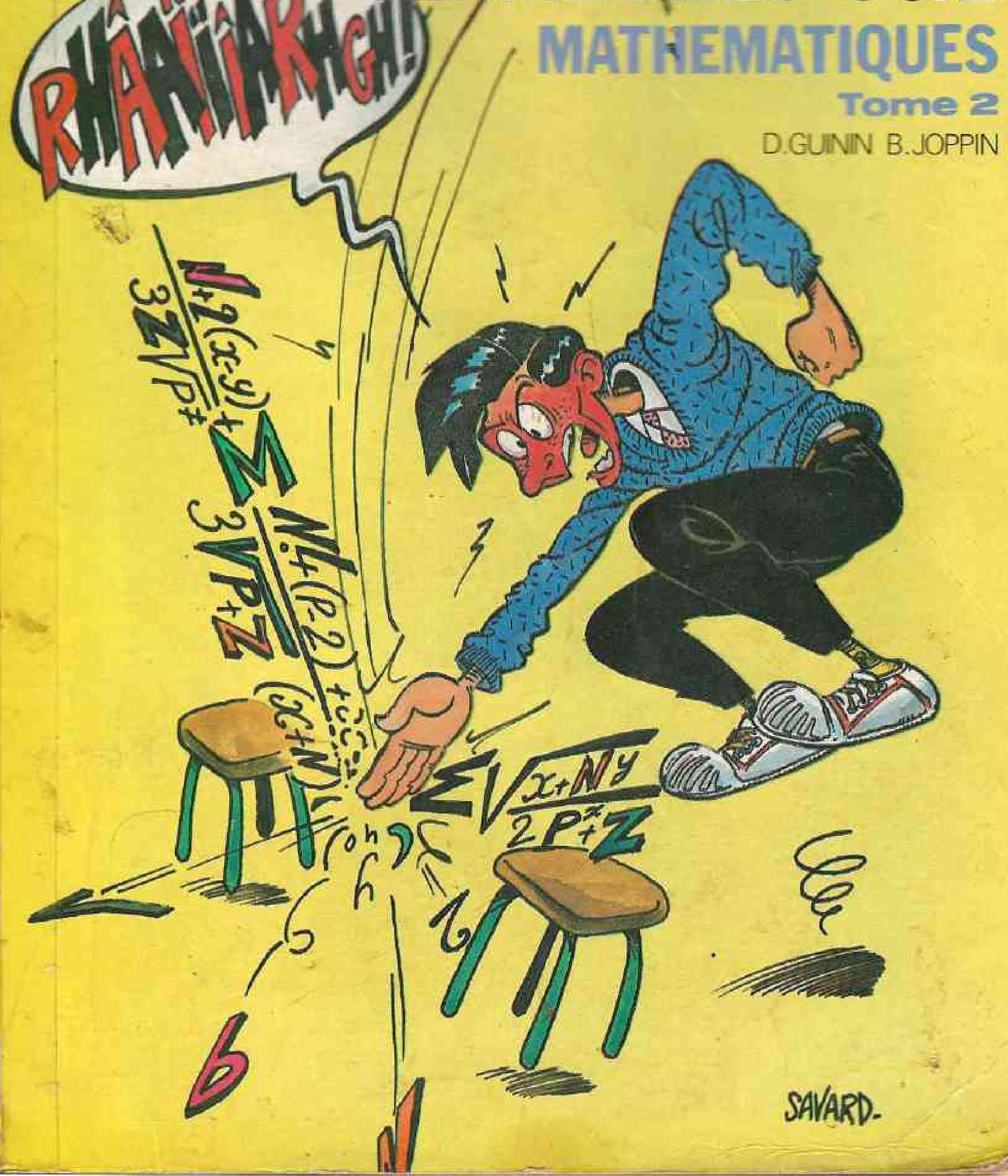
Les Cahiers du BAC

TERMINALES C&E

MATHEMATIQUES

Tome 2

D.GUININ B.JOPPIN



COURS ET EXERCICES RESOLUS

MATHEMATIQUES

TERMINALES C & E

ANALYSE

Tome 2

Bernard JOPPIN
Daniel GUININ

Professeurs agrégés

ABC Les Cahiers du BAC

310/320, Bd de la Boissière - 93100 MONTREUIL

AVERTISSEMENT AU LECTEUR

Cet ouvrage a été conçu pour vous permettre une approche pratique de l'examen du Baccalauréat en vous proposant une synthèse du cours et la plus grande variété possible de problèmes ou exercices.

Chaque chapitre est composé :

- *d'un résumé qui regroupe, sans démonstration, tous les résultats - définitions, théorèmes, propriétés - au programme du Baccalauréat,*
- *d'Exemples - Travaux pratiques, illustrant les points principaux de ce résumé,*
- *de nombreux exercices ou problèmes corrigés.*

En fin de chapitre, vous sont proposés des exercices non corrigés.

Dans la mesure du possible, les textes sont tirés des annales récentes. Les sujets proposés sont conformes aux nouveaux programmes. Le volume consacré à chaque chapitre tient compte à la fois de la diversité possible des problèmes et de la fréquence constatée, ou présumée, des sujets dans les annales.

Pour les problèmes ou exercices corrigés, nous ne pourrons jamais trop vous recommander de :

1) *lire attentivement le sujet,*
2) *rechercher une solution personnelle,*
3) *ensuite seulement, confronter votre solution à celle proposée, aussi bien pour les résultats que pour la méthode.*

Nous espérons avoir rendu cet ouvrage assez complet pour qu'il soit un précieux auxiliaire de votre travail personnel tout au long de l'année.

Les Auteurs.

BENGALY
KALIFA

Sommaire

CHAPITRE IV - SUITES NUMERIQUES

CHAPITRE V - EQUATIONS DIFFERENTIELLES

· CHAPITRE I

FONCTIONS NUMERIQUES

L'objet de ce chapitre est l'étude des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (fonctions numériques).
L'ensemble de définition d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est noté D_f

I. Limite - Continuité

Les notions suivantes ont été introduites en classe de 1[re] et sont supposées acquises (cf. Cahiers du Bac 1[re] S , Tome 1) :

- fonction définie au voisinage de x_0
- fonction définie au voisinage de $+\infty$
- fonction définie au voisinage de $-\infty$
- limite en $x_0 \in \mathbb{R}$, en $+\infty$, en $-\infty$
- limite à gauche, à droite, en $x_0 \in \mathbb{R}$
- limite infinie en $x_0 \in \mathbb{R}$, en $+\infty$, en $-\infty$

1) COMPARAISON DES FONCTIONS ET LIMITES

Théorèmes

- f est une fonction numérique définie au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$, de même que les fonctions u, v, ... etc.

t_1 : S'il existe $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tels que :

(i) $\forall x \in D_f \cap]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\quad |f(x) - \ell| \leq u(x)$

(ii) $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = 0$

alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$

t_2 : S'il existe $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tels que :

(i) $\forall x \in D_f \cap]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\quad u(x) \leq f(x) \leq v(x)$

(ii) $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = \lim\limits_{x \to x_0} v(x) = \ell$

alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$

t_3 : S'il existe $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tels que :

(i) $\forall x \in D_f \cap]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\quad f(x) \geq u(x)$ (resp $f(x) \leq u(x)$)

(ii) $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = +\infty$ (resp $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = -\infty$)

alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ (resp $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$)

• f est une fonction numérique définie au voisinage de $+\infty$ (resp de $-\infty$), de même que les fonctions u, v, ... etc.

t_4 : S'il existe $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{R}$ et $A \in \mathbb{R}_+$ tels que :
(i) $\forall x \geq A$ (resp $\forall x \leq -A$) $|f(x) - \ell| \leq u(x)$
(ii) $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = 0$ (resp $\lim\limits_{x \to -\infty} u(x) = 0$)
alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ (resp $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$)

t_5 : S'il existe $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{R}$ et $A \in \mathbb{R}_+$ tels que :
(i) $\forall x \geq A$ (resp $\forall x \leq -A$) $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$
(ii) $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} v(x) = \ell$ (resp $\lim\limits_{x \to -\infty} u(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} v(x) = \ell$)
alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ (resp $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$)

t_6 : S'il existe $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $A \in \mathbb{R}_+$ tels que :
(i) $\forall x \geq A$ (resp $\forall x \leq -A$) $f(x) \geq u(x)$
(ii) $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = +\infty$ (resp $\lim\limits_{x \to -\infty} u(x) = +\infty$)
alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (resp $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$)

t_7 : S'il existe $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $A \in \mathbb{R}_+$ tels que :
(i) $\forall x \geq A$ (resp $\forall x \leq -A$) $f(x) \leq u(x)$
(ii) $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = -\infty$ (resp $\lim\limits_{x \to -\infty} u(x) = -\infty$)
alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (resp $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$)

• f et g sont deux fonctions numériques définies au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$.

t_8 : S'il existe $\ell \in \mathbb{R}$, $\ell' \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tels que :
(i) $\forall x \in D_f \cap D_g \cap]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ $f(x) \leq g(x)$
(ii) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell'$
on a alors $\ell \leq \ell'$
On obtient deux énoncés analogues à t_8 en remplaçant x_0 par $+\infty$, ou par $-\infty$.

2) OPERATIONS ALGEBRIQUES ET LIMITES

Définition

d_1 Soit f et g deux fonctions numériques.
Pour $x_0 \in \mathbb{R}$ on dit que f et g sont **simultanément définies** au voisinage de x_0 si et seulement si il existe $\alpha > 0$
tel que $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\subset (D_f \cap D_g) \cup \{x_0\}$
ou tel que $]x_0, x_0 + \alpha[\subset D_f \cap D_g$
ou tel que $]x_0 - \alpha, x_0[\subset D_f \cap D_g$
f et g sont dites **simultanément définies** au voisinage de $+\infty$ (resp $-\infty$) si et seulement si il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $]\alpha, +\infty[\subset D_f \cap D_g$ (resp $]-\infty, \alpha[\subset D_f \cap D_g$)

Théorèmes

t_9 : Si f et g sont deux fonctions numériques, simultanément définies au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$ et λ un nombre réel, alors les fonctions
$f + g$: $x \mapsto f(x) + g(x)$
λf : $x \mapsto \lambda f(x)$
fg : $x \mapsto f(x)\, g(x)$
sont définies au voisinage de x_0.

t_{10} : Soit f et g deux fonctions numériques simultanément définies au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$

Si f et g admettent chacune une limite en x_0, il en est de même pour f + g

et $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$

Si f admet une limite en x_0 et si g admet $+\infty$ pour limite en x_0,

alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) + g(x) = +\infty$

Si f et g admettent toutes deux $+\infty$ pour limite en x_0, il en est de même pour f + g.

t_{11} : Soit f une fonction numérique définie au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$, et λ un nombre réel

Si f admet une limite en x_0, il en est de même pour λf

et $\lim\limits_{x \to x_0} \lambda f(x) = \lambda \left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \right)$

Si f admet $+\infty$ pour limite en x_0 et si λ est non nul

$$\text{alors} \begin{cases} \text{pour } \lambda > 0 & \lim\limits_{x \to x_0} \lambda f(x) = +\infty \\ \text{pour } \lambda < 0 & \lim\limits_{x \to x_0} \lambda f(x) = -\infty \end{cases}$$

t_{12} : Soit f et g deux fonctions numériques simultanément définies au voisinage de x_0

Si f et g admettent chacune une limite en x_0, il en est de même pour fg

et $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x)\, g(x)] = \left[\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \right] \left[\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \right]$

Si f admet en x_0 une limite ℓ non nulle et si g admet $+\infty$ pour limite en x_0,

$$\text{alors} \begin{cases} \text{pour } \lambda > 0 & \lim\limits_{x \to x_0} f(x)\, g(x) = +\infty \\ \text{pour } \lambda < 0 & \lim\limits_{x \to x_0} f(x)\, g(x) = -\infty \end{cases}$$

t_{13} : Soit f et g deux fonctions numériques simultanément définies au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$ telles que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = m$ avec $m \neq 0$

alors les fonctions $\frac{1}{g} : x \mapsto \frac{1}{g(x)}$

et $\frac{f}{g} : x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$

sont définies au voisinage de x_0 et admettent une limite en x_0 ; on a alors :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{m} \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lambda}{m}$$

t_{14} : Soit f une fonction numérique définie au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$

- Si f est strictement positive au voisinage de x_0 et si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$
- Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0.$

t_{15} : Si f est une fonction numérique définie - positive au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$ et s'il existe $\ell \in \mathbb{R}, \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$

• $\ell \geq 0$

Alors • la fonction $\sqrt{f} : x \mapsto \sqrt{f(x)}$ est définie au voisinage de x_0, et admet une limite en x_0

$$\lim_{x \to x_0} \boxed{\sqrt{f(x)} = \sqrt{\ell}}$$

Remarque : on obtient des énoncés analogues en remplaçant x_0 par $+\infty$ ou $-\infty$.

Exemples - Travaux pratiques

ex.1 ⇒ Etudier les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de $f : x \mapsto x^3 - 2x^2 + x - 1$

Pour $x \neq 0$ on a $f(x) = x^3\left(1 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^3}\right)$

- de $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^3} = 0$ on déduit que

$\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^3} = 0$ par le théorème t_{10}

- de $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^3} = 1$ on déduit ensuite

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ par le théorème t_{12}

De même on a $\lim\limits_{x \to -\infty} -f(x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

ex.2 ⇒ Etudier la limite en $+\infty$ de $f : x \mapsto \dfrac{x^2 - x + 1}{2x^2 + 1}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a

$$f(x) = \frac{1 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}}{2 + \dfrac{1}{x^2}}$$

du théorème t_{10} on déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} 2 + \dfrac{1}{x^2} = 2$

et le théorème t_{13} donne alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{1}{2}$

ex.3 ⇒ On rappelle que pour tout x réel $|\sin x| \leq x$. Etudier la limite en 0 de $f : x \mapsto \dfrac{\sin(x^3 + x^2)}{x^3 + x}$

On a ici $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et pour tout $x \in D_f$

$$|f(x)| \leq \left|\frac{x^2 + x^3}{x + x^3}\right|$$

donc $|f(x)| \leq |x|\left(\dfrac{1 + x}{1 + x^2}\right)$

Par application du théorème t_{13}, on a $\lim\limits_{x \to 0} x\left(\dfrac{1+x}{1+x^2}\right) = 0$

puis par application du théorème t_1 : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

3) COMPOSITION DES LIMITES

Théorème

t_{16} : Soit f et g deux fonctions numériques telles que g_0f soit définie au voisinage de x_0 avec $x_0 \in \mathbb{R}$ ou $x_0 = +\infty$ ou $x_0 = -\infty$.

- Si f admet en x_0 une limite : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$ avec $y_0 \in \mathbb{R}$ ou $y_0 = +\infty$ ou $y_0 = -\infty$

et

- Si g admet en y_0 une limite : $\lim\limits_{y \to y_0} g(y) = \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}$ ou $\ell = +\infty$ ou $\ell = -\infty$

alors g_0f admet une limite en x_0 et on a $\lim\limits_{x \to x_0} g_0f(x) = \ell$

Exemples - Travaux pratiques

ex.4 Soit : $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{2x-1}$ calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et en déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f_0f(x)$

Calculer de même $\lim\limits_{x \to -\infty} f_0f(x)$

⇒ Retrouver ces résultats en calculant $f_0f(x)$

- f est définie sur $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$

Pour $x \neq \dfrac{1}{2}$ $\quad f(x) - \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2(2x-1)} \neq 0$ donc f_0f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$.

- Le calcul ci-dessus montre que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{1}{2}$ avec de plus $f(x) > \dfrac{1}{2}$ pour tout $x > \dfrac{1}{2}$.

Lorsque y tend vers $\dfrac{1}{2}$ avec $y > \dfrac{1}{2}$, $y + 1$ tend vers $\dfrac{3}{2}$ et $2y - 1$ tend vers 0 en restant positif,

donc $f(y) = \dfrac{y+1}{2y-1}$ tend vers $+\infty$.

Le théorème t_{16} nous donne donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(f(x)) = +\infty$

- On a de même $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \dfrac{1}{2}$ avec $f(x) < \dfrac{1}{2}$ pour tout $x < \dfrac{1}{2}$.

Lorsque y tend vers $\dfrac{1}{2}$ avec $y < \dfrac{1}{2}$ on a maintenant $f(y) = \dfrac{y+1}{2y-1}$ qui tend vers $-\infty$, donc d'après le théorème t_{16} $\lim\limits_{x \to -\infty} f(f(x)) = -\infty$.

- Pour tout $x \neq \dfrac{1}{2}$

$f(f(x)) = \dfrac{\dfrac{x+1}{2x-1} + 1}{2\dfrac{x+1}{2x-1} - 1} = x$ ce qui redonne évidemment les résultats précédents.

ex.5 Calculer

$$\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$$

En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}) \sin (\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$

puis $\lim\limits_{x\to+\infty} x \sin (\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$

$\left(\text{On rappelle que } \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x} = 1\right)$

⇒ • La fonction

$f : x \mapsto \sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$ est définie sur $D_f =]-\infty, -1[\cup [1, +\infty[$

Pour tout $x \in D_f$, $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}$

d'où on déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

• La fonction

$g : x \mapsto (\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}) \sin (\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$ est définie sur $D_g = D_f$

et pour tout $x \in D_f$ $g(x) = 2\dfrac{\sin f(x)}{f(x)}$

Sachant que $\lim\limits_{y\to0} \dfrac{\sin y}{y} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, le théorème t_{16} donne $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 2$.

• Posons

$h(x) = x \sin (\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$, on a $D_h = D_f$

et $\forall x \in D_f$ $h(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}} g(x)$

En écrivant pour $x > 1$, $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}}$ on voit que

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{1}{2}$ d'où finalement $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 1$

4) CONTINUITE SUR UN INTERVALLE

Définition

d_2 : Une fonction numérique définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est dite **continue sur I** si et seulement si pour tout $a \in I$, $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe (on a alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$).

d_3 : Soit (a, b) un couple de réels tels que $a < b$ et f une fonction numérique continue sur l'intervalle [a, b[(resp]a, b]) telle qu'il existe $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ (resp $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$)

alors la fonction $\overline{f}$ définie sur [a, b] par

$\overline{f}(x) = f(x)$ pour $x \in [a, b[$ $\quad \overline{f}(b) = \ell$

(resp $\overline{f}(x) = f(x)$ pour $x \in]a, b]$ $\quad \overline{f}(a) = \ell$)

est continue sur [a, b] et est appelé **prolongement par continuité** de f sur [a, b].

Propriétés

p_1 Soient f et g deux fonctions numériques continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Alors les fonctions $f + g$, λf ($\lambda \in \mathbb{R}$), et fg sont continues sur I.
Si de plus g ne s'annule pas sur I, les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur I.

Exemples - Travaux pratiques

1) La fonction $f_1 : x \mapsto x$ est continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit successivement la continuité sur $\mathbb{R}$ de toute fonction $f_n : x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) (produit de fonctions continues, et de toute fonction polynôme : $f : x \mapsto a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ (combinaison linéaire de fonctions continues).

2) Les fonctions $f : x \mapsto x^2 + x + 1$ et $g : x \mapsto x - 1$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et g ne s'annule pas sur $I_1 =]-\infty, 1[$ et sur $I_2 =]1, +\infty[$, la fonction rationnelle :

$\frac{f}{g} : x \mapsto \frac{x^2 + x + 1}{x - 1}$ est donc continue sur I_1 ou sur I_2

p_2 Soient f et g deux fonctions numériques respectivement continues sur les intervalles I et J de $\mathbb{R}$ tels que $f(I) \subset J$, alors g_0f est continue sur I.

Exemples - Travaux pratiques

La fonction $g : x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $J = [0, +\infty[$, et la fonction $f : x \mapsto x^2 - 3x + 2$ est continue sur $\mathbb{R}$ avec $f(x) \geq 0$ sur $I_1 =]-\infty, 1[$ et sur $I_2 =]2, +\infty[$ (donc $f(I_1) \subset J$ et $f(I_2) \subset J$).
En conséquence :

$g_0f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 3x + 2}$ est continue sur I_1 et sur I_2

p_3 Si f est une fonction numérique dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, f est continue sur I.

Théorèmes

t_{17} : Soit f une fonction numérique continue sur I intervalle de $\mathbb{R}$, a et b deux points de I, alors pour tout $\lambda \in [f(a), f(b)]$ il existe au moins un point c de [a, b] tel que $f(c) = \lambda$ (théorème des valeurs intermédiaires).

t_{18} : Si une fonction numérique f est continue sur I intervalle de $\mathbb{R}$, f(I) est un intervalle de $\mathbb{R}$.

t_{19} : Si une fonction numérique f est continue sur un segment $S = [a, b]$ de $\mathbb{R}$, f(S) est un segment ;
f atteint ses bornes : avec $f(S) = [m, M]$ il existe $\alpha \in S$ et $\beta \in S$ tels que $f(\alpha) = m$ et $f(\beta) = M$.

t_{20} : Soit f une fonction numérique continue et strictement monotone sur I intervalle de $\mathbb{R}$, a et b les bornes inférieure et supérieure de I (éventuellement $\alpha = -\infty$ et $\beta = +\infty$).
Alors il existe $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \alpha$ avec éventuellement $\alpha = -\infty$ ou $\alpha = +\infty$ et il existe $\lim\limits_{x \to b} f(x) = \beta$ avec éventuellement $\beta = -\infty$ ou $\beta = +\infty$.

pour $I = [a, b]$ on a $f(I) = [\alpha, \beta]$
pour $I = [a, b[$ on a $f(I) = [\alpha, \beta[$
pour $I =]a, b]$ on a $f(I) =]\alpha, \beta]$
pour $I =]a, b[$ on a $f(I) =]\alpha, \beta[$

f est alors une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle $J = f(I)$.

Exemples - Travaux pratiques

ex.6 Montrer que $f : x \longrightarrow x^3 + x^2 + 2x + 1$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow$

f est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable
Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = 3x^2 + 2x + 2$, trinôme du second degré tel que $\Delta' = -5$
donc $f'(x) > 0$ et f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
En écrivant pour $x \neq 0$

$f(x) = x^3\left(1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}\right)$, on déduit que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

D'après le théorème t_{20} on a donc $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ et f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

ex.7 Etudier les variations de $f : x \mapsto x^3 - 3x$, en déduire suivant les valeurs de λ le nombre de racines de l'équation $x^3 - 3x = \lambda$.

$\Rightarrow$ f est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $\forall x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = 3(x^2-1)$ d'où le tableau de variations

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'(x)		+	0	−	0	+	
f(x)	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

en écrivant pour $x \neq 0$ $f(x) = x^3\left(1 - \dfrac{3}{x^2}\right)$ on obtient

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

D'après le théorème t_{20} :

La restriction f_1 de f à $]-\infty, -1] = I_1$ est une bijection strictement croissante de $]-\infty, -1]$ sur $]-\infty, 2]$

La restriction f_2 de f à $[-1, 1] = I_2$ est une bijection strictement décroissante de $[-1, 1]$ sur $[-2, 2]$

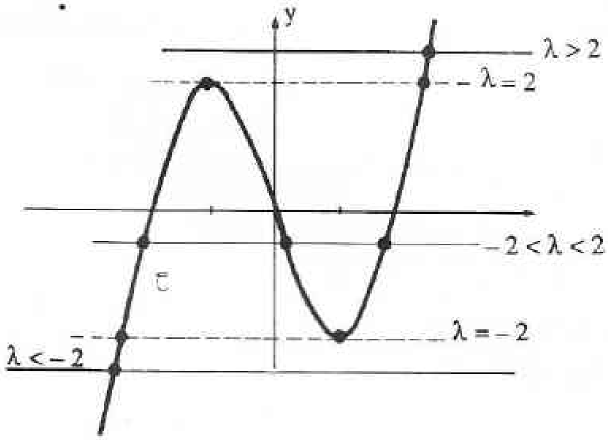
La restriction f_3 de f à $[1, +\infty[= I_3$ est une bijection strictement croissante de $[1, +\infty[$ sur $[-2, +\infty[$

Pour $\lambda < -2$ on a $\lambda \in f(I_1)$, $\lambda \notin f(I_2)$, $\lambda \notin f(I_3)$ donc il existe x_1 unique tel que
$x_1 \in I_1$ $f(x_1) = \lambda$: on a $x_1 = f_1^{-1}(\lambda)$

Pour $-2 \leq \lambda \leq 2$ on a $\lambda \in f(I_1)$, $\lambda \in f(I_2)$, $\lambda \in f(I_3)$ donc il existe x_1, x_2, x_3 réels tels que
$x_k \in I_k$, $f(x_k) = \lambda$ $(k = 1, 2, 3)$: on a $x_k = f_k^{-1}(\lambda)$
quand $\lambda = -2$ on a $x_2 = x_3 = 1$
quand $\lambda = 2$ on a $x_1 = x_2 = -1$

Pour $\lambda > 2$ on a $\lambda \in f(I_3)$, $\lambda \notin f(I_1)$, $\lambda \notin f(I_2)$ donc il existe x_3 unique tel que
$x_3 \in I_3$ $f(x_3) = \lambda$: on a $x_3 = f_3^{-1}(\lambda)$

Interprétation graphique



Le nombre de racines de l'équation $x^3 - 3x = \lambda$ correspond au nombre de points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ représentative de f avec la droite d'équation $y = \lambda$

- pour $\lambda < -2$	un seul point d'intersection
- pour $\lambda = -2$	deux points d'intersection
- pour $-2 < \lambda < 2$	trois points d'intersection
- pour $\lambda = 2$	deux points d'intersection
- pour $\lambda > 2$	un seul point d'intersection

5) ASYMPTOTES

Définitions

f est une fonction numérique de courbe représentative $\mathcal{C}$ dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$

d_4 : Si f est définie à droite (resp à gauche) de $x_0 \in \mathbb{R}$

- Si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = -\infty$, la droite $\Delta : x = x_0$ est **asymptote** à $\mathcal{C}$ **à droite** de x_0
- Si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = -\infty$, la droite $\Delta : x = x_0$ est **asymptote** à $\mathcal{C}$ **à gauche** de x_0

d_5 : Si f est définie au voisinage de $+\infty$ (resp de $-\infty$)

- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ ($\ell \in \mathbb{R}$), la droite $\Delta : y = \ell$ est **asymptote** à $\mathcal{C}$ en $+\infty$
- Si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$ ($\ell \in \mathbb{R}$), la droite $\Delta : y = \ell$ est **asymptote** à $\mathcal{C}$ en $-\infty$

d_6 : Si f est définie au voisinage de $+\infty$ (resp de $-\infty$)

- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - ax - b) = 0$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, la droite $\Delta : y = ax + b$ est **asymptote** à $\mathcal{C}$ en $+\infty$
- Si $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - ax - b) = 0$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, la droite $\Delta : y = ax + b$ est **asymptote** à $\mathcal{C}$ en $-\infty$

d_7 ω désigne $+\infty$ ou $-\infty$, f est définie au voisinage de ω

Si $\lim\limits_{\omega} \dfrac{f(x)}{x} = a$, réel non nul, on dit que C(f) admet une **direction asymptotique de coefficient directeur a**

Si $\lim\limits_{\omega} \frac{f(x)}{x} = 0$, on dit que C(f) admet une **direction asymptotique définie par Ox**

Si $\lim\limits_{\omega} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ ou $-\infty$, on dit que C(f) admet une **direction asymptotique définie par Oy**

Théorème

t_{21} Si la droite $\Delta(y = \ell)$ est asymptote à C(f) en ω, C(f) admet la direction asymptotique définie par Ox

Si la droite $\Delta(y = ax + b, a \neq 0)$ est asymptote à C(f) en ω, C(f) admet la direction asymptotique de coefficient directeur a

RECHERCHE D'ASYMPTOTE EN $+\infty$ OU EN $-\infty$

1° $f(x) = ax + b + \varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{+\infty} \varepsilon = 0$, $y = ax + b$ **asymptote** à C(f) en $+\infty$

$\lim\limits_{-\infty} \varepsilon = 0$, $y = ax + b$ **asymptote** à C(f) en $-\infty$

2° $\lim\limits_{\omega} f = \ell$ ($\ell \in \mathbb{R}$) (ω étant $+\infty$ ou $-\infty$), la droite $y = \ell$ est **asymptote à C(f)** en ω

3° $\lim\limits_{\omega} f = +\infty$ (ou $\lim\limits_{\omega} f = -\infty$), ω désignant, suivant les cas, $+\infty$ ou $-\infty$:

3.a $\frac{f(x)}{x}$ n'a pas de limite en ω : pas de résultat général

3.b $\lim\limits_{\omega} \frac{f(x)}{x} = 0$, direction asymptotique définie par Ox, pas d'asymptote.
On dit que C(f) présente une **branche parabolique** de direction Ox

3.c $\lim\limits_{\omega} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ ou $\lim\limits_{\omega} \frac{f(x)}{x} = -\infty$, direction asymptotique définie par Oy, pas d'asymptote. On dit que C(f) présente une **branche parabolique** de direction Oy

3.d $\lim\limits_{\omega} \frac{f(x)}{x} = a$, a réel non nul, **direction asymptotique** de coefficient a

3.d.1 $f(x) - ax$ n'a pas de limite en ω : rien de plus à dire

3.d.2 $\lim\limits_{\omega} (f(x) - ax) = +\infty$ ou $\lim\limits_{\omega} (f(x) - ax) = -\infty$, pas d'asymptote, on dit que C(f) présente une **branche parabolique** de direction définie par $y = ax$

3.d.3 $\lim\limits_{\omega} (f(x) - ax) = b$: $y = ax + b$ **asymptote** en ω à C(f)

On étudie, en outre, le signe de $f(x) - ax - b$ pour la position de C(f) par rapport à son asymptote

Exemples

1) $f : x \mapsto \sqrt{x}$ admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction Ox.

2) $g : x \mapsto x^2$ admet en $+\infty$ et en $-\infty$ une branche parabolique de direction Oy.

3) $h : x \mapsto x(3 + \sin x)$, $\lim\limits_{+\infty} h = +\infty$, $\frac{h(x)}{x}$ n'a pas de limite en $+\infty$.

4) $u : x \mapsto 3x + \sin x$, $\lim\limits_{+\infty} u = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{u(x)}{x} = 3$, mais $u(x) - 3x$ n'a pas de limite en $+\infty$.

Exemples - Travaux pratiques

ex.8 Soit $f : x \mapsto \frac{x^2 - x}{x - 3}$ montrer qu'il existe a, b, c réels tels que $\forall x \in D_f$ $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-3}$

En déduire que la courbe $\mathcal{C}$ représentative de f est asymptote à la droite $\Delta : y = ax + b$. $\mathcal{C}$ admet une deuxième asymptote, la déterminer.

⇒ $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

$\forall x \in D_f \quad f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-3} = \dfrac{ax^2 + (b-3a)x + c - 3b}{x-3}$

donne $a = 1, \quad b - 3a = -1, \quad c - 3b = 0$

donc $a = 1, \quad b = 2, \quad c = 6.$

ainsi $\forall x \in D_f \quad f(x) = x + 2 + \dfrac{6}{x-3}$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (x+2) = 0$

et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - (x+2) = 0$, il reste à appliquer la définition d_6 pour conclure.

On a par ailleurs $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x>3}} \dfrac{1}{x-3} = +\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x>3}} f(x) = +\infty$ et de même $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x<3}} f(x) = -\infty$

la deuxième asymptote est la droite $\Delta' : x = 3$.

ex.9 Soit $f : x \mapsto x + 1 + \sqrt{x^2 + 4x}$

⇒ Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + 4x} - x$,

en déduire que en $+\infty$ la courbe $\mathcal{C}$ représentative de f admet pour asymptote une droite Δ dont on donnera une équation.

Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$; en déduire une deuxième asymptote.

• $x^2 + 4x = x(x+4)$ donc $D_f =]-\infty, -4] \cup [0, +\infty[$

Pour $x > 0 \quad \sqrt{x^2 + 4x} - x = \dfrac{4x}{\sqrt{x^2 + 4x} + x} = \dfrac{4}{\sqrt{1 + \dfrac{4}{x}} + 1}$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + 4x} - x = 2$

On en déduit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (2x + 3) = 0$,

$\mathcal{C}$ est asymptote à $\Delta : y = 2x + 3$

• Pour $x < -4 \quad f(x) = \dfrac{x^2 + 4x - (x+1)^2}{\sqrt{x^2 + 4x} - (x+1)} = \dfrac{2x - 1}{\sqrt{x^2 + 4x} - (x+1)}$

et on a maintenant $\sqrt{x^2} = |x| = -x$ donc $f(x) = \dfrac{-2 + \dfrac{1}{x}}{\sqrt{1 + \dfrac{4}{x}} + 1 + \dfrac{1}{x}}$

et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$

en $-\infty$, $\mathcal{C}$ est asymptote à $\Delta' : y = -1$.

II. Dérivées

La notion de dérivée et son application à l'étude des variations d'une fonction ont été introduites en classe de Première (cf. Cahiers du Bac 1re S, tome 1).

1) TABLEAU DES DERIVEES USUELLES

Le tableau suivant indique les fonctions dérivées des fonctions usuelles, en précisant D(f) et D(f').

f(x) =	D(f) =	f'(x) =	D(f') =
a	$\mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$
$x^n \quad n \in \mathbb{Z}^*$	$\mathbb{R}$ si $n > 0$ $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$	$n\,x^{n-1}$	D(f)
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$-\dfrac{1}{x^2}$	D(f)
$\dfrac{ax+b}{cx+d}$	$\mathbb{R} \setminus \{-\dfrac{d}{c}\}$	$\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$	D(f)
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x$	D(f)
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$	D(f)
$\tan x$	$\mathbb{R} \setminus \{\dfrac{\pi}{2} + k\pi\}$	$\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	D(f)
$\sin(ax+b)$	$\mathbb{R}$	$a\cos(ax+b)$	D(f)
$\cos(ax+b)$	$\mathbb{R}$	$-a\sin(ax+b)$	
$\tan(ax+b)$	$ax+b \neq \dfrac{\pi}{2}\ (\pi)$	$\dfrac{a}{\cos^2(ax+b)} = a\,[1+\tan^2(ax+b)]$	D(f)

2) COMPOSITION DES DERIVATIONS

Théorème

t_{21} : Soit f et g deux fonctions numériques définies respectivement sur les intervalles I et J avec $f(I) \subset J$.

Si f et g sont dérivables sur I et J respectivement, $g_0 f$ est dérivable sur I et

$\forall x \in I \quad (g \circ f)'(x) = g'(f(x))\,f'(x)$

C'est-à-dire $(g \circ f)' = (g' \circ f)\,f'$

Exemples - Travaux pratiques

ex.10 Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$f_1 : x \mapsto \dfrac{2+x^3}{3-2x^3}$

$f_2 : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x-1}{2x-1}}$

$f_3 : x \mapsto \sqrt{2x^2-5x+3}$

$f_4 : x \mapsto \cos\sqrt{2x^2-5x+3}$

$\Rightarrow$

• $D_{f_1} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \sqrt[3]{\dfrac{3}{2}} \right\}$

$f_1 = g \circ u$ avec $u : x \mapsto x^3$: $\forall x \in \mathbb{R}$ $u'(x) = 3x^2$

$g : x \mapsto \dfrac{x+2}{-2x+3}$: $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\dfrac{3}{2}\}$ $g'(x) = \dfrac{7}{(3-2x)^2}$

donc f_1 est dérivable sur $\left]-\infty, \sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}\right[$ et sur $\left]\sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}, +\infty\right[$ avec

$$f_1'(x) = \frac{7}{(3-2u(x))^2}\, u'(x) = \frac{21x^2}{(3-2x^3)^2}$$

• $D_{f_2} =]-\infty, \dfrac{1}{2}[\cup [1, +\infty[$

$f_2 = g \circ u$ avec $u : x \mapsto \dfrac{x-1}{2x-1}$: $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\dfrac{1}{2}\}$ $u'(x) = \dfrac{1}{(2x-1)^2}$

$g : x \mapsto \sqrt{x}$: $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

donc f_2 est dérivable sur $]-\infty, \dfrac{1}{2}[$ et sur $]1, +\infty[$ avec

$$f_2'(x) = \frac{1}{2\sqrt{u(x)}}\, u'(x) = \frac{1}{2(2x-1)^2}\sqrt{\frac{2x-1}{x-1}}$$

pour $x < \dfrac{1}{2}$ $f_2'(x) = \dfrac{1}{2(1-2x)\sqrt{(x-1)(2x-1)}}$ $\qquad (\sqrt{(1-2x)^2} = 1-2x)$

pour $x > \dfrac{1}{2}$ $f_2'(x) = \dfrac{1}{2(2x-1)\sqrt{(x-1)(2x-1)}}$ $\qquad (\sqrt{(2x-1)^2} = 2x-1)$

• $Df_3 =]-\infty, 1] \cup [\dfrac{3}{2}, +\infty[$

$f_3 = g \circ u$ avec $u : x \mapsto 2x^2-5x+3$, $\forall x \in \mathbb{R}$ $u'(x) = 4x-5$

$g : x \mapsto \sqrt{x}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

donc f_3 est dérivable sur $]-\infty, 1[$ et sur $]\dfrac{3}{2}, +\infty[$ avec

$$f_3'(x) = \frac{1}{2\sqrt{u(x)}}\,u'(x) = \frac{4x-5}{2\sqrt{2x^2-5x+3}}$$

• $D_{f_4} = D_{f_3}$

$f_4 = \cos \circ f_3$ et cos est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $\cos' = -\sin$

donc f_4 est dérivable sur $]-\infty, 1[$ et sur $]\frac{3}{2}, +\infty[$ avec

$$f_4'(x) = -(\sin f_3(x))\, f_3'(x) = \frac{5-4x}{2\sqrt{2x^2-5x+3}} \sin \sqrt{2x^2-5x+3}$$

2) DERIVEES SUCCESSIVES

Définition

d_7 : Soit f une fonction numérique dérivable sur I intervalle de $\mathbb{R}$.

• Si la fonction f' est dérivable sur I, sa dérivée (f')' est dite **dérivée seconde** de f et notée f''.

• Si la fonction f'' est dérivable sur I, sa dérivée (f'')' est dite **dérivée troisième** de f et est notée f''' ou $f^{(3)}$.

• On peut ainsi définir successivement les dérivées quatrième, cinquième, ..., n° de f.

Notation :

$$f' = \frac{df}{dx}, \quad f'' = \frac{d^2f}{dx^2}, \quad f''' = \frac{d^3f}{dx^3}, \quad \ldots, \quad f^{(n)} = \frac{d^nf}{dx^n}$$

Exemples - Travaux pratiques

ex.11 Soit $f : x \mapsto \sin x$, $g : \mapsto \cos x$

On sait que f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$, vérifier que

$\forall x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = \sin(x+\frac{\pi}{2})$ $g'(x) = x = \cos(x+\frac{\pi}{2})$

En déduire $f^{(n)}$ et $g^{(n)}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

⇒

On a $f'(x) = \cos x = \sin(x+\frac{\pi}{2})$ $g'(x) = -\sin x = \cos(x+\frac{\pi}{2})$

Il en résulte que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$f^{(n)}(x) = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$ $g^{(n)}(x) = \cos(x + n\frac{\pi}{2})$

ex.12 Soit:

$f : x \mapsto \frac{1}{1-x}$, calculer $f^{(n)}$

⇒

f est dérivable sur $]-\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$ $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$

f' est dérivable sur $]-\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$ $f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}$

f'' est dérivable sur $]-\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$ $f^{(3)}(x) = \frac{3!}{(1-x)^4}$

$f^{(3)}$ est dérivable sur $]-\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$ $f^{(4)}(x) = \frac{4!}{(1-x)^5}$

- Supposons : $f^{(n-1)}$ dérivable sur $]-\infty,1[$ et sur $]1,+\infty[$ $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$

- Alors $f^{(n)}$ est dérivable sur $]-\infty,1[$ et sur $]1,+\infty[$ $f^{(n+1)}(x) = \frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}$

Il en résulte – par récurrence – que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f est n fois dérivable sur $]-\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$ avec

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

3) INEGALITE DES ACCROISSEMENTS FINIS

Théorème

t_{22} Soit f une fonction numérique dérivable sur un segment [a, b] de $\mathbb{R}$
- S'il existe m et M réels tels que pour tout x de [a, b] $\quad m \le f'(x) \le M$
et si $a < b$, alors :
$$m(b-a) \le f(b) - f(a) \le M(b-a) \qquad (1)$$
- S'il existe M réel tel que pour tout x de [a, b] $\quad |f'(x)| \le M$
alors : $\quad |f(b) - f(a)| \le M|b-a| \qquad (2)$

Exemples - Travaux pratiques

ex.13 Démontrer le théorème t_{22} en considérant les fonctions :
$\varphi : x \mapsto f(x) - mx \quad$ et $\quad \psi : x \mapsto f(x) - Mx$

⇒ φ et ψ sont dérivables sur [a, b] avec $\varphi'(x) = f'(x) - m \quad \psi'(x) = f'(x) - M$
- Par hypothèse sur f', on a pour tout x de [a, b] $\quad \varphi'(x) \ge 0 \quad$ et $\quad \psi'(x) \le 0$
donc φ est croissante et ψ décroissante sur [a, b]
et puisque $a < b$ on en déduit
$\varphi(b) - \varphi(a) \ge 0$ c'est-à-dire $\quad f(b) - f(a) \ge m(b-a)$
$\psi(b) - \psi(a) \le 0$ c'est-à-dire $\quad f(b) - f(a) \le M(b-a)$
La double inégalité (1) en résulte.
- L'hypothèse $|f'(x)| \le M$ donne $\quad -M \le f'(x) \le M$
si $a < b$ on déduit de (1) que $-M(b-a) \le f(b) - f(a) \le M(b-a)$
si $a > b$ on déduit de (1) que $-M(a-b) \le f(a) - f(b) \le M(a-b)$
dans tous les cas $\quad |f(b) - f(a)| \le M|b-a|$

ex.14 On considére la suite de nombres réels $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$u_{n+1} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \cos u_n$$
- Trouver $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (simple) tel que $\alpha = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \cos \alpha$, montrer (en utilisant le théorème t_{22}).
que si $\beta \in \mathbb{R}$ vérifie :
$\beta = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \cos \beta$, $\quad$ on a $\beta = \alpha$
- Trouver $k \in]0, 1[$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad |u_n - \alpha| \le k^n \alpha$, $\quad$ en déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

⇒
- On a $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \cos \frac{\pi}{6}$: $\alpha = \frac{\pi}{6}$ convient.
- On a $\cos' = -\sin$ donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad |\cos' x| \le 1$ et d'après l'inégalité des accroissements finis, pour tout couple (x, y) de réels $\quad |\cos x - \cos y| \le |x - y|$

Si $\beta = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \cos \beta$ on a :
$$\beta - \alpha = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} (\cos \beta - \cos \alpha) \quad \text{donc} \quad |\beta - \alpha| \le \frac{\pi}{3\sqrt{3}} |\beta - \alpha|$$

soit encore $\left(1-\dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}\right)|\beta-\alpha| \leq 0$ et puisque $1-\dfrac{\pi}{3\sqrt{3}} > 0$, il vient $|\beta-\alpha| \leq 0$

ce qui exige $\beta = \alpha$.

• $u_{n+1} - \alpha = \dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}(\cos u_n - \cos \alpha)$ donc $|u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{\pi}{3\sqrt{3}} |u_n - \alpha|$

En posant $k = \dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$ on a $k = 0{,}60$ à 5.10^{-3} près, $0 < k < 1$

et $|u_1 - \alpha| \leq k\,|u_0 - \alpha|$

$|u_2 - \alpha| \leq k\,|u_1 - \alpha|$

.....

$|u_n - \alpha| \leq k\,|u_{n-1} - \alpha|$

d'où en multipliant ces inégalités membre à membre, $|u_n - \alpha| \leq k^n\,|u_0 - \alpha|$

c'est-à-dire $\left|u_n - \dfrac{\pi}{4}\right| \leq k^n \dfrac{\pi}{4}$

Puisque $0 < k < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} k^n = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{\pi}{4}$

4) PRIMITIVES

Définition

d_8 Soit f et g deux fonctions numériques définies sur I intervalle de $\mathbb{R}$, on dit que g est une **primitive** de f sur I si et seulement si g est dérivable sur I avec $g' = f$.

Théorèmes

t_{23} Si g est une primitive de f sur I intervalle de $\mathbb{R}$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ $g + \lambda : x \mapsto g(x) + \lambda$ est également une primitive de f sur I.

t_{24} Si g et h sont deux primitives de f sur I intervalle de $\mathbb{R}$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $h = g + \lambda$ (i.e $\forall x \in I$ $h(x) = g(x) + \lambda$).

t_{25} Une fonction numérique f continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ admet au moins une primitive sur cet intervalle.

conséquence : f continue sur I, admet une infinité de primitives sur I si g est l'une d'entre-elles, l'ensemble des primitives de f est décrit par les fonctions $g + \lambda$ où λ décrit $\mathbb{R}$.

PRIMITIVES USUELLES

On les obtient par lecture du tableau des dérivées.
Pour chaque fonction f, le tableau ci-après donne une primitive de f sur I.

f(x)	I	une primitive de f sur I
a a constante	$\mathbb{R}$	ax
x^n $n \in \mathbb{Z}^*$ $n \neq -1$	$\mathbb{R}$ si $n > 0$ $\mathbb{R}_-^*$ ou $\mathbb{R}_+^*$ si $n < 0$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$	$2\sqrt{x}$
$\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}_-^*$ ou $\mathbb{R}_+^*$	$-\dfrac{1}{x}$
cos x	$\mathbb{R}$	sin x
$\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$]k\pi - \dfrac{\pi}{2}, k\pi + \dfrac{\pi}{2}[$ $k \in \mathbb{Z}$	tan x

EXERCICES RESOLUS

101

Déterminer les extremums de

$x \longmapsto \frac{1}{2}x^2 - |x|$

sur $]-\infty, 2]$

SOLUTION

Soit f_1 la restriction de f à $]-\infty, 0]$

$f_1 : x \longmapsto \frac{1}{2}x^2 + x$

et f_2 la restriction de f à $[0, 2]$

$f_2 : x \longmapsto \frac{1}{2}x^2 - x$

f_1 est dérivable sur $]-\infty, 0]$, $f_1'(x) = x + 1$
donc f est dérivable sur $]-\infty, 0[$, $f'(x) = x + 1$
et est dérivable à gauche en 0, $f_g'(0) = 1$

f_2 est dérivable sur $[0, 2]$, $f_2'(x) = x - 1$
donc f est dérivable sur $]0, 2]$, $f'(x) = x - 1$
et est dérivable à droite en 0, $f_d'(0) = -1$

f n'est pas dérivable en 0

Le tableau de variation en résulte :

x	$-\infty$	-2	-1		0		1		2
f'(x)	$-$		0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f(x)	$+\infty$ ↘	0 ↘	$-\frac{1}{2}$	↗	0	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	0

pour $x < 0$

$f(x) = \frac{x^2}{2}\left(1 + \frac{2}{x}\right)$

donc $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

f présente quatre extremums locaux

- un minimum en -1 : en ce point f' s'annule en changeant de signe
- un maximum en 0 : en ce point f' est non définie
- un minimum en 1 : en ce point f' s'annule en changeant de signe
- un maximum en 2 : ce point est une borne de l'intervalle d'étude.

102

On considère la fonction réelle définie par $f(x) = \dfrac{\sqrt{1 + 3x} - 2(2 - x)^5}{x^2 + x - 2}$.

1) Quel est l'ensemble de définition D_f de f ?
2) Etudier $\lim_{x \to 1} f(x)$.

SOLUTION

1) $x \longmapsto \sqrt{1+3x}$ est définie sur $\left[-\frac{1}{3}, +\infty\right[$

$x \longmapsto x^2 + x - 2$ s'annule en -2 et 1.

On a donc $D_f = \left[-\frac{1}{3}, 1\right[\cup \left]1, +\infty\right[$

2) Posons $\varphi(x) = \sqrt{1+3x} - 2(2-x)^5$. φ est dérivable sur $\left]-\frac{1}{3}, +\infty\right[$ avec $\varphi'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{1+3x}} + 10(2-x)^4$.

$\varphi(1) = 0$; quand x tend vers 1, f (x) se présente sous une forme indéterminée.

On a donc en particulier $\varphi'(1) = \frac{43}{4}$.

Le développement limité de φ à l'ordre 1 au point 1 s'écrit donc :

$$\varphi(x) = \frac{43}{4}(x-1) + (x-1)\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \to 1} \varepsilon(x) = 0$$

ε fonction définie sur $\left]-\frac{1}{3}, +\infty\right[$.

D'autre part on a $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$. Donc, pour tout $x \in D_f$:

$$f(x) = \frac{\frac{43}{4} + \varepsilon(x)}{x+2}$$

On en déduit $\lim_{x \to 1} f(x) = \frac{43}{12}$.

103

On donne les deux applications numériques :

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \longmapsto -1 + \sqrt{1+x^2}$

$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \longmapsto \dfrac{x^2}{1+|x|}$

1) Démontrer que f et φ sont paires, continues et dérivables.
Etudier f (x) et φ (x) quand x tend vers $+\infty$.
Montrer que les courbes représentatives C de f et Γ de φ rapportées au repère orthonormé direct $\mathcal{R}$ (unité : 2 cm) admettent pour asymptotes deux droites ayant respectivement pour équation :
$y = x - 1$ et $y = -x - 1$.
Etudier les variations de f et de φ.

2) Démontrer que, quel que soit x réel :

$1 + |x| \leq 1 + \sqrt{1+x^2}$ et $f(x) \leq \varphi(x)$

En déduire la position relative de C et Γ que l'on construira en plaçant les points d'abscisses 1, 2, 3, 4 notamment, points dont les ordonnées seront calculées à 0,1 près par excès.
Justifier la position de C et Γ par rapport à leurs asymptotes communes.

SOLUTION

1) f et φ sont définies, continues sur $\mathbb{R}$ et paires.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec pour tout x, $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

$x \longmapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$ et paire.

Pour $x \in \mathbb{R}_+$, $\varphi(x) = \dfrac{x^2}{1+x}$.

φ est donc dérivable sur $]0, +\infty[$ avec $\varphi'(x) = \dfrac{x^2+2x}{(1+x)^2}$

et est dérivable à droite en 0 avec :

$\varphi'_d(0) = 0$ (1)

Pour $x \in \mathbb{R}_-$, $\varphi(x) = \dfrac{x^2}{1-x}$.

φ est donc dérivable sur $]-\infty, 0[$ avec $\varphi'(x) = \dfrac{-x^2+2x}{(1-x)^2}$

et est dérivable à gauche en 0 avec :

$\varphi'_g(0) = 0$ (2)

De (1) et (2) il résulte que φ est dérivable en 0 avec $\varphi'(0) = 0$.

Etude quand x tend vers $+\infty$:

- Pour x positif, on a :

$$\frac{f(x)}{x} = -\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2}+1} \quad \text{donc} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

On met ainsi en évidence une direction asymptotique de coefficient directeur 1

$$f(x) - x = -1 + \sqrt{1+x^2} - x$$
$$= -1 + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}$$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x = -1$

Ainsi la droite D d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe C

De plus $f(x) - (x-1) = \sqrt{1+x^2} - x > 0$

donc C est au-dessus de son asymptote D

Pour tout $x \in \mathbb{R}$

$\sqrt{1+x^2} > |x|$

donc $\sqrt{1+x^2} - x > 0$

- Pour x positif, on a :

$$\frac{\varphi(x)}{x} = \frac{x}{1+x} = \frac{1}{1+\frac{1}{x}} \quad \text{donc} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = 1$$

direction asymptotique de coefficient directeur 1

$$\varphi(x) - x = -\frac{x}{1+x} = -\frac{1}{1+\frac{1}{x}} \quad \text{donc} \quad \lim_{x \to +\infty} \varphi(x) - x = -1$$

La droite D d'équation $y = x - 1$ est donc aussi asymptote à la courbe Γ.

De plus $\varphi(x) - (x-1) = \dfrac{1}{1+x} > 0$ sur $[0, +\infty[$: Γ est au-dessus de son asymptote.

Etant donnée la parité de f et φ, Oy est axe de symétrie de C et de Γ, la droite D' d'équation $y = -x - 1$ symétrique de D par rapport à Oy, est asymptote commune à C et Γ au voisinage de $-\infty$.

Variations de f et φ :

D'après la parité, on se limite à l'intervalle $[0, +\infty[$.

x	0	$+\infty$
f' (x)	0	+
f (x)	0	↗ $+\infty$

x	0	$+\infty$
φ' (x)	0	+
φ (x)	0	↗ $+\infty$

2) Pour tout x réel, on a $\sqrt{1+x^2} > \sqrt{x^2} = |x|$, donc :

$$\varphi(x) = \frac{x^2}{1+|x|} \geq \frac{x^2}{1+\sqrt{1+x^2}} = -1+\sqrt{1+x^2}$$

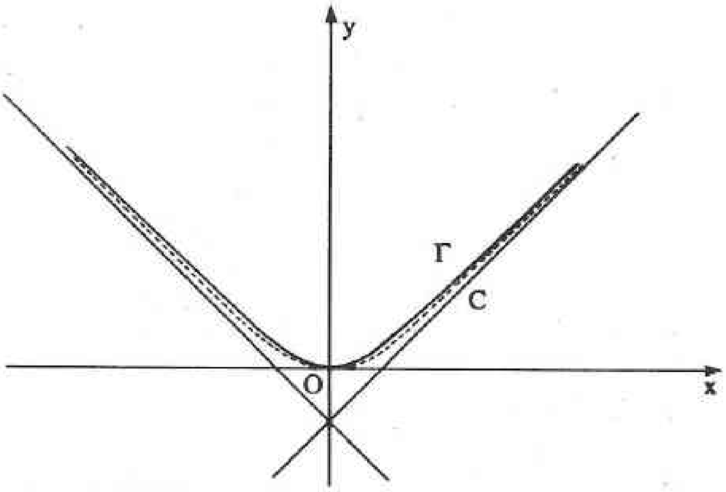
Soit :
$\varphi(x) \geq f(x)$
C est donc "en dessous" de Γ pour tout x réel.

Points particuliers

Valeurs à 0,1 par excès

x	1	2	3	4
f (x)	0,5	1,3	2,2	3,2
φ (x)	0,5	1,4	2,3	3,2

$f(1) = \sqrt{2} - 1$
$f(2) = \sqrt{5} - 1$
$f(3) = \sqrt{10} - 1$
$f(4) = \sqrt{17} - 1$
$\varphi(1) = \frac{1}{2}$
$\varphi(2) = \frac{4}{3}$
$\varphi(3) = \frac{9}{4}$
$\varphi(4) = \frac{16}{5}$



104

1) $g(x) = -\frac{1}{2} + \frac{x}{2\sqrt{x^2+1}}$.

Etudier continuité, dérivabilité de g. Montrer que g définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 0[$.

2) $f(x) = -\frac{x}{2} + 1 + \frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}$.

Etudier la fonction f en précisant en particulier la position de la courbe C (f) par rapport à ses asymptotes.
3) Montrer que f définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur un ensemble E à préciser.
Exprimer $f^{-1}(x)$, $x \in E$.

SOLUTION

1) g est définie, continue, dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = \dfrac{1}{2(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$.

g est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $g(\mathbb{R}) =]-1,0[$.

$g(\mathbb{R}) =]\lim\limits_{-\infty} g, \lim\limits_{+\infty} g[$.

$x > 0$, $g(x) = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}$,

donc $\lim\limits_{+\infty} g = 0$.

$x < 0$, $g(x) = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}$,

donc $\lim\limits_{-\infty} g = -1$.

2) f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Limites, asymptotes :

- Pour $x > 0$.

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}(\sqrt{x^2+1} - x)$$

$$= 1 + \frac{1}{2(\sqrt{x^2+1}+x)} \text{ et } \lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2+1}+x) = +\infty$$

$-x + \sqrt{x^2+1}$ est une forme indéterminée quand x tend vers $+\infty$.

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$: la droite Δ d'équation $y = 1$ est asymptote à C(f) en $+\infty$.

De plus, on a , pour tout x réel, $\sqrt{x^2+1} > |x|$, donc $f(x) > 1$, la courbe C(f) est toujours au-dessus de son asymptote Δ.

- Pour $x < 0$

$$\frac{f(x)}{x} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{x} - \frac{x}{2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \text{ donc } \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$$

$\sqrt{x^2} = -x$ pour $x < 0$.

$$f(x) + x = 1 + \frac{1}{2}(\sqrt{1+x^2} + x)$$

$$= 1 + \frac{1}{2(\sqrt{1+x^2} - x)}$$

or $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{1+x^2} - x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) + x - 1 = 0$:
la droite Δ' d'équation $y = -x + 1$ est asymptote à C(f) en $-\infty$.
De plus, on a, pour tout x réel :

$$f(x) + x - 1 = \frac{1}{2}(\sqrt{x^2+1} - x) > \frac{1}{2}(|x| - x) \geq 0.$$

C(f) est toujours au-dessus de son asymptote Δ'.

Variations : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = g(x)$.
f est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

D'après le 1) on a :
$\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) < 0$.

x	$-\infty$	$+\infty$
f'(x)	−	
f(x)	$+\infty$ ↘	1

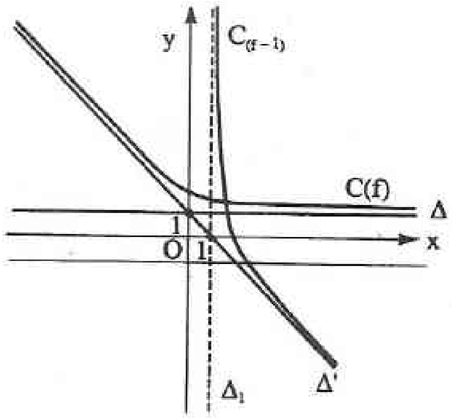
3) f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) =]1,+\infty[$.

f continue strictement décroissante.

Pour tout $x \in]1, +\infty[$, $y = f^{-1}(x)$ équivaut à $x = f(y)$.

On en déduit aisément $y = \dfrac{1}{4(x-1)} + 1 - x$.

Courbes représentatives de f et de f^{-1} :



Le repère est orthonormé ; les courbes C(f) et C(f^{-1}) sont symétriques par rapport à la droite D (y = x).

105

$f(x) = \dfrac{|x^2 + x| + 1}{|x| + 1}$. Etudier et représenter f.

SOLUTION

1) f est définie, continue sur $\mathbb{R}$, dérivable, sauf peut-être en 0 et − 1.

Théorèmes généraux
$x \mapsto |x|$ dérivable, sauf en 0.

2) Pour $x \geq 0$: $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x + 1} = x + \dfrac{1}{x+1}$.

Pour $-1 \leq x \leq 0$: $f(x) = \dfrac{-x^2 - x + 1}{-x + 1} = \dfrac{-x^2 + x - 2x + 2 - 1}{-x + 1}$

$= x + 2 + \dfrac{1}{x - 1}$

Transformations guidées par la mise en facteur de $-x + 1$ au numérateur.

Pour $x \leq -1$: $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{-x + 1} = \dfrac{x^2 - x + 2x - 2 + 3}{-x + 1}$

$= -x - 2 + \dfrac{3}{1 - x}$

$x \mapsto x + \dfrac{1}{x+1}$ a pour dérivée $x \mapsto 1 - \dfrac{1}{(x+1)^2}$.

Pour $x \geq 0$: $f'(x) = \dfrac{x(x+2)}{(x+1)}$ et $f'_d(0) = 0$.

$x \mapsto x + 2 + \dfrac{1}{x-1}$ a pour dérivée $x \mapsto +1 - \dfrac{1}{(x-1)^2}$.

Pour $-1 \leq x \leq 0$: $f'(x) = \dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$, $f'_g(0) = 0$, $f'_d(-1) = \dfrac{3}{4}$.

$x \mapsto -x - 2 - \dfrac{3}{x-1}$ a pour dérivée $x \mapsto -1 + \dfrac{3}{(x-1)^2}$.

Pour $x \leq -1$: $f'(x) = \dfrac{(\sqrt{3} + 1 - x)(\sqrt{3} - 1 + x)}{(x-1)^2}$, $f'_g(-1) = -\dfrac{1}{4}$.

f est dérivable en 0 et pas dérivable en − 1.

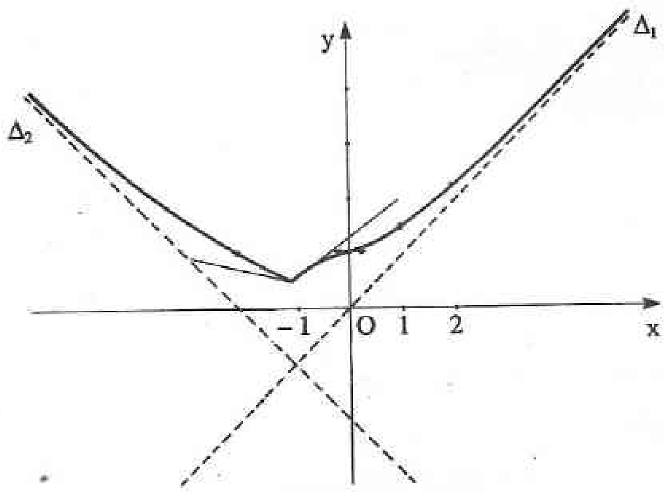
3) $x \geq 0$, $f(x) = x + \dfrac{1}{x+1}$ montre que $\Delta_1 : y = x$ est en $+\infty$ asymptote à la courbe. La position courbe/asymptote est précisée par le signe de $\dfrac{1}{x+1}$.

$x \leq -1$, $f(x) = -x - 2 + \dfrac{3}{1-x}$ montre que $\Delta_2 : y = -x - 2$ est asymptote en $-\infty$ à la courbe $C(f)$ et la position de la courbe par rapport à Δ_2 est précisée par le signe de $\dfrac{3}{1-x}$.

$y = ax + b$ asymptote en $+\infty$ (ou $-\infty$) quand $f(x) = ax + b + \varepsilon(x)$ et $\lim\limits_{+\infty} \varepsilon = 0$ (ou $\lim\limits_{-\infty} \varepsilon = 0$).
Le signe de $\varepsilon(x)$ précisant la position de la courbe par rapport à cette droite.

4) Tableau résumé :

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
f'(x)		$-$		$-$	$-\frac{1}{4}$ ‖ $\frac{3}{4}$	$+$	0	$+$		$+$			
f(x)	$+\infty$	↘	1	↘	$\frac{1}{2}$	↗	1	↗	$\frac{3}{2}$	↗	$\frac{7}{3}$	↗	$+\infty$



106

On considère le plan, rapporté à un repère orthonormé, l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient $x(x^2 + y^2) + x^2 - y^2 = 0$, soit Σ cet ensemble.
1) Montrer que Σ est la réunion des courbes Σ_1 et Σ_2 représentatives des fonctions f et $-f$ de la variable x définies par $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2(1+x)}{1-x}}$.
2) Etudier la dérivabilité de f en 0 et -1 ; préciser les tangentes éventuelles aux points d'abscisses 0 et -1 pour la courbe Σ_1.
3) Etudier les variations de f, tracer Σ_1 ; en déduire Σ.

SOLUTION

1) $x(x^2+y^2)+x^2-y^2=0$ s'écrit $y^2(1-x)=x^2(1+x)$.
Cette égalité implique que $1-x$ et $1+x$ ont le même signe, soit $-1 \leq x \leq 1$.
D'autre part, Σ ne contient pas de point d'abscisse 1 ; une équation de Σ est donc aussi :
$y^2 = \dfrac{x^2(1+x)}{1-x}$ avec $-1 \leq x \leq 1$
ou encore :

$$|y| = \sqrt{\frac{x^2(1+x)}{1-x}}, \text{ soit } \begin{cases} y = \sqrt{\dfrac{x^2(1+x)}{1-x}} \\ \text{ou} \\ y = -\sqrt{\dfrac{x^2(1+x)}{1-x}} \end{cases}$$

Σ est donc réunion des courbes représentatives :

Σ_1 de f, $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2(1+x)}{1-x}}$, et Σ_2 de $-f$.

Premier membre nul.
Deuxième membre égal à 2.

2) $f(0) = 0$,

$$\text{et} \quad \begin{cases} x \geq 0, \ f(x) = x\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}. \\ x \leq 0, \ f(x) = -x\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}. \end{cases}$$

$-1 \leq x < 0 : \dfrac{f(x)}{x} = -\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$; $\lim\limits_{x \to 0_-} \dfrac{f(x)}{x} = -1$.

$0 < x < 1 : \dfrac{f(x)}{x} = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$; $\lim\limits_{x \to 0_+} \dfrac{f(x)}{x} = +1$.

$\dfrac{f(x)}{x}$ n'a pas de limite en 0, f n'est donc pas dérivable en 0, mais dérivable à droite et à gauche en 0.

La courbe Σ_1 admet à gauche de 0 une demi-tangente, d'équation $y = -x$, et admet à droite de 0 une demi-tangente, $y = x$.

$f(-1) = 0$, $x \neq -1$, $\dfrac{f(x)}{x+1} = \dfrac{1}{x+1}\sqrt{\dfrac{x^2(x+1)}{1-x}}$.
Et, comme sur $]-1,1[$, $\sqrt{(x+1)^2} = x+1$, il vient :

$\dfrac{f(x)}{x+1} = \sqrt{\dfrac{x^2}{(1+x)(1-x)}}$, et donc $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{f(x)}{x+1} = +\infty$

f n'est pas dérivable en -1, mais Σ_1 admet en $(-1,0)$ une tangente "verticale".

$x+1>0$, $x+1 = |x+1|$
$= \sqrt{(x+1)^2}$

3) f est définie sur $[-1,1[$, continue sur $[-1,1[$, dérivable sur $]-1,0[\cup]0,1[$.

Application des théorèmes généraux.

La fonction dérivée de u : $x \mapsto \dfrac{x^2(1+x)}{1-x}$ est :

$$u' : x \mapsto \frac{(3x^2+2x)(1-x)-(-1)(x^2+x^3)}{(1-x)^2}$$

Soit $u'(x) = \dfrac{-2x}{(1-x)^2}(x^2-x-1)$

$f(x) = \sqrt{u(x)}$ ayant pour dérivée $\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$, on a :

$$f'(x) = -x\,\frac{(x^2-x-1)}{(1-x)^2}\sqrt{\frac{1-x}{x^2(1+x)}} \text{ sur }]-1,0[\cup]0,1[.$$

$x^2 - x - 1$ a pour racines : $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$
$= \omega$ $\quad = \omega'$

D'où le tableau des variations de f :

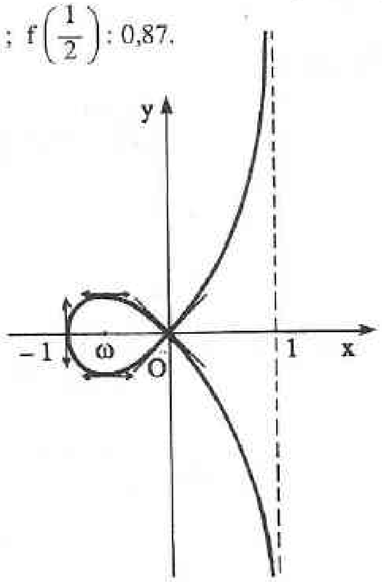
x	-1		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		0		1
f'(x)	‖ $+\infty$	$+$	0	$-$	-1 ‖ $+1$	$+$	‖
f(x)	0	↗		↘	0	↗ $+\infty$	‖

$$\omega^2 = \omega + 1,\ \omega^2\,\frac{\omega+1}{1-\omega} = \frac{(1+\omega)^2}{1-\omega} = \frac{(1+\omega)^2}{\omega'} = \frac{\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

$$f\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \sqrt{\frac{5\sqrt{5}-11}{2}}.$$

Valeurs approchées : $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} : -0{,}62$; $f\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) : 0{,}30$

$f\left(-\dfrac{1}{2}\right) : 0{,}29$; $f\left(\dfrac{1}{2}\right) : 0{,}87.$



Σ réunion de Σ_1 et Σ_2.

107

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1) On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
$$f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x-1)^2}$$

1° Calculer, lorsque f est définie, des constantes réelles a, b et c telles que :
$$f(x) = x + a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$$

2° Etudier la fonction f.

3° Montrer que la courbe C représentative de f admet deux asymptotes dont l'une est la droite D dont une équation est $y = x - 2$.
On précisera la position de C par rapport à D et les coordonnées du point commun à C et D.

4° Construire la courbe C dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

2) En utilisant la courbe C, déterminer, suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre et le signe des solutions réelles de chaque équation.
$x^3 - (4 + m)x^2 + 2(4 + m)x - 4 - m = 0$ (inconnue x), et
$\sin^3 u - (4 + m)\sin^2 u + 2(4 + m)\sin u - 4 - m = 0$ (inconnue u telle que $-\pi \leq u \leq \pi$).

SOLUTION

1) f est définie et continue sur $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

On a pour tout $x \neq 1$:
$$f(x) = x + a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$$
si et seulement si, pour tout $x \neq 1$:
$(x+a)(x-1)^2 + b(x-1) + c = x^3 - 4x^2 + 8x - 4$
ou encore :

$$x^3 + (a-2)x^2 + (1 - 2a + b)x + a - b + c = x^3 - 4x^2 + 8x - 4$$

On procède par identification

Ce qui donne :
$$\begin{cases} a - 2 = -4 \\ 1 + b - 2a = 8 \\ a - b + c = -4 \end{cases}$$
d'où :

$$\begin{cases} a = -2 \\ b = 3 \\ c = 1 \end{cases}$$

En conclusion :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{ 1 \}, f(x) = x - 2 + \frac{3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} \qquad (I)$$

2) Etude de f.

f est dérivable sur D_f ;

$$f'(x) = 1 - \frac{3}{(x-1)^2} - \frac{2}{(x-1)^3}$$

$$= \frac{(x-1)^3 - 3(x-1) - 2}{(x-1)^3}$$

$$= \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$$

f'(x) est du signe de (x–3) (x–1)

x	$-\infty$	0		1		3	$+\infty$
f'(x)	+	0	+	‖	−	0	+
f(x)	$-\infty \nearrow$	-4	$\nearrow +\infty$	‖	$+\infty \searrow$	$\frac{11}{4}$	$\nearrow +\infty$

$\lim_{x \to 1} x^3 - 4x^2 + 8x - 4 = 1$ donc $\lim_{x \to 1} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{3}{x-1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{(x-1)^2} = 0$ donc $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

de même $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Utilisation de (I)

3) D'après l'étude des variations, la droite d'équation x = 1 est asymptote.

D'après le 1) :

$\lim_{x \to +\infty} f(x) - (x-2) = 0$ et $\lim_{x \to -\infty} f(x) - (x-2) = 0$

$f(x) - (x-2) = \frac{3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$

En $+\infty$ et en $-\infty$

La droite D d'équation $y = x - 2$ est donc asymptote à C.
On a alors :

$$f(x) - (x-2) = \frac{3x-2}{(x-1)^2}$$

- Pour $x \in \left]-\infty, \frac{2}{3}\right[$: $f(x) - (x-2) < 0$

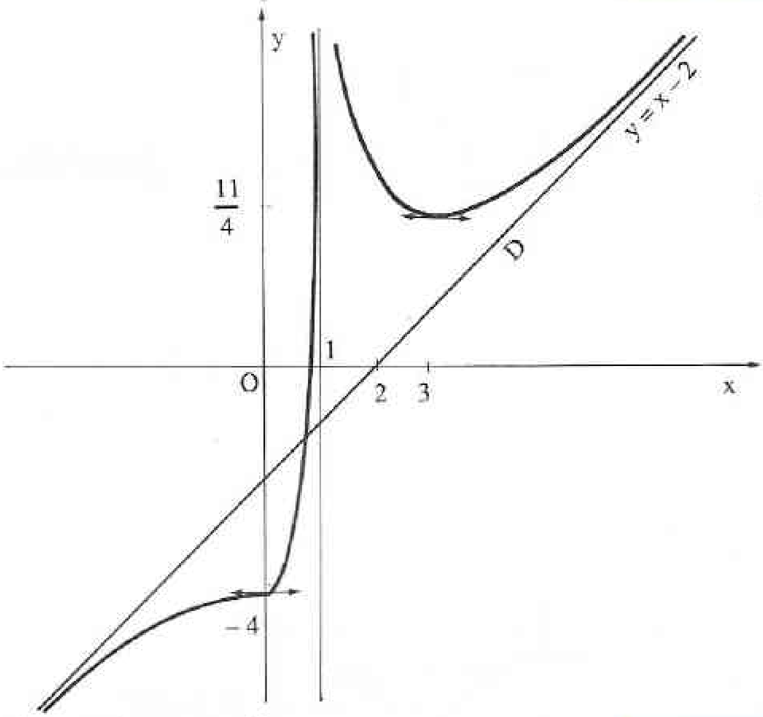
C est "en dessous" de D.

- Pour $x \in \left]\frac{2}{3}, 1\right[\cup \left]1, +\infty\right[$: $f(x) - (x-2) > 0$

C est "au-dessus" de D.

L'unique point commun de C et D est A ($\frac{2}{3}$, $-\frac{4}{3}$).

$f'(\frac{2}{3}) = 28$



2) L'équation (I) : $x^3 - (4 + m) x^2 + 2 (4 + m) x - 4 - m = 0$
s'écrit :
$m (x - 1)^2 = x^3 - 4x^2 + 8x - 4$
1 n'est jamais racine de cette équation, qui est donc équivalente à :

$$m = \frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x - 1)^2} = f (x)$$

D'après l'étude du 1) :

• La restriction de f à $I_1 =]-\infty, 1[$ est continue, strictement croissante et définit donc une bijection f_1 de $]-\infty, 1[$ sur $\mathbb{R}$. en conséquence, pour tout $m \in \mathbb{R}$, il exixte un réel x_1 et un seul, dans $]-\infty, 1[$ tel que $f (x_1) = m$

$f (]-\infty , 1 [) = \mathbb{R}$

$x_1 = f_1^{-1} (m)$

• De même, la restriction de f à $I_2 =] 1, 3]$ définit une bijection (décroissante) f_2 de $] 1, 3]$ sur $[\frac{11}{4}, +\infty [$.

Donc, pour tout $m \in [\frac{11}{4}, +\infty[$, il exixte un réel x_2 et un seul, dans $] 1, 3]$ tel que $f (x_2) = m$

$f (] 1, 3])$
$= [\frac{11}{4}, +\infty [$

$x_2 = f_2^{-1} (m)$

si $m > \frac{11}{4}$,
$x_2 \in] 1, 3 [$
si $m = \frac{11}{4}$, $x_2 = 3$

• Enfin, la restriction de f à $I_3 = [3, +\infty [$ définit une bijection (croissante) f_3 de $[3, +\infty [$ sur $[\frac{11}{4}, +\infty [$.

Donc, pour tout $m \in [\frac{11}{4}, +\infty[$, il exixte un réel x_3 et un seul, dans $[3, +\infty [$ tel que $f (x_3) = m$

$x_3 = f_3^{-1} (m)$

Conclusion :

- Si $m < \frac{11}{4}$

(I) a une solution et une seule : $x_1 = f_1^{-1}(m)$

- Si $m = \frac{11}{4}$

(I) a deux solutions : $x_1 = f_1^{-1}(\frac{11}{4}) < 1$

et $3 = f_2^{-1}(\frac{11}{4}) = f_3^{-1}(\frac{11}{4})$

- Si $m > \frac{11}{4}$

(I) a trois solutions : $x_1 = f_1^{-1}(m)$

$x_2 = f_2^{-1}(m)$

$x_3 = f^{-1}_3(m)$

$x_3 \in]3, +\infty[$

si $m = \frac{11}{4}$, $x_3 = 3$

$x_1 < 1 < x_2 < 3 < x_3$

$$\sin^3 u - (4+m)\sin^2 u + 2(4+m)\sin u - 4 - m = 0 \qquad \text{(II)}$$

(II) n'admet pas la racine $\frac{\pi}{2}$ et s'écrit donc :

$m = f(\sin u)$

Pour que (II) admette des solutions, il est donc nécessaire que $m \in f([-1, 1[)$.

.Sur $[-\pi, \pi]$ on a $\sin u = 1$
Si et seulement si :

$u = \frac{\pi}{2}$

.Pour $u \in [-\pi, \pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$:

$f(\sin u) \in f([-1, 1[)$

$f(-1) = -\frac{17}{4}$

La restriction de f à $[-1, +1[$ est continue strictement croissante et définit donc une bijection g de $[-1, +1[$ sur $[-\frac{17}{4}, +\infty[$.

Si $m < -\frac{17}{4}$, $m \notin f([-1, +1[)$, donc (II) n'a pas de solution.

Si $m \geq -\frac{17}{4}$, l'équation (II) s'écrit $m = g(\sin u)$ et équivaut à $\sin u = g^{-1}(m)$.

- Si $-\frac{17}{4} < m < -4$, on a $g^{-1}(m) \in]-1, 0[$

alors l'équation admet deux racines u_0 et u_1, telles que

$-\frac{\pi}{2} < u_0 < 0$ et $u_1 = -\pi - u_0$

- Si $m > -4$, on a $g^{-1}(m) \in]0, 1[$

l'équation admet toujours deux racines u_0 et u_1, avec

$0 < u_0 < \frac{\pi}{2}$ et $u_1 = \pi - u_0$

- Si $m = -\frac{17}{4}$, on a $g^{-1}(m) = -1$

une seule racine : $-\frac{\pi}{2}$

- Si $m = -4$, on a $g^{-1}(m) = 0$

trois racines : 0, π et $-\pi$

Etant donné $x \in [-1, +1]$,
il existe u_0 unique sur

$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

tel que $x = \sin u_0$.

Si $x \in [-1, 0]$,

$u_0 \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$

Si $x \in [0, 1]$,

$u_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$

on a alors :
$\sin u = x$
si et seulement si

$$\begin{cases} u = u_0 + 2k\pi \\ \text{ou} \\ u = \pi - u_0 + 2k\pi \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

CHAPITRE II

FONCTIONS USUELLES

I. Logarithme népérien

Définition

d_1 La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ continue sur $]0, +\infty[$ admet sur cet intervalle une primitive et une seule s'annulant pour $x = 1$, cette primitive est la fonction **logarithme népérien** et est notée ℓn.

Propriétés

p_1 : La fonction ℓn est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de fonction dérivée $\left(x \mapsto \frac{1}{x}\right)$

$$\frac{d\ell nx}{dx} = \frac{1}{x}$$

p_2 : $\ell n\, 1 = 0$

p_3 : $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\ell n\,(1+h)}{h} = 1$

p_4 : Pour tout couple (a,b) de réels strictement positifs

(i) $\ell n\, ab = \ell n\, a + \ell n\, b$

(ii) $\ell n \frac{1}{a} = -\ell n\, a$

(iii) $\ell n \frac{a}{b} = \ell n\, a - \ell n\, b$

Pour tout réel a strictement positif et tout $n \in \mathbb{Z}$

(iv) $\ell n\, a^n = n\, \ell n\, a$

p_5 : • ℓn est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et est strictement croissante

• $\lim_{x \to 0^+} \ell n\, x = -\infty$ $\lim_{x \to +\infty} \ell n\, x = +\infty$

• ℓn est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$.

p_6 : Il existe un réel unique noté e tel que $\ell n\, e = 1$

on a $e = 2{,}72$ à 5.10^{-3} près.

p_7 : $\lim_{x \to 0^+} x \ell n\, x = 0$ $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ell n\, x}{x} = 0$

Courbe représentative

• la tangente en B(e,1) est la droite OB d'équation $y = \frac{x}{e}$

• la tangente en A(1,0) a pour équation $y = x - 1$.

• la courbe présente une branche parabolique dans la direction de Ox.

FONCTION $x \mapsto \ell n\, |x|$

Théorèmes

t_1 La fonction $x \mapsto \ell n\, |x|$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ de fonction dérivée $x \mapsto \frac{1}{x}$

$$\frac{d \ell n\, |x|}{dx} = \frac{1}{x}$$

t_2 : Si u est une fonction dérivable sur I intervalle de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ ou dans $\mathbb{R}_-^*$,

la fonction $x \mapsto \ell n\, |u(x)|$ est dérivable sur I de fonction dérivée $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$

t_3 : Les primitives de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ sont les fonctions

$x \mapsto \ell n\, |x| + C$ (C constante réelle).

t_4 : Si u est une fonction dérivable sur I intervalle de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ ou dans $\mathbb{R}_-^*$

Les primitives sur I de la fonction $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ sont les fonctions

$x \mapsto \ell n\, |u(x)| + C$ (C constante réelle).

Exemples - Travaux pratiques

ex.1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\ell n(x^2 + 3) - \ell n(2x - 3) = \ell n(x + 1)$ (E)

⇒

$x \in \mathbb{R}$ est solution de (E) si et seulement si

$2x - 3 > 0,\ x + 1 > 0,$ $\ell n(x^2 + 3) = \ell n(x + 1) + \ell n(2x - 3)$

donc si et seulement si

$x > \frac{3}{2}$, $\ell n\,(x^2+3) = \ell n\,(2x^2 - x - 3)$

ou encore si et seulement si (en utilisant que ℓn est une bijection)

$x > \frac{3}{2}$, $x^2 + 3 = 2x^2 - x - 3$

L'équation (E') $x^2 + 3 = 2x^2 - x - 3$ se lit $x^2 - x - 6 = 0$ et admet pour racines 3 et -2, en conséquence (E) admet une solution et une seule = 3.

Remarque : On notera que l'équation

(E) $\ell n\,(x^2+3) = \ell n\,(x+1) + \ell n\,(2x-3)$

n'est pas équivalente à

(E_1) $\ell n\,(x^2+3) = \ell n(x+1)\,(2x-3)$

Ceci tient en fait que $\ell n\,(x+1)\,(2x-3)$ qui est défini pour $x > \frac{3}{2}$ mais aussi pour $x < -1$, n'est égal à $\ell n\,(x+1) + \ell n\,(2x-3)$ que pour $x > \frac{3}{2}$;

pour $x < -1$, on a $\ell n(x+1)\,(2x-3) = \ell n(-x-1) + \ell n(3-2x)$

ex.2 Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système

$$\begin{cases} \ell n x + 2\ell n 5 = \ell n 12 - \ell n y & (1) \\ x + y = \frac{7}{5} & (2) \end{cases}$$

⇒

L'équation (1) $\ell n\,x + 2\,\ell n\,5 = \ell n\,12 - \ell n\,y$

se lit $\ell n\,x + \ell n\,y = \ell n\,12 - \ell n\,25$.

et équivaut donc à $x > 0$, $y > 0$, $\ell n xy = \ell n \frac{12}{25}$

donc à $x > 0$, $xy = \frac{12}{25}$ (en utilisant que ℓn est une bijection)

Ainsi $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ est solution du système (1) (2) si et seulement si

$x > 0$, $x + y = \frac{7}{5}$, $xy = \frac{12}{25}$

donc si et seulement si

$x > 0$, et (x, y) couple de racines de $X^2 - \frac{7}{5}X + \frac{12}{25} = 0$

On en déduit que le système proposé admet deux solutions : $\left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$ et $\left(\frac{4}{5}; \frac{3}{5}\right)$

ex.3 Résoudre l'inéquation $|\,\ell n\,(x-1)\,| \leq \ell n\,x$ (E)

⇒

Les fonctions $x \mapsto \ell n\,(x-1)$ et $x \mapsto \ell n\,x$ sont simultanément définies pour $x > 1$.

Pour $x > 1$, l'inéquation se lit :

$-\ell n\,x \leq \ell n\,(x-1) \leq \ell n\,x$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} \ell n\,(x-1) \leq \ell n\,x \\ \text{et} \\ \ell n\,x\,(x-1) \geq 0 \end{cases} \qquad x > 1$$

soit encore (étant donné que ℓn est strictement croissante et que $\ell n\,1 = 0$)

$$\begin{cases} x - 1 \leq x & (1) \\ \text{et} \\ x\,(x-1) \geq 1 & (2) \end{cases} \qquad x > 1$$

L'inéquation (1) est toujours vérifiée,

et (2) se lit $x^2 - x - 1 \geq 0$, elle est donc vérifiée pour $x \leq \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ou $x \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

en conséquence l'ensemble des solutions de (E) est $\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2} ; +\infty\right[$

ex.4 Etudier $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\ln(x^2 - 2x + 1)}{x - 2}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x}$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x \ln(1+x)$

⇒

a) Posons $h(x) = x^2 - 2x$, on a $\lim\limits_{x \to 2} h(x) = 0$ donc d'après la propriété p_3

$\lim\limits_{x \to 2} \frac{\ln h(x) + 1}{h(x)} = 1$ c'est-à-dire $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\ln(x^2 - 2x + 1)}{x^2 - 2x} = 1$

on en déduit $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\ln(x^2 - 2x + 1)}{x - 2} = 2$

car $\frac{\ln(x^2 - 2x + 1)}{x - 2} = \frac{x \ln(x^2 - 2x + 1)}{x^2 - 2x}$

b) Pour $x > 0$, on a : $\ln(x^2+1) = \ln x^2 + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 2\ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$

donc $\frac{\ln(x^2+1)}{x} = 2\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$

Il est clair que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x}\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 0$ et d'après la propriété p_7,

on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

d'où finalement $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x} = 0$

c) Pour $x > 0$ on a $\ln x \ln(1+x) = x \ln x \frac{\ln(1+x)}{x}$

D'après les propriétés p_3 et p_7, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = 0$

donc $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x \ln(1+x) = 0$

ex.5 Trouver les primitives des fonctions suivantes

(1) $f : x \mapsto \frac{x+1}{x^2 + 2x + 2}$

(2) $g : x \mapsto \frac{x \ln(x^2+1)}{x^2+1}$

(3) $h : x \mapsto \frac{1}{x \ln x}$

⇒

(1) avec $u(x) = x^2 + 2x + 2$, on a :
pour tout x réel $u(x) = (x+1)^2 + 1 > 0$, donc f est continue sur $\mathbb{R}$;
de plus $f(x) = \frac{1}{2}\frac{u'(x)}{u(x)}$
Les primitives de f sont donc les fonctions F_λ

$F_\lambda = x \mapsto \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2x + 2) + \lambda \qquad \lambda \in \mathbb{R}$

(2) g est manifestement continue sur $\mathbb{R}$

Avec $u(x) = \ln(x^2+1)$ on a $u'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ donc

$g(x) = \dfrac{1}{2}\, u(x)\, u'(x)$

Les primitives de g sont donc les fonctions G_λ

$$G_\lambda = x \mapsto \frac{1}{4}\left(\ln\left(x^2+1\right)\right)^2 + \lambda$$

(3) h est continue sur $I =]0,1[$ et sur $J =]1,+\infty[$

Avec $u(x) = \ln x$ on a $h(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$

Les primitives de h sur I sont donc les fonctions H_λ

$$H_\lambda : x \mapsto \ln(-\ln x) + \lambda \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

et sur J ce sont les fonctions K_λ

$$K_\lambda = x \mapsto \ln(\ln x) + \lambda \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

II. Logarithme décimal

Définition

d_2 La fonction $x \mapsto \dfrac{\ln x}{\ln 10}$ est appelée **logarithme décimal** et notée **log**

Propriétés

p_8 log est définie sur $\mathbb{R}_+^*$

$\log = M \ln$ avec $M = \dfrac{1}{\ln 10} = 0{,}43429$ à $5 \cdot 10^{-6}$ près

p_9 Pour tout couple (a,b) de réels strictement positifs,

(i) $\log ab = \log a + \log b$

(ii) $\log \dfrac{1}{a} = -\log a$

(iii) $\log \dfrac{a}{b} = \log a - \log b$

Pour tout réel a strictement positif et tout $n \in \mathbb{Z}$

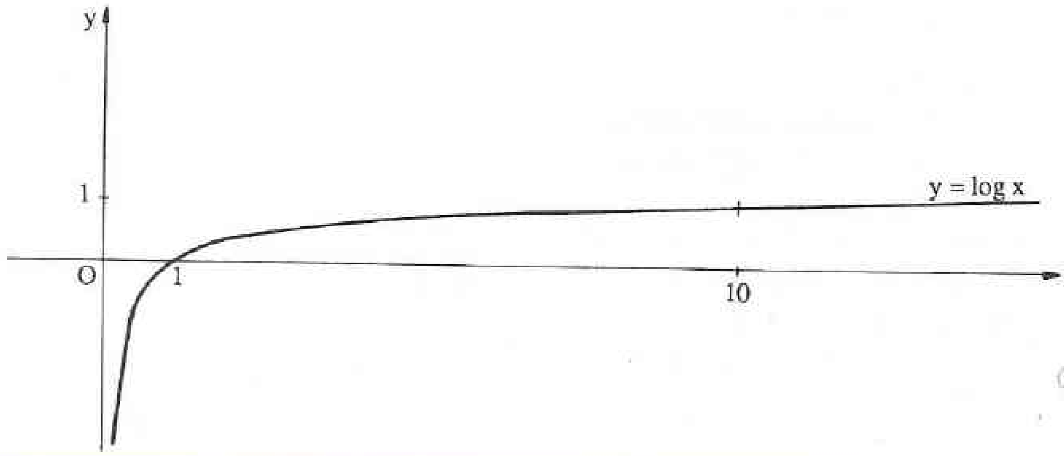
(iv) $\log a^n = n \log a$

p_{10} log est continue strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, c'est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$

p_{11} $\log 1 = 0 \qquad \log 10 = 1$

p_{12} log est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de fonction dérivée $x \mapsto \dfrac{M}{x}$

Courbe représentative



III. Fonction exponentielle

Définition

d_3 La bijection réciproque de la fonction logarithme népérien est appelée **fonction exponentielle** et notée exp.

exp est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$

$y = \exp x, \quad x \in \mathbb{R}$ équivaut à $x = \ln y, \quad y \in \mathbb{R}_+^*$

Propriétés

p_{13} $\exp 0 = 1 \quad \exp 1 = e$

$\forall n \in \mathbb{Z} \quad \exp n = e^n$

Notation : pour tout $x \in \mathbb{R}$ exp x est noté e^x

Conséquences : pour tout $x \in \mathbb{R}$ $e^x > 0$ et $\ln(e^x) = x$

p_{14} Pour tout couple (a,b) de réels, on a :

$$e^a e^b = e^{a+b}$$

$$e^{-a} = \frac{1}{e^a}$$

Pour tout réel a, et tout $n \in \mathbb{Z}$

$$(e^a)^n = e^{na}$$

p_{15} La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$, de fonction dérivée $x \mapsto \exp x$

$$\frac{de^x}{dx} = e^x$$

p_{16} $\lim\limits_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$

p_{17} exp est continue sur $\mathbb{R}$ et est strictement croissante.

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0 \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x e^x = 0 \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

Courbe représentative

- La tangente en A(0,1) est la droite d'équation $y = x + 1$
- La tangente en B(1,e) est la droite OB d'équation $y = e\,x$
- La courbe présente une branche parabolique dans la direction de Oy

Remarque et complément :

Le repère étant orthonormé, cette courbe (équation $y = e^x$) se déduit de la courbe représentative de ℓn (équation $y = \ell n\, x$) dans la symétrie orthogonale par rapport à la droite Δ (équation $y = x$), c'est-à-dire la première bissectrice des axes.
Il est facile de voir que ceci est une propriété générale : si f est une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle J de courbe représentative C_f, la courbe représentative $C_{f^{-1}}$ de f^{-1} (bijection de J sur I) est symétrique de C_f dans la symétrie orthogonale par rapport à Δ. En effet, M(x,y) appartient à $C_{f^{-1}}$ si et seulement si $y = f^{-1}(x)$ donc si et seulement si $x = f(y)$ donc si et seulement si M'(y,x) appartient à C_f.

Théorèmes

t_5 Pour toute fonction u dérivable sur I intervalle de $\mathbb{R}$, $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I, de fonction dérivée $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$

t_6 Les primitives de la fonction $x \mapsto e^x$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto e^x + C$ (C constante réelle).

t_7 u étant une fonction dérivable sur I intervalle de $\mathbb{R}$, les primitives sur I de la fonction $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$ sont les fonctions $x \mapsto e^{u(x)} + C$ (C constante réelle).

Exemples - Travaux pratiques

ex.6 Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système

$$\begin{cases} \ell n\, x + \ell n\, 4 = \ell n\, 3 - \ell n\, y & (1) \\ e^x = e^{2-y} & (2) \end{cases}$$

⇒

l'équation (1) s'écrit $\ell n\, x + \ell n\, y = \ell n \dfrac{3}{4}$

et équivaut donc à $xy = \dfrac{3}{4}$ avec $x > 0$ $y > 0$.

l'équation (2) s'écrit $e^{x+y} = e^2$
et équivaut à $x + y = 2$

De $x + y = 2$ et $xy = \dfrac{3}{4}$ on déduit que x et y sont les racines de $X^2 - 2X + \dfrac{3}{4} = 0$

d'où $(x, y) = \left(\dfrac{3}{2} ; \dfrac{1}{2}\right)$ ou $(x, y) = \left(\dfrac{1}{2} ; \dfrac{3}{2}\right)$

Pour ces deux couples, on a $x > 0$ et $y > 0$; ils constituent donc l'ensemble des solutions du système proposé.

ex.7 Calculer le réel x sachant que les nombres e^{x+1}, e^x et e^{2x+1} sont dans cet ordre en progression géométrique.

⇒

La raison q de la progression est telle que $q = \dfrac{e^x}{e^{x+1}} = \dfrac{e^{2x+1}}{e^x}$

donc $q = e^{-1} = e^{x+1}$

On en déduit $x + 1 = -1$, i.e. $x = -2$, les trois nombres proposés sont $\dfrac{1}{e}, \dfrac{1}{e^2}, \dfrac{1}{e^3}$

en progression géométrique de raison $\dfrac{1}{e}$

ex.8 Etudier les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 e^{\frac{1}{x}}$ $\quad \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{xe^{2x} - e^{3x}}{1 + e^x}$ $\quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{x-x^2}}{x^2}$

⇒

a) Posons $u = \dfrac{1}{x}$, u tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0 en restant positif

et $x^2 e^{\frac{1}{x}} = \dfrac{e^u}{u^2} = \left(\dfrac{e^{\frac{u}{2}}}{u}\right)^2$

Or $\dfrac{e^{\frac{u}{2}}}{u} = 2\dfrac{e^{\upsilon}}{\upsilon}$ avec $\upsilon = \dfrac{u}{2}$ et d'après la propriété p_{18} $\lim\limits_{\upsilon\to +\infty} \dfrac{e^{\upsilon}}{\upsilon} = +\infty$

donc $\lim\limits_{u\to +\infty} \dfrac{e^u}{u^2} = +\infty$ i.e. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 e^{\frac{1}{x}} = +\infty$

b) On a pout tout x réel $\dfrac{xe^{2x} - e^{3x}}{1 + e^x} = \dfrac{e^{3x}(xe^{-x} - 1)}{e^x(1 + e^{-x})} = e^{2x}\left(\dfrac{xe^{-x} - 1}{1 + e^{-x}}\right)$

De $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{-x} = 0$, $\lim\limits_{x\to +\infty} xe^{-x} = 0$ (cf propriété p_{18}) on déduit : $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{xe^{-x} - 1}{1 + e^{-x}} = -1$

et donc: $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{xe^{2x} - e^{3x}}{1 + e^x} = -\infty$

c) On a $e^x - e^{x-x^2} = e^x\left(1 - e^{-x^2}\right)$

D'après la propriété p_{16}, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-x^2} - 1}{-x^2} = 1$

donc $\lim\limits_{x\to 0} e^x \dfrac{1 - e^{-x^2}}{x^2} = 1$

Exponentielle de base a

Notation

Etant donné un réel a, a > 0, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a $a^n = e^{n \ln a}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on pose :

$a^x = e^{x \ln a}$

Remarque : Si a = 1 alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1^x = 1$;

$x \mapsto a^x$ est la fonction exponentielle de base a, $\exp_a$.

p_{19} Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $a^x > 0$

$a^0 = 1$, $\quad a^1 = a$

p20 $a \in \mathbb{R}_+^*$, b et c réels quelconques

$a^b a^c = a^{b+c}$ $\qquad (a^b)^c = a^{bc}$ $\qquad a^{-b} = \dfrac{1}{a^b}$ $\qquad \dfrac{a^b}{a^c} = a^{b-c}$

Exemples - Travaux pratiques

ex.9 Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $2^{2x} - 2^{x+2} + 3 = 0$

⇒

L'équation se lit : $X^2 - 4X + 3 = 0$, $X = 2^x$

Les racines de $X^2 - 4X + 3 = 0$ sont 1 et 3, en conséquence, l'équation proposée équivaut à $2^x = 1$ ou $2^x = 3$

c'est-à-dire à $x\,\ell n\, 2 = 0$ ou $x\,\ell n\,2 = \ell n\,3$

ses racines sont donc 0 et $\dfrac{\ell n\,3}{\ell n\,2}$

ex.10 a) Etudier les variations de la fonction $f : x \to \dfrac{\ell n\,x}{x}$

b) Discuter graphiquement l'équation $\dfrac{\ell n\,x}{x} = \lambda$, $x > 0$

c) Résoudre l'équation $x^2 = 2^x$, $x > 0$

⇒

a) f est définie, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ $\qquad f'(x) = \dfrac{1 - \ell n\,x}{x^2}$, f' s'annule en changeant de signe en e

$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ell n\,x}{x} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ell n\,x}{x} = 0$

x	0		e		$+\infty$
f'(x)		+	0	−	
f(x)	$-\infty$	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0

b) Soit (E) l'équation $\dfrac{\ell n\,x}{x} = \lambda$, $x > 0$

Pour $\lambda \leq 0$	(E) a une racine unique α,	$0 < \alpha \leq 1$
Pour $0 < \lambda < \frac{1}{e}$	(E) a deux racines distinctes α et β	$1 < \alpha < e < \beta$
Pour $\lambda = \frac{1}{e}$	(E) a une racine unique	$\alpha = e$
Pour $\lambda > \frac{1}{e}$	(E) n'a pas de racine.	

c) L'équation (E') $\quad x^2 = 2^x$, $\quad x > 0$

équivaut à $\quad 2\,\ell n\,x = x\,\ell n\,2$, $\quad x > 0$

donc encore à $\quad \dfrac{\ell n\,x}{x} = \dfrac{\ell n\,2}{2}$, $\quad x > 0$

D'après le b) cette dernière équation a deux racines α et β, $1 < \alpha < e < \beta$

on a bien sûr $\alpha = 2$ et la seconde racine est tout aussi évidente : $\beta = 4$ $\left(\frac{\ell n\, 4}{4} = \frac{2\,\ell n\, 2}{4} = \frac{\ell n\, 2}{2}\right)$

IV. Fonction puissance

Définition

d₄ $\alpha \in \mathbb{R}$ étant fixé, la fonction $x \mapsto x^\alpha$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $x^\alpha = e^{\alpha \,\ell n\, x}$ est appelée

fonction puissance.

Propriétés

p_{21} $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ $\quad x^0 = 1$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\quad 1^\alpha = 1$

p_{22} la fonction puissance $(x \mapsto x^\alpha)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée $(x \mapsto \alpha\, x^{\alpha-1})$

$$\frac{dx^\alpha}{dx} = \alpha\, x^{\alpha-1}$$

p_{23} Variations - Courbe représentative

$\alpha < 0$

x	0 ↘ $+\infty$
x^α	$+\infty$ ↘ 0

$0 < \alpha < 1$

x	0 ↗ $+\infty$
x^α	0 ↗ $+\infty$

$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^\alpha}{x} = +\infty$: la courbe est tangente en O à l'axe Oy.

$\alpha > 1$

x	0 ↗ $+\infty$
x^α	0 ↗ $+\infty$

$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^\alpha}{x} = 0$: la courbe est tangente en 0 à l'axe Ox.

p_{24} Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$(x^n)^{\frac{1}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n = x$$

La fonction $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$ $(\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*)$ est donc fonction réciproque

de $x \mapsto x^n$ $(\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R})$, on l'appelle aussi fonction racine $n^{\text{ième}}$ et on la note $\sqrt[n]{\ }$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ell n\, x}$

$$y = \sqrt[n]{x},\ x \in \mathbb{R}_+^* \iff x = y^n,\ y \in \mathbb{R}_+^*$$

p_{25} Pour tout réel a strictement positif, et tout réel α

$$\ell n\, a^\alpha = \alpha\, \ell n\, a$$

Remarque : on observera que cette propriété p_{25} généralise la propriété p_4 (iv)

THEOREME

Comparaison asymptotique des fonctions logarithme, puissance et exponentielle.

t_8 Pour $\alpha > 0$, on a

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha\, \ell n\, x = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ell n\, x}{x^\alpha} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha e^{-x} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$$

EXEMPLES - TRAVAUX PRATIQUES

e_{11} Etudier les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ell n\,(1+x^2)}{\sqrt{x}}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{\sqrt[3]{x}}}$

⇒

a) Pour $x > 0$, $\displaystyle\frac{\ell n\,(1+x^2)}{\sqrt{x}} = \frac{2\,\ell n\, x}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}\,\ell n\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$

il est clair que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\ell n\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = 0$

et d'après le théorème t_8, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ell n\, x}{\sqrt{x}} = 0$

d'où finalement $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ell n\,(1+x^2)}{\sqrt{x}} = 0.$

b) Pour $x > 0$, $x^{\frac{1}{\sqrt[3]{x}}} = e^{\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\ell n\, x}$

d'après le théorème t_8 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ell n\, x}{\sqrt[3]{x}} = 0$

or $\displaystyle\lim_{u\to 0} e^u = 1$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\ell n\, x} = 1$

e_{12} Etudier la limite en $+\infty$ de $f : x \mapsto \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

$\Rightarrow$

Pour tout $x > 0$, $f(x) = e^{x\, \ell n\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = e^{\frac{\ell n\,(1+h)}{h}}$ avec $h = \frac{1}{x}$

quand x tend vers $+\infty$, h tend vers 0, $\frac{\ell n\,(1+h)}{h}$ tend vers 1 (cf. propriété p_8)

donc $e^{\frac{\ell n\,(1+h)}{h}}$ tend vers e

Ainsi $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$

ex.13 Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

(1) $f : x \mapsto x\, e^{x^2+1}$ (2) $g : x \mapsto \frac{\ell n\, x}{x}\, e^{(\ell n\, x)^2}$

$\Rightarrow$

(1) f est continue en $\mathbb{R}$ et s'écrit $f(x) = \frac{1}{2} u'(x)\, e^{u(x)}$

avec $u(x) = x^2 + 1$, ses primitives sont donc les fonctions

$x \mapsto \frac{1}{2} e^{x^2+1} + \lambda \quad \lambda \in \mathbb{R}$

(2) g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$: $g(x) = \frac{\ell n\, x}{x}\, e^{(\ell n\, x)^2}$

et avec $u(x) = (\ell n\, x)^2$ on a $g(x) = \frac{1}{2} u'(x)\, e^{u(x)}$

ses primitives sont donc les fonctions

$x \mapsto \frac{1}{2} e^{(\ell n\, x)^2} + \lambda \quad \lambda \in \mathbb{R}$

V. FONCTIONS CIRCULAIRES

1) SINUS ET COSINUS

Propriétés

p_{26} Les fonctions sinus (sin) et cosinus (cos) sont définies sur $\mathbb{R}$.

p_{27} Pour tout x réel, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

p_{28} Pour tout x réel, $-1 \leq \cos x \leq 1$, $-1 \leq \sin x \leq 1$.

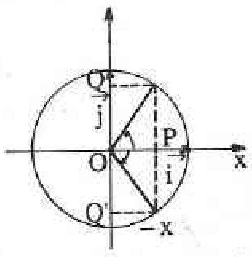
Dans ce qui suit, $\mathcal{C}$ désigne la courbe représentative de cos et $\mathcal{S}$ la courbe représentative de sin dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. Les axes sont notés Ox et Oy.

p_{29} Périodicité :
Les fonctions *sin* et *cos* sont périodiques de *période* 2π.
Pour tout x réel, $\cos(x+2\pi) = \cos x$, $\sin(x+2\pi) = \sin x$.

Corollaire :
Les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{S}$ sont invariantes pour toute translation de vecteur $2n\pi\vec{i}$, avec $n \in \mathbb{Z}$.

p_{30} La fonction *cos* est *paire* : pour tout x réel, $\cos(-x) = \cos x$.
La fonction *sin* est *impaire* : pour tout x réel, $\sin(-x) = -\sin x$.

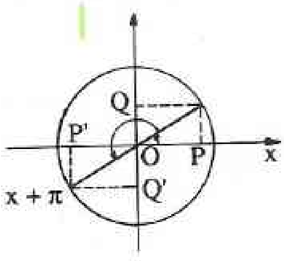
Corollaire :
La courbe $\mathcal{C}$ admet Oy comme axe de symétrie.
La courbe $\mathcal{S}$ admet O comme centre de symétrie.



$\overline{OP} = \cos x = \cos(-x)$

$\overline{OQ} = \sin x = -\overline{OQ'}$
$= -\sin(-x)$

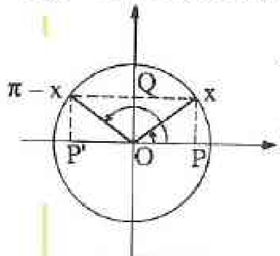
p_{31} Pour tout x réel, $\cos(x+\pi) = -\cos x$, $\sin(x+\pi) = -\sin x$.



$\overline{OP'} = \cos(x+\pi) = -\overline{OP} = -\cos x$

$\overline{OQ'} = \sin(x+\pi) = -\overline{OQ} = -\sin x$

P₃₂ Pour tout x réel, $\cos(\pi - x) = -\cos x$, $\sin(\pi - x) = \sin x$.



$\overline{OP'} = \cos(\pi - x) = -\overline{OP} = -\cos x$

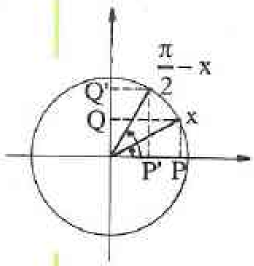
$\overline{OQ} = \sin(\pi - x) = \sin x$

Corollaire :

La courbe $\mathcal{C}$ admet le point de coordonnées $\left(\frac{\pi}{2}\ ;\ 0\right)$ comme centre de symétrie.

La courbe $\mathcal{S}$ admet la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ comme axe de symétrie.

P₃₃ Pour tout x réel, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$.



$\overline{OP'} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \overline{OQ} = \sin x$

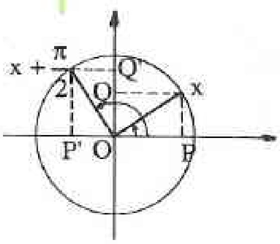
$\overline{OQ'} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \overline{OP} = \cos x$

Corollaire :

Les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{S}$ se déduisent l'une de l'autre dans la symétrie de rapport à la droite d'équation $x = \frac{\pi}{4}$.

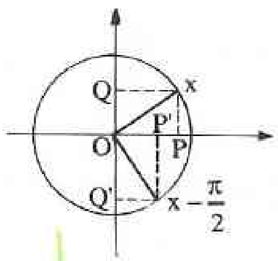
P₃₄ Pour tout x réel, $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$, $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$

$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x$, $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x$



$\overline{OP'} = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\overline{OQ} = -\sin x$

$\overline{OQ'} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \overline{OP} = \cos x$



$\overline{OP'} = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \overline{OQ} = \sin x$

$\overline{OQ'} = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\overline{OP} = -\cos x$

p_{35} Valeurs remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

DERIVEES - VARIATIONS

Théorème

t_9 La fonction *sin* est dérivable sur $\mathbb{R}$, et a pour *fonction dérivée cos*.
La fonction *cos* est dérivable sur $\mathbb{R}$, et a pour *fonction dérivée -sin*.

$$\frac{d \sin x}{d x} = \cos x \qquad \frac{d \cos x}{d x} = -\sin x$$

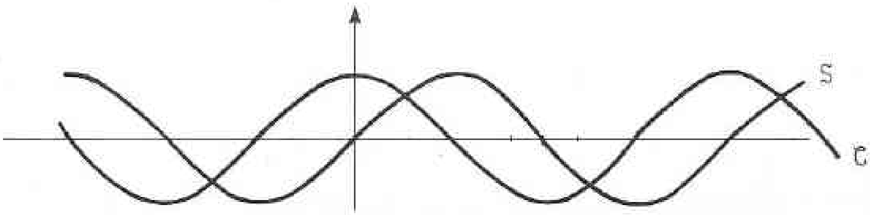
VARIATIONS

Les fonctions sin et cos étant périodiques (de période 2π) et respectivement impaire et paire, on peut restreindre leur étude à l'intervalle $[0,\pi]$.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
f'(x) = cos x	1	+	0	−	−1
f(x) = sin x	0	↗	1	↘	0

x	0		π
f'(x) = − sin x	0	−	0
f(x) = cos x	1	↘	−1

COURBES REPRESENTATIVES



$\mathcal{C}$ et $\mathcal{S}$ sont invariantes pour toute translation de vecteur $2n\pi\vec{i}$, $n \in \mathbb{Z}$.
Oy est axe de symétrie de $\mathcal{C}$, O est centre de symétrie de $\mathcal{S}$.
$\mathcal{S}$ se déduit de $\mathcal{C}$ dans la translation de vecteur $\frac{\pi}{2}\vec{i}$.

2) TANGENTE

Propriétés

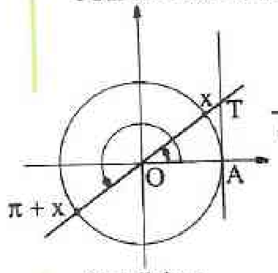
p_{10} La fonction tangente (tan) est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi ;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Pour tout réel x, n'appartenant pas à $\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi ;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$, $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

Dans ce qui suit, $\mathcal{T}$ désigne la courbe représentative de tan dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. Les axes sont notés Ox et Oy.

P11 La fonction tan est périodique de période π.

Pour tout réel x, n'appartenant pas à $\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}\right\}$, $\tan(\pi + x) = \tan x$.



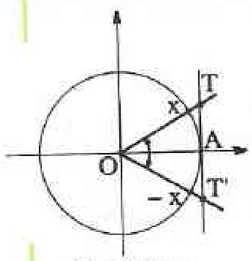
$\overline{AT} = \tan x = \tan(x + \pi)$

Corollaire :

La courbe $\mathcal{T}$ est invariante pour toute translation de vecteur $n\pi\vec{i}$, avec $n \in \mathbb{Z}$.

P12 La fonction tan est impaire.

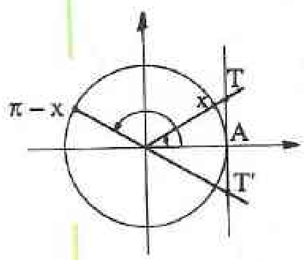
Pour tout réel x, n'appartenant pas à $\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}\right\}$, $\tan(-x) = -\tan x$.



$\overline{AT'} = \tan(-x) = -\overline{AT} = -\tan x$

Corollaire :
La courbe $\mathcal{T}$ admet O comme centre de symétrie.

P13 Pour tout réel x, n'appartenant pas à $\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}\right\}$, $\tan(\pi - x) = -\tan x$.



$\overline{AT'} = \tan(\pi - x) = -\overline{AT} = -\tan(x) = \tan(-x)$

Corollaire :

La courbe $\mathcal{T}$ admet comme centre de symétrie le point de coordonnées $\left(\frac{\pi}{2} ; 0\right)$.

P14 Pour tout réel x, n'appartenant pas à $\left\{k\frac{\pi}{2} ; k \in \mathbb{Z}\right\}$, $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan x}$.

VALEURS PARTICULIERES

x	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
tan x	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

THEOREME

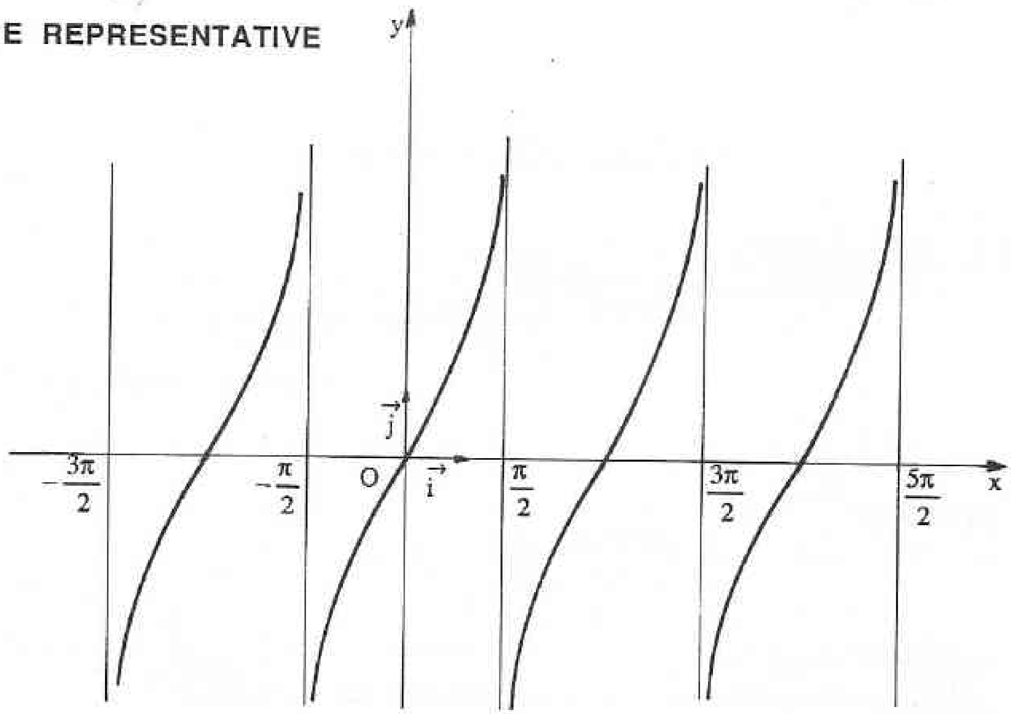
t_{10} La fonction tan est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ et a pour *fonction dérivée* $1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$.

VARIATIONS

La fonction tan étant périodique (de période π) et impaire, on peut restreindre son étude à l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}[$.

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$	1 +	‖
$f(x) = \tan x$	0 ↗ $+\infty$	‖

COURBE REPRESENTATIVE



$\mathcal{T}$ est invariante par toute translation de vecteur $n\pi\vec{i}$, $n \in \mathbb{Z}$.
O est centre de symétrie de $\mathcal{T}$.

3) FORMULAIRE USUEL

Pour tout couple (x,y) de réels :

1) $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$
2) $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
3) $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
4) $\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$

Pour tout couple (x,y) de réels n'appartenant pas à $\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$:

- si $x + y$ n'appartient pas à $\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $\tan(x+y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$
- si $x - y$ n'appartient pas à $\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $\tan(x-y) = \dfrac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$

Pour tout x réel

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$
$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

Pour tout x réel n'appartenant pas à $\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$$\cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} \qquad \sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$$

Pour tout x réel n'appartenant pas à $\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{\pi}{4} + \ell\frac{\pi}{2} \mid \ell \in \mathbb{Z}\}$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

EXERCICES RESOLUS

201

On définit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(\sqrt{x^2 + 4} - x\right)$$

1) Quel est l'ensemble de définition de f ?
2) Montrer que la courbe C représentative de f dans un repère orthonormé du plan admet le point I (O, $\ln 2$) comme centre de symétrie.
3) Etudier les variations de f et construire C.

SOLUTION

1) Pour tout x réel on a $\sqrt{x^2+4} > \sqrt{x^2}$

i.e. $\sqrt{x^2+4} > |x|$

d'où $\sqrt{x^2+4} - x > 0$.

f est donc définie sur $\mathbb{R}$

2) Opérons la translation des axes amenant l'origine en I.
Les formules de changement d'axes sont

$$x = X \qquad y = Y + \ln 2$$

$f(0) = \ln 2$

Dans le nouveau repère C a pour équation

$$Y = \ln\left(\sqrt{X^2+4} - X\right) - \ln 2$$

$$\text{i.e.} \quad Y = \ln\left(\sqrt{1+\frac{X^2}{4}} - \frac{X}{2}\right)$$

Posons $g(x) = \ln\left(\sqrt{1+\frac{X^2}{4}} - \frac{X}{2}\right)$

$$\left(\sqrt{1+\frac{X^2}{4}} - \frac{X}{2}\right) \cdot \left(\sqrt{1+\frac{X^2}{4}} + \frac{X}{2}\right) = 1$$

on a $\sqrt{1+\frac{X^2}{4}} + \frac{X}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{X^2}{4}} - \frac{X}{2}}$

donc $g(-X) = -g(X)$

$$\ln\frac{1}{u} = -\ln u$$

g étant impaire, I est centre de symétrie de C.

3) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec

$x \mapsto \sqrt{x^2+4} - x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et strictement positive.
f est donc une composée de fonctions dérivables.

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{x^2+4}}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+4}} - 1}{\sqrt{x^2+4} - x}$$

En écrivant $f(x) = \ln 4 - \ln\left(\sqrt{x^2+4} + x\right)$

$$\left(\sqrt{x^2+4} - x\right) \cdot \left(\sqrt{x^2+4} + x\right) = 4$$

il est clair que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

d'où le tableau de variations

x	0		$+\infty$
f'(x)	$-\frac{1}{2}$	$-$	
f(x)	$\ln 2$	$\searrow$	$-\infty$

le 2°) permet de restreindre l'étude à $[0, +\infty[$

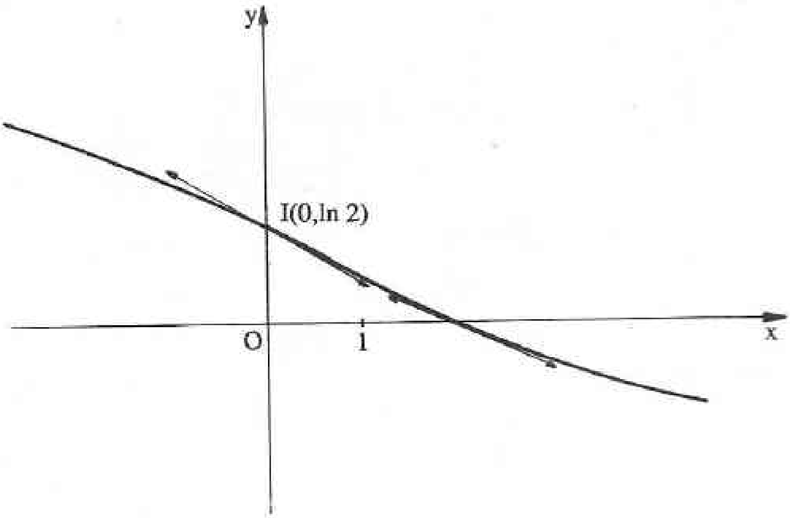
Pour étudier la branche infinie, écrivons

pour $x > 0$ $\quad f(x) = \ln x + \ln\left(\sqrt{1+\frac{4}{x^2}} - 1\right)$

$$\sqrt{x^2+4} - x = x\left(\sqrt{1+\frac{4}{x^2}} - 1\right)$$

alors $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{\ln\left(\sqrt{1+\frac{4}{x^2}} - 1\right)}{x}$

et il est clair que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$. C présente donc une branche parabolique de direction Ox.



f s'annule pour x tel que

$$\sqrt{x^2+4} - x = 1$$

donc

$$x^2 + 4 = x^2 + 2x + 1$$

et $x = \frac{3}{2}$

$$f'\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{2}{5}$$

On complète le dessin au moyen de la symétrie par rapport à I.

202

On considère la fonction numérique g de la variable réelle x telle que

$$g(x) = x + 1 + \frac{3}{2x} + \frac{1}{2}\ \ell n \left| \frac{x+1}{x-1} \right| .$$

1) Etudier l'ensemble de définition et les variations de la fonction g.

On désigne par C la courbe représentative de g dans un repère orthogonal $(O\,;\ \vec{i},\ \vec{j})$ du plan.(on prendra 3 cm pour unité sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées).

2) Montrer que la droite Δ d'équation $y = x+1$ est asymptote à la courbe C. Montrer que C admet un centre de symétrie.

3) Construire C.

SOLUTION

1) Ensemble de définition : $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1,0,1\}$.
g est continue et dérivable sur D_g.

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to1^+} g(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to(-1)^+} g(x) = -\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to1^-} g(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to(-1)^-} g(x) = -\infty$
$\lim\limits_{x\to0^+} g(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to0^-} g(x) = -\infty$

Sens de variation :

$$g'(x) = 1 - \frac{3}{2x^2} + \frac{1}{2}\,\frac{\dfrac{-2}{(x-1)^2}}{\dfrac{x+1}{x-1}} = 1 - \frac{3}{2x^2} - \frac{1}{x^2-1}$$

$$g'(x) = \frac{2x^4 - 7x^2 + 3}{2x^2\,(x^2-1)} = \frac{(2x^2-1)\,(x^2-3)}{2x^2\,(x^2-1)}$$
$$= \frac{(x\sqrt{2}-1)\,(x\sqrt{2}+1)\,(x-\sqrt{3})\,(x+\sqrt{3})}{2x^2\,(x^2-1)}$$

$(\ell n\,|u|)' = \dfrac{u'}{u}$

$2x^2 - 7x + 3 = 0$ admat pour racines 3 et $\dfrac{1}{2}$, donc

$2x^4 - 7x^2 + 3 =$
$(2x^2-1)\,(x^2-3)$.

$1 + \dfrac{3\sqrt{3}}{2} - \ell n\,\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$
$= 4{,}26$ à $5\cdot10^{-3}$ près.

$1 + 2\sqrt{2} - \ell n\,(\sqrt{2}-1)$
$= 4{,}71$ à $5\cdot10^{-3}$ près.

$1 - \dfrac{3\sqrt{3}}{2} + \ell n\,\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$
$= -2{,}26$ à $5\cdot10^{-3}$ près.

$1 - 2\sqrt{2} + \ell n\,(\sqrt{2}-1)$
$= -2{,}71$ à $5\cdot10^{-3}$ près.

Tableau de variation :

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	−	‖	+	0	−	‖	−	0	+	‖	−	0	+	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$-\frac{3\sqrt{3}}{2} + 1 + \ell n\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\right)$	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$-2\sqrt{2} + 1 + \ell n\,(\sqrt{2}-1)$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$1 + 2\sqrt{2} - \ell n\,(\sqrt{2}-1)$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$1 + \frac{3\sqrt{3}}{2} - \ell n\,\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$	↗	$+\infty$

2) $g(x) - (x+1) = \dfrac{3}{2x} + \dfrac{1}{2}\,\ell n\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

Donc $y = x + 1$ est asymptote à C au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$.

D'après l'étude des variations, le centre de symétrie, s'il existe, est le milieu du segment AB avec :

$$A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\,;\; g\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right);\; B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,;\; g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$$

Ce ne peut donc être que le point Ω (0,1).

Opérons la translation des axes définie par $x = X$, $y = Y + 1$.

Nouveau repère : $(\Omega\,;\,\vec{i},\,\vec{j})$

Dans le nouveau repère, C a pour équation :

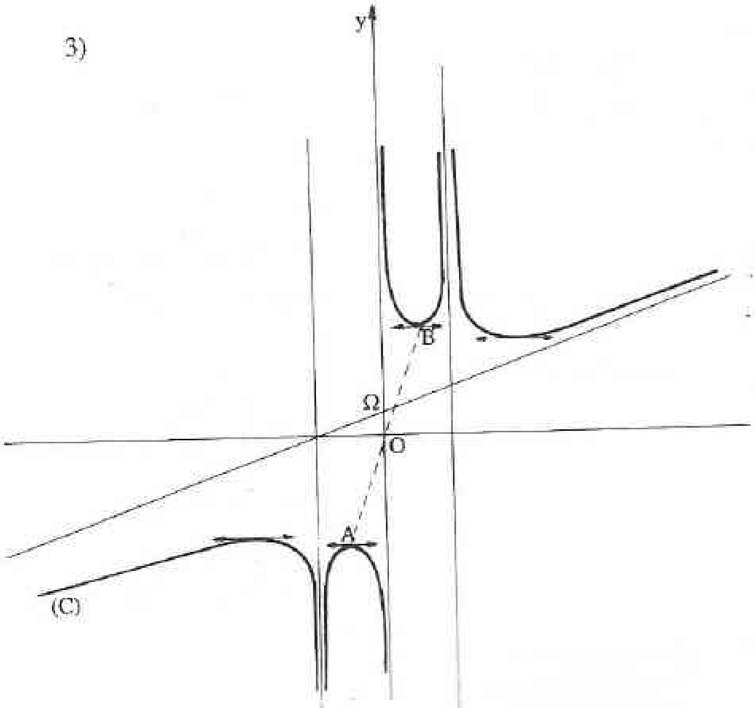
$$Y + 1 = g(x),\ \text{soit}\ Y = X + \frac{3}{2X} + \frac{1}{2}\,\ell n\left|\frac{X+1}{X-1}\right|$$

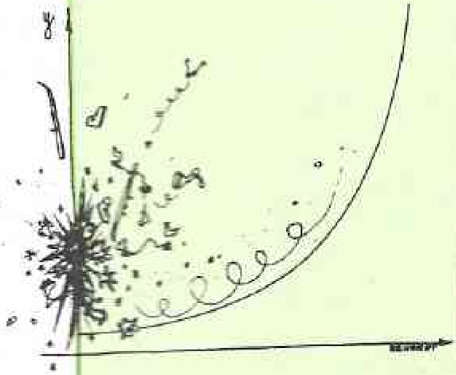
La fonction $f : X \mapsto X + \dfrac{3}{2X} + \dfrac{1}{2}\,\ell n\left|\dfrac{X+1}{X-1}\right|$ est impaire :

$\ell n\, u = -\,\ell n\,\dfrac{1}{u}$

Le point Ω (0,1) est donc centre de symétrie pour C.

3)





203

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{2x} - 4e^x + 3 = 0$
On notera S l'ensemble de ses solutions.

2) On considère la fonction f de la variable réelle x définie dans $\mathbb{R} \setminus S$ par
$x \mapsto f(x) = \ln |e^{2x} - 4e^x + 3|$

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $e^{2x} - 4e^x + 3 > 0$

b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - 2x$ (on pourra écrire que $2x = \ln e^{2x}$)

c) Etudier et représenter graphiquement la fonction f.

SOLUTION

1) L'équation s'écrit $X^2 - 4X + 3 = 0$ avec $X = e^x$
donc encore $e^x = 1$ ou $e^x = 3$

On en déduit $S = \{0, \ln 3\}$

1 est racine évidente de $X^2 - 4X + 3 = 0$, l'autre racine est donc 3.
$e^x = 1$ donne $x = 0$
$e^x = 3$ donne $x = \ln 3$
la fonction exponentielle est strictement croissante donc
$e^x < a$ équivaut à $x < \ln a$

2) a) $X^2 - 4X + 3 > 0$ équivaut à $X < 1$ ou $X > 3$
donc
$e^{2x} - 4e^x + 3 > 0$ équivaut à $x < 0$ ou $x > \ln 3$

b) On a $f(x) - 2x = \ln (e^{2x} - 4e^x + 3) - \ln e^{2x}$
$= \ln e^{-2x} (e^{2x} - 4e^x + 3)$

$\ln u - \ln v = \ln \frac{u}{v}$

$= \ln (1 - 4e^{-x} + 3e^{-2x})$
donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - 2x = 0$

c) Pour $x \in]-\infty,0[\cup]\ln 3,+\infty[$
$f(x) = \ln (e^{2x} - 4e^x + 3)$
f est dérivable sur $]-\infty,0[\cup]\ln 3,+\infty[$ avec

$$f'(x) = \frac{2e^{2x} - 4e^x}{e^{2x} - 4e^x + 3} = \frac{2e^x (e^x - 2)}{e^{2x} - 4e^x + 3}$$

On peut "réunir" ces deux études en utilisant que la dérivée de

• sur $]-\infty,0[$ on a $e^x < 2$ donc $f'(x) < 0$

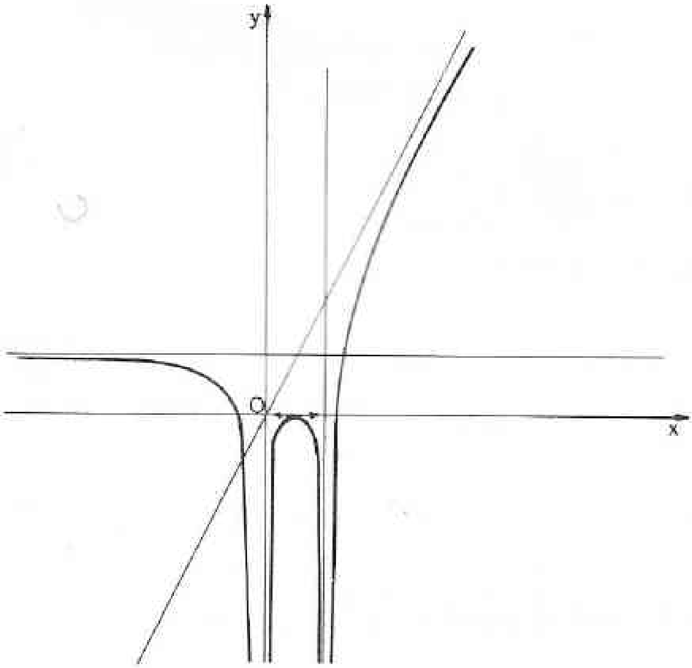
• sur $]\ln 3,+\infty[$ on a $e^x > 2$ donc $f'(x) > 0$

Pour $x \in]0, \ln 3[$ $f(x) = \ln(-e^{2x} + 4e^x - 3)$
f est dérivable sur $]0, \ln 3[$ avec

$$f'(x) = \frac{2e^x(e^x - 2)}{e^{2x} - 4e^x + 3}$$

• sur $]0, \ln 2[$ on a $f'(x) > 0$
• sur $]\ln 2, \ln 3[$ on a $f'(x) < 0$

x	$-\infty$		0		$\ln 2$		$\ln 3$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	
$f(x)$	$\ln 3$	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$



$x \mapsto \ln|u(x)|$
est
$x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$

quand x tend vers 0 ou $\ln 3$
$e^{2x} - 4e^x + 3$ tend vers 0
donc f(x) tend vers $-\infty$

D'après le 2°) b) la droite D ($y = 2x$) est asymptote

Intersections avec Ox :
$e^{2x} - 4e^x + 3 = 1$
donne
$e^x = 2 - \sqrt{2}$ ou
$e^x = 2 + \sqrt{2}$
soit
$x = \ln(2 - \sqrt{2})$ ou
$x = \ln(2 + \sqrt{2})$
i.e. à $5 \cdot 10^{-3}$ près
$x = -0,53$ ou $x = 1,23$

204

Soit f la fonction numérique d'une variable réelle définie par $x \mapsto f(x) = x \ln\left|1 + \dfrac{1}{x}\right|$

1) Préciser l'ensemble de définition de D_f de f ; étudier la continuité et la dérivabilité de f, en énonçant les théorèmes utilisés.

2) a) Etudier la dérivabilité de f', fonction dérivée de f, et en déduire les variations de f'.
b) Soit F la restriction de f' à l'intervalle $I =]-1,0[$.
Démontrer que F est une bijection de I sur un intervalle à préciser.
En déduire que dans I, l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution unique, notée a ; on ne cherchera pas à calculer a, mais on montrera que $a > -1/2$.
c) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f'(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x)$
d) Des résultats précédents, déduire le signe de f'(x) pour $x \in D_f$, et les variations de f.

3) Déterminer les limites de f aux bornes des intervalles de D_f (on pourra utiliser le changement de variable $X = \frac{1}{x}$).

4) Pour une étude locale de f au voisinage de zéro, on adoptera le plan suivant : soit h la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \neq 0,\ h(x) = f(x)$$
$$0 \mapsto h(0) = 0$$

a) Démontrer que h est le prolongement par continuité de f en zéro.
b) Etudier la dérivabilité de h en zéro.

Conclusion : donner le tableau de variations de f et construire la courbe (C) représentative de f dans P, plan muni du repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, en précisant l'intersection de (C) avec l'axe des abscisses.

SOLUTION

1) $Df = \mathbb{R} \setminus \{-1,0\}$.

$\left|1 + \frac{1}{x}\right| = \left|\frac{x+1}{x}\right| > 0$ pour $x \neq 1$ et $x \neq 0$.

La fonction $\varphi : x \mapsto \left|1 + \frac{1}{x}\right|$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1,0\}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
D'autre part, la fonction ℓn est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que f est continue et dérivable sur D_f.

Composée de fonctions continues et dérivables.

2) a) Pour tout x de D_f, on a $f(x) = x\,(\ell n\,|1+x| - \ell n\,|x|)$,

$(\ell n\,|u|)' = \frac{u'}{u}$

d'où :

$$f'(x) = \ell n\,|x+1| - \ell n\,|x| + \left[\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}\right]$$
$$f'(x) = \ell n\left|1 + \frac{1}{x}\right| - \frac{1}{x+1}$$
$$= \ell n\,|x+1| - \ell n\,|x| - \frac{1}{x+1}$$

On en déduit :

$$f''(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{(x+1)^2} = -\frac{1}{x\,(x+1)^2}$$

Sur $]-\infty, -1[$,
$f'(x) = \frac{-1}{x+1} + \ell n\,(-x-1) - \ell n\,(-x)$

Variation de f' :

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	$+$	$-$	
$f'(x)$	$0 \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow +\infty$	$+\infty \searrow 0$	

Pour la limite en $(-1)^-$, on écrit :

$$f'(x) = \frac{-1}{x+1} \cdot [-(x+1)\ \ell n(-x-1) + 1] - \ell n(-x)$$

et on utilise le théorème $\lim_{x \to 0+} x\ \ell n\, x = 0$

D'autre part, les expressions $\ell n \left| \frac{x+1}{x} \right|$ et $-\frac{1}{x+1}$ tendent vers $-\infty$ quand x tend vers $(-1)^+$.

b) F est continue et strictement croissante sur $I =]-1,0[$, c'est donc une bijection de I sur $F(I) = \mathbb{R}$.

En conséquence, il existe a unique dans I tel que $F(a) = 0$, c'est-à-dire $f'(a) = 0$.

D'autre part, on a $F\left(-\frac{1}{2}\right) = f'\left(-\frac{1}{2}\right) = -2$

donc $F^{-1}(-2) = -\frac{1}{2}$.

La fonction F^{-1} étant également strictement croissante, on en déduit que $a > -\frac{1}{2}$ et donc $a \in \left]-\frac{1}{2}\ ;\ 0\right[$.

$a = F^{-1}(0)$.

c) $\lim_{x \to -\infty} f'(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0$

Les expressions $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{x+1}$ tendent vers 0 quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

d) Du tableau de variations précédent, il résulte que :

$f'(x) > 0$ pour $x \in]-\infty,-1[\cup]a,0[\cup]0,+\infty[$

$f'(x) < 0$ pour $x \in]-1,a[$

3) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$.

En effet, pour $x \in]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$:

On a posé $X = \frac{1}{x}$ comme suggéré dans le texte.

$$f(x) = x\ \ell n\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{X}\ \ell n\ (1 + X) = \frac{\ell n\,(1 + X)}{X}$$

qui tend vers 1 quand X tend vers 0.

On a évidemment $\lim_{x \to -1} f(x) = +\infty$.

Car $\left|1 + \frac{1}{x}\right|$ tend vers 0 donc $\ell n \left|1 + \frac{1}{x}\right|$ tend

Pour étudier la limite éventuelle en 0, écrivons

$$f(x) = x\ \ell n\,|x+1| - x\ \ell n\,|x|. \text{ On a :}$$

$$\lim_{x\to 0} x\ \ell n\,|x| = 0 \quad \text{et} \lim_{x\to 0} x\ \ell n\,|1+x| = 0$$

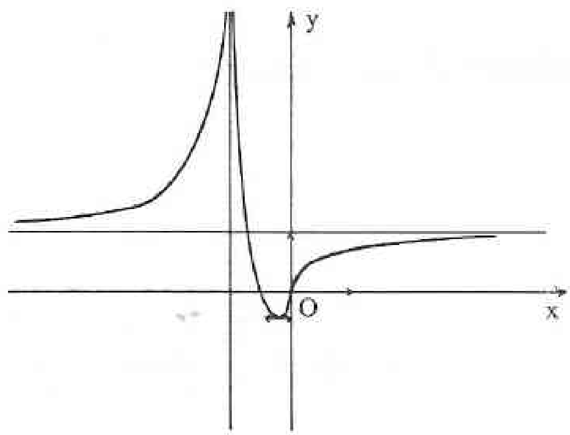
donc : $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

4) a) $h(x) = f(x) = x\ \ell n\left|1+\frac{1}{x}\right|$ tend vers 0 quand x tend vers 0. Or $h(0) = 0$, donc h est bien le prolongement par continuité de f pour $x = 0$.

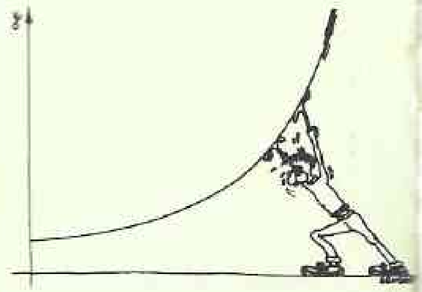
b) $\frac{h(x)}{x} = \ell n\left|1+\frac{1}{x}\right|$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0, donc h n'est pas dérivable à l'origine et sa courbe représentative présente un point d'inflexion à tangente en O portée par $(O\,;\vec{j})$.

Tableau de variations :

x	$-\infty$		-1		a		0		$+\infty$
f'(x)		+	‖	−	0	+	‖	+	
f(x)	1 ↗		$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	f(a)	↗	0 ‖ 0	↗	1



vers $-\infty$ et $x\ \ell n\left|1+\frac{1}{x}\right|$ tend vers $+\infty$.



$y = 1$ est asymptote.
$x = -1$ est asymptote.

La calculatrice donne $a = -0{,}22$ et $f(a) = -0{,}28$ à $5\cdot 10^{-3}$ près.

(C) coupe x'Ox lorsque $\left|1+\frac{1}{x}\right| = 1$, soit $x = -\frac{1}{2}$

205

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\begin{cases} f(x) = \ell n\,|x^2-x-2| & \text{pour } x \leq 0 \\ f(x) = -1 + \ell n\,(x+2) + e^x & \text{pour } x > 0 \end{cases}$$

1° Etudier l'ensemble de définition, la continuité et la dérivabilité de f.

2° Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative C dans un repère orthonormé.

SOLUTION

1° • $x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$ donc pour $x \leq 0$, $|x^2 - x - 2|$ s'annule au seul point -1 qui est le seul point de non définition de f sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in\ ]-\infty,-1[\ \cup\ ]-1,0[$ $|x^2-x-2| > 0$.

• Pour $x > 0$ on a bien sûr $x + 2 > 0$, f est définie en tout point de $\mathbb{R}_+^*$.
Finalement l'ensemble de définition de f est

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

• La fonction $x \mapsto \ln|x^2 - x - 2|$ est continue sur $\mathbb{R}_- \setminus \{-1\}$.

Fonction composée et somme de fonctions continues.

La fonction $x \mapsto -1 + \ln(x+2) + e^x$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0) = \ln 2 \; ; \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \ln 2.$$

f est continue sur D_f.

• Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ $\quad f(x) = -1 + \ln(x+2) + e^x$

f est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \dfrac{1}{x+2} + e^x$

et est dérivable à droite en 0, $f'_d(0) = \dfrac{3}{2}$

De même f est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$, $\quad f'(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-x-2}$

et est dérivable à gauche en 0, $f'_g(0) = \dfrac{1}{2}$

le point $(0, \ln 2)$ est anguleux

2) Tableau de variations :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$+$	$\frac{1}{2}$ || $\frac{3}{2}$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

Pour x tendant vers $-\infty$, on a

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{2}{x}\ln|x| + \frac{1}{x}\ln\left|1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right|$$

$|x^2-x-2| = x^2\left|1 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2}\right|$ et $\ln x^2 = 2\ln|x|$

donc $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ et C présente une branche parabolique de direction Ox.

on sait que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

et que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

Pour x tendant vers $+\infty$, on a

$$\frac{f(x)}{x} = -\frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}\ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) + \frac{e^x}{x}$$

donc $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ et C présente une branche parabolique de direction Oy.

Intersections avec l'axe Ox

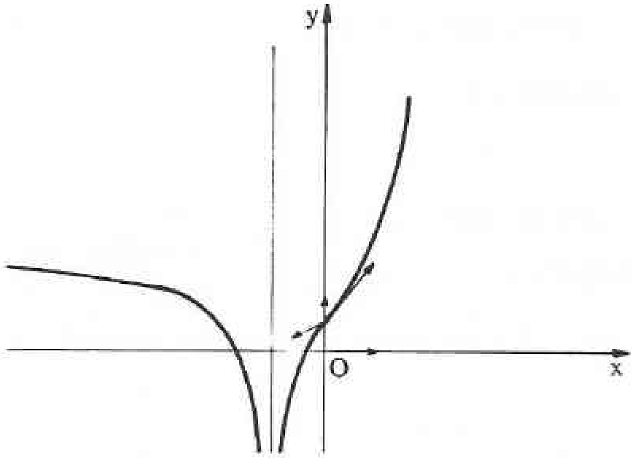
• pour $x \geq 0$ on a $f(x) \geq \ln 2$, les points cherchés correspondent donc aux racines de l'équation

$$\ln|x^2 - x - 2| = 0, \quad x \leq 0$$

c'est-à-dire $\quad |x^2 - x - 2| = 1, \quad x \leq 0$

soit encore $x = \dfrac{1 - \sqrt{13}}{2}$ ou $x = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}$

Ce sont les racines négatives de $x^2 - x - 3 = 0$ et $x^2 - x - 1 = 0$



$\frac{1-\sqrt{13}}{2} = -1,30$ à $5 \cdot 10^{-3}$ près

$\frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0,52$ à $5 \cdot 10^{-3}$ près

206

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^x - x$ si $x < 0$; $f(x) = \cos^2 \pi x$ si $x \in [0,1]$ et $f(x) = 1 + \frac{\ell n\, x}{x}$ si $x > 1$.

1) Etudier la continuité de f.
2) Etudier la dérivabilité de f.
3) Etudier les variations de la fonction f.
4) Construire la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. On prendra 3 cm pour unité.

SOLUTION

1) L'ensemble de définition est $D_f = \mathbb{R}$.

La fonction $x \mapsto e^x - x$ est continue sur $\mathbb{R}_-^*$.

La fonction $x \mapsto \cos^2 \pi x$ est continue sur $[0,1]$, enfin,

La fonction $x \mapsto 1 + \frac{\ell n\, x}{x}$ est continue sur $]1,+\infty[$.

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1 \; ; \quad f(0) = 1 \; ; \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1,$$

f est continue en 0.

De même : $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 1$; $f(1) = 1$; $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1$,

et f est continue en 1.

En résumé, f est continue sur $\mathbb{R}$.

2) $f'(x) = e^x - 1$ sur $\mathbb{R}_-^*$; $\quad f'_g(0) = 0$

$f'(x) = -\pi \sin 2\pi x$ sur $]0,1[$; $\quad f'_d(0) = 0 \quad f'_g(1) = 0$

$f'(x) = \frac{1 - \ell n\, x}{x}$ sur $]1,+\infty[$; $\quad f'_d(1) = 1$

Le point de coordonnées (1,1) est un point anguleux
Le point de coordonnées (0,1) est un point d'inflexion à tangente horizontale.

3) Tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		e		$+\infty$
f'(x)		−	0	−	0	+	0 ‖ 1	+	0	−	
f(x)	$+\infty$	↘	1	↘	0	↗	1	↗	$\frac{e+1}{e}$	↘	1

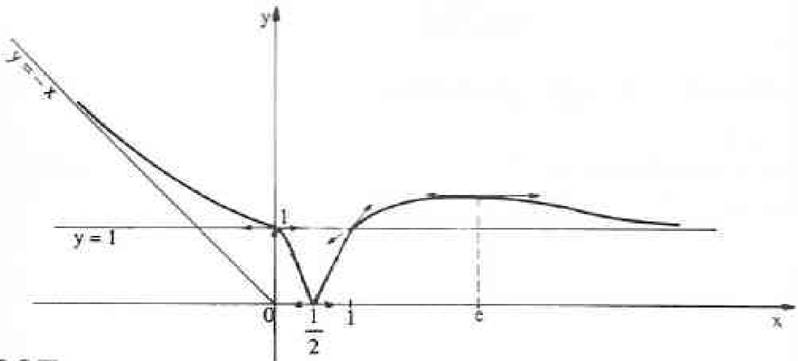
Branches infinies

- $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) + x) = \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

la droite D ($y = -x$) est donc asymptote en $-\infty$

- la droite D' ($y = 1$) est asymptote en $+\infty$.

De plus $f(x) + x > 0$, la courbe est au dessus de D (pour $x < 0$)



207

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On désigne par f_n la fonction d'une variable réelle x telle que : $f_n(x) = \ln\left(\dfrac{2+x}{2-x}\right) - n \ln (x+n)$.

1) Quel est l'ensemble de définition de f_n ? Etudier les limites et déterminer le tableau de variations de f_n (on distinguera le cas $n = 2$) (on ne demande pas de construire la courbe).

2) Montrer que pour tout $n \geq 2$, on a : $\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n \leq \dfrac{2+x}{2-x}$ pour tout x appartenant à $[0,2[$

(on pourra utiliser, à condition de la justifier, la propriété $f_n(x) \geq f_n(0)$ pour tout x appartenant à $[0,2[$).

SOLUTION

1) L'ensemble D_n de définition de f_n est $]-2,2[$.

$x \neq 2$, $x+n > 0$, $\dfrac{2+x}{2-x} > 0$.

f_n est continue et dérivable sur D_n.

Etude en -2

$\lim\limits_{(-2)^+} f_2 = +\infty$; $\quad n \geq 3$, $\quad \lim\limits_{(-2)^+} f_n = -\infty$.

$f_2(x) = \ln \dfrac{1}{(2-x)(2+x)}$.

Etude en +2

Pour tout $n \geq 2$, $\lim\limits_{2^-} f_n = +\infty$.

Calcul de $f_n'(x)$

$f_n'(x) = \dfrac{x(nx+4)}{(4-x^2)(x+n)}$; en particulier $f_2'(x) = \dfrac{2x}{4-x^2}$

Tableaux de variations $\quad (n \geq 3)$:

x	-2		0		2
$f_2'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_2(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-2\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

x	-2		$-\frac{4}{n}$		0		2
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	M	$\searrow$	$-n\ln n$	$\nearrow$	$+\infty$

où $M = (1-n)\ln(n-2) - (1+n)\ln(n+2) + n \ln n$.

$M = \ln \dfrac{n-2}{n+2} - n \ln \dfrac{n^2-4}{n}$.

2) Sur $[0,2[$, $\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$ et $\dfrac{2+x}{2-x}$ sont positifs strictement.

En outre, la fonction ℓn est croissante strictement sur $\mathbb{R}_+^*$, donc

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leq \frac{2+x}{2-x},\quad 0 \leq x < 2 \qquad \text{équivaut à}$$

$$n\,\ell n\left(1+\frac{x}{n}\right) \leq \ell n\,\frac{2+x}{2-x},\ 0 \leq x < 2 \qquad \text{donc aussi à}$$

$$\ell n\left(\frac{2+x}{2-x}\right) - n\,\ell n\,(x+n) \geq -n\,\ell n\,n,\ 0 \leq x < 2 \quad \text{c'est-à-dire à}$$

$$f_n(x) \geq f_n(0),\ 0 \leq x < 2$$

Sur $[0,2[$ on a $f_n'(x) \geq 0$ donc f_n est croissante sur $[0,2[$ ce qui assure que $f_n(x) \geq f_n(0)$ pour $x \in [0,2[$

c'est en fait une croissance stricte, ce qui donne $f_n(x) > f_n(0)$ sur $]0,2[$

En conséquence on a

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leq \frac{2+x}{2-x}$$

208

1) Montrer que pour tout nombre réel x, on a $\cos 3x = (2\cos 2x - 1)\cos x$.
2) Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

$$S_n(\theta) = \ell n\left(2\cos\frac{\theta}{3}-1\right) + \ell n\left(2\cos\frac{\theta}{3^2}-1\right) + \ldots\ \ell n\left(2\cos\frac{\theta}{3^n}-1\right),$$

où $\theta \in I = \left]-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right[$.

a) Justifier l'existence de $S_n(\theta)$.

b) En utilisant la première question, montrer que $S_n(\theta) = \ell n \cos\frac{\theta}{2} - \ell n \cos\frac{\theta}{2\cdot 3^n}$

c) Calculer $S(\theta) = \lim\limits_{x \to +\infty} S_n(\theta)$.

SOLUTION

1) $\cos 3x + i \sin 3x = (\cos x + i \sin x)^3$, pour tout x réel.

$= \cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x + i\,(3\cos^2 x \sin x - \sin^3 x)$

Formule de Moivre. Développement de $(a+b)^3$ par la formule du binôme.

On en déduit :

$\cos 3x = \cos x\,(\cos^2 x - 3\sin^2 x)$
$= \cos x\,(4\cos^2 x - 3)$
$= \cos x\,(2\cos 2x - 1)$

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$
$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

2) a) Pour tout $k \in \{1,\ldots,n\}$, $0 < \frac{1}{3^k} < 1$.

Pour tout $\theta \in \left]-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right[$, et tout $k \in \{1,\ldots,n\}$,

$\frac{\theta}{3^k} \in \left]-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right[$, donc $\cos\frac{\theta}{3^k} \in \left]-\frac{1}{2}; 1\right]$ et

par suite $0 < 2\cos\frac{\theta}{3^k} - 1 \leq 1$.

$\ell n\left(2\cos\frac{\theta}{3^k}-1\right)$ existe et

$\ell n\left(2\cos\frac{\theta}{3^k}-1\right) \leq 0$ et donc $S_n(\theta) \leq 0$.

$$S_n(\theta) = \sum_{k=1}^{n} \ell n\left(2\cos\frac{\theta}{3^k}-1\right) \text{existe.}$$

b) Pour tout x réel, avec $\cos x \neq 0$, on a :

En particulier pour

$2\cos 2x - 1 = \dfrac{\cos 3x}{\cos x}$, donc :

$$S_n(\theta) = \sum_{k=1}^{n}\left(\ln\cos\frac{\theta}{2\cdot 3^{k-1}} - \ln\cos\frac{\theta}{2\cdot 3^k}\right)$$

$$= \ln\cos\frac{\theta}{2} - \ln\cos\frac{\theta}{2\cdot 3^n}$$

$x = \dfrac{\theta}{2\cdot 3^k}$, $\theta \in I$,

$\ln\left(2\cos\dfrac{\theta}{3^k} - 1\right)$

$= \left(\ln\dfrac{\cos 3\dfrac{\theta}{2\cdot 3^k}}{\cos\dfrac{\theta}{2\cdot 3^k}}\right)$

c) On a $\lim\limits_{x\to 0} \ln\cos x = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\theta}{2\cdot 3^n} = 0$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\cos\dfrac{\theta}{2\cdot 3^n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(\theta) = \ln\cos\dfrac{\theta}{2}$

209

1) En étudiant les fonctions de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définies par $f(x) = \ln(1+x) - x$ et $g(x) = \ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2}$

Montrer que pour tout réel x positif, on a

$$x - \frac{x^2}{2} \le \ln(1+x) \le x$$

2) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général

$$u_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n-1}{n^2}\right)\left(1+\frac{n}{n^2}\right)$$

On admettra que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

SOLUTION

1) f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}_+$

* $f'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 = \dfrac{-x}{1+x}$

f est donc décroissante sur $[0,+\infty[$

et on a $\forall x \ge 0 \quad f(x) \le f(0)$

i.e. $\forall x \ge 0 \quad \ln(1+x) - x \le 0$

$f'(x) < 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$
f est en fait strictement décroissante sur $[0,+\infty[$

* $g'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 + x = \dfrac{x^2}{1+x}$

g est donc croissante sur $[0,+\infty[$

en fait croissante sur $]-1,+\infty[$

et on a $\forall x \ge 0 \quad g(x) \ge g(0)$

i.e. $\forall x \ge 0 \quad \ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2} \ge 0$

2) On a $\ln u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$

et pour tout $k \in \{1,2,\dots,n\}$

$$\frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4} \le \ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right) \le \frac{k}{n^2}$$

On additionne ces inégalités membre à membre en utilisant d'où

$$\frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{12n^4} \leq \ell n\, u_n \leq \frac{n(n+1)}{2n^2}$$

$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ et

$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

D'autre part $\frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$ donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{12n^4} = \frac{1}{6n} + \frac{1}{4n^2} + \frac{1}{12n^3}$$

donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{12n^4} = 0$

et finalement $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{7}{2}$

Il en résulte enfin $\lim_{n\to+\infty} u_n = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

On a ici

$\alpha_n \leq \ell n\, u_n \leq \beta_n$ avec

$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = \lim_{n\to+\infty} \beta_n = \frac{1}{2}$

210

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

Soit C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé

1) a) Démontrer que pour tout x réel, $f'(x) \geq 1$
En déduire, suivant les valeurs du réel x, le signe de
$\varphi(x) = f(x) - x$

b) Préciser la position de C par rapport à la droite D d'équation $y = x$

c) Tracer la courbe C.

2) Etablir que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer f^{-1}.
Tracer dans le même repère que C la courbe représentative de f^{-1}.

SOLUTION

1) a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec pour tout x, $f'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

somme de fonctions dérivables

On a donc $f'(x) - 1 = \frac{e^x - 2 + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}\right)^2 \geq 0$

On déduit du résultat précédent que φ est croissante sur $\mathbb{R}$, or $\varphi(0) = 0$ donc

$\varphi'(x) = f'(x) - 1$

pour $x \leq 0$ $\quad \varphi(x) = f(x) - x \leq 0$

pour $x \geq 0$ $\quad \varphi(x) = f(x) - x \geq 0.$

On peut remarquer que pour $x \neq 0$ on a $f'(x) - 1 > 0$ donc φ est strictement croissante et on a

$\varphi(x) < 0$ pour $x < 0$

$\varphi(x) > 0$ pour $x > 0$

b) D'après le a) C se trouve en dessous de la droite $g = x$ pour $x < 0$ et au dessus pour $x > 0$.

c) f est impaire, on peut limiter l'étude des variations à $\mathbb{R}_+$.

x	0	$+\infty$
f'(x)	1 +	
f(x)	0 ↗	$+\infty$

$\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}\left(\frac{e^x}{x} + \frac{e^{-x}}{x}\right)$ donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ et C présente une branche parabolique de direction Oy.

2) • f continue strictement croissante, est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R} = f(\mathbb{R})$

• $y = f^{-1}(x)$ équivaut à $x = f(y) = \dfrac{e^y - e^{-y}}{2}$

donc à $\quad e^y - 2x - e^{-y} = 0 \qquad (1)$

ou encore $\quad e^{2y} - 2x\, e^y - 1 = 0 \qquad (2)$

en multipliant par e^y qui est nul pour tout y réel, on obtient une équation équivalente

L'équation $Y^2 - 2xY - 1 = 0$ admet pour racines

$$Y_1 = x + \sqrt{x^2+1} \quad \text{et} \quad Y_2 = x - \sqrt{x^2+1}$$

$Y_1 > 0 \qquad Y_2 < 0$

$e^y = Y_2$ n'a pas de solution

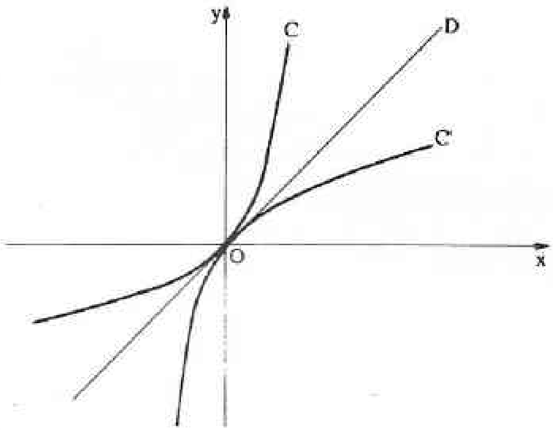
donc (2) équivaut à $\quad e^y = x + \sqrt{x^2+1}$

c'est-à-dire $\quad y = \ell n\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

Ainsi f^{-1} est la fonction $\quad x \mapsto \ell n\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

La courbe C' représentative de f^{-1} est symétrique de celle de f par rapport à la droite D $(y = x)$.

En effet M(x,y) appartient à C si et seulement si $y = f(x)$ donc si et seulement si $x = f^{-1}(y)$ donc si et seulement si M'(y,x) appartient à C'



211

1) Montrer que si x est un réel strictement positif, $1 + \dfrac{1}{x} > e^{-x}$

Montrer que si x est un réel strictement négatif, $1 + \dfrac{1}{x} < e^{-x}$ (on pourra comparer $1 + \dfrac{1}{x}$ et e^{-x} au nombre 1).

2) Soit f la fonction définie par $f(x) = x + \ell n\,|x| + e^{-x}$.
Etudier f (ne pas oublier l'étude des limites quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$) et construire sa courbe représentative (Γ).

SOLUTION

1) Soit $x > 0$.

exp est strictement croissante
exp 0 = 1

De $-x < 0$, on déduit $e^{-x} < 1$.

De $\dfrac{1}{x} > 0$, on déduit $1 + \dfrac{1}{x} > 1$.

Pour tout x réel, $x > 0$, $e^{-x} < 1 + \dfrac{1}{x}$.

Soit $x < 0$.

De $-x > 0$, on déduit $e^{-x} > 1$.

De $\dfrac{1}{x} < 0$, on déduit $1 + \dfrac{1}{x} < 1$.

Pour tout x réel, $x < 0$, $e^{-x} > 1 + \dfrac{1}{x}$.

2) La fonction $f : x \mapsto x + \ell n\,|x| + e^{-x}$ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

f est somme de fonctions classiques

Soit (Γ) la courbe représentative de f dans le repère $(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j})$.

- Etude aux bornes de $\mathbb{R}^*$

a) $\lim\limits_{0} f = -\infty$.

$\lim\limits_{x \to 0} \ell n\,|x| = -\infty$

La droite x = 0 est asymptote à (Γ).

b) $f(x) = e^{-x}\,(1+xe^{x}) + \ell n\,|x|$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} xe^{x} = 0$

On en déduit que $\lim\limits_{-\infty} f = +\infty$.

$$\frac{f(x)}{x} = 1 + \frac{\ell n\,|x|}{x} + \frac{e^{-x}}{x}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty.$$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\ell n\,|x|}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^{-x}}{x} = 0$

(Γ) admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction $(O\,;\,\vec{j})$.

c) $f(x) = x + \ell n\,|x| + e^{-x}$.

On obtient $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.

$$\frac{f(x)}{x} = 1 + \frac{\ell n\,|x|}{x} + \frac{e^{-x}}{x} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

$$f(x) - x = \ell n\,|x| + e^{-x} \qquad \lim_{x \to +\infty} (f(x) - x) = +\infty$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ell n\,|x|}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{-x}}{x} = 0$

(Γ) admet en $+\infty$ une branche parabolique dans la direction de la droite d'équation y = x.

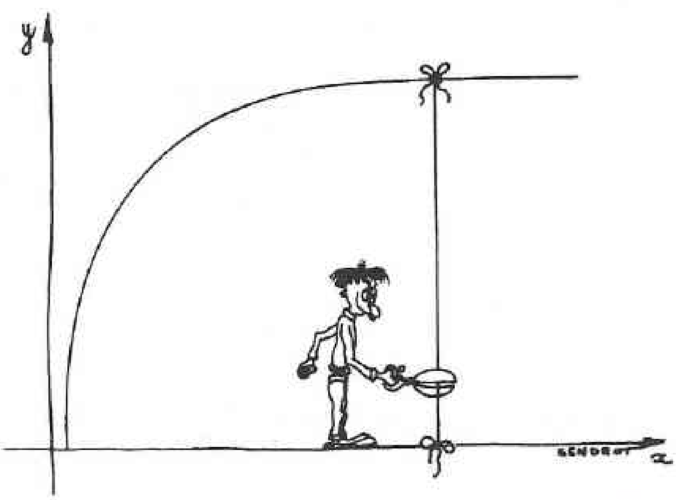
- Variations

$f'(x) = 1 + \frac{1}{x} - e^{-x}$ sur $\mathbb{R}^*$.

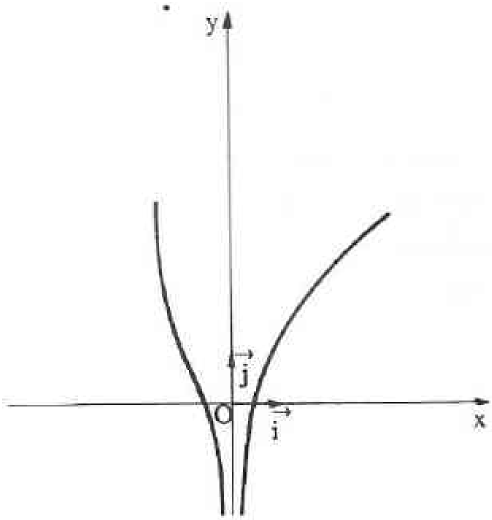
L'étude faite au 1) montre que :
* $f' < 0$ sur $]-\infty,0[$, et
* $f' > 0$ sur $]0,+\infty[$.

Tableau de variations :

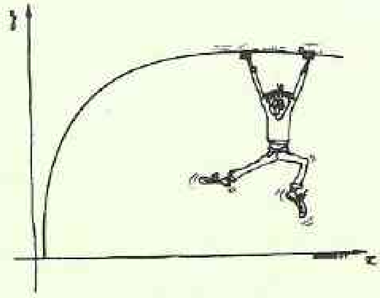
x	$-\infty$	0		$+\infty$
f'(x)	$-$	||	+	
f(x)	$+\infty \searrow -\infty$	||	$-\infty \nearrow +\infty$	



Courbe représentative (Γ) :



En repère orthonormé



212

Soit f la fonction numérique de variable réelle définie par $f(x) = 1 - |e^x - e^{3x}|$.

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f.
2) Etudier les variations de f et construire sa courbe représentative C dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

SOLUTION

1) L'ensemble de définition est $D_f = \mathbb{R}$, sur $\mathbb{R}_-$

$$f(x) = 1 - e^x + e^{3x}$$

sur $\mathbb{R}_+$, $f(x) = 1 + e^x - e^{3x}$, f est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

$$f'_d(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -2$$

$$f'_g(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 2$$

f n'est pas dérivable pour x = 0.

Le point de coordonnées (0,1) est un point anguleux.

2) $f'(x) = e^x (3e^{2x} - 1)$ sur $\mathbb{R}^*_-$.
$f'(x) = e^x (1 - 3e^{2x})$ sur $\mathbb{R}^*_+$.

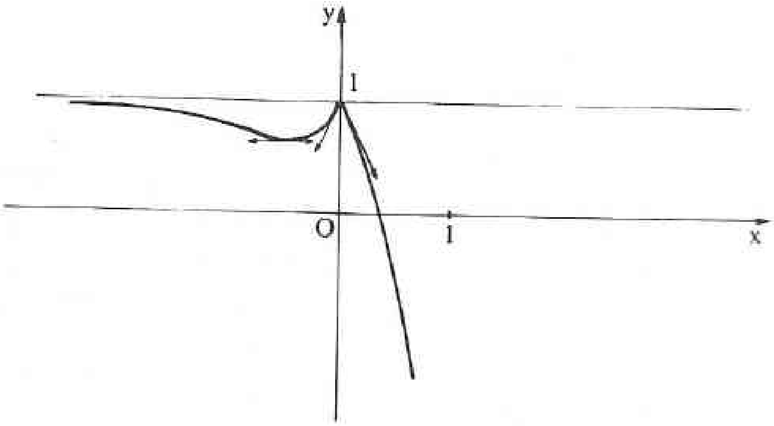
Tableau de variations :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}\ln 3$		0		$+\infty$
f'(x)		$-$	0	$+$	$2 \parallel -2$	$-$	
f(x)	1	↘	$1 - \frac{2}{3\sqrt{3}}$	↗	1	↘	$-\infty$

Courbe représentative :

- La droite D (y = 1) est asymptote en $-\infty$.
- D'autre part $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} - \frac{e^{3x}}{x}\left(1 - e^{-2x}\right) = -\infty$

donc C présente une branche parabolique de direction Oy.



213

On considère l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$\forall x \in \left]-\infty,0\right[$, $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

$\forall x \in [0,1[$, $f(x) = \sin^3 \pi x$

$\forall x \in [1,+\infty[$, $f(x) = 0$

1) Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$, en particulier aux points 0 et 1.

2) Etudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$, en particulier aux points 0 et 1 et calculer la dérivée.

3) Etudier les variations de f. Construire la courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormé (on prendra 4 cm comme unité graphique).

SOLUTION

1) L'ensemble de définition est $D_f = \mathbb{R}$.

La fonction $x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$ est continue sur $]-\infty,0[$ et $\lim\limits_{x \to 0} e^{\frac{1}{x}} = 0$.

De plus, la fonction $x \mapsto \sin^3 \pi x$ est continue sur $[0,1[$.

$$f(0) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$$

f est donc continue en 0.

D'autre part, la fonction $x \mapsto 0$ sur $[1,+\infty[$ (fonction constante) est continue sur $[1,+\infty[$, et donc :

$$f(1) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = 0$$

f est continue à droite en 1.

Et comme $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 0$, f est continue en 1.

f est finalement continue sur $D_f = \mathbb{R}$.

2) $\forall x \in]-\infty,0[$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$ et $f'_g(0) = 0$

$\forall x \in]0,1[$, $f'(x) = 3\pi \sin^2 \pi x \cos \pi x$ et $f'_d(0) = 0$,

$f'_g(1) = 0$

$\forall x \in]1,+\infty[$, $f'(x) = 0$ et $f'_d(1) = 0$

De $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} Xe^X = 0$, on déduit

• que $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}} = 0$, et donc $f'_g(0) = 0$

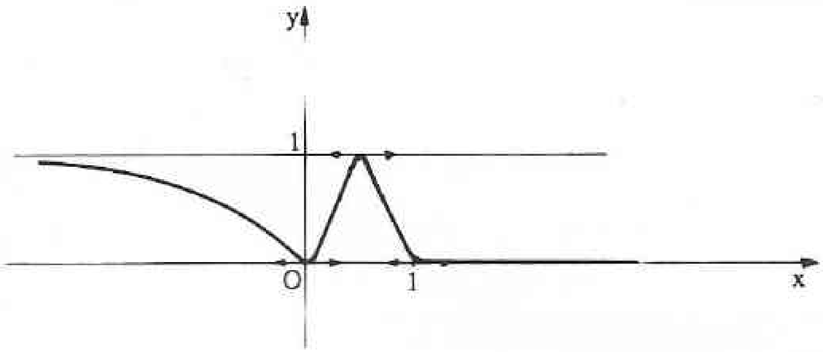
Il en résulte que f est dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$
et que f est dérivable en 1 avec $f'(1) = 0$

3) Tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
f'(x)		$-$	0	+	0	$-$	0		
f(x)	1	↘	0	↗	1	↘	0	Cte →	

$$\lim_{x \to -\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$$

y = 1 est asymptote en $-\infty$ à la courbe représentative de f.



214

Soit la fonction f définie par $f(x) = e^{-x}(\cos x + \sin x + 2x \sin x)$, pour tout x réel.

1) Etudier les variations de cette fonction sur $[0,\pi]$ et tracer la courbe représentative C dans un repère orthogonal. On prendra pour unités : sur Ox, π est représenté par 12 cm ; sur Oy, l'unité est 4 cm.

2) a) Montrer que l'équation
$$\begin{cases} f(x) = 0 \\ x \in [0;\pi] \end{cases}$$
admet une unique solution x_0.

Vérifier que x_0 appartient à $\left]\frac{5\pi}{6} ; \pi\right[$.

b) Calculer, pour tout élément k de $\mathbb{Z}$, $f(2k\pi)$, $f(\pi + 2k\pi)$.

Montrer que sur l'intervalle $]2k\pi, 2k\pi+2\pi[$ la fonction f admet exactement un maximum et un minimum qui sont de signes contraires.

c) Déduire du résultat précédent que pour tout élément k de $\mathbb{Z}$, l'équation $f(x) = 0$ admet sur l'intervalle $]k\pi, k\pi+\pi[$ une solution unique.

SOLUTION

1) L'ensemble de définition est $D_f = \mathbb{R}$.

f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Sa dérivée est $f' : x \mapsto 2\,xe^{-x}(\cos x - \sin x)$

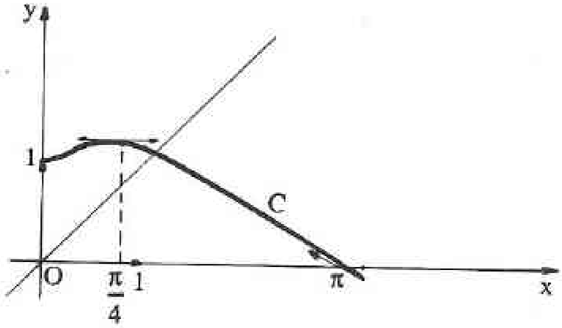
$\cos x - \sin x = 0$ pour :
$x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Tableau de variations :

x	0		$\frac{\pi}{4}$		π
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	$-2\pi e^{-\pi}$
$f(x)$	1	$\nearrow$	$\sqrt{2}\, e^{-\frac{\pi}{4}}\left(1+\frac{\pi}{4}\right)$	$\searrow$	$-e^{-\pi}$

$\sqrt{2}\, e^{-\pi/4}\left(1+\frac{\pi}{4}\right) = 1{,}15$ à $5\cdot10^{-3}$ près.
$e^{-\pi} = 0{,}04$ à $5\cdot10^{-3}$ près
$f'(\pi) = -2\pi e^{-\pi} = -0{,}27$

à $5\cdot10^{-3}$ près.



2) a) D'après l'étude des variations, f ne s'annule pas sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

Sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, $f(x) \geq 1$.

Pour $x \in \left[\frac{\pi}{4}\ ;\ \pi\right]$ l'équation $f(x) = 0$ s'écrit $h(x) = 0$.

La restriction h de f à $\left[\frac{\pi}{4}\ ;\ \pi\right]$ est une bijection de $\left[\frac{\pi}{4}\ ;\ \pi\right]$ sur

$$K = \left[-e^{-\pi}; \frac{\pi}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\pi}{4}}\left(1+\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

Puisque $0 \in K$, elle possède une racine et une seule :

$$x_0 = h^{-1}(0).$$

Par ailleurs, on a $f\left(\frac{5\pi}{6}\right) > 0$, donc, h étant strictement décroissante : $\frac{5\pi}{6} < x_0$.

$$f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = e^{-\frac{5\pi}{6}}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + \frac{5\pi}{6}\right)$$
$= 0{,}16$ à $5\cdot10^{-3}$ près

Finalement, l'équation $f(x) = 0$ possède sur $[0,\pi]$ une racine et une seule : $x_0 \in \left]\frac{5\pi}{6}\ ;\ \pi\right[$.

b) $f(2k\pi) = e^{-2k\pi}$
$f(\pi+2k\pi) = -e^{-(2k+\pi)}$

$f'(x) = 2xe^{-x}(\cos x - \sin x)$ s'annule et change de signe pour
$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$
Donc sur $]2k\pi, 2k\pi + 2\pi[$, $f'(x)$ s'annule et change de signe pour $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ et $x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$;

$f\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)$ et $f\left(\frac{5\pi}{4}+2k\pi\right)$ sont de signes contraires.
En effet :
le maximum est supérieur à $f(2k\pi) > 0$.
le minimum est inférieur à $f(\pi + 2k\pi) < 0$.

c) Pour k pair :

x	$k\pi$		$\frac{\pi}{4}+k\pi$		$(k+1)\pi$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$(-1)^k e^{-k\pi} > 0$	$\nearrow$	M	$\searrow 0 \searrow$	$(-1)^{k+1} e^{-(k+1)\pi} < 0$

f est strictement monotone sur chaque intervalle
$\left[k\pi;\ k\pi+\frac{\pi}{4}\right]$ et
$\left[k\pi+\frac{\pi}{4};\ (k+1)\pi\right]$

Pour k impair :

x	$k\pi$		$\frac{\pi}{4}+k\pi$		$(k+1)\pi$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$(-1)^k e^{-k\pi} < 0$	$\searrow$	M	$\nearrow 0 \nearrow$	$(-1)^{k+1} e^{-(k+1)\pi} > 0$

$M = (-1)^k \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)}$.
$\left(2+\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$
$M > 0$ pour k pair
$M < 0$ pour k impair

Donc $f(x) = 0$ possède une unique solution appartenant à :
$\left]\frac{\pi}{4}+k\pi;\ \pi+k\pi\right[$

215

1) Montrer que l'équation $(2-x^2)\sin x - 2x\cos x = 0$ admet une racine et une seule a sur $]0,\pi]$ (on pourra étudier les variations de $f : [0,\pi] \to \mathbb{R},\ x \mapsto (2-x^2)\sin x - 2x\cos x$)
2) Calculer a à 10^{-3} près par défaut.

SOLUTION

1) La fonction $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$
$x \mapsto (2-x^2)\sin x - 2x\cos x$
est dérivable sur $[0,\pi]$ avec
$f'(x) = -x^2\cos x$
d'où son tableau de variation :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$\left(2-\frac{\pi^2}{4}\right)$	$\nearrow$	2π

$2-\frac{\pi^2}{4} = -0{,}47$ à $5\cdot10^{-3}$ près

f est strictement décroissante sur $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right[$ et $f(0) = 0$

donc pour tout $x \in \left]0;\ \frac{\pi}{2}\right]$ $f(x) < 0$

f est strictement croissante sur $\left[\frac{\pi}{2} ; \pi\right]$ et continue, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$.

$f(\pi) > 0$ donc il existe a unique $\frac{\pi}{2} < a < \pi$ tel que $f(a) = 0$.

la restriction g de f à $\left[\frac{\pi}{2} ; \pi\right]$ est une bijection de $\left[\frac{\pi}{2} ; \pi\right]$ sur $\left[2 - \frac{\pi^2}{4} ; 2\pi\right]$, $a = g^{-1}(0)$

2) Pour tout couple (α, β) de points de $\left[\frac{\pi}{2} ; \pi\right]$ on a $\alpha < a < \beta$ si et seulement si $f(\alpha) < 0$ et $f(\beta) > 0$

Encadrement à l'unité

x	2	3
f(x)	–0,15	4,95

donc $2 < a < 3$

calculs à $5 \cdot 10^{-3}$ près

Encadrement à 0,1 près

x	2,2	2,1
f(x)	0,29	0,04

donc $2 < a < 2{,}1$

d'aprés le premier calcul, a est sans doute plus proche de 2 que de 3.

Encadrement à 0,01 près

x	2,05	2,07	2,08	2,09
f(x)	–0,064	–0,024	–0,003	–0,018

donc $2{,}08 < a < 2{,}09$

calcul à $5 \cdot 10^{-4}$ près

Encadrement à 0,001 près

x	2,085	2,082	2,081
f(x)	0,007	0,001	–0,001

donc $2{,}081 < a < 2{,}082$

Une valeur approchée de a à 10^{-3} près par défaut est donc 2,081.

216

1) soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x - \ln|x|$
Etudier les variations de g, en déduire le signe de g(x) suivant les valeurs de x.

2) Etudier les variations de la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, définie par

$$f(x) = \frac{1 + (x+1)\ln|x|}{x}$$

3) Déterminer suivant les valeurs du paramètre réel λ le nombre de racines de l'équation

$$(E) : (x+1)\ln|x| - \lambda x + 1 = 0.$$

SOLUTION

1) g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, $g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$

d'où le tableau de variations

x	$-\infty$	α		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$		‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$ ↗	0	↗ $+\infty$	‖	$+\infty$ ↘	1	↗	$+\infty$

en écrivant

$$g(x) = x\left(1 - \frac{\ln|x|}{x}\right)$$

on voit que ;

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

- g est strictement croissante sur $]-\infty,0[$ et s'annule en un point α

$g(-1) = -1$ donc $-1 < \alpha < 0$

$g(-0{,}6) = -0{,}09$ et $g(-0{,}5) = 0{,}19$ donc $-0{,}6 < \alpha < -0{,}5$

$g(-0{,}57) = -0{,}01$ et $g(-0{,}56) = 0{,}02$ donc $-0{,}57 < \alpha < -0{,}56$

pour $x < \alpha$ on a $g(x) < 0$

et pour $\alpha < x < 0$ on a $g(x) > 0$

- sur $]0,+\infty[$ on a $g(x) \geq 1$ donc $g(x) > 0$.

2) f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, $f'(x) = \frac{x - \ln|x|}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$

d'où le tableau de variations

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘		$f(\alpha)$	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	$+\infty$

- le signe de $g(x)$ donne celui de $f'(x)$

- $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)\ln|x| + \frac{1}{x}$

donne $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$,

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$$f(\alpha) = \frac{(\alpha+1)\ln|\alpha| + 1}{\alpha}$$

$$= \alpha + 1 + \frac{1}{\alpha}$$

$$-0{,}57 + 1 - \frac{1}{0.56} < f(\alpha) < -0{,}56 + 1 - \frac{1}{0.57}$$

donc $-1{,}36 < f(\alpha) < -1{,}31$

3) 0 n'étant pas racine de (E) celle-ci est équivalente à

$$f(x) = \lambda$$

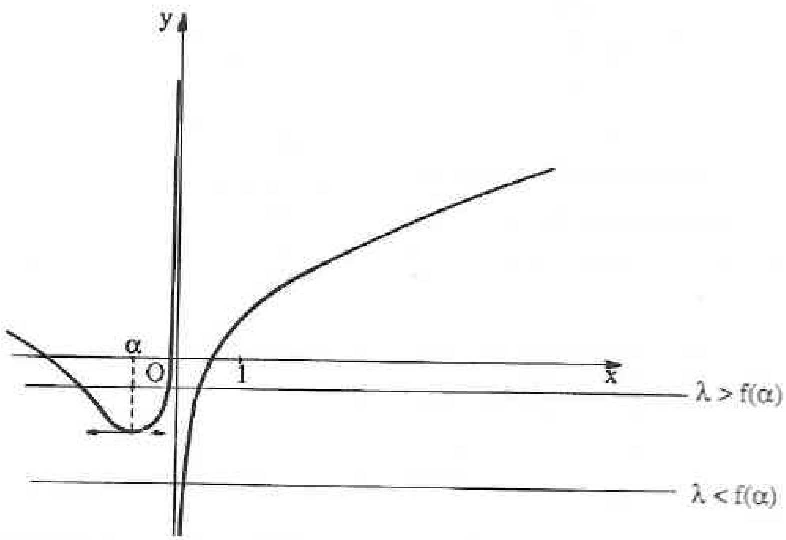
D'après l'étude des variations de f :

pour $\lambda < f(\alpha)$ (E) a une racine unique : $x_1 > 0$

pour $\lambda = f(\alpha)$ (E) a deux racines : $x_1 = \alpha$, $x_2 > 0$

pour $\lambda > f(\alpha)$ (E) a trois racines : $x_1 < \alpha < x_2 < 0 < x_3$

Interprétation graphique



$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\ln|x|}{x} + \frac{\ln|x|}{x^2} + \frac{1}{x}$$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

et la courbe présente une branche parabolique de direction Ox.

EXERCICES PROPOSES

01

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{1}{3}\left[x - 1 + \sqrt{x^2 - 2x + 4}\right]$$

Etudier et représenter graphiquement cette fonction.

02

Etudier et représenter graphiquement la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{|x^2 - 1|}}{x}$$

03

Soit φ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(x) = \frac{1}{x}\left(1 - \sqrt{1 - x^4}\right)$$

1° Déterminer l'ensemble D de définition de φ.

2° Etudier la continuité et la dérivabilité de φ sur D.

3° Montrer qu'il existe une fonction f définie et continue sur [-1,1] telle que l'on a :

$$f(x) = \varphi(x) \text{ pour tout } x \in [-1,1] \setminus \{0\}$$

4° Etudier et représenter graphiquement la fonction f.

On précisera en particulier $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

04

Soit f l'application de $]-\infty,1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f : x \to \sqrt{\frac{1 - x}{2}}$$

1° Etudier les variations et limites de f.
Tracer la courbe (C) représentative f dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, noté R. Préciser la tangente au point d'abscisse 1.

2° On désigne par s la symétrie orthogonale par rapport à (Ox). On pose :
$$C'' = s(C).$$
établir de $(C) \cup (C'')$ est une parabole P dont on déterminera le sommet, le foyer et la directrice.

3° Montrer que la courbe (C) admet en chacun de ses points M une tangente. Cette tangente coupe l'axe (Ox) au point T. Soit H le projeté orthogonal de M sur la droite (Ox). On désigne par S le point de coordonnées (1,0) ; montrer que S est le milieu du segment [HT]. En déduire une construction simple de la tangente à (C) en un point M quelconque donné sur (C).

05

1° Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :
$$\tan x + \tan 4x = 0$$

2° Exprimer tan 2x, puis tan 4x à l'aide de tan x.

3° Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue y :
$$y^4 - 10y^2 + 5 = 0$$

4° A l'aide des questions précédentes, donner des valeurs numériques de $\tan\left(k\frac{\pi}{5}\right)$ pour $k \in \{1, 2, 3, 4\}$.

06

On considère l'application f définie sur [0,2] par :
$$f(x) = \frac{1-3x}{x-2} \quad \text{pour } x \in [0, 1]$$
$$f(x) = 2\sin\frac{\pi}{2}x \quad \text{pour } x \in [1, 2]$$

1° Etudier la continuité de f sur [0,2].

2° f est-elle dérivable au point 1 ?

3° Etudier la fonction f.
Construire sa courbe représentative (C) dans le plan rapporté à un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

07

A°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :
$$\sin x + \cos x = 0$$
On note S l'ensemble de ses solutions.

B°) On donne la fonction numérique f définie dans
$$D = \mathbb{R} \setminus S \quad \text{par} \quad f(x) = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$$

1° Montrer que $\forall x \in D$, $f(x) = f(x + \pi)$ et en déduire la plus petite période positive de f.
Etudier f sur un intervalle d'amplitude de cette période et tracer sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 1 cm).

2° Montrer qu'il existe deux nombres réels A et B, tels que :
pour tout $x \in D$ $\quad f(x) = A + B\dfrac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}$
Calculer A et B.

3° Calculer l'aire du domaine limité par la courbe, l'axe Ox et les droites d'équation respectives :

$$x = 0, \qquad x = \frac{\pi}{2}.$$

08

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = e^x - 1 - (e^x - 1)\,\ell n\,|e^x - 1| \quad \text{pour } x \neq 0$$
$$f(0) = 0$$

1° Etudier la continuité de f.

2° Etudier les variations de f.

Tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

09

1° On considère la fonction u de la variable réelle x définie par :

$$u(x) = \tan(\pi x) - \pi$$

a) Etudier le sens de variation de u dans l'intervalle $\left[0; \frac{1}{2}\right[$.

En déduire que l'équation $\tan(\pi x) = \pi$ admet une racine unique α dans cet intervalle.

b) Donner un encadrement de α dans un intervalle de longueur 10^{-3}.

c) Quel est le signe de la fonction u dans l'intervalle $\left]\frac{1}{2}; 1\right]$?

2° La fonction f de la variable réelle x est définie par :

$$f(x) = e^{-x}\sin(\pi x)$$

a) Quel est le sens de variation de f sur [0,1] ?
b) Déterminer la limite de f(x) lorsque x tend vers $+\infty$.
c) Que peut-on dire de f(x) quand x tend vers $-\infty$?
d) On appelle C la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité = 4 cm). Dessiner C en indiquant son allure générale pour les points d'abscisse extérieure à [0,1].

10

1° Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système d'inconnue (x,y) :

$$\begin{cases} \ell n\, x + \ell n\, y = \ell n \sqrt{3} - 2\,\ell n\, 2 \\ 2\,(x + y) = \sqrt{3} + 1 \end{cases}$$

2° Dans $[0,2\pi]$, déterminer θ tel que :

$$\begin{cases} \ell n\,(\cos\theta) + \ell n\,(\sin\theta) = \ell n \sqrt{3} - 2\,\ell n\, 2 \\ 2\,(\cos\theta + \sin\theta) = \sqrt{3} + 1 \end{cases}$$

11

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \ell n\,(e^{2x} - 3e^x + 2)$$

1° Etudier la fonction f.
Construire sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

2° Soit g la restriction de f à $]\ell n\, 2, +\infty[$.
Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1}.
Exprimer $g^{-1}(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.

12

On considère l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = x\,e^x + 1 \qquad \text{pour } x < 0$$
$$f(x) = x + 1 \qquad \text{pour } 0 \leq x \leq 1$$
$$f(x) = \frac{1}{2}\,\ell n\, x + 2 \qquad \text{pour } x > 1$$

1° Etudier la continuité et la dérivabilité de f aux points 0 et 1.

2° Etudier les variations de f.
Construire la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan.

13

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$f(x) = e^{2x+3} + x - 1 \qquad \text{pour } x \in \left]-\infty, -1\right]$$
$$f(x) = x^2 + 2x \qquad \text{pour } x \in \left]-1, 0\right]$$
$$f(x) = \ell n \left|\frac{1+x}{1-x}\right| \qquad \text{pour } x \in \left]0, +\infty\right]$$

1° Préciser l'ensemble de définition D de f.

2° Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur D.

3° Etudier les variations de f.
Donner la représentation graphique de f dans un repère orthonormé du plan.

14

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = x\,e^{\frac{1}{x}} \qquad \text{pour } x < 0$$
$$f(0) = 0$$
$$f(x) = x\,\ell n\, x \qquad \text{pour } x > 0$$

1° Etudier la continuité de f.

2° Etudier la dérivabilité de f.

3° Etudier les variations de f.

4° Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\mathcal{R}$.
Soit (D) la droite d'équation $y = x + 1$ dans ce même repère.
Montrer que (D) est asymptote à $(\mathcal{C})$.
Préciser la tangente à $(\mathcal{C})$ au point 0 (0,0) et au point A (1,0).
Construire $(\mathcal{C})$.

15

1° Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$|2 + x| + 2 + 2x = x^2$$

2° Résoudre ensuite les équations suivantes :

a) $|2 + \ell n\, x| + 2 + 2\,\ell n\, x = (\ell n\, x)^2$

b) $|2e^{-x} + 1| + 2e^{-x} + 2 = e^x$

CHAPITRE III

CALCUL INTEGRAL

I. INTEGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE

Définition

d_1 Soit f une fonction réelle, continue sur I intervalle de $\mathbb{R}$, F et G deux primitives quelconques de f sur I, et (a, b) un couple de points de I : on a F(b) – F(a) = G(b) – G(a).
Le réel F(b) – F(a) est donc indépendant de la primitive F choisie pour f, il est appelé

intégrale de f sur le segment [a, b] et noté $\int_a^b f$ *ou* $\int_a^b f(t)\, dt$.

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Remarque : F(b) – F(a) est aussi noté $[F(t)]_a^b$

Théorème

t_1 Soit f une application continue d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Pour $a \in I$, l'application G de I dans $\mathbb{R}$ définie par $G : x \mapsto \int_a^x f(t)\, dt$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.

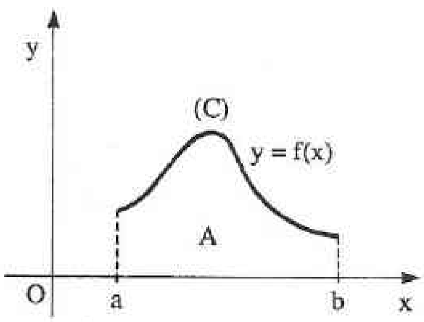
En d'autres termes : G est dérivable sur I
Pour tout $x \in I$, $G'(x) = f(x)$
$G(a) = 0$

Interprétation graphique

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, **continue positive** sur [a, b] (a < b), et (C) la courbe représentative de f

Alors $\int_a^b f(x)\, dx$ est **l'aire** de la partie A du plan définie par

$$A = \{(x, y) \mid a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)\}$$



II. Propriétés de l'intégrale.

Propriétés relatives à l'intervalle d'intégration

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est supposée continue sur I intervalle de $\mathbb{R}$

P1 Pour tout $a \in I$, $\int_a^a f = 0$

P2 Pour tout $(a, b) \in I \times I$, $\int_a^b f = -\int_b^a f$

P3 Pour tout $(a, b, c) \in I \times I \times I$

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$$

Relation de Chasles

Propriétés relatives à la fonction intégrée

P4 *Linéarité*

Soient f et g deux fonctions continues sur [a, b].

Pour tout couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on a $\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$.

P5 On suppose $a < b$, et f *continue* sur [a, b].

- Si f est *positive* sur [a, b], ($\forall x \in [a, b]$, $f(x) \geq 0$), alors $\int_a^b f \geq 0$.
- Si f est *positive* sur [a, b] et $\int_a^b f = 0$, alors f est nulle sur [a, b].

P6 On suppose $a < b$, f et g continues sur [a, b].

Si $\forall x \in [a, b]$, $f(x) \geq g(x)$, alors $\int_a^b f \geq \int_a^b g$.

P7 On suppose $a < b$, et f continue sur [a, b].

Alors $|f|$ est continue sur [a, b] et $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$.

($|f|$ est la fonction définie sur [a, b] par $x \mapsto |f(x)|$).

P8 *Inégalité de la moyenne*

On suppose f continue sur [a, b] ($a \neq b$).

$$I_2 = \int_1^e u(x)\, v'(x)\, dx = [u(x)\, v(x)]_1^e - \int_1^e u'(x)\, v(x)\, dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}(\ell n\, x)^2\right]_1^e - \int_1^e x\, \ell n\, x\, dx$$

$$= \frac{e^2}{2} - I_1$$

donc $\quad I_2 = \dfrac{e^2}{4} - \dfrac{1}{4}$

2°) On pose maintenant $\quad u(x) = (\ell n\, x)^n \qquad v(x) = \dfrac{x^2}{2}$

d'où $\quad u'(x) = \dfrac{n}{x}(\ell n\, x)^{n-1} \qquad v'(x) = x$

il vient :

$$I_n = \left[\frac{x^2}{2}(\ell n\, x)^n\right]_1^e - \frac{n}{2}\int_1^e x\,(\ell n\, x)^{n-1}\, dx$$

i.e $\quad I_n = \dfrac{e^2}{2} - \dfrac{n}{2}\, I_{n-1}$

3°) On applique la formule précédente :

$$I_3 = \frac{e^2}{2} - \frac{3}{2}\, I_2$$

$$I_4 = \frac{e^2}{2} - 2\, I_3 = -\frac{e^2}{2} + 3\, I_2$$

d'où d'après le 1°) $\quad I_4 = \dfrac{e^2}{4} - \dfrac{3}{4}$

ex.9 1°) Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie pour $x \neq 1$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + x}{1 - x}$$

a) Déterminer a, b, c, d réels tels que l'on ait, pour tout $x \neq 1$

$$f(x) = ax^2 + bx + c + \frac{d}{1 - x}$$

b) Calculer $\quad I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\, dx$

2°) Calculer

$$J = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(3x^2 - 6x + 1\right) \ell n\, (1 - x)\, dx$$

⇒

1°) a) Pour tout $x \neq 1$, on a

$$ax^2 + bx + c + \frac{d}{1 - x} = \frac{-ax^3 + (a - b)\, x^2 + (b - c)\, x + c + d}{1 - x}$$

l'identification avec f(x) donne donc

$-a = 1, \quad a - b = -3, \quad b - c = 1, \quad c + d = 0$

soit $\quad a = -1, \quad b = 2, \quad c = 1, \quad d = -1$

Ainsi $\quad f(x) = -x^2 + 2x + 1 - \dfrac{1}{1 - x}$

b) La fonction $\quad x \mapsto \dfrac{1}{1 - x}\quad$ est continue, strictement positive sur $\left[0; \dfrac{1}{2}\right]$

On déduit du a)

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + x + \ln|1-x|\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= -\frac{1}{24} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \ln\frac{1}{2}$$

$$= \frac{17}{24} - \ln 2$$

2°) On intègre par parties, avec

$u(x) = x^3 - 3x^2 + x$ $\qquad$ $v(x) = \ln(1-x)$

$u'(x) = 3x^2 - 6x + 1$ $\qquad$ $v'(x) = -\dfrac{1}{1-x}$

$$J = \int_0^{\frac{1}{2}} u'(x)\,v(x)\,dx = [u(x)\,v(x)]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} u(x)\,v'(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{8}\ln 2 + \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx$$

d'où $J = \dfrac{17}{24} - \dfrac{7}{8}\ln 2$

ex.10 Soit $[a, b]$, $a < b$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ pourvue de dérivées première et seconde continues sur $[a, b]$

1) Montrer au moyen de deux intégrations par parties que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)] + \frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)\,f''(x)\,dx$$

2) On prend $I' = \dfrac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$ comme valeur approchée de $I = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$,

l'erreur commise est $\Delta = I' - I$

- Dans le cas où f est positive sur $[a, b]$, donner une interprétation géométrique de I'
- Soit $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in [a, b]$ $|f''(x)| \leq M$, montrer que

$$|\Delta| \leq M\frac{(b-a)^3}{12}$$

⇒

1) Posons $\quad u(x) = f'(x) \qquad v(x) = (x-a)(x-b)$

donc $\quad u'(x) = f''(x) \qquad v'(x) = (x-a) + (x-b)$

alors $\displaystyle\int_a^b (x-a)(x-b)\,f''(x)\,dx = \int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx$

$$= [u(x)\,v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx$$

$$= -\int_a^b (2x-a-b)\,f'(x)\,dx$$

Une nouvelle intégration par parties donne alors

$$\int_a^b (2x-a-b)\,f'(x)\,dx = [(2x-a-b)\,f(x)]_a^b - 2\int_a^b f(x)\,dx$$

c'est-à-dire

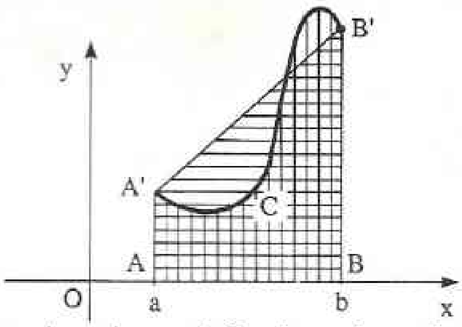
$$\int_a^b (2x-a-b)\,f'(x)\,dx = (b-a)[f(b)+f(a)] - 2\int_a^b f(x)\,dx$$

finalement

$$\int_a^b (x-a)(x-b)\, f''(x)\, dx \;=\; 2\int_a^b f(x)\, dx \;-\; (b-a)\,[f(b)+f(a)]$$

d'où la formule annoncée

2)



- Le plan est rapporté à un repère orthonormé, C est la courbe représentative de f
  - f étant positive, I est l'aire de $D = \{M(x, y) \mid a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)\}$ (partie hachurée verticalement)
  - $I' = \dfrac{b-a}{2}\,(f(a)+f(b))$ est l'aire du trapèze AA'B'B

    (A(a, 0), A'(a, f(a)), B(b, 0), B'(b, f(b))) (partie hachurée horizontalement)
- D'après le 1) on a

$$|I - I'| \le \frac{1}{2}\int_a^b |(x-a)(x-b)\, f''(x)|\, dx \;\le\; \frac{M}{2}\int_a^b (x-a)(b-x)\, dx$$

En intégrant par parties, il vient

$$\int_a^b (x-a)(b-x)\, dx = \left[(b-x)\,\frac{(x-a)^2}{2}\right]_a^b + \int_a^b \frac{(x-a)^2}{2}\, dx$$

$$= \left[\frac{(x-a)^3}{6}\right]_a^b = \frac{(b-a)^3}{6}$$

donc $\quad |\Delta| \le M\dfrac{(b-a)^3}{12}$

EXERCICES RESOLUS

301

Calculer $\quad I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x\, dx$

SOLUTION

Première méthode.

Posons $u(x) = \sin x$, on a

$$\cos^5 x = \cos^4 x \cos x = (1-\sin^2 x)^2 \cos x$$

Soit $\cos^5 x \quad = (1-u^2(x))^2\, u'(x)$

$$= u'(x) - 2u^2(x)\, u'(x) + u^4(x)\, u'(x)$$

Cette méthode est applicable à toute intégrale du type $\displaystyle\int_a^b \cos^n x\, dx$ avec $n = 2p+1$ i.e n impair

Donc :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u'(x)\,dx - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} u^2(x)\,u'(x)\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} u^4(x)\,u'(x)\,dx$$

$$= [u(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{3}\left[u^3(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{5}\left[u^5(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}$$

$$= \frac{8}{15}$$

On peut traiter de même les intégrales $\int_a^b \sin^n x\,dx$ avec $n = 2p + 1$, en introduisant $u(x) = \cos x$

Deuxième méthode.

On linéarise $\cos^5 x$

$$\cos^5 x = \frac{1}{2^5}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)^5$$

$$= \frac{1}{2^5}\left(e^{5ix} + 5e^{3ix} + 10e^{ix} + 10e^{-ix} + 5e^{-3ix} + e^{-5ix}\right)$$

formule du binôme

$$= \frac{1}{2^4}\left(\cos 5x + 5\cos 3x + 10\cos x\right)$$

Donc

$$I = \frac{1}{2^4}\left[\frac{\sin 5x}{5} + \frac{5}{3}\sin 3x + 10\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2^4}\left(\frac{1}{5} - \frac{5}{3} + 10\right)$$

$$= \frac{8}{15}$$

une primitive de $x \mapsto \cos nx$ est : $x \mapsto \frac{1}{n}\sin nx \quad (n \in \mathbb{N}^*)$

302

Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}\,dx$

SOLUTION

$x \mapsto \dfrac{1}{\cos^2 x}$ est la dérivée de $x \mapsto \tan x$

On obtient donc par intégration par parties

$$I = [x\tan x]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx$$

$$= \frac{\pi}{4} + [\ell n \cos x]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$I = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\,\ell n\, 2 = 0{,}43882 \text{ à } 5\cdot 10^{-6} \text{ près.}$$

$u(x) = x \quad \pi(x) = \tan x$

$I = [u(x)\,v(x)]_0^{\frac{\pi}{4}} - \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} u'(x)\,v(x)\,dx$

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos' x}{\cos x}\,dx$

$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$,

$\ell n \cos\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2}\,\ell n\, 2$

303

1) Linéariser $\sin^6 x$.

2) Calculer $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (1 + \cos x)^4 (1 - \cos x)^3 \, dx$.

SOLUTION

1) En utilisant les formules d'Euler, on obtient :

$$\sin^6 x = \left[\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right]^6$$

$$= -\frac{1}{64}\left(e^{6ix} - 6e^{4ix} + 15e^{2ix} - 20 + 15e^{-2ix} - 6e^{-4ix} + e^{-6ix}\right)$$

$$= -\frac{1}{32}\cos 6x + \frac{3}{16}\cos 4x - \frac{15}{32}\cos 2x + \frac{5}{16}$$

Triangle de Pascal

1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1

2) La fonction $x \mapsto (1 + \cos x)^4 (1 - \cos x)^3$ est paire, donc :

$$I = 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 + \cos x)^4 (1 - \cos x)^3 \, dx$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 + \cos x)(1 - \cos^2 x)^3 \, dx$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^6 x \, dx + 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^6 x \cdot \cos x \cdot dx$$

$1 - \cos^2 x = \sin^2 x$ pour tout x réel.

En utilisant le résultat précédent, il vient :

$x \mapsto \cos x \sin^6 x$ admet $x \mapsto \frac{1}{7}\sin^7 x$ pour primitive sur $\mathbb{R}$.

$$I = 2\left[-\frac{1}{32}\frac{\sin 6x}{6} + \frac{3}{16}\frac{\sin 4x}{4} - \frac{15}{32}\frac{\sin 2x}{2} + \frac{5x}{16} + \frac{1}{7}\sin^7 x\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$= \frac{5\pi}{48} + \frac{1}{448} - \frac{3\sqrt{3}}{16} = 0{,}00472 \text{ à } 5\cdot 10^{-6} \text{ près.}$$

304

Calculer l'intégrale $\int_0^{2\pi} (\pi - |2x - \pi|) \sin x \, dx$.

SOLUTION

On a $2x - \pi \geq 0$ si et seulement si $x \geq \frac{\pi}{2}$, donc, sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$,

$|2x - \pi| = \pi - 2x$ et sur $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$, $|2x - \pi| = 2x - \pi$.

On en déduit :

$$I = \int_0^{2\pi} (\pi - |2x-\pi|) \sin x \, dx$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx + 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} (\pi - x) \sin x \, dx$$

$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

d'où encore $I = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx - 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} x \sin x \, dx - 2\pi$

$\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \sin x \, dx = [-\cos x]_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} = -1$

En intégrant par parties, on obtient :

$u(x) = x \quad u'(x) = 1$
$v(x) = -\cos x \quad v'(x) = \sin x$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx = [-x \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} x \sin x \, dx = [-x \cos x]_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \cos x \, dx$$

$$= -2\pi + [\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} = -2\pi - 1$$

Finalement : $I = 2 + 4\pi + 2 - 2\pi = 4 + 2\pi$

305

On considère les intégrales définies :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{[\sin x]^n}{\cos x} dx, \quad \text{où } n \in \mathbb{N}^*, \quad \text{et } I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x} dx.$$

1) Calculer l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin x)^n \cos x \, dx$. En déduire $I_{n+2} - I_n$ en fonction de n.

2) Calculer I_1. En déduire I_3 et I_5.

3) a) Soit f l'application qui à $x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ associe $f(x) = \ln\left[\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right]$.

Montrer que f est une primitive de la fonction g définie sur $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ par $x \mapsto g(x) = \frac{1}{\cos x}$.

b) En déduire I_0, puis I_2 et I_4.

SOLUTION

1) On a, pour n appartenant à $\mathbb{N}$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin x)^n \cos x \, dx = \left[\frac{1}{n+1} (\sin x)^{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{1}{n+1} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, une primitive de $u^n u'$ est $\frac{1}{n+1} u^{n+1}$.

En formant la différence :

$$I_{n+2} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{[\sin x]^{n+2}}{\cos x}\, dx - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{[\sin x]^n}{\cos x}\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{[\sin x]^n}{\cos x} \left[\sin^2 x - 1\right] dx$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{3}} [\sin x]^n \cos x \, dx$$

$$= -\frac{1}{n+1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}$$

Une primitive de $\frac{u'}{u}$ est $\ell n\, u$ sur tout intervalle où u est strictement positive.

2) $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x}\, dx = -[\ell n \cos x]_0^{\frac{\pi}{3}} = -\ell n \frac{1}{2} = \ell n\, 2.$

En utilisant la relation obtenue au 1), on a :

$$I_3 = -\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + I_1 = \ell n\, 2 - \frac{3}{8}$$

$$I_5 = -\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 + I_3 = \ell n\, 2 - \frac{33}{64}$$

3) La fonction f est dérivable sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ et :

f est composée des fonctions

$x \mapsto \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}$

$X \mapsto \tan X$

et $Y \mapsto \ell n\, Y$

$$f'(x) = \frac{1}{\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} \cdot \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2 \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$= \frac{1}{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{\cos x} = g(x)$$

f est donc une primitive de la fonction g sur $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ et :

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x}\, dx = [f(x)]_0^{\frac{\pi}{3}} = \ell n\left[\tan\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= \ell n\left(2+\sqrt{3}\right)$$

$\tan\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) =$

$$\frac{\tan\frac{\pi}{6} + \tan\frac{\pi}{4}}{1 - \tan\frac{\pi}{6}\tan\frac{\pi}{4}}$$

$= 2 + \sqrt{3}$

D'où :

$$I_2 = -\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + I_0 = \ell n\left(2+\sqrt{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$I_4 = -\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 + I_2 = \ell n\left(2+\sqrt{3}\right) - \frac{5\sqrt{3}}{8}$$

306

A tout entier naturel non nul n on associe le réel :

$$u_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-t)^n e^t\,dt .$$

1) Calculer u_1.

2) Trouver, pour tout entier naturel non nul n, une relation de récurrence entre u_n et u_{n+1} et en déduire que $u_n = e - 1 - \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p!}$.

3) Montrer que pour tout entier naturel non nul, $0 \leq u_n \leq \frac{e}{n!}$.

En déduire $\lim_{x\to+\infty}\left(1 + \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p!}\right) = e.$

SOLUTION

1) $u_1 = \int_0^1 (1-t)e^t\,dt = \left[(1-t)e^t\right]_0^1 + \int_0^1 e^t\,dt$

$= -1 + \left[e^t\right]_0^1$

On intègre par parties

2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a, en intégrant par parties

$$u_{n+1} = \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!}\,e^t\,dt$$

$f(t) = \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!}$ $\quad f'(t) = -\frac{(1-t)^n}{n!}$

$g(t) = e^t$ $\quad g'(t) = e^t$

$$= \left[\frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!}\,e^t\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}\,e^t\,dt$$

$$= -\frac{1}{(n+1)!} + u_n$$

donc $u_{n+1} = u_n - \frac{1}{(n+1)!}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n - u_1 = \sum_{p=1}^{n-1}(u_{p+1} - u_p)$

$$= -\sum_{p=1}^{n-1}\frac{1}{(p+1)!} = -\sum_{p=2}^{n}\frac{1}{p!}$$

donc $u_n = e - 1 - \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p!}$.

$e - 2 - \sum_{p=2}^{n}\frac{1}{p!} = e - 1 - \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p!}$

3) Pour tout $t \in [0,1]$, on a $0 \leq 1-t \leq 1$, donc $0 \leq (1-t)^n \leq 1$.

On en déduit $\quad 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n!}\int_0^1 e^t\,dt$

donc $\quad 0 \leq u_n \leq \frac{e}{n!}$

$\int_0^1 e^t\,dt = e - 1 < e$

Il en résulte $\quad \lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

c'est-à-dire $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} e - \left(1 + \sum\limits_{p=1}^{n} \frac{1}{p!}\right) = 0$

ou encore $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \sum\limits_{p=1}^{n} \frac{1}{p!}\right) = e$

307

1) Montrer qu'il existe une application f de $]0,+\infty[$ dans $]-\infty,+\infty[$ définie par :

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{e^{-t^2}}{t}\, dt .$$

De l'égalité $f(x) = \int_1^{x^2} \frac{e^{-t^2}}{t}\, dt - \int_1^{x} \frac{e^{-t^2}}{t}\, dt$, déduire que f est dérivable ; déterminer f' ;

montrer qu'il existe un, et un seul, réel $\alpha \in]0,+\infty[$ tel que $f'(\alpha) = 0$; donner l'expression exacte et une valeur décimale approchée à 10^{-2} près du réel α.

Dresser le tableau de variation de l'application f.

2) Montrer que, pour tout $x \in]0,+\infty[$, f(x) est comprise entre :

$$e^{-x^2} \int_x^{x^2} \frac{dt}{t} \quad \text{et} \quad e^{-x^4} \int_x^{x^2} \frac{dt}{t}$$

En déduire que f(x) admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$.

Existe-t-il $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$?

N.B. : On ne demande pas une représentation graphique de f.

SOLUTION

La fonction $t \mapsto \frac{e^{-t^2}}{t}$ est continue sur $]0,+\infty[$, et pour tout $x \in]0,+\infty[$ on a $[x,x^2] \subset]0,+\infty[$.

En conséquence, pour tout $x \in]0,+\infty[$, $t \mapsto \frac{e^{-t^2}}{t}$ est continue sur $[x,x^2]$ et $\int_x^{x^2} \frac{e^{-t^2}}{t}\, dt$ a un sens. $f : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{e^{-t^2}}{t}\, dt$ est donc définie sur $]0,+\infty[$.

La fonction F définie sur $]0,+\infty[$ par $F(x) = \int_1^{x} \frac{e^{-t^2}}{t}\, dt$, est dérivable sur $]0,+\infty[$ avec $\forall x \in]0,+\infty[$, $F'(x) = \frac{e^{-x^2}}{x}$.

On a $\forall x \in]0,+\infty[$, $f(x) = F(x^2) - F(x)$, f est donc dérivable, avec :

$$\begin{aligned} \forall x \in]0,+\infty[,\ f'(x) &= 2x\, F'(x^2) - F'(x) \\ &= 2\frac{e^{-x^4}}{x} - \frac{e^{-x^2}}{x} \\ &= \frac{e^{-x^4}}{x}\left(2 - e^{x^4-x^2}\right) \end{aligned}$$

Composition de dérivation

Le calcul précédent montre que f'(x) est du signe de $\varphi(x) = 2 - e^{x^4-x^2}$.

L'intervalle d'étude est $]0,+\infty[$.

On a pour tout $x \in]0,+\infty[$, $\varphi'(x) = 2x\,(1-2x^2)\,e^{x^4-x^2}$, d'où le tableau de variation de φ :

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	
$\varphi(x)$	1	$\nearrow$	m	$\searrow$	$-\infty$

$\varphi'(x)$ est donc du signe de $1 - x\sqrt{2}$.

Quand x tend vers $+\infty$, x^4-x^2 tend vers $+\infty$ et $\varphi(x)$ tend vers $-\infty$.
$m \geq \varphi(0) = 1$ et donc $m > 0$.

Sur l'intervalle $\left[\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right[$, φ est continue et strictement décroissante, donc s'annule une fois et une seule.

La restriction de φ à $\left[\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right[$ est une bijection de $\left[\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right[$ sur $]-\infty,m]$.

Sur $\left[0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, φ ne s'annule pas.

Soit α l'unique valeur d'annulation de φ, et donc de f'.
α vérifie $\alpha > 0$ et $\alpha^4 - \alpha^2 = \ln 2$.
Les racines de $x^2 - x - \ln 2 = 0$ sont :

$$\frac{1+\sqrt{1+4\ln 2}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{1-\sqrt{1+4\ln 2}}{2}$$

On a donc $\alpha^2 = \frac{1+\sqrt{1+4\ln 2}}{2}$, et en tenant compte de $\alpha > 0$, on obtient :

$$\alpha = \sqrt{\frac{1+\sqrt{1+4\ln 2}}{2}}.$$

Car $\frac{1-\sqrt{1+4\ln 2}}{2} < 0$

Le calcul numérique donne $1,21 < \alpha < 1,22$. On prendra donc 1,21 comme valeur approchée à 10^{-2} près par défaut.

Calculatrice

On peut maintenant dresser le tableau de variation de f :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Le signe de $\varphi(x)$ (donc celui celui de $f'(x)$) résulte de l'étude des variations de φ.

2) Pour $x \geq 1$, on a $x \leq x^2$, et pour tout $t \in [x,x^2]$,
$e^{-x^4} \leq e^{-t^2} \leq e^{-x^2}$, donc :

$$e^{-x^4}\int_x^{x^2}\frac{dt}{t} \leq \int_x^{x^2}\frac{e^{-t^2}}{t}\,dt \leq e^{-x^2}\int_x^{x^2}\frac{dt}{t}$$

$t \mapsto e^{-t}$ est décroissante

ce qui s'écrit encore :

$$\int_x^{x^2}\frac{dt}{t} = [\ln t]_x^{x^2} = \ln x.$$

$$e^{-x^4}\ln x \leq f(x) \leq e^{-x^2}\ln x \qquad (1)$$

Pour $0 < x \leq 1$, on a $x^2 \leq x$ et pour tout $t \in [x^2,x]$,

$e^{-x^2} \leq e^{-t^2} \leq e^{-x^4}$, donc :

$$e^{-x^2}\int_x^{x^2}\frac{dt}{t} \geq \int_x^{x^2}\frac{e^{-t^2}}{t}\,dt \geq e^{-x^4}\int_x^{x^2}\frac{dt}{t}$$

ce qui s'écrit encore :

$$e^{-x^2}\,\ln x \geq f(x) \geq e^{-x^4}\,\ln x \qquad (2)$$

f(x) est négatif sur]0,1].

Applications :

- On a $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x^2}\ln x = 0$, donc a fortiori $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, car de (1) on déduit : $\forall x \geq 1, 0 \leq f(x) \leq e^{-x^2}\ln x$.

En effet, pour tout $x > 1$, $0 < \ln x < x^2$, donc $0 \leq e^{-x^2}\ln x \leq x^2e^{-x^2}$ et on sait que $\lim\limits_{u\to+\infty} ue^{-u} = 0$ (voir (2)).

- On a $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{-x^2}\ln x = -\infty$, et donc de $f(x) \leq e^{-x^2}\ln x$ on déduit $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$.

308

1) Montrer que la fonction $f : x \mapsto \int_x^{2x}\frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$ est définie sur $\mathbb{R}$, et qu'elle est impaire.

2) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, calculer f' et étudier les variations de f sur $[0,+\infty[$ (On montrera que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$)

3) Tracer la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$

SOLUTION

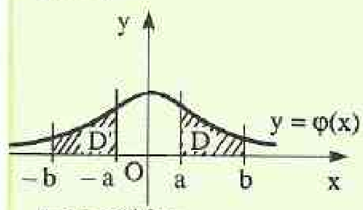
1) Pour tout $t \in \mathbb{R}$ $t^4 + t^2 + 1 \geq 1$ donc quel que soit $x \in \mathbb{R}$

- fonction $\varphi : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$ est continue sur $[x,2x]$ ce qui assure l'existence de $f(x) = \int_x^{2x}\frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$

$t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$ dérivable sur $\mathbb{R}$.

- φ est paire donc pour tout segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ on a

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \int_{-b}^{-a}\varphi(x)\,dx$$



φ est positive

si $a < b$, $\int_a^b \varphi = A(D)$

(A(D) est l'aire de D)

$\int_{-b}^{-a}\varphi = A(D')$

et $A(D) = A(D')$ car D et D'

En conséquence, pour tout x réel $\int_x^{2x}\varphi(t)\,dt = \int_{-2x}^{-x}\varphi(t)\,dt$

i.e $f(x) = -f(-x)$

f est donc impaire

2) * On a pour tout x réel

$$f(x) = \int_0^{2x} \varphi(t)\,dt - \int_0^{x} \varphi(t)\,dt$$

La continuité de φ sur $\mathbb{R}$, assure la dérivabilité de

$$u : x \mapsto \int_0^{x} \varphi(t)\,dt$$

$$\text{et de } v : x \mapsto \int_0^{2x} \varphi(t)\,dt$$

Ainsi f est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\varphi(2x) - \varphi(x) \\ &= \frac{2}{\sqrt{16x^4+4x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^4+x^2+1}} \\ &= \frac{2\sqrt{x^4+x^2+1} - \sqrt{16x^4+4x^2+1}}{\sqrt{16x^4+4x^2+1}\,\sqrt{x^4+x^2+1}} \\ &= \frac{3-12x^4}{\sqrt{16x^4+4x^2+1}\,\sqrt{x^4+x^2+1}\,\left(2\sqrt{x^4+x^2+1} + \sqrt{16x^4+4x^2+1}\right)} \end{aligned}$$

$f'(x)$ est donc du signe de $1 - 2x^2$

* Pour tout t réel non nul, on a $0 \leq \varphi(t) \leq \frac{1}{t^2}$

donc pour $x > 0$, $\quad 0 \leq \int_x^{2x} \varphi(t)\,dt \leq \int_x^{2x} \frac{dt}{t^2}$

c'est-à-dire $\quad 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2x}$

Il en résulte $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

* Tableau de variation : on se limite à l'intervalle $[0,+\infty[$

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
f'(x)	1	+	0	−	
f(x)	0	↗	m	↘	0

se correspondent dans la symétrie par rapport à Oy.

$u'(x) = \varphi(x)$

$v(x) = u(2x)$,
$v'(x) = 2u'(2x) = 2\varphi(2x)$

On multiplie et on divise par la quantité conjuguée du numérateur.

$3 - 12x^4 = 3(1-2x^2)(1+2x^2)$

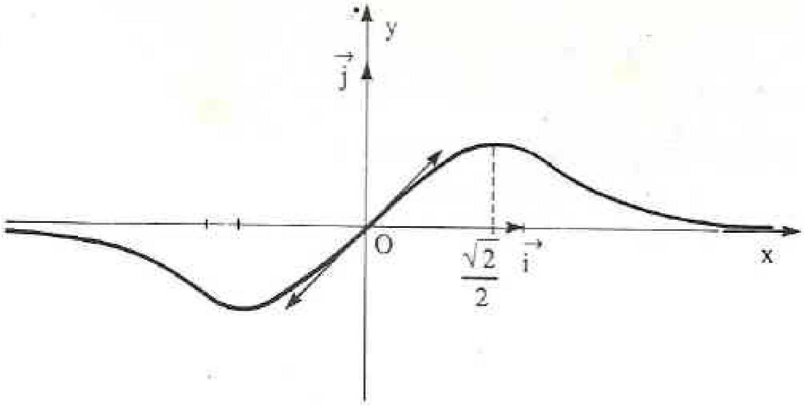
$t^4 + t^2 + 1 \geq t^4$ donne

$$\frac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}} \leq \frac{1}{t^2}$$

$$\int_x^{2x} \frac{dt}{t^2} = \left[-\frac{1}{t}\right]_x^{2x} = \frac{1}{2x}$$

d'après l'imparité de f la valeur $m = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}} \frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$ est inaccessible par un calcul élémentaire.

3)



La courbe admet 0 comme centre de symétrie.

La tangente en 0 est la droite d'équation $y = x$.
On a, bien sûr, pour tout t réel $0 \le \varphi(t) \le 1$ donc pour tout $x \ge 0$ (alors $x \le 2x$)

$$0 \le f(x) = \int_x^{2x} \varphi \le \int_x^{2x} 1$$

i.e $0 \le f(x) \le x$

309

1) a) Quelles sont les primitives de $t \mapsto \frac{1}{t \ln t}$ (on précisera sur quels intervalles ces primitives existent).

b) Calculer $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln t}$ pour $x > 0$, $x \neq 1$.

2) a) Soit $F(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$ pour $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.

Montrer que $F(x)$ est compris entre $x \ln 2$ et $x^2 \ln 2$.

b) F admet-elle une limite quand x tend vers 1 ?

c) F a-t-elle une limite quand x tend vers $+\infty$?

d) F a-t-elle une limite quand x tend vers 0 en restant supérieur à 0 ?

SOLUTION

1) a) $t \mapsto \frac{1}{t \ln t}$ est définie et continue sur chacun des intervalles $I_1 =]0,1[$ et $I_2 =]1,+\infty[$.

Sur chacun de ces intervalles, $t \mapsto \frac{1}{t \ln t}$ admet

$t \mapsto \ln|\ln t|$ pour primitive.

$\frac{1}{t \ln t} = \frac{\frac{1}{t}}{\ln t}$, de la forme $\frac{u'(t)}{u(t)}$.

b) Pour $0 < x < 1$ on a $0 < x^2 < x < 1$ donc $[x,x^2] \subset I_1$

et $$\int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln t} = \left[\ln|\ln t|\right]_x^{x^2} = \ln 2$$

$t \mapsto \frac{1}{t \ln t}$ est continue sur $[x,x^2]$

Pour $x > 1$ on a $1 < x < x^2$ donc $[x,x^2] \subset I_2$

et $$\int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln t} = [\ln \ln t]_x^{x^2} = \ln 2$$

$\ln|\ln x^2| - \ln|\ln x|$
$= \ln\left(\frac{2|\ln x|}{|\ln x|}\right) = \ln 2$

2) a) * $t \mapsto \dfrac{1}{\ln t}$ est continue sur I_1 et sur I_2

pour $0 < x < 1$, on a $[x, x^2] \subset I_1$ donc $F(x)$ existe

pour $x > 1$, on a $[x, x^2] \subset I_2$ donc $F(x)$ existe

ainsi F est bien définie sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} = I_1 \cup I_2$

* Sur I_1, $x^2 \le t \le x$ donne $\dfrac{x^2}{t \ln t} \ge \dfrac{1}{\ln t} \ge \dfrac{x}{t \ln t}$ $\quad t \ln t > 0$.

d'où $x^2 \displaystyle\int_{x^2}^{x} \frac{dt}{t \ln t} \ge \int_{x^2}^{x} \frac{dt}{\ln t} \ge x \int_{x^2}^{x} \frac{dt}{t \ln t}$. $\quad x^2 < x$.

soit $x^2 \ln 2 \le F(x) \le x \ln 2$.

Sur I_2, $x \le t \le x^2$ donne $\dfrac{x}{t \ln t} \le \dfrac{1}{\ln t} \le \dfrac{x^2}{t \ln t}$, $\quad t \ln t > 0$.

d'où $x \displaystyle\int_{x}^{x^2} \frac{dt}{t \ln t} \le \int_{x}^{x^2} \frac{dt}{\ln t} \le x^2 \int_{x}^{x^2} \frac{dt}{t \ln t}$, $\quad x < x^2$

soit $x \ln 2 \le F(x) \le x^2 \ln 2$.

b) Encadrée, sur I_1 et sur I_2, par deux fonctions admettant $\ln 2$ pour limite quand x tend vers 1, la fonction F admet $\ln 2$ pour limite quand x tend vers 1.

c) On a vu que sur I_2 on a $F(x) \ge x \ln 2$.
De $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln 2 = +\infty$, on déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$.

d) On a vu que sur I_1, $x^2 \ln 2 \le F(x) \le x \ln 2$.
Encadrée par deux fonctions admettant 0 pour limite en 0, la fonction F admet 0 pour limite en 0.

310

1) Etudier la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

Tracer sa courbe représentative C dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$

2) On admet que si une fonction u définie sur $[a, +\infty[$ est croissante et majorée (par M) sur cet intervalle, elle admet une limite ℓ en $+\infty$ $(\ell = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x))$ telle que $\ell \le M$ (propriété $\mathcal{P}$)

$$\text{On pose } F(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1 + t^2}}$$

a) Justifier que F est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer $F'(x)$. En déduire le sens de variation de F.

b) Montrer que F est impaire.

c) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt \leq \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt$$

Déduire de cette inégalité que F(x) tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

3) x étant un réel quelconque, on pose $G(x) = F(2x) - F(x)$

a) Montrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Etudier le sens de variation de G sur $\mathbb{R}$.

b) Justifier l'affirmation suivante :
pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$ $\quad \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq \dfrac{1}{x}$

c) Déduire de a) et b) que l'on peut affirmer :
pour tout x de $\mathbb{R}_+$ $\quad G(x) \leq \ln 2$
(On écrira G(x) à l'aide d'une seule intégrale).

d) Déduire de a) et c) que l'on peut affirmer l'existence d'un réel L, limite quand x tend vers $+\infty$ de G(x)

e) Montrer que G est une fonction impaire.

f) Déduire de d) et e) que G(x) tend vers une limite quand x tend vers $-\infty$. Exprimer cette limite en fonction de L.

SOLUTION

1) f est définie sur $\mathbb{R}$ et paire : on limite l'étude à $[0,+\infty[$

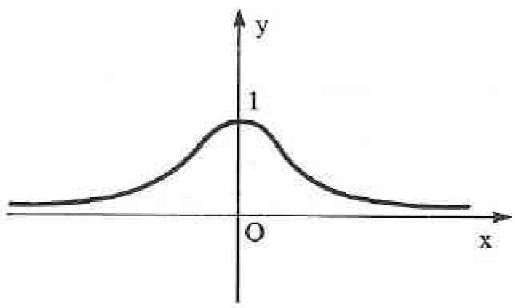
f est dérivable sur $\mathbb{R}$, $\quad f'(x) = \dfrac{-x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$

Le tableau de variation est immédiat

x	0	$+\infty$
f'(x)	0	−
f(x)	1 ↘	0

$x > 0$ donne $0 < f(x) < \dfrac{1}{x}$
donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Courbe représentative



Oy est axe de symétrie.

2) a) f étant continue sur $\mathbb{R}$, F est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec

$$F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

F est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$

b) f étant positive, pour tout $a > 0$ $\int_0^a f$ est l'aire de

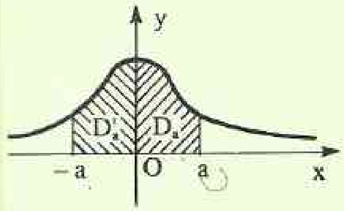
$D_a = \{M(x,y) \mid 0 \le x \le a, 0 \le y \le f(x)\}$ tandis que $\int_{-a}^0 f$ est l'aire de $D'_a = \{M(x,y) \mid -a \le x \le 0, 0 \le y \le f(x)\}$

f étant paire, D_a et D'_a se correspondent dans la symétrie orthogonale d'axe Oy, ils ont donc même aire, d'où

$$\int_0^a f = \int_{-a}^0 f$$

i.e. $F(a) = -F(-a)$

et F est impaire.



c) Pour tout $b \ge 0$, on a $1 + 2t + t^2 \ge 1 + t^2$

i.e. $(1+t)^2 \ge 1 + t^2$

donc $1 + t \ge \sqrt{1+t^2}$

et $\frac{1}{1+t} \le \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$

En conséquence, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, l'inégalité ci-dessus est vraie pour tout x de $[0,x]$

et on en déduit $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t} \le \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$

c'est-à-dire $F(x) \ge \ln(1+x)$

De $\lim_{x \to +\infty} \ln(1+x) = +\infty$ il résulte alors $\lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$

$\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t} = [\ln(1+t)]_0^x =$ $\ln(1+x)$

3) a) f étant continue sur $\mathbb{R}$, $F : x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$ est dérivable de dérivée f

On en déduit que $x \mapsto F(2x)$ est dérivable de dérivée $x \mapsto 2f(2x)$

composition de fonctions dérivables

et donc que G est dérivable avec $G'(x) = 2f(2x) - f(x)$

c'est-à-dire $G'(x) = \frac{2}{\sqrt{1+4x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

On peut aussi écrire

$$G'(x) = \frac{2\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+4x^2}}{\sqrt{1+x^2}\,\sqrt{1+4x^2}}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{1+x^2}\,\sqrt{1+4x^2}\left[2\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+4x^2}\right]}$$

ainsi G' est strictement positive et G est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

b) Pour tout $x > 0$, on a $1 + x^2 > x^2 > 0$

donc $\sqrt{1+x^2} > x > 0$

et $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} < \dfrac{1}{x}$

c) On a $G(x) = \int_0^{2x} f - \int_0^{x} f = \int_x^{2x} f$

Relation de Chasles

i.e. $G(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$

Pour $x > 0$ on a $x < 2x$ et d'après b)

$\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \le \dfrac{1}{t}$ pour tout t de $[x,2x]$ donc

$$\int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} \le \int_x^{2x} \frac{dt}{t}$$

$$\int_x^{2x} \frac{dt}{t} = [\ln t]_x^{2x} = \ln 2$$

i.e. $G(x) \le \ln 2$

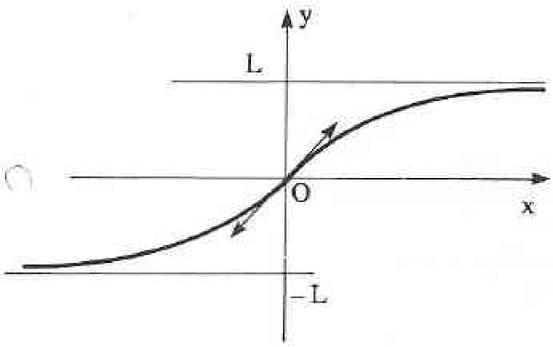
d) G' étant croissante (3) a)) et majorée (3) c)) il résulte alors de la propriété $\mathcal{P}$ que G admet une limite L en $+\infty$ avec $L \le \ln 2$

donnée dans l'énoncé

e) G est impaire comme somme de deux fonctions impaires

f) de d) et e) il résulte que $\lim\limits_{x \to -\infty} G(x) = -L$

g) On peut compléter cette étude par la courbe représentative de G dans un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j})$



F(0) = 0 G(0) = 0
F'(0) = 1 G'(0) = 1

EXERCICES PROPOSES

01

On considère la suite u définie par ses deux premiers termes u_0 et u_1 et par la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \frac{3}{2}\,u_{n+1} - \frac{1}{2}\,u_n$$

Soit v la suite de nombres réels définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{n+1} - u_n$$

1° Montrer que la suite v est géométrique.
Exprimer v_n en fonction de n.

2° En déduire u_n en fonction de n.

3° Quelle est la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ quand n tend vers $+\infty$?

4° Déterminer le plus petit entier n_0 tel que pour tout n supérieur ou égal à n_0, on a :

$$|u_n - 3| < 10^{-5}$$

02

Soit a un nombre réel strictement positif et différent de 1.
Etudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{1 + a\,u_n}{a + u_n} \quad \text{pour } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

03

On définit les deux suites : $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par :

$$u_1 = 1$$
$$v_1 = 12$$

$$\text{et } \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{1}{3}\,(u_n + 2v_n) \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{4}\,(u_n + 3v_n) \end{cases}$$

1° On pose $w_n = v_n - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w = (w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
Montrer que w est une suite géométrique.
Exprimer w_n en fonction de n pour tout entier naturel non nul n.
En déduire la limite de la suite w.

2° Démontrer que u est une suite croissante et que v est une suite décroissante.
Que peut-on en conclure à l'aide du 1° sur les suites u et v ?

3° On pose $t_n = 3u_n + 8v_n$ pour tout entier naturel non nul n.
Montrer que $t = (t_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite stationnaire.
En déduire la limite des suites u et v.

04

Pour tout entier n, $n \geq 1$, on pose :

$$I_n = \frac{1}{2^{n+1}\,n!}\int_0^1 (1-t)^n\, e^{\frac{t}{2}}\,dt$$

1° A l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1.

2° Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad I_{n+1} = I_n - \frac{1}{2^{n+1}\,(n+1)!}$$

3° En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sqrt{e} = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k\,k!}\right) + I_n$$

(on pourra procéder par récurrence).

4° Montrer qu'on peut trouver une constante réelle A telle que :

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{2^n\,n!} A$$

On pourra trouver A en majorant sur l'intervalle $[0,1]$ la fonction $(t \mapsto (1-t)^n e^{\frac{t}{2}})$.
En déduire la limite quand n tend vers $+\infty$ de :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k\,k!}$$

05

1° Pour tout entier naturel n on pose :

$$u_n = \int_n^{n+1} (x+1)\,e^{-x}\,dx$$

Montrer l'existence de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
A l'aide d'une intégration par parties, calculer u_n en fonction de n.
Etudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2° Pour tout entier naturel n, on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Calculer S_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite $S = (S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ quand n tend vers $+\infty$.

06

A) 1°) A tout réel x, tel que $\cos x \neq 0$, on associe

$$f(x) = -\ln|\cos x|.$$

a) Etudier la fonction f ainsi définie.

b) Construire la courbe représentative de f notée (C) dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ (unité : 2 cm).

2°) On note S l'ensemble des solutions de l'équation

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ \cos x + \sqrt{3}\sin x = 0 \end{cases}$$

a) Résoudre cette équation

b) On considère la fonction

$$g = \begin{pmatrix} \mathbb{R} \setminus S \to \mathbb{R} \\ x \mapsto -\ln|\cos x + \sqrt{3}\sin x| \end{pmatrix}$$

Comment la courbe (P) représentative de g peut-elle se déduire de (C) ?

3°) La suite u est définie par $u_0 = \frac{\pi}{4}$ et, pour tout entier naturel non nul n,

$$u_n = f(u_{n-1})$$

a) Montrer que l'équation

$$\begin{cases} x \in \left]\frac{\pi}{3} ; \frac{\pi}{2}\right[\\ f(x) = x \end{cases}$$

admet une solution unique, notée ℓ. Donner un encadrement de ℓ dans un intervalle de longueur 10^{-2}.

b) Montrer, par récurrence, que tous les termes de la suite u appartiennent à l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

Montrer que u est décroissante.

c) Montrer que u est convergente et trouver sa limite.

07

A) On se propose d'étudier l'équation $2x - \sin x = m$ où m est un nombre réel donné.

1°) Montrer que f admet une application réciproque g (on ne cherchera pas à expliciter g). Quelles propriétés possède la fonction g ?

Déterminer $g(0)$, $g(2\pi)$, $g(4k\pi)$.

2°) Montrer que, pour tout m réel, l'équation $2x - \sin x = m$ admet une solution unique.

3°) On considère l'équation : $2x - \sin x = 4$ et on note x sa solution.
Déterminer une estimation de x_0 à 10^{-1} près.

B) On se propose maintenant de dégager une méthode permettant d'obtenir une meilleure approximation de x_0, solution de $2x - \sin x = 4$.

1°) On considère l'application φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}(4 + \sin x)$$

Montrer que $f(x_0) = 4 \Leftrightarrow x_0 = \varphi(x_0)$

Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\varphi'(x)| \leq \frac{1}{2}$

2°) On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\quad u_{n+1} = \varphi(u_n)$
En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{n+1} - x_0| \leq \frac{1}{2}|u_n - x_0|$$

En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{n+1} - x_0| \leq \frac{1}{2^{n+1}}|u_0 - x_0|$$

Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

3°) a) Si on suppose : $|u_0 - x_0| < 10^{-1}$, combien faut-il calculer de termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour obtenir une valeur approchée de x_0 à 10^{-p} près ?

b) On prend comme valeur de u_0 la valeur approchée de x_0 à 10^{-1} près par défaut obtenue au A. 3°.
Déterminer une valeur approchée de x_0 à 10^{-2} près.

CHAPITRE IV

SUITES NUMERIQUES

Les notions de suite et de nombres réels ont été introduites en classe de Première (cf Cahiers du Bac Première S)

I. Propriétés des limites

1°) LIMITES ET RELATION D'ORDRE

Théorèmes

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$, sont des suites réelles

t_1 Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et $|u_n| \leq v_n$ pour $n \geq n_0$
Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

t_2 Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ et $u_n \geq v_n$ pour $n \geq n_0$
Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

t_3 Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$ et $v_n \leq u_n \leq w_n$ pour $n \geq n_0$
Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$

t_4 Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $u_n \leq A$ (resp $u_n \geq A$) pour $n \geq n_0$
Alors $\ell \leq A$ (resp $\ell \geq A$)

t_5 Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell'$ et $u_n \leq v_n$ pour $n \geq n_0$
Alors $\ell \leq \ell'$

t_6 Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante (resp décroissante) et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$
Alors $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n \leq \ell$ (resp $u_n \geq \ell$)

t_7 Pour qu'une suite croissante (resp décroissante) soit convergente, il faut et il suffit qu'elle soit majorée (resp minorée)

Exemples - Travaux pratiques

ex.1 Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $u_n = \sum\limits_{p=0}^{n} \dfrac{1}{C_n^p}$

En utilisant le fait que, pour $n \geq 4$ et $2 \leq p \leq n-2$ on a $C_n^p \geq C_n^2$ trouver la limite de la suite (u_n)

⇒

$$u_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{C_n^p} = \frac{1}{C_n^0} + \frac{1}{C_n^1} + \frac{1}{C_n^{n-1}} + \frac{1}{C_n^n} + \sum_{p=2}^{n-2} \frac{1}{C_n^p}, \quad n \geq 4 \ \mathit{(1)}.$$

De $C_n^p \geq C_n^2$ $(2 \leq p \leq n-2)$, on déduit : $\dfrac{1}{C_n^p} \leq \dfrac{2}{n(n-1)}$, et donc $u_n \leq 2 + \dfrac{2}{n} + (n-3)\dfrac{2}{n(n-1)}$

L'égalité *(1)* donne en outre $u_n \geq 2$.

$2 + \dfrac{2}{n} + (n-3)\dfrac{2}{n(n-1)}$ admet 2 pour limite quand n tend vers $+\infty$.

Le théorème t_3 permet de conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

ex.2 * utilise le chapitre 4

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{n}$$

b) On considère la suite de terme général

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ell n\, n, \quad n \geq 1$$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone, à termes positifs

Conclure.

⇒

a) • Si $n \geq 1$, la fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est continue sur $[n, n+1]$ et vérifie pour tout $t \in [n, n+1]$

$$\frac{1}{n+1} \leq f(t) \leq \frac{1}{n}$$

on en déduit $$\int_n^{n+1} \frac{1}{n+1}\,dt \leq \int_n^{n+1} f(t)\,dt \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{n}\,dt$$

c'est-à-dire $$\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} f(t)\,dt \leq \frac{1}{n}$$

b) On forme $$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - (\ell n\,(n+1) - \ell n\, n)$$

$$= \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \leq 0 \qquad \text{d'après le a)}$$

donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante

D'après a) $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t}$$

or d'après la relation de Chasles, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} = \int_1^{n+1} \frac{dt}{t} = \ell n\,(n+1)$$

donc $u_n \geq \ell n\,(n+1) - \ell n\, n > 0$

Etant décroissante et minorée, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente d'après le théorème t_7

2°) LIMITES ET OPERATIONS

Théorèmes

t_8 Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell'$

alors $\lim_{n\to+\infty} u_n + v_n = \ell + \ell'$

$\lim_{n\to+\infty} u_n v_n = \ell\ell'$

$\lim_{n\to+\infty} \lambda u_n = \lambda\ell \qquad \lambda \in \mathbb{R}$

t_9 On suppose $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

- si $\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n + v_n = +\infty$
- si $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n + v_n = +\infty$
- si $\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell > 0$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n v_n = +\infty$
- si $\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell < 0$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n v_n = -\infty$
- si $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n v_n = +\infty$
- si $\lambda > 0$ alors $\lim_{n\to+\infty} \lambda u_n = +\infty$
- si $\lambda < 0$ alors $\lim_{n\to+\infty} \lambda u_n = -\infty$

Remarques

1) Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, on dit que $u_n + v_n$ est une forme indéterminée en $+\infty$

On ne peut en effet pas donner de résultat général concernant le comportement de $u_n + v_n$ pour n infini

exemples $u_n = n^2 + n$, $v_n = -n$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n + v_n = +\infty$

$u_n = n$, $v_n = -n^2$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n + v_n = -\infty$

$u_n = n + 1$, $v_n = -n$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n + v_n = 1$

$u_n = n + (-1)^n$, $v_n = -n$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n + v_n$ n'a pas de limite

2) Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$, on dit que $u_n v_n$ est une forme indéterminée : il n'y a pas de résultat général concernant $u_n v_n$ pour n infini.

exemples $u_n = n^2$ $\quad v_n = \dfrac{1}{n}$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n v_n = +\infty$

$u_n = n$ $\quad v_n = \dfrac{1}{n^2}$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n v_n = 0$

$u_n = n$ $\quad v_n = \dfrac{1}{n}$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n v_n = 1$

$u_n = n$ $\quad v_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n v_n$ n'a pas de limite

t_{10} On suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \neq 0$ pour tout $n \geq n_0$

Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ alors $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{|u_n|} = +\infty$

- Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$, $\ell \neq 0$, alors $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{\ell}$
- Si $\lim_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty$ alors $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = 0$

3°) IMAGE D'UNE SUITE PAR UNE FONCTION

Théorème

t_{11} Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points de I

Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a$ (avec éventuellement $a = +\infty$ ou $a = -\infty$)

et si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ (avec éventuellement $\ell = +\infty$ ou $\ell = -\infty$)

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = \ell$

Remarque

ce théorème t_{10} est une conséquence directe du théorème de composition des limites - cf chapitre 1

Exemples - Travaux pratiques

* utilise le chapitre 4

ex.3 On condidère la suite de terme général

$$u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \qquad n \in \mathbb{N}^*$$

En utilisant le résultat de l'exercice ex_2 - a) déterminer un encadrement de u_n. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

⇒

D'après ex_2 - a) on a, pour tout $n \geq 2$ et pour tout k $0 \leq k \leq n$

$$\int_{n+k}^{n+k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{n+k} \leq \int_{n+k-1}^{n+k} \frac{dt}{t}$$

donc par addition membre à membre et utilisation de la relation de Chasles

$$\int_{n}^{2n+1} \frac{dt}{t} \leq u_n \leq \int_{n-1}^{2n} \frac{dt}{t} \qquad \text{i.c} \qquad \ell n\left(\frac{2n+1}{n}\right) \leq u_n \leq \ell n\left(\frac{2n}{n-1}\right)$$

En écrivant $\ell n\left(\frac{2n+1}{n}\right) = \ell n\left(2 + \frac{1}{n}\right)$ on voit par application du théorème t_{10} que

$$\lim_{n \to +\infty} \ell n\left(\frac{2n+1}{n}\right) = \ell n\, 2$$

de même $\ell n\left(\frac{2n}{n-1}\right) = \ell n\left(\frac{2}{1 - \frac{1}{n}}\right)$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \ell n\left(\frac{2n}{n-1}\right) = \ell n\, 2$

L'inégalité précédente permet alors, par application du théorème t_3 de conclure à $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell n\, 2$

II. Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

I étant un intervalle de $\mathbb{R}$, soit f une **application de I dans I continue sur I**

On définit une suite $u = (u_n)_{n \geq n_0}$ en choisissant $u_{n_0} \in I$ et en posant

pour tout $n \geq n_0$ $\qquad u_{n+1} = f(u_n)$

(on dit que u est une **suite récurrente**)

Théorème

t_{12} Si la suite u converge vers un élément ℓ de I, alors on a : $\ell = f(\ell)$

Remarque :

la résolution de l'équation $x = f(x)$ fournit donc les seules limites possibles de la suite u dans I

On notera l'importance de l'hypothèse "f continue sur I" dans ce théorème

t_{13} On suppose f croissante sur I

a) La suite u est alors monotone
croissante si $u_{n_0+1} \geq u_{n_0}$; décroissante si $u_{n_0+1} \leq u_{n_0}$

b) Si t est un élément de I tel que f(t) = t :
si $u_{n_0} \leq t$ alors pour tout $n \geq n_0$ $u_n \leq t$
si $u_{n_0} \geq t$ alors pour tout $n \geq n_0$ $u_n \geq t$

Exemples - Travaux pratiques

ex.4 On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \cos u_n$$

1°) Montrer que l'équation $x = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \cos x$ admet une racine unique ℓ (on pourra étudier la fonction $f : x \mapsto x - \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \cos x$). Donner la valeur de ℓ (c'est une valeur simple)

2°) a) Montrer qu'il existe $k \in [0, 1[$ tel que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\left|\frac{\pi}{3\sqrt{3}} \cos x - \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \cos y\right| \leq k\,|x - y|$$

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $|u_n - \ell| \leq \ell k^n$

c) Qu'en résulte-t-il pour la suite (u_n) ?

⇒

1°) $f : x \mapsto x - \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \cos x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f'(x) = 1 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \sin x$

Puisque $\frac{\pi}{3\sqrt{3}} = 0{,}60$ à $5 \cdot 10^{-3}$ près, on a $\left|\frac{\pi}{3\sqrt{3}} \sin x\right| < 1$ et $f'(x) > 0$, il en résulte que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et donc qu'elle s'annule au plus une fois.

D'autre part $f(0) = -\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$ donc f s'annule une fois et une fois seulement en $\ell \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$

On a $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$, donc $\ell = \frac{\pi}{6}$

2°) a) la dérivée de cos est $-\sin$ et $\forall x \in \mathbb{R}$ $|\sin x| \leq 1$, donc d'après l'inégalité des accroissements finis (cf chapitre 1) on a pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ $|\cos x - \cos y| \leq |x - y|$

donc $$\left|\frac{\pi}{3\sqrt{3}} \cos x - \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \cos y\right| \leq \frac{\pi}{3\sqrt{3}} |x - y|$$

On peut prendre $k = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$

b) En utilisant $\frac{\pi}{3\sqrt{3}} \cos \ell = \ell$ et l'inégalité précédente, on obtient

pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\left|\frac{\pi}{3\sqrt{3}} \cos x - \ell\right| \leq \frac{\pi}{3\sqrt{3}} |x - \ell|$

donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ $|u_{n+1} - \ell| \leq k\,|u_n - \ell|$

Ainsi on a $|u_1 - \ell| \leq k\,|u_0 - \ell|$ i.e $|u_1 - \ell| \leq \ell k$

$|u_2 - \ell| \leq k\,|u_1 - \ell| \leq \ell k^2$

$|u_3 - \ell| \leq k\,|u_2 - \ell| \leq \ell k^3$

etc ... $|u_n - \ell| \leq \ell k^n$, par une récurrence immédiate.

c) Puisque $0 < k < 1$ on a $\lim\limits_{n \to +\infty} k^n = 0$ et l'inégalité précédente donne

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ i.e. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{\pi}{6}$

ex.5 1) Etudier les variations de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = x - e^{-\frac{x}{2}}$$

En déduire qu'il existe ℓ réel unique tel que $\ell = e^{-\frac{\ell}{2}}$

2) On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = e^{-\frac{u_n}{2}}$$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n \geq 0$.

b) Montrer que pour tout couple (x, y) de réels positifs

$$\left| e^{-\frac{x}{2}} - e^{-\frac{y}{2}} \right| \leq \frac{1}{2} |x - y|$$

c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $|u_n - \ell| \leq \frac{\ell}{2^n}$

d) Qu'en résulte-t-il pour la suite (u_n) ?

3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{2n} \leq \ell \leq u_{2n+1}$$

Déterminer un encadrement de ℓ d'amplitude inférieure à 10^{-3}.

⇒

1) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f'(x) = 1 + \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}}$

On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f'(x) > 0$, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

De plus $f(0) = -1 < 0$ et $f(1) = 1 - e^{-\frac{1}{2}} > 0$ donc f s'annule en un point et un seul, ℓ tel que $0 < \ell < 1$

2) a) On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $e^x > 0$, il en résulte $u_n > 0$ pour tout $n \geq 1$ et puisque $u_0 = 0$ on a bien $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

b) Soit $g : x \mapsto e^{-\frac{x}{2}}$, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $g'(x) = -\frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}}$

donc si x et y sont positifs on a $|g'(t)| \leq \frac{1}{2}$ pour tout $t \in [x, y]$ et d'après l'inégalité des accroissements finis :

$$|g(x) - g(y)| \leq \frac{1}{2} |x - y|$$

$$\text{i.e.} \quad \left| e^{-\frac{x}{2}} - e^{-\frac{y}{2}} \right| \leq \frac{1}{2} |x - y|$$

c) En utilisant $e^{-\frac{\ell}{2}} = \ell$ on obtient successivement

$$|u_1 - \ell| = \left| e^{-\frac{u_0}{2}} - e^{-\frac{\ell}{2}} \right| \leq \frac{1}{2} |u_0 - \ell|$$

$$|u_2 - \ell| = \left| e^{-\frac{u_1}{2}} - e^{-\frac{\ell}{2}} \right| \leq \frac{1}{2} |u_1 - \ell| \leq \frac{1}{2^2} |u_0 - \ell|$$

et si on suppose $|u_{n-1} - \ell| \le \frac{1}{2^{n-1}} |u_0 - \ell|$, il vient

$$|u_n - \ell| = \left| e^{-\frac{u_n}{2}} - e^{-\frac{\ell}{2}} \right| \le \frac{1}{2} |u_{n-1} - \ell| \le \frac{1}{2^n} |u_0 - \ell|$$

Par récurrence on peut donc conclure à

$$|u_n - \ell| \le \frac{1}{2^n} |u_0 - \ell| \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

i.e. $$|u_n - \ell| \le \frac{\ell}{2^n} \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

d) Il en résulte bien sûr $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$

3) La fonction g est strictement décroissante donc

$u_0 < \ell$ donne $g(u_0) > g(\ell)$ i.e. $u_1 > \ell$

$u_1 < \ell$ donne $g(u_1) > g(\ell)$ i.e. $u_2 < \ell$

et ainsi de suite, on obtient

$u_{2n} < \ell$ et $u_{2n+1} < \ell$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Pour obtenir un encadrement de ℓ d'amplitude inférieure à 10^{-3} il suffit donc de déterminer deux termes consécutifs u_n et u_{n+1} de la suite tels que $|u_{n+1} - u_n| < 10^{-3}$

On obtient successivement (en arrondissant les résultats à 4 décimales)

$u_0 = 0$
$u_1 = 1$
$u_2 = 0{,}6065$
$u_3 = 0{,}7384$
$u_4 = 0{,}6913$
$u_5 = 0{,}7078$
$u_6 = 0{,}7020$
$u_7 = 0{,}7040$
$u_8 = 0{,}7033$
$u_9 = 0{,}7035$

ce qui permet de conclure à $0{,}703 < \ell < 0{,}704$

NB : la machine travaille à $5 \cdot 10^{-12}$, on peut donc supposer que les erreurs de calcul sont négligeables.

ex.6 1) Résoudre l'équation (E) $\ell n\,(1 + x) - x = 0$

(On pourra étudier la fonction $\varphi : x \to \ell n\,(1 + x) - x$

2) On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$u_0 = e$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = \ell n\,(1 + u_n)$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n \ge 0$

b) Montrer que (u_n) est décroissante
En déduire qu'elle est convergente

c) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

⇒

1) φ est définie et dérivable sur $]-1, +\infty[$, $\varphi'(x) = -\frac{x}{1 + x}$

d'où le tableau de variation

x	−1		0		+∞
φ'(x)		+	0	−	
φ(x)			0		

φ est strictement croissante sur $]-1, 0]$
strictement décroissante sur $[0, +\infty[$
et $\varphi(0) = 0$

Donc φ s'annule au seul point 0 et pour tout $x \in]-1, 0[\cup]0, +\infty[$, on a $\varphi(x) < 0$

2) a) $u_n \geq 0$ implique $u_{n+1} \geq 0$ donc puisque u_0 est positif on obtient par récurrence
$u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

b) D'après l'étude de φ on a pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$\ell n\,(1 + u_n) \leq u_n \quad \text{i.e.} \quad u_{n+1} \leq u_n$$
et la suite est décroissante
Etant décroissante et minorée par 0, (u_n) est convergente (cf théorème t_7)

c) En posant $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ on a $\ell \geq 0$ (théorème t_6)
et $\ell = \ell n\,(1 + \ell)$ (car $x \mapsto \ell n\,(1 + x)$ est continue sur $]-1, +\infty[$ donc continue en ℓ)

La seule possibilité est d'après le 1°) : $\ell = 0$.
Ainsi $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

III. Comparaison asymptotique des suites usuelles

On s'intéresse aux suites
$(\ell n\, n)_{n \in \mathbb{N}^*}$
$(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec a réel, $a > 0$
$(n^\alpha)_{n \in \mathbb{N}^*}$ avec α réel.

Théorèmes

t_{14}

- $\lim\limits_{n \to +\infty} \ell n\, n = +\infty$
- si $0 < a < 1$ $\lim\limits_{n \to +\infty} a^n = 0$
  si $a > 1$ $\lim\limits_{n \to +\infty} a^n = +\infty$
- si $\alpha > 0$ $\lim\limits_{n \to +\infty} n^\alpha = +\infty$
  si $\alpha < 0$ $\lim\limits_{n \to +\infty} n^\alpha = 0$

Remarque :

- si $a = 1$ (a^n) est constante avec $a^n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
- si $\alpha = 0$ (n^α) est constante avec $n^\alpha = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

t_{15} si $\alpha > 0$ $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ell n\, n}{n^\alpha} = 0$

si $a > 1$ $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^\alpha}{a^n} = 0$

IV. Suites arithmétiques et géométriques

Définition

d₁ La suite $(u_n)_{n \geq s}$ est dite **arithmétique** quand il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq s$, $u_{n+1} = u_n + r$

r est la **raison** de la suite

Propriétés

p₁ si $(u_n)_{n \geq s}$ est arithmétique, on a pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, $p \geq s$, $q \geq s$

$$u_p = u_q + (p - q)\, r$$

p₂ pour tout $(p, n) \in \mathbb{N}^2$, $s \leq p \leq n$

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = \frac{n - p + 1}{2}\,(u_p + u_n)$$

p₃ Trois nombres a, b, c sont en *progression arithmétique* (c'est-à-dire que ce sont trois termes d'indices consécutifs d'une suite arithmétique) si et seulement si :

$$a + c = 2b$$

Définition

d₂ La suite $(u_n)_{n \geq s}$ est dite géométrique quand il existe $q \in \mathbb{R}$ tel que

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq s$, $u_{n+1} = q u_n$

On dit que q est la *raison* ; on suppose, par la suite, q différent de 0.

Propriétés

p₄ si $(u_n)_{n \geq s}$ est géométrique, on a pour tout $(p, n) \in \mathbb{N}^2$, $p \geq s$, $n \geq s$

$$u_n = u_p\, q^{n-p}$$

p₅ Pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^{-2}$, $s \leq p \leq n$

si $q \neq 1$ $$\sum_{k=p}^{n} u_k = u_p \sum_{k=0}^{n-p} q^k = u_p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$$

si $q = 1$ $$\sum_{k=p}^{n} u_k = (n - p + 1)\, u_p$$

p₆ Trois réels non nuls a, b, c sont en *progression géométrique* (c'est-à-dire que ce sont trois termes d'indices consécutifs d'une suite géométrique) si et seulement si :

$$ac = b^2$$

EXERCICES RESOLUS

401

On appelle f_a la fonction numérique de la variable réelle x définie par $f_a(x) = \dfrac{(a+2)\,x}{x+2-a}$,

a étant un élément de l'intervalle $[0,2[$ de $\mathbb{R}$.

Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie par U_0 et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = f_a(U_n).$$

On suppose que $U_0 \in [0,2a]$.

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in [0,2a]$. En déduire que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie partout dans $\mathbb{N}$.
Que peut-on dire de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si $U_0 = 0$ ou si $U_0 = 2a$?

2) On suppose U_0 différent de 0 et 2a (a différent de 0).
Etudier la convergence de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et préciser la limite de cette suite.

SOLUTION

1) f_a est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{a-2\}$.
De $a \in [0, 2[$, on déduit $a-2 \in [-2, 0[$.
f_a est donc définie et dérivable sur $J = [0, 2a]$.
Pour tout $x \in J$, $f'_a(x) = \dfrac{(2-a)(a+2)}{(x+2-a)^2} > 0$.
f_a est donc strictement croissante sur J et de $f_a(0) = 0$ et $f_a(2a) = 2a$, on déduit que $f_a(J) = J$.
Soit $U_0 \in J$. Si U_n existe et appartient à J, $U_{n+1} = f(U_n)$ existe et appartient à J. Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}$, U_n existe et appartient à J.
Supposons $U_0 = 0$. Si $U_n = 0$, $U_{n+1} = f(U_n) = f(0) = 0$, et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = 0$.
Supposons $U_0 = 2a$. Si $U_n = 2a$, $U_{n+1} = f(U_n) = f(2a) = 2a$ et donc,
pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = 2a$.

Donc $a - 2 < 0$.
Car $a-2 \notin [0, 2a]$.
$2 - a > 0$; $a + 2 > 0$.
$f_a(J) = [(f_a(0), f_a(2a)]$.
Raisonnement par récurrence.
Idem

2) Pour tout x dans J, $f_a(x) - x = \dfrac{-x\,(x-2a)}{x+2-a}$ est positif.
Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $U_{n+1} = f(U_n) > U_n$; croissante et majorée par 2a, la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite ℓ inférieure ou égale à 2a.
La fonction f_a étant continue sur J, le nombre ℓ est un élément de J vérifiant $f(\ell) - \ell = 0$ et donc ℓ est 0 ou 2a. De $U_0 > 0$ et $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croissante, on déduit que $\ell = 2a$.

$\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in J$, et donc $U_n \leq 2a$.
Théorème t_7
Les seules racines de $f(x) = 0$ sont 0 et 2a.
$\ell > U_0$.

402

On considère la suite de terme général U_n telle que $\begin{cases} U_1 = \dfrac{3}{2} \\ U_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(U_n + \dfrac{2}{U_n}\right); \quad n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

1) a) Montrer que pour tout n, $U_n > 0$.

b) Montrer que $U_{n+1} - \sqrt{2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{(U_n - \sqrt{2})^2}{U_n}$ et que, pour tout n, $U_n > \sqrt{2}$.

c) Montrer que $U_{n+1} - \sqrt{2} = \dfrac{1}{2}(U_n - \sqrt{2}) + \dfrac{1}{U_n} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et que, pour tout n, $U_n - \sqrt{2} < \dfrac{1}{2n}$

d) U_n admet-il une limite quand n tend vers $+\infty$? Si oui, la calculer.

2) Etudier la convergence et la limite de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ en utilisant la fonction f,
$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$

SOLUTION

1) a) $U_1 = \frac{3}{2} > 0$.

Si U_n est strictement positif, $\frac{1}{2}\left(U_n + \frac{2}{U_n}\right)$ existe et est strictement positif et donc U_{n+1} est strictement positif.

$U_n > 0$ implique $\frac{1}{U_n} > 0$.

En conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, U_n existe et est strictement positif.

b) $$U_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{2}{U_n}\right) - \sqrt{2}$$
$$= \frac{1}{2U_n}\left(U_n^2 - 2\sqrt{2}\, U_n + 2\right)$$
$$= \frac{1}{2U_n}\left(U_n - \sqrt{2}\right)^2$$

$U_n > \sqrt{2} > 0$,
$(U_n - \sqrt{2})^2 > 0$
$U_{n+1} - \sqrt{2} > 0$.

$U_1 = \frac{3}{2} > \sqrt{2}$.

Si U_n est strictement supérieur à $\sqrt{2}$, l'égalité précédente montre que U_{n+1} l'est aussi.

En conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n > \sqrt{2}$.

c) $$U_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{U_n}{2} + \frac{1}{U_n} - \sqrt{2}$$
$$= \frac{U_n}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{U_n} - \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\left(U_n - \sqrt{2}\right) + \frac{1}{U_n} - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

En conséquence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$U_{n+1} - \sqrt{2} < \frac{1}{2}\left(U_n - \sqrt{2}\right)$$

De $U_n > \sqrt{2}$, on déduit :
$\frac{1}{U_n} - \frac{1}{\sqrt{2}} < 0$.

On a $U_1 - \sqrt{2} = \frac{3}{2} - \sqrt{2} < \frac{1}{2}$. Supposons alors que

$U_n - \sqrt{2} < \frac{1}{2^n}$, on en déduit

$U_{n+1} - \sqrt{2} < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^n}$, soit $U_{n+1} - \sqrt{2} < \frac{1}{2^{n+1}}$

En conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n - \sqrt{2} < \frac{1}{2^n}$.

d) De $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ et $0 < U_n - \sqrt{2} < \frac{1}{2^n}$, on déduit $\lim\limits_{n \to +\infty}\left(U_n - \sqrt{2}\right) = 0$ et donc que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite, égale à $\sqrt{2}$.

2) $f : x \mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.

$f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{x^2}\right)$ montre que f est strictement croissante sur $[\sqrt{2}, +\infty[$.

$f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ permet de conclure que $f(J) = J$.

$J = [\sqrt{2}, +\infty[$.

La suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $U_1 > \sqrt{2}$, $U_{n+1} = f(U_n)$ est donc monotone.

théorème t_{13}.

$$U_2 - U_1 = f\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{3}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{4}{3}\right) - \frac{3}{2} < 0$$

La suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc décroissante.
Décroissante et minorée par $\sqrt{2}$, $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ admet une limite supérieure ou égale à $\sqrt{2}$. f étant continue sur J, cette limite est solution de $f(x) - x = 0$.
De $f(x) - x = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{x} - x\right)$ et $\ell \geq \sqrt{2}$, on déduit que $\ell = \sqrt{2}$.

$U_2 - U_1 = -\frac{1}{12}$.

t13.
La monotonie de (U_n) peut aussi se démontrer en constatant que :
$f(x) - x = \frac{1}{2x}(2 - x^2)$
est négatif ou nul sur $[\sqrt{2}, +\infty[$.

403

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 2$, $u_1 = 3$, et pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$,
$$u_n = \frac{1}{3}(4u_{n-1} - u_{n-2}).$$

1) Soit E l'ensemble des suites réelles définies sur $\mathbb{N}$ telles que, pour tout $n \geq 2$,
$$v_n = \frac{1}{3}(4v_{n-1} - v_{n-2}).$$
Montrer qu'il existe deux suites géométriques de premier terme 1 et de raison non nulle dans E. Soit q_1 et q_2 les raisons obtenues.

2) Montrer qu'il existe un couple (a,b) de réels tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = aq_1^n + bq_2^n$.
En déduire la limite de la suite u.

SOLUTION

1) Une suite géométrique v de premier terme 1 et de raison q est dans E si et seulement si pour tout $n \geq 2$, on a :
$$q^n = \frac{1}{3}(4q^{n-1} - q^{n-2})$$
c'est-à-dire, si q n'est pas nul, lorsque :
$$3q^2 - 4q + 1 = 0$$
c'est-à-dire pour $q \in \left\{1; \frac{1}{3}\right\}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = q^n$.

$q_1 = 1$; $q_2 = \frac{1}{3}$

2) Pour que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_n = aq_1^n + bq_2^n$, il est nécessaire que :
$$\begin{cases} u_0 = aq_1^0 + bq_2^0 \\ u_1 = aq_1^1 + bq_2^1 \end{cases}$$
c'est-à-dire que :
$$\begin{cases} a + b = 2 \\ a + \frac{1}{3}b = 3 \end{cases}$$
et donc que :
$$(a,b) = \left(\frac{7}{2} ; -\frac{3}{2}\right)$$
Réciproquement, soit t la suite définie par :
$$t_n = \frac{7}{2} - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n, n \in \mathbb{N}.$$
On a $t_0 = 2$ et $t_1 = 3$.
Pour tout $n \geq 2$, on a :

D'après le calcul de a et b.

Pour tout $n \geq 2$, on a :

$$4t_{n-1} - t_{n-2} = 4\left(\frac{7}{2} - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right) - \left(\frac{7}{2} - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\right)$$

$$= 3 \times \frac{7}{2} - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}(4-3)$$

$$= 3\left(\frac{7}{2} - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right)$$

$$= 3t_n$$

$$t_n = \frac{1}{3}(4t_{n-1} - t_{n-2})$$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = t_n$.

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{2}\left(7 - \frac{1}{3^{n-1}}\right)$, donc la suite u converge et $\lim\limits_{+\infty} u = \frac{7}{2}$.

Ayant mêmes premiers termes et vérifiant la même relation de récurrence, les suites u et t sont égales.

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 0$

404

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que pour tout n on ait : $(n+1)^3 u_{n+1} - n^3 u_n = n+1$.
Déterminer u_n en fonction de u_1 et de n.
La suite (u_n) est-elle convergente ? Si oui quelle est sa limite ?

SOLUTION

Soit $v_n = n^3 u_n$, $n \geq 1$.
La relation donnée s'écrit $v_{n+1} - v_n = n+1$.

On a $\sum\limits_{k=1}^{n} (v_{k+1} - v_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} (k+1) = n + \sum\limits_{k=1}^{n} k$,

c'est-à-dire $v_{n+1} - v_1 = n + \frac{n(n+1)}{2}$

$$= \frac{n(n+3)}{2}$$

$\sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

On en déduit, pour tout $n \geq 1$:

$$v_n = v_1 + \frac{(n-1)(n+2)}{3}$$

$v_1 = u_1$

c'est-à-dire :

$$u_n = \frac{u_1}{n^3} + \frac{(n-1)(n+2)}{2n^3}$$

On en tire en particulier que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est convergente et admet 0 pour limite.

$\frac{(n-1)(n+2)}{n^3} = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{2}{n}\right)$ tend vers zéro quand n tend vers $+\infty$.

405

La suite numérique $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie sur $\mathbb{N}$ par la donnée de $u_0 = 0$ et par la relation de récurrence $\left(\forall n \in \mathbb{N};\ u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 4}\right)$.

En utilisant la fonction $f : x \mapsto \frac{2x+3}{x+4}$, étudier la convergence et la limite de la suite u.

SOLUTION

La fonction f est définie, continue, strictement croissante sur chacun des intervalles $]-\infty,-4[$ et $]-4,+\infty[$.

$f'(x) = \frac{5}{(x+4)^2}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$

$I = \mathbb{R}_+$ est stable par f (pour tout $x \geq 0$, $f(x)$ est positif), donc puisque $u_0 \in I$, u_n est défini pour tout n avec $u_n \in I$.

$f(I) \subset I$.

La suite u est monotone.

Théorème t_{13}.

$u_1 = f(u_0) = f(0) = \frac{3}{4}$, donc $u_1 - u_0 > 0$, et la suite u est croissante.

Pour tout $x \geq 0$, $f(x) - 2 = \frac{-5}{x+4} < 0$ et $f(x) > 0$. Pour tout $n \geq 1$, on a donc $0 < u_n < 2$.

$f(x) < 2$ pour tout $x \geq 0$.
$u_{n+1} = f(u_n) < 2$.

Croissante et majorée par 2, la suite u admet une limite ℓ inférieure ou égale à 2. f étant continue sur I, le nombre ℓ est solution de l'équation $f(x) - x = 0$, or

$$f(x) - x = -\frac{(x-1)(x+3)}{x+4}.$$

Et $\ell > 0$ puisque $u_1 \leq \ell$.

On en conclut que $\ell = 1$.

406

1) Montrer que l'équation

(E) $x^n + x^{n-1} + \ldots + x - 1 = 0$

a une racine et une seule sur $[0,+\infty[$, on la note a_n.

2) Montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante, en déduire qu'elle converge.

3) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $a_n = \frac{1}{2} + \frac{a_n^{n+1}}{2}$

Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} a_n^{n+1}$ (on pourra utiliser que $0 < a_n < a_2$ pour $n \geq 2$), en déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} a_n$.

SOLUTION

1) On étudie la fonction $f_n : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$

$x \mapsto x^n + x^{n-1} + \ldots + x - 1$

• chaque fonction $x \mapsto x^k$ $(1 \leq k \leq n)$ est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$, il en est donc de même pour f_n.

On peut aussi invoquer la dérivée de f_n

• $f_n(0) = -1$

et en écrivant $f_n(x) = x^n\left[1 + \frac{1}{x} + \ldots + \frac{1}{x^{n-1}} - \frac{1}{x^n}\right]$

on voit que $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$.

Ainsi f_n est une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[-1,+\infty[$ et il existe a_n unique tel que $f_n(a_n) = 0$, $a_n \geq 0$.

$a_n = f_n^{-1}(0)$
$a_n > 0$ car $f_n(0) \neq 0$

2) On a $f_{n+1}(x) = f_n(x) + x^{n+1}$

donc $f_{n+1}(a_n) = f_n(a_n) + a_n^{n+1} = a_n^{n+1}$

Il en résulte $f_{n+1}(a_n) > 0$ et donc $a_n > a_{n+1}$

Ainsi $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et puisqu'elle est minorée par 0, elle converge.

Théorème t_7

3) Pour $n \geq 2$, on a $a_n \neq 1$ car $f_n(1) = n-1 \neq 0$

donc $a_n + a_n^2 + \ldots + a_n^n = a_n \frac{1-a_n^n}{1-a_n}$

et la relation $f_n(a_n) = 0$ donne

$$2a_n - 1 - a_n^{n+1} = 0$$

$a_n + a_n^2 + \ldots + a_n^n = 1$

i.e. $a_n = \frac{1}{2} + \frac{a_n^{n+1}}{2}$

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée par 0 donc pour tout entier

$n \geq 2$ $\quad 0 < a_n \leq a_2$

et $\quad 0 < a_n^{n+1} \leq a_2^{n+1}$

On a $a_2 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} < 0{,}7$ donc pour tout $n \geq 2$

$$0 < a_n^{n+1} < (0{,}7)^{n+1}$$

De $\lim\limits_{n \to +\infty} (0{,}7)^{n+1} = 0$, on déduit alors $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n^{n+1} = 0$

puis $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \frac{1}{2}$

a_2 est défini par
$a_2^2 + a_2 - 1 = 0 \quad a_2 > 0$

407

A) Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad f(x) = e^{-x} \ln x$$

1) Déterminer la fonction dérivée de f et vérifier que f'(x) a même signe que

$$g(x) = -\ln x + \frac{1}{x}$$

2) Etudier les variations de la fonction g et en déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique, notée α, comprise entre $\frac{3}{2}$ et 2.

Quel est le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0,\alpha[$? sur l'intervalle $]\alpha,+\infty[$?

3) Vérifier l'égalité $f(\alpha) = \frac{e^{-\alpha}}{\alpha}$ et déduire, de l'inégalité $\frac{3}{2} < \alpha < 2$ un encadrement de $f(\alpha)$.

4) Achever l'étude de la fonction f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

B) Recherche d'une valeur approchée de α

1) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ est équivalente à l'équation $h(x) = x$ où h est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad h(x) = e^{\frac{1}{x}}$$

2) Calculer h'(x) est vérifier que :

$$\forall x \in \left[\frac{3}{2} ; 2\right] \qquad -\frac{4}{9} e^{\frac{2}{3}} \leq h'(x) \leq -\frac{1}{4} e^{\frac{1}{2}}$$

En déduire qu'il existe un réel $k \in]0,1[$ tel que :

$$\forall x \in \left[\frac{3}{2} ; 2\right] \qquad |h'(x)| \leq k$$

3) Prouver que pour tout couple de réels distincts x et y compris entre $\frac{3}{2}$ et 2

$$|h(x) - h(y)| \leq k |x - y|$$

4) Soit u la suite définie par son premier terme $u_0 = 2$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = h(u_n)$$

a) Montrer que

$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n \in \left[\frac{3}{2} ; 2\right]$

b) Prouver que :

$\forall n \in \mathbb{N} \qquad | u_{n+1} - \alpha | \leq k | u_n - \alpha |$

c) En déduire que :

$\forall n \in \mathbb{N} \qquad | u_n - \alpha | \leq k^n | 2 - \alpha |$

Montrer que la suite u converge vers 2.

5) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, α est compris entre u_n et u_{n+1}
En déduire une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

SOLUTION

A) 1) f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = e^{-x}\left(\frac{1}{x} - \ell n\ x\right)$

donc f'(x) est du signe de $g(x) = \frac{1}{x} - \ell n\ x$

pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$

2) g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, $g'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} < 0$

x	0	α	$+\infty$
g'(x)		−	
g(x)	$+\infty$ ↘	0 ↘	$-\infty$

$\lim_{x \to 0^+} g(x) = +\infty$, $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

g est une bijection de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$, donc il existe $\alpha > 0$ unique tel que $g(\alpha) = 0$.

De $g\left(\frac{3}{2}\right) = 0{,}26 > 0$ et $g(2) = -0{,}19$ on déduit

à $5 \cdot 10^{-3}$ près

$$\frac{3}{2} < \alpha < 2$$

Sur $]0,\alpha[$ on a $g(x) > 0$ et sur $]\alpha,+\infty[$, $g(x) < 0$

3) $f(\alpha) = e^{-\alpha}\ \ell n\ \alpha = \frac{e^{-\alpha}}{\alpha}$

car $\ell n\ \alpha = \frac{1}{\alpha}$

La fonction $\varphi : x \mapsto \frac{e^{-x}}{x}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$

$\varphi'(x) = e^{-x}\left(-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right) < 0$

donc $\frac{3}{2} < \alpha < 2$ donne $\frac{e^{-2}}{2} < \frac{e^{-\alpha}}{\alpha} < \frac{2e^{-\frac{3}{2}}}{3}$

d'où $0{,}07 < f(\alpha) < 0{,}15$

4) On a $\lim_{x \to 0^+} e^{-x}\ \ell n\ x = -\infty$

et $\lim_{x \to +\infty} e^{-x}\ \ell n\ x = 0$

$e^{-x}\ \ell n\ x = xe^{-x} \frac{\ell n\ x}{x} = 0$

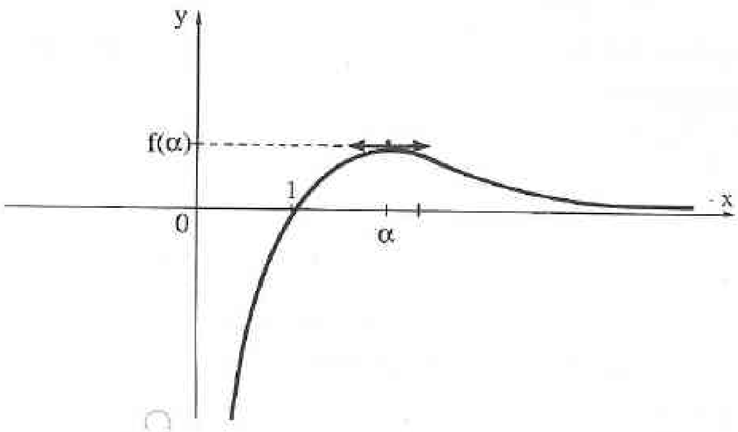
et on sait que

$\lim_{x \to +\infty} xe^{-x} = 0,$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ell n\ x}{x} = 0$

D'où le tableau de variation

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty \nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow 0$



B) 1) L'équation $g(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}_+^*$ s'écrit

$$\ell n\, x = \frac{1}{x}\ ,\ x \in \mathbb{R}_+^*$$

et équivaut donc à $\quad x = e^{\frac{1}{x}},\quad x \in \mathbb{R}_+^*$

a = b équivaut à $e^a = e^b$ car $x \mapsto e^x$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$

2) $h : x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, $h'(x) = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$

h' est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, $h''(x) = \left(\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right) e^{\frac{1}{x}} > 0$

donc h' est croissante et on a :

$$\forall x \in \left[\frac{3}{2}\ ;\ 2\right] \qquad h'\left(\frac{3}{2}\right) \le h'(x) \le h'(2)$$

$$\text{i.e.} \qquad -\frac{4}{9} e^{\frac{2}{3}} \le h'(x) \le -\frac{1}{4} e^{\frac{1}{2}}$$

On en déduit :

$$\forall x \in \left[\frac{3}{2}\ ;\ 2\right] \qquad |\, h'(x)\, | \le k$$

$$\text{avec} \qquad k = \frac{4}{9} e^{\frac{2}{3}}$$

$k = 0{,}87$ à $5 \cdot 10^{-3}$
donc $0 < k < 1$

3) En appliquant l'inégalité des accroissements finis à la fonction h, on obtient donc pour tout couple (x,y) de points de $\left[\frac{3}{2}\ ;\ 2\right]$

$$|\, h(x) - h(y)\, | \le k\, |\, x - y\, |$$

Pour $t \in [x,y]$ on a $|\, h'(t)\, | \le k$

4) a) h est décroissante donc

$$h\left[\frac{3}{2}\ ;\ 2\right] = \left[h(2);\ h\left(\frac{3}{2}\right)\right]$$

or $\quad 1{,}64 < h(2) < 1{,}65$

et $\quad 1{,}94 < h\left(\frac{3}{2}\right) < 1{,}95$

donc $h\left[\frac{3}{2}\ ;\ 2\right] \subset \left[\frac{3}{2}\ ;\ 2\right]$

$I = \left[\frac{3}{2}\ ;\ 2\right]$ est stable par h

u_0 appartenant à $\left[\frac{3}{2}\ ;\ 2\right]$ on déduit alors par récurrence que quel que soit n, $u_n \in \left[\frac{3}{2}\ ;\ 2\right]$

$u_n \in I$ implique $u_{n+1} \in I$

b) d'après le 3)

$$|u_{n+1} - \alpha| = |h(u_n) - h(\alpha)| \leq k\,|u_n - \alpha|$$

u_n et α appartiennent à I

c) On obtient par une récurrence immédiate

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |u_n - \alpha| \leq k^n\,|u_0 - \alpha|$$

Puisque $0 < k < 1$ on a $\lim\limits_{n \to +\infty} k^n = 0$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - \alpha) = 0$

c'est-à-dire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$

5) h étant décroissante, $u_n \leq \alpha$ implique

$$h(u_n) \geq h(\alpha) \qquad \text{i.e.} \quad u_{n+1} \geq \alpha$$

De même $u_n \geq \alpha$ implique $u_{n+1} \leq \alpha$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$u_n \leq \alpha \leq u_{n+1}$$

ou $\quad u_n \geq \alpha \geq u_{n+1}$

Pour obtenir une valeur approchée de α à moins de 10^{-2} près on calcule donc les premiers termes de la suite jusqu'à ce que la différence entre deux termes consécutifs soit (en valeur absolue) inférieure à 10^{-2}.

n	u_n
0	2
1	1.649
2	1.834
3	1.725
4	1.786
5	1.751
6	1.770
7	1.759
8	1.766

Les calculs sont effectués à la précision de la machine les résultats sont donnés à $5\cdot 10^{-4}$

Vérifions que 1,76 est une valeur approchée de α à moins de 10^{-2} près :

on a $\quad g(1{,}76) = 0{,}003 \quad$ à $5\cdot 10^{-4}$ près

$\quad g(1{,}77) = -0{,}006 \quad$ à $5\cdot 10^{-4}$ près

donc $\quad 1{,}76 < \alpha < 1{,}77$

408

1) Montrer que l'équation

(E) $x^3 - 17{,}2x - 8{,}84 = 0$

admet une racine positive unique : α

Montrer que $4{,}3 < \alpha < 4{,}4$

2) On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 4{,}3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = \sqrt{17{,}2 + \frac{8{,}84}{u_n}}$$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n \in [4{,}3 \,;\, 4{,}4]$

b) En considérant la fonction $\varphi : x \mapsto \sqrt{17{,}2 + \dfrac{8{,}84}{x}}$ déterminer $k \in [0,1[$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq k\,|u_n - \alpha|$$

c) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$

d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{2n} < \alpha$ et $u_{2n+1} > \alpha$

Déterminer un encadrement de α d'amplitude inférieure à 10^{-4}

SOLUTION

1) On étudie les variations de $f : x \mapsto x^3 - 17{,}2x - 8{,}84$ sur $[0,+\infty[$

f est dérivable sur $[0,+\infty[$, $f'(x) = 3x^2 - 17{,}2$

f'(x) s'annule en

$$x_0 = \sqrt{\frac{17{,}2}{3}}$$

$x_0 = 2{,}39$ à $5 \cdot 10^{-3}$ près

x	0		x_0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-8{,}84$	$\searrow$	m	$\nearrow$	$+\infty$

Conséquences :

- $m = f(x_0) < f(0)$ donc $m < 0$
- f s'annule une fois et une seule sur $]x_0,+\infty[$

la restriction g de f à $[x_0,+\infty[$ est une bijection strictement croissante de $[x_0,+\infty[$ sur $[m,+\infty[$

$0 \in [m,+\infty[$ donc

$$\alpha = g^{-1}(0)$$

On trouve $f(4{,}3) = -3{,}3$ (à 5.10^{-2} près)

$f(4{,}4) = 0{,}7$

donc $4{,}3 < \alpha < 4{,}4$

2) a) $\varphi : x \to \sqrt{17{,}2 + \dfrac{8{,}84}{x}}$ est évidemment décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$

Donc $4{,}3 \leq u_n \leq 4{,}4$ implique $\varphi(4{,}4) \leq u_{n+1} \leq \varphi(4{,}3)$

or à 5.10^{-3} près $\varphi(4{,}3) = 4{,}39$

et $\varphi(4{,}4) = 4{,}38$

d'où $\varphi(4{,}4) \leq u_{n+1} \leq \varphi(4{,}3)$ implique $4{,}3 \leq u_{n+1} \leq 4{,}4$

Partant de $4{,}3 \leq u_0 \leq 4{,}4$ une récurrence montre donc que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $4{,}3 \leq u_n \leq 4{,}4$.

b) φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ avec

$$\varphi'(x) = \frac{-8,84}{2x^2\sqrt{17,2 + \frac{8,84}{x}}}$$

Donc pour $x \in [4,3 ; 4,4]$ on a

$$|\varphi'(x)| \leq \frac{8,84}{2\cdot(4,3)^2\sqrt{17,2 + \frac{8,84}{4;4}}}$$

le calcul donne $\dfrac{8,84}{2\cdot(4,3)^2\sqrt{17,2 + \frac{8,84}{4;4}}} = 0,055$ à 10^{-3} près par excès.

- $u(x) = \dfrac{8,84}{x} + 17,2$

on a $\varphi(x) = \sqrt{u(x)}$

donc $\varphi'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

avec $u'(x) = -\dfrac{8,84}{x^2}$

- $x \geq 4,3$ donne $\dfrac{1}{x^2} \leq \dfrac{1}{(4,3)^2}$

$x \leq 4,4$ donne $\dfrac{8,84}{x} \leq \dfrac{8,84}{4;4}$

et donc $\dfrac{1}{\sqrt{17,2 + \frac{8,84}{x}}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{17,2 + \frac{8,84}{4,4}}}$

On a donc pour tout $x \in [4,3 , 4,4]$ $\quad |\varphi'(x)| \leq 6\cdot 10^{-2}$
et avec $k = 6.10^{-2}$ l'inégalité des accroissements finis donne pour tout couple (x,y) de points de $[4,3 , 4,4]$

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq k\,|x - y|$$

Appliquons cette inégalité avec le couple (u_n, α)

il vient $\quad |u_{n+1} - \alpha| \leq k\,|u_n - \alpha|$

$\varphi(u_n) = u_{n+1}$, $\varphi(\alpha) = \alpha$

c) On déduit du b) que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$|u_n - \alpha| \leq k^n\,|4,3 - \alpha| \leq \frac{k^n}{10}$$

et donc $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} u_n = \alpha$

$|4,3 - \alpha| \leq \dfrac{1}{10}$

$0 < k < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} k^n = 0$

d) φ étant strictement décroissante

$u_0 < \alpha \quad$ donne $\quad u_1 > \alpha$

$u_1 > \alpha \quad$ donne $\quad u_2 < \alpha$

etc...

$\varphi(u_0) > \varphi(\alpha)$

On obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\quad u_{2n} < \alpha \quad$ et $\quad u_{2n+1} > \alpha$

Calculons les premiers termes de la suite

$u_0 = 4,3$
$u_1 = 4,38814$
$u_2 = 4,38344$
$u_3 = 4,38368$
$u_4 = 4,38367$

On peut faire un raisonnement par recurrence jusqu'à un rang n tel que $|u_n \cdot u_{n+1}| < 10^{-4}$

La calculatrice travaille à $5\cdot 10^{-12}$, les erreurs de calculs sont donc considérées comme négligeables.

$u_4 < \alpha < u_2$ permet d'écrire

$$4,3836 < \alpha < 4,3837$$

409

1) Etudier les variations de la fonction $f : x \mapsto 1 - x - \sin x$.
En déduire l'équation

$$(E) \quad 1 - x - \sin x = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

admet une racine r et une seule avec $0 < r < 1$
On se propose de calculer r à 10^{-3} près par défaut.

2) Soit $k \in \mathbb{R}_+^*$, vérifier que l'équation (E) s'écrit

$$x = \varphi(x) \quad \text{avec} \quad \varphi(x) = (1-k)x + k(1 - \sin x)$$

a) Calculer $\varphi'(x)$ et $\varphi''(x)$ et dresser le tableau de variation de φ' sur $[0,1]$

b) Soit m le minimum et M le maximum de φ' sur $[0,1]$, quelle valeur faut-il donner à k pour que l'on ait $m \geq 0$ et M le plus petit possible ? Cette valeur est attribuée à k pour toute la suite. Montrer alors que pour tout couple (x,y) de points de $[0,1]$ on a

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \frac{|x-y|}{4}$$

En déduire que pour tout x de $[0,1]$

$$|\varphi(x) - r| \leq \frac{|x-r|}{4}$$

c) On considère la suite récurrente $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 0 \qquad u_{n+1} = \varphi(u_n) \qquad n \in \mathbb{N}$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n \in [0,1]$

En déduire que $u_n < r$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

que (u_n) est croissante

que $0 < r - u_n < \frac{1}{4^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = r$

Pour quelles valeurs de n a-t-on $|u_n - r| < 5 \cdot 10^{-4}$?

d) Déterminer une valeur approchée de r à 10^{-3} près par défaut.

SOLUTION

1) f est dérivable sur $\mathbb{R}$, $f'(x) = -1 - \cos x$

Il en résulte que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

Or $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

donc f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et il existe r unique tel que $f(r) = 0$.

De $f(0) = 1 > 0$ et $f(1) = -\sin 1 < 0$ on déduit

$$0 < r < 1$$

Pour tout x, $|\cos x| \leq 1$

donc $f'(x) \leq 0$

f' s'annulant au point $(2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Utiliser $f(x) \geq -x$

et $f(x) \leq 2 - x$

$r = f^{-1}(0)$

x	$-\infty$	0	r	1	$+\infty$
f(x)	$+\infty$ ↘	1 ↘	0 ↘	$-\sin 1$ ↘	$-\infty$

2) L'équation $\varphi(x) = x$ équivaut à

$$-kx + k(1 - \sin x) = 0$$

donc à

$$1 - x - \sin x = 0$$

car $k \neq 0$ par hypothèse

a) $\varphi'(x) = 1 - k - k\cos x$

$\varphi''(x) = k \sin x$

$k > 0$ donc $\varphi''(x) \geq 0$ sur $[0,1]$

x	0	1
$\varphi''(x)$	0 +	
$\varphi'(x)$	$1-2k$ ↗	$1-k-k\cos 1$

b) $m = 1 - 2k \qquad M = 1 - k\,(1 + \cos 1)$

• $m \geq 0$ équivaut à $k \leq \frac{1}{2}$

• alors la fonction $k \mapsto 1 - k\,(1 + \cos 1)$ étant décroissante M est le plus petit possible si et seulement si k est le plus grand possible, c'est-à-dire $k = \frac{1}{2}$

- l'inégalité des accroissements finis appliquée à φ sur $[x,y] \subset [0,1]$ donne

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \frac{|x - y|}{4}$$

en effet on alors pour tout $t \in [0,1]$
$|\varphi'(t)| \leq M = \frac{1-\cos 1}{2}$
i.e $|\varphi'(t)| \leq 0{,}23 < \frac{1}{4}$

Pour $y = r$ $\varphi(r) = r$ donc l'inégalité ci-dessus donne : pour tout $x \in [0,1]$

$$|\varphi(x) - r| \leq \frac{|x - r|}{4}$$

c) $u_0 = 0 \qquad u_{n+1} = \dfrac{1 + u_n - \sin u_n}{2}$

• φ est strictement croissante sur $[0,1]$,
donc $x \in [0,1]$ donne $\varphi(x) \in [\varphi(0), \varphi(1)]$,

de par le choix de $k = \frac{1}{2}$ qui a donné $\varphi'(x) > 0$ sur $]0,1]$

Or $\varphi(0) = 0{,}5$ et $\varphi(1) = 0{,}58$ à 5.10^{-3} près, donc
$\varphi(x) \in [0,1]$.

l'intervalle $I = [0,1]$ est stable par φ.

Ainsi partant de $u_0 \in [0,1]$ on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$
$u_n \in [0,1]$

• $u_n < r$ donne $\varphi(u_n) < \varphi(r)$ i.e. $u_{n+1} < r$
Donc partant de $u_0 < r$ on obtient $u_1 < r$ $u_2 < r$ etc...
pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n < r$

on peut faire une démonstration par récurrence

• $u_n < u_{n+1}$ donne $\varphi(u_n) < \varphi(u_{n+1})$
i.e $u_{n+1} < u_{n+2}$
Donc partant de $u_0 < u_1$ on obtient successivement $u_1 < u_2$, $u_2 < u_3$ etc... pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n < u_{n+1}$

$u_0 = 0$, $u_1 = 0{,}5$

• L'inégalité du b) donne

pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\quad |u_{n+1} - r| \leq \frac{1}{4}\,|u_n - r|$

$u_{n+1} = \varphi(u_n)$

donc $\quad |u_n - r| \leq \frac{1}{4^n}\,|u_0 - r|$

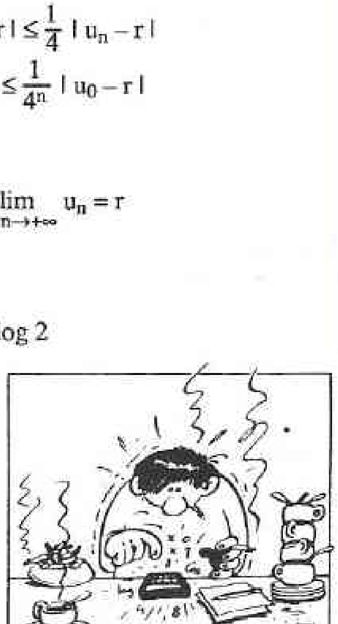
c'est-à-dire $0 < r - u_n < \frac{r}{4^n} < \frac{1}{4^n}$

$|u_n - r| = r - u_n$ et $u_0 = 0$

• De $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{4^n} = 0$ il résulte donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = r$

• La condition $\frac{1}{4^n} < \frac{5}{10^4}$
équivaut à $4^n > 2 \cdot 10^3$
ou encore à $n \log 4 > 3 + \log 2$

log décimaux



i.e. $n > \frac{1}{2} + \frac{3}{2 \log 2}$

ou $n \geq 6$

Ainsi pour réaliser

$| u_n - r | < 5 \cdot 10^{-4}$

il suffit de prendre $n \geq 6$

$\frac{1}{2} + \frac{3}{2 \log 2} = 5{,}48$ à $5 \cdot 10^{-3}$ près

d) D'après le c), u_6 est une valeur approchée par défaut de r à moins de 5.10^{-4} près.
Calculons donc les u_n $0 \leq n \leq 6$

$u_0 = 1$
$u_1 = 0{,}5$
$u_2 = 0{,}510287$
$u_3 = 0{,}510930$
$u_4 = 0{,}510971$
$u_5 = 0{,}510973$
$u_6 = 0{,}510973$

La condition n'est a priori que suffisante, car on a $0 < r - u_n < \frac{1}{4^n}$

donc $\frac{1}{4^n} < 5 \cdot 10^{-4}$ est une condition suffisante pour que $| u_n - r | < 5 \cdot 10^{-4}$

- les résultats sont arrondis à 6 décimales
- les calculs sont effectués au maximum des possibilités de la calculatrice, c'est-à-dire à $5 \cdot 10^{-12}$ près dans le cas présent

Remarque : quelles que soient les possibilités de la machine à calculer, à partir de u_2 les calculs sont entachés d'erreurs qui se cumulent car l'erreur sur u_2 induit une erreur sur u_3 etc...
$u_6^* = 0{,}510973$ n'est donc en fait qu'une valeur approchée de u_6.
Si on donne u_6^* comme valeur approchée de r, l'erreur commise est majorée par $E_c + E_m$

avec $E_c = | u_6 - u_6^* |$ (erreur de calcul)

et $E_m = | r - u_6 | < 5.10^{-4}$

E_c n'est pas évaluée mais il est assez évident que sur les moyens de calculs dont on dispose, E_c va être négligeable devant E_m, et de toute façon en ayant pris la précaution de limiter E_m à $5 \cdot 10^{-4}$ on aura sûrement $E_c + E_m < 10^{-3}$.

Cela mérite réflexion !

Montrons maintenant que 0,510 est une valeur approchée de r à moins de 10^{-3} près par défaut.
Il suffit pour cela de vérifier que

$f(0{,}510) > 0$ et $f(0{,}511) < 0$

et en effet $f(0{,}510) = 0{,}00182$ à $5 \cdot 10^{-6}$ près

$f(0{,}511) = -0{,}00005$ à $5 \cdot 10^{-6}$ près

Conclusion $0{,}510 < r < 0{,}511$

On évite ainsi l'évaluation de E_c

EXERCICES PROPOSES

01

1° Montrer que :

$$\cos^6 x + \sin^6 x = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x$$

2° Calculer :

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos^6 x + \sin^6 x)\, dx$$

02

1° Linéariser l'expression :

$$f(x) = \cos^2 x \sin 3x$$

2° Calculer :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\, dx$$

03

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$f(x) = \frac{x-2}{(2x-3)^2}$$

1° Montrer qu'il existe deux réels A et B tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}, \quad f(x) = \frac{A}{(2x-3)^2} + \frac{B}{2x-3}$$

2° Calculer :

$$\int_0^1 \frac{x-2}{(2x-3)^2}\, dx$$

04

On pose :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + 2\sin x}\, dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1 + 2\sin x}\, dx$$

Soit : $K = I + J$.

1° Calculer K.

2° Calculer I.

3° En déduire J.

05

1° Montrer que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-2t} \cos^2 t\, dt = \frac{1}{4}$$

(On pourra utiliser successivement deux intégrations par parties).

2° Utiliser la question précédente pour calculer les réels :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-2t} \cos^2 t \, dt \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-2t} \sin^2 t \, dt$$

(On pourra calculer I + J et I - J).

3° Donner des valeurs numériques de I et J en précisant le moyen de calcul utilisé et l'approximation obtenue.

06

Pour tout entier naturel n on pose :

$$I_n = \int_0^1 x^4 \sqrt{1-x} \, dx$$

1° Calculer I_0.

2° Calculer I_1 en procédant à une intégration par parties.

3° Montrer que pour tout entier naturel non nul n on a :

$$(3+2n)\, I_n = 2n\, I_{n-1}$$

07

Soit f l'application de $[0,\pi]$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = e^{-x} \sin x$$

1° Etudier cette fonction.

(On désignera par (γ) la courbe représentative de f, qu'on tracera dans un repère orthonormé $\mathcal{R}$).

2° Montrer que (γ) est tangente à la courbe représentative de l'application g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$g(x) = e^{-x}$$

(On précisera le point de contact).

3° Calculer l'aire de l'ensemble des points M de coordonnées x et y par rapport à $\mathcal{R}$, tels que :

$$\begin{cases} 0 \le x \le \pi \\ 0 \le y \le f(x) \end{cases}$$

08

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = x\,(1 - \ln |x|)$$

1° Etudier ses variations.

2° Construire sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé.

3° Calculer l'aire de la partie de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} 1 \le x \le e \\ 0 \le y \le f(x) \end{cases}$$

09

On considère l'application F de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$F(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} \, dt$$

(On n'essaiera pas de "calculer l'intégrale").

1° Etudier le sens des variations de F.

2° Soit f la fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$f(x) = F(x) - \ln x$$

Etudier le signe de f.
En déduire :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} F(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} F(x)$$

3° Soit (C) la courbe représentative de F dans un plan muni d'un repère orthonormé.

On admet que $e^t > t\, e^{\frac{t}{2}}$ pour tout nombre réel t.
Etudier la branche infinie de (C) lorsque x tend vers $+\infty$.

4° Tracer (C).

10

Soit la suite numérique $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$I_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1 - x)^n e^x \, dx.$$

1° Calculer I_1.

2° Par une intégration par parties, exprimer I_n en fonction de I_{n-1} pour $n \geq 2$.
En déduire que :

$$I_n = e - \sum_{p=0}^{p=n} \frac{1}{p!} \qquad \text{pour } n \geq 1.$$

3° Majorer la fonction $x \mapsto (1-x)^n e^x$ sur l'intervalle [0,1]. En déduire la limite de la suite (I_n) et montrer que :

$$e = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}\right)$$

11

A) 1° m est un nombre réel donné. Déterminer le nombre de solutions de l'équation :

$$E_{(m)} \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ e^x (2 - x) = m \end{cases}$$

2° On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = \dfrac{x^2}{e^x - 1} \quad \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

a) Montrer que f est dérivable. On étudiera soigneusement la dérivabilité de f en 0, où on précisera le nombre dérivé.

b) quelle est la fonction dérivée de f ? Montrer qu'il existe un unique réel a tel que f'(a) = 0. Montrer que f (a) = a (2-a). Montrer que :
$a \in \,]1{,}59 \,;\, 1{,}6[$.

c) Etudier les variations de f. Construire la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé (unité : 2 cm).

3° On pose, pour tout réel positif x

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt \qquad \text{et} \qquad G(x) = \int_0^x t^2 e^{-t}\,dt$$

a) Est-ce légitime ?
On a ainsi défini deux applications de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$, notées F et G.

b) Calculer G(x). Montrer que G admet une limite en $+\infty$ et calculer cette limite.
On ne cherchera en aucune manière à calculer F(x).

c) Prouver qu'il existe un réel h tel que :

$$(\forall t)\ \ (t \in [h, +\infty[\Rightarrow f(t) \leq 2t^2 e^{-t}).$$

d) En déduire que F est une fonction bornée.

e) Montrer que F est une fonction croissante.

- On admet que les résultats des questions 3d et 3e permettent de conclure que F admet une limite en $+\infty$. Cette limite est notée L. Le but de la partie B est d'obtenir, son existence étant admise, une valeur approchée de L. -

B) 1° a) Montrer que pour tout entier naturel non nul k et pour tout réel non nul x on a :

$$\frac{1}{e^x - 1} = e^{-x} + e^{-2x} + \ldots + e^{-(k-1)x} + e^{-kx} + \frac{e^{-kx}}{e^x - 1}$$

b) Montrer que pour tout entier naturel non nul k et pour tout réel positif x on a :

$$0 \leq \int_0^x f(t)\,e^{-kt}\,dt \leq \frac{a\,(2-a)}{k}$$

c) En intégrant par parties, calculer, k étant un entier naturel non nul et x un réel positif donnés, l'intégrale :

$$I_k(x) = \int_0^x t^2 e^{-kt}\,dt. \qquad \text{dont on justifiera l'existence.}$$

d) Montrer que la fonction I_k définie ci-dessus admet une limite en $+\infty$. Calculer cette limite.

2° a) Montrer que pour tout réel positif x on a :

$$\int_0^x f(t)\,e^{-kt}\,dt = F(x) - \sum_{p=1}^{p=k} I_p(x)$$

En déduire que la fonction qui, à tout réel positif x, associe l'intégrale :

$$\int_0^x f(t)\,e^{-kt}\,dt$$

a une limite en $+\infty$. On notera ℓ_k cette limite.

b) Montrer que pour tout entier naturel non nul k on a :

$$L - \ell_k = 2\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{k^3}\right)$$

c) En utilisant la majoration obtenue en B) 1° b), montrer que la suite $(\ell_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

d) Montrer que la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de terme général

$u_k = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{k^3}$ est convergente et a pour limite le réel L' tel que L = 2L'

3° a) Trouver une condition portant sur l'entier naturel k, suffisante pour que $\ell_k \leq 0{,}1$.

En déduire $2{,}3 \leq L \leq 2{,}5$.

12

A) 1° En étudiant le sens de variation de la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que

$$t \mapsto t - \ln t - 1$$

montrer que, pour tout réel t strictement positif, on a :

$$\ln t \leq t - 1$$

2° Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que :

$$f(x) = \frac{x}{x - \ln x}$$

a) Etudier le sens de la variation de f, les limites aux bornes de l'ensemble de définition.

b) Soit f_1 la fonction définie par $f_1(x) = f(x)$ si $x > 0$ et $f_1(0) = 0$.
Montrer que f_1 est le prolongement par continuité de f en zéro.
Construire la courbe représentative de f_1 dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité = 2 cm). On précisera la demi-tangente au point d'abscisse zéro ainsi que la tangente au point d'abscisse 1.

c) Dans cette question x est un réel fixé de l'intervalle $[1,+\infty]$.
Calculer, en justifiant son existence, la limite de la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 1 + \frac{\ln x}{x} + \frac{(\ln x)^2}{x^2} + \dots + \frac{(\ln x)^n}{x^n}$$

B) On se propose d'étudier la fonction F définie sur $\mathbb{R}_+^* =]0,+\infty[$ par

$$F(x) = \int_1^x \frac{t}{t - \ln t}\, dt$$

1° Justifier l'existence de la dérivabilité de F sur $\mathbb{R}_+^*$.
Etudier le sens de variation de F. (On n'étudiera pas les limites de F).

2° Déterminer le signe de F(x) suivant les valeurs de x. Quelle signification géométrique peut-on donner du réel F(x) ?

3° Etude de la limite de F en zéro.
Démontrer que pour x appartenant à]0, 1] on a :

$$\frac{x}{x - \ln x} \leq x$$

En déduire que, pour x appartenant à]0, 1] on a :

$$\frac{x^2 - 1}{2} \leq F(x) \leq 0$$

En déduire que F(x) admet une limite λ comprise entre $-\frac{1}{2}$ et 0 quand x tend vers 0. (On ne cherchera pas à calculer λ).

4° Etude de $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$
Montrer que, pour tout x de $[1, +\infty[$, $f(x) \geq 1$.
En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$

5° On se propose d'encadrer la fonction F par deux fonctions, lorsque x est supérieur à 1.

a) Calculer, pour x appartenant à $\mathbb{R}_+^*$:

$$\int_1^x (1 + \ln t)\, dt.$$

Montrer que si t est supérieur à 1 alors

$$\frac{t}{t - \ell n\, t} \leq 1 + \ell n\, t$$

En déduire que, pour x supérieur à 1, on a

$$F(x) \leq x\, \ell n\, x$$

b) Calculer, pour x appartenant à $\mathbb{R}_+^*$:

$$\int_1^x \left(1 + \frac{\ell n\, t}{t}\right)$$

Montrer que, pour tout x supérieur à 1, on a :

$$x + \frac{1}{2}(\ell n\, x)^2 - 1 \leq F(x)$$

c) Ecrire l'encadrement de F(x) pour x supérieur à 1.

13

Pour tout entier naturel non nul n, soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = x^n e^{-x}.$$

On appelle (C_n) la courbe représentative de f_n dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$ (unité : 2 cm).

1° a) Calculer la dérivée de f_n et préciser la valeur de $f_n'(0)$ lorsque n = 1 puis lorsque $n \geq 2$. Dresser le tableau de variation de f_n pour n = 1, n pair, n impair supérieur à 1.

b) Montrer que, pour tout n et pour tout point x de $[0, +\infty[$:

$$f_n(x) \leq f_n(n) = n^n e^{-n}.$$

c) Représenter sur une figure C_1 et C_2.

2° Pour tout nombre réel $X \geq 0$, on pose :

$$F_n(X) = \int_0^X f_n(x)\, dx.$$

a) Déterminer des nombres réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tels que la fonction

$$G_n : x \to e^{-x}(a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0)$$

soit une primitive de la fonction f_n sur $[0,+\infty[$.

b) En déduire l'expression de $F_n(X)$ en fonction de X et de n.

c) L'entier n étant donné, montrer que $F_n(X)$ admet une limite I_n lorsque X tend vers $+\infty$ et que $I_n = n!$

3° On se propose d'encadrer I_n par une méthode directe indépendante des résultats du 2°.

a) A l'aide du 1° b/ montrer que :

$$\int_0^{2n} x^n e^{-x}\, dx \leq 2n\, n^n e^{-n}.$$

b) Montrer que, si $x \geq 2n$,

$$\left(\frac{x}{2}\right)^n e^{-\frac{x}{2}} \leq n^n e^{-n} \qquad \text{et que} \qquad f_n(x) \leq (2n)^n e^{-n} e^{-\frac{x}{2}}$$

En déduire que, si $X \geq 2n$

$$\int_{2n}^X x^n e^{-x}\, dx \leq 2\,(2n)^n e^{-2n}$$

c) A l'aide de a et b, majorer $F_n(X)$ lorsque $X \geq 2n$.
En déduire que :

$$I_n \leq 2n^n e^{-n}\left[n + \left(\frac{2}{e}\right)^n\right]$$

d) Montrer, d'autre part, que

$$(n+1)^n e^{-n-1} \leq \int_n^{n+1} x^n e^{-x}\, dx \leq I_n$$

4° Déduire du 3° c et d, un encadrement de

$$u_n = \frac{\ell n\, I_n - n\, \ell n\, n}{n}$$

et déterminer une limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

14

A) Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{x}{\cos^2 t}}\, dt$$

Montrer que $\forall x \geq 0$, $f(x) \leq e^{-x}$.
Quelle est la limite de f quand x tend vers $+\infty$?

B) 1° Montrer que, pour tout réel b strictement positif :

$$(\forall x \in \mathbb{R}),\quad \left[x \leq b \Rightarrow e^x - 1 - x \leq \frac{1}{2} e^b x^2\right]$$

$$\left[x \geq -b \Rightarrow e^x - 1 - x \geq \frac{1}{2} e^{-b} x^2\right]$$

2° Montrer que pour tout réel a, il existe une application φ_a, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue en a, telle que $\varphi_a(a) = 0$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) - f(a) = (x-a)\left[-\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{-\frac{a}{\cos^2 t}}}{\cos^2 t}\, dt + \varphi_a(x)\right]$$

En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Préciser la dérivée f' de f.

C) Soit P une primitive (sur $\mathbb{R}$) de l'application $u \rightarrow e^{-u^2}$.
A tout réel x, on associe l'application Q_x, de $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$, telle que :

$$\forall t \in I,\ Q_x(t) = P(x \tan t).$$

Montrer que Q_x est dérivable sur I ; expliciter sa fonction dérivée. Prouver que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \int_0^x e^{-u^2}\, du = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{-x^2 \tan^2 t}}{\cos^2 t}\, dt$$

D) Soit g l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = f(x^2)$$

Soit g' sa dérivée.
Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

Que peut-on dire de la fonction h telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = g(x) + \left(\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)^2$$

Quelle est la limite de $\int_0^x e^{-t^2}\,dt$ quand x tend vers $+\infty$?

CHAPITRE V

EQUATIONS DIFFERENTIELLES

I - Equations du premier ordre

Définition

d_1 Soient a et b deux réels, avec $a \neq 0$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application, *dérivable, de I dans* $\mathbb{R}$. On dit que f est *solution de l'équation différentielle* (E_1) : $ay' + by = 0$, *sur I,* si et seulement si :
$\forall x \in I, af'(x) + bf(x) = 0 \quad (E_1)$
On dit que (E_1) est une équation linéaire homogène du premier ordre, à coefficients constants.

Théorèmes

t_1 L'ensemble (S_1) des solutions de (E_1) : $ay'+by = 0$ sur $\mathbb{R}$ est celui des fonctions f_λ de la forme $f_\lambda : x \mapsto \lambda e^{-\frac{b}{a}x}$ avec λ constante réelle quelconque.

t_2 Pour tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, il existe une fonction f *et une seule,* solution de (E_1)

f est définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = y_0 e^{-\frac{b}{a}(x - x_0)}$

sur $\mathbb{R}$, telle que $f(x_0) = y_0$.

Cette solution est dite déterminée par la *condition initiale* $y_0 = f(x_0)$.

II - Equations du deuxième ordre

Définition

d_2 Soient a, b, c trois réels, avec $a \neq 0$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application *deux fois dérivable de I dans* $\mathbb{R}$. On dit que f est *solution de l'équation différentielle* (E_2) : $ay''+by'+cy = 0$, *sur I,* si et seulement si :
$\forall x \in I, af''(x) + bf'(x) + cf(x) = 0$
On dit que (E_2) est une équation linéaire homogène du deuxième ordre, à coefficients constants.

d_3 Etant donnée l'équation différentielle (E_2) : $ay''+by'+cy = 0$, on appelle *équation caractéristique* de (E_2) l'équation $(C) : ar^2 + br + c = 0$.

Théorèmes

t_3 Soit $r \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto e^{rx}$ est solution de (E_2) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si r est solution de l'équation caractéristique (C).

t_4 Soit (S_2) l'ensemble des solutions de (E_2) sur $\mathbb{R}$.

a) Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, (C) admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2.

(E_2) est alors décrit par les fonctions $f_{\lambda,\mu}$ de la forme $x \mapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$ avec λ et μ constantes réelles quelconques.

b) Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, (C) admet deux racines complexes conjuguées (non réelles) : $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$.
(E_2) est alors décrit par les fonctions $f_{\lambda,\mu}$ de la forme
$x \mapsto e^{\alpha x}(\lambda \cos \beta x + \mu \sin \beta x)$ avec λ et μ constantes réelles quelconques.
(E_2) est aussi décrit par les fonctions $g_{\rho,\varphi}$ de la forme
$x \mapsto \rho e^{\alpha x} \cos(\beta x - \varphi)$ avec ρ et φ constantes réelles quelconques.

c) Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, (C) admet une réelle double $r_1 = -\dfrac{b}{2a}$.

(E_2) est alors décrit par les fonctions $f_{\lambda,\mu}$ de la forme $x \mapsto e^{-\frac{b}{2a}x}(\lambda x + \mu)$

avec λ et μ constantes réelles quelconques.

t_5 Pour tout $(x_0, y_0, y_0') \in \mathbb{R}^3$, il existe *une fonction f et une seule* solution de (E_2) sur $\mathbb{R}$ telle que *$f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = y_0'$.*
Cette solution est dite déterminée par les conditions initiales $f(x_0) = y_0$, $f'(x_0) = y_0'$.

■ Dans le cas $b^2 - 4ac > 0$, f est de la forme $x \mapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$, λ et μ sont alors déterminés par le système :

$$\begin{cases} y_0 = \lambda e^{r_1 x_0} + \mu e^{r_2 x_0} \\ y_0' = \lambda r_1 e^{r_1 x_0} + \mu r_2 e^{r_1 x_0} \end{cases}$$

d'où on tire : $\lambda = \dfrac{r_2 y_0 - y_0'}{r_2 - r_1} e^{-r_1 x_0}$; $\mu = \dfrac{r_1 y_0 - y_0'}{r_1 - r_2} e^{-r_2 x_0}$.

■ dans le cas $b^2 - 4ac < 0$, f est de la forme $x \mapsto e^{\alpha x}(\lambda \cos \beta x + \mu \sin \beta x)$, λ et μ sont alors déterminés par le système :

$$\begin{cases} y_0 = e^{\alpha x_0}(\lambda \cos \beta x_0 + \mu \sin \beta x_0) \\ y_0' = e^{\alpha x_0}(\lambda(\alpha \cos \lambda x_0 - \beta \sin \beta x_0) + \mu(\alpha \sin \beta x_0 + \beta \cos \beta x_0)) \end{cases}$$

ce qui équivaut à :

$$\begin{cases} y_0 e^{-\alpha x_0} = \lambda \cos \beta x_0 + \mu \sin \beta x_0 \\ \dfrac{1}{\beta} y_0' e^{-\alpha x_0} = -\lambda \sin \beta x_0 + \mu \cos \beta x_0 \end{cases}$$

N. B. : On a alors $\beta \neq 0$

On en tire λ : $\lambda = e^{-\alpha x_0}(y_0 \cos \beta x_0 - \frac{y_0'}{\beta} \sin \beta x_0)$ et $\mu = e^{-\alpha x_0}(y_0 \sin \beta x_0 + \frac{y_0'}{\beta} \cos \beta x_0)$.

■ Dans le cas $b^2 - 4ac = 0$, f est de la forme $x \mapsto e^{-\frac{b}{2a}}(\lambda x + \mu)$, λ et μ sont alors déterminés par le système :

$$\begin{cases} y_0 = e^{-\frac{b}{2a}x_0}(\lambda x_0 + \mu) \\ y_0' = e^{-\frac{b}{2a}x_0}\left(-\frac{b}{2a}\lambda x_0 + \lambda - \mu \frac{b}{2a}\right) \end{cases}$$

On en tire : $\lambda = e^{\frac{b}{2a}x_0}\left(\frac{b}{2a}y_0 + y_0'\right)$; $\mu = e^{\frac{b}{2a}x_0}\left(y_0\left(1 - \frac{bx_0}{2a}\right) - x_0 y_0'\right)$

Exemples travaux pratiques

ex. 1 Déterminer la solution f, sur $\mathbb{R}$, de (E_2) $y'' - 3y' + 2y = 0$ telle que $f(0) = 2$, $f'(0) = 3$.

⇒

L'équation caractéristique est $r^2 - 3r + 2 = 0$, elle admet pour racines : $r_1 = 1$, $r_2 = 2$.

f est donc de la forme $x \mapsto \lambda e^{2x} + \mu e^x$.
Pour tout x réel, on a $f'(x) = 2\lambda e^{2x} + \mu e^x$.
d'où $\lambda = \mu = 1$.

λ et μ sont donc déterminés par $\begin{cases} 2 = \lambda + \mu \\ 3 = 2\lambda + \mu \end{cases}$

On en déduit $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{2x} + e^x$.

ex. 2 Déterminer la solution f, sur $\mathbb{R}$, de (E_2) $y'' - 2y' + 2y = 0$ telle que $f(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $f'(0) = \sqrt{2}$.

⇒

L'équation caractéristique est $r^2 - 2r + 2 = 0$, soit $(r - 1)^2 + 1 = 0$, elle admet pour racines $r_1 = 1 + i$ et $r_2 = 1 - i$.

f est de la forme $x \mapsto e^x(\lambda \cos x + \mu \sin x)$
Pour tout x réel, on a $f'(x) = e^x(\lambda(\cos x - \sin x) + \mu(\sin x + \cos x))$.

λ et μ sont donc déterminés par $\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} = \lambda \\ \sqrt{2} = \lambda + \mu \end{cases}$

d'où $\lambda = \mu = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

On en déduit $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^x\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right) = e^x \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

EXERCICES RESOLUS

501

Soit l'équation (E) : $y' - 2y = 2x^2 + 1$.

1) Montrer qu'il existe une fonction polynôme P unique solution de (E) sur $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $P'(x) - 2P(x) = 2x^2 + 1$).

2) Etant donnée f, application dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on pose $f = P + g$.
Montrer que f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si g est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E') : $y' - 2y = 0$.

3) Déterminer toutes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.
Montrer que (E) admet une solution et une seule sur $\mathbb{R}$, vérifiant la condition initiale $f(0) = 0$. Expliciter cette solution.

SOLUTION

1) Il n'y a pas de fonction constante solution de (E).

Si $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \lambda$, on a $f'(x) - 2f(x) = -2\lambda$, donc f n'est pas solution de (E).

Soit P, fonction polynôme non constante. Si P est de degré n, P' est de degré n-1, donc P' - 2P est de degré n.

En conséquence, si P est solution de (E) sur $\mathbb{R}$, on a nécessairement $n = 2$.

Car $P'(x) - 2P(x) = 2x^2 + 1$ et $2x^2 + 1$ est de degré 2.

Posons alors $P(x) = ax^2 + bx + c$.
La condition $\forall x \in \mathbb{R}$, $P'(x) - 2P(x) = 2x^2 + 1$ donne :
$\forall x \in \mathbb{R}$, $2ax + b - 2ax^2 - 2bx - 2c = 2x^2 + 1$

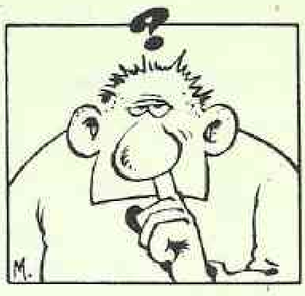
On procède par identification.

d'où :

$$\begin{cases} -2a = 2 \\ 2a - 2b = 0 \\ b - 2c = 1 \end{cases}$$

ce qui donne :

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \\ c = -1 \end{cases}$$



En conclusion, il existe une unique fonction polynôme solution de (E) sur $\mathbb{R}$, elle est définie par :

$P(x) = -x^2 - x - 1$

2) $f = P + g$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $P'(x) + g'(x) - 2P(x) - 2g(x) = 2x^2 + 1$

Puisque : $P'(x) - 2P(x) = 2x^2 + 1$.

soit :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) - 2g(x) = 0$

3) Les solutions de (E') sont de la forme $x \mapsto \lambda e^{2x}$.

Théorème t_1.

D'après le 2°, f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = P(x) + \lambda e^{2x}$

donc :

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lambda e^{2x} - x^2 - x - 1$

La condition $f(0) = 0$ équivaut alors à $\lambda = 1$, d'où l'existence et l'unicité de la solution de (E) vérifiant cette condition initiale. Cette solution est :

$f : x \mapsto e^{2x} - x^2 - x - 1$

502

1) Déterminer la solution f_0 de (E) : $y' + y = 0$, sur $\mathbb{R}$, vérifiant la condition initiale $f_0(0) = 1$.

2) On veut déterminer les solutions sur $]0,+\infty[$ de l'équation (E_1) : $y' + y = e^{-x} \ln x$ (c'est-à-dire les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivables sur $]0,+\infty[$ telles que $\forall x \in]0,+\infty[, f'(x) + f(x) = e^{-x} \ln x$).
a) Montrer que, quelle que soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivable sur $]0,+\infty[$, il existe g unique, dérivable sur $]0,+\infty[$ telle que $\forall x \in]0,+\infty[, f(x) = g(x) f_0(x)$
b) Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur g' pour que f soit solution de (E) sur $]0,+\infty[$. En déduire toutes les solutions de (E_1) sur $]0,+\infty[$.
c) Monter qu'il existe une solution de (E_1) sur $]0,+\infty[$ et une seule, f, telle que $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$. Expliciter cette solution.

SOLUTION

1) Les solutions de (E) sont de la forme $x \mapsto \lambda e^{-x}$.
La condition $f(0) = 1$ donne $\lambda = 1$, donc

Voir théorème t_1.

$\forall x \in \mathbb{R}, f_0(x) = e^{-x}$.

2) a) La condition $\forall x \in]0,+\infty[, f(x) = g(x) f_0(x)$ équivaut évidemment à : $\forall x \in]0,+\infty[, g(x) = e^{x} f(x)$.
La fonction g ainsi définie est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que produit de deux fonctions dérivables.

b) on a alors $\forall x \in]0,+\infty[, f'(x) = e^{-x} g'(x) - e^{-x} g(x)$ et f est solution de (E_1) sur $]0,+\infty[$ si et seulement si :

$\forall x \in]0,+\infty[, e^{-x} g'(x) - e^{-x} g(x) + e^{-x} g(x) = e^{-x} \ln x$

$f'(x) + f(x) = e^{-x} \ln x$.

c'est à dire :
$\forall x \in]0,+\infty[, e^{-x} g'(x) = e^{-x} \ln x$
ou encore
$\forall x \in]0,+\infty[, g'(x) = \ln x$

La condition précédente équivaut à :

$\forall x \in]0,+\infty[, g(x) = x \ln x - x + \lambda$

λ, constante réelle, voir primitives de $x \mapsto \ln x$.

En conséquence, les solutions de (E_1) sur $]0,+\infty[$ sont les fonctions f_λ de la forme :

$f_\lambda : x \mapsto \lambda e^{-x} + xe^{-x}(-1 + \ln x)$

c) On a $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = 0$, donc $\lim\limits_{x \to 0^+} f_\lambda(x) = \lambda$, la condition $\lim\limits_{x \to 0^+} f_\lambda(x) = 0$ équivaut donc à $\lambda = 0$ et l'unique solution de (E_1) sur $]0,+\infty[$ vérifiant cette condition est la fonction :

$x \mapsto xe^{-x}(-1 + \ln x)$

503

1) Déterminer a et b réels de façon que la fonction $f_0 : x \mapsto ax \cos 2x + bx \sin 2x$ soit solution sur $\mathbb{R}$, de l'équation (E) : $y'' + 4y = \cos 2x + \sin 2x$.

2) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$; on pose $f = g + f_0$.
Quelle est une condition nécessaire et suffisante portant sur g, pour que f soit solution de (E) sur $\mathbb{R}$?
En déduire toutes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

3) Déterminer la solution de (E) sur $\mathbb{R}$ vérifiant les conditions initiales :

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{8} ; f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

SOLUTION

1) f_0 est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a :

$\forall x \in \mathbb{R}, f_0'(x) = (2bx + a) \cos 2x + (-2ax + b) \sin 2x$
$\forall x \in \mathbb{R}, f_0''(x) = (-4ax + 4b) \cos 2x + (-4bx - 4a) \sin 2x$

donc :

$\forall x \in \mathbb{R}, f_0''(x) + 4f_0(x) = 4b \cos 2x - 4a \sin 2x$

La condition $\forall x \in \mathbb{R}, f_0''(x) + 4f_0(x) = \cos 2x + \sin 2x$ implique

$4b = 1$, soit $b = \dfrac{1}{4}$

$-4a = 1$, soit $a = -\dfrac{1}{4}$

En substituant à x la valeur 0.
En substituant à x la valeur $\dfrac{\pi}{4}$

Réciproquement, f_0 définie par $f_0(x) = -\dfrac{x}{4} \cos 2x + \dfrac{x}{4} \sin 2x$

est bien solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

(E) admet une solution et une seule de la forme indiquée.

2) $f = g + f_0$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g''(x) + f_0''(x) + 4g(x) + 4f_0(x) = \cos 2x + \sin 2x$$

soit

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g''(x) + 4g(x) = 0$$

Les solutions de (E') : $y'' + 4y = 0$, sur $\mathbb{R}$, sont les fonctions de la forme :

L'équation caractéristique de (E') est $r^2 + 4 = 0$, de racines $2i$ et $-2i$ et on applique t_4 b).

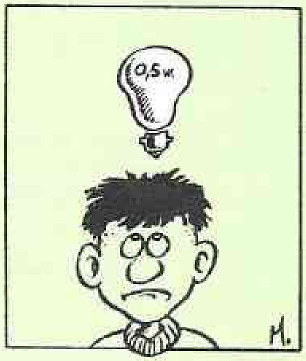
$$x \mapsto \lambda \cos 2x + \mu \sin 2x$$

Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont donc les fonctions :

$$f : x \mapsto \left(\lambda - \frac{x}{4}\right)\cos 2x + \left(\mu + \frac{x}{4}\right)\sin 2x \qquad (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2.$$

$f = f_0 + g.$

3) La condition $f\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\pi}{8}$ donne : $-\left(\lambda - \frac{\pi}{8}\right) = \frac{\pi}{8}$, d'où $\lambda = 0$.



On a $f'(x) = \left(\frac{x}{2} + 2\mu - \frac{1}{4}\right)\cos 2x + \left(\frac{x}{2} - 2\lambda + \frac{1}{4}\right)\sin 2x$, donc la condition $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4}$ donne :

$$-\left(\frac{\pi}{4} + 2\mu - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4},\ \text{d'où } \mu = -\frac{\pi}{8}$$

la solution demandée est :

$$x \mapsto -\frac{x}{4}\cos 2x + \left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{8}\right)\sin 2x$$

504

1) Soit f une fonction dont la dérivée première f' et la dérivée seconde f'' vérifient l'équation différentielle au premier ordre en f' : $f'' + 2f' = 0$
Donner l'expression générale de f(x)

2) Parmi ces fonctions f, déterminer la fonction f_1 vérifiant les conditions

$$f_1(0) = -\frac{1}{2} \text{ et } f_1(-0{,}5) = \frac{1-2e}{2}$$

SOLUTION

1) La condition $f' + 2f' = 0$ donne

cf théorème t_1, résolution de $y' + 2y = 0$

$$\forall x \in \mathbb{R}\ f'(x) = \lambda e^{-2x}$$

On en déduit $f(x) = \mu - \frac{\lambda}{2} e^{-2x}$

La solution générale de l'équation proposée est donc de la forme

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto a + be^{-2x} \qquad (a,b) \in \mathbb{R}^2$$

2°) Les conditions $f_1(0) = -\frac{1}{2}$ et $f_1(-0,5) = \frac{1-2e}{2}$

avec $f_1(x) = a + be^{-2x}$, donnent

$$a + b = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad a + be = \frac{1}{2} - e$$

d'où on tire $a = \frac{1}{2}$ $b = -1$

et donc $f_1(x) = \frac{1}{2} - e^{-2x}$

505

Déterminer les fonctions numériques f $(f : x \mapsto y = f(x))$ solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + 4y = 0$ et vérifiant $f(0) = 1$ $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$

SOLUTION

L'équation caractéristique est $r^2 + 4 = 0$, ses racines sont $r_1 = 2i$ et $r_2 = -2i$

La solution générale de l'équation $f'' + 4y = 0$ est donc définie par $f(x) = a\cos 2x + b\sin 2x$

Les conditions $f(0) = 1$ $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$ s'écrivent alors

$$a = 1 \qquad b = \sqrt{3}$$

donc $f(x) = \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x$

506

On appelle E l'ensemble des fonctions numériques f admettant des dérivées f', f'' et f''' continues sur $\mathbb{R}$ et vérifiant l'équation différentielle

$$(x-1)\,y'' - xy' + y = 0$$

1) Démontrer que si f appartient à E alors

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \quad f'''(x) = f''(x)$$

en déduire que si f est élément de E alors f''' = f'', puis que f'' est solution d'une équation différentielle de la forme

$$y' - my = 0 \qquad (m \in \mathbb{R})$$

2) A l'aide de deux intégrations, montrer que les éléments de E sont de la forme

$$f(x) = ax + be^x \qquad (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

SOLUTION

1) Si f appartient à E on a

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (x-1)\,f''(x) - x\,f'(x) + f(x) = 0$$

d'où en dérivant

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (x-1)\,f'''(x) + f''(x) - x\,f''(x) - f'(x) + f'(x) = 0$$

c'est-à-dire

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (x-1)\,(f'''(x) - f''(x)) = 0$$

On en déduit pour tout $x \neq 1$

$$f'''(x) - f''(x) = 0.$$

• f''' et f'' sont par hypothèse continues sur $\mathbb{R}$, donc continues en 1 et

$$f'''(1) - f''(1) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x \neq 1}} (f'''(x) - f''(x)) = 0$$

car $f'''(x) - f''(x) = 0$ pour $x \neq 1$

finalement on a

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'''(x) = f''(x) \qquad \text{i.e} \quad f''' = f''$$

f'' est donc solution de l'équation $y' - y = 0$

2) Il résulte du 1) qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f''(x) = be^x$$

théorème t_1

On en déduit

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = be^x + a \qquad a \in \mathbb{R}$$

puis $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = be^x + ax + c \qquad c \in \mathbb{R}$

• Ainsi E est inclus dans l'ensemble des fonctions de la forme

$$x \mapsto be^x + ax + c$$

Réciproquement, soit $f : x \mapsto be^x + a + c$, f est élément de E si et seulement si

la condition f''' = f'' est nécessaire pour que f soit solution de l'équation $(x-1)\,y'' - xy' + y = 0$ elle n'est pas suffisante

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (x-1)\,be^x - x\,(be^x + a) + be^x + ax + c = 0$$

i.e $\quad c = 0$

Donc E est l'ensemble des fonctions de la forme

$$x \mapsto ax + be^x \qquad (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

507

Soit (a, b) un couple de réels fixé, on se propose de déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x) + \int_0^x (x-t)\,f(t)\,dt = ax + b$$

(E)

1) Montrer que si f est solution du problème, f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et est solution

d'une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants (E_1)

2) Résoudre (E_1) et en déduire les solutions du problème

SOLUTION

1) • Soit f continue vérifiant (E), alors on a pour tout x réel

$$f(x) = ax + b - x\int_0^x f(t)\,dt + \int_0^x t\,f(t)\,dt \qquad (1)$$

$x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $x \mapsto f(x)$ — car f est continue sur $\mathbb{R}$

$x \mapsto \int_0^x t\,f(t)\,dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $x \mapsto x\,f(x)$ — car $t \mapsto t\,f(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$

ainsi d'après (1) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec — comme somme de fonctions dérivables

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = a - \int_0^x f(t)\,dt - x\,f(x) + x\,f(x)$$

$$f'(x) = a - \int_0^x f(t)\,dt \qquad (2)$$

• La relation (2) montre que f' est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc que f est deux fois dérivable, avec — car $x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f''(x) = -f(x) \qquad (3)$$

• D'après (3), f est solution de l'équation

$$y'' + y = 0 \qquad (E_1)$$

2) La solution générale de (E_1) est définie par — l'équation caractéristique est $x^2 + 1 = 0$, de racines i et $-i$

$$y = \lambda \cos x + \mu \sin x$$

Remarquons que si f est solution du problème on a

$f(0) = b$ d'après (1)

et $f'(0) = a$ d'après (2)

on en déduit que ce problème a au plus une solution, à savoir la fonction

$$f : x \mapsto b\cos x + a \sin x$$

$y = \lambda \cos x + \mu \sin x$ donne $y(0) = \lambda$ et $y'(0) = \mu$

On a alors

$$\int_0^x t\cos t\,dt = [t\sin t]_0^x - \int_0^x \sin t\,dt$$
$$= x\sin x + [\cos t]_0^x$$
$$= x\sin x + \cos x - 1$$

$$\int_0^x t\sin t\,dt = [-t\cos t]_0^x + \int_0^x \cos t\,dt$$
$$= -x\cos x + [\sin t]_0^x$$
$$= -x\cos x + \sin x$$

donc avec $f(x) = a \sin x + b \cos x$, on obtient

$$f(x) + \int_0^x (x - t)\, f(t)\, dt$$

$$= a \sin x + b \cos x + ax \int_0^x \sin t\, dt + bx \int_0^x \cos t\, dt$$

$$- a \int_0^x t \sin t\, dt - b \int_0^x t \cos t\, dt$$

$$= ax + b.$$

Conclusion, il existe une fonction continue $\mathbb{R}$ et une seule vérifiant (E), il s'agit de

$$f : x \mapsto a \sin x + b \cos x$$

EXERCICES PROPOSES

01

Déterminer la solution f de l'équation différentielle

$$y'' - 2y' + 2y = 0$$

telle que $f(0) = 1 \quad f'(0) = 0$

02

On considère l'équation différentielle

$$(1) \quad y'' - y' - 6y = -6x - 1$$

1° Déterminer a et b réels tels que la fonction polynôme g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = ax + b$ soit solution de l'équation (1).

2° a) Montrer que f, fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, est solution de (1) si et seulement si $f - g$ est solution de l'équation différentielle

$$y'' - y' - 6y = 0.$$

b) Résoudre l'équation différentielle

$$y'' - y' - 6y = 0.$$

c) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (1).

d) Trouver la solution de l'équation (1) vérifiant $f(1) = 2$ et $f'(1) = 4$.

03

On se propose de déterminer toutes les fonctions définies et dérivables deux fois sur $\mathbb{R}_+^*$, solutions de l'équation différentielle

$$(E) : y' + 3y' + 2y = \frac{x-1}{x^2}\, e^{-x}.$$

1° Vérifier que la fonction f définie par :

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad f(x) = e^{-x} \ell n\, x$, est solution de cette équation.

2° Résoudre l'équation différentielle

$$(E') : y' + 3y' + 2y = 0.$$

3° Soit g une fonction dérivable deux fois sur $\mathbb{R}_+^*$.
Montrer que g est solution de (E) si, et seulement si $g - f$ est solution de (E').

4° En déduire toutes les solutions de l'équation (E).

04

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe

$$f(x) = (1 + x)\, e^{-2x}$$

On se propose d'utiliser une équation différentielle satisfaite par f pour donner une méthode de calcul des dérivées successives de f.

1° Quels doivent être les coefficients a et b pour que la fonction f vérifie l'équation différentielle du second ordre :

$$(1)\ y'' + ay' + by = 0\ ?$$

Démontrer qu'alors, toutes les dérivées de f vérifient (1).
Calculer l'ensemble des primitives de f, et chercher si une de ces primitives vérifie l'équation (1).

2° On pose f(0) = f et, pour n entier naturel non nul, on note $f^{(n)}$ la dérivée $n^{\text{ième}}$ de f. La fonction f est une solution de l'équation différentielle :

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

Démontrer par récurrence l'existence de deux suites (c_n) et (d_n) qui vérifient pour tout n entier naturel :

$$\begin{cases} f^{(n)} = c_n f' + d_n f \\ c_{n+1} = -4c_n + d_n \\ d_{n+1} = -4c_n \end{cases}$$

3° On définit deux suites (γ_n) et (δ_n) $(n \geq 0)$ par les formules :

$$c_n = (-2)^n \gamma_n \,;\ d_n = (-2)^n \delta_n.$$

Montrer que la suite de terme général $\delta_n - 2\gamma_n$ admet une valeur constante que l'on déterminera.
En déduire que la suite (γ_n) est une suite arithmétique que l'on explicitera.
Calculer $f^{(n)}(x)$ en fonction de n et de x.

Imprimerie TARDY QUERCY S.A. - Bourges
N° d'imprimeur : 14761

PLUS DE 20 TITRES DE LA SECONDE À LA TERMINALE POUR PRÉPARER LE BAC !

POUR TOUTE DOCUMENTATION, S'ADRESSER À :
"LES CAHIERS DU BAC" ABC ÉDITIONS
310-320 BOULEVARD DE LA BOISSIÈRE
93100 MONTREUIL

Réf : 708.1002 Dépôt à Paris : Librairie des Prépas, 34 rue Serpente 75006 - PARIS 2 86769.101 0