Table des matieres

LE SUCCES MATHEMATIQUES Tle D

Auteur : Lassane SAWADOGO

Qualification :

- Professeur certifié de Mathématiques / Physique Chimie.
- Technicien Supérieur International des Assurances de IIA.
- Etudiant en Master 2 en Ingénierie Mathématiques.

Contacts : 75 35 20 04 / 72 25 57 26

<u>CONSEILS POUR LES ELEVES :</u>

Après chaque chapitre exécuté en classe, il faut réviser le cours et reprendre tous les exercices faits en classe avec le professeur. Traiter les exercices de ce document aussi bien en groupe et individuellement. A deux mois du BAC, il faut traiter tous les sujets de PREPA – BAC de ce document. Apres avoir traité un exercice en groupe ou en classe, il faut le reprendre seul afin de mémoriser les démarches et les formules. En sciences la meilleure façon de retenir les démarches et les formules, c'est en faisant assez d'exercices. Il faut partager vos connaissances avec les amis, car en cela vous devenez plus fort.

Le présent document relève de la première édition. Il est susceptible d'être amélioré dans les prochaines années par l'ajout du corrigé. Il est un outil d'amélioration et de consolidation des acquis de l'utilisateur. Prière à tout utilisateur qui trouvera des parties à revoir ou des idées d'amélioration de ne pas hésiter à me contacter, car un homme reste toujours insuffisant face au savoir.

Ensemble faisons la promotion scientifique du Burkina.

EXERCICES PAR CHAPITRE & DEVOIRS

PARTIE 1 : NOMBRES COMPLEXES

EXERCICE 1

1) On donne z = -2 + 3i et z' = 1 - i

a) Déterminer $\bar{z}$; $\bar{z}'$; Ré(z) et Im(z')

b) Calculer z + z', z - z' ; zz', $\frac{1}{z}$, $\frac{i}{z'}$ et z^2.

2) Donner la forme algébrique du conjugué $\bar{z}$ des complexes z suivants :

$z_1 = 3 - 4i$; $z_2 = \frac{1}{i-1}$; $z_3 = \frac{3-i}{1+i}$.

3) Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

1) $z = 3 + 2i - 1 + 3i$; 2) $z = 6 + i - (2 + 4i)$

3) $z = 12 - 3i - 4 - 5 + 8i$; 4) $z = (1 + 2i)(4 + 3i)$

5) $z = (3 - i)(2 + 7i)$; 6) $z = (1 + i)^2$

7) $z = (3 + i\sqrt{5})(3 - i\sqrt{5})$; 8) $z = (2 - 5i)^2$

9) $z = (1 + i)(2 - 3i)(1 + i)$; 10) $(2 + i)^2(1 - 2i)$.

EXERCICE 2

1) Soient A , B et C trois points d'affixes respectives

$z_A = -1 + 2i$; $z_B = 3 - i$ et $z_C = -2 - 3i$.

a- Donner l'affixe des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b – En déduire les distances AB, AC et BC.

c- Placer les points A , B et C dans un repère.

2) Calculer $|1 - i|$; $|i|$; $|i - \sqrt{3}|$ et $\left|(1 + i\sqrt{3})^4\right|$.

EXERCICE 3

Soit f : $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$z \to \frac{z+i}{z-1}$

1. Déterminer les parties réelle et imaginaire de f(z) en fonction de x et y en posant z = x + iy.
2. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que f(z) soit réel.
3. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que f(z) soit imaginaire.

EXERCICE 4

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes. Donner la solution sous forme algébrique.

1) $(1 + i)z = 3 - i$; 2) $2z + 1 - i = iz + 2$

3) $(2z + 1 - i)(iz + 3) = 0$; 4) $\frac{z+1}{z-1} = 2i$

5) $(iz + 1)(z + 3i)(z - 1 + 4i) = 0$

6) $z^2 + iz + 1 + 3i = 0$; 7) $z^2 + z + 1 = 0$

8) $z^2 + 3z + 2 = 0$ et 9) $z^2 = 3 + 4i$.

EXERCICE 5

Donner les formes trigonométrique et exponentielle des nombres complexes suivants :

$z_1 = 2 + 2i\sqrt{3}$; $z_2 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$; $z_3 = 4 - 4i$;

$z_4 = -\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}$; $z_5 = -2i$; $z_6 = 3i$; $z_7 = -\sqrt{5}$; $Z_8 = 1$

$z_9 = \frac{4}{1-i}$.

EXERCICE 6

Soient Z_1 et Z_2 les nombres complexes tels que

$Z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$ et $Z_2 = 1 - i$.

1) Donner le module et un argument de Z_1 , Z_2 et $\frac{Z_1}{Z_2}$.

2) Donner la forme algébrique de $Z_1 \times Z_2$ et $\frac{Z_1}{Z_2}$.

3) En déduire que $\cos(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$; $\sin(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

EXERCICE 7

1) Donner une forme exponentielle de chacun des nombres complexes suivants :

$Z_1 = 2\sqrt{3} + 6i$; $Z_2 = (1 + i\sqrt{3})^4$

$Z_3 = 2(\cos\frac{\pi}{5} - i\sin\frac{\pi}{5})$.

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé du plan, on donne les points A et B d'affixe respective 1 et 3 + 2i. Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z satisfaisant la condition suivante

$|z - 1| = |z - (3 + 2i)|$.

3) Linéariser $\sin^2 x$; $\cos^2 x$; $\sin^3 x$ et $\cos^3 x$.

EXERCICE 8

1) Calculer $(1 + i)^6$

2) Soit l'équation (E) : $Z^2 = -8i$ et

l'équation (E') : $Z^3 = -8i$. Déduire de 1°) une solution de (E) et une solution de (E'). Achever la résolution de (E).

3) Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ qui transforme le Point A d'affixe 2i en le point B et point B en le point C.

a- Déterminer Z_B et Z_C .

b- Montrer que Z_B et Z_C sont solution de (E'). Résoudre alors l'équation (E').

EXERCICE 9

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $Z^2 - 2Z + 2 = 0$

2) Soit K, L, M les points d'affixes respectives

$Z_K = 1 + i$, $Z_L = 1 - i$, $Z_M = -i\sqrt{3}$

Placer ces points dans le plan muni d'un repère orthonormé direct (o, $\vec{u}$, $\vec{v}$), unité graphique : 2 cm.

(on complètera la figure au fur et à mesure)

3) On appelle N le symétrique du point M par rapport au point L. Calculer l'affixe du point N

4) La rotation de centre O et l'angle $\frac{\pi}{2}$ transforme le point M en le point A et le point N en le point C.
Calculer les affixes des points A et C.

5) La translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe 2i transforme le point M en le point D et le point N en le point B.
Calculer les affixes des points D et B.

6) Montrer que le point K est milieu des segments $[DB]$ et $[AC]$.

7) Montrer que $\frac{z_{C-}z_K}{z_{B-}z_K} = i$

8) En déduire la nature exacte du quadrilatère $ABCD$.

EXERCICE 10

Soit le corps des nombres complexes.

On désigne par F l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par
$F(z) = z^3 - (3-4i)z^2 - (7i+3)z + 4$.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$: F(z) = 0. (On admet que cette équation admet une solution imaginaire pure).

2) Déterminer le module et l'argument de chacune des racines et représenter leur image dans le plan (P) rapporté à un repère orthonormé.

EXERCICE 11

A tout nombre complexes z, différent de 2- i , on associe le nombre complexe : $Z = f(z) = \frac{z+3-2i}{z-2+i}$.

1- Déterminer les ensembles des points M d'affixes z tels que :

a) Z soit un nombre réel.

b) Z soit un nombre imaginaire pur positif.

c) Z soit un nombre imaginaire pur.

d) $|Z| = 1$

2- Déterminer l'ensemble des points invariants de l'application.

3- Placer dans le plan complexe les points A , B et C d'affixes respectives 3 + i , - 2 + 4i et -1 + 4i .

4- Déterminer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$

5- Calculer l'affixe du centre de gravité G du triangle ABC

6- Calculer l'affixe du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.

EXERCICE 12

Soient *A* et *B* les nombres complexes définis par :

$A = -1 + i$; $B = -\sqrt{3} - i$

1) Mettre *A* et *B* sous forme trigonométrique et sous forme exponentielle

2) En déduire les formes trigonométriques et exponentielle de A^3, B^4 et $Z = \frac{A^3}{B^4}$

3) Déterminer les formes algébriques de A^3 ; B^4 et Z

4) Déduire des questions précédentes les valeurs exactes de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$.

EXERCICE 13

1) Résoudre dans C l'équation :
$Z^2 + (-3+4i)Z - 3(1+3i) = 0$

On note Z_1 et Z_2 les racines de l'équation avec Z_2 imaginaire pure.

2) On note A et B les points d'affixes respectives Z_1 et Z_2.
Déterminer l'affixe Z_3 du point C tel que

$$AB = BC \text{ et } \left(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}\right) = \frac{\pi}{3}$$

b) En déduire la nature du triangle ABC.

EXERCICE 14

On considère dans l'ensemble des nombres complexes , l'équation $(E) : z^3 + 2z^2 - 16 = 0$.

1) a- Montrer que 2 est solution de (E) puis que (E) peut s'écrire sous la forme $(z-2)(az^2+bz+c) = 0$ où a , b , c , sont trois réels que l'on déterminera .

b- En déduire les solutions de (E) sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(0, \vec{u}, \vec{v})$.

2) a- Placer les points A , B , et D d'affixe respectives $z_A = -2-2i$; $z_B = 2$ et $z_D = -2+2i$.

b- Calculer l'affixe z_c du point C tel que ABCD soit un parallélogramme. Placer C.

3) Soit E l'image du point C par la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{2}$, et F l'image du point C par la rotation de centre D et d'angle $+\frac{\pi}{2}$.

a- Calculer les affixes z_E et z_F des points E et F .

b- Placer les points E et F .

4) a- Vérifier que $\frac{z_{F-}z_A}{z_{E-}z_A} = i$.

b- En déduire la nature du triangle AEF .

EXERCICE 15

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité 1cm.

1) Soit d le nombre complexe défini par :
$d = \frac{3-i}{1-2i} + \frac{2+i}{i} + (3+i)(1-4i) - 14(1+i)^2$

a- Ecrire d sous forme algébrique.

b- En déduire les racines carrées de d.

c- En déduire la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation :
$z^2 - (3+2i)z - 1 + 13i = 0$. On notera z_1 la solution dont la partie réelle est positive et z_2 l'autre solution.

2) On désigne par A et B les points d'affixe respectives z_1 et z_2.

a – Déterminer l'affixe du point C l'image dans la translation t du vecteur $\vec{p}$ d'affixe 4i du point A.

b- Déterminer une mesure en radians de l'angle $(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB})$.
En déduire la nature du triangle ABC. (0,25pt)

3) M étant le point d'affixe z distinct de 4 - i , on considère le nombre complexe Z défini par : $Z = \frac{iz+3+i}{z-4+i}$

a- Vérifier que $Z = \frac{i(z+1-3i)}{z-4+i}$.

b- Donner une interprétation du module et un argument de Z.

c- Déterminer et construire l'ensemble (D) des points M du plan tel que $|z| = 1$.

d- Faire une figure complète. On donne $\sqrt{1681} = 41$.

EXERCICE 16

Soit P le polynôme de la variable complexe z défini par : $P(z) = z^3 - 5(1+i)z^2 - 2(1\text{-}9i)z + 16 - 8i$.

1. Montrer que l'équation $p(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure z_0 que l'on déterminera.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $p(z) = 0$. On désignera par z_1 et z_2 les deux autres solutions tel que $\text{im}(z_1) < \text{im}(z_2)$.

3. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ unité : 1cm

a) Placer les points A, B et C d'affixes respectives z_1 ; z_0 et $\bar{z}_2$.

b) Calculer $\frac{\bar{z}_2 - Z_1}{Z_0 - Z_1}$.

c) En déduire la nature du triangle ABC.

4. Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$. M et M' sont les points d'affixes respectives z et z' tels que M' soit l'image de M par la translation t.

a) Exprimer z' en fonction de z.

b) Calculer l'affixe du point D image du point C par t.

c) Donner la nature exacte du quadrilatère ABDC.

5) Soit M le point d'affixe z et f(z) l'image de M défini par f(z) = 3 – iz . Déterminer les ensembles des points invariants M du plan.

EXERCICE 17

Le plan complexe (p) est rapporté orthonormal direct $(o, \vec{u}, \vec{v})$ ayant comme unité graphique : 1cm.

On note A et B les points d'affixes respectifs i et -4 -2i.

Soit z un nombre complexe différent de i, on pose $Z' = i\,\frac{z+4+2i}{z-i}$.

1. Donner une interprétation géométrique du module et l'argument de z'.

2. Déterminer et représenter l'ensemble E des points M du plan complexe (p) d'affixe z tel que z' soit un nombre réel puis soit un nombre imaginaire pur.

3. On pose $z_1 = z - i$ et $z'_1 = z' - i$.

a) Montrer que $z_1.z'_1 = -3 + 4i$.

b) Calculer le module de $z_1.z'_1$.

4.a) Prouver que si M appartient au cercle (C) de centre A d'affixe i et de rayon r >0 alors M' appartient à un cercle de (C') de centre A.

b) Déterminer r pour que $(C) = (C')$.

EXERCICE 18

PARTIE A :

On considère l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, le polynôme : $p(z) = z^3 + (1+2i)z^2 - (1-14i)z - 13$.

1) Démontrer que l'équation $p(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure z_0 que l'on précisera.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $p(z) = 0$.

PARTIE B :

Soit f l'application définie par $f(z) = \frac{iz}{z+i}$ dans Le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ unité 2cm, on considère les points A, B, C et M d'affixes respectives $-i$; $2-3i$; $-3+2i$ et z .

1) Déterminer le domaine d'existence de f.

2) Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure.

3) a- Donner une Interprétation géométrique du module et un argument de $f(z)$.

b- Déterminer sans construire l'ensemble (E_1) des points M du plan tel que $f(z)$ soit un imaginaire pur.

c- Déterminer sans construire l'ensemble (E_2) des points M du plan tel que $f(z)$ soit un réel pur.

d- Déterminer et construire l'ensemble (E_3) des points M du plan tel que $|f(z)| = 1$.

4) Déterminer le point invariant de l'application f.

5) Déterminer l'affixe de E l'antécédente de $1+2i$ par f.

6) Déterminer si possible l'affixe de A' l'image de A et celui de B' l'image de B par l'application f.

7) Montrer que les points A, B et C sont alignés.

8) a- Déterminer une interprétation géométrique de $|f(z) - i|$ et $\arg[f(z) - i]$.

b- Déterminer et construire l'ensemble (E_4) des points M du plan tel que $|f(z) - i| = \sqrt{2}$.

c- Déterminer et construire l'ensemble (E_5) des points M du plan tel que $\arg[f(z) - i] = \frac{\pi}{4}$.

9) Démonter que E le point d'intersection de (E_4) et (E_5).

« Le soleil brillera d'abord sur ceux qui sont débout avant de briller sur ceux qui sont assis » Seydou BADIAN

DEVOIR N°1 DE MATHEMATIQUES

EXERCICE 1 (8pts)

On donne les nombres complexes suivants: $a = i - \sqrt{3}$, $b = -2i + 2$, $c = -3\sqrt{3} - 3i$ et $d = 2 + 2i\sqrt{3}$.

1) Ecrire sous forme algébrique : b^3 ; $d\bar{c}$; $\frac{c}{a}$ et $\frac{1}{\bar{a}}$. (2pts)
2) Calculer le module et un argument de a, b, c et d. (2pts)
3) Ecrire a, b, c et d sous forme trigonométrique. (1pt)
4) Ecrire a, b, c et d sous forme exponentielle. (1pt)
5) On pose h = $\frac{c}{d}$, écrire h sous forme exponentielle. (0,5pt)
6) On désigne par k le nombre complexe tel que k et $\bar{C}$ soit l'inverses l'un de l'autre.
Donner la forme trigonométrique de k. (0,5pt)
7) Linéariser $sin^3 x$. (1pt)

EXERCICE 2 (6pts)

1) Calculer $(2+4i)^2$. (0,5pt)
2) On considère l'équation (E) : $z^3 + (3-8i)z^2 - (13+12i)z + 9 + 20i = 0$.
   a- Montrer que (E) admet une solution réelle que l'on déterminera. (1pt)
   b- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). (1pt)
3) Soient les points A, B et C d'affixes respectives $Z_A = -3 + 2i$; $Z_B = 1$ et $Z_C = -1 + 6i$.
   a – Calculer $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}$. En déduire la nature du triangle ABC. (1pt)
   b- Le point D est l'image de B par la translation du vecteur $\vec{u}$ d'affixe $2 + 4i$. Calculer Z_D. (0,5pt)
   c- Déterminer la nature exacte du quadrilatère ABDC. (0,5pt)
   d- Le point E est le symétrique du point A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{-\pi}{4}$. Calculer Z_E. (0,5pt)
4) Faire une figure complète dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité 1cm. (1pt)

EXERCICE 3 (6pts)

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité 2cm. On désigne par A, B et C d'affixes respectifs $2i$; 1 et i. Soit f l'application qui à tout point M d'affixe Z distinct A on associe le point M' d'affixe Z' telle que $Z' = \frac{Z-1}{Z-2i}$.

1) Placer les points A, B et C. On complètera la figure dans la suite. (1pt)
2) Déterminer l'affixe du point C', image de C par f. (0,5pt)
3) a- En posant $z = x + iy$, exprimer la partie réel et la partie imaginaire de Z' en fonction de x et y. (1pt)
   b- En déduire l'équation de l'ensemble (Γ) des points M du plan tel que Z' soit imaginaire pur. (0,5pt)
   c- En déduire l'équation de l'ensemble (Δ) des points M du plan tel que Z' soit un réel. (0,5pt)
4) a- Donner une interprétation géométrique du module et un argument de Z'. (1pt)
   Déterminer et construire les ensembles :
   b- (D) des points M dont l'image par f a pour affixe un nombre complexe de module 1. (0,5pt)
   c- (F) des points M dont l'image par f a pour affixe un imaginaire pur positif non nul. (0,5pt)
   d- (E) des points M dont l'image par f a pour affixe un réel strictement négatif. (0,5pt)

DEVOIR N°2 DE MATHEMATIQUES

EXERCICE 1 (7pts)

On donne les nombres complexes suivants: $a = i + \sqrt{3}$, $b = 2i - 2$, $c = -3\sqrt{3} - 3i$ et $d = 4 - 4i\sqrt{3}$.

1) Ecrire sous forme algébrique : b^2 ; $d\bar{c}$; $\frac{c}{\bar{a}}$ et $\frac{1}{a}$. (2pts)

2) Calculer le module et un argument de a, b, c et d. (2pts)

3) Ecrire a, b, c et d sous forme trigonométrique. (1pt)

4) Ecrire a, b, c et d sous forme exponentielle. (1pt)

5) On pose h = $\frac{a}{d}$, écrire h sous forme exponentielle. (0,5pt)

6) On désigne par n le nombre complexe tel que n et d soit inverses l'un de l'autre. Donner la forme trigonométrique de n. (0,5pt)

EXERCICE 2 (3pts)

1) Soit (Δ) l'ensemble des points M du plan d'affixe z vérifiant la relation $|z - 1 - i| = |z - 3 + i|$.
   a- Caractériser géométriquement l'ensemble (Δ). (0,5pt)
   b- En posant $z = x + iy$ où x et y sont des réels, caractériser analytiquement l'ensemble(Δ). (1pt)
   c- Justifier que le point A d'affixe 4 + 2i appartient à (Δ). (0,25pt)
   d- Déterminer l'affixe du point B de (Δ) situé sur l'axe des ordonnées. (0,25pt)
2) Linéariser $\sin^4 x$. (1pt)

EXERCICE 3 (5pts)

Soient a = $\frac{5+11i\sqrt{3}}{7-4i\sqrt{3}}$ et b = $\frac{(2+2\sqrt{3})+i(-2+2\sqrt{3})}{1+i\sqrt{3}}$.

1) Ecrire a et b sous forme algébrique puis sous forme exponentielle. (1pt)
2) Calculer a^9 et b^{12}. (donner le résultat sous forme algébrique). (0,5pt)
3) Soit A le point d'affixe $-i\bar{a}$ et C l'image de A par la rotation de centre O et d'angle de mesure $\frac{-3\pi}{4}$.
   On désigne par c l'affixe du point C.
   a) Déterminer c et donner le résultat sous forme algébrique puis sous forme exponentielle. (1,5pt)
   b) En déduire les valeurs exactes de $\cos(\frac{\pi}{12})$ et $\sin(\frac{\pi}{12})$. (1pt)
   c) Résoudre dans $[-\pi; \pi]$ l'équation : $(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cos 2x + (\sqrt{6}-\sqrt{2})\sin 2x = 2$. (1pt)

EXERCICE 4 (5pts)

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. (unité : 4cm), On note $Z_A = -1 + i$.

Soit f l'application définie sur $\mathbb{C} \setminus \{-1 + i\}$ par : $f(z) = \frac{2z-i}{z+1-i}$.

1) On pose $z = x + iy$ où x et y sont des réels.
   a) Déterminer la partie réelle de f(z) et la partie imaginaire de f(z) en fonction de x et de y. (1pt)
   b) Déterminer l'ensemble E_1 des points M d'affixe z tel que f(z) soit un nombre réel. (0,5pt)
   c) Déterminer l'ensemble E_2 des points M d'affixe z tel que f(z) soit un nombre imaginaire pur. (1pt)
2) Soit B le point d'affixe $Z_B = \frac{1}{2}i$ et le point C d'affixe $Z_C = -\frac{1}{4} + \frac{5}{4}i$
   a) Vérifier que B appartient à E_1 et E_2 et que C appartient à E_2. (0,75pt)
   b) Calculer $\frac{Z_A - Z_C}{Z_B - Z_C}$ puis écrire le résultat sous forme exponentielle. (0,5pt)
   c) En déduire la nature du triangle ABC. (0,25pt)
   d) Construire E_1 et E_2. Placer les points A, B et C sur la figure. (1pt)

« Demain c'est aujourd'hui » Bonne chance

PARTIE 2 : LIMITES ET CONTINUITES

EXERCICE 1

1) Déterminer la limite en + ∞ de chacune des fonctions suivantes : f(x) = $\frac{2}{x^3}$; g(x) = $\frac{2x^3-5x-3}{x^3}$;
h(x) = -3 + $\frac{5}{x^2}$; k(x) = - x^4

2) Déterminer la limite en - ∞ de chacune des fonctions suivantes : f(x) = - x^3 ; g(x) = 5 + $\frac{1}{x}$; h(x) = $\sqrt{-x+3}$

3) Déterminer les limites suivantes :
. $\lim_{x\to 0^+}\left(x^2-4+\frac{1}{x}\right)$; $\lim_{x\to-\infty}(-x^2-x+3)$; $\lim_{x\to-\infty}(2x+1-\frac{1}{x})$; $\lim_{x\to-\infty}(1-\frac{4-3x}{x})$

EXERCICE 2

1. a) Déterminer suivant les valeurs de x le signe de x^2-3x+2.
b) Déterminer : $\lim_{x\to 1^+}\frac{2x+1}{x^2-3x+2}$ et $\lim_{x\to 1^-}\frac{2x+1}{x^2-3x+2}$.

2. Soit la fonction f définie sur $]1\,;\,+\infty[$ par
f(x) = $\frac{3x+\cos x}{x-1}$.
a) Montrer que si x > 1, $\frac{3x-1}{x-1}\leq$ f(x) $\leq\frac{3x+1}{x-1}$.
b) En déduire alors $\lim_{x\to+\infty}f(x)$

3. Déterminer $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{4x-5}{x-1}}$.

EXERCICE 3

On sait que $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ = 1.

1) On considère la fonction f définie par f(x) = $\frac{1-\cos 2x}{x^2}$. Montrer que f(x) = $\frac{2\sin^2 x}{x^2}$ et déterminer $\lim_{x\to 0}f(x)$.

2) En déduire que $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}$ = 2.

EXERCICE 4

1) Etudier la continuité en 0 de :

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{4-x} & si\ x<0\\ \frac{x-6}{2x-3} & si\ \ x\geq 0\end{cases}\ ;\ g(x)=\begin{cases}\frac{2x-1}{x+1} & si\ x\leq 0\\ \sqrt{x+9} & si\ x>0\end{cases}$$

2)) Etudier la continuité en 1 de :

$$g(x)=\begin{cases}\frac{6x}{x+2} & si\ x\in\ ]-\infty\,;1[\\ \sqrt{3x+1} & si\ \ \in\ [1\,;\,+\infty[\end{cases}$$

3) Etudier la continuité en π de :

$$h(x)=\begin{cases}\frac{cos2x}{1-cosx} & si\ x\in\ ]-\infty\,;\pi[\\ \sin(\frac{1}{6}x) & si\ \ \in\ [\pi\,;\,+\infty[\end{cases}$$

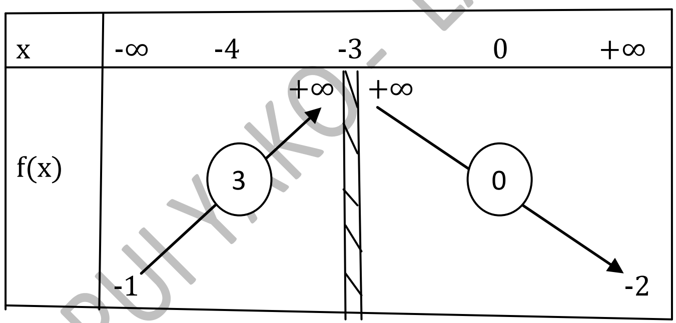
EXERCICE 5

1) Dans chacun des cas suivants, f est une fonction définie sur $]0\,;1]$. dire si on peut prolonger f par continuité en 0 . f(x) = $\frac{\sin x}{x}$; f(x) = $\frac{1-\cos x}{x}$;
f(x) = $\frac{\tan x}{x}$; f(x) = $\frac{\sqrt{x}}{x}$.

2) Dans chacun des cas suivants, f est une fonction définie sur $[0\,;1[$. Dire si on peut prolonger f par continuité en 1.
f(x) = $\frac{x^2-1}{x-1}$; f(x) = $\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$; f(x) = $\frac{|x|-1}{x-1}$; f(x) = $\frac{x(1-x)}{x-1}$.

EXERCICE 6

On considère la fonction f de ℝ vers ℝ dont le tableau de variation est le suivant :



1) Déterminer Df .
2) Quelle est l'image par f de chacun des intervalle suivants : $]-4;\,-3[$; $]-3\,;0]$; $]-3\,;\,+\infty[$; $]-\infty;\,-4]$.
3) Déterminer les différentes asymptotes à la courbe représentatives de f.
4) Donner les variations de f.
5) Tracer la courbe (C) de f.

EXERCICE 7

Soit $(x)=\sqrt{x^2-|x+1|}$.
1) Ecrire f sans le sans le symbole de la valeur absolue.
2) Etudier la continuité de f en -1.

« DETERMINATION DE L'ENSEIGNANT + COURAGE DE L'ELEVE = SUCCES A L'EXAMEN » SAWADOGO. L

PARTIE 3 : DERIVABILITE

EXERCICE 1

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer le domaine de définition et calculer la dérivé :

f$(x) = -x^2 - x + 3$; g$(x) = 5 + \frac{1}{x} - \sqrt{3x}$; $h(x) = -3 + \frac{5}{x^2}$; k$(x) = \frac{2x^3 - 5x - 3}{x^3}$; A$(x) = \sqrt{-x+3}$;

B$(x) = 1 - \frac{4-3x}{x}$; C$(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$; p$(x) = \frac{\sin x}{x}$;

q$(x) = \frac{3x-1}{x-1}$; m$(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$; n$(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{4x^2}$;

s$(x) = \frac{\tan x}{x}$; v$(x) = \frac{1-\cos x}{x}$;

D$(x) = \sqrt{3x+1} - \sqrt{3x} + 1$;

H$(x) = |2x+4|$; F$(x) = \left|\frac{x^2-1}{x^2+2}\right|$; L$(x) = \left|\frac{x^2-3x-1}{x^2-4}\right|$.

EXERCICE 2

Soit f la fonction définie par $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$.

1) Quel est l'ensemble de définition de f ?
2) Etudier la parité de f.
3) Etudier les variations de f puis dresser le tableau de variation.
4) Etudier la dérivabilité de f en -1 et en 1. Interpréter géométriquement les résultats.
5) Construire la courbe représentative de f dans un repère orthonormal (O,$\vec{i}$, $\vec{j}$), d'unité 1cm. Construire l'équation de la tangente au point d'abscisse 0.

EXERCICE 3

Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ *vers* $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x+3}{|x|+2}$ et (C) sa courbe représentative.

1) Quel est l'ensemble de définition de f ?
2) Etablir les équations de la tangente à gauche et de la tangente à droite à la courbe (C) au point A(0 ; $\frac{3}{2}$).

EXERCICE 4

1- Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ *vers* $\mathbb{R}$ par :
f$(x) = x^2\,(3-x)$ et (C) sa courbe représentative.

a) Déterminer les extrémums éventuels de f.
b) Déterminer les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe (C).

2- Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ *vers* $\mathbb{R}$ par : f$(x) = \frac{x-x^2}{x^2+1}$ et (C) sa courbe représentative.

a) Déterminer les extrémums éventuels de f.
b) Déterminer les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe (C).

EXERCICE 5

Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ *vers* $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x|x-1|$

1) Etudier la dérivabilité de f en 1.
2) La fonction f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$? Justifier.

EXERCICE 6

Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ *vers* $\mathbb{R}$ par :
f$(x) = \sqrt{x(x+1)}$ et (C) sa courbe représentative.

1) Quel est l'ensemble de définition de f ?
2) Etudier la dérivabilité de f en -1 et en 0.
3) Etudier les variations de f puis dresser le tableau de variation.
4) Vérifier que la droite (D) : y = $x + \frac{1}{2}$ est une asymptote à la courbe (C) de f en $+\infty$.
5) Vérifier que la droite (D') : y = $-x - \frac{1}{2}$ est une asymptote à la courbe (C) de f en $-\infty$.
6) Construire la courbe représentative de f dans un repère orthonormal (O,$\vec{i}$, $\vec{j}$) en précisant la tangente à gauche et de la tangente à droite à la courbe (C) en -1 et 0.

EXERCICE 7

Soit f la fonction définie sur $[1\ ;\ +\infty[$ par :
f$(x) = \left(1 - \sqrt{x}\right)^2$ et (C) sa courbe représentative.

1) Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.
2) En déduire que f réalise une bijection de $[1\ ;\ +\infty[$ Vers un intervalle J que l'on déterminera. En déduire le tableau de variation de f^{-1}
3) Déterminer la bijection réciproque f^{-1} de f.
4) Construire la courbe représentative de f dans un repère orthonormal (O,$\vec{i}$, $\vec{j}$). En déduire celle de la bijection réciproque puis justifier.

EXERCICE 8

Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ *vers* $\mathbb{R}$ par :
f$(x) = x + \sqrt{|x^2 - 1|}$ et (C) sa courbe représentative.

1) Quel est l'ensemble de définition de f ?
2) Déterminer les limites de f aux bornes de Df.
3) Etudier la dérivabilité de f en -1 et en 1. Donner une interprétation géométrique des résultats obtenus.
4) Etudier le sens de variations de f .
5) Démontrer que la courbe représentative de f admet deux asymptotes ; donner les équations de ces asymptotes.
6) Construire la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.

PROBLEME 1

On considère $f(x) = \frac{(x-4)^2}{2(2-x)}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère (O,I,J) du plan.

1) a- Déterminer D_f et

 b- Préciser les limites aux bornes de D_f.

 c- En déduire la ou les asymptote(s) à C_f.

2) a- Déterminer a, b , c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{2-x}$.

 b- Montrer que $(D) : y = \frac{-x}{2} + 3$ est une asymptote à la courbe C_f.

3) a- Montrer que $f'(x) = \frac{x(4-x)}{2(x-2)^2}$.

 b- Etudier le signe de $f'(x)$ et dresser son tableau de variation.

 c- Construire la courbe C_f .

PROBLEME 2

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2} - 1 \; si \; x \geq 2 \\ f(x) = \frac{x^2 - 4x+5}{x^2 - 4x+3} \; si \; x < 2 \end{cases}$$

PARTIE A :

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère ortho normal (O,I,J) d'unité 1 cm.

1) Déterminer le domaine de définition Df de f.
2) Déterminer les limites de f aux bornes de Df. En déduire une conséquence graphique.
3) Montrer que la droite (L) d'équation : $y = x - \frac{3}{2}$ est une asymptote à (C) en $+\infty$.
4) Etudier la continuité de f en 2.
5) Etudier la dérivabilité de f en 2.
6) a- Calculer la dérivée $f'(x)$.
 b- Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.
 c- Dresser le tableau de variation de f.
 d- Tracer les asymptotes, la tangente (T) et la courbe (C).
7) Soit g la restriction de f à l'intervalle I = $]-\infty; 1[$.
 a- Montrer que g admet une bijection réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à préciser. En déduire le tableau de variation de g^{-1} sans expliciter $g^{-1}(x)$.

 b- Construire en justifiant la courbe (C^{-1}) de la bijection réciproque g^{-1} dans le même repère.

PARTIE B :

Soit (Γ) la trajectoire d'un point mobile M$(x; y)$ dont les coordonnées sont fonction du paramètre t :

$$\begin{cases} x(t) = t + 2 \\ y(t) = -1 + \sqrt{t^2 + 3t} \end{cases} \quad ; \; t \geq 0$$

1) Déterminer l'ensemble de valeurs prise par x .
2) Exprimer y en fonction de x.
3) En déduire une explication de l'obtention de (Γ) à partir de la courbe (C) de f .
4) Déterminer les coordonnées du vecteur vitesse en fonction de t.
5) Déterminer les coordonnées du vecteur vitesse V à $t = 1$. En déduire sa valeur.
6) Construire (Γ) en pointillé dans le même repère.

PROBLEME 3

PARTIE A :

Soit la fonction g définie par $g(x) = x^3 - 3x - 4$.

1) Etudier les variations de g.
2) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution .
3) Etudier le signe de g sur $\mathbb{R}$.

PARTIE B :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité 1cm. On considère la fonction f de courbe représentative (C) dans le plan par : $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f puis calculer les limites de f à ses bornes. Interpréter si possible.
2) Etudier les variations de f.
3) Calculer $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter ces limites .
4) En déduire l'équation de l'asymptote oblique (Δ) en $-\infty$ et en $+\infty$.
5) Etudier la position relative de (C) par rapport à (Δ) d'équation $y = x + 2$.
6) Tracer (C) et (Δ). On donne $\alpha = 2{,}25$ et $f(\alpha) = 5{,}3$.

PROBLEME 4

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 3} \; ; \; si \; x > 1 \\ f(x) = \frac{x^2}{x+2} \; ; \; si \; x \leq 1 \end{cases}$$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité 2cm.

PARTIE A :

1) Déterminer le domaine de définition de f .

2) Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition .
3) Etudier la continuité de f en 1.
4) Etudier la dérivabilité de f en 1. Interpréter le résultat.
5) Déterminer les réels a , b et c tels que
$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+2}$; $si\ x \leq 1$.
6) Montrer que la droite (L) : $y = x - 2$ est une asymptote à (C) en $-\infty$.
7) Montrer que la droite (D) : $y = x + 1$ est une asymptote à (C) en $+\infty$.
8) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisses 1.
9) Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau.
10) Construire (C), ses asymptotes ainsi que ses tangentes.

PARTIE B :

Soit p la restriction de f à $]1\ ;\ +\infty[$ et (C^{-1}) sa courbe dans le même repère.
1) Montrer que p est bijective vers un intervalle J à préciser.
2) Expliciter $p^{-1}(x)$.
3) Sans étudier p donner, en justifiant, son sens de variation puis dresser son tableau de variation.
4) Justifier la construction de la courbe (C^{-1}) de p dans le même repère.
5) Construire la courbe (C^{-1}) de p dans le même repère.

PARTIE C :

Soit (Γ) la trajectoire d'un point mobile M($x; y$) dont les coordonnées sont fonction du paramètre t :

$$\begin{cases} x(t) = -1 + \frac{2}{cost} \\ y(t) = 2tant \end{cases} ;\ t \in \left]0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$$

1) Déterminer l'ensemble de valeurs prise par x .
2) Exprimer y en fonction de x.
3) En déduire une explication de l'obtention de (Γ) à partir de la courbe (C) de f dans le même repère.
4) Déterminer les coordonnées du vecteur vitesse en fonction de t.
5) Déterminer les coordonnées du vecteur vitesse V à $t = \frac{\pi}{4}$. En déduire sa valeur.
6) Construire (Γ) en pointillé dans le même repère.

PROBLEME 5

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 1} & ;\ si\ x \leq 0 \\ f(x) = \frac{-2x^2 + 10x + 1}{x^2 - 2x + 1} & ;\ si\ x > 0 \end{cases}$$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2cm.

PARTIE A :

1) Expliquer pourquoi le domaine de définition de f est : $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
2) Etudier la continuité de f en 0.
3) Etudier la dérivabilité de f en 0. Interpréter le résultat
4) Déterminer les réels a , b et c tels que
$\forall\ x \in\ ]0\ ;1[\ \cup\ ]1\ ;\ +\infty[$, on ait :
$f(x) = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$.
5) Calculer les limites aux bornes de D_f . Interpréter géométriquement les résultats obtenus.
6) Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.
7) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe au point d'abscisse 4.
8) Démontrer que la courbe coupe l'axe des abscisses en un point $et\ vérifier\ que\ \alpha \in [5\ ;6]$.
9) a- Montrer que la droite (Δ) d'équation
$y = -x + \frac{3}{2}$ est une asymptote à (C).
b – Etudier la position relative de (C) par rapport à(Δ).
10) Construire (C) , ses asymptotes ainsi que ses tangentes.

PARTIE B :

1) Soit g la restriction de f sur $]1\ ;\ +\infty[$. Montrer que f est une bijection de $]1\ ;\ +\infty[$ vers un intervalle J à préciser. Que représente l'intervalle J.
2) Donner le sens de variation de la bijection réciproque g^{-1} de g puis dresser le tableau de variation.
3) Comment peut – on obtenir la courbe (C^{-1}) de g^{-1} dans le même repère. Tracer (C^{-1}).
4) a- Déterminer une primitive de F de f sur $]1\ ;\ +\infty[$.
b- Déterminer la primitive de f qui s'annule en 2.

« Dans la plus part du temps, le respect et la réussite sont tributaires du savoir »

PARTIE 4 : FONCTION

LOGARITHME NEPERIEN

EXERCICE 1

Pour chaque fonction, déterminer l'ensemble de définition et calculer la dérivée.

$f(x) = \ln(x^2 - 3x + 2)$; $f(x) = \ln(x^2 + 1)$;
$f(x) = \ln(3 - x)$; $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x-1}\right)$; $f(x) = (\ln x)^2$;
$f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$; $f(x) = x\ln x$; $f(x) = \frac{\ln x}{x}$;
$f(x) = \ln x + \frac{x^2}{2}$; $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$;
$f(x) = (x-1)\ln(2-x)$; $f(x) = \ln(\ln x)$;
$f(x) = (\ln x)^2 - \ln x$
$f(x) = \frac{\ln x}{x} - x + 2$; $f(x) = ln(x^2 + 4x + 3)$;

EXERCICE 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

$\ln(3-2x) = 0$; $\ln(x+2) = 0$;
$ln(x+2) = \ln(3-x)$; $\ln(x-5) = 1$;
$(lnx)^2 + 5lnx + 6 = 0$
$\ln(x-2) + \ln(3x-1) = ln2$; $lnx < 0$; $lnx \geq 1$;
$\ln(x+1) \leq 3$; $ln(x+2) < 0$; $(lnx)^2 + 5lnx > 0$
$(lnx)^2 - 2lnx - 3 \leq 0$; $\ln(x+1) + \ln(2x-1) < ln2$

EXERCICE 3

1) Les fonctions f et g définies par $f(x) = ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ et $g(x) = \ln(x+1) - \ln(x-1)$ ont – elle le même ensemble de définition ?

2) Soit la fonction f définie Df par $f(x) = ln\left(\frac{3-x}{3+x}\right)$; Peut – on calculer f(0) ?

3) Soit $f(x) = \frac{1 + 2lnx}{x^2}$. Calculer les images de 1 et e par f.

4) Simplifier les écritures : $ln(\sqrt{e})$; $ln\left(\frac{1}{e}\right)$; $ln(e^3)$;

$ln\left(\frac{1}{e^4}\right)$; ln8 ; $ln\left(\frac{1}{4}\right)$ et 5ln4 – ln32.

5) Soit f définie par $f(x) = ln(1 + e^x)$. Montrer que pour tout nombre réel , $f(x) = x + ln(1 + e^{-x})$.

6) Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $(0{,}9)^n < 0{,}5$.

7) La probabilité d'obtenir un double six en lançant n fois deux dés bien équilibrés est $P_n = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n$. Déterminer le nombre minimal de lancers pour que cette probabilité soit supérieure à 0,99.

8) Soient a et b deux nombres réels et f une fonction définie sur Df par $(x) = ax + b + \frac{lnx}{x}$. Déterminer a et b pour que la courbe représentative de f passe par A(1 ; 0) et admette en ce point une tangente parallèle à la droite d'équation $y = 2x$.

EXERCICE 4

On considère la fonction f définie sur $]0;\ +\infty[$ par :

$f(x = x - \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)$.

Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse -1.

EXERCICE 5

1. En utilisant le fait que $\lim_{x\to 0}\left(\frac{ln(1+x)}{x}\right) = 1$; déterminer $\lim_{x\to 0+}\frac{ln(1+x)}{x^2}$ et $\lim_{x\to+\infty} xln\left(1+\frac{1}{x}\right)$
2. En utilisant le fait que $\lim_{x\to+\infty}\frac{lnx}{x} = 0$; déterminer $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{lnx}{\sqrt[n]{x}}\right)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

EXERCICE 6

On considère la fonction f définie sur $]0;\ +\infty[$ par $f(x) = 5 - x - \frac{2lnx}{x}$. On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Déterminer les limites de f en + ∞ et en 0.
2. Démontrer que (C) admet une asymptote oblique (Δ) dont on donnera une équation.
3. Etudier la position de la courbe (C) par rapport à la droite (Δ).

EXERCICE 7

On considère la fonction f définie sur $]0;\ +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x} - \ln x$.

1. Etudier les variations de f et en déduire que f admet un minimum sur $]0;\ +\infty[$.
2. En déduire le signe de f puis montrer que $\forall\, x > 1,\ 0 < \frac{lnx}{x} < \frac{\sqrt{x}}{x}$.
3. En déduire que $\lim_{x\to+\infty}\frac{lnx}{x} = 0$.

EXERCICE 8

1. Etudier le sens de variation de la fonction h définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par $h(x) = x - \ln x$
En déduire que h est strictement positive sur $]0; +\infty[$.
2) On définit sur $]0; +\infty[$ la fonction f par $f(x) = \frac{x}{x - lnx}$.
   a. Etudier les limites de f en 0^+ et $+\infty$. En déduire les équations des éventuelles asymptotes.
   b. Étudier le sens de variation de f.
   c. Tracer la représentation graphique (C) de f dans un repère orthonormé.

EXERCICE 9

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par

$f(x) = \ln(x^2 + 4)$.

1. Etudier le sens de variation de f sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
2. Soit g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$.

a. Montrer que pour tout $x > 0$,

$\ln(x^2 + 4) = 2\ln x + \ln(1 + \frac{4}{x^2})$.

En déduire la limite de g en $+\infty$.

b. Etudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $[0; +\infty[$ puis établir son tableau de variation.

c. Montrer que sur $[0, +\infty[$ l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution notée α.

d. Montrer que $\in]1; 3[$.

e. Déduire des questions précédentes le tableau de signe de g sur $[0, +\infty[$.

EXERCICE 10

Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par

$f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right) \ln x - 2x$.

1. Montrer que la limite de f en 0 est égale à $-\infty$.
2. Montrer que pour tout $x \in]0; +\infty[$,

$f(x) = x(\ln x - 2) + \frac{\ln x}{x}$. En déduire la limite de f en $+\infty$.

3. Montrer que f est dérivable sur $]0; +\infty[$, puis que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = \frac{(x^2-1)(\ln x - 1)}{x^2}$.
4. En déduire le tableau de variation de f.
5. Tracer la courbe (C) représentant f dans un repère orthonormé. Unité graphique 1cm.

EXERCICE 11

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par

$f(x) = \frac{2 + \ln x}{x}$. On note (C) sa représentation graphique dans un repère $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

PARTIE A

1. Etudier les limites de f en 0^+ et en $+\infty$.

2. Calculer f' de f puis résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation

$f'(x) \geq 0$

3. En déduire le tableau de variation de la fonction f.

(On précisera la valeur exacte des éventuels extremums).

4. Tracer la courbe (C).

5. préciser, à l'aide d'un calcul, les coordonnées exactes du point d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses.

PARTIE B

On considère la suite (Un) définie par $U_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = f(U_n)$.

1. Construire la courbe représentative (C) de f ainsi que la droite (Δ) d'équation y = x dans un repère orthonormé$(0; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$, unité graphique : 2cm.
2. En utilisant la courbe (C) et la droite (Δ), placer sur l'axe des abscisses les 4 premier termes de la suite (Un) en laissant apparaitre les traits de construction. Quelle conjecture peut-on faire quant aux variations de la suite (Un) et à sa convergence ?
3. placer le point I de la courbe qui a pour abscisse α.

4) a. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $1 \leq Un \leq \alpha$.

b. Démontrer que la suite (Un) est croissante (on pourra s'aider de la partie A) ; en déduire alors qu'elle converge vers ℓ.

EXERCICE 12

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ {1} par : $f(x) = \frac{x + \ln|x-1|}{x-1}$

et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; I; J)$ d'unité graphique 2 cm.

Partie A :

1) Déterminer le domaine de définition de f.

2) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition En déduire les asymptotes à (C) .

3) Soit f' la fonction dérivable de f , calculer $f'(x)$ puis étudier son signe . E déduire le sens de variation de f.

4) Dresser le tableau de variation de f.

5) Montrer que le point K$(1; 1)$ est un centre de symétrie pour (C).

6) Tracer (C) et les asymptotes.

Partie B :

Soit les fonctions u et v définis sur l'intervalle $]1 ; +\infty[$ par :

$u(x) = \frac{1}{1-x}$ et $v(x) = \frac{\ln(x-1)}{x-1}$.

1) Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes u et v sur $]1 ; +\infty[$.

2) Vérifier que pour $x > 1 ; -1 + f(x) = v(x) - u(x)$.

3. Calculer ; en cm^2, la valeur exacte de l'aire S du domaine plan compris entre (C) et les droites d'équations respectives $y = 1, x = 2 \; et \; x = 3$.

« Pour bien construire on doit creuser profond »

Bonne chance !!!

PARTIE 5 : FONCTION EXPONENTIELLE

EXERCICE 1

1) Montrer que pour réel x , on a : $\frac{e^{1-3x}}{1+e^{-3x}} = \frac{e}{1+e^{3x}}$.

2) Montrer que pour réel x , on a :

$$\frac{e^{2x}}{(1+e^{x})^2} = \frac{e^{x}}{1+e^{x}} - \frac{e^{x}}{(1+e^{x})^2}.$$

3) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{e^{x}+e^{-x}}$.

a – Etudier la parité de f.

b - Montrer que pour réels x, $f(x) = \frac{e^{x}}{(e^{x})^2+1}$.

4) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = -1 + \frac{2}{e^{x}+1}$.

a- Montrer que pour tout réel x, $f(x) + f(-x) = 0$.

b- En déduire une conséquence géométrique pour la courbe représentative de f.

EXERCICE 2

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$e^{x} + 1 = 0$; $(x-1)e^{x} = 0$;

$(x^2 - 5x + 6)e^{x} = 0$; $(1 - x^2)e^{-x} = 0$;

$\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = 0$; $\frac{1}{1-e^{-x}} = 0$;

$x^2e^{x} + 3xe^{x} = 0$; $e^{2x} - 3e^{x} - 4 = 0$;

$2(lnx)^2 - lnx - 6 = 0$

2) On considère le polynôme défini par :

$P(X) = X^3 + 2X^2 - 5X - 6$.

a – Factoriser P(X) puis Résoudre dans $\mathbb{R}$, P(X) = 0.

b - Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$e^{3x} + 2e^{2x} - 5e^{x} - 6 = 0$ et

$(lnx)^3 + 2(lnx)^2 - 5lnx - 6 = 0$

EXERCICE 3

1) Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer Df, les limites en $+\infty$ *et en* $-\infty$ et calculer la dérivé.

$f(x) = e^{x} + x + 3$; $f(x) = e^{-x} + 2$; $f(x) = 1 - e^{x}$;

$f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$; $f(x) = e^{-2x^2}$;

$f(x) = (x^2 + 2x - 1)e^{-x} + 1$; $f(x) = 2e^{x} - x - 2$;

$f(x) = e^{2x} - (x+1)e^{x}$; $f(x) = \frac{e^{x}}{1+e^{x}}$.

2) Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer Df, les limites aux bornes de Df et calculer la dérivé.

$f(x) = e^{x^2+3x-1}$; $f(x) = e^{\frac{x-1}{2x+1}}$; $f(x) = e^{\sqrt{x+4}}$;

$f(x) = e^{\sqrt{4x^2-1}}$; $f(x) = lnx.e^{3x-1}$; $f(x) = 2xe^{x^2+3}$.

EXERCICE 4

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(0,\vec{i},\vec{j})$. On considère les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ *vers* $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 + e^{x-2}$ et $g(x) = e^{-x+2}$; on note (Cf) et (Cg) leurs courbes représentatives respectives.

1) Etudier les variations de f et g puis dresser leurs tableaux de variation respectifs.

2) Montrer que (Cf) et (Cg) ont un unique point commun A

3) Construire les deux courbes.

EXERCICE 5

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(0,\vec{i},\vec{j})$.

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ *vers* $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = x - \frac{e^{x}-1}{e^{x}+1}$ et (C) sa courbe représentative.

1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$f(x) = x - 1 + \frac{2}{e^{x}+1} = x + 1 - \frac{2e^{x}}{e^{x}+1}$.

2) Déterminer les limites de f en $+\infty$ *et* $-\infty$.

3) Montrer que les droites (D) et (D') d'équation respectives $y = x - 1$ *et* $y = x + 1$ *sont des asymptotes* à (C).

4) Préciser les positions relatives des droites (D) et (D') par rapport à (C).

5) Etudier la parité de la fonction f.

6) En déduire que (C) admet un centre de symétrie dont on précisera les coordonnées .

7) Déterminer les variations de f sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

8) Dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R}$.

9) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

10) Tracer (C), (D), (D') , et (T).

EXERCICE 6

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \frac{x-4}{x}e^{x}$. On note (C_f) sa représentation graphique dans un repère $(0,\vec{i},\vec{j})$.

1) Etudier les limites de f en $-\infty$, 0^+ , 0^- et $+\infty$.

2) Calculer la dérivée f' de f et préciser son signe .

3) En déduire le tableau de variation de la fonction f. *(on précisera la valeur exacte des éventuels extremums)*

4) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 2.

5) Tracer (C_f) sur $[-2;0[\cup]0;5]$.

PROBLEME 1

PARTIE A : Etude d'un polynôme.

On considère la fonction polynôme P définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = x^3 - x^2 - x + 1$.

1) Calculer $p(1)$.

2) Factoriser, au maximum, le polynôme P.

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $p(x) \geq 0$.

PARTIE B : Etude d'une fonction comportant une exponentielle.

On considère f définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$f(x) = \left(x - 2 - \frac{1}{x}\right)e^x$. On note (C) sa courbe représentation graphique dans un repère$(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) Etudier les limites de f en $-\infty$, en 0^+,en 0^- et en $+\infty$. En déduire que (C) admet une asymptote verticale et une asymptote horizontale en $-\infty$ dont on précisera les équations.

2) Calculer la dérivée f' de f puis établir que

$$f'(x) = \frac{(x-1)^2(x+1)}{x^2}e^x.$$

3) En déduire le tableau de variation de f.

4) Déterminer, par calcule, les coordonnées du point d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses.

5) Tracer (C) dans un repère $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

PROBLEME 2

On considère la fonction f sur $\mathbb{R}$ par

$f(x) = (x+1)^2e^{-x}$. On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé$(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) Calcule des limites de f :

a- Etudier la limite de f en $-\infty$.

b- Etudier la limite de f en $+\infty$. En déduire que (C) admet une asymptote horizontale dont on précisera l'équation.

2) Variations de f :

a- Montrer que la dérivée $f'(x) = (1 - x^2)e^{-x}$.

b- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f'(x) \geq 0$

c- En déduire le tableau de variation de la fonction f.

3) Représentation graphique :

a- Déterminer une équation de la tangent (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

b- Tracer la droite (T) puis la courbe (C).

PROBLEME 3

PARTIE A :

Etude d'une fonction simple.

Soit U la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $U(x) = \frac{1-x^2}{2}$.

1) Etudier les limites de U en $-\infty$ et en $+\infty$.

2) Calculer $U'(x)$.

PARTIE B

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$f(x) = e^{\frac{1-x^2}{2}}$.

1) Etudier les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

Préciser les éventuelles asymptotes horizontales.

2) Calculer $f'(x)$. En déduire le tableau de variation (complet) de f.

3) Tracer (soigneusement) la courbe (C) représentant la fonction f dans un repère orthonormé. (Unité : 4cm).

4) Soit A le point de (C) d'abscisse 1. Calculer l'ordonnée de A.

5) Déterminer une équation de la tangente (Δ) à (C) au point A. Tracer (Δ) dans le repère.

PROBLEME 4

Le but du problème est l'étude d'une fonction et le tracer de sa représentation graphique.

1) Soit g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$g(x) = -1 + (1-x)e^{-x}$.

a- Calculer $g'(x)$; étudier son signe.

b- Démontrer que la limite de g en $+\infty$ est égale à -1.

c- Dresser le tableau de variation de la fonction g .

d- Démontrer que pour tout x $[0, +\infty[$, $f(x) \leq 0$.

2) Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par

$f(x) = xe^{-x} - x + 4$. Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé$(0; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$. (Unité : 2cm).

a- Vérifier que pour tout x ϵ $[0; +\infty[$, $f'(x) = g(x)$.

b- Etudier les variations de f sur $[0; +\infty[$.

Préciser la limite de f en $+\infty$.

c- Montrer que la droite (Δ) d'équation y = -x + 4 est une asymptote à (C). Etudier la position de (Δ) par rapport à (C).

d- Construire la courbe (C) et préciser la tangent à cette courbe au point d'abscisse 0.

3) Soit h la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $h(x) = -\frac{x}{2} + 4$.

a- Tracer sa représentation graphique (D) dans le même repère que (C).

b- Calculer les coordonnées du point d'intersection de (C) et (D).

4) Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[2 ; 3]$.

PROBLEME 5

On considère la fonction f définie par :

$f(x) = (x^2 + 1)e^x$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère (O,I,J) d'unité graphique 2cm.

1) Etudier les variations de f.

2) a- Montrer que f est bijective sur $\mathbb{R}$ vers un intervalle K à préciser.

b- Que représente l'intervalle K.

c- Donner le sens de variation de f^{-1} et dresser son tableau de variation.

d- justifier la construction de C^{-1}, la courbe de f^{-1}

3) Construire (C) et C^{-1} dans le même repère.

4) Calculer à l'aide d'une double intégration par partie, J = $\int_{-1}^{0}(x^2 + 1)e^x dx$

5) En-déduire l'aire de la partie du plan délimité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0 \; et \; x = -1$.

PROBLEME 6

PARTIE A :

Soit g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$g(x) = -3 - lnx + \frac{1}{x}$

1) Calculer les limites de aux bornes de son domaine de définition.

2) Déterminer la dérivée g' de g et dresser le tableau de variation de g.

3) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution $\propto$ dans $]0\,;+\infty[$ et que $\propto \in [0{,}4\,;0{,}5]$.

4) Déduire le signe de $g(x)$ sur $]0\,;+\infty[$.

PARTIE B :

On considère la fonction $f(x) = e^{-x}(3 + lnx)$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal d'unité graphique 4cm.

1) Etudier la continuité de f en 0.

2) Calculer la limite de f en $+\infty$.

3) Préciser les éventuelles asymptotes à (C).

4) Etudier les variations de f.

5) Montrer que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha e^{\alpha}}$. Donner un encadrement de $f(\alpha)$ à 5.10^{-1} près.

6) Déterminer le point d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses.

7) Tracer la courbe (C).

PROBLEME 7

PARTIE A

Le plan est muni d'un repère orthonormal (0, I, J) d'unité 2cm .

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$h(x) = -(2x + 1)e^{-2x} + 2$

1) a. Etudier le sens de variation de h.

b. Calculer h(0) et déterminer le signe de h(x) sur $\mathbb{R}$.

2) Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = (x + 1)e^{-2x} + 2x - 2$. On appelle (C) sa courbe représentative dans le repère.

a) Calculer les limites en + ∞ et en -∞ de f.

b) Calculer f'(x) et dresser le tableau de variation de f

c) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\propto$ dans $\mathbb{R}$ et que $\propto \in]0\,,1[$.

3) a. Montrer que la courbe (C) admet une asymptote (Δ) en +∞ dont on déterminera une équation.

Etudier les positions relative de (Δ) et de la courbe (C) de f.

b) Déterminer une équation cartésienne de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse nulle.

c) Construire (Δ) , (T) et (C) dans le repère .

4) Soit la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par F$(x) = (ax + b)e^{-2x}$. Déterminer les réel a et b pour que F soit une primitive de la fonction

$h(x) = (x + 1\,)e^{-2x}$.

5) Soit λ un réel strictement positif et A(λ) l'aire en cm^2 de la partie délimitée par les droites d'équations : $x = 0$ et $y = \lambda$, la courbe (C) et la droite (Δ).

Calculer A(λ) et Déterminer $\lim_{\lambda \to +\infty} A(\lambda)$.

PARTIE B

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$g(x) = 1 - \frac{1}{2}(x + 1)e^{-2x}$

1) Montrer que l'unique réel $\propto$ vérifiant $f(\propto) = 0$ Est une solution de l'équation g$(x) = x$.

2)a. Calculer g'(x) ; étudier les variations de g'.

b. En verifiant que pour tout x de l'intervalle $[0\,;1]$, $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

c. Montrer que pour tout x de l'intervalle $[0\,;1]$, g(x) appartient encore à $[0\,,1]$.

3) On considère la suite (U_n) définie pour tout naturel n par : $\begin{cases} U_o = 1 \\ U_{n+1} = g(Un) \end{cases}$

a) Montrer que pour tout entier naturel n, $U_n \in [O\ ,1]$

b) Montrer que pour tout entier n, $|U_{n+1} - \propto| \leq \frac{1}{2}|U_n - \propto|$.

c) En déduire que pour tout entier naturel, $|U_n - \propto| \leq (\frac{1}{2})^n$

d) Montrer que (U_n) est convergente et donner sa limite .

e) Déterminer un entier p pour lequel on a : $|U_p - \propto| \leq 1O^{-3}$

ln2≈ o,69 ; ln5 ≈ 1, 6 ; e ≈ 2, 7 ; $e^{-2} \approx$ o,13 .

PROBLEME 8

PARTIE A

Soit l'équation différentielle (1) : y' – 2y = xe^x

1) Résoudre l'équation (2) : y' – 2y = o

2) Soient a et b deux réels tels que u$(x) = (ax + b)e^x$

a. Déterminer a et b pour que u soit solution de (1)

Montrer que v est solution de l'équation (2) si et seulement si u + v est solution de l'équation (1).

c. En déduire l'ensemble des solutions de (1).

3) Déterminer la solution de (1) qui s'annule en zéro.

PARTIE B

Soit g la fonction définie sur ℝ par g$(x) = 2e^x - x - 2$.

1) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.

2) On admet que l'équation g$(x) = 0$ a exactement 2 solutions sur ℝ

a. Vérifier que zéro est l'une de ces 2 solutions.

b. L'autre solution est appelée ∝ .

c- Montrer que $-1{,}6 \leq \propto \leq -1{,}5$.

3) Déterminer le signe de g suivant les valeurs de x.

PARTIE C

Soit f$(x) = e^{2x} - (x + 1)e^x$

1) Déterminer les limites de f en -∞ et en +∞ .

2) Etudier les variations de f.

3) Montrer que f$(\propto) = -\frac{\propto^2 + 2\propto}{4}$.

En déduire un encadrement de f(x) .

Etablir le tableau de variation de f.

4) Tracer la courbe (C) de f dans le repère orthonormal (unité graphique : 2cm).

PARTIE D

1) Soit m un réel négatif .Interpréter graphiquement l'intégrale $\int_m^o f(x).dx$. Justifier.

2) a- Calculer K = $\int_m^o xe^x$dx à l'aide d'une intégration par partie.

b) En déduire A(m) = $\int_m^o f(x)dx$ puis la limite en -∞

PROBLEME 9

Le plan est muni d'un repère orthonormal unité graphique 2cm.

PARTIE A :

Soit g la fonction définie sur $[O\ ; +\infty[$ par g$(x) = e^x - x + 1$

1) Etudier le sens de variation de g.

2) Déterminer le signe de g pour tout $x \in [0\ ; +\infty[$

PARTIE B :

Soit la fonction définie sur ℝ par :

$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-1} + \sqrt{1-x} & si\ x < 0 \\ x + 1 + xe^{-x} & si\ x \geq 0 \end{cases}$

1) Etudier la continuité de f en 0.

2) Etudier la dérivabilité de f en 0. En déduire les conséquences graphiques.

3) Calculer les limites de f en - ∞ $et\ en + \infty$

4) Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.

5) Démontrer que (D) : y $= x + 1$ est une asymptote à (Cf) .

6) Calculer la limite de $\frac{f(x)}{x}$ en $-\infty$ puis interpréter.

Tracer (D) et (C) le même repère .

7) Calculer en cm^2 l'aire A (∝) du domaine limité par la courbe (C) de f la droite (D) et les droites $x = 0$ et $x = \propto$ où ∝ est un réel strictement positif.

Calculer $\lim_{\propto \to +\infty} A\ (\propto)$.

PARTIE C

1) Démontrer que l'équation f$(x) = 2$ admet une solution $\beta\ et\ que\ \beta \in [0\ ; 1]$

2) Soit h la fonction définie sur $[0\ ; 1]$ par :

$h(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$

a - Démontrer que β est une solution de l'équation h$(x) = x$.

b- Etudier le sens de variation de h sur $[0\ ; 1]$.

En déduire que pour tout $x \in [0\,;1]$;

$h(x) \in [0\,;1]$.

c- Déterminer $h'(x)$ et en déduire le sens de variation de h' sur $[0\,;1]$.

d- Montrer que pour tout $x \in [0\,;1]$, $0 \leq h'(x) \leq \frac{1}{4}$

3) On définit la suite (U_n) par :

$$\begin{cases} U_o = 0 \ ; \ n \geq 0 \\ U_{n+1} = h(U_n) \end{cases}$$

a- Démontrer que pour tout n , $U_n \in [0\,;1]$.

b- Démontrer que pour tout n ,

$|U_{n+1} - \beta| \leq \frac{1}{4}|U_n - \beta|$.

c- En déduire que , pour tout n,

$|U_{n+1} - \beta| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

d- Montrer que (U_n) converge.

PROBLEME 10

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ d'unité 1cm. On considère la fonction f de courbe représentative (C) dans le plan par :

$f(x) = (lnx)^2 - 1$.

1) a- Etudier f et dresser son tableau de variations.

b- Soit (Δ) la tangente à la courbe de f au point d'abscisse e . Déterminer l'équation de (Δ).

2) On se propose d'étudier la position relative de (C) par rapport à (Δ). Pour cela, on définit la fonction h par $h(x) = (lnx)^2 - \frac{2x}{e} + 1$.

On note h' la fonction dérivée de h.

a- Etudier h' et dresser son tableau de variations.

b- En déduire le sens de variation de h.

c- En déduire la position relative de (C) par rapport à (Δ).

3) Construire (C) et (Δ).

4) Soit g la fonction définie par $g(x) = |f(x)|$.

a- Expliquer comment à partir de (C) , on peut déduire la courbe (C') de g.

b- Construire (C') dans le même repère.

5) a- Soit S la partie du plan délimitée par les courbe (C) et (C') et les droites d'équations $x = \frac{1}{e}$ et $x = e$

Calculer l'aire de S.

b- La rotation de S autour de l'axe des abscisses engendre un solide de l'espace.

Déterminer le volume de ce solide.

PROBLEME 11

PARTIE A :

Soit g la fonction dérivable sur $]0\,;+\infty[$ par :

$g(x) = \frac{x+1}{2x+1} - lnx.$

1) Calculer la limite de g en 0 et en $+\infty$.

2) Etudier le sens de variation de g puis dresser son tableau de variation.

3) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\propto$ sur $]0\,;+\infty[$ puis que $1{,}83 < \propto < 1{,}84$.

4) Donner le signe de g sur $]0\,;+\infty[$.

5) a- Déterminer les nombres réels a et b tels que $\forall\, x \in]0\,;+\infty[$, $\frac{x+1}{2x+1} = a + \frac{b}{2x+1}$.

b- A l'aide d'une intégration par parties, déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto lnx$ sur $]0\,;+\infty[$.

c- En déduire une primitive de g sur $]0\,;+\infty[$.

PARTIE B :

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$f(x) = \frac{2lnx}{x^2+x}$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ d'unité 2cm.

1) Calculer la limite de g en 0 et en $+\infty$ puis interpréter graphiquement les résultats.

2) Etudier les variations de f.

3) a- Justifier que $f(\propto) = \frac{2}{\propto(2\propto+1)}$.

b- En déduire un encadrement de $(\propto)$.

4) Tracer la courbe (C) et ses asymptotes. (On prendra $\propto = 1{,}84$ et $f(\alpha) = 0{,}23$).

PARTIE C :

Soit k la restriction de f à l'intervalle $]0\,;\propto[$.

1- Justifier que k admet une bijection réciproque k^{-1} vers un intervalle que l'on précisera.

2- Préciser le domaine de définition de k^{-1}.

3- Indiquer en justifiant, le sens de variation de k^{-1}.

4- Construire dans le même repère en justifiant, la courbe (C^{-1}) de la fonction k^{-1}.

5) a- Calculer $k(1)$.

b- Justifier que k^{-1} est dérivable en 0.

c- Calculer $(k^{-1})'(0)$.

« L'enfer c'est d'avoir perdu l'espoir » CRONIN

PARTIE 6 : PRIMITIVE ET INTEGRALE

EXERCICE 1

Déterminer la primitive de chacune des fonctions suivantes qui s'annule en 1 :

$f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x - 2$;

$f(x) = \frac{2}{x^3} + \frac{3}{(x+4)^2}$; $f(x) = 2x(x^2 + 5)^2$

; $f(x) = 6x^2(x^3 - 2)^3$; $f(x) = \frac{lnx}{x}$

$f(x) = \frac{-12x+4}{-3x^2+2x-2}$; $f(x) = \frac{6x-2}{(-3x^2+2x-2)^3}$;

$f(x) = \frac{1}{xlnx}$; $f(x) = \frac{3x}{x^2+1}$;

$f(x) = \frac{2}{x(lnx)^4}$; $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$;

$f(x) = \frac{4x}{\sqrt{x^2+3}}$; $f(x) = \frac{3x}{\sqrt[4]{x^3-1}}$;

$f(x) = x\sqrt{x^2 + 1}$; $f(x) = sinx\sqrt[4]{cosx}$;

$f(x) = \frac{1}{x\sqrt[3]{lnx}}$; $f(x) = x\,e^{x^2+2}$

$f(x) = e^{-x+3}$; $f(x) = 3x\,e^{x^2-1}$

$f(x) = e^{2x}$; $f(x) = (-2x+3)e^{-x^2+3x-1}$

EXERCICE 2

1) Calculer les intégrales suivantes :

$\int_0^3(-x^2 + 4x\ 1)\,dx$; $\int_1^e \frac{dx}{x}$; $\int_0^1 \frac{dx}{x+1}$; $\int_1^2 \frac{dx}{x^3}$

$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} tanx.dx$; $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} sin2x.dx$; $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos2x.dx$;

$\int_0^3|a-2|\,da$; $\int_0^3 e^x dx$; $\int_1^{2e} lnx.dx$;

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t.cost.dt$; $\int_{-1}^1(x^2 + x - 1)e^x\,dx$; $\int_1^e xlnx.dx$;

$\int_0^3 xe^x dx$; $\int_1^e \frac{lnx}{x}dx$; $\int_1^e \frac{1}{xlnx}.dx$

2) On considère la fonction *f* de *IR* vers *IR* par :

$f(x) = x + |1 - e^{-x}|$. Calculer $\int_{-1}^1 f(x).dx$.

3) Déterminer trois réels a , b et c tel que pour tout $x \neq -2$, $f(x) = \frac{2x^2+3x}{x+2} = ax + b + \frac{c}{x+2}$. En déduire I = $\int_0^1 f(x).dx$ et J = $\int_0^1(4x+3)\ln(x+2)dx$

EXERCICE 3

1) On considère les intégrales I et J définies respectivement par I = $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x.\sin^4 x.dx$ et J = $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x.\cos^4 x.dx.$

Calculer I + J et I – J. En déduire I et J.

2) Soit f la fonction définie sur $[-1\,;\,+\infty[$ par

$f(x) = \int_{-1}^x \frac{5t}{1+t}.dt$. Calculer f(1) et f'(x).

EXERCICE 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on considère la fonction f définie sur *IR* vers *IR* par: par:

$f(x) = x + ln\left(\frac{3-x}{1+x}\right)$, on note (C) la courbe représentative de f.

1) Etudier les variations de f et construire (C).

2) Calculer à l'aide d'une intégration par partie les intégrales : $\int_1^2 \ln(x+1).dx$ et $\int_1^2 \ln(-x+3).dx$

3) Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 1 et x = 2.

EXERCICE 5

Soit f la fonction définie sur *IR* par:

$f(x) = \sin^4 x$.

1) Exprimer $\sin^2 x\ \ et \cos^2 x\ \ en\ fonction\ de\ \cos 2x.$

2) Exprimer $\sin^4 x\ \ en\ fonction\ de\ \cos 2x\ \ et\ cos4x.$

3) Calculer K = $\int_0^{\frac{\pi}{8}} f(x).dx$.

EXERCICE 6

Soit f la fonction définie sur *IR* par:

$f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$. On note (C) la courbe représentative de f dans (O , I , J) d'unité 2cm.

1) Déterminer les limites de f aux bornes de Df puis préciser les éventuelles asymptotes.

2) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

3) Donner une équation de la tangente (T) à la courbe (C) en 0.

4) Tracer (C) et (T).

5) Calculer l'aire du domaine suivant :

D =$\{M(x;y): -1 \leq x \leq 1\ et\ 0 \leq y \leq f(x).\}$

EXERCICE 7

Soit f la fonction définie sur *IR* $par : f(x) = \frac{1}{1+e^x}$.

Le but de l'exercice est de calculer l'intégrale

I = $\int_0^{ln2} f(x).dx$. Pour cela, on considère la fonction g définie sur *IR* $par : g(x) = 1 - f(x)$.

1) Déterminer une primitive de g sur *IR.*

2) En déduire une primitive de f sur *IR.*

3) Calculer alors l'intégrale I .

EXERCICE 8

On pose pour tout entier naturel n,

$I_n = \int_1^e x^2(lnx)^n.dx$

1) Calculer I_0 et I_1.

2) A l'aide d'une intégration par partie , démontrer que pour tout entier naturel non nul,

$3I_{n+1} + (n+1)I_n = e^3$. En déduire I_2.

3) Démontrer que $\forall\, n\,, I_n\ est\ positive$.

4) En déduire de la question 3 que $\forall\, n\ non\ nul$,

$I_n \leq \frac{e^3}{n+1}$, déterminer la limite de $I_n\ en + \infty$.

EXERCICE 9

1) Calculer par une double intégration par parties une primitive de la fonction *f* de *IR* vers *IR* par :

$f(x) = e^{-x}\,cosx$

2) *Pour tout* $k \in \mathbb{N}$ *, on pose* $U_k = \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} e^{-x}\cos x.dx$.

Calculer U_o et U_k

3) Démontrer que la suite (U_k) $k \in IN$ est une suite géométrique. Préciser son premier terme et sa raison

Calculer $S_n = U_o + U_1 + \ldots + U_n$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

S_n *est t – elle convergente ?*

EXERCICE 10

On pose : I = $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{e^x}\,dx$; J = $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{e^x}\,dx$

K = $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\,cos2x\,dx$.

1) Calculer I + J

2) A l'aide de deux intégrations par partie,

démontrer que K = $\frac{1+e^{-\frac{\pi}{2}}}{5}$.

3) En déduire la valeur de I – J.

4) Calculer I et J.

EXERCICE 11

Soit $I_n = \int_o^1 x^n e^{-x}dx$, où $n \in IN^*$

1) Démontrer que I_n existe pour tout *n* de IN^* et qu'il est strictement positif. Calculer I_1.

2) Démontrer que, pour tout *n* de IN^*,

$I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n$. (On pourra utiliser une intégration par parties). Calculer dans I_2 et I_3

3) Utiliser les résultats précédents pour calculer

$I = \int_o^1 \left(-x^3 + 2x^2 - x\right)\, e^{-x}$ *dx.*

EXERCICE 12

L'objectif est d'étudier la suite (U_n) définie pour tout entier n ≥ 0 par :

$U_0 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$ et, pour n $\geq$ 1. $U_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx$

1) Soit la fonction numérique définie sur $[0,1]$ par :

$f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

a- Calculer la dérivée f' de f. En déduire U_0.

b- Calculer U_1.

2) a- Prouver que la suite (U_n) est décroissante.

(on ne cherchera pas à calculer U_n).

b- Montrer que pour tout entier $n > 0$; $U_n \geq 0$.

c- En déduire que la suite (U_n) est convergente.

3) Montrer que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle [0,1] on a : $1 \leq \sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{2}$.

a- En déduire que pour tout entier n ≥ 1,

$\frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$.

b- Déterminer la limite de U_n.

« DETERMINATION DE L'ENSEIGNANT + COURAGE DE L'ELEVE = SUCCES A L'EXAMEN » SAWADOGO. L

PARTIE 7 : EQUATIONS DIFFERENTIELLES

EXERCICE 1

1) Résoudre les équations différentielles ci-dessous avec les conditions initiales imposées.

a) f' + 3f $= 0$ et f$(1) = 1$; 2) f' - 3f $= 0$ et f$(-2) = 2$

b) $-$f' + 2f $= 0$ et $f(3) = -2$.

c) 3f' - 6f $= 0$ et $f(4) = 2$.

d) 5f' + f $= 0$ et $f(-5) = 0$.

e) 2f' $-$ 5f' $= 0$ et $f(1) = -1$.

f) g'' + 4g = 0 ; g(0) = 0 et g'($\frac{\pi}{4}$) = 1 .

g) 4f'' + f= 0 avec f$(\pi) = 2$ et $f'(\pi) = \sqrt{3}$.

h) f'' + f $= 0$ $avec\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3\ et\ f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2.$

2) On considère les équations différentielles suivantes : (E_1) : y'' + 4y = 0 ; (E_2) : y'' + y = 0.

a- Déterminer la solution de l'équation (E_1) dont la courbe représentative dans un repère (O, I, J) passe par le point A(0 ; 2) et admet en ce point une tangente horizontale.

b- Déterminer la solution g de l'équation (E_2) vérifiant g($\frac{\pi}{2}$) = - 1 et g'($\frac{\pi}{4}$) = - 1.

3) Soit g la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que 2g'(x) + g(x) $= 0$ et telle que la courbe représentative (C) admette en son point d'abscisse - 2 une tangente de Coefficient directeur $\frac{3}{5}$. Déterminer la fonction g(x) .

EXERCICE 2

Soit l'équation différentielle (E) : y' – y = -x + 2

1) Déterminer une fonction affine p solution de (E).

2) Démontrer qu'une fonction g est solution de (E) si et seulement (g – p) est solution de (E') : y ' – y = 0.

3) Résoudre (E'). En déduire les solutions de (E).

4) Déterminer la solution f de (E) vérifiant f(0) = 0.

EXERCICE 3

Soit l'équation différentielle (E) : y' +2 y = $(x+4)e^{-x}$

1) Déterminer le réels a et b pour que la fonction $g(x) = (ax+b)e^{-x}$ soit solution de (E).

2) Démontrer qu'une fonction h est solution de (E) si et seulement (h – g) est solution de (E') : y ' + 2y = 0.

3) Résoudre (E'). En déduire les solutions de (E).

4) Déterminer la solution f de (E) qui s'annule en -1 .

EXERCICE 4

Soit l'équation différentielle (E) : $\frac{1}{2}$y'' – y' + y = 0.

On pose I = $\int_o^{\pi} e^x Cosx dx$ et J = $\int_0^{\pi} e^x \sin x dx$

1) En intégrant convenablement I par partie, montrer que I + J = 0.

2) Résoudre l'équation différentielle (E).

3) Déduire la solution f de (E) telle que f(0) = f '(0) = 1.

4) Déterminer à l'aide de (E) , une primitive de la fonction f définie en 3°)

Vérifier que I = $\int_o^{\pi} f(x)dx$ puis déduire I et J.

EXERCICE 5

Dans tout l'exercice, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1) Résoudre l'équation différentielle : (E) : y' - $\frac{1}{n}$y = 0.

2) On considère l'équation différentielle :

(E') : y' - $\frac{1}{n}$y = $-\frac{x+1}{n(n+1)}$.

Déterminer deux réels a et b tels que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ $par\ g(x) = ax + b$ soit solution de l'équation (E').

3) Montrer que pour qu'une fonction h définie sur $\mathbb{R}$ soit solution de (E'), il faut et il suffit que h – g soit soit solution de (E) . En déduire la solution de (E').

EXERCICE 6

Soit l'équation différentielle (E) : 9y'' + 49y = 0.

1) Résoudre (E) puis déterminer la solution f de (E) qui vérifie $f(0) = \sqrt{3}$ et $f'(0) = 7$.

2) Montrer que pour tout nombre réel x,

$f(x) = 2\sqrt{3}\cos\left(\frac{7}{3}x - \frac{\pi}{3}\right)$.

3) Résoudre dans $]0\,;2\pi[$,l'équation $f(x) = \sqrt{6}$.

4) Calculer la valeur moyenne

θ $de\ la\ fonction\ f\ sur\ \left[\frac{3\pi}{7}\ ;\ \frac{3\pi}{7}\right]$.

EXERCICE 7

On considère l'équation différentielle :

(E) : y' - 3y = $-\frac{-3e}{(1+e^{-3x})^2}$.

On donne une fonction φ dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ $par\ f(x) = e^{-3x} \times \varphi(x)$.

1) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

2) Exprimer sur $f'(x)\ en\ fonction\ de\ \varphi(x) et\ de\ \varphi'(x)$.

3) Sachant que $\varphi(x)$ est une solution de (E) ,

a- Exprimer $f'(x)\ en\ fonction\ de\ x$.

b- Déterminer l'expression de

$$f(x)\ en\ fonction\ de\ x\ si\ f(0) = \frac{e}{2}$$

« On n'est heureux par ce que nous espérons » J J ROUSSEAU

PARTIE 8 : COURBES PLANES PARAMETREES

EXERCICE 1

La représentation paramétrique d'une courbe (C) est donnée par : $\begin{cases} x(t) = \sin t \\ y(t) = \sin 2t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$.

1. Etudier la périodicité des fonctions x et y.
Quelle conclusion peut-on en tirer par rapport à l'intervalle d'étude ?
2. Etudier la position relative des points M$(t+\pi)$ et M(t). En déduire une réduction de l'intervalle d'étude.
3. Comparer les points M$(\pi - t)$ et M(t). A quel intervalle peut-on encore restreindre l'étude ?
4. Etudier les variations des fonctions coordonnées x et y sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ et dresser leur tableau de variations conjoint.
5. On note A, B, C, D et E les points de (C) de paramètres respectifs 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{2}$.
Recopier et compléter le tableau suivant :

Point	A	B	C	D	E
t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
X(t)					
Y(t)					
X'(t)					
Y'(t)					

6. Dans un repère ortho normal, représenter les 5 points A, B , C, D et E avec les tangentes aux points A, C et E puis tracer la courbe (C) .

EXERCICE 2

Soit la courbe (C) définie par les équations paramétriques :
$\begin{cases} x(t) = cos^2t - cost - 1 \\ y(t) = costsint \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

1) Comparer les positions des points M(t) et M(t+2π).
2) Comparer les positions des points M(t) et M(-t)
En déduire une symétrie de la courbe.
En déduire un intervalle d'étude I.
3) Etudier les variations de x *et* y *sur* $[0; \pi]$.
4) Tracer la courbe (C) associée a l'intervalle $[0; \pi]$, *puis achever la construction de* (C).

EXERCICE 3

Le plan est reporté à un repère ortho normal (O, I, J).
Soit la courbe (C) d'équation paramétrique
$\begin{cases} x(t) = (t+1)e^{-t} \\ y(t) = t^2e^{-t} \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$

1. Etudier les variations des fonctions coordonnées x et y sur $\mathbb{R}$.
2. Dresser le tableau des variations conjointes de x et y sur $\mathbb{R}$.
3. Représenter la courbe (C).

EXERCICE 4

Les coordonnées d'un point M sont paramétrées dans un repère orthonormal (o, i, j).

$\begin{cases} x = \cos t + \sqrt{3}\sin t \\ y = \sin 3t \end{cases}$

On appelle M (t) le point de C définie par la valeur t du paramètre.

1) Montrer que, pour tout t $\in$ R, M (t + 2π) = M (t).
2) Comparer les positions des points M (t) et M (t + π) ainsi que celles des points M$\left(\frac{\pi}{3}+t\right)$ et M$\left(\frac{\pi}{3}-t\right)$.
Que peut-on en déduire pour (C) ?
3) Etudier les variations de x et de y pour t $\in \left[\frac{\pi}{3};\frac{5\pi}{6}\right]$
Puis dresser le tableau de variation Conjoint de x et y.
4) Tracer les vecteurs dérivés aux points M$\left(\frac{\pi}{3}\right)$; M$\left(\frac{\pi}{2}\right)$; M$\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ et M$\left(\frac{5\pi}{6}\right)$, ainsi que la représentation graphique de la partie de (C) associée à $t \in \left[\frac{\pi}{3};\frac{5\pi}{6}\right]$.
5) Achever la construction de (C).

EXERCICE 5

Soit la courbe (C) définie par les équations paramétriques :
$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}cos2t + cost \\ y(t) = sin2t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

1) Comparer les positions des points M(t) et M(t+2π).
2) Comparer les positions des points M(t) et M(-t)
En déduire une symétrie de la courbe.
En déduire une restriction de l'intervalle d'étude I.
3) Etudier les variations de x *et* y *sur* $[0; \pi]$.
4) Tracer la courbe (C) associée a l'intervalle $[0; \pi]$.

« DETERMINATION DE L'ENSEIGNANT + COURAGE DE L'ELEVE = SUCCES A L'EXAMEN » SAWADOGO. L

PARTIE 9 : SUITES NUMERIQUES

EXERCICE 1

Le conseil d'administration d'une église décide d'augmenter les salaires mensuels de la manière suivante : le nouveau salaire est obtenu en ajoutant 2000F au salaire de l'année précédente augmenté de 5 % .
Soit $S_0 = 60000$F, le salaire de René en 2014, S_1 son salaire mensuel en 2015, … , et S_n son salaire mensuel en 2014+n.

1. Calculer S_1 , S_1 et S_3 .
2. Exprimer S_{n+1} en fonction de S_n .
3. Soit $(P_n) \geq 0$ la suite définie par $P_n = S_n$ + 40.000.

a. Exprimer P_{n+1} en fonction de P_n puis n.
b. En déduire l'expression de S_n en fonction de n.
c. On pose $T_n = P_0 + P_1 + \ldots + P_{n-1}$. Exprimer T_n en fonction de n.

4. A partir de quelle année le salaire mensuel de René sera –t-il supérieur à 107.700 F ?

EXERCICE 2

On considère les suites (V_n) et (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $V_0 = 3$, $V_{n+1} = \frac{V_n}{1+V_n}$ et $U_n = \frac{1}{V_n}$.

1) Prouver que (U_n) est une suite arithmétique.
2) Exprimer (U_n) puis (V_n) en fonction de n.
3) Exprimer la somme $S_n = U_0 + U_1 + . . . + U_n$ en fonction de n. Etudier la convergence de (S_n).

EXERCICE 3

(U_n) est une suite arithmétique croissante telle que :
$$\begin{cases} U_1 + U_2 + U_3 = 9 \\ U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 = 35 \end{cases}.$$

1) Déterminer son premier terme U_0 et la sa raison r.
2) Exprimer U_n en fonction de n.
3) Exprimer en fonction de n,$T_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$.
4) Soit (V_n) la suite définie par $V_n = 2^{U_n}$.

a- Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
b- Calculer en fonction de n :
$G_n = V_0 \times V_1 \times \ldots \times V_n$ et $S_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_n$.
c- Etudier la convergence de (G_n) *et de* (S_n).

EXERCICE 4

1) Soit (U_n) la suite numérique définie par :
$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ 2U_n = U_{n-1} + 5 \end{cases} ; \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$
Montrer que (U_n) *n'est* ni arithmétique ni géométrique.

2) Soit (V_n) la suite définie par $V_n = U_n - 5$.

a- Montrer que (V_n) est géométrique.
b- Exprimer V_n puis U_n en fonction de n. En déduire leur limite.

3) On pose : $S_n = V_0 + V_1 + \ldots + V_n$;
Et $G_n = U_0 + U_1 + \cdots U_n$.

a- Exprimer les suites (S_n) *et* (G_n) *en* fonction de n.
b-Etudier la convergence des suites (S_n) *et* (G_n).

EXERCICE 5

Soit (V_n) la suite numérique définie sur $\mathbb{N}^*$ par :
$V_1 = \frac{1}{2}$ et $V_{n+1} = \frac{n+1}{2n} V_n$.

1) Calculer V_2, V_3 *et* V_4.
2) a- Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ V_n > 0$.
b- Démontrer que la suite (V_n) est décroissante.
c- En déduire que la suite (V_n) est convergente.
3) Soit (U_n) la suite numérique définie par
$U_n = \frac{V_n}{n}$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

a- Montrer que la suite (U_n) est géométrique. Préciser la raison et le premier terme.
b) Exprimer U_n puis V_n en fonction de n
c) Exprimer U_{n+1} puis V_{n+1} en fonction de n.
d) Calculer la limite de V_n et U_n en $+\infty$.

EXERCICE 6

On considère la suite numérique (U_n) définie par :
$$\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \frac{3U_n}{1+2U_n} \end{cases}$$
On admet que $U_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

1) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $U_n < 1$.
2) Démontrer que (U_n) est croissante et convergente.
3) On pose $V_n = \frac{U_n}{1-U_n}$.

a- Démontre que (V_n) est une suite Géométrique dont on précisera la raison et le premier terme .
b- Donner l'expression de V_n en fonction de n.
En-déduire que $U_n = \frac{3^n}{1+3^n}$.
c- Calculer la limite de U_n .

PARTIE 10 : PROBABILITES

EXERCICE 1

Une urne contient 3 boules noires et 4 boules blanches. On tire successivement sans remise 3 boules.

1) Déterminer le nombre de tirage possibles.
2) Déterminer le nombre de tirage comportant une boule noire.
3) Déterminer le nombre de tirage comportant au plus une boule noire.
4) On définit la variable aléatoire X égale le nombre de boules noires présentes dans un tirage.

a) Quelles sont les valeurs possibles de X ?
b) Ecrire la loi de probabilité de X.
c) Déterminer l'espérance mathématique E(X) .

EXERCICE 2

Une urne contient 10 boules :2 bleues, 5 blanches, 3rouges .On tire simultanément 3 boules de l'urne.

1) Quelle est la probabilité d'obtenir un tirage tricolore ?
2) Quelle est la probabilité d'obtenir un tirage unicolore ?
3) On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges obtenu.

a) Quelles sont les valeurs possibles de X ?
b) Ecrire la loi de probabilité de X.
c) Déterminer l'espérance mathématique E(X).
d) Déterminer la variance V(X) et l'écart type.
e) Tracer F(X) la fonction de réparation.

EXERCICE 3

Un joueur lance un dé parfaitement équilibré.

- Si le nombre apparu sur la face supérieure du dé est Impair, le joueur gagne la somme égale au nombre apparu en francs ;
- si le nombre apparu est pair, Le joueur perd la somme égale à ce nombre .

On note y la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

1) Déterminez la loi de probabilité de y.
2) Calculer l'espérance de gain du joueur et la variance de Y.
3) Le jeu est – il favorable pour le joueur ?

EXERCICE 4

Un enfant dispose dans sa poche de six pièces de monnaie : deux pièces de 100F, trois pièces de 50F, une pièce de 25F. Dans un magasin, pour régler un achat de 225F, il extrait trois pièces de sa poche. On admet que l'enfant ne connaissant pas les rapports entre la dimension d'une pièce et sa valeur, tous les tirages sont équiprobables.

1)a. Quelle est la probabilité qu'il obtienne la somme exacte ?
b. Quelle est la probabilité qu'il obtienne une somme suffisante pour régler son achat ?

2) On désigne par X la variable aléatoire réelle associant a chaque tirage la somme obtenue.

a. Quelles sont les valeurs possibles prises par X ?
b. Etablir la loi de probabilité de X.
c. Calculer l'espérance mathématique de X.

EXERCICE 5

On dispose d'une urne contenant trois (3) boules rouges et sept (7) boules noires. On considère les événements suivants :

A « Les boules tirées sont toutes rouges ».
B « Les boules tirées sont toutes noires ».
C « Les boules tirées sont toutes de même couleurs ».
D « Les boules tirées sont de couleurs distinctes ».

On considère que tous les tirages sont équiprobables.

1) Calculer la probabilité de chacun des événements si on extrait simultanément deux boules de cette urne.
2) Calculer la probabilité de chacun des événements si on extrait successivement et sans remise deux boules de cette urne.
3) Calculer la probabilité de chacun des événements si on extrait successivement et avec remise deux boules de cette urne.

EXERCICE 6

Yao propose à Diallo le jeu suivant : un sac contient n boules noires (n un entier naturel non nul) et une boule blanche, indiscernable au toucher. Diallo tire une boule au hasard, on note sa couleur, on la remet dans le sac, puis tire au hasard une deuxième boule et on note sa couleur. (Les tirages sont supposés indépendants).

Si les deux boules tirées sont noires, Yao doit donner 100 à Diallo.

Si les deux boules tirées sont blanches, Yao doit donner 1000 à Diallo.

Si les deux boules tirées sont de couleurs différentes Diallo doit donner 350 à Yao.
Soit X la variable qui à chaque tirage des deux boules associe le gain algébrique de Diallo.
1°) Déterminer la distribution de X ainsi que son espérance mathématique, en fonction de n.
2°) Pour quelles valeurs de n ce jeu est-il équitable ?
3°) Pour quelles valeurs de n ce jeu peut-il rapporter le plus d'argent a Yao ?

EXERCICE 7

On dispose de deux urnes U_1 et U_2. L'urne U_1 contient trois boules blanches et une boule noire. L'urne U_2 contient une boule blanche et deux boules noires. On lance un dé équilibré.
Si le dé donne un numéro d'inférieur ou égal à 2, on tire une boule de l'urne U_1 ; sinon on tire une boule dans l'urne U_2. (On suppose que les boules sont indiscernables au toucher).
1°) Calculer la probabilité de tirer une boule blanche.
2°) On tire une boule blanche. Calculer la probabilité qu'elle provienne de l'urne U_1.

EXERCICE 8

Dans un jeu, on gagne en obtenant 3 après un lancé de dé. On lance 5 fois de suite le dé. Calculer la probabilité :
1°) A ≪obtenir exactement deux succès ≫.
2°) B ≪obtenir au moins un succès ≫.
3°) La probabilité d'obtenir 6 succès est-elle possible ? Justifier votre réponse.

EXERCICE 9

Une urne contient 6 jetons numérotés de 1 à 6.
Lorsqu'on tire au hasard un jeton de l'urne, on note p_i avec $i \in \{1,2,3,4,5,6\}$ la probabilité de tirer de tirer le jeton numéro i. on suppose que les nombres P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 et P_6 sont dans cet ordre en progression arithmétique de raison $\frac{1}{30}$.
1°) a- Montrer que $P_1 = \frac{1}{12}$.
 a- En déduire P_2, P_3, P_4, P_5 et p_6 .
2°) on tire trois fois de suite et avec remise un jeton de cette urne, on désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de jeton portant un numéro pair.
 a- Déterminer la loi de probabilité de x.
b- Déterminer l'espérance mathématique et l'écart-type de X.
3°) Un joueur tire simultanément deux jetons et on note S la valeur absolue de la différence des numéros que portent les deux jetons tirés.
Déterminer la loi probabilité de S.

EXERCICE 10

Une urne contient sept boules dont une rouge, deux jaunes et quatre vertes. Un joueur tire au hasard une boule.
Si elle est rouge, il gagne 10 euros.
Si elle est jaune, il perte 5 euros.
Si elle est verte, il tire une deuxième boule de l'urne sans avoir replacer la première boule tirée.
Si la seconde boule est rouge, il gagne 8 euros, si non il perte 4 euros.
1°) Construire un arbre pondéré représentant l'ensemble des éventualités de cet jeu.
2°) Soit X la variable aléatoire associant à chaque gain algébrique du joueur.
 a- Etablir la loi de probabilité de la variable X.
 b- Calculer l'espérance mathématique de X.
3°) Les conditions de jeu restent identiques. Indiquer le montant du gain algébrique qu'il faut attribuer à un joueur lorsque la deuxième boule est rouge, pour que le jeu soit équitable.

EXERCICE 11

On considère un dé rouge et un dé vert, cubique et équilibrés.
Le dé rouge comporte deux faces numérotées -1, deux face numérotées 0 et deux faces numérotées 1.
Le dé vert comporte une face numérotée 0, trois faces numérotées 1 et deux faces numérotées 2.
On lance simultanément les deux dés et on désigne par X la somme points obtenus
1) Déterminer la loi de probabilité de X.
2)Donner et construire la fonction de répartition de X.

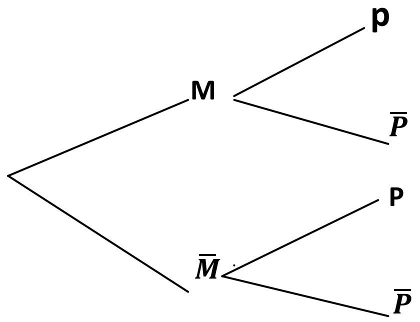
EXERCICE 12

Dans un magasin d'électroménagère, on s'intéresse au comportement d'un acheteur potentiel d'un téléviseur et d'un magnétoscope.
La probabilité pour qu'il achète un téléviseur est de 0,6 ; La probabilité pour qu'il achète un magnétoscope quand il a acheté un téléviseur est de 0,4 ; La probabilité pour qu'il achète un magnétoscope quand il n'a pas acheté de téléviseur est de 0,2.
1°) Quelle est la probabilité qu'il achète un téléviseur et un magnétoscope ?

2°) Quelle est la probabilité qu'il achète un magnétoscope ?

3°) Le client achète un magnétoscope. Quelle est la probabilité qu'il achète un téléviseur ?

4°) Compléter l'arbre de probabilité suivant :



EXERCICE 13

Dans tout cet exercice on suppose que les tirages sont équiprobables et que n est entier naturel non nul.

I°) Une urne contient (n+1) boules verts et (n-1) boules rouges. Le jeu suivant consiste à tirer une boule de l'urne.

- Si la boule est rouge, le joueur perte.
- Si la boule est verte, le joueur gagne.

1°) Quelle est la probabilité p_1 que le joueur gagne ?

2°) Quelle est la probabilité p_2 que le joueur perte ?

3°) Lorsque le joueur gagne, il reçoit 200 Fr ; s'il perd il doit verser 300 Fr. On Défini la variable aléatoire X qui a chaque tirage associe le gain en FCFA.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer l'espérance mathématique de X.

c) Pour quelle valeur de n le jeu est-il équitable ?

II°) L'urne contient maintenant (n+1) boules vertes, (n-1) boules rouges et deux boules bleues. Le jeu consiste toujours à tirer une boule de l'urne.

- Si la boule est rouge, le joueur perd.
- Si elle est verte, il gagne.
- Si elle est bleue, il tire une deuxième boule sans remettre la boule bleue dans l'urne. Le jeu est terminé après trois tirages au plus.

1°) a - Quelle est la probabilité q_1 que le joueur gagne ?

b - Quelle est la probabilité q_2 que le joueur perd ?

2°) A-t-on plus de chance de gagner au deuxième jeu qu'au premier jeu ?

EXERCICE 14

Dans un jeu de 32 cartes, on tire simultanément et au hasard 4 cartes. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : ≪ obtenir une carte de chaque figure≫.

B : ≪ obtenir exactement un as≫.

C : ≪ obtenir aucun as ≫.

D :≪ obtenir 2 cœurs et 2 pics≫.

B : ≪ obtenir exactement 2 cœurs et un as≫.

EXERCICE 15

Un jeu consiste à lancer trois fois un dé cubique équilibré à 6 faces, numérotées De 1 à 6 et On note successivement les chiffres obtenus sur la face supérieur

1°) Démontrer que la probabilité d'obtenir 3 chiffres identiques est $\frac{1}{36}$.

2°) Calculer la probabilité d'obtenir 3 chiffres dont la somme est égale à 6.

3°) Démontrer que la probabilité d'obtenir exactement 2 chiffres identiques est $\frac{5}{12}$.

4°) Le droit de participation au jeu est de 3 000 francs.

- Si le joueur obtient 3 chiffres identiques, il reçoit 5000 francs.
- Si le joueur obtient 3 chiffres deux à deux distinctes, il reçoit 3000 francs.
- Si le joueur obtient exactement 2 chiffres identiques, il ne reçoit rien.

Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique d'un joueur au cours d'une partie.

On appelle gain la différence entre ce qu'il reçoit et sa mise.

a – Déterminer les valeurs prises par X.

b – Déterminer la loi de probabilité de X.

c - Déterminer le gain moyen d'un joueur au cours d'une partie. Le est-il équitable ?

EXERCICE 16

Un livreur de pain qui fait son service à moto, doit servir tous les jours un client à 20 heures précises. La livraison de pain chez le client est indépendante d'un jour à un autre. Habituellement, le livreur met 10 minutes de la boulangerie au domicile de ce client ; mais la mairie a fait installer deux feux tricolores non synchronisés et indépendants.

- S'il arrive à un feu orange, il s'arrête 60 secondes et repart.

-S'il arrive à un feu rouge, il s'arrête 30 secondes et repart. Pour chaque feu:

- La probabilité d'être vert à l'arrivée du livreur est $\frac{1}{2}$.
- La probabilité d'être orange à l'arrivée du livreur est $\frac{1}{4}$.

On note X la variable aléatoire égale au temps mis en minutes par le livreur pour arriver au domicile du client.

a) Justifier que l'ensemble des valeurs prises par X est $\{10; 10{,}5; 11; 11{,}5; 12\}$.

b) Justifier que P(X = 11) = $\frac{5}{16}$.

c) Déterminer la loi de probabilité de X.

2- Calculer l'expérience mathématique de X.
Interpréter ce résultat.

3- Le livreur part à 19 h 49 min de la boulangerie :

a) Calculer la probabilité qu'il arrive à 20 heures précises chez le client.

b) Calculer la probabilité qu'il arrive en retard chez le client.

4- Pour cette question, on donnera l'arrondi d'ordre 3 de chaque résultat.

a) Calculer la probabilité pour que le pain soit livré exactement trois fois à 20 heures précises au cours d'une semaine.

b) Calculer la probabilité pour que le pain soit livré au moins une fois à 20 heures précises au cours d'une semaine.

EXERCICE 17 (BAC 2013)

1) Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher, dont quatre portent le chiffre 1 et six portent le chiffre 5. On tire simultanément deux de ces boules.

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : ≪ Tirer deux boules portant chacune le chiffre 1 ≫.

B : ≪ Tirer deux boules portant chacune le chiffre 5 ≫.

C:≪Tirer deux boules portant des chiffres différents≫

2) On suppose maintenant que l'urne contient a boules portant le chiffre 1 et b boules portant le chiffre 5 avec a + b = 10 (1≤ a ≤ 9) et (1≤ b ≤ 9).

Soit X la variable aléatoire égale au total des points marqués sur les deux boules tirées simultanément.

a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

b) Déterminer l'espérance mathématique E(X) en fonction de a.

c) Pour quelles valeurs de a, a-t-on $6 < E(X < 8$?

EXERCICE 18

Dans une famille de trois (non jumeaux) enfants classées par ordre de naissance, on considère les événements suivants :

A : « la famille comprend au moins un enfant de chaque sexe ».

B : « la famille comprend au plus une fille ».

C : « la famille comprend au moins un garçon ».

D : « la famille comprend des enfants de même sexe ».

E : « la famille comprend exactement deux fille ».

F : « la famille comprend exactement deux garçon et une fille ».

G : « la famille possède une fille comme troisième enfant ».

H : « la famille possède une fille comme premier enfant et un garçon comme deuxième enfant ».

I : « la famille comprend aucun garçon ».

1°) Calculer la probabilité de chaque événement.

2°) On introduit la variable aléatoire X égale au nombre de filles dans la famille.

a- Déterminer les valeurs prises par X.

b- Donner la loi de probabilité de X.

c- Calculer l'espérance mathématique de X.

d- Montrer que la variance V(X) = 0,75 et donner l'écart type de X.

e- Quelle est la probabilité pour que X soit inférieure ou égale à 2 ?

EXERCICE 19

Un établissement dispos de trois classes de terminales : À, D et C de même effectif.il ya 20% de filles en A, 40% de filles en D et 60% de filles en C.

1°) On choisit un élève au hasard dans chacune de ses classes et on désigne par X la variable aléatoire réelle prenant pour valeurs le nombre de filles obtenues.

a- Définir la loi de probabilité de X.

b- Calculer l'espérance mathématique et
L'écart type de X.

2°) On réunit tous les élèves des trois classes A, D et C dans la cours de l'établissement et on choisit un élève au hasard parmi eux.

Calculer la probabilité des événements :

A : « L'élève choisi est de la terminale A ».

B : « l'élève choisi est une fille ».

EXERCICE 20

Dans tout l'exercice, n est un entier naturel non nul. On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules indiscernables au toucher. U_1 contient n boules blanches et 3 boules noires ; U_2 contient 2 boules blanches et une boule noire. On tire au hasard une boule dans U_1 et on la met dans U_2, puis on tire au hasard une boule dans U_2 et on la met dans U_1 ; L'ensemble de ces opérations constitue une épreuve.

1°) on considère l'événement A «après l'épreuve, les urnes se retrouvent chacune dans les configurations départ ».

a- Montrer que la probabilité de l'événement A peut s'écrire : p(A) = $\frac{3}{4}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)$.

b- Déterminer la limite de P(A) lorsque n tend vers +∞

c- 2°) on considère l'événement B : « après l'épreuve l'urne U_2 contient une seule boule blanche ». Vérifier que la probabilité de l'événement B peut s'écrire : p(B) = $\frac{6}{4(n+3)}$.

3°) Un joueur mise 20 francs et effectue une épreuve. A l'issue de cette épreuve, on compte les boules blanches contenues dans U_2

- Si U_2 contient 1 seule boule blanche, le joueur reçoit 2n francs ;
- Si U_2 contient 2 boules blanches, le joueur reçoit n francs ;
- Si U_2 contient 3 boules blanches, le joueur ne reçoit rien.

a- Expliquer pourquoi le joueur n'a aucun intérêt à jouer tant que n ne dépasse pas 10.

Dans la suite, on considère que $n>10$ et on introduit la variable aléatoire X qui prend pour valeurs les gains algébriques du joueur.

b- Déterminer la loi de probabilité de X

c- Calculer l'espérance mathématique de X

Démontrer que si le jeu est favorable, l'urne U_1 contient au moins 25 boules blanches.

EXERCICE 21 (IDS 2013)

N.B : Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles

Le propriétaire d'une loterie met en vente des billets numérotés de 1 à 50.La règle du jeu est la suivante :

- Si le numéro du billet se termine par 0 ou 5, le client gagne 2 000F
- Si le numéro du billet se termine par 3, 6 ou 9, le client gagne 1 000F
- Dans les autres cas, le client ne rien.

1°) Le client choisit un seul billet. On suppose que chaque billet a la même chance d'être tiré.

a- Quelle est la probabilité pour qu'il gagne 1 000F ?

b- Quelle est la probabilité pour qu'il gagne 2 000F ?

2°) Soit X la variable aléatoire qui, à chaque billet tiré, associe le gain réalisé. Calculer l'espérance mathématique de X.

3°) Trouvant qu'il a trop de gagnants, le propriétaire décide de retirer de vente un certain nombre n de billets terminés par 0 ou 5 ($0< n \leq 10$). Le client tire alors un billet parmi ceux restants. Soit X_n la variable aléatoire qui, à chaque billet tiré, associe le gain réalisé.

a) Déterminer la loi de probabilité de X_n.

b) Déterminer, en fonction de n, l'espérance mathématique de X_n .

c) En déduire le nombre minimal de billets à tirer pour que $E(X_n) \leq 500$.

4°) Le propriétaire enlève 7 billets terminés par 0 ou 5. Un client tire simultanément 2 billets parmi ceux restants.

a) Quelle est la probabilité pour qu'il gagne 4 000 F ?

b) Quelle est la probabilité pour qu'il ne gagne pas ?

EXERCICE 22 (IDS 2012)

Une urne contient des boules noires et des boules rouges .Chaque boule noire porte un entier positif de trois chiffres multiple de 179. Chaque boule rouge porte un entier positif de trois chiffres multiple de 59. Ces boules sont indiscernables au toucher.

1) Trouver le nombre maximal de boules noires dans l'urne.
2) On suppose que l'urne contient cinq boules noires et 15 boules rouges. On considère le jeu suivant : le joueur tire une boule de l'urne. La mise est 200 F pour chaque partie.
   - Si elle est noire, on lui donne 500 F et le jeu est terminé.
   - Si elle est rouge, il la remet dans l'urne et procède à un second tirage.
   - Si la seconde boule est tirée est noire, on lui donne 300 F et la partie est terminée.
   - Si la seconde boule est tirée est rouge, il la remet dans l'urne et procède à un troisième tirage.
   - Si la troisième boule tirée est noire, on lui donne 100 F.
   - Si la troisième boule tirée est rouge, il n'a rien.

On désigne par X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

a) Donner la loi de probabilité de X.
b) Calculer la probabilité p pour que X soit positive.
c) Calculer l'espérance mathématique de X
d) Un joueur fait cinq parties successives. Quelle est probabilité pour qu'il ait exactement trois fois un gain positif au lors des cinq parties ?

N.B : Les réponses aux questions 2a ; 2b et 2c seront données sous forme de fractions irréductibles. Pour la question 2d, la réponse sera arrondie à 10^{-3} près.

On donne $\left(\frac{7}{16}\right)^3 = 0{,}084$ et $\left(\frac{9}{16}\right)^2 = 0{,}316$.

EXERCICE 23 (IDS 2014)

Un joueur de tennis effectue une mise en jeu. Pour cela, il a droit deux tentatives : Un premier service, suivi s'il n'est réussi, d'un deuxième service. La probabilité pour que le premier service réussisse de $\frac{2}{3}$, s'il a échoué, la probabilité pour le deuxième service réussisse est de $\frac{4}{5}$.

Lorsque les deux services échouent, on dit alors qu'il y a « double faute » si non la mise en jeu est réussie.

Soient A : « Le joueur rate son premier service » ;

B : « Le joueur rate son deuxième service » ;

C : « Le joueur fait une double faute ».

1) a- Traduire cette situation par un arbre pondéré.
b- Déterminer P(C) .
c- Déterminer la possibilité P pour que ce jeux soit réussie.

2) Ce joueur participe à un entrainement publicitaire organisé par son club et patronné par un magasin de sport. Il s'agit pour lui, d'effectuer 10 mises en jeu successives dont les résultats sont indépendant les uns des autres. Chaque mise en jeux lui permet de gagner une balle.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de balles gagnées.
a- Exprimer $p(X = k)$ en fonction de k , $0 \leq k \leq 10$.
b- Déterminer la probabilité pour que le joueur gagne au moins 9 balles.
c- Calculer l'espérance mathématique de X.

On donne : $\left(\frac{14}{15}\right)^9 = \mathbf{0,035}$ ***;*** $\left(\frac{14}{15}\right)^{10} = \mathbf{0,5}$ **.**

EXERCICE 24 (BAC 2017)

Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12. Toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées. On tire simultanément 3 boules de l'urne.
1) Déterminer le nombre de tirage possible.
2) Calculer la probabilité des événements suivants :
A : « Les nombres portés par ces boules sont tous des nombres premiers ».
B : « Les nombres portés par ces 3 boules tous divisibles par 3 ».
C : « Deux des boules portent un numéro divisible par 3 ».
D : « Les trois numéros sont des multiples de 2 ».
E : « Les trois nombres portés par ces boules, convenablement rangés forment trois termes consécutifs de suite arithmétique de raison 3 ».
F : « Les trois nombres portés par ces boules, convenablement rangés forment trois termes consécutifs de suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ ».

EXERCICE 25 (BAC 2018)

Un sac contient quatre pièces de 500 Francs et six pièces de 200 Francs. Un enfant tire au hasard et simultanément trois pièces de ce sac.
1°) Calculer la probabilité de l'événement A « tirer trois de 500 Francs »
2°) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de pièces de 500 F figurant parmi les trois pièces tirées.
b- Déterminer la loi de probabilité de X.
a- Calculer l'espérance mathématique et L'écart type de X.
3°) l'enfant répète cinq fois l'expérience en remettant à chaque fois les trois pièces tirer dans le sac. Quelle est la probabilité que l'événement A se réalise trois fois à l'issue des cinq tirages ?

EXERCICE 26

Une entreprise confie à une société de sondage par téléphone une enquête sur la qualité de ses produits. Chaque enquêteur a une liste de personne à contacter. Lors du premier appel téléphonique ; la probabilité pour que le correspondant soit absent est de 0,4. Sachant que le correspondant est présent, la probabilité qu'il accepte de répondre au questionnaire est de 0,2.
1) On note A_1 l'évènement : « la personne est absente au premier appel »
R_1 l'évènement : « la personne accepte de répondre aux questionnaire lors du premier appel »
Calculer la probabilité de R_1.
2) lorsqu'une personne est absente lors du premier appel, on lui téléphone une seconde fois, à une heure différente et alors la probabilité pour qu'il soit absent est de 0,3. Et sachant qu'elle est présente lors du second appel, la probabilité qu'elle accepte de répondre au questionnaire est encore 0,2. Si une personne est absente lors du second appel, on ne tente plus de la contacter.
On note A_2 l'évènement : « la personne est absente lors du second appel »
R_2 l'évènement : « la personne accepte de répondre aux questionnaire lors du second appel »
R l'évènement : « la personne accepte de répondre au questionnaire »
Montrer que la probabilité de R est 0,176.
3) Sachant qu'une personne accepte de répondre au questionnaire, Montrer la probabilité que la réponse ait lieu lors du premier appel est 0,681.
4) On suppose que les sondages auprès des personnes d'une même liste sont indépendants.
Un enquêteur à une liste de 20 personnes à contacter. Quelle est la probabilité pour qu'une personne au moins des 20 personnes de cette liste accepte de répondre au questionnaire.
NB : Les résultats seront donnés à 10^{-3} près.

« DETERMINATION DE L'ENSEIGNANT + COURAGE DE L'ELEVE = SUCCES A L'EXAMEN » M. SAWADOGO. L

PARTIE 11 : STATISTIQUES A DEUX VARIABLES

EXERCICE 1

L'évolution de 2011 à 2015 du salaire horaire moyen (en F CFA) d'un ouvrier, dans un pays en voie de développement donné, est consigné dans le tableau suivant :

Année	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
Salaire Horaire moyen	1650	1760	1930	2020	2220	2450	2530

1. Représenter graphiquement, les variations de ce salaire horaire moyen par un nuage de points.
2. Réaliser un ajustement affine de ce nuage de points par la méthode du ≪ tracé au juger≫.
3. Déterminer les coordonnées du point G et les placer sur le graphique.
4. En admettant que cette évolution se poursuive, déterminer à l'aide du graphique, une estimation du salaire horaire moyen d'un tel ouvrier en 2018.

EXERCICE 2

Diverses sociétés de gardiennage pour des immeubles résidentiels proposent différents salaires : on note X le salaire proposé et Y le nombre de candidats qui ce sont présentés à l'embauche pour postulé une place. Les observations sont données dans le tableau suivant :

Société	Alaires X (en F CFA)	Nombre de candidats Y
1	44 000	10
2	45 000	13
3	46 000	17
4	47 000	19
5	48 000	21
6	49 000	25

1. Représenter le nuage de points associé à la série statistique double : le salaire X en ordonnée.
2. Déterminer l'équation de la droite de Moyer, ajustement affine de ce nuage de points. Tracer cette droite sur le graphique.
3. On a appris qu'une septième société de gardiennage s'était ouverte sur la place et que 30 candidats s'y étaient présentés. A combien peut-on estimer le salaire que l'on a proposé dans cette nouvelle société ?

EXERCICE 3

Une société fabrique et vent des lots de foyers salaires.

Le tableau suivant donne le pourcentage Y de foyers d'un lot qui ont une panne au cours de X semestre d'utilisation.

Nombre Xi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
% Y_i	0	2	4	8	11	14	17	20	23	27

1. Représenter le nuage de points associé a cette série statistique : x en abscisse et y en ordonnée.
2. Réaliser un ajustement affine de ce nuage de points par la méthode de Mayer. (On déterminera une équation de la droite de Mayer qu'on tracera sur le graphique).
3. Utiliser la droite de Mayer pour donner une estimation du pourcentage de foyers en panne après 20 semestres d'utilisation.

EXERCICE 4

Une automobile hybride est un véhicule disposant de deux types de motorisation : un moteur thermique et un moteur électrique, afin de limiter la consommation de carburant.

On se propose d'étudier la répartition des ventes de véhicule hybrides ces dernières années.

Une concession fait une étude statistique de ses ventes de modèles hybride ces six dernières années.

Le directeur dispose du tableau suivant :

Année	2010	2011	2012	2013	2014	2015
Nombre De Modèles Hybride	18	32	65	84	105	123

1. représenter le nuage de points associé à cette série statistique.
2. Tracer la droite d'ajustement de Mayer de ce nuage de point ; déterminer son équation sous la forme Y = ax +b.
3. Déterminer graphiquement une estimation du nombre de véhicules hybrides vendus en 2016.
4. L'objectif des ventes fixé à la concession pour l'année 2016 est de 16% d'augmentation par rapport à l'année 2015.

a. Calculer le nombre de véhicule qui devraient être Vendus en 2016 pour atteindre cet objectif. (Arrondir le résultat à l'unité).

b. L'estimation du nombre de véhicules vendus en 2016 permet-elle de penser que l'objectif des ventes sera atteint ?

EXERCICE 5

Le gérant d'une salle de loisirs vous demande de réaliser une étude permettant de prévoir la rentabilité de son centre en 2016, en suivant les étapes suivantes :

En tenant compte de la quantité d'abonnements annuels que le gérant peut espérer réaliser en 2016. Le tableau ci-dessous regroupe les nombres d'abonnements annuels réalisés entre 2010 et 2015.

Année	2000	2011	2012	2013	2014	2015
Nombre d'abnts annuels réalisés	306	314	328	339	332	340

1. Représenter le nuage de points associés à cette série statistique. On placera les années en abscisse.
2. Déterminer les coordonnées du point moyen G de cette série.
3. Déterminer l'équation de la droite d'ajustement affine de Mayer de cette série sous la forme y = ax + b, a et b étant des nombres réels.
4. Placer le point G et tracer la droite de Mayer sur le graphique.
5. Déterminer graphiquement le nombre d'abonnement annuels prévisibles pour 2016. Vérifier le résultat par un calcul.

EXERCICE 6

On considère un conducteur dont la résistance électrique R, exprimée en ohm (Ω), est une fonction affine de la température θ exprimée en degrés Celsius (°C). On a R = a$\theta + b$ ou a et b sont des constantes réelles. L'objet de cet exercice est de fournir une estimation de R pour θ donnée.

1. On pose x = $\frac{\theta}{4}$ - 5 et y = 10R – 21, puis on effectue une série de mesure. On obtient ainsi le tableau statistique ci-dessous.

x_i	3	27	51	70	97	116	156	184
y_i	12,1	2,2	27,5	37,6	47,3	50,7	66,6	76,5

a. Représenter le nuage de point associé à cette série (x_i ; y_i) dans le plan muni d'un repère orthonormé.

b. G_1 désigne le point moyen des quatre premiers points du nuage et G_2 celui des quatre dernier points. Déterminer les coordonnées de G_1 et G_2.
(On arrondira les résultats à 10^{-2} près par excès).

c. Déterminer une équation cartésienne de la droite (G_1G_2).

d. Placer les point G_1 et G_2 puis tracer la droite (G_1G_2) sur le graphique.

2. Utiliser le résultat précédent pour calculer les valeurs les constantes a et b.

« Le vouloir c'est le pouvoir » bonne chance !!!

PARTIE 12 : GEOMETRIE DANS L'ESPACE

EXERCICE 1

1) Soient A, B et C trois points d'un plan tel que AB = 5, AC = 8 et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{2}$.

Calculer la norme du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. En déduire l'aire du parallélogramme ABDC où D est le point tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

2) Dans une base orthonormale directe de l'espace, on donne les points A (2 ; -3) ; B(-1 ; 2 ; 0) et C(4 ; -6 ; 5). Calculer l'aire du triangle ABC.

3) Dans un repère orthonormal direct, on considère les points A(1 ; 0 ; 0), B(0 ; 0 ; 1) et C(1 ; 1 ; 1).

a) Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BC}$. En déduire la norme de chacun des vecteurs.

b) Calculer $\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC} . \overrightarrow{CA}$.

c) Calculer la distance de M(0 ; -1 ; -1) à la (AB).

4) Soit (D) la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -3t \\ z = 4 + t \end{cases}$; t ∈ ℝ. Donner les coordonnées d'un point H de (D) et celles d'un vecteur directeur $\vec{u}$ de (D).

5) Dans un repère orthonormal direct, la droite (d) à pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + t \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}.$$

Calculer la distance du point A(2 ; -1 ; 3) à la droite (d).

6) Dans un repère orthonormal direct, on considère les points A(2 ; -1 ; 3), B(3 ; 0 ; 4), C(1 ; 1 ; 4) et M(-1 ; 3 ; 4). Calculer la distance de M à (ABC).

7) (P) est le plan d'équation 2x – 3y + 5z = 4 dans un repère orthonormal direct et M(1 ; 2 ; 1). Calculer la distance de M au plan (P).

EXERCICE 2

1) Dans un repère orthonormal, on considère les points A(-1 ; 1 ; 3), B(2 ; 1 ; 0) et C(4 ; -1 ; 5). Montrer que les points A , B et C ne sont pas alignée.

2) On considère les points A(1 ;1 ;0), B(1 ;2 ;1) et C(3 ;-1 ;2). Déterminer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AC}$.
Interpréter ces résultats.

3) L'espace (E) est muni d'un repère orthonormé direct. On donne les points P(1 ;2 ;-1) ; Q(3 ;-1 ;4) et R(2 ;6 ;2). S est un point de(E) tel que PQRS est un parallélogramme.

a) Trouver les coordonnées du point S.

b) Trouver l'aire du parallélogramme PQRS.

EXERCICE 3

On considère les points A(2 ; 1 ; 3), B(-3 ; -1 ; 7) et C(3 ; 2 ; 4) et le vecteur $\vec{n}$(2 ; -3 ; 1).

a. Vérifie que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

b. Calculer la distance du point D(0 ; 1 ; -1) au plan (ABC).

c- Calculer l'aire du triangle ABC.

d- Calculer le volume de la pyramide de base triangulaire ABC et de sommet D.

e- Calculer le volume du parallélépipède construit sur les segments $[AB]$ et $[AC]$.

EXERCICE 4

Dans l'espace rapporté a un repère orthonormal direct $(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath}\,;\vec{k})$, on donne les points $A(-2\,;\,-1\,;2)$, $B(6\,;\,-5\,;3)$, $C(-1\,;3\,;10)$ $et\ le\ vecteur$ $\vec{u} = -4\vec{\imath} - 7\vec{\jmath} + 4\vec{k}$

1) a- Calculer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}$.

b- Interpréter géométriquement ces résultats.

c- Calculer les distances AB et AC.

d- En déduire la nature exacte du triangle ABC.

2) Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

3) Montrer que $\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = 9\|\vec{u}\|$ et en déduire l'aire du triangle ABC en fonction de la norme de $\vec{u}$.

4) Soit D(1 ; 1 ; 1) un point de l'espace.

a- Les points A, B, C et D sont coplanaires ?

b- Calculer la distance $d(D,(ABC))$ et en déduire le volume V, en unité de volume, de la pyramide de sommet D et de base le triangle ABC.

EXERCICE 5

Dans l'espace rapporté a un repère orthonormal direct $(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath}\,;\vec{k})$, on donne les points $A(-1\,;\,0\,;2)$, $B(0\,;\,1\,;3)$, $C(1\,;3\,;0)$ et $C(-1\,;-1\,;1)$.

1) Calculer l'aire du triangle ABC.

2) a- Calculer la distance $d(D,(ABC))$.

b- Les points A, B, C et D sont – ils coplanaires ?

3) Calculer le volume du tétraèdre DABC.

4) a- Déterminer les coordonnées du point E tel que ABDE soit un parallélogramme.

a- Calculer l'aire du parallélogramme ABDE.

EXERCICE 6

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k})$. On donne les points : $A(1\,;\,2\,;3)$, $B(3\,;\,0\,;3)$ et $C(3\,;2\,;1)$.

1) Calculer AB ; BC et $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}$.

2) Soit D le point tel que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. Trouver les coordonnées de D. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ? En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont orthogonaux.

3) Déterminer la distance séparant le point O au plan du quadrilatère ABCD.

4) Soit I le milieu de $[AC]$. Calculer OI, En déduire que I est le projeté orthogonal de O sur le plan (ABCD).

5) Démontrer que les plans (OAC) et (OBC) sont orthogonaux.

6) Calculer l'aire du quadrilatère ABCD.

7) Déterminer le volume de la pyramide de sommet O et de base, le quadrilatère ABCD.

EXERCICE 7

Dans l'espace rapporté a un repère orthonormal direct $(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath}\,;\vec{k})$, on donne les points $A(2\,;\,0\,;0)$, $B(0\,;\,2\,;0)$, $C(0\,;0\,;-2)$.

1) Déterminer les coordonnées de $\vec{u} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

2) Soit H(a ; b ; c) le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC).

a- Que peut – on dire des vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\vec{u}$? En déduire que $3a + 2b - 3c - 6 = 0$.

b- Que peut – on dire des vecteurs $\overrightarrow{OH}$ et $\vec{u}$? En déduire qu'il existe un réel t tel que : $\begin{cases} a = -6t \\ b = -4t \\ c = 6t \end{cases}$

c- Déterminer t puis donner les coordonnées de H.

d- Calculer la distance du point O au plan (ABC).

3) Calculer le volume du tétraèdre de base ABC et de sommet O.

PREPA BAC

22 SUJETS TYPE BAC

« Le soleil brillera d'abord sur ceux qui sont débout avant de briller sur ceux qui sont assis » Seydou BADIAN

CLASSE : Tle D

PROF : M. SAWADOGO . L **DUREE : 4h**

PREPA BAC MATHEMATIQUES N°1

EXERCICE 1 (4pts)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité 2cm.

Soit A le point d'affixe $Z_A = 1 + i\sqrt{3}$.

1) Ecrire Z_A sous forme exponentielle. (0,25pt)

2) Soit A le point antécédent du point B par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

a- Déterminer l'affixe du point B sous forme exponentielle puis sous forme algébrique.(0,75pt)

b- Quelle est la nature exacte du triangle AOB. (0,5pt)

3) On pose la transformation suivante : $Z_C = Z_A\, e^{i\frac{\pi}{4}}$.

a- Donner la nature et les éléments caractéristiques de cette transformation. (0,5pt)

b- Ecrire Z_C sous forme exponentielle et sous forme trigonométrique. (0,5pt)

c- En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{7\pi}{12}$ et de $\sin\frac{7\pi}{12}$. (0,5pt)

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ *puis dans* $\left[-\pi\,;\,\pi\right]$, l'équation

$(E) : \left(1-\sqrt{3}\right)\cos x + \left(1+\sqrt{3}\right)\sin x = 2\sqrt{2}$. (1pt)

EXERCICE 2 (4pts)

1) Déterminer les racines carrées du nombre complexe $u = \frac{4+4i\sqrt{3}}{8}$ sous forme exponentielle. (0,5pt)

2) Donner la forme trigonométrique de u . (0,25pt)

3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 + \left(\sqrt{3}-7i\right)z - 4\left(3+i\sqrt{3}\right) = 0$. (0,5pt)

4) Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité 1cm.

a- Placer les points A, B et C d'affixes respectives $Z_A = 2i$; $Z_B = 4i$ et $Z_C = 3i - \sqrt{3}$.(0,5pt)

b- Montrer que $u = \frac{Z_C - 2i}{Z_B - 2i}$. (0,25pt)

c- En déduire la nature exacte du triangle ABC. (0,5pt)

5) Soit f l'application de P\ $\{C\}$ dans P, qui a tout point M d'affixe Z $(Z \neq Z_C)$ on associe le point M' d'affixe $Z' = f(Z)$ telle que $Z' = f(Z) = \frac{z-4i}{z-3i+\sqrt{3}}$.

a- Interpréter géométriquement le module et un argument de Z'. (0,5pt)

b- En déduire et construire l'ensemble (E) des points M dont l'image par f a pour affixe un nombre imaginaire pur non nul. (0,5pt)

c- En déduire et construire l'ensemble (D) des points M dont l'image par f est un élément du cercle de centre O et de rayon 1. (0,5pt)

On donne $\sqrt{3} = 1{,}7$.

PROBLEME (12pts)

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2} \ ; \ si\ x > 2 \\ f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 3} \ ; \ si\ x \leq 2 \end{cases}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité 2cm.

PARTIE A : (7,5pts)

1) Montrer que le domaine de définition de f est : $D_f = \mathbb{R}$. (0,5pt)
2) Calculer les limites aux bornes de $\mathbb{R}$. (0,5pt)
3) Etudier la continuité de f en 2. (0,5pt)
4) Etudier la dérivabilité de f en 2. Interpréter le résultat. (1,25pt)
5) Déterminer les réels a , b et c tels que $\forall\, x \leq 2$; $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-3}$. (0,75pt)
6) Montrer que la droite (D) : $y = x + 2$ est une asymptote à (C) en $-\infty$. (0,5pt)
7) Déterminer l'équation réduite de l'asymptote (D') à (C) en $+\infty$. (0,5pt)
8) Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation. (2pts)
9) Construire (C), ses asymptotes ainsi que ses tangentes. (1pt)

PARTIE B : (2pts)

Soit h la restriction de f à $]-\infty\,; 1]$ et $(C^{'})$ la courbe représentative de la fonction bijective h^{-1} dans le même repère.

1) Montrer que h est bijective vers un intervalle K à préciser. (0,5pt)
2) Donner, en justifiant, le sens de variation de h^{-1} puis dresser son tableau de variation. (1pt)
3) Justifier la construction de la courbe $(C^{'})$ de h^{-1} dans le même repère. (0,25pt)
4) Construire la courbe $(C^{'})$ dans le même repère. (0,25pt)

PARTIE C : (2,5pts)

Soit $M(x\,; y)$ un point mobile dont les coordonnées en fonction du paramètre t dans le même repère sont données par : $\begin{cases} x(t) = t + 3 \\ y(t) = \sqrt{t^2 + 3t + 2} \end{cases}$; $t > -1$

1) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par x . (0,5pt)
2) Déterminer l'équation cartésienne de la trajectoire du point mobile M. (0,5pt)
3) En déduire que la trajectoire du point mobile M est une partie de la courbe (C) que l'on précisera. (0,5pt)
4) Déterminer les coordonnées du vecteur vitesse en fonction de t. En déduire sa valeur à t = 0 . (0,5pt)
5) Construire en bleu la trajectoire du point mobile M (Γ) en pointillé dans le même repère. (0,5pt)

CLASSE : Tle D

PROF : M. SAWADOGO . L DUREE : 4h

PREPA BAC MATHEMATIQUES N°2

EXERCICE 1 (5pts)

Les deux parties A et B sont indépendantes.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ dont l'unité et le centimètre.

PARTIE A :

Soient A , B et C trois nombres complexes tels que A = $\sqrt{3} + i$; B = $\sqrt{2}(1+i)$ et C = B.A^2 .

1) Déterminer le module et un argument de A , B et C. (1,5pt)

2) Donner la forme exponentielle de A et la forme trigonométrique de B. (0,5pt)

3) Donner la forme exponentielle de A^{202} . (0,25pt)

4) Donner la forme trigonométrique et la forme algébrique de C. (0,5pt)

5) En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{7\pi}{12}$ et de $\sin\frac{7\pi}{12}$. (0,5pt)

PARTIE B :

On donne E, F , et G d'affixes respectives $Z_E = 3i$; $Z_F = 4 + i$ et $Z_G = 2 - 3i$.

1) Placer les points E , F et G dans le repère. (0,5pt)

2) Déterminer Z_D l'affixe du point D pour que EFGD soit un parallélogramme. (0,25pt)

3) On pose $Z' = \frac{z-3i}{z-4-i}$ $avec\ z \neq 4 + i.$

Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z tels que : (1pt)

a- $|Z'| = 1.$

b- Z' soit imaginaire pur non nul.

EXERCICE 2 (4pts)

Les deux parties A et B sont indépendantes.

PARTIE A :

Soit $f(x) = \frac{1}{(1+e^x)^2}$ et I = $\int_0^1 f(x).dx$

1) Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) = 1 - \frac{e^x}{1+e^x} - \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$. (0,5pt)

2) Déterminer la primitive de f qui prend la valeur 1 en 0. (1pt)

3) Calculer I. (0,5pt)

PARTIE B :

Soit K = $\int_0^\pi e^x cos2x.dx$; L = $\int_0^\pi e^x cos^2x.dx$; J = $\int_0^\pi e^x sin^2x.dx$.

1) A l'aide d'une double intégration par parties, montrer que K = $\frac{e^\pi - 1}{5}$. (0,5pt)

2) Calculer L + J . (0,5pt)

3) Calculer L – J . (0,5pt)

4) En déduire les valeurs de L et J. (0,5pt)

PROBLEME (11pts)

PARTIE A : (3,25pts)

On considère la fonction numérique $(x) = -\frac{2x+1}{x^2} + \ln x$.

1) Déterminer le domaine de définition D_g de g. (0,25pt)

2) Calculer les limites aux bornes de D_g. (0,5pt)

3) Etudier les variations de g. (1,5pt)

4) Montrer que $\forall\, x \in D_g$, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution
$\propto$ telle que $\propto \in \left]2{,}55\,;2{,}56\right[$. (0,5pt)

5) Donner le signe de $g(x)$ sur D_g. (0,5pt)

PARTIE B : (5,25pts)

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \left(\frac{1}{x} - \ln x\right)e^{-x}$.On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unités graphiques OI = 2cm et OJ = 4cm.

1) Déterminer le domaine de définition D_f de f. (0,25pt)

2) Calculer les limites aux bornes de D_f. Donner si possible une interprétation graphique. (1pt)

3) Démontrer que $f(\propto) = -\frac{1+\propto}{\propto^2}e^{-\propto}$. (0,5pt)

4) Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation. (1,5pt)

5) La fonction f admet – elle une bijection sur D_f ? Justifier. (0,5pt)

6) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point $A\left(1\,;\,\frac{1}{e}\right)$. (0,5pt)

7) Construire (T) et (C) . (1pt)

On donne $\propto = 2{,}6$; $f(\propto) = 0{,}5$; $\ln(2{,}55) = 0{,}93$; $\ln(2{,}56) = 0{,}94$

PARTIE C : (2,5pts)

Soit h une fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $h(x) = e^{-x}.\ln x$ et $\lambda > 3$

1) Déterminer la dérivée première de h. Que peut – on en déduire. (1pt)

2) Calculer , en cm^2 et en fonction de λ, l'aire $A(\lambda)$ de la partie du plan comprise entre (C) , (OI) et les droites d'équation $x = 3$ et $x = \lambda$. (1pt)

3) Quelle est la valeur de l'aire calculée lorsque λ tend vers +∞. (0,5pt)

CLASSE : Tle D

PROF : M. SAWADOGO . L DUREE : 4h

PREPA BAC MATHEMATIQUES N°3

EXERCICE 1 (4pts)

L'objectif est d'étudier la suite (U_n) définie pour tout entier n ≥ 0 par : $U_0 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$ et

Pour entier naturel n $\geq$ 1, $U_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx.$

1) Soit la fonction numérique définie sur $[0,1]$ par : $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

a- Calculer la dérivée f' de f. En déduire U_0. (1pt)

b- Calculer U_1. (0,5pt)

2) Prouver que la suite (U_n) est décroissante. (on ne cherchera pas à calculer U_n). (0,5pt)

3) a- Montrer que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle [0,1] on a : $1 \leq \sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{2}$. (0,5pt)

b- En déduire que pour tout entier n ≥ 1, $\frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$. (0,5pt)

c- Déterminer la limite de U_n . (0,5pt)

d- En déduire que la suite (U_n) est convergente. (0,5pt)

EXERCICE 2 (4pts)

On considère la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = \frac{5}{2} \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + \frac{2}{U_n} \end{cases}$; $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

On pose $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $V_n = \frac{U_n - 2}{U_n + 2}$.

1) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$; $V_{n+1} = (V_n)^2$. (0,5pt)

2) On définit la suite $W_n = ln(V_n)$, où $ln(V_n)$ est le logarithme népérien de (V_n) .

a- Déterminer la nature de la suite (W_n). (0,5pt)

b- Exprimer W_n et V_n en fonction de n. (0,5pt)

3) a- Exprimer la suite U_n en fonction de n. (0,5pt)

b- La suite (U_n) est – elle convergente ? Justifier. (0,5pt)

4) On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n-2}(W_k)$.

a- Exprimer S_n en fonction de n. (0,5pt)

b- Etudier la convergence de la suite (S_n) . (0,25pt)

5) On pose $T_n = V_0 \times V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_{n-2}$.

a- Exprimer T_n en fonction de n. (0,5pt)

b- Calculer la limite de T_n . (0,25pt)

PROBLEME (11pts)

PARTIE A : (3,25pts)

On considère la fonction u définie par : $u(x) = x - 1 + \ln|x|$.

1) Déterminer le domaine de définition D_u de u. (0,25pt)

2) Calculer les limites aux bornes de D_u . (1pt)

3) Etudier les variations de . (1pt)

4) La fonction u est – elle bijective sur $\mathbb{R}_-^*$? (0,25pt)

5) Montrer que $\forall\ x \in \mathbb{R}_+^*$, l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution $\propto$ telle que $\propto \in]0,9\,;1,1[$. (0,5pt)

6) Calculer l'image de 1 par u puis donner le signe de $u(x)$ sur D_u. (0,25pt)

PARTIE B : (5,75pts)

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x-1}{x} ln|x|$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unités graphiques 2 cm .

1) Déterminer le domaine de définition D_f de f. (0,25pt)

2) Calculer les limites aux bornes de D_f. Donner si possible une interprétation graphique. (1,25pt)

3) Etudier le sens de variations de f puis dresser son tableau de variation . (1pt)

4) a- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution β sur $\mathbb{R}_-^*$. (0,25pt)

   b- Calculer l'image de -1 par f puis donner le signe de $f(x)$ sur D_f. (0,5pt)

   c- En déduire la position relative de (C) par rapport à l'axe des abscisses. (0,5pt)

5) Calculer les limites de $\frac{f(x)}{x}$ en $+\infty$ et en $-\infty$. Interpréter ces résultats.(1pt)

6) Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à (C) au point d'ordonnées nul. (0,5pt)

7) Construire (T) et (C) . (0,5pt)

PARTIE C : (1,5pts)

Soit h la restriction de f à l'intervalle $I = [1;\ +\infty[$.

1) Montrer que h réalise une bijection de I vers un intervalle J à préciser. (0,5pt)

2) Donner le sens de variation de h^{-1} la bijection réciproque de h puis dresser son tableau de variation.(0,5pt)

3) Expliquer la construction de la courbe (C^{-1}) de h^{-1} puis la Construire dans le même repère. (0,5pt)

PARTIE D : (1,5pts)

Soit p la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $p(x) = -\frac{1}{2}(lnx)^2 + xlnx - x$.

1) Déterminer $p'(x)$. Quelle remarque peut – on faire ?. (0,5pt)

2) Soit λ un réel supérieur à 2 et $A(\lambda)$ l'aire de la partie du plan délimité par la courbe (C) l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1\ et\ x = \lambda$.

   a- En prenant $\lambda = 4$, hachurer le domaine concerné et calculer en cm^2 son aire. (0,5pt)

   b- Calculer en cm^2 $A(\lambda)$ et montrer que $A(\lambda)$ n'est pas définie lorsque λ tant vers $+\infty$.(0,5pt)

Données : $\ln(0,9) = -0,2$; $\ln(1,1) = 0,09$; $\ln(2) = 0,7$

CLASSE : Tle D

PROF : M. SAWADOGO . L DUREE : 4h

PREPA BAC MATHEMATIQUES N°4

EXERCICE 1

On considère un repère orthonormal du plan. On se propose de déterminer la trajectoire (C) d'un point mobile M dont les coordonnées sont données en fonction du temps

par : $\begin{cases} x(t) = cos3t \\ y(t) = sin2t \end{cases}$; t ∈ ℝ .

1) Comparer la position de des points M(t) et M(t+2π) puis M(t) et M(- t) puis en fin M(t) et M(t + π). En déduire des interprétations.

2) Dresser le tableau de variation conjoints de x et y sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

3) Construire la courbe (C) sur $[-\pi \,;\, \pi]$.

EXERCICE 2

NB : Les questions 1 , 2 et 3 ne sont pas liées.

1- On considère l'équation suivante : $Z^2 - \left(2^{\theta+1}\cos\theta\right)Z + 2^{2\theta} = 0$ où θ ∈ [0,2π[.
Résoudre dans ℂ l'équation et Donner chaque solution sous forme trigonométrique puis sous forme exponentielle.

2- Déterminer un nombre k tel que $2 + i$ soit une solution de l'équation : $z^2 - 2z + k = 0$, Puis achever la résolution dans ℂ de l'équation.

3- Soit z un nombre complexe non nul et α un réel appartenant à l'intervalle [− π ; π].
On considère l'équation (E) : $iz^2 - 2(\sin\alpha + i)z + 2\sin\alpha = 0$.

a) Résoudre dans ℂ l'équation (E).

b) Exprimer $1 - \cos\alpha$ en fonction de $\sin\frac{\alpha}{2}$.

c) Exprimer $1 + \cos\alpha$ en fonction de $\cos\frac{\alpha}{2}$.

d) Exprimer $\sin\alpha$ en fonction de $\cos\frac{\alpha}{2}$ et $\sin\frac{\alpha}{2}$.

e) En déduire la forme exponentielle de chacune des solutions de (E).

PROBLEME

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,,I,J)$ $(unité\ graphique: 2\ cm)$.On considère la fonction numerique f $définie\ sur$ ℝ par :

$\begin{cases} f(x) = -(x+1)\sqrt{1-x} \ ; si\ x \leq 1 \\ f(x) = \frac{(x-1)ln(x-1)}{x} \ ; si\ x > 1 \end{cases}$; On désigne par (C) sa représentation graphique .

Partie A

Soit φ la fonction définie sur] 1 ; +∞[par $\varphi(x) = x + ln(x-1)$.

1. a) Calculer les limites de φ en 1 et en + ∞ .

b) Etudier le sens de variation de , puis dresser son tableau de variation .

2. a) Montrer que l'équation $\varphi(x) \ = O\ admet\ une\ solution\ unique\ \beta$ appartenant à l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$.

b) Vérifier que 1,27$\leq \beta \leq 1{,}28$

3. Déduire des questions précédentes le signe de φ sur$]1;\ +\infty[$.

Partie B

1.a) Etudier la continuité f en 1.

b) Etudier la dérivabilité de f en 1 ,puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2.a) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

b) Calculer $\lim_{n\to-\infty}(\frac{f(x)}{x})$ et $\lim_{n\to+\infty}(\frac{f(x)}{x})$.

Quelles conséquences graphiques peut-on en déduire pour la courbe (C).

3. On admet que f est dérivable sur les intervalles $]-\infty; 1[$ et $]1\ ; +\infty[$.

Soit v la fonction définie sur $]-\infty; 1[$ par v$(x) = \frac{3x-1}{2\sqrt{1-x}}$.

a) Montrer que f est une primitive de v sur l'intervalle $]-\infty\ ; 1[$.

b) Déterminer la primitive de V sur $]-\infty\ ; 1[$ qui s'annule en $x_o = -3$.

4. a) Déterminer la fonction dérivée f' de f.

b) Exprimer f ' (x) en fonction de $\varphi\ (x)$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$.

c) Etudier le sens de variation de f et dresser le tableau de variation de f .

5. Montrer que $f(\beta) = 1 - \ \beta$, puis donner un encadrement de $f(\beta)$ à 10^{-2} près.

6. Construire la tangente ou les demi – tangentes à $(C)\ au\ point\ d'abscisse\ 1\ puis\ (C)$.

(On pourra placer les points d'abscisse -1 ; 0 ; et 2.

Partie C

Soit h la restriction de f à l'intervalle $]\beta\ ; +\infty[$.

1. Montrer que h admet une bijection réciproque h^{-1} dont on précisera le domaine de définition , l'ensemble image et le sens de variation .

2. Construire dans le même repère la courbe $(T)\ de\ h^{-1}$.Justifier la construction .

On donne : ln0,27 $\approx\ -1.31$; $ln0{,}28\ \approx\ -1{,}27$; $ln2\ \approx O{,}7$; $\sqrt{\frac{2}{3}} \approx O{,}81$; $\frac{4}{3} \approx 1.33$.

« Pour bien construire on doit creuser profond »

Bonne chance !!!

PREPA BAC MATHEMATIQUES N°5

EXERCICE 1

On considère les intégrales suivantes :

$\mathrm{I} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}.\mathrm{d}x$; $\mathrm{J} = \int_0^1 \sqrt{x^2+\ 2}.\mathrm{d}x$; $\mathrm{K} = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}.\mathrm{d}x$

1) Soit f la fonction définie sur $[0\ ;1]$ par $\mathrm{f}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+\ 2}\right)$

a- Calculer la dérivée f' de f.

b- En déduire la valeur de I .

2) a- Sans calculer les intégrales J et K , vérifier que J = 2I + K.

b- A l'aide d'une intégration par partie , montrer que $\mathrm{J} = \sqrt{3} - \mathrm{K}$.

c- En déduire les valeurs de J et K . (1pt)

EXERCICE 2

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O\ ,\vec{u},\vec{v})$, unité graphique : 2 cm.

1) Soit le nombre complexe $z_o = 1 + i$.

a- Montrer que z_o est solution de l'équation (E) définie par :

$z^3 - (7 + i)z^2 + 2(8 + 3i)z - 10(1 + i) = 0$.

b- Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.

2) On considère les points A , B et C du plan ,d'affixes respectives $1 + i$; $3 + i$ et $3 - i$.

a- Calculer et écrire sous forme exponentielle $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$.

b- En déduire une interprétation du résultat de $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$. Quelle est la nature de ABC ?

c- Placer les points A , B , et C dans le repère et compléter la figure au fur et à mesure.(0,5pt)

d- Soit (Γ) le cercle circonscrit au triangle ABC. Déterminer l'affixe du centre G et le rayon r du cercle (Γ).

3) Soit (Δ) l'ensemble des points M du plan d'affixe z vérifiant la relation :

$|z - 1 - i| = |z - 3 + i|$.

a- Caractériser géométriquement l'ensemble (Δ).

b- Justifier que le point F d'affixe 4 + 2i appartient à (Δ).

c- Déterminer l'affixe du point E de (Δ) situé sur l'axe des ordonnées.

4) Quelle est la nature exacte du quadrilatère CEAF. Justifier votre réponse.

PROBLEME

PARTIE A :

On considère la fonction $P(x) = 1 - x - 2lnx$

1) Déterminer le domaine de définition de p puis calculer les limites à ses bornes.
2) Etudier le sens de variation de P.
3) Calculer $P(1)$ et déterminer le signe de $P(x)$ suivant les valeurs de x.

PARTIE B :

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} 2e^{x-1} - x \ \ si\ x < 1 \\ \frac{x + lnx}{x^2} \ \ si\ x \geq 1 \end{cases}$

On désigne par (C) la courbe représentative dans le plan muni d'un repère ortho normal $(O, \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ d'unité 2cm.

1) Déterminer le domaine de définition D de f.
2) Calculer les limites aux bornes de D. En déduire une conséquence graphique.
3) Etudier la continuité de f en 1 puis sur $\mathbb{R}$.
4) Etudier la dérivabilité de f en 1. En déduire une conséquence graphique.
5) Montrer que la droite d'équation $y = -x$ est une asymptote a (C) en $-\infty$.
6) Calculer la dérivée f' de f.
7) Dresser le tableau de variation de f.
8) Construire la courbe (C) , ses tangentes et ses asymptotes.

PARTIE C :

Soit h la restriction de f à l'intervalle $[1; +\infty[$.

1) a- Montrer que h est bijective de $[1; +\infty[$ sur un intervalle K à préciser.
   b- En déduire le domaine de définition de la fonction bijective h^{-1}.
2) Déterminer les variations de h^{-1} et dresser son tableau de variation.
3) Justifier le tracer de la courbe C^{-1} de h^{-1}.
4) Construire dans le même repère la courbe C^{-1} de h^{-1}.

PARTIE D :

1) Déterminer les réels a et b tels que $g(x) = \frac{a + blnx}{x}$ soit une primitive de $p(x) = \frac{lnx}{x^2}$ pour $x \geq 1$.
2) Calculer l'aire de la partie du plan délimité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 1 \ \ et\ x = e$.

On donne : $2e^{-1} = 0{,}73$; $e = 2{,}7$; $ln2 = 0{,}69$ et $ln3 = 1{,}1$.

Bonne inspiration !!!

PREPA BAC MATHEMATIQUES N°6

EXERCICE 1

Après un test de présélection, une société de la place a retenu 15 candidats dont 10 garçons et 5 filles. Les résultats seront donnés sous forme de fraction irréductible.

A) La société décide de retenir définitivement 3 candidats en procédant par un tirage simultané de 3 candidats parmi 15.

1°) Calculer la probabilité des événements suivants :

A << les candidats retenus sont tous des filles >> ; B << aucune fille n'est retenue >>

C << une fille au moins est retenue >> ; D << au plus un garçon est retenu >>

2°) Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de fille retenu.

a- Donner la loi de probabilité de Y .

b- Calculer l'expérience mathématique de Y.

c- Déterminer la fonction de répartition puis la représenter.

B) La société décide maintenant d'effectuer n fois indépendamment et avec remise un tirage simultané des 3 candidats et s'intéresse au nombre de fois le tirage contient uniquement que des filles ; c'est-à-dire le nombre de fois l'évènement « A » est réalisé.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de fois que « A » est réalisé.

1- Donner la loi de X.

2- Calculer en fonction de n, L'espérance mathématique de X.

3- Calculer en fonction de n la probabilité p_n pour que « A » se réalise au moins une fois.

4- Déterminer le plus petit entier naturel n_0 tels que $p_n > 0{,}99$.

On donne : $\ln(0{,}01) = -4{,}6$; $\ln\left(\frac{89}{91}\right) = -0{,}022$

EXERCICE 2

Au cours de l'année 2018, les dépenses Xi et les chiffres d'affaire Yi bimensuels d'une grande entreprise d'assurance de Ouagadougou a permis de réaliser le tableau ci – dessous ; tous les montants sont exprimés en millions de FCFA.

Xi	11	12	13	17	20	31
Yi	95	100	110	130	150	230

1) On considère les points M_i de coordonnées (X_i ; Y_i).

a- Construire le nuage des points Mi (1cm représentera 5 FCFA en abscisse et 20 en ordonnées.

b - Un ajustement affine de ce nuage est – il possible ? Justifier la réponse.

2) a- Construire la droite (Δ) d'ajustement affine obtenue par la méthode de Mayer.

(On prendra pour premier sous nuage les trois premiers points et pour le deuxième, les trois derniers).

b- Déterminer une équation de la droite (Δ).

3) On considère que la tendance reste la même au cours des deux mois concernés par l'étude.

Donner, durant cette période, une estimation :

a- De la dépense de l'entreprise si le chiffre d'affaire est de 200.000.000.

b- Du chiffre d'affaire de l'entreprise si la dépense est de 40.000.000.

PROBLEME

PARTIE A :

On considère la fonction g définie par : $g(x) = \begin{cases} -x + 1 + xln|x| \ si\ x \in \ ]-\infty\ ; 1[\\ x - 2 + \ e^{1-x} \ \ si\ x \in \ [1; +\infty[\end{cases}$

1) Déterminer Dg et calculer les limites aux bornes de Dg .
2) Etudier la continuité de g en 1.
3) Etudier la dérivabilité de g en 1. En déduire une interprétation graphique.
4) Peut –on prolonger g par continuité en 0 ?

PARTIE B :

On considère la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) \ = g(x)\ si\ x \in Dg \\ f(0) \ = 1 \end{cases}$

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(o\ ;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ unité : 2cm.

1) Déterminer Df et Calculer les limites aux bornes de Df .
2) Etudier la dérivabilité de f en 0. En déduire une interprétation graphique.
3) Calculer $f'(x)$ suivant les valeurs de x.
4) a- Déterminer une équation de (Δ), asymptote oblique à (C) en +∞ puis donner la position relative de (C) par rapport à (Δ) pour ≥ 1 .

   b- Calculer $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$ et en déduire une interprétation graphique du résultat.
5) Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
6) a- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions $\alpha\ \ et\ \ \beta$ avec $\alpha < 0$.

   b- Montrer que $\in\ ]-3{,}6\ ;\ -3{,}5[$.
7) Soit $h(x) = \ f(x)\ sur\ \ ]1;\ +\infty\ [\ = I.$

   a- Montrer que h est bijective de I vers K que l'on déterminera.

   b- Dresser le tableau de variation de h^{-1} .
8) Construire la courbe (C) et la courbe (C^{-1}) de h^{-1} dans le même repère.

PARTIE C :

1) Soit $n \in \mathbb{R}\ \ (n > 1)$.

   a- Calculer l'aire $A(n)$ de la partie du plan délimité par (C) ; (Δ) et les droites d'équations $x = 1\ et\ x = n$.

   b- Calculer la limite de $A(n)\ en + \infty$.
2) Soit D la partie du plan délimité par (C) , l'axe (ox) et les équations $x = 1\ et\ x = 2$

$On\ note\ V\ le\ volume$ du solide engendré par la rotation de D autour de l'axe des abscisses .

   a- A l'aide dune intégration par partie calculer I = $\int_1^2 (x-2)\, e^{1-x}\ \ \mathrm{d}(x)$.

   b- Calculer en cm^3 le volume V.

On donne ln(3,6) = 1, 28 ; ln (3,5) = 1,25 .

« Pour bien construire on doit creuser profond »

Bonne chance !!!

PREPA BAC MATHEMATIQUES N°7

EXERCICE 1

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité 2cm.
On considère les points A, B et C d'affixes respectives i ; -1 et $1+2i$. A tout point M d'affixe Z on associe le point M' d'affixe Z' tel que : $Z' = f(Z) = \frac{iZ+1}{Z+1}$.

1) Déterminer le domaine d'existence de f.
2) Déterminer les coordonnées des points A' et C'associés respectivement à A et C.
3) Représenter les points A, B, C, A' et C'.
4) On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ où x, y, x' et y' $sont$ des $nombres$ $réels$.
   a- Exprimer x' en fonction de x et y.
   b- Exprimer y' en fonction de x et y.
   c- Déterminer et construire l'ensemble (D) des points M du plan tel que Z' soit un imaginaire pure.
   d- Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M du plan tel que Z' soit un réel.
   e- Justifier que A appartient à (E).
5) On désigne par (Δ) l'ensemble des ponts M d'affixe Z du plan tel que $|z'| = 1$.
   a- Montrer que pour $z \neq -1, |Z'| = 1$ équivaut à $|Z - i| = |Z + 1|$.
   b- Construire (Δ).

EXERCICE 2

Un jeu consiste à lancer un dé tétraédrique dont les quatre faces portent le nombre 1, 2, 3 et 4. On s'intéresse au nombre porté par la face cachée. Pour k ∈ $\{1, 2, 3, 4\}$, on note p_k la probabilité d'obtenir le nombre k sur la face cachée. Le dé est déséquilibré de telle sorte que P_1, P_2, P_3 et P_4 suivent dans cette ordre une suite arithmétique de raison r = 0,1 .

1) Déterminer P_1, P_2, P_3 et P_4 .
2) Les critères du jeu sont les suivants : le joueur mise 1000 Fr avant de procéder à un lancer. Si la face cachée porte le nombre 1, organisateur du jeu lui donne 1750 Fr. Si la face cachée porte le nombre 2, organisateur du jeu lui donne 1250 Fr. Si la face cachée porte le nombre 3, organisateur du jeu lui donne 1000 Fr. Si la face cachée porte le nombre 4, organisateur du jeu ne lui donne rien.
Soit Z la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur à l'issue d'un lancer.
Déterminer la loi de probabilité de Z puis calculer l'expérience mathématique de Z et dire si le jeu est favorable ou non pour le joueur.

3) On note X la variable aléatoire égale au nombre porté sur la face cachée.

a- Quelle est la loi de probabilité de X ?

b- calculer l'espérance mathématique E(X) .

4) On lance 4 fois de suite le dé. On suppose que les lancés sont indépendants. On note Y la variable qui décompte le nombre de fois où le chiffre 4 est obtenu.

a- Quelle est la loi de Y. En déduire l'expérience mathématique E(Y).

b- Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une (01) fois le nombre 1 sur la face cachée ?

On donne $(0,9)^4 = 0,656$.

PROBLEME

Le plan est muni d'un repère orthonormé (o, $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$). (Unité graphique : 4 cm). On considère la fonction f définie sur IR par : $f(x) = \frac{e^{-x}}{1+ e^{-x}}$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans (o, $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$).

Partie A :

1) Déterminer le domaine de définition de f D puis calculer les limites à ses bornes.

2) Déterminer la fonction dérivée f' de f et étudier le sens de variation de f sur D.

3) a- Montrer que f réalise une bijection de D vers un intervalle J que l'on précisera. Expliciter la bijection réciproque f^{-1}.

b- Justifier le tracé de la courbe (C') de f^{-1} sans étudier ses variations puis construire dans le même repère les courbes (C) et (C').

4) Soit α >0, calculer en cm^2 l'aire $A(\alpha)$ de la partie du plan délimité la courbe (C) et les droites d'équations $x = 0$, $x = \alpha$ et $y = 0$. Calculer la limite de $A(\alpha)$ quand α tant vers $+\infty$

Partie B :

1) Soit h la fonction définie par $h(x) = 1 - xe^{x} - x$.

Calculer Sur Dh les expressions de $h'(x)$ et $h''(x)$ de la dérivée première et seconde de h.

2) Etudier les variations de h' et en déduire le signe de $h'(x)$.

3) a- Quel est le sens de variation de h ? Dresser son tableau de variations.

b- Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution β et vérifier que $\beta \in [0; 1]$

4) Montrer que β est solution de l'équation $f(x) = x$

5) a- Soit I = $[0; 1]$, Montrer que pour tous x de I, f(x) est élément de I

b- Montrer que si x est élément de I alors $(1 + e^{-1})^2 \leq (1 + e^{-x})^2 \leq 4$.

c- Prouver que pour tous x de I , $|f'(x)| \leq \left(\frac{e}{1+e}\right)^2$.

6) On définit la suite (U_n) par $U_o = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = f(U_n)$.

a- Prouver que pour tout entier naturel n , $U_n \in I$.

b- On pose $k = \frac{e}{1+e}$, montrer que pour tout x de I, $|f(x) - \beta| \leq k^2|x - \beta|$.

c- Prouver que pour tout entier naturel n , $|U_{n+1} - \beta| \leq k^2|U_n - \beta|$.

d- Prouver que $|U_n - \beta| \leq \frac{1}{2}k^{2n}$, en déduire que la suite (U_n) converge vers m que l'on précisera.

On donne $e \approx 2,72$; $e^{-1} \approx 0,37$; $e^{-0,5} \approx 0,61$; $e^{0,5} \approx 1,65$; $e^{-2} \approx 0,13$.

BON COURAGE !

PREPA BAC MATHEMATIQUES N°8

EXERCICE 1

1) On a étudié au laboratoire, l'évolution d'une population de petits rongeurs. La taille de la population au temps t (exprimés en années) est notée g(t). L'unité choisie pour g(t) est la centaine d'individus. On définit ainsi une fonction g de [0 ;+∞[vers $\mathbb{R}$, et on admet que g est une solution de l'équation différentielle (E_1) : $y' = \frac{1}{4}y$

a- Résoudre l'équation différentielle (E_1). (0,5pt)

b- Déterminer l'expression de g(t), sachant qu'à la date t = 0, la population comprend 100 rongeurs c'est-à-dire g(0) = 1. (0,5pt)

c- Apres combien d'années la population dépassera-t-elle 300 rongeurs pour la première fois ? (0,5pt)

2) On observe dans un secteur donné, qu'ez*-n réalité, un prédateur empêche une telle croissance en tuant une certaine quantité de rongeurs. On note u(t) le nombre de rongeurs vivants au tempsvbbù9g* t dans ce secteur et on admet que la fonction u, ainsi définie satisfait aux conditions : (E_2) : $u'(t) = \frac{1}{4}u(t) - \frac{1}{12}[u(t)]^2 \quad et \quad u(0) = 1$.

a) On suppose que, pour tout réel positif t , on u(t)>0. On considère la fonction h définie sur [0 ;+∞[par $h = \frac{1}{u}$. Démontrer que la fonction u satisfait aux conditions (E_2) si et seulement si la fonction h satisfait aux conditions (E_3) : $h'(t) = -\frac{1}{4}h(t) + \frac{1}{12} \; et \; h(0) = 1$

b) On pose : pour tout t ∈ [0 ;+∞[$k(t) = h(t) - \frac{1}{3}$. Ecrire l'équation différentielle (E_4) satisfaite par la fonction k , puis résoudre l'équation (E_4). (1pt)

c) En déduire l'expression de h(t) puis celle de u(t). (0,5pt)

d) Dans cette étude, comment se comporte la taille de la population lorsque t tend vers + ∞ ? (0,5pt) On donne : ln3$\approx 1{,}09$

EXERCICE 2 :

L'espace est rapporté à un repère orthonomal direct $(0;\ \vec{i};\ \vec{j};\ \vec{k})$. On donne les points A(-1 ; 0 ; 2) ; B(0 ; 1 ; 3) ; C(1 ; 3 ; 0) et D(-1 ; -1 ; 1).

1) Placer ces points dans le repère.

2) Calculer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$. Interpréter géométriquement ces resultats.

3) Calculer les distances AB et AC .

4) Calculer l'aire du triangle ABC .

5) Calculer la distance du point D au plan (ABC). Les points A, B, C et D sont – il coplanaires ?

6) Calculer le volume du tétraèdre DABC.

7) Déterminer les coordonnées du point E tel que ABDE soit un parallélogramme.

8) Calculer l'aire du parallélogramme ABDE.

PROBLEME :

On considère la fonction numérique f de la variable réel x par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}\,,\ si\ x < -1 \\ f(-1) = 0 \\ f(x) = (x+1)e^{-x}\,,\ si\ x > -1 \end{cases}$$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité 2cm.

PARTIE A :

1) Etudier la continuité de f.

2) Etudier la dérivabilité de f en -1 puis interpréter le résultat.

3) Préciser à l'aide de ce qui précède le domaine de dérivabilité de f puis calculer la dérivée de f.

4) Calculer la limite de f en $-\infty\ et\ en + \infty$. Préciser la ou les asymptotes à (C).

5) Déterminer l'équation de l'asymptote à (C) en $-\infty$.

6) Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.

7) Déterminer une équation de la tangente à (C) au point d'abscisse 1.

8) a- Montrer que $\forall\ x < -1$, f réalise une bijection vers un intervalle à préciser.

b- Dresser le tableau de variation de la fonction bijective $f^{-1}\ de\ f$.

c- Justifier la construction de (C^{-1}) la courbe de la fonction bijective $f^{-1}\ de\ f$.

9) Construire (C) , les asymptotes et les tangentes à (C) puis (C^{-1}).

PARTIE B :

1) Soit $\propto$ un réel strictement positif, calculer l'aire de la portion du plan comprise entre (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0\ et\ x = \propto$. (On pourra utiliser une intégration par parties).

2) L'aire calculée admet-elle une limite en $+\infty$?

PARTIE C :

On considère le mouvement d'un point mobile M$(x\,;y)$ définie par les équations :

$$\begin{cases} x(x) = 1 - \frac{2}{cost} \\ y(t) = 2tant \end{cases} ;t \in \left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$$

1) Montrer que la trajectoire de M est une partie de (C) que l'on précisera.

2) Tracer la trajectoire (Γ) de M dans le même repère que (C).

« Demain c'est aujourd'hui » **Bonne chance !!!**

CLASSE : Tle D

PROF : M. SAWADOGO . L **DUREE : 4h**

PREPA BAC MATHEMATIQUES N°9

EXERCICE 1

Dans le tableau suivant figurent les résultats d'une enquête réalisée dans un magasin pour déterminer le nombre d'acheteurs potentiels d'un modèle de chaussures en fonction de son prix de vente.

Prix en francs x_i	350	400	450	500	550	600
Nombre d'acheteurs potentiels y_i	140	120	100	90	80	55

1) Représenter les nuages de points $M_i(x_i\,;y_i)$ correspondant à cette série statistique dans un repère orthonormal (O ; I ;J) tel que 1cm représente 100 francs sur l'axe des abscisses et 1cm représente 20 acheteurs sur l'axe des ordonnées.

2) Un ajustement affine est – il possible ? Justifier.

3) On appelle G_1 et G_2 les points moyens des sous-nuages constitués d'une part par les trois premiers points, d'autre part par les trois derniers points.

a- Calculer les coordonnées de G_1 et G_2.

b- Placer les points G_1 et G_2 sur la figure et tracer la droite (G_1G_2).

c- Déterminer une équation de la forme y = mx +p de la droite (G_1G_2).

4) Donner une estimation du nombre d'acheteurs potentiels d'un modèle de chaussures vendu 650f.

5) Donner une estimation du prix d'un modèle dont le nombre d'acheteurs potentiels est 50.

EXERCICE 2

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 2cm. On note A le point d'affixe 1 et B le point d'affixe 3 + 2i. On appelle f l'application qui, à tout point M distinct de A et d'affixe z, associe le point M' d'affixe z', définie par $z' = \frac{z-1+2i}{z-1}$.

1) a- Calculer les affixes des points O' et B', images respectives des points O et B par f

b- Placer les points A, O', B et B' dans le plan.

2) a- Calculer, pour tout complexe différent de 1, le produit : (z' – 1)(z – 1)

b- En déduire que, pour tout point M distinct de A, on a :

$$AM \times AM' = 2 \text{ et } \left(\widehat{\vec{u}\,,\overrightarrow{AM}}\right) + \left(\widehat{\vec{u}\,,\overrightarrow{AM'}}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}.$$

3. Démontrer que, si M appartient au cercle (C) de centre A passant par O, alors M' appartient à un cercle(C') que l'on précisera le centre et le rayon. Construire (C) et (C').

4) a- Déterminer l'angle$\left(\widehat{\vec{u}\,,\overrightarrow{AB}}\right)$.

b- Démontrer que, si M est un point autre que le point A de la demi-droite (D) d'origine A passant par B alors M'appartient a une demi-droite que l'on précisera.

5) On appelle P le point d'intersection du cercle (C) et de la demi-droite (D).

Placer son image P' sur la figure.

PROBLEME

PARTIE A :

On considère la fonction numérique définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2} - x + e^{x-1} \;\; ; \;\; si\ x \leq 1 \\ f(x) = \frac{3}{2} - x + \ln(2x-1) \;\; ; \;\; si\ x > 1 \end{cases}$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère d'unité 1cm.

1) Etudier la continuité de f en 1.

2) Etudier la dérivabilité de f en 1 puis interpréter le résultat.

3) Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.

4) Construire la courbe (C).

5) a- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\propto \in \ ]3\,;4[$.

b- Vérifier que $\alpha = \frac{3}{2} + \ln(2\alpha - 1)$.

PARTIE B

Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{3}{2} + \ln(2x-1)$.

1) a- Calculer $g(\alpha)$ puis en-déduire que α est solution de l'équation $g(x) = x$.

b- Montrer que si $x \in [3\,;4]$; alors $g(x) \in [3\,;4]$.

c- Montrer que $\forall\, x \in [3\,;4]$; $|g'(x)| \leq \frac{2}{5}$.

d- Montrer que $\forall\, x \in [3\,;4]$; $|g(x) - \propto| \leq \frac{2}{5}|x - \alpha|$.

2) Soit la suite (U_n) définie par $U_0 = 3$ et pour tout naturel n ; $U_{n+1} = g(U_n)$.

a- Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$; $3 \leq U_n \leq 4$.

b- Montrer que la suite (U_n) est croissante et déduire sa convergence.

c- Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$; $|U_{n+1} - \propto| \leq \frac{2}{5}|U_n - \alpha|$.

d- Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$; $|U_n - \propto| \leq \left(\frac{2}{5}\right)^n$. Déterminer la limite de (U_n).

e- Déterminer la plus petite valeur p de n pour la quelle U_n est une valeur approchée de α à 10^{-4} près.

NB : On donne $ln2 \approx 0{,}7$; $ln5 \approx 1{,}6$; $ln7 \approx 1{,}9$.

BON COURAGE !

CLASSE : Tle D

PROF : M. SAWADOGO . L DUREE : 4h

PREPA BAC MATHEMATIQUES N°10

EXERCICE 1

Dans un repère orthonormal direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, on considère les points A(2 ; 1 ; 3), B(2 ; 0 ; -2), C(1 ; 1 ; 4) et D(0 ; 2 ; 2).

1) Calculer l'aire du triangle ABC.
2) Calculer la distance de D à la droite (AB).
3) Calculer la distance de D au plan (ABC).
4) Calculer le volume du tétraèdre ABCD.

EXERCICE 2

On considère les suites (U_n) et (V_n) toutes définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} U_0 = \frac{1}{3} \\ U_{n+1} = \frac{3}{2}(U_n)^2 \end{cases} \quad \text{et} \quad V_n = ln\left(\frac{3}{2}U_n\right).$$

1) Calculer V_0.
2) Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera son premier terme et sa raison.
3) Exprimer V_n en fonction de n. Calculer la limite de V_n . (V_n) est – elle convergente ?
4) Exprimer U_n en fonction de n. Calculer la limite de U_n . (U_n) est – elle convergente ?
5) Pour tout entier naturel n, on pose :

$$S_n = V_0 + V_1 + \ldots + V_{n-1} \quad \text{et} \quad T_n = U_0 \times U_1 \times \ldots \times U_{n-1}.$$

a- Montrer que $T_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n e^{S_n}$.

b- Exprimer S_n et T_n en fonction de n. Etudier la convergence des suites (S_n) et (T_n).

PROBLEME

Le plan est muni d'un repère orthonormé (o, $\vec{i},\vec{j}$). (Unité graphique : 2 cm). On considère la fonction f définie sur IR par : $f(x) = x^2e^x - 2$. On désigne par (C) sa courbe représentative

Partie A :

1) Déterminer le domaine de définition D de f puis calculer les limites à ses bornes. En déduire une interpréter graphiquement.
2) Calculer la limite en $+\infty$ de $\frac{f(x)}{x}$, interpréter graphiquement le résultat.
3) Etudier les variations de f sur D.
4) a- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α tel que $\alpha \in]0,5 ; 1[$.
   b- Donner le signe de f sur D.
5) Construire dans le repère la courbe (C).

Partie B :

1) Trouver les réels a, b et c pour que la fonction $G(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$ soit une primitive de de $g(x) = x^2e^x$.
2) Calculer en cm^2 l'aire A de la partie du plan délimité la courbe (C) et les droites d'équations x = -2, x = 0 et y = -2 .

On donne e ≈ 2,72 ; $e^{-1} \approx 0,37$; $e^{-0,5} \approx 0,61$; $e^{0,5} \approx 1,65$; $e^{-2} \approx 0,13$.

PREPA BAC MATHEMATIQUES N°11

EXERCICE 1

Soit les équations différentielles (E) : $y'' + 4y = 3cost$ et (E') : $y'' + 4y = 0$.

1) Déterminer a , un réel tel que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = acost$ soit solution (E).
2) Montrer qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si $(f - g)$ est solution de (E').
3) Donner la solution générale de (E') puis en déduire celle de (E).
4) a- Déterminer la solution particulière h de (E) vérifiant $f(0) = 0 \ \ et \ \ f'(0) = 0$.
   b- Résoudre dans l'intervalle $[0\,; 2\pi]$ l'équation $f(t) = 0$.

EXERCICE 2

Chaque résultat sera donné sous forme d'un nombre décimal arrondi d'ordre 3 par défaut.
On admet que 70% des joueurs du football sont droitier du pied. Par ailleurs, un droitier du pied tire le ballon du côté gauche du gardien de but dans 85% des cas et un gaucher du pied du côté droit du gardien de but dans 60% des cas. On note les évènements suivants :
D « le joueur est droitier » et G « Le joueur tire à gauche du gardien du but ».

1) Calculer la probabilité pour que :
   a- Un joueur soit droitier et qu'il tire à droite du gardien de but.
   b- Un joueur soit gaucher et qu'il tire à droite du gardien de but.
2) Démontrer que la probabilité pour qu'un joueur tire le ballon à droite du gardien de but est 0,285.
3) Un joueur tire à gauche du gardien de but. Quelle est la probabilité qu'il soit droitier du pied ?
4) Le gardien de but plonge soit à droite soit à gauche de façon indépendante d'un tir à l'autre lors d'une séance de 5 penaltys. On admet que la probabilité que le gardien plonge à sa droite est 0,6. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de plongeons à droite effectués par le gardien pendant les 5 tirs.
   a- Déterminer la loi de X.
   b- Calculer la probabilité que le gardien de but plonge exactement deux fois à sa droite.
   b- Calculer l'espérance mathématique de X.

PROBLEME

PARTIE A :

On se propose de résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : (E) : $y' - 2y = 2(e^{2x} - 1)$.

1) Déterminer les réels a et b telles que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = axe^{2x} + b$ soit solution de (E).

2) On pose $= z + g$. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution de l'équation différentielle

(E') : $z' - 2z = 0$.

3) Résoudre l'équation (E') et en déduire les solutions f de (E).

4) Démontrer qu'il existe une solution et une seule de (E) s'annulant en 0.

PARTIE B :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2x - 1)e^{2x} + 1$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal d'unité graphique 2cm.

1) Calculer les limites de f sur $\mathbb{R}$. En déduire l'existence d'une asymptote (Δ) dont on précisera.

2) Etudier la branche infinie en $+\infty$.

3) a- Etudier la position relative de (C) et (Δ) .

b- Déterminer les coordonnées du point A intersection de (C) et (Δ) .

4) Etudier les variations de f puis en déduire le signe de f sur $\mathbb{R}$.

5) Construire la courbe (C).

6) a- Calculer à l'aide d'une intégration par partie, $I = \int_0^{\frac{1}{2}}[1 - f(x)]dx$.

b- Interpréter graphiquement le résultat de I obtenu.

PARTIE C :

1) Calculer J = $\int_{-1}^{0}(2x - 1)e^{2x}\,dx$.

2) A l'aide d'une double intégration par partie, calculer K = $\int_{-1}^{0}(2x - 1)^2 e^{4x}\,dx$.

3) Soit D l'ensemble des points du plan tels que $-1 \leq x \leq 0$ et $0 \leq y \leq f(x)$. Calculer en cm3 le volume du solide de révolution engendré par la rotation de D autour de l'axe des abscisses.

(On pourra exprimer V en fonction de J et K)

PARTIE D :

On considère dans le même repère la courbe (δ) de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) = -\frac{lnt}{2} \\ y(t) = -\frac{1 + lnt}{t} + 1 \end{cases} ; \ t \in \mathbb{R}_+$$

1) Déterminer une équation cartésienne de (δ).

2) Expliquer comment peut-on tracer (δ) à partir de (C).

3) Tracer (δ) en pointillées.

BON COURAGE !

CLASSE : Tle D

PROF : M. SAWADOGO . L **DUREE : 4h**

PREPA BAC MATHEMATIQUES N°12

EXERCICE 1

On considère les équations différentielles suivantes :

(E_1) : $y'' + 4y = 0$ et (E_2) : $y'' + y = 0$.

1) Déterminer la solution de (E_1) dont la courbe représentative dans le repère ortho normal passe par A(0 ; -2) et admet en ce point une tangente horizontale.

2) Déterminer la solution g de l'équation (E_2) vérifiant $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 \; et \; g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$.

3) Soit (C) la courbe définie par le système d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x(t) = -2cos2t \\ y(t) = cost - sint \end{cases} ; t \in \mathbb{R}.$$

a- Déterminer la période commune des fonction x et y ; Comparer la position des points M(t) et M(t + π), puis en déduire un élément de symétrie de (C) .

En déduire une restriction de l'intervalle d'étude.

b- Etudier les variations de x et y sur $[0\,;\pi]$ et dresser leur tableau de variation conjoint.

c- Représenter la courbe (C). (unité 2cm). $\sqrt{2} = 1{,}4$.

EXERCICE 2

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé $(O,\ \vec{u},\ \vec{v})$ d'unité 2cm.

1) Résoudre dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ Le système suivant : $\begin{cases} iz + \overline{z'} = -2\sqrt{3} \\ \bar{z} - iz' = -2 \end{cases}$.

2) Soit A et B les points d'affixes respectives $Z_A = -1 + i\sqrt{3}$ et $Z_B = -i - \sqrt{3}$.

a- Ecrire Z_A , Z_B et $Z_A Z_B$ sous forme trigonométrique.

b- Montrer que z_A^3 est réel et z_B^3 est imaginaire pur.

3) Soit R la rotation de centre 0 et d'angle $\frac{-\pi}{2}$ qui transforme A en C et C en D.

a- Déterminer les affixes des points C et D.

b- Placer les points A , B , C et D.

4) Montrer que O est le milieu de $[AD]$ et $[BC]$.

b- Calculer le module et un argument de $\frac{Z_A}{Z_B}$.

c- En déduire la nature exacte du quadrilatère ABDC.

c- Soit C l'image du point D par la translation t de vecteur $\overrightarrow{AB}$. Calculer l'affixe du point D.

PROBLEME

On considère la fonction *f* définie sur IR par $f(x) = (2x + 1)e^{-x}$

On note (C) la courbe représentative de *f* dans un plan rapporté à un repère orthonormée $(O, \vec{I}, \vec{J})$ (unité graphique 2 cm).

PARTIE A

1) Etudier les variations de *f* sur *IR.*

2) Calculer les limites de *f* en -∞ et +∞ puis dresser son tableau de variations.

3) Construire la courbe (C).

4) Pour tout réel λ positif, on note A(λ) l'aire en cm^2 du domaine plan constitué des points *M(x, y)* tel que : $\frac{-1}{2} \leq x \leq \lambda$ et $0 \leq y \leq f(x)$.

a) On pose $F(x) = (ax + b)\, e^{-x}$, *a* et *b* étant des nombres réels. Déterminer *a* et *b* tel que $F'(x) = f(x)$.

b) En déduire A(λ).

c) Déterminer $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} A(\lambda)$.

PARTIE B

1- a) Comment trouve-t-on graphiquement les solutions de l'équation $f(x) = x$

b) montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α dans l'intervalle I = $\left[1, \frac{5}{4}\right]$

c) montrer que quel que soit $x \in I$, $f(x) \in I$

2 - a) Calculer *f('x)* et étudier les variations de *f'* sur I.

b) Monter que $/f'(x)/ \leq \frac{1}{2}$ quel que soit $x \in I$

c) En déduire que : quel que soit $x \in I$ $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$

3 – a) Soit (U_n) la suite définie par son 1er terme $U_o = 1$ et par la relation de récurrence : $U_{n+1} = f(U_n)$

b) Prouver par récurrence sur *n* que $U_n \in I$ quel que soit *n.*

c) Prouver que : (i) $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$ quel que soit *n*.

(ii) $|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+2}}$. Quel que soit *n*.

d) Quelle est la limite de (U_n) ?

$e^{\frac{-5}{4}} \cdot \frac{2}{7}$; $e^{\frac{-3}{2}} = \frac{2}{9}$ $e = 2{,}7$; $e^{\frac{-1}{2}} = 0{,}6$; ; $e^{\frac{1}{2}} = 1{,}6$

BON COURAGE !

CLASSE : Tle D

PROF : M. SAWADOGO . L DUREE : 4h

PREPA BAC MATHEMATIQUES N°13

EXERCICE 1

1) On considère la suite (V_n) telle que : $27V_{15}$ = $8V_{12}$.

a- Déterminer la nature de la suite (V_n) en précisant sa raison.

On donne : premier terme est V_0.

b- Exprimer V_n puis V_{n+1} en fonction de n et V_0.

c- On pose S_n = $V_0 + V_1 + \cdots + V_n$. Exprimer S_n en fonction de n et V_0.

d- Déterminer le premier terme V_0 pour que S_n converge vers 3.

2) Soit t la suite définie par t_n = $\ln|q^{n+1} - q^n|$; avec q$> 0\ et\ \neq 1; n \geq 0$.

a- Montrer que (t_n) est une suite arithmétique et donner en fonction de q sa raison et son premier terme.

c- En prenant q = $\frac{2}{3}$; calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n}(t_k)$.

EXERCICE 2

Un corps de masse m sans vitesse initiale subit en une chute libre une force de freinage d'intensité F proportionnelle à la vitesse V : (F = - kV où k est un réel positif appelé coefficient de force).

A chaque instant t (exprimé en seconde), V vérifie la relation $V(t) + \frac{k}{m}V(t)$ = g (où g est l'accélération de la pesanteur et t un réel positif.

1) Trouver une fonction constante C solution de l'équation différentielle (E) : $y' + \frac{k}{m}y = g$

(ou g est l'accélération de la pesanteur et t un réel positif).

2) Montrer qu'une fonction f est solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si $f - c$ est solution de l'équation différentielle (E') : $y' + \frac{k}{m}y = 0$

3) a- Résoudre l'équation (E') et (E).

b- Donner l'expression de la vitesse instantanée sachant que la vitesse initiale est nulle.

c- Donner une interprétation de la valeur de V = $\frac{mg}{k}$.

4) a- Donner l'expression de la force de freinage en fonction du temps t.

b- Donner une interprétation de la valeur de $F = -mg$.

5) Le corps atteint le sol au bout de 1mn 20s.

a- Calculer la vitesse moyennée » $\bar{V}$ du corps pendant la chute.

b- En déduire la valeur moyenne de la force $\bar{F}$ de freinage pendant la période de freinage.

PROBLEME

PARTIE A :

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ à variable x par $g(x) = (ax+b)e^{-x} + c$, où a , b et c sont des réels. Le tableau de variation de g est le suivant :

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$2+e^{-2}$	$\searrow$	2

1) Calculer la dérivée de g.

2) En utilisant les données numériques, déterminer les valeurs des réels a , b et c.

3) Pour la suite du problème, on prendra $g(x) = (x-1)e^{-x} + 2$.

a- Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\propto$ dans $]-\infty\,;2]$.

b- Donner le signe de g sur $\mathbb{R}$.

PARTIE B :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x + 1 - xe^{-x}$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unités 2cm.

1) Calculer les limites en $-\infty$ de $f(x)$ et de $\frac{f(x)}{x}$. Interpréter les résultats.

2) Calculer la limite de f en $+\infty$.

3) a- Démontrer que la droite (D) d'équation $y = 2x + 1$ est une asymptote à (C) en $+\infty$.

b- Etudier la position relative de (C) par rapport à (D)

4) a- Etablir $f(\propto)$ $en\ fonction\ de$ $\propto$.

b- Etudier le sens de variations de f puis dresser son tableau de variation.

5) Déterminer les coordonnées du point A de (C) auquel la tangente est parallèle à (D).

6) Tracer la courbe (C) et ses asymptotes.

BON COURAGE !

CLASSE : Tle D

PROF : M. SAWADOGO . L **DUREE : 4h**

PREPA BAC MATHEMATIQUES N°14

EXERCICE 1

$soit\ \ p(z) = z^3 - (1-i)z^2 + z - 1 + i.$

1) Démontrer que l’équation $p(z) = 0$ admet deux racines imaginaires pures.

2) Résoudre l’équation $p(z) = 0$ puis donner les solutions sous forme exponentielle.

3) Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d’unité 2cm.

a- Placer les points A, B et C d’affixes respectives $a = -i$; $b = i$ et $c = 1 - i$.

b- Calculer $\frac{a-b}{a-c}$, puis préciser la nature du triangle ABC.

EXERCICE 2

Pour l’oral d’un examen comportant 10 leçons au programme, un examinateur prépare une question par leçon et inscrit les questions respectivement sur 10 feuilles séparées. Chaque candidat doit tirer deux feuilles simultanément et répondre aux questions correspondantes. Les feuilles ont la même probabilité d’être tirées. Un candidat n’a appris que trois leçons.

1) Quelle est la probabilité qu’il ne connaisse aucune des leçons tirée ?

2) Quelle est la probabilité qu’il connaisse au plus une des leçons tirée ?

3) Quelle est la probabilité qu’il toutes les leçons tirées ?

4) Quelle est la probabilité qu’il connaisse au moins une des leçons tirées ?

5) Pour aider ce candidat, l’examinateur lui permet d’effectuer 6 fois le tirage du couple de leçon. Les feuilles tirées sont remise en place avant le tirage suivant. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de fois que le candidat connaisse au moins l’une des leçons tirées.

a- Déterminer la loi de X.

b- Calculer l’expérience mathématique de X.

c- Calculer la probabilité pour qu’exactement deux fois le candidat connaisse au moins une des questions tirées.

PROBLEME

PARTIE A :

Soit g la fonction numérique dérivable sur $]0\,;\ +\infty[$ et définie par : $g(x) = lnx + x + 1$.

1) Calculer la limite de g en 0 et en $+\infty$.

2) Etudier le sens de variation de g puis dresser son tableau de variation.

3) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\propto$ sur $]0\,;+\infty[$ puis que $0{,}2 < \propto < 0{,}3$.

4) Donner le signe de g sur $]0\,;\ +\infty[$.

5) Etablir la relation de $\ln(\propto)$ en fonction de $\propto$.

PARTIE B :

Soit f la fonction définie sur $]0\,;\ +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{xlnx}{1+x} & si\ x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité 2cm.

1) Calculer les limites en $+\infty$ $de\ f(x)\ \ et\ de\ \frac{f(x)}{x}$. Interpréter les résultats.

2) Démontrer que f est continue en 0.

3) Etudier la dérivabilité de f en 0 puis interpréter graphiquement le résultat.

4) a- Etablir $f(\propto)\ en\ fonction\ de\ \propto$.

b- Etudier le sens de variations de f puis dresser son tableau de variation.

5) Tracer la courbe (C) et ses asymptotes. (On prendra $\propto = 0{,}3$)

PARTIE C :

On désir calculer $K = \int_1^e f(x).dx$.

1) Donner une interprétation à K.

2) Calculer à l'aide d'une intégration par parties l'intégrale suivante :$I = \int_1^e xlnx.dx$.

3) a- Démontrer que pour tout x élément de $[1\,; e]$, $\frac{xlnx}{e+1} \leq f(x) \leq \frac{xlnx}{2}$.

b- En déduire que pour tout x élément de $[1\,; e]$, $\frac{e^2+1}{4(e+1)} \leq \int_1^e f(x).dx \leq \frac{e^2+1}{8}$.

CLASSE : Tle D

PROF : M. SAWADOGO . L **DUREE : 4h**

PREPA BAC MATHEMATIQUES N°15

EXERCICE 1 (6pts)

Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes. Donner les résultats sous forme de fraction irréductible pour les questions 1 et 2.

1) Un porte - monnaie contient quatre pièces de 500 Francs et six pièces de 200 Francs. Un enfant tire successivement et sans remise trois pièces de ce porte-monnaie.

a- Calculer la probabilité de l'événement A « tirer trois de 500 Francs ».

b- Soit Y la variable aléatoire égale au total d'argent tirés. Déterminer la loi de probabilité de Y.

2) Une urne contient trois boules bleues et deux boules rouges toutes indiscernables au touché. On y tire au hasard une boule. Soit l'évènement B : « la boule est bleue » .On réalise six fois le tirage toute en remettant a chaque la boule précédemment tirée et on désigne par X la variable aléatoire égal au nombre de boule bleue obtenue.

a- Calculer la probabilité l'évènement B .

b- Donner la loi de X.

c- Calculer la probabilité d'obtenir exactement deux fois une boule bleue.

3) Dans un magasin d'électroménagère, on s'intéresse au comportement d'un acheteur potentiel d'un téléviseur et d'un magnétoscope. La probabilité pour qu'il achète un téléviseur est de 0,6.

La probabilité pour qu'il achète un magnétoscope quand il a acheté un téléviseur est de 0,4.

La probabilité pour qu'il achète un magnétoscope quand il n'a pas acheté de téléviseur est de 0,2.

a- Quelle est la probabilité qu'il achète un téléviseur et un magnétoscope ?

b- Quelle est la probabilité qu'il achète un magnétoscope ?

c- Le client achète un magnétoscope. Quelle est la probabilité qu'il achète un téléviseur ?

EXERCICE 2 (4pts)

On considère l'équation différentielle (E) : $9y'' + 4y = 2x - 1$

1) Déterminer un polynôme p de degré 2 solution de (E).

2) Résoudre l'équation (E') : $9y'' + 4y = 0$.

3) Démontrer qu'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est solution de (E) si et seulement si la fonction f – p est une solution de (E').

4) Déterminer les solutions de (E).

5) Déterminer la solution de (E) qui vérifie $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$ $et\ g'(0) = 2$.

PROBLEME (10pts)

PARTIE A :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2e^{-x}$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ d'unité 2cm.

1) Calculer les limites de f sur $\mathbb{R}$.
2) Dresser le tableau de variation de f.
3) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point A(-1 ; e).
4) Tracer (T) et et (C).

PARTIE B :

1) Calculer $J = \int_0^1 xe^{-x}\,dx$ en utilisant une intégration par partie.
2) Vérifier que f est telle que $f'(x) + f(x) = 2xe^{-x}$.
3) En déduire que $\int_0^1 f(x)\,dx = 2J - f(1)$.
4) En déduire l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0 \;et\; x = 1$.

PARTIE C :

1) Justifier graphiquement que l'équation $f(x) = f(2)$ admet une seconde solution, notée α, et appartient à I $= [-1; 0]$.
2) Soit g la fonction définie sur I par : $g(x) = \left(-\frac{2}{e}\right)e^{\frac{x}{2}}$. Montrer que α est solution de l'équation $g(x) = x$.
3) Montrer que $\forall\, x \in I$; $g(x) \in I$.
4) Montrer que $\forall\, x \in I$; $|g'(x)| \leq \frac{1}{e}$.
5) Montrer que $\forall\, x \in I$; $|g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{e}|x - \alpha|$.
6) On définie la suite (U_n) par $U_0 = -0{,}5$ et pour tout n de$\mathbb{N}$, $U_{n+1} = g(U_n)$.
   a- Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$; $U_n \in I$.
   b- Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{e}|U_n - \alpha|$.
   c- Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2e^n}$.
   d- Montrer que (U_n) est une suite convergente et préciser sa limite.
   e- Déterminer le plus petit entier n tel que l'inégalité précédente fournisse une valeur approchée de α à 10^{-6} près.

« Demain c'est aujourd'hui »
Bon courage !!!

CLASSE : Tle D

PROF : M. SAWADOGO . L DUREE : 4h

PREPA BAC MATHEMATIQUES N°16

EXERCICE 1

Soit la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} (U_{n+1})^2 = \frac{U_n}{e} \\ U_1 = e \end{cases}$

1) calculer U_2, U_3

2) $U_n > 0$, on pose $V_n = 1 + \ln(U_n)$

a- Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le 1er terme.

b- Donner le sens de variation de (V_n)

c- Exprimer V_n puis U_n en fonction de n. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} Un$.

d- Calculer $Sn = V_1 + V_2 + ... + V_n$.

EXERCICE 2

On pose : A = $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{e^x}\, dx$ B = $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{e^x}\, dx$ C = $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} cos2x\, dx$.

1) Calculer la valeur de A + B.
2) A l'aide de deux intégrations par partie démontrer que C = $\frac{1+e^{-\frac{\pi}{2}}}{5}$.
3) En déduire la valeur de A – B.
4) Calculer la valeur de A et B.

PROBLEME

I) Soit la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$f(x) = 2(2x+1)e^{-\frac{1}{2}x}$;

1. Etudier les variations de f , puis dresser son tableau de variations. Tracer la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
2. Etablir que l'équation f(x) -2=0 admet une solution unique α strictement positive. On admet qu'une valeur approchée de α est 4,67.
3. Calculer a l'aide d'une intégration par parties l'intégrale I = $\int_0^3 f(x)dx$

II) On note y(t) la valeur, en degré Celsius, de la température d'une réaction chimique a l'instant t, t étant exprimé en heures. La valeur initiale a l'instant t= 0 est y(0) = 1

On admet que la fonction qui, a tout réel t associe y(t) est solution de l'équation différentielle

$$(E): y' + \frac{1}{2}y = 4e^{-\frac{1}{2}t}$$

1. Vérifier que la fonction f étudiée dans la partie I) est solution de l'équation (E).
2. On se propose de démontrer que cette fonction est l'unique solution de l'équation (E) définie sur $[0; +\infty[$ qui prend la valeur 2 a l'instant t= 0.

a) On note g une solution quelconque de l'équation différentielle (E) définie sur $[0; +\infty[$ vérifiant g(0) = 2. Démontrer que la fonction g-f est solution sur $[0; +\infty[$ de l'équation différentielle : $(E'): y' + \frac{1}{2}y = 0$

b) Résoudre l'équation (E'). Conclure

3. Au bout de combien de temps la température de cette réaction chimique redescente-elle a sa valeur initiale ? Le résultat sera donné a la minute près.
4. La valeur θ en degre celsius de la temperature moyenne a cette réaction chimique durant les trois premieres heures est la valeur moyenne de la fonction f définie sur $[0; 3]$. Calculer la valeur exacte de θ.

CLASSE : Tle D

PROF : M. SAWADOGO . L **DUREE : 4h**

PREPA BAC MATHEMATIQUES N°17

EXERCICE 1

1) Calculer par une double intégration par parties une primitive de la fonction *f* de *IR* vers *IR* par :
 $f(x) = e^{-x} \cos x$.

2) Pour tout $k \in \mathbb{N}$ *, on pose* $U_k = \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} e^{-x} \cos x.dx$. Calculer U_o et U_k

3) Démontrer que la suite (U_k) $k \in IN$ est une suite géométrique. Préciser son premier terme et sa raison

4) Calculer $S_n = U_o + U_1 + \ldots + U_n$ *en fonction de n.*

5) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ *. Sn est t – elle convergente ?*

EXERCICE 2

Le plan complexe *P* est rapporté à un RON (o, $\vec{e_1}, \vec{e_2}$) tel que $\|\vec{e_1}\| = \|\vec{e_2}\| = 4cm$

On appelle A, B et C les points d'affixes respectives *2i, 1* et $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$. Soit *T* la transformation du plan qui à tout point M(*z*) associe le point M'(*z*') tel que z' = $\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)z$

1) Donner la nature et les éléments caractéristiques de *T.*

2) Soit (Γ) l'ensemble des points M(z) tels que /z-2i/ = 2.

 a- Déterminer et construire (Γ).

 b- Déterminer et construire l'image de (Γ) par la transformation *T*

3) Soit (*D*) l'ensemble des points M(*z*) tels que : /z-1/ = $\left|z - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|$

 a- Déterminer et construire (*D*)

 c- Déterminer et construire l'image de (*D*) par *T*.

PROBLEME

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $\begin{cases} f(x) = -1 + x\ln x & si\ x > 0 \\ f(0) = -1 \end{cases}$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité 2cm.

1) Etudier la continuité de f en 1.

2) Calculer $\lim_{x\to0^+} \frac{f(x)+1}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat.

3) Calculer la limite de f en $+\infty$.

4) Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.

5) a- Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

 b- Vérifier que $1{,}7 \le \alpha \le 1{,}8$.

 c- En déduire le signe de sur $[0\,;\,+\infty[$.

6) Calculer $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter cette limite.

7) Tracer (C).

8) Soit $A(\propto)$ l'aire de la partie du plan délimitée par (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1\ et\ x = \propto$.

 a- Calculer à l'aide d'une intégration par parties $I = \int_1^{\propto} x\ln x\, dx$.

 b- En déduire $(\propto)$.

PREPA BAC MATHEMATIQUES N°18

EXERCICE 1

On considère le polynôme *P* défini par : $P(z) = z^3 - 6z^2 + 12z - 16$.

1) Calculer $P(4)$ et résoudre dans C l'équation : $P(z) = 0$.

2) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(o, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité 1cm. Soit A, B et C les points d'affixes respectives : $a = 4$; $b = 1 + i\sqrt{3}$; $c = 1 - i\sqrt{3}$

a) Placer les points A, B et C sur une figure que l'on complétera tout au long de l'exercice.

b) Montrer que le triangle ABC est équilatéral. (on donne $\sqrt{3} = 1{,}73$)

3) Soit *K* le point d'affixe $k = -\sqrt{3} + i$. On appelle *F* l'image de *K* par la rotation de centre O et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$ et G l'image de *K* par la translation de vecteur $\overrightarrow{OB}$.

a) Quelles sont les affixes respectives de F et de G ?

b) Montrer que les droites (OC) et (OF) sont perpendiculaires.

4) Soit H le quatrième sommet du parallélogramme COFH

a) Montrer que COFH est un carré

b) Calculer l'affixe du point H

c) Le triangle AGH est-il équilatéral ?

EXERCICE 2

Dans une famille donnée, on admet qu'une naissance donne un garçon, une fille ou des jumeaux. Une naissance donne dans 30% des cas un garçon et dans 50% des cas une fille. On admet que le sexe de l'enfant ne dépend pas des naissances précédentes.

1) a) Quelle est la probabilité pour qu'une naissance donne des jumeaux dans la famille ?

b) Calculer la probabilité pour que les trois premières naissances donnent des filles et la quatrième donne un garçon.

2) On suppose qu'il y a *n* naissances dans la famille.

a) Calculer en fonction de *n*, la probabilité P_n d'avoir au moins une naissance donnant des jumeaux.

b) Déterminer le nombre minimal n_o d'enfants pour que P_n soit supérieur ou égal à 0,97.

3) On suppose qu'il y a trois naissances successives dans la famille et l'on désigne par X la variable aléatoire égale au nombre d'enfants possibles issus des trois naissances.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de X.

On donne : $\frac{\ln(0{,}03)}{\ln(0{,}8)} \approx 15{,}95$

PROBLEME (12 pts)

Le plan est muni d'un repère orthonormal (o, $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$). (Unité graphique : 3 cm). On considère la fonction f définie sur IR par : $f(x) = ln\ (x^2 - 2x + 2)$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans (o, $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$).

Partie I

5) Justifier que pour tout x réel, $x^2 - 2x + 2 > 0$

6) Déterminer la fonction dérivée f' de f et étudier le sens de variation de f sur IR

7) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

8) Représenter (C) et la courbe Δ d'équation $y = x$. on montrera que la droite d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie de (C) et on placera les points d'abscisses 0 et 2 ainsi que les tangentes à la courbe en ces points.

Partie II : On s'intéresse à l'intersection de (C) et de Δ. On pose pour tout réel x, $\varphi(x) = f(x) - x$

1) Déterminer la limite de $\varphi\ en -\infty$.

2) Montrer que pour tout réel x strictement positif, $\varphi(x) = x\left(\frac{2lnx}{x} + \frac{ln\left(1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{x} - 1\right)$. En déduire la limite de φ en $+\infty$.

3) Montrer que φ est une bijection de *IR* sur *IR.* En déduire que la droite Δ coupe la courbe(C) en un point et un seul. On désigne par $\propto$ l'abscisse de ce point. Montrer que $0,3 < \propto < 0,4$.

Partie III : on pose : J = $[0,3; 0,4]$

1) Montrer que la fonction $x \mapsto x^2 - 2x + 2$ est décroissante sur J. En déduire que si x appartient à J alors $f(x)$ appartient à J.

2) a) Prouver que ∀ x de J, $|f'(x)| \leq 0,95$. (On pourra montrer que f' est décroissante sur J)

b) En déduire que pour tout x de J, $|f(x) - \propto| \leq 0,95|x - \propto|$.

3) On définit la suite (U_n) par $U_o = 0,3$ et, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = f(U_n)$.

a) Prouver que pour tout n :

* $U_n \in J$ * $|U_{n+1} - \propto| \leq 0,95|U_n - \propto|$ * $|U_n - \propto| \leq 0,1 \times (0,95)^n$

En déduire que la suite (Un) converge vers $\propto$.

b) Déterminer un entier naturel n_o tel que, pour tout $n \geq n_o$, $|U_n - \propto| \leq 10^{-3}$.

Partie IV : On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan comprise entre les droites d'équations $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$, l'axe des abscisses et la courbe C. On se propose de déterminer une valeur approchée de $\mathcal{A}$ en unités d'aire.

1) Montrer que la tangente T à la courbe (C) au point d'abscisse $\frac{1}{4}$ a pour équation $y = \frac{-24}{25}x + \frac{6}{25} + ln\frac{25}{16}$.

2) Soit les points E d'abscisse 0 et F d'abscisse $\frac{1}{2}$ de la courbe $\mathcal{C}$. Montrer que la droite (EF) a pour équation $y = 2\left(ln\frac{5}{8}\right)x + ln2$.

3) On admet que, sur l'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, la courbe $\mathcal{C}$ est au-dessus de T et en dessous de (EF).

a) Montrer que : $\int_o^{\frac{1}{2}}\left(\frac{-24}{25}x + \frac{6}{25} + ln\frac{25}{16}\right)dx \leq \mathcal{A} \leq \int_o^{\frac{1}{2}}\left(2\left(ln\frac{5}{8}\right)x + ln2\right)dx$

b) En déduire que, $ln\frac{5}{4} \leq \mathcal{A} \leq \frac{1}{4}ln\frac{5}{2}$.

c) Donner une valeur approchée de $\mathcal{A}$ à 10^{-3} près.

On donne $ln0,95 \simeq -0,05$; $ln1,36 \simeq 0,3$; $ln1,49 \simeq 0,39$; $ln2 \simeq 0,69$; $ln5 \simeq 1,6$; $ln10 \simeq 2,3$.

CLASSE : Tle D

PROF : M. SAWADOGO . L **DUREE : 4h**

PREPA BAC MATHEMATIQUES N°19

EXERCICE 1

Soit (U_n) la suite définie par :

$U_o = \int_o^1 \frac{1}{e^{-x}+1}\,dx$ et $\forall n \in N, u_n = \int_o^1 \frac{e^{-nx}}{e^{-x}+1}\,dx.$

1. Calculer u_1 et $u_o + u_1$ puis en déduire u_o
2. Etudier les variations de la suite (u_n).
3. Calculer en fonction de n $(n \geq 1)$, $u_{n+1} + u_n$. En déduire u_2 et u_3.

EXERCICE 2

Dans une culture de microbes, le nombre de microbes à l'instant t exprimé en heures, peut être considéré comme une fonction y a valeurs réelles de la variable t. La vitesse de prolifération à l'instant t du nombre de microbes est la dérivée de cette fonction. On considère que $y'(t) = k\,y(t)$, ou k ∈ ℝ. On désigne par N le nombre de microbes à l'instant t= 0

1) Déterminer l'unique solution de l'équation différentielle $y' = ky$ telle que $y(0) = N$

2) Sachant qu'au bout de 2 heures, le nombre de microbes a quadruplé, calculer en fonction de N le nombre de microbes au bout de 3 heures.

3) Quelle est la valeur de N sachant que la culture contient 6400 microbes au bout de 5 heures.

PROBLEME

On considère la fonction f définie sur]0; +∞[par :

$$\begin{cases} f(x = -x + 1 + 2ln|x| & si\ x \in]0,1[\\ f(x) = x - 2 + e^{1-x} & si\ x \in [1,+\infty[\end{cases}$$

A) 1) a- Etudier la dérivabilité de *f* en $x_o = 1$.

b) Quelle conclusion géométrique peut-on en tirer ?

2) Etudier les variations de *f*.

3) On note (C) la courbe représentative de *f* dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, (unité : 2 cm)

a- Montrer que (C) admet une asymptote oblique en +∞ dont on donnera une équation.

Quelle est l'équation de la deuxième asymptote ?

b- Tracer (C) et son asymptote oblique. On placera les points d'abscisses $\frac{1}{2}$ et 2, et on tracera les demi tangentes à (C) au point d'abscisse 1.

4) Soit f_1 la restriction de *f* à l'intervalle] 0, 1[.

a- Montrer que f_1 admet une application réciproque f_1^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition.

b) Construire la courbe (C_1) de f_1^{-1} dans le même repère que (C) (justifier la construction)

B) Soit *h* la fonction définie sur]0 ; +∞ [par $h(x) = -|f(x)|$

1) Sans étudier explicitement *h*, construire en pointillés la courbe représentative (C') de *h* dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. (Justifier).

2) On considère un réel α supérieur à 2. Soit A(α) l'aire délimité par les droites d'équations $x = 2$; $x = \alpha$; $y = x - 2$ et la courbe (C).

Calculer A(α) en fonction de α puis déterminer $\lim_{\alpha \to +\infty} A(\alpha)$

3) Pour la suite, A' représente l'aire de la portion de plan comprise entre les droites d'équations $x = 1$, $x = 2$ et les courbes (C) et (C'). On note V le volume engendré par la rotation de A' autour de l'axe des abscisses.

a) Calculer, en intégrant par parties, $I = \int_1^2 (x-2)e^{1-x}dx$

b) Calculer V en cm^3. On donne : $e \approx 2{,}72$; $e^2 \approx 7{,}39$; $e^{-1} \approx 0{,}36$; $e^{-2} \approx 0{,}135$; $\ln 2 \approx 0{,}69$.

CLASSE : Tle D

PROF : M. SAWADOGO . L **DUREE : 4h**

PREPA BAC MATHEMATIQUES N°20

EXERCICE 1

On considère les suites (U_n) et (V_n) ; définie par :

$U_0 = \frac{1}{2}$; $V_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\begin{cases} U_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{3}U_n - V_n \\ V_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{3}V_n + U_n \end{cases}$ $(n \in \mathbb{N})$

On pose $Z_n = U_n + iV_n$.

1) Calculer $|Z_0|$ puis $|Z_{n+1}|$ en fonction de $|Z_n|$ et en déduire une expression de $|Z_n|$ en fonction de n.

2) a - Exprimer Z_{n+1} en fonction de Z_n.

b - Calculer $\arg(\frac{\sqrt{3}}{3} + i)$.

c – Soit θ_n un argument de Z_n et θ_{n+1} un argument de Z_{n+1} .
Déduire de ce qui précède θ_{n+1} en fonction de θ_n.

d – Calculer $\arg(Z_0)$ et donner une expression de θ_n en fonction de n.

e- Démontrer que $U_n = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^n \left[\frac{1}{2}cos\left(\frac{\pi n}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}sin\left(\frac{\pi n}{3}\right)\right]$ et exprimer V_n en fonction de n.

EXERCICE 2

1) Soit g la fonction définie sur $]1 ; +\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{x(x^2-1)}$.

a- Déterminer les nombres réels a, b et c tels que l'on ait pour tout $x > 1$:

$$g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1}.$$

b- Trouver une primitive G de g sur $]1 ; +\infty[$.

2) Soit f la fonction définie sur $]1 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2x}{(x^2-1)^2}$.

Trouver une primitive F de f sur $]1 ; +\infty[$.

3) Calculer $I = \int_2^3 \frac{2x}{(x^2-1)^2} lnx.dx$.

(On donnera le résultat sous la forme de $qln2 + pln3$ avec p et q des nombres rationnels).

PROBLEME

PARTIE A :

On considère la fonction :

$g(x) = (x-1)^2 - 1 + ln(|x-1|)$.

1) Déterminer le domaine de définition D de g et calculer les limites a ses bornes.

2) Etudier les variations de g.

3) a- Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur D deux solutions $\propto et\, \beta \quad tels\ que\ \alpha < 1 < \beta$.

b- Calculer $g(0) et\ g(2)$ puis donner le signe de g sur D.

PARTIE B :

On considère la fonction $f(x) = x - \frac{ln(|x-1|)}{x-1}$.

Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, I, J) d'unité 2cm.

1) Déterminer le domaine de définition D de g puis
calculer les limites a ses bornes.

2) Montrer que (C) admet deux asymptotes dont l'une est la droite (D) d'équation $y = x$.

3) Etudier les variations de f.

4) Etudier la position relative de (C) par apport à (D).

5) a- Déterminer les coordonnées du point B intersection des deux asymptotes

b- Démontrer que le point B est un centre de symétrie à la courbe (C).

c- Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point A(2 ; 2).

6) Construire la courbe (C) .

7) Calculer l'aire du domaine du plan délimité par la courbe (C) , la droite (D) et les droites d'équations
$x = 2\ et\ x = 3$.

PREPA BAC MATHEMATIQUES N°21

EXERCICE 1

Le plan complexe est rapporté a un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité 2cm.

1) On rappelle que, pour tous nombre complexes a et b, $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^3 = 8$.

2) On désigne par A , B et C les points d'affixes respectives a, b et c définie par a = 2, $b = -1 + i\sqrt{3}$ et $c = -1 - i\sqrt{3}$. On appelle r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et r' la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

On pose B' = r'(B) et C' = r(C) et on note b' et c' les affixes les affixes respectives de B' et C'.

a- Placer les points A, B et C dans le repère.
Dans la suite de l'exercice, on complètera cette figure.

b- Montrer que b' = 2 + $\sqrt{3}$ +3i.

c- Montrer que b' et c' sont conjugués.

3) On appelle M, N, P et Q les milieux respectifs des segments $[CB]$, $[BB']$, $[B'C']$ et $[CC']$.
On note m, n , p et q leurs affixes.

a- Montrer que $n = \frac{1+\sqrt{3}}{2}(1 + i\sqrt{3})$. En déduire que les points O, N et C sont alignés.

b- Montrer que $n + 1 = i(q + 1)$. Que peut-on en déduire pour le triangle MNQ ?

c- Montrer que le quadrilatère MNIQ est un carré.

EXERCICE 2

Dans une population, la probabilité de naissance d'un garçon est de 0,52. On sait d'autre part Que 2% des filles et 1% des garçons présentent a la naissance une luxation congénitale de la hanche. On considère les événements suivants :

G :$\ll naissance\ d'un\ garcon \gg$

F :$\ll naissance\ d'une\ fille \gg$

L :$\ll Le\ nouveau - né\ souffre\ d'une\ luxation\ de\ la\ hanche \gg$

1) Déterminer, a partir des données de l'énoncé, la probabilité de l'événement:$\ll$
$Le\ nouveau - né\ souffre\ d'uneluxation\ de\ la\ hanche\ sachant\ qu'ilest\ un\ garcon \gg$
et celle de l'événement :
$\ll Le\ nouveau - né\ souffre\ d'uneluxation\ de\ la\ hanche\ sachant\ qu'ilest\ une\ fille \gg$

2) Calculer les probabilités des événements:$\ll G\ et\ L \gg$ et :$\ll F\ et\ L \gg$.
En déduire la probabilité de L.

3) Quelle est la probabilité qu'un nouveau-né présentant une luxation soit une fille ?

4) Dans une maternité il nait en moyenne 20 enfants par semaine.

a- Quelle est la probabilitéP_1 qu'aucun de ces nouveau-nés ne présente de luxation de la hanche ?

b- Quelle est la probabilité P_2 qu'au moins un de ces nouveau-nés présente une telle luxation ?

Pour tout l'exercice, on donnera les résultats sous forme décimale avec 4 chiffres après la virgule. NB : $(0{,}9852)^{20}$= 0,7420.

PROBLEME

On considère la fonction f définie sur[0 ; +∞[par $\begin{cases} f(x) = x^2 lnx - \frac{x^2-1}{2} & si\ x > 0 \\ f(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$

On désigne (C) la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormée (O,I,J) d'unité 2 cm.

Partie A

1) Etudier la continuité de f à droite de 0.
2) Déterminer la limite de $\frac{f(x)-\frac{1}{2}}{x}$ lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures. Interpréter géométriquement les résultats obtenus.
3) Etudier le sens de variation de f. préciser la nature de la branche infinie.
4) Construire (C) .

Partie B

Soit λ un réel strictement positif.

1) A l'aide d'une intégration par partie calculer en fonction de λ l'intégrale $\int_{\lambda}^{1} x^2 lnx\, dx$
2) En déduire la valeur en fonction de λ de I(λ) tel que I(λ) = $\int_{\lambda}^{1} f(x)dx$.
3) Calculer la limite de I(λ) quand λ tend vers 0 . En déduire l'aire en Cm^2 de la portion de plan limitée par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 0 et x = 1

Partie C

1) On pose, pour tout x de]0 ; 1[; g(x) = f(x) – x .Dresser le tableau de variation de g. En déduire que l'équation f(x) = x admet une solution unique α dans]0 ; 1[.
2) a- Etudier le sens de variation de f' ,fonction dérivée de f sur]0 ; 1] et dresser son tableau de variation.

   b- Démontrer que pour tout x de [0 ; 1] on a $|f'(x)| \leq \frac{2}{e}$.
3) On a la suite (U_n) définie $\forall\ n \in \mathbb{N}$, par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

   a - Montrer que si x ϵ [0 ; 1] alors f(x) ϵ [0 ; 1].

   b – A l'aide d'un raisonnement par récurrence démontrer que $\forall\ n \in \mathbb{N}$, U_n ϵ [0 ;1] .

   c – α étant le nombre réel défini à la question c-1,
   démontrer que pour entier naturel n ; on a : $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{e}|U_n - \alpha|$.

   d – Démontrer par récurrence que $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{e}\right)^n |1 - \alpha|$.

   e – En déduire que la suite (Un) converge vers α.

PREPA BAC MATHEMATIQUES N°22

EXERCICE 1

Le plan complexe est rapporté a un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère l'application f qui a tout point M(z) associe le point M'(z') tel que $z' = z^2 - 4z$.

1) Soit A et B deux points du plan. Démontrer que si A et B ont la même image par f alors ils sont soient confondus soient l'un est l'image de l'autre par une symétrie centrale que l'on déterminera.

2) Soit I d'affixe -3.

a- Démontrer que OMIM' est un parallélogramme si et seulement si $z^2 - 3z + 3 = 0$.

b- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 3z + 3 = 0$.

3) a- Exprimer (z'+4) en fonction de (z-2). Enduire une relation entre $|z' + 4|$ et $|z - 2|$ Puis entre arg (z'+4) et arg (z-2).

b- On donne $Z_G = 2$ et $Z_K = -4$.

Démontrer que tous M du cercle de centre G et de rayon 2 ont leurs images M' qui sont sur un cercle que l'on précisera.

EXERCICE 2

L'espace est rapporté à un repère orthonomal direct $(0; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

On donne les points A(-1 ; 0 ; 2) ; B(0 ; 1 ; 3) ; C(1 ; 3 ; 0) et D(-1 ; -1 ; 1).

1) Calculer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$. Interpréter géométriquement les résultats.

2) Calculer les distances AB et AC .

3) Calculer l'aire du triangle ABC .

4) Calculer la distance du point D à la droite (BC).

5) Calculer la distance du point D au plan (ABC). Les points A, B, C et D sont – il coplanaires ?

6) a- Calculer le volume du tétraèdre DABC de sommet D.

b- Calculer le volume du parallélépipède dont la base est formée par les segments $[AB]$ et $[AC]$.

7) Déterminer les coordonnées du point E tel que ABDE soit un parallélogramme.

8) Calculer l'aire du parallélogramme ABDE.

PROBLEME

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} -x-1+e^{x} ; si\ x \leq 0 \\ x^2 ln\left(\frac{x+1}{x}\right) ; si\ x > 0 \end{cases}$$

On appelle (C_f) la courbe représentative de f dans le plan p rapporté au repère orthonormal $(o\,;i\,;j)$, unité graphique : 2cm

1. Calculer f(0). Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.

2. On considère la fonction f_1 :$]-\infty;0]\to\mathbb{R}$ définie par $f_1(x) = -x-1+e^{x}$

Soit C_1 sa courbe représentative dans le plan p.

a) Etudier les variations de f_1 puis dresser son tableau de variation.

b) Calculer $\lim_{x\to-\infty} f_1(x)$ .Montrer que la droite (D): $y = -x-1$ est une asymptote à la courbe $(c_1)\ en\ -\infty$.

Etudier la position relative $(C_1)\ et\ de\ (D)$.

3. On considère la fonction f_2 : $]0\,;+\infty[\ \to\mathbb{R}$ définie par : $f_2(x) = x^2\ ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$.

a) Démontrer que f_2 est dérivable sur $]0\,;+\infty[\ et\ que\ \forall\ x>0,$

$$f'_2(x) = x\varphi(x)\ où\ \varphi(x) = -\frac{1}{x+1}+2ln\left(\frac{x+1}{x}\right).$$

b) Démontrer que φ est dérivable et calculer $\varphi'^{(x)}$.En déduire les variations de φ.

Calculer $\lim_{x\to0^+}\varphi(x)\ \ et\ \lim_{x\to+\infty}\varphi(x)$, dresser le tableau de variation de φ et en déduire son signe puis celui de $f'_2(x)$.

d) Quel est le sens de variation de f_2 . Calculer $\lim_{x\to+\infty} f_2(x)$.

4. On considère la fonction g :$]0;+\infty[\ \to\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = f_2(x)-x+\frac{1}{2}$.

a. Vérifier que $\forall x\in\,]0;+\infty[$, $g(x) = x^2\int_o^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{t+1}-1+t\right)dt.$

b. On pose $\forall x\in\,]0;+\infty[$, $I(x) = \int_o^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{t+1}-1+t\right)dt.$

Montrer que $\forall\ t>0;\ \ 0\leq\frac{1}{t+1}-1+t\leq t^2$

c. En déduire que $\forall\ x>0\,,0\ \leq I(x)\leq\frac{1}{3}x^3$.

d. Démontrer que $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$, en déduire que la courbe représentative (c_2) de la fonction f_2 dans p admet pour asymptote une droite (Δ) dont on donnera une équation. Etudier la position relative de $(c_2)\ et\ de\ (\Delta)$.

5. Dresser le tableau de variation de f et tracer la courbe (c_f). Soit λ un nombre réel tel que 0< $\lambda\leq1$.

On pose : A$(\lambda) = \int_\lambda^1 f(x)dx$.

6. En utilisant une intégration par parties , montrer que :

A$(\lambda) = \left[\frac{x^3}{3}ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\right] + \frac{1}{3}\int_\lambda^1\frac{x^2}{x+1}\,dx.$

Calculer $\lim_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)$.

En déduire A(D) l'aire de D la portion du plan p délimité p ar l'axe des abscisses la courbe (Cf) les droites d'équations $x=0\ et\ x=1$.

« J'ai consenti beaucoup d'efforts pour l'obtention de mon BAC, Mon sort est laissé à la volonté de Dieu »

BONNE CHANCE AU BACCALAUREAT SESSION 2020