LE PELICAN

$$\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

MATHEMATIQUES

1ère SM

NOUVEAU PROGRAMME

Cours bien élaborés
Exercices d'Application
Exercices et Problèmes tous Résolus
Les derniers Probatoires "C" avec Solutions

TABLE DES MATIERES

LES DERNIERS PROBATOIRES

CHAPITRE 1 : BARYCENTRE

COURS

1. DEFINITIONS

1.1. Barycentre de deux points

Soient A et B deux points du plan ; α et β deux réels.
Si $\alpha + \beta \neq 0$, alors il existe un unique point G tel que :
$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ (ou $\alpha\overrightarrow{AG} + \beta\overrightarrow{BG} = \vec{0}$).
G est appelé **barycentre** des points pondérés (A, α) et (B, β).
On écrit : G = bar{(A, α) ; (B, β)}.

Remarque :
On dit aussi barycentre des points "A et B affectés des coefficients respectifs α et β"
** Si $\alpha + \beta = 0$, alors les points A et B n'admettent pas de barycentre.*
** Si G = bar{(A, α) ; (B, β)}, alors G appartient à la droite (AB)*

1.2. Barycentre de trois points ou plus

Soient A, B et C des points du plan ; α, β et γ des réels.
Si $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, alors il existe un unique point G tel que : $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0}$
G est appelé barycentre des points pondérés (A, α) ; (B, β) et (C, γ).

Remarque :
On dit aussi "barycentre des points A, B et C affectés des coefficients respectifs α, β et γ".
** Si $\alpha + \beta + \gamma = 0$, alors les points A, B et C n'admettent pas de barycentre.*
** La définition se généralise sans difficulté à quatre points ou plus.*

1.3. Lignes de niveau

Soient f une application du plan dans $\mathbb{R}$ et k un nombre réel.
On appelle ligne de niveau k de f, l'ensemble des points M du plan tel que : f(M) = k.

2. PROPRIETES

P_1. Le barycentre est inchangé lorsqu'on multiplie les coefficients par un même réel **non nul.**

P_2. Le barycentre de plusieurs points affectés du même coefficient est appelé **isobarycentre** de ces points.

- Si G est l'isobarycentre de deux points A et B, alors $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$; G est le milieu de [AB].
- Si G est l'isobarycentre de trois points A, B et C, alors $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$; G est le centre de gravité du triangle ABC (point de concours des médianes du triangle)

P_3, Barycentre partiel :
Soit G = bar{(A, α) ; (B, β) ; (C, γ)} et H = bar{(A, α) ; (B, β)} ; alors G = bar{(H, $\alpha + \beta$) ; (C, γ)} avec $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ et $\alpha + \beta \neq 0$.

P_4. Coordonnées du barycentre

Soit (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) un repère du plan.

- Soit $G = bar\{(A, \alpha) ; (B, \beta)\}$ avec $\alpha + \beta \neq 0$.

  Posons $A(x_A, y_A)$; $G(x_G, y_G)$ et $B(x_B, y_B)$; on a : $x_G = \dfrac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha + \beta}$ et $y_G = \dfrac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha + \beta}$.
- Soit $G = bar\{(A, \alpha) ; (B, \beta) ; (C, \gamma)\}$ avec $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$.

  Posons $A(x_A, y_A)$; $B(x_B, y_B)$; $C(x_C, y_C)$ et $G(x_G, y_G)$; on a : $x_G = \dfrac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma}$ et

  $y_G = \dfrac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha + \beta + \gamma}$.

  Cette propriété se généralise facilement à quatre points ou plus.

P₅. Soient α et β deux nombres réels non tous nuls ; A et B deux points distincts du plan $\wp$ et f l'application de $\wp$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(M) = \alpha MA^2 + \beta MB^2$.

- Si $\alpha + \beta \neq 0$, alors la ligne de niveau k de l'application f est l'ensemble vide, le point G ou un cercle de centre G ; où $G = bar\{(A, \alpha) ; (B, \beta)\}$.
- Si $\alpha + \beta = 0$, alors la ligne de niveau k de l'application f est une droite perpendiculaire à (AB).

3. REDUCTIONN DE SOMMES VECTORIELLES

3.1. Cas de deux points

Soient A et B deux points du plan ; α et β deux réels.

- Si $\alpha + \beta \neq 0$, alors pour tout point M du plan,
  $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{MG}$ où $G = bar\{(A, \alpha) ; (B, \beta)\}$.
- Si $\alpha + \beta = 0$, alors le vecteur $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB}$ est indépendant du point M.

Remarque :

** Si $\alpha + \beta \neq 0$, alors on écrit aussi* $\overrightarrow{MG} = \dfrac{1}{\alpha + \beta}\left(\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB}\right)$.

** Si $\alpha + \beta = 0$, alors* $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = \alpha\overrightarrow{MA} - \alpha\overrightarrow{MB} = \alpha\overrightarrow{BA}$

3.2. Cas de trois points ou plus

Soient A, B et C trois points du plan ; α, β et γ trois réels.

- Si $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, alors pour tout point M du plan,
  $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = (\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{MG}$ où $G = bar\{(A, \alpha) ; (B, \beta) ; (C, \gamma)\}$.
- Si $\alpha + \beta + \gamma = 0$, alors le vecteur $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC}$ est indépendant du point M.

Remarque : *si $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, alors on écrit :* $\overrightarrow{MG} = \dfrac{1}{\alpha + \beta + \gamma}\left(\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC}\right)$. *Cette propriété se généralise sans difficulté au cas de quatre points ou plus.*

EXERCICES

EXERCICE 1 :

Soient $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan ; A et B les points de coordonnées respectives (-3, 1) ; (4, 1) ; G le barycentre des points (A, -1) et (B, 3).

1) Exprimer $\overrightarrow{OG}$ à l'aide des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.
2) Calculer les coordonnées de G.

EXERCICE 2 :

Soient A et B des points distincts.

1) Construire le point M défini par $\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{AB}$.
2) Trouver un réel x tel que M soit barycentre de (A, 1) et (B, x).

EXERCICE 3 :

Sur une droite de repère (O, I), on donne les points A et B d'abscisses respectifs –3 et 3.

1) Construire les points C et D tels que : C est barycentre des points (A, 1) et (B, 2) ; D est barycentre des points (A, 1) et (B, -2).
2) Déterminer deux nombres entiers positifs c et d tels que : A est barycentre des points (C, c) et (D, -d) ; B est barycentre des points (C, c) et (D, d).
3) Soit f le milieu du segment [CD]. Vérifier que : $OA^2 = OB^2 = \overline{OC} \times \overline{OD}$ et $JC^2 = JD^2 = \overline{JA} \times \overline{JB}$.

EXERCICE 4 :

Soit ABC un triangle.
On note le point G en le barycentre de (A, 2) ; (B, -2) et (C, 1).

1) Construire le point G en utilisant un barycentre partiel.
2) Dans le repère (A, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$), quelles sont les coordonnées de A, B, C et G ?

EXERCICE 5 :

Soient A, B et C trois points non alignés et G le barycentre de (A, -3), (B, 1) et C, 1).

1) Démontrer que A est le centre de gravité de GBC
2) En déduire une construction de G.

EXERCICE 6 :

Soient A, B et C trois points non alignés et G le barycentre des points pondérés (A, 1) ; (B, -2) et (C, 3).

1)
   a) Construire le point E tel que E = bar{(A, 1) ; (B, -2)}.
   b) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB}$ à l'aide du vecteur $\overrightarrow{GE}$
   c) Démontrer que G est un point de la droite (CE).
2)
   a) Construire le point F tel que F = bar{(B, -2) ; (C, 3)}
   b) Démontrer que G est un point de la droite (AF)
   c) Construire G.

EXERCICE 7 :

Soit ABC un triangle équilatéral, I le milieu du segment [BC] et H le projeté orthogonal de I sur (AB).

1) Ecrire H comme barycentre des points A et B.
2) Soit K le milieu de [IH]. Démontrer que K est le barycentre de (A, 1) ; (B, 5) et (C, 2).

EXERCICE 8 :

Construire le barycentre G des points (A, -1) ; (B, 4) ; (C, 2) et (D, 1) en procédant de la façon suivante :

1) Construire le barycentre I de (A, -1) ; (B, 4)
2) Construire le barycentre J de (C, 2) ; (D, 1)
3) Démontrer que G est le barycentre de (I, 3) ; (J, 3) puis construire G

EXERCICE 9 :

Soit ABCD un quadrilatère.
On désigne par I, J, K, L, M et N les milieux respectifs des segments [AB] ; [BC] ; [CD] ; [DA] ; [AC] ; [BD] et par G l'isobarycentre des points A, B, C et D.

1) Démontrer que les droites (IK), (JL) et (MN) sont concourantes en G.
2) Soit H le centre de gravité du triangle BCD. Démontrer que les points A, G et H sont alignés. Enoncer trois autres alignements de même type.

EXERCICE 10 :

1) Soient $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé et les points A(-1, 1) et B(1, 2). Déterminer par calcul l'ensemble ε des points M tels que : $MA^2 - 2MB^2 = 6$
2) Soit ABC un triangle. Déterminer l'ensemble Λ des points M tels que : $MB^2 + MC^2 = 2MA^2$

EXERCICE 11 :

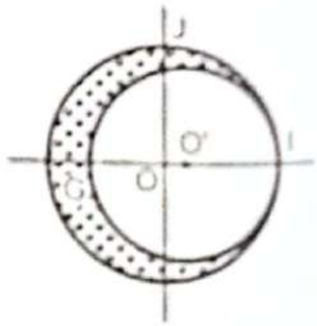
Soient A et B deux points du plan tels que AB = 6 et f l'application numérique définie dans le plan par : $f(M) = MA^2 + MB^2$.

1) Déterminer les lignes de niveau 50, 36, 26, 20 et f.
2) Pour quelles valeurs de k la ligne de niveau k de f :
   - est-elle réduite à un point ?
   - passe-t-elle par A ?
   - passe-t-elle par le symétrie de B par rapport à A ?
3) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : $26 \leq MA^2 + MB^2 \leq 68$

EXERCICE 12 :

Le plan est muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère une plaque homogène d'épaisseur constante, formée du disque de centre O et de rayon 1, auquel on a enlevé un disque de centre O' et de rayon r tangent intérieurement en I au précédent.

1) Déterminer en fonction de r la position du point G centre de gravite de cette plaque.
2) Calculer r pour que G soit exactement sur la "frontière" entre les deux plaques (on remarquera que la valeur de r trouvée est égale à l'inverse du "nombre d'or").



CHAPITRE 2 : ANGLES ORIENTES - TRIGONOMETRIE

COURS

1) ANGLES ORIENTES

1.1) Mesures d'un angle orienté

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Tout angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ admet une seule mesure dans $]-\pi, \pi[$ appelé **mesure principale** de l'angle.

Définition

Soit $(\vec{u}, \vec{v})$ un angle orienté et α sa mesure principale. On appelle mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$, tout nombre réel de la forme $\alpha + 2k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$.

Congruence modulo 2π

Si θ et θ' sont deux mesures de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$, alors il existe un nombre entier relatif k tel que $\theta' = \theta + 2k\pi$. On dit que "θ est congru à θ' modulo 2π" et on note : $\theta \equiv \theta'[2\pi]$.
De manière générale, deux nombres réels x et y sont congrus modulo 2π s'il existe un nombre entier k tel que $x = y + 2k\pi$. On note $x \equiv y[2\pi]$. "x est congru à y modulo 2π".

Propriétés

Pour tous nombres réels x, y, z et a, on a :

1) $x \equiv y[2\pi] \Leftrightarrow x + a \equiv y + a[2\pi]$; 2) $x \equiv y[2\pi] \Leftrightarrow -x \equiv -y[2\pi]$;

3) $\begin{cases} x \equiv y[2\pi] \\ y \equiv z[2\pi] \end{cases} \Rightarrow x \equiv z[2\pi]$

1.2) Propriétés des angles orientés

P₁. Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$; $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) + (\widehat{\vec{u}, \vec{w}}) = (\widehat{\vec{u}, \vec{w}})$

P₂. Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u'}$ et $\vec{v'}$ on a : $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = (\widehat{\vec{u'}, \vec{v'}}) \Leftrightarrow (\widehat{\vec{u}, \vec{u'}}) = (\widehat{\vec{v}, \vec{v'}})$

P₃. Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls, et tout nombre réel non nul k, on a :

1) $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = -(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$

2) $(\widehat{\overrightarrow{ku}, \overrightarrow{kv}}) = (\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$

3) Si $k > 0$, alors $(\widehat{\overrightarrow{ku}, \vec{v}}) = (\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{kv}}) = (\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$

4) Si $k < 0$, alors $(\widehat{\overrightarrow{ku}, \vec{v}}) = (\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{kv}}) = (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) + \pi$

P₄. Pour tous nombres réels a et b d'images respectives A et B sur le cercle trigonométrique, $b - a$ est une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}})$

P₅. Caractérisation d'un cercle

Soient $\mathcal{C}$ un cercle de centre O, A et B deux points distincts de ce cercle. Pour tout point M distinct de A et B, on a : $M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$

P₆. points cocycliques

A, B, C et D sont quatre points distincts du plan tels que trois quelconques d'entre eux ne sont pas alignés.

Les points A, B, C et D sont cocycliques si et seulement si : $2(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}})$; soit $(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}) = (\widehat{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}})$.

Remarque : par trois points distincts et non alignés A, B et C, il passe un seul cercle : le cercle circonscrit à ABC.

2) TRIGONOMETRIE

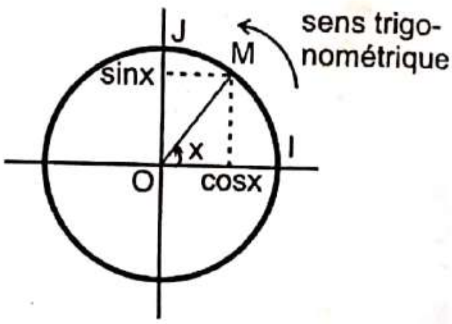
2.1) Cosinus, sinus et tangente d'un angle orienté

Définition :

Traçons le cercle trigonométrique ; cercle de centre O et de rayon 1 orienté dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

Les coordonnées du point M sont par définition (cosx, sinx). De plus, M appartient au cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$, on a forcément $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ et sinx, et cosx sont compris entre -1 et 1 ;

c'est-à-dire : $\cos x \in [-1, 1]$; $\sin x \in [-1, 1]$.



La tangente de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}}) = \hat{x}$ est le nombre réel noté $\tan(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}})$ ou tanx, défini par : $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ et on a : $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

Propriétés :

Pour tout nombre réel α, on a :

$\cos(-\alpha) \cos\alpha$; $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$; $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$; $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin\alpha$

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$; $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$; $\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$; $\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos\alpha$

2.2) Formules trigonométriques

Formules d'addition : pour tous nombres réels a et b, on a :

1) $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$;
2) $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$
3) $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$;
4) $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$
5) $\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$;
6) $\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$

Formules de duplication : pour tout nombre réel a, on a :

7) $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a = 2\cos^2 a - 1$.

On en déduit : $\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$ et $\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$

8) $\sin 2a = 2\sin a \cos a$;
9) $\tan 2a = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$

3) EQUATIONS ET INEQUATIONS TRIGONOMETRIQUES

3.1) Equations trigonométriques

Pour tous nombres réels x et a, on a :

- $\cos x = \cos a \Leftrightarrow x = a + 2k\pi$ ou $x = -a + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$
- $\sin x = \sin a \Leftrightarrow x = a + 2k\pi$ ou $x = \pi - a + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.
- Si tanx et tana sont defines, on a : $\tan x = \tan a \Leftrightarrow x = a + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

Les équations du type $a\cos x + b\sin x + c = 0$ se ramenant le plus souvent à l'un des types précédents seront résolues en exercice.

3.2) Inéquations trigonométriques

Considérons la fonction $f : x \mapsto a\cos\alpha x + b\sin\beta x + c\tan\gamma x$; c'est-à-dire une fonction de cosinus, sinus ou tangente.
Soit à résoudre l'une des inéquations : $f(x) < 0$; $f(x) \leq 0$; $f(x) > 0$; $f(x) \geq 0$. On procède de la manière suivante :

- On résout l'équation $f(x) = 0$ dans l'intervalle précisé.
- Ensuite, on place les solutions suivant l'intervalle donné sur le cercle trigonométrique.
- Puis on choisit un réel a de l'intervalle donné, qui n'est pas solution de l'équation $f(x) = 0$.
- Et on calcule f(a). Le signe de f(a) est celui de l'intervalle auquel il appartient, délimité par valeurs consécutives, solutions de l'équation $f(x) = 0$.
- On obtient ainsi en alternant le signe de f(a) sur le cercle trigonométrique, les intervalles solutions de l'inéquation donnée (vois exercice : 11).

EXERCICES

EXERCICE 1 :

PQR est un triangle tel que les angles $(\overrightarrow{QR}, \overrightarrow{QP})$ et $(\overrightarrow{PR}, \overrightarrow{QP})$ ont respectivement pour mesures $-\frac{9\pi}{5}$ et $+\frac{22\pi}{5}$. Démontrer que le triangle PQR est isocèle.

EXERCICE 2 :

ABC est un triangle tel que $mes(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \frac{\pi}{4}$ et $mes(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}) = -\frac{\pi}{3}$

1) Dessiner un triangle vérifiant ces hypothèses. Calculer $mes(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}})$

2) D est un point du plan différent de A. On pose $mes(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}) = \alpha$. Exprimer en fonction de α les mesures des angles $(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}})$.

EXERCICE 3 :

ABC est un triangle non rectangle inscrit dans un cercle (ρ). D est le point d'intersection des tangentes à (ρ) en B et C. Soit α une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$. Déterminer en fonction de α une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}})$.

EXERCICE 4 :

a) Calculer sinx sachant que $\cos x = \frac{2}{5}$ et $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

b) Calculer cosx sachant que $\sin x = \frac{3}{5}$ et $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

c) Un nombre θ est tel que : $\cos\theta = \frac{3}{5}$ et $\sin\theta > 0$. Calculer $\cos 2\theta$ et $\sin 2\theta$.

EXERCICE 5 :

1) Pour tout nombre réel x, démontrer que $(\cos x + \sin x)^2 + (\sin x - \sin x)^2 = 2$

2) Calculer cosx et sinx dans chacun des cas suivants :

a) $\cos x - \sin x = -1$; b) $\cos x - \sin x = \frac{1}{2}$

EXERCICE 6 :

1) En remarquant que $\frac{\pi}{4} = 2 \times \frac{\pi}{8}$, démontrer que $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$; $\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ et $\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$.

2) En observant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, donner les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$, $\sin\frac{\pi}{12}$ et $\tan\frac{\pi}{12}$.

EXERCICE 7 :

Soient a et b deux réels.

Démontrer les égalités : $\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$; $\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$

En déduire les égalités :

$\cos a + \cos 2a + \cos 3a + \cos 4a = 4\cos\frac{a}{2}\cos a\cos\frac{5a}{2}$

$\sin a + \sin 2a + \sin 3a + \sin 4a = 4\cos\frac{a}{2}\cos a\sin\frac{5a}{2}$

EXERCICE 8 :

Prouver que pour tout réel a, $\cos^3 a = \frac{1}{4}(\cos 3a + 3\cos a)$

En déduire la valeur numérique de $A = \cos^3\left(\frac{\pi}{12}\right) + \cos^3\left(\frac{5\pi}{12}\right) + \cos^3\left(\frac{7\pi}{12}\right) + \cos^3\left(\frac{11\pi}{12}\right)$

EXERCICE 9 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes et représenter les images de leurs solutions sur le cercle trigonométrique :

a) $\sin 3x = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$; b) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$

c) $\sin 2x - 2\sin x\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$; d) $4\cos^2 x + 2\sin^2 2x = 0$

e) $-2\cos^2 x + \cos x + 6 = 0$; f) $\sin^2 2x - \sqrt{3}\sin 2x + \frac{3}{4} = 0$

g) $3\cos x - \sqrt{3}\sin x + \sqrt{6} = 0$; h) $\cos 2x - \sin 2x = -1$

EXERCICE 10 :

Résoudre dans D les inéquations suivantes et représenter les images de leurs solutions sur le cercle trigonométrique :

a) $\sin x - \cos x \leq 0$; $D = \mathbb{R}$;

b) $\tan^2 x - 3 < 0$; $D = [0, 2\pi]$

c) $\dfrac{1 - 2\cos x}{2\sin x - \sqrt{3}} \geq 0$; $D =]-\pi, \pi]$;

d) $\dfrac{2}{4\cos^2 x - 1} < 1$; $D = [0, 2\pi]$.

EXERCICE 11 :

Déterminer le réel m pour que l'ensemble E des solutions du système $\begin{cases} \sin x + \sqrt{3}\cos x = 1 \\ \sin x + \cos x = m \end{cases}$ soit non vide. Déterminer alors E.

EXERCICE 12 :

Résoudre dans D les systèmes d'inéquations suivants et représenter les images de leurs solutions sur le cercle trigonométrique.

a) $\begin{cases} \sin x \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ 2\sin x + 1 \geq 0 \end{cases}$; $D = [0, 2\pi[$;

b) $\begin{cases} \sin 2x < \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos 2x \geq -\dfrac{1}{2} \end{cases}$; $D = \mathbb{R}$.

EXERCICE 13 :

a et b sont deux nombres réels donnés non nuls et t un nombre réel variable.

1) Justifier l'existence de deux nombres réels r et φ tels que : $a = r\cos\varphi$ et $b = r\sin\varphi$.

2)

a) Résoudre le système d'équations $\begin{cases} x\cos t + y\sin t = a \\ -x\sin t + y\cos t = b \end{cases}$

b) Démontrer que les solutions du système sont : $\begin{cases} x = r\cos(t + \varphi) \\ y = r\sin(t + \varphi) \end{cases}$

c) Soit (x, y) une solution du système précédent et M le point de coordonnées (x, y) dans un repère orthonormé. Démontrer que lorsque t décrit $\mathbb{R}$, le lieu du point M est inclus dans un cercle que l'on déterminera. Préciser ce cercle pour $a^2 + b^2 = 4$.

CHAPITRE 3 : GEOMETRIE ANALYTIQUE DU PLAN

COURS

1) ORTHOGONALITE ET DROITES DU PLAN

1.1) Droite définie par un point et une vecteur normal

A est un point donné du plan et $\vec{n}$ un vecteur non nul. Il existe une et une seule droite passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$. Cette droite est définie par : $\overrightarrow{AM} \perp \vec{n}$ où M est un point du plan.

Propriétés :

P_1 *a et b étant deux réels tous non nuls ;*

* *Pour tout nombre réel c, la droite d'équation $ax + by + c = 0$ admet $\vec{n}(a, b)$ pour vecteur normal.*

* *Réciproquement, toute droite de vecteur $\vec{n}(a, b)$ admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$; où $c \in R$*

P_2 *(D) et (D')sont deux droites cartésiennes respectives $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$*

1) $(D)//(D') \Leftrightarrow ab' - a'b = 0$; *2) $(D) \perp (D') \Leftrightarrow aa' + bb' = 0$*

N.B. : la propriété P_2 (2) n'est vraie que dans un repère orthonormé.

P_3. Equation normale d'une droite :

Soit (D) une droite, $\vec{n}$ un vecteur normal à (D) et θ une mesure de l'angle orienté $(\vec{i}, \hat{} \vec{n})$. Cette équation est appelée équation normale de (D)

1.2) Distance d'un point à une droite

Soient $A(x_0, y_0)$ un point du plan et (D) une droite

- Si (D) admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$, alors $d(A,D) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$
- Si (D) admet une équation normale $x\cos\theta + y\sin\theta + k = 0$, alors $d(A, D) = |x_0\cos\theta + y_0\sin\theta + k|$

1.3) Autres expressions du cosinus et du sinus

$\cos(\vec{u}, \hat{} \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$ et $\sin(\vec{u}, \hat{} \vec{v}) = \frac{\det(\vec{u}, \vec{v})}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$. On en déduit les propriétés suivantes :

$\text{aire}(ABCD) = |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})|$ où ABCD est un parallélogramme et $\text{aire}(ABD) = \frac{1}{2}|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})|$

2) CERCLES

Une caractérisation du cercle (C) de centre $\Omega(a, b)$ et de rayon r est son équation cartésienne $(a - b)^2 + (y - b)^2 = r^2$. On peut écrire $\left(\frac{x - a}{2}\right)^2 + \left(\frac{y - b}{r}\right)^2 = 1$.

Alors, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que : $\frac{x-a}{r} = \cos\theta$ et $\frac{y-b}{r} = \sin\theta$; soit $\begin{cases} x = a + r\cos\theta \\ y = b + r\sin\theta \end{cases}$ $(\theta \in \mathbb{R})$.

Le système $\begin{cases} x = a + r\cos\theta \\ y = b + r\sin\theta \end{cases}$ $(\theta \in \mathbb{R})$ est appelé représentation paramétrique de $(\mathcal{C})$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Cette dernière écriture est une seconde caractérisation du cercle $(\mathcal{C})$ de centre $\Omega(a, b)$ et de rayon r.

Remarque :

Le cercle de centre O et de rayon r admet pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $(\theta \in \mathbb{R})$

***Propriétés :** soient $(\mathcal{C})$ le cercle d'équation $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ et $A(x_0, y_0)$ un point de $(\mathcal{C})$.*
L'équation cartésienne de la tangente à $(\mathcal{C})$ en A est : $xx_0 + yy_0 + a(x + x_0) + b(y + y_0) + c = 0$.

EXERCICES

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

EXERCICE 1 :

1) Déterminer une équation cartésienne de la droite (D) passant par le point A(3, -1) et admettant $\vec{n}(1,2)$ pour vecteur normal.
2) Déterminer un vecteur normal à la droite (Δ) dans chacun des cas suivants :
   a) (Δ) : $3x - 5y + 1 = 0$; b) (Δ) : $7x = 3$
   c) (Δ) est la droite passant par le point A(-1, 2) et de vecteur directeur $\vec{u}(1,2)$

EXERCICE 2 :

Déterminer une équation cartésienne de la droite (D) passant par le point A(3, -2) et perpendiculaire à la droite d'équation $x - y + 3 = 0$.

EXERCICE 3 :

Soit (Δ) la droite d'équation $3x - 2y + 4 = 0$

1) Déterminer les vecteurs unitaires normaux à (Δ)
2) Déterminer les équations normales de (Δ)

EXERCICE 4 :

On donne les points A(3, 5) ; B(4, 1) et C(-2, -1). Vérifier que A, B et C ne sont pas alignés.

Déterminer les coordonnées du centre du cercle circonscrit au triangle ABC

EXERCICE 5 :

On considère les points A(-2, -2) et B(1, 0)

Déterminer et tracer le lieu des points M du plan tels que : $\left|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM})\right| = 8$.

EXERCICE 6 :

On considère le cercle $(\mathscr{C})$ et la droite (D) d'équations respectives $(\mathscr{C}) : x^2 + y^2 - 2x + 4y - 21 = 0$; (D) : $x + y - 5 = 0$.

1) Calculer les coordonnées des points d'intersection A et B du cercle $(\mathscr{C})$ et le la droite (D).

2) Ecrire les équations respectives des tangentes en A et en B au cercle $(\mathscr{C})$.

EXERCICE 7 :

On considère le point A(2, 1) et la droite (D) d'équation $2x - y + 3 = 0$.

1) Déterminer une équation cartésienne du cercle $(\mathscr{C})$ de centre A, tangent à la droite (D).

2) Calculer les coordonnées du point de contact entre $(\mathscr{C})$ et (D).

EXERCICE 8 :

On considère une cercle $(\mathscr{C})$ d'équation $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ et un point $A(x_0, y_0)$ de ce cercle. Montrer qu'une équation de la tangente à $(\mathscr{C})$ au point A est : $xx_0 + yy_0 + a(x + x_0) + b(y + y_0) + c = 0$.

EXERCICE 9 :

Soient (D) et (D') les droites d'équations respectives : $3x - 4y + 6 = 0$ et $-6x + 8y + 9 = 0$

1) Démontrer que ces droites sont parallèles

2) Déterminer une représentation paramétrique du cercle tangent à ces deux droites et dont le centre a une ordonnée nulle.

EXERCICE 10 :

Déterminer les équations des bissectrices des droites d'équations : $3x + 4y - 1 = 0$ et $4x + 3y - 2 = 0$.

EXERCICE 11 :

On considère un cercle $(\mathscr{C})$ de centre $\Omega(a, b)$ et de rayon R et un point M. On pose $d = d(\Omega, M)$. Soit (D) une droite qui passe par M et qui coupe $(\mathscr{C})$ en deux points A et B. on désigne par A le point de $(\mathscr{C})$ diamétralement opposé au point A.

1) Démontrer l'égalité $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA'} \cdot \overrightarrow{MA}$

2) En déduire que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = d^2 - R^2$

EXERCICE 12 :

Soient A, B et C trois points de coordonnées respectives (0, a) ; (b, 0) et (c, 0) où a, b et c sont des nombres réels non nuls tels que : $|b| \neq |c|$.

1) Démontrer que l'ensemble des points du plan équidistants des droites (AB) et (AC) est la réunion de deux droites perpendiculaires (Δ) et (Δ').

2) Soient I et J les points d'intersection respectifs de (Δ) et (Δ') avec la droite (BC). Déduire de la question 1, une équation du second degré dont les solutions sont les abscisses des points I et J.

3) En utilisant l'équation trouvée à la question 2), mais sans résoudre cette équation, démontrer que $\frac{IB}{IC} = \frac{JB}{JC} = \frac{AB}{AC}$.

CHAPITRE 4 : ISOMETRIES DU PLAN

Cours

1) TRANSLATIONS

1.1) Définition

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan. On appelle translation de vecteur $\vec{u}$ l'application notée $t_{\vec{u}}$ qui à tout point M du plan associe le point M' défini par $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

1.2) Propriétés

P₁. Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan, pour tous points M et N d'images respectives M' et N' par $t_{\vec{u}}$, on a : $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$

P₂. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. On a : $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{u}+\vec{v}}$.

P₃. Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan ; $t_{\vec{u}}$ est une bijection du plan dans lui-même et sa réciproque est $(t_{\vec{u}})^{-1} = t_{-\vec{u}}$.

P₄. La translation $t_{\vec{u}}$ de vecteur $\vec{u}(a,b)$ a pour expression analytique $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$

Remarque :

* $t_{\vec{0}}$ *est l'identité du plan (tout point M est invariant)*

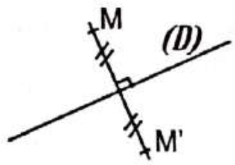
* *Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, il n'y a pas de point invariant.*

2) SYMETRIES ORTHOGONALES

2.1) Définition

La symétrie orthogonale d'axe (D) notée S_D est l'application du plan dans lui-même qui associe :

- à chaque point M extérieur de (D) le point M' tel que (D) soit la médiatrice de [MM']
- à chaque point M de (D), le point M lui-même.



Remarque :

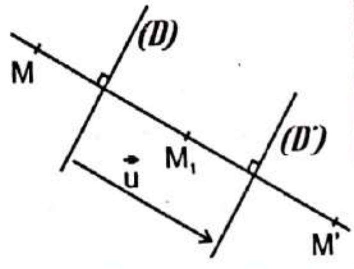
Soit (D) la droite passant par un point O et de vecteur directeur $\vec{u}$ non nul. Pour tous points M et M' distincts de 0 on a : $S_D(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} OM = OM' \\ (\overrightarrow{OM}, \hat{\ } \vec{u}) = (\vec{u}, \hat{\ } \overrightarrow{OM'}) \end{cases}$

2.2) Propriétés

P₁. L'ensemble des points invariants par S_D est la droite (D)

P₂. Toute symétrie orthogonale est une bijection du plan sur lui-même. La bijection réciproque de S_D est S_D elle-même : on dit que S_D est une transformation involutive du plan.

P₃. La composée de deux symétries orthogonales **d'axes parallèles** (D) et (D') est une translation de vecteur normal à (D) ; $\overrightarrow{MM'} = 2\vec{u}$ et $S_{D'} \circ S_D = t_{2\vec{u}}$

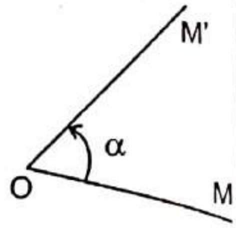


P_4. Soit $t_{\vec{u}}$ une translation de vecteur non nul $\vec{u}$. Pour toute droite (D) de vecteur normal $\vec{u}$, il existe une droite (D') et une seule telle que : $S_{D'} \circ S_D = t_{\vec{u}}$.

P_5. La composée de deux symétries orthogonales d'axes orthogonaux (D) et (D') est la symétrie de centre O, point d'intersection de (D) et (D').

3) ROTATIONS

3.1) Définition



Soient O un point du plan et α un angle orienté. On appelle rotation de centre O et d'angle α l'application notée $r(O, \alpha)$ ou r qui à tout point M du plan associe le point M' défini par : Si M = 0, alors M' = 0

Si $M \neq 0$, alors $OM = OM'$ et $(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}}) = \hat{\alpha}$.

Remarques :
** Si α est l'angle nul, cette application est l'identité*
** Si α n'est pas l'angle nul, le seul point invariant est le centre O.*

3.1) Propriétés

P_1. Soit (D) et (D') deux droites sécantes en un point O de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{u'}$. La composée $S_{D'} \circ S_D$ des symétries orthogonales d'axes respectifs (D) et (D') est la rotation de centre O et d'angle $2(\widehat{\vec{u}, \vec{u'}})$.

P_2. Soit O un point du plan et α un angle orienté. Pour toute droite (D) passant par O, il existe une droite (D') et une seule telle que : $S_{D'} \circ S_D = r(0, \alpha)$.

P_3. Une application f du plan est une rotation d'angle α si et seulement si pour tous points M et N distincts d'images respectives M' et N', On a : $MN = M'N'$ et $(\widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}}) = \alpha$

P_4. ***Composée de deux rotations***

- ***de même centre***

$r(O,\alpha) \circ r(O,\alpha') = r(O,\alpha') \circ r(O,\alpha) = r(O,\alpha + \alpha')$

- ***De centres distincts***
- Si $\hat{\alpha} + \hat{\alpha}' \neq \hat{0}$, alors $r(O,\alpha) \circ r(O',\alpha') = r(\Omega,\alpha + \alpha')$, où Ω est un point du plan
- Si $\hat{\alpha} + \hat{\alpha}' = \hat{0}$, alors $r(O,\alpha) \circ r(O',\alpha') = t_{\vec{u}}$ où $\vec{u}$ est un vecteur du plan

P_5. $r(O, \alpha)$ est une bijection du plan dans lui-même et sa réciproque est $[r(O,\alpha)]^{-1} = r(O,-\alpha)$

4) ISOMETRIES

4.1) Définition

Soient f une application du plan, M et N deux points du plan. M' = f(M) et N' = f(N).
On dit que f est une isométrie si et seulement si M'N' = MN ; c'est-à-dire f conserve la distance.

4.2) Propriétés

P_1. Une isométrie f conserve le produit scalaire ; c'est-à-dire, pour tous points A, B, C et D d'images respectives A', B', C' et D' par f, on a $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{C'D'}$.

P_2. Toute isométrie plane est une transformation (application bijective du plan) et sa réciproque est une isométrie plane.

P_3. L'image d'une droite, d'un segment, d'une demi-droite par une isométrie est respectivement, une droite, un segment, une demi-droite

- L'image d'un cercle de centre O et de rayon r par une isométrie est un cercle de centre O' et de rayon r.

P_4. Une isométrie conserve les angles non orientés, le contact entre un cercle et une droite, les aires et le barycentre.

Remarque : *les translations, les symétries centrales, les symétries orthogonales et les rotations sont des isométries.*

5) COMPLEMENTS SUR LES ISOMETRIES

5.1) Déplacement et antidéplacements

- Un déplacement est une isométrie qui conserve les angles orientés
- Un antidéplacement est une isométrie qui transforme tout angle orienté en son opposé.

Remarques :
** Les symétries orthogonales sont des antidéplacements*
** Les translations, les symétries centrales, les rotations sont des déplacements.*

Propriétés :
** La composée de deux déplacements est un déplacement*
** La composée de deux antidéplacements est un déplacement*
** La composée d'un déplacement et d'un antidéplacement est antidéplacement*
** La réciproque d'un déplacement (resp. antidéplacement) est un déplacement (resp. antidéplacement).*

5.2) Triangles isométriques :

Définitions :
Deux triangles ABC et A'B'C' sont isométriques ou superposables s'il existe une isométrie qui transforme les points A, B et C respectivement en A', B' et C'.

- Si f est déplacement, alors les triangles ABC et A'B'C' sont dits directement superposables.
- Si f est un antidéplacement, alors les triangles ABC et A'B'C' sont dits superposables après retournement.

Propriétés :
Soit ABC et A'B'C' deux triangles.
Si A'B' = AB, B'C' = BC, C'A' = CA, alors les triangles ABC et A'B'C' sont isométriques.

EXERCICES

EXERCICE 1 :

Soient A et B des points du plan
A tout point M du plan, on associe le point N tel que ABMN est un parallélogramme.

1) Quelle est la nature de l'application f qui à M associe N ?
2) Quel est l'ensemble ε des points N quand M décrit une droite (D) donnée ?

P_3. L'image d'une droite, d'un segment, d'une demi-droite par une isométrie est respectivement, une droite, un segment, une demi-droite

- L'image d'un cercle de centre O et de rayon r par une isométrie est un cercle de centre O' et de rayon r.

P_4. Une isométrie conserve les angles non orientés, le contact entre un cercle et une droite, les aires et le barycentre.

Remarque : *les translations, les symétries centrales, les symétries orthogonales et les rotations sont des isométries.*

5) COMPLEMENTS SUR LES ISOMETRIES

5.1) Déplacement et antidéplacements

- Un déplacement est une isométrie qui conserve les angles orientés
- Un antidéplacement est une isométrie qui transforme tout angle orienté en son opposé.

Remarques :
** Les symétries orthogonales sont des antidéplacements*
** Les translations, les symétries centrales, les rotations sont des déplacements.*

Propriétés :
** La composée de deux déplacements est un déplacement*
** La composée de deux antidéplacements est un déplacement*
** La composée d'un déplacement et d'un antidéplacement est antidéplacement*
** La réciproque d'un déplacement (resp. antidéplacement) est un déplacement (resp. antidéplacement).*

5.2) Triangles isométriques :

Définitions :
Deux triangles ABC et A'B'C' sont isométriques ou superposables s'il existe une isométrie qui transforme les points A, B et C respectivement en A', B' et C'.

- Si f est déplacement, alors les triangles ABC et A'B'C' sont dits directement superposables.
- Si f est un antidéplacement, alors les triangles ABC et A'B'C' sont dits superposables après retournement.

Propriétés :
Soit ABC et A'B'C' deux triangles.
Si A'B' = AB, B'C' = BC, C'A' = CA, alors les triangles ABC et A'B'C' sont isométriques.

EXERCICES

EXERCICE 1 :

Soient A et B des points du plan
A tout point M du plan, on associe le point N tel que ABMN est un parallélogramme.

1) Quelle est la nature de l'application f qui à M associe N ?
2) Quel est l'ensemble ε des points N quand M décrit une droite (D) donnée ?

EXERCICE 2 :

Le plan est muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On considère le vecteur $\vec{u}(1, 2)$ et la droite (D) d'équation $2x - 3y + 4 = 0$.

1) Quelle est l'expression analytique de $t_{\vec{u}}$?
2) Soit (D') l'image de (D) par $t_{\vec{u}}$. Déterminer une équation cartésienne de (D').

EXERCICE 3 :

Soient O, A, B et C des points du plan et α, β et γ trios réels.
On considère les applications :
$f : M \mapsto M'$ telle que $\overrightarrow{MM'} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC}$
$g : M \mapsto M'$ telle que $\overrightarrow{OM'} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC}$

1) A quelle condition f est-elle une translation ?
2) A quelle condition g est-elle une translation ?

EXERCICE 4 :

On considère une droite (Δ) de vecteur normal $\vec{u}$.
Déterminer la nature et l'élément caractéristique de la transformation $t_{\vec{u}} \circ S_{\Delta}$

EXERCICE 5 :

On considère un point A du plan. A tout point M du plan, on associe le point N tel que AMN soit un triangle équilatéral direct.

1) Reconnaître la transformation qui à M associe N
2) Quel est l'ensemble des points N si M décrit un cercle $(\mathcal{C})$?

EXERCICE 6 :

On considère deux points distincts M et N

1) Déterminer la nature et l'élément caractéristique de la transformation $S_M \circ S_N$
2) En déduire que toute translation est la composée de deux symétries centrales dont l'une est arbitrairement choisie.
3) **Application**
   ABC est un triangle, I et J sont les milieux respectifs de [AB] et [AC]. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations $t_{\overrightarrow{BC}} \circ S_I$ et $S_J \circ t_{\overrightarrow{BC}}$.

EXERCICE 7 :

Soit ABC un triangle équilatéral direct et A' le symétrique de A par rapport à C.

1) Démontrer qu'il existe une rotation r telle que r(A) = c et r(B) = A'.
2) Déterminer son centre et son angle.

EXERCICE 8 :

Le plan est muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$
(Δ) désigne la première bissectrice et r le quart de tour direct de centre O.

1) Quelles sont les expressions analytiques de $S_{(OI)}$ et $S_{(\Delta)}$

2) En déduire l'expression analytique de r.

EXERCICE 9 :

AOB est un triangle ; AOC et BOD sont deux triangles rectangles en O et isocèles, construis à l'extérieur du triangle AOB.
La rotation de centre O qui transforme A en C, transforme C en A'.
Démontrer que les segments [A'B] et [CD] sont perpendiculaires et de même longueur.

EXERCICE 10 :

A et B sont deux points distincts.

1) Déterminer et construire la droite (Δ) telle que : $r\left(A, \frac{-2\pi}{3}\right) = S_{(AB)} \circ S_{(\Delta)}$
2) Déterminer et construire la droite (Δ') telle que : $r'\left(B, \frac{-2\pi}{3}\right) = S_{(\Delta')} \circ S_{(AB)}$
3) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $r' \circ r$

EXERCICE 11 :

Soit ABC un triangle.
On appelle A_1 le symétrique de A par rapport à la droite (BC) et C_1 le symétrique de C par rapport à la droite (AB).

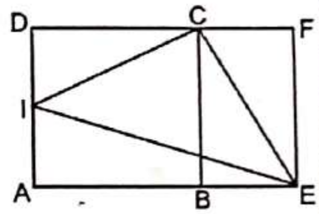
Montrer que $AC_1 = A_1C$ et que $(\overrightarrow{AC_1}, \overrightarrow{A_1C}) = 2(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$.

EXERCICE 12 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On désigne par f la translation ponctuelle qui au point M(x, y) associe le point M'(x', y') telle que :
$\begin{cases} x' = y - 1 \\ y' = x + 1 \end{cases}$.

1) Démontrer que l'ensemble des points invariants par f est une droite (Δ) de vecteur directeur $\vec{u}(1, 1)$.
2) Démontrer que pour tout M, le milieu I de [MM'] appartient à (Δ).
3) Démontrer que pour tout M, les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{MM'}$ sont orthogonaux
4) En déduire la nature de la transformation f.

EXERCICE 13 :

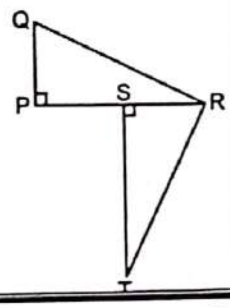


ABCD est un carré de sens direct. I est le milieu de [AD]

On construit le rectangle BEFC, extérieur au carré ABCD tel que AB = 2BE.

Quelle est la nature du triangle ICE ? Justifier (on pourra utiliser une rotation).

EXERCICE 14 :



Sur la figure ci-contre, on a PQ = SR et PR = ST.

1) Préciser l'angle de rotation r qui transforme le triangle SRT en PQR et construire son centre I.
2) Soit V l'image du point R par la symétrie de centre I. Quelle est l'image par r du triangle VSQ ?

EXERCICE 15 :

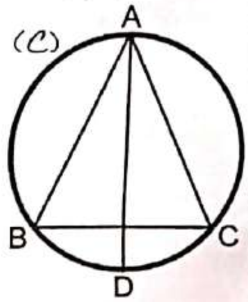
Soit un triangle ABC rectangle en A. M étant un point du segment [BC], on considère les points P et Q, respectivement symétriques de M par rapport à (AB) et à (AC).

Montrer que A est le milieu du segment [PQ].

EXERCICE 16 :

ABC est un triangle équilatéral de sens direct, inscrit dans le cercle ($\mathcal{C}$) de diamètre [AD].

1) Démontrer que la translation f définie par : $f = S_{(BD)} \circ S_{(AC)}$ est une rotation dont on précisera le centre et l'angle.
2) Démontrer que la transformation g définie par : $g = S_{(CD)} \circ S_{(AB)}$ est une rotation dont on précisera le centre J et l'angle.
3) Démontrer que le triangle AIJ est équilatéral. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations $g \circ f$ et $f \circ g$.



EXERCICE 17 :

Soit ABCD un carré. On considère des points M et N des segments [AB] et [BC] respectivement tels que AM = BN.

1) Démontrer que les droites (AN) et (DM) sont orthogonales, ainsi que les droites (DN) et (CM).
2) Soit I le point d'intersection des droites (CM) et (AN). Démontrer que les droites (DI) et (MN) sont orthogonales.

EXERCICE 18 :

Soit ABC un triangle équilatéral tel que : $(\overrightarrow{AB}, \widehat{\ \ } \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$

On appelle O le centre du triangle ; I, J et K les points tels que :

$\overrightarrow{AI} = \frac{5}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BJ} = \frac{5}{3}\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CK} = \frac{5}{3}\overrightarrow{CA}$

1) Déterminer deux nombres réels a et b tels que I soit le barycentre de (A, a) et (B, b).
2) En utilisant la rotation de centre O qui transforme A en B, démontrer que O est le centre de gravité du triangle IJK.

EXERCICE 19 :

ABCD est un carré direct de centre O

1) Quelle est la nature des transformations suivantes : $S_{(DC)} \circ S_{(AB)}$; $S_{(AC)} \circ S_{(DB)}$; $S_{(AB)} \circ S_{(AC)}$; $S_{(AB)} \circ S_{(DB)}$?

2) En déduire la nature des transformations suivantes : $r(A, \frac{-\pi}{2}) \circ r(0, \pi)$; $t_{\overrightarrow{2AD}} \circ r(B, \frac{\pi}{2})$.

CHAPITRE 5 : HOMOTHETIES

COURS

1) LES HOMOTHETIES

1.1) Définition

L'homothétie de centre Ω et de rapport $k(k \neq 0)$ est l'application notée $h_{(\Omega, k)}$ ou h, qui à tout point M du plan associe le point M' défini par $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$.
Soit $M(x, y)$ un point du plan, $M'(x', y')$ son image par h.

On a : $M' = h(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M} \Leftrightarrow \begin{cases} x'-x_0 = k(x - x_0) \\ y'-y_0 = k(y - y_0) \end{cases}$ où $\Omega(x_0, y_0)$

L'expression analytique de h est : $\begin{cases} x' = kx + (1-k)x_0 \\ y' = ky + (1-k)y_0 \end{cases}$

1.2) Propriétés

P_1. Soit h une homothétie de rapport k. Soit M et N deux points quelconques du plan d'images respectives M' et N' par h. Alors $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$. On en déduit : $M'N' = |k| \times MN$.

P_2. Une homothétie h de rapport k ;

- transforme une droite (D) en une droite (D') parallèle à (D) ;
- transforme le cercle $\mathcal{C}(A,r)$ en le cercle $\mathcal{C}(h(A), |k|r)$;
- conserve le barycentre, les angles orientés et le contact entre un cercle et une droite ;
- multiplie les distances par $|k|$;
- admet pour transformation réciproque l'homothétie de même centre et de rapport $\frac{1}{k}$.

2) HOMOTHETIES ET ISOMETRIES

2.1) Homothéties et translation

- Soient h et h' deux homothéties de centre O et de rapports k et k'. $h' \circ h = h \circ h'$ est l'homothétie de centre 0 et de rapport k'k.
- Soient h et h' deux homothéties de centres O et O' et de rapports respectifs k et k'.
  - Si $k'k \neq 1$, alors $h' \circ h$ est une homothétie de rapport k'k
  - Si $k'k = 1$, alors $h' \circ h$ est une translation.

Remarque : en général, la composition de deux homothéties de centres distincts n'est pas commutative.

- La composée d'une translation et d'une homothétie de rapport $k(k \neq 1)$ est une homothétie de rapport k.

2.2) Similitudes

Définitions :

Toute transformation composée d'une homothétie et d'une isométrie est appelée une similitude.

- Si l'isométrie est un déplacement, on dit que la similitude est directe ;
- Si l'isométrie est un antidéplacement, on dit que la similitude est indirecte.

Propriétés :

P_1. Soit S une similitude directe, composée d'une homothétie et d'une rotation d'angle α.

Pour tous points M et N distincts, d'images respectives M' et N', on a : $(\overrightarrow{MN}, \widehat{\overrightarrow{M'N'}}) = \hat{\alpha}$, α est appelé angle de la similitude S.

P_2. Les similitudes ;

- multiplient les distances par |k| (leurs rapports) ;
- directes conservent les angles orientés ;
- indirectes transforment tout angle orienté en son opposé ;
- conservent l'alignement, le contact, le milieu, le parallélisme et l'orthogonalité.

2.3) Triangles semblables

Deux triangles ABC et A'B'C' sont semblables s'il existe une similitude S telle que les points A, B et C ont respectivement pour images A', B' et C' par S.

- Si deux triangles ont leurs côtés deux à deux proportionnels, alors ils sont semblables
- Si deux triangles ont leurs angles deux à deux de même mesure, alors ils sont semblables.

EXERCICES

EXERCICE 1 :

Soient ($\mathcal{C}$) un cercle et A, B deux points distincts de ($\mathcal{C}$)

Déterminer le lieu géométrique du centre de gravité G du triangle ABM lorsque M décrit le cercle ($\mathcal{C}$) privé des points A et B.

EXERCICE 2 :

Soit A un point du plan ; à tout point M du plan, on associe le point M' barycentre de (A, 1) et (M, 3).

1) Quelle est la nature de l'application f qui à M associe M' ?
2) Quel est l'ensemble ε des points M' quand M décrit un segment [PQ] donné ?

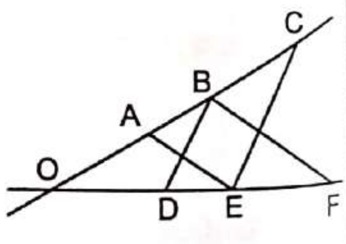
EXERCICE 3 :

ABC est un triangle et M un point de [BC].
Soient G et G' les centres de gravité respectifs des triangles ABM et ACM.

1) Déterminer les lieux géométriques respectifs (ρ) et (ρ') des points G et G' lorsque M décrit le segment [BC].
2) Préciser la position du point commun à (ρ) et (ρ').

EXERCICE 4 :

Sur la figure ci-contre, (AE) et (BF) d'une part ; (BD) et (CE) d'autre part sont parallèles.



1) Montrer qu'il existe une homothétie h_1 transformant A en B et E en F
2) Montrer qu'il existe une homothétie h_2 transformant B en C et D en E
3) Montrer en utilisant les composés $h_1 \circ h_2$ et $h_2 \circ h_1$ que les droites (AD) et (CF) sont parallèles.

EXERCICE 5 :

ABCD est un trapèze de bases [AB] et [CD] avec AB ≠ CD.

On note I et J les milieux respectifs de [AB] et [CD]
Soit M le point d'intersection des droites (AD) et (BC)
Soit N le point d'intersection des droites (AC) et (BD)
On veut montrer que M, N, I et J sont alignés.

1) Soit h l'homothétie de centre M qui transforme A en D. Déterminer h(B), puis h(I). En déduire que M, I et J sont alignés.
2) En considérant une autre homothétie, démontrer que N, I et J sont aussi alignés. Conclure.

EXERCICE 6 :

Soient ($\mathcal{C}$) et ($\mathcal{C}'$) deux cercles sécants.
A un de leurs points d'intersection, construire une droite (Δ) passant par A, coupant les cercles ($\mathcal{C}$) et ($\mathcal{C}'$) respectivement aux points M et N tels que : $\overrightarrow{AM} = -2\overrightarrow{AN}$

EXERCICE 7 :

Le plan est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soit t la translation de vecteur $\vec{u}(-2, 1)$ et h l'homothétie $h(\Omega, -2)$ où $\Omega(1, 3)$.
Quelle est la nature des applications $t \circ h$ et $h \circ t$? Préciser leurs éléments caractéristiques. Ces applications sont-elles égales ?

EXERCICE 8 :

($\mathcal{C}$) est un cercle de centre O, de diamètre [BC]. A est un point de ce cercle.

La droite (AB) coupe en D la parallèle à (OA) menée par C. Démontrer que le triangle BCD est isocèle.

EXERCICE 9 :

ABC est un triangle ; I, J et K sont les milieux respectifs des côtés [BC], [CA] et [AB].
Soit P le point d'intersection de la droite parallèle à (BJ) passant par K et de la droite parallèle à (CK) passant par J. Démontrer que les points A, P et I sont alignés.

EXERCICE 10 :

Dans le plan, on considère trois points A, B et C non alignés.
On appelle I, J et K les milieux respectifs de [BC], [CA] et [AB].
Soit M un point quelconque du plan et P, Q et R les symétriques de M par rapport aux points I, J et K respectivement. G est le centre de gravité de ABC.

1) Exprimer $\overrightarrow{GI}$ en fonction de $\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GJ}$ en fonction de $\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GK}$ en fonction de $\overrightarrow{GC}$. En déduire une homothétie qui transforme A, B et C en I, J et K respectivement.
2) Déterminer de même une homothétie h_2 transformant I, J et K en P, Q et R respectivement.
3) Préciser la nature de l'application $f = h_2 \circ h_1$. En déduire que les segments [AP], [BQ] et [CR] ont même milieu Ω.
4) Déterminer l'image par f du cercle circonscrit au triangle ABC.

EXERCICE 11 :

Soient ABCD un parallélogramme de centre O et E un point de la diagonale [BD], distinct de 0.

La droite passant par E et parallèle à (AD) coupe (AB) en F et (CD) en G. La droite passant par E et parallèle à (AB) coupe (AD) en H et (BC) en I. Démontrer que les droites (FH), (BD) et (IG) sont concourantes.

EXERCICE 12 :

f est la transformation définie analytiquement par : $\begin{cases} x' = -2x + 1 \\ y' = -2y \end{cases}$

1) Démontrer qu'il existe un seul point noté I confondu avec son image.
2) Comparer alors le vecteur $\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{IM'}$
3) Quelle est la transformation f ?

EXERCICE 13 :

OAB est un triangle isocèle en O. Soient h l'homothétie de centre O et de rapport k, r la rotation de centre O et d'angle α. On désigne par D et E les images respectives de A et B par la transformation $h \circ r$, C le point tel que ABCD soit un parallélogramme.

Quelle est la nature du triangle BCE ?

EXERCICE 14 :

Le plan est muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$
Soient h l'homothétie de centre O et de rapport –2, S_A la symétrie de centre A(-3, 1)

1) Ecrire les expressions analytiques de h et S_A, puis celle de la transformation $S_A \circ h$
2) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $S_A \circ h$

EXERCICE 15 :

Soient (𝒞) un cercle de centre O et A un point distinct de O.
A tout point M de (𝒞), on associe les points P et Q milieux respectifs de [AM] et [OP]

1) Déterminer les lieux (ρ) et (ρ') des points P et Q lorsque M décrit le cercle (𝒞).
2) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation qui à (𝒞) associe (ρ').

EXERCICE 16 :

ABC est un triangle rectangle en A. Soient H le pied de la hauteur issue de A, I et J les projetés orthogonaux de H respectivement sue (AB) et (AC). On pose : AC = b et AB = c.

1) Démontrer que les triangles ABC et AJI sont semblables et calculer en fonctions de b et c le rapport de similitude $\frac{IJ}{BC}$.
2) Déterminer une homothétie h de centre A et une symétrie orthogonale S dont l'axe passe par A telles que l'image du triangle ABC par $S \circ h$ soit le triangle AJI.

CHAPITRE 6 : ORTHOGONALITE DANS L'ESPACE

COURS

1) DROITES ORTHOGONALES

1.1) Définitions

On dit que deux droites (D) et (D') de l'espace sont orthogonales si et seulement si leurs parallèles passant par un point donné de l'espace sont perpendiculaires dans le plan qu'elles définissent. On note (D)⊥(D')

On dit que deux droites (D) et (D') de l'espace sont perpendiculaires lorsqu'elles sont orthogonales et sécantes.

1.2) Propriétés

P₁. Si deux droites sont orthogonales, toute droite parallèle à l'une est orthogonale à l'autre.

Notation : $\begin{cases}(D) \perp (D') \\ (\Delta) // (D)\end{cases} \Rightarrow (\Delta) \perp (D')$.

P₂. Si deux droites sont parallèles, toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.

Notation : $\begin{cases}(D) // (D') \\ (\Delta) \perp (D)\end{cases} \Rightarrow (\Delta) \perp (D')$

2) DROITE ET PLAN ORTHOGONAUX

2.1) Définition

Une droite (D) et un plan $(\wp)$ sont orthogonaux si et seulement si (D) est orthogonale à deux droites sécantes de $(\wp)$. On note $(D)\perp(\wp)$.

2.2) Propriétés

P_1. Etant donné un point A et un plan $(\wp)$, il existe une unique droite passant par A et orthogonale à $(\wp)$

P_2. Etant donné un point A et une droite (D), il existe un unique plan passant par A et orthogonal à (D)

P_3. Si une droite est orthogonale à un plan, alors elle est orthogonale à toute droite de ce plan.

P_4. Si deux droites (D) et (D') sont parallèles, tout plan $(\wp)$ orthogonal à (D) est orthogonal à (D').

Notation : $\begin{cases}(D) // (D') \\ (D) \perp (\mathcal{P})\end{cases} \Rightarrow (D') \perp (\mathcal{P})$

P_5. Si deux plans $(\wp)$ et $(\wp')$ sont parallèles, toute droite (D) orthogonale à $(\wp)$ est orthogonale à $(\wp')$. Notation : $\begin{cases}(\mathcal{P}) // (\mathcal{P}') \\ (D) \perp (\mathcal{P})\end{cases} \Rightarrow (D) \perp (\mathcal{P}')$

P_6. Si deux droites (D) et (D') sont orthogonales à un même plan ($\wp$), alors elles sont parallèles. Notation : $\begin{cases} (D) \perp (\mathcal{P}) \\ (D') \perp (\mathcal{P}) \end{cases} \Rightarrow (D) // (D')$

P_7. Si deux plans ($\wp$) et ($\wp$') sont orthogonaux à une même droite (D), alors ils sont parallèles. Notation : $\begin{cases} (D) \perp (\mathcal{P}) \\ (D) \perp (\mathcal{P}') \end{cases} \Rightarrow (\wp) // (\wp')$

P_8. Soit (D) une droite orthogonale à un plan ($\wp$). Toute droite (D') orthogonale à (D) est parallèle à ($\wp$). Notation : $\begin{cases} (D) \perp (\wp) \\ (D) \perp (D') \end{cases} \Rightarrow (D') // (\mathcal{P})$

3) PLANS PERPENDICULAIRES

3.1) Définition

Deux plans sont perpendiculaires lorsque l'un d'entre eux contient une droite orthogonale à l'autre.

3.2) Propriétés

P_1. Si une droite (D) est orthogonale à un plan ($\wp$), tout plan parallèle à (D) est perpendiculaire à ($\wp$). Notation : $\begin{cases} (D) \perp (\wp) \\ (\wp') // (D) \end{cases} (D) \Rightarrow (\wp) \perp (\wp')$

P_2. Si deux plans sont perpendiculaires, toute droite orthogonale à l'un est parallèle à l'autre. Notation : $\begin{cases} (\wp) \perp (\wp') \\ (D) \perp (\wp) \end{cases} \Rightarrow (D) // (\wp')$

P_3. Si deux plans sont perpendiculaires, tout plan parallèle à l'un est perpendiculaire à l'autre. Notation : $\begin{cases} (\wp) \perp (\wp') \\ (\wp) \perp \Pi \end{cases} \Rightarrow (\wp') // (\Pi)$

P_4. Un plan est perpendiculaire à deux plans sécants si et seulement si il est orthogonal à leur droite d'intersection.

EXERCICES

EXERCICE 1 :

Soient (D_1) et (D_2) deux droites d'un plan ($\wp$) sécantes en un point O. On construit deux plans ($\wp_1$) et ($\wp_2$) respectivement orthogonaux à (D_1) et à (D_2)

1) Démontrer que les plans ($\wp_1$) et ($\wp_2$) sont sécants.
2) Démontrer que leur droite d'intersection (Δ) est orthogonale au plan ($\wp$).

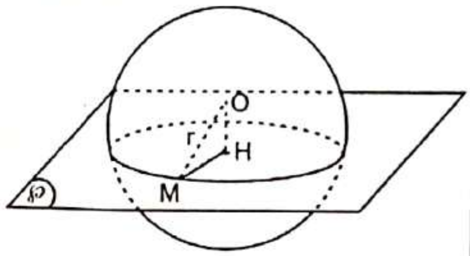
EXERCICE 2 :

Soient ABC un triangle et (D) la droite passant par A et perpendiculaire au plan (ABC).

1) Soit M un point de (D), distinct de A. Montrer que (AM) est orthogonale à (BC)
2) Soit H le pied de la hauteur issue de M du triangle BMC. Montrer que H est aussi le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.

EXERCICE 3 :

Soit $(\wp)$ un plan ; O est un point de l'espace. H le projeté orthogonal de O sur $(\wp)$ et (Σ) une sphère de centre O et de rayon r. On désigne par d la distance du point O au plan $(\wp)$.



1) Démontrer qu'un point M de $(\wp)$ appartient à (Σ) si et seulement si : $HM^2 = r^2 - d^2$.
2) Déterminer l'intersection de (Σ) et de $(\wp)$ dans les trois cas suivants :
   a) $r < d$; b) $r = d$; c) $r > d$. Si $r = d$, on dit que le plan est tangent à la sphère.

EXERCICE 4 :

Soit ABC un triangle rectangle en A dans un plan $(\wp)$. (Δ) la perpendiculaire en A à $(\wp)$ et D un point de (Δ) distinct de A. Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

EXERCICE 5 :

Soient ABCD un tétraède et I, J, K, L, M et N les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD], [DA], [AC], [BD]. On suppose que AB = CD et AC = BD

1) Démontrer que les quadrilatères IJKL et MLNJ sont des losanges
2) Démontrer que la droite (JL) est orthogonale au plan (IKM)
3) Démontrer que la droite (JL) est orthogonale aux droites (BC) et (AD).

EXERCICE 6 :

Soient $(\wp)$ un plan, (Δ) une droite de $(\wp)$, A un point de $(\wp)$ non situé sur (Δ), H la projection orthogonale de A sur (Δ) et (D) la perpendiculaire en A à $(\wp)$;
Démontrer que pour tout M de (D), les droites (MH) et (Δ) sont perpendiculaires.

EXERCICE 7 :

Soient $(\wp)$ et (Q) deux plans sécants
Démontrer qu'il existe un plan et un seul perpendiculaire à $(\wp)$ et à (Q), passant par un point A donné.

EXERCICE 8 :

Soit ABCD un tétraède régulier. I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [CD].

1) Démontrer que les plans (ICD) et (JAB) sont perpendiculaires.
2) Démontrer que le plan (ICD) est perpendiculaire aux plans (ABC) et (ABD) et que le plan (JAB) est perpendiculaire aux plans (ACD) et (BCD).

EXERCICE 9 :

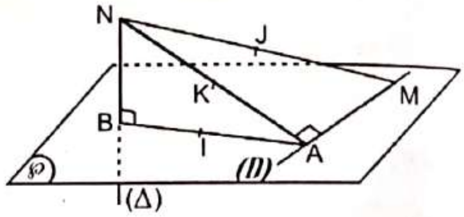
Soient $(\mathcal{C})$ un cercle de diamètre [AB] dans un plan $(\wp)$; (Δ) la perpendiculaire à $(\wp)$ en A et (Δ') une droite passant par B et non contenue dans $(\wp)$; M un point de $(\mathcal{C})$ distinct de A et de B.
Démontrer que les plans déterminés par (M, Δ) et (M, Δ') sont perpendiculaires.

EXERCICE 10 :

Soient un tétraède ABCD et a un réel positif tel que : BC = CD = DB = a et AB = AC = AD = 2a.
1)
   a) Soit I le milieu de [BC]. Montrer que la droite (BC) est orthogonale au plan (AID)
   b) En déduire que deux arêtes opposées quelconques ont des supports orthogonaux.

2)
   a) La droite orthogonale au plan (BCD) passant par A, coupe le plan (BCD) en O. Calculer la distance AO. (On montrera au préalable que O est le centre de gravité du triangle équilatéral BCD).
   b) En déduire le volume du tétraède ABCD.

EXERCICE 11 :



Soient (℘) un plan, A et B deux points de (℘) tels que AB = 1 ; I le milieu du segment [AB] ; (D) la droite de (℘) passant par A et perpendiculaire à la droite (AB) et (Δ) la droite orthogonale à (℘) en B.

Pour tout point M de (D), et pour tout point N de (Δ), on désigne par J le milieu du segment [MN].

1) On pose AM = a et BN = b. Calculer MN en fonction de a et b
2) On désigne par K le milieu du segment [AN]. Démontrer que le triangle IKJ est rectangle en K.
3) Calculer IJ en fonction de a et b.
4) On suppose que M varie sur (D) et N varie sur (Δ) de manière à ce que MN soit constant et égal à 2. Déterminer le lieu du point J.

CHAPITRE 7 : VECTEURS DE L'ESPACE

COURS

1) POINTS ET VECTEURS DE L'ESPACE

1.1) Définitions

- A tous points A et B de l'espace, on associe le vecteur $\overrightarrow{AB}$. Lorsque A et B sont distincts, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a :
  - pour direction, celle de la droite (AB)
  - pour sens, celui de A vers B
  - pour longueur, la distance AB
- La longueur du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est aussi appelée la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et on note $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$
- Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ($A \neq B$ et $C \neq D$) sont dits égaux lorsqu'ils ont la même direction, le même sens, la même longueur.

1.2) Propriétés

P₁. Pour tout point A et tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace, il existe un et un seul point M tel que : $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$.

P_2. Repère d'une droite de l'espace

Soient A un point de l'espace et $\vec{u}$ un vecteur non nul de l'espace.

L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u}$; $\lambda \in \mathbb{R}$ est la droite de repère $(A, \vec{u})$.

P_3. Repère d'un plan de l'espace

Soient A un point de l'espace, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires de l'espace. L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u} + \upsilon\vec{v}$; $(\lambda, \upsilon) \in \mathbb{R}^2$ est un plan de l'espace. C'est le plan passant par A de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ou le plan de repère $(A, \vec{u}, \vec{v})$.

P_4. Vecteurs coplanaires

- Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs et A un point de l'espace.
  Les points B, C et D sont tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{AD} = \vec{w}$. Les trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont dits coplanaires lorsque les points A, B, C et D sont coplanaires.
- Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace tels qu'ils ne sont pas deux à deux colinéaires. $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si l'un des vecteurs est une combinaison linéaire des deux autres.
- Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont non coplanaires si et seulement si le seul triplet $(\lambda, \upsilon, \gamma)$ de nombres tels que $\lambda\vec{u} + \upsilon\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}$ est le triplet (0, 0, 0). Cette propriété s'écrit encore : $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ non coplanaires $\Leftrightarrow (\lambda\vec{u} + \upsilon\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0} \Rightarrow \lambda = \upsilon = \gamma = 0)$

2) BASES ET REPERES DE L'ESPACE

2.1) Bases de l'espace

On appelle base de l'espace tout triplet $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de vecteurs non coplanaires. $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ désignant une base de l'espace, pour tout vecteur $\vec{V}$ de l'espace, il existe un triplet unique

(x, y, z) de nombres réels tel que : $\vec{V} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. On dit que (x, y, z) sont les coordonnées de $\vec{V}$ relativement à la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On écrit $\vec{V}(x, y z)$.

- Une base est orthogonale lorsqu'elle est constituée de trois vecteurs deux à deux orthogonaux.
- Une base est orthonormée lorsqu'elle est orthogonale et constituée de trois vecteurs unitaires.

2.2) Repère de l'espace

Tout quadruplet $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ où O est un point de l'espace et $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base, est un repère de l'espace. $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ désignant un repère de l'espace, pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet de nombres réels (x, y, z) tels que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$; x, y et z sont respectivement l'abscisse, l'ordonnée, la côte de M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

3) PRODUIT SCALAIRE

3.1) Définition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace

On appelle produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, le nombre réel noté $\vec{u}.\vec{v}$, défini par :

- $\vec{u}.\vec{v} = 0$ si au moins l'un des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est nul ;
- $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$, si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls.

3.2) Propriétés

P_1. Opérations sur le produit scalaire

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace, pour tout nombre réel k, on a :

1) $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$;
2) $(k\vec{u}).\vec{v} = \vec{u}.(k\vec{v}) = k(\vec{u}.\vec{v})$
3) $\vec{u}(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$;
4) $(\vec{u} + \vec{v})\vec{w} = \vec{u}.\vec{w} + \vec{v}.\vec{w}$

P_2. Soient $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{u'}(x', y', z')$ dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on a :

1) $\vec{u}.\vec{u'} = x.x' + y.y' + z.z'$;
2) $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

P_3. Soient $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On a :

$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

EXERCICES

EXERCICE 1 :

Soit ABCD un parallélogramme. A tout point M de l'espace ; on associe le point N tel que BMDN soit un parallélogramme. Démontrer que : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NC}$.

EXERCICE 2 :

On considère les points A(1, 0, 4) ; B(3, -2, 5) et C(1, 1, 1)

1) Calculer les coordonnées du point M tel que ABMC soit un parallélogramme.
2) Calculer les coordonnées du centre de gravité du triangle ABC

EXERCICE 3 :

Soit ABCD un tétraède.

1) Démontrer que $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$
2) Soit S le point tel que $\overrightarrow{CS}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$
   a) Vérifier que [AS] et [BD] ont même milieu
   b) On désigne par I et J les milieux respectifs de [BD] et [AC]. Démontrer que $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{JI}$.

EXERCICE 4 :

ABCDEFGH est un cube. I, J et K sont les milieux respectifs de [AB], [EF] et [HG]. Démontre que la droite (HI) est parallèle au plan (JKC).

EXERCICE 5 :

Soient OABC un tétraède, k un nombre réel et I, J et K les points tels que : $\overrightarrow{OI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OJ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OK}=k\overrightarrow{OC}$.

1) Démontrer que les droites (IJ) et (AB) sont sécantes.

On désigne par E leur point d'intersection

2) Pour quelles valeurs de k les droites (IK) et (AC) sont-elles sécantes ?

On désigne alors par F leur point d'intersection.

3) Pour quelles valeurs de k les droites (EF) et (BC) sont-elles sécantes ? Déterminer alors leur point d'intersection G.

EXERCICE 6 :

Soient ABCD un tétraède et k un nombre réel.

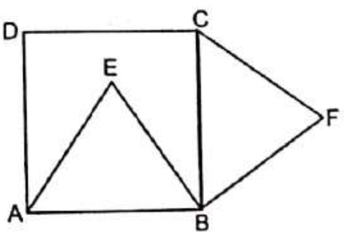
On désigne par I le point tel que $\overrightarrow{AI}=k\overrightarrow{AC}$ par $(\wp)$ le plan de repère (I, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$) et par J, K, L les points d'intersection du plan $(\wp)$ avec les droites (BC), (AD) et (BD).

Exprimer chacun des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{IL}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.

EXERCICE 7 :

ABCD est un carré et les triangles AEB et BCF sont équilatéraux.

1) Justifier que (A, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$) est un repère.
2) Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AF}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
3) Quelles sont les coordonnées des points D, E et F dans le repère (A, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$) ?
4) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DF}$ dans la base ($\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$).
5) Calculer le nombre réel k tel que $\overrightarrow{DF}=k\overrightarrow{DE}$. Que peut-on en déduire pour ies points D, E et F ?



EXERCICE 8 :

Soit ABCDEFGH un pavé.
On désigne par I, J, K, L M et N les centres respectifs des parallélogramme ABCD, EFGH, ABFE, DCGH, ADHE, BCGF et par O l'isobarycentre des sommets du pavé.

1) Démontrer que les droites (IJ), (KL) et (MN) sont concourantes en O
2) Démontrer que O est le centre de chacun des parallélogrammes ACGE et BDHF
3) Déterminer les coordonnées de O
   a) dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$
   b) dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AG})$

EXERCICE 9 :

ABCD est un tétraède. P est le point tel que $2\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \vec{0}$. G l'isobarycentre des points A, B, C et D). On considère le repère $(B, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD})$.

1) Calculer les coordonnées de P et de G dans ce repère.
2) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite (PG) et du plan (BCD).

EXERCICE 10 :

Soit SABCD une pyramide dont la base ABCD est un carré de côté l et les faces sont des triangles équilatéraux. On pose $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$, $\overrightarrow{AS} = \vec{w}$

1) Calculer $\|\vec{u}\|, \|\vec{v}\|, \|\vec{w}\|$, $\vec{u}.\vec{v}$, $\vec{v}.\vec{w}$, $\vec{w}.\vec{u}$.
2) Exprimer chacun des vecteurs $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$ et $\overrightarrow{SD}$ en fonction de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$. Etablir que les droites (SA) et (SB) sont respectivement perpendiculaires aux droites (SC) et (SD).
3) Déterminer un point I du plan (ABC) tel que la droite (SI) soit orthogonale au plan (SAB) (on pourra exprimer $\overrightarrow{AI}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$).

EXERCICE 11 :

Soit ABCD un tétraède

1) Démontrer que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = \vec{0}$
2) En déduire que si (AB) et (AC) sont orthogonales respectivement à (CD) et (BD), alors (AD) est orthogonale à (BC).

EXERCICE 12 :

Soit ABCD un tétraède et I, J, K, L et M les milieux respectifs des segments [AB], [AC], [AD], [BC], [BD]. λ étant un nombre réel, on considère les points p et Q tels que $\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CQ} = \lambda\overrightarrow{CD}$.

1)
   a) Démontrer que $\overrightarrow{PQ}(1-\lambda)\overrightarrow{AC} + \lambda\overrightarrow{BD}$
   b) En déduire que (PQ) est parallèle à (IKL)
2) On désigne par O le milieu de [PQ]
   a) Démontrer que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{JM}$
   b) Etablir la relation $\overrightarrow{JO} = \lambda\overrightarrow{JM}$. Quel est l'ensemble des points O quand λ décrit $\mathbb{R}$?
   c) En déduire que pour tout point O du segment [JM], il existe un point P de [AB] et un point Q de [CD] tels que O soit milieu de [PQ].

CHAPITRE 8 : GEOMETRIE ANALYTIQUE DE L'ESPACE

COURS

L'objectif de ce chapitre est de caractériser les droites et les plans de l'espace par leurs équations cartésiennes (pour les plans) ou par leurs représentations paramétriques, puis d'utiliser ces deux points pour étudier les positions relatives de droites et de plans. Dans tout le chapitre, l'espace sera muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1) EQUATIONS CARTESIENNES

1.1) Définitions

$(\wp)$ est un plan de l'espace de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On appelle vecteur normal à $(\wp)$ tout vecteur non nul $\vec{n}$ orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.
On appelle équation cartésienne du plan $(\wp)$ toute équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$ où $\vec{n}(a, b, c)$ est un vecteur normal à $(\wp)$; a, b, et c étant des réels non tous nuls.

1.2) Propriétés

P₁. Etant donné un point A de l'espace et un vecteur $\vec{n}$ non nul, il existe un plan et un seul passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

P₂. Soit $(\wp)$ un plan, $\vec{n}$ un vecteur normal à $(\wp)$ et A un point de $(\wp)$. Pour tout point M de l'espace, on a : $M \in (\wp) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \vec{n}$.

P₃. Soient $(\wp)$ et $(\wp')$ deux plans de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}$ et $\vec{n'}$, on a :

- $(\wp)$ et $(\wp')$ sont parallèles si et seulement si $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont colinéaires
- $(\wp)$ et $(\wp')$ sont perpendiculaires si et seulement si $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont orthogonaux.

P₄. Soit $(\wp)$ un plan d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ et $A(x_0, y_0, z_0)$ un point de l'espace. Alors on a : $d(A, \wp) = \dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

Remarque : *il n'est pas possible de trouver une équation cartésienne d'une droite donnée dans l'espace.*

2) REPRESENTATIONS PARAMETRIQUES

2.1) Représentation paramétrique d'une droite de l'espace

Etant donné une droite (D) passant par $A(x_0, y_0, z_0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a, b, c)$. Une représentation paramétrique de (D) est le système : $\begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases}$; $(\lambda \in \mathbb{R})$.

2.2) Représentation paramétrique d'un plan

Etant donné un plan $(\wp)$ passant par $A(x_0, y_0, z_0)$ et vecteurs directeurs $\vec{u}(a, b, c)$ et $\vec{v}(a', b', c')$

Une représentation paramétrique de $(\wp)$ est le système : $\begin{cases} x = x_0 + \lambda a + \mu a' \\ y = y_0 + \lambda b + \mu b' \\ z = z_0 + \lambda c + \mu c' \end{cases}$; $[(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2]$

3) POSITIONS RELATIVES DE DROITES ET PLANS

3.1) Positions relatives de deux droites

Soient (D) et (D') deux droites de l'espace, de repères respectifs $(A, \vec{u})$ et $(A, \vec{v})$

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors (D) et (D') sont parallèles
- Si $\overrightarrow{AB}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires, alors (D) et (D') sont sécantes
- Si $\overrightarrow{AB}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non coplanaires, alors (D) et (D') sont non coplanaires.

3.2) Positions relatives d'une droite et d'un plan

(D) est une droite de repère $(A, \vec{u})$, $(\wp)$ un plan passant par B et de vecteur normal $\vec{n}$

- Si $\vec{u}.\vec{n} = 0$
- Si $\overrightarrow{AB}.\vec{n} \neq 0$, alors (D) et $(\wp)$ sont strictement parallèles
- Si $\overrightarrow{AB}.\vec{n} = 0$, alors (D) est incluse dans $(\wp)$
- Si $\vec{u}.\vec{n} \neq 0$, alors (D) et $(\wp)$ sont sécants. En particulier, si $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires ; alors (D) et $(\wp)$ sont orthogonaux.

(D) est une droite de repère $(A, \vec{u})$ et $(\wp)$ un plan de repère $(B, \vec{v}, \vec{w})$

- Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires, et si $\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont non coplanaires, alors (D) et $(\wp)$ sont strictement parallèles et si $\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires, alors (D) est incluse dans $(\wp)$.
- Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont non coplanaires, alors (D) et $(\wp)$ sont sécants.

3.3) Positions relatives de deux plans

Soient $(\wp)$ et $(\wp')$ deux plans passant respectivement par A et B, de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}$ et $\vec{n'}$

- Si $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont colinéaires et
  - Si $\overrightarrow{AB}.\vec{n} \neq 0$ $(\overrightarrow{AB}.\vec{n'} \neq 0)$, alors $(\wp)$ et $(\wp')$ sont strictement parallèles.
  - Si $\overrightarrow{AB}.\vec{n} = \overrightarrow{AB}.\vec{n'} = 0$, alors $(\wp)$ et $(\wp')$ sont confondus
- Si $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont non colinéaires, alors $(\wp)$ et $(\wp')$ sont sécants.

EXERCICES

L'espace est muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Exercice 1 :
On considère les points (A(-1, 1, 1) ; B(1, -1, 1) et C(1, 1, -1)

1) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC)
2) Déterminer une équation cartésienne du plan $(\wp)$ passant par O et parallèle au plan (ABC).

EXERCICE 2 :

Soit $(\wp)$ le plan d'équation cartésienne $2x - y + 3z - 6 = 0$

1) Déterminer trois points de $(\wp)$ dont les coordonnées (x, y, z) sont des nombres entiers relatifs.
2) Placer ces points sur une figure.

EXERCICE 3 :

1) Soient le point A(-1, 1, 2) et le vecteur $\vec{u}(2, -1, 3)$. Déterminer une équation cartésienne du plan $(\wp)$ qui passe par A et qui est orthogonal au vecteur $\vec{u}$.
2) Soient le point $A(1 - \frac{2}{3}, 4)$ et les vecteurs $\vec{u}(\frac{1}{2}, -1, 3)$ et $\vec{v}(-2, 1, 6)$. Déterminer une équation cartésienne du plan $(\wp)$ déterminée par le point A et les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

EXERCICE 4 :

Déterminer l'ensemble des points M(x, y, z) tels que a) $\begin{cases} x = -3 + 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$; $(\lambda \in \mathbb{R})$ et b) $\begin{cases} x = -3 + 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$; $(\lambda \in \mathbb{R}^*)$

EXERCICE 5 :

Soit $(\wp)$ le plan de représentation paramétrique $\begin{cases} x = -1 + 2\lambda - \mu \\ y = -\lambda + \mu \\ z = 2 + \lambda - 2\mu \end{cases}$; $[(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2]$

1) Démontrer que les points A(0, 0, 1) ; B(2, -2, 5) et C(-3, 1, 1) appartiennent au plan $(\wp)$.
2) Déterminer λ et μ pour que le point de paramètres λ et μ soit le centre de gravité du triangle ABC.

EXERCICE 6 :

Soient (D) et (D') deux droites déterminées respectivement par le point A(3, 1, 1) et le point B(-1, -1, 3) ; le point A'(0, 1, 1) et le point B(-2, 3, -1).

1) Vérifier que (D) et (D') sont deux droites sécantes et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.
2) Donner une représentation paramétrique du plan $(\wp)$ déterminé par ces deux droites.

EXERCICE 7 :

Soient $(\wp_1)$ et $(\wp'_2)$ deux plans d'équations respectives $x - 2y + 3z - 1 = 0$ et $x - 2y + z + 3 = 0$

1) Vérifier que ces plans sont sécants.
2) Déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur de leur droite d'intersection
3) Donner une représentation paramétrique de la droite (D) qui est parallèle à $(\wp_1)$ et à $(\wp_2)$ et qui passe par le point K(2, -3, 1).

EXERCICE 8 :

Soit $(\wp)$ le plan d'équation $x + 4y - z - 4 = 0$ et (D) la droite qui a pour système d'équation $\begin{cases} x - y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$.

Déterminer un point M de (D) tel que $d(M, \wp) = 2$.

EXERCICE 9 :

On considère le plan $(\wp)$ d'équation $2x + y + 2 = 0$ et le point (A(-1, 1, 1)

1) Déterminer les coordonnées de la projection orthogonale du point A sur le plan $(\wp)$.
2) Déterminer la distance du point A au plan $(\wp)$.
3) Déterminer les coordonnées du symétrique du point A par rapport au plan $(\wp)$.

EXERCICE 10 :

On considère les plans $(\wp_1)$ et $(\wp_2)$ d'équations respectives $2x + y - 2z + 3 = 0$ et $x - 4y - z = 0$.

1) Vérifier que $(\wp_1)$ et $(\wp_2)$ sont orthogonaux.
2) Soit A le point de coordonnées (1, 1, 1). Déterminer la distance du point A à la droite $(D) = (\wp_1)\cap(\wp_2)$.

EXERCICE 11 :

Soient (D_1) et (D_2) les droites de représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x = -\lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} ;\ (\lambda\in\mathbb{R}) \text{ et } \begin{cases} x = 2 - 2\mu \\ y = 1 - \mu \\ z = -\mu \end{cases} ;\ (\mu\in\mathbb{R}).$$

1) Démontrer que (D_1) et (D_2) sont non coplanaires.
2) Déterminer une équation cartésienne du plan $(\wp)$ contenant (D_2) et parallèle à (D_1)

EXERCICE 12 :

Soient $(\wp)$ et $(\wp')$ les plans d'équations respectives $2x - 4y + 2z + 3 = 0$ et $x - 2y + z - 3 = 0$

1) Justifier que ces plans sont parallèles
2) Soient (D) une droite orthogonale aux plans $(\wp)$ et $(\wp')$; M(x, y, z) et M'(x', y', z') les points d'intersection de (D) respectivement avec $(\wp)$ et $(\wp')$.
   a) Démontrer qu'il existe un nombre réel k tel que $\begin{cases} x' = x + k \\ y' = y - 2k \\ z' = z + k \end{cases}$. Déterminer k.
   b) Calculer MM'.

EXERCICE 13 :

On considère le plan $(\wp)$ d'équation $2x - y + 3z - 7 = 0$ et la droite (D) déterminée par le point A(-1, 1, 1) et le vecteur $\vec{u}(1, -2, 1)$.

1) Vérifier que (D) n'est pas perpendiculaire à $(\wp)$. Déterminer une représentation paramétrique du plan (Q) qui contient (D) et qui est perpendiculaire à $(\wp)$.
2) En déduire une représentation paramétrique de la projection orthogonale de (D) sur $(\wp)$.

CHAPITRE 9 : LES FONCTIONS

COURS

1) GENERALITES

- Soient A et B deux ensembles non vides. On dit qu'une correspondance entre A et B est une fonction lorsque à tout élément de A, elle associe au plus un élément de B.
- Soit f une fonction de A vers B. L'ensemble des éléments de A qui ont une image par f est l'ensemble de définition de la fonction f. On le note E_f ou D_f.
- Soit f une fonction de A vers B et A' une partie de A. On appelle restriction de f à A', la fonction $\begin{array}{l} g : A' \mapsto B \\ \quad a \mapsto f(a) \end{array}$; f est alors appelé prolongement de g à A.
- Soient A, B et C trois ensembles ; f est une fonction de A vers B et g une fonction de B vers C. On appelle composée de f par g la fonction de A vers C notée $g \circ f$ et définie pour tout élément a de A tel que $a \in D_f$ et $f(a) \in D_g$ par $g \circ f(a) = g(fa))$.

2) APPLICATIONS PARTICULIERES

2.1) Injection

Soit f une application de A vers B. f est une injection si tout élément de B a au plus un antécédent dans par f.
f est injective $\Leftrightarrow$ pour tous éléments a et b de A, on a : $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$.

2.2) Surjection

Une application f de A vers B est surjective si tout élément de B a au moins un antécédent par f.
f est surjective $\Leftrightarrow f(A) = B$.

2.3) Bijection

Une application f de A vers B est une bijection si et seulement si tout élément de B a un unique antécédent par f dans A. F est bijective $\Leftrightarrow$ f est injective et surjective.
Soit f une application de A vers B et g une application de B vers A telle que :
$f \circ g = Id_B$ et $g \circ f = Id_A$ alors g est la bijection réciproque de f. On note $g = f^{-1}$.

3) FONCTIONS NUMERIQUES

3.1) Comparaison de fonctions

Soit une application définie sur un ensemble A.

- f est minorée sur A s'il existe un nombre réel m tel que pour tout x élément de A, on a $f(x) \geq m$.
- f est majorée sur A s'il existe un nombre réel M tel que pour tout x élément de A, on a $f(x) \leq M$.
- f est bornée sur A si elle est à la fois minorée et majorée sur A.

3.2) Fonctions associées

1) Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J)
   - La courbe représentative de la fonction $x \mapsto -f(x)$ se déduit de celle de la fonction f par la symétrie orthogonale d'axe (OI).
   - La courbe représentative de la fonction $x \mapsto f(-x)$ se déduit de celle de la fonction f par la symétrie orthogonale d'axe (OJ).

2) La courbe représentative de la fonction $x \mapsto f(x-a)+b$ se déduit de celle de la fonction f par la translation de vecteur $\vec{u}(a, b)$.

3) Soit f une bijection de A vers B, $A \subset \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}$. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, les courbes représentatives respectives de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

EXERCICES

EXERCICE 1 :

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans les cas suivants.

a) $f(x) = \dfrac{x\sqrt{x}}{1-x}$; b) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+|x|-2}$; c) $f(x) = \sqrt{2-|x|}$

EXERCICE 2 :

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ telle que $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x-E(x)}}$ où E désigne la fonction partie entière.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) Soit n un nombre entier et g la restriction de f à l'intervalle $]n, n+1[$
   a) Démontrer que g est une application
   b) Pour tout x élément de $]n, n+1[$, déterminer une expression de g(x) dans laquelle ne figure pas la fonction partie entière.

EXERCICE 3 :

Soient les fonctions $f \mapsto x^2-4x+3$ définie dans $\mathbb{R}$ et $g : x \mapsto \sqrt{x}$ définie dans $[0, +\infty[$. Déterminer les intervalles dans lesquels on peut définir $g \circ f$ et donner l'expression de $(g \circ f)(x)$.

EXERCICE 4 :

On considère la fonction $f : R \mapsto R$

$$x \mapsto \frac{1}{(x-1)^2}$$

Déterminer trois fonctions élémentaires u, v et w telles que $f = u \circ v \circ w$.

EXERCICE 5 :

A) *Sot E = {0, 1}. A tout couple (a, b) d'éléments de E, on associe le nombre a + b – ab.*

1) Vérifier qu'on établit ainsi une application de ExE dans E.
2) Cette application est-elle injective ? Est-elle surjective ?

B) *Soit f une application d'un ensemble E dans lui-même telle que $f \circ f = f$.*
Démontrer que si f est bijective, alors $f = Id_E$.

EXERCICE 6 :

On considère trois applications f, g et h d'un ensemble E dans E.

1) Démontrer que l'égalité $f \circ g = f \circ h$ implique l'égalité : $g = h$ si et seulement si f est une application injective.
2) Démontrer que l'égalité $g \circ f = h \circ f$ implique l'égalité $g = h$ si et seulement si f est une application surjective.

EXERCICE 7 :

Dans chacun des cas suivants, démontrer que l'application f est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

a) $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$; $x \mapsto 5 - 3x$

b) $f : \mathbb{R} - \{2\} \mapsto \mathbb{R} - \{2\}$; $x \mapsto \dfrac{4x-1}{2x-4}$

c) $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}\times\mathbb{R}$; $(x, y) \mapsto (x - 2y, x + 3y)$

EXERCICE 8 :

Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J). Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 - 2x$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative.

1)
   a) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x - 1)^2 - 1$
   b) En déduire que $(\mathcal{C})$ est l'image de la parabole d'équation $y = x^2$ par une transformation simple que l'on déterminera. Construire $(\mathcal{C})$.
2) On considère les fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4 définies par : $f_1(x) = f(-x)$, $f_2(x) = -f(-x)$, $f_3(x) = |fx)|$ et $f_4(x) = f(x + 1) + 2$. Construire la courbe représentative de chacune des fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4.

EXERCICE 9 :

1) Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1+\sin x}{1+x^2}$. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.
2) On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Montrer que f n'est pas bornée sur $\mathbb{R}^*$.
3) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{x}$. f est-elle bornée sur $\mathbb{R}_+$?

EXERCICE 10 :

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{2x}{x+3}$

1)
   a) Déterminer les nombres réels a et b tels que pour tout x élément de $\mathbb{R}\backslash\{-3\}$, on a : $f(x) = a + \dfrac{b}{x+3}$.
   b) M étant un nombre réel quelconque, démontrer qu'il existe au moins un nombre réel x tel que $f(x) > M$. f est-elle majorée sur $\mathbb{R}$?
   c) m étant un nombre réel quelconque, démontrer qu'il existe au moins un nombre réel x tel que $f(x) < m$. f est-elle minorée sur $\mathbb{R}$?
   d) Démontrer que f est bornée sur [-1, 1]
2) Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = \dfrac{2\cos x}{3+\cos x}$
   a) Déterminer D_g, ensemble de définition de g
   b) Démontrer que g est bornée sur D_g.

EXERCICE 11 :

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$

$x \mapsto \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$

1) Quel est l'ensemble de définition de f ?
2) Démontrer que pour tout x de $\mathbb{R}^*$, $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}$
3) Démontrer que pour tout x de $\mathbb{R}^*$, $\sqrt{1+x^2}+1 > 2$. En déduire que pour tout x de $\mathbb{R}^*$, $|f(x)| < \dfrac{1}{2}|x|$.

CHAPITRE 10 : EQUATIONS - INEQUATIONS - SYSTEMES

Rappel : $a^2+2ab+b^2 = \dots$
$a^2-2ab+b^2 = \dots$
$a^2-b^2 = \dots$

COURS

1) LE SECOND DEGRE

1.1) Equation du second degré

Soit P le polynôme du second degré défini par : $P(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$. On pose $\Delta = b^2 - 4ac$. Δ est appelé discriminant du polynôme P et l'expression $P(x) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$ est appelé forme canonique de P.

Racines et factorisation

- Si $\Delta < 0$, alors P n'a pas de racine et n'est pas factorisable
- Si $\Delta = 0$, alors P a une racine unique $-\frac{b}{2a}$ et $P(x) = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$
- Si $\Delta > 0$, alors p a deux racines distinctes x_1 et x_2 telles que $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$; on a : $P(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$.

Factorisation : $3x^2-5x+2$; $3x^2+5x+7$; $6x^2+24x+24$

Résoudre dans ℝ une équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ équivaut à déterminer les racines du polynôme du second degré $p(x) = ax^2 + bx + c$.

Somme et produit des racines

Dans le cas où P admet deux racines distinctes x_1 et x_2 $(\Delta > 0)$, on a : $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $P = x_1x_2 = \frac{c}{a}$. Ainsi, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ équivaut à $x^2 - Sx + P = 0$

1) $2x^2 - x - 6 = 0$ 2) $x^2 + x + 1 = 0$ 3) $9x^2 - 12x + 4 = 0$
$2x^2 - x + 1/8$

2) INEQUATIONS DU SECOND DEGRE

Résoudre dans ℝ une inéquation du second degré revient à déterminer le signe du polynôme du second degré. Soit le polynôme du second degré $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$. Le signe de f est donné par celui de son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta < 0$, alors pour tout x de ℝ, f(x) est du signe de a
- Si $\Delta = 0$, alors pour tout x, f(x) est du signe de a sauf pour $x = -\frac{b}{2a}$
- Si $\Delta > 0$, alors f(x) est du signe de a (à l'intérieur des racines) et du signe de –a (à l'extérieur des racines).

x	$-\infty$ x_1	x_2	$+\infty$
f(x)	Signe de a	Signe de –a	Signe de a

1) $x^2 - 8x - 9 > 0$; $-3x^2 + 2x - 1 < 0$; $-\frac{1}{4}x^2 + 4x - 16 \leq 0$

Représentation graphique

La courbe représentative (P) d'une fonction polynôme du second degré $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ dans un repère orthonormé (O, I, J) est une parabole de sommet $S\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$

Dans le repère (S, I, J), une équation de (P) est $y = ax^2$.

$x^2 + mx + m + 1 = 0$
calculer Δ en fonction de m.

Remarque :
* Si a < 0, alors la parabole (P) est tournée vers le bas
* Si a > 0, alors la parabole (P) est tournée vers le haut

3) SYSTEMES LINEAIRES

On appelle système linéaire à trois inconnues tout système de la forme

$$\begin{cases} ax + by + cz = d & (E_1) \\ a'x + b'y + c'z = d' & (E_2) \\ a''x + b''y + c''z = d'' & (E_3) \end{cases}$$ où x, y et z sont des inconnues.

Ce système peut se résoudre de deux façons : par substitution ou par la méthode du pivot de Gauss. La méthode du Pivot de Gauss consiste à transformer le système initial en un système triangulaire équivalent en utilisant les combinaisons deux à deux des équations (E_1), (E_2) et (E_3).

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 7 \\ 2x + y + z = 4 \\ -3x + 2y - 2z = -10 \end{cases}$$

(2 ; −1 ; 1)

$$\begin{cases} 3x + y - 2z = 2 \\ x - 2y + z = 3 \\ 2x - y - 3z = 3 \end{cases}$$

EXERCICES

EXERCICE 1 :

Mettre chacun des polynômes suivants sous forme canonique et en déduire ses racines éventuelles.

a) $P(x) = 4x^2 - 4x - 3$; b) $Q(x) = 2x^2 - 12x + 18$
c) $R(x) = 2x^2 - x + 3$; d) $S(x) = 2x^2 - x - 6$

EXERCICE 2 :

Résoudre dans ℝ chacune des équations suivantes :

a) $x^2 + (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6} = 0$; b) $x^2 - 6x + 9 = 0$; c) $2x^2 + 5x + 4 = 0$;

d) $6x^2 - 3x\sqrt{3} + 1 = 0$; e) $\frac{3x+2}{x-1} = \frac{x}{x+2}$; f) $\frac{3x-4}{x} + \frac{8-2x}{x+2} = 2$

$x^2 + 3\sqrt{x} - 10 = 0$; $x - 9\sqrt{x} + 14 = 0$; $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

EXERCICE 3 :

Résoudre dans ℝ chacune des inéquations suivantes :

a) $2x^2 + x - 1 < 0$; b) $4(x-1) \geq x(3x-4)$; c) $2x^2 + 5x + 4 < 0$;

d) $\frac{5x^2+16}{x+2} \leq 7$; e) $x - \frac{1}{x} > 1$; f) $3x^2 - 5x + 3 > 0$

EXERCICE 4 :

Soit le polynôme défini par $P(x) = x^2 - (2p + q)x + 3p - 2q$.
Déterminer p et q pour que –2 et 3 soient racines de P.

EXERCICE 5 :

Soit P le polynôme défini par $P(x) = x^2 - 2(2m - 3)x + m^2 - 3m + 3$
1) Déterminer les valeurs du nombre réel m pour lesquelles P a deux racines distinctes
2) Déterminer les valeurs du nombre réel m pour lesquelles P a une racine double et calculer, dans chacun des cas, cette racine.

EXERCICE 6 :

Soit L'équation (E) : $(m + 2)x^2 + 2mx + m - 3 = 0$ où x est l'inconnue réelle et m un paramètre réel.

1) Pour quelles valeurs de m (E) est-elle du second degré ?

2) On suppose $m \neq -2$; étudier dans $\mathbb{R}$ suivant les valeurs de m l'existence et le signe des racines de (E).
3) Montrer que lorsqu'elles existent, les racines x' et x'' vérifient une égalité indépendante de m.
4) Exprimer en fonction de m, la somme $x'^2 + x''^2$.
5) Déterminer m pour que les racines x' et x'' vérifient l'égalité $\frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} = 2$

EXERCICE 7 :

Soit P le polynôme défini par $P(x) = x^2 + (2m + 1)x + m^2 + 1$
Déterminer les valeurs du nombre réel m pour que P ait deux racines α et β telles que
a) $\alpha^2 + \beta^2 = 29$; b) $|\alpha - \beta| = 1$
Dans chacun des cas, calculer α et β.

EXERCICE 8 :

Les racines réelles x' et x'' d'une équation du second degré vérifient les relations $x' + x'' = 2x'x''$ et $mx'x'' - x' - x'' = 2m + 1$. Former cette équation.

EXERCICE 9 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :
a) $x^4 - 11x^2 + 18$; b) $x^4 + x^2 + 1 = 0$
c) $x^4 - 4x^2 - 45 = 0$; d) $-x^4 + 2(a^2 + b^2)x^2 - (a^2 - b^2)^2 = 0$ où a et b sont deux nombres réels donnés.

EXERCICE 10 :

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :
   a) $\sqrt{4 - x^2} = x - 1$; b) $\sqrt{x - 3} - \sqrt{6x + 1} + 4 = 0$
   c) $\sqrt{x} + \sqrt{x + 1} = \sqrt{2x + 1}$; d) $x + \sqrt{-x^2 + x + 6} = \sqrt{2x\sqrt{-x^2 + x + 6} - x}$
2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations suivantes :
   a) $\sqrt{x + 1} \leq x - 2$; b) $\sqrt{2x + 3} > \sqrt{x - 1}$
   c) $\sqrt{5x - 4} \geq \sqrt{x} + 2$; d) $\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} > 4$
   e) $\sqrt{3x^2 + 1} > 3x + 1$; f) $\sqrt{2x + 1} - \sqrt{2x - 1} > 1$

EXERCICE 11 :

Résoudre et discuter suivant les valeurs du réel m, chacun ses systèmes suivants :

a) $\begin{cases} (\sqrt{2} - 1)x - my = \sqrt{2} - 1 \\ x - (\sqrt{2} + 1)y = m \end{cases}$; b) $\begin{cases} mx\sqrt{2} - 3y\sqrt{3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -x\sqrt{3} + 2my\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$

$\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$

$\begin{cases} 5x^2 - y^2 = 55 \\ xy = 20 \end{cases}$

EXERCICE 12 :

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ chacun des systèmes suivants :

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{9}{2} \\ xy = -2 \end{cases}$; b) $\begin{cases} \frac{4}{x-2} + \frac{1}{y-1} = 5 \\ \frac{4}{x-2} - \frac{1}{y-1} = 2 \end{cases}$

$\begin{cases} x - y = 17 \\ xy = -60 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 6 \\ x^2 + y^2 - xy = 10 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x^3 + y^3 = -7 \\ x + y = -1 \end{cases}$; e) $\begin{cases} x^3 y + x y^3 = -10 \\ xy = -2 \end{cases}$

EXERCICE 13 :

Le plan est muni du repère (O, I, J)

1) Représenter graphiquement l'ensemble E des points M dont les coordonnées (x, y) vérifient le système (Σ) d'inéquations $\begin{cases} x + 2y \geq 6 \\ 5x + 4y \leq 40 \\ x \geq 0 \\ 0 \leq y \leq 7 \end{cases}$
2) Parmi les points de E, déterminer ceux dont les coordonnées
   - rendent maximale l'expression x + y
   - rendent maximale en nombre entier x + y. Préciser les valeurs de ces maximums.
3) Parmi les points de E, déterminer celui dont les coordonnées rendent minimale l'expression 2x + y. Préciser la valeur de ce minimum.

EXERCICE 14 :

1) Résoudre par substitution les systèmes suivants

a) $\begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ 2x - y + 3z = 6 \\ x - 3y + 4z = 7 \end{cases}$; b) $\begin{cases} y + z = 1 \\ z + x = 4 \\ x + y = -1 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ 2x - 3y + z = 1 \\ 5x - 11y = -17 \end{cases}$

2) Résoudre par la méthode du Pivot de Gauss les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} 2x + 3y - 5z = -11 \\ 4x + y - 2z = -8 \\ x - 2y + z = -2 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x - 2y + z = -5 \\ -x + y + 2z = -4 \\ 2x - y - z = 5 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x - 2y = \sqrt{2} \\ y - 2z = \sqrt{2} \\ z - 2x = \sqrt{2} \end{cases}$

EXERCICE 15 :

1) Peut-on trouver deux nombres réels tels que leur somme et leur produit soient égaux à un même nombre réel K ? Discuter suivant la valeur de k.
2) On considère l'équation d'inconnue x : $x^2 + m(m + 3)x + m^3 = 0$. Déterminer le nombre réel m pour que cette équation ait deux solutions α et β telles que $\alpha^2 = \beta$.

$3x^2 - 2(m-2)x + 2 - m = 0$

CHAPITRE 11 : LES APPLICATIONS LINEAIRES MATRICES

COURS

A) APPLICATIONS LINEAIRES

1) Définitions

Etant donné deux espaces vectoriels réels (eVr) E et F, on appelle application linéaire de E vers F toute application de E dans F telle que

a) $\forall \vec{u} \in E, \forall \vec{v} \in E, f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$

b) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \vec{u} \in E, f(\lambda \vec{u}) = \lambda f(\vec{u})$.

- Lorsque l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée d'une application linéaire sont égaux, on dit que f est un **endomorphisme**.
- Un **isomorphisme** est une application linéaire bijective
- Un **automorphisme** est un endomorphisme bijectif
- Une **forme linéaire** est une application linéaire dont l'ensemble d'arrivée est $\mathbb{R}$.

2) Propriétés

P₁. L'application composée de deux applications linéaires est une application linéaire.
P₂. L'application composée de deux isomorphisme est un isomorphisme et $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.
P₃. Pour toute application linéaire f de E dans F,

- $f(O_E) = O_F$
- $\forall \vec{u} \in E, f(-\vec{u}) = -f(\vec{u})$.

3) Noyau et image

On appelle noyau d'une application linéaire de E dans F, l'ensemble des éléments de E dont l'image est le O_F. Le noyau de f est noté Kerf. $\text{Kerf} = \{\vec{x} \in E / f(\vec{x}) = O_F\}$
On appelle image de f l'ensemble de images des éléments de E par f. L'image de f est notée Imf. $\text{Imf} = \{\vec{v} \in F / \exists \vec{u} \in E / f(\vec{u}) = \vec{v}\}$.

Propriétés

P₁. Soit $f : E \mapsto F$ une application linéaire.
f est injective si et seulement si $\text{Kerf} = \{\overrightarrow{O_E}\}$
f est surjective si et seulement si Imf = F.
P₂. Si dimE = dimF, les propriétés suivantes sont équivalentes :
i) f injective ; ii) f surjective ; iii) Imf = F ; iiii) $\text{Kerf} = \{\overrightarrow{O_E}\}$.

B) MATRICES

Une matrice carrée d'ordre 2 est un tableau $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ (où a, b, c et d appartiennent à $\mathbb{R}$) de deux lignes et deux colonnes.
Une matrice unicolonne d'ordre 2 est un tableau $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ d'une colonne et de deux lignes où x et y appartiennent à $\mathbb{R}$.

1) Opérations sur les matrices

Soient $M_1 = \begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ b_1 & d_1 \end{bmatrix}$ et $M_2 = \begin{bmatrix} a_2 & c_2 \\ b_2 & d_2 \end{bmatrix}$:

- $M_1 = M_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \\ c_1 = c_2 \\ d_1 = d_2 \end{cases}$
- $M_1 + M_2 = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & c_1 + c_2 \\ b_1 + b_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix}$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda M_1 = \begin{bmatrix} \lambda a_1 & \lambda c_1 \\ \lambda b_1 & \lambda d_1 \end{bmatrix}$
- $M_1 \cdot M_2 = \begin{bmatrix} a_1a_2 + c_1b_2 & a_1c_2 + c_1d_2 \\ b_1a_2 + d_1b_2 & b_1c_2 + d_1d_2 \end{bmatrix}$

2) Matrice d'un endomorphisme du plan vectoriel E_2

Soit F un endomorphisme du plan vectoriel E_2.

Supposons E_2 rapporté à une base $(\vec{i}, \vec{j})$. $\exists (a, b, c \text{ et } d) \in \mathbb{R} / f(\vec{i}) = a\vec{i} + b\vec{j}$; $f(\vec{j}) = c\vec{i} + d\vec{j}$

La matrice $M(f) = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ est la matrice de f dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{u'}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \in E_2$; $f(\vec{u}) = \vec{u'} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = ax + cy \\ y' = bx + dy \end{cases}$

Cette dernière relation est traduite par l'égalité matricielle $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

3) Propriétés

Soient f et g deux endomorphismes de E_2, M et M' leurs matrices respectives dans une base $(\vec{i}, \vec{j})$ de E_2.

P_1. $f = g \Leftrightarrow M = M'$

P_2. $M.M' \neq M'.M$; la multiplication dans $\mathcal{M}_2$ n'est pas commutative.

P_3. La multiplication des matrices est une opération associative.

P_4. Soit $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, pour toute matrice M de $\mathcal{M}_2$, IM = MI = M. I est la matrice de l'application identique notée Id. $(\forall \vec{u} \in E,\ Id(\vec{u}) = \vec{u})$.

P_5. $M(f \circ g) = M.M'$

P_6. Une matrice M de $\mathcal{M}_2$ est inversible si et seulement s'il existe une matrice M'' tel que M.M'' = M''.M = I.

P_7. Un endomorphisme est bijectif si et seulement si sa matrice est inversible.

P_8. Soit $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$, le déterminant de M est le réel noté det(M) tel que det(M) = ad – bc.

La trace de M est Tr(M) = a + d.

P_9. Si M est inversible, alors $\det(M) \neq 0$.

P_{10}. Si M est inversible, son inverse est $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)}\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$

P_{11}. Une matrice est singulière lorsqu'elle n'est pas inversible.

P_{12}. Si $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$, le transposé de M est la matrice $\tilde{M} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & a \end{bmatrix}$ et $\det(M) = \det(\tilde{M})$.

EXERCICES

EXERCICE 1 :

Soient E un espace vectoriel réel et h l'application tel que $h : E \mapsto E$, $\vec{u} \mapsto \lambda\vec{u}$ $(\lambda \in \mathbb{R}^*)$.

Montrer que h est une application linéaire.

EXERCICE 2 :

Soit E un eVr rapporté à la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

Soit $f : E \mapsto \mathbb{R}$, $x\vec{i} + y\vec{j} \mapsto 2x + y$. Montrer que f est une forme linéaire.

EXERCICE 3 :

Soit un eVr de dimension 2. Montrer que si $f : E \mapsto \mathbb{R}$ est une forme linéaire, il existe deux réels a et b tels que pour tout $\vec{u}(x, y) \in E$, $f(\vec{u}) = ax + by$ (on supposera E rapporté à une base $(\vec{i}, \vec{j})$).

EXERCICE 4 :

Soit $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto 2x + 3y - 1$. L'application est =-elle linéaire ?

EXERCICE 5 :

Déterminer Kerf et Imf dans chacun des cas suivants :

a) $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (2x + y, x - y)$; b) $f : E \mapsto E$, $x\vec{i} + y\vec{j} \mapsto (x + y)\vec{i} + (2x + 2y)\vec{j}$; c) $f : E \mapsto \mathbb{R}$, $x\vec{i} + y\vec{j} \mapsto x - y$

EXERCICE 6 :

Soient f un endomorphisme et E_2 tel que $f(\vec{i}) = \vec{i} + \vec{j}$ et $f(\vec{j}) = 2\vec{i} - \vec{j}$.

1) Déterminer l'image de $\vec{v}$ où $\vec{v} = 3\vec{i} + \vec{j}$.
2) Soit f un autre endomorphisme de E défini analytiquement par : $\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x + y \\ y' = 2x + y\sqrt{3} \end{cases}$. Déterminer la matrice M(f) de f. En déduire l'image de $\vec{i}$ et l'image de $\vec{j}$.

EXERCICE 7 :

Soit f un endomorphisme de E de matrice $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ dans $(\vec{i}, \vec{j})$. Soit $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j}$.

1) Montrer que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de E_2.
2) Exprimer la matrice M' dans $(\vec{u}, \vec{v})$.

EXERCICE 8 :

Soit f un endomorphisme de E_2 défini analytiquement par $\begin{cases} x' = -x + y \\ y' = 2x + y \end{cases}$. Montrer que f est un endomorphisme de E. Donner la définition analytique de f^{-1}.

PROBLEME 1 :

Le plan vectoriel étant E_2 étant rapporté à une $(\vec{i}, \vec{j})$, soit f l'endomorphisme de E_2 de matrice $M = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. On appelle vecteur propre de f, tout vecteur $\vec{v}$ tel que $f(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$; $\lambda \in \mathbb{R}$. Le réel λ est appelé valeur propre.

1) Montrer que si $\vec{v}$ est un vecteur propre de E associé à la valeur propre λ, alors $\vec{v} \in Kerf(f - \lambda Id)$
2) Montrer que f admet au moins un vecteur propre non nul si et seulement si $detM(f - Id) = 0$.
3) Démontrer que f admet deux valeurs propres distinctes.
4) Montrer que l'ensemble des vecteurs propres de f est formé de deux droites vectorielles distinctes (D_1) et (D_2).
5) Soient $\vec{I}$ et $\vec{J}$ deux vecteurs non nuls tels que $\vec{I} \in (D_1)$ et $\vec{J} \in (D_2)$. Montrer que $(\vec{I}, \vec{J})$ est une base de E_2 et écrire la matrice de f dans $(\vec{I}, \vec{J})$.

PROBLEME 2 :

Le plan vectoriel E_2 est rapporté à une base $(\vec{i}, \vec{j})$.

Soit f_m l'application linéaire de E dans E qui à tout vecteur $\vec{v}$ de composantes (x, y), associe le vecteur $f_m(\vec{v})$ de composantes (x', y') telles que $\begin{cases} x' = (3m-1)x + (m-1)y \\ y' = (1-m)x + y \end{cases}$ où m est un paramètre réel.

1) Ecrire la matrice de f_m dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$. Déterminer pour quelles valeurs de m, f_m est bijective.
2) On suppose $m = 0$
   a) Déterminer le noyau de f_0 et donner en une base.
   b) Montrer que $\forall \vec{v} \in E$, $f_0(\vec{v})$ appartient à la droite vectorielle de base $\vec{i} - \vec{j}$.
   c) En déduire que $f_0 \circ f_0$ est l'application nulle.
3) On suppose $m = -1$
   a) Soit λ un réel, déterminer λ pour qu'il existe au moins un vecteur différent de $\vec{0}$ tel que $f_{-1}(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$.
   b) On pose $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j}$ et $\vec{v} = -2\vec{i} + \vec{j}$. Montrer que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de E. Déterminer $f_{-1}(\vec{u})$ et $f_{-1}(\vec{v})$. En déduire la matrice f^{-1} dans cette base.

PROBLEME 3 :

On considère le plan vectoriel E. Soit $\beta = (\vec{i}, \vec{j})$ une base de E et f un endomorphisme de E dont la matrice dans β est définie par : $A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$.

I.

1) Montrer que $f \circ f = \theta$; où θ est l'endomorphisme nul de E. En déduire que f n'est pas bijective.
2) Déterminer le noyau E_1 de f.
3) Déterminer l'image E_2 de f. Comparer E_1 et E_2.
4) Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul de E_1. Montrer qu'il existe un vecteur $\vec{v}$ de E tel que $f(\vec{v}) = \vec{u}$. Montrer que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de E. Ecrire la matrice de f dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$.

II. On considère deux réels non nuls a et b ; et h l'endomorphisme du plan vectoriel E_2 défini par : $h(\vec{i}) = a\vec{i} + b\vec{j}$; $h(\vec{j}) = (1-a)\vec{i} + (1-b)\vec{j}$; $(\vec{i}, \vec{j})$ étant une base de E_2.

1) Déterminer la matrice de h dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$

2) En déduire que :
   a) pour $a - b \neq 0$, $\text{Ker}h = \{\vec{0}\}$
   a) pour $a - b = 0$, kerh est une droite vectorielle dont on précisera la base et une équation cartésienne.

3) On suppose $a = b = \frac{1}{2}$
   a) Montrer que h est involutive.
   b) Montrer que Kerh et Imh sont des droites vectorielles de base respective $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$.
   c) Montrer que $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ est une base de E_2 et déduire la nature de h dans la base $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$.

CHAPITRE 12 : DENOMBREMENT

COURS

1) NOTIONS SUR LES ENSEMBLES

- ***Cardinal d'un ensemble :*** le cardinal d'un ensemble fini est le nombre de ses éléments. Pour un ensemble E, on note CardE.
  Soit E un ensemble de cardinal n, alors $Card(\wp(E)) = 2^n$.
- ***Inclusion :*** tout sous-ensemble d'un ensemble fini est fini et on a : $E \subset F \Rightarrow CardE \leq CardF$.
- ***Réunion :*** Si E et F sont deux ensembles finis, $E \cup F$ est un ensemble fini et on a : $Card(E \cup F) = CardE + CardF - Card(E \cap F)$. En particulier, si E et F sont disjoints, $E \cap F = \varnothing \Rightarrow Card(E \cup F) = CardE + CardF$. Plus généralement, si $E_1, E_2, \ldots, E_n$ sont deux à deux disjoints, on a : $Card(E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n) = CardE_1 + CardE_2 + \ldots + CardE_n$.
- ***Partition d'un ensemble :*** des parties $E_1, E_2, E_3, \ldots, E_n$ d'un ensemble E forment une partition si :
  - elles sont non vides ; c'est-à-dire $E_i \neq 0$ pour $1 \leq i \leq n$
  - elles sont disjointes deux à deux ; c'est-à-dire $E_i \cap Ej = \varnothing$ pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$
  - leur réunion est égale à E c'est-à-dire $E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \ldots \cup E_n = E$.
    On a alors $CardE = CardE_1 + CardE_2 + \ldots + CardE_n$.
- ***Produit cartésien :*** le produit cartésien ExF (lire E crox F) de deux ensembles E et F est l'ensemble des couples (x, y) où x décrit E et y décrit F. Si E et F sont finis, alors le produit cartésien ExF est fini et on a : Card(ExF) = (CardE)x(CardF). Plus généralement, pour n ensembles finis, $Card(E_1xE_2x\ldots xE_n) = CardE_1xCardE_2x\ldots xCardE_n$.

2) LISTES ORDONNEES D'ELEMENTS

2.1) P-uplets d'un ensemble

Soient E un ensemble fini à n éléments et P un entier naturel non nul. Une liste ordonnée de p éléments de E dans laquelle chaque élément peut éventuellement être répété plusieurs fois s'appelle une **p-liste de E** ou une **p-uplet de E**. L'ensemble des p-listes de E se note E^p, le nombre de p-liste de E est n^P. On a donc : $Card(E^p) = (CardE)^p$.

2.2) Arrangements

Soient E un ensemble fini de cardinal n et p un entier vérifiant $0 \leq p \leq n$. une liste ordonnée de p éléments distincts de E s'appelle **un arrangement** de p éléments de E. On dit aussi **"arrangement de p éléments pris parmi n"**. Le nombre d'arrangements de p éléments pris parmi n que l'on note A_n^p est : nx(n-1)x(n-2)x…x(n-p+1).

2.3) Permutations

Soit E un ensemble fini de cardinal n.

Une permutation de E est une liste ordonnée contenant les n éléments de E.

Le nombre de permutations de E est nx(n-1)x(n-2)x…x3x2x1.

Pour tout entier n, on note n ! (factoriel n) le produit : nx(n-1)x(n-2)x…x3x2x1. Dans ce cas, le nombre de permutations de E est n !. On convient que 0 ! = 1 et 1 ! = 1. On a également $n! = A_n^n$ et pour tout p vérifiant $O \leq p \leq n$, $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$.

Remarques :

* Le nombre d'applications d'un ensemble à p éléments vers un ensemble à n éléments est n^p.
* Le nombre d'injections d'un ensemble à p éléments vers un ensemble à n éléments est A_n^p.
* Le nombre de bijections d'un ensemble à n éléments vers un ensemble à n éléments est n!

3) COMBINAISONS

3.1) Définition

Soient E un ensemble de cardinal n et p un entier tel que $0 \leq p \leq n$.
Un sous-ensemble (non ordonné) de p éléments de E (distincts) s'appelle une **combinaison de p éléments de E.** On dit aussi "combinaison de p éléments pris parmi n".
Le nombre de combinaisons de p éléments pris parmi n que l'on note C_n^p est $C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!} = \dfrac{A_n^p}{p!}$.

3.2) Propriétés

Pour tous entiers naturels n et p tels que $p \leq n$, on a : $C_n^p = C_n^{n-p}$. Si de plus $1 \leq p \leq n$, alors : $C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^{p} = C_n^p$.

Formule du binôme de Newton
Pour tout nombres réels a et b et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^p a^{n-p} b^p = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^p a^{n-p} b^p + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + C_n^n b^n$$

EXERCICES

EXERCICE 1 :

Soit E l'ensemble des nombres entiers naturels compris entre 1 et 100.
On désigne par $E_0, E_1, \ldots, E_9$ les sous-ensemble des éléments de E dont le chiffre des unités est respectivement 0, 1, …, 9. Démontrer que les ensembles $E_0, E_1, \ldots, E_9$ forment une partition de E.

EXERCICE 2 :

Dans un collège de 300 élèves, une enquête a donné les résultats suivants : 200 élèves aiment la lecture ; 180 élèves aiment le sport ; 60 élèves n'aiment ni le sport, ni la lecture.

1) Combien d'élèves n'aiment que la lecture ?
2) Combien d'élèves n'aiment que le sport ?
3) Combien d'élèves aiment à la fois le sport et la lecture ?

EXERCICE 3 :

Pour chaque élève d'un lycée, l'infirmière remplit une fiche dans laquelle elle note le sexe, l'age et le groupe sanguin de l'élève.
Déterminer le nombre maximum de fiches distinctes sachant que les élèves ont un âge compris entre 11 et 18 ans et qu'il existe 8 groupes sanguins.

EXERCICE 4 :

1) Lors d'un sondage, 438 personnes ont déclaré avoir un chien ; 651 personnes ont déclaré avoir un chat. Parmi elles, 116 ont déclaré avoir à la fois un chien et un chat. Combien y a-t-il de personnes interrogées ?

2) Un self-service propose des menus comportant une entrée, un plat et un dessert. Les clients peuvent choisir parmi 5 entrées, 4 plats et 3 desserts. Combien y a-t-il de menus possibles ?

EXERCICE 5 :

Le chef d'un village dispose de trois masques différents. Dix villageois seulement peuvent porter l'un ou l'autre de ces masques. Calculer le nombre de répartitions possibles.

EXERCICE 6 :

1) Combien peut former de nombre de quatre chiffres en n'utilisant que des chiffres impairs ?
   a) avec la possibilité d'utiliser plusieurs fois le même chiffre ?
   b) avec les chiffres tous différents ?
2) Une loterie édite 1 000 000 de billets numérotés de 000 000 à 999 999.
   a) Combien y a-t-il de billets qui portent un numéro composé de 6 chiffres tous différents entre eux ?
   b) Combien y a-t-il de billets qui portent un numéro composé de 6 chiffres identiques ?

EXERCICE 7 :

1) Dans un championnat de football, chacune des 16 équipes doit rencontrer dans un match aller et dans un match retour toutes les autres équipes. Calculer le nombre total de matchs de ce championnat.
2) Pour réduire le nombre de matchs, les 16 équipes sont réparties en 4 poules de 4 équipes ; le vainqueur de chaque pour participe à une poule finale. Sachant qu'à l'intérieur de chaque poule chaque équipe rencontre les trois autres dans un match aller et dans un match retour, calculer le nombre total de matchs.

EXERCICE 8 :

On dispose d'un jeu de 32 cartes.
On choisit au hasard 5 cartes du jeu (on dit que l'on a une main de 5 cartes).

1) Combien y a-t-il de mains différentes de 5 cartes ?
2) Combien y a-t-il de mains de 5 cartes ne contenant que des figures (valets, dames, rois) ?
3) Combien y a-t-il de mains de 5 cartes ne contenant aucun roi ?
4) Combien y a-t-il de mains de cinq cartes contenant au moins un roi ?
5) Combien y a-t-il de mains de 5 cartes contenant exactement un roi et exactement 3 cœurs ?

EXERCICE 9 :

Un jury est composé de six membres pris dans une liste comportant dix hommes et sept femmes. Combien peut-on former de jury comportant :

a) seulement des hommes ?
b) quatre hommes et deux femmes ?
c) au plus deux femmes ?

EXERCICE 10 :

Une compagnie aérienne doit desservir six villes ; chacune étant reliée sans escale à chacune des autres.

1) Combien de lignes la compagnie met-elle en service ?
2) Quel serait le nombre de lignes si la compagnie desservait :
   a) une ville supplémentaire ?

b) douze villes au total ?

3) Pendant les mois d'été, la compagnie prévoit d'assurer 45 lignes. Combien de villes desservira-t-elle pendant cette période ?

EXERCICE 11 :

Un magazine propose pour un sondage, une liste de quinze chanteurs, numérotés de 1 à 15. On demande au lecteur d'entourer les noms de ses trois chanteurs préférés.

1) Combien y a-t-il de choix possibles ?

2) Combien y a-t-il de choix contenant le chanteur numéroté 1 ?

3) Combien y a-t-il de choix ne contenant que des chanteurs de numéros pairs ?

EXERCICE 12 :

Un parking contient 20 places de voitures numérotées de 1 à 10 (rangée A) de 11 à 20 (rangée B).

1) De combien de manières peut-on garer 20 voitures dans ce parking ?

2) Calculer le nombre de façons de garer 10 voitures dans chacun des cas suivants :
   a) les voitures occupent la même rangée ;
   b) 6 voitures exactement occupent la rangée A ;
   c) il y a au moins 1 voiture dans la rangée A.

EXERCICE 13 :

Une urne A contient 3 boules noires et 2 boules blanches. Une urne B contient 2 boules noires et 2 boules blanches. On tire simultanément deux boules de A et une boule de B.

1) Quel est le nombre total de tirages possibles ?

2) Quel est le nombre total de tirages où les trois boules obtenues sont de la même couleur ?

3) Quel est le nombre de tirages comportant exactement 1 boule blanche ?

4) Quel est le nombre de tirages comportant exactement 2 boules blanches ?

EXERCICE 14 :

Une urne contient 10 boules numérotées de 0 à 9. On tire quatre boules de cette urne.

1) Combien peut-on obtenir de nombres distincts de quatre chiffres (dont le premier est non nul) dans chacun des cas suivants :
   a) les 4 boules sont tirées successivement et sans remise ?
   b) les 4 boules sont tirées successivement avec remise ?

2) On tire simultanément quatre boules.
   a) Combien de tirages différents peut-on réaliser ?
   b) Avec chacun des tirages, combien de nombres de quatre chiffres peut-on former ? Retrouver le résultat de la question 1.a).

EXERCICE 15 :

On lance trois dés de couleurs différentes dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on s'intéresse au nombre qui apparaît sur la face supérieure de chacun d'eux.

1) Déterminer le nombre de résultats possibles.

2) Déterminer le nombre de résultats comportant :
   a) un seul six ;
   b) au moins un six ;
   c) au moins un as et au moins un six.

3) Déterminer le nombre de résultats tels que la somme des nombres est égale à 13.

CHAPITRE 13 : LIMITES ET CONTINUITE

COURS

1) LIMITES

1.1) Limite en zéro

- **Fonction de référence**

  La fonction de puissance $x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) et la fonction racine $x \mapsto \sqrt{x}$ admettent en 0 la limite 0. On écrit : $\lim\limits_{x \to 0} x^n = 0$; $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$.

- **Fonction admettant une limite finie en zéro**

  Soit un intervalle I contenant 0. Soit f une fonction définie sur I (sauf peut-être en 0)

  - ***Cas de la limite 0 en 0***

    S'il existe un réel k strictement positif tel que $|f(x)| \leq k|x^n|$ ou bien $|f(x)| \leq k\sqrt{x}$ alors f admet la limite 0 en 0. On écrit $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ ou $\lim\limits_{0} f = 0$. On dit encore que f(x) tend vers 0 lorsque x tend vers 0.

  - ***Cas de la limite finie l en 0***

    On dit que f admet la limite l en 0 pour exprimer que $f(x) - l$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0.

1.2) Limite en x_0

- **Limite finie en x_0**

  Soit un intervalle I contenant x_0. Soit f une fonction définie sur I (sauf peut-être en x_0). On dit que f admet la limite l en x0 pour exprimer que $f(x_0 + h)$ admet la limite l lorsque h tend vers 0. On écrit : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ ou $\lim\limits_{x_0} f = l$.

  - ***Unicité***

    Si f admet une limité l en x_0, on montre que cette limite est unique

- **Limite à droite, limite à gauche**

  Soit une fonction numérique f définie sur I contenant x_0

  - On dit que f admet en $x_0 \in I$ une limite l à droite si et seulement si, la restriction de f à $I \cap]x_0, +\infty[$ admet en x_0 cette limite l. (pour chercher cette limite, il suffit de considérer les valeurs de $x > x_0$). On note alors $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = l$.

  - On dit que f admet en $x_0 \in I$ une limite l' à gauche si et seulement si la restriction de f à $I \cap]-\infty, x_0[$ admet en x_0 cette limite l'. On note alors $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = l'$.

  - Si $l = l'$ et même si $f(x_0)$ n'existe pas, alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$

- **Limite infinie de f en x_0**

  On dit que f admet en x_0 la limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) pour exprimer que f(x) peut être rendu aussi grand (resp. aussi petit) que l'on veut pourvu que $|x - x_0|$ soit suffisamment petit. On écrit $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ (resp. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$).

1.3) Limite en $+\infty$, $-\infty$

- Soit f une fonction définie sur une demi-droite $]a, +\infty[$.

  On dit que f admet la limite l en $+\infty$ pour exprimer que $|f(x) - l|$ peut-être rendu aussi voisin de 0 que l'on veut pourvu que x soit suffisamment grand. On écrit : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$

- Soit f une fonction définie sur une demi-droite $]-\infty, a[$
On dit que f admet la limite l en $-\infty$pour exprimer que la fonction g définie par $g(x) = f(-x)$ admet la limite l en $+\infty$.
- On dit que f(x) tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si et seulement si pour tout réel $A > 0$ il existe un réel $B > 0$ tel que ; pour tout $x \in I$, on a l'implication $x > B \Rightarrow f(x) > A$. On écrit : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
- On dit que f(x) tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ si et seulement si, pour tout réel $A>0$, il existe un réel $B > 0$ tel que : pour tout $x \in I$, on a l'implication $x > B \Rightarrow f(x) < -A$. De manière analogue, on étudie la limite de f en $-\infty$.

1.4) Propriétés de comparaison

P_1. Soit f une fonction
- S'il existe une fonction g telle que $f \geq g$ sur un intervalle $]A, +\infty[$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
- S'il existe une fonction g telle que $f \leq g$ sur un intervalle $]A, +\infty[$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.
- S'il existe deux fonctions g et h telles que $g \leq f \leq h$ sur un intervalle $]A, +\infty[$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = l$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$

P_2. Soient f et g deux fonctions telles que $f \leq g$ sur un intervalle $]A, +\infty[$. Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = l'$, alors $l \leq l'$.

P_3.
- La limite en l'infini d'un polynôme est égale à la limite en l'infini de son monôme de plus haut degré.
- La limite en l'infini d'une fonction rationnelle est égale à la limite en l'infini du quotient des monômes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

2) CONTINUITE

2.1. Définition

- **Continuité en x_0**
Une fonction f définie sur un intervalle I non réduit à un point et contenant x_0 est continue en x_0 si et seulement si elle admet une limite finie en x_0.

Ainsi, f continue en $x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \in I \\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \end{cases}$

- **Continuité à droite, à gauche en x_0**
  - Soit f une fonction définie sur $[x_0, x_0 + a]$, alors f est continue à droite en x_0 si et seulement si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = f(x_0)$
  - Soit f une fonction définie sur $[x_0 - a, x_0]$, alors f est continue à gauche en x_0 si et seulement si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = f(x_0)$.
  - Soit f est une fonction définie sur $[x_0 - a, x_0 + a]$, alors f est continue en x_0 si et seulement si : $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = f(x_0)$.

- **Prolongement par continuité**

  Soit f une fonction non définie en x_0 et l un nombre réel tel que : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$. On appelle prolongement de f par continuité en x_0 la fonction g définie par $\begin{cases} g(x) = f(x), & \text{si } x \in D_f \\ g(x_0) = l \end{cases}$.

1.2) Propriétés

Si f et g sont deux fonctions continues en x_0, alors :

- Les fonctions f + g, fg, kf ($k \in \mathbb{R}$) et |f| sont continues en x_0.
- La fonction $\frac{f}{g}$ est continue en x_0 si $g(x_0) \neq 0$.
- La fonction $\sqrt{f}$ est continue en x_0 si $f(x_0) \geq 0$.

EXERCICES

EXERCICE 1 :

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{2x}{1 + x^2}$

1) Montrer que pour tout x, on a $|f(x)| \leq 2|x|$
2) En déduire que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

EXERCICE 2 :

I. f est la fonction définie par $f(x) = x^2 - 2x$

1) Montrer que pour tout x tel que $|x| < 1$, on a : $|f(x)| < 3|x|$
2) En déduire que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

II. Soit la fonction h définie par $h(x) = \sqrt{1 + x^2} - \sqrt{1 - 2x}$. Montrer que $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = 0$

EXERCICE 3 :

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x + 2}{x + 1}$

1) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}^*_+$, $|f(x) - 1| < \frac{1}{x}$
2)
   a) Trouver un nombre réel A pour lequel $x > A \Rightarrow |f(x) - 1| < 10^{-4}$
   b) ε étant un nombre réel strictement positif, trouver un nombre réel A pour lequel $x > A \Rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$.
   c) En déduire la limite de f en $+\infty$.

EXERCICE 4 :

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2}{x + 1}$

1) Démontrer que $\forall x \in]1, +\infty[$, $f(x) > \frac{x}{2}$

2)
a) Comment choisir x pour que $|f(x)| > 10^6$?
b) Peut-on rendre f(x) aussi grand que l'on veut ?
c) En déduire la limite de f en $+\infty$.

EXERCICE 5 :

Dans chacun des cas suivants, étudier la limite de la fonction f en x_0 (on calculera éventuellement les limites à gauche et à droite en x_0).

a) $f(x) = \dfrac{3}{(x-2)^2}$, $x_0 = 2$;

b) $f(x) = \dfrac{-2x+3}{x}$, $x_0 = 0$

c) $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{x-2}}$, $x_0 = 2$;

d) $f(x) = \dfrac{x^2+3x-4}{x^2-1}$, $x_0 = 1$

e) $f(x) = \dfrac{x\sqrt{x}-8}{4-x}$, $x_0 = 4$;

f) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{4+x^2-2}}$, $x_0 = 0$

g) $f(x) = \dfrac{1}{x(x-1)} - \dfrac{1}{x}$, $x_0 = 0$;

h) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$, $x_0 = 3$

EXERCICE 6 :

1) Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2 + \cos^2 x}$. Utiliser les propriétés de comparaison pour calculer la limite de f en $+\infty$.

2) Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x}-1}$. Démontrer que $\forall x \in]1, +\infty[$, $f(x) > \sqrt{x} + 1$. En déduire la limite de f en $+\infty$.

EXERCICE 7 :

Dans chacun des cas suivants, calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$

a) $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$;

b) $f(x) = -x^5 + 6x^2 + 4x + 6$;

c) $f(x) = \dfrac{3x-2}{2x-4}$;

d) $f(x) = \dfrac{x^2+4}{x^3-1}$;

e) $f(x) = \dfrac{x^3+1}{1-2x}$;

f) $f(x) = \dfrac{\sqrt{3x^2+1}}{3x-1}$

g) $f(x) = x + 1 + \sqrt{2x^2 - x + 1}$;

h) $f(x) = \sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+1}$

i) $f(x) = \dfrac{x - \sqrt{x^2-3x+1}}{2x + \sqrt{4x^2+x}}$

EXERCICE 8 :

Calculer les limites suivantes, a et b étant des réels non nuls :

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sin x}$;

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan(ax)}{bx}$;

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(ax)}{bx}$;

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(ax)}{\sin(bx)}$;

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan(ax)}{\tan(bx)}$

EXERCICE 9 :

Soit f la fonction définie par $f(x) = xE(x)$

1) Etudier la continuité en 0 de f

2) Etudier la continuité à gauche et à droite au point 1 de f.

EXERCICE 10 :

Soit la fonction définie par $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x+1}{2x+3}, \text{ si } x \leq 0 \\ f(x) = x^2 + x + a, \text{ si } x > 0 \end{cases}$

Etudier la continuité de f en 0 (on discutera suivant les valeurs du nombre réel a).

EXERCICE 11 :

Vérifier que la fonction $g = x \mapsto \dfrac{1}{1+\sqrt{1+x}}$ est le prolongement par continuité en 0 de la fonction $f = x \mapsto \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$.

EXERCICE 12 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ par $f(x) = x - \dfrac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2}}$.

1) Déterminer une fonction g définie sur $\mathbb{R}$, qui prolonge la fonction f et qui est continue à droite au point $x_0 = -1$.
2) Déterminer une fonction h, définie sur $\mathbb{R}$, qui prolonge la fonction f et qui est continue à gauche au point x_0.
3) Existe-t-il une fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui prolonge f et qui est continue au point x_0 ?

EXERCICE 13 :

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x + \cos x}{x + \sin x}$

1) Calculer $\lim\limits_{\substack{x \to x0 \\ <}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to x0 \\ >}} f(x)$. f admet-elle une limite en 0 ?
2) Après avoir encadré sur $]1, +\infty[$ la fonction f par deux fonctions plus simples, calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
3) Calculer de la même façon $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

CHAPITRE 14 : DERIVATION

COURS

1) DERIVATION EN x_0

1.1. Dérivabilité en x_0

Définitions :

Soit I un intervalle ouvert et x_0 un élément de I.
Soit f une fonction définie sur I

On dit que f est dérivable en x_0 si $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ a une limite en x_0. Cette limite est appelée nombre dérivé de f en x_0 et notée $f'(x_0)$.

On dit que f est dérivable à gauche en x_0 si la limite $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ <}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est finie. Cette limite est appelée nombre dérivé de f à gauche en x_0.

On dit que f est dérivable à droite en x_0 si la limite $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ >}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est finie. Cette limite est appelée nombre dérivé de f à droite en x_0.

- **Propriétés**

P₁. Si une fonction est dérivable en x_0, alors elle est continue en x_0.

P₂. Si une fonction f est dérivable en x_0, alors la courbe $(\mathcal{C})$ représentative de f admet une tangente (T) au point $A(x_0, f(x_0))$, dont le coefficient directeur est $f'(x_0)$. Une équation de (T) est $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

P₃. Une fonction est dérivable en x_0 si et seulement si elle est dérivable à gauche et à droite en x_0 et les nombres dérivés à gauche et à droite sont égaux.

P₄. Si $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite infinie à gauche ou à droite en x_0, alors la courbe représentative de f admet une demi-tangente verticale ; donc parallèle à l'axe des ordonnées au point d'abscisse x_0.

2) FONCTION DERIVEE ET CALCULS DE DERIVEES

2.1) Fonction dérivée

Soit une fonction f

- On appelle ensemble de dérivabilité de f l'ensemble des réels en lesquels f est dérivable.
- La fonction $f' : x \mapsto f'(x)$ est appelée dérivée ou fonction dérivée de f.

2.2) Calculs de dérivées

- L'application de la dérivabilité des fonctions sinus et cosinus en 0 permet d'en déduire les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$
- Nous récapitulons le calcul de dérivée dans les tableaux ci-dessous.

Dérivées des fonctions élémentaires

f	f '	Ensemble de dérivabilité
$x \mapsto k\ (k \in \mathbb{R})$	$x \mapsto 0$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x$	$x \mapsto 1$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$x \mapsto x^n\ (n \in \mathbb{N}^* \backslash \{1\}$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^*_+$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto \cos x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto -\sin x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \tan x$	$x \mapsto 1 + \tan^2 x$	$(\mathbb{R} \backslash \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z\}$

Dérivées et opérations sur les fonctions

f	f '
$u + v$	$u' + v'$
$ku\ (k \in \mathbb{R})$	ku'
uv	$u'v + uv'$
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
$u^n\ (n \in \mathbb{N}^* \backslash \{1\})$	$nu'u^{n-1}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$x \mapsto u(ax + b)$	$x \mapsto au'(ax + b)$

3) APPLICATIONS

3.1) Sens de variation d'une fonction

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I

- f est croissante sur I si et seulement si f' est positive sur I
- f est décroissante sur I si et seulement si f' est négative sur I
- f est constante sur I si et seulement si f' est nulle sur I
- f est monotone sur I si f est croissante ou décroissante sur I

3.2) Extremum d'une fonction

f est une fonction dérivable sur un intervalle $]a, b[$ et x_0 un élément de $]a, b[$.
Si f' s'annule en changeant de signe en x_0, alors f admet un extremum relatif en x_0. Cet extremum relatif est un maximum relatif si f' est positif à gauche en x_0 et, est un minimum relatif dans le cas contraire.

3.3) Approximation d'une fonction par une fonction affine

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et x_0 un élément de I
Si f est dérivable en x_0, alors pour tout réel h tel que $x_0 + h$ appartient à I, on a :

$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + h\varphi(h)$ où φ est une fonction telle que $\lim\limits_{h \to 0} \varphi(h) = 0$

La fonction $h \mapsto f(x_0) + f'(x_0)h$ ou $x \mapsto f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ est une fonction affine ($h = x - x_0$)

La fonction $x \mapsto f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ est la meilleure approximation de la fonction f par une fonction affine, lorsque x est proche de x_0.

EXERCICES

EXERCICE 1 :

Soit f la fonction définie par $f(x) = (x - 1)(2x - 3)$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative

1) Démontrer que $\forall h \in \mathbb{R}$, $f(2 + h) = 1 + 3h + 2h^2$
2) En déduire que f est dérivable en 2 et calculer son nombre dérivé en 2
3) Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 2
4) Représenter $(\mathcal{C})$ et (T) sur le même graphique.

EXERCICE 2 :

Soit la fonction définie par $f(x) = (x + \frac{1}{x})\sin(\pi x)$

1) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$, $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -\pi(x + \frac{1}{x})\frac{\sin(x - 1)}{\pi(x - 1)}$
2) En déduire que f est dérivable en 1 et calculer son nombre dérivé en 1

EXERCICE 3 :

Soit la fonction définie par $\begin{cases} f(x) = \frac{x - 1}{x + 2} \text{ si } x < 1 \\ f(x) = x^2 - 1 \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$.

Etudier la dérivabilité à gauche, la dérivabilité à droite et la dérivabilité de f en 1.

EXERCICE 4 :

Soit f la fonction définie par $\begin{cases} f(x) = 3 - 2x \text{ si } x < 0 \\ f(x) = 2x + 3 + \sqrt{x} \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) Démontrer que la courbe représentative de f admet une demi-tangente à gauche et une demi-tangente à droite au point d'abscisse 0. Déterminer une équation de chacune de ces demi-tangentes.

EXERCICE 5 :

Dans chacun des cas suivants, préciser l'ensemble de dérivabilité de la fonction f puis déterminer sa fonction dérivée.

a) $f(x) = -2x^2 + 3x - 1$; b) $f(x) = (2x^2 + 5)^2$; c) $f(x) = \frac{1}{x + 1}$

d) $f(x) = \frac{-x^2 + 1}{3x + 1}$; e) $f(x) = x^2 + 1 + \sqrt{x}$; f) $f(x) = \sqrt{\frac{1}{2 - x}}$

g) $f(x) = \frac{1}{2} x \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$; h) $f(x) = \sin x \tan 2x$; l) $f(x) = \frac{x\sqrt{x + 1}}{2x - 3}$

EXERCICE 6 :

On considère la fonction f définie sur ℝ par $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$, $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ et $f(1) = 2$

Démontrer que cette fonction est continue et dérivable sur ℝ. Quelle est sa fonction dérivée ?

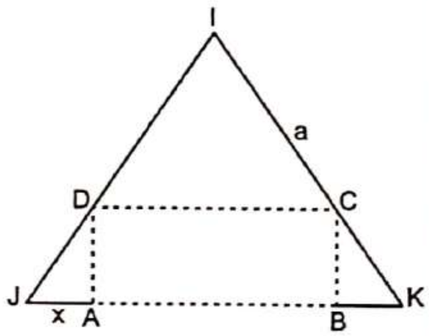
EXERCICE 7 :

Dans chacun des cas suivants, préciser l'ensemble de dérivabilité de la fonction f ; déterminer la dérivée de f et étudier son signe sur l'intervalle I ; dresser le tableau de variation de f sur I

a) $f(x) = \sin^2 x + \cos x$ et $I =]-\pi, \pi[$;

b) $f(x) = \dfrac{1-3\cos 3x}{\cos 3x - 2}$ et $I =]0, \pi[$.

EXERCICE 8 :



Le triangle IJK est équilatéral de côté a.
On considère un rectangle ABCD en choisissant A sur [JK], de sorte que JA = x ($0 < x < \dfrac{a}{2}$) . Comment faut-il choisir x pour que l'aire du rectangle ABCD soit maximum ?

EXERCICE 9 :

Un nombre réel α est appelé racine double d'un polynôme P si et seulement s'il existe un polynôme Q tel que pour tout nombre réel x, on a : $P(x) = (x - \alpha)^2 Q(x)$.
Soient P une fonction polynôme et α un nombre réel, on désigne par P' la fonction dérivée de P.

1) Démontrer que P' est une fonction polynôme
2) On suppose que α est une racine double de P. Démontrer que α est une racine de P.
3) On suppose que α est une racine de P et de P'. Démontrer que α est une racine double de P.

EXERCICE 10 :

1) Soit f_1 la fonction définie par $f_1(x) = x - \sin x$
   a) Etudier le sens de variation de f_1 sur ℝ
   b) Calculer $f_1(0)$; en déduire que pour tout nombre réel positif x, on a : $\sin x \le x$
2) Soit f_2 la fonction définie par $f_2(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} - \cos x$
   a) Déduire de la question précédente le sens de variation de f_2 sur $\mathbb{R}_+$
   b) Calculer $f_2(0)$; en déduire que pour tout nombre réel x, on a : $1 - \dfrac{x^2}{2} \le \cos x$
3) Soit f_3 la fonction définie par $f_3(x) = x - \dfrac{x^3}{6} - \sin x$
   a) Déduire de la question précédente le sens de variation de f_3 sur ℝ
   b) Calculer $f_3(0)$; en déduire que pour tout nombre réel positif x, on a : $x - \dfrac{x^3}{6} \le \sin x$
4) Soit f_4 la fonction définie par $f_4(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} - \cos x$
   a) Déduire de la question précédente le sens de variation de f_4 sur $\mathbb{R}_+$
   b) Calculer $f_4(0)$; en déduire que pour tout nombre réel x, on a : $\cos x \le 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}$

***Application :** déduire des questions 1.b., 2.b., 3.b. et 4.b. un encadrement de* $\sin\left(\dfrac{1}{2}\right)$ *et un encadrement de* $\cos\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

CHAPITRE 15 : ETUDE DES FONCTIONS

COURS

1) REDUCTION DE L'ENSEMBLE D'ETUDE

On considère une fonction f définie sur un ensemble D
On note ($\mathcal{C}$) sa courbe représentative dans un repère (O, I, J)

1.1) Fonction paire

- La fonction f est paire si et seulement si, pour tout $x \in D$, $-x \in D$ et $f(-x) = f(x)$
- "Deux réels opposés ont la même image"
- Si le repère (O, I, J) est orthogonal, la courbe ($\mathcal{C}$) est symétrique orthogonalement par rapport à l'axe des ordonnées. On peut donc étudier f seulement sur $D \cap [0, +\infty[$. La courbe obtenue est ensuite complétée par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

1.2) Fonction impaire

- La fonction f est impaire si et seulement si, pour tout $x \in D$, $-x \in D$ et $f(-x) = -f(x)$. "Deux réels opposés ont des images opposées".
- La courbe ($\mathcal{C}$) est symétrique par rapport à l'origine O du repère. On peut donc étudier f seulement sur $D \cap [0, +\infty[$. La courbe obtenue est ensuite complétée par symétrie par rapport à l'origine O du repère.

1.3) Fonction périodique

- Soit T un réel. La fonction f est périodique de période T si et seulement si pour tout $x \in D$, $x + T \in D$ et $f(x + T) = f(x)$.
- La courbe ($\mathcal{C}$) est invariante dans une translation de vecteur $T\overrightarrow{OI}$. ON peut donc étudier f seulement sur une période, c'est-à-dire sur $D \cap [a, a + T[$ où a est un réel quelconque.

2) ELEMENTS DE SYMETRIE ET ASYMPTOTES

2.1) Axe de symétrie et centre de symétrie

Soient f une fonction et ($\mathcal{C}$) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthogonal (O, I, J).

- La droite d'équation $x = a$ est un axe de symétrie de ($\mathcal{C}$) si l'une des deux propriétés suivantes est vraie ;

  P_1. Dans le repère $(O', \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ avec $O'(a, 0)$, ($\mathcal{C}$) est la représentation graphique d'une fonction paire.

  P_2. Pour tout nombre réel h tel que $a + h \in D_f$, on a : $a - h \in D_f$ et $f(a - h) = f(a + h)$.
- Le point $\Omega(a,b)$ est un centre de symétrie de ($\mathcal{C}$)
  Si l'une des deux propriétés suivantes est vraie,

  P_1. Dans le repère $(\Omega, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, ($\mathcal{C}$) est la représentation graphique d'une fonction impaire.

  P_2. Pour tout nombre réel h tel que $a + h \in D_f$, on a : $a - h \in D_f$ et $\frac{f(a-h)+f(a+h)}{2} = b$

2.2) Asymptotes

Soit une fonction f dont la courbe représentative est ($\mathcal{C}$)

- La droite d'équation y = b est asymptote (horizontale) à la courbe ($\mathcal{C}$) si et seulement si $\lim\limits_{|x| \to +\infty} f(x) = b$.
- La droite d'équation x = a est asymptote (verticale) à la courbe ($\mathcal{C}$) si et seulement si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = \infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = \infty$.
- La droite d'équation y = ax + b est asymptote oblique à la courbe ($\mathcal{C}$) si et seulement si $\lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$

PLAN D'ETUDE D'UNE FONCTION

- Chercher l'ensemble de définition et réduire éventuellement l'ensemble d'étude
- Etudier les limites aux bornes de l'ensemble de définition
- Calculer la dérivée et étudier son signe
- Résumer les résultats précédents dans un tableau de variation
- Tracer la courbe représentative, en précisant les éléments remarquables (sommets, asymptotes, etc.).

EXERCICES

EXERCICE 1 :

Dans chacun des cas suivants, étudier la parité de la fonction f sur son ensemble de définition

a) $f(x) = x - \frac{1}{x}$; b) $f(x) = \frac{1 + x^2}{x^2 - 2}$; c) $f(x) = |x - 2| + |x + 2|$

d) $f(x) = (1 + \cos x)\sin x$; e) $f(x) = \frac{\sin x}{\sin^3 x - 1}$; f) $f(x) = \sin 2x - 1$

EXERCICE 2 :

1) Montrer que les fonctions $x \mapsto \cos(ax + b)$ et $x \mapsto \sin(ax + b)$ sont périodiques de période $\frac{2\pi}{|a|}$; et que la fonction $x \mapsto \tan(ax + b)$ est périodique de période $\frac{\pi}{|a|}$

2) Les fonctions suivantes sont-elles périodiques ? Si oui, en préciser une période.

a) $f(x) = \sin^2 x$; b) $f(x) = x - \sin x$; c) $f(x) = \frac{1}{1 + \sin x}$.

EXERCICE 3 :

Le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est orthogonal

a) Tracer la courbe représentative de la fonction : $f : x \mapsto x^2 - 6x + 5$

b) En déduire la courbe représentative de la fonction : $g : x \mapsto |x^2 - 6x + 5|$

EXERCICE 4 :

On considère les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies respectivement par :
$f(x) = -x^2 + 4$ et $g(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.

1) Etudier les variations de chacune de ces fonctions et construire sur un même graphique leurs courbes représentatives.
2) Déterminer par le calcul, les coordonnées des points d'intersection des deux courbes.
3) En déduire les solutions de l'inéquation : $x^3 - 3x^2 + 4 < -x^2 + 4$.

EXERCICE 5 :

1) Déterminer les nombres réels a, b et c pour que la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$: passe par le point $A(0, -3)$; ait un sommet d'abscisse -1 ; admette au point d'abscisse 1, une tangente de coefficient directeur 4.
2) Construire les courbes représentatives $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ des fonctions f et g respectivement définies par : $f(x) = x^2 + 2x - 3$ et $g(x) = 1 - x^2$. Déterminer les coordonnées des points d'intersection B et D de $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$.
3) Donner une équation de la droite (BD)
4) Etudier graphiquement le signe de $p(x) = x^2 + 2x - 3 - (1 - x^2)$.

EXERCICE 6 :

Soit g une fonction définie par : $g(x) = -x^3 + 3|x|$.

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de g au point d'abscisse 0 et en déduire les équations des demi-tangentes à la courbe $(\mathcal{C})$ de g au point d'abscisse 0.
2) Etudier les variations de g et tracer sa courbe $(\mathcal{C})$
3) Déterminer graphiquement le nombre et le signe des solutions de l'équation $g(x) = \alpha$ où α est un paramètre réel.

EXERCICE 7 :

Soit g la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1 - 4x^2}{2 - x}$

a) Déterminer les nombres réels a, b et c tels que : $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$, $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{2 - x}$
b) Etudier la fonction f et tracer sa courbe représentative $(\mathcal{C})$

EXERCICE 8 :

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{x - 2}$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1) Déterminer a, b et c pour que $(\mathcal{C})$ ait les propriétés suivantes : $(\mathcal{C})$ passe par le point $A(0, 5)$; la tangente à $(\mathcal{C})$ au point A est parallèle à l'axe des abscisses et la tangente à $(\mathcal{C})$ au point B d'abscisse 1 a pour coefficient directeur -3
2) Etudier les variations de la fonction f ainsi obtenue
3) Tracer $(\mathcal{C})$.

EXERCICE 9 :

Le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est orthonormé. Soit f la fonction définie par $f(x) = 4\sin^2 x.\cos 2x$. On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f.

1)
   a) Démontrer que f est périodique, de période π
   b) Démontrer que la droite d'équation $x = \dfrac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de $(\mathcal{C})$

2)
   a) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 4\sin 2x(1 - 4\sin^2 x)$

b) Dresser le tableau de variation de f sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

3) Tracer ($\mathcal{C}$) sur $\left[\frac{-3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

EXERCICE 10 :

1) Résoudre sur $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ l'équation $2\cos x - \frac{1}{\cos x} = 0$

2) f est la fonction définie sur $\left[\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ par $f(x) = 2\cos x - \frac{1}{\cos x}$. Etudier les variations de f. Tracer la courbe représentant f dans un repère orthonormé (unité : 3cm).

EXERCICE 11 :

Le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est orthonormé. On considère une fonction f dont l'ensemble de dérivabilité est $\mathbb{R}$, ($\mathcal{C}$) sa courbe représentative et ($\mathcal{C}$') la courbe représentative de sa fonction dérivée.

1) Démontrer que si le point $\Omega(a, b)$ est un centre de symétrie de ($\mathcal{C}$), alors la droite (Δ) d'équation x = a est un axe de symétrie de ($\mathcal{C}$').

2) Démontrer que si la droite (Δ) d'équation x = a est un axe de symétrie de ($\mathcal{C}$), alors le point $\Omega(a, 0)$ est un centre de symétrie de ($\mathcal{C}$').

EXERCICE 12 :

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 2x}$.

1) Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative ($\mathcal{C}$) dans un plan muni d'un repère orthonormé

2) A l'aide de la courbe ($\mathcal{C}$), étudier graphiquement, suivant les valeurs du paramètre m, l'existence et le signe des racines de l'équation : (E) : $(m - 2)x^2 + 2mx - 1 = 0$.

3) Soit (D_m) la droite d'équation y = m. Lorsque (D_m) coupe ($\mathcal{C}$) en deux points M' et M", on désigne par I le milieu de [M'M"]
   a) Déterminer les coordonnées de I en fonction de m
   b) En déduire l'ensemble des points I quand m décrit $\mathbb{R}$
   c) Construire cet ensemble sur le graphique précédent.

EXERCICE 13 :

On considère les fonctions $f_a : x \mapsto ax^3 - 3x + 1$, $a \in \mathbb{R}$. On désigne par ($\mathcal{C}_a$) la courbe représentative de f_a.

1) Etudier et représenter graphiquement f_a pour $a = \frac{1}{2}$ et a = 0.

2) Démontrer que les courbes ($\mathcal{C}_a$) passent toutes par un même point Ω dont on déterminera les coordonnées.

3) Démontrer que Ω est centre de symétrie de toutes les courbes ($\mathcal{C}_a$).

4) Etudier suivant les valeurs de a, les variations de f_a.

EXERCICE 14 :

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x| + 2}$

1) Quel est l'ensemble de définition de f ?
2) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0
3) Calculer $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - x + 2]$ et $\lim_{x \to -\infty} [f(x) - x + 2]$. En déduire les asymptotes obliques.
4) Achever l'étude de f et tracer la courbe $(\mathcal{C})$ de f

EXERCICE 15 :

On considère la famille de fonctions f_m de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par $f_m(x) = \frac{(2m-1)x + m}{x - m}$ où m est un paramètre réel non nul. On désigne par $(\mathcal{C}_m)$ la courbe représentative de f_m dans un plan rapporté à un repère orthonormé.

1) Etudier les variations de ma fonction f_1 correspondant à m = 1. Tracer sa courbe représentative $(\mathcal{C}_1)$.
2) Démontrer que pour tout m, les courbes $(\mathcal{C}_m)$ passent par un point fixe A dont on précisera les coordonnées.
3) Ecrire une équation de la tangente en A à la courbe $(\mathcal{C}_m)$
4) Il existe un deuxième point P de la courbe $(\mathcal{C}_m)$ où la tangente est parallèle à la tangente en A. Déterminer l'ensemble des points P lorsque m varie.

EXERCICE 16 :

Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+1}{x^2-1} \text{ ; si } x \geq 0 \\ \frac{-2x^2+3x+1}{x-1} \text{ ; si } x < 0 \end{cases}$

1) Déterminer le domaine de définition D de f
2) Déterminer les limites aux bornes de D
3) f est-elle continue en 0 ? f est-elle dérivable en 0 ?
4) Montrer que pour tout $x \in]-\infty, 0[$, $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$ où a, b et c sont des réels que l'on déterminera.
5) Montrer que la droite d'équation y = ax + b est une asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$ de f
6) Tracer avec soin la courbe $(\mathcal{C})$ de f.

EXERCICE 17 :

On considère la fonction f définie par $f(x) = x + \sqrt{|x^2 - 1|}$

1) Déterminer l'ensemble de définition D de f et écrire f(x) sans barres de valeurs absolues sur D
2) Etudier la dérivabilité de f en –1 et en 1. On précisera les tangentes éventuelles
3) Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
4) Montrer que les droites d'équations y = 2x et y = 0 sont des asymptotes de la courbe $(\mathcal{C})$ de f
5) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation de f (indication : résoudre l'inéquation $f'(x) \geq 0$ suivant les intervalles)
6) Tracer la courbe $(\mathcal{C})$. On précisera les tangentes éventuelles en –1 et en 1 étudiées à la question de 2) ; et les asymptotes (unité = 2cm).

CHAPITRE 16 : SUITES NUMERIQUES

COURS

I) NOTIONS GENERALES

1.1) Définition

Une suite numérique est une fonction u de IN dans IR

Notation : $u: N \mapsto IR$
$n \mapsto u(n) = U_n$
u est aussi notée (U_n)

Remarques :

- En général, l'ensemble de définition des suites que nous rencontrerons est IN ou IN*; cependant, certaines suites seront définies sur d'autres sous-ensembles de IN.
- On dit d'une propriété qu'elle est vraie pour "n assez grand" lorsqu'il existe un indice k tel que si $n \geq k$ alors U_n possède cette propriété.
- Définir une suite c'est se donner un procédé qui permette d'associer à chaque valeur de n (qui appartient à l'ensemble de définition de la suite) un certain réel U_n. Ainsi, en général, une suite numérique (U_n) est déterminée par :
  - Une formule simple permettant de calculer U_n en fonction de n
  - Ou le premier terme est une formule de récurrence exprimant U_n en fonction de U_n

1.2) Représentations graphiques d'une suite numérique

Il est possible de représenter les termes d'une suite sur un axe ou dans le plan muni d'un repère car une suite numérique est une fonction (*Cf exercices*)

II) ETUDE D'UNE SUITE NUMERIQUE

2.1) Minoration, Majoration

Soit (U_n) une suite numérique

- **(U_n) est minorée s'il existe un nombre réel m tel que pour tout n, on a $U_n \geq m$**
- **(U_n) est majorée s'il existe un nombre réel M tel que pour tout n, on a : $U_n \leq M$**
- **(U_n) est bornée si elle est à la fois minorée et majorée.**

2.2) Sens de variation

Soit $u = (U_n)$ une suite numérique. On dit que :

- U est croissante lorsque pour tout n, $U_{n+1} \geq U_n$
- U est strictement croissante lorsque pour tout n, $U_{n+1} > U_n$
- U est décroissante lorsque pour tout n, $U_{n+1} \leq U_n$
- U est strictement décroissante lorsque pour tout n, $U_{n+1} < U_n$
- U est constante lorsque pour tout n, $U_{n+1} = U_n$

2.3) Convergence

Définitions

- Une suite est convergente si elle a une limite finie
- Une suite est divergente si elle n'est par convergente.

Propriété

Soit (U_n) une suite numérique définie par $U_n = f(n)$ où f est une fonction numérique.
Si f a une limite en $+\infty$, alors U_n a une limite et on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} Un = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

Mais si f n'a pas de limite en $+\infty$, on ne peut rien conclure sur l'éventuelle limite de (U_n) .

III) SUITES ARITHMETIQUES – SUITES GEOMETRIQUES

Le tableau ci-dessous résume toute l'étude des suites arithmétiques et des suites géométriques
Il faut remarquer qu'un suite peut-être ni arithmétique, ni géométrique.
Soit $u = (u_n)$ une suite numérique.

	Suite arithmétique	Suite géométrique
Définition	$u_{n+1} = u_n + r\ (r \in \mathbb{R})$	$u_{n+1} = qu_n\ (q \in \mathbb{R})$
Raison	r	q
Relations entre les termes	$u_n = u_0 + nr$; $u_n = u_p + (n-p)r$	$u_n = q^n u_0$; $u_n = q^{n-p}.u_p$
Somme $u_0 + u_1 + \ldots + u_n$	$n\dfrac{u_0 + u_{n-1}}{2}$	• $u_0 \dfrac{1-q^n}{1-q}\ (q \neq 1)$ • $nu_0\ (q = 1)$
Limite	• Si $r > 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ • Si $r < 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$	• Si $\|q\| < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ • Si $\|q\| > 1$, alors u diverge • Si $q = 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = u_0$

EXERCICES

EXERCICE 1 :

Soit une droite (D) et O un point extérieur à (D).
Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on se propose de déterminer le nombre u_n de triangles que l'on obtient en reliant n points de la droite (D) au point O.

1) Déterminer u_2, u_3 et u_4.
2) Conjecturer une relation entre u_{n+1} et u_n. Vérifier que $u_9 = 36$ et $u_{10} = 45$.

EXERCICE 2 :

Une entreprise estime le coût d'un forage ainsi : le premier mètre coûte 1000F ; puis chaque mètre coûte 50F de plus que le précédent.

Quelle profondeur pourra atteindre le forage si l'on dispose d'un crédit de 519750F ?

EXERCICE 3 :

Le plan est muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit (u_n) $n \in \mathbb{N}$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{2 + 2u_n}{2 + u_n} \end{cases}$

1) Construire la courbe représentative $(\mathcal{C})$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{2x+2}{x+2}$ dans l'intervalle $]-2, +\infty[$ ainsi que la droite (D) d'équation $y = x$.
2) En déduire une construction des quatre premiers termes de cette suite sur l'axez (Oi).

EXERCICE 4 :

1) Montrer que la suite de terme général $u_n = \dfrac{n-2}{2n+1}$ est croissante
2) On considère la suite u définie par $u_n = n^2 + 4n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Calculer u_0, u_1, u_2 et u_3.
b) Démontrer que la suite u est strictement croissante.
c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

EXERCICE 5 :

Soit (u_n), $n\in\mathbb{N}^*$ la suite de terme général $u_n = \sqrt{1+\sqrt{1+\ldots+\sqrt{1+\sqrt{1}}}}$ (l'expression comporte n radicaux)

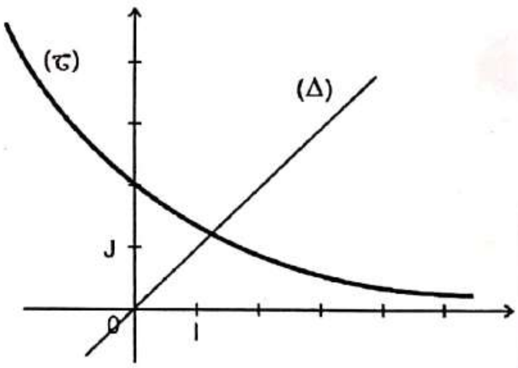
1) Calculer u_1, u_2 et u_3
2) Conjecturer une expression de u_n en fonction de u_{n-1}
3) En déduire le sens de variation de cette suite.

EXERCICE 6 :

On considère la suite u définie par : $\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)},\ n\in\mathbb{N}^* \end{cases}$

1) Calculer u_2, u_3 et u_4. Donner les résultats sous la forme d'une fraction irréductible.
2) Démontrer qu'il existe des réels a et b tels que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\dfrac{1}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{a}{n+1} + \dfrac{b}{n+2}$
3) En déduire une expression de u_n en fonction de n
4) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

EXERCICE 7 :



Le plan est muni du repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ ($\mathscr{C}$) est la représentation graphique d'une fonction numérique f et (Δ) la droite d'équation y = x.

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = -1 \\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

1) Construire sur l'axe (Oi) les quatre premiers termes de cette suite.
2) Conjecturer le sens de variation de cette suite
3) Donner un encadrement de sa limite éventuelle par deux nombres consécutifs.

EXERCICE 8 :

1) Démontrer que la suite u définie pour tout entier n par $u_n = 2n + 1$ est une suite arithmétique. Préciser son premier terme et sa raison.
2) Démontrer que la suite v définie pour tout entier n par $v_n = 3^{u_n}$ est une suite géométrique. Préciser son premier terme et sa raison.

EXERCICE 9 :

Soient p, q, p' et q' quatre nombres entiers naturels tels que : p + q = p' + q'.

1) Démontrer que pour toute suite arithmétique (u_n), on a : $u_p + u_q = u_{p'} + u_{q'}$
2) Démontrer que pour toute suite géométrique (v_n), on a : $v_p \times v_q = v_{p'} \times v_{q'}$

EXERCICE 10 :

1) x, y et z sont dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite arithmétique. Calculer ces trois nombres sachant que leur somme est 9 et la somme de leurs carrés est 59.
2) x, y et z sont dans cet ordre trois termes consécutifs d'une suite géométrique croissante. Calculer ces trois nombres sachant que leur somme est 63 et la somme de leurs inverses est $\frac{7}{16}$.

EXERCICE 11 :

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \,;\, u_1 = 3 \\ u_n = \dfrac{4u_{n-1} - u_{n-2}}{3} \,;\text{ pour tout } n \in \mathbb{N} - \{0, 1\} \end{cases}$

1) Calculer u_2, u_3 et u_4
2) On définit la suite (v_n) par ; pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = u_n - u_{n-1}$. Calculer v_1, v_2 et v_3. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique. Exprimer v_n en fonction de n.
3) Calculer $S_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n$ en fonction de n puis en fonction de u_n et u_0. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

EXERCICE 12 :

Soit (u_n) $n\in\mathbb{N}$ et (v_n) $n\in\mathbb{N}$ les suites définies par : $\begin{cases} u_0 = 6 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{5}u_n + \dfrac{4}{5} \end{cases}$; $\forall n\in\mathbb{N}$, $v_n = u_n - 1$.

1) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique
2) Exprimer v_n et u_n en fonction de n
3) En déduire les limites des suites $(u_n$ et (v_n).

EXERCICE 13 :

Soit la suite définie par $u_0 = 2$ et la relation $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 3}{5 - u_n}$ (on admettra que cette suite est définie pour tout entier n).

1) Calculer u_1, u_2 et u_3.
2) Soit $v_n = \dfrac{3 - u_n}{u_n - 1}$ (on admettra que pour tout entier n, $u_n \neq 1$ et donc v_n est bien définie). Exprimer v_{n+1} à l'aide de v_n. En déduire que la suite v est une suite géométrique et donner l'expression de son terme général.
3) En déduire une expression de u_n en fonction de n
4) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

EXERCICE 14 :

Le plan est muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère la suite numérique (u_n), $n\in\mathbb{N}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n - 3 \end{cases}$.

1) Construire les cinq premiers termes de cette suite sur l'axe des abscisses.

2)

a) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(u_n - u_{n-1})$

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = -5\left(\frac{1}{2}\right)^n$

c) Quel est le sens de variation de la suite (u_n) ?

3)

a) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n + 6 = \frac{1}{2}(u_{n-1} + 6)$

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n + 6 = \left(\frac{1}{2}\right)^n(u_0 + 6)$

c) Calculer la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 15 :

Soit u la suite définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n}{u_n - 1}$ pour tout entier n.

1) Calculer u_1, u_2 et u_3.

2) On se propose de déterminer graphiquement la limite de u

a) Soit f la fonction définie sur [2, 5] par $f(x) = \frac{2x}{x-1}$. Etudier le sens de variation de f.

b) Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, d'unité 2cm, tracer la courbe représentative $(\mathcal{C})$ de f et la droite (D) d'équation y = x. Préciser leur point d'intersection A.

c) Représenter les points d'abscisses u_0, u_1, u_2 et u_3.

d) Quelle hypothèse peut-on faire au sujet de $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n$?

3) On se propose de démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n = 3$. Pour tout entier n, on pose $v_n = u_n - 3$.

a) Démontrer que pour tout entier n, $\left|\frac{v_{n+1}}{v_n}\right| \leq \frac{2}{3}$ (E_n) (on admettra que $u_n \geq \frac{5}{2}$ pour tout entier n).

b) Démontrer que pour tout entier n, $|v_n| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ (on pourra multiplier membre à membre les inégalités (E_0), (E_1), …, (E_{n-1})).

c) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} v_n$ puis, $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n$.

CHAPITRE 17 : STATISTIQUES

COURS

I) SERIES STATISTIQUES PRESENTANT UN REGROUPEMENT EN CLASSES

1.1) Effectifs cumulés, fréquences cumulés

Soient les nombres $a_0, a_1, a_2, \dots, a_p$ (avec $a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_p$).
Considérons la série statistique $([a_{i-1}, a_i[, n_i)_{1\le i\le p}$ où ni est l'effectif de la classe $[a_{i-1}, a_i[$. C... une série statistique à modalités regroupées en classes.

- L'effectif cumulé croissant de la classe $[a_{k-1}, a_k[$ est : $\sum_{i=1}^{k} n_i = n_1 + n_2 + \dots + n_k$.
- L'effectif cumulé décroissant de la classe $[a_{k-1}, a_k[$ est : $\sum_{i=1}^{k} n_i = n_k + n_{k-1} + \dots + n_p$

On a une définition analogue pour la fréquence cumulée d'une classe.
Les résultats obtenus sont dressés dans un tableau puis, représentés par les graphique... l'aide de la représentation graphique, on déduit le polygone des effectifs cumulés croiss... (resp. décroissants). C'est la ligne brisée reliant les points consécutifs du graphique... effectifs cumulés croissants (resp. décroissants).

...2) Caractéristiques de position

Soit une série statistique présentant un regroupement en classe $([a_{i-1}, a_i[, n_i)_{1\le i\le p}$, d'effe... total N.

- On appelle **classe modale** de cette série toute classe d'effectif maximal ;
- On appelle **médiane** de cette série le nombre réel M tel que le nombre d'individus... modalité supérieure à M et le nombre d'individus de modalité inférieure à M soient ... deux égaux à $\frac{N}{2}$. Graphiquement, la médiane est l'abscisse du point des polygones... fréquences cumulées croissantes ou décroissantes qui a pour ordonnée 50%.

On appelle **moyenne** de cette série la moyenne $\bar{x}$ de la série statistique $(x_i, n_i)_{1\le i\le p}$ ... est le centre de la classe $[a_{i-1}, a_i[$ $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i$.

...ractéristiques de dispersion

... $([a_{i-1}, a_i[, n_i)_{1\le i\le p}$ une série statistique d'effectif total N et de moyenne $\bar{x}$.
...r tout nombre entier i tel que $1\le i\le p$, on désigne par x_i le centre de la classe $[a_{i-1}, a_i[$...

...rt moyen est le réel : $\mathcal{E}_m = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i |x_i - \bar{x}|$

...iance est le réel $V = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i (x_i - \bar{x})^2 = \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2\right) - \bar{x}^2$

... type est le réel $\sigma = \sqrt{V}$

II) SERIES STATISTIQUES A DEUX CARACTERES

2.1) Définition et propriétés

Soit une population d'effectif N sur laquelle sont définis deux caractères X et Y ; $M_x = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ et $M_y = \{y_1, y_2, \dots, y_p\}$, les ensembles des modalités respectives des caractères X et Y. On appelle série statistique à deux caractères ou série statistique double de caractères (X, Y) l'ensemble des triplets (x_i, y_j, n_{ij}) où n_{ij} est l'effectif du couple (x_i, y_j), x_i et y_j étant deux modalités respectives de X et Y.

On représente une série statistique double à l'aide d'un tableau à double entrée.

Les séries statistiques (x_i, n_i) et (y_j, n_j) où n_i et n_j sont les effectifs des modalités x_i et y_j sont appelées séries marginales de la série statistique double (x_i, y_j, n_{ij}) associée à X et Y.

Le plan étant muni d'un repère orthogonal, l'ensemble des points M_{ij} de coordonnées (x_i, y_j) est appelé nuage de points associé à la série double.

On appelle point moyen du nuage de point représentant cette série le point G de coordonnées $(\bar{x}, \bar{y})$ où $\bar{x}$ et $\bar{y}$ désignent les moyennes respectives des séries marginales (x_i, n_i) et (y_j, n_j).

2.2) Ajustement linéaire

Soit la série statistique double (x, y) d'effectif total N. Réaliser un ajustement (linéaire) d'un nuage de points consiste à chercher une approximation (affine) de y (y = ax + b) en fonction de x ou inversement.

Dans le cas d'un ajustement linéaire, on obtient une droite d'équation y = ax + b où les coefficients a et b sont donnés par : $a = \dfrac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}$ et $b = \bar{y} - a\bar{x}$.

La droite d'équation y = ax + b est alors appelée **droite de régression** de y en x.

3) Corrélation linéaire

Soit $(x_i, y_i)_{1 \le i \le N}$ une série statistique à deux caractères x et y d'effectif total N

- La **covariance** de cette série est le nombre réel : $\mathrm{cov}(x, y) = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \left(\dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i y_i\right) - \bar{x}\cdot\bar{y}$
- La droite de régression de y en x (respectivement de x en y) passe par le point moyen du nuage associé à la série et a pour coefficient directeur $\dfrac{\mathrm{cov}(x, y)}{V(x)}$ $(V(x) \neq 0)$ (respectivement : $\dfrac{V(y)}{\mathrm{cov}(x, y)}$ avec $\mathrm{cov}(x, y) \neq 0$). Une équation de cette droite es
$y - \bar{y} = \dfrac{\mathrm{cov}(x, y)}{V(x)}(x - \bar{x})$ respectivement $x - \bar{x} = \dfrac{\mathrm{cov}(x, y)}{V(y)}(y - \bar{y})$.
- Le coefficient de corrélation linéaire de cette série est le nombre réel r tel qu
$r = \dfrac{\mathrm{cov}(x, y)}{\sqrt{V(x)V(y)}}$ avec $V(x) \neq 0$ et $V(y) \neq 0$.

EXERCICES

CICE 1 :

sidère une série dont les effectifs sont donnés tableau ci-contre :

Classe	[-2, -1[	[-1, 0[	[0, 2[	[2,
Effectif	14	16	8	1

II) SERIES STATISTIQUES A DEUX CARACTERES

2.1) Définition et propriétés

soit une population d'effectif N sur laquelle sont définis deux caractères X et Y ; $M_x = \{x_1, x_2, ..., x_p\}$ et $M_y = \{y_1, y_2, ..., y_p\}$, les ensembles des modalités respectives des caractères X et Y. On appelle série statistique à deux caractères ou série statistique double de caractères (X, Y) l'ensemble des triplets (x_i, y_i, n_{ij}) où n_{ij} est l'effectif du couple (x_i, y_i), x_i et y_j étant deux modalités respectives de X et Y.

On représente une série statistique double à l'aide d'un tableau à double entrée.

Les séries statistiques (x_i, n_i) et (y_j, n_j) où n_i et n_j sont les effectifs des modalités x_i et y_j sont appelées séries marginales de la série statistique double (x_i, y_j, n_{ij}) associée à X et Y.

Le plan étant muni d'un repère orthogonal, l'ensemble des points M_{ij} de coordonnées (x_i, y_j) est appelé nuage de points associé à la série double.

On appelle point moyen du nuage de point représentant cette série le point G de coordonnées $(\overline{x}, \overline{y})$ ou $\overline{x}$ et $\overline{y}$ désignent les moyennes respectives des séries marginales (x_i, n_i) et (y_j, n_j).

2.2) Ajustement linéaire

Soit la série statistique double (x, y) d'effectif total N. Réaliser un ajustement (linéaire) d'un nuage de points consiste à chercher une approximation (affine) de y (y = ax + b) en fonction de x ou inversement.

Dans le cas d'un ajustement linéaire, on obtient une droite d'équation y = ax + b où les coefficients a et b sont donnés par : $a = \dfrac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2}$ et $b = \overline{y} - a\overline{x}$.

La droite d'équation y = ax + b est alors appelée **droite de régression** de y en x.

2.3) Corrélation linéaire

Soit $(x_i, y_i)_{1 \le i \le N}$ une série statistique à deux caractères x et y d'effectif total N

- La **covariance** de cette série est le nombre réel : $\operatorname{cov}(x, y) = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) = \left(\dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i y_i\right) - \overline{x} \cdot \overline{y}$
- La droite de régression de y en x (respectivement de x en y) passe par le point moyen du nuage associé à la série et a pour coefficient directeur $\dfrac{\operatorname{cov}(x, y)}{V(x)}$ $(V(x) \neq 0)$ (respectivement : $\dfrac{V(y)}{\operatorname{cov}(x, y)}$ avec $\operatorname{cov}(x, y) \neq 0$). Une équation de cette droite est $y - \overline{y} = \dfrac{\operatorname{cov}(x, y)}{V(x)}(x - \overline{x})$ respectivement $x - \overline{x} = \dfrac{\operatorname{cov}(x, y)}{V(y)}(y - \overline{y})$.
- Le coefficient de corrélation linéaire de cette série est le nombre réel r tel que $r = \dfrac{\operatorname{cov}(x, y)}{\sqrt{V(x)V(y)}}$ avec $V(x) \neq 0$ et $V(y) \neq 0$.

EXERCICES

EXERCICE 1 :

On considère une série dont les effectifs sont donnés dans le tableau ci-contre :

Classe	[-2, -1[	[-1, 0[	[0, 2[	[2, 4[
Effectif	14	16	8	12

II) SERIES STATISTIQUES A DEUX CARACTERES

2.1) Définition et propriétés

soit une population d'effectif N sur laquelle sont définis deux caractères X et Y ; $M_x = \{x_1, x_2, ..., x_p\}$ et $M_y = \{y_1, y_2, ..., y_p\}$, les ensembles des modalités respectives des caractères X et Y. On appelle série statistique à deux caractères ou série statistique double de caractères (X, Y) l'ensemble des triplets (x_i, y_i, n_{ij}) où n_{ij} est l'effectif du couple (x_i, y_i), x_i et y_j étant deux modalités respectives de X et Y.

On représente une série statistique double à l'aide d'un tableau à double entrée.

Les séries statistiques (x_i, n_i) et (y_j, n_j) où n_i et n_j sont les effectifs des modalités x_i et y_j sont appelées séries marginales de la série statistique double (x_i, y_j, n_{ij}) associée à X et Y.

Le plan étant muni d'un repère orthogonal, l'ensemble des points M_{ij} de coordonnées (x_i, y_j) est appelé nuage de points associé à la série double.

On appelle point moyen du nuage de point représentant cette série le point G de coordonnées $(\overline{x}, \overline{y})$ ou $\overline{x}$ et $\overline{y}$ désignent les moyennes respectives des séries marginales (x_i, n_i) et (y_j, n_j).

2.2) Ajustement linéaire

Soit la série statistique double (x, y) d'effectif total N. Réaliser un ajustement (linéaire) d'un nuage de points consiste à chercher une approximation (affine) de y (y = ax + b) en fonction de x ou inversement.

Dans le cas d'un ajustement linéaire, on obtient une droite d'équation y = ax + b où les coefficients a et b sont donnés par : $a = \dfrac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2}$ et $b = \overline{y} - a\overline{x}$.

La droite d'équation y = ax + b est alors appelée **droite de régression** de y en x.

2.3) Corrélation linéaire

Soit $(x_i, y_i)_{1 \le i \le N}$ une série statistique à deux caractères x et y d'effectif total N

- La **covariance** de cette série est le nombre réel : $\operatorname{cov}(x, y) = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) = \left(\dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i y_i\right) - \overline{x} \cdot \overline{y}$
- La droite de régression de y en x (respectivement de x en y) passe par le point moyen du nuage associé à la série et a pour coefficient directeur $\dfrac{\operatorname{cov}(x, y)}{V(x)}$ $(V(x) \neq 0)$ (respectivement : $\dfrac{V(y)}{\operatorname{cov}(x, y)}$ avec $\operatorname{cov}(x, y) \neq 0$). Une équation de cette droite est $y - \overline{y} = \dfrac{\operatorname{cov}(x, y)}{V(x)}(x - \overline{x})$ respectivement $x - \overline{x} = \dfrac{\operatorname{cov}(x, y)}{V(y)}(y - \overline{y})$.
- Le coefficient de corrélation linéaire de cette série est le nombre réel r tel que $r = \dfrac{\operatorname{cov}(x, y)}{\sqrt{V(x)V(y)}}$ avec $V(x) \neq 0$ et $V(y) \neq 0$.

EXERCICES

EXERCICE 1 :

On considère une série dont les effectifs sont donnés dans le tableau ci-contre :

Classe	[-2, -1[	[-1, 0[	[0, 2[	[2, 4[
Effectif	14	16	8	12

II) SERIES STATISTIQUES A DEUX CARACTERES

2.1) Définition et propriétés

soit une population d'effectif N sur laquelle sont définis deux caractères X et Y ; $M_x = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ et $M_y = \{y_1, y_2, \dots, y_p\}$, les ensembles des modalités respectives des caractères X et Y. On appelle série statistique à deux caractères ou série statistique double de caractères (X, Y) l'ensemble des triplets (x_i, y_i, n_{ij}) où n_{ij} est l'effectif du couple (x_i, y_i), x_i et y_i étant deux modalités respectives de X et Y.

On représente une série statistique double à l'aide d'un tableau à double entrée.

Les séries statistiques (x_i, n_i) et (y_j, n_j) où n_i et n_j sont les effectifs des modalités x_i et y_j sont appelées séries marginales de la série statistique double (x_i, y_j, n_{ij}) associée à X et Y.

Le plan étant muni d'un repère orthogonal, l'ensemble des points M_{ij} de coordonnées (x_i, y_j) est appelé nuage de points associé à la série double.

On appelle point moyen du nuage de point représentant cette série le point G de coordonnées $(\overline{x}, \overline{y})$ ou $\overline{x}$ et $\overline{y}$ désignent les moyennes respectives des séries marginales (x_i, n_i) et (y_j, n_j).

2.2) Ajustement linéaire

Soit la série statistique double (x, y) d'effectif total N. Réaliser un ajustement (linéaire) d'un nuage de points consiste à chercher une approximation (affine) de y (y = ax + b) en fonction de x ou inversement.

Dans le cas d'un ajustement linéaire, on obtient une droite d'équation y = ax + b où les coefficients a et b sont donnés par : $a = \dfrac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2}$ et $b = \overline{y} - a\overline{x}$.

La droite d'équation y = ax + b est alors appelée **droite de régression** de y en x.

2.3) Corrélation linéaire

Soit $(x_i, y_i)_{1 \le i \le N}$ une série statistique à deux caractères x et y d'effectif total N

- La **covariance** de cette série est le nombre réel : $\mathrm{cov}(x, y) = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) = \left(\dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i y_i\right) - \overline{x} \cdot \overline{y}$
- La droite de régression de y en x (respectivement de x en y) passe par le point moyen du nuage associé à la série et a pour coefficient directeur $\dfrac{\mathrm{cov}(x, y)}{V(x)}$ $(V(x) \neq 0)$ (respectivement : $\dfrac{V(y)}{\mathrm{cov}(x, y)}$ avec $\mathrm{cov}(x, y) \neq 0$). Une équation de cette droite est $y - \overline{y} = \dfrac{\mathrm{cov}(x, y)}{V(x)}(x - \overline{x})$ respectivement $x - \overline{x} = \dfrac{\mathrm{cov}(x, y)}{V(y)}(y - \overline{y})$.
- Le coefficient de corrélation linéaire de cette série est le nombre réel r tel que $r = \dfrac{\mathrm{cov}(x, y)}{\sqrt{V(x)V(y)}}$ avec $V(x) \neq 0$ et $V(y) \neq 0$.

EXERCICES

EXERCICE 1 :

On considère une série dont les effectifs sont donnés

Classe	[-2, -1[	[-1, 0[	[0, 2[	[2, 4[

II) SERIES STATISTIQUES A DEUX CARACTERES

2.1) Définition et propriétés

soit une population d'effectif N sur laquelle sont définis deux caractères X et Y ; $M_X = \{x_1, x_2, ..., x_p\}$ et $M_Y = \{y_1, y_2, ..., y_p\}$, les ensembles des modalités respectives des caractères X et Y. On appelle série statistique à deux caractères ou série statistique double de caractères (X, Y) l'ensemble des triplets (x_i, y_i, n_{ij}) où n_{ij} est l'effectif du couple (x_i, y_i), x_i et y_i étant deux modalités respectives de X et Y.
On représente une série statistique double à l'aide d'un tableau à double entrée.
Les séries statistiques (x_i, n_i) et (y_j, n_j) où n_i et n_j sont les effectifs des modalités x_i et y_j sont appelées séries marginales de la série statistique double (x_i, y_j, n_{ij}) associée à X et Y.
Le plan étant muni d'un repère orthogonal, l'ensemble des points M_{ij} de coordonnées (x_i, y_j) est appelé nuage de points associé à la série double.
On appelle point moyen du nuage de point représentant cette série le point G de coordonnées $(\overline{x}, \overline{y})$ ou $\overline{x}$ et $\overline{y}$ désignent les moyennes respectives des séries marginales (x_i, n_i) et (y_j, n_j).

2) Ajustement linéaire

Soit la série statistique double (x, y) d'effectif total N. Réaliser un ajustement (linéaire) d'un nuage de points consiste à chercher une approximation (affine) de y (y = ax + b) en fonction de x ou inversement.
Dans le cas d'un ajustement linéaire, on obtient une droite d'équation y = ax + b où les coefficients a et b sont donnés par : $a = \dfrac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2}$ et $b = \overline{y} - a\overline{x}$.
La droite d'équation y = ax + b est alors appelée **droite de régression** de y en x.

Corrélation linéaire

Soit $(x_i, y_i)_{1\le i\le N}$ une série statistique à deux caractères x et y d'effectif total N

- La **covariance** de cette série est le nombre réel : $\operatorname{cov}(x, y) = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) = \left(\dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_iy_i\right) - \overline{x}\cdot\overline{y}$
- La droite de régression de y en x (respectivement de x en y) passe par le point moyen du nuage associé à la série et a pour coefficient directeur $\dfrac{\operatorname{cov}(x, y)}{V(x)}$ $(V(x) \neq 0)$ (respectivement : $\dfrac{V(y)}{\operatorname{cov}(x, y)}$ avec $\operatorname{cov}(x, y) \neq 0$). Une équation de cette droite est $y - \overline{y} = \dfrac{\operatorname{cov}(x, y)}{V(x)}(x - \overline{x})$ respectivement $x - \overline{x} = \dfrac{\operatorname{cov}(x, y)}{V(y)}(y - \overline{y})$.
- Le coefficient de corrélation linéaire de cette série est le nombre réel r tel que $r = \dfrac{\operatorname{cov}(x, y)}{\sqrt{V(x)V(y)}}$ avec $V(x) \neq 0$ et $V(y) \neq 0$.

EXERCICES

II) SERIES STATISTIQUES A DEUX CARACTERES

2.1) Définition et propriétés

soit une population d'effectif N sur laquelle sont définis deux caractères X et Y ; $M_x = \{x_1, x_2, ..., x_p\}$ et $M_y = \{y_1, y_2, ..., y_p\}$, les ensembles des modalités respectives des caractères X et Y. On appelle série statistique à deux caractères ou série statistique double de caractères (X, Y) l'ensemble des triplets (x_i, y_i, n_{ij}) où n_{ij} est l'effectif du couple (x_i, y_i), x_i et y_j étant deux modalités respectives de X et Y.
On représente une série statistique double à l'aide d'un tableau à double entrée.
Les séries statistiques (x_i, n_i) et (y_j, n_j) où n_i et n_j sont les effectifs des modalités x_i et y_j sont appelées séries marginales de la série statistique double (x_i, y_j, n_{ij}) associée à X et Y.
Le plan étant muni d'un repère orthogonal, l'ensemble des points M_{ij} de coordonnées (x_i, y_j) est appelé nuage de points associé à la série double.
On appelle point moyen du nuage de point représentant cette série le point G de coordonnées $(\overline{x}, \overline{y})$ ou $\overline{x}$ et $\overline{y}$ désignent les moyennes respectives des séries marginales (x_i, n_i) et (y_j, n_j).

2.2) Ajustement linéaire

Soit la série statistique double (x, y) d'effectif total N. Réaliser un ajustement (linéaire) d'un nuage de points consiste à chercher une approximation (affine) de y (y = ax + b) en fonction de x ou inversement.
Dans le cas d'un ajustement linéaire, on obtient une droite d'équation y = ax + b où les coefficients a et b sont donnés par : $a = \dfrac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2}$ et $b = \overline{y} - a\overline{x}$.

La droite d'équation y = ax + b est alors appelée **droite de régression** de y en x.

2.3) Corrélation linéaire

Soit $(x_i, y_i)_{1 \le i \le N}$ une série statistique à deux caractères x et y d'effectif total N

- La **covariance** de cette série est le nombre réel : $\operatorname{cov}(x, y) = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) = \left(\dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i y_i\right) - \overline{x} \cdot \overline{y}$
- La droite de régression de y en x (respectivement de x en y) passe par le point moyen du nuage associé à la série et a pour coefficient directeur $\dfrac{\operatorname{cov}(x, y)}{V(x)}$ $(V(x) \neq 0)$ (respectivement : $\dfrac{V(y)}{\operatorname{cov}(x, y)}$ avec $\operatorname{cov}(x, y) \neq 0$). Une équation de cette droite est $y - \overline{y} = \dfrac{\operatorname{cov}(x, y)}{V(x)}(x - \overline{x})$ respectivement $x - \overline{x} = \dfrac{\operatorname{cov}(x, y)}{V(y)}(y - \overline{y})$.
- Le coefficient de corrélation linéaire de cette série est le nombre réel r tel que $r = \dfrac{\operatorname{cov}(x, y)}{\sqrt{V(x)V(y)}}$ avec $V(x) \neq 0$ et $V(y) \neq 0$.

EXERCICES

EXERCICE 1 :

On considère une série dont les effectifs sont donnés dans le tableau ci-contre :

Classe	[-2, -1[	[-1, 0[	[0, 2[	[2, 4[

1) Dresser le tableau des effectifs cumulés croissants et décroissants
2) Construire les polygones des effectifs cumulés croissants et décroissants
3) Déterminer graphiquement le nombre d'individus dont la modalité est :
   a) inférieure à 1 ; b) supérieure à –0,4.
4) Déterminer graphiquement l'intervalle dans lequel on trouve :
   a) les 9 individus de modalité la plus grande
   b) les 20 individus de modalité la plus petite.

EXERCICE 2 :

On donne la taille en centimètres de 50 enfants d'une colonie de vacances :

139	164	150	133	144	125	150	157	135	139
146	157	140	147	137	149	152	144	143	152
167	127	137	175	164	120	145	165	144	155
145	173	143	146	134	143	139	134	145	134
161	146	134	143	150	157	146	129	140	131

1) Etablir un relevé des tailles en regroupant celles-ci en classes de diamètre 6, s'étalant de 120cm à 180cm.
2) Construire l'histogramme des effectifs et le polygone des effectifs cumulés croissants.
3) Calculer la moyenne de la médiane ainsi que l'écart type de la série statistique.

EXERCICE 3 :

Le tableau ci-contre donne les durées de vie en heures, regroupés en huit classes, d'un lot de piles d'une même marque pour lampes de poche.

1) Calculer la moyenne, la variance et l'écart-type de cette série.
2) Calculer par interpolation linéaire, la médiane de cette série.

Durée de vie	Effectif	Durée de vie	Effectif
[50, 60[	10	[90, 100[	30
[60, 70[	15	[100, 110[	20
[70, 80[	35	[110, 120[	15
[80, 90[	40	[120, 130[	5

EXERCICE 4 :

Une machine à ensacher le café produit des sacs de 250 grammes.
On a mesuré le poids net de 125 sacs produits par cette machine et obtenu la série statistique ci-contre.

Durée de vie	Effectif	Durée de vie	Effectif
[242, 244[	2	[250, 252[	30
[244, 246[	14	[252, 254[	15
[246, 248[	18	[254, 256[	4
[248, 250[	40	[256, 258[	2

1)
   a) Construire les polygones de fréquences cumulés croissantes et décroissantes.
   b) Déterminer la médiane de cette série
2)
   a) Calculer la moyenne $\overline{x}$ et l'écart type σ (on donnera les résultats à 10^{-3} près).
   b) Quel est le pourcentage des sacs dont le poids est compris :
      - entre $\overline{x}-\sigma$ et $\overline{x}+\sigma$?
      - entre $\overline{x}-2\sigma$ et $\overline{x}+2\sigma$

EXERCICE 5 :

Lors d'une enquête auprès des élèves d'un lycée, on a étudié les caractères suivants :
nombre x des livres lus au cours du dernier mois ;
nombre y de sorties au cinéma au cours du dernier mois.
Les résultats sont présentés dans le tableau suivant :

x_i \ y_i	0	1	2	3	4	5
0	35	30	50	25	12	0
1	34	58	44	47	10	19
2	72	65	57	30	12	7
3	24	32	26	25	16	6
4	5	21	20	11	7	0

1) Dresser le tableau des effectifs et des fréquences des séries marginales associées à cette série double.
2) Représenter par des points pondérés, le nuage associé à cette série.
3) Déterminer et placer le point moyen du nuage.

EXERCICE 6 :

Le tableau suivant donne le poids en kilogrammes d'un nourrisson, x jours après sa naissance :

x_i	5	7	10	14	18	22	26
y_i	3,61	6,70	3,75	3,85	3,90	4,05	4,12

1) Représenter le nuage de points associé à cette série.
2) Déterminer une équation de la droite de régression de y en x et représenter cette droite sur le graphique.
3) Donner une estimation du poids du nourrisson 30 jours après sa naissance.

EXERCICE 7 :

Le tableau ci-contre donne pour six années, les montants x des frais de publicité d'une entreprise et y de son chiffre d'affaires, exprimé en millions de francs.

x_i	5,8	4	6,4	4,6	5,2	7
y_i	128	102	138	116	118	142

1) Représenter le nuage de point associé à cette série
2) Calculer le coefficient de corrélation linéaire de cette série. Le résultat permet-il d'envisager un ajustement linéaire ?
3) Déterminer la droite de régression de y en x
4) En déduire :
   a) une estimation du chiffre d'affaires si l'on envisage 9 millions de francs de publicité.
   b) Une estimation du budget de publicité à prévoir si l'on désire réaliser un chiffre d'affaires de 200 millions de francs.

EXERCICE 8 :

La distribution des poids en kilogrammes des élèves d'un lycée est donnée dans le tableau ci-dessus :

Classe	[30, 35[	[35, 40[	[40, 45[	[45, 50[	[50, 55[	[55, 60[	[60, 65[	[65, 70[
Fréquence (%)	1,15	5,50	16	27,35	27,35	15,90	5,40	1,35

1) Tracer l'histogramme des fréquences
2) Construire le polygone des fréquences cumulées décroissantes
3) Déterminer graphiquement :
   a) la médiane de la série
   b) le poids minimum des dix pour cent des élèves les plus lourds.
   c) Le pourcentage des élèves dont le poids est compris entre 42,5kg et 52,5kg.
4) Déterminer la moyenne et l'écart type de cette série.

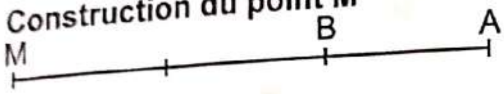
EXERCICE 1 :

1) On a : $-\overrightarrow{AG}+3\overrightarrow{BG}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OG}=\frac{1}{2}\left(-\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}\right)$

2) Les points A et B ont pour coordonnées respectives (-3, 1) et (4, 1). D'après la relation de question 1, on a : $x_G=\frac{1}{2}\left(-(-3)+3\text{x}4\right)=\frac{15}{2}$ et $y_G=\frac{1}{2}\left(-1+3\text{x}1\right)=1$ Donc G a pour coordonnées $\left(\frac{15}{2},1\right)$.

EXERCICE 2 :

1) **Construction du point M**

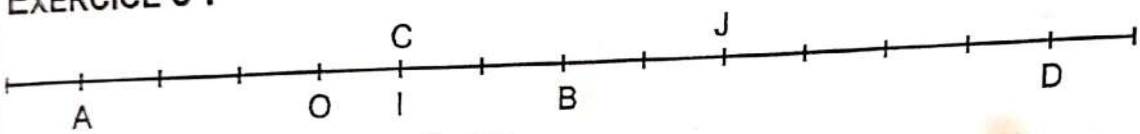


2) **Détermination de x**

$\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{AM}+2\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{BM}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BM}=\vec{0}$

Pour $x=-\frac{1}{2}$, M est barycentre de (A, 1) et (B, x).

EXERCICE 3 :



1) **Construction des points C et D**

$C=\text{bar}\{(A,1),(B,2)\} \Rightarrow$ C a pour abscisse $x_C=\frac{1\text{x}(-3)+2\text{x}3}{3}=1 \Rightarrow C=1$

$D=\text{bar}\{(A,1),(B,-2)\} \Rightarrow$ D a pour abscisse $x_D=\frac{1\text{x}(-3)-2\text{x}3}{-1}=9 \Rightarrow D=9$

2) **Détermination de c et d (c, d > 0)**

- On a $\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AC}$ d'où $3\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=\vec{0}$. Soit : $\overrightarrow{OA}=\frac{1}{2}\left(3\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}\right)$

  De plus A = bar{(C, c) ; (D, d)} alors $\overrightarrow{OA}=\frac{1}{C-d}\left(c\overrightarrow{OC}+d\overrightarrow{OD}\right)$

  De l'unicité du barycentre, on a : C = 3 et –d = -1 ; soit c = 3 et d = 1
- On a : $\overrightarrow{BD}=-3\overrightarrow{BC}$. D'où $\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OD}=-3\overrightarrow{BO}-3\overrightarrow{OC}$, soit $\overrightarrow{OB}=\frac{1}{4}\left(3\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$

  De plus B = bar{(C, c) ; (D, d)} alors $\overrightarrow{OB}=\frac{1}{c+d}\left(c\overrightarrow{OC}+d\overrightarrow{OD}\right)$

  De l'unicité du barycentre, on a : c = 3 et d = 1.

3) **Vérification des égalités**

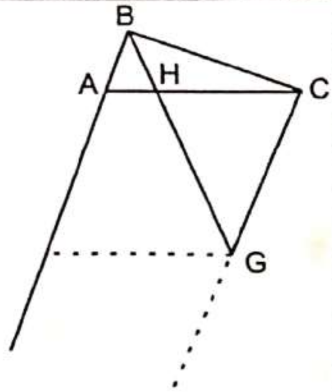
On a : $\overline{OA}=-3$, $\overline{OB}=3$, $\overline{OC}=1$.

$\overline{OD}=9 \Rightarrow OA^2=OB^2=\overline{OC}\text{x}\overline{OD}$

$\overline{JC}=-\overline{JD}=-4 \Rightarrow JC^2=JD^2=16$

$\overline{JA}=\overline{JC}+\overline{CA}=-4-4=-8$ et $\overline{JB}=-2 \Rightarrow \overline{JA}\cdot\overline{JB}=16$ d'où JC^2 = JD = JA. JB

EXERCICE 4 :



1) On ne peut pas construire de barycentre partiel pour (A, 2) et (B, -2), car la somme des coefficients est nulle. On peut par contre associer les points A et C par exemple.
Considérons le schéma :

$$\underbrace{\underbrace{(A,\ 2) \qquad (C,\ 1)}_{(H,\ 3)} \qquad (B,\ -2)}_{G}$$

Soit H = bar{(A, 2) ; (C, 1)}. On a : $\overrightarrow{AH} = \dfrac{1}{2+1}\overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

On sait que G est le barycentre de (H, 3) et (B, -2). Donc $\overrightarrow{HG} = \dfrac{-2}{3-2}\overrightarrow{HB} = -2\overrightarrow{HB}$

2) Un point M a pour coordonnées (x, y) dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ si et seulement si $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$. Le point A est l'origine du repère ; d'où A(0, 0).
On a : $\overrightarrow{AB} = 1.\overrightarrow{AB} + 0.\overrightarrow{AC}$ d'où B(1, 0), $\overrightarrow{AC} = 0.\overrightarrow{AB} + 1.\overrightarrow{AC}$; d'où C(0, 1).
On a : G = bar{(A, 2) ; (B, -2) ; (C, 1)} d'où $\overrightarrow{AG} = -2.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Donc G(-2, 1).

EXERCICE 5 :

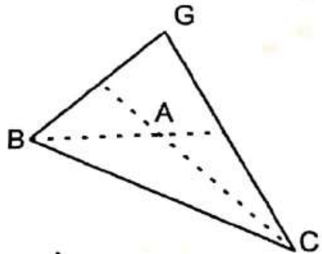
G = bar{(A, -3) ; (B, 1) ; (C, 1)}

1) Démontrons que A est le centre de gravité de GBC

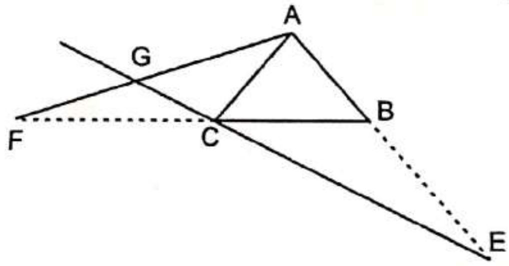
G = bar{(A, -3) ; (B, 1) ; (C, 1)} $\Leftrightarrow -3\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$
D'où A = bar{(G, 1) ; (B, 1) ; (C, 1)}. Donc A est le centre de gravité de GBC.

2) Construction de G

Il suffit de construire le centre de gravité de trois points non alignés parmi lesquels B et C.
Ce centre de gravité est le point A. Le point supplémentaire est le point G.



EXERCICE 6 :



1)

a) Construction de E

E = bar{(A, 1), (B, -2)} $\Leftrightarrow \overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB}$

b) Expression de $\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB}$

On a : G = bar{(A, 1) ; (B, -2) ; (C, 3)} ; E = bar{(A, 1) ; (B, -2)} d'où G = bar{(E, -1) ; (C, 3)}

G = bar{(E, -1) ; (C, 3)} $\Rightarrow 3\overrightarrow{CG} = -\overrightarrow{GE} \Rightarrow 3\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GE}$ (1)

et G = bar{(A, 1) ; (B, -2) ; (C, 3)} $\Rightarrow \overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ (2)

des relations (1) et (2), on a $\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GE} = \vec{0}$; Soit $\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} = -\overrightarrow{GE}$

c) Démontrons que G est un point de (CE)

De la relation G = bar{(E, -1) ; (C, 3)} de la question 1.b), il est clair que G est un point de la droite (CE).

2)

a) Construction de F

F = bar{(B, -2), (C, 3)} $\Leftrightarrow -2\overrightarrow{BF} + 3\overrightarrow{CF} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BF} = 3\overrightarrow{BC}$

b) Démontrons que G est un point de (AF)

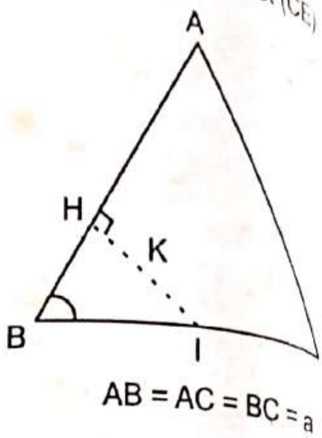
G = bar{(A, 1) ; (B, -2) ; (C, 3)} et F = bar{(B, -2) ; (C, 3)}

D'où G = bar{(A, 1), (F, 1)}. Donc G est un point de la droite (AF).

c) Construction du point G

On sait que $G \in (AF)$ et $G \in (CE)$. Donc G est le point d'intersection des droites (AF) et (CE)

EXERCICE 7 :



1) Ecrivons H comme barycentre de A et B

$\cos 60° = \frac{BH}{BI} \Rightarrow BH = BI\cos 60° = \frac{a}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{a}{4}$

Ainsi $\overrightarrow{BH} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{HA} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BA}$

d'où $\overrightarrow{BH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HA}$; soit $3\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{AH} = \vec{0}$.

Donc H = bar{(A, 1) : (B, 3)}. AB = AC = BC = a.

2) Démontrons que K = bar{(A, 1) ; (B, 5) ; (C, 2)}

On a : $3\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HA} = \vec{0}$ alors : $3\overrightarrow{HK} + 3\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{HK} + \overrightarrow{KA} = \vec{0}$; d'où $\overrightarrow{KA} + 3\overrightarrow{KB} + 4\overrightarrow{HK} = \vec{0}$

De plus, I milieu de [BC].

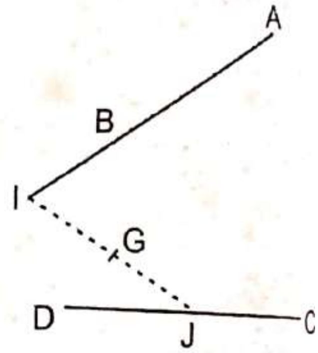
D'où $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$ et par suite $\overrightarrow{IK} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{IK} + \overrightarrow{KC} = \vec{0}$; soit $\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} + 2\overrightarrow{IK} = \vec{0}$; or $\overrightarrow{IK} = -\overrightarrow{HK}$

D'où $\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} = 2\overrightarrow{HK}$. Soit $\overrightarrow{HK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{KB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{KC}$

En remplaçant ceci dans la relation (1), on obtient : $\overrightarrow{KA} + 3\overrightarrow{KB} + 4\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{KB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{KC}\right) = \vec{0}$.

Soit $\overrightarrow{KA} + 5\overrightarrow{KB} + 2\overrightarrow{KC} = \vec{0}$. Donc K est le barycentre des points (A, 1) ; (B, 5) et (C, 2).

EXERCICE 8 :



1) I barycentre de (A, -1) ; (B, 4) ; alors $-\overrightarrow{AI} + 4\overrightarrow{BI} = \vec{0}$;

d'où $\overrightarrow{AI} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$

2) J barycentre de (C, 2) ; (D, 1)

on a : $2\overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{DJ} = \vec{0}$. D'où $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$

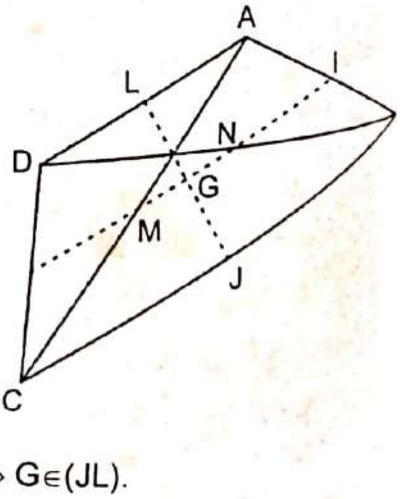
3) On a : G = bar{(A, -1) ; (B, 4) ; (C, 2) ; (D, 1)}

I = bar{(A, -1) ; (B, 4)} et J = bar{(C, 2) ; (D, 1)}

D'où G = bar{(I, -1+4) ; (J, 2+1)} = bar{(I, 3) ; (J, 3)}

Pour construire le point de G, il suffit de construire le milieu du segment [IJ] (à l'aide d'un comp

EXERCICE 9 :



1) Les droites (IK), (JL) et (MN) sont concourantes en G

I et K sont milieux respectifs de [AB] et [DC].

D'où $\begin{cases} I = \text{bar}\{(A, 1) ; (B, 1)\} \\ K = \text{bar}\{(C, 1) ; (D, 1)\} \end{cases}$

Or G = bar{(A, 1) ; (B, 1) ; (C, 1) ; (D, 1)}

D'où G = bar{(I, 2) ; (K, 2)}.

Donc $G \in (IK)$

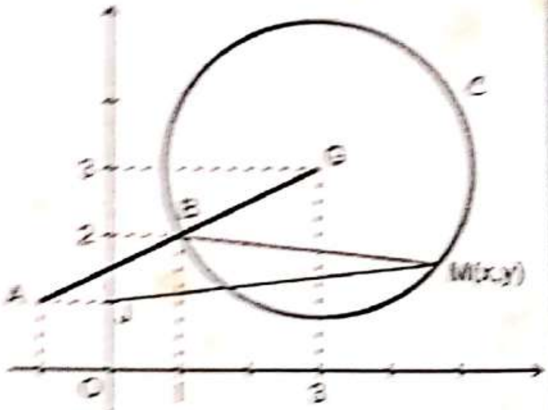
De même $\begin{cases} J = \text{bar}\{(B, 1) ; (C, 1)\} \\ L = \text{bar}\{(A, 1) ; (D, 1)\} \end{cases} \Rightarrow G = \text{bar}\{(J, 2) ; (L, 2)\} \Rightarrow G \in (JL)$.

De la même façon, on montre que $G \in (MN)$.
Donc les droites (IH), (JL) et (MN) sont concourantes en G.

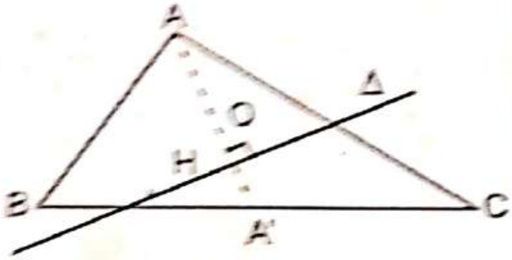
3) **Les points A, G et H sont alignés**
H est centre de gravité du triangle BCD ⇒ H = bar{(B, 1) ; (D, 1) ; (C, 1)}.
Or G est barycentre des points A, B, C et D.
D'où G = bar{(A, 1) ; (H, 3)} ⇒ $G \in (AH)$
Donc les points A, G et H sont alignés.

Trois autres alignements de même type
- Soit H_1 le centre de gravité du triangle ABD. Les points C, G et H_1 sont alignés.
- Soit H_2 le centre de gravité du triangle ACD. Les points B, G et H_2 sont alignés.
- Soit H_3 le centre de gravité du triangle ABC. Les points D, G et H_3 sont alignés.

EXERCICE 10 :



Soit M(x ; y) un point du plan.
On a : $MA^2 = (-1-x)^2 + (1-y)^2$
et $MB^2 = (1-x)^2 + (2-y)^2$
On en déduit $MA^2 - 2MB^2 = -(x^2 + y^2) + 6x + 6y - 8$
On a donc $M \in \mathcal{C}$ si et seulement si :
$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 14 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-3)^2 = 4$
$\mathcal{C}$ est donc le cercle de centre G(3, 3) et de rayon 2.



Soit A' le milieu de [BC] ; pour tout point M, on a :
$MB^2 + MC^2 = 2MA'^2 + \frac{BC^2}{2}$
On en déduit que $M \in \Delta$ si et seulement si :
$MA^2 - MA'^2 = \frac{BC^2}{4}$
Soit O le milieu de [AA'] ;
$MA^2 - MA'^2 = \frac{BC^2}{4}$
$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA'}) . (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MA'}) = \frac{BC^2}{4} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{AA'} = \frac{BC^2}{8}$. Δ est la droite perpendiculaire à (AA') qui passe par le point H de (AA') défini par $\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{AA'} = \frac{BC^2}{8}$.

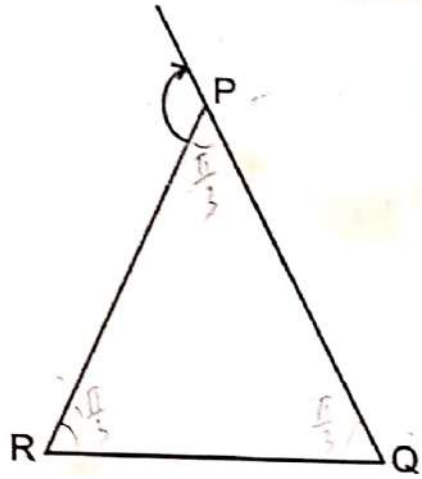
EXERCICE 11 :

Lignes de niveau k ; k ∈ {50, 36, 26, 20}
Soit I le milieu du segment [AB]. On a : $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$
$f(M) = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 = 2MI^2 + IA^2 + IB^2 + 2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB})$
$f(M) = k \Leftrightarrow 2MI^2 + IA^2 + IB^2 = k \Leftrightarrow MI^2 = \frac{k - IA^2 - IB^2}{2} = \frac{k-18}{2}$.

- Si k = 50, alors $MI^2 = \frac{50-18}{2} = 16$. Et la ligne de niveau 50 de f est le cercle de centre I et de rayon 4.
- Si k = 36, alors $MI^2 = \frac{36-18}{2} = 9$. Et la ligne de niveau 36 de f est le cercle de centre I et de rayon 3.
- Si k = 26, alors $MI^2 = \frac{26-18}{2} = 4$. Et la ligne de niveau 26 de f est le cercle de centre I et

CHAPITRE 2 : ANGLES ORIENTES - TRIGONOMETRIE

EXERCICE 1 :



Démontrons que PQR est isocèle

On a : $\frac{-9\pi}{5} = -2\pi + \frac{\pi}{5}$ et $\frac{22\pi}{5} = 4\pi + \frac{2\pi}{5}$

D'où $\frac{9\pi}{5} = \frac{\pi}{5}[2\pi]$ et $\frac{22\pi}{5} = \frac{2\pi}{5}[2\pi]$.

Ainsi $mes(\overrightarrow{QR}\widehat{,}\overrightarrow{QP}) = \frac{\pi}{5}$ et $mes(\overrightarrow{PR}\widehat{,}\overrightarrow{QP}) = \frac{2\pi}{5}$

On sait que $(\overrightarrow{PR}\widehat{,}\overrightarrow{QP}) + (\overrightarrow{PR}\widehat{,}\overrightarrow{QP}) = \hat{\pi}$

D'où $(\overrightarrow{PR}\widehat{,}\overrightarrow{QP}) = \hat{\pi} - mes(\overrightarrow{PR}\widehat{,}\overrightarrow{QP}) = \hat{\pi} - \frac{2\pi}{5} = \frac{3\pi}{5}$

Or $(\overrightarrow{RQ}\widehat{,}\overrightarrow{RP}) + (\overrightarrow{QP}\widehat{,}\overrightarrow{QP}) + (\overrightarrow{PR}\widehat{,}\overrightarrow{RQ}) = \hat{\pi}$. D'où une mesure de $(\overrightarrow{RQ}\widehat{,}\overrightarrow{RP})$ est $\pi - \frac{\pi}{5} - \frac{3\pi}{5} = \frac{\pi}{5}$

Ainsi on a : $mes(\overrightarrow{RQ}\widehat{,}\overrightarrow{RP}) = mes(\overrightarrow{QR}\widehat{,}\overrightarrow{QP}) = \frac{\pi}{5}$. Donc PQR est un triangle isocèle en P.

EXERCICE 2 :

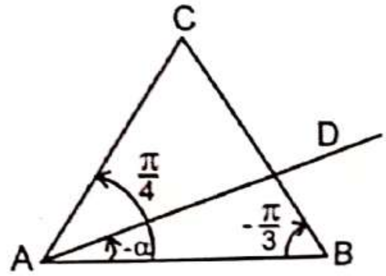
1) **Pour dessiner un tel triangle ABC, on peut :**
placer arbitrairement A et B ;

construire la demi-droite [A,x) telle que $([AB)\widehat{,}[Ax)) = \frac{\hat{\pi}}{4}$

construire la demi-droite (By) telle que $([AB)\widehat{,}[Bx)) = \frac{\hat{\pi}}{3}$

Le point C est alors le point d'intersection des demi-droites [Ax) et [By).

Calcul de $mes(\overrightarrow{CA}\widehat{,}\overrightarrow{CB})$



On a : $mes(\overrightarrow{AB}\widehat{,}\overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{4}$ et $mes(\overrightarrow{BC}\widehat{,}\overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{3}$

Or $mes(\overrightarrow{CA}\widehat{,}\overrightarrow{CB}) + mes(\overrightarrow{AB}\widehat{,}\overrightarrow{AC}) + mes(\overrightarrow{BC}\widehat{,}\overrightarrow{BA}) = \pi$

D'où $mes(\overrightarrow{CA}\widehat{,}\overrightarrow{CB}) = \pi - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}$. Donc $mes(\overrightarrow{CA}\widehat{,}\overrightarrow{CB}) = \frac{5\pi}{12}$

2) **Expression en fonction de α, de $mes(\overrightarrow{AC}\widehat{,}\overrightarrow{AD})$ et $mes(\overrightarrow{BC}\widehat{,}\overrightarrow{AD})$**

On peut écrire $(\overrightarrow{AC}\widehat{,}\overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{AC}\widehat{,}\overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}\widehat{,}\overrightarrow{AD}) = -(\overrightarrow{AB}\widehat{,}\overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AB}\widehat{,}\overrightarrow{AD})$

D'où $mes(\overrightarrow{AC}\widehat{,}\overrightarrow{AD}) = \frac{-\pi}{4} + \alpha$

On a de même $(\overrightarrow{BC}\widehat{,}\overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{BC}\widehat{,}\overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}\widehat{,}\overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{BC}\widehat{,}\overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{BA}\widehat{,}\overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}\widehat{,}\overrightarrow{AD})$

D'où $mes(\overrightarrow{BC}\widehat{,}\overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{3} + \pi + \alpha = \frac{4\pi}{3} + \alpha$.

EXERCICE 3 :

Mesure de $(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC})$ en fonction de α

On a : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) \Rightarrow mes(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) = 2\alpha$

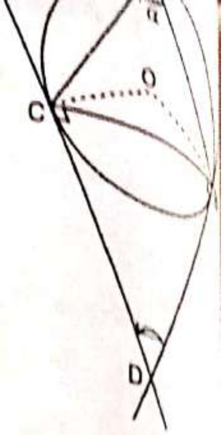
Considérons le quadrilatère OBDC. La somme des mesures de ses angles est égale à 2π ; c'est-à-dire :

$mes(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}) + mes(\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BD}) + mes(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CO}) + mes(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}) = 2\pi$

Or $mes(\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BD}) = mes(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CO}) = \frac{\pi}{2}$

D'où $mes(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}) = 2\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - mes(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB})$

Soit $mes(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}) = \pi + 2\alpha mes(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}) = -mes(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$



N.B : dans cette résolution, l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ a été orienté dans le sens négatif. Dans le sens positif, on aura $mes(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}) = \pi - 2\alpha$.

EXERCICE 4 :

a) $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \sin x \geq 0$

On a $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$; d'où $\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x}$; Soit $\sin x = \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}$; donc $\sin x = \frac{\sqrt{21}}{5}$

b) $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \Rightarrow \cos x \leq 0$

On a $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$; d'où $\cos x = -\sqrt{1-\sin^2 x}$;

Soit $\cos x = -\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}$; donc $\cos x = -\frac{4}{5}$

On a $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ et $\sin 2\theta = 2\sin\theta \cos\theta$

Or, $\cos\theta = \frac{3}{5}$ et $\sin\theta > 0$; d'où $\sin\theta = \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$

Ainsi, $\cos 2\theta = 2\left(\frac{3}{5}\right)^2 - 1$ et $\sin 2\theta = 2 \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{5}$. Donc $\cos 2\theta = -\frac{7}{25}$ et $\sin 2\theta = \frac{24}{25}$.

EXERCICE 5 :

Démontrons que $(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 = 2$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(\cos x + \sin x)^2 = \cos^2 x + \sin^2 x + 2\sin x\cos x = 1 + 2\sin x\cos x$.

$(\cos x - \sin x)^2 = \cos^2 x + \sin^2 x - 2\sin x\cos x = 1 - 2\sin x\cos x$.

Donc $(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 = 1 + 2\sin x\cos x + 1 - 2\sin x\cos x = 2$.

Calcul de cosx et sinx

$\cos x - \sin x = -1$

$\cos x - \sin x = -1 \Rightarrow \cos x = -1 + \sin x$ et $\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Rightarrow (\sin x - 1)^2 + \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin x(\sin x - 1)$

Ainsi $\sin x = 0$ ou $\sin x = 1$.

On en déduit $\cos x = -1$ ou $\cos x = 0$

Donc ($\cos x = -1$ et $\sin x = 0$) ou ($\cos x = 0$ et $\sin x = 1$).

b) $\cos x - \sin x = \frac{1}{2}$

$\cos x - \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \sin x + \frac{1}{2}$ et $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$; d'où $\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)^2 + \sin^2 x = 1$

Soit $2\sin^2 x + \sin x - \frac{3}{4} = 0$. Equation du second degré d'inconnue sinx.

$\Delta = 1 - 4 \times 2 \times \left(-\frac{3}{4}\right) = 7$; d'où $\sin x = \frac{-1+\sqrt{7}}{4}$ ou $\sin x = \frac{-1-\sqrt{7}}{4}$

Donc $\left(\sin x = \frac{-1+\sqrt{7}}{4} \text{ et } \cos x = \frac{1+\sqrt{7}}{4}\right)$ ou $\left(\sin x = \frac{-1-\sqrt{7}}{4} \text{ et } \cos x = \frac{1-\sqrt{7}}{4}\right)$.

EXERCICE 6 :

1) $\cos\frac{\pi}{4} = \cos\left(2 \times \frac{\pi}{8}\right) = 2\cos\frac{2\pi}{8} - 1 \Rightarrow \cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

- $\sin\frac{\pi}{4} = \sin\left(2 \times \frac{\pi}{8}\right) = 2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8} \Rightarrow \sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{2\cos\frac{\pi}{8}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

- $\tan\frac{\pi}{8} = \frac{\sin\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{8}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{2} - 1$

2) $\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3} \Rightarrow \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

- $\sin\frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}\mathrm{con}\frac{\pi}{3} \Rightarrow \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

- $\tan\frac{\pi}{12} = \frac{\sin\frac{\pi}{12}}{\cos\frac{\pi}{12}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \times \frac{2}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} \Rightarrow \tan\frac{\pi}{12} = \frac{4-\sqrt{12}}{2}$.

EXERCICE 7 :

- Pour tous réels p et q, on a :
  cos(p + q) = cospcosq – sinpsinq et cos(p – q) = cospcosq + sinpsinq
  D'où cos(p + q) + cos(p - q) = 2cospcosq (1)
  Posons a = p + q et b = p – q ; alors $p = \frac{a+b}{2}$ et $q = \frac{a-b}{2}$
  En remplaçant ceci dans l'égalité (1), on obtient le résultat ; c'est-à-dire
  $\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$.

- Pour tous réels p et q, on a
  sin(p + q) = sinpcosq + sinqcosp et sin(p – q) = sinpcosq – sinqcosp
  D'où sin(p + q) + sin (p – q) = 2sinpcosq (2)
  En posant a = p + q et b = p – q, on a : $p = \frac{a+b}{2}$ et $q = \frac{a-b}{2}$
  En remplaçant ceci dans l'égalité (2), on obtient le résultat ; c'est-à-dire
  $\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$
  En utilisant ces deux résultats, on déduit

- $\cos a + \cos 4a = 2\cos\dfrac{a+4a}{2}\cos\dfrac{4a-a}{2} = 2\cos\dfrac{3a}{2}\cos\dfrac{5a}{2}$

  $\cos 2a + \cos 3a = 2\cos\dfrac{2a+3a}{2}\cos\dfrac{2a-3a}{2} = 2\cos\dfrac{a}{2}\cos\dfrac{5a}{2}$

  D'où $\cos a + \cos 2a + \cos 3a + \cos 4a = 2\cos\dfrac{5a}{2}\left(\cos\dfrac{a}{2} + \cos\dfrac{3a}{2}\right)$

  $= 2\cos\dfrac{5a}{2}\left(2\cos\dfrac{\frac{a}{2}+\frac{3a}{2}}{2}\cos\dfrac{\frac{a}{2}-\frac{3a}{2}}{2}\right)$

  Soit $\cos a + \cos 2a + \cos 3a + \cos 4a = 4\cos\dfrac{a}{2}\cos a\cos\dfrac{5a}{2}$

- $\sin a + \sin 4a = 2\sin\dfrac{5a}{2}\cos\dfrac{3a}{2}$ et $\sin 2a + \sin 3a = 2\sin\dfrac{5a}{2}\cos\dfrac{a}{2}$

  D'où $\sin a + \sin 2a + \sin 3a + \cos 4a = 2\sin\dfrac{5a}{2}\left(\cos\dfrac{3a}{2} + \cos\dfrac{a}{2}\right)$

  Soit $\sin a + \sin 2a + \sin 3a + \sin 4a = 4\cos\dfrac{a}{2}\cos a\sin\dfrac{5a}{2}$

EXERCICE 8 :

Prouvons que $\cos^3 a = \dfrac{1}{4}(\cos 3a + 3\cos a)$

$$\begin{aligned}\cos 3a + 3\cos a &= \cos(2a+a) + 3\cos a\\ &= \cos 2a\cos a - \sin a\sin 2a + 3\cos a\\ &= (\cos^2 a - \sin^2 a)\cos a - 2\sin^2 a\cos a + 3\cos a\\ &= \cos^3 a - 3\sin^2 a\cos a + 3\cos a = \cos^3 a + 3\cos a(1-\sin^2 a)\end{aligned}$$

Donc $\cos 3a + 3\cos a = 4\cos^3 a$ et on a le résultat.

Remarquons que l'on a :

$\dfrac{11\pi}{12} = \pi - \dfrac{\pi}{12}$ et $\dfrac{7\pi}{12} = \pi - \dfrac{5\pi}{12}$ et $\cos(\pi - x) = -\cos x$ puis $\cos^3(\pi - x) = -\cos^3 x$

Ainsi, $A = \cos^3\dfrac{\pi}{12} + \cos^3\dfrac{5\pi}{12} + \cos^3\dfrac{7\pi}{12} + \cos^3\dfrac{11\pi}{12} \Rightarrow \cos^3\dfrac{\pi}{12} + \cos^3\dfrac{5\pi}{12} - \cos^3\dfrac{\pi}{12} \Rightarrow A = 0$

Mais pour respecter l'esprit de la question, utilisons le résultat précédent :

$A = \cos^3\dfrac{\pi}{12} + \cos^3\dfrac{5\pi}{12} + \cos^3\dfrac{7\pi}{12} + \cos^3\dfrac{11\pi}{12}$

$= \dfrac{1}{4}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + 3\cos\dfrac{\pi}{12} + \cos\dfrac{5\pi}{4} + 3\cos\dfrac{5\pi}{12} + \cos\dfrac{7\pi}{4} + 3\cos\dfrac{7\pi}{12} + \cos\dfrac{11\pi}{4} + 3\cos\dfrac{11\pi}{12}\right)$

ayant comme précédemment $\cos(\pi - x) = -\cos x$. Alors

$A = \dfrac{1}{4}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + \cos\dfrac{5\pi}{4}\right) + \left(3\cos\dfrac{5\pi}{12} + 3\cos\dfrac{7\pi}{12}\right) + \left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + \cos\dfrac{7\pi}{4}\right) + \left(3\cos\dfrac{\pi}{12} + 3\cos\dfrac{11\pi}{12}\right)$

$A = 0$ (chaque paramètre est nulle).

EXERCICE 9 :

Résolution d'équations

a) On sait que $\sin 3x = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - 3x\right) = \cos\left(3x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

D'où $\sin 3x = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \cos\left(3x - \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$

$\Leftrightarrow 3x - \dfrac{\pi}{2} = x - \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $3x - \dfrac{\pi}{2} = -x + \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

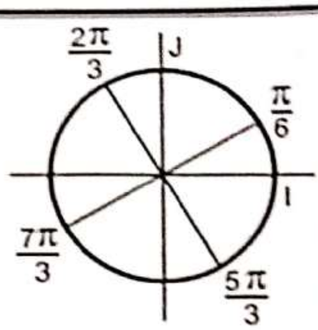
$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi$ ou $x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{2}$; $k \in \mathbb{Z}$.

Les solutions de l'équation sont :

a) les nombres x de la forme $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ ou $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$; $k \in \mathbb{Z}$.

Les solutions à représenter sont :

$\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{6} + \pi$ et $\frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{3}$; soit $\frac{\pi}{6}$; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{7\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{3}$

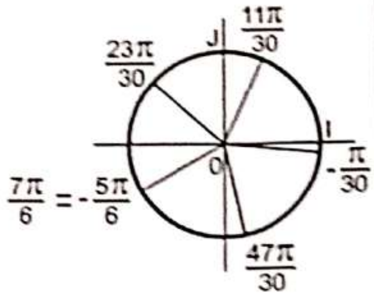


b) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{3} = 3x + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

ou $2x - \frac{\pi}{3} = \pi - 3x - \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = -\frac{5\pi}{6} - 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{30} + \frac{2l\pi}{5}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Les solutions de l'équation b) sont les nombres réels de la forme : $x = -\frac{5\pi}{6} - 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ ou $x = -\frac{\pi}{30} + \frac{2k\pi}{5}$; $k \in \mathbb{Z}$.



$\sin 2x - 2\sin x \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$

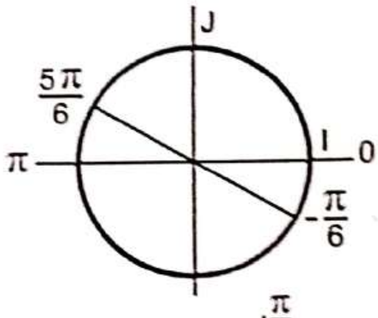
$\Leftrightarrow 2\sin x\left(\cos x - \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0$ ou $\cos x = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

$\cos x = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow x = x + \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = -x - \frac{\pi}{3} + 2k\pi$;

$k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

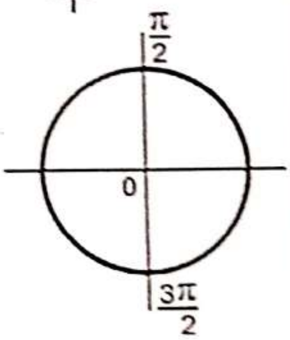
Donc les solutions de l'équation c) sont les nombres de la forme $x = k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ ou $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.



$4\cos^2 x + \sin^2 2x = 0 \Leftrightarrow 4\cos^2 x(1 + 2\sin^2 x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0$

Or $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

Donc les solutions de l'équation d) sont les nombres de la forme $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.



On pose x = cosx. L'équation devient $-2x^2 + x + 6 = 0$;

$\Delta = 1 - 4(-2)\times 6 = 49$. D'où $x = \frac{-1-7}{-4} = 2$ ou $x = \frac{-1+7}{-4} = -\frac{3}{2}$

Soit cosx = 2 ou $\cos x = -\frac{3}{2}$. Or $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos x \in [-1, 1]$.

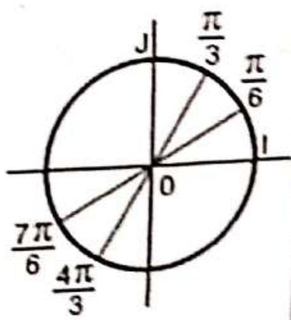
Ce qui n'est pas le cas ici. Donc l'équation e) n'admet pas de solution.

On pose x = sin2x ; l'équation devient : $x^2 - \sqrt{3}x + \frac{3}{4} = 0$;

$\Delta = 3 - 4\times\frac{3}{4} = 0$; d'où $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow \sin 2x = \sin\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $2x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$. Donc les solutions de l'équation f) sont les nombres de la forme : $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ ou $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.



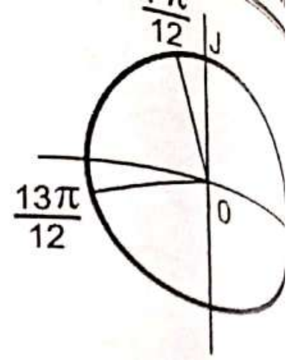
g) $3\cos x - \sqrt{3}\sin x + \sqrt{6} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{3}{\sqrt{12}}\cos x - \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}}\sin x = -\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{12}}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \dfrac{1}{2}\sin x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos\dfrac{\pi}{6}\cos x - \sin\dfrac{\pi}{6}\sin x = \cos\dfrac{3\pi}{4}$

$\Leftrightarrow \cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) = \cos\dfrac{3\pi}{4} \Leftrightarrow x = \dfrac{7\pi}{12} + 2k\pi$ ou $x = -\dfrac{11\pi}{12} + 2k\pi$;

$k \in \mathbb{Z}$. Donc les solutions de g) sont $x = \dfrac{7\pi}{12} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ ou

$x = -\dfrac{11\pi}{12} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.



h) $\cos 2x - \sin 2x = -1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos 2x - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin 2x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \cos\dfrac{\pi}{4}\cos 2x - \sin\dfrac{\pi}{4}\sin 2x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

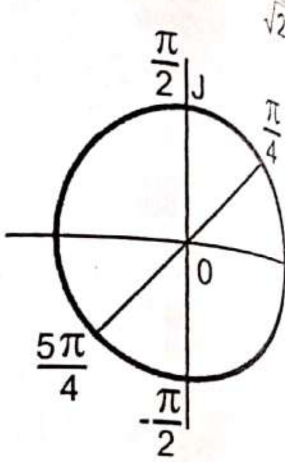
$\cos 2x - \sin 2x = -1 \Leftrightarrow \cos\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \cos\dfrac{3\pi}{4}$

$\Leftrightarrow 2x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi$ ou $2x + \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$ ou $x = -\dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Les solutions de h) sont les nombres de la forme $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$;

$k \in \mathbb{Z}$ ou $x = -\dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.



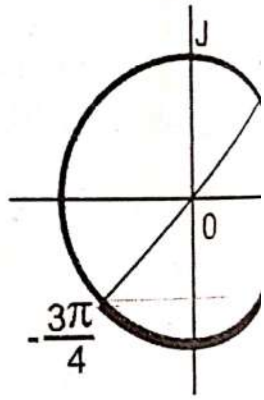
EXERCICE 10 :

a) Soit à résoudre dans $D = \mathbb{R}$ l'inéquation $\sin x - \cos x \leq 0$.
Posons $u(x) = \sin x - \cos x$

$u(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = \cos x \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

Les valeurs $\dfrac{\pi}{4}$ et $-\dfrac{3\pi}{4}$ séparent le cercle trigonométrique en deux secteurs. Sur chacun de ces secteurs, u a un signe constant.

- $u\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \sin\dfrac{\pi}{2} - \cos\dfrac{\pi}{2} = 1 \Rightarrow u\left(\dfrac{\pi}{2}\right) > 0$. Donc les solutions de l'inéquation a) est la réunion dans $\mathbb{R}$ des intervalles de la forme $\left[-\dfrac{3\pi}{4} + k\pi ; \dfrac{\pi}{4} + k\pi\right]$; $k \in \mathbb{Z}$.



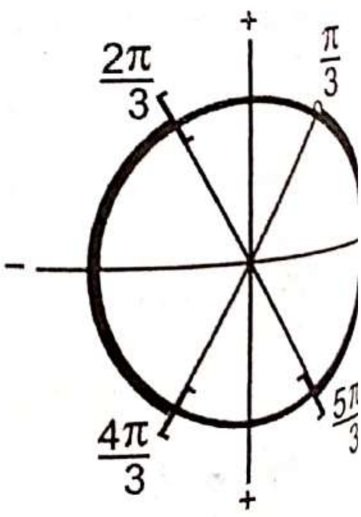
b) $\tan^2 x - 3 < 0$, $D = [0, 2\pi]$
Posons $v(x) = \tan^2 x - 3 = \left(\tan x - \sqrt{3}\right)\left(\tan x + \sqrt{3}\right)$ avec $x \neq \dfrac{\pi}{2}$ et $x = \dfrac{3\pi}{2}$

- $v(x) = 0 \Leftrightarrow \tan x = \sqrt{3}$ ou $\tan x = -\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \tan x = \tan\dfrac{\pi}{3}$ ou $\tan x = \tan\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ ou $x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

$u(0) = \tan^2 0 - 3 = -3 \Rightarrow u(0) < 0$



Donc l'ensemble solution de b) dans D est S ...

c) $\dfrac{1-2\cos x}{2\sin x-\sqrt{3}} > 0$; $D =]-\pi, \pi]$

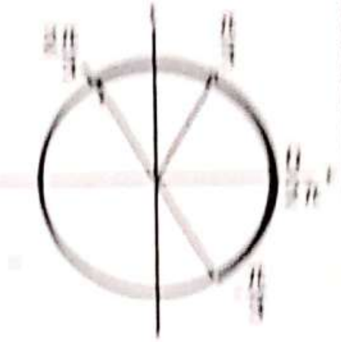
On a : $\dfrac{1-2\cos x}{2\sin x-\sqrt{3}} > 0 \Leftrightarrow (1-2\cos x)(2\sin x-\sqrt{3}) > 0$ avec $2\sin x-\sqrt{3} \neq 0$

Posons $u(x) = (1-2\cos x)(2\sin x-\sqrt{3})$.

$u(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}$ ou $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow \left(x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right)$

ou $\left(x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right)$.



- $u(0) = (-1)\times(-\sqrt{3}) = \sqrt{3}$; $u(0) > 0$. Donc l'ensemble solution de c) dans D est $S = \left]-\frac{\pi}{3} ; \frac{\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{\pi}{3} ; \frac{2\pi}{3}\right[$

N.B. : dans ce cas, particulièrement, $\frac{\pi}{3}$ est racine double. Alors le signe ne s'alterne pas après cette valeur ; mais à partir de $\frac{2\pi}{3}$

d) $\dfrac{2}{4\cos^2 x-1} < 1$; $D = [0, 2\pi]$

$\dfrac{2}{4\cos^2 x-1} < 1 \Leftrightarrow \dfrac{3-4\cos^2 x}{4\cos^2 x-1} < 0 \Leftrightarrow (3-4\cos^2 x)(4\cos^2 x-1) < 0$ avec $4\cos^2 x-1 \neq 0$.

Posons $f(x) = (3-4\cos^2 x)(4\cos^2 x-1)$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \cos^2 x = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$ ou $\cos^2 x = \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$\Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\cos x = \frac{1}{2}$ ou $\cos x = -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \left(x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right)$

ou $\left(x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right)$

ou $\left(x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)$ ou $\left(x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right)$

- $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -3 \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$. Donc l'ensemble solution de d) est :

$S = \left[0, \frac{\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right]$

EXERCICE 11 :

Détermination de m

$$\begin{cases} \sin x + \sqrt{3}\cos x = 1 & (1) \\ \sin x + \cos x = m & (2) \end{cases}$$

L'équation (1) équivaut à $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ admet pour solutions les nombres de la forme

$x = \frac{-\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

Pour que l'ensemble E soit non vide, il faut q[ue]

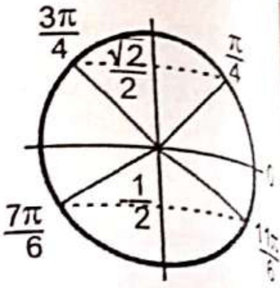
c'est-à-dire $\sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{-\pi}{6} = m$ ou $\sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} = m$; soit $m = \frac{\ldots}{2}$ ou $m = 1$.

Ainsi, pour $m = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$, $E = \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right\}$; $k\in\mathbb{Z}$. Pour $m = 1$, $E = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right\}$; $k\in\mathbb{Z}$.

EXERCICE 12 :

a) $\begin{cases} \sin x \le \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2\sin x + 1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right]$

Donc $S = \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right]$



b) $\begin{cases} \sin 2x < \frac{\sqrt{3}}{2} & (1) \\ \cos 2x \ge -\frac{1}{2} & (2) \end{cases}$ $D = \mathbb{R}$

(1) $\sin 2x < \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 2x \in \left]\frac{-4\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right[$; $k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \left]-\frac{2\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi\right[$; $k\in\mathbb{Z}$

Donc la solution de (1) est la réunion des intervalles de la forme $\left]-\frac{2\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi\right[$; $k\in\mathbb{Z}$

(2) $\cos 2x \ge -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x \in \left[-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right]$ $k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x \in \left[-\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi\right]$; $k\in\mathbb{Z}$

La solution de (2) est la réunion des intervalles de la forme $\left[-\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi\right]$; $k\in\mathbb{Z}$.

En faisant l'intersection des deux solutions, on obtient la solution du système b est la réun[ion] des intervalles de la forme; $\left[-\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi\right[$; $k\in\mathbb{Z}$.

EXERCICE 13 :

1) **Existence de deux réels r et φ**

a et b étant deux nombres non tous nuls, il existe un réel non nul r tel que :

$a^2 + b^2 = r^2$ ie $\left(\frac{a}{r}\right)^2 + \left(\frac{b}{r}\right)^2 = 1$.

De plus, pour tout $\theta\in\mathbb{R}$, $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$; d'où l'existence d'un réel φ tel que $\frac{a}{r} = \cos\varphi$

$\frac{b}{r} = \sin\varphi$. Donc, il existe deux réels r et φ, $r \neq 0$ tels que $a = r\cos\varphi$ et $b = r\sin\varphi$.

2)

a) Résolution du système

$\begin{cases} x\cos t + y\sin t = a \\ -x\sin t + y\cos t = b \end{cases}$; $D = \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix} = 1$; $D_x = \begin{vmatrix} a & \sin t \\ b & \cos t \end{vmatrix} = a\cos t - b\sin t$

$D_y = \begin{vmatrix} \cos t & a \\ -\sin t & b \end{vmatrix} = b\cos t + a\sin t$; donc $S = \{(a\cos t - b\sin t ; b\sin t + a\sin t)\}$

CHAPITRE 3 : GEOMETRIE ANALYTIQUE DU PLAN

Le plan est muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

EXERCICE 1 :

1) L'équation cartésienne de la droite (D) est de la forme $x + 2y + c = 0$.
Comme $A \in (D)$, on a : $x_A + 2y_A + c = 0$. D'où $3 - 2 + c = 0$; soit $c = -1$. Donc (D) : $x + 2y - 1 = 0$

2) **Détermination d'un vecteur normal à (Δ)**
   a) (Δ) : $3x - 5y + 1 = 0$. Un vecteur normal à (Δ) est $\vec{n}(3, -5)$
   b) (Δ) : $7x = 3 \Leftrightarrow 7x + 0y = 3$. Un vecteur normal à (Δ) est $\vec{n}(7, 0)$
   c) (Δ) a pour équation cartésienne $ax + by + c = 0$ et les coordonnées de son vecteur directeur vérifient l'équation $ax + by = 0$. Or $\vec{u}(1, 2)$. D'où une équation de (Δ) est $-2x + y + c = 0$
   Comme $A \in (\Delta)$, on en déduit que $-2x(-1) + 2 + c = 0$. Soit $c = -4$. Donc (Δ) : $-2x + y - 4 = 0$.

EXERCICE 2 :

Un vecteur directeur de la droite d'équation $x - y + 3 = 0$ est $\vec{n}(1, 1)$.
C'est aussi un vecteur normal à la droite (D). Ainsi une équation cartésienne de (D) est $x + y + c = 0$
Comme $A(3, -2) \in D$, on en déduit : $3 - 2 + c = 0$ soit $c = -1$. Donc une de (D) est $x + y - 1 = 0$

EXERCICE 3 :

1) **Vecteurs unitaires normaux à (Δ)**
Le vecteur $\vec{n}(3, -2)$ est normal à (Δ) ; $\|\vec{n}\| = \sqrt{13}$
Les vecteurs $\vec{V} = \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \frac{3}{\sqrt{13}}\vec{i} - \frac{2}{\sqrt{13}}\vec{j}$ et $-\vec{V}$ sont des vecteurs unitaires normaux à (Δ).

2) **Equations normales de (Δ)**
Elles sont les suivantes $\frac{3}{\sqrt{12}}x - \frac{2}{\sqrt{13}}y + \frac{7}{\sqrt{13}} = 0$ et $\frac{-3}{\sqrt{13}}x + \frac{2}{\sqrt{13}}y - \frac{7}{\sqrt{13}} = 0$

EXERCICE 4 :

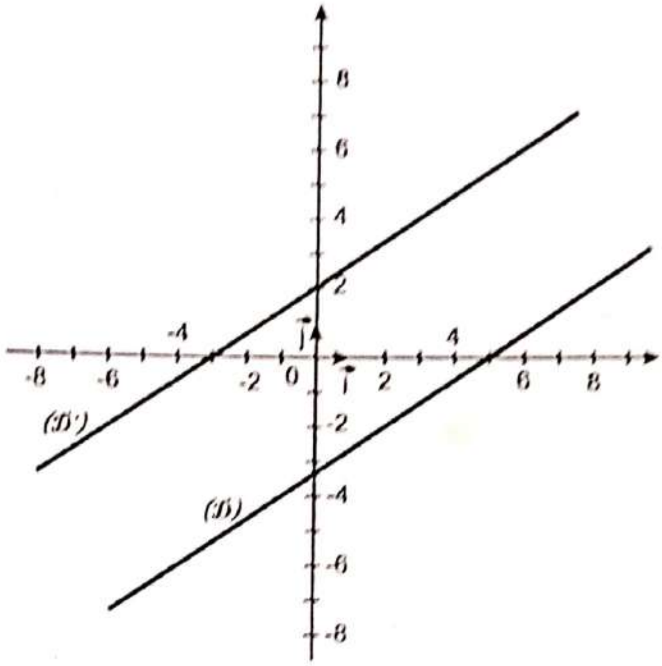
A, B et C ne sont pas alignés
$\overrightarrow{AB}(1, -4)$, $\overrightarrow{AC}(-5, -6)$ et $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -4 & -6 \end{vmatrix} = -26$; $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \neq 0 \Rightarrow$ les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont libres. Donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

Coordonnées du centre du cercle circonscrit
Soit $\Omega(x_0, y_0)$ ce centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
On a $A\Omega = B\Omega = C\Omega$ c'est-à-dire $A\Omega^2 = B\Omega^2 = C\Omega^2$.
$A\Omega^2 = B\Omega^2 \Leftrightarrow (x_0 - 3)^2 + (y_0 - 5)^2 = (x_0 - 4)^2 + (y_0 - 1)^2 \Leftrightarrow 2x_0 - 8y_0 = -17$
Et $B\Omega^2 = C\Omega^2 \Leftrightarrow (x_0 - 4)^2 + (y_0 - 1)^2 = (x_0 + 2)^2 + (y_0 + 1) \Leftrightarrow 3x_0 + y_0 = 3$.

Ainsi x_0 et y_0 vérifient le système $\begin{cases} 2x_0 - 8y_0 = -17 \\ 3x_0 + y_0 = 3 \end{cases}$; d'où $x_0 = \frac{7}{26}$ et $y_0 = \frac{57}{26}$.

Donc Ω a pour coordonnées $x_0 = \frac{7}{26}$ et $y_0 = \frac{57}{26}$

EXERCICE 5 :



Lieu des points M tels que : $\left|\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AM})\right| = 8$.

On a : $\overrightarrow{AB}(+3, 2)$,

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x+2 \\ y+2 \end{pmatrix}$ et $\left|\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AM})\right| = 2x - 3y - 2$

$\left|\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AM})\right| = 8$

$\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AM}) = 8$ ou $\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AM}) = -8$

$\Leftrightarrow 2x - 3y - 10 = 0$ ou $2x - 3y + 6 = 0$

Posons (D) : $2x - 3y = 10$ et (D') : $2x - 3y + 6 = 0$

Le lieu des points M tels que $\left|\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AM})\right| = 8$ est la réunion des droites (D) et (D').

EXERCICE 6 :

1) Coordonnées des points d'intersection

Soit (x, y) les coordonnées d'un point d'intersection du cercle $(\mathcal{C})$ et de la droite (D). Elles vérifient les équations cartésiennes de $(\mathcal{C})$ et de (D) en même temps.

Ainsi, de l'équation $x + y - 5 = 0$, on a $y = 5 - x$. En remplaçant y par cette valeur dans l'équation de $(\mathcal{C})$, on obtient $x^2 - 8x + 12 = 0$; soit $x = 2$ ou $x = 6$. Et on déduit $y = 3$ et $y = -1$.

Donc, ces points d'intersection sont A(2, 3) et B(6, -1).

2) Equations des tangentes en A et en B à $(\mathcal{C})$

La tangente à $(\mathcal{C})$ en un point de coordonnées (x_0, y_0) a pour équation :

$xx_0 + yy_0 - (x + x_0) + 2(y + y_0) - 21 = 0$ (cf exercice 8).

Ainsi, les tangentes à $(\mathcal{C})$ en A et en B ont respectivement pour équations :

$x + 5y - 17 = 0$ et $5x + y - 29 = 0$.

EXERCICE 7 :

1) Equation cartésienne du cercle $(\mathcal{C})$

Cette équation s'écrit : $(x-2)^2 + (y-1)^2 = R^2$

Le rayon R se définie par : $R = d(A, D)$.

On a : $d(A, D) = \dfrac{|2x_A - y_A + 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \dfrac{6}{\sqrt{5}}$. D'où $R = \dfrac{6}{\sqrt{5}}$

Donc, l'équation cherchée est : $x^2 + y^2 - 4x - 2y - \frac{11}{5} = 0$

Coordonnées du point de contact

Soit M(x, y) le point de contact. On a : $2x - y + 3 = 0$ et $x^2 + y^2 - 4x - 2y - \frac{11}{5} = 0$.

Soit $y = 2x + 3$ et $x^2 + (2x+3)^2 - 4x - 2(2x+3) - \frac{11}{5} = 0$.

L'équation $5x^2 + 4x + \frac{4}{5} = 0$ a pour solution $x = -\frac{2}{5}$. Et de la relation $y = 2x + 3$, on en dé

$y = \frac{11}{5}$. Donc le point de contact a pour coordonnées $(-\frac{2}{5}, \frac{11}{5})$.

EXERCICE 8 :

$(\mathcal{C})$ est le cercle d'équation : $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$

Soit Ω le centre de $(\mathcal{C})$, (T) la tangente à $(\mathcal{C})$ en un point $A(x_0, y_0)$ et $M(x, y)$ un point de (T)

L'équation cartésienne de (T) est donnée par : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{\Omega A} = 0$.

De l'équation de $(\mathcal{C})$, on déduit que Ω a pour coordonnées (-a, -b).

Ainsi, $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{\Omega A} = 0 \Leftrightarrow (x - x_0)(x_0 + a) + (y - y_0)(y_0 + b) = 0$

$\Leftrightarrow xx_0 + yy_0 + ax + by - x_0^2 - y_0^2 - ax_0 - by_0 = 0 \quad (1)$

Or, $A \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 + 2ax_0 + 2by_0 + c = 0 \Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 + ax_0 + by_0 = -ax_0 - by_0 - c$

Donc (1) $\Leftrightarrow xx_0 + yy_0 + ax + by + ax_0 + by_0 + c = 0 \Leftrightarrow xx_0 + yy_0 + a(x + x_0) + b(y + y_0) - c =$

Nous obtenons ainsi l'équation de la tangente à $(\mathcal{C})$ au point A.

EXERCICE 9 :

1) **Démontrons que les droites (D) et (D') sont parallèles**

On a : $3 \times 8 - (-4) \times (-6) = 24 - 24$. Donc les droites (D) et (D') sont parallèles d'après propriété P_2. du cours.

2) **Représentation paramétrique du cercle**

cette représentation est de la forme : $\begin{cases} x = a + r\cos\theta \\ y = b + r\sin\theta \end{cases}$; $(\theta \in \mathbb{R})$ où (a, b) sont les coordonn

du centre Ω du cercle, et r son rayon. On a $d(\Omega, D) = d(\Omega, D') = r$ et $b = 0$.

Or, $d(\Omega, D) = \frac{|3a - 4 \times 0 + 6|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{1}{5}|3a + 6|$. Et $d(\Omega, D') = \frac{|-6a + 8 \times 0 + 9|}{\sqrt{(-6)^2 + 8^2}} = \frac{1}{5}|3a - 4|$

D'où $d(\Omega, D) = d(\Omega, D') \Leftrightarrow |3a + 6| = |3a - 4| \Leftrightarrow 3a + 6 = 3a - 4$

ou $3a + 6 = -3a + 4 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{3}$. On en déduit que $r = \frac{1}{5}\left|3(-\frac{1}{3}) + 6\right| = 1$

Donc la représentation cherchée est $\begin{cases} x = -\frac{1}{3} + \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}$; $(\theta \in \mathbb{R})$.

EXERCICE 10 :

Equations des bissectrices

Un point M(x, y) appartient aux bissectrices si et seulement s'il est équidistant des deux dro

c'est-à-dire si et seulement si ses coordonnées vérifient : $\frac{|3x + 4y - 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|4x + 3y - 2|}{\sqrt{4^2 + 3^2}}$.

C'est-à-dire si $|3x + 4y - 1| = |4x + 3y - 2|$. Soit $7x + 7y - 3 = 0$ ou $x - y - 1 = 0$.

Donc les bissectrices ont pour équations respectives $7x + 7y - 3 = 0$ et $x - y - 1 = 0$.

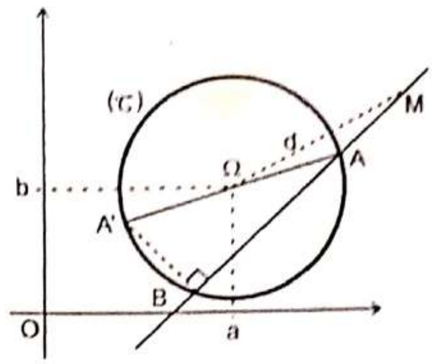
EXERCICE 11 :

1) Démontrons l'égalité $\overrightarrow{MA}\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA'}\overrightarrow{MA}$

Pour tout M ainsi défini, on a : $\overrightarrow{MA}\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA'}\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA'}) = -\overrightarrow{MA}\overrightarrow{BA'}$

Or, [AA'] est un diamètre du cercle $(\mathcal{C})$ et B est un point de $(\mathcal{C})$.

D'où $mes(\overrightarrow{BM}\,;\widehat{\ }\overrightarrow{BA'}) = \frac{\pi}{2}$ et $\overrightarrow{MA}\overrightarrow{BA'} = 0$. Donc $\overrightarrow{MA}\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA'}\overrightarrow{MA}$.



2) **Déduisons que** $\overrightarrow{MA}\overrightarrow{MB} = d^2 - R^2$

On a : $\overrightarrow{MA'}\overrightarrow{MA} = (\overrightarrow{M\Omega} + \overrightarrow{\Omega A'})(\overrightarrow{M\Omega} + \overrightarrow{\Omega A})$

$= M\Omega^2 + \overrightarrow{M\Omega}(\overrightarrow{\Omega A} + \overrightarrow{\Omega A'}) + \overrightarrow{\Omega A'}\overrightarrow{\Omega A}$

Or $\overrightarrow{\Omega A} + \overrightarrow{\Omega A'} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{\Omega A'}\overrightarrow{\Omega A} = \Omega A'\,\Omega A \cos\pi = -R^2$.

D'où $\overrightarrow{MA'}\overrightarrow{MA} = M\Omega^2 - R^2 = d^2 - R^2$.

Donc, $\overrightarrow{MA}\overrightarrow{MB} = d^2 - R^2$ (car $\overrightarrow{MA}\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA'}\overrightarrow{MA}$).

EXERCICE 12 :

1) Les équations cartésiennes de (AB) et (AC) sont données par :

$\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0$ et $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC}) = 0$; c'est-à-dire : $-ax - by + ab = 0$ et $-ax - cy + ac = 0$

Donc, on a : (AB) : $ax + by - ab = 0$ et (AC) : $ax + cy - ac = 0$

M(x, y) un point du plan équidistant à (AB) et à (AC).

On a : d(M, (AB)) = d(M, (AC)) ; c'est-à-dire : $\frac{|ax + by - ab|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|ax + cy - ac|}{\sqrt{a^2 + c^2}}$

Soit $\frac{ax + by - ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{ax + cy - ac}{\sqrt{a^2 + c^2}}$ ou $\frac{ax + by - ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} = -\frac{ax + cy - ac}{\sqrt{a^2 + c^2}}$ Ou encore,

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}}\right)x + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}}\right)y - \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{ac}{\sqrt{a^2 + c^2}} = 0 \quad (1)$$

Ou $$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}}\right)x + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}}\right)y - \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \frac{ac}{\sqrt{a^2 + c^2}} = 0 \quad (2)$$

Soit (Δ) et (Δ') les droites d'équations respectives (1) et (2).

Il est clair que l'ensemble des point équidistants à (AB) et à (AC) est la réunion des deux droites (Δ) et (Δ').

Posons $\alpha = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ et $\beta = \frac{1}{\sqrt{a^2 + c^2}}$. Les vecteurs $\vec{n}(\alpha a - \beta a, \alpha b - \beta c)$ et $\vec{n'}(\alpha a + \beta a, \alpha b + \beta c)$ sont normaux respectivement à (Δ) et (Δ') ; on a

$\vec{n}.\vec{n'} = (\alpha a - \beta a)(\alpha a + \beta a) + (\alpha b - \beta c)(\alpha b + \beta c)$

$\vec{n}.\vec{n'} = (\alpha^2 - \beta^2)a^2 + \alpha^2 b^2 - \beta^2 c^2$

$\vec{n}.\vec{n'} = \left(\frac{1}{a^2 + b^2} - \frac{1}{a^2 + c^2}\right)a^2 + \frac{b^2}{a^2 + b^2} - \frac{c^2}{a^2 + c^2} = 0$

Donc $(\Delta)\perp(\Delta')$ et on a le résultat.

Une équation du second degré dont les solutions sont les abscisses des points I et J

Soit M(x 0) un point de (BC).

On a : d(M, (AB)) = d(M, (AC)) ; c'est-à-dire : $\frac{|ax - ab|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|ax - ac|}{\sqrt{a^2 + c^2}} \Leftrightarrow \frac{(x - b)^2}{a^2 + b^2} = \frac{(x - c)^2}{a^2 + c^2}$

Soit : $(c + b)x^2 + 2(a^2 - bc)x - a^2(c + b) = 0$ (1)

Cette dernière égalité est une équation du second degré en x car $|c| \neq |b|$ et Car $|c| \neq |b|$.

$\Delta' = (a^2 - bc)^2 + a^2(c + b)^2$.

$\Delta' > 0$ car si $\Delta' = 0$, alors $a^2 - bc = 0$ et $c + b = 0$.

Or $|c| \neq |b|$. L'équation (1) admet deux solutions qui sont les abscisses des points I et J.

3) Démontrons que $\frac{IB}{IC} = \frac{JB}{JC} = \frac{AB}{AC}$

$IB.JC = (b - x_I)(c - x_J)$ et $JB.IC = (x_J - b)(c - x_I)$

L'équation (1) de la question (2) peut encore s'écrire : $x^2 - \frac{2(bc - a^2)}{b + c}x - a^2 = 0$

x_I et x_J étant solutions de cette équation, on a : $x_I + x_J = \frac{2(bc - a^2)}{b + c}$ et $x_I x_J = -a^2$.

de plus, $IB.JC - JB.IC = (b - x_I)(c - x_J) - (x_J - b)(c - x_I)$

$= 2bc - (b + c)(x_I + x_J) + 2x_I x_J$

$= 2bc - (b + c)\frac{2bc - 2a^2}{b + c} - 2a^2 = 0$

D'où $IB.JC = JB.IC$ c'est-à-dire $\frac{IB}{IC} = \frac{JB}{JC}$

D'autre part, $AC = \sqrt{a^2 + c^2}$ et $AB = \sqrt{a^2 + b^2}$

D'où $(IB.AC)^2 - (IC.AB)^2 = (b - x_I)^2(a^2 + c^2) - (c - x_I)^2(a^2 + b^2)$

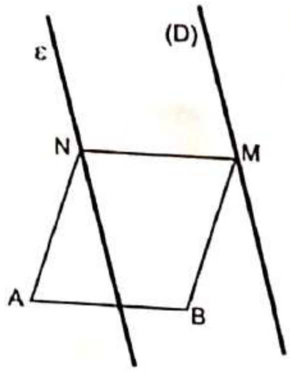
$= (c - b)\left[(c + b)x_I^2 + 2(a^2 - bc)x_I - a^2(c + b)\right]$.

Or x_I est solution de l'équation (1) de la question 2).

D'où $(IB.AC)^2 - (IC.AB)^2 = 0 \Leftrightarrow IB.AC = IC.AB \Rightarrow \frac{IB}{IC} = \frac{AB}{AC}$. Donc $\frac{IB}{IC} = \frac{JB}{JC} = \frac{AB}{AC}$.

CHAPITRE 4 : ISOMETRIES DU PLAN

EXERCICE 1 :



1) ABMN est un parallélogramme. Donc $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BA}$ et f est la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$.

2) ε est l'image de (D) par la translation f. Donc ε est une droite parallèle à (D).

EXERCICE 2 :

(D) : $2x - 3y + 4 = 0$; $\vec{u}(1, 2)$

) **Expression analytique de $t_{\vec{u}}$**

Soit M(x, y) et M'(x', y') deux points du plan.

$M' = t_{\vec{u}}(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x'-x = 1 \\ y'-y = 2 \end{cases}$. Donc l'expression analytique cherchée est : $\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y + 2 \end{cases}$

) **Equation cartésienne de (D')**

Soient M(x, y) un point de (D), M'(x', y') un point de (D') image de (D) par $t_{\vec{u}}$

On a : $\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y + 2 \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} x = x'-1 \\ y = y'-2 \end{cases}$

En remplaçant x et y dans l'équation de (D), on obtient :

$2(x' - 1) - 3(y' - 2) + 4 = 0$; soit $2x' - 3y' + 8 = 0$

Donc une équation cartésienne de (D') est $2x - 3y + 8 = 0$.

(ERCICE 3 :

Soient M et N deux points ; M' et N' leurs images par f.

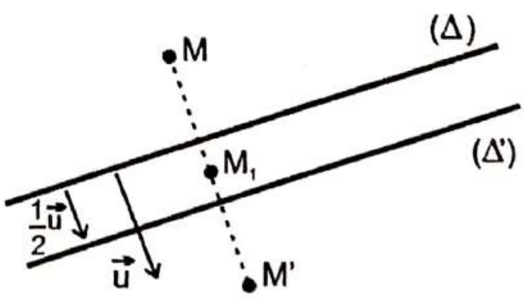
f est une translation si et seulement si pour tous M, N ; $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'}$

C'est-à-dire $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = \alpha\overrightarrow{NA} + \beta\overrightarrow{NB} + \gamma\overrightarrow{NC}$ ou encore $(\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{MN} = \vec{0}$.

f est donc une translation si et seulement si $\alpha + \beta + \gamma = 0$.

Comme à la question précédente, on montre que g est une translation si et seulement si $\alpha+\beta+\gamma=1$.

ERCICE 4 :



sait qu'il existe une droite (Δ') et une seule telle que $S_{\Delta} = t_{\vec{u}}$. En composant cette égalité à droite par S_{Δ},

ı : $S_{\Delta'} \circ S_{\Delta} \circ S_{\Delta} = t_{\vec{u}} \circ S_{\Delta} \Leftrightarrow S_{\Delta'} = t_{\vec{u}} \circ S_{\Delta}$ car $S_{\Delta} \circ S_{\Delta} = Id$.

c $t_{\vec{u}} \circ S_{\Delta}$ est la symétrie orthogonale d'axe (Δ'), image

Δ) par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\vec{u}$.

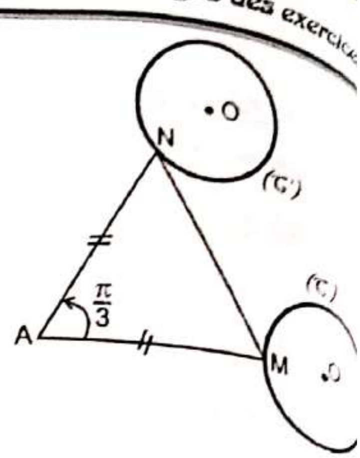
M) = $t_{\vec{u}} \circ S_{\Delta}(M) = t_{\vec{u}}(M_1) = M'$.

ERCICE 5 :

On considère la figure ci-dessous.

e triangle AMN est équilatéral direct donc AM = AN et $(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}}) = \frac{\pi}{3}$.

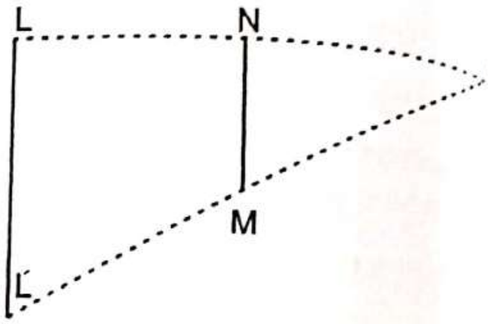
La transformation f qui à M associe N est une rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.



2) Si M décrit un cercle (𝒞) de centre O et de rayon R, alors N décrit le cercle (𝒞') = f(𝒞) de centre O' = f(O) et de rayon R.

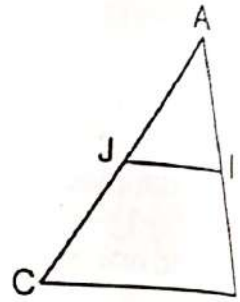
EXERCICE 6 :

1) Soit L un point du plan ;
$S_M \circ S_N(L) = S_M(L_1) = L'$
et $\overrightarrow{LL'} = 2\overrightarrow{NM}$
Donc $S_M \circ S_N$ est la translation de vecteur $2\overrightarrow{NM}$



2) Soient $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$ et M un point. Choisissons arbitrairement un point N distinct de M tel que $\overrightarrow{NM} = \frac{1}{2}\vec{u}$. On sait d'après la question 1) que :
$S_M \circ S_N = t_{2\overrightarrow{NM}} = t_{\vec{u}}$.
Donc toute translation est la composée de deux symétries centrales dont l'une est arbitrairement choisie.

) **Application**
D'après ce qui précède, $S_J \circ S_I = t_{2\overrightarrow{IJ}} = t_{\overrightarrow{BC}}$.
En composant cette égalité à droite par S_I et à gauche par S_J, on obtient successivement $S_J \circ (S_I \circ S_I) = t_{\overrightarrow{BC}} \circ S_I$ et $(S_J \circ S_J) \circ S_I = S_J \circ t_{\overrightarrow{BC}}$.
C'est-à-dire $S_J = t_{\overrightarrow{BC}} \circ S_I$ et $S_I = S_J \circ t_{\overrightarrow{BC}}$
Donc $t_{\overrightarrow{BC}} \circ S_I$ et $S_J \circ t_{\overrightarrow{BC}}$ sont respectivement les symétries de centres J et I.

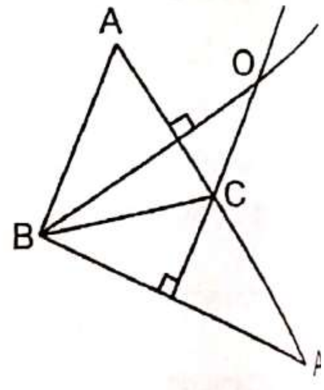


XERCICE 7 :

On a AB = BC = AC = CA'.
En particulier AB = CA' ; donc r existe.

Le centre O de la rotation r est le point d'intersection des médiatrices de [AC] et [BA']. L'angle θ de la rotation est $\frac{\pi}{3}$ car

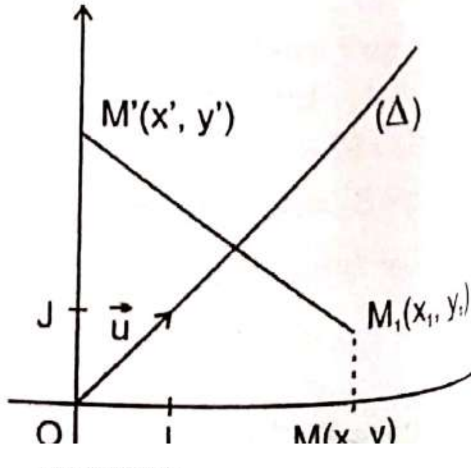
$\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA'}}) = \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \frac{\pi}{3}$.



ERCICE 8 :

Les transformations S_{OI} et S_Δ ont pour expressions analytiques :

$S_{OI} : \begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$ et $S_\Delta : \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$



xpressions analytiques de r

(1, 1) est un vecteur directeur de (Δ).

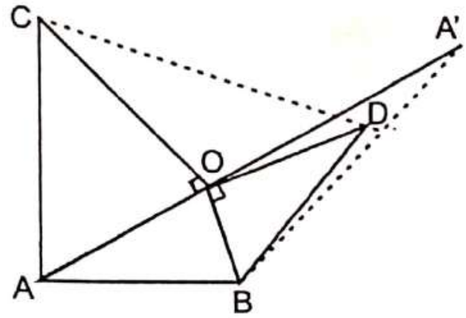
) et (OI) sont sécants ...

D'où $\alpha = \frac{\pi}{2}$ c'est-à-dire $S_{\Delta} \circ S_{(OI)} = r$.

De plus, on a $r(M) = S_{\Delta} \circ S_{(OI)}(M) = S_{\Delta}(M_1) = M'$ tels que :

$\begin{cases} x_1 = x \\ y_1 = -y \end{cases}$ et $\begin{cases} x' = y_1 \\ y' = x_2 \end{cases}$; c'est-à-dire $\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$. Donc l'expression analytique de r est $\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$.

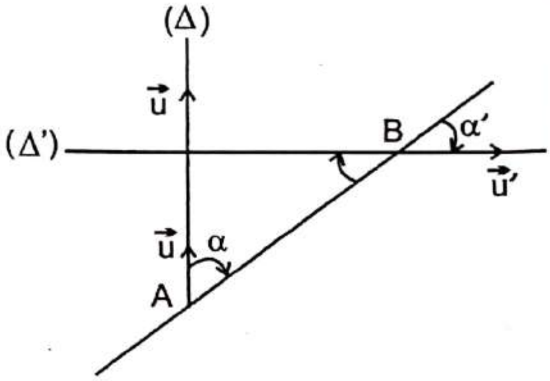
EXERCICE 9 :



Soit r la rotation qui transforme A en C et C en A'.
r transforme également D en B. Ainsi, on a : r(C) = A' et r(D) = B.
d'où A'B = CD (car r conserve la distance) et $(\widehat{\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{CD}}) = \hat{\alpha}$ où α est l'angle de la rotation r.

Or, r est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$. Donc A'B = CD et $(\widehat{\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{CD}}) = \hat{\frac{\pi}{2}}$. Et [A'B] et [CD] sont perpendiculaires et de même longueur.

EXERCICE 10 :



1) Détermination de (Δ)

Les droites (AB) et (Δ) sont sécantes en A

Soi $\vec{u}$ un vecteur directeur de (Δ) d'origine A. On a :

$r(A, -\frac{2\pi}{3}) = S_{(AB)} \circ S_{\Delta} \Rightarrow (\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{AB}}) = \hat{\frac{\pi}{3}} = \hat{\alpha}$

Donc (Δ) est la droite passant par A et faisant un angle de $\frac{\pi}{3}$ avec (AB), (figure ci-contre).

2) Détermination de (Δ')

Les droites (AB) et (Δ') sont sécantes en B.

Soit $\vec{u'}$ un vecteur directeur de (Δ') d'origine B. on a :

$r'(B, -\frac{2\pi}{3}) = S_{\Delta'} \circ S_{(AB)} \Rightarrow (\widehat{\overrightarrow{AB}, \vec{u'}}) = -\hat{\frac{\pi}{3}} = \hat{\alpha}'$.

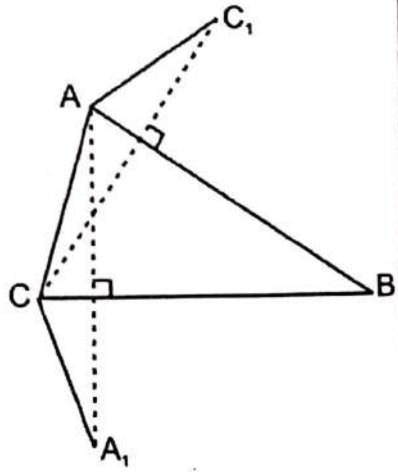
Donc (Δ') est la droite passant par B et faisant un angle de $\frac{\pi}{3}$ avec (AB), suivant la figure ci-dessus.

3) Nature et éléments caractéristiques de r' ∘ r

r'∘r est la rotation de centre Ω, intersection des droites (Δ) et (Δ') et d'angles $-\frac{2\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{4\pi}{3}$.

Remarque : $r' \circ r = S_{\Delta'} \circ S_{(AB)} \circ S_{(AB)} \circ S_{\Delta} = S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}$.

EXERCICE 11 :



L'énoncé suggère clairement l'utilisation des symétries orthogonales $S_{(AB)}$ et $S_{(BC)}$.
En effet $S_{(AB)}$ transforme C_1 en C et laisse A invariant.
$S_{(BC)}$ transforme A et A_1 et laisse C invariant.
Pour passer des points A, C_1 aux points A_1, C, il faut effectuer successivement les deux symétries.

Donc considérons la transformation $r = S_{(BC)} \circ S_{(AB)}$

On a : $r(A) = S_{(BC)}(S_{(AB)}(A)) = S_{(BC)}(A) = A_1$ et $r(C_1) = S_{(BC)}(S_{(AB)}(C_1)) = S_{(BC)}(C) = C$

La composée des symétries orthogonales d'axes sécants (en B) $S_{(AB)}$ et $S_{(BC)}$ est la rotation de centre B et d'angle $2(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$.

D'après les propriétés de la rotation $AC_1 = A_1C$ (conservation de la distance) et $(\overrightarrow{AC_1}, \overrightarrow{A_1C}) = 2(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$.

EXERCICE 12 :

$$f : M \mapsto M' \begin{cases} x' = y - 1 \\ y' = x + 1 \end{cases}$$

1) Soit $M(x, y)$ un point invariant par f, on a : $\begin{cases} x = y - 1 \\ y = x + 1 \end{cases}$

   D'où (x, y) vérifie l'équation : $x - y + 1 = 0$

   Donc l'ensemble des points invariants par f est la droite (Δ) d'équation cartésienne : $x - y + 1 = 0$ et dont un vecteur directeur est $\vec{u}(1, 1)$

2) Le milieu I de [MM'] a pour coordonnées $\left(\frac{x + x'}{2}, \frac{y + y'}{2}\right)$ c'est-à-dire $I\left(\frac{x + y - 1}{2}, \frac{x + y + 1}{2}\right)$ avec $M(x, y)$ et $M'(x', y')$

   De plus, $x_I - y_I + 1 = \frac{x + y - 1}{2} - \frac{x + y + 1}{2} + 1 = 0$. Donc I appartient à la droite (Δ)

3) On a $\overrightarrow{MM'}(x' - x, y' - y)$ c'est-à-dire $\overrightarrow{MM'}(y - x - 1, x - y + 1)$

   Ainsi, $\vec{u}.\overrightarrow{MM'} = 1(y - x - 1) + 1(x - y + 1) = 0$

   Donc pour tout M, les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{MM'}$ sont orthogonaux

4) Il vient de ce qui précède que f est la symétrie orthogonale d'axe (Δ) de vecteur directeur $\vec{u}(1, 1)$ et dont une équation cartésienne est $x - y + 1 = 0$

EXERCICE 13 :

Nature du triangle ICE

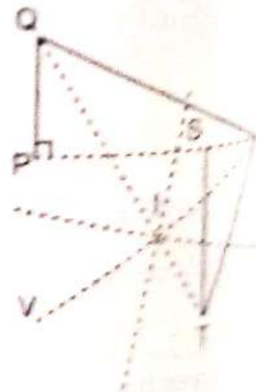
Considérons le quart de tour direct r de centre C

$r(D) = B$ et $r(A) = A'$ tel que E soit le milieu de [BA']. Ainsi, [BA'] est l'image de [DA] par r. On déduit que $r(I) = E$ car r est une isométrie

Donc conserve le milieu. D'où $IC = EC$ et $mes(\overrightarrow{CI}, \overrightarrow{CE}) = \frac{\pi}{2}$

Donc le triangle ICE est rectangle et isocèle en C

EXERCICE 14 :



1) La rotation r transforme SRT en PQR. Comme PR = ST, on déduit que r transforme [ST] en [PR]. Or [ST] et [PR] sont perpendiculaires. Donc la mesure de l'angle de la rotation r est $+\frac{\pi}{2}$.

   $r(P) = Q$ et $r(T) = R$; d'où I est le point d'intersection des médiatrices des segments [QR] et [TR]

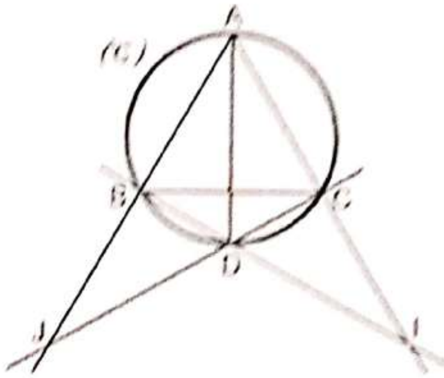
2) $V = S_I(R)$

On a $r(V) = I$, $r(S) = P$ et $r(G) = V$
Donc IPV est l'image par r de VSG

EXERCICE 15 :

Soient les symétries orthogonales $S_{(AB)}$ et $S_{(AC)}$.
On a : $S_{(AB)}(P) = M$ d'une part et $S_{(AC)}(M) = Q$.
Or, $S_{(AC)} \circ S_{(AB)}$ est la rotation de centre A et d'angle de mesure $2(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})[2\pi]$ c'est-à-dire $\pi[2\pi]$; car le triangle ABC est rectangle en A.
Autrement dit, $S_{(AC)} \circ S_{(AB)}$ est la symétrie de centre A.
Elle transforme P en Q ; donc A est le milieu de [PQ].

EXERCICE 16 :



1) Les droites (BD) et (AC) sont sécantes en un point I.
   Donc f est une rotation de centre I et d'angle $2mes(\widehat{\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}})$

   Le triangle AIB est rectangle en B et $mes(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}}) = \frac{\pi}{3}$.

   D'où $mes(\widehat{\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}}) = \frac{\pi}{6}$.

   Donc f est la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

2) Une étude analogue à celle de la question 1) nous permet de dire que g est une rotation de centre J. Mais $g(A) = S_{(CD)} \circ S_{(AB)}(A) = S_{(CD)}(A) = I$. Donc g est la rotation de centre J et d'angle $2mes(\widehat{\overrightarrow{JA}, \overrightarrow{JC}}) = -\frac{\pi}{3}$.

3) Le triangle AIJ est équilatéral.

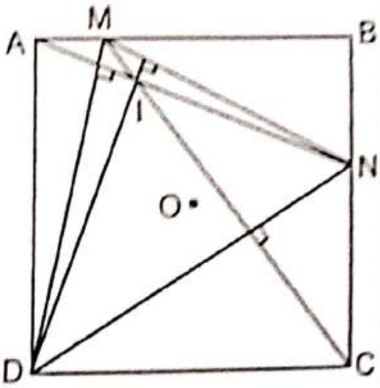
   En effet, $f(A) = J \Rightarrow AI = JI$ et $g(A) = I \Rightarrow AJ = JI$. Donc $AI = AJ = JI$.

   Nature et éléments caractéristiques de $g \circ f$ et $f \circ g$

   On a : $f = r(I, \frac{\pi}{3})$ et $g = r(J, -\frac{\pi}{3})$. Or $\widehat{\frac{\pi}{3}} + (\widehat{-\frac{\pi}{3}}) = \widehat{0}$. Donc $g \circ f$ et $f \circ g$ sont des translations.

   - $g \circ f(A) = g(J) = J$; donc $g \circ f = t_{\overrightarrow{AJ}}$
   - $f \circ g(A) = f(I) = I$; donc $f \circ g = t_{\overrightarrow{AI}}$

EXERCICE 17 :



Soit O le centre du carré ABCD.

Les rotations de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$ laissent les sommets A, B, C et D globalement invariants car les diagonales d'un carré sont orthogonales, ont même longueur et se coupent en leur milieu.

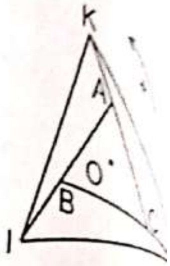
1) On considère la rotation r de centre O qui transforme C en B.
   Son angle est $-\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{\pi}{2}$ suivant que le carrée ABCD est direct ou indirect (cas de la figure). On a : $r(C) = B$, $r(B) = A$ (et aussi, $r(A) = D$ et $r(D) = C$).
   L'image du segment [BC] par r est le segment [AB].
   Posons $N' = r(N)$, alors $N' \in [AB]$ et $AN' = BN$; ce qui prouve que $N' = M$ c'est-à-dire $r(N) = M$.
   On a donc $(AN) \perp (DM)$ et $(DN) \perp (CM)$.

2) Dans le triangle DMN, le point I est le point d'intersection des hauteurs issues de ... (d'après la question 1).). C'est donc l'othocentre de ce triangle. Il appartient à la hauteur ... de D ; c'est-à-dire que les droites (DI) et (MN) sont orthogonales.

EXERCICE 18 :

1) **Recherche de a et b**

De l'égalité $\overrightarrow{AI} = \frac{5}{3}\overrightarrow{AB}$, nous déduisons la relation : $-2\overrightarrow{AI} + 5\overrightarrow{BI} = \vec{0}$ qui prouve que I est le barycentre des points (A, -2) et (B, 5). Notons de même que, le point J est barycentre de (B, 2) et (C, 5) et K est barycentre de (C, -2) et (A, 5).

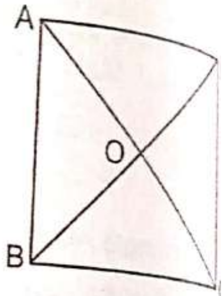


2) **Centre de gravité du triangle IJK**

Le point O étant le centre du triangle ABC, la rotation r de centre O qui transforme A ... transforme B en C et C en A.
Par cette rotation r, le barycentre I de (A, -2) et (B, 5) a pour image le barycentre de (r(A), ... et (r(B), 5) c'est-à-dire de (B, -2) et (C, 5) ; par suite, r(I) = J. Une démonstration ana... permet de prouver que r(J) = K puis r(K) = I. La rotation r est une isométrie et $O \overset{r}{\mapsto} O$; I... $J \overset{r}{\mapsto} K$; $K \overset{r}{\mapsto} I$. Donc IJ = JK et JK = KI ; le triangle IJK est donc équilatéral.
De plus, OI = OJ et OJ = OK ; le point O équidistant de I, J et K est le centre du ce... circonscrit au triangle IJK et donc le centre de gravité de ce triangle.

EXERCICE 19 :

1) On considère la figure ci-contre :



- Les droites (AB) et (DC) sont parallèles donc $S_{(DC)} \circ S_{(AB)} = t_{\overrightarrow{1AD}} = t_{\overrightarrow{2BC}}$
- Les droites (DB) et (AC) sont sécantes en O. De plus, $(\widehat{\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{AC}}) = (\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}}) = \frac{\pi}{2}$. Par conséquent, $S_{(AC)} \circ S_{(DB)} = r(O, \pi)$ (symétrie de centre O).
- Les droites (AB) et (AC) sont sécantes en A ; de plus $(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}}) = -\frac{\pi}{4}$. Par conséquen...

  $S_{(AB)} \circ S_{(AC)} = r(A, -\frac{\pi}{2})$.
- Les droites (DB) et (AB) sont sécantes en B ; de plus $(\widehat{\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{AB}}) = \frac{\pi}{4}$. Par conséquen...

  $S_{(AB)} \circ S_{(DB)} = r(B, \frac{\pi}{2})$

2) D'après la question 1)., on a : $r(A, -\frac{\pi}{2}) \circ r(0, \pi) = (S_{(AB)} \circ S_{(AC)}) \circ (S_{(AC)} \circ S_{(DB)})$

$= S_{(AB)} \circ (S_{AC)} \circ S_{(AC)}) \circ S_{(DB)} = S_{(AB)} \circ S_{(DB)} = r(B, \frac{\pi}{2})$.

De même, on a : $t_{\overrightarrow{2AD}} \circ r(B, \frac{\pi}{2}) = S_{(DC)} \circ S_{(AB)} \circ S_{(AB)} \circ S_{(DB)} = S_{(DC)} \circ S_{(DB)}$.

Les droites (DC) et (DB) sont sécantes en D.

De plus, $(\widehat{\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}}) = \frac{\pi}{4}$. Donc $t_{\overrightarrow{2AD}} \circ r(B, \frac{\pi}{2}) = S_{(DC)} \circ S_{(DB)} = r(D, \frac{\pi}{2})$.

CHAPITRE 6 : HOMOTHETIES

EXERCICE 1 :

Soit I le milieu du segment [AB]

On a : $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IM}$. D'où G est l'image de M par l'homothétie h de centre I et de rapport $\frac{1}{3}$

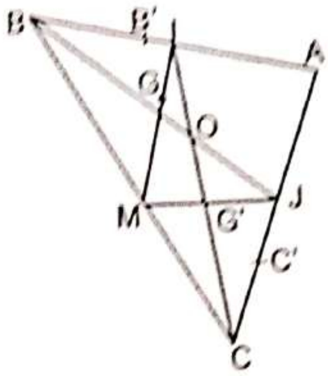
$(C) = C(O, r)$, $h(C) = (C') = C(O', \frac{1}{3}r)$. Donc le lieu de G est le cercle (C') privé des points A' et B' tels que : $A' = h(A)$ et $B' = h(B)$.

EXERCICE 2 :

1) Par définition, M' est le barycentre de (A, 1) et (M, 3) signifie que :
$\overrightarrow{M'A} + 3\overrightarrow{M'M} = \vec{0}$ ceci équivaut successivement à :
$\overrightarrow{M'A} + 3(\overrightarrow{M'A} + \overrightarrow{AM}) = 0$
$\overrightarrow{AM'} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AM}$. Donc f est l'homothétie de centre A et de rayon $\frac{3}{4}$

2) ε est l'image par l'homothétie f du segment [PQ]
donc ε est le segment [P'Q'] avec $P' = f(P)$ et $Q' = f(Q)$

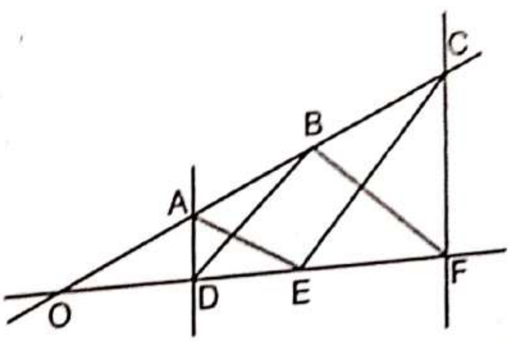
EXERCICE 3 :



1) **Lieux respectifs (ρ) et (ρ') des poins G et G'**
I et J sont milieux respectifs de [AB] et [AC].
On a : $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{JG'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{JM}$.
Soient h et h' les homothéties de centres respectifs I et J, de rapport $\frac{1}{3}$. Il vient : $h(M) = G$ et $h'(M) = G'$.
Donc les lieux géométriques cherchés (ρ) et (ρ') sont les images du segment [BC] respectivement par h et h'.

2) **Position du point commun à (ρ) et (ρ')**
0 est le centre de gravité du triangle ABC
on a : $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{JO} = \frac{1}{3}\overrightarrow{JB}$.
D'où $h(C) = 0$ et $h'(B) = 0$.
Donc $(\rho) = [B'O]$ et $(\rho) = [OC']$ et $\{0\} = (\rho)\cap(\rho')$.

EXERCICE 4 :



O, A et B sont alignés.
Il existe donc un réel k_1 tel que $\overrightarrow{OB} = k_1\overrightarrow{OA}$
(AE) et (BF) étant parallèles, d'après la propriété de Thalès, $\overrightarrow{OF} = k_1\overrightarrow{OE}$. Ces deux égalités prouvent que $B = h_1(A)$ et $F = h_1(E)$, où h_1 est l'homothétie de centre O et de rapport k_1.

2) On a de même $\overrightarrow{OC} = k_2\overrightarrow{OB}$ car O, B et C sont alignés et $\overrightarrow{OE} = k_2\overrightarrow{OD}$ d'après la propriété de Thalès (BD) et (CE) étant parallèles. D'où $C = h_2(B)$ et $h_2(D)$ où h_2 est l'homothétie de centre O et de rapport k_2

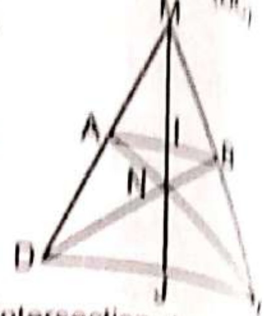
3) On a $h_1 \circ h_2(A) = h_1(B) = C$ et $h_1 \circ h_2(D) = h(E) = F$. $h_1 \circ h_2 = h_2 \circ h_1 = h$ homothétie de centre O et de rapport k_1k_2

Donc $h(A) = C$ et $h(D) = F$. h transforme alors la droite (AD) en la droit (CF)

Or l'image d'une droite par une homothétie est une droite qui lui est parallèle ; donc (AD) est parallèle à (CF)

EXERCICE 5 :

1) h transforme la droite (AB) en une droite parallèle passant par $h(A) = D$. Donc $h(AB) = (DC)$
h transforme la droite (MB) en elle même
Le point B intersection de (AB) et (MB) a donc pour image par h le point d'intersection de (DC) et (MB) c'est à dire C.



- h transforme le milieu I de [AB] en le milieu de $[h(A)h(B)] = [DC]$ C'est à dire J. Donc $h(I) = J$. Comme h a pour centre M, les points M, I et J sont alignés.

2) Soit h' l'homothétie de centre N qui transforme A en C. $h'(B) = D$. En effet, comme précédemment, $h'(AB) = (CD)$ et $h'(BD) = (BD)$. Donc le point B, intersection de (AB) et (BD) a pour image par h' le point d'intersection de (CD) et (BD), c'est à dire D.

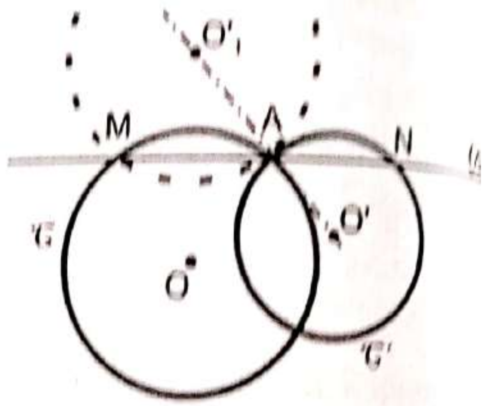
- $h'(I) = J$, en effet, h' transforme le milieu I de [AB] en le milieu de $[h'(A)h'(B)] = [CD]$ c'est à dire en J. Les points N, I et J sont alignés.

Conclusion : d'après les questions 1) et 2), les points M, N, I et J sont alignés.

EXERCICE 6 :

Construction de (Δ)

$\overrightarrow{AM} = -2\overrightarrow{AN} \Rightarrow h(N) = M$ où h est l'homothétie de centre A et de rapport -2



$\in (\mathcal{C}')$; donc on construit l'image de $(\mathcal{C}')$ par h. Son intersection avec le cercle $(\mathcal{C})$ nous donne le point M. Puis, l'intersection de la droite (AM) et $(\mathcal{C}')$ est le point N. On obtient ainsi la droite (Δ).

NB : $h(\mathcal{C}')$ est le cercle de centre $O'_1 = h(O')$ et passant par A

EXERCICE 7 :

On peut dire sans faire de calculs que $t \circ h$ et $h \circ t$ sont toutes des homothéties de rapport -2.

Cherchons le centre Ω_1 et $t \circ h$

Posons $M' = h(M)$ et $M_1 = t \circ h(M) = t(M')$ si M est un point quelconque du plan.

Par définition du centre d'une homothétie, $\overrightarrow{\Omega_1 M_1} = -2\overrightarrow{\Omega_1 M}$

Ce qui s'écrit encore : $\overrightarrow{\Omega_1 M'} + \overrightarrow{M'M_1} = -2\overrightarrow{\Omega_1 M}$

Soit $\overrightarrow{\Omega_1 M'} = -\vec{u} - 2\overrightarrow{\Omega_1 M}$. En particulier, cette relation s'écrit pour $M = \Omega$, $\overrightarrow{\Omega_1 \Omega'} = -\vec{u} - 2\overrightarrow{\Omega_1 \Omega}$ d'où

$\overrightarrow{\Omega_1 \Omega} = -\frac{1}{3}\vec{u}$. Connaissant les coordonnées de Ω et de $\vec{u}$, on en déduit que $\Omega_1\left(\frac{1}{3}; \frac{10}{3}\right)$.

Cherchons le centre Ω_2 de $h \circ t$

Posons $M'' = t(M)$ et $M_2 = h \circ t(M) = h(M'')$

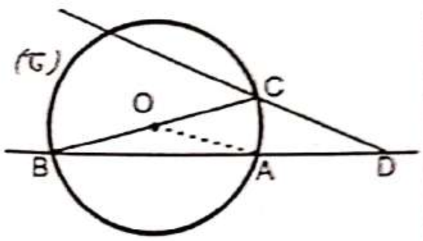
Ce qui s'écrit encore $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{\Omega M_2} = -2\overrightarrow{\Omega M'}$: on obtient donc $\overrightarrow{\Omega M_2} = -2\overrightarrow{\Omega M} - 2\overrightarrow{MM'}$.
Soit $\Omega M2 = -2\Omega M - 2\vec{u}$

En particulier, $h \circ t(\Omega_2) = \Omega_2$ d'où $\overrightarrow{\Omega\Omega_2} = -2\overrightarrow{\Omega\Omega_2} - 2\vec{u}$ ou encore $\overrightarrow{\Omega\Omega_2} = -\frac{2}{3}\vec{u}$

Ceci permet de calculer les coordonnées de $\Omega_2\left(\frac{7}{3}, \frac{7}{3}\right)$

$h \circ t$ et $t \circ h$ ayant des centres distincts, ces homothéties sont différentes.

EXERCICE 8 :

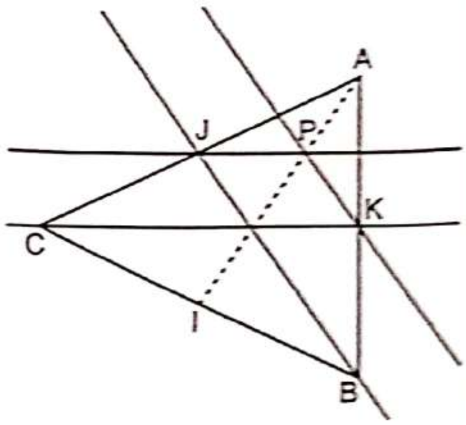


OA, OB et OC sont des rayons du cercle (𝒞)
Ainsi, BC = 2OA (1)
De plus, O est le milieu de [BC] et [CD] est parallèle à (OA)
En appliquant une propriété de Thalès, on a :
CD = 2OA (2)
Des égalités (1) et (2), on déduit BC = CD. Donc BCD est isocèle.

Remarque : on peut utiliser l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{1}{2}$.

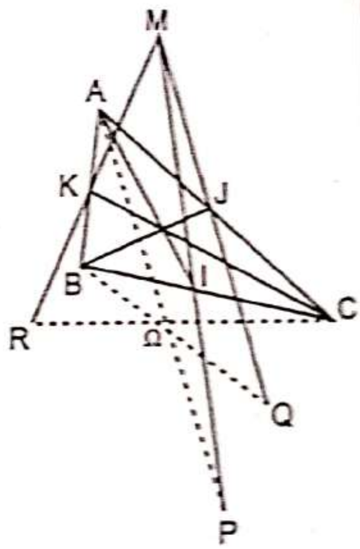
Alors h(C) = 0 et h(D) = A ; d'où $OA = \frac{1}{2}CD$.

EXERCICE 9 :



$\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AK}$
D'où h(J) = C et h(K) = B où h est l'homothétie de centre A et de rapport 2.
Par construction du point P, ce dernier est isobarycentre du triangle AJK.
De plus, l'image de AJK par h est le triangle ABC.
D'où h(P) = G où G est l'isobarycentre du triangle ABC.
On déduit que les points A, P et G sont alignés.
Et par construction de G, les points A, G et I sont alignés.
Donc les points A, P et I sont alignés.

XERCICE 10 :



G étant le centre de gravité de ABC et I le milieu de [BC], on a :
$\overrightarrow{IG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IA}$; soit $\overrightarrow{GI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}$.

On obtiendra de même $\overrightarrow{GJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GK} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GC}$.

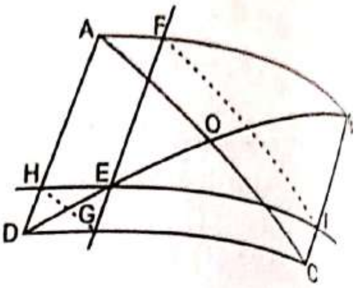
Soit h_1 l'homothétie de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$;
on a bien $h_1(A) = I$, $h_1(B) = J$ et $h_1(C) = K$

Par définition de P, Q et R on a :
$\overrightarrow{MP} = 2\overrightarrow{MI}$, $\overrightarrow{MQ} = 2\overrightarrow{MJ}$ et $\overrightarrow{MR} = 2\overrightarrow{MK}$.
Soit h_2 l'homothétie de centre M et de rapport 2.
Alors $h_2(I) = P$, $h_2(J) = Q$ et $h_2(K) = R$.

Comme $\left(-\frac{1}{2}\right)x2 = -1$, $f = h_2 \circ h_1$ est une homothétie de rapport -1; c'est-à-dire une symétrie centrale. Soit Ω son centre. Or $f(A) = h_2(h_1(A)) = h_2(I) = P$; de même f(B) = Q et f(C) = R.
Conclusion : [AP], [BQ] et [CR] ont même milieu Ω.

4) Soit O le centre du cercle (…) … même rayon
et soit O' symétrique par rapport à Ω. L'image p…
(par exemple OA) et de centre O' = f(O).

EXERCICE 11 :



On a : (HG)//(AC) et (AC)//(FI) ; d'où (HG)//(FI)
De plus, HG ≠ FI car sinon le point E serai confondu avec O
Il existe donc une homothétie qui transforme DHEG en EFBI c'est-à-dire :
h(E) = B ; h(D) = E ; h(H) = F et h(G) = I.
D'où les droites (FH), (IG), (EB) passent par le centre de l'homothétie h.
Donc les droites (FH), (IG) et (BD) ((BD) = (EB)) sont concourantes.

EXERCICE 12 :

$f : M(x, y) \mapsto M'(x', y')$ tel que $\begin{cases} x' = -2x + 1 \\ y' = -2y \end{cases}$

1) Soit (x, y) les coordonnées d'un point confondu à son image. On a : $\begin{cases} x = -2x + 1 \\ y = -2y \end{cases}$.

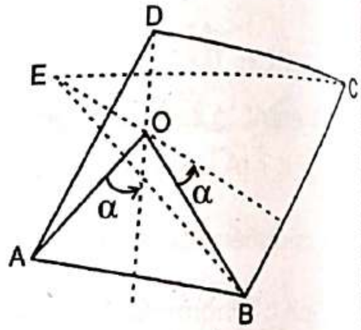
Soit $\begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = 0 \end{cases}$. Donc $I(\frac{1}{3}, 0)$

2) Soit M(x, y) un point du plan et M'(x', y') son image par f . On a : $\overrightarrow{IM'} = \left(x' - \frac{1}{3}\right)\vec{i} + y'\vec{j}$; soit

$\overrightarrow{IM'} = \left(-2x + \frac{2}{3}\right)\vec{i} - 2y\vec{j}$ et $\overrightarrow{IM} = \left(x - \frac{1}{3}\right)\vec{i} + y\vec{j}$. On déduit : $\overrightarrow{IM'} = -2\overrightarrow{IM}$.

) Des questions 1) et 2) il vient ; f est une homothétie de centre I et rapport –2.

EXERCICE 13 :



a transformation S = h∘r est la similitude directe de centre O, de
apport k et d'angle θ. S(A) = D et S(B) = E. D'où
$(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD}}) = (\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OB}}) = \hat{\theta}$
e plus, OA = OB. D'où AD = BE. Comme AD = BC, on déduit
ue BE = BC. Donc le triangle BCE est isocèle en B.

EXERCICE 14 :

) Soient M(x, y), M'(x', y') deux points du plan.

- $h(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{OM'} = -2\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -2x \\ y' = -2y \end{cases}$
- $S_A(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{AM'} = -\overrightarrow{AM} \Leftrightarrow \begin{cases} x'+3 = -x - 3 \\ y'-1 = -y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -x - 6 \\ y' = -y + 2 \end{cases}$
- Posons $h(M) = M_1(x_1, y_1)$ et $S_A \circ h(M) = M'$. On a :

$\begin{cases} x_1 = -2x \\ y_1 = -2y \end{cases}$ et $\begin{cases} x' = -x_1 - 6 \\ y' = -y_1 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 2x - 6 \\ y' = 2y + 2 \end{cases}$

Donc les transformation h, S_A et $S_A \circ h$ ont respectivement pour expressions analytiques

$\begin{cases} x' = -2x \\ y' = -2y \end{cases}$; $\begin{cases} x' = -x - 6 \\ y' = -y + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 2x - 6 \\ y' = 2y + 2 \end{cases}$

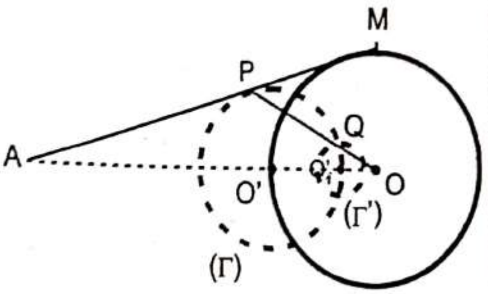
2) La transformation $SA \circ h$ est une similitude directe car elle est la composée d'une homothétie et d'un déplacement.

- Soit Ω le centre de cette similitude, $\Omega(x_0, y_0)$

$(S_A \circ h)(\Omega) = \Omega \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2x_0 - 6 \\ y_0 = 2y_0 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 6 \\ y_0 = -2 \end{cases} \Rightarrow \Omega(6, -2).$

Puis, on a $\overrightarrow{\Omega M'} = (x'-6)\vec{i} + (y'+2)\vec{j} = 2(x-6)\vec{i} + 2(y+2)\vec{j}$ et $\overrightarrow{\Omega M} = (x-6)\vec{i} + (y+2)\vec{j}$ d'où $\overrightarrow{\Omega M'} = 2\overrightarrow{\Omega M}$. Donc la transformation $S_A \circ h$ est l'homothétie de centre Ω et de rapport 2.

EXERCICE 15 :



1) On a : $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AM} \Rightarrow h(M) = P$ où h est l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$ $h(O) = O'$

Donc (ρ) est le cercle de centre O et de rapport $\frac{1}{2}r$, r étant le rayon du cercle ($\mathcal{C}$).

De plus, $\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OP} \Rightarrow h'(P) = Q$. Où h' est l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{2}$;

$h'(O') = O_1$. Donc (ρ') est le cercle de centre O_1 et de rayon $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}r) = \frac{1}{4}r$.

2) **Caractéristique de la transformation f : $(\mathcal{C}) \mapsto (\rho')$**

On aura $f(\mathcal{C}) = (\rho')$

On sait que $h(\mathcal{C}) = (\rho) \Rightarrow h'(h(\mathcal{C})) = h'(\rho) = (\rho')$; c'est-à-dire $h' \circ h(\mathcal{C}) = (\rho')$. Donc $f = h' \circ h$ est une homothétie de rapport $\left(\frac{1}{4}r\right)x\left(\frac{1}{2}r\right) = \frac{r^2}{8}$. Considérons l'homothétie h telle que $h(B) = B'$ et $h(C) = C'$ où B' et C' sont tels que AB' = AJ et AC' = AI.

Déterminons le rapport k de h

Par définition des points B' et C', k est positif ; on a :

$h(B) = B' \Leftrightarrow \overrightarrow{AB'} = k\overrightarrow{AB} \Rightarrow k = \frac{AB'}{AB} = \frac{AJ}{AB} = \frac{JI}{BC}$

ou $h(C) = C' \Leftrightarrow \overrightarrow{AC'} = k\overrightarrow{AC} \Rightarrow k = \frac{AC'}{AC} = \frac{AI}{AC} = \frac{JI}{BC}$

Choisissons ensuite la bissectrice (D) de l'angle $\widehat{CAB}$. Posons $S = S_{(D)}$. Il est clair que S(C') = I et S(B') = J car AI = AC' et AB' = AJ.

D'où $S \circ h(A) = S(A) = A$; $S \circ h(B) = S(B') = J$ et $S \circ h(C) = S(C') = I$. Donc l'image du triangle ABC par $S \circ h$ est AJI où h = h(A, k) tel que $k = \frac{JI}{BC} = \frac{b^2}{b^2 + c^2}$ et $S = S_{(D)}$.

EXERCICE 16 :

1) On a : $mes(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AH}}) mes(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BH}}) = 90°$ et $mes(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AH}}) + mes(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CH}}) = 90°$;

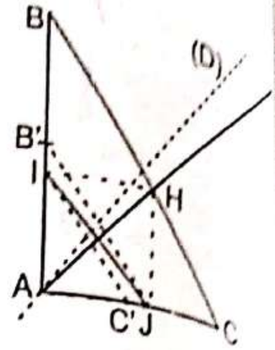
or $mes(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AH}}) + mes(\widehat{\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AB}}) = 90°$; d'où

$mes(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AH}}) = mes(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BH}})$; or $mes(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AH}}) = mes(\widehat{\overrightarrow{JI}, \overrightarrow{JA}})$.

D'où $mes(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}) = mes(\widehat{\overrightarrow{JI}, \overrightarrow{JA}})$. De la même façon,

$mes(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}) = mes(\widehat{\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IJ}})$;

Donc les triangles ABC et AJI sont semblables.



- Les triangles ABC et AJI étant semblables, il existe une similitude S' qui transforme ABC en AJI et on a : S'(A) = A, S'(B) = J et S'(C) = I.

  D'où S'([AB]) = [AJ], S'([AC]) = [AI] et S'([BC]) = [JI]

  Donc $k' = \frac{AJ}{AB} = \frac{AI}{AC} = \frac{JI}{BC}$ est le rapport de la similitude S'.

  De plus, $\tan\hat{B} = \frac{AJ}{BI} = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c} \Rightarrow AJ = BI \times \frac{b}{c} = (b - AI)\frac{b}{c}$ et

  $\frac{AJ}{AB} = \frac{AI}{AC} \Leftrightarrow \frac{(b - AI)b}{C^2} = \frac{AI}{b} \Leftrightarrow AI = \frac{b^3}{b^2 + c^2}$

  Donc $\frac{JI}{BC} = \frac{AI}{AC} \Leftrightarrow \frac{JI}{BC} = \frac{b^2}{b^2 + c^2}$

2) **Détermination de h et S**

Considérons l'homothétie h telle que h(B) = B' et h(C) = C' ou B' et C' sont tels que AB' = AJ et AC' = AI.

Déterminons le rapport k de h.

Par définition des points B' et C', k est positif ; on a :

$h(B) = B' \Leftrightarrow \overrightarrow{AB'} = k\overrightarrow{AB} \Rightarrow k = \frac{AB'}{AB} = \frac{AJ}{AB} = \frac{JI}{BC}$

Ou $h(C) = C' \Leftrightarrow \overrightarrow{AC'} = k\overrightarrow{AC} \Rightarrow k = \frac{AC'}{AC} = \frac{AI}{AC} = \frac{JI}{BC}$

Choisissons ensuite la bissectrice (D) de l'angle $\widehat{CAB}$

Posons $S = S_{(D)}$. Il est clair que S(C') = I et S(B') = J

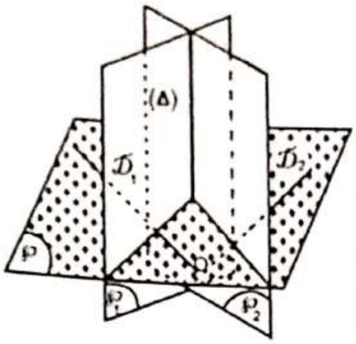
Car AI = AC' et AB' = AJ. D'où $S \circ h(A) = S(A) = A$; $S \circ h(B) = S(B') = J$ et $S \circ h(C) = S(C') = I$

Donc l'image du triangle ABC par $S \circ h$ est AJI où $h = h(A, k)$ tel que :

$k = \frac{JI}{BC} = \frac{b^2}{b^2 + c^2}$ et $S = S_{(D)}$.

CHAPITRE 6 : ORTHOGONALITE DANS L'ESPACE

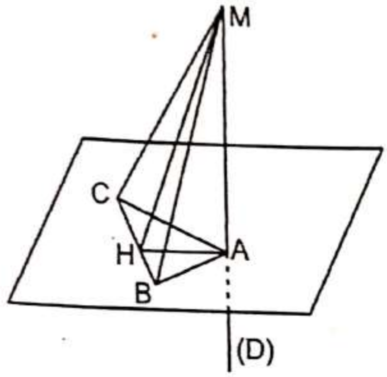
EXERCICE 1 :



1) **Démontrons que $(\wp_1)$ et $(\wp_2)$ sont sécantes**
On a deux possibilités et deux seulement : soit $(\wp_1)$ et $(\wp_2)$ sont sécants, soit ils sont parallèles.
Si $(\wp_1)$ et $(\wp_2)$ étaient parallèles, alors (D_1), orthogonale à $(\wp_1)$, serait orthogonale à $(\wp_2)$ donc parallèle ou confondus à (D_2) ce qui n'est pas possible, car (D_1) et (D_2) sont sécants en O. Donc les plans $(\wp_1)$ et $(\wp_2)$ sont sécants.

2) **Démontrons que (Δ) est orthogonale à $(\wp)$**
$(\wp_1)\perp(\wp)$ car $(\wp)$ contient la droite (D_1) orthogonale à $(\wp_1)$
$(\wp_2)\perp(\wp)$ car $(\wp)$ contient la droite (D_2) orthogonale à $(\wp_2)$
D'où $(\Delta)\perp(D_1)$ et $(\Delta)\perp D_2)$ car $(\Delta)\subset(\wp_1)$ et $(\Delta)\subset(\wp_2)$
Donc (Δ) est orthogonale à $(\wp)$

EXERCICE 2 :



1) A et M étant deux points donnés de (D), nous avons : (D) = (AM). La droite (D) est perpendiculaire au plan (ABC) ; donc orthogonale à toute droite de ce plan.
En particulier, (D) = (AM) est orthogonale à (BC)

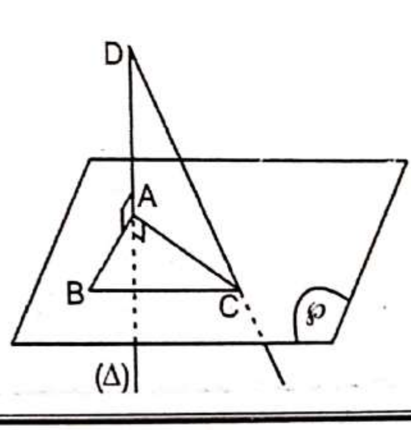
2) Par définition de H, (BC) est orthogonale à (MH). La droite (BC) étant orthogonale aux droites (AM) et (MH), elle est orthogonale au plan (AMH) définit par ces deux droites. En particulier, (BC) est orthogonale à (AH). Le point H appartenant à (BC), H est donc le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.

EXERCICE 3 :

1) Soit M un point de $(\wp)$. OHM est un triangle rectangle en H et on a : $OM^2 = OH^2 + HM^2$.
Ainsi $M\in(\Sigma) \Leftrightarrow OM^2 = r^2 \Leftrightarrow OH^2 + HM^2 = r^2 \Leftrightarrow HM^2 = r^2 - d^2$.

2) Intersection de $(\wp)$ et (Σ)
   a) Si $r < d$, alors $HM^2 < 0$; ce qui n'a pas de sens. Donc $(\wp)\cap(\Sigma) = \varnothing$.
   b) Si $r = d$, alors $HM = 0 \Leftrightarrow M = H$ donc $(\wp)\cap(\Sigma) = \{H\}$
   c) Si $r > d$, alors $HM = \sqrt{r^2 - d^2}$. Donc $(\wp)\cap(\Sigma) = (\mathcal{C})$, cercle de centre H et de rayon $\sqrt{r^2 - d^2}$

EXERCICE 4 :



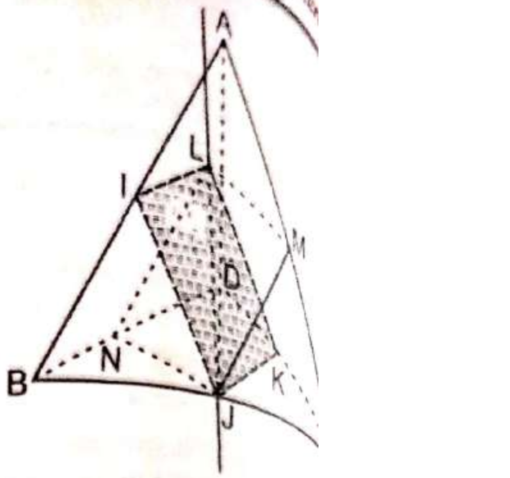
Le triangle ABC est rectangle en A.
Les droites (AB) et (AC) sont donc perpendiculaires. (Δ) est perpendiculaire à $(\wp)$; (Δ) = (AD) est donc perpendiculaire à (AB).
Il en résulte que la droite (AB) est perpendiculaire au plan (ACD). Elle est donc orthogonale à toute droite de ce plan. En particulier, la droite (AB) est orthogonale à (CD).

EXERCICE 5 :

$AB = CD$ et $AC = BD$.

1) **IJKL et MLNJ sont des losanges**

- On a successivement : $IJ = \frac{1}{2}AC$; $LK = \frac{1}{2}AC$;
$JK = \frac{1}{2}BC$; $IL = \frac{1}{2}BD$. Or $AC = BD$.
D'où $IJ = LK = JK = IL$. Donc IJKL est un losange.
- De même, on a : $LM = \frac{1}{2}CD$; $JN = \frac{1}{2}CD$; $JM = \frac{1}{2}AB$
et $NL = \frac{1}{2}AB$. Or, $AB = CD$; d'où $LM = JN = JM = NL$.
Donc MLNJ est un losange.



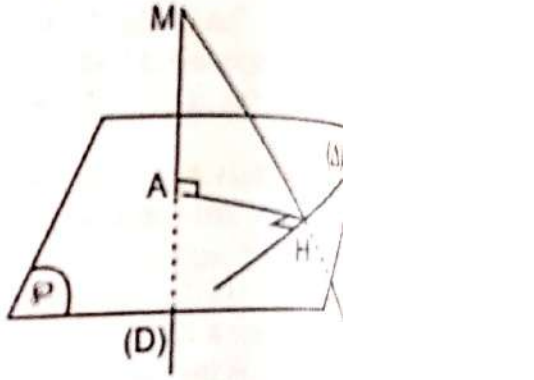
2) Puisque IJKL et MLNJ sont des losanges, on déduit que $(JL)\perp(IK)$ et $(JL)\perp(NM)$.
Or le point N est contenu dans le plan (IKM) car on peut démontrer comme à la questio
que IMKN est un losange.
Donc (JL) orthogonale à deux droites de (IKM) est orthogonale à (IKM).

3) On a $(JL)\perp(IKM)$ d'où $(JL)\perp(NK)$ et $(JL)\perp(MK)$
Or $(NK)//(BC)$ et $(MK)//(AD)$ (d'après le théorème de Thalès)
Donc $(JL)\perp(BC)$ et $(JL)\perp(AD)$.

EXERCICE 6 :

- Si M = A, (MH) = (AH) est perpendiculaire à (Δ).
- Si m ≠ A, considérons le plan (MAH). (D) = (MA) est perpendiculaire à $(\wp)$; elle est donc orthogonale à (Δ).

D'autre part (AH) et (Δ) sont perpendiculaires.
La droite (Δ) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (MAH) ; elle est donc perpendiculaire à ce plan. Il en résulte que (Δ) est orthogonale à (MH) ; comme ces deux droites sont sécantes, elles sont perpendiculaires.



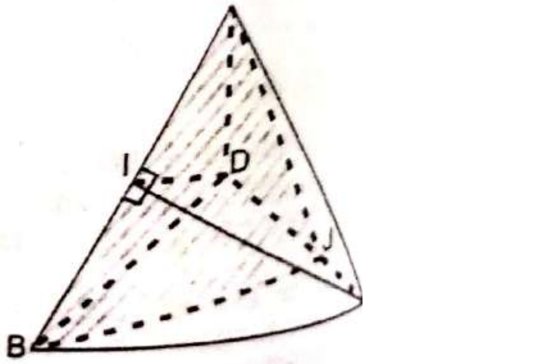
EXERCICE 7 :

Soit (D) l'intersection des plans $(\wp)$ et (Q)
Pour qu'un plan soit perpendiculaire à $(\wp)$ et à (Q) **il faut et il suffit qu'il soit orthogonale** à (D)
Soit A un point donné de l'espace. On sait qu'il existe un et un seul plan passant par A et orthogonal à (D).
Donc il existe un plan et un seul, perpendiculaire à $(\wp)$ et à (Q), passant par A.

EXERCICE 8 :

1) ACD et BCD sont des triangles équilatéraux. D'où $(BJ)\perp(CD)$ et $(AJ)\perp(CD)$. Par suite, $(CD)\perp(JAB)$; or $(CD)\subset(ICD)$. Donc $(ICD)\perp(JAB)$.

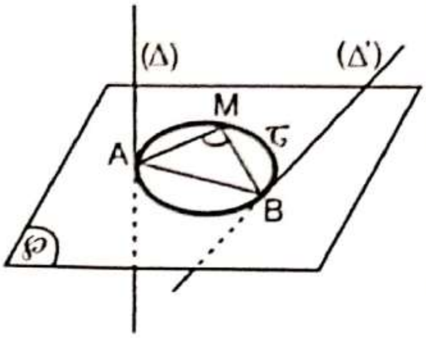
2) On a ABC et ABD triangles équilatéraux. D'où $(IC)\perp(AB)$ et $(ID)\perp(AB)$. Par suite $(AB)\perp(ICD)$
Or $(AB)\subset(ABC)$ et $(AB)\subset ABD)$. Donc $(ICD)\perp(ABC)$ et $(ICD)\perp(ABD)$.
   - **De la même façon, on montre que $(DC)\perp(JAB)$. Or $(DC)\subset(ACD)$ et $(DC)\subset(BCD)$**
   Donc $(JAB)\perp ACD)$ et $(JAB)\perp(BCD)$.



On a : ABC et ABD triangles équilatéraux. D'où (IC)⊥(AB) et (ID)⊥(AB). Par suite, (AB)⊥(ICD) ; or (AB)⊂(ABC) et (AB)⊂(ABD). Donc (ICD)⊥(ABC) et (ICD)⊥(ABD)

- De la même façon, on montre que (DC)⊥(JAB). Or (DC)⊂(BCD). Donc (JAB)⊥(ACD) et (JAB)⊥(BCD).

EXERCICE 9 :



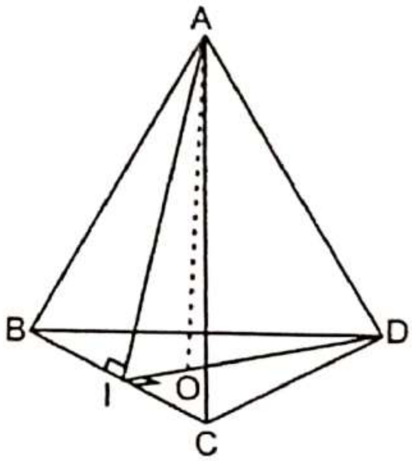
Soient Q le plan déterminé par M et (Δ) et Q' le plan déterminé par M et (Δ'). (Δ) est perpendiculaire à (℘) ; (Δ) est donc orthogonale à (MB). M appartient au cercle de diamètre [AB]

(AM) et (MB) sont donc perpendiculaires. La droite (MB) est donc orthogonale aux deux droites sécantes (Δ) et est contenue dans (Q'), on en déduit que les plans (Q) et (Q') sont perpendiculaires.

EXERCICE 10 :

1)

a) Le triangle ABC est isocèle de sommet principal A ; donc (IA) est orthogonale à (BC). Le triangle BCD est équilatéral ; donc (ID) est orthogonale à (BC). Le vecteur $\overrightarrow{BC}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{ID}$; comme $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{ID})$ est un système de vecteurs directeurs du plan (AID), alors la droite (BC) est orthogonale au plan (AID).



b) Comme la droite (BC) est orthogonale au plan (AID), alors le vecteur $\overrightarrow{BC}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{AD}$. Les arêtes [BC] et [AD] ont des supports orthogonaux.
Même méthode pour [CD] et [BA] et pour [DB] et [CA].

2)

a) La droite (AO) est orthogonale au plan (BCD). Donc les droites (AO) et (BC) sont orthogonales.
Puisque le plan (AID) est orthogonal à la droite (BC), alors la droite (AO) est incluse dans le plan (AID).
Donc O appartient à la médiane ID du triangle BCD on montrerait de même que O appartient aux deux autres médianes du triangle BCD ; O est donc le centre de gravité du triangle BCD. Le triangle AOD est rectangle en O ; donc $AD^2 = AO^2 + OD^2$. Or AD = 2a et $OD = \frac{2}{3}ID = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Donc $AO^2 = (2a)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{11a^2}{3}$; $AO = a\sqrt{\frac{11}{3}}$

b) L'aire $\mathcal{A}$ du triangle BCD est : $A = \frac{1}{2}BC.ID = \frac{1}{2}.a.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Le volume V du tétraède ABCD est donc : $V = \frac{1}{3}AO.\mathcal{A} = \frac{1}{3}.a\sqrt{\frac{11}{3}}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow V = a^3\frac{\sqrt{11}}{12}$.

EXERCICE 11 :

1) AM = a et BN = b.
Le triangle MBN est rectangle en B d'où $MN^2 = MB^2 + BN^2$
Le triangle MBA est rectangle en A d'où $MB^2 = MA^2 + AB^2$.
Par suite, $MN^2 = MA^2 + AB^2 + BN^2 = a^2 + b^2 + 1$. Donc $MN = \sqrt{a^2 + b^2 + 1}$.

vecteurs directeurs du plan (JKC) puisqu'ils ne sont pas colinéaires. Utilisons la relation de Chasles

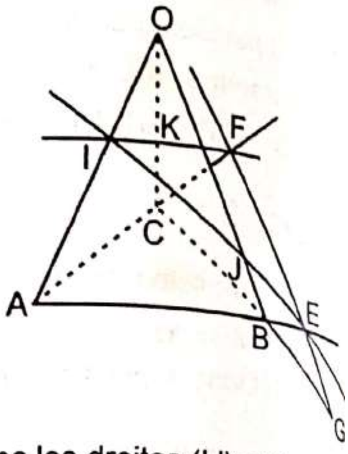
$\vec{HI} = \vec{HK} + \vec{KC} + \vec{CB} + \vec{BI}$; or par hypothèse, on a $\vec{CB} = \vec{GF} = \vec{KJ}$ et aussi $\vec{HK} = \frac{1}{2}\vec{HG}$;

$\vec{BI} = \frac{1}{2}\vec{BA}$; $\vec{BA} = \vec{GH} = -\vec{HG}$ d'où $\vec{HK} + \vec{BI} = \vec{0}$

Il en résulte que $\vec{HI} = \vec{KC} + \vec{KJ}$

Donc la droite (HI) est parallèle au plan (JKC).

EXERCICE 5 :



1) Si (IJ) et (AB) étaient parallèles, alors d'après la propriété de Thalès appliquée au triangle OAB, on aurait : $\frac{OB}{OJ} = \frac{OA}{OI}$ (1).

Or $\vec{OI} = \frac{1}{3}\vec{OA}$ et $\vec{OJ} = \frac{3}{4}\vec{OB} \Rightarrow \frac{OB}{OJ} = \frac{4}{3}$ et $\frac{OA}{OI} = 3$

c'est-à-dire $\frac{OB}{OJ} \neq \frac{OA}{OI}$ ce qui est contradiction à l'égalité (1).

D'où les droites (IJ) et (AB) ne sont pas parallèles.

De plus les droites (IJ) et (AB) appartiennent au plan (OAB). Donc les droites (IJ) et (AB) sont sécantes.

2) On a $\vec{OI} = \frac{1}{3}\vec{OA}$ et $\vec{OK} = k\vec{OC}$

(IK) et (AC) sont deux droites du plan (OAC)

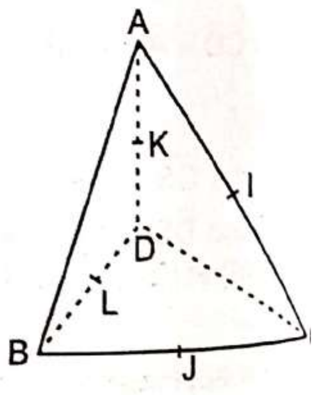
D'où (IK) et (AC) sont sécantes si et seulement si elles ne sont pas parallèles ; c'est-à-dire s

$\frac{\overline{OK}}{\overline{OC}} \neq \frac{\overline{OI}}{\overline{OA}}$; soit $k \neq \frac{1}{3}$. Donc (IK) et (AC) sont sécantes pour $k \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}\}$.

) Les droites (EF) et (BC) appartiennent au plan (ABC). Si (EF) et (BC) sont parallèles, alors (KJ) et (BC) sont parallèles.

Or (KJ) et (BC) sont parallèles si $k = \frac{3}{4}$. Don (EF) et (BC) sont sécantes pour $k \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{4}\}$.

ERCICE 6 :



a (IJ)//(AB) ; (IK)//(CD) et (KL)//(AB)

près la propriété de Thalès, on a : $\frac{\overline{CA}}{\overline{CI}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{IJ}}$. Or

$= k\vec{AC} \Leftrightarrow k\overline{CA} = \overline{IA} \Leftrightarrow -\frac{\overline{CI}}{\overline{CA}} = k - 1$

ù $\frac{\overline{CA}}{\overline{CI}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{IJ}} \Leftrightarrow \frac{\overline{IJ}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CI}}{\overline{CA}} = 1 - k \Leftrightarrow \overline{IJ} = (1-k)\overline{AB}$.

si, $\vec{IJ} = (1-k)\vec{AB}$

la même façon, $\vec{IK} = k\vec{CD}$. Enfin, (KL)//(AB), donc (KL)//(IJ) et d'après Thalès, $\frac{\overline{KL}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AK}}{\overline{AD}}$ or

$= \frac{\overline{AI}}{\overline{AC}} = k$. D'où $\overline{KL} = k\overline{AB}$. On en déduit $\vec{KL} = k\vec{AB}$ Ainsi, $\vec{IL} = \vec{IK} + \vec{KL} \Rightarrow \vec{IL} = k\vec{AB} + k\vec{CD}$

ERCICE 7 :

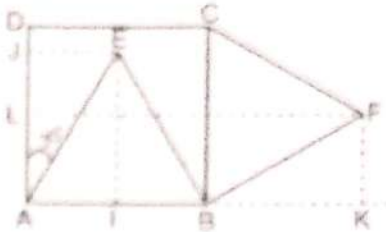
Les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AD}$ ne sont pas colinéaires ; donc $(\vec{AB}, \vec{AD})$ est une base de plan (ABD). Donc $(A, \vec{AB}, \vec{AD})$ est repère du plan (ABD).

2) Considérons les points I et J respectivement milieu de [AB] et $AJ = IE$

On a : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AJ}$

Or $\cos 30° = \dfrac{AJ}{AE} \Rightarrow AJ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}AE = \dfrac{\sqrt{3}}{2}AD \Rightarrow \overrightarrow{AJ} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Donc $\overrightarrow{AE} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{AD}$



De même $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AL} + \overrightarrow{AK}$. Or $\overrightarrow{AL} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BK}$

De plus, $BK = AJ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}AD \Rightarrow BK = \dfrac{\sqrt{3}}{2}AB$. Soit $\overrightarrow{BK} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{AB}$

D'où $\overrightarrow{AF} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{AB}$. Donc $\overrightarrow{AF} = \dfrac{2+\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

3) Les points D, E et F ont pour coordonnées respectifs $(0\,;1)$, $\left(\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $\left(\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}\,;\dfrac{1}{2}\right)$ dans le repère $(A\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD})$

4) On a : $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AD} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{DE} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \dfrac{\sqrt{3}-2}{2}\overrightarrow{AD}$

et $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AF} = -\overrightarrow{AD} + \dfrac{2+\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{DF} = \dfrac{2+\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{AB} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

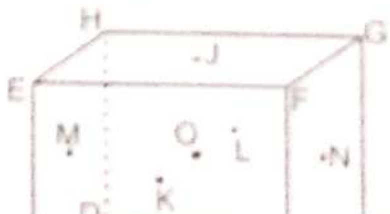
Donc les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DF}$ ont respectivement pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{\sqrt{3}-2}{2}\right)$ et $\left(\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}\,;-\dfrac{1}{2}\right)$ dans la base $(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD})$

5) On a : $\overrightarrow{DE} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \dfrac{\sqrt{3}-2}{2}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{DF} = \dfrac{2+\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{AB} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

D'où $\overrightarrow{DF} = (2+\sqrt{3})\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \dfrac{1}{2(2+\sqrt{3})}\overrightarrow{AD}\right) = (2+\sqrt{3})\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \dfrac{\sqrt{3}-2}{2}\overrightarrow{AD}\right)$

Soit $\overrightarrow{DF} = (2+\sqrt{3})\overrightarrow{DE}$. Donc $k = 2+\sqrt{3}$. Donc les points D, E et F sont alignés

EXERCICE 8 :



1) I est l'isobarycentre du parallélogramme ABCD et J est l'isobarycentre du parallélogramme EFGH, ainsi l'isobarycentre O du pavé est le milieu du segment [IJ].
De la même façon, O est le milieu des segments [KL] et [MN].
Donc les droites (IJ), (KL) et (MN) sont concourantes en O

2) O est l'isobarycentre du pavé, donc des parallélogrammes ACGE et BDHF (d'après les barycentres partiels). Donc O est le centre de chacun des parallélogrammes

3) **Coordonnées de O**

a) $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IO}$; $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{IO} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AE}$

Donc $\overrightarrow{AO} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AE}$ et le point O a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{1}{2}\right)$ dans le repère $(A\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\,;\overrightarrow{AE})$

CHAPITRE 8 : GEOMETRIQUE ANALYTIQUE DE L'ESPACE

EXERCICE 1 :

1) Toute équation cartésienne du plan (ABC) est de la forme $ax + by + cz + d = 0$; où a, b, c et d sont des réels. Etant donné que les points A, B et C appartiennent à ce plan, on a :

$-a + b + c + d = 0$, $a - b + c + d = 0$ et $a + b - c + d = 0$ d'où le système : $\begin{cases} -a+b+c+d=0 & (1) \\ a-b+c+d=0 & (2) \\ a+b-c+d=0 & (3) \end{cases}$

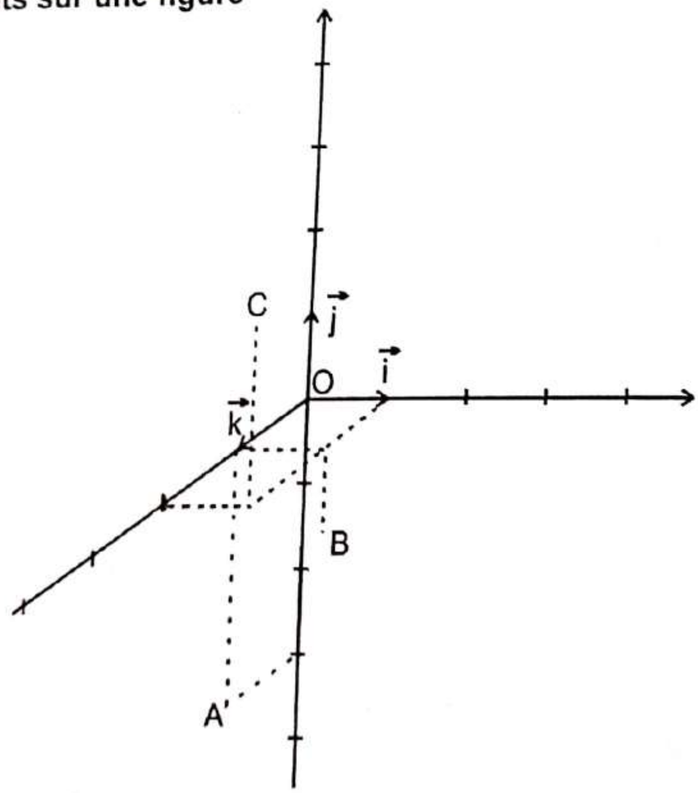
En additionnant (1) et (2) membres à membres, on a : $2c + 2d = 0$. Soit $c = -d$.
On fait de même avec (2) et (3) puis avec (1) et (3) ; on obtient $a = -d$ et $b = -d$.
En prenant $d = -1$ on déduit qu'une équation cartésienne de (ABC) est $x + y + z - 1 = 0$.

) Puisque $(\wp)$ est parallèle à (ABC),
une équation cartésienne de $(\wp)$ est de la forme $x + y + z + d' = 0$ c'est-à-dire $0 \in \wp$.
On déduit $0 + 0 + 0 + d' = 0$ c'est-à-dire $d' = 0$.
Donc une équation cartésienne de $(\wp)$ est $x + y + z = 0$.

(ERCICE 2 :

$(\wp) : 2x - y + 3z - 6 = 0 \Leftrightarrow y = 2x + 3z - 6$.
Les points A(0, -3, 1) ; B(1, -1, 1) et C(1, 2, 2) appartiennent au plan $(\wp)$.

Plaçons ces points sur une figure



RCICE 3 :

$(x, y, z) \in (\wp)$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}.\vec{u} = 0$.
n a : $\overrightarrow{AM}.\vec{u} = (x+1)2 + (y-1)(-1) + (z-2)3 = 2x - y + 3z - 3$
e équation cartésienne de $(\wp)$ est donc $2x - y + 3z - 3 = 0$.

De l'unicité des coordonnées d'un point, on déduit $\begin{cases} -1+2\lambda-\mu=-\dfrac{1}{3} \\ -\lambda+\mu=-\dfrac{1}{3} \\ 2+\lambda-2\mu=\dfrac{7}{3} \end{cases}$; soit $\lambda=\dfrac{1}{3}$ et $\mu=0$

Donc les valeurs cherchées sont $\lambda=\dfrac{1}{3}$ et $\mu=0$.

EXERCICE 6 :

1) Les droites (D) et (D') ont respectivement pour vecteurs directeurs $\overrightarrow{AB}(-4,-2,2)$ et $\overrightarrow{A'B'}(-2,2,-2)$; donc admettent pour représentations paramétriques respectives :
$\begin{cases} x=3-4\lambda \\ y=1-2\lambda \\ z=1+2\lambda \end{cases}$ $(\lambda\in\mathbb{R})$ et $\begin{cases} x=-2\lambda' \\ y=1+2\lambda' \\ z=1-2\lambda' \end{cases}$; $(\lambda'\in\mathbb{R})$.

Un point M(x, y, z) appartient aux droites (D) et (D') si et seulement s'il existe deux réels λ et λ' tels que : $\begin{cases} x=3-4\lambda=-2\lambda' \\ y=1-2\lambda=1+2\lambda' \\ z=1+2\lambda=1-2\lambda' \end{cases}$; soit $\begin{cases} 4\lambda-2\lambda'=3 \\ 2\lambda+2\lambda'=0 \end{cases}$

D'où $\lambda=\dfrac{1}{2}$ et $\lambda'=-\dfrac{1}{2}$. Et on en déduit que (D) et (D') sont sécants. Leur point d'intersection est I(1, 0, 2).

2) Un point M(x, y, z) appartient à $(\wp)$ si et seulement si :

$\overrightarrow{IM}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{A'B'}$ c'est-à-dire $\begin{cases} x-1=-4\lambda-2\mu \\ y=-2\lambda+2\mu \\ z-2=2\lambda-2\mu \end{cases}$

Donc une représentation paramétrique du plan $(\wp)$ est $\begin{cases} x=1-4\lambda-2\mu \\ y=-2\lambda+2\mu \\ z=2+2\lambda-2\mu \end{cases}$.

EXERCICE 7 :

1) Les plans $(\wp_1)$ et $(\wp_2)$ ont respectivement pour vecteurs normaux $\overrightarrow{n_1}(1,-2,3)$ et $\overrightarrow{n_2}(1,-2,1)$. Ces vecteurs ne sont pas colinéaires ; donc d'après l'étude de la position relative de deux plans, les plans $(\wp_1)$ et $(\wp_2)$ son sécants.

2) Soit (Δ) la droite d'intersection de $(\wp_1)$ et $(\wp_2)$. Un système d'équations cartésienne est $\begin{cases} x-2y+3z-1=0 \\ x-2y+z+3=0 \end{cases}$. Les points A(-1, 2, 2) et B(1, 3, 2) appartiennent à (Δ). Donc un vecteur directeur de (Δ) est $\overrightarrow{AB}(2,1,0)$.

3) La droite (D) est parallèle à $(\wp_1)$ et $(\wp_2)$; donc est parallèle à leur droite d'intersection (Δ). Ainsi le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de (D) et un repère de (D) est $(k, \overrightarrow{AB})$.

2) Les plans (P_1) et (P_2) sont orthogonaux on a : $d^2(A, D) = d^2(A, (P_1)) + d^2(A, (P_2))$ avec $D = (P_1) \cap (P_2)$ (ceci est assez clair lorsqu'on fait un schéma)

Or $d(A, (P_1)) = \dfrac{|2 + 1 - 2 + 3|}{\sqrt{2^2 + 1 + 2^2}} = \dfrac{4}{3}$ et $d(A, (P_2)) = \dfrac{|1 - 4 - 1|}{\sqrt{1 + 4^2 + 1}} = \dfrac{4}{3\sqrt{2}}$

$d^2(A, D) = d^2(A, (P_1)) + d^2(A, (P_2)) = \dfrac{16}{9} + \dfrac{16}{18} = \dfrac{48}{18} = \dfrac{24}{9}$, donc $d(A, D) = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

Exercice 11 :

1) Les droites (D_1) et (D_2) passent respectivement par les points O et $A(2, 1, 0)$ et ont pour vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}(-1, 1, 1)$ et $\vec{v}(-2, -1, -1)$

Soient trois α, β, γ tels que $\alpha\vec{OA} + \beta\vec{u} + \gamma\vec{v} = \vec{0}$

On a : $(2\alpha - \beta - 2\gamma, \alpha + \beta - \gamma, \beta - \gamma) = (0, 0, 0)$; d'où $\alpha = \beta = \gamma = 0$

Donc les vecteurs $\vec{OA}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non coplanaires ; par conséquent, les droites (D_1) et (D_2) sont non coplanaires

2) Puisque (P) contient (D_2) et est parallèle à (D_1) alors (P) passe par le point A et admet pour vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Donc une représentation paramétrique de (P) est :

$$\begin{cases} x = 2 - \lambda - 2\mu \\ y = 1 + \lambda - \mu \quad [(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2] \\ z = \lambda - \mu \end{cases}$$

Exercice 12 :

1) Les plans (P) et (P') admettent les vecteurs normaux respectifs $\vec{n}(2, -4, 2)$ et $\vec{n'}(1, -2, 1)$. Il est clair que $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont colinéaires. Donc (P) est parallèle à (P').

2)

a) Les vecteurs $\vec{MM'}$ et $\vec{n'}$ sont colinéaires. Donc il existe un réel K tel que $\vec{MM'} = k\vec{n'}$. D'où il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} x' = x + k \\ y' = y - 2k \\ z' = z + k \end{cases}$.

Détermination de k

Le point $A\left(2, 1, -\dfrac{3}{2}\right)$ appartient à (P).

Le point $A'(x', y', z')$ appartient à (P') tel que $(AA') \perp (P)$ et $(AA') \perp (P')$, est tel que

$\begin{cases} x' = 2 + k \\ y' = 1 - 2k \\ z' = -\dfrac{3}{2} + k \end{cases}$. Comme $A' \in (P')$, on a : $2 + k - 2(1 - 2k) - \dfrac{3}{2} + k - 3 = 0$. Donc $k = \dfrac{3}{4}$.

2) On a : $\overrightarrow{MM'} = k\vec{n}$. D'où $MM' = |k|\|\vec{n}\| = k\|\vec{n}\|$

Or $\|\vec{n}\| = \sqrt{1+(-2)^2+1} = \sqrt{6}$. Donc $MM' = \frac{3\sqrt{6}}{4}$.

EXERCICE 13 :

Le vecteur directeur $\vec{u}(1,-2,1)$ n'est pas colinéaire au vecteur normal $\vec{n}(2,-1,3)$ à $(\wp)$. Donc (D) n'est pas perpendiculaire à $(\wp)$. (Q) contient (D), donc $\vec{u}$ est un vecteur directeur de (Q). (Q) est perpendiculaire à $(\wp)$, donc $\vec{n}$ est un vecteur directeur de (Q). De plus $A(-1, 1, 1)\in(D)$, donc $A\in(Q)$. Ainsi, soit $M(x, y, z)$. Un point de (Q) on a : $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{n}$, $(\lambda, \mu)\in\mathbb{R}^2$. Donc une représentation paramétrique de (Q) est :

$$\begin{cases} x = -1+\lambda+2\mu \\ y = 1-2\lambda-\mu & ; (\lambda, \mu)\in\mathbb{R}^2 \\ z = 1+3\lambda+\mu \end{cases}$$

La projection orthogonale de (D) sur $(\wp)$ est la droite (Δ), intersection des plans (Q) et $(\wp)$.

De la représentation paramétrique de (Q), on déduit le système : $\begin{cases} x = -1+\lambda+2\mu & (1) \\ -2\lambda-\mu = y-1 & (2) \\ 3\lambda+\mu = z-1 & (3) \end{cases}$

(2) et (3) donnent : $\lambda = y + z - 2$ et $\mu = -3y - 2z + 5$.
En remplaçant ceci dans (1), on obtient l'équation cartésienne de (Q) : $x + 5y + 3z - 7 = 0$.

Ainsi un système d'équations cartésiennes de (Δ) est : $\begin{cases} 2x-y+3z-7=0 \\ x+5y+3z-7=0 \end{cases}$. Les points $B\left(6, 1, -\frac{4}{3}\right)$ et $C(-6,-1,6)$ appartiennent à (Δ) $\overrightarrow{BC}\left(-12,-2,\frac{22}{3}\right)$. Donc une représentation paramétrique de (Δ), c'est-à-dire de la projection orthogonale de (D) sur $(\wp)$ est :

$$\begin{cases} x = 6-12\lambda \\ y = 1-2\lambda & ; (\lambda\in\mathbb{R}). \\ z = -\frac{4}{3}+\frac{22}{3}\lambda \end{cases}$$

EXERCICE 1 :

a) f(x) existe si $x > 0$ et $1 - x \neq 0$. Donc $D_f = \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$

b) Si $x \geq 0$, $f(x) = \frac{x-1}{x^2+x-2} = \frac{x-1}{(x-1)(x+2)}$; alors f(x) existe si $x - 1 \neq 0$ et $x + 2 \neq 0$
et $x \neq -2$. Mais $-2 < 0$.
Si $x \leq 0$, $f(x) = \frac{x-1}{x^2-x-2} = \frac{x-1}{(x+1)(x-2)}$; alors f(x) existe si $x \neq -1$ et $x \neq 2$. Mais 2
Conclusion : f(x) existe $x \neq 1$ et $x \neq -1$. Donc $D_f = \mathbb{R}\setminus\{1, -1\}$.

c) f(x) existe si $2 - |x| \geq 0$ c'est-à-dire $|x| \leq 2$. Or $|x| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow x \in [-2, 2]$. Donc $D_f =$

EXERCICE 2 :

1) f(x) existe si $x - E(x) > 0$. Or par définition de la fonction partie entière, pour tout réel
$E(x) \leq x$ et $E(x) = x$. Si $x \in \mathbb{Z}$. Donc $D_f = \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$.

2)
a) L'ensemble de départ $]n, n+1[$ est l'ensemble de définition de g ; donc g
application.
b) Pour tout $x \in]n, n+1[$, $E(x) = n$. Donc $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x-n}}$.

EXERCICE 3 :

$f(x) = x^2 - 4x + 3$; $\quad g(x) = \sqrt{x}$

g est définie dans $[0, +\infty[$ pour que $g \circ f(x)$ existe il faut que $f(x) \in [0, +\infty[$.
Or $f(x) = (x-3)(x-1)$;
d'où $f(x) \in [0, +\infty[\Leftrightarrow x \in]-\infty, 1] \cup [3, +\infty[$
donc on peut définir $g \circ f$ dans les intervalles $]-\infty, 1]$ et $[3, +\infty[$.
Ainsi, pour tout $x \in]-\infty, 1] \cup [3, +\infty[$, $g \circ f(x) = g(f(x)) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$.

EXERCICE 4 :

Posons $w(x) = x - 1$, $v(x) = x^2$ et $u(x) = \frac{1}{x}$

Les fonctions v et w sont définies dans $\mathbb{R}$ et $v \circ w(x) = (x-1)^2$
De plus, u est définie dans $\mathbb{R}^*$ et $v \circ w(x) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$.
Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$, $u \circ v \circ w(x) = u(v \circ w(x)) = \frac{1}{(x-1)^2}$. Et on a bien $f = u \circ v \circ w$.

EXERCICE 5 :

1)
) Soit $f : (a, b) \mapsto a + b - ab$
Il est clair que f est une application car f est définie dans ExE.
De plus f prend ses valeurs dans E.
En effet, il n'y a que trois cas possibles, les valeurs a et b jouant des rôles symétrique
l'expression de f(a, b). $f(0, 1) = f(1, 0) = 1$; $f(0, 0) = 0$ et $f(1, 1) = 1$. Donc f est une app
de ExE dans E.

$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{4x-1}{2x-4} \Leftrightarrow (2x-4)y = 4x-1 \Leftrightarrow x = \frac{4y-1}{2y-4}$

D'où $x \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$ existe. (il est facile de vérifier que pour $y \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$, $x \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$)

De plus pour tout y donné, $x = \frac{4y-1}{2y-4}$ est unique

Donc pour tout $y \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$, il existe $x \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$ unique tel que $y = f(x)$

Par conséquent f est une bijection et sa bijection réciproque est : $f^{-1} = f$.

$f^{-1} : R - \{2\} \mapsto R - \{2\}$; c'est-à-dire

$x \mapsto \frac{4x-1}{2x-4}$

c) f est injective. En effet, soit (x_1, y_1) ; $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}x\mathbb{R}$ tels que : $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$.

On a : $(x_1 - 2y_1 ; x_1 + 3y_1) = (x_2 - 2y_2 ; x_2 + 3y_2)$

C'est-à-dire $\begin{cases} x_1 - 2y_1 = x_2 - 2y_2 \\ x_1 + 3y_1 = x_2 + 3y_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 - x_2) - 2(y_1 - y_2) = 0 \\ (x_1 - x_2) + 3(y_1 - y_2) = 0 \end{cases}$.

En posant $X = x_1 - x_2$ et $Y = y_1 - y_2$, la résolution de ce dernier système est $X = 0$ et $Y = \ldots$

soit $x_1 = x_2$ et $y_1 = y_2$. Ainsi, $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2) \Rightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$. Donc f est injective.

- f est injective. En effet, soit $(x', y') \in \mathbb{R}x\mathbb{R}$; trouvons $(x, y) \in \mathbb{R}x\mathbb{R}$ tel que $f(x, y) = (x', y')$.

$f(x, y) = (x', y') \Leftrightarrow (x - 2y, x + 3y) = (x', y') \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = x' \\ x + 3y = y' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{5}(3x' + 2y') \\ y = \frac{1}{5}(-x' + y') \end{cases}$; le cou...

(x, y) ainsi trouvé, f est surjective.

Conclusion : f est une bijection et sa bijection réciproque est :

$f^{-1} : RxR \mapsto RxR$

$(x, y) \mapsto \left(\frac{3}{5}x + \frac{2}{5}y, -\frac{1}{5}x + \frac{1}{5}y\right)$

EXERCICE 8 :

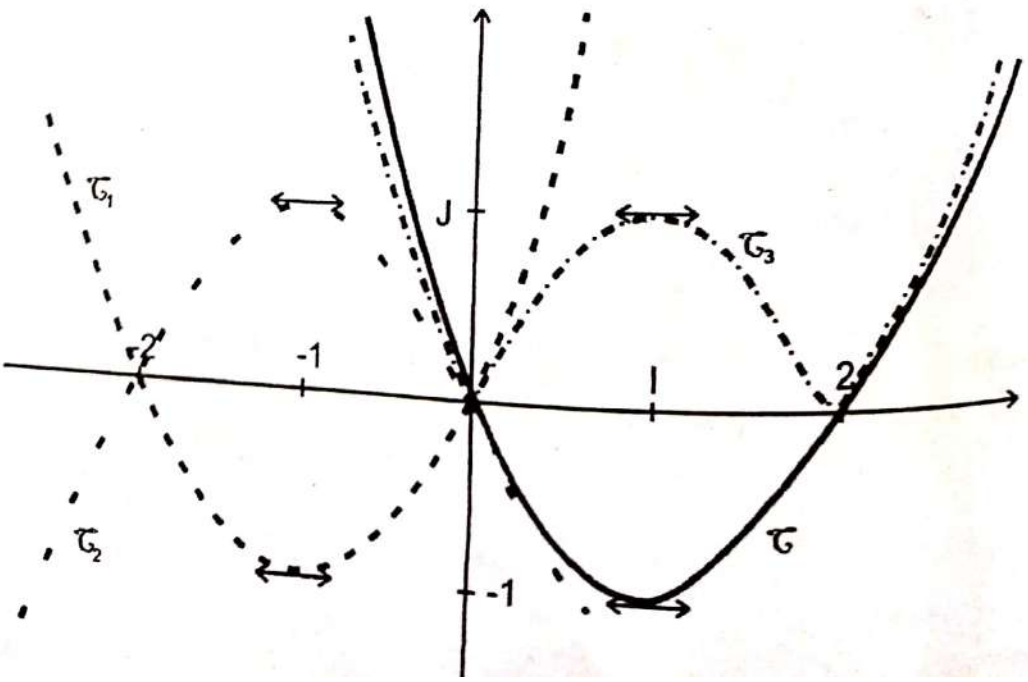
$f(x) = x^2 - 2x$

1)

a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x - 1)^2 - 1 = x^2 - 2x + 1 - 1 = x^2 - 2x = f(x)$. Donc $f(x) = (x - 1)^2 - 1$.

b) Posons $a = 1$ et $b = -1$ et $u(x) = x^2$. Alors on a : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = u(x - a) + b$.

Donc $(\mathcal{C})$ est l'image de $(\mathcal{C}_\mu)$ par la translation de vecteur $\vec{v}(1, -1)$



- $(\mathscr{C}_1)$ est l'image de $(\mathscr{C})$ par la symétrie orthogonale d'axe (OJ)
- $(\mathscr{C}_2)$ est l'image de $(\mathscr{C}_1)$ par la symétrie orthogonale d'axe (OI)
- $(\mathscr{C}_3)$ est l'image de $(\mathscr{C})$ par la symétrie orthogonale d'axe (OI) de la partie négative de f, la partie positive restant inchangée.
- $(\mathscr{C}_4)$ est l'image de $(\mathscr{C})$ par la translation de vecteur $\vec{u}(-1, 2)$. (non représentée sur la figure).

EXERCICE 9 :

1) Pour tout réel x, on a $|\sin x| \le 1$ d'où : $|1 + \sin x| \le 1 + |\sin x| \le 2$
De plus, pour tout réel x, on a $x^2 > 0$ et donc $1 + x^2 \ge 1$.
Il en résulte $\frac{1}{1+x^2} \le 1$. Donc pour tout réel x, on a $|f(x)| \le 2$.
La fonction f est bornée sur $\mathbb{R}$.

) Soit M un réel positif, on a : $|f(x)| = \frac{1}{|x|}$ d'où l'équivalence $|f(x)| \ge M \Leftrightarrow |x| \le \frac{1}{M}$. Soit $x_0 = \frac{1}{2M}$, on a : $|f(x_0)| = 2M$ et donc $|f(x_0)| \ge M$
Donc pour tout $M > 0$, il existe $x_0\left(x_0 = \frac{1}{2M}\right)$, élément de $\mathbb{R}^*$, tel que $|f(x_0)| \ge 0$, donc f n'est pas bornée sur $\mathbb{R}^*$.

On multiplie par l'expression conjuguée et on obtient $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{1+x}}$. On en déduit que pour tout réel positif x, on a $0 \le f(x) \le \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ puis $0 \le f(x) \le 1$. Donc f est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

XERCICE 10 :

a) $f(x) = \frac{2x}{x+3}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{-3\}$, $f(x) = a + \frac{b}{x+3} = \frac{ax+3a+b}{x+3}$. Par identification des deux expressions, on a : a = 2 et 3a + b = 0 ; soit a = 2 et b = -6 et $f(x) = 2 - \frac{6}{x+3}$.

b) Soit $M \in \mathbb{R}$, $f(x) > M \Leftrightarrow 2 - \frac{6}{x+3} > M \Leftrightarrow x > \frac{6}{2-M} - 3$ $(M \neq 2)$

Pour $x_0 = \frac{6}{2-M}$, $f(x_0) = \frac{12}{12-3M} > M$ pour $M < 4$ (d'après ce qui précède).
Donc, il existe au moins un réel x tel que $f(x) > M$
On en déduit que f n'est pas majorée.

c) Soit $m \in \mathbb{R}$, $f(x) < m \Leftrightarrow 2 - \frac{6}{x+3} < m \Leftrightarrow x < \frac{6}{2-m} - 3$

Pour $x'_0 = \frac{6}{2-m} - 6$, on $f(x'_0) = \frac{3m-4}{m-1}$; $f(x'_0) < m$ pour $m > 2$.
Donc il existe au moins un réel x tel que $f(x) < m$. On en déduit que f n'est pas minorée.

d) Soit $x \in [-1, 1]$, alors $-1 \le x \le 1 \Leftrightarrow 2 \le x + 3 \le 4 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \le \frac{1}{x+3} \le \frac{1}{2}$

D'où $\frac{3}{2} \le \frac{6}{x+3} \le 3$. Soit $-3 \le \frac{-6}{x+3} \le \frac{-3}{2} \Leftrightarrow -1 \le f(x) \le \frac{1}{2}$. f est bornée sur [-1, 1].

$g(x) = \frac{2\cos x}{3 + \cos x}$

b) posons X = cosx, pour tout réel x, $X \in [-1, 1]$. Et d'après ce qui précède, $X \in [-1, 1]$, $\frac{2X}{X+3} \in \left[-1, \frac{1}{2}\right]$. C'est-à-dire pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{+2\cos x}{3+\cos x} \in \left[-1, \frac{1}{2}\right]$.

Donc g est bornée sur $D_g = \mathbb{R}$.

EXERCICE 11 :

$f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$

$x \mapsto \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + x^2 > 0$. Ainsi, f(x) existe si $x \neq 0$. Donc l'ensemble de définition de f est $D_f = \mathbb{R}^*$

2) Pour tout x de $\mathbb{R}^*$, $f(x) = \frac{\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}{x\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}$

3) Soit $x \in \mathbb{R}^*$, $x^2 > 0 \Leftrightarrow 1 + x^2 > 1 \Leftrightarrow \sqrt{1+x^2} > 1 \Leftrightarrow \sqrt{1+x^2}+1 > 2$. Donc pour tout x de $\mathbb{R}^*$ $\sqrt{1+x^2}+1 > 2$. On en déduit que pour tout x de $\mathbb{R}^*$, $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1} < \frac{1}{2}$

C'est-à-dire $\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}+1} \leq \frac{1}{2}|x|$. Donc pour tout x de $\mathbb{R}^*$, $|f(x)| < \frac{1}{2}|x|$.

EXERCICE 1 :

On rappelle que $P(x) = ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$

a) $\Delta = 4^2 - 4x4(-3) = 64$. D'où $P(x) = 4\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 1\right)$

On en déduit $P(x) = 4\left(x - \frac{1}{2} - 1\right)\left(x - \frac{1}{2} + 1\right) = 4\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)$. Donc les racines de P sont $\frac{3}{2}$ et $-\frac{1}{2}$.

b) On a : $\Delta = 12^2 - 4x18x2 = 0$; d'où $P(x) = 2(x - 3)^2$. Donc la racine double de P est 3.

c) On a $\Delta = 1^2 - 4x2x3 = -23$; d'où $P(x) = 2\left[\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{23}{16}\right]$. Donc P n'a pas de racines.

d) On a : $\Delta = 1^2 - 4x2x(-6) = 49$; d'où $P(x) = 2\left[\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{49}{16}\right]$.

On en déduit $P(x) = 2\left(x - \frac{1}{4} - \frac{7}{4}\right)\left(x - \frac{1}{4} + \frac{7}{4}\right) = 2(x - 2)\left(x + \frac{3}{2}\right)$.

Donc les racines de p sont 2 et $-\frac{3}{2}$.

EXERCICE 2 :

a) On a : $\Delta = \left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^2 - 4\sqrt{6} = \left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)^2$.

Donc les racines de cette équation sont : $x_1 = \frac{-\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right) - \left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)}{2} = -\sqrt{2}$ et $x_2 = \frac{-\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right) + \left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)}{2} = -\sqrt{3}$

b) On a $\Delta = 6^2 - 4x9 = 0$. Donc l'équation admet une racine double égale à $\frac{6}{2} = 3$.

c) On a : $\Delta = 5^2 - 4x2x4 = -7$. Donc l'équation n'admet pas de solution.

d) On a : $\Delta = \left(3\sqrt{3}\right)^2 - 4x6 = 3$. Donc l'équation admet deux racines distincte
$x_1 = \frac{3\sqrt{3} - \sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{6}$ et $x_2 = \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

L'équation existe si $x \neq 1$ et $x \neq -2$. Pour tout $x \neq 1$ et $x \neq -2$,
$\frac{3x + 2}{x - 1} = \frac{x}{x + 2} \Leftrightarrow (3x + 2)(x + 2) = x(x - 1) \Leftrightarrow 2x^2 + 9x + 4 = 0$.

On a : $\Delta = 9^2 - 4x2x4 = 49$. Donc l'équation $2x^2 + 9x + 4 = 0$ admet deux racines $x_1 = \frac{-9-7}{4} = -4$ et $x_2 = \frac{-9+7}{4} = \frac{-1}{2}$. Comme $x_1 \neq 1$, $x_1 \neq -2$, $x_2 \neq 1$ et $x_2 \neq -2$, l'équation initiale admet les solutions $x_1 = -4$ et $x_2 = -\frac{1}{2}$.

f) L'équation existe si $x \neq 0$ et $x \neq -2$
Pour tout $x \neq 0$ et $x \neq -2$, $\frac{3x-4}{x} + \frac{8-2x}{x+2} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0$.
On a $\Delta = 6^2 - 4x8 = 4$. Donc l'équation $x^2 - 6x + 8 = 0$ admet les solutions $x_1 = \frac{6-2}{2} = 2$ et $x_2 = \frac{6+2}{2} = 4$.

EXERCICE 3 :

a) On a $\Delta = 1^2 - 4x2x(-1) = 9$. D'où les racines du polynôme $2x^2 + x - 1$ sont $x_1 = -1$ et $x_2 = \frac{1}{2}$.
Donc l'ensemble solution de l'inéquation est $S = \left]-1, \frac{1}{2}\right[$

b) $4(x-1) \geq x(3x-4) \Leftrightarrow -3x^2 + 8x - 4 \geq 0$
O a : $\Delta = 8^2 - 4(-3)(-4) = 16$. Les racines du polynôme $-3x^2 + 8x - 4$ sont $x_1 = \frac{-8-4}{-6} = 2$ et $x_2 = \frac{-8+4}{-6} = \frac{2}{3}$. Donc l'ensemble solution de l'inéquation est $S = \left[\frac{2}{3}, 2\right]$.

c) On a : $\Delta = 5^2 - 4x2x4 = -7$. D'où le polynôme $2x^2 + 5x + 4$ est du signe de 2 (positif). Donc l'ensemble solution de l'inéquation est $S = \varnothing$.

d) L'inéquation existe su $x \neq -2$.
Pour tout $x \neq -2$, $\frac{5x^2+16}{x+2} \leq 7 \Leftrightarrow \frac{5x^2+16}{x+2} - 7 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{5x^2-7x+2}{x+2} \leq 0$. Etudions le signe de $Q(x) = \frac{5x^2-7x+2}{x+2}$ dans un tableau.
On a : $\Delta = 7^2 - 4x5x2 = 9$. Le polynôme $5x^2 - 7x + 2$ admet les racines $\frac{2}{5}$ et 1. On a le tableau suivant :

x	$-\infty$	-2		$\frac{2}{5}$		1	$+\infty$
$x + 2$	-	○	+		+		+
$5x^2 - 7x + 2$	+		+	○	-	○	+
$Q(x)$	-		+	○	-	○	+

Du signe de $Q(x)$ dans ce tableau, nous déduisons que l'ensemble solution de l'inéquation est :
$S = \left]-\infty, -2\right[\cup \left[\frac{2}{5}, 1\right]$.

e) Pour tout $x \neq 0$, $x - \frac{1}{x} > 1 \Leftrightarrow x - \frac{1}{x} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-x-1}{x} > 0$
$\Delta = 1^2 - 4(-1) = 5$.
Les racines du polynôme $x^2 - x - 1$ sont :
$x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.
On a le tableau ci-contre : donc la solution de l'inéquation est $S = \left]x_1, 0\right[\cup \left]x_2, +\infty\right[$.

x	$-\infty$	x_1		0		x_2	$+\infty$
x	-		-	○	+		+
$x^2 - x - 1$	+	○	-		-	○	+
$\frac{x^2-x-1}{x}$	-	○	+		-	○	+

f) On a $\Delta = 5^2 - 4x3x3 = -11$. Le polynôme $3x^2 - 5x + 3$ a le signe de 3 (positif).
Donc la solution de l'inéquation est $S = \mathbb{R}$.

EXERCICE 4 :

Les réels -2 et 3 sont racines de P si et seulement si $2p + q = -2 + 3$ et $3p - 2q = -2\text{x}3$.
Soit $2p + q = 1$ et $3p - 2q = -6$. Donc $p = -\frac{4}{7}$ et $q = \frac{15}{7}$.

EXERCICE 5 :

$P(x) = x^2 - 2(2m - 3)x + m^2 - 3m + 3$.

On a $\Delta = [2(2m - 3)]^2 - 4(m^2 - 3m + 3) = 12(m^2 - 3m + 2)$

En factorisant Δ, on obtient $\Delta = 12(m - 1)(m - 2)$.

1) P a deux racines distinctes si et seulement si $\Delta > 0$. Or $\Delta > 0 \Leftrightarrow m \in]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$
Donc P a deux racines distinctes pour $m \in]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$

2) P a une racine double si et seulement si $\Delta = 0$.
Or $\Delta = 0 \Leftrightarrow m = 1$ ou $m = 2$.
Donc pour $m = 1$ ou $m = 2$, P a une racine double
   - pour $m = 1$, la racine est $x = \frac{2(2m - 3)}{2} = -1$
   - pour $m = 2$, la racine est $x = \frac{2(2m - 3)}{2} = 1$

EXERCICE 6 :

(E) : $(m + 2)x^2 + 2mx + m - 3 = 0$

1) L'équation (E) est du second degré si $m + 2 = 0$; soit $m = -2$.

2) On suppose $m \neq -2$. Pour étudier l'existence et le signe des racines de (E), nous avons besoin de Δ, S et P qui sont respectivement le discriminant de l'équation, la somme et le produit des racines lorsqu'elles existent.
On a : $\Delta = (2m)^2 - 4(m + 2)(m - 3) = 4(m + 6)$;
$S = -\frac{2m}{m + 2}$ et $P = \frac{m - 3}{m + 2}$
Le tableau ci-contre donne les signes de Δ, S et P.

m	$-\infty$		-6		-2		0		3		$+\infty$
Δ		-	0	+	|	+	|	+	|	+	
S				-	||	+	0	-	|	-	
P				+	||	-	|	-	0	+	

Conclusion :
- Pour $m \in]-\infty, -6[$, (E) n'admet pas de solution
- Pour $m = -6$, (E) admet une racine double négative car $S < 0$
- Pour $m \in]-6, -2[$, (E) admet deux racines distinctes négatives car $S < 0$ et $P > 0$
- Pour $m \in]-2, 0[$, (E) admet deux racines distinctes de signes contraires car $S > 0$ et $P < 0$.
- Pour $m = 0$, (E) admet deux racines opposées
- Pour $m \in]0, 3[$, (E) admet deux racines distinctes de signes contraires
- Pour $m = 3$, (E) admet deux racines distinctes, une nulle (car $P = 0$) et l'autre négative (car $S < 0$).
- Pour $m \in]3, +\infty[$, (E) admet deux racines distinctes négatives.

3) On sait que pour $m \in]-6, +\infty[\setminus\{-2\}$, les racines x' et x'' existent et $S = \frac{-2m}{m + 2}$ et $P = \frac{m - 3}{m + 2}$.

$$S = \frac{-2m}{m + 2} \Leftrightarrow m = -\frac{2S}{S + 2} \text{ et } P = \frac{m - 3}{m + 2} = \frac{-\frac{2S}{S + 2} - 3}{-\frac{2S}{S + 2} + 2}.$$

D'où $P = \frac{-5S-6}{4}$. Soit $5S + 4P + 6 = 0$ (*)

Or $S = x' + x''$ et $P = x'x''$.
De l'égalité (*), on déduit la relation $5(x' + x'') + 4x'x'' + 6 = 0$ indépendante de m.

4) On a : $x'^2 + x''^2 = (x' + x'')^2 - 2x'x'' = S^2 - 2P$
Or $S = \frac{-2m}{m+2}$ et $P = \frac{m-3}{m+2}$. D'où $x'^2 + x''^2 = \frac{4m^2}{(m+2)^2} - \frac{2m-6}{m+2}$. Donc
$x'^2 + x''^2 = \frac{2m^2+2m+12}{(m+2)^2}$.

5) x' et x'' vérifient l'égalité $\frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} = 2$ si et seulement si $\frac{x'+x''}{x'x''} = 2$.

Soit $\frac{S}{P} = 2$; c'est-à-dire $S = 2P$.

Or $S = \frac{-2m}{m+2}$ et $P = \frac{m-3}{m+2}$. D'où $S = 2P \Leftrightarrow \frac{-2m}{m+2} = \frac{2m-6}{x+2} \Leftrightarrow -2m = 2m - 6 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$;

Donc pour que les racines x' et x'' vérifient l'égalité, $\frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} = 2$. Il faut que $m = \frac{3}{2}$.

EXERCICE 7 :

$P(x) = x^2 + (2m + 1)x + m^2 + 1$
$\Delta = (2m + 1)^2 - 4(m^2 + 1) = 4m^2 + 4m + 1 - 4m^2 - 4 = 4m - 3$.
P admet de racines si et seulement si $\Delta \geq 0$; soit $m \geq \frac{3}{4}$.

Supposons $m \geq \frac{3}{4}$. Soient S et P la somme et le produit de ces racines.
On a : $S = -(2m + 1)$ et $P = m^2 + 1$ d'une part et $S = \alpha + \beta$ et $P = \alpha\beta$ d'autre part.

a) $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = S^2 - 2p = (2m + 1)^2 - 2(m^2 + 1)$
$\alpha^2 + \beta^2 = 29 \Leftrightarrow 4m^2 + 4m - 1 - 2m^2 - 2 = 29$
$\Leftrightarrow 2m^2 + 4m - 30 = 0 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 15 = 0 \Leftrightarrow m = -5$ ou $m = -3$.
Or $-5 < \frac{3}{4}$ donc $\alpha^2 + \beta^2 = 29$ si $m = 3$
Pour $m = 3$, $S = -7$ et $P = 10$. On en déduit $\alpha = -2$ et $\beta = -5$

b) $|\alpha - \beta| = 1 \Leftrightarrow (\alpha - \beta)^2 = 1 \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta = 1 \Leftrightarrow (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 1$
$|\alpha - \beta| = 1 \Leftrightarrow S^2 - 4P = 1 \Leftrightarrow (2m + 1)^2 - 4(m^2 + 1) = 1 \Leftrightarrow m = 1$.
Donc $|\alpha - \beta| = 1$ si $m = 1$. Pour $m = 1$, $S = -3$ et $P = 2$. On en déduit $\alpha = -2$ et $\beta = -1$.

EXERCICE 8 :

Posons $S = x' + x''$ et $P = x'x''$ alors on a : $S = 2P$ et $mP - S = 2m + 1$
D'où $S = 2P$ et $mP - 2P = 2m + 1$. Soit $P = \frac{2m+1}{m-2}$ et $S = \frac{4m+2}{m-2}$ avec $m \neq 2$
Donc l'équation cherchée est : $x^2 - \frac{4m+2}{m-2} + \frac{2m+1}{m-2} = 0$.

EXERCICE 9 :

a) Posons $X = x^2$ alors l'équation devient $X^2 - 11X + 18 = 0$
$\Delta = 11^2 - 4.18 = 49$; $X_1 = \frac{11-7}{2} = 2$ et $X_2 = \frac{11+7}{2} = 9$. D'où $x^2 = 2$ ou $x^2 = 9$. Soit $x = \pm\sqrt{2}$
ou $x = \pm 3$. Donc les solutions de l'équation initiale sont $-\sqrt{2}$, -3, $\sqrt{2}$ et 3.

b) On pose $X = x^2$ et l'équation devient $X^2 + X + 1 = 0$
$\Delta = 1 - 4 = -3$. D'où l'équation $X^2 + X + 1 = 0$ n'admet pas de racine ; par conséquent, l'équation initiale n'admet pas de solution.

c) On pose $X = x^2$ et l'équation devient : $X^2 - 4X - 45 = 0$
$\Delta = 4^2 - 4(-45) = 14^2$; $X_1 = \frac{4+14}{2} = 9$ et $X_2 = \frac{4-14}{2} = -5$
D'où $x^2 = X_1 \Leftrightarrow x = \pm 3$. Mais $x^2 = X_2$ n'a pas de solution.
Donc les solutions de l'équation initiale sont -3 et 3

d) On pose $X = x^2$ et l'équation devient ; $X^2 + 2(a^2 + b^2)X - (a^2 - b^2)^2 = 0$
$\Delta' = (a^2 + b^2)^2 + (a^2 - b^2)^2 = 2(a^4 + b^4)$
D'où $X_1 = -(a^2 + b^2) - \sqrt{2(a^4 + b^4)}$ et $X_2 = -(a^2 + b^2) + \sqrt{2(a^4 + b^4)}$
$x^2 = X_1$ n'admet pas de racine car $x_1 < 0$
$x^2 = X_2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{X_2}$ avec $X_2 = -(a^2 + b^2) + \sqrt{2(a^4 + b^4)}$
Donc l'équation initiale admet deux racines $-\sqrt{X_2}$ et $\sqrt{X_2}$

EXERCICE 10 :

1) **Résolution d'équations**

a) L'équation existe si $4 - x^2 \geq 0$ soit $x \in [-2, 2]$
$\sqrt{4 - x^2} = x - 1 \Leftrightarrow 4 - x^2 = (x-1)^2 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 3 = 0$
$\Delta = 2^2 - 4.2.(-3) = 28$. D'où $x_1 = \frac{2 - 2\sqrt{7}}{4} = \frac{1 - \sqrt{7}}{2}$ et $x_2 = \frac{2 + 2\sqrt{7}}{4} = \frac{1 + \sqrt{7}}{2}$
Or $\sqrt{4 - x_1^2} \neq x_1 - 1$. Donc l'équation initiale admet une seule racine $\frac{1+\sqrt{7}}{2}$.

b) L'équation existe si $x - 3 \geq 0$ et $6x + 1 \geq 0$; soit $x \geq 3$.
$\sqrt{x-3} - \sqrt{6x+1} + 4 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-3} + 4 = \sqrt{6x+1} \Leftrightarrow \left(\sqrt{x-3} + 4\right)^2 = \left(\sqrt{6x+1}\right)^2$
$\sqrt{x-3} - \sqrt{6x+1} + 4 = 0 \Leftrightarrow 8\sqrt{x-3} = 5x - 12 \Leftrightarrow 64(x-3) = (5x-12)^2$
$\sqrt{x-3} - \sqrt{6x+1} + 4 = 0 \Leftrightarrow 25x^2 - 184x + 336 = 0$
$\Delta' = 92^2 - 25x336 = 64$. D'où $x_1 = \frac{92-8}{25} = \frac{84}{25}$ et $x_1 = \frac{92+8}{25} = 4$
Les deux racines x_1 et x_2 vérifient l'équation initiale.
Donc les solutions de cette équation sont $\frac{84}{25}$ et 4

c) L'équation existe si $x \geq 0$; $x + 1 \geq 0$ et $2x + 1 \geq 0$. Soit $x \geq 0$.
$\sqrt{x} + \sqrt{x+1} = \sqrt{2x+1} = \sqrt{2x+1} \Leftrightarrow \left(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}\right)^2 = \left(\sqrt{2x+1}\right)$
$\Leftrightarrow 2x + 1 + 2\sqrt{x^2 + x} = 2x + 1$
$\sqrt{x} + \sqrt{x+1} = \sqrt{2x+1} \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2 + x} = 0 \Leftrightarrow x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -1$
or $-1 < 0$, donc l'équation proposée admet une seule racine égale à 0.

d) $x + \sqrt{-x^2 + x + 6} = \sqrt{\sqrt{2x}.\sqrt{-x^2 + x + 6} - x}$
$\Leftrightarrow \left(x + \sqrt{-x^2 + x + 6}\right)^2 = \left(\sqrt{2x\sqrt{-x^2 + x + 6} - x}\right)^2$
$\Leftrightarrow x + 6 + 2x\sqrt{-x^2 + x + 6} = 2x\sqrt{-x^2 + x + 6} - x \Leftrightarrow 2x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -3$
Or $2(-3)\sqrt{(-3)^2 - 3 + 6} - (-3) = -6\sqrt{12} + 3 < 0$. Donc l'équation n'a pas de solution.

2) Résolution d'inéquations

a) L'inéquation n'a de sens que si $x + 1 \geq 0$; soit $x \geq -1$

$$\sqrt{x+1} \leq x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 \leq (x-2)^2 \\ x - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 3 \geq 0 \\ x \geq 2 \end{cases}$$

$\Delta = 5^2 - 4.3 = 13$. Les racines du polynôme $x^2 - 5x + 3$ sont $x_1 = \frac{5-\sqrt{13}}{2}$ et $x_2 = \frac{5+\sqrt{13}}{2}$. D'où $x^2 - 5x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty[$

Or $x_1 < 2$. Donc l'ensemble solution de l'inéquation initiale est $S = [x_2, +\infty[$

b) L'inéquation n'a de sens que si $2x + 3 \geq 0$; soit $x \geq 1$

$\sqrt{2x+3} > \sqrt{x-1} \Leftrightarrow 2x + 3 > x - 1 \Leftrightarrow x > 4$

Donc l'ensemble solution de l'inéquation est $S =]4, +\infty[$

c) L'inéquation n'a de sens que si $5x - 4 \geq 0$ et $x \geq 0$ soit $x \geq \frac{4}{5}$

$\sqrt{5x-4} \geq \sqrt{x} + 2 \Leftrightarrow 5x - 4 \geq \left(\sqrt{x}+2\right)^2 \Leftrightarrow x - 2 \geq \sqrt{x} \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 \geq 0$

$\Delta = 5^2 - 4.4 = 9$.

Les racines du polynôme $x^2 - 5x + 4$ sont $x_1 = \frac{5+3}{2} = 4$ et $x_2 = \frac{5-3}{2} = 1$

On déduit l'ensemble solution de l'inéquation $x^2 - 5x + 4 \geq 0$ qui est $]-\infty, 1] \cup [4, +\infty[$

Avec la condition $x \geq \frac{4}{5}$, on conclut que l'ensemble solution de l'inéquation initiale est $S = \left[\frac{4}{5}, 1\right] \cup [4, +\infty[$.

d) L'inéquation n'a de sens que si $x^2 - 1 > 0$; soit $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} > 4 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2-1} > 16 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2-1} - 16 > 0 \Leftrightarrow \frac{17-16x^2}{x^2-1} > 0$

$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} > 4 \Leftrightarrow 17 - 16x^2 > 0 \Leftrightarrow (\sqrt{17} - 4x)(\sqrt{17} + 4x) > 0$

L'ensemble solution de cette dernière inéquation est $\left[-\frac{\sqrt{17}}{4}, \frac{\sqrt{17}}{4}\right]$

Donc l'ensemble solution de l'inéquation initiale est $S = \left[-\frac{\sqrt{17}}{4}, -1\right[\cup \left]1, \frac{\sqrt{17}}{4}\right]$

e) Pour tout x tel que $3x + 1 < 0$, $\sqrt{3x^2+1} > 3x + 1$

Donc une partie de l'ensemble solution $\left]-\infty, -\frac{1}{3}\right]$

- Pour $x \geq -\frac{1}{3}$, $\sqrt{3x^2+1} > 3x + 1 \Leftrightarrow \left(\sqrt{3x^2+1}\right)^2 = (3x+1)^2$
  $\Leftrightarrow 6x(x+1) < 0 \Leftrightarrow x \in \left]-1, 0\right]$. Donc la seconde partie de l'ensemble solution est : $\left[-\frac{1}{3}, +\infty\right[\cap \left]-1, 0\right[$; soit $\left[-\frac{1}{3}, 0\right[$. Donc l'ensemble solution de l'inéquation initiale est : $\left]-\infty, -\frac{1}{3}\right[\cup \left[-\frac{1}{3}, 0\right[= \left]-\infty, 0\right[$.

f) L'inéquation existe si $2x + 1 \geq 0$ et $2x - 1 \geq 0$; soit $x \geq \frac{1}{2}$

$\sqrt{2x+1} - \sqrt{2x-1} > 1 \Leftrightarrow \left(\sqrt{2x+1} - \sqrt{2x-1}\right)^2 > 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{4x^2-1} < 4x - 1$

$\sqrt{2x+1} - \sqrt{2x-1} > 1 \Leftrightarrow 4(4x^2 - 1) < (4x-1)^2 \Leftrightarrow x < \frac{5}{8}$

Donc l'ensemble solution de l'inéquation est $S = \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right[$.

EXERCICE 11 :

a) $D = \begin{vmatrix} \sqrt{2}-1 & -m \\ 1 & -(\sqrt{2}+1) \end{vmatrix} = m - 1$; $D_x = \begin{vmatrix} \sqrt{2}-1 & -m \\ m & -(\sqrt{2}+1) \end{vmatrix} = m^2 - 1$;

$D_y = \begin{vmatrix} \sqrt{2}-1 & \sqrt{2}-1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = (\sqrt{2}-1)(m-1)$

- Si $m = 1$, alors $D = D_x = D_y = 0$. Donc tout couple (x, y) de nombre tel que $x - (\sqrt{2}+1)y = 1$ est solution du système. D'où $S = \{(1 + (\sqrt{2}+1)\lambda, \lambda) ; \lambda \in \mathbb{R}\}$
- Si $m \neq 1$, alors on a : $x = m + 1$ et $y = \sqrt{2} - 1$; donc $S = \{(m+1, \sqrt{2}-1)\}$

b) On a : $D = \begin{vmatrix} m\sqrt{2} & -3\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 2m\sqrt{3} \end{vmatrix} = 4m^2 - 9$; $D_x = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -3\sqrt{3} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 2m\sqrt{3} \end{vmatrix} = 2m + 3$;

$D_y = \begin{vmatrix} m\sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\sqrt{3} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix} = m\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{2m+3}{\sqrt{6}}$

- Si $m = -\frac{3}{2}$, alors $D = D_x = D_y = 0$ et tout couple solution du système est de la forme $\left(-\lambda\sqrt{6} - \frac{1}{3}, \lambda\right)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Si $m = \frac{3}{2}$, alors $D = 0$; mais $D_x \neq 0$ et $D_y \neq 0$. Donc le système n'a pas de solution
- Si $m \neq -\frac{3}{2}$ et $m \neq \frac{3}{2}$, alors $x = \frac{D_x}{D} = \frac{1}{2m-3}$ et $y = \frac{D_y}{D} = \frac{1}{\sqrt{6}(2m-3)}$.

  Donc $S = \left\{\left(\frac{1}{2m-3}, \frac{1}{\sqrt{6}(2m-3)}\right)\right\}$.

EXERCICE 12 :

a) $x^2 + y^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow (x+y)^2 - 2xy + \frac{x+y}{xy} = \frac{9}{2}$

Or, xy = -2. D'où $x^2 + y^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow 2(x+y)^2 - (x+y) - 1 = 0$

On pose $X = x + y$ et on a : $2X^2 - X - 1 = 0$

$\Delta = 1 - 4.2.(-1) = 9$. On déduit $X = -\frac{1}{2}$ ou $X = 1$.

D'où $\begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{9}{2} \\ xy = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -\frac{1}{2} \\ xy = -2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x + y = 1 \\ xy = -2 \end{cases}$ avec $x \neq 0$ et $y \neq 0$.

Ainsi x et y sont solutions des équations $x^2 + \frac{1}{2}x - 2 = 0$ et $x^2 - x - 2 = 0$

$x^2 + \frac{1}{2}x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1-\sqrt{33}}{4}$ ou $x = \frac{-1+\sqrt{33}}{4}$

$x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -1$. Donc l'ensemble solution du système initial est :

$$S = \left\{\left(\frac{-1-\sqrt{33}}{4}, \frac{-1+\sqrt{33}}{4}\right); \left(\frac{-1+\sqrt{33}}{4}, \frac{-1-\sqrt{33}}{4}\right); (2, -1) ; (-1, 2)\right\}$$

b) En posant $X = \frac{1}{x-2}$ et $Y = \frac{1}{y-1}$ avec $x \neq 2$ et $y \neq 1$.

Le système devient $\begin{cases} 4X + Y = 5 \\ 4X - Y = 2 \end{cases}$ dont les solutions sont : $X = \frac{7}{8}$ et $Y = \frac{3}{2}$.

On en déduit $\frac{1}{x-2} = \frac{7}{8}$ et $\frac{1}{y-1} = \frac{3}{2}$; soit $x = \frac{22}{7}$ et $y = \frac{5}{3}$. Donc $S = \left\{\left(\frac{22}{7}, \frac{5}{3}\right)\right\}$

c) $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 6 \\ x^2 + y^2 - xy = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - xy = 6 \\ (x+y)^2 - 3xy = 10 \end{cases}$

On pose $X = (x + y)^2$ et $Y = xy$ et le système devient :

$\begin{cases} X - Y = 6 \\ X - 3Y = 10 \end{cases}$ dont les solutions sont $X = 4$ et $Y = -2$.

Ainsi $(x + y)^2 = X$ et $xy = Y \Leftrightarrow (x + y)^2 = 4$ et $xy = -2 \Leftrightarrow (x + y = 2$ ou $x + y = -2)$ et $xy = -2$. D'où le système initial est équivalent à : $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = -2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x + y = -2 \\ xy = -2 \end{cases}$. On déduit que x et y sont solutions de $x^2 - 2x - 2 = 0$ ou de $x^2 + 2x - 2 = 0$.

Or, $x^2 - 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{3}$ ou $x = 1 + \sqrt{3}$

$x^2 + 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 - \sqrt{3}$ ou $x = -1 + \sqrt{3}$

Donc l'ensemble solution du système initial est :

$$S = \left\{\left(1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}\right); \left(1+\sqrt{3}, 1-\sqrt{3}\right); \left(-1-\sqrt{3}, -1+\sqrt{3}\right); \left(-1+\sqrt{3}, -1-\sqrt{3}\right)\right\}$$

d) On a $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$. Or $x + y = -1$

D'où $\begin{cases} x^3 + y^3 = -7 \\ x + y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - xy = -7 \\ x + y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - 3xy = -7 \\ x + y = -1 \end{cases}$

$\begin{cases} x^3 + y^3 = -7 \\ x + y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = \frac{8}{3} \\ x + y = -1 \end{cases}$; x et y sont solutions de l'équation $x^2 + x + \frac{8}{3} = 0$

$\Delta = 1 - 4.\frac{8}{3} = -\frac{29}{3} < 0$. Cette équation n'a pas de solution.

Donc le système initial n'a pas de solution.

e) $\begin{cases} x^3 + xy^3 = -10 \\ xy = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy(x^2 + y^2) = -10 \\ xy = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = -2 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - 2xy = 5 \\ xy = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 = 1 \\ xy = -2 \end{cases}$

$\begin{cases} (x+y)^2 = 1 \\ xy = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ xy = -2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x + y = -1 \\ xy = -2 \end{cases}$;

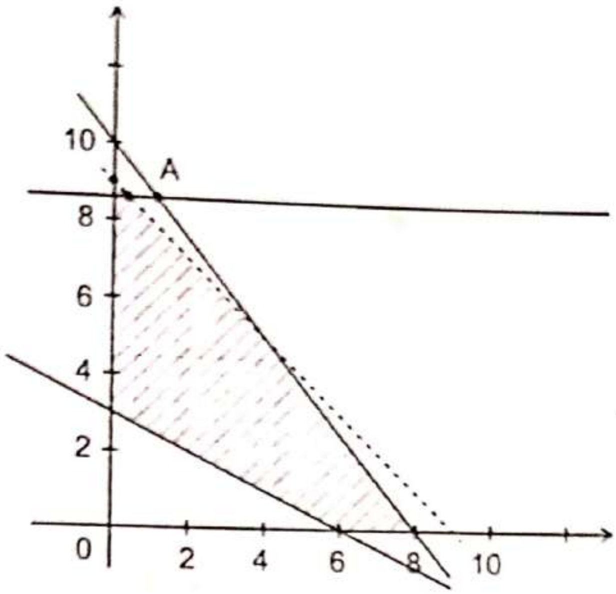
x et y sont solutions (symétriques) de l'équation $x^2 - x - 2 = 0$ et de $x^2 + x - 2 = 0$.

Or $x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -1$; $x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ ou $x = 1$.

Donc, $S = \{(2, -1) ; (-1, 2) ; (-2, 1) ; (1, -2)\}$.

EXERCICE 13 :

1) Traçons dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les droites d'équations $x + 2y = 6$; $5x + 4y = 40$; $x = 0$; $y = 0$ et $y = 7$.
Les solutions du système sont tous les couples (x, y), coordonnées des points de la partie colorée ci-après.



2)

- D'après le graphique, $x + y$ est maximale au point A de coordonnées $\left(\frac{12}{5}, 7\right)$. On a alors $x + y = \frac{47}{5}$.
- D'après le graphique $x + y$ est maximale en nombre entier aux points de coordonnées $(2, 7)$ et $(4, 5)$. La valeur de ce maximum est $x + y = 9$.

3) L'expression $2x + y$ est maximale au point de coordonnées $(0, 3)$. La valeur de ce minimum est $x + y = 3$.

Remarque : pour déterminer les points dont les coordonnées vérifient un système d'inéquations donné, rendent maximale ou minimale une expression de la forme $ax + by$:
- On considère les droites d'équations $ax + by = m$ $(m \in \mathbb{R})$
- La plus "au-dessus" dans la partie colorée est maximale et la plus "en-dessous" est minimale.

EXERCICE 14 :

1) **Résolution par substitution**

a) $(S_1)\begin{cases} x + y + 2z = 4 & (E_1) \\ 2x - y + 3z = 6 & (E_2) \\ x - 3y + 4z = 7 & (E_3) \end{cases}$

De l'équation (E_1), on déduit que $x = -y - 2z + 4$. en remplaçant cette expression de x dans (E_2) et (E_3), on obtient : $(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y - 2z + 4 \\ 3y + z = 2 \\ -4y + 2z = 3 \end{cases}$. Le système $\begin{cases} 3y + z = 2 \\ -4y + 2z = 3 \end{cases}$ admet un unique couple solution $\left(\frac{1}{10}, \frac{17}{10}\right)$. On en déduit que $x = -\frac{1}{10} - 2.\frac{17}{10} + 4 = \frac{1}{2}$. Donc le système (S_1) a un unique triplet solution : $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{10}, \frac{17}{10}\right)$

b) $(S_2) : \begin{cases} y + z = 1 & (E_1) \\ z + x = 4 & (E_2) \\ x + y = -1 & (E_3) \end{cases}$

Des équations (E_1) et (E_2), on déduit $y = 1 - z$ et $x = 4 - z$.
En remplaçant ces expressions de x et y dans (E_3),on obtient $-2z + 6 = 0$ soit $z = 3$.
On en déduit $x = 1$ et $y = -2$. Donc le système (S_2) a un unique triplet solution $(1, -2, 3)$

c) $(S_2) : \begin{cases} x + 2y + 3z = 14 & (E_1) \\ 2x - 3y + z = 1 & (E_2) \\ 5x - 11y = -17 & (E_3) \end{cases}$. On déduit de l'équation (E_2) que $z = 1 - 2x + 3y$

En remplaçant z par $1 - 2x + 3y$ dans l'équation (E_1), on obtient $(S_3) : \begin{cases} -5x + 11y = 11 \\ z = 1 - 2x + 3z \\ 5x - 11y = -17 \end{cases}$

Le système $\begin{cases} -5x + 11y = 11 \\ 5x - 11y = -17 \end{cases}$ n'a pas de solution .

Donc le système (S_3) n'a pas de triplet solution.

2) Résolution par le point de Gauss

a) $(S_1) : \begin{cases} 2x + 3y - 5z = -11 & (E_1) \\ 4x + y - 2z = -8 & (E_2) \\ x - 2y + z = -2 & (E_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y - 5z = -11 & (E_1) \\ -5y + 8z = 14 & (E'_2) = -2(E_1) + (E_2) \\ 7y - 7z = -7 & (E'_3) = (E_1) - 2(E_3) \end{cases}$

$(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y - 5z = -11 & (E_1) \\ -5y + 8z = 14 & (E'_2) \\ 3z = 9 & (E''_3) = (E'_2) + 5(E'_3) \end{cases}$

En remplaçant par la dernière équation et en remontant, on obtient : $z = 3$, $y = 2$ et $x = -1$
Donc le système (S_1) a un unique triplet solution : $(-1, 2, 3)$.

b) $(S_2) : \begin{cases} x - 2y + z = -5 & (E_1) \\ -x + y + 2z = -4 & (E_2) \\ 2x - y - z = 5 & (E_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = -5 & (E_1) \\ -y + 3z = -9 & (E'_2) = (E_1) + (E_2) \\ 3y - 3z = 15 & (E'_3) = (E_3) - 2(E_1) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = -5 & (E_1) \\ -y + 3z = -9 & (E'_2) \\ 2z = -4 & (E''_3) = (E'_2) + (E'_3) \end{cases}$. On en déduit $z = -2$; $y = 3$ et $x = 3$.

Donc le système (S_2) a un unique triplet solution : $(3, 3, -2)$.

c) $(S_3): \begin{cases} x - 2y = \sqrt{2} & (E_1) \\ y - 2z = \sqrt{2} & (E_2) \\ z - 2x = \sqrt{2} & (E_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = \sqrt{2} & (E_1) \\ y - 2z = \sqrt{2} & (E_2) \\ -4y + z = 3\sqrt{2} & (E'_3) = 2(E_1) + (E_3) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = \sqrt{2} & (E_1) \\ y - 2z = \sqrt{2} & (E'_2) \\ -7z = 7\sqrt{2} & (E''_3) = 4(E_2) + (E'_3) \end{cases}$. On en déduit $z = -\sqrt{2}$, $y = -\sqrt{2}$ et $x = -\sqrt{2}$.

Donc le système (S_3) a un unique triplet solution $\left(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$.

EXERCICE 15 :

1) Ces deux nombres réels, s'ils existent, seront solution de l'équation $x^2 - kx + k = 0$; $\Delta = k^2 - 4k$.
Si $k \in]-\infty, 0] \cup [4, +\infty[$, l'équation $x^2 - kx + k = 0$ admet deux racines distinctes ou confondues (si $k = 0$ ou $k = 4$). Donc pour ces valeurs de k, ces deux nombres existent.
Si $k \in]0, 4[$ alors l'équation $x^2 - kx + k = 0$ n'admet pas de racines et ces nombres n'existent pas.

2) Si l'équation $x^2 + m(m + 3)x + m^3 = 0$ admet deux solutions α et β alors $\alpha + \beta = -m^2 - 3m$ et $\alpha\beta = m^3$. Or, $\beta = \alpha^2$. D'où $\alpha\beta = m^3 \Leftrightarrow \alpha^3 = m^3 \Leftrightarrow \alpha = m$
On en déduit que $\beta = m^2$. Ainsi, $\alpha + \beta = -m^2 - 3m \Leftrightarrow m + m^2 = -m^2 - 3m \Leftrightarrow 2m^2 + 4m = 0$
$\Leftrightarrow m = 0$ ou $m = -2$
Donc pour $m = 0$ ou $m = -2$, l'équation a deux racines α et β telles que $\alpha^2 = \beta$.

CHAPITRE 11 : LES APPLICATIONS LINEAIRES - MATRICES

EXERCICE 1 :

Montrons que h est une application linéaire

- $\forall \vec{u}, \vec{v} \in E$, $h(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v} = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$.
- $\forall k \in \mathbb{R}$, $h(k\vec{u}) = \lambda(k\vec{u}) = k(\lambda\vec{u}) = kh(\vec{u})$.

  Donc h est une application linéaire appelée **homothétie linéaire de rapport** λ.

EXERCICE 2 :

Soient $\vec{u}, \vec{v} \in E$

Posons $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$

- $f(\vec{u} + \vec{v}) = f(x + x')\vec{i} + (y + y')\vec{j} = 2(x + x') + y + y' = 2x + y + 2x' + y'$

  $= f(x\vec{i} + y\vec{j}) + f(x'\vec{i} + y'\vec{j}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, soit $\vec{u} \in E / \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$

  $f(\lambda\vec{u}) = f(\lambda(x\vec{i} + y\vec{j}) = 2\lambda x + \lambda y = \lambda(2x + y) = \lambda(f(x\vec{i} + y\vec{j}) = \lambda f(\vec{u})$

  f est une application linéaire. De plus son ensemble d'arrivée est $\mathbb{R}$ d'où f est une forme linéaire.

EXERCICE 3 :

Soit $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} \in E$; $f(\vec{u}) = f(x\vec{i} + y\vec{j}) = f(x\vec{i}) + f(y\vec{j}) = xf(\vec{i}) + yf(\vec{j})$

Posons $a = f(\vec{i})$ et $b = f(\vec{j})$. On aura : $f(\vec{u}) = ax + by$.

EXERCICE 4 :

Soit $\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$

$(x, y) \mapsto 2x + 3y - 1$

$f(0,0) = 1 \neq 0$. Donc f n'est pas une application linéaire/

EXERCICE 5 :

a) $\forall (x, y) \in E$, tout couple $(x, y) \in \mathrm{Ker}f$ si et seulement si

$f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$; d'où $\mathrm{Ker}f = \{(0, 0)\}$.

Soit $(x', y') \in \mathrm{Im}f$; $f(x, y) = (x', y') \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = x' \\ x - y = y' \end{cases}$; $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$.

Donc pour tout couple $(x', y') \in \mathbb{R}^2$, $\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2 / 2x + y = x'$ et $x - y = y'$. $\mathrm{Im}f = \mathbb{R}^2$.

b) Soit $\vec{u}(x, y) \in E$; $\vec{u} \in \mathrm{Ker}f \Leftrightarrow f(\vec{u}) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases}$; D = 0. Le système est homogène.

Kerf est la droite vectorielle engendrée par $\overrightarrow{u_0}(-1, 1)$ ou la droite d'équation (D) : $x + y = 0$.

Soit $\vec{v}(x', y') \in E$, si $\vec{v} \in \mathrm{Im}f \Leftrightarrow \exists \vec{u}(x, y) \in E / f(\vec{u}) = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = x' \\ 2x + 2y = y' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = x' \\ x + y = \dfrac{y'}{2} \end{cases}$

Ce système admet une solution si et seulement si $x' = \dfrac{y'}{2}$.

D'où Imf est la droite vectorielle d'équation $2x' - y' = 0$ ou $2x - y = 0$.

c) Soit $\vec{u} \in E / \vec{u}(x, y)$, $f(\vec{u}) = x - y$

$f(\vec{u}) = \vec{0} \Leftrightarrow x - y = 0$

Kerf est la droite vectorielle d'équation $x - y = 0$. Imf = $\mathbb{R}$.

EXERCICE 6 :

1) **Image de $\vec{v}$**

$f(\vec{v}) = f(3\vec{i} + \vec{j}) = 3f(\vec{i}) + f(\vec{j}) = 3(\vec{i} + \vec{j}) + 2\vec{i} - \vec{j} = 5\vec{i} + 2\vec{j}$; $f(\vec{v}) = 5\vec{i} + 2\vec{j}$.

2) $M(f) = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{2} & 1 \\ 2 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$; image de $\vec{i}$ et $\vec{j}$; $f(\vec{i}) = -\dfrac{1}{2}\vec{i} + 2\vec{j}$; $f(\vec{j}) = \vec{i} + \sqrt{3}\vec{j}$.

EXERCICE 7 :

1) **Montrons que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de E_2.**

$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$. D'où $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de E_2.

2) **Exprimons M' dans $(\vec{u}, \vec{v})$**

On a : $\begin{cases} \vec{i} + \vec{j} = \vec{u} \\ \vec{i} - \vec{i} = \vec{v} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{i} = \dfrac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v}) \\ \vec{j} = \dfrac{1}{2}(\vec{u} - \vec{v}) \end{cases}$

$f(\vec{u}) = 3\vec{i} - \vec{j} = \dfrac{3}{2}(\vec{u} + \vec{v}) - \dfrac{1}{2}(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} + 2\vec{v}$

$f(\vec{v}) = -\vec{i} - \vec{j} = -\dfrac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v}) - \dfrac{1}{2}(\vec{u} - \vec{v}) = -\vec{u}$

$\begin{cases} f(\vec{u}) = \vec{u} + 2\vec{v} \\ f(\vec{v}) = -\vec{u} \end{cases}$. D'où $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

EXERCICE 8 :

$M(f) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$; $\det(M(f)) = -1-2 \neq 0$

Comme $\det M(f) \neq 0$, l'endomorphisme f est bijectif ; par conséquent, f est un automorphisme.

Déterminons f^{-1} analytiquement

$M(f^{-1}) = \dfrac{1}{\det M(f)}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = -\dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{3} \end{bmatrix}$; $M(f^{-1}) = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{3} \end{bmatrix}$

D'm f^{-1} est définie analytiquement par : $\begin{cases} -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y = x' \\ \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y = y' \end{cases}$.

PROBLEME 1 :

1) $\vec{v}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre λ si et seulement si $\vec{v} \in \text{Ker}f(f - \lambda Id)$.
Soit $\vec{v} \in E_2$. Supposons $f(\vec{v}) = \lambda\vec{v} \Leftrightarrow f(\vec{v}) - \lambda\vec{v} = \vec{0}$; donc $(f - \lambda Id)(\vec{v}) = \vec{0}$;
d'où $\vec{v} \in \text{Ker}(f - \lambda Id)$.

2) Soit $\vec{v}$ un vecteur propre non nul, associé à la valeur propre λ
$v \in \text{Ker}f(f - \lambda Id)$; Donc $\text{Ker}(f - \lambda Id) \neq \{\vec{0}\}$; D'où $\det M(f - \lambda Id) = 0$.

3) $M(f) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$; $M(Id) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$M(f - \lambda Id) = \begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 \\ -1 & 1-\lambda \end{bmatrix}$. Si λ est une valeur propre d'après (2), $\text{Det}M(f - \lambda Id) = 0$; donc

$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (4-\lambda)(1-\lambda) - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$ ou $\lambda = 3$

Les deux valeurs propres sont 2 et 3.

4) Soit $\vec{v}$ un vecteur propre de f. La valeur propre associée à $\vec{v}$ est 2 ou 3 d'après 3. ; donc $\vec{v} \in \ker(f - 2Id)$ ou $\vec{v} \in \text{Ker}(f - 3Id)$. $M(f - 2Id) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

Soit $\vec{u}(x, y)$, $(f - 2Id)(\vec{u}) = (2x + 2y)\vec{i} + (-x - y)\vec{j} = (x + y)(2\vec{i} - \vec{j})$
$\text{Ker}(f - 2Id)$ est la droite verticale d'équation $x + y = 0$
$M(f - 3Id) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

Soit $\vec{u}(x, y)$; $(f - 3Id)(\vec{u}) = (x + 2y)\vec{i} + (-x - 2y)\vec{j} = (x + 2y)(\vec{i} - \vec{j})$
$\text{Ker}(f - 3Id)$ est la droite vectorielle d'équation $x + 2y = 0$
D'où les droites vectorielles recherchées sont $D_1 : x + y = 0$ et $D_2 : x + 2y = 0$.

5) $\det(\vec{I}, \vec{J}) = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$; d'où $(\vec{I}, \vec{J})$ est une base.

$\vec{I} \in D_1$; donc $f(\vec{I}) = 2\vec{I}$; $\vec{J} \in D_2$, donc $f(\vec{J}) = 3\vec{J}$.

Donc la matrice M' de f dans la base $(\vec{I}, \vec{J})$ est $M' = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

PROBLEME 2 :

A.

1) **Matrice de f_m**
$M = \begin{bmatrix} 3m-1 & m-1 \\ 1-m & 1 \end{bmatrix}$

f est bijective si $\det M \neq 0 \Leftrightarrow (3 - m) - (m - 1)(1 - m) \neq 0 \Leftrightarrow m^2 + m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$ et $m \neq 0$
f est bijective si $m \in \mathbb{R} - \{0, -1\}$.

2) On suppose $m = 0$

a) **Déterminons $\ker f_0$**

$M_0 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$; $\forall \vec{v} \in E$, $\vec{v} \in \ker f_0$ si et seulement si $f_0(\vec{v}) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} -x - y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$

Donc $\ker f_0$ est la droite vectorielle d'équation $x + y = 0$ engendrée par $\vec{i} - \vec{j}$

b) Soit $\vec{v}(x, y)$

$f_0(\vec{v}) = (-x - y)\vec{i} + (x + y)\vec{j} = (-x - y)(\vec{i} - \vec{j})$; d'où $\vec{v}$ appartient à la droite vectorielle de base $\vec{i} - \vec{j}$.

c) **Déduisons que $f_0 \circ f_0$ est une application nulle.**

$\forall \vec{v} \in E$, $f_0(\vec{v}) \in \ker f_0$; donc $f_0 \circ f_0(\vec{v}) = \vec{0}$. On peut alors conclure que $f_0 \circ f_0$ est l'application nulle.

3) $m = -1$

a) **Déterminons λ**

Soit $\vec{v}(x, y)$, $f_{-4}(\vec{v}) = \lambda\vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} -x - 2y = \lambda x \\ 2x + y = \lambda y \end{cases}$

$\vec{v}$ existe si la solution de ce système est $\neq (0, 0)$; c'est-à-dire si le déterminant $(4 + \lambda)(1 - \lambda) \neq 0$; car on a : $\begin{cases} x(4 + \lambda) + 2y = 0 \\ 2x + y(1 - \lambda) = 0 \end{cases}$. λ doit appartenir à $\mathbb{R}$-{0, -3}

b) **Montrons que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de E.**

$\vec{u}(1, -2)$ et $\vec{v}(-2, 1)$; $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 4 = 5 \neq 0$; d'où $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de E.

$M_{-1}\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

$\begin{cases} \vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j} \\ \vec{v} = -2\vec{i} + \vec{j} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{i} = -\frac{1}{3}(\vec{u} + 2\vec{v}) \\ \vec{j} = -\frac{1}{3}(2\vec{u} + \vec{v}) \end{cases}$; $f_{-1}(\vec{u}) = \vec{0}$ et $f_{-1}(\vec{v}) = 6\vec{i} - 3\vec{j} = -3\vec{v}$

d'où f_{-1} a pour matrice dans $(\vec{u}, \vec{v})$ $M_{-1}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$.

PROBLEME 3 :

1) **Montrons que $f \circ f = \theta$**

$A\text{x}A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \text{x} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; d'où $f \circ f = \theta$; θ étant l'endomorphisme nul.

$f(f(\vec{u})) = \vec{0}$. $f(\vec{u})$ et $\vec{0}$ ont la même image qui est $\vec{0}$ par f. Donc f n'est pas bijective.

2) **Déterminons E_1**

Soit $\vec{u}(x, y) \in E_1$; $\vec{u} \in \ker f$ si et seulement si :

$f(\vec{u}) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{y}{2} = 0 \\ -2x - y = 0 \end{cases}$

Le système étant homogène, E_1(Kerf) est la droite vectorielle d'équation $y + 2x = 0$ engendrée par le vecteur (1, -2).

3) Déterminons E_2

Soit $\vec{v}(x', y') \in E_2$, $\vec{v} \in \mathrm{Im} f$ si et seulement si :

$$\exists(\vec{u}, \vec{v}) \in E/f(\vec{u}) = \vec{v} \text{ et } \vec{v}(x', y') \Leftrightarrow \begin{cases} x + \dfrac{y}{2} = x' \\ -2x - y = y' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - y = -2x' \\ -2x - y = y' \end{cases} \Leftrightarrow \{y' = -2x'$$

E_2 est la droite vectorielle d'équation $y = -2x$.
On peut donc conclure que $E_1 = E_2$.

4) Nous savons que $E_1 = E_2$; donc $\vec{u} \in E_1$ et $\vec{u} \in E_2$.
Or E_2 est l'image de f ; d'où il existe un $\vec{v} \in E/f(\vec{v}) = \vec{u}$

- Montrons que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de E

  Montrons que $(\vec{u}, \vec{v})$ est libre

  Si $(\vec{u}, \vec{v})$ est lié, $\exists \alpha \in \mathbb{R}/\vec{u} = \alpha\vec{v} \Rightarrow f(\vec{u}) = \alpha f(\vec{v})$.

  $\vec{u} \in E_1 \Rightarrow f(\vec{u}) = \vec{0} \Rightarrow f(\vec{v}) = \vec{0}$ et $f(\vec{v}) = \vec{u}$; donc $\vec{u} = \vec{0}$.

  Dans l'hypothèse $\vec{u}$ est un vecteur non nul, il y a contradiction ; donc $(\vec{u}, \vec{v})$ est libre puisque nous sommes en dimension 2, $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de E.
- matrice

  $\vec{u} \in E_1$, $f(\vec{u}) = 0\vec{u} + 0\vec{v}$; $f(\vec{v}) = \vec{u} + 0\vec{v}$; d'où la matrice est $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

II.

1) Déterminons la matrice de h dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$

$$M(h) = \begin{bmatrix} a & 1-a \\ b & 1-b \end{bmatrix}$$

2) Déduction

a) Pour $a - b \neq 0$, $\ker f = \{\vec{0}\}$
$\det M(h) = a(1-b) - b(1-a) = a - b - b + a = 2(a-b)$
$\det M(h) \neq 0 \Leftrightarrow a - b \neq 0$
Comme $a - b \neq 0$, h est bijective par conséquent injective; d'où $\mathrm{Ker}h = \{\vec{0}\}$.

b) Pour $a - b = 0$, Kerh est une droite vectorielle ; $a - b = 0 \Leftrightarrow a = b$.

Soit $\vec{u}(x, y) \in \mathrm{Ker}h$, $\begin{bmatrix} a & 1-a \\ a & 1-a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} ax + (1-a)y = 0 \\ ax + (1-a)y = 0 \end{cases}$

Le système étant homogène et pour $a \neq 0$, Kerh est une droite vectorielle d'équation $ax + (1 - a)y = 0$ de vecteur directeur $(a - 1)\vec{i} + a\vec{j}$.

3) On suppose $a = b = \dfrac{1}{\alpha}$

a) Montrons que h est involutive : h est involutive si et seulement si $h \circ h = h$.

$$M(h)\times M(h) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} + \frac{1}{4} & \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{4} & \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

$M(h).M(h) = M(h)$; d'où $h \circ h = h$. L'application h est donc involutive.

b) Montrons que Kerh et Imh sont des droites vectorielles de base respective $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$

- D'après la question 2.b), un vecteur directeur de Kerf est $(a-1)\vec{i} + a\vec{j}$.

  Pour $a = \frac{1}{\alpha}$; on a : $-\frac{1}{\alpha}\vec{i} + \frac{1}{\alpha}\vec{j}$;

  d'où Kerh est une droite vectorielle de base $\overrightarrow{e_1} = -\vec{i} + \vec{j}$

- $\forall \vec{v}(x', y') \in \mathrm{Im} f$, $\exists \vec{u}(x, y) \in E_2$ tel que $h(\vec{u}) = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = x' \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = y' \end{cases} \Leftrightarrow x' = y'$

  D'où Imf est une droite vectorielle d'équation $x - y = 0$ et une base $\overrightarrow{e_2}$ est $\overrightarrow{e_2} = \vec{i} + \vec{j}$

c) Montrons que $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est une base de E_2.

$\mathrm{Det}(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}) = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$; d'où $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est une base de E_2.

- **Déduisons la matrice de h dans $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$**

  $\overrightarrow{e_1} \in$ Kerh, d'où $h(\overrightarrow{e_1}) = \vec{0}$;

  $\overrightarrow{e_2} \in$ Imf, d'où $h(\overrightarrow{e_2}) = \overrightarrow{e_2}$.

  Donc la matrice de h dans $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

CHAPITRE 12 : DENOMBREMENT

EXERCICE 1 :

- Parmi les nombres entiers naturels compris entre 1 et 100, il existe au moins un dont le chiffre des unités est respectivement 0, 1, …, 9. Cela signifie que les ensembles E_0, E_1, …, E_9 sont tous non vides.
- Il n'existe pas de nombre entier naturel dont le chiffre des unités a deux valeurs parmi 0, 1, …, 9. Donc les ensembles E_0, E_1, …, E_9 sont deux à deux disjoints.
- Pour tout nombre entier naturel compris entre 1 et 100 son chiffre des unités est 0, 1, …, 8 ou 9. Donc $E_0 \cup E_1 \cup \ldots \cup E_9 = E$.

De ces trois points, il vient : les ensembles E_0, E_1, …, E_9 forment une partition de E.

EXERCICE 2 :

Soit E l'ensemble des élèves du Collège, S l'ensemble de ceux qui aiment le sport et L l'ensemble de ceux qui aiment la lecture.

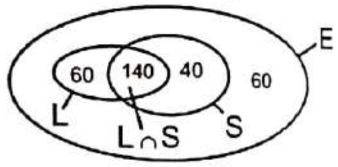
CardE = 300, CardL = 200 et CardS = 180. De plus, $\text{Card}(\overline{L \cup L}) = 60$

On a donc $\text{Card}(L \cup S) = \text{CardE} - \text{Card}(\overline{L \cup S}) = 300 - 60 = 240$

1) Le nombre d'élèves qui n'aiment que la lecture est donc :
   $\text{Card}(L \cup S) - \text{CardS} = 240 - 180 = 60$

2) De même, il y a $\text{Card}(L \cup S) - \text{CardL} = 240 - 200 = 40$ élèves qui n'aimen,t que le sport.

3) $\text{Card}(L \cap S) = \text{CardL} + \text{CardS} - \text{Card}(L \cup S)$
   $\text{Card}(L \cap S) = 200 + 180 - 240 = 140$
   $\text{Card}(L \cap S) = 140$.
   Il y a donc 140 élèves qui aiment à la fois le sport et la lecture.



EXERCICE 3 :

Soient A l'ensemble des sexes, B l'ensemble des âges et C l'ensemble des groupes sanguins.
CardA = 2 ; CardB = 8 et CardC = 8.
Pour chaque élève correspond une fiche à laquelle on associe le triplet (x, y, z) où $x \in A$, $y \in B$ et $z \in C$.
L'ensemble des fiches distinctes est AxBxC et le nombre maximum de fiches distinctes est :
Card(AxBxC) = CardAxCardBxCardC
Card(AxBxC) = 2x8x8
Card(AxBxC) = 128
Donc il y a 128 fiches distinctes au maximum.

EXERCICE 4 :

1) Si A désigne l'ensemble des personnes ayant un chien et B l'ensemble des personnes ayant un chat, on sait que :
   CardA = 438 ; CardB = 651 ; $\text{Card}(A \cap B) = 116$
   D'où : $\text{Card}(A \cup B) = \text{CardA} + \text{CarB} - \text{Card}(A \cap B) = 438 + 651 - 116 = 973$
   Donc il y a 973 personnes interrogées.

2) Pour constituer un menu, il faut choisir une entrée (5 possibilités) puis un plat (4 possibilités), puis un dessert (3 possibilités). Le nombre de menus possibles est donc : 5x4x3 = 60.

EXERCICE 5 :

Le nombre de répartition possible est le nombre d'applications d'un ensemble à trois éléments vers un ensemble à dix éléments.
Donc il y a 10^3 c'est-à-dire 1000 répartitions possibles.

EXERCICE 6 :

1) Un nombre de quatre chiffres n'utilisant que des chiffres impairs peut être considéré comme une 4-liste d'éléments de $E = \{1, 3, 5, 7, 9\}$.

a) L'ensemble de toutes ces listes est le produit cartésien E^4. Il y a donc $(\text{Card}E)^4 = 5^4 = 625$ nombres possibles.

b) Si on exige que les quatre chiffres soient tous différents, il s'agit alors d'arrangements d'ordre 4 des éléments de E. Dans ce cas, il y a $A_5^4 = 5\text{x}4\text{x}3\text{x}2 = 120$ nombres possibles.

2)

a) Un billet comportant 6 chiffres tous différents entre eux, est obtenu en choisissant parmi les 10 chiffres disponibles, 6 chiffres tous distincts. Comme de plus l'ordre entre les 6 chiffres retenus compte, il s'agit d'un arrangement. Le nombre de billets demandés est donc : $A_{10}^6 = 10\text{x}9\text{x}8\text{x}7\text{x}6\text{x}5 = 151200$

b) Pour obtenir un billet comportant 6 chiffres identiques, il y a 10 façons de choisir le chiffre, puis, le chiffre étant choisi, une seule façon de déterminer le numéro. Il y a donc 10 billets dont le numéro est composé de 6 chiffres identiques.

EXERCICE 7 :

1) Dans un match de ce championnat, deux équipes parmi les 16 se rencontrent. Il y a alors A_{16}^2 matchs aller (car à l'aller comme au retour, deux équipes ne se rencontrent qu'une seule fois). Le nombre total de matchs de ce championnat est : $2\text{x}A_{16}^2 = 2\text{x}16\text{x}15 = 480$.

2) En raisonnant comme ci-dessus, le nombre total de matchs dans les quatre poules est $4\text{x}(2\text{x}A_4^2) = 4\text{x}2\text{x}4\text{x}3 = 96$ et le nombre de matchs dans la poule finale est : $2\text{x}A_4^2 = 2\text{x}4\text{x}3 = 24$.
Donc il y a au total : $96 + 24 = 120$ matchs dans ce championnat.

EXERCICE 8 :

1) On choisit cinq cartes sans ordre et sans remise. Il y a $C_{32}^5 = 201376$ mains de cinq cartes.

2) Il y a dans le jeu 12 figures (4 valets, 4 dames et 4 rois). Tout se passe comme si l'on choisissait les 5 cartes parmi les 12. Il y a $C_{12}^5 = 792$ mains comportant cinq figures.

3) On choisit cinq cartes parmi 28 (on retire les quatre rois). Il y a donc $C_{28}^5 = 98280$ mains ne comportant pas de roi.

4) C'est le complémentaire de l'ensemble précédent. Il y a donc $C_{32}^5 - C_{28}^5 = 103096$ mains comportant au moins un roi.

5) Deux possibilités :
- Un roi qui n'est pas de cœur, trois cœurs différents du roi et une carte qui n'est ni roi ni cœur ; il y a alors $C_3^1\text{x}C_7^3\text{x}21$ c'est-à-dire 2205 mains.

Scanné avec CamScanner

- Le roi de cœur, deux autres cœurs et deux autres cartes qui ne sont ni rois, ni cœurs ; il y a alors $1 \times C_7^2 \times C_{21}^2 = 4410$ mains.
  En tout, cela fait 2205 + 4410 = 6615 mains comportant exactement un roi et trois cœurs.

EXERCICE 9 :

a) La liste comporte dix hommes. Tout se passe comme si on choisit six membres parmi 10. Il y a alors $C_{10}^6 = 210$ jurys possibles.

b) Il y a $C_{10}^4 \times C_7^2 = 4410$ jurys possibles.

c) On peut avoir 0, 1 ou 2 femmes. Il y a $C_{10}^6 \times C_7^0 + C_{10}^5 \times C_7^1 + C_{10}^4 \times C_7^2 = 4872$ jurys possibles.

EXERCICE 10 :

a) Une ligne aérienne relie deux villes différentes et l'ordre entre les deux villes n'intervient pas. Une ligne aérienne peut donc être considérée comme une partie à deux éléments de l'ensemble des villes concernées.

1) Avec six villes, on faut mettre en service $C_6^2 = \dfrac{6 \times 5}{2} = 15$ lignes.

2)
   a) Pour sept villes, il faut $C_7^2 = 21$ lignes
   b) Pour douze villes, il faut $C_{12}^2 = 66$ lignes

3) Comme $C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$, on a : $C_n^2 = 45 \Leftrightarrow (n-10)(n+9) = 0 \Leftrightarrow n = 10$. Il y aura donc 10 villes qui seront desservies pendant les mois d'été.

EXERCICE 11 :

1) En supposant que le choix se fait au hasard et simultanément, le nombre de choix possibles est $C_{15}^3 = 3003$.

2) Dans ce cas, on entoure deux noms de chanteurs parmi 14. Il y a donc $C_{14}^2 = 91$ choix possibles.

3) Entre 1 et 15, il y a 7 numéros pairs. Il faut donc entourer 3 numéros parmi 7. Il y a donc $C_7^3 = 35$ choix possibles.

EXERCICE 12 :

1) Le nombre de manières de garer les 20 voitures sur les 20 places est le nombre d'injections d'un ensemble à 20 éléments vers un ensemble à 20 éléments. C'est-à-dire 20! manières.

2)
   a) Dans ce cas, il y a 10! façons de garer 10 voitures.
   b) Dans ce cas, il y a $A_{10}^6 \times A_{10}^4$ façons de garer 10 voitures.
   c) Considérons la proposition : "il n'y a pas de voiture dans la rangée A". C'est le contraire de la proposition : " il y a au moins une voiture dans la rangée A". Or, il y a 10! façons de garer 10 voitures telles qu'il n'y ait pas de voiture dans la rangée A. Donc il y a 20! – 10! façons de garer 10 voitures de manière à ce qu'il ait au moins une voiture dans la rangée A.

EXERCICE 13 :

1) Un tirage est constitué par le choix de deux boules (en vrac et sans remise) parmi les cinq boules de l'urne A et le choix d'une boule parmi les quatre boules de l'urne B. Le nombre total de tirages possibles est donc : $C_5^2 \times C_4^1 = 10 \times 4 = 40$.

2) La couleur unique peut être noire ou blanche
   - Les tirages où les trois boules sont noires sont obtenues en choisissant deux boules parmi les trois boules noires de l'urne A, puis une boule parmi les deux noires de l'urne B. Il y a donc : $C_3^2 \times C_2^1 = 3 \times 2 = 6$.
   - Les tirages où les trois boules sont blanches sont obtenues en choisissant deux boules blanches dans A et une boule blanche dans B. Il y en a : $C_2^2 \times C_2^1 = 2$.

   En définitive, il y a 6 + 2 = 8 tirages où les trois boules obtenues sont de la même couleur.

3) L'ensemble de ces tirages est la réunion des deux ensembles disjoints :
   - On a prélevé une boule noire et une boule blanche dans A (de 3x2 = 6 façons) et une boule noire dans B (de deux façons). Il y a 6x2 = 12 tirages de ce type.
   - On a prélevé deux boules noires dans A (de trois façons) et une boule blanche dans B (de deux façons). Il y a 3x2 = 6 tirages de ce type.

   Il y a donc 12 + 6 = 18 tirages qui comportent exactement une boule blanche.

4) L'ensemble de ces tirages est la réunion des deux ensembles disjoints :
   - On a prélevé deux boules blanches dans A et une boule noire dans B. Il y a 1x2 = 2 tirages de ce type.
   - On a prélevé une boule blanche et une boule noire dans A et une boule blanche dans B. Il y a 2x3x2 = 12 tirages de ce type.

   Il y a donc 2 + 12 = 14 tirages qui comportent exactement deux boules blanches.

EXERCICE 14 :

1)
   a) Dans ce cas, la première boule est tirée parmi les boules 1, 2, ..., 9 (9 possibilités) et les trois autres parmi le reste de boules y compris la boule numérotée 0 (A_9^3 possibilités). Donc le nombre de nombres distincts de quatre chiffres que l'on peut obtenir dans ce cas est : $9 \times A_9^3 = 4536$.

   b) Dans ce cas, la première boule est tirée parmi les boules 1, 2, ..., 9 (9 possibilités) et chacune des trois autres sera tirée parmi les 10 boules (10^3 possibilités). Donc il y a $9 \times 10^3 = 9000$ nombres distincts de quatre chiffres dont les quatre chiffres sont tirées successivement avec remise.

2)
   a) Pour un tirage simultané dans les quatre boules, il y a $C_{10}^4 = 210$ tirages différents possibles.

   b)
   - Si le tirage ne contient pas 0, alors il y a 4! = 24 nombres de quatre chiffres possibles par tirage.
   - Si le tirage contient 0, alors il y a 4! − 3! = 18 nombres de quatre chiffres possibles par tirage (car il y a 3! nombres de quatre chiffres dont le premier est nul). D'autre part, il y a $C_9^4 = 126$ tirages ne contenant pas 0 et $C_9^3 = 84$ tirages contenant 0.

     Ainsi, il y a 24x126 + 18x84 = 4536 nombres distincts de quatre chiffres (dont le premier est nul), les tirages étant successifs et sans remise. En effet, dans la question 2.b), on forme les nombres tirage à après tirage. Nous retrouvons ainsi le résultat de la question 1.a).

EXERCICE 15 :

1) Un résultat est un élément du produit cartésien formé par l'ensemble des faces des trois dés. Donc le nombre de résultats possibles est : 6x6x6 = 216

2)
   a) Le numéro 6 peut apparaître sur l'un ou l'autre des dés (trois possibilités). Supposons qu'il apparaît sur un dé précis, alors les deux autres présentent un numéro différent de 6(1x5x5 possibilités).
   Donc le nombre de résultats comportant un seul 6 est 3x(1x5x5) = 75.

   b) La proposition "comporte au moins un 6" est contraire à "ne comporte aucun 6". Or le nombre de résultats ne comportant aucun 6 est : 5x5x5 = 125. Donc le nombre de résultats comportant au moins un six est : 6x6x6 – 5x5x5 = 91

   c) Soit A l'ensemble des résultats comportant au moins un as et au moins un 6. $\overline{A}$ est l'ensemble des résultats ne comportant aucun as ou aucun 6. $\overline{A}$ est le complémentaire de A. $\overline{A}$ est aussi la réunion des ensembles A_1 des résultats ne comportant aucun as et A_2 des résultats ne comportant aucun six.
   On a : $\text{Card}\overline{A} = \text{Card}A_1 + \text{Card}A_2 - \text{Card}(A_1 \cap A_2)$
   Or, $\text{Card}(A_1 \cap A_2) = 4 \times 4 \times 4 = 64$; $\text{Card}A_1 = \text{Card}A_2 = 125$;
   d'où $\text{Card}\overline{A} = 125 + 125 - 64 = 186$; donc $\text{Card}A = 6 \times 6 \times 6 - 186 = 30$
   Il y a 30 résultats comportant au moins un as et au moins un 6.

3) La somme des nombres des résultats suivants est égale à 13 :
(1, 6, 6) ; (2, 6, 5) ; (2, 5, 6) ; (3, 6, 4) ; (3, 4, 6) ; (3, 5, 5) ; (4, 6,3) ; (4, 3, 6) ; (4, 4, 5) ; (4, 5, 4) ; (5, 6, 2) ; (5, 5, 3) ; (5, 4, 4) ; (5, 3, 5) ; (5, 2, 6) ; (6, 6, 1) ; (6, 5, 2) ; (6, 4, 3) ; (6, 3, 4) ; (6, 2, 5) ; (6, 1, 6). Donc il y a 21 résultats dont la somme des nombres est égale à 13.

CHAPITRE 13 : LIMITES ET CONTINUITE

EXERCICE 1 :

1) Pour tout réel x, on a $x^2 \geq 0$ et donc $1 + x^2 \geq 1$. Il en résulte : $\frac{1}{1+x^2} \leq 1$

On a, d'autre part $|f(x)| = \frac{2|x|}{1+x^2}$ d'où $|f(x)| \leq 2|x|$

2) De l'égalité, pour tout x, $|f(x)| \leq 2|x|$, on en déduit $0 \leq |f(x)| \leq 2|x|$. Or $\lim\limits_{x \to 0} 2|x| = 0$; donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

EXERCICE 2 :

I.

1) On a : $f(x) = x(x-2)$, d'où $|f(x)| = |x||x-2|$. $|x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1 \Leftrightarrow -3 < x - 2 < -1 \Rightarrow |x-2| < 3$
D'où pour tout x tel que $|x| < 1$, $|x-2| < 3$ et donc $|f(x)| < 3|x|$.

2) De la question 1, on a pour tout x tel que $|x| < 1$, $0 \leq |f(x)| < 3|x|$. Or $\lim\limits_{x \to 0} 3|x| = 0$. Donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

II.

On a : $h(x) = \frac{(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-2x})(\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-2x})}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-2x}} = \frac{x^2 + 2x}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-2x}}$;

D'où $|h(x)| = |x| \frac{|x+2|}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-2x}}$.

Pour tout x tel que $|x| < \frac{1}{4}$, on a : $|x+2| < 2 + \frac{1}{4} < 3$ et $\frac{1}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-2x}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq 1$.

Donc si $|x| < \frac{1}{4}$, on a : $|h(x)| < 3|x|$. Or $\lim\limits_{x \to 0} 3|x| = 0$. Donc $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = 0$.

EXERCICE 3 :

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*_+$, $f(x) - 1 = \frac{1}{x+1}$ et $|f(x) - 1| = \frac{1}{x+1}$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}^*_+$, $x + 1 > x$ et $\frac{1}{x+1} < \frac{1}{x}$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}^*_+$, $|f(x) - 1| < \frac{1}{x}$.

2)

a) On sait que $\forall x \in \mathbb{R}^*_+$, $|f(x) - 1| < \frac{1}{x}$. Ainsi, pour avoir $|f(x) - 1| < 10^{-4}$, il suffit d'avoir $\frac{1}{x} < 10^{-4}$; d'où $\frac{1}{x} < 10^{-4} \Rightarrow |f(x) - 1| < 10^{-4}$. C'est-à-dire $x > 10^4 \Rightarrow |f(x) - 1| < 10^{-4}$; donc pour $A = 10^4$, $x > 10^4 \Rightarrow |f(x) - 1| < 10^{-4}$

b) De la même façon qu'au a), pour avoir $|f(x) - 1| < \varepsilon$, il suffit d'avoir $\frac{1}{x} < \varepsilon$;

d'où $\frac{1}{x} < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$.

C'est-à-dire $x > \varepsilon^{-1} \Rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$; donc pour $A = \varepsilon^{-1}$, $x > A \Rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$

c) D'après les questions 2.a) et 2.b), $|f(x) - 1|$ peut être aussi petit que l'on veut dès que x est assez grand. Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - 1) = 0$; soit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

EXERCICE 4 :

1) Pour tout $x \in]1, +\infty[$, on a : $x + 1 < 2x$, d'où $\frac{1}{x+1} > \frac{1}{2x}$ et donc $\frac{x^2}{x+1} > \frac{x^2}{2x}$, par suite $f(x) > \frac{x}{2}$.

2)

a) Pour $x \in]1, +\infty[$, $f(x) > \frac{x}{2}$. Pour que $|f(x)| > 10^6$, il faut que $\frac{x}{2} > 10^6$ soit $x > 2.10^6$. Donc si l'on choisi $x > 2.10^6$, On a $|f(x)| > 10^6$.

b) D'après ce qui précède, on peut rendre f(x) aussi grand que l'on veut pourvu que x soit assez grand.

c) De la question b), on déduit : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

EXERCICE 5 :

a) On a : $\lim\limits_{x \to 2} (x-2)^2 = 0$ et $(x-2)^2 \geq 0$; donc $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = +\infty$

b) On a : $\lim\limits_{x \to 0} (-2x + 3) = 3$; donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = -\infty$; donc f n'a pas de limite en 0.

c) $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} \sqrt{x-2} = 0$ et $\sqrt{x-2} \geq 0$; donc $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = +\infty$

d) Pour $x \neq 1$, $f(x) = \frac{(x-1)(x+4)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x+4}{x+1}$; donc $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \frac{5}{2}$

e) Pour $x \neq 4$, $f(x) = \frac{(x\sqrt{x} - 8)(x\sqrt{x} + 8)}{(4-x)(x\sqrt{x} + 8)} = \frac{x^3 - 8^2}{(4-x)(x\sqrt{x} + 8)} = \frac{x^3 - 4^3}{(4-x)(x\sqrt{x} + 8)}$.

Pour $x \neq 4$, $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 16}{x\sqrt{x} + 8}$; d'où : $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = \frac{4^2 - 4x4 + 16}{4\sqrt{4} + 8} = 1$.

f) Pour $x \neq 0$, $f(x) = \frac{x(\sqrt{4 + x^2} + 2)}{(\sqrt{4 + x^2} - 2)(\sqrt{4 + x^2} + 2)} = \frac{\sqrt{4 + x^2} + 2}{x}$

Or $\lim\limits_{x \to 0} (\sqrt{4 + x^2} + 2) = 4$; donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = -\infty$; f n'a pas de limite en 0.

g) Pour $x \neq 0$, $f(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{2-x}{x-1}$; or $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2-x}{x-1} = -2$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{1}{x} = -\infty$

Donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = +\infty$; f n'a pas de limite en 0.

h) Pour $x \neq 3$, $f(x) = \frac{(\sqrt{x+1} - 2)(\sqrt{x+1} + 2)}{(x-3)(\sqrt{x+1} + 2)} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + 2}$.

Or $\lim\limits_{x \to 3} (\sqrt{x+1} + 2) = 4$; Donc $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \frac{1}{4}$.

EXERCICE 6 :

1) Pour tout $x > 0$, on a : $0 \leq \cos^2x \leq 1 \Leftrightarrow x^2 \leq x^2 + \cos^2x \leq x^2 + 1$. D'où, pour tout $x > 0$, $\sqrt{x^2} \leq f(x) \leq \sqrt{x^2+1}$; soit $x \leq f(x) \leq \sqrt{x^2+1}$; or $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2) Pour tout $x\in]1, +\infty[$, $f(x) = \dfrac{(x+1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \dfrac{x+1}{x-1}(\sqrt{x}+1)$; de plus, $x + 1 > x - 1$; soit $\dfrac{x+1}{x-1} > 1$. Donc $\forall x\in]1, +\infty[$, $f(x) > \sqrt{x}+1$.

On a de plus, $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x}+1) = +\infty$. D'après les propriétés de comparaison, on déduit que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

EXERCICE 7 :

a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}(2x^2) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(-x^5) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(-x^5) = +\infty$

c) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{3x}{2x}\right) = \dfrac{3}{2}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{x^3}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2}{x^3}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$

e) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{x^3}{-2x}\right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{x^2}{-2}\right) = -\infty$

f) Pour tout $x \neq \dfrac{1}{3}$, $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2\left(3+\dfrac{1}{x^2}\right)}}{3x-1} = \dfrac{|x|\sqrt{3+\dfrac{1}{x^2}}}{x\left(3-\dfrac{1}{x}\right)}$; or $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\sqrt{3+\dfrac{1}{x^2}}}{x\left(3-\dfrac{1}{x}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{3+\dfrac{1}{x^2}}}{3-\dfrac{1}{x}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ et

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-x\sqrt{3+\dfrac{1}{x^2}}}{x\left(3-\dfrac{1}{x}\right)} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-\sqrt{3+\dfrac{1}{x^2}}}{3-\dfrac{1}{x}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1) = \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2x^2-x+1} = +\infty$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Pour $x < 0$,

$f(x) = x + 1 - x\sqrt{2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}} = x\left(1+\dfrac{1}{x}-\sqrt{2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}\right)$.

Or $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}\right) = 0$; donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

h) On a : $f(x) = \dfrac{(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+1})(\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2+1}} = \dfrac{x-1}{|x|\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-\frac{1}{x}}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)} = \dfrac{1}{2}$; car $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$ et

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1-\frac{1}{x}}{-\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)} = -\dfrac{1}{2}$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$.

i) Pour tout $x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{x - |x|\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}}{2x + |x|\sqrt{4+\frac{1}{x}}}$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x - x\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}}{2x + x\sqrt{4+\frac{1}{x}}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}}{2+\sqrt{4+\frac{1}{x}}}$; or $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}\right) = 0.$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x + x\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}}{2x - x\sqrt{4+\frac{1}{x}}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}}{2-\sqrt{4+\frac{1}{x}}}$; or

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}\right) = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2-\sqrt{4+\dfrac{1}{x}}\right) = 0$.

Avec $2-\sqrt{4+\dfrac{1}{x}} < 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\sqrt{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}}\right) = 2$. Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

EXERCICE 8 :

Nous allons utiliser la propriété : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\frac{\sin x}{x}} = \dfrac{1}{1} = 1.$

b) Pour $x \neq 0$, $\dfrac{\tan(ax)}{bx} = \dfrac{a}{b\cos(ax)} \times \dfrac{\sin(ax)}{ax} = \dfrac{a}{b\cos X}\dfrac{\sin X}{X} (X = ax)$

$\lim\limits_{x\to 0} X = 0$ et $\lim\limits_{X\to 0} \cos X = 1$; $\lim\limits_{X\to 0} \dfrac{\sin X}{X} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(ax)}{bx} = \dfrac{a}{b}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(ax)}{bx} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a}{b} \times \dfrac{\sin(ax)}{ax} = \lim\limits_{X\to 0} \dfrac{a}{b}\dfrac{\sin X}{X} (X = ax)$

Or $\lim\limits_{X\to 0} \dfrac{\sin X}{X} = 1$; donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(ax)}{bx} = \dfrac{a}{b}$

d) $\dfrac{\sin(ax)}{\sin(bx)} = \dfrac{\frac{a\sin(ax)}{ax}}{b.\frac{\sin(bx)}{bx}} = \dfrac{a}{b}\dfrac{\frac{\sin X}{X}}{\frac{\sin X'}{X'}}$; avec $X = ax$ et $X' = bx$.

Or, $x \to 0$ et $x' \to 0$ lorsque $x \to 0$. D'où $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x'}{x'} = 1$; donc $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{\sin(bx)} = \frac{a}{b}$.

e) $\frac{\tan(ax)}{\tan(bx)} = \frac{\frac{\tan(ax)}{x}}{\frac{\tan(bx)}{x}} = \frac{a}{b}\,\frac{\frac{\tan(ax)}{ax}}{\frac{\tan(bx)}{bx}}$; or d'après b), $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan(ax)}{(ax)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan(bx)}{(bx)} = 1$.

Donc $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan(ax)}{\tan(bx)} = \frac{a}{b}$.

EXERCICE 9 :

1) Soit I l'intervalle $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$ encadrant 0.

Pour $x \in I$ et $x > 0$, on a $E(x) = 0$ et donc $f(x) = 0$.
Pour $x \in I$ et $x < 0$, on a : $E(x) = -1$ et donc $f(x) = -x$
On en déduit que pour tout x de I, on a : $|f(x)| \leq |x|$.
Il en résulte que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$ et donc, f est continue en 0.

2) Sur l'intervalle $J = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ encadrant 1, on a : $f(x) = x$ si $x \geq 1$ et $f(x) = 0$; si $x < 1$, il en résulte $\lim\limits_{x\to 1^>} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to 1^<} f(x) = 0$

On a d'autre part $f(1) = 1$; donc f est continue à droite en 1, n'est pas continue à gauche en 1 et par suite, n'est pas continue en 1.

EXERCICE 10 :

On a : $\lim\limits_{x\to 0^<} f(x) = \frac{1}{3}$; $\lim\limits_{x\to 0^>} f(x) = a$ et $f(0) = \frac{1}{3}$

- Si $a = \frac{1}{3}$, alors $\lim\limits_{x\to 0^>} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^<} f(x) = f(0) = \frac{1}{3}$ et par suite, f est continue en 0
- Si $a \neq \frac{1}{3}$, alors $\lim\limits_{x\to 0^>} f(x) = f(0) = \frac{1}{3}$; mais $\lim\limits_{x\to 0^<} f(x) \neq f(0)$ et par suite, f est continue à droite en 0, n'est pas continue à gauche en 0 et donc, n'est pas continue en 0.

EXERCICE 11 :

La fonction f n'est pas définie en $x = 0$ et pour tout $x \neq 0$,

$f(x) = \frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \frac{1}{1+\sqrt{1+x}}$.

D'où $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2}$

Donc pour tout $x \neq 0$, $g(x) = f(x)$ et $g(0) = \frac{1}{2}$

Par conséquent, g est le prolongement par continuité en 0 de la fonction f.

EXERCICE 12 :

1) Pour $x > -1$, $f(x) = x - \frac{x+1}{x+1}$; soit $f(x) = x - 1$ et $\lim\limits_{x\to -1^>} f(x) = -2$. Donc la fonction g définie par

$\begin{cases} g(x) = f(x) & x > -1 \\ g(-1) = -2 \end{cases}$ continue à droite au point $x_0 = -1$ prolonge f.

2) Pour x < -1, on a : $f(x) = x - \frac{x+1}{-(x+1)}$ soit f(x) = x + 1 et $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = 0$. Donc la fonction h définie par : $\begin{cases} h(x) = f(x) & x < -1 \\ h(-1) = 0 \end{cases}$, continue à gauche au point x_0 = -1, prolonge f.

3) Le prolongement g de f à droite au point x_0 est différent du prolongement h de f à gauche au point x_0. Donc il n'existe pas de fonction définie sur ℝ, qui prolonge f et qui soit continue au point x_0.

EXERCICE 13 :

1) Pour tout $x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{x\left(1 + \dfrac{\cos x}{x}\right)}{x\left(1 + \dfrac{\sin x}{x}\right)} = \dfrac{1 + \dfrac{\cos x}{x}}{1 + \dfrac{\sin x}{x}}$

On a : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{\cos x}{x} = -\infty$. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{\cos x}{x} = +\infty$

Donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = +\infty$ par suite, f n'admet pas de limite en 0.

2) Pour tout $x \in]1, +\infty[$, on a : $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$

Ainsi, $x - 1 \leq x + \cos x \leq x + 1$ et $x - 1 \leq x + \sin x \leq x + 1$

Soit $x - 1 \leq x + \cos x \leq x + 1$ et $\frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{x + \sin x} \leq \frac{1}{x-1}$

D'où : $\frac{x-1}{x+1} \leq \frac{x + \cos x}{x + \sin x} \leq \frac{x+1}{x-1}$ car $x - 1 > 0$ et $x + 1 > 0$

Donc pour tout $x \in]1, +\infty[$, on a : $\frac{x-1}{x+1} \leq f(x) \leq \frac{x+1}{x-1}$

D'autre part, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 1$; donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

3) Pour tout $x \in]-\infty, 1[$, $f(x) = \dfrac{1 + \dfrac{\cos x}{x}}{1 + \dfrac{\sin x}{x}}$ et on a $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$.

Soit $\frac{1}{x} \leq \frac{\cos x}{x} \leq -\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq -\frac{1}{x}$; car x < 0.

C'est-à-dire $1 + \frac{1}{x} \leq 1 + \frac{\cos x}{x} \leq 1 - \frac{1}{x}$ et $1 + \frac{1}{x} \leq 1 + \frac{\sin x}{x} \leq 1 - \frac{1}{x}$

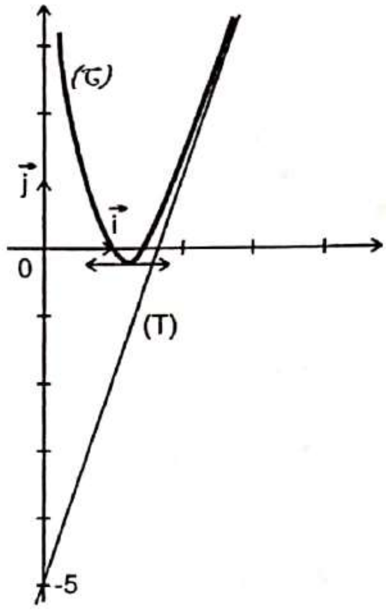
Ou encore $1 + \frac{1}{x} \leq 1 + \frac{\cos x}{x} \leq 1 - \frac{1}{x}$ et $\dfrac{1}{1 - \frac{1}{x}} \leq \dfrac{1}{1 + \frac{\sin x}{x}} \leq \dfrac{1}{1 + \frac{1}{x}}$

D'où $\dfrac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} \leq \dfrac{1 + \frac{\cos x}{x}}{1 + \frac{\sin x}{x}} \leq \dfrac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$; donc $\dfrac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} \leq f(x) \leq \dfrac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$.

Scanné avec CamScanner

CHAPITRE 14 : DERIVATION

EXERCICE 1 :



1) Pour tout $h \in \mathbb{R}$, $f(2 + h) = (h + 1)(2h + 1) = 1 + 3h + 2h^2$

2) On a : $f(2) = 1$ et posons $\varphi(h) = 2h$, alors on a :
$f(2 + h) = f(2) + 3h + h\varphi(h)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varphi(h) = 0$.
D'où $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(2 + h) - f(2)}{h} = \lim\limits_{x\to 0}(3 + \varphi(h)) = 3$. Donc f est dérivable en 2 et son nombre dérivé est $f'(2) = 3$.

3) Une équation de (T) est : $y = 3(x - 2) + 1 = 3x - 5$.

4) $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$; $f'(x) = 4x - 5$
Donc f est croissante sur $\left[\dfrac{5}{4}, +\infty\right[$ et f est décroissante sur $\left]-\infty, \dfrac{5}{4}\right]$.

EXERCICE 2 :

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*\setminus\{1\}$, $\dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)\dfrac{\sin \pi x}{(x - 1)}$ avec $f(1) = 0$.
Or $\sin\alpha = \sin(\pi - \alpha) = -\sin(\alpha - \pi)$; d'où pour tout $x \in \mathbb{R}^*\setminus\{1\}$, $\dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \pi\left(x + \dfrac{1}{x}\right)\left(\dfrac{-\sin(\pi x - \pi)}{\pi(x - 1)}\right)$
Donc pour tout $x \in \mathbb{R}^*\setminus\{1\}$, $\dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -\pi\left(x + \dfrac{1}{x}\right)\dfrac{\sin \pi(x - 1)}{\pi(x - 1)}$.

2) Posons $x = \pi(x - 1)$ alors x tend vers 0 lorsque x tend vers 1 et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$;
$\lim\limits_{x\to 1} \pi\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = 2\pi$
Donc $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -2\pi$; f est dérivable en 1 et de nombre dérivé égal à -2π.

EXERCICE 3 :

On a : $f(1) = 1^2 - 1 = 0$
D'où pour $x < 1$, $\dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \dfrac{1}{x + 2}$; donc $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\<}} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \dfrac{1}{3}$ et pour $x > 1$, $\dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = x - 1$;
donc $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 0$.
f est dérivable à gauche en 1 et de nombre dérivé égal à $\dfrac{1}{3}$
f est dérivable à droite en 1 et de nombre dérivé égal à 0. Donc f n'est pas dérivable en 1

EXERCICE 4 :

1) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

2) On a : f(0) = 3, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{3-2x-3}{x} = -2$ et

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{(2x+3+\sqrt{x}-3}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(2+\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = +\infty$$

D'où $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{f(x)-f(0)}{x} \neq \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x}$; donc la courbe de f admet une demi-tangente à gauche et une demi-tangente à droite au point d'abscisse 0.

- Une équation de la demi-tangente à gauche est : y = -2(x – 0) + f(0) ; soit y = -2x + 3.
- Une équation de la demi-tangente à droite est x = 0.

EXERCICE 5 :

a) f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et f'(x) = -4x + 3

b) f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 12x(2x^2 + 2)^2$

c) f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ et $f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}$

d) f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{3}\right\}$ et $f'(x) = \frac{-2x(3x+1)-3(-x^2+1)}{(3x+1)^2} = \frac{-3x^2-2x-3}{(3x+1)^2}$

e) f est définie sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*_+$ et : $f'(x) = 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

f) f est définie et dérivable sur]-∞, 2[et :

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{2-x}\right)'}{2\sqrt{\frac{1}{2-x}}} = \frac{\frac{1}{(2-x)^2}}{2\sqrt{\frac{1}{2-x}}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2(2-x)^2\sqrt{\frac{1}{2-x}}}$$

g) f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $f'(x) = \frac{1}{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$

h) f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$ et : f'(x) = cosxtan(2x) et $2\sin x(1+\tan^2 2x)$.

i) f est définie sur $[1, +\infty[\setminus\left\{\frac{3}{2}\right\}$ est dérivable sur $]-1, +\infty[\setminus\left\{\frac{3}{2}\right\}$.

$$f'(x) = \frac{\left(x\sqrt{x+1}\right)'(2x-3)-(2x-3)'\left(x\sqrt{x+1}\right)}{(2x-3)^2} = \frac{2x^2-9x-6}{2\sqrt{x+1}(2x-3)^2}.$$

EXERCICE 6 :

- Pour tout x ≠ 1, f(x) = x + 1 et $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2 = f(2)$. Donc f est continue en x = 1 ; donc sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout x ≠ 1, $\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{x+1-2}{x-1} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 1$. Donc f est dérivable en x = 1 ; donc sur $\mathbb{R}$.
- Pour x ≠ 1, f(x) = x + 1 et f'(x) = 1. De plus, f'(1) = 1. Donc la fonction dérivée de f est f' : x ↦ 1.

EXERCICE 7 :

a) f est définie et dérivable sur ℝ et $f'(x) = 2\cos x\sin x - \sin x$.

- Etude du signe de f'(x) sur I.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x(2\cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0$ ou $\cos x = \frac{1}{2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x = k\pi,\ k\in\mathbb{Z})$ ou $\left\{x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Donc l'équation f'(x) = 0 admet sur I les racines 0, $-\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3}$

Ces racines partagent l'intervalle $]-\pi, \pi[$ de la manière suivante :

$\left]-\pi, \pi\right[= \left]-\pi, -\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[-\frac{\pi}{3}, 0\right] \cup \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$

pour déterminer le signe de f'(x) sur $]-\pi, \pi[$, il suffit de le faire sur l'un des intervalles de la réunion ci-dessous et faire alterner ce signe dans les autres. Par exemple,

$f'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1$

Donc $f'(x) > 0$ sur $\left]-\pi, -\frac{\pi}{3}\right]$ car $-\frac{\pi}{2} \in \left]-\pi, -\frac{\pi}{3}\right]$

On en déduit que : f'(x) est positif sur $\left]-\pi, -\frac{\pi}{3}\right]$ et sur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$

f'(x) est négatif sur $\left[-\frac{\pi}{3}, 0\right]$ et sur $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right[$

- ***Tableau de variation de f sur I***

$f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{5}{4}$; $f(-\pi) = f(\pi) = -1$ et $f(0) = 1$.

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{3}$		0		$\frac{\pi}{3}$		π
f'(x)	0	+	0	-	0	+	0	-	
f(x)	-1	↗	$\frac{5}{4}$	↘	1	↗	$\frac{5}{4}$	↘	-1

b) f est définie et dérivable sur ℝ.

Et $f'(x) = \frac{9\sin 3x(\cos 3x - 2) + 3\sin 3x(1 - 3\cos 3x)}{(\cos 3x - 2)^2} = \frac{-15\sin 3x}{(\cos 3x - 2)^2}$

- ***Etude du signe de f'(x) sur I***

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin 3x = 0 \Leftrightarrow 3x = k\pi;\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{3};\ k\in\mathbb{Z}$.

Les solutions de l'équation f'(x) = 0 dans I sont : $\frac{\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$

On obtient $\left]0, \pi\right[= \left]0, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right[$

Puis $\frac{\pi}{4} \in \left]0, \frac{\pi}{3}\right]$ et $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{-15\sin\frac{3\pi}{4}}{\left(\cos\frac{3\pi}{4} - 2\right)^2} = \frac{-\frac{15}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 2\right)^2}$; $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0$

Donc f'(x) est négatif sur $\left]0, \frac{\pi}{3}\right]$ et sur $\left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right[$ et f'(x) est positif sur $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$.

- ***Tableau de variation de f sur I***

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
f'(x)	0	-	0	+	0	-	0
f(x)	2	↘	$-\frac{4}{3}$	↗	2	↘	$-\frac{4}{3}$

EXERCICE 8 :

On a DC = AB = a – 2x et $\tan\hat{J} = \frac{AD}{JA}$

Or mes $\hat{J} = 60°$ et $\tan\hat{J} = \sqrt{3}$; d'où $AD = JA\tan\hat{J} = x\sqrt{3}$
L'aire du rectangle ABCD est A(x) = DCxAD
C'est-à-dire $A(x) = ax\sqrt{3} - 2x^2\sqrt{3}$

Pour tout $x \in \left]0, \frac{a}{2}\right[$, $A'(x) = a\sqrt{3} - 4x\sqrt{3}$

$A'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{4}$ et A est croissante sur $\left]0, \frac{a}{4}\right[$ et décroissante sur $\left]\frac{a}{4}, \frac{a}{2}\right[$

Donc pour que l'aire du rectangle ABCD soit maximum, il faut prendre $x = \frac{a}{4}$.

EXERCICE 9 :

1) Soit P un polynôme de degré n($n \in \mathbb{N}^*$). On peut écrire
$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$, où a_n, a_{n-1}, …
a_2, a_1 et a_n sont des nombres réels
P est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $P'(x) = na_nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + 2a_2x + a_1$ qui est une fonction polynôme de degré (n – 1)

2) Supposons que α est une racine double de P ; alors $P(x) = (x - \alpha)^2Q(x)$ où Q est un polynôme.
D'où $P'(x) = 2(x - \alpha)Q(x) + (x - \alpha)^2Q'(x) = (x - \alpha)[2Q(x) + (x - \alpha)Q'(x)]$
Posons $K(x) = 2Q(x) + (x - \alpha)Q'(x)$, K est un polynôme car Q et Q' le sont.
Alors $P'(x) = (x - \alpha)K(x)$. Donc α une racine de P'.

3) On suppose que α est une racine de P et de P'.
On peut donc écrire : $P(x) = (x - \alpha)Q_1(x)$ et $P'(x) = (x - \alpha)Q_2(x)$ où Q_1 et Q_2 sont des polynômes.
De l'égalité $P(x) = (x - \alpha)Q_1(x)$, on déduit que : $P'(x) = Q_1(x) + (x - \alpha)Q'_1(x)$.
Or $P'(x) = (x - \alpha)Q_2(x)$; d'où $Q_1(x) + (x - \alpha)Q'_1(x) = (x - \alpha)Q_2(x)$
Soit $Q_1(x) = (x - \alpha)(-Q'_1(x) + Q_2(x))$
Donc $P(x) = (x - \alpha)Q_1(x)$ et $Q_1(x) = (x - \alpha)(-Q'_1(x) + Q_2(x))$
C'est-à-dire $P(x) = (x - \alpha)^2(-Q'_1(x) + Q_2(x))$ où $-Q'_1 + Q_2$ est un polynôme car Q'_1 et Q_2 le sont.
Conclusion : α est une racine double de P.

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 10 :

1)

a) f_1 est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $f'_1(x) = 1 - \cos x$.
Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos x \leq 1$. D'où pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'_1(x) \geq 0$. Donc f_1 est croissante sur $\mathbb{R}$.

b) $f_1(0) = 0$. On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f_1(x) \geq f_1(0)$. Soit $f_1(x) \geq 0$ c'est-à-dire pour tout réel positif x, on a : $x - \sin x \geq 0$; soit $\sin x \leq x$.

2)

a) f_2 est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $f'_2(x) = -x + \sin x$. Or, d'après la question 1.b), pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\sin x \leq x$. D'où $f'_2(x) \leq 0$. Donc f_2 est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

b) On a : $f_2(0) = 0$. D'après la question 1.b), on déduit que pour $x \in \mathbb{R}_-$,
$f'_2(x) = x' - \sin x$ et $f'_2(x) \geq 0$ (avec $x = -x'$ et $x' \in \mathbb{R}_+$). D'où f_2 est croissante sur $\mathbb{R}_-$. De ceci et de la question 2.a), on déduit que : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_2(x) \leq 0$ c'est-à-dire $1 - \frac{x^2}{2} - \cos x \leq 0$;

donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x$

3)

a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'_3(x) = 1 - \frac{x^2}{2} - \cos x$. D'après ce qui précède, $f'_3(x) = f_2(x)$ d'où : $f'_3(x) \leq 0$.
Donc f_3 est décroissante sur $\mathbb{R}$.

b) $f_3(0) = 0$ soit $x \in \mathbb{R}_+$, on a : $f_3(x) \leq f_3(0)$ soit $f_3(x) \leq 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a : $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x$

4)

a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'_4(x) = -x + \frac{x^3}{6} + \sin x = -f_3(x)$. Or, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f_3(x) \leq 0$, d'où $f'_4(x) \geq 0$.
Donc, f_4 est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

b) On a : $f_4(0) = 0$.
De la question 3), nous déduisons également que pour $x \in \mathbb{R}_-$, $f_3(x) \geq 0$ et $f'_4(x) \leq 0$ d'où f_4 est décroissante sur $\mathbb{R}_-$. Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_4(x) \geq f_4(0)$; soit $f_4(x) \geq 0$

Donc pour tout réel x, $\cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$.

APPLICATION

- Des questions 1.b) et 3.b) on déduit que pour tout réel positif x, on a :
$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$. Donc pour $x = \frac{1}{2}$, on a l'encadrement $\frac{23}{48} \leq \sin\left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{2}$

Des questions 2.b) et 4.b), on déduit que pour tout réel x, $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$.

Donc pour $x = \frac{1}{2}$, on a l'encadrement $\frac{7}{8} \leq \cos\left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{337}{384}$.

CHAPITRE 15 : ETUDE DES FONCTIONS

EXERCICE 1 :

a) f est définie sur $\mathbb{R}^*$. Pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, $-x\in\mathbb{R}^*$ et $f(-x) = (-x) - \frac{1}{(-x)} = -\left(x - \frac{1}{x}\right) = -f(x)$.

Donc f est impaire.

b) f est définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right\}$.

Pour tout $x\in D$, on a : $-x\in D$ et $f(-x) = \frac{1+(-x)^2}{(-x)^2-2} = \frac{1+x^2}{x^2-2} = f(x)$. Donc f est paire.

c) f est définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $-x\in\mathbb{R}$.
De plus $f(-x) = |-x-2| + |-x+2| = |x+2| + |x-2| = f(x)$. Donc f est paire.

d) f est définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $-x\in\mathbb{R}$.
De plus $f(-x) = (1 + \cos(-x))\sin(-x) = -(1 + \cos x)\sin x = -f(x)$. Donc f est impaire.

e) f(x) est définie si $\sin x - 1 \neq 0$ c'est-à-dire si $\sin x \neq 1$. Or $\sin x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$; $k\in\mathbb{Z}$.

Donc f est définie sur $D = \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$. Mais pour $x_0 = -\frac{\pi}{2}$, on a : $x_0\in D$ et $-x_0\notin D$.
Il est donc inutile de calculer f(-x). Par conséquent, f n'est ni paire ni impaire.

f) f est définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $-x\in\mathbb{R}$. Mais $f(-x) = -\sin 2x - 1$
c'est-à-dire $f(-x) \neq -f(x)$ et $f(-x) \neq f(x)$. Donc f n'est ni paire, ni impaire.

EXERCICE 2 :

1) Supposons que $a > 0$ et posons $f : x \mapsto \cos(ax+b)$. f est définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$ et $T\in\mathbb{R}$, $x+T\in\mathbb{R}$. Ainsi, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f\left(x + \frac{2\pi}{a}\right) = \cos\left(a\left(\frac{2\pi}{a} + x\right) + b\right)$

$$f\left(x + \frac{2\pi}{a}\right) = \cos(ax + b + 2\pi)$$

$$f\left(x + \frac{2\pi}{a}\right) = \cos(ax + b)$$

$$f\left(x + \frac{2\pi}{a}\right) = f(x)$$

Donc la fonction $x \mapsto \cos(ax+b)$ est périodique de période $\frac{2\pi}{a}$. Un raisonnement analogue au précédant donne les résultats cherchés pour les fonctions $x \mapsto \sin(ax+b)$ et $x \mapsto \tan(ax+b)$.

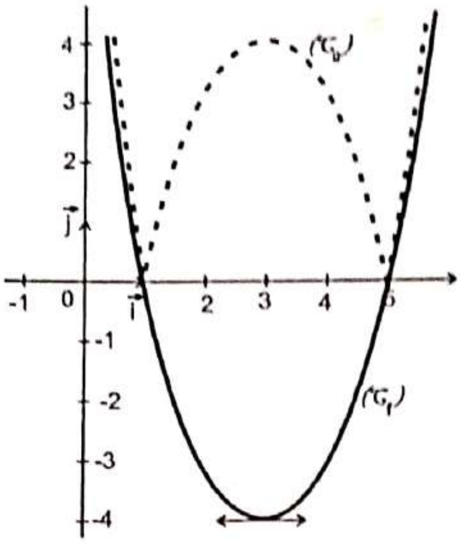
2)

a) f est définie sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a :
$f(x+\pi) = \sin^2(x+\pi) = (-\sin x)^2 = \sin^2 x = f(x)$. Donc f est périodique de période π.

b) f est définie sur $\mathbb{R}$. Mais, pour tout $x\in\mathbb{R}$ et $T\in\mathbb{R}$. On a $f(x+T) \neq f(x)$.
En effet $f(x+T) = [x - \sin(x+T)] + T$.

c) f est définie sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$f(x + 2\pi) = \dfrac{1}{1 + \sin(x + 2\pi)} = \dfrac{1}{1 + \sin x} = f(x)$. Donc f est périodique de période 2π.

EXERCICE 3 :



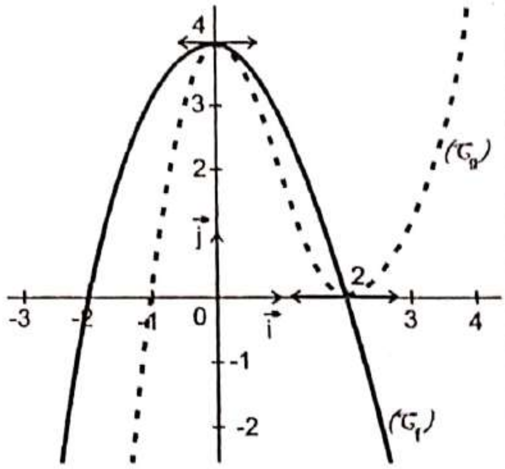
a) f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x - 6$. Donc :
- f est croissant sur $[3, +\infty[$
- f est décroissante sur $]-\infty, 3]$
  f admet un minimum en $x_0 = 3$. Nous obtenons la courbe ci-contre.

b) La courbe de g est déduite de celle de f par une symétrie de la partie négative par rapport à l'axe des abscisses ; la partie positive restant la même.

EXERCICE 4 :

1)
- f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On a : $f'(x) = -2x$. Ainsi, f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et croissante sur $\mathbb{R}_-$.
  f admet un maximum en $x_0 = 0$ de valeur $f(x_0) = 4$. f passe par les points de coordonnées $(-2, 0)$ et $(2, 0)$
- g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a ; $g'(x) = 3x(x - 2)$.
  De plus $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$
  et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.
  On obtient le tableau de variation ci-contre. Cette étude de f et de g nous permet de tracer les courbes ci-dessous.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
g'(x)		+	0	-	0	+	
g(x)	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$



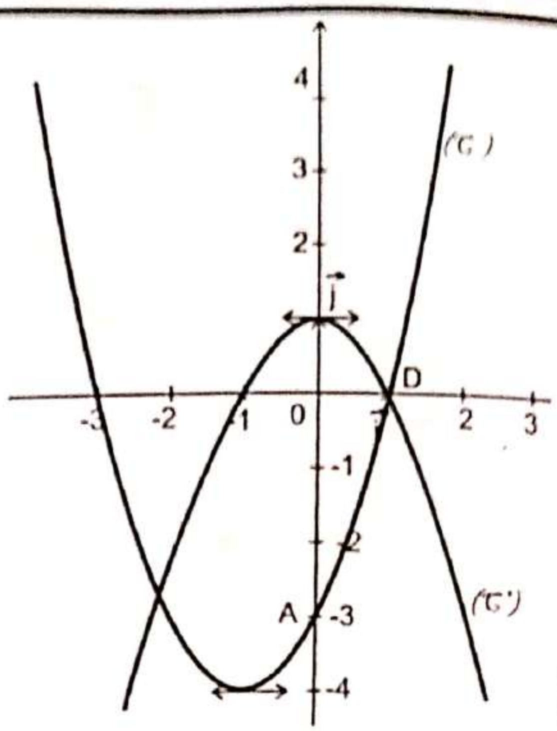
2) Les abscisses des points d'intersection de ces deux courbes sont les solutions de l'équation
$-x^2 + 4 = x^3 - 3x^2 + 4$.
Or $-x^2 + 4 = x^3 - 3x^2 + 4 \Leftrightarrow x^2(x - 2) = 0$;
$x = 0$ ou $x = 2$.
Donc ces points ont pour coordonnées $(0, 4)$ et $(2, 0)$.

3) Les solutions de cette inéquation se déduisent graphiquement. On a donc $S =]-\infty, 2[\setminus\{0, 2\}$.

EXERCICE 5 :

1) Soit $(\wp)$ la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$
- $(\wp)$ passe par le point $A(0, -3)$, alors $C = -3$
- On a : $y' = 2ax + b$; $(\wp)$ a un sommet d'abscisse -1 signifie que :
  $2a(-1) + b = 0$ soit $-2a + b = 0$ (1)
- $(\wp)$ admet en 1 une tangente de coefficient directeur 4 d'où $y'(1) = 4$; soit $2a + b = 4$ (2)
  Des égalités (1) et (2), on déduit que $a = 1$ et $b = 2$. Donc $a = 1$, $b = 2$ et $c = -3$.

2)
- La fonction f sera construite sous la base des éléments de la question 1). De plus, (C) admet un sommet en –1.
- $g'(x) = -2x$; (C') admet un sommet en $x_0 = 0$. De plus, (C') passe par les ponts de coordonnées (-1, 0) et (1, 0).
- Les abscisses des points B et D sont solutions de l'équation $x^2 + 2x - 3 = 1 - x^2$. Or, cette équation admet pour solutions –2 et 1. Donc les points B et D ont pour coordonnées (-2, -3) et (1, 0).



3) L'équation de la droite (BD) est de la forme y=ax+ b
De plus, on a : -2a + b = -3 et a + b = 0 car B∈(BD) et D∈(BD) ; d'où a = 1 et b = -1. Donc une équation de la droite (BD) est y = x – 1.

4) Le signe de P(x) est déterminé graphiquement par la position de (C) par rapport à (C') sur la figure.
Donc $P(x) > 0$ si $x \in]-\infty, -2[\cup]1, +\infty[$; $P(x) < 0$ si $x \in]-2, 1[$; $P(x) = 0$ si $x = -2$ ou $x = 1$.

EXERCICE 6 :

1) On a : $g(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0 = g(0)$. Donc g est continue en 0.

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{-x^3-3x}{x} = -3 \text{ et } \lim_{x\to 0^+}\frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-x^3+3x}{x} = 3$$

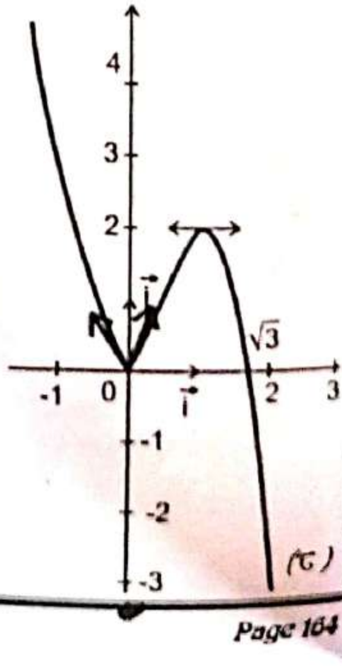
on a : $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{g(x)-g(0)}{x} \neq \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{g(x)-g(0)}{x}$; donc g n'est pas dérivable en 0.

La demi-tangente à (C) à gauche en 0 a pour équation y = -3x
La demi-tangente à (C) à droite a pour équation y = 3x

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
g'(x)		-	-3 | 3	+		-	
g(x)	$+\infty$ ↘		0	↗	2	↘	$-\infty$

2) $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = -\infty$
- Pour x > 0,
$g'(x) = -3x^2 + 3$
$= -3(x - 1)(x + 1)$
- Pour x < 0,
$g'(x) = -3x^2 - 3 = -3(x^2 + 1)$.
L'étude du signe de g'(x) permet d'obtenir le tableau de variation ci-dessus. Et on déduit la courbe (C) ci-dessous.
$g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \sqrt{3}$; $g(-1) = 4$.

3) De la courbe ci-contre, on en déduit que :
- pour $\alpha \in]-\infty, 0[$, l'équation admet une racine positive
- pour $\alpha = 0$, l'équation admet une racine positive et une racine nulle
- pour $\alpha \in]0, 2[$, l'équation admet deux racines positives et une racine négative
- pour $\alpha = 2$, l'équation admet une racine positive et une négative
- pour $\alpha \in]2, +\infty[$, l'équation admet une racine négative.



EXERCICE 7 :

a) Pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}$, $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{2-x} = \dfrac{2b + c + (2a-b)x - ax^2}{2-x}$; or pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}$, $f(x) = \dfrac{1-4x^2}{2-x}$. D'où par identification, $2b + c = 1$, $2a - b = 0$ et $-a = -4$.

Donc $a = 4$, $b = 8$ et $c = -15$ $f(x) = 4x + 8 - \dfrac{15}{2-x}$.

b)

- f est définie sur $D = \mathbb{R}\backslash\{2\}$.

  $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{15}{2-x} = 0$

  $\lim\limits_{\substack{x\to2 \\ <}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to2 \\ >}} f(x) = +\infty$

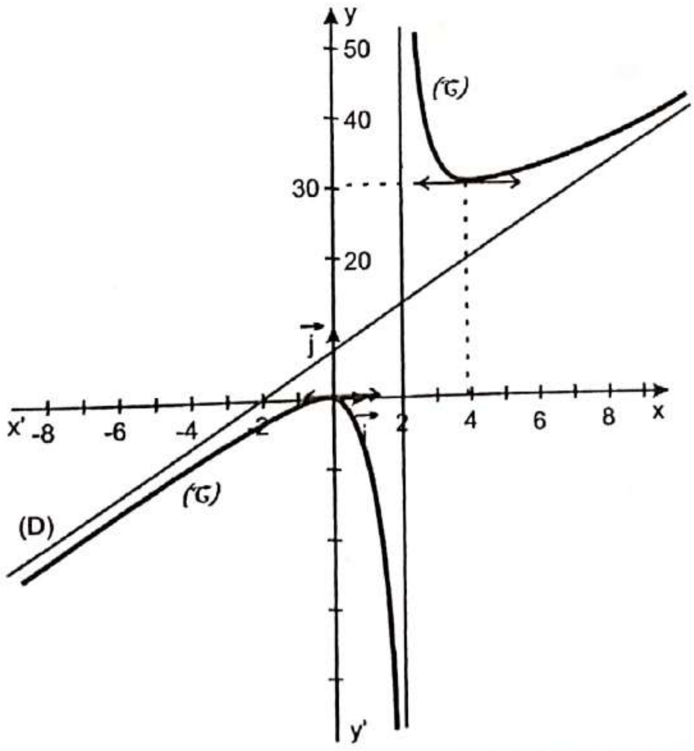
- f est dérivable sur D et on a : $f'(x) = \dfrac{(2x-4-\sqrt{15})(2x-4+\sqrt{15})}{(2-x)^2}$

  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{4+\sqrt{15}}{2} = x_1$ ou $x = \dfrac{4-\sqrt{15}}{2} = x_2$.

  De l'étude du signe de f'(x) et de l'étude des limites, on déduit le tableau de variation ci-dessous.

x	$-\infty$		x_2		2		x_1		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	‖	-	0	+	
f(x)	$-\infty$	↗	$16-4\sqrt{15}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$16+4\sqrt{15}$	↗	$+\infty$

- **Construction de ($\mathcal{C}$)**



On a $\lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - (4x + 8)] = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{15}{x - 2} = 0$. Donc la droite (D) d'équation $y = 4x + 8$ est asymptote à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$ et en $-\infty$. De plus, $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = +\infty$. D'où la droite d'équation $x = 2$ est asymptote verticale à $(\mathcal{C})$

EXERCICE 8 :

1) Les trois propriétés se traduisent successivement par $f(0) = 5$; $f'(0) = 0$ et $f'(1) = -3$

- $f(0) = 5 \Leftrightarrow \frac{c}{-2} = 5 \Leftrightarrow c = -10$
- pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $f'(x) = \frac{ax^2 - 4ax - 2b - c}{(x-2)^2}$

  $f'(0) = 0 \Leftrightarrow \frac{-2b - c}{4} = 0 \Leftrightarrow b = 5$

  $f'(1) = -3 \Leftrightarrow \frac{-3a - 2b - c}{(1-2)^2} = -3 \Leftrightarrow a = 1$

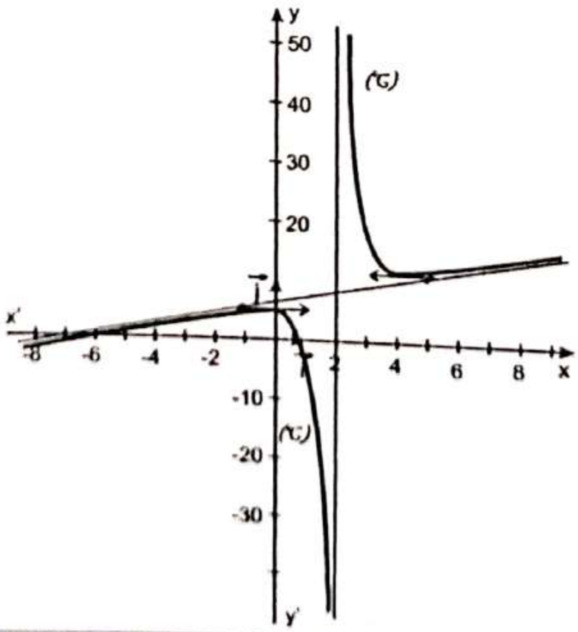
  donc $a = 1$, $b = 5$ et $c = -10$ et $f(x) = \frac{x^2 + 5x - 10}{x - 2}$

2) Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $f(x) = x + 7 + \frac{4}{x - 2}$

- f est définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ et dérivable sur D et on a : $f'(x) = 1 - \frac{4}{(x-2)^2} = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = +\infty$. L'étude du signe de $f'(x)$ et le calcul des limites permettent de dresser le tableau de variation de f ci-dessous.

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	‖	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	5	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	13	↗	$+\infty$

3) **Construction de $(\mathcal{C})$**



La droite d'équation x = 2 est asymptote à ($\mathcal{C}$)

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-(x+7)\right]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{4}{x-2}=0$.

La droite d'équation y = x + 7 est asymptote à ($\mathcal{C}$) en $-\infty$ et en $+\infty$.

EXERCICE 9 :

1)

a) f est définie sur $\mathbb{R}$.
De plus, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $x+\pi\in\mathbb{R}$ et $f(x+\pi)=4\sin^2(x+\pi)\cos2(x+\pi)$
$=4(-\sin x)^2\cos(2x+2\pi)$; $f(x+\pi)=4\sin^2x\cos2x=f(x)$.
Donc f est une fonction périodique de période π.

b) Pour tout $h\in\mathbb{R}$, $\frac{\pi}{2}-h\in R$ et $\frac{\pi}{2}+h\in R$; et on a :

$$f\left(\frac{\pi}{2}-h\right)=4\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-h\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-h\right)=4\cos^2h(-\cos2h)=-4\cos^2h\cos2h$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}+h\right)=4\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+h\right)\cos2\left(\frac{\pi}{2}-h\right)-4\cos^2h\cos2h\ ;\ \text{d'où } f\left(\frac{\pi}{2}-h\right)=f\left(\frac{\pi}{2}+h\right).$$

Par conséquent, la droite d'équation $x=\frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de ($\mathcal{C}$).

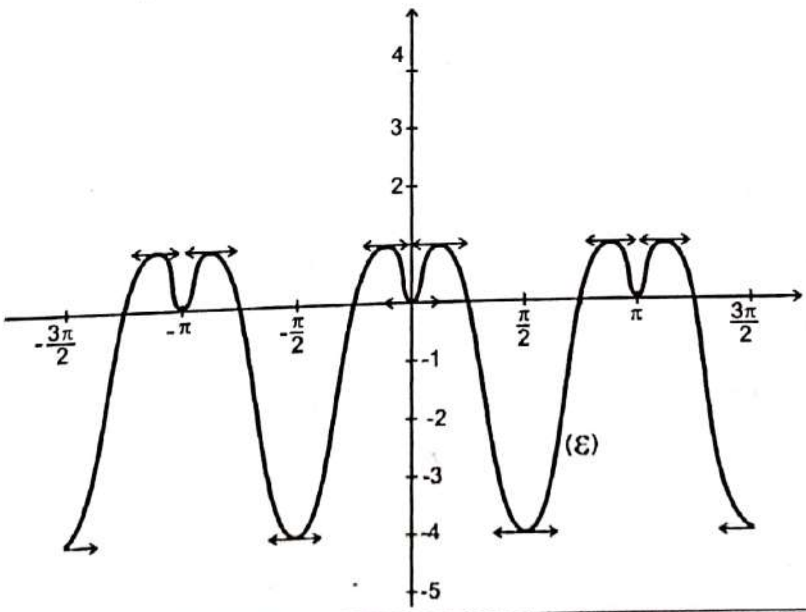
2)

a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$,
$f'(x)=8\cos x\sin x\cos2x-8\sin^2x\sin2x$
$f'(x)=4\sin2x\cos2x-8\sin^2x\sin2x$
$f'(x)=4\sin2x(\cos2x-2\sin^2x)$
$f'(x)=4\sin2x(1-4\sin^2x)$; car $\cos2x=1-2\sin^2x$.

b) Pour $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $f'(x)=0\Leftrightarrow\sin2x=0$ ou $\sin^2x=\frac{1}{4}$ $\Leftrightarrow x=0$ ou $x=\frac{\pi}{2}$ ou $x=\frac{\pi}{6}$; $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-4$. On en déduit le signe de f'(x) sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et par suite le tableau de variation ci-contre.

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
f'(x)	0	+	0	-	0
f(x)	0	↗	$\frac{1}{2}$	↘	-4

3) **Construction de ($\mathcal{C}$) sur $\left[-\frac{3\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$**



Scanné avec CamScanner

La construction de $(\mathcal{C})$ se fait de la manière suivante :

- construction de $(\mathcal{C})$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ suivant le tableau de variation
- pour $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = f(x)$. Donc f est paire. Ainsi une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées permet d'obtenir la courbe sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
- ensuite, on fait deux translations de vecteurs respectifs $-\pi\overrightarrow{OI}$ et $\pi\overrightarrow{OI}$ pour obtenir $(\mathcal{C})$ sur $\left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

EXERCICE 10 :

1) Pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $2\cos x - \frac{1}{\cos x} = 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{2}\cos x\right)^2 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ou $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = -\frac{\pi}{4}$; donc dans l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, les solutions de l'équation sont $-\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{4}$.

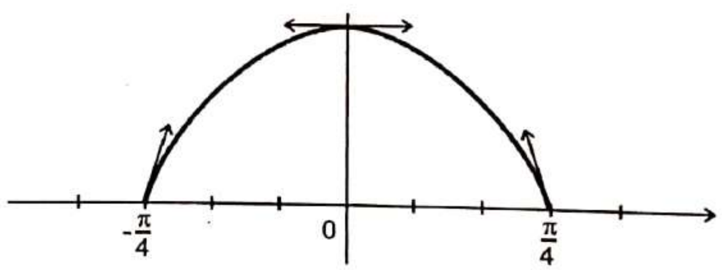
2) f est continue et dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ et on a :

$f'(x) = -2\sin x - \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \sin x\left(-2 - \frac{1}{\cos^2 x}\right)$

f' est positive sur $\left[-\frac{\pi}{4}, 0\right]$ et négative sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

x	$-\frac{\pi}{4}$		0		$\frac{\pi}{4}$
f'(x)		+	0	-	
f(x)	0	↗	1	↘	0

On en déduit le tableau de variation ci-contre. La construction de la courbe de f se fait en utilisant simplement le tableau de variation et les pentes des demi-tangentes à la courbe aux points d'abscisses $-\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{4}$. Ces demi-tangentes ont respectivement pour pentes $f'\left(-\frac{\pi}{4}\right) = +2\sqrt{2}$ et $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2\sqrt{2}$



EXERCICE 11 :

1) Supposons que $\Omega(a, b)$ est un centre de symétrie de $(\mathcal{C})$

Montrons alors que la droite (Δ) d'équation $x = a$ est un axe de symétrie de $(\mathcal{C}')$

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, tel que $a - x \in \mathbb{R}$ et $a + x \in \mathbb{R}$, $\frac{f(a-x) + f(a+x)}{2} = b$.

En dérivant cette égalité membres à membres, $x \mapsto f(a-x)$ étant composé des fonctions $x \mapsto a - x$ et $x \mapsto f(x)$; on obtient $-\frac{f'(a-x) + f'(a+x)}{2} = 0$ $\quad (u(ax+b))' = au'(ax+b)$; soit $f'(a-x) = f'(a+x)$. On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que :

$a - x \in \mathbb{R}$ et $a + x \in \mathbb{R}$, $f'(a-x) = f'(a+x)$; d'où le résultat cherché.

2) Supposons que la droite (Δ) d'équation x = a est un axe de symétrie de ($\mathcal{C}$), alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $a - x \in \mathbb{R}$ et $a + x \in \mathbb{R}$, on a : $f(a - x) = f(a + x)$

En dérivant membre à membre cette égalité, on obtient $-f'(a - x) = f'(a + x)$; soit $\frac{f'(a-x) + f'(a+x)}{2} = 0$. Donc le point $\Omega(a, 0)$ est un centre de symétrie de ($\mathcal{C}$).

EXERCICE 12 :

1) f est définie sur $D = \mathbb{R}\backslash\{0, -2\}$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$
- $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} f(x) = +\infty$;

  $\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}} f(x) = -\infty$;

  $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\>}} f(x) = -\infty$;

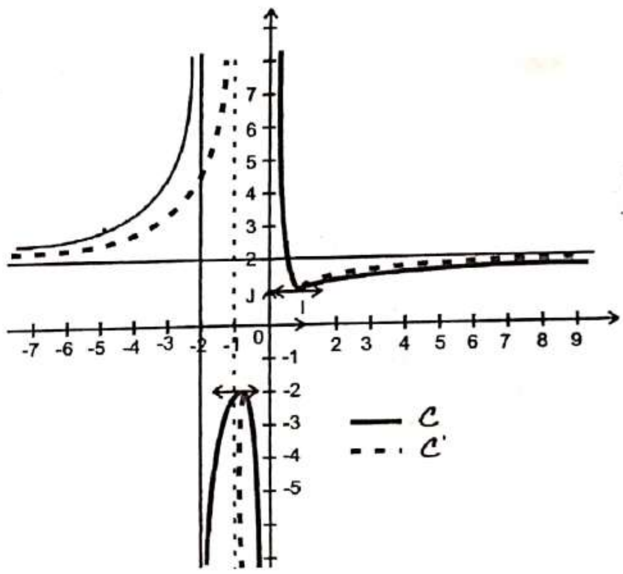
  $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\<}} f(x) = +\infty$
- f est dérivable sur D et on a : $f'(x) = \frac{2(2x+1)(x-1)}{(x^2+2x)^2}$

  On obtient le tableau de variation ci-dessus

x	-∞		2		$-\frac{1}{2}$		0		1		+∞
f'(x)		+	‖	+	0	-	‖	-	0	+	
f(x)	2	↗	+∞ ‖ -∞	↗	-2	↘	+∞ ‖ +∞	↘	1	↗	2

Construction de ($\mathcal{C}$)

Les droites d'équations y = 2, x = -2 et x = 0 sont asymptotes à ($\mathcal{C}$).



2) Pour tout $x \in D$, on a : $(m - 2)x^2 + 2mx - 1 = 0$

$\Leftrightarrow m = \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 2x} \Leftrightarrow m = f(x)$

On en déduit que :

- pour $m \in]-\infty, -2[$, (E) admet deux racines négatives ;
- pour m = -2, (E) admet une racine négative ;
- pour $m \in]-2, 1[$, (E) n'admet pas de racine ;
- pour m =1, (E) admet une racine positive ;
- pour $m \in]1, 2[$, (E) admet deux racines positives ;
- pour m = 2, (E) admet une racine positive ;
- pour $m \in]2, +\infty[$, (E) admet deux racines, une positive et une négative.

3) (D_m) : y = m

a) Pour $m \in]-\infty, -2[\cup]1, +\infty[\backslash\{2\}$. On a : $\Delta' = m^2 + m - 2$, $\Delta' > 0$ et $x_1 = \frac{-m - \sqrt{\Delta'}}{m-2}$; $x_2 = \frac{-m + \sqrt{\Delta'}}{m-2}$. Les coordonnées de I sont $\left(-\frac{m}{m-2}, m\right)$

b) On a $x_I = \frac{-m}{m-2}$ et $y_I = m$ avec $m \in]-\infty, -2[\cup]1, +\infty[\backslash \{2\}$; d'où $x_I = \frac{-y_I}{y_I - 2}$ et par suite $y_I = \frac{2x_I}{x_I + 1}$. Donc l'ensemble des points I est la courbe ($\mathcal{C}'$) d'équation $y = \frac{2x}{x+1}$.

c) **Construction de ($\mathcal{C}'$)**

Posons $g(x) = \frac{2x}{x+1}$; alors $g'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$ avec $x \neq -1$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 2$; $\lim\limits_{x \to -1^-} g(x) = +\infty$ et

$\lim\limits_{x \to -1^+} g(x) = -\infty$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
g'(x)		+	‖	+	
g(x)	2	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	2

D'où le tableau de variation ci-contre

Comme m = y_I, alors dans la représentation graphique de ($\mathcal{C}'$), y∈]-∞,-2[∪]1, +∞[\{2}.

EXERCICE 13 :

1) Pour $a = \frac{1}{2}$, $f_a(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x + 1$ et

$f'_a(x) = \frac{3}{2}x^2 - 3$

$f'_a(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$

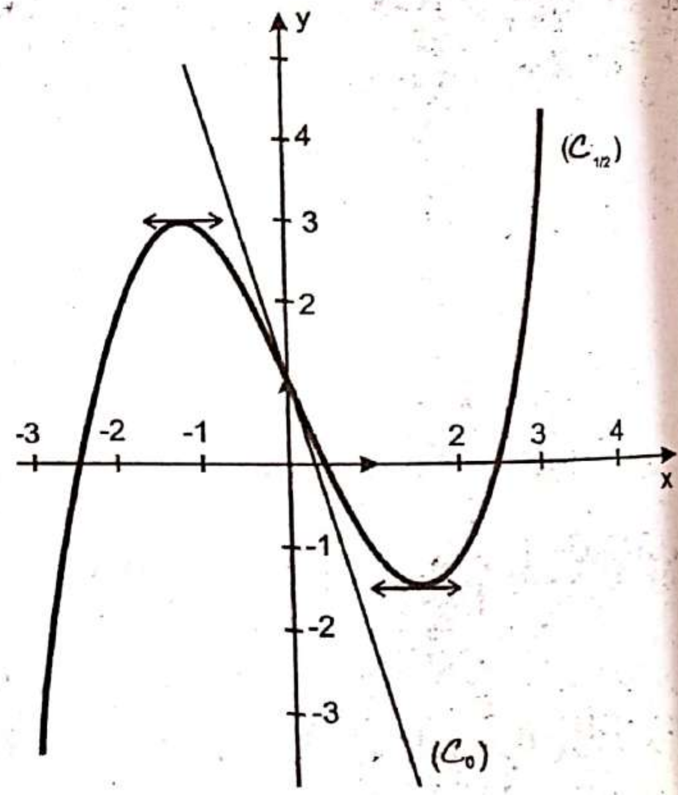
$\lim\limits_{x \to -\infty} f_a(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_a(x) = +\infty$

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'_a(x)$		+	0	-	0	+	
$f_a(x)$	$-\infty$	↗	$2\sqrt{2}+1$	↘	$-2\sqrt{2}+1$	↗	$+\infty$

D'où le tableau de variation ci-contre

Pour a = 0, fa(x) = -3x + 1 sa courbe est une droite affine dont la pente est –3.

On obtient ainsi les courbes ($\mathcal{C}_{1/2}$) et ($\mathcal{C}_0$) ci-contre.



2) Soit M(x, y) un point de ($\mathcal{C}_a$).

On a $y = ax^3 - 3x + 1 \Leftrightarrow ax^3 - y - 3x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow x^3a + (-y - 3x + 1) = 0$.

Cette dernière égalité étant vraie pour tout x∈ℝ, on déduit que $x^3 = 0$

et $-y - 3x + 1 = 0$; soit x = 0 et y = 1.

Donc toutes les courbes ($\mathcal{C}_a$) passent par le point Ω de coordonnée (0, 1).

3) Pour tout x∈ℝ, -x∈ℝ et $f(-x) = -ax^3 + 3x + 1$

D'où pour tout x∈ℝ, $\frac{f(-x) + f(x)}{2} = 1$. Donc

Ω(0, 1) est centre de symétrie de toutes les courbes ($\mathcal{C}_a$).

4) Pour tout x∈ℝ, $f'_a(x) = 3ax^2 - 3 = 3(ax^2 - 1)$

- Si a < 0, alors f'(x) < 0 et f_a est strictement décroissante sur ℝ.
- Si a > 0, alors

$f'_a(x) = 3a\left(x - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{a}}\right)$ et f_a est croissante sur $\left]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{a}}\right[$ et sur $\left]\frac{1}{\sqrt{a}}, +\infty\right[$ et

décroissante sur $\left]-\frac{1}{\sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{a}}\right[$.

- Si a = 0, $f_a(x) = -3x + 1$, alors f_a est décroissante sur ℝ.

EXERCICE 14 :

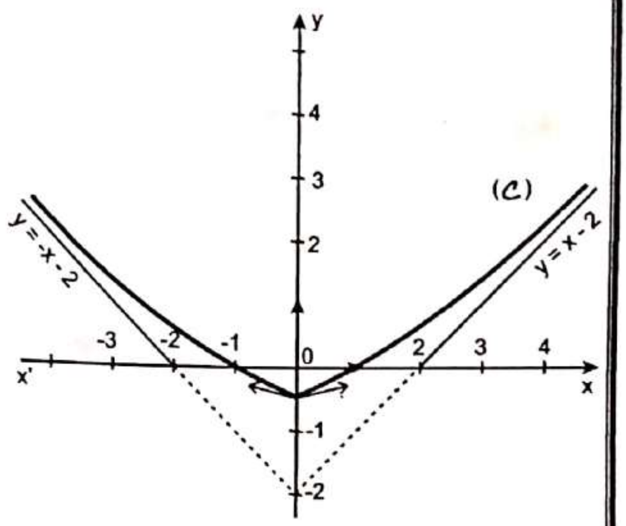
1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| + 2 > 0$. Donc $D_f = \mathbb{R}$

2) On a : $f(0) = -\frac{1}{2}$;

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{2x - 1}{-2x + 4} = -\frac{1}{4}$ et

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{2x + 1}{-2x + 4} = \frac{1}{4}$

donc f est dérivable à gauche en 0 et à droite en 0. Mais f n'est pas dérivable en 0. Par contre, f est continue en 0.



3) Pour $x > 0$, $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 2}$ et

$\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x - 2)] = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3}{x + 2} = 0$

Pour $x < 0$, $f(x) = \frac{x^2 - 1}{-x + 2}$ et

$\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (-x - 2)] = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3}{x + 2} = 0$

On a donc $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x - 2)] = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) + (x + 2)] = 0$, on en déduit que la droite d'équation $y = x - 2$ est asymptote oblique à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$ et la droite d'équation $y = -x - 2$ est asymptote oblique à $(\mathcal{C})$ en $-\infty$.

4) Pour $x \geq 0$, $f(x) = x - 2 + \frac{3}{x + 2}$ et

$f'(x) = 1 - \frac{3}{(x + 2)^2} = \frac{(x + 2 - \sqrt{3})(x + 2 + \sqrt{3})}{(x + 2)^2}$

Pour $x \leq 0$, $f(x) = -x - 2 + \frac{3}{-x + 2}$ et

$f'(x) = -1 - \frac{3}{(-x + 2)^2} = \frac{-(x - 2 + \sqrt{3})(x - 2 - \sqrt{3})}{(-x + 2)^2}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'(x)	-	||	+
f(x)	$+\infty$ ↘	$-\frac{1}{2}$	↗ $+\infty$

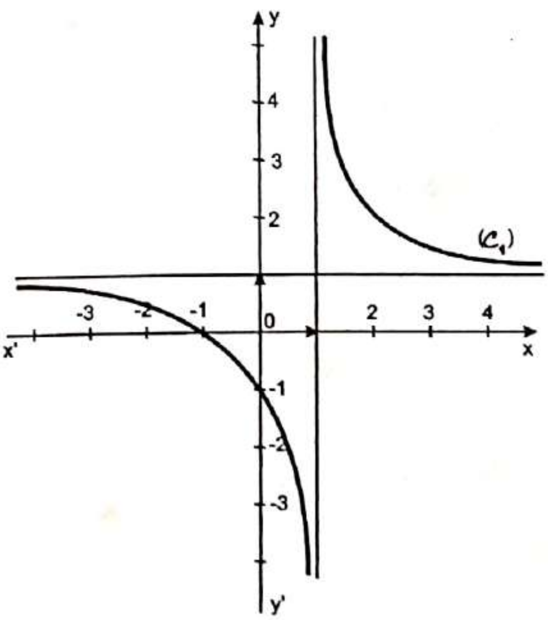
De plus, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; d'où le tableau de variation et la courbe ci-contre.

EXERCICE 15 :

1) $f_1(x) = \frac{x + 1}{x - 1}$

- f_1 est définie, continue et dérivable sur $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
- pour tout $x \in D$, $f'_1(x) = \frac{-2}{(x - 2)^2}$. Donc f_1 est décroissante sur $]-\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to 1} f_1(x) = -\infty$ et

$\lim\limits_{x \to 1} f_1(x) = +\infty$



- **Construction de $(\mathcal{C}_1)$**
  Les droites d'équations y = 1 et x = 1 sont asymptotes à $(\mathcal{C}_1)$.
  Le point de coordonnées (1, 1) est centre de symétrie de $(\mathcal{C}_1)$

2) Soient $m \in \mathbb{R}^*$ et M(x, y) un point de $(\mathcal{C}_m)$.
   On a : $y = \dfrac{(2m-1)x+m}{x-m} \Leftrightarrow (-y-2x-1)m + x + yx = 0$
   Cette dernière égalité est considérée comme un polynôme en "m" égal au polynôme nul. On en déduit : $-y-2x-1 = 0$ et $x + yx = 0$; soit x = O et y = -1
   Donc toutes les courbes $(\mathcal{C}_m)$ passent par le point A(0, -1)

3) Pour tout $m \in \mathbb{R}^*$ et pour $x \neq m$, on a : $f'_m(x) = \dfrac{-2m^2}{(x-m)^2}$. On a : $f'_m(0) = -2$. Donc une équation de la tangente en A à $(\mathcal{C}_m)$ est $y = -2x - 1$.

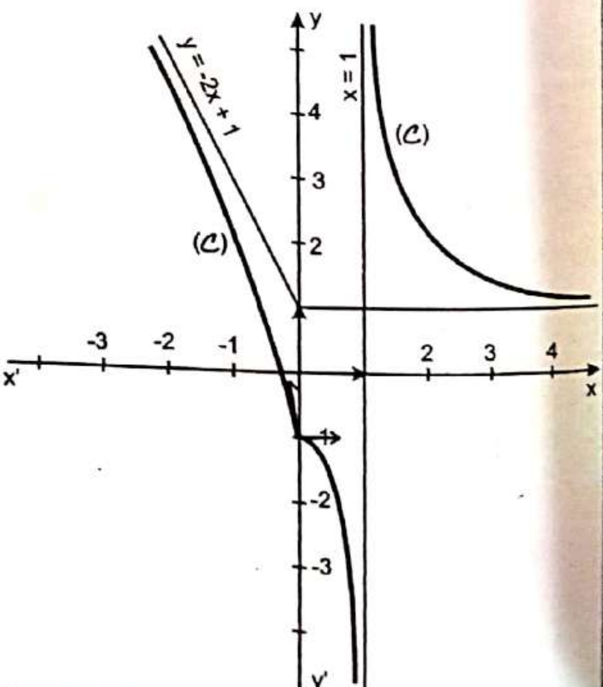
4) Soit x l'abscisse d'un tel point P. On a : $f'_m(x) = -2$.
   Or $f'_m(x) = -2 \Leftrightarrow \left(\dfrac{m}{x-m}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow x = 2m$ ou $x = 0$
   Les cas x = 0 correspond au point A.
   Donc l'abscisse de P est x = 2m. l'ordonnée de P est $y = f_m(x)$ c'est-à-dire $y = 4m - 1$.
   Ainsi, $x = 2m$ et $y = 4m - 1 \Rightarrow y = 2x - 1$
   Donc l'ensemble des points P lorsque m varie est la droite d'équation $y = 2x - 1$

EXERCICE 16 :

1) f(x) existe si $x^2 - 1 \neq 0$ pour $x \geq 0$. Donc $D = \mathbb{R}\backslash\{1\}$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{-2x^2+3x+1}{x-1}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{-2x^2}{x}\right) = +\infty$
   $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2}{x^2}\right) = 1$
   $\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} f(x) = +\infty$

3) $f(0) = -1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}} f(x) = -1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} f(x) = -1$; donc
   $\lim\limits_{x\to0} f(x) = -1 = f(0)$; par conséquent, f est continue en 0.
   - $\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{-2x+4}{x-1} = -4 \Rightarrow$ f est dérivable à gauche de en 0
   - $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{2x}{x^2-1} = 0 \Rightarrow$ f est dérivable à droite en 0.
     Donc f n'est pas dérivable en 0 car les nombres dérivés à gauche et à droite sont différents.



4) Pour tout $x \in]-\infty, 0[$,
   $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-1} = \dfrac{ax^2 + (b-a)x + c - b}{x-1}$

Or $f(x) = \dfrac{-2x^2+3x+1}{x-1}$; d'où : a = -2, b – a = 3 et c – b = 1.

Donc a = -2, b = 1 et c = 2 et $f(x) = -2x + 1 + \dfrac{2}{x-1}$

5) On a $f(x) - (-2x+1) = \dfrac{2}{x-1}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (-2x+1)] = 0$

Donc la droite d'équation y = -2x + 1 est asymptote à ($\mathcal{C}$) en -∞.

6) Pour x > 0, $f'(x) = \dfrac{-4x}{(x^2-1)^2}$. Donc f'(x) < 0 sur]0, +∞[\{1}

Pour x < 0, $f'(x) = -2 - \dfrac{2}{(x-1)^2}$. Donc f'(x) < 0 sur]-∞, 0[

Ainsi, f est décroissante sur]-∞, 1[et sur]1, +∞[.
Les asymptotes à ($\mathcal{C}$) ont pour équations y = 1, x = 1 et y = -2x + 1

x	-∞	0	1	+∞
f'(x)	- -4	0 -		-
f(x)	+∞ ↘		-∞	+∞ ↘ 1

EXERCICE 17 :

1) f est définie pour tout x∈ℝ. Donc D = ℝ et on a :

$$\begin{cases} f(x) = x + \sqrt{x^2-1} & \text{si } x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[= I \\ f(x) = x + \sqrt{1-x^2} & \text{si } x \in [-1, 1] = J \end{cases}$$

2)

- f(-1) = -1 ; $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} \dfrac{2}{x+1-\sqrt{x^2-1}} = -\infty$

  et $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \dfrac{2x}{x+1-\sqrt{1-x^2}} = -\infty$

  donc f n'est pas dérivable en –1 et la tangente à ($\mathcal{C}$) en ce point est verticale.
- Une étude analogue à la précédente montre que f n'est pas également dérivable en 1 et la tangente à ($\mathcal{C}$) en ce point est verticale.

3) On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2-1} = +\infty$. Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$;

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(x + \sqrt{x^2-1}\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x - \sqrt{x^2-1}} = 0$

4) Puisque $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$. On déduit que la droite d'équation y = 0 est asymptote horizontale à ($\mathcal{C}$) en -∞.

- Pour x∈I, $f(x) - 2x = \sqrt{x^2-1} - x = \dfrac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}$;

  donc $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - 2x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x} = 0$.

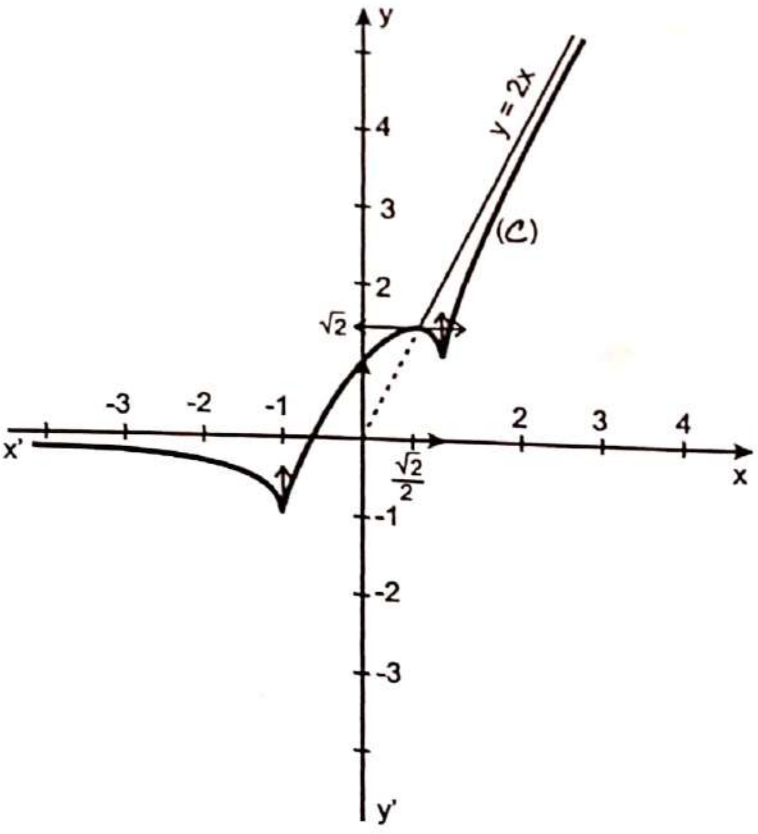
  Par conséquent, la droite d'équation y = 2x est asymptote horizontale à ($\mathcal{C}$) en +∞.

5) Pour $x \in I$, $f'(x) = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ avec $x \neq -1$ et $x \neq 1$. $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-1} > -x$

- Si $x > 1$, alors $-x < 0$ et on a : $\sqrt{x^2-1} > -x$; d'où $f'(x) > 0$.
- Si $x < -1$, alors $\sqrt{x^2-1} > -x \Leftrightarrow x^2 - 1 > x^2 \Leftrightarrow -1 > 0$
  L'inégalité $-1 > 0$ étant fausse, on n'a pas $\sqrt{x^2-1} > -x$, d'où pour $x < -1$, $f'(x) < 0$
- Pour $x \in J$, $f'(x) = 1 - \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ avec $x \neq -1$ et $x \neq 1$, $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} \geq x$
- Si $0 \leq x < 1$, alors $\sqrt{1-x^2} \geq x \Leftrightarrow 1 - 2x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right] \cap [0, 1[$ d'où $f'(x) \geq 0$ si

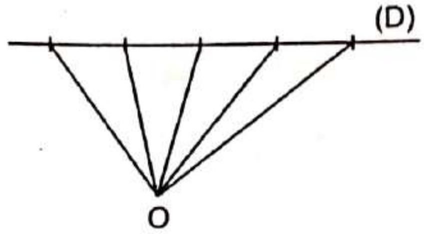
  $x \in \left[0, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$ et $f'(x) \leq 0$, si $x \in \left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 1\right[$
- Si $-1 < x < 0$, alors l'inégalité $\sqrt{1-x} > x$ est vérifiée d'où $f'(x) > 0$ si $-1 < x < 0$. On en déduit le tableau de variation ci-contre

x	$-\infty$		-1		0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1		$+\infty$
f'(x)		$-$	‖	$+$		$+$		$-$	‖	$+$	
f(x)	0	↘	-1	↗	1	↗	$\sqrt{2}$	↘	1	↗	$+\infty$



CHAPITRE 16 : SUITES NUMERIQUES

EXERCICE 1 :



1) On a : $u_2 = 1$; $u_3 = 3$ et $u_4 = 6$

2) Nous pouvons dire que $u_{n+1} = u_n + n$

On a : $u_5 = u_4 + 4 = 10$; $u_6 = u_5 + 5 = 15$; $u_7 = u_6 + 6 = 21$;
$u_8 = u_7 + 7 = 28$ et $u_9 = u_8 + 8$ d'où $u_9 = 36$ et $u_{10} = u_9 + 9$.
Donc $u_9 = 36$ et $u_{10} = 45$.

EXERCICE 2 :

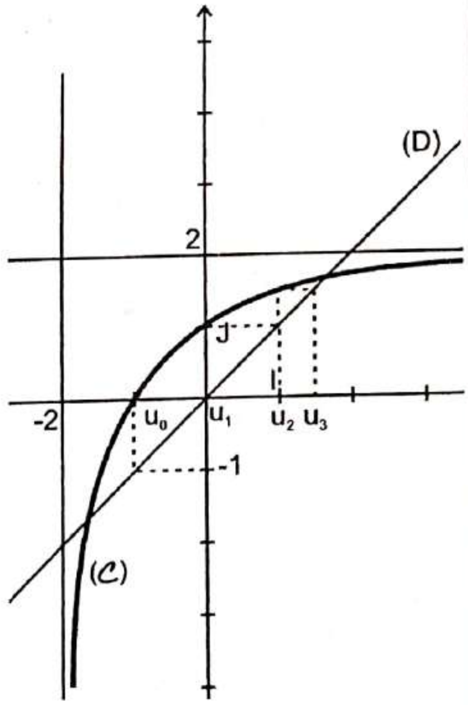
Soit u_n le prix du $n^{ième}$ mètre
On a : $u_1 = 100F$; $u_2 = u_1 + 50$; $u_3 = u_2 + 50$; … ; $u_n = u_{n-1} + 50$
(u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_1 = 1000F$ et de raison $r = 50F$.
Le coût de n mètres de profondeur est $S = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = n\dfrac{u_1 + u_n}{2} = n\dfrac{u_1 + u_1 + (n-1)r}{2}$;

d'où $S = 1000n + 25n(n - 1)$.
Si $S = 519750$, alors $25n(n - 1) + 1000n = 519750$
Soit $25n^2 + 975n - 519750 = 0$. C'est-à-dire $n^2 + 39n - 20790 = 0$; d'où $n = 126$
Donc si l'on dispose d'un crédit de 519750F, on pourra atteindre une profondeur de 126 mètres.

EXERCICE 3 :

1) Soit f la fonction définie sur $]-2, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x+2}{x+2}$

Pour tout $x \in]-2, +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{2}{(x+2)^2}$; $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]-2, +\infty[$
De plus $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ >}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$. Donc les droites d'équations $x = -2$ et $y = 2$ sont asymptotes à $(\mathcal{C})$. D'où la courbe ci-contre.



2) On construit les termes de la suite de la manière suivante : $u_0 = 1$, on projette -1 sur (D) perpendiculairement à (OI), puis on projette le point de (D) obtenu sur (OJ) parallèlement à (OI), la projection de ce dernier sur (OI) donne le point u_1.

Ensuite, on projette u_1 sur $(\mathcal{C})$ perpendiculairement à (OI), on obtient $f(u_1)$ que l'on projette sur (D), puis sur (OI) et on obtient $f(u_1) = u_2$ sur l'axe (OI). Ainsi de suite.

EXERCICE 4 :

1) On a : $u_{n+1} = \dfrac{n-1}{2n+3}$; $u_n = \dfrac{n-2}{2n+1}$ et $u_{n+1} - u_n = \dfrac{5}{(2n+1)(2n+3)}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n > 0$, donc (u_n) est croissante

2) On a : $u_n = n^2 + 4n - 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$
a) $u_0 = -1$, $u_1 = 4$; $u_2 = 11$ et $u_3 = 20$

b) On a $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 + 4(n+1) - 1 - n^2 - 4n + 1 = 2n + 5$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n > 0$; donc u est strictement croissante

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} (n^2)$; donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

EXERCICE 5 :

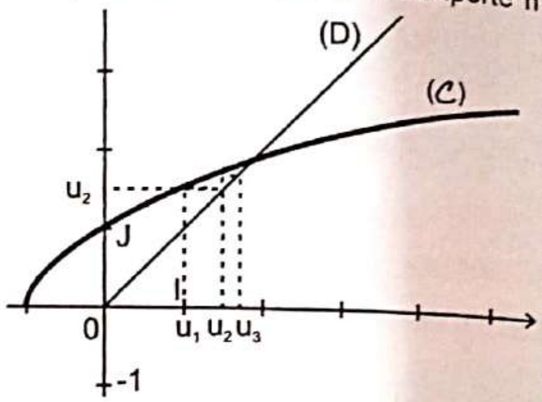
1) On a : $u_1 = \sqrt{1} = 1$; $u_2 = \sqrt{1+\sqrt{1}} = \sqrt{2}$; $u_3 = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}} = \sqrt{1+\sqrt{2}}$

2) On peut écrire : $u_n = \sqrt{1+u_{n-1}}$ car u_{n-1} comporte (n - 1) radicaux et $\sqrt{1+u_{n-1}}$ comporte n radicaux.

3) $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$

Construisons les courbes ($\mathcal{C}$) et (D) d'équations respectives $y = \sqrt{1+x}$ et $y = x$.

La construction des termes de la suite sur l'axe (OI) montre que la suite (u_n) est croissante.



EXERCICE 6 :

1) On a : $u_1 = \frac{1}{2}$; $u_2 = \frac{2}{3}$; $u_3 = \frac{3}{4}$; $u_4 = \frac{4}{5}$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$, $\frac{a}{n+1} + \frac{b}{n+2} = \frac{(a+b)n + b + 2a}{(n+1)(n+2)}$;

d'où $\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n+1} + \frac{b}{n+2} \Leftrightarrow a + b = 0$ et $b + 2a = 1 \Leftrightarrow a = 1$ et $b = -1$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$

3) Des n relations, $u_n = u_{n-1} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$,

on déduit $u_n = u_{n-1} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$u_{n-1} = u_{n-2} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$

$u_{n-2} = u_{n-3} + \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1}$

...

...

...

$u_3 = u_2 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$

$u_2 = u_1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$

$u_1 = u_1$

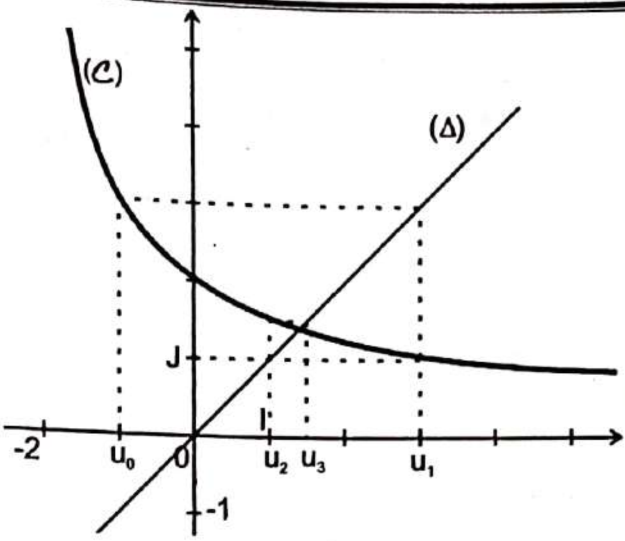
En faisant la somme membres à membres de ces n relations, on déduit $u_n = u_1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}$.

Soit : $u_n = \frac{n}{n+1}$. Donc pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{n}{n+1}$.

4) On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 7 :



1) Construction sur l'axe (OI) des quatre premiers termes de la suite.

2) On a : $u_0 < u_1$, mais $u_1 > u_2$ et $u_2 < u_3$.
Donc la suite (u_n) n'est ni croissante, ni décroissante.

3) La limité de cette suite si elle existe est l'abscisse du point d'intersection des courbes ($\mathcal{C}$) et (D). Donc cette limite éventuelle est l telle que $1 \leq l \leq 2$

EXERCICE 8 :

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2(n + 1) + 1 = (2n + 1) + 2 = u_n + 2$. Donc u est une suite arithmétique de raison r = 2 et de premier terme $u_0 = 1$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = 3^{u_{n+1}} = 3^{u_{n+2}} = 3^2 3^{u_n}$; d'où $v_{n+1} = 9v_n$. Donc v est une suite géométrique de raison q = 9 et de premier terme $v_0 = 3^{u_0} = 3$.

EXERCICE 9 :

P, q, p' et q' sont quatre entiers naturels tels que p + q = p' + q'

1) Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

on a : $\begin{cases} u_{p+q} = u_p + qr \\ u_{p+q} = u_q + pr \end{cases} \Rightarrow u_{p+q} = \dfrac{u_p + u_q}{2} + \dfrac{p+q}{2}r$

de même on a : $u_{p'+q'} = \dfrac{u_{p'} + u_{q'}}{2} + \dfrac{p'+q'}{2}r$

Or, p + q = p' + q'. D'où: $u_{p+q} = u_{p'+q'}$ et $\dfrac{p'+q'}{2}r = \dfrac{p+q}{2}r$ et on a $\dfrac{u_p + u_q}{2} = \dfrac{u_{p'} + u_{q'}}{2}$

Donc $u_p + u_q = u_{p'} + u_{q'}$.

2) Soit (v_n) une suite géométrique de raison $\lambda (\lambda \neq 0)$
On a : $v_{p+q} = \lambda^p v_q$ et $v_{p+q} = \lambda^q v_p$ d'où $v_{p+q}^2 = \lambda^{p+q} v_p x v_q$
De même, on a : $v_{p'+q'}^2 = \lambda^{p'+q'} v_{p'} x v_{q'}$
Or p + q = p' + q'. D'où $v_{p+q}^2 = v_{p'+q'}^2$ et $\lambda^{p+q} = \lambda^{p'+q'}$
Donc $v_p x v_q = v_{p'} x v_{q'}$ (car $\lambda \neq 0$).

EXERCICE 10 :

1) On a : $x + y + z = 9$ et $x^2 + y^2 + z^2 = 59$
De plus, on a : $y = \dfrac{x+z}{2}$ (moyenne arithmétique). En remplaçant cette égalité dans la première équation, on obtient $z = 6 - x$ et on déduit que $y = \dfrac{x+z}{2} = \dfrac{x+6-x}{2} = 3$
Ainsi $x^2 + y^2 + z^2 = 59 \Leftrightarrow x^2 + 3^2 + (6 - x)^2 = 59 \Leftrightarrow x = 7$ ou $x = -1$. D'où $z = -1$ ou $z = 7$.
Donc (x = 7, y = 3 et z = -1) ou (x = -1, y = 3 et z = 7).

2) On a $x + y + z = 63$ et $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{7}{16}$
De plus, on a : $y^2 = xz$ (moyenne géométrique).
$x + y + z = 63 \Rightarrow x + z = 63 - y$

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{7}{16} \Leftrightarrow \frac{x+z}{xz}+\frac{1}{y}=\frac{7}{16} \Leftrightarrow \frac{63-y}{y^2}+\frac{1}{y}=\frac{7}{16} \Leftrightarrow y=\pm 12$

- Pour y = 12, on a : x + z = 51 et xz = 144. D'où x et z sont solutions de l'équation : $x^2 - 51x + 144 = 0$. Ainsi : (x = 3 et z = 48) ou (x = 48 et z = 3)
- Pour y = -12, on a : x + z = 75 et xz = 144. D'où x et z sont solutions de l'équation : $x^2 - 75x + 144 = 0$. Ainsi : $\left(x=\frac{75-\sqrt{5049}}{2} \text{ et } z=\frac{75+\sqrt{5049}}{2}\right)$

  ou $\left(x=\frac{75+\sqrt{5049}}{2} \text{ et } z=\frac{75-\sqrt{5049}}{2}\right)$.

  La suite étant croissante, on a les solutions : (x = 3, y = 12 et z = 48).

EXERCICE 11 :

1) $u_2=\frac{4u_1-u_0}{3}=\frac{10}{3}$; $u_3=\frac{4u_2-u_1}{3}=\frac{31}{9}$ et $u_4=\frac{4u_3-u_2}{3}=\frac{94}{27}$

2) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $v_n = u_n - u_{n-1}$. On a : $v_1 = u_1 - u_0 = 1$; $v_2=u_2-u_1=\frac{10}{3}-3=\frac{1}{3}$ et $v_3=u_3-u_2=\frac{1}{9}$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a : $v_{n+1}=u_{n+1}-u_n=\frac{4u_n-u_{n-1}}{3}-u_n=\frac{u_n-u_{n-1}}{3}$

   Donc $v_{n+1}=\frac{1}{3}v_n$ et la suite (v_n) est géométrique de raison $q=\frac{1}{3}$ et de premier terme $v_1 = 1$.

   il est immédiat que $v_n = q^n v_1$ c'est-à-dire $v_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

3) On a : $S_n=v_1+v_2+\ldots+v_n=v_1\frac{1-q^n}{1-q}$.

   Donc $S_n=\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$ (*)

   D'autre part, $S_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n$.
   $S_n = (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \ldots + (u_{n-1} - u_{n-2}) + (u_n - u_{n-1})$
   Donc $S_n = -u_0 + u_n$ (**)

   Des deux égalités (*) et (**), on déduit que $-u_0+u_n=\frac{3}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]$

   Donc, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=2+\frac{3}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]=\frac{7}{2}-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$

EXERCICE 12 :

1) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_{n+1}=u_{n+1}-1=\frac{1}{5}u_n+\frac{4}{5}-1=\frac{1}{5}(u_n-1)$

   Donc $v_{n+1}=\frac{1}{5}v_n$ et (v_n) est une suite géométrique de raison $q=\frac{1}{5}$ et de premier terme $v_0=u_0-1=5$.

2) Il est immédiat que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_n=q^n v_0=\left(\frac{1}{5}\right)^n \times 5$. Donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, $V_n=\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$

   De l'égalité $v_n = u_n - 1$, on en déduit que $u_n = v_n + 1$. Donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}+1$

3) On a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = 0$ car $q = \frac{1}{5} < 1$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

EXERCICE 13 :

1) On a : $u_1 = \frac{u_0 + 3}{5 - u_0} = \frac{5}{3}$; $u_2 = \frac{u_1 + 3}{5 - u_1} = \frac{7}{5}$; $u_3 = \frac{u_2 + 3}{5 - u_2} = \frac{11}{9}$

2) On a : $v_{n+1} = \frac{3 - u_{n+1}}{u_{n+1} - 1} = \frac{3 - \frac{u_n + 3}{5 - u_n}}{\frac{u_n + 3}{5 - u_n} - 1} = 2\frac{3 - u_n}{u_n - 1}$

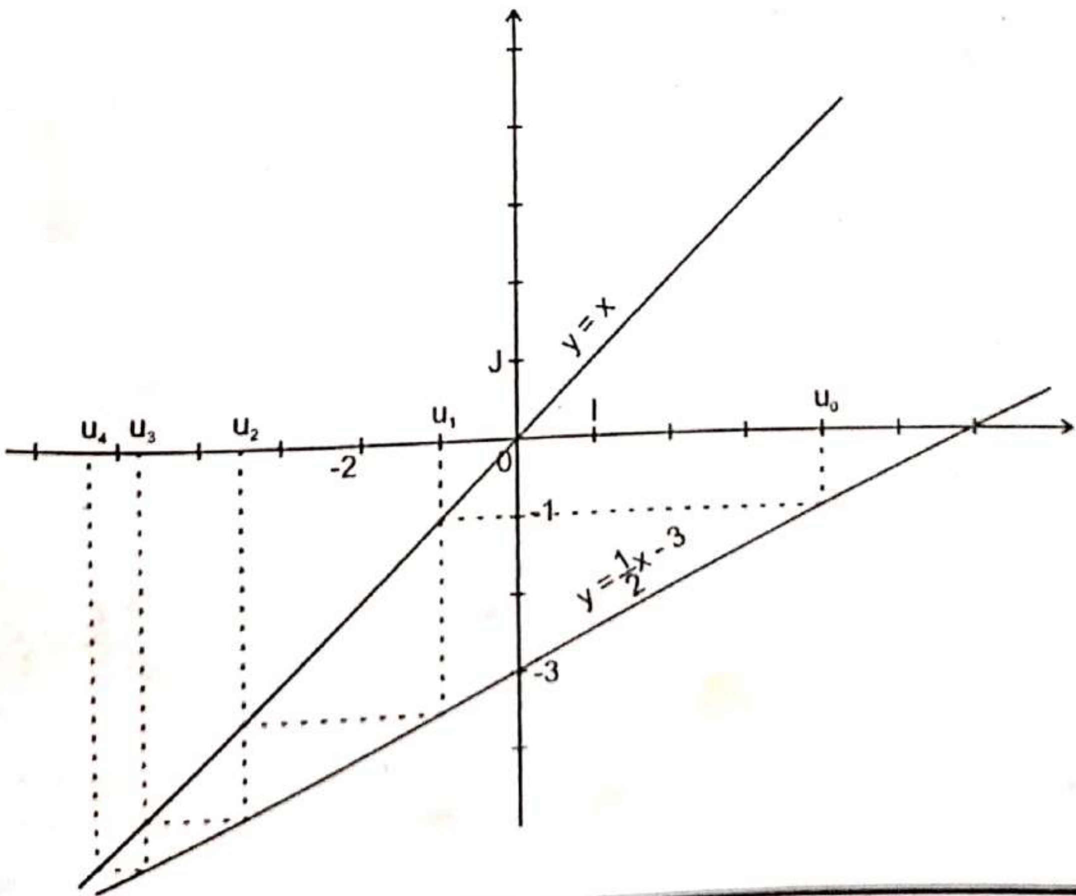
Donc $v_{n+1} = 2v_n$. Par conséquent, (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $v_0 = 1$. On en déduit que : $v_n = q^n v_0$; soit $v_n = 2^n$.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{3 - u_n}{u_n - 1} \Rightarrow u_n = \frac{v_n + 3}{v_n + 1}$. Or $v_n = 2^n$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{2^n + 3}{2^n + 1}$.

4) On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2^n\left(1 + \frac{3}{2^n}\right)}{2^n\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1 + \frac{3}{2^n}}{1 + \frac{1}{2^n}} = 1$; car $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

EXERCICE 14 :

1) Traçons les deux droites d'équations $y = \frac{1}{2}x - 3$ et $y = x$. Ensuite, on place successivement les points d'abscisses u_0, u_1, u_2 et u_4 sur la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x - 3$. Puis sur la droite d'équation $y = x$.



2)

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n - 3 - \frac{1}{2}u_{n-1} + 3$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(u_n - u_{n-1})$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Ecrivons n fois la relation précédente :

$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(u_n - u_{n-1})$

$u_n - u_{n-1} = \frac{1}{2}(u_{n-1} - u_{n-2})$

$u_{n-1} - u_{n-2} = \frac{1}{2}(u_{n-2} - u_{n-3})$

....

....

....

$u_4 - u_3 = \frac{1}{2}(u_3 - u_2)$

$u_3 - u_2 = \frac{1}{2}(u_2 - u_1)$

$u_2 - u_1 = \frac{1}{2}(u_1 - u_0)$

En multipliant ces relations membres à membres, puis en faisant les simplifications, on obtient : $u_{n+1} - u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n(u_1 - u_0)$; or $u_1 - u_0 = -5$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = -5\left(\frac{1}{2}\right)^n$

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-5\left(\frac{1}{2}\right)^n < 0$ c'est-à-dire $u_{n+1} - u_n < 0$. Donc la suite (u_n) est strictement décroissante.

3)

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n + 6 = \frac{1}{2}u_{n-1} - 3 + 6 = \frac{1}{2}u_{n-1} + 3 - 1$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n + 6 = \frac{1}{2}(u_{n-1} + 6)$

b) Un raisonnement analogue à celui de la question 2.a) nous mène au résultat.

Autre méthode :

De la relation : $u_n + 6 = \frac{1}{2}(u_{n-1} + 6)$, on déduit que la suite de terme général $(u_n + 6)$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $u_0 + 6$. D'où : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n + 6 = (u_0 + 6)\left(\frac{1}{2}\right)^n$

c) On a : $\lim_{n \to +\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$. D'où $\lim_{n \to +\infty}(u_n + 6) = 0$. Donc $\lim_{n \to +\infty} u_n = -6$

EXERCICE 15 :

1) On a : $u_1 = \frac{8}{3}$; $u_2 = \frac{16}{5}$; $u_3 = \frac{32}{11}$

2)

a) On a : pour tout $x \neq 1$, $f'(x) = \dfrac{2(x-1)-2x}{(x-1)^2} = \dfrac{-2}{(x-1)^2}$ et pour tout $x \neq 1$, $f'(x) < 0$. La fonction f est décroissante sur [2, 5]

b) Les coordonnées du point d'intersection A des courbes ($\mathcal{C}$) et (D) vérifient :

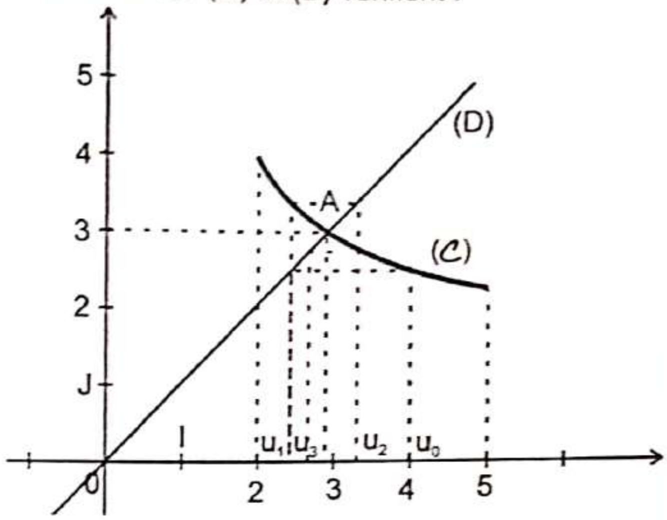
$y = \dfrac{2x}{x-1}$ et $y = x$.

On obtient l'équation :

$\dfrac{2x}{x-1} = x \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 3$.

Comme $x \in [2, 5]$, la solution est $x = 3$.

Donc A(3, 3).



c) On constate que les points d'abscisses u_0, u_1, u_2 et u_3 semblent "s'enrouler" autour de A. Or, les abscisses de ces points et de A sont : u_n, u_{n+1}, ... et 3. On est amené à faire l'hypothèse : $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n = 3$.

3)

a) On peut écrire : $v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = \dfrac{2u_n}{u_n - 1} - 3 = \dfrac{-u_n + 3}{u_n - 1}$. $v_{n+1} = \dfrac{-v_n}{u_n - 1} \Rightarrow \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{-1}{u_n - 1}$ et

$\left|\dfrac{v_n + 1}{v_n}\right| = \dfrac{1}{|u_n - 1|}$.

On admet que $u_n \geq \dfrac{5}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $u_n - 1 \geq \dfrac{3}{2}$. Comme $u_n - 1 > 0$, on a

$|u_n - 1| \geq \dfrac{3}{2}$ et $\dfrac{1}{|u_n - 1|} \leq \dfrac{2}{3}$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\left|\dfrac{v_{n+1}}{v_n}\right| \leq \dfrac{2}{3}$ $\qquad (E_n)$

b) Considérons les relations :

$(E_0) : \left|\dfrac{v_1}{v_0}\right| \leq \dfrac{2}{3}$

$(E_1) : \left|\dfrac{v_2}{v_1}\right| \leq \dfrac{2}{3}$

....

....

....

$(E_{n-1}) : \left|\dfrac{v_n}{v_{n-1}}\right| \leq \dfrac{2}{3}$

La multiplication membre à membre de ces n inégalités donne :

$\left|\dfrac{v_1}{v_0}\right| x \left|\dfrac{v_2}{v_1}\right| x \ldots x \left|\dfrac{v_{n-1}}{v_{n-2}}\right| x \left|\dfrac{v_n}{v_{n-1}}\right| \leq \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$; soit $\left|\dfrac{v_n}{v_0}\right| \leq \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ ou encore $|v_n| \leq \left(\dfrac{2}{3}\right)^n |v_0|$.

Or $v_0 = u_0 - 3 = 1$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $|v_n| \leq \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

c) On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$ et $0 \leq |v_n| \leq \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

D'où $0 \leq \lim\limits_{n \to +\infty} |V_n| \leq 0$ ce qui implique : $\lim\limits_{n \to +\infty} |v_n| = 0$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.

Comme $v_n = u_n - 3$, on a : $u_n = v_n + 3$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 3$.

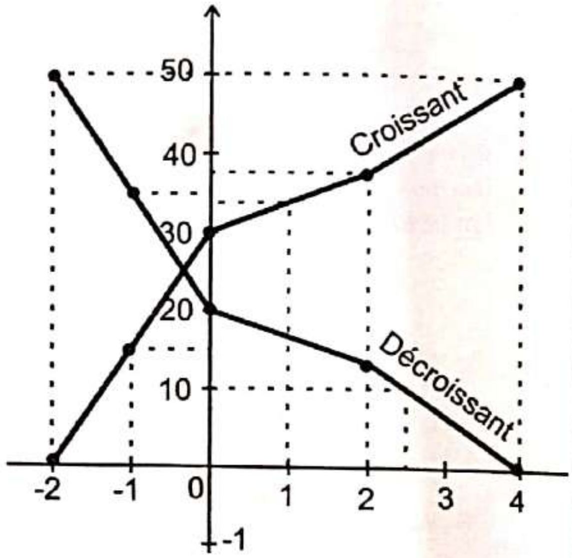
CHAPITRE 17 : STATISTIQUES

EXERCICE 1 :

1)

Classe	[-2, -1[	[-1, 0[	[0, 2[	[2, 4[
Effectif cumulé croissant	14	30	38	50
Effectif cumulé décroissant	50	36	20	12

2) Figure ci-contre



3)

a) Sur le graphique des effectifs cumulés croissants, le point d'abscisse 1 a pour ordonnée 34. Donc le nombre d'individus dont la modalité est inférieure à 1 est de 34.

b) Sur le graphique des effectifs cumulés décroissants, le point d'abscisse –0,4 a pour ordonnée 26. Donc le nombre d'individus dont la modalité est supérieure à –0,4 est de 26.

4)

a) Sur le graphique des effectifs cumulés décroissants, le point d'ordonnée 9 a pour abscisse 2,5. Donc l'intervalle dans lequel on trouve les 9 individus de modalité le plus grand est [2,5 ; 4[.

b) De manière analogue, sur le graphique des effectifs cumulés croissants, l'intervalle dans lequel on trouve les 20 individus de modalité la plus petite est [-2 ; -0,7[.

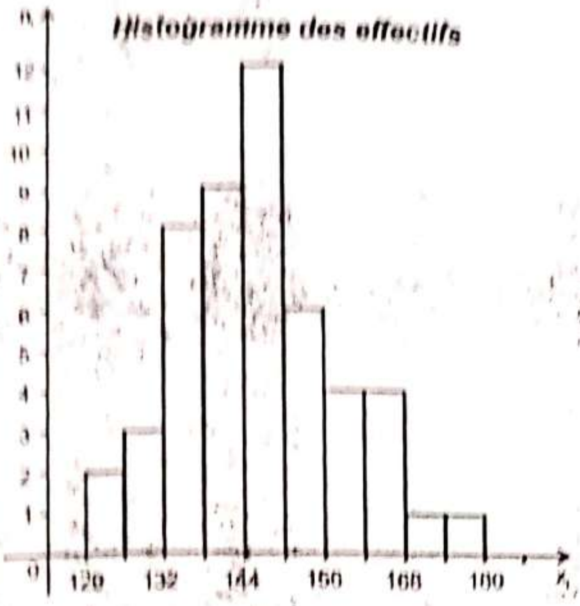
EXERCICE 2 :

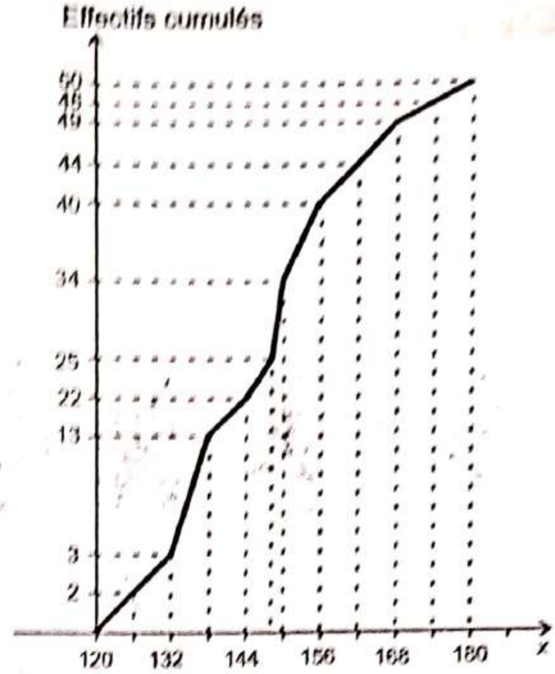
1) On a le relevé suivant :

Classe	[120, 126[	[126, 132[	[132, 138[	[138, 144[	[144, 150[	[150, 156[
Effectifs	2	3	8	9	12	6

Classe	[156, 162[	[162, 168[	[168, 174[	[174, 180[
Effectifs	4	4	1	1

2)





N.B. : on dresse le tableau des effectifs cumulés croissants

Polygone des effectifs cumulés croissants

3) Désignons par c_i le centre de chaque classe ;

Classe	n_i	C_i	n_iC_i	C_i^2	$n_iC_i^2$
[120, 126[	2	123	246	15129	30258
[126, 132[	3	129	387	16641	49923
[132, 138[	8	135	1080	18225	145800
[138, 144[	9	141	1269	19881	178929
[144, 150[	12	147	1764	21609	259308
[150, 156[	6	153	918	23409	140454
[156, 162[	4	159	636	25281	101124
[162, 168[	4	165	660	27225	108900
[168, 174[	1	171	171	29241	29241
[174, 180[	1	177	177	31329	31329
Total	**50**		**7308**		**1075266**

- La moyenne de la série (C_i, n_i) donc la série demandée est : $\bar{x} = \frac{7308}{50} = 146,16$. La taille moyenne des enfants est 146,16cm.
- La médiane M_e correspond à une fréquence cumulée de 0,5 ; donc à un effectif cumulé de 25. graphiquement, on lit l'abscisse 145,5cm du point du polygone d'ordonnée 25. La médiane appartient à la classe [144, 150[. On calcule M_e par une interpolation linéaire sur l'intervalle [144, 150[la restriction du polygone est une fonction affine dont le taux de variations est constant : ce taux est : $\frac{M_e - 144}{25 - 22} = \frac{150 - 144}{34 - 22}$; Soit $M_e = 145,5$cm.
- La variance de la série est $V = \frac{1}{50}(1075266) - (146,16)^2$ et l'écart type est $\sigma = \sqrt{V}$; soit $\sigma = 11,94$cm.

EXERCICE 3 :

C_i désigne le centre de la classe i

Classe	Effectif n_i	C_i	n_iC_i	C_i^2	$n_iC_i^2$
[50, 60[	10	55	550	3025	30250
[60, 70[	15	65	975	4225	63375
[70, 80[	35	75	2625	5625	196875
[80, 90[	40	85	3400	7225	289000
[90, 100[	30	95	2850	9025	270750
[100, 110[	20	105	2100	11025	220500
[110, 120[	15	115	1725	13225	198375
[120, 130[	5	125	625	15625	78125
Total	**170**		**14850**		**1347250**

1) La moyenne de cette série est $\overline{x} = \frac{1}{170}\sum n_iC_i = \frac{14850}{170} = 87,35$

La variance de cette série est $V = \left(\frac{1}{170}\sum n_iC_i^2\right) - \overline{x}^2 = 294,98$

Et l'écart type est $\sigma = \sqrt{V} = 17,17$

2) La médiane M_e est l'abscisse du point d'ordonnée 50% c'est-à-dire d'effectifs cumulés de 85. Donc M_e appartient à l'intervalle [80, 90[. Ainsi, sur l'intervalle [80, 90[, le polygone des effectifs cumulés croissants est une droite affine dont la pente est constante. Etablissons le tableau des effectifs cumulés croissants.

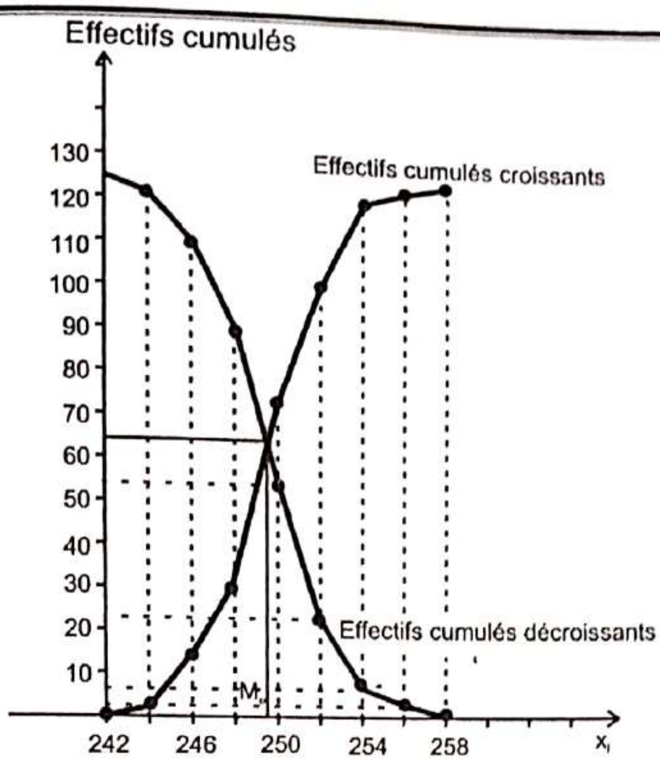
Classe	[50, 60[	[60, 70[	[70, 80[	[80, 90[	[90, 100[	[100, 110[	[110, 120[	[120, 130[
Effectifs cumulés croissants	10	25	60	100	130	150	165	170

Par une interpolation linéaire, on a : $\frac{M_e - 80}{85 - 60} = \frac{90 - 80}{100 - 60}$. Donc $M_e = 86,25$.

EXERCICE 4 :

1) Tableau des calculs

Classe	n_i	n_i croissants	n_i décroissants	x_i	n_ix_i	x_i^2	$n_ix_i^2$
[242, 244[	2	2	125	243	486	59049	118098
[244, 246[	14	16	123	245	3430	60025	840350
[246, 248[	18	34	109	247	4446	61009	1098162
[248, 250[	40	74	91	249	9960	62001	2480040
[250, 252[	30	104	51	251	7530	63001	1890030
[252, 254[	15	119	21	253	3795	64009	960135
[254, 256[	4	123	6	255	1020	65025	260100
[256, 258[	2	125	2	257	514	66049	132098
	125				**31181**		**7779013**



b) La médiane est l'abscisse M_e du point d'ordonnée $\frac{125}{2} = 62,5$

M_e appartient à l'intervalle [248, 250[. Par une interpolation linéaire, on a : $\frac{M_e - 248}{62,5 - 34} = \frac{250 - 248}{74 - 34}$ (on a utilisé le polygone des effectifs cumulés croissants). Donc $M_e = 249,425$.

2)

a) On a : $\overline{x} = \frac{1}{125}\sum n_i x_i = \frac{31181}{125} = 249,448$

On a : $\sigma^2 = \left(\frac{1}{125}\sum n_i x_i^2\right) - \overline{x}^2 = \frac{1}{125} \text{x}7779013 - (249,448)^2$. Donc σ = **2,792**.

b) On a : $\overline{x} - \sigma = 246,656$; $\overline{x} + \sigma = 252,24$

Par une interpolation sur le polygone des effectifs cumulés croissants, déterminons l'effectif n_1 et n_2 et donc l'effectif $n_2 - n_1$, correspondant à $\overline{x} - \sigma$ et $\overline{x} + \sigma$. On a : $\frac{n_1 - 16}{246,656 - 246} = \frac{34 - 16}{248 - 246}$ et $\frac{n_2 - 104}{252,24 - 252} = \frac{119 - 104}{254 - 252}$.

D'où $n_1 = 21,904$ et $n_2 = 105,8$. Ainsi, $n_2 - n_1 = 83,896$ et $\frac{n_2 - n_1}{125} = 0,67116$

Donc le pourcentage des sacs dont le poids est compris entre $\overline{x} - \sigma$ et $\overline{x} + \sigma$ est de 67,116%.

- On a : $\overline{x} - 2\sigma = 243,864$ et $\overline{x} + 2\sigma = 255,032$. De la même façon que ci-dessus, on a : $\frac{n'_1 - 0}{243,864 - 242} = \frac{2}{244 - 242}$ et $\frac{n'_2 - 119}{255,032 - 254} = \frac{123 - 119}{256 - 254}$.

  D'où $n'_1 = 1,864$ et $n'_2 = 121,064$. Ainsi $n'_2 - n'_1 = 119,2$ et $\frac{n'_2 - n'_1}{125} = 0,9536$.

  Donc le pourcentage des sacs dont le poids est compris entre $\overline{x} - 2\sigma$ et $\overline{x} + 2\sigma$ est de 95,36%.

EXERCICE 5 :

1) Tableau des effectifs et des fréquences marginales

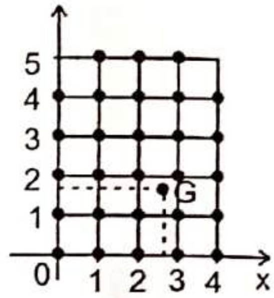
x_i	0	1	2	3	4
n_i	152	212	243	129	64
f_i	0,19	0,265	0,304	0,161	0,08

Série (x_i, n_i)

y_j	0	1	2	3	4	5
n_j	170	206	197	138	57	32
f_j	0,213	0,257	0,246	0,173	0,071	0,04

Série (y_j, n_j)

- **Représentation des points (ci-contre)**



3) Le point moyen G du nuage a pour coordonnés $(\bar{x}, \bar{y})$ telle que :

$$\bar{x} = \frac{1}{800}\sum x_i n_i$$

$$\bar{x} = \frac{(0\text{x}152) + (1\text{x}212) + (2\text{x}243) + (3\text{x}129) + (4\text{x}64)}{800} = 2,81$$

$$\bar{y} = \frac{1}{800}\sum n_i y_j$$

$$= \frac{(0\text{x}170) + (1\text{x}206) + (2\text{x}197) + (3\text{x}138) + (4\text{x}57) + (5\text{x}32)}{800} = 1,75$$

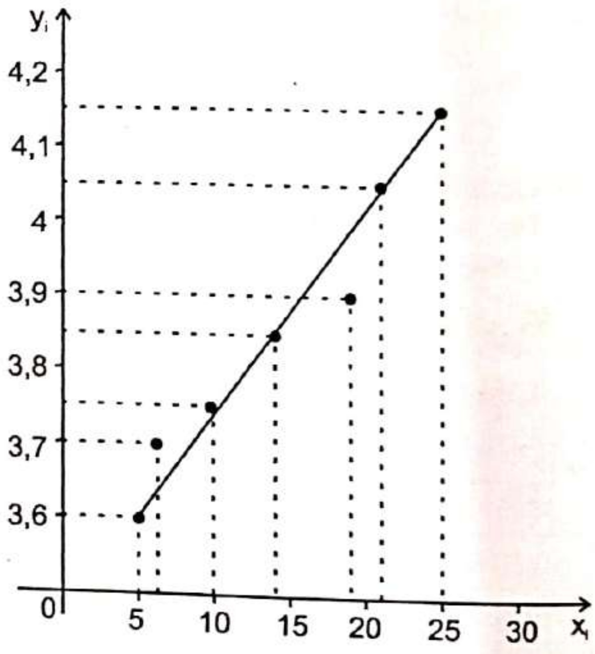
Donc G a pour coordonnées $(\bar{x}, \bar{y}) = (2,81 ; 1,75)$.

EXERCICE 6 :

1) Nuage de points (ci-contre)

2) Tableau des calculs

	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2
	5	3,61	18,05	25
	7	3,70	25,9	49
	10	3,75	37,5	100
	14	3,85	53,9	196
	18	3,90	70,2	324
	22	4,05	89,1	484
	26	4,12	107,12	676
Total	**102**	**26,98**	**401,77**	**1854**



$$\bar{y} = \frac{26,98}{7} = 3,85 \ ; \ \bar{x} = \frac{102}{7} = 14,57$$

On a : $V(x) = \left(\frac{1}{7}\sum x_i^2\right) - \bar{x}^2 = \frac{1854}{7} - 14,57^2 = 52,5722$

$Cov(x, y) = \left(\frac{1}{7}\sum x_i y_i\right) - \overline{xy} = \frac{401,77}{7} - 14,57\text{x}3,85 = 1,3012$

La droite de régression de y en x s'écrit : $y - \bar{y} = \frac{Cov(x, y)}{V(x)}(x - \bar{x})$. Donc $y = 2{,}5.10^{-2}x + 3{,}49$.

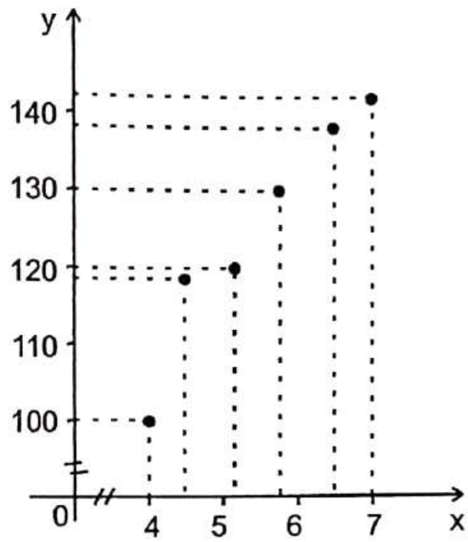
3) L'estimation du poids du nourrisson 30 jours après sa naissance est de : $2{,}5.10^{-2}x30 + 3{,}49 = 4{,}24$kg.

EXERCICE 7 :

1) **Nuage de points (ci-contre)**

2) **Tableau des calculs**

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	x_iy_i
5,8	128	33,64	16384	742,4
4	102	16	10404	408
6,4	138	40,96	19044	883,2
4,6	116	21,16	13456	533,6
5,2	118	27,04	13924	613,6
7	142	49	20164	994
33	744	187,8	93376	4174,8



On a : $\bar{x} = \frac{33}{4} = 5{,}5$; $\bar{y} = \frac{744}{6} = 124$; $V(x) = \left(\frac{1}{6}\sum x_i^2\right) - \bar{x}^2 = \frac{187{,}8}{6} - 5{,}5^2 = 1{,}05$

$V(y) = \left(\frac{1}{6}\sum y_i^2\right) - \bar{y}^2 = \frac{93376}{6} - 124^2 = 186{,}6667$

$Cov(x, y) = \left(\frac{1}{6}\sum x_iy_i\right) - \overline{xy} = \frac{4174{,}8}{6} - 5{,}5x124 = 13{,}8$

Le coefficient de corrélation linéaire est : $r = \frac{Cov(x, y)}{\sqrt{V(x)V(y)}}$. Donc $r \approx 0{,}986$

Le résultat permet d'envisager un ajustement linéaire car r est très voisin de 1.

3) La droite de régression de y en x est : $y - \bar{y} = \frac{Cov(x, y)}{V(x)}(x - \bar{x})$. D'où $y = 13{,}143x + 51{,}714$.

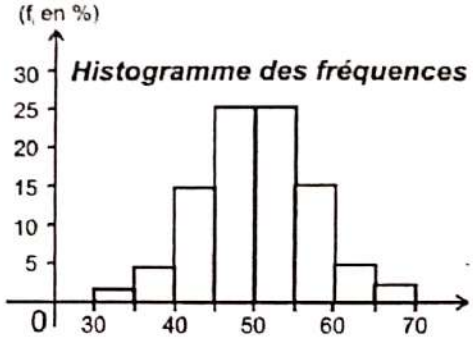
4)

a) Si l'on engage 9 millions de francs de publicité, alors on estime le chiffre d'affaires à : $13{,}143x9 + 51{,}714 \approx 170$ millions de francs.

b) Si l'on désire réaliser un chiffre d'affaires de 200 millions de francs, alors le budget de publicité peut être estimer à : $\frac{200 - 51{,}714}{13{,}143} \approx 11{,}28$ millions de francs.

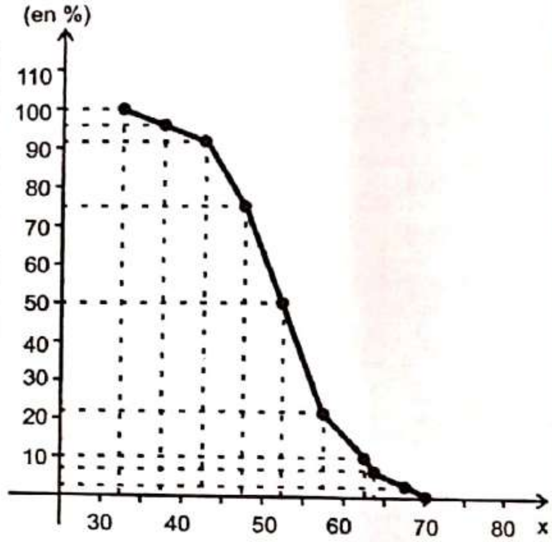
EXERCICE 8 :

1)



2) Soit x_i le centre des classes

Classe	xi	Fréquences cumulées décroissantes
[30, 35[	32,5	100%
[35, 40[	37,5	98,85%
[40, 45[	42,5	93,35%
[45, 50[	47,5	77,35%
[50, 55[	52,5	50%
[55, 60[	57,5	22,65%
[60, 65[	62,5	6,75%
[65, 70[	67,5	1,35%



3)

a) Graphiquement, la fréquence 50% correspond à l'abscisse x = 52,5. Donc la médiane de cette série est : Me = 52,5kg.

b) Le poids minimum des10% des élèves les plus lourds est 61,25 car l'ordonnée 10% correspond à l'abscisse x_m presque milieu des abscisses 60 et 62,5.

c) 40% des élèves ont un poids compris entre 42,5kg et 52,5kg. En effet, les abscisses 42,5 et 52,5 ont pour ordonnées respectives 90 et 50. D'où le pourcentage 90 – 50 = 40.

Remarque : *seul le résultat 3.b) sera vérifié par calcul ; car les deux autres sont évidents. L'abscisse du point d'ordonné 10% appartient à l'intervalle [57,5 ; 62,5]. La restriction du polygone des fréquences cumulées décroissantes dans cet intervalle est une droite affine. Ainsi, par une interpolation linéaire, on a :* $\dfrac{22{,}65-10}{57{,}5-x_m}=\dfrac{22{,}65-6{,}75}{57{,}5-62{,}5}$ *; soit* $\boldsymbol{x_m = 61{,}478}$.

4) La moyenne $\overline{x}$ de cette série est donnée par :

$\overline{x}=\sum f_i x_i = (1{,}15\times32{,}5 + 5{,}5\times37{,}5 + 16\times42{,}5 + 27{,}35\times47{,}5$
$+ 27{,}35\times52{,}5 + 15{,}9\times57{,}5 + 5{,}4\times62{,}5 + 1{,}35\times67{,}5)\times10^{-2}$. Donc $\overline{x} = 50{,}015$

- L'écart type σ de cette série est donné par : $\sigma^2=\sum f_i x_i^2-\overline{x}^2$; après calcul, on obtient : **σ = 6,786**.

PROBATOIRE "C" 2008

EXERCICE 1

Dans le plan orienté on considère le carré ABCD de sens direct, de centre O et de côté 1 (unité : 3,5 mm).

Soit G le barycentre des points (A, 1) ; (B, 2) ; (C, 1).

1 - a) Montrer que G est le milieu du segment [OB].

b) Construire le point G.

2 - On désigne par (Γ) l'ensemble des points M du plan tels que : $MA^2 + 2MB^2 + MC^2 = 6$.

a) Démontrer que pour tout point M du plan on a :

$$MA^2 + 2MB^2 + MC^2 = 4MG^2 + \frac{3}{2}.$$

b) En déduire la nature précise de (Γ).

3 - Soit h l'homothétie de centre O et de rapport 2, et r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. On pose f = hor.

a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.

b) Construire A'B'C'D' et G', images respectives du carré ABCD et de G par f.

EXERCICE 2

On considère les suites (U_n) et (V_n) définis par : $u_0 = 2$, $u_{n+1} = 2u_n + n - 1$ et $v_n = u_n + n$.

1 - a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Exprimer v_n en fonction de n, puis u_n en fonction de n.

2 - Un animal mesure 2 cm à sa naissance, sa taille à la fin de la $(n+1)^{ème}$ semaine, diminuée de (n-1) centimètres est le double de celle qu'il avait à la fin de la $n^{ème}$ semaine. Quelle est la mesure de la taille de cet animal à la fin de la deuxième semaine ?

EXERCICE 3

On considère l'équation (E) : sin 3x = -sin2x.

1 - Résoudre l'équation (E) dans l'intervalle$]-\pi, \pi]$, puis représenter ses solutions sur un cercle trigonométrique.

2 - a) Démontrer que sin3x =sinx ($4\cos^2$x-1).

b) En déduire que l'équation (E) , lesquelles sont aussi solution de l'équation : $4\cos^2x + 2\cos x - 1 = 0$?

c) Parmi les solutions trouvées pour (E), lesquelles sont aussi solutions de l'équation : $4\cos^2x + 2\cos x - 1 = 0$?

3 - a) Résoudre dans IR, l'équation $4t^2 + 2t - 1 = 0$.

b) En déduire des valeurs exactes de $\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\cos\frac{4\pi}{5}$.

PROBLEME

Ce problème comporte trois parties indépendantes.

Partie A.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points A (2, 0, 0) ; B (0, 3, 0) et C (0, 0, 4).

1 - a) Démontrer que les points A, B et C définissent un plan.

b) Donner une représentation paramétrique du plan (ABC).

c) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

2 - On considère le plan (Q) d'équation cartésienne $x - 2z - 2 = 0$.

a) Démontrer que les plans (ABC) et (Q) sont orthogonaux.

b) Déterminer une représentation paramétrique de leur intersection.

Partie B

L'évolution de 1998 à 2004 du salaire horaire moyen d'un ouvrier est donné dans le tableau suivant :

Numéro de l'année x_i	1	2	3	4	5	6	7
Salaire horaire moyen en FCFA : y_i	1650	1760	1930	2020	2220	2450	2530

1 -Représenter le nuage de points associé à la série double (x_i, y_i) dans le plan muni d'un repère orthogonal, ainsi que le point moyen G du nuage, puis ajuster à la règle ce nuage de points. On calculera les coordonnées de G.

2 -Donner une troncature d'ordre 2 du coefficient de corrélation linéaire. Que peut-on conclure ?

3 -Déterminer l'équation de la droite de régression de y en fonction de x.

4 -En admettant que cette évolution se poursuive, donner une estimation du salaire horaire moyen d'un tel ouvrier en l'an 2010.

Parie C

F est une fonction rationnelle dont la courbe de la fonction dérivée ci-dessous admet la droite d'équation $x = -1$ comme axe de symétrie.

1 -Déduire de ce graphique :

a) Le domaine de définition de f.

b) Le sens de variations de f sur chacun des intervalles où elle est définie.

c) Les abscisses des points de la courbe de f où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

2 -Démontrer que les tangentes à la courbe de f aux points d'abscisse α et $-\alpha-2$ sont parallèles, α étant un réel distinct de -1.

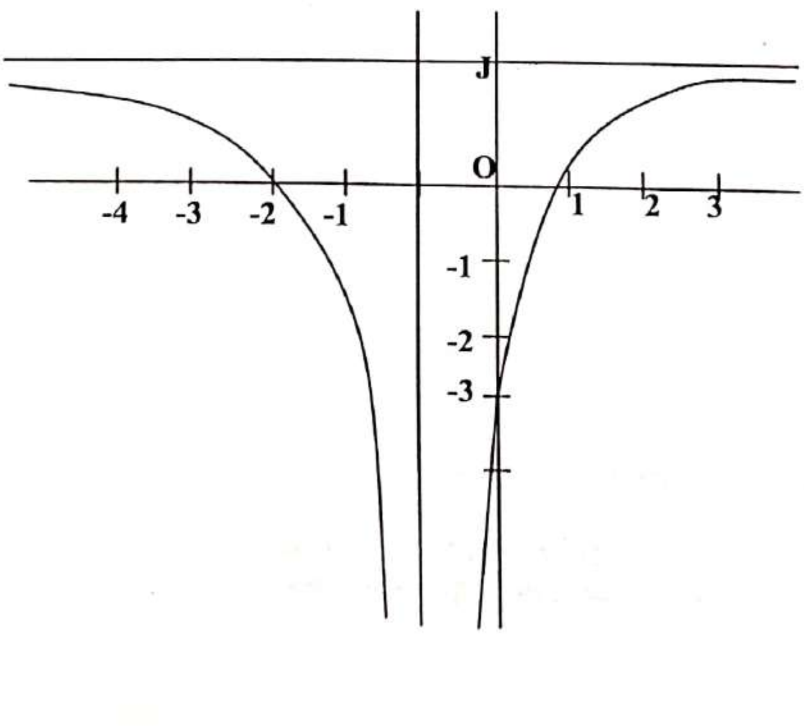
3 -On suppose dans la suite que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$ où a, b, et c sont des nombres réels.

a) Déterminer a, b et c sachant que la courbe de f admet en 1 un extremum égal à 0.

b) Dresser le tableau de variations de f.

c) Déterminer en justifiant votre réponse les équations des asymptotes à la courbe de f.

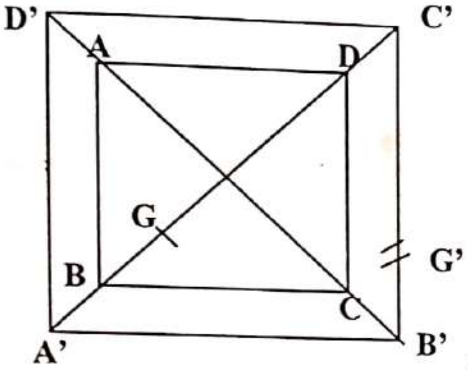
d) Tracer soigneusement la courbe de f.



CORRIGEE

EXERCICE 1

1) a) G, le barycentre des points (A, 1) ; (B, 2) ; (C, 1) est le barycentre des points (B, 2) et (O, 2). O, milieu de [AC], est le barycentre partiel de (A, 1) et (C, 1), donc G est l'isobarycentre de O et B donc milieu de [OB].



2) a) MA² + MB² + MC² = $\left(\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GM}\right)^2+\left(\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GM}\right)^2+\left(\overrightarrow{GC}-\overrightarrow{GM}\right)^2$

= $GA^2+2GB^2+GC^2+4\overrightarrow{GM}^2-2\overrightarrow{GM}\left(\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)$

= $GA^2+2GB^2+GC^2+4GM^2=\frac{5}{8}+\frac{5}{8}+\frac{2}{8}+4\overrightarrow{GM}^2=4\overrightarrow{GM}^2+\frac{3}{2}$.

Si M $\in\Gamma$, on a $4\overrightarrow{GM}^2+\frac{3}{2}=6$ donc $MG^2=\frac{9}{8},MG+\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

b) Γ est le cercle de centre G et de rayon $\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

3) a) ρ est la similitude de centre O de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

b) Voir graphique.

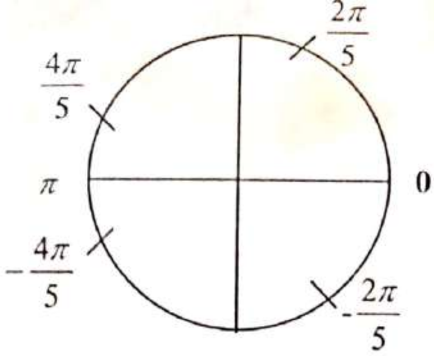
EXERCICE 2

1) a) $V_{n+1} = U_{n+1} + n + 1 = 2U_n + n - 1 + n + 2 = 2(U_n + n)$.
(V_n) est une suite géométrique de premier terme 2 et de raison 2.
b) $V_n = 2 . 2^n = 2^{n+1} - n$.
2) Soit t_n la taille de l'animal à la semaine n, on a $t_{n+1} - (n-1) = 2t_n$.
$t_n = 2^{n+1}-n$.
$t_{10} = 2^{11} - 10 = 2038$ cm.

EXERCICE 3

1) Sin3x = - sin2x équivaut à $\begin{cases}3x=-2x+2k\pi\\ ou\\ 3x=\pi+2x+2k\pi\end{cases}$ ou $\begin{cases}x=\frac{2k\pi}{5}\\ x=\pi+2k\pi\end{cases}$

Les solutions appartenant à] $-\pi,\pi$] sont $-\frac{4\pi}{5},-\frac{2\pi}{5},0,\frac{2\pi}{5},\frac{4\pi}{5},\pi$.



2) a) Sin3x = sin (x+2x) = sinxcos2x + sin2xcosx
= sinx(2cos²x-1) + 2sinxcos²x
= sinx(4cos²x – 1).

b) Sin3x = - sin2x équivaut à sin(4cos²x – 1) = - sin2x.
Ce qui équivaut à sinx(4cos²x – 1) = -2sinxcosx d'où sinx(4cos²x + 2cosx – 1) = 0.

c) Parmi les solutions de l'équation (E) seules $\frac{2\pi}{5};\frac{4\pi}{5};-\frac{4\pi}{5};-\frac{2\pi}{5}$ sont solutions de l'équation 4cos²x + 2cosx – 1 = 0, car 0 et π ne vérifient pas ladite équation dans l'intervalle $]-\pi,\pi]$.

3) a) 4t² + 2t – 1 = 0 $\Delta = 5$ $t_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}, t_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$.

b) On en déduit que $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ et $\cos\frac{4\pi}{5} = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$ car $\cos\frac{2\pi}{5} > 0$ et $\cos\frac{4\pi}{5} < 0$.

PROBLEME

PARTIE A

1) a) A, B et C définissent un plan si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

b) Un point M(x,y,z) appartient au plan (ABC) si $\overrightarrow{AM} + P\overrightarrow{AB} + q\overrightarrow{AC}$ p et q étant des réels, on retrouve le système $\begin{cases} x = -2p - 2q + 2 \\ y = 3p \\ z = 4q \end{cases}$

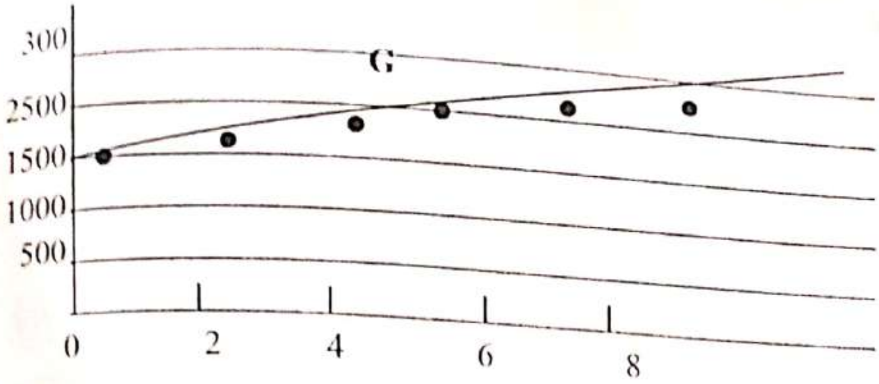
c) En éliminant p et q, on a l'équation : $6x + 4y + 3z - 12 = 0$.

2) a) (Q) est le plan d'équation cartésienne : $x - 2z - 2 = 0$; on peut remarquer que 6(1) + 0(4) + 3(-2) = 0 (produit scalaire des vecteurs normaux) ; donc (ABC) et (Q) sont orthogonaux.

b) Un point M(x,y,z) appartient à la droite d'intersection de ces deux plans si ses coordonnées vérifient le système $\begin{cases} 6x + 4y + 3z - 12 = 0 \\ x - 2z - 2 = 0 \end{cases}$

En posant z = m on obtient la représentation paramétrique suivante : $\begin{cases} x = 2m + 2 \\ y = -\frac{15}{4}m \\ z = m \end{cases}$

1)



Le point **G** étant l'isobarycentre des points de nuage a pour coordonnées (4, 2080)

2) Le coefficient de corrélation r est définie par : $r = \dfrac{COV(x,y)}{\sigma(x)\sigma(y)}$.

$$cov(x;y) = \frac{1}{7}(1.1650 + 2.160 + 3.1930 + 4.2020 + 5.2220 + 6.2450 + 7.2530) - 4.2080 = 615,71$$

$V(x) = 4\sigma(x) = 2.V(y) = 96057,17\sigma(y) = 309,93$ .On trouve **r= 0,99** ce qui signifie que la corrélation est forte.

3) Le coefficient directeur de la droite d'ajustement de y en x est définie par $a = \dfrac{COV(xy)}{v(x)} = 153,92$ cette droite passant par **G** a pour équation

$y - 2080 = 153,92(x - 4)$. $y = 153,92x + 1464,25$

4) pour $x = 13$, $y = 3465,25$

PARTIE C

1-a) le domaine de définition de f est $IR - \{-1\}$

b) f est croissante sur $]-\infty - 3]$ et $[1,+\infty[$ et décroissante sur $[-3,-1[et]-1,1]$.

c) les abscisses des points où la courbe admet une tangente parallèle à l'axe des ***x*** sont respectivement ***-3 et 1***.

2) la courbe de la dérivée étant symétrique par rapport à la droite Λ d'équation ***x = -1*** les points d'abscisses $-\alpha - 2$ et α sont symétriques par rapport à Λ, et par conséquent ont la même image f', donc les tangentes à la courbe en ces points sont parallèles $(f'(\alpha)) = f'(-\alpha - 2)$

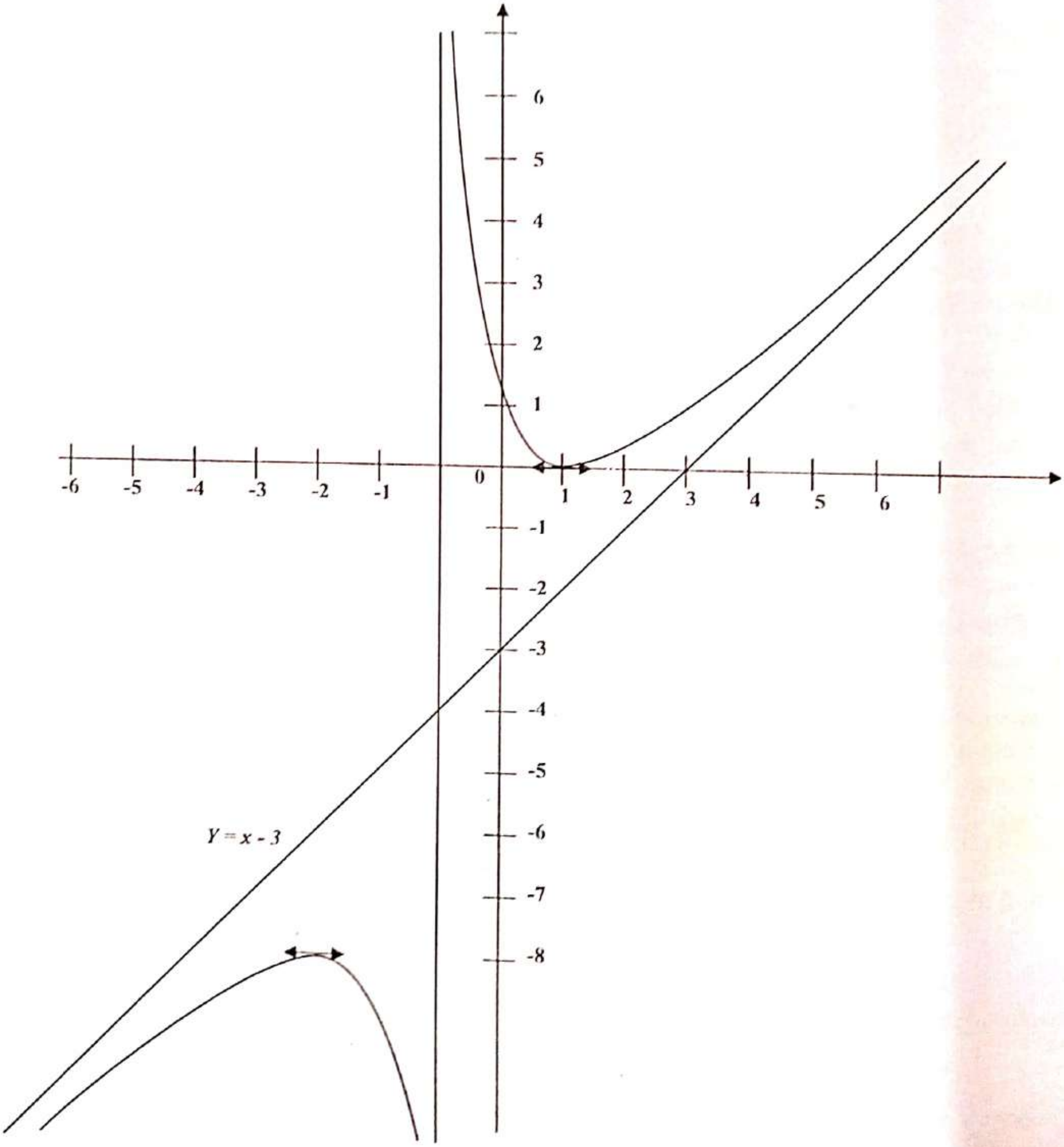
3) a, b et c sont solutions du système d'équation. $\begin{cases} f'(1) = 0 \\ f(1) = 0 \\ f'(0) = -3 \end{cases}$ Ceci conduit au

Système $\begin{cases} 4a - c = 0 \\ 2a + 2b + c = 0 \\ a - c = -3 \end{cases}$ ce qui donne ***a = 1, b =-3, c= 4*** $f(x) = x - 3 + \dfrac{4}{x+1}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -1} f(x^-) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -1} f(x^+) = +\infty$

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	|	$-$	||	$-$	|	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	8	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Asymptote verticale : x = 1, asymptote oblique : y = x- 3
Car si x tend vers -1, $f(x)$ tend vers l'infini et $\lim(f(x)-(x-3))$ quand x tend vers l'infini égale 0.



PROBATOIRE "C" 2009

EXERCICE 1

Pour chacune des questions de cet exercice, trois réponses vous sont proposées parmi lesquelles une seule est juste ; reproduire sur votre feuille de composition, le numéro de la question et celui de la réponse juste correspondante.

N.B : Aucun calcul n'est exigé dans cet exercice.

1° Dans un ensemble à n éléments, s'il y a autant de parties à deux éléments que de parties à quatre éléments, alors n est solution de l'équation du second degré :

Réponse a) : $n^2 + 5n - 6 = 0$; Réponse b) : $n^2 - 5n - 6 = 0$

Réponse c) : $n^2 - 5n + 6 = 0$

2° On considère une suite géométrique (u_n), de premier terme $\frac{1}{2}$, et de raison $-\frac{1}{2}$ on pose :

$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

S_n Est égale à : Réponse a) : $\frac{1}{3}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$ Réponse b) : $\frac{1}{3}\left(1-(-1)^n\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$; Réponse c) : $\frac{1}{3}\left(1-(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$.

3° Le plan vectoriel est rapporté à une base $(\vec{i},\vec{j})$; f est un endomorphisme défini pour tout $\vec{u}(x,y)$ par $f(\vec{u}) = (2x + y)\vec{i} + (4x + 2y)\vec{j}$; l'ensemble des vecteurs $\vec{u}(x,y)$ tels que : $f(\vec{u}) = 4\vec{u}$ est :

Réponse a) : la droite vectorielle dirigée par le vecteur $\vec{u}_0(1;2)$;

Réponse b) la droite vectorielle dirigée par le vecteur $\vec{u}_1(-1;2)$;

Réponse c) : $\{\vec{0}\}$.

EXERCICE 2

On considère la fonction numérique f définie pour tout x par $f(x) = \dfrac{4x^2 - 12}{|x| + 2}$; (C) désigne, dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, la courbe représentative de f.

1) a) Déterminer les limites de $f(x)$ quand x tend vers l'infini.
   b) Etudier la dérivabilité de f en $x_0 = 0$.
2) Montrer que, lorsque x tend vers l'infini, la courbe (C) admet deux demi asymptotes T et T' dont on donnera les équations cartésiennes respectives.
3) Montrer que f est paire.
4) Etudier les variations de f dans IR^+
5) Tracer (C), T et T'

Problème

Le problème comporte deux partie A et B indépendantes.

Partie A

Dans le plan orienté, on considère le triangle équilatéral direct ABC. On construit les triangles équilatéraux directs ADB et ACE. G_1 et G_2 désignent respectivement les centres de gravité des triangles ADB et ACE.

1) Montrer que (CD) et (BE) sont les médiatrices respectives de $[AB]$ et de $[AC]$.

2) On considère la rotation r de centre A qui transforme D en C.

a) Déterminer l'image de B par r

b) Déterminer l'angle de la rotation r.

c) Démontrer de deux manières différentes que G_2 est l'image de G_1 par r.

3) Soit C' l'image de C par r ; montrer que C'est le symétrique de B par rapport à A.

4) I est le point d'intersection de (BE) et (CD) ; montrer que :

a) CD = BE et que mes $\left(\widehat{\overrightarrow{BE}\,\overrightarrow{CD}}\right)=\dfrac{2\pi}{3}$

b) I est le centre du cercle inscrit au triangle ABC.

<u>Partie B</u>

Dans l'espace ξ on considère quatre points P, Q, R, S. On appelle J le barycentre du système de points pondérés $\{(P,1)(R,3)\}$ et K celui du système de points pondérés $\{(Q,1)(S,3)\}$

1) Montrer que $\overrightarrow{PQ}+3\overrightarrow{RS}=4\overrightarrow{JK}$

2) Montrer que Si J et K sont confondus alors P, Q, R et S sont coplanaires.

3) On suppose dans la suite que l'espace ξ est rapporté au repère $\left(O,\vec{I},\vec{J},\vec{K}\right)$. P et P' sont deux plans d'équations cartésiennes respectives : $x + y - z - 2 = 0$ et $x - 2y + z - 3 = 0$.

a) Déterminer deux vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ respectivement normaux à P et P'.

b) Montrer que $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ ne sont pas colinéaires.

c) En déduire la position relative de P et P'.

CORRIGE

<u>EXERCICE 1</u> : QCM

1) b ; 2) c ; 3) a

<u>EXERCICE 2</u>

1) a) calcul des limites à l'infini.

Si $x\le 0$, $f(x)=\dfrac{4x^2-12}{-x+2}$; Si $x\ge 0$, $f(x)=\dfrac{4x^2-12}{x+2}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{4x^2}{-x}\right)=\lim_{x\to-\infty}(-4x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x^2}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}(4x)=+\infty$$

b) dérivabilité de f en 0.

Si $x<0$, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{4x^2-6x}{x(-x+2)}=\dfrac{4x-6}{-x+2}$

Si $x>0$, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{4x+6}{x+2}$

D'où $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=-3$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=3$

<u>Conclusion</u> : f est dérivable à gauche en 0 et dérivable à droite en 0, mais f n'est pas dérivable en 0, car le nombre dérivé à gauche est différent du nombre dérivé à droite.

2) détermination de T et T'.

Si $x \le 0$, $f(x) = \dfrac{4x^2 - 12}{-x+2} = -4x - 8 + \dfrac{4}{-x+2}$

Si $x \ge 0$, $f(x) = \dfrac{4x^2 - 12}{x+2} = 4x - 8 + \dfrac{4}{x+2}$

On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - (-4x - 8) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (4x - 8) = 0$ d'où (C) admet deux demi asymptotes T et T' d'équations respectives : $\begin{cases} y = -4x - 8 \\ x \le 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} y = 4x - 8 \\ x \ge 0 \end{cases}$

3) Montrons de f est paire.

$\forall x \in IR;\ -x \in IR$ et $f(-x) = \dfrac{4(-x)^2 + 12}{|-x| + 2} = f(x)$ d'où f est paire.

4) Variations de f dans IR^-.

$\forall x \in]-\infty;0[$, $f'(x) = -4 + \dfrac{4}{(-x+2)^2} = \dfrac{-4x^2 + 16x - 12}{(-x+2)^2}$

<u>Signe de</u> $f'(x)$

On a $-4x^2 + 16x - 12 = 4(x-1)(3-x)$

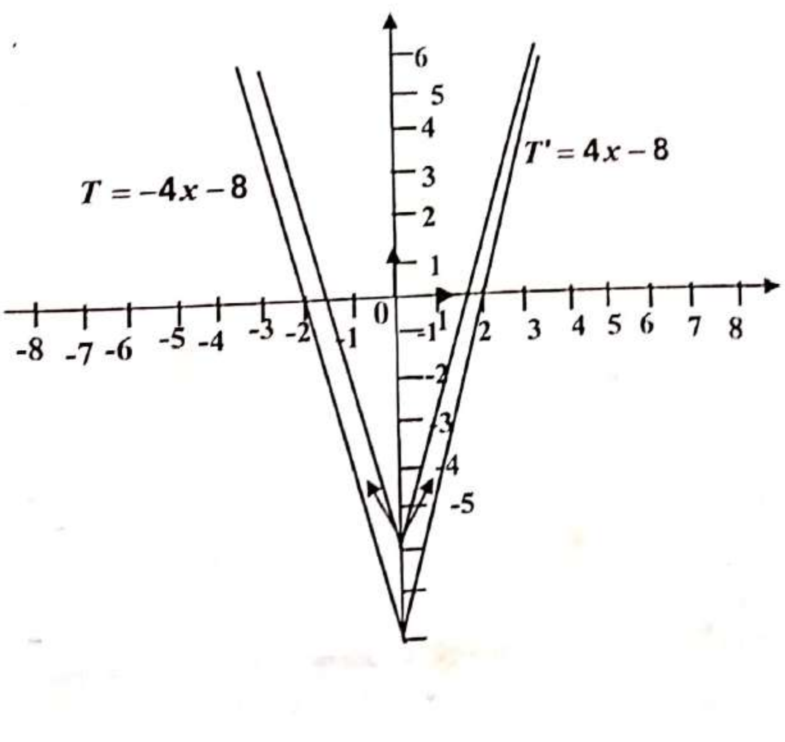
Or $4(x-1)(3-x) < 0$ pour $x < 0$ d'où $f'(x) < 0$ pour $x \in]-\infty;0[$

<u>Tableau de variation</u>

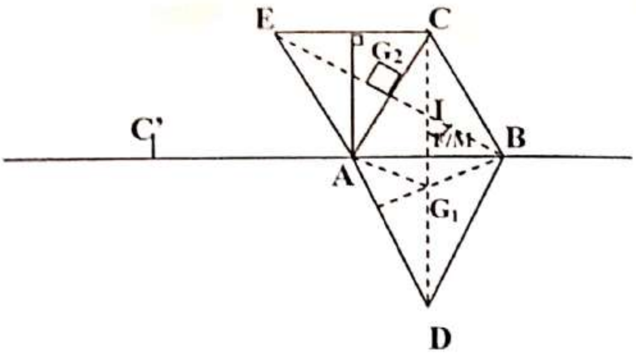
x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ 0
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$-\infty$ $\searrow$ -6

5) Tracé de (C) T et T'

f étant une fonction paire, sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



<u>PROBLEME</u>



A)

1) Montrons que (CD) est médiatrice de [AB] :

Soit (Δ) la médiatrice de [AB] on a :

$\begin{cases} C \in (\Delta) car CA = CB \\ D \in (\Delta) car DA = DB \end{cases}$ d'où $(\Delta) = (CD)$

Montrons que (BE) est médiatrice de [AC] :

Soit (Δ') la médiatrice de[AC] , on a :

$\begin{cases} B \in (\Delta') car BA = BC \\ E \in (\Delta') car EA = EC \end{cases}$ d'où $(\Delta') = (BE)$

2) a) image de B par r

r(B) = E car $\begin{cases} AB = AE \\ mes(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}}) = mes(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC}}) \end{cases}$

b) angle de r = $\frac{2\pi}{3}$ car mes $(\widehat{\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AC}}) = \frac{2\pi}{3}$

c) Montrons que $r(G_1) = G_2$:

<u>1ère méthode</u>

G_1 est l'isobarycentre de A, B et D d'où $r(G_1)$ est l'isobarycentre de r(A), r(B) et r(D) or r(A) = A, r(B) = E ; r(D) = c ainsi, $r(G_1)$ est l'isobarycentre de A, E et C. c'est-à-dire $r(G_1) = G_2$

<u>2ème méthode</u> :

On $\begin{cases} AG_1 = AG_2 \\ et mes(\widehat{\overrightarrow{AG_1},\overrightarrow{AG_2}}) = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$

D'où $r(G_1) = G_2$

3) Montrons que C' = symétrique de B par rapport à A :

On a AC = AC' = AB et mes $\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC'}})$ = mes $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$ + mes$(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AC'}}) = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \pi$

D'où C' est le symétrique de B par rapport à A.

4) a) Montrons que CD = BE :

Puisque ADBC est un losange, on a CD = 2h avec h hauteur de ABC on a aussi BE = 2h car les triangles ABC, ABD et ACE sont superposables. D'où CD = BE.

Montrons que mes $(\widehat{BE,CD}) = \frac{2\pi}{3}$

$$mes(\widehat{\overrightarrow{BE},\overrightarrow{CD}}) = mes(\widehat{\overrightarrow{IE},\overrightarrow{ID}}) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

b) I est le point d'intersection de (BE) et (CD), or (BI) et (CI) sont deux bissectrices du triangle ABC, ce qui prouve bien que I est le centre du cercle inscrit au triangle ABC.

Partie B

1) Montrons que $\overrightarrow{PQ} + 3\overrightarrow{RS} = 4\overrightarrow{JK}$:

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PJ} + JK + \overrightarrow{KQ}$$

$$\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{RJ} + \overrightarrow{JK} + \overrightarrow{KS}$$

D'où $\overrightarrow{PQ} + 3\overrightarrow{KS} = 4\overrightarrow{JK} + (\overrightarrow{PJ} + 3\overrightarrow{KJ}) + (\overrightarrow{KQ} + 3\overrightarrow{KS}) = 4\overrightarrow{JK} + \vec{O} = 4\overrightarrow{JK}$

Conclusion : $\overrightarrow{PQ} + 3\overrightarrow{RS} = 4\overrightarrow{JK}$

2) Si J = K alors $\overrightarrow{JK} = \vec{O}$

D'où $\overrightarrow{PQ} + 3\overrightarrow{RS} = \vec{O}$ ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{RS}$ sont colinéaires et par conséquent P, Q, R et S sont coplanaires.

3)

a) On a $\vec{n}(1,1,-1)$ et $\vec{n}'(1,-2,1)$

b) Montrons que $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont colinéaires :

Supposons $\alpha \in IR$, $\vec{n} = \alpha\vec{n}'$, on aurait alors $\alpha = 1$, $-2\alpha = 1$ et $\alpha = -1$ ce qui est absurde donc $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ ne sont pas colinéaires.

c) déduction de la position relative de P et P' :

Puisque les vecteurs normaux respectifs de P et P' ne sont pas colinéaires, les plans P et P' sont sécants.

PROBATOIRE C 2010

EXERCICE 1 (2 points)

On pose $g(x) = 2\cos^2 x + \sin 2x$, où x est un réel ;

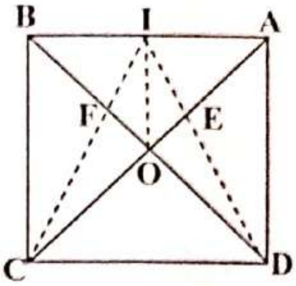
1 – Montrer que pour tout réel x, $g(x+\pi) = g(x)$

2 – Montrer que pour tout réel x, $g(x) = 1 + \cos 2x + \sin 2x$

3 – Résoudre dans $]0, \pi]$ l'équation $g'(x) = 0$, où g' est la dérivée de g et représenter les solutions trouvées sur un cercle trigonométrique.

EXERCICE 2 (4 points)

ABCD est un rectangle de centre O, I est le milieu de [AB]. Les droites (AC) et (DI) se coupent en E ; les droites (BD) et (IC) se coupent en F.



1 – Déterminer l'image du triangle ABC par la réflexion d'axe (OI).

2 – Montrer que le point F est le centre de gravité du triangle ABC.

3 – En déduire que E est le centre de gravité du triangle BAD.

4 – Soit h l'homothétie de centre O qui transforme A en E.

a) Montrer que les droites (EF) et (AB) sont parallèles.

b) déterminer h(B).

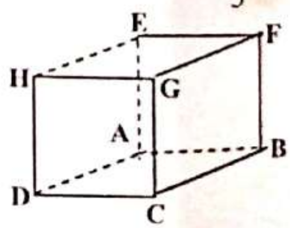
EXERCICE 3 (3 points)

Pour chacune des questions suivantes, recopier sur votre feuille de composition le numéro de la question et le numéro de la réponse choisie parmi celles proposées.

1 – sachant que $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ et $\sin x = \frac{3}{5}$, alors

a) $Cosx = \frac{2}{5}$; b) $Cosx = -\frac{4}{5}$; c) $Cosx = \frac{4}{5}$; d) $Cosx = \frac{-2}{5}$; e) $Cosx = -\frac{3}{5}$

2 – Si ABCDEFGH est le cube ci-contre, alors la droite (DG) est :



a) Perpendiculaire au plan (GFH) car (DG) $\perp$ (GH) et (GF) $\perp$ (DA)

b) Parallèle au plan (CFH)

c) perpendiculaires au plan (CHE)

3 – ABC est un triangle ; I, J, K sont les milieux respectifs des segments [BC], [CA] et [AB]. S_{BC} et S_{JK} sont les symétriques d'axes (BC) et (JK) respectivement. L'application $S_{BC} \circ S_{JK}$ est :

a) La translation de vecteur $2\overrightarrow{AI}$

b) La rotation de centre A ;

c) La translation de vecteur $\overrightarrow{AI}$

PROBLEME

PARTIE A

f est une fonction numérique définie sur D = IR - $\{-1\}$ par $f(x)=\frac{(x-1)^2}{x+1}$. On note (Γ) la courbe représentative de f dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'unité 1 cm sur les axes

1 - Etudier le sens des variations de f et dresser son tableau de variations.

2 - Déterminer les réels a, b, et c tels que pour tout réel x de D on ait :

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x+1}$$

b) En déduire que la droite (Δ) d'équation $y=ax+b$ est asymptote à la courbe (Γ)

3 – Montrer que le point $\Omega(-1,-4)$ est centre de symétrie pour la courbe (Γ).

4 – Tracer la courbe (Γ)

5 – Soit g, la fonction définie sur IR par $g(x)=f(|x|)$.

a) Etudier la parité de g, puis comparer $g(x)$ et $f(x)$ pour x positif.

b) Tracer la courbe (Γ') représentative de g dans le même graphique que (Γ).

PARTIE B

La suite (U_n) est définie par $U_0 = 1$ et pour tout entier n, par : $U_{n+1}=\frac{U_n-4}{U_n-3}$

1 – Calculer U_1 et U_2.

2 – On pose $V_n=\frac{1}{U_n-2}$.

a) Montrer que (V_n) est une suite arithmétique, préciser son premier terme et sa raison.

b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

c) calculer la limite de la suite (U_n).

CORRIGE PROBATOIRE C 2010

EXERCICE 1

1) Montrons que pour tout réel x, $g(x+\pi)=g(x)$

Pour tout réel x,

$g(x+\pi)=2Cos^2(x+\pi)+Sin^2(x+\pi)=2(-Cosx)^2+Sin2x=2Cos^2x+Sin2x=g(x)$

2) Montrons que pour tout réel x, $g(x)=1+Cos2x+Sin2x$

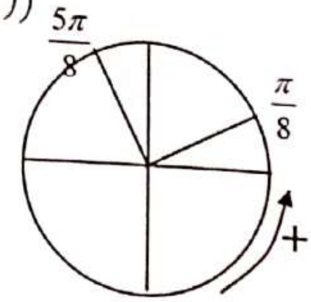
$Cos2x = Cos^2x - Sin^2x$ **donc** $1 + Cos2x = Cos^2x + Sin^2x + Cos^2x - Sin^2x$; **d'où**
$1 + Cos2x + Sin2x = 2Cos^2x + Sin2x = g(x)$

3) Résoudre dans $]0, \pi]$ **l'équation** $g'(x) = 0$

$g'(x) = -2Sin2x + 2Cos^22x = -2(Sin2x - Cos2x)$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow -2(Sin2x - Cos2x) = 0 \Leftrightarrow \left(Sin2x = Cos2x = Sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)\right)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} - 2x + 2K\pi, K \in Z \\ 2x = \pi - \frac{\pi}{2} + 2x + 2K\pi, K \in Z \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{2K\pi}{4}, K \in Z$



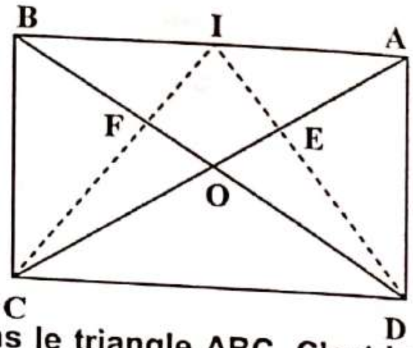
Or $0 < \frac{\pi}{8} + \frac{2K\pi}{4} \leq \pi$ **Donc** $K \in \{0,1\}$ **; d'où** $S = \left\{\frac{\pi}{8}; \frac{5\pi}{8}\right\}$

EXERCICE 2

1) Soit $S_{(OI)}$ **cette réflexion. On a le schéma suivant :**

M	$S_{(OI)}$M
A	B
B	A
C	D

Donc l'image du triangle ABC est le triangle BAD



2) F est le point de concours des médianes BO et IC dans le triangle ABC. C'est le centre de gravité du triangle ABC.

3) F est le point de rencontre des droites (BD) et (CI). E est le point de rencontre des droites (AC) et (DI).

(AC) et (DI) sont respectivement images de (BD) et (IC) par $S_{(OI)}$ **donc E est image de F par** $S_{(OI)}$.

De plus F est centre de gravité de ABC ; donc E est centre de gravité de BAD car $S_{(OI)}$ **conserve les centres de gravité.**

4) a) Montrons que (EF) // (AB) $\begin{cases} S_{(OI)}(A) = B & \text{Alors (AB)} \perp \text{(OI)} \\ S_{(OI)}(F) = E & \text{Alors (FE)} \perp \text{(OI)} \end{cases}$

Donc (AB) et (EF) sont parallèles.

b) détermination de $h(B)$

Soit K le rapport de h **:** $(h(A) = E) \Rightarrow (OE = KOA)$ **et** $(EF)//(AB)$**, d'après Thalès,**
$\frac{OE}{OA} = \frac{OF}{OB} = K$ **soit** $OF = KOB$ **d'où** $h(B) = F$

EXERCICE 3

1 = b ; 2 = c ; 3 = c

PROBLEME

PARTIE A

1) f est la fonction numérique définie sur $D = IR - \{-1\}$ par : $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x+1}$

$f'(x) = \dfrac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$.

f est croissante sur $]-\infty,-3]$ et sur $[1;+\infty[$; f est décroissante sur $[-3,-1[$ et sur $]-1;1]$

Tableau de variations

(x)	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	‖	-	0	+	
$g(x)$	$-\infty$	↗	-8	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	0	↗	$+\infty$

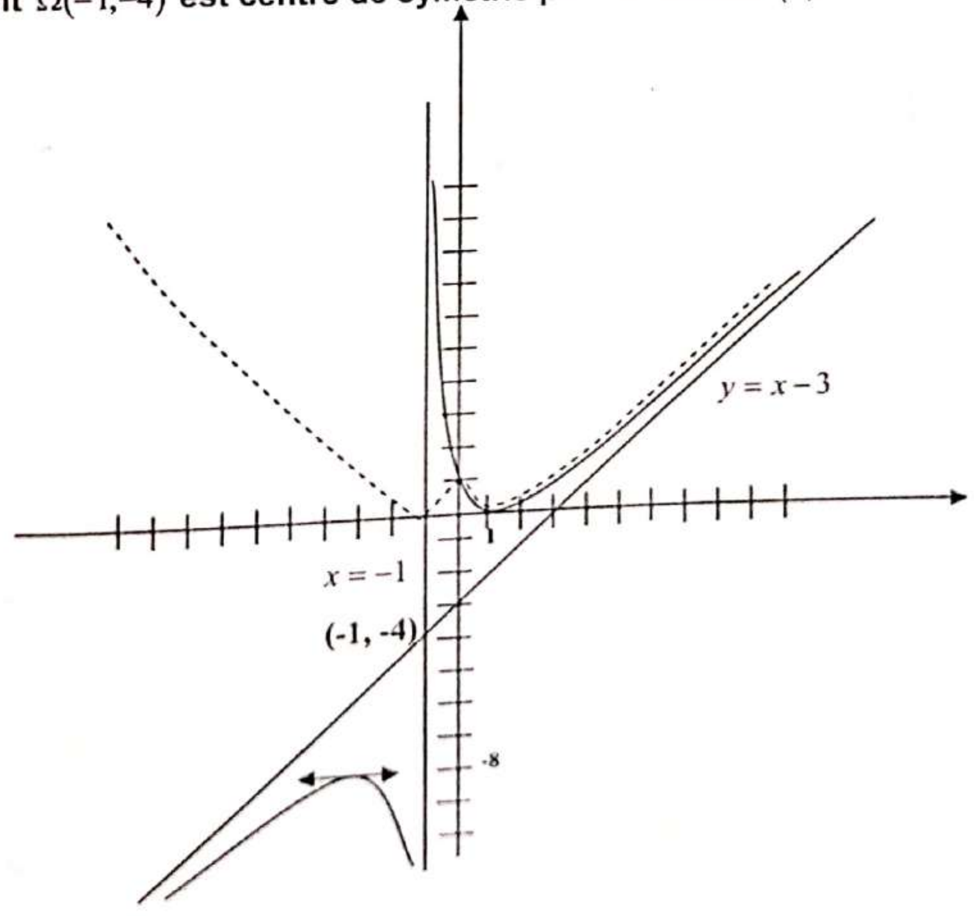
2) a) détermination de a, b et c . $f(x = x-3+\dfrac{4}{x+1}$ a = 1 , b = -3, c = 4

b) La droite d'équation $y = x-3$ est asymptote à la courbe (Γ).

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-(x-3)) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{4}{x+1} = 0$ donc la droite d'équation $y = x-3$ est asymptote à la courbe (Γ).

3) pour tout x différent de -1, $-2-x$ est différent de -1 et $f(-2-x)+f(x) = 2(-4)$ donc le point $\Omega(-1,-4)$ est centre de symétrie pour la courbe (Γ).

4)



5) g est la fonction numérique définie sur IR par $g(x)=f(|x|)$

a) Etude de la parité de g et comparaison

$g(-x)=f(|-x|)=f(|x|)=g(x)$ donc g est une fonction paire ; pour x positif, $|x|=x$ alors, $g(x)=f(x)$.

b) Le tracé de la courbe de g est en pointillés sur le même graphique que celui de f.

PARTIE B

1) $U_1=\dfrac{U_0-4}{U_0-3}=\dfrac{3}{2}$; $U_2=\dfrac{U_1-4}{U_1-3}=\dfrac{5}{3}$

On pose $V_n=\dfrac{1}{U_n-2}$

a) Montrons que (V_n) est une suite arithmétique

Pour n de IN, $V_{n-1}-V_n=\dfrac{-U_n+2}{U_n-2}=-1$ donc (V_n) est une suite arithmétique de raison r = -1 et de premier terme V_0 = -1

b) expression de V_n et de U_n en fonction de n.

V_n = -1-n $\quad U_n=\dfrac{1}{V_n}+2=\dfrac{1+2V_n}{V_n}=\dfrac{1+2n}{1+n}$

c) Calcul de la limite de U_n

$$\lim_{n\to+\infty} U_n=\lim_{x\to+\infty}\frac{2n}{n}=2$$

PROBATOIRE C 2011

L'épreuve comporte deux exercices et un problème, tous obligatoires, sur deux pages.

EXERCICE 1 (5 points)

Le plan affine est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$; on considère les points A (2, -3), B(1, -2) et C tel que C soit le barycentre de A et B affectés respectivement des coefficients 2 et -1.

1°) Montrer que le point A est le milieu de [BC].

2°) On considère (C) et (C') les cercles d'équations cartésiennes respectives :
$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 3 = 0$ et $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 23 = 0$

a) Déterminer les éléments caractéristiques de (C) et (C').

b) Montrer que (C') est l'image de (C) par la symétrie de centre A.

c) Soit (D) la droite d'équation cartésienne $x - y + c = 0$, déterminer c pour que (D) soit une tangente commune à (C) et (C').

d) Tracer (D) (C) et (C') dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

EXERCICE 2 (4 points)

Chacune des questions de cet exercice se termine par une affirmation écrite en gras : dire dans chaque cas si cette affirmation est vraie ou fausse. Aucun calcul n'est demandé sur votre feuille de composition.

1°) G est le barycentre du système de points pondérés du plan $\left\{(A, \cos^2 \alpha), (B, -\sin^2 \alpha), \left(C, \frac{1}{2}\right)\right\}$ avec $\alpha \in]-\pi, \pi[$; G existe pour $\alpha = -\frac{2\pi}{3}$

2°) Le plan vectoriel étant rapporté à la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ f est l'endomorphisme défini de la manière suivante : $f(\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}) = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$, $f(\vec{\imath} + \vec{\jmath}) = \overrightarrow{-2\imath} - 2\vec{\jmath}$; f est un isomorphisme.

3°) L'espace affine euclidien est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. $\emptyset$ est la sphère de centre $\Omega(1, 1, 0)$ et de rayon 2;P est le plan d'équation cartésienne

$x + y + z\sqrt{2} + 2 = 0$. L'intersection de P de $\emptyset$ est un cercle.

4°) (u_n) et (v_n) sont deux suites numériques définies de la manière suivante :

$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 1 + \frac{u_{n-1}}{2u_{n-1}} \end{cases}$ et $v_n = \frac{1}{u_{n-1}}$ (v_n) est une suite arithmétique de raison 2.

PROBLEME (11 points)

PARTIE A (7,5 points)

On considère la fonction numérique définie pour tout réel x différent de -1 par :

$f(x) = \frac{4x^2+5x+2}{x+1}$. (Γ) désigne dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ la courbe représentative de f.

1°) Donner les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2°) Calculer $f'(x)$, en déduire le sens de variation de f sur son ensemble de définition.

3°) Dresser le tableau de variation de f.

4°) Montrer que le point $I(-1,-3)$ est centre de symétrie de (Γ).

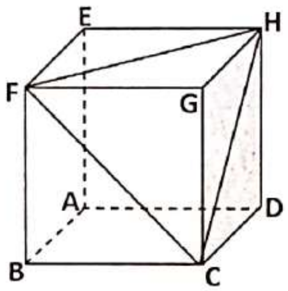
5°) Montrer que la courbe (Γ) admet une asymptote oblique dont on donnera une équation cartésienne (on écrira $f(x)$ sous la forme $ax+b+\frac{c}{x+1}$, a, b et c étant des réels que l'on déterminera).

6°) Tracer (Γ)

7°) S_I désigne la symétrie de centre I et S_Δ la symétrie d'axe $x'Ox$; construire dans le même repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, l'image (Γ') de la courbe (Γ) par la transformation $S_\Delta o\, S_I$.

(on pourra utiliser le résultat de la question 4)

<u>PARTIE B</u> (3,5 points)



ABCDEFFGH est un cube (figure ci-dessus)

1°) Déterminer les coordonnées de C, F, G et H dans le repère $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

2°) Donner une équation cartésienne du plan (CFH) et calculer la distance du point G à ce plan.

3°) Montrer que le triangle CFH est équilatéral.

CORRIGE PROBATOIRE C 2011

<u>EXERCICE I</u>

1- A est le milieu de [BC]

C barycentre de $\{(A;2);\ (B;-1)\} \Leftrightarrow \left(2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}=\vec{0}\right) \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}\right) \Leftrightarrow A$ est le milieu de [BC].

2- a) Eléments caractéristiques de (C) et (C')

(C) : $x^2+y^2-2x+4y+3=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2=2$; donc (C) est le cercle de centre B et de rayon $\sqrt{2}$.

De même (C') : $x^2+y^2-6x+8y+23=0 \Leftrightarrow (x-3)^2+\ (y+4)^2=2$; donc (C') est le cercle de centre C et de rayon $\sqrt{2}$.

b) (C') est l'image de (C) par la symétrie de centre A.

Soit S_A cette symétrie : A est le milieu de [BC] donc $S_A(B)$ = C ; (C) et (C') ont un même rayon.

Donc (C') est l'image de (C) par la symétrie de centre A.

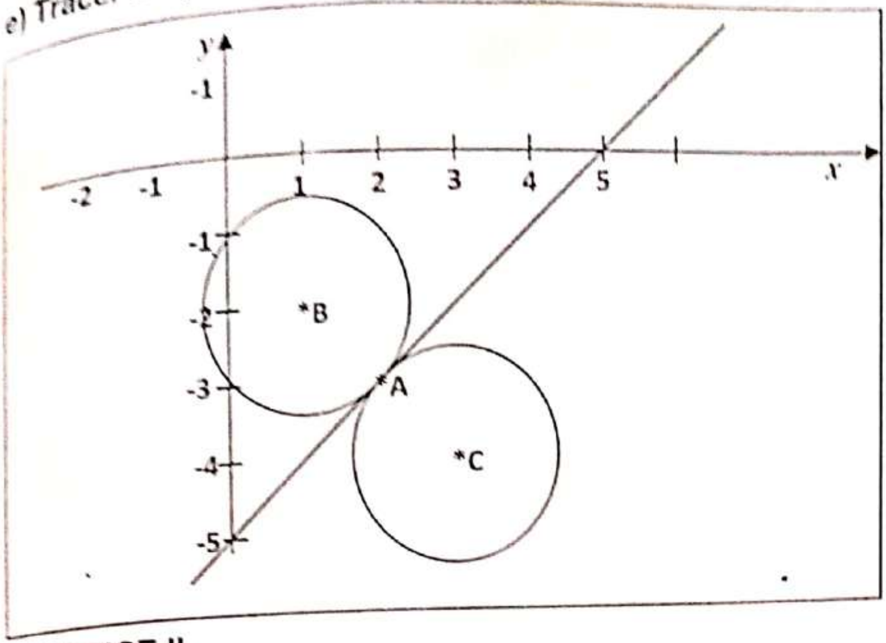
c) Détermination de C

(D) tangente commune à (C) et (C') $\Leftrightarrow$ d(B, (D)) = d(C, (D)) ;

On a : $d\big(B,(D)\big)=\frac{|3+c|}{\sqrt{2}}$; $d\big(C,(D)\big)=\frac{|7+c|}{\sqrt{2}}$

$\frac{|3+c|}{\sqrt{2}} = \frac{|7+c|}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow (3+c = 7+c)$ ou $(3+c = -7-c) \Leftrightarrow (c = -5)$

e) Tracer de (D), (C) et (C') dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$



EXERCICE II

1°) fausse
2°) fausse
3°) fausse
4°) Vraie

PROBLEME

PARTIE A

$f(x) = \frac{4x^2+5x+2}{x+1}$

1. Limites aux bornes de son ensemble de définition

Ensemble de définition de f: $D_f = IR - \{-1\} =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$

$\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\mapsto-1^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\mapsto-1^+} f(x) = +\infty$

2. Calcul de $f'(x)$ et déduction du sens de variation de f sur Df

$$f'(x) = \frac{(8x+5)(x+1)-(4x^2+5x+2)}{(x+1)^2} = \frac{4x^2+3x+5x+5-2}{(x+1)^2} = \frac{4x^2+8x+3}{(x+1)^2}$$

$(f'(x) = 0) \Leftrightarrow \left(x = -\frac{3}{2} ou\ x = -\frac{1}{2}\right)$

$(f'(x) < 0) \Leftrightarrow \left(x \in \left]-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right[\right)$; **f est strictement décroissante.**

$(f'(x) > 0) \Leftrightarrow \left(x \in \left]-\infty; -\frac{3}{2}\right[\cup \left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[\right)$; **f est strictement croissante.**

3. tableau de variation de f

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	||	-	0	+	
$F(x)$	$-\infty$	↗	-7	↘ $-\infty$	||	$+\infty$ ↘	1	↗	$+\infty$

4. Montrons que le point I(−1 ; −3) est centre de symétrie de (Γ)

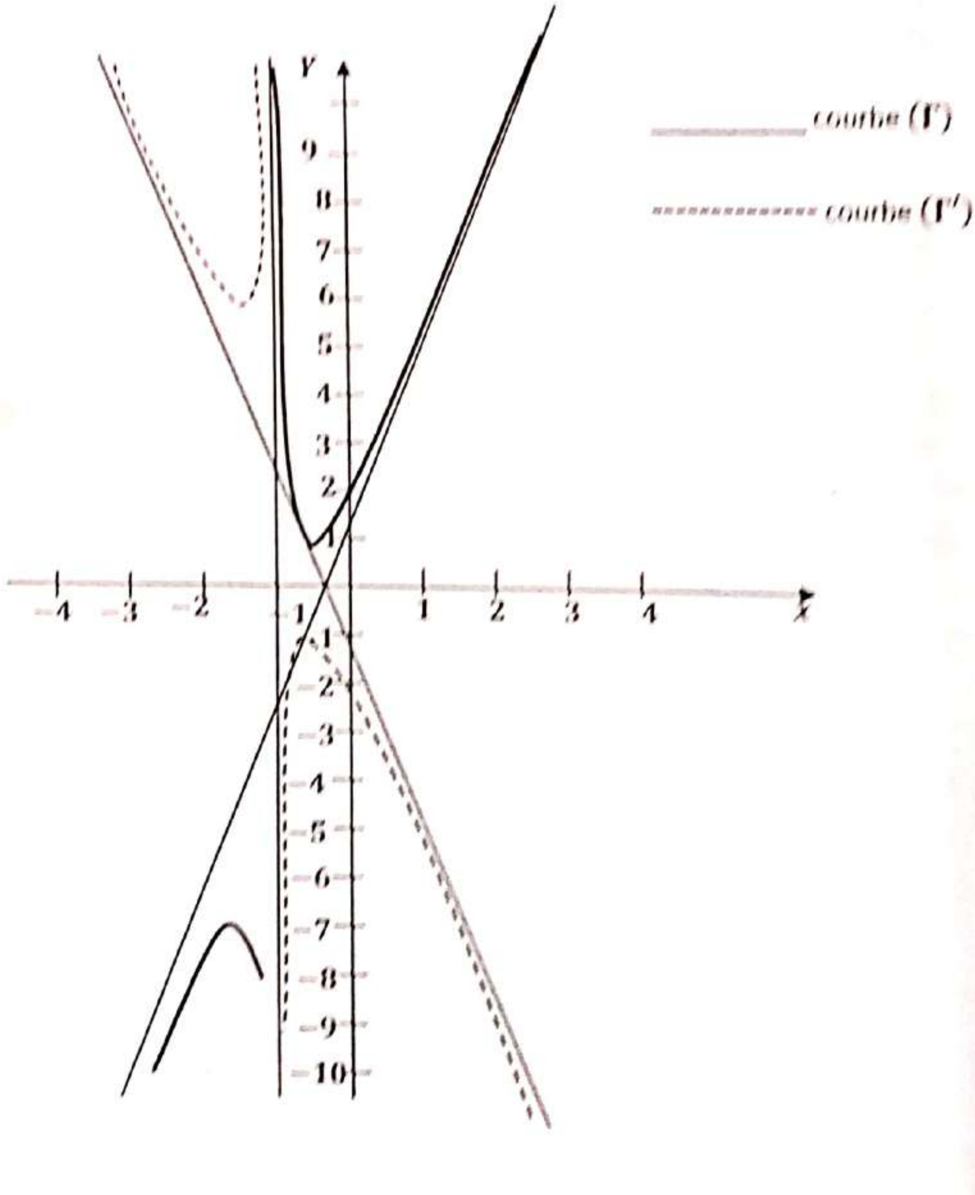
$\forall x \in D_f,\ 2(-1) - x \in D_f$ et on a : $f(-2-x) + f(x) = -6 = 2(-3)$ Donc le point I(−1 ; −3) est centre de symétrie pour (Γ).

5. Montrons que la courbe (Γ) admet une asymptote oblique. $f(x) = 4x + 1 + \frac{1}{x+1}$

$Lim_{x\to+\infty}|f(x)-(4x+1)| = Lim_{x\to-\infty}|f(x)-(4x+1)| = Lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1} = Lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x+1} = 0$ la droite d'équation $y = 4x + 1$ est asymptote à (Γ) , lorsque x tend vers l'infini.

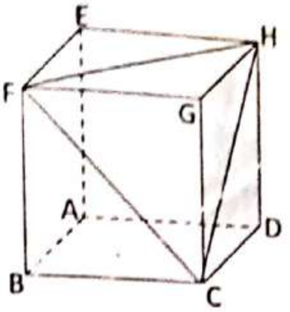
6. Tracé de la courbe (Γ)

7. Courbe(Γ′) sur le même graphique



Scanné avec CamScanner

PARTIE B



1. détermination des coordonnées des points C, F, G et H.

C(1,1,0) ; F(1,0,1) ; G(1,1,1) ; H(0,1,1) obtenues soit par lecture graphique, soit en utilisant les relations vectorielles suivantes dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ d'où C(1,1,0) ; $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$ d'où F(1,0,1) ; $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ d'où G(1,1,1) ; $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ d'où H(0,1,1).

2. Equation cartésienne du plan (CFH)

Une équation cartésienne du plan est de la forme : $ax + by + cz + d = 0$ avec a, b et c non tous nuls.

$C \in (CFH) \Leftrightarrow a + b + d = 0$

$H \in (CFH) \Leftrightarrow b + c + d = 0$

$F \in (CFH) \Leftrightarrow a + c + d = 0$

En supposant $a \neq 0$, la résolution du système : $\begin{cases} a + b + d = 0 \\ b + c + d = 0 \\ a + c + d = 0 \end{cases}$ de paramètre a, donne

b = a, c = a et d = -2a d'où l'équation du plan :

$ax + ay + az - 2a = 0$ soit $x + y + z - 2 = 0$

La distance de G au plan (CFH) est : d(G,(CFH)) = $\frac{|1+1+1-2|}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

3. [CF], [CH] et [FH] sont les diagonales des faces du cube ABCDEFGH, donc CF = CH = FH. D'où le triangle CFH est équilatéral.

PROBATOIRE C 2012

L'épreuve comporte deux exercices et un problème obligatoires étendus sur deux pages.

EXERCICE 1 (4,5 points)

1°) Résoudre dans IR l'inéquation $|4x+2| > |3-x|$

2°) On considère dans IR l'équation $(E) : (x-1)(x^2-3) = 39$

a) Ecrire 39 sous la forme d'un produit de facteurs premiers.

b) Trouver alors une solution de l'équation (E) dans l'ensemble IN des entiers naturels.

c) Montrer que cette solution entière est l'unique qu'admet l'équation (E) dans IR.

3°) Calculer le réel A défini par : $A = \left(1+\frac{1}{4}\right) \times \left(1+\frac{1}{5}\right) \times \dots \times \left(1+\frac{1}{999}\right)$

EXERCICE 2 (4,5 points)

1°) Soit θ un nombre réel.

a) Développer $(Cos^2\theta - Sin^2\theta)^2$

b) En déduire que $Cos^4\theta - Sin^4\theta = \frac{1}{2}(1 + Cos^2\theta)$

c) résoudre dans $]-\pi, \pi[$ l'équation : $Cos^4\theta - Sin^4\theta = \frac{5}{8}$

2°) Soit $(U_n), n \in IN$ une suite géométrique de raison q et telle que :

$u_0 \in IR^*; q > 0 \text{ et } \begin{cases} u_0 \times u_1 \times u_2 = 27 \\ u_0 \times u_2 \times u_4 = 216 \end{cases}$

a) Déterminer la raison et le terme initial u_0.

b) En déduire u_n en fonction de n.

PROBLEME (11 points)

Le problème comporte trois parties indépendantes A, B et C.

PARTIE A (4,5 points)

1°) On considère les fonctions numériques suivantes : $\begin{cases} f : [-2, 2] \longrightarrow IR \\ x \rightarrow x^2 \end{cases}$ et

$\begin{cases} g : [0, 4] \longrightarrow IR \\ x \rightarrow x^2 - 4x + 5 \end{cases}$

(C) et (C') sont respectivement les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthonormée direct $(O; \vec{i}; \vec{j})$ du plan P.

a) Construire la courbe (C)

b) Vérifier que pour tout x de $[0, 4]$, $g(x) = f(x-2) + 1$

c) Comment peut-on déduire de la courbe (C) la courbe (C') ?

d) Représenter la courbe (C')

2 – On désigne par r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$, et par h l'homothétie de centre O et de rapport 2. Soient I et J les points du plan de coordonnées respectives $(1, 0)$ et $(0, 1)$.

a) Construire les images I' et J' des points I et J par la transformation $s = roh$.

b) D...
c) Démontrer que les droites (II') et (JJ') sont perpendiculaires.
d) Montrer que $II' = JJ'$

PARTIE B

E est le plan vectoriel de base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et f l'application linéaire de E dans E définie par : $f(\vec{\imath}) = 3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$ et $f(\vec{\jmath}) = \vec{\imath} + 4\vec{\jmath}$

1°) Ecrire la matrice M de f dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$

2°) Déterminer le noyau de f.

3°) f est-elle bijective ? Justifier votre réponse.

4°) Donner une base de l'image de f.

5°) Donner l'expression analytique de $f0f$.

PARTIE C (3,5 points)

L'espace (E) est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Soient (P) et (P') les plans d'équations cartésiennes respectives : $2x + 3y + 6z = 0$ et $3x - 6y + 2z + 1 = 0$

1°) Démontrer que (P) et (P') sont perpendiculaires.

2°) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) d'intersection des deux plans (P) et (P') .

3°) Soit A le point de coordonnées $(-4; 1; -2)$

a) Calculer les distances du point A à (P) et à (P').

b) En déduire la distance de A à (D).

CORRIGE PROBATOIRE C 2012

EXERCICE 1

1°) Résolvons dans IR $|4x+2| > |3-x|$

$|4x+2| > |3-x| \Leftrightarrow (4x+2)^2 > (3-x)^2 \Leftrightarrow (4x+2)^2 - (3-x)^2 > 0$

$\Leftrightarrow (4x+2-3+x)(4x+2+3-x) > 0 \Leftrightarrow (5x-1)(3x+5) > 0$

$\Leftrightarrow S \left]-\infty; \frac{-5}{3}\right[\cup \left]\frac{1}{5}; +\infty\right[$

2°) (E): $(x-1)(x^2-3) = 39$

a) Décomposition de 39 : $39 = 3 \times 13$

b) Solution de (E)

$(x-1)(x^2-3) = 3 \times 13 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=3 \\ x^2-3=13 \end{cases}$ $ou \begin{cases} x-1=13 \\ x^2-3=3 \end{cases}$ $ou \begin{cases} x-1=1 \\ x^2-3=39 \end{cases}$

$ou \begin{cases} x-1=39 \\ x^2-3=1 \end{cases}$ seul le système $\begin{cases} x=4 \\ x^2=16 \end{cases}$ admet une solution entière $x = 4$.

c) Montrons l'unicité de la solution entière 4 dans IN

$(x-1)(x^2-3) = 39 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow (x-4)(x^2+ax+b) = 0$

$\Leftrightarrow (x-4)(x^2+3x+9) = 0$. Le discriminant de x^2+3x+9 est -27 qui est négatif.

Donc 4 est la seule solution de (E) dans (IR).

3°) $A = \frac{5}{4} \times \frac{6}{5} \times \frac{7}{6} \times \ldots \times \frac{1000}{999} = \frac{1000}{4} = 250$

EXERCICE 2

1°) a) $(Cos^2\theta - Sin^2\theta)^2 = Cos^4\theta + Sin^4\theta - 2Cos^2\theta Sin^2\theta$

b) Déduction de $Cos^4\theta + Sin^4\theta$

$Cos^4\theta + Sin^4\theta = (Cos^2\theta - Sin^2\theta)^2 + 2Cos^2\theta Sin^2\theta = Cos^2 2\theta + \frac{1}{2}Sin^2 2\theta$

$= Cos^2 2\theta + \frac{1}{2}\left(1 - Cos^2 2\theta\right) = \frac{1}{2}\left(1 - Cos^2 2\theta + 2Cos^2 2\theta\right) = \frac{1}{2}\left(1 + Cos^2 2\theta\right)$

c) Résolution dans $]-\pi; \pi[$ de : $Cos^4\theta + Sin^4\theta = \frac{5}{8}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(1 + Cos^2 2\theta) = \frac{5}{8} \Leftrightarrow (1 + Cos^2 2\theta) = \frac{5}{4}$

$\Leftrightarrow Cos^2 2\theta = \frac{1}{4} \Leftrightarrow Cos2\theta = \frac{1}{2}\ ou\ Cos2\theta = -\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \quad ou \\ 2\theta = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} k \in IZ\ ou \begin{cases} 2\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ \quad ou \\ 2\theta = \frac{-2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} k \in IZ$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \theta = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ \quad ou \\ \theta = -\frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases} k \in IZ\ ou \begin{cases} \theta = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ \quad ou \\ \theta = \frac{-\pi}{3} + k\pi \end{cases} k \in IZ$$

$$\Leftrightarrow S = \left(-\frac{5\pi}{6}; -\frac{2\pi}{3}; -\frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}\right)$$

2°) a) Déterminons la raison et le 1^er terme de cette suite

$$\begin{cases} u_0u_1u_2 = 27 \\ u_0u_2u_4 = 216 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_0u_0qu_0q^2 = 3^3 \\ u_0u_0q^2u_0q^4 = 2^33^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_0^3q^3 = 3^3 \\ u_0^3q^6 = 2^33^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_0^3q^3 = 3^3 \\ q^3 = 2^3 \end{cases}$$

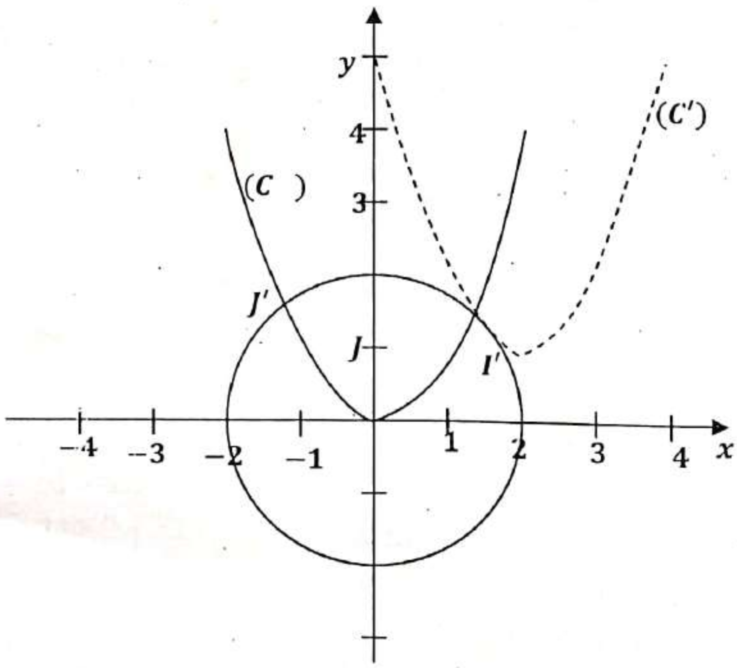
$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_0q = 3 \\ q = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} \\ q = 2 \end{cases}$$

b) Déduisons de U_n en fonction de n $u_n = u_0q^n = \frac{3}{2}2^n = 3 \times 2^{n-1}$

PROBLEME

PARTIE A

1°)



b) Vérifions que $g(x) = f(x-2) + 1$ pour tout n de [0 ; 4].

Soit x réel de [0 ; 4] ; alors, $x - 2$ est dans [-2 ; 2] et $f(x-2)+1 = (x-2)^2 + 1 = x^2 - 4x + 4 + 1 = x^2 - 4x + 5 = g(x)$

c) Déduction de (C')

(C') se déduit de C par la translation de vecteur de couple de coordonnées (2 ; 1)

d) Représentation de (C') *(voir la courbe en pointillée)*

2°) b) Nature du triangle OI'J'

OI'J' est un triangle rectangle et isocèle en O comme image de OIJ par S.

c) Démontrons que les droites (II') et (JJ') sont perpendiculaires.

$I'\left(2Cos\frac{\pi}{6};\ 2Sin\frac{\pi}{6}\right), J'\left(2Cos\frac{2\pi}{3};\ 2Sin\frac{2\pi}{3}\right)$ donc $I'(\sqrt{3}; 1), J'(-1;\ \sqrt{3})$ d'où $\overrightarrow{II'}(\sqrt{3}-1; 1)$ et $\overrightarrow{JJ'}(-1;\ \sqrt{3}-1)$

$\overrightarrow{II'}.\overrightarrow{JJ'} = -1 \times (\sqrt{3}-1) + 1 \times (\sqrt{3}-1) = -\sqrt{3} + 1 + \sqrt{3} - 1 = 0$. Donc (II') et (JJ') sont perpendiculaires.

d) Montrons que $\overrightarrow{II'} = \overrightarrow{JJ'}$

$$\overrightarrow{II'} = \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2 + 1} = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = \overrightarrow{JJ'}$$

PARTIE B

1°) Matrice M de f $M\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

2°) Déterminons le noyau de f

Soit $\vec{u}(x,y)$ un vecteur de E, $\vec{u}$ est dans le noyau de f signifie que $f(\vec{u}) = \vec{0}$ ce qui équivaut au système $\begin{cases} 3x + y = 0 \\ -2x + 4y = 0 \end{cases}$ qui a pour solution $x = y = 0$ d'où $N(f) = \{\vec{0}\}$

3°) $N(f) = \{\vec{0}\}$ donc f est un endomorphe injectif de E, donc f est bijectif comme tout endomorphe injectif d'espace vectoriel fini.

4°) Base de l'image de f

Comme f est bijective, $Im(f) = E$ et donc $(\vec{i}; \vec{j})$ est une base de $Im(f)$

5°) Expression analytique de $f0f$

Soit $\vec{u}(x,y), \vec{v}(x_1; y_1)$ et $\vec{w}(x'; y')$ des vecteurs de E. Posons $f(\vec{u}) = \vec{v}$

$$f0f(\vec{u}) = \vec{w} \Leftrightarrow f(\vec{u}) = \vec{v}\ et\ f(\vec{v}) = \vec{w} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3x + y \\ y_1 = -2x + 4y \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x' = 3x_1 + y_1 \\ y' = -2x_1 + 4y_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = 3\,(3x + y) + (-2x + 4y) \\ y' = -2(3x + y) + 4(-2x + 4y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 7x + 7y \\ y' = -14x + 14y \end{cases}$$

PARTIE C

1°) Démontrons que (P) et (P') sont perpendiculaires.

Un vecteur normal de (P) est $\vec{n}(2;3;6)$ et U_n un vecteur normal de (P') est $\overrightarrow{n'}(3;\ -6;2)$ et $\vec{n}.\overrightarrow{n'} = 2 \times 3 + 3x(-6) + 6 \times 2 = 6 - 18 + 12 = 0$. Donc (P) et (P') sont perpendiculaires.

2°) Représentation paramétrique de la droite (D)

$$(D): \begin{cases} 2x + 3y + 6z = 0 \\ 3x - 6y + 2z + 1 = 0\ ; a \in IR \\ z = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = -6a \\ 3x - 6y = -2a - 1 \quad a \in IR \\ z = a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 6y = -12a \\ 3y - 6y = -2a - 1 \quad a \in IR \\ z = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = -14a - 1 \\ 21y = -14c + 2 \qquad a \in IR \\ z = a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2a - \frac{1}{7} \\ y = -\frac{2}{3}a + \frac{2}{21} \qquad a \in IR \\ z = a \end{cases}$$

3°) a) calcul des distances de A à (P) et à (P') ou $A(-4,1,-2)$

$$D(A;(P)) = \frac{|2(-4)+3(1)+6(-2)|}{\sqrt{2^2-3^2+6^2}} = \frac{|1-3+3-12|}{\sqrt{4-9+36}} = \frac{17}{\sqrt{49}} = \frac{17}{7}$$

$$D(A;(P')) = \frac{|3(-4)-6(1)+1(-2)-1|}{\sqrt{3^2+6^2+2^2}} = \frac{|-12-6-2-1|}{\sqrt{9+36+4}} = \frac{21}{\sqrt{49}} = \frac{21}{7} = 3$$

b) Déduction de la distance de A à (D)

$$D(A;(D)) = \sqrt{D(A;(P))^2 + D(A;(P')^2} = \sqrt{\left(\frac{17}{7}\right)^2 \times 3^2} = \sqrt{\frac{289}{49} + 9} = \sqrt{\frac{730}{49}} = \frac{\sqrt{730}}{7}$$

PROBATOIRE C et E 2013

Exercice 1

Dans le tableau ci – dessous, pour chacune des questions de la deuxième colonne de gauche, il vous est proposé trois réponses parmi lesquelles une seule est juste : reproduire sur votre feuille de composition le numéro de la question et celui de la réponse juste correspondante.

N°	Questions	Réponse a)	Réponse b)	Réponse c)
1	Le plan vectoriel est rapporté à une base $(\vec{I},\vec{J})$; f est l'endomorphisme du plan défini pour tout vecteur $\vec{u}\ (x,y)$ par $f(\vec{u}) = (2x-2y)\vec{I} - (x+y)\vec{J}$ le noyau de f est	$\{\vec{o}\}$	La droite vectorielle de base $\vec{u} = \vec{I} - 2\vec{J}$	La droite vectorielle de base $\vec{w} = -\vec{I} + \vec{J}$
2	Le plan vectoriel est rapporté à une base $(\vec{I},\vec{J})$; la matrice de l'endomorphisme g défini pour tout $\vec{u}\ (x,y)$par g $(\vec{u}) = (-x-y)\vec{I} + (x-y)\vec{J}$ est :	$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$
3	L'espace affine est rapporté au repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. P et P' sont deux plans d'équations cartésiennes respectives : $x-2y+z+2=0$, et $x+y+z+2=0$; les plans P et P' sont :	Parallèles	perpendiculaires	confondus
4	A et B sont deux points du plan euclidien ; I est le milieu de $[AB]$; G est le barycentre du système $\{(A,3),\ (B,-1)\}$ L'ensemble des points M tels que $\|3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\|$ est :	Le cercle de diamètre $[G,I]$	$\emptyset$	La médiatrice $[G,I]$
5	Le plan affine euclidien est rapporté au repère orthonormé $(\vec{o},\vec{\imath},\vec{\jmath})$; le cercle (C) d'équation cartésienne : $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$, et la droite (D)d'équation cartésienne $3x+4y+11=0$ sont	Sécants	Tangents	Disjoints

Exercice 2

1) Montrer que pour tout x réel, $\cos x \sin x \cos 2x \cos 4x \cos 8x = \frac{1}{16}\sin 16x$.

2) En déduire que $cos\frac{\pi}{32}\ sin\frac{\pi}{32}cos\frac{\pi}{16}cos\frac{\pi}{8}cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{16}$.

3) On considère la fonction polynôme p définie pour tout x réel par $p(x) = 2x^3 + 5x^2 + x - 2$.

   a) Calculer $p(-1)$; en déduire que $p(x) = (x+1)(ax^2+bx+c)$ où a, b, et c sont des réels qu l'on déterminera.

   b) Résoudre alors dans $\mathbb{R}$ l'équation : $2sin^3 2x + 5sin^2 2x + \sin 2x - 2 = 0$.

Problème

Partie A

On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}-\{1\}$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{x^2}{2(x-1)}$

1) Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition
2) Calculer la dérivée et dresser le tableau de variation de f.
3) Montrer que la courbe (C) représentative de f dans le repère orthonormé $(O,\vec{I},\vec{J})$, admet une asymptote oblique et une asymptote verticale, dont on donnera les équations cartésiennes respectives.
4) Tracer (C) et ses asymptotes.
5) Montrer que le point $K(1;1)$ est le centre de symétrie de (C)
6) m étant un paramètre réel, discuter graphiquement l'existence et le nombre de solutions de l'équation $x^2+2m\ x-2m=0$

Partie B

On considère la suite numérique (U_n) définie pour tout entier naturel $n>1$ par la relation $U_{n+1}=\frac{u_n^2}{2(u_n-1)}$ avec $u_2=4$

1) Calculer u_3, u_4 et u_5
2) Placer u_2, u_3, u_4, u_5 sur le graphique de la fonction f.
3) En déduire le sens de variation de (U_n).

CORRIGE PROBATOIRE C 2013

Exercice 1

N° de questions	1	2	3	4	5
Réponses	a	a	b	c	b

Exercice 2

1) $\cos x\sin x\cos 2x\cos 4x\cos 8x=\frac{1}{2}\sin 2x\cos 2x\cos 4x\cos 8x=\frac{1}{2}\sin 4x\cos 4x\cos 8x=\frac{1}{8}\sin 8x\cos 8x=\frac{1}{16}\sin 16x$

2) $\cos\frac{\pi}{32}\sin\frac{\pi}{32}\cos\frac{\pi}{16}\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{32}\sin\frac{\pi}{32}\cos\frac{2\pi}{32}\sin\frac{4\pi}{32}\cos\frac{8\pi}{32}=\frac{1}{16}\sin\frac{16\pi}{32}=\frac{1}{16}\sin\frac{\pi}{2}=\frac{1}{16}$

3) a) $P(-1)=-2+5-1-2=0$ donc $P(x)$ est factorisable par $x-1$ on a : $P(x)=(x+1)(2x^2+3x-2)$ donc $a=2$; $b=3$ et $c=-2$

b) L'équation $2sin^3 2x+5sin^2 2x+sin2x-2=0$ équivaut à $sin2x=-1$ ou $2sin^2 2x+3\sin 2x-2=0$ ou encore $sin2x=-1$ ou $sin2x=-2$ ou $sin2x=\frac{1}{2}$

On en déduit que $2x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ ou $2x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$, K entier. Ainsi les solutions dans $\mathbb{R}$ sont de la forme $\frac{3\pi}{4}+k\pi,-\frac{\pi}{4}+k\pi,\frac{\pi}{12}+k\pi,\frac{5\pi}{12}+k\pi$, k entier.

Problème

Partie A

1) On a :

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \quad \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$

2) $f'(x) = \frac{x(x-2)}{2(x-1)^2}$

Le tableau de variation de f s'en déduit :

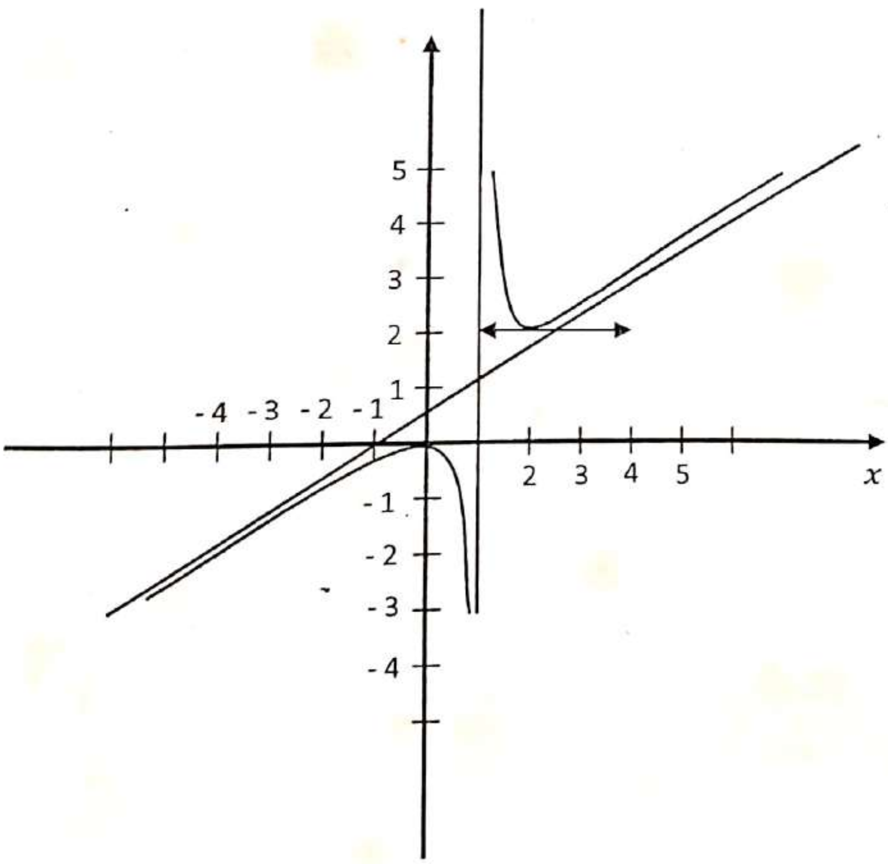
x	$-\infty$		0		1		2		$-\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

3) On a

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - \frac{1}{2}(x+1) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - \frac{1}{2}(x+1) = 0$ donc la droite d'équation $y = \frac{1}{2}(x+1)$ est asymptote oblique à la courbe (C).

On a $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$ donc la droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à la courbe (C).

4)



5) On a $2(1)-f[2(1)-x]=2-\frac{(2-x)^2}{2((2-x)-1)}$

$$=\frac{4(x-1)+x^2-4x+4}{2(x-1)}=f(x)$$

On en déduit que le point $K(1,1)$ est le centre de symétrie pour (C)

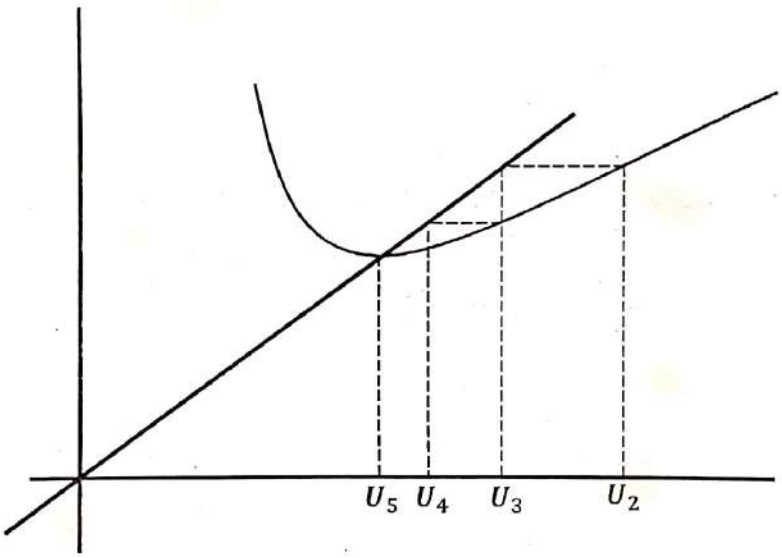
6) L'équation proposée équivaut à $=-m=f(x)$. On en déduit que :

Si $m\in\,]-\infty,-2[\,ou\ m\in\,]0,+\infty[$ l'équation a deux solutions.

Si $m=-2$ ou $m=0$ l'équation a une solution.
Si $m\in\,]-2,0[$, l'équation n'a pas de solution.

Partie B

Si $u_3=\frac{8}{3}$, $u_u=\frac{32}{15}$ et $u_5=\frac{512}{255}$



3) La suite (u_n) est décroissante.

PROBATOIRE C - E 2014

Exercice 1 :

I – a) Calculer $\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$, le système suivant : $\begin{cases} a+b = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \\ ab = \frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$

c) En déduire dans $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[\times \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, les solutions du système d'inconnues $(x;y)$ suivant : $\begin{cases} 2\,sin\,x + 2\,sin\,y = \sqrt{3}+1 \\ sin\,x \times \sin y = \frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$

II – Dans un plan vectoriel M muni d'une base $B = (\vec{\imath};\vec{\jmath})$, on considère l'application linéaire f de E vers E et de matricule $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ relativement à B.

a) Déterminer le noyau et l'image de f

b) On pose $M' = 2M - 2I$ où $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Justifier que M' est la matrice inverse de M'

Exercice 2 :

On s'est intéressé au nombre de personnes qui ont visité un site touristique sur 7 ans. Les résultats de cette enquête sont consignés dans le tableau ci-dessous :

Rang de l'année (*X*)	1	2	3	4	5	6	7
Nombre de personnes en milliers (*Y*)	1,5	2	3,5	1	6	8	10

1 – Représenter le nuage de points de la série statistique ainsi définie.

2 – a) Calculer la covariance de la série statistique $(X;Y)$. On donnera le résultat à 10^{-2} près par excès.

b) En prenant la moyenne de Y égale à 4,57 ; la variance de X égale à 4 et la variance de Y égale à 10,46 :

i. Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y

ii. Justifier qu'une équation de la droite de régression de y en x est : $y = 1{,}43 \times -1{,}15$

c) En déduire une estimation du nombre de personnes qui visiteront ce site en l'année de rang 31

3 – Ce site comporte 5 escales distinctes nommées A, B, C, D et E. Elles sont obligatoires pour tous ses visiteurs qui y passent une seule fois par escale. De combien de façons distinctes peut-on :

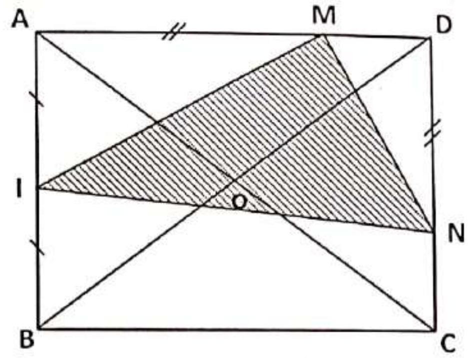
a) Parcourir le 5 escales ?

b) Parcourir les 5 escales si on commence toujours par l'escale A ?

PROBLEME

PARTIE A

Dans le plan orienté, $ABCD$ est un carré direct de centre O et de côté $AB = 6$. I est le milieu du segment $[AD]$ et $[DC]$ respectivement tels que $AM = DN$; $M \neq A$ et $M \neq D$.



1 – Soit r la rotation qui transforme A en D et M en N.
Déterminer la mesure principale de l'angle de r

2 – a) Montrer que $OM^2 = 18 - 6AM + AM^2 = ON^2$

b) En déduire que O est le centre de la rotation r.

On pose pour toute la suite $AM = x$, et on appelle G, le barycentre du système $A(7-x)$, $B(1)$ et $D(x)$.

3 – a) Soit k le réel tel que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{DM}$. Déterminer k en fonction de x et en déduire que M est le barycentre de A et D affectés respectivement des coefficients $6 - x$ et x.

b) Vérifier que $(7-x)\,\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + x\overrightarrow{GD} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + (6-x)\overrightarrow{GA} + x\overrightarrow{GD}$ et en déduire que G est le barycentre des points M et I affectés de coefficients que l'on déterminera.

c) soit G',l'image de G par r et J le milieu de$[AD]$. Justifier que $\overrightarrow{G'J} = \frac{3}{4}\overrightarrow{NJ}$

4 – a) Exprimer les aires des triangles IAM et MDN en fonction de x.

b) Montrer que l'aire A_1 du trapèze $BCNI$ en unité d'aire est : $A_1 = 27 - 3x$

c) En déduire que l'aire A du triangle IMN en unité d'aire est : $A = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 9$.

PARTIE B

Soit f la fonction définie de l'intervalle $[0; 6]$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 9$.

1 – Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2 – a) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

b) En déduire que pour tout réel $x \in [0; 6], f(x) \geq f\left(\frac{3}{2}\right)$.

c) Déterminer la valeur de x pour laquelle l'aire du triangle IMN est minimale.

3 – Représenter f dans un repère orthogonal.

(Echelle : $1cm$ pour 1unité en abscisse ; $1cm$ pour 3 unité en ordonnées).

4 – Soit g la fonction définie de $[-6; 6]$ vers $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(|x|)$.

a) Etudier la continuité et la dérivabilité de g en 0.

b) Justifier que g est une fonction paire.

c) Déduire ... courts, la courbe de g de celle de f.

CORRIGE PROBATOIRE C- E 2014

EXERCICE 1

1) a- $\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2 = -\frac{2\sqrt{3}+1}{4} = \frac{4-2\sqrt{3}}{4} = \frac{2-\sqrt{3}}{2}.$

b- **Résolution dans $\mathbb{R}^2$**

a et b sont les solutions de l'équation (E) :

$x^2 - \frac{1+\sqrt{3}}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{4} = o$ comme les solutions de (E) sont $\frac{1}{2}$ et $\frac{\sqrt{3}}{2}$, alors on a $\begin{cases} a = 1/2 \\ b = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ ou

$\begin{cases} a = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$ donc $S = \left\{(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}), (\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2})\right\}$

c-**Déduction** : $\begin{cases} 2\sin x + 2\sin y = \sqrt{3} + 1 \\ \sin x \sin y = \frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \sin y = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \\ \sin x \sin y = \frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$

d'après 1.b) on a $sin\, x = \frac{1}{2}\ et\ sin\, y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $sin\, x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $sin\, y = \frac{1}{2}$ d'où $x = \frac{\pi}{6}$ et $y = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{\pi}{3}$ et $y = \frac{\pi}{6}$ $s = \left\{\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right); \left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{6}\right)\right\}$

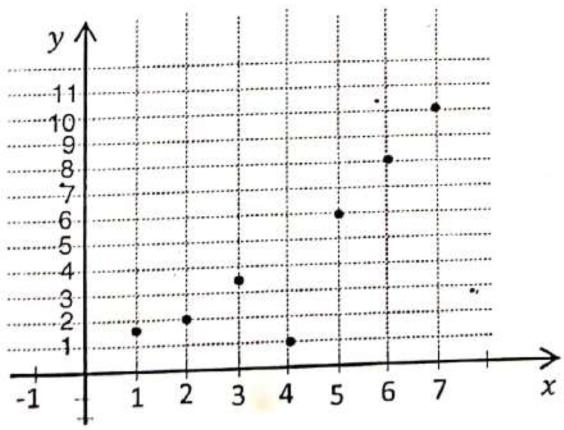
2) a- **Déterminons le noyau kerf et l'image Imf de f**

on a $det\, M = -\frac{1}{2}$ comme $det\, M \neq o$ alors $Kerf = \{\vec{o}\}$ et $imf = E$

b- On a $M' \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$ et $M^{-1} = \frac{1}{\det M}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$ donc $M^{-1} = M'$

EXERCICE 2

a – **Représentons le nuage des points**



b- **Calculons la variance**

								Total	Moyenne
								28	4
x	1	2	3	4	5	6	7	32	4,5714
y	1,5	2	3,5	1	6	8	10	168	24
xy	1,5	4	10,5	4	30	48	70		

$\text{Cov}\,(X\,;Y) = (\overline{xy}) - (\bar{x} \times \bar{y} = 24 - \big(4 \times (4{,}57)\big) = 5{,}72.$

b) i Calculons le coefficient de corrélation linéaire r

on a $r = \frac{cov\,(x,y)}{\sqrt{v(x)\times v(y)}} = \frac{5{,}72}{\sqrt{4}\times\sqrt{10{,}46}} \cong 0{,}8843.$

b) ii Justification

une équation de la droite de régression de Y en x est $y = \frac{cov\,(x,y)}{v(x)}(x - \overline{x}) + \bar{y}$ ainsi

$y = \frac{5{,}72}{4}(x-4) + 4{,}57$ d'où $y = 1{,}43 \times -1{,}15.$

C) Déduction

On a $x = 31\ ainsi\ y = 1{,}43 \times 31 - 1{,}15 = 43{,}18.$

3) a- Le nombre de façons de parcourir les 5 escales est $5\,! = 120.$
   b- Le nombre de façons de parcourir les 5 escales si on commence par $A\ est\ 4\,! = 24.$

PROBLÈMES

PARTIE A

1) L'angle de r est $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{DN})$ sa mesure principale est $-\frac{\pi}{2}$.
2) a-Montrons que $OM^2 = ON^2 = 18 - 6AM + AM^2$

   on a $OM^2 = \overrightarrow{OM}^2 = \left(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AO}\right)^2 = AM^2 + AO^2 - 2\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AO}$

   $AM^2 + AO^2 - 2\overrightarrow{AM} \times \overrightarrow{AJ}$ ou J milieu de $[AD]$ est le projeté orthogonal de o sur (AD).

   D'où $OM^2 = AM^2 + 18 - 6AM$

   De même $ON^2 = \overrightarrow{ON}^2 = (\overrightarrow{DN} - \overrightarrow{DO})^2 = DN^2 + DO^2 - 2\overrightarrow{DN}\overrightarrow{DO}$

   $ON^2 = DN^2 + DO^2 - 2\overrightarrow{DN} \times \overrightarrow{DK}$ où K milieu$[CD]$ est le projeté orthogonal de O sur (CD)d'où $ON^2 = DN^2 + 18 - 6DN = AM^2 + 18 - 6AM$ car $DN = AM$

   donc $OM^2 = ON^2$

   b- **Déduction**

soit le Ω centre de r. on a $\begin{cases} r(A) = D \\ r(M) = N \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Omega A = \Omega D \\ \Omega M = \Omega N \end{cases}$ ainsi Ω est le point d'intersection des médianes de $[AD]$ et $[MN]$ donc Ω=o car $ON\ = OM\ et\ OA = OD.$

3) a- **Déterminons K et écrivons M comme barycentre de A et D**

On a $\overrightarrow{AM} = K\overrightarrow{DM} \Leftrightarrow \frac{x}{6}\overrightarrow{AD} = -\frac{k(6-x)}{6}\,\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow (\frac{x+k(6-x)}{6})\overrightarrow{AD} = \vec{O}$

donc $k = \frac{x}{x-6}$ car $\overrightarrow{AD} \neq \vec{O}$ et $x \neq 6$

on a $\overrightarrow{AM} - K\overrightarrow{DM} = \vec{O} \Leftrightarrow M = bar\{(A;1);(D;-k)\}$ d'où M=bar $\{(A;6-x);(D;-k(6-x)\}$ donc M=bar $\{(A;6-x);(D;x)\}$

b) **Vérifions l'égalité et écrivons G comme barycentre et I et M**

On a $(7-x)\,\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}$ +x$\overrightarrow{GD} = (1+6-x)\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}x\,\overrightarrow{GD} =$ $\overrightarrow{GA}$+$\overrightarrow{GB}$ +(6-x)$\overrightarrow{GA}$+$x\overrightarrow{GD}$

En outre $G = bar\ \{(A;7-x);(B;1);(D;x)\} = bar\{(I;2);(M;6)\}$ car $I = bar\{(A;1);(B;1)\}$ et $M = bar\{(A;6-x);(D;x)\}$

c) **Justifions que** $\overrightarrow{GJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{NJ}$

on a $\begin{cases} r(I) = J \\ r(M) = N \\ r(G) = G' \\ G = bar\{(I;1);(M;3)\} \end{cases} \Rightarrow G' = bar\{(J;1);(N;3)\}$ car V conserve le barycentre

ainsi $\overrightarrow{JG'} = \frac{3}{4}JN\ donc\overrightarrow{GJ} = \frac{3}{4}\,\overrightarrow{NJ}$

4) a- Exprimons les aires des triangles IAM et MDN en fonction de x

l'aire de IAMest $\frac{AI\times AM}{2} = \frac{3x}{2}$

l'aire de MDN est $\frac{DN\times DM}{2} = \frac{6x-x^2}{2}$

b- Montrons que l'aire A_1 de $BCNJ\ est\ 27-3x$

l'aire de $BCNJ$ est $A_1 = \frac{(BI+CN)\times BC}{2} = \frac{(3+6-x)\times 6}{2} = 27-3x$

c=Déduction

l'aire de IMN est $A = 36 - \left[(27-3x) + \frac{3x}{2} + \frac{6x-x^2}{2}\right] = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3x}{2} + 9$

PARTIE B

1) calculons les limitesTapez une équation ici.

$\lim\limits_{x\to o^+} f(x) = 9$ et $\lim\limits_{x\to 6^-} f(x) = 18$

2) **a**-étudions les variations de f et dressons son tableau de variation

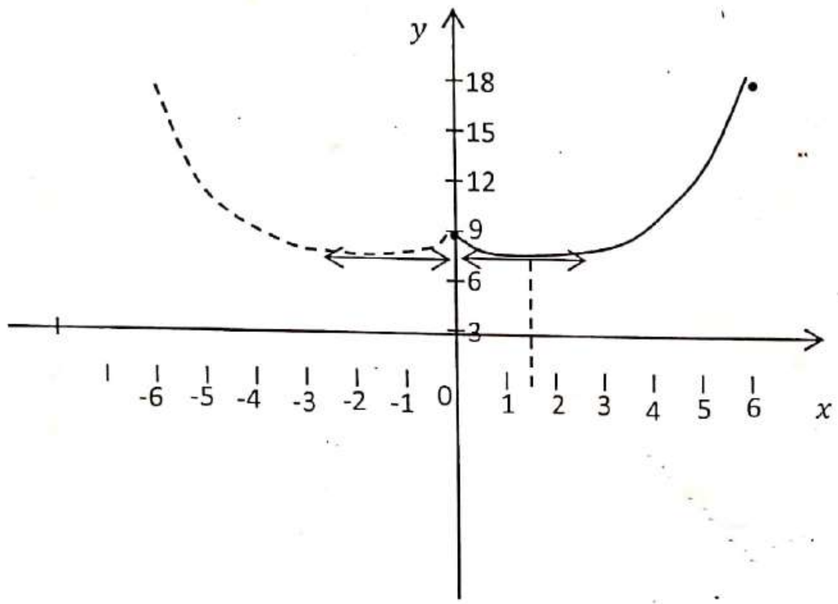
on a $f'(x) = x - \frac{3}{2}$ pour tout x dans $[o;6]$ $f'(x) \geq o \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}$ ainsi f est croissante sur$\left[\frac{3}{2};6\right]$ et décroissante sur $\left[o;\frac{3}{2}\right]$ on a le tableau de variation suivant :

x	0		$3/2$		6
$f'(x)$		$-$	o	$+$	
$f(x)$	9	$\searrow$	$\frac{63}{8}$	$\nearrow$	18

b) Déduction

f admet un minimum sur $[o;6]$ au point d'abscisse $\frac{3}{2}$ d'après 2 a) donc pour tout $x \in [o;6]$, $f(x) \geq f(\frac{3}{2})$

c) l'aire du triangle IMN en unité d'aire est $f(x)$ donc cette aire est minimale pour $x = \frac{3}{2}$



4)a- étudions la continuité et la dérivabilité de g en O

on a

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 9 & si\ x \in [o;6] \\ \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 9 & si\ x \in [-6;0] \end{cases} \qquad g(o) = 9$$

$\lim\limits_{x \to o^+} g(x) = 9$ et $\lim\limits_{x \to o^-} g(x) = 9$, donc $\lim\limits_{x \to o} g(x) = 9 = g(o)$ et la fonction g est continue en o.

$\lim\limits_{x \to o^-} \frac{g(x)-g(o)}{x} = \lim\limits_{x \to o^-} \frac{(x+3)}{2} = \frac{3}{2}$; $\lim\limits_{x \to o^+} \frac{g(x)-g(o)}{x} = \lim \frac{(x-3)}{2} = \frac{-3}{2}$

donc la fonction g n'est pas dérivable en o

b) **Justifions que la fonction g est paire**

soit $x \in [-6;6]$, $-x \in [-6;6]$ et $g(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = g(x)$,

, donc la fonction g est paire.

c) **Construisons en traits interrompus courts la courbe de g**

Voir courbe ci-dessus.