on a :  $(a + b)^p \equiv a^p + b^p [p]$ . 0.5pt

c) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $a$ ,  $a^p \equiv a [p]$ . 0.75pt

d) En déduire que si  $a$  et  $p$  sont premiers entre eux, alors  $a^{p-1} \equiv 1 [p]$ . 0.5pt

2. On considère dans  $\mathbb{N}^3$  le système (S) :

$$\begin{cases} p^2 + q^2 = r^2 \\ p + q + r = 24 \\ r < p + q \end{cases}$$

a) Démontrer qu'un triplet  $(p; q; r)$  est solution de (S) si et seulement si  $r < 12$  et  $(p; q)$  sont les solutions de l'équation :  $n^2 - (24 - r)n + 24(12 - r) = 0$ , où  $n$  est l'inconnue. 1pt

b) Résoudre le système (S). 0.5pt

#### EXERCICE 4 (5.5 points)

I) soit la fonction  $f$  définie sur  $[0; \frac{\pi}{2}]$  par :  $f(x) = \frac{1}{2} \sin^2 x$

1. Démontrer que  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$ . 0,5pt

2. Déterminer l'ensemble sur lequel  $f^{-1}$  est dérivable. 0,25pt

3. Démontrer que :  $(f^{-1}(x))' = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x}\sqrt{1-2x}}$ .

1pt

II) On considère la fonction  $h$  définie par :  $h(x) = \sqrt{|x^2 - x - 2|}$ .

a) Étudier la dérivabilité de  $h$  aux points d'abscisses -1 et 2 respectivement.

0.5pt

b) Étudier les branches infinies de la courbe représentative  $(C_h)$  de  $h$ .

1pt

c) Calculer  $h'(x)$  dresser le tableau de variations de  $h$ .

0,5pt

d) Construire la courbe représentative de  $h$  dans un repère orthonormé  $(O ; I, J)$ .

1pt

e) Démontrer que la courbe  $(C_h)$  de  $h$  dans l'intervalle  $[-1 ; 2]$  est un demi-cercle dont on précisera le centre et le rayon.

0,75pt

### PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES/5 points

#### Situation

Monsieur MOUSSA est un enseignant de mathématiques qui appartient à une famille très riche du Nord Cameroun. Sa famille possède des parcelles de terres et un grand poulailler. Son fils ALI qui est élève en Terminale C est très curieux de connaître le nombre de parcelles de terres et le nombre de volailles que possède sa famille. Mais son père qui veut vérifier si ALI sait utiliser ses connaissances mathématiques lui répond de manière énigmatique :

- Le nombre de parcelles est le plus petit nombre entier naturel tel que le nombre  $\overline{x32y}$  écrit dans le système de numération de base 5 soit divisible par 3 et par 4 ;
- Le nombre de volailles est le plus petit entier naturel divisible par 6 dont l'écriture en base 7 est  $\overline{\alpha 43\beta}$ .

PAUL, ami de MOUSSA et vivant aux ETATS-UNIS souhaiterait connaître au cours d'une conversation téléphonique le nombre d'enfants de la famille de MOUSSA. Il lui répond au téléphone que le nombre d'enfants de sa famille est le chiffre des dizaines, dans le système décimal, de l'entier naturel :  $(3548)^9 \times (2537)^{31}$ .

#### Tâches :

1. Combien de parcelles de terres possède la famille de ALI ?

1.5pt

2. Combien de volailles possède la famille de ALI ?

1.5pt

3. Quel est le nombre d'enfants de la famille de MOUSSA ?

1.5pt

Présentation : 0.5pt

EXAMINATEUR : M. NOUMSSI

**EPREUVE DE MATHÉMATIQUES**

**PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES 15,50 points**

**EXERCICE 1** 7,00 points

- I. Soit  $f$  la fonction définie sur  $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$  par  $f(x) = \tan(x)$
1. Démontrer que  $f$  réalise une bijection de  $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$  vers un intervalle  $\mathbb{R}$ . 0,5pt
  2. Démontrer que  $f^{-1}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et déterminer sa dérivée. 0,75pt
  3. Démontrer que pour tout nombre réel  $t$  de l'intervalle  $[0; \frac{\pi}{4}]$ , on a  $t \leq \tan(t) \leq 2t$  0,75pt
- II. soit  $P$  le plan muni d'un repère orthonormal  $R(O; \vec{i}; \vec{j})$  (unité 2cm) soient  $f_1$  et  $f_2$  les fonctions définies sur  $] -\infty; -1] \cup [1; +\infty[$  par :  $f_1(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$  et  $f_2(x) = x - \sqrt{x^2 - 1}$ . On désigne par  $C_1$  et  $C_2$  les représentations graphiques respectives de  $f_1$  et  $f_2$
1. a) Etudier la dérivabilité de  $f_1$  à gauche en  $-1$  et à droite en  $1$  interpréter graphiquement les résultats obtenus. 0,75pt  
 b) Etudier les variations de  $f_1$  et dresser son tableau des variations 1pt  
 c) Montrer que la droite d'équation  $y = 2x$  est asymptote à  $C_1$  en  $+\infty$  et préciser l'autre asymptote 0,75pt  
 d) Tracer  $C_1$  ainsi que ses asymptotes dans le même repère. 0,75pt
  2. Soit  $C$  la courbe d'équation  $y^2 - 2xy + 1 = 0$  et sa symétrie de centre  $O$ .  
 a) Montrer que  $s(C_1) = C_2$  et tracer  $C_2$  dans le même repère 0,5pt  
 b) Montrer que  $C$  est la réunion de  $C_1$  et  $C_2$  0,5pt
  3. Soit  $\vec{u}$  le vecteur  $\vec{i} + 2\vec{j}$ .  
 a) Montrer que  $(O; \vec{i}; \vec{u})$  est un repère du plan 0,25pt  
 b) Déterminer une équation de  $C$  dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{u})$  0,5pt

**EXERCICE 2**: 3,75 points

- I. Soit  $W$  un espace vectoriel dont une base est  $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ .  $f$  est une application linéaire de  $W$  dans  $\mathbb{R}$ .  
 On donne  $f(\vec{i}) = -3$ ;  $f(\vec{j}) = 2$  et  $f(\vec{k}) = -1$ . Soit  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  un vecteur de  $W$ .
1. Montrer que  $f(\vec{u}) = -3x + 2y - z$  0,5pt
  2. Démontrer que  $\ker f$  est un plan vectoriel et déterminer une base de  $\ker f$ . 0,5pt
  3. Démontrer que  $\text{Im} f = \mathbb{R}$  0,25pt
- II. On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé. On considère les points les points  $A(0; 4; 1)$ ,  $B(1; 3; 0)$ ,  $C(2; -1; -2)$  et  $D(7; -1; 4)$
1. Démontrer que les points  $A, B$  et  $C$  sont non alignés. 0,5pt
  2. Soit  $(\Delta)$  la droite passant par le point  $D$  et de vecteur directeur  $\vec{u}(2; -1; 3)$   
 a) Démontrer que la droite  $(\Delta)$  est orthogonale au plan  $(ABC)$ . 0,5pt  
 b) En déduire une équation cartésienne du plan  $(ABC)$ . 0,5pt  
 c) Déterminer une équation paramétrique de la droite  $(\Delta)$ . 0,5pt
  3. Déterminer les coordonnées du point  $H$ , intersection de la droite  $(\Delta)$  et du plan  $(ABC)$  0,5pt

**EXERCICE 3**: 4,75 points

*I-On appelle diviseur strict d'un entier naturel  $n$  tout diviseur de  $n$  positif et autre que lui-même.*

*On appelle nombres amiables, deux nombres entiers naturels tels que chacun d'eux est égal à la somme des diviseurs stricts de l'autre.*

*On appelle nombre parfait, tout nombre entier naturel égal à la somme de ses diviseurs stricts*

1. Déterminer les diviseurs stricts de 220 et 284 puis justifier qu'ils sont amiables. **1pt**
2. a) Justifier que le nombre 28 est-il parfait **0,25pt**  
b) Déterminer un nombre premier  $p$  tel que  $A = 2^4p$  soit un nombre parfait. **0,5pt**  
c)  $n$  est un nombre entier naturel non nul et  $p$  un nombre premier. Exprimer  $p$  en fonction de  $n$  pour que  $B = 2^n p$  soit parfait. **0,5pt**

**II-**  $P$  est le polynôme à coefficients entiers relatifs défini par  $P(x) = 6x^3 + 9x^2 + 5x + 1$ .

1. Soit  $p$  et  $q$  deux entiers relatifs premiers entre eux,  $n$  un entier naturel non nul. Démontrer que  $p$  et  $q^n$  sont premiers entre eux. **0,5pt**
2. Soit  $\frac{a}{b}$  une fraction irréductible solution de l'équation  $P(x) = 0$ . Démontrer que  $a \in \{-1, 1\}$  et que  $b$  divise 6. En déduire les valeurs possibles de  $\frac{a}{b}$ . **1pt**
3. En déduire une racine de  $P$  et factoriser le polynôme  $P$ . **0,5pt**
4. Résoudre dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  l'équation  $P(x) \equiv 0[5]$ . **0,5pt**

### **PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES 04,50 POINTS**

Quatre malfrats braquent un homme d'affaires et emporte une somme inférieure à 14 mille euros. Ils décident alors de se rendre dans un restaurant réputé pour sa bonne cuisine pour fêter leur succès et se partager le butin (le partage étant équitable). S'ils se partagent le triple du butin, il restera 3 mille euros. Malheureusement un des bandits meurt des suites de blessures reçus lors des échanges de tirs avec la police. Si le reste du groupe se partagent le double du butin, il restera mille euros. Le patron du restaurant en passant a écouté et a donc une idée du code de la mallette contenant le butin. Le code a 6 chiffres. Il est le plus petit nombre  $N$  divisible par 3 et 11. Son écriture en base 10 est :  $\overline{28x75y}$

Quelques jours plus tard les trois malfrats restant ont été arrêtés et jetés en prison. Les gars ne comptent pas abandonner leur butin et commencent donc à réfléchir sur un plan d'évasion. Ils ont observé pendant un an, 3 lampes qui brillent et éclairent toute la cour de la prison chaque nuit après 18h00, heure avant laquelle elles sont toutes les trois éteintes : la première lampe s'éteint toutes les heures, la deuxième toutes les 36 minutes et la troisième toutes les 90 minutes. Ils se sont donc enfuit lorsque les trois lampes étaient simultanément éteintes après 22 heures et avant 02 heures du matin.

Tâches :

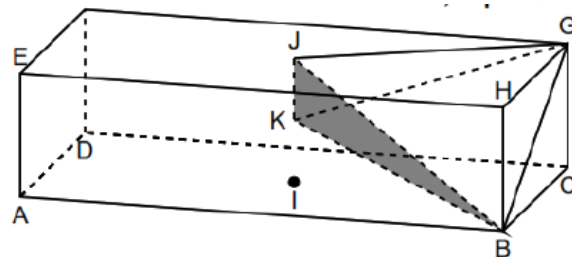
- 1- Déterminer ce que gagnera le patron du restaurant si les trois autres malfrats sont condamnés à perpétuité ? **1,5pt**
- 2- Déterminer l'heure à laquelle les trois malfrats se sont évadés de la prison. **1,5pt**
- 3- Déterminer le code de la mallette **1,5pt**

**EPREUVE DE MATHEMATIQUES**

**PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES : (15,5 points)**

**Exercice 1 : (4 points)**

L'unité est le centimètre. Ci-contre,  $ABCDEFGH$  est un pavé droit tel que :  $AE = 2$ ,  $AD = 4$ , et  $AB = 8$ . Les points  $I$  et  $J$  sont les centres des rectangles  $ABCD$  et  $EFGH$ ,  $K$  est le milieu du segment  $[IJ]$ . On note par  $S$  le barycentre des points pondérés  $(A, 2)$ ,  $(B, -1)$  et  $(C, 1)$ . On désigne par  $(P)$  le plan passant par les points  $B, G$  et  $K$  puis par  $(\Gamma)$  l'ensemble des points  $M$  de l'espace vérifiant :



$$2MA^2 - MB^2 + MC^2 = 16.$$

- 1) Ecrire chacun des vecteurs suivants sans le symbole  $\wedge$  :  
 $\overrightarrow{DA} \wedge \overrightarrow{DC}$ ,  $\overrightarrow{DG} \wedge \overrightarrow{AE}$  et  $\overrightarrow{DC} \wedge \overrightarrow{AF}$ . **0,75 pt**
- 2) Montrer que  $S$  est le milieu de  $[AD]$ , puis déterminer et caractériser l'ensemble  $(\Gamma)$ . **0,75 pt**
- 3) Dans toute la suite, on munit l'espace d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  où l'on a  $A(1, 2, 3)$  ;  
 $B(1, 10, 3)$  ;  $D(1, 2, 7)$  ;  $E(1, 2, 5)$  et  $F(3, 2, 7)$ .
  - a) Montrer que  $G(3, 10, 7)$  ;  $J(2, 6, 6)$  et  $K(\frac{3}{2}, 6, \frac{11}{2})$ . **0,75 pt**
  - b) Montrer que les points  $B, G, J$  et  $K$  ne sont pas coplanaires. **0,5 pt**
  - c) Calculer le volume du tétraèdre  $BGJK$ . **0,5 pt**
  - d) Etudier l'intersection de  $(P)$  et  $(\Gamma)$ . **0,75 pt**

**Exercice 2 : (3,25 points)**

- 1) Soit  $g$  la fonction définie sur  $[0; \pi]$  par  $g(x) = x \sin x + \cos x - 1$ .
  - a) Etudier les variations de  $g$  sur  $[0; \pi]$ . **0,5 pt**
  - b) Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  sur  $[0; \pi]$ , et que  $\alpha \in ]\frac{2\pi}{3}; \pi[$ . **0,5 pt**
  - c) Préciser le signe de  $g(x)$  pour  $x$  élément de  $[0; \pi]$ . **0,5 pt**
- 2) Soit  $f$  la fonction telle que  $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x} & \text{si } x \in ]0; \pi] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ 
  - a) Etudier la continuité et la dérivabilité de  $f$  en 0. **0,5 pt**
  - b) Etudier les variations de  $f$  sur  $[0; \pi]$  **0,5 pt**
  - c) Vérifier que  $f(\alpha) = \sin \alpha$ . **0,25 pt**
- 3) On donne  $\alpha \approx 2,34$  et  $f(\alpha) = 0,72$ . Construire  $(C_f)$  la courbe de  $f$ . **0,5 pt**

**Exercice 3 : (3,25 points)**

$W$  est l'espace vectoriel muni de la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ,  $f$  est l'endomorphisme de  $W$  dont la matrice relativement à la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est :  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ . On donne la matrice  $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  et on note  $h$  l'endomorphisme de  $W$  dont la matrice relativement à la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est  $A + B$ .

- 1) Déterminer  $\ker f$  et préciser une base. **0,5 pt**
- 2) Déterminer  $\text{Im} f$  et préciser une base. **0,5 pt**
- 3) On pose  $\vec{e}_1 = \vec{i} - \vec{k}$  ;  $\vec{e}_2 = \vec{j}$  et  $\vec{e}_3 = -2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ .
  - a) Montrer que  $(\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$  est une base de  $W$ . **0,25 pt**

- b) Ecrire la matrice de  $f$  dans la base cette base. 0,5 pt
- 4) Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $g$  l'endomorphisme de  $W$  tel que  $g(\vec{u}) = \alpha h(\vec{u}) - \vec{u}$ .
- a) Démontrer que pour tout vecteur  $\vec{u}$  de  $W$ ,  $(g \circ g)(\vec{u}) = \vec{u} \Leftrightarrow \alpha = 0$  ou  $\alpha = \frac{2}{3}$ . 0,5 pt
- b) Ecrire la matrice de  $g$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , pour  $\alpha = \frac{2}{3}$ . 0,5 pt
- c) Démontrer que  $Im(h)$  est l'ensemble des points invariants de  $g$ . 0,5 pt

#### Exercice 4 : (5 points)

- I- Soit les suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie par :  $a_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$  et  $b_n = a_n + \frac{1}{n \cdot (n!)}$ .
- 1- Montrer que pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $0 \leq a_n \leq b_n$ . 0,5 pt
- 2- Montrer que la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante. 0,25 pt
- 3- Démontrer que la suite  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est décroissante. 0,25 pt
- 4- En déduire que les suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  sont convergentes. 0,5 pt
- 5- Montrer que la suite  $(a_n - b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers 0. 0,25 pt
- 6- Montrer que les suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  sont adjacentes. 0,25 pt
- II-
- 1- Déterminer suivant les valeurs de  $n$  le reste de la division euclidienne de  $5^n$  par 7. 0,5 pt
- 2- Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $S_n = 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^n$ .
- a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $4S_n = 5^{n+1} - 1$ . 0,25 pt
- b) Soit  $a \in \mathbb{N}$ , montrer que,  $4S_n \equiv a[7]$  si et seulement si  $S_n \equiv 2a[7]$ . 0,5 pt
- c) Déterminer tous les entiers  $n$  tels que  $S_n$  soit divisible par 7. 0,5 pt
- 3- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On considère l'équation (E):  $5^n x + S_n y = 1$ .
- a) Justifier que l'équation (E) admet au moins une solution. 0,5 pt
- b) Résoudre dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  l'équation (E). 0,75 pt

#### PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES (4,5 points)

L'évolution du chiffre d'affaires (en centaines de millions de Francs CFA) de l'entreprise de Mr Bouba dénommé SOTRA en fonction du numéro de l'année est regroupé dans le tableau ci-dessous :

Années	2016	2017	2018	2019	2020	2021
Numéro de l'année $x_i$	1	2	3	4	5	6
. Chiffres d'affaires $y_i$	3,5	4,8	4,3	5	5,6	6,2

Mr Bouba désire prévoir son chiffre d'affaires pour les années à venir. Pour ce faire, il contacte un technicien qui dit qu'il procèdera par la méthode des moindres carrés pour trouver un ajustement linéaire. A l'heure de pause, un lundi, il y a cambriolage a SOTRA . A la suite du vol, on interroge 4 témoins qui ont vu les bandits s'enfuir en voiture. Le premier dit que le numéro d'immatriculation comporte 4 chiffres. Le deuxième, que les deux premiers chiffres sont identiques. Le troisième que les deux derniers chiffres sont identiques. Le quatrième un élève en classe de terminale C a remarqué que le nombre en question est un carré parfait et que son chiffre des dizaines est compris entre 1 et 5, il dit en plus « un nombre dont les deux derniers chiffres sont impairs n'est jamais un carré parfait ». Apres ce vol, M. Bouba décide de mieux protéger SOTRA. Pour cela il décide alors d'acheter des fils électriques donc le mètre coute 15000Frs pour l'installer le long de SOTRA qui a la forme d'un quadrilatère à 4 côtés, tel que les sommets de cette figure sont les points images sont solutions dans  $\mathbb{C}$  de l'équation(E):  $z^4 + 2z^3 + 2z^2 - 2z + 1 = 0$ . Le plan complexe étant rapporté au repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  d'unité graphique 10m Notre élève de terminale C affirme que pour résoudre (E), on pourra déterminer deux réels  $a$  et  $b$  tels que  $(E) \Leftrightarrow z^2 \left[ \left(z - \frac{1}{z}\right)^2 + a \left(z - \frac{1}{z}\right) + b \right] = 0$ .

- Tache 1 :** Donner une estimation du chiffres d'affaires de cette entreprise en 2035. 1,5 pt
- Tache 2 :** Quel est le numéro d'immatriculation du véhicule des bandits ? 1,5 pt
- Tache 3 :** Combien dépensera M. Bouba pour l'achat des fils électriques ? 1,5 pt

EVALUATION N°1 DU 1er TRIMESTRE

EXERCICE 1 / 4 pts

Questions à choix multiples (QCM)

Pour chaque question choisir la réponse juste ; chaque réponse juste vaut 1pt.

- La notation scientifique de  $0,870036 \times 0,603$  est :  
a)  $5,24631708 \times 10^1$  ; b)  $5,24631708 \times 10^{-1}$  ; c)  $5,24631708 \times 10^{-2}$
- L'arrondi par défaut d'ordre 5 de  $0,100757 \times 10^5 + 7,001905$  est :  
a) 1014,57191 ; b) 71014,5719 ; c) 60 008,0811
- La solution du système (S) :  $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ -x + y = 0 \end{cases}$  est :  
a)  $S = \{1; 1\}$  ; b)  $S = \{(1; -2)\}$  ; c)  $S = \{(1; 1)\}$
- La solution de l'inéquation (I):  $-x^2 - x - 1 \leq 0$  est :  
a)  $S = ]-\infty; +\infty[$  ; b)  $S = [-1; 1]$  ; c)  $S = \emptyset$

EXERCICE 2 / 5 pts

- Un article qui coûtait 2500 FCFA a subi une première hausse de  $x\%$  puis une seconde hausse de  $x\%$  sur le nouveau prix. L'article est alors vendu à 3600 FCFA.  
a) Montrer que  $x$  vérifie l'équation (E) :  $x^2 + 200x - 4400 = 0$ . 1,5 pt  
b) Déterminer  $x$  ainsi que le prix de l'article après la première hausse. 1,5 pt
- Déterminer les dimensions d'un terrain rectangulaire d'aire  $240 \text{ m}^2$  et de périmètre  $64 \text{ m}$ . 2pts

EXERCICE 3 / 5,5 pts

On considère le polynôme  $P(x) = x^3 + 2x^2 - 9x - 18$ .

- Montrer que  $-2$  est une racine de  $P$ . 1pt
- Déterminer les réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que  $P(x) = (x + 2)(ax^2 + bx + c)$ . 1pt
- Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :  $(x + 1)(x^2 - 9) = 0$ . 1,5pt
- Dresser le tableau de signe du polynôme  $P(x)$  puis déduire dans  $\mathbb{R}$  la solution des inéquations :  
a)  $P(x) < 0$  et b)  $P(x) \geq 0$  2pts

EXERCICE 4 / 5,5 pts

On donne les systèmes : (S1) :  $\begin{cases} 5x + 3y + 2z = 780 \\ x + 2y + 3z = 446 \\ 2x + 3y + z = 468 \end{cases}$  et (S2) :  $\begin{cases} -2x + y + 1 = -2 \\ 3x + y - 4 = -1 \end{cases}$

- Résoudre dans  $\mathbb{R}^2$  par la méthode de CRAMER le système (S2). 1pt
- a) Résoudre dans  $\mathbb{R}^3$  par la méthode du pivot de GAUSS le système (S1). 2 pts  
b) Trois femmes d'affaires LEA, FIMANOU et BENITA arrivent à Douala et se rendent dans un grand magasin au marché central pour effectuer des achats. LEA achète 5 sacs à main, 3 pagnes SUPER WAX et 2 paires de chaussures artisanales et elle paye 780.000 FCFA. FIMANOU achète 2 sacs à main, 4 pagnes SUPER WAX et 6 paires de chaussures artisanales et elle paye 892.000 FCFA. BENITA achète 2 sacs à main, 3 pagnes SUPER WAX et 1 paire de chaussures artisanales et elle paye 468.000 FCFA.  
Déterminer le prix de chaque article acheté. 2.5pts

## EPREUVE DE MATHÉMATIQUES N°2 DU 1<sup>er</sup> TRIMESTRE

### PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES : (15 points)

#### EXERCICE 1 : (4,5 points)

On considère les fonctions  $g$  et  $f$  définies par  $g(x) = 4x^3 - 3x - 8$  et  $f(x) = \frac{x^3 + 1}{4x^2 - 1}$ .

1. Etudie les variations de la fonction  $g$  et dresse son tableau de variations. 1pt
2. (a) Montre que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\lambda$  sur  $\mathbb{R}$ . 0,5pt  
(b) Justifie que  $1 < \lambda < 2$ , puis donne un encadrement de  $\lambda$  à  $10^{-2}$  près. 0,5pt  
(c) Détermine le signe de  $g(x)$  suivant les valeurs de  $x$ . 0,5pt
3. Montre que pour tout  $x \in D_f$ ,  $f'(x) = \frac{xg(x)}{(4x^2 - 1)^2}$ . Dresse le tableau de variations de  $f$ . 1pt
4. (a) Montre que  $f(\lambda) = \frac{3}{8}\lambda$ . 0,5pt  
(b) Dédus-en une valeur approchée de  $f(\lambda)$  à  $10^{-2}$  près. 0,5pt

#### EXERCICE 2 : (3,5 points)

$E$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  dont une base est  $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Soit  $\varphi$  l'endomorphisme de  $E$  qui à tout vecteur  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  associe le vecteur

$$\varphi(\vec{u}) = (-x - y + 2z)\vec{i} + (2x - y + z)\vec{j} + (x - 2y + 3z)\vec{k}.$$

1. Détermine la matrice de  $\varphi$  dans la base  $\mathcal{B}$ . 0,5pt
2. (a) Détermine le noyau  $\ker \varphi$  de  $\varphi$  et en donne une base. 0,75pt  
(b) Dédus-en la dimension de  $\text{Im } \varphi$ , image de  $\varphi$ .  $\varphi$  est-elle bijective ? Justifie. 1pt
3. On considère les vecteurs  $\vec{e}_1 = 2\vec{j} - \vec{k}$ ;  $\vec{e}_2 = 3\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ ;  $\vec{e}_3 = \vec{i} - \vec{k}$ .  
(a) Démontre que la famille  $\mathcal{B}' = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  est une base de l'espace vectoriel  $E$ . 0,5pt  
(b) Détermine la matrice de  $\varphi$  dans la base  $\mathcal{B}'$ . 0,75pt

#### EXERCICE 3 : 3,75 points

1. Calcule  $PGCD(4^5 - 1, 4^6 - 1)$ . 0,5pt
2. Soit  $(U_n)$  la suite définie par :  $U_0 = 0, U_1 = 1$  et,  $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+2} = 5U_{n+1} - 4U_n$ .  
(a) Calcule les termes  $U_2, U_3$  et  $U_4$ . 0,75pt  
(b) Montre que  $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = 4U_n + 1$  et que,  $U_n \in \mathbb{N}$ . 0,75pt  
(c) Dédus-en, pour tout  $n \in \mathbb{N}, PGCD(U_n, U_{n+1})$ . 0,25pt
3. Soit  $(V_n)$  la suite définie pour tout entier naturel  $n$  par  $V_n = U_n + \frac{1}{3}$ .  
(a) Montre que  $(V_n)$  est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le 1<sup>er</sup> terme  $V_0$ . Exprimer  $V_n$  puis  $U_n$  en fonction de  $n$ . 1pt  
(b) Détermine, pour tout  $n \in \mathbb{N}, PGCD(4^{n+1} - 1, 4^n - 1)$ . 0,5pt

#### EXERCICE 4 : (3,5 points)

- (a) Utilise l'algorithme d'Euclide pour déterminer un couple  $(x_0, y_0)$  d'entiers relatifs solution de l'équation  $48x + 35y = 1$ . 0,75pt

(b) Déduis-en l'ensemble des solutions dans  $\mathbb{Z}^2$  de cette équation. 0,75pt

(c) Donne l'ensemble des solutions dans  $\mathbb{Z}^2$  de l'équation  $336x + 245y = 7$ . 0,25pt
- L'espace étant rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on donne le vecteur  $\vec{u}(48, 35, 24)$  et le point  $A(-11, 35, -13)$ .

(a) Précise la nature et donne une équation cartésienne de l'ensemble  $\mathcal{P}$  des points  $M$  de l'espace, de coordonnées  $(x, y, z)$  tels que :  $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$ . 0,75pt

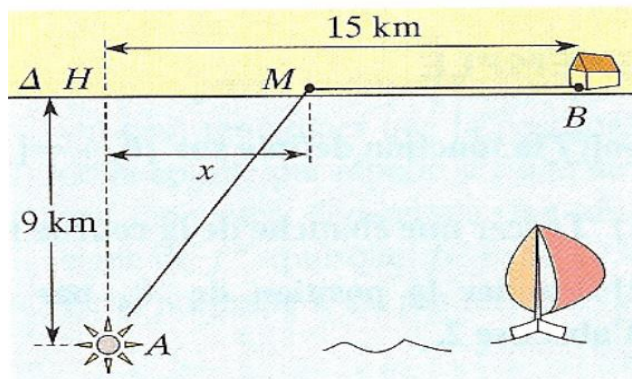
(b) Soit  $\mathcal{D}$  la droite d'intersection de  $\mathcal{P}$  avec le plan d'équation  $z = 16$ .  
Détermine tous les points de  $\mathcal{D}$  à coordonnées entières appartenant à l'intervalle  $[-100; 100]$ . 1pt

#### PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES (5 points)

##### SITUATION :

**M. BELL** habite la localité d'Edéa en bordure du fleuve Sanaga. Il a une vieille pirogue à moteur qui lui permet de se déplacer sur la Sanaga pour creuser du sable.

Pour des raisons obscures, **M. BELL** (point  $A$ ) doit rejoindre le plus rapidement la maison côtière (point  $B$ ). Il se déplace sur la pirogue à la vitesse de  $4\text{ km/h}$  puis à pied à la vitesse de  $5\text{ km/h}$ . La côte est rectiligne et la dérive due au courant de l'eau est nulle. Les dimensions utiles sont sur le dessin (voir figure).



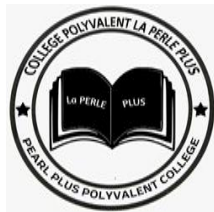
Pour stocker son sable, **M. BELL** dispose d'un domaine ayant la forme d'un rectangle acquis à  $2500\text{ FCFA}$  le  $m^2$  dont la longueur  $L$  et la largeur  $l$  sont telles que  $L = |b - c|$  et  $l = \frac{aL}{5}$ ,  $a$  entier naturel avec  $a, b$  et  $c$  les solutions dans  $\mathbb{C}$  de l'équation :  $(E) : z^3 - (4 + 4i)z^2 - (7 - 14i)z + 30 - 6i = 0$ . Le plan complexe étant rapporté au repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  d'unité graphique  $10m$ .

**M. BELL** a entre 800 et 1000 brouettes de sable de  $1200\text{ FCFA}$ . S'il fait des tas de 12 brouettes, il lui en restera 4 et s'il fait des tas de 11 brouettes, il lui en restera 3.

##### Tâches :

- Où doit accoster **M. BELL** pour que le temps de parcours soit minimal ? 1,5pt
- A combien **M. BELL** avait-il acquis son domaine pour le stockage du sable ? 1,5pt
- Quelle somme gagnera **M. BELL** après la vente de toutes ses brouettes de sable ? 1,5pt

Présentation générale : 0,5pt



**PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES : 15 points**

**EXERCICE 1: (5 points)**

Les questions de cet exercice sont indépendantes et obligatoires. Chaque question est notée sur **0,5pt**.

1. La division euclidienne de 900 par un entier  $b$  a pour quotient 14 et pour reste  $r$ . Quelles sont les valeurs possibles de  $b$  et  $r$  ?
2. Soit  $n$  un entier naturel, montrer que  $2n + 5$  et  $3n + 7$  sont premiers entre eux.
3. Déterminer tous les couples  $(x ; y)$  d'entiers tels que  $x^2 = y^2 + 17$ .
4. Déterminer les entiers naturels  $n$  tels que le nombre  $\frac{3n-4}{2n-1}$  soit un entier.
5. Déterminer tous les couples d'entiers naturels  $(x ; y)$  tels que le nombre  $\overline{x43y}$  écrit dans le système décimal soit divisible par 2 et par 9.
6. Démontrer en utilisant les congruences que  $3^{2n+1} + 2^{n+2}$  est divisible par 7.
7. Résoudre dans  $\mathbb{N}^2$  le système  $\begin{cases} PGCD(a ; b) = 12 \\ a^2 - b^2 = 7344 \end{cases}$
8. Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel  $n$ , le reste de la division euclidienne par 7 du nombre  $A = n^2 - n + 1$ .
9. Déterminer le chiffre des unités du nombre  $7^{1999}$ .
10. Démontrer que si  $n$  est un entier naturel supérieur ou égal à 3,  $n^2 + 4n + 5$  est un nombre qui n'est jamais premier.

**EXERCICE 2 : (5 points)**

1. a) Déterminer les racines carrées du nombre complexe  $2 + 2i\sqrt{3}$  **0,5pt**  
 b) Résoudre dans  $\mathbb{C}$ , l'équation  $z^2 + (1 + i\sqrt{3})z - 1 = 0$  **0,75pt**
2.  $P$  est le polynôme à variable complexe  $z$  défini par :  
 $P(z) = z^4 + 2z^3 + 2z^2 - 2z + 1$   
 a) Démontrer que si  $z_0$  est solution de l'équation  $P(z) = 0$  alors  $\bar{z}_0$  est aussi solution de  $P(z) = 0$  **0,5pt**  
 b) Déterminer les nombres complexes  $a$  et  $b$  tels que **1,5pt**  

$$P(z) = z^2 \left[ \left( z - \frac{1}{z} \right)^2 + a \left( z - \frac{1}{z} \right) + b \right]$$
  
 c) Justifier que 0 n'est pas solution de l'équation  $P(z) = 0$  **0,25pt**  
 d) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $z^2 + 2z + 4 = 0$  puis déduire l'ensemble des solutions de l'équation  $P(z) = 0$  **1,5pt**

**EXERCICE 3 : (5 points)**

On considère la fonction numérique d'une variable réelle définie par  $(x) = \frac{2x^3+3}{x^2-1}$ .

1. soit  $g(x) = x^3 - 3x - 3$   
 a) Etudier les variations de  $g$ . **0,75pt**

- b) Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha \in [2,10 ; 2,11]$  **0,5pt**  
 c) En déduire le signe de  $g(x)$  sur  $\mathbb{R}$  **0,5pt**
2. a) Etudier les branches infinies de la fonction  $f$ . **1,5pt**  
 b) Montrer que pour tout réel  $x$  de l'ensemble de définition de  $f$ ,  $f'(x) = \frac{2xg(x)}{(x^2-1)^2}$  **0,75pt**  
 c) En déduire les variations de  $f$  et dresser son tableau des variations. **1pt**

## **PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES : 5 points**

### **Situation**

Un jeune ingénieur agricole décide créer une exploitation agricole. Pour cela, il dispose d'un terrain qu'il souhaite clôturer avant d'y pratiquer l'agriculture.

Le terrain est formé de l'ensemble des points  $M$  du plan complexe d'affixe  $z$  vérifiant  $|4z + 4 - 4i\sqrt{3}| = |16 - 16i|$  et doit être clôturé avec du fil barbelé vendu par rouleau de 5 mètres et à 3500 FCFA le rouleau.

Au démarrage du projet, le jeune ingénieur dispose de 149500 FCFA et veut faire une pépinière d'arbres fruitiers constitués d'avocatiers et de manguiers. Un centre de recherche lui propose d'acheter le plant d'avocatier à 3500 FCFA et le plant de manguiers à 5000 FCFA et dans ce cas, il aura plus de 12 plants de chaque type.

Les récoltes annuelles de chaque sorte de fruit sont conditionnées dans les sacs et sont vendus au même prix. En un an, la production varie entre 40 et 160 sacs de fruits et le bénéfice réalisé par ce jeune ingénieur exprimé en milliers de francs, est modélisé par la fonction  $g(x) = \frac{-2x^2 + 2000x - 6400}{x}$  où  $x$  représente le nombre de sacs de fruits produits en un an.

### **Tâches**

1. Déterminer le montant à dépenser par l'ingénieur pour l'achat du fil barbelé permettant de clôturer le terrain. **1,5pt**
2. Déterminer le nombre exact de plants d'avocatiers et le nombre exact de plants de manguiers si l'ingénieur décide de traiter avec le centre de recherche. **1,5pt**
3. Déterminer le nombre de sacs de fruits à produire en un an pour réaliser un bénéfice maximal. **1,5pt**

### **Présentation**

**0,5pt**

**Examineur : M. HIONG**

**EPREUVE DE MATHÉMATIQUES :**

**PARTIE A : ÉVALUATION RESSOURCES (15POINTS)**

**Exercice 1:(3,75 points)**

Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

Chaque réponse exacte rapporte 0,75 point. Chaque réponse fautive enlève 0,5 point. Une absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro. Aucune justification n'est demandée.

1. On considère dans l'ensemble des entiers relatifs l'équation :  $x^2 - x + 4 \equiv 0 [6]$ .

A : toutes les solutions sont des entiers pairs.

B : il n'y a aucune solution.

C : les solutions vérifient  $x \equiv 2 [6]$ .

D : les solutions vérifient  $x \equiv 2 [6]$  ou  $x \equiv 5 [6]$ .

2. On se propose de résoudre l'équation (E) :  $24x + 34y = 2$ , où  $x$  et  $y$  sont des entiers relatifs.

A : Les solutions de (E) sont toutes de la forme :  $(x; y) = (34k-7; 5-24k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

B : L'équation (E) n'a aucune solution.

C : Les solutions de (E) sont toutes de la forme :  $(x; y) = (17k-7; 5-12k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

D : Les solutions de (E) sont toutes de la forme :  $(x; y) = (-7k; 5k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

3. On considère les deux nombres  $n = 1\,789$  et  $p = 17\,892\,023$ . On a alors :

A :  $n \equiv 4 [17]$  et  $p \equiv 0 [17]$ . C :  $p \equiv 4 [17]$ .

B :  $p$  est un nombre premier. D :  $p \equiv 1 [17]$ .

4. On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal, les points  $A$  et  $B$  d'affixes respectives  $a$  et  $b$ . Le triangle  $MAB$  est rectangle isocèle direct d'hypoténuse  $[AB]$  si et seulement si le point  $M$  d'affixe  $z$  est tel que :

$$A : z = \frac{b-ia}{1-i} \quad C : a - z = i(b-z) \quad B : z - a = e^{i\frac{\pi}{4}}(b-a) \quad D : b - z = \frac{\pi}{2}(a-z).$$

5. On considère dans le plan orienté deux points distincts  $A$  et  $B$  ; on note  $I$  le milieu du segment  $[AB]$ . Soit  $f$  la similitude directe de centre  $A$ , de rapport 2 et d'angle  $\frac{2\pi}{3}$  ; soit  $g$  la similitude directe de centre  $A$ , de rapport  $\frac{1}{2}$  et d'angle  $\frac{\pi}{3}$  ; soit  $h$  la symétrie centrale de centre  $I$ .

A :  $h \circ g \circ f$  transforme  $A$  en  $B$  et c'est une rotation.

B :  $h \circ g \circ f$  est la réflexion ayant pour axe la médiatrice du segment  $[AB]$ .

C :  $h \circ g \circ f$  n'est pas une similitude.

D :  $h \circ g \circ f$  est la translation de vecteur  $\overrightarrow{AB}$ .

**Exercice 2 : (5,5 points)**

A- On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0; 4[$  par :  $f(x) = \frac{2x-4}{\sqrt{4x-x^2}}$ . On désigne par  $(C)$  sa courbe représentative.

1-a) Etudier les variations de  $f$ . (0,5pt)

b) Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $]0; 4[$  vers  $\mathbb{R}$ . (0,5pt)

c) Soit  $g$  la réciproque de  $f$ . Montrer que pour tout réel  $x$ , on a :  $g(x) = 2 + \frac{2x}{\sqrt{x^2+4}}$  (0,5pt)

2) Montrer que l'équation  $f(x) = x$  admet sur  $]0; 4[$  une solution unique  $\alpha$  telle que  $\alpha > 2$ . (0,5pt)

3-a) Ecrire une équation cartésienne de la tangente  $(T)$  à la courbe de  $f$  au point d'abscisse 2. (0,5pt)

b) Etudier la position de  $(C)$  par rapport à  $(T)$ . (0,5pt)

c) Tracer la courbe (C) (0,5pt)

B- Soit la fonction  $\mu$  définie sur  $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$  pour : 
$$\begin{cases} \mu\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \\ \mu(x) = \frac{1}{g(2 \tan x)} \end{cases}$$

1) Montrer que pour tout  $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ ,  $\mu(x) = \frac{1}{1 + \sin x}$ . (0,5pt)

2) Montrer que  $\mu$  réalise une bijection de  $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$  vers un intervalle  $I$  que l'on déterminera. (0,5pt)

3) Calculer  $\mu^{-1}(2)$  et  $\mu^{-1}(2 + \sqrt{2})$ . (0,5pt)

4) Dresser le tableau de variation de  $\mu^{-1}$  et donner le programme de construction de sa courbe représentative à partir de celle de  $\mu$ . (0,5pt)

**Exercice 3:(3,25 points)**

1. a) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $z^4 = \frac{1}{z}$  (1pt)

b) On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives  $1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{4\pi}{3}}$ . Démontrer que 0 est le centre de gravité du triangle ABC. (0,5pt)

c) Déterminer l'écriture complexe de la rotation de centre O, qui transforme le A en B (0,5pt)

2.  $\theta$  est un réel de l'intervalle  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $(E_\theta)$  désigne l'équation

$$2(1 - \cos 2\theta)z^2 - 2 \sin 2\theta z + 1 = 0$$

a) Résoudre  $(E_\theta)$  dans  $\mathbb{C}$  (on distinguera les  $\cos \theta = 0$  et  $\theta \neq 0$ ). (0,5pt)

b) Dans le cas où  $\theta \neq 0$  déterminer le module des solutions  $z_1$  et  $z_2$  de  $(E_\theta)$ .  $z_1$  étant la solution ayant une partie imaginaire positive. (0,5pt)

c) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$  on désigne par P et Q les points d'affixes  $z_1$  et  $z_2$ , pour quelle valeur de  $\theta$ .

Le triangle OPQ est-il rectangle ou équilatéral ? (0,25pt)

**Exercice 4:(2,5 points)**

Dans  $\mathbb{R}^3$ , on considère les ensembles suivants :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + 2y - z = 0\} \text{ et } G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2x + y = 0 \text{ et } x - z = 0\}$$

1) Montrer que F est un plan vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ . Et préciser une base. (0,75pt)

2) Montrer que G est une droite vectorielle de  $\mathbb{R}^3$  dont on précisera une base. (0,75pt)

3) Déterminer  $F \cap G$  et montrer que F et G sont deux sous espaces vectoriels supplémentaires de  $\mathbb{R}^3$  (1pt)

**PARTIE B : ÉVALUATION DES COMPETENCES (5POINTS)**

**Compétences attendues** : Déployer un raisonnement logique afin de résoudre un problème concret de vie.

Pour coder un message, un service secret procède de la manière suivante : à chacune des 26 lettres de l'alphabet, on commence par associer un entier  $n$  de l'ensemble  $\Omega = \{0 ; 1 ; 2 ; \dots ; 24 ; 25\}$  selon le tableau ci-dessous

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

**Étape1**: A la lettre que l'on veut coder, on associe le nombre n correspondant dans le tableau.

**Étape2** : On calcule le reste de la division euclidienne de  $5n + 2$  par 26 et on le note  $p$ .

**Étape3** : Au nombre  $p$ , on associe la lettre correspondante dans le tableau.

Quelques années plus tard, on change ce codage et on propose qu'à l'étape 2,  $p$  soit le reste de la division euclidienne de  $3^n$  par 26

**Tâche** :

1) Coder le mot «ABRAHAM » suivant les trois étapes. (1,5pt)

2) Décoder les lettres:« TC » (1,5pt)

3) Décoder la lettre : « V » selon le nouveau codage. (1,5pt)

**Présentation** :

**0,5pt**



COBIPRO

EPREUVE DE MATHÉMATIQUE  
PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES (19points)  
EXERCICE 1(8pt)

**Les parties A et B sont indépendantes.**

A. Soit les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $] -1; 1[$  par  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{-x^2+1}}$  et  $g(x) = f\left[-\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]$

1) Montrer que pour tout  $x \in ] -1; 1[$ ;  $g(x) = -1 - \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ . 0.5pt

2) Montrer que  $g$  réalise une bijection de  $] -1; 1[$  vers un intervalle  $J$  à déterminer. 1pt

3) Expliciter la bijection réciproque  $g^{-1}$ . 0.75pt

4) Montrer que la bijection réciproque  $g^{-1}$  de  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Et que pour tout réel  $x$ ,  $(g^{-1})' = \frac{2}{\pi[1+(x+1)^2]}$ . 1pt

B. Soit  $n$  un entier naturel non nul. Soit  $f_n$  une fonction définie sur  $[0; 1]$  par  $f_n(x) = 1 - \frac{x}{2} - x^n$

1) Montrer que  $f_n$  réalise une bijection 0.75pt

2) En déduire qu'il existe un unique  $x_n \in [0; 1]$  telle que  $f_n(x) = 0$ . 0.75pt

3) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ;  $f_{n+1}(x_n) > 0$ . 0.75pt

4) En déduire que la suite  $(x_n)$  est croissante et qu'elle converge. 1.25pt

5) On suppose qu'il existe un réel  $\beta$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ;  $0 \leq x_n \leq \beta < 1$ .

Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x_n^n$  et montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x_n = 1$  1.25pt

EXERCICE 2(5pt)

I) On considère le polynôme  $p(x) = 4x^3 + x^2 + x - 3$

a) Démontrer que l'équation  $p(x) = 0$  admet une unique solution  $a \in \mathbb{R}$  et que  $0 < a < 1$  0.5pt

b) On suppose que  $a$  est une racine rationnelle de la forme  $\frac{p}{q}$  où  $p$  et  $q$  sont deux entiers naturels premiers entre eux. Montrer que  $p$  divise 3 et  $q$  divise 4 1pt

c) Déterminer alors la solution rationnelle  $a$  de l'équation  $p(x) = 0$ . 1.5pt

II) a) Soit  $N$  un entier relatif impair. Montrer que  $N^2 \equiv 1[8]$ . 0.5pt

b) Montrer que si un entier relatif  $M$  est tel que  $M^2 \equiv 1[8]$ , alors  $M$  est impair.

c) Résoudre dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation  $x^2 = 8y + 1$ . 0.75pt

d) En déduire que la parabole  $(\tau)$  d'équation  $y = \frac{x^2-1}{8}$  dans le repère orthonormé  $(o; \vec{i}; \vec{j})$  du plan  $P$  passe par une infinité de points à coordonnées entières. 0.75pt

EXERCICE 3(4.25pts)

On considère l'espace  $E$  rapporté à un repère orthonormé direct  $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  Soient les points  $A(3; -2; 2)$ ;  $B(6; 1; 5)$ ;  $C(6; -2; -1)$  et  $D(0; 4; -1)$  A

1. Démontrer que les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  ne sont pas alignés. 0.5pt

2. a) Montrer que le triangle  $ABC$  est rectangle en  $A$  0.5pt

b) Ecrire une équation cartésienne du plan  $(P_1)$  orthogonal à la droite  $(AC)$ , passant par  $A$ . 0.5

c) Vérifier que le plan  $(P_2)$  d'équation  $x + y + z - 3 = 0$  est orthogonal à la droite  $(AB)$  et

passe par A.

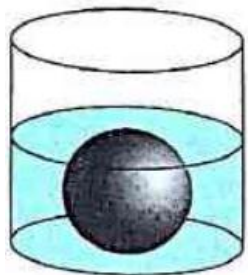
075pt

4. Ecrire une équation cartésienne de la sphère (S) de centre B et de rayon  $r = 5\sqrt{3}$ . 0.75pt

5. a) Calculer les produits scalaires  $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$  et  $\vec{AC} \cdot \vec{AD}$ . En déduire que la droite (AD) est orthogonale au plan (ABC) 1.25pt

b) Calculer le volume v du tétraèdre ABCD. 0.75pt


### PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES 6pts



Un industriel retrouve en stock un nombre (entre 75 et 350) inconnu de boules sphériques et identiques de rayon commun et inconnu. Son employé lui dit que s'il forme des tas identiques de 5 boules, il en reste un isolé. Tandis que s'il forme des tas identiques de 8 boules, il en restera 6 à part. Pour déterminer le rayon inconnu d'une de ces boules métalliques, un ingénieur de cette société prend un récipient cylindrique de rayon 12 cm et contenant de l'eau à une hauteur de 5cm, en fait au tiers de sa hauteur. On immerge donc une de ces boules métalliques dans ce récipient sans que l'eau ne se verse et on constate que la surface de l'eau est parfaitement tangente à la boule. L'industriel se demande si la hauteur d'air dans le cylindre, de la surface tangente à la boule jusqu'au bord du cylindre, est linéairement dépendante du rayon de la boule immergée.

L'industriel fait appel à vos compétences pour l'aider dans les tâches suivantes:

- 1) Quel est le rayon d'une de ces boules métalliques à 0,1 mm près ? 2pt
- 2) Quel est ou sont le(s) nombre(s) possible(s) de boule(s) retrouvée(s) en stock ? 2pt
- 3) Peut-on dire que la hauteur d'air dans le cylindre, de la surface tangente à la boule jusqu'au bord du cylindre, est linéairement dépendante du rayon de la boule immergée ?

<b>MINESEC</b> <b>DRL/DDW</b> <b>COLLEGE PRIVE LAIC</b> <b>MEUKOUONTCHOU</b>		<b>EVALUATION TRIMESTRIELLE N°1</b>			
		<b>EPREUVE DE MATHÉMATIQUES</b>			
		<b>Classe : Tle C</b>	<b>Coef : 7</b>	<b>Durée : 4H</b>	<b>A/S : 2022/2023</b>

**EVALUATION DES RESSOURCES : 15,5 points**

**EXERCICE 1**

**03 pts**

**« 45min »**

A) On considère le nombre  $a_n = \underbrace{111 \dots 11}_{n \text{ fois}}$ .

1- Déterminer  $a_1$  et  $a_2$ . 0,25pt x 2

2- Montrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $a_n = \frac{10^n - 1}{9}$ . 0,75pt

3- On pose  $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ .

a) Montrer par récurrence que pour tout entier non nul,  $S_n = \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{81}$ . 0,5pt

b) En déduire la valeur du nombre  $B = 5 + 55 + 555 + \dots + \underbrace{555 \dots 55}_{20 \text{ fois}}$ . 0,5pt

B) Ecrire 142 en base 5 puis déduire les entiers naturels  $a, b$  et  $c$  tels que l'on ait :

$$\frac{142}{5^3} = a + \frac{b}{5} + \frac{c}{5^2} + \frac{d}{5^3} \quad \text{0,75pt}$$

**EXERCICE 2:**

**04 pts**

**« 45min »**

1) On pose la suite  $(U_n)$  définie par :  $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = 2U_n + 1 \end{cases}$  pour tout entier naturel  $n$ .

a) Montrer que la suite  $(U_n)$  est une suite d'entiers naturels. 0,5pt

b) Montrer que  $U_{n+1}$  et  $U_n$  sont premiers entre eux. 0,5pt

c) Montrer que  $U_n = 2^n - 1$ . 0,5pt

2) Montrer que pour tout entiers naturels  $n$  et  $p$  non nuls tels que  $n \geq p$  on a :

$$U_n = U_p(U_{n-p} + 1) + U_{n-p} \quad \text{0,75pt}$$

3) a- Montrer que pour  $n \geq p$  l'égalité  $\text{pgcd}(U_n; U_p) = \text{pgcd}(U_p; U_{n-p})$ . 0,5pt

b- Soit  $n$  et  $p$  deux entiers naturels non nuls ; montrer que l'on a :

$$\text{pgcd}(U_n; U_p) = U_{\text{pgcd}(n;p)} \quad \text{0,75pt}$$

c- En déduire alors le nombre  $\text{pgcd}(U_{2005}; U_{15})$ . 0,5pt

**EXERCICE 3**

**05 pts**

**« 60min »**

On considère la fonction numérique d'une variable réelle  $f(x) = \frac{2x-4}{\sqrt{4x-x^2}}$  et  $(C)$  sa courbe représentative et  $I = ]0; 4[$ .

1) Déterminer l'ensemble de définition de  $f$  et dresser son tableau de variation. 1pt

2) Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $]0; 4[$  vers un intervalle  $J$  à déterminer. 0,5pt

3) Montrer que pour tout  $x$  appartenant à  $J$ ,  $f^{-1}(x) = 2 + \frac{2x}{\sqrt{x^2+4}}$ . 0,5pt

4) Montrer que l'équation  $f(x) = x$  admet dans  $I$  une unique solution  $\alpha$  telle que  $\alpha > 2$ . 0,75pt

5) Déterminer une équation cartésienne de la tangente  $(T)$  à  $(C)$  au point d'ordonnée 0. 0,5pt

6) Etudier la position relative de  $(C)$  par rapport à  $(T)$ , puis tracer  $(T)$  et  $(C)$  dans le même repère. 1pt

7) Soit  $g$  la fonction définie sur  $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$  par  $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x = \frac{\pi}{2} \\ \frac{2}{f^{-1}(2\tan x)} & \text{si } x \in ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[ \end{cases}$

a) Montrer que pour tout réel  $x \in ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ , on a:  $g(x) = \frac{1}{1+\sin x}$ . **0,5pt**

b) Montrer que  $g$  réalise une bijection de  $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$  vers un intervalle  $K$  à déterminer. **0,5pt**

**EXERCICE 4**

**03,5 pts**

**« 30min »**

Soit  $B = (\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ . Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  vers  $\mathbb{R}^3$  définie par:  $f(\vec{u}) = x\vec{i} + (2y - 4z)\vec{j} + (-y + 2z)\vec{k}$  avec  $\vec{u}(x; y; z)$ .

1) Déterminer la matrice  $M$  de  $f$  dans la base  $B$ . **0,5pt**

2) a- Déterminer le noyau  $\text{Ker}f$  et l'image  $\text{Im}f$  de  $f$  et préciser leurs bases. **1,5pt**

b- Montrer que  $\text{Ker}f \oplus \text{Im}f = \mathbb{R}^3$ . **0,5pt**

3) On pose  $\vec{e}_1 = \vec{i}$ ;  $\vec{e}_2 = 2\vec{j} + \vec{k}$  et  $\vec{e}_3 = 2\vec{j} - \vec{k}$ .

a) Démontrer que la famille  $B' = (\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ . **0,5pt**

b) Déterminer la matrice  $N$  de  $f$  dans la base  $B'$ . **0,5pt**

**EVALUATION DES COMPETENCES : 04,5 points**

**« 1H »**

Pour embellir le mur de la barrière qui entoure sa concession, WENDY fait appel à un peintre qui lui propose d'utiliser une frise constituée de carrés, triangles, cercles, trapèzes et qui se succèdent régulièrement. Ces éléments sont successivement peints en noir, avec des rayures ou en blanc. Le début de la frise est représenté ci-dessous (**figure 1**).

La réalisation des travaux de la barrière nécessite  $124 \text{ m}^3$  de sable. Ce sable est livré par tricycle (à raison de 12000FCFA le tricycle) dont le bac contenant le sable a la forme d'un parallélépipède rectangle de dimensions(en mètre) 3 ; a et b ; où a et b vérifient le système définie par :  $\begin{cases} \text{PPCM}(a; b) = a + 4 \\ \text{PGCD}(a; b) = 2 \end{cases}$ .

La femme de WENDY, responsable d'une entreprise examine les dépenses et les chiffres d'affaires bimensuels de son entreprise de l'année 2022. Après une étude statistique, son comptable a dressé un tableau statistique (figure 2) où les chiffres de dépenses  $\alpha$  et  $\beta$  ont été effacés lors d'une manipulation. L'étude a montré que la moyenne des dépenses était de 110 et leur écart - type de  $2\sqrt{685}$ . Les montants sont exprimés en millions de FCFA.

**Tâche 1** : Donner les caractéristiques (forme et couleur) du 929<sup>ème</sup> élément de la frise **1,5pt**

**Tâche 2** : quel est le coût total du sable pour la réalisation des travaux ? **1,5pt**

**Tâche 3** : Donner une estimation du chiffre d'affaire si la dépense bimensuelle était de 300 millions FCFA. **1,5pt**

Figure 1 :



Figure 2 :

Dépenses ( $x_i$ )	40	50	$\alpha$	80	90	120	$\beta$	150	180	200
Chiffres d'affaire ( $y_i$ )	165	172	182	180	190	194	183	188	193	192

## EPREUVE DE MATHEMATIQUES

## Partie A : Evaluation des ressources(15,5pts)

Exercice 1 : 5 pts

- I. Soit  $a$  et  $n$  deux entiers naturels ( $n \geq 2$ ) tels que  $a \equiv 1[n]$ . Montrer que :
- Pour tout diviseur  $d$  de  $n$ ,  $a \equiv 1[d]$ . (0,5pt)
  - Si pour tout  $k \in \mathbb{N}$   $2^n \equiv 1[k]$ , alors  $2^a \equiv 2[k]$ . (0,5pt)
- II. 1. Démontrer que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $2^{3n} - 1$  est multiple de 7 ; et en déduire que  $2^{3n+1} - 2$  et  $2^{3n+2} - 4$  sont des multiples de 7. (0,75pt)
- En déduire les restes de la division euclidienne de  $2^n$  par 7.
  - On pose  $A_n = 2^n + 2^{2n} + 2^{3n}$ ; résoudre l'équation  $A_n \equiv 0[7]$ . (0,5pt)
  - Montrer que si  $n$  n'est pas multiple de 3 alors  $5^{2n} + 5^n + 1 \equiv 0[31]$ . (0,5pt)
- III. Résoudre dans  $\mathbb{Z}^2$  les systèmes suivants :
- $\begin{cases} a + b = 135 \\ PGCD(a, b) = 504 \end{cases}$ . (0,75pt)
  - $\begin{cases} PPCM(a, b) = 1680 \\ PGCD(a, b) = 42 \end{cases}$ . (1pt)

Exercice 2 : 3,25 pts

- I. On pose  $z = -\sqrt{2 + \sqrt{2}} + i\sqrt{2 - \sqrt{2}}$ .
- Donner la forme algébrique de  $z^2$ . (0,5pt)
  - Ecrire  $z^2$ , puis  $z$  sous forme exponentielle. (0,5pt)
  - Déterminer les valeurs exactes de  $\cos \frac{7\pi}{8}$  et de  $\sin \frac{7\pi}{8}$ . (0,5pt)
- II. Le plan complexe est rapporté à un repère  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . **Prendre pour unité 2cm.**
- Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $(z - 2i)(z^2 - 2z + 2) = 0$ . (0,5pt)
  - Soient  $A$  et  $B$  les points d'affixes  $z_A = 1 + i$  et  $z_B = 2i$ , à tout nombre complexe  $z \neq 2i$  on associe le nombre complexe  $z' = \frac{z-2i}{z-1-i}$ .
- Déterminer et construire l'ensemble  $(\mathcal{E})$  des points  $M$  d'affixes  $z$  tels que  $|z'| = 1$ . (0,5pt)
  - Soit  $(\mathcal{F})$  l'ensemble des points  $M$  d'affixes  $z$  tels que  $z' \in i\mathbb{R}$ . Montrer que  $B \in (\mathcal{F})$ , puis déterminer et construire  $(\mathcal{F})$ . (0,75pt)

Exercice 3 : 7,25pts

- I. Pour chacune des 3 propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.
- Proposition 1** : « le chiffre des unités de  $7^{9^9}$  est 2 ». (0,5pt)
  - Proposition 2** : « Le chiffre des unités de  $3548^9 \times 2537^{31}$  est 1 ». (0,5pt)
  - Proposition 3** : «  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists k \in \mathbb{N}$  tel que  $5^{6n+1} + 2^{3n+1} = 5k$  ». (0,25pt)
  - Proposition 4** : « Si  $\frac{a}{b}$  est irréductible alors  $\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}$  est l'est aussi. » (0,5pt)
  - Proposition 5** : «  $-\frac{\pi}{2}$  et 2 sont respectivement l'argument et le module de  $\frac{5-5i}{10e^{\frac{i\pi}{4}}}$  ». (0,5pt)

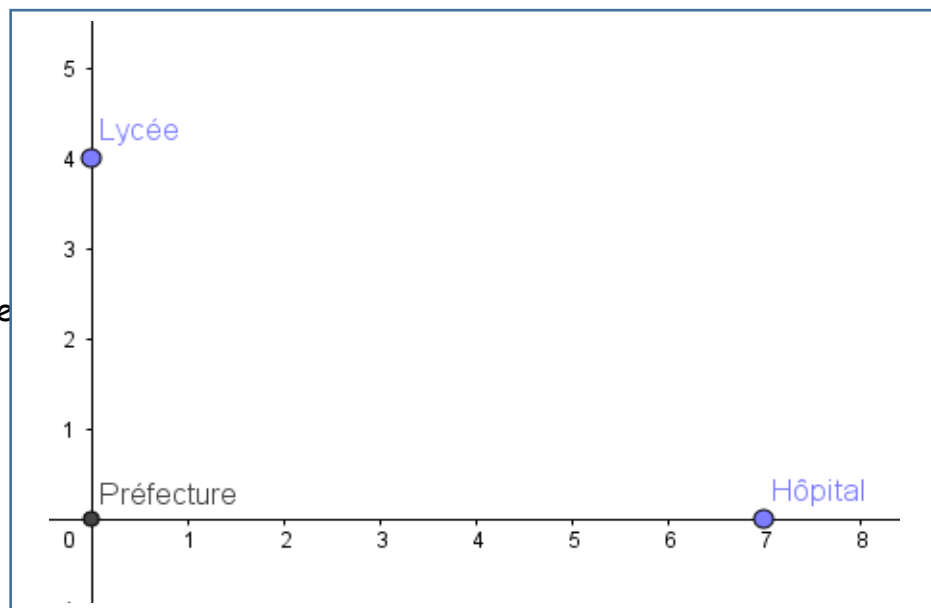
## II.

On considère dans  $\mathbb{C}$ , le polynôme  $P$  définie par :  $P(x) = 9x^4 - 24x^3 + 50x^2 - 24x + 41$ .

1. Montrer que si  $z_0$  est une racine de  $P$ , alors  $\bar{z}_0$  est aussi une racine de  $P$  0,5pt
2. Vérifier que  $i$  est une racine de  $P$  et en déduire l'autre racine de  $P$ . 0,5pt
3. Déterminer trois nombres complexes  $a, b$  et  $c$  tels que  $\forall z \in \mathbb{C} \quad P(z) = (z^2 + 1)(az^2 + bz + c)$  0,75pt
4. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $P(z) = 0$  0,5pt
5. Le plan étant rapporté à un repère orthonormé direct  $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$  (unité graphique : 3cm). On désigne par  $A; B; C$  et  $D$  les points d'affixes respectives  $z_A = -i; z_B = i; z_C = \frac{4}{3} + \frac{5}{3}i$  et  $z_D = \frac{4}{3} - \frac{5}{3}i$ 
  - a) Placer les points  $A; B; C$  et  $D$  0,75pt
  - b) Montrer que  $\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A} \in i\mathbb{R}$  et  $\frac{z_C - z_B}{z_D - z_B} \in i\mathbb{R}$  où  $i\mathbb{R}$  est l'ensemble des imaginaires purs. 1pt
  - c) En déduire la nature exacte des triangles  $ACD$  et  $BCD$  0,5pt
  - d) Montrer que les points  $A; B; C$  et  $D$  appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon 0,5pt

### Partie B : Evaluation des compétences (4,5pts)


Une équipe d'ingénieurs désignée pour construire 3 forages dans un village a assimiler le village à un repère ainsi qu'indique la figure ci-contre. Après étude pour savoir les coordonnées des points des trois forages, les ingénieurs ont réalisé que l'un des forages sera situé sur l'axe reliant la préfecture et le Lycée ; et que les affixes de ces points sont solutions de l'équation (E)



(E):  $z^3 + (-4 - 8i)z^2 + (-15 + 22i)z + 30 = 0$ . Pour aspirer la boue, l'équipe d'ingénieurs utilise des tubes en métal vendus dans des boîtes de rangements par 5 et par 9. L'ingénieur en chef constate que s'il ne prend que des rangements par 5, il lui restera 3 tubes ; et s'il ne prend que des rangements par 9, il lui restera 2 tubes. Et fini par obtenir une quantité de tubes comprise entre 100 et 140.

Pour fêter l'arrivée du forage dans son voisinage, un habitant du village dispose de 10 000 FCFA pour l'achat des bières qui coûtent 350 FCFA chacune et des jus qui coutent 200 FCFA chacun. Il doit dépenser la totalité de cette somme d'argent pour l'achat de ces deux types de boissons. Avec la présence de son voisin qui ne boit que de la bière et de sa femme qui ne boit que du jus, chaque participant a droit à une seule bouteille.

1. Déterminer les nombres possibles des bouteilles de bières et de jus qu'il peut acheter (1,5pt)
2. Déterminer par leurs coordonnées les positions des trois forages. (1,5pts)
3. Combien l'équipe d'ingénieurs a-t-elle commandé de tubes ? (1,5pts)

COLLÈGE F-X. VOGT		Année scolaire 2022-2023
Département de Mathématiques	<b>MINI SESSION</b>	<b>Situation Scolaire N°2</b> Date : Novembre 2022
<b>EPREUVE DE MATHÉMATIQUES</b>		
Niveau : Tle C	Durée : 04 heures	Coef: 7

**PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES**

**15,5 POINTS**

**Exercice 1 : 02,50 Points**

On considère le nombre entier naturel  $a_n = \underbrace{111 \dots 1}_{n \text{ fois}}$ .

- 1- Déterminer  $a_1$  et  $a_2$ . **0,5pt**
- 2- Montrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $a_n = \frac{10^n - 1}{9}$ . **0,75pt**
- 3- On pose  $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ .
  - a) Montrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $S_n = \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{81}$ . **0,75pt**
  - b) En déduire la valeur du nombre  $B = 5 + 55 + 555 + \dots + \underbrace{555 \dots 5}_{20 \text{ fois}}$ . **0,5pt**

**Exercice 2 : 04,00 Points**

Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2.

- 1- Montrer que les nombres  $n$  et  $2n + 1$  sont premiers entre eux. **0,5pt**
- 2- On pose  $p = n + 3$  et  $q = 2n + 1$  et on désigne par  $d_1$  le PGCD de  $p$  et  $q$ , ( $d_1 > 0$ ).
  - a) Montrer que  $d_1$  divise 5 et en déduire les valeurs possibles de  $d_1$ . **0,75pt**
  - b) Démontrer que  $p$  et  $q$  sont multiples de 5 si et seulement si  $n - 2$  est multiple de 5. **0,5pt**
- 3- Soient les nombres  $a = n^3 + 2n^2 - 3n$ ;  $b = 2n^2 - n - 1$  et  $d_2 = \text{PGCD}[n(n + 3); 2n + 1]$ .
  - a) Montrer que  $a$  et  $b$  sont divisibles par  $n - 1$ . **0,5pt**
  - b) Montrer que  $d_1 = d_2$ . **0,75pt**
  - c) En déduire les valeurs de  $\text{PGCD}(a, b)$  en fonction de  $n$ . **0,5pt**
  - d) Déterminer  $\text{PGCD}(a, b)$  pour  $n = 2022$ . **0,5pt**

**Exercice 3 : 03,00 Points**

- 1- Déterminer l'ensemble des diviseurs positifs de 5929. **0,5pt**
- 2- Déterminer les entiers naturels strictement supérieurs à 1 dont les carrés divisent 5929. **0,5pt**
- 3- Déterminer les couples  $(x, y)$  d'entiers naturels tels que  $x^2 + x^2y = 5929$ . **0,5pt**
- 4- On cherche les couples  $(a, b)$  d'entiers naturels dont le PGCD et le PPCM sont solutions de l'équation (E):  $x^2 - 91x + 588 = 0$ .
  - a) Résoudre l'équation (E). **0,5pt**
  - b) Déterminer alors les couples  $(a, b)$ . **1pt**

**Exercice 4 : 06,00 Points**

**Les parties A et B sont largement indépendantes.**

**Partie A :** On considère l'équation (E) d'inconnue  $z$ , suivante :  $10z^2 - 2z + 1 = 0$

- 1- Déterminer les racines complexes  $z_1$  et  $z_2$  de (E), la partie imaginaire de  $z_1$  étant positive. **1pt**

- 2- Soit  $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  tel que  $\tan\theta = 3$ . Montrer que  $z_1 = \frac{\cos\theta + i\sin\theta}{10 \cos\theta}$  et  $z_2 = \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{10 \cos\theta}$ . **1pt**
- 3- On pose, pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_n = z_1^n + z_2^n$ .
- a) Montrer que  $v_n$  est un nombre réel que l'on déterminera en fonction de  $n$  et  $\theta$ . **0,5pt**
- b) Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $|v_n| \leq 2 \left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^n$ . **0,5pt**

**Partie B :** Soient  $S_1 = 1 + \cos \theta + \cos 2\theta + \dots + \cos n\theta$  et  $S_2 = \sin \theta + \sin 2\theta + \dots + \sin n\theta$ .  
On pose  $S = S_1 + iS_2$ .

- 1- Déterminer  $S_1$  et  $S_2$  lorsque  $\theta = 2k\pi$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ . **1pt**
- 2- On suppose pour la suite que  $\theta \neq 2k\pi$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ .
- a) Montrer que  $S = \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}$ . **0,75pt**
- b) Montrer que  $S = e^{in\frac{\theta}{2}} \cdot \left( \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \right)$ . **0,75pt**
- 3- En déduire alors les expressions simplifiées de  $S_1$  et  $S_2$  en fonction de  $n$  et  $\theta$ . **0,5pt**

## PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES

**04,5 POINTS**

**Situation :** Quatre malfrats braquent un homme d'affaires et emporte une somme inférieure à 14 mille euros. Ils décident alors de se rendre dans un restaurant réputé pour sa bonne cuisine pour fêter leur succès et se partager le butin (le partage étant équitable). S'ils se partagent le triple du butin, il restera 3 mille euros. Malheureusement un des bandits meurt des suites de blessures reçus lors des échanges de tirs avec la police. Si le reste du groupe se partagent le double du butin, il restera mille euros. Le patron du restaurant en passant a écouter et a donc une idée sur le lieu de la cachette du butin.

Quelques jours plus tard les trois malfrats restant ont été arrêtés et jetés en prison. Les gars ne comptent pas abandonner leur butin et commencent donc à réfléchir sur un plan d'évasion. Ils ont observés pendant un an, 3 lampes qui brillent et éclairent toute la cour de la prison chaque nuit après 18h00, heure avant laquelle elles sont toutes les trois éteintes : la première lampe s'éteint toutes les heures, la deuxième toutes les 36 minutes et la troisième toutes les 90 minutes. Ils se sont donc enfuit lorsque les trois lampes étaient simultanément éteintes après 22 heures et avant 02 heures du matin.

Le jour où ils décident d'aller sur le lieu de la cachette du butin, ils prennent comme chauffeur leur ancien ami, Alfred qui sait que sur ce trajet entre 07h et 07h20 la police n'est pas présente mais aussi il doit faire attention car il y a deux feux tricolores qu'il juge mal synchronisés. En effet il a après étude remarqué que : le premier feu reste vert pendant 60 secondes et rouge pendant 30 secondes, le second feu qu'il rencontre 875 mètres plus loin en roulant à la vitesse de 45 km/h, reste vert pendant 45 secondes et rouge pendant 50 secondes ; de plus il a remarqué que ces deux feux passaient au vert en même temps à minuit. Alfred recherche un synchronisme de ces deux feux, c'est-à-dire voudrait savoir à quelle heure exactement il devrait arriver au premier feu au moment où il passe au vert et tel que le second feu passe au vert lorsqu'il arrive à sa hauteur pour ne pas avoir à s'arrêter pour attendre.

### Tâches :

- 1- Que gagnera le patron du restaurant si les trois autres malfrats trépassent ? **1,5pt**
- 2- Déterminer l'heure à laquelle les trois malfrats se sont évadés de la prison. **1,5pt**
- 3- Déterminer l'heure exacte à laquelle Alfred doit arriver au premier feu. Afin de bénéficier de ce synchronisme des feux et éviter la police. **1,5pt**

**Evaluation des Ressources : 15 points**

**Exercice 1 (3 points)** PPCM, PGCD, nombres premiers.

On se propose de résoudre le système suivant dont l'inconnue est le couple  $(x, y)$  d'entiers naturels non nuls tels que  $x > y$

$$\begin{cases} (x - y)^2 = x + y(1) \\ \text{PPCM}(x, y) = 495(2) \end{cases}$$

1. (Résolution de (1))

On pose  $z = x - y$  et on considère comme nouvelle inconnue le couple  $(z, y)$ .

(a) Quelle relation vérifie  $z$  et  $y$ ? (0,5pt)

(b) En déduire que  $2y$  est un produit de deux entiers consécutifs. (0,5pt)

(c) En déduire que les solutions de l'équation (1) sont de l'une des formes suivantes :

$$\begin{cases} x = k(2k + 1) \\ y = k(2k - 1) \end{cases} \text{ avec } k \in \mathbb{N}^* \text{ ou bien } \begin{cases} x = (k + 1)(2k + 1) \\ y = k(2k + 1) \end{cases} \text{ avec } k \in \mathbb{N}^*. \quad (0,75\text{pt})$$

2. (Résolution du système).

On suppose que les solutions du système sont sous la forme :  $\begin{cases} x = k(2k + 1) \\ y = k(2k - 1) \end{cases}$  avec  $k \in \mathbb{N}^*$

(a) Donner en fonction de  $k$ , le PGCD de  $x$  et  $y$ . (0,75pt)

(b) En déduire le PPCM de  $x$  et  $y$  en fonction de  $k$ . (0,5pt)

(c) Montrer que le double de ce PPCM est le produit de 3 entiers consécutifs. (0,5pt)

(d) Résoudre dans ce cas le système. (1pt)

**Exercice 2 (2,5 points)**

1. Soit la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :  $a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$

(a) Montrer que la suite  $(a_n)$  est croissante (0,25 pt)

(b) On définit la suite  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  par  $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad b_n = a_n + \frac{1}{n \cdot (n!)}$ . Démontrer que la suite  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est décroissante. (0,25 pt)

(c) Démontrer que  $\forall (p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, a_p \leq b_q$ . (0,75 pts)

(d) En déduire que  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  sont convergentes. (0,5 pt)

(e) Démontrer que la suite  $(a_n - b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers zéro. (0,5 pt)

(f) En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$ . (0,25 pt)

**Exercice 3 (4,5pts)**

1. On considère dans  $\mathbb{C}$  le polynôme  $P(z) = z^4 + az^3 + bz^2 + az + 1$  où  $a, b \in \mathbb{R}$

(a) Démontrer que si  $z_0$  est une solution de (E),  $\bar{z}_0, \frac{1}{z_0}$  et  $\frac{1}{\bar{z}_0}$  sont également des solutions de (E). 0,75 pt

(b) Déterminer  $a$  et  $b$  sachant que  $1 + i$  est une solution de (E). 0,75 pt

(c) En déduire trois autres racines de l'équation  $P(z) = 0$  0,5 pt

(d) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $P(z) = 0$  0,5 pt

2. (a) Déterminer la forme trigonométrique de chacun des nombres complexes solutions de l'équations  $Z^4 = 8(1 - i\sqrt{3})$ . (0,75pt)

- (b) Vérifier que la complexe  $a = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$  est une racine quatrième du complexe  $8(1-i\sqrt{3})$ . (0,25pt)
- (c) En déduire la forme algébrique des solutions de l'équation  $Z^4 = 8(1-i\sqrt{3})$ . (0,5pt)
- (d) Déduire des questions 2. et 4. les valeurs exactes de  $\sin \frac{17\pi}{12}$  et  $\cos \frac{17\pi}{12}$ . (0,5pt)

### Exercice 3 (5pts)

Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \sqrt{\frac{x^3 - x^2 + x}{1-x}}$ .

On nomme  $(\mathcal{C})$  sa courbe représentative dans un repère orthonormal (unité graphique : 1 cm).

Le but de l'exercice est d'étudier cette fonction. Pour mener à bien cette étude, il est nécessaire d'étudier au préalable une fonction auxiliaire  $g$ .

1. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :  $\frac{x^3 - x^2 + x}{1-x} \geq 0$ ; puis en déduire le domaine de définition  $D_f$  de  $f$ . (0,5pt)
2. Soit  $g(x) = -2x^3 + 4x^2 - 2x + 1$ .
  - (a) Étudier les variations de  $g$  et donner sa représentation graphique dans un repère  $(O; I; J)$ . (0,5pt)
  - (b) Déterminer le signe de  $g(x)$  sur  $[0; 1]$ . (0,5pt)
3. (a) Étudier la dérivabilité de  $f$  en  $x_0 = 0$  et en déduire l'équation de la tangente à  $(C_f)$  en  $x_0 = 0$ . (0,75pt)
  - (b) Déterminer le domaine de dérivabilité de  $f$ . (0,25pt)
  - (c) Calculer la dérivée de  $f$  et vérifier que  $f'(x) = \frac{g(x)}{2(1-x)^2 f(x)}$ . (0,5pt)
4. (a) Étudier les variations de  $f$  sur  $[0; 1]$ . (0,5pt)
  - (b) Tracer la courbe  $(C_f)$  de  $f$  dans un repère orthonormé du plan. (0,5pt)
5. (a) Montrer que  $f$  est une bijection de  $]0; 1]$  vers un intervalle  $J$  que l'on déterminera. (0,5pt)
  - (b) Tracer la courbe  $(C_{f^{-1}})$  de la bijection réciproque. (0,5pt)

### Evaluation des Compétences :      4,5 points


Monsieur MOUSSA est Comptable dans une société de micro finance. Il a un chantier qui n'est malheureusement pas desservi par une voie que peut emprunter un engin à moteur. Il achète le sable et a versé chez son voisin situé à une centaine de mètres du chantier. Ce sable livré par une société et acheter à raison de 15000F le mètre cube ( $m^3$ ) est contenu dans un bac plein de forme parallélépipédique de dimensions  $3m \times am \times bm$  où  $a$  et  $b$  vérifient en mètre le système :  $\begin{cases} PPCM(a; b) = a + 3 \\ PGCD(a; b) = 2 \end{cases}$ . Ce sable devrait être transporté en 100 tours dans des seaux identiques et pleins par des garçons et des filles du quartier. Les garçons ont effectué 8 tours et les filles 5 tours. Pour les motiver, il leur propose un taux forfaitaire de 1000F par personne. Pour régler les problèmes d'eau du chantier, M. Moussa fait creuser un puits par l'entreprise qualifiée. Pour atteindre la nappe phréatique qui est à 2046m, cette entreprise creuse  $2m$  le premier jour,  $4m$  le deuxième,  $8m$  le troisième jour,  $16m$  le quatrième jour et ainsi de suite, cette entreprise est payé suivant le contrat suivant : 5000F le premier jour, 8000F le deuxième jour, 11000F le troisième jours, 14000F le quatrième jour et ainsi de suite.

**Tâche 1 :** Déterminer le prix d'achat du sable. (1,5pt)

**Tâche 2 :** Déterminer le montant nécessaire à prévoir par M. MOUSSA pour satisfaire les transporteurs sachant qu'il y a plus de garçons que de filles. (1,5pt)

**Tâche 3 :** Déterminer la somme dépensée par Moussa pour creuser le puits. (1,5pt)

Présentation : 0,5 pt

COLLÈGE F-X. VOGT		Année scolaire 2022-2023
Département de Mathématiques	<b>CONTROLE</b>	<b>Situation Scolaire N°1</b> Date : 01 Octobre 2022
<b>EPREUVE DE MATHÉMATIQUES</b>		
Niveau : Tle C	Durée : 04 heures	Coef: 7

**PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES**

**15,5 POINTS**

**Exercice 1 : 05,50 Points**

A- Soit l'énoncé suivant : « *s'il pleut, Alex prend un parapluie. Bertine ne prend jamais de parapluie s'il ne pleut pas et en prend toujours un quand il pleut* »

On considère les propositions logiques suivantes :  $p$ : "il pleut" ;  $q$ : "Alex a un parapluie" et  $r$ : "Bertine a un parapluie".

Pour chaque affirmation du **tableau 1**, retrouver sa conclusion dans le **tableau 2**. 0,5pt×6=3pts

1- $q$ est vraie
2- $\text{non } q$ est vraie
3- $r$ est vraie
4- $\text{non } r$ est vraie
5- $\text{non } p$ est vraie
6- $p$ est vraie

**Tableau 1**

a) Donc Alex et Bertine ont tous deux leur parapluie.
b) Donc il pleut.
c) Donc il ne pleut pas.
d) On ne peut rien conclure.
e) Donc Bertine se promène sans parapluie.
f) Donc Alex et Bertine n'ont pas leur parapluie.

**Tableau 2**

B- Le but de cette partie est de retrouver la valeur exacte, sans utiliser une calculatrice, du nombre

$A = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$ . Soient  $a$  et  $b$  deux nombres entiers naturels tels que  $t = (a + b\sqrt{2})^3$  avec  $t = 20 + 14\sqrt{2}$ .

- 1- Montrer que les nombres  $a$  et  $b$  vérifient le système (I) :  $\begin{cases} a(a^2 + 6b^2) = 20 \\ b(3a^2 + 2b^2) = 14 \end{cases}$  **0,5pt**
- 2- Déterminer le(s) couple(s) d'entiers positifs  $(a, b)$  vérifiant le système (I). **1pt**
- 3- Déterminer la valeur de  $A$ , en montrant les étapes du calcul. **0,5pt**

C- Déterminer les entiers relatifs  $n$ , tels que  $\frac{5n^2+8}{2n-1}$  soit un nombre entier relatif. **0,5pt**

**Exercice 2 : 02,00 Points**

On considère deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  définies par  $\begin{cases} u_{n+1} = v_n - (n+1)u_n \\ v_{n+1} = -(n+1)v_n \end{cases}$  avec  $u_1 = 1, v_1 = -1$ .

- 1- La suite  $(v_n)$  est-elle géométrique ? **0,5pt**
- 2- Montrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul  $n, v_n = (-1)^n \cdot n!$ . **0,5pt**
- 3- Montrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul  $n,$   
 $u_n = (-1)^{n+1}n! \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)$ . **1pt**

**Exercice 3 : 04,50 Points**

A- Un nombre entier naturel  $N$  s'écrit  $\overline{abcca}^5$  et  $\overline{bbab}^8$

- 1- Montrer que l'on a :  $309a - 226b + 15c = 0$ . **0,5pt**
- 2- Montrer que  $b \equiv 0[3]$  et  $(3a - 1) \equiv 0[5]$ . **1pt**
- 3- En déduire les valeurs de  $a, b$  et  $c$ . **0,75pt**

B- Soit  $p$  un nombre premier. **On rappelle que**  $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$  **et**  $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$ .

- 1- a) Démontrer que pour tout entier  $k$  compris entre 0 et  $p$ ,  $C_p^k$  est un multiple de  $p$ . 0,5pt  
b) En déduire que pour tout entier relatif  $a$  et  $b$ ,  $(a + b)^p \equiv (a^p + b^p)[p]$ . 0,5pt
- 2- Montrer que  $a^7 + b^7$  est un multiple de 7 si  $a + b$  est un multiple de 7. 0,5pt
- 3- Trouver les entiers relatifs  $x$  tels que :  $\begin{cases} -10 \leq x \leq 10 \\ (x^7 + 128) \equiv 0[7] \end{cases}$ . 0,75pt

#### **Exercice 4 : 03,50 Points**

Soient  $p$  et  $q$  deux nombres réels.

- 1- Montrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , on a :  
 $p^{n+1} - q^{n+1} = (p - q)(p^n + p^{n-1}q + \dots + pq^{n-1} + q^n)$ . 0,5pt
- 2- Soit  $n, a$  et  $b$  trois entiers relatifs non nuls. Montrer que si  $n$  divise  $a$  et  $a - b$ , alors  $n$  divise  $b$ . 0,5pt
- 3- On pose  $a = 27^{n+1} - 26n - 27$  et  $b = 27^{n+2} - 26(n + 1) - 27$ .
  - a) Montrer que 676 divise  $a - b$ . 0,5pt
  - b) En utilisant les questions précédentes, montrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ , 676 divise  $27^{n+1} - 26n - 27$ . 0,5pt
- 4- On pose à présent  $p = 5n - 3$  et  $q = n + 1$ .
  - a) Démontrer que tout diviseur commun à  $p$  et  $q$  est un diviseur de 8. 0,5pt
  - b) En déduire tous les diviseurs positifs commun à  $p$  et  $q$ . 0,5pt
  - c) Montrer que si  $n$  est pair alors  $p$  et  $q$  admettent un seul diviseur positif commun que l'on déterminera. 0,5pt

#### **PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES**

**04,5 POINTS**

#### **Situation :**

Monsieur Fotso un grossiste dans la vente du ciment, va recevoir dans les jours qui suivent un camion contenant 14550 sacs de ciments. Il lui faudra donc des détaillants pour écouler toute sa marchandise. Chacun d'eux devra prendre entre 150 et 300 sacs de ciments et aussi déposer chacun une caution de 50000 francs dans un compte bancaire ouvert par M. Fotso pour l'occasion. Après tous les dépôts effectués, M. Fotso constate qu'il a moins de 3000000 francs.

Après cette bonne affaire M. Fotso décide d'encourager ses enfants après leur bon travail à la première situation scolaire (première séquence). Il a donc prévu une certaine somme d'argent à distribuer à tous les enfants. Ainsi le premier reçoit 1000F plus le dixième du reste, le second reçoit 2000F plus le dixième du reste, le troisième reçoit 3000F plus le dixième du reste et ainsi de suite jusqu'au dernier. A la fin du partage, ils se rendent compte qu'ils ont reçu exactement la même somme d'argent.

Voulant faire un retrait dans son compte devant un distributeur, M. Fotso se rend compte qu'il a oublié le code de sa carte, mais se rappelle qu'il avait inventé un procédé afin de retrouver tous les quatre chiffres du code de sa carte bancaire : **le premier chiffre est le plus petit de tous et le dernier est un multiple de 4, la somme des deux derniers chiffres est le numéro de son jour de naissance et le produit de tous les chiffres du code est égal à son année de naissance**. M. Fotso est né le 15 Février 1960 à Garoua.

#### **Tâches**

- 1- Retrouver la somme exacte disponible dans le compte de M. Fotso après tous les dépôts. 1,5pt
- 2- Déterminer le code confidentiel de la carte bancaire de M. Fotso. 1,5pt
- 3- Déterminer le nombre d'enfants de M. Fotso. 1,5pt

### EVALUATION N°1 DU 1<sup>er</sup> TRIMESTRE

#### PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES / 15 points

##### EXERCICE 1 : 6,25 points

1. Effectuer la division euclidienne de -1225 par -32. 1pt
2. Montrer que 211 est un nombre premier. 1pt
3. Déterminer les nombres entiers relatifs  $x$  tels que  $2x + 1$  divise  $x - 3$ . 0,75pt
4. a) Montrer que l'écriture de  $\overline{11111 \dots 111}^2$ , où 1 apparaît  $p$  fois  $p \in \mathbb{N}$ ,  $p \geq 2$  dans le système décimale est  $2^p - 1$ . 0,75pt  
b) Dédire l'écriture en base deux du nombre de FERMAT,  $2^{32} + 1$ . 1pt
5. a) Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel  $n$  le reste de la division euclidienne de  $2^n$  par 7. 1pt  
b) En déduire le reste de la division euclidienne de  $3607^{2020}$  par 7. 0,75pt

##### EXERCICE 2 : 4,5 points

1. Trouver toutes les valeurs de  $a$  et  $b$  telles que le nombre  $x = \overline{28a75b}$  dans le système décimal soit divisible par 3 et 11. 2pts
2. On considère un nombre entier naturel :  $x = \overline{a_p a_{p-1} \dots a_1 a_0}$ .  
a) Démontrer que  $x \equiv a_0 + 2a_1 [4]$ . 1pt  
b) Comment reconnaître facilement que  $x$  est divisible par 25 ? 0,5pt
3. Démontrer que pour tout entier relatif  $n$ ,  
 $2n(n + 1)$  et  $2n + 1$  sont premiers entre eux. 1pt

##### EXERCICE 3 : 4,25 points

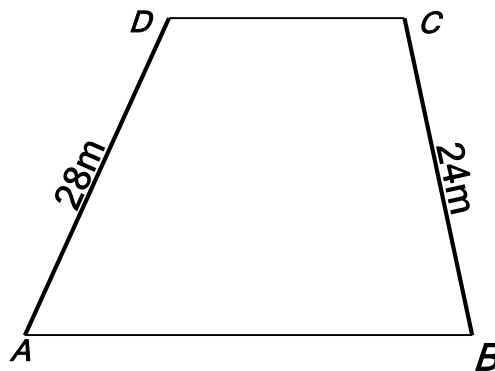
1. a) Calculer PGCD(529 ; 391) par l'algorithme d'Euclide. 0,75pt  
b) En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer deux entiers relatifs  $x$  et  $y$  tels que :  $23x + 17y = 1$ . 1pt  
c) En déduire alors un couple  $(x_0, y_0)$ , solution particulière de l'équation  $529x + 391y = 23$ . 0,5pt  
d) Déterminer alors tous les couples  $(x, y)$  de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , solution de  $529x + 391y = 23$ . 0,75pt
2. Déterminer toutes les solutions dans  $\mathbb{Z}$  de l'équation :  $3x \equiv 2 [5]$ . 1,25 pt

#### PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES/ 5points

Situation :

Pour Célébrer un mariage, une famille décide de louer une salle de fête. Elle a la forme d'un trapèze comme l'indique la figure ci-contre.

- Pour la décoration de la salle, on désire placer les pots de fleur, les roses, aux quatre coins de la salle, les autres régulièrement espacés le long des murs représentés par les segments  $[AD]$  et  $[BC]$ . Un pot de ces fleurs coûte 4800 F. Les décorateurs veulent faire un bon travail, mais aussi faire des économies.
- Jeanne, une décoratrice récite une prière toutes les 50 minutes, Paul l'autre décorateur a une infection des yeux et doit faire un soin avec un collyre toute les 40 minutes. Chacun des décorateurs est rappelé par l'alarme de son téléphone. Ils prennent une pause avec goûter toutes les fois que la prière coïncide avec le soin ; chacun prend un jus de 250 F et un biscuit de 100 F. Ils travaillent de 8h00 à 18h30. A la fin de la journée ils désirent connaître ce que les gouter leurs ont couté.



**Tâches :**

1. Quel est le plus petit montant à prévoir pour l'achat de ces pots de fleurs ? **2,25 pts**
2. Combien vont coûter les jus et les biscuits du goûter pendant les pauses pour un jour ? **2,25 pts**

Présentation : **0,5 pt**

**12 novembre 2022**

**DEVOIR DE MATHÉMATIQUES (coef 07 en C, 4 en D et Ti)**

→ La qualité combinée du raisonnement et de la rédaction seront des facteurs clés de cette évaluation.

**Exercice No 1** : 4 pts série C exclusivement (source : M. GPM)

- 1- Rappeler les théorèmes de Bezout et de Gauss. 0,5pt/C
- 2- Résoudre dans  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ , l'équation d'inconnues  $x$  et  $y$ :  $75x + 27y = -6$  0,5pt/C
- 3- a) Montrer que l'espace vectoriel réel  $E$  des polynômes de degré inférieur ou égal à 2, est de dimension 3 lorsqu'on le muni des opérations usuelles sur les applications de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$ .  $\frac{1}{2}$ pt/C  
b) Donner la matrice de l'application  $\theta: E \rightarrow E$  telle que  $\theta(f) = f'$  la dérivée de  $f$  dans la base  $B = (u, v, w)$  où  $u: x \mapsto 1$ ,  $v: x \mapsto x$ ,  $w: x \mapsto x^2$ .  $\frac{1}{2}$ pt/C
- 4- Soit  $u$  un nombre complexe différent de 1 et  $z$  un nombre complexe quelconque.  
a) Montrer que si  $u$  est de module 1, alors  $\frac{z-u\bar{z}}{1-u} \in \mathbb{R}$ .  $\frac{1}{2}$ pt/C  
b) Montrer que si  $\frac{z-u\bar{z}}{1-u} \in \mathbb{R}$  et  $\bar{u}z - u\bar{z} = 0$ , alors ( $z \in \mathbb{R}$  ou  $|u| = 1$ ).  $\frac{1}{2}$ pt/C
- 5- On a  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $z + \frac{1}{z} = 2\cos(\theta)$  avec  $\theta$  un nombre réel quelconque. Soit  $n \in \mathbb{Z}$ .  
a) Résoudre  $z^2 - 2\cos(\theta)z + 1 = 0$  et mettre le résultat sous forme exponentiel.  $\frac{1}{2}$ pt/C  
b) En déduire que  $z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos(n\theta)$ .  $\frac{1}{2}$ pt/C

**Exercice No 2** : 4 pts série C [TOUT] et 03 pts en série TI [questions 1a-b-c et 3a-b-c] (source : GPM)

On considère la suite  $(a_n)_n$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $a_n = 2 \times 5^n + 7$ .

1. a) Justifiez que pour tout entier naturel  $n$ ,  $a_n$  est un entier naturel impair. [0,25pt]  
b) Déterminez suivant les valeurs de  $n$  le reste modulo 8 de  $5^n$ . [0,5pt]  
c) Déduisez-en que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n \equiv 1[8]$ . [0,5pt]
2. a) Montrez que si  $\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{8} \\ x \equiv 7 \pmod{125} \end{cases}$ , alors  $x \equiv 257 \pmod{1000}$ . [0,5pt]  
b) Montrez que pour tout  $n \geq 3$ ,  $a_n \equiv 257 \pmod{1000}$ . [0,5pt]  
c) Quels sont les trois derniers chiffres de l'entier  $A = (2 \times 5^{2020} + 7) \times (2 \times 5^{2021} + 7)$ ? [0,5pt]
3. a) Vérifiez que pour tout entier naturel  $n$ ,  $5a_{2n} - a_{2n+1} = 28$ . [0,25pt]  
b) Soit  $= \text{pgcd}(a_{2n}; a_{2n+1})$ . Montrez par l'absurde que  $\delta$  est différent de 7. [0,5pt]  
c) Trouvez alors les valeurs possibles de  $\delta$ . [0,5pt]

**Exercice No 3** : 3 pts en C-Ti et 6 pts en D (source : GPM). Les parties de cet exercice sont indépendantes.

- I - Calculez les limites suivantes : a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+5}-x}{\sqrt{x^2-x}}$ ; b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x + \sin(2x)}{\sin x - \sin(2x)}$ . [0,5pt]
- II- Étudiez les branches infinies de la courbe représentative de la fonction  $p: x \mapsto 2x - \sqrt{x}$ . [0,5pt]

III- Soit  $g$  la fonction définie sur  $[0; 1[$  par :  $g(x) = \sqrt{\frac{x}{1-x^2}}$ .

1. Dresser le tableau de variation de  $g$ . [0,75pt]
2. Montrez que la fonction  $g$  admet une bijection réciproque  $g^{-1}$ . [0,5pt]
2. Montrez que  $g^{-1}$  est dérivable sur son ensemble de définition et dresser le tableau de variation de la fonction  $g^{-1}$ . [0,75pt]

**Exercice No 4** : 5 pts en D-Ti (source : collègue)

- 1) La fonction  $h$  est définie sur  $I = [1; 2]$  par  $h(x) = \frac{3x+2}{x+2}$ .
  - a) Montrer que  $h$  réalise une bijection de  $I$  vers un intervalle  $J$  à préciser. 0,5pt
  - b) Montrer que  $\forall x \in I, |h'(x)| \leq \frac{4}{9}$ . 0,5pt
- 2) La suite  $(U_n)$  est définie par : 
$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{3U_n+2}{U_n+2} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$
  - a) Montrer par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq U_n \leq 2$ . 0,5pt
  - b) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} \geq U_n$ . 0,5pt
  - c) Quel conjecture pouvez-vous faire sur la convergence de la suite  $(U_n)$ ? 0,5pt
  - d) Démontrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - 2| \leq \frac{4}{9} |U_n - 2|$ . 0,5pt
  - e) En déduire que  $|U_n - 2| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n$ . 0,5pt
- 3) Déterminer la limite de la suite  $(U_n)$ . 0,5pt

**Evaluation des compétences** : 9 pts (Fonctions, projet GPM) Pour C, D et Ti.

Situation-problème :

Monsieur Ahmadou est le gestionnaire de l'entreprise où vous avez postulé pour un emploi. M. Ahmadou vous explique, lors de l'interview, que le bénéfice  $b$  en fonction du nombre  $x$  (en milliers) de chaussures est défini par :

$$b(x) = x^3 - x^2 - 5x + 5, \text{ avec } 1 < x < 3.$$

L'entrepreneur sait qu'il existe un nombre unique de chaussures  $x = X$  pour lequel le bénéfice est nul. L'entreprise est située dans un village où les habitants fêtent deux évènements N et Y. L'évènement N est célébré tous les 140 jours et l'évènement Y, tous les 108 jours. Les jours où les fêtes des évènements N et Y coïncident sont considérés comme jours de **grâce**. Un matin M le village a célébré Y, huit jours après avoir célébré N. L'entreprise souhaite éviter de programmer une journée de travail, à la fête du prochain jour de **grâce**.

M. Ahmadou vous propose de l'aider pour ces trois tâches pour passer votre interview:

1. (C-D-Ti) Donne numériquement, à l'unité près, le nombre de chaussures dont le bénéfice est nul. (3pts)
2. (D-Ti) Donne (en fonction de X) l'intervalle de valeurs du nombre de chaussures menant à une perte ? (3pts)
3. (C-D-Ti) Donne (en fonction de X) l'intervalle de valeurs du nombre de chaussures menant à un gain positif ? (3pts)
4. **(C) Trouve le jour de grâce le plus proche après le matin M.** (3pts)

➔ L'AP Timene et MT Dr Kouakep [qui notent la qualité combinée du raisonnement et de la rédaction].

**Evaluation des Ressources : 15 points**

**Exercice 1 (3 points)** PPCM, PGCD, nombres premiers.

On se propose de résoudre le système suivant dont l'inconnue est le couple  $(x, y)$  d'entiers naturels non nuls tels que  $x > y$

$$\begin{cases} (x - y)^2 = x + y(1) \\ \text{PPCM}(x, y) = 495(2) \end{cases}$$

1. (Résolution de (1))

On pose  $z = x - y$  et on considère comme nouvelle inconnue le couple  $(z, y)$ .

(a) Quelle relation vérifie  $z$  et  $y$ ? (0,5pt)

(b) En déduire que  $2y$  est un produit de deux entiers consécutifs. (0,5pt)

(c) En déduire que les solutions de l'équation (1) sont de l'une des formes suivantes :

$$\begin{cases} x = k(2k + 1) \\ y = k(2k - 1) \end{cases} \text{ avec } k \in \mathbb{N}^* \text{ ou bien } \begin{cases} x = (k + 1)(2k + 1) \\ y = k(2k + 1) \end{cases} \text{ avec } k \in \mathbb{N}^*. \quad (0,75\text{pt})$$

2. (Résolution du système).

On suppose que les solutions du système sont sous la forme :  $\begin{cases} x = k(2k + 1) \\ y = k(2k - 1) \end{cases}$  avec  $k \in \mathbb{N}^*$

(a) Donner en fonction de  $k$ , le PGCD de  $x$  et  $y$ . (0,75pt)

(b) En déduire le PPCM de  $x$  et  $y$  en fonction de  $k$ . (0,5pt)

(c) Montrer que le double de ce PPCM est le produit de 3 entiers consécutifs. (0,5pt)

(d) Résoudre dans ce cas le système. (1pt)

**Exercice 2 (2,5 points)**

1. Soit la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :  $a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$

(a) Montrer que la suite  $(a_n)$  est croissante (0,25 pt)

(b) On définit la suite  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  par  $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad b_n = a_n + \frac{1}{n \cdot (n!)}$ . Démontrer que la suite  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est décroissante. (0,25 pt)

(c) Démontrer que  $\forall (p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, a_p \leq b_q$ . (0,75 pts)

(d) En déduire que  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  sont convergentes. (0,5 pt)

(e) Démontrer que la suite  $(a_n - b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers zéro. (0,5 pt)

(f) En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$ . (0,25 pt)

**Exercice 3 (4,5pts)**

1. On considère dans  $\mathbb{C}$  le polynôme  $P(z) = z^4 + az^3 + bz^2 + az + 1$  où  $a, b \in \mathbb{R}$

(a) Démontrer que si  $z_0$  est une solution de (E),  $\overline{z_0}$ ,  $\frac{1}{z_0}$  et  $\frac{1}{\overline{z_0}}$  sont également des solutions de (E). 0,75 pt

(b) Déterminer  $a$  et  $b$  sachant que  $1 + i$  est une solution de (E). 0,75 pt

(c) En déduire trois autres racines de l'équation  $P(z) = 0$  0,5 pt

(d) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $P(z) = 0$  0,5 pt

2. (a) Déterminer la forme trigonométrique de chacun des nombres complexes solutions de l'équations  $Z^4 = 8(1 - i\sqrt{3})$ . (0,75pt)

- (b) Vérifier que la complexe  $a = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$  est une racine quatrième du complexe  $8(1-i\sqrt{3})$ . (0,25pt)
- (c) En déduire la forme algébrique des solutions de l'équation  $Z^4 = 8(1-i\sqrt{3})$ . (0,5pt)
- (d) Déduire des questions 2. et 4. les valeurs exactes de  $\sin \frac{17\pi}{12}$  et  $\cos \frac{17\pi}{12}$ . (0,5pt)

### Exercice 3 (5pts)

Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \sqrt{\frac{x^3 - x^2 + x}{1-x}}$ .

On nomme  $(\mathcal{C})$  sa courbe représentative dans un repère orthonormal (unité graphique : 1 cm).

Le but de l'exercice est d'étudier cette fonction. Pour mener à bien cette étude, il est nécessaire d'étudier au préalable une fonction auxiliaire  $g$ .

1. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :  $\frac{x^3 - x^2 + x}{1-x} \geq 0$ ; puis en déduire le domaine de définition  $D_f$  de  $f$ . (0,5pt)
2. Soit  $g(x) = -2x^3 + 4x^2 - 2x + 1$ .
  - (a) Étudier les variations de  $g$  et donner sa représentation graphique dans un repère  $(O; I; J)$ . (0,5pt)
  - (b) Déterminer le signe de  $g(x)$  sur  $[0; 1]$ . (0,5pt)
3. (a) Étudier la dérivabilité de  $f$  en  $x_0 = 0$  et en déduire l'équation de la tangente à  $(C_f)$  en  $x_0 = 0$ . (0,75pt)
  - (b) Déterminer le domaine de dérivabilité de  $f$ . (0,25pt)
  - (c) Calculer la dérivée de  $f$  et vérifier que  $f'(x) = \frac{g(x)}{2(1-x)^2 f(x)}$ . (0,5pt)
4. (a) Étudier les variations de  $f$  sur  $[0; 1]$ . (0,5pt)
  - (b) Tracer la courbe  $(C_f)$  de  $f$  dans un repère orthonormé du plan. (0,5pt)
5. (a) Montrer que  $f$  est une bijection de  $]0; 1]$  vers un intervalle  $J$  que l'on déterminera. (0,5pt)
  - (b) Tracer la courbe  $(C_{f^{-1}})$  de la bijection réciproque. (0,5pt)

### Evaluation des Compétences :      4,5 points

Monsieur MOUSSA est Comptable dans une société de micro finance. Il a un chantier qui n'est malheureusement pas desservi par une voie que peut emprunter un engin à moteur. Il achète le sable et a versé chez son voisin situé à une centaine de mètres du chantier. Ce sable livré par une société et acheter à raison de 15000F le mètre cube ( $m^3$ ) est contenu dans un bac plein de forme parallélépipédique de dimensions  $3m \times am \times bm$  où  $a$  et  $b$  vérifient en mètre le système :  $\begin{cases} PPCM(a; b) = a + 3 \\ PGCD(a; b) = 2 \end{cases}$ . Ce sable devrait être transporté en 100 tours dans des seaux identiques et pleins par des garçons et des filles du quartier. Les garçons ont effectué 8 tours et les filles 5 tours. Pour les motiver, il leur propose un taux forfaitaire de 1000F par personne. Pour régler les problèmes d'eau du chantier, M. Moussa fait creuser un puits par l'entreprise qualifiée. Pour atteindre la nappe phréatique qui est à 2046m, cette entreprise creuse 2m le premier jour, 4m le deuxième, 8m le troisième jour, 16m le quatrième jour et ainsi de suite, cette entreprise est payé suivant le contrat suivant : 5000F le premier jour, 8000F le deuxième jour, 11000F le troisième jours, 14000F le quatrième jour et ainsi de suite.

**Tâche 1 :** Déterminer le prix d'achat du sable. (1,5pt)

**Tâche 2 :** Déterminer le montant nécessaire à prévoir par M. MOUSSA pour satisfaire les transporteurs sachant qu'il y a plus de garçons que de filles. (1,5pt)

**Tâche 3 :** Déterminer la somme dépensée par Moussa pour creuser le puits. (1,5pt)

Présentation : 0,5 pt

EXPERT CORPORATION	<b>Epreuve de MATHEMATIQUES</b>	<b>CLASSE: TieC</b>	
1 <sup>ère</sup> évaluation de la 3 <sup>ème</sup> séquence DECEMBRE 2020		Durée : 4h	Coef : 7

Proposée par : Mr SYMPHORIEN STYVE KAMGA

**NB : le correcteur tiendra compte de la rigueur dans la rédaction et de la clarté de la copie. Il est demandé à l'élève de justifier toutes ses affirmations.**

**PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES (15points).**

**EXERCICE 1 :(05,25pts)**

I) Soit  $a$  un entier naturel qui s'écrit  $a = r^\alpha s^\beta$  avec  $r$  et  $s$  deux nombres premiers distincts, et  $\alpha, \beta$  deux entiers naturels. Le but de cette exercice est de montrer que  $a^n = p^2$  ou  $n$  est le nombre de diviseurs de  $a$  et  $p$  le produit de tous les diviseurs de  $a$ .

1) On pose  $a = 200$ .

- a) Quel est le nombre de diviseurs  $n$  de  $a$ . [0.5pt]
- b) Déterminer  $p$ , produit de tous les diviseurs de  $a$ . [0.5pt]
- c) Vérifier qu'on a bien  $a^n = p^2$  [0.5pt]

2) On suppose à présent que  $a = r^\alpha s^\beta$  ( $r$  et  $s$  premiers distincts)  $\alpha, \beta$  deux entiers naturels .

- a) Déterminer  $n$  le nombre de diviseurs de  $a$ . [0.5pt]
- b) Démontrer que le produit  $p$  de tous les diviseurs de  $a$  est  $p = r^{\frac{\alpha(\alpha+1)(\beta+1)}{2}} s^{\frac{\beta(\beta+1)(\alpha+1)}{2}}$  [0,75pt]
- c) Déduire alors que  $a^n = p^2$  [0,75pt]

II) 1- Résoudre dans  $\mathbb{Z}^2$  le système  $\begin{cases} (3x + 5y)(x + 2y) = 1276 \\ xy = 2ppcm(x, y) \end{cases}$  [0,75pt]

2- On note  $A$  l'ensemble des 193 entiers naturels inférieure où égaux à 192 et on considère les deux fonctions  $f$  et  $g$  définie de la manière suivante :

à tout entier  $a$  de  $A$ ,  $f$  associe le reste de la division euclidienne de  $a^{83}$  par 193 .

à tout entier  $g$  de  $A$ ,  $g$  associe le reste de la division euclidienne de  $a^{155}$  par 193.

Démontrer que  $g(f(a)) = a^{83 \times 155} [193]$ . En déduire que pour tout  $a \in A$  on a :  $g(f(a)) = a$ . [1pt]

**EXERCICE 2 :(03,5pts)**

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct  $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on donne les points  $A(-2 ; -1 ; 2)$  ;  $B(6 ; -5 ; 3)$  ;  $C(-1 ; 3 ; 10)$  et le vecteur  $\vec{u}(-4, -7, 4)$

1) a) Calculer  $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$  et  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$  puis interpréter géométriquement ces résultats [0.75pt]

b) Calculer les distances  $AB$  et  $AC$ . En déduire la nature exacte du triangle  $ABC$  [0.75pt]

2) Démontrer que les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$  sont colinéaires [0.5pt]

3) Montrer que  $\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\| = 9\|\vec{u}\|$  et en déduire l'aire du triangle  $ABC$  en fonction de la norme de  $\vec{u}$ . [0.5pt]

4) Soit  $D(1 ; 1 ; 1)$  un point de l'espace.

a) Les points  $A, B, C, D$  sont – ils coplanaires ? [0.5pt]

b) Calculer le volume  $V$ , en unité de volume, de la pyramide de sommet  $D$  et de base le triangle  $ABC$ . [0.5pt]

**EXERCICE 3 (03,5pts)**

1. a) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $(E) : z^2 - 2z + 4 = 0$  [0.5pt]

b) Déterminer une écriture exponentielle de chacune des solutions de  $(E)$ . [0.5pt]

2. Dans le repère rapporté à un repère orthonormé directe  $(O ; \vec{u}; \vec{v})$ , on considère le cercle  $(\Gamma)$  de centre O et de rayon 2 et le point A d'affixe 2.

Placer les points B et C d'affixes respectives  $e^{\frac{i\pi}{3}}$  et  $2e^{-\frac{i\pi}{3}}$ . [0.5pt]

3. Soit  $\theta \in ]-\pi ; \pi]$  et M le point du cercle  $(\Gamma)$  d'affixe  $2e^{i\theta}$ .

On désigne par N le point de  $(\Gamma)$  tel que  $(\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{ON}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ . Justifier que N a pour affixe  $2e^{i(\theta+\frac{\pi}{3})}$ . [0.5pt]

4. Soit r la rotation de centre A et d'angle  $\frac{\pi}{3}$ .

a) Soit F et K les milieux respectifs des segments  $[BM]$  et  $[CN]$ . Montrer que  $r(F) = K$ . [0.5pt]

b) En déduire la nature du triangle AFK. [0.25pt]

5. a) Montrer que  $AF^2 = 4 - 2\sqrt{3}\cos(\theta + \frac{\pi}{6})$ . [0.5pt]

b) En déduire l'affixe du point M pour laquelle AF est maximale et construire le triangle AFK correspondant. [0.25pt]

### EXERCICE 4 :(03,5pts)

A- On considère l'équation (E):  $x^5 - 209x + 56 = 0$

1) Démontrer que (E) admet trois solutions réelles, dont on donnera le signe. [0.75pt]

2) a- Démontrer que deux de ces solutions ont pour produit 1 et calculer leur somme. [0.75pt]

b- En déduit ces deux solutions et déterminer une valeur approchée à  $10^{-2}$  près de la troisième solution [0.75pt]

B- Soit f la fonction définie par  $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ ; démontrer que pour tout entier naturel n non nul, il existe un polynôme  $P_n$  de degré n tel que pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ ,  $f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!P_n(x)}{2(x^2-1)^{n+1}}$  [0.75pt]

C- Démontrer que pour tout nombre réel  $x \in [0; \frac{1}{2}]$  on a :  $1 - \frac{x}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{1-x} \leq 1 - \frac{x}{2}$  [0.5pt]

### **PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES (4,5 points)**

Situation :

Monsieur FOTSO est Comptable dans une société de micro finance. Il a un chantier qui n'est malheureusement pas desservi par une voie que peut emprunter un engin à moteur. Il achète le sable et a versé chez son voisin situé à une centaine de mètres du chantier. Ce sable livré par une société et acheter à raison de 15000F le mètre cube ( $m^3$ ) est contenu dans un bac plein de forme parallélépipédique de dimensions  $3m \times a \times b$  m où a et b vérifient en mètre le

$$\text{système : } \begin{cases} \text{ppcm}(a, b) = a + 3 \\ \text{pgcd}(a, b) = 2 \end{cases}$$

Ce sable devrait être transporté en 100 tours dans des seaux identiques et pleins par des garçons et des filles du quartier. Les garçons ont effectué 8 tours et les filles 5 tours. Pour les motiver, il leur propose un taux forfaitaire de 1000F par personne.

Frustré par ce problème qui le préoccupe, monsieur FOTSO rejoint son lieu de service. Mais malheureusement il a oublié le mot de passe de son ordinateur. En fouillant ses documents, il tombe sur ce message : mot de passe « WSAYZ ». Le procédé de décodage est le suivant : à chaque lettre de l'alphabet, on associe, grâce au tableau ci-dessous, un nombre entier compris entre 0 et 25. Ensuite, le procédé de décodage continu de la façon suivante :

**Étape 1** : A la lettre que l'on veut décoder, on associe le nombre x correspondant dans le tableau.

**Étape 2** : On calcule le reste de la division euclidienne de  $17x + 5$  par 27 et on le note m.

**Étape 3** : Au nombre m, on associe la lettre correspondante dans le tableau.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

### **Tâches :**

1. Déterminer le prix d'achat du sable. [1.5pt]

2. Déterminer le montant nécessaire à prévoir par Mr FOTSO pour satisfaire les transporteurs sachant qu'il y a plus de garçons que de filles. [1.5pt]

3. Décoder le mot de passe de l'ordinateur de Mr FOTSO. [1.5pt]

**FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGES DE MATHEMATIQUES**

**(ESPACES VECTORIELS, APPLICATIONS LINEAIRES ET MATRICES)**

**EXERCICE 1 :**

Soit  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  une base d'un espace vectoriel  $E$ . Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$ .

1. Pour tout réel  $\lambda$ , on considère l'ensemble  $E_\lambda$  des vecteurs  $\vec{u}$  de  $E$  tels que  $f(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$ .
  - a) Démontrer que  $E_\lambda$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .
  - b) On suppose que  $f$  vérifie l'égalité  $f \circ f = 2f$ . Démontrer que  $\vec{u} \in \text{Im}f \Leftrightarrow \vec{u} \in E_2$ .
2. On suppose ici qu'on a :  $f(\vec{i} + \vec{j}) = 2\vec{i} + 2\vec{j}$ ,  $f(\vec{i} - \vec{j}) = 2\vec{i} - 2\vec{j}$  et  $f(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) = \vec{0}$ .
  - a) Démontrer que  $f(\vec{i}) = 2\vec{i}$ ,  $f(\vec{j}) = 2\vec{j}$  et  $f(\vec{k}) = -2\vec{i} + 2\vec{j}$ .
  - b) Donner la matrice  $M$  de  $f$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .
  - c) Démontrer que  $f \circ f = 2f$ .
  - d) Déterminer par une de ses bases, le noyau  $\text{Ker}f$  de  $f$ .
  - e) Déterminer l'image  $\text{Im}f$  de  $f$ . On précisera une de ses bases.

**EXERCICE 2 :**

$E$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  de base  $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Soit  $f$  l'endomorphisme de  $E$  qui à tout vecteur  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ , associe le vecteur  $f(\vec{u}) = (-x - y + 2z)\vec{i} + (2x - y + z)\vec{j} + (x - 2y + 3z)\vec{k}$ .

1. Déterminer la matrice  $M$  de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$ .
2.
  - a) Déterminer le noyau  $\text{Ker}f$  de  $f$ . (On donnera une base)
  - b) En déduire la dimension de  $\text{Im}f$ , image de  $f$ .
  - c)  $f$  est-elle bijective ? Justifier votre réponse.
3. Soient  $\vec{e}_1 = 2\vec{j} - \vec{k}$ ,  $\vec{e}_2 = 3\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$  et  $\vec{e}_3 = \vec{i} - \vec{k}$ .
  - a) Démontrer que  $\mathcal{B}' = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  est une base de  $E$ .
  - b) Ecrire la matrice  $M'$  de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}'$ .

**EXERCICE 3 :**

Soit  $E$  un espace vectoriel réel de dimension 3.

$\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est une base de  $E$ ,  $\vec{n} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$  est un vecteur de  $E$ . Soit  $f$  l'application de  $E$  dans  $E$  définie par :  $f(\vec{u}) = \vec{n} \wedge \vec{u}$  où  $\vec{u}$  est un vecteur quelconque de  $E$ .

1. Montrer que  $f$  est un endomorphisme bijectif. Déduire  $\text{Ker}f$  et  $\text{Im}f$ .
2. Donner la matrice  $A$  de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$ .
3. Donner l'expression analytique de  $f$ .

4. Soit  $k$  un nombre réel. Déterminer suivant les valeurs de  $k$ , l'ensemble  $E_k = \{\vec{u} \in E / f(\vec{u}) = k\vec{u}\}$ .

#### EXERCICE 4 :

L'espace vectoriel  $\varepsilon$  est rapporté à une base orthonormée directe  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère le vecteur  $\vec{w} = \frac{1}{3}(-\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k})$ , et l'application  $\varphi$  définie de  $\varepsilon$  dans  $\varepsilon$  qui, à tout vecteur  $\vec{v}$  de  $\varepsilon$ , associe le vecteur  $\varphi(\vec{v}) = \vec{w} \wedge \vec{v}$ .

1. Montrer que  $\varphi$  est un endomorphisme de  $\varepsilon$ .
2. On pose  $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ .
  - a) Donner les coordonnées de  $\varphi(\vec{v})$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .
  - b) Déterminer le noyau et l'image de  $\varphi$ .
3. Soient  $\vec{u} = \frac{1}{3}(2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k})$  et  $\vec{v} = \frac{1}{3}(2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k})$ .
  - a) Démontrer que  $(\vec{u}, \vec{v})$  forme une base orthonormée de  $Im\varphi$ , puis que  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  forme une base orthonormée de  $\varepsilon$ .
  - b) Ecrire la matrice de  $\varphi$  dans cette nouvelle base.

#### EXERCICE 5 :

Soit  $E$  un espace vectoriel réel de dimension 3 rapporté à une base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

soient les vecteurs  $\vec{a}$  et  $\vec{n}$  de  $E$  tels que  $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$  et  $\vec{n} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ .

Soit  $f$  l'application de  $E$  dans  $E$  définie par :  $f(\vec{u}) = (\vec{a} \wedge \vec{u}) \wedge \vec{n}$ .

1. Démontrer que  $f$  est un endomorphisme de  $E$ , puis donner sa matrice dans la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .
2. Démontrer que  $Ker f$  est une droite vectorielle dont on précisera une base.
3. Démontrer que  $Im f$  est un plan vectoriel de vecteur normal  $\vec{n}$ .

#### EXERCICE 6 :

Soit l'espace vectoriel  $E = \mathbb{R}^3$ .

On donne  $F = \{(x + y; x; x - y); x, y \in \mathbb{R}\}$  et  $G = \{(2x - 2y; 3x; x + 2y); x, y \in \mathbb{R}\}$ .

1. Montrer que  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces vectoriels de  $E$  et préciser leurs dimensions.
2. Donner une équation cartésienne de  $E$  et une équation cartésienne de  $F$ .
3. Déterminer  $F \cap G$  et  $\dim(F \cap G)$ . Déterminer  $F + G$  et  $\dim(F + G)$ .
4. Soit  $f$  l'endomorphisme de  $E$  défini par :  $f(\vec{i}) = -2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ ,  $f(\vec{j}) = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$  et  $f(\vec{k}) = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ .
  - a) Déterminer le noyau de  $f$  et préciser une base  $\vec{e}_1$ .
  - b) Démontrer que  $Im f$  est un plan vectoriel dont on précisera une base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ .
  - c) Montrer que tout vecteur de  $E$  s'écrit de manière unique comme somme d'un vecteur de  $Ker f$  et d'un vecteur de  $Im f$ .



COLLEGE PRIVE LAIC « LE PENTAGONE »

BP. : 17353 DOUALA

Tél. : 674 83 20 50 / 677 15 24 17

Aut. : 174/15/MINESEC/SG/DESG/ du 20/07/2015

A/S 2022-2023

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

## EVALUATION SEQUENTIELLE N°1

EPREUVE	CLASSE	DUREE	COEF.	DATE	HORAIRE
MATHEMATIQUES	TleC	3h	07	.../10/2022	

### Partie A : EVALUATION DES RESSOURCES

15 POINTS

#### Exercice 1 : 6points

I- Montrer par récurrence que :

- Pour tout entier naturel  $n$ ,  $1-3+5-7+\dots+(-1)^n(2n+1) = (n+1)(-1)^n$ . **1pt**
- Pour tout entier naturel  $n$ ,  $2^{3n+1} + 3 \times 5^{2n+1}$  est un multiple de 17. **1pt**
- Pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $n! \geq 2^{n-1}$ . **1pt**

II- On considère la suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $\begin{cases} u_0 = 2009^2 - 1 \\ u_{n+1} = (u_n + 1)^5 - 1 \end{cases}$ .

- Démontrer que  $u_0$  est divisible par 5. **0.5pt**
  - Démontrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = u_n [u_n^4 + 5(u_n^3 + 2u_n^2 + 2u_n + 1)]$ . **0.75pt**
  - Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n$  est divisible par  $5^{n+1}$ . **0.75pt**
- Vérifier que  $u_3 = 2009^{250} - 1$  puis en déduire que  $2009^{250} \equiv 1 [625]$ . **0.75pt**
  - Démontrer alors que  $2009^{8001} \equiv 134 [625]$ . **0.75pt**

#### Exercice 2 : 04,25 points

- tout nombre entier naturel  $x$  s'écrit  $x = \overline{a_p a_{p-1} \dots a_1 a_0}$  en base 10.
  - Démontrer que  $x \equiv (10a_1 + a_0) [100]$ . **0.5pt**
  - Déterminer le chiffre des unités et celle des centaines du nombre  $(2907)^{543}$ . **0.5pt**
- Dans un système de numération de base inconnue, trois nombres s'écrivent respectivement 211 ; 312 et 133032. Sachant que le produit des deux premiers nombres est égal au troisième, déterminer cette base. **1pt**
- Soit le nombre entier naturel  $N = \overline{2x4y^5}$ . Déterminer  $x$  et  $y$  pour que  $N$  soit divisible par 8. **0,75pt**
- Le nombre 341 (en base 10) s'écrit  $\overline{2331}$  en base  $a$ .
  - Démontrer que 340 est divisible par  $a$ . **0.25pt**
  - Donner un encadrement de 341 par des puissances de  $a$  et déterminer  $a$ . **0.5pt**
- Déterminer suivant les valeurs de l'entier  $n$ , le reste de la division euclidienne par 7 du nombre  $n^3 - 3n^2 - 2$ . **0.5pt**
  - Déterminer le reste de la division euclidienne par 7 du nombre  $(2753)^3 - 3(2753)^2 - 2$ . **0.25pt**

#### Exercice 3 : 05,5 points

On se propose de déterminer quels sont les nombres complexes solutions de l'équation (E) :  $z^2 - 6z + 12 = 0$

et de placer, par construction géométrique, les images de ces Nombres dans le plan complexe.

1. a) Résoudre l'équation (E). on note  $u$  et  $\bar{u}$  ses solutions,  $u$  étant celle dont la partie imaginaire est positive. 0.5pt
  - b) Calculer le module et un argument de  $u$ . 0.5pt
  - c) En déduire le module et l'argument de  $\bar{u}$ . 0.5pt
  2. On considère le nombre complexe  $u-4$ .
    - a) Ecrire ce nombre sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique. 0.5pt
    - b) Calculer le module et un argument de  $\frac{u}{u-4}$ . En déduire le module et un argument de  $\frac{\bar{u}}{u-4}$ . 1.5pt
  3. Dans le plan complexe, rapporté à un repère orthonormé  $(O, I, J)$ , on note  $A$  le point d'affixe 4,  $B$  le point d'affixe 2 et  $C$  le point d'affixe 6.  $M$  et  $N$  sont les points d'affixes  $u$  et  $\bar{u}$ .
    - a) En interprétant géométriquement les résultats du 2, démontrer que les points  $O, A, M, N$  sont sur un même cercle que l'on précisera. 0.5pt
    - b) Démontrer que les points  $B, C, M$  et  $N$  sont aussi sur un même cercle que l'on précisera. 1pt
    - c) Construire les deux cercles ainsi obtenus et placer les deux points  $M$  et  $N$ . 0.5pt
- a) C. 0.5pt

### Partie B : EVALUATION DES COMPETENCES 04.5 POINTS

La base militaire de Dschang a défini son procédé de codage des données de la façon suivante :

**Etape 1 :** A la lettre que l'on veut coder, on associe le nombre  $n$  correspondant dans le tableau 1.

**Etape 2 :** On calcule le reste de la division euclidienne de  $9n + 5$  par 26 et on le note  $p$ .

**Etape 3 :** au nombre  $P$ , on associe la lettre correspondante dans le tableau.

Tableau : A chaque lettre de l'alphabet, on associe un nombre entier compris entre 0 et 25.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Cette base militaire est composée de régiments et chaque régiment a un nombre identique de soldats. Lorsque 11 régiments se retrouvent pour le repas, il y'a 7 salles occupées et 5 soldats qui n'ont pas de place.

Un des soldats, content de la réussite au baccalauréat série C de son fils KOUAKOU lui a promis comme cadeau un voyage pour Melong pour vivre la rencontre d'un match de Football de Stade Renard de Melong. Une fois à l'agence, le caissier leur dit : « le prix d'un billet de voyage pour Melong est le nombre  $xyz$  en base 10, où  $x$  est solution de l'équation  $x + y + z = 50$  avec  $y = \overline{131}^x$  et  $z = \overline{101}^x (x > 3)$  ». Pour cela, il demande au père de KOUAKOU d'écrire d'abord le produit  $xyz$  en base  $x$  avant de trouver le prix d'achat de leurs billets de voyage.

**Tâche 1 :** Aider le commandant de cette base militaire à coder le mot « SOLDAT ». 1.5pt

**Tâche 2 :** Quel est le nombre maximal de soldats par régiment, sachant qu'un régiment a moins de 300 soldats ? 1.5pt

**Tâche 3 :** Aide le père de KOUAKOU à trouver le montant qu'ils doivent déboursier à l'agence de Dschang pour se rendre à Melong assister au match de Football. 1.5pt

**EPREUVE DE MATHÉMATIQUES : TEST No 1 – Coef 07 (deux pages)**

**Evaluation ressources** : Nombres complexes ( /7pts ) ; Arithmétique ( /8pts ) . **Evaluation/compétences** : Arithmétique ( /5pts).

Copie remise le : / / 2021. **Nom(s)+signature du parent** :

**Evaluation des ressources (15 pts) [S'il vous plait, 01pt -> 9 minutes]**

**Exercice 1** : (05 pts) sources LB. NJ + Tle SM CIAM

I- 1) Résoudre dans  $\mathbb{C}$ , l'équation ( $E_1$ ) :  $z^2 - 2z \cdot \cos\alpha + 1 = 0$  où  $\alpha$  est un paramètre réel ( $z$  est l'inconnue). (1pt)

2) Donner la formule trigonométrique des solutions de l'équation ( $E_n$ ) :  $z^{2n} - 2z^n \cos\alpha + 1 = 0$  où  $n \in \mathbb{N}^*$  (1pt)

II- Soit  $P_\alpha(z) = z^{2n} - 2z^n \cos\alpha + 1$

1) Montrer que  $P_\alpha(z) = \prod_{k=0}^{n-1} [z^2 - 2 \cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)z + 1]$  (0,75pt)

2) a- Calculer  $P_\alpha(1)$  (0,25pt)

b- En déduire que  $\prod_{k=0}^{n-1} \sin^2\left(\frac{\alpha}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right) = \frac{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{4^{n-1}}$  (0,75pt)

3) pour tout  $\alpha \in ]0 ; \pi[$  et pour tout entier naturel  $n \geq 2$ , on pose :

$$H_n(\alpha) = \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{\alpha}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)$$

Montrer que  $2^{n-1} H_n(\alpha) = \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2n}\right)}$  . (0,75pt)

III) Pour trois entiers naturels non nuls  $a, b, c$ , montrer que :  $ab < c$  implique que  $a + b \leq c$ . (0,5pt)

**Exercice 2** : (05 pts) sources LB. NJ + Tle SM CIAM

1) a) Démontrer la proposition suivante par récurrence sur l'entier naturel  $n$ .

$$P(n) : " \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{1(1+1)} + \frac{1}{2(2+1)} + \frac{1}{3(3+1)} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} "$$
 (1pt)

b) En déduire, sous forme de fraction irréductible, le réel  $a$  défini par :

$$a = \frac{1}{10 \times 11} + \frac{1}{11 \times 12} + \frac{1}{12 \times 13} + \dots + \frac{1}{99 \times 100} .$$
 (1pt)

2) Résoudre dans  $\mathbb{C}$ , l'équation  $9Z^3 - 6Z^2 + 2Z = 0$ . (2pts)

3) Déterminer l'ensemble des couples  $(a ; b)$  d'entiers naturels tels que

$$2.PPCM(a ; b) + 3.PGCD(a ; b) = 11 \quad (E)$$
 (1pt)

**Exercice 3** : (05 pts) *Conçu et proposé par « PAA OUM »*

Les nombres 1 ; 11 ; 111 ; 1111 ; etc. sont des nombres appelés **rep-units** (répétition de l'unité) : ils ne s'écrivent qu'avec des chiffres 1.

Soit  $k$  un entier strictement positif, on note  $N_k$  le rep-unit qui s'écrit avec  $k$  chiffres. Ainsi  $N_2 = 11$  ;

1) Citer deux nombres premiers inférieurs à 10 n'apparaissant jamais dans la décomposition en facteurs premiers d'un rep-unit. Justifier votre réponse. (0,5pt)

2) Donner la décomposition en facteurs premiers de  $N_3$ ,  $N_4$  et  $N_5$ . (0,75pt)

3) Soit  $n$  un entier strictement supérieur à 1. On suppose que l'écriture décimale de  $n^2$  se termine par le chiffre 1.

a- Montrer que, dans son écriture décimale,  $n$  se termine lui-même par 1 ou par 9. (0,5pt)

b- Montrer qu'il existe un entier  $m$  tel que  $n$  s'écrit sous la forme  $10m+1$  ou  $10m-1$ . (0,5pt)

c- En déduire que  $n^2 \equiv 1[20]$ . (0,25pt)

- 4) a- Soit  $k > 2$ . Quel est le reste de la division de  $N_k$  par 20 ? (0,25pt)  
 b- En déduire qu'un rep-unit distinct de 1 n'est pas un carré. (0,25pt)
- 5) Montrer que  $N_k = 10^{k-1} + 10^{k-2} + \dots + 10^0$  (0,25pt)
- 6) Prouver que  $N_k = \frac{10^k - 1}{9}$ . Peut-on être certain que  $10^k - 1$  est divisible par 9 ? (0,5pt)

**Rappel:**  $x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$  pour  $x$  réel.

- 7) On se propose de démontrer que si  $k$  n'est pas premier, alors  $N_k$  n'est pas premier.
- a- On suppose que  $k$  est pair et on pose  $k=2q$ , où  $q$  est un entier plus grand que 1.  
 Montrer que  $N_k$  est divisible par  $N_{2q}=11$  (0,25pt)
- b- On suppose que  $k$  est multiple de 3 et on pose  $k=3q$ , où  $q$  est un entier plus grand que 1.  
 Montrer que  $N_k$  est divisible par  $N_{3q}=111$  (0,25pt)
- c- On suppose  $k$  non premier et on pose  $k=pq$ , où  $p$  et  $q$  sont des entiers plus grand que 1.  
 En déduire que  $N_k$  est divisible par  $N_p$ . (0,25pt)
- 8) Donner une condition nécessaire pour que  $N_k$  soit premier. Cette condition est-elle suffisante ? (0,5pt)

**Evaluation des compétences (05 pts) Conçu et proposé par « PAA OUM » [S'il vous plaît, 01,5pt -> 13,5 minutes]**  
 Résoudre une situation problème, déployer un raisonnement logique et communiquer à l'aide du langage mathématique dans les situations de vie où intervient l'arithmétique.

Situation-problème : *Cet exercice aborde le cryptage de données dans le système RSA*

Une ingénieure Alima (qu'on appellera « A. » pour simplifier) travaillant dans le service de codage/cryptographie/transmission de l'armée camerounaise, choisit deux nombres  $p$  et  $q$ , puis calcule les produits  $N = pq$  et  $n = (p - 1)(q - 1)$ . Elle choisit également un entier naturel  $c$  premier avec  $n$ .

L'ingénieure A publie le couple  $(N ; c)$ , qui est une clé publique permettant à quiconque de lui envoyer un nombre crypté.

Les messages à envoyer sur le terrain d'opération sont numérisés et transformés en une suite d'entiers compris entre 0 et  $N-1$ . Pour crypter un entier  $a$  de cette suite, on procède ainsi : on calcule le reste  $b$  de la division euclidienne par  $N$  du nombre  $a^c$ , et le nombre crypté est l'entier  $b$ .

Pour décrypter les messages reçus des services du Ministère de la Défense Camerounais, l'ingénieure A. calcule dans un premier temps l'unique entier naturel  $d$  vérifiant la condition  $0 \leq d < n$  et  $cd \equiv 1[n]$ . Elle garde secret ce nombre  $d$  qui lui permet ensuite, à elle et elle seule, de décrypter les nombres qui lui ont été envoyés cryptés avec sa clé publique.

Pour décrypter un nombre crypté  $b$ , l'ingénieure A. calcule le reste  $a$  dans la division euclidienne par  $N$  du nombre  $b^d$ , et le nombre en clair (c'est-à-dire avant le cryptage) est le nombre  $a$ .

Ici, nous prendrons  **$p=5$ ,  $q=11$  et  $c=23$** .

- 1) Si un émetteur envoie à A. le nombre  $a = 8$ , quelle est la valeur du nombre crypté  $b$  reçu ? (1,5pt)
- 2) Si l'ingénieure A. reçoit le message crypté  $b = 6$ , quelle est le nombre à envoyer ? (1,5pt)
- 3) Si un émetteur envoie à A. le nombre  $a = 1$ , quelle est la valeur du nombre crypté  $b$  reçu ? (1,5pt)  
 L'AP Timene et Dr Kouakep [qui notent surtout la qualité du raisonnement et de la rédaction].

**Présentation générale: 0,5 point** [« Don't forget to protect ourselves from Covid19 by following the barrier measures », Dpt of Mathematics]

## EPREUVE DE MATHÉMATIQUES

**Consigne :** L'épreuve comporte deux parties sur 20 points. Rédaction exigée. Qu'on se le dise !!

### PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES / 15,5 points

#### EXERCICE 1 / 2,5 points

1. Montrer que tout nombre premier  $p > 3$  s'écrit de la forme  $p = 6k + 1$  ou  $p = 6k + 5$ . 0,75pt
2. On considère dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  l'équation (E) :  $13x + 47y = 1$ .
  - a) Justifier que l'équation (E) admet au moins une solution  $(x_0; y_0)$  dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  à déterminer. 0,75pt
  - b) Soit  $(x; y)$  une solution de l'équation (E).
    - i) Démontrer que  $8y \equiv 1[13]$ , puis résoudre dans  $\mathbb{Z}$  l'équation  $8y \equiv 1[13]$ . 0,75pt
    - ii) En déduire l'ensemble solution de l'équation (E) dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . 0,25pt

#### EXERCICE 2 / 2 points

Soit l'équation (E) :  $z^4 - 5z^3 + 6z^2 - 5z + 1 = 0$ .

1. Démontrer que l'équation (E) est équivalente au système : 
$$\begin{cases} u = z + \frac{1}{z} \\ u^2 - 5u + 4 = 0 \end{cases}$$
 0,5pt
2. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $u^2 - 5u + 4 = 0$ . 0,5pt
3. En déduire les solutions de l'équation (E) dans  $\mathbb{C}$ . 1pt

#### EXERCICE 3 / 5 points

E désigne un espace vectoriel réel de dimension 3 muni d'une base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Soit  $f$  l'endomorphisme de E défini par  $f(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) = 3(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$  et  $f(\vec{i}) = f(\vec{j}) = f(\vec{k})$ .

1. Démontrer que la matrice de  $f$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ . 0,25pt
2. Déterminer le noyau et l'image de  $f$ . On déterminera une base de chacun des espaces vectoriels. 1pt
3. Démontrer que  $f \circ f = 3f$  et en déduire que  $Im f$  est l'ensemble des vecteurs  $\vec{u}$  de E tels que  $f(\vec{u}) = 3\vec{u}$ . 0,75pt
4. On pose  $\vec{e}_1 = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ ,  $\vec{e}_2 = \vec{i} + \vec{j}$  et  $\vec{e}_3 = \vec{i} + \vec{k}$ .  
Montrer que  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  est une base de E puis écrire la matrice de  $f$  dans la base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ . 1pt
5. Soit  $\alpha$  un réel et  $\varphi$  l'endomorphisme de E tel que pour tout  $\vec{u} \in E$ ,  $\varphi(\vec{u}) = \alpha f(\vec{u}) - \vec{u}$ .
  - a) Démontrer que pour tout  $\vec{u} \in E$ ,  $\varphi \circ \varphi(\vec{u}) = \vec{u}$  si et seulement si  $\alpha = \frac{2}{3}$ . 0,5pt
  - b) On suppose dans la suite que  $\alpha = \frac{2}{3}$ .
    - i) Montrer que  $\varphi$  est un automorphisme et en déduire  $Im \varphi$ . 0,5pt
    - ii) Écrire la matrice de  $\varphi$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . 0,5pt
    - iii) Montrer que  $Im f$  est l'ensemble des vecteurs invariants par  $\varphi$ . 0,5pt

#### EXERCICE 4 / 6 points

I- On considère la fonction  $h$  par :  $h(x) = \frac{\sin 3x}{1 - 2 \cos x}$ . Peut-on prolonger  $h$  par continuité en  $\frac{\pi}{3}$  ? 0,75pt

II- Soit la fonction  $f$  définie sur  $]1; +\infty[$  par  $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$ .

1. Étudier la dérivabilité de  $f$  en  $1^+$  puis interpréter le résultat obtenu. 0,5pt
2. Justifier que  $f$  est dérivable sur  $]1; +\infty[$ , calculer  $f'(x)$  puis dresser le tableau de variation de  $f$ . 1pt

3. Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $]1; +\infty[$  vers un intervalle  $J$  à déterminer. **0,5pt**
4. Montrer que  $\forall x \in J, f^{-1}(x) = \frac{1+x^2}{2x}$ . **0,5pt**
5. On désigne par (C) la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé.
- a) Etudier les branches infinies de (C) en  $+\infty$ . **0,5pt**
- b) Tracer (C). **0,5pt**
6. Soit  $g$ , la fonction définie sur  $[0; \frac{\pi}{2}[$  par :  $g(x) = f(\frac{1}{\cos x})$ .
- a) Montrer que pour tout  $x \in [0; \frac{\pi}{2}[, g(x) = \frac{1+\sin x}{\cos x}$ . **0,25pt**
- b) Montrer que  $g$  réalise une bijection de  $[0; \frac{\pi}{2}[$  vers un intervalle  $K$  que l'on précisera. **0,75pt**
- c) Montrer que  $g^{-1}$  est dérivable sur  $K$  et que  $\forall x \in K, (g^{-1})'(x) = \frac{2}{1+x^2}$ . **0,75pt**

**PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES / 04,5 points**

Une voiture placée en un carrefour pris comme un point M se déplace sur une route. PAUL, élève en classe de Terminale scientifique décide d'étudier le mouvement de cette voiture sur un intervalle de 0 à 4h de temps. L'abscisse de la voiture à un instant  $t$  quelconque est donnée par  $f(t) = -t^3 + t^2 + 8t + 1$ , sa vitesse par :  $v(t) = f'(t)$  et son accélération :  $a(t) = f''(t)$ .

PAUL se rappelle que sur un intervalle de temps, le mouvement est accéléré si  $v(t) \times a(t) \geq 0$  et retardé si  $v(t) \times a(t) \leq 0$ .

PIERRE, le camarade de PAUL s'est inscrit à un jeu concours de mathématique afin de décrocher une bourse d'étude avec son examen. Le concours consiste à imaginer un polynôme P de degré supérieur à 3 à coefficient complexes devant automatiquement vérifier la propriété (E) suivante : « **pour tout polynôme P et pour tout nombre complexe  $z_0$ , si  $z_0$  est une racine de P alors  $\bar{z}_0, \frac{1}{z_0}$  et  $\frac{1}{\bar{z}_0}$  sont aussi des racines de P** ». PIERRE choisit le polynôme P défini par :  $P(z) = -6z^4 + 18z^3 - 27z^2 + 18z - 6$ .

**Tache 1** : Démontrer que l'abscisse du point M est nulle à un instant  $t_0 \in [0; 4]$ . (vous préciserez exactement l'intervalle de deux temps consécutifs où  $t_0$  est à  $10^{-2}$  près).

**Tache 2** : Déterminer l'abscisse et l'accélération de la voiture à l'instant où sa vitesse est maximale, puis donner les intervalles de temps sur lesquels le mouvement de la voiture est accéléré où retardé.

**Tache 3** : PIERRE décrochera t-il la bourse d'étude ? Justifier ?

**Examineur** : M. NGANSOB NONO Yves. B (PLEG\_Maths)

Epreuve : MATHEMATIQUES

**A-EVALUATION DES RESSOURCES : 15 points**

**EXERCICE 1 : 4points**

On rappelle la propriété connue sous le nom de petit Théorème de FERMAT : « si  $p$  est un nombre premier et  $a$  un entier non divisible par  $p$ , alors  $a^{p-1} \equiv 1[p]$ . »

On considère la suite  $(U_n)$  d'entiers naturels définie par  $U_0 = 1$  et  $U_{n+1} = 10U_n + 21$ .

1. Démontrer par récurrence que pour tout  $n$ ,  $3U_n = 10^{n+1} - 7$ . 0,5pt
2. En déduire l'écriture décimale de  $U_n$  pour tout entier naturel  $n$ . 0,5pt
3. Montrer que  $U_2$  est un nombre premier. 0,5pt
4. a) Démontrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $U_n$  n'est divisible ni par 2 ni par 3 ni par 5. 0,75pt  
b) Démontrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $3U_n \equiv (4 - (-1)^n)[11]$ . 0,5pt  
c) En déduire que pour tout entier naturel  $n$ ,  $U_n$  n'est pas divisible par 11. 0,5pt  
d) Démontrer que  $10^{16} \equiv 1[17]$  et en déduire que  $U_{16k+8} \equiv 0[17]$ . 0,75pt

**EXERCICE 2 : 4points**

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ . On considère la fonction  $f$  défini sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x + 3}.$$

1. Ecrire  $f$  sans valeur absolue. 0,5pt
2. Démontrer que la courbe de  $f$  admet deux asymptotes dont on donnera les équations.
3. a) Etudier la dérivabilité de  $f$  en  $-1$  et en  $3$ . 1pt  
b) En déduire une interprétation géométrique des résultats obtenus et la nature des points de la courbe de  $f$  d'abscisses  $-1$  et  $3$ . 1pt
4. Dresser le tableau de variations de  $f$ . 1,5pt

**EXERCICE 3 : 3points**

Dans l'espace rapporté au repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ , on considère les points  $A(6;0;0)$ ,  $B(0;5;0)$  et  $C(0;0;4)$ .

1. Déterminer les coordonnées du point  $D$  pour que  $ABCD$  soit un parallélogramme.  
Quelle est l'aire de ce parallélogramme  $ABCD$ ? 1pt
2. Montrer que les points  $O$ ,  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont non coplanaires et calculer le volume du tétraèdre  $OABC$ . 1pt

3. Soit  $(\mathcal{L})$  l'ensemble des points tels que les vecteurs  $\overrightarrow{AM}$  et  $\overrightarrow{AB}$  soient colinéaires.

Déterminer les coordonnées entières de  $(\mathcal{L})$ .

1pt

#### EXERCICE 4 : 4points

Soit  $E$  un espace vectoriel réel de dimension 3,  $B = (\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  une base de  $E$ . Soit  $f$  l'endomorphisme de  $E$  défini par  $f(\vec{i}) = \vec{i} - \vec{k}$ ,  $f(\vec{j}) = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$  et  $f(\vec{k}) = \vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k}$ .

1. Déterminer la matrice  $A$  de  $f$  dans la base  $B$ . 0,5 pt

2. a) Montrer que  $\ker f$  est une droite vectorielle de  $E$ . 0,5pt

b) En déduire que  $\text{Im} f$  est un plan vectoriel de  $E$  et préciser une base. 0,5 pt

3. On donne :  $\vec{e}_1 = 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ ,  $\vec{e}_2 = -\vec{i} + \vec{k}$  et  $\vec{e}_3 = -\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$ . Soit  $B' = (\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$ .

a) Montrer que  $B'$  est une base de  $E$ . 0,75 pt

b) Montrer que  $\vec{e}_1 \in \ker f$  et  $\vec{e}_2, \vec{e}_3 \in \text{Im} f$ . 0,75pt

c) Déterminer la matrice  $A'$  de  $f$  dans la base  $B'$ . 1pt

#### B- EVALUATION DES COMPETENCES : 5points

M. BELL est un biologiste. Il étudie l'effet de substances sur une espèce animale. Il a appliqué sur un effectif initial de cet espèce une substance  $X$ . Dans son laboratoire les spécialistes estiment que pour les années à venir, à compter de ce mois l'effectif de cette population d'espèce sera donné par  $p(t) = 360f(t)$  où  $f$  est une fonction numérique définie sur  $[0; +\infty[$  en fonction du temps  $t$

(exprimé en mois) qui vérifie : pour tout  $t \in [0; +\infty[$ ,  $|f(t) - 2| \leq \frac{1}{2t}$ . M. BELL rêve compter 720 individus de l'espèce animal à l'unité près.

Par ailleurs M.BELL a un chantier. Il veut acheter le sable d'un voisin, contenu dans un bac rempli au plein de forme un parallélépipède rectangle dont les dimensions avaient été codées,  $3 \times a \times b$

où  $a$  et  $b$  sont exprimés en mètre et sont solutions du système 
$$\begin{cases} \text{ppcm}(a; b) = a + 4 \\ \text{pgcd}(a; b) = 2 \end{cases}$$
.

Ils conviennent pour un prix de 15000FCFA le mètre cube.

D'autre part, l'ingénieur en charge des travaux devra prévoir la construction d'un forage pour approvisionner le chantier en eau. Des recherches faites indiquent que pour trouver une bonne

nappe d'eau, il faut forer le sol aux lieux définis par les points  $M$  d'affixe  $z$  tels que  $\frac{z-4-2i}{z+2+2i}$  soit

imaginaire pur lorsque la propriété de M.BELL est muni d'un repère orthonormé direct.

Ces trois situations préoccupent M.BELL.

#### Tâches :

1. A quelle date le rêve de M. BELL pourra-il être réalisé ? 1,5pt

2. Déterminer le prix d'achat du sable. 1,5pt

3. Déterminer le lieu où l'on doit construire le forage. 1,5pt

#### Présentation : 0,5pt

03 décembre 2022

**DEVOIR DE MATHÉMATIQUES (coef 07 en C, 4 en D et Ti)**

→ La qualité combinée du raisonnement et de la rédaction seront des facteurs clés de cette évaluation.

**Exercice No 1** : 4 pts série C exclusivement (source : collègue)

I- 1) Résoudre dans  $\mathbb{C}$ , l'équation  $(E_1)$  :  $z^2 - 2z \cdot \cos(\alpha) + 1 = 0$  où  $\alpha$  est un paramètre réel ( $z$  est l'inconnue). (0,25pt)

2) Donner la forme trigonométrique des solutions de l'équation  $(E_n)$ :  $z^{2n} - 2z^n \cos(\alpha) + 1 = 0$  où  $n \in \mathbb{N}^*$ . (0,5pt)

II- Soit  $P_\alpha(z) = z^{2n} - 2z^n \cos(\alpha) + 1$

1) Montrer que  $P_\alpha(z) = \prod_{k=0}^{n-1} \left[ z^2 - 2 \cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) z + 1 \right]$  (0,50pt)

2) a- Calculer  $P_\alpha(1)$  (0,25pt)

b- En déduire que  $\prod_{k=0}^{n-1} \sin^2\left(\frac{\alpha}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right) = \frac{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{4^{n-1}}$  (0,5pt)

3) pour tout  $\alpha \in ]0 ; \pi[$  et pour tout entier naturel  $n \geq 2$ , on pose :

$$H_n(\alpha) = \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{\alpha}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)$$

Montrer que  $2^{n-1} H_n(\alpha) = \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2n}\right)}$ . (0,50pt)

III- Posons  $V_n(\alpha) = 2^{n-1} H_n(\alpha)$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$

a- Calculer  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} V_n(\alpha)$ ,  $a_n = \lim_{\alpha \rightarrow 0} H_n(\alpha)$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$  (**NB**:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{b^n} = 0$  si  $b > 1$ ) (0,75pt)

b- Montrer à l'aide du théorème des accroissements finis que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $|\sin(x)| \leq |x|$ . (0,25pt)

c- En déduire, en revenant à la définition, que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{\alpha}{2n}\right) = 0$ . (0,5pt)

**Exercice No 2** : 03 pts en séries C-D-Ti (source : GPM)

Soit  $f$  la fonction numérique définie sur  $D = ]1 ; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{1}{x-1} - \sqrt{x}$

1) Montrer que la dérivée de  $f$  garde un signe constant sur  $D$ . (0,25pt)

2) Dresser le tableau de variation de  $f$ . (0,25pt)

3) Etudier le comportement de  $f$  à l'infini. (0,25pt)

4) En déduire que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  dans l'intervalle  $[1 ; 2]$ . (0,25pt)

5) a) Démontrer que  $f$  réalise une bijection de l'intervalle  $D$  vers un intervalle  $J$  à déterminer. (0,25pt)

b) Dresser le tableau de variations de  $f^{-1}$ . (0,25pt)

6) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  est équivalente à l'équation :  $1 + \frac{1}{\sqrt{x}} = x$  (0,25pt)

7) On appelle  $g$  la fonction définie sur  $D$  par  $g(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$

a) Montrer que si  $x$  est élément de  $[1 ; 2]$ , alors  $g(x)$  appartient aussi à  $[1 ; 2]$  (0,25pt)

b) calculer la dérivée  $g'$  de  $g$  et montrer que, pour tout  $x \in [1;2]$ ,  $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$  (0,25pt)

- c) En déduire que, pour tout  $x \in [1; 2]$  :  $|g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$  0,25pt
- d) On définit les suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par :  $u_0 = 2$  et  $u_{n+1} = g(u_n)$ .
- Montrer que  $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$  et  $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}$  0,25pt
  - En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  . 0,25pt

**Exercice No 3** : 3 pts [barème visible divisé par 2] en C et 6 pts [barème visible] en D-Ti (source : GPM).

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0; \frac{\pi}{2}[$  par  $f(x) = \frac{\sqrt{\sin 2x}}{\sin x}$ .

1-a) Montrer que  $f$  est dérivable sur  $]0; \frac{\pi}{2}[$ . 0,5 pt

b) Étudier la dérivabilité de  $f$  en  $\frac{\pi}{2}$ .  $f$  est-elle continue en  $\frac{\pi}{2}$  ? 0,5 pt

c) Étudier les variations de  $f$ . 0,5 pt

2- Montrer que  $f$  est une bijection de  $]0; \frac{\pi}{2}[$  vers un intervalle  $J$  à déterminer. 0,5 pt

3- Soit  $g$  la bijection réciproque de  $f$ .

a) Préciser les domaines de continuité et de dérivabilité de  $g$ . 0,5 pt

b) Montrer que pour  $x > 0$ ,  $g'(x) = \frac{-4x}{4+x^4}$ . 0,5 pt

4- Soit  $\varphi(x) = g(\sqrt{2x}) + g\left(\sqrt{\frac{2}{x}}\right)$ .

a) Montrer que  $\varphi$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$ . 0,5 pt

b) Montrer que pour  $x > 0$ ,  $\varphi'(x) = 0$ . Que vaut alors  $\varphi(1)$ ? 0,5 pt

c) Calculer  $\varphi(x)$  pour  $x > 0$ . 0,5 pt

**N.B** : On rappelle que :  $\sin(a - b) = \sin a \times \cos b - \cos a \times \sin b$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

5- Etudier la fonction  $f(x) = x \ln(x) - x + 1$  0,5 pt

6- Considérons la primitive  $F$  de la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{1}{x}$  telle que  $F(1) = 0$ .

6a) Justifier l'existence de  $F$ . 0,25 pt

6b) Montrer que pour tout paramètre  $y > 0$ , la fonction  $G$  définie sur  $]0; +\infty[$  par

$$G(x) = F(y \cdot x) - F(y) - F(x),$$

est constante.

0,25 pt

6b) Calculer  $G(1)$  et prouver que pour  $x, y > 0$ ,  $F(y \cdot x) = F(y) + F(x)$  . 0,5 pt

**Exercice No 4** : 5 pts en C / 5,5pts-D-Ti (source : collègue)

I. On considère le polynôme  $P$  de degré 3 défini par :  $P(z) = z^3 - (2 + 2i)z^2 + 2(1 + 2i)z - 4i$ .

1. a- Déterminer les nombres complexes  $a$  et  $b$  tels que :  $P(z) = (z - 2i)(z^2 + az + b)$ . 0,75pt

b- Résoudre l'équation dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $P(z) = 0$ . 0,75pt

II. Dans le plan complexe  $(0, I, J)$  direct, on donne les points A, B, C, E et G dont les affixes respectives sont:

$$Z_A = 3, \quad Z_B = 2 + i\sqrt{3}, \quad Z_C = -1, \quad Z_E = 7 \text{ et } Z_G = 11 + 4i\sqrt{3}.$$

1. On pose :  $X = \frac{Z_B - Z_I}{Z_A - Z_I}$  . Calculer  $|X|$  et déterminer un argument de  $X$  . 0,5pt  $\times$  2

2. En déduire la nature exacte du triangle AIB. 0,5pt

3. On pose :  $\varphi = \frac{Z_G - Z_C}{Z_B - Z_C}$ . Mettez  $\varphi$  sous forme algébrique puis donner une interprétation géométrique du résultat obtenu. **1pt-C/1,5pt-D**
- 4- Déterminer l'affixe du point  $F$  de l'axe des abscisses pour lequel le triangle  $EFG$  est équilatéral. **1pt**

**Evaluation des compétences (05 pts-C / 05,5pts-D\_Ti) Source, Collègue L. Soa [01,5pt -> 18 minutes]**

Monsieur POUGA est un agriculteur qui possède une plantation de cacao. Il a relevé que sa production (en Kg), après chaque saison de récolte depuis 2014 (année de rang 1), forme une série statistique à deux variables comme l'indique le tableau ci-contre :

Rang de l'année $x_i$	1	2	3	4	5	6	7
Production $y_i$ (en Kg)	94	219	751	2252	4573	6714	8157

Il voudrait avoir une estimation « aux moindres carrés » (*termes employés par son banquier qui suit sa production pour renforcer en prêt l'équipement de son exploitation*) de sa production en 2021 en supposant que la tendance des récoltes reste la même au cours du temps. Pour cela il fait appel à son fils de la classe de terminale afin de l'aider. Dans sa démarche, son fils constate que le nuage de points associé à cette série ne laisse pas entrevoir un ajustement linéaire et après plusieurs calculs, il décide donc de poser  $y'_i = \sqrt{y_i}$  et constate que le nuage de points de la nouvelle série ( $x_i; y'_i$ ) laisse entrevoir un ajustement linéaire.

Bien avant, en 2012, monsieur POUGA avait récolté son cacao et avait entreposé sa récolte dans une réserve ayant la forme d'un cube ABCDEFG de côte 1 dam, muni d'un repère orthonormé  $(A, \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$  et avait constaté que le cacao occupait un volume ayant la forme d'un tétraèdre ABIG où  $I$  est le milieu du segment  $[EF]$ . Le prix d'un sac de cacao de 100 L coûtait 120 00 FCFA à cette époque.

Pour le suivi des recettes de sa ferme, monsieur POUGA ai fait appel à l'expertise d'un bureau d'études. Des études faites ont permis d'établir que la recette  $R(x)$  (en millions de francs de CFA), résultant de la vente de  $x$  centaines de kilogrammes de cacao, est définie sur  $[1; 5]$  par  $R(x) = 17x$  (en millions). Monsieur POUGA vend son cacao à son client principal, au cout  $C(x) = x(-x^2 + 29) - 16$  (en millions). Le bénéfice de son client principal pour  $x$  centaines de kilogrammes de cacao vendus est  $B(x) = R(x) - C(x)$  défini sur  $[1; 5]$ . Le fournisseur requiert votre expertise pour savoir s'il existe au moins un  $x_0$  dans  $[1; 5]$  tel que le bénéfice soit égale à 80 millions de francs CFA.

**Votre travail consiste à résoudre les tâches suivantes en justifiant votre démarche par des calculs bien détaillés :**

**Tâche 1 :** Déterminer lorsque des  $x_0$  existent, leur(s) encadrement(s) au dixième près. **1, 5pts**


**Tâche 2 :** Déterminer, à l'unité près, une estimation de sa production en 2021. **1, 5pts**

**Tâche 3 :** Déterminer le prix de vente de la production de cacao de M. POUGA en 2012. **1, 5pts**

**Présentation générale: 0,5 point (C) et 01 point (D-Ti)**

→ L'AP Timene et Dr Kouakep [qui notent surtout la qualité combinée du raisonnement et de la rédaction].

[« Don't forget to protect ourselves from Covid19 by following the barrier measures », Dpt of Mathematics]

COLLÈGE INSTITUT FOTSO		Année scolaire 2021-2022
Département de Mathématiques	<b>CONTROLE</b>	<b>Séquence N°5</b> Date : AVRIL 2022
<b>EPREUVE DE MATHÉMATIQUES</b>		
Niveau : Tle C	Durée : 04 heures	Coef: 7

Examineur: NKANA NDJOOH SEPPO FRANCOIS

**PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES**

**15,5 POINTS**

**Exercice 2 : Espaces vectoriels et applications linéaires (4pts)**

E est un espace vectoriel sur IR dont une base est  $B = (\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ . Soit  $f$  l'endomorphisme de E qui à tout vecteur  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  associe le vecteur  $f(\vec{u}) = (x + 2y)\vec{i} + (-y + z)\vec{j} - (x + 2z)\vec{k}$

- 1) Déterminer la matrice de  $f$  dans la base B. **0,5pt**
- 2) a) Déterminer le noyau de  $f$ . (On donner une base du noyau) **0,75pt**  
b) Sans déterminer  $Imf$ , en déduire la dimension de  $Imf$ . **0,25pt**  
c) Déterminer  $Imf$  et une base de  $Imf$ . **0,75pt**
- 3) Déterminer la matrice de  $f \circ f$  dans la base B. **0,5pt**
- 4) On considère les vecteurs  $\vec{e}_1 = 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ ,  $\vec{e}_2 = \vec{i} - \vec{k}$  et  $\vec{e}_3 = \vec{j} - 2\vec{k}$ 
  - a) Démontrer que la famille  $B' = (\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$  est une base de E. **0,5pt**
  - b) Déterminer la matrice de  $f$  dans la base B'. **0,75pt**

**Exercice 2 : 4 points**

Un dé cubique pipé est tel que :  
deux faces sont marquées 2 ; trois faces sont marquées 4, et une face marquée 6.  
La probabilité  $p_i$  d'apparition de la face  $i$  est proportionnelle au nombre  $i$ .

1° Calculer les nombres  $p_2, p_4, p_6$ . [1.5pt]

2° On suppose dans la suite que :

On lance deux fois de suite le dé précédent, on note  $i$ , le résultat du premier lancer et  $j$  le résultat du deuxième lancer. On définit la variable aléatoire  $X$  qui au couple  $(i; j)$  associe le nombre  $i - j$ .

a) Déterminer l'univers-image de  $X$ . [1pt]

b) Déterminer la loi de probabilité de  $X$ . [1,5pt]

**EXERCICE 3 : 5 points**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = e^x \cos x$ .

1. Montrer que pour tout réel  $x$ ,  $-e^x \leq f(x) \leq e^x$  et en déduire que la courbe représentative (Cf) de  $f$  admet une asymptote au voisinage de  $-\infty$ . [0.25pt]

2. Etudier les variations de  $f$  sur  $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ . (On justifiera que  $f$  est croissante sur  $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}]$  et décroissante sur  $[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}]$ ) [0.75 pt]

3. Représenter (Cf) sur  $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ , on prendra  $\|\vec{i}\| = 0,25\pi$  et  $\|\vec{j}\| = 2cm$  [0.75 pt]

4. On pose  $I_n = \int_0^\pi e^x \cos nx dx, \forall n \in \mathbb{N}$ .

a) Montrer que pour tout  $n$  de  $\cos(n\pi) = (-1)^n$  et que  $\sin(n\pi) = 0$  [0.5 pt]

b) A l'aide de deux intégrations par parties, montrer que  $I_n = \frac{(-1)^n e^{\pi} - 1}{1+n^2}$  [1 pt]

c) Montrer que :  $|I_n| \leq \frac{e^{\pi} + 1}{1+n^2}$  et en déduire la limite de la suite  $(I_n)$  [0.5pt]

5. Soit (E) l'équation différentielle  $y' - 2y - 1 = 0$  et

(E') l'équation  $y' - 2y = 1 - e^x \sin x$ , où  $y$  est une fonction définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Dire en justifiant, si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.

a) Si  $g$  est une fonction positive et si  $g$  est solution de (E) alors  $g$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ . [0.25 pt]

b) La fonction  $x \mapsto 3e^{2x} + \frac{1}{2}$  est une solution de (E). [0.25 pt]

c) La primitive  $F$  de  $f$  qui s'annule en 0 est solution de (E'). [0.75 pt]

**EXERCICE 4 :** 2,5 points

Le plan est rapporté au repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  d'unité graphique 2cm.  $M$  est le point d'affixe  $z$ ,  $(\Gamma)$  est l'ensemble des points  $M$  du plan tels que

$$|z - 1 - i| = \frac{1}{4} |z + i\bar{z} - 8(1 + i)|, (D) \text{ est la droite}$$

d'équation  $x + y - 8 = 0$  et  $F$  le point de coordonnées  $(1 ; 1)$ . Soit  $M'$  le projeté orthogonal de  $M$  sur la droite  $(D)$ .

1. Montrer que l'affixe  $z'$  de  $M'$  est :

$$z' = \frac{1}{2} (z - i\bar{z} + 8(1 + i))$$

2. Calculer  $z' - z$ .

3.a) En déduire que  $(\Gamma)$  est l'ensemble des points  $M$  du plan tels que  $MM' = 2MF$

b) En déduire que  $(\Gamma)$  est une ellipse dont on précisera le foyer et la directrice.

c) Préciser l'axe focal.

d) Vérifier que les points  $A(2, 2)$  et  $A'(-2, -2)$  sont deux sommets de  $(\Gamma)$ .

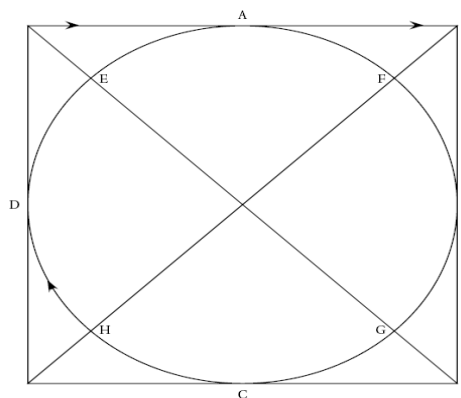
**PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES**

**04,5 POINTS**

Une population de microbes se développe dans une culture suivant une loi où à chaque instant le taux d'accroissement est proportionnel à l'effectif. Et l'on sait qu'au bout d'une heure il y a  $10^4$  microbes et que deux heures plus tard il y en a  $4 \times 10^4$  microbes.

Cette population vit à côté d'une salle de fête comme l'indique la figure ci-contre. Le manège comporte un jeu qui consiste à attraper un pompon qui se déplace sur un câble formant un carré dans lequel est inscrit le cercle.

Le manège tourne dans le sens des aiguilles d'une montre, à vitesse constante. Il fait un tour en 24 secondes. Le pompon se déplace dans le même sens à vitesse constante. Il fait un tour en 17 secondes.



Pour gagner, Jean doit attraper le pompon, et il ne peut le faire qu'aux points de contact qui sont notés A, B, C et D sur le dessin.

À l'instant  $t = 0$ , Jean part du point H en même temps que le pompon part du point A.

On suppose qu'à un certain instant  $t$  Jean attrape le pompon en A. Jean a déjà pu passer un certain nombre de fois en A sans y trouver le pompon.

1- quelle est l'effectif initial de cette culture ?

2.25pts

2- On suppose qu'à un certain instant  $t$  Jean attrape le pompon en A. Jean a déjà pu passer un certain nombre de fois en A sans y trouver le pompon.

À l'instant  $t$ , on note  $y$  le nombre de tours effectués depuis son premier passage en A et  $x$  le nombre de tours effectués par le pompon. Jean a payé pour 2 minutes ; aura-t-il le temps d'attraper le pompon ?

2.25pts

## EPREUVE DE MATHÉMATIQUES

### Partie A : Evaluation des ressources (15 points)

#### Exercice 1 : 4points

- I. On considère la suite  $(z_n)$  définie par  $z_0 = 0$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  
 $z_{n+1} = iz_n + 2i$ .
- Déterminer la forme algébrique de  $z_1$  et de  $z_2$ . **1pt**
  - On considère le nombre complexe  $z_A = -1 + i$  et la suite  $(u_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par  $u_n = z_n - z_A$ .
    - Montrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = iu_n$ . **0,5pt**
    - Montrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $u_n = (1 - i) \times i^n$  et déduire  $z_n$  en fonction de  $n$ . **1pt**
    - Déterminer la forme algébrique de  $z_{2022}$ . **0,5pt**
- II. Pour tout nombre réel  $\theta \in [0, \pi]$ , on considère l'équation  $z^2 - 2\cos\theta z + 1 = 0$ .
- Déterminer les valeurs de  $\theta$  pour lesquelles l'équation admet une solution réelle. **0,5pt**
  - Dans les autres cas, exprimer les solutions complexes en fonction de  $\theta$ . **0,5pt**

#### Exercice 2 : 6points

- I. Soit la suite  $(a_n)$  définie pour  $n \in \mathbb{N}$  par  $a_n = \frac{4^{2n+1} + 1}{5}$ .
- Calculer  $a_2$  et  $a_3$ . **0,5pt**
  - Montrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $a_{n+1} = 16a_n - 3$ . **0,75pt**
  - Montrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $a_n \in \mathbb{N}$ . **0,75pt**
  - On note  $d_n = \text{pgcd}(a_n, a_{n+1})$ . Montrer que  $d_n \in \{1; 3\}$ . **0,5pt**
    - Montrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $a_{n+1} \equiv a_n[3]$ . **0,5pt**
    - Vérifier que  $a_0 \equiv 1[3]$  et déduire que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $a_n$  n'est pas divisible par 3. **0,5pt**
    - Déduire la valeur de  $d_n$ . **0,5pt**
- II.1.
  - Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Quels sont les restes de la division euclidienne de  $4^n$  par 7 ? **0,5pt**
  - En déduire le reste de  $2020^{2019}$  dans la division euclidienne par 7. **0,5pt**
2. Soit  $p$  un nombre premier supérieur ou égal à 5. Montrer que  $p^2 - 1$  est divisible par 3 et par 8 et en déduire qu'il est divisible par 24. **1pt**

#### Exercice 3 : 5points

Soit l'équation (E) :  $2x\sqrt{x} - 3\sqrt{x} + 4 = \pi\sqrt{x}$ .

Le but de cet exercice est de déterminer le nombre de solutions de (E).

- On pose pour tout  $x > 0$ ,  $g(x) = x\sqrt{x} - 1$ .

a) Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  que l'on déterminera. 0,5pt

b) Déterminer le signe de  $g(x)$  pour  $x > 0$ . 1pt

2. Soit la fonction  $f$  définie sur  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = 2x - 3 + \frac{4}{\sqrt{x}}$ .

a) Déterminer les limites de  $f$  en 0 et en  $+\infty$ . 1pt

b) Montrer que pour tout  $x > 0$ ,  $f'(x) = \frac{2g(x)}{x\sqrt{x}}$ . 0,5pt

c) En déduire les variations de  $f$  et dresser son tableau de variation. 1pt

3.a) Montrer que l'équation (E) est équivalente à  $f(x) = \pi$ , pour  $x \neq 0$ . 0,5pt

b) Déterminer le nombre de solutions de l'équation (E). 0,5pt

### Partie B : Evaluation des compétences (4,5 points)

Une équipe d'ingénieurs désignée pour construire 3 forages dans un village a assimilé le village à un repère ainsi qu'indique la figure ci-contre. Après étude pour savoir les coordonnées des points des trois forages, les ingénieurs ont réalisé que l'un des forages sera situé sur l'axe reliant la préfecture et le Lycée ; et que les affixes de ces points sont solutions de l'équation (E):  $z^3 + (-4-8i)z^2 + (-15+22i)z + 30 = 0$ . Pour aspirer la boue, l'équipe d'ingénieurs utilise des tubes en métal vendus dans des boîtes de rangements par 5 et par 9. L'ingénieur en chef constate que s'il ne prend que des rangements par 5, il lui restera 3 tubes ; et s'il ne prend que des rangements par 9, il lui restera 2 tubes. Et fini par obtenir une quantité de tubes comprise entre 100 et 140.

Pour fêter l'arrivée du forage dans son voisinage, un habitant du village dispose de 10 000 F CFA pour l'achat des bières qui coûtent 350 FCFA chacune et des jus qui coutent 200 FCFA chacun. Il doit dépenser la totalité de cette somme d'argent pour l'achat de ces deux types de boissons. Avec la présence de son voisin qui ne boit que de la bière et de sa femme qui ne boit que du jus, chaque participant a droit à une seule bouteille.

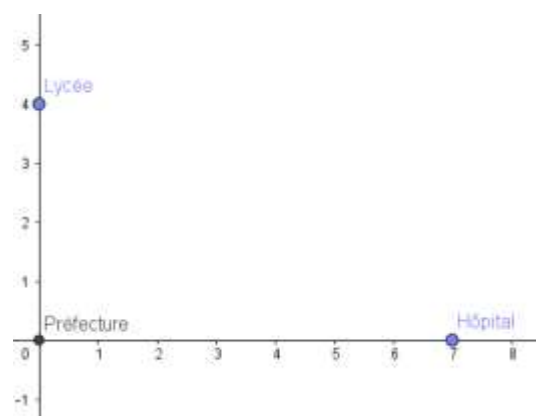
Taches :

1. Déterminer les nombres possibles des bouteilles de bières et de jus qu'il peut acheter (1,5pt)

2. Déterminer par leurs coordonnées les positions des trois forages. (1,5pt)

3. Combien l'équipe d'ingénieurs a-t-elle commandé de tubes ? (1,5pt)

Présentation : 0,5pt



## Epreuve de Mathématiques

Compétences évaluées : Arithmétiques, produit vectoriel, nombres complexes

### PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES / 15,5 points

#### EXERCICE 1 / 5,5 points

Les questions 1, 2, 3, 4 et 5 sont indépendantes.

- On considère deux entiers naturels non nuls  $a$  et  $b$  tels que :  $a + b = 23$ .
  - Montrer que  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux. **0,5pt**
  - En déduire  $a$  et  $b$  sachant que  $a < b$  et  $PPCM(a, b) = 126$ . **1pt**
- Résoudre dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation (E) :  $9x - 14y = 0$ . **1pt**
  - Résoudre dans  $\mathbb{Z}$  le système (S) :  $\begin{cases} x \equiv 4[9] \\ x \equiv 5[14] \end{cases}$ . **0,5pt**
- Déterminer les entiers relatifs  $n$  tels que  $\frac{n(5n+8)}{2n-1}$  soit un entier relatif. **1pt**
- Résoudre dans  $\mathbb{Z}$  l'équation :  $x^2 - 3x + 6 \equiv 5[7]$ . **0,5pt**
- Déterminer le chiffre des unités du nombre  $A = (3548)^9 \times (2537)^{37}$ . **1pt**

#### EXERCICE 2 / 2 points

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

Soit  $u$ , un nombre complexe tel que  $|u| = 1$ ,  $u \neq 1$  et  $z$  un nombre complexe quelconque.

- Montrer que  $\frac{z-u\bar{z}}{1-u}$  est un nombre réel. **1pt**
- On considère les nombres complexes  $z_1 = \frac{3+2i}{-5+7i}$  et  $z_2 = \frac{3-2i}{5+7i}$ . Démontrer sans calcul que  $z_1 - z_2$  est un réel et que  $z_1 + z_2$  est un imaginaire pur. **1pt**

#### EXERCICE 3 / 4,5 points

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . On donne les points  $A(1; 0; 1)$ ,  $B(2; 2; 4)$ ,  $C(1; -1; 0)$  et  $D(2; 1; -1)$ .

- Montrer que les points A, B et C définissent un plan (P) dont on déterminera une équation. **1pt**
- Démontrer que les points A, B, C et D sont non coplanaires. **0,5pt**
- Calculer l'aire du triangle ABC, puis le volume du tétraèdre ABCD. **1pt**
- Déterminer les réels  $a, b$  et  $c$  tels que le point O soit le barycentre des points pondérés  $(A, a)$ ;  $(B, b)$  et  $(C, c)$ . **0,75pt**
- Soit  $(\Psi)$  l'ensemble des points M de l'espace tels que :  $4MA^2 - MB^2 - 2MC^2 = -16$ .
  - Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de  $(\Psi)$ . **0,75pt**
  - Démontrer que l'intersection de  $(\Psi)$  et (P) est un cercle dont on précisera les éléments caractéristiques. **0,5pt**

### **EXERCICE 4 / 3,5 points**

I-/ Soit à résoudre dans  $\mathbb{N}^2$  l'équation (E):  $15x^2 - 7y^2 = 9$ .

1. Démontrer que dans le système decimal, le dernier chiffre d'un carré est 0, 1, 4, 5, 6 ou 9.
2. En déduire que  $7y^2 + 9$  n'est pas divisible par 5. **0,5pt**
3. Résoudre alors l'équation (E) dans  $\mathbb{N}^2$ . **0,5pt**

II-/ Soit le nombre  $a_n = 3^{2n} - 1$ , tout entier naturel non nul  $n$ .

1. Montrer que pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $a_n$  est divisible par 8. **0,5pt**
2. On considère l'équation (E) :  $a_3x + a_2y = 3296$ .
  - i) Montrer qu'il existe un couple d'entiers solution de (E) **0,5pt**
  - ii) Résoudre (E) dans  $\mathbb{Z}^2$ . **1pt**

### **PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES / 4,5 points**

La base du **BIR** de Maroua a défini son procédé de codage des données de la façon suivante :

**Etape 1** : à la lettre que l'on veut coder, on associe le nombre  $n$  correspondant dans le tableau.

**Etape 2** : on calcule le reste de la division euclidienne de  $9n + 5$  par 26 et on le note  $r$ .

**Etape 3** : au nombre  $r$ , on associe la lettre correspondante dans le tableau.

<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>	<b>D</b>	<b>E</b>	<b>F</b>	<b>G</b>	<b>H</b>	<b>I</b>	<b>J</b>	<b>K</b>	<b>L</b>	<b>M</b>
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
<b>N</b>	<b>O</b>	<b>P</b>	<b>Q</b>	<b>R</b>	<b>S</b>	<b>T</b>	<b>U</b>	<b>V</b>	<b>W</b>	<b>X</b>	<b>Y</b>	<b>Z</b>
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Cette base du BIR est composée de régiments et chaque régiment a un certain nombre identique de soldat. Lorsque 11 régiments se retrouve pour le repas, il y'a 7 salles occupées et 5 soldats qui n'ont pas de places. Un des soldats, **M. BRAVO** content de la réussite au baccalauréat série C de son fils, lui a promis comme cadeau un voyage pour Yaoundé pour suivre la rencontre d'un match de football au stade Olembé. Une fois à l'agence, le caissier leur dit : « *le prix d'un billet de voyage pour Yaoundé est le produit  $xyz$  en base 10, où  $x$  est solution de l'équation  $x + y + z = 50$  avec  $y = \overline{131}^x$  et  $z = \overline{101}^x$  ( $x > 3$ )* ». pour cela, il demande à **M. BRAVO** d'écrire d'abord le produit  $xyz$  en base  $x$  avant de trouver le prix d'achat de leurs billets de voyage.

**Tache 1** : Quel est le noms de code utilisé par le commandant de cette base militaire pour le mot SOLDAT ? **1,5pt**

**Tache 2** : quel est le nombre maximal de soldats par régiment, sachant qu'un régiment a moins de 300 soldats ? **1,5pt**

**Tache 3** : Quel montant doivent-ils déboursier à l'agence pour se rendre à Yaoundé ? **1,5pt**

« *Travaillez de manière à remporter le prix* »

**Examineur** : *M. NGANSOB NONO Yves. B (PLEG\_Maths)*



<b>Trimestre : 1</b> <b>A/S : 2022-2023</b>	<b>Discipline</b>	<b>Examineur</b>	<b>Classe</b>	<b>Date : nov.</b> <b>2022</b>	<b>Durée</b> <b>4H00</b>
<b>Évaluation No : 2</b>	<b>Mathématiques</b>	<b>M. Nchare Abdoulaye</b>	<b>Tle C</b>	<b>Coefficient : 7</b>	

**PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES 15,50 points**

**EXERCICE 1: 3,25 points**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$ , par  $f(x) = 4x^3 + x^2 + x - 3$

- Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet sur  $\mathbb{R}$  une unique solution  $\beta \in ]0; 1[$ , puis donner un encadrement de  $\beta$  à  $10^{-1}$  près. 0,75 pt
- a) Montrer que si  $f$  admet une racine rationnelle  $\frac{p}{q}$  irréductible, alors  $p$  divise 3 et  $q$  divise 4. 0,75 pt  
 b) Déterminer tous les nombres rationnels vérifiant cette dernière condition. 0,75 pt  
 c) Déterminer alors en justifiant une racine de  $f$  0,25 pt
- Resoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $f(x) = 0$  0,75 pt

**EXERCICE 2 : 6,75 points**

- I.** Soit  $f$  la fonction définie sur  $]-\pi; \pi[$  vers  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$
- Démontrer que  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$ . 0,75 pt
  - Démontrer que  $f^{-1}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et déterminer sa dérivée. 0,75 pt
- II.** soit  $P$  le plan muni d'un repère orthonormal  $R$ . soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :
- $$g(x) = \frac{1}{14}(-9x + 5\sqrt{x^2 + 1})$$
- On désigne par  $C_1$  sa représentation graphique.
- Etudier le comportement de  $g$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$  puis montrer que  $C_1$  admet deux asymptotes dont on précisera les équations. 1pt
  - a) Etudier la dérivabilité de  $g$  sur  $\mathbb{R}$  et déterminer sa fonction dérivée. 0,75pt  
 b) Dresser le tableau des variations de  $g$  1pt
  - soient  $h$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $h(x) = \frac{1}{14}(-9x - 5\sqrt{x^2 + 1})$  de courbe  $C_2$ , soit  $C$  la courbe d'équation  $196y^2 + 252xy + 56x^2 - 25 = 0$  et  $s$  la symétrie de centre  $O$ .  
 a) Montrer que  $s(C_1) = C_2$  et tracer  $C_1$  et  $C_2$  dans le même repère 1pt  
 b) Montrer que  $C$  est la réunion de  $C_1$  et  $C_2$  0,75pt
  - Soit  $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j}$  et  $\vec{v} = 7\vec{i} - 2\vec{j}$ . Montrer que  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  est un repère du plan, puis éterminer une équation de  $C$  dans le repère  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  0,75pt

**EXERCICE 3: 5,50 points**

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ . (unité: 1cm).

- I.** On considère le point  $D$  d'affixe  $4 - 2i$ . Déterminer la forme algébrique de l'affixe du point  $E$  tel que  $DOE$  soit un triangle équilatéral de sens direct. 0,5 pt
- II.** soit  $a$  un nombre complexe non nul tel que  $|a| = r$ . On considère les points  $A$  et  $B$  d'affixes respectives  $a$  et  $-a$ . On pose  $a = \alpha + i\beta$  avec  $\alpha$  et  $\beta$  des nombres réels non nuls. On note  $C$  le point d'intersection de la médiatrice du segment  $[AB]$  et la droite d'équation  $y = -\alpha$ .
- a) Démontrer qu'une équation de la médiatrice du segment  $[AB]$  est  $y = -\frac{\alpha}{\beta}x$ . 0,5 pt

- b) Prouver que le point  $C$  a pour affixe  $-ia$  0,25 pt
2. Démontrer que le triangle  $ABC$  est rectangle et isocèle en  $C$ . 0,5 pt
3. On note  $(\Gamma)$  le cercle circonscrit au triangle  $ABC$ .  
Démontrer que  $(\Gamma)$  est le cercle de centre  $O$  et de rayon  $r$ . 0,5 pt
4. On considère l'application  $f$  qui à tout point  $M$  de  $(\Gamma)$  d'affixe  $z \neq ia$  associe le point  $N$  d'affixe  $z'$   
tel que :  $z' = \frac{(1+i)z^2 - iaz + ia^2}{ai - z}$
- a) Déterminer les images par  $f$  des points  $A$  et  $C$ . 0,5 pt
- b) Etablir que :  $z' - a = -(1 + i)z$ . 0,5 pt
5. On note  $(\Psi)$  l'ensemble des points  $N$  tels que :  $|z' - a| = |(1 + i)z|$ .
- a) Justifier que le point  $C$  appartient à l'ensemble  $(\Psi)$  0,25 pt
- b) Déterminer l'ensemble  $(\Psi)$  0,5 pt
6. Pour  $a = 1 - 3i$
- a) Déterminer points les  $M$  d'affixe  $z \neq 1 - 3i$  tel que  $arg(z - a) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$  0,5 pt
- b) Constuire les points  $A, B$  et  $C$  et les ensembles  $(\Psi)$  et  $(\Gamma)$  1 pt

### PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES 04,50 POINTS

#### Situation :

Les enseignants du lycée bilingue de Mbalngong ont mis sur pieds il y'a de cela 12 ans une association culturelle et professionnelle dénommée AMIMBA. Lors de son inscription, chaque membre reçoit un numéro d'adhérent. Ce numéro comporte 7 chiffres et s'écrit  $C_0C_1C_2C_3C_4C_5C_6$ . Le premier chiffre  $C_0$  correspond au loisir de l'adhérent : **1 pour un adhérent ayant pour loisir le sport ; 2 pour un adhérent ayant pour loisir le voyage et 3 pour un adhérent ayant pour loisir la lecture.**

Les deux chiffres  $C_1$  et  $C_2$  du numéro d'adhérent correspondent à son année de naissance (par exemple, 89 pour un adhérent né en 1989). Les trois chiffres suivants sont donnés par le secrétaire général lors de l'adhésion à l'association. Le dernier chiffre est appelé clé de contrôle, il est calculé automatiquement de la manière suivante : **On calcule la somme  $s = C_0 + C_1 + 2C_2 + 3(C_3 + C_4 + C_5)$  ; on effectue ensuite la division euclidienne de  $s$  par 9 ; le reste obtenu est la clé de contrôle.**

Lors d'une soirée de gala couplée à la présentation de la nouvelle banque partenaire de AMIMBA, en mai dernier, les membres étaient installés sur des tables en fonction de leurs clés de contrôle. Le membre monsieur MAGOUMOU enseignant d'EPS né en 1992 et dont le seul loisir est le sport était arrivé à la soirée en retard ayant oublié sa carte d'adhésion. Il se souvenait néanmoins que lors de son inscription en 2019 le secrétaire générale lui avait attribué le numéro 123. Le service de protocole devait alors retrouver sa clé de contrôle pour pouvoir l'installer

Pendant la cérémonie, le président de AMIMBA a organisé un quizz par discipline enseignée sanctionné par la remise des lots. Le quizz adressé aux enseignants de mathématiques et informatique était le suivant : **le numéro du compte bancaire de AMIMBA est un code à 6 chiffres. Il est le plus grand nombre  $N$  divisible par 3 et 11 dont l'écriture en base 10 est :  $\overline{28x75y}$ .** La bonne réponse a été donnée par monsieur NCHARE

À la fin de la cérémonie, la décoratrice madame KENTSANG devait ranger tous les bouquets de fleurs qui se trouvaient sur les tables soit en tas de 7, soit en tas de 11. Elle se souvenait qu'elle avait entre 400 et 462 bouquets de fleurs et qu'aucun bouquet n'avait disparu. Lorsqu'elle faisait des tas de 7, il lui reste cinq bouquets de fleurs. Lorsqu'elle faisait des tas de 11 bouquets de fleurs, il lui reste deux bouquets de fleurs. Elle voulait connaître le nombre de ses bouquets de fleurs pour mieux les ranger.

#### Tâches :

1. Quel était le nombre de bouquets de fleurs de madame KENTSANG ? 1,5 pt
2. Quelle a été la réponse donnée par monsieur NCHARE ? 1,5 pt
3. Quel est le numéro complet d'adhésion de monsieur MAGOUMOU ? 1,5 pt



**La qualité de la rédaction et la présentation de la copie seront prises en compte dans l'évaluation de la copie de l'élève.**

**PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES / 15,5 POINTS**

**EXERCICE 1/ 4,5 pts**

NB : Les trois questions de cet exercice sont indépendantes

1. Soit  $a, b$  et  $c$  des entiers. Démontrer que l'équation  $ax + by = c$  admet au moins un couple  $(x, y)$  solution dans  $\mathbb{Z}^2$  si et seulement si  $c$  est un multiple du PGCD de  $a$  et  $b$ . **0,5pt**  
 Considérons l'équation ( E ) : l'équation  $5x + 12y = 13$ 
  - a) Justifier que ( E ) admet au moins une solution dans  $\mathbb{Z}^2$  **0,25pt**
  - b) Résoudre dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation ( E ) **0,5pt**
  - c) Comment peut-on avoir 13 litres d'eau dans un récipient de 100 litres en n'utilisant que des récipients de 5 litres et 12 litres ? **0,5pt**
2. Résoudre dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation :  $48x + 35y = 1$  **0,5pt**
  - a. L'espace étant rapporté à un repère orthonormal, on donne le vecteur  $\vec{u}(48; 35; 24)$  et le point  $A(-11; 35; -13)$ . Préciser la nature et donner une équation cartésienne de l'ensemble des points  $M(x; y; z)$  de l'espace, tels que  $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$ . **0,5pt**
  - b. Soit (D) la droite d'intersection de (P) avec le plan d'équation  $z = 16$ . Déterminer tous les points de (D) dont les coordonnées sont entières et appartiennent à l'intervalle  $[-100; 100]$ .
  - c. En déduire les coordonnées du point de D, coordonnées entières, situé le plus près de l'origine. **0,75pt**
3. Comment choisir l'entier  $n$  pour que  $(i + \sqrt{3})^n$  soit un réel ? soit un imaginaire pur ? **1pt**

**EXERCICE 2/ 3,25 pts**

P est un plan de l'espace E de repère  $(A, \vec{u}, \vec{v})$  M un point de E et K son projeté orthogonal sur P.

- 1.a. Démontrer que  $\overrightarrow{MA} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = \overrightarrow{MK} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v})$  **0,75pt**
- b. En déduire que la distance du point M au plan P est  $\frac{|\overrightarrow{MA} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v})|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}$  **0,5pt**

2. Dans un repère orthonormé  $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  de l'espace, on considère les points  $A \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ ;  $B \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ;  $C \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $M \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Calculer la distance du point M au plan (ABC) **0,75pt**

3. L'espace est muni du repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Soient (P) et (P') les plans d'équations respectives  $x + 2y - z + 1 = 0$  et  $-x + y + z = 0$ . Soit A le point de coordonnées  $(0 ; 1 ; 1)$ .

- a. Démontrer que les plans (P) et (P') sont perpendiculaires **0.25pt**
- b. Déterminer une représentation paramétrique de leur droite d'intersection **0,5pt**
- c. Calculer la distance du point A à chacun des plans (P) et (P') **0,5pt**
- d. En déduire la distance du point A à la droite d'intersection des plans (P) et (P') **0,5pt**

### EXERCICE 3/ 5,5 pts

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct  $(o, \vec{u}, \vec{v})$ , on désigne par A, B, C et D les images respectives des complexes  $-1, 1, \frac{1}{2}, 2$ . On note (C) le cercle de diamètre [AB].

A tout point  $N(z)$  du plan distinct de D, on associe le point  $M(Z)$  tels que :

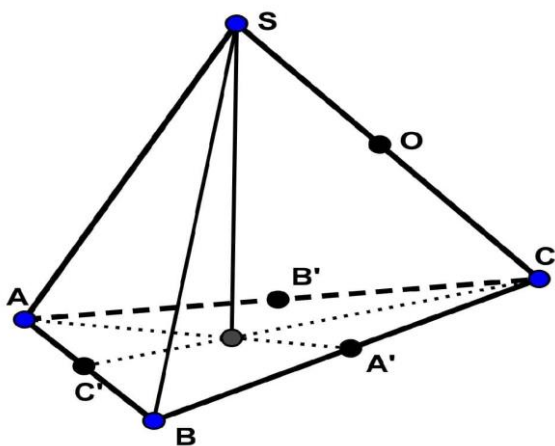
$$Z = -2z - 3 + \frac{6}{2-z}. \text{ On note T l'application qui à } N \text{ associe } M.$$

1. Déterminer l'image du segment [AB] par T **0,75pt**
2. Déterminer l'ensemble ( $\Gamma$ ) des points N du plan tels que M soit un élément de l'axe  $(o, \vec{u})$  **0,75pt**
3. On pose  $z_1 = \frac{2z-1}{2-z}$ . Exprimer  $|z_1|$  en fonction de NC et ND et exprimer  $\arg(z_1)$  en fonction de  $\text{mes}(\widehat{ND, CN})$  **1pt**
4. Montrer que si  $|z| < 1$  alors  $|z_1| < 1$  **0,75pt**
5. En déduire que si N est intérieur à (C) alors M est intérieur à (C). **0,5pt**
6. On suppose que N appartient au demi-cercle (C') de diamètre [AB], qui contient i et on pose  $\theta = \arg(z), 0 \leq \theta \leq \pi$  et  $\varphi = \arg(Z_1)$ 
  - a. Démontrer que  $\sin \varphi \geq 0$  **0,75pt**
  - b. On suppose :  $0 \leq \varphi \leq \pi$ . Calculer  $\cos \varphi$  en fonction de  $\cos \theta$  et en déduire que  $\varphi$  est une fonction croissante de  $\theta$ . **1pt**

**EXERCICE 4/ 2,25 pts**

$SABC$  est un tétraèdre régulier (toutes les faces sont des triangles équilatéraux).  $G$  et  $H$  sont des points tels que  $\overrightarrow{SG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SA}$ ,  $\overrightarrow{SH} = \frac{3}{4}\overrightarrow{SB}$  et  $O$  le milieu du segment  $[SC]$ .  $\vec{i}, \vec{j}$  et  $\vec{k}$  sont des vecteurs unitaires respectivement colinéaires et de même sens que les vecteurs  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$  et  $\overrightarrow{AS}$ . On suppose que l'espace est rapporté au repère  $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  et que  $AS=4$

1. Déterminer les coordonnées des points  $G, H$  et  $O$  dans  $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  1pt
2. Déterminer une équation du plan  $(GOH)$  0,5pt
3. Déterminer le volume du tétraèdre  $SABC$  0,75pt



**PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES / 4.5 POINTS**

Une société de fabrication de bonbons produit des bonbons de type A et de type B, à l'aide de deux machines M1 et M2 respectivement. Le nombre journalier de bonbons produit par les deux machines est 161161. On démarre les machines chaque jour à 6h30 min et chaque machine a une période en minutes bien précise de production de bonbons. L'écart entre le temps de productions des deux machines est de 30 minutes. A 21h 30mins exactement, elles produisent simultanément les bonbons. La société conçoit les bonbons par paquet identique contenant les mêmes nombres de bonbons de types A et B. Elle a fait un nombre maximal de 1001 paquets sachant que dans un paquet, le nombre de bonbons de type A est compris entre 50 et 70, et celui de type B est compris entre 80 et 100, et vent à 15 FCFA et 10 FCFA les bonbons de types A et B respectivement. Chaque samedi soir, un agent d'entretien range un certain nombre de paquets de bonbons dans deux espaces. Pour l'espace 1, il fait des blocs de 49 paquets et il en reste 1 et pour l'espace 2; il fait des blocs de 81 et il en reste 70. Le nombre de paquets rangés est compris entre 2400 et 2600.

1. Déterminer en heure les temps de production respectifs des machines M1 et M2. 1,5 pt
2. Déterminer le prix de vente d'un paquet de bonbons. 1,5 pt
3. Déterminer le nombre de paquets de bonbons rangés chaque samedi soir. 1,5 pt

Lycée de Mokolo 4 - Bertoua	<b>Examineur :</b>  <b>Awounang Armand</b> <b>PLEG Maths</b>	C.C. N°1
Année Scolaire : 2022 / 2023		Matière : Mathématiques
Classes : T <sup>le</sup> C		Durée : 3 heures
Date de Passage: / 10 / 2022		Coefficient : 7

**PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES.....[15 POINTS]**

**EXERCICE 1:.....[4 points]**

- 1) Soit  $p$  un nombre entier relatif. On pose :  $u = 14p + 3$  et  $v = 5p + 1$ . On considère dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation  $(E) : 87x - 31y = 2$ . On désigne par  $(D)$  la droite d'équation  $87x - 31y = 2$  dans le plan rapporté à un repère orthonormé.
- Montrer que les entiers  $u$  et  $v$  sont premiers entre eux.
  - En déduire que 87 et 31 sont premiers entre eux.
  - Résoudre l'équation  $(E)$ .
  - Déterminer les points de  $(D)$  dont les coordonnées sont des entiers naturels et les abscisses sont inférieures à 100.
- 2) Trouver tous les couples d'entiers naturels  $a$  et  $b$  tels que  $ab = 1008$  et  $PPCM(a; b) = 6$

**EXERCICE 2:.....[4 points]**

- Démontrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $2^{6n+3} + 3^{4n+2}$  est un multiple de 17.
- Déterminer les entiers relatifs  $x$ , tels que  $x^2 - 3x + 6 \equiv 0 [5]$
- Soient  $n$  un entier naturel. On donne  $a = (n + 1)(2n + 1)$  et  $b = n(2n + 1)$   
On pose:  $PGCD(a; b) = \delta$  et  $PPCM(a; b) = \mu$ 
  - Déterminer  $\delta$  et  $\mu$  en fonction de  $n$
  - Vérifier que  $\delta = a - b$  et  $\mu(a + b) = ab\delta$
- Réciproquement, soient  $a$  et  $b$  deux entiers naturels vérifiant  $\delta = a - b$  et  $\mu(a + b) = ab\delta$ .  
On note  $a'$  et  $b'$  les entiers naturels tels que  $a = \delta a'$  et  $b = \delta b'$ 
  - Démontrer que  $a' - b' = 1$  et  $a' + b' = \delta$
  - En déduire que  $\delta$  est un nombre entier impair

**EXERCICE 3:.....[7 points]**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . On considère dans  $\mathbb{C}$  le polynôme :

$$P(z) = z^3 - (6 + 4i)z^2 + (8 + 14i)z - 12i$$

- Vérifier que 2 est une racine de  $P(z)$
  - Déterminer trois complexes  $a, b$  et  $c$  tels que  $P(z) = (z - 2)(az^2 + bz + c)$
  - Résoudre alors dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $P(z) = 0$
- On considère les points  $A, B$  et  $C$  d'affixes respectives  $z_A = 2, z_B = 1 + i$  et  $z_C = 3 + 3i$ 
  - Placer les points  $A, B$  et  $C$  dans le repère
  - Ecrire sous forme algébrique  $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$  et en déduire la nature exacte du triangle  $ABC$
  - Montrer que la similitude  $S$  de centre  $B$ , d'angle  $\frac{\pi}{2}$  et de rapport 2 a pour écriture complexe  $z' = 2iz + 3 - i$
  - Montrer que  $C$  est l'image de  $A$  par  $S$
  - Déterminer et construire l'image par  $S$  du cercle de centre  $A$  et de rayon  $r = 1,5 \text{ cm}$
- On considère la transformation  $R$  d'expression analytique :

$$\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y + 2 - \sqrt{2} \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y - \sqrt{2} \end{cases}$$

- a) Déterminer l'écriture complexe de  $R$
- b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de  $R$
- 4) Déterminer et construire l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que  $|2z - 2 - 2i| = 4$

**PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES.....[4,5 POINTS]**

**Situation :** M. SALLA possède trois terrains non encore exploités qu'il voudrait absolument sécuriser car il y a des personnes mal intentionnées qui utilisent ces espaces à des mauvaises fins. Il décide donc d'acheter du fil barbelé pour clôturer entièrement chacun de ces trois terrains, le rouleau de 5 mètres de ce fil lui est vendu à 3500 FCFA. Il devra en plus remettre 3000 FCFA pour les piquets et la main d'œuvre pour chacun des terrains.

**Terrain 1 :** A la forme d'un triangle rectangle  $ABC$  en  $A$  tels que  $Z_A = 2 + 2i$  et  $Z_B$  et  $Z_C$  sont solutions de l'équation  $Z^2 - (3 + 3i)Z + 5i = 0$  avec  $Re(Z_B) < Re(Z_C)$ .

**Terrain 2 :** Est de forme rectangulaire et ses dimensions sont la partie réelle et la partie imaginaire de la solution  $Z$  de l'équation  $(1 + 4i)Z + (3 - 4i)\bar{Z} = 4 - 8i$  où  $\bar{Z}$  désigne le conjugué du complexe  $Z$ .

**Terrain 3 :** Est formé de l'ensemble des points  $M(x; y)$  d'affixe  $Z$  tels que le complexe  $\frac{Z}{Z+2i}$  soit imaginaire pur.

**Taches :**

- 1) Déterminer la dépense de M. SALLA pour le **terrain 1**.
- 2) Déterminer la dépense de M. SALLA pour le **terrain 2**.
- 3) Déterminer la dépense de M. SALLA pour le **terrain 3**.

**PRESENTATION:.....0,5 pt**

EPREUVE DE MATHÉMATIQUES

NB : la clarté, la lisibilité et toutes les étapes de calculs seront prises en compte. L'épreuve est numérotée sur deux pages

A. EVALUATIONS DES RESSOURCES : [15,5pts]

EXERCICE 1 : [03,5pts]

On considère dans l'espace un cube  $OABCDEFG$ . On oriente l'espace par le repère orthonormé direct  $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD})$ . Soit  $a$  un réel strictement positif et  $h$  l'homothétie de centre  $O$  et de rapport  $a$ . on note  $M = h(A)$  et  $L = h(C)$

1- Déterminer les coordonnées de  $\overrightarrow{DM} \wedge \overrightarrow{DL}$ . En déduire l'aire du triangle  $DLM$  [0,75pt]

2- Soit  $I$  le milieu de  $[ML]$ . Déterminer l'ensemble des points  $I$  lorsque  $a$  varie [0,5pt]

3- Soit  $K$  l'image de  $F$  par l'homothétie de centre  $B$  et de rapport  $a$ . montrer que  $(OK)$  est perpendiculaire au plan  $(DML)$  [0,5pt]

4- Soit  $H$  le projeté orthogonal de  $O$  sur le plan  $(DML)$

a- Démontrer que :  $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OK}$

b- Montrer que  $\overrightarrow{OH} = \frac{a}{a^2+2} \overrightarrow{OK}$  [0,5pt]

c- Montrer que  $HK = \frac{a^2-a+2}{\sqrt{a^2+2}}$  [0,5pt]

5- Déterminer le volume du tétraèdre  $DLMK$  en fonction de  $a$  [0,75pt]

EXERCICE 2 : [05pts]

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct  $(0; \vec{u}; \vec{v})$ . On donne les points  $A, B$  et  $C$  d'affixes respectives  $z_A = 1 + 2i, z_B = 3 + 2i$  et  $z_C = 1 + 6i$ .  $f$  et  $g$  des transformations qui ont pour écriture respective  $z' = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)z + \frac{\sqrt{2}}{2} + i\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$  et  $z' = 3z - 2i$

1- Déterminer l'affixe du point  $E$  antécédant du point  $A$  par  $g$  [0,5pt]

2- Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de  $f$  [0,75pt]

3- Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de  $g$  [0,5pt]

4-  $h$  est la composée des transformations du plan  $g$  et  $f$  ( $h = g \circ f$ )

a- Déterminer l'écriture complexe de la transformation  $h$  [0,5pt]

b- Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de  $h$  [0,75pt]

5-  $(D)$  est la droite d'équation  $2x - y + 1 = 0$  et  $(D')$  son image la transformation  $g$

a- Déterminer l'expression analytique de  $g$  [0,5pt]

b- Déterminer une équation cartésienne de la droite  $(D')$  [0,75pt]

6- Soit  $s$  la similitude directe qui transforme  $C$  en  $B$  et qui a pour point invariant  $A$ . donner l'écriture complexe de  $s$  [0,75pt]

EXERCICE 3 : [02,5pts]

1- On considère l'expression suivante :  $S_n = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n \times (n+1)}$

a- Démontrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $S_n = \frac{n}{n+1}$  [0,75pt]

b- Donner la valeur exacte de :  $A = \frac{1}{9 \times 10} + \frac{1}{10 \times 11} + \frac{1}{11 \times 12} + \dots + \frac{1}{29 \times 30}$  [0,5pt]

2- Pour tout entier naturel non nul, on pose  $T_n = \sum_{k=1}^n (2k - 1)^3$

a- Démontrer par récurrence que  $T_n = 2n^4 - n^2$  [0,5pt]

b- Déterminer l'entier  $n$ , tel que  $T_n = 29161$

[0,75pt]

**PROBLEME** : [05pts]

**PARTIE A** : [02pts]

Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = -4x^3 + 6x^2 + 2$

1- Etudier les variations de  $g$  et dresser son tableau de variation [1pt]

2- Démontrer que pour  $x \in \mathbb{R}$ , l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  et que  $1,6 < \alpha < 1,7$  [0,5pt]

3- Déterminer suivant les valeurs de  $x$  le signe de  $g(x)$  sur  $\mathbb{R}$  [0,5pt]

**PARTIE B** : [03pts]

Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{4-4x}{1+x^3}$  et on note  $(C_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(0; I; J)$ . L'unité graphique est  $2\text{cm}$

1- Calculer les limites de  $f$  sur son  $D_f$ . interpréter graphiquement les résultats [0,75pt]

2- Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{-2g(x)}{(1+x^3)^2}$  [0,5pt]

3- Etudier les variations de  $f$  et dresser son tableau de variation [0,75pt]

4- Construire  $(C_f)$  [1pt]

**B-EVALUATIONS DES COMPETENCES** : [04,5pts]

L'entreprise ABEGA et FILS voudrait savoir s'il est possible de faire une estimation de son chiffre d'affaire en 2021 si sa dépense mensuelle est de 300 millions. Pour cela elle a fait appel à un cabinet pour une expertise. En 2020 le bureau d'enquête de ce cabinet a relevé en dizaine de millions de francs CFA les dépenses ainsi que les chiffres d'affaires mensuels de cette entreprise. Il a consigné les données dans le tableau suivant :

Dépenses ( $x_i$ )	12	17	11	13	31	20
Chiffres d'affaires ( $y_i$ )	99	130	92	108	232	150

Mr Ebané directeur de l'entreprise ABEGA et FILS est propriétaire d'un terrain dans la ville de Mfou. Pour préparer sa retraite, il décide transformer une partie de ce terrain en un site touristique. Il fait appel à un entrepreneur pour l'étude du site. L'entrepreneur fait comprendre à Mr Ebané que dans le repère des services du cadastre de la ville de Mfou où l'unité est le mètre, la zone utilisable pour le site est délimitée par l'ensemble des points  $M(x; y)$  du plan tels que :  $70 \leq |2i\bar{z} + 2 - 3i| \leq 80$  ou  $z = x + iy$  est la forme algébrique du nombre complexe. L'entrepreneur demande à Mr Ebané une somme de 5000 Fcfa par mètre carré de terrain du site. Et Mr Ebané dispose d'une somme de 5 500 000 FCFA pour l'aménagement du site. Pour le suivi des recettes de sa ferme, Mr Ebané a fait appel à l'expertise d'un bureau d'études. Des études faites ont permis d'établir que la recette  $R(x)$  (en millions de francs de CFA), résultant de la vente de  $x$  centaines de kilogrammes de cacao, est définie sur  $[1; 5]$  par  $R(x) = 17x$ . Mr Ebané vend son cacao à son client principal, au coût  $C(x) = x(-x^2 + 29) - 16$  (en millions). Le bénéfice de son client principal pour  $x$  centaines de kilogrammes de cacao vendus est  $B(x) = R(x) - C(x)$  défini sur  $[1; 5]$ . Le fournisseur requiert votre expertise pour savoir s'il existe au moins un  $x_0$  dans  $[1; 5]$  tel que le bénéfice soit égale à 81 millions de francs CFA.

**TACHES** :

1- Le cabinet d'expertise pourra-t-il faire une bonne estimation du chiffre d'affaire de l'entreprise ? Si oui quelle l'estimation de ce chiffre d'affaire ? [1,5pts]

2- Monsieur Ebané pourra-t-il réaliser son projet de site touristique ? [1,5pts]

3- Lorsque des  $x_0$  existent, quels sont leur(s) encadrement(s) à  $10^{-1}$  près ? [1,5pts]

Epreuve de Mathématiques. Novembre 2022 (20pts) Coef : 7  
Présentation : 0.5pt  
Evaluation des ressources

**Exercice 1(2pts)**

- Déterminer l'ensemble des entiers  $a$  et  $b$  tels que  $PGCD(a; b) + PPCM(a; b) = a + b$ . (0.25pt)
- Montrer le théorème de Gauss : « si  $a$  divise  $bc$ ,  $a$  et  $b$  premier entre eux alors  $a$  divise  $c$  ». (0.25pt)
- Résoudre dans  $\mathbb{Z}^2$   $7x - 11y = 3$ . (0.5pt)
- Soit  $z$  un complexe tel que  $z + \frac{1}{z} = 2 \cos \theta$ . Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $z^n + \frac{1}{z^n} = 2 \cos n\theta$ . (0.5pt)
- Soit  $l$  la fonction définie par  $l(x) = \frac{1}{1-ax}$  où  $a$  est un réel. On suppose  $l$  est  $n$  fois dérivable,  $n$  étant un entier naturel. Démontrer par récurrence que  $l^n(x) = \frac{a^n n!}{(1-ax)^{n+1}}$ . (0.5pt)

**Exercice 2 (6pts)**

- Démontrer que pour tout réel  $x \in [0; 1]$  on a :  $1 + \frac{\sqrt{2}}{4}x \leq \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$ . (0,5pt)
- Soit  $h$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $h(x) = x + \sqrt{|x^2 - 1|}$ 
  - Etudier la continuité de  $h$  en  $x_0 = -1$ . (0.25pt)
  - Etudier la dérivabilité de  $h$  aux points d'abscisses  $x_0 = -1$  et  $x_1 = 1$ . (0.75pt)
  - Etudier les branches infinies. On déterminera les asymptotes. (0.75pt)
  - Dresser le tableau de variation de  $h$ . (1pt)
- Soit  $p$  la fonction définie  $[0; \pi]$  vers  $\mathbb{R}$  définie par  $p(x) = \frac{1}{\tan x}$ 
  - Démontrer que  $p$  admet une fonction réciproque  $p^{-1}$ . (0,5pt)
  - Dresser le tableau de variation de  $p$ . (0,25pt)
  - Exprimer  $p'(x)$  en fonction de  $p$ , puis montrer que  $p''(x) = 2p^3(x) + 2p(x)$  et déduire l'abscisse du point d'inflexion. (0,75pt)
  - Construire la courbe de  $p$  et de  $p^{-1}$  dans le même repère (0,75pt)
  - Montrer que  $(p^{-1}(x))' = \frac{-1}{x^2+1}$ . (0,5pt)

**Exercice 3 (3pts)**

Le plan est muni du repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

- Considérons la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = -2x^3 - 3x^2 + 2$ .
  - Etudier rapidement les variations de  $g$  et dresser son tableau de variation. (0.75pt)
  - Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  dont on donnera un encadrement à  $10^{-1}$  près. (0.5pt)
  - Déduire le signe de  $g$  suivant les valeurs de  $x$ . (0.25pt)
- Montrer que  $g$  est bijective sur  $[0, +\infty[$  vers un intervalle que l'on précisera. (0.5pt)
- Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$  par  $f(x) = \frac{-x^3+2x}{x+1}$ 
  - Montrer que  $f$  est dérivable et calculer sa dérivée  $f'$ . (0.5pt)
  - Déduire de la question 1, le tableau de variations de  $f$ . (0.5pt)

**Exercice 4 (4.5pts)**

Soit  $B = \{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3\}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ . On définit les vecteurs  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  et  $\vec{c}$  par :  $\vec{a}(2; 2; 1)$ ,  $\vec{b}(1; 1; 0)$  et  $\vec{c}(0; 1; -1)$ . Soit  $g$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  qui à tout point  $M(x; y; z)$  associe le point  $M'(x'; y'; z')$  tel que

$$\begin{cases} x' &= 6x - 4y - 4z \\ y' &= 5x - 3y - 4z. \\ z' &= x - y \end{cases}$$

1. Vérifier si la famille  $B' = \{\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}\}$  est libre puis déduire si elle forme une base de  $\mathbb{R}^3$ . (0.5pt)
2. Soit  $F = \{\vec{u}(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x - y - z = 0\}$ . Montrer que  $F$  est un sous espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$  dont on donnera une base. (0.5pt)
3. Soit  $H = \{\vec{u}(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } g(\vec{u}) = 2\vec{u}\}$ . Montrer que  $H$  est un sous espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ . (0.5pt)
4. Déterminer la matrice de  $g$ . (0.25pt)
5.
  - a) Déterminer le noyau de  $g$ , une base de ce noyau puis déduire sa dimension. (0.75pt)
  - b) Déterminer l'image de  $g$ . (0.25pt)
  - c) L'endomorphisme  $g$  est il bijectif ? (0.25pt)
  - d) Déterminer la matrice de  $g \circ g$ . (0.5pt)
6. Soit  $f$  l'application définie sur  $\mathbb{R}^2$  par  $f(x; y) = (2x - y)u_1 + (x + y)u_2$  dans une base  $(u_1; u_2)$  de  $\mathbb{R}^2$ .
  - a) Montrer que  $f$  est linéaire. (0.5pt)
  - b) Montrer que  $f$  est bijective et déterminer la matrice de sa bijection réciproque. (0.5pt)

### Evaluation des compétences (4.5pts)

L'évolution du chiffre d'affaire d'une entreprise en fonction du numéro de l'année est regroupée dans le tableau ci-dessous

Années	2017	2018	2019	2020	2021	2022
Numéro des années	1	2	3	4	5	6
Chiffre d'affaire	2,4	3,8	4,1	5	5,2	5,6

Cette entreprise désire prévoir son chiffre d'affaire pour les années avenir par la méthode des moindres carrés.

M Maïgari, premier actionnaire de l'entreprise approvisionne l'entreprise tous les 35 jours. M Tsendou deuxième actionnaire arrive à l'entreprise tous les 27 jours. Le directeur reçoit M Tsendou deux jours après avoir reçu M Maïgari. Il souhaite les recevoir le même jour pour une réunion sans perturber leur périodicité.

On définit sur le plan du site de l'entreprise un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . On définit également l'application  $f$  qui transforme tout point  $M(x, y)$  du cercle unité centré en  $O$ , en un point  $M'(x', y')$  tel que  $z' = \frac{z+3-4i}{z}$  où  $i$  est le nombre imaginaire tel que  $i^2 = -1$  et  $z = x + iy$ ,  $z' = x' + iy'$ . Le site de l'entreprise est délimité par l'ensemble des points  $M'$ .

#### Tache 1

Donner une estimation du chiffre d'affaire de cette entreprise en 2025. (1.5pt)

#### Tache 2

Déterminer le nombre de jours que devra attendre le directeur pour recevoir ses deux actionnaires. (1.5pt)

#### Tache 3

Déterminer et représenter le site de l'entreprise dans le repère. On montrera que  $|z' - 1| = |3 - 4i|$  (1.5pt)

### Grille d'évaluation

	Production	Interprétation correcte de la situation. (0.5pt)	Utilisation correcte des outils : (0.5pt)	Cohérence (0.5pt)
Tache 1				
Tâche 2				
Tâche 3				

<b>LYCEE BILINGUE DE BAMYANGA</b>			
<b>DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES</b>			
<b>Deuxième Évaluation</b>	<b>Classe : Tle C</b>	<b>Année scolaire 2020-2021</b>	<b>Date :</b>
<b>Épreuve de mathématiques</b>	<b>Durée : 4h</b>	<b>Coef: 7</b>	<b>02/12/2020</b>

**PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES/15 points**

**EXERCICE 1 : (3.25 points)**

- Soit  $N$  un entier naturel, impair non premier. On suppose que  $N = a^2 - b^2$  où  $a$  et  $b$  sont deux entiers naturels.
  - Montrer que  $a$  et  $b$  n'ont pas la même parité. 0.5pt
  - Montrer que  $N$  peut s'écrire comme produit de deux entiers naturels  $p$  et  $q$ .  
En déduire la parité de  $p$  et  $q$ . 0.5pt
- Démontrer qu'il existe un seul couple  $(a; b)$  de nombres entiers naturels, tel que  $a < b$  et  $PPCM(a, b) - PGCD(a, b) = 1$ . 0.75pt
- Deux entiers  $M$  et  $N$  sont tels que  $M$  a pour écriture  $abc$  en base dix et  $N$  a pour écriture  $bca$  en base dix.  
Démontrer que si l'entier  $M$  est divisible par 27, alors l'entier  $M - N$  est aussi divisible par 27. 0.5pt
- Résoudre dans  $\mathbb{Z}$  le système  $(S) \begin{cases} n \equiv 13[19] \\ n \equiv 6[12] \end{cases}$ . 1pt

**EXERCICE 2 : (3.75 points)**

- Montrer que pour tout entier naturel non nul  $k$  et pour tout entier naturel  $x$  :  
 $(x - 1)(1 + x + x^2 + \dots + x^{k-1}) = x^k - 1$ . 0.25pt  
Soit  $a$  un entier naturel supérieur ou égal à 2.
  - Soit  $n$  un entier naturel non nul et  $d$  un diviseur positif de  $n$ .  
Montrer que  $a^d - 1$  est un diviseur de  $a^n - 1$ . 0.5pt
  - Déduire de la question précédente que  $a^{2004} - 1$  est divisible par 7,  
par 63 puis par 9. 0.75pt
  - soient  $m$  et  $n$  deux entiers naturels non nuls et  $d$  leur PGCD.
    - Justifier qu'il existe deux entiers relatifs  $u$  et  $v$  tels que :  $mu - nv = d$ .
    - On suppose  $u$  et  $v$  strictement positifs.  
Montrer que :  $(a^{mu} - 1) - (a^{nv} - 1)a^d = a^d - 1$ . 1pt
    - En déduire le PGCD de  $a^{mu} - 1$  et de  $a^{nv} - 1$ . 0.25pt
- Trouver toutes les valeurs des chiffres  $x$  et  $y$  telles que le nombre  $N = \overline{26x95y}$  dans le système décimal soit divisible par 3 et 11. 1pt

**EXERCICE 3 : (5 points)**

- Mettre chacun des nombres complexes suivants sous la forme trigonométrique.
  - $z_1 = 1 + \sqrt{3} + i(1 + \sqrt{3})$  ;    b)  $z_2 = \frac{1-\sqrt{3}}{1-i}$  ;    c)  $z_3 = 1 + e^{i\theta}$  ( $\theta \in \mathbb{R}$ );
  - $z_4 = -\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}$ . 1pt
- Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $Z^4 = 8\sqrt{2}(-1 + i)$ . 1pt
- $\theta$  est un nombre réel tel que  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ . On donne le nombre complexe  
 $X = \sin(2\theta) - 2i \sin^2(\theta)$ .
  - Déterminer le module de  $X$ . 0.25pt
  - Déterminer si possible un argument de  $X$ . 0.25pt
- Linéariser l'expression suivante :  $f(x) = \sin^6 x$ . 0.75pt

5. On donne les nombres complexes  $z$  et  $u$  définis par :

$$z = -8\sqrt{3} + 8i \text{ et } u = (\sqrt{6} - \sqrt{2}) + i(\sqrt{6} + \sqrt{2}).$$

1. a) Ecrire  $z$  sous forme trigonométrique.

0.5pt

b) Déterminer les racines carrées de  $z$  sous forme trigonométrique.

0.5pt

2. a) Calculer  $u^2$ . En déduire les valeurs exactes de  $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$  et  $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ .

0.75pt

#### EXERCICE 4 : (3 points)

1. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ .

Déterminer géométriquement et représenter l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  vérifiant :

a)  $\arg\left(\frac{z-2-2i}{z+2-i}\right) = \frac{\pi}{5} + 2k\pi; (k \in \mathbb{Z}).$  ; b)  $\left|\frac{z-2-i}{z-1+i}\right| = \frac{3}{2}.$

2pt

2. Résoudre dans  $\mathbb{Z}^2$  le système d'inconnue  $a$  et  $b$  : (S)  $\begin{cases} (3a + 5b)(a + 2b) = 1276 \\ ab = 2m \end{cases}$

où  $m$  est le PPCM de  $a$  et  $b$ .

1pt

### PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES/5 points

Situation :

Monsieur MOUSSA est Comptable dans une société de micro finance. Il a un chantier qui n'est malheureusement pas desservi par une voie qui peut emprunter un engin à moteur. Il achète le sable et a versé chez son voisin situé à une centaine de mètres du chantier. Ce sable livré par une société et acheté à raison de 15000F le mètre cube ( $m^3$ ) est contenu dans un bac plein de forme parallélépipédique de dimensions  $3m \times a m \times b m$  où  $a$  et  $b$

vérifient en mètre le système :  $\begin{cases} \text{PPCM}(a, b) = a + 3 \\ \text{PGCD}(a, b) = 2 \end{cases}$ .

Ce sable devrait être transporté en 100 tours dans des seaux identiques et pleins par des garçons et des filles du quartier. Les garçons ont effectué 8 tours et les filles 5 tours. Pour les motiver, il leur propose un taux forfaitaire de 1000F par personne.

Frustré par ce problème qui le préoccupe, monsieur MOUSSA rejoint son lieu de service.

Mais malheureusement il a oublié le mot de passe de son ordinateur. En fouillant ses documents, il tombe sur ce message : mot de passe « **WSAYZ** », fonction de codage :

$f(x) \equiv 17x + 22 \pmod{26}$  où à chaque lettre de l'alphabet on associe un entier compris entre 0 et 25 respectivement par :  $A = 0$  ;  $B = 1$  ;  $C = 2$  ;  $D = 3$  ; ... ;  $Z = 25$ .

Tâches :

1. Déterminer le prix d'achat du sable.

1.5pt

2. Déterminer le montant nécessaire à prévoir par M. MOUSSA pour satisfaire les transporteurs sachant qu'il y a plus de garçons que de filles.

1.5pt

3. Décoder le mot de passe de son ordinateur.

1.5pt

Présentation : 0.5pt

EXAMINATEUR : M. NOUMSSI

MINISTÈRE DES ENSEIGNEMENTS SECONDAIRES	LYCÉE D'AFANOYOA	Année scolaire : 2021/2022	
Examen : Baccalauréat blanc	Epreuve de : MATHÉMATIQUES	Classe : Tle C	Durée : 4h Coefficient : 7

## I – EVALUATION DES RESSOURCES :

### Exercice 1: (10 pts)

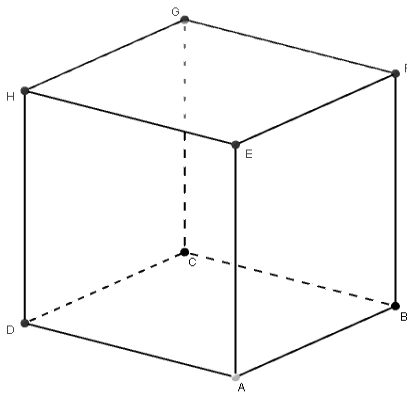
I - On considère l'endomorphisme  $f$  d'espace vectoriel  $E$  qui à tout vecteur  $\vec{u}(x; y; z)$  associe le vecteur

$$f(\vec{u}) = \vec{u}'(x'; y'; z') \text{ dans la base orthonormée } B = (\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}) \text{ tel que } \begin{cases} x' = 2x - y + z \\ y' = x - y \\ z' = y + z \end{cases}.$$

- Démontrer que l'ensemble  $F = \{\vec{u} \in E \text{ tel que } f(\vec{u}) = \vec{u}\}$  est un espace vectoriel dont on précisera une base et la dimension. **(1,5 pt)**
- Démontrer que  $f$  n'est pas bijective. **(1 pt)**
- Démontrer que  $\text{Im}(f)$  est un plan vectoriel dont on précisera une équation cartésienne. **(1,5 pt)**

II - On considère les plans  $(P): x - 2y - z + 1 = 0$  et  $(P'): x + y - z = 0$ .

- Déterminer l'expression analytique de la réflexion  $S_{(P)}$  de plan  $(P)$ . **(2 pts)**
- Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la composée  $S_{(P)} \circ S_{(P')}$ . **(1 pt)**
- En déduire l'expression analytique de  $S_{(P)} \circ S_{(P')}$ . **(2 pts)**
- Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des composées  $S_{(ADE)} \circ S_{(HGF)}$  et  $S_{(AB)} \circ S_{(DC)}$ . **(1 pt)**



### Exercice 2 : (14 pts)

#### Partie A : (09 pts)

Soient les fonctions  $f$  et  $h$  définies sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{1+2\ln(x)}{x^2}$ , et  $h(x) = \frac{1}{x}$ . On désigne par  $(C_f)$  et  $(C_h)$  leurs courbes représentatives.

- On considère la fonction  $g$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  $g(x) = 1 - x + 2\ln(x)$ .
  - Dresser le tableau de variation de  $g$ . **(1,5 pt)**
  - En déduire que l'équation  $g(x) = 0$  admet une autre solution notée  $\alpha \in ]3,5; 3,6[$ . **(0,5 pt)**
  - Déduire le signe de  $g$ . **(0,5 pt)**
- Montrer que  $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$  et donner une valeur approchée de  $f(\alpha)$  à  $10^{-1}$  près. **(0,75 pt)**
- Montrer que pour tout  $x > 0$ ,  $f(x) - h(x) = \frac{g(x)}{x^2}$  et déduire les positions relatives de  $(C_f)$  et  $(C_h)$ . **(0,75 pt)**
- Déterminer les limites de  $f$  en 0 et  $+\infty$  puis donner une interprétation géométrique des résultats. **(1 pt)**
- Dresser le tableau de variation de  $f$ . **(1,5 pt)**
- Tracer les courbes  $(C_f)$  et  $(C_h)$  dans un même repère orthonormé  $(O, \vec{i}; \vec{j})$ . On prendra 2 cm comme unité sur les axes du repère. **(2 pts)**

## Partie B : (5 pts)

Soit le domaine  $D$  du plan défini par l'ensemble des points  $M(x; y)$  tels :  $\begin{cases} 1 \leq x \leq \alpha \\ h(x) \leq y \leq f(x) \end{cases}$ .

- Déterminer à l'aide d'une intégration par partie une primitive de la fonction  $k(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ . On pourra poser  $u'(x) = \frac{1}{x^2}$  et  $v(x) = g(x)$ . **(1 pt)**
- Représenter le domaine  $D$  et calculer l'aire  $A(\alpha)$  du domaine  $D$ . **(1,5 pt)**
- Soit la suite  $(I_n)$  définie pour tout entier naturel non nul  $n$  par  $I_n = \int_n^{n+1} f(x) dx$ .
  - Justifier que pour tout  $x \geq 4$ ,  $f(x) - h(x) < 0$ . **(0,25 pt)**
  - En déduire que pour tout  $n \geq 4$ ,  $0 \leq I_n \leq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ . **(0,75 pt)**
  - Déterminer la limite de  $I_n$  et déduire que  $(I_n)$  est convergente. **(0,75 pt)**
  - Exprimer  $S_n = I_1 + I_2 + \dots + I_n$  en fonction de  $n$ . On pourra remarquer que  $f(x) = \frac{g(x)}{x^2} + h(x)$ . **(0,75 pt)**

## Exercice 3 : (6 pts)

Le plan complexe est muni du repère orthonormé  $(O, \vec{e}_1; \vec{e}_2)$ . Soit  $M(x; y)$  et  $Z = x + iy$  son affixe dans le plan complexe. On pose  $f(Z) = \frac{Z^5 - Z}{Z^3 - Z}$  et on considère les points  $M'$  et  $M''$  d'affixes  $Z^3$  et  $Z^5$  respectives.

- Déterminer la nature et les éléments caractéristiques (centre, foyers, excentricité, sommets, axe focal) de l'ensemble des points  $M$  du plan tel que  $f(Z)$  soit un imaginaire pur. **(2 pts)**
- Déterminer tous les points  $M$  de coordonnées entières tels que  $f(Z) = 4 - 4i$ . **(2 pts)**
- Montrer que si le point  $M$  appartient aux axes du repère alors, les points  $M, M'$  et  $M''$  sont alignés. **(2 pts)**

## II - EVALUATION DES COMPETENCES : (09 pts)

En économie, on définit le coût marginal, dépense marginale et bénéfice marginal en fonction de la quantité produite comme étant la dérivée du coût total, dépense totale ou bénéfice total correspondante à cette production. KARL hérite de l'entreprise de production de fèves cacao de son père et veut produire 1000 tonnes de fèves de cacao. En fouillant les archives de l'entreprise, il constate que son père avait commencé avec un capital de 1 million pour une production d'environ égale à  $\ln(40)$  tonnes de fèves et le coût marginal  $C_m(Q)$  et le coût total  $C_T(Q)$  exprimés en millions de FCFA et pour une production  $Q$  exprimée en tonnes sont liés par la relation  $C_m(Q) = \frac{1}{100} C_T(Q)$ .

Une étude comparative sur 6 ans entre la dépense effectuée et les bénéfices réalisés chaque année a conduit aux résultats confinés dans le tableau ci-dessous :

Dépenses (en millions de FCFA)	1	3	5	7	9	11
Bénéfices (en million de FCFA)	1,5	3,5	6	8	10,5	13,5

Karl veut faire une dépense de 20 millions de FCFA et souhaite avoir une estimation de son bénéfice en fin d'année. Il présente ces données à un ingénieur statisticien qui affirme qu'il existe une très bonne corrélation linéaire entre les dépenses et les bénéfices et lui propose une estimation par la méthode des moindres carrés de son bénéfice.

Taches :

- Déterminer le coût total pour la réalisation du projet de KARL. **(3 pts)**
- Vérifier par des calculs la parfaite corrélation linéaire entre les dépenses et les bénéfices réalisés. **(3 pts)**
- Donner une estimation du bénéfice à réaliser par la méthode proposée par l'ingénieur. **(3 pts)**

## Présentation :

**(1 pt)**



FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGES N° 1 : CLASSE DE T<sup>le</sup> C,D,TI

NOMBRES COMPLEXES : APPROCHE ALGEBRIQUE

EXERCICE 1

Détermine l'écriture algébrique de chacun des nombres complexes suivants :

$$z_1 = 5(2 + 3i) - 3(4 - 5i) ; z_2 = (3 - i)(4 - 5i) ; z_3 = -4i(5 + i) - 3i ; z_4 = (3 - 4i)(3 + 4i).$$

EXERCICE 2

1. Détermine le conjugué du nombre complexe  $z$  dans chaque cas :

$$z = 3 - i ; z = -3 - i ; z = 2i ; z = -3$$

2. Détermine le module de chacun des nombres complexes suivants :

$$z = 3 + i ; z = -1 - 2i ; z = 1 - i ; z = (3 + i)(1 + 2i)$$

3. Résous dans  $\mathbb{C}$  les équations suivantes :

$$a) 3z - 4i = (2 - i)z + 1 - i ; b) \frac{z+1}{z-i} = 2i ; c) 3z - i\bar{z} = 1 + 2i$$

EXERCICE 3

1. Détermine les racines carrées du nombre complexe  $\Delta = -3 + 4i$ .

2. Résous dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $(E) : z^2 + (3 - 6i)z - 6 - 10i = 0$ .

EXERCICE 4

On considère dans  $\mathbb{C}$  le polynôme  $P$  à variable complexe  $z$  défini par :

$$P(z) = (1 + i)z^3 - (3 + 2i)z^2 + (4 + 2i)z - 2.$$

1. Montre que  $1 + i$  est une racine de  $P$ .

2. On admet qu'il existe 3 nombres complexes  $a, b$  et  $c$  tels que :  $P(z) = (z - 1 - i)(az^2 + bz + c)$ .

(a) Montre que  $a = 1 + i; b = -3$  et  $c = 1 - i$ .

(b) Résous alors dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $P(z) = 0$ .

3. On considère l'ensemble  $\mathcal{E}$  des points  $M$  du plan d'affixe  $z \neq 1 - i$  tels que le nombre complexe  $z' = \frac{z}{z - 1 + i}$  soit imaginaire pur.

(a) En posant  $z = x + iy$ , montre que :  $z' = \frac{x^2 + y^2 - x + y}{(x-1)^2 + (y+1)^2} - i \frac{x + y}{(x-1)^2 + (y+1)^2}$ .

(b) Détermine alors  $\mathcal{E}$ .

EXERCICE 5

1. Résous dans  $\mathbb{C}^2$  le système suivant : 
$$\begin{cases} 3z - 2iz' = 5 - 5i \\ 2iz - 3z' = -1 - i \end{cases}$$

2. Soit  $z \in \mathbb{C}^* - \{1\}$  de module 1. Montre que  $Z = \frac{z+1}{z-1}$  est imaginaire pur.

## EXERCICE 6

Pour la construction de son nouveau siège, L'INS (Institut National de Statistiques) a acheté un terrain de forme rectangulaire dont les coordonnées géodésiques des sommets sont les points images des solutions de l'équation

$$(E) : \left[ z^2 + (-20 + 40i)z - 300 - 1200i \right] \left[ z^2 + (40 - 20i)z + 300 - 1200i \right] = 0.$$

L'unité de longueur est le mètre. L'INS engage un ingénieur en bâtiment pour clôturer la parcelle.

Celui-ci propose un devis de 17.225 FCFA par mètre de mur tout en prévoyant une ouverture de 5m pour un portail estimé à 1.002.500 FCFA.

**Tâche :** Détermine le montant total du devis présenté par l'ingénieur.

## EXERCICE 7

On considère dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $(E) : z^3 - (1-i)z^2 + (1-i)z + i = 0$ .

1. Montre que  $(E)$  possède une unique solution imaginaire pure que l'on précisera.
2. Résous dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $(E)$ .

## EXERCICE 8

1. Montre que  $(1+i)^6 = -8i$ .
2. On considère l'équation  $(E) : z^2 = -8i$ .

Déduis-en de 1. une solution de l'équation  $(E)$ . Détermine l'autre solution.

## EXERCICE 9

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . Soit  $M$  le point d'affixe  $z \neq -3+i$  et  $Z$  le nombre complexe défini par :  $Z = \frac{z+2i}{z+3-i}$ .

1. On pose  $z = x + iy$  avec  $x, y \in \mathbb{R}$ .  
Détermine en fonction de  $x$  et  $y$  la partie réelle et la partie imaginaire de  $Z$ .
2. Soit  $\mathcal{E}$  l'ensemble des points  $M(x, y)$  du plan tels que  $Z$  soit imaginaire pur et  $\mathcal{D}$  l'ensemble des points  $M(x, y)$  du plan tels que  $Z$  soit réel.
  - (a) Détermine et construis  $\mathcal{E}$ .
  - (b) Détermine et construis  $\mathcal{D}$ . Unité graphique : 2cm.

## EXERCICE 10

1. (a) Ecris  $(1 - 3i\sqrt{3})^2$  sous la forme algébrique.  
(b) Résous dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $z^2 - (9 + i\sqrt{3})z + 26 + 6i\sqrt{3} = 0$ .
2.  $P$  est le polynôme à variable complexe  $z$  défini par  $P(z) = z^3 - \alpha z^2 + (29 - 3i\sqrt{3})z - 18 + 26i\sqrt{3}$  où  $\alpha$  est un nombre complexe.
  - (a) Détermine  $\alpha$  sachant que  $-i\sqrt{3}$  est une racine de  $P$ .
  - (b) Détermine les nombres complexes  $b$  et  $c$  tels que :
$$z^3 - \alpha z^2 + (29 - 3i\sqrt{3})z - 18 + 26i\sqrt{3} = (z + i\sqrt{3})(z^2 + bz + c).$$



FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGES N° 2 : CLASSE DE T<sup>1e</sup> C,D,TI

FONCTIONS NUMERIQUES

EXERCICE 1

1. Calcule les limites suivantes :

a)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x-3}$  ; b)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x + \sqrt{x} - 6}{\sqrt{x} - 2}$  ; c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + \sqrt{x^2 - 1})$  ; d)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2 \cos x - 1}{3x - \pi}$

2. Soit  $f$  une fonction vérifiant la relation  $|f(x) + 2| \leq \frac{4x}{x^2 + 1}$ .  
Détermine  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

3. Soit  $h$  la fonction définie par  $h(x) = \frac{-1 + \sqrt{x+1}}{x}$ .

(a) Détermine l'ensemble de définition de  $h$ .

(b) Démontre que  $h$  admet un prolongement par continuité en 0 et le définir.

EXERCICE 2

Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = 2x^3 + x^2 - 1$ .

1. Etudie les variations de  $g$ .

2. Montre que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  dans  $\mathbb{R}$ .

3. Donne un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude 0,1.

4. Dédus-en le signe de  $g(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .

EXERCICE 3

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \sqrt{x^2 + 4} - \frac{x}{2} - 2$  et  $(C_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1. Calcule  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

2. Etudie les branches infinies de  $(C_f)$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .

EXERCICE 4

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $]1; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{1}{x-1} - \sqrt{x}$ .

1. Montre que  $f(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} = x$ .

2. Prouve que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\lambda$  sur  $]1; 2[$ .

3. On note  $g$  la fonction définie sur  $]1; +\infty[$  par  $g(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$ .

(a) Montre que pour tout  $x$  dans  $]1; +\infty[$ ,  $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$ .

(b) Dédus-en que pour tout  $x$  dans  $]1; +\infty[$ ,  $|g(x) - \lambda| \leq \frac{1}{2}|x - \lambda|$ .

## EXERCICE 5

Soit  $f$  la fonction numérique d'une variable réelle définie sur  $[-1;1]$  par :  $f(x) = (1 - \sqrt{|x|})^2$ .  
On note  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans le repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . (unité graphique : 3cm)

1. Etudier la parité de  $f$ . Quelle conséquence géométrique peut-on en déduire ?
2. Soit  $g$  la restriction de  $f$  à  $[0;1]$ .
  - (a) Vérifier que  $g(x) = (1 - \sqrt{x})^2$  pour tout  $x \in [0;1]$ .
  - (b) Etudier la dérivabilité de  $g$  à droite en 0. Qu'en conclure pour la courbe  $\mathcal{C}$  de  $f$  ?
  - (c) Montrer que pour tout  $x \in ]0;1]$ ,  $g'(x) = \frac{-1 + \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ .
  - (d) Dresser le tableau de variation de  $g$ .
3. (a) Représenter soigneusement dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  la courbe  $\mathcal{C}$  de  $f$ .  
(b) Construire dans le même repère la courbe  $\mathcal{C}'$  de la fonction  $h : x \mapsto -f(x)$ .

## EXERCICE 6

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0; \pi[$  par  $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ .

On désigne par  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1. Etudier la fonction  $f$  et construire  $\mathcal{C}$ .
2. Montrer que la restriction  $g$  de  $f$  à l'intervalle  $]0; \frac{\pi}{2}[$  possède une fonction réciproque  $g^{-1}$ , dont on construira la courbe dans le même repère que  $\mathcal{C}$ .
3. Soit  $y = g^{-1}(x)$ . Montrer que  $\sin y = \frac{1}{x}$  et que  $\cos y = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}$ .
4. Montrer que  $g^{-1}$  est dérivable sur  $]1; +\infty[$  et que pour tout  $x \in ]1; +\infty[$ , on a :
$$(g^{-1})'(x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}.$$

## EXERCICE 7

L'agence spatiale américaine (**NASA**) localise une comète se dirigeant suivant la courbe  $C_f$  de la fonction  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$  par  $f(x) = 3 + \sqrt{x}$  vers la planète terre et, programme alors le lancement d'un missile longue portée suivant la direction de la courbe  $C_g$  de la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = 2x^2$ .

**Tâche** : Est-il possible que le missile intercepte la comète ?

## EXERCICE 8

Soit  $f$  la fonction définie sur  $I = ]-1; 1[$  par  $f(x) = -1 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ .

1. Etudie les variations de  $f$  et dresse son tableau de variation.
2. Construis la courbe  $C_f$  tout en précisant ses points d'intersection avec les axes du repère.
3. (a) Montre que  $f$  réalise une bijection de  $I$  sur un intervalle  $J$  à préciser.  
(b) Construis  $C_{f^{-1}}$  dans le repère précédent.  
(c) Explicite  $f^{-1}(x)$  en fonction de  $x$ .

L'épreuve comporte deux parties A et B. Pour la partie A, les exercices 1, 2 et 5 sont obligatoires alors les exercices 3 et 4 sont aux choix. Le candidat traitera un de ces deux exercices aux choix.

L'utilisation de la calculatrice et du matériel usuel de géométrie est autorisée.

**PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES [15.5 points]**

**EXERCICE 1 / 05 points**

- Démontrer par récurrence que :
  - $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{p=1}^n (-1)^{p+1} (2p-1) = (-1)^{n+1} n.$  [0,75pt]
  - $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}.$  [1pt]
  - $\forall n \in \mathbb{N}, 5^{2n} - 3^n$  est divisible par 11. [0,5pt]
  - Soit  $a$  et  $b$  deux entiers, montrer que pour tout entier naturel  $n \geq 2$  on a :
$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$
 [0,75pt]
- Ecrire l'entier  $3^{10} - 1$  en base 9. [0,25pt]
- Résoudre dans  $\mathbb{Z}^2$ , l'équation  $x^3 - y^3 = 386.$  [0,5pt]
- On se propose de déterminer tous les éléments  $(a, b)$  de  $\mathbb{N}^2$  qui vérifient la relation :
$$PPCM(a, b) - 9PGCD(a, b) = 13.$$
  - Résoudre dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation :  $x - 9y = 13.$  [0,25pt]
  - Déterminer tous les éléments  $(a, b)$  de  $\mathbb{N}^2$  qui vérifient la relation :
$$PPCM(a, b) - 9PGCD(a, b) = 13.$$
 [1pt]

**EXERCICE 2 / 4 points**

- En utilisant les propriétés des congruences, montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, 9^{n+1} + 2^{6n+1}$  est divisible par 11. [0,5pt]
- Soit  $a = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}$  un entier écrit sous sa symbolisation décimale.
  - Montrer que  $a \equiv \overline{a_1 a_0} [100].$  [0,5pt]
  - En déduire le chiffre des unités et des dizaines de l'entier  $n = 201^{2018^{2017}}.$  [1pt]
- Soit un entier naturel  $M$  s'écrivant  $M = \overline{xyzzyx}$  dans le système décimal.
  - Montrer que  $M$  est un multiple de 11. [0,5pt]
  - Déterminer  $x$  et  $z$  tels que  $M$  soit divisible par 5 et par 7. [0,75pt]
  - En déduire que  $M$  est un multiple de 35. [0,25pt]
  - Déterminer  $y$  pour que  $M$  soit un multiple de 3. [0,5pt]

**EXERCICE 3 / 2 points**

- Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel  $n$  le reste de la division euclidienne de  $n^2 - n + 1$  par 7. [0,5pt]
  - En déduire le reste de la division euclidienne de  $(2755674)^2 - 2755674 + 1$  par 7. [0,25pt]
- Résoudre dans  $\mathbb{Z}$ , l'équation  $x^2 + x - 6 \equiv 0 [6].$  [0,5pt]
- On pose  $S_n = 2^n + 5^n + 7^n$  pour tout entier naturel  $n$ .
  - Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel  $n$ , le reste de la division euclidienne de  $S_n$  par 9. [0,5pt]
  - En déduire le reste de la division euclidienne par 9 de l'entier  $B = (1793)^{2019} + (1796)^{2019} + (1798)^{2019}.$  [0,25pt]

#### **Exercice 4 / 2points**

1. Trouver les paires d'entiers naturels dont le plus grand diviseur commun  $d$  et le plus petit multiple commun  $m$  vérifient :  $\begin{cases} m + 3d = 276 \\ 10 < d < 30 \end{cases}$  [1pt]
2. On considère un nombre entier  $a \geq 2$ . Soit  $n$  un entier naturel non nul et  $d$  un diviseur positif de  $n$  ( $n = dk$ ).
  - a. Montrer que  $a^d - 1$  est un diviseur de  $a^n - 1$  (On pourra remarquer que pour tout entier naturel  $k$  non nul et  $\forall x \in \mathbb{N} : (x - 1)(1 + x + x^2 + \dots + x^{k-1}) = x^k - 1$ ). [0,25pt]
  - b. Dédurre de la question précédente que  $2^{2004} - 1$  est divisible par 7, par 63 puis par 9. [0,75pt]

#### **EXERCICE 5 / 4.5 points**

Le plan complexe est muni du repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

1. Soit le polynôme  $P$  de  $\mathbb{C}$  défini par :  $P(z) = z^3 - (5 + i)z^2 + (10 + 6i)z - 8 - 16i$ .
  - a) Montrer que le polynôme  $P(z)$  admet une racine  $z_0$  imaginaire pure. [0,5pt]
  - b) Déterminer les nombres complexes  $a$  et  $b$  tels que  $P(z) = (z - 2i)(z^2 + az + b)$ . [0,5pt]
  - c) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $P(z) = 0$ . [0,5pt]
2. Soit les points  $A(3 + i), B(2i)$  et  $C(2 - 2i)$ .
  - a) Placer les points  $A, B$  et  $C$  dans le plan. [0,75pt]
  - b) Démontrer que le triangle  $ABC$  est rectangle et isocèle. [0,5pt]
  - c) Déterminer l'affixe du point  $I$  milieu du segment  $[BC]$ . [0,25pt]
  - d) Montrer que les points  $A, B$  et  $C$  sont situés sur un même cercle dont-on précisera le centre et le rayon, puis construire. [0,5pt]
  - e) Déterminer l'affixe du point  $J$  symétrique de  $A$  par rapport à  $I$ . [0,25pt]
  - f) Déterminer l'affixe du point  $D$  tel que le quadrilatère  $ABCD$  soit un parallélogramme. [0,25pt]

#### **PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES [4.5 points]**

##### **Tâche1 :**

Un terrain a la forme d'un triangle dont les côtés ont pour mesures 132m ; 156m et 204m. On veut planter des arbres sur son pourtour de façon à ce qu'il ait un arbre à chaque sommet du triangle et les arbres soient également espacés.

Quel est le nombre minimum d'arbres que l'on pourra planter si l'on veut que la distance entre deux arbres puisse être exprimée par un nombre entier de mètre ? [1,5pt]

##### **Tâche2 :**

Monsieur Dongmo dispose d'un terrain ayant la forme d'un quadrilatère dont les longueurs des cotés en mètre  $a, b, c$  et  $d$  formant dans cet ordre les termes consécutifs d'une suite géométrique de raison  $r$  strictement supérieur à 1. Il ne se souvient plus des dimensions, mais il se rappelle que  $a$  est strictement inférieur à 13 mètre et que  $r$  est premier avec  $a$ . Déterminer les dimensions de ce terrain sachant que  $10a^2 = d - b$ . [1,5pt]

##### **Tâche3 :**

Un phare émet trois feux différents : un rouge toutes les 18 secondes ; un vert toutes les 45 secondes et un blanc toutes les 2 minutes 30 secondes. Ces trois feux sont émis simultanément à minuit.

Trouver les instants d'émissions simultanés de feux : a) Rouge et vert b) Rouge et blanc c) Vert et blanc d) Rouge ; vert et blanc [1,5pt]

*« Quand vous vous demandez où est Dieu pendant les périodes difficiles de votre vie, souvenez-vous que le professeur reste toujours silencieux pendant l'examen ». (ALBERT Einstein)*

**EPREUVE DE MATHÉMATIQUE**

NB : la clarté et la rédaction seront prises en compte

**PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES (15 Points)**

**Exercice 1 : ( 5 POINTS)**

- 1) Soit  $a$  et  $b$  deux entiers naturels non nuls. Démontrer que 1pt  
 $PGCD(4a + 3b; 5a + 4b) = PGCD(a; b)$
- 2)  $P$  est un nombre premier.
  - a) Montrer que pour tout  $k$  tel que  $1 \leq k \leq P - 1$  ;  $C_P^k$  est divisible par  $P$ . 0.75pt
  - b) Soit  $x, y$  deux entiers naturels non nuls. Montrer que  $(x + y)^P \equiv x^P + y^P [P]$ . 0.75pt
  - c) Démontrer par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}^* P$  divise  $n^P - n$ . 0.75pt
  - d) En déduire que pour tout entier naturel  $n$  premier avec  $P$ ,  $P$  divise  $n^{P-1} - 1$  0.5pt
- 3) Montrer que  $xy(x^5 - y^5)$  est divisible par 5 0.5pt
- 4) Prouver que pour tout  $k \in \{2; 3; 4; 5\}$ ,  $5! + k$  n'est pas un nombre premier 0.75pt

**Exercice 2 ( 4 POINTS)**

On considère l'équation complexe (E):  $z^3 - (5 + 7i)z^2 - (4 - 25i)z - 12i + 30 = 0$ .

- 1) a) Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure  $z$  que l'on déterminera. 0.5pt  
b) Déterminer les complexes  $a$  et  $b$  tels que pour tout complexe  $z$ , on ait :  
 $z^3 - (5 + 7i)z^2 - (4 - 25i)z - 12i + 30 = (z - z_0)(z^2 + az + b)$ . 0.75pt  
c) Résoudre l'équation (E). 0.5pt
- 2) Le plan est rapporté au repère  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ . Soient A, B et C les points d'affixes respectives  $3; 2i$  et  $2 + 5i$ . Soit  $s$  la similitude directe de centre A qui transforme B en C.
  - a) Montrer que l'écriture complexe de  $s$  est :  $z' = (1 - i)z + 3i$  ; puis déterminer l'angle de  $s$ . 0.75pt
  - b) Soit D l'image de C par  $s$ . Déterminer l'affixe de D. 0.5pt
  - c) Quelle est la nature du triangle ACD ? Justifier votre réponse. 0.5pt
- 3) Soit  $f$  l'application, qui à tout nombre complexe  $z$  différent de  $2i$ , associe  $f(z) =$ 
  - a) On pose  $z = x + iy$  et  $f(z) = X + iY$ . Exprimer en fonction de  $X$  et  $Y$  en fonction de  $x$  et  $y$ . 1pt
  - b) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe  $z$  tels que  $f(z)$  soit un réel. 0.5pt
  - c) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe  $z$  tels que  $|f(z)| = 1$ . 0.5pt

**Exercice 3 ( 6 POINTS)**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ .

On pose  $Z_1 = \frac{\sqrt{6-i\sqrt{2}}}{2}$  et  $Z_2 = 1 + i$

- 1) Déterminer la forme exponentielle de  $z_1$  ;  $z_2$  et  $z = z_1 \times z_2$  1.5pt
- 2) Déterminer la forme algébrique de  $z$ . 0.5pt
- 3) En déduire la valeur exacte de  $\cos(\frac{\pi}{12})$  et de  $\sin(\frac{\pi}{12})$ . 0.5pt
- 4) Soit  $n$  un entier relatif. Démontrer que l'ensemble des relatifs  $n$  tels que  $(1 + i)^n$  soit un réel est  $4\mathbb{Z}$  0.5pt

5) Déterminer et construire l'ensemble des points  $M$  dont l'affixe  $z$  vérifie la condition indiquée

a)  $|\bar{z} + z - 1| = 4$

1pt

b)  $\arg(z + 1) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$

1pt

c)  $\frac{z+i}{z-1}$  est un imaginaire pur non nul

1pt

**PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES (4,5 Points)**

**Situation**

Dans le but de protéger la confidentialité des échanges des militaires sur un front de guerre, les responsables militaires ont contacté une agence de sécurité pour mettre sur pied un procédé de codage des informations échangées par les militaires. Le manifeste de confidentialité que l'ingénieur de l'agence a mis sur pieds stipule qu'à chaque lettre de l'alphabet, on associe grâce au tableau ci-dessous un nombre entier compris entre 0 et 25. Le procédé de codage est le suivant.

**Etape 1 :** A la lettre que l'on veut coder, on associe le nombre  $k$  correspondant dans le tableau.

**Etape 2 :** On calcule le reste de la division euclidienne de  $6k + 5$  par 26 et on le note  $r$ .

**Etape 3 :** Au nombre  $r$ , on associe la lettre correspondante dans le tableau.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Mais le général NCHARE lui aussi informaticien de formation propose plutôt qu'à l'étape 2,  $r$  soit le reste de la division euclidienne de  $(\overline{110}^2)^k$  par 26.

**Tâches :**

1) Coder Le mot : **COLLEGE** selon le procéder de l'ingénieur.

1.5pt

2) Décoder le sigle : **NSA** selon le procédé de l'ingénieur.

1.5pt

3) Décoder le sigle: **TIR** selon votre procédé proposé par général NCHARE

1.5pt

**Présentation 0.5 pt**



Département de Mathématiques

*L'épreuve est étalée sur deux pages.*

**PARTIE A : ÉVALUATION DES RESSOURCES (15 points)**

**Exercice ①**

**5,5 points**

On veut déterminer l'ensemble **T(P)** des triplets  $(x, y, z)$  de  $(\mathbb{N}^*)^3$  vérifiant l'équation (E) :  $x^2 + y^2 = z^2$ .

**N.B :** Un élément de **T(P)** est appelé triplet pythagoricien.

1) Montrer que  $\forall (k, a, b) \in (\mathbb{N}^*)^3$  avec  $a > b$ , les triplets  $(ka^2 - kb^2, 2kab, ka^2 + kb^2)$  et  $(2kab, ka^2 - kb^2, ka^2 + kb^2)$  sont des éléments de **T(P)**. 0,25 pt

Dans toute la suite,  $(x, y, z)$  désigne un élément de **T(P)**, et on pose  $\delta = \text{pgcd}(x, y)$ , et  $(u, v)$  est le couple d'entiers naturels tels que  $x = \delta u$  et  $y = \delta v$ .

2) a) Montrer que  $\text{pgcd}(x, z) = \text{pgcd}(y, z) = \delta$ . 0,5 pt

b) Justifier que  $\text{pgcd}(u, v) = \text{pgcd}(u, w) = \text{pgcd}(v, w) = 1$  où  $w$  est l'entier vérifiant  $z = \delta w$ . 0,5 pt

c) Justifier que  $u$  et  $v$  ne sont pas tous pairs. 0,5 pt

d) Montrer que  $(u, v, w)$  est un élément de **T(P)**. 0,25 pt

3) a) Montrer que l'équation  $n^2 \equiv 2[4]$  n'a pas de solutions dans  $\mathbb{N}$ . 0,5 pt

b) Montrer que si  $u$  et  $v$  sont tous impairs, alors  $u^2 + v^2 \equiv 2[4]$ . 0,25 pt

c) En déduire que  $u$  et  $v$  ne sont pas tous impairs

4) On suppose  $u$  impair, et  $v$  pair.

*On admet que si  $(k, k')$  est un couple d'entiers naturels tous non nuls, premiers entre eux tels que  $kk'$  soit un carré parfait, alors  $k$  et  $k'$  sont des carrés parfaits.*

a) Montrer que  $w$  est impair, et que  $w + x$  et  $w - x$  sont pairs. 0,5 pt

b) En déduire qu'il existe un couple  $(p, q)$  d'entiers naturels tous non nuls et premier entre eux tels que  $u = p - q$ ;  $w = p + q$  et  $v^2 = 4pq$ . 0,5 pt

c) Justifier que  $pq$  est un carré parfait. 0,25 pt

d) En déduire l'existence d'un couple  $(a, b)$  d'entiers naturels tous non nuls avec  $a > b$  tel que :  $u = a^2 - b^2$ ;  $v = 2ab$  et  $w = a^2 + b^2$ . 0,5 pt

5) a) Déterminer l'ensemble **T(P)**. 0,5 pt

b) Déterminer tous les triplets  $(x, y, z)$  de **T(P)** pour lesquels  $z \leq 18$ . 0,5 pt

**Exercice ②**

**3,75 points**

AIBJ est un rectangle tel que  $\widehat{\text{mes}(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AJ})} = \frac{\pi}{3}$  et  $AI = 4$ . On nomme par H le projeté orthogonal de J sur la droite (AB).

1) a) Faire une figure, puis montrer que  $AJ = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ . 0,5 pt

b) On pose  $\vec{u} = \frac{1}{4}\vec{AI}$  et  $\vec{v} = \frac{\sqrt{3}}{4}\vec{AJ}$ . Montrer que  $(A, \vec{u}, \vec{v})$  est un repère orthonormé direct du plan. 0,25 pt

*Dans toute la suite, on suppose le plan muni du repère  $(A, \vec{u}, \vec{v})$ .*

2) a) Déterminer  $z_I, z_J$  et  $z_B$  les affixes respectives des points I, J et B. 0,75 pt

b) Etablir que l'affixe  $z_H$  du point H vérifie :  $z_H = \frac{1}{3}(3 + i\sqrt{3})$ . 0,25 pt

3) Soit  $s$  la similitude directe qui transforme B en J et J en A.

a) Donner l'écriture complexe de  $s$ , puis, déterminer le rapport et l'angle de  $s$ . 0,75 pt

b) Vérifier que H est le centre de  $s$ . 0,25 pt

4) a) Déterminer la nature exacte de  $s \circ s$ , ainsi que ses éléments caractéristiques. (Indication : On pourra d'abord donner l'écriture complexe de  $s \circ s$ ) 0,5 pt

b) Sans faire des calculs, montrer que  $\vec{HA} = -\frac{1}{3}\vec{HB}$ . 0,25 pt

5)  $\varphi$  est la similitude directe de centre B et d'angle  $-\frac{\pi}{2}$  et de rapport  $\sqrt{3}$ .

Montrer que  $s \circ \varphi$  est une translation de vecteur  $\vec{BJ}$ . 0,25 pt

**Exercice 3****5,75 points**

Sur  $]0; +\infty[$ , on définit les fonctions  $f$  et  $g$  par :  $f(x) = \ln x - x \ln x + x$  et  $g(x) = \frac{1}{x} - \ln x$ .

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  où l'unité sur les axes est 2 cm.

$(\mathcal{C})$  est la courbe représentative de  $f$  dans  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

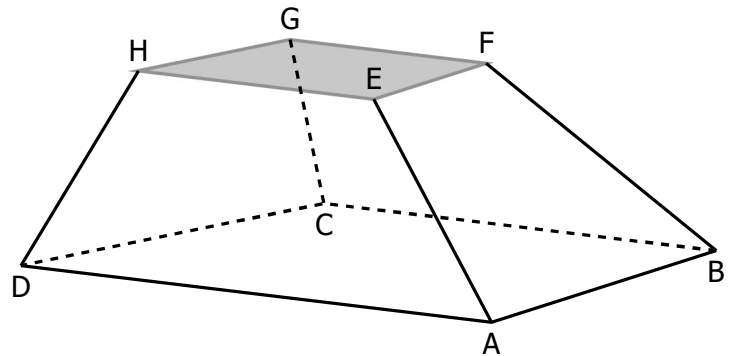
- 1) Déterminer :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ . 0,75 pt
- 2) a) Etudier les variations de  $g$ . 0,5 pt  
 b) Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet dans  $]0; +\infty[$  une unique solution  $\alpha$  et que  $1,7 < \alpha < 1,8$ . 0,5 pt  
 c) Etudier le signe de  $g(x)$  pour  $x \in ]0; +\infty[$ . 0,5 pt
- 3) a) Vérifier que pour tout  $x$  de  $]0; +\infty[$ ,  $f'(x) = g(x)$ , puis dresser le tableau de variations de  $f$ . 0,75 pt  
 b) Montrer que  $(\mathcal{C})$  coupe l'axe des abscisses en deux points d'abscisses  $x_1$  et  $x_2$  telles que :  
 $0,4 < x_1 < 0,5$  et  $3,8 < x_2 < 3,9$ . 0,5 pt
- 4) a) Etudier les branches infinies de  $(\mathcal{C})$ . 0,5 pt  
 b) Montrer que  $f(\alpha) = \alpha + \frac{1}{\alpha} - 1$ . 0,25 pt
- 5) a) Placer les points de  $(\mathcal{C})$  d'abscisses  $x_1$ ,  $x_2$  et  $\alpha$  dans  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . (On prendra  $f(\alpha) \approx 1,33$ ) 0,25 pt  
 b) Tracer  $(\mathcal{C})$ . 0,5 pt
- 6)  $(\mathcal{D})$  est le domaine plan délimité par  $(\mathcal{C})$ , les droites d'équations  $x = 1$ ,  $x = 3$  et  $y = 0$ .  
 a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer  $I = \int_1^3 (1-x) \ln x \, dx$ . 0,5 pt  
 b) En déduire l'aire exacte du domaine plan  $(\mathcal{D})$ . 0,25 pt

**PARTIE B : ÉVALUATION DES COMPÉTENCES (5 points)****Pallier de compétences :**

Résoudre une situation problème, déployer un raisonnement logique et communiquer à l'aide d'un langage mathématique en faisant appel aux nombres complexes, aux équations diophantiennes et le produit vectoriel.

**Situation :**

La société **Green Planet** fait dans la culture du maïs bio et sa transformation en farine. Pour diversifier ses activités, elle envisage se lancer dans l'élevage des poissons tilapia, et ceci par la création d'un étang. L'étang en question a la forme d'un triangle PQR, où  $P(1+2i)$ ;  $Q(2+i)$  et  $R(4+3i)$  dans un repère orthonormé direct où l'unité sur les axes est 1 hm (1 hectomètre). Dans cet étang, on introduira 4 alevins de tilapia au mètre carré.



La société **Green Planet** ayant connu des difficultés pour le stockage de ses récoltes, opte se construire un entrepôt pouvant contenir au moins  $250 \text{ m}^3$  de farine de maïs. L'ingénieur **Bita** approché pour la réalisation de l'entrepôt propose une structure en forme de tronc de pyramide ABCDEFGH (Voir figure ci-dessus) où  $A(0;3;0)$ ,  $B(-4;4;0)$ ,  $C(-4;-1;0)$ ,  $D(0;-3;0)$ ,  $E(0;\frac{3}{2};\frac{5}{2})$ ,  $F(-2;2;\frac{5}{2})$ ,  $G(-2;-\frac{1}{2};\frac{5}{2})$  et  $H(0;-\frac{3}{2};\frac{5}{2})$  dans un repère orthonormé direct de l'espace où l'unité sur chaque axe est 1,5 m.

**Green Planet** a des employés très ardues au travail. Pour les motiver, une prime de 7 500 fcfa devra être allouée à chaque employé femme, et une prime de 7000 fcfa pour chaque employé homme.

Le comptable de la société aimerait déterminer le budget mensuel pour la paie de ces primes. Il se rend chez le Directeur des ressources humaines qui déclare que la taille moyenne des employés est 167 cm, la taille moyenne des employés femmes est 160 cm, la taille moyenne des employés hommes est 173,5 cm et l'effectif des employés de cette entreprise est compris entre 50 et 60.

**Tâches :**

- 1) Combien d'alevins devra-t-on introduire dans l'étang ? 1,5 pt
- 2) La structure de l'entrepôt proposé par **Bita** peut-elle contenir au moins  $250 \text{ m}^3$  de farine de maïs ? 1,5 pt
- 3) Quel montant mensuel doit prévoir le Comptable de **Green Planet** pour les primes des employés ? 1,5 pt

**Présentation**0,5 pt



Département de Mathématiques

*L'épreuve est étalée sur deux pages.*

**PARTIE A : ÉVALUATION DES RESSOURCES (15 points)**

**Exercice ①**

**4,5 points**

I) Montrer par récurrence que :

1)  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \cos(2kx - x) = \frac{\cos(nx) \sin(nx)}{\sin x}$  où  $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$ . 1 pt

2)  $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}, \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$ . 0,5 pt

II) Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère les points  $A(2; 0; 2)$ ,  $B(2; 1; 2)$ ,  $C(1; 2; 1)$  et  $E(-1; -1; 0)$ ,

- 1) a) Montrer que les points A, B et C définissent un plan. 0,5 pt
- b) Montrer que les points A, B, C et E ne sont pas coplanaires. 0,5 pt
- 2) Calculer l'aire du triangle ABC, et le volume du tétraèdre EABC. 1 pt
- 3) a) Donner une représentation paramétrique de la droite  $(\Delta)$  passant par E et perpendiculaire au plan (ABC). 0,5 pt
- b) En déduire les coordonnées du point F, projeté orthogonal de E sur (ABC). 0,5 pt

**Exercice ②**

**5,5 points**

Le plan est doté d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , et  $(\mathcal{C}_f)$  est la courbe représentative de la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = 3\sqrt{1-x|x|}$ .

- 1) Soit  $x$  un réel.
  - a) Montrer que si  $x \leq 0$ , on a :  $1 - x|x| \geq 0$ . 0,25 pt
  - b) On suppose  $x \geq 0$ . Montrer que  $1 - x|x| \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0; 1]$ . 0,25 pt
  - c) En déduire que le domaine de définition de  $f$  est l'intervalle  $]-\infty; 1]$ . 0,25 pt
- 2) a) Etudier la continuité et la dérivabilité de  $f$  en 0. 0,5 pt
- b) Etudier la dérivabilité de  $f$  en 1, et donner une interprétation géométrique. 0,5 pt
- 3) a) Montrer que  $f'(x) = \begin{cases} \frac{3x}{\sqrt{1+x^2}} & \text{si } x < 0 \\ \frac{3x}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si } 0 \leq x < 1 \end{cases}$ . 0,5 pt
- b) Dresser le tableau de variations de  $f$ . 0,5 pt
- 4) Etudier les branches infinies de  $(\mathcal{C}_f)$ . 0,75 pt
- 5) a) Démontrer que  $f$  admet une bijection réciproque  $f^{-1}$ , de domaine de définition  $\mathbf{K}$  à préciser. 0,5 pt
- b) Déterminer le domaine de dérivabilité de  $f^{-1}$ . 0,25 pt
- c) Expliciter  $f^{-1}(x)$  pour  $x \in \mathbf{K}$ . (On distinguera le cas  $x \leq 3$ , et le cas  $x \geq 3$ ). 0,5 pt
- 6) Construire  $(\mathcal{C}_f)$  et  $(\mathcal{C}_1)$  la courbe de  $f^{-1}$ . 0,75 pt

**Exercice ③**

**5 points**

I) On pose  $Z = \frac{\sqrt{\sqrt{2}}}{2} \left( \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}} + i\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \right)$ .

- 1) Donner l'écriture algébrique de  $Z^2$ , puis celle de  $Z^4$ , et en déduire un module et un argument de  $Z^4$ . 1 pt
- 2) a) Déterminer alors le module et l'argument principal de  $Z$ . 0,5 pt

b) Prouver que  $\cos \frac{\pi}{16} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}{2}$ .

0,5 pt

**II)** On considère dans  $\mathbb{C}$  l'équation (E) :  $z^3 + (1 - 6i)z^2 - (17 + 8i)z - 33 + 30i = 0$ .

1) Vérifier que  $-3$  est une solution de (E), puis résoudre l'équation (E).

1,25 pt

2) Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives  $z_A = -3$ ,  $z_B = -1 + 4i$  et  $z_C = 2 + 3i$ .

a) Montrer que ABC est un triangle isocèle.

0,5 pt

b) Déterminer  $z_G$  l'affixe de G, barycentre des points pondérés (A; -1), (B; 1) et (C; 1).

0,25 pt

c) Déterminer et construire l'ensemble  $(\Gamma)$  des points M du plan d'affixes  $z$  tels que

$$|z + 1 - 4i|^2 - |z + 3|^2 + |\bar{z} - 2 + 3i|^2 = -28.$$

1 pt

## PARTIE B : ÉVALUATION DES COMPÉTENCES (5 points)

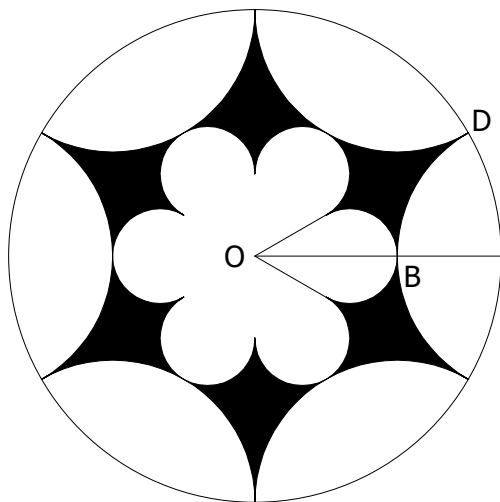
### Situation :

Dans le cadre de la promotion du tourisme, l'Exécutif Communal d'une localité entreprend la construction d'un musée d'architecture moderne sur un terrain rectangulaire dont le mètre carré est évalué à 15 000 fcfa, et les dimensions en dizaines de mètres sont les modules des solutions dans  $\mathbb{C}$  de l'équation  $z^2 - (6 + i)z + 10 = 0$ .

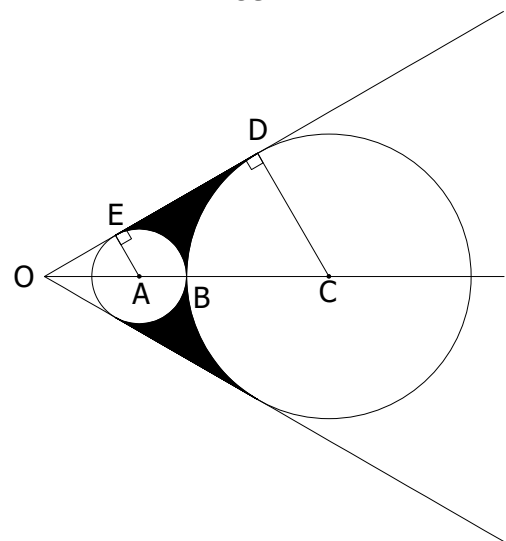
L'architecte en charge du projet prévoit la construction en verre et acier blindés d'un bâtiment ayant la forme d'une pyramide à base triangulaire pour abriter les objets d'art précieux. Il indique que sur chaque face latérale du bâtiment en question, il sera matérialisé une rosace particulière inscrite dans un cercle à partir du motif ci-dessous construit à l'aide de deux cercles de centres A et C, et tangents extérieurement en B, milieu de [OC] dans un repère orthonormé direct du plan d'origine O où l'unité est le mètre, les points A, C, D et E ont pour affixes respectives  $2$ ,  $6$ ,  $3\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$  et  $\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$ .

Le matériel pour la réalisation d'une rosace coûte au mètre carré 20 000 fcfa.

### Rosace inscrite dans un cercle



### Motif



La masse de verre nécessaire pour la construction du bâtiment exprimée en tonnes est égale à

$$\frac{\pi(\sqrt{3}-1)}{4} \left[ F\left(\frac{\pi(\sqrt{3}-1)}{2}\right) - F(0) \right] \text{ avec } F \text{ primitive sur } \mathbb{R} \text{ de la fonction } g : x \mapsto \cos[(\sqrt{3}+1)x] + \sin[(\sqrt{3}+1)x].$$

Un bienfaiteur fait un don de 525 kilogrammes de verre à l'Exécutif Communal pour la réalisation du projet.

### Tâches :

1) Quel montant doit prévoir l'Exécutif Communal pour l'achat du terrain ?

1,5 pt

2) Quel montant doit prévoir l'Exécutif Communal pour l'achat du matériel nécessaire à la réalisation des rosaces ?

1,5 pt

3) La masse de verre offerte par le bienfaiteur sera t-elle suffisante pour la construction du bâtiment ?

1,5 pt

### Présentation

0,5 pt



Département de Mathématiques

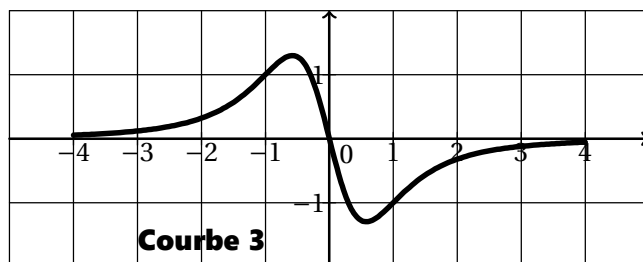
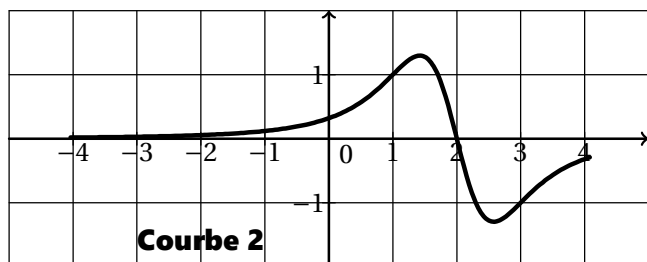
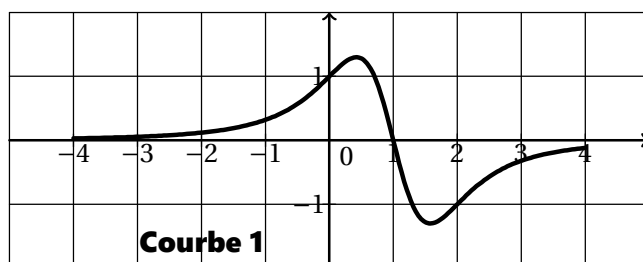
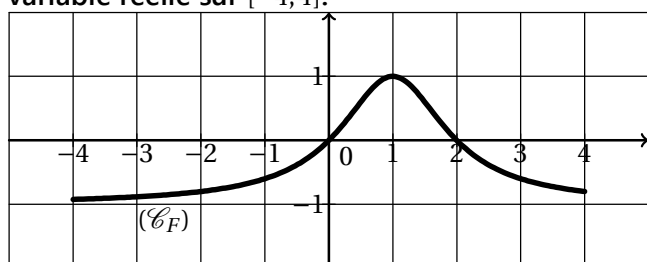
L'épreuve est étalée sur deux pages.

**PARTIE A : ÉVALUATION DES RESSOURCES (15 points)**

**Exercice 1**

2,5 points

1) Ci-dessous,  $(\mathcal{C}_F)$  est la courbe représentative d'une primitive  $F$  sur  $[-4;4]$  d'une fonction numérique  $f$  d'une variable réelle continue sur  $[-4;4]$ . Les courbes 1, 2 et 3 sont celles des fonctions numériques à une variable réelle sur  $[-4;4]$ .



- a) Une des trois courbes 1, 2 et 3 ci-dessus est la courbe représentative de  $f$ . Déterminer laquelle en justifiant la réponse. 0,5 pt
- b) Ecrire une équation de la tangente à  $(\mathcal{C}_F)$  au point d'abscisse 2. 0,5 pt
- 2) Déterminer les primitives de la fonction  $h$  sur  $I$  dans chacun des cas suivants :
- a)  $h(x) = (1 + \tan^2 x) \tan^5 x$  et  $I = \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ . 0,5 pt
- b)  $h(x) = \frac{x^3 + (x^2 + 2x + 1)}{x^3(x+1)^2}$  et  $I = [1; +\infty[$ . 0,5 pt
- c)  $h(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}}$  et  $I = \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ . 0,5 pt

**Exercice 2**

7 points

On considère la fonction  $h$  définie par  $h(x) = \sqrt{\frac{x^3 - 8}{x - 1}}$ , et  $(\mathcal{C})$  est la courbe représentative de  $h$  dans un repère orthonormé du plan  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  d'unité 1 cm sur les axes.

- 1) Prouver que le domaine de définition de  $h$  est l'ensemble  $]-\infty; 1[ \cup [2; +\infty[$ . 0,5 pt
- 2) Etudier la dérivabilité de  $h$  en 2. 0,5 pt
- 3) a) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -1$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 1$ . 0,5 pt
- b) Montrer que pour  $x < 0$ ,  $h(x) + x = \frac{x^2 - 8}{-x(x - 1)} \times \frac{1}{\sqrt{\frac{x^3 - 8}{x^2(x - 1)} + 1}}$ . 0,5 pt

- 4) Montrer que  $(\mathcal{C})$ , la courbe de  $h$ , admet trois asymptotes dont on précisera les équations.
- 5) Soit  $\varphi$  la fonction définie par  $\varphi(x) = 2x^3 - 3x^2 + 8$ .
- a) Etudier les variations de  $\varphi$  sur  $\mathbb{R}$ . 0,5 pt
- b) Montrer que l'équation  $\varphi(x) = 0$  admet sur  $\mathbb{R}$  une unique solution  $\alpha$  telle que  $-1,3 < \alpha < -1,2$ . 0,75 pt
- 6) a) Montrer que pour  $x$  dans  $]-\infty; 1[ \cup ]2; +\infty[$ ,  $h'(x) = \frac{\varphi(x)}{2(x-1)^2 f(x)}$ . 0,5 pt
- b) Dresser le tableau de variations de  $h$ . 0,75 pt
- 7) a) Montrer que pour tout  $x \in [-1; 0]$ ,  $\frac{1}{8} \leq h'(x) \leq 2$ . 0,5 pt
- b) En déduire que pour tout  $x$  de  $[-1; 0]$ ,  $2(x + \sqrt{2}) \leq h(x) \leq \frac{1}{8}(x + 16\sqrt{2})$ . 0,5 pt
- 8) Soit  $k$  la restriction de  $h$  sur  $]2; +\infty[$ .
- a) Justifier que  $k$  admet une bijection réciproque qu'on notera  $k^{-1}$ . 0,5 pt
- b) Construire  $(\mathcal{C})$  et  $(\mathcal{C}')$  courbe de  $k^{-1}$ . (On admettra que  $h(\alpha) \approx 2,1$ ) 1 pt

### Exercice 3

5 points

On considère la fonction  $\ell$  définie sur  $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$  par  $\ell(x) = \sqrt[3]{2 \cos x - 1}$ .

- 1) Montrer que pour tout réel  $t$ , on a :  $2 \cos t - 1 = -4 \sin\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \sin\left[\frac{1}{2}\left(t - \frac{\pi}{3}\right)\right]$ . 0,75 pt
- 2) a) Montrer que pour tout  $x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ ,  $\frac{\ell(x)}{x - \frac{\pi}{3}} = -\sqrt[3]{\frac{4 \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)}{\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2}} \times \sqrt[3]{\frac{\sin\left[\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right]}{x - \frac{\pi}{3}}}$ . 0,75 pt
- b) Etudier la dérivabilité de  $\ell$  en  $\frac{\pi}{3}$ . 0,5 pt
- 3) Montrer que pour tout  $x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ , on a :  $\ell'(x) = -\frac{2 \sin(x)}{3[\ell(x)]^2} = -\frac{\sqrt{3 - [\ell(x)]^6} - 2[\ell(x)]^3}{3[\ell(x)]^2}$ . 0,75 pt
- 4) Montrer que  $\ell$  admet une bijection réciproque qu'on notera  $\mu$ . 0,5 pt
- 5) a) Déterminer l'ensemble de dérivabilité  $J$  de  $\mu$ . 0,5 pt
- b) Vérifier que  $\sqrt[3]{\sqrt{3} - 1} \in J$ , puis déterminer  $\mu'(\sqrt[3]{\sqrt{3} - 1})$ . 0,75 pt
- c) Expliciter  $\mu'(x)$  pour  $x \in J$ . 0,5 pt

### PARTIE B : ÉVALUATION DES COMPÉTENCES (5 points)

#### Situation :

**Mme Gabel** dispose d'un terrain de forme rectangulaire sur lequel elle voudrait implanter les locaux d'une entreprise faisant dans la fabrication et la commercialisation du beurre de cacao. Le géomètre indique à **Mme Gabel** que le terrain a pour aire  $2500 \text{ m}^2$ , et pour dimensions en mètres :  $(300x - 100)$  et  $(25\sqrt{x})$  avec  $x \in [0; 1]$ ,  $x \in [a; b]$  où  $b - a = 10^{-2}$ . Pour des raisons de sécurité, **Mme Gabel** doit clôturer le terrain avec 4 passages de fil de fer barbelé dont le mètre coûte 350 fcfa, et prévoit pour cela, une somme 330000 fcfa.

Le beurre produit sera vendu dans deux formes de boîtes en plastique dur d'épaisseur négligeable, hermétiquement fermées, l'une des formes étant celle d'un parallépipède rectangle de volume  $200 \text{ cm}^3$  et l'autre forme est celle d'un cylindre de volume  $300 \text{ cm}^3$ , et dont le rayon et la hauteur ont la même valeur.

Le concepteur des boîtes précise que les dimensions d'une boîte dont la forme est celle d'un parallépipède sont  $(40y - 60) \text{ cm}$ ;  $5y \text{ cm}$  et  $2y \text{ cm}$  avec  $y \in [1; 2]$ ,  $y \in [c; d]$  où  $d - c = 10^{-1}$ . Pour la confection d'une boîte, un  $\text{cm}^2$  de plastique utilisé est facturé à 0,5 fcfa et la main d'œuvre à 15 fcfa. **Mme Gabel** prévoit 185 fcfa pour la production d'une boîte ayant la forme d'un parallépipède.

**Mme Gabel** a un t-shirt sur lequel sont mentionnées :

(Aire totale d'un parallépipède rectangle de dimensions  $a$ ,  $b$  et  $c$ )  $= 2ab + 2ac + 2bc$ .

(Aire totale d'un cylindre de rayon  $r$  et de hauteur  $h$ )  $= 2\pi(r^2 + rh)$ .

#### Tâches :

- 1) Le montant dont dispose **Mme Gabel** pour l'achat du fil barbelé est-il suffisant ? 1,5 pt
- 2) Le montant prévu par **Mme Gabel** pour la production d'une boîte de forme parallépipédique est-il suffisant ? 1,5 pt
- 3) Quel est le montant pour la production d'une boîte de forme cylindrique ? 1,5 pt

**Présentation :**

0,5 pt

Collège Bilingue Les Anges			Année Scolaire 2020 / 2021	
Département de Mathématiques			Classe de : T <sup>le</sup> C	Mini Session N°1
Epreuve de Mathématiques			Période N° 2	Trimestre 1
Durée : 4 Heures	Coefficient : 7		Proposée par : M. NJANDA NJ.	

*L'épreuve comporte deux (02) parties obligatoires réparties sur deux pages numérotées de 1 à 2.  
La qualité de la rédaction, la démarche vers le résultat et le soin apporté au tracé des figures  
seront pris en compte dans l'évaluation de la copie de l'apprenant.*

**PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES [ 15 Points ]**

**EXERCICE 1 : [2,5 Points]**

*ROC et questions de cours pour éviter zéro.*

1. **a)** Énoncer clairement le théorème de Bézout. 0, 25 pt  
**b)** Montrer que, quel que soit l'entier naturel  $n$ , les nombres  $a = 9n + 5$  et  $b = 7n + 4$  sont premiers entre eux. 0, 25 pt
2. **a)** Citer puis démontrer le théorème de Gauss en utilisant le théorème de Bézout. 0, 75 pt  
**b)** Trouver tous les couples entiers naturels  $(x ; y)$  tels que :  $3(x - 1) = 5y$  0, 5 pt
3. **a)** Citer le corollaire du théorème de Bézout. 0, 25 pt  
**b)** Les équations  $9x - 6y = 2$  et  $5x + 7y = 4$  admettent-elles des solutions entières ? 0, 5 pt
- 4) Déterminer l'ensemble des couples  $(x ; y)$  d'entiers relatifs solutions de l'équation :  
 $(E) : 8x - 5y = 3.$  0, 5 pt

**EXERCICE 2 : [5 Points]**

On rappelle que :  $C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$  où  $n$  et  $k$  sont des entiers naturels tel que  $k \leq n$ . Soit  $p$  un entier naturel premier.

1. **a°)** Montrer que, si  $1 \leq k \leq p - 1$ , alors  $p$  divise  $C_p^k$ . 0, 5 pt  
**b°)** En déduire en raisonnant par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}^*$ , que  $p$  divise  $n^p - n$ . 0, 5 pt
- 2°) Montrer que si  $n$  et  $p$  sont premiers entre eux, alors  $p$  divise  $n^{p-1} - 1$ . 0, 25 pt
3. **a°)** Soit  $a$  et  $b$  deux entiers. Montrer que pour tout entier naturel  $n \geq 2$ , on a :  
 $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-3}a^2 + b^{n-2}a + b^{n-1})$  0, 75 Pt  
**b°)** Démontrer que si  $p \in \mathbb{N}$  et  $q \in \mathbb{N}$ , alors  $2^{pq} - 1$  est divisible par  $2^p - 1$  et  $2^q - 1$ . 0, 5 Pt
4. **a°)** On note  $\mathbf{P}$  l'ensemble des nombres premiers. Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ , si  $2^n - 1$  appartient à  $\mathbf{P}$ , alors  $n$  appartient à  $\mathbf{P}$ . 0, 5 Pt  
**b°)** Démontrer que :  $2^{11} \equiv 1[23]$ . 0, 5 Pt  
**c°)** La réciproque de la proposition établie en 3. **a°)** est-elle vraie ? Justifier votre réponse. 0, 5 Pt
5. **a°)** Soit  $x$  et  $y$  deux entiers naturels non nuls. Montrer que  $(x + y)^p \equiv x^p + y^p [p]$ . 0, 5 pt  
**b°)** Démontrer que, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , la fraction  $F = \frac{2n(n+1)}{2n+1}$  est irréductible. 0, 5 pt

**EXERCICE 3 : [3,5 Points]**

1. **a°)** Résoudre dans  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$  le système d'équations :  $\begin{cases} iz + \bar{z}' = -2\sqrt{3} \\ \bar{z} - iz' = -2 \end{cases}$  0, 75 pt  
**b°)** Soient  $A$  et  $B$  les points d'affixes respectives  $z_A = -1 + i\sqrt{3}$  et  $z_B = -\sqrt{3} - i$ .  
Ecrire  $\mathbf{z}_A \times \mathbf{z}_B$  sous forme trigonométrique. 0, 25 pt
- 2°) Soit  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  deux entiers naturels non nuls tels que  $\delta = \text{PGCD}(a ; b)$  et  $\mu = \text{PPCM}(a ; b)$ .  
Démontrer que  $\delta\mu = ab$  0, 75 pt
3. **a°)** Calculer de deux façons différentes le PGCD de 845 et 220. 0, 5 pt  
**b°)** En déduire PPCM(845 ; 220) 0, 25 pt
- 4°) Déterminer tous les couples  $(a ; b)$  d'entiers naturels tels que :  $\begin{cases} \text{PGCD}(a ; b) = 10 \\ \text{PPCM}(a ; b) = 280 \end{cases}$  1 pt

### EXERCICE 4 : [4 Points]

A—) L'espace orienté est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ . On considère les points  $A(1; 1; -\frac{3}{2})$ ;  $B(0; 1; -1)$ ;  $C(-4; -3; -2)$  et  $D(1; 1; -1)$ .

1. a°) Montrer que les points  $A$ ;  $B$  et  $C$  ne sont pas alignés. **0,5 pt**

b°) Ecrire une équation cartésienne du plan  $(ABC)$ . **0,5 pt**

2. a°) Montrer que les points  $A$ ;  $B$ ;  $C$  et  $D$  ne sont pas coplanaires. **0,5 pt**

b°) En déduire la nature géométrique de la figure  $ABCD$ . **0,25 pt**

3°) Calculer le volume du tétraèdre  $ABCD$ . **0,5 pt**

B—) Soit  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'entiers naturels vérifiant la propriété suivante : « Pour tout couple  $(n; p)$  d'entiers naturels,  $Pgcd(U_n; U_p) = Pgcd(U_n; U_{n+p})$  ».

1°) Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $U_n$  est un diviseur de  $U_0$ . **0,5 pt**

2°) Montrer que pour tout couple  $(n; p)$  d'entiers naturels, on a :  $Pgcd(U_n; U_p) = U_\delta$  où  $\delta = Pgcd(n; p)$  **0,5 pt**

3°) En déduire  $Pgcd(2^n - 1; 2^{n+1} - 1)$ . **0,25 pt**

4°) Démontrer par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} (2k - 1) = (-1)^{n+1} \times n$ . **0,5 Pt**

### PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES [ 4,5 Points ]

#### **Palier de compétence :**

*Déployer un raisonnement mathématique et résoudre un problème de vie relatif à la détermination de la date d'un jour  $J_1$  en faisant appel aux équations diophantiennes, à l'algorithme d'Euclide et au théorème de Gauss.*

#### Situation Problème :

Un astronome a observé au jour  $J_0$  le corps céleste **A** qui apparaît périodiquement tous les 105 jours. Six jours plus tard ( $J_0 + 6$ ), il observe le corps céleste **B** dont la période d'apparition est de **81** jours. On appelle  $J_1$  le jour de la prochaine apparition simultanée des deux objets (corps célestes) aux yeux de l'astronome. On rappelle que l'an 2000 fût une année bissextile.

#### Tâches :

1°) Soit  $u$  et  $v$  le nombre de périodes effectuées respectivement par **A** et **B** entre  $J_0$  et  $J_1$ . Montrer que le couple  $(u; v)$  est solution de l'équation  $(E_1) : 35x - 27y = 2$ , déterminer un couple  $(x_0; y_0)$  d'entiers relatifs solution particulière de l'équation  $(E_2) : 35x - 27y = 1$  et en déduire une solution particulière  $(u_0; v_0)$  de  $(E_1)$ . **1,5 pt**

2°) Déterminer les solutions de l'équation  $(E_1)$  et le couple solution  $(u; v)$  permettant de déterminer  $J_1$ . Combien de jours s'écouleront exactement entre  $J_0$  et  $J_1$  ? **1,5 pt**

3°) On suppose que le jour  $J_0$  était mardi 07 décembre 1999. Quelle est la date exacte du jour  $J_1$  ? Si l'astronome manque ce futur rendez-vous, combien de jours devra-t-il encore attendre jusqu'à la prochaine conjonction des deux astres ? **1,5 pt**

**Présentation : 0,5 pt**

*« Il y'a plus du courage que de sagesse dans la plupart de réussites »*



*L'épreuve comporte deux (02) exercices et un problème tous obligatoires répartis sur deux pages numérotées de 1 à 2. La qualité de la rédaction, la démarche vers le résultat, et le soin apporté au tracé des figures seront pris en compte dans l'évaluation de la copie du candidat*

**PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES [ 15 Points ]**

**EXERCICE 1 : [2,5 Points]**

*ROC et questions de cours pour éviter zéro.*

1. **a)** Enoncer clairement le théorème de Bézout. 0, 25 pt  
**b)** Montrer que quelque soit l'entier naturel  $n$ , les nombres  $a = 9n + 5$  et  $b = 7n + 4$  sont premiers entre eux. 0, 25 pt
2. **a)** Citer puis démontrer le théorème de Gauss en utilisant le théorème de Bézout. 0, 75 pt  
**b)** Trouver tous les couples entiers naturels  $(x ; y)$  tels que :  $3(x - 1) = 5y$  0, 5 pt
3. **a)** Citer le corollaire du théorème de Bézout. 0, 25 pt  
**b)** Les équations  $9x - 6y = 2$  et  $5x + 7y = 4$  admettent-elles des solutions entières ? 0, 5 pt
- 4) Déterminer l'ensemble des couples  $(x ; y)$  d'entiers relatifs solutions de l'équation :  
 $(E) : 8x - 5y = 3$ . 0, 5 pt

**EXERCICE 2 : [5 Points]**

On rappelle que :  $C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$  où  $n$  et  $k$  sont des entiers naturels tel que  $k \leq n$ . Soit  $p$  un entier naturel premier.

1. **a°)** Montrer que, si  $1 \leq k \leq p - 1$ , alors  $p$  divise  $C_p^k$ . 0, 5 pt  
**b°)** En déduire en raisonnant par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}^*$ , que  $p$  divise  $n^p - n$ . 0, 5 pt
- 2°) Montrer que si  $n$  et  $p$  sont premiers entre eux, alors  $p$  divise  $n^{p-1} - 1$ . 0, 25 pt
3. **a°)** Soit  $a$  et  $b$  deux entiers. Montrer que pour tout entier naturel  $n \geq 2$ , on a :  
 $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-3}a^2 + b^{n-2}a + b^{n-1})$  0, 75 Pt  
**b°)** Démontrer que si  $p \in \mathbb{N}$  et  $q \in \mathbb{N}$ , alors  $2^{pq} - 1$  est divisible par  $2^p - 1$  et  $2^q - 1$ . 0, 5 Pt
4. **a°)** On note  $P$  l'ensemble des nombres premiers. Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ , si  $2^n - 1$  appartient à  $P$ , alors  $n$  appartient à  $P$ . 0, 5 Pt  
**b°)** Démontrer que :  $2^{11} \equiv 1[23]$ . 0, 5 Pt  
**c°)** La réciproque de la proposition établie en 3. **a°)** est -elle vraie ? Justifier votre réponse. 0, 5 Pt
5. **a°)** Soit  $x$  et  $y$  deux entiers naturels non nuls. Montrer que  $(x + y)^p \equiv x^p + y^p [p]$ . 0, 5 pt  
**b°)** Démontrer que, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , la fraction  $F = \frac{2n(n+1)}{2n+1}$  est irréductible. 0, 5 pt

**EXERCICE 3 : [3,5 Points]**

1. **a°)** Résoudre dans  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$  le système d'équations :  $\begin{cases} iz + \bar{z}' = -2\sqrt{3} \\ \bar{z} - iz' = -2 \end{cases}$  0, 75 pt  
**b°)** Soient  $A$  et  $B$  les points d'affixes respectives  $z_A = -1 + i\sqrt{3}$  et  $z_B = -\sqrt{3} - i$ .  
 Ecrire  $z_A \times z_B$  sous forme trigonométrique. 0, 25 pt
- 2°) Soit  $a$  et  $b$  deux entiers naturels non nuls tels que  $\delta = PGCD(a ; b)$  et  $\mu = PPCM(a ; b)$ .  
 Démontrer que  $\delta\mu = ab$  0, 75 pt
3. **a°)** Calculer de deux façons différente le  $PGCD$  de 845 et 220. 0, 5 pt  
**b°)** En déduire  $PPCM(845 ; 220)$  0, 25 pt
- 4°) Déterminer tous les couples  $(a ; b)$  d'entiers naturels tels que :  $\begin{cases} PGCD(a ; b) = 10 \\ PPCM(a ; b) = 280 \end{cases}$  1 pt

### EXERCICE 4 : [4 Points]

A—) L'espace orienté est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$ . On considère les points  $A \left(1 ; 1 ; -\frac{3}{2}\right)$  ;  $B (0 ; 1 ; -1)$  ;  $C (-4 ; -3 ; -2)$  et  $D (1 ; 1 ; -1)$ .

1. a°) Montrer que les points  $A$  ;  $B$  et  $C$  ne sont pas alignés. **0,5 pt**

b°) Ecrire une équation cartésienne du plan  $(ABC)$ . **0,5 pt**

2. a°) Montrer que les points  $A$  ;  $B$  ;  $C$  et  $D$  ne sont pas coplanaires. **0,5 pt**

b°) En déduire la nature géométrique de la figure  $ABCD$ . **0,25 pt**

3°) Calculer le volume du tétraèdre  $ABCD$ . **0,5 pt**

B—) Soit  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'entiers naturels vérifiant la propriété suivante : « Pour tout couple  $(n ; p)$  d'entiers naturels,  $\text{Pgcd}(U_n ; U_p) = \text{Pgcd}(U_n ; U_{n+p})$  ».

1°) Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $U_n$  est un diviseur de  $U_0$ . **0,5 pt**

2°) Montrer que pour tout couple  $(n ; p)$  d'entiers naturels, on a :  $\text{Pgcd}(U_n ; U_p) = U_\delta$  où  $\delta = \text{Pgcd}(n ; p)$  **0,5 pt**

3°) En déduire  $\text{Pgcd}(2^n - 1 ; 2^{n+1} - 1)$ . **0,25 pt**

4°) Démontrer par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} (2k - 1) = (-1)^{n+1} \times n$ . **0,5 Pt**

### PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES [ 4,5 Points ]

#### **Palier de compétence :**

Déployer un raisonnement mathématique et résoudre un problème de vie relatif à la détermination de la date d'un jour  $J_1$  en faisant appel aux équations diophantiennes, à l'algorithme d'Euclide et au théorème de Gauss.

#### **Situation Problème :**

Un astronome a observé au jour  $J_0$  le corps céleste  $A$  qui apparaît périodiquement tous les 105 jours. Six jours plus tard ( $J_0 + 6$ ), il observe le corps céleste  $B$  dont la période d'apparition est de **81** jours. On appelle  $J_1$  le jour de la prochaine apparition simultanée des deux objets (corps célestes) aux yeux de l'astronome. On rappelle que l'an 2000 fût une année bissextile.

#### **Tâches :**

1°) Soit  $u$  et  $v$  le nombre de périodes effectuées respectivement par  $A$  et  $B$  entre  $J_0$  et  $J_1$ .

Montrer que le couple  $(u ; v)$  est solution de l'équation  $(E_1) : 35x - 27y = 2$ , déterminer un couple  $(x_0 ; y_0)$  d'entiers relatifs solution particulière de l'équation  $(E_2) : 35x - 27y = 1$  et en déduire une solution particulière  $(u_0 ; v_0)$  de  $(E_1)$ . **1,5 pt**

2°) Déterminer les solutions de l'équation  $(E_1)$  et le couple solution  $(u ; v)$  permettant de déterminer  $J_1$ . Combien de jours s'écouleront exactement entre  $J_0$  et  $J_1$  ? **1,5 pt**

3°) On suppose que le jour  $J_0$  était mardi 07 décembre 1999. Quelle est la date exacte du jour  $J_1$  ? Si l'astronome manque ce futur rendez-vous, combien de jours devra-t-il encore attendre jusqu'à la prochaine conjonction des deux astres ? **1,5 pt**

**Présentation : 0,5 pt**

*« Il y'a plus du courage que de sagesse dans la plupart de réussites »*

<b>Classe :</b>	<b>TERMINALE C</b>	<b>Durée :</b>	4 heures	<b>Année scolaire :</b>	2020/2021
<b>Épreuve :</b>	<b>MATHÉMATIQUES</b>	<b>Coef. :</b>	7	<b>Par</b>	DJOUTSOP Emile

**I- EVALUATION DES RESSOURCES (15,5 points)**

**EXERCICE 1: (06,5points)**

- Soit  $b \in \mathbb{N}$  avec  $b > 5$ . On donne  $A = \overline{1335}^b$ . Donner l'écriture de A dans la base  $(b+1)$ . 0,5 pt
- Déterminer les réels  $m, p$  et  $q$  tels que  $8x^4 + 6x^2 + 2 = (2x^2 + x + 1)(mx^2 + px + q)$ . 0,5 pt
  - En déduire que dans le système de numération de base 9, le nombre  $B = \overline{80602}^9$  est divisible par  $\overline{211}^9$ ; puis en déduire le quotient en base 9. 0,75 pt
- Déterminer le chiffre des unités du nombre  $7^{77}$ . 0,75 pt
- Déterminer suivant les valeurs de l'entier  $n$ , les reste de la division euclidienne de  $2^n$  par 5; puis déduire que  $6753^{811} \equiv 2[5]$ . 1 pt
- Soit  $n$  un nombre entier naturel non nul. Montrer que  $n^3 - n = (n+2)(n^2 - 2n + 3) - 6$ ; puis en déduire les valeurs de  $n$  pour les quelles  $\frac{n^3 - n}{n+2}$  est un entier. 0,75 pt
- On considère l'équation suivante :  $(E): 37x + 54y = 1998$ .
  - Déterminer à l'aide de l'algorithme d'Euclide une solution particulière de  $(E)$ . 0,5 pt
  - Résoudre alors l'équation  $(E)$  dans  $\mathbb{Z}^2$ . 0,5 pt
- On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$  par  $f(x) = \frac{1}{x+1}$ .
  - Calculer  $f'(x)$  et  $f''(x)$ . 0,5 pt
  - Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n \geq 2$ ,  $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \times n!}{(x+1)^{n+1}}$ , 0,75 pt

**EXERCICE 2: (04 points)**

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé  $(O; \overset{\uparrow}{i}, \overset{\uparrow}{j}, \overset{\uparrow}{k})$ , on donne les points  $A(2;0;1)$ ;  $B(3;-2;0)$  et  $C(2;8;-4)$ .

- Soit  $M(x; y; z)$  un point de l'espace. Exprimer en fonction de  $x, y$  et  $z$  les coordonnées du produit vectoriel  $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{BM}$ . 0,75 pt
- Résoudre dans  $\mathbb{R}^3$  le système suivant : 
$$\begin{cases} -x + y - 2z = -4 \\ -x - y - z = -11 \\ 2x + y - z = 8 \end{cases}$$
 0,5 pt
- Montrer qu'il existe un unique point N vérifiant :  $\overrightarrow{AN} \wedge \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{CN}$  et donner les coordonnées du point N. 0,5 pt
- On rappelle que le volume d'un tétraèdre est  $V = \frac{\text{Surface de base} \times \text{hauteur}}{3}$ .
  - Le point N étant défini à la question précédente, montrer que le volume du tétraèdre ABCN est égal à  $\frac{1}{6} CN^2$ ; puis calculer V. 1 pt

- b) En utilisant le résultat du 1) et en prenant  $M=C$ , calculer l'aire du triangle ABC. 0,75 pt  
 c) En déduire la distance du point N au plan (ABC). 0,5 pt

**EXERCICE 2: (05 points)**

1. Linéariser  $\text{Sin}^3(2x)$ . 0,5 pt  
 2. On considère le polynôme P suivant défini dans  $\mathbb{C}$  par  $P(z) = z^3 + 2(1+i)z^2 - 2z + 4(2-i)$ .  
 a) Vérifier que  $P(z) = (z+2i)(z^2 + 2z - 2 - 4i)$ . 0,25 pt  
 b) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $P(z) = 0$ . 0,75 pt  
 c) On donne les points A, B et C d'affixes respectives  $z_A = -2i$ ,  $z_B = 1+i$  et  $z_C = -3-i$ .

Quelle est la nature du triangle ABC ? 0,5 pt

- d) S est la similitude directe de centre B qui transforme A en C.  
 i) Déterminer l'écriture complexe de S. 0,75 pt  
 ii) Déterminer les éléments caractéristiques de S. 0,5 pt

3. Soit  $\theta$  un nombre réel de l'intervalle  $[0; 2\pi[$ . On considère l'équation

$$(E): z^2 - \left(2^{(\theta+1)} \cos \theta\right)z + 2^{2\theta} = 0.$$

- a) Résoudre dans  $\mathbb{C}$ , l'équation (E). 0,75 pt  
 b) Donner la forme exponentielle de chacune des solutions de (E). 0,5 pt  
 c) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ , on donne les points A et B

d'affixes respectives  $z_1 = 2^\theta [\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)]$  et  $z_2 = 2^\theta (\cos \theta + i \sin \theta)$ . Déterminer  $\theta$  pour que le triangle OAB soit équilatéral direct. 0,75 pt

**II- EVALUATION DES COMPETENCES (04,5 points)**

Dans le but de protéger la confidentialité des échanges des militaires au front de guerre, les responsables militaires ont contacté une agence de sécurité pour mettre sur pied un procédé de codage des informations échangées par les militaires. Le manifeste de confidentialité que l'ingénieur de l'agence a mis sur pied stipule qu'à chaque lettre de l'alphabet, on associe grâce au tableau ci-dessous un nombre entier compris entre 0 et 25. Le procédé de codage est le suivant :  
 Etape 1 : A la lettre que l'on veut coder, on associe le nombre k correspondant dans le tableau.  
 Etape 2 : On calcule le reste de la division euclidienne de  $6k+5$  par 26 et on le note r.  
 Etape 3 : Au nombre r, on associe la lettre correspondante dans le tableau.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Mais le général d'armée TAKAM lui aussi informaticien de formation propose plutôt qu'à l'étape 2, r soit le reste de la division de  $\left(\overline{110}^2\right)^k$  par 26.

Tâches :

1. Coder le mot "LYCEE" par le procédé de l'ingénieur. 1,5 pt  
 2. Décoder le sigle NSA selon le procédé de l'ingénieur. 1,5 pt  
 3. Décoder le sigle TIR selon le procédé proposé par le général TAKAM. 1,5 pt



## Partie A : Evaluation des ressources

### SUJET 1

#### EXERCICE 1:

- Démontrer par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $3 \cdot 5^{2n-1} + 2^{3n-2}$  est divisible par 17. **1pt**
- Démontrer par récurrence que pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $\sum_{k=1}^{n-1} (1 + \frac{1}{k+1}) \geq 1 + \frac{n}{2}$  **1pt**
- Démontrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$  et  $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ . **1pt**
  - En déduire la somme :  $S_{(m,n)} = mn + (m-1)(n-1) + \dots + 1 \cdot (n-m+1)$  où  $m$  et  $n$  sont des entiers naturels tels que  $m < n$ . **1pt**
  - Calculer  $S_{(7,10)}$ . **1pt**

#### EXERCICE 2:

- Résoudre dans  $\mathbb{Z}$  : a)  $x^2 - 3x + 4 \equiv 0[7]$  ; b)  $8x \equiv 7[5]$ . **1pt**
- Déterminer les entiers  $x$  et  $y$  tels que le nombre qui s'écrit  $\overline{x32y^5}$  soit divisible par 3 et par 4. **1pt**
- Dans le système décimal, déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel  $n$ , le chiffre des unités de  $2^{2n}$  et de  $7^n$ . **1pt**
  - Application : Trouver le chiffre des unités de  $3548^9 \times 2537^{31}$  **1pt**
- Démontrer que : si  $n$  est impair alors  $n^2 - 1 \equiv 0[8]$  **1pt**

### SUJET 2

#### EXERCICE 1:

Le tableau ci-dessous indique la puissance  $x$  en chevaux et la cylindrée  $y$  (en  $\text{cm}^3$ ) de huit voiture à moteur Diesel.

Numéro de voiture	1	2	3	4	5	6	7	8
Puissance $x$	35	55	60	60	65	70	72	75
Cylindre $y$	1000	1600	1800	1700	1900	2000	2100	2500

- Représenter le nuage de la série  $(x ; y)$ . (Choisir sur l'axe des abscisses 1cm pour 10 chevaux et sur l'axe des ordonnées 2cm pour 1000  $\text{cm}^3$ ). **2pts**
  - Le nuage ainsi représenté laisse-t-il entrevoir un ajustement linéaire ? **1pt**
- Calculer la puissance moyenne et la cylindrée moyenne des huit voitures. **1,5pt**
- Sachant que la covariance du couple  $(x ; y)$  vaut 4662,5 :  
a) Écrire une équation cartésienne de la droite de régression de  $x$  en  $y$ . **1,5pt**
  - Donner une estimation au cheval près de la puissance d'un moteur de cylindrée 3500  $\text{cm}^3$ . **1pt**

#### EXERCICE 2:

Trois pays envoient chacun à une conférence deux espions ; chaque espions doit espionner tous les espions des autres pays (mais pas son propre collègue !)

- Représenter cette situation par un graphe d'ordre 6. **1pt**
- Ce graphe est-il complet ? Est-il connexe ? **1pt**
- Quel est le degré de chaque sommet ? Déduisez-en le nombre d'arêtes. **1pt**

**Partie B : Evaluation de Compétences (3,5pts)**

En visite dans une grande ville Africaine, Paul, élève en classe de Terminale C a été émerveillé par le nouvel échangeur, le tracé de certaines rues et le système de jet d'eau qui se trouve au rond-point. Le guide de Paul, un féru de mathématiques, lui annonce que le coût de la réalisation  $c$  du projet de modernisation de la ville, en francs CFA s'exprime par  $c = 5 \times 10^n$  où  $n$  est un entier naturel. De plus,  $c$  possède 132 diviseurs positifs.

En se promenant, Paul rencontre un artiste qui expose deux types de tableaux  $T_1$  et  $T_2$  dont les nombres respectifs  $p$  et  $q$  sont tels que  $\frac{p+15}{p+2}$  est un entier naturel et  $q$  un nombre premier tel que  $13q + 1$  est le carré d'un entier naturel

Ces tableaux sont exposés dans un musée où  $N$  visiteurs au moins viennent chaque jour et  $N$  est tel que  $PPCM(9N + 4; 2N - 1) = 714$

Tâche 1 : Détermine le coût exact de la réalisation du projet (1,5pt)

Tâche 2 : Détermine le nombre de tableaux de chaque type (1,5pt)

Tâche 3 : Déterminer  $N$  (1pt)

**PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES/**

**(15,5 points)**

**EXERCICE 1 /**

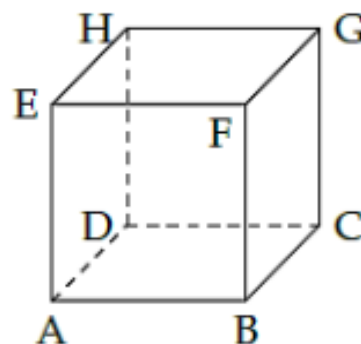
**(04,5 points)**

Cet exercice regroupe deux blocs de questions pouvant être traités de façon indépendante.

1. On considère la plan rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . On note  $(\Gamma)$  l'ensemble des points  $M$  du plan dont l'affixe  $z$  vérifie la relation :  $5z\bar{z} + (z + \bar{z} + 1)^2 - 1$  où  $\bar{z}$  est le conjugué de  $z$ .

Soit  $\varphi$  la similitude directe plane d'angle  $\frac{\pi}{2}$ , de rapport 2 et de centre  $O$ ;  $\Psi$  l'application de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$  qui à tout nombre complexe  $z$ , affixe d'un point  $M$ , associe le nombre  $\Psi(z)$ , affixe de  $\varphi(M)$ . On désigne par  $(\Gamma')$  l'image de  $(\Gamma)$  par  $\varphi$ .

- Démontrer que  $(\Gamma)$  est une ellipse et préciser ses éléments caractéristiques. **1.5pt**
  - Donner l'expression de  $\Psi(z)$  en fonction de  $z$ . **0.75pt**
  - Donner en justifiant la nature exacte de  $(\Gamma')$ . **0.75pt**
2. On considère dans l'espace le cube ABCDEFGH ci-contre représenté. On note  $r_1$  la réflexion de plan (ABCD) ;  $r_2$  la réflexion de plan (ADHE) ;  $r_3$  la réflexion de plan (ABFE) et  $r_4$  la réflexion de plan (DCGH). On pose  $s = r_1 \circ r_2 \circ r_3 \circ r_4$ ,  $d = r_1 \circ r_2$  et  $t = r_3 \circ r_4$ . Il n'est pas demandé aux candidats de reproduire la figure.
- Montrer que  $d$  est un demi-tour dont on précisera l'axe. **0.5pt**
  - Montrer que  $t$  est une translation dont on précisera la vecteur. **0.5pt**
  - Reconnaitre et caractériser  $s$ . **0.5pt**



**EXERCICE 2 /**

**(03,75 points)**

**N.B :** Les exercices 2, 3 et 4 sont liés.

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{j}, \vec{k})$ . Soit  $A$  le point d'affixe  $3 + i$  et  $B$  le point d'affixe 6. Pour tout réel  $u$ , on considère les deux points  $M_u$  et  $N_u$  d'affixes respectives  $3 - \sin(u) + i\cos(u)$  et  $3(1 + \cos(u)) + 3i\sin(u)$ .

- Peut-on avoir  $M_u = N_u$  ? **0.5pt**
  - En déduire que pour toute valeur de  $u$ , il existe une unique similitude directe  $T_u$  qui transforme  $A$  en  $M_u$  et  $B$  en  $N_u$ . **0.25pt**
- Montrer que l'écriture complexe de  $T_u$  est  $z' = e^{iu}z + 3(1 - e^{iu})$ . **0.75pt**
  - En déduire que pour tout  $u$ ,  $T_u$  est une rotation dont on précisera le centre et l'angle. **0.5pt**
- Soit  $E$  l'ensemble des transformations  $T_u$  pour  $u \in \mathbb{R}$ . On muni  $E$  de la loi de composition d'applications "o". Montrer que  $(E, o)$  est un groupe abélien. **0.75pt**
- On pose  $B_0 = B$ ,  $B_1 = T_{\frac{\pi}{2}}(B_0)$ , et pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $B_n = T_{\frac{\pi}{2^n}}(B_{n-1})$ .
  - Montrer par récurrence que  $B_n = T_{\frac{2^{n-1}\pi}{2^n}}(B)$ , pour tout entier naturel  $n$ . **0.5pt**
  - Montrer que  $n \in \mathbb{N}$ , le point  $B_n$  a pour affixe  $z_{B_n} = 3 + 3\cos\left(\frac{2^{n-1}\pi}{2^n}\right) + 3i\sin\left(\frac{2^{n-1}\pi}{2^n}\right)$  puis en déduire la position limite des points  $B_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . **0.5pt**

**EXERCICE 3 /**

**(05 points)**

1. Soit  $(C)$  l'ensemble des points  $M(x; y)$  tels que  $(y^2 - 8y + 15)e^{y-3} + 3 - x = 0$ . On note par  $(C_1)$  l'image de  $(C)$  par  $T_{\frac{\pi}{2}}$ .

- Montrer que  $(C_1)$  a pour équation  $y = (x^2 + 2x)e^{-x}$ . **0.5pt**
- Calculer l'intégrale  $\int_0^x (t^2 + 2t)e^{-t} dt$  **0.5pt**

II. Soit la fonction numérique à variable réelle  $f$  définie par  $f(x) = (x^2 + 2x)e^{-x}$ , (Sa courbe représentative est  $(C_1)$ ).

1. Préciser l'ensemble de définition de  $f$ , calculer les limites aux bornes de cet ensemble puis en déduire l'existence d'une asymptote à  $(C_1)$ . 1pt
2. Étudier les variations de  $f$  et dresser son tableau de variations. 1pt
3. a. Déterminer la branche infinie de  $f$  en  $-\infty$ . 0.25pt  
 b. Tracer soigneusement  $(C_1)$  dans le repère. 0.75pt
4. a. Calculer l'aire du domaine limité par  $(C_1)$ , l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation  $x = 3$ . 0.5pt  
 b. En déduire l'aire du domaine limité par  $(C)$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives  $x = 3$  et  $y = 3$ . 0.5pt

**EXERCICE 4 / (02,75 points)**

Soit l'équation différentielle  $(F) : y'' + 4y' + 4y = f(x)$ .

1. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle  $(F_0) : y'' + 4y' + 4y = 0$ . 0.5pt
2. Déterminer les réels  $a, b$  et  $c$  pour que la fonction numérique  $g$  de la variable réelle définie par  $g(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$  soit solution de  $(F)$ . 0.75pt
3. Soit  $h$  une fonction deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ .  
 a. Démontrer que  $h$  est solution de  $(F)$  si et seulement si  $h - g$  est solution de  $(F_0)$  0.75pt  
 b. En déduire la solution  $h$  de  $(F)$  qui s'annule en 0 et dont la courbe admet en ce point une tangente horizontale. 0.75pt

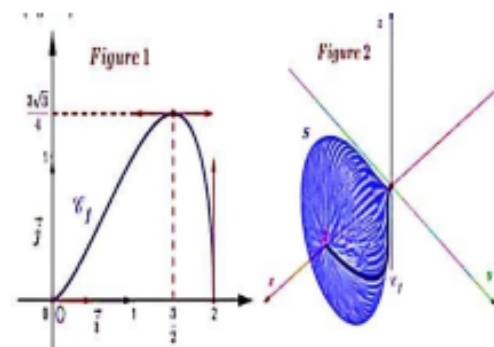
**PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES / (04,5 points)**

Afin de crypter ou coder et décoder des messages dans une banque, on utilise un chiffrement affine. La banque dispose d'une table de conversion des lettres dont chaque lettre de l'alphabet est associée à un nombre entier comme l'indique le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Un nombre  $x$  est associé à la lettre à coder puis on détermine le reste  $y$  de la division euclidienne de  $7x + 5$  par 26, puis on en déduit la lettre associée à  $y$  (c'est elle qui code la lettre d'origine). Exemple : M correspond à  $x = 12$  ;  $7 \times 12 + 5 \equiv 11[26]$  et 11 correspond à la lettre L, donc la lettre M est codé par la lettre L. Sur le manuel d'utilisation de la machine qui gère le codage et le décodage du gestionnaire de la banque est inscrit le système codage-décodage :  $y \equiv 7x + 5[26]$  équivaut à  $x \equiv 15y + 3[26]$ .

Un gestionnaire d'une banque veut construire chez lui un objet d'art ayant la forme de l'oignon représentée en la figure 2. Pour se faire, l'ingénieur considère la surface à réaliser son objet d'art comme un plan rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  d'unité 2m. L'ingénieur trace d'abord la courbe représentative de la fonction numérique  $f$  de la variable réelle  $x$  définie sur  $[0; 2]$  par  $f(x) = x\sqrt{2x - x^2}$  puis il opère la rotation de  $(C_f)$  au tour de l'axe  $(O, \vec{i})$  engendrant un solide S ayant la forme de l'oignon représentée en la figure 2.



L'ingénieur possède trois bus pour ramener ses employés aux chantiers. Lorsqu'il utilise le premier bus qui a des bancs de 5 places, une personne reste mais lorsqu'il utilise le deuxième bus qui a des bancs de 7 places, 5 personnes restent. Finalement, il utilise le troisième bus qui a des bancs de 2 places et ce bus prend tout le monde.

1. Aider le gestionnaire de cette banque à faire un tableau codage-décodage de toutes les lettres alphabétiques qui lui permettra facilement de coder et décoder des messages des autres banques. 1,5pt
2. Calculer le volume  $V$  du béton que peut prendre le solide S 1,5pt
3. Quel est le nombre minimal que l'ingénieur peut transporter ? 1,5pt



**Partie A : Evaluation des ressources EXERCICE 1: / 3,75pts**

I. On lance deux fois de suite un dé tétraédrique parfaitement équilibré dont deux faces portent le numéro 2 et les deux autres les numéros 5 et 4, et on note  $a$  le numéro de la face cachée à l'issue du premier lancer et  $b$  le numéro de la face cachée à l'issue du deuxième lancer.  $P_i$  est la probabilité qu'au cours d'un lancer, la face numérotée  $i$  ( $i \in \{2;4;5\}$ ) soit cachée. On considère l'équation différentielle (E):  $y'' - ay' + by = 0$ ; la fonction  $g: x \mapsto e^x$  et l'hyperbole d'équation réduite (H):  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  dans le plan rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1. Justifier que  $P_1 = \frac{1}{2}$  et  $P_4 = P_5 = \frac{1}{4}$ . **0,5pt**
2. Déterminer  $P(A)$  avec  $A$ : « La fonction  $x \mapsto e^x$  est une solution sur  $\mathbb{R}$  de (E) ». **0,5pt**
3. Déterminer  $P(B)$  avec  $B$ : « Une équation de (H) dans un repère dont les axes sont ses asymptotes est :  $Y = \frac{1}{X}$  ». **0,5pt**
4. On désigne par  $X$  la variable aléatoire qui à chaque éventualité  $(a;b)$  associe le réel  $|a - b|$ .
  - a) Donner l'ensemble des valeurs prises par  $X$ . **0,25pt**
  - b) Déterminer la loi de probabilité de  $X$ . **0,5pt**
- II. (E) :  $y' + 2y = 2\cos xe^{3x}$  ; (E') :  $y' + 2y = 0$ .
  1.  $P(x) = (a\cos x + b\sin x)e^{3x}$ . Trouver les réels  $a$  et  $b$  tels que  $P$  soit solution de (E). **0,5pt**
  2. Résoudre (E'). Prouver que  $f$  est solution de (E) si et seulement si  $f - P$  est solution de (E'). **0,5pt**
  3. Résoudre alors (E). **0,5pt**

**EXERCICE 2: / 4,25pts**

Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ ;  $f_\lambda$  la fonction de variable réelle définie par :  $f_\lambda(x) = \frac{x+\lambda}{x^2+1}$ .

1. Démontrer que  $f_\lambda$  admet deux extréma locaux en deux réels  $a$  et  $b$  ( $a < b$ ). **0,5pt**
2. On pose  $m_\lambda$  le minimum de  $f_\lambda$  sur  $\mathbb{R}$  et  $M_\lambda$  le maximum de  $f_\lambda$  sur  $\mathbb{R}$ .  
Justifier que  $m_\lambda = \frac{1}{2a}$  et  $M_\lambda = \frac{1}{2b}$ . **0,5pt**
3. Calculer  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} m_\lambda$ ;  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} M_\lambda$ ;  $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} m_\lambda$  et  $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} M_\lambda$ . **1pt**
4. On pose  $\lambda=1$ . Tracer la courbe  $(C_1)$  de  $f_1$ . Unité : 2cm. **1pt**
5. En posant  $x = \tan \alpha$ , calculer  $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$ . En déduire  $\int_0^1 f_1(x) dx$ . **0,75pt**
6. Soit  $(\Delta) = \{M(x; y) \text{ tels que } 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq f_1(x)\}$ . On fait tourner  $(\Delta)$  autour de l'axe des abscisses ce qui engendre le solide (S). Calculer le volume de (S). **0,5pt**

**EXERCICE 3: / 7,5pts**

Soit  $f$  la fonction numérique de la variable réelle définie par :  $\begin{cases} f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\ln t} dt, & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ .

1. Déterminer l'ensemble de définition D de  $f$ . **0,25pt**
2. Justifier que  $f$  est dérivable sur  $\left]0; \frac{1}{2}\right[ \cup ]1; +\infty[$ . (on pourra introduire la fonction  $h : t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ ). Calculer  $f'(x)$ . **0,75pt**
3. Démontrer que  $\forall x \in \left]0; \frac{1}{2}\right[ \cup ]1; +\infty[ ; \frac{x}{\ln(2x)} \leq f(x) \leq \frac{x}{\ln x}$ . Trouver  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ . **0,75pt**
4. Etudier la continuité et la dérivabilité de  $f$  en  $0^+$ . **0,5pt**
5. Soit la fonction  $\varphi$  définie par  $\varphi(t) = 2 - 2t + \ln t$ , avec  $t \in ]0; 1]$ .
  - a) Etudier les variations de  $\varphi$  sur  $]0; 1]$ . En déduire qu'il existe un unique  $\alpha \in \left]0; \frac{1}{2}\right[$  tel que  $\varphi(\alpha) = 0$ . **1pt**
  - b) Justifier que  $\forall t \in [\alpha; 1[ ; \ln t \geq 2t - 2$ . **0,25pt**
  - c) Montrer que  $\forall x \in \left[\alpha; \frac{1}{2}\right[ ; f(x) \leq \frac{1}{2} \int_x^{2x} \frac{1}{t-1} dt$ . **0,5pt**
  - d) Trouver alors  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x)$ . **0,5pt**
6. a) Justifier que  $0 < \ln t < t - 1$ . **0,25pt**  
b) En déduire  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ . **0,5pt**
7. Déterminer le tableau de variation de  $f$ . **0,75pt**

8. Par la méthode des rectangles (en subdivisant l'intervalle en 5 parties) donner une valeur approchée de  $f(2)$  et  $f(4)$ . **0,75pt**
9. Donner une esquisse de (Cf). On pensera à étudier les branches infinies. **0,75pt**

**Partie B : Evaluation des compétences**

**M. NANA** est invité à la base navale de la ville de Douala. Il fait des réservations dans deux types d'hébergements : l'hébergement A et l'hébergement B. Une nuit à l'hébergement A coûte 12 000f et une nuit à l'hébergement B coûte 22 500f. Il se rappelle que le coût total de sa réservation dans les deux types d'hébergement est de 219 000f et qu'il aurait passé au maximum 13 nuits à l'hébergement A.

La base navale possède une piste d'athlétisme qui est un terrain délimité par les cercles  $(C_1)$  et  $(C_2)$  tels que  $(C_1)$  est le cercle de centre I d'affixe  $z_I = \frac{(\sqrt{3}+i)^9}{(1+i)^{12}}$  et de rayon  $\sqrt{2}$ .  $(C_2)$  est l'image de  $(C_1)$  par la similitude directe S d'écriture complexe  $z' = (-1 + i)z + 2i$ .

**M. NANA** voudrait estimer la superficie de cette piste d'athlétisme. Le camp d'armement peut être assimilé à un plan (ABC) de sorte que si on munit l'espace d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  tel que  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  soit un repère du plan ; alors  $A(1; 2; 3)$  ;  $B(-1; 3; 1)$  et  $C(2; -1; 2)$ . Une caméra y est fixée en un point K, point d'intersection du plan (ABC) et la droite dont un système d'équation cartésienne est  $\begin{cases} -4x + 7y = 4 \\ 5x + 7y = 9 \end{cases}$ .

Intrigué, **M. NANA** voudrait savoir en quel point K est fixée cette caméra.

**Tâches :**

1. Déterminer le nombre d'hébergements passés dans chacun des deux types d'hébergement. **1,5pt**
2. Aider **M. NANA** à estimer la superficie de la piste d'athlétisme. **1,5pt**
3. Aider **M. NANA** à déterminer les coordonnées du point K. **1,5pt**



Trimestre : 1 A/S : 2022-2023	Discipline	Examineur	Classe	Date : 23/09/2022	Durée 1H30
Contrôle des connaissances	Mathématiques	M. NCHARE	Tle C	Coefficient : 7	

**CONSIGNE : Pour les deux premiers exercices. Réponse juste +1pt. Mauvaise réponse : -0.5pt. Pas de réponse 0 pt. Aucune justification n'est demandée.**

**EXERCICE : 1 Dire si chaque proposition est vraie (V) ou fausse (F). 4 points**

**Question 1 :**  $99^{100} \equiv 1[10]$

**Question 2 :** Soit  $a, b$  et  $c$  trois entiers relatifs non nuls. Si  $a$  divise le produit  $b \times c$  et si  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux, alors  $a$  divise  $c$ .

**Question 3 :** L'équation  $51x + 39y = 2016$  n'admet pas de solutions entières.

**Question 4 :** Si  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux, alors il existe un unique couple d'entiers relatifs  $(u; v)$  tel que :  $au + bv = 1$ .

**EXERCICE : 2 Incrire sur la feuille la lettre correspondant à la réponse juste. 6 points**

**Question 1 :**  $PGCD(a, b) = 7$ ;  $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ . Dans l'algorithme d'Euclide, les quotients successifs sont 3, 1, 1, 2 (comprenant la dernière division de reste nul). On a alors :

a)  $(a, b) = (35, 63)$     b)  $(a, b) = (35, 126)$     c)  $(a, b) = (25, 126)$     d)  $(a, b) = (14, 35)$

**Question 2 :** Soit un entier relatif  $n$ . On pose :  $a = 2n - 5$  et  $b = 3n - 7$ .

a)  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux

b)  $PGCD(a, b) = 11$

c) Tout diviseur commun à  $a$  et  $b$  divise 11

d)  $a$  et  $b$  ne sont pas premiers entre eux

**Question 3:**  $a$  est un entier naturel. Quelle est la relation entre les propositions  $A$  et  $B$  ?

$A: \ll 12a \equiv 0[3] \gg$  et  $B: \ll a \equiv 0[3] \gg$ .

a)  $A \Rightarrow B$

b)  $B \Rightarrow A$

c)  $A \Leftrightarrow B$

d) aucune

**Question 4 :** Dans la congruence modulo 5, le nombre  $23512^4$  est congru à

a) 2

b) 17

c) 1

d) 8

**Question 5 :** soit  $n$  un entier naturel. Si  $n - 4$  divise  $7n + 2$  alors,

a)  $n - 4$  divise 28

b)  $n$  divise 34

c) 30 divise  $n - 4$

d)  $n - 4$  divise 30

**Question 6:** les solutions dans  $\mathbb{Z}$  de l'équation  $4x \equiv 3[7]$  sont de la forme

a)  $x = 7k, k \in \mathbb{Z}$

b)  $x = 6 + 3k, k \in \mathbb{Z}$

c)  $x = 6 + 7k, k \in \mathbb{Z}$

d)  $x = 3 + 7k, k \in \mathbb{Z}$

**EXERCICE : 3**

**10 points**

1) Déterminer tous les couples d'entiers naturels  $(x; y)$  tels que :  $x^2 = 2xy + 15$ .

2) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$   $3^{n+3} - 4^{4n+2}$  est divisible par 11.

3) Soit  $a = bq + r$  représentant la division euclidienne de  $a$  par  $b$  sachant que  $q$  et  $r$  restent invariants si on augmente  $a$  de 52 et  $b$  de 4. Calculer  $q$ .

4) Écrire avec les quantificateurs la proposition suivante puis donner sa négation «Pour tout entier naturel on peut trouver un entier naturel plus grand que lui.»

5)  $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$ , Démontrer par contraposition que si  $n^2 - 1$  n'est pas divisible par 8 alors  $n$  est pair.

**Partie B : évaluation des compétences**

4,5points

**Situation**

La population d'une région est de l'ordre 5 millions d'habitants. Le taux d'accroissement moyen de cette population est de 1,6% par an. On a relevé la taille de 40 athlètes devant représenter cette région aux jeux olympique à Londres. Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous :

<b>Taille (cm)</b>	<b>157</b>	<b>162</b>	<b>167</b>	<b>172</b>	<b>177</b>	<b>182</b>
<b>Effectif</b>	<b>3</b>	<b>8</b>	<b>10</b>	<b>10</b>	<b>7</b>	<b>2</b>

Les athlètes les plus performants sont ceux qui ont la taille médiane et l'écart type inférieur à 5 cm. Pour leur seul repas lourd, leur cuisinière a acheté 41 400 F pour un mélange de 30 kg de viande sans os et de viande avec os .Un kilogramme de viande sans os coute 1 500F et un kilogramme de viande avec os coute 1 300F.

**Tâches :**

1 Dans combien d'années la population de cette région aura-t-elle doublée ?

1,5pt

2-Les athlètes de cette région sont-ils performants ?

1,5pt

3-Calculer le nombre de kilogramme de viande de chaque espèce.

1,5pt

**Présentation :****0,5pt**



*L'épreuve comporte deux parties A et B obligatoires.*

*L'utilisation de la calculatrice et du matériel usuel de géométrie est autorisée.*

**PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES [15.5 points]**

**EXERCICE 1 / 05.5 points**

- I.  $a$  et  $b$  désignent deux entiers naturels non nuls tels que  $\text{pgcd}(a+b, a) = p$ ,  $p$  premier.
1. Démontrer que  $p$  divise  $a^2$  (on pourra remarquer que  $a^2 = a(a+b) - a$ ) [0,25pt]
  2. En déduire que  $p$  divise  $a$  et aussi que  $p$  divise  $b$  [0,5pt]
  3. **Application.** Résoudre dans  $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$  le système suivant :  $\begin{cases} \text{pgcd}(a+b, ab) = 5 \\ \text{ppcm}(a, b) = 170 \end{cases}$  [0,75pt]
- II. On rappelle la propriété connue sous le nom de petit théorème de Fermat :  
"Si  $p$  est un nombre premier et  $a$  un entier naturel non divisible par  $p$ , alors  $a^{p-1} \equiv 1[p]$ ".  
On considère la suite  $(u_n)$  d'entiers naturels définie par :  $u_0 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 10u_n + 21$ .
1. Calculer  $u_1, u_2$  et  $u_3$ . [0,75pt]
  2. Démontrer par récurrence que, pour tout  $n$  entier naturel,  $3u_n = 10^{n+1} - 7$ . [0,75pt]
  3. En déduire une écriture décimale de  $u_n$  pour tout entier naturel  $n$ . [0,5pt]
  4. Montrer que  $u_2$  est un nombre premier. [0,5pt]
  5. On se propose maintenant d'étudier la divisibilité des termes de la suite  $(u_n)$  par certains nombres premiers.
    - a. Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n$  n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5. [0,75pt]
    - b. Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $3u_n \equiv 4 - (-1)^n [11]$ . [0,25pt]
    - c. En déduire que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n$  n'est pas divisible par 11. [0,25pt]
    - d. Démontrer l'égalité :  $10^{16} \equiv 1[17]$ . [0,25pt]

**EXERCICE 2 / 3 points**

1. Démontrer par récurrence que pour tout  $n$  entier naturel non nul :  
$$\sum_{k=1}^n (2k-1)(-1)^{k-1} = n(-1)^{n-1}$$
 [1,5pts]
2. On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R} - \{-3\}$  par  $f(x) = \frac{2}{x+3}$ ,
  - a) Calculer  $f'(x)$  et  $f''(x)$  [0,5pts]
  - b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul,  $f^{(n)}(x) = 2 \times \frac{n!(-1)^n}{(x+3)^{n+1}}$ ; où  $f^{(n)}$  désigne la dérivée d'ordre  $n$  de  $f$  [1pt]

**EXERCICE 3 / 2 points**

1. Trouver les entiers naturels  $a$  et  $b$  dont le plus grand diviseur commun  $d$  et le plus petit multiple commun  $m$  vérifiant :  $\begin{cases} m+d=1 \\ b \leq a \\ m=d^2 \end{cases}$  [1pt]
2. On considère un nombre entier  $a \geq 2$ . Soit  $n$  un entier naturel non nul et  $d$  un diviseur positif de  $n$  ( $n = dk$ ).

- a. Montrer que  $a^d - 1$  est un diviseur de  $a^n - 1$  (On pourra remarquer que pour tout entier naturel  $k$  non nul et  $\forall x \in \mathbb{N} : (x - 1)(1 + x + x^2 + \dots + x^{k-1}) = x^k - 1$ ). **[0,25pt]**
- b. Dédurre de la question précédente que  $2^{2004} - 1$  est divisible par 7, par 63 puis par 9. **[0,75pt]**

**EXERCICE 5 / 5 points**

- 1) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation (E) :  $z^2 - (\sin x + i \cos x)z + i \sin x \cos x \quad x \in ]0; \frac{\pi}{2}[$  **[0,75pt]**
- 2) Calculer  $(2 + 2i)^3$  puis résoudre dans  $\mathbb{C}$   $z^3 = -16 + 16i$  **[0,75pt]**
- 3) Ecrire sous forme exponentielle  $z = \frac{1 + \cos x + i \sin x}{1 - \cos x - i \sin x} \quad x \in ]0; \pi[$  **[0,75pt]**
- 4) Pour tous  $z \neq 2i$ . On donne les points A et B d'affixes  $z_A = -1 + i$  et  $z_B = 2i$ . Au point M(z) on associe le point M' d'affixe  $z' = \frac{z+1-i}{z-2i}$  où  $z = x + iy$ .
- a-Déterminer la partie réelle  $x'$  et la partie imaginaire  $y'$  de  $z'$  en fonction de  $x$  et  $y$  **[0,75pt]**
- b-Déterminer le lieu (E) des points M pour que M' soit un réel. **[0,75pt]**
- c-Déterminer et construire le lieu ( $\Gamma$ ) des points M vérifiant  $|z'| = 2$ . **[1,25pts]**

**PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES [4.5 points]**

Un astronome a observé au jour  $J_0$  le corps céleste A, qui apparait périodiquement tous les 105 jours. Six jours plus tard ( $J_0 + 6$ ), il observe le corps B, donc la période d'apparition est de 81 jours. On appelle  $J_1$ , le jour de la prochaine apparition simultanée des deux objets aux yeux de l'astronome.

**Tâche1** : Soit  $u$  et  $v$  le nombre de périodes effectuées respectivement par A et B entre  $J_0$  et  $J_1$ .

Montrer que le couple  $(u, v)$  est solution de l'équation (E) :  $35u - 27v = 2$ . **[1,5pts]**

**Tâche2** : Déterminer les solutions de l'équation (E) et puis déterminer le couple  $(u, v)$  permettant de déterminer  $J_1$ . **[1,5pts]**

**Tâche3** : Le jour  $J_0$  était mardi 7 décembre 1999, quelle sera la date exacte du jour  $J_1$ . (Rappelons que l'an 2000 était une année bissextile) **[1,5pts]**

*« Quand vous vous demandez où est Dieu pendant les périodes difficiles de votre vie, souvenez-vous que le professeur reste toujours silencieux pendant l'examen ». (ALBERT Einstein)*

EPREUVE DE MATHÉMATIQUES				
Contrôle Continu : <b>No2</b>	Année 2020/2021	Classe : T <sup>le</sup> C	Coefficient : 7	Durée : 4heures
Examineur : <del>AZEBAZE T&amp;AMC T&amp;EOPHILE</del>				

**Partie A : EVALUATION DES RESSOURCES/15PTS**

**EXERCICE 1 /5pts**

On considère la suite numérique  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :  $V_0 = 27$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, V_{n+1} = 3V_n - 4$  ;

1. a) Indiquer les cinq premiers termes de cette suite ; (1pt)  
 b) En déduire une conjecture des deux derniers chiffres des termes de cette suite ; (0,25pt)
2. a) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, V_{n+2} \equiv V_n [8]$ ; (0,75pt)  
 b) En déduire par récurrence sur  $n$  que :  $\forall n \in \mathbb{N}, V_{2n} \equiv 3[8]$  et  $V_{2n+1} \equiv 5[8]$ ; (1pt)
3. On pose :  $\forall n \in \mathbb{N}, W_n = V_n - 2$ ;  
 a) Montrer que la suite  $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique de raison 3 ; (0,5pt)  
 b) Justifier que :  $\forall n \in \mathbb{N}, V_n = 2 + 25 \times 3^n$ ; (0,5pt)
4. a) Justifier que :  $\forall n \in \mathbb{N}, 2V_n \equiv 54[100]$ ; (0,5pt)  
 b) Déterminer les deux derniers chiffres de l'écriture décimale des termes de  $V_n$  suivant les valeurs de  $n$ . (0,5pt)

**EXERCICE 2 /5pts**

l'application  $p$  de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$  définie par :  $p(z) = z^3 - (2 - 4i)z^2 - (18 + 3i)z - 9 - 45i$  et on donne les points A ; B ; C et D d'affixes respectives  $-3i$  ;  $5 - i$  ;  $-3$  et  $1 + 5i$  dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$  : unité graphique 1 cm .

1. a) Montrer que  $p(z)$  possède une racine réelle ; (0,5pt)  
 b) Justifier que le nombre complexe  $5 + 2i$  est une racine carrée du nombre complexe  $21 + 20i$  ; (0,25pt)  
 c) Résoudre dans  $\mathbb{C}$ , l'équation  $p(z) = 0$  ; (0,5pt)
2. a) Donner l'écriture exponentielle du nombre complexe  $\frac{z_D}{z_B}$  ; puis en déduire la nature de la figure OBD; (0,5pt)  
 b) Donner l'écriture algébrique du nombre complexe  $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} \div \frac{z_A - z_D}{z_C - z_D}$  ; puis justifier que les points A ; B ; C et D ne peuvent appartenir à un même cercle ; (0,75pt)
3. On considère l'équation (E) :  $z^2 - 2(4 + 5 \cos \theta)z + (4 \cos \theta + 5)^2 = 0$  dans  $\mathbb{C}$  avec  $\theta \in ]-\pi ; 0]$ ;  
 a) Justifier que son discriminant vaut  $(6i \sin \theta)^2$ ; (0,5pt)  
 b) On définit les points  $M_1$  et  $M_2$  d'affixes respectives  $z_1$  et  $z_2$  où  $z_1$  et  $z_2$  sont solutions de l'équation (E) avec  $\text{Im}(z_1) > 0$ ; (0,75pt)  
 c) Préciser les coordonnées des points  $M_1$  et  $M_2$  pour lesquelles  $M_1M_2 = 3$  cm ; (0,5pt)  
 d) Justifier que le module du nombre complexe  $\frac{z_{M_1} - z_A}{z_{M_2} - z_A}$  ne dépend pas de avec  $z_A = 4$  ; puis en déduire la nature de la figure  $AM_1M_2$ ; (0,75pt)

### EXERCICE 3 /5pts

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ . On considère la fonction numérique suivantes :  $f : x \mapsto x + \sqrt{1+x^2}$  .

1. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation :  $x + \sqrt{1+x^2} > 0$  ; (0,5pt)
2. Etudier les branches infinies de la courbe  $(C_f)$  de  $f$  ; (0,75pt)
3. Montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R} ; f'(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{1+x^2}}$  ; (0,5pt)
4. Dresser le tableau de variation de  $f$  ; (0,75pt)
5. Déterminer une équation de la tangente à  $(C_f)$  au point d'abscisse 0 ; (0,5pt)
6. a) Justifier que  $f$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  vers un intervalle à préciser ; (0,5pt)  
b) Montrer que :  $g : x \mapsto \frac{x^2-1}{2x}$  définie sur  $]0; +\infty[$  est la bijection réciproque de  $f$  ; (0,5pt)
7. Tracer la courbe  $(C_f)$  de  $f$  et  $(C_g)$  de  $g$  dans le même repère ci-haut mentionné ; (1pt)

### Partie B : EVALUATION DES COMPETENCES /5pts

L'entreprise **HILMA** créée pour le recensement de la population Camerounaise est ouverte de lundi à Vendredi. Le salaire journalier des ouvriers est 2000 FCFA ; celui des techniciens de 2500 FCFA et celui des cadres de 5000 FCFA pour un salaire journalier moyen de 2450 FCFA. La masse salariale journalière de cette entreprise s'élevait à 122500 FCFA, mais pour des raisons économiques dues à la crise sanitaire de la Covid-19, la direction a réduit cette masse salariale journalière à 95000 FCFA. Cette diminution se répartie comme suit : une baisse de 25% sur le salaire journalier des ouvriers, de 20% sur le salaire journalier des techniciens et de 20% sur le salaire journalier des cadres.

Cette entreprise a constaté qu'au 1<sup>er</sup> janvier 1992, la ville de **Catakaré** possédait 20000 habitants et à partir de cette année 1992, la population de cette ville augmente de 5% par an.

Le T-shirt de travail de cette entreprise était étiqueté dans un magasin à 45000 FCFA ; mais a subi une baisse de  $a\%$  et tout travailleur à **HILMA** bénéficiant d'une remise de  $(a-5)\%$  sur le nouveau prix peut enfin payer ce T-shirt à 30600 FCFA.

**Tâche 1** : Quel est l'effectif total de chaque catégorie de travailleur de l'entreprise **HILMA** ? 1,5pt

**Tâche 2** : Quelle sera la population de la ville de **Catakaré** au 1<sup>er</sup> janvier 2021 ? 1,5pt

**Tâche 3** : Quelles sont les valeurs possibles de  $a$  ? 1,5pt

***Présentation : 0,5pt***

***« La réussite, c'est au bout de l'effort! »***

## Épreuve de Mathématiques

*L'épreuve est sur deux pages, deux grandes parties A et B , toutes obligatoires. La qualité de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation de la copie du candidat. Soyez précis et propre.*

### PARTIE A : ÉVALUATION DES RESSOURCES : 15,5 PTS

#### Exercice 1 : 03,5 points

On considère l'équation  $(E) : [z^2 - 2(1 + i)z + 4i][z^2 + 4z + 8] = 0$  , dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  de nombres complexes .On notera  $A$  ,  $B$  ,  $C$  et  $D$  les images des racines de  $(E)$  , dans le plan complexe telles que  $A$  et  $B$  ont même abscisse  $A$  et  $C$  ont même ordonnée

1. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $(E)$  . 0,75 pt
2. Trouver l'écriture complexe de la similitude  $S$  où ;  $S(A) = C$  et  $S(B) = D$  . 0,75 pt
3. Déduire les éléments caractéristiques de  $S$  . 0,5 pt
4. Soit  $M_0$  le point d'affixe  $z_0 = 2 + 3i$  ; on pose  $\forall n \in \mathbb{N}$  ,  $M_{n+1} = S(M_n)$  et  $4U_n = \|\overrightarrow{IM_n}\|$ 
  - (a) Démontrer que  $(U_n)_n$  est une suite géométrique . 0,75 pt
  - (b) Déduire les caractéristiques de  $U$  et Exprimer  $U_n$  en fonction de  $n$  . 0,5 pt
  - (c) Étudier la convergence éventuelle de la suite  $(U_n)$  . 0,25 pt

#### Exercice 2 : 04,5 points

1. Démontrer en utilisant la récurrence que ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  :
  - (a)  $1.2 + 2.3 + \dots + h.(h + 1) + \dots + n(n + 1) = \frac{1}{3}n(n + 1)(n + 2)$  . 0,75 pt
  - (b)  $n^7 - n$  est divisible par 7 . 0,75 pt
  - (c)  $1.(1!) + 2.(2!) + 3.(3!) + \dots + n.(n!) = (n + 1)! - 1$  . 0,75 pt
2. Soient  $a$  et  $b$  deux entiers naturels non nuls premiers entre eux .
  - (a) Démontrer que  $a + b$  et  $ab$  sont premiers entre eux . 0,75 pt
  - (b) Vérifier que :  $a^2 - ab + b^2 = (a + b)^2 - 3ab$  . 0,25 pt
  - (c) Déduire que  $a + b$  et  $a^2 - ab + b^2$  sont soit étrangers soit divisible par 3 . 0,75 pt
  - (d) Montrer que  $PGCD(a^2 - ab + b^2, a + b) = PGCD(a + b, 3)$  . 0,5 pt

#### Exercice 3 : 04 points

1. (a) Décomposer 18360 en produit de facteur premier et Trouver tous les entiers naturels dont le cube divise 18360 . 0,5 pt  
(b) Déduire dans  $\mathbb{N}$  la résolution de l'équation  $b^3(b^2 + (b + 1)^2) = 18360$  . 0,75 pt
2. Déterminer le chiffre des unités de  $7^{7^7}$  . 0,75 pt
3. On souhaite déterminer les entiers  $n \in \mathbb{N}$  , vérifiant la relation  $(E) : 13 \mid 5^{2n} + 5^n$  .
  - (a) Déterminer les entiers naturels  $n$  tels :  $5^n \equiv -1[13]$  . 0,5 pt
  - (b) Montrer que si  $13 \mid 5^{2n} + 5^n$  alors  $5^n \equiv -1[13]$  . 0,75 pt

(c) Dédurre que les entiers  $n$  vérifiant (E) sont de la forme  $n = 4p + 2$  ( $p \in \mathbb{N}$ ) . **0,75 pt**

**Exercice 4 : 03,5 points**

Le plan complexe  $\mathbb{P}$  est rapporté à un repère orthonormal  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  . On prendra pour unité graphique  $4cm$  . On considère les points  $A, B, C$  et  $D$  d'affixes respectifs  $a = i$  ,  $b = 1 + 2i$  ,  $c = 1 + i$  et  $d = 3 + 2i$  . On considère la similitude directe  $s$  qui transforme  $A$  en  $B$  et  $C$  en  $D$  . Soit  $M$  et  $M'$  les points d'affixes respectifs  $z$  et  $z'$  tels que  $s(M) = M'$  .

1. Exprimer  $z'$  en fonction de  $z$  et déterminer les éléments caractéristiques de  $s$  . **0,75 pt**
2. Soit la suite numérique  $V$  définie par :  $V_0 = 0$  et  $V_{n+1} = 2V_n + 1$  ;  $\forall n \in \mathbb{N}$  .
  - (a) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}$  ,  $V_n$  et  $V_{n+1}$  sont premiers entre eux . **0,25 pt**
  - (b) Interpréter en utilisant la similitude  $s$  les termes de la suite  $V$  . **0,25 pt**
  - (c) Montrer par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}$  ,  $V_n = 2^n - 1$  . **0,5 pt**
  - (d) Montrer que  $\forall n, p \in \mathbb{N}^*$  tels que  $n \geq p$  ,  $V_n = V_p(V_{n-p} + 1) + V_{n-p}$  . **0,5 pt**
  - (e) Dédurre que  $PGCD(V_n, V_p) = PGCD(V_p, V_{n-p})$  . **0,25 pt**
  - (f) Dédurre que  $PGCD(V_n, V_p) = V_{PGCD(n,p)}$  et calculer  $PGCD(V_{2005}, V_{15})$  . **1 pt**

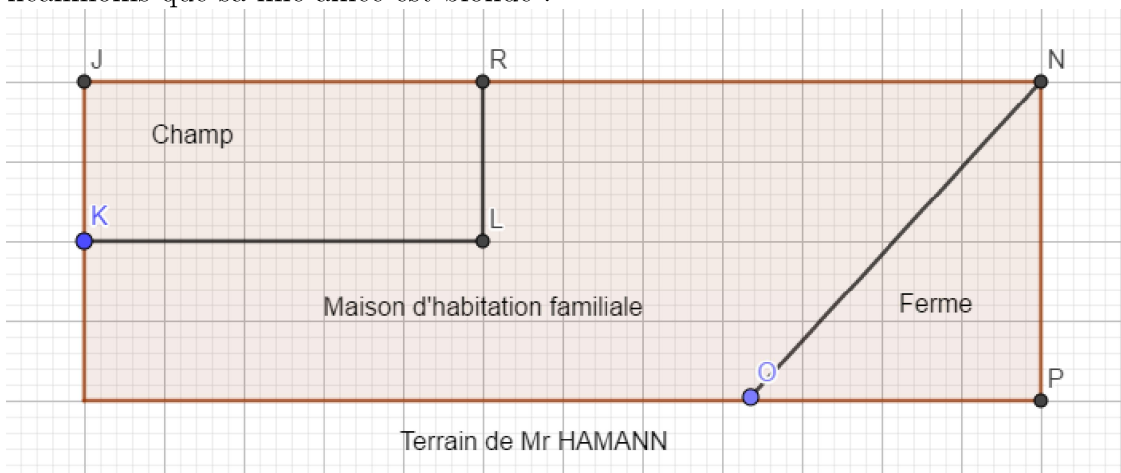
**PARTIE B : ÉVALUATION DES COMPÉTENCES :04,5 PTS**

Mr HAMMAN possède un terrain ayant une forme rectangulaire comme l'indique la figure ci-dessous . Se sentant un peu fatigué et sous le poids de l'âge il aimerait mieux protéger son champ et sa ferme par du fil électrique coutant 2500Frs le mètre .

Sa ferme ayant la forme d'un triangle rectangle  $OPN$  est image du triangle  $O'P'N'$  par la similitude directe plane ayant pour écriture complexe  $z' = (8 + 8i)z - i$  ; tels que  $s(O') = O$  ,  $s(P') = P$  (on donne  $P'(-5, 0)$  ,  $N'(0, 5)$  et  $O'(0, 0)$ ) .

Les sommets  $R$  et  $K$  de son champ sont les points images solution de l'équation (E) :  $z^3 - (1 + i)z^2 - 2iz - 6 + i = 0$  avec  $z_J = \overline{z_K}$  et  $z_L = \overline{z_R}$  (avec  $z_K$  ayant une ordonnée positive) .

Dans sa maison familiale Mr HAMANN a oublié les âges de ses trois filles le produit de leurs âges est 36 et la somme de ces ages est le sixième plus petit entier naturel premier . Il se souvient néanmoins que sa fille ainée est blonde .



**Taches :**

- Tache 1 :** Combien dépensera Mr HAMANN pour entourer son champ . **1,5 pt**
- Tache 2 :** Combien dépensera Mr HAMANN pour entourer sa ferme . **1,5 pt**
- Tache 3 :** Quels sont les ages respectifs des trois filles de Mr HAMANN . **1,5 pt**

## Épreuve de Mathématiques

*L'épreuve est sur deux pages, deux grandes parties A et B toutes obligatoires. La qualité de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation de la copie du candidat. Soyez précis et propre.*

### PARTIE A : ÉVALUATION DES RESSOURCES : 15,5 PTS

#### Exercice 1 : 06 points

1. Soit le polynôme  $P(z) = z^3 - (1 - i)z^2 + z - 1 + i$ ,  $z \in \mathbb{C}$ .
  - (a) Montre que  $P(z)$  admet deux racines imaginaires pures que tu détermineras. **0,75pt**
  - (b) Résoudre alors dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $P(z) = 0$ . **0,5pt**
  - (c) Le plan est muni du repère  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . On note  $A, B$  et  $C$  les points d'affixes respectifs  $a = -i$ ,  $b = i$  et  $c = 1 - i$ . Soient les points  $D$  et  $E$  d'affixes  $d$  et  $e$ .
    - i. Faire une figure, que tu complèteras au fur et à mesure. **0,25pt**
    - ii.  $C$  est l'image du point  $D$  par la translation de vecteur  $\vec{AB}$ . Détermine  $d$ . **0,5pt**
    - iii.  $E$  est l'image de  $D$  par la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ . Trouve  $e$ . **0,5pt**
2. On veut que tu détermine les couples  $(n, m)$  d'entiers naturels non nuls vérifiant l'équation  $(E)$  suivante;  $(E) : 7^n - 3 \times 2^m = 1$ .
  - (a) On suppose  $m \leq 4$ . Montre qu'il y'a exactement deux couples solutions de  $(E)$ . **0,5pt**
  - (b) On suppose maintenant que  $m \geq 5$ .
    - i. Montrer que si  $(n, m)$  vérifie l'égalité  $(E)$ , alors  $7^n \equiv 1[32]$ . **0,5pt**
    - ii. Étudies les restes de la division par 32 des puissances de 7. **0,75pt**
    - iii. Dédurre que si  $(n, m)$  vérifie l'égalité  $(E)$ , alors 4 divise  $n$ . **0,5pt**
    - iv. En déduire que si  $(n, m)$  est solution de  $(E)$ , alors  $7^n \equiv 1[5]$ . **0,5pt**
    - v. Pour  $m \geq 1$ , existe-il des couples  $(n, m)$  solutions de  $(E)$ . **0,5pt**
  - (c) Dédurre alors, l'ensemble des couples  $(n, m)$  solution de  $(E)$ . **0,25pt**

#### Exercice 2 : 03,5 points

Soit  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  une base d'un espace vectoriel  $E$ . Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$ . Pour tout réel  $\lambda$ , on considère l'ensemble  $E_\lambda = \{\vec{u} \in E; f(\vec{u}) = \lambda\vec{u}\}$ .

1.
  - (a) Démontre que  $E_\lambda$  est un sous espace vectoriel de  $E$ . **0,5pt**
  - (b) On suppose que  $f \circ f = 2f$ ; montre que  $\vec{u} \in \text{Im}(f) \iff u \in E_2$ . **0,75pt**
2. On suppose ici que :  $f(\vec{i} + \vec{j}) = 2\vec{i} + 2\vec{j}$ ,  $f(\vec{i} - \vec{j}) = 2\vec{i} - 2\vec{j}$ ; et  $f(\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}) = \vec{0}$ .
  - (a) Démontre que :  $f(\vec{i}) = 2\vec{i}$ ,  $f(\vec{j}) = 2\vec{j}$  et  $f(\vec{k}) = 2\vec{i} + 2\vec{j}$ . **0,75pt**
  - (b) Détermine la matrice  $M$  de  $f$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . **0,25pt**
  - (c) Montre que  $f \circ f = 2f$ . Compléter :  $\text{Im}(f) = \dots$  **0,5pt**
  - (d) Détermine par une de ses bases, le noyau  $\text{Ker}(f)$  de  $f$ ; et déduire  $\text{Im}(f)$ . **0,75pt**

### Exercice 3 : 02,5 points

On donne la série statistique suivante :

$x_i$	1,2	1,4	1,6	1,8	2
$y_i$	13	12	14	16	a

où  $a$  est un entier naturel non nul. Par la méthode des moindres carrés, on a obtenu l'équation de la droite de regression de  $y$  en  $x$ , à savoir  $(D) : y = 9x + 0,6$ .

1. Complète par les expressions :  $x$ ,  $COV(X, Y)$ ;  $V(X)$ ;  $\bar{X}$  et  $\bar{Y}$  le petit texte suivant :  
L'équation de la droite de regression de  $y$  en ... est donnée par  $y = ax + b$  avec :  $a = \dots\dots\dots$   
et  $b = \dots\dots - a(\dots\dots)$ . **0,75pt**
2. Détermine  $V(X)$  et déduire  $COV(X, Y)$  à partir de la droite  $(D)$ . **0,5pt**
3. Déduire  $\bar{X}$  et exprime  $\bar{Y}$  en fonction de  $a$ . **0,75pt**
4. En utilisant la question précédente montre que  $a = 20$ . **0,5pt**

### Exercice 4 : 03,5 points

Soit  $f$  la fonction  $f : x \mapsto \sqrt{\frac{x-2}{x+1}}$ ; on note  $(C)$  sa courbe représentative dans un repère orthogonal  $(O, I, J)$ .  $D_f$  son ensemble de définition.

1. Montre que  $D_f = ]-\infty; -1[ \cup ]2; +\infty[$ ; et étudies les branches infinies à  $(C)$ . **0,75pt**
2. Étudie la continuité et la dérivabilité de  $f$  sur son ensemble de définition. **0,75pt**
3. En déduire que  $(C)$  admet une demi-tangente parallèle à l'axe  $(OJ)$ . **0,25pt**
4. Étudies les variations de  $f$  et dresse son tableau de variation. **1,25pt**
5. Montre que la restriction de  $f$  à  $] - \infty; -1[$  notée  $h$  est une bijection et trouve  $h^{-1}$ . **0,5pt**

## PARTIE B : ÉVALUATION DES COMPÉTENCES :04,5 PTS

L'évolution du chiffre d'affaire(en centaines de millions de Frs) de l'entreprise de Mr Bouba dénomé **SOTRA** en fonction du numéro de l'année est regroupée dans le tableau ci-dessous :

Années	2016	2017	2018	2019	2020	2021
Numéro année	1	2	3	4	5	6
Chiffre d'affaire	3,5	4,8	4,3	5	5,6	6,2

Mr Bouba désire prévoir son chiffre d'affaire pour les années avenir. Pour ce faire il contacte un technicien de la chose qui dit qu'il procèdera par la méthode de Mayer pour trouver un ajustement linéaire. À l'heure de pause un lundi, il y'a cambriolage à **SOTRA**. À la suite du vol, on interroge 4 temoins qui ont vu les bandits s'enfuir en voiture. Le premier dit que le numéro d'immatriculation comporte 4 chiffres. Le deuxième, que les deux premiers chiffres sont identiques. Le troisième que les deux derniers chiffres sont identiques. Le quatrième un élève en classe de terminale **C** a remarqué que le nombre en question est un carré parfait et que son chiffre des dizaines est compris entre 1 et 5 il dit en plus **un nombre dont les deux derniers chiffres sont impairs n'est jamais un carré parfait**.Après ce vol, Mr Bouba décide de mieux protéger **SOTRA**. Il décide alors d'acheter des fils electriques, pour installer le long de **SOTRA** qui a la forme d'une figure possédant 4 côtés, tel que les sommets de cette figure sont les points images solutions de l'équation  $(E) : z^4 + 2z^3 + 2z^2 - 2z + 1 = 0$  (notre élève de terminale **C** affirme que pour résoudre  $(E)$ , on pourra déterminer deux réels  $a$  et  $b$  tels que :  $(E) \iff z^2[(z - 1/z)^2 + a(z - 1/z) + b] = 0$ ).

- Tache 1** : Donne une estimation du chiffre d'affaire de cette entreprise en 2035. **1,5pt**  
**Tache 2** : Quel est le numéro d'immatriculation du véhicule des bandits. **1,5pt**  
**Tache 3** : combien Mr Bouba dépensera pour l'achat de fils électrique. **1,5pt**

**ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES**

**PARTIE A : ÉVALUATION DES RESSOURCES : [15,5 pts]**

**Exercice 1 : (5 points).**

1. Rappele les théorèmes de Bezout et de Gauss. [1pt]
2. Résous dans  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ , l'équation d'inconnues  $x$  et  $y$  :  $75x + 27y = -6$  [1pt]
3. a) Montre que l'espace vectoriel réel  $E$  des polynômes de degré inférieur ou égal à 2, est de dimension 3 lorsqu'on le muni des opérations usuelles sur les applications de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$ . [0, 5pt]  
 b) Donne la matrice de l'application  $\theta : E \rightarrow E$  telle que  $\theta(f) = f'$  la dérivée de  $f$  dans la base  $B = (u, v, w)$  où  $u : x \mapsto 1$ ,  $v : x \mapsto x$ ,  $w : x \mapsto x^2$ . [0, 5pt]
4. Soit  $u$  un nombre complexe différent de 1 et  $z$  un nombre complexe quelconque.
  - a. Montre que si  $u$  est de module 1, alors  $\frac{z - u\bar{z}}{1 - u} \in \mathbb{R}$ . [0, 5pt]
  - b. Montre que si  $\frac{z - u\bar{z}}{1 - u} \in \mathbb{R}$  et  $\bar{u}z - u\bar{z} = 0$ , alors ( $z \in \mathbb{R}$  ou  $|u| = 1$ ). [0, 5pt]
5. On a  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $z + \frac{1}{z} = 2 \cos(\theta)$  avec  $\theta$  un nombre réel quelconque. Soit  $n \in \mathbb{Z}$ .
  - a) Résous  $z^2 - 2 \cos(\theta)z + 1 = 0$  et mettre le résultat sous forme exponentielle. [0, 5pt]
  - b) Dédus-en que  $z^n + \frac{1}{z^n} = 2 \cos(n\theta)$ . [0, 5pt]

**Exercice 2 : (5 points).**

On considère la suite  $(a_n)_n$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $a_n = 2 \times 5^n + 7$ .

1. a. Justifie que pour tout entier naturel  $n$ ,  $a_n$  est un entier naturel impair. [0, 5pt]  
 b. Détermine suivant les valeurs de  $n$  le reste modulo 8 de  $5^n$ . [0, 75pt]  
 c. Dédus-en que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n \equiv 1[8]$ . [0, 75pt]
2. a. Montre que si  $\begin{cases} x \equiv 1(mod 8) \\ x \equiv 7(mod 125) \end{cases}$ , alors  $x \equiv 257(mod 1000)$ . [0, 75pt]  
 b. Montre que pour tout  $n \geq 3$ ,  $a_n \equiv 257(mod 1000)$ . [0, 5pt]  
 c. Quels sont les trois derniers chiffres de l'entier  $A = (2 \times 5^{2020} + 7) \times (2 \times 5^{2021} + 7)$ ? [0, 5pt]
3. a) Vérifie que pour tout entier naturel  $n$ ,  $5a_{2n} - a_{2n+1} = 28$ . [0, 25pt]  
 b) Soit  $\delta = pgcd(a_{2n}; a_{2n+1})$ . Montrez par l'absurde que  $\delta$  est différent de 7. [0, 5pt]  
 c) Trouve alors les valeurs possibles de  $\delta$ . [0, 5pt]

**Exercice 3 : (5 points).**

Une association de sage-femme a mené une enquête sur le nombre de naissances journalières par sexe dans la ville de Dschang. Les résultats obtenus auprès de 10 maternités sont regroupés dans le tableau ci-dessous :

Garçon (X)	2	5	5	7	8	9	9	10	12	14
Fille (Y)	1	3	3	5	9	10	10	11	11	12

1. Dresse le tableau des effectifs des séries marginales de cette série statistique. [1pt]
2. Calcule les coordonnées du point moyen de cette série statistique. [0, 5pt]
3. Ressors le tableau à double entrée des données de la série statistique double  $(X, Y)$  décrite par le tableau ci-dessus. [1pt]
4. Représente le nuage de points associé à cette série en indiquant le point moyen  $G$ . [1pt]
5. Un ajustement affine de ce nuage de points est-il envisageable ? [0, 25pt]
6. a- Détermine l'équation de la droite de régression de  $y$  en  $x$  par la méthode de Mayer. [0, 75pt]
- b- En déduis le nombre de naissances des filles si celui des garçon est 24. [0, 5pt]

**PARTIE B : ÉVALUATION DES COMPÉTENCES : [4,5 pts + bonus potentiel]**

**Situation-problème :**

Monsieur Ahmadou est le gestionnaire de l'entreprise où vous avez postulé pour un emploi. M. Ahmadou vous explique, lors de l'interview, que le bénéfice  $b$  en fonction du nombre  $x$  (en milliers) de chaussures est défini par :

$$b(x) = x^3 - x^2 - 5x + 5, \text{ avec } 1 < x < 3 .$$

L'entrepreneur sait qu'il existe un nombre unique de chaussure  $x = X$  pour lequel le bénéfice est nul. L'entreprise est située dans un village où les habitants fêtent deux évènements  $N$  et  $Y$ . L'évènement  $N$  est célébré tous les 140 jours et l'évènement  $Y$ , tous les 108 jours. Les jours où les fêtes des évènements  $N$  et  $Y$  coïncident sont considérés comme jours de grâce. Un matin  $M$  le village a célébré  $Y$ , huit jours après avoir célébré  $N$ . L'entreprise souhaite éviter de programmer une journée de travail, à la fête du prochain jour de grâce.

M. Ahmadou vous propose de l'aider pour ces trois tâches pour passer votre interview :

**Tâches :**

1. Donne numériquement, à l'unité près, le nombre de chaussures dont le bénéfice est nul. [3pts]
2. Donne(en fonction de  $X$ ) l'intervalle de valeurs du nombre de chaussures menant à un gain positif? [3pts]
3. Trouve le jour de grâce le plus proche après le matin  $M$ . [3pts]

**Épreuve de Mathématiques**  
Evaluation intermédiaire du trimestre 1

 **Evaluation des ressources: 15 points**

**Exercice 1: 2,25 points**

Soit l'équation (E) à variable complexe  $z$  tel que:  $z^4 - 3z^3 + 4,5z^2 - 3z + 1 = 0$ .

- 1) Montrer que si  $z_0$  est solution de (E) alors  $\bar{z}_0$  est aussi solution de (E), puis que si  $z_0$  est solution de (E) alors  $\frac{1}{z_0}$  est aussi solution de (E). **1 pt**
- 2) Montrer que  $1 - i$  est une solution de (E). **0,5 pt**
- 3) En déduire les autres solutions de (E). **0,75 pt**

**Exercice 2: 3,5 points**

On considère le polynôme  $P$  à variable complexe  $z$  défini par:  $P(z) = z^3 - (1+4i)z^2 + (-5+5i)z + 6+6i$ .

- 1) Montrer que le polynôme  $P$  admet une racine réelle que l'on déterminera. **1 pt**
- 2) Déterminer les nombres complexes  $a$  et  $b$  tels que  $P(z) = (z - 2)(z^2 + az + b)$ . **0,75 pt**
- 3) On suppose que  $a = 1 - 4i$  et  $b = -3 - 3i$ .

Déterminer les racines carrées du nombre complexe  $-3 + 4i$ . **0,75 pt**

- 4) En déduire dans  $\mathbb{C}$  la résolution de l'équation (E) :  $z^3 - (1+4i)z^2 = (5-5i)z - 6 - 6i$ . **1 pt**

**Exercice 3: 4,75 points**

- 1) Calculer limites suivantes:

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^4 + x^2} - \sqrt[3]{x^3 + 3x}$ ;    b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{9x^2 - 2x + 4} - 3x + 1$ ;    c)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\sin 4x}$ . **1,5 pt**

- 2) Montrer que l'équation  $x \sin x = x^2 - \cos x$  admet deux solutions réelles distinctes. **1,5 pt**

- 3) Démontrer que pour tout nombre réel  $a \in [0; \frac{\pi}{4}]$ , on a:  $a \leq \tan 2a \leq 2a$ . **1 pt**

- 4) Soit  $f$  l'application de  $[-\pi; -\frac{\pi}{2}]$  vers  $[-1; 0]$  définie par:  $f(x) = \cos x$ .

- a) Démontrer que  $f$  admet une bijection réciproque  $f^{-1}$ . **0,5 pt**

- b) Déterminer l'ensemble de dérivabilité de  $f^{-1}$  et démontrer que  $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ . **0,75 pt**

**Exercice 4: 4,5 points**

- 1) Soit  $a = bq + r$  représentant la division euclidienne de  $a$  par  $b$ . Calculer  $q$  sachant que  $q$  et  $r$  restent invariant si l'on augmente  $a$  de 52 et  $b$  de 4. **0,75 pt**

- 2) Un nombre  $N$  s'écrit  $\overline{x32y^4}$ . Déterminer  $x$  et  $y$  pour que  $N$  soit divisible par 3 et par 2. **0,75 pt**

- 3) Démontrer en utilisant les congruences que  $\forall n \in \mathbb{N}, 17^{4n} + 3 \times 9^{2n+1}$  est un multiple de 7. **0,75 pt**

- 4) Résoudre dans  $\mathbb{Z}$  l'équation  $x^2 - 3x + 4 \equiv 0[7]$ . **1 pt**

- 5) On se propose de déterminer les entiers relatifs  $n$  tels que  $\frac{n(5n+8)}{2n-1}$  soit une fraction irréductible.

- a) Énoncé le théorème de Gauss et montrer que  $2n - 1$  divise  $5n + 8$ . **0,5 pt**

- b) En déduire les valeurs entières de  $n$  pour lesquelles  $\frac{n(5n+8)}{2n-1}$  est irréductible. **0,75 pt**

 **Evaluation des compétences: 5 points**

Résoudre une situation problème, déployer un raisonnement mathématique et communiquer à l'aide du langage mathématique dans des situations de vie où interviennent: Le ppcm, le pgcd de deux entiers naturels et les équations diophantiennes.

---

Une société de fabrication de bonbons produit des bonbons de type A et de type B, à l'aide de deux machines  $M_1$  et  $M_2$  respectivement. Le nombre journalier de bonbons produit par les deux machines est 161 161. On démarre les machines chaque 6h30 min et chaque machine a un temps bien précis de production de bonbons. L'écart de production entre les deux machines est de 30 mins dès le démarrage. A 21h 30mins exactement, elles produisent simultanément les bonbons.


La société conçoit les bonbons par paquet identique contenant les mêmes nombres de bonbons de types A et B. Elle a fait un nombre maximal de 1001 paquets sachant que dans un paquet, le nombre de bonbons de type A est compris entre 50 et 70, et celui de type B est compris entre 80 et 100, et vent à 15 FCFA et 10 FCFA les bonbons de types A et B respectivement.

Chaque samedi soir, un agent d'entretien range un certain nombre de paquets de bonbons dans deux espaces. Pour l'espace 1, il fait des blocs de 49 paquets reste 1 et pour l'espace 2; il fait des blocs de 81 et il en reste 70. Le nombre de paquets rangé est compris entre 2400 et 2600.

1. Déterminer en heure les temps de production respectifs des machines  $M_1$  et  $M_2$ . 1,5 pt
2. Déterminer le prix de vente d'un paquets de bonbons. 1,5 pt
3. Déterminer le nombre de paquets de bonbons rangés chaque samedi soir. 1,5 pt

**Présentation 0,5 pt**

*"Ce n'est pas le plus fort de l'espèce qui survit, ni le plus intelligent,  
mais le plus apte au changement." Charles Darwin  
Travaillez, travaillez, travaillez encore et travaillez par vous même.*

 **Evaluation intermédiaire du trimestre 1, Maths  $T^{les}C$ /Lygradjam/ Octobre 2021**

| *Examineur: M Ferdinand MAKAINI, PLEG Mathématiques*

**MINISTÈRE DES ENSEIGNEMENTS SECONDAIRES  
DELEGATION REGIONALE DU CENTRE**

Classe	Epreuve de Mathématiques	CHAMP DES LY	Coef	Durée
Tc	Année 2022/2023	MINI SESSION	7	4H

**PARTIE A : évaluation des ressources (15,5pts)**

**Exercice 1 : 3pts**

I/ Soit  $\theta$  un nombre complexe. On considère dans  $\mathbb{C}$  l'équation (E) :  $z^2 - (2 + i\theta)z + i\theta + 2 - \theta = 0$

- Déterminer les valeurs de  $\theta$  pour lesquels l'équation (E) admet deux solutions complexes distinctes 0,5pt
- Exprimer alors ces solutions. 0,5pt
- Déterminer la valeur de  $\theta$  pour laquelle (E) admet une unique solution complexe 0,25pt

- Montrer que  $Q = \left( \frac{\sqrt[3]{1024 \times \sqrt{64} \times \sqrt[5]{7776}}}{\sqrt{18} \times \sqrt[3]{256}} \right)^{\frac{1}{4}}$  est un entier. 0,25pt

II/ On considère l'équation (E) :  $z^3 + (1 - i)z^2 + (4 - i)z - 4i = 0$

- Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure à déterminer 0,25pt
- Trouver un polynôme  $P$  du second degré tel que  $z^3 + (1 - i)z^2 + (4 - i)z - 4i = (z - i)P(z)$  0,5pt
- Résoudre l'équation (E) dans  $\mathbb{C}$  0,75pt

**Exercice 2 : 4,5 pts**

I/1. On considère la famille (S) des suites  $(V_n)$  de premiers termes  $V_0$  et  $V_1$  définie par :

$\forall n \in \mathbb{N}, V_{n+2} + V_{n+1} = 6V_n$ , démontrer que la suite  $(U_n)$  définie par  $U_n = p2^n + q(-3)^n$  où  $p$  et  $q$  sont des entiers relatifs est dans (S) 0,25pt

- a) Déterminer l'entier relatif  $k$  pour que le couple  $(p; q)$  défini par  $p = 110 + 27k$  et  $q = 33 + 8k$  soit solution de l'équation :  $4p + 9q = 17$  0,25pt  
 b) En déduire les valeurs des entiers relatifs  $p$  et  $q$  pour lesquelles  $U_2 = 17$  0,5pt
- Soit  $W_n = 2^{n+1} + (-3)^n$  et  $S_n = W_0 + W_1 + \dots + W_n$ .  
 a) Démontrer que  $S_n \equiv 2n - 4 \pmod{5}$  0,5pt  
 b) Déduire le reste de la division euclidienne de  $S_{2023}$  par 5 0,25pt

- 1) Calculer le PGCD de  $4^5 - 1$  et  $4^6 - 1$  0,25pt  
 2) Soit  $(u_n)$  la suite définie par :  $u_0 = 0, u_1 = 1$  et pour tout entier naturel  $n, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 4u_n$   
 3) a- Montrer que pour tout entier naturel  $n, u_{n+1} = 4u_n + 1$  0,5pt  
 b - Montrer que pour tout entier naturel  $n, u_n$  est un entier naturel 0,5pt  
 c - En déduire pour tout entier naturel  $n$ , le PGCD de  $u_n$  et  $u_{n+1}$  0,25pt  
 4) Soit  $(v_n)$  la suite définie pour tout entier naturel  $n$  par :  $v_n = u_n + \frac{1}{3}$   
 a/ Montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme  $v_0$  0,5pt  
 b/ Exprimer  $v_n$  puis  $u_n$  en fonction de  $n$  0,5pt  
 c/ Déterminer pour tout entier naturel  $n$  le PGCD de  $4^n - 1$  et  $4^{n+1} - 1$  0,25pt

**Exercice 3 : 3 ,5pts**

A/ On cherche deux entiers relatifs  $x$  et  $y$  solutions de l'équation (1) :  $ax + by = 60$  ; ( $a$  et  $b$  étant des entiers naturels donnés tels que  $ab \neq 0$ ). On notera  $d$  le plus grand commun diviseur de  $a$  et  $b$ .

- On suppose que l'équation (1) a au moins une solution  $(x_0, y_0)$ . Montrer que  $d$  divise 60. 0,25pt
- On suppose que  $d$  divise 60. Prouver qu'il existe alors au moins une solution  $(x_0, y_0)$  de l'équation (1). 0,25pt
- On considère l'équation : (2) :  $24x + 36y = 60$  . ( $x$  et  $y$  entiers relatifs).  
 (a) Donner le PGCD de 24 et 36 en justifiant brièvement. Simplifier l'équation (2). 0,5pt  
 (b) Trouver une solution évidente pour l'équation (2) et résoudre cette équation. 0,5pt

(c) Énumérer tous les couples  $(x, y)$  solutions de (2) et tels que  $-10 \leq x \leq 10$ . Donner parmi eux, ceux pour lesquels  $x$  et  $y$  sont multiples de 5. 0,5pt

B/ Soit  $E$  un espace vectoriel de base  $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ . On considère les ensembles :

$$P = \left\{ \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E / 5x + y + z = 0 \right\}; Q = \left\{ \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E / x = y = 0 \right\}$$

- 1) Montrer que  $P$  et  $Q$  sont deux sous-espaces vectoriels de  $E$  et donner une base et la dimension de chacun d'eux. 1pt
- 2) Montrer que  $P \cap Q = \{\vec{0}_E\}$ . 0,25pt
- 4) Montrer que  $E = P + Q$ . 0,25pt

#### Exercice 4 : 4,5pts

A) Soit  $g$  la fonction définie sur  $[0, +\infty[$  par  $g(x) = 2 - (x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}$

1.(a) Montrer que  $\forall x \in [0, +\infty[$ ,  $g'(x) = -3x\sqrt{x^2 + 1}$  0,25pt

(b) Dresser le tableau de variation de  $g$ . 0,5pt

2.(a) Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  dans  $[0, +\infty[$  et vérifier que  $0,7 < \alpha < 0,8$ . En déduire le signe de  $g(x)$  pour tout  $x \in [0, +\infty[$ . 0,75pt

B) On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0, +\infty[$  par  $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} - x + 1$ . Soit  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . (unité graphique : 2cm)

1.(a) Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$  0,25pt

(b) Montrer que pour tout  $x \in [0, +\infty[$ ,  $f'(x) = \frac{g(x)}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$  0,25pt

(c) Dresser le tableau de variation de  $f$ . 0,5pt

2. Montrer que la droite  $(D) : y = -x + 3$  est une asymptote à  $\mathcal{C}_f$  au voisinage de  $+\infty$ . 0,5pt

3. Montrer que  $\forall x \geq 0$ ,  $x - \sqrt{x^2 + 1} < 0$ . En déduire la position relative de  $\mathcal{C}_f$  et  $(D)$ . 0,5pt

4.(a) Montrer que  $\sqrt{\alpha^2 + 1} = \frac{2}{\alpha^2 + 1}$  et en déduire que  $f(\alpha) = \alpha^3 + 1$ . 0,5pt

(b) Tracer  $(D)$  et  $\mathcal{C}_f$ . On prendra  $\alpha \approx 0,75$ . 0,5pt

#### PARTIE B: Evaluation des compétences (4,5pts)

##### Situation :

Pour le suivi des recettes de sa ferme, monsieur POUGA a fait appel à l'expertise d'un bureau d'études. Des études faites ont permis d'établir que la recette  $R(x)$  (en millions de francs de CFA), résultant de la vente de  $x$  centaines de kilogrammes de cacao, est définie sur  $[1; 5]$  par  $R(x) = 17x$ . Monsieur POUGA vend son cacao à son client principal, au coût  $C(x) = x(-x^2 + 29) - 16$  (en millions). Le bénéfice  $B(x)$  de son client principal pour  $x$  centaines de kilogrammes de cacao vendus est défini sur  $[1; 5]$ . Le fournisseur requiert votre expertise pour savoir s'il existe au moins un  $x_0$  dans  $[1; 5]$  tel que le bénéfice soit égale à 81 millions de francs CFA. Le sable devant servir pour les travaux de construction de sa ferme est livré par une société et acheté à raison de 1500 FCFA le mètre cube et est contenu dans un bac plein de forme parallélépipédique de dimensions  $a, b, c$  où  $a$  et  $b$  vérifient en mètre le système :  $\begin{cases} PGCD(a, b) = 7 \\ a^2 - b^2 = 343 \end{cases}$  et  $c = 5 \times 10^n$  avec  $n$  un entier naturel tel que  $c$  possède 6 diviseurs positifs. Ce sable devrait être transporté en 100 tours dans des sceaux identiques et pleins par des garçons et des filles de la ville. Les garçons ont effectués 8 tours chacun et les filles 5 tours chacune. Il y a plus de garçons que de filles. Pour les motiver, un montant forfaitaire de 3500 FCFA est donné par personne

##### Tâches :

- 1) Déterminer lorsqu'ils existent, une (les) valeur (s) approchée (s) de la (les) quantité (s) pour laquelle (lesquelles) le bénéfice est égale à 81 millions de francs CFA 1,5pts
- 2) Déterminer le prix du sable. 1,5pts
- 3) Déterminer le montant nécessaire à prévoir pour satisfaire les transporteurs de sable 1,5pts



**Examen de fin de Deuxième Séquence**  
**Novembre 2022**  
**Proposé par : TSOMENE Barthelemy**

**Classe de Tle C**  
**Durée : 4h**  
**Coef : 6**

**Partie I : Evaluation des ressources**

**/13,25pts**

**Exercice 1 :**

- A/ 1) Résoudre dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation  $-4x + 5y = 4$  /0,5pt  
2) Un nombre  $a$  s'écrit  $\overline{47}$  dans le système de base  $x$  et  $\overline{53}$  dans le système de base  $y$ . Un nombre  $b$  s'écrit  $\overline{144}$  dans le système de base  $x$  et  $\overline{171}$  dans le système de base  $y$ .  
Déterminer les entiers naturels  $a$ ,  $b$ ,  $x$  et  $y$  /0,75pt
- B/ 1) Montrer que les solutions dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation  $29x - 13y = 6$  (E) sont  $x = 2 + 13k$  et  $y = 4 + 29k$  avec  $k \in \mathbb{Z}$  /0,25pt  
Soit dans  $\mathbb{Z}$  l'équation  $x^{19} \equiv -2[29]$  (E')  
2) justifier que  $2^{28} \equiv 1[29]$  et en déduire que  $-8$  est solution de (E') /0,5pt  
3) Soit  $x_0$  une solution de (E')  
a) Montrer que  $x_0^{28} \equiv 1[29]$  /0,25pt  
b) Montrer que  $x_0^{57} \equiv -8[29]$ , puis que  $x_0 \equiv -8[29]$  /0,5pt  
c) En déduire les solutions dans  $\mathbb{Z}$  de l'équation (E') /0,25pt  
d) Résoudre dans  $\mathbb{Z}$  l'équation  $(x - 3)^{19} \equiv -2[29]$  /0,25pt  
4) Déduire dans  $\mathbb{Z}$  les solutions de l'équation  $\begin{cases} (x - 3)^{19} \equiv -2[29] \\ (x - 3)^{13} \equiv -2[13] \end{cases}$  /0,5pt

**Exercice 2**

- A/ Dans tout l'exercice, le plan complexe  $\mathcal{P}$  est rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$   
On considère l'application  $f$  de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$  qui, à tout point  $M$  d'affixe  $z$ , associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  tel que  $z' = \frac{z-2+i}{iz+1}$ . Soient les points  $A$  et  $B$  d'affixes respectives  $2 - i$  et  $i$
- 1) Calculer  $z' + i$  en fonction de  $z$  puis déterminer l'image par  $f$  du cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $B$  et de rayon  $2\sqrt{2}$  /0,5pt  
2) Déterminer le lieu des points  $M'$  lorsque  $M$  décrit la médiatrice de  $[AB]$  /0,5pt  
3) a) Démontrer que  $(\overrightarrow{OM'}, \vec{u}) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) - \frac{\pi}{2} + 2k\pi$  /0,25pt  
b) Déduire que si  $M$  est un point du cercle de diamètre  $[AB]$  privé des points  $A$  et  $B$ , alors  $M'$  est un point de l'axe des réels /0,5pt
- B/  
1) a) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $z^2 - 2\sqrt{2}z + 2 + 2i = 0$  (E) /0,5pt  
b) Donner la forme exponentielle de chacune des solutions de (E) /0,5pt  
2) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . Unité : 1 cm  
On donne  $z_0 = 1$  et pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $z_{n+1} = \frac{\sqrt{2}-1+i}{2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{8}} z_n$ .  $B_n$  est le point d'affixe  $z_n$
- 2.1) a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $z_n = e^{i\frac{3n\pi}{8}}$  /0,5pt  
b) Déterminer les couples d'entiers naturels  $(x, y)$  tels que  $3x - 16y = 4$  /0,5pt  
c) Déduire les valeurs de  $n$  pour lesquelles le point  $B_n$  est situé sur l'axe des imaginaires /0,25pt
- 2.2) a) Démontrer que, pour tout entier naturel  $k$ ,  $\frac{z_{k+1} - z_k}{z_k} = 2\sin\frac{3\pi}{16} e^{i\frac{11\pi}{16}}$  /0,5pt  
b) Déduire que pour tout entier naturel  $k$ ,  $B_k B_{k+1} = \left(2\sin\frac{3\pi}{16}\right) OB_k$  /0,25pt  
c) Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $L_n = B_0 B_1 + B_1 B_2 + \dots + B_{n-1} B_n$   
Exprimer  $L_n$  en fonction de  $n$  /0,5pt

### Exercice 3

I/ Soit  $f$  la fonction définie sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  par  $f(x) = \cos^2 x$

1) Montrer que  $f$  admet une réciproque  $f^{-1}$  /0,5pt

2) Ecrire une équation cartésienne de la tangente à la courbe de  $f^{-1}$  au point d'abscisse  $\frac{1}{2}$  /0,5pt

3) Montrer que la fonction  $f^{-1}$  est dérivable, puis montrer que  $(f^{-1})'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{x-x^2}}$  /0,5pt

II/ Soit  $f$  une fonction définie par :  $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$ . On désigne par  $(\mathcal{C})$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé où l'unité est 1 cm

1) a) Préciser l'ensemble de définition de  $f$  ainsi que les limites à ses bornes /0,75pt

b) Etudier les branches infinies de  $f$  et interpréter les résultats /0,5pt

2) a) Etudier la dérivabilité de  $f$  en 1 et en  $-1$ , puis interpréter les résultats /0,75pt

b) Justifier que pour tout réel  $x$  de  $] -\infty; -1[ \cup ] 1; +\infty[$ ,  $f'(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{x^2 - 1}}$ . /0,25pt

Déduire le sens de variations de  $f$ , puis dresser le tableau de variations de  $f$  /0,75pt

c) Construire la courbe  $(\mathcal{C})$  de  $f$  /0,5pt

3) On désigne par  $h$  la restriction de  $f$  à  $] 1; +\infty[$ .

a) Montrer que  $h$  admet une réciproque  $h^{-1}$  dont on donnera le tableau de variations /0,5pt

b) Pour tout réel  $x$  de  $] 1; +\infty[$ , expliciter  $h^{-1}(x)$  /0,5pt

c) Tracer la courbe  $(\mathcal{C}')$  de  $h^{-1}$  dans le même repère /0,5pt

### Partie II : Evaluation des compétences

**/06,75pts**

A, B et C sont trois villages voisins traversés par deux routes perpendiculaires  $L_1$  et  $L_2$  formant un carrefour dans un quartier O.  $L_1$  est verticale et  $L_2$  horizontale.

Les responsables des trois villages ont décidé de créer un grand puits pour palier au manque d'eau. Ils veulent que ce puits soit situé au centre du triangle formé par les centres de ces trois villages. Le village A étant situé sur la route  $L_1$  et ces routes étant prises comme repère orthonormé complexe d'origine O dans lequel l'unité est 10 km, les affixes  $z_A$ ,  $z_B$  et  $z_C$  de ces villages sont solutions dans  $\mathbb{C}$  de l'équation  $z^3 - 3(3 + 2i)z^2 + 2(11 + 12i)z + 12(1 - 5i) = 0$  (E). Le responsable du village A doit envoyer 24 travailleurs sur le site de création du puits et le coût du transport de chacun est de 50 FCFA au kilomètre.

Des études antérieures ont montré que les besoins maximaux en eau de ces trois communautés sont une fonction du temps  $t$  (en jours) définie par  $v(t) = -6t + (t + 9)\sqrt{t}$  (en dizaines de  $m^3$ ). Forts de cette donnée, les entrepreneurs pris en charge veulent créer un puits cylindrique plein en tout temps, dont le rayon (en m) est la valeur approchée à  $10^{-1}$  près de l'unique solution de l'équation  $2x^3 - 3x^2 - 1 = 0$ .

Sa profondeur (en mètres) est la limite en 1 de la fonction  $g$  définie par :  $g(x) = \frac{5x^6 - 6x^5 + 1}{x^4 - x^3 - x + 1}$ . Les trois chefs ont décidé de vendre la terre creusée à raison de 60 000 FCA le  $m^3$  pour amortir la dépense due à la construction de ce puits

Pour mener à bien ces travaux, l'entrepreneur a besoin d'engager  $a$  techniciens ( $a > 5$ ) tel que la fraction  $\frac{2a^2 + 5a + 15}{a + 2}$  soit un entier naturel, parmi lesquels  $b$  hommes tels que  $\text{PPCM}(3b - 2; 4b + 3) = 589$ . Chaque homme technicien sera payé à 7 500 FCFA et chaque femme à 6 000 FCFA. Mais seulement parmi les hommes, il faudra  $n$  techniciens prospecteurs tel que  $n$  soit le reste de la division euclidienne de  $3^{371} + 2^{173}$  par 13 et chacun d'eux sera payé double.

#### Tâches :

1) Quelle est la somme que le responsable du village A doit payer pour le transport de ses travailleurs

/02,25 pts

2) Quelle est la somme que les trois responsables recevront pour amortir les dépenses dues à ces travaux. Ce puits est-il conforme aux attentes ?

/02,25 pts

3) Quelle est la somme que les entrepreneurs devront prévoir pour payer les techniciens recrutés /02,25pts

**TRAVAUX DIRIGES N° 1 DES CONGES DE NOEL : CLASSE DE T<sup>1e</sup> C****EXERCICE 1 :**

On considère les nombres complexes  $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$  et  $z_2 = 2 - 2i$

1. Déterminer la forme algébrique de  $z = z_1 \times z_2$
2. Déterminer la forme trigonométrique de  $z = z_1 \times z_2$
3. En déduire les valeurs exactes de  $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$  et de  $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

**EXERCICE 2 :**

1. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé, on donne A, B et C d'affixes respectives  $a = i\sqrt{3}$ ,  $b = \frac{1-\sqrt{3}}{2}(1-i)$  et  $c = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ . Donner la nature exacte du triangle ABC
2. Déterminer un module et un argument de chacun des complexes suivants  $z_1 = 1 + \cos \alpha + i \sin \alpha$ ,  $\alpha \in [0, \pi[$  et  $z_2 = -2(\cos 3 + i \sin 3)$
3. Résoudre dans l'ensemble  $\mathbb{C}$ , l'équation  $z - 2 + 3i = i(2\bar{z} - 3i) + 5i$
4. Déterminer deux nombres complexes a et b tels que  $\begin{cases} a + b = -4 + i \\ ab = 1 + 13i \end{cases}$
5. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que  $|2iz - 4 + 2i| = 6$
6. On pose  $u = -\frac{3}{2}(\sqrt{2-\sqrt{2}} - i\sqrt{2+\sqrt{2}})$ . Calculer  $u^2$  puis déduire le module et un argument de u. En déduire les valeurs exactes de  $\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right)$  et de  $\sin\left(\frac{5\pi}{8}\right)$
7. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $z^{2n} - 2z^n \cos \alpha + 1 = 0$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ )
8. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $z^2 - 2z + 1 - e^{i2\theta} = 0$  puis donner le module et un argument de chacune des solutions.
9. On pose  $z' = \frac{z+2i}{z-2}$  déterminer l'ensemble des points M(z) tels que  $z' \in i\mathbb{R}$

**EXERCICE 3 :**

1. Déterminer les racines quatrièmes de l'unité sous forme algébrique
2. En déduire la résolution dans  $\mathbb{C}$  de l'équation  $\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^4 = 1$

**EXERCICE 4 :**

Soit f l'application du plan complexe dans lui-même qui à tout point M(z) où  $z = x + iy$

associe le point M(z'),  $z' = x' + iy'$  tel que  $\begin{cases} x' = x + y - 2 \\ y' = -x + y + 1 \end{cases}$

1. Déterminer les coordonnées du point invariant  $\Omega$  par f
2. Déterminer l'écriture complexe de f
3. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f
4. Déterminer une équation de l'image par f de la droite d'équation  $x - 2y + 2 = 0$
5. Déterminer l'image du cercle de centre I(0, 1) et de rayon  $r = 2$

**EXERCICE 5 :**

On considère l'équation (E) :  $3z^3 - (4 + 6i)z^2 + (2 + 8i)z - 4i = 0$

1. Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure  $z_0$  que l'on déterminera
2. Trouver trois complexes a, b et c tels que  $3z^3 - (4 + 6i)z^2 + (2 + 8i)z - 4i = (z - z_0)(az^2 + bz + c)$
3. En déduire les solutions dans  $\mathbb{C}$  de l'équation (E).



MINISTÈRE DES ENSEIGNEMENTS SECONDAIRES		
COLLEGE F.X.VOGT	FICHE DE TRAVAUX DIRIGES	Année scolaire 2022 – 2023
Département de Maths		Niveau : T <sup>les</sup> C
Pour la période des congés de Noël du 19 décembre 2022 au 02 Janvier 2023		

### Exercice 1 :

Soit  $n$  un entier naturel. On pose  $E = 2n - 1$  et  $F = 9n + 4$ .

- 1- Démontrer que tout diviseur commun à  $E$  et  $F$  divise 17.
- 2- Déterminer l'ensemble  $D$  des diviseurs communs à  $E$  et  $F$ .
- 3- Résoudre dans  $\mathbb{Z}^2$ , l'équation  $9x - 2y = -1$ .
- 4- En déduire les valeurs de  $n$ , pour lesquelles  $\text{pgcd}(E, F) = 17$ .
- 5- Pour quelles valeurs de  $n$ ,  $E$  et  $F$  sont-ils premiers entre eux.

### Exercice 2 :

Soit  $g$  la fonction définie sur  $I = ]0; \frac{\pi}{2}[$  par  $g(x) = 1 + \cos x$ .

- 1- Etudier les variations de  $g$  sur  $I$  et dresser son tableau de variation.
- 2- Justifier que  $g$  réalise une bijection de  $I$  vers  $]1; 2[$ .
- 3- Justifier que la bijection réciproque  $g^{-1}$  de  $g$  est dérivable sur  $]1; 2[$ .
- 4- Déterminer  $g\left(\frac{\pi}{4}\right)$ ;  $g^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)$  et  $(g^{-1})'\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ .
- 5- a) Montrer que  $g'(x) = -\sqrt{2g(x) - (g(x))^2}$ .  
b) En déduire que pour tout  $x \in ]1; 2[$ ,  $(g^{-1})'(x) = -\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$ .

### Exercice 3:

On considère dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes, le système (S): 
$$\begin{cases} x + y + z = -1 + 2i \\ xy + yz + xz = -2(1 + i) \\ xyz = 2 \end{cases}$$

et le polynôme  $P(z) = z^3 + (1 - 2i)z^2 - 2(1 + i)z - 2$ .

- 1- Montrer qu'un triplet  $(a, b, c)$  est solution de (S) si et seulement si  $a, b$  et  $c$  sont des racines de  $P$ .
- 2- Montrer que l'équation  $P(z) = 0$  admet une racine réelle et une seule que l'on déterminera.
- 3- Résoudre dans  $\mathbb{C}$ , l'équation  $P(z) = 0$  et en déduire les solutions de (S)

### Exercice 4:

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension 3 dont une base est  $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ . On considère l'endomorphisme  $f$  de  $E$  défini par  $f(\vec{i}) = 2\vec{i}$ ,  $f(\vec{j}) = f(\vec{k}) = \vec{j} + \vec{k}$ .

- 1- a) Ecrire la matrice  $M$  de  $f$  dans la base  $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ .  
b) Montrer que  $M^2 = 2M$ .
- 2-  $f$  est-il un automorphisme de  $E$  ?
- 3- Déterminer  $\text{Ker} f$  et  $\text{Im} f$ ; puis donner si possible une base de chacun de ces ensembles.
- 4- Montrer que  $\text{Ker} f$  et  $\text{Im} f$  sont deux sous espaces vectoriels supplémentaires de  $E$ .
- 5- Soit  $\vec{u}$  un vecteur de  $E$ . Montrer que  $\vec{u} \in \text{Im} f$  équivaut à  $f(\vec{u}) = 2\vec{u}$ .

### Exercice 5 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ . A, B, C et D sont les points d'affixes respectives  $z_A = 2 + i$ ,  $z_B = 6 + 2i$ ,  $z_C = 7 + 5i$  et  $z_D = 3 + 4i$ .

- 1- Placer ces points dans le repère.
- 2- Justifier que ABCD est un parallélogramme.
- 3- On pose  $a = \frac{z_D - z_A}{z_B - z_A}$ .
  - a) Donner la forme algébrique du nombre complexe  $a$ .
  - b) Justifier que  $\cos(\widehat{AB, AD}) = \frac{7}{\sqrt{170}}$ .
  - c) En déduire une valeur approchée au degré près de l'angle  $(\widehat{AB, AD})$ .
- 4- On considère l'équation d'inconnue  $z$  suivante (E):  $(1 + i)z^2 - (1 + 3i)z + 6 + 8i = 0$ .
  - a) Montrer que résoudre (E) revient à résoudre (F):  $z^2 - (2 + i)z + 7 + i = 0$ .
  - b) En déduire les solutions de (E).

### Exercice 6:

Soit  $p$  et  $q$  deux entiers relatifs premiers entre eux,  $n$  un entier naturel non nul. On considère le polynôme  $R$  tel que  $R(x) = 6x^3 + 9x^2 + 5x + 1$ .

- 1- Montrer que  $p$  et  $q^n$  sont premiers entre eux.
- 2- On suppose que la fraction  $\frac{p}{q}$  est une racine de  $R$ .
  - a) Montrer que  $p \in \{-1; 1\}$  et que  $q$  divise 6.
  - b) En déduire une racine de  $R$ , puis factoriser  $R(x)$ .
- 3- Résoudre dans  $\mathbb{Z}$ , l'équation  $R(x) \equiv 0[5]$ .
- 4- Démontrer que pour tout entier relatif  $x$ , la fraction  $\frac{2x+1}{3x^2+3x+1}$  est irréductible.

### Exercice 7:

On donne les fonctions numériques  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathbb{R}$ , par :  $f(x) = -1 + \sqrt{1 + x^2}$  et  $g(x) = \frac{x^2}{1+|x|}$ . On désigne par  $(C_f)$  et  $(C_g)$  leur courbe respective.

- 1- a) Etudier la parité des fonctions  $f$  et  $g$ .  
b) Calculer les limites de  $f$  et  $g$  en  $+\infty$ .  
c) Justifier que les fonctions  $f$  et  $g$  sont continues sur  $\mathbb{R}$ .
- 2- a) Etudier les branches infinies à la courbe  $(C_f)$  en  $+\infty$ .  
b) Montrer que la droite d'équation  $y = x - 1$  est asymptote à la courbe  $(C_g)$  en  $+\infty$ .
- 3- Etudier les variations de  $f$  et  $g$  sur  $[0; +\infty[$  et dresser leur tableau de variations sur  $\mathbb{R}$ .
- 4- a) Démontrer que pour tout réel  $x$ , on a :  $1 + |x| \leq 1 + \sqrt{1 + x^2}$ .  
b) En déduire que pour tout réel  $x$ ,  $f(x) \leq g(x)$ .  
c) Etudier la position relative des courbes  $(C_f)$  et  $(C_g)$ .
- 5- Construire dans un même repère les courbes  $(C_f)$  et  $(C_g)$ .

### Exercice 8 :

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  d'unité graphique 4 cm. On considère les points A et B d'affixes respectives  $z_A = 1$  et  $z_B = 2$ . Soient  $\alpha$  un élément de  $]0; \pi[$  et M le point d'affixe  $z = 1 + e^{2i\alpha}$ .

- 1- Montrer que M appartient à un cercle (C) dont on précisera le centre et le rayon.
- 2- Exprimer l'angle  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM})$  en fonction de  $\alpha$ . En déduire l'ensemble des points M du plan lorsque  $\alpha$  décrit l'intervalle  $]0; \pi[$ .
- 3- Soit  $M'$  l'image de M par la rotation  $r$  de centre O et d'angle  $-2\alpha$ , on désigne par  $z'$  l'affixe du point  $M'$ .
  - a) Montrer que  $z' = \bar{z}$ .
  - b) En déduire que  $M'$  appartient à (C).
- 4- On suppose que  $\alpha = \frac{\pi}{3}$  et on désigne par  $A'$  l'image de A par  $r$ . ( $C'$ ) est l'image de (C) par  $r$  et P est le symétrique de M par rapport à A.
  - a) Montrer que le triangle AMO est équilatéral.
  - b) Montrer que (C) et ( $C'$ ) se coupent en O et  $M'$ .
  - c) Montrer que  $M'$  est le milieu du segment  $[A'P]$ .

### Exercice 9:

- 1- Soit  $a$  un nombre réel. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$  non nul, on a  $a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1)$ .
- 2- On considère l'équation (1) dans  $\mathbb{Z}^2$  d'inconnue  $x$  et  $y$  :  $11x - 24y = 1$ .
  - a) Déterminer une solution particulière de (1).
  - b) Déterminer l'ensemble des solutions de (1).
- 3- L'objectif de cette question est la recherche du pgcd de  $10^{11} - 1$  et  $10^{24} - 1$ .
  - a) Justifier que les nombres  $10^{11} - 1$  et  $10^{24} - 1$  sont divisibles par 9.
  - b)  $(n, m)$  désignant un couple d'entiers naturel solution de (1), montrer que l'on peut écrire  $(10^{11n} - 1) - 10(10^{24m} - 1) = 9$ .
  - c) Montrer que  $10^{11} - 1$  divise  $10^{11n} - 1$ .
  - d) En déduire l'existence de deux entiers  $p$  et  $q$  tels que  $(10^{11} - 1)p - (10^{24} - 1)q = 9$ .
  - e) Montrer que tout diviseur commun à  $10^{11} - 1$  et  $10^{24} - 1$  divise 9.
  - f) En déduire alors le pgcd de  $10^{11} - 1$  et  $10^{24} - 1$ .

### Problème 1 :

Le général d'armée Salifou a entre 300 et 400 soldats qu'il désire amener en mission pour sécuriser la frontière contre d'éventuelles troubles. Il les répartit par groupe de 17 soldats, il lui en reste 9 soldats ; mais quand il fait des groupes de 5 soldats, il lui en reste 3 soldats.

Pour cette mission, chaque soldat reçoit une prime journalière de 1500 francs s'il passe la nuit au campement ou alors 2000 francs s'il passe la nuit en brousse. L'un des soldats Hamir, se rappelle avoir reçu une prime de 31000 francs et qu'il a fait entre 10 et 16 jours de mission.

Pendant la mission, pour conserver la confidentialité des messages échangés par les troupes, les messages sont alors codés. On fait correspondre à chaque lettre de l'alphabet un nombre entier naturel  $x$  : par exemple à A on associe 0, à B on associe 1, à C on associe 2 et ainsi de suite jusqu'à Z qui est associé à 25. Ensuite à  $x$  on associe l'entier  $y$  qui est le reste de la division euclidienne de  $(11^2)^x$  par 26. Enfin à  $y$  on associe la lettre correspondante. Le Général a envoyé le mot STYLO.

### Tâches

- 1- Quel est le mot reçu du général par les troupes ?
- 2- Combien de soldats dispose le général Salifou ?
- 3- Combien de jours de mission le soldat Hamir a-t-il passé en brousse ?

### Exercice 10 :

ABC est un triangle tel que  $AB = AC = a$  et  $(\widehat{AB, AC}) = \frac{\pi}{2}$ ,  $a$  est un nombre réel strictement positif. D est le symétrique de A par rapport à B, O est le milieu de [CD] et (C) est le cercle de diamètre [CD]. On désigne par  $f$  la similitude directe qui transforme D en B et B en C.

- 1- a) Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure.  
b) Déterminer le rapport  $k$  et l'angle  $\alpha$  de  $f$ .  
c)  $\Omega$  est le centre de  $f$ . Montrer que  $(\widehat{\Omega D, \Omega C}) = \frac{\pi}{2}$  (1) et que  $\Omega C = 2\Omega D$  (2)
- 2- a) A l'aide de (1), démontrer que  $\Omega \in (C)$ .  
b) A l'aide de (2), démontrer que  $\Omega D = a$  et en déduire que  $\Omega B = BC$ .
- 3- a) Démontrer que (OB) est la médiatrice de [OC].  
b) Quelle est la nature de CAD $\Omega$  ?  
c) Placer  $\Omega$ .
- 4- On pose  $\vec{e}_1 = \frac{1}{a}\vec{AB}$  et  $\vec{e}_2 = \frac{1}{a}\vec{AC}$ .  
a) Démontrer que  $(A, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$  est un repère orthonormé.  
b) Déterminer les affixes des points B, C et D dans ce repère.  
c) Donner l'écriture complexe de  $f$ .  
d) En déduire l'affixe du point  $\Omega$ .

### Exercice 11:

On désigne par  $E$  l'espace vectoriel des fonctions de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$ . Soit  $F$  et  $G$  des sous espaces vectoriels de  $E$  tels que :  $F = \{f \in E; \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)\}$  et  $G = \{f \in E; \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x)\}$ .

- 1- Montrer que  $F \cap G = \{0\}$ .
- 2- Soit  $h \in E$ . On pose  $f_1(x) = \frac{h(x)+h(-x)}{2}$  et  $g_1(x) = \frac{h(x)-h(-x)}{2}$ . tel que  $h = f + g$  avec  $f \in F$  et  $g \in G$ .  
a) Montrer que  $f_1 \in F$  et  $g_1 \in G$ .  
b) Déterminer les réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $h = \alpha f_1 + \beta g_1$ .
- 3- Montrer que  $F$  et  $G$  sont deux sous espaces vectoriels supplémentaires d  $E$ .

### Exercice 12:

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , on considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{C}$  par  $f(z) = \frac{z-2+i}{z+2i}$ , avec  $z \neq -2i$ .

Soient E l'ensemble des points  $M(z)$  du plan tels que  $f(z)$  soit réel et F l'ensemble des points  $M(z)$  du plan tels que  $f(z)$  soit imaginaire pur. A et B sont les points d'affixes respectives  $z_A = 2 - i$  et  $z_B = -2i$ .

- 1-  $f$  admet-elle des points invariants ?
- 2- En posant  $z = x + iy$ , déterminer la partie réelle X et la partie imaginaire Y de  $f(z)$ .
- 3- Déterminer alors les ensembles E et F.
- 4- **Détermination géométrique de E et F.**  
a) Donner une interprétation géométrique de  $|f(z)|$  et  $\arg(f(z))$ .  
b) Déterminer les ensembles E et F.  
c) Déterminer l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que  $|f(z)| = 2$ .
- 5- a) Calculer :  $|f(z) - 1| \times |z + 2i|$ .

b) En déduire l'ensemble des points  $M'$  d'affixe  $f(z)$ , lorsque le point  $M(z)$  parcourt le cercle de centre B et de rayon  $\sqrt{5}$ .

### Exercice 13 :

On considère les nombres  $u = 2 + \sqrt{3}$  et  $v = 2 - \sqrt{3}$ .

- 1- Montrer que pour tout entier naturel  $n > 1$ ,  $u^n = a_n + b_n\sqrt{3}$  et  $v^n = a_n - b_n\sqrt{3}$  où  $a_n$  et  $b_n$  sont des entiers naturels.
- 2- Exprimer  $a_{n+1}$  et  $b_{n+1}$  en fonction de  $a_n$  et  $b_n$ .
- 3- a) Etablir que  $a_n^2 - 3b_n^2 = 1$  et que  $a_nb_{n+1} - a_{n+1}b_n = 1$ .  
b) En déduire que  $\text{pgcd}(a_n, b_n) = \text{pgcd}(a_n, a_{n+1}) = \text{pgcd}(b_n, b_{n+1}) = 1$ .

### Exercice 14 :

- A- Soit P le plan muni d'un repère orthonormé  $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$ , d'unité graphique 2 centimètres. Soient  $f_1$  et  $f_2$  les fonctions de IR vers IR définies par :  $f_1(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$  et  $f_2(x) = x - \sqrt{x^2 - 1}$ .  $(C_1)$  et  $(C_2)$  désignent les représentations graphiques des fonctions  $f_1$  et  $f_2$  respectivement, dans le repère R.
- 1- Etudier la continuité et la dérivabilité de  $f_1$  sur IR. Préciser les demi tangentes à  $(C_1)$  aux points d'abscisses -1 et 1.
  - 2- Etudier les variations de  $f_1$  et dresser son tableau de variation.
  - 3- Etudier les branches infinies de  $(C_1)$ .
  - 4- Tracer  $(C_1)$ .
- B- Soit  $(C)$  la courbe d'équation  $y^2 - 2xy + 1 = 0$  et  $s$  désigne la symétrie de centre O.
- 1- Montrer que  $s(C_1) = (C_2)$ .
  - 2- Tracer  $(C_2)$  dans le repère R.
  - 3- Prouver que  $(C) = (C_1) \cup (C_2)$ .
  - 4- Soit le vecteur  $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j}$ .
    - a) Montrer que  $(O, \vec{i}, \vec{u})$  est un repère du plan P.
    - b) Déterminer une équation de  $(C)$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{u})$ .

### Problème 2 :

Pour la construction de son nouveau siège, l'INS (Institut National de Statistiques) a acheté un terrain de forme rectangulaire dont les coordonnées géodésiques des sommets sont les points images des solutions de l'équation  $[z^2 + (-20 + 40i)z - 300 - 1200i][z^2 + (40 - 20i)z + 300 - 1200i] = 0$ . L'unité de longueur est le mètre. L'INS engage un ingénieur en bâtiment pour clôturer la parcelle, celui-ci propose un devis 17 225F par mètre de mur tout en prévoyant une ouverture de 5m pour un portail estimé à 1 002 500F.

La cellule de crise du suivi de la pandémie du COVID19 de l'INS a publié les données du tableau ci-dessous, où  $x_i$  est le nombre de cas confirmés et  $y_i$  le nombre de guérisons, pour les mois de février à juillet 2020 et en rappelant que le nombre de guérisons dans cette ville en octobre 2020 était de 27.

Mois	Février	Mars	Avril	Mai	Juin	Juillet
$x_i$	450	480	495	510	525	540
$y_i$	26	27	29	31	32	35

Paul, élève d'une classe de Tle D voudrait par la méthode des moindres carrés estimer le nombre de guérisons durant ce mois d'octobre 2020.

Un problème ne surgissant jamais seul, l'agence Spatial américaine NASA localise une comète se dirigeant suivant la courbe de la fonction  $f: \mapsto 3 + \sqrt{x}$  vers la planète terre et, programme alors le lancement d'un missile longue portée suivant la direction de la courbe de la fonction  $g: x \mapsto 2x^2$ .

### Tâches

- 1- Aider Paul à donner cette estimation du mois d'octobre.
- 2- Déterminer le montant total du devis présenté par l'ingénieur.
- 3- Est-il possible que le missile intercepte la comète ?

### Exercice 15 :

- 1- Déterminer les nombres complexes  $z_1$  et  $z_2$  (sous la forme trigonométrique) satisfaisant aux conditions : 
$$\begin{cases} z_1 \cdot z_2 = 0,5 \\ z_1 + 2z_2 = \sqrt{3} \end{cases}$$
- 2- Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . Soit  $\theta$  un nombre réel de l'intervalle  $]0; 2\pi[$ . On considère le point  $M$  du plan complexe d'affixe  $z$  et le nombre complexe  $Z = \frac{1+z}{1-z}$ . On sait en plus que le point  $M$  appartient au cercle de centre  $O$  et de rayon 1.
  - a) Montrer que  $Z = i \cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$ .
  - b) Déterminer le module et un argument de  $Z$ .
  - c) Pour quelles valeurs de  $\theta$  l'argument de  $Z$  est-il défini ?

### Exercice 16:

On considère les ensembles suivants  $F: \{(x, y, z, t) \in E; x + y + z + t = 0\}$  et  $G = \{(2a, -a, 0, a); a \in \mathbb{R}\}$ .  $E$  étant un espace vectoriel réel de dimension 4.

- 1- Montrer que  $F$  est un sous espace vectoriel.
- 2- Démontrer que  $F + G$  est une somme directe.
- 3- Soit  $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ . Déterminer le réel  $a$  tel que le vecteur  $(x - 2a; y + a; z; t - a) \in F$ .
- 4- En déduire que  $F$  et  $G$  sont deux sous espace vectoriels supplémentaires de  $E$ .

### Exercice 17:

Soit  $A$  l'ensemble des entier naturels de l'intervalle  $[1; 46]$ .

- 1- On considère l'équation suivante  $(E): 23x + 47y = 1$  où  $x$  et  $y$  sont des entiers relatifs.
  - a) Déterminer une solution particulière  $(x_0, y_0)$  de  $(E)$ .
  - b) Déterminer l'ensemble des couples  $(x, y)$  solutions de  $(E)$ .
  - c) En déduire qu'il existe un unique entier  $x$  appartenant à  $A$  tel que  $23x \equiv 1[47]$ .
- 2- Soient  $a$  et  $b$  deux entiers relatifs.
  - a) Montrer que si  $ab \equiv 0[47]$  alors  $a \equiv 0[47]$  ou  $b \equiv 0[47]$ .
  - b) En déduire que si  $a^2 \equiv 1[47]$  alors  $a \equiv 1[47]$  ou  $a \equiv -1[47]$ .
- 3- Montrer que pour tout entier  $p$  de  $A$ , il existe un entier relatif  $q$  tel que  $p \times q \equiv 1[47]$ .  
Pour la suite, on admet que pour tout entier  $p$  de  $A$ , il existe un unique entier, noté  $inv(p)$  appartenant à  $A$  tel que  $p \times inv(p) \equiv 1[47]$ .
- 4- Déterminer par exemple :  $inv(1)$ ,  $inv(2)$  et  $inv(3)$ .
- 5- Montrer que  $46! \equiv -1[47]$ .