CHAPITRE 3 ARITHMETIQUE

I. RESUME DE COURS

Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

1) Définition

Soient a et b deux entiers relatifs, on dit que b divise a s'il existe un entier relatif k tel que a = kb. On note: b|a

Remarques

- **On dit aussi que a est un multiple de b ou b est un diviseur de a.**
- **1 et -1 divisent tous les nombres.**
- **Un nombre *a* admet au minimum 4 diviseurs :** $\{1\,;-1\,;a;-a\}$.

2) Propriétés

Soient a, b, c trois entiers relatifs et n un entier naturel non nul.

1. $(a|b \text{ et } b|a) \Leftrightarrow (a=b \text{ ou } a=-b)$
2. $(a \mid b \text{ et } b|c\ ) \Rightarrow a\,|\,c$ **(transitivité)**
3. $(c|a \text{ et } c|b) \Rightarrow c\ |(ua+vb)\ ;\ u,v\in\mathbb{Z}$ **(divisibilité par combinaison linéaire)**
4. $a\,|\,b \Rightarrow -a\,|\,b$
5. $a\,|\,b \Rightarrow |a| \le |b|;\quad b\neq 0$
6. $a\,|\,b \Rightarrow a\,|\,bc$ **pour tout entier c**
7. $a\,|\,b \Rightarrow ac\,|\,bc$ **pour tout entier c non nul.**
8. $(a-b)\,|\,(a^n - b^n);\quad n\in\mathbb{N}^*$
9. **Si n est impair alors** $(a+b)\,|\,(a^n+b^n);\quad n\in\mathbb{N}^*$

3) Critères de divisibilité

Soit n un entier naturel

n	Critères de divisibilité par n (en écriture décimale)
10	Le chiffre des unités est 0.
2	Le chiffre des unités est paire :0, 2, 4, 6, 8.
5	Le chiffre des unités est 0 ou 5.
4	Le nombre formé par les deux derniers chiffres est divisible par 4
25	Le nombre formé par les deux derniers chiffres est divisible par 25.
8	Le nombre formé par les trois derniers chiffres est divisible par 8.
125	Le nombre formé par les trois derniers chiffres est divisible par 125.

n	Critères de divisibilité par n (en écriture décimale)
3	La somme des chiffres qui le composent est divisible par 3.
9	La somme des chiffres qui le composent est divisible par 9.
11	La différence de la somme des chiffres de rang impair et de la somme des chiffres de rangs pair (en partant de la droite) est divisible par 11.
7	Le nombre de dizaines diminué du double du chiffre des unités est divisible par 7. Soustraction alternée des tranches de trois chiffres divisible par 7.
13	Le nombre de dizaines augmenté de 4 fois le chiffre des unités est divisible par 13. Soustraction alternée des tranches de trois chiffres divisible par 13.

Division euclidienne

1) Division euclidienne dans $\mathbb{N}$

Soient a et b deux entiers naturels, avec $b \neq 0$. Il existe un unique couple $(q;r)$ d'entiers naturels tels que $a = bq + r$ avec $0 \leq r < b$.

2) Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$

Pour deux entiers relatifs a et b avec $b \neq 0$, il existe un unique couple $(q;r)$ avec $q \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{N}$ tel que : $a = bq + r$ avec $0 \leq r < |b|$.

a	b	q	R
dividende	diviseur	quotient	reste, $r \in \mathbb{N}$, $(r = 0 \Rightarrow b \mid a)$

3) Congruence

Soient a et b deux entiers relatifs, et n un entier naturel non nul.

Définition et notation

On dit que a et b sont congrus modulo n si a et b ont le même reste dans la division euclidienne par n.

On note $a \equiv b \ (n)$ ou $a \equiv b \ (\mathrm{mod}\ n)$

Propriétés

Soient a, b, c, a′ et b′ des entiers relatifs, et n un entier naturel non nul.

1.	$a \equiv b\ (n) \Leftrightarrow b \equiv a\ (n)$
2.	$a \equiv b\ (n) \Leftrightarrow a - b \equiv 0\ (n)$
3.	$a \equiv b\ (n) \Leftrightarrow n \mid (a - b)$
4.	$n \mid a \Leftrightarrow a \equiv 0\ (n)$
5.	$n \equiv 0\ (n)$
6.	$a \equiv a\ (n)$
7.	$\left.\begin{array}{l} a \equiv b\ (n) \\ b \equiv c\ (n) \end{array}\right\rangle \Rightarrow a \equiv c\ (n)$
8.	$\left.\begin{array}{l} a \equiv b\ (n) \\ a' \equiv b'(n) \end{array}\right\rangle \Rightarrow a + a' \equiv b + b'(n)$
9.	$\left.\begin{array}{l} a \equiv b\ (n) \\ a' \equiv b'(n) \end{array}\right\rangle \Rightarrow a - a' \equiv b - b'(n)$
10.	$\left.\begin{array}{l} a \equiv b\ (n) \\ a' \equiv b'(n) \end{array}\right\rangle \Rightarrow aa' \equiv bb'(n)$
11.	$a \equiv b(n) \Rightarrow a^p \equiv b^p(n)$ **pour tout p de** $\mathbb{N}$**,**
12.	$a \equiv b(n) \Rightarrow ac \equiv bc(n)$

4) Nombres premiers

1)Définition

Un nombre entier naturel p est premier s'il possède exactement deux diviseurs positifs: 1 et p lui-même.

2)Théorème

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 . n admet au moins un diviseur premier.
Si n n'est pas premier alors il admet au moins un diviseur premier p tel que $p \le \sqrt{n}$ **.**

3)Critère de primalité

Si un entier naturel n n'est divisible par aucun nombre premier dont le carré lui est inférieur ou égal, alors il est premier.

4)Théorèmes

Théorème 1: Il existe une infinité de nombres premiers (Théorème d'Euclide).

Théorème 2: Tout entier naturel $n > 1$ s'écrit de façon unique sous la forme d'un produit de facteurs : $n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times p_3^{\alpha_3} \times \ldots \times p_r^{\alpha_r}$ où $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_r$ sont des nombres premiers et $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_r$ des entiers naturels. On note $n = \prod_{k=1}^{r} p_k^{\alpha_k}$.

5) Crible d'Eratosthène

Pour trouver les nombres premiers, on peut utiliser le « crible d'Eratosthène :

~~0~~	~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~
~~10~~	11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19
~~20~~	~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29
~~30~~	31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~
~~40~~	41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~

PGCD

1) Définition

a et b sont deux entiers naturels non nuls. Le plus grand élément des diviseurs communs de a et b est appelé Plus Grand Commun Diviseur de a et de b , on le note PGCD(a ; b) ou $a \wedge b$.

Si a et b sont des entiers relatifs non nuls : $\mathrm{PGCD}(a;b) = \mathrm{PGCD}(|a|;|b|)$

2) Propriétés

a, ***b*** **et** ***c*** **étant trois entiers naturels non nuls.**

1.	$c\mid a$ et $c\mid b \Leftrightarrow c\mid PGCD(a;b)$
2.	$b\mid a \Rightarrow b = PGCD(a;b)$
3.	$PGCD(a;b) = PGCD(b;a)$ soit $a\wedge b = b\wedge a$
4.	$PGCD(a;\ PGCD(b;c)) = PGCD(PGCD(a;b)\ ;c)$ soit $a\wedge(b\wedge c) = (a\wedge b)\wedge c$
5.	$aPGCD(b;c) = PGCD(ab;ac)$ soit $a(b\wedge c) = ab\wedge ac$
6.	**a, b et g sont trois entiers positifs.**
	$g = PGCD\ (a,b) \Leftrightarrow \begin{cases} \bullet\ g\mid a \text{ et } g\mid b \\ \bullet\ \frac{a}{g}\wedge\frac{b}{g} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bullet\ g\mid a \text{ et } g\mid b \\ \bullet\ \text{il existe u et v} \\ \text{tels que } ua+vb=g \end{cases}$

3) Algorithme d'Euclide

Théorème

a et b étant deux entiers naturels non nuls tels que $a\geq b$ et $a = bq + r$ avec $0\leq r < b$

Si $r = 0$, alors $PGCD(a;b) = b$, sinon ($r\neq 0$), $PGCD(a;b) = PGCD(b;r)$.

En d'autre termes :

$$\left.\begin{array}{l} a,b\in\mathbb{N}^*, \\ a\geq b, \\ a = bq+r, \\ 0\leq r<b. \end{array}\right| \left|\begin{array}{l} r=0 \Rightarrow PGCD(a;b) = b \\ r\neq 0 \Rightarrow PGCD(a;b) = PGCD(b;r) \end{array}\right.$$

Propriété

Lorsque b ne divise pas a, le PGCD de a et b est le dernier reste non nul obtenu par l'algorithme d'Euclide.

4) Nombres premiers entre eux

Définition

Deux entiers naturels non nuls a et b sont premiers entre eux (ou étrangers) si PGCD(a ;b) = 1.

5) Théorème de Gauss

Soit a, b et c trois entiers naturels non nuls.
Si a et b sont premiers entre eux et si a|bc alors a|c.

Conséquences

Soit a, b, c et p des entiers naturels non nuls.

1) $$\left|\begin{array}{l}\bullet\ a \mid c,\\ \bullet\ b \mid c,\\ \bullet\ \text{PGCD}(a,b)=1.\end{array}\right\rangle \Rightarrow \boxed{ab \mid c}$$

2) $$\left|\begin{array}{l}\bullet\ p \text{ est premier},\\ \bullet\ p \mid ab.\end{array}\right\rangle \Rightarrow \boxed{p \mid a \text{ ou } p \mid b}$$

3) $$\left|\begin{array}{l}\bullet\ p \text{ est premier},\\ \bullet\ \text{PGCD}(p,a)=1,\\ \bullet\ \text{PGCD}(p,b)=1.\end{array}\right\rangle \Rightarrow \boxed{\text{PGCD}(p,ab)=1}$$

Si a et b sont premiers entre eux et si a|bc alors a|c.

6) Petit théorème de Fermat

Théorème

Soit p un nombre premier et a un entier naturel premier avec p (non divisible par p) alors $a^{p-1}-1$ est divisible par p.

Corollaire

Soit p un nombre premier et a un entier naturel. Alors a^p-a est divisible par p.

En d'autres termes :

$$\boxed{\left|\begin{array}{l}\bullet\ p \text{ est premier},\\ \bullet\ a \text{ un entier naturel}.\end{array}\right\rangle \Rightarrow \boxed{a^p\text{-}a \text{ est divisible par } p}}$$

PPCM

Définition

Soit a et b deux entiers naturels non nuls. L'ensemble des multiples positifs communs à a et b admet un plus petit élément.

On appelle Plus Petit Commun Multiple de a et de b le plus petit entier strictement positif commun à a et à b. On note PPCM(a ; b) ou $a \vee b$

Propriétés

1. $a \mid b \Rightarrow PPCM(a;b) = b$
2. $PGCD(a;b) = 1 \Rightarrow PPCM(a;b) = ab$
3. $PPCM(a;b) = PPCM(b;a)$ soit $a \vee b = b \vee a$
4. $PPCM(a;\ PPCM(b;c)) = PPCM(PPCM(a;b)\ ;c)$ soit
   $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$
5. $aPPCM(b;c) = PPCM(ab;ac)$ soit $a(b \vee c) = ab \vee ac$
6. $PPCM(a;b) \times PGCD(a;b) = ab$ soit $(a \vee b)(a \wedge b) = ab$

Equations diophantiennes

1)Théorème

a et b sont deux entiers naturels n on nuls et $d = PGCD(a,b)$. Il existe deux entiers relatifs x et y tels que $ax + by = d$.

Autrement dit :

$$\left.\begin{array}{l} a,b \in \mathbb{N}^*, \\ d = PGCD(a,b) \end{array}\right\rangle \Rightarrow \boxed{\text{il existe deux entiers relatifs } x \text{ et } y \text{ tels que } ax + by = d}$$

2)Théorème de Bézout

Soit a et b deux entiers naturels non nuls. a et b sont premiers entre eux si et seulement si il existe deux entiers relatifs x et y tels que $xa + yb = 1$.

Autrement dit :

$$\boxed{\begin{array}{l} a,b \in \mathbb{N}^*, \\ \text{a et b sont premiers entre eux} \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} \text{il existe deux entiers relatifs} \\ x \text{ et } y \text{ tels que } xa + yb = 1 \end{array}}$$

3) Théorème

a, b et c étant trois entiers naturels. L'équation $ax + by = c$ admet des solutions entières si et seulement si c est un multiple de $PGCD(a,b)$.

Systèmes de numération

1) Système de numération décimale (ou « en base 10 ») :

Dans notre système habituel de numération, on dispose de 10 symboles (chiffres) : 0,1,2,3,…9 pour écrire tous nos nombres.

Tout nombre peut donc se décomposer en une somme de puissances de 10.

2) Système binaire (ou « en base 2 ») :

Ce système ne se compose que de deux symboles : 0 et 1 ; ce qui est très pratique pour toute l'électronique puisqu'il n'y a que deux possibilités : le courant passe ou ne passe pas. Tout nombre se décompose donc ici en «paquets de 2 » au lieu de « paquets de 10 », et donc en puissances de 2.

3) Système octal (ou « en base 8 ») :

Le système octal utilise un système de numération ayant comme base 8 (octal => latin octo = huit).
Il faut noter que dans ce système nous avons 8 symboles seulement : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.
Cette base obéira aux même règles que la base 10, vue précédemment,

4) Système hexadécimal (ou « en base 16 ») :

On dispose ici de 16 symboles et on décompose selon les puissances de 16. Les chiffres s'écrivent ainsi : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; A ; B ; C ; D ; E ; F.

5) Tableau de correspondance entre base 2, base 8, base 10 et base 16:

Base 10	Base 2	Base 8	Base 16
0	0	0	0
1	1	1	1
2	10	2	2
3	11	3	3
4	100	4	4
5	101	5	5
6	110	6	6
7	111	7	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F
16	10000	20	10
17	10001	21	11
18	10010	22	12
19	10011	23	13
20	10100	24	14
32	100000	40	20
48	110000	60	30
64	1000000	100	40
100	1100100	144	64
200	11001000	310	C8
400	110010000	620	190
500	111110100	764	1F4
800	1100100000	1440	320
1000	1111101000	1750	3E8
2000	11111010000	3720	7D0

II. QUESTIONNAIRES A CHOIX MULTIPLE

QCM 1

Dans ce QCM, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte.

1) Quel est l'ensemble des entiers relatifs n tels que n-1 divise n+17 :

A. $\{2\ ;3\ ;4\ ;7\ ;10\ ;19\ ;0\ ;-1\ ;-2\ ;-5\ ;-8\ ;-17\}$

B. $\{2\ ;3\ ;4\ ;7\ ;10\ ;19\ ;-1\ ;-2\ ;-3\ ;-5\ ;-8\ ;-17\}$

C. $\{1\ ;2\ ;4\ ;6\ ;9\ ;-6\ ;-9\ ;-18\}$

D. $\{0\ ;1;2;4;-1;9;-6\ ;-9\ ;-18\}$

2) On divise un entier naturel n par 139 et 142. Les quotients sont égaux et les restes respectifs sont 74 et 32. Quelle est la valeur de n ?

A. 1452
B. 1464
C. 2020
D. 3271

3) On sait que a est un entier naturel, et que le reste de la division euclidienne de a par 90 est 75.Quelle est le reste de la division euclidienne de a par 45 ?

A. 40
B. 35
C. 30
D. 25

4) Le PGCD de 8534 et 6526 est :

A. 26
B. 104
C. 251
D. 502

5) Le PPCM de 72 et 180 est :

A. 270
B. 360
C. 720
D. 1800

QCM 2

Dans ce QCM, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte.

1) Soit n un entier naturel. Quels sont les entiers toujours premiers entre eux ?

$7n+1$ et $3n+2$.

$n+5$ et $n-2$.

$2n+5$ et $n+2$

$2n-1$ et $11n+3$.

2) x et y sont deux entiers naturels tels que PGCD(x, y) = 3 et x + y = 27. Quelle valeur de x peut être un élément d'un couple solution ?

9

18

21

27

3) Soit n un entier naturel. n^7-n est toujours divisible par :

11

14

20

21

4) Quelle affirmation est vraie ?

$2020^{22} \equiv 1\ [22]$

$2020^{23} \equiv 1\ [22]$

$2020^{22} \equiv 1\ [23]$

$2020^{23} \equiv 1\ [23]$

5) Quelle affirmation est fausse ?

$2019^{19} - 2019 \equiv 0\ [19]$

$2020^{18} - 1 \equiv 0\ [19]$

$2019^{18} - 2019 \equiv 0\ [19]$

$2019^{2019} - 2019 \equiv 0\ [2019]$

III. ENONCES DES EXERCICES CORRIGES

Exercice 1

1) Trouvez, suivant les valeurs de l'entier naturel *n*, le reste de la division euclidienne de 5^n par 7.

2) Trouvez le reste de la division euclidienne de 2021^{2020} par 7.

3) Soit $X = 2011^{2n+1} + 2014^{2n+1}$.

a) Montrez que pour tout entier naturel *n*, X est divisible par 7.

b) Montrez que pour tout entier naturel *n*, X est divisible par 25.

c) X est – il divisible par 175 ? Justifier.

Exercice 2 (Bac)

1) On considère l'équation (E) : $2017x + 41y = 1$, où x et y sont des entiers relatifs

a) Vérifier que 2017 est un nombre premier puis montrer que l'équation (E) admet des solutions entières.

b) Vérifier que le couple $(-5;246)$ est une solution particulière de (E). Résoudre l'équation (E).

c) Déduire qu'il existe un unique entier y inférieur ou égal à 2016 tel que : $41y \equiv 1[2017]$

Pour la suite de l'exercice on rappelle qu'un entier a est l'inverse de b modulo 2017 si $ab \equiv 1[2017]$.

2) Soient a et b deux entiers relatifs.

a) Montrer que : si $ab \equiv 0[2017]$ alors $\left(a \equiv 0[2017] \text{ ou } b \equiv 0[2017]\right)$

b) Déduire que : si $a^2 \equiv 1[2017]$ alors $\left(a \equiv 1[2017] \text{ ou } a \equiv -1[2017]\right)$

c) Quels sont donc les entiers de l'intervalle $[1;4033]$ qui sont égaux à leurs inverses modulo 2017 ?

Exercice 3

En rangeant les n pièces de son puzzle, un enfant constate que :

S'il les range par groupe de 5, il lui reste 3 pièces.

S'il les range par groupe de 7, il lui reste 2 pièces.

S'il les range par groupe de 9, il lui reste 1 pièce.

S'il les range par groupe de 11, il ne lui reste plus de pièces.

Sa mère affirme qu'alors 2n-11 est divisible par 5, 7, 9 et 11.

1) A-t-elle raison ?

2) Combien ce puzzle contient de pièces sachant que ce nombre est inférieur à 2020 ?

Exercice 4 (Bac)

1) On considère l'équation (E) : $25x-49y=5$**, où x et y sont des entiers relatifs.**
a) Déterminer le pgcd de 49 et 25 à l'aide de l'algorithme d'Euclide et en déduire que l'équation (E) admet des solutions entières.
b) Vérifier que le couple $(10\ ;\ 5)$ **est une solution particulière de (E). Résoudre l'équation (E).**
c) Montrer qu'il existe un unique entier p compris entre 1960 et 2018 tel que : $25p\equiv 5[49]$.
2.a) Justifier que si (x,y) **est une solution de (E) alors** $5x\equiv 1[7]$ **et** $y\equiv 0[5]$.
b) Montrer que $5x\equiv 1[7]$ **si et seulement si** $x\equiv 3[7]$.
3.a) Soit x un entier relatif. Quels sont les restes de x^2 **dans la division euclidienne par7 ?**
b) Existe-t-il un couple (x,y) **d'entiers relatifs tels que** (x^2,y^2) **soit solution de (E) ?**

Exercice 5

Quels sont les entiers n tels que n^6-1 **soit divisible par 9 ?**

Exercice 6

On considère l'équation (E) : $11x-7y=25$ **, où x et y sont des entiers relatifs.**
1.a) Justifier que l'équation (E) admet des solutions entières et vérifier que le couple $(8,9)$ **est une solution particulière de (E).**
b) Déterminer l'ensemble des solutions de (E).
2) Soit (x,y) **une solution de (E).**
a) Montrer que si x est un diviseur de y, alors x est un diviseur de 25.
b) Soit m un entier relatif. Existe-t il des valeurs de m telles que le quotient $\dfrac{20+11m}{15+7m}$ **soit un entier relatif ?**

Exercice 7

On donne les nombres suivants en base 10 : $A = 1268$ et $B = 2098$.
Convertir ces nombres :
1) En binaire
2) En base 3
3) En base 5
4) En base 7
5) En base 8.

Exercice 8

On donne les nombres suivants en base 10 : $X = 1216$ et $Y = 8091$.
Convertir ces nombres en hexadécimal .

Exercice 9

Effectuer les opérations suivantes :

1) En base 2 : $110010110 + 10001110 =$
2) En base 8 : $5612 + 7572 =$
3) En base 16 : $1D21 + F1BC =$

Exercice 10

Convertir en décimal les nombres suivants qui sont donnés en représentation hexadécimale :

a) 3DE18
b) 8AFCE.

V. EXERCICES DE SYNTHESE

Exercice 1

1) Écrire l'ensemble des entiers relatifs diviseurs de 6.

2) Déterminer les entiers relatifs n tels que $n-4$ divise 6.

3) Déterminer les entiers relatifs n tels que $n-4$ divise $n+2$.

4) Déterminer les entiers relatifs n tels que $n+1$ divise $3n-4$.

Exercice 2

Déterminer le reste de la division par 7 du nombre 32^{2021} .

Exercice 3

1) Déterminer les restes de la division de 5^p par 13 pour p entier naturel.

2) En déduire que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, le nombre $N = 31^{4n+1} + 18^{4n-1}$ est divisible par 13.

Exercice 4

p et q sont des entiers naturels.

1) Démontrez que $2^{pq}-1$ est divisible par 2^p-1 et par 2^q-1.

2) Déduisez en que pour que 2^n-1 soit premier, il faut que n soit premier.

3) Prouvez à l'aide d'un contre-exemple que la condition « n est premier » n'est pas suffisante pour que 2^n-1 soit premier.

Exercice 5 (Bac)

1) On considère dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation (E): $7x-5y=1$

a) Justifier que le couple $(3;4)$ est solution de (E) puis résoudre (E).

b) Montrer que si $(x;y)$ est une solution de (E) alors $\begin{cases} x \equiv 3[5] \\ y \equiv 4[7] \end{cases}$

2) Dans cette question on se propose de déterminer l'ensemble S des entiers relatifs A tels que $\begin{cases} A \equiv 4[5] \\ A \equiv 3[7] \end{cases}$

a) Soit A un élément de S. Démontrer qu'il existe un couple d'entiers $(x;y)$ **tel que** $A = 7x + 3 = 5y + 4$ **où** $(x;y)$ **est une solution de** (E)

b) En déduire que $A \in S$ **si et seulement si** $A \equiv 24\,[35]$**.**

c) Soit n et a deux entiers naturels ($0 < n < 9$ **) et B un entier qui s'écrit, en base n, sous la forme** $\overline{374a}$**. Déterminer n puis en déduire l'écriture décimale de l'entier B sachant qu'il appartient à S.**

Exercice 6 (Bac)

On considère l'équation (E) : $5x - 3y = 17$ **, où x et y sont des entiers relatifs.**

1.a) Justifier que l'équation (E) admet des solutions entières et vérifier que le couple $(4,1)$ **est une solution particulière de (E).**

b) Déterminer l'ensemble des solutions de (E).

2) Soit (x,y) **une solution de (E).**

a) Montrer que si x est un diviseur de y, alors x est un diviseur de 17.

b) Soit m un entier relatif. Trouver les valeurs de m telles que le quotient $\frac{1+5m}{4+3m}$ **soit un entier relatif.**

Exercice 7

1) On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ **l'équation (E) :18a + 23b = 2001.**

a) Montrer que pour tout couple (a, b) solution de (E) a est un multiple de 23 et b un multiple de 3.

b) Déterminer une solution de (E).

c) Résoudre (E).

2) Déterminer les couples (p, q) d'entiers tels que 18d + 23m = 2001, où d désigne le pgcd de p et q, et m leur ppcm.

Exercice 8

1. On considère l'équation (E) : $8x + 5y = 1$**, où** $(x\,;y)$ **est un couple de nombres entiers relatifs.**

a. Donner une solution particulière de l'équation (E).

b. Résoudre l'équation (E).

2. Soit *N* un nombre naturel tel qu'il existe un couple (*a* ; *b*) de nombres entiers vérifiant : $\begin{cases} N = 8a+1 \\ N = 5b+2 \end{cases}$.

a. Montrer que le couple (*a* ; *b*) est solution de (E).

b. Quel est le reste, dans la division de *N* par 40 ?

3. a. Résoudre l'équation $8x + 5y = 100$, où $(x ; y)$ est un couple de nombres entiers relatifs.

Exercice 9

1) Vérifier les conversions suivantes du nombre X

Base	2	3	5	8	10	16
X	1000111101101	20021222	121324	10755	4589	11ED

2) Compléter le tableau de conversion

Base	2	3	5	8	10	16
X			4203			
Y				6724		
Z						1C2D

Exercice 10

1. Résolution d'une équation

On considère l'équation (1) : $11n - 24m = 1$ d'inconnue (n, m) élément de $\mathbb{Z}^2$.

a. Justifier, à l'aide de l'énoncé d'un théorème, que cette équation admet au moins une solution.

b. En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution particulière de l'équation (1).

c. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (1).

2. Recherche du PGCD de $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$

a. Justifier que 9 divise $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$.

b. Soit (n, m) un couple quelconque d'entiers naturels solutions de (1). Montrer que l'on peut écrire

$$(10^{11n}-1)-10(10^{24m}-1)=9.$$

c. Montrer que $10^{11}-1$ divise $10^{11n}-1$

Déduire de la question précédente l'existence de deux entiers N et M tels que :

$$(10^{11}-1)N-(10^{24}-1)M=9.$$

d. Montrer que tout diviseur commun à $10^{24}-1$ et $10^{11}-1$ divise 9.

e. Déduire des questions précédentes le PGCD de $10^{24}-1$ et $10^{11}-1$.

Exercice 11

1. En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer le PGCD des nombres 28 et 31. Trouver alors deux nombres x et y entiers relatifs tels que $31x-28y=1$.

2. Résoudre dans l'ensemble des entiers relatifs l'équation $31x-28y=414$.

3. Le plan est rapporté au repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

On donne les points A(–30 ; – 48) et B(82 ; 76). On appelle (D) la droite (AB).

a. Trouver l'ensemble des points M(x ; y) de (D) dont les coordonnées sont des nombres entiers relatifs.

b. Le repère utilisé pour le graphique est gradué de –10 à +10 en abscisses et de –14 à +14 en ordonnées. Vérifiez et expliquez pourquoi il n'y a pas de point de (D) à coordonnées entières visible sur le graphique.

c. Pour remédier à l'inconvénient du 3.b. on décide d'agrandir la fenêtre à [–40 ; +40] en abscisses et à [–50 ; +10] en ordonnées. Combien y-a-t-il de points de (D) à coordonnées entières sur ce nouveau graphique ? Faire la figure.

Exercice 12

Les nombres 1 ; 11 ; 111 ; 1111 ; etc. sont des nombres que l'on appelle rep-units (répétition de l'unité). Ils ne s'écrivent qu'avec des chiffres 1. Ces nombres possèdent de nombreuses propriétés qui passionnent des mathématiciens.

Cet exercice propose d'en découvrir quelques-unes.

Pour k entier strictement positif, on note N_k le rep-unit qui s'écrit à l'aide de k chiffres 1.

Ainsi $N_1=1$, $N_2=11$, $N_3=111$, …

1. Citer deux nombres premiers inférieurs à 10 n'apparaissant jamais dans la décomposition d'un rep-unit. Justifier brièvement la réponse.

2. A quelle condition sur k le nombre 3 apparaît-il dans la décomposition du rep-unit N_k ? Justifier brièvement la réponse.

3. Pour $k > 1$, le rep-unit N_k est défini par $N_k = \sum_{i=0}^{k-1} 10^i = 1 + 10 + 100 + ... + 10^{k-1}$.

Justifier l'égalité : $9N_k = 10^k - 1$ pour tout entier $k > 1$.

4. Soit k un entier strictement positif. Démontrer que : « $10^k \equiv 1(7)$ » équivaut à « k est multiple de 6 ».

En déduire que 7 divise N_k si et seulement si k est multiple de 6.

Exercice 13 (Bac- traduit)

On considère l'équation (E) : $25x - 9y = 5$, où x et y sont des entiers relatifs. 1.a) En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer deux entiers relatifs u et v tels que $25u + 9v = 1$. En déduire une solution particulière (x_0, y_0) de (E). b) Déterminer l'ensemble des solutions de (E). 2) On désigne par d le PGCD de x et y où (x, y) est une solution particulière de (E). a) Quelles sont les valeurs possibles de d ? b) Quelles sont les solutions (x, y) de (E) telles que x et y soient premiers entre eux? c) Peut-on trouver un couple (x, y) d'entiers relatifs tel que (x^2, y^2) soit solution de (E) ? Justifier votre réponse.	نعتبر المعادلة $25x - 9y = 5$: (E) حيث x و y عددان صحيحان. 1.a) باستخدام خوارزمية إقليدس عين عددين صحيحين u و v بحيث يكون $25u + 9v = 1$. استنتج حلا خاصا (x_0, y_0) للمعادلة (E) . b) عين مجموعة حلول (E). 2) نعني بالرمز d المضاعف المشترك الأعلى للعددين x و y حيث (x, y) حل للمعادلة (E). a) ما هي القيم الممكنة للعدد d؟ b) ما هي الحلول (x, y) للمعادلة (E) التي من أجلها يكون العددان x و y أوليين فيما بينهما؟ c) هل يمكن إيجاد زوج (x, y) من الأعداد الصحيحة بحيث يكون (x^2, y^2) حلا للمعادلة (E)؟ برر جوابك.

Dépôt légal N° 2177/2020

Bibliothèque nationale

Nouakchott

COLLECTION ESSEBIL AU BAC

Accompagnement au Bac

Dans les ouvrages de la collection ESSEBIL AU BAC vous trouverez chaque trimestre:

ESSEBIL AU BAC - Mathématiques

- ✓ **Des résumés de cours pour réviser rapidement et mémoriser les formules,**
- ✓ **Des QCM pour l'entraînement et la maîtrise des notions du programme,**
- ✓ **Des exercices corrigés variés et progressifs pour teser et approfondir vos connaissances,**
- ✓ **Des exercices de synthèse et des problèmes non corrigés pour préparer éfficacement l'épreuve du Bac.**
- ✓ **Quelques traductions pour améliorer le niveau d'acquisition.**