Collection NAMO

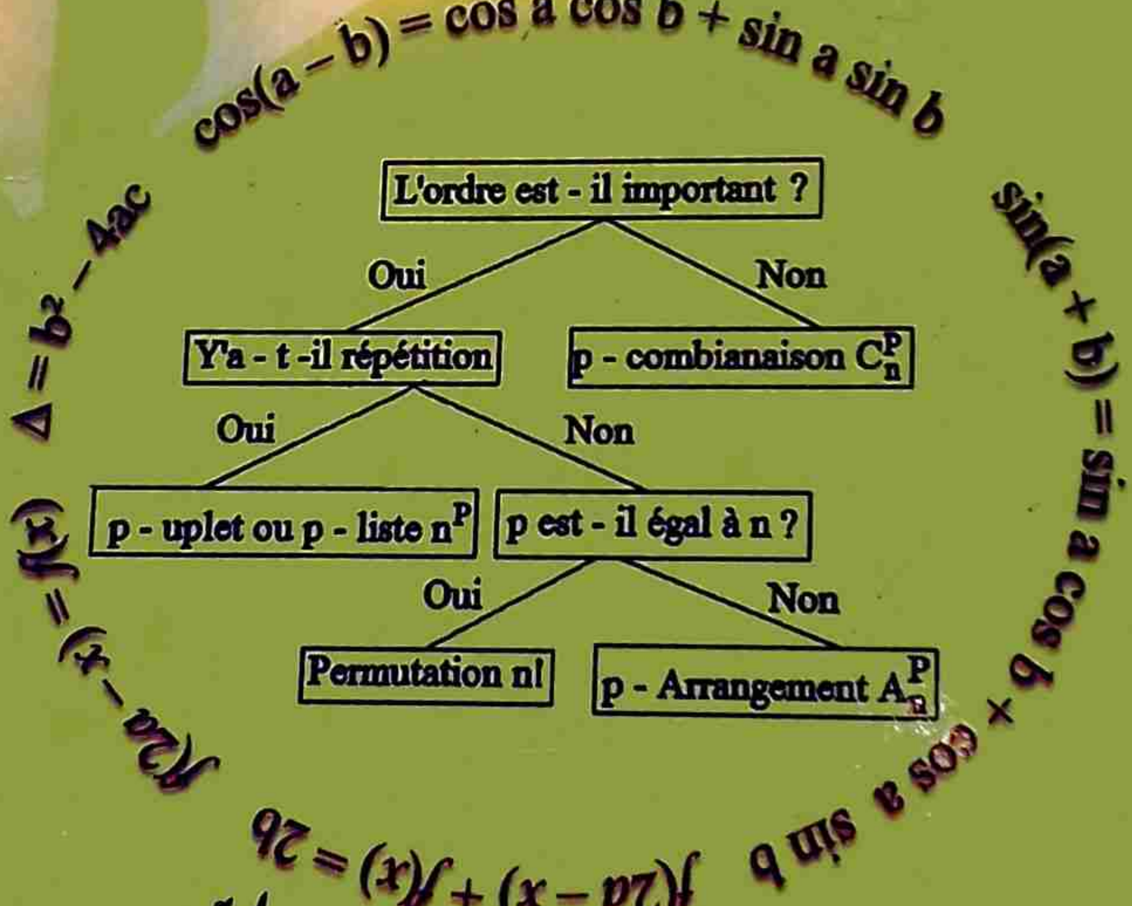
REPUBLIQUE DU NIGER

Fraternité - Travail - Progrès

Mathématiques

1ère A, C et D

1ère Edition Septembre 2017



M. Yazi Alidou Nasser

&

M. Himadou Moussa

Dans la même collection :

- Pour la classe de 6ème : livrets d'exercices de Maths ; Physique - Chimie ; Français et Anglais
- Pour la classe de 5ème : livrets d'exercices de Maths ; Physique - Chimie ; Français et Anglais
- Pour la classe de 4ème : livrets d'exercices de Maths ; Physique - Chimie ; Français et Anglais
- Pour la classe de 3ème : livrets d'exercices de Maths ; Physique - Chimie ; SVT ; Français et Anglais
- Pour la classe de 3ème : livret résumé du cours Maths et Physique - Chimie
- Pour la classe de 2nde A : livrets d'exercices de Mathématiques
- Pour la classe de 2nde C : livrets d'exercices de Maths et Physique - Chimie
- Pour la classe de 1ère A : livrets d'exercices de Mathématiques
- Pour la classe de 1ère C/D: livrets d'exercices de Maths et Physique - Chimie
- Pour la classe de Tle A : livrets d'exercices de Mathématiques et Anglais
- Pour la classe de Tle C/D: livrets d'exercices de Maths ; Physique - Chimie ; SVT et Anglais
- Pour la classe de Tle C/D: livrets résumés du cours Maths et Physique - Chimie

N.B: "Pour être sûr de soi aux examens et concours en Mathématiques traiter le maximum des exercices"

N° d'adhésion 21266 BNDA Niamey - niger

ISBN

9782355100154

SOMMAIRE

EQUATIONS – INEQUATIONS - POLYNOMES

Exercice 1

Résoudre dans IR les équations suivantes :

a) $x^2 - 14x + 33 = 0$; b) $x^2 + 16x + 63 = 0$; c) $x^2 - 13x - 48 = 0$;

d) $5x^2 - 31x + 30 = 0$; e) $7x^2 - 27x - 40 = 0$; f) $6x^2 + 71x + 175 = 0$;

g) $21x^2 + 43x - 90 = 0$; h) $35x^2 - 137x - 360 = 0$; i) $x^2 - x + 1 = 0$;

j) $4x^2 - x - 3 = 0$; k) $x^2 - x - 2 = 0$; l) $15x^2 - x - 6 = 0$;

m) $12x^2 + 4x + 3 = 0$; n) $2x^2 - 11x + 5 = 0$; o) $x^2 + x + \frac{1}{4} = 0$;

p) $x^2 - 6x + 5 = 0$; q) $x^2 - 5x + 6 = 0$; r) $x^2 - 13x + 42 = 0$;

s) $x^2 + 16x + 63 = 0$; t) $x^2 + 4x - 77 = 0$; u) $x^2 - 5x - 150 = 0$;

v) $(1 - \sqrt{2})x^2 - 2(1 + \sqrt{2})x + 1 + 3\sqrt{2} = 0$;

w) $(2 + \sqrt{3})x^2 - (2\sqrt{3} + 1)x - (\sqrt{3} + 1) = 0$;

x) $(2x^2 - 5x + 1)^2 - (x^2 - 5x + 6)^2 = 0$;

y) $(2x^2 - x - 1)^2 - (x^2 - 7x + 6)^2 = 0$;

z) $(2x^2 + 5x)(x^2 - 8x + 15)(7x^2 - 27x - 4) = 0$.

Exercice 2

Résoudre dans IR les équations suivantes :

a) $x^4 - 34x^2 + 225 = 0$; b) $x^4 - 7x^2 - 144 = 0$; c) $4x^4 + 9x^2 + 2 = 0$;

d) $9x^4 + 8x^2 - 1 = 0$; e) $4x^4 - 29x^2 + 25 = 0$; f) $x^4 - x^2 - 6 = 0$;

g) $5x^4 - 44x^2 - 9 = 0$; h) $2x^4 + 7x^2 + 3 = 0$; i) $5x^4 - 4x^2 - 7 = 0$;

j) $3x^4 + 5x^2 + 9 = 0$; k) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$; l) $x^4 + 5x^2 + 6 = 0$;

m) $x^4 + x^2 + 1 = 0$; n) $x^4 - 2\sqrt{3}x^2 + 2 = 0$; o) $x^4 + 16x^2 + 23 = 0$;

p) $x^4 + x^2 - 1 = 0$; q) $x^4 - 11x^2 + 28 = 0$; r) $-4x^2 - x - 6 = 0$;

s) $\frac{1}{2}x^4 + \frac{11}{3}x^2 + \frac{7}{6} = 0$; t) $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$; u) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

Exercice 3

Résoudre dans IR les inéquations suivantes :

a) $x^2 - 4x - 21 > 0$; b) $3x^2 - 17x + 20 \leq 0$; c) $5x^2 - 16x + 12 \geq 0$;

d) $3x^2 + 2x - 21 < 0$; e) $4x^2 + 17x + 18 \geq 0$; f) $4x^2 - 11x + 7 > 0$;

g) $7x^2 + 23x + 16 \leq 0$; h) $5x^2 + 26x - 31 < 0$; i) $9x^2 - 22x - 31 \leq 0$;

j) $-x^2 + 9x + 22 \geq 0$; k) $3x^2 + 5x + 4 > 0$; l) $-3x^2 + 3x - 9 < 0$;

m) $9x^2 + 6x + 1 < 0$; n) $8x - 18\sqrt{x} - 11 \geq 0$; o) $x^2 + x - 1 > 0$;

p) $2x^2 + 3x - 3 \leq 17$ q) $2x^2 + 9x - 5 \leq 0$; r) $x^2 + x - 1 \geq 0$.

<u>Exercice 4</u>

Déterminer deux nombres connaissant leur somme S et leur produit P :

1) $S = 1$ et $P = -6$; 2) $S = -33$ et $P = 266$; 3) $S = 1$ et $P = -2$;

4) $S = 2\sqrt{3}$ et $P = 2$; 5) $S = -7$ et $P = -8$; 6) $S = -5$ et $P = 6$;

7) $S = 3 - 2\sqrt{2}$ et $P = 4 - 3\sqrt{2}$; 8) $S = 4$ et $P = -15$; 9) $S = -6$ et $P = 9$.

<u>Exercice 5</u>

Résoudre dans IR les systèmes :

1) $\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = -3 \\ xy = -4 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x + y = -4 \\ xy = 2 \end{cases}$;

4) $\begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ xy = 12 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x + 2y = 8 \\ xy = 6 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ xy = 16 \end{cases}$

7) $\begin{cases} x + y = 10 \\ x^2 + y^2 = 58 \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x + y = 13 \\ x^2 + y^2 = 89 \end{cases}$; 9) $\begin{cases} x + y = 7 \\ x^3 + y^3 = 133 \end{cases}$

<u>Exercice 6</u>

On considère la fonction f définie sur IR par $f(x) = 3x^3 - 4x^2 - 25x + 42$

1) Développer réduire et ordonner $(x + 3)(ax^2 + bx + c)$

2) Déterminer trois réels a, b et c tel que $f(x) = (x + 3)(ax^2 + bx + c)$

3) Résoudre $f(x) = 0$.

<u>Exercice 7</u>

On considère la fonction g définie sur IR par $g(x) = x^3 + 5x^2 - 12x + 6$

1) Montrer que 1 est solution de $g(x) = 0$.

2) Déterminer les réels a, b et c tel que $g(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$ pour tout réel x.

3) En déduire le signe de $g(x)$.

Exercice 8

On considère le polynôme $P(x) = -3x^3 + 11x^2 + 24x - 20$

1) Déterminer les réels a, b et c tel que $P(x) = (x+2)(ax^2 + bx + c)$

2) Factoriser $P(x)$ sous forme de facteur de degré 1.

3) En déduire la résolution de l'équation $P(x) = 0$.

Exercice 9

On considère le polynôme $P(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$.

1) Vérifier que $P(x) = (x+3)(x^2 + x - 2)$.

2) En déduire la résolution de l'équation $P(x) = 0$.

Exercice 10

Discuter suivant les valeurs de m le nombre des racines des équations suivantes :

a) $x^2 - 4x + m = 0$; b) $x^2 - 2mx + 9 = 0$;

c) $x^2 - 2mx + 3m = 0$; d) $x^2 - (m+2)x + 2m = 0$;

e) $x^2 - (m-1)x - m(2m-1) = 0$; f) $(m+1)x^2 - mx + m + 2 = 0$;

g) $(m-1)x^2 - 2mx + m + 1 = 0$; h) $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + m - 3 = 0$;

i) $x^2 - 2(m+2)x + 2m^2 - 17 = 0$;

j) $(m-2)x^2 + 2(2m-3)x + 5m - 6 = 0$;

k) $(m+1)x^2 - (5m+6)x + 3(2m+3) = 0$;

l) $(m-3)x^2 + (2m-1)x + 2(2m-1) = 0$.

Exercice 11

Etudier suivant les valeurs de m l'existence et le signe des racines des équations suivantes :

a) $x^2 - (3m-2)x + 4 = 0$; b) $x^2 - 2mx + (m-3)^2 = 0$;

c) $x^2 - mx + 4(m+5) = 0$; d) $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 4 = 0$;

e) $mx^2 - 2(m-1)x + 3(m-2) = 0$; f) $mx^2 - 2(m+1)x + m - 5 = 0$;

g) $mx^2 - (m-2)x + m - 3 = 0$;

h) $(m+1)x^2 - (m+2)x + m - 3 = 0$;

i) $(2m-3)x^2 - (m+2)x + 2m - 3 = 0$;

j) $(m-3)x^2 - 2(m-3)x + 2m + 1 = 0$.

Exercice 12

Déterminer les valeurs de m pour que les équations suivantes aient deux racines de signes contraires.

a) $(m-2)x^2 - 2mx^2 + m + 1 = 0$; b) $mx^2 - 2(m+2)x^2 + m + 3 = 0$;

c) $(2m+1)x^2 - 2x^2 + m + 1 = 0$; d) $mx^2 - 2(m-1)x^2 + m + 5 = 0$.

Exercice 13

Déterminer les valeurs de m pour que les équations suivantes aient deux racines positives.

a) $x^2 - 2(m-1)x - 3m + 7 = 0$; b) $(m-3)x^2 + (m+3)x - m - 1 = 0$

c) $mx^2 - (6m-8)x + 4m - 3 = 0$; d) $x^2 - (4m+2)x + 6m^2 - 5m + 1 = 0$

e) $(m+1)x^2 - (m+3)x + 3 - m = 0$;

f) $(m-1)x^2 - 2(m+1)x + 2m + 1 = 0$.

Exercice 14

Déterminer les valeurs de m pour que les équations suivantes aient deux racines négatives.

a) $mx^2 - 2(m-1)x + 3m + 2 = 0$; b) $mx^2 - 2(m+2)x + m + 3 = 0$;

c) $(m+7)x^2 - (m-9)x - 7m + 15 = 0$;

d) $x^2 + (m+2)x + 3(m+2) = 0$

Exercice 15

Résoudre dans IR suivant les valeurs de m, les équations suivantes :

1) $(m+2)x^2 + 2mx + m - 3 = 0$; 2) $(1-m)x^2 - 2mx - m - 2 = 0$;

3) $(m-3)x^2 + (2m-1)x + 4m - 2 = 0$; 4) $(2m-5)x^2 + mx + 7 = 0$

5) $(m^2-4)x^2 - 2(m+2)x + m - 1 = 0$; 6) $x^2 - 2mx + m + 3 = 0$

7) $(3m-5)x^2 - (m+2)x + m + 2 = 0$ 8) $x^2 - (m+1)x + m = 0$

Exercice 16

On considère l'équation : $(m-1)x^2 - 4x + 4m - 1 = 0$.

1) Pour quelles valeurs de m l'équation est – elle du second degré ?

2) On suppose $m \neq 1$.

a) Pour quelles valeurs de m l'équation admet – elle une solution double ?

b) Pour quelles valeurs de m l'équation a – t – elle deux solutions distinctes ?

Exercice 17

On considère l'équation $(m-2)x^2 + 5x + 7 - m = 0$ avec $m \neq 2$.

1) Démontrer que, quel que soit la valeur de m, -1 est racine de cette équation.

2) Calculer l'autre racine sans calculer le discriminant.

3) Déterminer m pour que l'autre racine soit égale à 1.

Exercice 18

Soit l'équation $x^2 - (2m-3)x + m^2 - 3m + 2 = 0$

1) Pour quelles valeurs de m cette équation admet des racines de signes contraires ?

2) Pour quelles valeurs de m cette équation admet des racines de signes positifs ?

3) Pour quelles valeurs de m cette équation admet des racines de signes négatifs ?

Exercice 19

Soit l'équation paramétrique (E_m) : $(m-2)x^2 + (2m+2)x + 10m - 14 = 0$

1) Discuter suivant les valeurs de m l'existence et le signe des racines de (E_m).

2) Trouver entre les racines x_1 et x_2 une relation indépendante de m.

3) Pour quelles valeurs de m l'équation admet deux racines de signes contraires ?

4) Pour quelles valeurs de m l'équation admet deux racines de signes positifs ?

Exercice 20

On donne l'équation paramétrique suivante : $mx^2 - 2(m+2)x + 3m + 4 = 0$

1) Discuter l'existence et le signe des racines lorsque m varie.

2) Etudier en fonction de m les variations de la somme S et celles de P des racines.

3) Ecrire la relation entre P et S.

Exercice 21

On considère la fonction h définie sur IR par $h(x) = x^2 - mx + 3$ où m est un nombre réel.

1) Déterminer les valeurs de m pour lesquelles h admet deux racines distinctes.

2) Déterminer les valeurs de m pour lesquelles h admet une racine double.

3) Déterminer les valeurs de m pour lesquelles h n'admet pas de racine.

4) Déterminer les valeurs de m pour lesquelles h admet deux racines positives.

Exercice 22

Soit l'équation (E) : $(m-2)x^2-2mx+2m-3=0$ où x est l'inconnue et m un paramètre réel.

1) Etudier l'équation pour m = −1.

2) Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre m l'équation (E) admet :

a) une seule solution ? b) deux solutions ? c) aucune solution ?

3) Lorsque les solutions de (E) existent, calculer leur somme et leur produit en fonction de m.

4) Peut – on déterminer m pour que l'équation (E) ait deux solutions x' et x'' vérifiant la relation $x'x''=1$?

Exercice 23

Déterminer m de façon que les inégalités suivantes soient vérifiées quel que soit x :

a) $(m+1)x^2-2(m-1)x+3m+6>0$;

b) $(2m-1)x^2-2x+4m-3<0$;

c) $(m-2)x^2+2(2m-3)x+5m-6<0$;

Exercice 24

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes d'équations suivants :

a) $\begin{cases} 2x+y-3=0 \\ -4x+y+9=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-2y=-1 \\ -x+3y=3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x-7y=13 \\ x-y=4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -2x+5y=21 \\ 3x-7y=-29 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x+y=7 \\ 2x-3y=-11 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 5x+4y=22 \\ 5x+y=13 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 4x+6y=26 \\ x-6y=-16 \end{cases}$ h) $\begin{cases} 4x+3y=-7 \\ x+4y=-5 \end{cases}$ i) $\begin{cases} 4x+6y=-16 \\ 4x+y=-6 \end{cases}$

j) $\begin{cases} x-3y=2 \\ -3x+9y=4 \end{cases}$ k) $\begin{cases} x-y=2 \\ -3x+3y=-6 \end{cases}$ l) $\begin{cases} 3x^2-y^2-3=0 \\ x^2+2y^2-22=0 \end{cases}$

m) $\begin{cases} \frac{2}{x-3}+\frac{1}{y-2}=5 \\ \frac{1}{x-3}-\frac{1}{y-2}=1 \end{cases}$ n) $\begin{cases} \frac{2}{3}x-\frac{3}{2}y=6 \\ \frac{1}{9}x+\frac{1}{4}y=-1 \end{cases}$ o) $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=5 \\ \frac{5}{x}-\frac{2}{y}=4 \end{cases}$

Exercice 25

Résoudre dans IR^3 les systèmes d'équations suivants :

a) $\begin{cases} x - y + 3z = -1 \\ x + y - z = 1 \\ 7x + y + 5z = 1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 3x - y + z = 5 \\ x + y - z = 2 \\ -x + 2y + z = 3 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 2x + y + 3z = 7 \\ x + 2y + 3z = 13 \\ 2x + 2y + 4z = 9 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ 3x + 3y - z = 2 \\ 3x + 4y = 2 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x - y - z = 2 \\ 4x - y - z = 3 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 3x - y + z = 5 \\ x + y - z = -2 \\ -x + 2y + z = 3 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 3x - y + 2z = 13 \\ x + 3y - 5z = -16 \\ 4x + 2y - z = 3 \end{cases}$ h) $\begin{cases} 2x - 5y + 3z = 2 \\ 3x - 5y + 2z = 1 \\ -2x + 3y - 5z = 0 \end{cases}$ i) $\begin{cases} 4x + 5y - 7z = -1 \\ 2x + y - 3z = 9 \\ x - 2y + 3z = -4 \end{cases}$

Exercice 26

Résoudre dans IR^4 les systèmes d'équations suivants :

a) $\begin{cases} x + y - 3z - 4t = -1 \\ 2x + 2y + 2z - 3t = 2 \\ 3x + 6y - 2z + t = 8 \\ 2x + y + 5z + t = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y + z + t = 3 \\ 5x + 2y - z - 3t = 5 \\ -3x - 4y + 3z + 2t = 1 \\ 6x + y - 2t = 8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y - z + t = 1 \\ x + 3y + z - t = 2 \\ -x + y + 7z + 2t = 3 \\ 2x + y - 8z + t = 4 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y + z + t = 2 \\ x - 2y - z - t = 3 \\ 3x + 5y + 2z + 2t = 1 \\ 4x - z - t = 5 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + y + z - t = 1 \\ x - y - z + t = 2 \\ x - y - z - t = 3 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2x + 3y + 2z + t = 9 \\ 6x + 8y + 5z + 6t = 31 \\ 3x + 6y + 4z + 5t = 23 \\ 2x + 10y + 3z + 2t = 19 \end{cases}$

Exercice 27

Résoudre dans IR les équations suivantes :

a) $x + \sqrt{2x+1} = 1$; b) $2x + \sqrt{x+1} = 3$ c) $\sqrt{x+5} = x + 3$;

d) $x + 1 = \sqrt{2x+5}$; e) $-\sqrt{2x+7} = 4$; f) $-x + 4 = \sqrt{3x+1}$;

g) $x = \sqrt{2x-1} + 3$; h) $\sqrt{x+3} - x = 2$; i) $\sqrt{x+2} = 3x - 4$;

j) $\sqrt{x^2+1} = x + 2$; k) $\sqrt{x^2+3} = -x + 3$; l) $\sqrt{2x-2} = -x + 4$;

m) $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = x + 4$; n) $\sqrt{(3x-4)(3x+4)} = 2x + 3$;

o) $x - 1 = \sqrt{(x^2 + 3x + 2)^2}$; p) $\sqrt{x^2 - 3x + 1} + 2x = 3$;

q) $\sqrt{-x^2+x+1}+5=x$; r) $\sqrt{2x^2-x-5}=\sqrt{6x^2+11x+4}$.

Exercice 28

Résoudre dans IR :

a) $\sqrt{x+1}<x-5$; b) $x-\sqrt{2x^2+1}\geq 1$; c) $2x-3\leq\sqrt{-x+1}$;

d) $\sqrt{2x-1}>x$; e) $2x-\sqrt{x}\leq -2$; f) $\sqrt{x+2}<\sqrt{3x-5}$;

g) $\sqrt{x+1}\geq -3$; h) $\sqrt{x-3}<4$; i) $\sqrt{x+1}>3x$;

j) $\sqrt{x^2+x+1}+1<2x$; k) $\sqrt{(x+2)(x+3)}\geq x+4$;

l) $\sqrt{(x^2+3x+2)^2}>x-1$; m) $\sqrt{(-2x^2+x-1)^2}\leq 2x+3$;

n) $\sqrt{(x-2)(3x+4)}>2(3x+4)$; o) $\sqrt{x^2-3x+2}\geq\sqrt{x^2-4x+3}$.

Exercice 29

Soit $h(x)=x^4-x^3-4x^2+3x+3$.

1) Montrer que $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$ sont racines de $h(x)$.

2) Ecrire $h(x)$ sous la forme de $(x^2-3)(ax^2+bx+c)$.

3) Résoudre dans IR l'équation $h(x)=0$.

Exercice 30

Un lycée fait une 1[ère] commande de 10 livres de mathématiques et de 15 livres de français pour un coût de 168000F. Il effectue une deuxième commande de 15 livres de mathématiques et 10 livres de français pour un coût de 162000F. Déterminer le prix d'un livre de mathématiques et celui de français.

Exercice 31

Un lycée organise un voyage d'étude dont le prix de x personnes est de y.

- Si chacune d'elle verse 150 F, il manque 1500 F.
- Si chacune d'elle verse 200 F, on rend au groupe 200 F.

Déterminer le nombre de personnes et le prix du voyage d'étude.

Exercice 32

Pour mettre en conserve 6350 g de poisson, on a utilisé deux sortes de boites. Les unes peuvent contenir 600 g de poisson, les autres peuvent en contenir 250 g. Sachant qu'on a utilisé 17 boites, déterminer le nombre de boites de chaque sorte.

Exercice 33

Au cours d'une soirée, le centre de restauration fait une promotion sur les desserts (Glace : 5100F ; crème caramel ; 3600F).

En fin de soirée, le caissier désire trouver rapidement le nombre de glaces et le nombre de crèmes caramel qu'il a vendu. Il a dans sa caisse 413700F et il sait qu'il a vendu 97 desserts au total.

Déterminer le nombre de desserts de chaque sorte.

Exercice 34

La recette d'un match s'élève à 36.500.000F.

Les spectateurs ont le choix entre deux possibilités. Soit prendre une place dans les tribunes à 5.000F soit prendre une place dans les "populaires" à 3.000F. Il y a eu 1.000 spectateurs. Combien de spectateurs ont pris place dans les tribunes ?

Exercice 35

Sani, Ali et Idi vont à la pâtisserie :

- Sani achète 3 croissants, 4 pains au chocolat et 7 sandwichs ; il paie 18000F.
- Ali achète 5 croissants, 4 pains au chocolat et 2 sandwichs ; il paie 12300F
- Idi achète 6 croissants, 8 pains au chocolat et 4 sandwichs ; il paie 21000F.

Déterminer le prix unitaire d'un croissant, d'un pain au chocolat et d'un sandwich.

Exercice 36

Boubacar se rend à la banque et retire au guichet la somme de 725 €. La banquière lui remet 45 billets dont : des billets de 5 € ; des billets de 10 € et des billets de 20 €.

A la sortie de la banque, Boubacar se rend dans un magasin. Après son passage en caisse, il lui reste la moitié du nombre de billets de 10 € et la moitié du nombre de billets de 20 €, toujours le même nombre de billets de 5 € et une somme de 375 €.

Combien Boubacar, avait – il de billets de 5€, 10 € et 20 € à la sortie de la banque ?

Exercice 37

Pour faire des cadeaux de fleurs à leurs mères ; trois amis se rendent chez la fleuriste pour composer chacun un bouquet de fleurs.

- Le bouquet 1 est composé de 4 fleurs rouges, 2 fleurs blanches et 1 fleur de couleur fleur et coûte 11400F.
- Le bouquet 2 est composé de 3 fleurs rouges, 6 fleurs blanches et 2 fleurs de Couleur rose et coûte 16800F.
- Le bouquet 3 est composé de 6 fleurs rouges, 4 fleurs blanches et 3 fleurs de couleur rose et coûte 20400F.

Quel est le prix unitaire de chaque fleur ?

GENERALITES SUR LES FONCTIONS NUMERIQUES

Exercice 1

Dans chacun des cas suivants, déterminer si les fonctions f et g sont égales :

1) $f(x) = x^3 + x^2 - 7x + 2$ et $g(x) = (x^2 + 3x - 1)(x - 2)$

2) $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$ et $g(x) = x + 1$

3) $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$ et $g(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+2}}$

4) $f(x) = \sqrt{x^2}$ et $g(x) = x$

Exercice 2

On donne les fonctions suivantes : $g(x) = 2x + 1$ et $h(x) = \frac{4x^2-1}{2x-1}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions g et h.

2) Démontrons que f et h sont égales sur$]-\infty\,; \frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}\,;\,+\infty[$.

Exercice 3

On donne les fonctions f et g définies dans IR par : $f(x) = \frac{1}{1+x^4}$ et $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$

1) Calculer $f(x)$- $g(x)$.

2) En déduire l'intervalle sur lequel on a $f(x) \geq g(x)$.

Exercice 4

On considère les fonction f et g définies par :

$f(x) = |x^2 - 5x + 6|$ et $g(x) = x^2 - 5x + 6$.

1) Ecrire $f(x)$ sans le symbole de la valeur absolue.

2) Calculer $f(x)$- $g(x)$.

3) Comparer $f(x)$ et $g(x)$.

Exercice 5

On considère les fonctions f et g définies par :

$f(x) = x^2 + x - 2$ et $g(x) = x^2 + |x| - 2$.

1) Préciser les ensembles de définitions des fonctions f et g.

2) Ecrire $g(x)$ sans le symbole de la valeur absolue.

3) Préciser l'intervalle sur lequel $f = g$.

4) Préciser l'intervalle sur lequel $f \neq g$.

Exercice 6

Soit les fonctions f et g telles que : $f(x) = \sqrt{-x^2+9}$ et $g(x) = \frac{3}{2x-5}$

1) Quels sont les ensembles de définition de f et g ?

2) Etudier la parité de f et g.

3) Calculer $f(x) \times g(x)$ puis préciser l'ensemble de définition de $f \times g$.

Exercice 7

Calculer $f + g$; $f - g$; $f \times g$ et $\frac{f}{g}$ dans les cas suivants :

1) $f(x) = -3x + 2$ et $g(x) = 2x^3 - 1$;

2) $f(x) = \sqrt{x^2-1}$ et $g(x) = x^2 + 3$;

3) $f(x) = -x^3 + x + 1$; $g(x) = x^3 - 4x - 1$;

Exercice 8

Calculer $(2f - g)$; $(f + 3g)$ dans les cas suivants :

1) $f(x) = x^2 + 2$ et $g(x) = \frac{1}{x-2}$; 2) $f(x) = \frac{x+4}{x^2-1}$; $g(x) = x - 5$;

3) $f(x) = 2x^2 - 1$ et $g(x) = 4x^3 - 3x$; 4) $(x) = 3x - 5$; $g(x) = x^2$

Exercice 9

On donne : $f(x) = 4x - x^3$; $g(x) = 4x - 1$; $h(x) = \sqrt{x^2+1}$; $k(x) = \frac{-1}{2+3x^2}$.

1) Donner le domaine de définition des fonctions ci – dessus puis étudier leurs parités.

2) Déterminer $f \circ g$; $f \circ h$ et $h \circ k$; $g \circ k$; $h \circ g$.

3) Donner le domaine de définition de $f \circ g$; $f \circ h$ et $h \circ k$; $g \circ k$; $h \circ g$.

Exercice 10

Dans chacun des cas suivants, calculer $f(-x)$ puis conclure :

1) $f(x) = \frac{-3x^2+2}{|x|}$; 2) $f(x) = \frac{x^3-2}{x^2}$; 3) $f(x) = \frac{x^2-3}{x}$; 4) $f(x) = 5x^2 - x + 2$

Exercice 11

Après avoir déterminé l'ensemble de définition, étudier la parité de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1) $f(x) = 5x^4 - 3x^2$; 2) $f(x) = 2x^4 - x^3 + 1$; 3) $f(x) = x^3 - x$;

4) $f(x) = x^4 - x^2 + 1$; 5) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^3-x}$; 6) $f(x) = \frac{-3x^2-1}{|x|}$;

7) $f(x) = \frac{3x^3-1}{x^2}$; 8) $f(x) = x^5 - x^3 + \frac{4}{x}$; 9) $f(x) = \frac{x^2+2}{4\sqrt{x}}$;

10) $\frac{x}{1+|x|}$; 11) $\frac{-2x}{\sqrt{-x^2+1}}$; 12) $\frac{x^2}{\sqrt{9+4x^2}}$.

Exercice 12

On considère l'application f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$.

1) Déterminer les images directes suivantes :

a) $f(\{-1\,;2\})$; b) $f([-3\,;-1])$; c) $f([-3\,;1])$.

2) Déterminer les images réciproques suivantes :

a) $f^{-1}(\{4\})$; b) $f^{-1}(\{-1\})$; c) $f^{-1}([-1\,;4])$.

Exercice 13

1) Les applications suivantes sont – elles injectives, surjectives ou bijectives ?

a) : $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$; b) $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$; c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$n \to n+1$ $n \to n+1$ $x \to x^2$

2) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

a) f est – elle injective ? Surjective ?

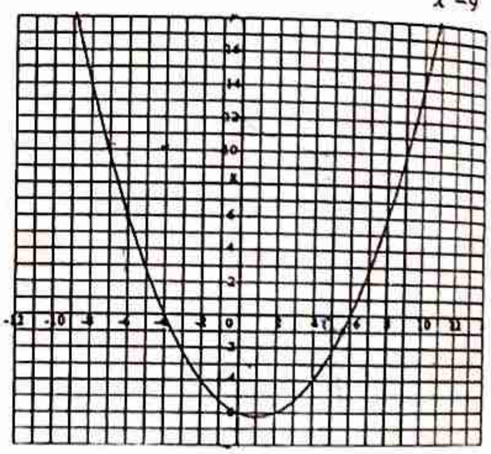
b) Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1\,;1]$.

Exercice 14

Donner le domaine de définition et l'image directe de ces domaines par les fonctions f suivantes :

1) $f(x) = \sqrt{4-3x^2}$; 2) $f(x) = \frac{1}{x+1}$; 3) $f(x) = \sqrt{x+2}$; 4) $f(x) = \frac{-2}{x^2-9}$.

Exercice 15



Soit la figure ci – contre représentation graphique de la fonction fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$.

Représenter graphiquement à partir de celle de f_1 les fonctions suivantes :

$f_2(x) = -f_1(x)$; $f_3(x) = f_1(-x)$;

$f_3(x) = f_1(|x|)$; $f_4(x) = |f_1(x)|$;

$f_5(x) = f_1(x+3)$; $f_6(x) = f_1(x) - 2$

APPLICATION DU PRODUIT SCALAIRE, DU BARYCENTRE

Exercice 1

Les équations ci – dessous définissent – elles des cercles ? Si oui, déterminez leur centre et leur rayon :

1) $x^2 + y^2 + 6x - 16 = 0$;
2) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 14 = 0$;
3) $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 16 = 0$;
4) $2x^2 + 2y^2 - 9x + 4y - 8 = 0$;
5) $x^2 + y^2 + 4x - 2y = -5$;
6) $x^2 + y^2 + x = 0$.

Exercice 2

Déterminer une équation cartésienne d'un cercle :

1) de centre O et de rayon 4 ;
2) de centre A(2 ; 1) passant par l'origine ;
3) de diamètre [AB] avec A(3 ; 2) et B(−1 ; 6) ;
4) de centre C(−3 ; −1) et de rayon 2.

Exercice 3

Dans chacun des cas suivants, déterminez s'il y a lieu les coordonnées des points d'intersection du cercle (C) et de la droite (D) dans les cas suivants :

1) (C) : $x^2 + y^2 = 25$ et (D) : $2x - y - 5 = 0$;
2) (C) : $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$ et (D) : $3x - 4y - 19 = 0$;
3) (C) : $x^2 + y^2 - 3x + 2y = 3$ et (D) : $y = 2x - 3$;
4) (C) : $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 12 = 0$ et (D) : $x - 2y - 1 = 0$.

Exercice 4

1) Soit les points A(3 ; 3) et B(5 ; 3). Déterminer l'ensemble (E) de tous les points P(x ; y) du plan vérifiant $\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{BP} = 8$.

2) Déterminer l'équation du cercle circonscrit au triangle ABC avec A(1 ; 1) ; B(1 ; −1) et C(2 ; 0).

3) Déterminer l'équation du cercle inscrit au triangle DEF avec D(2 ; −1) ; E(−2 ; 2) et F(16 ; 9,5).

Exercice 5

Donner une représentation paramétrique du cercle (C) :

1) de centre $\Omega(2\,;1)$ et de rayon $\sqrt{3}$; 2) de centre $\Omega(-1\,;-1)$ et de rayon 4 ;

3) de centre $\Omega(1\,;3)$ et de rayon $\sqrt{2}$; 4) de centre $\Omega(2\,;2)$ et de rayon 5 ;

5) de centre O et de rayon 3 ; 6) de centre O et de rayon 6.

Exercice 6

Calculer la distance du point A à la droite (D) dans chacun des cas suivants :

1) $A(1\,;-2)$ et (D) : $x = 2y + 5$; 2) $A(-2\,;3)$ et (D) : $4y = 3x - 2$;

3) $A(0\,;-3)$ et (D) : $5x = 12y + 23$; 4) $A(2\,;-1)$ et (D) : $4x + 3y + 10 = 0$;

Exercice 7

1) Quelle est la distance du point A $(1\,;-2)$ à la droite (D) passant par $B(1\,;1)$ et $C(2\,;-1)$?

2) On considère le triangle EFG tel que $E(2\,;-3)$; $F(3\,;2)$ et $G(-2\,;-5)$.

Déterminer la mesure de la hauteur issue de E.

Exercice 8

Déterminer dans le plan P l'ensemble des points M tel que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = k$ ($k \in \mathbb{R}$). Soit M un point du plan et H son projeté orthogonal sur (AB).

Exercice 9

Soit A et B deux point tels que AB = 2 et l'application $f : P \to P$

$$M \to \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}$$

1) Construire les lignes de niveau -1 ; 0 de f.

2) Déterminer l'ensemble des points M tel que $f(M) = 2$.

Exercice 10

Déterminer l'ensemble (E) des points M tel que $\overrightarrow{AM}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = k$ ($k \in \mathbb{R}$).

Exercice 11

Déterminer l'ensemble des points M tel que $\overrightarrow{AM}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = k$ ($k \in \mathbb{R}$).

DENOMBREMENT

Exercice 1

Dans une classe de 1ère, il y a autant de filles que de garçons. Tous les élèves étudient au moins une langue. Parmi eux : 25 étudient l'espagnol, 4 étudient l'allemand seulement, 20 étudient l'anglais, 7 étudient l'espagnol et l'allemand, 8 étudient l'allemand et l'anglais, 9 étudient l'anglais et l'espagnol.

1) Quel est l'effectif de la classe ?

2) Combien d'élèves étudient uniquement :

a) l'anglais ? b) l'allemand ? c) l'espagnol ?

Exercice 2

Lors d'une enquête auprès de 200 élèves d'un lycée : 125 élèves déclarent aimer les prêches, 87 la musique et 60 aiment à la fois les prêches et la musique.

1) Combien d'élèves n'aiment que la musique ?

2) Représenter cette situation par un diagramme de Venn mettant en évidence les ensembles P (prêches) et M (musique) et leurs parties complémentaires.

3) Combien d'élèves n'ont pas donné leur avis ?

Exercice 3

Dans une classe de 1ère de 30 élèves, 17 élèves aiment la mathématique, 12 aiment la physique et 10 élèves aiment les deux.

1) Calculer le nombre des élèves qui aiment la mathématique seulement.

2) Calculer le nombre des élèves qui aiment la physique seulement.

3) Calculer le nombre des élèves qui n'aiment ni la mathématique, ni la physique.

Exercice 4

Parmi les élèves d'une classe de 1ère, 20 aiment la mathématique, 14 aiment la physique, 10 aiment l'anglais, 9 aiment la mathématique et la physique, 5 aiment la mathématique et l'anglais, 7 aiment la physique et l'anglais et 2 aiment les trois matières.

1) Combien d'élèves y a – t – il dans cette classe ?

2) Combien d'élèves étudient seulement une seule matière ?

Exercice 5

Dans un lycée de 1023 élèves on a recensé les élèves pratiquant l'Anglais et l'Espagnol.

On obtient les résultats suivants :

524 élèves pratiquent l'Anglais et l'Espagnol.

936 élèves pratiquent l'Anglais.

415 élèves ne pratiquent pas l'Espagnol.

En utilisant un diagramme, répondre aux questions suivantes :

1) Combien d'élèves ne pratiquent ni l'Anglais ni l'Espagnol.

2) Combien d'élèves pratiquent l'Anglais seulement.

3) Combien d'élèves pratiquent l'Espagnol.

4) Combien d'élèves pratiquent une des deux langues ?

Exercice 6

A l'aide d'un diagramme arborescent, déterminer de combien de manières différentes un individu peut porter une chemise, puis une cravate s'il possède en tout 2 chemises (C_1 et C_2) et 4 cravates (A, B, C et D).

Exercice 7

Une pièce a été jetée trois fois. Déterminer les divers résultats possibles au moyen d'un diagramme arborescent,

Exercice 8

Les nombres 5, -1 et 3 constituent la solution d'un système de trois équations à trois inconnues. Donner tous les triplets différents qui peuvent être la solution de ce système.

Exercice 9

1) Calculer : $8\,!$; $7\,!$; $4\,!$; $2\,!$

2) Calculer : A_8^2 ; A_3^3 ; A_2^0 ; A_7^3 ; A_5^1 ; A_9^8 ; A_n^0 ; A_n^1 ; A_n^n ; A_n^{n-1}.

3) Résoudre : a) $A_n^2 = 72$; b) $A_n^4 = 42A_n^2$; c) $2A_n^2 + 50 = A_{2n}^2$.

Exercice 10

Quatre garçons et deux filles s'assoient sur un banc.

1) Quel est le nombre de dispositions possibles ?

2) Même question si les garçons sont d'un côté et les filles de l'autre.

Exercice 11

On appelle anagramme d'un mot, chacun des « mots », ayant un sens ou non, que l'on peut former avec les lettres de ce mot placées à la suite les une des autres de toutes les façons possibles.

Dénombrer les anagrammes des mots :

1) ECOLE ; 2) MATH ; 3) Classe ; 4) Maths ; 5) administration ; 6) Mathématiques ; 7) MATHEMATIQUES ; 8) anticonstitutionnellement.

Exercice 12

Six personnes choisissent mentalement un nombre entier compris entre 1 et 6.

1) Combien de résultats peut-on obtenir ?

2) Combien de résultats ne comportant pas deux fois le même nombre peut-on obtenir ?

Exercice 13

Un questionnaire à choix multiple, autorisant une seule réponse par question, comprend 15 questions. Pour chaque question, on propose 4 réponses possibles. De combien de façons peut – on répondre à ce questionnaire ?

Exercice 14

1) Combien peut – on former de numéros de téléphone à 8 chiffres ?

2) Combien peut – on former de numéros de téléphone à 8 chiffres ne comportant pas le chiffre 0 ?

3) Combien peut – on former de numéros de téléphone à 8 chiffres ne comportant pas de chiffre impair ?

Exercice 15

De combien de façons différentes est – il possible de ranger 3 boules (1 verte, 1 jaune, 1 rouge) dans 5 casiers distincts en tenant compte du fait qu'il doit y avoir au plus une boule dans chaque casier ?

Exercice 16

A l'occasion d'une compétition sportive groupant 18 athlètes, on attribue trois médailles (une en or, une en argent, une en bronze). Combien y – a – t – il de distributions possibles ?

Exercice 17

Un groupe de 24 élèves de première constitue un bureau d'association. Ce bureau est composé d'un président, d'un secrétaire et d'un trésorier. Combien y – a – t – il de bureaux possibles ?

Exercice 18

Soit A l'ensemble des nombres de quatre chiffres, le premier étant non nul.

1) Calculer le nombre d'éléments de A.

2) Dénombrer les éléments de A :

a) composés de quatre chiffres distincts

b) composés d'au moins deux chiffres identiques

c) composés de quatre chiffres distincts autres que 5 et 7

Exercice 19

Dans un lot de 20 pièces fabriquées, 4 sont mauvaises.

On tire successivement sans remise 4 pièces.

1) Déterminer le nombre de cas possible de tirer 4 bonnes pièces.

2) Déterminer le nombre de cas possible de tirer au moins une mauvaise pièce.

c) Déterminer le nombre de cas possible de tirer au plus deux mauvaises pièces.

Exercice 20

On tire successivement 4 boules d'un sac contenant 10 boules blanches et 5 boules bleues. Déterminer le nombre de tirages permettant d'obtenir :

1) 4 boules bleues ;

2) 4 boules blanches ;

3) 3 boules bleues et 1 boule blanche dans cet ordre ;

3) 3 boules bleues et 1 boule blanche ;

4) 2 boules bleues et 2 boules blanches dans cet ordre ;

5) au moins 3 boules blanches ;

6) au plus 3 boules bleues.

Exercice 21

On dispose de 12 jetons numérotés de 1 à 12. On appelle « main » 4 jetons de numéros distincts tirés sans remise dans les 12 jetons, sans tenir compte de l'ordre de la distribution.

Pour chacune des questions suivantes, répondre par vrai ou faux en justifiant :

1) Le nombre total de « mains » est 495 ;

2) Il y a 30 « mains » ne comportant que des numéros pairs ;

3) Il y a 120 « mains » comportant trois numéros pairs et un numéro impair ;

Exercice 22

Un sac contient 5 jetons verts (numérotés de 1 à 5) et 4 jetons rouges (numérotés de 1 à 4).

1) On tire successivement et au hasard 3 jetons du sac, sans remettre le jeton tiré.

Déterminer le nombre de tirages contenant :

a) des jetons unicolores ;

b) aucun jeton vert

c) au plus 2 jetons verts ;

d) 2 jetons numéro 1.

2) On tire simultanément et au hasard 3 jetons du sac. Reprendre alors les questions a), b), c) et d).

Exercice 23

Une urne contient 5 boules rouges, 2 boules jaunes et 3 boules vertes (indiscernables au toucher). On tire successivement avec remise 3 boules de l'urne.

1) Combien y – a – t – il de résultats possibles ?

2) Combien de tirages comprenant une rouge, une jaune et une verte dans cet ordre ?

3) Combien de tirages comprenant une rouge, une jaune et une verte ?

4) Combien de tirages comprenant au moins une rouge ?

Exercice 24

Une urne contient 12 boules : 5 blanches, 4 noires et 3 verts. On tire successivement sans remise quatre boules de l'urne.

Déterminer le nombre de tirages comprenant :

1) Exactement deux boules blanches.

2) Au moins une boule noire.

3) Au plus une boule blanche.

4) Une seule couleur.

5) Les trois couleurs.

Exercice 25

1) Calculer C_4^2 ; C_7^1 ; C_5^3 ; C_6^0 ; C_5^4 ; C_7^7 , C_n^0 ; C_n^1 ; C_n^n ; C_n^{n-1}.

2) Résoudre dans IN* les équations suivantes :

a) $C_n^2 = 55$;

b) $C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + C_{2n}^3 = 387n$;

c) $C_n^3 - C_n^2 = \frac{n^3-6n^2+30}{6}$;

d) $C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 = 5n$;

Exercice 26

De combien de façons peut – on choisir 3 femmes et 2 hommes parmi 10 femmes et 5 hommes ?

Exercice 27

Un groupe de 3 élèves de première doit aller chercher des livres à la bibliothèque. De combien de manières peut – on former ce groupe sachant qu'il y a 24 élèves dans la classe ?

Exercice 28

Un tournoi sportif compte 8 équipes engagées. Chaque équipe doit rencontrer toutes les autres une seule fois. Combien doit – on organiser de matchs ?

Exercice 29

Dans une classe de 32 élèves, on compte 19 garçons et 13 filles. On doit élire deux délégués.

1) Quel est le nombre de choix possibles ?

2) Quel est le nombre de choix si l'on impose un garçon et fille

3) Quel est le nombre de choix si l'on impose 2 garçons ?

4) Quel est le nombre de choix si l'on impose au moins une fille ?

Exercice 30

Abdou et Ali font partie d'un club de 18 personnes. On doit former un groupe constitué de cinq d'entre elles pour représenter le club à un spectacle.

1) Combien de groupes de 5 personnes peut – on constituer ?

2) Dans combien de ces groupes peut figurer Abdou ?

3) Combien de groupe peu – on constituer pour que Abdou et Ali se retrouvent ensemble ?

4) Abdou et Ali ne pouvant se supporter, combien de groupes de 5 personnes peut-on constituer de telle façon que Abdou et Ali ne se retrouvent pas ensemble ?

Exercice 31

Au service du personnel, on compte 12 célibataires parmi les 30 employés. On choisit un échantillon de quatre personnes dans ce service.

1) Quel est le nombre d'échantillons possibles ?

2) Quel est le nombre d'échantillons ne contenant aucun célibataire ?

3) Quel est le nombre d'échantillons contenant au moins un célibataire ?

4) Quel est le nombre d'échantillons contenant 2 célibataires ?

5) Quel est le nombre d'échantillons contenant uniquement des célibataires ?

Exercice 32

Une entreprise est constituée de 25 femmes et 32 hommes. On choisit 6 personnes.

1) Combien de groupes peut – on constituer ?

2) Combien de groupes peut – on constituer avec :

a) uniquement des hommes ?

b) des personnes de même sexe ?

c) au moins une femme et au moins un homme ?

Exercice 33

On extrait simultanément 5 cartes d'un jeu de 32.

Cet ensemble de 5 cartes est appelé une "main".

A

(La composition d'un jeu de 32 cartes est la suivante : 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; valet ; dame ; roi ; as pour chacune des 4 « couleurs » : cœur ; carreau ; trèfle et pique.)

1) Combien y a-t-il de mains différentes possibles ?

2) Dénombrer les mains de 5 cartes contenant :

a) un carré (quatre cartes de même valeur).

b) deux paires distinctes.

c) un full (trois cartes de même valeur, et deux autres de même valeurs.

Exemple : 3 rois et 2 as)

d) trois cartes de même valeur.

e) 5 cartes de même couleur.

Exercice 34

D'un jeu de 32 cartes, on veut choisir une main de 8 cartes.

Combien y a – t – il de mains :

1) ne comportant que des cartes noires (trèfle ou pique) ?

2) ne comportant que des figures (valet, dame, roi ou as) ?

3) comportant 4 as ?

4) comportant 5 figures, dont 3 noires ?

5) comportant 3 as, 3 dames et 2 carreaux ?

6) comportant 4 trèfles, dont la dame de trèfle ?

7) ne comportant aucun cœur ?

8) comportant trois carreaux au plus ?

Exercice 35

Nous disposons d'un jeu de 32 cartes, et nous distribuons une main de 8 cartes à un jour. Combien peut – on former de mains :

1) ne contenant pas l'as de pique ?

2) contenant au moins 1 as ?

3) contenant exactement 2 as ?

4) contenant au plus un pique ?

5) contenant exactement 2 as et 5 piques ?

6) ne contenant que des cartes de deux couleurs au plus ?

Exercice 37

On choisit au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes.

1) Combien y a – t – il d'issues possibles ?

2) On considère les événements :

A : « obtenir un as » et T : « obtenir un trèfle ».

a) Combien y a – t – il d'éventualités dans A ?

b) Combien y a – t – il d'éventualités dans T ?

c) Traduire par une phrase les événements $A \cap T$ et $A \cup T$.

d) Déterminer Card $(A \cap T)$ et Card $(A \cup T)$.

Exercice 38

Un sac contient 9 jetons répartis comme suit : quatre jetons blancs marqués : 1, 1, 2, 6 et cinq jetons rouges marqués : 2, 2, 2, 3, 4.

1) On tire successivement sans remise 3 jetons du sac . Dénombrer les tirages dans chacun des cas suivants :

a) Le premier jeton tiré porte le numéro 2.

b) Obtenir un seul jeton marqué 2.

c) Le premier jeton tiré est blanc et le deuxième jeton tiré est marqué 2.

2) On tire successivement et avec remise 3 jetons du sac.

Répondre aux questions 1) a), b) et c).

Exercice 39

Un sac contient 9 jetons répartis comme suit : quatre jetons blancs marqués : 1, 1, 2, 6 et cinq jetons rouges marqués : 2, 2, 2, 3, 4.

On tire simultanément 3 jetons du sac .

1) Dénombrer les tirages possibles.

2) Dénombrer les tirages comprenant :

a) des jetons bicolores.

b) Au moins un jeton blanc.

c) 3 jetons de même couleur dont la somme des numéros est égale à 8.

d) Un jeton et un seul blanc et un jeton et un seul portant un numéro multiple de 3.

c) Deux jetons portant le numéro 1 et un seul jeton portant le numéro 2.

Exercice 40

Dans une urne, on place n boules blanches et une boule noire. On tire simultanément k boules.

1) Combien y – a – t – il de tirages sans boule noire ?

2) Combien y – a – t – il de tirages avec une boule noire ?

3) Combien y – a – t – il de tirages possibles en tout sachant que $k = 3$ et $n = 5$

Exercice 41

1) On lance un dé à six faces (numérotées de 1 à 6) et note à chaque fois le numéro apparaissant sur la face supérieure.

a) Quel est le nombre de cas possibles ?

b) Quel est le nombre de cas possibles comportant 2 numéros pairs ?

c) Quel est le nombre de cas possibles comportant 1 seul numéro pair ?

d) Quel est le nombre de cas possibles comportant le même numéro ?

2) Pour la suite on s'intéresse à la somme de deux numéros indiqués par la face supérieure du dé.

a) Quels sont les résultats possibles ?

b) Quel est le nombre de cas possibles dont la somme est supérieure à 5 ?

Exercice 42

En utilisant le triangle de Pascal, calculer :

a) $(x+3)^4$; b) $(x-2)^6$; c) $(a+4)^5$; d) $(2x-1)^8$;

e) $(x-3a)^3$; f) $(n+1)^9$; g) $(4a-5)^7$; h) $(-3x+5a)^5$.

ANGLES ORIENTES – TRIGONOMETRIE

Exercice 1

1) Convertir en radians les mesures d'angles exprimés en degrés : 20° ; 50° ; 30° ; 120° ; 150° ; 60° ; 14° ; 210°.

2) Convertir en degrés les mesures d'angles exprimés en radians : $\frac{\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{3}$; $\frac{8\pi}{5}$; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{\pi}{10}$; $\frac{7\pi}{6}$.

3) Déterminer la mesure principale des angles : $\frac{11\pi}{3}$; $\frac{49\pi}{6}$; $-\frac{7\pi}{3}$; $\frac{37\pi}{12}$; $-\frac{241\pi}{4}$.

Exercice 2

1) Dans chacun des cas suivants, donner trois autres réels associés au même point sur le cercle trigonométrique :

a) $-\frac{\pi}{3}$; b) $\frac{5\pi}{12}$; c) 3π ; d) $\frac{\pi}{4}$; e) -7π.

2) Parmi les mesures suivantes, indiquer celles qui sont associées au même point que $-\frac{\pi}{12}$ sur le cercle trigonométrique : $-\frac{37\pi}{12}$; $\frac{11\pi}{12}$; $\frac{47\pi}{12}$; $-\frac{313\pi}{12}$; $-\frac{49\pi}{12}$

Exercice 3

1) Construire un octagone ABCDEFGH de centre O.

2) Donner une mesure en radian des angles orientés suivants :

$(\overrightarrow{OC} ; \overrightarrow{OH})$; $(\overrightarrow{OC} ; \overrightarrow{OE})$; $(\overrightarrow{OC} ; \overrightarrow{OD})$, $(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OD})$; $(\overrightarrow{OH} ; \overrightarrow{OE})$ et $(\overrightarrow{OD} ; \overrightarrow{OH})$.

Exercice 4

Soit (C) un cercle de centre A et B un point du cercle.

1) Construire les points C, D, E et F du cercle (C) tel que :

$(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$; $(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD}) = \frac{3\pi}{4}$; $(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AE}) = \frac{7\pi}{6}$ et $(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AF}) = -\frac{3\pi}{4}$.

2) Déterminer la mesure principale de chacun des angles orientés suivants : $(\overrightarrow{AC} ; \overrightarrow{AE})$; $(\overrightarrow{AD} ; \overrightarrow{AF})$; $(\overrightarrow{AF} ; \overrightarrow{AC})$ et $(\overrightarrow{AF} ; \overrightarrow{AE})$.

Exercice 5

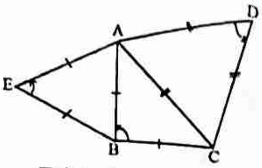
Construire un triangle ABC tel que $(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{6}$ et $(\overrightarrow{BA} ; \overrightarrow{BC}) = -\frac{\pi}{5}$.

Déterminer une mesure principale de chacun des angles orientés :

a) $(\overrightarrow{BA} ; \overrightarrow{AC})$; b) $(\overrightarrow{BC} ; \overrightarrow{CA})$; c) $(\overrightarrow{CA} ; \overrightarrow{CB})$.

Exercice 6

Soit la figure ci – contre où $(\overrightarrow{BC} ; \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{2}$;
$(\overrightarrow{DA} ; \overrightarrow{DC}) = (\overrightarrow{EB} ; \overrightarrow{EA}) = \frac{\pi}{3}$.



Déterminer la mesure principale des angles :
$(\overrightarrow{BC} ; \overrightarrow{AC})$; $(\overrightarrow{AE} ; \overrightarrow{AC})$; $(\overrightarrow{DA} ; \overrightarrow{AB})$; $(\overrightarrow{AE} ; \overrightarrow{AD})$ et $(\overrightarrow{AD} ; \overrightarrow{CB})$.

Exercice 7

On considère un réel $x \in \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $sinx = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$.

1) Déterminer la valeur exacte de $cosx$.

2) On sait que $x \in \left\{\frac{\pi}{12} ; \frac{5\pi}{12} ; -\frac{\pi}{12}\right\}$. Déterminer la valeur exacte de x.

Exercice 8

En appliquant $\cos(a+b)$, $\sin(a+b)$, $\cos(a-b)$ ou $\sin(a-b)$, calculer :
$\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)$; $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$; $\sin\left(-x-\frac{\pi}{2}\right)$; $\sin(x+\pi)$; $\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$; $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)$;
$\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)$; $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)$; $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$; $\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$; $\cos(3x)-\sin(2x)$.

Exercice 9

En appliquant la formule d'addition $\cos(a+b)$, $\sin(a+b)$, $\tan(a+b)$, $\cos(a-b)$, $\sin(a-b)$ ou $\tan(a-b)$ calculer :
$\cos\frac{5\pi}{12}$; $\sin\frac{5\pi}{12}$; $\tan\frac{5\pi}{12}$; $\cos\frac{7\pi}{12}$; $\sin\frac{7\pi}{12}$; $\cos\frac{\pi}{12}$; $\sin\frac{\pi}{12}$; $\tan\frac{\pi}{12}$; $\cos\frac{5\pi}{4}$; $\sin\frac{5\pi}{4}$.

Exercice 10

1) Sachant que $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$, calculer $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

2) Calculer : $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$; $\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)$; $\tan\left(\frac{4\pi}{5}\right)$; $\cos\left(\frac{11\pi}{5}\right)$; $\sin\left(\frac{11\pi}{5}\right)$ et $\tan\left(\frac{11\pi}{5}\right)$.

Exercice 11

Montrer que :

1) $\cos(3x) = 4\cos^3x - 3\cos x$; 2) $\sin(3x) = 3\sin x - 4\sin^3x$;
3) $\sin(4x) = \cos^3x.\sin x - 4\cos x.\sin^3x$; 4) $\cos(2x) = 2\cos^2x - 1$;
5) $\sin(a+b)\sin(a-b) = \sin 2a - \sin 2b$; 6) $\cos^4x - \sin^4x = \cos(2x)$;
7) $\cos(b+c)\cos(b-c) = \cos^2b - \sin^2c$; 8) $\cos(4x) = 1 - 8\sin^2x + 8\sin^4x$.

Exercice 12

1) Résoudre à l'aide du cercle trigonométrique $cosx = \frac{\sqrt{3}}{2}$ sur :
a) $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$; b) $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$; c) $[\pi ; 2\pi]$.

2) Résoudre à l'aide du cercle trigonométrique $sinx = \frac{1}{2}$ sur :
a) $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$; b) $[0 ; \pi]$; c) $[\pi ; 2\pi]$.

Exercice 13

Résoudre les équations trigonométriques suivantes sur $[0 ; 2\pi]$:
a) $2\sin x - \sqrt{2} = 0$; b) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; c) $\tan x = 1$; d) $\sin^2x - 1 = 0$;
e) $\tan^2x - 3 = 0$; f) $\cos x = 0$; g) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; h) $\sin x = -\frac{1}{2}$;
i) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; k) $\cos x = -1$; l) $\cos x = 2$; m) $\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Exercice 14

Résoudre les équations trigonométriques suivantes :
a) $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = 1$; $x \in [0 ; 2\pi]$ b) $\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $x \in \left[-\frac{\pi}{2} ; 2\pi\right]$
c) $2\sin(2x) + \sqrt{2} = 0$; $x \in [-\pi ; 2\pi]$ d) $\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$; $x \in \left]\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}\right[$
e) $2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = 1$; $x \in [0 ; 2\pi]$ f) $2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3} = 0$; $x \in [-\pi ; \pi]$
g) $2\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right) - 1 = 0$; $x \in [0 ; 2\pi]$ h) $\cos\left(3x-\frac{2\pi}{5}\right) = -\frac{1}{2}$; $x \in \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$

Exercice 15

Résoudre les équations trigonométriques suivantes :
a) $\sin x = \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$; $x \in [0 ; 2\pi]$ b) $\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$; $x \in \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$
c) $\tan x = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$; $x \in [\pi ; 2\pi]$ d) $\cos(2x) = \cos(3x+\pi)$; $x \in [\pi ; 2\pi]$
e) $\sin(3x) = \sin\left(\frac{\pi}{7}-x\right)$; $x \in [-\pi ; \pi]$
f) $\sin\left(7x-\frac{\pi}{5}\right) = \sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$; $x \in [0 ; \pi]$
g) $\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$; $x \in [0 ; \pi]$

Exercice 16

Résoudre dans IR les équations suivantes :

1) $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\sin(3x) = cos(x+\pi)$;

3) $in\left(2x-\frac{\pi}{3}\right) - sin\left(3x+\frac{\pi}{2}\right) = 0$; 4) $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \sin(3x)$.

Exercice 17

1) Résoudre $2x^2 + 7x + 3 = 0$

2) Résoudre l'équation ci-dessous dans $]-\pi\,;\,\pi]$: $sin2x = -\frac{1}{2}$

3) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation :

$2(sin2x)^2 + 7sin2x + 3 = 0$

Exercice 18

1) Résoudre $2x^2 - x - 1 = 0$.

2) En déduire les solutions des équations :

a) $2sin^2(x) - sinx - 1 = 0$; b) $2cos^2x - cosx - 1 = 0$.

Exercice 19

1) Résoudre sur $[-\pi\,;\,\pi]$:

a) $\sin^2 x - \sin x = 0$; b) $2\sin^2 x - 3\sin x = 0$;

c) $\cos^2 x - 1 - \sin^2 x = 0$; d) $2\cos^2(3x) + 3\cos(3x) - 2 = 0$.

2) Résoudre sur $[0\,;\,2\pi]$:

a) $\cos^2 x - 2\cos x + 1 = 0$; b) $\cos^2 x - 2\cos x = 0$; c) $\cos^2 x - \sin^2 x = 0$

Exercice 20

En s'aidant d'une représentation graphique du cercle trigonométrique, déterminer l'ensemble des solutions dans l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$ des inéquations suivantes :

a) $cos \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$; b) $2sinx \leq 1$; c) $cosx < -\frac{1}{2}$;

d) $cosx > 0$; e) $sinx > 0$; e) $sinx < -\frac{1}{2}$

Exercice 21

Résoudre les inéquations trigonométriques suivantes :

a) $2cosx - 1 > 0$; $x\epsilon[0\,;\,\pi]$ b) $sinx < \frac{\sqrt{2}}{2}$; $x\epsilon\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$

c) $tanx < 1$; $x\epsilon\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$; d) $\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right) > -1$; $x\epsilon[0\,;\,2\pi]$

e) $cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{5}\right) > -\frac{1}{2}$ $(x\epsilon[0\,;\,\pi])$ f) $sin\left(3x-\frac{\pi}{5}\right) < \frac{\sqrt{3}}{2}$ $(x\epsilon[0\,;\,\pi])$

LIMITES – CONTINUITE

Exercice 1

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 0}(x+3)$; b) $\lim\limits_{x\to 3}(x-9)$; c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$;

d) $\lim\limits_{x\to -2}(x^3-6)$; e) $\lim\limits_{x\to 0}(-2-x^2)$; e) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+4}{5}$;

f) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+3}{x+1}$; g) $\lim\limits_{x\to -1}\sqrt{x^2+4}$; h) $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{x+2}$;

i) $\lim\limits_{x\to 4}(2x-1\sqrt{x^2-4x})$; j) $\lim\limits_{x\to -2}x^2-x+1$; k) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2-2x+2}{x+1}$.

Exercice 2

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x-3}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-2x}{x}$; c) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x-1}$;

d) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{2x^2+x-1}{x^3+1}$; e) $\lim\limits_{x\to -5}\frac{x^2+2x-15}{x^2+8x+15}$; f) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{2x^2-6x}$;

g) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{(x-1)^2}$; h) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3}$; i) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}-1}$;

j) $\lim\limits_{x\to 1}\left(x+\sqrt{\frac{x^3-1}{x-1}}\right)$; k) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}-1}$; l) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}$;

m) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-1}{\sqrt{5+x}-2}$; n) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-2x^2}-\sqrt{1+2x^2}}{x^2}$; o) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^4+x}}$

Exercice 3

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}}\frac{1-5x}{x-3}$; b) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{x+1}{x-1}$; c) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\frac{-1}{3x-6}$;

d) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+4}$; e) $\lim\limits_{\substack{x\to -5\\ x<-5}}\frac{1+5x}{x+5}$; f) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+4}$;

g) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}\left(\frac{6}{x^2-4}\right)$; h) $\lim\limits_{\substack{x\to -3\\ x<-3}}\sqrt{\frac{2x-1}{x+3}}$; i) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{-x^2+6x-7}{x^2-1}$

j) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \left(\frac{1}{x} + 3x^2 - 2\right)$; k) $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} \left(\frac{-3x}{x-2} + 5x + 7\right)$; l) $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x<-2}} \left(\frac{2}{x+2} + \frac{1}{2}\right)$.

Exercice 4

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 + x)$; b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(-\frac{1}{2}x^3\right)$; c) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^4 - 3x + 2)$;

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 + x)$; e) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3\left(1 - \frac{1}{x}\right)$; f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{x} + 2x + 3\right)$;

g) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{-5}{x} + x^2\right)$; h) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(5 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$; i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-5x^2-2x+6}{4x^2-x+1}$;

j) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2+2x+1}{x^3-x^2-x-1}$; k) $\lim\limits_{x \to +\infty} (3\sqrt{x} + x^2)$; l) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - \sqrt{x})$;

m) $\lim\limits_{x \to -\infty} (2x - \sqrt{x^2 - 4x})$; n) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{2x^2+3x+5}}{x-4}$; o) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{2x-1}{x+3}}$

p) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})$; q) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x + \sqrt{\frac{x^3-1}{x+2}}\right)$ r) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - \sqrt{x^2+1})$

Exercice 5

Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$ dans chacun des cas suivants :

a) $f(x) = x^2 + 3x$; b) $f(x) = \frac{-1}{x^2}$; c) $f(x) = \frac{5-4x}{-3x^2+1}$;

d) $f(x) = \frac{2x^2-x}{x+2}$; e) $f(x) = \frac{x^3+3x^2}{x^2-1}$; f) $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+3x}$;

g) $f(x) = \frac{x^4+2x^2+1}{2x^4-3x^3+x}$; h) $f(x) = \frac{x^3+x^2-x-1}{2x+3}$; i) $f(x) = \frac{x^2+2|x|}{x}$;

j) $f(x) = (x + \sqrt{x^2+1})$; k) $f(x) = (2x+1)\sqrt{x}$; l) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}} - \frac{x}{\sqrt{x+2}}$;

m) $f(x) = \frac{3x+1}{x+\sqrt{x}}$; n) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-3}-x}{x}$; o) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x+1}$.

Exercice 6

Démontrer que :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{4x^2+1}}{2x-3} = 1$; b) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1-x^2}{1-\sqrt{x}} = 4$; c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}} = 1$;

d) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1-x^2}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3x-1}} = 2\sqrt{2}$; e) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{4x^2+1}}{2x+3} = \frac{1}{3}$; f) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = 1$.

Exercice 7

Etudier la continuité de f en a dans les cas suivants :

1) $f(x) = \begin{cases} 1 - x & si\ x \leq 2 \\ x^2 - 2x & si\ x > 2 \end{cases}$ $a = 2$ 2) $f(x) = \frac{x-9}{\sqrt{x}-3}$; $a = 9$

3) $f(x) = \frac{x-1}{3-2x}$; $a = \frac{3}{2}$ 4) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x-6}{x-2} \\ f(2) = 5 \end{cases}$; $a = 2$

5) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x-6}{x-2} \\ f(2) = 5 \end{cases}$; $a = 2$ 6) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+3x+2}{x+1} \\ f(-1) = 1 \end{cases}$; $a = -1$

7) $f(x) = \begin{cases} x^2 & si\ x < 1 \\ 1 - x & si\ x \geq 1 \end{cases}$; $a = 1$ 8) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2} \\ f(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$; $a = 0$

9) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+1}{x+1} & si\ x \neq -1 \\ f(-1) = 6 \end{cases}$; $a = -1$; 10) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-2x-8}{x-4} & si\ x \neq 4 \\ f(4) = 3 \end{cases}$; $a = 4$

Exercice 8

Peut – on prolonger la fonction f par continuité au point a donné ?

Si oui, préciser ce prolongement g.

1) $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}$; $a = 0$ 2) $f(x) = \frac{x^2+8}{x+2}$; $a = -2$

3) $f(x) = \frac{x^3-7x+6}{x-1}$; $a = 1$ 4) $f(x) = \frac{x^2+x}{x^2-|x|}$; $a = 0$

5) $f(x) = \frac{|2x+2|-x}{2x-4}$; $a = 2$ 6) $f(x) = \frac{x^2-25}{|x-5|}$; $a = 5$

7) $f(x) = \frac{\sqrt{2x+7}-1}{9-x^2}$; $a = -3$ 8) $f(x) = \frac{3-\sqrt{5+2x}}{x-2}$; $a = 2$

Exercice 9

Dans chacun des cas suivants, la fonction f admet – elle un prolongement par continuité en a ? Si oui donner ce prolongement h par continuité de f en a.

1) f la fonction de IR vers IR définie par : $f(x) = \frac{x-1}{2-\sqrt{x-3}}$; $a = 1$.

2) f la fonction de IR vers IR définie par : $f(x) = \frac{x^2-4}{x(x+2)^2}$; $a = -2$.

3) f la fonction de IR vers IR définie par : $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} & si\ 0 \leq x < 1 \\ \frac{x^2-1}{3x^2-2x-1} & si\ x > 1 \end{cases}$; $a = 1$

Exercice 10

Soit la fonction numérique f définie sur IR* par $f(x) = x - 1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}$

1) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2) Calculer les limites à gauche et à droite de 0.

3) En déduire que la fonction f n'admet pas un prolongement par continuité en 0

Exercice 11

Les fonctions ci – dessous sont – elles continues en a ?

1) $(x) = \frac{x^2-x-2}{x-2}$; $a = 2$ 2) $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$; $a = -1$ 3) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$; $a = 0$

Exercice 12

On donne les fonctions suivantes : $f(x) = \frac{x^4+17}{6x^2+x-1}$ et $g(x) = 2x + \sqrt{25 - x^2}$

1) Préciser le domaine de définition de f et g.

2) Expliquez pourquoi les fonctions ci – dessus sont continues en chaque point de leur domaine de définition.

DERIVATION - PRIMITIVE

Exercice 1

Dans chacun des cas suivants, étudier la dérivabilité de f en a indiqué, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

1) $f(x) = 3x^2 + x - 5$; $a = 0$ 2) $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$; $a = 3$

3) $f(x) = \sqrt{x^2 + x - 6}$; $a = 2$ 4) $f(x) = (x+1)\sqrt{x+1} - 1$; $a = -1$

5) $f(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2}$; $a = 1$ 6) $f(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2}$; $a = -1$

7) $f(x) = x\sqrt{x}$; $a = 0$ 8) $f(x) = x + \sqrt{x}$; $a = 0$

Exercice 2

On donne les fonctions suivantes : $f(x) = \frac{x}{1+\sqrt{x}}$; $g(x) = \frac{x^2+1}{x^2+3}$; $h(x) = \sqrt{x^2 + 2}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition D_f, D_g et D_h.

2) Déterminer les limites de f, g et h en $-\infty$ et $+\infty$.

3) Etudier la dérivabilité de :

a) f en 0 ; b) g en 1 ; c) h en 2.

Exercice 3

On donne les fonctions f et g définies par : $f(x) = 2\sqrt{x^2 - 1}$ et $g(x) = x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition D_f et D_g.

2) a) Calculer $\lim\limits_{x \to -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1}$; $\lim\limits_{x \to -1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ et $\lim\limits_{x \to 1} \frac{g(x)-g(1)}{x-1}$. Conclure.

b) Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

Exercice 4

Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} \frac{3x+3}{x} & si\ x \leq -1 \\ -x^2 + 2x + 3 & si\ x > -1 \end{cases}$

1) Justifier que l'ensemble de définition D_f de f est IR.

2) Calculer la limite de f en $-\infty$; 0 et $+\infty$.

3) Calculer la continuité de f en -1.

4) Calculer la dérivabilité de f en -1. Calculer son nombre dérivé en -1.

Exercice 5

On considère trois fonctions f, g et h définies sur IR par : $f(x) = |x^2 - 1|$;

$g(x) = \begin{cases} x^2 + x - 6 & si\ x < -3 \\ \sqrt{x+3} & si\ x \geq -3 \end{cases}$ et $h(x) = \begin{cases} x^2 + 6x + 5 & si\ x > 0 \\ \frac{x+5}{1-x} & si\ x \leq 0 \end{cases}$.

1) Etudier la dérivabilité de f à gauche et à droite en 2 puis déterminer une équation des tangentes à la courbe (C_f) au point d'abscisse 2.

2) Etudier la dérivabilité de g à gauche et à droite en -3 puis déterminer une équation de la demi-tangente à la courbe (C_g) au point d'abscisse -3.

3) Etudier la dérivabilité de h à gauche et à droite en 0 puis déterminer une équation de la tangente à la courbe (C_h) au point d'abscisse 0.

Exercice 6

Déterminer la dérivée f' de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1) $f(x) = 2x + 3$;
2) $f(x) = 42$;
3) $f(x) = -5x + 1$;
4) $f(x) = -7$;
5) $f(x) = 10x^2$;
6) $f(x) = -\frac{4}{9}x^3$;
7) $f(x) = x^2 - 3x + 1$;
8) $f(x) = -5x^2 + 2x - 3$;
9) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - 5x$;
10) $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x - 4$;
11) $f(x) = -\frac{5}{4}x^4 - 3x^2 + \frac{1}{2}$;
12) $f(x) = x^{19} - x^{13} + 5x^4$;
13) $f(x) = -x^4 - 5x^3 - x^2 + 7$;
14) $f(x) = -\frac{7}{3}x^6 - \frac{3}{2}x^4 + \frac{1}{8}x^2 + \frac{5}{2}$;
15) $f(x) = -\sqrt{x} + \frac{x^2}{2}$;
16) $f(x) = x^2 + \sqrt{x} + 4$.

Exercice 7

Déterminer la dérivée f' de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1) $f(x) = (x+3)^2$;
2) $f(x) = (1-x)^2$;
3) $f(x) = (x^2 - 4)^2$;
4) $f(x) = (3x^2 - 5)^3$;
5) $f(x) = (7 - 2x)^4$;
6) $f(x) = (-2x^2 - 3x)^5$
7) $f(x) = (\frac{1}{4}x^3 + x^2 - 2)^6$;
8) $f(x) = (-x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 8x)^4$;
9) $f(x) = (-\frac{5}{2}x^4 - x^3 + x)^3$;
10) $f(x) = (2x^2 + 3x + 1)^5$.

Exercice 8

Déterminer la dérivée f' de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1) $f(x) = \sqrt{x+1}$;
2) $f(x) = \sqrt{3x-2}$;
3) $f(x) = \sqrt{2-x}$;
4) $f(x) = -3\sqrt{x-5}$;
5) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3}$;
6) $f(x) = \sqrt{-2x^3 + 5}$;
7) $f(x) = 2\sqrt{x^2 + 4}$;
8) $f(x) = \sqrt{x^2 + 5x - 1}$;
9) $f(x) = \sqrt{-3x^2 + x - 6}$;
10) $f(x) = \sqrt{-x^3 - 4x^2 - x + 2}$;
11) $f(x) = \sqrt{\frac{1}{8}x^4 + \frac{5}{2}x^3 - 2x - 1}$;
12) $f(x) = \sqrt{-\frac{3}{4}x^6 - \frac{4}{3}x^4 - \frac{7}{2}x^2 - \frac{8}{3}}$.

Exercice 9

Déterminer la dérivée f' de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1) $f(x) = (2x+3)(3x-7)$;
2) $f(x) = (x-1)^2(3-x)^3$;
3) $f(x) = (3x^2 - x - 1)(2x-3)^4$;
4) $f(x) = \left(x^2 - \frac{1}{x}\right)(x + \sqrt{x})$;
5) $f(x) = x^3(1 + \sqrt{x})$;
6) $f(x) = x^3(x - \sqrt{x})$;
7) $f(x) = (2x - \sqrt{x})(x^2 + 4)$;
8) $f(x) = \sqrt{x}\left(1 - \frac{1}{x}\right)$;
9) $f(x) = 4x^2\sqrt{x}$;
10) $f(x) = \frac{1}{3}(2x^3 - 1)\sqrt{2x-1}$;
11) $\sqrt{x-1} \times \sqrt{3-x}$;
12) $f(x) = \sqrt{x+2} \times \sqrt{3x^2 - 4x - 1}$.

Exercice 10

Déterminer la dérivée f' de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1) $f(x) = \frac{4}{x}$;
2) $f(x) = \frac{1}{x^5}$;
3) $f(x) = \frac{2x+4}{3x-1}$;
4) $f(x) = \frac{x-3}{x^2+1}$
5) $f(x) = \frac{x^2-x-6}{x^2-2x+1}$;
6) $f(x) = \frac{3x^2+x-2}{-x^3-3}$;
7) $f(x) = \frac{2\sqrt{x}+3}{x}$;
8) $f(x) = \frac{x-1}{x+3}\sqrt{x}$;
9) $f(x) = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^4$;
10) $(x) = \left(\frac{1+x}{\sqrt{x}+1}\right)^3$.

Exercice 11

On considère la fonction f définie sur IR par $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

1) Déterminer la dérivée f'.
2) Déterminer le signe de la dérivée.
3) En déduire le sens de variation de f.
4) Encadrer $f(x)$:

a) pour $x \in [-1 ; 1]$; b) pour $x \in [0 ; 2]$

5) La fonction f est – elle minorée sur $[0 ; +\infty[$?
6) Le réel 5 est – il un majorant de la fonction f sur $]-\infty ; 1]$?

Exercice 12

On considère la fonction f définie IR par $f(x) = x^3 - x^2 - x - 1$.

1) Déterminer l'ensemble de dérivabilité de f puis l'expression de $f'(x)$.
2) Etudier le signe de $f'(x)$.
3) En déduire le sens de variation de la fonction f.
4) Déterminer une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 2.

Exercice 13

On considère la fonction f définie par $(x) = \frac{x^2+4x-4}{x^2-2x+2}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition la fonction f.
2) Montrer que $f'(x) = \frac{-6x^2+12x}{(x^2-2x+2)^2}$.
3) Etudier le signe de $f'(x)$.
4) En déduire le sens de variation de la fonction f.
5) Déterminer une équation de la tangente (T) à C_f au point d'abscisse -1.

Exercice 14

On considère les fonctions suivantes :

$f(x) = \frac{-5}{4x+1}$; $g(x) = \frac{x^2+x+2}{x+2}$; $h(x) = x + 1 + \frac{4}{x^2}$ et $k(x) = \frac{3x-2}{x+1}$

1) Déterminer le domaine de définition de f, g, h et k.
2) Calculer la dérivée de f, g, h et k.
3) Etudier le signe de $f'(x), g'(x), h'(x)$ et $k(x)$.

4) En déduire le sens de variation de f, g, h et k.

Exercice 15

On considère la fonction f définie sur $]-3 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{9x-1}{x+3}$.

1) Démontrer que pour tout réel x de $]-3 ; +\infty[$ on a : $f(x) = 9 - \frac{28}{x+3}$.
2) a) Soit x_1 et x_2 deux réels de $]-3 ; +\infty[$ tel que $x_1 < x_2$, comparer $f(x_1)$ et $f(x_2)$.

b) Déterminer le sens de variation de la fonction f sur $]-3 ; +\infty[$.

c) Calculer $f\left(\frac{1}{9}\right)$. En déduire le tableau de signe de $f(x)$ sur $]-3 ; +\infty[$.

3) Montrer que f est majorée sur $]-3 ; +\infty[$.

Exercice 16

Pour chacune des fonctions suivantes déterminer une équation de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse a.

1) $f(x) = -x^2 + 2x - 8$; $a = -2$
2) $f(x) = \frac{x+3}{1-2x}$; $a = -1$
3) $f(x) = x^2 + 1 - \frac{1}{x^2+1}$; $a = 1$
4) $f(x) = 3x^2 - x + 1$; $a = 1$
5) $f(x) = x^3 - 3x + 6$; $a = 1$
6) $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$; $a = 3$
7) $f(x) = x^2 + 6x + 5$; $a = 0$
8) $f(x) = 5x^3 - x^2 + 2x - 7$; $a = 1$

Exercice 17

Dans chacun des cas suivants, préciser les extremums relatifs de f ainsi que les points de (C_f) où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

1) $f(x) = x^3 + 2$;
2) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2$;
3) $f(x) = x^3 - 3x + 5$;
4) $f(x) = \frac{x^2-9}{x^2+9}$;
5) $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 3$;
6) $f(x) = -3x^4 + 4x^3 - 2$

Exercice 18

Déterminer une primitive de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1) $f(x) = 2x + 1$;
2) $f(x) = 10x^4 + 6x^3 - 4$;
3) $f(x) = 5x^3 - 10x^2 + 8x + 3$;
4) $f(x) = 2x^3 - 3x + 8$;

5) $f(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$;

6) $f(x) = 6x^2 - 10x + 5$;

7) $f(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 - 4x + 3$;

8) 13) $f(x) = 2x^4 - 5x^3 - 8$

9) $f(x) = \frac{x^2-2x+1}{3}$;

10) $f(x) = \frac{5x^3+x^2-7x+4}{2}$

Exercice 19

Déterminer une primitive de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1) $f(x) = (x+3)^3$;

2) $f(x) = (2x-1)^2$;

3) $f(x) = (x^3+2)^3$;

4) $f(x) = (2x+7)^6$;

5) $f(x) = 3(3x+1)^4$;

6) $f(x) = 16(4x-1)^3$;

7) $f(x) = 2(5x^2 + x - 2)^5$;

8) $(x) = -3(1 + 4x^2 - x^3)^4$;

9) $f(x) = -2(3x^2 - 2x + 3)^7$;

10) $f(x) = \frac{(x-1)^5}{3}$.

Exercice 20

Déterminer une primitive de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1) $f(x) = -sinx$;

2) $f(x) = \frac{1}{2}cosx$;

2) $f(x) = sinx - 2cosx$;

4) $f(x) = 2sinx - 5cosx$;

5) $f(x) = 2\sin(3x) + \cos(5x)$;

6) $f(x) = cosx - \frac{1}{4}sinx$;

7) $f(x) = 2[\cos(2x+3) + x]$;

8) $f(x) = sinxconx$,

9) $f(x) = 3sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$;

10) $f(x) = -2cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$

Exercice 21

Trouver la primitive F de f sur I vérifiant la condition donnée :

1) $f(x) = 4x^3$; I = IR et $F(0) = 2$

2) $f(x) = 3x^2 - 8x + 4$; I = IR et $F(1) = 0$;

3) $f(x) = 1 - x + x^2 - x^3$; I = IR et $F(1) = 0$;

4) $f(x) = x^4 + 3x^2 - 4x + 1$; I = IR et $F(2) = 0$;

5) $f(x) = 3x^2 - x + \frac{1}{3}$; I = IR et $F(0) = 0$;

6) $f(x) = (2x+3)^4$; I = IR et $F(0) = 5$;

7) $f(x) = x^2(x^3+6)$; I = IR et $F(-3) = 2$;

8) $f(x) = (3x-1)(\frac{3x^2-2x-1}{2})$; I = IR et $F(1) = 0$;

9) $f(x) = 3x(x^2+1)^4$; I = IR et $F(\sqrt{2}) = 1$;

10) $f(x) = 2cos\frac{x}{2} - 3sin\frac{x}{2}$; I = IR et $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$;

11) $f(x) = cosxsin^2x$; I = IR et $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$;

12) $f(x) = cosx.sin^4x$; I = IR et $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Exercice 22

Déterminer une primitive de la fonction f dans chacun des cas suivants en indiquant l'ensemble de définition :

1) $f(x) = \frac{1}{(4x+3)^2}$;

2) $f(x) = \frac{4}{(1+4x)^2}$;

3) $f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$;

4) $f(x) = \frac{1}{x^2} - x^2$;

5) $f(x) = \frac{x^5}{1+x^{12}}$;

6) $f(x) = \frac{x+1}{x^2-x+1}$

Exercice 23

Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = 3x - 1 + \frac{2}{x}$

Déterminer la primitive F de f sur $]0 ; +\infty[$ qui s'annule pour $x = 1$.

EXEMPLES D'ETUDES DE FONCTIONS NUMERIQUES

Exercice 1

Dans chacun des cas suivants montrer que la fonction f admet le point $I(a\,;b)$ comme centre de symétrie :

1) $f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$; $I(1\,;2)$

2) $f(x) = \frac{x^2-7x+10}{2(1-x)}$; $I(1\,;\frac{5}{2})$

2) $(x) = \frac{-x^2+2x-2}{x-1}$; $I(1\,;0)$

4) $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$; $I(0\,;0)$

5) $(x) = \frac{2x-1}{x-3}$; $I(3\,;2)$

6) $f(x) = 2x - 3 - \frac{3}{x+2}$; $I(-2;-7)$

Exercice 2

Dans chacun des cas suivants montrer que la fonction f admet la droite d'équation $x = a$ comme axe de symétrie :

1) $f(x) = \frac{1}{x^2-2x+3}$; $x = 1$

2) $f(x) = x^2 - 4x + 3$; $x = -\frac{3}{2}$

3) $f(x) = x^2 - 3$; $x = 0$

4) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$; $x = 2$.

Exercice 3

Calculer les limites suivantes puis en déduire les éventuelles asymptotes :

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{x^2-1}{x}$;

2) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{x^2-2x+2}{x-1}$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4x^2}{2x^2+1}$;

4) $\lim\limits_{x\to-\infty} 1 + \frac{1}{3x}$;

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x - 5 + \frac{10}{x+2}$;

6) $\lim\limits_{x\to+\infty} x + 3 + \frac{2}{x-1}$;

7) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4x+3}{2x^2-5x+7}$;

8) $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ <}} \frac{x+1}{\sqrt{3-x}}$;

9) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2+3x+2}{x^2+4x+4}$.

Exercice 4

Déterminer les équations des asymptotes verticales des fonctions f suivantes :

1) $f(x) = \frac{x^2+x-12}{x^2-3x-10}$;

2) $f(x) = \frac{9}{x^2-9}$;

3) $f(x) = \frac{2(x+2)^2}{(x-3)(x+1)}$;

4) $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x-6}$;

5) $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+2}$;

6) $f(x) = \frac{3}{1-x}$.

Exercice 5

Déterminer les équations des asymptotes horizontales des fonctions f suivantes :

1) $f(x) = \frac{x^2-16}{x^2+4}$;

2) $f(x) = \frac{x+2}{x^2-3}$;

3) $f(x) = \frac{(x-1)^2}{(x-3)(x+1)}$;

4) $f(x) = \frac{x+5}{x^2-x-2}$;

5) $f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x^2-4x+4}$;

6) $f(x) = \frac{-2}{x+4}$.

Exercice 6

Déterminer les équations des asymptotes obliques des fonctions f suivantes :

1) $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x-2}$;

2) $f(x) = x - \frac{2}{x}$;

3) $f(x) = -x + 1 - \frac{3}{x+1}$;

4) $f(x) = -2x + \frac{1}{x-3}$;

5) $f(x) = 2x - 1 - \frac{4}{4-x}$;

6) $f(x) = 3x + 2 + \frac{1}{x}$.

Exercice 7

Soit la fonction définie sur IR par $f(x) = -(x-1)^2 + 2$.

1) f est – elle paire ou impaire ?

2) Déterminer la dérivée f' de f.

3) En déduire que f est croissante sur $]-\infty\,;1]$ et décroissante sur $[1\,;+\infty[$.

Exercice 8

Soit $f(x) = 2x^2 + 3x + 4$ définie sur IR.

1) Calculer les limites aux bornes de D_f.

2) Calculer la dérivée $f'(x)$.

3) Etudier le signe de $f'(x)$.

4) En déduire les variations de f puis dresser son tableau de variation.

5) Montrer que f admet un extremum.

6) Construire la courbe (C_f) représentative de la fonction f.

Exercice 9

On considère la fonction f définie par : $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

1) Quel est l'ensemble de définition de la fonction f.

2) Calculer la dérivée f' de f.

3) Etudier son signe et dresser son tableau de variation.

4) Montrer que la droite d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie à (C_f).

5) Tracer la courbe (C_f).

Exercice 10

On considère les fonctions f et g définies sur IR par : $f(x) = -2x^2 + 1$ et $g(x) = x^2 + x - 3$. (C_f) et (C_g) sont les représentations graphiques de f et g.

1) Calculer les limites aux bornes de D_f et D_g.
2) Étudier la parité des fonctions f et g.
3) Calculer les dérivées f' et g' puis étudier leur signe.
4) Dresser les tableaux de variation des fonctions f et g.
5) Etudier la position de (C_f) par rapport à (C_g).
6) En déduire la résolution de l'inéquation $f(x) \leq g(x)$.
7) Tracer (C_f) et (C_g).

Exercice 11

On considère la fonction f définie sur R par : $f(x) = x^3 - 3x - 3$. On note (C_f) sa représentation graphique.

1) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2) Calculer la dérivée $f'(x)$.
3) Etudier son signe et dresser le tableau de variation de f en précisant les extrémums.
4) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 0.
5) Tracer (T) et (C_f).

Exercice 12

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{2x^2-5x+1}{x-3}$. On appelle (C_f) sa courbe représentative.

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2) Déterminer les réels a, b et c tel que, pour tout réel x, $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-3}$
3) Soit (D) la droite représentative de la fonction g définie sur IR par $g(x) = 2x + 1$. On pose $h(x) = f(x) - g(x)$
1) Étudier le signe de $h(x)$ selon les valeurs de x.
2) En déduire la position de (C_f) par rapport à (D).

Exercice 13

Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$.

1) Déterminer son ensemble de définition D_f.
2) Calculer les limites aux bornes de D_f puis en déduire les éventuelles asymptotes.
3) Calculer la dérivée g' de g puis étudier le signe de $g'(x)$.
4) Déterminer la position de la courbe (C_g) par rapport à la droite d'équation $y = 1$ selon les valeurs de x.
5) Construire la courbe (C_g) et les asymptotes.

Exercice 14

Soit f la fonction définie sur R\{2} par : $f(x) = \frac{-x^2+5x-4}{x-2}$. On appelle (C) sa courbe représentative.

1) Montrer que $f(x)$ peut s'écrire sous la forme de $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$
2) En déduire les variations de f.
3) Etudier la position de (C) par rapport à la droite d'équation $y = -x + 3$.
4) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (C) avec les axes de coordonnées.
5) Montrer que le point I(2 ; 1) est centre de symétrie de (C).
6) Placer les points et les droites rencontrées dans les questions précédentes dans un même repère et y tracer (C).

Exercice 15

On considère la fonction g définie par : $g(x) = \frac{1}{x} + x$

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2) Déterminer $g'(x)$.
3) Étudier le signe de la dérivée $g'(x)$.
4) Dresser le tableau de variation de g.
5) La fonction g admet un (des) extremum(s) ? Si oui déterminez le(s).
6) Tracer la représentation graphique de la fonction g.

Exercice 16

Soit f la fonction définie sur $IR\setminus\{1\}$ par : $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$.

On note (C) sa représentation grahique.

1) Etudier les variations de f.

2) Soit A le point d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses. Calculer les coordonnées de A puis une équation de la tangente (T_1) à la courbe (C) en A.

3) Soit B le point d'intersection de C avec l'axe des ordonnées. Calculer les coordonnées de B puis une équation de la tangente (T_2) à la courbe C en B

4) Tracer dans un même repère (T_1), (T_2) et (C).

Exercice 17

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{-x+1}{x+3}$.

On appelle (C) sa courbe représentative.

On appelle D_f, l'ensemble de définition de f.

1) Déterminer D_f, l'ensemble de définition de f.

2) Étudier les limites aux bornes de son ensemble de définition.

3) En déduire les éventuelles asymptotes de (C).

4) Étudier les variations de f.

5) Dresser le tableau de variation de f.

6) Tracer (C).

Exercice 18

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

1) Quel est l'ensemble de définition de f ?

2) Démontrer que f est une fonction impaire.

3) Préciser l'ensemble de dérivabilité de f puis calculer la dérivée f'.

4) Etudier son signe.

5) Dresser le tableau de variation de f en précisant la valeur M de son maximum et la valeur m de son minimum.

4) Tracer la représentation graphique de f.

Exercice 19

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{-x^2+2x-2}{x-1}$

1) Montrer que $f(x) = -x + 1 - \frac{1}{x-1}$.

2) Etudier la fonction f.

3) Montrer que la droite (D) d'équation $y = -x + 1$ est une asymptote de (C_f).

4) Etudier les positions relatives de (C_f) par rapport à (D).

5) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 2.

6) Montrer que le point I(1 ; 0) est centre de symétrie de (C_f).

7) Tracer la courbe (C_f) dans le plan muni d'un repère orthonormé.

Exercice 20

Soit f la fonction de IR vers IR définie par $f(x) = \frac{x^2+x}{x^2+4x+4}$ et soit (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

1) Etudier les variations de f et en déduire les asymptotes éventuelles à la courbe (C).

2) a) Le point $I(-2 ; 1)$ est – il un centre de symétrie pour la courbe (C) ?

b) Quelles sont les coordonnées du point d'intersection A de la courbe (C) avec la droite $y = 1$?

3) Déterminer une équation cartésienne de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

4) Déterminer la position de (C) par rapport à la droite (T).

5) Tracer la courbe (C) et la tangente (T).

Exercice 21

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2+\alpha x+\beta}{x+1}$ où α et β des réels.

1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.

2) Déterminer les réels α et β sachant que $f(0) = 4$ et $f'(0) = -3$.

3) Déterminer les limites aux bornes de D_f.

4) Déterminer les réels a ; b et c tels que : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$.

5) Montrer que la courbe (C_f) de f admet une droite asymptotique oblique (D).

6) Etudier la position de (C_f) par rapport à l'asymptote oblique (D).

7) Etudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f.

8) Etudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

9) Déterminer une équation de la tangente (T_0) à (C_f) au point $x = 0$.

10) Montrer que le point $I(-1\,;-1)$ est centre de symétrie de (C_f).

11) Calculer $f(3)\,;f(-3)$.

12) Tracer la courbe (C_f), la droite (D) et la tangente (T_0) dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

Exercice 22

Soit la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{4x-3}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f.

2) Calculer les limites aux bornes D_f.

3) Préciser l'ensemble de dérivabilité de la fonction f puis calculer sa dérivée.

4) Etudier le sens de variation de f.

5) Dresser le tableau de variation de f.

6) Tracer la courbe (C_f) représentative de la fonction f.

Exercice 23

Soit la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{-x+2}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f.

2) Calculer les limites aux bornes D_f.

3) Etudier les variations de f.

4) Tracer la courbe (C_f) représentative de la fonction f.

Exercice 24

Soit la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{|2x-1|}$ et (C_f) sa courbe représentative.

1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f.

2) Calculer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

3) Calculer la dérivée $f'(x)$.

4) Etudier le sens de variation de f.

5) Dresser le tableau de variation de f.

6) Tracer la courbe (C_f).

Exercice 25

Soit la fonction f définie sur $[-\pi\,;\,\pi]$ par $f(x) = 2\cos x$.

1) Déterminer la dérivée $f'(x)$.

2) Déterminer le signe de dérivée puis en déduire le sens de variation de f.

3) Dresser le tableau de variation de f.

4) Construire la courbe représentative de la fonction f.

Exercice 26

Soit la fonction f définie sur IR par $f(x) = \sin(2x)$. On note (C) la représentation graphique de f dans le repère orthonormé.

1) Calculer $f(0)\,;f\left(\frac{\pi}{6}\right)\,;f\left(\frac{\pi}{12}\right)\,;f\left(\frac{\pi}{2}\right)\,;f\left(\frac{\pi}{8}\right)f(\pi)$.

2) Montrer que f est impaire.

3) Que peut – on en déduire pour la courbe représentative (C) ?

4) Soit x un nombre réel. Comparer $f(\pi + x)$ et $f(x)$. Que peut – on en déduire pour f ?

5) Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$ puis strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right]$.

6) Représenter graphiquement la fonction f sur $\left[-\frac{5\pi}{4};\frac{7\pi}{4}\right]$.

Exercice 27

Soit la fonction f définie pour tout réel $x \neq -\frac{\pi}{2} + k\pi$ par $f(x) = \tan x$.

1) Calculer $f(0)\,;f\left(\frac{\pi}{6}\right)\,;f\left(\frac{\pi}{4}\right)\,;f\left(\frac{\pi}{3}\right)\,;f(\pi)$.

2) a) Montrer que pour tout réel $\neq -\frac{\pi}{2} + k\pi$ $\tan(x+\pi) = \tan x$. Que peut – on en déduire pour la courbe représentative de f ?

b) Montrer que pour tout réel $x \neq -\frac{\pi}{2} + k\pi$, $\tan(-x) = -\tan x$. Que peut – on en déduire pour f ?

3) a) Montrer que : $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \tan x = +\infty$.

b) Montrer que $\tan'(x) = 1 + \tan^2 x$ puis en déduire le sens de variation de f sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$.

c) Tracer la courbe représentative de la fonction f sur $[-2\pi;\ 2\pi]$.

Exercice 28

Déterminer les variations de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1) $f(x) = x + \sin x$ définie sur IR.

2) $f(x) = 3\sin x + 1$ définie sur $[-\pi;\ \pi]$.

3) $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ définie sur $[0;\ 2\pi]$.

SUITES NUMERIQUES

Exercice 1

1) Soit (V_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $V_n = n^2 + n + 1$.

Exprimer en fonction de n les termes suivants :

a) V_{n+1} ; b) V_{n-1} ; c) V_{2n} ; d) V_{3n+1} ; e) $V_{n+1} - V_n$.

2) Soit (U_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $U_n = \frac{3n-2}{n^2+3}$.

Exprimer en fonction de n les termes suivants :

a) U_{n-2} ; b) U_{n+1} ; c) U_{2n-1} ; d) U_{4n} ; e) $U_{n^2-1} - U_{n^2}$.

Exercice 2

Etudier le sens de variation des suites suivantes :

1) $U_n = 2n^3 + n$; 2) $U_n = \frac{2n^2-1}{n^2+n}$; 3) $U_n = \frac{2n-3}{4n+1}$;

4) $U_n = \frac{3n^2-2n+1}{n^2-n+2}$; 5) $U_n = -\frac{1}{n}$; 6) $U_n = \sqrt{n^2+n+1}$;

7) $U_n = 2^n - 4$; 8) $U_n = \frac{(0{,}75)^n}{n^3}$; 9) $U_n = \frac{n}{2^n}$;

10) $U_n = (-3)^n$; 11) $U_n = -\frac{1}{2+\sqrt{n}}$; 12) $U_n = 2^n - n$.

Exercice 3

Pour chaque cas calculer les quatre premiers termes de la suite U_n (avec $n \in$ IN) :

a) $U_n = 1 + \frac{1}{n}$; b) $U_n = n + \frac{1}{n}$; c) $U_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$;

d) $U_n = \frac{1}{n+2}$; e) $U_n = n - n^2$; f) $U_n = \frac{2n+1}{n+3}$;

g) $U_n = 3^n$; h) $U_n = \sqrt{n^2+2}$; i) $U_n = \frac{n-1}{\sqrt{n}}$.

Exercice 4

On considère les suites numériques (U_n) et (V_n).

Dans chacun des cas suivants, calculer U_1 ; U_2 ; U_3 ; U_4 ; U_5 pour la suite (U_n) et V_1 ; V_2 ; V_3 ; V_4 ; V_5 pour la suite (V_n) sachant que :

1) $U_{n+1} = 2U_n - 2$; $(U_0 = 3)$ et $V_n = U_n - 2$;

2) $2U_{n+1} = U_n - 1$; $(U_0 = -8)$ et $V_n = U_n + 1$;

3) $5U_{n+1} = U_n + 8$; $(U_0 = 1)$ et $V_n = U_n - 1$;

4) $U_{n+1} = \frac{5U_n+3}{U_n+3}$; $(U_0 = 1)$ et $V_n = \frac{U_n-3}{2U_n+1}$;

5) $U_{n+1} = \left(\frac{U_n}{1-U_n}\right)^2$; $(U_0 = -2)$ et $V_n = \left(\frac{U_n+1}{U_n}\right)^2$;

6) $U_{n+1} = \frac{1}{2}{U_n}^2 - 3$; $(U_0 = 2)$ et $V_n = \frac{{U_n}^2}{U_n-1}$.

Exercice 5

On considère les suites (U_n), (V_n) et (W_n) définies par :

$(U_n) : \begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + 1 \end{cases}$; $(V_n) : \begin{cases} V_0 = 2 \\ V_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{V_n}{1+V_n}\right) \end{cases}$ et $(W_n) : \begin{cases} W_0 = 2 \\ W_{n+1} = \frac{2W_n+3}{W_n+4} \end{cases}$

1) Calculer U_1 ; U_2 et U_3.

2) Calculer V_1 ; V_2 et V_3.

3) Calculer W_1 ; W_2 ; W_3

Exercice 6

(U_n) désigne une suite arithmétique de premier terme $U_0 = 1$ et de raison 4.

1) Donner l'expression de (U_n) en fonction de n.

2) Calculer U_1, U_2 et U_3.

Exercice 7

On considère (Un) une suite arithmétique de raison r.

1) Calculer U_4, U_{10}, U_{20} sachant que $U_0 = 2$ et $r = -3$.

2) Calculer U_0, U_8 et U_{100} sachant que $U_5 = 3$ et $r = \frac{1}{2}$.

3) Calculer U_0, U_2 et U_{30} sachant que $r = 2$ et $U_1 = 4$.

4) Calculer r, U_1 et U_5 sachant que $U_0 = 2$ et $U_2 = 10$.

5) Calculer r, U_0 et U_7 sachant que $U_1 = 10$ et $U_4 = 16$.

6) Calculer r, U_0 et U_{18} sachant que $U_5 = 17$ et $U_{10} = 12$.

Exercice 8

(U_n) est une suite arithmétique de premier terme U_0 et de raison r. On donne $U_{11} = 12$ et $U_{24} = 38$.

1) Pour un entier $p \leq n$, exprimer U_n en fonction de $(U_p$.

2) En déduire l'expression de U_{24} en fonction de U_{11} et de r puis calculer r.

3) En déduire la valeur de U_0.

Exercice 9

Soit (U_n) la suite définie par $U_0 = 17$ et pour tout n, $U_{n+1} = U_n + 4$.

1) Calculer U_1, U_2, U_3 et U_4.

2) Cette suite est – t – elle arithmétique ou géométrique ?

3) Exprimer U_n en fonction de U_0 et de n.

Exercice 10

Les premiers termes d'une suite sont : -2 ; 1 ; 4 ; 7 ; 10 ; 13.

1) Ces termes sont –ils ceux d'une progression arithmétique ? Pourquoi ?

2) Quel serait le septième terme de cette suite ?

3) Quel serait le trois cent cinquantième terme ?

Exercice 11

La suite (U_n) est arithmétique de raison r. Sachant que $U_{20} = 166$ et $U_{80} = 646$:

1) Déterminer r, U_0, U_5, U_{10} et U_{30}.

2) Calculer $S = U_{20} + U_{21} + \cdots + U_{80}$

Exercice 12

Soit la suite (U_n) définie par $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = \frac{2U_n}{2+3U_n}$

1) Calculer les termes U_1 et U_2.

2) Montrer que la suite (U_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

3) On admet que pour tout n, U_n n'est pas nul. On pose $V_n = 1 + \frac{2}{U_n}$

a) Calculer V_0, V_1 et V_2..

b) Calculer V_{n+1} en fonction de V_n. En déduire que (V_n) est une suite arithmétique.

c) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

d) En déduire les limites des suites (V_n) et (U_n).

Exercice 13

1) Montrer que ces suites sont arithmétiques et préciser leur raison et leur premier terme.

a) $U_{n+1} = U_n + \frac{1}{2}$;

b) $V_n = 5 - 2n$;

c) $W_n = (n+1)^2 - n^2$;

d) $U_n = \frac{n+1}{2}$

2) Pour chacune des suites :

a) En déduire son sens de variation.

b) Etudier sa convergence.

c) Calculer le terme de rang 200.

d) Calculer la somme des termes jusqu'au rang 200.

Exercice 14

On désigne par (U_n) une suite géométrique de premier terme $V_0 = 2$ et de raison $q = 3$.

1) Donner U_n en fonction de n.

2) Calculer U_1, U_2 et U_3.

Exercice 15

1) Montrer que ces suites sont géométriques et préciser leur raison et leur premier terme.

a) $U_n = 2^{3n+1} \times (-1)^n$;

b) $V_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$;

c) $W_n = (-4)^{2n+1}$;

d) $Y_n = \frac{1}{3^{n+1}} \times 2^n$.

2) Pour chacune des suites :

a) En déduire son sens de variation.

b) Etudier sa convergence.

c) Calculer le terme de rang 60.

d) Calculer la somme des termes jusqu'au rang 60.

Exercice 16

(U_n) est une suite géométrique de premier terme $U_0 = 8$ et de raison $q = \frac{1}{2}$.

1) Calculer les termes U_1, U_2 et U_{20}.

2) Montrer que la somme $S = U_0 + U_1 + \cdots + U_{20} = \frac{2^{21}-1}{2^{17}}$

Exercice 17

On considère une suite géométrique (U_n) de premier terme $U_1 = 1$ et de raison $q = -2$.

1) Calculer U_2, U_3, U_4, U_{10} et U_{15}.

2) Calculer la somme $S = U_1 + U_2 \dots + U_{15}$.

Exercice 18

1) La suite (U_n) est géométrique de raison $q = 1$. Calculer U_0, U_1, U_2, U_{10} sachant que $U_8 = -1$.

2) La suite (V_n) est géométrique de raison q.

a) Calculer q, $V_0, V_1, V_2, V_{10}, V_{90}$ sachant que $V_4 = 10, V_6 = 20$ et $q > 0$.

b) Calculer $S = V_{10} + V_{11} + \cdots V_{90}$.

Exercice 19

On définit une suite (U_n) par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + n - 1 \end{cases}$

1) Montrer que $U_1 = -\frac{1}{2}$; $U_2 = -\frac{1}{4}$; $U_3 = \frac{7}{8}$.

2) Donner la relation entre les trois termes consécutifs d'une suite géométrique. En déduire que la suite (U_n) n'est pas géométrique.

2) on définit la suite (V_n) par $V_n = U_n - 2n + 6$. Calculer V_0, V_1, V_2, V_3.

3) Montrer que la suite (V_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$.

4) En déduire l'expression de V_n puis celle de U_n en fonction de n.

5) Déterminer $S_n = V_0 + V_1 + \cdots V_n$

Exercice 20

On considère la suite (Un) définie par : $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \frac{2}{1+U_n} \end{cases}$

1) Calculer U_1 et U_2. La suite (U_n) est – elle arithmétique ou géométrique ?

2) Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n on a : $0 \leq U_n \leq 3$.

3) On considère la suite (V_n) définie pour tout entier naturel n par : $V_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 2}$

a) Calculer V_0, V_1 et V_2. Démontrer que (V_n) est géométrique.

b) Exprimer V_n en fonction de n.

c) Exprimer U_n en fonction de V_n. Puis U_n en fonction de n.Que vaut U_{10} ?

d) En déduire les limites des suites (V_n) et (U_n).

Exercice 21

On définit la suite (U_n) par $U_0 = 1$ et pour tout n, $U_{n+1} = 2U_n + n + 1$.

On pose $V_n = U_n + n + 2$.

1) Calculer V_0 ; V_1, V_2 et V_3.
2) Démontrer que, pour tout n, $V_{n+1} = 2V_n$.
3) En déduire l'expression de V_n en fonction de n.
4) Démontrer que pour tout n : $U_n = 3 \times 2^n - n - 2$
5) Etudier le sens de variation de (U_n).
6) Etudier la convergence de (V_n) et de (U_n).

Exercice 22

Étudier la convergence de la suite (U_n) dans chacun des cas suivants :

1) $U_n = n^2 - 5n - 2$; 2) $U_n = \sqrt{n} + \sqrt{n+2}$; 3) $U_n = 1 + \frac{1}{n}$;

4) $U_n = n - \sqrt{3 + n^2}$; 5) $U_n = n - \frac{1}{n+1}$; 6) $U_n = n + \frac{1}{n}$;

7) $U_n = 2(-1)^n$; 8) $U_n = \frac{-4\times 3^n}{4+3^n}$; 9) $U_n = 10\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$

Exercice 23

Un fournisseur fait une étude sur la fidélité de sa clientèle depuis l'année $n = 0$, où il y a eu 200 clients. Chaque année, sa clientèle est composée de 50% des clients de l'année précédente auxquels s'ajoutent 400 nouveaux clients.

1) Soit U_n le nombre de clients l'année n.
Justifier que $U_{n+1} = 0{,}5U_n + 400$, puis calculer U_1, U_2, U_3 et U_4.
2) On considère la suite (V_n) définie par $V_n = U_n - 800$.
Vérifier que $V_{n+1} = 0{,}5V_n$. En déduire la nature de la suite (V_n).
3) En déduire l'expression de V_n, puis celle de U_n, en fonction de n.
4) Étudier la limite de la suite (U_n).

Exercice 24

Le 1er janvier 2005, une grande entreprise compte 1500 employés.
Une étude montre que lors de chaque année à venir, 10% de l'effectif du 1er janvier partira à la retraite au cours de l'année. Pour ajuster ses effectifs à ses

besoins, l'entreprise embauche 100 jeunes dans l'année. Pour tout entier n on appelle U_n le nombre d'employés le 1er janvier de l'année $(2005 + n)$.

1) Déterminer U_0, U_1, U_2 et U_3
2) Montrer que $U_{n+1} = 0{,}9U_n + 100$.
3) On pose $V_n = U_n - 1000$.
a) Déterminer V_0, V_1, V_2 et V_3.
b) Montrer que (V_n) est géométrique.
c) En déduire V_n puis U_n en fonction de n.
d) En déduire quel sera l'effectif de l'entreprise le 1er janvier de l'année 2027.

Exercice 25

Un quartier comprenait 2400 habitants au premier janvier 1980. On estime que la ville accueille tous les ans 2% de nouveaux arrivants et a un taux annuel de natalité de 3%. On constate curieusement un nombre fixe de décès qui est de 60 personnes par an. On veut déterminer à partir de quelle année la population de la ville sera supérieure au double de la population en 1980.

1) Quelle était la population estimée de la ville le premier janvier 1981 ?
2) On note P_n la population de la ville à l'année $1980 + n$.
Exprimer P_{n+1} en fonction de P_n.
3) On pose $q_n = P_n - 1200$.
a) Montrer que cette suite est une suite géométrique.
b) Exprimer q_n puis P_n en fonction de n.
4) Montrer que (P_n) est croissante.

Exercice 26

Ali place un capital initial $U_0 = 180.000$ F à un taux annuel de 6%, les intérêts étant simples, c'est – à – dire que le capital d'une année est égal à celui de l'année précédente augmenté de 6% du capital initial.

On note U_n le capital d'Albert au bout de n années, capital exprimé en euros.

1) Montrer que, pour tout entier n, $U_{n+1} = U_n + 10800$. Qu'en déduit – on ?
2) Pour tout entier n, exprimer U_n en fonction de n.
3) De quel capital Ali dispose – t – il au bout de 10 ans ?

Exercice 27

Un chef d'entreprise paie 60 000 F par an pour l'entretien de ses machines. Lors du renouvellement du contrat pour les dix prochaines années, une société lui propose deux formules :

Contrat A : Le contrat augmente de 5% par an.

1) Exprimer en fonction de n le montant U_n du contrat lors de la $n^{ième}$ année.
2) Calculer le montant du contrat pour la $10^{ème}$ année.
3) Calculer la somme payée, au total, au bout de ces 10 années.

Contrat B : Le contrat augmente de 3500 F par an.

1) Exprimer en fonction de n le montant V_n du contrat lors de la $n^{ième}$ année.
2) Calculer le montant du contrat pour la $10^{ème}$ année.
3) Calculer la somme payée, au total, au bout de ces 10 années.
4) Quel est le contrat le plus avantageux ?

TRANSFORMATIONS DU PLAN

Exercice 1

ABCD est un carré de centre O et r la rotation de centre O qui transforme le point A en B.

1) Quel est l'angle α de la rotation ?
2) Préciser l'image du point D par la rotation r.
3) Les points K, I, L et J sont les milieux respectifs des segments [BC], [CD] [DA] et [AB]. Soit r' la rotation de centre O qui transforme le point I en D. Quelles sont les images des points A ; C ; K ; L ; J et B par r' ?

Exercice 2

ABCD est un carré direct du plan orienté tel que $(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$. f est la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et g la réflexion d'axe (AC). On note $h = g \circ f$.

1) Pourquoi la translation h est – elle un antidéplacement ?
2) Quelles sont les images de A et B par h ?
3) Identifier alors h.

Exercice 3

Les points A, B et C sont tel que A est barycentre de (B ; 3) et (C ; 1).
Justifier en déterminant le rapport que :

1) C est l'image de B par une homothétie de centre A.
2) B est l'image de C par une homothétie de centre A.
3) C est l'image de A par une homothétie de centre B.
4) A est l'image de B par une homothétie de centre C.

Exercice 4

Soit un trapèze ABCD de bases [AB] et [CD] tel que AB = 2 et CD = 5.
Déterminer le centre et le rapport des homothéties suivantes :

1) h qui transforme A en D et B en C.
2) h' qui transforme A en C et B en D.

Exercice 5

Soient A un point du plan P et les applications f et g définiés par :

f(M) = M' tel que M' est le barycentre de (A ; 3) et (M ; 1)

g(M) = M'' tel que M'' est le barycentre de (A ; −2) et (M ; 5)

Montrer que f et g sont deux homothéties que l'on caractérisera.

Exercice 6

ABC est un triangle ; h l'homothétie de centre $h_{(A\,;\,-1)}$ et h' l'homothétie $h_{(B\,;\,2)}$

1) Construire l'image du triangle ABC par $h_o h'$.

2) Construire l'image du triangle ABC par $h'_o h$.

Exercice 7

Soit A et B deux points tel que AB = 5cm. Soit h l'homothétie de centre $h_{(A\,;\,-2)}$ et h' l'homothétie $h_{(B\,;\,3)}$. On considère les points A_1 ; B_1 ; A_2 et B_2 tels que : $h(A) = A_1$; $h(B) = B_1$; $h'(A_1) = A_2$ et $h'(B) = B_2$.

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $h'_o h$.

Exercice 8

1) Soit h l'homothétie définie analytiquement par : $\begin{cases} x' = \frac{x}{3} + 1 \\ y' = \frac{y}{3} - 1 \end{cases}$

Déterminer les éléments caractéristiques de l'homothétie h.

2) Soit h' l'application du plan vers lui même qui, à tout point $M(x\,;\,y)$, associe $M'(x'\,;\,y')$ défini par : $\begin{cases} x' = x - 3 \\ y' = y + 1 \end{cases}$

Déterminer la nature de l'application h'.

3) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $h_o h'$.

Exercice 9

Soit les points A(1 ; 2) ; B(3 ; 1) et I(−1 ; −1).

1) Déterminer les coordonnées des points A' et B' images de A et B par l'homothétie $h(O\,;\frac{3}{2})$.

2) Déterminer les coordonnées des points A'' et B'' images de A et B par l'homothétie $h(I\,;-\frac{2}{3})$.

3) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $h'_o h$.

Exercice 10

ABC est isocèle rectangle en A tel que $(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$. I, J et K sont les milieux respectifs de [BC], [AC] et [AB]. On note r la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et t la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. On pose $f = r_o t$ et $g = t_o r$.

1) Trouver l'image de K par f et celle de J par g. Préciser la nature et les éléments caractéristiques de f et de g.

2) Préciser la nature de la transformation $g_o f$.

3) Quelle est l'image de A par $g_o f$. Caractériser cette transformation.

STATISTIQUE

Exercice 1

On interroge un groupe de personnes sur le nombre de journaux vus par semaine. Le tableau suivant résume le résultat obtenu :

Classes	[0 ; 3[	[3 ; 6[	[6 ; 9[	[9 ; 12[	[12 ; 15[	[15 ; 18[	[18 ; 21[
Effectifs	4	8	10	30	36	6	6

1) Sur combien de personnes le sondage a – t – il été réalisé ?

2) Quelle est la classe modale de cette série ?

3) Quelle est l'amplitude d'une classe ?

4) Représenter la série statistique par un histogramme.

5) Compléter le tableau avec les effectifs cumulés croissants et les effectifs cumulés décroissants.

6) Déterminer la médiane et la moyenne de cette série statistique.

Exercice 2

On a consigné les primes en centaines de mille de fin d'année attribuées aux salariés d'une société dans le tableau suivant.

Primes	[0 ; 6[	[6 ; 12[	[12 ; 18[	[18 ; 24[
Effectifs	41	79	78	2

1) Quel est l'effectif de cette société ?

2) Quelle est la population étudiée ?

3) Déterminer la prime moyenne de cette entreprise.

4) Calculer la médiane et l'écart moyen de cette série statistique.

5) Calculer la variance et l'écart type de cette série.

Exercice 3

Le résultat d'une étude sur le temps vécu (mois) des habitants dans un immeuble est regroupé dans le tableau des effectifs suivants :

Temps	[0 ; 4[	[4 ; 8[	[8 ; 12[	[12 ; 16[	[16 ; 20[	[20 ; 24[	[24 ; 28[
Effectifs	34	36	32	24	20	18	16

1) Quel est l'effectif total de la population ?

2) Quelle est le caractère étudié ? Quelle est la cl: se modale ?

3) Calculer le temps moyen. 4) Calculer la médiane et l'écart moyen.

5) Calculer la variance et l'écart type. 6) Construire l'histogramme de cette série.

Exercice 4

La répartition des travailleurs d'une entreprise par tranches de salaire net annuel est en millions de FCFA.

Salaire	[0 ; 5[	[5 ; 10[	[10 ; 15[	[15 ; 20[	[20 ; 30[	[30 ; 50[
Effectif	5	14	37	27	14	3

1) Tracer l'histogramme de cette distribution.

2) Quel est le pourcentage de travailleurs gagnants plus de 30 millions ?

3) Calculer le salaire annuel moyen et l'écart type de la distribution des salaires.

4) Calculer la médiane et l'écart moyen de cette distribution.

Exercice 5

On considère la série statistique suivante :

Classes	[0 ; 3[	[3 ; 6[	[6 ; 12[	[12 ; 20[	[20 ; 25[
Effectifs	10	15	10	20	25

1) Représenter cette série statistique par un histogramme.

2) Calculer les effectifs cumulés croissants et les représenter graphiquement. En déduire une valeur approchée de la médiane de la série statistique..

3) Calculer une valeur approchée de la moyenne de la série statistique.

4) Calculer l'écart moyen et l'écart type de cette série statistique.

Exercice 6

La gendarmerie a effectué un contrôle de vitesse en (km/h) sur une route nationale à deux voies. La limitation est de 90 km/h. Voici les résultats groupés en classes :

Vitesse	[60 ; 70[	[70 ; 80[	[80 ; 90[	[90 ; 100[	[100 ; 120[
Effectifs	1	6	20	19	4

1) Quel est le caractère étudié ?

2) Quel est le nombre de véhicules contrôlés ?

3) Quel est le pourcentage de véhicule roulant trop vite ?

4) Construire un histogramme représentant la série statistique.

5) Calculer la moyenne, l'écart moyen, l'écart type et la variance de cette série.

Exercice 7

Le tableau ci – dessous donne la répartition des tailles d'un échantillon de 100 élèves d'une classe de 1ère d'un établissement :

Tailles (cm)	[80 ; 110[	[110 ; 140[	[140 ; 170[	[170 ; 200[
Effectifs	9	45	34	12

1) Calculer les effectifs cumulés croissants.

2) Dans quelle classe se situe la médiane de cette série ?

3) Calculer la moyenne de cette série statistique.

4) Représenter graphiquement les effectifs cumulés croissants de cette série.

5) A l'aide du graphique obtenu, donne une valeur approchée de la médiane.

6) Calculer l'écart – type de cette série puis interpréter le résultat.

Exercice 8

Le tableau ci – dessous résume le volume des transactions pour les valeurs à terme lors de 100 journées consécutives de Bourse:

Volume	[80 ; 100[	[100 ; 120[	[120 ; 130[	[130 ; 140[	[140 ; 160[	[160 ; 170[
Effectifs	12	14	23	28	18	5

1) Quelle est la classe modale ?

2) Déterminer la moyenne et l'écart type.

3) Déterminer la médiane.

4) Construire l'histogramme de cette série.

Exercice 9

Une boutique de confection a relevé le montant mensuel en francs de ses ventes :

Montant	[0 ; 300[	[300 ; 600[	[600 ; 900[	[900 ; 1200[	[1200 ; 1500[
Effectifs	127	82	90	48	53

1) Déterminer le montant moyen des ventes.

2) Déterminer l'écart type.

3) Tracer le polygone des effectifs cumulés croissants ainsi que celui des effectifs cumulés décroissants.

4) Calculer la médiane.

Exercice 10

On a relevé dans une entreprise de 125 employés le temps consacré à une activité sportive par semaine. On obtient le tableau suivant :

Temps (en minutes)	[0 ; 20[	[20 ; 40[	[40 ; 60[	[60 ; 100[	[100 ; 140[	[140 ; 200[
Effectifs	35	41	30	12	5	2

1) Combien d'employés consacrent moins de 40 minutes à cette activité ?

2) Calculer le pourcentage d'employés consacrant de 20 à 100 minutes.

3) Calculer la moyenne et l'écart moyen. 4) Calculer la variance et l'écart type.

Exercice 11

Au cours d'une fabrication de fromages de chamelles, on a relevé les masses (en grammes) suivantes des fromages.

Masse	[80 ; 85[	[85 ; 90[	[90 ; 95[	[95 ; 100[	[100 ; 105[	[110 ; 115[
Effectifs	9	14	18	25	16	8

1) Quelle est la classe qui a le plus d'effectif ?

2) Calculer la masse moyenne et l'écart moyen.

3) Représenter l'histogramme de cette série.

4) Calculer la variance et l'écart type de cette série.

Exercice 12

A l'occasion d'une course cycliste, on a relevé le nombre de kilomètres parcourus par les participants ayant été contraints à l'abandon :

Classes	[0 ; 20[	[20 ; 30[	[30 ; 40[	[40 ; 50[	[50 ; 60[	[60 ; 80[
Effectifs	5	15	18	13	20	19

1) Calculer le nombre de cyclistes ayant abandonnés.

2) Calculer la moyenne et la médiane. 3) Calculer l'écart type de cette série.

GEOMETRIE DANS L'ESPACE

Exercice 1

On donne les points A(4 ; 3 ; 5), B(−3 ; 2 ; 1), C(2 ; −3 ; 0) et D(0 ; 0 ; −3).
Trouver les coordonnées de leurs projections orthogonales :

a) sur le plan (Oxy) ; b) sur le plan (Oxz) ; c) sur le plan (Oyz) ;
d) sur l'axe des abscisses ; e) sur l'axe des ordonnées ; f) sur l'axe des cotes

Exercice 2

Trouver une équation cartésienne du plan (P) défini par les points :

1) A(0 ; 0 ; 1), B(1 ; 0 ; 0) et C(0 ; 1 ; 0) ;
2) A(1 ; 1 ; 1), B(2 ; 0 ; 1) et C(−1 ; 2 ; 4).
3) O(0 ; 0 ; 0), A(−6 ; 4 ; 3) et B(2 ; 8 ; 4)

Exercice 3

Trouver une équation cartésienne du plan (P) défini par A un point de (P), $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs directeurs de (P) :

1) A(1 ; 2 ; 1), $\vec{u}(4 ; 0 ; 3)$ et $\vec{v}(1 ; 3 ; -1)$;
2) A(1 ; 0 ; 2), $\vec{u}(2 ; -1 ; 3)$ et $\vec{v}(-1 ; 4 ; 5)$

Exercice 4

Dans l'espace muni d'un repère $(O ; \vec{\imath} ; \vec{\jmath} ; \vec{k})$.

1) On considère le plan (P) dont une équation cartésienne est $x + y - z - 1 = 0$. Donner une représentation paramétrique du plan (P).

2) La droite (D) passe par le point A(2 ; 1 ; 3) et admet $\vec{u}(5 ; 2 ; 3)$ comme vecteur directeur. Donner une équation paramétrique de (D).

3) Donner une représentation paramétrique de la droite passant par les A(1 ; −2 ; 3) et B(3 ; 2 ; −1).

4) Donner une représentation paramétrique de la droite (D) passant par A(0 ; −1 ; 2) et parallèle à la droite passant par les points B(−1 ; 2 ; 3) et C(1 ; 1 ; 4).

5) Donner une représentation de la droite (D) passant par le point (−1 ; 2 ; −3) et orthogonale au plan d'équation $2x - 3y + 4z + 1 = 0$.

Exercice 5

Donner une équation cartésienne puis des équations paramétriques du plan (P) dans chacun des cas suivants :

1) le plan (P) passe par M(2 ; 5 ; 6) et parallèle au plan (P') passant par O(0 ; 0 ; 0), A(−6 ; 4 ; 3) et B(2 ; 8 ; 4) ;
2) le plan (P) passe par M(−1 ; −4 ; 1) et a pour vecteur normal $5\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 5\vec{k}$.
3) le plan (P) passe par M(3 ; 1 ; 1) et est perpendiculaire à la droite (BC) où B(1 ; 0 ; 5) et C(3 ; −3 ; 8).

Exercice 6

Dans un repère orthonormé $(O ; \vec{\imath} ; \vec{\jmath} ; \vec{k})$ dans l'espace, on considère les points : A(0 ; 2 ; 5), B(3 ; 0 ; 5) et C(3 ; 2 ; 0).

1) Placer les points dans le repère.
2) Déterminer une équation du plan (ABC).
3) Déterminer une équation du plan (P) passant par C et de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$.

Exercice 7

On considère l'espace d'un repère $(O ; \vec{\imath} ; \vec{\jmath} ; \vec{k})$.

Soit la droite (D) dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 - 2t \ (t \in \mathrm{IR}). \\ z = -1 - t \end{cases}$

1) Donner les coordonnées de trois points appartenant à (D).
2) Préciser les coordonnées du point de (D) ayant 2 pour abscisse.
3) Préciser les coordonnées du point de (D) ayant pour ordonnée −4.
4) Préciser les coordonnées du point de (D) ayant 6 pour cote.
5) Donner un vecteur directeur de (D).
6) Donner un vecteur directeur de (D) de cote 7.

Exercice 8

On considère l'espace muni d'un repère $(O ; \vec{\imath} ; \vec{\jmath} ; \vec{k})$.

Soit les droites (D) et (D') de représentations paramétriques respectives :

$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 + t \ (t \in \mathrm{IR}) \\ z = 1 + t \end{cases}$ et $\begin{cases} x = -1 + 3t' \\ y = -2 + t' \ (t' \in \mathrm{IR}). \\ z = t' \end{cases}$

1) Démontrer que les droites (D) et (D') sont sécantes.

2) Préciser les coordonnées de leur point d'intersection.

Exercice 9

On considère les deux plans (P) et (Q) dont les équations sont données ci – dessous : (P) : $x + 3y - z + 1 = 0$ et (Q) : $2x + 6y + \alpha z + 5 = 0$

1) Donner un vecteur normal $\vec{n}$ au plan (P) et un vecteur normal $\vec{m}$ au plan (Q).

2) Comment choisir α pour que (P) et (Q) soient perpendiculaires ?

3) Comment choisir α pour que (P) et (Q) soient parallèles.

Les plans (P) et (Q) sont – ils alors confondus ?

4) Dans cette question, on suppose que $\alpha = 1$. Les plans (P) et (Q) sont donc sécants suivant une droite (D).

Résoudre le système : $\begin{cases} x + 3y - z + 1 = 0 \\ 2x + 6y + z + 5 = 0 \end{cases}$

Déterminer deux points A et B de la droite (D). En déduire un vecteur directeur $\vec{v}$ de la droite (D).

Exercice 10

1) On considère trois plans (P), (Q) et (R) dont les équations sont données ci – dessous : (P) : $2x - y + 3z - 1 = 0$; (Q) : $3x + 2y - z + 2 = 0$ et (R) : $x - 3y + 2z - 3 = 0$.

On admet que ces trois plans se coupent en un unique point A. déterminer les coordonnées de A.

2) On considère plans trois (P), (Q) et (R) dont les équations sont données ci – dessous : (P) : $x + 2y + z - 3 = 0$; (Q) : $x - y + z - 2 = 0$ et (R) : $x + y - z + 1 = 0$.

Déterminer l'intersection de ces trois plans.

Exercice 11

Dans l'espace rapporté à un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$. Les questions suivantes sont indépendantes.

1) On considère le plan (P) d'équation cartésienne $x + 2y - z - 4 = 0$. Donner un vecteur normal à (P) et un point de (P).

2) Donner une équation cartésienne des plans (xOy), (yOz) et (xOz) et un vecteur normal à chacun de ces trois plans.

3) On considère le plan (Q) d'équation cartésienne $2x - y + 3z = 0$. Le vecteur $\vec{v}(-4 ; 2 ; 6)$ est – il un vecteur normal au plan (Q) ?

Exercice 12

Déterminer la distance du point A au plan (P) :

1) A(1 ; 0 ; 2) et (P) : $2x + y + z + 4 = 0$;

2) A(3 ; 2 ; 1) et (P) : $-x + 5y - 4z = 5$.

Exercice 13

Dans l'espace rapporté à un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$

1) Donner une équation cartésienne du plan passant par les points A(2 ; 1 ; 3), B(−1 ; 2 ; −3) et C(3 ; −2 ; −1).

2) Donner une équation cartésienne du plan (P) passant par le point A(1 ; 3 ; −2) et parallèle au plan (P') d'équation cartésienne $2x - y + z + 4 = 0$.

3) On donne les points A(1 ; 2 ; −1), B(3 ; 2 ; 0), C(2 ; 1 ; −1) et D(1 ; 0 ; 4).

Déterminer l'intersection des plans (OAB) et (OCD).

Exercice 14

L'espace est muni d'un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$. On considère les plans (P) et (P') d'équations respectives $2x - y + 2z + 3 = 0$ et $-3x + 4y + 5z - 1 = 0$.

1) Montrer que les plans (P) et (P') sont sécants.

2) Montrer que les plans (P) et (P') sont orthogonaux.

Exercice 15

L'espace est muni d'un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$. Soit les points A(2 ; −3 ; 1) et B(−3 ; 1 ; 2) et soit le vecteur $\vec{u}(-1 ; 2 ; 1)$. On désigne par (D) la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ et par (P) le plan passant par B et perpendiculaire à (D).

1) Donner une représentation paramétrique de la droite (D).

2) Donner une équation cartésienne du plan (P).

3) Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal de A sur (P).

4) En déduire la distance du point A au plan (P).

Exercice 16

L'espace est muni d'un repère $(O\ ;\vec{\imath}\ ;\vec{\jmath}\ ;\vec{k})$. on considère les plans (P) et (P') d'équations respectives $x+2y-z+1=0$ et $3x+4y-2z+5=0$.

1) Montrer que les plans (P) et (P') sont sécants selon la droite (D).

2) Donner une représentation paramétrique de la droite (D), droite d'intersection des plans (P) et (P').

3) En déduire un vecteur directeur et un point de la droite (D).

4) Montrer que la droite (D) est contenue dans le plan d'équation cartésienne $2x+6y-3z=0$.

Exercice 17

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O\ ;\vec{\imath}\ ;\vec{\jmath}\ ;\vec{k})$.

On considère les points : A(0 ; 0 ;2), B(0 ; 4 ; 0) et C(2 ; 0 ; 0).

1) a) Vérifier que (ABC) est un plan et qu'une de ses équations paramétriques est : $2x+y+2z=4$.

b) Calculer la distance du point O au plan (ABC).

2) a) Déterminer une équation du plan (P) passant par A et orthogonal à (BC).

b) Soit (Δ) la droite d'intersection du plan (P) et du plan (ABC).

Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ).

Quel rôle joue cette droite dans le triangle ABC ?

3) a) Soit (Δ′) la médiane issue de B du triangle ABC.

Montrer qu'une équation paramétrique de (Δ′) est : $\begin{cases} x=t \\ y=4-4t, & t\in \mathbb{R}. \\ z=t \end{cases}$

b) Montrer que le triangle ABC est isocèle.

4) Soit H le point d'intersection des droites (Δ) et (Δ′).

Montrer que $H\left(\frac{8}{9}\ ;\ \frac{4}{9}\ ;\ \frac{8}{9}\right)$. Que représente le point H pour le triangle ABC ?

Exercice 18

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O\ ;\vec{\imath}\ ;\vec{\jmath}\ ;\vec{k})$.

On désigne par (P) le plan d'équation $2x+3y-z+4=0$, et par A et B les points de coordonnées respectives : (1 ; 2 ; −4) et (−3 ; 4 ; 1).

Choisir la bonne réponse :

1) Soit la droite (D) ayant pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x=-8+2t \\ y=7-t, & t\in \mathbb{R} \\ z=6+t \end{cases}$

a) Le plan (P) et la droite sont sécants ;

b) Le plan (P) et la droite n'ont aucun point en commun ;

c) La droite (D) est incluse dans le plan (P) ;

d) Aucune des trois affirmations précédentes n'est vraie.

2) On note (P') le plan d'équation $x+4y-3z+4=0$.

a) les plans (P) et (P') sont parallèles et distincts ;

b) les plans (P) et (P') sont confondus ;

c) les plans (P) et (P') sont sécants selon une droite de vecteur directeur $\vec{u}(-1\ ;1\ ;2)$;

d) les plans (P) et (P') sont sécants selon une droite de vecteur directeur $\vec{u}(-1\ ;1\ ;1)$.

3) L'ensemble des points M de l'espace qui sont équidistants des points A et B est :

a) une droite passant par le point $C\left(-1\ ;3\ ;-\frac{1}{2}\right)$;

b) une sphère de rayon $\frac{3\sqrt{5}}{2}$;

c) un plan d'équation $-4x+2y+5z-\frac{5}{2}=0$;

d) un plan d'équation $-4x+2y+5z+\frac{5}{2}=0$.

Exercice 19

1) On donne A(3 ; −1 ; 6), B(−1 ; 7 ; −2) et C(1 ; −3 ; 2). Montrer que ABC est rectangle.

2) Les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ forment un angle $\varphi=\frac{\pi}{6}$. Calculer $\|\vec{a}\times\vec{b}\|$ sachant que $\|\vec{a}\|=6$ et $\|\vec{b}\|=5$.

3) On donne $\|\vec{a}\| = 10$ et $\|\vec{b}\| = 2$ et $\vec{a}.\vec{b} = 12$. Calculer $\|\vec{a} \times \vec{b}\|$.

4) Les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ forment un angle $\varphi = \frac{2\pi}{3}$. On donne $\|\vec{a}\| = 3$ et $\|\vec{b}\| = 4$.

Calculer :

a) $\vec{a}.\vec{b}$; b) $\vec{a}^2$; c) $\vec{b}^2$; d) $(\vec{a} + \vec{b})^2$; e) $(3\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b})$.

Exercice 20

1) Les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont perpendiculaires. Sachant que $\|\vec{a}\| = 3$ et $\|\vec{b}\| = 4$, calculer :

a) $\|(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})\|$; b) $\|(3\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} - 2\vec{b})\|$.

2) A quelles conditions doivent satisfaire les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ pour que les vecteurs $\vec{a} + \vec{b}$ et $\vec{a} - \vec{b}$ soient colinéaires ?

Exercice 21

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$.

On considère les points $A(-1 ; 3 ; 1)$; $B(3 ; 1 ; -1)$; $C(1 ; -3 ; -1)$; $D(-5 ; 0 ; 2)$.

1) Justifier que ABC est un triangle rectangle.

2) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Exercice 22

L'espace est rapporté à un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$.

1) Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ les vecteurs de coordonnées respectives (1 ; 2 ; 1), (2 ; -1 ; 0) et (0 ; 5 ; 2).

a) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont – ils colinéaires ?

b) $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont – ils colinéaires ?

c) $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont – ils colinéaires ?

d) Déterminer les coordonnées du vecteur $2\vec{u} - \vec{v} - \vec{w}$.

e) Que peut – on dire des vecteurs $\vec{u}$; $\vec{v}$ et $\vec{w}$?

2) Les points A(2 ; 3 ; -1), B(1 ; -3 ; 1) et C(4 ; 2 ; 1) sont – ils alignés ?

Exercice 23

On donne les points $A(-1 ; 5 ; -10)$, $B(5 ; -7 ; 8)$, $C(2 ; 2 ; -7)$ et $D(5 ; -4 ; 2)$.

Vérifier que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Exercice 24

1) On donne $A(3 ; -1 ; 2)$, $B(0 ; -4 ; 2)$ et $C(-3 ; 2 ; 1)$. Démontrer que ABC est isocèle.

2) On donne $A(2 ; -1 ; 4)$, $B(3 ; 2 ; -6)$ et $C(-5 ; 0 ; 2)$. Calculer la longueur de la médiane menée du sommet A.

QUELQUES FORMULES A RETENIR

1) Equations – Inéquations – Polynômes

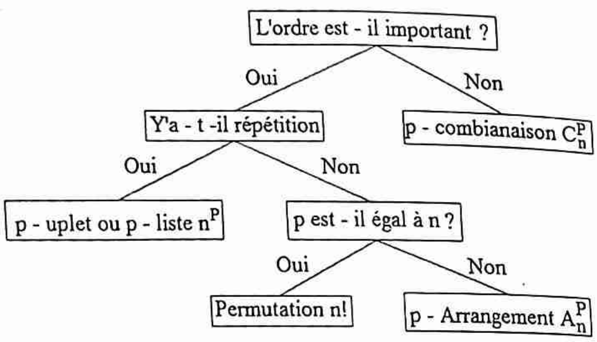
a) Recherche des racines et factorisation

Signe de Δ	Nombre de racines	Calcul des racines	Factorisation
$\Delta < 0$	Pas de racine		
$\Delta = 0$	Une racine double	$x_0 = -\frac{b}{2a}$	$a(x - x_0)^2$
$\Delta > 0$	Deux racines	$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	$a(x - x_1)(x - x_2)$

b) Etude de signe

Signe de Δ	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$		$\Delta > 0$		
x	$-\infty$ $+\infty$	$-\infty$ x_0	$+\infty$	$-\infty$ x_1	x_2	$+\infty$
$P(x) = ax^2 + bx + c = 0$	Signe de a	signe de a	signe de a	signe de a	signe de $-a$	signe de a

2) Dénombrement



3) Trigonométrie

a) Relations entre les fonctions cosinus, sinus et tangente

a) Pour tout réel x on a : $\cos^2x + \sin^2x = 1$.

b) Pour tout réel $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in Z)$ on a : $\text{tg}x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

c) Pour tout réel $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in Z)$ on a : $1 + \text{tg}^2x = \frac{1}{\cos^2x}$

d) Pour tout réel $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in Z)$ on a : $1 + \frac{1}{\text{tg}^2x} = \frac{1}{\sin^2x}$

b) Autres propriétés

$\forall x \in IR$ on a :

a) $\cos(-x) = \cos x$; b) $\sin(-x) = -\sin x$; c) $\text{tg}(-x) = -\text{tg}x$;

d) $\cos(\pi - x) = -\cos x$; c) $\sin(\pi - x) = \sin x$; f) $\text{tg}(\pi - x) = -\text{tg}x$;

g) $\cos(\pi + x) = -\cos x$; h) $\sin(\pi + x) = -\sin x$; i) $\text{tg}(\pi + x) = \text{tg}x$;

j) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$; k) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$; l) $\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\text{tg}x}$;

m) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$; n) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$; o) $\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\frac{1}{\text{tg}x}$

c) Valeurs remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\text{Tg}x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Non définie	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

d) Formules d'addition

$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$;

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$;

$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$;

$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$;

$\cos^2a = \frac{1+\cos 2a}{2}$; $\sin^2a = \frac{1-\cos 2a}{2}$

e) Formules de duplication

$\cos 2a = \cos^2a - \sin^2a = 2\cos^2a - 1$; $\sin 2a = 2\sin a \cos a$

f) Formules de transformation de produit en somme

$\cos a \cos a = \frac{1}{2}[\cos(a - b) + \cos(a + b)]$;

$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$;

$\frac{1}{2}\sin a \cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b)$;

$\frac{1}{2}\cos a \sin b = \sin(a+b) + \sin(a-b)$

4) Limites

a) Les asymptotes

*Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = l$ alors la droite d'équation $y = l$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de f.

*Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ alors la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à la courbe représentative de f.

*Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$ alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à la courbe représentative de f en $+\infty$ ou en $-\infty$.

b) Les formes indéterminées

$+\infty - \infty$; $0 \times \infty$; $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$

5) Dérivées

a) Dérivées usuelles

$f(x)$	a	$ax+b$	$x^n (n \in IN^*)$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x^n} (n \in IN^*)$	$\sqrt{x}$	$\cos x$	$\sin x$
$f'(x)$	0	a	nx^{n-1}	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{-n}{x^{n+1}}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$-\sin x$	$\cos x$
$D_{f'}$	IR	IR	IR	IR*	IR*	IR_+^*	IR	IR

b) Opérations sur les fonctions

$f(x)$	k.u	u + v	u.v	$\frac{1}{v}$	$\frac{u}{v}$	$\sqrt{u}$	$u^n (n \in IN^*)$	$\frac{1}{u^n}$
$f'(x)$	k.u'	u' + v'	u'.v+u.v'	$\frac{-v'}{v^2}$	$\frac{u'.v - u.v'}{v^2}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$n.u'.u^{n-1}$	$\frac{-nu'}{u^{n+1}}$

6) Fonctions numériques

a) Majorant – Minorant

• La fonction f définie de IR vers IR est minorée par α sur un ensemble E lorsque pour tout élément x de E, $f(x) \geq \alpha$.

• La fonction f définie de IR vers IR est majorée par β sur un ensemble E lorsque pour tout élément x de E, $f(x) \leq \beta$.

b) Comparaison de deux fonctions

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
Signe de $f(x) - g(x)$	+		−
Comparaison de $f(x)$ et $g(x)$	$f(x) > g(x)$		$f(x) < g(x)$
Positions relatives de (C_f) et (C_g)	(C_f) est au –dessus de (C_g)		(C_f) est en-dessous de (C_g)

c) Extremum relatif, signe de la dérivée et sens de variation

x	a	x_0	b
$f'(x)$	+		−
$f(x)$	↗		↘

x	a	x_0	b
$f'(x)$	−		+
$f(x)$	↘		↗

d) Axe de symétrie – Centre de symétrie

* La droite $(\Delta) = a$ est un axe de symétrie de la courbe représentative de la fonction f, lorsque pour $x \in IR$, $(a-x) \in D_f$ on a : $f(a+x) = f(a-x)$.

Ou pour $x \in IR$, $(2a-x) \in D_f$ on a : $f(2a-x) = f(x)$.

* Le point $\Omega(a ; b)$ est centre de symétrie de la courbe représentative de la fonction f, lorsque pour $x \in IR$, $(a-x) \in D_f$ et $(a+x) \in D_f$ on a :

$f(a+x) + f(a-x) = 2b$.

Ou pour $x \in IR$, $(2a-x) \in D_f$ et $(a+x) \in D_f$ on a : $f(2a-x) + f(x) = 2b$.

7) Statistiques

a) Ecart moyen

$e_m = \frac{1}{N}\sum_1^p n_i|x_i - \bar{x}|$

ı Nn ; AT = TA C
Si oui : AT ≠ TA

b) Variance

$V(x) = \frac{1}{N}\sum_1^k n_i(x_i - \bar{x})^2$ ou $V(x) = \frac{1}{N}\sum_1^k n_i {x_i}^2 - (\bar{x})^2$

c) Covariance

$Cov(x\,;y) = \frac{1}{N}\sum x_i y_i - \bar{x}.\bar{y}$ ou $Cov(x\,;y) = \frac{1}{N}\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$

d) Ecart type

$\sigma = \sqrt{V(x)}$

8) Suites numériques

Suites	Arithmétiques	Géométriques
Définition	La suite (U_n) est dite arithmétique de raison r si $\forall n \in \mathbb{N}\,;\, U_{n+1} = U_n + r$	La suite (U_n) est dite géométrique de raison q si $\forall n \in \mathbb{N}\,;\, U_{n+1} = qU_n$
Terme général	$\forall n \in \mathbb{N}\,;\, U_n = U_p + (n-p)r$ $\forall n \in \mathbb{N}\,;\, U_n = U_0 + nr$	$\forall n \in \mathbb{N}\,;\, U_n = q^{n-p}.U_p$ $\forall n \in \mathbb{N}\,;\, U_n = q^n.U_0$
Somme des termes consécutifs	$S_{p\,;\,n} = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n$ $S_{p\,;\,n} = \frac{n-p+1}{2}(u_p + u_n)$ $S_{0\,;\,n} = \frac{1}{2}(n+1)(u_0 + u_n)$	$S_{p\,;\,n} = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n$ $S_{p\,;\,n} = \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q} \times u_p$ $S_{0\,;\,n} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \times u_0$
Sens de variation	(U_n) est croissante si r > 0 (U_n) est décroissante si r < 0 (U_n) est constante si r = 0	Si q < 0 alors (U_n) n'est pas monotone Si q > 0 (U_n) est croissante si q > 1 (U_n) est décroissante si 0 < r < 1 (U_n) est constante si q = 1
Limite	$\lim\limits_{x \to +\infty} U_n = \begin{cases} +\infty \; si \; r > 0 \\ -\infty \; si \; r < 0 \\ U_0 \; si \; r = 0 \end{cases}$	Si $\lvert q \rvert < 1$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} U_n = 0$ Si q ∈]1 ; +∞[alors $\lim\limits_{x \to +\infty} U_n = \begin{cases} -\infty \; si \; u_0 < 0 \\ +\infty \; si \; u_0 > 0 \end{cases}$ Si q ∈]−∞ ; −1[alors (U_n) n'a pas de limite
Convergence	U_n converge si r = 0	U_n converge si q ∈]−1 ; 1]