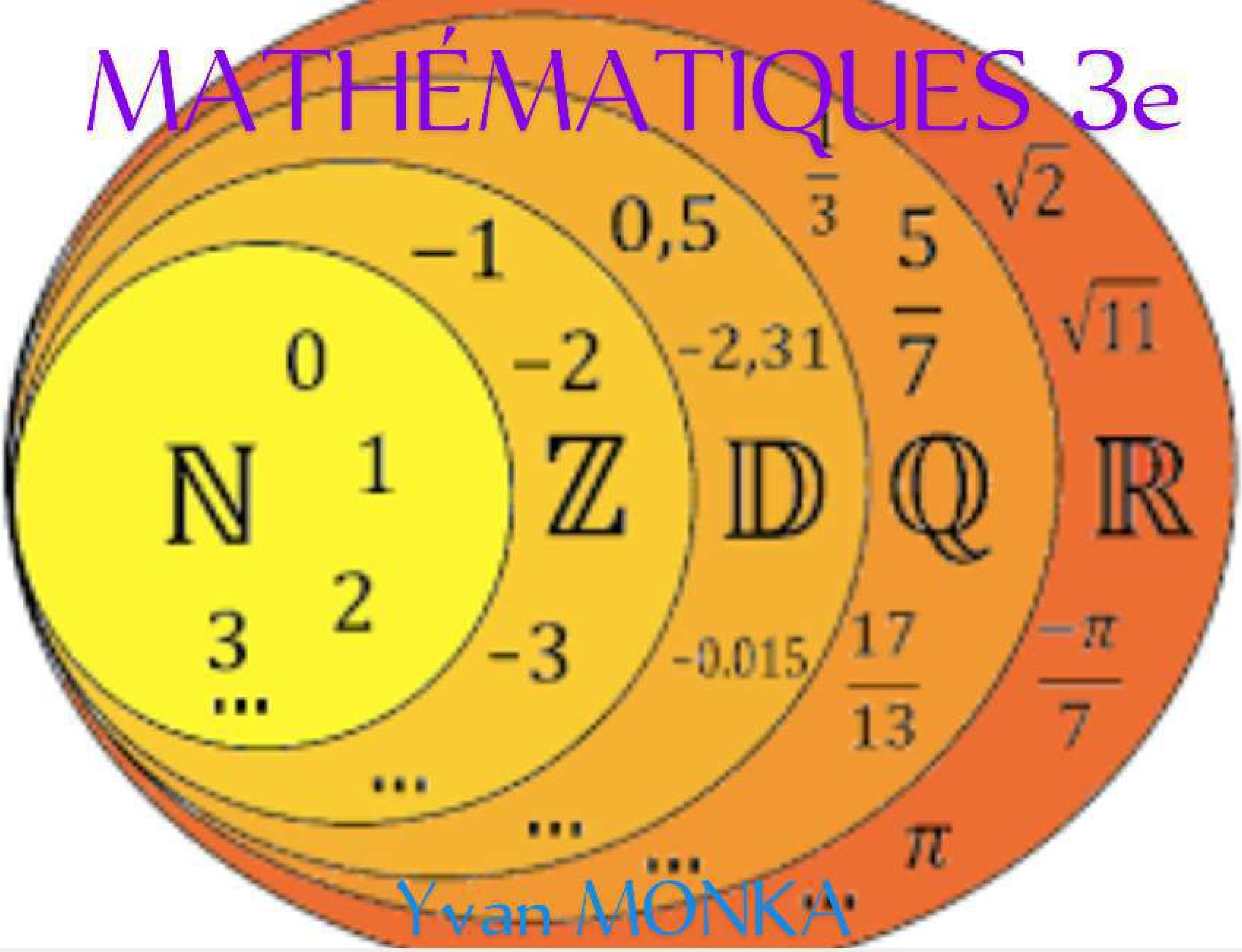
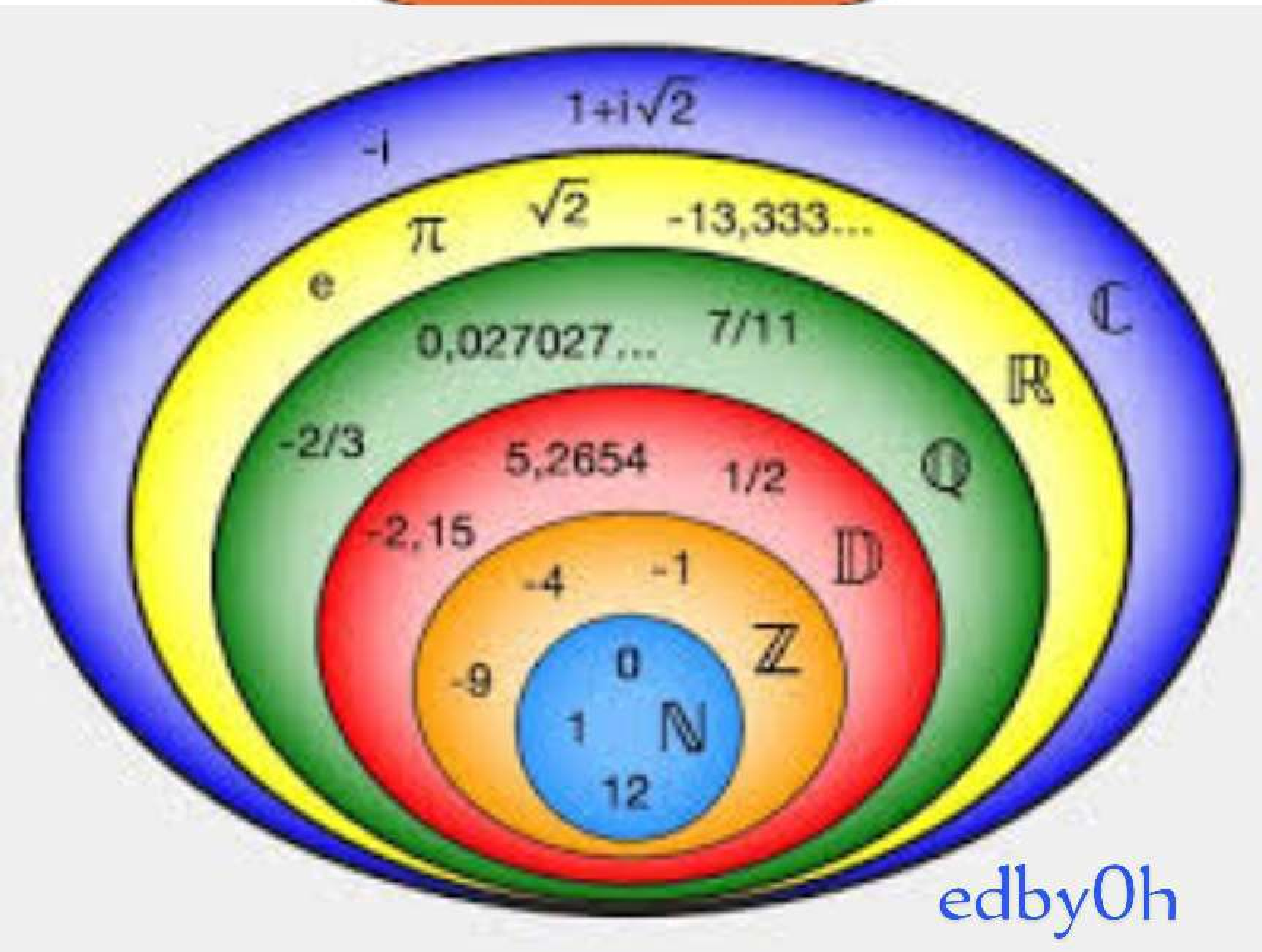
MATHÉMATIQUES 3e



Yvan MONKA



edby0h

CALCULS NUMERIQUES

Tout le cours sur les fractions en vidéo : https://youtu.be/a0Qb812W75c
Tout le cours sur les puissances en vidéo : https://youtu.be/IxCzv5FPJ3s

Partie 1 : Nombres relatifs et priorités (Rappels)

1) Règles de calculs avec les nombres relatifs

Additions et soustractions

$-3-4=-7$

-3 et -4 ont le même signe :
- Garder le signe « $-$ ».
- Faire 3 + 4.

$+3-4=-1$

$+3$ et -4 ont des signes contraires :
- Prendre le signe du plus grand « $-$ ».
- Faire 4 – 3.

Multiplications et divisions
(La règle des signes)

$2\times3=6$
$(-2)\times(-3)=6$
$2\times(-3)=-6$
$-2\times3=-6$

+ + → +
- - → +
+ - → -
- + → -

Méthode : Effectuer des calculs sur les nombres relatifs (1)

Vidéo https://youtu.be/3rXse_lbAKk

Calculer les expressions suivantes :

$\mathrm{A}=-8-10 \qquad \mathrm{B}=12-20 \qquad \mathrm{C}=4\times(-5) \qquad \mathrm{D}=\dfrac{-12}{-3}$

Correction

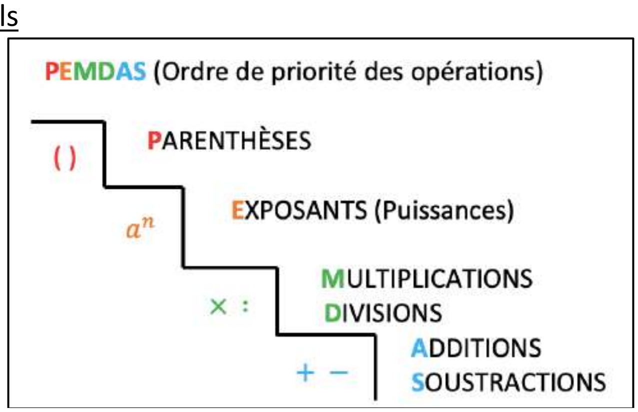
$A=-8-10=-18$ ← Mêmes signes : garder le « $-$ » et additionner

$B=+12-20=-8$ ← Signes contraires : prendre le signe du plus grand donc le « $-$ » du 20 et soustraire

$C=4\times(-5)=-20$ ← Règle des signes : $+\ -\ \rightarrow\ -$

$D=\dfrac{-12}{-3}=4$ ← Règle des signes : $-\ -\ \rightarrow\ +$

2) Priorités de calculs



La 1re lettre de chaque opération forme le mot **PEMDAS**.
Il suffit donc de mémoriser le mot PEMDAS pour se souvenir à tout moment des priorités dans les calculs.

Méthode : Effectuer des calculs sur les nombres relatifs (2)

Vidéo https://youtu.be/p_-4EYjsOiA

Calculer les expressions suivantes.
$A = 7 - 4 \times (-8)$ $B = -10 + 3^2$
$C = 5 + (-12 + 8)$ $D = 15 \div 3 \times 4$

Correction
$A = 7 - 4 \times (-8)$ ← La multiplication est prioritaire sur la soustraction.
$= 7 + 32$
$= 39$

$B = -10 + 3^2$ ← L'expression avec exposant est prioritaire sur l'addition.
$= -10 + 9$
$= -1$

$C = 5 + (-12 + 8)$ ← Les parenthèses sont prioritaires sur l'addition.
$= 5 + (-4)$ ← Deux signes se suivent, on utilise la règle des signes : $+ \; - \rightarrow -$
$= 5 - 4$
$= 1$

$D = 15 \div 3 \times 4$ ← La division et la multiplication sont au même niveau de priorité :
$= 5 \times 4$ On effectue les calculs de gauche à droite.
$= 20$

Partie 2 : Les fractions (Rappels)

1) Additions et soustractions

Propriétés :

$$\frac{a}{D} + \frac{b}{D} = \frac{a+b}{D} \qquad \frac{a}{D} - \frac{b}{D} = \frac{a-b}{D}$$

Remarque :
Si les dénominateurs sont différents, il faut modifier au moins une fraction pour avoir le même dénominateur.

Méthode : Effectuer des additions et soustractions de fractions

Vidéo https://youtu.be/nsc675xcjPc

Calculer et donner le résultat sous forme simplifiée : $A = \frac{5}{4} + \frac{6}{16}$ $B = \frac{5}{3} - \frac{6}{5}$

Correction

$$A = \frac{5}{4} + \frac{6}{16}$$
$$= \frac{5\times4}{4\times4} + \frac{6}{16}$$
$$= \frac{20}{16} + \frac{6}{16}$$
$$= \frac{20+6}{16}$$
$$= \frac{26}{16}$$
$$= \frac{13}{8}$$

$$B = \frac{5}{3} - \frac{6}{5}$$
$$= \frac{5\times5}{3\times5} - \frac{6\times3}{5\times3}$$
$$= \frac{25}{15} - \frac{18}{15}$$
$$= \frac{25-18}{15}$$
$$= \frac{7}{15}$$

2) Multiplications et divisions

Propriétés :

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d} = \frac{a\times c}{b\times d} \qquad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$$

Méthode : Effectuer des multiplications et divisions de fractions

Vidéo https://youtu.be/7_hZWOoMBSA

Calculer et donner le résultat sous forme simplifiée :

$$A = \frac{2}{-3}\times\frac{-5}{11} \qquad B = 7\times\frac{2}{3} \qquad C = \frac{3}{4} : \frac{-5}{8}$$

Correction

$$A = \frac{2}{-3}\times\frac{-5}{11}$$
$$= \frac{2\times(-5)}{(-3)\times 11}$$
$$= \frac{-10}{-33}$$
$$= \frac{10}{33}$$

$$B = 7\times\frac{2}{3}$$
$$= \frac{7}{1}\times\frac{2}{3}$$
$$= \frac{7\times2}{1\times3}$$
$$= \frac{14}{3}$$

$$C = \frac{3}{4} : \frac{-5}{8}$$
$$= \frac{3}{4}\times\frac{8}{-5}$$
$$= \frac{3\times8}{4\times(-5)}$$
$$= \frac{24}{-20}$$
$$= -\frac{6}{5}$$

3) Calculs mêlés

Méthode : Effectuer des calculs mêlés de fractions

Vidéo https://youtu.be/Z86gfJOKgBg
Vidéo https://youtu.be/1yV5scwCwvg

Calculer et donner le résultat sous forme simplifiée :

$A = \frac{8}{7} - \frac{-4}{7} \times \frac{5}{3}$ $\qquad B = \frac{-3}{2 + \frac{5}{2}}$ $\qquad C = \left(\frac{-2}{3} + \frac{4}{9}\right) : \left(\frac{5}{2} + \frac{3}{-14}\right)$

Correction

$$A = \frac{8}{7} - \frac{-4}{7} \times \frac{5}{3}$$
$$= \frac{8}{7} - \frac{-20}{21}$$
$$= \frac{8}{7} + \frac{20}{21}$$
$$= \frac{24}{21} + \frac{20}{21}$$
$$= \frac{44}{21}$$

$$B = \frac{-3}{2 + \frac{5}{2}}$$
$$= -3 : \left(2 + \frac{5}{2}\right)$$
$$= -3 : \left(\frac{4}{2} + \frac{5}{2}\right)$$
$$= -3 : \frac{9}{2}$$
$$= -3 \times \frac{2}{9}$$
$$= -\frac{6}{9}$$
$$= -\frac{2}{3}$$

$$C = \left(\frac{-2}{3} + \frac{4}{9}\right) : \left(\frac{5}{2} + \frac{3}{-14}\right)$$
$$= \left(\frac{-6}{9} + \frac{4}{9}\right) : \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{14}\right)$$
$$= -\frac{2}{9} : \left(\frac{35}{14} - \frac{3}{14}\right)$$
$$= -\frac{2}{9} : \frac{32}{14}$$
$$= -\frac{2}{9} \times \frac{14}{32}$$
$$= -\frac{2}{9} \times \frac{7}{16}$$
$$= -\frac{14}{144}$$
$$= -\frac{7}{72}$$

Partie 3 : Les puissances

1) Rappel :

$a^4 = a \times a \times a \times a$

De façon générale :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ fois}}$$

DIVERTISSEMENT :

$1^3+5^3+3^3 = 153$
$16^3+50^3+33^3 = 165033$
$166^3+500^3+333^3 = 166500333$
$1666^3+5000^3+3333^3 = 166650003333$
and so on and on and on and on!

Exemples :

Vidéo https://youtu.be/IKmReDkNGp8

$2 \times 2 \times 2 = 2^3$
$11 \times 11 \times 11 \times 11 \times 11 = 11^5$

a est un nombre non nul et n un entier non nul :

$a^1 = a$

$a^0 = 1$

$0^n = 0$

$1^n = 1$

Exemples :
$15^1 = 15$
$153^0 = 1$
$0^4 = 0$
$1^{12} = 1$

Méthode : Effectuer des calculs de puissances avec des nombres relatifs

Vidéo https://youtu.be/4CEYTrvUP0I

Calculer : $A = 2^4$ $B = (-3)^3$ $C = (-5)^2$ $D = -5^2$

Correction

$A = 2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$
$B = (-3)^3 = (-3) \times (-3) \times (-3) = 9 \times (-3) = -27$
$C = (-5)^2 = (-5) \times (-5) = 25$
$D = -5^2 = -5 \times 5 = -25$ Sans parenthèses, c'est 5 qui est au carré et non pas –5.

2) Puissances d'exposant négatif

On dit que : $a^{-1} = \frac{1}{a}$ est l'inverse de a.

De façon générale : $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Méthode : Utiliser les puissances d'exposant négatif

Vidéo https://youtu.be/5miQxq30zhY
Vidéo https://youtu.be/_iwHYbuZ4N8

1) Écrire sous forme de fractions les puissances suivantes : $A = 2^{-4}$ $B = 9^{-2}$

2) Écrire les quotients sous la forme a^{-n} :

$C = \frac{1}{5}$ $D = \frac{1}{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}$ $E = \frac{1}{(-6) \times (-6) \times (-6)}$ $F = \frac{1}{(-6)^8 \times (-1)^8}$

Correction

1) $A = 2^{-4} = \dfrac{1}{2^4} = \dfrac{1}{2 \times 2 \times 2 \times 2} = \dfrac{1}{16}$ $\qquad B = 9^{-2} = \dfrac{1}{9^2} = \dfrac{1}{9 \times 9} = \dfrac{1}{81}$

2) $C = \dfrac{1}{5} = 5^{-1}$

$D = \dfrac{1}{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3} = \dfrac{1}{3^5} = 3^{-5}$

$E = \dfrac{1}{(-6) \times (-6) \times (-6)} = \dfrac{1}{(-6)^3} = (-6)^{-3}$

$F = \dfrac{1}{(-6)^8 \times (-1)^8} = \dfrac{1}{6^8 \times 1^8} = \dfrac{1}{6^8} = 6^{-8}$

3) Rappel : la notation scientifique

Définition :
La notation scientifique :

$7{,}328 \times 10^5$

Nombre entre 1 et 10 (10 exclu) x une puissance de 10

Exemples :
$3{,}45 \times 10^4$ est une notation scientifique car $3{,}45$ est bien compris entre 1 et 10 (10 exclu).
$11{,}3 \times 10^6$ n'est pas une notation scientifique car $11{,}3$ est plus grand que 10.
$0{,}42 \times 10^{-6}$ n'est pas une notation scientifique car $0{,}42$ est plus petit que 1.

Attention à ne pas se tromper avec le signe des exposants :
34 000 = $3{,}4 \times 10^4$ car $3{,}4 \times 10000 = 34\,000$
0,00034 = $3{,}4 \times 10^{-4}$ car $3{,}4 \times 0{,}0001 = 0{,}00034$

Méthode : Effectuer des calculs de puissances et présenter le résultat en notation scientifique

Vidéo https://youtu.be/tzhNCpLRtCY

Écrire les nombres suivants sous forme scientifique :
A = 8 300 000 $\qquad B$ = 0,00231 $\qquad C$ = 204,5 x 10^5

$D = 7{,}5 \times 10^5 \times 4 \times 8{,}2 \times (10^{-1})^2$ $\qquad E = 8 \times 10^2 + 85 \times 10^{-2}$ $\qquad F = \dfrac{3\times10^3\times7\times10^2}{50\times10}$

Correction

$A = 8{,}3 \times 10^{6}$ $B = 2{,}31 \times 10^{-3}$ $C = 2{,}045 \times 10^{5+2} = 2{,}045 \times 10^{7}$

$D = 7{,}5 \times 10^5 \times 4 \times 8{,}2 \times (10^{-1})^2$
$= 7{,}5 \times 4 \times 8{,}2 \times 10^5 \times (10^{-1})^2$
$= 246 \times 10^5 \times (0{,}1)^2$
$= 246 \times 10^5 \times 0{,}1 \times 0{,}1$
$= 246 \times 100\,000 \times 0{,}01$
$= 246 \times 1000$
$= 246\,000$ (Notation décimale)
$= 2{,}46 \times 10^5$ (Notation scientifique)

$E = 8 \times 10^2 + 85 \times 10^{-2}$
$= 800 + 0{,}85$
$= 800{,}85$ (Notation décimale)
$= 8{,}0085 \times 10^2$ (Notation scientifique)

$F = \dfrac{3 \times 10^3 \times 7 \times 10^2}{50 \times 10}$
$= \dfrac{3 \times 7}{50} \times \dfrac{10^3 \times 10^2}{10}$
$= 0{,}42 \times \dfrac{1000 \times 100}{10}$
$= 0{,}42 \times 10\,000$
$= 4\,200$ (Notation décimale)
$= 4{,}2 \times 10^3$ (Notation scientifique)

Activité de groupe : La légende de Sessa
http://www.maths-et-tiques.fr/telech/SESSA.pdf

DÉVELOPPEMENTS

Tout le cours en vidéo : https://youtu.be/F78Sm4HCHxA

Partie 1 : La distributivité simple (Rappel)

Formule de distributivité :
$a(b+c) = ab + ac$

Exemple :

① $4 \times x$ ② 4×5

$$4 \times (x + 5) = \underset{①}{4x} + \underset{②}{20}$$

Remarque :
Développer, c'est transformer un produit en somme (ou différence).
Dans la pratique, développer c'est « perdre les parenthèses ».

Méthode : Développer une expression

Vidéo https://youtu.be/RuWyHq2sABE

Développer les expressions suivantes :

$A = 2(3 + x)$
$B = 5(x - 3)$
$C = (3x + 6) \times 4$
$D = -3(-2x + 4)$
$E = -x(2 - 3x)$
$F = -(4 - x)$

Correction

2×3 $2 \times x$

$A = 2(3 + x) = 6 + 2x$

$5 \times x$ $5 \times (-3)$

$B = 5(x - 3) = 5x - 15$

$4 \times 3x$ 4×6

$C = (3x + 6) \times 4 = 12x + 24$

Rappel : Règle des signes
+ par + devient +
– par – devient +
+ par – devient –
– par + devient –

-3×4

$-3 \times (-2x)$

$D = -3\,(-2x + 4) = 6x - 12$

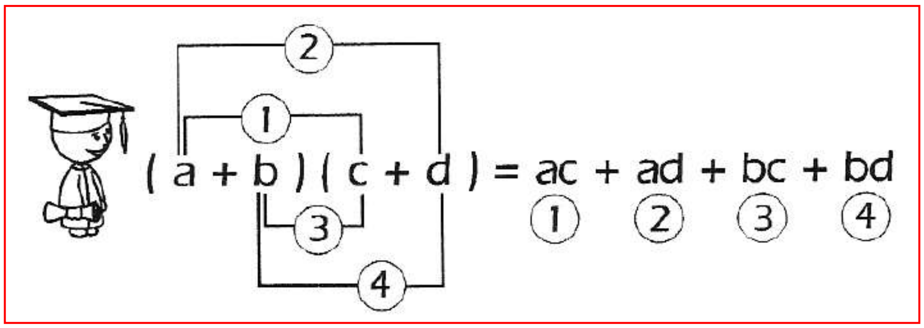
$-x \times (-3x)$

$-x \times 2$

$E = -x\,(2 - 3x) = -2x + 3x^2$

$F = -(4 - x) = -4 + x$ « Un – devant une parenthèse change les signes dans la parenthèse »

Partie 2 : La double distributivité



Exemple :

2×3

$2 \times x$

$$(2 + 4x)(x + 3) = \underset{1}{2x} + \underset{2}{6} + \underset{3}{4x^2} + \underset{4}{12x}$$

$4x \times x$

$4x \times 3$

Méthode : Appliquer la double distributivité pour développer

Vidéo https://youtu.be/YS-3JI_z2f0

Vidéo https://youtu.be/1EPOmbvoAlU

Développer et réduire si possible :

$A = (4x + 3)(x + 2)$
$B = (-3 + 2x)(4 - x)$
$C = -(x - 3)(3x + 2)$
$D = 2x(1 - x) - (x - 4)(3x + 1)$

Correction

$A = (4x + 3)(x + 2) = 4x^2 + 8x + 3x + 6 = 4x^2 + 11x + 6$

$B = (-3 + 2x)(4 - x) = -12 + 3x + 8x - 2x^2 = -12 + 11x - 2x^2$

$C = -(x - 3)(3x + 2) = -(3x^2 + 2x - 9x - 6) = -(3x^2 - 7x - 6) = -3x^2 + 7x + 6$

Le « - » devant les parenthèses change les signes dans la parenthèse.

$$\begin{aligned} D &= 2x(1-x) - (x-4)(3x+1) \\ &= 2x(1-x) \quad - (x-4)(3x+1) \\ &= 2x - 2x^2 \quad - (3x^2 + x - 12x - 4) \\ &= 2x - 2x^2 \quad - 3x^2 - x + 12x + 4 \\ &= -5x^2 + 13x + 4 \end{aligned}$$

Partie 3 : Une identité remarquable

$$\boxed{(a-b)(a+b) = a^2 - b^2}$$

Démonstration : $(a-b)(a+b) = a^2 + ab - ba - b^2 = a^2 - b^2$

Remarque : Il existe deux autres identités remarquables qui seront étudiées en classe de seconde.

Méthode : Appliquer une identité remarquable pour développer

Vidéo https://youtu.be/6j0oMQlaBYg

Développer et réduire éventuellement :

$A = (x-3)(x+3)$ $\quad B = (4-x)(x+4)$ $\quad C = 2(x+3) + (2x+3)(2x-3)$

Correction

$A = (x-3)(x+3) = x^2 - 3^2 = x^2 - 9$

$B = (4-x)(x+4) = (4-x)(4+x) = 4^2 - x^2 = 16 - x^2$

$$\begin{aligned} C &= 2(x+3) \quad + (2x+3)(2x-3) \\ &= 2x+6 \quad\;\; + (2x)^2 - 3^2 \\ &= 2x+6 \quad\;\; + 4x^2 - 9 \\ &= 4x^2 + 2x - 3 \end{aligned}$$

FACTORISATIONS

Tout le cours en vidéo : https://youtu.be/JVnzqtfXfl4

Partie 1 : Factorisations avec facteur commun

Vient du latin « Factor » = « celui qui fait »

Définition : Une expression factorisée est formée de facteurs.

Exemple :
Dans le produit 3×4, 3 et 4 sont les facteurs.

Introduction :

Vidéo https://youtu.be/FTi9WOQsq3w

Retrouver les expressions qui sont factorisées :

$A = (2x + 1)(1 + x)$

$B = (x + 3) + (1 - 3x)$

$C = (x - 4) - (3 + 2x)$

$D = 2(1 + x)$

$E = 3(5 + x)$

$F = (1 + 3x)(x - 2) + 1$

$G = 4x - 15$

$H = -(2x + 1)(1 + x)$

$I = (x + 15)^2$

$J = 4 - (x - 5)(3x - 5)$

$K = (x - 4) - 5$

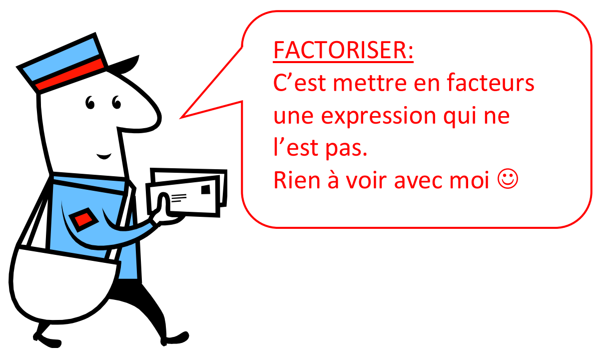
$L = x - 4(2 + 3x)$

$M = (2 + x)(3 - 4x)$

$N = x(x - 2)$

$O = (2x + 1)^2(1 + x)$

Réponses : A, D, E, H, I, M, N *et* O.



Méthode : Factoriser avec un facteur commun

Vidéo https://youtu.be/r3AzqvgLcl8

Pour factoriser, il faut trouver dans l'expression un facteur commun.

Trouver le facteur commun de ces expressions, puis factoriser et réduire si possible :

$A = 3x + 4x \qquad B = 4t - 6t \qquad C = 4x + 8 \qquad D = x^2 + 3x \qquad E = 3x - x \qquad F = 9y^2 - 6y$

Correction

$A = 3x + 4x$
$\quad = x(3+4)$
$\quad = 7x$

$B = 4t - 6t$
$\quad = t(4-6)$
$\quad = -2t$

$C = 4x + 8$
$\quad = 4x + 4 \times 2$
$\quad = 4(x+2)$

$D = x^2 + 3x$
$\quad = x \times x + 3x$
$\quad = x(x+3)$

$E = 3x - 1x$
$\quad = x(3-1)$
$\quad = 2x$

$F = 9y^2 - 6y$
$\quad = 3 \times 3 \times y \times y - 2 \times 3y$
$\quad = 3y(3y-2)$

Méthode : Factoriser avec un facteur commun (Non exigible)

Vidéo https://youtu.be/5dCsR85qd3k

Trouver le facteur commun de ces expressions, puis factoriser et réduire le 2e facteur si possible :
$A = 3(2+3x) - (5+2x)(2+3x)$
$B = (4x-1)(x+6) + (4x-1)$
$C = (1-6x)^2 - (1-6x)(2+5x)$

Correction

$A = 3(2+3x) - (5+2x)(2+3x)$
$\quad = (2+3x)(3-(5+2x))$
$\quad = (2+3x)(3-5-2x)$
$\quad = (2+3x)(-2-2x)$

$B = (4x-1)(x+6) + (4x-1) \times 1$
$\quad = (4x-1)(x+6+1)$
$\quad = (4x-1)(x+7)$

$C = (1-6x)^2 - (1-6x)(2+5x)$
$\quad = (1-6x)(1-6x) - (1-6x)(2+5x)$
$\quad = (1-6x)((1-6x)-(2+5x))$
$\quad = (1-6x)(1-6x-2-5x)$
$\quad = (1-6x)(-11x-1)$

Partie 2 : Factorisations en appliquant une identité remarquable

1) L'identité remarquable

On applique une identité remarquable pour factoriser.

Rappel : $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

Méthode : Factoriser en appliquant une identité remarquable

Vidéo https://youtu.be/VWKNW4aLeG8
Vidéo https://youtu.be/91ZSBiadxrA

Factoriser : $A = x^2 - 81$ $B = 9x^2 - 4$ $C = 1 - 49x^2$

Correction
Retrouvons les termes : a^2 et b^2 dans les expressions

$A = x^2 - 81$
$= x^2 - 9^2$ (Identité remarquable avec $a = x$ et $b = 9$)
$= (x - 9)(x + 9)$

$B = 9x^2 - 4$
$= (3x)^2 - 2^2$ (Identité remarquable avec $a = 3x$ et $b = 2$)
$= (3x - 2)(3x + 2)$

$C = 1 - 49x^2$
$= 1^2 - (7x)^2$ (Identité remarquable avec $a = 1$ et $b = 7x$)
$= (1 - 7x)(1 + 7x)$

2) Factorisations plus complexes (pour les experts)

Méthode : Factoriser en appliquant une identité remarquable (Non exigible)

Vidéo https://youtu.be/nLRRUMRyfZg

Factoriser et réduire :

$A = (2x + 3)^2 - 64$ $B = 1 - (2 - 5x)^2$

Correction

$A = (2x + 3)^2 - 64$
$= (2x + 3)^2 - 8^2$ (Identité remarquable avec $a = 2x + 3$ et $b = 8$)
$= ((2x + 3) - 8)((2x + 3) + 8)$
$= (2x + 3 - 8)(2x + 3 + 8)$
$= (2x - 5)(2x + 11)$

$B = 1 - (2 - 5x)^2$
$= 1^2 - (2 - 5x)^2$ (Identité remarquable avec $a = 1$ et $b = 2 - 5x$)
$= (1 - (2 - 5x))(1 + (2 - 5x))$
$= (1 - 2 + 5x)(1 + 2 - 5x)$
$= (-1 + 5x)(3 - 5x)$

ÉQUATIONS

Tout le cours en vidéo : https://youtu.be/WoTpA2RyuVU

TP info : Al Khwarizmi
http://www.maths-et-tiques.fr/telech/Alkhwa_Rech.pdf

La méthode de résolution des équations (*muadala*) découverte par le perse *Abu Djafar Muhammad ibn Musa **al Khwarizmi*** (Bagdad, 780-850) consiste en :
- **al jabr** (le reboutement, 4x - 3 = 5 devient 4x = 5 + 3), le mot est devenu "algèbre" aujourd'hui.

Dans l'équation, un terme négatif est accepté mais *al Khwarizmi* s'attache à s'en débarrasser au plus vite. Pour cela, il ajoute son opposé des deux côtés de l'équation.
- **al muqabala** (la réduction, 4x = 9 + 3x devient x = 9)

Les termes semblables sont réduits.
A cette époque, la « famille des nombres » est appelée *dirham* et la « famille des *x* » est appelée *chay* (=chose), devenu plus tard *xay* en espagnol qui explique l'origine du *x* dans les équations.

Partie 1 : Notion d'équation

INCONNUE : C'est une lettre qui cache un nombre cherché :
→ x

EQUATION : C'est une opération « à trous » dont « les trous » sont remplacés par une inconnue :
→ $10x - 2 = 2x + 3$

RESOUDRE UNE EQUATION : C'est chercher et trouver le nombre caché sous l'inconnue.

SOLUTION : C'est le nombre caché sous l'inconnue :
→ $x = 0{,}625$

VÉRIFICATION : On remplace la solution dans l'équation.
→ $10 \times 0{,}625 - 2 = 2 \times 0{,}625 + 3$, donc $0{,}625$ est solution.

Méthode : Vérifier si un nombre est solution d'une équation

Vidéo https://youtu.be/PLuSPM6rJKI

Vérifier si 14 est solution de l'équation $4(x - 2) = 3x + 6$

Correction
On remplace la valeur 14 dans les deux membres de l'équation.
- D'une part :

$4(x - 2) = 4(14 - 2) = 4 \times 12 = 48$

- D'autre part :

$3x + 6 = 3 \times 14 + 6 = 42 + 6 = 48$

14 vérifie l'équation $4(x - 2) = 3x + 6$ donc 14 est solution !

TP info : « Recherche de la solution d'une équation »
http://www.maths-et-tiques.fr/telech/Rech_sol.pdf
http://www.maths-et-tiques.fr/telech/Rech_sol.ods (Feuille de calcul OOo)

Partie 2 : Résolution d'équations

But : Trouver x !
C'est-à-dire : isoler x dans l'équation pour arriver à :
x = nombre

1) Rappels sur les équations vues en 4e

Méthode : Résoudre une équation

Vidéo https://youtu.be/quzC5C3a9jM

Résoudre les équations : 1) $-5x+3=-3x+2$
2) $3(x+4)=-(x+5)+2$

Correction

1) $-5x+3=-3x+2$

$-5x+3x=2-3$ ← On ramène les « x » à gauche et les « nombres » à droite.

$-2x=-1$ ← Réduire

$x=\dfrac{-1}{-2}$ ← On divise par -2.

$x=\dfrac{1}{2}$

2) $3(x+4)=-(x+5)+2$

$3x+12=-x-5+2$ On applique la distributivité

$3x+x=-12-5+2$

$4x=-15$

$x=-\dfrac{15}{4}$

2) Équation produit

Si $a\times b=0$, que peut-on dire de a et b ?
« Faire des essais sur des exemples, puis conclure … ! »

Propriété : Si $a\times b=0$ alors $a=0$ ou $b=0$.
Si un produit de facteurs est nul, alors l'un au moins des facteurs est nul.

Méthode : Résoudre une équation-produit

Vidéo https://youtu.be/APj1WPPNUgo
Vidéo https://youtu.be/VNGFmMt1W3Y

Résoudre les équations :
a) $(4x+6)(3-7x)=0$ b) $4x^2+x=0$ c) $x^2-25=0$ d) $x^2-3=0$

Correction
a) Si un produit de facteurs est nul, alors l'un au moins des facteurs est nul.

Alors : $4x+6=0$ ou $3-7x=0$
$4x=-6$ $-7x=-3$
$x=-\frac{6}{4}$ $x=\frac{-3}{-7}$
$x=-\frac{3}{2}$ $x=\frac{3}{7}$ $S=\left\{-\frac{3}{2}\ ;\ \frac{3}{7}\right\}$

b) $4x^2+x=0$
$x(4x+1)=0$
Si un produit de facteurs est nul, alors l'un au moins des facteurs est nul.
Alors : $x=0$ ou $4x+1=0$
$4x=-1$
$x=-\frac{1}{4}$

$S=\left\{-\frac{1}{4}\ ;\ 0\right\}$

c) $x^2-25=0$
$x^2-5^2=0$
$(x-5)(x+5)=0$
Si un produit de facteurs est nul, alors l'un au moins des facteurs est nul.
Alors : $x-5=0$ ou $x+5=0$
$x=5$ $x=-5$

$S=\{-5\ ;\ 5\}$

d) $x^2-3=0$
$(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})=0$
Si un produit de facteurs est nul, alors l'un au moins des facteurs est nul.
Alors : $x-\sqrt{3}=0$ ou $x+\sqrt{3}=0$
$x=\sqrt{3}$ $x=-\sqrt{3}$

$S=\{-\sqrt{3}\ ;\ \sqrt{3}\}$

Partie 3 : Application à la résolution de problèmes

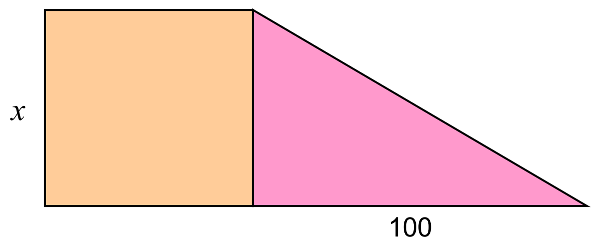
Méthode : Mettre un problème en équation

Vidéo https://youtu.be/flObKE_CyHw

Deux agriculteurs possèdent des champs ayant un côté commun de longueur inconnue. L'un est de forme carrée, l'autre à la forme d'un triangle rectangle de base 100m.
Sachant que les deux champs sont de surface égale, calculer leurs dimensions.

Correction

On désigne par x la longueur du côté commun.
Les données sont représentées sur la figure suivante :



L'aire du champ carré est égale à x^2.
L'aire du champ triangulaire est égale à $\frac{100x}{2} = 50x$
Les deux champs étant de surface égale, le problème peut se ramener à résoudre l'équation :

$$x^2 = 50x$$

Soit $x^2 - 50x = 0$
$x(x - 50) = 0$
Si un produit de facteurs est nul alors l'un au moins des facteurs est nul.
Alors $x = 0$ ou $x - 50 = 0$
$x = 0$ ou $x = 50$
La première solution ne convient pas à la situation du problème. On en déduit que le premier champ est un carré de côté de longueur 50 m et le deuxième est un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent 100 m et 50 m.

Activité de groupe : Moquettes !
http://www.maths-et-tiques.fr/telech/MOQUETTES.pdf

ARITHMÉTIQUE

Tout le cours en vidéo : https://youtu.be/al9oHwrlTNo

Le mot vient du grec « arithmos » = nombre. En effet, l'arithmétique est la science des nombres.
Citons la célèbre conjecture de Goldbach énoncée en 1742 et à ce jour jamais démontrée :
« Tout nombre entier pair est la somme de deux nombres premiers »

Partie 1 : Divisibilité

Propriétés : Un nombre entier est divisible :
- par 2, si son chiffre des unités est pair (se termine par 0, 2, 4, 6 ou 8).
- par 5, si son chiffre des unités est 0 ou 5,
- par 10, si son chiffre des unités est 0,
- par 3, si la somme de ses chiffres est divisible par 3,
- par 9, si la somme de ses chiffres est divisible par 9.

Exemples :
a) 15 est divisible par 3 et par 5.
On peut dire alors que 3 et 5 sont des **diviseurs** de 15.
Mais on peut également dire que 15 est un **multiple** de 3 ou de 5.

b) 456 est divisible par 3.
En effet, 4 + 5 + 6 = 15 est divisible par 3.

Méthode : Déterminer les diviseurs d'un nombre
Vidéo https://youtu.be/sSgsrHMyFrI

Dresser la liste des diviseurs de 24.

Correction
24 est divisible par 1 et 24.
Pour les autres, l'astuce est de les chercher par couple.
Par exemple, 2 divise 24 donc 12 divise également 24 car $2 \times 12 = 24$.

En poursuivant ainsi, on trouve la liste des diviseurs de 24 :
1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24.

Partie 2 : Nombres premiers

1) Définition

Définition : Un nombre est **premier** s'il possède exactement deux diviseurs qui sont 1 et lui-même.

Exemples :
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, … Cette liste est infinie.

Remarque :
Le nombre 1 n'est pas premier car il n'a qu'un seul diviseur.

Vidéo https://youtu.be/N1gY8G_Y5k4

Divertissement :

Le nombre 73939133 est un nombre premier. Si on retire à chaque fois son dernier chiffre, il reste premier.
Ainsi,
73939133
7393913
739391
73939
7393
739
73
7 sont tous premiers.

Méthode : Déterminer si un nombre est premier ou non

Vidéo https://www.youtube.com/watch?v=g9PLLhnCv88

6 et 11 sont-ils des nombres premiers ?

Correction :

- 6 peut s'écrire 2×3 et a donc 2 et 3 comme diviseurs en plus de 1 et 6.

6 a donc plus que deux diviseurs et n'est alors pas premiers.

- 11 n'a pas d'autres diviseurs que 1 et 11 donc il est premier.

2) Décomposition d'un nombre en produit de facteurs premiers

Exemples :
- 20 = $2 \times 2 \times 5$ est une décomposition du nombre 20 en produit de facteurs premiers.
En effet, chaque facteur de la décomposition est un nombre premier.
- 231 = $3 \times 7 \times 11$
- 225 = $3 \times 3 \times 5 \times 5$

Propriété : Tout nombre non premier peut se décomposer en produit de facteurs premiers. L'ordre des facteurs n'a pas d'importance.

Méthode : Décomposer un nombre en produit de facteurs premiers

Vidéo https://youtu.be/RBE2wPIKagI
Vidéo https://youtu.be/QoRWa45dQig

Décomposer 300 en produit de facteurs premiers.

Correction :
Pour le faire, il est important de bien connaître le début de la liste des nombres premiers :
2, 3, 5, 7, 11, 13, …

On commence par tester si **300** est divisible par **2** (1er nombre premier).
La réponse est « oui » car **300** se termine par un chiffre pair.
Et on a : **300 : 2** = 150

300	**2**
150	

On recommence, en testant si **150** est divisible par **2**.
La réponse est « oui » et **150 : 2** = **75**

300	2
150	**2**
75	

On recommence, en testant si **75** est divisible par 2.
La réponse est « non » !
On teste alors le nombre premier suivant dans la liste.
Est-ce que **75** est divisible par **3**.
La réponse est « oui » car 7+5=12 est divisible par 3.
Et on a : **75 : 3** = **25**

300	2
150	2
75	**3**
25	

On recommence, en testant si **25** est divisible par 3.
La réponse est « non » !
On teste alors le nombre premier suivant dans la liste.
Est-ce que **25** est divisible par **5**.
La réponse est « oui » et on a **25 : 5** = **5**.

300	2
150	2
75	3
25	**5**
5	

On recommence, en testant si **5** est divisible par **5**.
La réponse est « oui » et on a **5 : 5** = **1**.

C'est fini, on trouve **1** !

300	2
150	2
75	3
25	5
5	**5**
1	

La décomposition en produit de facteurs premiers de 300 se lit dans la colonne de droite.

$$300 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5$$

Partie 3 : Application aux fractions

<u>Définition :</u> On dit qu'une fraction est **irréductible**, lorsque son numérateur et son dénominateur n'ont pas de diviseur commun autre que 1.

<u>Exemples :</u>

- $\frac{4}{9}$ est une fraction irréductible car les diviseurs de 4 sont 1, 2 et 4
  et les diviseurs de 9 sont 1, 3 et 9.

  Le seul diviseur commun de 4 et de 9 est 1.
- $\frac{2}{8}$ n'est pas une fraction irréductible car les diviseurs de 2 sont 1 et 2
  et les diviseurs de 8 sont 1, 2, 4 et 8.

  2 et 8 ont deux diviseurs communs 1 et 2.

Méthode : Rendre une fraction irréductible

Vidéo https://youtu.be/qZaTliAWkA0

Rendre irréductible la fraction $\frac{60}{126}$.

Correction :
Pour rendre une fraction irréductible, il faut décomposer son numérateur et son dénominateur en produit de facteurs premiers.

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

On ainsi les décompositions de 60 et 126 : $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$ et $126 = 2 \times 3 \times 3 \times 7$

On a : $\frac{60}{126} = \frac{2\times2\times3\times5}{2\times3\times3\times7} = \frac{2\times5}{3\times7} = \frac{10}{21}$.
10 et 21 n'ont pas de diviseur commun.

$\frac{10}{21}$ est la fraction irréductible égale à $\frac{60}{126}$.

NOTION DE FONCTION

Tout le cours en vidéo : https://youtu.be/E4SY8_L-DTA

Partie 1 : Notations et vocabulaire

1) Exemple

Un groupe scolaire se rend au théâtre pour assister à un spectacle. Le prix d'entrée à ce spectacle est de 4 € par élève.

Prix du spectacle pour :
12 élèves : $12 \times \mathbf{4} = 48$ €
20 élèves : $20 \times \mathbf{4} = 80$ €
32 élèves : $32 \times \mathbf{4} = 128$ €

x élèves : $x \times \mathbf{4} = 4x$ €

2) Notations :

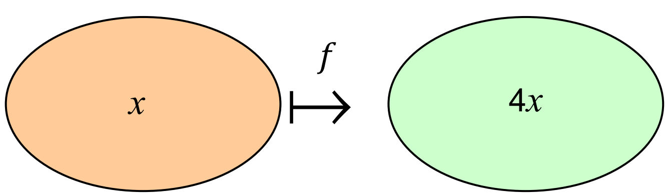
Pour un nombre d'élèves donné, on a fait correspondre le prix à payer.
Par exemple : $12 \longmapsto 48$
$20 \longmapsto 80$

De façon générale, pour x élèves on note : $x \longmapsto 4x$
$x \longmapsto 4x$ se lit « à x, on associe $4x$ ».

La correspondance qu'on a établie entre x et $4x$ porte un nom.
On va l'appeler f, et on note également :

$$\boxed{f : x \longmapsto 4x}$$

f est appelée une **fonction**. C'est une « machine » mathématique qui, à un nombre donné, fait correspondre un autre nombre.



Nombre de départ   Nombre associé

La fonction f dépend donc de la valeur de x choisie au départ et <u>varie en fonction de cette valeur x</u>.
x est ainsi appelée la **variable**.

On note également : $\boxed{f(x) = 4x}$
$f(x)$ se lit « f de x ».

f : $32 \longmapsto 128$ peut donc s'écrire : $f(32) = 128$

3) Tableau de valeurs

On peut résumer les résultats précédents dans un tableau qui s'appelle **tableau de valeurs**.

x	12	20	32
$f(x)$	**48**	**80**	**128**

Méthode : Résoudre un problème à l'aide d'une fonction

Vidéo youtu.be/02mDFbESIbk

On donne le programme de calcul suivant :
- Choisir un nombre
- Enlever 2
- Multiplier par 2
- Ajouter 3

1) Appliquer le programme en prenant 4 comme nombre de départ.
2) On prend x comme nombre de départ.
Donner le résultat du programme en fonction de x.
3) On appelle f la fonction qui associe à x le résultat du programme.
Donner l'expression de la fonction f à l'aide des deux notations suivantes :
$f : x \mapsto \ldots$
$f(x) = \cdots$
4) Compléter le tableau de valeurs :

x	4	6	10
$f(x)$			

Correction
1) En prenant 4 au départ :
- 4
- 4 – 2 = 2
- 2 x 2 = 4
- 4 + 3 = 7

En prenant 4 au départ, on obtient 7.

2) En prenant x au départ :
- x
- $x - 2$
- 2 x $(x - 2)$
- 2 x $(x - 2)$ + 3

En prenant x au départ, on obtient $2(x - 2) + 3$.

On peut simplifier l'expression :

$$\begin{aligned} 2(x-2)+3 &= 2 \times x + 2 \times (-2) + 3 \\ &= 2x - 4 + 3 \\ &= 2x - 1 \end{aligned}$$

3) $f(x) = 2x - 1$

$f : x \mapsto 2x - 1$

4)

x	4	6	10
$f(x)$	7	11	19

$2 \times 4 - 1$
$= 8 - 1$
$= 7$

Partie 2 : Image et antécédent par une fonction

<u>Exemple :</u>

Dire que : $f(2) = 5$ signifie que : $2 \longmapsto 5$

Antécédent de 5

Image de 2

On dit que :
- l'**image** de 2 par la fonction f est 5.
- un **antécédent** de 5 par f est 2.

<u>Méthode :</u> Déterminer une image et un antécédent par une fonction

Vidéo https://youtu.be/BHrBGehewi0
Vidéo https://youtu.be/EOS5bSPTZjg

Soit le tableau de valeurs suivant de la fonction f :

x	–4	2	10	18
$f(x)$	18	6	–4	38

Compléter alors :
a) L'image de 2 par f est …
b) Un antécédent de 18 par f est …
c) f : … $\longmapsto$ –4
d) $f(18)$ = …

Correction
a) L'image de 2 par f est 6, car 2 ⟼ 6
b) Un antécédent de 18 par f est –4, car –4 ⟼ 18
c) f : 10 ⟼ –4
d) f(18) = 38

Méthode : Déterminer l'image d'une fonction par calcul

Vidéo https://youtu.be/FjqPwHS7vE8

Soit la fonction g définie par $g(x) = 3x - 1$.
Calculer l'image de 6 par la fonction g :

Correction
$g(x) = 3x - 1$
$g(6) = 3 \times 6 - 1$
$= 18 - 1$
$= 17$
L'image de 6 par g est 17.

Méthode : Déterminer un antécédent par calcul

Vidéo https://youtu.be/0NakIDu5dQU

Soit la fonction f définie par $f(x) = 2x - 3$.
Déterminer un antécédent de -5 par la fonction f.

Correction
On cherche un antécédent de -5 donc -5 est une image.
On peut donc écrire : $f(x) = -5$
Soit : $2x - 3 = -5$

On résout ainsi l'équation :
$2x = 3 - 5$
$2x = -2$
$x = -1$
Un antécédent de -5 par f est donc -1.

Remarques :
- Un nombre possède une unique image par une fonction.
- Cependant, un nombre peut posséder plusieurs antécédents.

Par exemple :
Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2$.

On a : $f(2) = 2^2 = 4$ et $f(-2) = (-2)^2 = 4$.
On en déduit que 4 possède deux antécédents qui sont 2 et -2.

Partie 3 : Représentation graphique d'une fonction

1) Construction d'une courbe

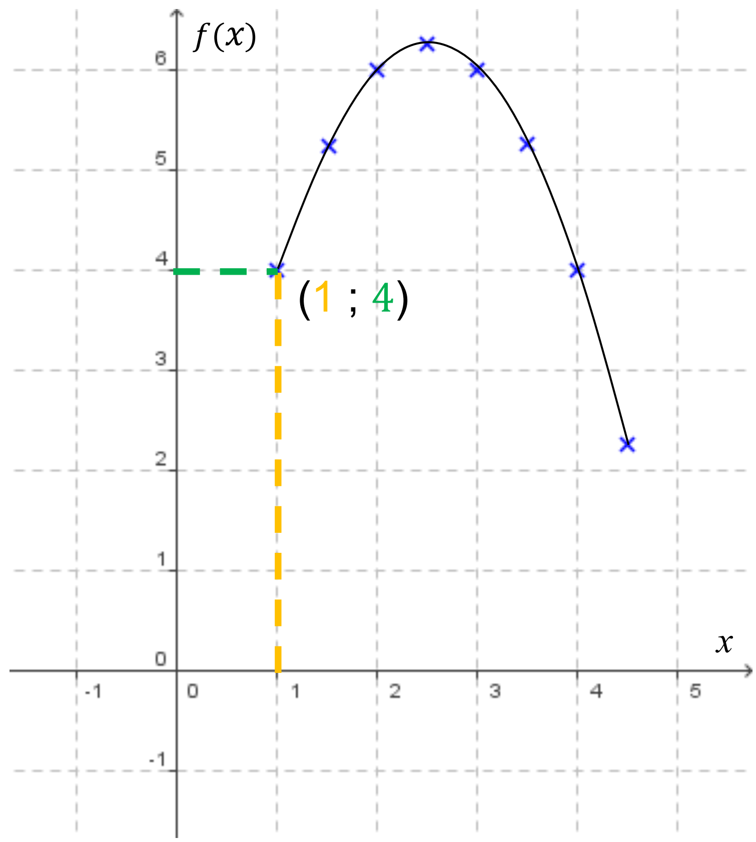
Vidéo https://youtu.be/xHJNdrhzY4Q

Soit la fonction f définie par $f(x) = 5x - x^2$.
On complète un tableau de valeurs de la fonction f :

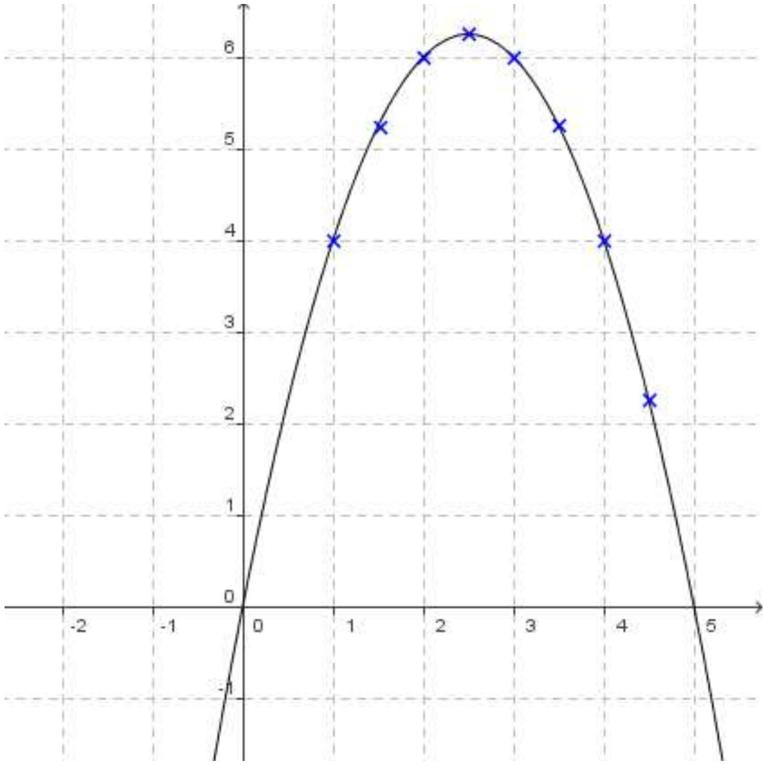
x	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
$f(x)$	**4**	**5,25**	**6**	**6,25**	**6**	**5,25**	**4**	**2,25**

On représente les données du tableau de valeurs dans un repère tel qu'on trouve en abscisse les valeurs de x et en ordonnée les valeurs de $f(x)$ correspondante.

En reliant les points, on obtient une courbe.
Tout point de la courbe possède donc des coordonnées de la forme $(x\ ;\ f(x))$.



Ouvrir le logiciel *GeoGebra* et saisir directement l'expression de la fonction f.
Dans la barre de saisie, on écrira : *f*(*x*)=5*x*-*x*^2



La courbe affichée de la fonction f dépasse les limites des valeurs du tableau.
L'expression de la fonction f accepte par exemple des valeurs négatives de x.

En latin, « curbus » désignait ce qui est courbé. On retrouve le mot en ancien français sous la forme de « corbe ». Le corbeau est ainsi appelé à cause de la forme de son bec.

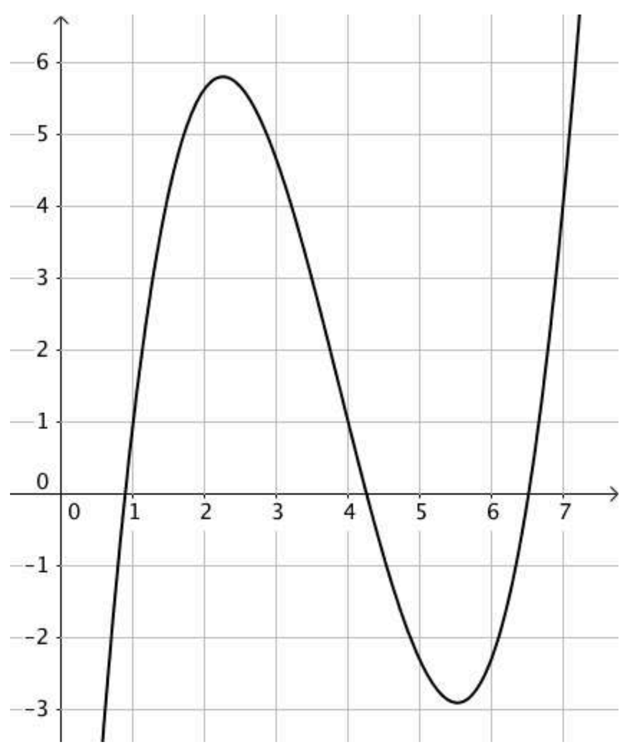
2) Lectures graphiques

Méthode : Lire graphiquement une image et un antécédent

Vidéo https://youtu.be/gQUt5y8LFKk

On considère la fonction f représentée ci-contre.

Déterminer graphiquement :
a) L'image de 7 par la fonction f.
b) Trois antécédents de 1 par la fonction f.

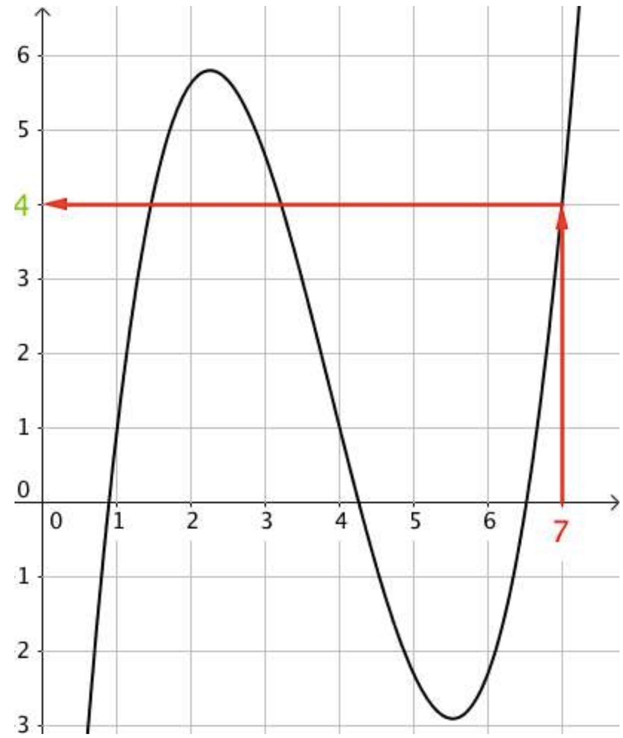


Correction

a) Pour déterminer l'image de 7, on « part » de l'abscisse 7, on « rejoint » la courbe et on lit la valeur correspondante sur l'axe des ordonnées.

On lit donc que l'image de 7 est 4.

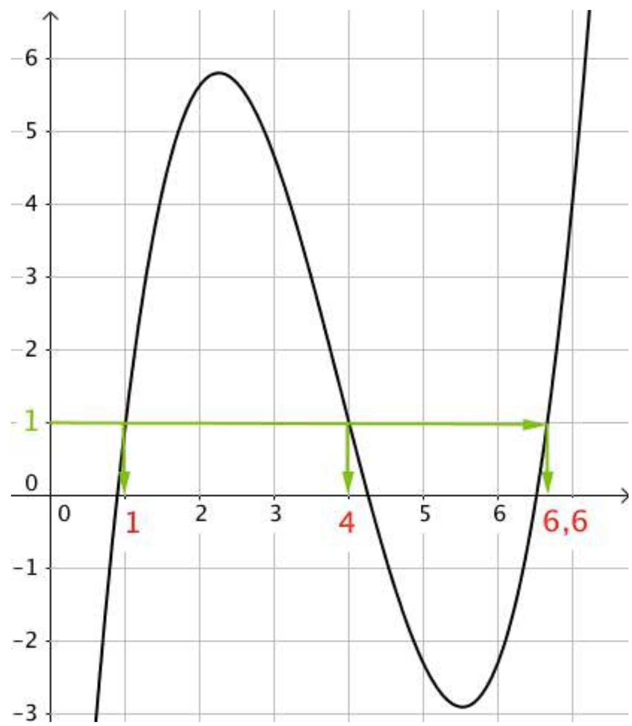
On peut noter : $f(7) = 4$.



b) Pour déterminer des antécédents de 1, on « part » de l'ordonnée 1, on « rejoint » la courbe et on lit les valeurs correspondantes sur l'axe des abscisses.

On lit donc que des antécédents de 1 sont 1, 4 et 6,6.

On peut par exemple noter : $f(4) = 1$.



<u>TP info :</u> « Fonctions trigonométriques »
http://www.maths-et-tiques.fr/telech/TP_Trigo.pdf
http://www.maths-et-tiques.fr/telech/TP_Trigo.ods (feuille de calcul OOo)

FONCTIONS AFFINES – Chapitre 1/2

Tout le cours en vidéo : https://youtu.be/n5_pRx4ozlg

Partie 1 : Fonction affine, fonction linéaire, fonction constante

Vidéo https://youtu.be/XOwoyupaPx0

Exemple :
Voici les tarifs d'entrée pour un stade de football :
- Tarif 1 : 8 € l'entrée
- Tarif 2 : 4 € l'entrée avec la carte demi-tarif qui coûte 40 €
- Tarif 3 : l'abonnement pour la saison qui coûte 92 €

Soit x le nombre d'entrées.
On a calculé pour chaque tarif, la dépense pour $x = 6$ entrées.

Nombre d'entrées x	$x = 6$
Tarif 1	$8 \times 6 = 48$ €
Tarif 2	$4 \times 6 + 40 = 64$ €
Tarif 3	92 €

On exprime en fonction de x la dépense pour chaque tarif.

Tarif 1 : $8 \times x$
On a défini une fonction qu'on appelle f et on note : $f(x) = 8x$

Tarif 2 : $4 \times x + 40$
On a défini une fonction qu'on appelle g et on note : $g(x) = 4x + 40$

Tarif 3 : 92
On a défini une fonction qu'on appelle h et on note : $h(x) = 92$

Définitions :
Une fonction de la forme :
$x \longmapsto ax + b$ est appelée **fonction affine**
$x \longmapsto ax$ est appelée **fonction linéaire**
$x \longmapsto b$ est appelée **fonction constante**.

Exemple :
On reprend l'exemple précédent :

- Tarif 1 : $f : x \longmapsto 8x$ est une fonction linéaire.

Ici, le prix est proportionnel au nombre d'entrées.
Une fonction linéaire traduit une situation de proportionnalité.

● Tarif 2 : $g : x \longmapsto 4x + 40$ est une fonction affine.

● Tarif 3 : $h : x \longmapsto 92$ est une fonction constante.
Ici, le prix est constant quel que soit le nombre d'entrées.

Propriété : Une fonction linéaire est une fonction affine telle que $b = 0$.

Méthode : Reconnaître une fonction affine

Vidéo https://youtu.be/r5f6kS-8ePM

Justifier que les fonctions suivantes sont affines en donnant la valeur de a et de b dans l'écriture $x \longmapsto ax + b$.

1) $f(x) = 2x + 1$
2) $g(x) = x$
3) $h(x) = 2 - x$
4) $k(x) = 3$
5) $l(x) = 3(x - 1)$

Correction

Une fonction affine s'écrit sous la forme $x \longmapsto ax + b$

1) $f(x) = 2x + 1$ $\quad a = 2 \quad b = 1$

2) $g(x) = x = 1x + 0$ $\quad a = 1 \quad b = 0$
L'écriture $g(x) = x$ est sous la forme $x \longmapsto ax$ avec a = 1 donc la fonction est aussi linéaire.

3) $h(x) = 2 - x = -1x + 2$ $\quad a = -1 \quad b = 2$

4) $k(x) = 3 = 0x + 3$ $\quad a = 0 \quad b = 3$
L'écriture $k(x) = 3$ est sous la forme $x \longmapsto b$ avec b = 3 donc la fonction est aussi constante.

5) $l(x) = 3(x - 1)$
$= 3 \times x - 3 \times 1$
$= 3x - 3$ $\quad a = 3 \quad b = -3$

Partie 2 : Image, antécédent (rappels)

Exemple :
On reprend l'exemple précédent :

1) Avec le tarif 2, on calcule le prix dépensé pour 18 entrées.
On a donc : $x = 18$
Calculons $g(18) = 4 \times 18 + 40 = 112$
Avec le tarif 2 : 18 entrées coûtent 112 €.

On dit que 112 est l'IMAGE de 18 par g et on note :
$g(18) = 112$ ou
$g : 18 \longmapsto 112$

2) On cherche maintenant x tel que $g(x) = 84$.
Soit :

$$\begin{aligned} 4x + 40 &= 84 \\ 4x &= 44 \\ x &= 11 \end{aligned}$$

On dit que 11 est un ANTÉCÉDENT de 84 et on note :
$g(11) = 84$ ou
$g : 11 \longmapsto 84$

Interprétation :
Avec le tarif 2, 11 entrées coûtent 84 €.

Partie 3 : Représentation graphique d'une fonction affine

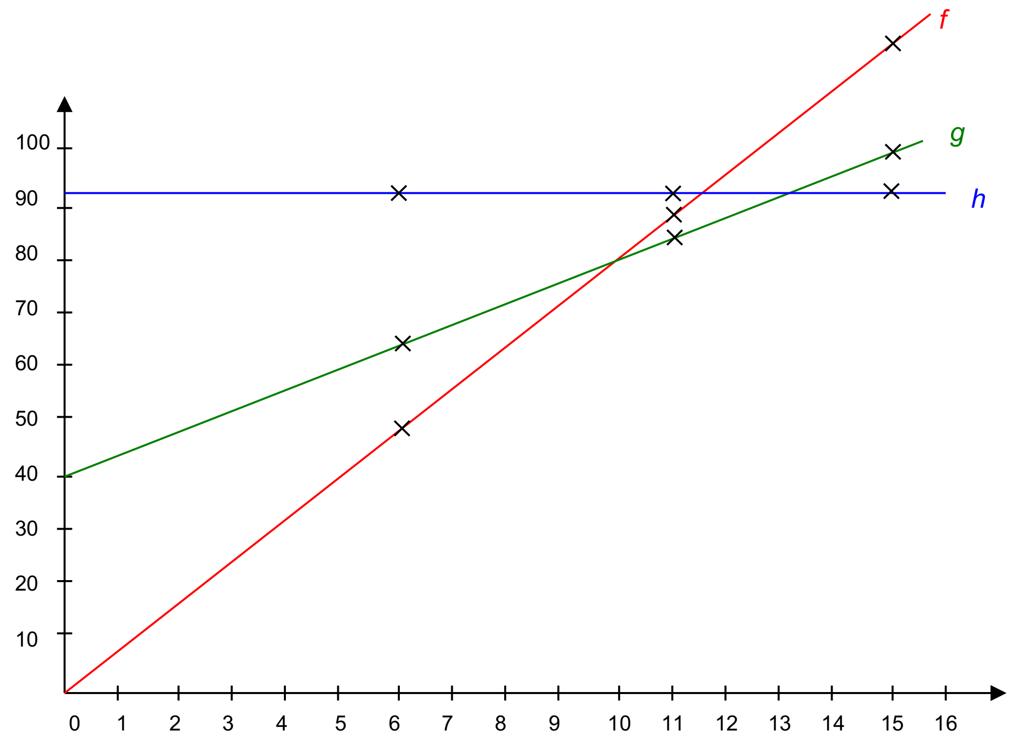
Vidéo https://youtu.be/OQ37ZFZnqZg

Exemple :
On poursuit l'exemple précédent :

Pour chaque tarif, on souhaite représenter sur un même graphique la dépense en fonction du nombre d'entrées.

Pour construire ces représentations graphiques, on utilise le tableau de valeurs suivant :

x	6	11	15
Tarif 1 : $f(x) = 8x$	48	88	120
Tarif 2 : $g(x) = 4x + 40$	64	84	100
Tarif 3 : $h(x) = 92$	92	92	92



Les représentations graphiques sont des droites.

<u>Propriétés :</u> 1) Une fonction affine est représentée par une droite.
2) Une fonction linéaire est représentée par une droite passant par l'origine.
3) Une fonction constante est représentée par une droite parallèle à l'axe des abscisses.

<u>Méthode :</u> Représenter graphiquement une fonction affine

Vidéo https://youtu.be/7xyYABOyKjM

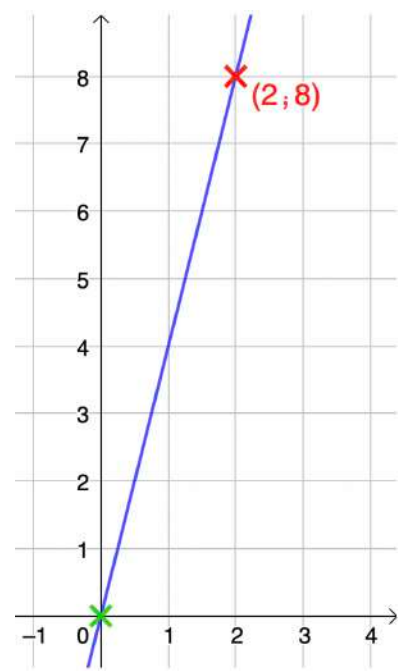
Représenter graphiquement les fonctions affines suivantes :
1) $f(x) = 4x$
2) $g(x) = 2x - 5$

Correction
Une fonction affine est représentée par une droite.
Or, pour tracer une droite, il suffit de déterminer deux points.

1) ● f est une fonction linéaire, donc sa droite représentative passe par l'origine.

● Déterminons un deuxième point appartenant à la droite :
Par exemple : si $x = 2$, alors $f(2) = 4 \times 2 = 8$.
Le point de coordonnées $(2\,;8)$ appartient à la droite.

● On trace ainsi la droite passant par l'origine et point de coordonnées $(2\,;8)$.

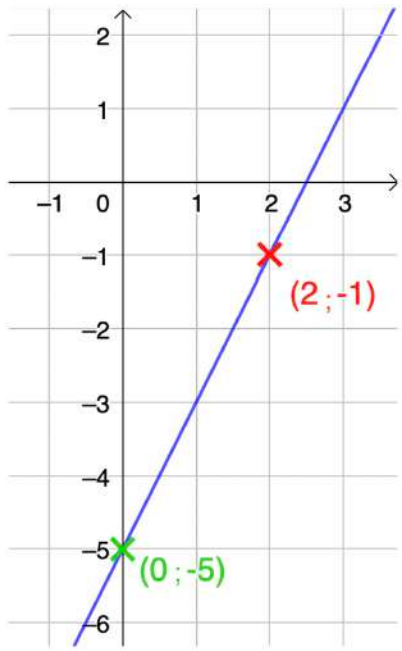


2) f est une fonction affine, déterminons deux points appartenant à sa droite représentative :

● Par exemple : si $x = 0$, alors $g(0) = 2 \times 0 - 5 = -5$. Le point de coordonnées (0 ; -5) appartient à la droite.

● Par exemple : si $x = 2$, alors $g(2) = 2 \times 2 - 5 = 4 - 5 = -1$. Le point de coordonnées (2 ; -1) appartient à la droite.

● On trace la droite passant par les points de coordonnées (0 ; -5) et (2 ; -1).



TP info : Représentations graphiques de fonctions affines
http://www.maths-et-tiques.fr/telech/Fonctions_affin.pdf

FONCTIONS AFFINES – Chapitre 2/2

Tout le cours en vidéo : https://youtu.be/n5_pRx4ozIg

Partie 1 : Fonction affine et droite associée

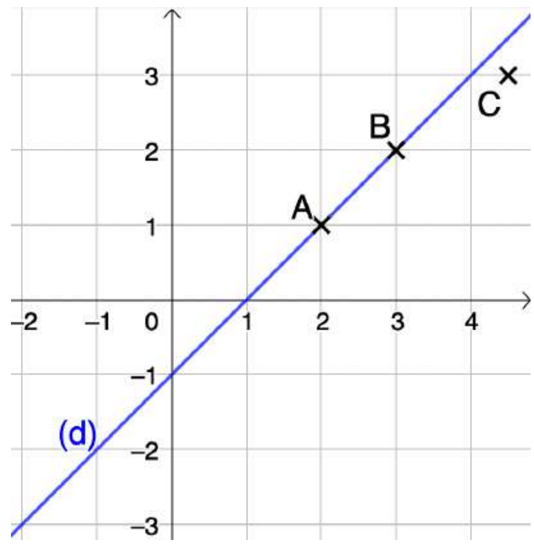
Vidéo https://youtu.be/KR8AgLUngeg

<u>Exemple :</u>
Soit (d) la représentation graphique de la fonction affine définie par $f(x) = x - 1$.

On a par exemple :
Si $x = 2$, alors $f(x) = f(2) = 2 - 1 = 1$.
Le point A de coordonnées $(2\,;1)$ appartient à la droite (d).

De même, si $x = 3$, alors $f(x) = f(3) = 3 - 1 = 2$.
Le point B de coordonnées $(3\,;2)$ appartient à la droite (d).

De façon générale :
Le point M de coordonnées $(x\,;f(x))$ appartient à la droite (d).



Cependant :
Le point C de coordonnées $(4{,}5\,;3)$ n'appartient pas à la droite (d).
En effet, si $x = 4{,}5$, alors $f(x) = f(4{,}5) = 4{,}5 - 1 = 3{,}5$ et non pas 3 !

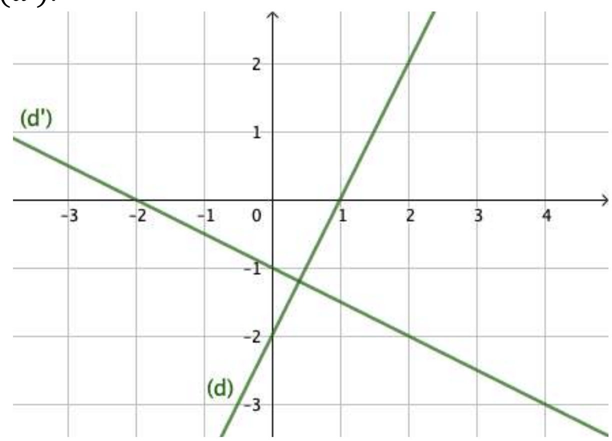
Partie 2 : Coefficient directeur et ordonnée à l'origine

<u>Définition :</u> Soit la fonction affine f définie par $f(x) = ax + b$.
- a s'appelle le **coefficient directeur**,
- b s'appelle l'**ordonnée à l'origine**.

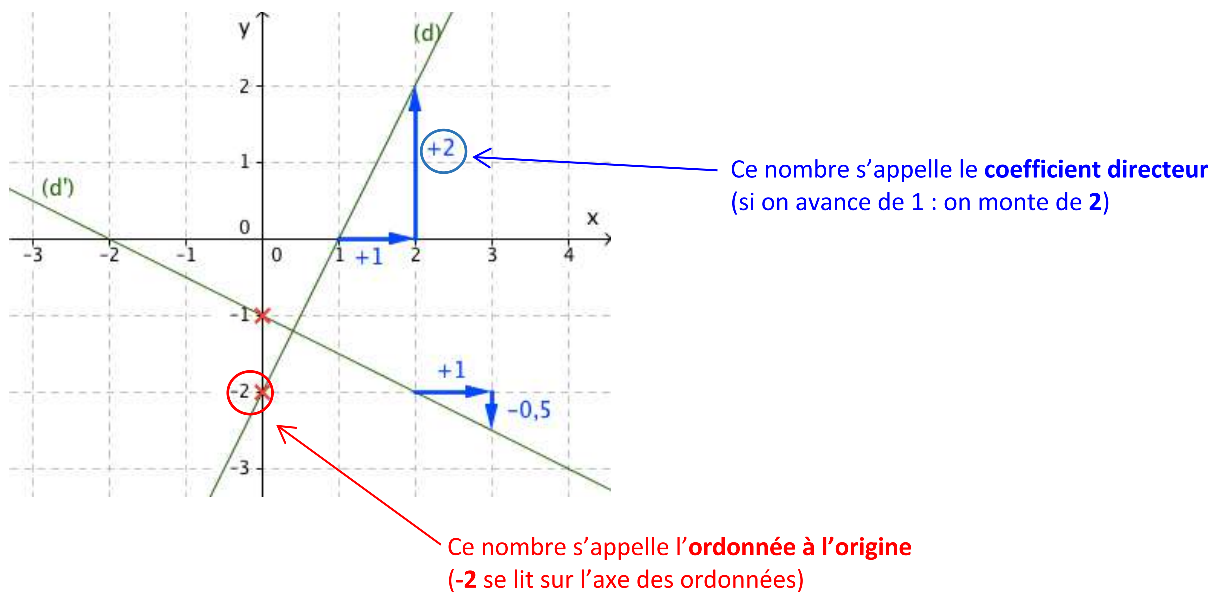
<u>Méthode :</u> Déterminer une fonction affine à l'aide de son coefficient directeur et de son ordonnée à l'origine

Vidéo https://youtu.be/E0NTyDRqWfM
Vidéo https://youtu.be/bgySp9gT8kA
Vidéo https://youtu.be/tEiuCP_oekY
Vidéo https://youtu.be/q68CLk2CNik

Déterminer graphiquement l'expression de la fonction f représentée par la droite (d) et de la fonction g représentée par la droite (d').



Correction



Pour (d) : Le coefficient directeur est 2
L'ordonnée à l'origine est -2

L'expression de la fonction f, représentée par la droite (d), est : $f(x) = 2x - 2$

Pour (d') : Le coefficient directeur est $-0{,}5$
L'ordonnée à l'origine est -1

L'expression de la fonction g, représentée par la droite (d'), est : $g(x) = -0{,}5x - 1$

Remarques :

- Si le coefficient directeur est ***positif***, alors on « ***monte*** » sur la droite en la parcourant de gauche à droite. On dit que la fonction affine associée est ***croissante***.
- Si le coefficient directeur est ***négatif***, alors on « ***descend*** » sur la droite. On dit que la fonction affine associée est ***décroissante***.

Partie 3 : Accroissements (non exigible)

<u>Propriété des accroissements :</u>
Soit la fonction affine f définie par $f(x) = ax + b$ et deux nombres distincts m et n.
Alors : $a = \frac{f(m)-f(n)}{m-n}$.

<u>Remarque</u> : Dans le calcul de a, inverser m et n n'a pas d'importance.
En effet : $\frac{f(m)-f(n)}{m-n} = \frac{f(n)-f(m)}{n-m}$

<u>Exemple :</u>
On considère la fonction affine f telle que $f(2) = 3$ et $f(5) = 4$.
Le coefficient directeur de la droite représentative de f est égal à :

$$\frac{f(2)-f(5)}{2-5} = \frac{3-4}{2-5} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$

<u>TP info :</u> « Fonctions affines »
https://www.maths-et-tiques.fr/telech/rep_fa.xls

Partie 4 : Déterminer une fonction affine à partir de deux images (Non exigible)

<u>Méthode :</u> Déterminer l'expression d'une fonction affine

Vidéo **https://youtu.be/cXl6snfEJbg**

Déterminer la fonction affine f vérifiant : $f(2) = 4$ et $f(5) = 1$

Correction
f est une fonction affine de la forme $f(x) = ax + b$
Déterminer f revient à trouver les valeurs de a et b.

- On applique la propriété des accroissements pour trouver le coefficient directeur a :

$$a = \frac{f(2)-f(5)}{2-5} = \frac{4-1}{2-5} = \frac{3}{-3} = -1$$

donc : $f(x) = (-1)x + b$ soit $f(x) = -x + b$.

- Or, on a par exemple : $f(5) = 1$

Comme : $f(x) = -x + b$
On a : $f(5) = -5 + b$
Donc : $1 = -5 + b$
Soit : $b = 1 + 5$
$b = 6$

D'où : $f(x) = -x + 6$.

PROPORTIONNALITÉ

Tout le cours les pourcentages en vidéo : https://youtu.be/1UV378tA_Hg

Partie 1 : Notion de proportionnalité (Rappel)

Méthode : Utiliser la proportionnalité

Vidéo https://youtu.be/qllXnid2UsE
Vidéo https://youtu.be/Qd6FDygCqDI

Il est conseillé de ne pas trop boire de soda. En effet, ces boissons contiennent beaucoup de sucre.

Sur une étiquette d'une canette de soda, on peut lire :
« Teneur en sucre : 10,8 g pour 100 mL de boisson. »
1) Quelle quantité de sucre contient une canette de 33 cL ?
2) À combien de morceaux de sucre de 6 g cela correspond ?

Correction

1) On présente les données dans un tableau de proportionnalité :

Masse de sucre (en g)	10,8	x
Quantité de boisson (en mL)	100	330

avec 33cL = 330 mL

On a donc, en effectuant le produit en croix :
x = 330 × 10,8 : 100 = 35,64 g.
Il y a donc 35,64 g de sucre dans la canette.

2) On calcule le nombre de morceaux de sucre dans la canette : 35,64 : 6 = 5,94.
Une canette de ce soda contient l'équivalent d'environ 6 morceaux de sucre.

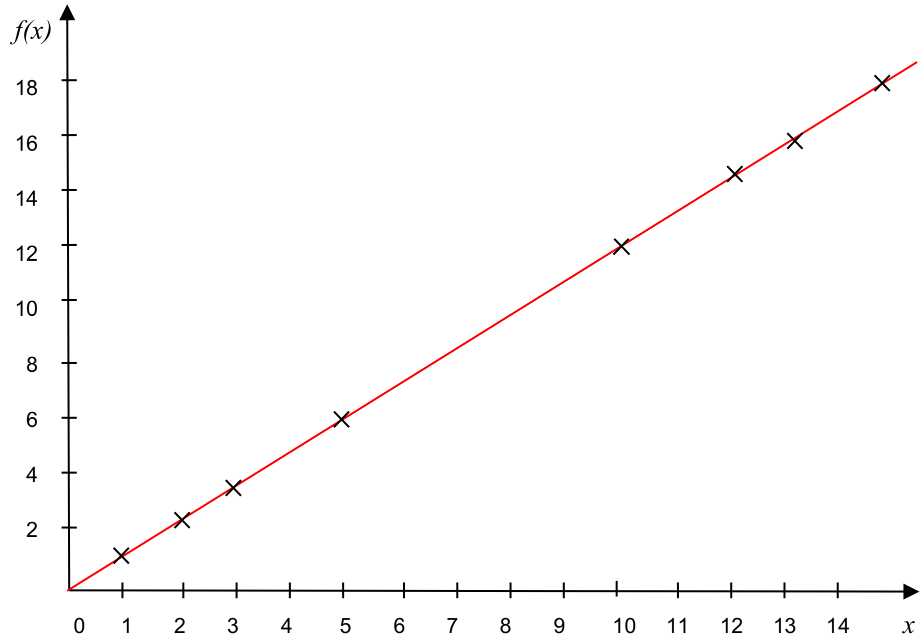
Partie 2 : Proportionnalité et représentation graphique (Rappel)

Exemple : Soit la fonction **linéaire** f définie par $f(x) = 1{,}2x$ dont on donne un tableau de valeurs :

x	1	2	3	5	10	12	13	15
$f(x)$	1,2	2,4	3,6	6	12	14,4	15,6	18

Ce tableau est un tableau de proportionnalité. En effet, on obtient tous les nombres de la 2e ligne du tableau en multipliant les nombres de la 1ère ligne par 1,2.

On a représenté les données du tableau dans un graphique. Les points sont alignés avec l'origine du repère.
La représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite passant par l'origine.



<u>Propriété :</u>
Sur un graphique, on reconnaît une situation de proportionnalité, lorsque cette situation est représentée par une droite qui passe par l'origine.

Partie 3 : Pourcentages

1) <u>Proportions (Rappel)</u>

<u>Méthode :</u> Utiliser une proportion exprimée en %

Vidéo https://youtu.be/Ce6E56gsbY0

On considère que 80% des jeunes aiment les maths. Sur un groupe de 25 élèves, combien d'entre eux devraient aimer les maths ?

Correction
On cherche les 80% de 25 :
Soit :

$$\frac{80}{100} \times 25$$
$$= 0{,}80 \times 25$$
$$= 20$$

Sur 25 élèves, on peut penser que 20 d'entre eux devraient aimer les maths.

2) Évolutions

Propriétés :
1) Augmenter un nombre de $25\ \%$ revient à le multiplier par $\mathbf{1+0,25}$.
2) Diminuer un nombre de $25\ \%$ revient à le multiplier par $\mathbf{1-\ 0,25}$.

Remarque : Cette propriété se généralise pour tout pourcentage.
Par exemple, augmenter un nombre de 59% revient à le multiplier par $\mathbf{1+0,59}$.

De façon générale :

- Augmenter un nombre de $N\ \%$ revient à le multiplier par $1+\dfrac{N}{100}$.
- Diminuer un nombre de $N\ \%$ revient à le multiplier par $1-\dfrac{N}{100}$.

Vidéo https://youtu.be/-5QmcMuzy5I

Méthode : Appliquer une augmentation ou une diminution en %

Vidéo https://youtu.be/c2s_Fta0jCo
Vidéo https://youtu.be/_HXPkDRYCYA

1) Le prix d'un blouson qui coutait 160 € est réduit de 35 %.
Calculer le nouveau prix du blouson.
2) Le prix d'un survêtement qui coûtait 49 € est augmenté de 8 %.
Calculer le nouveau prix du survêtement.

Correction
1) 160 € est le nombre de départ. Le prix est diminué de 35 %.
Diminuer un nombre de **35 %**, revient à le multiplier par $\mathbf{1-0,35}$.
Calcul du nouveau prix après diminution :
$160\times(1-0{,}35)$
$=\ 160\times 0{,}65$
$=\ 104$ €.
Le nouveau prix du blouson est de 104 €.

2) 49 € est le nombre de départ. Le prix est augmenté de 8 %.
Augmenter un nombre de **8 %**, revient à le multiplier par $\mathbf{1+0,08}$.
Calcul du nouveau prix après augmentation :
$49\times(1+0{,}08)$
$=\ 49\times 1{,}08$
$=\ 52{,}92$ €.
Le nouveau prix du survêtement est de 52,92 €.

PROBABILITÉS

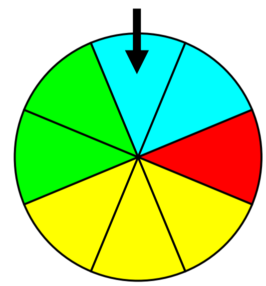
Tout le cours en vidéo : https://youtu.be/CBtj0nLx-N4

Partie 1 : Le vocabulaire en probabilité

1) Expérience aléatoire

Exemples :

- On lance une pièce de monnaie et on regarde la face supérieure.
- On lance un dé à six faces et on regarde le nombre de points inscrits sur la face du dessus.
- On fait tourner une roue marquée sur ses secteurs de couleurs différentes et on regarde le secteur marqué par la flèche.



Une **expérience** *(lancer un dé par exemple)* est **aléatoire** lorsqu'elle a plusieurs résultats ou **issues** *(pile ou face)* et que l'on ne peut pas prévoir quel résultat se produira.

2) Évènement

Exemples :

On lance un dé à six faces.

- « Obtenir un chiffre pair » est l'événement constitué des issues 2 ; 4 et 6.
- « Obtenir un chiffre inférieur ou égal à 2 » est l'événement constitué des issues 1 et 2.

Un **évènement** est constitué d'une ou plusieurs issues d'une même expérience aléatoire.

3) Évènement contraire

Exemples :

- L'évènement contraire de l'évènement « Obtenir un chiffre pair » est l'événement « Obtenir un chiffre impair ».
- L'évènement contraire de l'évènement « Obtenir un chiffre inférieur ou égal à 2 » est l'événement constitué des issues 3 ; 4 ; 5 et 6.

L'**événement contraire** de A, noté $\bar{A}$, est l'ensemble de toutes les issues n'appartenant pas à A.

Partie 2 : Notion de probabilité

1) Exemple

Vidéo https://youtu.be/ithQHSY9Z-E

Chaque élève lance 100 fois un dé à six faces et note les effectifs d'apparition de chaque face dans le tableau :

Faces	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***Total***
Effectifs	20	14	10	22	16	18	100

On regroupe ensuite l'ensemble des résultats de la classe dans un même tableau puis on calcule les fréquences d'apparition de chaque face.

Faces	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***Total***
Effectifs	434	456	443	459	435	473	2700
Fréquences	16,1%	16,9%	16,4%	17%	16,1%	17,5%	100

Les fréquences d'apparition sont très proches les unes des autres.

Théoriquement, il y a autant de chance d'obtenir un 1, un 2, … ou un 6.
En effectuant un nombre encore plus grand de lancers, les fréquences se rapprocheraient les unes des autres de façon encore plus évidente vers une valeur théorique.
Cette valeur, égale à $\frac{1}{6} \approx 0{,}167$, s'appelle la **probabilité** d'obtenir un 1, un 2, … ou un 6.

2) Définition

Exemple :
Dire que la probabilité d'un évènement est de $\frac{8}{10} = 0{,}8$ signifie que cet évènement à 8 chances sur 10 ou 80 % de chance de se produire.

La **probabilité** d'un évènement est un nombre compris entre 0 et 1 qui exprime
« la chance qu'a un évènement de se produire ».

Remarques :
- Un évènement dont la probabilité est égale à 0 est un **évènement impossible**.
- Un évènement dont la probabilité est égale à 1 est un **évènement certain**.
- Lorsque chaque issue a autant de chance de se produire, on dit qu'il y a **équiprobabilité**.

3) Calcul de probabilité

Propriété : La probabilité d'un évènement A est :

$$P(A) = \frac{Nombre\ d'issues\ favorables\ à\ A}{Nombre\ d'issues\ total}$$

Remarque : Pour que cette propriété soit vraie, chaque issue doit avoir autant de chance de se produire (équiprobabilité).

Cas de l'évènement contraire :

Propriété : $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Méthode : Calculer une probabilité

Vidéo https://youtu.be/d6Co0q01QH0

On lance un dé à six faces et on regarde le nombre inscrit sur la face du dessus.
Soit E l'évènement : « La face du dessus est un nombre supérieur ou égal à 3 ».

1) Quelle est la probabilité que l'évènement E se réalise ?
2) Calculer la probabilité de $\bar{E}$. Donner une interprétation du résultat.

Correction

1) - Le nombre d'issues favorables à E est égal à 4.
En effet, pour avoir un nombre supérieur ou égal à 3, il faut obtenir un 3, un 4, un 5 ou un 6.

- Le nombre d'issues total est égal à 6.
En effet, le dé a 6 faces.

- Ainsi d'après la formule : $P(E) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

La probabilité que l'évènement E se réalise est égale à $\frac{2}{3}$.
Il y a donc deux chances sur trois d'obtenir un nombre supérieur ou égal à 3.

2) $P(\bar{E}) = 1 - P(E) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

La probabilité que l'évènement $\bar{E}$ se réalise est égale à $\frac{1}{3}$.
Il y a donc une chance sur trois d'obtenir un nombre inférieur ou égal à 2.

Partie 3 : Expérience aléatoire à deux épreuves

Méthode : Calculer une probabilité à l'aide d'un tableau à double entrée

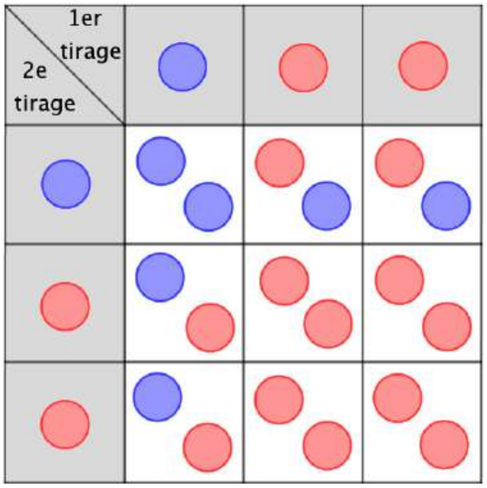
Vidéo https://youtu.be/5DGQ-49xzgI

Une urne contient une boule bleue et deux boules rouges. On tire deux fois de suite une boule de l'urne en la remettant dans l'urne après chaque tirage.

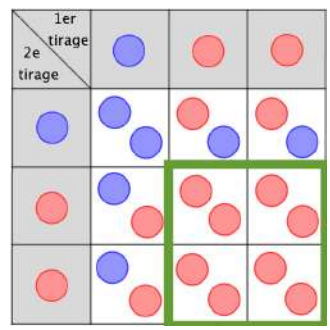
En utilisant un tableau à double entrée, déterminer la probabilité de :
a) Tirer successivement deux boules rouges,
b) Tirer au moins une boule rouge.

Correction

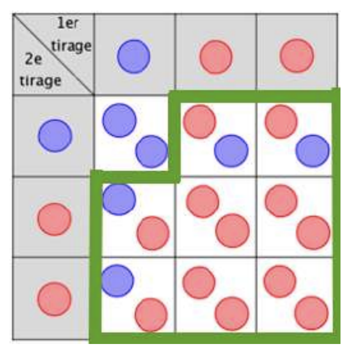
On réalise un tableau à double entrée présentant en ligne et en colonne les issues possibles pour chaque tirage :



a) On compte 4 issues favorables à l'événement « Tirer successivement deux boules rouges » et 9 issues en tout.
Donc la probabilité de tirer successivement deux boules rouges est égale à $\frac{4}{9}$.



b) On compte 8 issues favorables à l'événement « Tirer au moins une boule rouge » et 9 issues en tout.
Donc la probabilité de tirer au moins une boule rouge est égale à $\frac{8}{9}$.



STATISTIQUES

Tout le cours en vidéo : https://youtu.be/-7Db42jJRuo

En italien, « stato » désigne l'état. Ce mot a donné « statista » pour « homme d'état ».
En 1670, le mot est devenu en latin « statisticus » pour signifier ce qui est relatif à l'état. Les statistiques ont en effet d'abord désigné l'étude des faits sociaux relatifs à l'état.

Partie 1 : Moyenne, médiane, étendue

Dans toute la partie 1, les méthodes utilisent les 3 séries suivantes qui présentent les dernières notes obtenues par 3 élèves :

Victor : 4 ; 6 ; 18 ; 7 ; 17 ; 12 ; 12 ; 18

Nadir : 13 ; 13 ; 12 ; 10 ; 12 ; 3 ; 14 ; 12 ; 14 ; 15

Julie : 15 ; 9 ; 14 ; 13 ; 10 ; 12 ; 12 ; 11 ; 10

1) Moyenne (Rappel)

Méthode : Calculer une moyenne

Vidéo https://youtu.be/h0urYAnMUNI
Calculer les moyennes des notes de Victor, Nadir et Julie.

Correction

Victor : Moyenne = (4 + 6 + 18 + 7 + 17 + 12 + 12 + 18) : 8 ≈ 11,8
Nadir : Moyenne = (13 + 13 + 12 + 10 + 12 + 3 + 14 + 12 + 14 + 15) : 10 = 11,8
Julie : Moyenne = (15 + 9 +14 + 13 + 10 + 12 + 12 + 11 + 10) : 9 ≈ 11,8

Méthode : Calculer une moyenne pondérée

Vidéo https://youtu.be/U1NamiLxBaI

Supposons qu'on attribue des coefficients aux notes de Victor :

Note	4	6	18	7	17	12	12	18
Coefficient	1	1	4	2	4	2	4	2

Calculer alors la moyenne pondérée des notes de Victor.

Correction

Moyenne $= \dfrac{1\times 4+1\times 6+4\times 18+2\times 7+4\times 17+2\times 12+4\times 12+2\times 18}{1+1+4+2+4+2+4+2} = \dfrac{272}{20} = 13{,}6$

Dans ce cas, la moyenne de Victor est égale à 13,6. Cette moyenne est nettement supérieure à la moyenne sans les coefficients. Cela s'explique par le fait que ses meilleures notes ont de grands coefficients, et à l'inverse, ses notes les plus faibles ont de petits coefficients.

2) Médiane (Rappel)

Définition : La médiane partage une série ordonnée en deux groupes de même effectif.

Méthode : Calculer une médiane

Vidéo https://youtu.be/tf9fFDacKAQ (à partir d'une liste)
Vidéo https://youtu.be/lv9ZJ8dGn54 (à partir d'un tableau)
Vidéo https://youtu.be/msDPkgW2nhw (à partir d'un diagramme)

Calculer les médianes des notes de Victor, Nadir et Julie.

Correction
Pour déterminer les notes médianes, il faut ordonner les séries.
La médiane partage la série en deux groupes de même effectif.

Victor :

$$\underbrace{4\quad 6\quad 7\quad 12}_{\text{4 valeurs}}\ \underset{\text{Médiane}}{\uparrow}\ \underbrace{12\quad 17\quad 18\quad 18}_{\text{4 valeurs}}$$

Médiane = 12

Nadir :

$$\underbrace{3\quad 10\quad 12\quad 12\quad 12}_{\text{5 valeurs}}\ \underset{\text{Médiane}}{\uparrow}\ \underbrace{13\quad 13\quad 14\quad 14\quad 15}_{\text{5 valeurs}}$$

Médiane = (12 + 13) : 2 = 12,5

Julie :

$$\underbrace{9\quad 10\quad 10\quad 11}_{\text{4 valeurs}}\quad \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Médiane}}}{12}\quad \underbrace{12\quad 13\quad 14\quad 15}_{\text{4 valeurs}}$$

Médiane = 12

3) Étendue

Définition :
Étendue = plus grande valeur – plus petite valeur

Méthode : Calculer une étendue

Vidéo https://youtu.be/JicN3egTNPg

Calculer les étendues des notes de Victor, Nadir et Julie.

Correction

L'étendue d'une série statistique est la différence entre la plus grande valeur et la plus petite.

Victor : La plus grande valeur est 18 et la plus petite valeur est 4 donc :
Étendue = 18 – 4 =14

Nadir : Étendue = 15 – 3 = 12

Julie : Étendue = 15 – 9 = 6

Remarque : On a vu que les trois élèves ont approximativement la même moyenne mais les étendues sont très différentes. Les notes de Victor par exemple sont beaucoup plus dispersées autour de la moyenne que les notes de Julie. Victor a été plus irrégulier.

Exercices (Calculs de moyenne, médiane et étendue) :

Vidéo https://youtu.be/Lv3qvDjW6_Q

Vidéo https://youtu.be/aO3pb-FEsbk

Vidéo https://youtu.be/AcSxB_wedkU

Partie 2 : Fréquence

Définition :

$$Fréquence = \frac{Effectif}{Effectif\ total}$$

Méthode : Calculer des fréquences

Vidéo https://youtu.be/GWDDay-mdVA

On interroge des élèves sur leur taille (en cm).
Voici les résultats de l'enquête :

Taille	$150 \leq t < 155$	$155 \leq t < 160$	$160 \leq t < 165$	$165 \leq t < 170$	$170 \leq t < 175$	$175 \leq t < 180$
Effectif	2	4	7	8	3	3

Calculer les fréquences correspondantes en % arrondies au dixième.

Correction

Calcul de l'effectif total : 2 + 4 + 7 + 8 + 3 + 3 = 27.
Les fréquences en % sont calculés dans le tableau suivant :

Taille	$150 \leq t < 155$	$155 \leq t < 160$	$160 \leq t < 165$	$165 \leq t < 170$	$170 \leq t < 175$	$175 \leq t < 180$
Effectif	2	4	7	8	3	3
Fréquence	$\frac{2}{27} \approx 0{,}074$	$\frac{4}{27} \approx 0{,}148$	$\frac{7}{27} \approx 0{,}259$	$\frac{8}{27} \approx 0{,}296$	$\frac{3}{27} \approx 0{,}111$	$\frac{3}{27} \approx 0{,}111$
Fréquence en %	7,4 %	14,8 %	25,9 %	29,6 %	11,1 %	11,1 %

Partie 3 : Histogramme

Méthode : Construire un histogramme

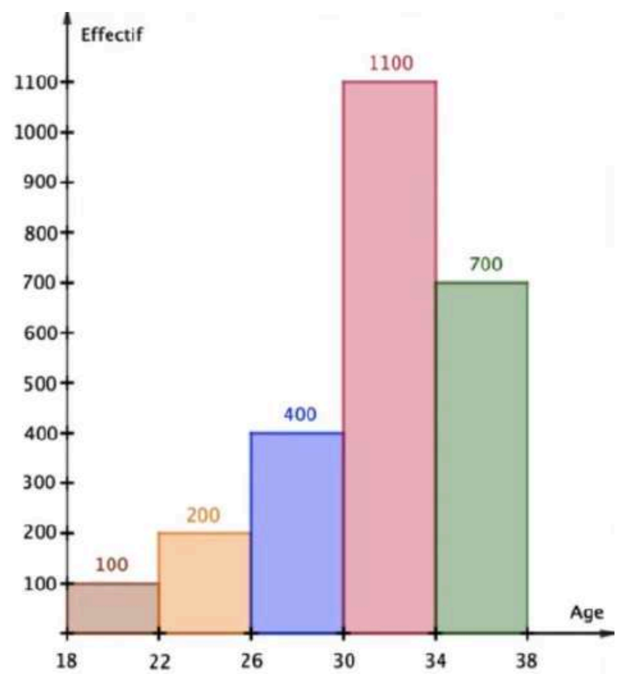
Vidéo https://youtu.be/BJMLHFmTMcE

Une enquête a été réalisée auprès de 2500 personnes à partir de la question suivante : « À quel âge avez-vous trouvé un emploi correspondant à votre qualification ? » Les résultats de l'enquête sont reportés dans le tableau.
Représenter ces données par un histogramme.

Âge	Effectif
[18 ; 22 [	100
[22 ; 26 [	200
[26 ; 30 [	400
[30 ; 34 [	1 100
[34 ; 38 [	700

D'après « Attendus de fin d'année 3e »

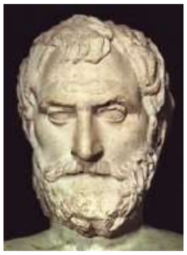
Correction



TP info : « Notes »
http://www.maths-et-tiques.fr/telech/Notes.pdf
http://www.maths-et-tiques.fr/telech/Notes.ods (feuille de calcul OOo)

THÉORÈME DE THALÈS

Tout le cours en vidéo : https://youtu.be/puuHhlf0jAQ



Thalès serait né autour de 625 avant J.C. à Milet en Asie Mineure (actuelle Turquie). Considéré comme l'un des sept sages de l'Antiquité, il est à la fois mathématicien, ingénieur, philosophe et homme d'Etat mais son domaine de prédilection est l'astronomie.
Il aurait prédit avec une grande précision l'éclipse du soleil du 28 mai de l'an - 585. Ce n'est peut-être qu'une légende, Thalès en explique cependant le phénomène.
Curieusement, le fameux théorème de Thalès n'a pas été découvert par Thalès. Il était déjà connu avant lui des babyloniens et ne fut démontré qu'après lui par Euclide d'Alexandrie.

Partie 1 : Le théorème de Thalès « version triangles emboîtés » (Rappel)

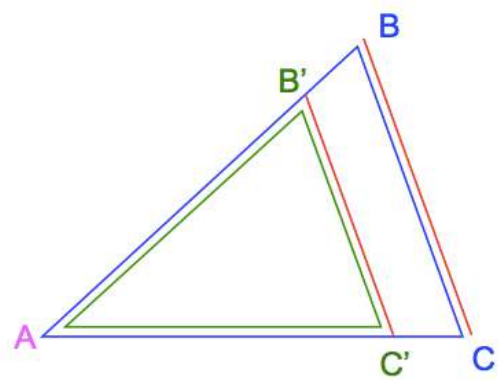
Animation : *http://www.maths-et-tiques.fr/telech/Thales4.ggb*

LE THÉORÈME DE THALÈS

Soit deux triangles ABC et $AB'C'$, tels que :
A, B, B' et A, C, C' sont alignés.

Si $(B'C')//(BC)$

alors : $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$



Comment retenir le théorème de Thalès ?

ABC et $AB'C'$ sont deux triangles en situation de Thalès : ils ont un sommet commun A, et deux côtés parallèles $(B'C')$ et (BC).
Un triangle est un « agrandissement » de l'autre. Ils ont donc des côtés deux à deux proportionnels.
On obtient la formule de Thalès :

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$$

← Le petit triangle $AB'C'$
← Le grand triangle ABC

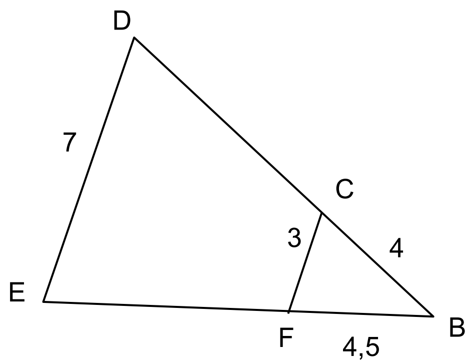
↑ 1ers côtés ↑ 2èmes côtés ↑ 3èmes côtés

Savoir utiliser : *http://www.maths-et-tiques.fr/telech/thales_ecrire.pdf*

Méthode : Calculer une longueur à l'aide du théorème de Thalès

Vidéo https://youtu.be/zP16D2Zrv1A

Sur la figure ci-dessous, les triangles BCF et BDE sont tels que (CF) et (DE) sont parallèles.
Calculer : a) BE b) BD
Donner la valeur exacte et éventuellement un arrondi au dixième.



Correction

a) Les triangles BCF et BDE sont en situation de Thalès car (CF) // (DE), donc :

$$\frac{BC}{BD} = \frac{BF}{BE} = \frac{CF}{DE}$$

$$\frac{4}{BD} = \boxed{\frac{4,5}{BE} = \frac{3}{7}}$$

$$\frac{4,5}{BE} = \frac{3}{7}$$

Soit : $BE = 4,5 \times 7 : 3 = 10,5$

2) On a : $\boxed{\frac{4}{BD}} = \frac{4,5}{BE} = \boxed{\frac{3}{7}}$

$$\frac{4}{BD} = \frac{3}{7}$$

Soit : $BD = 4 \times 7 : 3 = \frac{28}{3}$ (Valeur exacte)

$\approx 9,3$ (Valeur approchée)

Partie 2 : Le théorème de Thalès « version papillon »

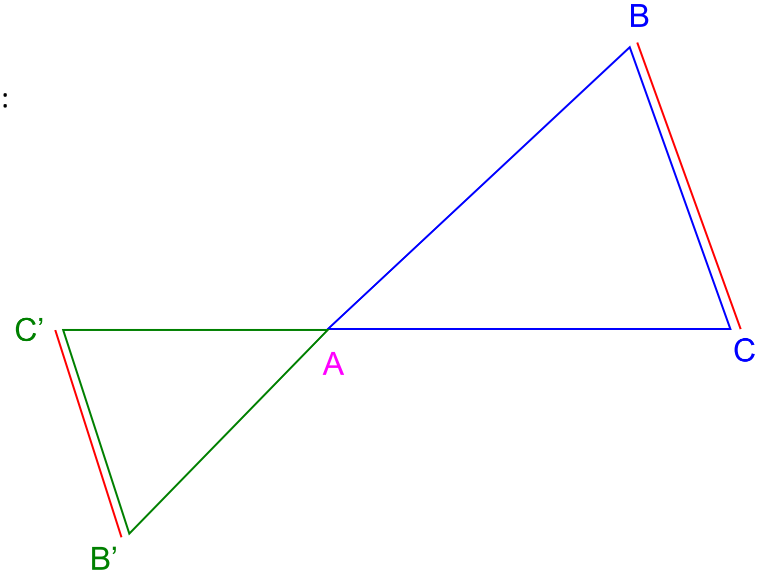
Animation : *http://www.maths-et-tiques.fr/telech/Thales.ggb*

LE THÉORÈME DE THALÈS

Soit deux triangles ABC et $AB'C'$, tels que :
A, B, B' et A, C, C' sont alignés.

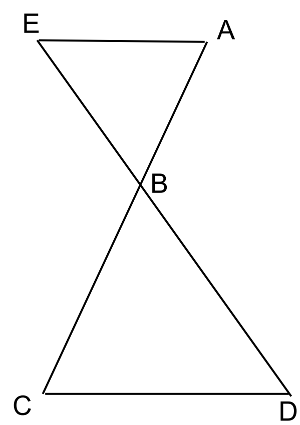
Si $(B'C')//(BC)$

alors : $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$



Méthode : Calculer une longueur à l'aide du théorème de Thalès

Vidéo https://youtu.be/cq3wBbXYB4A



Les triangles BAE et BDC sont tels que les droites (AE) et (CD) sont parallèles.
On donne : $BE = 2\ cm$, $BD = 5\ cm$, et $CD = 6\ cm$.
Calculer AE.

Correction
Les triangles BAE et BDC sont en situation de Thalès car (AE) et (CD) sont parallèles, donc :

$$\frac{BA}{BC} = \frac{BE}{BD} = \frac{AE}{CD}$$

$$\frac{BA}{BC} = \frac{2}{5} = \frac{AE}{6}$$

$$\frac{2}{5} = \frac{AE}{6}$$

Et donc $AE = 6 \times 2 : 5 = 2{,}4\ cm$.

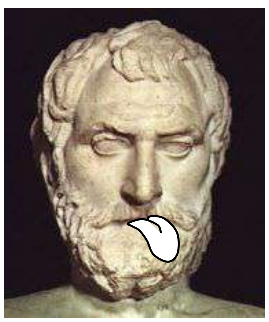
Activités de groupe : Le paradoxe de Lewis Carroll
http://www.maths-et-tiques.fr/telech/L_CARROLL.pdf

Des hauteurs inaccessibles
http://www.maths-et-tiques.fr/telech/haut_inacc.pdf
http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/expositions-deleves/hauteurs-inaccessibles

Partie 3 : La réciproque du théorème de Thalès

Animation : http://www.maths-et-tiques.fr/telech/RThales.ggb

LA RÉCIPROQUE DU THÉORÈME DE THALÈS

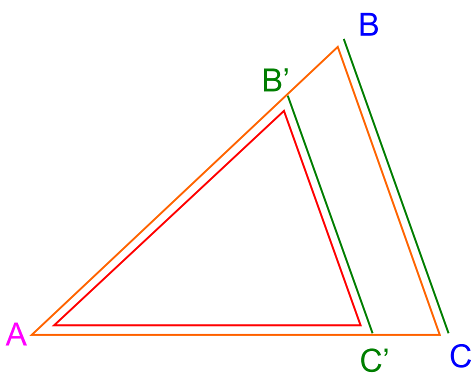


Thalès de Milet (-624 ; -546)

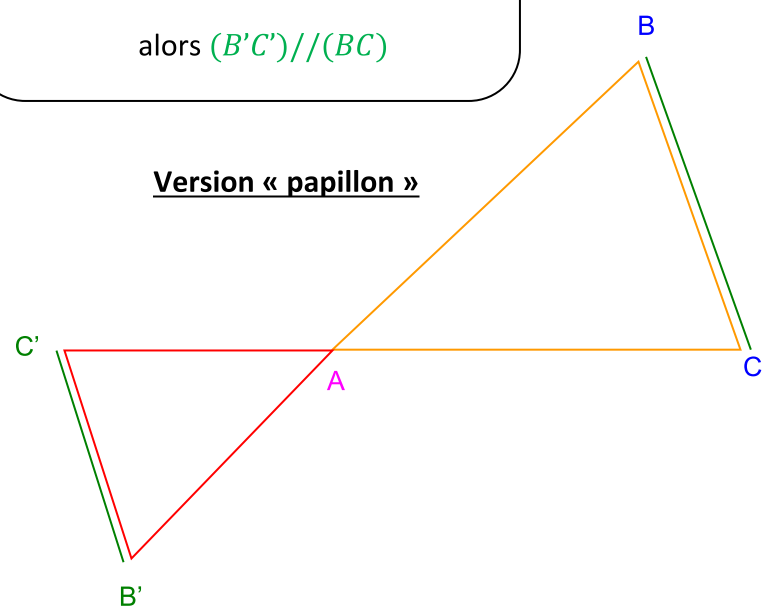
Si les points A, B, B' sont alignés dans le même ordre que les points A, C, C' et $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}$

alors $(B'C')//(BC)$

Version « triangles emboités »



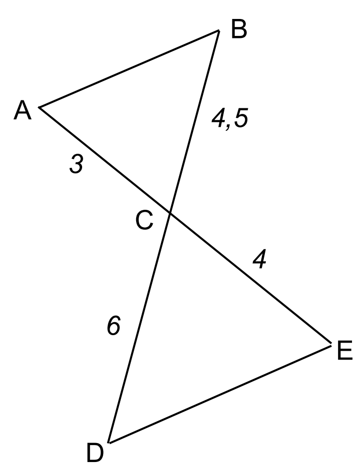
Version « papillon »



Méthode : Démontrer que deux droites sont parallèles

Vidéo https://youtu.be/uaPicwUSQz0

Sur la figure ci-contre, les points A, C, E sont alignés et les points B, C, D sont également alignés dans le même ordre.
Les droites (AB) et (DE) sont-elles parallèles ?



Correction

● D'une part : $\dfrac{CA}{CE} = \dfrac{3}{4} = 0{,}75$

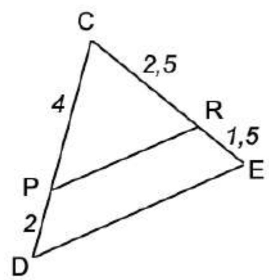
● D'autre part : $\dfrac{CB}{CD} = \dfrac{4{,}5}{6} = 0{,}75$

Donc : $\dfrac{CA}{CE} = \dfrac{CB}{CD}$

De plus les points A, C, E sont alignés dans le même ordre que les points B, C, D.
D'après la réciproque du théorème de Thalès, on peut conclure que les droites (AB) et (DE) sont parallèles.

Méthode : Démontrer que deux droites ne sont pas parallèles

Vidéo https://youtu.be/ovlhagzONlw



Les droites (PR) et (DE) sont-elles parallèles ?

Correction

• D'une part : $\dfrac{CP}{CD} = \dfrac{4}{6} \approx 0{,}67$

• D'autre part : $\dfrac{CR}{CE} = \dfrac{2{,}5}{4} = 0{,}625$

Donc : $\dfrac{CP}{CD} \neq \dfrac{CR}{CE}$

On ne peut pas utiliser la réciproque du théorème de Thalès.
(PR) et (DE) ne sont pas parallèles.

Lors d'un voyage en Egypte, ***Thalès de Milet*** (-624 ; -546) aurait mesuré la hauteur de la pyramide de Kheops par un rapport de proportionnalité avec son ombre.
Citons : *« Le rapport que j'entretiens avec mon ombre est le même que celui que la pyramide entretient avec la sienne. »*
Par une relation de proportionnalité, il obtient la hauteur de la pyramide grâce à la longueur de son ombre.
L'idée ingénieuse de Thalès est la suivante : *« A l'instant où mon ombre sera égale à ma taille, l'ombre de la pyramide sera égale à sa hauteur. »*

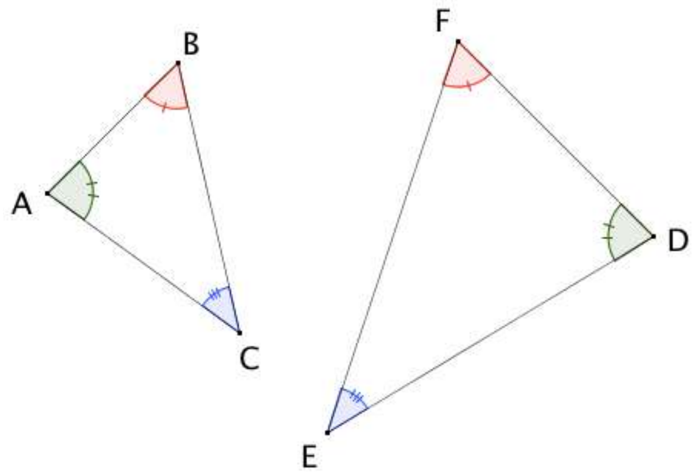
TRIANGLES SEMBLABLES

Tout le cours en vidéo : https://youtu.be/38DTCmRRvUs

Partie 1 : Les angles

Définition : On appelle **triangles semblables**, des triangles qui ont des angles deux à deux égaux.

Exemple :
Les triangles ABC et DEF sont semblables, en effet :



$\widehat{ABC} = \widehat{DFE}$

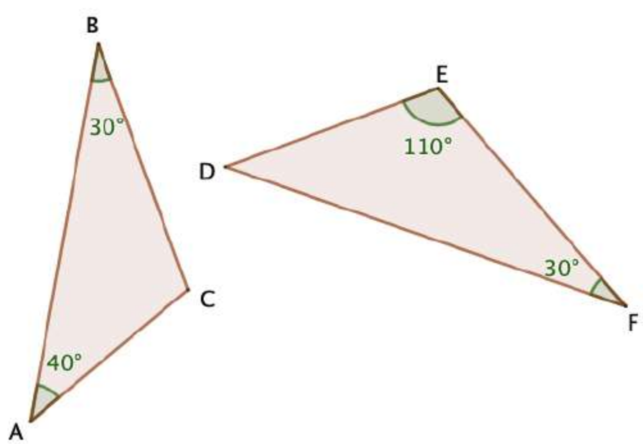
$\widehat{BAC} = \widehat{EDF}$

$\widehat{ACB} = \widehat{DEF}$

Méthode : Montrer que deux triangles sont semblables avec les angles

Vidéo https://youtu.be/TAeQhd1r3QI

Démontrer que les triangles ABC et DEF sont semblables.



Correction

- Dans le triangle ABC, on calcule l'angle $\hat{C}$ à l'aide de la règle des 180°.

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$
$40° + 30° + \hat{C} = 180°$
$70° + \hat{C} = 180°$
$\hat{C} = 180° - 70°$
$\hat{C} = 110°.$

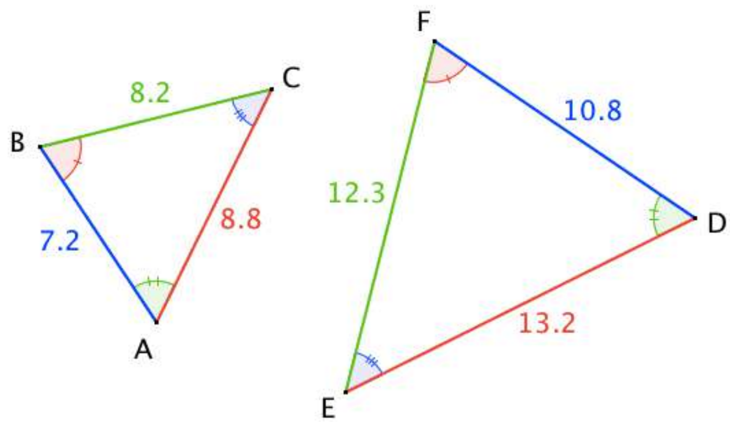
- Dans le triangle DEF, on calcule l'angle $\widehat{D}$ à l'aide de la règle des 180°.
$\widehat{D} + \widehat{E} + \widehat{F} = 180°$
$\widehat{D} + 110° + 30° = 180°$
$\widehat{D} + 140° = 180°$
$\widehat{D} = 180° - 140°$
$\widehat{D} = 40°$.

- On ainsi : $\hat{A} = \widehat{D}, \hat{B} = \hat{F}, \hat{C} = \hat{E}$
Les triangles ABC et DEF ont des angles deux à deux égaux, ils sont semblables.

A noter :
Pour montrer que deux triangles sont semblables, il suffit de s'assurer que **deux couples** d'angles sont égaux deux à deux. En effet, d'après la règle des 180°, le dernier couple d'angles le sera nécessairement.

Partie 2 : Les cotés

<u>Exemple :</u>
Les triangles ABC et DEF sont semblables.



Dans un tableau, on range dans l'ordre croissant les côtés des deux triangles :

Côtés de DEF	DF = 10,8	EF = 12,3	ED = 13,2
Côtés de ABC	AB = 7,2	BC = 8,2	AC = 8,8

On constate ainsi que :

$$\frac{10{,}8}{7{,}2} = \frac{12{,}3}{8{,}2} = \frac{13{,}2}{8{,}8} = 1{,}5$$

Les côtés du triangle ABC sont donc proportionnels aux côtés du triangle DEF.

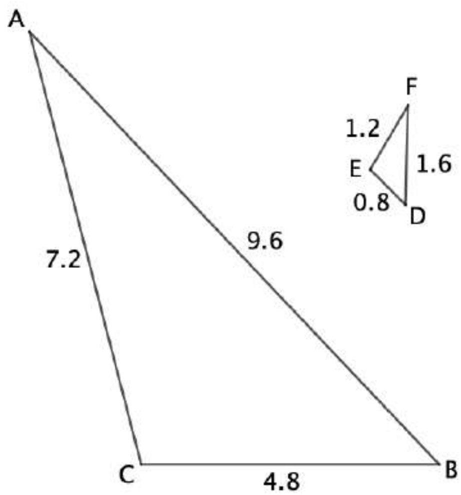
Propriété : Dire que deux triangles sont semblables revient à dire que les longueurs des côtés de l'un sont proportionnelles aux longueurs des côtés de l'autre.

Remarque : Le coefficient de proportionnalité est appelé le coefficient d'agrandissement ou de réduction.

Méthode : Montrer que des triangles sont semblables avec les côtés

Vidéo https://youtu.be/LoYKBLIrCdY

Montrer que les triangles ABC et DEF sont semblables.



Correction

Dans un tableau, on range dans l'ordre croissant les côtés des deux triangles :

Côtés de ABC	CB = 4,8	AC = 7,2	AB = 9,6
Côtés de DEF	AB = 0,8	BC = 1,2	AC = 1,6

On constate ainsi que :

$$\frac{4,8}{0,8} = \frac{7,2}{1,2} = \frac{9,6}{1,6} = 6$$

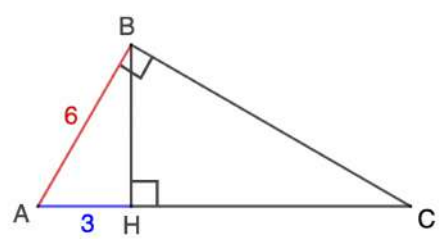
Les côtés du triangle ABC sont donc proportionnels aux côtés du triangle DEF donc les triangles ABC et DEF sont semblables.

Méthode : Utiliser des triangles semblables

Vidéo https://youtu.be/h0tnW4JqQjQ

Vidéo https://youtu.be/F3SuRBTkaGM

1) Montrer que les triangles ABC et ABH sont semblables.
2) Calculer la longueur AC.



Correction

1) On sait que : $\widehat{AHB} = \widehat{ABC} = 90°$.
$\widehat{HAB} = \widehat{CAB}$. Ces angles sont superposés dont ils ont la même mesure.

D'après la règle des 180°, le dernier couple d'angles est égale.
Donc $\widehat{ABH}$ = $\widehat{BCA}$.
On en déduit que les triangles ABC et ABH sont semblables.

2) Comme les triangles ABC et ABH sont semblables, les longueurs des côtés de l'un sont proportionnelles aux longueurs des côtés de l'autre.
A l'aide de la figure, on range les côtés des deux triangles dans l'ordre croissant.

Côtés de ABC	$AB = 6$	BC	AC
Côtés de ABH	$AH = 3$	BH	$AB = 6$

↑ Petits côtés de l'angle droit ↑ Grands côtés de l'angle droit ↑ Hypoténuses

On a donc $\frac{AB}{AH} = \frac{BC}{BH} = \frac{AC}{AB}$, soit : $\frac{6}{3} = \frac{BC}{BH} = \frac{AC}{6}$

On applique le produit en croix : $\frac{6}{3} = \frac{AC}{6}$

$AC = 6 \times 6 : 3$
$AC = 12\ cm$

Pour aller plus loin :

Vidéo https://youtu.be/0tB0jmrMaLc
Vidéo https://youtu.be/chTB8q0cY9Q

TRIGONOMÉTRIE

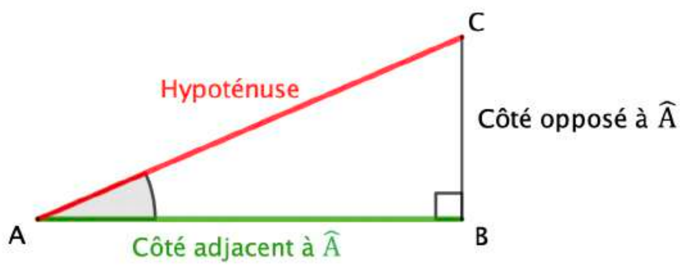
Tout le cours en vidéo : https://youtu.be/DfgUYXB5_jg

Partie 1 : Le cosinus (Rappel)

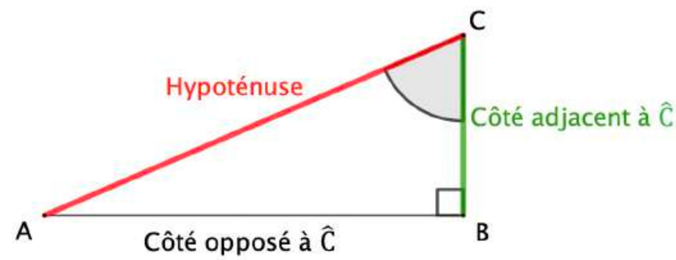
1) Vocabulaire

Dans le triangle ABC **rectangle en B** :
Le plus grand côté, ici [AC], est appelé **l'hypoténuse**.

Par rapport à l'angle $\widehat{A}$:



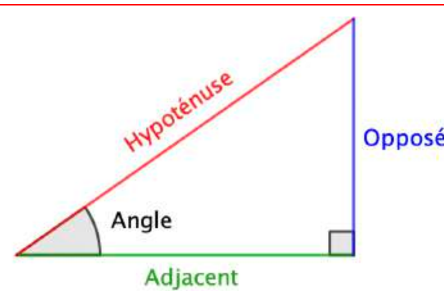
Par rapport à l'angle $\widehat{C}$:



2) Formule

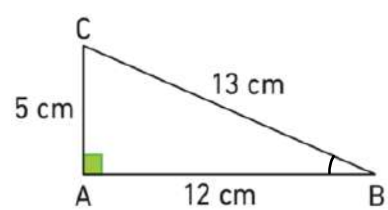
Dans un triangle rectangle :

$$\cos\,(Angle) = \frac{Adjacent}{Hypoténuse}$$



Exemple :

$$\cos(\widehat{B}) \ = \frac{BA}{BC} \ = \frac{12}{13} \approx 0{,}92$$



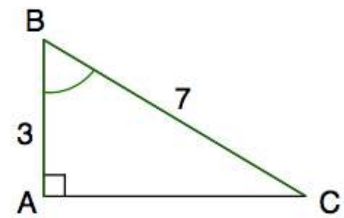
Remarques :
- Le cosinus ne s'applique jamais sur l'angle droit.
- Le cosinus d'un angle est un nombre sans unité.
- Le cosinus est un nombre compris entre 0 et 1.

3) Calculer un angle

La calculatrice doit être en **MODE degré** (DEG)

Méthode : Calculer un angle à l'aide du cosinus

Vidéo https://youtu.be/EQk7WyojUgY



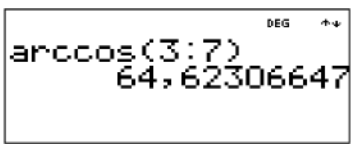
Calculer la mesure de l'angle $\hat{B}$ au dixième de degré près.

Correction

Dans le triangle ABC rectangle en A, on a :

$$\cos(\hat{B}) = \frac{BA}{BC}$$

$$\cos(\hat{B}) = \frac{3}{7}$$

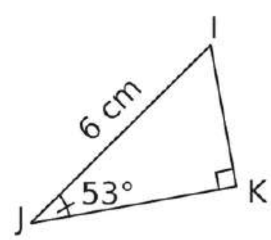


$\hat{B} \approx 64{,}6°$

4) Calculer une longueur

Méthode : Calculer une longueur à l'aide du cosinus

Vidéo https://youtu.be/8MQ0ecvoSOc



Calculer JK, arrondi au centième.

Correction

Dans le triangle IJK rectangle en K, on a :

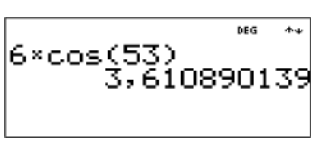
$$\cos(\hat{J}) = \frac{JK}{JI}$$

$$\cos(53°) = \frac{JK}{6}$$

$$\frac{\cos(53°)}{1} = \frac{JK}{6}$$

$JK = 6 \times cos\,(53°) : 1$

$JK \approx 3{,}61$



Partie 2 : Cosinus, sinus et tangente

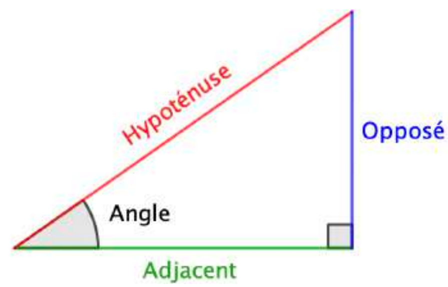
1) Formules de trigonométrie

Dans un triangle rectangle, on a :

$$\cos(Angle) = \frac{Adjacent}{Hypoténuse}$$

$$\sin(Angle) = \frac{Opposé}{Hypoténuse}$$

$$\tan(Angle) = \frac{Opposé}{Adjacent}$$



2) Petit truc pour mémoriser les formules :

M. Trigo te dit :

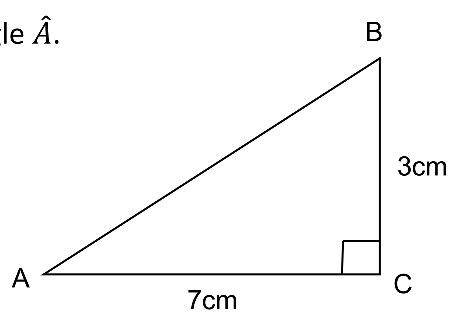
Vidéo https://youtu.be/XGnTdigL8fg

3) Calculer un angle

Méthode : Calculer un angle à l'aide de cosinus, sinus ou tangente

Vidéo https://youtu.be/md7hgVVKVI0
Vidéo https://youtu.be/Cm9R1l0CSLo

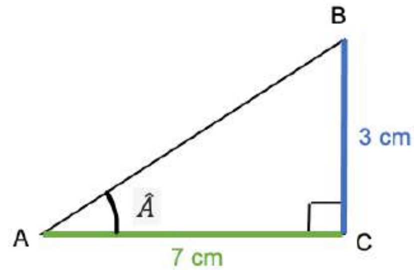
Calculer la mesure, au degré près, de l'angle $\hat{A}$.



Correction
On connait la longueur du côté adjacent AC et du côté opposé BC à l'angle $\hat{A}$. Et on cherche l'angle $\hat{A}$.

CAH SOH $\boxed{\text{TOA}}$

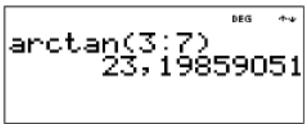
On choisit donc *tangente*.



Dans le triangle ABC rectangle en C, on a :

$\tan \hat{A} = \frac{BC}{AC}$

$\tan \hat{A} = \frac{3}{7}$



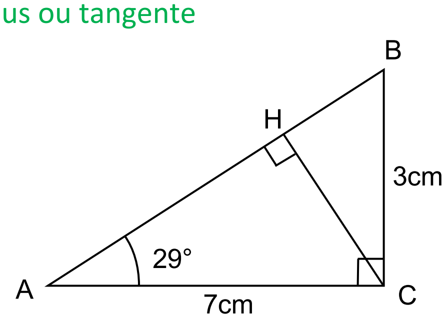
$\hat{A} \approx 23°$

4) <u>Calculer une longueur</u>

<u>Méthode :</u> Calculer une longueur à l'aide de cosinus, sinus ou tangente

Vidéo https://youtu.be/BscM5Iti3zI
Vidéo https://youtu.be/FczJ1GvpD3w

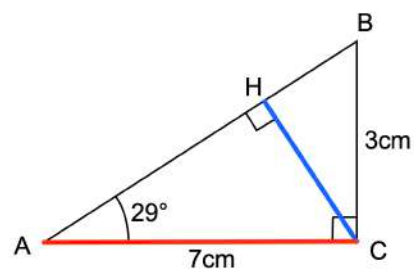
Calculer la longueur HC arrondie au dixième de cm.



Correction
Dans le triangle AHC, on connait l'angle $\widehat{HAC}$, l'hypoténuse AC et on cherche le côté opposé HC à l'angle $\widehat{HAC}$.

CAH $\boxed{\text{SOH}}$ TOA

On choisit donc le *sinus*.



Dans le triangle AHC rectangle en H, on a :

$\sin \widehat{HAC} = \frac{HC}{AC}$

$\sin 29° = \frac{HC}{7}$

$HC = 7 \times sin\ 29°$

$HC \approx 3{,}4\ cm$

TRANSFORMATIONS – Chapitre 1/2

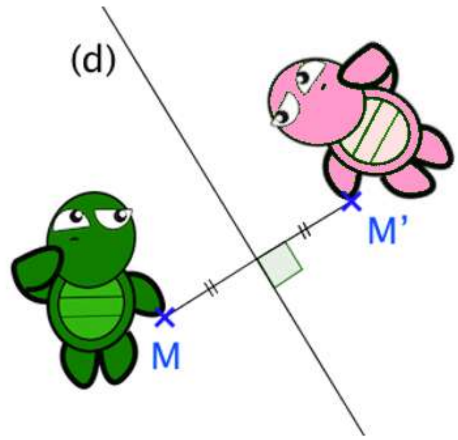
Tout le cours en vidéo : https://youtu.be/4hACSwA1cn4

Partie 1 : Symétries, translation (Rappels)

1) Symétrie axiale

Vidéo https://youtu.be/sRcgsiPelq4

Une symétrie axiale transforme une figure par effet miroir par rapport à l'axe de symétrie.



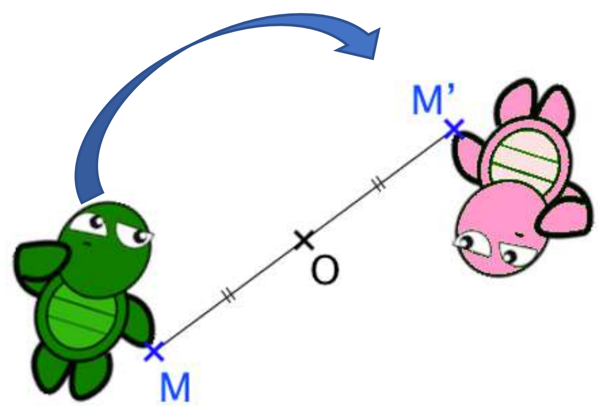
M' est l'image de M par la symétrie d'axe **(d)** :
- [MM'] est perpendiculaire à (d),
- M et M' sont à égale distance de (d).

Remarque : (d) est la médiatrice de [MM'].

2) Symétrie centrale

Vidéo https://youtu.be/gQZIWxzOfaE

Une symétrie centrale fait tourner une figure autour d'un point en effectuant un demi-tour.



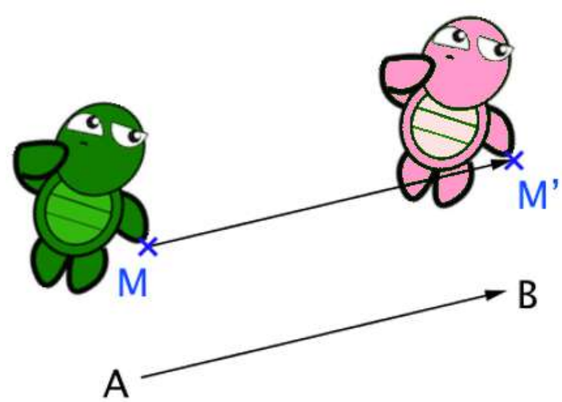
M' est l'image de M par la symétrie de centre **O** :
- M, O et M' sont alignés,
- MO = OM'.

Remarque : O est le milieu de [MM'].

3) Translation

Vidéo https://youtu.be/YzG5ZP9Kp6k
Vidéo https://youtu.be/chYUBSVEoFo

Une translation fait glisser une figure selon une flèche.
Cette flèche définie une direction, un sens et une longueur.



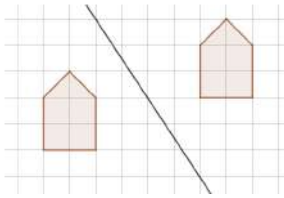
M' est l'image de M par la translation qui **envoie A en B**.

Remarque : ABM'M est un parallélogramme.

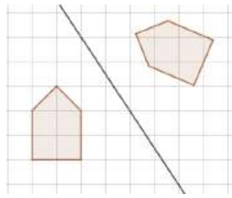
QCM

1. Dans quel cas, les figures sont-elles images l'une de l'autre par symétrie axiale ?

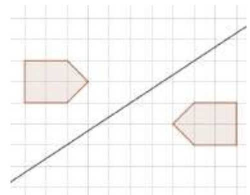
A.



B.

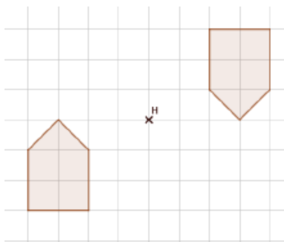


C.

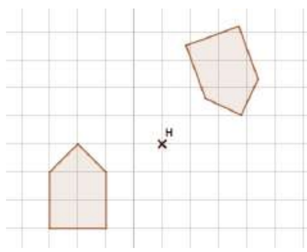


2. Dans quel cas, les figures sont-elles images l'une de l'autre par symétrie centrale ?

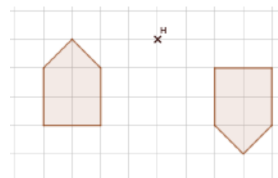
A.



B.

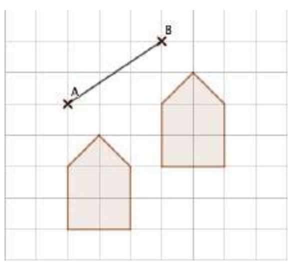


C.

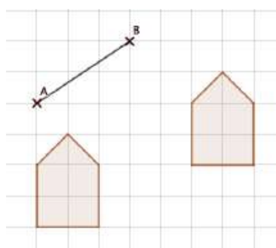


3. Dans quel cas, les figures sont-elles images l'une de l'autre par la translation qui envoie A en B ?

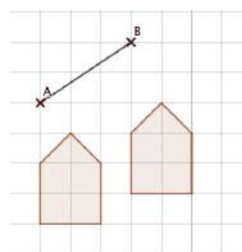
A.



B.



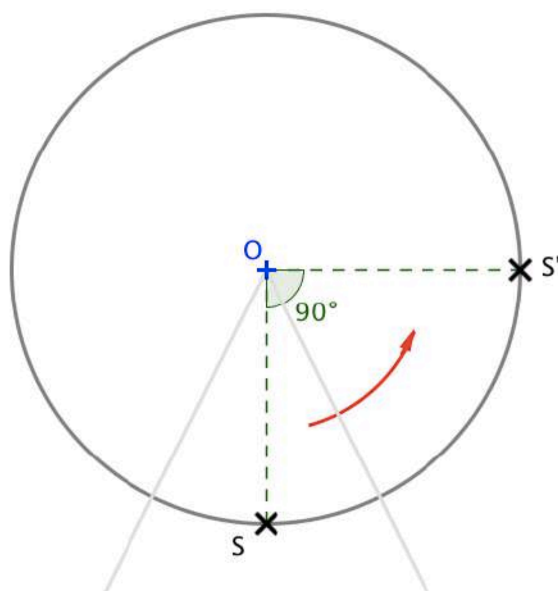
C.



Réponses : 1.B 2.A 3.A

Partie 2 : Rotations

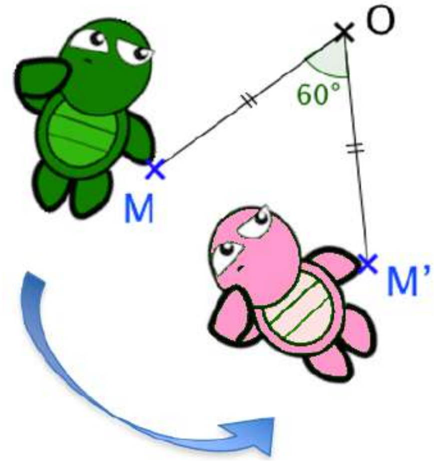
1) <u>Exemple :</u>



Sur une grande roue, un siège partant de S se trouve déplacé en S' tel que :
Le siège tourne de 90° dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.
Et bien sûr, le siège reste à la même distance du centre de la roue.

2) Définition

Une rotation fait tourner une figure autour d'un point selon un angle.

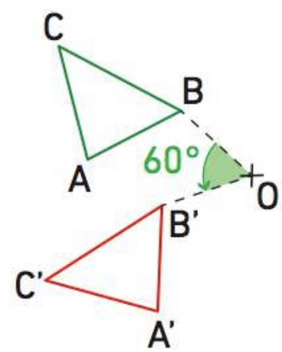


M' est l'image de M par la rotation de **centre O** et d'**angle 60° dans le sens inverse des aiguilles d'une montre** :

- $\widehat{MOM'} = 60°$
- MO = OM'

Remarques :

- Appliquer une rotation sur une figure, c'est faire tourner la figure autour d'un centre selon un angle donné et dans un sens donné.



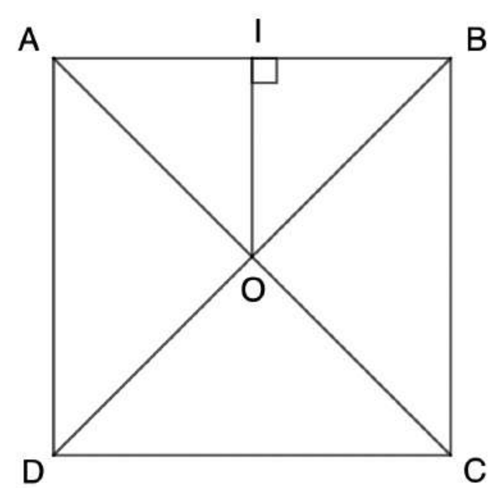
- Une rotation d'angle 180° est une symétrie centrale.
- L'image du point O par une rotation de centre O est le point O lui-même.

Reconnaître les transformations :

Vidéo https://youtu.be/OVxRkeu8gTc

Méthode : Reconnaitre l'image d'une rotation

Vidéo https://youtu.be/aiJ0J3x6UcQ



ABCD est un carré de centre O.

1) Quelle est l'image du point A par la rotation de centre O et d'angle 90° dans le sens inverse des aiguilles d'une montre ?

2) Quelle est l'image du point A par la rotation de centre D et d'angle 90° dans le sens des aiguilles d'une montre ?

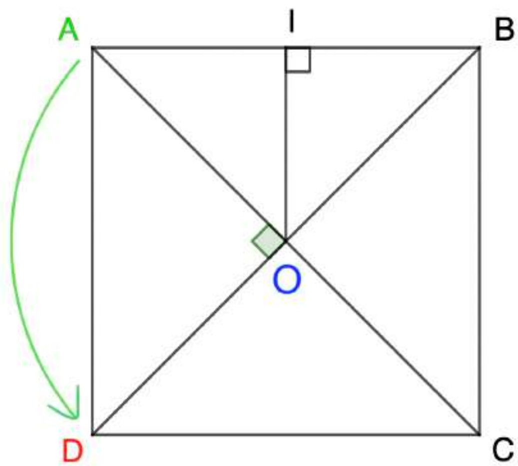
3) Quelle est l'image du point A par la rotation de centre I et d'angle 90° dans le sens inverse des aiguilles d'une montre ?

4) Quelle est l'image du point A par la rotation de centre I et d'angle 180° dans le sens des aiguilles d'une montre ?

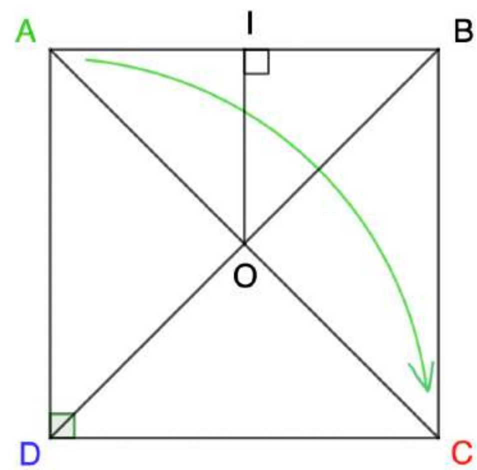
5) Quelle est l'image triangle OAB par la rotation de centre O et d'angle 90° dans le sens des aiguilles d'une montre ?

Correction

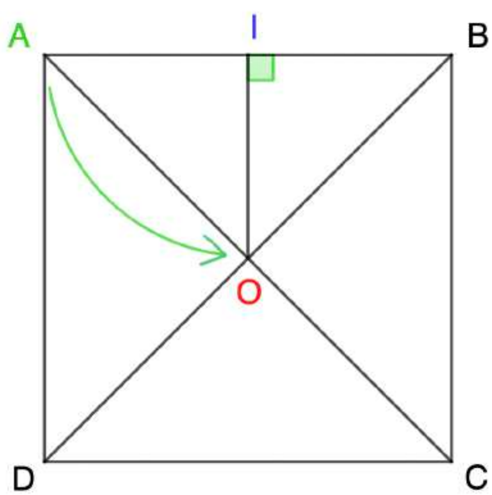
1) L'image du point A est le point D.



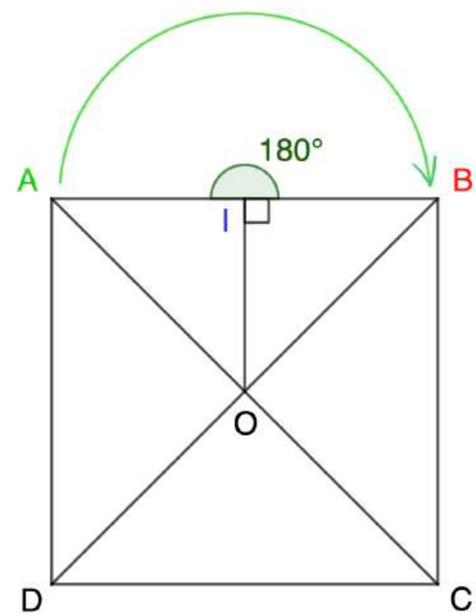
2) L'image du point A est le point C.



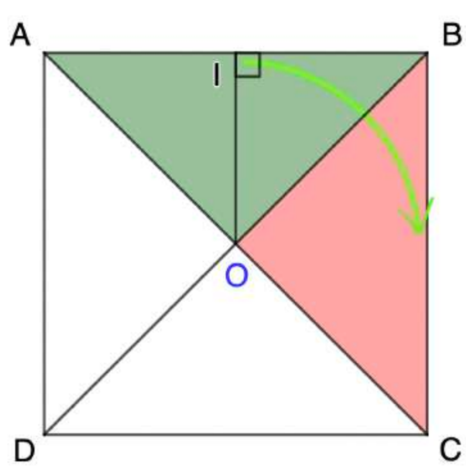
3) L'image du point A est le point O.



4) L'image du point A est le point B.



5) L'image triangle OAB est le triangle BOC.

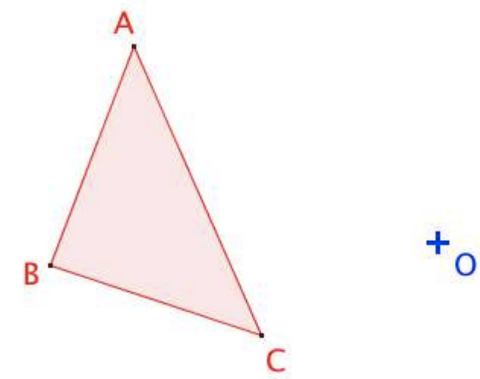


3) Constructions :

Méthode : Construire l'image d'une figure par une rotation

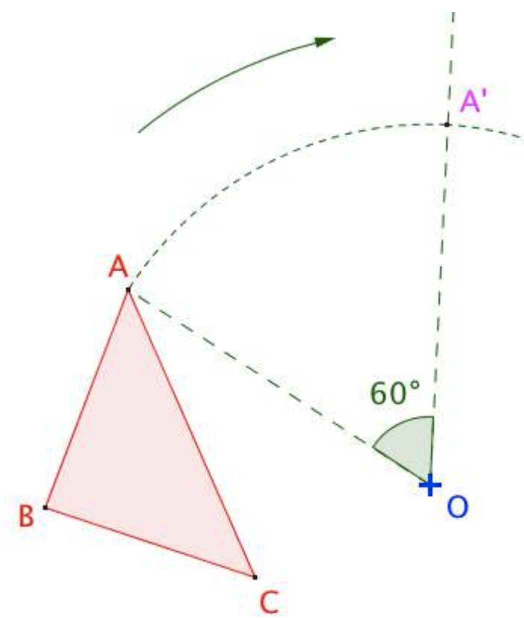
Vidéo https://youtu.be/_lr-qTQVtCg
Vidéo https://youtu.be/xd_-KzMmjwI

Construire l'image du triangle ABC par la rotation de centre O et d'angle 60° dans le sens des aiguilles d'une montre.

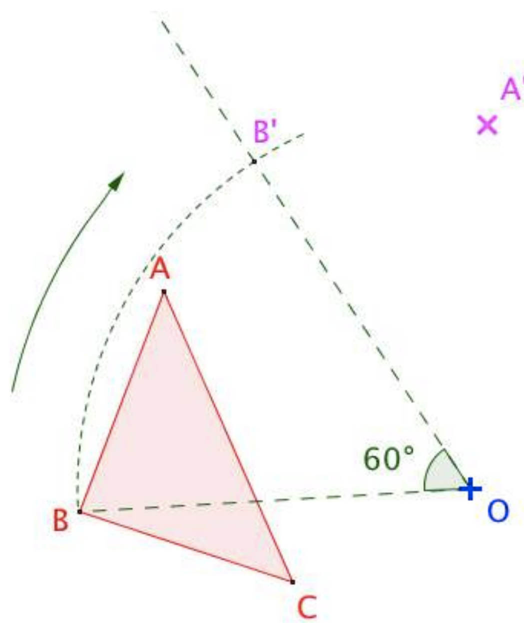


Correction

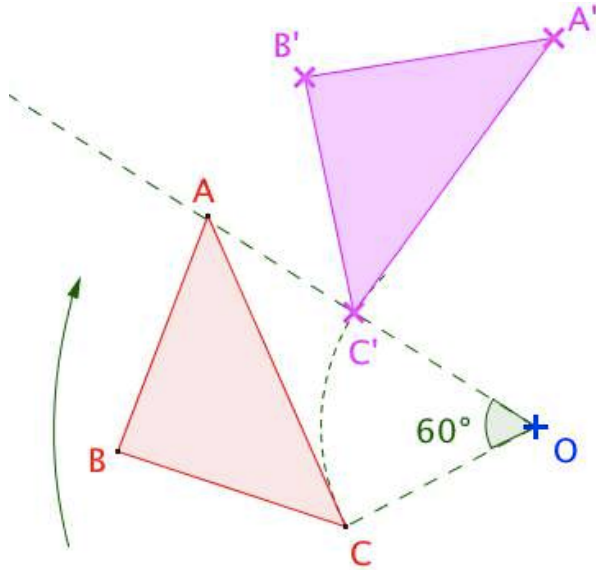
On commence par construire l'image du point A :
Pour cela, on trace un angle de sommet O et de mesure 60° en partant de [OA] et en tournant dans le sens des aiguilles d'une montre.
Le point A' est tel que OA = OA'.



On refait de même pour tracer les images des points B et C :



On obtient ainsi l'image A'B'C' du triangle ABC par la rotation :



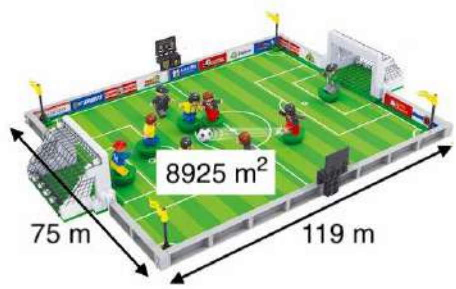
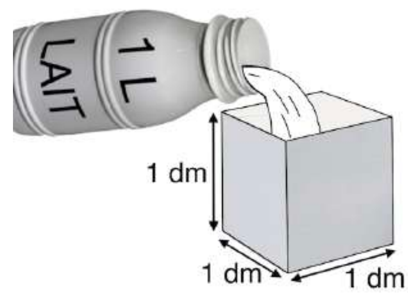
Activités de groupe :
Le tapis : http://www.maths-et-tiques.fr/telech/tapis3e.pdf
Pavage de papillon : http://www.maths-et-tiques.fr/telech/pap3e.pdf

ESPACE

Tout le cours en vidéo : https://youtu.be/Wsv2pp5Ytx8

Partie 1 : Périmètres, aires et volumes (Rappels)

1) Définitions, exemples et conversions

Périmètre	**Aire**	**Volume**
Longueur du tour de la figure.	Surface, intérieur d'une figure plane.	Contenance, intérieur d'un solide.
cm, m …	cm^2, m^2 …	L, m^3..
Exemple : Le périmètre de cet enclos est de 70 m. *(20 + 15 + 20 + 15)* 	Exemple : La surface de ce terrain de foot est 8 925 m^2. *(75 x 119)* 	Exemple : La contenance de ce cube est de 1 L. *(1 dm^3 = 1 L)* 

Exemple de conversions d'unités :

Vidéo https://youtu.be/nnXfRWe4WDE

Longueur

km	hm	dam	m	dm	cm	mm
	2 ,	3	5	2 ,		

2 352 dm = 2,352 hm

Aire

km^2	hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2
			3 ,	4 0	0 0 ,	

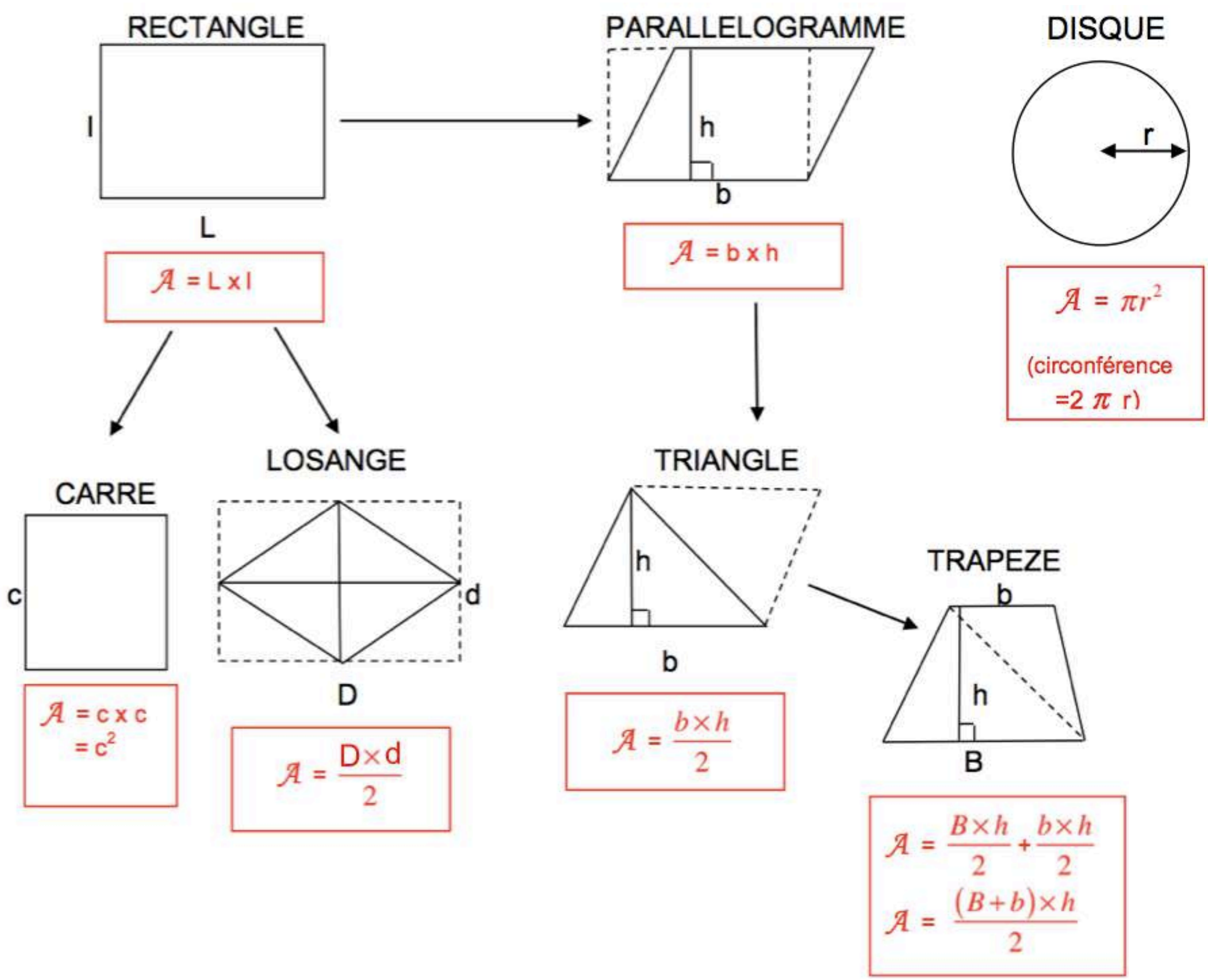
3,4 m^2 = 34 000 cm^2

Volume

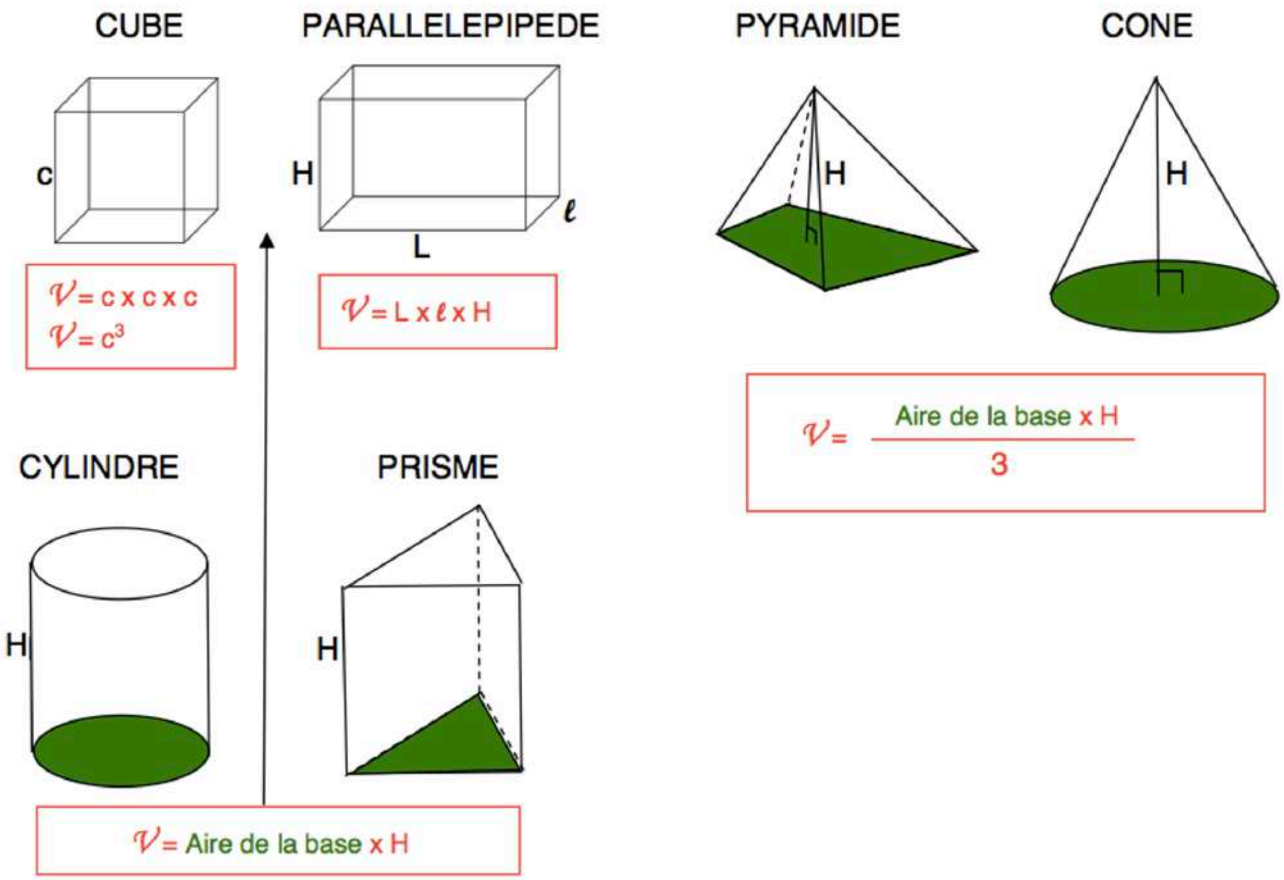
km^3	hm^3	dam^3	m^3	dm^3 hL daL L	cm^3 dL cL mL	mm^3
			5 3 ,	9 0 0 ,		

Exemple : 53,9 m^3 = 53 900 dm^3 = 53 900 L

2) <u>Formules d'aires</u>



3) Formules de volume

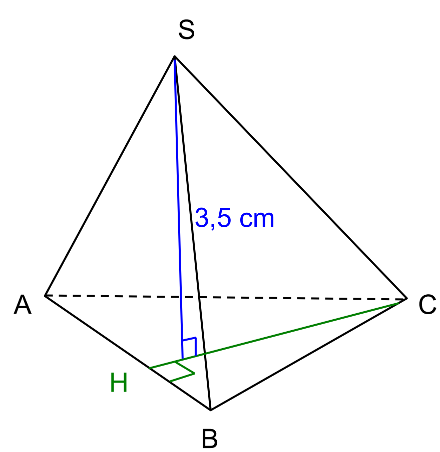


Méthode : Calculer des périmètres, des aires et des volumes

Vidéo https://youtu.be/kMssaNRPXz8

a) Calculer le périmètre et l'aire d'un disque de rayon 13 dm. Arrondir les résultats au centième.

b) Calculer le volume de la pyramide ci-contre tel que :
$AB = 4\ cm$ et $CH = 5\ cm$.
La hauteur de la pyramide est de 3,5 cm.
Arrondi au centième de cm^3.



Correction

a) $P_{cercle} = 2 \times \pi \times r$
$= 2 \times \pi \times 13$
$\approx 81{,}68\ dm$

$A_{disque} = \pi \times r^2$
$= \pi \times 13^2$
$\approx 530{,}93\ dm^2$

b) Aire de la base $= \frac{b \times h}{2} = \frac{AB \times CH}{2} = \frac{4 \times 5}{2} = 10\ cm^2$

$V_{pyramide} = \frac{A \times H}{3} = \frac{10 \times 3{,}5}{3} = \frac{35}{3}\ cm^3 \approx 11{,}67\ cm^3$

Partie 2 : Sphères et boules

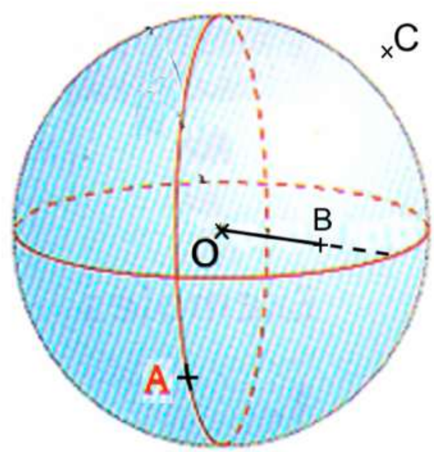
Vidéo https://youtu.be/YQF7CBY-uEk

1) Définitions et exemples

La sphère	**La boule**
Une sphère de centre O est l'ensemble des points situés à la même distance de O. Cette distance s'appelle le **rayon**.	Une boule de centre O est l'ensemble des points situés à l'intérieure de la sphère et sur la sphère.
Exemple : Une bulle de savon : elle est vide. 	Exemple : Une boule de billard : elle est pleine. 

Remarque : Le mot « Sphère » du grec « sphaira » (balle à jouer)

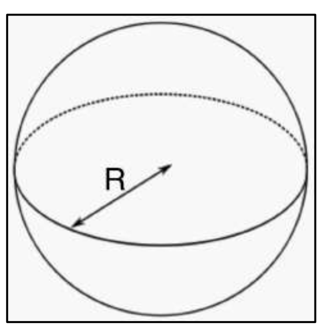
Exemple :



Le point A est sur la sphère et sur la boule.
Le point B n'est pas sur la sphère mais il est dans la boule.
Le point C n'est ni sur la sphère ni dans la boule.

2) Aire de la sphère

Aire d'une sphère de rayon R :
$A = 4\pi R^2$



3) Volume de la boule

Volume d'une boule de rayon R :
$V = \frac{4}{3}\pi R^3$

Méthode : Calculer l'aire d'une sphère et le volume d'une boule

Vidéo https://youtu.be/YQF7CBY-uEk

Calculer la surface et le volume de la Terre sachant que son rayon est environ égal à 6370 km.

Correction

$$\begin{aligned} A &= 4\pi R^2 \\ &\approx 4 \times 3{,}14 \times 6370^2 \\ &\approx 509\,904\,364\ km^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= \frac{4}{3}\pi R^3 \\ &\approx \frac{4}{3} \times 3{,}14 \times 6370^3 \\ &\approx 1\,082\,696\,932\,000\ km^3 \end{aligned}$$

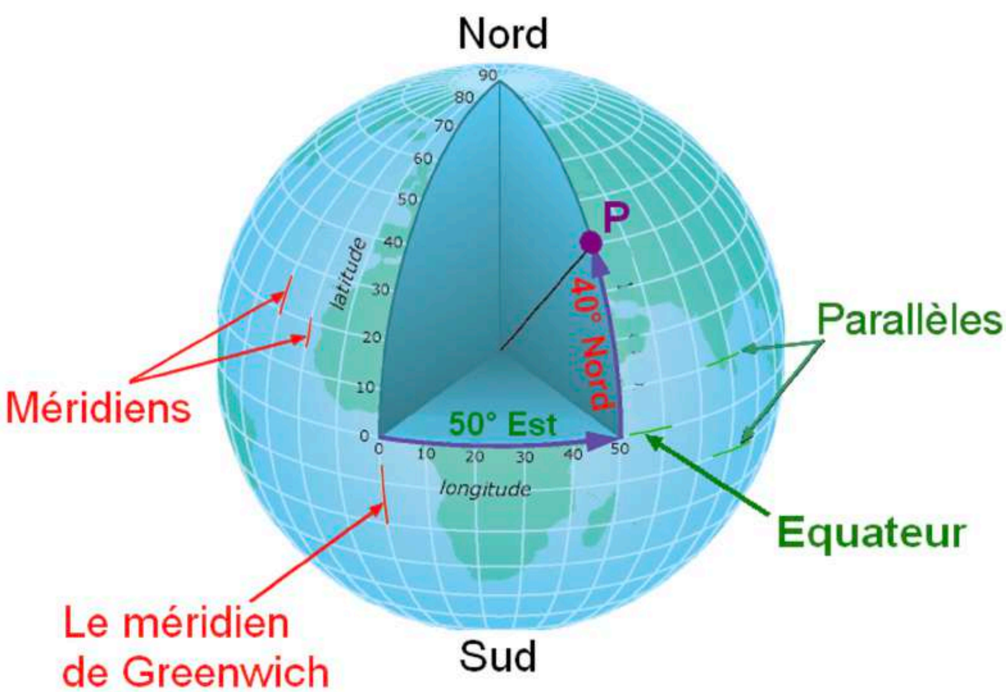
4) Coordonnées géographiques

Vidéo https://youtu.be/cNi_4U6tFWQ

Exemple : Les coordonnées géographiques du point P sont :

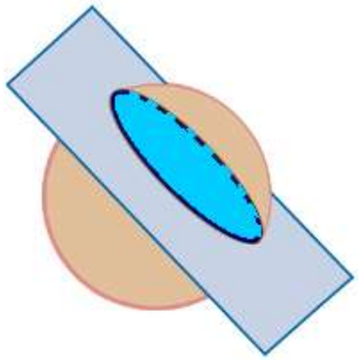
(50°E ; 40°N)

Longitude Latitude

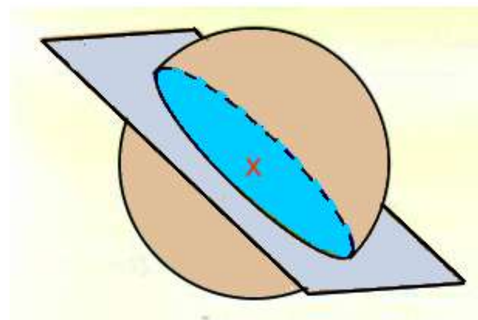


Partie 3 : Sections de solides par un plan

Avec une sphère



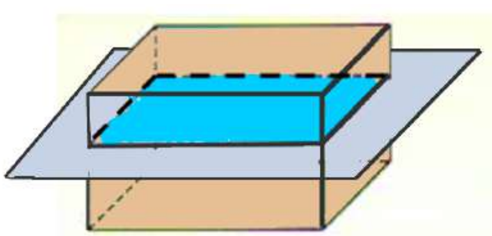
La section d'une sphère par un plan est un **cercle**.



<u>Cas particulier :</u>
Le plan passe par le centre de la sphère.
La section s'appelle un **GRAND CERCLE**.

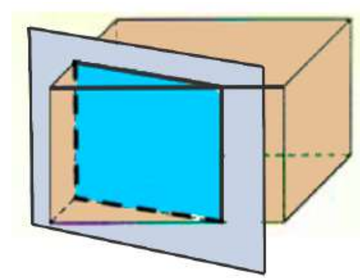
Avec un parallélépipède

Le plan est parallèle à la base



La section est un rectangle.

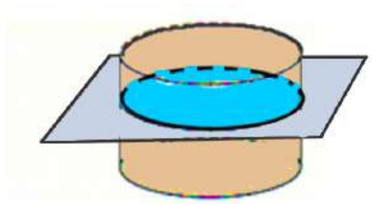
Le plan est perpendiculaire à la base.



La section est un rectangle.

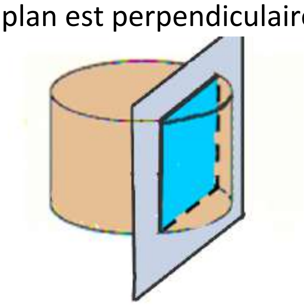
Avec un cylindre

Le plan est parallèle à la base



La section est un cercle.

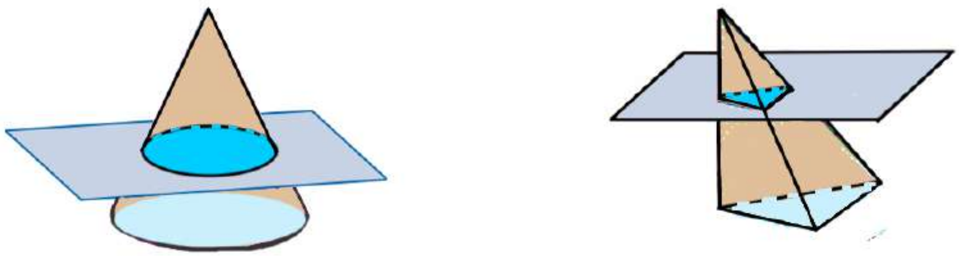
Le plan est perpendiculaire à la base.



La section est un rectangle.

Avec un cône ou une pyramide

Le plan est parallèle à la base



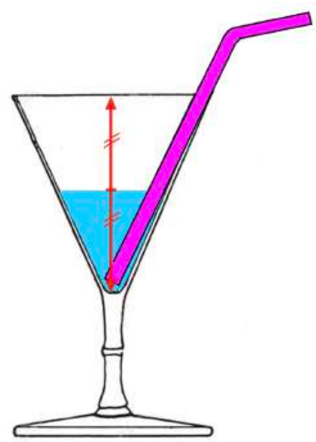
La section est la même figure que celle de la base mais réduite.

Dessiner en vraie grandeur la section d'un solide :

Vidéo https://youtu.be/hNj4ySy-NaU

Propriétés : Pour un agrandissement ou une réduction de rapport k,
- les longueurs sont multipliées par k,
- les aires sont multipliées par k^2,
- les volumes sont multipliés par k^3.

Exemple :
Le verre de forme conique et de contenance de $32\ Cl$ est à moitié plein en hauteur.
Le cône formé par le liquide versé est une réduction du verre.
Le rapport de la réduction est : $k = \frac{1}{2} = 0{,}5$.



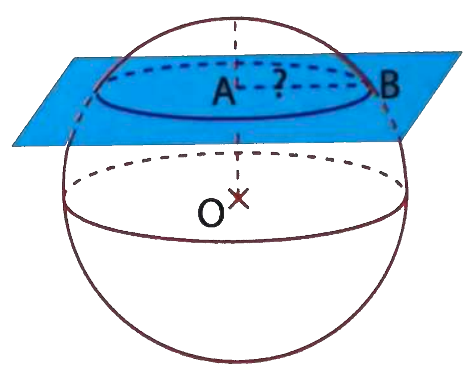
Le volume de liquide est alors égal au volume du verre multiplié par k^3, soit :

$$V = 32 \times 0{,}5^3 = 4\ Cl.$$

Méthode : Calculer une longueur à l'aide d'une section d'un solide.

Vidéo https://youtu.be/NY75MafJJ3Y

On a représenté la coupe par un plan de la sphère de centre O et de rayon $5\ cm$.
On obtient ainsi un cercle de centre A et de rayon AB tel que : $OA = 3\ cm$.
On admet que $[AB]$ est perpendiculaire à $[OA]$.
Calculer le rayon AB du cercle.



Correction

$[AB]$ est perpendiculaire à $[OA]$, donc le triangle OAB est rectangle en A.
D'après le théorème de Pythagore, on a : $OB^2 = OA^2 + AB^2$
Soit : $5^2 = 3^2 + AB^2$. En effet $OB = 5\ cm$ est le rayon de la sphère.
Soit encore :
$25 = 9 + AB^2$
$AB^2 = 25 - 9$
$AB^2 = 16$
$AB = 4$
Le rayon du cercle est donc égale à $4\ cm$.

CALCUL LITTÉRAL

Tout le cours sur les développements en vidéo : https://youtu.be/gSa851JJn6c
Tout le cours sur les factorisations en vidéo : https://youtu.be/kQGWtMOHbrA

Partie 1 : Somme et produit

Vidéo https://youtu.be/FTi9WOQsq3w

Exemples :

Sommes (ou différence) de termes	Produits de facteurs
$x-3$	$(6x+1)\times(x-1)$
$(2x+4)+3x$	$2\times(1+6x)$
$(5-x)-(9+9x)$	$(8-x)\times(2+x)$
$3+(2+3x)(x-2)$	$(3+8x)\times(x-8)^2$

Définitions :
Développer c'est transformer un produit en une somme.
Factoriser c'est transformer une somme en un produit.

DEVELOPPER

$$x(4-y) = 4x - xy$$

FACTORISER

Partie 2 : Développement

1. Distributivité simple

Exemple :

6×5

$6\times x$

$$6\,(x+5) = \underset{1}{6x} + \underset{2}{30}$$

Formule de distributivité :
$a\,(b+c) = ab+ac$

Méthode : Développer une expression

Vidéo https://youtu.be/S_ckQpWzmG8

Vidéo https://youtu.be/URNld8xsXgM

Développer les expressions suivantes :

$A = 4(5 + x)$
$B = 5(x - 2)$
$C = (4x + 6) \times 3$
$D = -6(-2x + 4)$
$E = -x(2 - 3x)$
$F = -(5 - x)$

Correction

$$A = 4(\overset{4\times 5}{5} + \overset{4\times x}{x}) = 20 + 4x$$

$$B = 5(\overset{5\times x}{x} - \overset{5\times(-2)}{2}) = 5x - 10$$

$$C = (\overset{3\times 4x}{4x} + \overset{3\times 6}{6}) \times 3 = 12x + 18$$

$$D = -6(\overset{-6\times(-2x)}{-2x} + \overset{-6\times 4}{4}) = 12x - 24$$

$$E = -x(\overset{-x\times 2}{2} - \overset{-x\times(-3x)}{3x}) = -2x + 3x^2$$

$F = -(5 - x) = -5 + x$ « Un – devant une parenthèse change les signes dans la parenthèse »

Rappel : Règle des signes
+ par + devient +
– par – devient +
+ par – devient –
– par + devient –

2. Double-distributivité

Exemple :

$$(2 + 5x)(\overset{①\ 2\times x}{\underset{③\ 5x\times x}{x}} + \overset{②\ 2\times 4}{\underset{④\ 5x\times 4}{4}}) = \overset{①}{2x} + \overset{②}{8} + \overset{③}{5x^2} + \overset{④}{20x}$$

Formule de double distributivité :

$$(a+b)(c+d) = \overset{1}{ac} + \overset{2}{ad} + \overset{3}{bc} + \overset{4}{bd}$$

Méthode : Appliquer la double distributivité pour développer

Vidéo https://youtu.be/1EPOmbvoAlU
Vidéo https://youtu.be/YS-3JI_z2f0
Vidéo https://youtu.be/o6qVMmA3oTQ

Développer et réduire les expressions :

$A = (2x+3)(x+8)$
$B = (-3+x)(4-5x)$
$C = 2(3+x)(3-2x)$
$D = 2x(1-x) - (x-3)(3x+2)$

Correction

$2x \times 8$ $2x \times x$

$A = (2x + 3)(x + 8)$

$3 \times x$ 3×8

$= 2x^2 + 16x + 3x + 24$
$= 2x^2 + 19x + 24$

$-3 \times (-5x)$ -3×4

$B = (-3 + x)(4 - 5x)$

$x \times 4$ $x \times (-5x)$

$= -12 + 15x + 4x - 5x^2$
$= -5x^2 + 19x - 12$

$3 \times (-2x)$ 3×3

$C = 2(3 + x)(3 - 2x)$

$x \times 3$ $x \times (-2x)$

$= 2(9 - 6x + 3x - 2x^2)$
$= 2(-2x^2 - 3x + 9)$
$= -4x^2 - 6x + 18$

$$
\begin{aligned}
D &= 2x(1-x) - (x-3)(3x+2) \\
&= 2x - 2x^2 - (3x^2 + 2x - 9x - 6) \\
&= 2x - 2x^2 - 3x^2 - 2x + 9x + 6 \\
&= -5x^2 + 9x + 6
\end{aligned}
$$

Partie 3 : Factorisation

Méthode : Factoriser une expression (1)

Vidéo https://youtu.be/r3AzqvgLcI8

Pour factoriser, il faut trouver dans chaque terme un facteur commun.

Trouver le facteur commun de ces expressions, puis factoriser et réduire si possible :

$A = 3{,}5x - 4{,}2x + 2{,}1x$ $\quad$ $C = 4x - 4y + 8$ $\quad$ $E = 3t + 9u + 3$

$B = 4t - 5tx + 3t$ $\quad$ $D = x^2 + 3x - 5x^2$ $\quad$ $F = 3x^2 - x$

Correction

$$
\begin{aligned}
A &= 3{,}5x - 4{,}2x + 2{,}1x \\
&= x(3{,}5 - 4{,}2 + 2{,}1) \\
&= 1{,}4x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C &= 4x - 4y + 4 \times 2 \\
&= 4(x - y + 2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E &= 3t + 3 \times 3u + 3 \times 1 \\
&= 3(t + 3u + 1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B &= 4t - 5tx + 3t \\
&= t(4 - 5x + 3) \\
&= t(7 - 5x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D &= x \times x + 3x - 5x \times x \\
&= x(x + 3 - 5x) \\
&= x(-4x + 3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F &= 3x \times x - 1x \\
&= x(3x - 1)
\end{aligned}
$$

Méthode : Factoriser une expression (2)

Vidéo https://youtu.be/UGTFELhE9Dw

Factoriser les expressions suivantes :

$A = 3(2+3x) - (5+2x)(2+3x)$

$B = (2-5x)^2 - (2-5x)(1+x)$

$C = 5(1-2x) - (4+3x)(2x-1)$

Correction

Pour factoriser, il faut trouver dans chaque terme un facteur commun.

$A = 3(2+3x) - (5+2x)(2+3x)$ $\quad$ Le facteur commun est $2+3x$.

$\quad = (2+3x)(3 - (5+2x))$

$= (2+3x)(3-5-2x)$
$= (2+3x)(-2-2x)$

$B = (2-5x)^2 - (2-5x)(1+x)$
$= (2-5x)(2-5x) - (2-5x)(1+x)$
$= (2-5x)((2-5x)-(1+x))$
$= (2-5x)(2-5x-1-x)$
$= (2-5x)(1-6x)$

Lorsque le facteur commun n'est pas immédiatement apparent, il est parfois possible de modifier l'écriture d'un des termes de l'expression pour faire apparaître un facteur commun :
$C = 5(1-2x) - (4+3x)(2x-1)$
$= 5(1-2x) + (4+3x)(1-2x)$
$= 5(1-2x) + (4+3x)(1-2x)$
$= (1-2x)(5+(4+3x))$
$= (1-2x)(9+3x)$

Partie 4 : Identités remarquables

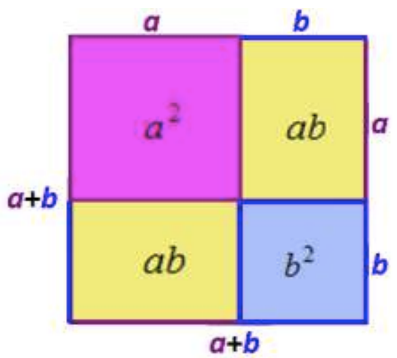
Propriété :

DEVELOPPER

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

FACTORISER

Illustration géométrique de la 1ère identité remarquable :
En considérant les aires dans le carré, on a : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$



Vidéo https://youtu.be/wDAdBXIZNK4

Exemples :
Vidéo https://youtu.be/A8U1QVW7RaU

$(x+3)^2 = x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$
$(x-5)^2 = x^2 - 2 \times x \times 5 + 5^2 = x^2 - 10x + 25$
$(2x-1)(2x+1) = (2x)^2 - 1^2 = 4x^2 - 1.$

1) Les identités remarquables pour développer

Méthode : Appliquer les identités remarquables pour développer (1)

Vidéo https://youtu.be/U98Tk89SJ5M

Développer et réduire éventuellement :

$A = (x+3)^2$ $B = (3x-4)^2$ $C = (x-3)(x+3)$
$D = (2x+3)(2x-3)$ $E = (4-3x)(3x+4)$

Correction

$A = (x+3)^2 = x^2 + 6x + 3^2$ $\quad\quad 2ab = 2 \times x \times 3$
$\quad\quad = x^2 + 6x + 9$

$B = (3x-4)^2 = (3x)^2 - 24x + 4^2$ $\quad\quad 2ab = 2 \times 3x \times 4$
$\quad\quad = 9x^2 - 24x + 16$

$C = (x-3)(x+3) = x^2 - 3^2 = x^2 - 9$

$D = (2x+3)(2x-3) = (2x)^2 - 3^2 = 4x^2 - 9$

$E = (4-3x)(3x+4) = (4-3x)(4+3x) = 4^2 - (3x)^2 = 16 - 9x^2$

Méthode : Appliquer les identités remarquables pour développer (2)

Vidéo https://youtu.be/7va96s4OfiM

Développer et réduire en utilisant les identités remarquables :

$A = (2x-3)^2 + (x+5)(3-x)$
$B = (x-3)(x+3) - (4-3x)^2$
$C = 2(x+3) + (2x+3)(2x-3)$

Correction

$A = (2x-3)^2 \quad + (x+5)(3-x)$
$\quad = 4x^2 - 12x + 9 \quad + 3x - x^2 + 15 - 5x$
$\quad = 3x^2 - 14x + 24$

$B = (x-3)(x+3) \quad - (4-3x)^2$
$\quad = x^2 - 9 \quad - (16 - 24x + 9x^2)$
$\quad = x^2 - 9 \quad - 16 + 24x - 9x^2$
$\quad = -8x^2 + 24x - 25$

$C = 2(x+3) \quad + (2x+3)(2x-3)$
$\quad = 2x + 6 \quad + (2x)^2 - 3^2$
$\quad = 2x + 6 \quad + 4x^2 - 9$
$\quad = 4x^2 + 2x - 3$

2) Les identités remarquables pour factoriser

Méthode : Factoriser en appliquant les identités remarquables (1)

Vidéo https://youtu.be/T9T4IeYGEe4

Factoriser :

$A = x^2 - 2x + 1$ $\quad\quad D = 25 + 16x^2 - 40x$ $\quad\quad B = 4x^2 + 12x + 9$
$E = 1 - 49x^2$ $\quad\quad C = 9x^2 - 4$

Correction
Retrouvons les termes a^2 $2ab$ b^2 des identités remarquables.

$A = x^2 - 2x + 1$ (2^e identité remarquable avec $a = x$ et $b = 1$)
$\quad = (x - 1)^2$

$B = 4x^2 + 12x + 9$ (1^{re} identité remarquable avec $a = 2x$ et $b = 3$)
$\quad = (2x + 3)^2$

$C = 9x^2 - 4$ *pas de $2ab$* (3^e identité remarquable avec $a = 3x$ et $b = 2$)
$\quad = (3x - 2)(3x + 2)$

$D = 25 + 16x^2 - 40x$ (2^e identité remarquable avec $a = 5$ et $b = 4x$)
$\quad = 25 - 40x + 16x^2$
$\quad = (5 - 4x)^2$

$E = 1 - 49x^2$ *pas de $2ab$* (3^e identité remarquable avec $a = 1$ et $b = 7x$)
$\quad = (1 - 7x)(1 + 7x)$

Méthode : Factoriser en appliquant les identités remarquables (2)

Vidéo https://youtu.be/nLRRUMRyfZg
Vidéo https://youtu.be/tO4p9TzMrls

Factoriser et réduire :

$$A = (2x + 3)^2 - 64 \qquad\qquad B = 1 - (2 - 5x)^2$$

Correction

$A = (2x + 3)^2 - 64$ (3^e identité remarquable avec $a = 2x + 3$ et $b = 8$)
$\quad = (2x + 3)^2 - 8^2$
$\quad = ((2x + 3) - 8)((2x + 3) + 8)$
$\quad = (2x + 3 - 8)(2x + 3 + 8)$
$\quad = (2x - 5)(2x + 11)$

$B = 1 - (2 - 5x)^2$ (3^e identité remarquable avec $a = 1$ et $b = 2 - 5x$)
$\quad = 1^2 - (2 - 5x)^2$
$\quad = (1 - (2 - 5x))(1 + (2 - 5x))$
$\quad = (1 - 2 + 5x)(1 + 2 - 5x)$
$\quad = (-1 + 5x)(3 - 5x)$

FRACTIONS, PUISSANCES, RACINES CARRÉES

Tout le cours sur les fractions en vidéo : https://youtu.be/a0Qb812W75c
Tout le cours sur les puissances en vidéo : https://youtu.be/XA-JkXirNz4
Tout le cours sur les racines carrées en vidéo : https://youtu.be/8Atxa6iMVsw

Partie 1 : Fractions

1. Calcul avec les fractions (Rappels)

Propriétés :

$$\frac{a}{D}+\frac{b}{D}=\frac{a+b}{D} \qquad \frac{a}{D}-\frac{b}{D}=\frac{a-b}{D} \qquad \frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d} \qquad \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$$

Méthode : Effectuer des calculs de fractions

Vidéo https://youtu.be/1yV5scwCwvg

$$A=\frac{5}{4}+\frac{6}{16} \qquad B=\frac{5}{3}-\frac{6}{5} \qquad C=\frac{2}{-3}\times\frac{-5}{11} \qquad D=\frac{3}{4}:\frac{-5}{8} \qquad E=\frac{8}{7}-\frac{4}{7}\times\frac{5}{3}$$

Correction

$$\begin{aligned} A &= \frac{5}{4}+\frac{6}{16} \\ &= \frac{5\times4}{4\times4}+\frac{6}{16} \\ &= \frac{20}{16}+\frac{6}{16} \\ &= \frac{20+6}{16} \\ &= \frac{26}{16} \\ &= \frac{13}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{5}{3}-\frac{6}{5} \\ &= \frac{5\times5}{3\times5}-\frac{6\times3}{5\times3} \\ &= \frac{25}{15}-\frac{18}{15} \\ &= \frac{25-18}{15} \\ &= \frac{7}{15} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= \frac{2}{-3}\times\frac{-5}{11} \\ &= \frac{2\times(-5)}{(-3)\times11} \\ &= \frac{-10}{-33} \\ &= \frac{10}{33} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= \frac{3}{4}:\frac{-5}{8} \\ &= \frac{3}{4}\times\frac{8}{-5} \\ &= \frac{24}{-20} \\ &= -\frac{6}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E &= \frac{8}{7}-\frac{4}{7}\times\frac{5}{3} \\ &= \frac{8}{7}-\frac{20}{21} \end{aligned}$$

$= \frac{24}{21} - \frac{20}{21}$

$= \frac{4}{21}$

2. Réduire des expressions au même dénominateur

Propriété :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{cb}{db} = \frac{ad+cb}{bd}$$

Méthode : Réduire au même dénominateur

Vidéo https://youtu.be/Id_udNTKsqI

Réduire les expressions suivantes au même dénominateur :

$$A = \frac{7}{x-2} - \frac{5}{3} \qquad B = 3 + \frac{5x}{2x+1}$$

Correction

$$A = \frac{7}{x-2} - \frac{5}{3}$$
$$= \frac{7 \times 3}{(x-2) \times 3} - \frac{5(x-2)}{3(x-2)}$$
$$= \frac{21 - 5(x-2)}{3(x-2)}$$
$$= \frac{21 - 5x + 10}{3(x-2)}$$
$$= \frac{31 - 5x}{3(x-2)}$$

$$B = 3 + \frac{5x}{2x+1}$$
$$= \frac{3}{1} + \frac{5x}{2x+1}$$
$$= \frac{3(2x+1)}{1(2x+1)} + \frac{5x}{2x+1}$$
$$= \frac{3(2x+1) + 5x}{2x+1}$$
$$= \frac{6x + 3 + 5x}{2x+1}$$
$$= \frac{11x + 3}{2x+1}$$

Partie 2 : Puissances

1. Rappels

$a^4 = a \times a \times a \times a$

De façon générale :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ fois}}$$

Exemples :

$2^3 = 2 \times 2 \times 2$

$11^5 = 11 \times 11 \times 11 \times 11 \times 11$

a est un nombre non nul et
n est un entier non nul.

$a^1 = a$

$a^0 = 1$

$0^n = 0$

$1^n = 1$

Exemples :

$15^1 = 15$

$103^0 = 1$

$0^4 = 0$

$1^{12} = 1$

2. Attention aux signes !

Ne pas confondre : $(-3)^4 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) = 81$

et : $-3^4 = -3 \times 3 \times 3 \times 3 = -81$

Exercice :

Calculer de même en appliquant la règle des signes :

$(-5)^2$; -1^2 ; $(-1)^2$; -3^3 ; $(-2)^2$; -7^2 ; $(-9)^0$; -9^0

Réponses : 25 ; -1 ; 1 ; -27 ; 4 ; -49 ; 1 ; -1

3. Opérations sur les puissances

It is really hard to believe that **DIVERTISSEMENT**

$0^0+3^0+5^0+6^0+9^0+10^0+12^0+15^0=1^0+2^0+4^0+7^0+8^0+11^0+13^0+14^0,$

$0^1+3^1+5^1+6^1+9^1+10^1+12^1+15^1=1^1+2^1+4^1+7^1+8^1+11^1+13^1+14^1,$

$0^2+3^2+5^2+6^2+9^2+10^2+12^2+15^2=1^2+2^2+4^2+7^2+8^2+11^2+13^2+14^2,$

$0^3+3^3+5^3+6^3+9^3+10^3+12^3+15^3=1^3+2^3+4^3+7^3+8^3+11^3+13^3+14^3.$

Avec n et p entiers relatifs :

$a^n \times a^p = a^{n+p}$	$\dfrac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$	$(a^n)^p = a^{n \times p}$	$(a \times b)^n = a^n \times b^n$

$a^{-1} = \dfrac{1}{a}$	$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

Méthode : Effectuer des calculs sur les puissances

Vidéo https://youtu.be/FBmVDGvUtJ4
Vidéo https://youtu.be/cY6xdxT7kLM

Exprimer sous la forme d'une seule puissance :

$A = \dfrac{1}{4^2}$ $\qquad B = 4^5 \times 4^7$ $\qquad C = \dfrac{5^4}{5^6}$ $\qquad D = 7^3 \times (7^2)^6$ $\qquad E = 6^7 \times 9^7$

Correction

$A = \dfrac{1}{4^2} = 4^{-2}$

$B = 4^5 \times 4^7 = 4^{5+7} = 4^{12}$

$C = \dfrac{5^4}{5^6} = 5^{4-6} = 5^{-2}$

$D = 7^3 \times (7^2)^6 = 7^3 \times 7^{2\times 6} = 7^3 \times 7^{12} = 7^{3+12} = 7^{15}$

$E = 6^7 \times 9^7 = (6 \times 9)^7 = 54^7$

Méthode : Appliquer les formules sur les puissances de 10

Vidéo https://youtu.be/GWz5_veC12U
Vidéo https://youtu.be/EL4dBiBbL-U

a) Écrire sous la forme 10^n ou 10^{-n} :

$A = 10^4 \times 10^7$ $\qquad B = \dfrac{10^{-4}}{10^5}$ $\qquad C = (10^2)^{-6}$ $\qquad D = 10^{-4} \times (10^3)^{-1}$

b) Écrire en notation scientifique :

$A = 4 \times 7 \times 10^{-5} \times 10^{-8}$ $\qquad B = \dfrac{7 \times 10^{-4} \times 5 \times 10^8}{56 \times 10^{-9}}$ $\qquad C = \dfrac{32 \times 10^{-4} + 6 \times 10^{-3}}{2 \times 10^{-5}}$

Correction

a) $A = 10^4 \times 10^7 = 10^{4+7} = 10^{11}$

$B = \dfrac{10^{-4}}{10^5} = 10^{-4-5} = 10^{-9}$

$C = (10^2)^{-6} = 10^{2\times(-6)} = 10^{-12}$

$D = 10^{-4} \times (10^3)^{-1} = 10^{-4} \times 10^{3\times(-1)} = 10^{-4} \times 10^{-3} = 10^{-4-3} = 10^{-7}$

b) $A = 4 \times 7 \times 10^{-5} \times 10^{-8} = 28 \times 10^{-5-8}$

$B = \dfrac{7 \times 10^{-4} \times 5 \times 10^8}{56 \times 10^{-9}} = \dfrac{7 \times 5}{56} \times \dfrac{10^{-4} \times 10^8}{10^{-9}}$

$C = \dfrac{32 \times 10^{-4} + 6 \times 10^{-3}}{2 \times 10^{-5}} = \dfrac{0{,}0032 + 0{,}006}{2 \times 10^{-5}}$

$= 28 \times 10^{-13}$

$= 2{,}8 \times 10^{-12}$

$= 0{,}625 \times \dfrac{10^4}{10^{-9}}$

$= 0{,}625 \times 10^{13}$

$= 6{,}25 \times 10^{12}$

$= \dfrac{0{,}0092}{2 \times 10^{-5}}$

$= \dfrac{0{,}0092}{2} \times \dfrac{1}{10^{-5}}$

$= 0{,}0046 \times 10^5$

$= 4{,}6 \times 10^2$

Partie 3 : Racines carrées

1. Définition

Exemples :

- $3^2 = 9$ donc $\sqrt{9} = 3$
- $2{,}6^2 = 6{,}76$ donc $\sqrt{6{,}76} = 2{,}6$
- $\sqrt{2} \approx 1{,}4142$
- $\sqrt{3} \approx 1{,}732$

$\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$ s'écrivent avec un nombre infini de décimales, on les appelle des nombres irrationnels.

Définition :
La **racine carrée** de a est le nombre (toujours positif) dont le carré est a.

Racines de carrés parfaits :

$\sqrt{0} = 0$	$\sqrt{25} = 5$	$\sqrt{100} = 10$
$\sqrt{1} = 1$	$\sqrt{36} = 6$	$\sqrt{121} = 11$
$\sqrt{4} = 2$	$\sqrt{49} = 7$	$\sqrt{144} = 12$
$\sqrt{9} = 3$	$\sqrt{64} = 8$	$\sqrt{169} = 13$
$\sqrt{16} = 4$	$\sqrt{81} = 9$	

Remarque : $\sqrt{-5} =$?
La racine carrée de -5 est le nombre dont le carré est -5 !
Un nombre au carré est toujours positif (règle des signes), donc la racine carrée d'un nombre négatif est impossible.
$\sqrt{-5}$ n'existe pas !

2. Propriétés sur les racines carrées

Propriétés : a et b sont des nombres positifs.

$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$ $\qquad$ $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$ $(b \neq 0)$ $\qquad$ $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ $\qquad$ $\sqrt{a^2} = a$

⚠ De façon générale : $\sqrt{a}+\sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$ et $\sqrt{a}-\sqrt{b} \neq \sqrt{a-b}$

Démonstration au programme : $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$

Vidéo https://youtu.be/gzp16wnchaU

- $\left(\sqrt{a} \times \sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2 \times \left(\sqrt{b}\right)^2 = a \times b$
- $\left(\sqrt{a \times b}\right)^2 = a \times b$ car a et b sont positifs

Donc $\left(\sqrt{a} \times \sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a \times b}\right)^2$ et donc $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$

Démonstration au programme : $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a + b}$

Vidéo https://youtu.be/fkE5KngvcCA

On a par exemple :

- $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2 + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + \left(\sqrt{b}\right)^2 = a + b + 2\sqrt{ab}$
- $\left(\sqrt{a + b}\right)^2 = a + b$

Donc $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 > \left(\sqrt{a + b}\right)^2$ car $2\sqrt{ab} > 0$

Et donc $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a + b}$

Méthode : Effectuer des calculs sur les racines carrées

Vidéo https://youtu.be/CrTjK3Qa72s

Écrire le plus simplement possible :

$A = \sqrt{32} \times \sqrt{2}$ $\quad B = \sqrt{3} \times \sqrt{27}$ $\quad C = \sqrt{3} \times \sqrt{36} \times \sqrt{3}$

$D = \dfrac{\sqrt{98}}{\sqrt{2}}$ $\quad E = \dfrac{\sqrt{50}}{\sqrt{72}}$ $\quad F = \left(4\sqrt{5}\right)^2$ $\quad G = \dfrac{\sqrt{32} \times \sqrt{10}}{\sqrt{80}}$

Correction

$A = \sqrt{32} \times \sqrt{2} = \sqrt{32 \times 2} = \sqrt{64} = 8$

$B = \sqrt{3} \times \sqrt{27} = \sqrt{3 \times 27} = \sqrt{81} = 9$

$C = \sqrt{3} \times \sqrt{36} \times \sqrt{3} = \sqrt{3 \times 3} \times \sqrt{36} = \sqrt{9} \times \sqrt{36} = 3 \times 6 = 18$

$$D = \frac{\sqrt{98}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{98}{2}} = \sqrt{49} = 7$$

$$E = \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{72}} = \sqrt{\frac{50}{72}} = \sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{36}} = \frac{5}{6}$$

$F = \left(4\sqrt{5}\right)^2 = 4^2 \times \left(\sqrt{5}\right)^2 = 16 \times 5 = 80$

$G = \frac{\sqrt{32}\times\sqrt{10}}{\sqrt{80}} = \sqrt{\frac{32\times 10}{80}} = \sqrt{4} = 2$

3. Extraire un carré parfait

Méthode : Extraire un carré parfait

Vidéo https://youtu.be/cz27kb_qTy4

Écrire sous la forme $a\sqrt{b}$, avec a et b entiers et b étant le plus petit possible :

$A = \sqrt{72}$ $\quad B = \sqrt{45}$ $\quad C = 3\sqrt{125}$

Correction

$A = \sqrt{72}$

$= \sqrt{36 \times 2}$ ← *On fait « apparaître » dans 72 le carré parfait 36*

$= \sqrt{36} \times \sqrt{2}$ ← *On extrait cette racine en appliquant une formule*

$= 6\sqrt{2}$ ← *On simplifie la racine du carré parfait*

Pour que b soit le plus petit possible, b ne doit pas « contenir » de carré parfait.

$B = \sqrt{45}$

$= \sqrt{9 \times 5}$

$= \sqrt{9} \times \sqrt{5}$

$= 3\sqrt{5}$

$C = 3\sqrt{125}$

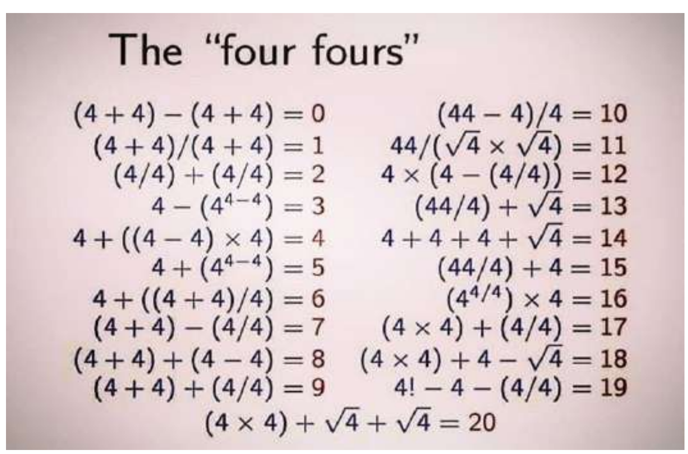
$= 3\sqrt{25 \times 5}$

$= 3\sqrt{25} \times \sqrt{5}$

$= 3 \times 5 \times \sqrt{5}$

$= 15\sqrt{5}$

Curiosité :



4. Simplifier les écritures contenant des racines carrées

Méthode : Simplifier une écriture contenant des racines carrées

Vidéo https://youtu.be/8pB5pq2MyDM
Vidéo https://youtu.be/MXJYntzumDo

1) Écrire le plus simplement possible :
$A = 4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 6\sqrt{3}$
$B = 7\sqrt{2} - 3\sqrt{5} + 8\sqrt{2} - \sqrt{5}$
$C = (3 - 2\sqrt{3}) - (4 - 6\sqrt{3})$

2) Écrire les expressions suivantes sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont des entiers et b le plus petit possible :
$D = \sqrt{12} + 7\sqrt{3} - \sqrt{27}$
$E = \sqrt{125} - 2\sqrt{20} + 6\sqrt{80}$

Correction
1) On regroupe les membres d'une même « famille de racines carrées » pour réduire l'expression.
Les différentes familles de racines carrées sont : $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}$, ...
$A = 4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 6\sqrt{3}$
$\quad = 8\sqrt{3}$

$B = 7\sqrt{2} - 3\sqrt{5} + 8\sqrt{2} - \sqrt{5}$
$\quad = 15\sqrt{2} - 4\sqrt{5}$

$C = (3 - 2\sqrt{3}) - (4 - 6\sqrt{3})$
$\quad = 3 - 2\sqrt{3} - 4 + 6\sqrt{3}$
$\quad = -1 + 4\sqrt{3}$

2) On fait apparaître des racines carrées d'une même famille. Pour cela, il faut extraire des carrés parfaits.

$D = \sqrt{12} + 7\sqrt{3} - \sqrt{27}$ $\leftarrow$ *$\sqrt{12}$ et $\sqrt{27}$ sont des « $\sqrt{3}$ déguisées »*
$\quad = \sqrt{4 \times 3} + 7\sqrt{3} - \sqrt{9 \times 3}$ $\leftarrow$ *Elles sont maintenant « démasquées » !*
$\quad = 2\sqrt{3} + 7\sqrt{3} - 3\sqrt{3}$ $\leftarrow$ *On peut alors réduire l'expression*
$\quad = 6\sqrt{3}$

$E = \sqrt{125} - 2\sqrt{20} + 6\sqrt{80}$
$\quad = \sqrt{25 \times 5} - 2\sqrt{4 \times 5} + 6\sqrt{16 \times 5}$
$\quad = 5\sqrt{5} - 2 \times 2\sqrt{5} + 6 \times 4\sqrt{5}$

$= 5\sqrt{5} - 4\sqrt{5} + 24\sqrt{5}$
$= 25\sqrt{5}$

5. Racines carrées et développements

Méthode : Effectuer des développements avec des racines carrées

Vidéo https://youtu.be/xmtZS0GwV_Y

Développer et réduire les expressions suivantes :

$A = \left(\sqrt{3} - 4\right)^2$ $\qquad B = \left(3 + \sqrt{5}\right)^2$

$C = \left(\sqrt{2} - \sqrt{5}\right)\left(\sqrt{2} + \sqrt{5}\right)$ $\qquad D = \left(3 + \sqrt{3}\right)\left(1 - \sqrt{2}\right)$

Correction

On applique les règles classiques de développement d'une expression comme on peut le faire en calcul littéral.
Les racines sont alors « traitées » comme une inconnue.

$A = \left(\sqrt{3} - 4\right)^2$ ← *On applique la 2^e identité remarquable*

$= \left(\sqrt{3}\right)^2 - 2 \times \sqrt{3} \times 4 + 4^2$
$= 3 - 8\sqrt{3} + 16$
$= 19 - 8\sqrt{3}$

$B = \left(3 + \sqrt{5}\right)^2$ ← *On applique la 1ère identité remarquable*

$= (3)^2 + 2 \times 3 \times \sqrt{5} + \left(\sqrt{5}\right)^2$
$= 9 + 6\sqrt{5} + 5$
$= 14 + 6\sqrt{5}$

$C = \left(\sqrt{2} - \sqrt{5}\right)\left(\sqrt{2} + \sqrt{5}\right)$ ← *On applique la 3^e identité remarquable*

$= \left(\sqrt{2}\right)^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2$
$= 2 - 5$
$= -3$

$D = \left(3 + \sqrt{3}\right)\left(1 - \sqrt{2}\right)$ ← *On applique la double distributivité*

$= 3 - 3\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{3} \times \sqrt{2}$
$= 3 - 3\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{6}$

NOMBRES RÉELS – Chapitre 1/2

Tout le cours sur les ensembles de nombres en vidéo : https://youtu.be/kL-eMNZiARM

Partie 1 : Nombres entiers

Vidéo https://youtu.be/HMY31orMLjs

1. Nombres entiers naturels

Définition : Un **nombre entier naturel** est un nombre entier qui est positif.
L'ensemble des **nombres entiers naturels** est noté $\mathbb{N}$.
$\mathbb{N} = \{0\,;1\,;2\,;3\,;4\,;\ldots\}$.

Exemples :
$4 \in \mathbb{N}$ (4 appartient à l'ensemble des entiers naturels)
$-2 \notin \mathbb{N}$ (-2 n'appartient pas à l'ensemble des entiers naturels)

2. Nombres entiers relatifs

Définition : Un **nombre entier relatif** est un nombre entier qui est positif ou négatif.
L'ensemble des **nombres entiers relatifs** est noté $\mathbb{Z}$.
$\mathbb{Z} = \{\ldots\,;-3\,;\,-2\,;\,-1\,;\,0\,;1\,;2\,;3\,;\ldots\}$.

Exemples : $-2 \in \mathbb{Z}$ $\quad$ $5 \in \mathbb{Z}$ $\quad$ $0{,}33 \notin \mathbb{Z}$

Partie 2 : Nombres décimaux, nombres rationnels

1. Nombres décimaux

Définition : Un **nombre décimal** est un nombre qui s'écrit avec un nombre fini de chiffres après la virgule.
L'ensemble des **nombres décimaux** est noté $\mathbb{D}$.

Exemples : $0{,}56 \in \mathbb{D}$ $\quad$ $3 \in \mathbb{D}$

$\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$ car $\frac{1}{3} \approx 0{,}3333\ldots$ $\quad$ $\frac{3}{4} \in \mathbb{D}$ car $\frac{3}{4} = 0{,}75$

Remarque :
Un nombre décimal peut toujours s'écrire sous la forme de la fraction d'un entier et d'une puissance de 10.
Par exemple : $2{,}36 = \frac{236}{100} = \frac{236}{10^2}$

2. Nombres rationnels

Définition : Un **nombre rationnel** est une fraction (*).
L'ensemble des **nombres rationnels** est noté $\mathbb{Q}$.

(*) Une fraction s'écrit sous la forme d'un quotient $\frac{a}{b}$ avec a un entier et b un entier non nul.

Exemples : $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$ $\quad 4 \in \mathbb{Q}$ $\quad -4{,}8 \in \mathbb{Q}$ $\quad \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Démonstration au programme :

Vidéo https://youtu.be/SHRo1ISyIXI

Démontrons que le nombre rationnel $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal.

On va effectuer une démonstration par l'absurde en supposant que $\frac{1}{3}$ est décimal.
Si notre démonstration aboutit à une absurdité, cela prouvera que notre hypothèse de départ est fausse.
Supposons donc que $\frac{1}{3}$ est décimal.
Alors il peut s'écrire sous la forme de la fraction d'un entier et d'une puissance de 10.
Soit $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^p}$ avec a entier et p entier naturel.
Donc $10^p = 3a$ et donc 10^p est divisible par 3.
Un nombre est divisible par 3 lorsque la somme de ses chiffres est divisible par 3.
Or, ceci est impossible car la somme des chiffres de 10^p est 1, et 1 n'est pas divisible par 3.
Donc l'hypothèse posée au départ est fausse et donc $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal

Partie 3 : Notion de nombres réels

1. Nombres irrationnels

Définition : Un **nombre irrationnel** est un nombre qui ne peut pas s'écrire à l'aide d'une fraction.

Exemples :
$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ ou encore π sont des nombres irrationnels.
Ils ne peuvent pas s'écrire sous la forme d'une fraction.

Remarque :
Il n'est pas possible d'écrire un nombre irrationnel sous forme décimale. Les décimales qui le constituent sont en nombre infini et se suivent sans suite logique.

2. Nombres réels

Définition : Un nombre réel est un nombre rationnel ou irrationnel.
L'ensemble des **nombres réels** est noté $\mathbb{R}$.

Exemples :
$2, -5, 0.67, \frac{1}{3}, \sqrt{3}$ ou π appartiennent à $\mathbb{R}$.

Remarques :
- Un nombre est réel s'il est l'abscisse d'un point d'une droite graduée appelée la **droite numérique**.
- $\mathbb{R}$ est l'ensemble de tous les nombres que nous utilisons en classe de seconde.

Démonstration au programme : Irrationalité de $\sqrt{2}$

Vidéo https://youtu.be/oRcTlNh1Sjc
On va effectuer une démonstration par l'absurde en supposant que $\sqrt{2}$ est rationnel.
Si notre démonstration aboutit à une absurdité, cela prouvera que notre hypothèse de départ est fausse.

Supposons donc que $\sqrt{2}$ est un rationnel.
Il s'écrit alors $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ avec a et b entiers naturels premiers entre eux, b non nul.
Ainsi : $\frac{a^2}{b^2} = 2$ soit $a^2 = 2b^2$.
On en déduit que a^2 est pair, ce qui entraîne que a est pair.
En effet, si a était impair, alors a^2 serait impair (voir Chapitre « Notion de multiple, diviseur et nombre premier »).
Puisque a est pair, il existe un entier naturel k tel que $a = 2k$.
Comme, $a^2 = 2b^2$

On a : $(2k)^2 = 2b^2$

Soit : $4k^2 = 2b^2$

Soit encore $b^2 = 2k^2$.

On en déduit que b^2 est pair, ce qui entraîne que b est pair.
Or, a et b sont premiers entre eux, donc ils ne peuvent être pairs simultanément. On aboutit à une absurdité.
Donc, $\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel. Et donc, $\sqrt{2}$ est un irrationnel.

« Les nombres entiers permettent de compter, les nombres réels permettent de mesurer. »

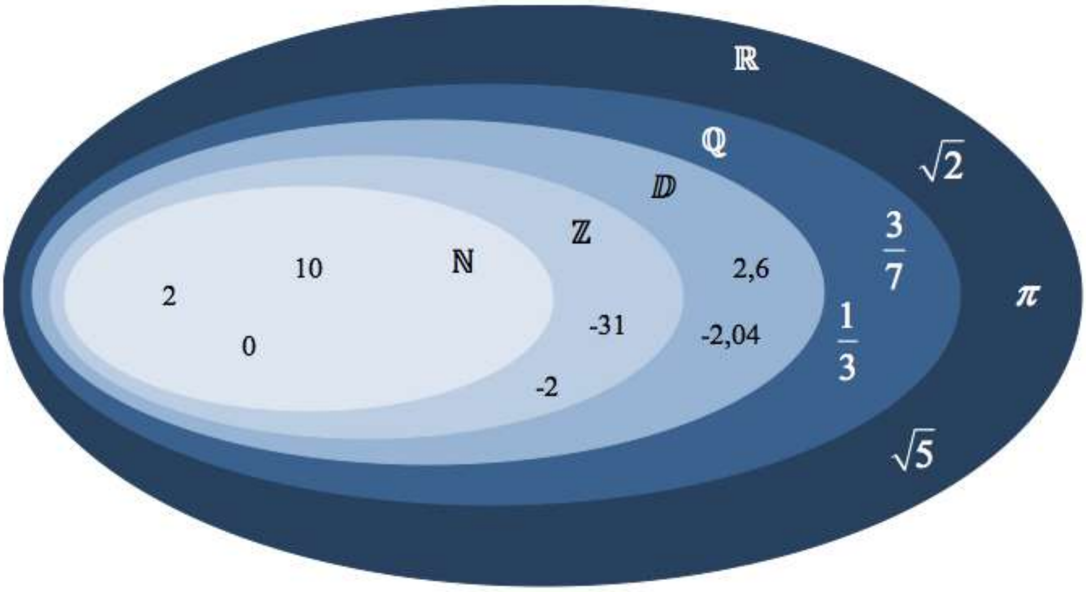
Partie 4 : Classification des nombres

La classification des nombres :

Vidéo https://youtu.be/kL-eMNZiARM

Si un nombre appartient à $\mathbb{N}$, alors il appartient à $\mathbb{Z}$.
Par exemple : $5 \in \mathbb{N}$ donc $5 \in \mathbb{Z}$.
On dit que l'ensemble $\mathbb{N}$ est inclus dans l'ensemble $\mathbb{Z}$. On note : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

On a également les inclusions suivantes :
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$



Méthode : Reconnaître la nature d'un nombre

Vidéo https://youtu.be/pKxTaiqnyHg

Quel est le plus petit ensemble de nombres auquel appartient chacun des nombres suivants ?

1) $-\frac{1}{4}$ 2) $\frac{2}{6}$ 3) $1,333$ 4) $\sqrt{36}$ 5) $\sqrt{6}$ 6) $\frac{-3\left(\sqrt{2}\right)^2}{12}$

Correction

1) $-\dfrac{1}{4} = -0{,}25$

Donc $-\dfrac{1}{4} \in \mathbb{D}$ car le nombre de décimales après la virgule est en nombre fini.

2) $\dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3} \approx 0{,}3333\ldots$

Donc $\dfrac{2}{6} \in \mathbb{Q}$ car $\dfrac{2}{6}$ s'écrit uniquement sous forme d'une fraction et ne peut pas s'écrire sous forme décimale.

3) $1{,}333 \in \mathbb{D}$ car le nombre de décimales après la virgule est en nombre fini.

4) $\sqrt{36} = 6$

Donc $\sqrt{36} \in \mathbb{N}$ car 6 est un nombre entier positif.

5) $\sqrt{6} \approx 2{,}4495\ldots$

Donc $\sqrt{6} \in \mathbb{R}$ car c'est un nombre irrationnel.

6) $\dfrac{-3\left(\sqrt{2}\right)^2}{12} = \dfrac{-3 \times 2}{12} = \dfrac{-6}{12} = -0{,}5$

Donc $\dfrac{-3\left(\sqrt{2}\right)^2}{12} \in \mathbb{D}$ car le nombre de décimales après la virgule est en nombre fini.

<u>Déterminer un arrondi d'un nombre :</u>

Vidéo https://youtu.be/53VOST9yJfg

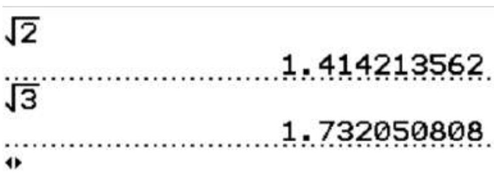
Méthode : Donner un encadrement d'un nombre réel

Vidéo https://youtu.be/sJIXJT3fdcU

A l'aide de la calculatrice donner un encadrement à 10^{-3} de $\sqrt{2}$ et de $\sqrt{3}$.

Correction

La calculatrice affiche des valeurs approchées :



Donner un encadrement à 10^{-3}, c'est donner un encadrement d'amplitude $0{,}001$.

On a alors les encadrements à 10^{-3} : $1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$ et $1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733$.

MULTIPLES, DIVISEURS, NOMBRES PREMIERS

Tout le cours en vidéo : https://youtu.be/9l4EvLS0ezA

Partie 1 : Multiples et diviseurs

Définition : Soit a et b deux entiers naturels.
On dit que a est un **multiple** de b s'il existe un entier k tel que $a = kb$.

Remarque **:** On dit alors que b est un **diviseur** de a.

Exemple :
15 est un multiple de 3, car $15 = k \times 3$ avec $k = 5$.

Méthode : Démontrer qu'un nombre est un multiple ou un diviseur

Vidéo https://youtu.be/umlnJooSDas

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
1) 36 est un multiple de 12.
2) 28 est un multiple de 8.
3) 6 est un diviseur de 54.
4) 7 est un diviseur de 24.

Correction
1) VRAI : 36 est un multiple de 12, car $36 = k \times 12$ avec $k = 3$.
2) FAUX : 28 n'est pas un multiple de 8 car il n'existe pas d'entier k tel que $28 = k \times 8$.
3) VRAI : 6 est un diviseur de 54, car $54 = k \times 6$ avec $k = 9$.
4) FAUX : 7 n'est pas un diviseur de 24 car il n'existe pas d'entier k tel que $24 = k \times 7$.

Propriété : La somme de deux multiples d'un entier a est un multiple de a.

Exemple :
700 et 21 sont des multiples de 7 donc :
721 = 700 + 21 est un multiple de 7.

Démonstration au programme : avec $a = 3$

Vidéo https://youtu.be/4an6JTwrJV4

Démontrons que la somme de deux multiples de 3 est un multiple de 3.

Soit b et c deux multiples de 3.
Comme b est un multiple de 3, il existe un entier k_1 tel que $b = 3k_1$.
Comme c est un multiple de 3, il existe un entier k_2 tel que $c = 3k_2$.

Alors : $b+c=3k_1+3k_2=3(k_1+k_2)=3k$, où $k=k_1+k_2$.
$k=k_1+k_2$ est un entier car somme de deux entiers, donc $b+c=3k$ avec k entier.
$b+c$ est donc un multiple de 3.

Méthode : Résoudre un problème avec des multiples ou des diviseurs

Vidéo https://youtu.be/7nU2M-zhAjk

Montrer que la somme de trois entiers consécutifs est toujours un multiple de 3.

Correction
Soit trois entiers consécutifs qui peuvent donc s'écrire sous la forme :
n, $n+1$ et $n+2$, où n est un entier quelconque.
Leur somme est :
$S=n+(n+1)+(n+2)=n+n+1+n+2=3n+3=3(n+1)$.

Donc $S=k\times 3$, avec $k=n+1$ entier.
On en déduit que S est un multiple 3.

Partie 2 : Nombres pairs, nombres impairs

Définition : Un nombre **pair** est un multiple de 2.
Un nombre **impair** est un nombre qui n'est pas pair.

Exemples :
- 34 est pair, car c'est un multiple de 2, on a $34 = 17\times 2$
- 57 est impaire car il n'existe pas d'entier k tel que $57=k\times 2$.

Propriétés : Un nombre pair s'écrit sous la forme $2k$, avec k entier.
Un nombre impair s'écrit sous la forme $2k+1$, avec k entier.

Exemples :
- $34=2\times k$, avec $k=17$.
- $57=2\times k+1$, avec $k=28$.

Propriétés :

Écrit de façon abrégée, on a :
PAIR + PAIR → PAIR
PAIR + IMPAIR → IMPAIR
IMPAIR + IMPAIR → PAIR

PAIR x NOMBRE → PAIR
IMPAIR x IMPAIR → IMPAIR

Méthode : Déterminer la parité d'un nombre

Vidéo https://youtu.be/cE3gOMZ0Kko

Quelle est la parité de $5\,678\,984^2+1$

Correction

$$5\,678\,984^2 = \underbrace{5\,678\,984}_{\text{PAIR}} \times \underbrace{5\,678\,984}_{\text{PAIR}}$$

Donc $5\,678\,984^2$ est pair car PAIR × PAIR → PAIR

On peut donc écrire $5\,678\,984^2=2k$, avec k entier.
Et donc :
$5\,678\,984^2+1=2k+1$ est impair.

Propriété : Le carré d'un nombre impair est impair.

Démonstration au programme :

Vidéo https://youtu.be/eKo1MpX9ktw

Soit a est un nombre impair. Alors il s'écrit sous la forme $a=2k+1$, avec k entier.
Donc $a^2=(2k+1)^2 \;=4k^2+4k+1=2(2k^2+2k)+1=2k'+1$, avec $k'=2k^2+2k$.
k' est entier car somme de deux entiers, donc a^2 s'écrit sous la forme $a^2=2k'+1$ et donc a^2 est impair.

Méthode : Résoudre un problème avec des nombres pairs ou impairs

Vidéo https://youtu.be/xCLLqx11Le0
Vidéo https://youtu.be/3Gv_z0pM9pM

Montrer que le produit de deux entiers consécutifs est un nombre pair.

Correction
Soit deux entiers consécutifs n et $n+1$.

- Si n est pair, alors il s'écrit sous la forme $n=2k$, avec k entier.
Alors le produit des deux entiers consécutifs s'écrit :
$n(n+1)=2k(2k+1)=2k_1, avec\ k_1=k(2k+1)$ entier.
Donc $n(n+1)$ est pair.

- Si n est impair, alors il s'écrit sous la forme $n=2k+1$, avec k entier.
Alors le produit des deux entiers consécutifs s'écrit :
$n(n+1)=(2k+1)(2k+2)=2(2k+1)(k+1)=2k_2$, avec $k_2=(2k+1)(k+1)$ entier.
Donc $n(n+1)$ est pair.

Dans tous les cas, le produit de deux entiers consécutifs est un nombre pair.

Partie 3 : Nombres premiers (Rappels)

Définition : Un nombre est **premier** s'il possède exactement deux diviseurs qui sont 1 et lui-même.

Exemples :
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, … Cette liste est infinie.

Remarque :
Le nombre 1 n'est pas premier car il n'a qu'un seul diviseur.

Méthode : Démontrer qu'un nombre est premier

Vidéo https://youtu.be/kLs0TiIz7lc

Vérifier si le nombre 97 est premier.

Règles de divisibilité (rappels) :
2 : Le chiffre des unités est pair (0, 2, 4, 6, 8).
3 : La somme des chiffres est divisible par 3.
5 : Le chiffre des unités est 0 ou 5.
9 : La somme des chiffres est divisible par 9.
10 : Le chiffre des unités est 0.

Correction

On cherche tous les diviseurs éventuels de 97 jusqu'à $\sqrt{97}$. Il n'est pas nécessaire de tester tous les entiers inférieurs à 97.

$\sqrt{97} \approx 9,8$
On va donc tester les entiers de 2 à 9.

- **2 :** Non ! 97 ne se termine pas par un chiffre pair.
- **3 :** Non ! 9+7=16 et 16 n'est pas divisible par 3.
- **4 :** Non ! Un nombre qui n'est pas divisible par 2, ne l'est pas par 4.
- **5 :** Non ! 97 ne se termine pas par 0 ou 5.
- **6 :** Non ! Un nombre qui n'est pas divisible par 2, ne l'est pas par 6.
- **7 :** Non ! 70+28=98. 70 et 28 sont divisibles par 7, donc 98 l'est et 97 ne l'est pas.
- **8 :** Non ! Un nombre qui n'est pas divisible par 2, ne l'est pas par 8.
- **9 :** Non ! Un nombre qui n'est pas divisible par 3, ne l'est pas par 9.

97 n'est divisible par aucun des entiers de 2 à 9.
Donc 97 est un nombre premier.

Propriété : Tout nombre non premier peut se décomposer en produit de facteurs premiers. L'ordre des facteurs n'a pas d'importance.

Exemple :
$300 = \mathbf{2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5}$

Définition : On dit qu'une fraction est irréductible, lorsque son numérateur et son dénominateur n'ont pas de diviseur commun autre que 1.

Méthode : Rendre une fraction irréductible

Vidéo https://youtu.be/qZaTliAWkA0

Rendre irréductible la fraction $\frac{60}{126}$.

Correction

Pour rendre une fraction irréductible, il faut décomposer son numérateur et son dénominateur en produit de facteurs premiers.

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

On ainsi les décompositions de 60 et 126 :

$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$ et $126 = 2 \times 3 \times 3 \times 7$

On a : $\frac{60}{126} = \frac{2\times2\times3\times5}{2\times3\times3\times7} = \frac{2\times5}{3\times7} = \frac{10}{21}$

10 et 21 n'ont pas de diviseur commun autre que 1 et donc :

$\frac{10}{21}$ est la fraction irréductible égale à $\frac{60}{126}$.

ÉQUATIONS

Tout le cours sur les équations en vidéo : https://youtu.be/WoTpA2RyuVU

Partie 1 : Équations du premier degré

But : Trouver x !
C'est-à-dire : isoler x dans l'équation pour arriver à :
x = nombre

Méthode : Résoudre une équation du premier degré

Vidéo https://youtu.be/quzC5C3a9jM

Résoudre les équations : a) $-5x+3=-3x+2$
b) $3(x+4)=-(x+5)+2$

Correction

1) $-5x+3=-3x+2$

$-5x+3x=2-3$ ← On ramène les « x » à gauche et les « nombres » à droite.

$-2x=-1$ ← Réduire

$x=\frac{-1}{-2}$ ← On divise par -2.

$x=\frac{1}{2}$

2) $3(x+4)=-(x+5)+2$

$3x+12=-x-5+2$ On applique la distributivité

$3x+x=-12-5+2$

$4x=-15$

$x=-\frac{15}{4}$

Partie 2 : Équation-produit

➤ Équation du type : $P(x)\times Q(x)=0$, où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des expressions littérales.

Propriété : Si $A\times B=0$ alors $A=0$ ou $B=0$.

Autre formulation :
Si un produit de facteurs est nul, alors l'un au moins des facteurs est nul.

Méthode : Résoudre une équation-produit

Vidéo https://youtu.be/EFgwA5f6-40
Vidéo https://youtu.be/sMvrUMUES3s

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
a) $(4x+6)(3-7x)=0$
b) $(3x+1)(1-6x)-(3x+7)(3x+1)=0$
c) $5x^2-4x=0$

Correction
a) $(4x+6)(3-7x)=0$
Si un produit de facteurs est nul, alors l'un au moins des facteurs est nul.

Soit : $4x+6=0$ ou $3-7x=0$
$4x=-6$ $-7x=-3$
$x=-\frac{6}{4}$ $x=\frac{-3}{-7}$
$x=-\frac{3}{2}$ $x=\frac{3}{7}$

L'équation a deux solutions : $-\frac{3}{2}$ et $\frac{3}{7}$.
On note : $S=\left\{-\frac{3}{2}\,;\,\frac{3}{7}\right\}$.

b) On commence par factoriser l'expression pour se ramener à une équation-produit :
$(3x+1)(1-6x)-(3x+7)(3x+1)=0$
$(3x+1)[(1-6x)-(3x+7)]=0$
$(3x+1)(1-6x-3x-7)=0$
$(3x+1)(-9x-6)=0$
Soit : $3x+1=0$ ou $-9x-6=0$
$3x=-1$ $-9x=6$
$x=-\frac{1}{3}$ $x=\frac{6}{-9}=-\frac{2}{3}$

L'équation a deux solutions : $-\frac{2}{3}$ et $-\frac{1}{3}$.
On note : $S=\left\{-\frac{2}{3}\,;\,-\frac{1}{3}\right\}$.

c) $5x^2-4x=0$
$x(5x-4)=0$
Soit : $x=0$ ou $5x-4=0$
$5x=4$

$$x = \frac{4}{5}$$

L'équation a deux solutions : 0 et $\frac{4}{5}$.

On note : $S = \left\{0\ ;\ \frac{4}{5}\right\}$.

Partie 3 : Équation de la forme $x^2 = a$

Propriété : Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $x^2 = a$ dépendent du signe de a.
Si $a < 0$, alors l'équation n'a pas de solution.
Si $a = 0$, alors l'équation possède une unique solution qui est 0.
Si $a > 0$, alors l'équation possède deux solutions qui sont $-\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$.

Démonstration :

- Si $a < 0$, l'équation n'a pas de solution car un carré est toujours positif.
- Si $a = 0$, alors l'équation s'écrit $x^2 = 0$ donc $x = 0$.
- Si $a > 0$: $x^2 = a$ équivaut à : $x^2 - a = 0$
  Soit $\left(x - \sqrt{a}\right)\left(x + \sqrt{a}\right) = 0$
  $x - \sqrt{a} = 0$ ou $x + \sqrt{a} = 0$

L'équation possède deux solutions : $-\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$.

Méthode : Résoudre une équation de la forme $x^2 = a$

Vidéo https://youtu.be/ef15aeQRs6w

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :
a) $x^2 = 16$ b) $x^2 = -8$ c) $(x + 2)^2 = 9$.

Correction
a) L'équation $x^2 = 16$ possède deux solutions : $x = -\sqrt{16} = -4$ et $x = \sqrt{16} = 4$.
On note : $S = \{-4\ ;\ 4\}$.

b) L'équation $x^2 = -8$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$ car -8 est négatif.
On note : $S = \emptyset$.

c) L'équation $(x + 2)^2 = 9$ possède deux solutions :
$x + 2 = -\sqrt{9}$ et $x + 2 = \sqrt{9}$
Soit : $x = -3 - 2 = -5$ et $x = 3 - 2 = 1$
L'équation a deux solutions : -5 et 1.
On note : $S = \{-5\ ;\ 1\}$.

Partie 4 : Équation-quotient

➤ Équation du type : $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$, où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des expressions littérales ($Q(x) \neq 0$).

Propriété : Si $\frac{A}{B} = 0$ alors $A = 0$ et $B \neq 0$.

Exemple :
L'équation $\frac{x+2}{x+3} = 0$ a pour solution $x = -2$.

Méthode : Résoudre une équation-quotient

Vidéo https://youtu.be/zhY1HD4oLHg
Vidéo https://youtu.be/OtGN4HHwEek

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

a) $\frac{3x+5}{x-1} = 0$ b) $\frac{(2x+1)(x-3)}{x-4} = 0$ c) $\frac{x^2-9}{x+3} = 0$ d) $\frac{x+3}{x-3} = \frac{2}{x-3}$

e) *Pour les experts :* $1 - \frac{x+3}{x-3} = \frac{2}{2-x}$

Correction

a) L'équation $\frac{3x+5}{x-1} = 0$ n'est pas définie pour $x - 1 = 0$, soit pour $x = 1$.

Pour $x \neq 1$, l'équation $\frac{3x+5}{x-1} = 0$ équivaut à : $3x + 5 = 0$

$$3x = -5$$
$$x = -\frac{5}{3}.$$

On note : $S = \left\{-\frac{5}{3}\right\}$.

b) L'équation $\frac{(2x+1)(x-3)}{x-4} = 0$ n'est pas définie pour $x - 4 = 0$, soit pour $x = 4$.

Pour $x \neq 4$, l'équation $\frac{(2x+1)(x-3)}{x-4} = 0$ équivaut à : $(2x + 1)(x - 3) = 0$

Soit : $2x + 1 = 0$ ou $x - 3 = 0$

$2x = -1$ $x = 3$

$x = -\frac{1}{2}$

Les solutions sont : $x = -\frac{1}{2}$ et $x = 3$.

On note : $S = \left\{-\frac{1}{2}\ ;\ 3\right\}$.

c) L'équation $\frac{x^2-9}{x+3} = 0$ n'est pas définie pour $x + 3 = 0$, soit pour $x = -3$.

Pour $x \neq -3$, l'équation $\frac{x^2-9}{x+3} = 0$ équivaut à : $x^2 - 9 = 0$, soit $x^2 = 9$

Soit encore : $x = -\sqrt{9} = -3$ ou $x = \sqrt{9} = 3$.

Comme $x \neq -3$, l'équation a pour unique solution : $x = 3$.

On note : $S = \{3\}$.

d) L'équation $\frac{x+3}{x-3} = \frac{2}{x-3}$ n'est pas définie pour : $x - 3 = 0$, soit pour $x = 3$.

Pour $x \neq 3$, l'équation $\frac{x+3}{x-3} = \frac{2}{x-3}$ équivaut à : $\frac{x+3}{x-3} - \frac{2}{x-3} = 0$.

On réduit au même dénominateur dans le but de se ramener à une équation-quotient :

$\frac{x+3-2}{x-3} = 0$

$\frac{x+1}{x-3} = 0$

Pour $x \neq 3$, l'équation équivaut à $x + 1 = 0$.

D'où $x = -1$.

On note : $S = \{-1\}$.

e) L'équation $1 - \frac{x+3}{x-3} = \frac{2}{2-x}$ n'est pas définie pour $x = 2$ et $x = 3$.

Pour $x \neq 2$ et $x \neq 3$, l'équation $1 - \frac{x+3}{x-3} = \frac{2}{2-x}$ équivaut à : $1 - \frac{x+3}{x-3} - \frac{2}{2-x} = 0$

On réduit au même dénominateur dans le but de se ramener à une équation-quotient :

$\frac{(x-3)(2-x)}{(x-3)(2-x)} - \frac{(x+3)(2-x)}{(x-3)(2-x)} - \frac{2(x-3)}{(2-x)(x-3)} = 0$

$\frac{(x-3)(2-x)-(x+3)(2-x)-2(x-3)}{(x-3)(2-x)} = 0$

On développe et on réduit le numérateur :

$\frac{2x-x^2-6+3x-2x+x^2-6+3x-2x+6}{(x-3)(2-x)} = 0$

$\frac{4x-6}{(x-3)(2-x)} = 0$

Ce qui équivaut à $4x - 6 = 0$.

D'où $x = \frac{3}{2}$.

On note : $S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$.

LES VECTEURS – Chapitre 1/2

Tout le cours en vidéo : https://youtu.be/aSSDBNn_rRI

Activités de groupe : La Translation (Partie1) :
http://www.maths-et-tiques.fr/telech/trans_gr1.pdf

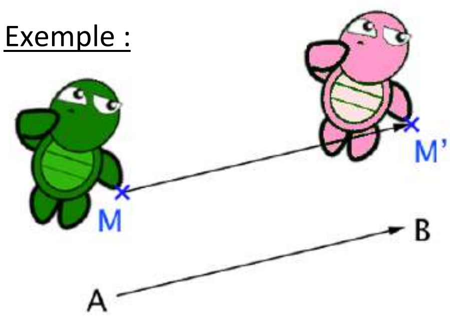
La Translation (Partie2) :
http://www.maths-et-tiques.fr/telech/trans_gr2.pdf

Partie 1 : Notion de vecteur

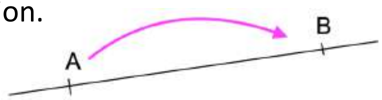
1. Translation (Rappel)

Définition :
Une **translation** fait glisser une figure selon une direction, un sens et une longueur donnée, schématisé par une flèche.

Exemple :



Ne pas confondre **direction** et **sens** :
Par exemple :
La **droite (AB)** définit une direction.
De A vers B définit un sens.



M' est l'image de M par la translation qui envoie A en B.

2. Définition et propriétés :

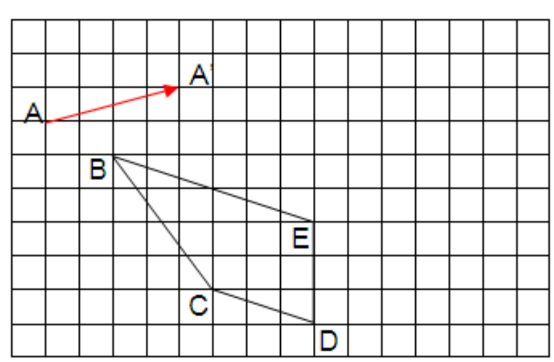
Définition :
La flèche qui définit la translation s'appelle un **vecteur**.
Un vecteur est défini selon :
- une direction,
- un sens,
- une longueur.

La tortue rose est l'image de la tortue verte par la translation de vecteur noté $\overrightarrow{AB}$.

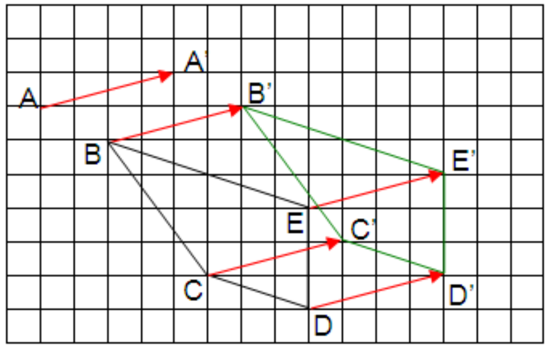
Méthode : Construire l'image d'une figure par une translation

Vidéo https://youtu.be/8Jb9cMOeYSk

Soit la translation définie par le vecteur $\overrightarrow{AA'}$.
Construire l'image B'C'D'E' du trapèze BCDE par cette translation.



Correction



« vecteur » vient du latin « vehere » (conduire, transporter)
Le mot a été introduit en 1925 et la notation $\overrightarrow{AB}$ en 1920.
A l'origine des vecteurs, un italien, ***Giusto Bellavitis*** (1803-1880) qui les désignait comme *segments équipollents*.

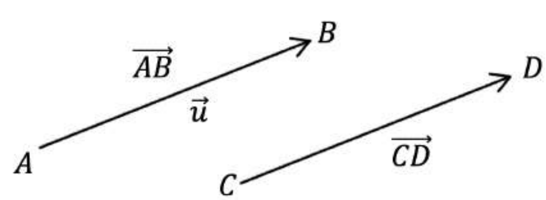
Activités de groupe :
http://www.maths-et-tiques.fr/telech/Act_vect.pdf

TP info : Bonhommes et dromadaires :
http://www.maths-et-tiques.fr/telech/bonhom.pdf
http://www.maths-et-tiques.fr/telech/droma.pdf

3. Vecteurs égaux

Définition :
Des vecteurs sont **égaux** lorsqu'ils ont même direction, même sens et même longueur.

Exemple :
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux.
On note : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.



On dit dans ce cas que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont des représentants d'un même vecteur.
On peut noter plus simplement ce vecteur à l'aide d'une seule lettre : $\vec{u}$.
Et on a : $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Définition :
La longueur d'un vecteur est appelée la **norme** du vecteur.

Méthode : Construire un point défini à partir de vecteurs

Vidéo https://youtu.be/zcQPz4dfnn0

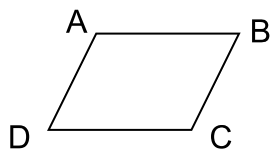
À partir du parallélogramme $ABCD$, construire les points E, F, G et H tels que :

$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BC}$

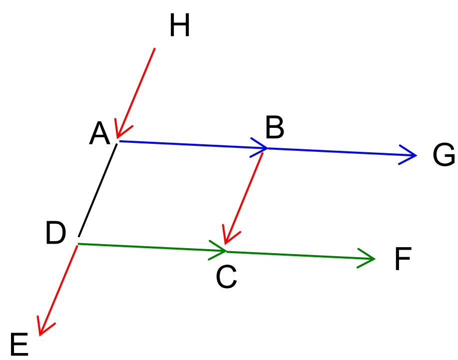
$\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{BC}$

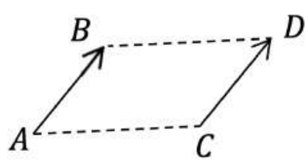


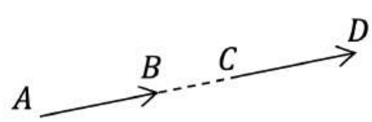
Correction



Propriété du parallélogramme :

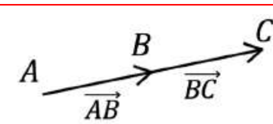
Dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux revient à dire que le quadrilatère AB**DC** est un parallélogramme, éventuellement aplati.





Propriété du milieu :

Dire que B est le milieu du segment $[AC]$ revient à dire que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont égaux.



Méthode : Utiliser des propriétés sur les vecteurs

Vidéo https://youtu.be/XokpP_8mTOE

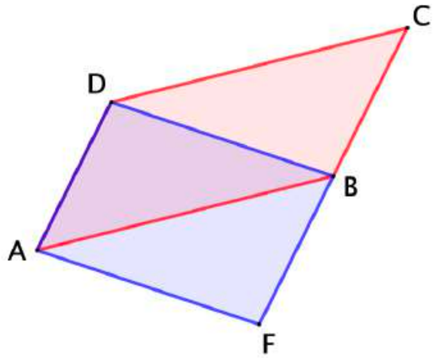
$ABCD$ et $AFBD$ sont deux parallélogrammes.

a) Réaliser une figure.

b) Démontrer que B est le milieu du segment $[CF]$.

Correction

a)



b) Dire que B est le milieu de $[CF]$ revient à dire que $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BF}$.
Démontrons-le.

$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$ car $ABCD$ est un parallélogramme.
$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{DA}$ car $AFBD$ est un parallélogramme.
Donc $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BF}$
Et donc en particulier : $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BF}$.
D'où B est le milieu de $[CF]$.

4. Vecteur nul

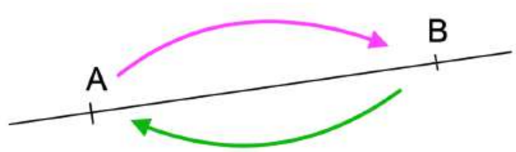
Définition : Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est **nul** lorsque les points A et B sont confondus.

On note : $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

Remarque : Pour tout point M, on a : $\overrightarrow{MM} = \vec{0}$.

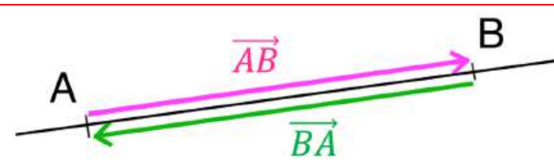
5. Vecteurs opposés

Il ne faut pas confondre sens et direction !
Une droite définit une direction, ci-dessous la direction de la droite (AB).
Cependant une direction possède deux sens, ici de « A vers B » ou de « B vers A ».



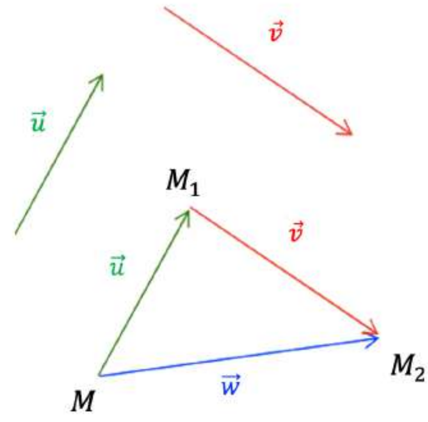
Définition : Deux vecteurs sont **opposés** lorsqu'ils ont la même direction, la même longueur et qu'ils sont de sens contraire.

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont des vecteurs opposés.
On note $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$



Partie 2 : Somme de vecteurs

1. Exemple avec les translations



Soit t_1 la translation de vecteur $\vec{u}$
et t_2 la translation de vecteur $\vec{v}$.

Appliquer la translation t_1 puis la translation t_2 :

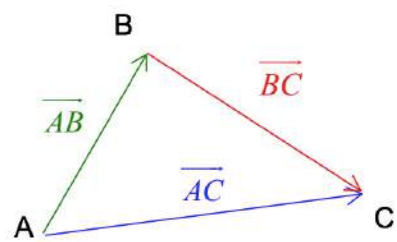
$$M \longmapsto M_1 \longmapsto M_2$$

revient à appliquer la translation t de vecteur $\vec{w}$:

$$M \longmapsto M_2$$

L'enchaînement de deux translations de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est la translation de vecteurs noté $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$.

2. Addition de deux vecteurs



Exemple :
Sur la figure, on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
La somme des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ construit bout à bout est égale au vecteur $\overrightarrow{AC}$.

Remarques :

- L'égalité précédente porte le nom de **relation de Chasles**.
- Dans le triangle ABC, on a également les relations : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$
  $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$.

Michel Chasles (Fr, 1793-1880) : La relation n'est pas de lui, mais nommée ainsi en hommage à ses travaux sur les vecteurs.
Homme naïf, on raconte qu'il fut ruiné en achetant de fausses lettres (Jeanne d'arc à sa mère, Vercingétorix à César,…) !

Méthode : Appliquer la relation de Chasles (non exigible)

Vidéo https://youtu.be/fbVrdYiY0qc

Simplifier les écritures :

a) $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN}$ b) $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{AM}$ c) $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{KO} + \overrightarrow{NK}$
d) $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NM}$ e) $\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{OP}$ f) $\overrightarrow{KN} - \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OK}$

Correction

a) $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN}$
$= \overrightarrow{AN}$

b) $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{AM}$
$= \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MP}$
$= \overrightarrow{AP}$

c) $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{KO} + \overrightarrow{NK}$
$= \overrightarrow{KO} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{NK}$
$= \overrightarrow{KP} + \overrightarrow{NK}$
$= \overrightarrow{NK} + \overrightarrow{KP} = \overrightarrow{NP}$

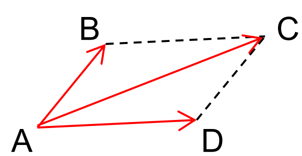
d) $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NM}$
$= \overrightarrow{MM}$
$= \vec{0}$

e) $\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{OP}$
$= \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM}$
$= \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PM}$
$= \overrightarrow{MM} = \vec{0}$

f) $\overrightarrow{KN} - \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OK}$
$= \overrightarrow{KN} + \overrightarrow{NO} + \overrightarrow{OK}$
$= \overrightarrow{KO} + \overrightarrow{OK}$
$= \overrightarrow{KK} = \vec{0}$

Propriété caractéristique du parallélogramme :

Dire que $ABCD$ est un parallélogramme revient à dire que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$,



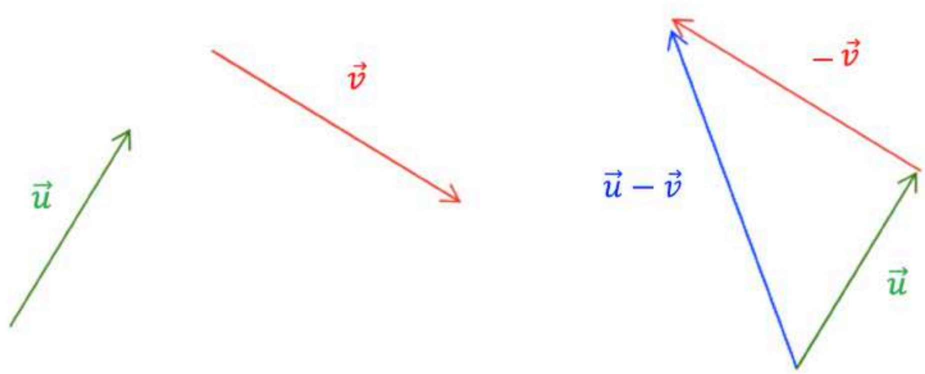
Démonstration :

D'après la relation de Chasles, l'égalité $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ peut s'écrire :
$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$
Soit $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$,
soit encore : $ABCD$ est un parallélogramme.

3. Soustraction de deux vecteurs

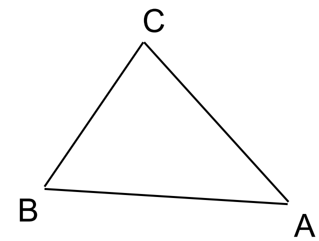
Exemple :

Pour effectuer la différence des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on passe à la somme :
$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$.
Pour obtenir la somme des vecteurs $\vec{u}$ et $-\vec{v}$, on construit les vecteurs $\vec{u}$ et $-\vec{v}$ bout à bout.



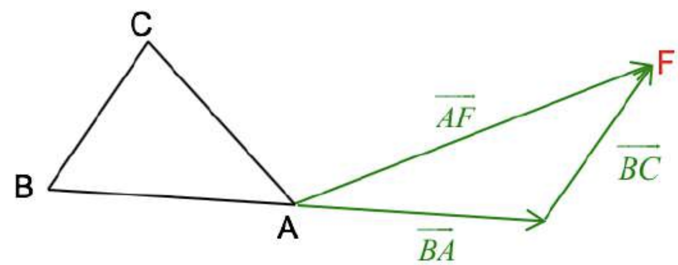
Méthode : Construire un point défini à partir d'une somme de vecteurs

Vidéo https://youtu.be/nzABUzFM6p8



Soit un triangle ABC.
Construire le point F tel que $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$

Correction

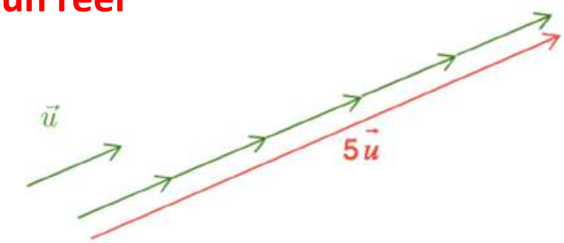


On construit à partir de A (origine de $\overrightarrow{AF}$) le vecteur $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$ en mettant « bout à bout » les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$.
On a ainsi construit le vecteur $\overrightarrow{AF}$ et donc le point F.

LES VECTEURS – Chapitre 2/2

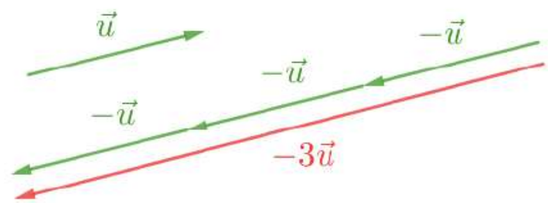
Tout le cours en vidéo : https://youtu.be/aSSDBNn_rRI

Partie 1 : Produit d'un vecteur par un réel



Exemple 1 :
$5\vec{u}$ est la somme de 5 vecteurs $\vec{u}$.
On a :
$5\vec{u} = \vec{u} + \vec{u} + \vec{u} + \vec{u} + \vec{u}$

Remarques :
- Les vecteurs $5\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont la même direction et le même sens.
- La norme du vecteur $5\vec{u}$ est égale à 5 fois la norme du vecteur $\vec{u}$.

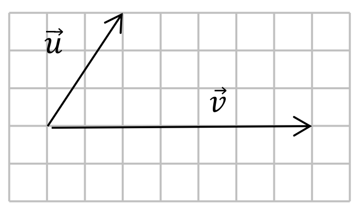


Exemple 2 :
$-3\vec{u}$ est la somme de 3 vecteurs $-\vec{u}$.
On a :
$-3\vec{u} = (-\vec{u}) + (-\vec{u}) + (-\vec{u})$

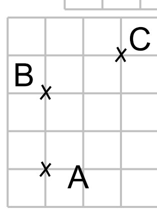
Remarques :
- Les vecteurs $\vec{u}$ et $-3\vec{u}$ ont la même direction mais sont de sens contraire.
- La norme du vecteur $-3\vec{u}$ est égale à 3 fois la norme du vecteur $\vec{u}$.

Méthode : Représenter un vecteur défini comme produit et somme de vecteurs

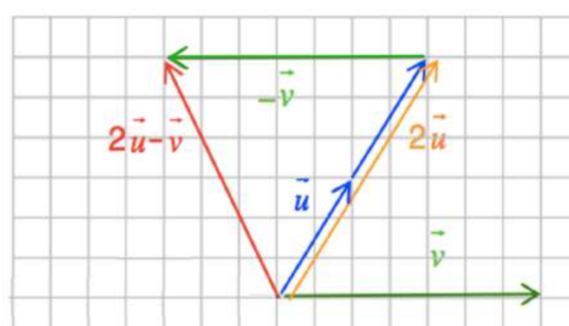
Vidéo https://youtu.be/1C6KEwbO-b8



a) Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Représenter les vecteurs suivants :
$2\vec{u}$, $-\vec{v}$, $2\vec{u} - \vec{v}$.



b) Soit trois points A, B et C.
Représenter le vecteur $\overrightarrow{BC} - 3\overrightarrow{AC}$.

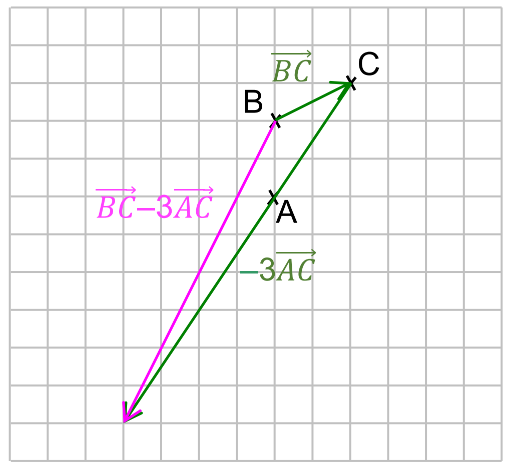


Correction
a) • On commence par représenter le vecteur $2\vec{u}$:
On place bout à bout deux vecteurs $\vec{u}$.

• Le vecteur $-\vec{v}$ a la même direction et la même longueur que $\vec{v}$ mais il est de sens contraire.

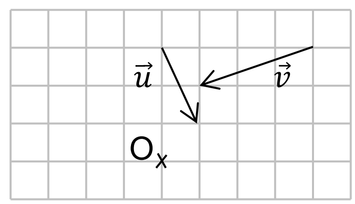
• Pour représenter le vecteur $2\vec{u} - \vec{v} = 2\vec{u} + (-\vec{v})$, on place bout à bout les vecteurs $2\vec{u}$ et $-\vec{v}$ et on relit les extrémités du chemin construit.

b) Pour représenter le vecteur $\overrightarrow{BC} - 3\overrightarrow{AC}$ ou $\overrightarrow{BC} + (-3\overrightarrow{AC})$, on place bout à bout les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $-3\overrightarrow{AC}$.



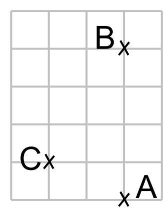
Méthode : Construire un point vérifiant une égalité vectorielle

Vidéo https://youtu.be/JxYpPE6iPEA



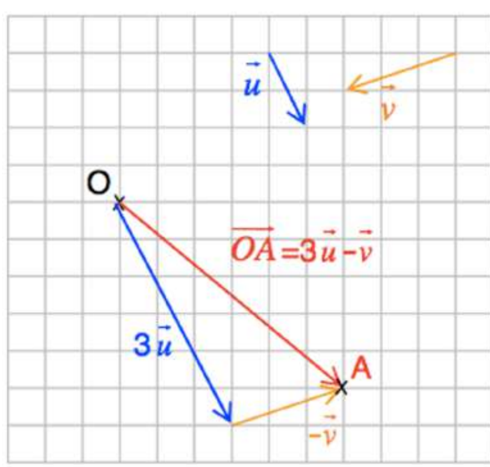
a) Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et un point O.
Construire le point A tel que $\overrightarrow{OA} = 3\vec{u} - \vec{v}$.

b) Soit trois points A, B, C du plan.
Construire le point M tel que $\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$.

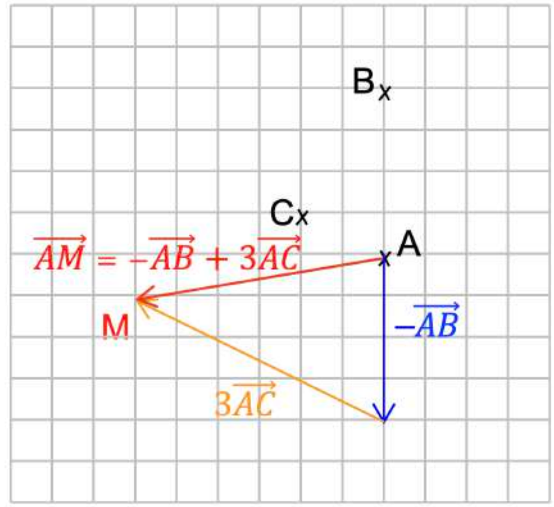


Correction

a) Pour représenter le vecteur $\overrightarrow{OA} = 3\vec{u} - \vec{v}$, on place bout à bout les vecteurs $3\vec{u}$ et $-\vec{v}$ en partant de O.
Le point A se trouve à l'extrémité du vecteur $-\vec{v}$ dans le chemin construit.



b) Pour représenter le vecteur $\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$, on place bout à bout les vecteurs $-\overrightarrow{AB}$ et $3\overrightarrow{AC}$ en partant de A.
Le point M se trouve à l'extrémité du vecteur $3\overrightarrow{AC}$ dans le chemin construit.

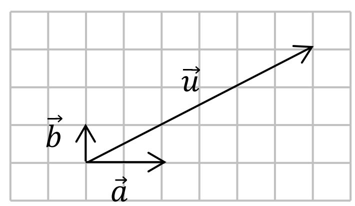


Activité de groupe : Course d'orientation
http://www.maths-et-tiques.fr/telech/Course_vect.pdf

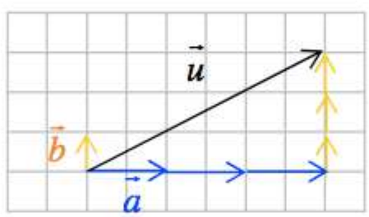
Méthode : Exprimer par lecture graphique un vecteur en fonction d'autres vecteurs

Vidéo https://youtu.be/ODZGKdIKewo

Par lecture graphique, exprimer le vecteur $\vec{u}$ en fonction des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.



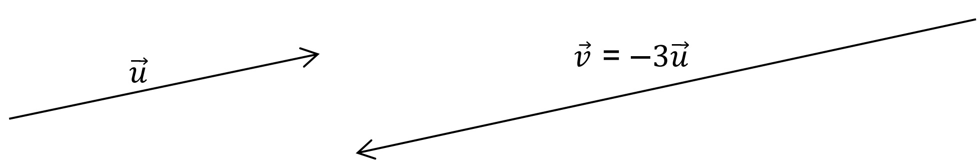
Correction



On construit un chemin formé de vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ mis bout à bout reliant l'origine et l'extrémité du vecteur $\vec{u}$.
On compte ainsi le nombre de vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ formant ce chemin.
On a : $\vec{u} = 3\vec{a} + 3\vec{b}$.

Partie 2 : Notion de colinéarité

Exemple :



Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont la même direction, on dit qu'ils sont colinéaires.

Définition : Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** signifie qu'ils ont même direction c'est à dire qu'il existe un nombre réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

Remarque : Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur du plan.

Méthode : Démontrer que des vecteurs sont colinéaires

Vidéo https://youtu.be/FjUbd9Pbhmg

On donne deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, tel que : $-4\vec{u} + 3\vec{v} = \vec{0}$.
Démontrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Correction

$-4\vec{u} + 3\vec{v} = \vec{0}$

$-4\vec{u} = -3\vec{v}$

$\vec{u} = \frac{-3}{-4}\vec{v}$

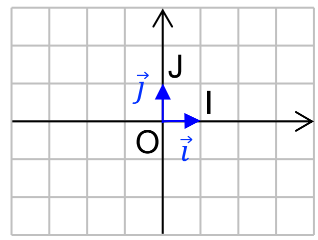
$\vec{u} = \frac{3}{4}\vec{v}$

Il existe un nombre réel $k = \frac{3}{4}$ tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.
Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc colinéaires.

VECTEURS ET REPÉRAGE

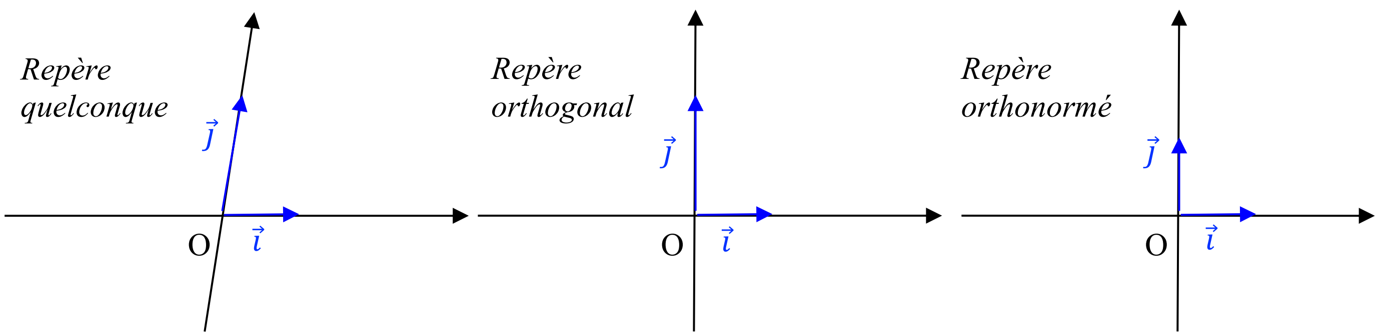
Tout le cours en vidéo : https://youtu.be/9OB3hct6gak

Partie 1 : Repère du plan



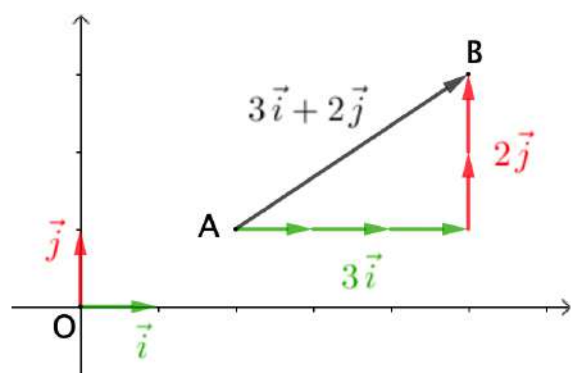
Trois points du plan non alignés O, I et J forment un repère, que l'on peut noter (O, I, J).
L'origine O et les unités OI et OJ permettent de graduer les axes (OI) et (OJ).
Si on pose $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$, alors ce repère se note également (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$).

<u>Définitions :</u>
- On appelle **repère du plan** tout triplet (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) où O est un point et $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont deux vecteurs non colinéaires.
- Un repère est dit **orthogonal** si $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ont des directions perpendiculaires.
- Un repère est dit **orthonormé** s'il est orthogonal et si $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont de norme 1.



TP info : Lectures de coordonnées :
http://www.maths-et-tiques.fr/telech/Lecture_coord.pdf

Partie 2 : Coordonnées d'un vecteur



<u>Exemple :</u>

Vidéo https://youtu.be/8PyiMHtp1fE

Pour aller de A vers B, on parcourt un chemin :
3 unités vers la droite et 2 unités vers le haut.
Ainsi $\overrightarrow{AB} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$.
Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ se notent $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ ou (3 ; 2). On préfèrera la première notation.

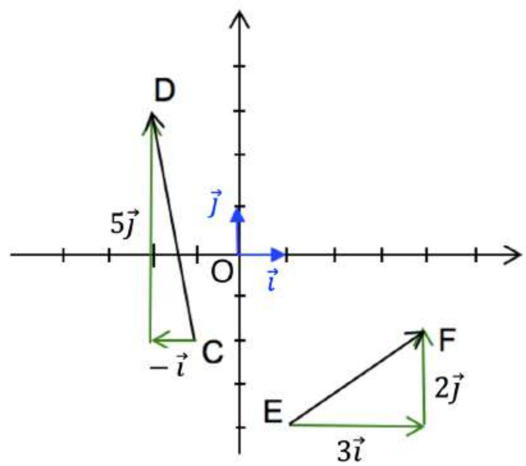
Méthode : Déterminer les coordonnées d'un vecteur par lecture graphique

Vidéo https://youtu.be/8PyiMHtp1fE

a) Dans le repère (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$), placer les points $C\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$, $D\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$, $E\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$, $F\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$.

b) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$ par lecture graphique.

Correction



On a :

$\overrightarrow{CD} = -\vec{\imath} + 5\vec{\jmath}$ donc $\overrightarrow{CD}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{EF} = 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$ donc $\overrightarrow{EF}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$.

Propriété :

Soit deux points $A\begin{pmatrix}x_A\\y_A\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}x_B\\y_B\end{pmatrix}$.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\end{pmatrix}$.

Méthode : Déterminer les coordonnées d'un vecteur par calcul

Vidéo https://youtu.be/wnNzmod2tMM

Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$, tels que :

$A\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$, $D\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$, $E\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$ et $F\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$.

Correction

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5-2\\3-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-2-(-1)\\3-(-2)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}4-1\\-2-(-4)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$$

Propriétés :

Soit deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$, et un réel k.

On a :

• $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$ • $k\vec{u}\begin{pmatrix}kx\\ky\end{pmatrix}$ • $-\vec{u}\begin{pmatrix}-x\\-y\end{pmatrix}$

• $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont égaux lorsque $x=x'$ et $y=y'$.

Méthode : Appliquer les formules sur les coordonnées de vecteurs

Vidéo https://youtu.be/rC3xJNCuzkw

En prenant les données de la méthode précédente, calculer les coordonnées des vecteurs $3\overrightarrow{AB}$, $4\overrightarrow{CD}$ et $3\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{CD}$.

Correction

On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$.

$3\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\times 3\\3\times 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\6\end{pmatrix}$, $4\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4\times(-1)\\4\times 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\20\end{pmatrix}$

$3\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}9-(-4)\\6-20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13\\-14\end{pmatrix}$

Méthode : Calculer les coordonnées d'un point défini par une égalité vectorielle

Vidéo https://youtu.be/eQsMZTcniuY

Soit les points $A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$.

Déterminer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

Correction

$ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

On pose $\begin{pmatrix}x_D\\y_D\end{pmatrix}$ les coordonnées du point D.

On a alors : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4-1\\3-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}1-x_D\\-2-y_D\end{pmatrix}$

Donc : $1-x_D=-5$ et $-2-y_D=1$

$-x_D=-5-1$ et $-y_D=1+2$

$x_D=6$ et $y_D=-3$.

Les coordonnées du point D sont donc $\begin{pmatrix}6\\-3\end{pmatrix}$.

Partie 3 : Colinéarité de deux vecteurs

1. Critère de colinéarité

Propriété : Soit deux vecteurs $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$.
Dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires revient à dire que : $xy' - yx' = 0$.

Remarque : Dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires revient à dire que les coordonnées des deux vecteurs sont proportionnelles soit : $xy' = yx'$.

Démonstration au programme :

Vidéo https://youtu.be/VKMrzaiPtw4

- Si l'un des vecteurs est nul alors l'équivalence est évidente.
- Supposons maintenant que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient non nuls.

Dire que les vecteurs $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$ sont colinéaires équivaut à dire qu'il existe un nombre réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.
Les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc proportionnelles et le tableau ci-dessous est un tableau de proportionnalité :

x	x'
y	y'

Donc : $xy' = yx'$ soit encore $xy' - yx' = 0$.

Réciproquement, si $xy' - yx' = 0$.
Le vecteur $\vec{v}$ étant non nul, l'une de ses coordonnées est non nulle. Supposons que $x' \neq 0$. Posons alors $k = \frac{x}{x'}$. L'égalité $xy' - yx' = 0$ s'écrit : $yx' = xy'$.

Soit : $y = \frac{xy'}{x'} = ky'$.
Comme on a déjà $x = kx'$, on en déduit que $\vec{u} = k\vec{v}$.

Méthode : Vérifier si deux vecteurs sont colinéaires

Vidéo https://youtu.be/eX-_639Pfw8

Dans chaque cas, vérifier si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
a) $\vec{u}\binom{4}{-7}$ et $\vec{v}\binom{-12}{21}$ b) $\vec{u}\binom{5}{-2}$ et $\vec{v}\binom{15}{-7}$

Correction
a) $xy' - yx' = 4 \times 21 - (-7) \times (-12) = 84 - 84 = 0$.
Le critère de colinéarité est vérifié donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc colinéaires.
On peut également observer directement que $\vec{v} = -3\vec{u}$.

b) $xy' - yx' = 5 \times (-7) - (-2) \times (15) = -35 + 30 = -5 \neq 0$.
Le critère de colinéarité n'est pas vérifié donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont donc pas colinéaires.

2. Déterminant de deux vecteurs

Définition : Soit deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$.
Le nombre $xy' - yx'$ est appelé déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
On note : $det(\vec{u}\,;\,\vec{v}) = \begin{vmatrix}x & x'\\ y & y'\end{vmatrix} = xy' - yx'$.

Propriété : Dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires revient à dire que $det(\vec{u}\,;\,\vec{v}) = 0$.

Méthode : Vérifier si deux vecteurs sont colinéaires à l'aide du déterminant

Vidéo https://youtu.be/MeHOuwy81-8

Dans chaque cas, vérifier si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
a) $\vec{u}\begin{pmatrix}-6\\10\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}9\\-15\end{pmatrix}$
b) $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\9\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}11\\23\end{pmatrix}$

Correction
a) $det(\vec{u}\,;\,\vec{v}) = \begin{vmatrix}-6 & 9\\ 10 & -15\end{vmatrix} = (-6) \times (-15) - 10 \times 9 = 90 - 90 = 0$
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc colinéaires.

b) $det(\vec{u}\,;\,\vec{v}) = \begin{vmatrix}4 & 11\\ 9 & 23\end{vmatrix} = 4 \times 23 - 9 \times 11 = 92 - 99 = -7 \neq 0$
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont donc pas colinéaires.

3. Applications

Propriétés :
1) Dire que les droites (AB) et (CD) sont parallèles revient à dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.
2) Dire que les points A, B et C sont alignés revient à dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Méthode : Appliquer la colinéarité

Vidéo https://youtu.be/hp8v6YAQQRI
Vidéo https://youtu.be/dZ81uKVDGpE

On considère les points $A\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}$, $D\begin{pmatrix}6\\-1\end{pmatrix}$ et $E\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$.
a) Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
b) Démontrer que les points E, B et D sont alignés.

Correction
a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-(-1)\\2-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}6-(-2)\\-1-(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix}$.
$det(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{CD})=\begin{vmatrix}4&8\\1&2\end{vmatrix}=4\times2-8\times1=8-8=0$
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires. Donc les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Remarque :
On aurait pu également remarquer que les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont proportionnelles pour en déduire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

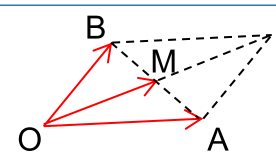
b) $\overrightarrow{EB}\begin{pmatrix}3-5\\2-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{ED}\begin{pmatrix}6-5\\-1-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.
$det(\overrightarrow{EB}\,;\,\overrightarrow{ED})=\begin{vmatrix}-2&1\\2&-1\end{vmatrix}=-2\times(-1)-2\times1=0$
Les vecteurs $\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{ED}$ sont colinéaires. Donc les points E, B et D sont alignés.

Partie 4 : Coordonnées du milieu d'un segment

Propriété : Soit deux points $A\begin{pmatrix}x_A\\y_A\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}x_B\\y_B\end{pmatrix}$.

Le milieu M du segment $[AB]$ a pour coordonnées : $\begin{pmatrix}\frac{x_A+x_B}{2}\\\frac{y_A+y_B}{2}\end{pmatrix}$

Démonstration :
Considérons le parallélogramme construit à partir de O, A et B.
Soit M son centre.
Alors $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$.



$\overrightarrow{OM}$ (ou M) a donc les mêmes coordonnées que celles du vecteur $\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$ soit :
$\begin{pmatrix}\frac{1}{2}(x_A+x_B)\\\frac{1}{2}(y_A+y_B)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{x_A+x_B}{2}\\\frac{y_A+y_B}{2}\end{pmatrix}$.

Méthode : Calculer les coordonnées d'un milieu

Vidéo https://youtu.be/YTQCtSvxAmM

On considère les points $A\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$.
Calculer les coordonnées de M, N et P milieux respectifs de $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$.

Correction

$$M\begin{pmatrix}\dfrac{2+(-2)}{2}\\ \dfrac{3+1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} \qquad N\begin{pmatrix}\dfrac{2+3}{2}\\ \dfrac{3+(-1)}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2{,}5\\1\end{pmatrix} \qquad P\begin{pmatrix}\dfrac{-2+3}{2}\\ \dfrac{1+(-1)}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}5\\0\end{pmatrix}$$

Partie 5 : Distance dans un repère orthonormé

Propriété : Soit deux points $A\begin{pmatrix}x_A\\y_A\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}x_B\\y_B\end{pmatrix}$ dans un repère ***orthonormé*** :
La distance AB (ou la norme de $\overrightarrow{AB}$) est : $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

Remarque : Cette propriété est une conséquence du théorème de Pythagore.

Méthode : Calculer une distance dans un repère orthonormé

Vidéo https://youtu.be/pP8ebg8W9o8

Soit deux points $A\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé.
Calculer la distance AB.

Correction
La distance AB (ou norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$) est égale à :

$$\begin{aligned}AB&=\sqrt{(2-3)^2+(-2-2)^2}\\&=\sqrt{(-1)^2+(-4)^2}\\&=\sqrt{1+16}\\&=\sqrt{17}\end{aligned}$$

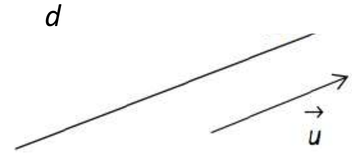
DROITES DU PLAN

Tout le cours en vidéo : https://youtu.be/d-rUnClmcCY

Partie 1 : Vecteur directeur et équation cartésienne d'une droite

1. Vecteur directeur

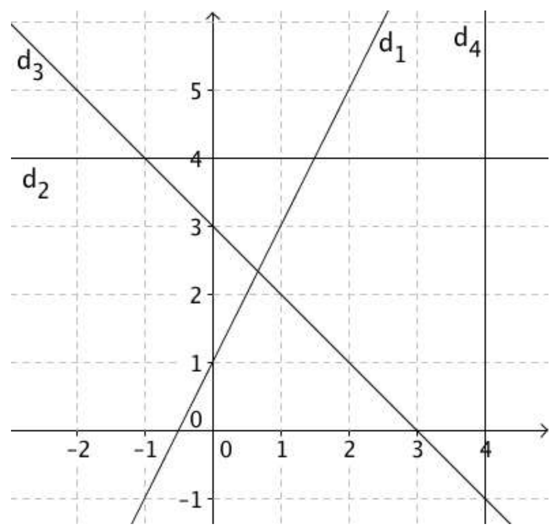
Définition :
d est une droite du plan.
On appelle **vecteur directeur** de d tout vecteur non nul $\vec{u}$ qui possède la même direction que la droite d.



Méthode : Déterminer graphiquement un vecteur directeur d'une droite

Vidéo https://youtu.be/6VdSz-0QT4Y

Donner des vecteurs directeurs des droites d_1, d_2, d_3 et d_4.



Correction

- Pour d_1 :

On choisit un vecteur qui possède la même direction que la droite d_1.
Par exemple : $\vec{a}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ convient.
$\vec{b}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ ou $\vec{c}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$ sont également des vecteurs directeurs de d_1.

- Pour d_2 : $\vec{u}\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}$ convient.
- Pour d_3 : $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ convient.
- Pour d_4 : $\vec{w}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ convient.

2. Équation cartésienne d'une droite

Définition :
Toute droite admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$, avec $(a\,;b) \neq (0\,;0)$.
Cette équation est appelée **équation cartésienne** de la droite.

Propriété : Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d'équation cartésienne $ax+by+c=0$.

Démonstration au programme :

Vidéo https://youtu.be/GVDUrdsRUdA

Soit $A\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$ un point de la droite d et $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ un vecteur directeur de d.
Un point $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ appartient à la droite d si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ sont colinéaires, soit $det(\overrightarrow{AM}\,;\vec{u})=0$ soit encore $\begin{vmatrix}x-x_0 & \alpha\\y-y_0 & \beta\end{vmatrix}=0$.
Donc : $\beta(x-x_0)-\alpha(y-y_0)=0$
$\beta x-\beta x_0-\alpha y+\alpha y_0=0$
$\beta x-\alpha y+\alpha y_0-\beta x_0=0$
Cette équation peut s'écrire : $ax+by+c=0$ avec $a=\beta$ et $b=-\alpha$ et $c=\alpha y_0-\beta x_0$.
Les coordonnées de $\vec{u}$ sont donc $\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$.

Exemple : Un vecteur directeur de la droite d'équation cartésienne $4x-5y-1=0$ est le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$.
En effet, $a=4$ et $b=-5$ donc $\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$.

Méthode : Déterminer une équation cartésienne de droite à partir d'un point et d'un vecteur directeur

Vidéo https://youtu.be/NosYmlLLFB4
Vidéo https://youtu.be/i5WD8IZdEqk

a) Déterminer une équation cartésienne de la droite d passant par le point $A\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$.
b) Déterminer une équation cartésienne de la droite d' passant par les points $B\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$.

Correction
a) d admet une équation cartésienne de la de la forme $ax+by+c=0$.

- Comme $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d, on a : $\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$

Soit $a=5$ et $b=1$.
Une équation de d est donc de la forme $5x+1y+c=0$.

- Pour déterminer c, il suffit de substituer les coordonnées $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ de A dans l'équation :

$5 \times 3 + 1 \times 1 + c = 0$
$15 + 1 + c = 0$
$16 + c = 0$
$c = -16$

Une équation de d est donc $5x + 1y - 16 = 0$.

Remarque : Une autre méthode consiste à utiliser le déterminant :

Vidéo https://youtu.be/rLxQIbQkPsQ

b) ● B et C appartiennent à d' donc $\overrightarrow{BC}$ est un vecteur directeur de d'.
On a : $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 1-5 \\ -3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$. Donc $a = -6$ et $b = 4$.
Une équation cartésienne de d' est de la forme : $-6x + 4y + c = 0$.

- $B\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ appartient à d' donc : $-6 \times 5 + 4 \times 3 + c = 0$ donc $c = 18$.

Une équation cartésienne de d' est : $-6x + 4y + 18 = 0$ ou encore $-3x + 2y + 9 = 0$.

Méthode : Tracer une droite à partir de l'équation cartésienne

Vidéo https://youtu.be/EchUv2cGtzo

Tracer la droite d d'équation cartésienne $3x + 2y - 5 = 0$.

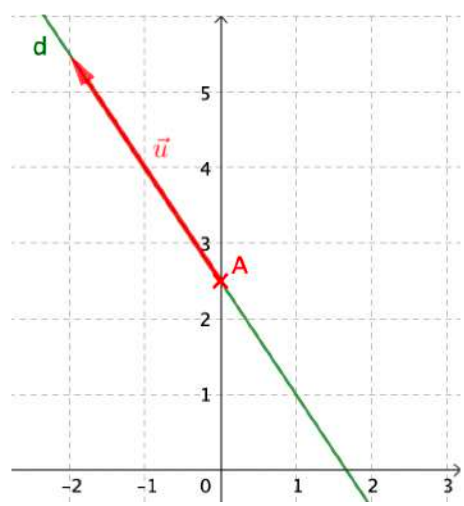
Correction
Pour tracer une droite, il suffit de connaître un point appartenant à la droite et un vecteur directeur.

- On choisit le point d'abscisse 0 :

Comme $x = 0$, on remplace x par 0 dans l'équation et on calcule la valeur de y correspondante :
$3 \times 0 + 2y - 5 = 0$
$2y = 5$
$y = \frac{5}{2} = 2{,}5$
Le point A de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$ appartient à la droite d.

- $a = 3$ et $b = 2$ donc $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d.



On trace la droite d passant par le point $A\begin{pmatrix} 0 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

3. Position relative de deux droites

Propriété :
Dire que deux droites sont parallèles équivaut à dire qu'elles ont des vecteurs directeurs colinéaires.

Méthode : Déterminer la position relative des deux droites

Vidéo https://youtu.be/NjsVdVolhvU

Démontrer que les droites d_1 et d_2 d'équations respectives $6x - 10y - 5 = 0$ et $-9x + 15y = 0$ sont parallèles.

Correction
Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}10\\6\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d_1.
Le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}-15\\-9\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d_2.
Calculons $det(\vec{u}\,;\vec{v})$:

$$det(\vec{u}\,;\vec{v}) = \begin{vmatrix}10 & -15\\6 & -9\end{vmatrix} = 10 \times (-9) - 6 \times (-15) = 0$$

Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et donc les droites d_1 et d_2 sont parallèles.

Partie 2 : Équation réduite et pente d'une droite

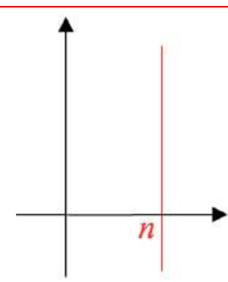
1. Équation réduite

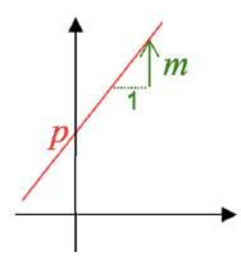
Exemple : Soit d dont une droite d'**équation cartésienne** $4x + y - 6 = 0$.
On a alors : $4x + y = 6$
$y = -4x + 6$
Cette équation est appelée l'**équation réduite** de la droite d.

Propriété :
Soit une droite d.

- Si d est parallèle à l'axe des ordonnées :
alors l'équation de d est de la forme $x = n$.

- Si d n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées :
alors l'équation de d est de la forme $y = mx + p$.
Cette équation est appelée **équation réduite** de la droite d.





Démonstration :

- Si $b \neq 0$, alors l'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ de la droite d peut être ramenée à une équation réduite $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$. Et on note $m = -\frac{a}{b}$ et $p = -\frac{c}{b}$.
- Si $b = 0$, alors l'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ de la droite d peut être ramenée à l'équation $x = -\dfrac{c}{a}$. Dans ce cas, la droite d est parallèle à l'axe des ordonnées.

Exemples :

- L'équation $y = -4x + 6$ est l'équation réduite d'une droite avec :
  $m = -4$ et $p = 6$.
- L'équation $x = 5$ est l'équation d'une droite parallèle à l'axe des ordonnées avec :
  $n = 5$.

Méthode : Passer d'une équation cartésienne à l'équation réduite et réciproquement

Vidéo https://youtu.be/XA0YajthETQ

a) Soit la droite d d'équation cartésienne $6x + 3y - 5 = 0$. Déterminer l'équation réduite de d.
b) Soit la droite d' d'équation cartésienne $y = 6x - 5$. Déterminer une équation catésienne de d'.

Correction

a) On veut exprimer l'équation sous la forme $y = ax + b$. Il s'agit donc d'isoler y dans l'équation.

$6x + 3y - 5 = 0$

$3y = -6x + 5$

$y = \dfrac{-6x + 5}{3}$

$y = -2x + \dfrac{5}{3}$: équation réduite de d.

b) On veut exprimer l'équation sous la forme $ax + by + c = 0$. Il s'agit donc de ramener tous les termes de l'équation dans le membre de gauche.

$y = 6x - 5$

$-6x + y + 5 = 0$: équation cartésienne de d'.

Vocabulaire : - m est appelé la **pente** ou le **coefficient directeur** de la droite d.
- p est appelé l'**ordonnée à l'origine** de la droite d.

Remarque : Dans l'équation réduite, on retrouve l'expression d'une fonction affine.

Exercice :
Donner la pente (coefficient directeur) et l'ordonnée à l'origine de chacune des droites d'équations : a) $y = -2x + 3$ b) $y = 5$ c) $4x + 2y = 1$

Réponses
a) Pente : -2
Ordonnée à l'origine : 3

b) Pente : 0
Ordonnée à l'origine : 5

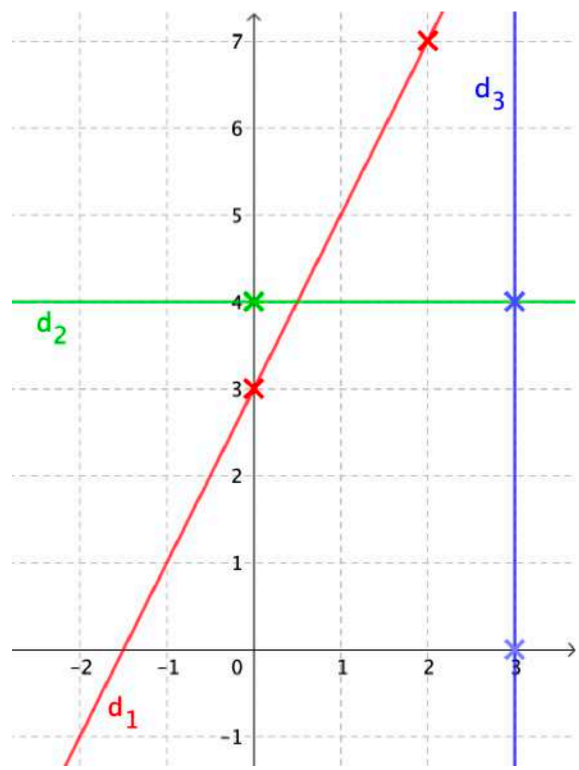
c) L'équation peut s'écrire sous sa forme réduite : $y = -2x + \frac{1}{2}$
Pente : -2
Ordonnée à l'origine : $\frac{1}{2}$

Méthode : Représenter graphiquement une droite d'équation réduite donnée

Vidéo https://youtu.be/cUdhxkaTqqk

Dans un repère, tracer les droites d_1 , d_2 et d_3 d'équations respectives :
$y = 2x + 3, y = 4, x = 3.$

Correction
● - La droite d_1 d'équation $y = 2x + 3$ a pour ordonnée à l'origine 3. Donc le point de coordonnée $\binom{0}{3}$ appartient à la droite d_1.
- On choisit le point d'abscisse 2 :
Comme $x = 2$, on remplace x par 2 dans l'équation et on calcule la valeur de y correspondante :
$y = 2 \times 2 + 3 = 7.$
Le point de coordonnées $\binom{2}{7}$ appartient à d_1.
On peut ainsi tracer la droite d_1 passant par ces deux points.



● La droite d_2 d'équation $y = 4$ est l'ensemble des points dont l'ordonnée est égale à 4. La droite d_2 est donc la droite parallèle à l'axe des abscisses passant par le point de coordonnées $\binom{0}{4}$.

● La droite d_3 d'équation $x = 3$ est l'ensemble des points dont l'abscisse est égale à 3. La droite d_3 est donc la droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par le point de coordonnées $\binom{3}{0}$.

Méthode : Vérifier si un point appartient à une droite d'équation donnée

Vidéo https://youtu.be/XA0YajthETQ

Les points $A\begin{pmatrix}6\\39\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}346\\2420\end{pmatrix}$ appartiennent-ils à la droite d d'équation $y = 7x - 3$?

Correction

- Dire que le point $A\begin{pmatrix}6\\39\end{pmatrix}$ appartient à la droite d d'équation $y = 7x - 3$ revient à dire que

les coordonnées de A vérifient l'équation de la droite d.
Ce qui est le cas, puisque $y = 7 \times 6 - 3 = 39$.
Le point A appartient donc à la droite d.

- Les coordonnées de $B\begin{pmatrix}346\\2420\end{pmatrix}$ ne vérifient pas l'équation de la droite d.

En effet : $7 \times 346 - 3 = 2419 \neq 2420$ donc le point B n'appartient pas à la droite d.

Remarque : Pour démontrer que 3 points A, B et C sont alignés, il suffit de montrer par exemple que le point A vérifie l'équation de la droite (BC).

2. Pente d'une droite

Propriété : Si $A\begin{pmatrix}x_A\\y_A\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}x_B\\y_B\end{pmatrix}$ sont deux points distincts d'une droite tel que $x_A \neq x_B$ alors la droite a pour pente (ou coefficient directeur) $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Méthode : Déterminer une équation réduite de droite dont on connaît deux points

Vidéo https://youtu.be/tfagLy6QRuw

Soit $A\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$ deux points d'une droite d. Déterminer une équation de la droite d.

Correction

L'équation réduite de la droite d est de la forme $y = mx + p$.

- La pente (coefficient directeur) de d est : $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5-(-1)}{3-4} = \frac{6}{-1} = -6$.

L'équation de d est donc de la forme : $y = -6x + p$.

- Comme $A\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$ appartient à la droite d, ses coordonnées vérifient l'équation de d.

Soit : $-1 = -6 \times 4 + p$.
D'où $p = -1 + 6 \times 4 = 23$.

L'équation réduite de d est donc : $y = -6x + 23$.

ALGORITHME

TP avec Python : Déterminer une équation de droite passant par deux points donnés

https://www.maths-et-tiques.fr/telech/Algo_EqDroite.pdf

```
def droite(xA,yA,xB,yB):
    m=...
    p=...
    print('y=',m,'x+',p)
```

3. Position relative de deux droites

Propriété : Soient deux droites d'équations réduites $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$.
Dire que les droites sont parallèles revient à dire que leurs pentes sont égales ($m = m'$).

Remarque : Lorsque les pentes sont différentes, les droites sont sécantes.

Exemple : Les droites d_1 et d_2 d'équations respectives $y = 3x + 4$ et $y = 3x + 9$ sont parallèles car elles ont la même pente égale à 3.

Méthode : Déterminer la position relative de deux droites

Vidéo https://youtu.be/gTUPGw7Bulc

Dans chaque cas, déterminer la position relative des deux droites :

a) $d_1 : y = -2x - 5$ et $d_2 : y = -2x + 4$

b) $d_3 : y = 2x + 1$ et $d_4 : y = -3x + 8$

c) $d_5 : y = -x + 7$ et $d_6 : y = 3$

d) $d_7 : x = 1$ et $d_8 : x = -8$

Correction

1) Les droites d_1 et d_2 sont parallèles car elles ont la même pente égale à -2.

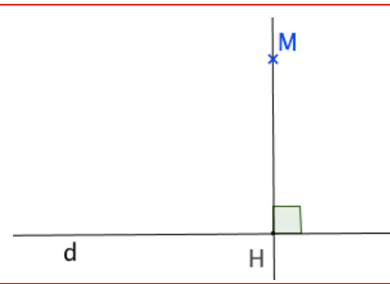
2) Les droites d_3 et d_4 sont sécantes car elles ont des pentes différentes 2 et -3.

3) Les droites d_5 et d_6 sont sécantes car elles ont des pentes différentes -1 et 0.

4) Les droites d_7 et d_8 sont parallèles car elles sont parallèles à l'axe des ordonnées.

Partie 3 : Projeté orthogonal d'un point sur une droite

Définition : Soit une droite d et un point M.
Le **projeté orthogonal** du point M sur la droite d est le point d'intersection H de la droite d avec la perpendiculaire à d passant par M.

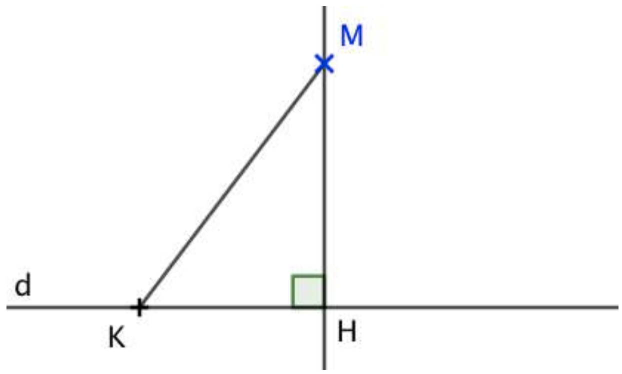


Propriété : Le projeté orthogonal du point M sur la droite d est le point de la droite d le plus proche du point M.

Démonstration au programme :

Vidéo https://youtu.be/DohZ0ehR_rw

Soit H le projeté orthogonal du point M sur la droite d.
Supposons qu'il existe un point K de la droite d plus proche de M que l'est le point H.

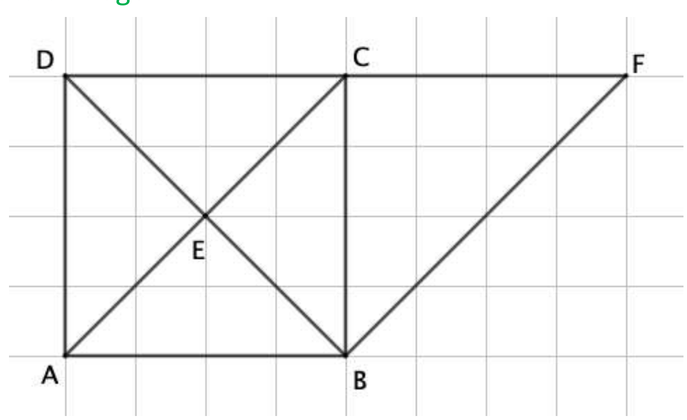


$KM \leq HM$ car K est le point de la droite le plus proche de M.
Donc $KM^2 \leq HM^2$.
Or, d'après l'égalité de Pythagore, on a : $HM^2 + HK^2 = KM^2$
Donc $HM^2 + HK^2 \leq HM^2$.
Donc $HK^2 \leq 0$. Ce qui est impossible sauf dans le cas où le point K est le point H.
On en déduit que H est le point de la droite d le plus proche du point M.

Méthode : Reconnaitre et construire un projeté orthogonal

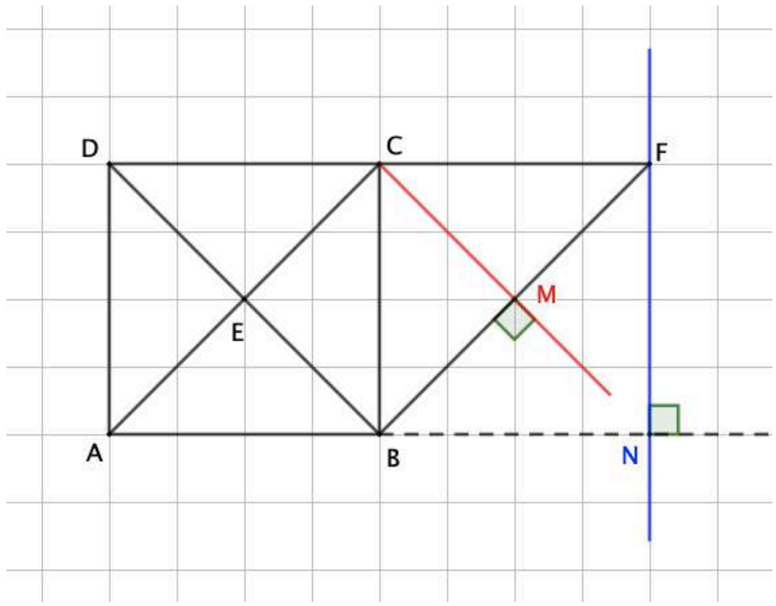
Vidéo https://youtu.be/MiJHpVzyQPc

1) Donner le projeté orthogonal de :
   a) C sur (AB)   b) B sur (DF)
   c) D sur (AC)   d) F sur (AD)
2) Représenter sur la figure le projeté orthogonal de :
   a) C sur (BF). Nommer ce point M.
   b) F sur (AB). Nommer ce point N.



Correction
1) a) Il s'agit du point B. En effet, la perpendiculaire à (AB) passant par C coupe (AB) en B.
   b) Il s'agit du point C.
   c) Il s'agit du point E.
   d) Il s'agit du point D.

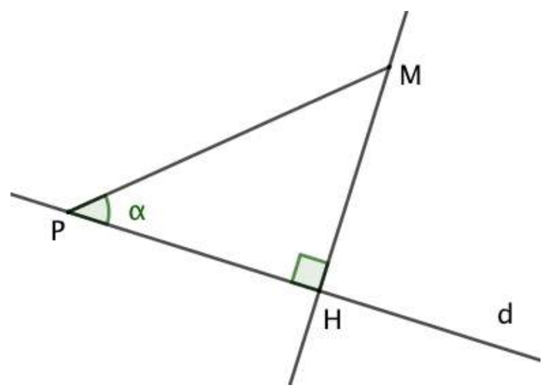
2)



Démonstration au programme : $(\cos \alpha)^2 + (\sin \alpha)^2 = 1$

Vidéo https://youtu.be/9r2qDd7EkMo

Soit une droite d et un point P appartenant à d.
Soit un point M n'appartenant pas à d.
On appelle H le projeté orthogonal du point M sur la droite d.
On note α l'angle $\widehat{MPH}$.
Démontrons que $(\cos \alpha)^2 + (\sin \alpha)^2 = 1$.



Le triangle PHM est rectangle en H, on a donc : $\cos \alpha = \dfrac{PH}{PM}$ soit $PH = PM \times \cos \alpha$.
De même, on a : $\sin \alpha = \dfrac{HM}{PM}$ soit $HM = PM \times \sin \alpha$.

D'après le théorème de Pythagore, on a : $PH^2 + HM^2 = PM^2$
Soit en remplaçant : $(PM \times \cos \alpha)^2 + (PM \times \sin \alpha)^2 = PM^2$
Soit encore : $PM^2 \times (\cos \alpha)^2 + PM^2 \times (\sin \alpha)^2 = PM^2$
Soit enfin, en simplifiant : $(\cos \alpha)^2 + (\sin \alpha)^2 = 1$.

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS ET DROITES

Tout le cours en vidéo : https://youtu.be/sWaHnxqUve0

Exemple d'introduction :

Soit deux équations à deux inconnues x et y :

$$2x - y = 0 \text{ et } 3x - 4y = -5.$$

Elles forment ce qu'on appelle un **système** de deux équations à deux inconnues.

Et on note : $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 3x - 4y = -5 \end{cases}$

Un couple de nombres qui vérifie les deux équations est appelé solution du système.
Ici, le coupe (1 ; 2) est solution. En effet :

$$\begin{cases} 2 \times 1 - 2 = 0 \\ 3 \times 1 - 4 \times 2 = -5 \end{cases}$$

Dans ce chapitre, on verra deux méthodes permettant de résoudre de tels systèmes.

Partie 1 : Méthode de substitution

Méthode : Résoudre un système d'équations par la méthode de substitution

Vidéo https://youtu.be/24VsDZK6bN0
Vidéo https://youtu.be/tzOCBkFZgUI

Résoudre le système d'équations par la méthode de substitution : $\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ x - 4y = 14 \end{cases}$

Correction :

$\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ x - 4y = 14 \end{cases}$

$\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ x = 14 + 4y \end{cases}$ On isole facilement l'inconnue x dans la 2^{e} équation.

$\begin{cases} 3(14 + 4y) + 2y = 0 \\ x = 14 + 4y \end{cases}$ On remplace x par $14 + 4y$ dans la 1re équation (substitution).

$\begin{cases} 42 + 12y + 2y = 0 \\ x = 14 + 4y \end{cases}$ On résout la 1re équation pour trouver y.

$\begin{cases} 14y = -42 \\ x = 14 + 4y \end{cases}$

$\begin{cases} y = -\dfrac{42}{14} = -3 \\ x = 14 + 4y \end{cases}$

$\begin{cases} y = -3 \\ x = 14 + 4 \times (-3) \end{cases}$ On remplace y par -3 dans la 2e équation.

$\begin{cases} y = -3 \\ x = 2 \end{cases}$

La solution du système est le couple $(2\,;-3)$ et on note : $S = \{(2\,;-3)\}$

Partie 2 : Méthode des combinaisons linéaires

Méthode : Résoudre un système d'équations par la méthode des combinaisons linéaires

Vidéo https://youtu.be/Zw-qI9DFv54
Vidéo https://youtu.be/UPIz65G4f48
Vidéo https://youtu.be/V3yn_oEdgxc

Résoudre les systèmes d'équations par la méthode des combinaisons linéaires :

a) $\begin{cases} 3x - 2y = 11 \\ 6x + 3y = 15 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ 5x + 3y = -1 \end{cases}$

Correction

Remarque : Ici, la méthode de substitution ne se prête pas à la résolution du système car en isolant une inconnue, on ferait apparaitre des fractions. Ce qui complique les calculs.

a) • $\begin{cases} 3x - 2y = 11 \\ 6x + 3y = 15 \end{cases}$

$\begin{cases} 3x - 2y = 11 \\ 6x + 3y = 15 \end{cases}$ $\times \mathbf{2}$ On multiplie la 1re équation par 2…

$\begin{cases} 6x - 4y = 22 \\ 6x + 3y = 15 \end{cases}$ … pour obtenir le même coefficient devant une des inconnues.

•
$$-\begin{cases} 6x - 4y = 22 \\ 6x + 3y = 15 \end{cases}$$
$$6x - 6x - 4y - 3y = 22 - 15$$
$$-4y - 3y = 22 - 15$$
$$-7y = 7$$
$$y = \frac{7}{-7}$$
$$y = -1$$

On soustrait les deux équations pour éliminer x.

• $3x - 2y = 11$
$3x - 2 \times (-1) = 11$
$3x + 2 = 11$
$3x = 11 - 2$
$3x = 9$
$x = 3$

On remplace y par -1 dans une des deux équations (au choix).

On résout l'équation pour trouver x.

La solution du système est le couple $(3\,; -1)$ et on note : $S = \{(3\,;\ -1)\}$

b) • $\begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ 5x + 3y = -1 \end{cases}$

$\begin{cases} 3x - 2y = 7 & \times 5 \\ 5x + 3y = -1 & \times 3 \end{cases}$

On multiplie la 1re équation par 5,
et la 2e équation par 3…

$\begin{cases} 15x - 10y = 35 \\ 15x + 9y = -3 \end{cases}$

… pour obtenir le même coefficient devant une des inconnues.

•
$$-\begin{cases} 15x - 10y = 35 \\ 15x + 9y = -3 \end{cases}$$
$$15x - 15x - 10y - 9y = 35 + 3$$
$$-10y - 9y = 35 + 3$$
$$-19y = 38$$
$$y = \frac{38}{-19}$$
$$y = -2$$

On soustraie les deux équations pour éliminer x.

• $3x - 2y = 7$
$3x - 2 \times (-2) = 7$
$3x + 4 = 7$
$3x = 7 - 4$
$3x = 3$
$x = 1$

On remplace y par -2 dans une des deux équations (au choix).

La solution du système est le couple $(1\,; -2)$ et on note : $S = \{(1\,;\ -2)\}$

Partie 3 : Résolutions graphiques

1) Système admettant une unique solution

Méthode : Résoudre graphiquement un système d'équations

Vidéo https://youtu.be/-LV_5rkW0RY

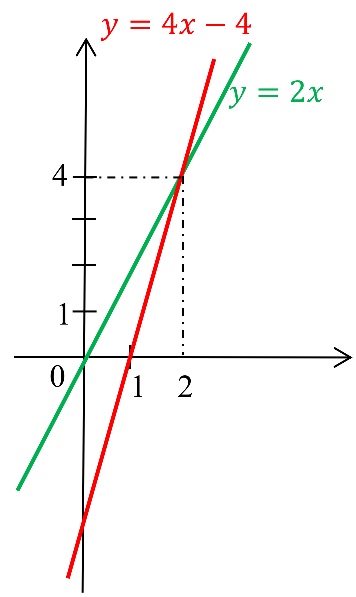
On considère le système d'équations : $\begin{cases} -2x + y = 0 \\ 4x - y = 4 \end{cases}$

Déterminer graphiquement le couple solution.

Correction

Le système équivaut à : $\begin{cases} y = 2x \\ -y = -4x + 4 \end{cases}$

$\begin{cases} y = 2x \\ y = 4x - 4 \end{cases}$



$y = 2x$ et $y = 4x - 4$ sont les équations de deux droites qu'on représente dans un repère.
La solution du système est donc le couple $(x\,;\,y)$ coordonnées du **point d'intersection** des deux droites.

Par lecture graphique, on trouve le couple $(2\,;4)$ comme solution du système.

On note : $S = \{(2\,;4)\}$

2) Système n'admettant pas de solution

Méthode : Démontrer qu'un système ne possède pas de solution

Vidéo https://youtu.be/IYzK0zVr-Lk

On considère le système d'équations : $\begin{cases} -3x + y = 1 \\ 6x - 2y = 6 \end{cases}$

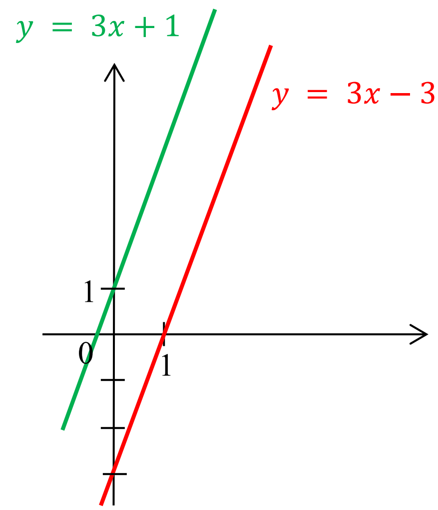
Démontrer que ce système n'admet pas de solution.

Correction

Le système équivaut à : $\begin{cases} y = 3x + 1 \\ -2y = -6x + 6 \end{cases}$

$$\begin{cases} y = 3x + 1 \\ y = \dfrac{-6x}{-2} + \dfrac{6}{-2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3x + 1 \\ y = 3x - 3 \end{cases}$$



Les droites d'équations $y = 3x + 1$ et $y = 3x - 3$ possèdent des coefficients directeurs égaux, elles sont donc parallèles, et même strictement parallèles.
Elles n'ont pas de point d'intersection, donc le système n'a pas de solution.
On note : $S = \emptyset$

3) Système admettant une infinité de solutions

Méthode : Démontrer qu'un système admet une infinité de solutions

Vidéo https://youtu.be/IYzK0zVr-Lk

Soit le système d'équations : $\begin{cases} -6x - 3y = -6 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$

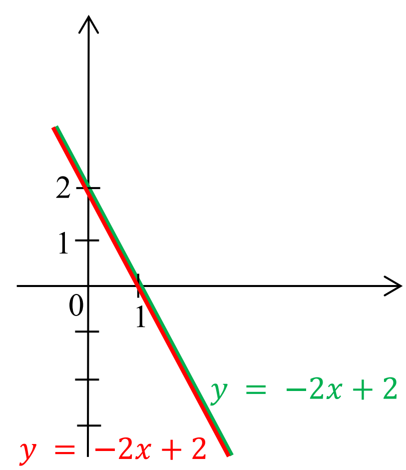
Démontrer que ce système admet une infinité de solutions.

Correction

Le système équivaut à : $\begin{cases} -3y = 6x - 6 \\ y = -2x + 2 \end{cases}$

$$\begin{cases} y = \dfrac{6}{-3}x - \dfrac{6}{-3} \\ y = -2x + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2x + 2 \\ y = -2x + 2 \end{cases}$$



Les deux droites ont la même équation $y = -2x + 2$, elles sont donc confondues et possèdent une infinité de points d'intersection.
Le système admet donc une infinité de solutions : tous les couples $(x\,;\,y)$ vérifiant $y = -2x + 2$.

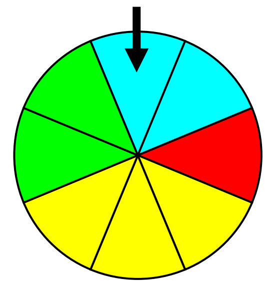
PROBABILITÉS

Tout le cours en vidéo : https://youtu.be/dvx_O37gfyY

Partie 1 : Rappels sur les calculs de probabilités

1. Expérience aléatoire

- On lance une pièce de monnaie et on regarde la face supérieure.
- On lance un dé à six faces et on regarde le nombre de points inscrits sur la face du dessus.
- On fait tourner une roue marquée sur ses secteurs de couleurs différentes et on regarde le secteur marqué par la flèche.



Définitions : Une **expérience** *(lancer une pièce par exemple)* est **aléatoire** lorsqu'elle a plusieurs résultats ou **issues** *(PILE ou FACE par exemple)* et que l'on ne peut pas prévoir quel résultat se produira.
L'ensemble de toutes les issues d'une expérience s'appelle l'**univers**.

2. Évènement

Exemples :
On lance un dé à six faces.
« Obtenir un chiffre pair » est l'évènement constitué des issues : 2 ; 4 et 6.
« Obtenir un chiffre inférieur ou égal à 2 » est l'évènement constitué des issues : 1 et 2.

Définition : Un **évènement** est constitué d' une ou plusieurs issues d'une même expérience aléatoire.

3. Probabilité

Exemple :
Dire que la probabilité d'un évènement est de 0,8 signifie que cet évènement à 8 chances sur 10 ou 80 % de chance de se produire.

Définition : La **probabilité** d'un évènement est un nombre compris entre 0 et 1 qui exprime « la chance » qu'a un évènement de se produire.

Remarques :
- Un évènement dont la probabilité est égale à 0 est un **évènement impossible**.
- Un évènement dont la probabilité est égale à 1 est un **évènement certain**.
- Lorsque chaque issue a autant de chance de se produire, on dit qu'il y a **équiprobabilité**.

Propriété : En cas d'équiprobabilité, la probabilité d'un évènement A est :

$$P(A) = \frac{Nombre\ d'issues\ favorables\ à\ A}{Nombre\ d'issues\ total}$$

Méthode : Calculer une probabilité (1)

Vidéo https://youtu.be/d6Co0q01QH0

On lance un dé à 6 faces. On considère les évènements :
E = « On obtient un 3 »
F = « On obtient un chiffre pair »
G = « On obtient un chiffre strictement supérieur à 3 »
Calculer la probabilité que ces évènements se réalisent.

Correction

- Nombre d'issues favorables à E : 1

Nombre d'issues total : **6**
En effet, le dé à 6 faces.

$$P(E) = \frac{1}{6}$$

- Nombre d'issues favorables à F : 3

Pour avoir un nombre pair, il faut obtenir un 2, un 4 ou un 6.

$$P(F) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

- Nombre d'issues favorables à G : 3

Pour avoir un chiffre strictement supérieur à 3, il faut obtenir un 4, un 5, ou un 6.

$$P(G) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Méthode : Calculer une probabilité (2)

Vidéo https://youtu.be/5ZNYG3e2g_k

On tire une carte dans un jeu de 32 cartes. Soit E l'évènement : « On tire un as ».
Quelle est la probabilité que l'événement E se réalise ?

Correction

Il a 32 issues possibles car il existe 32 façons différentes de tirer une carte.
L'évènement E possède 4 issues possibles : As de cœur, as de carreau, as de trèfle, as de pique.

La probabilité que l'événement E se réalise est donc égale à : $P(E) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$.

Partie 2 : Évènement contraire, réunion, intersection

1. Évènement contraire

Définition : L'**événement contraire** de A, noté $\bar{A}$, est l'ensemble de toutes les issues n'appartenant pas à A.

Exemples :
L'évènement contraire de l'évènement « Obtenir un chiffre pair » est l'événement « Obtenir un chiffre impair ».
L'évènement contraire de l'évènement « Obtenir un chiffre inférieur ou égal à 2 » est l'événement constitué des issues 3 ; 4 ; 5 et 6.

Propriété :
La probabilité de l'événement contraire d'un événement A est : $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Exemple :
La probabilité de gagner au tennis contre Evelyne est : $P(G) = 0{,}2$.
Alors la probabilité de perdre (évènement contraire) est :
$P(\bar{G}) = 1 - P(G) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$.

2. Loi de probabilité

Exemple :
Une urne contient 6 boules vertes, 3 boules jaunes et 11 boules noires.
On tire une boule au hasard et on note sa couleur.
Le tableau suivant présente les probabilités de toutes les issues de l'expérience, on l'appelle **loi de probabilité**.

Issues	**Boule verte**	**Boule jaune**	**Boule noire**
Probabilités	$\frac{6}{20} = 0{,}3$	$\frac{3}{20} = 0{,}15$	$\frac{11}{20} = 0{,}55$

Propriétés : La somme des probabilités de toutes les issues est égale à 1.

Exemple : $P(\text{Boule verte}) + P(\text{Boule jaune}) + P(\text{Boule noire}) = 0{,}3 + 0{,}15 + 0{,}55 = 1$

Méthode : Utiliser une loi de probabilité

Vidéo https://youtu.be/i24AGpzHviE

On tire au hasard un jeton dans le sac contenant des jetons numérotés de 1 à 5.
Le tableau présente les probabilités de toutes les issues (loi de probabilité).

Issues	1	2	3	4	5
Probabilités	$\frac{1}{15}$	$\frac{4}{15}$	?	$\frac{3}{15}$	$\frac{4}{15}$

a) Compléter le tableau de la loi de probabilité.
b) Calculer la probabilité de l'évènement E : « Tirer un chiffre pair ».
c) Décrire l'évènement $\bar{E}$ puis calculer sa probabilité.

Correction

a)

Issues	1	2	3	4	5
Probabilités	$\frac{1}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{4}{15}$

La somme des probabilités de toutes les issues est égale à 1, donc :

$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) = 1$

$\frac{1}{15} + \frac{4}{15} + P(3) + \frac{3}{15} + \frac{4}{15} = 1$

$P(3) + \frac{12}{15} = 1$

$P(3) = 1 - \frac{12}{15}$

$P(3) = \frac{15}{15} - \frac{12}{15} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$

b) L'évènement E possède deux issues : 2 et 4
Donc, d'après le tableau :

$P(E) = \frac{4}{15} + \frac{3}{15} = \frac{7}{15}$.

La probabilité tirer un chiffre pair est égale à $\frac{7}{15}$.

$c)$ $\overline{E}$ est l'évènement : « Ne pas tirer un chiffre pair »

$P(\overline{E}) = 1 - P(E) = 1 - \frac{7}{15} = \frac{15}{15} - \frac{7}{15} = \frac{8}{15}$.

3. Réunion et intersection de deux événements

Exemple :
Soit les évènements : $A = \{1\,;2\}$ et $B = \{1\,;3\,;4\}$.
Alors $A \cap B = \{1\}$ et $A \cup B = \{1\,;2\,;3\,;4\}$.

Méthode : Calculer la probabilité d'une intersection

Vidéo https://youtu.be/VprpP3e_R-4

On lance un dé à six faces et on considère les événements suivants :
A : « Obtenir un multiple de 2 ».
B : « Obtenir un nombre inférieur ou égale à 4 ».
a) Décrire par une phrase l'évènement $A \cap B$.
b) Déterminer les issues des évènements : A, B et $A \cap B$.
c) Calculer $P(A)$, $P(B)$, P($A \cap B$).

Correction
a) $A \cap B$: « Obtenir un multiple de 2 inférieur ou égale à 4. »

b) On a : $A = \{2\,;\ 4\,;\ 6\}$ et $B = \{1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ 4\}$.
Donc $A \cap B = \{2\,;4\}$.

c) $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$P(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$P(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Théorème : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Méthode : Calculer la probabilité d'une réunion

Vidéo https://youtu.be/y4P_BP-ldxk

On lance un dé à six faces et on considère les événements suivants :
A : « On obtient un nombre impair »
B : « On obtient un multiple de 3 »
a) Calculer $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$.
b) Calculer la probabilité de l'événement $A \cup B$. Interpréter le résultat.

Correction

a) ● On a : $A = \{1\,;3\,;5\}$ et $B = \{3\,;6\}$, donc :

$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ et $P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

● On a : $A \cap B = \{3\}$, donc :

$P(A \cap B) = \frac{1}{6}$.

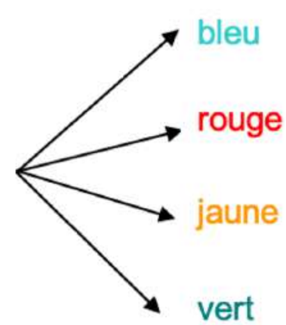
b) L'évènement $A \cup B$ a donc pour probabilité :

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} \\ &= \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} \\ &= \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

La probabilité d'obtenir un nombre impair ou un multiple de 3 est égale à $\frac{2}{3}$.

Partie 3 : Arbre des possibles

Exemple :
Dans un sac, on dépose quatre jetons :
Un bleu, un rouge, un jaune et un vert.
En tirant au hasard un jeton du sac, on a quatre issues possibles.
On représente les issues sur un schéma appelé **arbre des possibles**.



Méthode : Utiliser un arbre des possibles

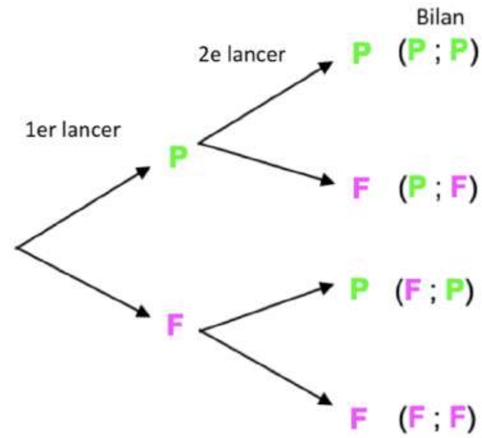
Vidéo https://youtu.be/dQPd9njK5ZA
Vidéo https://youtu.be/JF_PXsPaeN4

On lance deux fois de suite une pièce de monnaie. Il s'agit d'une expérience aléatoire à deux épreuves.
Soit E l'événement : « On obtient au moins une fois PILE. »
Calculer $P(E)$ en utilisant un arbre des possibles.

Correction

On construit un arbre présentant les résultats possibles aux deux épreuves de l'expérience.
On note P pour PILE et F pour FACE.
1er niveau de l'arbre : issues du 1er lancer (1ère épreuve).

2e niveau de l'arbre : issues du 2e lancer (2e épreuve).
On inscrit à droite de l'arbre le bilan des issues des deux épreuves.



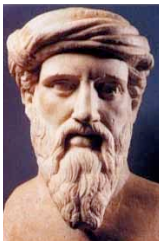
A l'aide de l'arbre des possibles, on peut dénombrer les issues de l'expérience :

- On compte 4 issues en tout :
  (P ; P), (P ; F), (F ; P) et (F ; F).
- L'événement E possède 3 issues :
  (P ; P), (P ; F) et (F ; P).

La probabilité que l'événement E se réalise est donc égale à $\frac{3}{4}$.
Il y a donc trois chances sur quatre d'obtenir au moins une fois « PILE » lorsqu'on lance deux fois de suite une pièce de monnaie.

Remarque :
Une autre solution consisterait à calculer la probabilité de l'évènement contraire « On obtient deux fois FACE ».

RACINES CARREES (Partie 1)



La devise pythagoricienne était « Tout est nombre » au sens de nombres rationnels (quotient de deux entiers).
L'erreur des pythagoriciens est d'avoir toujours nié l'existence des nombres irrationnels.
Par la diagonale d'un carré de côté 1, ils trouvent le nombre inexprimable $\sqrt{2}$ qui étonne puis bouleverse les pythagoriciens. Dans un carré d'une telle simplicité niche un nombre indicible et jamais rencontré jusqu'alors. Cette découverte doit rester secrète pour ne pas rompre le fondement même de la Fraternité pythagoricienne jusqu'à ce qu'un des membres, *Hippase de Métaponte*, trahisse le secret. Celui-ci périra "curieusement" dans un naufrage !

Origine du symbole :

IIe siècle : l12 = côté d'un carré d'aire 12 (l comme latus = côté en latin)
1525, Christoph RUDOLFF, all. : v12 (vient du r de racine)
XVIe siècle, Michael STIFEL, all. : $\sqrt{12}$ (combinaison du « v » de Rudolff et de la barre « $\overline{}$ » ancêtre des parenthèses)

I. La famille des racines carrées

1) Définition

Exemples : $3^2 = 9$ donc $\sqrt{9} = 3$
$2,6^2 = 6,76$ donc $\sqrt{6,76} = 2,6$

La racine carrée de a est le nombre (toujours positif) dont le carré est a.

Remarque :
$\sqrt{-5} = ?$
La racine carrée de -5 est le nombre dont le carré est -5.
Un nombre au carré est toujours positif (règle des signes), donc la racine carrée d'un nombre négatif est impossible.
$\sqrt{-5}$ n'existe pas !

2) Quelques nombres de la famille des racines carrées

$\sqrt{0} = 0$
$\sqrt{1} = 1$
$\sqrt{2} \approx 1,4142$ (nombres ni décimaux, ni rationnels !)
$\sqrt{3} \approx 1,732$

3) Racines de carrés parfaits

$\sqrt{4}=2$	$\sqrt{36}=6$	$\sqrt{100}=10$
$\sqrt{9}=3$	$\sqrt{49}=7$	$\sqrt{121}=11$
$\sqrt{16}=4$	$\sqrt{64}=8$	$\sqrt{144}=12$
$\sqrt{25}=5$	$\sqrt{81}=9$	$\sqrt{169}=13$

Exercices conseillés	En devoir
p66 n°19 à 23 p66 n°35	p70 n°101

4) Racines carrées d'un nombre au carré

Exemples : $\sqrt{3^2}=\sqrt{9}=3$

$\sqrt{5^2}=\sqrt{25}=5$

$\sqrt{9^2}=\sqrt{81}=9$

Pour un nombre positif a, $\sqrt{a^2}=a$
La racine « annule » le carré.

Exercices conseillés	En devoir
p66 n°34	

II. Opération sur les racines carrées

1) Exemples

a	b	$\sqrt{a}$	$\sqrt{b}$	$\sqrt{a}+\sqrt{b}$	$\sqrt{a}-\sqrt{b}$	$\sqrt{a}\times\sqrt{b}$	$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$	$\sqrt{a+b}$	$\sqrt{a-b}$	$\sqrt{a\times b}$	$\sqrt{\dfrac{a}{b}}$
9	16	3	4	7	-1	12	0,75	5	Imp.	12	0,75
25	4	5	2	7	3	10	2,5	≈5,4	≈4,6	10	2,5
36	16	6	4	10	2	24	1,5	≈7,2	≈4,5	24	1,5

2) Formules

$$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b} \qquad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$$

Attention :

Les « non-formules » : $\sqrt{a}+\sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$ et $\sqrt{a}-\sqrt{b} \neq \sqrt{a-b}$

3) Carré d'une racine carrée

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = \sqrt{a}\times\sqrt{a} = \sqrt{a\times a} = \sqrt{a^2} = a$$

Pour un nombre positif a, $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$

Le carré « annule » la racine.

Exercices conseillés	En devoir
p66 n°27 à 29 p72 n°134	p70 n°103, 104

Méthode :

Ecrire le plus simplement possible :

A = $\sqrt{32}\times\sqrt{2}$ B = $\sqrt{3}\times\sqrt{27}$ C = $\sqrt{3}\times\sqrt{36}\times\sqrt{3}$

D = $\dfrac{\sqrt{98}}{\sqrt{2}}$ E = $\dfrac{\sqrt{50}}{\sqrt{72}}$ F = $\left(4\sqrt{5}\right)^2$

G = $\dfrac{\sqrt{32}\times\sqrt{10}}{\sqrt{80}}$

A = $\sqrt{32\times 2}$ = $\sqrt{64}$ = *8*

B = $\sqrt{3\times 27}$ = $\sqrt{81}$ = *9*

C = $\sqrt{3\times 3}\times\sqrt{36}$ = $\sqrt{9}\times\sqrt{36}$ = *3 x 6 = 18*

D = $\sqrt{\dfrac{98}{2}}$ = $\sqrt{49}$ = *7*

E = $\sqrt{\dfrac{50}{72}}$ = $\sqrt{\dfrac{25}{36}}$ = $\dfrac{\sqrt{25}}{\sqrt{36}}$ = $\dfrac{5}{6}$

F = *16 x* $\left(\sqrt{5}\right)^2$ = *16 x 5 = 80*

G = $\sqrt{\dfrac{32\times 10}{80}}$ = $\sqrt{4}$ = *2*

Exercices conseillés	En devoir
p67 n°38 à 41 p71 n°108	p71 n°109, 110

4) Extraire un carré parfait

Méthode :

Ecrire sous la forme $a\sqrt{b}$, avec a et b entiers et b étant le plus petit possible :

A = $\sqrt{72}$ B = $\sqrt{45}$ C = $3\sqrt{125}$

A = $\sqrt{72}$

= $\sqrt{9 \times 8}$ ← *On fait « apparaître » dans 72 un carré parfait : 9.*

= $\sqrt{9}$ x $\sqrt{8}$ ← *On extrait cette racine en appliquant une formule.*

= 3 x $\sqrt{8}$ ← *On simplifie la racine du carré parfait.*

= 3 x $\sqrt{4 \times 2}$ ← *On recommence si possible.*

= 3 x $\sqrt{4}$ x $\sqrt{2}$

= 3 x 2 x $\sqrt{2}$

= $6\sqrt{2}$ ← *On s'arrête, 2 ne « contient » pas de carré parfait.*

B = $\sqrt{45}$

= $\sqrt{9 \times 5}$

= $3\sqrt{5}$

C = $3\sqrt{125}$

= 3 $\sqrt{25 \times 5}$

= 3 x 5 $\sqrt{5}$

= $15\sqrt{5}$

Remarque :

Pour que b soit le plus petit possible, b ne doit pas contenir de carré parfait.

Exercices conseillés	En devoir
p64 n°1 et 2 p67 n°42 à 44 p64 n°5 et 6 p73 n°141	p64 n°3 et 4

III. Application à la résolution d'équations

Exercices conseillés

p61 Act4	

Exemple :

Résoudre l'équation $x^2 = 5$

$x^2 = 5$

$x^2 - 5 = 0$

$(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5}) = 0$

Un produit de facteur est nul si l'un au moins des facteurs est nul.

$x-\sqrt{5} = 0 \quad ou \quad x+\sqrt{5} = 0$

$x = \sqrt{5} \quad ou \quad x = -\sqrt{5}$

$S = \left\{ \sqrt{5};\sqrt{5} \right\}$

Les solutions de l'équation $x^2 = a$ sont $-\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$.

Dans la pratique, on applique directement la propriété !

Méthode :

Résoudre les équations suivantes :

1) $x^2 = 3$ 2) $2x^2 = 32$ 3) $(x-3)^2 = 9$

1) $x = -\sqrt{3}$ ou $x = \sqrt{3}$

Les solutions sont $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$.

2) $2x^2 = 32$

$x^2 = 16$

$x = -\sqrt{16}$ ou $x = \sqrt{16}$

$x = -4$ ou $x = 4$

Les solutions sont -4 et 4.

3) $(x-3)^2 = 9$

$x-3 = -\sqrt{9}$ ou $x-3 = \sqrt{9}$
$x-3 = -3$ ou $x-3 = 3$
$x = 3-3$ ou $x = 3+3$
$x = 0$ ou $x = 6$

Les solutions sont 0 et 6.

Exercices conseillés	En devoir
p65 n°11 à 18 p68 n°57 à 61 p68 n°67, 68, 73	p68 n°54 à 56

Activité de groupe : T.P. sur la calculatrice
http://www.maths-et-tiques.fr/telech/TP_CALC.pdf

RACINES CARREES (Partie 2)

I. Sommes et différences de racines carrées

Rappel : $\sqrt{2}+\sqrt{3} \neq \sqrt{5}$ ou $\sqrt{6}-\sqrt{2} \neq \sqrt{4}$ (non-formules !)

Comment simplifier des expressions contenant des sommes et des différences de racines carrées ?

Méthode 1 :

Ecrire le plus simplement possible :

A = $4\sqrt{3}-2\sqrt{3}+6\sqrt{3}$

B = $7\sqrt{2}-3\sqrt{5}+8\sqrt{2}-\sqrt{5}$

C = $\left(3-2\sqrt{3}\right)-\left(4-6\sqrt{3}\right)$

On regroupe les membres d'une même « famille de racines carrées » pour réduire l'expression.
Les différentes familles de racines carrées sont :
$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{10}, \sqrt{13}, \ldots$

A = $4\sqrt{3}-2\sqrt{3}+6\sqrt{3}$
= $8\sqrt{3}$

B = $7\sqrt{2}-3\sqrt{5}+8\sqrt{2}-\sqrt{5}$
= $15\sqrt{2}-4\sqrt{5}$

C = $3-2\sqrt{3}-4+6\sqrt{3}$
= $-1+4\sqrt{3}$

Exercices conseillés	En devoir
p66 n°31	

Méthode 2 :

Ecrire les expressions suivantes sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont des entiers et b le plus petit possible :

A = $\sqrt{12}+7\sqrt{3}-\sqrt{27}$

B = $\sqrt{125}-2\sqrt{20}+6\sqrt{80}$

On fait apparaître des racines carrées d'une même famille. Pour cela, il faut extraire des carrés parfaits.

A $= \sqrt{12} + 7\sqrt{3} - \sqrt{27}$ ← $\sqrt{12}$ et $\sqrt{27}$ sont des « $\sqrt{3}$ déguisées »

$= \sqrt{4 \times 3} + 7\sqrt{3} - \sqrt{9 \times 3}$ ← Elles sont maintenant « démasqués » !

$= 2\sqrt{3} + 7\sqrt{3} - 3\sqrt{3}$ ← On peut alors réduire l'expression.

$= 6\sqrt{3}$

B $= \sqrt{125} - 2\sqrt{20} + 6\sqrt{80}$

$= \sqrt{25 \times 5} - 2\sqrt{4 \times 5} + 6\sqrt{16 \times 5}$

$= 5\sqrt{5} - 2 \times 2\sqrt{5} + 6 \times 4\sqrt{5}$

$= 25\sqrt{5}$

Exercices conseillés	En devoir
p64 n°7 à 10 p67 n°47 p69 n°76, 81, 82, 89	p67 n°45, 46 p69 n°79, 80

II. Racines carrées et développements

Méthode :

Ecrire les expressions suivantes sous la forme $a + b\sqrt{c}$, où a, b et c sont des entiers relatifs :

A = $\left(\sqrt{3} - 4\right)^2$

B = $\left(3 + \sqrt{5}\right)^2$

C = $\left(\sqrt{2} - \sqrt{5}\right)\left(\sqrt{2} + \sqrt{5}\right)$

D = $\left(3 + \sqrt{3}\right)\left(4 - 2\sqrt{3}\right)$

← On applique les règles classiques de développement d'une expression comme on pourrait le faire sur des expressions algébriques.
Les radicaux sont alors « traités » comme l'inconnue.

$A = \left(\sqrt{3}-4\right)^2$ ← *On applique la 2^e identité remarquable*

$= \left(\sqrt{3}\right)^2 - 2\times\sqrt{3}\times 4 + 4^2$

$= 3 - 8\sqrt{3} + 16$

$= 19 - 8\sqrt{3}$

$B = \left(3+\sqrt{5}\right)^2$ ← *On applique la 1^ère identité remarquable*

$= 3^2 + 2\times 3\sqrt{5} + \left(\sqrt{5}\right)^2$

$= 9 + 6\sqrt{5} + 5$

$= 14 + 6\sqrt{5}$

$C = \left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)$ ← *On applique la 3^e identité remarquable*

$= \left(\sqrt{2}\right)^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2$

$= 2 - 5$

$= -3$

$D = \left(3+\sqrt{3}\right)\left(4-2\sqrt{3}\right)$ ← *On applique la double distributivité*

$= 12 - 6\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 2\left(\sqrt{3}\right)^2$

$= 12 - 6\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 2\times 3$

$= 6 - 2\sqrt{3}$

Exercices conseillés	En devoir
p66 n°32 et 33 p67 n°52 p69 n°78, 85, 90	p67 n°51 p69 n°84