

# Exercices et Problèmes Corrigés et détaillés

Cours et Points Méthodes



**MATHÉMATIQUES EN AFRIQUE**  
EN TERMINALES C,D&SI

COLLECTION MATHS EN AFRIQUE  
ÉDITION 2023

© 2023, Antoine Gildas Mba Obiang

Cette œuvre est protégée par le droit d'auteur et strictement réservée à l'usage privé du client. Toute reproduction ou diffusion au profit de tiers, à titre gratuit ou onéreux, de tout ou une partie de cette œuvre, est strictement interdite et constitue une contrefaçon prévue par les articles L 335-2 et suivant du code de la propriété intellectuelle. L'auteur se réserve le droit de poursuivre toute atteinte à ses droits de propriété intellectuelle devant les juridictions civiles ou pénales.



## AVANT PROPOS

Dans le souci d'apporter un ouvrage adapté au programme en vigueur en terminales scientifiques, j'avais à coeur de mettre à disposition des lycéens du Gabon et des pays d'Afrique francophone cet outil de travail : **Mathématiques en Afrique tome 1**.

Celui-ci participe d'une collection intitulée **Collection maths en Afrique** qui ambitionne de donner à chaque lycéen du Gabon et d'Afrique francophone des outils d'assimilation du cours, de le soutenir dans son travail personnel pour une préparation efficace et sereine à l'épreuve de mathématiques au baccalauréat.

Le présent volume, de la collection, est rédigé à l'attention des élèves de terminales séries C,D et SI. Il a pour objectifs de :

- ☞ fournir des outils permettant d'organiser une préparation optimale à l'épreuve de mathématiques au baccalauréat;
- ☞ permettre aux futurs étudiants d'acquérir une culture mathématique très solide afin de faciliter la transition lycée - université;
- ☞ proposer des exercices de synthèse, ceux-ci permettent de vérifier si les notions présentées sont assimilées et de déjouer les pièges qui s'y rapportent.

Les mathématiques sont, comme toute autre discipline à caractère scientifique, à la portée de l'élève qui veut non seulement les apprivoiser, mais aussi et surtout faire les efforts constants afin de combler ses propres lacunes, d'approfondir ses acquis et d'affermir ses aptitudes. Mon souhait le plus cher est de contribuer à l'amélioration des performances de chaque élève de terminale avant et après le baccalauréat.

**L'auteur**

*Si l'esprit d'un homme s'égaré, faites-lui étudier les mathématiques car dans les démonstrations, pour peu qu'il s'écarte, il sera obligé de recommencer.*

**Francis BACON** philosophe, scientifique (1561- 1626).

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Nombres complexes - racines carrées</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Fonctions numériques d'une variable réelle</b>	<b>7</b>
<b>3</b>	<b>Coniques</b>	<b>14</b>
<b>4</b>	<b>Lignes de niveau</b>	<b>19</b>
<b>5</b>	<b>Isométries du plan et de l'espace</b>	<b>26</b>
5.1	Isométries du plan	26
5.1.1	Détermination d'un déplacement	26
5.1.2	Détermination d'un antidéplacement	27
5.1.3	Classification	30
5.2	Applications de l'espace	34
5.2.1	Translations et homothéties	34
5.3	Symétries orthogonales	38
5.3.1	Réflexions	38
5.3.2	Projections	40
5.4	Demi-tours	41
5.4.1	Rotation	42
5.4.2	Symétrie centrale	43
<b>6</b>	<b>Arithmétique dans <math>\mathbb{Z}</math></b>	<b>51</b>
6.1	Divisibilité dans $\mathbb{Z}$	51
6.1.1	Multiple et Diviseur	51
6.1.2	Nombres premiers	51
6.2	Division Euclidienne	52
6.2.1	PGCD	52
6.2.2	Algorithme d'Euclide	53
6.2.3	Les théorèmes de Bézout et de Gauss	53
6.2.4	Equation $ax + by = c$ , $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$	56
6.2.5	PPCM	58
6.2.6	Décomposition en facteurs premiers	59
6.2.7	Valuation $p$ -adique	59
6.2.8	Nombre de diviseurs d'un entier	59
6.3	Congruence	60
6.3.1	Petit théorème de Fermat	62
6.3.2	Système d'équations $x \equiv a[n]$ , $x \equiv b[p]$	62
<b>7</b>	<b>Continuité et dérivabilité</b>	<b>72</b>
7.1	Continuité	72
7.1.1	Continuité d'une fonction en un point	72
7.1.2	Continuité d'une fonction sur un intervalle	74
7.2	Théorème des valeurs intermédiaires	74
7.2.1	Image d'un intervalle par une fonction continue	74
7.2.2	Image d'un segment $[a, b]$ par une fonction continue	74
7.2.3	Image d'un intervalle par une fonction continue et monotone	75
7.3	Théorème des fonctions réciproques	76
7.3.1	Fonction racine $n$ -ième	80

## 2 ÉTUDE DE FONCTIONS NUMÉRIQUES

**Partie B** – Étude de la suite  $u_n$ .

Soit  $x \in [0; 1]$ , on considère  $(u_n)$  la suite définie par  $u_n = \int_0^x f_n(t) dt$ .

1. Pour tout  $n \in \mathbb{N} - \{0\}$  fixé,  $t \mapsto f_n(t)$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et particulier sur  $[0; x]$ . Ainsi, l'intégrale  $\int_0^x f_n(t) dt$  est bien définie, par suite  $(u_n)$  existe.

$$\text{On a } u_1 = \int_0^x f_1(t) dt = \int_0^x (1 - te^t) dt = \int_0^x dt - \int_0^x te^t dt.$$

D'une part, on en déduit directement le calcul  $\int_0^x dt = x$ .

D'autre part .

Posons  $\begin{cases} u'(t) = e^t \\ v(t) = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(t) = e^t \\ v'(t) = 1 \end{cases}$ . Le propriété de l'intégration par parties nous permet d'écrire .

$$\int_0^x te^t dt = [te^t]_0^x - \int_0^x e^t dt = [te^t - e^t]_0^x = (x-1)e^x + 1$$

Ainsi, on a  $u_1 = x - [(x-1)e^x + 1] = x - 1 - (x-1)e^x = (1 - e^x)(x-1)$ .

2. Soit  $x \in [0; 1]$  fixé.

On a  $f_{n+1}(x) - f_n(x) = 1 - x^{n+1}e^x - (1 - x^n e^x) = (1-x)x^n e^x \geq 0$  car  $0 \leq x \leq 1$ .

On en déduit d'après la croissance de l'intégrale .

$$\int_0^x [f_{n+1}(t) - f_n(t)] dt \geq 0 \Rightarrow u_{n+1} - u_n \geq 0$$

par suite,  $(u_n)$  est croissante.

3. Sur  $[0; 1]$  est  $f_n$  est décroissante donc pour tout  $x \in [0; 1]$ ,  $f_n(1) \leq f_n(x) \leq f_n(0)$  c'est-à-dire .

$$1 - e \leq f_n(x) \leq 1$$

On en déduit d'après la croissance de l'intégrale :

$$\int_0^x (1 - e) dt \leq \int_0^x f_n(t) dt \leq \int_0^x dt \Rightarrow u_n \leq 1$$

donc la suite  $(u_n)$  est majorée par 1.

4. On a montré que la suite  $(u_n)$  est croissante et majorée par 1 alors, par le théorème de la convergence des suites monotones cette suite converge.

### Exercice 6. Calcul d'une limite

Soit  $n$  un entier naturel supérieur à 1.

Etudier la convergence de la suite  $(I_n)$  définie par :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n - 1}{x^2 + 1} dx$$

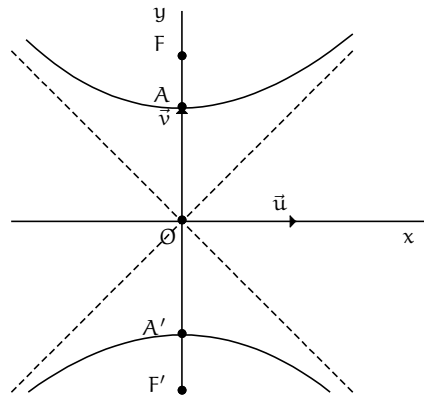
**Solution.**

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a l'égalité :  $\frac{x^n - 1}{x^2 + 1} = \frac{x^n}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^2 + 1}$ .

**Solution.**

1. Dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  soit H la courbe d'équation :  $-x^2 + y^2 = 1$   
 H est une hyperbole de centre  $O(0;0)$ , d'axe focal  $(O, \vec{j})$ , de sommets  $A(0;1)$   
 et  $A'(0;-1)$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . Les asymptotes sont les droites d'équa-  
 tion dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  :

$$y = x \text{ et } y = -x$$



2. L'équation (E) a pour discriminant  $\Delta = \sin^2 2\alpha - 4(2 - \cos^2 \alpha)\cos^2 \alpha = -4\sin^2 \alpha$ .  
 Cette équation admet deux solutions dans  $\mathbb{C}$  d'affixes .

$$z = \frac{\sin 2\alpha + 2i \sin 2\alpha}{2\cos^2 \alpha} = \tan \alpha + \frac{1}{\cos \alpha} i \text{ et } \bar{z} = \frac{\sin 2\alpha - 2i \sin 2\alpha}{2\cos^2 \alpha} = \tan \alpha - \frac{1}{\cos \alpha} i$$

3. a) En notant par  $z$  l'affixe de  $M$  on a  $z = \tan \alpha + \frac{1}{\cos \alpha} i$  car  $\forall \alpha \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ ,  
 $\frac{1}{\cos \alpha} > 0$ . De plus, on a la relation fondamentale pour tout  $\alpha \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ ,

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

donc, il s'ensuit que  $M$  appartient à l'hyperbole H définie au 1°.

- b) Soient  $f$  et  $g$  les fonctions définies sur  $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$  par

$$f(x) = \tan x \text{ et } g(x) = \frac{1}{\cos x}$$

Pour tout  $x \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ ,  $f'(x) = 1 + \tan^2 x$  et  $g'(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$  donc on en déduit  
 que  $f$  est continue et strictement croissante sur  $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$  par suite

$$f\left(\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[ \right) = \mathbb{R}$$

$g$  est continue et strictement décroissante sur  $\left] -\frac{\pi}{2}; 0 \right]$  et strictement  
 croissante sur  $\left] 0; \frac{\pi}{2} \right[$  par suite  $g\left(\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[ \right) = [1; +\infty[$ . On en déduit donc  
 que le sous-ensemble de H décrit par  $M$  lorsque  $\alpha$  décrit l'intervalle  
 $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$  est la partie de l'hyperbole H situées dans le demi plan de  
 frontière  $(Ox)$  contenant le point  $A(0;1)$ .

### Exercice 16. Lignes de niveau $MA = kMB$

On considère un segment  $[AB]$  de longueur 6cm.

Le but de l'exercice est de déterminer l'ensemble des points  $M$  tels que :

$$\frac{MA}{MB} = 2$$

1. Démontrer qu'il existe deux points  $M$ , et deux seulement, de la droite  $(AB)$  vérifiant  $\frac{MA}{MB} = 2$ . On notera  $G$  et  $G'$  ces deux points et  $K$  le milieu du segment  $[GG']$ .
2. Soit  $M$  un point du plan n'appartenant pas à la droite  $(AB)$ .
  - a) Exprimer  $\cos \widehat{BAM}$  de deux façons différentes en appliquant le théorème d'Al-Kashi dans le triangle  $ABM$ , puis dans le triangle  $AKM$ .
  - b) En déduire  $MK^2$  sachant que  $MA = 2MB$ .
3. Conclure.

### Solution.

1. On va raisonner par **analyse-synthèse**.

**Analyse** : Soit  $M$  un point du plan vérifiant  $\frac{MA}{MB} = 2$ . On en déduit successivement les égalités suivantes :

$$MA^2 = 4MB^2 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}) = 0$$

En notant  $G' = \text{bar}\{(A, 1); (B, -2)\}$  et  $G = \text{bar}\{(A, 1); (B, 2)\}$  on en déduit que ces deux points sont uniques et vérifient :

$$-3\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{MG'} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{MG'} = 0$$

**Synthèse** : On a vu que si il existe un point  $M$  vérifiant  $\frac{MA}{MB} = 2$  alors, il existe deux points  $G$  et  $G'$  seules points de la droite  $(AB)$  vérifiant

$$\frac{MA}{MB} = 2$$

Ainsi, on a montré que l'ensemble  $\Gamma$  des points  $M$  du plan vérifiant  $\frac{MA}{MB} = 2$  rencontre la droite  $(AB)$  en deux points distincts  $G$  et  $G'$  définis par tels que  $G' = \text{bar}\{(A, 1); (B, -2)\}$  et  $G = \text{bar}\{(A, 1); (B, 2)\}$ .

2. a) Soit  $M$  un point du plan n'appartenant pas à la droite  $(AB)$ .

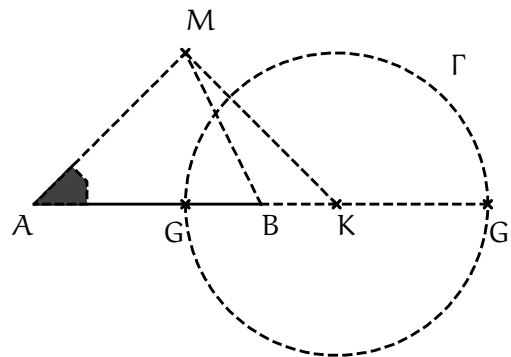



Figure.

## 5 Isométries du plan et de l'espace

### 5.1 Isométries du plan

#### Point Méthode.

Soit  $f$  une symétrie glissante.

 **Premier cas** : on donne trois points distincts,  $A$ ,  $B$  et  $C$  tels que :

$$\begin{cases} f(A) = B \\ f(B) = C \end{cases}$$

Dans ce cas, on détermine d'abord :


1. un vecteur directeur  $\vec{u}$  de l'axe  $(\Delta)$ ,
2. on en déduit l'axe  $(\Delta)$ .

On a :  $f \circ f(A) = f(B) = C$  donc  $2\vec{u} = \vec{AC}$  donc  $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{AC}$ .

**Détermination de l'axe  $(\Delta)$ .**

- $f(A) = B$  donc le milieu  $I$  de  $[AB]$  appartient à l'axe  $(\Delta)$ ,
- $f(B) = C$  donc le milieu  $J$  de  $[BC]$  appartient à l'axe  $(\Delta)$ ,

Donc  $(\Delta) = (IJ)$  avec  $I \neq J$

 **Deuxième cas** : on donne quatre points distincts  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  tels que :

$$\begin{cases} f(A) = B \\ f(C) = D \end{cases}$$

Dans ce cas, on détermine d'abord :

1. l'axe  $(\Delta)$ ,
2. on en déduit un vecteur directeur  $\vec{u}$  de l'axe  $(\Delta)$ .

**Détermination de l'axe  $(\Delta)$ .**

- $f(A) = B$  donc le milieu  $I$  de  $[AB]$  appartient à l'axe  $(\Delta)$ ,
- $f(C) = D$  donc le milieu  $J$  de  $[CD]$  appartient à l'axe  $(\Delta)$ ,

Donc  $(\Delta) = (IJ)$  avec  $I \neq J$ .

**Détermination d'un vecteur directeur  $\vec{u}$  de l'axe  $(\Delta)$ .**

On choisit un point  $K \in (\Delta)$  puis on détermine  $L = f(K)$ .

On a :  $L = t_{\vec{u}} \circ s_{(\Delta)}(K) = t_{\vec{u}}(K)$  par suite  $\vec{u} = \vec{KL}$ .

#### 5.1.1 Détermination d'un déplacement

##### Proposition.

Étant donnés les points  $A, B, A'$  et  $B'$  tels que  $A'B' = AB$  et  $A \neq B$ , il existe un déplacement  $f$  et un seul tel que :  $A' = f(A)$  et  $B' = f(B)$ .

- si  $\vec{A'B'} = \vec{AB}$ , ce déplacement est la translation de vecteur  $\vec{AA'}$ .
- si  $\vec{A'B'} \neq \vec{AB}$ , ce déplacement est une rotation d'angle  $\widehat{(\vec{AB}, \vec{A'B'})}$ .

Par ailleurs, on a :

- $f(B) = A$  alors le milieu de  $[BA]$  appartient à  $(\Delta)$  c'est-à-dire que  $K \in (\Delta)$ ,
- $f(A) = C$  alors le milieu de  $[AC]$  appartient à  $(\Delta)$  c'est-à-dire que  $I \in (\Delta)$ ,

d'où  $(\Delta) = (KI)$ . **Conclusion** :  $f = t_{\vec{KI}} \circ s_{(KI)}$ .

2. a) On a  $\begin{cases} f(A) = C \\ f(B) = A \\ f(C) = C' \end{cases}$  comme  $f$  est un antidéplacement alors l'image  $CAC'$  de

$ABC$  par  $f$  est un triangle équilatéral indirect ce qui implique que nécessairement  $C' = D$  par suite  $f(C) = D$ .

b) On a  $f(D) = f(f(C)) = f \circ f(C) = t_{2\vec{u}}(C) = t_{\vec{BC}}(C)$  donc  $f(D) = s_C(B)$ .

### Exercice 19. Extrait Bac C 2023 Bénin

Soit  $ABCD$  un carré de centre  $O$  et  $I, J, K$  et  $L$  les milieux respectifs des segments  $[AB]$ ,  $[BC]$ ,  $[CD]$  et  $[AD]$ . Soit  $g$  la similitude indirecte du plan qui transforme  $B$  en  $K$  et  $K$  en  $A$ .

1. Justifier que  $g$  est un antidéplacement.
2. Démontrer que  $g$  est une symétrie glissée dont tu caractériseras.

**Solution.**

1. On a  $B \neq K$  et  $BK = KA$  ( car  $K$  appartient à la médiatrice du segment  $[AB]$ ) donc, il existe un unique antidéplacement qui transforme  $B$  en  $K$  et  $K$  en  $A$ . On en déduit par suite,  $g$  est un antidéplacement.

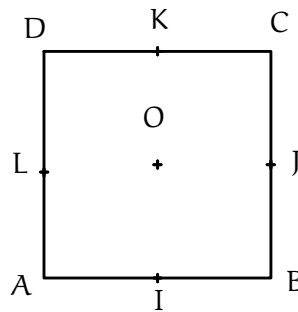


Figure.

2. On a  $g^2(B) = g \circ g(B) = g(K) = A \neq B$  donc  $g$  est une symétrie glissante, de vecteur  $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{BA}$ . En notant  $(d)$  l'axe de  $g$  on en déduit que  $g = S_{(d)} \circ t_{\vec{u}}$  par suite,

$$S_{(d)}(I) = K \quad \text{et} \quad S_{(d)}(D) = A$$

d'où  $(d)$  est la droite  $(LO) = (LJ)$ . Ainsi,  $g$  est la symétrie glissante d'axe  $(LJ)$  et de vecteur directeur  $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{BA}$ .

**Exercice 20. Isométrie du plan**

Dans le plan orienté de sens direct. On considère un triangle ABC rectangle en C tel que  $\widehat{(\vec{CA}, \vec{CB})} = \frac{\pi}{2}[2\pi]$  et deux triangles ACD et ABE rectangle en A. On désigne par I, J et K les milieux respectifs des segments [CD], [AC] et [AD]. Soit f une isométrie telle que  $f(A) = D$  et  $f(C) = A$ .

1. On suppose que f admet un point fixe.
  - a) Montrer que f est une rotation.
  - b) Donner les éléments caractéristiques de f.
  - c) Construire le point F tel que  $F = f(B)$ .
  - d) Montrer que les points A, C et F sont alignés.
2. Soit R la rotation de centre A, d'angle  $\frac{\pi}{2}$  et  $g = f \circ R$ .
  - a) Déterminer g(E) puis caractériser g.
  - b) En déduire que le quadrilatère AEFD est un parallélogramme.
3. On suppose que f sans point fixe.
  - a) Montrer que f est une symétrie glissée.
  - b) Déterminer les éléments caractéristiques de f.
4. Soit  $\varphi$  la rotation de centre I et d'angle  $-\frac{\pi}{2}$  et  $\psi$  la symétrie glissée de vecteur  $\vec{JK}$  et d'angle (JK) et  $h = \varphi \circ \psi^{-1}$ .
  - a) Quelle la nature de h ?
  - b) Déterminer h(D) et h(A) puis caractériser h.

**Solution.**

1. On suppose que f admet un point fixe

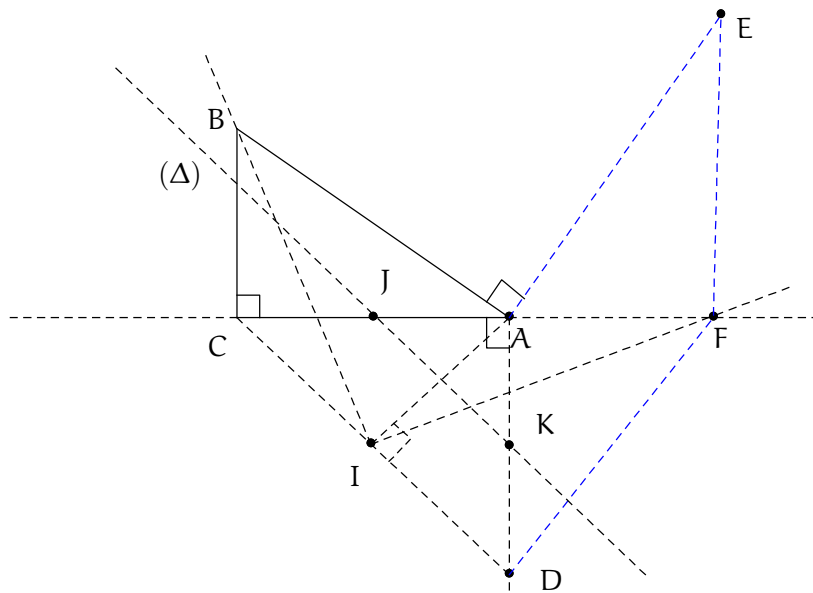


Figure.

a) Le point I est le point d'intersection des médiatrices [AC] et [AD] donc par conséquent I est un point fixe de f.

L'image de l'angle orienté  $\widehat{(\vec{IC}, \vec{IA})}$  par f est l'angle  $\widehat{(\vec{IA}, \vec{ID})}$  et ces deux angles sont égaux. On en déduit que f est déplacement. De ce fait, f

3. a) Soit I le milieu de  $[MM']$ .

$$x_I = \frac{x+x'}{2} = \frac{9x-6y+12}{13} \quad \text{et} \quad y_I = \frac{y+y'}{2} = \frac{-6x-4y+18}{13}$$

ainsi,  $2x_I + 3y_I - 6 = \frac{18x-12y+24}{13} + \frac{-18x-12y+54}{13} - 6 = 0$  donc  $I \in (D)$ .

b) Soit M le point de coordonnées  $(x; y)$ ;  $M'$  de coordonnées  $(x'; y')$  l'image de M par f. On a

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MM'} &= (x' - x)\vec{i} + (y' - y)\vec{j} \\ \overrightarrow{MM'} &= \left[ \frac{1}{13}(5x - 12y + 24) - x \right] \vec{i} + \left[ \frac{1}{13}(-12x - 5y + 36) - y \right] \vec{j} \\ \overrightarrow{MM'} &= -\frac{4}{13}(2x + 3y - 6)\vec{i} - \frac{6}{13}(2x + 3y - 6)\vec{j} \end{aligned}$$

par suite,  $\overrightarrow{MM'} = -\frac{2x+3y-6}{13}(2\vec{i}+3\vec{j})$  donc  $\overrightarrow{MM'}$  a une direction fixe qui est celle du vecteur  $2\vec{i}+3\vec{j}$ . Un vecteur normal de (D) est  $2\vec{i}+3\vec{j}$  qui est colinéaire à  $\overrightarrow{MM'}$  donc  $\overrightarrow{MM'}$  a une direction fixe orthogonale à celle de (D).

c) f est la symétrie orthogonale par rapport à (D).

**Exercice 22. Expression analytique d'une symétrie d'axe (D).**

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . On donne la droite (D) d'équation :  $y = x - 1$ . On note  $S_{(D)}$  la symétrie orthogonale par rapport à (D).

1. Déterminer l'expression analytique, puis l'écriture complexe de  $S_{(D)}$ .
2. Soit  $\vec{u}$  le vecteur de coordonnées  $\left(\frac{1}{2}\right)$  et  $t_{\vec{u}}$  la translation de vecteur  $\vec{u}$ .  
On pose  $f = t_{\vec{u}} \circ S_{(D)}$ .  
a) Montrer que f est une symétrie glissée, puis déterminer son expression analytique et l'écriture complexe de f.  
b) Déterminer les éléments caractéristiques de f.

**Solution.**

1. Soit  $M(x; y)$  un point du plan et  $M'(x'; y')$  image de M par  $S_{(D)}$ . Les vecteurs  $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j}$  et  $\vec{n} = \vec{i} - \vec{j}$  sont respectivement un vecteur directeur et un vecteur normal de (D). Ainsi,

$$M' = S_{(D)}(M) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \overrightarrow{MM'} = \lambda \vec{n} \Leftrightarrow \lambda \in \mathbb{R} / \begin{cases} x' = x + \lambda \\ y' = y - \lambda \end{cases}$$

Soit K le milieu de  $[MM']$ . On a :

$$x_K = \frac{x'+x}{2} = \frac{2x+\lambda}{2} \quad \text{et} \quad y_K = \frac{y'+y}{2} = \frac{2y-\lambda}{2}$$

$$K \in (D) \Leftrightarrow \frac{2x+\lambda}{2} - \frac{2y-\lambda}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -x + y + 1 \text{ par suite,}$$

$$\begin{cases} x' = x - x + y + 1 = y + 1 \\ y' = y + x - y - 1 = x - 1 \end{cases}$$

ainsi,  $S_{(D)}$  a pour expression analytique :  $x' = y + 1$  et  $y' = x - 1$ .

De plus, en notant  $z = x + iy$  l'affixe de M et  $z' = x' + iy'$  celui de  $M'$ . On en déduit

$$z' = y + 1 + (x - 1)i = i(x - iy) + 1 - i = i\bar{z} + 1 - i$$

## 5.2 Applications de l'espace

### 5.2.1 Translations et homothéties

Dans cette partie, on note  $\mathcal{E}$  l'espace muni du repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  et  $\mathcal{W}$  l'ensemble des vecteurs de  $\mathcal{E}$ . On appelle application identique de  $\mathcal{E}$ , et on note  $\text{id}_{\mathcal{E}}$  l'application de  $\mathcal{E}$  dans lui-même qui a tout point  $M$  associe lui-même c'est-à-dire pour tout  $M \in \mathcal{E}$ ,  $\text{id}_{\mathcal{E}}(M) = M$ .

#### ■ Définition et propriété caractéristique des translations.

**Définition.** Soit  $\vec{u}$  un vecteur  $\mathcal{W}$ .

On appelle translation de vecteur  $\vec{u}$ , et on note  $t_{\vec{u}}$ , l'application de  $\mathcal{E}$  dans lui-même qui a tout point  $M$  associe le point  $M'$  tel que :  $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ .

- Si  $\vec{u} = \vec{0}$ ,  $t_{\vec{u}}$  est l'application identique.
- Si  $\vec{u} \neq \vec{0}$ , aucun point n'est invariant par  $t_{\vec{u}}$ .

**Propriété caractéristique.** Soit  $f$  une application de  $\mathcal{E}$  dans lui-même.

$f$  est une translation si et seulement si, pour tous points  $M$  et  $N$  d'images respectives  $M'$  et  $N'$ , on a :  $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$ .

On en déduit que :

- ☞ Toute translation de  $\mathcal{E}$  est une isométrie.
- ☞ Toute translation linéaire associée à une translation est l'application identique de  $\mathcal{W}$ .

#### ■ Expression analytique d'une translation.

**Proposition.** L'espace est muni du repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

L'expression analytique de la translation de vecteur  $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  est : 
$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \\ z' = z + c \end{cases}$$

#### Remarque.

Toutes les propriétés relatives aux translations dans le plan (sauf la détermination complexe) s'étendent de façon évidente aux translations de l'espace.

#### ■ Définition et propriété caractéristique des homothéties.

**Définition.** Soit  $O$  un point de  $\mathcal{W}$  et  $k$  un nombre réel non nul.

On appelle homothétie de centre  $O$  et de rapport  $k$ , et on note  $h_{(O,k)}$ , l'application de  $\mathcal{E}$  dans lui-même qui a tout point  $M$  associe le point  $M'$  tel que :  $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ .

- Si  $k = 1$ ,  $h$  est l'application identique.
- Si  $k \neq 1$ ,  $O$  est le seul point invariant.
- Si  $k = -1$ ,  $h$  est la symétrie de centre  $O$ .

## 5.3 Symétries orthogonales

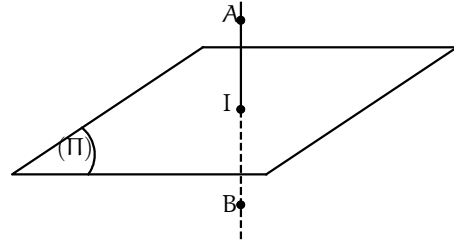
Dans cette partie, l'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

### 5.3.1 Réflexions

Soit  $A$  et  $B$  deux points distincts de  $\mathcal{E}$  et  $I$  le milieu de  $[AB]$ .

L'ensemble des points équidistants de  $A$  et  $B$  est le plan  $(\Pi)$  orthogonal à la droite  $(AB)$  en  $I$ .

Ce plan  $(\Pi)$  s'appelle plan médiateur de  $[AB]$ .

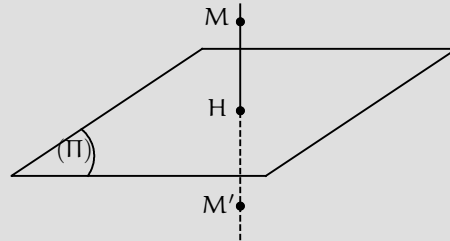


#### Définition.

Soit  $(\Pi)$  un plan de  $\mathcal{E}$ .

On appelle réflexion de plan  $(\Pi)$ , et on note  $S_{\Pi}$  l'application de  $\mathcal{E}$  dans lui-même qui, à tout point  $M$  associe le point  $M'$  tel que :

- si  $M \in (\Pi)$ , alors  $M' = M$ ;
- si  $M \notin (\Pi)$ , alors  $(\Pi)$  le plan médiateur de  $[MM']$ .



#### ■ Expression analytique d'une réflexion.

##### Point Méthode.

Soit  $(\Pi)$  un plan d'équation  $ax + by + c + d = 0$  et  $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  un vecteur normal de  $(\Pi)$ .

Soit  $M$  un point de  $\mathcal{E}$  et  $M'$  son image par  $S_{\Pi}$ .

Pour déterminer l'expression analytique de  $S_{\Pi}$  on raisonne en deux étapes :

1. Les vecteurs  $\overrightarrow{MM'}$  et  $\vec{n}$  sont colinéaires,
2. Le milieu  $I$  de  $[MM']$  appartient à  $(\Pi)$ .

##### Exercice 26.

Soit  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  un repère orthonormal direct. On considère le plan  $(\mathcal{P})$  d'équation  $2x - y + z - 3 = 0$ . Déterminer l'expression analytique de chacun des transformations suivantes :

1. Réflexion du plan  $(\mathcal{P})$ ;
2. Projection orthogonale sur  $(\mathcal{P})$ .

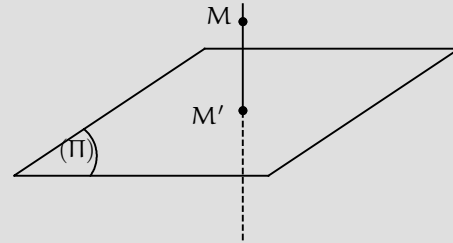
## ■ Projection orthogonale sur un plan

### Définition.

Soit  $(\Pi)$  un plan de  $\mathcal{E}$ .

On appelle *projection orthogonale sur  $(\Pi)$* , l'application de  $\mathcal{E}$  dans lui-même qui, à tout point  $M$  associe le point  $M'$  tel que :

- si  $M \in (\Pi)$ , alors  $M' = M$ ;
- si  $M \notin (\Pi)$ , alors  $(MM') \perp (\Pi)$  et  $M' \in (\Pi)$

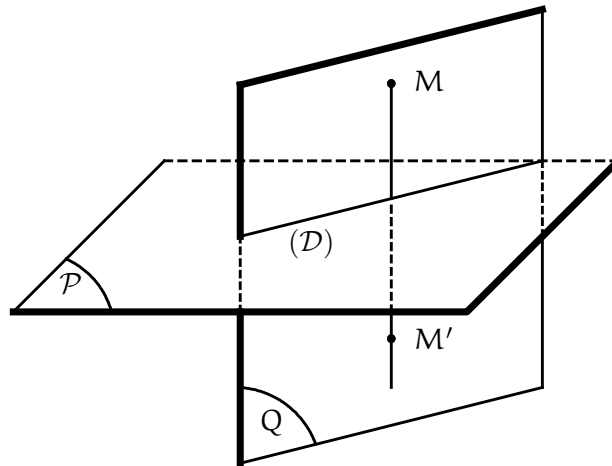


On en déduit que :

- ☞ Toute projection orthogonale est idempotent c'est-à-dire  $p \circ p = p$ .
- ☞ Toute projection orthogonale est une application affine, donc conserve le barycentre, l'alignement, le parallélisme.

## 5.4 Demi-tours

Soit  $\mathcal{P}$  un plan de l'espace  $\mathcal{E}$ .



Les plans  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$  sont sécants suivant la droite  $(\mathcal{D})$ .

- Pour tout plan  $\mathcal{Q}$  perpendiculaire à  $\mathcal{P}$ , la restriction de la réflexion au plan  $\mathcal{Q}$  est une réflexion plane d'axe la droite  $(\mathcal{D}) = \mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$ .
- La réflexion par rapport au plan  $\mathcal{P}$  est l'isométrie dont l'ensemble des points invariants est le plan  $\mathcal{P}$ .
- Soit  $S_{\mathcal{P}}$  la réflexion de plan  $\mathcal{P}$ ,  $S_{\mathcal{P}} \circ S_{\mathcal{P}} = \text{Id}_{\mathcal{E}}$ .

Pour la suite, on considère que les plans  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$  sont perpendiculaires suivant la droite  $(\mathcal{D})$ . Dans ce cas, on en déduit la définition suivante :

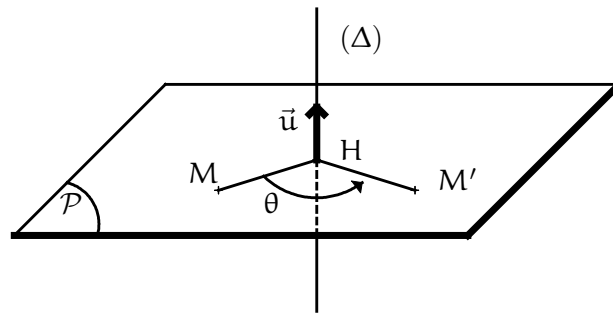


Figure.

☞ Pour tout plan  $\mathcal{P}$  orthogonal à  $(\Delta)$  la restriction de la rotation  $r$  au plan  $\mathcal{P}$  est une rotation plane de centre  $\Omega = \mathcal{P} \cap (\Delta)$  d'angle  $\theta$ .

☞ En particulier si  $M_1$  est défini par  $\overrightarrow{HM_1} = \vec{u} \wedge \overrightarrow{HM}$  où  $\vec{u}$  est un vecteur directeur unitaire de  $(\Delta)$  alors

$$\overrightarrow{HM'} = \overrightarrow{HM} \cos \theta + \overrightarrow{HM_1} \sin \theta$$

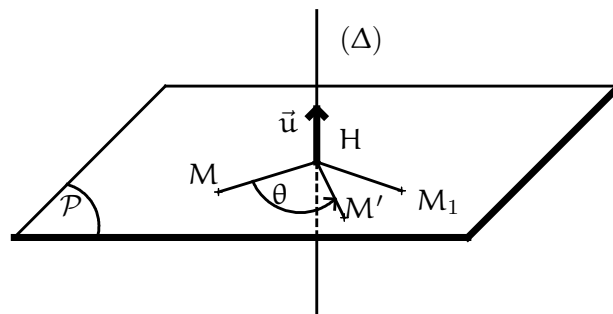


Figure.

☞ Une rotation d'axe  $(\Delta, \vec{u})$  est une isométrie dont l'ensemble des points invariants est la droite  $(\Delta)$ .

☞ Une rotation d'axe  $(\Delta, \vec{u})$  et d'angle  $\pi$  est appelée demi-tour.

**Théorème.** Soit  $\mathcal{P}$  et  $Q$  deux plans sécants suivant une droite  $(\Delta)$ .

- La composée de deux réflexions par rapport à  $\mathcal{P}$  et  $Q$  est une rotation d'axe  $(\Delta)$ .
- Réciproquement, pour tout plan  $\mathcal{P}$  passant par  $(\Delta)$ , il existe un unique plan  $Q$  tel que la rotation d'axe  $(\Delta)$  s'écrive  $r = S_{\mathcal{P}} \circ S_Q$ .

☞ Si  $\mathcal{P} \perp Q$  alors  $S_{\mathcal{P}} \circ S_Q$  est le demi-tour d'axe  $(\Delta) = \mathcal{P} \cap Q$ .

### 5.4.2 Symétrie centrale

Soit  $A$  un point de l'espace  $\mathcal{E}$  la symétrie par rapport au point  $A$  est une isométrie de  $\mathcal{E}$  ayant un seul point invariant.

L'image d'un point  $M(x, y, z)$  de  $(\Delta)$  a pour coordonnées :

$$x' = -x - y + 2z - 1 = (1 + 2\lambda) - (2 + \lambda) + 2(3 + 2\lambda) - 1 = \lambda + 2$$

$$y' = -2x + 2z - 1 = -2(1 + 2\lambda) + 2(3 + 2\lambda) - 1 = 3$$

$$z' = -2x - y + 3z - 1 = -2(1 + 2\lambda) - (2 + \lambda) + 3(3 + 2\lambda) - 1 = \lambda + 4$$

Lorsque  $\lambda$  décrit  $\mathbb{R}$ , l'image de  $(\Delta)$  est la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 3 \\ z = 4 + \lambda \end{cases} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

elle passe par le point  $A(2, 3, 4)$  et elle a pour vecteur directeur  $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

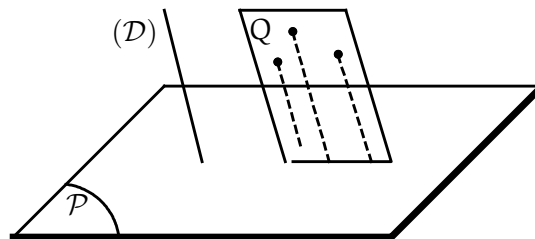
3. Une représentation paramétrique de la droite  $(\mathcal{L}) : x - 1 = y - 2 = z - 3$  est, en appelant  $t$  la valeur commune de  $x - 1, y - 2, z - 3$  :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 3 + t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

elle passe par le point  $B(1, 2, 3)$  et elle a pour vecteur directeur  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Puisque  $(\mathcal{L})$  a pour direction celle de la projection  $f$  donc son image est le singleton  $\{B'\} = \{f(B)\}$ .

4. Soit  $Q$  le plan d'équation :  $3x - y - 2z + 2 = 0$ . Le plan vectoriel associé à la direction de  $Q$  a pour équation :  $3x - y - 2z = 0$ . Ce plan contient le vecteur  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  donc  $Q$  est parallèle à  $(\mathcal{D})$ .



On a représenté  $\mathcal{P}, (\mathcal{D}), Q$ .

L'image de  $Q$  est l'intersection de  $Q$  et  $\mathcal{P}$  :

$$\begin{cases} 3x - y - 2z + 2 = 0 \\ 2x + y - 2z + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{5}z - \frac{3}{5} \\ y = \frac{2}{5}z + \frac{1}{5} \end{cases}$$

C'est la droite passant par  $C\left(-\frac{3}{5}, \frac{1}{5}, 0\right)$  dirigé par  $\vec{w} = \frac{4}{5}\vec{i} + \frac{2}{5}\vec{j} + \vec{k}$ .

## 6.2.2 Algorithme d'Euclide

**Proposition.** Pour tous entiers  $a$  et  $b$  strictement positifs, on a

$$\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(b, r)$$

où  $r$  est le reste de la division euclidienne de  $a$  par  $b$ .

On exploite cette proposition pour calculer le pgcd. Soient  $a$  et  $b$  des entiers positifs. Faisons les divisions successives :

$$\begin{array}{rcl} a & = & bq_1 + r_1 \\ b & = & r_1q_2 + r_2 \\ r_1 & = & r_2q_3 + r_3 \\ \vdots & & \vdots \\ r_{n-2} & = & r_{n-1}q_n + r_n \\ r_{n-1} & = & r_nq_{n+1} + 0 \end{array} \quad 0 = r_{n+1} < r_n < \dots < r_2 < r_1 < |b|.$$

Puisque les restes sont positifs ou nuls et diminuent strictement, le dernier est nul. Le dernier reste non nul est un nombre  $r_n > 0$  tel que  $r_n | r_{n-1}$ , donc

$$\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(b, r_1) = \text{pgcd}(r_1, r_2) = \dots = \text{pgcd}(r_{n-1}, r_n) = r_n$$

Cette méthode de calcul du pgcd s'appelle l'*algorithme d'Euclide*.

## 6.2.3 Les théorèmes de Bézout et de Gauss

**Théorème.** Soient  $a, b \in \mathbb{Z}$  des entiers non tous deux nuls. Alors il existe  $u, v \in \mathbb{Z}$  tels que  $au + bv = \text{pgcd}(a, b)$  (relation de Bézout).

**Notations.** Pour tout entier  $a$ , on note  $a\mathbb{Z}$  l'ensemble des multiples de  $a$ . Si  $a$  et  $b$  sont des entiers, on note  $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$  l'ensemble des entiers de la forme  $au + bv$ , où  $u, v \in \mathbb{Z}$ .

### Exercice 34. Conséquence du théorème de Bézout

Soient  $a$  et  $b$  des entiers non tous deux nuls. Montrer que :

1.  $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \text{pgcd}(a, b)\mathbb{Z}$
2. En déduire que  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux si il existe des entiers  $u, v \in \mathbb{Z}$  tel que  $au + bv = 1$ .

**Solution.**

Posons  $d = \text{pgcd}(a, b)$ .

1. D'après le théorème de Bézout,  $d \in a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ , donc  $d\mathbb{Z} \subset a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ . Réciproquement,  $a$  et  $b$  sont multiples de  $d$ , donc tout entier  $ak + bl \in a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$  est un multiple de  $d$ , c'est-à-dire appartient  $d\mathbb{Z}$ .
2. D'après 1, en déduit que

$$\text{pgcd}(a, b) = 1 \Leftrightarrow a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \mathbb{Z} \Leftrightarrow \text{il existe des entiers } u, v \in \mathbb{Z} \text{ tel que } au + bv = 1$$

**Solution.**

Supposons  $p|bc$ . Si  $p$  ne divise pas  $b$ , alors comme  $p$  est un nombre premier, il est premier avec  $b$  d'après le théorème de Gauss,  $p$  divise  $c$ .

**Exercice 37. Corollaire du théorème de Gauss**

Soit  $p$  un nombre premier et  $b, c \in \mathbb{Z}$ . Montrer que :

Pour tout entier  $k$  tel que  $1 \leq k \leq p-1$ , le coefficient binomial  $C_p^k = \frac{p!}{k!(p-k)!}$  est un multiple de  $p$ .

**Solution.** On a

$$p! = k!(p-k)C_p^k$$

Ainsi,  $p$  divise  $k!(p-k)C_p^k$ . Supposons  $1 \leq k \leq p-1$ . Alors  $p$  ne divise aucun entier entre 1 et  $k$  donc  $p$  ne divise pas  $k!$ , d'après le théorème de Gauss. Puisqu'on a aussi  $1 \leq p-k \leq p-1$ ,  $p$  ne divise pas non plus  $(p-k)!$ . Toujours par le théorème de Gauss, on en déduit que  $p$  ne divise pas  $k!(p-k)!$  et par suite,  $p$  divise  $C_p^k$ .

### 6.2.4 Equation $ax + by = c$ , $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

Soient  $a, b \in \mathbb{Z}$  des entiers non nuls et soit  $c \in \mathbb{Z}$ .

Les nombres de la forme  $au + bv$ , avec  $u, v \in \mathbb{Z}$ , sont les multiples de  $\text{pgcd}(a, b)$ .

On en déduit :

**l'équation  $ax + by = c$  a des solutions si et seulement si  $c$  est un multiple de  $\text{pgcd}(a, b)$ .**

**Exercice 38. Equation  $ax + by = c$**

Soit  $c \in \mathbb{Z}$ . Trouver tous les couples  $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  tels que

$$931x + 513y = c$$

**Solution.** On remarque que  $931 = 19 \times 49$  et  $513 = 19 \times 27$  donc  $\text{pgcd}(931, 513) = 19$ .

On a deux situations :

☞  $c$  n'est pas multiple de  $19 = \text{pgcd}(931, 513)$ , alors l'équation n'a pas de solution.

☞  $c = 19c'$ ,  $c' \in \mathbb{Z}$ . L'équation équivaut à  $49x + 27y = c'$ .

- Puisque  $49 \times (-11) + 27 \times 20 = 1$ ,  $(x_0, y_0) = (-11c', 20c')$  est solution.
- Toute solution  $(x, y)$  vérifie  $49(x - x_0) + 27(y - y_0) = 0$  c'est-à-dire

$$27(y - y_0) = -49(x - x_0)$$

Donc  $27|49(x - x_0)$ .

Puisque 27 et 49 sont premiers entre eux, on en déduit par le Théorème de Gauss que  $27|(x - x_0)$ , donc il existe  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $x = x_0 + 27k$

Il vient

$$27(y - y_0) = -49(x - x_0) = -49 \times 27k$$

d'où  $y - y_0 = -49k$  et  $y = y_0 - 49k$ .

On vérifie bien que ces nombres  $x$  et  $y$  sont bien solution.

### 6.2.6 Décomposition en facteurs premiers

Nous avons montré à la page 51 que tout entier au moins égal à 2 est produit de nombres premiers. Nous allons voir que cette factorisation est essentiellement unique.

**Proposition.** *Pour tout entier  $a > 1$ , il existe une unique suite de nombres premiers  $p_1, p_2, \dots, p_k$  tels que  $a = p_1 p_2 \cdots p_k$  et  $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_k$ .*

En regroupant les termes égaux dans la décomposition, on voit que tout nombre entier  $a > 1$  s'écrit de manière unique à l'ordre près des facteurs :

$$a = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k}$$

où les  $p_i$  sont des nombres premiers deux à deux différent et  $n_i \geq 1$ .

### 6.2.7 Valuation $p$ – adique

Par commodité, on étend la décomposition précédente en considérant un produit sur tous les nombres premiers, y compris ceux qui ne divisent pas l'entier  $a$  qu'on affecte de l'exposant 0 : par convention en effet, si  $q$  est un entier non nul, alors  $q^0 = 1$ . Notons  $\mathbb{P}$  l'ensemble des nombres premiers. On écrit :

$$a = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{v_p(a)} \quad \text{où } v_p(a) \in \mathbb{N}$$

Dans ce produit, il n'y a bien sûr qu'un nombre fini de facteurs différents de 1. Car il n'y a qu'un nombre fini d'exposant non nuls.

**Définition.** *Soit  $a$  un entier et  $p \in \mathbb{P}$ . L'entier  $v_p(a)$  s'appelle l'exposant de  $p$  dans la décomposition de  $a$  en facteurs premiers.*

☞  $1188 = 11 \times 2^2 \times 3^3$  donc  $v_{11}(1188) = 1$ ;  $v_2(1188) = 2$  et  $v_3(1188) = 3$ .

☞ Pour tout entiers naturels  $a, b$  et  $p$  un nombre premier,  $v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$ .

**Proposition.** *Soient  $a$  et  $b$  deux entiers tels que  $a = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{v_p(a)}$  et  $b = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{v_p(b)}$ . Alors*

$$\text{pgcd}(a, b) = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\min(v_p(a), v_p(b))} \quad \text{et} \quad \text{ppcm}(a, b) = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\max(v_p(a), v_p(b))}$$

### 6.2.8 Nombre de diviseurs d'un entier

Soit  $a = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k}$  un entier décomposé en facteurs premiers. Pour qu'un entier positif  $d$  divise  $a$ , il faut et il suffit que la décomposition de  $d$  soit de la forme

$$d = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k} \quad \text{où } 0 \leq \alpha_i \leq n_i \quad \text{pour tout } 1 \leq i \leq k$$

Il y a  $n_1 + 1$  valeurs possibles pour  $\alpha_1$ ,  $n_2 + 1$  valeurs possibles pour  $\alpha_2$ , etc, donc on en déduit la proposition suivante :

**Proposition.** *Soient  $a$  et  $b$  deux entiers tels que  $a = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k}$ . Alors le nombre*

$$N = (n_1 + 1)(n_2 + 1) \cdots (n_k + 1)$$

*est le nombre des diviseurs positifs de  $a$ .*

☞ Le nombre  $1188 = 11 \times 2^2 \times 3^3$  admet 24 diviseurs positifs car  $(1 + 1)(2 + 1)(3 + 1) = 24$ .

### 6.3.1 Petit théorème de Fermat

Soit  $p$  un nombre premier et  $b, c \in \mathbb{Z}$ . on a montré à la page 55 que Pour tout entier  $k$  tel que  $1 \leq k \leq p-1$ , le coefficient binomial  $C_p^k = \frac{p!}{k!(p-k)!}$  est un multiple de  $p$  c'est-à-dire  $C_p^k \equiv 0[p]$ . De ce fait, on en déduit le théorème suivant :

**Théorème.** Soit  $p$  un nombre premier. Pour tout entier  $a \in \mathbb{Z}$ , on a  $a^p \equiv a[p]$ .

**Corollaire.** Soit  $p$  un nombre premier.

Pour tout entier  $a \in \mathbb{Z}$  non multiple de  $p$ , on a  $a^{p-1} \equiv 1[p]$ .

**Démonstration.** Soit  $p$  un nombre premier. D'après le petit théorème de Fermat,  $a^p \equiv a[p]$  autrement dit  $p$  divise  $a^p - a = a(a^{p-1} - a)$ . Si  $p$  ne divise pas  $a$ , alors par le théorème de Gauss divise  $a^{p-1} - 1$  donc  $a^{p-1} \equiv 1[p]$ .  $\square$

### 6.3.2 Système d'équations $x \equiv a[n], x \equiv b[p]$

**Point Méthode.**

Soient  $n$  et  $p$  deux entiers premiers entre eux.

On cherche les entiers  $x \in \mathbb{Z}$  qui sont congrus à  $a$  modulo  $n$  et à  $b$  modulo  $p$ .

 **Premier cas :** on calcule une solution particulière

On écrit une relation de Bézout entre  $n$  et  $p$

$$nu + pv = 1 \quad \text{avec } u, v \in \mathbb{Z}.$$

Posons  $\alpha = pv$  et  $\beta = nu$ . On a alors

$$\alpha \equiv \begin{cases} 1 \pmod{n} \\ 0 \pmod{p} \end{cases} \quad \text{et} \quad \beta \equiv \begin{cases} 0 \pmod{n} \\ 1 \pmod{p} \end{cases}$$

on en déduit

$$a\alpha \equiv \begin{cases} a \pmod{n} \\ 0 \pmod{p} \end{cases} \quad \text{et} \quad b\beta \equiv \begin{cases} 0 \pmod{n} \\ b \pmod{p} \end{cases}$$

donc

$$a\alpha + b\beta \equiv \begin{cases} a \pmod{n} \\ b \pmod{p} \end{cases}$$

Ainsi l'entier  $x_0 = a\alpha + b\beta$  est une solution du système d'équations.

 **Deuxième cas :** on calcule toutes les solutions

Pour tout entier  $x \in \mathbb{Z}$ , on a les équivalences :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x \equiv a \pmod{n} \\ x \equiv b \pmod{p} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv x_0 \pmod{n} \\ x \equiv x_0 \pmod{p} \end{cases} \Leftrightarrow (x - x_0) \text{ est un multiple de } n \text{ et de } p \\ &\Leftrightarrow (x - x_0) \text{ est un multiple de } np \end{aligned}$$

car  $n$  et  $p$  étant premiers entre eux, on a  $\text{ppcm}(n, p) = np$ . Les solutions sont donc les entiers  $x$  de la forme  $x_0 + knp$  où  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Exercice 48. Suite de nombres premiers**

1. a) Calculer  $(1 + \sqrt{6})^2$ ,  $(1 + \sqrt{6})^4$  et  $(1 + \sqrt{6})^6$ .  
 b) Appliquer l'algorithme d'Euclide à 847 et 342. Que peut-on en déduire ?
2. Soit  $n$  un entier naturel non nul. On note  $a_n$  et  $b_n$  les entiers naturels tels que .

$$(1 + \sqrt{6})^n = a_n + b_n\sqrt{6}$$

- a) Que valent  $a_1$  et  $b_1$  ? d'après les calculs de la question **1.a**, donner d'autres valeurs de  $a_n$  et  $b_n$ .
- b) Calculer  $a_{n+1}$  et  $b_{n+1}$  en fonctions de  $a_n$  et  $b_n$ .
- c) Démontrer que, si 5 ne divise pas  $a_n + b_n$ , alors 5 ne divise pas non plus  $a_{n+1} + b_{n+1}$ .  
 En déduire que, quel que soit  $n$  entier naturel non nul, 5 ne divise pas  $a_n + b_n$ .
3. Démontrer que, si  $a_n$  et  $b_n$  sont premiers entre eux, alors  $a_{n+1}$  et  $b_{n+1}$  sont premiers entre eux. En déduire que, quel que soit  $n$  entier naturel non nul,  $a_n$  et  $b_n$  sont premiers entre eux.

**Solution.**

1. a) On a représenté ci-dessous la sixième ligne du triangle de Pascal .

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & 1 \\
 & & & & & & 1 & 2 & 1 \\
 & & & & & & 1 & 3 & 3 & 1 \\
 & & & & & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
 & & & & & & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
 & & & & & & 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1
 \end{array}$$

sixième ligne du triangle de Pascal.

On a successivement .

$$(1 + \sqrt{6})^2 = 7 + 2\sqrt{6}, \quad (1 + \sqrt{6})^4 = 73 + 28\sqrt{6} \text{ et } (1 + \sqrt{6})^6 = 847 + 342\sqrt{6}.$$

b) On utilise l'algorithme d'Euclide .

- $847 = 342 \times 2 + 163$ 
  - $847 = 342 \times 2 + 163$ 
    - $163 = 10 \times 16 + 3$ 
      - $16 = 3 \times 5 + 1$

On en déduit l'identité  $-107 \times 847 + 265 \times 342 = 1$ , donc par suite d'après le théorème Bezout, les entiers 847 et 342 sont premiers entre eux.

2. a)  $a_1 = 1$  et  $b_1 = 1$  d'après les calculs de la question **1.a**, on en déduit que  $a_2 = 7$  et  $b_2 = 2$ ,  $a_4 = 73$  et  $b_4 = 28$ ,  $a_6 = 847$  et  $b_6 = 342$ .

b) Pour tout  $n \geq 0$  on a

$$(1 + \sqrt{6})^{n+1} = (a_n + b_n\sqrt{6})(1 + \sqrt{6}) = a_n + 6b_n + (a_n + b_n)\sqrt{6}$$

donc on en déduit que pour tout  $n \geq 0$ ,  $a_{n+1} = a_n + 6b_n$  et  $b_{n+1} = a_n + b_n$ .

c) Supposons par l'absurde que 5 ne divise pas  $a_{n+1} + b_{n+1}$  mais divise  $a_n + b_n$ . Comme 5 divise  $a_n + b_n$  alors il divise  $b_{n+1}$  de plus, on a pour tout  $n \geq 0$ ,  $a_{n+1} - b_{n+1} = 5b_n$  donc 5 divise également  $a_{n+1} - b_{n+1}$  et par

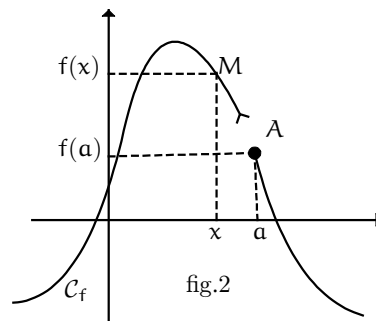
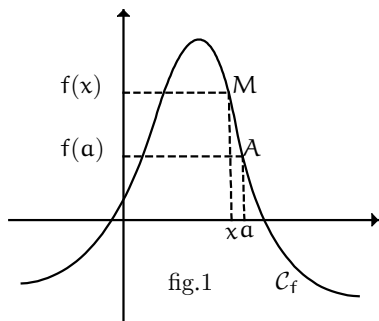
## 7 Continuité et dérivabilité

### 7.1 Continuité

#### 7.1.1 Continuité d'une fonction en un point

##### Introduction

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et  $a$  un réel de  $I$ . On note  $C_f$  sa courbe représentative et  $A(a, f(a))$  le point de la courbe  $C_f$  d'abscisse  $a$ . Pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $I$ , on considère le point  $M$  de la courbe  $C_f$  d'abscisse  $x$ .



☞ **figure 1.**  $f$  est une fonction continue en  $a$ .

☞ Intuitivement la figure **fig 1** permet de conjecturer que pour tout réel  $a$  de  $I$ , on peut rendre  $f(x)$  aussi proche que l'on veut de  $f(a)$  pourvu que  $x$  soit suffisamment proche de  $a$ .

☞ **figure 2.**  $f$  n'est pas une fonction continue en  $a$ .

☞ Intuitivement la figure **fig 2** permet de conjecturer la courbe  $C_f$  présente un saut au point  $A$  d'abscisse  $a$  par conséquent  $M$  n'est pas proche de  $A$  lorsque  $x$  est proche de  $a$ .

On a la définition suivante :

**Définition.** Soit  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction numérique et  $a$  un point où la fonction est définie. On dit que  $f$  est continue en  $A(a, f(a))$  si on a simultanément les deux conditions :

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  existe
- $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

- ☞ Cette définition implique nécessairement que  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x)$  et  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x)$  existent et sont égales.
- ☞ Par abus de langage, on dira que la fonction  $f$  est continue au point  $x = a$  ou en  $x = a$  lorsqu'elle est continue au point  $A(a, f(a))$ .

La fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

n'est pas continue en 1.

On a représenté sa courbe ( $C_f$ ) ci-dessous :

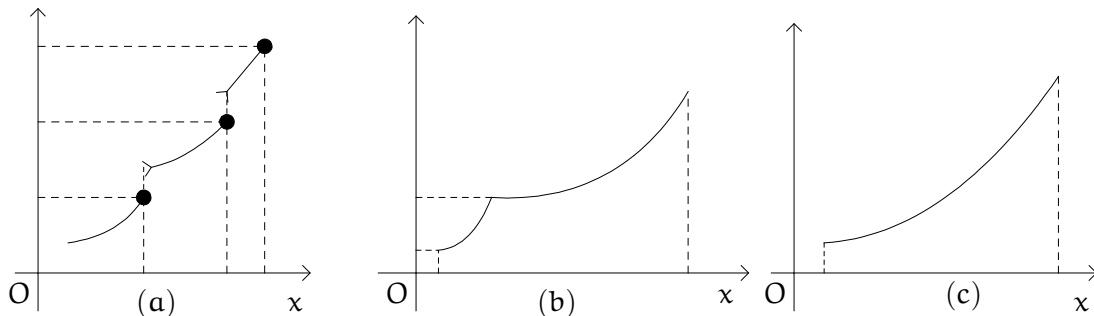
d'où  $f(\mathbb{R}) = \left[ \frac{\sqrt{7}}{2}; +\infty \right[$ .

2.  $f$  est dérivable sur  $]0; \pi[$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = -\sin x$  donc on en déduit que  $f$  est décroissante sur  $]0; \pi[$  par suite,  $f(]0; \pi[) = ]f(\pi); f(0)[ = ]0; 2[$ .

### 7.3 Théorème des fonctions réciproques

On s'intéresse au comportement d'une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  monotone définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  supposé d'intérieur non vide. Plus précisément, on voudrait savoir :

- quelle condition imposer à  $f$  pour que l'application  $f : I \rightarrow f(I)$  soit bijective;
- lorsque  $f^{-1}$  existe, si l'on peut déduire la continuité ou la dérivabilité de  $f^{-1}$  de celle de  $f$ .



Trois cas de figures.

On a représenté des graphes de fonctions monotones.

- Le graphe (a) est celui d'une fonction strictement monotone sur  $I$  qui n'est pas continue sur  $I$  (mais seulement continue par morceaux). On constate que  $f(I)$  n'est pas un intervalle, mais  $f : I \rightarrow f(I)$  est bijective.
- Le graphe (b) est celui d'une fonction monotone et continue sur  $I$ , mais non strictement monotone. Dans ce cas  $f(I)$  est un intervalle, mais la fonction  $f : I \rightarrow f(I)$  n'est pas bijective.
- Le graphe (c) est celui d'une fonction strictement monotone et continue sur  $I$ . Dans ce cas tout est parfait :  $f(I)$  est un intervalle (d'après le théorème des valeurs intermédiaires) et  $f : I \rightarrow f(I)$  est bijective. Ce dernier graphe correspond aux hypothèses de théorème suivant on l'admet :

**Théorème.** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue strictement monotone définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ . Posons  $J = f(I)$ . Alors

- $J$  est un intervalle
- $f$  induit une bijection de  $I$  sur  $J$ ,
- $f^{-1} : J \rightarrow I$  est continue strictement monotone et de même sens que  $f$ .
- Si  $f$  est dérivable en  $x_0 \in I$  et si  $f'(x_0) \neq 0$ , alors  $f^{-1}$  est dérivable en  $f(x_0)$  et :

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

c'est-à-dire pour tout  $x \in [0; \frac{\pi}{4}]$ ,  $x \leq \tan x$ .

2. Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(t) = \sin t$ .

Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$f'(t) = \cos t \leq 1$$

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . L'inégalité des accroissements finis nous permet d'obtenir l'inégalité pour tout  $t \in [0; x]$  ou  $t \in [x; 0]$ ,

$$|g(x) - g(0)| \leq 1 \times |x - 0|$$

c'est-à-dire pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $|\sin x| \leq |x|$ .

### 7.4.3 Variations et signe de la dérivée

L'application la plus importante du **théorème de Rolle** (page 80) est sans doute celle qui lie les variations d'une fonction au signe de sa dérivée :

**Théorème.** Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  d'intérieur non vide, de bornes  $a$  et  $b$  ( $a < b$ ), et  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue sur  $I$  et dérivable sur l'intérieur  $]a, b[$  de  $I$ . Alors :

1. ( $f$  croissante sur  $I$ )  $\Leftrightarrow (\forall x \in ]a, b[ f'(x) \geq 0)$ .
2. ( $f$  décroissante sur  $I$ )  $\Leftrightarrow (\forall x \in ]a, b[ f'(x) \leq 0)$ .
3. ( $f$  est constante sur  $I$ )  $\Leftrightarrow (\forall x \in ]a, b[ f'(x) = 0)$ .

Soient  $a$  et  $b$  deux nombres réels tels que  $a < b$ .

☞ On dit qu'un intervalle  $I = [a, b]$  de  $\mathbb{R}$  est d'intérieur non vide si pour tout  $x$  de l'intervalle ouvert  $]a, b[$  il existe un intervalle ouvert  $]c, d[$  contenant  $x$  tel que  $]c, d[ \subset ]a, b[$ .

☞ En considérant les hypothèses du théorème ci-dessus, on en déduit le théorème suivant :

**Théorème.** L'application  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  est strictement croissante sur  $I$  si et seulement si les deux conditions suivantes sont réalisées :

1.  $\forall x \in ]a, b[ f'(x) \geq 0$ ,
2. L'ensemble  $\{x \in ]a, b[ / f'(x) = 0\}$  ne contient pas d'intervalle de longueur non nulle.

#### Exercice 56. Définition de la fonction arctangente

Soit  $f$  la fonction définie de  $I = ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$  vers  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \tan x$ .

1. Démontrer que  $f$  admet une bijection réciproque définie sur  $\mathbb{R}$  que l'on notera  $\arctan$ . En déduire sa fonction dérivée.
2. Pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ , calculer :

$$\arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

$x \mapsto h\left(\frac{1}{x} - 1\right)$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  comme composée. On en déduit que  $H$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  comme somme de fonctions dérivables et pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$  on a

$$H'(x) = [h^{-1}]'(x-1) - \frac{1}{x^2}[h^{-1}]\left(\frac{1}{x} - 1\right)$$

$$H'(x) = -\frac{2}{\pi(1+(x-1+1)^2)} + \frac{2}{x^2\pi\left(1+\left(\frac{1}{x}-1+1\right)^2\right)}$$

$$H'(x) = -\frac{2}{\pi(1+x^2)} + \frac{2}{\pi(1+x^2)} = 0$$

Donc  $H$  est constante sur  $]-\infty; 0[$  et sur  $]0; +\infty[$ .

b)  $H(1) = (h^{-1})(0) + (h^{-1})(0) = 2(h^{-1})(0)$ .

$h(x) = 0 \Leftrightarrow -1 - \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 0 \Leftrightarrow \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right) = -1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2}x = -\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ .

Donc  $h^{-1}(0) = -\frac{1}{2}$ .

Il s'ensuit que  $H(1) = -1$  et  $H(-1) = (h^{-1})(-2) + (h^{-1})(-2) = 2(h^{-1})(-1)$ .

$h(x) = -1 \Leftrightarrow -1 - \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right) = -1 \Leftrightarrow \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2}x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .

Donc  $h^{-1}(0) = -\frac{1}{2}$ . Il s'ensuit que  $H(-1) = 0$ .

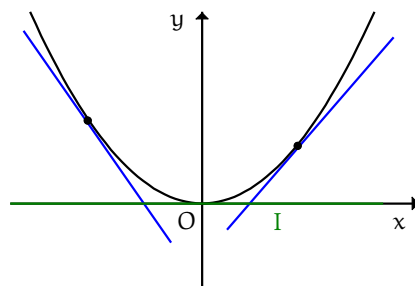
c) On en déduit que  $H(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in ]0; +\infty[ \\ 0 & \text{si } x \in ]-\infty; 0[ \end{cases}$ .

#### 7.4.4 Convexité - concavité

##### ■ Convexité

**Définition.** Soit  $f$  une fonction deux fois dérivable sur un intervalle  $I$ . Si pour tout  $x \in I$ ,  $f''(x) > 0$ , alors la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  de la fonction  $f$  est convexe sur  $I$ .

Interprétation graphique.



■ ☞ La courbe  $(\mathcal{C}_f)$  de la fonction  $f$  est située au-dessus de toutes ses tangentes.

■ ☞ La fonction  $f: x \mapsto \frac{1}{x}$  est convexe sur  $I = ]0; +\infty[$ . En effet,  $f$  est deux fois dérivable sur  $I$  et pour tout  $x \in I$ ,  $f''(x) = \frac{2}{x^3} > 0$ .

Par conséquent  $\forall x \in I$ ,  $f(x) \geq f'(1)(x-1) + f(1)$  c'est-à-dire  $\forall x \in I$ ,  $\frac{1}{x} \geq -x + 2$ .

**En conclusion**, il s'ensuit dans tous les cas les vecteurs  $\vec{BC}$ ,  $\vec{DH}$  et  $\vec{CI}$  ne sont pas coplanaires.

5. On a  $\vec{AF} = \vec{AE} + \vec{EF} = \vec{BE} + \vec{AB} + \vec{EF} = \vec{BE} + 2\vec{EF} = -\vec{EB} + 4\vec{EI}$ . Ainsi, les vecteurs  $\vec{AF}$ ,  $\vec{EI}$  et  $\vec{EB}$  sont coplanaires.

### 8.2 Produit scalaire

La principale difficulté pour calculer un produit scalaire que ce soit dans le plan ou l'espace est le choix de la formule à utiliser car on a plusieurs façons de le calculer.

#### Propriété.

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de l'espace. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

■  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}[\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2]$

■  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$

■  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$  où  $\vec{w}$  est le projeté orthogonal de  $\vec{v}$  sur la direction de  $\vec{u}$ .

De plus, si  $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$  alors  $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$ .

#### 8.2.1 Inégalité de Cauchy- Schwartz

#### Propriété.

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de l'espace. On a :

■  $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$  Inégalité de Cauchy – Schwartz .

On a l'égalité si et seulement si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires.

■  $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$  Inégalité triangulaire.

#### Démonstration.

Pour tous vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de l'espace on a  $|\cos(\vec{u}, \vec{v})| \leq 1$  donc on en déduit  $|\vec{u} \cdot \vec{v}| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| |\cos(\vec{u}, \vec{v})| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ .

On a  $|\vec{u} \cdot \vec{v}| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \iff |\cos(\vec{u}, \vec{v})| = 1 \iff \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} \equiv 0[\pi]$ . Donc  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires.

On a  $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} \leq \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| = (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2$  par suite  $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$  car la fonction  $x \mapsto x^2$  est strictement croissante sur  $[0; +\infty[$ .  $\square$

### 8.3 Produit vectoriel

Une base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  de l'espace est dite directe s'il existe un point O de l'espace tel que le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  soit direct, elle est dite indirecte si  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est indirect. Le sens d'un repère change lorsqu'on échange deux vecteurs. Si  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est un repère direct de l'espace orienté,  $(O, \vec{j}, \vec{k}, \vec{i})$ ,  $(O, \vec{k}, \vec{i}, \vec{j})$  sont des repères directs de cet espace. On utilise la règle du bonhomme d'Ampère ci-dessous pour déterminer l'orientation d'une base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

## 8 VECTEURS DE L'ESPACE

### Expression analytique du produit vectoriel de deux vecteurs dans une base orthonormée directe.

Une base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est dite orthonormée directe si elle est orthonormée et directe. On a alors  $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$ ,  $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$  et  $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$ .

Soit  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  une base orthonormée directe et deux vecteurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

alors on a :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix}$$

#### Exercice 63. Volume d'un tétraèdre

L'espace est muni du repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Soit les points  $A \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $B \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $C \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

1. Calculer l'aire du triangle ABC.
2. Calculer le volume du tétraèdre OABC.

**Solution.**

$$1. \text{ On a } \vec{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{AC} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ Donc } \vec{AB} \wedge \vec{AC} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -21 \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\| = \sqrt{5^2 + (-1)^2 + (-21)^2} = \sqrt{467}. \text{ On en déduit :}$$

$$\mathcal{A}(ABC) = \frac{\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|}{2} = \frac{\sqrt{467}}{2}$$

2. Calculons le volume du tétraèdre OABC.

Soit H le projeté orthogonal de O sur le plan

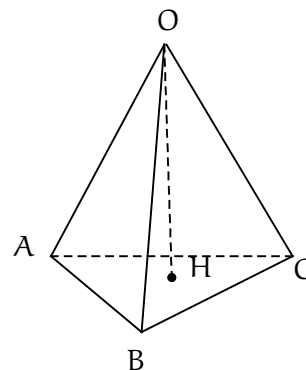
(ABC) on a  $V = \frac{1}{3} OH \times \mathcal{A}(ABC)$ .

Les vecteurs  $\vec{OH}$  et  $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$  sont colinéaires donc on a  $|\vec{AO} \cdot (\vec{AB} \wedge \vec{AC})| = OH \times \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|$  par suite

$$OH = \frac{|\vec{AO} \cdot (\vec{AB} \wedge \vec{AC})|}{\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|} \text{ d'où finalement :}$$

$$V = \frac{1}{6} |\vec{AO} \cdot (\vec{AB} \wedge \vec{AC})|.$$

Comme  $\vec{AO} \cdot (\vec{AB} \wedge \vec{AC}) = 3 \times 5 + 0 \times (-1) - 1 \times (-21) = 36$  on a  $V = \frac{36}{6} = 6$ .



et

$$\arg(a) = \begin{cases} \frac{\theta - 2\pi}{4} [2\pi] & \text{si } \theta \in ]0; 2\pi[ \\ \frac{\theta + 2\pi}{4} [2\pi] & \text{si } \theta \in ]-2\pi; 0[ \end{cases}$$

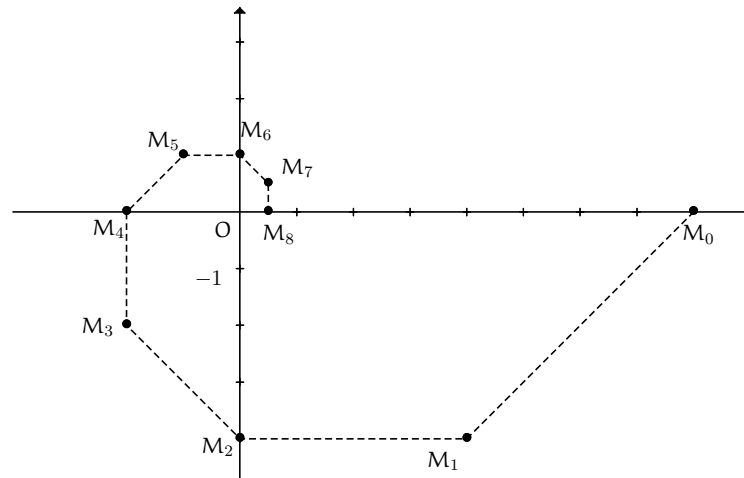
2. Dans cette question on prend  $\theta = \pi$ .

a) On a d'après 1 que  $|a| = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$  et  $\arg(a) = \frac{\pi - 2\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} [2\pi]$ .

b) Dans le plan complexe  $P$  rapporté au repère orthogonal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , on définit l'application  $f$  qui au point  $M$  d'affixe  $z$  associe le point  $M'$  d'affixe  $az$ . L'expression complexe de  $f$  est  $z' = az$ ,  $a \in \mathbb{C}$  et  $a = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$ . Alors  $f$  est la similitude directe de centre  $O$ , de rapport  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  et d'angle  $-\frac{\pi}{4}$ .

c)  $K$  est le point d'affixe  $z_K = 8$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $z_{n+1} = az_n$ .  
On a :

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$z_n$	8	$4(1-i)$	$-4i$	$-2(1+i)$	$-2$	$-1+i$	$i$	$\frac{1}{2}(1+i)$	$\frac{1}{2}$



d) On a :  $OM_{n+1} = \left| \frac{z_n}{2}(1-i) \right| = \frac{\sqrt{2}}{2} |z_n|$   
et

$$M_n M_{n+1} = |z_{n+1} - z_n| = |az_n - z_n| = |z_n| \left| \frac{1}{2}(1-i) - 1 \right| = \frac{\sqrt{2}}{2} |z_n|$$

Donc pour tout  $n$ , le triangle  $OM_n M_{n+1}$  est rectangle isocèle en  $M_{n+1}$  par suite on en déduit que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $A_n = \frac{OM_n \times M_n M_{n+1}}{2} = \frac{1}{4} |z_n|^2$  de ce fait, il s'ensuit que  $A_{n+1} = \frac{1}{4} |z_{n+1}|^2 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} |z_n|^2 = \frac{1}{8} |z_n|^2 = \frac{1}{2} A_n$  donc la suite  $(A_n)$  est géométrique de raison  $\frac{1}{2}$  et de premier terme  $A_0 = 16$  donc pour tout  $n \geq 0$ ,  $A_n = 16 \left(\frac{1}{2}\right)^n$ .

**Solution.**

On considère le plan complexe muni du repère  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

1. a) Si  $z_0 \in \mathbb{R}_+$  alors  $z_1 = \frac{z_0 + z_0}{2} = z_0$  et par récurrence on en déduit

$$\forall n \in \mathbb{N}, z_n = z_0$$

donc  $(z_n)$  est la suite constante égale à  $z_0$ .

b) Si  $z_0 \in \mathbb{R}_-$  alors  $z_1 = \frac{z_0 - z_0}{2} = 0$  et par récurrence on en déduit

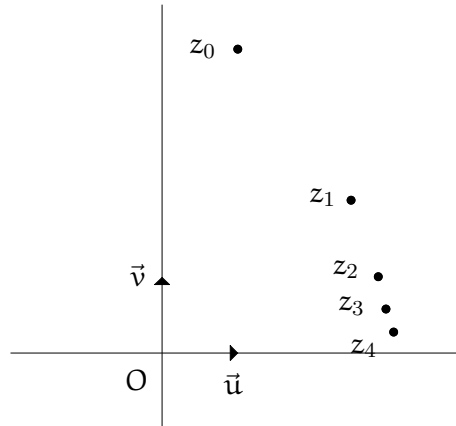
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, z_n = 0$$

donc  $(z_n)_{n>0}$  est la suite constante égale à 0.

2. On suppose désormais que  $z_0 \notin \mathbb{R}$ , et on pose  $z_n = x_n + iy_n$  avec  $x_n$  et  $y_n$  des nombres réels. Pour réaliser la figure suivante on a posé  $z_0 = 1 + 4i$ .

a) On obtient le tableau de valeurs approchées suivants :

n	0	1	2	3	4	5
$z_n$	$1 + 4i$	$2,56 + 2i$	$2,91 + i$	$2,99 + 0,5i$	$3,01 + 0,25i$	$3,02 + 0,13i$



On a placé les 5 premiers termes de la suite  $(z_n)$ .

b) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$z_{n+1} = \frac{x_n + iy_n + \sqrt{x_n^2 + y_n^2}}{2} = \frac{x_n + \sqrt{x_n^2 + y_n^2}}{2} + \frac{y_n}{2}i$$

donc  $y_{n+1} = \frac{y_n}{2}$  et  $x_{n+1} = \frac{x_n + \sqrt{x_n^2 + y_n^2}}{2}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . On en déduit que la suite  $(y_n)$  est géométrique de raison  $\frac{1}{2}$  par suite elle converge vers 0.

c) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $y_n = \frac{y_0}{2^n}$  donc on en déduit

$$x_{n+1} = \frac{x_n + \sqrt{x_n^2 + \frac{y_0^2}{2^{2n}}}}{2} = \frac{2^n x_n + \sqrt{2^{2n} x_n^2 + y_0^2}}{2^{n+1}}$$

d) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$x_{n+1} - x_n = \frac{x_n + \sqrt{x_n^2 + \frac{y_0^2}{2^{2n}}}}{2} - x_n = \frac{-x_n + \sqrt{x_n^2 + \frac{y_0^2}{2^{2n}}}}{2}$$

**Solution.**

- I. 1) Tout nombre complexe  $z$  s'écrit sous la forme algébrique  $z = a + ib$  où  $a \in \mathbb{R}$  est la partie réelle de  $z$  et  $b \in \mathbb{R}$  sa partie imaginaire.  
Or, on pour tous réels  $a$  et  $b$  :  $a^2 \leq a^2 + b^2$ , avec égalité lorsque  $b$  est nul, soit  $|a| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$ . De plus,  $a \leq |a|$  donc,  $a \leq \sqrt{a^2 + b^2}$ . Pour tout nombre complexe  $z$ ,

$$\operatorname{Re} z \leq |z|$$

Le cas d'égalité est obtenu si, et seulement si,  $\begin{cases} a^2 = a^2 + b^2 \\ a = |a| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a \geq 0 \end{cases}$  donc lorsque  $z$  est un nombre réel positif ou nul.

$\operatorname{Re} z = |z|$  si, et seulement si,  $z$  est un nombre réel positif ou nul. Le cas d'égalité est obtenu si, et seulement si,  $\begin{cases} a^2 = a^2 + b^2 \\ a = |a| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a \geq 0 \end{cases}$  donc lorsque  $z$  est un nombre réel positif ou nul.

$\operatorname{Re} z = |z|$  si, et seulement si,  $z$  est un nombre réel positif ou nul.

2) On a

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} \\ |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) \\ |z_1 + z_2|^2 &= z_1\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 \\ |z_1 + z_2|^2 &= |z_1|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2) + |z_2|^2 \\ |z_1 + z_2|^2 &\leq |z_1|^2 + 2|z_1\bar{z}_2| + |z_2|^2 \\ |z_1 + z_2|^2 &\leq |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 \\ |z_1 + z_2|^2 &\leq (|z_1| + |z_2|)^2 \end{aligned}$$

Les quantités étant positives, on obtient  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ . On a égalité dans l'expression précédente si, et seulement si,  $\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2) = |z_1\bar{z}_2|$ , ce qui signifie  $z_1\bar{z}_2$  est un nombre réel positif d'après la question **A.I.1**.

$z_1$  et  $z_2$  étant non nuls, on en déduit que  $z_1\bar{z}_2$  est un nombre réel strictement positif :

$$\begin{aligned} \exists k \in \mathbb{R}_+^* / z_1\bar{z}_2 = k &\Leftrightarrow \bar{z}_2 = \frac{k}{z_1} \text{ avec } z_1 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \bar{z}_2 = \frac{k\bar{z}_1}{z_1\bar{z}_1} = \frac{k}{|z_1|^2}\bar{z}_1 \\ &\Leftrightarrow z_2 = \frac{k}{|z_1|^2}z_1 \end{aligned}$$

En choisissant  $\lambda = \frac{k}{|z_1|^2}$ , qui est bien un réel strictement positif, on a  $z_2 = \lambda z_1$ . On dit que  $z_1$  et  $z_2$  sont positivement liés.

**Réciproquement**, si  $z_2 = \lambda z_1$ , avec  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$  alors

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2| &= |z_1 + \lambda z_1| \\ |z_1 + z_2| &= |1 + \lambda||z_1| \\ |z_1 + z_2| &= (1 + \lambda)|z_1| \text{ car } 1 + \lambda > 0 \\ |z_1 + z_2| &= |z_1| + |\lambda z_1| \\ |z_1 + z_2| &= |z_1| + |z_2| \end{aligned}$$

$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$  si, et seulement si, il existe un réel strictement positif  $\lambda$  tel que  $z_2 = \lambda z_1$ .

Réciproquement, supposons que  $\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| = \sum_{k=1}^n |z_k|$  et montrons par récurrence que l'on a :  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \exists \lambda_k \in \mathbb{R}_+, z_k = \lambda_k z_1$ .

- **Initialisation** : pour  $n=2$ , on est dans le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire démontré en A.I.3. Donc,  $(H_2)$  est vraie.
- supposons l'hypothèse vraie au rang  $n$ .  
On choisit le  $(n+1)$ -uplet  $(z_1, z_2, \dots, z_n)$ , de nombres complexes non nuls tels que  $\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| = \sum_{k=1}^n |z_k|$ . On a :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^{n+1} z_k \right| &= \left| \sum_{k=1}^n z_k + z_{n+1} \right| \\ \left| \sum_{k=1}^{n+1} z_k \right| &\leq \left| \sum_{k=1}^n z_k \right| + |z_{n+1}| \\ \left| \sum_{k=1}^{n+1} z_k \right| &\leq \sum_{k=1}^{n+1} |z_k| + |z_{n+1}| \\ \left| \sum_{k=1}^{n+1} z_k \right| &\leq \sum_{k=1}^{n+1} |z_k| = \left| \sum_{k=1}^{n+1} z_k \right| \end{aligned}$$

d'ou  $\left| \sum_{k=1}^{n+1} z_k \right| = \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|$ . On en déduit

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| + |z_{n+1}| = \sum_{k=1}^n |z_k| + |z_{n+1}|$$

D'après l'hypothèse de récurrence à l'ordre  $n$ , pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , il existe  $\lambda_k \in \mathbb{R}_+$  tel que  $z_k = \lambda_k z_1$ . De l'égalité

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k + z_{n+1} \right| = \sum_{k=1}^{n+1} |z_k| + |z_{n+1}|$$

on en déduit d'après l'hypothèse de récurrence à l'ordre 2, qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{R}_+$  tel que  $z_{n+1} = \lambda \sum_{k=1}^n z_k$ . Donc,  $z_{n+1} = \lambda \sum_{k=1}^n z_k = \left( \lambda \sum_{k=1}^n z_k \right) z_1$ .  
En posant  $\lambda_{n+1} = \sum_{k=1}^n \lambda \lambda_k$  qui est positif comme somme de termes positifs, on a

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \exists \lambda_k \in \mathbb{R}_+, z_k = \lambda_k z_1$$

L'hypothèse reste donc encore vraie au rang  $n+1$ .  
On en conclut donc que  $(H_n)$  est vraie pour tout  $n \geq 2$ . Ainsi, on a montré si  $z_1, z_2, \dots, z_n$  sont des nombres complexes tous non nuls,

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| = \sum_{k=1}^n |z_k| \Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \exists \lambda_k \in \mathbb{R}_+, z_k = \lambda_k z_1$$

On vient de démontrer que  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \overline{u_k}(z - z_k) \in \mathbb{R}_- \Leftrightarrow z = 0$ , et en vertu de la question B.II.3., on obtient :

$$\sum_{k=1}^n |z - z_k| = \sum_{k=1}^n |z_k| \Leftrightarrow z = 0$$

5) On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n MA_k &= \sum_{k=1}^n |z - z_k| \\ &\geq \sum_{k=1}^n |z_k| \end{aligned}$$

Donc, l'expression  $\sum_{k=1}^n MA_k$  atteint son minimum en un point unique d'affixe  $z=0$ .

☞ La somme  $\sum_{k=1}^n MA_k$  atteint son minimum en l'unique point O, origine du repère.

**Problème. Image et antécédent**

Soit  $f$  la fonction qui à un complexe  $z$  associe, lorsque  $c'$  est possible,

$$f(z) = \frac{z^2}{z - 2i}$$

1. Déterminer le domaine de définition  $\mathcal{D}$  de  $f$ .
2. a) Déterminer les racines carrées complexes de  $8 - 6i$ .  
b) En déduire tous les antécédents de  $1 + i$  par  $f$ .
3. Soit  $h$  un nombre complexe. Discuter, suivant les valeurs de  $h$ , le nombre d'antécédents de  $h$  par  $f$ .
4. On désigne par  $f(\mathcal{D})$  l'ensemble des éléments de  $z'$  de  $\mathbb{C}$  tel qu'il existe  $z \in \mathbb{C}$  tel qu'il existe  $z \in \mathcal{D}$  vérifiant  $z' = f(z)$ .  
Si  $f(\mathcal{D}) = \mathbb{C}$ , on dit que  $f$  surjective.  
a) Déterminer l'ensemble  $f(\mathcal{D})$ .  
b) La fonction  $f$  est-elle surjective ?
5. On dit que  $f$  est injective lorsque, pour tous nombres  $z$  et  $z'$  de  $\mathcal{D}$ , si

$$f(z) = f(z') \text{ alors } z = z'$$

La fonction  $f$  est-elle injective ?

Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathcal{D}$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$  et telle que, pour tout

$$z \in \mathcal{D}, g(z) = |z - 2i|^2 \frac{z^2}{z - 2i} + z^3.$$

6. Soit  $z = x + iy$  un nombre complexe appartenant à  $\mathcal{D}$ .  
a) Montrer que la partie réelle de  $g(z)$  est  $2x^3 - 2xy^2 - 4xy$ .  
b) Déterminer la partie imaginaire de  $z$ .

**Solution.**

1. a) On a  $1 + e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i\frac{\pi}{6}}(e^{-i\frac{\pi}{6}} + e^{i\frac{\pi}{6}}) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$ .

b) On a : 
$$\begin{cases} \widehat{(\overrightarrow{OG_0}, \overrightarrow{OM_0})} = \frac{\pi}{3}[2\pi] \\ OG_0 = OM_0 = |Z_0| = |z_0| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \arg \frac{Z_0}{z_0} = \frac{\pi}{3}[2\pi] \\ \left| \frac{Z_0}{z_0} \right| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{Z_0}{z_0} = e^{i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow Z_0 = z_0 e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

c) On a :  $OI = \frac{\sqrt{3}}{2}OG_0$  or,  $G_1$  est le centre de gravité du triangle équilatéral  $OG_0M_0$ , donc  $OG_1 = \frac{2}{3}OI = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}OG_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}OG_0$ . De plus, la droite  $(OG_1)$  est la bissectrice de l'angle  $\widehat{(\overrightarrow{OG_0}, \overrightarrow{OG_1})} = \frac{1}{2}\widehat{(\overrightarrow{OG_0}, \overrightarrow{OM_0})} = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$ .

En résumé,  $G_1$  est le point tel que 
$$\begin{cases} OG_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}OG_0 \\ \widehat{(\overrightarrow{OG_0}, \overrightarrow{OG_1})} = \frac{\pi}{6}[2\pi] \end{cases}$$
 donc,  $G_1$  est l'image du point  $G_0$  par la similitude directe  $S$  de centre  $O$ , de rapport  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  et d'angle  $\frac{\pi}{6}$ .

2. a)  $G_{n+1}$  est le centre de gravité du triangle  $OG_nM_n$ . Notons  $I_n$  le milieu du segment  $[M_nG_n]$ . On a  $OI_n = \frac{\sqrt{3}}{2}OG_n$  et  $OG_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{3}OG_n$ .

De plus, la droite  $(OG_{n+1})$  est la bissectrice de l'angle  $\widehat{(\overrightarrow{OG_n}, \overrightarrow{OM_n})}$ , donc on en déduit que  $\widehat{(\overrightarrow{OG_n}, \overrightarrow{OM_n})} = \frac{1}{2}\widehat{(\overrightarrow{OG_n}, \overrightarrow{OM_n})} = \frac{\pi}{6}$

En résumé, on en déduit que  $G_{n+1}$  est l'image de  $G_n$  par la similitude directe  $S$  de centre  $O$ , de rapport  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  et d'angle  $\frac{\pi}{6}$ . De ce fait, on a l'égalité  $z_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{3}e^{i\frac{\pi}{6}}z_n$

b) La suite  $(z_n)$  est géométrique de raison  $\frac{\sqrt{3}}{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$  et de premier terme  $z_0$ .

Par conséquent,  $z_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^n z_0 = r \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^n e^{i(n\frac{\pi}{6} + \theta)}$

3. Plaçons les points sur la figure ci-dessous :

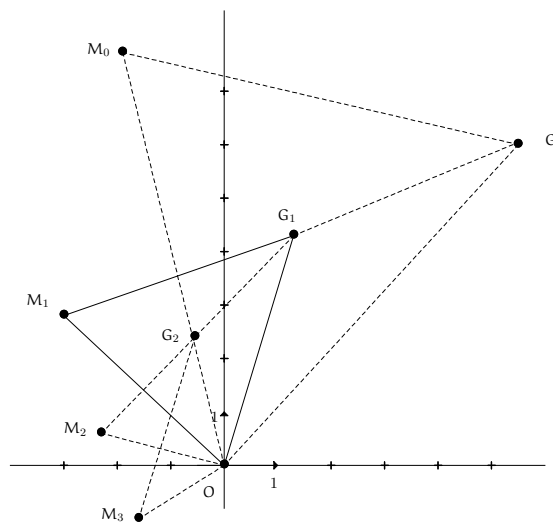


Figure.

**Exercice 77. Problème bac C Togo 2023**

**Partie A**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , une suite définie par son premier terme  $u_0$  et par la relation de récurrence  $u_{n+1} = u_n^2 + u_n$ .

1. a) Démontrer que  $(u_n)$  est une suite croissante.  
 b) Démontrer que si  $(u_n)$  est convergente alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .
2. Démontrer que si  $u_0^2 + u_0 > 0$  alors la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge.
3. Démontrer par récurrence que si  $u_0^2 + u_0 < 0$  alors  $\forall n \in \mathbb{N}, -1 < u_n < 0$ .
4. Conclure sur la convergence de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Partie B**

Le plan complexe est rapporté d'un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . Soit  $F$  l'application du plan dans lui-même qui, à tout point  $M$  d'affixe  $z$ , associe le point  $M'$  d'affixe  $z' = z^2 + z$ .

1. Déterminer l'ensemble des points invariants par  $F$ , puis l'ensemble des points invariants par  $F \circ F$ .
2. Soit  $A, B$  et  $I$  les points d'affixes respectifs  $i, -1 - i$  et  $-\frac{1}{2}$ .  
 a) Déterminer  $F(A)$  et  $F(B)$ .  
 b) Soit  $M_0$  un point du plan. Démontrer que  $F(M) = F(M_0)$  si, et seulement si  $M = M_0$  ou  $M = S(M_0)$  où  $S$  est une transformation simple du plan que l'on précisera.

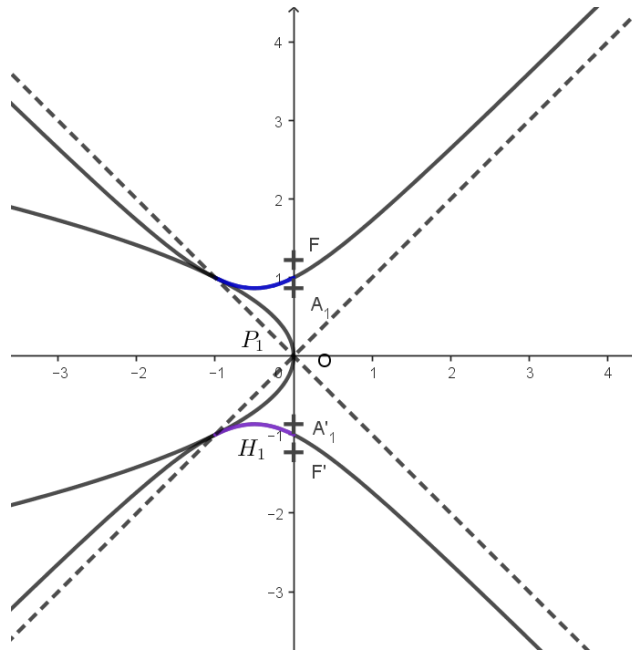
**Partie C**

Le plan complexe est rapporté d'un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  (pour les figures prendre  $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 4\text{cm}$ ).

1. Soit  $\mathcal{H}$  l'ensemble des points du plan dont les coordonnées  $(x, y)$  vérifient  $x^2 - y^2 + x + 1 = 0$  et  $\mathcal{P}$  l'ensemble des points du plan dont les coordonnées  $(x, y)$  vérifient  $y^2 + x = 0$ .  
 a) Donner la nature des coniques  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{P}$ .  
 b) Préciser les éléments caractéristiques et les asymptotes éventuelles.
2. Représenter ces coniques sur une même figure. (On admettra qu'elles sont tangentes au points d'abscisse  $x = -1$ ).
3. Soient  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{P}_1$  les ensembles des points du plan dont les coordonnées vérifient :  $\mathcal{H}_1 \begin{cases} -1 < x < 0 \\ x^2 - y^2 + x + 1 > 0 \end{cases}$  et  $\mathcal{P}_1 \begin{cases} -1 < x < 0 \\ y^2 + x < 0 \end{cases}$   
 a) Hachurer  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{P}_1$  sur la figure précédente. (On ne cherchera pas à le justifier par calcul).  
 b) Démontrer que  $\mathcal{P}_1$  est inclus dans  $\mathcal{H}_1$  puis que  $\mathcal{P}_1$  est inclus dans  $D(K, 1)$ , ensemble des points  $M$  tels que  $KM < 1$ ,  $K$  étant le point d'affixe  $-1$ .  
 c) Démontrer que si  $M$  appartient à  $\mathcal{H}_1$  alors  $F(M)$  appartient à  $\mathcal{P}_1$ .
4. Soit  $M_0$  un point de  $\mathcal{H}_1$ . On définit la suite de points  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par  $M_{n+1} = F(M_n)$ . En utilisant les questions 3b) et 3c), montrer que la suite  $(|z_n|)_{n \in \mathbb{N}}$  converge,  $z_n$  étant l'affixe de  $M_n$ .

de coordonnées  $(-\frac{1}{2}, 0)$ .

2. Représentation graphique des deux coniques.



Courbes représentatives des coniques  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{P}$ .

3. Soient  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{P}_1$  les ensembles des points du plan dont les coordonnées

$$\text{vérifient : } \mathcal{H}_1 \begin{cases} -1 < x < 0 \\ x^2 - y^2 + x + 1 > 0 \end{cases} \text{ et } \mathcal{P}_1 \begin{cases} -1 < x < 0 \\ y^2 + x < 0 \end{cases}$$

a) Voir figure ci-dessus.

b) Soit  $M(x, y)$  un point du plan. On a

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{P}_1 &\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 0 \\ y^2 + x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 0 \\ x < -y^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 0 \\ x^2 + x + 1 < x^2 - y^2 + x + 1 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} -1 < x < 0 \\ x^2 - y^2 + x + 1 > 0 \end{cases} \text{ car } x^2 + x + 1 > 0 \text{ pour } -1 < x < 0 \end{aligned}$$

donc  $M \in \mathcal{H}_1$  par suite  $\mathcal{P}_1$  est inclus dans  $\mathcal{H}_1$ .

Supposons  $M(x, y) \in \mathcal{P}_1$ . On a :

$KM^2 = (x+1)^2 + y^2 = x^2 + 2x + y^2 + 1$  donc  $KM^2 - 1 = (x^2 + x) + (y^2 + x) < 0$  car pour tout  $x \in ]-1; 0[$ ,  $x^2 + x = x(1+x) < 0$  et  $y^2 + x < 0$ . On en déduit  $KM < 1$  par suite  $\mathcal{P}_1$  est inclus dans  $D(K, 1)$ .

c) Soit  $M$  un point d'affixe  $z \in \mathbb{C}$ . En posant  $z = x + iy$  et  $z' = x' + iy'$  on a :

$$\begin{aligned} x' + iy' &= (x + iy)^2 + x + iy \\ &= x^2 + x - y^2 + i(2x + 1)y \end{aligned}$$

donc  $x' = x^2 + x - y^2$  et  $y' = 2xy + y$ .

**Exercice 79. Extrait bac Maths Tunisie 2023**

Le plan P rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . Soit A, B et C les points du plan d'affixes respectives  $i, 1+i$  et  $-1+i$ . A tout point M du plan P d'affixe  $z \neq i$ , on associe le point M' de plan P d'affixe  $z' = \frac{iz+2}{z-i}$ .

1. Montrer que pour tout  $z \neq i, (z-i)(z'-i) = 1$ .
2. En déduire que  $z' \neq i$ .  
Soit  $z \neq i, M$  le point d'affixe  $z$  et  $M'$  d'affixe  $z'$ .
3. Déterminer l'ensemble des points M tels que  $M = M'$ .
4. a) Montrer que les points A, M et M' sont alignés si, et seulement si  $(z-i)^2$  est un réel.  
b) En déduire l'ensemble des points M tels que les points A, M et M' soient alignés.
5. Montrer que pour tout point M d'affixe  $z \neq i,$

$$AM \cdot AM' = 1 \text{ et } \widehat{(\vec{AB}, \vec{AM})} \equiv \widehat{(\vec{AM}', \vec{AB})} [2\pi]$$

Dans la figure ci-dessus,  $\zeta$  est le cercle de centre A et de rayon 1. K et Q sont les points d'affixes respectives  $z_K = 1 + e^{i\frac{\pi}{4}}$  et  $z_Q = 1 + re^{i\frac{\pi}{4}}, r > 1$ . H est le point de  $\zeta$  tel que le triangle AHQ est rectangle en H et E est le projeté orthogonal de H sur la droite (AK).

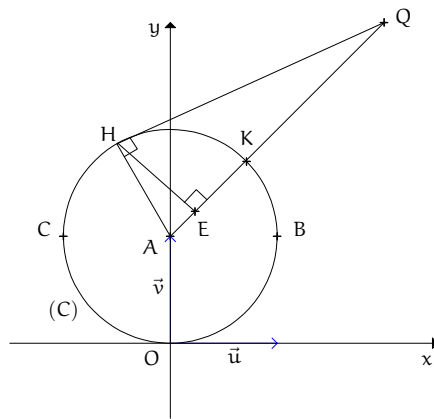


Figure .

6. a) Soit le point K' d'affixe  $z'_K$ . Calculer la distance  $AK'$  et donner une mesure de  $\widehat{(\vec{AB}, \vec{AK}')}$ .  
b) Placer le point K' sur la figure ci-dessus.  
c) Déterminer l'ensemble des points M' lorsque M décrit la demi-droite  $[AK)$  privée du point A.
7. a) Montrer que  $AQ \cdot AE = 1$ .  
b) Construire alors dans la figure ci-dessus le point Q' d'affixe  $z'_Q$ .

## 9 EXERCICES ET PROBLÈMES DE SYNTHÈSE

donc  $a=1$ ,  $b=-5-3i$  et  $c=2+9i$ .

Soit  $\Delta$  le discriminant du trinôme  $z^2 - (5+3i)z + 2+9i$ . On a  $\Delta=8-6i$ .

Déterminons une racine carrée de  $\Delta$ .

Soit  $\gamma \in \mathbb{C}$  tel que  $\sqrt{\Delta}=\gamma$  c'est-à-dire  $\gamma^2=\Delta$ . En posant  $\gamma=x+iy$  avec  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  il s'ensuit que :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \\ x^2 + y^2 = 10 \\ 2xy = -6 \end{cases}$$

d'où  $x=\pm 3$  et  $y=\pm 1$ . Il suffit de prendre  $\gamma=3-i$ . Ainsi, on en déduit que les solutions de l'équation  $z^3 - (7+3i)z^2 + \lambda z - 4 - 18i = 0$  sont les nombres complexes

$$z_1=2, \quad z_2=\frac{5+3i+3-i}{2}=4+i, \quad z_3=\frac{5+3i-3+i}{2}=1+2i$$

c) On a  $z_A=2$ ,  $z_B=4+i$  et  $z_D=1+2i$ . Placer les points sur la figure ci-dessus :

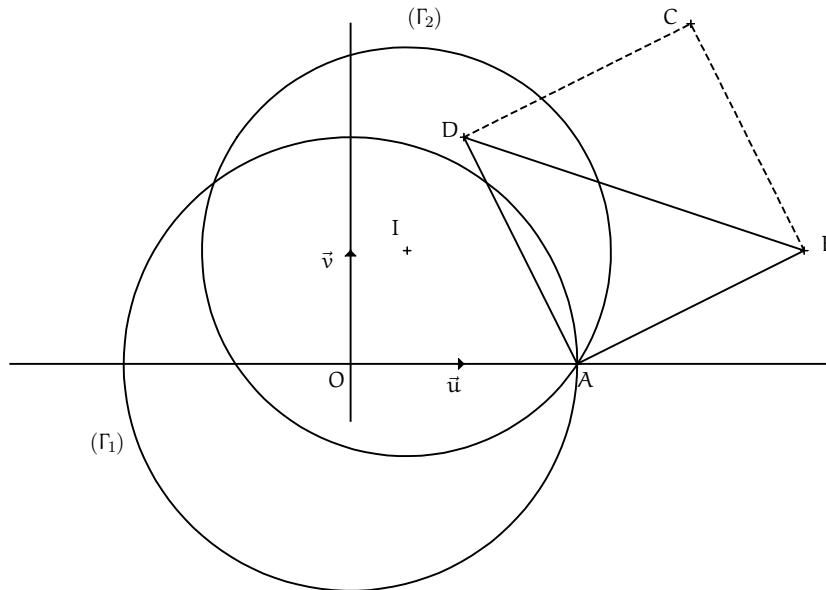


Figure.

On a  $AB=|z_A - z_B| = |-2 - i| = \sqrt{5}$ ;  $AD=|-1+2i| = \sqrt{5}$  et  $BD=|3-i| = \sqrt{10}$ . Ainsi, on en déduit :  $AB=AD$  et  $BD^2=AB^2+AD^2$  donc le triangle  $ABD$  est rectangle isocèle en  $A$ .

### Autre Méthode

On a :

$$\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} = \frac{1+2i-2}{4+i-2} = \frac{-1+2i}{2+i} = i$$

Ainsi,  $ABD$  est un triangle isocèle rectangle en  $A$ .

Un point  $M$  du plan de coordonnées  $(x, y)$  appartient à  $(BD)$  si et seulement si les vecteurs  $\overrightarrow{BM}$  et  $\overrightarrow{BD}$  sont colinéaires ce qui est aussi équivalent à

$$\begin{vmatrix} -3 & x-4 \\ 1 & y-1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x+3y=7$$

$OQ = |z^2| = |z|^2 = 1$  et  $\arg z_Q = 2\theta[2\pi]$  donc  $Q \in (\mathcal{C})$  et  $(\vec{u}, \vec{OQ}) = 2\theta[2\pi]$ .

3. Soit B le point d'affixe  $z_B = 1 + z + z^2$  où  $z$  est l'affixe du point M.

a) On a  $\vec{OB} = \vec{OP} + \vec{OQ}$  par suite, OQBP est un parallélogramme.

b)  $\frac{z_B}{z} = \frac{1+z+z^2}{z} = \frac{1+e^{i\theta}+e^{i2\theta}}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} + e^{i\theta} + 1 = 2\cos\theta + 1$  par suite,  $\frac{z_B}{z}$  est un nombre réel.

c)  $\frac{z_B}{z} \in \mathbb{R}^*$  implique que  $(\vec{OM}, \vec{OB}) = 0[\pi]$  par suite les points O, M et B sont alignés.

**Exercice 84. Extrait du bac C Cameroun 2021**

Le plan complexe est rapporté à un repère  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . On considère la transfor-

mation  $g$  du plan d'écriture complexe  $z' = \frac{1+i}{2}z + 1$ .

$\Omega$  est le point d'affixe  $1+i$ , les points  $A_n$  d'affixes  $z_n$ . La suite  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est définie par  $z_0 = 0$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $z_{n+1} = \frac{1+i}{2}z_n + 1$ .

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de  $g$ .

2. Montrer que :

a) pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , les points  $\Omega, A_n$  et  $A_{n+1}$  sont alignés.

b) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , le triangle  $\Omega A_n A_{n+1}$  est rectangle et isocèle.

**Solution.**

1. La transformation  $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  qui à tout M du plan d'affixe  $z$  associe le point M' d'affixe :  $z' = \frac{1+i}{2}z + 1$  est une similitude directe de centre  $\Omega$  d'affixe  $\omega = \frac{1}{1 - \frac{1+i}{2}} = \frac{1}{\frac{1-i}{2}} = 1+i$ , de rapport,  $\left| \frac{1+i}{2} \right| = \frac{|1+i|}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$  et d'angle

$$\arg\left(\frac{1+i}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

2. a) D'après la relation de Chasles on a :

$$(\vec{\Omega A_n}; \vec{\Omega A_{n+4}}) = \sum_{k=0}^3 (\vec{\Omega A_{n+k}}; \vec{\Omega A_{n+k+1}})$$

Or, pour tout  $k \in \{1, 2, 3\}$   $(\vec{\Omega A_k}; \vec{\Omega A_{k+1}}) = \frac{\pi}{4}$  par suite :

$$(\vec{\Omega A_n}; \vec{\Omega A_{n+4}}) = 4 \times \left(\frac{\pi}{4}\right) = \pi$$

de cette égalité, on en déduit que les points  $\Omega, A_n$  et  $A_{n+4}$  sont alignés.

b)  $\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1} - \omega} = \frac{\frac{1+i}{2}z_n + 1 - z_n}{\frac{1+i}{2}z_n + 1 - (1+i)} = \frac{\frac{-1+i}{2}z_n + 1}{\frac{1+i}{2}z_n - i} = \frac{i\left(\frac{1+i}{2}z_n - i\right)}{\frac{1+i}{2}z_n - i} = i$ . On en déduit

que le triangle  $\Omega A_n A_{n+1}$  est rectangle isocèle en  $A_{n+1}$ .

**Exercice 89. Extrait bac C Gabon 2021**

Le but de l'exercice est de déterminer la forme du développement d'un nombre rationnel en fraction continue simple finie.

1. On considère les nombres  $a = 49$ ,  $b = 17$  et les égalités (1) et (2) suivantes

$$(1) \quad 49 = 17 \times 2 + 15 \qquad (2) \quad \frac{49}{17} = 2 + \frac{1}{\frac{15}{17}}$$

a) Expliquer simplement pourquoi l'égalité (1) implique l'égalité (2).

b) Soit l'égalité suivante :  $17 = 15 \times 1 + 2$

Expliquer simplement cette égalité implique les égalités (3) et (4) suivantes :

$$(3) \quad \frac{17}{15} = 1 + \frac{2}{15} = 1 + \frac{1}{\frac{15}{2}} \qquad (4) \quad \frac{49}{17} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{15}{2}}}$$

c) Soit l'égalité :  $15 = 2 \times 7 + 1$

Expliquer simplement cette égalité implique les égalités (5) et (6) suivantes :

$$(5) \quad \frac{15}{2} = 7 + \frac{1}{2} \qquad (6) \quad \frac{49}{17} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{7 + \frac{1}{2}}}$$

L'égalité (6) est nommée développement de  $\frac{49}{17}$  en fraction continue simple finie. Ce développement, noté  $[2; 1; 7; 2]$ , permet d'écrire plus simplement l'égalité (6) :  $\frac{49}{17} = [2; 1; 7; 2]$

2. a) Calculer le nombre rationnel  $r$  tel que :  $r = [3; 2; 5; 7]$   
 b) Calculer le nombre rationnel  $s$  dont le développement est  $[3; 2; 5; 6; 1]$ .  
 c) Le développement d'un nombre rationnel en fraction continue simple finie est-il unique ? Justifier.

3. a) Ecrire le développement de  $\frac{16}{9}$  en fraction continue simple finie.  
 b) Ecrire le développement de  $\frac{2021}{2019}$  en fraction continue simple finie.

4. Soit  $a$  et  $b$  deux entiers naturels premiers entre eux. L'application de l'algorithme d'Euclide au couple  $(a, b)$  permet d'écrire les égalités suivantes où  $n$  est un entier naturel tel que  $n \geq 3$  :

$$\begin{aligned} a &= b q_1 + r_1 \\ b &= r_1 q_2 + r_2 \\ r_1 &= r_2 q_3 + r_3 \\ &\vdots \\ r_{n-2} &= r_{n-1} q_n + r_n \\ r_{n-1} &= r_n q_{n+1} + 0 \end{aligned} \qquad 0 = r_{n+1} < r_n < \dots < r_2 < r_1 < b$$

- a) Que veut l'entier naturel  $r_n$  ? Justifier.  
 b) Ecrire le développement de  $\frac{a}{b}$  en fraction continue simple finie. On déterminera une égalité analogue à l'égalité (6).

**Exercice 91. Indicatrice d'Euler**

Pour tout entier naturel  $n \geq 2$ , On appelle indicatrice d'Euler de  $n$ , et on note  $\varphi(n)$ , le cardinal de l'ensemble des entiers premiers avec  $n$  compris entre 0 et  $n-1$ .

1. Déterminer  $\varphi(i)$  pour  $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ .
2. Soit  $p$  un nombre premier. Montrer que :
  - a)  $\varphi(p) = p - 1$
  - b) Pour tout entier  $\alpha \geq 2$ ,  $\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1} = p^{\alpha-1}(p - 1)$
3. On admet que pour tout entiers  $n$  et  $m$  premiers entre eux :

$$\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$$

Déterminer  $\varphi(465696)$ .

4. Pour tout  $n \geq 2$ , on note  $E(n)$  l'ensemble de tous les entiers naturels inférieurs ou égaux à  $n$  tels que leur plus grand diviseur commun (pgcd) avec  $n$  soit le nombre 1. Par exemple,  $E(4) = \{1; 3\}$  et  $E(8) = \{1; 3; 5; 7\}$ . Par suite, on considère le nombre  $S(n)$  égal à la somme des valeurs de  $\cos\left(k \times \frac{2\pi}{n}\right)$  lorsque  $k$  décrit l'ensemble  $E(n)$ . On peut noter :

$$S(n) = \sum_{k \in E(n)} \cos\left(k \times \frac{2\pi}{n}\right)$$

- a) Calculer  $S(4)$  et  $S(8)$ .
- b) Pour chacune des valeurs de  $n$  suivantes, décomposer  $n$  en produit de facteurs premiers puis déterminer  $E(n)$  :  $n = 3$ ,  $n = 9$ ,  $n = 12$ ,  $n = 14$ ,  $n = 15$ ,  $n = 30$ ,  $n = 54$ .
- c) Conjecturer les valeurs prises par  $S(n)$  en fonction de  $n$ .

**Solution.**

1.  $\varphi(1) = 1$ ;  $\varphi(2) = 1$ ;  $\varphi(3) = \text{card}\{1, 2\} = 2$ ;  $\varphi(4) = \text{card}\{1, 3\} = 2$ ;  
 $\varphi(5) = \text{card}\{1, 2, 3, 4\} = 4$ ;  $\varphi(6) = \text{card}\{1, 5\} = 2$ ;  $\varphi(7) = \text{card}\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = 6$ ;  
 $\varphi(8) = \text{card}\{1, 3, 5, 7\} = 4$ .
2. Soit  $p$  un nombre premier.
  - a) Tout entier  $k$  compris entre 1 et  $p - 1$  est premier à  $p$  d'où on a l'égalité  $\varphi(p) = \text{card}(1, \dots, p - 1) = p - 1$ .
  - b) Soit  $\alpha$  un entier supérieur ou égal à 2.  
 Les entiers premiers à  $p^\alpha$  sont ceux qui ne sont pas multiples de  $p$ . Comptons les multiples de  $p$  compris entre 1 et  $p^\alpha$  : ce sont les entiers  $kp$ , où  $k$  est compris entre 1 et  $p^{\alpha-1}$ , donc il y a  $p^{\alpha-1}$  multiples de  $p$  entre 1 et  $p^\alpha$ . On en déduit qu'il y a  $p^\alpha - p^{\alpha-1}$  entiers non multiples de  $p$  compris entre 1 et  $p^\alpha$  d'où  $\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1} = p^{\alpha-1}(p - 1)$ .
3.  $465696 = 11 \times 2^5 \times 3^3 \times 7^2$   
 Puisque  $\varphi(11) = 11 - 1 = 10$ ,  $\varphi(2^5) = 2^4$ ,  $\varphi(3^3) = 2 \times 3^2$  et  $\varphi(7^2) = 6 \times 7$  alors on en déduit :

$$\varphi(465696) = \varphi(11)\varphi(2^5)\varphi(3^3)\varphi(7^2) = 10 \times 2^4 \times 2 \times 3^2 \times 6 \times 7 = 120960$$

4. a) On a  $E(4) = \{1; 3\}$ .

Ainsi, les solutions de (E) sont les couples  $(-21 + 16k, -28 + 21k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .  
 $a > 1 \Leftrightarrow -21 + 16k > 1 \Leftrightarrow k \geq 2$ . Ainsi, pour  $k=2$  on a  $a = 11$  et  $N_0 = 231$  ce qui signifie que KEMO va rencontrer ses deux fournisseurs entre la première fois 231 jours plus tard à compter du 20 décembre 2020 c'est-à-dire qu'il va les croiser 8 mois et 7 jours plus tard soit le 8 Aout 2021.

**Exercice 93. Extrait du bac Sciences Maths Maroc 2023**

Soit  $p$  un nombre premier impair. On considère dans  $\mathbb{Z}$  l'équation (E) :

$$x^2 \equiv 2[p]$$

1. a) Montrer que :  $2^{p-1} \equiv 1[p]$   
 b) En déduire que :  $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1[p]$  ou  $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1[p]$   
 (On remarquera que :  $(2^{\frac{p-1}{2}} - 1)(2^{\frac{p-1}{2}} + 1) = 2^{p-1} - 1$ )
2. Soit  $x$  une solution de l'équation (E).  
 a) Montrer que  $p$  et  $x$  sont premiers entre eux.  
 b) En déduire que :  $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1[p]$  (On pourra utiliser le petit théorème de Fermat).
3. Montrer que pour tout  $k \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ ,  $p$  divise  $C_p^k$ .  
 On rappelle que pour tout  $k \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ ,

$$C_p^k = \frac{p!}{k!(p-k)!} \text{ et que : } kC_p^k = pC_{p-1}^{k-1}$$

4. a) En déduit la formule de Moivre, montrer que :

$$(1+i)^p = 2^{\frac{p}{2}} \cos\left(p\frac{\pi}{4}\right) + i2^{\frac{p}{2}} \sin\left(p\frac{\pi}{4}\right)$$

( $i$  étant le nombre complexe tel que  $i^2 = -1$ )

$$b) \text{ On admet que : } (1+i)^p = \sum_{k=0}^{k=\frac{p-1}{2}} (-1)^k C_p^{2k} + i \sum_{k=0}^{k=\frac{p-1}{2}} (-1)^k C_p^{2k+1}$$

Montrer que :  $2^{\frac{p}{2}} \cos\left(p\frac{\pi}{4}\right) \in \mathbb{Z}$  et  $2^{\frac{p}{2}} \cos\left(p\frac{\pi}{4}\right) \equiv 1[p]$  (on pourra utiliser la question 3).

5. En déduire que si  $p \equiv 5[8]$  alors l'équation (E) n'admet pas solution dans  $\mathbb{Z}$ .

**Solution.**

1. a/  $p$  et 2 sont premiers entre eux donc d'après le petit théorème de Fermat on a :  $2^{p-1} \equiv 1[p]$   
 b/ Puisque  $p$  est impair alors  $\frac{p-1}{2} \in \mathbb{N}$  et on a l'identité :

$$2^{p-1} - 1 = \left(2^{\frac{p-1}{2}} - 1\right)\left(2^{\frac{p-1}{2}} + 1\right)$$

d'où  $p$  divise le produit  $\left(2^{\frac{p-1}{2}} - 1\right)\left(2^{\frac{p-1}{2}} + 1\right)$  par suite  $p$  divise  $2^{\frac{p-1}{2}} - 1$  ou  $p$  divise  $2^{\frac{p-1}{2}} + 1$  car  $p$  est premier.

**Remarque.** En général,  $d$  divise  $ab$  n'implique pas que  $d$  divise  $a$  ou  $d$  divise  $b$ . On peut le voir en prenant  $d=6$ ,  $a=2$  et  $b=3$ .