MATHÉMATIQUES

T C et E

algèbre et géométrie

NOUVELLE ÉDITION

HACHETTE

MATHÉMATIQUES
TERMINALES C et E

Algèbre et géométrie

Nouvelle édition conforme au Programme 86
(B.O. du 11 septembre 1986)

C. GAUTIER
Ph. ROYER
C. THIERCÉ

HACHETTE

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1

DÉNOMBREMENT

Dans ce chapitre, nous supposerons connus l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, les propriétés des opérations dans $\mathbb{N}$: addition et multiplication, ainsi que les propriétés de la relation d'ordre $\leqslant$. Pour tout entier naturel *non nul n*, nous noterons $\mathbb{N}_n$ l'ensemble formé des entiers 1, 2, ..., n :

$$\mathbb{N}_n = \{ i \in \mathbb{N} / 1 \leqslant i \leqslant n \}.$$

I – ENSEMBLES FINIS

Pour compter les élèves d'une classe, on fait successivement correspondre à chacun des entiers 1, 2, 3, ..., un et un seul élève, chaque élève n'étant compté qu'une seule fois. Le dernier entier utilisé est le nombre cherché. Cet exemple illustre le sens courant de la notion d'ensemble fini : ensemble dont on peut compter les éléments.

Plus précisément :

DÉFINITION 1 | **On dit qu'un ensemble E est fini s'il est vide ou s'il existe un entier naturel non nul n et une bijection f de $\mathbb{N}_n$ sur E.**

Un ensemble non fini est dit infini, c'est le cas de $\mathbb{N}$, de $\mathbb{Z}$, de $\mathbb{Q}$, de $\mathbb{R}$.

CARDINAL D'UN ENSEMBLE FINI

Soit E un ensemble fini.

1° Si E n'est pas vide, il existe un entier naturel non nul n et une bijection f de $\mathbb{N}_n$ sur E. On démontre, et nous l'admettrons, que cet entier n est unique. On l'appelle le **cardinal** de E et on le note Card E.

Card E n'est autre que le nombre d'éléments de E.

2° Si E est vide, son cardinal est, par définition, l'entier 0 : Card $\varnothing = 0$.

Dénombrer un ensemble fini E, c'est calculer son cardinal.

A noter que tout ensemble E, fini, non vide, de cardinal n, peut s'écrire sous la forme $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$. En effet, comme il existe une bijection f de $\mathbb{N}_n$ sur E, les éléments de E sont $f(1)$, $f(2)$, ..., $f(n)$. Si, pour tout i de $\mathbb{N}_n$, on note $x_i = f(i)$, on obtient :

$$E = \{x_1, x_2, ..., x_n\}.$$

A noter également que l'ensemble vide est le seul ensemble de cardinal égal à 0.

2° Les résultats de la question 1° conduisent à présumer que si Card $E = n$ *alors* Card $\mathscr{P}(E) = 2^n$. *Vérifions cette conjecture par récurrence.*

- *La propriété est vraie pour* $n = 0$.
- *En supposant qu'elle soit vraie pour tout ensemble de cardinal n, démontrons qu'elle est vraie pour tout ensemble de cardinal* $n + 1$.

Soit E' un ensemble de cardinal $n + 1$. *Comme* Card $E' \geqslant 1$, *E' possède au moins un élément. Le choix d'un élément a de E' permet d'opérer sur les parties de E' la classification suivante : celles qui contiennent a, celles qui ne contiennent pas a.*

a) En utilisant l'hypothèse de récurrence (si Card $E = n$, *alors* Card $\mathscr{P}(E) = 2^n$), *dénombrer l'ensemble des parties de E' contenant a et l'ensemble des parties de E' ne contenant pas a.*

b) En déduire Card $\mathscr{P}(E')$ *et conclure.*

Nous retiendrons :

THÉORÈME 1 — **Pour tout ensemble fini E de cardinal n, l'ensemble $\mathscr{P}(E)$ des parties de E est fini et de cardinal 2^n.**

3° Application : *Soit E un ensemble fini de cardinal n et A une partie de E de cardinal p. Dénombrer l'ensemble* $\mathscr{P}'$ *des parties de E contenant A et l'ensemble* $\mathscr{P}''$ *des parties de E disjointes de A. Formuler la définition de l'ensemble* $\overline{\mathscr{P}' \cup \mathscr{P}''}$ *et calculer son cardinal.*

4° Soit E un ensemble fini de cardinal n, $n \geqslant 2$, *et soit a et b deux éléments de E. Dénombrer les parties de E contenant un et un seul des deux éléments a, b et celles contenant au moins un de ces deux éléments.*

5° Soit E un ensemble fini de cardinal n et soit A et B des parties de E de cardinaux respectifs p et q.

a) A quelle condition, nécessaire et suffisante, l'équation $A \cup X = B$ *a-t-elle au moins une solution X appartenant à* $\mathscr{P}(E)$*? Cette condition étant satisfaite, dénombrer les solutions de l'équation.*

b) Reprendre la question a) pour l'équation $A \cap X = B$.

3. *Soit E et F deux ensembles finis de même cardinal n, et f une application de E dans F.*
On rappelle :

- que f est dite **injective** si tout élément y de F possède *au plus* un antécédent par f;
- que f est dite **surjective** si tout élément y de F possède *au moins* un antécédent par f.

1° On suppose, dans cette question, que f est injective.
Calculer Card $f\langle E \rangle$ *et en déduire que f est surjective.* ($f\langle E \rangle$ est l'ensemble des images par f des éléments de E.)

2° On suppose, dans cette question, que f est surjective. On note F sous la forme $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$. *A tout élément* y_i *de F on associe l'ensemble* E_i *de ses antécédents par f :*

$$E_i = \{x \in E \,/\, f(x) = y_i\}.$$

a) Démontrer que Card $E_i \geqslant 1$.

b) Démontrer que les ensembles $E_1, E_2, ..., E_n$ *sont non vides, deux à deux disjoints, et que leur réunion est l'ensemble E* (On dit que $E_1, E_2, ..., E_n$ forment une **partition** de E.) *En déduire que :*

$$\text{Card } E_1 + \text{Card } E_2 + ... + \text{Card } E_n = n.$$

c) Démontrer que s'il existait un entier i de $\mathbb{N}_n$ *tel que* Card $E_i > 1$, *on aurait* Card $E > n$.
En déduire que f est injective.

On peut conclure cette étude par l'énoncé :
E et F étant deux ensembles finis de même cardinal, une application f de E dans F est injective si, et seulement si, elle est surjective.

- **Exercices d'application**

1. On considère deux ensembles finis A et B et on note : $\text{Card } A = a$, $\text{Card } B = b$, $\text{Card } (A \setminus B) = c$. Calculer, en fonction de a, b, c, les cardinaux des ensembles $A \cap B$, $A \cup B$, $A \Delta B$. (On rappelle que :

$$A \Delta B = A \setminus B \cup B \setminus A.)$$

2. Le cardinal de la réunion de deux ensembles finis A et B est donné par la formule :

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card } A + \text{Card } B - \text{Card}(A \cap B).$$

Établir une formule donnant le cardinal de la réunion de trois ensembles finis A, B, C.

3. Une ville de n habitants compte 48 % d'hommes et 52 % de femmes. On sait que 5 % des hommes et 3 % des femmes sont atteints d'une maladie M. Calculer :
a) La proportion des habitants de la ville atteints de la maladie M.
b) La proportion de femmes parmi les habitants atteints de la maladie M.

4. Soit E un ensemble fini et soit A et B deux parties de E. On note :

$$\text{Card } E = n, \quad \text{Card } A = a,$$
$$\text{Card } B = b, \quad \text{Card } A \cup B = c.$$

Calculer : $\text{Card } (\overline{A} \cap B)$, $\text{Card } (A \cap \overline{B})$, $\text{Card } (\overline{A} \cap \overline{B})$, $\text{Card } (\overline{A} \cup B)$, $\text{Card } (A \cup \overline{B})$, $\text{Card } (\overline{A} \cup \overline{B})$, en fonction de a, b, c et n.

5. On considère, dans le plan $\mathscr{P}$, n droites $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$, ..., $\mathscr{D}_n$ deux à deux sécantes et trois à trois non concourantes. On note a_n le nombre de régions délimitées par ces n droites.
1° Calculer a_1, a_2, a_3.
2° Les droites $\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2, ..., \mathscr{D}_{n-1}$ délimitent a_{n-1} régions. Combien d'entre elles sont-elles traversées, et donc partagées en deux, par la droite $\mathscr{D}_n$? (On déduira cet entier du nombre de points d'intersection de $\mathscr{D}_n$ avec $\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2, ..., \mathscr{D}_{n-1}$.)
En déduire que $a_n = a_{n-1} + n$.
3° Démontrer par récurrence que :

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

En déduire l'expression de a_n en fonction de n.

6. Soit n un entier naturel donné.
1° Dénombrer l'ensemble des couples (x, y) d'entiers naturels solutions de l'équation :

$$x + y = n.$$

2° Même question pour l'équation :

$$x + 2y = n.$$

(On distinguera les cas n pair et n impair.)

II — ARRANGEMENTS ET PERMUTATIONS

CARDINAL D'UN PRODUIT CARTÉSIEN

1° Soit E et F deux ensembles finis de cardinaux respectifs n et p.

Le **produit cartésien** $E \times F$ est l'ensemble des **couples** (x, y), où x est élément de E et y élément de F.

Si l'on note $E = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, $E \times F$ peut être considéré comme la réunion de l'ensemble C_1 des couples dont le premier coefficient est x_1, de l'ensemble C_2 des couples dont le premier coefficient est x_2, ..., de l'ensemble C_n des couples dont le premier coefficient est x_n :

$$E \times F = C_1 \cup C_2 \cup ... \cup C_n.$$

Or, quel que soit i, $\text{Card } C_i = \text{Card } F = p$, et quels que soient i et j distincts, $C_i \cap C_j = \varnothing$. Il en résulte que $E \times F$ est fini et que (propriété **5**) :

$$\text{Card } E \times F = \text{Card } C_1 + \text{Card } C_2 + ... + \text{Card } C_n = np,$$

soit :

$$\boxed{\textbf{Card } (E \times F) = (\textbf{Card } E) . (\textbf{Card } F)}$$

Cas particulier :

Lorsque $E = F$, le produit cartésien $E \times E$, noté E^2, est fini et tel que $\text{Card } (E^2) = (\text{Card } E)^2$.

2° Considérons maintenant n ensembles finis $E_1, E_2, ..., E_n$. Leur produit cartésien est l'ensemble, noté $E_1 \times E_2 \times ... \times E_n$, des n-uplets $(x_1, x_2, ..., x_n)$ où, quel que soit l'entier i de $\mathbb{N}_n$, le coefficient x_i est élément de E_i.

Lorsque $n = 3$, en observant que les ensembles $(E_1 \times E_2) \times E_3$ et $E_1 \times E_2 \times E_3$ sont équipotents, on a :

$$\begin{aligned}\text{Card}\,(E_1 \times E_2 \times E_3) &= \text{Card}\,((E_1 \times E_2) \times E_3) = (\text{Card}\,(E_1 \times E_2)) \,.\, (\text{Card}\,E_3)\\ &= (\text{Card}\,E_1) \,.\, (\text{Card}\,E_2) \,.\, (\text{Card}\,E_3).\end{aligned}$$

Cette formule se généralise par récurrence :

THÉORÈME 2 | **Le produit cartésien $E_1 \times E_2 \times ... \times E_n$ de n ensembles finis $E_1, E_2, ..., E_n$ est fini et :**

$$\textbf{Card}\,(E_1 \times E_2 \times ... \times E_n) = (\textbf{Card}\,E_1) \,.\, (\textbf{Card}\,E_2) \,.\, ... \,.\, (\textbf{Card}\,E_n).$$

Cas particulier :

Lorsque $E_1 = E_2 = ... = E_n = E$, où E est un ensemble fini, le produit cartésien $E \times E \times ... \times E$, noté E^n, est fini et tel que :

$$\boxed{\textbf{Card}\,(E^n) = (\textbf{Card}\,E)^n}$$

Les éléments de E^n, c'est-à-dire les n-uplets $(x_1, x_2, ..., x_n)$ où tous les coefficients x_i appartiennent à E, sont aussi appelés **n-listes d'éléments de l'ensemble E.**

ARRANGEMENTS

1. Soit E un ensemble fini non vide de cardinal n et soit p un entier naturel non nul.

DÉFINITION 2 | **On appelle p-arrangement d'éléments de l'ensemble E toute p-liste d'éléments de E deux à deux distincts.**

Autrement dit un p-arrangement d'éléments de E est un p-uplet $(x_1, x_2, ..., x_p)$ dont les coefficients x_i sont des éléments de E deux à deux distincts.

Par exemple les triplets (2, 1, 3), (3, 1, 2), (4, 2, 3) sont des 3-arrangements d'éléments de l'ensemble $\mathbb{N}_4$; par contre les triplets (2, 2, 2), (1, 4, 1) n'en sont pas.

2. Dénombrement des p-arrangements

Désignons par $\mathscr{A}_p(E)$ l'ensemble des p-arrangements d'éléments de E. L'ensemble $\mathscr{A}_p(E)$ est fini puisque c'est une partie de l'ensemble fini E^p; déterminons son cardinal.

a) Si $p > n$, il est évident que $\mathscr{A}_p(E)$ est vide; dans ce cas Card $\mathscr{A}_p(E) = 0$.

b) Supposons maintenant $p \leqslant n$. Pour construire un p-arrangement d'éléments de E, on choisit successivement :

- un élément x_1 de E comme 1^{er} coefficient;
- un élément x_2 de $E \setminus \{x_1\}$ comme 2^e coefficient;
- un élément x_3 de $E \setminus \{x_1, x_2\}$ comme 3^e coefficient;

.

.

.

- un élément x_p de $E \setminus \{x_1, x_2, ..., x_{x-p}\}$ comme p-ième coefficient.

Le choix de x_1 peut se faire de n façons, celui de x_2 de $n-1$ façons, celui de x_3 de $n-2$ façons, ..., et enfin celui de x_p de $n-(p-1)$ façons. On peut donc construire ainsi $n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)$ p-arrangements d'éléments de E.

Les p-arrangements ainsi construits sont deux à deux distincts puisqu'ils diffèrent par le 1[er] coefficient, ou par le 2[e], ..., ou par le p-ième. De plus on les obtient tous puisqu'un arrangement quelconque $(y_1, y_2, \ldots, y_p)$ correspond aux choix successifs $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, ..., $x_p = y_p$.

Finalement le cardinal de $\mathscr{A}_p(E)$ est le produit $n(n-1)\ldots(n-p+1)$ que l'on note habituellement A_n^p.

THÉORÈME 3

***E* étant un ensemble fini non vide de cardinal *n* et *p* un entier naturel non nul, le nombre A_n^p des *p*-arrangements d'éléments de *E* est tel que :**

$$A_n^p = 0, \quad \text{si} \quad p > n;$$
$$A_n^p = n(n-1)\ldots(n-p+1), \quad \text{si} \quad p \leqslant n.$$

REMARQUE : Il est important de bien comprendre pourquoi on obtient A_n^p en effectuant le *produit* des entiers $n, n-1, \ldots, n-p+1$, et non pas leur somme. Il suffit pour cela de reprendre les étapes du calcul de A_n^p : n façons de choisir le 1[er] coefficient; ce choix étant fait, $(n-1)$ façons de choisir le 2[e] et donc $n(n-1)$ façons de choisir les deux premiers coefficients; et ainsi de suite.

PERMUTATIONS

DÉFINITION 3

On appelle permutation d'un ensemble fini non vide *E* de cardinal *n* tout *n*-arrangement d'éléments de *E*, c'est-à-dire tout *n*-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dont les *n* coefficients sont les *n* éléments de *E*.

Par exemple les triplets (1, 2, 3), (3, 2, 1), (2, 1, 3) sont des permutations de l'ensemble $\mathbb{N}_3$; par contre les triplets (1, 1, 1), (1, 1, 2) n'en sont pas.

Le nombre des permutations de E est égal à A_n^n, c'est-à-dire au produit :

$$n \times (n-1) \times \ldots \times 2 \times 1,$$

que l'on convient de noter $n!$ (lire « **factorielle *n*** »).

THÉORÈME 4

Le nombre des permutations d'un ensemble fini *E* de cardinal *n* est égal à *n*!

***Convention :* 0! = 1**

Soit n et p deux entiers tels que $1 \leqslant p < n$. On peut écrire :

$$A_n^p = \frac{n \times (n-1) \times \ldots \times (n-p+1) \times (n-p)(n-p-1) \times \ldots \times 2 \times 1}{(n-p) \times (n-p-1) \times \ldots \times 2 \times 1}$$

soit :
$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}. \tag{1}$$

Pour $p = n$, la formule (1) s'écrit : $A_n^n = \dfrac{n!}{0!}$. Or $A_n^n = n!$. Il est donc naturel de poser $0! = 1$, puisque, avec cette convention, la formule (1) est valable quels que soient les entiers n et p tels que $1 \leqslant p \leqslant n$.

Activité

1. Nombre d'applications de A dans E

Soit A et E *deux ensembles finis non vides de cardinaux respectifs* p *et* n.
Notons $A = \{a_1, a_2, ..., a_p\}$ *et désignons par* $\mathscr{F}$ *l'ensemble des applications de* A *dans* E.

1° Démontrer que l'application Φ *de* $\mathscr{F}$ *dans* E^p *qui, à toute application* f *de* A *dans* E, *associe la p-liste* $(f(a_1), f(a_2), ..., f(a_p))$ *est bijective. En déduire le nombre des applications de* A *dans* E.

2° a) Démontrer qu'une application f *de* A *dans* E *est* injective *si et seulement si la p-liste* $(f(a_1), f(a_2), ..., f(a_p))$ *est un p-arrangement d'éléments de* E. (On rappelle que f est injective si tout élément de E possède au plus un antécédent par f.)
b) En déduire le nombre des injections de A *dans* E.

3° a) Démontrer que si les ensembles A *et* E *n'ont pas le même cardinal* $(p \neq n)$, *il n'existe pas de bijection de* A *sur* E.
b) On suppose maintenant que $p = n$. *Démontrer qu'une application* f *de* A *dans* E *est bijective si et seulement si elle est injective.*
En déduire le nombre des bijections de A *sur* E.

On peut conclure cette étude par le théorème :

THÉORÈME 5

Soit A et E deux ensembles finis non vides de cardinaux respectifs p et n.
1. Le nombre des applications de A dans E est n^p.
2. Le nombre des injections de A dans E est A_n^p.
3. Si $p = n$, le nombre de bijections de A sur E est $n!$.

2. *1° Programmer le calcul de* $n!$ *sur une calculatrice.* (Cet exercice ne présente qu'un intérêt pédagogique dans la mesure où les calculatrices de référence possèdent toutes la fonction factorielle.)

Réponse (CASIO FX-180P)

MODE 0 KAC	met en mode programme et vide les mémoires
4 P2 Kin 1	initialise le contenu x de la mémoire K1 : $x = n\ (= 4)$
1 Kin 2	initialise le contenu y de la mémoire K2 : $y = 1$
P1	programme de calcul de $n!$
Kout 1 Kin × 2	remplace y par le produit yx dans K2
1 Kin − 1 ($x > 0$)	remplace x par $x - 1$ dans K1
Kout 1 $x > 0$	test : si $x > 0$ recommence, si $x \leqslant 0$ arrête
Kout 2 ($x \leqslant 0$)	affiche $y = n!$
MODE •	exécution : calcul de 12!
12 P2 P1	affiche le résultat : 479 001 600

2° Programmez le calcul de A_n^p *sur une calculatrice :*
a) sans utiliser la fonction factorielle de la machine ;
b) en utilisant cette fonction.

Réponse (CASIO FX-180P)

MODE 0 KAC	met en mode programme et vide les mémoires
P₁	programme de saisie de n et p
ENT 5 Kin 1	entre n ($n = 5$) dans la mémoire K1
ENT 2 Kin 2	entre p ($p = 2$) dans la mémoire K2
P₂	programme de calcul de A_n^p
Kout 1 $x!$ ÷ (Kout 1 − Kout 2) $x!$ =	
MODE •	exécution : calcul de A_{10}^6
P₁ 10 ENT 6 ENT P₂	affiche le résultat : 151 200

3° Soit E un ensemble fini de cardinal n ($n \geqslant 3$) et soit a un élément donné de E.
a) On classe les p-arrangements d'éléments de E ($1 < p < n$) selon le critère suivant :

- *ceux dont un des coefficients est a;*
- *ceux dont aucun coefficient n'est a.*

En déduire que $A_n^p = pA_{n-1}^{p-1} + A_{n-1}^p$.
Vérifier cette formule en utilisant les expressions de A_n^p, A_{n-1}^{p-1}, A_{n-1}^p.
b) En déduire une méthode de calcul des entiers A_n^p *en remplissant le tableau ci-contre (jusqu'à la ligne 7).*
c) Vérifier les résultats obtenus avec le programme établi à la question 2°.

$n \backslash p$	1	2	3	4	...
1	1				
2	2	2			
3	3	6	6		
4	4	12	24	24	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

• Exercices d'application

7. Soit E un ensemble fini non vide de cardinal n. Dénombrer les applications non surjectives de E dans E.

8. On range n dossiers numérotés 1, 2, ..., n dans n tiroirs numérotés 1, 2, ..., n en plaçant un dossier par tiroir.
1° Dénombrer les différents rangements possibles.
2° Dénombrer les rangements suivants :
a) le dossier numéroté i est dans le tiroir numéroté i ($1 \leqslant i \leqslant n$);
b) les dossiers i et j sont respectivement dans les tiroirs i et j ($1 \leqslant i < j \leqslant n$);
c) les dossiers $i_1, i_2, ..., i_k$ sont respectivement dans les tiroirs $i_1, i_2, ..., i_k$ ($1 \leqslant i_1 < i_2 < ... < i_k \leqslant n$).

9. Soit n un entier naturel donné. Déterminer les couples (p, q) d'entiers naturels tels que $A_n^p = A_n^q$.

10. Soit E un ensemble fini de cardinal n. On appelle diagonale du produit cartésien E^2 l'ensemble Δ des couples (x, x) dont les deux coefficients sont égaux.
1° Dénombrer l'ensemble des parties de E^2.
2° Dénombrer les parties de E^2 contenant Δ.
3° Dénombrer les parties G de E^2 telles que :

$$\text{si } (x, y) \in G, \quad \text{alors} \quad (y, x) \in G.$$

11. On considère l'entier

$$n = 2^a \times 3^b \times 5^c \times 7^d,$$

où a, b, c, d, sont des entiers naturels non nuls.
1° Démontrer que tout entier de la forme $2^\alpha \times 3^\beta \times 5^\gamma \times 7^\delta$, où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des entiers tels que $0 \leqslant \alpha \leqslant a$, $0 \leqslant \beta \leqslant b$, $0 \leqslant \gamma \leqslant c$, $0 \leqslant \delta \leqslant d$, est un diviseur de n. (On admettra que tous les diviseurs de n sont de cette forme.) En déduire le nombre des diviseurs de n.
2° Quel est le nombre des diviseurs de l'entier 169 047 648?

III – SOUS-ENSEMBLES D'UN ENSEMBLE FINI

COMBINAISONS

Soit E un ensemble fini et p un entier naturel.

DÉFINITION 4	On appelle p-combinaison d'éléments de E toute partie de E de cardinal p.

Désignons par $\mathscr{P}_p(E)$ l'ensemble des parties de E de cardinal p. Cet ensemble est fini puisqu'il est inclus dans l'ensemble, fini, de toutes les parties de E. Dénombrons-le.

1° Si l'entier p est strictement supérieur au cardinal n de E, l'ensemble $\mathscr{P}_p(E)$ est vide et donc de cardinal nul.

2° Supposons maintenant $p \leqslant n$ et examinons quelques cas particuliers.

- Si $p = 0$, $\mathscr{P}_0(E)$ ne contient que la partie vide de E; donc : Card $\mathscr{P}_0(E) = 1$.
- Si $p = 1$, $\mathscr{P}_1(E)$ est l'ensemble des parties de cardinal 1, ou **singletons,** de E; donc : Card $\mathscr{P}_1(E) = n$.
- Si $p = n$, la seule partie de E de cardinal n est E, donc : Card $\mathscr{P}_n(E) = 1$.
- Dans le cas d'un entier p tel que $0 < p \leqslant n$, considérons une p-combinaison $\{x_1, x_2, ..., x_p\}$, et associons lui les différentes permutations de l'ensemble $\{x_1, x_2, ..., x_p\}$. On obtient ainsi des p-arrangements d'éléments de E en nombre égal à $p!$.

Si on répète cette opération pour toutes les p-combinaisons d'éléments de E, le nombre des p-arrangements obtenus est, x désignant le cardinal de $\mathscr{P}_p(E)$, $x \times p!$.

Ces p-arrangements sont deux à deux distincts : s'ils proviennent de la même p-combinaison, ils sont formés avec les mêmes éléments de E mais ordonnés de façon différente, et s'ils proviennent de deux p-combinaisons distinctes de E, ils diffèrent par les éléments qui les constituent.

De plus on les obtient tous; en effet un p-arrangement quelconque $(x'_1, x'_2, ..., x'_p)$ proviendra de la p-combinaison $\{x'_1, x'_2, ..., x'_p\}$.

Il en résulte que le nombre des p-arrangements d'éléments de E est égal à $x \times p!$.

On a donc :
$$x \times p! = \frac{n!}{(n-p)!},$$

d'où :
$$x = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}.$$

A noter que cette formule, établie pour un entier p tel que $0 < p \leqslant n$, s'applique aussi, compte tenu de la convention $0! = 1$, pour $p = 0$. En effet dans ce cas on a, d'une part $x = 1$, et d'autre part $\dfrac{n!}{0!\,(n-0)!} = 1$.

Nous retiendrons :

THÉORÈME 6	**Le nombre des parties de cardinal donné, p, d'un ensemble fini E de cardinal n, est nul si $p > n$, et est égal à $\dfrac{n!}{p!\,(n-p)!}$ si $0 \leqslant p \leqslant n$.**

COEFFICIENTS BINOMIAUX

Pour tout couple (n, p) d'entiers naturels tel que $0 \leqslant p \leqslant n$, on appelle **coefficient binomial** d'indices n et p, et on note C_n^p ou $\binom{n}{p}$, le nombre des parties de cardinal p d'un ensemble à n éléments. Lorsque l'entier p est tel que $p > n$, on convient de poser $C_n^p = 0$.

Ainsi :

$$\boxed{\begin{array}{l} \textbf{si} \quad p > n, \quad C_n^p = 0 \\ \textbf{si} \quad 0 \leqslant p \leqslant n, \quad C_n^p = \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!} \end{array}}$$

Tout coefficient binomial est un entier naturel; par exemple :

$$C_7^0 = 1, \qquad C_7^1 = 7, \qquad C_7^2 = 21, \qquad C_7^3 = 35, \qquad C_7^4 = 35, \ldots$$

REMARQUE : L'appellation «coefficient binomial» trouvera sa justification au paragraphe «Formule du binôme» (page 14).

Propriétés des coefficients binomiaux

1. Soit E un ensemble fini de cardinal n. L'ensemble $\mathscr{P}(E)$ des parties de E est la réunion des ensembles de parties de E contenant respectivement 0, 1, 2, ..., n éléments :

$$\mathscr{P}(E) = \mathscr{P}_0(E) \cup \mathscr{P}_1(E) \cup \ldots \cup \mathscr{P}_n(E).$$

De plus, si i et j sont deux entiers naturels distincts, toute partie de E de cardinal i est distincte de toute partie de E de cardinal j. D'où : $\mathscr{P}_i(E) \cap \mathscr{P}_j(E) = \varnothing$.

Il en résulte : $$\operatorname{Card} \mathscr{P}(E) = \sum_{i=0}^{n} \operatorname{Card} \mathscr{P}_i(E).$$

Or : $$\operatorname{Card} \mathscr{P}(E) = 2^n \quad \text{et} \quad \operatorname{Card} \mathscr{P}_i(E) = C_n^i.$$

Par suite : $$\boxed{2^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i}$$

2. A toute partie A de E de cardinal p associons sa partie complémentaire $\overline{A}$ relativement à E. On définit ainsi une application φ de $\mathscr{P}_p(E)$ dans $\mathscr{P}_{n-p}(E)$. Tout élément B de $\mathscr{P}_{n-p}(E)$ possède un antécédent unique par φ, à savoir $A = \overline{B}$. Il en résulte que l'application φ est bijective, et donc que les ensembles $\mathscr{P}_p(E)$ et $\mathscr{P}_{n-p}(E)$ ont même cardinal.

PROPRIÉTÉ 6	**Pour tout couple (n, p) d'entiers naturels tel que $0 \leqslant p \leqslant n$, on a :** $C_n^p = C_n^{n-p}$.

A noter qu'on peut vérifier aisément cette égalité en utilisant la formule de définition d'un coefficient binomial.

3. Soit E un ensemble fini non vide de cardinal n, et soit p un entier tel que $0 < p < n$. Un élément a de E étant choisi, on peut classer les parties de E de cardinal p suivant le critère suivant :

- celles ne contenant pas a;
- celles contenant a.

Les premières sont les parties de cardinal p de $E \setminus \{a\}$; leur nombre est C_{n-1}^p.

Les secondes s'obtiennent en ajoutant a aux parties de cardinal $p-1$ de $E \setminus \{a\}$; leur nombre est C_{n-1}^{p-1}.

On peut donc considérer $\mathscr{P}_p(E)$ comme la réunion de deux sous-ensembles disjoints, l'un de cardinal C_{n-1}^{p-1}, l'autre de cardinal C_{n-1}^p. Par conséquent :

PROPRIÉTÉ 7 — **Pour tout couple (n, p) d'entiers naturels tels que $0 < p < n$, on a :**

$$C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p.$$

Là encore, il est facile de vérifier cette égalité en utilisant la formule de définition d'un coefficient binomial.

4. Triangle de Pascal

De la formule $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$ découle un *algorithme* de calcul des coefficients binomiaux connu sous le nom de **triangle de Pascal.**

Le triangle de Pascal est un tableau croisé dans lequel la valeur de chaque coefficient binomial C_n^p, inscrite à l'intersection de la n-ième ligne et de la p-ième colonne, est obtenue de la façon suivante :

- Dans la colonne d'indice 0, tous les coefficients sont égaux à 1, puisque $C_n^0 = 1$.
- La ligne d'indice 0 contient le coefficient C_0^0 égal à 1.
- La ligne d'indice 1 contient les coefficients C_1^0 et C_1^1 égaux à 1.
- Dans la ligne d'indice 2, C_2^1 s'obtient à partir de l'égalité $C_2^1 = C_1^0 + C_1^1$; quant au coefficient C_2^2, il est égal à 1.
- Supposons que le tableau soit rempli jusqu'à la ligne d'indice $n-1$. La ligne d'indice n est ainsi construite : pour tout entier p tel que $0 < p \leqslant n-1$, on calcule C_n^p en ajoutant C_{n-1}^{p-1} et C_{n-1}^p; quant à C_n^n, il est égal à 1.

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5	6	...	$p-1$	p
0	1									
1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						
4	1	4	6	4	1					
5	1	5	10	10	5	1				
6	1	6	15	20	15	6	1			
⋮										
$n-1$	C_{n-1}^0	C_{n-1}^1	C_{n-1}^2	C_{n-1}^3	C_{n-1}^4	C_{n-1}^5	C_{n-1}^6	...	C_{n-1}^{p-1}	C_{n-1}^p
n	C_n^0	C_n^1	C_n^2	C_n^3	C_n^4	C_n^5	C_n^6	...		C_n^p

Activité

1° Programmer le calcul de C_n^p en utilisant la fonction factorielle de la machine.

Réponse (CASIO FX-180P)

[MODE] 0 [KAC]	met en mode programme et vide les mémoires
[P1]	programme de saisie de n et p
[ENT] 7 [Kin] 1	entre n ($n = 7$) dans la mémoire K1
[ENT] 3 [Kin] 2	entre p ($p = 3$) dans la mémoire K2
[P2]	programme de calcul de C_n^p
[Kout] 1 [x!] [÷] [Kout] 2 [x!] [=]	
[÷] [(] [Kout] 1 [−] [Kout] 2 [)] [x!] [=]	
[MODE] [•]	exécution : calcul de C_{19}^8
[P1] 19 [ENT] 8 [ENT] [P2]	affiche 75581.99999; résultat : 75 582

2° a) Programmer à nouveau le calcul de C_n^p, mais sans utiliser la fonction factorielle.
b) Remplir le triangle de Pascal jusqu'à la ligne 10, et vérifier les résultats à l'aide du programme de la question 2° a.
3° a) Programmer le calcul de $u_n = \ln(n!)$ sans utiliser la fonction factorielle.

Réponse (CASIO FX-180P)

[MODE] 0 [KAC]	met en mode programme et vide les mémoires
4 [P2] [Kin] 1 0 [Kin] 2	saisie de n ($n = 4$) dans K1 et mise à zéro du contenu y de K2
[P1]	programme de calcul de $u_n = \sum_{k=0}^{n} \ln k$
[Kout] 1 [ln]	appel du contenu x de K1 et calcul de $\ln x$
[Kin] [+] 2	ajoute $\ln x$ à y dans K2
1 [Kin] [−] 1	retranche 1 à x dans K1
[Kout] 1 [x>0] ($x > 0$; $x \leqslant 0$)	test $\begin{cases} x > 0 \text{ recommence} \\ x \leqslant 0 \text{ arrête} \end{cases}$
[Kout] 2	affiche le résultat
[MODE] [•]	exécution : calcul de ln (6!)
6 [P2] [P1]	affiche le résultat : 6,579 251 212

b) Quel est le plus grand entier n pour lequel la machine affiche une valeur de $n!$, par utilisation de la fonction factorielle?
Peut-on calculer C_{100}^{37} à l'aide de cette fonction?
Utiliser le programme précédent pour afficher une valeur de C_{100}^{37}.
Quel est le nombre de chiffres de l'entier C_{100}^{37}?

Exercices d'application

12. Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geqslant 2$ et a et b deux éléments distincts de E. Soit p un entier tel que $2 \leqslant p \leqslant n$.

On classe les parties de E à p éléments de la façon suivante :
- celles ne contenant ni a ni b;

• celles contenant un, et un seul, des deux éléments a, b;
• celles contenant a et b.

En déduire la relation :

$$C_n^p = C_{n-2}^p + 2C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^{p-2}.$$

13. 1° Démontrer que l'égalité $C_n^p = C_n^q$, où n, p, q sont des entiers naturels tels que $p \leqslant n$ et $q \leqslant n$, implique : $p = q$ ou $p + q = n$.
2° Résoudre, dans $\mathbb{N}$, l'équation :

$$C_{10+x}^{x+4} = C_{10+x}^{2x-10}.$$

14. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation :

$$x^2 - xC_n^p + C_{n-1}^{p-1}C_{n-1}^p = 0,$$

où n et p sont deux entiers tels que $0 < p < n$.

15. Démontrer les relations :
a) $C_{p+1}^q = C_p^q + C_{p-1}^{q-1} + C_{p-2}^{q-2} + \dots + C_{p-q}^0$, où $0 \leqslant q \leqslant p$;
b) $C_{n+1}^{p+1} = C_p^p + C_{p+1}^p + C_{p+2}^p + \dots + C_n^p$, où $0 \leqslant p \leqslant n$;
c) $C_{n-1}^p + C_{n-2}^{p-1} + C_{n-3}^{p-2} + \dots + C_{n-p}^1 + 1 = C_n^p$, où $0 < p \leqslant n$.

16. Pour tout couple (n, p) d'entiers naturels tels que $0 \leqslant p \leqslant n - 1$, démontrer que $C_n^p \geqslant C_{n-1}^p$. Dans quels cas y-a-t-il égalité?

17. Soit E et F deux ensembles finis de cardinaux respectifs n et $n - 1$ ($n \geqslant 2$).
1° Soit f une application surjective de E sur F. Montrer qu'il existe un élément a' de F ayant deux antécédents, a et b, par φ et que tous les autres éléments de F ont un seul antécédent, différent de a et de b.
2° En déduire une méthode de construction d'une surjection de E sur F. Dénombrer l'ensemble de ces surjections.

18. Soit E et F deux ensembles finis de cardinaux respectifs n et p ($n \geqslant 2$ et $p \geqslant 2$). Dénombrer les applications f de E dans F telles que Card $f\langle E \rangle = 2$. (On rappelle que $f\langle E \rangle$ est l'ensemble des images par f des éléments de E.)

19. On considère un polygone convexe à n côtés ($n \geqslant 4$).
1° Combien a-t-il de diagonales?
2° Combien les diagonales ont-elles, au plus de points d'intersection à l'intérieur du polygone? (On constatera que l'on peut associer à chaque point d'intersection de deux diagonales, quatre sommets du polygone.)

20. Résoudre, dans $\mathbb{N}^{*2}$, l'équation :

$$C_x^{y-1} = C_{x-1}^y.$$

21. On lance une pièce de monnaie n fois de suite et on note le résultat de cette suite de lancers sous la forme d'une n-liste dont les coefficients sont P (pile) ou F (face).
1° Dénombrer les résultats possibles.
2° Dans combien de résultats trouve-t-on exactement k fois ($0 \leqslant k \leqslant n$) le coefficient P?
3° En déduire la formule :

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n.$$

FORMULE DU BINÔME

Soit à calculer $(a + b)^n$, où a et b sont des réels et n un entier naturel.

Lorsque $n = 0$, on convient que $(a + b)^0 = 1$.

Lorsque l'entier n n'est pas nul, $(a + b)^n$ est le produit Π de n facteurs égaux à $a + b$:

$$\Pi = (a + b)(a + b)\dots(a + b).$$

De la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, il ressort que Π est la somme de tous les produits obtenus en choisissant, dans chaque facteur, un des deux réels a, b, puis en multipliant les n réels choisis.

Si b est retenu dans i facteurs ($i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$), a l'est dans les $n - i$ autres et le produit correspondant est $a^{n-i}b^i$, compte tenu de l'associativité et de la commutativité de la multiplication dans $\mathbb{R}$.

Pour obtenir un terme $a^{n-i}b^i$, il convient donc, parmi les n facteurs de Π, d'en choisir i dans lesquels on retient b et de retenir a dans les autres. Or, il y a C_n^i façons de choisir i facteurs parmi n. Il y a donc C_n^i termes égaux à $a^{n-i}b^i$.

Finalement, Π est la somme de C_n^0 produits égaux à a^nb^0, de C_n^1 produits égaux à $a^{n-1}b$, ..., de C_n^i produits égaux à $a^{n-i}b^i$, ... et de C_n^n produits égaux à a^0b^n.

Autrement dit :

$$\boxed{(a + b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^{n-i} b^i} \qquad (1)$$

Cette formule est connue sous le nom de **formule du binôme de Newton.**

Pour l'établir, on a uniquement utilisé les propriétés d'associativité et de commutativité de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{R}$, et la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. Il en résulte que la formule du binôme s'applique dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

Conséquence

Pour $a = b = 1$, la formule du binôme donne :

$$\boxed{2^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i} \qquad (2)$$

On retrouve ainsi un résultat établi à la page 11 à partir de la propriété :

$$\text{si Card } E = n, \quad \text{alors} \quad \text{Card } \mathscr{P}(E) = 2^n.$$

A noter que la formule (2) permet aussi d'effectuer le dénombrement de $\mathscr{P}(E)$. En effet pour tout ensemble E de cardinal n, l'ensemble des parties de E est la réunion des ensembles de parties de cardinaux 0, 1, 2, ..., n :

$$\mathscr{P}(E) = \mathscr{P}_0(E) \cup \mathscr{P}_1(E) \cup ... \cup \mathscr{P}_n(E).$$

De plus, quels que soient les entiers naturels distincts i et j ($i \leqslant n$ et $j \leqslant n$), les ensembles $\mathscr{P}_i(E)$ et $\mathscr{P}_j(E)$ sont disjoints. Donc :

$$\text{Card } \mathscr{P}(E) = \text{Card } \mathscr{P}_0(E) + \text{Card } \mathscr{P}_1(E) + ... + \text{Card } \mathscr{P}_n(E) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i.$$

Finalement : $\qquad \text{Card } \mathscr{P}(E) = 2^n.$

Activité

1. *1° Soit n un entier naturel non nul et soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = (1+x)^n$.*

Démontrer que $f(x) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i x^i$.

2° a) Calculer $f(1)$ et $f(-1)$. En déduire que :

$$2^{n-1} = C_n^0 + C_n^2 + ... + C_n^{2i} + ... = C_n^1 + C_n^3 + ... + C_n^{2i+1} + ...$$

b) Application : *Soit E un ensemble non vide de cardinal n. Démontrer que le nombre des parties de E de cardinal pair est égal au nombre des parties de E de cardinal impair. Quel est ce nombre?*

3° Calculer la dérivée $f'(x)$ de deux façons différentes. En déduire que :

$$n2^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + ... + nC_n^n.$$

Trouver une expression simple de $C_n^0 + 2C_n^1 + 3C_n^2 + ... + (n+1)C_n^n$.

2. *Soit E et F deux ensembles finis, disjoints, de même cardinal n.*

1° En évaluant de deux façons différentes le nombre des parties de cardinal n de $E \cup F$, démontrer que :

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + ... + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n.$$

(En choisissant k éléments de E et $n-k$ éléments de F, on obtient une partie à n éléments de $E \cup F$ et cela quel que soit $k = 0, 1, 2, ..., n$).

2° Retrouver cette formule en utilisant l'égalité $(1 + x)^{2n} = (1 + x)^n(1 + x)^n$ *et la formule du binôme.*

3° En déduire que $(C_n^1)^2 + 2(C_n^2)^2 + ... + n(C_n^n)^2 = \frac{n}{2} C_{2n}^n$.

Exercices d'application

22. *1°* Pour tout réel x strictement positif et pour tout entier n supérieur à 2, démontrer que $(1 + x)^n > 1 + nx$.
2° En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = a^n$, où a est un réel tel que $a > 1$.

23. Utiliser l'identité :
$(x + 1)^p(x + 1)^q = (x + 1)^{p+q}$, où p et q sont deux entiers naturels, pour démontrer que :

$$C_{p+q}^p = \sum_{i=0}^{p} C_p^i C_q^{p-i}.$$

24. *1°* Pour tout couple (a, b) d'entiers naturels, démontrer que $(a + b)^5 - a^5 - b^5$ est un entier naturel divisible par 5.
2° Généraliser ce résultat en montrant, par récurrence, que si $a_1, a_2, ..., a_n$ sont des entiers naturels :

$$(a_1 + a_2 + ... + a_n)^5 - (a_1^5 + a_2^5 + ... + a_n^5)$$

est un entier naturel divisible par 5.
3° En déduire que, pour tout entier naturel n, $n^5 - n$ est divisible par 5.

25. En développant $(1 + x + x)^n$ de deux façons différentes, démontrer que :

$$2^p C_n^p = C_n^0 C_n^p + C_n^1 C_{n-1}^{p-1} + C_n^2 C_{n-2}^{p-2} + ... + C_n^p C_{n-p}^0.$$

TRAVAUX PRATIQUES

STATISTIQUE — RAPPELS

Population — Échantillon

Toute étude statistique porte sur une **population** E d'objets, de personnes, d'animaux, de pays, etc. Chaque élément de E est un **individu** de la population.

Lorsque le nombre d'individus de E est très élevé, ou lorsqu'on ne peut contacter tous les individus, ou encore lorsque le relevé à effectuer est coûteux ou qu'il occasionne la destruction des individus, on ne fait porter l'étude que sur un **échantillon** de la population E.

Un échantillon n'a évidemment d'intérêt que s'il est *représentatif* de la population de façon que des conclusions relatives à cet échantillon puissent être généralisées à la population toute entière.

Caractère

Pour chaque individu d'une population, ou d'un échantillon de population, on relève la valeur d'un ou de plusieurs **caractères.** Par exemple :

- pour les élèves d'une classe, l'âge, la taille et le poids;
- pour les salariés d'une entreprise, le salaire mensuel brut;
- pour les pays de la C.E.E. ou du Comecon, la production annuelle d'acier;
- pour les habitants d'un département, le sexe et le groupe sanguin;
- pour la population active d'un pays, la catégorie socioprofessionnelle.

Certains de ces caractères sont **qualitatifs :** sexe, groupe sanguin, catégorie socioprofessionnelle. Les autres sont **quantitatifs** et s'expriment par des nombres réels : âge, taille, poids, salaire, production d'acier.

Un caractère quantitatif X d'une population E est aussi appelé **variable statistique numérique.** D'un point de vue mathématique, X est une application de E dans $\mathbb{R}$: celle qui à tout individu e de E associe la valeur $X(e)$ du caractère X pour l'individu e.

On dit que les réels $X(e)$ sont les **modalités** du caractère X. L'ensemble des modalités de X est noté $X\langle E\rangle$.

Série statistique simple

Considérons un caractère numérique X relatif à une population, ou à un échantillon de population E.

1° Lorsque le cardinal p de l'ensemble $X\langle E\rangle$ des modalités de X est faible, on classe les modalités par ordre croissant : $x_1 < x_2 < \dots < x_p$, et, à chaque modalité x_j, on associe l'**effectif** n_j de x_j, c'est-à-dire le nombre des individus de E pour lesquels le caractère X prend la valeur x_j.

L'ensemble des couples $(x_j, n_j)_{j\in\mathbb{N}_p}$ est la **série statistique simple** associée au caractère X.

Une série statistique simple est aussi appelée **statistique simple.** Le qualificatif « simple » souligne qu'elle est définie à partir d'un seul caractère de la population. Une telle série est présentée sous forme d'un tableau :

Modalités	x_1	x_2	...	x_j	...	x_p
Effectifs	n_1	n_2	...	n_j	...	n_p

2° Lorsque le cardinal de l'ensemble $X\langle E\rangle$ des modalités de X est élevé, on recouvre cet ensemble par des intervalles, ou classes : $c_1 = [a_0, a_1[$, $c_2 = [a_1, a_2[$, ..., $c_p = [a_{p-1}, a_p[$, ayant en général la même *amplitude*, et, à chaque classe c_j, on associe l'**effectif** de c_j, c'est-à-dire le nombre n_j des individus de E pour lesquels le caractère X prend une valeur appartenant à la classe c_j.

L'ensemble des couples $(c_j, n_j)_{j\in\mathbb{N}_p}$ est une **série statistique simple exprimée en classes.**

Les tailles (en cm) de 50 élèves de Seconde sont indiquées dans le relevé statistique ci-dessous :

166	158	175	165	181	177	169	169	157	160
165	165	160	168	163	168	154	164	158	185
164	164	170	169	172	166	173	168	151	164
160	166	175	181	169	157	165	160	163	154
158	164	169	173	160	164	166	170	161	151

1° Classer, dans un tableau, les différentes tailles par valeurs croissantes $x_1 < x_2 < ...$, et, pour chaque valeur x_j, indiquer :
a) le nombre n_j d'élèves dont la taille est x_j.
b) Le nombre N_j d'élèves dont la taille est inférieure ou égale à x_j.

2° Dans un repère orthogonal, on porte en abscisses les tailles x_j (graduer à partir de 150 en prenant 0,5 cm *pour* 1 cm *de taille), et, à chaque valeur x_j, associer :*
a) Le segment ayant pour extrémités les points de coordonnées $(x_j, 0)$ et (x_j, n_j) (prendre en ordonnées 0,5 cm *pour 1 élève).*
b) Le point $A_j(x_j, N_j)$.

L'ensemble des segments du *a)* est le **diagramme en bâtons.**

La ligne brisée $A_1 A_2 ...$ est le **polygone des effectifs cumulés.**

3° Calculer la taille moyenne d'un élève en utilisant :
a) Le relevé initial.
b) Le tableau du 1°.
Interpréter cette taille moyenne comme le barycentre des points $x_1, x_2, x_3, ...$ affectés de coefficients que l'on précisera.

4° On recouvre l'ensemble des tailles par les intervalles, ou **classes,** $c_1 = [150, 154[$, $c_2 = [154, 158[$, *... de même amplitude* 4 cm. *Classer, dans un tableau, les différents intervalles $c_1, c_2, c_3, ...$, et, à chaque intervalle c_k, associer :*
a) Le nombre m_k d'élèves dont la taille appartient à c_k.
b) Le nombre $M_k = m_1 + m_2 + ... + m_k$ que l'on interprétera.

5° Dans un repère orthogonal, porter en abscisses les bornes $a_0, a_1, a_2, a_3, ...$ des intervalles $c_1, c_2, c_3, ...$ et construire, sur chaque intervalle c_k pris comme base, un rectangle dont l'aire est proportionnelle à l'effectif m_k de c_k.
L'ensemble de ces rectangles est l'**histogramme.**

Joindre les points de coordonnées $(a_0, 0)$, (a_1, M_1), (a_2, M_2), ...

La ligne brisée obtenue est le **polygone des effectifs cumulés.**

6° A partir des seules données du tableau du 4°, évaluer la taille moyenne d'un élève. (On supposera toutes les tailles de c_1 égales à 152, toutes celles de c_2 égales à 156, ...) Expliquer la différence avec la valeur trouvée au 3°.

Fréquence et pourcentage

Soit $(x_j, n_j)_{j \in \mathbb{N}_p}$, ou $(c_j, n_j)_{j \in \mathbb{N}_p}$, une série statistique simple relative à une population d'effectif total n.

On appelle **fréquence** de la modalité x_j, ou de la classe c_j, le réel f_j défini par $f_j = \dfrac{n_j}{n}$. Toute fréquence f_j est un réel de l'intervalle $[0, 1]$; de plus, $\sum_{j=1}^{p} f_j = 1$.

En pratique, on préfère souvent utiliser les **pourcentages** p_j obtenus en multipliant les fréquences f_j par 100 : $p_j = 100 f_j$.

La série $(x_j, n_j)_{j \in \mathbb{N}_p}$ peut aussi être présentée sous la forme $(x_j, f_j)_{j \in \mathbb{N}_p}$, ou $(x_j, p_j)_{j \in \mathbb{N}_p}$.

Valeur moyenne et écart type

L'étude des séries statistiques simples a été développée dans le cours de Première. Rappelons deux définitions importantes.

Soit X un caractère d'une population d'effectif total n et $(x_j, n_j)_{j \in \mathbb{N}_p}$ la série statistique associée à X. On appelle **valeur moyenne** et **écart type** du caractère X, ou de la série associée, les réels respectivement notés $\overline{X}$ et $\sigma(X)$ et définis par :

$$\boxed{\begin{aligned} \overline{X} &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{p} n_j x_j \qquad (1) \\ \sigma(X) &= \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{p} n_j (x_j - \overline{X})^2} \qquad (2) \end{aligned}}$$

Le réel $\overline{X}$, barycentre du système $(x_j, n_j)_{j \in \mathbb{N}_p}$, représente la valeur moyenne des modalités de X : c'est un **paramètre de position.**

Quant à l'écart type $\sigma(X)$, il exprime le plus ou moins grand éparpillement des modalités de X autour de leur valeur moyenne $\overline{X}$: c'est un **paramètre de dispersion.** Le carré de l'écart type est appelé **variance** de X et noté $V(X)$.

Si on peut calculer $\sigma(X)$ à partir de la formule (2) de définition, on préfère généralement utiliser la formule suivante qui découle de (2) :

$$\boxed{\sigma(X) = \sqrt{\frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{p} n_j x_j^2\right) - \overline{X}^2}} \qquad (3)$$

Quelle que soit la formule choisie, le calcul de $\sigma(X)$ implique celui de $\overline{X}$.

Pour calculer la valeur moyenne et l'écart type d'une série statistique exprimée en classes, on se ramène au cas précédent en convenant de concentrer l'effectif de chaque classe c_j en son centre x_j.

Exemple :

A partir d'un relevé des prix, exprimés en francs, de 400 robes en vente dans un grand magasin, on a établi le tableau statistique suivant :

Classes	[300, 400[	[400, 500[	[500, 600[	[600, 700[	[700, 800[
Effectifs	25	90	145	90	50

Pour calculer la valeur moyenne et l'écart type de cette série statistique exprimée en classes, on se ramène à la série statistique suivante :

Modalités	350	450	550	650	750
Effectifs	25	90	145	90	50

On en déduit : $\frac{1}{400} \sum_{j=1}^{5} n_j x_j = 562{,}5$; $\frac{1}{400} \sum_{j=1}^{5} n_j x_j^2 = 328\,250$; et par suite :

$$\overline{X} = 562{,}5; \qquad V(X) = 11\,843{,}75; \qquad \sigma(X) \approx 108{,}83.$$

Parmi les calculatrices présentées dans cet ouvrage, la CASIO FX-180 P, la SHARP EL-5050 et la TI-62 effectuent les calculs de $n = \sum_{j=1}^{p} n_j$, $\overline{X}$ et $\sigma(X)$ sur simple entrée des données x_j, n_j.

On trouvera dans le tableau suivant, pour chacune d'elles, la séquence d'un tel calcul (les données sont celles de l'exemple ci-dessus).

CASIO FX-180 P	SHARP EL-5050	TI-62	Commentaires
MODE 3 KAC	STAT CA	1 Var	mise en mode statistique mise à zéro des mémoires
350 × 25 DATA 450 × 90 DATA 550 × 145 DATA 650 × 90 DATA 750 × 50 DATA	350 × 25 DATA 450 × 90 DATA 550 × 145 DATA 650 × 90 DATA 750 × 50 DATA	350 Frq 25 Σ+ 450 Frq 90 Σ+ 550 Frq 90 Σ+ 550 Frq 55 Σ+ 650 Frq 90 Σ+ 750 Frq 50 Σ+	entrée des données
Kout *n* Kout $\bar{x}$ Kout σn	affiche *n* $\bar{x}$ σx	affiche *n* Mean σn	affiche $n = 400$ affiche $\overline{X} = 562{,}50$ affiche $\sigma(X) \approx 108{,}83$

A noter que si l'effectif n_j est tel que $n_j \geqslant 100$, la TI-62 n'enregistre que l'effectif $100 - n_j$; c'est pourquoi l'entrée des 145 robes à 550 F s'est faite en deux fois : **550** Frq **90** et **550** Frq **55**.

La HP-11 C effectue aussi ces calculs mais il convient, pour chaque modalité x_j, de répéter n_j fois la séquence x_i Σ+ :

Σ, **350** Σ+ répétée 25 fois, **450** Σ+ répétée 90 fois, ..., **750** Σ+ répétée 50 fois.

On obtient alors $\overline{X}$ avec $\bar{x}$ et $\sigma(X)$ avec $\bar{x}$ Σ+ s.

Lorsque les effectifs n_j sont importants, comme c'est le cas dans l'exemple considéré, il est plus rapide d'effectuer les calculs directement, à l'aide des formules $\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{p} n_j x_j$, $\sigma(X) = \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{p} n_j x_j^2 - \overline{X}^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

On peut aussi utiliser le programme suivant :

P/R	met en mode programme
PRGM	efface la mémoire programme
LBL A	choix du label du programme
STO 8 R↓ STO 7	entre n_j dans le registre R_8 et x_j dans R_7
RCL 8 STO + 0	ajoute n_j au contenu de R_0
RCL 8 RCL 7 ×	effectue le produit $n_j x_j$
STO + 1	ajoute $n_j x_j$ au contenu de R_1
RCL 8 RCL 7 x^2 ×	effectue le produit $n_j x_j^2$
STO + 2	ajoute $n_j x_j^2$ au contenu de R_2
RTN	fin du programme

P/R	retour en mode calcul
Σ	initialise les registres statistiques R_0, R_1, R_2, R_3, R_4, R_5
350 ENTER 25 A	entrée des données
450 ENTER 90 A	
550 ENTER 145 A	
650 ENTER 90 A	
750 ENTER 50 A	
RCL 0	affiche $n = 400$
$\bar{x}$	affiche $\overline{X} = 562{,}50$
$\bar{x}$ $\Sigma+$ s	affiche $\sigma(X) \approx 108{,}83$

Applications

1. *Procéder à 200 jets de deux dés et, pour chaque jet, noter le plus grand, X, des points amenés et la valeur absolue, Y, de la différence des points amenés. On définit ainsi deux séries statistiques simples. Pour chacune d'elles :*

1° Calculer la valeur moyenne et l'écart type.

2° Déterminer le pourcentage des jets pour lesquels :

a) $X \in [\overline{X} - \sigma(X), \overline{X} + \sigma(X)]$.

b) $Y \in [\overline{Y} - \sigma(Y), \overline{Y} + \sigma(Y)]$.

2. *Le service comptable d'une banque donne la statistique suivante portant sur les sommes X déposées à la banque par ses clients :*

Somme déposée	1 000	3 000	5 000	10 000	50 000	100 000
Pourcentage de clients	12	18	25	20	15	10

Calculer la valeur moyenne et l'écart type de X.

3. *On considère la série statistique suivante, relative à la répartition de la population active d'un pays, par âge, en centaines de milliers de personnes.*

[20, 25[	[25, 30[	[30, 35[	[35, 40[	[40, 45[	[45, 50[	[50, 55[	[55, 60[	[60, 65[
10	30	40	35	25	24	18	12	6

1° Déterminer la valeur moyenne m et l'écart type σ de cette série.

2° Déterminer le pourcentage de personnes dont l'âge appartient à l'intervalle $[m - \sigma, m + \sigma]$.

4. *On considère un échantillon de 1 000 assurés pris parmi ceux qui n'ont eu aucun accident pendant l'année 1980. Le tableau ci-après indique la distribution de ces assurés suivant les tranches d'âge :*

Tranches d'âge (en années)	[18, 25[	[25, 35[	[35, 45[	[45, 55[	[55, 65[	[65, 75[
Effectifs	29	270	490	195	14	2

1° Calculer la moyenne m et l'écart type σ.

2° Déterminer le pourcentage des assurés dont l'âge appartient à l'intervalle $[m - \sigma, m + \sigma]$.

5. *Les résultats d'un test de durée de vie de 400 tubes fluorescents sont consignés dans le tableau ci-contre.*

1° Préciser la série statistique ainsi définie et calculer sa moyenne m et son écart type σ.

2° Estimer le pourcentage des tubes dont la durée de vie :

a) n'excède pas 600 heures;

b) est supérieure ou égale à 800 heures;

c) est comprise entre 500 et 1 000 heures;

d) est comprise entre 680 et 920 heures.

Durée de vie (en heures)	Nombre de tubes
[300, 400[	15
[400, 500[	46
[500, 600[	54
[600, 700[	78
[700, 800[	70
[800, 900[	64
[900, 1 000[	45
[1 000, 1 100[	20
[1 100, 1 200[	8

6. *Soit E une population et X un caractère numérique. Démontrer que l'écart type de X est nul si, et seulement si, X est constant.*

7. *On considère le tableau statistique suivant relatif aux notes obtenues à l'épreuve d'analyse par les candidats au concours d'entrée de 1985 à l'École nationale des mines d'Alès.*

Notes sur 20	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5
Nombre de notes	23	51	36	63	54	66	81	79	76	136	133	91	160	124
Notes sur 20	7	7,5	8	8,5	9	9,5	10	10,5	11	11,5	12	12,5	13	13,5
Nombre de notes	116	96	117	115	117	87	103	66	72	66	67	54	42	25
Notes sur 20	14	14,5	15	15,5	16	16,5	17	17,5	18	18,5	19	19,5	20	
Nombre de notes	42	19	19	14	17	9	13	1	8	3	4	1	1	

1° Calculer l'effectif, la valeur moyenne X et l'écart type $\sigma(X)$ *de cette série statistique.*

2° Calculer le pourcentage des candidats dont la note X est telle que :

a) $X \in [\overline{X} - \sigma(X), \overline{X} + \sigma(X)]$;

b) $X \in [\overline{X} - 2\sigma(X), \overline{X} + 2\sigma(X)]$.

3° Déterminer la note médiane μ. (μ est telle que : la moitié au moins des candidats ont une note $\leqslant \mu$, et la moitié au moins des candidats ont une note $\geqslant \mu$.)

COMBINAISONS AVEC RÉPÉTITION

Soit E un ensemble non vide de cardinal n. On appelle ***p*-combinaison avec répétition** (p-c.a.r.) d'éléments de E tout objet mathématique formé de p éléments de E pris dans un ordre quelconque, chaque élément pouvant être répété jusqu'à p fois.

Exemple : [*aaabbc*], [*aaaabb*], [*aaaaaa*] sont des 6-c.a.r. d'éléments de l'ensemble $\{a, b, c\}$.

Deux c.a.r. sont égales si elles sont formées des mêmes éléments, chaque élément étant répété le même nombre de fois : [*aababc*] et [*cbabaa*] sont des 6-c.a.r. égales.

On désigne par Γ_n^p *le nombre des p-c.a.r. d'éléments de E* (Card $E = n$).

1° Calculer Γ_3^1, Γ_3^2, Γ_3^3, Γ_2^3 et, pour $n \geqslant 3$, Γ_n^1, Γ_n^2, Γ_n^3.

*2° On suppose écrites toutes les p-c.a.r. d'éléments de E (*Card $E = n$*). Démontrer qu'un élément donné, a, de E est écrit $\frac{p}{n}\,\Gamma_n^p$ fois.*

3° On considère l'ensemble des p-c.a.r. ($p \geqslant 2$) contenant a au moins une fois. Si dans chacune de ces p-combinaisons on retire un des termes a, qu'obtient-on?

En déduire : $\frac{p}{n}\Gamma_n^p = \Gamma_n^{p-1} + \frac{p-1}{n}\Gamma_n^{p-1}$, *puis :*

$$\Gamma_n^p = \frac{n+p-1}{p}\Gamma_n^{p-1}. \tag{1}$$

4° Démontrer que Γ_n^p est égal à un coefficient binomial dont on précisera les indices.
(Écrire l'égalité (1) puis, au-dessous, les égalités obtenues en remplaçant successivement p par $p-1$, $p-2$, ..., 3, 2; faire le produit des premiers membres, puis des seconds, de ces égalités; simplifier et conclure.)

5° Applications :
a) On répartit p boules dans n tiroirs numérotés 1, 2, ..., n et on note la répartition obtenue sous la forme d'une n-liste $(x_1, x_2, ..., x_n)$, où x_i est le nombre de boules placées dans le tiroir i ($0 \leqslant x_i \leqslant p$). Dénombrer les différentes n-listes d'entiers qu'on peut ainsi obtenir. (A chaque répartition des boules dans les tiroirs, on associera la c.a.r. obtenue en répétant chaque numéro de tiroir non vide autant de fois qu'il y a de boules dans le tiroir.)
b) Dénombrer les n-listes d'entiers naturels $(x_1, x_2, ..., x_n)$ telles que :

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = p,$$

où p est un entier naturel donné.

p-LISTES CROISSANTES DE $\mathbb{N}_n$

Une p-liste $(x_1, x_2, ..., x_p)$ d'éléments de $\mathbb{N}_n$ est dite

- strictement croissante si $x_1 < x_2 < ... < x_p$;
- croissante si $x_1 \leqslant x_2 \leqslant ... \leqslant x_p$.

1° Démontrer que le nombre de p-listes strictement croissantes d'éléments de $\mathbb{N}_n$ est C_n^p. (A chaque p-liste strictement croissante $(x_1, x_2, ..., x_p)$ on associera la partie $\{x_1, x_2, ..., x_p\}$ de $\mathbb{N}_n$.)

2° Soit $(x_1, x_2, ..., x_p)$ une p-liste croissante d'éléments de $\mathbb{N}_n$. Associons-lui la p-liste $(y_1, y_2, ..., x_p)$ telle que, quel que soit l'entier k de $\mathbb{N}_p$, $y_k = x_k + k - 1$.
a) Démontrer que $(y_1, y_2, ..., y_p)$ est une p-liste strictement croissante d'éléments de $\mathbb{N}_{n+p-1}$.
b) Démontrer réciproquement que toute p-liste strictement croissante d'éléments $\mathbb{N}_{n+p-1}$ est associée à une, et à une seule, p-liste croissante d'éléments de $\mathbb{N}_n$.
c) En déduire le nombre des p-listes croissantes d'éléments de $\mathbb{N}_n$.
d) Retrouver ce résultat en associant à toute p-liste croissante $(x_1, x_2, ..., x_p)$ d'éléments de $\mathbb{N}_n$ la p-c.a.r. $[x_1 x_2 ... x_p]$ d'éléments de $\mathbb{N}_n$. (Voir l'étude précédente des combinaisons avec répétition.)

3° On se propose de dénombrer les 4-listes (x, y, z, t) d'entiers naturels tels que :

$$x + y + z + t = 10. \tag{1}$$

a) A toute 4-liste (x, y, z, t) répondant à la question associons la 3-liste $(1 + x,\ 1 + x + y,\ 1 + x + y + z)$. Démontrer que $(1 + x,\ 1 + x + y,\ 1 + x + y + z)$ est une 3-liste croissante d'éléments de $\mathbb{N}_{11}$.
b) Démontrer réciproquement que toute 3-liste croissante (a, b, c) d'éléments de $\mathbb{N}_{11}$ est associée à une, et à une seule, 4-liste (x, y, z, t) d'entiers naturels vérifiant l'égalité (1).
c) En déduire le nombre cherché.

4° Utiliser la méthode de la question 3° pour dénombrer les n-listes $(x_1, x_2, ..., x_n)$ d'entiers naturels tels que $x_1 + x_2 + ... + x_n = p$, où p est un entier naturel donné. (On se contentera de préciser les différentes étapes du raisonnement, sans faire les démonstrations, et on donnera le nombre cherché.)

EXERCICES ET PROBLÈMES

ENSEMBLES FINIS

26. Soit E un ensemble fini et A et B deux sous-ensembles de E. Calculer, en fonction de Card $A = a$, Card $B = b$ et Card $(A \cap B) = i$, les cardinaux des ensembles suivants (on commencera par simplifier l'écriture de chaque ensemble) :
a) $X = A \cap \{(A \cap B) \cap B\}$.
b) $Y = A \cup [\{B \cap (A \cup B)\} \cap \{A \cup (A \cap B)\}]$.
c) $Z = A \cap [\{B \cap (A \cap B)\} \cup \{A \cap (A \cup B)\}]$.

27. Soit E l'ensemble des diviseurs de 60 et F l'ensemble des diviseurs de 38. Calculer Card $(E \cap F)$, Card $(E \cup F)$ et Card $(E \Delta F)$.

28. Soit E l'ensemble des multiples de 2, F l'ensemble des multiples de 3 et G l'ensemble des diviseurs de 546. Calculer Card $[(E \cap G) \cup (F \cap G)]$.

29. Parmi quarante secrétaires, huit connaissent le russe, quinze l'anglais et neuf l'allemand. D'autre part, quatre parlent anglais et allemand, cinq anglais et russe, deux allemand et russe, et deux les trois langues. Combien de secrétaires ne connaissent aucune de ces trois langues?

30. Un certain appareil, fabriqué en grande série, peut être défectueux à cause de deux défauts désignés par A et B. Sur cent appareils, on a en moyenne :

- dix appareils présentant le défaut A (et peut être aussi le défaut B);
- huit appareils présentant le défaut B (et peut-être aussi le défaut A);
- quatre appareils présentant les deux défauts.

Combien d'appareils, en moyenne, sur cent, ne présentent aucun défaut?

DÉNOMBREMENT

31. On considère les cinq lettres a, b, c, d et e. Combien peut-on former de mots, avec ces cinq lettres, dans lesquels les voyelles a et e ne sont pas voisines?

32. On trace, dans un plan, n droites de directions différentes et dont trois quelconques ne sont pas concourantes. Combien forme-t-on ainsi de triangles?

33. De combien de manières peut-on former un comité de trois femmes et de quatre hommes dans une société de huit femmes et de sept hommes, si l'on suppose que Mlle X... refuse d'être désignée en même temps que M. Y...?

34. De combien de manières peut-on extraire un ensemble de cinq cartes dans un jeu de trente-deux cartes?
Même question si l'on suppose que cet ensemble de cinq cartes contient trois rois, et trois seulement.

35. Combien y a-t-il de nombres de trois chiffres dans lesquels un chiffre est répété deux fois (numération décimale)?

36. Combien y a-t-il de nombres de quatre chiffres différents qui contiennent les chiffres 5 et 7 (numération décimale)?

37. De combien de manières distinctes peut-on placer six convives autour d'une table ronde? Même question en supposant qu'on alterne les dames et les messieurs (il y a trois dames et trois messieurs).

38. Un rectangle est constitué par six cases carrées égales, numérotées 1, 2, 3, 4, 5, 6 comme l'indique la figure. On dispose de six plaquettes carrées, égales à chacune des cases et numérotées de 1 à 6.

6	5	4
1	2	3

1° On place les plaquettes sur les cases à raison de une par case. Combien y a-t-il de positions possibles se distinguant :
a) Uniquement par la place des plaquettes?
b) A la fois par leur place et leur orientation?
2° Chaque plaquette coïncidant avec la case de même numéro, on colorie en rouge le périmètre du rectangle qu'elles constituent, puis on les disperse. De combien de façons peut-on former le rectangle de telle sorte que le contour rouge soit reconstitué?

39. Étant donné n éléments $a_1, a_2, ..., a_n$, combien y a-t-il d'arrangements qui contiennent à la fois les éléments a_1 et a_2.

40. Étant donné n éléments $a_1, a_2, ..., a_n$, combien y a-t-il de permutations où l'objet a_1 occupe la première place? Où les éléments a_1 et a_2 occupent les deux premières places?

41. Dans un jeu de trente-deux cartes, combien peut-on faire de jeux de cinq cartes contenant trois piques?

42. Une classe de trente-cinq élèves comprend quinze filles (toutes externes) et vingt garçons (tous internes). On veut former un comité comprenant un président (interne), une secrétaire (fille) et trois autres membres. Combien y a-t-il de comités possibles?

43. On dispose de lettres accentuées permettant de distinguer E, É et È. Combien y a-t-il de permutations possibles pour l'ensemble des lettres du mot THÉORÈME?
On supprime les accents. Combien reste-t-il de permutations distinctes?

44. Par combien de zéros se termine le nombre 100! écrit dans le système décimal? Même question pour le nombre 10000!

45. On marque, dans un plan, cinq points tels que trois quelconques d'entre eux ne soient pas alignés. Combien ces points déterminent-ils de pentagones? Généraliser.

46. On garde tous les cœurs et tous les trèfles d'un jeu de trente-deux cartes. Combien y a-t-il de permutations de ces seize cartes dans lesquelles deux cartes consécutives quelconques sont de couleurs différentes?

47. Dans un bureau de vingt-sept personnes, combien y a-t-il de façons de choisir un président, un vice-président, un secrétaire général et un trésorier?

48. On a un jeu de trente-deux cartes. On en prend huit, ce qui constitue une « main ». Dénombrer les mains qui contiennent :
a) exactement un as;
b) exactement deux as;
c) aucun as;
d) au moins un as;
e) deux cœurs et trois piques;
f) deux cœurs, trois piques et un trèfle;
g) deux cœurs et un as;
h) deux cœurs et deux dames;
i) un carré (quatre cartes de même valeur).

49. On jette trois dés différenciés A, B et C ayant chacun six faces. Les faces sont numérotées de 1 à 6. On s'intéresse aux résultats possibles.
1° Dénombrer tous ces résultats. Le problème revient à dénombrer les applications d'un ensemble dans un autre ensemble. Préciser ces ensembles.
2° Dénombrer les résultats où les trois faces amenées sont identiques.
3° Dénombrer ceux où les trois faces sont différentes.
4° Dénombrer les résultats ne comportant aucun as (on pourra procéder comme au *1°*).
5° Dénombrer les résultats comportant au moins un as.
6° Dénombrer les résultats comportant exactement un as.
7° Dénombrer les résultats comportant exactement deux as.
8° Indiquer le lien entre les questions *4°*, *5°*, *6°* et *7°* et une autre question, concernant les as, qui n'a pas été posée.

50. On dispose d'un alphabet à deux symboles a et e. Combien de mots distincts de longueur k peut-on former à l'aide de cet alphabet, une lettre pouvant être répétée jusqu'à k fois? (On prendra $k = 1$, $k = 2$, puis k quelconque.)

51. Une grenouille monte un escalier de treize marches. Elle peut progresser en sautant d'une marche à la suivante, ou en sautant par dessus une marche (de la marche n à la marche $n + 2$). Combien de façons distinctes a-t-elle d'arriver au sommet de l'escalier?

52. Un tournoi sportif compte sept équipes engagées. Chaque équipe doit rencontrer une fois, et une seule, toutes les autres équipes. Combien doit-on organiser de matchs?

53. Pour jouer au loto, on désigne 6 numéros, parmi 49. On gagne au 1er rang si les six numéros choisis sortent, au 3e si cinq numéros sur six sortent, au 4e si quatre numéros sur six sortent. Combien y a-t-il de grilles gagnantes au 1er, 3e et au 4e rang?

54. Une ligne de chemin de fer comporte 25 stations. Chaque station délivre des titres de transports en première et deuxième classe pour chacune des autres stations (on distingue le billet $A \to B$ du billet $B \to A$). La ligne est prolongée de trois stations. Combien doit-on imprimer de *nouveaux* types de billets?

APPLICATIONS ENTRE ENSEMBLES FINIS

55. Soit E un ensemble fini non vide de cardinal n. On se propose de dénombrer l'ensemble des applications f de E dans E telles que $f \circ f = f$.
1° Soit f une application de E dans E. On note $f\langle E\rangle$ l'ensemble des images par f de tous les éléments de E. Démontrer que l'application f est telle que $f \circ f = f$ si, et seulement si, tout élément de $f\langle E\rangle$ est invariant par f.
2° Soit A une partie non vide de E, de cardinal p. Dénombrer les applications f de E dans E telles que $f \circ f = f$ et $f\langle E\rangle = A$.
3° Dénombrer les applications f de E dans E telles que $f \circ f = f$.

56. *Applications croissantes de $\mathbb{N}_p$ dans $\mathbb{N}_n$*
Soit n et p deux entiers naturels non nuls.
1° Une application de f de $\mathbb{N}_p$ dans $\mathbb{N}_n$ est une *injection croissante* si $1 \leqslant f(1) < f(2) < \ldots < f(p) \leqslant n$.
Démontrer que le nombre d'injections croissantes de $\mathbb{N}_p$ dans $\mathbb{N}_n$ est C_n^p. (A chaque injection croissante f de $\mathbb{N}_p$ dans $\mathbb{N}_n$, on associera la partie $\{f(1), f(2), \ldots, f(p)\}$ de $\mathbb{N}_n$.)
2° Soit f une application croissante de $\mathbb{N}_p$ dans $\mathbb{N}_n$: $1 \leqslant f(1) \leqslant f(2) \leqslant \ldots \leqslant f(p) \leqslant n$. A f on associe l'application g qui à tout entier k de $\mathbb{N}_p$ associe l'entier $g(k)$ tel que :

$$g(k) = f(k) + k - 1.$$

Démontrer que g est une injection croissante de $\mathbb{N}_p$ dans $\mathbb{N}_{n+p-1}$. En déduire que le nombre d'applications croissantes de $\mathbb{N}_p$ dans $\mathbb{N}_n$ est C_{n+p-1}^p.

57. *Dénombrement des surjections de A sur B*
Soit A et B deux ensembles finis non vides de cardinaux respectifs n et p. On se propose de dénombrer les applications surjectives de A sur B. On note S_n^p le cardinal cherché.
1° Calculer les entiers S_n^1, S_n^n et S_n^p pour $p > n$.
Dans tout ce qui suit, on suppose $p \leqslant n$.
2° Soit a un élément de A. Les surjections f de A sur B sont de deux sortes :
- celles pour lesquelles la restriction à $A \setminus \{a\}$ est une surjection de $A \setminus \{a\}$ sur B : il existe $b \neq a$ tel que $f(a) = f(b)$;
- celles pour lesquelles la restriction à $A \setminus \{a\}$ est une surjection de $A \setminus \{a\}$ sur l'ensemble B privé d'un de ses éléments : quel que soit $b \neq a$, $f(a) \neq f(b)$.

Déduire de ce constat que : $S_n^p = p(S_{n-1}^{p-1} + S_{n-1}^p)$.
3° Calculer S_n^p pour $1 \leqslant n \leqslant 6$ et $1 \leqslant p \leqslant 6$, et noter les résultats dans le tableau ci-dessous.

n \ p	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

4° Application : combien y a-t-il de façons de distribuer 32 cartes à quatre joueurs, les joueurs n'étant pas censés recevoir nécessairement le même nombre de cartes, chaque joueur en recevant au moins une?

58. *Dénombrement des involutions d'un ensemble fini*

I — Soit A un ensemble fini non vide de cardinal pair :

$$\text{Card } A = 2p,\ p \in \mathbb{N}^*.$$

On note Π l'ensemble des partitions de E formées de paires d'éléments de E.
Par exemple, si $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, la partition $\{a, b\}, \{c, e\}, \{d, f\}$ est un élément de Π.
On se propose de déterminer le cardinal de Π, que l'on note u_{2p}.
1° Démontrer que $u_{2p} = (2p - 1)u_{2p-2}$.
2° En déduire que $u_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^p p!}$.

II — Soit f une application involutive d'un ensemble E dans lui-même : $f \circ f = \mathrm{Id}_E$.

Pour tout élément a de E, on note $\bar{a}$ l'ensemble $\{a, f(a)\}$.
(Si $f(a) = a$, Card $\bar{a} = 1$ et si $f(a) \neq a$, Card $\bar{a} = 2$.)
1° Soit a et b deux éléments distincts de E. Démontrer que :
a) si $b = f(a)$, $\bar{a} = \bar{b}$;
b) si $b \neq f(a)$, $\bar{a} \cap \bar{b} = \varnothing$.
2° En déduire que tous les ensembles $\bar{a}$ distincts forment une partition de E (faite de parties à un ou deux éléments).
3° Montrer, réciproquement, que la donnée d'une partition de E, faites de parties à un ou deux éléments, définit une involution de E.
4° On suppose, dans cette question, que E est fini et de cardinal pair : Card $E = 2n$, $n \in \mathbb{N}^*$.
a) Dénombrer les involutions de E sans élément invariant.
b) Dénombrer les involutions de E possédant deux éléments invariants.
c) Dénombrer les involutions de E possédant $2k$ éléments invariants ($1 \leqslant k \leqslant n$).
d) Dénombrer toutes les involutions de E.
5° On suppose, dans cette question, que E est fini et de cardinal impair : Card $E = 2n + 1$, $n \in \mathbb{N}$.
a) Démontrer que E possède un nombre impair d'éléments invariants.
b) Dénombrer les involutions de E.

59. *Transformations de E sans point fixe*

Soit E un ensemble fini non vide de cardinal n. Une transformation de E est une bijection de E sur E. On considère l'ensemble $\mathcal{T}$ des transformations f de E sans point fixe : pour tout x de E, $f(x) \neq x$. On note $u_n = \text{Card } \mathcal{T}$.
1° On choisit un élément a de E. Les éléments f de $\mathcal{T}$ sont de deux sortes :

- ceux pour lesquels l'image b de a et l'antécédent c de a sont égaux;
- ceux pour lesquels b et c sont distincts.

a) Montrer que si f est du premier type, la restriction de f à $A \setminus \{a, b\}$ est une transformation sans point fixe de $A \setminus \{a, b\}$.
b) Montrer que si f est du second type, l'application g qui à c associe b, et à $x \neq c$ associe $f(x)$ est une transformation sans point fixe de $A \setminus \{a\}$.
c) En déduire que : $u_n = (n - 1)(u_{n-1} + u_{n-2})$.
2° On pose $\alpha_n = u_n - nu_{n-1}$. Montrer par récurrence que $\alpha_n = (-1)^n$. En déduire que

$$u_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!}\right).$$

3° Programmer le calcul de u_n.

CHAPITRE 2

CALCUL DES PROBABILITÉS

I — NOTION D'ÉVÉNEMENT

EXPÉRIENCE ALÉATOIRE

Quand, dans un sac contenant six jetons numérotés 1, 2, 3, 4, 5, 6, on tire *deux* jetons *au hasard*, simultanément, on peut obtenir différents résultats.

Une telle opération dont le résultat est imprévisible est une **expérience aléatoire.**

C'est à partir de cet exemple que nous introduirons le vocabulaire des *événements*.

Univers des possibles

Il est naturel de représenter le **résultat** d'un tirage par la paire formée des nombres inscrits sur les deux jetons tirés, par exemple $\{2, 5\}$, $\{3, 5\}$, ... L'ensemble des résultats possibles, ou **univers des possibles,** est donc l'ensemble des parties à deux éléments de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. On le note Ω. Son cardinal est $C_6^2 = 15$.

ÉVÉNEMENT

Le résultat $\{2, 5\}$ *réalise l'événement* « la somme des points est 7 ».

Deux autres résultats : $\{1, 6\}$ et $\{3, 4\}$ réalisent également cet événement que l'on peut représenter par la partie de l'univers des possibles formée des éléments $\{1, 6\}$, $\{2, 5\}$, $\{3, 4\}$.

De même, « le plus petit nombre est 3 » est un événement représenté par la partie de Ω :

$$\{\{3, 4\}, \{3, 5\}, \{3, 6\}\}.$$

Plus généralement, on appelle **événement** toute partie A de l'univers des possibles. Dire qu'un résultat possible ω réalise l'événement A signifie alors que $\omega \in A$.

Un événement peut être défini par une formulation comme « la somme des points est 7 », « le plus petit nombre est 3 », ou en extension, par la donnée des résultats qui le réalisent.

Ainsi, la formulation « la somme des points est 7 » et la partie $\{\{1, 6\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}\}$ définissent le même événement.

Le cardinal d'un événement est inférieur à celui de l'univers des possibles Ω.

Événement impossible

La partie vide de l'univers Ω des possibles est l'**événement impossible.** Ainsi, « la somme des points est 12 » est-elle l'événement impossible : aucun résultat ne le réalise.

Événement certain

La partie Ω est l'**événement certain.** Ainsi, « la somme des points est supérieure à 2 » est l'événement certain : il est réalisé par tous les résultats.

Événement élémentaire

L'événement « le plus grand des nombres est 2 » est réalisé par le seul résultat $\{1, 2\}$: on dit que c'est un **événement élémentaire.**

Les événements élémentaires sont les *singletons* de l'univers des possibles, c'est-à-dire les parties de cardinal 1.

Pour tout élément ω de l'univers des possibles Ω, l'événement élémentaire réalisé par ω est $\{\omega\}$.

Événement contraire d'un événement

Soit A un événement, c'est-à-dire une partie de l'univers des possibles Ω. La partie complémentaire de A relativement à Ω est aussi un événement, appelé **événement contraire** de A et noté $\overline{A}$.

Par exemple, « la somme des points est 7 » a pour événement contraire « la somme des points est différente de 7 ».

L'événement impossible et l'événement certain sont contraires l'un de l'autre.

A noter que, pour tout événement A, on a : Card A + Card $\overline{A}$ = Card Ω.

Événements incompatibles

Un événement A et son contraire $\overline{A}$ sont tels que $A \cap \overline{A} = \varnothing$. On peut aussi exprimer cette propriété en disant qu'un même résultat ne peut réaliser à la fois un événement A et son contraire $\overline{A}$.

Plus généralement, on dit que deux événements A et B sont **incompatibles,** ou **disjoints**, si $A \cap B = \varnothing$, c'est-à-dire s'il n'existe aucun résultat qui les réalise simultanément.

« La somme des points est 5 » et « le plus petit des points est 3 » sont deux événements incompatibles.

Système complet d'événements

Dans l'expérience aléatoire considérée dans ce paragraphe, la somme des points sortis est un entier compris entre 3 et 11. Pour tout entier i tel que $3 \leqslant i \leqslant 11$, notons S_i

l'événement : « la somme des points est i ». Il est alors immédiat de constater que les événements S_i sont non impossibles, deux à deux incompatibles, et que leur réunion est l'univers Ω.

On exprime ces propriétés en disant que les événements S_i, $3 \leqslant i \leqslant 11$, forment un **système complet d'événements.**

A noter que cette notion de système complet d'événements n'est autre, exprimée en langage des événements, que la notion de **partition** : un système complet d'événements est une partition de l'univers des possibles Ω. (Rappelons que des parties $A_1, A_2, ..., A_p$ d'un ensemble E forment une partition de E si elles sont vides, deux à deux disjointes, et si leur réunion est E.)

REMARQUES :

1. *Un événement A, non impossible et non certain, et son contraire $\bar{A}$ forment un système complet d'événements.*
2. *Les événements élémentaires forment un système complet d'événements.*

Réunion et intersection de deux événements

Soit A et B deux événements, c'est-à-dire deux parties de l'univers des possibles.

La partie $A \cup B$, réunion de A et B, est appelée événement « A ou B ».

La partie $A \cap B$, intersection de A et B, est appelée événement « A et B ».

Exemple

Si A et B sont respectivement les événements « la somme des points est 7 » et « le plus petit nombre est 3 », alors :

- « A ou B » est l'événement $\{\{1, 6\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{3, 6\}\}$;
- « A et B » est l'événement $\{\{3, 4\}\}$.

• Exercices d'application

1. Dans un sac contenant six boules numérotées 1, 2, 3, 4, 5, 6, on tire une première boule, puis, sans remettre cette première dans le sac, une seconde boule.

1° Définir un univers des possibles Ω tenant compte de l'ordre de sortie des deux nombres obtenus.

2° Quel est le cardinal de Ω?

3° « La somme des nombres est 3 » est-il un événement élémentaire?

4° Écrire en extension et préciser le cardinal des événements suivants :

A : les deux nombres sortis sont consécutifs;

B : le premier nombre sorti est inférieur au second;

C : la somme des nombres sortis est impaire;

D : le second nombre sorti est 6.

5° Même question pour les événements $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$, $\bar{D}$, A et B, A et C, A et $\bar{C}$, B et D, B ou D.

2. Reprendre l'exercice précédent en supposant que la première boule tirée soit remise dans le sac avant le second tirage.

3. On place n boules numérotées 1, 2, ..., n dans p tiroirs numérotés 1, 2, ..., p, chaque tiroir pouvant recevoir un nombre k de boules compris entre 0 et n : $0 \leqslant k \leqslant n$.

A chaque répartition des boules dans les tiroirs on associe l'application de $\mathbb{N}_n$ dans $\mathbb{N}_p$ qui à tout entier i de $\mathbb{N}_n$ associe le numéro du tiroir dans lequel est placée la boule numérotée i.

1° Quel est l'univers des possibles Ω? Dénombrer Ω.

2° On note X le nombre de boules placées dans le tiroir numéro 1, et, pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, $(X = k)$ l'événement : « le premier tiroir contient k boules ».

a) Montrer que les événements $(X = k)$, $k = 0, 1, 2, ..., n$, forment un système complet d'événements.

b) Calculer Card $(X = k)$.

c) En déduire que :

$$p^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (n-k)^p.$$

II — NOTION DE PROBABILITÉ

CAS PARTICULIER

Dans l'expérience aléatoire considérée au paragraphe I, les 15 tirages possibles se font au hasard et un résultat donné n'est obtenu que par un seul tirage : par exemple le résultat $\{3, 5\}$ est obtenu en tirant les boules numérotées 3 et 5. Il est alors légitime de penser que les résultats possibles ont tous la même *chance* de sortir : une sur quinze.

Cette hypothèse peut recevoir une justification expérimentale : si on effectue des séries de 150 tirages, on constate que la **fréquence de sortie** d'un résultat donné, c'est-à-dire le quotient du nombre de sorties du résultat par le nombre de tirages, est généralement proche de $\frac{1}{15}$. Certes des séries où cette fréquence diffère notablement de $\frac{1}{15}$ peuvent intervenir, mais elles sont rares.

On exprime ce fait en disant que les résultats possibles sont **équiprobables** et on convient d'affecter à chacun d'eux la **probabilité** $\frac{1}{15}$.

Il est alors naturel d'affecter à un événement A de cardinal p, c'est-à-dire réalisé par p résultats, la probabilité $p \times \frac{1}{15}$ égale à $\frac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega}$.

Là encore l'expérience justifie cette démarche : dans des séries d'un grand nombre de tirages (100, 150, 200, 1 000), la fréquence de réalisation de A ne s'éloigne sensiblement de $\frac{p}{15}$ que dans quelques cas rares.

DÉFINITION 1	**Dans une expérience aléatoire, lorsque les résultats possibles sont équiprobables, la probabilité d'un événement A est le réel, noté $P(A)$, défini par :** $$P(A) = \frac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega}, \quad \textbf{où } \Omega \textbf{ est l'univers des possibles.}$$

Il résulte de cette définition que les événements élémentaires ont tous la même probabilité : $\frac{1}{\text{Card } \Omega}$ (toujours dans l'hypothèse d'équiprobabilité des résultats possibles).

Activité

1. *Soit Ω un univers des possibles associé à une expérience aléatoire dont les résultats possibles sont équiprobables.*

1° Quelle est la probabilité de l'événement impossible et celle de l'événement certain?

2° Démontrer que la probabilité $P(A)$ d'un événement quelconque A est un réel tel que $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.

3° Pour tout événement A d'événement contraire $\overline{A}$, démontrer que :

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

On utilise cette formule pour déterminer $P(A)$ lorsque le calcul de $P(\overline{A})$ est plus simple que celui de $P(A)$. Par exemple :

On tire quatre cartes au hasard d'un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un as?

L'univers des possibles Ω est l'ensemble des parties à 4 éléments de l'ensemble des 32 cartes. Donc : Card $\Omega = C_{32}^4$. De plus les résultats possibles sont équiprobables.

L'événement A dont on demande la probabilité est l'ensemble des parties à 4 éléments contenant au moins un as. Son contraire $\overline{A}$ est l'ensemble des parties à 4 éléments ne contenant pas d'as; $\overline{A}$ est donc l'ensemble des parties à 4 éléments des 28 cartes qui ne sont pas des as.

D'où : Card $\overline{A} = C_{28}^4$. Il en résulte : $P(\overline{A}) = \dfrac{C_{28}^4}{C_{32}^4}$ et, par suite :

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{C_{28}^4}{C_{32}^4} \approx 0{,}43.$$

4° Soit A et B deux événements.
On dit que A **entraîne** B si $A \subset B$, c'est-à-dire si tout résultat qui réalise A réalise B.
Démontrer que si A entraîne B, alors $P(A) \leqslant P(B)$.

5° Soit A et B deux événements. Démontrer que :

$$P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B).$$

Que devient cette formule lorsque A et B sont incompatibles?

6° Soit $A_1, A_2, ..., A_p$ un système complet d'événements. Démontrer que :

$$P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_p) = 1.$$

2. *Un sac contient n boules : 2 blanches et $(n-2)$ noires $(n > 2)$.*
On tire les n boules, une par une, au hasard, sans remettre les boules tirées dans le sac. Le résultat d'une telle opération est la n-liste dont le k-ième coefficient est B (resp. N), si la k-ième boule tirée est blanche (resp. noire).

1° Quel est l'univers des possibles Ω? Dénombrer Ω.

2° On note X le rang de la première boule blanche tirée. Quel est l'ensemble E des valeurs possibles de X?

3° Pour tout entier k élément de E, on note $(X = k)$ l'événement : « la première boule blanche est obtenue au k-ième tirage ».
a) Montrer que les événements $(X = k)_{k \in E}$ forment un système complet d'événements.
b) Calculer $P(X = k)$.
c) En déduire une expression de la somme des n premiers entiers naturels non nuls.

4° On suppose dans cette question que $n = 2p$, où p est un entier $\geqslant 2$, et on note $(X \leqslant p)$ l'événement : « la première boule blanche est obtenue avant le p-ième tirage ».
a) Démontrer que $P(X \leqslant p) = \sum_{k=1}^{p} P(X = k)$.
b) Programmer le calcul de $P(X \leqslant p)$ en fonction de p.

Réponse (HP-11C)

P/R	met en mode programme
PRGM	efface la mémoire programme
LBL A	choix du label du programme
STO 0	place p dans le registre R_0
0 STO 1	initialise le contenu k du registre R_1 : $k = 0$

	début d'une boucle
LBL 0	ajoute 1 au contenu de R_1
1 STO + 1	calcule $2p - k$
RCL 0 2 × RCL 1 −	calcule $p(2p-1)$
RCL 0 2 × 1 − RCL 0 ×	effectue le quotient $\dfrac{2p-k}{p(2p-1)} = P(X = k)$
÷	ajoute $P(X = k)$ au contenu du registre R_2
STO + 2	appelle k dans R_1, puis p dans R_0
RCL 1 RCL 0	compare p à k $\begin{cases} \text{retourne à LBL 0} & \text{si } p > k \\ \text{sort de la boucle} & \text{si } p \leqslant k \end{cases}$
$x > y$	fin de la boucle
GTO 0	affiche le contenu de R_2 : $P(X \leqslant p)$
RCL 2	fin du programme
RTN	
P/R	retour en mode calcul
0 STO 2	vide le registre R_2
100 A	affiche $0{,}751\,3 \approx P(X \leqslant 100)$

Calculer $P(X \leqslant p)$ pour $p = 10$, $p = 20$, $p = 50$, $p = 100$.

c) Démontrer en utilisant le résultat de la question 3° c que :

$$P(X \leqslant p) = \frac{3p-1}{2(2p-1)}.$$

En déduire la limite quand p tend vers $+\infty$ de $P(X \leqslant p)$.

Exercices d'application

Dans tous ces exercices on demande de calculer la probabilité d'un événement A relatif à une expérience aléatoire. On commencera par définir un univers des possibles dont les éléments (résultats possibles) sont équiprobables et on utilisera la formule : $P(A) = \dfrac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega}$.

4. Un sac contient 5 jetons numérotés 1, 2, 3, 4, 5. On les tire au hasard, un par un, en les plaçant les uns à côté des autres, de gauche à droite de manière à former un nombre n de 5 chiffres. Calculer la probabilité que :
1° n soit pair;
2° n soit supérieur à 23 000.

5. On marque n points sur un cercle. On en choisit deux au hasard. Quelle est la probabilité qu'ils soient voisins? Même question lorsque les points sont sur une droite.

6. Une urne contient $n - 2$ boules blanches et 2 boules noires. On les tire une à une, au hasard, sans les remettre.
1° Calculer la probabilité d'obtenir la seconde boule noire au k-ième tirage ($k \in \{2, 3, \dots n\}$).
2° Calculer la probabilité d'obtenir les deux boules noires consécutivement.

7. On range, au hasard, n boules numérotées 1, 2, ..., n dans n tiroirs numérotés 1, 2, ..., n, en mettant une boule par tiroir. Quelle est la probabilité que la boule 3 soit dans le tiroir 3? que les boules 3 et 5 soient respectivement dans les tiroirs 3 et 5?

8. Une urne contient n boules. On en tire, au hasard, une partie A non vide. Quelle est la probabilité pour que A ait un cardinal pair?

9. Une urne contient b boules blanches et n boules noires ($b \geqslant 2$ et $n \geqslant 2$). On tire 2 boules, au hasard, simultanément. Quelle est la probabilité d'un tirage de deux boules blanches, de deux boules noires, d'une boule noire et d'une boule blanche?

10. Une urne contient n boules numérotées 1, 2, ..., n ($n \geqslant 3$). On tire 3 boules, au hasard, simultanément.
1° Quelle est la probabilité que le plus petit des numéros tirés soit égal à k ($k \in \{1, 2, \dots, n\}$)?
2° Même question pour le plus grand des numéros tirés.

11. On tire 5 cartes, au hasard, d'un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité d'avoir :
1° l'as de cœur;
2° un as et un seul;
3° deux as et deux seulement;
4° exactement trois as;
5° les quatre as;
6° au moins un as?

12. Une urne contient 3 boules blanches et 5 boules noires. On en tire 4, au hasard, simultanément. Quelle est la probabilité d'avoir k boules blanches ($k \in \{0, 1, 2, 3\}$)?

13. n personnes disposent chacune d'un jeu de 32 cartes. Chaque personne tire une carte au hasard. Quelle est la probabilité pour que parmi les cartes tirées il n'y en ait pas deux identiques?

14. Quelle est la probabilité pour que parmi n personnes choisies au hasard il y ait au moins deux personnes dont l'anniversaire ait lieu le même jour?

CAS GÉNÉRAL

Probabilités des résultats possibles

Considérons maintenant l'expérience aléatoire consistant à tirer deux jetons au hasard, simultanément, dans un sac en contenant six : deux numérotés 1, deux numérotés 2 et deux numérotés 3.

Le résultat d'un tel tirage est constitué par les nombres marqués sur les deux jetons sortis. Ces nombres ne forment pas un couple car ils ne sont pas ordonnés, ni un ensemble car le même numéro peut être répété deux fois; nous les noterons sous la forme d'une 2-liste croissante d'éléments de $\mathbb{N}_3$, c'est-à-dire d'un couple de $\mathbb{N}_3 \times \mathbb{N}_3$ dont le premier coefficient est inférieur ou égal au second.

L'univers des possibles est alors $\Omega = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$, et Card $\Omega = 6$.

Si on effectue des séries de 100 tirages dans les conditions décrites ci-dessus et si, à l'issue de chaque série, on calcule la fréquence de sortie de chaque résultat ω, c'est-à-dire le quotient $\dfrac{\text{nombre de sorties de } \omega}{\text{nombre de tirages}}$, on constate, dans la plupart des cas, des fréquences voisines de $\dfrac{7}{100}$ pour les résultats (1, 1), (2, 2) et (3, 3), et des fréquences voisines de $\dfrac{27}{100}$ pour les résultats (1, 2), (1, 3) et (2, 3). Les résultats possibles ne sont donc pas équiprobables. Pourquoi?

Comme dans le tirage étudié au paragraphe I, il y a six jetons dans le sac qui, même s'ils portent le même numéro, sont des jetons distincts (deux jetons de même numéro peuvent, par exemple, être de couleurs différentes : l'un blanc et l'autre noir). Le nombre de tirages possibles de deux jetons parmi les six est donc $C_6^2 = 15$, et ces tirages sont équiprobables.

Le résultat (1, 1) est obtenu par un seul tirage : celui des deux jetons numérotés 1; sa probabilité est donc $\dfrac{1}{15}$ et il en est de même pour les résultats (2, 2) et (3, 3). Par contre le résultat (1, 2) est obtenu par quatre tirages : les deux jetons blancs numérotés 1 et 2, les deux jetons noirs numérotés 1 et 2, les jetons blanc et noir respectivement numérotés 1 et 2, les jetons blanc et noir respectivement numérotés 2 et 1. La probabilité du résultat (1, 2) est donc $\dfrac{4}{15}$ et il en est de même pour les résultats (1, 3) et (2, 3).

Bien évidemment la somme des probabilités des résultats possibles est égale à 1 :

$$\frac{1}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{15} + \frac{4}{15} + \frac{4}{15} + \frac{4}{15} = 1,$$

car la somme $1 + 1 + 1 + 4 + 4 + 4$ est égale au nombre, 15, de tous les tirages possibles.

Probabilité d'un événement

La probabilité d'un événement quelconque s'obtient à partir des probabilités des résultats qui le réalisent.

Par exemple, soit A l'événement : «la somme des points est 4»; A est la partie $\{(1, 3), (2, 2)\}$ de l'univers Ω, et comme il est réalisé par les résultats (1, 3) et (2, 2), et uniquement par ces résultats, il est naturel de lui affecter une probabilité égale à la somme des probabilités des résultats (1, 3) et (2, 2), soit : $\frac{4}{15} + \frac{1}{15} = \frac{1}{3}$.

On peut vérifier expérimentalement le bien-fondé de ce calcul en procédant à des séries de 100 tirages, et en constatant que la fréquence de réalisation de A reste, dans la plupart des cas, voisine de $\frac{1}{3}$.

D'une façon générale :

DÉFINITION 2

La probabilité d'un événement A est la somme des probabilités des résultats qui le réalisent :

$$\textbf{si}\quad A = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_p\},\quad \textbf{alors}\quad P(A) = P(\omega_1) + P(\omega_2) + ... + P(\omega_p).$$

Conclusion

Pour calculer la probabilité d'un événement A relatif à une expérience aléatoire, il convient d'adopter la démarche suivante :

1° Définir un univers des possibles Ω.

2° Calculer les probabilités des différents résultats possibles. Ces probabilités sont positives et leur somme doit être égale à 1.

3° La probabilité de A est alors la somme des probabilités des résultats qui réalisent A.

REMARQUES :

1. Lorsque les résultats possibles sont équiprobables, la formule $P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega)$ devient $P(A) = \frac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega}$.

2. Dans le processus conduisant au calcul de la probabilité d'un événement, la première étape : définition de l'univers des possibles, est essentielle. Elle consiste à choisir la nature des éléments mathématiques qui représenteront les résultats de l'expérience : p-listes, p-listes croissantes, p-arrangements, p-combinaisons, ...

3. Il est parfois possible d'associer à une même expérience aléatoire deux univers des possibles. Si, pour l'un des deux, les résultats possibles sont équiprobables, on préférera cet univers à l'autre, ce qui permettra, pour tout événement A, d'appliquer la formule : $P(A) = \frac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega}$.

L'activité suivante donne un exemple d'un tel choix.

Activité

Considérons l'expérience aléatoire consistant à jeter deux dés simultanément sur une table.

1° Le résultat d'un tel jet est constitué par les deux nombres de points situés sur la face supérieure des dés. (Ces deux nombres ne forment pas un couple car ils ne sont pas ordonnés, ni un ensemble car le même nombre peut être répété deux fois.) *Définir un univers des possibles Ω_1 et calculer son cardinal.*

2° Il est toujours possible de différencier les dés par un signe permettant de définir un premier dé et un second. On peut alors considérer comme résultat le couple (i_1, i_2) *où* i_1 *et* i_2 *sont respectivement les nombres de points marqués par le premier et le second dé.*
Quel univers des possibles Ω_2 *obtient-on ainsi et quel est son cardinal?*

3° Les résultats possibles de l'univers Ω_1 *sont-ils équiprobables? Même question pour* Ω_2.

4° Calculer, en utilisant les deux univers, les probabilités des événements suivants : la somme des points est 7, le plus grand des nombres de points est 5, au moins un des dés marque l'as, un et un seul dé marque l'as, les nombres de points des deux dés sont distincts.
Quel univers préférez-vous? Pourquoi?

5° On jette trois dés simultanément. Calculer la probabilité d'obtenir :
a) trois nombres de points deux à deux distincts;
b) au moins deux nombres de points égaux;
c) exactement deux nombres de points égaux;
d) au moins un as;
e) exactement un as;
f) une somme de points égale à 10;
g) une somme de points supérieure à 12;
h) 4, 2, 1.

6° On jette quatre dés simultanément. Calculer la probabilité d'obtenir :
a) un carré (quatre fois un même nombre de points);
b) un brelan (trois fois un même nombre de points);
c) une double paire (deux fois un même nombre de points et deux fois un même autre nombre de points);
d) une disposition banale (quatre nombres de points deux à deux distincts).

Exercices d'application

15. Une urne contient six boules : une numérotée 1, deux numérotées 2 et trois numérotées 3. On tire deux boules au hasard, simultanément.
1° Définir un univers des possibles et calculer la probabilité de chaque résultat possible.
2° Quelle est la probabilité de tirer deux numéros distincts? De tirer un et un seul numéro 3, au moins un numéro 3?
3° On note X le plus petit des numéros tirés.
a) Quel est l'ensemble E des valeurs possibles de X?
b) Pour tout élément i de E calculer la probabilité des événements $(X = i)$, $(X \leqslant i)$ et $(X > i)$.
c) Les événements $(X = i)_{i \in E}$ forment-ils un système complet d'événements? Même question pour les événements $(X \leqslant i)_{i \in E}$.
4° On note Y le plus grand des numéros tirés. Reprendre avec Y les questions du *3°*.

16. Une urne contient six boules : trois numérotées 1, deux numérotées 2 et une numérotée 3. On tire une première boule au hasard puis, sans remettre cette première boule dans l'urne, une seconde boule, toujours au hasard.
Le résultat d'un tel tirage est le couple (a, b) où a et b sont les nombres respectivement inscrits sur la première et la seconde boule.
1° Écrire en extension l'univers des possibles et calculer la probabilité de chaque résultat possible.
2° Calculer la probabilité des événements suivants :
a) les deux nombres tirés sont égaux $(a = b)$;
b) le premier nombre tiré est inférieur au second $(a \leqslant b)$;
c) le premier nombre tiré est strictement supérieur au second $(a > b)$.
Les événements définis en *a)*, *b)*, *c)* forment-ils un système complet?
3° On note X la valeur absolue de la différence des deux nombres tirés $(X = |a - b|)$.
a) Quel est l'ensemble E des valeurs possibles de X?
b) Pour tout élément i de E calculer la probabilité de l'événement $(X = i)$.
c) Les événements $(X = i)_{i \in E}$ forment-ils un système complet?

17. Reprendre l'exercice précédent en supposant que la première boule tirée soit remise dans l'urne avant le tirage de la seconde boule.

III — PROPRIÉTÉS DES PROBABILITÉS

PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES

Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ un univers des possibles de cardinal n associé à une expérience aléatoire.

Les résultats possibles ω_i possèdent des probabilités respectives $P(\omega_i)$, positives, et dont la somme est égale à 1 : $\sum_{i=1}^{n} P(\omega_i) = 1$.

Pour tout événement A, on définit la probabilité de A comme la somme des probabilités des résultats qui réalisent A :

$$\text{si } A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, ..., \omega_{i_p}\}, \text{ alors } P(A) = P(\omega_{i_1}) + P(\omega_{i_2}) + ... + P(\omega_{i_p}).$$

Il en résulte les trois propriétés suivantes, fondamentales en ce sens qu'elles permettent de démontrer toutes les autres :

PROPRIÉTÉS 1, 2, 3	
	1. Pour tout événement A, $P(A) \geqslant 0$.
	2. La probabilité de l'événement certain est égale à 1 : $P(\Omega) = 1$.
	3. Si A et B sont deux événements incompatibles, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Les propriétés **1** et **2** sont évidentes; pour démontrer **3** posons :

$$A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, ..., \omega_{i_p}\} \quad \text{et} \quad B = \{\omega_{j_1}, \omega_{j_2}, ..., \omega_{j_q}\}.$$

Comme $A \cap B$ est vide, les éléments $\omega_{i_1}, ..., \omega_{i_p}, \omega_{j_1}, ..., \omega_{j_q}$ sont deux à deux distincts. Par suite :

$$A \cup B = \{\omega_{i_1}, ..., \omega_{i_p}, \omega_{j_1}, ..., \omega_{j_p}\},$$

d'où : $P(A \cup B) = P(\omega_{i_1}) + ... + P(\omega_{i_p}) + P(\omega_{j_1}) + ... + P(\omega_{j_q})$,

soit : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

CONSÉQUENCES

1. Un événement quelconque A et son contraire $\overline{A}$ sont tels que :

$$A \cup \overline{A} = \Omega \quad \text{et} \quad A \cap \overline{A} = \varnothing.$$

Donc (propriété **3**) : $P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$, soit : $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.

PROPRIÉTÉ 4	**Pour tout événement A, $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.**

On a déjà vu (page 31) l'intérêt de cette formule pour déterminer $P(A)$ lorsque le calcul de $P(\overline{A})$ est plus simple que celui de $P(A)$.

Lorsque $A = \Omega$, $\overline{A} = \varnothing$; la formule s'écrit alors $P(\Omega) + P(\varnothing) = 1$. D'où $P(\varnothing) = 0$: la probabilité de l'événement impossible est nulle.

D'autre part, comme $P(\overline{A})$ est un réel positif, l'égalité $P(A) + P(\overline{A}) = 1$ prouve que $P(A) \leqslant 1$.

PROPRIÉTÉ 5 | **La probabilité d'un événement quelconque est un réel appartenant au segment [0, 1].**

2. Soit A et B deux événements quelconques; on a :

$$\begin{cases} A \cup (B \setminus A) = A \cup B & \text{et} \quad A \cap (B \setminus A) = \varnothing \\ B = (A \cap B) \cup (B \setminus A) & \text{et} \quad (A \cap B) \cap (B \setminus A) = \varnothing. \end{cases}$$

Il en résulte :
$$\begin{cases} P(A) + P(B \setminus A) = P(A \cup B) \\ P(B) = P(A \cap B) + P(B \setminus A). \end{cases}$$

d'où, par addition de ces deux égalités puis simplification :

$$P(A) + P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B).$$

PROPRIÉTÉ 6 | **Les probabilités de deux événements quelconques A et B, de leur réunion et de leur intersection sont telles que :**

$$\mathbf{P(A) + P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B).}$$

A noter que la propriété **3** apparaît comme un cas particulier de cette propriété **6** : si A et B sont incompatibles, $P(A \cap B)$ est nul et la relation ci-dessus devient $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

3. Soit A_1, A_2, A_3 trois événements deux à deux incompatibles. On a :

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1 \cup A_2) + P(A_3) - P((A_1 \cup A_2) \cap A_3).$$

Or :
$$(A_1 \cup A_2) \cap A_3 = (A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3) = \varnothing \cup \varnothing = \varnothing,$$

et
$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2).$$

Il en résulte :
$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3).$$

Cette formule se généralise par récurrence :

PROPRIÉTÉ 7 | **Si $A_1, A_2, ..., A_p$ sont des événements deux à deux incompatibles, alors :**

$$\mathbf{P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_p) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_p).}$$

Cas particulier :

Si les événements $A_1, A_2, ..., A_p$ forment un système complet d'événements, ils sont deux à deux disjoints et leur réunion est l'univers Ω. D'où :

$$P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_p) = 1.$$

• Exercices d'application

18. A, B et C sont trois événements d'un univers Ω muni d'une probabilité P. On définit les deux événements :

$$E_1 = A \cap \overline{B} \cap \overline{C} \quad \text{et} \quad E_2 = A \cap (B \cup C).$$

1° Comparer E_1 et E_2.

2° Calculer $P(E_1 \cup E_2)$ en fonction de $P(A)$.

3° Calculer $P(E_1)$ et $P(E_2)$ sachant que :

$$P(A) = 0{,}6; \quad P(B) = 0{,}4; \quad P(C) = 0{,}3;$$
$$P(A \cap B) = 0{,}2;$$
$$P(B \cap C) = P(A \cap C) = 0{,}1;$$
$$P(A \cap B \cap C) = 0{,}005.$$

19. A, B et C sont trois événements d'un même univers. Soit les deux événements :

$$E_1 = A \cap (B \cup C) \quad \text{et} \quad E_2 = A \cup (B \cap C).$$

Calculer $P(E_1)$ et $P(E_2)$ sachant que :

$$P(A) = 0{,}6; \quad P(B) = 0{,}4; \quad P(C) = 0{,}3;$$
$$P(A \cap B) = 0{,}2; \quad P(B \cap C) = 0{,}1;$$
$$P(A \cap C) = 0{,}1;$$
$$P(A \cap B \cap C) = 0{,}05.$$

20. A, B, C sont trois événements d'un même univers. On donne :

$$P(A) = 0{,}30; \quad P(B) = 0{,}25; \quad P(C) = 0{,}25;$$
$$P(A \cap B) = 0{,}15; \quad P(B \cap C) = 0{,}15;$$
$$P(A \cap C) = 0{,}20; \quad P(A \cap B \cap C) = 0{,}08.$$

1° Écrire les événements suivants :
a) A et B se produisent mais non C (événement E).
b) Deux des trois événements se produisent mais pas trois (événement F).
2° Calculer les probabilités des événements E et F.

21. Soit A, B, C des événements définis sur une même épreuve aléatoire.
1° Connaissant les probabilités :

$$P(A) = p, \quad P(B) = q, \quad P(A \cup B) = r,$$

calculer $P(A \cap B)$, $P(A \Delta B)$, $P(\overline{A} \cap B)$, $P(\overline{A} \cap \overline{B})$.
Application : $p = 0{,}6$; $q = 0{,}4$; $r = 0{,}8$.
2° Soit les deux événements :

$$E_1 = A \cup (B \cap C) \quad \text{et} \quad E_2 = A \cap (B \cup C).$$

Calculer $P(E_1)$ et $P(E_2)$ connaissant :

$$P(C) = s; \quad P(B \cap C) = t;$$
$$P(A \cap C) = u; \quad P(A \cap B \cap C) = v.$$

Application : $s = 0{,}3$; $t = 0{,}1$; $u = 0{,}1$; $v = 0{,}05$.

22. Soit A, B, C des événements définis sur une même épreuve aléatoire.
1° Démontrer que :

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) + P(A \cap B \cap C).$$

2° Une urne contient 10 boules numérotées 1, 2, ..., 10. On extrait au hasard trois boules, une par une, avec remise. Soit X le produit des nombres inscrits sur les boules extraites. Quelle est la probabilité :
a) pour que X soit pair ?
b) pour que X soit impair ?
(On pourra considérer les événements A : « la première boule extraite porte un numéro pair », B : « la deuxième boule extraite porte un numéro pair », etc.)

23. On considère un dé cubique dont les six faces sont numérotées de 1 à 6. Le dé est pipé de telle sorte que $P(i)$ désignant la probabilité d'apparition de la face portant le numéro i, $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, ..., $P(6)$ soient les six premiers termes d'une suite arithmétique de raison r.
1° On lance le dé une fois et on prend comme univers l'ensemble Ω des six numéros. $A = \{1, 6\}$ désigne l'événement : « la face supérieure porte l'un des numéros 1 ou 6 ». On considère de même les événements $B = \{2, 5\}$ et $C = \{3, 4\}$.
Montrer que les trois événements A, B et C ont la même probabilité. En donner la valeur.

2° On donne la raison $r = \dfrac{1}{30}$ de la progression arithmétique.
a) Calculer $P(i)$ pour chacune des valeurs de i.
b) Calculer la probabilité de l'événement $D = \{2, 4, 6\}$ (« la face supérieure porte l'un des numéros 2, 4 ou 6 »).

TRAVAUX PRATIQUES

PRÉLÈVEMENTS ALÉATOIRES

1. *Une urne contient n boules numérotées* 1, 2, ..., *n. On extrait deux boules simultanément, au hasard.*

1° Définir un univers des possibles Ω et calculer son cardinal. Que peut-on dire des résultats possibles?

2° Calculer la probabilité de sortir deux boules dont les numéros ne sont pas consécutifs.

3° On note X le plus grand des deux numéros sortis.
a) Quel est l'ensemble E des valeurs possibles de X?
b) Pour tout élément i de E, on désigne par $(X = i)$ *l'événement : « le plus grand numéro sorti est i ». Calculer* $P(X = i)$.
c) Montrer que les événements $(X = i)_{i \in E}$ *forment un système complet d'événements. En déduire une expression simple de la somme des* $n - 1$ *premiers entiers, puis de la somme des n premiers entiers.*

4° On note Y le plus petit des numéros tirés. Reprendre avec Y les questions du 3°.

5° On note S la somme des numéros sortis.
a) Quel est l'ensemble F des valeurs possibles de S.
b) Pour tout élément k de F, on désigne par $(S = k)$ *l'événement : « la somme des numéros sortis est k ». Démontrer que :*

$$\text{Card } (S = k) = \text{Card } \left(\mathbb{N}^* \cap \left[k - n, \frac{k}{2}\right[\right).$$

c) Dans le cas $n = 10$, *calculer, pour tout élément k de F,* $P(S = k)$. *Vérifier que* $\sum_{k \in F} P(S = k) = 1$. *Expliquer ce résultat.*

2. *Soit n un entier supérieur ou égal à 3. Dans une urne contenant n boules rouges, n boules noires et n boules blanches, on fait un prélèvement aléatoire de n boules. Les différents prélèvements possibles sont supposés équiprobables.*

1° Définir un univers des possibles Ω et préciser son cardinal.

2° Calculer la probabilité d'un prélèvement monocolore.

3° Démontrer que la probabilité d'un prélèvement bicolore est $3\,\dfrac{C_{2n}^{n} - 2}{C_{3n}^{n}}$.

4° Calculer la probabilité P_n *d'un prélèvement tricolore.*

5° a) Calculer P_3, P_5, P_{10} *à* 10^{-2} *près.*
b) Démontrer que $C_{3n}^{n} \geqslant 3^n$ *et que* $\dfrac{C_{2n}^{n}}{C_{3n}^{n}} \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$. *En déduire la limite de* P_n.

3. *1° Une urne contient dix boules bleues, dix boules blanches, dix boules rouges et dix boules noires. On en prend quatre au hasard. Calculer la probabilité d'amener une boule de chaque couleur.*

2° L'urne contient maintenant quatre boules blanches et huit boules noires. On en prélève sept au hasard. Calculer la probabilité d'amener trois boules blanches au moins.

4. *Dans une urne contenant a boules blanches et b boules noires, on extrait n boules au hasard, simultanément* $(0 < n \leqslant a + b)$. *On note X le nombre de boules blanches tirées, E l'ensemble des valeurs possibles de X, et, pour tout entier k de E,* $(X = k)$ *l'événement : « le nombre de boules blanches tirées est k ». On admet que les prélèvements aléatoires sont équiprobables.*

1° Définir un univers des possibles Ω et préciser son cardinal.

2° On suppose $a = 4$, $b = 6$, $n = 3$.
a) Déterminer E.
b) Pour tout élément k de E calculer $P(X = k)$. *Calculer* $\sum_{k \in E} P(X = k)$. *Expliquer ce résultat.*
c) Calculer les probabilités de tirer au moins une boule blanche, au moins une boule noire, au moins une boule blanche et au moins une boule noire.

3° Reprendre les questions 2° a et 2° b dans les cas suivants :
a) $a = 4, b = 6, n = 5$; *b)* $a = 4, b = 6, n = 8$.

5. *Dans une urne contenant N boules numérotées 1, 2, ..., N, on tire n boules au hasard, simultanément* $(1 \leqslant n \leqslant N)$. *On admet que les prélèvements aléatoires possibles sont équiprobables.*

1° Définir un univers des possibles Ω et préciser son cardinal.

2° Soit k un entier tel que $1 \leqslant k \leqslant N$. *Quelle est la probabilité que tous les numéros inscrits sur les boules tirées soient inférieurs ou égaux à k? Pour quelles valeurs de k cette probabilité n'est-elle pas nulle ?*

3° On note X le plus grand des numéros tirés.
a) Quel est l'ensemble E des valeurs possibles de X?
b) Pour tout entier k de E on note $(X = k)$ *l'événement : « le plus grand numéro tiré est k ». Calculer* $P(X = k)$.
c) Montrer que les événements $(X = k)_{k \in E}$ *forment un système complet d'événements. En déduire que :*

$$\sum_{k=n}^{N} C_{k-1}^{n-1} = C_N^n.$$

6. Tirages sans remise

Une urne contient a boules blanches et b boules noires $(a + b = n)$. *On tire au hasard les n boules, une par une, sans les remettre dans l'urne. On appelle résultat du tirage la n-liste dont le i-ième coefficient* $(i = 1, 2, ..., n)$ *est B ou N selon que la i-ième boule tirée est blanche ou noire. On admet que les résultats possibles sont équiprobables.*

1° Quel est l'univers des possibles Ω et quel est son cardinal?

2° Soit A_i *l'événement : la i-ième boule tirée est blanche.*
a) Calculer $P(A_i)$ *et* $P(\overline{A_i})$.
b) Soit i et j deux entiers distincts de $\mathbb{N}_n$. *Calculer :* $P(A_i \cap A_j)$, $P(A_i \cup A_j)$, $P(A_i \Delta A_j)$, $P(\overline{A_i} \cap \overline{A_j})$, $P(A_i \cup \overline{A_j})$, $P(\overline{A_i} \cup \overline{A_j})$, $P(A_i \cup \overline{A_j})$, $P(\overline{A_i} \Delta \overline{A_j})$, $P(A_i \Delta \overline{A_j})$.

3° Soit X le rang de la première boule blanche tirée.
a) Quel est l'ensemble E des valeurs possibles de X?
b) Pour tout élément k de E on note $(X = k)$ *l'événement : « la première boule blanche tirée l'est au k-ième tirage ». Calculer* $P(X = k)$.
c) Démontrer que les événements $(X = k)_{k \in E}$ *forment un système complet d'événements. En déduire une relation entre coefficients binômiaux.*
d) Lorsque $a = 2$ *(et donc* $b = n - 2$*) déduire de la relation précédente une expression de la somme* $1 + 2 + ... + n - 1$, *puis de la somme* $1 + 2 + ... + n$.
e) Exploiter de même le cas particulier $a = 3$.

7. Problème du scrutin

Une urne électorale contient a bulletins de vote pour un candidat A et b bulletins pour le candidat B. On suppose $a > b$. *On a effectué le dépouillement en retirant les bulletins un par un, au hasard, et en notant au fur et à mesure le score de chaque candidat.*

1° Montrer que l'on peut représenter chaque dépouillement possible par une $(a + b)$*-liste où figurent a coefficients A et b coefficients B. En déduire le nombre des dépouillements possibles.*

2° A chaque dépouillement, on peut associer, dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, *le chemin aléatoire* $A_0 A_1 A_2 \ldots A_{a+b}$ *ainsi défini :*

- $A_0 = O$;
- *si le premier bulletin tiré est pour A (resp. B),* $\overrightarrow{A_0 A_1} = \overrightarrow{OI}$ *(resp.* $\overrightarrow{OJ}$*);*
- *si le i-ième bulletin tiré est pour A (resp. B),* $\overrightarrow{A_{i-1} A_i} = \overrightarrow{OI}$ *(resp.* $\overrightarrow{OJ}$*).*

Soit C l'ensemble des chemins aléatoires possibles. Le cardinal de C est égal au nombre de dépouillements possibles. Quelles sont les coordonnées du dernier point, A_{a+b}, *d'un chemin de C?*

3° On note Δ la bissectrice de l'angle $\widehat{IOJ}$. *On considère la partition* $\{C_1, C_2, C_3\}$ *de C ainsi définie :*

- C_1 *est l'ensemble des chemins passant par I et ayant avec Δ le seul point O commun;*

• C_2 *est l'ensemble des chemins passant par* I' *et ayant avec* Δ *au moins un point commun distinct de* O;

• C_3 *est l'ensemble des chemins passant par* J.

a) *Démontrer que* Card C_2 = Card C_3.
b) *Calculer* Card C_3 *et en déduire* Card C_1.

4° *Quelle est la probabilité pour qu'au cours du dépouillement le candidat* A *soit constamment en tête?*

ÉPREUVE DE BERNOULLI RÉPÉTÉE n FOIS

On rencontre fréquemment des expériences aléatoires dont l'issue est la réalisation, ou la non-réalisation d'un certain événement A. Une telle expérience aléatoire est une *épreuve de Bernoulli.*
L'univers des possibles d'une épreuve de Bernoulli est $\{A, \overline{A}\}$.
Exemples :

- jet d'une pièce de monnaie : pile ou face;
- naissance : fille ou garçon;
- présentation à un concours : succès ou échec;
- test de diagnostic d'une maladie : positif ou négatif.

Désignons respectivement par p et q les probabilités des deux résultats possibles, A et $\overline{A}$, d'une épreuve de Bernoulli : $p = P(A), q = P(\overline{A})$. Comme $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$, p et q sont tels que $p + q = 1$.

Les réels p et q peuvent être égaux, et dans ce cas cas $p = q = \dfrac{1}{2}$ (jet d'une pièce de monnaie parfaitement équilibrée), mais le plus souvent ils sont distincts. Par exemple, lorsque dans une urne contenant a boules blanches et b boules noires on extrait une boule au hasard, la probabilité qu'elle soit blanche (événement A) est $p = \dfrac{a}{a+b}$, et la probabilité qu'elle soit noire (événement $\overline{A}$) est $q = \dfrac{b}{a+b}$; si a et b sont distincts, il en est de même de p et q.

Considérons l'expérience aléatoire consistant à répéter n fois une même épreuve de Bernoulli, dans les mêmes conditions, de telle sorte qu'à chaque épreuve la probabilité d'obtenir A (resp. $\overline{A}$) *soit* p (resp. $q = 1 - p$).
Identifions chaque résultat possible à la n-liste dont le i-ième coefficient ($i = 1, 2, ..., n$) *est* A (resp. $\overline{A}$), *si* A (resp. $\overline{A}$) *est apparu à la i-ième épreuve.*

1° *Quel est alors l'univers des possibles* Ω, *et quel est son cardinal?*

2° *Pour tout résultat possible* ω *nous admettrons que la probabilité de* ω *est égale au produit* $a_1 \times a_2 \times a_n$, *où* a_i *est égal à* p *ou* q *selon que le i-ième coefficient de* ω *est* A *ou* $\overline{A}$. *Par exemple si* $n = 7$ *et si* $\omega = (A, \overline{A}, \overline{A}, \overline{A}, A, A, \overline{A})$, $P(\omega) = p \times q \times q \times q \times p \times p \times q = p^3 \times q^4$.
a) *Vérifier que la somme des probabilités de tous les résultats possibles est égale à* 1.
(Considérer le produit $\Pi = (p+q)(p+q) \dots (p+q)$ *de* n *termes égaux à* $p + q$.*)*
b) *A quelle condition les résultats possibles sont-ils équiprobables?*

3° *Pour tout entier* k *tel que* $0 \leqslant k \leqslant n$, *on note* E_k *l'événement : « A est sorti k fois » (et donc «* $\overline{A}$ *est sorti* $n - k$ *fois »).*
a) *Calculer* $P(E_0)$, $P(E_1)$, $P(E_n)$.
b) *Démontrer que* Card $E_k = C_n^k$ *et en déduire* $P(E_k)$.

Nous retiendrons :

Lorsqu'on répète n fois une même épreuve de Bernoulli dont l'issue est A ou $\overline{A}$, de manière qu'à chaque épreuve la probabilité d'obtenir A soit p, la probabilité d'obtenir exactement k fois A ($k = 0, 1, 2, ..., n$) est $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$.

c) *Lorsque* $n = 10$ *et* $p = 0{,}35$, *programmer le calcul de* $P(E_k)$ *en fonction de* k. *En déduire, pour tout entier* k *tel que* $0 \leqslant k \leqslant 10$, *une valeur approchée de* $P(E_k)$. *Calculer* $\sum_{k=0}^{10} P(E_k)$.

Réponse (HP-11C)

[P/R]	met en mode programme
[PRGM]	efface la mémoire programme
[LBL] [A]	choix du label du programme
[STO] 0	place k dans le registre R_0
10 [RCL] 0 [$C_{y,x}$]	calcule C_{10}^k
0.35 [RCL] 0 [y^x]	calcule $0{,}35^k$
[×]	calcule le produit $C_{10}^k \times 0{,}35^k$
0.65 [ENTER] 10 [RCL] 0 [−] [y^x]	calcule $(0{,}65)^{10-k}$
[×]	calcule le produit $C_{10}^k \times 0{,}35^k \times 0{,}65^{n-k}$
[RTN]	fin du programme
[P/R]	retour en mode calcul
7 [A]	affiche $0{,}021\,20 \approx P(E_k)$ (cas $k = 7$)

d) Reprendre la question c) dans les cas suivants :

$$n = 15,\ p = \frac{3}{8};\quad n = 20,\ p = \frac{1}{10}.$$

Quelle conjecture peut-on avancer? Démontrer cette présomption de deux façons différentes : en utilisant un système complet d'événements, en utilisant la formule du binôme.

e) Programmer le calcul de $\sum_{k=0}^{n} P(E_k)$ *en fonction de n et p.*

Réponse (HP-11C)

[P/R]	met en mode programme
[PRGM]	efface la mémoire programme
[LBL] [B]	choix du label du programme
[STO] 1	place p dans R_1
[$x \gtrless y$] [STO] 0	place n dans R_0
−1 [STO] 2	initialise le contenu k de R_2 : $k = -1$
[LBL] 0	début d'une boucle
1 [STO] [+] 2	remplace k par $k + 1$ (dans R_2)
[RCL] 0 [RCL] 2 [−] [STO] 3	calcule $n - k$ et le place dans R_3
[RCL] 0 [RCL] 2 [$C_{y,x}$]	calcule C_n^k
[RCL] 1 [RCL] 2 [y^x]	calcule p^k
[×]	effectue le produit $C_n^k \times p^k$
1 [RCL] 1 [−] [RCL] 3 [y^x]	calcule $(1 - p)^{n-k}$
[×]	effectue le produit $C_n^k \times p^k \times (1-p)^{n-k} = P(E_k)$
[STO] [+] 4	ajoute $P(E_k)$ au contenu de R_4
[RCL] 2	appelle k
[RCL] 0	appelle n

X > Y?	compare n à k $\begin{cases} \text{retourne à LBL } 0 & \text{si } n > k \\ \text{sort de la boucle} & \text{si } n \leqslant k \end{cases}$
GTO 0	fin de la boucle
RCL 4	affiche le contenu de R_4 : $\sum_{k=0}^{n} P(E_k)$
RTN	fin du programme
P/R	retour en mode calcul
10 ENTER 0.35 A	affiche $1{,}000\,000\,000 = \sum_{k=0}^{10} P(E_k)$ (cas $n = 10$, $p = 0{,}35$)

f) Programmer le calcul de $\sum_{k=0}^{n} kP(E_k)$ *en fonction de n et p.*
Vérifier, dans les cas suivants, que cette somme est voisine de np :

$$n = 10,\ p = 0{,}2; \quad n = 15,\ p = 0{,}7.$$

Démontrer que $\sum_{k=0}^{n} kP(E_k) = np$. (Développer $(px + q)^n$ à l'aide de la formule du binôme, dériver par rapport à x, puis faire $x = 1$.)

Applications

1. *On lance un dé n fois de suite.*

1° Calculer la probabilité p_1 *d'amener 6 au moins une fois. Déterminer n pour que :* $p_1 \geqslant \frac{1}{2}$.

2° Calculer la probabilité p_2 *d'amener 6 au moins deux fois. Déterminer n pour que :* $p_2 \geqslant \frac{1}{2}$.

2. *Est-il plus probable d'obtenir au moins une fois 6 en lançant quatre dés que d'obtenir au moins un double 6 en lançant 24 fois deux dés?*

3. *Un objectif attaqué par des projectiles d'un type déterminé a, pour chaque projectile tiré, une probabilité constante, p, d'être atteint. Quel est le nombre minimal n de projectiles qu'il faut lancer pour que la probabilité d'atteindre l'objectif au moins une fois soit supérieure ou égale à 0,95?*
Applications numériques : $p = 0{,}1$; $p = 0{,}01$.

4. *On définit le « sex ratio » d'une espèce comme le quotient s du nombre de naissances d'individus mâles par le nombre de naissances d'individus femelles.*

1° Calculer en fonction de s :
a) la probabilité d'avoir un seul individu mâle sur trois naissances;
b) la probabilité d'avoir un seul individu femelle sur trois naissances.

2° Applications numériques : $s = 0{,}9$; $s = 1$; $s = 1{,}1$.

5. *Une urne contient huit boules numérotées de 1 à 8. Toutes ces boules sont indiscernables au toucher. Un tirage consiste à extraire simultanément deux boules de l'urne. A chaque tirage, on associe le nombre n égal à la somme des numéros portés par les deux boules tirées.*

I – *Un joueur procède à un tirage.*

1° Quelle est la probabilité p pour qu'il obtienne un nombre n impair?

2° Quelle est la probabilité q pour qu'il obtienne un nombre n pair?

II – *Le joueur effectue trois tirages consécutifs avec remise (les deux boules extraites à un tirage étant remises dans l'urne avant de procéder au tirage suivant). A chaque tirage, le joueur obtient un nombre n. Il gagne 1 F si n est impair (gain = 1). Il perd 2 F si n est pair (gain = − 2).*
Soit G le gain du joueur à l'issue des trois tirages. Déterminer les valeurs possibles de G et la probabilité de chacune de ces valeurs.

RTN	fin du programme
P/R	retour en mode calcul
0 $\boxed{\text{STO}}$ 2	vide R_2
10 A	affiche $3{,}42 \approx T_n$ (cas $n = 10$)

b) Calculer, à l'aide du programme précédent, T_{20}, T_{30}, T_{40}, T_{50}. Quelle hypothèse peut-on faire quant à $\lim_{n \to +\infty} T_n$?

c) On pose $A_n = \sum_{k=1}^{n} x^k$ *et* $B_n = \sum_{k=1}^{n} kx^k$, *tels que* $|x| < 1$.

Démontrer que $\lim_{n \to +\infty} A_n = \dfrac{x}{1-x}$. *Exprimer* $(1-x)B_n$ *en fonction de* A_n, *n et x. En déduire* $\lim_{n \to +\infty} B_n$.
L'hypothèse du b) était-elle juste?

8. *Pierre jette deux pièces de monnaie; Paul en jette trois. Celui des deux qui amène face le plus de fois gagne. Si les deux joueurs amènent face le même nombre de fois, on recommence l'opération. Calculer la probabilité pour que Pierre gagne. Même question pour Paul.*

EXERCICES ET PROBLÈMES

24. Dans un groupe de trente-deux personnes comprenant quatorze femmes et dix-huit hommes, on veut prélever par tirage au sort un comité de quatre personnes.
Calculer la probabilité pour que ce comité soit formé de deux femmes et de deux hommes. Donner une valeur décimale approchée du résultat comportant trois décimales exactes.

25. Un sac contient dix objets : n objets sont noirs $1 < n < 10$; les autres sont blancs. On extrait simultanément deux objets du sac. Les tirages étant équiprobables, quelles sont les probabilités d'obtenir :
a) deux objets de couleurs différentes?
b) deux objets noirs?
c) deux objets blancs?
Calculer n pourque cette dernière probabilité soit égale à $\frac{7}{15}$.

26. On tire deux cartes (simultanément) d'un jeu de trente-deux cartes. Calculer la probabilité pour qu'il y ait :
a) au moins un as;
b) exactement un as;
c) deux as.

27. Deux clubs de football, A et B, ont respectivement dix-huit et quinze joueurs. Le joueur V est du club A, le joueur W du club B. Une équipe de football étant constituée par onze joueurs, calculer la probabilité pour que V joue contre W dimanche prochain.

28. On jette trois dés. Calculer la probabilité pour que la somme des points amenés soit :
a) égale à 16;
b) supérieure à 16;
c) égale à 20;
d) inférieure à 20.

29. *1°* Une urne contient a boules vertes et b boules jaunes. On extrait simultanément deux boules. Calculer la probabilité pour qu'elles soient de couleurs différentes.
2° L'urne contient maintenant a boules vertes, b boules jaunes et c boules noires. On en tire trois. Calculer la probabilité pour qu'elles soient de couleurs différentes.
3° Application : $a = 3$, $b = 5$ et $c = 2$.

30. On veut construire un tableau de mots croisés ayant cinq lignes et cinq colonnes. On noircira, au hasard, huit des vingt-cinq cases du tableau, et on considérera que les choix des cases sont équiprobables.
1° De combien de manières peut-on choisir les huit cases noires dans le tableau?
2° Quelle est la probabilité d'obtenir un tableau ainsi constitué : une case noire au centre du carré et une à chacun des sommets, les trois autres cases noires étant à une place quelconque?
3° Quelle est la probabilité d'obtenir, lors d'une épreuve, un tableau dont une colonne est entièrement composée de cases noires, les trois autres cases noires étant à une place quelconque? On donnera, des probabilités demandées, des valeurs décimales approchées exprimées avec cinq décimales.

31. Une urne contient cent billets numérotés de 1 à 100.
1° On extrait de l'urne un billet. Sachant que chaque billet a la même probabilité d'être extrait, quelle est la probabilité d'obtenir un billet dont le numéro est terminé par le chiffre 2?
2° On tire deux billets de l'urne simultanément. Donner le nombre de tirages différents possibles.
3° Ces billets sont utilisés pour une tombola. Chaque billet dont le numéro est terminé par un chiffre 2 donne droit à un lot. On extrait simultanément deux billets de l'urne. Les événements élémentaires attachés à cette expérience sont équiprobables.
Soit A l'événement : « gagner un lot et un seulement ».
Soit B l'événement : « gagner deux lots ».
Soit C l'événement : « gagner au moins 1 lot ».
Calculer la probabilité des événements A, B, et C.

32. On partage un cercle en six parties égales. On obtient les points A, B, C, D, E et F qui sont les sommets consécutifs d'un hexagone régulier. On considère l'ensemble U constitué par ces six lettres.
1° On tire au hasard et simultanément deux lettres dans U. Quelle est la probabilité pour que ces deux lettres désignent deux sommets consécutifs de l'hexagone?
2° On tire maintenant, au hasard et simultanément, trois lettres dans U. Quelle est la probabilité pour que ces trois lettres obtenues désignent les sommets :
a) d'un triangle équilatéral (trois côtés égaux)?
b) d'un triangle isocèle non équilatéral (deux côtés égaux)?
c) d'un triangle rectangle (un côté du triangle doit être diamètre du cercle)?

33. Une cible circulaire est divisée en dix régions par dix cercles concentriques de rayons 1, 2, 3, ..., 10 cm. Aucune balle ne pouvant sortir de la cible, on appelle événement l'impact d'une balle dans le disque central ou dans une des couronnes circulaires ainsi tracées. On suppose que la probabilité pour que la balle atteigne une région de la cible est proportionnelle à l'aire de cette région. On rappelle que l'aire d'un disque de rayon R est πR^2.
1° Quelles sont les probabilités respectives d'atteindre le disque central et chacune des couronnes?
2° On donne dix points si la balle atteint le disque central, neuf si elle atteint la première couronne de rayons 1 et 2 cm, huit si elle atteint la seconde couronne, etc. et un point pour la dernière couronne. Calculer la probabilité d'un score supérieur ou égal à 8.

34. Jean possède, dans le tiroir de son armoire, 5 paires de chaussettes noires, 3 paires de chaussettes vertes et 2 paires de chaussettes rouges, mais ces chaussettes sont mélangées dans le plus grand désordre et indiscernables au toucher.
Lorsque Jean est en train de s'habiller survient une panne de lumière. Jean qui est pressé et qui n'a pas une lampe de poche, prend au hasard deux chaussettes dans le tiroir.
1° Calculer, à 0,01 près par défaut, la probabilité pour que Jean ait tiré deux chaussettes noires.
2° Calculer, à 0,01 près par défaut, la probabilité pour que Jean ait tiré deux chaussettes de même couleur.

3° En supposant que le nombre de chaussettes vertes et le nombre de chaussettes rouges restent inchangés, calculer quel devrait être le nombre n de chaussettes noires ($n \in \mathbb{N}^*$) contenues dans le tiroir pour que la probabilité d'avoir deux chaussettes noires soit égale à $\frac{2}{7}$.

35. Soit l'équation du second degré : $x^2 + px + q = 0$. Les coefficients p et q sont l'un des entiers naturels 1, 2, 3, 4, 5 et 6. Le coefficient p est déterminé par un premier jet d'un dé parfait dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et ont toutes la même probabilité d'apparition. Le coefficient q est déterminé par un deuxième jet de ce même dé.
Déterminer les probabilités des événements suivants :
a) « l'équation $x^2 + px + q = 0$ admet deux racines réelles distinctes »;
b) « l'équation $x^2 + px + q = 0$ admet deux racines réelles confondues »;
c) « l'équation $x^2 + px + q = 0$ admet deux racines complexes conjuguées ».

36. Un sac contient deux boules blanches portant respectivement les numéros 1 et 4 et quatre boules noires portant respectivement les numéros 2, 3, 5 et 7. On tire simultanément deux boules du sac. Quelle est la probabilité :
1° Pour que les deux boules tirées portent des numéros impairs?
2° Pour que les deux boules tirées soient de la même couleur?
3° Pour que les deux boules tirées portent des numéros impairs et soient de la même couleur?
4° Pour que les deux boules tirées portent des numéros impairs ou soient de la même couleur?
(Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.)

37. Un dé cubique a ses faces numérotées de 1 à 6. On sait qu'il est pipé de telle façon que les probabilités $p_1, p_2, ..., p_6$ d'apparition des faces numérotées 1, 2, ..., 6 forment une suite arithmétique de raison $r = \frac{1}{18}$.

Calculer les probabilités $p_1, p_2, ..., p_6$.
Un joueur joue avec ce dé dans les conditions suivantes :
• il gagne 2 F s'il fait apparaître une face portant un nombre pair;
• il perd 3 F s'il fait apparaître une face portant un nombre impair.

Calculer la probabilité de l'événement : « après trois lancers successifs, le joueur a gagné 1 F ».

38. Un sac contient dix jetons respectivement numérotés de 0 à 9. On tire successivement et sans les remettre dans le sac trois jetons. On considère le nombre formé par les trois chiffres obtenus dans l'ordre de leur tirage (on suppose que tous les nombres ainsi obtenus sont équiprobables).
1° Trouver un espace probabilisé fini correspondant à cette épreuve.
2° Soit A l'événement : « le nombre obtenu commence par 15 » et B l'événement, « le nombre obtenu se termine par 7 ». Calculer la probabilité de chacun des événements A, B, $A \cap B$ et $A \cup B$.

39. Un sac renferme huit jetons de forme et de matière identiques dont trois sont blancs et cinq sont noirs. On extrait du sac, au hasard, un par un, quatre jetons que l'on dispose, dans l'ordre où ils sont tirés, dans quatre cases numérotées de 1 à 4. (Le premier jeton est placé dans la case numéro 1, le deuxième dans la case numéro 2, etc.)
Calculer la probabilité de chacun des événementsnts :
1° « Les 4 cases sont occupées par des jetons noirs. »
2° « Les cases 1 et 3 sont occupées par des jetons blancs, les cases 2 et 4 par des jetons noirs. »

40. (La question *3°* peut être traitée indépendamment des deux précédentes.)
On envisage une particule π pouvant occuper deux positions A et B et se déplaçant aléatoirement de la façon suivante :

a) La position initiale (au temps 0) de la particule π est A. Au temps n, $n \in \mathbb{N}^*$, la particule π est soit en A, soit en B.
b) Entre deux instants successifs, n et $(n + 1)$, la particule π saute éventuellement d'une position à l'autre. Les divers facteurs influant sur cette évolution ne varient pas au cours du temps. L'éventualité d'un saut est par ailleurs indépendante de la position de la particule π au temps n.

On ne demande pas d'expliciter d'espaces probabilisés. Mais on peut traduire en termes mathématiques la situation de la façon suivante : Si $n \in \mathbb{N}$, on note A_n l'événement « la particule π est en A au temps n » et par B_n l'événement « la particule π est en B au temps n ». Ainsi $A_n \cap A_{n+1}$ est l'événement « la particule π est en A au temps n et aussi en A au temps $(n + 1)$ », etc.
Soient respectivement α_n et β_n la probabilité des événements A_n et B_n. On donne un nombre θ dans l'intervalle $]0, 1[$. Nous exprimons *a)* et *b)* par les hypothèses :

• $\alpha_0 = 1$, $\alpha_n + \beta_n = 1 \quad (n \in \mathbb{N})$,
• la probabilité de $A_n \cap A_{n+1}$ est $\theta\alpha_n$, celle de $B_n \cap B_{n+1}$ est $\theta\beta_n$.

1° Calculer, en fonction de θ et β_n, la probabilité de l'événement $B_n \cap A_{n+1}$ (c'est-à-dire l'événement « la particule π est en B au temps n et en A au temps $(n + 1)$ »).
2° Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_{n+1} = (2\theta - 1)\alpha_n + (1 - \theta)$.
3° Du résultat de la question précédente et de $\alpha_0 = 1$, déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_n = \frac{(2\theta - 1)^n}{2} + \frac{1}{2}$.

Quelle est la limite de la suite (α_n) quand n tend vers $+\infty$?

41. Soit S l'ensemble $\{1, 2, ..., q\}$ des entiers naturels compris entre 1 et q. On choisit au hasard une partie B de S, de telle sorte que toutes les parties de S, y compris $\varnothing$ et S, aient la même probabilité p_0 d'être choisies.
1° Choisir un univers des possibles Ω et préciser son cardinal. Quelle est la valeur de p_0?
2° Soit A une partie non vide de S à k éléments. Quelles sont les probabilités respectives p_1, p_2, p_3 des événements suivants :
a) la partie choisie B contient A;
b) la partie choisie B est contenue dans A;
c) la partie choisie B est telle que $A \cap B \neq \varnothing$?

CHAPITRE 3

NOMBRES COMPLEXES

I — APERÇU HISTORIQUE

L'introduction des nombres entiers négatifs est liée à la résolution de l'équation $a + x = b$, où a et b sont deux nombres entiers naturels quelconques.

La résolution de l'équation $ax = b$, où a est un entier naturel non nul et b un entier relatif quelconque conduit aux nombres rationnels.

La représentation des nombres réels par les points d'une droite munie d'un repère met en évidence des nombres non rationnels comme $\sqrt{2}, \pi$, ..., etc. Ces nombres représentent des longueurs de lignes particulières : $\sqrt{2}$ est la longueur de la diagonale d'un carré dont le côté a l'unité pour longueur; π est la longueur de la demi-circonférence dont le rayon a pour longueur l'unité.

La résolution d'équations du second degré comme $x^2 + 1 = 0, x^2 + x + 1 = 0$, conduit à la notion de nombre complexe.

A l'origine, Cardan et les algébristes italiens du XVI^e^ siècle n'hésitent pas à employer le symbole $\sqrt{-a}$, avec a réel strictement positif. En appliquant les règles usuelles de l'époque, Cardan remarque que l'équation du second degré $x^2 - 10x + 40 = 0$ a pour racines $5 + \sqrt{-15}$ et $5 - \sqrt{-15}$. Il considérait son résultat comme « aussi subtil qu'inutile » et traitait de « sophistiquées » ces racines de nombres négatifs.

En étudiant l'équation du troisième degré $x^3 + px = q$, Cardan trouve, lorsque *p est positif*, la *racine réelle* de cette équation sous la forme :

$$\sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2} + \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2} - \frac{q}{2}}.$$

Il est aisé de vérifier que ce nombre est réel et qu'il est bien solution de l'équation $x^3 + px = q$. De plus, l'étude des variations de la fonction $x \mapsto x^3 + px - q$ montre que cette fonction ne s'annule qu'une fois (lorsque $p > 0$).

Pour l'équation $x^3 - 15x = 4$, dont 4 est l'unique racine réelle, comme le montre l'étude de la fonction $x \mapsto x^3 - 15x - 4$, la formule de Cardan donne :

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} - \sqrt[3]{-2 + \sqrt{-121}},$$

ce qui fait apparaître des nombres « impossibles » ou « imaginaires ».

C'est Bombelli qui montre l'égalité $4 = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} - \sqrt[3]{-2 + \sqrt{-121}}$, en procédant ainsi :

$$(2 - \sqrt{-1})^3 = 2 + \sqrt{-121} \quad \text{et} \quad (-2 - \sqrt{-1})^3 = -2 + \sqrt{-121},$$

par utilisation de règles de calcul connues dans $\mathbb{R}$; ce qui le conduit à :

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} - \sqrt[3]{-2 + \sqrt{-121}} = 2 - \sqrt{-1} + 2 + \sqrt{-1} = 4.$$

A l'aide des nombres imaginaires et de la formule de Cardan, il « trouve » la racine réelle de $x^3 - 15x = 4$.

Jusqu'au XVIIIe siècle les nombres imaginaires sont utilisés comme symboles purement formels pour étudier des équations algébriques. C'est au XIXe siècle, avec Gauss et Cauchy, que les nombres imaginaires trouveront leur représentation à partir de « réalités mathématiques connues ».

On doit à Gauss le premier exposé complet de la représentation des nombres imaginaires par les points d'un plan muni d'un repère orthonormal. Comme on représentait les réels par les points d'une droite munie d'une origine, d'une unité et d'un sens, la « réalité » des nombres imaginaires était ainsi établie; Gauss les appela *nombres complexes* et il utilisa la lettre i pour désigner cet « impossible » $\sqrt{-1}$.

Cauchy remarque qu'effectuer des calculs sur les nombres complexes revient à appliquer aux nombres réels et à un nombre imaginaire i tel que $i^2 = -1$, les règles d'opérations dans $\mathbb{R}$. Ainsi lorsque p est un entier naturel non nul i^{2p} est remplacé par $(-1)^p$ et i^{2p+1} par $(-1)^p i$. Si l'on substitue i à x dans l'expression polynômiale :

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n,$$

où $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont des nombres réels, en appliquant la règle précédente on obtient une expression de la forme $a + ib$, où a et b sont réels. Notons que :

$$\begin{aligned}(a + bi)(a' + b'i) &= aa' + ab'i + ba'i + bb'i^2\\ &= aa' - bb' + (ab' + ba')i.\end{aligned}$$

II — DÉFINITION DU CORPS DES NOMBRES COMPLEXES

Activité

Sur $\mathbb{R}^2$ on définit les deux opérations internes suivantes :

- *addition :* $(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$;
- *multiplication :* $(a, b)(a', b') = (aa' - bb', ab' + ba')$.

1° Vérifier les propriétés suivantes :

a) Associativité de l'addition : $[(a, b) + (a', b')] + (a'', b'') = (a, b) + [(a', b') + (a'', b'')]$.

b) (0, 0) est élément neutre pour l'addition : $(a, b) + (0, 0) = (0, 0) + (a, b) = (a, b)$.

c) $(-a, -b)$ est l'opposé de (a, b) : $(a, b) + (-a, -b) = (0, 0) = (-a, -b) + (a, b)$.
L'opposé de (a, b) est aussi noté $-(a, b)$. On a donc $-(a, b) = (-a, -b)$.

d) Commutativité de l'addition : $(a, b) + (a', b') = (a', b') + (a, b)$.

e) Associativité de la multiplication : $[(a, b)(a', b')](a'', b'') = (a, b)[(a', b')(a'', b'')]$.

f) Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition :

$$(a, b)[(a', b') + (a'', b'')] = (a, b)(a', b') + (a, b)(a'', b'')$$

et

$$[(a', b') + (a'', b'')](a, b) = (a', b')(a, b) + (a'', b'')(a, b).$$

g) (1, 0) est élément neutre pour la multiplication : $(1, 0)(a, b) = (a, b)(1, 0) = (a, b)$.

h) Commutativité de la multiplication : $(a, b)(a', b') = (a', b')(a, b)$.

i) Tout élément (a, b) distinct de $(0, 0)$ admet pour inverse $\left(\dfrac{a}{a^2 + b^2}, \dfrac{-b}{a^2 + b^2}\right)$:

$$(a, b)\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right) = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right)(a, b) = (1, 0).$$

L'addition et la multiplication sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant les propriétés précédentes, on dit que $\mathbb{R}^2$ muni de ces deux opérations un corps. On l'appelle corps des nombres complexes et on le note $\mathbb{C}$.

2° On pose $i = (0, 1)$. *Vérifier* $i^2 = -(1, 0)$; i^2 *est donc l'opposé de l'élément neutre pour la multiplication.*

3° a) Démontrer que le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$, *noté* $\mathbb{R}_1$, *formé des couples de la forme* $(a, 0)$ *contient la somme et le produit de deux quelconques de ses éléments et contient l'inverse de chacun de ses éléments non nuls (c'est-à-dire différent de* $(0, 0)$*). En déduire que* $\mathbb{R}_1$ *muni de l'addition et de la multiplication est un corps.* On dit que $\mathbb{R}_1$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$.
b) On considère l'application φ *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}_1$: $a \mapsto (a, 0)$.
Démontrer que φ *est bijective, que* $\varphi(1) = (1, 0)$ *et que, quels que soient* a *et* a' *de* $\mathbb{R}$:

$$\varphi(a + a') = \varphi(a) + \varphi(a') \quad \text{et} \quad \varphi(aa') = \varphi(a)\varphi(a').$$

On dit que φ est un **isomorphisme** du corps $\mathbb{R}$ sur le corps $\mathbb{R}_1$ et que $\mathbb{R}_1$ est isomorphe à $\mathbb{R}$.

THÉORÈME 1 et DÉFINITION 1

L'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni de l'addition et de la multiplication :

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$$
$$(a, b)(a', b') = (aa' - bb', ab' + ba')$$

est un corps commutatif, d'élément unité $(1, 0)$, appelé corps des nombres complexes et noté $\mathbb{C}$.
Le corps $\mathbb{C}$ contient un sous-corps isomorphe à $\mathbb{R}$; de plus l'élément $(0, 1)$, noté i, est tel que $i^2 = -(1, 0)$.

NOTATION $a + ib$

Soit $\mathbb{R}_1$ l'ensemble des complexes de la forme $(a, 0)$, où a est un réel.

La bijection φ de $\mathbb{R}_1$ sur $\mathbb{R}$ qui, à tout élément $(a, 0)$ de $\mathbb{R}_1$ associe le réel a permet d'*identifier* les éléments de $\mathbb{R}_1$ à ceux de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire de noter a l'élément $(a, 0)$ de $\mathbb{R}_1$.
Pour tout couple (a, b) on a : $(a, b) = (a, 0) + (0, 1)(b, 0)$, soit en utilisant l'identification précédente et la notation $i = (0, 1)$: $(a, b) = a + ib$.

Tout nombre complexe s'écrit donc sous la forme $a + ib$, où a et b sont des réels. Cette écriture est évidemment unique puisque l'égalité $a + ib = a' + ib'$, avec a, a', b, b' réels signifie que $(a, b) = (a', b')$, c'est-à-dire que $a = a'$ et $b = b'$.

Nous retiendrons :

THÉORÈME 2 et DÉFINITION 2

Pour tout nombre complexe z, il existe un couple (a, b) de réels et un seul tel que $z = a + ib$. Les réels a et b sont respectivement appelés partie réelle et partie imaginaire de z et sont notés $\text{Re}(z)$ et $\text{Im}(z)$.

A noter que le nombre complexe $a + ib$, avec a et b réels, est nul si, et seulement si, $a = b = 0$.

Les nombres complexes *non nuls* de la forme iy, où y est un réel non nul, sont appelés **imaginaires purs.**

L'égalité $(iy)^2 = -y^2$ montre que le carré d'un nombre imaginaire pur est un réel strictement négatif.

REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE DES NOMBRES COMPLEXES

Rapportons le plan $\mathscr{P}$ à un repère orthonormal $\mathscr{R} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. A tout nombre complexe z on associe le point M de coordonnées (Re(z), Im (z)) dans le repère $\mathscr{R}$; on dit que M est le **point-image** de z (figure 1).

Tout point M du plan de coordonnées (a, b) dans le repère $\mathscr{R}$ est évidemment l'image d'un unique complexe, $z = a + ib$, appelé **affixe** de M.

Les nombres réels ont pour images les points de l'axe $x'Ox$ de repère $(O, \vec{e}_1)$ appelé **axe réel.**

Par exemple, l'image du réel 1 est le point $A(1, 0)$.

Les nombres imaginaires purs ont pour images les points de l'axe $y'Oy$, privé de O, de repère $(O, \vec{e}_2)$, appelé **axe imaginaire.**

Ainsi l'image de i est le point $B(0, 1)$.

A tout nombre complexe z, on peut aussi associer le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées :

$$(\text{Re}\,(z), \text{Im}\,(z))$$

dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ du plan vectoriel $\mathscr{V}$.

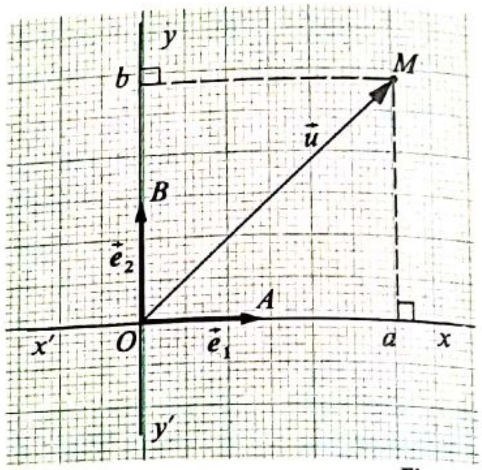


Figure 1

On dit que $\vec{u}$ est le **vecteur-image** de z.

Tout vecteur $\vec{u}$ de $\mathscr{V}$ de coordonnées (a, b) est l'image d'un unique complexe, $z = a + ib$, appelé **affixe** de $\vec{u}$.

RÈGLES DE CALCULS DANS $\mathbb{C}$

Toutes les règles de calculs concernant l'addition et la multiplication de $\mathbb{R}$ s'appliquent à $\mathbb{C}$ qui, comme $\mathbb{R}$, est un corps commutatif.

En particulier :

1. La **différence** $z - z'$ de deux nombres complexes z et z' est le nombre complexe $z + (-z')$, où $-z'$ désigne l'opposé de z'.

Si z et z' sont les affixes de M et M', $z - z'$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{M'M}$.

2. Quels que soient les complexes z, z', z'', on a :

$$z(z' - z'') = zz' - zz''.$$

3. Pour tout complexe z et pour tout entier naturel n on définit z^n par :

$$z^0 = 1 \quad (\text{si } z \text{ est non nul}), \quad z^1 = z, \quad z^2 = zz, \ldots, \quad z^{n+1} = z^n z.$$

Quels que soient les entiers naturels n et p : $z^n z^p = z^{n+p}$ et $(z^n)^p = z^{np}$.

4. Quels que soient les complexes z_1 et z_2 :

$$(z_1 + z_2)^2 = z_1^2 + 2z_1 z_2 + z_2^2$$
$$(z_1 - z_2)^2 = z_1^2 - 2z_1 z_2 + z_2^2$$
$$(z_1 + z_2)(z_1 - z_2) = z_1^2 - z_2^2.$$

En particulier :

$$\boxed{\begin{aligned} (a+ib)^2 &= a^2 - b^2 + 2ab\mathrm{i} \\ (a-ib)^2 &= a^2 - b^2 - 2ab\mathrm{i} \\ (a+ib)(a-ib) &= a^2 + b^2 \end{aligned}}$$

Quel que soit l'entier naturel non nul n :

$$z_1^n - z_2^n = (z_1 - z_2)(z_1^{n-1} + z_1^{n-2}z_2 + z_1^{n-3}z_2^2 + \dots + z_1 z_2^{n-2} + z_2^{n-1}).$$

En particulier : $\quad 1 - z^n = (1-z)(1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1}).$

5. Formule du binôme de Newton

Étant donnés deux nombres complexes z_1 et z_2 et un entier naturel n :

$$(z_1 + z_2)^n = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k z_1^{n-k} z_2^k,$$

où $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ et où l'on convient de poser $z_1^0 = 1$ et $z_2^0 = 1$, même si z_1 et z_2 sont nuls. Par exemple : $(z_1 + z_2)^3 = z_1^3 + 3z_1^2 z_2 + 3z_1 z_2^2 + z_2^3$.

6. L'inverse de tout complexe *non nul* est noté z^{-1} ou $\dfrac{1}{z}$.

- Si $z = a + ib$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $(a, b) \neq (0, 0)$, on a :

$$\frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \mathrm{i}\,\frac{b}{a^2+b^2}.$$

Nous retiendrons : $\quad \boxed{(a+ib)^{-1} = \dfrac{a}{a^2+b^2} - \mathrm{i}\,\dfrac{b}{a^2+b^2}}$

- Si z_1 et z_2 sont deux nombres complexes *non nuls*, le produit $z_1 z_2$ est non nul et :

$$\frac{1}{z_1 z_2} = \frac{1}{z_1} \times \frac{1}{z_2}.$$

Plus généralement si $z_1, z_2, \dots, z_n$ sont des nombres complexes *non nuls*, le produit $z_1 z_2 \dots z_n$ est non nul et :

$$\frac{1}{z_1 z_2 \dots z_n} = \frac{1}{z_1} \times \frac{1}{z_2} \times \dots \times \frac{1}{z_n}.$$

En particulier, si z est un complexe *non nul* et n un entier naturel :

$$\frac{1}{z^n} = \left(\frac{1}{z}\right)^n.$$

On note $\dfrac{1}{z^n} = z^{-n}$. Avec cette convention et la convention $z^0 = 1$, on a :

- pour tout complexe z non nul et pour tout couple (p, q) d'entiers relatifs :

$$z^p z^q = z^{p+q} \quad \text{et} \quad (z^p)^q = z^{pq};$$

- pour tout couple (z_1, z_2) de complexes non nuls et pour tout entier relatif p :

$$(z_1 z_2)^p = z_1^p z_2^p.$$

7. Étant donnés deux nombres complexes α et β tels que $\beta \neq 0$, il existe un unique nombre complexe z tel que $\alpha = \beta z$, à savoir $z = \beta^{-1}\alpha$.

En effet, si le nombre complexe z_1 satisfait $\alpha = \beta z_1$, on obtient en multipliant par β^{-1} les deux membres de cette égalité : $\beta^{-1}\alpha = \beta^{-1}(\beta z_1)$, d'où $\beta^{-1}\alpha = (\beta^{-1}\beta)z_1$, et par suite $z_1 = \beta^{-1}\alpha$. De plus, $\alpha = \beta(\beta^{-1}\alpha)$.

Le nombre complexe $\beta^{-1}\alpha$ est aussi noté $\dfrac{\alpha}{\beta}$; on l'appelle le **quotient** de α par β.

Exercices résolus

1. *Calculer de deux façons* $(1+i)^8$ *et en déduire une expression simple de :*

$$S_1 = 1 - C_8^2 + C_8^4 - C_8^6 + C_8^8$$

et de :

$$S_2 = C_8^1 - C_8^3 + C_8^5 - C_8^7.$$

On a : $(1+i)^8 = [(1+i)^2]^4$ et $(1+i)^2 = 2i$,

donc : $(1+i)^8 = (2i)^4 = 2^4(i^2)^2 = 2^4(-1)^2 = 2^4$.

Ainsi : $(1+i)^8 = 16$.

Par ailleurs $(1+i)^8 = 1 + C_8^1 i + C_8^2 i^2 + C_8^3 i^3 + C_8^4 i^4 + C_8^5 i^5 + C_8^6 i^6 + C_8^7 i^7 + C_8^8 i^8$.

Compte tenu de $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$, $i^6 = -1$, $i^7 = -i$, $i^8 = 1$, on obtient :

$$(1+i)^8 = S_1 + iS_2.$$

Donc : $S_1 = 16$ et $S_2 = 0$.

2. *Démontrer que les vecteurs ayant pour affixes* $1 - i$ *et* $1 + i$ *forment une base du plan vectoriel* $\mathscr{V}$ *(figure 2). Trouver les composantes du vecteur ayant pour affixe* $3 - i$ *dans cette nouvelle base.*

Désignons par $\vec{u}$ le vecteur d'affixe $1 - i$ et par $\vec{v}$ celui d'affixe $1 + i$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas nuls. S'ils étaient colinéaires, il existerait un réel t tel que $\vec{v} = t\vec{u}$. Comme le vecteur $t\vec{u}$ a pour affixe $t(1 - i)$, on aurait :

$$1 + i = t(1 - i)$$

soit $t = 1$ et $t = -1$, ce qui est impossible.

Les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ sont donc non colinéaires : ils forment une base de $\mathscr{V}$.

Désignons par $\vec{w}$ le vecteur d'affixe $3 - i$. $(\vec{u}, \vec{v})$ étant une base de $\mathscr{V}$, il existe un unique couple de réels (a, b) tel que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$, c'est-à-dire $3 - i = a(1 - i) + b(1 + i)$.

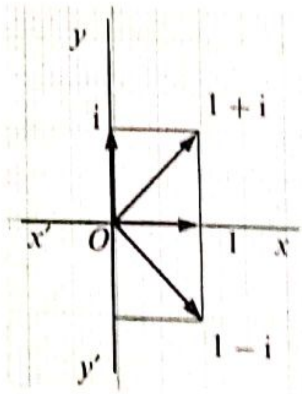


Figure 2

Il s'ensuit $a + b = 3$ et $b - a = -1$, d'où $a = 2$ et $b = 1$.

3. *Résoudre l'équation* $z^2 = a$ *sur* $\mathbb{C}$, *où* a *est un réel donné.*

- Si $a = 0$, la solution est 0.
- Si $a > 0$, $z^2 - a = (z - \sqrt{a})(z + \sqrt{a})$; les solutions sont donc $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.
- Si $a < 0$, $z^2 - a = z^2 - (i\sqrt{-a})^2$

$$= (z - i\sqrt{-a})(z + i\sqrt{-a});$$

les solutions sont donc $i\sqrt{-a}$ et $-i\sqrt{-a}$.

4. *Factoriser sur* $\mathbb{C}$ *les expressions suivantes :* $z^2 + 4$ *et* $z^4 - 1$.

On a : $z^2 + 4 = (z + 2i)(z - 2i)$.

$$z^4 - 1 = (z^2 + 1)(z^2 - 1) = (z + i)(z - i)(z + 1)(z - 1).$$

5. *Soient les quatre points A, B, C, D, d'affixes respectives* $1 + i$, $1 - i$, $-i$, -1. *Trouver l'affixe g du barycentre G de* $(A, 1)$, $(B, 2)$, $(C, -4)$, $(D, 3)$.

On a : $$2\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} - 4\overrightarrow{OC} + 3\overrightarrow{OD},$$

d'où $2g = 1 + i + 2(1 - i) + 4i - 3$, soit $g = \frac{3}{2}i$.

Activité

1° Programmer la somme, le produit et le quotient de deux nombres complexes $z = a + ib$ *et* $z' = a' + ib'$.

Réponse (TI-62)

[CP]	efface les programmes antérieurs
[LRN] 1	mise en mode programme
[LBL] 1	label de la séquence $z + z'$
[RCL] 1 [+] [RCL] 3 [=] [R/S]	calcule $a + a'$
[RCL] 2 [+] [RCL] 4 [=] [R/S]	calcule $b + b'$
[LBL] 2	label de la séquence zz'
[RCL] 1 [×] [RCL] 3 [−] [RCL] 2 [×] [RCL] 4 [=] [R/S]	calcule $aa' - bb'$
[RCL] 1 [×] [RCL] 4 [+] [RCL] 2 [×] [RCL] 3 [=] [R/S]	calcule $ab' - ba'$
[LBL] 3	label de la séquence $\frac{z}{z'}$
[(] [RCL] 1 [×] [RCL] 3 [+] [RCL] 2 [×] [RCL] 4 [)]	calcule $aa' + bb'$
[÷] [(] [RCL] 3 [x^2] [+] [RCL] 4 [x^2] [)] [=] [R/S]	divise $aa' + bb'$ par $a'^2 + b'^2$
[(] [RCL] 2 [×] [RCL] 3 [−] [RCL] 1 [×] [RCL] 4 [)]	calcule $ba' - ab'$
[÷] [(] [RCL] 3 [x^2] [+] [RCL] 4 [x^2] [)] [=] [R/S]	divise $ba' - ab'$ par $a'^2 + b'^2$

Exemple d'exécution : $z = 2 - 4i$, $z' = 3 + 5i$

[LRN]	retour en mode calcul
2 [STO] 1 −4 [STO] 2 3 [STO] 3 5 [STO] 4	entrée des données a, b, a', b'
[GTO] 1 [R/S]	affiche $a + a' = 5$
[R/S]	affiche $b + b' = 1$
[GTO] 2 [R/S]	affiche $aa' - bb' = 26$
[R/S]	affiche $ab' + ba' = -2$
[GTO] 3 [R/S]	affiche $\frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2} \approx -0{,}412$
[R/S]	affiche $\frac{ba' - ab'}{a'^2 + b'^2} \approx -0{,}647$

2° Utiliser ce programme pour vérifier les résultats des calculs demandés dans l'exercice d'application **1** *(ci-dessous).*

3° Programmer le calcul de $(a + ib)^n$, *où* a *et* b *sont des réels et* n *un entier naturel.*

Réponse (TI-62)

Si on pose, pour tout entier $k \in \mathbb{N}_n$, $(a + ib)^k = A_k + iB_k$, on a :

$$A_k = aA_{k-1} - bB_{k-1} \quad \text{et} \quad B_k = aB_{k-1} + bA_{k-1}.$$

Le programme consiste à calculer successivement A_2 et B_2, A_3 et B_3. Pour cela on utilise la fonction $\boxed{\text{DSZ}}$ de commande automatique de boucles qui opère de la façon suivante :

- le contenu k de la mémoire 0 (M_0) est d'abord diminué d'une unité (décrémentation $k \leftarrow k - 1$);
- ensuite, si $k - 1 \neq 0$, le programme se poursuit avec l'instruction qui suit $\boxed{\text{DSZ}}$;
- si $k - 1 = 0$, le programme se poursuit en sautant l'instruction qui suit $\boxed{\text{DSZ}}$.

$\boxed{\text{CP}}$	efface les programmes antérieurs
$\boxed{\text{LRN}}$	mise en mode programme
$\boxed{\text{STO}}$ 0	entre n dans la mémoire M_0
$\boxed{\text{LBL}}$ 0	début d'une boucle
$\boxed{\text{RCL}}$ 1 $\boxed{\times}$ $\boxed{\text{RCL}}$ 3 $\boxed{-}$ $\boxed{\text{RCL}}$ 2 $\boxed{\times}$ $\boxed{\text{RCL}}$ 4 $\boxed{=}$ $\boxed{\text{STO}}$ 5	calcule A_k et place A_k dans la mémoire M_5
$\boxed{\text{RCL}}$ 1 $\boxed{\times}$ $\boxed{\text{RCL}}$ 4 $\boxed{+}$ $\boxed{\text{RCL}}$ 2 $\boxed{\times}$ $\boxed{\text{RCL}}$ 3 $\boxed{=}$ $\boxed{\text{STO}}$ 4	calcule B_k et place B_k dans la mémoire M_4
$\boxed{\text{RCL}}$ 5 $\boxed{\text{STO}}$ 3	place A_k dans la mémoire M_3
$\boxed{\text{DSZ}}$	remplace k par $k-1$ et compare $k-1$ à 0
$\boxed{\text{GTO}}$ 0	renvoie à $\boxed{\text{LBL}}$ **0** si $k - 1 \neq 0$
$\boxed{\text{RCL}}$ 3 $\boxed{\text{R/S}}$	si $k - 1 = 0$, affiche le contenu de M_3
$\boxed{\text{RCL}}$ 4 $\boxed{\text{R/S}}$	affiche le contenu de M_4
$\boxed{\text{RST}}$	place le pointeur en 0 pour l'exécution

Exemple d'exécution : calcul de $(2 + i)^{18} = A + iB$

$\boxed{\text{LRN}}$	retour en mode calcul
$\boxed{\text{CM}}$	efface les mémoires
2 $\boxed{\text{STO}}$ 1 1 $\boxed{\text{STO}}$ 2 1 $\boxed{\text{STO}}$ 3 0 $\boxed{\text{STO}}$ 4	entre 2, 1, 1, 0 dans les mémoires 1, 2, 3, 4
18 $\boxed{\text{R/S}}$	entre $n = 18$ et affiche $A = -922\,077$
$\boxed{\text{R/S}}$	affiche $B = 1\,721\,764$

• Exercices d'application

1. Effectuer les calculs suivants en présentant les résultats sous la forme $a + ib$, où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:

$$(1 + i)^2; \quad (1 - i)^2; \quad (2 + 3i)^2;$$
$$(2 - 3i)^2; \quad (3 + 4i)(3 - 4i);$$
$$(1 + i)^3; \quad (1 - i)^3; \quad (3 + 2i)^3;$$
$$\frac{i - 5}{3 + 5i}; \quad \frac{3 + i}{2 - i} + \frac{2 - i}{3 + i};$$
$$\frac{i - 4}{2 + 5i} + \frac{2 + 3i}{1 - i}; \quad \frac{4 + 5i}{2 - i} - \frac{1 - 3i}{1 + i}.$$

2. On pose $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Calculer :

$$j^2, \quad 1 + j + j^2, \quad \frac{1 + j}{(1 - i)^2} + \frac{1 - j}{(1 + i)^2}.$$

3. On considère les deux nombres complexes :

$$z_1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{1}{\sqrt{3} + i}.$$

Calculer :

$$z_1 + z_2, \quad z_1 z_2, \quad \frac{z_1}{z_2}, \quad z_1^2 + z_2^2, \quad z_1^3 + z_2^3.$$

4. Calculer : $1 + i + i^2 + ... + i^n$.

5. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points d'affixes i, iz soient alignés avec M.

6. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points d'affixes 1, z, z^2 soient alignés.

7. A tout point M on associe son affixe z et le nombre complexe $Z = z^2$. Déterminer l'ensemble des points M tels que :

a) $Z \in \mathbb{R}_+$;
b) $Z \in \mathbb{R}_-$;
c) $Z \in \mathbb{R}$;
d) Z soit imaginaire pur.

8. Reprendre l'exercice précédent avec :

$$Z = z^3.$$

9. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

a) $\operatorname{Re}\left(\frac{z-1}{z-i}\right) = 0$; *b)* $\operatorname{Im}\left(\frac{z-1}{z-i}\right) = 0$.

10. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

$$\operatorname{Re}(z^3) = \operatorname{Im}(z^3).$$

III — MODULE D'UN NOMBRE COMPLEXE

CONJUGUÉ D'UN NOMBRE COMPLEXE

DÉFINITION 3 | **Le conjugué d'un nombre complexe $z = a + ib$, où a et b sont réels, est le nombre complexe, noté $\bar{z}$, tel que $\bar{z} = a - ib$.**

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, les points-images de z et $\bar{z}$ sont **symétriques** par rapport à l'axe des abscisses parallèlement à l'axe des ordonnées (figure 3).

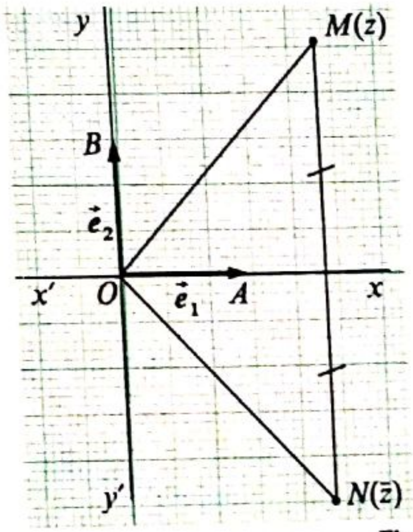


Figure 3

Activité

1° Montrer que l'application $\delta : z \mapsto \bar{z}$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ vérifie les propriétés :

a) Pour tous nombres complexes z et z' :

$$\delta(z + z') = \delta(z) + \delta(z'), \quad \delta(zz') = \delta(z)\delta(z'),$$
$$\delta(\delta(z)) = z;$$

b) δ est bijective.

c) Pour que le nombre complexe z soit invariant par δ (c'est-à-dire $\delta(z) = z$) il faut et il suffit que z soit réel.

2° Montrer que les seules bijections f de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}$ laissant chaque réel invariant et telles que pour tous complexes z, z' : $f(z + z') = f(z) + f(z')$ et $f(zz') = f(z)f(z')$, sont δ et l'application identique de $\mathbb{C}$.

3° Montrer que si z est un nombre complexe non nul $\delta\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{\delta(z)}$.

Nous retiendrons :

$$\boxed{\begin{aligned} z + \bar{z} &= 2\,\mathrm{Re}\,(z) \\ z - \bar{z} &= 2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,(z) \\ \overline{z + z'} &= \bar{z} + \bar{z}' \\ \overline{zz'} &= \bar{z}\bar{z}' \\ \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} &= \frac{1}{\bar{z}} \\ \text{z est réel si, et seulement si,} \quad z &= \bar{z} \end{aligned}}$$

Conséquence

Soit $P(z)$ une expression polynomiale en z à *coefficients réels* :

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n,$$

où $a_0, a_1, \dots, a_n$ sont réels et z complexe. On a :

$$\overline{P(z)} = \overline{a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n} = \overline{a_0} + \overline{a_1 z} + \dots + \overline{a_n z^n}.$$

Comme $\overline{z^k} = \bar{z}^k$ et $\bar{a}_k = a_k$, on obtient : $\overline{P(z)} = \sum_{k=0}^{k=n} a_k \bar{z}^k$, d'où $\overline{P(z)} = P(\bar{z})$.

Si z_0 est un nombre complexe tel que $P(z_0) = 0$, il s'ensuit que $0 = \overline{P(z_0)} = P(\bar{z}_0)$.

On retiendra :

Si un nombre complexe z_0 est racine d'un polynome P à coefficients réels, son conjugué $\bar{z}_0$ est aussi racine de P.

Exemples

1. Soit : $\mathrm{j} = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$; alors : $\mathrm{j}^2 = -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} = \bar{\mathrm{j}}$.

De plus : $\left(-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 1 = 0$, c'est-à-dire : $\mathrm{j}^2 + \mathrm{j} + 1 = 0$.

Considérons $P(z) = z^2 + z + 1$, j est racine de $P(z)$ et, P étant à coefficients réels, $\bar{\mathrm{j}}$ est racine de $P(z)$.

D'où $P(z) = (z - \mathrm{j})(z - \bar{\mathrm{j}}) = (z - \mathrm{j})(z - \mathrm{j}^2)$, puisque le coefficient de z^2 est 1.

2. Considérons $Q(z) = z^4 + z^2 + 1$.

On constate que $Q(\mathrm{j}) = \mathrm{j}^4 + \mathrm{j}^2 + 1$ et que $\mathrm{j}^3 = \mathrm{j}\mathrm{j}^2 = \mathrm{j}\bar{\mathrm{j}} = 1$, donc :

$$Q(\mathrm{j}) = \mathrm{j} + \mathrm{j}^2 + 1 = 0.$$

Par suite, j est racine de $Q(z)$. Comme $Q(-z) = Q(z)$ et que Q est à coefficients réels, $-\mathrm{j}, \bar{\mathrm{j}}$ et $-\bar{\mathrm{j}}$ sont aussi racines de $Q(z)$. Les nombres complexes $\mathrm{j}, -\mathrm{j}, \mathrm{j}^2$ et $-\mathrm{j}^2$ étant distincts et le coefficient de z^4 étant 1, on obtient :

$$Q(z) = (z - \mathrm{j})(z - \bar{\mathrm{j}})(z + \mathrm{j})(z + \bar{\mathrm{j}}).$$

On a ainsi factorisé $Q(z)$ dans $\mathbb{C}$.

De plus :
$$(z - \mathrm{j})(z - \bar{\mathrm{j}}) = z^2 - (\mathrm{j} + \bar{\mathrm{j}})z + 1,$$
et :
$$(z + \mathrm{j})(z + \bar{\mathrm{j}}) = z^2 + (\mathrm{j} + \bar{\mathrm{j}})z + 1.$$
Donc :
$$Q(z) = (z^2 + z + 1)(z^2 - z + 1).$$

Soit $x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$. On a ainsi factorisé $x^4 + x^2 + 1$ dans $\mathbb{R}$.

MODULE D'UN NOMBRE COMPLEXE

Pour tout nombre complexe z écrit sous la forme $z = a + ib$, où a et b sont des réels, on a :

$$z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2.$$

Le produit $z\bar{z}$ est donc un réel positif.

DÉFINITION 4	On appelle module d'un nombre complexe z, le nombre réel positif, noté $\lvert z \rvert$, et défini par : $\lvert z \rvert = \sqrt{z\bar{z}}$.

A noter que le module de z est égal à la distance de l'origine O du repère à l'image M de z : $\lvert z \rvert = OM$.

A noter aussi que si z est réel, son module n'est autre que sa valeur absolue.

Propriétés

1. $\lvert \text{Re}(z) \rvert \leqslant \lvert z \rvert$ et $\lvert \text{Im}(z) \rvert \leqslant \lvert z \rvert$.

2. $\lvert z \rvert = 0$ équivaut à $z = 0$.

3. $\lvert z \rvert = \lvert -z \rvert$, $\lvert z \rvert = \lvert \bar{z} \rvert$.

4. $\lvert zz' \rvert = \sqrt{zz'\bar{z}\bar{z}'} = \sqrt{z\bar{z}z'\bar{z}'} = \sqrt{z\bar{z}}\sqrt{z'\bar{z}'} = \lvert z \rvert \lvert z' \rvert$.

Il s'ensuit, pour tout entier naturel n : $\lvert z^n \rvert = \lvert z \rvert^n$.

5. Inégalité triangulaire

Soit z et z' deux nombres complexes d'images respectives M et M' et soit S l'image de $z + z'$ (figure 4).

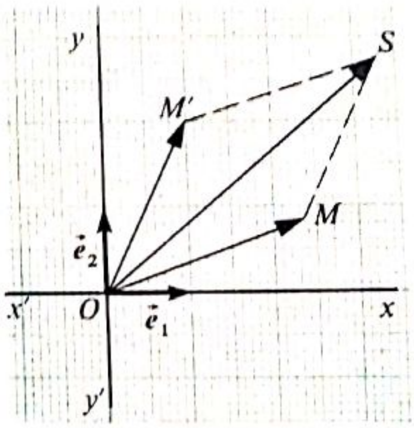


Figure 4

L'inégalité triangulaire appliquée aux trois points O, M, S donne :

$$OS \leqslant OM + MS,$$

soit $OS \leqslant OM + OM'$. Il en résulte : $\lvert z + z' \rvert \leqslant \lvert z \rvert + \lvert z' \rvert$.

Donnons de cette inégalité une démonstration algébrique :

$$\lvert z + z' \rvert^2 = (z + z')(\bar{z} + \bar{z}');$$

d'où :

$$\lvert z + z' \rvert^2 = z\bar{z} + z'\bar{z}' + (z\bar{z}' + \bar{z}z'). \tag{1}$$

Comme $\overline{z\bar{z}'} = \bar{z}z'$, on a $z\bar{z}' + \bar{z}z' = 2\,\text{Re}\,(z\bar{z}')$.

Or :

$$2\,\text{Re}\,(z\bar{z}') \leqslant 2\lvert z\bar{z}' \rvert = 2\lvert z \rvert\,\lvert z' \rvert.$$

Ainsi, en majorant le deuxième membre de l'inégalité (1), on obtient :

$$\lvert z + z' \rvert^2 \leqslant \lvert z \rvert^2 + \lvert z' \rvert^2 + 2\lvert z \rvert\,\lvert z' \rvert, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \lvert z + z' \rvert \leqslant \lvert z \rvert + \lvert z' \rvert.$$

Plus généralement : $\lvert z_1 + z_2 + ... + z_n \rvert \leqslant \lvert z_1 \rvert + \lvert z_2 \rvert + ... + \lvert z_n \rvert$.

REMARQUE : On utilise souvent l'inégalité : $\big\lvert \lvert z \rvert - \lvert z' \rvert \big\rvert \leqslant \lvert z - z' \rvert$, qui se démontre en remarquant que $z = (z - z') + z'$ et en utilisant l'inégalité triangulaire

$$\lvert z \rvert = \lvert (z - z') + z' \rvert \leqslant \lvert z - z' \rvert + \lvert z' \rvert, \quad \text{soit} \quad \lvert z \rvert - \lvert z' \rvert \leqslant \lvert z - z' \rvert.$$

En échangeant les rôles de z et z', on a aussi $\lvert z' \rvert - \lvert z \rvert \leqslant \lvert z' - z \rvert = \lvert z - z' \rvert$, d'où le résultat. Cette inégalité exprime que la longueur d'un côté d'un triangle est supérieure ou égale à la différence des deux autres.

6. Pour tout complexe *non nul* z on a : $1 = \left|z\,\frac{1}{z}\right| = |z| \times \left|\frac{1}{z}\right|$, d'où $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$. Par conséquent :

$$\left|\frac{z'}{z}\right| = \left|z'\,\frac{1}{z}\right| = |z'|\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|}.$$

Pour tout nombre entier relatif p et tout nombre complexe non nul z, on a :

$$|z^p| = |z|^p.$$

7. Calcul de l'inverse d'un nombre complexe *non nul* z : $\frac{1}{z} = \frac{1}{z} \times \frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}}$. Par suite :

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

Exemple : $\quad \dfrac{1}{1+\mathrm{i}} = \dfrac{1-\mathrm{i}}{2}.$

8. Un nombre complexe z est de module 1 si, et seulement si, $\bar{z} = \frac{1}{z}$.

En effet $|z| = 1$ signifie $z\bar{z} = 1$, soit $\bar{z} = \frac{1}{z}$.

Nous retiendrons :

$$\boxed{\begin{array}{c} |\mathbf{Re}(z)| \leqslant |z| \quad \textbf{et} \quad |\mathbf{Im}(z)| \leqslant |z| \\ |z| = 0 \quad \textbf{équivaut à} \quad z = 0 \\ |zz'| = |z|\,|z'| \quad \textbf{et} \quad \left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{|z'|}{|z|} \\ |z + z'| \leqslant |z| + |z'| \\ \dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2} \\ |z| = 1 \quad \textbf{si, et seulement si,} \quad \bar{z} = \dfrac{1}{z} \end{array}}$$

■ Exercice résolu

Déterminer les nombres complexes z tels que z, $\frac{1}{z}$, $z - 1$ aient même module.

Soit z un nombre complexe tel que $|z| = \left|\frac{1}{z}\right| = |z - 1|$.

On a $|z| = \frac{1}{|z|}$, d'où $|z| = 1$.

Ainsi $|z - 1| = 1$, soit $(z - 1)(\bar{z} - 1) = 1$.

D'où $z\bar{z} - z - \bar{z} = 0$.

Comme $|z| = 1$, on a $z\bar{z} = 1$ et, par suite, $z + \bar{z} = 1$.

En posant $z = x + \mathrm{i}y$, avec x et y réels, on obtient $x = \frac{1}{2}$.

De plus, $x^2 + y^2 = 1$, d'où $y^2 = \frac{3}{4}$.

Finalement, si $|z| = \left|\frac{1}{z}\right| = |z - 1|$, alors $z = \frac{1}{2} - \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $z = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}$.

On vérifie que les nombres complexes $\frac{1}{2} - \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{1}{2} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}$ satisfont les conditions demandées.

• Exercices d'application

11. Démontrer que, si λ est réel, le nombre complexe $\dfrac{1+\lambda i}{1-\lambda i}$ a pour module 1.
Étudier la réciproque.

12. Calculer z pour que l'on ait :

$$\left|\frac{z-12}{z-8i}\right| = \frac{5}{3} \quad \text{et} \quad \left|\frac{z-4}{z-8}\right| = 1.$$

13. Démontrer que $\dfrac{z-u\bar{z}}{1-u}$ est réel si $|u|=1$.

Étudier la réciproque.

14. z, z' désignent des nombres complexes. Montrer que :

$$|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2(|z|^2+|z'|^2).$$

15. Déterminer les nombres complexes z tels que z, $\dfrac{1}{z}$ et $1+z$ aient même module.

16. Déterminer z pour que z^2, $1-z$, $\bar{z}$ aient même module.

17. *1°* Étant donnés les points M_1, M_2, M_3 d'affixes z_1, z_2, z_3, montrer que ces trois points sont alignés si, et seulement si :

$$z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_3 + z_3\bar{z}_1 = \bar{z}_1 z_2 + \bar{z}_2 z_3 + \bar{z}_3 z_1.$$

2° Étant donnés les complexes distincts a et b de module 1, soit A et B leurs images respectives. Montrer qu'un point M d'affixe z appartient à la droite (AB) si, et seulement si :

$$z + ab\bar{z} = a + b.$$

3° Soit a, b, c, d des nombres complexes de module 1 tels que $a \neq b$ et $c \neq d$, d'images respectives A, B, C, D. Montrer que les droites (AB) et (CD) sont orthogonales si, et seulement si :

$$ab = -cd.$$

IV — ARGUMENTS D'UN NOMBRE COMPLEXE NON NUL

Avant d'aborder cette partie, il est indispensable de revoir les notions d'angles de vecteurs et d'égalité modulo 2π développées au début du chapitre 7.

NOMBRES COMPLEXES DE MODULE 1

Soit z un nombre complexe de module 1.

Dans le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormal *direct* $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, désignons par M l'image de z (figure 5). Les coordonnées (a, b) du point M s'expriment en fonction de toute mesure θ en radians de l'angle de vecteurs $(\widehat{\vec{e}_1, \overrightarrow{OM}})$ par :

$$a = \|\overrightarrow{OM}\| \cos\theta = \cos\theta,$$

$$b = \|\overrightarrow{OM}\| \sin\theta = \sin\theta.$$

D'où : $\quad z = \cos\theta + i\sin\theta.$

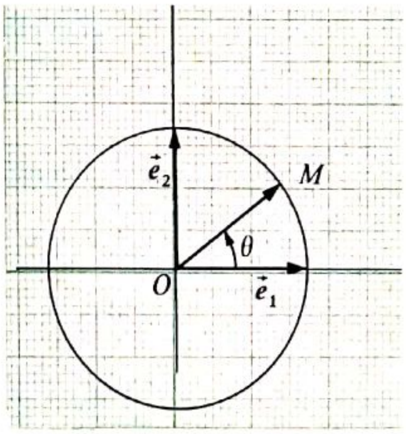


Figure 5

Réciproquement, pour tout réel α tel que $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$, on a :

$$\cos\alpha = \cos\theta \quad \text{et} \quad \sin\alpha = \sin\theta;$$

d'où $\alpha = \theta \ (2\pi)$, ce qui montre que α est une mesure en radians de l'angle $(\widehat{\vec{e}_1, \overrightarrow{OM}})$.

DÉFINITION 5 et THÉORÈME 3	**On appelle argument d'un nombre complexe z de module 1, tout réel θ tel que : $z = \cos\theta + i\sin\theta$.** **L'ensemble des arguments de z est l'ensemble des mesures en radians de l'angle $(\widehat{\vec{e}_1, \overrightarrow{OM}})$, où M est l'image de z dans un repère orthonormal direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.**

Si θ est un argument de z, on note $\arg z = \theta \quad (2\pi)$, ce qui rappelle que tout argument de z, noté $\arg z$, est égal à θ modulo 2π.

Propriétés

1. Nous constatons que si z et z' sont deux nombres complexes de module 1, zz' est de module 1 et $\frac{1}{z} = \bar{z}$ est de module 1. Par suite :

L'ensemble U des nombres complexes de module 1 contient le produit de deux, quelconques, de ses éléments et l'inverse de chacun de ses éléments.

2. Soit z et z' deux nombres complexes de module 1.

Si $\arg z = \theta \quad (2\pi)$ et $\arg z' = \theta' \quad (2\pi)$, on a :

$$z = \cos\theta + i\sin\theta \quad \text{et} \quad z' = \cos\theta' + i\sin\theta'.$$

Donc :
$$\begin{aligned} zz' &= (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta') \\ &= \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + i(\sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta') \\ &= \cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta'). \end{aligned}$$

Ainsi (figure 6) : $\boxed{\mathbf{arg}\ zz' = \mathbf{arg}\ z + \mathbf{arg}\ z' \quad (2\pi)}$

3. L'égalité $(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta - i\sin\theta) = 1$ s'écrit :

$$\frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta).$$

Elle montre que pour tout complexe z de module 1, on a : $\arg\frac{1}{z} = -\arg z \quad (2\pi)$.

De plus, si $|z| = 1$, alors $\bar{z} = \frac{1}{z}$. Finalement :

$$\boxed{\textbf{si } |z| = 1, \quad \mathbf{arg}\ \frac{1}{z} = \mathbf{arg}\ \bar{z} = -\mathbf{arg}\ z \quad (2\pi)}$$

Il en résulte que si $|z| = 1$, les images de z et de $\frac{1}{z}$ sont symétriques par rapport à $x'Ox$ (figure 7).

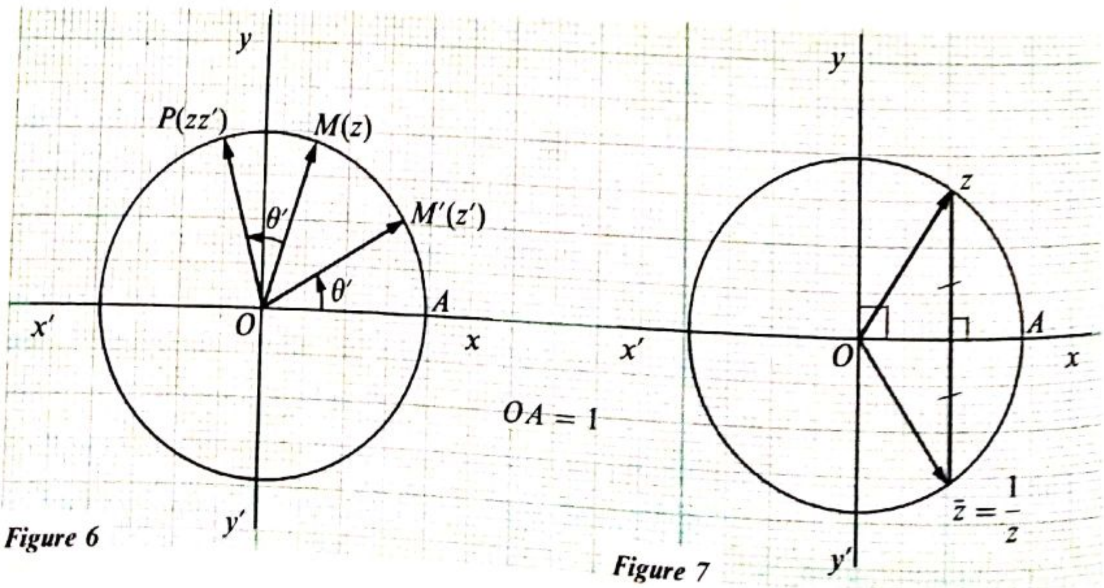


Figure 6

Figure 7

FORMULES DE MOIVRE

Nous avons remarqué :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta') = \cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta').$$

Plus généralement, on démontre par récurrence que :

$$(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\ \dots\ (\cos\theta_n + i\sin\theta_n) = \cos(\theta_1+\theta_2+\dots+\theta_n) + i\sin(\theta_1+\theta_2+\dots+\theta_n). \quad (1)$$

Si, dans l'égalité (1) les réels $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ sont égaux à θ, on obtient :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta.$$

De plus, quel que soit l'entier naturel n :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{-n} = \left(\frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta}\right)^n = (\cos\theta - i\sin\theta)^n$$
$$= (\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))^n = \cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta).$$

Il en résulte, quel que soit l'entier relatif p :

$$\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^p = \cos p\theta + i\sin p\theta}$$

Cette formule est appelée **formule de Moivre.** Si on remplace θ par $-\theta$, on obtient :

$$\boxed{(\cos\theta - i\sin\theta)^p = \cos p\theta - i\sin p\theta}$$

Exemples

- 1 est le nombre complexe de module 1 et d'argument 0.
- i est le nombre complexe de module 1 d'argument $\frac{\pi}{2}$.
- $-$ i est le nombre complexe de module 1 d'argument $-\frac{\pi}{2}$.
- $-$ 1 est le nombre complexe de module 1 et d'argument π.
- $i = \frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$; $i^2 = \cos\pi + i\sin\pi = -1$;

  $i^3 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i$; $i^4 = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1$.

Plus généralement : $i^{4n} = 1$, $i^{4n+1} = i$, $i^{4n+2} = -1$, $i^{4n+3} = -i$.

- Si j désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{2\pi}{3}$, on a :

$$j = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3},$$
$$j^2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3},$$
$$j^3 = \cos 2\pi + i\sin 2\pi, \quad \text{soit :}$$
$$j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad j^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad j^3 = 1.$$

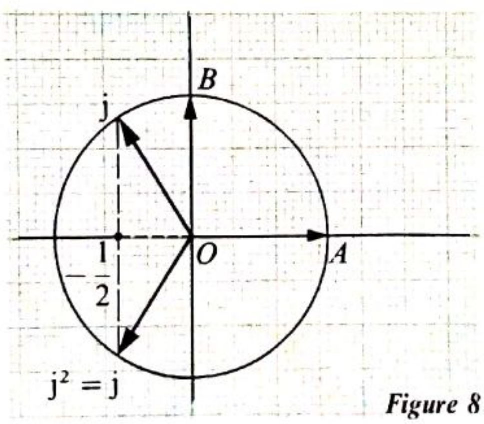


Figure 8

$$j^{3n} = 1,\ j^{3n+1} = j,\ j^{3n+2} = j^2.$$

Par suite :

$$1 + j + j^2 = 0.$$

A noter que :

REMARQUE : Si n est un entier naturel non nul et k un entier relatif on a :

$$\left(\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}\right)^n = \cos 2k\pi + i \sin 2k\pi = 1.$$

ARGUMENTS D'UN NOMBRE COMPLEXE NON NUL

Pour tout nombre complexe *non nul* z, le quotient $\frac{z}{|z|}$ est un nombre complexe de module 1.

DÉFINITION 6 | **On appelle argument d'un nombre complexe z *non nul* tout argument du quotient $\frac{z}{|z|}$.**

Si θ est un argument de z, on a $\frac{z}{|z|} = \cos\theta + i \sin\theta$, d'où :

$$\boxed{z = |z| (\cos\theta + i \sin\theta)}$$

C'est l'**écriture trigonométrique** du nombre complexe non nul z.

Si θ est un argument de z, l'ensemble des arguments de z est l'ensemble des réels égaux à θ modulo 2π. On note :

$$\arg z = \theta \quad (2\pi).$$

Interprétation géométrique

Désignons par M l'image du nombre complexe non nul z et par N l'image de $\frac{z}{|z|}$ (figure 9).

Les arguments de z sont les mesures en radian de l'angle $(\widehat{\vec{e}_1, \overrightarrow{ON}})$, c'est-à-dire les mesures de l'angle $(\widehat{\vec{e}_1, \overrightarrow{OM}})$.

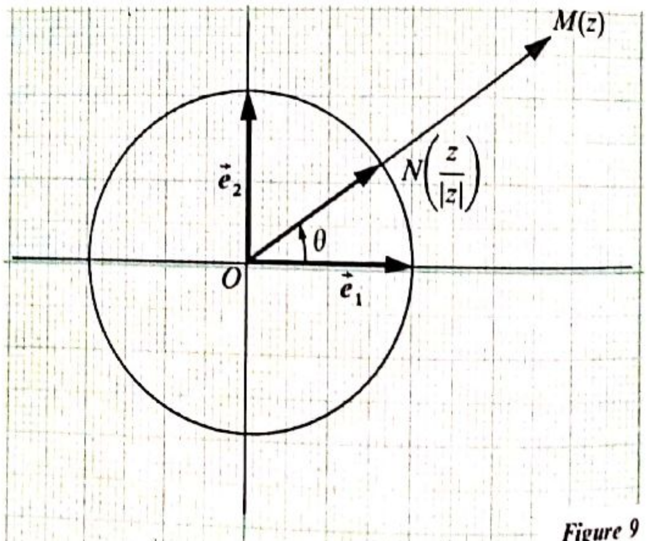


Figure 9

Égalité de deux nombres complexes

Pour que deux nombres complexes z et z' soient égaux, il faut et il suffit que :

$$|z| = |z'| = 0 \quad \text{ou} \quad (|z| = |z'| \neq 0 \quad \text{et} \quad \arg z = \arg z' \quad (2\pi))$$

La condition est évidemment nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante.

En effet, si z et z' ne sont pas nuls et vérifient $|z| = |z'| = r$ et $\arg z = \arg z'$ (2π), posons $\theta = \arg z$ et $\theta' = \arg z'$.

On a : $z = |z| (\cos \theta + \mathrm{i} \sin \theta)$ et $z' = |z'| (\cos \theta' + \mathrm{i} \sin \theta')$,
soit : $z = r(\cos \theta + \mathrm{i} \sin \theta)$ et $z' = r(\cos \theta' + \mathrm{i} \sin \theta')$.
De plus, il existe un entier relatif k tel que $\theta' = \theta + 2k\pi$; donc :

$$\cos \theta' = \cos (\theta + k2\pi) = \cos \theta \quad \text{et} \quad \sin \theta' = \sin (\theta + k2\pi) = \sin \theta.$$

Par suite, $z' = r(\cos \theta + \mathrm{i} \sin \theta)$, d'où $z = z'$.

Recherche d'une forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

1° Soit $z = a + \mathrm{i}b$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, un nombre complexe *non nul.*

On a $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \neq 0$; donc $\dfrac{z}{|z|} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \mathrm{i} \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Si $\arg z = \theta \quad (2\pi)$, on a $z = |z| (\cos \theta + \mathrm{i} \sin \theta)$, d'où :

$$\frac{z}{|z|} = \cos \theta + \mathrm{i} \sin \theta.$$

Par suite : $$\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

La connaissance de $\cos \theta$ et $\sin \theta$ détermine les arguments θ de z.

2° Soit $z = \rho(\cos \theta + \mathrm{i} \sin \theta)$, où ρ est un nombre réel :

- Si $\rho = 0$, $z = 0$.
- Si $\rho > 0$, $|z| = \rho$ et $\arg z = \theta \quad (2\pi)$.
- Si $\rho < 0$, $z = (-\rho)(-\cos \theta - \mathrm{i} \sin \theta)$
$= (-\rho)(\cos (\theta + \pi) + \mathrm{i} \sin (\theta + \pi))$.

Donc : $$|z| = -\rho \quad \text{et} \quad \arg z = \theta + \pi \quad (2\pi).$$

Propriétés

1. Soit z et z' des nombres complexes *non nuls* d'arguments respectifs θ et θ' :

$$z = |z| (\cos \theta + \mathrm{i} \sin \theta) \quad \text{et} \quad z' = |z'| (\cos \theta' + \mathrm{i} \sin \theta').$$

On a : $zz' = |z|\,|z'| (\cos \theta + \mathrm{i} \sin \theta)(\cos \theta' + \mathrm{i} \sin \theta')$, d'où :

$$zz' = |z|\,|z'| (\cos (\theta + \theta') + \mathrm{i} \sin (\theta + \theta')).$$

Ainsi : $$\boxed{\arg zz' = \arg z + \arg z' \quad (2\pi)}$$

2. Plus généralement, si $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sont des nombres complexes non nuls, on a :

$$\arg (z_1 z_2 \ldots z_n) = \arg z_1 + \arg z_2 + \ldots + \arg z_n \quad (2\pi).$$

En particulier, si z est un nombre complexe non nul et n un entier naturel non nul :

$$\boxed{\arg z^n = n \arg z \quad (2\pi)}$$

3. Soit z un nombre complexe non nul.

On a : $zz^{-1} = 1$, $\arg 1 = 0 \quad (2\pi)$; donc $\arg zz^{-1} = 0 \quad (2\pi)$.

Or : $\arg zz^{-1} = \arg z + \arg z^{-1} \quad (2\pi)$; par suite, $\arg z + \arg z^{-1} = 0 \quad (2\pi)$,

d'où : $$\boxed{\arg z^{-1} = -\arg z \quad (2\pi)}$$

4. Soit z un nombre complexe *non nul*, $\bar{z}$ son conjugué et M et N leurs points-images respectifs. On a (figure 10) :

$$(\vec{e}_1, \overrightarrow{ON}) = -(\vec{e}_1, \overrightarrow{OM}) \quad (2\pi),$$

d'où :

$$\boxed{\mathbf{arg}\ \bar{z} = -\ \mathbf{arg}\ z \quad (2\pi)}$$

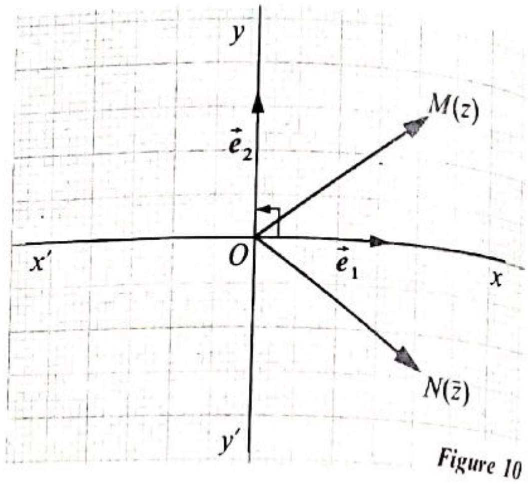


Figure 10

5. Soit z et z' deux nombres complexes non nuls :

$$\arg \frac{z}{z'} = \arg z\left(\frac{1}{z'}\right) = \arg z + \arg \frac{1}{z'} \quad (2\pi),$$

d'où :

$$\boxed{\mathbf{arg}\ \frac{z}{z'} = \mathbf{arg}\ z - \mathbf{arg}\ z' \quad (2\pi)}$$

Il en résulte, pour tout entier naturel *n non nul* : $\arg \frac{1}{z^n} = -\arg z^n \quad (2\pi)$, et donc :

$$\boxed{\mathbf{arg}\ \frac{1}{z^n} = -\ n\ \mathbf{arg}\ z \quad (2\pi)}$$

Comme on a posé $\frac{1}{z^n} = z^{-n}$ et $z^0 = 1$, on a pour tout entier *relatif* p :

$$\boxed{\mathbf{arg}\ z^p = p\ \mathbf{arg}\ z \quad (2\pi)}$$

6. Les nombres *réels positifs non nuls* sont les nombres complexes d'argument 0.

Les nombres *réels négatifs non nuls* sont les nombres complexes d'arguments π.

Les nombres complexes *imaginaires purs* sont les nombres complexes d'arguments $\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2}$.

INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DE $z' - z$

Soit z et z' deux nombres complexes distincts d'images respectives M et M' dans le repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, et soit N l'image de $z' - z$ (figure 11).

On a :

$$\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{MM'}, \quad |z' - z| = ON,$$
$$\arg (z' - z) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{ON}) \quad (2\pi).$$

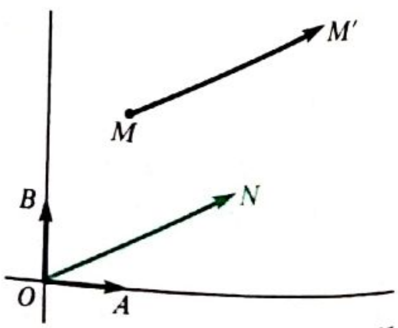


Figure 11

Par suite :

Pour tous nombres complexes distincts z et z' d'images respectives M et M', on a, A étant l'image du nombre 1 :

$$|z' - z| = MM' \quad \text{et} \quad \arg(z' - z) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{MM'}) \quad (2\pi).$$

Activité

Considérons trois nombres complexes z, z_1, z_2 d'images respectives M, M_1, M_2 dans un repère orthonormal direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. On suppose $z \neq z_1$ et $z \neq z_2$.

1° Démontrer :

$$\left|\frac{z - z_1}{z - z_2}\right| = \frac{MM_1}{MM_2} \quad \text{et} \quad \arg\left(\frac{z - z_1}{z - z_2}\right) = (\overrightarrow{MM_2}, \overrightarrow{MM_1}) \quad (2\pi).$$

2° On suppose $z_1 = 2 - 3\mathrm{i}$ et $z_2 = \mathrm{i}$. Déterminer l'ensemble des points M tels que :

a) $\left|\dfrac{z - z_1}{z - z_2}\right| = 3$;

b) $\arg\left(\dfrac{z - z_1}{z - z_2}\right) = \dfrac{\pi}{3} \quad (2\pi)$;

c) $\left|\dfrac{z - z_1}{z - z_2}\right| = 3$ *et* $\arg\left(\dfrac{z - z_1}{z - z_2}\right) = \dfrac{\pi}{3} \quad (2\pi)$.

NOTATION $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$

Pour tout nombre réel θ on pose :

$$\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta}$$

1. Cette notation vérifie les règles opératoires suivantes :

- $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}$ car $\cos(\theta + \theta') + \mathrm{i}\sin(\theta + \theta') = (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)(\cos\theta' + \mathrm{i}\sin\theta')$.
- $\mathrm{e}^{\mathrm{i}0} = 1$; plus précisément, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = 1$ si, et seulement si $\theta = 0 \quad (2\pi)$.
- $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{i}$.
- $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$.
- $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\theta)} = \cos(-\theta) + \mathrm{i}\sin(-\theta) = \cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta$, c'est-à-dire $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\theta)} = \overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}$.

Si on pose : $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\theta)}$, on a donc $\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$.

- $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}$ si, et seulement si $\theta = \theta' \quad (2\pi)$.

2. Formules d'Euler

De $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i}\sin x$ et $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} = \cos x - \mathrm{i}\sin x$, il résulte :

$$\boxed{\cos x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}); \quad \sin x = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})}$$

3. La formule de Moivre s'écrit, pour tout entier relatif p : $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^p = \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\theta}$.

4. Dérivée de la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$

Une application F d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ s'écrit :

$$F(t) = F_1(t) + \mathrm{i}F_2(t), \quad \text{où} \quad F_1(t) = \operatorname{Re} F(t) \quad \text{et} \quad F_2(t) = \operatorname{Im} F(t).$$

Par définition F est dérivable en t si F_1 et F_2 sont dérivables en t; dans ce cas, la dérivée de F en t, notée $F'(t)$ est donnée par : $\quad F'(t) = F_1'(t) + \mathrm{i}F_2'(t)$.

Appliquons cette définition à la fonction $\varphi : t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \cos t + \mathrm{i} \sin t$.

Les fonctions cos et sin étant dérivables en chaque point de $\mathbb{R}$, φ est donc dérivable en tout réel t et on a :

$$\varphi'(t) = -\sin t + \mathrm{i} \cos t$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right) + \mathrm{i} \sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right).$$

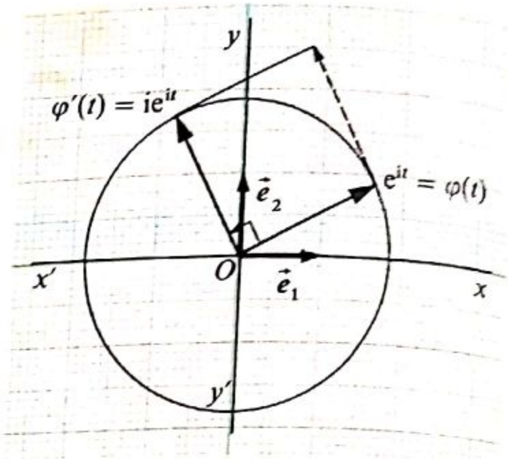


Figure 12

On constate que $\varphi'(t) = \mathrm{i}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$.

Formellement on écrit : $\boxed{\dfrac{\mathbf{de}^{\mathrm{i}t}}{\mathbf{d}t} = \mathbf{i}\ \mathbf{e}^{\mathrm{i}t}}$

5. Si dans l'écriture trigonométrique de tout nombre complexe non nul z d'argument θ, on utilise la notation $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, on obtient : $z = |z|\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

Si $z = \rho\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, où ρ et θ sont des nombres réels, on a :

- lorsque $\rho = 0$: $\quad z = 0$;
- lorsque $\rho > 0$: $\quad |z| = \rho \quad$ et $\quad \arg z = \theta \quad (2\pi)$;
- lorsque $\rho < 0$: $\quad |z| = -\rho \quad$ et $\quad \arg z = \theta + \pi \quad (2\pi)$.

REMARQUES :

Soit $f(t) = a\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$, où a est un réel positif et ω un réel non nul.

1. $f(t)$ définit un mouvement circulaire uniforme sur le cercle de centre O et de rayon a, de période $\dfrac{2\pi}{\omega}$, de pulsation ω.

Re $(f(t)) = a \cos \omega t$ définit un mouvement rectiligne vibratoire de centre O, d'amplitude a et de période $\dfrac{2\pi}{\omega}$.

2. $f'(t) = a\ \mathrm{i}\omega\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$, $f''(t) = -a\omega^2\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$, d'où : $f''(t) + \omega^2 f(t) = 0$.

Si l'on pose $g(t) = \mathrm{Re}\,(f(t))$ et $h(t) = \mathrm{Re}\,(g(t))$, g et h sont solutions de l'équation différentielle :

$$y'' + \omega^2 y = 0 \tag{1}$$

On démontre, et l'on admettra, que toute solution réelle de l'équation différentielle (1) s'écrit sous la forme $\lambda g(t) + \mu h(t)$, où λ et μ sont des réels quelconques. Toute solution réelle de (1) s'écrit aussi sous la forme $C \cos(\omega t - \varphi)$, où C et φ sont des réels quelconques.

Exercices résolus

1. *Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes :* $z = 1 + \mathrm{i}$, $z' = 1 - \mathrm{i}$.

On a : $\quad z = \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right) \quad$ et $\quad z' = \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right).$

Par suite : $\quad z = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{4}\right), \quad z' = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right].$

2. *Déterminer le module et l'argument des nombres complexes suivants :*

$$z_1 = \sqrt{3} - \mathrm{i}; \quad z_2 = 1 - \mathrm{i}; \quad z = \frac{z_1}{z_2}.$$

En déduire $\cos \dfrac{\pi}{12}$ *et* $\sin \dfrac{\pi}{12}$.

1° On a $z_1 = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\mathrm{i}}{2}\right)$ et $z_2 = \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)$, puisque $|z_1| = 2$ et $|z_2| = \sqrt{2}$.

D'où $\arg z_1 = \dfrac{11}{6}\pi \quad (2\pi)$ et $\arg z_2 = \dfrac{7\pi}{4} \quad (2\pi)$.

Donc $|z| = \sqrt{2}$ et $\arg z = \dfrac{11}{6}\pi - \dfrac{7\pi}{4} \quad (2\pi)$, soit $\arg z = \dfrac{\pi}{12} \quad (2\pi)$.

Ainsi :

$$z = \sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{12} + \mathrm{i} \sin \frac{\pi}{12}\right).$$

2° En utilisant les règles de calcul dans le corps $\mathbb{C}$, on a :

$$z = \frac{\sqrt{3} - \mathrm{i}}{1 - \mathrm{i}} = \frac{(\sqrt{3} - \mathrm{i})(1 + \mathrm{i})}{(1 - \mathrm{i})(1 + \mathrm{i})} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3} - 1}{2}.$$

Ainsi $z = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} + \mathrm{i}\,\dfrac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + \mathrm{i}\,\dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right)$.

On conclut de *1°* et *2°* que :

$$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \quad \text{et} \quad \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

Activité

Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, le point-image M d'un nombre complexe z écrit sous la forme algébrique $x + \mathrm{i}y$ ($x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$) est défini par ses coordonnées (x, y), dites *cartésiennes*, ou *rectangulaires*.

Si z est exprimé sous la forme trigonométrique $r(\cos \theta + \mathrm{i} \sin \theta)$, le point M est défini par le couple (r, θ) :

$$OM = r \quad \text{et} \quad (\vec{e}_1, \overrightarrow{OM}) = \theta \quad (2\pi).$$

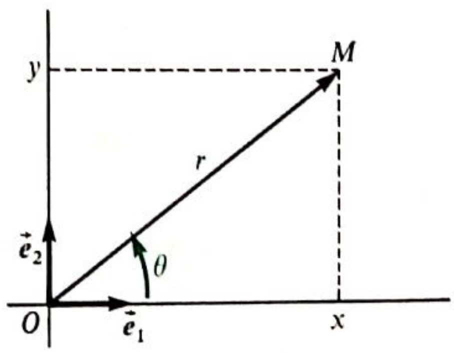


Figure 13

On dit que r et θ sont les **coordonnées polaires** du point M par rapport à l'axe $(O, \vec{e}_1)$.

Les calculatrices de référence permettent de calculer les coordonnées polaires à partir des coordonnées rectangulaires et inversement. Elles permettent donc de passer de l'une à l'autre des deux écritures $x + \mathrm{i}y$ et $r(\cos \theta + \mathrm{i} \sin \theta)$.

Il convient au préalable de placer la calculatrice dans le mode correspondant à l'unité d'angle choisie : degré, grade ou radian.

Passage de l'écriture algébrique $x + iy$ à l'écriture trigonométrique $r(\cos\theta + i\sin\theta)$

TI-62	SHARP EL-5050	CASIO FX-180P	HP-11C	Commentaires
INV P⇌R x $x⇌t$ y	x →POL y	x R→P y	y ENTER x	entre x et y
=	=	=	→P	affiche r
$x⇌t$	RCL Z	X↔Y	$x \gtrless y$	affiche θ

Passage de l'écriture trigonométrique $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ à l'écriture algébrique $x + iy$

P⇌R r $x⇌t$ θ	r →REC θ	r P→R θ	θ ENTER r	entre r et θ
=	=	=	→R	affiche x
$x⇌t$	RCL Z	X↔Y	$x \gtrless y$	affiche y

Application :

1° Écrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

$$1 + i,\quad 1 - i,\quad 3 - 4i,\quad -27 + 13i,\quad \sqrt{3} - \sqrt{2}i,$$
$$(\sqrt{3} - 1) + i(\sqrt{3} - 1),\quad \frac{-1 + 3i\sqrt{3}}{5 - 2i\sqrt{3}}.$$

(On exprimera les arguments en degrés, puis en radians.)

2° Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$2(\cos 60° + i\sin 60°),\qquad \sqrt{7}(\cos 75\text{ gr} + i\sin 75\text{ gr}),$$
$$(\sqrt{5} - 1)(\cos 127° + i\sin 127°),\qquad 7\left(\cos\frac{3\pi}{7} + i\sin\frac{3\pi}{7}\right),$$
$$\pi\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{7\pi}{4}\right)\right),\qquad e^{-1,2}(\cos 0{,}7\pi + i\sin 0{,}7\pi).$$

Exercices d'application

18. Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :
a) $z = i$; $z = 9i$; $z = -6$; $z = +8$.
b) $z = 1 + i\sqrt{3}$; $z = 1 - i\sqrt{3}$.

19. Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :
a) $z = \sin\theta + i\cos\theta$, $z = 1 + i\tan\theta$,
$z = \dfrac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\theta - i\sin\theta}$, où θ est un nombre fixé.
b) $z = \dfrac{-\sqrt{2}}{1 + i}$; $z = \dfrac{3}{1 - i}$.

20. Soit le nombre complexe :

$$j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}.$$

Montrer que $j^{3n} = 1$, $j^{3n+1} = j$,
$j^{3n+2} = j^2$ et $1 + j + j^2 = 0$.

21. Mettre sous forme trigonométrique le nombre complexe suivant :

$$z = \frac{-1 + 3i\sqrt{3}}{10 - 2i\sqrt{3}}.$$

22. Déterminer le module et l'argument des nombres complexes suivants :

$$z_1 = \frac{\sqrt{6} + i\sqrt{2}}{2}, \quad z_2 = 1 + i, \quad z = \frac{z_1}{z_2}.$$

En déduire $\cos \frac{7\pi}{12}$ et $\sin \frac{7\pi}{12}$.

23. Mettre sous forme trigonométrique :

$$z = \frac{(1 - i\sqrt{3})(\cos x + i \sin x)}{\cos x + \sin x + i(\cos x - \sin x)},$$

où $x \in \mathbb{R}$.

24. Calculer $\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 + i}\right)^{30}$ et $\frac{(1 - i)^5 - 1}{(1 + i)^5 + 1}$.

25. Comment choisir l'entier naturel n pour que $(\sqrt{3} + i)^n$ soit un réel positif? un imaginaire pur?

26. En calculant de deux manières différentes $(1 + i)^n$, déduire :

$$S_0 = 1 - C_n^2 + C_n^4 - \ldots + (-1)^p C_n^{2p} + \ldots$$
$$S_1 = C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - \ldots + (-1)^q C_n^{2q+1} + \ldots$$

27. En calculant de deux manières différentes $(1 + j)^n$, $(1 + j^2)^n$, $(1 + 1)^n$ et en utilisant la relation $1 + j + j^2 = 0$, déduire :

$$S_0 = 1 + C_n^3 + C_n^6 + \ldots + C_n^{3k} + \ldots$$
$$S_1 = C_n^1 + C_n^4 + \ldots + C_n^{3p+1} + \ldots$$
$$S_2 = C_n^2 + C_n^5 + C_n^8 + \ldots + C_n^{3q+2} + \ldots$$

28. Donner une expression simple de

$$C = \sum_{k=0}^{k=n} \cos kx \quad \text{et} \quad S = \sum_{k=0}^{k=n} \sin kx.$$

(On pourra calculer $C + iS$ en posant : $z = e^{ix}$.)

29. Donner une expression simple de :

$$C = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{\cos kx}{\cos^k x} \quad \text{et} \quad S = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{\sin kx}{\cos^k x},$$

pour $x \neq \frac{\pi}{2}$ (π).

$\left(\text{Calculer } C + iS \text{ en posant : } z = \frac{e^{ix}}{\cos x}.\right)$

30. Ensemble décrit par l'image M du complexe z tel que :

a) $|\arg z| = \frac{\pi}{4}$ (2π);

b) $|z - 2i| = 2$;

c) $\left|\frac{z - 1}{z + 1}\right| = 2$.

31. Module et argument de $z_1 = \sqrt{3} + i$,

$$z_2 = 3i - z_1, \quad z_3 = 2i + z_1 \quad \text{et} \quad z_4 = \frac{z_3}{z_2}.$$

32. Module et argument de $z = \frac{1}{1 + i \tan \alpha}$, lorsque $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ (π).

33. Module et argument de :

$$z = \frac{1 + \cos \alpha + i \sin \alpha}{1 - \cos \alpha - i \sin \alpha},$$

lorsque $\alpha \neq 0$ (2π).

34. Module et argument de :

$$1 + \sin \alpha - i \cos \alpha, \quad \frac{e^{i\alpha} + e^{i\beta}}{1 + e^{i(\alpha+\beta)}},$$

où α et β sont deux réels donnés. On donnera la condition pour que la deuxième expression soit définie.

V — APPLICATIONS DES NOMBRES COMPLEXES À LA TRIGONOMÉTRIE

CALCUL DE cos *nx* ET sin *nx* EN FONCTION DE cos *x* ET sin *x*

La méthode consiste à appliquer la formule de Moivre et la formule du binôme de Newton, et à utiliser la relation :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

• **Cas** $n = 2$

On a : $$(\cos x + i \sin x)^2 = \cos 2x + i \sin 2x$$

et : $$(\cos x + i \sin x)^2 = \cos^2 x - \sin^2 x + 2i \cos x \sin x,$$

d'où :

$$\boxed{\begin{aligned}&\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x\\&\cos 2x = 2\cos^2 x - 1\\&\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x\\&\sin 2x = 2\sin x \cos x\end{aligned}}$$

• **Cas** $n = 3$

On a : $$(\cos x + i \sin x)^3 = \cos 3x + i \sin 3x,$$
et : $$(\cos x + i \sin x)^3 = \cos^3 x + 3i \cos^2 x \sin x - 3 \cos x \sin^2 x - i \sin^3 x,$$
d'où : $$\cos 3x = \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x$$
$$\sin 3x = 3 \cos^2 \sin x - \sin^3 x.$$

En remplaçant $\sin^2 x$ par $1 - \cos^2 x$ et $\cos^2 x$ par $1 - \sin^2 x$, on obtient :

$$\boxed{\begin{aligned}&\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x\\&\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x\end{aligned}}$$

Si $3x \neq \frac{\pi}{2}\ (2\pi)$, on a $\cos 3x \neq 0$ et $\cos x \neq 0$.

Alors : $$\tan 3x = \frac{\sin 3x}{\cos 3x} = \frac{3\cos^2 x \sin x - \sin^3 x}{\cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x}.$$

Après division du numérateur et du dénominateur par $\cos^3 x$, on obtient :

$$\boxed{\tan 3x = \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}}$$

• **Cas** $n = 4$

On a : $$(\cos x + i \sin x)^4 = \cos 4x + i \sin 4x$$
et : $$(\cos x + i \sin x)^4 = \cos^4 x + 4i \cos^3 x \sin x - 6 \cos^2 x \sin^2 x - 4i \cos x \sin^3 x + \sin^4 x.$$

D'où : $$\cos 4x = \cos^4 x - 6 \cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x$$
$$\sin 4x = 4 \cos^3 x \sin x - 4 \cos x \sin^3 x.$$

Comme $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, on a :

$$\cos 4x = \cos^4 x - 6\cos^2 x(1 - \cos^2 x) + (1 - \cos^2 x)^2,$$

d'où :

$$\boxed{\begin{aligned}&\cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1\\&\sin 4x = 4\cos^3 x \sin x - 4\cos x \sin^3 x = 2\sin 2x \cos 2x\end{aligned}}$$

Si $4x \neq \frac{\pi}{2}\ (\pi)$ et $x \neq \frac{\pi}{2}\ (\pi)$, on a $\cos 4x \neq 0$ et $\cos x \neq 0$.

Alors : $$\tan 4x = \frac{\sin 4x}{\cos 4x} = \frac{4\cos^3 x \sin x - 4\cos x \sin^3 x}{\cos^4 x - 6\cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x}.$$

Après division du numérateur et du dénominateur par $\cos^4 x$, on obtient :

$$\boxed{\tan 4x = \frac{4\tan x - 4\tan^3 x}{1 - 6\tan^2 x + \tan^4 x}}$$

Activité

1° Montrer les relations suivantes :

- $\cos nx = \cos^n x - C_n^2 \cos^{n-2} x \sin^2 x + C_n^4 \cos^{n-4} x \sin^4 x$
$- C_n^6 \cos^{n-6} x \sin^6 x + C_n^8 \cos^{n-8} x \sin^8 x - \ldots$
- $\sin nx = C_n^1 \cos^{n-1} x \sin x - C_n^3 \cos^{n-3} x \sin^3 x + C_n^5 \cos^{n-5} x \sin^5 x$
$- C_n^7 \cos^{n-7} x \sin^7 x + \ldots$

où le dernier terme de chaque expression dépend de la parité de n.

2° En déduire :

a) $\cos nx = P_n(\cos x)$, *où* $P_n(\cos x)$ *est une expression polynomiale en* $\cos x$ *de degré n dont le coefficient de* $\cos^n x$ *est* 2^{n-1} *;*

b) $\sin nx = \sin x Q_{n-1}(\cos x)$, *où* $Q_{n-1}(\cos x)$ *est une expression polynomiale en* $\cos x$ *de degré* $n-1$ *dont le coefficient de* $\cos^{n-1} x$ *est* 2^{n-1}.

LINÉARISATION DES POLYNÔMES TRIGONOMÉTRIQUES

Il s'agit d'exprimer $\cos^p x \sin^q x$ comme somme de termes de la forme :

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

On utilise les formules d'Euler et la formule du binôme de Newton :

$$\cos^p x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^p \quad \text{et} \quad \sin^q x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^q.$$

Exemples

- $\cos^2 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(e^{i2x} + 2 + e^{-i2x}) = \frac{1}{4}(2\cos 2x + 2),$

d'où :

$$\boxed{\mathbf{\cos^2 x = \frac{1}{2}(\cos 2x + 1)}}$$

- $\sin^2 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2i}\right)^2 = -\frac{1}{4}(e^{i2x} - 2 + e^{-i2x}) = -\frac{1}{4}(2\cos 2x - 2),$

d'où :

$$\boxed{\mathbf{\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)}}$$

- $\cos^3 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}(e^{i3x} + 3\,e^{ix} + 3\,e^{-ix} + e^{-i3x}) = \frac{1}{8}(2\cos 3x + 6\cos x),$

d'où :

$$\boxed{\mathbf{\cos^3 x = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x)}}$$

- $\sin^3 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2i}\right)^3 = -\frac{1}{8i}(e^{i3x} - 3\,e^{ix} + 3\,e^{-ix} - e^{-i3x})$

$$= -\frac{1}{8}(2\sin 3x - 6\sin x),$$

d'où :
$$\boxed{\sin^3 x = -\frac{1}{4}(\sin 3x - 3\sin x)}$$

- $y = \cos x \sin^4 x$

$$= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)\left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2i}\right)^4 = \frac{1}{2^5}(e^{ix} + e^{-ix})(e^{i4x} - 4\,e^{i2x} + 6 - 4\,e^{-i2x} + e^{-i4x}),$$

d'où :

$$y = \frac{1}{2^5}(e^{i5x} - 4\,e^{i3x} + 6\,e^{ix} - 4\,e^{-ix} + e^{-i3x} + e^{i3x} - 4\,e^{ix} + 6\,e^{-ix} - 4\,e^{-i3x} + e^{-i5x})$$

$$= \frac{1}{2^5}(2\cos 5x - 6\cos 3x + 4\cos x).$$

Finalement : $$y = \frac{1}{2^4}(\cos 5x - 3\cos 3x + 2\cos x).$$

Dans tous ces calculs nous avons utilisé :

$$e^{ipx} + e^{-ipx} = 2\cos px \quad \text{et} \quad e^{ipx} - e^{-ipx} = 2i\sin px.$$

ÉQUATION $a \cos x + b \sin x = c$

1° a et b désignant deux nombres réels tels que $a^2 + b^2 \neq 0$, posons $r = \sqrt{a^2 + b^2}$; il existe alors un réel φ, défini modulo 2π, tel que $a = r\cos\varphi$ et $b = r\sin\varphi$: φ est un argument du nombre complexe $a + ib$. Une valeur approchée de φ s'obtient à l'aide d'une table des fonctions trigonométriques, ou d'une calculatrice.

Il s'ensuit, pour tout réel x : $a\cos x + b\sin x = r(\cos x\cos\varphi + \sin x\sin\varphi)$.

Comme $\cos(x - \varphi) = \cos x\cos\varphi + \sin x\sin\varphi$, on obtient :

$$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2 + b^2}\cos(x - \varphi).$$

2° Soit à résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $a\cos x + b\sin x = c$, où a, b, c sont des réels donnés tels que $(a, b) \neq (0, 0)$.

On a alors $a^2 + b^2 \neq 0$ ce qui, avec les notations précédentes, nous ramène à la résolution de l'équation :

$$\cos(x - \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Discussion :

- Si $\left|\dfrac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right| > 1$, l'équation n'a pas de solution.
- Si $\left|\dfrac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right| \leqslant 1$, il existe un réel t_0 unique de l'intervalle $[0, \pi]$ tel que :

$$\cos t_0 = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

On résout alors : $\cos(x - \varphi) = \cos t_0$.

L'ensemble des solutions est : $\{t_0 + \varphi + k_1 2\pi,\ k_1 \in \mathbb{Z}\} \cup \{-t_0 + \varphi + k_2 2\pi,\ k_2 \in \mathbb{Z}\}$.

Une autre méthode de résolution sera donnée page 84.

■ **Exercice résolu**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ *l'équation* $\cos x + \sqrt{3} \sin x = 1{,}8$.

On a $a = 1$ et $b = \sqrt{3}$, d'où $\cos \varphi = \frac{1}{2}$ et $\sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

En choisissant $\varphi = \frac{\pi}{3}$, on obtient : $\cos x + 3 \sin x = 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

On est donc ramené à la résolution de l'équation $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0{,}9$.

Choisissons 0,451 comme valeur de t_0 telle que $\cos t_0 \approx 0{,}9$. L'ensemble des solutions approximatives de (1) est alors :

$$\left\{0{,}451 + \frac{\pi}{3} + k_1 2\pi,\ k_1 \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-0{,}451 + \frac{\pi}{3} + k_2 2\pi,\ k_2 \in \mathbb{Z}\right\}.$$

● **Exercices d'application**

35. Linéariser les expressions suivantes : $\cos^4 x \sin x$; $\sin^2 x \cos^3 x$; $\cos^4 x \sin^3 x$; $3 \cos^3 x \sin^3 x - 2 \cos^4 x \sin^2 x$.

36. Linéariser les expressions suivantes :

$$2^{2m} \cos^{2m} x; \qquad (-1)^m 2^{2m} \sin^{2m} x;$$
$$2^{2m+1} \cos^{2m+1} x; \quad (-1)^m 2^{2m+1} \sin^{2m+1} x;$$

où m est un entier naturel.

37. Transformer en un produit les expressions :

$$\cos(a + b + c) + \cos a + \cos b + \cos c;$$
$$\sin(a + b - c) + \sin(b + c - a) + \sin(c + a - b) - \sin(a + b + c).$$

38. Simplifier l'expression :

$$\frac{\sin a + \sin 3a + \sin 5a + \ldots + \sin(2n-1)a}{\cos a + \cos 3a + \ldots + \cos(2n-1)a}.$$

39. En supposant $a + b + c = \pi$, simplifier les expressions :

$$\frac{\sin a + \sin b - \sin c}{\sin a + \sin b + \sin c};$$
$$1 + \cos a + \cos b - \cos c.$$

40. Calculer la somme :

$$S = \sin^4 \frac{\pi}{8} + \sin^4 \frac{3\pi}{8} + \sin^4 \frac{5\pi}{8} + \sin^4 \frac{7\pi}{8}.$$

41. Résoudre les équations :

$$\sqrt{2} \cos x + \sqrt{3} \sin x - 1 = 0,$$
$$2 \cos x + 5 \sin x + 2 = 0;$$
$$\sqrt{2} \cos x + \sqrt{3} \sin x = 1;$$
$$\cos x + \sin x = 1;$$
$$\sqrt{3} \cos x + \sqrt{13} \sin x = 2.$$

VI — RACINES *n*-ièmes

RACINES *n*-ièmes DE L'UNITÉ

Cas $n = 2$

On se propose de chercher les nombres complexes z tels que : $z^2 = 1$.
Comme $z^2 - 1 = (z - 1)(z + 1)$, 1 et -1 sont les racines carrées de l'unité. Remarquons que leur somme est nulle.

Cas $n = 3$

Les nombres complexes z tels que $z^3 = 1$ ont pour module 1. Ils sont donc de la forme $e^{i\theta}$ et vérifient $e^{i3\theta} = 1 = e^{i0}$, c'est-à-dire $3\theta = 0 \quad (2\pi)$, d'où $\theta = \frac{k2\pi}{3}$, avec k entier relatif.

Les racines troisièmes de l'unité sont donc les complexes de la forme $e^{i\frac{k2\pi}{3}}$, lorsque k décrit $\mathbb{Z}$. Posons $\omega_k = e^{i\frac{k2\pi}{3}} = (\omega_1)^k$:

- $\omega_0 = 1$;
- $\omega_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; le complexe ω_1 est généralement noté j;
- $\omega_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$; remarquons que $\omega_2 = j^2 = \bar{j}$;
- $\omega_3 = 1, \quad \omega_4 = \omega_1, \quad \omega_5 = \omega_2$.

Plus généralement : $\omega_{3p} = 1, \omega_{3p+1} = j, \omega_{3p+2} = j^2$. Comme tout nombre entier relatif à l'une des formes $3p$, $3p + 1$ ou $3p + 2$, avec p entier relatif, les racines cubiques de l'unité sont 1, j, j^2. On pose $U_3 = \{ 1, j, j^2 \}$.

Propriétés :

1. $1 + j + j^2 = 0$.

2. $z^3 - 1 = (z - 1)(z^2 + z + 1) = (z - 1)(z - j)(z - j^2)$.

3. Désignons par U_3 l'ensemble des racines cubiques de l'unité. Le produit de deux éléments de U_3, l'inverse d'un élément de U_3, sont aussi des éléments de U_3.

On le vérifie en considérant le tableau croisé ci-contre, où l'on met dans chaque case le produit des nombres complexes qui correspondent à la ligne et la colonne de la case.

	1	j	j^2
1	1	j	j^2
j	j	j^2	1
j^2	j^2	1	j

On a : $\frac{1}{j} = \bar{j} = j^2$; $\frac{1}{j^2} = j$.

4. Représentation géométrique des racines cubiques de l'unité.

De $1 + j + j^2 = 0$, il résulte :

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \vec{0}.$$

De plus (figure 14) :

$$OA = OM = ON = 1;$$

$$OH = \frac{1}{2}; \quad AM = MN = NA = \sqrt{3}.$$

Les points A, M, N, images respectives de 1, j, j^2, sont les sommets d'un triangle équilatéral inscrit dans le cercle trigonométrique.

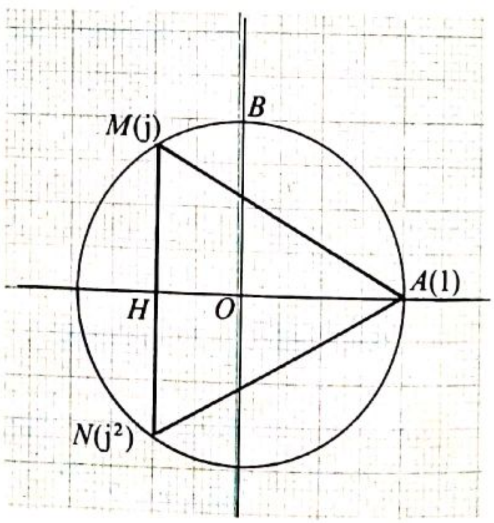


Figure 14

Cas $n = 4$

Les nombres complexes z tels que $z^4 = 1$ ont pour module 1. Ils sont donc de la forme $e^{i\theta}$ et vérifient $e^{i4\theta} = 1 = e^{i0}$, c'est-à-dire $4\theta = 0 \quad (2\pi)$, d'où $\theta = \frac{k2\pi}{4}$, avec k élément de $\mathbb{Z}$. Les racines quatrièmes de l'unité sont donc les complexes de la forme $e^{i\frac{k2\pi}{4}}$ lorsque k décrit $\mathbb{Z}$.

Posons $\omega_k = e^{i\frac{k2\pi}{4}} = (\omega_1)^k$:

- $\omega_0 = 1$;
- $\omega_1 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$;
- $\omega_2 = i^2 = -1$;
- $\omega_3 = i^3 = -i$;
- $\omega_4 = 1, \quad \omega_5 = i, \quad \omega_6 = -1, \quad \omega_7 = -i.$

Plus généralement :

$$\omega_{4p} = i^{4p} = 1, \quad \omega_{4p+1} = i^{4p+1} = i, \quad \omega_{4p+2} = i^{4p+2} = -1, \quad \omega_{4p+3} = i^{4p+3} = -i.$$

Comme tout entier relatif a l'une des formes $4p$, $4p+1$, $4p+2$, $4p+3$, avec p entier relatif, les racines quatrièmes de l'unité sont $1, i, -1, -i$.

On pose : $\quad U_4 = \{1, i, -1, -i\}$.

On constate : $\omega_0 + \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$.

Les images des quatre racines quatrièmes de l'unité sont les sommets d'un carré inscrit dans le cercle trigonométrique.

Le produit de deux éléments de U_4, l'inverse d'un élément de U_4, sont aussi des éléments de U_4, comme le montre le tableau croisé ci-contre.

	1	i	-1	$-i$
1	1	i	-1	$-i$
i	i	-1	$-i$	1
-1	-1	$-i$	1	i
$-i$	$-i$	1	i	-1

■ Exercice résolu

Déterminer les solutions complexes de l'équation : $z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.

Pour tout nombre complexe z, on a : $(z-1)(z^3 + z^3 + z + 1) = z^4 - 1$.

Les solutions de l'équation sont donc celles de $z^4 - 1 = 0$ privées de 1. L'ensemble des solutions est donc $\{i, -1, -i\}$.

Cas général

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Les nombres complexes z tels que $z^n = 1$ ont pour module 1. Ils sont donc de la forme $e^{i\theta}$ et vérifient :

$$e^{in\theta} = 1 = e^{i0}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad n\theta = 0 \quad (2\pi).$$

D'où $\theta = \dfrac{k2\pi}{n}$, avec k entier relatif.

Posons $\omega_k = e^{i\frac{k2\pi}{n}}$. On a : $\omega_k = (\omega_1)^k$.

Tout entier relatif k a l'une des formes np, $np+1$, ..., $np+r$, ..., $np+n-1$, où p est un entier relatif.

On a : $\qquad \omega_{np+r} = (\omega_1)^{np+r} = (\omega_1)^{np}(\omega_1)^r = (\omega_1^n)^p(\omega_1)^r \quad$ et $\quad \omega_1^n = 1$.

Donc $\omega_{np+1} = (\omega_1)^r = \omega_r$, avec r entier naturel compris entre 0 et $n-1$, au sens large (c'est-à-dire $0 \leqslant r \leqslant n-1$).

Les racines n-ièmes de l'unité sont les complexes de la forme $e^{i\frac{k2\pi}{n}}$, où k est un entier naturel compris entre 0 et $n-1$, au sens large.

De plus, si r et r' sont deux entiers naturels *distincts* tels que $0 \leqslant r \leqslant n-1$ et $0 \leqslant r' \leqslant n-1$, on a $0 < |r - r'| < n$, il ne peut donc exister d'entier relatif p tel que $r - r' = pn$.

3. La somme des racines n-ièmes d'un nombre complexe non nul est nulle. Cela résulte de la propriété 1 et de la propriété vérifiée par la somme des racines n-ièmes de l'unité.

Exercices résolus

1. *Déterminer les racines cubiques du nombre complexe* $1 + i$.

On peut écrire : $$1 + i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Les racines cubiques de $1 + i$ sont donc : $\sqrt[6]{2}\, e^{i\frac{\pi}{12}}\, e^{i\frac{k2\pi}{3}}$ pour $0 \leqslant k \leqslant 2$, d'où :

$$z_0 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + \sin\frac{\pi}{12}\right),$$
$$z_1 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right),$$
$$z_2 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}\right).$$

2. *Déterminer les racines n-ièmes de* -1.

On peut écrire : $-1 = e^{i\pi}$. Les racines n-ièmes de -1 sont donc $e^{i\frac{\pi}{n}} \times e^{i\frac{k2\pi}{n}}$, avec k entier naturel tel que $0 \leqslant k \leqslant n - 1$.

3. *Résoudre dans* $\mathbb{C}$, *l'équation :*

$$\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^3 + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 = 0. \qquad (1)$$

Les solutions de (1) sont différentes de 1 et -1. Posons $Z = \dfrac{z+1}{z-1}$.

Nous sommes ramenés à résoudre : $Z^3 + \dfrac{1}{Z^3} = 0$, c'est-à-dire $Z^6 = -1$.

Les solutions de cette dernière équation sont définies par $Z = e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{6}\right)}$, avec k entier naturel tel que $0 \leqslant k \leqslant 5$.

Les solutions de l'équation (1) sont donc déterminées par les équations :

$$\frac{1+z}{z-1} = e^{i\theta_k}, \qquad (2)$$

où $\theta_k = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{3}$ et $0 \leqslant k \leqslant 5$.

De la relation (2) il résulte $z(e^{i\theta_k} - 1) = 1 + e^{i\theta_k}$.

On a donc pour chaque entier naturel k tel que $0 \leqslant k \leqslant 5$ et $\theta_k \neq 0 \ (2\pi)$:

$$z = \frac{1 + e^{i\theta_k}}{e^{i\theta_k} - 1} = \frac{e^{i\frac{\theta_k}{2}}(e^{-i\frac{\theta_k}{2}} + e^{i\frac{\theta_k}{2}})}{e^{i\frac{\theta_k}{2}}(e^{+i\frac{\theta_k}{2}} - e^{-i\frac{\theta_k}{2}})}, \quad \text{d'où} \quad z = \frac{\cos\frac{\theta_k}{2}}{i\sin\frac{\theta_k}{2}} = -i\cot\frac{\theta_k}{2}.$$

Comme pour $0 \leqslant k \leqslant 5$ on a : $\dfrac{\pi}{6} \leqslant \theta_k \leqslant \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{5\pi}{3} = \dfrac{11\pi}{6} < 2\pi$, les racines de (1) sont donc définies par : $z = -i\cot\left(\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{k\pi}{6}\right)$, avec $0 \leqslant k \leqslant 5$ et k entier naturel.

RACINES CARRÉES D'UN NOMBRE COMPLEXE NON NUL Z

Première méthode : $Z = |Z|\, e^{i\varphi}$. Les racines carrées de Z sont donc, d'après l'étude générale : $\sqrt{|Z|}\, e^{i\frac{\varphi}{2}}$ et $-\sqrt{|Z|}\, e^{i\frac{\varphi}{2}}$. Elles sont opposées l'une de l'autre.

Seconde méthode : $Z = a + ib$, avec a et b réels.

Le nombre complexe $z = x + iy$, x et y étant réels, est racine carrée de Z si, et seulement si : $(x + iy)^2 = a + ib$; c'est-à-dire :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b. \end{cases}$$

Notons en outre que si $z^2 = Z$, alors $|z|^2 = |Z|$, donc $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$. Ainsi, $z = x + iy$, x et y étant réels, est racine carrée de Z si, et seulement si :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a & (1) \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} & (2) \\ 2xy = b & (3) \end{cases}$$

Les relations (1) et (2) donnent :

$$x^2 = \frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2 + b^2}\right) \quad \text{et} \quad y^2 = \frac{1}{2}\left(-a + \sqrt{a^2 + b^2}\right). \qquad (4)$$

- Si $b = 0$ et $a > 0$, les deux racines carrées sont $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.
- Si $b = 0$ et $a < 0$, les deux racines carrées sont $i\sqrt{-a}$ et $-i\sqrt{-a}$.
- Si $b \neq 0$, x et y sont déterminés par les relations (4) et sont de même signe si $b > 0$ (d'après (3)), et de signe contraire si $b < 0$.

Exemple

Les racines carrées de $-7 - 24i$ sont de la forme $x + iy$, avec x et y réels et sont déterminées par :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -7 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{49 + 576} = 25 \\ 2xy = -24, \end{cases}$$

d'où :
$$x^2 = 9, \quad y^2 = 16 \quad \text{et} \quad xy < 0.$$

$3 - 4i$ et $-3 + 4i$ sont donc les racines carrées de $-7 - 24i$.

■ Exercice résolu

En exprimant de deux manières différentes les racines carrées de $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$, *calculer* $\cos\frac{\pi}{8}$ *et* $\sin\frac{\pi}{8}$.

1° $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$. Les racines carrées de $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$ sont donc $\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}$ et $-\cos\frac{\pi}{8} - i\sin\frac{\pi}{8}$.

2° $x + iy$, avec x et y réels, est racine carrée de $\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{i}{\sqrt{2}}$ si, et seulement si :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ x^2 + y^2 = 1 \\ 2xy = \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \end{cases}$$

d'où : $$x^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 1\right) = \frac{2+\sqrt{2}}{4}, \quad y^2 = \frac{2-\sqrt{2}}{4} \quad \text{et} \quad xy > 0.$$

D'après le résultat précédent, on a donc :

$$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, \qquad \sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

- **Exercices d'application**

42. Calculer les racines carrées des nombres complexes suivants :

$$i;\ 1+i;\ 9+40i;\ 7-24i;\ 4i-3;$$
$$\frac{1+i}{1-i};\ -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2};\ \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{15}}{2}.$$

43. Calculer les racines cubiques des nombres complexes suivants :

$$-i;\ 1+i;\ 2+11i;\ 4\sqrt{2}(-1+i).$$

44. Démontrer que :

$$\frac{(1+i)^n - (1-i)^n}{i} = 2^{\frac{n+2}{2}} \sin n\frac{\pi}{4},$$

où n est un entier.

45. Déterminer les racines quatrièmes de $\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}$. En déduire $\cos\dfrac{\pi}{24}$ et $\cos\dfrac{\pi}{12}$.

46. Résoudre sur $\mathbb{C}$ les équations :

$$z^4 = 3 + 4i; \quad z^5 + 1 = 0;$$
$$\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^3 + \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^2 + \left(\frac{z-i}{z+i}\right) + 1 = 0;$$
$$\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^4 = \frac{1+ia}{1-ia}, \quad \text{où } a \text{ est réel};$$
$$(z-i)^n - (z+i)^n = 0;$$
$$\left(1 + \frac{iz}{n}\right)^n + \left(1 - \frac{iz}{n}\right)^n = 0.$$

47. Calculer :

$$S = \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7};$$
$$S' = \sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{6\pi}{7}.$$

(On pourra considérer $S + iS'$.)

VII – ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ

FORME CANONIQUE D'UN TRINÔME DU SECOND DEGRÉ

Considérons le trinôme du second degré $az^2 + bz + c$, où a est un nombre complexe *non nul* et b et c deux nombres complexes quelconques.

Pour tout complexe z, on a :

$$az^2 + bz + c = a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right].$$

Par suite : $$\boldsymbol{az^2 + bz + c = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]} \tag{1}$$

Le second membre de cette égalité est appelé **forme canonique** du trinôme $az^2 + bz + c$.

RÉSOLUTION SUR $\mathbb{C}$ DE L'ÉQUATION $az^2 + bz + c = 0$

Dans cette équation, a, b, c sont des nombres complexes donnés et a n'est pas nul. Désignons par d une racine carrée complexe de $b^2 - 4ac$. La relation (1) s'écrit : 1

$$az^2 + bz + c = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{d^2}{4a^2}\right]$$
$$= a\left(z + \frac{b}{2a} - \frac{d}{2a}\right)\left(z + \frac{b}{2a} + \frac{d}{2a}\right).$$

Ainsi, la résolution de $az^2 + bz + c = 0$ se ramène à celle de :

$$a\left(z + \frac{b-d}{2a}\right)\left(z + \frac{b+d}{2a}\right) = 0.$$

Or, pour qu'un produit de nombres complexes soit nul il faut et il suffit qu'au moins un des nombres complexes soit nul, donc les solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ sont $\frac{-b+d}{2a}$ et $\frac{-b-d}{2a}$. Elles sont égales si $d = 0$ et distinctes sinon.

On peut donc énoncer :

Soit a, b, c des nombres complexes tels que $a \neq 0$.

L'équation $az^2 + bz + c = 0$ a pour solutions :

$$z_1 = \frac{-b+d}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b-d}{2a},$$

où d désigne une racine carrée de $\Delta = b^2 - 4ac$.

- **Si $b^2 - 4ac \neq 0$, alors $z_1 \neq z_2$.**
- **Si $b^2 - 4ac = 0$ alors $z_1 = z_2 = -\frac{b}{2a}$; on dit que l'équation a une racine double.**

Le complexe $\Delta = b^2 - 4ac$ est appelé le **discriminant** de l'équation $az^2 + bz + c = 0$.

REMARQUES :

1. En effectuant la somme et le produit des racines z_1 et z_2 de l'équation $az^2 + bz + c = 0$, on obtient :

$$z_1 + z_2 = \frac{-b}{a} \quad \text{et} \quad z_1 z_2 = \frac{c}{a}.$$

Réciproquement, si a, b, c sont trois nombres complexes donnés ($a \neq 0$) et si les nombres complexes u_1 et u_2 satisfont $u_1 + u_2 = \frac{-b}{a}$ et $u_1 u_2 = \frac{c}{a}$, alors u_1 et u_2 sont les solutions de l'équation :

$$az^2 + bz + c = 0.$$

En effet, $a(z - u_1)(z - u_2) = 0$ admet pour solutions u_1 et u_2.

Or
$$a(z - u_1)(z - u_2) = a(z^2 - (u_1 + u_2)z + u_1 u_2)$$
$$= az^2 + bz + c.$$

2. Si, dans l'équation $b = 2b'$, alors $d^2 = 4(b'^2 - ac) = 4d'^2$, où $d'^2 = b'^2 - ac$, d' étant une racine carrée de $\Delta' = b'^2 - ac$. On a alors :

$$z_1 = \frac{-b' + d'}{a}, \qquad z_2 = \frac{-b' - d'}{a}.$$

Le nombre complexe $\Delta' = b'^2 - ac$ est appelé le **discriminant réduit** de l'équation $az^2 + bz + c = 0$.

RÉSOLUTION SUR $\mathbb{C}$ D'UNE ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ À COEFFICIENTS *RÉELS*

Si les coefficients a, b, c sont des nombres réels ($a \neq 0$), le discriminant Δ de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ est réel. S'il est positif, ses racines carrées sont $\sqrt{\Delta}$ et $-\sqrt{\Delta}$, et s'il est négatif, ses racines carrées sont $\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}$ et $-\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}$.

Il résulte alors de l'étude précédente :

Pour toute équation $az^2 + bz + c = 0$, où a est un réel non nul et b, c deux réels quelconques :

- **Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, l'équation admet deux solutions réelles distinctes :**

$$\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- **Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, elle admet une seule solution : $\dfrac{-b}{2a}$, réelle.**

- **Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, elle admet deux solutions complexes conjuguées :**

$$\frac{-b+\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}, \qquad \frac{-b-\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

■ Exercices résolus

1. *Résoudre sur* $\mathbb{C}$: $z^2 - 2z\cos\varphi + 1 = 0$.
Calculons le discriminant réduit : $\Delta' = \cos^2\varphi - 1 = -\sin^2\varphi$.
Les solutions sont donc : $\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$ et $\cos\varphi - \mathrm{i}\sin\varphi$.

2. *Résoudre sur* $\mathbb{C}$: $3x^2 + 2x + 2 = 0$.
Calculons le discriminant réduit : $\Delta' = 1 - 6 = -5 = (\mathrm{i}\sqrt{5})^2$.
Les solutions sont donc : $\dfrac{-1+\mathrm{i}\sqrt{5}}{3}$ et $\dfrac{-1-\mathrm{i}\sqrt{5}}{3}$.

Résolution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $a\cos x + b\sin x = c$ où a, b, c sont des réels donnés

On pose $z = \cos x + \mathrm{i}\sin x$; on a alors $\dfrac{1}{z} = \cos x - \mathrm{i}\sin x$, donc :

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \quad \text{et} \quad \sin x = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(z - \frac{1}{z}\right).$$

On est alors ramené à résoudre l'équation :

$$a\left(z + \frac{1}{z}\right) + \frac{b}{\mathrm{i}}\left(z - \frac{1}{z}\right) = 2c$$

avec la condition $|z| = 1$, c'est-à-dire à résoudre l'équation du second degré :

$$(a - b\,\mathrm{i})z^2 - 2cz + a + \mathrm{i}b = 0$$

avec la condition $|z| = 1$.

On cherche alors les racines carrées de $\Delta' = c^2 - (a - \mathrm{i}b)(a + \mathrm{i}b) = c^2 - a^2 - b^2$. (A noter que Δ' est réel.) On termine la résolution de l'équation du second degré. On remarque que le produit des racines est $\dfrac{a+\mathrm{i}b}{a-\mathrm{i}b}$, et que ce complexe est de module 1. Ainsi, si l'une des racines a un module différent de 1, l'autre a aussi un module différent de 1.

Exemples

- $\cos x + 3 \sin x = 1{,}8$. Posons : $z = \cos x + \mathrm{i} \sin x$. On est ramené à l'équation :

$$\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) - 3\,\frac{\mathrm{i}}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right) = 1{,}8,$$

soit :

$$(1 - 3\,\mathrm{i})z^2 - 3{,}6z + 1 + 3\,\mathrm{i} = 0.$$

Calculons le discriminant :

$$\Delta' = (1{,}8)^2 - (1 - 3\,\mathrm{i})(1 + 3\,\mathrm{i}) = (1{,}8)^2 - 10 = (2{,}6\,\mathrm{i})^2.$$

D'où :

$$z_1 = \frac{1{,}8 + 2{,}6\,\mathrm{i}}{1 - 3\,\mathrm{i}} = \frac{(1{,}8 + 2{,}6\,\mathrm{i})(1 + 3\,\mathrm{i})}{(1 - 3\,\mathrm{i})(1 + 3\,\mathrm{i})} = \frac{-6 + 8\,\mathrm{i}}{10},$$

$$z_2 = \frac{1{,}8 - 2{,}6\,\mathrm{i}}{1 - 3\,\mathrm{i}} = \frac{(1{,}8 - 2{,}6\,\mathrm{i})(1 + 3\,\mathrm{i})}{(1 - 3\,\mathrm{i})(1 + 3\,\mathrm{i})} = \frac{9{,}6 + 2{,}8\,\mathrm{i}}{10}.$$

On vérifie que z_1 et z_2 sont de module 1. Ceci est le cas dès que $\Delta' \leqslant 0$. Ce cas correspond à : $\left|\dfrac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right| \leqslant 1$ (voir partie V, page 74).

Les solutions de l'équation sont définies par :

$$\cos x = -0{,}6 \quad \text{et} \quad \sin x = 0{,}8$$

ou

$$\cos x = 0{,}96 \quad \text{et} \quad \sin x = 0{,}28$$

On les détermine, modulo 2π, à l'aide de tables trigonométriques ou d'une calculatrice :

$$x \approx 2{,}2143 + k2\pi, \qquad x \approx 0{,}2838 + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

- $\cos x + 3 \sin x = 4$. Posons $z = \cos x + \mathrm{i} \sin x$. On est ramené à l'équation :

$$(1 - 3\,\mathrm{i})z^2 - 8z + 1 + 3\,\mathrm{i} = 0.$$

Calculons le discriminant : $\quad \Delta' = 16 - (1 - 3\,\mathrm{i})(1 + 3\,\mathrm{i}) = 6.$

Les racines de l'équation du second degré sont :

$$z_1 = \frac{4 + \sqrt{6}}{1 - 3\,\mathrm{i}} = \frac{(4 + \sqrt{6})(1 + 3\,\mathrm{i})}{10}, \qquad z_2 = \frac{(4 - \sqrt{6})(1 + 3\,\mathrm{i})}{10}.$$

On remarque que : $|z_1| > 1$ et $|z_2| < 1$. L'équation $\cos x + 3 \sin x = 4$ n'a donc pas de solution. Ce cas correspond à $\left|\dfrac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right| > 1$ (voir partie V, page 74).

• Exercices d'application

48. Soient z, z', u des nombres complexes tels que $u^2 = zz'$. Montrer que :

$$|z| + |z'| = \left|\frac{z + z'}{2} - u\right| + \left|\frac{z + z'}{2} + u\right|.$$

(Interprétation géométrique.)

49. Trouver tous les couples de complexes (z, z') tels que $\sqrt{|zz'|} = \left|\dfrac{z + z'}{2}\right|$. Remarquer que cette relation est conservée par similitude et supposer $|zz'| = 1$.

50. Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct, on considère les points A_k $(0 \leqslant k < n)$ d'affixes :

$$z_k = a\left(\cos \frac{2k\pi}{n} + \mathrm{i} \sin \frac{2k\pi}{n}\right) \quad (a > 0)$$

et le point M d'affixe :

$$z = r(\cos \theta + \mathrm{i} \sin \theta) \quad (r > 0).$$

a) Démontrer que :

$$z^n - a^n = (z - a)(z - z_1) \dots (z - z_{n-1}).$$

b) De la relation trouvée pour $a = 1$, déduire :

$$\sin \frac{\pi}{n} \sin \frac{2\pi}{n} \dots \sin \frac{(n-1)\pi}{n} = n2^{1-n},$$

et $$\sin \frac{\pi}{2n} \sin \frac{2\pi}{2n} \dots \sin \frac{(n-1)\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.$$

51. Résoudre sur $\mathbb{C}$:

a) $z^2 - (3 + 2\mathrm{i})z + 5 + \mathrm{i} = 0$;

b) $z^2 - 2\mathrm{i}z - \mathrm{i}\sqrt{3} = 0$;

c) $\mathrm{i}z^2 + (1 - 5\mathrm{i})z + 6\mathrm{i} - 2 = 0$;

d) $\mathrm{i}z^2 + (4\mathrm{i} - 3)z + \mathrm{i} - 5 = 0$;

e) $(1 + \mathrm{i})z^2 - (5 + \mathrm{i})z + 6 + 4\mathrm{i} = 0$;

f) $(1 - \mathrm{i})z^2 - 2z - 11 + 3\mathrm{i} = 0$.

52. Résoudre sur $\mathbb{C}$:

a) $z^4 + z^2 + 1 = 0$; *b*) $z^8 + z^4 + 1 = 0$;

c) $z^4 - 2(1 + \mathrm{i}a^2)z^2 + 1 - a^4 = 0$, où a est réel.

53. Soit $\mathrm{j} = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Calculer :

$$(x + y + z)(x + y\mathrm{j} + z\mathrm{j}^2)(x + y\mathrm{j}^2 + z\mathrm{j}).$$

54. Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation :

$$4z^2 + 8|z^2| - 3 = 0.$$

Mettre sous forme trigonométrique la somme de deux solutions quelconques.

55. Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^3 + (2\mathrm{i} - 11)z^2 + (25 - 19\mathrm{i})z - 8(1 - 3\mathrm{i}) = 0,$$

sachant qu'elle admet une racine réelle.

56. Résoudre sur $\mathbb{C}$:

a) $x^4 - x^3 - x + 1 = 0$;

b) $1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + \ldots + 2x^{n-1} + x^n = 0$.

57. *1°* Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(z^2 - 4z + 5) + \mathrm{i}(z + 1) = 0.$$

2° Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(z^2 - 4z + 5)^2 + (z + 1)^2 = 0.$$

3° En déduire qu'il existe des réels A, B, C, D qu'on déterminera, tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (x^2 - 4x + 5)^2 + (x + 1)^2 = (x^2 + Ax + B)(x^2 + Cx + D).$$

TRAVAUX PRATIQUES

PROGRAMMATION

1° On considère un nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$, où x et y sont réels, et un entier naturel n. Programmer le calcul de $(x + \mathrm{i}y)^n$ en utilisant les fonctions de conversion coordonnées rectangulaires-coordonnées polaires, coordonnées polaires-coordonnées rectangulaires.

Réponse (TI-62)

$\boxed{\text{CP}}$	efface les programmes antérieurs
$\boxed{\text{LRN}}$	met en mode programme
$\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{\text{P}\rightleftarrows\text{R}}$	mode de conversion en coordonnées polaires
$\boxed{\text{RCL}}$ 1 $\boxed{x\rightleftarrows t}$ $\boxed{\text{RCL}}$ 2	entre x et y
$\boxed{=}$ $\boxed{y^x}$ $\boxed{\text{RCL}}$ 0 $\boxed{=}$ $\boxed{\text{STO}}$ 3	calcule r puis r^n et place r^n dans la mémoire 3
$\boxed{x\rightleftarrows t}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{\text{RCL}}$ 0 $\boxed{=}$ $\boxed{\text{STO}}$ 4	calcule θ, puis $n\theta$ et place $n\theta$ dans la mémoire 4
$\boxed{\text{P}\rightleftarrows\text{R}}$	mode de conversion en coordonnées cartésiennes
$\boxed{\text{RCL}}$ 3 $\boxed{x\rightleftarrows t}$ $\boxed{\text{RCL}}$ 4	entre r^n et $n\theta$
$\boxed{=}$ $\boxed{\text{R/S}}$	calcule Re (z^n)
$\boxed{x\rightleftarrows t}$ $\boxed{\text{R/S}}$	calcule Im (z^n)
$\boxed{\text{RST}}$	place le pointeur en 0 pour l'exécution
$\boxed{\text{LRN}}$	exécution : calcul de $(2 + \mathrm{i})^{18} = A + \mathrm{i}B$
2 $\boxed{\text{STO}}$ 1 1 $\boxed{\text{STO}}$ 2 18 $\boxed{\text{STO}}$ 0	entre 2, 1, 18 dans les mémoires 1, 2, 0
$\boxed{\text{R/S}}$	affiche $A = -922\,077$
$\boxed{\text{R/S}}$	affiche $B = 1\,721\,764$

2° *Calculer* $(3+2i)^{12}$, $(-3+2i)^{15}$, $(1-i)^{20}$, $(1-2i)^{11}$, $(3-4i)^{17}$, $(\sqrt{2}+i)^{16}$.

3° *Montrer que le programme du 1° s'applique lorsque l'entier n est négatif.*

Calculer $(4-3i)^{-5}$, $(1+2i)^{-12}$, $\left(-\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i\right)^{-18}$, $\left(\frac{\sqrt{3}}{7}-\frac{1}{9}i\right)^{-13}$.

4° *Montrer que le programme du 1° permet de calculer une racine n-ième de z. L'utiliser pour traiter les exercices* **42, 43, 45.**

CONSTRUCTION D'UN PENTAGONE RÉGULIER À LA RÈGLE ET AU COMPAS

1° *On pose* $\omega_1 = e^{i\frac{2\pi}{5}}$. *Déterminer l'équation du second degré qui admet* $\alpha = \omega_1 + \omega_1^4$ *et* $\beta = \omega_1^2 + \omega_1^3$ *pour solutions.*

2° *Considérer le pentagone régulier dont les sommets sont les images des racines cinquièmes de l'unité :* $A(1)$, $M(\omega_1)$, $N(\omega_1^2)$, $P(\omega_1^3)$, $Q(\omega_1^4)$.

Soit H le point d'intersection de x'Ox avec (MQ). Montrer que $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = 2\overrightarrow{OH}$.

En déduire que $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$. *Montrer que* $\cos\frac{4\pi}{5} = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$.

3° *B étant le point d'affixe* i, *le cercle de centre* Ω, *d'affixe* $-\frac{1}{2}$, *passant par B, rencontre x'Ox en I et J.*

Montrer que $\overline{OI}\,.\,\overline{OJ} = -1$ *et* $\overline{OI} + \overline{OJ} = -1$.

4° *En déduire une construction à la règle et au compas d'un pentagone régulier.*

RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DU 3e DEGRÉ

1° *Soit l'équation* $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, *où a, b, c, d sont des nombres complexes tels que* $a \neq 0$.

On pose $z = x + \frac{b}{3a}$.

Montrer qu'on se ramène ainsi à la résolution d'une équation du type $z^3 + pz + q = 0$ (1), *où p et q sont des nombres complexes.*

Montrer que l'équation (1) admet au moins une racine réelle lorsque p et q sont réels.

2° *z étant un nombre complexe satisfaisant (1), on pose* $z = u + v$, *avec* $3uv + p = 0$. *Montrer que* u^3 *et* v^3 *sont les racines* y_1 *et* y_2 *d'une équation du second degré que l'on formera. Comment faut-il associer les racines cubiques de* y_1 *et* y_2 *pour que leur somme soit racine de (1)?*

Effectuer les calculs lorsque p et q sont réels (distinguer les cas $4p^3 + 27q^2 > 0$ *et* $4p^3 + 27q^2 < 0$).

Retrouver les formules de Cardan *(page 49)*.

Résoudre sur $\mathbb{C}$ *les équations* $x^3 - 2x - 12 = 0$ *et* $x^3 - 15x - 4 = 0$.

3° α, β, γ *désignant les racines de (1), démontrer que* $z = (\alpha + \beta j + \gamma j^2)^3$, *où* $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, *ne prend que deux valeurs* z_1 *et* z_2 *lorsque l'on permute* α, β, γ *de toutes les manières possibles.*

Former l'équation du second degré admettant z_1 *et* z_2 *pour racines. En déduire une méthode de résolution de (1). Effectuer les calculs lorsque p et q sont réels.*

4° a) *En exprimant* $\cos 3\alpha$ *comme polynôme en* $\cos\alpha$, *montrer que l'équation* $\cos 3\alpha = a$ *se ramène à une équation du troisième degré du type* $x^3 + px + q = 0$, *avec* $4p^3 + 27q^2 < 0$, *lorsque l'on suppose* $|a| < 1$.

b) *Réciproquement, étant donnés deux réels p et q tels que* $4p^3 + 27q^2 < 0$, *montrer qu'il existe des réels* ρ *et* φ *tels que (1) admette pour racines :* $\rho\cos\varphi$, $\rho\cos\left(\varphi + \frac{2\pi}{3}\right)$, $\rho\cos\left(\varphi + \frac{4\pi}{3}\right)$. *Calculer* ρ *et* $\cos 3\varphi$ *en fonction de p et q. Résoudre sur* $\mathbb{C}$ *l'équation* $x^3 - 4x + 1 = 0$.

EXERCICES ET PROBLÈMES

CALCULS DANS $\mathbb{C}$

58. Soit $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes et i un nombre complexe tel que $i^2 = -1$.

1° Calculer $\left(\frac{1}{2} + i\sqrt{3}\right)^4$.

2° Déterminer les nombres réels a, b tels que :

$$(a + ib)^4 = \frac{73}{16} - \frac{11}{2}\sqrt{3}\,i.$$

59. Dans cet exercice, Z désigne le nombre complexe :

$$\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}.$$

1° Vérifier que $Z^5 - 1 = 0$. En déduire la relation :

$$1 + Z + Z^2 + Z^3 + Z^4 = 0.$$

2° *a*) Exprimer Z, Z^2, Z^3, Z^4 sous forme trigonométrique.

b) Démontrer les égalités :

$$Z + Z^4 = 2\cos\frac{2\pi}{5} \quad \text{et} \quad Z^2 + Z^3 = 2\cos\frac{4\pi}{5}.$$

3° Utiliser les résultats des *1°* et *2°* pour trouver une relation entre $\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\cos\frac{4\pi}{5}$, puis montrer que $\cos\frac{2\pi}{5}$ est racine de l'équation $4x^2 + 2x - 1 = 0$; en déduire la valeur de $\cos\frac{2\pi}{5}$.

60. Soit n un entier strictement positif, θ un réel appartenant à $]0, \pi[$; on pose :

$$S_n = \cos^2\theta + \cos^2\theta\cos 2\theta + \dots + \cos^p\theta\cos p\theta + \dots + \cos^n\theta\cos n\theta,$$

$$S'_n = \cos\theta\sin\theta + \cos^2\theta\sin 2\theta + \dots + \cos^p\theta\sin p\theta + \dots + \cos^n\theta\sin n\theta,$$

$$\Sigma_n = S_n + iS'_n.$$

Montrer que Σ_n est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique complexe, dont on donnera le premier terme et la raison.

En déduire la valeur de Σ_n, puis de S_n en fonction de n et θ.

$\left(\text{On montrera que } S_n = \dfrac{\cos^{n+1}\theta\sin n\theta}{\sin\theta}.\right)$

61. On rappelle que si q est un nombre complexe différent de 1 et n un élément de $\mathbb{N}$:

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Soit t un élément de $[0, \pi]$; on pose pour n élément de $\mathbb{N}^*$:

$$C_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \cos kt \quad \text{et} \quad S_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \sin kt.$$

1° Calculer le nombre complexe $C_n(t) + iS_n(t)$.

2° En déduire :

si $t = 0$, $\quad C_n(0) = n$;

si $t \in]0, \pi]$, $\quad C_n(t) = \dfrac{\sin\frac{nt}{2}\cos\frac{(n+1)t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}$.

62. Calculer :

$$A = C_n^0 + C_n^1\cos x + C_n^2\cos 2x + \dots + C_n^n\cos nx,$$

$$B = C_n^1\sin x + C_n^2\sin 2x + \dots + C_n^n\sin nx.$$

(Considérer $A + iB$ et poser $z = \cos x + i\sin x$.)

63. Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de nombres complexes définie par la donnée de $z_0 = 2\sqrt{2}(-1 + i)$ et les conditions suivantes : pour tout entier naturel n, un représentant de l'argument de z_{n+1} appartient à l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ et $z_{n+1}^4 = z_n$.

1° Déterminer le module et un argument de z_1.

2° On pose $r_n = |z_n|$ et $v_n = \ln r_n$, où $\ln r_n$ désigne le logarithme népérien de r_n. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.

IMAGE D'UN NOMBRE COMPLEXE

64. On donne $Z = \dfrac{1}{(4 - z)(2 - iz)}$. Soit M l'image du nombre complexe z, dans un repère orthonormal. Construire l'ensemble des points M tels que Z soit un réel.

65. Le plan complexe $\mathscr{P}$ étant rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère :

- le point M d'affixe $z = x + iy$, x et y réels;
- le point M' d'affixe $z' = x + 4iy$;
- le point A d'affixe -7;
- le point B d'affixe 5.

1° Quelles conditions doit vérifier z pour que l'on ait $M \neq A$ et $M' \neq B$?

Ces conditions étant remplies, on appelle $\mathscr{D}$ la droite contenant les points A et M et $\mathscr{D}'$ la droite contenant les points B et M'.

2° Montrer que $\mathscr{D}$ est parallèle à $\mathscr{D}'$ si, et seulement si, $\dfrac{z + 7}{z' - 5} \in \mathbb{R}^*$.

En déduire l'ensemble C_1 des points M tels que les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ soient parallèles. Construire C_1.

3° Déterminer, de la même manière, l'ensemble C_2 des points M tels que les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ soient perpendiculaires. Construire C_2.

66. Soit $\mathscr{P}$ un plan rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.
M est un point quelconque de $\mathscr{P}$, d'affixe $z = x + iy$.
Déterminer l'ensemble des points M de $\mathscr{P}$ tels que :

$$|(1 + i)\bar{z} - 2i| = 2.$$

67. Le conjugué d'un élément z de $\mathbb{C}$ est noté $\bar{z}$. Soit E l'ensemble des éléments u de $\mathbb{C}$ tels que :

$$u + \bar{u} + u\bar{u} = 0.$$

Représenter l'ensemble des images des éléments de E dans le plan complexe.

68. On considère, dans $\mathbb{C}$, les complexes z_1 et z_2 de module 1 et d'arguments respectifs α et β.
1° Montrer que $\dfrac{(z_1 + z_2)^2}{z_1 z_2}$ est un réel positif ou nul. Dans quel cas est-il nul?
2° Soit deux points A et B d'un plan complexe d'origine O d'affixes respectives a et b (on supposera O, A et B non alignés).
Calculer en fonction de a et b l'affixe z du point I barycentre de $(A, |b|)$ et $(B, |a|)$.
3° A l'aide du *1°*, montrer que $\dfrac{z^2}{ab}$ est un réel strictement positif.
Exprimer arg z en fonction de arg a et arg b. En déduire que $\overrightarrow{OI}$ est un vecteur directeur de la bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$.

69. Soit $\mathscr{P}$ un plan orienté muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. A tout point P de $\mathscr{P}$ on associe son affixe complexe p.
Soit $1, j, j^2$ les racines cubiques de l'unité, où :

$$j = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}.$$

On se propose d'étudier la propriété (E) suivante, relative à un triplet (A, B, C) de points de $\mathscr{P}$:
(E) : les affixes a, b, c des points A, B, C satisfont :

$$a + bj + cj^2 = 0.$$

1° $T_{\vec{v}}$ une translation de vecteur $\vec{v}$ définie dans $\mathscr{P}$. Montrer que si le triplet (A, B, C) a la propriété (E), il en est de même de $(T_{\vec{v}}(A), T_{\vec{v}}(B), T_{\vec{v}}(C))$.
2° Soit un triangle équilatéral dont les sommets A, B, C sont disposés de sorte qu'une mesure de l'angle $\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}$ soit $\dfrac{\pi}{3}$. Montrer que (A, B, C) a la propriété (E).
3° Caractériser géométriquement la propriété (E).

***70.** Soit $\mathscr{P}$ un plan rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. On rappelle qu'à tout point M du plan de coordonnées (x, y) on peut associer le nombre complexe $z = x + iy$ appelé affixe du point M.
Soit A, B, C, D quatre points du plan d'affixes respectives z_1, z_2, z_3, z_4.
1° Montrer que le quadrilatère (A, B, C, D) est un carré si, et seulement si, les nombres complexes z_1, z_2, z_3, z_4 vérifient les relations :

$$\begin{cases} z_2 - z_1 = z_3 - z_4 \\ z_3 - z_1 = \pm i(z_4 - z_2). \end{cases}$$

2° Montrer, alors, que l'affixe z_0 du point I, intersection de (AC) et (BD), vérifie :

$$(z_1 - z_0)^4 = (z_2 - z_0)^4 = (z_3 - z_0)^4 = (z_4 - z_0)^4.$$

3° Construire le carré, dans le cas où $z_0 = 1 + i$ et $z_1 + z_2 = 0$.
Déterminer les affixes z_1, z_2, z_3, z_4 dans ce cas.

71. On donne le nombre complexe u :

$$u = \sqrt{2 - \sqrt{2}} - i\sqrt{2 + \sqrt{2}} \quad (i^2 = -1).$$

1° Calculer u^2 et u^4. Calculer le module et l'argument de u^4. En déduire le module et l'argument de u.
2° On considère un plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormal. A tout point M de coordonnées (x, y) dans $\mathscr{P}$, on associe son affixe $z = x + iy$.
Déterminer l'ensemble des points M de $\mathscr{P}$ pour lesquels le module du produit uz est égal à 8.

72. *1°* Quel est l'ensemble des nombres complexes z vérifiant $|z - 1| = |\bar{z} + 1|$? Expliquer géométriquement le résultat trouvé, en considérant un plan orienté rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ et en associant à tout point $M(x, y)$ du plan son affixe z, c'est-à-dire le nombre complexe défini par $z = x + iy$.
2° Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z vérifiant $(z - 1)^n = (\bar{z} + 1)^n$.

73. Soit $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes et f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{1}{2}z + \frac{i}{2}\bar{z} \quad (\bar{z} \text{ est le conjugué de } z).$$

1° Préciser l'application $f \circ f$ et déterminer les ensembles I_f et N_f suivants :

$$I_f = \{z \in \mathbb{C} / f(z) = z\}; \quad N_f = \{z \in \mathbb{C} / f(z) = 0\}.$$

2° Soit $\mathscr{P}$ le plan rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$. A chaque nombre complexe on associe son point image dans $\mathscr{P}$. Soit F l'application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui, au point M image de z, associe le point M' image de $f(z)$.
a) Préciser $F \circ F$ et déterminer les ensembles $\mathscr{D}$ et Δ suivants :

$$\mathscr{D} = \{M \in \mathscr{P} / F(M) = M\}; \quad \Delta = \{M \in \mathscr{P} / F(M) = 0\}.$$

b) Démontrer que, pour tout point M de $\mathscr{P}$, le point $F(M)$ appartient à $\mathscr{D}$ et que, pour tout point M de $\mathscr{P}$ n'appartenant pas à $\mathscr{D}$, la droite $(M, F(M))$ est parallèle à Δ. En déduire la nature de F.

74. On désigne par $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes et par $\bar{z}$ le conjugué de z.
Soit f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f(z) = \bar{z}^3$.
1° Quel est l'ensemble des nombres z tels que $f(z) = \bar{z}$?
2° Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ on désigne par M et M' les points d'affixes respectives z et $f(z)$. Quel est l'ensemble des points M tels que le triangle MOM' soit rectangle en O? Quel est l'ensemble des points M tels que M, O et M' soient alignés?

3° Déterminer l'ensemble des nombres complexes images par f des nombres complexes de module 1.
4° Déterminer et représenter dans le plan complexe les points M, d'affixe z telle que $f(z) = \mathrm{i}$.

75. Soit f l'application de $E = \mathbb{C} \setminus \{-\mathrm{i}\}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$z \mapsto f(z) = \frac{iz}{z+i}.$$

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on note M le point d'affixe z.
1° Déterminer les coordonnées du point B dont l'affixe z_0 est telle que $f(z_0) = 1 + 2\mathrm{i}$.
2° Soit z un élément de E. On note r le module de $z + \mathrm{i}$ et α une mesure de son argument.
Exprimer la forme trigonométrique de $f(z) - \mathrm{i}$ en fonction de r et de α.
3° Soit A le point d'affixe $-\mathrm{i}$.
a) Déterminer l'ensemble $\mathscr{C}$ des points M vérifiant :

$$|f(z) - \mathrm{i}| = \sqrt{2}$$

et l'ensemble $\mathscr{D}$ des points M tels que $\frac{\pi}{4}$ soit une mesure de l'argument de $f(z) - \mathrm{i}$.
b) Montrer que B appartient à $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ et construire $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$.

RACINES n-ième DE L'UNITÉ

76. 1° Déterminer, sous forme trigonométrique, les solutions de l'équation :

$$z^3 = 4\sqrt{2}(-1 + \mathrm{i})$$

dans l'ensemble des nombres complexes.
2° En utilisant les racines cubiques de l'unité, écrire les solutions de cette équation sous forme algébrique.
3° Déduire des questions précédentes les valeurs de $\cos \frac{11\pi}{12}$ et $\sin \frac{11\pi}{12}$.

77. 1° Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $z^6 = -1$, où z est l'inconnue.
2° Mettre le polynôme $x^6 + 1$ sous la forme d'un produit de trois polynômes à coefficients réels.

78. Soit n un entier naturel non nul, q un réel distinct de 0, de 1 et de -1.
On considère, dans le plan complexe, n points $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$, d'affixes respectives $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$.
1° Démontrer que le système de n points pondérés :

$$\{(A_k, q^k), 0 \leqslant k \leqslant n-1\}$$

admet un barycentre G_n.
2° On donne :

$$z_0 = 1$$
$$z_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{n}$$
$$\forall k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}, \quad z_k = (z_1)^k.$$

a) Déterminer l'affixe Z_n de G_n à l'aide de q et z_1.
b) Calculer la partie réelle X_n et la partie imaginaire Y_n de Z_n.

On rappelle que :

$$X_n = \frac{Z_n + \overline{Z}_n}{2}, \quad Y_n = \frac{Z_n - \overline{Z}_n}{2\mathrm{i}}.$$

3° *a)* Comment faut-il choisir n pour que Z_n soit réel?
b) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} X_n$, $\lim\limits_{n \to +\infty} Y_n$.

79. 1° Résoudre, dans le corps des nombres complexes, l'équation $z^{12} = 1$. Donner les solutions sous forme trigonométrique puis algébrique.
2° u désignant un nombre complexe différent de 1, calculer au moyen des seuls u^{n+1} et u :

$$1 + u + u^2 + \ldots + u^n.$$

3° Donner les solutions de l'équation $z^8 + z^4 + 1 = 0$, par exemple en utilisant les questions précédentes.

80. 1° Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^5 = -\mathrm{i}$.
On précisera le module et l'argument des racines et on représentera leurs images dans le plan complexe.
2° Calculer la somme des racines et interpréter géométriquement ce résultat en introduisant l'isobarycentre de leurs images.
3° Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$1 + \mathrm{i}z - z^2 - \mathrm{i}z^3 + z^4 = 0.$$

(On se ramènera à l'équation précédente, en calculant une somme de la forme $1 + k + k^2 + k^3 + k^4$.)

81. 1° Écrire sous forme trigonométrique les racines cubiques du nombre complexe $a = 16(1 - \mathrm{i})$.
2° Pour λ nombre réel quelconque, on pose :

$$z_\lambda = 1 + \mathrm{i} + 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda} = x_\lambda + \mathrm{i}y_\lambda.$$

a) Calculer les réels x_λ et y_λ en fonction de λ.
b) Déterminer l'ensemble (C) des points M_λ de coordonnées (x_λ, y_λ) quand λ décrit $[0, 2\pi[$.
3° Montrer que les solutions de l'équation :

$$(z - (1 + \mathrm{i}))^3 = a$$

sont les affixes de points de (C).

82. 1° Exprimer les racines z_k dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^5 = 1$ en fonction des nombres $\theta_k = \frac{2k\pi}{5}$, où $k \in [0, 4]$.
2° Quelle est la nature du polygone dont les sommets A_k ont pour affixe z_k? Déterminer l'isobarycentre des points A_k. En déduire une équation du second degré à coefficients entiers satisfaite par $a = \cos\frac{2\pi}{5}$.
3° Résoudre cette équation; calculer $\cos\frac{2\pi}{5}$, $\cos\frac{4\pi}{5}$, $\cos\frac{\pi}{5}$ et $\cos\frac{8\pi}{5}$.
4° A tout nombre complexe u, différent de -1, on associe $z = \frac{u-1}{u+1}$. Calculer u en fonction de z.
5° A l'aide des résultats précédents, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(u - 1)^5 = (u + 1)^5$.
Dessiner les affixes des racines.

6° Expliquer ce dernier résultat en déterminant l'ensemble E des points M dont l'affixe est telle que $\left|\dfrac{u-1}{u+1}\right| = 1$.

ÉQUATIONS

83. Dans le corps des complexes, résoudre l'équation :

$$iz^2 - 2\bar{z} + 2 - i = 0,$$

où z est l'inconnue et $\bar{z}$ le conjugué de z.

84. Soit le polynôme $P(z) = z^3 - 4x + \lambda$, où z désigne un nombre complexe et où λ est un nombre réel.
1° Montrer que si $P(z) = 0$ admet une solution complexe z_0, alors $\bar{z}_0$ est aussi solution. En déduire que l'équation $P(z) = 0$ admet au moins une solution réelle, sans chercher à résoudre l'équation.
2° Déterminer λ pour que l'équation $P(z) = 0$ admette une racine réelle de module 2. Résoudre l'équation pour la valeur de λ ainsi trouvée.
3° Déterminer λ pour que l'équation $P(z) = 0$ admette une racine complexe de module 2. Résoudre l'équation pour les valeurs de λ ainsi trouvées et préciser le module et l'argument de chaque solution.

85. Le plan est rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit $\mathbb{C}_1$ l'ensemble $\mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$ et f l'application telle que :

$$\forall z \in \mathbb{C}_1, \quad f(x) = \frac{z}{z^2+1}.$$

1° Résoudre l'équation : $f(z) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

2° *a)* Montrer que :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}_1 \times \mathbb{C}_1, \quad f(z) = f(z') \Leftrightarrow z = z' \quad \text{ou} \quad zz' = 1.$$

b) Soit $(z, z') \in \mathbb{C}_1 \times \mathbb{C}_1$ tel que $|z| < 1$ et $|z'| < 1$; montrer que :

$$f(z) = f(z') \Rightarrow z = z'.$$

3° Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $z \in \mathbb{C}_1$ et $f(z)$ soit réel.
4° Dans cette question :

$$z = e^{i\theta}, \quad \theta \in [-\pi, \pi[\setminus \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}.$$

a) Montrer que $f(z)$ est réel, et le calculer en fonction de $\cos \theta$.
b) Soit u la suite réelle telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 1 + f(z) + (f(z))^2 + \dots + (f(z))^n.$$

Pour quelles valeurs de θ cette suite converge-t-elle?

86. On considère l'équation du second degré dans $\mathbb{C}$,

$$z^2 + 2(1 - \cos u)z + 2(1 - \cos u) = 0,$$

u étant un paramètre réel appartenant à l'intervalle $[0, \pi]$.
1° Résoudre cette équation dans $\mathbb{C}$. On notera z_1 et z_2 les solutions.
2° Déterminer le module et l'argument de z_1 et de z_2.

87. θ désigne un nombre réel appartenant à $[0, 2\pi[$.
1° Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z :

$$z^2 - (2^{\theta+1} \cos \theta)z + 2^{2\theta} = 0.$$

Donner chaque solution sous forme trigonométrique.
2° Le plan étant rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B dont les affixes sont les solutions de l'équation précédente.
Déterminer θ de manière à ce que OAB soit un triangle équilatéral.

88. Soit α un nombre réel appartenant à $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.
On considère l'équation d'inconnue complexe z :

$$(E): \quad (1 + iz)^3(1 - i \tan \alpha) = (1 - iz)^3(1 + i \tan \alpha).$$

1° Soit z une solution de (E).
a) Montrer que $|1 + iz| = |1 - iz|$.
b) En déduire que z est réel.
2° *a)* Exprimer $\dfrac{1 + i \tan \alpha}{1 - i \tan \alpha}$ en fonction de $e^{i\alpha}$.
b) Soit z un nombre réel; on pose $z = \tan \varphi$, où $-\dfrac{\pi}{2} < \varphi < \dfrac{\pi}{2}$.
Écrire l'équation portant sur φ traduisant (E) et la résoudre.
c) Déterminer les solutions z_1, z_2, z_3 de (E).

89. $\mathbb{C}$ représente le corps des nombres complexes; θ est un nombre réel donné.
1° Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation en Z :

$$(E): \quad Z^2 - 2Z \cos \theta + 1 = 0.$$

En déduire la résolution, dans $\mathbb{C}$, de l'équation en z :

$$(E'): \quad z^4 - 2z^2 \cos \theta + 1 = 0.$$

(Les racines seront présentées sous forme trigonométrique.)
2° Dans le plan complexe, on considère les images M_1, M_2, M_3 et M_4 des quatre racines de l'équation (E').
Pour quelle valeur de θ $(0 < \theta < \pi)$ ces quatre points sont-ils les sommets d'un carré?
3° Décomposer en un produit de deux facteurs du second degré et à coefficients réels le polynôme en x défini par :

$$f(x) = x^4 - 2x^2 \cos \theta + 1.$$

PROBLÈMES

90. Soit d l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$ ainsi définie :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad z = x + iy,$$
$$d(z) = \text{Inf}\,[y - E(y), E(y+1) - y], \quad x \text{ et } y \text{ réels},$$

où $E(y)$ désigne la partie entière de y.
1° Calculer $d(1)$, $d\left(\dfrac{i}{2}\right)$, $d\left(1 + \dfrac{5i}{4}\right)$.

Donner une interprétation géométrique de l'application d en utilisant dans $\mathscr{P}$ le point M_0 d'affixe z_0 et les droites $\mathscr{D}_0$ et $\mathscr{D}'_0$ d'équations respectives $y = \mathrm{E}(y_0)$ et $y = \mathrm{E}(y_0 + 1)$.

2° On pourra résoudre cette question, soit par le calcul, soit par une méthode géométrique utilisant l'interprétation précédente et, suivant les cas, une symétrie orthogonale ou une translation convenablement choisie. Comparer :

a) pour tout nombre complexe z, $d(-z)$ et $d(z)$;

b) pour tout nombre complexe z et pour tout nombre entier q, $d(z + \mathrm{i}q)$ et $d(z)$;

c) pour tout couple de nombres réels x et y, $d(x + \mathrm{i}y')$ et $d(x + \mathrm{i}y)$ lorsque $y' = 2\mathrm{E}(y) - y + 1$.

Déterminer l'ensemble des valeurs $d(z)$ lorsque z décrit $\mathbb{C}$.

3° Soit δ l'application de $\mathscr{P}$ dans $\mathbb{R}$ qui à tout point M d'affixe $z = x + \mathrm{i}y$ associe le nombre réel $\delta(M) = d(z)$. Définir et représenter graphiquement dans $\mathscr{P}$ l'ensemble des points M tels que $\delta(M) = 0$.

On définit de même une application c de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad z = x + \mathrm{i}y,$$
$$c(z) = \mathrm{Inf}\,[x - \mathrm{E}(x), \mathrm{E}(x+1) - x], \quad x \text{ et } y \text{ réels},$$

et l'application correspondante γ, de $\mathscr{P}$ dans $\mathbb{R}$, qui à tout point M d'affixe $z = x + \mathrm{i}y$ associe le nombre réel $\gamma(M) = c(z)$.

Définir et représenter graphiquement dans $\mathscr{P}$ l'ensemble des points M de $\mathscr{P}$ tels que :

$$\delta(M) = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \gamma(M) = \frac{1}{2}.$$

4° Soit T l'application qui, à tout point M de $\mathscr{P}$ d'affixe z, associe le point M' de $\mathscr{P}$ d'affixe z' telle que :

$$z' = x + \mathrm{i}d(z), \quad \text{avec } x \text{ partie réelle de } z.$$

Soit M_1 d'affixe 1, M_2 d'affixe $1 + \mathrm{i}$ et M_3 le milieu du segment $[M_1, M_2]$; déterminer leurs images par T. T est-elle une application affine de $\mathscr{P}$?

5° On note $I_{a,b}$ l'ensemble des points de $\mathscr{P}$ dont les affixes $z = x + \mathrm{i}y$ vérifient $a \leqslant y < b$, a et b étant deux réels donnés.

a) Démontrer que la restriction de T à $I_{n,n+\frac{1}{2}}$, où $n \in \mathbb{Z}$, est une translation.

b) Démontrer que la restriction de T à $I_{n+\frac{1}{2},n+1}$, où $n \in \mathbb{Z}$, est une réflexion.

6° On considère la fonction :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x + \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations $f(x) = \dfrac{1}{2}$ et $f(x) = \dfrac{3}{2}$.

7° Étudier les variations de f et construire sa représentation graphique C dans le plan $\mathscr{P}$. Montrer que C possède un centre de symétrie.

8° Construire la courbe C', image de la courbe C par T.

9° Construire la représentation graphique Γ de la fonction :

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) - d(x + \mathrm{i}y),$$

x et y étant les coordonnées d'un point M de C.

91. Soit θ un réel de l'intervalle $]-\pi, \pi]$. On considère les suites $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad Z_{n+2} - 2Z_{n+1}\cos\theta + Z_n = 0. \tag{1}$$

On donne d'autre part un plan $\mathscr{P}$ de repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Le nombre Z_n est représenté par le point M_n de coordonnées x_n et y_n; x_n et y_n désignent respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de Z_n.

I — Pour les constructions demandées dans cette partie, on prendra :

$$Z_0 = 3 + \mathrm{i}, \quad Z_1 = 1 + 2\mathrm{i}.$$

1° On suppose dans cette question $\theta = 0$. Construire les points M_0, M_1, M_2, M_3. Démontrer que la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique dont on précisera la raison. Calculer $\overrightarrow{M_0M_n}$ en fonction de $\overrightarrow{M_0M_1}$ et n.

2° On suppose dans cette question $\theta = \dfrac{\pi}{3}$. Construire les points $M_0, M_1, M_2 \dots M_6$. Montrer que la suite (Z_n) est périodique.

3° On suppose dans cette question $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$. Construire les points M_0, M_1, M_2, M_3. Montrer que quel que soit n, le point O est isobarycentre de M_{n+1}, M_{n+2}. Montrer que (Z_n) est périodique.

4° Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$Z^2 - 2Z\cos\theta + 1 = 0.$$

On appelle α et β ses racines. Montrer que si :

$$\forall n, \quad Z_n = \lambda\alpha^n + \mu\beta^n,$$

avec λ et μ complexes quelconques, alors la suite (Z_n) vérifie la relation (1).

II — On prend dans cette partie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad Z_n = \lambda(\cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta) + m\bar{\lambda}(\cos n\theta - \mathrm{i}\sin n\theta)$$

où λ est un complexe donné non nul, $\lambda = a + \mathrm{i}b$, avec a et b réels, $\bar{\lambda}$ son conjugué et m un *réel* donné.

1° Remarquer que la suite (Z_n) vérifie la relation (1).

2° Calculer x_n et y_n en fonction de a, b, m, θ.

3° Exprimer $\cos n\theta$ et $\sin n\theta$ en fonction de x_n et y_n pour $m \neq 1$ et $m \neq -1$.

5° Montrer que si $m = 1$, alors Z_n est réel. Exprimer dans ce cas Z_n en fonction de a, b, θ. Préciser Z_n dans le cas où $\lambda = 1$, puis $\lambda = \mathrm{i}$.

CHAPITRE 4

SYSTÈMES LINÉAIRES

I – GÉNÉRALITÉS ET DÉFINITIONS

Dans ce chapitre, consacré à la résolution des **systèmes d'équations linéaires,** les valeurs des inconnues, les coefficients des inconnues et, d'une façon plus générale, tous les nombres utilisés sont des nombres réels.

On appelle **équation linéaire à p inconnues** toute relation de la forme :

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_p x_p = \beta,$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_p$ sont les **inconnues** et où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ sont p réels donnés appelés **coefficients des inconnues,** et β un réel donné appelé **coefficient du second membre** de l'équation.

On dit qu'un p-uplet de réels $(c_1, c_2, \ldots, c_p)$ *vérifie*, ou *satisfait*, l'équation si on obtient une égalité en substituant chaque c_j à chaque x_j dans l'équation. C'est ainsi que le 4-uplet $(-1, 2, 0, -3)$ vérifie l'équation $2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = -1$.

• Le couple formé par deux équations linéaires à deux inconnues est appelé **système** de deux équations linéaires à deux inconnues; $(3x + 2y = 2,\ x + y = 1)$ en est un exemple.

Par habitude et commodité on le note : $\begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ x + \ \ y = 1. \end{cases}$

Appelons (S_1) ce système. **Résoudre** (S_1), c'est chercher l'ensemble des couples de réels (c_1, c_2), appelés **solutions**, qui vérifient chacune des équations.

Si (x_0, y_0) est solution de (S_1), c'est-à-dire si (x_0, y_0) vérifie les deux équations, on a :

$$3x_0 + 2y_0 = 2 \quad \text{et} \quad x_0 + y_0 = 1;$$

en retranchant 3 fois la deuxième équation de la première, on obtient $-y_0 = -1$, d'où $y_0 = 1$ et par suite $x_0 = 0$, d'après la seconde équation. Remarquons que la seule affirmation permise par le raisonnement est : « si (S_1) a une solution alors (0, 1) est la seule solution », mais pas : « (S_1) admet (0, 1) pour solution ».

Il reste à examiner si (0, 1) est solution. Comme $3 \times 0 + 2 \times 1 = 2$ et $0 + 1 = 1$, (0, 1) est bien solution de (S_1), et c'est la seule d'après la première partie du raisonnement.

• Considérons le système de *trois* équations linéaires à *deux* inconnues :

$$(S_2) \begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ x + \ \ y = 1 \\ 2x + \ \ y = 0. \end{cases}$$

Si le couple de réels (x_0, y_0) était solution, il vérifierait les deux premières équations; on aurait donc $x_0 = 0$ et $y_0 = 1$, d'après le résultat précédent. Comme (0, 1) ne satisfait pas la troisième équation, il s'ensuit que le système n'a pas de solution.

On dit que les équations sont **incompatibles** et que le système est **impossible.**

Remarquons que le système (S_1) est déterminé par le tableau $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et le système (S_2) par le tableau $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- Plus généralement, le n-uplet d'équations :

$$(S) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

est appelé **système de n équations linéaires à p inconnues** $x_1, x_2, \dots, x_p$.

$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ip}x_p = b_i$ est la i-ième équation du système, on la note L_i. Dans cette équation, les réels a_{ij} sont respectivement les coefficients des inconnues x_j et le réel b_i, le coefficient du second membre.

Lorsque tous les b_i sont nuls le système est dit **homogène.** Le système homogène associé à (S) est obtenu en remplaçant chaque coefficient des seconds membres par 0.

On appelle **solution** du système, tout p-uplet de réels $(c_1, c_2, \dots, c_p)$ qui vérifie les n équations du système. Si le système est homogène, il admet la solution *banale* $(0, 0, \dots, 0)$.

Le système (S) est déterminé par le tableau M :

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots\dots & a_{1j} \dots\dots & a_{1p} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} \quad \dots & a_{2j} \quad \dots & a_{2p} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \quad \dots & a_{nj} \quad \dots & a_{np} & b_n \end{pmatrix}$$

appelé **matrice complète** du système.

L_i désignera aussi la i-ième ligne de cette matrice.

II — INTERPRÉTATION VECTORIELLE D'UN SYSTÈME DE 2 ÉQUATIONS LINÉAIRES À 2 INCONNUES

Activité

1. Soit $\mathscr{B}$ une base du plan vectoriel $\mathscr{V}$, c'est-à-dire un couple $(\vec{i}, \vec{j})$ de vecteurs du plan non colinéaires.

Rappelons qu'étant donnés deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées respectives (a, b) et (c, d) dans la base $\mathscr{B}$, on appelle **déterminant** du couple $(\vec{u}, \vec{v})$ dans la base $\mathscr{B}$, le réel $ad - bc$, noté $\text{dét}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v})$ ou $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$.

Rappelons également que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires (resp. non colinéaires) si et seulement si $\text{dét}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ (resp. $\text{dét}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v}) \neq 0$).

1° Démontrer les propriétés, vérifiées par des vecteurs quelconques $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$:

a) $\text{dét}_{\mathscr{B}}(\vec{v}, \vec{u}) = -\text{dét}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v})$; *en déduire* $\text{dét}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{u}) = 0$;

b) $\text{dét}_{\mathscr{B}}(\vec{u}_1 + \vec{u}_2, \vec{v}) = \text{dét}_{\mathscr{B}}(\vec{u}_1, \vec{v}) + \text{dét}_{\mathscr{B}}(\vec{u}_2, \vec{v})$;

c) pour tout réel x, $\text{dét}_{\mathscr{B}}(x\vec{u}, \vec{v}) = x\, \text{dét}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v})$;

d) $\text{dét}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \text{dét}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v}_1) + \text{dét}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v}_2)$;

e) pour tout réel y, $\text{dét}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, y\vec{v}) = y\, \text{dét}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v})$.

2° On considère le système de deux équations linéaires à deux inconnues :

$$(S_1) \quad \begin{cases} 2x - 5y = 12 \\ 3x + 4y = -5. \end{cases}$$

Dans le plan vectoriel $\mathscr{V}$ *rapporté à la base* $\mathscr{B}$, *on considère les vecteurs :*

$$\vec{u}(2, 3), \qquad \vec{v}(-5, 4), \qquad \vec{w}(12, -5).$$

(A noter que les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont respectivement les coefficients de x et y et que celles de $\vec{w}$ sont les coefficients des seconds membres des équations du système.)

a) Démontrer que le système (S_1) *et l'équation* (1) : $x\vec{u} + y\vec{v} = \vec{w}$, *sont équivalents (tout couple solution de* (S_1) *vérifie* (1) *et réciproquement).*

b) Démontrer que le couple $(\vec{u}, \vec{v})$ *est une base de* $\mathscr{V}$. *En déduire que l'équation* (1), *et donc le système* (S_1), *possède un couple solution unique.*

c) Des égalités $\text{dét}_{\mathscr{B}}(x\vec{u} + y\vec{v}, \vec{v}) = \text{dét}_{\mathscr{B}}(\vec{w}, \vec{v})$ *et* $\text{dét}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, x\vec{u} + y\vec{v}) = \text{dét}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{w})$, *déduire les valeurs de* x *et* y.

3° Résoudre de même les systèmes :

a) $\begin{cases} 6x - y = 4 \\ 5x + 3y = 21; \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 6x - 15 = 8y \\ 12y = 5x - 10; \end{cases}$ *c)* $\begin{cases} 6x - 5y = 10 \\ 3y + 8x = 52. \end{cases}$

4° Plus généralement, résoudre le système $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$ *lorsque* $\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \neq 0$.

5° On considère le système (S_2) : $\begin{cases} \frac{5}{3}x - 3y = -1 \\ -10x + 18y = m \end{cases}$ *où* x, y *sont les inconnues et* m *un nombre réel donné.*

a) Traduire le système par une équation vectorielle $x\vec{u} + y\vec{v} = \vec{w}$ (2).

b) Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ *forment-ils une base du plan vectoriel* $\mathscr{V}$?

c) Montrer que l'équation (2) *peut s'écrire sous la forme* $(x + \lambda y)\vec{u} = \vec{w}$, *où* λ *est un nombre réel que l'on déterminera.*

d) Déterminer suivant les valeurs de m *les solutions du système* (S_2).

6° On considère le système (S_3) : $\begin{cases} 2x - 3y - z = 2 \\ x - 2y + z = 9. \end{cases}$

a) Montrer que (S_3) *est équivalent à une équation vectorielle* $x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = \vec{t}$ (3).

b) Montrer que $(\vec{u}, \vec{v})$ *est une base du plan vectoriel* $\mathscr{V}$.

c) Trouver une solution (x_0, y_0, z_0) *de* (S_3) *et montrer que l'équation* (3) *est équivalente à* $(x - x_0)\vec{u} + (y - y_0)\vec{v} + (z - z_0)\vec{w} = \vec{0}$. *En déduire l'ensemble des solutions de* (S_3).

2. On considère le système (S) : $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$ où x, y sont les inconnues et a, b, c, d, e, f, des réels donnés.

Notons : $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$, $\Delta_x = \begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix}$, $\Delta_y = \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}$.

Le déterminant Δ est appelé déterminant du système (S); Δ_x (resp. Δ_y) s'obtient en remplaçant dans Δ les coefficients a, d de x (resp. b, e de y) par les seconds membres c, f.

L'étude faite au 4° de l'activité précédente a montré que si Δ n'est pas nul, le système (S) possède un unique couple solution (x, y) donné par les formules :

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}.$$

1° Programmer le calcul de x et y sur votre calculatrice.

Réponse (SHARP EL-5050)

Ce programme contient l'**expression conditionnelle** $h \neq 0$.

- Si la condition est satisfaite, la calculatrice exécute la séquence entre crochets précédée et suivie de **–Y→**.
- Si la condition n'est pas satisfaite, elle exécute la séquence entre crochets précédée et suivie de **–N→**.

AER	mode programme
CRAMER	titre du programme
[ENT]	enregistrement du titre
[1] [VAR] h [≠] [VAR] 0	expression conditionnelle $h \neq 0$ — *procédure principale*
[–Y→[]] [2] [◣] [–Y→[]]	séquence exécutée si $h \neq 0$ — *procédure principale*
[–N→[]] [3] [◣] [–N→[]]	séquence exécutée si $h = 0$ — *procédure principale*
[SUB]	*sous-programme 1*
[VAR] h [=] a [×] e [–] b [×] d	calcul de $h = ae - bd$
[SUB]	*sous-programme 2*
[VAR]	calcul, si $h \neq 0$, de :
x [=] [(] c [×] e [–] b [×] f [)] [÷] h [,]	$x = \frac{1}{h}(ce - bf)$
y [=] [(] a [×] f [–] c [×] d [)] [÷] h	$y = \frac{1}{h}(af - cd)$
[SUB]	*sous-programme 3*
[VAR] h [=] [VAR] 0	si $h = 0$, le calcul n'est pas possible
[ENT]	fin et enregistrement du programme

On met ensuite la SHARP EL-5050 en mode calcul (mode COMP) et, à l'aide de la touche [TITLE], on cherche le programme CRAMER. Puis on entre successivement les données a, e, b, d, c et f à l'aide de la touche [COMP]. Enfin, on affiche le résultat, x puis y, toujours à l'aide de la touche [COMP].

2° Utiliser le programme du 1° pour résoudre les systèmes :

a) $\begin{cases} -357x + 159y = 392 \\ 213x + 25y = -709 ; \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} (-\ln 2)x + \sqrt{7}y = (\sqrt{2})^{\sqrt{3}} \\ e^2 x + \sqrt{\pi} y = \ln 5 ; \end{cases}$

c) $\begin{cases} -9x - 3y = 13 \\ 24x + 8y = 1 ; \end{cases}$ *d)* $\begin{cases} 4x + y = 1 \\ \frac{1}{3}x + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)y = 0. \end{cases}$

• Exercices d'application

1. A toute valeur de m on associe, dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, les droites $\mathscr{D}_m$ et $\mathscr{D}'_m$ d'équations respectives :

$$x + 2y = m \quad \text{et} \quad mx - (2m - 1)y = m^2.$$

1° Démontrer que, pour tout réel m, $\mathscr{D}_m$ et $\mathscr{D}'_m$ se coupent en un point I_m dont on calculera les coordonnées en fonction de m.
2° Construire l'ensemble des points I_m lorsque m décrit $\mathbb{R}$.

2. On considère les trois droites d'équations respectives, dans un repère du plan :

$$2x - 5y = 3,$$
$$-x + 3y = m,$$
$$3x - 7y = 3m + 1.$$

Déterminer m de manière que ces droites soient concourantes.
Quelles sont alors les coordonnées de leur point d'intersection?

3. A tout réel m on associe, dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la droite $\mathscr{D}_m$ d'équation :

$$(3m + 2)x + (7m + 3)y + m - 1 = 0.$$

Démontrer qu'un point $M_0(x_0, y_0)$ du plan appartient à $\mathscr{D}_m$, quel que soit m, si et seulement si :

$$3x_0 + 7y_0 + 1 = 2x_0 + 3y_0 - 1 = 0.$$

En déduire que toutes les droites $\mathscr{D}_m$ passent par un point fixe dont on calculera les coordonnées.

4. A tout réel m on associe, dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la droite $\mathscr{D}_m$ d'équation :

$$(m + 1)^2x + m(m - 1)y - 4m^2 + m - 1 = 0$$

1° Démontrer que toutes les droites $\mathscr{D}_m$ passent par un point fixe dont on calculera les coordonnées.
2° En est-il de même pour les droites Δ_m d'équation :

$$(m^2 - 3m + 1)x + (2m^2 + m - 3)y + 4m^2 - 3m + 2 = 0?$$

5. Le plan $\mathscr{P}$ est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit f l'application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui, à tout point M de coordonnées (x, y), associe le point M' de coordonnées (x', y') telles que :

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{5}(-3x - 4y) \\[2mm] y' = \dfrac{1}{5}(-4x + 3y). \end{cases}$$

1° Démontrer que f est bijective et définir analytiquement sa bijection réciproque f^{-1}.
2° Déterminer l'ensemble $\mathscr{I}$ des points invariants par f.
3° Pour tout point M d'image M' par f, démontrer :

a) que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ reste colinéaire à un vecteur fixe;
b) que le milieu du bipoint (M, M') est invariant par f.

En déduire une définition géométrique simple de la transformation f.

III — TRANSFORMATIONS ÉLÉMENTAIRES D'UN SYSTÈME

Considérons le système de n équations linéaires à p inconnues :

$$(S)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{np}x_p = b_n, \end{cases}$$

et désignons par L_i la i-ième équation du système ($i = 1, 2, \dots, n$).

OPÉRATIONS SUR LES ÉQUATIONS D'UN SYSTÈME

Soit deux équations, L_i et L_j ($i \neq j$) du système (S).

1° En les ajoutant membre à membre, on obtient l'équation notée $L_i + L_j$:

$$(a_{i1} + a_{j1})x_1 + (a_{i2} + a_{j2})x_2 + \dots + (a_{ip} + a_{jp})x_p = b_i + b_j.$$

Il est alors immédiat que tout p-uplet vérifiant L_i et L_j vérifie cette équation $L_i + L_j$.

2° On peut aussi multiplier l'équation L_i par un réel λ; on obtient l'équation notée λL_i :

$$\lambda a_{i1}x_1 + \lambda a_{i2}x_2 + \dots + \lambda a_{ip}x_p = \lambda b_i$$

Tout p-uplet vérifiant L_i vérifie évidemment λL_i et, réciproquement, si λ n'est pas nul, tout p-uplet vérifiant λL_i vérifie L_i.

3° On peut combiner ces deux opérations; par exemple, $L_j + \lambda L_i$ est l'équation :

$$(a_{j1} + \lambda a_{i1})x_1 + (a_{j2} + \lambda a_{i2})x_2 + \dots + (a_{jp} + \lambda a_{ip})x_p = b_j + \lambda b_i.$$

Remarquons que le système formé par les équations L_i et L_j ($i \neq j$) est *équivalent* à celui formé par L_i et $L_j + \lambda L_i$ en ce sens que tout p-uplet $(c_1, c_2, \dots, c_p)$ vérifiant L_i et L_j vérifie L_i et $L_j + \lambda L_i$ et, réciproquement, que tout p-uplet vérifiant L_i et $L_j + \lambda L_i$ vérifie L_i et $(L_j + \lambda L_i) - \lambda L_i$, c'est-à-dire L_i et L_j.

TRANSFORMATIONS D'UN SYSTÈME

Deux systèmes sont dits **équivalents** s'ils ont même ensemble de solutions.

Par une suite finie de transformations élémentaires, au nombre de trois, nous allons associer au système (S) un système équivalent dont la résolution est immédiate.

1. Permutation de deux équations

Pour $i \neq j$, $L_i \leftrightarrow L_j$ signifie que l'on permute la i-ième et la j-ième équation du système.

Par exemple, pour le système $\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ x + 3y + z = 2, \\ x - 3y + 2z = 5 \end{cases}$ la transformation $L_1 \leftrightarrow L_3$ conduit

au système $\begin{cases} x - 3y + 2z = 5 \\ x + 3y + z = 2 \\ 2x + 3y - z = 1. \end{cases}$

Il est alors immédiat que le second système est équivalent au premier.

Nous retiendrons :

Si on échange deux équations d'un système, on obtient un système équivalent au premier.

2. Addition d'un multiple d'une équation à une autre équation

Pour $i \neq j$, $L_j \leftarrow L_j + \lambda L_i$ signifie que l'on remplace la j-ième équation L_j du système par $L_j + \lambda L_i$, où λ est un réel.

Par exemple, pour le système $\begin{cases} x - 3y + 2z = 5 \\ x + 3y + z = 2 \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases}$, la transformation $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$

conduit au système $\begin{cases} x - 3y + 2z = 5 \\ \phantom{x +{}} 6y - z = -3 \\ 2x + 3y - z = 1. \end{cases}$

Comme les systèmes $\begin{cases} L_i \\ L_j \end{cases}$ et $\begin{cases} L_i \\ L_j + \lambda L_i \end{cases}$ sont équivalents, on peut donc énoncer :

Si dans un système on remplace la j-ième équation L_j par l'équation :

$$L_j + \lambda L_i \quad (i \neq j \quad \text{et} \quad \lambda \in \mathbb{R}),$$

on obtient un système équivalent au premier.

3. Multiplication d'une équation par un nombre réel non nul

Pour tout réel α, $L_i \leftarrow \alpha L_i$ signifie que l'on remplace la i-ième équation par αL_i.

Par exemple, pour le système $\begin{cases} -x + y - 2z = -3 \\ \\ \dfrac{1}{3}x - 2y + \dfrac{5}{3}z = 0 \end{cases}$, les transformations $L_1 \leftarrow -L_1$

et $L_2 \leftarrow 3L_2$ conduisent au système $\begin{cases} x - y + 2z = 3 \\ x - 6y + 5z = 0. \end{cases}$

Lorsque α n'est pas nul les équations L_i et αL_i sont équivalentes. Par suite :

Si dans un système on remplace la i-ième équation L_i par l'équation αL_i, où α est un réel *non nul*, on obtient un système équivalent au premier.

REMARQUE :

Dans une suite de transformations élémentaires, toutes les lignes concernées par une instruction sont celles de la matrice qui précède immédiatement l'instruction.

Exemples

1. Considérons le système (S_1) $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ \phantom{x +{}} y + z = 2 \\ -3z = 3. \end{cases}$

En résolvant la troisième équation, puis la deuxième et la première, on constate aisément que $(-3, 3, -1)$ est l'unique solution de (S_1).

Remarquons que la matrice complète du système (S_1) est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Considérons le système (S_2) : $\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x - y + z = 2 \\ 4x + 3y + z = 3. \end{cases}$

La matrice complète de ce système est : $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Par la transformation $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2} L_1$ on obtient le système de matrice complète :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 4 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix};$$

par $L_2 \leftarrow 2L_2$, on obtient : $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;

par $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$, on obtient : $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$;

par $L_2 \leftrightarrow L_3$, on obtient : $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$;

et enfin par $L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2$, on obtient : $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 12 & 6 \end{pmatrix}$.

Cette dernière matrice est la matrice complète du système $\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ y + 3z = 1 \\ 12z = 6. \end{cases}$ qui admet pour unique solution $\left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

A noter qu'on aurait pu continuer ainsi la suite des transformations :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 12 & 6 \end{pmatrix} L_3 \leftarrow \frac{1}{6} L_3 \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - \frac{3}{2} L_3 \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{2} L_3 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette dernière matrice est la matrice complète du système $\begin{cases} 2x = 2 \\ y = -\frac{1}{2} \\ 2z = 1 \end{cases}$ qui admet pour unique solution $\left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

3. Au système (S_3) : $\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ 3x + 3y - z = 2 \\ 2x + 4y = 3 \end{cases}$, faisons subir les transformations élémentaires successives suivantes :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - \frac{3}{2} L_1 \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La dernière matrice obtenue est la matrice complète du système :

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ 0x + \frac{3}{2} y + \frac{1}{2} z = \frac{1}{2} \\ 0x + 0y + 0z = 1. \end{cases}$$

Sa troisième équation n'étant jamais vérifiée, ce dernier système n'a pas de solution. Le système (S_3) qui lui est équivalent n'a donc pas, lui aussi, de solution.

4. Appliquée au système (S_4) : $\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ 3x + 3y - z = 2 \\ 2x + 4y = 2 \end{cases}$, la méthode précédente donne :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - \frac{3}{2} L_1 \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La dernière matrice obtenue est la matrice complète du système :

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ 0x + \frac{3}{2} y + \frac{1}{2} z = \frac{1}{2} \\ 0x + 0y + 0z = 0. \end{cases}$$

Dans ce système la dernière équation, vérifiée par tout triplet de réels, peut être supprimée. A chaque valeur de z choisie arbitrairement, correspond alors deux valeurs x et y déterminées, de manière unique, par les deux premières équations.

L'ensemble des solutions de (S_4) est : $\left\{\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\lambda, \frac{1}{3} - \frac{\lambda}{3}, \lambda\right), \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.

IV — MÉTHODE DU PIVOT DE GAUSS

La méthode que nous venons d'utiliser pour résoudre les quatre systèmes précédents s'appelle : **méthode du pivot de Gauss.**

Supposant $a_{11} \neq 0$ dans le système général (S), la méthode consiste, dans une première étape, à effectuer les transformations élémentaires :

$$L_2 \leftarrow L_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} L_1, \qquad L_3 \leftarrow L_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} L_1, \ldots, L_n \leftarrow L_n - \frac{a_{n1}}{a_{11}} L_1,$$

de manière à obtenir un système de matrice complète :

$$M' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots\cdots & a_{1p} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{2p} & b'_2 \\ 0 & a'_{32} & a'_{3p} & b'_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a'_{n2} & a'_{np} & b'_n \end{pmatrix}.$$

Dans cette première série de transformations élémentaires, le coefficient *non nul* a_{11} s'appelle le **pivot.**

Ayant obtenu la matrice M', on choisit un second pivot pour le système, de $n-1$ équations à $p-1$ inconnues :

$$\begin{cases} a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2p}x_p = b'_2 \\ \vdots \\ a'_{n2}x_2 + \ldots + a'_{np}x_p = b'_n. \end{cases}$$

Si le réel a'_{22} n'est pas nul, on effectue les transformations élémentaires :

$$L'_3 \leftarrow L'_3 - \frac{a'_{32}}{a'_{22}} L'_2, \ldots, L'_n \leftarrow L'_n - \frac{a'_{n2}}{a'_{22}} L'_2.$$

On est ainsi conduit à la matrice :

$$M'' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & \cdots\cdots\, a_{1p} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & & a'_{2p} & b'_2 \\ 0 & 0 & a''_{33} \cdots\cdots & a''_{3p} & b''_p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a''_{n3} \cdots\cdots & a''_{np} & b''_n \end{pmatrix}.$$

On itère ainsi le procédé.

REMARQUES :

1. Si $a_{11} = 0$ et si $a_{i_0 1} \neq 0$, on commence par effectuer la transformation élémentaire $L_1 \leftrightarrow L_{i_0}$.

2. Si tous les a_{i1} sont nuls, l'inconnue x_1 peut prendre toutes les valeurs réelles. Le système se réduit en fait à un système de n équations linéaires à $p-1$ inconnues $x_2, \ldots, x_p$.

3. Si, au cours des transformations, on obtient une équation de la forme $0x_1 + \ldots + 0x_p = b$, où $b \neq 0$, le système n'a pas de solution. On arrête alors le processus.

4. Si on obtient une équation de la forme $0x_1 + \ldots + 0x_p = 0$, en la supprimant, on obtient évidemment un système équivalent.

Exemples

Dans les exemples, ci-après, de résolution d'un système par la méthode du pivot, les pivots utilisés ont été encadrés. De plus, L_i désigne toujours la i-ième ligne de la dernière matrice écrite.

1. Considérons le système (S_5) : $\begin{cases} 2x + 3y - z + t = 2 \\ 2x + 3y + z \quad = 4 \\ 2x + 3y + 2z \quad = 3 \\ 2x + 3y \quad = 5 \end{cases}$.

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & 3 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} L_2 \leftrightarrow L_4$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} L_4 \leftarrow L_4 - \frac{1}{2} L_3$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ soit } \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -8 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + \frac{1}{2} L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{2} L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -8 \end{pmatrix} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -8 \end{pmatrix}$$

Le système (S_5) est équivalent au système $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ z = -1 \\ 2t = -8 \end{cases}$. Il admet donc pour ensemble de solutions : $\left\{\left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}\lambda, \lambda, -1, -4\right), \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.

2. Considérons le système (S_6) : $\begin{cases} 2x + 3y - z + t = 2 \\ 2x + 3y + z \quad = 4 \\ 2x + 3y + 2z \quad = 3 \\ 2x + 3y \quad = 4 \end{cases}$.

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & 3 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} L_2 \leftrightarrow L_4$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} L_4 \leftarrow L_4 - \frac{1}{2} L_3$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

La dernière équation du système équivalent : $0x + 0y + 0z + 0t = \frac{1}{2}$, n'est jamais vérifiée. Le système (S_6) n'a donc pas de solution.

CONCLUSION

Reprenons les notations générales d'un système (S) de n équations linéaires à p inconnues $x_1, x_2, ..., x_p$ en supposant $a_{11} \neq 0$.

Par des transformations élémentaires successives et par élimination des lignes dont tous les coefficients sont nuls, on se ramène, soit à un système impossible (système contenant une équation $0x_1 + 0x_2 + ... + 0x_p = \beta$, avec $\beta \neq 0$), soit à un système (S') de r équations ($r \leqslant n$ et $r \leqslant p$) à p inconnues, équivalent à (S) et de la forme suivante :

- la première équation de (S') est la première équation de (S) : dans cette équation le premier coefficient non nul est celui, a_{11}, de l'inconnue x_1;
- dans la deuxième équation de (S'), le premier coefficient non nul est celui d'une inconnue x_{j_2} dont le rang j_2 est tel que $1 < j_2$;
- dans la troisième équation de (S'), le premier coefficient non nul est celui d'une inconnue x_{j_3} dont le rang j_3 est tel que $1 < j_2 < j_3$;
- et ainsi de suite jusqu'à la r-ième équation dans laquelle le premier coefficient non nul est celui d'une inconnue x_{j_r} dont le rang j_r est tel que $1 < j_2 < j_3 < ... < j_r \leqslant p$.

Les inconnues $x_1, x_{j_2}, ..., x_{j_r}$ sont dites **principales** et les autres **secondaires** ou **libres**.

Le choix des inconnues principales dépend du système (S'), c'est-à-dire de la façon dont on a transformé (S) pour obtenir (S'). Une autre suite de transformation de (S) peut conduire à un système (S'') autre que (S') et par conséquent à un autre choix d'inconnues principales.

Il n'y a donc pas unicité du choix des inconnues principales; par contre, on démontre, et nous l'admettrons, que leur nombre r, égal au nombre d'équations du système (S'), reste invariable.

Cet entier r, *intrinsèquement lié* au système (S), est appelé le **rang** de (S). A noter que ce rang est inférieur ou égal au nombre n d'équations et au nombre p d'inconnues du système (S).

Distinguons deux cas selon que $r = p$ ou $r < p$.

- **Premier cas : $r = p$**

Toutes les inconnues $x_1, x_2, ..., x_p$ sont alors principales et le système (S') est de la forme :

$$(S') \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots\dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \qquad\quad a'_{22}x_2 + \dots\dots\dots + a'_{2p}x_p = b'_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \vdots \; a'_{pp}x_p = b'_p \end{cases}$$

où les coefficients $a_{11}, a'_{22}, a'_{33}, ..., a'_{pp}$ sont non nuls.

Il est alors immédiat que (S'), et donc (S), possède une solution unique. (C'est le cas du système (S_2) de la page 100).

- **Second cas : $p < r$**

Il existe alors $p - r$ inconnues secondaires. Si l'on donne à ces inconnues secondaires des valeurs arbitraires, les inconnues principales sont alors déterminées par les r équations de (S'). On dit qu'il y a **indétermination d'ordre $p - r$.**

Le système (S') et, par conséquent, le système (S) possède une infinité de solutions (c'est le cas du système (S_5) de la page 103).

REMARQUES :

1. Un système *homogène* de n équations linéaires à p inconnues tel que $p > n$ admet au moins une solution autre que la solution banale. En effet, le système n'est pas impossible et son rang r est tel que $r \leqslant n < p$. Il en résulte $p - r > 0$. Il y a donc indétermination d'ordre $p - r$ et, par suite, infinité de solutions.

2. Superposition de solutions. Soit (S) et (S') deux systèmes qui ne diffèrent éventuellement que par les coefficients des seconds membres :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{i1}x_1 + \dots + a_{ip}x_p = b_i \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{np}x_p = b_n \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1p}x_p = b'_1 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{i1}x_1 + \dots + a_{ip}x_p = b'_i \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{np}x_p = b'_n \end{cases}.$$

Si $(c_1, c_2, \dots, c_p)$ est solution de (S) et $(c'_1, c'_2, \dots, c'_p)$ est solution de (S'), alors $(c_1 + c'_1, c_2 + c'_2, \dots, c_p + c'_p)$ est solution du système :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 + b'_1 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{i1}x_1 + \dots + a_{ip}x_p = b_i + b'_i \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{np}x_p = b_n + b'_n. \end{cases}$$

■ Exercices résolus

Résoudre les systèmes suivants et préciser éventuellement leur rang.

1. $(S_7)\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 3. \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 4 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2} L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{2} L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 & 0 & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le système (S_7) est équivalent au système de rang 3 : $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_4 = \frac{7}{2} \\ x_3 + 2x_4 = \frac{3}{2} \\ 2x_5 = 1. \end{cases}$

L'ensemble de ses solutions, obtenu à partir des inconnues principales x_1, x_3, x_5 est :

$$\left\{ \left(\frac{7}{2} - 3\lambda - 5\mu, \lambda, \frac{3}{2} - 2\mu, \mu, \frac{1}{2}\right), \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. $(S_8)\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 3. \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -3 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Le système (S_8) n'a pas de solution puisqu'il est équivalent à un système contenant l'équation $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 3$.

• Exercices d'application

6. On considère le système (S) :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c'. \end{cases}$$

On suppose $a \neq 0$. Résoudre et discuter (S) par la méthode du pivot. On montrera notamment que (S) possède un couple solution et un seul si, et seulement si, $ab' - ba' \neq 0$.

7. On considère le système (S) :

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 2 \\ 2x + y + z = -1 \\ x + 2y + az = b, \end{cases}$$

où a et b sont des réels donnés.
Résoudre (S) par la méthode du pivot et discuter suivant les valeurs de a et b.

8. On considère dans le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les trois droites d'équations respectives :

$$2x + y = a, \quad 3x - y = b, \quad x - 2y = c.$$

A quelle condition nécessaire et suffisante ces trois droites sont-elles concourantes?

9. Démontrer qu'il existe une fonction polynôme f telle que, pour tout réel x :

$$(x^2 - x - 2)f''(x) + (1 - 3x)f'(x) + f(x) = -4x^3 - 6x^2 - 22x + 1.$$

(On déterminera le degré de f, puis on calculera ses coefficients.)

TRAVAUX PRATIQUES

DÉTERMINATION DE FONCTIONS POLYNÔMES

Pour tout entier naturel n, on note P_n l'ensemble des fonctions polynômes f de la forme : $x \mapsto f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, où $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont $(n + 1)$ réels appelés coefficients de f.

Question préliminaire

Il est immédiat que :

Si tous les coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_n$ d'un élément f de P_n sont nuls, alors f est la fonction nulle : pour tout réel x, $f(x) = 0$.

a) *Énoncer la propriété réciproque, notée* H.
b) *Démontrer que tout élément de* P_1 *vérifie* H.
c) *On suppose que tout élément de* P_n *vérifie* H. *Démontrer qu'il en est de même pour tout élément* g *de* P_{n+1}. (Considérer la fonction dérivée de g.)
d) *Conclure en énonçant un théorème.*
e) *En déduire que tout élément* f *de* P_n *s'écrit de manière unique sous la forme*

$$x \mapsto a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n.$$

Toute fonction polynôme f est dite de degré n si f appartient à P_n et si son coefficient a_n n'est pas nul.

Les parties I, II, III *suivantes sont indépendantes.*

Partie I

1° *a)* *Démontrer qu'il existe une unique fonction polynôme* f *de degré 2 telle que* $f(0) = 0$ *et telle que, pour tout réel* x :
$$f(x) - f(x - 1) = x \quad (1).$$

b) *Écrire l'égalité* (1) *pour* $x = 1, x = 2, \ldots, x = n$ *et ajouter membre à membre les* n *égalités ainsi obtenues. En déduire une expression simple de la somme* S_1 *des entiers* $1, 2, \ldots, n$.

2° *Démontrer qu'il existe une fonction polynôme* f *de degré 3, et une seule, telle que* $f(0) = 0$ *et telle que, pour tout réel* x : $f(x) - f(x - 1) = x^2$.
En déduire une expression simple de $S_2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$.

3° *Trouver une expression simple de la somme* $S_3 = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$.
Vérifier que $S_3 = S_1^2$.

Partie II

A toute fonction polynôme f, *élément de* P_3, *on associe la fonction* F *définie par*

$$F(x) = x^2 f'(x) + (rx + 2) f(x),$$

où r *est un réel donné et* f' *la fonction dérivée de* f.

1° *Démontrer que* F *est une fonction polynôme. A quelle condition* F *est-elle élément de* P_3, *quel que soit* f?

2° *La condition précédente étant réalisée, démontrer que l'application* $\varphi : f \mapsto F$ *est une bijection de* P_3 *sur* P_3.

Partie III

A toute fonction polynôme $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$, *élément de* P_2, *on associe la fonction* F *définie par*

$$F(x) = 2(x + 1) f(x) - (x^2 - 1) f'(x),$$

où f' *est la fonction dérivée de* f.

1° *Démontrer que l'application* F *associée à tout élément* f *de* P_2 *est un élément de* P_2. *On note* φ *l'application de* P_2 *dans* P_2 : $f \mapsto F$.

2° *Soit $g : x \mapsto \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ un élément donné de P_2. Déterminer les éléments f de P_2 tels que $\varphi(f) = g$.*
Examiner les deux cas particuliers :

$$g(x) = 2x^2 + 3x + 1 \quad \text{et} \quad g(x) = -x^2 + 2x + 1.$$

3° *On cherche à déterminer les éléments f, non nuls, de P_2 pour lesquels il existe un réel λ tel que $\varphi(f) = \lambda f$.*
Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ une telle fonction, s'il en existe.
a) Traduire la condition $\varphi(f) = \lambda f$ par un système (S) de trois équations linéaires à trois inconnues a, b, c.
b) Transformer (S) par la méthode du pivot de Gauss.
c) Montrer que la condition $\lambda \in \{0, 2, 4\}$ est nécessaire et suffisante pour que le problème ait une solution au moins. Déterminer les solutions correspondant à chacune de ces trois valeurs.

OPTIMISATION DE $ax + by$ DANS UN DOMAINE CONVEXE

Rappels :

1° Une partie Δ du plan $\mathscr{P}$ est dite **convexe** si tout segment ayant pour extrémités deux points quelconques de Δ est inclus dans Δ.

2° Le plan $\mathscr{P}$ étant muni d'un repère orthonormal, la distance du point $M_0(x_0, y_0)$ à la droite $\mathscr{D}$ d'équation $ax + by + c = 0$ est donnée par la formule :

$$d(M_0, \mathscr{D}) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Soit D l'ensemble des couples (x, y) de $\mathbb{R}^2$ vérifiant les conditions

$$(\mathrm{I}) \quad \begin{cases} x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0 \\ x + 2y \leqslant 42 \\ x + y \leqslant 22 \\ 2x + y \leqslant 26 \\ 3x + y \leqslant 32 \\ 4x + y \leqslant 40. \end{cases}$$

Si, dans le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on représente chaque élément (x, y) de $\mathbb{R}^2$ par le point M de coordonnées (x, y), l'ensemble D sera représenté par le domaine Δ, intersection des sept demi-plans respectivement définis par les conditions (I). Comme tout demi-plan est convexe et que toute intersection de parties convexes est convexe, Δ est convexe.

1° Dessiner le domaine Δ (prendre $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 0{,}5$ cm), puis calculer les coordonnées de ses sommets. On note O, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6 les sommets, (x_i, y_i) les coordonnées de M_i et on numérote les points M_i de manière que $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 < x_6$.
On désigne par F l'ensemble des points M situés sur la ligne polygonale $OM_1M_2M_3M_4M_5M_6O$ (F est inclus dans Δ).

2° Soit a et b deux réels positifs non nuls fixés, et soit f l'application de Δ dans $\mathbb{R}_+$ qui à tout point $M(x, y)$ de Δ associe $f(M) = ax + by$.
Le but du problème est de chercher une méthode rapide de détermination d'un point R de Δ pour lequel f est maximale : $\forall M \in \Delta$, $f(M) \leqslant f(R)$.
On note S l'ensemble des points R répondant à la question.
a) Pour tout point M de Δ, interpréter $f(M)$ à l'aide de la distance $\delta(M)$ du point M à la droite $\mathscr{D}$ d'équation $ax + by = 0$.
b) Démontrer que tout point M de Δ non situé sur F n'appartient pas à S. En déduire que $S \subset F$.
c) Démontrer que si un point M de S appartient à $]M_i, M_{i+1}[$, alors M_i et M_{i+1} sont aussi éléments de S. En déduire que si S n'est pas vide, alors il existe au moins un sommet M_i appartenant à S.
d) Soit M_j un sommet tel que $f(M_j)$ soit le plus grand des réels $f(M_1)$, $f(M_2)$, $f(M_3)$, $fM_4)$, $f(M_5)$, $f(M_6)$. Démontrer que M_j appartient à S.
e) Montrer que si $f(M_2) \leqslant f(M_1)$, alors M_1 est élément de S.

f) Montrer que M_j est élément de S si, pour $j > 1$ et $j < 6$, M_j est un sommet tel que :

$$f(M_j) \geqslant f(M_{j-1}) \quad \text{et} \quad f(M_j) \geqslant f(M_{j+1}).$$

g) Montrer que si $f(M_5) \leqslant f(M_6)$, alors M_6 est élément de S.

3° En partant du point M_1, décrire une méthode permettant d'obtenir une solution au problème posé, parmi les sommets, et ce sans considérer nécessairement tous les sommets.
Imaginer un programme permettant d'obtenir un sommet solution.

Réponse (SHARP EL-5050)

AER	mode programme
MAXIMUM	titre du programme
[ENT]	enregistrement du titre
[1] [VAR] z [>] a	expression conditionnelle $z > a$ (procédure principale)
[-Y→[]] [2] [►] [-Y→[]]	séquence exécutée si $z > a$ (procédure principale)
[-N→[]] [3] [►] [-N→[]]	séquence exécutée si $z \leqslant a$ (procédure principale)
[SUB]	*sous-programme 1*
[VAR] z [=] [VAR] 900 [×] [VAR] x [+] [VAR] 400 [×] [VAR] y	calcul de $z = 900x + 400y$
[SUB]	*sous-programme 2*
[VAR] z [VAR] [STO] A [,]	place z dans la mémoire A
[VAR] x [VAR] [STO] B [,]	place x dans la mémoire B
[VAR] y [VAR] [STO] C	place y dans la mémoire C
[SUB]	*sous-programme 3*
A [,] B [,] C	
[ENT]	fin et enregistrement du programme

On met ensuite la SHARP EL-5050 en mode calcul (mode COMP), et à l'aide de la touche [TITLE], on cherche le programme MAXIMUM. Puis, on entre les données après avoir vidé la mémoire A :

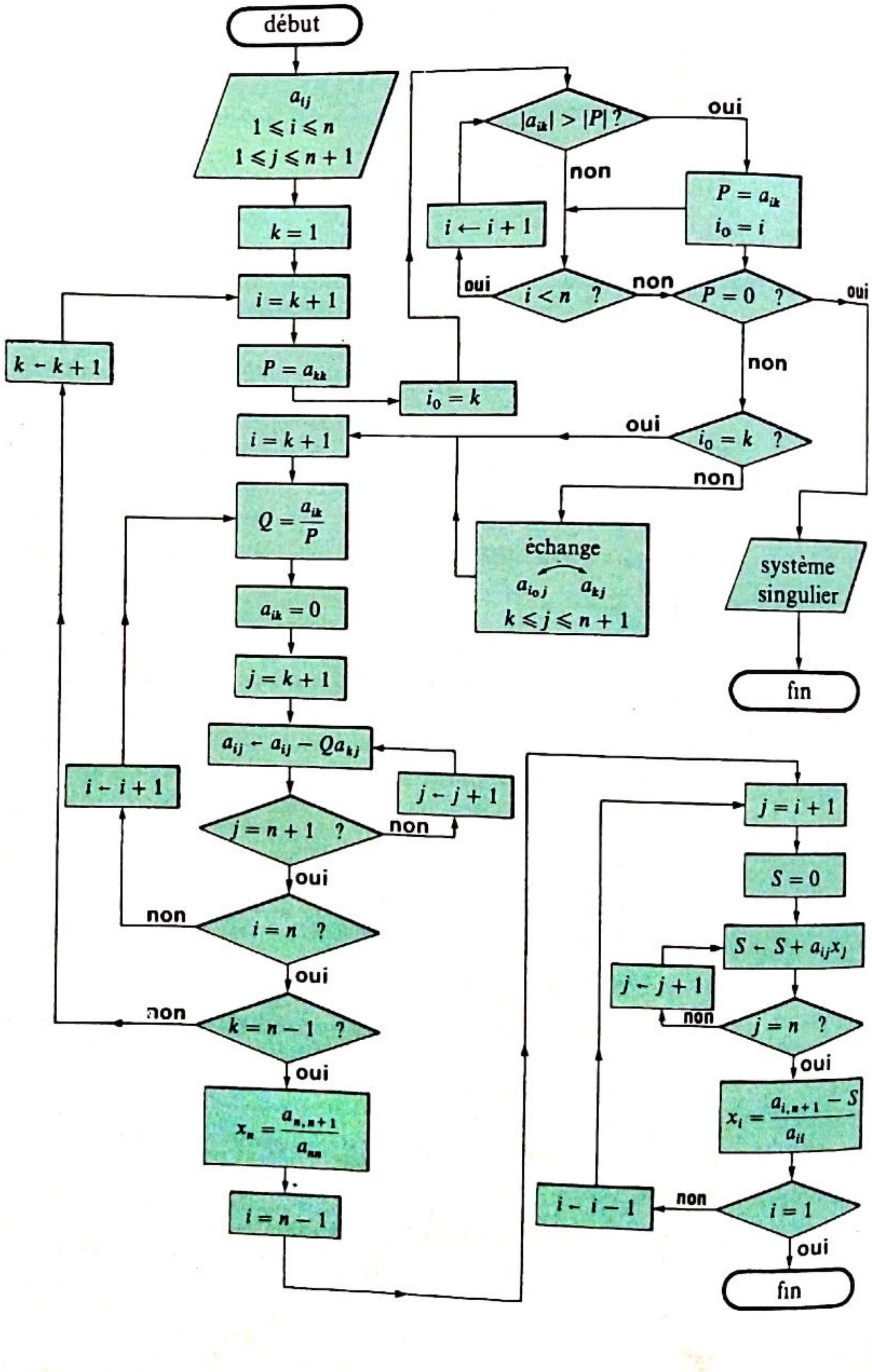
0 [STO] A	vide la mémoire A
[COMP] x	entrée de l'abscisse
[COMP] y	entrée de l'ordonnée
[COMP] [RCL] A	entrée de a
[COMP] [COMP] [COMP]	affiche successivement $f(M)$, x_M, y_M pour le sommet M qui, à ce stade de l'exécution, réalise le maximum de f

Lorsque les points sont pris au hasard, la solution est obtenue à l'issue des n opérations d'entrée de leurs coordonnées.
Lorsqu'ils sont classés par ordre d'abscisses croissantes, la solution est atteinte dès qu'il y a répétition des résultats affichés.

4° Appliquer ce programme au cas particulier : $f(M) = 900x + 400y$.
Donner également une solution graphique.

ORGANIGRAMME DE LA MÉTHODE DU PIVOT DE GAUSS POUR UN SYSTÈME DE *n* ÉQUATIONS LINÉAIRES À *n* INCONNUES

Les seconds membres $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sont notés $a_{1,n+1}, a_{2,n+1}, \ldots, a_{n,n+1}$.
Pour minimiser l'erreur d'arrondi, on choisit à chaque étape le *pivot de plus grande valeur absolue.*
Un système est dit **singulier** s'il n'a pas de solution ou s'il en a une infinité.



EXERCICES ET PROBLÈMES

10. Résoudre les systèmes d'équations suivants :

$$a)\ \begin{cases} 3x + y - 3z = 6 \\ 3x - 2y + 2z = 3 \\ 4x - 3y + z = 7\,; \end{cases}$$

$$b)\ \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 = 3 \\ 3x_1 + x_2 = 1\,; \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 5x_4 = 5\,; \end{cases}$$

$$d)\ \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1\,; \end{cases}$$

$$e)\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 + 6x_4 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 4\,; \end{cases}$$

$$f)\ \begin{cases} x + 2y + 2z = 2 \\ 3x - 2y - z = 5 \\ 2x - 5y + 3z = -4 \\ x + 4y + 6z = 0\,; \end{cases}$$

$$g)\ \begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 13x_4 = 3 \\ 4x_1 + 4x_2 + 6x_3 - 8x_4 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 1\,; \end{cases}$$

$$h)\ \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 = 2 \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = -3 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6\,; \end{cases}$$

$$i)\ \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0\,; \end{cases}$$

$$j)\ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 9x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 8x_3 - 8x_4 + 27x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + 16x_3 + 16x_4 + 81x_5 = 0\,; \end{cases}$$

11. Résoudre suivant les valeurs de α les systèmes suivants :

$$a)\ \begin{cases} \alpha x + y + z = 1 \\ x + \alpha y + z = 1 \\ x + y + \alpha z = 1\,; \end{cases}$$

$$b)\ \begin{cases} x_1 + x_2 + \alpha x_3 = a_1 \\ x_1 + \alpha x_2 + x_3 = a_2 \\ \alpha x_1 + x_2 + x_3 = a_3\,; \end{cases}$$

12. a, b, c désignant des réels distincts deux à deux, résoudre :

$$\begin{cases} x + ay + a^2 z = 0 \\ x + by + b^2 z = 0 \\ x + cy + c^2 z = 0. \end{cases}$$

13. a et b étant des réels distincts et différents de 1, résoudre :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d \\ a^2 x + b^2 y + c^2 z = d^2, \end{cases}$$

où d est un réel donné.

14. Déterminer le réel λ pour que les systèmes suivants aient au moins une solution et les résoudre :

$$a)\ \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2 \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = \lambda\,; \end{cases}$$

$$b)\ \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_3 = \lambda. \end{cases}$$

15. Trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur les réels a, b, c, d pour que le système suivant ait au moins une solution :

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = a \\ 2x - y + z = b \\ 3x + y - z = c \\ x - 3y - 5z = d. \end{cases}$$

16. *1°* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ étant des réels distincts deux à deux et $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ des réels quelconques, montrer que le système suivant a une solution unique :

$$\begin{cases} x_1 + \alpha_1 x_2 + \alpha_1^2 x_3 = \lambda_1 \\ x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_2^2 x_3 = \lambda_2 \\ x_1 + \alpha_3 x_2 + \alpha_3^2 x_3 = \lambda_3. \end{cases}$$

Le plan étant rapporté à un repère, en déduire qu'il existe une parabole et une seule, d'axe parallèle à l'axe des ordonnées, passant par trois points non alignés et d'abscisses distinctes deux à deux.

2° Montrer qu'une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 3 est déterminée, de manière unique, par les valeurs qu'elle prend en quatre réels distincts deux à deux.

17. Pour $s \in \mathbb{R}$ fixé, résoudre le système à 5 équations, d'inconnue $(x, y, z, t, u) \in \mathbb{R}^5$:

$$\begin{cases} -sx + y = 0 \\ x - sy + z = 0 \\ y - sz + t = 0 \\ z - st + u = 0 \\ t - su = 0. \end{cases}$$

A quelle condition, portant sur s, ce système admet-il une autre solution que l'élément nul de $\mathbb{R}^5$?

18. Démontrer qu'il existe une fonction polynôme unique f telle que, pour tout réel x :

$$f''(x) + 3f'(x) - 4f(x) = 8x^3 - 2x^2 + 4x - 6.$$

(On déterminera le degré, puis les coefficients de f.)

19. Soit a et b deux nombres réels; on considère le système suivant d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(S) \quad \begin{cases} ax + 2z = 2 \\ 5x + 2y = 1 \\ x - 2y + bz = 3. \end{cases}$$

1° Comment faut-il choisir a et b pour que (S) ait un seul triplet solution?
Lorsque a et b sont ainsi choisis, calculer la solution.
2° Lorsque la condition du *1°* n'est pas réalisée, quelles sont les valeurs de a et b pour lesquelles (S) admet au moins une solution?
Lorsque a et b ont ces valeurs, déterminer les solutions de (S).
3° Que se passe-t-il lorsque $a = 4$ et $b = 3$?

20. *1°* Déterminer une fonction polynôme f de degré 2 telle que $f(0) = 0$ et telle que, pour tout réel x :

$$f(x) - f(x-2) = x.$$

En déduire les sommes :

$$A = 2 + 4 + 6 + \dots + 2n,$$
$$B = 1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1.$$

2° Retrouver ces résultats à l'aide de l'égalité (admise) :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

21. *1°* Déterminer une fonction polynôme f de degré 3 telle que $f(0) = 0$ et telle que, pour tout réel x :

$$f(x) - f(x-2) = x^2.$$

En déduire les sommes :

$$A = 2^2 + 4^2 + \dots + (2n)^2,$$
$$B = 1^2 + 3^2 + \dots + (2n-1)^2.$$

2° Retrouver ces résultats à l'aide de l'égalité (admise) :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

22. Soit a et b deux réels; on considère le système (S) de trois équations à trois inconnues :

$$(S) \quad \begin{cases} x + ay + a^2z = 1 \\ x + ay + abz = a \\ bx + a^2y + a^2bz = a^2b. \end{cases}$$

1° A quelle condition, portant sur a et b, le système (S) a-t-il un seul triplet solution. Cette condition étant vérifiée, calculer cette solution.
2° Résoudre le système (S) lorsque la condition du *1°* n'est pas vérifiée.

23. Le plan $\mathscr{P}$ est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit f l'application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui, à tout point M de coordonnées (x, y), associe le point M' de coordonnées (x', y') telles que :

$$\begin{cases} x' = \dfrac{4}{3}x - \dfrac{1}{3}y + \dfrac{1}{3} \\[2ex] y' = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{5}{3}y - \dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

1° Démontrer que f est bijective et définir analytiquement la bijection réciproque f^{-1}.
2° Déterminer l'ensemble $\mathscr{I}$ des points invariants par f.
3° Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ reste colinéaire à un vecteur fixe $\vec{u}$ dont on précisera les coordonnées.
4° Soit t un réel différent de 1. Calculer en fonction de t et des coordonnées (x, y) de M, les coordonnées du barycentre G des points pondérés $M(-t)$ et $M'(1)$. Montrer que l'on peut choisir t de manière que, quel que soit M, G soit invariant par f. En déduire une définition géométrique simple de l'application f.

24. Dans le plan $\mathscr{P}$ rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ d'équations respectives :

$$x - 2y + 3 = 0 \quad \text{et} \quad 2x - y - 4 = 0.$$

1° Montrer que $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont concourantes en un point A. (On ne demande pas les coordonnées de A.)
2° Pour tout couple (λ, μ) de réels non tous nuls, démontrer que la droite d'équation :

$$\lambda(x - 2y + 3) + \mu(2x - y - 4) = 0$$

passe par A.
3° Soit B le point de coordonnées $(-7, 5)$. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB) en effectuant le minimum de calculs.

CHAPITRE 5

PROJECTIONS – CARACTÉRISATIONS DES DROITES ET PLANS

Le but de ce premier chapitre de géométrie est de revoir et de prolonger des notions et des résultats étudiés en Première, et qu'il est indispensable de bien maîtriser : projections, caractérisations vectorielle et analytique des droites et plans.

Dans chaque paragraphe on trouvera, après quelques brefs rappels et compléments, de nombreuses activités se rapportant aux propriétés évoquées, et qui seront aussi l'occasion de rafraîchir et d'affermir des connaissances acquises dans les classes antérieures.

C'est ainsi que des notions essentielles, en principe connues, seront abordées et/ou utilisées, sans faire l'objet de rappels particuliers :

- repères, bases, coordonnées, dans le plan et l'espace;
- produit scalaire, orthogonalité, bases et repères orthonormaux;
- translations, homothéties, etc, ...

En cas de besoin le lecteur se rapportera à la nouvelle édition de l'ouvrage de Première S et E publiée dans la même collection.

I – POINTS ET VECTEURS

En géométrie plane, on a défini à partir des bipoints du plan $\mathscr{P}$, le **plan vectoriel $\mathscr{V}$** : ensemble des vecteurs de $\mathscr{P}$ muni de l'addition de deux vecteurs et du produit d'un vecteur par un réel.

L'intérêt du plan vectoriel $\mathscr{V}$ tient à l'efficacité de l'*outil vectoriel*, que l'on peut utiliser pour étudier la plupart des notions rencontrées, comme pour traiter la plupart des démonstrations. Les vecteurs présentent en effet cet avantage sur les points qu'on peut les additionner et les multiplier par des réels; c'est ce qui explique la puissance et les performances des méthodes vectorielles.

De plus, n'oublions pas qu'en *géométrie analytique* les coordonnées d'un point M dans un *repère* $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ne sont autres que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la *base* $(\vec{i}, \vec{j})$ du plan vectoriel $\mathscr{V}$.

Il est donc indispensable de bien maîtriser les mécanismes qui permettent le va-et-vient, permanent en géométrie, entre les points de $\mathscr{P}$ et les vecteurs de $\mathscr{V}$.

En fait la correspondance points/vecteurs est simplement assurée par l'application $(A, B) \mapsto \overrightarrow{AB}$ qui, à tout bipoint (A, B) associe le vecteur $\overrightarrow{AB}$, et par les deux propriétés fondamentales de cette application :

1. Pour tout point O et pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un point M unique tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.

2. Quels que soient les trois points A, B, C : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Ce sont les mêmes propriétés qui, en géométrie dans l'espace, *associent* l'espace $\mathscr{E}$ et l'**espace vectoriel** $\mathscr{W}$ des vecteurs de l'espace.

Activité

Les activités suivantes, indépendantes, donnent des exemples d'utilisation de l'outil vectoriel pour démontrer des propriétés d'une configuration et traiter certaines questions.

1. *Soit A, A', B, B' quatre points de l'espace et soit I et J les milieux respectifs de (A, A') et (B, B').*

1° Démontrer que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'B'} = 2\overrightarrow{IJ}$.

2° A quelle condition, nécessaire et suffisante, les points I et J sont-ils confondus?

3° Démontrer que si $ABCD$ et $A'B'C'D'$ sont deux parallélogrammes, les milieux respectifs I, J, K, L des bipoints (A, A'), (B, B'), (C, C') et (D, D') sont les sommets d'un parallélogramme.

2. *Soit quatre points A, B, C, D du plan $\mathscr{P}$. A tout réel t on associe les points M et N tels que : $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DN} = t\overrightarrow{DC}$.*

1° Démontrer que $\overrightarrow{MN} = t\overrightarrow{BC} + (1-t)\overrightarrow{AD}$.

2° On suppose désormais que $\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{AD}$ et on note $AD = a$. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{MN}$ en fonction de t et $\overrightarrow{AD}$, puis la distance MN en fonction de t et a.

3° a) Pour quelle valeur de t a-t-on $M = N$?
b) Représenter graphiquement la fonction $f : t \mapsto MN$ (a est fixé).
c) Résoudre l'équation $f(t) = \dfrac{7}{2}a$.

3. *Soit un triangle ABC et A', B', C' les milieux respectifs de (B, C), (C, A) et (A, B). Soit M un point quelconque du plan et I, J, K les symétriques respectifs de M, par rapport à A', B', C'.*

1° Démontrer que $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{KI} = \overrightarrow{AC}$.
En déduire que les triangles ABC et IJK sont associés dans une symétrie centrale dont on précisera le centre.

2° Donner une démonstration analytique de cette propriété en rapportant le plan du triangle ABC au repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

4. *Soit $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ deux droites non coplanaires de l'espace $\mathscr{E}$. Trois plans $\mathscr{P}$, $\mathscr{Q}$, $\mathscr{R}$ de même direction coupent $\mathscr{D}$ respectivement en A, B, C et $\mathscr{D}'$ en A', B', C'.*

1° Un réel k, non nul et différent de 1, étant donné, démontrer qu'il existe trois points I, J, K, uniques, tels que : $\overrightarrow{IA} = k\overrightarrow{IA'}$, $\overrightarrow{JB} = k\overrightarrow{JB'}$, $\overrightarrow{KC} = k\overrightarrow{KC'}$.

2° Démontrer que $\overrightarrow{IJ} = \dfrac{1}{1-k}(\overrightarrow{AB} - k\overrightarrow{A'B'})$ et que $\overrightarrow{IK} = \dfrac{1}{1-k}(\overrightarrow{AC} - k\overrightarrow{A'C'})$.
En déduire que les points I, J, K sont alignés. (D'après le théorème de Thalès dans l'espace si $\overrightarrow{AC} = t\overrightarrow{AB}$, alors $\overrightarrow{A'C'} = t\overrightarrow{A'B'}$.)

II – PROJECTIONS

PROJECTIONS PONCTUELLES

Rappelons que la direction d'une droite $\mathscr{D}$ est l'ensemble des droites parallèles à $\mathscr{D}$, et qu'en conséquence, deux droites ont, ou n'ont pas, la même direction si elles sont, ou ne sont pas, parallèles.

De même, la direction d'un plan $\mathscr{P}$ est l'ensemble des plans parallèles à $\mathscr{P}$, et donc deux plans ont, ou n'ont pas, la même direction s'ils sont, ou ne sont pas, parallèles.

Il existe une droite unique, ou un plan unique, de direction donnée et passant par un point donné.

Soit d une direction de droites et p une direction de plans.

Si une droite $\mathscr{D}$ de direction d est parallèle à un plan $\mathscr{P}$ de direction p, tout autre droite $\mathscr{D}'$ de direction d est parallèle à tout autre plan $\mathscr{P}'$ de direction p (figure 1).

On dit alors que les directions d et p sont parallèles, et l'on écrit : $d \,//\, p$.

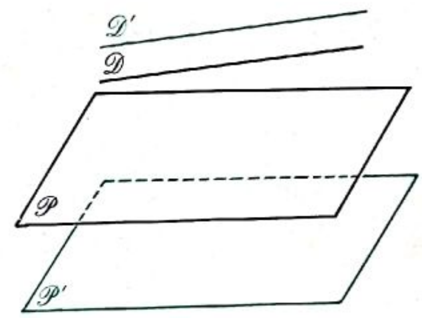


Figure 1

Projection sur une droite suivant une direction de droite

Soit, dans le plan $\mathscr{P}$, une droite $\mathscr{D}$ de direction d, et une direction de droite δ, *distincte* de d. Pour tout point M du plan $\mathscr{P}$ la droite de direction δ passant par M coupe $\mathscr{D}$ en un point M' appelé **projeté** de M sur $\mathscr{D}$ suivant la direction δ (figure 2).

L'application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{D}$ qui à tout point M associe son projeté M' est la **projection** sur $\mathscr{D}$ suivant la direction δ.

La projection sur une droite $\mathscr{D}$ suivant la direction orthogonale à $\mathscr{D}$ est la **projection orthogonale** sur $\mathscr{D}$.

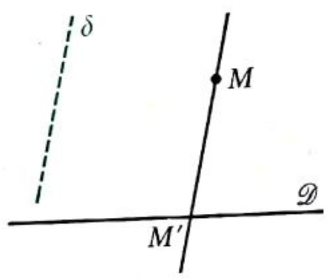


Figure 2

Projection sur un plan suivant une direction de droite

Soit un plan $\mathscr{P}$ de l'espace $\mathscr{E}$, et une droite $\mathscr{D}$ de direction d, non parallèle à $\mathscr{P}$. Par tout point M de $\mathscr{E}$ il passe une droite $\mathscr{D}_M$, et une seule, de direction d (figure 3); cette droite coupe $\mathscr{P}$ en un point M'.

L'application de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{P}$, qui à tout point M associe le point M' ainsi obtenu, est appelée **projection** sur le plan $\mathscr{T}$, parallèlement à $\mathscr{D}$, ou suivant la direction de droite d. Le point M' est le **projeté** de M, la droite $\mathscr{D}_M$ est la **projetante** de M.

La projection sur un plan $\mathscr{P}$ suivant la direction de droite orthogonale à $\mathscr{P}$ est la **projection orthogonale** sur $\mathscr{P}$.

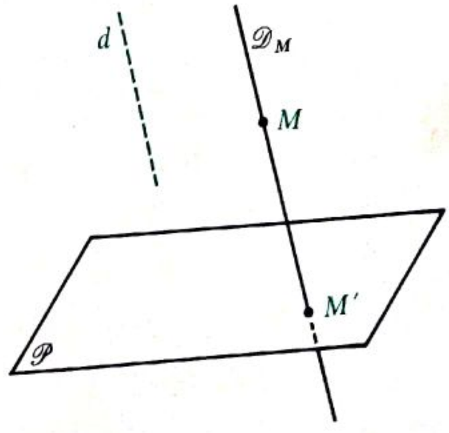


Figure 3

Projection sur une droite suivant une direction de plan

Soit un plan $\mathscr{P}$ de direction p, et une droite $\mathscr{D}$ sécante avec $\mathscr{P}$.

Par tout point M de l'espace il passe un plan $\mathscr{P}_M$, et un seul, de direction p; ce plan coupe $\mathscr{D}$ en un point M' (figure 4).

L'application de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{D}$, qui à tout point M associe le point M' ainsi obtenu, est appelée **projection** sur la droite $\mathscr{D}$ parallèlement au plan $\mathscr{P}$ (ou suivant la direction de plan p). Le point M' est le **projeté** de M, le plan $\mathscr{P}_M$ est le **plan projetant** du point M.

La projection sur une droite $\mathscr{D}$ suivant la direction de plan orthogonale à $\mathscr{D}$ est la **projection orthogonale** sur $\mathscr{D}$.

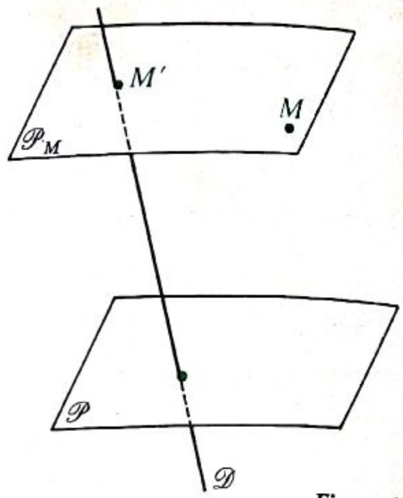


Figure 4

PROPRIÉTÉS DES PROJECTIONS PONCTUELLES

On démontre, en utilisant le théorème de Thalès dans le plan ou dans l'espace, que toute projection ponctuelle vérifie la propriété suivante :

Trois points alignés A, B, C tels que $\overrightarrow{AC} = t\overrightarrow{AB}$ ont pour projetés respectifs trois points A', B', C' tels que $\overrightarrow{A'C'} = t\overrightarrow{A'B'}$.

Il en résulte que le projeté I' du milieu I d'un bipoint (A, B) est le milieu du bipoint (A', B'), projeté de (A, B).

Conséquence :

Considérons un parallélogramme $ABCD$; les bipoints (A, C) et (B, D) ont même milieu I. Soit A', B', C', D', I' les projetés respectifs des points A, B, C, D, I.

Le point I' étant le milieu de (A', C') et de (B', D'), le quadrilatère $A'B'C'D'$ est un parallélogramme.

Le projeté d'un parallélogramme est un parallélogramme.

La figure 5 illustre cette propriété dans le cas d'une projection sur un plan suivant une direction de droite.

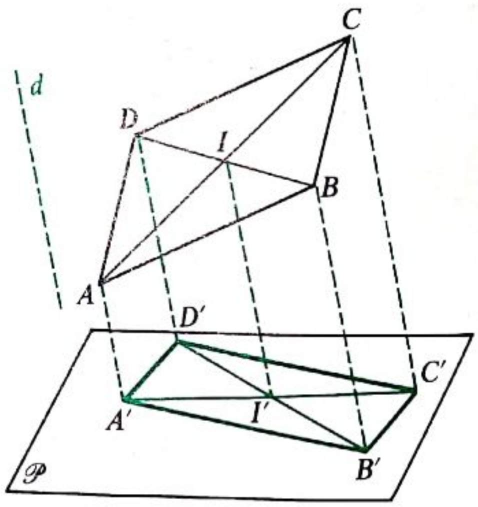


Figure 5

A noter que lorsque la direction d est parallèle à celle du plan $(ABCD)$, le parallélogramme $A'B'C'D'$ est aplati. Dans le cas d'une projection sur une droite, le parallélogramme $A'B'C'D'$ est évidemment toujours aplati.

PROJECTION VECTORIELLE ASSOCIÉE À UNE PROJECTION PONCTUELLE

Définition

Soit p une projection ponctuelle.

Pour tout vecteur $\vec{u}$, considérons un bipoint (A, B) tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et son projeté

(A', B'). Pour tout autre bipoint (C, D), de projeté (C', D'), tel que $\overrightarrow{CD} = \vec{u}$, $ABCD$ est un parallélogramme et il en est donc de même de $A'B'C'D'$. (La figure 6 illustre cette situation dans le cas où p est, dans le plan $\mathscr{P}$, la projection sur une droite $\mathscr{D}$ parallèlement à une direction de droite δ.)

Par suite : $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'D'}$.

Il en résulte que le vecteur $\vec{u}' = \overrightarrow{A'B'}$ ne dépend pas du choix de (A, B) : $\vec{u}'$ ne dépend que du vecteur $\vec{u}$ (et bien sûr de la projection p considérée).

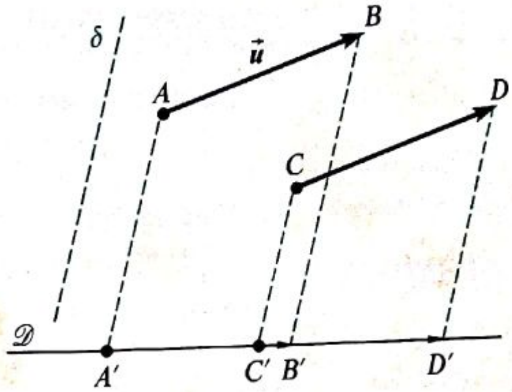


Figure 6

DÉFINITION 1	**On appelle projection vectorielle associée à une projection ponctuelle p, l'application π qui, à tout vecteur $\vec{u}$, fait correspondre le vecteur $\vec{u}'$ ainsi défini : si (A, B) est un bipoint tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, et si (A', B') est le projeté de (A, B), alors $\vec{u}' = \overrightarrow{A'B'}$.**

Il résulte de la définition de la projection vectorielle π que, pour tout bipoint (A, B) de projeté (A', B'), on a : $\pi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{A'B'}$.

REMARQUE : Si p est, dans le plan $\mathscr{P}$, une projection sur une droite suivant une direction de droite, π est une application du plan vectoriel $\mathscr{V}$ des vecteurs de $\mathscr{P}$ dans lui-même.
Si p est, dans l'espace $\mathscr{E}$, une projection sur une droite, ou un plan, suivant une direction de plan, ou de droite, π est une application de l'espace vectoriel $\mathscr{W}$ des vecteurs de l'espace dans lui-même.

Linéarité d'une projection vectorielle

Soit p une projection ponctuelle et soit π sa projection vectorielle associée.

1. Pour tout couple $(\vec{u}, \vec{v})$ de vecteurs, considérons trois points A, B, C tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$, et leurs projetés respectifs A', B', C'. On a :

- d'une part : $\pi(\vec{u} + \vec{v}) = \pi(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{A'C'}$,
- d'autre part : $\pi(\vec{u}) + \pi(\vec{v}) = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{A'C'}$.

Il s'ensuit : $\pi(\vec{u} + \vec{v}) = \pi(\vec{u}) + \pi(\vec{v})$.

La projection vectorielle π vérifie donc la propriété :

L'image de la somme de deux vecteurs est la somme des images des deux vecteurs.

2. Pour tout vecteur $\vec{u}$ et pour tout réel t, considérons trois points A, B, C tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = t\vec{u}$; leurs projetés respectifs A', B', C' sont tels que $\overrightarrow{A'C'} = t\overrightarrow{A'B'}$.

On a, d'une part : $\pi(t\vec{u}) = \pi(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{A'C'}$, et, d'autre part : $t\pi(\vec{u}) = t\pi(\overrightarrow{AB}) = t\overrightarrow{A'B'}$.

Il s'ensuit : $\pi(t\vec{u}) = t\pi(\vec{u})$.

D'où une seconde propriété vérifiée par la projection vectorielle π :

L'image du produit d'un vecteur par un réel est le produit, par le même réel, de l'image du

APPLICATIONS LINÉAIRES

Les deux propriétés que l'on vient de démontrer pour toute projection vectorielle π présentent un tel intérêt que cela conduit à distinguer les applications qui les vérifient.

DÉFINITION 2	**On dit qu'une application φ du plan vectoriel $\mathscr{V}$, ou de l'espace vectoriel $\mathscr{W}$, dans lui-même est linéaire si elle vérifie les deux propriétés :** **1. Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$: $\varphi(\vec{u}+\vec{v}) = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v})$.** **2. Quels que soient le réel t et le vecteur $\vec{u}$: $\varphi(t\vec{u}) = t\varphi(\vec{u})$.**

Exemples

1. La projection vectorielle π associée à toute projection ponctuelle p est une application linéaire.

2. L'application identique du plan vectoriel $\mathscr{V}$, notée $\mathrm{Id}_{\mathscr{V}}$, qui, à tout vecteur $\vec{u}$, associe ce même vecteur $\vec{u}$, est linéaire.

Il en est de même de l'application de $\mathscr{V}$ dans $\mathscr{V}$ qui, à tout vecteur $\vec{u}$, associe le vecteur nul $\vec{0}$.

3. Toutes les applications du plan vectoriel $\mathscr{V}$, ou de l'espace vectoriel $\mathscr{W}$, dans lui-même ne sont évidemment pas linéaires. C'est ainsi qu'un vecteur $\vec{a}$ *non nul* étant donné, l'application qui, à tout vecteur $\vec{u}$, associe le vecteur $\vec{u} + \vec{a}$, n'est pas linéaire.

Propriétés d'une application linéaire

Soit φ une application linéaire de $\mathscr{V}$ dans $\mathscr{V}$, ou de $\mathscr{W}$ dans $\mathscr{W}$.

1. Pour tout vecteur $\vec{u}$ on a, φ étant linéaire : $\varphi(\vec{u}) = \varphi(\vec{u}+\vec{0}) = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{0})$.
Si on ajoute le vecteur $-\varphi(\vec{u})$ aux deux membres de l'égalité $\varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{0}) = \varphi(\vec{u})$, on obtient : $\varphi(\vec{0}) = \vec{0}$.

L'image du vecteur nul par une application linéaire est le vecteur nul.

2. Soit x et y, deux réels et soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.
Comme l'application φ est linéaire, on a :

$$\varphi(x\vec{u}+y\vec{v}) = \varphi(x\vec{u}) + \varphi(y\vec{v}), \qquad \varphi(x\vec{u}) = x\varphi(\vec{u}), \qquad \varphi(y\vec{v}) = y\varphi(\vec{v}),$$

d'où : $$\varphi(x\vec{u}+y\vec{v}) = x\varphi(\vec{u}) + y\varphi(\vec{v}).$$

Si on fait $x = 1$ et $y = -1$ dans l'égalité précédente, on obtient :

$$\varphi(\vec{u}-\vec{v}) = \varphi(\vec{u}) - \varphi(\vec{v}).$$

Si on fait $\vec{u} = \vec{0}$ dans cette dernière égalité on obtient :

$$\varphi(-\vec{v}) = -\varphi(\vec{v}).$$

Nous retiendrons :

$$\boxed{\begin{gathered}\varphi(x\vec{u}+y\vec{v}) = x\varphi(\vec{u}) + y\varphi(\vec{v})\\ \varphi(\vec{u}-\vec{v}) = \varphi(\vec{u}) - \varphi(\vec{v})\\ \varphi(-\vec{v}) = -\varphi(\vec{v})\end{gathered}}$$

3. L'égalité $\varphi(x\vec{u}+y\vec{v}) = x\varphi(\vec{u}) + y\varphi(\vec{v})$ se généralise par récurrence :

Quels que soient les réels $x_1, x_2, ..., x_n$ et les vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n$:

$$\varphi(x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + ... + x_n\vec{u}_n) = x_1\varphi(\vec{u}_1) + x_2\varphi(\vec{u}_2) + ... + x_n\varphi(\vec{u}_n).$$

Pour définir la projection vectorielle π associée à une projection ponctuelle p et pour démontrer que π est une application linéaire, on s'est uniquement appuyé sur la propriété suivante de p :

Trois points A, B, C tels que $\overrightarrow{AC} = t\overrightarrow{AB}$ ont pour images respectives trois points A', B', C' tels que $\overrightarrow{A'C'} = t\overrightarrow{A'B'}$.

Il s'ensuit qu'à toute application f du plan $\mathscr{P}$, ou de l'espace $\mathscr{E}$, dans lui-même vérifiant cette propriété, on peut appliquer la même démarche, et donc associer à f une application vectorielle φ.

L'image par φ d'un vecteur $\vec{u}$ quelconque est le vecteur $\vec{u}'$ ainsi défini : si A et B sont deux points tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et si A' et B' sont leurs images respectives par f, alors $\vec{u}' = \overrightarrow{A'B'}$. De plus cette application φ est linéaire.

On trouvera dans les activités suivantes des exemples de telles applications, dites **affines,** et de leurs applications vectorielles associées.

1. Translations

1° Rappeler la définition de la translation de vecteur $\vec{u}$.

2° Pour tout bipoint (A, B) d'image (A', B') par t, comparer les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$.

3° En déduire que la translation t est une application affine et reconnaître son application vectorielle associée.

2. Homothéties

1° Rappeler la définition de l'homothétie h de centre O et de rapport k (k réel non nul).

2° Pour tout bipoint (A, B) d'image (A', B') par h, comparer les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$.

*3° En déduire que l'homothétie h est une application affine et définir son application vectorielle associée φ. On dit que φ est l'***homothétie vectorielle** *de rapport k. Vérifier la linéarité de φ.*

3. Symétrie axiale plane

Soit une droite $\mathscr{D}$ de direction d et une direction de droite δ distincte de d.

A tout point M du plan, on peut associer le point M_1, projeté de M sur $\mathscr{D}$ suivant la direction δ, puis le point M' tel que $\overrightarrow{M_1M'} = -\overrightarrow{M_1M}$, c'est-à-dire tel que M_1 soit le milieu du bipoint (M, M') (figure 7). On dit que M' est le **symétrique** de M par rapport à la droite $\mathscr{D}$ suivant la direction δ.

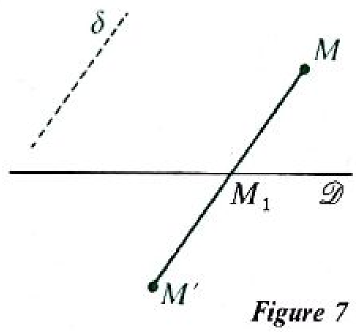


Figure 7

L'application du plan $\mathscr{P}$ dans lui-même qui, à tout point M, fait correspondre le point M', est appelée **symétrie d'axe** $\mathscr{D}$ et de **direction** δ.

Lorsque δ est la direction orthogonale à d, la symétrie d'axe $\mathscr{D}$ et de direction δ est la **symétrie orthogonale,** ou **réflexion,** d'axe $\mathscr{D}$.

Pour distinguer les symétries par rapport à un point et les symétries par rapport à une droite, on dit que les premières sont **centrales** et les secondes **axiales.**

Étant donné un point M du plan $\mathscr{P}$, son symétrique M' par rapport à $\mathscr{D}$ suivant la direction δ est *caractérisé* par les deux propriétés :

- M' appartient à la droite contenant M et de direction δ;
- le milieu du bipoint (M, M') appartient à la droite $\mathscr{D}$.

1° Soit s la symétrie d'axe $\mathscr{D}$ et de direction δ. Pour tout bipoint (A, B) d'image (A', B') par s, démontrer que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'B'} = 2\overrightarrow{A_1B_1}$, où A_1 et B_1 sont respectivement les milieux des bipoints (A, A') et (B, B').

2° En déduire :

a) Que la symétrie s est une application affine.

b) Que l'application vectorielle σ associée à s est telle que, pour tout vecteur $\vec{u}$:

$$\sigma(\vec{u}) = 2\pi(\vec{u}) - \vec{u},$$

où π est la projection vectorielle associée à la projection sur $\mathscr{D}$ suivant la direction δ. Vérifier, à partir de cette expression de $\sigma(\vec{u})$, la linéarité de σ.

4. *Le plan $\mathscr{P}$ étant muni d'un repère $\mathscr{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$, on désigne par f l'application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui, à tout point M de coordonnées (x, y), associe le point M' dont les coordonnées (x', y') sont données par :*

$$\begin{cases} x' = \dfrac{2}{3}(x + y - 1) \\ y' = \dfrac{1}{3}(x + y + 2). \end{cases}$$

(Rappelons que le procédé qui consiste à définir l'application f par les formules donnant les coordonnées de $f(M)$ en fonction de celles de M est appelé la **définition analytique** de f.)

1° Démontrer que l'application f est affine.

2° a) Démontrer que l'ensemble des points invariants par f est une droite $\mathscr{D}$.

b) Démontrer que pour tout point M d'image M', le point M' appartient à $\mathscr{D}$ et le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire à un vecteur fixe.

c) Reconnaître l'application f.

Exercices d'application

1. Soit p la projection sur une droite $\mathscr{D}$ suivant une direction de droite δ.

1° Deux points distincts peuvent-ils avoir le même projeté. Si oui, à quelle condition?

2° Quel est l'ensemble des antécédents par p d'un point de la droite $\mathscr{D}$?

3° Quel est l'ensemble des points invariants par p?

4° Reconnaître l'application composée $p \circ p$.

2. Reprendre l'exercice précédent lorsque p est, dans l'espace $\mathscr{E}$, la projection sur une droite $\mathscr{D}$ suivant une direction de plan π.

3. Soit dans le plan deux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sécantes en O et un point A n'appartenant ni à $\mathscr{D}$, ni à $\mathscr{D}'$.

A tout point M du plan on associe le point N, projeté de M sur $\mathscr{D}$ parallèlement à $\mathscr{D}'$, et le point N', projeté de M sur $\mathscr{D}'$ parallèlement à $\mathscr{D}$.

1° Déterminer M de manière que A soit le milieu de $[N, N']$.

2° Quel est l'ensemble des points M du plan tels que la droite (NN') ait une direction donnée δ distincte des directions de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$?

4. Soit, dans l'espace $\mathscr{E}$, un plan $\mathscr{P}$ et une droite $\mathscr{D}$ sécants en O et un point A n'appartenant ni à $\mathscr{D}$, ni à $\mathscr{P}$. A tout point M de $\mathscr{E}$, on associe le point M', projeté de M sur $\mathscr{P}$ parallèlement à $\mathscr{D}$ et le point M'', projeté de M sur $\mathscr{D}$ parallèlement à $\mathscr{P}$.

Déterminer le point M de manière que :

a) A soit le milieu de $[M', M'']$;

b) A soit le centre de gravité du triangle $MM'M''$.

5. Dans le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère l'application définie analytiquement par :

$$\begin{cases} x' = -3x + 4y \\ y' = -\dfrac{3}{2}x + 2y. \end{cases}$$

1° Démontrer qu'il existe un point A, et un seul, invariant par f.

2° Démontrer que pour tout point M d'image $M' = f(M)$:

a) M' appartient à une droite fixe $\mathscr{D}$;

b) le milieu M_1 du bipoint (M, M') appartient à une droite fixe Δ.

3° En déduire une construction simple du point M'.

6. Soit k un réel non nul et différent de 1 et, dans le plan $\mathscr{P}$, deux droites sécantes $\mathscr{D}$ et Δ. A tout point M du plan on associe le point d'intersection M' de la droite $\mathscr{D}$ et de la droite Δ_M, image de Δ par l'homothétie de centre M et de rapport k.
Démontrer que l'application $f : M \mapsto M'$ peut s'écrire sous la forme $f = h \circ p$, où p et h sont respectivement une projection et une homothétie dont on précisera les éléments caractéristiques.
A-t-on $h \circ p = p \circ h$?

7. Soit k un réel non nul et différent de 1 et, dans le plan $\mathscr{P}$, deux droites sécantes $\mathscr{D}$ et Δ. A tout point M du plan on associe le point d'intersection M' des droites $\mathscr{D}_M$ et Δ_M, images respectives de $\mathscr{D}$ et Δ par l'homothétie de centre M et de rapport k.
1° Choisir un repère du plan et définir analytiquement l'application $f : M \mapsto M'$. Reconnaître f.
2° Donner une démonstration vectorielle du résultat de la question *1°*.

8. On considère dans le plan $\mathscr{P}$ la projection p sur une droite $\mathscr{D}$ suivant une direction δ et l'homothétie h de centre A et de rapport k.
Pour tout point M du plan on note M_1 l'image de M par $h \circ p$ et M_2 l'image de M par $p \circ h$.
1° Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$ est constant.
2° Quel est l'ensemble des points A pour lesquels $p \circ h = h \circ p$? (Le réel k est fixé.)

9. On considère dans le plan $\mathscr{P}$ une symétrie s d'axe $\mathscr{D}$ et de direction δ et une translation t de vecteur $\vec{u}$. On note f l'application composée $t \circ s$.
1° Pour tout point M d'image M' par f, démontrer que le milieu de (M, M') appartient à une droite fixe $\mathscr{D}_1$ parallèle à $\mathscr{D}$.
2° Soit s_1 la symétrie d'axe $\mathscr{D}_1$ et de direction δ. Pour tout point M on pose $M' = f(M)$ et $M_1 = s_1(M)$. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{M_1M'}$ est constant.
En déduire que f peut s'écrire sous la forme $t_1 \circ s_1$, où t_1 est une translation dont le vecteur est parallèle à l'axe $\mathscr{D}_1$ de la symétrie s_1.

10. On considère dans le plan $\mathscr{P}$ la projection p sur une droite $\mathscr{D}$ suivant une direction δ, et une translation t de vecteur $\vec{u}$. On note f l'application composée $t \circ p$.
1° Pour tout point M d'image M' par f, démontrer que M' appartient à une droite fixe $\mathscr{D}_1$ parallèle à $\mathscr{D}$.
2° Soit p_1 la projection sur $\mathscr{D}_1$ suivant la direction δ. Pour tout point M on pose $M' = f(M)$ et $M_1 = p_1(M)$. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{M_1M'}$ est constant.
En déduire que f peut s'écrire sous la forme $t_1 \circ p_1$, où t_1 est une translation dont le vecteur est parallèle à $\mathscr{D}_1$.

III – LA DROITE DANS LE PLAN

CARACTÉRISATION VECTORIELLE

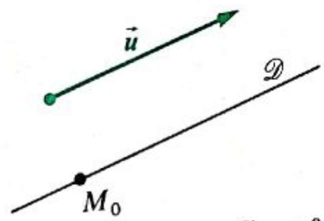


Figure 8

On appelle **repère** d'une droite $\mathscr{D}$ tout couple $(M_0, \vec{u})$, où M_0 est un point de $\mathscr{D}$ et $\vec{u}$ un **vecteur directeur** de $\mathscr{D}$, c'est-à-dire un vecteur non nul de même direction que $\mathscr{D}$ (figure 8).

Le repère $(M_0, \vec{u})$ détermine la droite $\mathscr{D}$:

- $\mathscr{D}$ est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{u}$, lorsque le réel t décrit $\mathbb{R}$.
- Pour tout point M de $\mathscr{D}$, il existe un réel t, unique, tel que $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{u}$; t est le **paramètre** de M dans le repère $(M_0, \vec{u})$.

L'égalité $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{u}$, où $t \in \mathbb{R}$, *caractérise* l'appartenance d'un point M du plan à la droite $\mathscr{D}$.

Traduction dans un repère du plan

Considérons un repère $\mathscr{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan et désignons par (x_0, y_0) les coordonnées de M_0, par (α, β) celles de $\vec{u}$ et par (x, y) celles d'un point M du plan.

L'égalité $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{u}$ se traduit alors dans le repère $\mathscr{R}$ par le système

$$\begin{cases} x = x_0 + t\alpha \\ y = y_0 + t\beta \end{cases}$$

appelé **système d'équations paramétriques** de $\mathscr{D}$.

REMARQUE : Soit deux points distincts A et B. Un repère de la droite $\mathscr{D}$ passant par A et B est $(A, \overrightarrow{AB})$. Donc $\mathscr{D}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$, lorsque t décrit $\mathbb{R}$. De plus :

• L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$, lorsque t décrit $\mathbb{R}_+$, est la demi-droite $[AB)$, d'origine A et contenant B.

• L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$, lorsque t décrit l'intervalle $[0, 1]$, est le segment $[A, B]$.

ÉQUATION CARTÉSIENNE D'UNE DROITE

Le plan $\mathscr{P}$ est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Considérons la droite $\mathscr{D}$ passant par le point $M_0(x_0, y_0)$ et dont un vecteur directeur est $\vec{u}(\alpha, \beta)$ (figure 9).

Un point $M(x, y)$ du plan appartient à $\mathscr{D}$ si, et seulement si, les vecteurs :

$$\overrightarrow{M_0M}(x - x_0, y - y_0) \quad \text{et} \quad \vec{u}(\alpha, \beta)$$

sont colinéaires.

Or $\overrightarrow{M_0M}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires si, et seulement si, le déterminant du couple $(\overrightarrow{M_0M}, \vec{u})$ est nul :

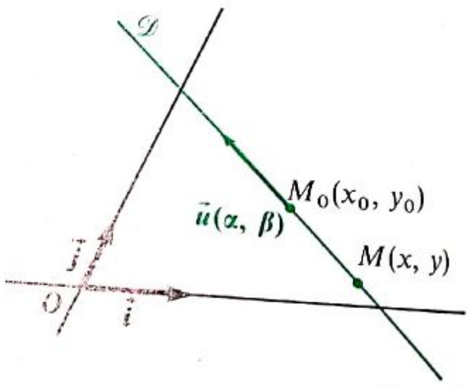


Figure 9

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & \alpha \\ y - y_0 & \beta \end{vmatrix} = 0,$$

soit :

$$\beta(x - x_0) - \alpha(y - y_0) = 0.$$

Finalement : $M(x, y) \in \mathscr{D}$ si, et seulement si, $\beta x - \alpha y + (\alpha y_0 - \beta x_0) = 0.$ (1)

On dit que la relation (1) est une **équation cartésienne** ou simplement une **équation** de $\mathscr{D}$.

En posant $a = \beta$, $b = -\alpha$ et $c = \alpha y_0 - \beta x_0$, l'équation (1) s'écrit $ax + by + c = 0$, où $(a, b) \neq (0, 0)$, puisque le vecteur directeur $\vec{u}(-b, a)$ n'est pas nul.

THÉORÈME 1	**Une équation de la droite passant par le point $M_0(x_0, y_0)$, et dont un vecteur directeur est $\vec{u}(\alpha, \beta)$, s'obtient en considérant un point $M(x, y)$ du plan et en annulant le déterminant du couple de vecteurs $(\overrightarrow{M_0M}, \vec{u})$:** $$\begin{vmatrix} x - x_0 & \alpha \\ y - y_0 & \beta \end{vmatrix} = 0.$$

Rappelons que l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées (x, y) vérifient l'équation $ax + by + c = 0$, où $(a, b) \neq (0, 0)$, est une droite de vecteur directeur $\vec{u}(-b, a)$.

Activité

Les activités suivantes sont indépendantes.

1. *On considère un triangle ABC.*

1° Quel est, lorsque t décrit $\mathbb{R}$, l'ensemble des points M tels que :
a) $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{BC}$; *b)* $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$; *c)* $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

2° Reprendre la question 1° lorsque t décrit $\mathbb{R}^+$, *puis lorsque t décrit l'intervalle* $[0, 1]$.

2. *On considère un quadrilatère ABCD et les milieux respectifs I et J de* $[A, B]$ *et* $[C, D]$. *A tout réel t on associe les points M et N tels que* $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AD}$ *et* $\overrightarrow{BN} = t\overrightarrow{BC}$, *et le point E milieu de* $[M, N]$.

1° Construire les points associés aux réels $0, 1, \frac{3}{2}, -2$. *Que peut-on conjecturer quant à l'ensemble des points E lorsque t décrit* $\mathbb{R}$?

2° Démontrer que $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$ *et que* $\overrightarrow{IE} = \frac{t}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$. *En déduire l'ensemble des points E.*

3. *Démontrer que la droite* $\mathscr{D}$ *d'équation* $2x + 5y - 10 = 0$, *et la droite* $\mathscr{D}'$ *passant par* $A(-1, 2)$ *et de vecteur directeur* $\vec{u}(3, 2)$ *sont sécantes.*
Calculer les coordonnées de leur point d'intersection de deux façons :
a) en utilisant un système d'équations paramétriques de $\mathscr{D}'$;
b) en utilisant une équation cartésienne de $\mathscr{D}'$.

4. *On donne un triangle ABC. Déterminer, dans le repère* $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, *des équations cartésiennes des médianes du triangle. Démontrer que les trois médianes sont concourantes.*

5. Formules analytiques d'une projection

1° Dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, *on considère la droite* $\mathscr{D}$ *d'équation* $2x - y + 3 = 0$ *et la direction* δ *du vecteur* $\vec{u}(3, -2)$. *On note p la projection sur* $\mathscr{D}$ *suivant la direction* δ.
a) Soit A le point de coordonnées $(4, 2)$. *Écrire un système d'équations paramétriques de la droite* Δ_A, *de direction* δ *et passant par A. Calculer les coordonnées du point d'intersection A' des droites* $\mathscr{D}$ *et* Δ_A *(A' est le projeté de A sur* $\mathscr{D}$ *suivant la direction* δ*).*
b) Soit un point $M(X, Y)$ *et son projeté* $M'(X', Y')$. *Exprimer X' et Y' en fonction de X et Y. (On obtient ainsi la définition analytique de la projection p.)*

2° Soit $\mathscr{D}$ *et* Δ *les droites d'équations respectives :*

$$x + y - 1 = 0 \quad et \quad x + 3y = 0.$$

Définir analytiquement la projection sur $\mathscr{D}$ *parallèlement à* Δ.

3° Soit f l'application du plan $\mathscr{P}$ *dans lui-même qui, à tout point* $M(x, y)$, *associe le point* $M'(x', y')$ *tel que :*

$$\begin{cases} x' = 3x + y - 2 \\ y' = -4x - y + 4. \end{cases}$$

a) Dessiner soigneusement, sur du papier millimétré, les points $A(-2, 3)$, $B(2, -1)$, $C(4, 3)$, $D(3, -4)$ *et leurs images A', B', C', D'. Quelle hypothèse peut-on formuler quant à la nature de l'application f?*
b) Démontrer que l'ensemble des points invariants par f est une droite $\mathscr{D}$ *dont on donnera une équation.*

c) *Pour tout point M d'image $M' = f(M)$, démontrer que :*
- *M' appartient à $\mathscr{D}$;*
- *le vecteur $\overrightarrow{MM'}$, s'il n'est pas nul, a une direction fixe.*

Reconnaître l'application f.

DROITE DÉFINIE PAR UN POINT ET UN VECTEUR NORMAL

On appelle **vecteur normal** d'une droite $\mathscr{D}$ du plan, tout vecteur non nul dont la direction est orthogonale à celle de $\mathscr{D}$ (figure 10).

La droite $\mathscr{D}$ est déterminée par un de ses points, M_0, et par un de ses vecteurs normaux, $\vec{u}$: $\mathscr{D}$ est l'ensemble des points M du plan tels que les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{M_0M}$ soient orthogonaux, c'est-à-dire tels que le produit scalaire $\vec{u} \cdot \overrightarrow{M_0M}$ soit nul.

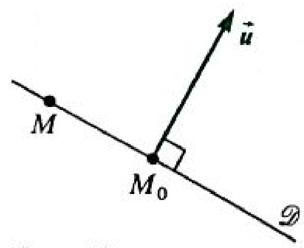


Figure 10

L'égalité $\vec{u} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$ *caractérise* l'appartenance d'un point M du plan à la droite $\mathscr{D}$.

Traduction dans un repère orthonormal

Considérons un repère *orthonormal* $\mathscr{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan et désignons par (x_0, y_0) les coordonnées de M_0, par (a, b) celles de $\vec{u}$ et par (x, y) celles d'un point M du plan.

L'égalité $\vec{u} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$ s'écrit alors $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$.

Cette relation, vérifiée par les coordonnées (x, y) d'un point M du plan si et seulement si ce point appartient à $\mathscr{D}$, est une *équation cartésienne* de $\mathscr{D}$.

THÉORÈME 2

Dans un repère orthonormal du plan, une équation cartésienne de la droite définie par un point $M_0(x_0, y_0)$ et un vecteur normal $\vec{u}(a, b)$ est :

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0.$$

REMARQUES :

1. Étant donnée une droite $\mathscr{D}$ d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ dans un repère orthonormal :
- un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ est $\vec{v}(-b, a)$;
- un vecteur normal de $\mathscr{D}$ est $\vec{u}(a, b)$.

2. Deux droites d'équations respectives $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$ dans un repère orthonormal sont orthogonales si et seulement si $aa' + bb' = 0$.

Activité **Distance d'un point à une droite**

Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. *Soit le point $A(1, -2)$ et la droite $\mathscr{D}$ d'équation* $3x + 4y - 1 = 0$.

1° Construire A et $\mathscr{D}$.

2° Déterminer une équation de la droite $\mathscr{D}'$ passant par A et orthogonale à $\mathscr{D}$.

3° Calculer les coordonnées du point d'intersection, H, des droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.

4° Calculer la distance des points A et H.
On rappelle que la distance du point A à son projeté orthogonal H sur la droite $\mathcal{D}$ est, par définition, la distance de A à $\mathcal{D}$; on la note $d(A, \mathcal{D})$.

2. Cette activité présente une autre méthode de calcul de la distance $d(A, \mathcal{D})$. Elle reprend les données de l'activité précédente.

1° Définir, par ses coordonnées, un vecteur $\vec{u}$ normal à la droite $\mathcal{D}$. Calculer $\|\vec{u}\|$.

2° A partir du repère $(A, \vec{u})$ de la droite $\mathcal{D}'$, donner un système d'équations paramétriques de cette droite.

3° Soit t_H le paramètre du point H (t_H est le réel tel que $\overrightarrow{AH} = t_H\vec{u}$).
Calculer t_H en exprimant que le point H appartient à la droite $\mathcal{D}$.

4° Calculer la distance des points A et H, en utilisant l'égalité vectorielle $\overrightarrow{AH} = t_H\vec{u}$.

3. On peut aussi calculer la distance AH en utilisant la propriété suivante, que l'on démontrera : la distance AM, et donc son carré AM^2, du point A à un point M de la droite $\mathcal{D}$ est minimale lorsque M est en H.

1° Écrire un système d'équations paramétriques de la droite $\mathcal{D}$ et exprimer AM^2 en fonction du paramètre t de M.

2° La fonction qui à tout réel t associe AM^2 est une fonction polynôme du second degré. Pour quelle valeur de t est-elle minimum? En déduire les coordonnées de H.

4. *Utiliser la méthode développée dans l'activité **2** sur un cas particulier pour montrer que la distance du point $M_0(x_0, y_0)$ à la droite $\mathcal{D}$ d'équation $ax + by + c = 0$ est donnée par :*

$$\boxed{d(M_0, \mathcal{D}) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

(Attention : pour appliquer cette formule il faut que le repère considéré soit orthonormal.)

5. *On donne, dans un repère orthonormal, les points $A(1, -2)$, $B(-2, 1)$, $C(3, -7)$. Calculer l'aire du triangle ABC.*

6. *Soit une droite $\mathcal{D}$, et un point A de $\mathcal{D}$.*

1° En choisissant un repère orthonormal du plan, déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $MA = 2MM'$, où M' est le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$.

2° Reprendre la question 1° avec :

a) $MA = \sqrt{3}\, MM'$; *b)* $MA = MM'$; *c)* $MA = \frac{1}{3} MM'$.

7. *On donne deux droites concourantes $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ et un réel k strictement positif. On se propose de déterminer analytiquement l'ensemble des points M du plan dont le rapport des distances à $\mathcal{D}'$ et à $\mathcal{D}$ est égal à k :*

$$\mathcal{F} = \{ M \in \mathcal{P} / d(M, \mathcal{D}') = kd(M, \mathcal{D}) \}.$$

Pour cela, on rapporte le plan $\mathcal{P}$ à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, choisi de façon que O soit le point d'intersection des droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ et $\vec{i}$ un vecteur directeur unitaire *de $\mathcal{D}$.*

1° Soit $\vec{i}'(\alpha, \beta)$ un vecteur directeur unitaire *de $\mathcal{D}'$. Démontrer que $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ et donner une équation cartésienne de $\mathcal{D}'$.*

2° Pour un point M de coordonnées (x, y) calculer $d(M, \mathcal{D})$ et $d(M, \mathcal{D}')$. En déduire que l'ensemble $\mathcal{F}$ est la réunion de deux droites passant par O.

3° On suppose $k = 1$. Démontrer que les deux droites de $\mathcal{F}$ sont orthogonales, que l'une, Δ, a pour vecteur directeur $\vec{i} + \vec{i}'$, et que l'autre, Δ', a pour vecteur directeur $\vec{i} - \vec{i}'$. En déduire que Δ et Δ' sont les bissectrices des angles formés par les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. Énoncer un théorème.

• Exercices d'application

11. Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère $(O, \vec{j}, \vec{j})$. On considère l'application f de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui, à tout point M de coordonnées (x, y), associe le point M' de coordonnées (x, y) telles que :

$$\begin{cases} x' = y + 1 \\ y' = 4x + 2. \end{cases}$$

1° Démontrer que f admet un point fixe unique, noté A, dont on calculera les coordonnées.
2° Démontrer que l'ensemble des points M du plan tels que A, M, M' soient alignés est la réunion de deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ passant par A.
b) Démontrer qu'il existe un réel k_1 que l'on déterminera tel que l'on ait, pour tout point M de $\mathcal{D}_1$, $\overrightarrow{AM'} = k_1\overrightarrow{AM}$.
c) Même question pour la droite $\mathcal{D}_2$.

12. Dans le plan $\mathcal{P}$, muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère l'application f définie par les formules analytiques :

$$\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = 3x + 10y. \end{cases}$$

1° Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}$ des points invariants par f.
2° a) Pour tout point M d'image M' démontrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire à un vecteur fixe $\vec{u}$.
b) Soit H le projeté de M sur $\mathcal{D}$ suivant la direction de $\vec{u}$. Démontrer qu'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{HM'} = k\overrightarrow{HM}$.
En déduire une construction simple de l'image M' d'un point M du plan $\mathcal{P}$.

13. Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit f l'application qui à tout point M de coordonnées (x, y) associe le point M' de coordonnées (x', y') tel que :

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = x + 2y. \end{cases}$$

1° Quel est l'ensemble $\mathcal{D}$ des points invariants par f?
2° Soit M un point qui n'est pas invariant. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MM'}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$. Que concluez-vous? Soit H le point d'intersection des droites (MM') et $\mathcal{D}$. Exprimer $\overrightarrow{HM'}$ en fonction de $\overrightarrow{HM}$. En déduire une construction géométrique de l'image M' d'un point M du plan.

14. Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit f l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ défini par les formules analytiques :

$$\begin{cases} x' = -3x + 4y - 12 \\ y' = -\dfrac{3}{2}x + 2y - 4. \end{cases}$$

1° Démontrer qu'il existe un point A, et un seul, invariant par f.
2° a) Démontrer que l'image M' de tout point M de $\mathcal{P}$ appartient à une droite fixe $\mathcal{D}$ passant par A.
b) Démontrer que le point M_1, milieu de $[M, M']$, appartient à une droite fixe Δ sécante avec $\mathcal{D}$ en A.
c) Déduire de *a)* et *b)* une construction géométrique simple de l'image M' d'un point M.
3° Démontrer que l'application f peut s'écrire sous la forme $s \circ p$, où p est une projection et s une symétrie centrale.

15. On donne dans le plan $\mathcal{P}$ un point O et un vecteur $\vec{u}$ non nul. Pour tout point M du plan on désigne par M' son image par la translation t de vecteur $\vec{u}$, et par M'' son image par la symétrie de centre O.
Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $\|\overrightarrow{M'M''}\| = \|\vec{u}\|$. (Donner une solution géométrique et une solution analytique.)

16. Le plan est muni d'un repère orthonormal. On donne les points $A(2, -3)$, $B(0, -1)$, $C(-2, -5)$.
Calculer les coordonnées de l'orthocentre H, du centre du cercle circonscrit Ω et du centre de gravité G, du triangle ABC.
Vérifier que les points Ω, G, H sont alignés et que : $\overrightarrow{\Omega G} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\Omega H}$.

17. Soit $\mathcal{D}$ et Δ deux droites du plan $\mathcal{P}$, sécantes en O et non orthogonales, et soit θ la mesure en radians des deux angles aigus déterminés par $\mathcal{D}$ et Δ $\left(\theta \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[\right)$.
A tout point M de $\mathcal{D}$ on associe le point M', projeté orthogonal de M sur Δ, et le point M_1 projeté orthogonal de M' sur $\mathcal{D}$. On désigne par f l'application de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}$ qui à M associe M'.
1° Démontrer que f est bijective.

2° Déterminer M de manière que :
a) $MM_1 = a$ (a réel positif donné);
b) le milieu de (M, M_1) soit un point I donné de la droite $\mathscr{D}$.

3° Soit M un point de $\mathscr{D}$; on pose :
$M_1 = f(M)$, $M_2 = f(M_1)$, ..., $M_n = f(M_{n-1})$.
Démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} OM_n = 0$.

IV – DROITE ET PLAN DANS L'ESPACE

CARACTÉRISATION VECTORIELLE D'UNE DROITE DE L'ESPACE

Comme dans le plan, toute droite $\mathscr{D}$ de l'espace $\mathscr{E}$ est déterminée par un de ses repères $(M_0, \vec{u})$: l'égalité $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{u}$, où t est un réel, *caractérise* l'appartenance d'un point M de $\mathscr{E}$ à la droite $\mathscr{D}$.

Considérons un repère $\mathscr{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace et désignons par (x_0, y_0, z_0) les coordonnées de M_0, par (α, β, γ) celles de $\vec{u}$, et par (x, y, z) celles d'un point M de l'espace.

L'égalité $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{u}$ se traduit dans le repère $\mathscr{R}$ par le système :

$$\begin{cases} x = x_0 + t\alpha \\ y = y_0 + t\beta \\ z = z_0 + t\gamma \end{cases}$$

appelé **système d'équations paramétriques** de $\mathscr{D}$.

Activité

1. *Dans l'espace $\mathscr{E}$, muni d'un repère $\mathscr{R}$, on donne les points $A(1, 2 - 1)$ et $B(-2, 4, 0)$.*

1° *Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite $\mathscr{D}$ passant par A et B.*

2° *Les points suivants appartiennent-ils à $\mathscr{D}$:*

$$M_1\left(-4, \frac{16}{3}, \frac{2}{3}\right), \quad M_2\left(\frac{11}{5}, \frac{6}{5}, -\frac{8}{5}\right), \quad M_3\left(-\frac{3}{2}, \frac{11}{3}, -\frac{1}{6}\right)?$$

3° *Soit $\mathscr{D}_m$ la droite dont un système d'équations paramétriques est :*

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = m + 2t. \end{cases}$$

Étudier, suivant les valeurs du réel m, l'intersection des droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}_m$.

2. Distance d'un point à une droite

Soit, dans l'espace $\mathscr{E}$, un point A et une droite $\mathscr{D}$ et soit H le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{D}$ (figure 11).

Pour tout point M de la droite $\mathscr{D}$, on a :

$$AM^2 = AH^2 + HM^2,$$

d'où $AM^2 \geqslant AH^2$, soit $AM \geqslant AH$.

La distance du point A à un point M de la droite $\mathscr{D}$ est donc *minimale* lorsque M est en H, projeté orthogonal de A sur $\mathscr{D}$.

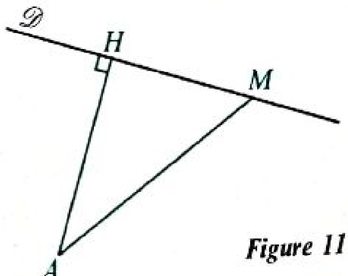


Figure 11

Cette distance AH est appelée **distance du point A à la droite $\mathscr{D}$** et est notée $d(A, \mathscr{D})$.

I — *Dans l'espace $\mathscr{E}$ rapporté à un repère orthonormal $\mathscr{R}$, on se propose de déterminer la distance du point $A(-2, 1, 3)$ à la droite $\mathscr{D}$ passant par $M_0(-1, 2, 1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(-2, 1, 2)$.*

• **Première méthode :**

1° Soit t_H le paramètre du point H, projeté orthogonal de A sur $\mathscr{D}$, dans le repère $(M_0, \vec{u})$ de $\mathscr{D}$. Déterminer t_H à partir de l'égalité $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0$. En déduire les coordonnées de H.

2° Calculer la distance AH.

A noter que cette méthode de calcul des coordonnées de H peut être utilisée pour définir analytiquement la projection orthogonale sur une droite $\mathscr{D}$ (cf. activité 3).

• **Seconde méthode :**

1° Soit M un point quelconque de la droite $\mathscr{D}$ de paramètre t dans le repère $(M_0, \vec{u})$. Exprimer les coordonnées de M en fonction de t, puis le réel AM^2 en fonction de t.

2° La fonction f qui, à tout réel t, associe le réel $f(t) = AM^2$ est une fonction trinôme du second degré. En écrivant ce trinôme sous la forme canonique, déterminer sa valeur minimale. En déduire la distance $d(A, \mathscr{D})$.

II — Application

Dans l'espace $\mathscr{E}$ muni d'un repère orthonormal on donne les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ de repères respectifs $(A, \vec{u})$ et $(A', \vec{u}')$: $A(0, 0, 1)$, $\vec{u}(1, 1, 0)$, $A'(0, 0, -1)$, $\vec{u}'(1, -1, 0)$.

1° Pour tout point M de coordonnées (x, y, z) calculer en fonction de x, y, z les distances $d(M, \mathscr{D})$ et $d(M, \mathscr{D}')$.

2° On désigne par $\mathscr{S}$ l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que $d(M, \mathscr{D}) = d(M, \mathscr{D}')$. Démontrer que M appartient à $\mathscr{S}$ si et seulement si :

$$xy = 2z. \tag{1}$$

(La relation (1) est une équation de l'ensemble $\mathscr{S}$.)

3° Démontrer que le point $B(-1, 2, -1)$ appartient à $\mathscr{S}$ et que par B il passe deux droites contenues dans l'ensemble $\mathscr{S}$.

3. Formules analytiques de la projection orthogonale sur une droite

L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère orthonormal.
On se propose de définir analytiquement la projection orthogonale sur la droite $\mathscr{D}$ passant par $M_0(-2, 1, 3)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(2, 1, 3)$.
Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace de projeté orthogonal $M'(x', y', z')$ sur $\mathscr{D}$. Désignons par t le paramètre de M' dans le repère $(M_0, \vec{u})$ de la droite $\mathscr{D}$.
A partir de l'égalité $\overrightarrow{MM'} \cdot \vec{u} = 0$, calculer t en fonction de x, y, z. En déduire l'expression de x', y', z' en fonction de x, y, z.

4. Distance de deux droites

I — Perpendiculaire commune à deux droites de l'espace

On dit qu'une droite Δ est une **perpendiculaire commune** à deux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ pour exprimer que Δ coupe $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ et leur est orthogonale.

1° On suppose que $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont strictement parallèles. Déterminer l'ensemble de leurs perpendiculaires communes.

2° On suppose que $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont sécantes. Démontrer qu'elles possèdent une perpendiculaire commune, et une seule.

3° On suppose que $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ne sont pas coplanaires.

Soit A un point de $\mathscr{D}$, A' un point de $\mathscr{D}'$ et soit $\vec{i}$ et $\vec{i}\,'$ des vecteurs directeurs unitaires *respectifs de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ (figure 12).*

Déterminer les perpendiculaires communes à $\mathscr{D}$ et à $\mathscr{D}'$ revient à déterminer les bipoints (M, M') tels que :

$$M \in \mathscr{D}, \quad M' \in \mathscr{D}', \quad \overrightarrow{MM'} \perp \vec{i}, \quad \overrightarrow{MM'} \perp \vec{i}\,'.$$

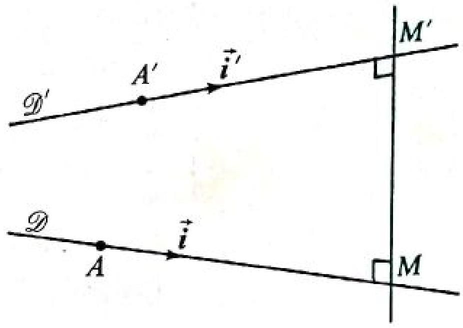


Figure 12

Désignons par θ la mesure en radians des angles associés aux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{i}\,'$.
Comme $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ne sont pas parallèles, on a $\theta \neq 0$ et $\theta \neq \pi$, d'où $\cos\theta \neq 1$ et $\cos\theta \neq -1$.
Pour tout point M de la droite $\mathscr{D}$, il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{i}$.
De même, pour tout point M' de la droite $\mathscr{D}'$, il existe un réel t' tel que $\overrightarrow{A'M'} = t'\vec{i}\,'$.

a) Démontrer que la droite (MM') est une perpendiculaire commune à $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ si, et seulement si :

$$\begin{cases} t - t'\cos\theta = \overrightarrow{AA'} \cdot \vec{i} \\ t\cos\theta - t' = \overrightarrow{AA'} \cdot \vec{i}\,'. \end{cases}$$

b) En déduire l'existence et l'unicité d'une perpendiculaire commune à $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.

II – Plus courte distance de deux droites non coplanaires

On considère deux droites non coplanaires $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ et leur perpendiculaire commune (HH') (figure 13). Étudions la distance d'un point M de $\mathscr{D}$ et d'un point M' de $\mathscr{D}'$.
Soit $\mathscr{P}$ le plan contenant $\mathscr{D}$ et parallèle à $\mathscr{D}'$ et soit K le projeté orthogonal de M' sur $\mathscr{P}$.
Démontrer que $HH' = KM'$. En déduire que $MM' \geqslant HH'$.

La distance d'un point M de $\mathscr{D}$ et d'un point M' de $\mathscr{D}$ est donc minimale lorsque M est en H et M' en H'. Cette distance minimale HH' est appelée **plus courte distance,** ou plus simplement, **distance** des droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.

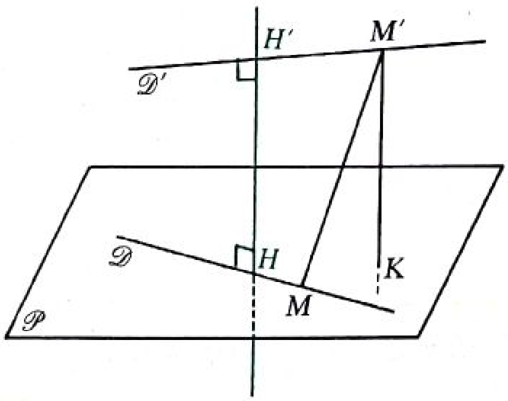


Figure 13

III – Application

Dans l'espace $\mathscr{E}$ rapporté à un repère orthonormal, on considère les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ de repères respectifs $(A, \vec{u})$ et $(A', \vec{u}\,')$: $A(2, -1, 1)$, $\vec{u}(-1, 2, 1)$, $A'(0, 2, 1)$, $\vec{u}\,'(2, -3, 1)$.

1° Démontrer que $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ne sont pas coplanaires.

2° Soit M un point de $\mathscr{D}$, de paramètre t dans le repère $(A, \vec{u})$, et M' un point de $\mathscr{D}'$, de paramètre t' dans le repère $(A', \vec{u}\,')$.
a) Déterminer les réels t et t' de manière que la droite (MM') soit orthogonale à $\mathscr{D}$ et à $\mathscr{D}'$. On note respectivement H et H' les points de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ correspondant aux valeurs de t et t' trouvées.
(La droite (HH') est la **perpendiculaire commune** aux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.)
b) Calculer la distance des droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$, c'est-à-dire la distance HH'.

3° Déterminer, dans les cas suivants, la perpendiculaire commune à $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ et la distance de ces droites :

a) $A(0, 0, 0)$, $\vec{u}(1, 0, 0)$, $A'(0, 3, 0)$, $\vec{u}'(0, -1, 2)$.
b) $A(1, 1, 1)$, $\vec{u}(1, 2, 3)$, $A'(2, -1, 0)$, $\vec{u}'(0, 0, 1)$,
c) $A(2, 0, 0)$, $\vec{u}(0, 1, -2)$, $A'(0, -2, 0)$, $\vec{u}'(0, 2, -3)$.

CARACTÉRISATION VECTORIELLE D'UN PLAN DE L'ESPACE

On appelle **repère** d'un plan $\mathscr{P}$ tout triplet $(M_0, \vec{u}, \vec{u}')$, où M_0 est un point de $\mathscr{P}$ et $\vec{u}, \vec{u}'$ deux vecteurs *non colinéaires* dont les directions sont parallèles à la direction de $\mathscr{P}$ (figure 14).

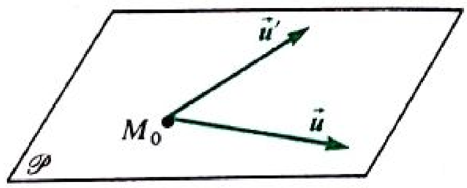


Figure 14

Le repère $(M_0, \vec{u}, \vec{u}')$ détermine le plan $\mathscr{P}$:

- $\mathscr{P}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{u} + t'\vec{u}'$, lorsque le couple de réels (t, t') décrit l'ensemble $\mathbb{R}^2$.
- Pour tout point M du plan $\mathscr{P}$, il existe un couple de réels (t, t'), unique, tel que $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{u} + t'\vec{u}'$; t et t' sont les **paramètres** de M dans le repère $(M_0, \vec{u}, \vec{u}')$.

L'égalité $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{u} + t'\vec{u}'$, où t, t' sont des réels, *caractérise* l'appartenance d'un point M de l'espace au plan $\mathscr{P}$.

Traduction dans un repère de l'espace

Considérons un repère $\mathscr{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace et désignons par (x_0, y_0, z_0) les coordonnées de M_0, par (α, β, γ) et $(\alpha', \beta', \gamma')$ celles de $\vec{u}$ et $\vec{u}'$, et par (x, y, z) celles d'un point M de l'espace.

L'égalité $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{u} + t'\vec{u}'$ se traduit alors dans le repère $\mathscr{R}$ par le système :

$$\begin{cases} x = x_0 + t\alpha + t'\alpha' \\ y = y_0 + t\beta + t'\beta' \\ z = z_0 + t\gamma + t'\gamma' \end{cases}$$

appelé **système d'équations paramétriques de** $\mathscr{P}$.

Activité

1. *Soit $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ deux droites non coplanaires. A toute droite Δ, sécante avec $\mathscr{D}$ en M et avec $\mathscr{D}'$ en M', on associe le point R tel que* $\dfrac{\overline{RM}}{\overline{RM'}} = -3$.

On se propose de déterminer l'ensemble des points R ainsi obtenus.
Soit $(A, \vec{u})$ et $(A', \vec{u}')$ des repères respectifs de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.
La droite (AA') est une droite Δ particulière; soit R_0 le point qui lui est associé. Toute droite Δ est déterminée par ses points d'intersection, M et M', avec $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$, ou encore par les paramètres respectifs t et t' de ces deux points dans les repères $(A, \vec{u})$ et $(A', \vec{u}')$.

1° Exprimer le vecteur $\overrightarrow{R_0R}$ en fonction de t, t', $\vec{u}$ et $\vec{u}'$.

2° En déduire l'ensemble cherché.

2. Équation cartésienne d'un plan

L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère $\mathscr{R}$.

I – *On considère le plan* $\mathscr{P}$ *de repère* $(M_0, \vec{u}, \vec{u}')$: $M_0(1, -2, 3)$, $\vec{u}(-1, 1, 1)$, $\vec{u}'(-2, 1, 3)$. *Soit M un point de l'espace de coordonnées* (x, y, z).

1° Si M appartient à $\mathscr{P}$, *il existe deux réels t et t′ tels que :*

$$\begin{cases} x = 1 - t - 2t' & (1) \\ y = -2 + t + t' & (2) \\ z = 3 + t + 3t'. & (3) \end{cases}$$

A partir de (1) *et* (2), *exprimer t et t′ en fonction de x et y. Déduire alors de* (3) *l'égalité* (E) : $2x + y + z - 3 = 0$.

2° Réciproquement, démontrer que tout point M dont les coordonnées (x, y, z) *vérifient la relation* (E), *appartient à* $\mathscr{P}$.
La relation (E) *est donc vérifiée par les coordonnées* (x, y, z) *d'un point M de l'espace si, et seulement si, ce point appartient à* $\mathscr{P}$.

On dit que (E) est une **équation cartésienne** du plan $\mathscr{P}$.

3° Déterminer une équation du plan de repère $(M_0, \vec{u}, \vec{u}')$ *dans les cas suivants :*

a) $M_0(3, -1, 1)$, $\vec{u}(-1, 1, 2)$, $\vec{u}'(1, 2, 0)$;
b) $M_0(1, 3, 2)$, $\vec{u}(2, -1, 3)$, $\vec{u}'(-1, 2, 1)$.

II – *On désigne par* $\mathscr{F}$ *l'ensemble des points M de l'espace dont les coordonnées* (x, y, z) *vérifient l'équation* $x + 2y - 3z + 9 = 0$.

1° Pour tout point $M(x, y, z)$ *appartenant à* $\mathscr{F}$, *démontrer que :*

$$\begin{cases} x = -9 - 2y + 3z \\ y = 0 + 1y + 0z \\ z = 0 + 0y + 1z. \end{cases}$$

En déduire que M appartient au plan $\mathscr{P}$ *de repère* $(M_0, \vec{u}, \vec{u}')$ *tel que :*

$$M_0(-9, 0, 0), \qquad \vec{u}(-2, 1, 0), \qquad \vec{u}'(3, 0, 1).$$

2° Démontrer réciproquement que tout point M du plan $\mathscr{P}$ *appartient à* $\mathscr{F}$. *En déduire que* $\mathscr{F} = \mathscr{P}$.

3° Démontrer que les ensembles définis par les équations suivantes, sont des plans dont on déterminera un repère :

a) $-3x + 2y + 5z + 6 = 0$;   *d)* $3y - 4z + 12 = 0$;
b) $2x - 3y + z = 0$;   *e)* $x + y + z = 0$;
c) $2x - 3z + 5 = 0$;   *f)* $y + 3 = 0$.

4° Plus généralement, démontrer le théorème suivant :

Étant donnés quatre réels *a*, *b*, *c*, *d*, dont un au moins des trois premiers *a*, *b*, *c* n'est pas nul, l'ensemble d'équation $ax + by + cz + d = 0$ est un plan.

3. *On donne les points :* $A(-1, 2, 3)$, $B(2, -5, 1)$, $C(1, -3, 4)$.

1° a) Démontrer que A, B, C ne sont pas alignés.
b) Écrire un système d'équations paramétriques du plan (A, B, C).
c) Les points suivants appartiennent-ils au plan (ABC) :

$$M_1(4, -10, 2), \quad M_2(11, -27, 1), \quad M_3(2, -6, 8), \quad M_4(-1, 0, 10)?$$

2° Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC). *Utiliser cette équation pour traiter la question 1° c.*

4. *On considère les trois points A, B, C et les deux vecteurs* $\vec{u}, \vec{u}'$:

$$A(1, -1, 0), \quad B(0, 1, -3), \quad C(2, -1, 1), \quad \vec{u}(0, 1, -1), \quad \vec{u}'(-2, 0, 1).$$

1° Écrire un système d'équations paramétriques de la droite $\mathcal{D}$ passant par A et B.
2° Trouver une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ de repère $(C, \vec{u}, \vec{u}')$.
3° Calculer les coordonnées du point d'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$.
4° Définir analytiquement la projection sur $\mathcal{P}$ parallèlement à $\mathcal{D}$.

PLAN DÉFINI PAR UN POINT ET UN VECTEUR NORMAL

On appelle **vecteur normal** d'un plan $\mathcal{P}$, tout vecteur $\vec{u}$, non nul, dont la direction est orthogonale à celle de $\mathcal{P}$ (figure 15).

Le plan $\mathcal{P}$ est déterminé par un de ses points, M_0, et par un de ses vecteurs normaux, $\vec{u}$: $\mathcal{P}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{M_0M}$ soient orthogonaux, c'est-à-dire tels que le produit scalaire $\vec{u} \cdot \overrightarrow{M_0M}$ soit nul.

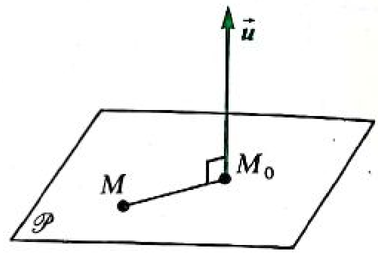


Figure 15

L'égalité $\vec{u} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$ caractérise l'appartenance d'un point M de l'espace au plan $\mathcal{P}$.

Traduction dans un repère orthonormal

Considérons un repère *orthonormal* $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace et désignons par (x_0, y_0, z_0) les coordonnées de M_0, par (a, b, c) celles de $\vec{u}$ et par (x, y, z) celles d'un point M de l'espace.

L'égalité $\vec{u} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$ s'écrit alors :

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

Cette relation, vérifiée par les coordonnées (x, y, z) d'un point M de l'espace si et seulement si ce point appartient à $\mathcal{P}$, est une **équation cartésienne** de $\mathcal{P}$.

THÉORÈME 3	**Dans un repère orthonormal de l'espace, une équation cartésienne du plan défini par un point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ et un vecteur normal $\vec{u}(a, b, c)$ est :** $$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

Cette équation peut s'écrire :

$$ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0) = 0,$$

soit, en posant $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$:

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Et dans cette relation, un au moins des trois réels a, b, c n'est pas nul, puisque le vecteur normal $\vec{u}$ de coordonnées (a, b, c) n'est pas nul.

ENSEMBLE D'ÉQUATION $ax + by + cz + d = 0$

On donne trois réels a, b, c non tous nuls et un réel d.

Étudions l'ensemble $\mathscr{F}$ des points M de l'espace $\mathscr{E}$ dont les coordonnées (x, y, z) dans un repère orthonormal de $\mathscr{E}$, vérifient l'équation :

$$ax + by + cz + d = 0. \tag{1}$$

L'ensemble $\mathscr{F}$ n'est pas vide : si, par exemple, a n'est pas nul, le point de coordonnées $\left(-\frac{d}{a}, 0, 0\right)$ appartient à $\mathscr{F}$.

Soit $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un point de $\mathscr{F}$; on a :

$$ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0.$$

L'équation (1) est alors équivalente à :

$$(ax + by + cz + d) - (ax_0 + by_0 + cz_0 + d) = 0,$$

soit :

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0. \tag{2}$$

Or (2) est une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ défini par le point $M\ (x_0, y_0, z_0)$ et le vecteur normal $\vec{u}(a, b, c)$.

Donc : $\mathscr{F} = \mathscr{P}$.

THÉORÈME 4	**Trois réels a, b, c non tous nuls et un réel d étant donnés, l'ensemble des points M de l'espace dont les coordonnées (x, y, z), dans un repère orthonormal, vérifient l'équation $ax + by + cz + d = 0$, est un plan.** **Le vecteur de coordonnées (a, b, c) est un vecteur normal de ce plan.**

REMARQUE : On démontre (activité 2, page 131), que l'ensemble d'équation :

$$ax + by + cz + d = 0$$

dans un repère *quelconque* de l'espace est, lorsque a, b, c ne sont pas tous nuls, un plan. Mais, dans le cas où le repère n'est pas orthonormal, le vecteur de coordonnées (a, b, c) n'est pas, en général, un vecteur normal de ce plan.

CONDITIONS DE PARALLÉLISME ET DE PERPENDICULARITÉ DE DEUX PLANS

Soit $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ deux plans d'équations respectives, dans un repère orthonormal de l'espace :

$$ax + by + cz + d = 0$$

et $$a'x + b'y + c'z + d' = 0.$$

Le vecteur $\vec{u}(a, b, c)$, normal à $\mathscr{P}$, est un vecteur directeur de toute droite $\mathscr{D}$ orthogonale à $\mathscr{P}$. De même le vecteur $\vec{u}'(a', b', c')$ est un vecteur directeur de toute droite $\mathscr{D}'$ orthogonale à $\mathscr{P}'$.

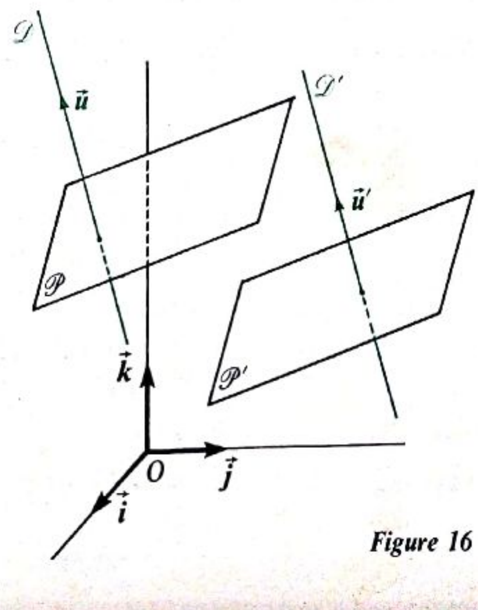


Figure 16

1. Les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont parallèles si, et seulement si, les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont parallèles (figure 16), c'est-à-dire si, et seulement si, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont colinéaires. Comme $\vec{u}$ n'est pas nul, $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont colinéaires si, et seulement si, il existe un réel t tel que $\vec{u}' = t\vec{u}$.

Finalement, $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont parallèles si, et seulement si, il existe un réel t tel que :

$$a' = ta, \qquad b' = tb, \qquad c' = tc.$$

2. Les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont perpendiculaires si, et seulement si, les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont orthogonales (figure 17), c'est-à-dire si, et seulement si, $\vec{u} \cdot \vec{u}' = 0$.

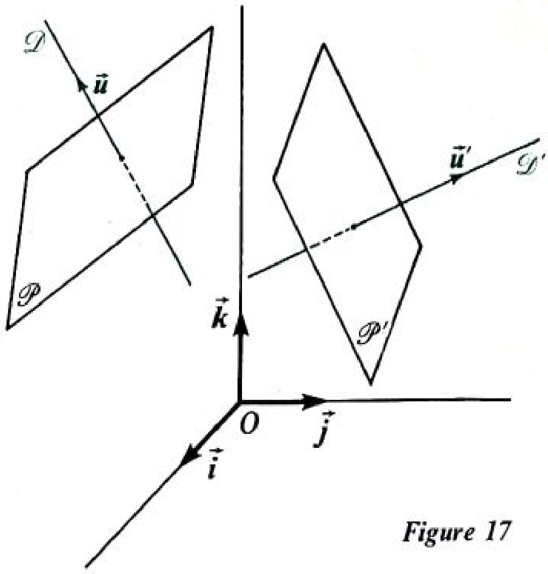


Figure 17

D'où le théorème :

THÉORÈME 5

Étant donnés deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ d'équations respectives :

$$ax + by + cz + d = 0 \quad \text{et} \quad a'x + b'y + c'z + d' = 0,$$

dans un repère orthonormal de l'espace :

1. $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont parallèles si, et seulement si, il existe un réel t tel que :

$$a' = ta, \qquad b' = tb, \qquad c' = tc.$$

2. $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont perpendiculaires si, et seulement si, $aa' + bb' + cc' = 0$.

La condition de parallélisme des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ « il existe un réel t tel que $a' = ta$, $b' = tb$, $c' = tc$ » peut aussi s'exprimer, lorsque a, b et c ne sont pas nuls, par :

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}.$$

Activité

1. *Dans l'espace $\mathscr{E}$ rapporté à un repère orthonormal, on donne le plan $\mathscr{P}$ de repère $(M_0, \vec{u}', \vec{u}'')$:* $M_0(-1, 3, 4)$, $\vec{u}'(-2, 1, 3)$, $\vec{u}''(2, -2, -1)$.

1° Déterminer, par ses coordonnées, un vecteur normal à $\mathscr{P}$. En déduire une équation cartésienne de $\mathscr{P}$.

2° Étudier l'intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la droite $\mathscr{D}$ passant par le point $M_1(-1, 0, 3)$ et de vecteur directeur $\vec{u}_1(-2, 1, 4)$.

2. *On donne le plan $\mathscr{P}$ d'équation $2x - 3y + z - 6 = 0$, dans un repère orthonormal.*

1° Soit A le point de coordonnées $(1, -3, -2)$. Calculer les coordonnées du point A', projeté orthogonal de A sur $\mathscr{P}$. (A' est le point d'intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la droite passant par A et orthogonale à $\mathscr{P}$; on remarquera qu'un vecteur normal à $\mathscr{P}$ est un vecteur directeur de cette droite.)

2° Établir les formules analytiques de la projection orthogonale sur $\mathscr{P}$.

3. *Dans l'espace $\mathscr{E}$ muni d'un repère orthonormal, on donne le plan $\mathscr{P}$ d'équation $2x - 3y + 4z - 3 = 0$ et les points $A(2, -1, 3)$ et $B(1, 1, 1)$.*

1° Trouver une équation :
a) du plan $\mathscr{P}'$ passant par A et parallèle à $\mathscr{P}$;
b) du plan $\mathscr{P}''$ passant par A et B et perpendiculaire à $\mathscr{P}$.

2° Déterminer un système d'équations paramétriques des droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$, intersections respectives du plan $\mathscr{P}''$ avec les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$.

4. Distance d'un point à un plan

Considérons dans l'espace $\mathscr{E}$, un plan $\mathscr{P}$, un point A et le projeté orthogonal H de A sur $\mathscr{P}$ (figure 18).

Pour tout point M du plan $\mathscr{P}$, on a :

$$AM^2 = AH^2 + HM^2.$$

d'où $AM^2 \geqslant AH^2$, soit $AM \geqslant AH$.

La distance du point A à un point M de la droite $\mathscr{D}$ est donc *minimale* lorsque M est en H, projeté orthogonal de A sur $\mathscr{P}$. Cette distance AH est appelée **distance du point A au plan $\mathscr{P}$** et est notée $d(A, \mathscr{P})$.

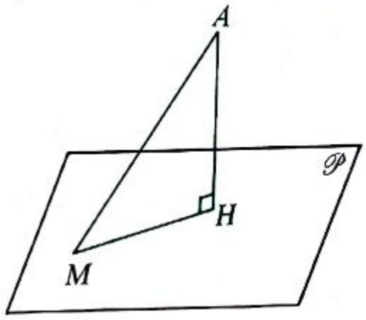


Figure 18

1° Dans l'espace $\mathscr{E}$ rapporté à un repère orthonormal, on se propose de déterminer la distance du point $A(-3, 1, 2)$ au plan $\mathscr{P}$ d'équation $2x - y + z - 2 = 0$.

a) Définir, par ses coordonnées, un vecteur $\vec{u}$ normal au plan $\mathscr{P}$. Calculer $\|\vec{u}\|$.

b) Le point H, projeté orthogonal de A sur $\mathscr{P}$, appartient à la droite Δ de repère $(A, \vec{u})$. Calculer le paramètre t_H du point H dans ce repère en exprimant l'appartenance de H au plan $\mathscr{P}$.

c) Calculer la distance AH, en utilisant l'égalité vectorielle $\overrightarrow{AH} = t_H\vec{u}$.

2° En utilisant la méthode exposée ci-dessus, calculer les distances :

a) du point O, origine du repère, au plan d'équation $x + y + z - 1 = 0$;

b) du point $A(-1, 3, 4)$ au plan d'équation $2x - y - 2z + 4 = 0$;

3° Plus généralement, démontrer que la distance du point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ au plan $\mathscr{P}$ d'équation $ax + by + cz + d = 0$ est donnée par la formule :

$$\boxed{d(M_0, P) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$

4° Soit $\mathscr{P}_1$ le plan d'équation $z = 0$, et $\mathscr{P}_2$ le plan d'équation $x - 2y + 2z - 3 = 0$. Déterminer l'ensemble $\mathscr{F}$ des points M de l'espace tels que $d(M, \mathscr{P}_1) = d(M, \mathscr{P}_2)$. (On montrera que $\mathscr{F}$ est la réunion de deux plans perpendiculaires, sécants suivant la droite d'intersection de $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.)

Exercices d'application

Dans tous ces exercices on suppose que l'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

18. Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation $x + y + z = 0$. On désigne par $\mathscr{F}$ l'ensemble des points M de l'espace tels que $d(M, O) = \sqrt{3}d(M, \mathscr{P})$.

1° Démontrer qu'un point $M(x, y, z)$ appartient à $\mathscr{F}$ si, et seulement si, $xy + yz + zx = 0$.

2° Démontrer que pour tout point A de $\mathscr{F}$, distinct de O, la droite (OA) est contenue dans l'ensemble $\mathscr{F}$.

19. On considère les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ de repères respectifs $(A, \vec{i})$ et $(A', \vec{j})$, avec :

$$A(0, 0, 1), \quad A'(0, 0, -1).$$

1° Pour tout point M de coordonnées (x, y, z) calculer, en fonction de x, y, z, les distances $d(M, \mathscr{D})$ et $d(M, \mathscr{D}')$.

2° On désigne par $\mathscr{S}$ l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que $d(M, \mathscr{D}) = d(M, \mathscr{D}')$. Démontrer que M appartient à $\mathscr{S}$ si, et seulement si : $\quad y^2 - x^2 = 4z \qquad (1)$

(1) est une équation de l'ensemble $\mathscr{S}$.

3° Démontrer que le point $B(1, 3, 2)$ appartient à $\mathscr{S}$ et que par B il passe deux droites contenues dans l'ensemble $\mathscr{S}$.

20. Soit $\mathscr{P}$ le plan de repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et soit $\mathscr{D}$ la droite passant par O et dont un vecteur directeur est $\vec{u}(0, 1, 1)$. On désigne par $\mathscr{S}$ l'ensemble des points M de l'espace tels que $d(M, \mathscr{P}) = d(M, \mathscr{D})$.
1° Pour tout point M calculer, en fonction de ses coordonnées x, y, z, les distances $d(M, \mathscr{P})$ et $d(M, \mathscr{D})$. En déduire une équation de $\mathscr{S}$.
2° Soit M_0 un point différent de O, appartenant à $\mathscr{S}$. Démontrer que la droite (OM_0) est incluse dans $\mathscr{S}$.

21. Soit $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ deux plans sécants suivant une droite $\mathscr{D}$. On choisit un repère orthonormal $\mathscr{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de la façon suivante :
- O est un point de $\mathscr{D}$;
- $\vec{i}$ est un vecteur directeur unitaire de $\mathscr{D}$;
- $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormal de $\mathscr{P}$.

1° Donner une équation de $\mathscr{P}$. Démontrer que $\mathscr{P}$ possède une équation de la forme $y = mz$, où m est un réel.
2° Pour tout point M de coordonnées (x, y, z), calculer les distances $d(M, \mathscr{P})$ et $d(M, \mathscr{P}')$ en fonction de x, y, z.
3° En déduire que l'ensemble des points de l'espace équidistants des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ est la réunion de deux plans $\mathscr{Q}$ et $\mathscr{R}$. Démontrer que les plans $\mathscr{Q}$ et $\mathscr{R}$ contiennent la droite $\mathscr{D}$ et qu'ils sont perpendiculaires.

22. Soit a un réel strictement positif. On considère les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ passant par l'origine O du repère et de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}(1, a, 0)$ et $\vec{u}'(1, -a, 0)$.
Démontrer que l'ensemble des points de l'espace équidistants de $\mathscr{D}$ et de $\mathscr{D}'$ est la réunion de deux plans perpendiculaires entre eux et perpendiculaires au plan contenant $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.

23. On considère l'application f de l'espace $\mathscr{E}$ dans lui-même qui, à tout point $M(x, y, z)$, associe le point $M'(x', y', z')$ défini par :

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{9}(8x + 2y - 2z) \\ y' = \dfrac{1}{9}(2x + 5y + 4z) \\ z' = \dfrac{1}{9}(-2x + 4y + 5z). \end{cases}$$

1° Démontrer que l'ensemble des points invariants par f est un plan de $\mathscr{P}$ dont on donnera une équation cartésienne.
2° Pour tout point M d'image M' par f, démontrer que :
a) M' appartient à $\mathscr{P}$;
b) le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est orthogonal à $\mathscr{P}$.
En déduire que f est la projection orthogonale sur $\mathscr{P}$.
3° Étudier de même l'application f définie analytiquement par :

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{3}(2x + y - z) \\ y' = \dfrac{1}{3}(x + 2y + z) \\ z' = \dfrac{1}{3}(-x + y + 2z). \end{cases}$$

24. Déterminer l'ensemble des points M de l'espace équidistants des trois axes de coordonnées du repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

25. On considère l'application f de l'espace $\mathscr{E}$ dans lui-même qui, à tout point $M(x, y, z)$, associe le point $M'(x', y', z')$ défini par :

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{9}(x - 2y + 2z) \\ y' = -\dfrac{2}{9}(x - 2y + 2z) \\ z' = \dfrac{2}{9}(x - 2y + 2z). \end{cases}$$

1° Démontrer que l'image M' de tout point M appartient à une droite $\mathscr{D}$ dont on déterminera un repère $(A, \vec{u})$.
2° Démontrer que pour tout point M d'image M' le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est orthogonal à $\vec{u}$. En déduire que f est la projection orthogonale sur $\mathscr{D}$.

26. Dans l'espace rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points A, B, C de coordonnées :

$A(3, 2, 3)$, $\quad B(9, 2, 11)$, $\quad C(6, -3, 7)$.

1° Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux.
2° Donner une équation du plan $\mathscr{P}$ passant par les points A, B et C.
3° Donner une équation de la sphère $\mathscr{S}$ de diamètre $[A, B]$. Préciser les coordonnées de son centre et son rayon.

TRAVAUX PRATIQUES

ENSEMBLE DES HOMOTHÉTIES-TRANSLATIONS

Formules analytiques d'une translation et d'une homothétie

1° Rappeler la définition :
a) d'une translation de vecteur $\vec{u}$;
b) d'une homothétie de centre A et de rapport k (k réel non nul).

2° Le plan $\mathscr{P}$ est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
a) Définir analytiquement la translation t de vecteur $\vec{u} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$.
b) Définir analytiquement l'homothétie h de centre $A(3, -4)$ et de rapport $-\frac{5}{2}$.

(Définir analytiquement une application f de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ c'est exprimer, en fonction des coordonnées (x, y) d'un point quelconque M, les coordonnées (x', y') de son image $M' = f(M)$.)

3° Soit f l'application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ définie analytiquement par les formules :

$$\begin{cases} x' = kx + a \\ y' = kx + b, \end{cases}$$

où k est un réel non nul *et a, b deux réels quelconques.*
a) On suppose $k = 1$. Démontrer que pour tout M d'image $M' = f(M)$, le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est constant. Reconnaître l'application f.
b) On suppose $k \neq 1$. Démontrer qu'il existe un point A, unique, invariant par f. Pour tout point M d'image $M' = f(M)$ comparer les vecteurs $\overrightarrow{AM'}$ et $\overrightarrow{AM}$. Reconnaître l'application f.

On retiendra :

Dans le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, toute application f définie par les formules analytiques :

$$\begin{cases} x' = kx + a \\ y' = ky + b, \end{cases}$$

où k est un réel non nul, et a, b deux réels quelconques, est une translation si $k = 1$ ou une homothétie de rapport k si $k \neq 1$.

4° Définir analytiquement et reconnaître les applications composées $t \circ h$ et $h \circ t$, où t et h sont les applications de la question 2°. A-t-on $t \circ h = h \circ t$?

Applications composées de translations et d'homothéties

1. Composée de deux translations

Reconnaître l'application composée $t_2 \circ t_1$ de deux translations t_1 et t_2 de vecteurs respectifs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$. Que peut-on dire des deux applications $t_2 \circ t_1$ et $t_1 \circ t_2$?

2. Composée d'une homothétie et d'une translation

Soit h une homothétie de centre O et de rapport $k \neq 1$ et soit t une translation de vecteur $\vec{u}$. On pose $f = h \circ t$.
1° a) Pour tout point M d'image M' par f, démontrer que :

$$\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM} + k\vec{u}. \qquad (1)$$

b) En utilisant l'égalité (1), démontrer qu'un point Ω_1 est invariant par f si, et seulement si :

$$\overrightarrow{O\Omega_1} = k\overrightarrow{O\Omega_1} + k\vec{u}. \qquad (2)$$

En déduire l'existence et l'unicité d'un tel point Ω_1, défini par $\overrightarrow{O\Omega_1} = \frac{k}{1-k}\vec{u}$.

c) Déduire de (1) *et* (2) *que* $\overrightarrow{\Omega_1 M'} = k\overrightarrow{\Omega_1 M}$ *et reconnaître l'application* f.

2° En procédant comme au 1°, démontrer que l'application composée $g = t \circ h$ *est une homothétie de rapport* k *dont le centre* Ω_2 *est défini par*

$$\overrightarrow{O\Omega_2} = \frac{1}{1-k}\vec{u}.$$

3° Démontrer que $\overrightarrow{\Omega_1 \Omega_2} = \vec{u}$ *et en déduire, lorsque* $\vec{u} \neq \vec{0}$, *que* $h \circ t \neq t \circ h$.

4° On suppose $k \neq 1$ *et* $\vec{u} \neq \vec{0}$ *et on rapporte le plan* $\mathcal{P}$ *à un repère* $(O, \vec{i}, \vec{j})$ *dont l'origine est le centre de* h *et tel que* $\vec{i} = \vec{u}$.

a) Définir analytiquement l'application $f = h \circ t$. *En déduire que* f *est une homothétie dont on déterminera le centre et le rapport.*

b) Même question pour l'application $g = t \circ h$.

c) Ω_1 *et* Ω_2 *étant les centres respectifs des homothéties* f *et* g, *vérifier analytiquement que* $\overrightarrow{\Omega_1 \Omega_2} = \vec{u}$.

3. Composée de deux homothéties

Soit h_1 *une homothétie de centre* O_1 *et de rapport* k_1 *et* h_2 *une homothétie de centre* O_2 *et de rapport* k_2. *On pose* $f = h_2 \circ h_1$.

1° Soit M *un point quelconque du plan,* $M_1 = h_1(M)$ *et* $M' = h_2(M_1)$:

$$\overrightarrow{O_1 M_1} = k_1 \overrightarrow{O_1 M} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{O_2 M'} = k_2 \overrightarrow{O_2 M_1}.$$

En déduire que :

$$\overrightarrow{O_1 M'} = k_2 k_1 \overrightarrow{O_1 M} + (1 - k_2)\overrightarrow{O_1 O_2}. \qquad (1)$$

2° On suppose $k_2 k_1 = 1$. *Démontrer que l'égalité* (1) *s'écrit :*

$$\overrightarrow{MM'} = (1 - k_2)\overrightarrow{O_1 O_2}.$$

En déduire la nature de l'application f.

3° On suppose $k_2 k_1 \neq 1$.

a) Démontrer qu'un point O *est invariant par* f *si, et seulement si :*

$$\overrightarrow{O_1 O} = k_2 k_1 \overrightarrow{O_1 O} + (1 - k_2)\overrightarrow{O_1 O_2}. \qquad (2)$$

En déduire l'existence et l'unicité d'un tel point O, *défini par :*

$$\overrightarrow{O_1 O} = \frac{1 - k_2}{1 - k_1 k_2}\overrightarrow{O_1 O_2}.$$

b) Déduire de (1) *et* (2) *que* f *est l'homothétie de centre* O *et de rapport* $k_2 k_1$.

4° On suppose $O_1 \neq O_2$ *et on rapporte le plan* $\mathcal{P}$ *à un repère* $(O_1, \vec{i}, \vec{j})$ *dont l'origine est le centre* O_1 *de* h_1 *et tel que* $\vec{i} = \overrightarrow{O_1 O_2}$.

a) Définir analytiquement l'application $f = h_2 \circ h_1$.

b) Lorsque $k_2 k_1 = 1$, *démontrer que* f *est une translation dont on déterminera le vecteur.*

c) Lorsque $k_2 k_1 \neq 1$, *démontrer que* f *est une homothétie dont on déterminera le centre et le rapport.*

PROBLÈMES DE CONSTRUCTION

On rencontre souvent en géométrie des problèmes où les données sont des éléments géométriques : points, bipoints, droites, cercles, triangles,... et parfois des nombres réels, et où l'inconnue est un élément géométrique astreint à vérifier une ou plusieurs conditions.

La détermination de l'inconnue consiste alors en sa construction. Ce qui explique l'appellation **problème de construction** attachée à ce type de problème.

Pour résoudre un problème de construction, on commence par analyser une configuration qui répond à la question afin de dégager des propriétés qui permettront d'effectuer, uniquement à partir des données, la construction demandée. Les transformations usuelles : translations, homothéties, symétries,... interviennent fréquemment dans une telle étude.

Exemple de résolution

On donne une droite $\mathscr{D}$, un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et un point A de $\mathscr{C}$.
Construire un cercle $\mathscr{C}'$ tangent en A à $\mathscr{C}$ et tangent à $\mathscr{D}$.

1° Analyse de la configuration cherchée

Soit $\mathscr{C}'$ un cercle répondant à la question, de centre O' et tangent à $\mathscr{D}$ en B (figure 19)

Le lecteur démontrera que l'homothétie h de centre A et transformant O en O' est telle que $h\langle \mathscr{C} \rangle = \mathscr{C}'$.

L'antécédent de B par h est le point I où la droite (AB) recoupe le cercle $\mathscr{C}$. De plus, l'image par h de la droite (OI) est la droite $(O'B)$ parallèle à (OI). Comme $(O'B)$ est orthogonale à $\mathscr{D}$, il en est de même de (OI).

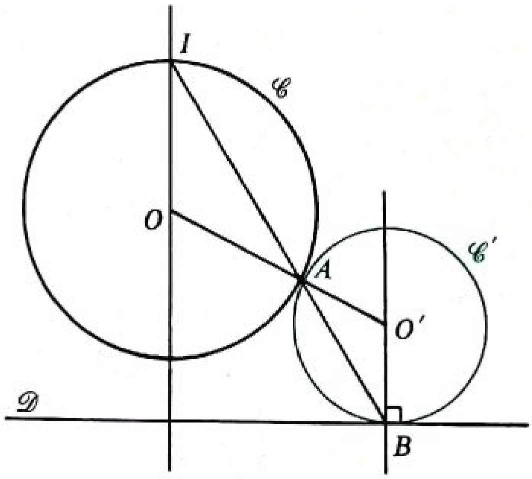


Figure 19

Le point I appartient donc à la droite passant par O et orthogonale à $\mathscr{D}$.

2° La construction demandée découle de cette propriété (figure 20) :

- La droite passant par O et orthogonale à $\mathscr{D}$ coupe $\mathscr{C}$ en I_1 et I_2.
- Lorsque A est distinct de I_1 et de I_2 les droites (AI_1) et (AI_2) coupent respectivement $\mathscr{D}$ en B_1 et B_2.
- Les droites passant par B_1 et B_2 et orthogonales à $\mathscr{D}$ coupent respectivement (OA) en O'_1 et O'_2.
- Les cercles $\mathscr{C}'_1$ et $\mathscr{C}'_2$ de centres respectifs O'_1 et O'_2 et passant par A répondent à la question.

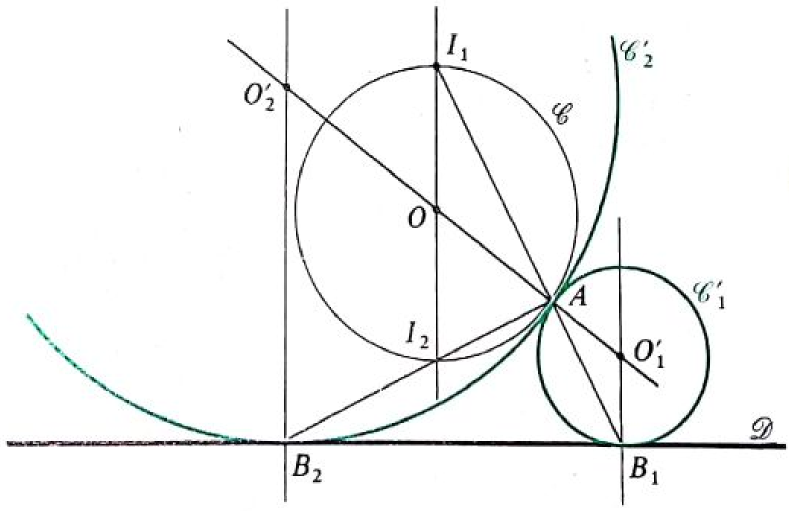


Figure 20

Exercices à résoudre

1. *On donne deux droites sécantes $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ et un vecteur $\vec{u}$ non nul.*
Construire deux points M_1 et M_2 appartenant respectivement à $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ et tels que $\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{u}$.

2. *On donne deux droites sécantes $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ et un point A n'appartenant ni à $\mathscr{D}_1$, ni à $\mathscr{D}_2$.*

1° *Construire deux points M_1 et M_2 appartenant respectivement à $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ et tels que A soit le milieu de (M_1, M_2).*

2° *Construire deux points M_1 et M_2 appartenant à $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ et tels que $\overrightarrow{AM_2} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AM_1}$.*

3° *Construire deux points M_1 et M_2 appartenant respectivement à $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ et tels que A soit le barycentre des points $(M_1, 2)$, $(M_2, 3)$.*

3. *On donne deux droites sécantes $\mathscr{D}$ et Δ et deux points distincts A et G. Construire un triangle de sommet A, de centre de gravité G, et dont les deux autres sommets B et C appartiennent respectivement à $\mathscr{D}$ et à Δ.*

4. *On donne trois droites $\mathscr{D}$, $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$ et une direction de droite δ distincte de celles de $\mathscr{D}$, $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$. Construire une droite Δ de direction δ coupant respectivement $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ en deux points M_1 et M_2 dont le milieu appartient à $\mathscr{D}$.*

5. *On donne un cercle $\mathscr{C}$ et un vecteur $\vec{u}$. Construire deux points M_1 et M_2 appartenant à $\mathscr{C}$ et tels que $\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{u}$.*

6. *On donne un triangle ABC.*

1° Construire un carré MNPQ tel que $M \in (BC)$, $N \in (BC)$, $Q \in (AB)$.
La droite (BP) coupe (AC) en P'. Quelle est l'image du carré MNPQ par l'homothétie de centre B transformant P en P'?

2° En déduire la construction d'un carré dont deux sommets appartiennent à l'un des côtés d'un triangle ABC et dont les deux autres sommets appartiennent aux deux autres côtés du triangle.

7. *On donne un demi-cercle de diamètre [A, B]. Construire un carré MNPQ de façon que M et N appartiennent à (AB) et que P et Q appartiennent au demi-cercle.*
Même question pour un arc de cercle d'extrémités A et B.

8. *Construire un cercle tangent à deux droites concourantes $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ et passant par un point A n'appartenant ni à $\mathscr{D}$, ni à $\mathscr{D}'$.*
Même question pour deux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ strictement parallèles et pour un point A de la bande définie par $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.

INTERSECTION DE PLANS

Soit $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ deux plans de l'espace $\mathscr{E}$ d'équations respectives $ax + by + cz + d = 0$ et $a'x + b'y + c'z + d' = 0$, dans un repère $\mathscr{R}$ de $\mathscr{E}$.

Un point M de coordonnées (x, y, z) appartient à $\mathscr{P} \cap \mathscr{P}'$ si et seulement si le triplet (x, y, z) vérifie les équations de $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$.

Il s'ensuit que l'étude de l'intersection de $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ se ramène à la résolution du système de deux équations linéaires à trois inconnues :

$$\begin{cases} ax + by + cz = -d \\ a'x + b'y + c'z = -d'. \end{cases}$$

De même, étant donnés trois plans de l'espace $\mathscr{E}$ respectivement définis par une équation cartésienne dans un repère $\mathscr{R}$, étudier l'intersection de ces plans revient à résoudre le système de trois équations linéaires à trois inconnues formé par leurs équations.

Applications

1. *On considère, dans l'espace $\mathscr{E}$ muni d'un repère $\mathscr{R}$, les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ d'équations respectives $x - y + 2z = 1$ et $x + y - z = 2$. Démontrer que $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont sécants suivant une droite dont on déterminera un repère.*

2. *Étudier l'intersection des deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ d'équations respectives dans un repère de l'espace :*

a) $2x + y + z - 2 = 0$, $\quad 3y - 2z + 6 = 0$;
b) $(\sqrt{3} - 1)x + y - \sqrt{3}z = 1$, $\quad 2x + (\sqrt{3} + 1)y + (\sqrt{3} - 3)z = m$;
c) $mx + 3y - 2z + 1 = 0$, $\quad 2x + (m - 1)y + 2z - 1 = 0$.
(On discutera éventuellement suivant les valeurs de m.)

3. *Déterminer l'ensemble des points M de l'espace dont les coordonnées (x, y, z) vérifient la relation :*

a) $(x + 2y - z)^2 + (x - y + 2z + 6)^2 = 0$; *b)* $|x - 2y + 3| + |2x - y + 2z| = 0$;
c) $\sqrt{x - 2z + 4} + |x + y + z| = 0$; *d)* $(x - 2y + 3z)^2 + |2x - z + 4| = 0$.

4. *Déterminer l'ensemble des points M de l'espace dont les coordonnées (x, y, z) sont telles que* $\sqrt{x + 2y - 3z} = 1$ *et* $2x + 3y - 2z = 0$.

5. *Étudier l'intersection des trois plans $\mathscr{P}$, $\mathscr{P}'$, $\mathscr{P}''$ d'équations respectives dans un repère de l'espace :*

a) $2x + y - 3z = -9$, $\quad -x + 3y + 4z = 19$, $\quad 3x + y - 2z = -7$;
b) $x - 2y + 3z = 5$, $\quad 2x - y + 5z = 13$, $\quad x + 4y + z = m$.
(On discutera suivant les valeurs de m.)

FAMILLES DE PLANS

1. Question préliminaire : *Soit a, b, c trois réels donnés et soit m, p deux réels variables. Démontrer que :*

a) $am + b$ *est nul, quel que soit m, si et seulement si* $a = b = 0$.
b) $am^2 + bm + c$ *est nul, quel que soit m, si et seulement si* $a = b = c = 0$.
c) $am + bp + c$ *est nul, quels que soient m et p, si et seulement si* $a = b = c = 0$.

2. *A tout réel m, on associe le plan* $\mathscr{P}_m$ *dont une équation cartésienne est :*

$$mx + y + (m-1)z + 2m + 1 = 0.$$

1° Démontrer que $\mathscr{P}_0$ *et* $\mathscr{P}_1$ *se coupent suivant une droite* $\mathscr{D}$, *dont on déterminera un repère.*

2° Démontrer que la droite $\mathscr{D}$ *est incluse dans chaque plan* $\mathscr{P}_m$.

3° Retrouver le résultat du 2° en montrant qu'un point M de coordonnées (x, y, z) *appartient à tous les plans* $\mathscr{P}_m$ *si, et seulement si :*

$$x + z + 2 = 0 \quad \text{et} \quad y - z + 1 = 0.$$

4° Reprendre les questions précédentes lorsque le plan $\mathscr{P}_m$ *a pour équation :*

$$mx + (1-m)y + (2m+1)z + 3 - m = 0.$$

3. *A tout réel m, on associe le plan* $\mathscr{P}_m$ *d'équation :*

$$m^2x + (2m-1)y + mz - 3 = 0.$$

1° Déterminer les plans $\mathscr{P}_m$ *passant :*
a) par le point $A(1, 1, 1)$;
b) par le point $B(-1, -2, 6)$;
c) par le point $C(-1, 0, 1)$.

2° Démontrer qu'il existe un point R, et un seul, dont on déterminera les coordonnées, appartenant à tous les plans $\mathscr{P}_m$.

4. *L'espace* $\mathscr{E}$ *est muni d'un repère orthonormal.*
A tout réel m on associe le plan $\mathscr{P}_m$ *d'équation :*

$$(m^2 + m)x + (2m+3)y + (m^2 - 1)z - 4m - 1 = 0.$$

1° Démontrer qu'il existe un point A unique appartenant à tous les plans $\mathscr{P}_m$.

2° Déterminer m de manière que :
a) $\mathscr{P}_m$ *passe par l'origine du repère;*
b) $\mathscr{P}_m$ *passe par le point de coordonnées* $(1, 0, 1)$;
c) $\mathscr{P}_m$ *passe par le point de coordonnées* $(1, 1, 0)$;
d) $\mathscr{P}_m$ *soit parallèle à une droite de vecteur directeur* $\vec{u}(1, 2, -1)$;
e) $\mathscr{P}_m$ *soit perpendiculaire au plan d'équation*

$$x + y - 3z - 5 = 0.$$

5. *A tout couple (m, p) de nombres réels, on associe le plan* $\mathscr{P}_{m,p}$ *d'équation :*

$$(m-1)x + py + (2m-p)z - m + p + 3 = 0.$$

1° Démontrer qu'il existe un point A, et un seul, appartenant à tous les plans $\mathscr{P}_{m,p}$.
Tout plan passant par A est-il un plan $\mathscr{P}_{m,p}$?

2° Reprendre la question 1° lorsque le plan $\mathscr{P}_{m,p}$ *a pour équation :*

$$(m + p - 2)x + (m - p)y + (2m + 3p + 3)z + 8 = 0.$$

PROGRAMMATION

1. *1° Programmer le calcul du produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}, \vec{u}'$ en fonction de leurs coordonnées respectives (a, b) et (a', b') dans une base orthonormale du plan vectoriel.*

Réponse (CASIO FX-180 P)

MODE 0	met en mode programme
P₁	programme de saisie des données
ENT a Kin 1	entre a dans K_1
ENT b Kin 2	entre b dans K_2
ENT a' Kin 3	entre a' dans K_3
ENT b' Kin 4	entre b' dans K_4
P₂	programme de calcul
Kout 1 × Kout 3 + Kout 2 × Kout 4 =	calcule $aa' + bb'$
MODE •	met en mode calcul
P₁ a ENT b ENT a' ENT b' ENT	entrée des données a, b, a', b'
P₂	affiche $aa' + bb'$

2° Tester le programme dans les cas suivants :

a) $a = -2$, $b = 3$, $a' = -7$, $b' = 12$;

b) $a = -27$, $b = 39$, $a' = -15$, $b' = 49$.

2. *1° Programmer le calcul de la mesure en degrés de l'angle (non orienté) de deux vecteurs non nuls $\vec{u}, \vec{u}'$ en fonction de leurs coordonnées respectives (a, b, c) et (a', b', c') dans une base orthonormale de l'espace.*

Réponse (HP-11C)

P/R	met en mode programme
PRGM	efface la mémoire programme
LBL A	label d'entrée de a, b, c
STO 3 R↓ STO 2 R↓ STO 1	c dans R_3, b dans R_2, a dans R_1
R/S	
LBL B	label d'entrée de a', b', c'
STO 6 R↓ STO 5 R↓ STO 4	c' dans R_6, b' dans R_5, a' dans R_4
R/S	
LBL C	label du programme de calcul de θ
RCL 1 RCL 4 ×	
RCL 2 RCL 5 × +	calcule $aa' + bb' + cc' = \vec{u}.\vec{u}'$
RCL 3 RCL 6 × +	
RCL 1 x^2 RCL 2 x^2 + RCL 3 x^2 +	calcule $a^2 + b^2 + c^2 = \lVert\vec{u}\rVert^2$
RCL 4 x^2 RCL 5 x^2 + RCL 6 x^2 +	calcule $a'^2 + b'^2 + c'^2 = \lVert\vec{u}'\rVert^2$
×	calcule $\lVert\vec{u}\rVert^2 \times \lVert\vec{u}'\rVert^2$
$\sqrt{x}$	calcule $\lVert\vec{u}\rVert \times \lVert\vec{u}'\rVert$

÷	calcule $\frac{\|\vec{u}\| \times \|\vec{u}'\|}{\vec{u} \cdot \vec{u}'} = \cos\theta$
cos⁻¹	calcule θ
R/S	
RTN	fin du programme

P/R	met en mode calcul
DEG	choix du degré comme unité d'angle
a ENTER *b* ENTER *c* A	entrée des données
a' ENTER *b'* ENTER *c'* B	
C	affiche θ

2° Tester le programme en calculant les mesures des angles du triangle ABC dans les cas suivants :

a) $A(-3, 3, 7)$, $B(-5, -8, 12)$, $C(13, 5, -7)$;

b) $A(25, -37, 11)$, $B(-43, 57, 15)$, $C(-7, -29, -34)$.

3. *1° Programmez le calcul de la distance d'un point $M_0(x_0, y_0)$ à la droite $\mathscr{D}$ d'équation* $2x + 3y - 5 = 0$.

Réponse (TI-62)

ON/C CP	efface la mémoire programme
LRN	mise en mode programme
(RCL 0 × 2 + RCL 1	
× 3 − 5) |x|	calcule $\|2x_0 + 3y_0 - 5\|$
÷ 13 √x =	divise $\|2x_0 + 3y_0 - 5\|$ par $\sqrt{13}$
R/S	fin de programme
RST	remet le pointeur au début du programme

LRN	retour en mode calcul
x STO 0 *y* STO 1 R/S	exécute le calcul $d(M, \mathscr{D})$

2° On donne les points $A(13, -25)$, $B\left(-\frac{13}{2}, 17\right)$, $C\left(\sqrt{3}, \frac{14}{5}\right)$, $D(33, -19)$, $E(-\sqrt{5}, \pi)$, $F(\sqrt{19}, 47)$, $G(-\sqrt{13}, \sqrt{19})$, $H\left(-15, \frac{26}{3}\right)$.

Déterminer le(s) point(s) pour le(s)quel(s) la distance à $\mathscr{D}$ est minimale, maximale.

4. *Programmez le calcul de la distance d'un point $M(x, y, z)$ au plan $\mathscr{P}$ d'équation $ax + by + cz + d = 0$, le repère étant orthonormal.*

Réponse (SHARP EL-5050)

AER	mise en mode programme
D (M , P)	titre du programme : $D(M, P)$
ENT	met le titre en mémoire
f()= A B C D X Y Z *f*()= ABS	entrée de la procédure principale

5/ Projections – Caractérisations des droites et plans

ABS (A × X + B × Y + C × Z + D) ÷ √ (A x^2 + B x^2 + C x^2)	$f(A,B,C,D,X,Y,Z)=\dfrac{\lvert AX+BY+CZ+D\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$
ENT	fin du programme

COMP	mise en mode calcul	
TITLE	sélection du titre $D(M, P)$	
COMP 2	entre $A = 2$	distance du point $M(-3, 2, -4)$ au plan d'équation $2x - 3y + 5z - 7 = 0$
COMP (−) 3	entre $B = -3$	
COMP 5	entre $C = 5$	
COMP (−) 7	entre $D = -7$	
COMP (−) 3	entre $X = -3$	
COMP (−) 2	entre $Y = 2$	
COMP (−) 4	entre $Z = -4$	
COMP	affiche le résultat 6,326 635 424	

EXERCICES ET PROBLÈMES

27. Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère n points distincts $A_1, A_2, ..., A_n$; pour tout i tel que $1 \leqslant i \leqslant n$, on note (x_i, y_i) les coordonnées du point A_i.
Soit Δ_m la droite passant par O, d'équation $y = mx$, où $m \in \mathbb{R}$.
1° Pour tout i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, calculer la distance d_i du point A_i à la droite Δ_m.
2° On pose : $a = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$, $b = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ et $c = \sum_{i=1}^{n} y_i^2$.
Exprimer $S(m) = \sum_{i=1}^{n} d_i^2$, en fonction de m, a, b, c.
3° On suppose $b \neq 0$. Montrer que S est une fonction de m admettant un maximum et un minimum.
Vérifier que les droites Δ_m correspondant au maximum et au minimum de S sont orthogonales.

28. Dans le plan, on considère le parallélogramme $KMLN$ et le point de concours O de ses diagonales (MN) et (KL).
Soit A un point de la droite (KN) distinct de K et de N; soit B le point d'intersection de la droite (MA) et de la droite (LN). P et Q sont respectivement les projetés, parallèlement à la droite (MN), de A sur la droite (KM) et de B sur la droite (LM).
1° Faire une figure.
2° a) On note h l'homothétie de centre K et de rapport $\dfrac{\overline{KA}}{\overline{KN}}$.
Démontrer que $h(M) = P$. En déduire que le milieu I du segment $[A, P]$ appartient à la droite (KL).
b) Indiquer l'homothétie qui permettrait de démontrer que le milieu J du segment $[B, Q]$ appartient à la droite (KL).
3° Justifier que les points N, P, Q sont les images respectives des points M, A, B par une symétrie dont on précisera l'axe et la direction.
En déduire que les points N, P, Q sont alignés.

APPLICATIONS DE $\mathscr{P}$ DANS $\mathscr{P}$

29. Soit $\mathscr{P}$ le plan géométrique de repère cartésien $\mathscr{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$.
On note $x'x$ et $y'y$ l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées de $\mathscr{R}$.
Soit a un réel non nul; on appelle f_a l'application qui à tout point M de coordonnées (x, y) associe le point M' de coordonnées (x', y') définies par :

$$\begin{cases} x' = ax - ay + 1 - a \\ y' = ay. \end{cases}$$

1° Démontrer que f_a est une application bijective.
2° Déterminer, selon la valeur de a, l'ensemble des points invariants par f_a.
3° Dans cette question on considère le cas $a = 1$.
a) Démontrer que l'image de $y'y$ par f_1 est une droite Δ que l'on déterminera.
b) Soit D une droite parallèle à $x'x$. Déterminer l'image de D par f_1.
c) Déduire de *a)* et *b)* une construction géométrique de l'image d'un point quelconque de $y'y$.
d) Soit M un point quelconque du plan d'image M'. La droite D_M passant par M et parallèle à $x'x$ coupe $y'y$ et Δ respectivement en R et S.
Comparer $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{RS}$. En déduire une construction géométrique de M' à partir de M.

30. On considère dans le plan $\mathscr{P}$ deux droites strictement parallèles $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ et deux point distincts A et B de $\mathscr{D}'$. A tout point M de $\mathscr{P}$ n'appartenant pas à $\mathscr{D}'$ on associe le point M' ainsi défini : la droite (AM) coupe $\mathscr{D}$ en M_1; M' est alors le point d'intersection de la droite (BM_1) et de la parallèle à $\mathscr{D}$ passant par M.
1° Soit O un point de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{R}$ le repère $(O, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OA})$. Exprimer les coordonnées (x', y') du point M' en fonction de celles (x, y) d'un point $M (M \notin \mathscr{D}')$.
2° Les formules du *1°* définissent analytiquement une application f de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$. Quelle est l'image par f d'un point de $\mathscr{D}'$?
3° Soit une droite Δ parallèle à $\mathscr{D}$. Démontrer que pour tout point M de Δ, d'image $M' = f(M)$, le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est constant.

31. Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On désigne par T l'application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ dans laquelle le point M de coordonnées x, y a pour image le point M' de coordonnées x', y' définies par :

$$\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = x + 2y. \end{cases}$$

1° m étant un nombre réel, soit D_m la droite d'équation $y - mx = 0$. Démontrer que T transforme la droite $\mathscr{D}_m$ en une droite $\mathscr{D}'_m$ contenant O, dont on donnera la pente en fonction de m. Quelle est la droite $\mathscr{D}'_m$ quand $m = -\dfrac{2}{3}$?
2° a) Déterminer la droite Δ contenant O qui est transformée par T en une droite orthogonale à Δ.
b) Si M appartient à Δ, M' se déduit de M par une symétrie orthogonale par rapport à une droite qu'on déterminera.
3° a) Trouver les deux valeurs de m telles que $\mathscr{D}_m$ coïncide avec sa transformée $\mathscr{D}'_m$. L'une de ces droites $\mathscr{D}_m$ ainsi obtenue est de pente positive; soit Δ_1 cette droite. L'autre sera notée Δ_2.
b) Si M appartient à Δ_1, démontrer que M' se déduit de M par une homothétie de centre O, dont on déterminera le rapport k_1. Étudier la même question pour Δ_2.

32. Le plan $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On désigne par f l'application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ définie par les formules analytiques :

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{5}(x + 2y + 2) \\ y' = \dfrac{1}{5}(2x + 4y - 1). \end{cases}$$

1° Calculer les coordonnées du point A', image de $A(-2, 1)$. Déterminer l'ensemble des antécédents de A' par f.
2° Démontrer que l'ensemble des points invariants par f est une droite $\mathscr{D}$, dont on déterminera une équation.
3° Démontrer que pour tout point M du plan, d'image M' :
a) le point M' appartient à $\mathscr{D}$;
b) le vecteur $\overrightarrow{MM'}$, s'il n'est pas nul, est normal à $\mathscr{D}$.
En déduire la nature de l'application f.

FAMILLES DE DROITES

33. Le plan $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
A tout réel m, on associe la droite $\mathscr{D}_m$ d'équation :

$$(2m-1)x + (3-m)y - 7m + 6 = 0.$$

1° Déterminer le réel m de manière que :
a) $\mathscr{D}_m$ soit parallèle à l'axe des abscisses;
b) $\mathscr{D}_m$ soit parallèle à l'axe des ordonnées;
c) $\mathscr{D}_m$ passe par le point de coordonnées $(-1, 1)$;
d) $\mathscr{D}_m$ soit parallèle à la droite d'équation :

$$2x + 3y - 1 = 0;$$

e) $\mathscr{D}_m$ soit orthogonale à la droite d'équation :

$$3x + 4y = 0.$$

2° Démontrer que toutes les droites $\mathscr{D}_m$ passent par un point fixe A, dont on calculera les coordonnées.
3° Déterminer m de manière que le coefficient directeur de $\mathscr{D}_m$ soit égal à un réel p. Discuter suivant les valeurs de p. Toute droite passant par A est-elle une droite $\mathscr{D}_m$?

34. Le plan $\mathscr{P}$ est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
A tout réel m, on associe les droites $\mathscr{D}_m$ et Δ_m d'équations respectives :

$$(m+2)x + (3-2m)y + 3m - 8 = 0$$
$$(9m-3)x + (10m-8)y - 8m - 2 = 0.$$

1° Démontrer que toutes les droites $\mathscr{D}_m$ passent par un point fixe A, et que toutes les droites Δ_m passent par un point fixe B. (On calculera les coordonnées de A et B.)
2° Peut-on déterminer m de manière que $\mathscr{D}_m = \Delta_m$?
3° Étudier, suivant les valeurs de m, l'intersection des droites $\mathscr{D}_m$ et Δ_m. Lorsque $\mathscr{D}_m$ et Δ_m sont sécantes, calculer, en fonction de m, les coordonnées de leur point d'intersection I_m.
4° Déterminer et construire l'ensemble des points I_m.

APPLICATIONS DE $\mathscr{E}$ DANS $\mathscr{E}$

35. L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On désigne par f l'application de l'espace $\mathscr{E}$ dans lui-même qui, à tout point M de coordonnées (x, y, z) associe le point M' dont les coordonnées (x', y', z') sont données par :

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{3}(2x - y - z + 1) \\ y' = \dfrac{1}{3}(-x + 2y - z + 1) \\ z' = \dfrac{1}{3}(-x - y + 2z + 1). \end{cases}$$

1° Déterminer l'ensemble $\mathscr{P}$ des points invariants par f.
2° Démontrer que l'image par f de tout point M de $\mathscr{E}$ appartient à $\mathscr{P}$.
3° Soit A l'image par f de l'origine O du repère. Pour tout point M d'image M' par f, démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont colinéaires.
4° Reconnaître l'application f.

36. L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On considère l'application f de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ qui à tout point $M(x, y, z)$ associe le point $M'(x', y', z')$ défini par :

$$\begin{cases} x' = -3x + 2y - 2z + 4 \\ y' = -8x + 5y - 4z + 8 \\ z' = -4x + 2y - z + 4. \end{cases}$$

1° Déterminer l'ensemble $\mathscr{P}$ des points invariants par f.
2° Pour tout point M d'image M' démontrer que :
a) le milieu de $[M, M']$ appartient à $\mathscr{P}$.
b) le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire à un vecteur fixe.
En déduire une définition géométrique simple de l'application f.

37. L'espace $\mathscr{E}$ étant rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on désigne par f l'application de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ définie par les formules analytiques :

$$\begin{cases} x' = 5x + 2y - 2z + 2 \\ y' = -4x - y + 2z - 2 \\ z' = 8x + 4y - 3z + 4. \end{cases}$$

1° Démontrer que l'ensemble des points invariants par f est un plan $\mathscr{P}$.
2° Démontrer que pour tout point M d'image $M' = f(M)$, le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ reste colinéaire à un vecteur fixe non nul.
3° Démontrer qu'il existe un réel k tel que, pour tout point M n'appartenant pas à $\mathscr{P}$ d'image M' par f, la droite (MM') coupe $\mathscr{P}$ en un point H tel que $\overrightarrow{HM'} = k\overrightarrow{HM}$. (On calculera k.)
En déduire une définition géométrique de l'application f.

38. L'espace $\mathscr{E}$ étant rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on désigne par f l'application de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ définie par les formules analytiques :

$$\begin{cases} x' = -5x + 8y + 4z \\ y' = -8x + 15y + 8z \\ z' = 10x - 20y - 11z. \end{cases}$$

1° Démontrer que l'ensemble des points invariants par f est une droite $\mathscr{D}$.
2° Démontrer que pour tout point M d'image M', le milieu de (M, M') appartient à $\mathscr{D}$.
3° Démontrer que pour tout point M n'apartenant pas à $\mathscr{D}$, la droite (MM') est parallèle à un plan fixe dont on déterminera un vecteur normal.

4° En déduire une définition géométrique de l'application f.

39. L'espace $\mathscr{E}$ étant rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère l'application f définie par les formules analytiques :

$$\begin{cases} x' = 3x - 4y - 2z + 16 \\ y' = 4x - 7y - 4z + 32 \\ z' = -5x + 10y + 6z - 40. \end{cases}$$

Démontrer que f est la projection sur un plan $\mathscr{P}$ dont on déterminera une équation, parallèlement à une droite $\mathscr{D}$ dont on déterminera un vecteur directeur.

40. L'espace $\mathscr{E}$ étant rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère l'application f définie par les formules analytiques :

$$\begin{cases} x' = -2x + 4y + 2z + 5 \\ y' = -4x + 8y + 4z + 6 \\ z' = 5x - 10y - 5z - 7. \end{cases}$$

1° Démontrer que l'ensemble des points invariants par f est une droite $\mathscr{D}$ dont on déterminera un repère $(A, \vec{u})$.
2° Démontrer que l'ensemble des antécédents de A est un plan $\mathscr{P}$ dont on déterminera une équation.
3° Pour tout point M n'appartenant pas à $\mathscr{D}$, d'image M' par f, démontrer que :
a) M' appartient à la droite $\mathscr{D}$;
b) la droite (MM') est parallèle au plan $\mathscr{P}$.
Reconnaître l'application f.

41. L'espace $\mathscr{E}$ étant rapporté à un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, démontrer que l'application f définie par les formules analytiques :

$$\left| \begin{aligned} x' &= x - 2y - \frac{4}{3}z \\ y' &= -2x + 4y + \frac{8}{3}z \\ z' &= 3x - 6y - 4z. \end{aligned} \right.$$

est la projection sur une droite $\mathscr{D}$ parallèlement à un plan $\mathscr{P}$. (On déterminera un repère de $\mathscr{D}$ et une équation de $\mathscr{P}$.)

CHAPITRE

6

CALCUL BARYCENTRIQUE

I — INTRODUCTION

En mécanique, l'étude du mouvement des points d'un système matériel fait intervenir différents éléments parmi lesquels les *masses*, positives, des points du système.

En électrostatique, le champ électrique produit par un système de particules électrisées est déterminé, à un instant donné, par la position des particules et par les *charges*, positives ou négatives, des différentes particules.

En statistique, lorsqu'on s'intéresse à un caractère quantitatif X d'une population E (âge, poids, taille, nombre d'enfants, salaire mensuel, ...), on associe à chaque valeur x_i de X le nombre n_i des individus de E pour lesquels le caractère X prend la valeur x_i.

Comme le montrent ces exemples, il est fréquent que l'étude d'un phénomène fasse intervenir un système de points affectés de coefficients. S'il est possible de remplacer le système par un seul point muni d'un seul coefficient, l'étude s'en trouvera évidemment facilitée.

L'activité ci-dessous donne un exemple géométrique de **réduction** d'un système de points et montre l'intérêt de cette réduction pour résoudre certains problèmes.

Activité

Un triangle ABC de l'espace $\mathscr{E}$ étant donné, on considère l'application f de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{W}$ qui, à tout point *M, associe le vecteur :* $\overrightarrow{f(M)} = -5\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$.

A noter que pour tout point M le vecteur $\overrightarrow{f(M)}$ est défini à l'aide des points A, B, C et des coefficients -5, 1, 2 que l'on peut considérer comme respectivement associés aux points A, B, C.

1° Pour tout bipoint (M, M') démontrer que $\overrightarrow{f(M)} - \overrightarrow{f(M')} = -2\overrightarrow{MM'}$.

En déduire que s'il existe un point G tel que $\overrightarrow{f(G)} = \vec{0}$, le vecteur $\overrightarrow{f(M)}$ s'exprime sous la forme réduite $-2\overrightarrow{MG}$, *à partir du seul point G et du coefficient -2 égal à la somme des coefficients* -5, 1, 2.

2° Démontrer l'existence et l'unicité d'un point G tel que $\overrightarrow{f(G)} = \vec{0}$.

Montrer que G appartient au plan (ABC) et déterminer sa position avec précision en indiquant ses coordonnées dans un repère bien choisi du plan (ABC).

3° Application : *Utiliser l'expression réduite, $-2\overrightarrow{MG}$, du vecteur $\overrightarrow{f(M)}$ pour résoudre les questions suivantes :*

a) A tout point M de l'espace distinct de G, on associe la droite $\mathscr{D}_M$ passant par M et de vecteur directeur $\overrightarrow{f(M)}$. Démontrer que les droites $\mathscr{D}_M$ passent par un point fixe.

b) A tout point M de l'espace, on associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{f(M)}$. Reconnaître l'application $g : M \mapsto M'$, et déterminer l'ensemble des points M tels que la droite (MM') ait une direction donnée, ou passe par un point donné.

c) Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que :

$$\| - 5\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} \| = \| \overrightarrow{AB} \|.$$

d) Déterminer l'ensemble des points M de l'espace annulant le produit scalaire :

$$(- 5\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}) \cdot \overrightarrow{MA}.$$

II – BARYCENTRE

Un entier naturel $n \geqslant 1$ étant donné, rappelons que $\mathbb{N}_n$ désigne l'ensemble des entiers i tels que $1 \leqslant i \leqslant n$.

FONCTION VECTORIELLE DE LEIBNIZ

On appelle point pondéré tout couple (A, α), élément du produit cartésien $\mathscr{E} \times \mathbb{R}$. Le réel α est le coefficient de pondération, ou masse de A.

A noter que la masse du point A peut être positive, négative, ou nulle et que, par conséquent, le terme masse peut avoir une signification différente de celle qu'il possède en mécanique.

Toute suite finie $(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), ..., (A_n, \alpha_n)$ de n points pondérés est appelée **système de n points pondérés,** ou **système massif,** et est notée $(A_i, \alpha_i)_{i \in \mathbb{N}_n}$

Le réel $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$, que l'on note aussi $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$, est la **masse** du système. Là encore cette masse peut être positive, négative, ou nulle.

DÉFINITION 1

On appelle fonction vectorielle de Leibniz du système de points pondérés $(A_i, \alpha_i)_{i \in \mathbb{N}_n}$, l'application f de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{W}$ qui, à tout point M, associe le vecteur $\overrightarrow{f(M)}$ défini par :

$$\overrightarrow{f(M)} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA}_i.$$

Le vecteur $\overrightarrow{f(M)}$ est une *combinaison linéaire* des vecteurs $\overrightarrow{MA}_1, \overrightarrow{MA}_2, ..., \overrightarrow{MA}_n$.

Est-il possible d'en donner une expression ne faisant intervenir qu'un seul point et qu'un seul coefficient?

Expression réduite de la fonction f

Désignons par m la masse du système $(A_i, \alpha_i)_{i \in \mathbb{N}_n}$.

Pour tout bipoint (M, M'), on a :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{f(M)} &= \alpha_1 \overrightarrow{MA}_1 + \alpha_2 \overrightarrow{MA}_2 + ... + \alpha_n \overrightarrow{MA}_n \\
&= \alpha_1(\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'A}_1) + \alpha_2(\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'A}_2) + ... + \alpha_n(\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'A}_n) \\
&= (\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n)\overrightarrow{MM'} + (\alpha_1 \overrightarrow{M'A}_1 + \alpha_2 \overrightarrow{M'A}_2 + ... + \alpha_n \overrightarrow{M'A}_n).
\end{aligned}$$

D'où la relation vérifiée par deux points quelconques M et M' de l'espace :

$$\boxed{\overrightarrow{f(M)} = \overrightarrow{f(M')} + m\overrightarrow{MM'}} \qquad (1)$$

Ce résultat nous amène à distinguer deux cas, selon que la masse m du système est nulle ou non.

1° $m = 0$.
Il est alors immédiat que, pour tout bipoint (M, M'), $\overrightarrow{f(M)} = \overrightarrow{f(M')}$, ce qui prouve que l'application f est *constante*. Par suite :
La fonction vectorielle de Leibniz d'un système de points pondérés dont la masse est nulle est constante.

2° $m \neq 0$.
La relation (1) montre que s'il existe un point G tel que $\overrightarrow{f(G)} = \vec{0}$, le vecteur $\overrightarrow{f(M)}$ s'exprimera sous la *forme réduite* $\overrightarrow{f(M)} = m\overrightarrow{MG}$. Existe-t-il un tel point G?
Soit O un point *fixé* de l'espace; pour tout point M, on a, d'après (1) :

$$\overrightarrow{f(M)} = \overrightarrow{f(O)} - m\overrightarrow{OM}.$$

L'égalité $\overrightarrow{f(G)} = \vec{0}$ est donc équivalente à $\overrightarrow{f(O)} - m\overrightarrow{OG} = \vec{0}$, soit encore, m n'étant pas nul, à $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m}\overrightarrow{f(O)}$.
Or cette dernière égalité définit un point G, et un seul; d'où l'existence et l'unicité d'un point G tel que $\overrightarrow{f(G)} = \vec{0}$.

THÉORÈME 1 et DÉFINITION 2	**Pour tout système de points pondérés $(A_i, \alpha_i)_{i \in \mathbb{N}_n}$ dont la masse n'est pas nulle, il existe un point G, et un seul, tel que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$. Le point G est appelé barycentre du système $(A_i, \alpha_i)_{i \in \mathbb{N}_n}$, ou barycentre des points $A_1, A_2, ..., A_n$ affectés des coefficients respectifs $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$.**

Le barycentre G du système $(A_1, \alpha_i)_{i \in \mathbb{N}_n}$ est défini, à partir d'un point O, choisi dans l'espace, par $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m}\overrightarrow{f(O)}$, soit :

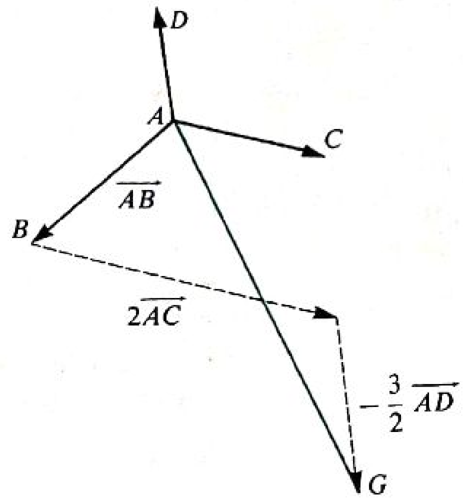
$$\boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i}}$$

Il permet de définir la fonction vectorielle de Leibniz du système $(A_i, \alpha_i)_{i \in \mathbb{N}_n}$, sous la *forme réduite :*

$$\boxed{\overrightarrow{f(M)} = m\overrightarrow{MG}}$$

Attention : un système de points pondérés dont la masse est nulle ne possède pas de barycentre.

Exemples



1. Soit quatre points A, B, C, D de coefficients respectifs -1, 2, 4, -3.

La masse du système $(A, -1)$, $(B, 2)$, $(C, 4)$, $(D, -3)$ est égale à 2; il en résulte que ce système possède un barycentre G défini par l'égalité :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{2}(-\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + 4\overrightarrow{OC} - 3\overrightarrow{OD}),$$

où O est un point de l'espace.

En faisant $O = A$ dans cette égalité, on obtient $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$. (1)

Lorsque les points A, B, C, D ne sont pas coplanaires $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ est un repère de l'espace et l'égalité (1) prouve que G est le point de coordonnées $\left(1,\ 2,\ -\frac{3}{2}\right)$ dans ce repère (figure 1).

2. Soit n points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ affectés de coefficients tous égaux à 1. Le système $(A_i, 1)_{i \in \mathbb{N}_n}$ est de masse n : il admet un barycentre G, appelé **isobarycentre** des points $A_1, A_2, \ldots, A_n$, et défini par l'une des égalités vectorielles :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}, \qquad \overrightarrow{OG} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OA_i}}$$

3. Soit X un caractère statistique numérique relatif à une population E et soit $(x_i, n_i)_{i \in \mathbb{N}_n}$ la série statistique associée : les réels x_i sont les valeurs prises par X et les entiers n_i leurs effectifs respectifs. La somme $n = \sum_{i=1}^{n} n_i$ est l'effectif de la population.

La valeur moyenne de cette série statistique est, par définition, le réel $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} n_i x_i$, c'est-à-dire le barycentre du système $(x_i, n_i)_{i \in \mathbb{N}_n}$.

COORDONNÉES DU BARYCENTRE

Dans l'espace $\mathscr{E}$ muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, considérons un système de points pondérés $(A_i, \alpha_i)_{i \in \mathbb{N}_n}$ dont la masse $m = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ n'est pas nulle.

Ce système admet un barycentre G défini par $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i}$.

Si l'on désigne par x_i, y_i, z_i les coordonnées du point $A_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ et par x, y, z celles du barycentre G, l'égalité vectorielle ci-dessus se traduit analytiquement par :

$$\boxed{x = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, \qquad y = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i, \qquad z = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i}$$

En particulier l'*isobarycentre* des points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ a pour coordonnées :

$$x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \qquad y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i, \qquad z = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i .$$

Utilisation de la calculatrice

Le calcul des coordonnées du barycentre d'un système de points pondérés s'effectue avec les deux calculatrices CASIO FX-180P et SHARP EL-5050 en utilisant la fonction statistique « moyenne » :

CASIO FX-180P	SHARP EL-5050	Commentaires
MODE 3 KAC	STAT CA	mode statistique mise à zéro des mémoires
⋮ x_i × α_i DATA ⋮	⋮ x_i × α_i DATA ⋮	entrée des données
Kout n Kout $\bar{x}$	n $\bar{x}$	affiche la masse du système affiche $x = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$

Attention : Pour entrer un nombre négatif (α_i ou x_i) sur la SHARP EL-5050, il convient de le mettre entre parenthèses. Par exemple, pour -2, faire : ((−) 2).

Avec la HP-11C, le programme de calcul de la valeur moyenne d'une série statistique, présenté à la page 20, s'applique au calcul des coordonnées du barycentre.

Enfin, avec la TI-62, on peut utiliser le programme suivant :

CP	efface les programmes antérieurs
LRN	met en mode programme
LBL 0	label de la séquence
R/S	introduit la masse α_i du point A_i
STO 0	place α_i dans la mémoire 0
STO + 7	ajoute α_i au contenu de la mémoire 7
R/S	introduit l'abscisse x_i de A_i
× RCL 0 =	multiplie x_i par α_i
STO + 8	ajoute $\alpha_i x_i$ au contenu de la mémoire 8
GTO 0	renvoie à LBL 0
LRN	retour au mode calcul
CM 0 STO 7 STO 8	efface les mémoires
1 Var	entre en mode statistique à une variable
α_1 R/S x_1 R/S α_2 R/S x_2 R/S ⋮ ⋮ α_n R/S x_n R/S	entrée des données
N	affiche la masse du système $m = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$
Mean	affiche l'abscisse du centre de gravité

Application : *Utiliser ces programmes pour calculer les coordonnées du barycentre des points pondérés* $(A, -\sqrt{2})$, $(B, \sqrt{3})$, $(C, \ln 2)$, $\left(D, \frac{15}{7}\right)$, $\left(E, \log \frac{1}{3}\right)$, *dans les cas suivants :*

a) $A(-3, 5, 7)$, $B(2, -1, 0)$, $C(-1, 2, 6)$, $D(3, 5, -7)$, $E(-1, 3, 9)$;

b) $A\left(\frac{12}{5}, -7{,}19\right)$, $B\left(-7, 15, \frac{22}{7}\right)$, $C(-15, 0, 37)$, $D(18, -11, 5)$, $E\left(\frac{11}{4}, 1, -\frac{27}{13}\right)$.

AFFIXE DU BARYCENTRE

Dans le plan $\mathscr{P}$ rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, considérons n points $A_1, A_2, ..., A_n$ affectés de coefficients respectifs $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ dont la somme m n'est pas nulle.

Soit $z_1, z_2, ..., z_n$ les *affixes* respectives des points $A_1, A_2, ..., A_n$; si (x_k, y_k) sont les coordonnées de A_k, $z_k = x_k + \mathrm{i}y_k$.

Le barycentre G du système $(A_k, \alpha_k)_{k\in\mathbb{N}_n}$ a pour coordonnées :

$$x_G = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k, \qquad y_k = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n} \alpha_k y_k.$$

L'affixe de G est alors le nombre complexe z_G tel que :

$$z_G = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k + \mathrm{i}\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n} \alpha_k y_k\right),$$

soit :

$$z_G = \frac{1}{m}\left[\sum_{k=1}^{n} \alpha_k (x_k + \mathrm{i}y_k)\right],$$

soit encore :

$$z_G = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n} \alpha_k z_k .$$

L'affixe du barycentre d'un système de n points pondérés $(A_k, \alpha_k)_{k\in\mathbb{N}_n}$ est le barycentre du système $(z_k, \alpha_k)_{k\in\mathbb{N}_n}$, où, pour $k = 1, 2, ..., n$, z_k est l'affixe de A_k.

PROPRIÉTÉS DU BARYCENTRE

Soit $(A_i, \alpha_i)_{i\in\mathbb{N}_n}$ un système de n points pondérés dont la masse m n'est pas nulle; O étant un point de l'espace, le barycentre G de ce système est défini par

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m}(\alpha_1\overrightarrow{OA}_1 + \alpha_2\overrightarrow{OA}_2 + ... + \alpha_n\overrightarrow{OA}_n). \tag{1}$$

1. L'addition vectorielle étant commutative, il résulte de l'égalité (1) que le barycentre d'un système de points pondérés est indépendant de l'ordre des points.

2. Multiplions tous les coefficients α_i des points du système par un réel λ *non nul*. On obtient un second système $(A_i, \lambda\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}_n}$ dont la masse, égale à λm, n'est pas nulle, et qui possède donc un barycentre G' défini par :

$$\overrightarrow{OG'} = \frac{1}{\lambda m}(\lambda\alpha_1\overrightarrow{OA}_1 + \lambda\alpha_2\overrightarrow{OA}_2 + ... + \lambda\alpha_n\overrightarrow{OA}_n),$$

soit :

$$\overrightarrow{OG'} = \frac{1}{m}(\alpha_1\overrightarrow{OA}_1 + \alpha_2\overrightarrow{OA}_2 + ... + \alpha_n\overrightarrow{OA}_n). \tag{2}$$

La comparaison de (1) et (2) montre que $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OG'}$, et par conséquent que les points G et G' sont confondus. D'où la propriété :

Étant donné un système de points pondérés $(A_i, \alpha_i)_{i \in \mathbb{N}_n}$ dont la masse n'est pas nulle et un réel λ *non nul*, le système $(A_i, \lambda\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}_n}$ a même barycentre que le premier.

Autrement dit le barycentre d'un système de points pondérés ne change pas quand on multiplie tous les coefficients de pondération par un même réel *non nul*.

REMARQUE : Le barycentre G d'un système $(A_i, \alpha_i)_{i \in \mathbb{N}_n}$ dont la masse m n'est pas nulle est aussi le barycentre du système $\left(A_i, \frac{\alpha_i}{m}\right)_{i \in \mathbb{N}_n}$ dont la masse $\frac{\alpha_1}{m} + \frac{\alpha_2}{m} + \dots + \frac{\alpha_n}{m}$ est égale à 1.
Quand on considère le barycentre d'un système de points pondérés, il est donc toujours possible de se ramener au cas d'un système de masse 1.

3. Considérons, parmi les n points pondérés (A_1, α_1), (A_2, α_2), ..., (A_n, α_n), k points $(1 < k < n)$ dont la somme des coefficients m' n'est pas nulle.

On peut toujours supposer, en changeant éventuellement le numérotage, que ce sont les k premiers. Ces points possèdent un barycentre G' défini par :

$$m'\overrightarrow{OG'} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \overrightarrow{OA_i}, \quad \text{où } m' = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i. \tag{3}$$

Considérons le système (G', m'), (A_{k+1}, α_{k+1}), ..., (A_n, α_n), obtenu en remplaçant les k points considérés par leur barycentre G' affecté du coefficinet m'; sa masse est :

$$m' + \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i + \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = m,$$

et son barycentre G_1 est défini par : $\overrightarrow{OG_1} = \dfrac{1}{m}\left(m'\overrightarrow{OG'} + \displaystyle\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i}\right)$;

soit, en tenant compte de (3) :

$$\overrightarrow{OG_1} = \frac{1}{m}\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \overrightarrow{OA_i} + \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i}\right) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i}.$$

Il en résulte $\overrightarrow{OG_1} = \overrightarrow{OG}$ et par suite $G_1 = G$.

Dans la recherche du barycentre de n points pondérés, on peut remplacer k d'entre eux, dont la somme m' des coefficients n'est pas nulle, par leur barycentre affecté du coefficient m'.

Cette propriété dite d'**associativité** est importante. Elle montre notamment que pour construire le barycentre de plusieurs points il suffit de savoir construire le barycentre de deux points. Comme nous le verrons bientôt, elle permet aussi, dans une figure, de mettre en évidence des droites concourantes.

Exercices d'application

1. On donne dans le plan $\mathscr{P}$ deux points distincts A et B.
1° Déterminer la condition sur le couple de réels (α, β) pour que, pour tout point M, il existe un unique point M' tel que :

$$\alpha\overrightarrow{M'A} + \beta\overrightarrow{M'B} + 2\overrightarrow{M'M} = \vec{0}.$$

2° On suppose dans toute la suite de l'exercice, réalisée la condition trouvée dans la question *1°* et on désigne par f l'application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui à M associe M'.

a) Déterminer, suivant les valeurs du couple (α, β), l'ensemble des points invariants par f.

b) On suppose $\alpha + \beta = 0$.
Exprimer, pour tout point M de $\mathscr{P}$, le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et du réel α.
En déduire la nature de f.

c) On suppose $\alpha + \beta \neq 0$.
Montrer que f est une homothétie.
Déterminer le centre et le rapport de f.

2. On donne dans le plan $\mathscr{P}$ un carré $ABCD$.
1° Construire le barycentre G du système :

$$S = \{(A, 2), (B, -1), (C, 1)\}.$$

2° Construire l'ensemble Γ des points M de $\mathscr{P}$ tels que :

$$\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{AD}\|.$$

3° Soit f l'application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui à tout point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{GM'} = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$. Montrer que f est une homothétie dont on donnera le centre et le rapport.

3. On donne dans le plan $\mathscr{P}$ un triangle ABC. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :

a) $(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}) = 0;$
b) $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 4\overrightarrow{MC}) \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) = 0;$
c) $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}) \cdot (-2\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}) = 0.$

4. On donne dans le plan $\mathscr{P}$ un triangle ABC.
1° Définir par ses coordonnées dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ le barycentre G des points pondérés $(A, -2), (B, 4), (C, 1)$.
2° A ces trois points on ajoute le point pondéré $(G, -3)$. On obtient ainsi le système S dont on désigne par f la fonction vectorielle de Leibniz. Démontrer que pour tout point M du plan, $\overrightarrow{f(M)} = \vec{0}$.
3° Démontrer que chaque point du système S est barycentre des trois autres points.

5. Le plan $\mathscr{P}$ étant rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on désigne par A et B les points de coordonnées respectives (1,0) et (0,1). A tout point M de coordonnées (x, y) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on associe, lorsqu'il existe, le barycentre M' des points O, A, B affectés respectivement des coefficients $1, x, y$. On définit ainsi une fonction $f : M \mapsto M'$.
a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{S}$ de f.
b) Déterminer l'image de $\mathscr{S}$ par f.
c) Déterminer l'ensemble des points M du plan $\mathscr{P}$ tels que $f(M) = M$.

6. On considère dans un plan $\mathscr{P}$ un triangle ABC non aplati. B' désigne le milieu de $[A, C]$, C' le milieu de $[A, B]$ et D le barycentre du système $\{(A, 3), (B, 2)\}$. Soit I le barycentre du système $\{(A, 2), (B, 2), (A, 1), (C, 1)\}$.
1° Montrer que I est le barycentre du système $\{(B', 1), (C', 2)\}$ et également du système $\{(D, 5), (C, 1)\}$. En déduire que I est le point d'intersection des droites $(B'C')$ et (CD).
2° La droite (AI) coupe la droite (BC) en E. Déterminer la position de E sur la droite (BC). (On pourra utiliser le fait que I est le barycentre du système $\{(B', 1), (C', 2)\}$.)
3° B et C restent fixes. Le point A se déplace dans $\mathscr{P}$, le segment $[A, E]$, où E est le point défini dans la question *2°*, conservant une longueur constante. Déterminer les lieux géométriques des points I et D. (On pourra faire intervenir des homothéties.)

7. *1°* Les complexes a_1, a_2, a_3, a_4 sont donnés. Résoudre l'équation :

$$\begin{cases} (z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^4 \\ z_1 + z_2 = 2a_1 \\ z_2 + z_3 = 2a_2 \\ z_3 + z_4 = 2a_3 \\ z_4 + z_1 = 2a_4. \end{cases}$$

2° Dans le plan, on considère un quadrilatère $A_1 A_2 A_3 A_4$.
a) Montrer qu'il existe un quadrilatère $M_1 M_2 M_3 M_4$ dont les milieux des côtés sont les points A_1, A_2, A_3, A_4 si, et seulement si, le quadrilatère $A_1 A_2 A_3 A_4$ est un parallélogramme.
b) Montrer que, s'il en est ainsi, le point de concours des diagonales du parallélogramme $A_1 A_2 A_3 A_4$ est l'isobarycentre des points M_1, M_2, M_3, M_4.

III – BARYCENTRES DE DEUX POINTS DISTINCTS

Soit A et B deux points distincts de l'espace $\mathscr{E}$; le couple $(A, \overrightarrow{AB})$ est un *repère* de la droite (AB).

1° Étant donnés deux réels α et β dont la somme n'est pas nulle, le système $(A, \alpha), (B, \beta)$ admet un barycentre M, défini à l'aide du point A par $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{\alpha + \beta}(\alpha\overrightarrow{AA} + \beta\overrightarrow{AB})$, soit

$$\overrightarrow{AM} = \frac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{AB}.$$

Il en résulte que M est le point de la droite (AB) de *paramètre* $\dfrac{\beta}{\alpha + \beta}$ dans le repère $(A, \overrightarrow{AB})$.

Nous retiendrons :

Le barycentre de deux points A et B est un point de la droite (AB).

2° *Réciproquement*, un point M de la droite (AB) étant donné, existe-t-il deux réels α et β de somme non nulle tels que M soit le barycentre du système (A, α), (B, β)?
Le paramètre t de M dans le repère $(A, \overrightarrow{AB})$ vérifie l'égalité $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$, qui s'écrit aussi $\overrightarrow{AM} = t(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB})$, soit $(1 - t)\overrightarrow{MA} + t\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

Il en résulte que M est le barycentre du système $(A, 1 - t)$, (B, t) de masse non nulle puisque égale à 1.

On peut donc énoncer :

THÉORÈME 2 | **L'ensemble des barycentres de deux points distincts A et B est la droite (AB).**

Ce résultat définit une méthode de **génération** d'une droite $\mathscr{D}$ à partir de deux de ses points A et B, *distincts*. On dit parfois que le couple (A, B) est un **repère affine** de $\mathscr{D}$. Pour tout point M de $\mathscr{D}$, il existe un couple (α, β) de réels tels que M soit barycentre du système (A, α), (B, β). A noter qu'un tel couple n'est pas unique puisque si (α, β) en est un, pour tout réel λ *non nul*, $(\lambda\alpha, \lambda\beta)$ en est un autre.

REMARQUES :

1. L'isobarycentre de deux points A et B est le point I défini $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$; c'est le milieu du bipoint (A, B).

2. Rappelons que le segment $[A, B]$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} = t\overrightarrow{AB}$, lorsque le réel t décrit l'intervalle $[0, 1]$ de $\mathbb{R}$.
Le lecteur vérifiera alors facilement que le barycentre de deux points distincts A et B affectés de coefficients α, $\beta (\alpha + \beta \neq 0)$ appartient au segment $[A, B]$ si $\alpha\beta \geqslant 0$ et n'appartient pas à $[A, B]$ si $\alpha\beta < 0$.
Il en résulte que le segment $[A, B]$ est l'ensemble des barycentres des points A et B affectés de coefficients positifs ou nuls.

3. Considérons deux points distincts A et B et un réel k différent de 1. Pour tout point M de la droite (AB) les égalités $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = k$ et $\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ sont équivalentes. Or la seconde signifie que M est le barycentre du système $(A, 1)$, $(B, -k)$. Par suite :

Étant donné deux points distincts A et B et un réel k différent de 1, il existe un point M de la droite (AB), et un seul, tel que $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = k$.

Activité — Constructions du barycentre de deux points

1° Décrire et justifier les constructions suivantes :
a) du point G_1 (figure 2), barycentre du système :

$$(A, 2), \quad (B, 5);$$

b) du point G_2 (figure 3), barycentre du système :

$$(A, -2), \quad (B, 5).$$

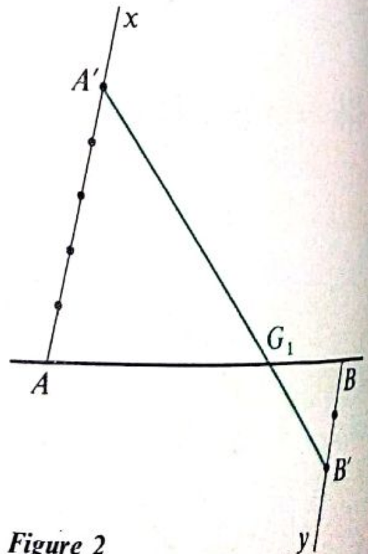


Figure 2

2° On considère le barycentre G de deux points distincts A et B affectés des coefficients respectifs α et β ($\alpha + \beta \neq 0$).
a) Définir le point G à l'aide d'un point O n'appartenant pas à la droite (AB).
Quelles sont les coordonnées de G dans le repère $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ du plan OAB?
b) On considère les points A' et B' définis par $\overrightarrow{OA'} = \alpha\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB'} = \beta\overrightarrow{OB}$, et le point S quatrième sommet du parallélogramme $A'OB'S$ (figure 4). Démontrer que G est le point d'intersection des droites (AB) et (OS).
(A noter que l'on peut utiliser le milieu I de (A', B') à la place de S pour construire G.)
c) Utiliser cette construction pour obtenir les barycentres G_1 et G_2 de la question 1°.

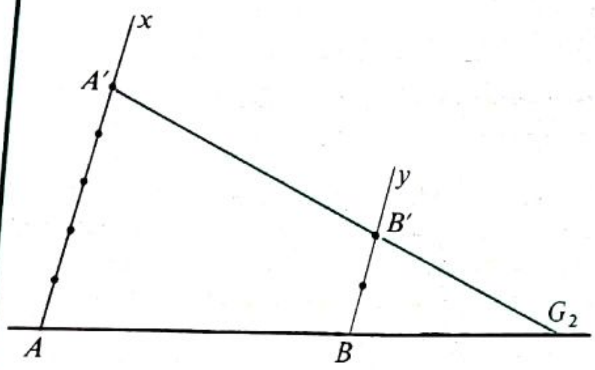


Figure 3

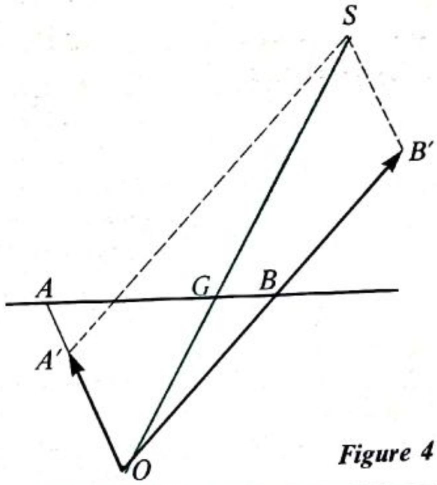


Figure 4

RECHERCHE DE DROITES CONCOURANTES DANS UNE FIGURE

Considérons un système de points pondérés S dont la masse m n'est pas nulle et son barycentre G.

Supposons que l'on puisse partager S en deux sous-systèmes S' et S'', non vides et disjoints, de masses respectives *non nulles* m' et m'', et de barycentres respectifs G' et G''. Le point G est alors le barycentre des points G' et G'' affectés des coefficients m' et m''. Si les points G' et G'' sont distincts, G appartient à la droite $(G'G'')$; autrement dit la droite $(G'G'')$ passe par G.

A toute *partition* du système S en deux sous-systèmes de masses non nulles et de barycentres distincts correspond une droite passant par G. On met ainsi en évidence une famille de droites passant par G.

Exemples

1. L'isobarycentre de trois points non alignés A, B, C est le point G défini par $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$, et appelé **centre de gravité** du triangle ABC.

Le barycentre des points $(B, 1)$ et $(C, 1)$ est le point A', milieu du côté $[B, C]$. Il en résulte que G est aussi le barycentre des points $(A, 1)$ et $(A', 2)$. Le point G appartient donc à la médiane (AA') du triangle ABC et est tel que :

$$\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GA'} = \vec{0}.$$

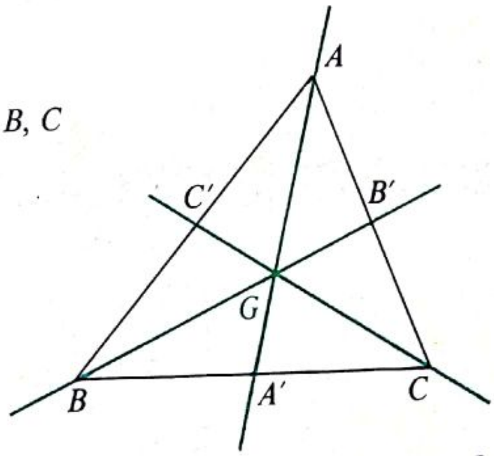


Figure 5

De même les deux autres médianes (BB') et (CC') passent par G (figure 5).

Nous retiendrons :

Les trois médianes d'un triangle sont concourantes au centre de gravité du triangle.

2. L'isobarycentre de quatre points non coplanaires A, B, C, D est le point G défini par :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0},$$

et appelé **centre de gravité** du tétraèdre $ABCD$.

- Le barycentre des points $(A, 1)$ et $(B, 1)$ est le milieu I de l'arête $[A, B]$. De même le barycentre des points $(C, 1)$ et $(D, 1)$ est le milieu J de l'arête $[C, D]$.

Il en résulte que le point G est aussi le barycentre des points $(I, 2)$ et $(J, 2)$, c'est-à-dire le milieu du segment $[I, J]$ (figure 6).

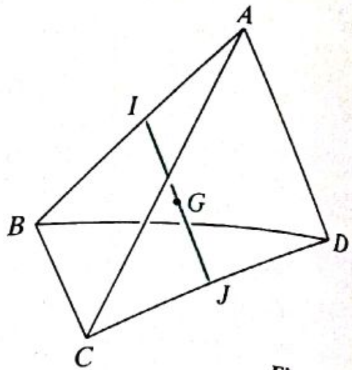


Figure 6

Le centre de gravité d'un tétraèdre est le milieu des segments ayant pour extrémités les milieux de deux arêtes opposées.

- Le barycentre des points $(B, 1)$, $(C, 1)$, $(D, 1)$ est le centre de gravité A' du triangle BCD.

Il en résulte que G est le barycentre des points $(A, 1)$, $(A', 3)$.

Le point G appartient à la droite (AA') (figure 7) et est tel que :

$$\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GA'} = \vec{0}.$$

Nous retiendrons :

Le centre de gravité d'un tétraèdre appartient aux droites passant par un sommet et le centre de gravité de la face opposée.

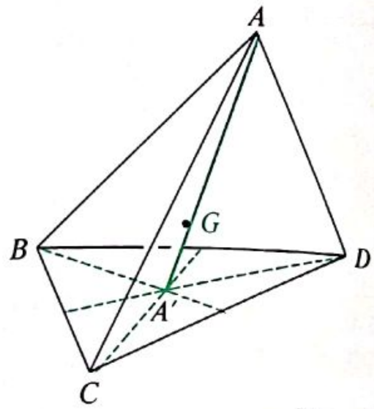


Figure 7

Nous venons de mettre en évidence dans tout tétraèdre, *sept* droites passant par le centre de gravité du tétraèdre : les *trois* droites définies par les milieux de deux arêtes opposées et les *quatre* droites définies par un sommet et le centre de gravité de la face opposée.

Activité — Théorème de Menelaüs

Dans le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on donne un triangle ABC et une droite Δ qui coupe respectivement les côtés (BC), (CA) et (AB) en trois points A', B', C' distincts des sommets A, B, C (figure 8).

(On dit que la droite Δ est une **transversale** du triangle ABC.)

Soit $ax + by + c = 0$ une *équation de Δ. Pour tout point M du plan, de coordonnées (x, y), on note $f(M)$ le réel $ax + by + c$.*

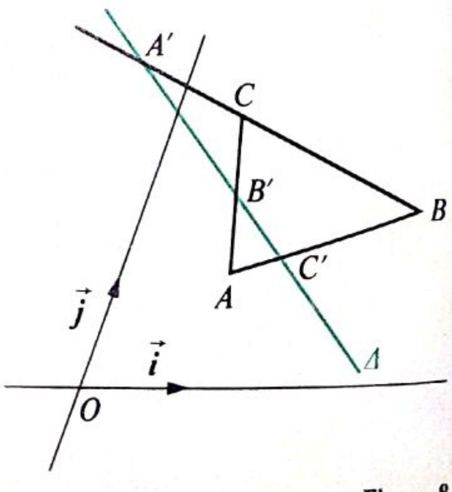


Figure 8

1° Soit β et γ deux réels tels que A' soit le barycentre du système (B, β), (C, γ).
a) Exprimer le quotient $\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}$ en fonction de β et γ.
c) En exprimant l'appartenance de A' à Δ, trouver une relation simple entre les réels β, γ, $f(B)$ et $f(C)$. En déduire une expression de $\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}$.

2° Utiliser la question 1° pour démontrer que $\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1.$ (1)

Ce résultat est connu sous le nom de **théorème de Menelaüs.**

3° Donner une autre démonstration, géométrique, du théorème de Menelaüs en utilisant le point B'' projeté de B sur (AC) parallèlement à Δ.

4° Réciproquement, soit trois points A', B', C' appartenant respectivement aux côtés (BC), (CA), (AB) d'un triangle ABC, distincts des sommets du triangle et vérifiant la relation (1).
a) Démontrer que les droites $(B'C')$ et (BC) sont sécantes en un point noté A''.
b) Démontrer que $A'' = A'$ et en déduire l'alignement des points A', B', C'.

• Exercices d'application

8. Soit $\mathscr{D}$ la droite définie par deux points distincts A et B.
1° Trouver un couple (α, β) de réels tel que A soit le barycentre du système (A, α), (B, β). Même question pour le point B, le point C symétrique de A par rapport à B et le point D symétrique de B par rapport à A.
2° Soit (α, β) et (α', β') deux couples de réels tels que les systèmes $\{(A, \alpha), (B, \beta)\}$ et $\{(A, \alpha'), (B, \beta')\}$ aient le même barycentre. Démontrer qu'il existe un réel λ non nul tel que $\alpha' = \lambda\alpha$ et $\beta' = \lambda\beta$.

9. Soit A, B, C trois points alignés et deux à deux distincts dans le plan $\mathscr{P}$.
On pose $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.
1° Démontrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que A, B, C soient les barycentres respectifs des systèmes :

$$\{(B, \beta), (C, \gamma)\}, \{(C, \gamma), (A, \alpha)\}, \{(A, \alpha), (B, \beta)\}$$

est : $\quad \alpha = \gamma(\lambda - 1) \quad$ et $\quad \beta = -\gamma\lambda$.
2° Soit (α, β, γ) un triplet vérifiant la condition précédente. Reconnaître l'application f qui, à tout point M du plan $\mathscr{P}$, associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC}$.

10. Le plan $\mathscr{P}$ est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et f est l'application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui, à tout point M de coordonnées (x, y), associe le point M' de coordonnées (x', y') telles que :

$$\begin{cases} x' = \dfrac{4}{3}x - \dfrac{1}{3}y + \dfrac{1}{3} \\[2mm] y' = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{5}{3}y - \dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

1° Déterminer l'ensemble $\mathscr{I}$ des points invariants par f.
2° Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ garde une direction fixe.
3° Montrer que l'on peut trouver un couple (α, α') de réels vérifiant $\alpha + \alpha' = 1$, tel que, pour tout point M, le barycentre du système (M, α), (M', α') soit invariant par f.
En déduire une construction simple de l'image par f d'un point M quelconque.

11. On donne dans le plan $\mathscr{P}$ un triangle ABC. A tout point M du plan on associe successivement les points M_1, symétrique de M par rapport à A, M_2, symétrique de M_1 par rapport à B, et M_3, symétrique de M_2 par rapport à C.
1° En considérant l'isobarycentre des points M, M_1, M_2, M_3, démontrer que le milieu de (M, M_3) est un point fixe.
2° On note s_A, s_B, s_C les symétries de centres respectifs A, B, C. Reconnaître l'application composée $s_C \circ s_B \circ s_A$.
3° Quelle est la nature de l'application composée de quatre symétries centrales?

12. On considère une droite $\mathscr{D}$ et deux de ses points, A et B, distincts. Soit M et M' les barycentres de systèmes respectifs (A, α), (B, β) et (A, α'), (B, β').
1° Quels coefficients λ, μ faut-il affecter à A et B pour que le barycentre du système (A, λ), (B, μ) soit le milieu de (M, M')?
2° Application : On donne deux points distincts A et B et un réel k différent de 1 et de -1. Soit M et M' les deux points de la droite (AB) définis par $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = -\dfrac{\overline{M'A}}{\overline{M'B}} = k$, et soit I le milieu de (M, M').
Démontrer que $\dfrac{\overline{IA}}{\overline{IB}} = k^2$.

13. *1°* Démontrer que deux triangles ABC et $A'B'C'$ ont même centre de gravité si, et seulement si : $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$.
2° Est-ce le cas lorsque les points A', B', C' sont ainsi définis :
a) A', B', C' sont les milieux respectifs des bipoints (B, C), (C, A), (A, B)?
b) k est un réel différent de 1 et

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = k?$$

c) α et β sont deux réels dont la somme n'est pas nulle et A', B', C' sont les barycentres respectifs des systèmes $\{(B, \beta), (C, \gamma)\}$, $\{(C, \gamma), (A, \alpha)\}$, $\{(A, \alpha), (B, \beta)\}$?

14. On donne deux points distincts A et B du plan et un réel k non nul. Soit M_1 l'image de M par l'homothétie de centre A et de rapport k; soit M' le barycentre des points B et M_1 affectés respectivement des coefficients α et 1, α étant un réel distinct de -1. Soit f l'application qui, à tout point M du plan, associe M'.
1° Montrer que pour tout point M, on a :

$$(\alpha + 1)\overrightarrow{MM'} = (1 - k)\overrightarrow{MA} + \alpha\overrightarrow{MB}.$$

2° Montrer que si $k = \alpha + 1$, alors f est une translation dont on déterminera le vecteur.
3° Montrer que si $k \neq \alpha + 1$, il existe un unique point G invariant par f.
Montrer qu'alors f est une homothétie de centre G, dont on définira le rapport.

IV — BARYCENTRES DE TROIS POINTS NON ALIGNÉS

Soit A, B, C trois points *non alignés* de l'espace $\mathscr{E}$; le triplet $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un *repère cartésien* du plan (ABC).

1° Étant donnés trois réels α, β, γ dont la somme m n'est pas nulle, le système (A, α), (B, β), (C, γ) admet un barycentre M, défini à partir du point A par

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{m}(\alpha\overrightarrow{AA} + \beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC}), \quad \text{soit} \quad \overrightarrow{AM} = \frac{\beta}{m}\overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{m}\overrightarrow{AC}.$$

Il en résulte que M est le point du plan (ABC) de coordonnées $\left(\frac{\beta}{m}, \frac{\gamma}{m}\right)$ dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ de ce plan. Nous retiendrons :

Le barycentre de trois points non alignés A, B, C est un point du plan (ABC).

2° *Réciproquement*, un point M du plan (ABC) étant donné, existe-t-il trois réels α, β, γ de somme non nulle tels que M soit le barycentre du système (A, α), (B, β), (C, γ)?
Les coordonnées t, t' de M dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ vérifient l'égalité

$$\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB} + t'\overrightarrow{AC},$$

qui s'écrit aussi $\overrightarrow{AM} = t(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}) + t'(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC})$, soit

$$(1 - t - t')\overrightarrow{MA} + t\overrightarrow{MB} + t'\overrightarrow{MC} = \vec{0}.$$

Il en résulte que M est le barycentre du système $(A, 1 - t - t')$, (B, t), (C, t') de masse non nulle puisque égale à 1.

On peut donc énoncer :

THÉORÈME 3 | **L'ensemble des barycentres de trois points non alignés A, B, C est le plan (ABC).**

Ce résultat montre que l'on peut **engendrer** un plan $\mathscr{P}$ à partir de trois de ses points A, B et C, *non alignés*. On dit parfois que le triplet (A, B, C) est un **repère affine** de $\mathscr{P}$. Pour tout point M de $\mathscr{P}$, il existe un triplet (α, β, γ) de réels tels que M soit le barycentre du système (A, α), (B, β), (C, γ). A noter qu'un tel triplet n'est pas unique puisque si (α, β, γ) en est un, pour tout réel λ *non nul*, $(\lambda\alpha, \lambda\beta, \lambda\gamma)$ en est un autre.

REMARQUES :

1. L'isobarycentre de trois points A, B, C est le point G défini par $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$; c'est le centre de gravité du triangle ABC.

2. De même que l'on peut définir un plan $\mathscr{P}$ comme ensemble des barycentres de trois de ses points non alignés, on démontre que l'espace $\mathscr{E}$ est l'ensemble des barycentres de quatre points *non coplanaires*.

Activité — Théorème de Ceva

1° On considère un triangle ABC et un point M n'appartenant à aucun des côtés du triangle ni à aucune des trois droites passant par un sommet et parallèle au côté opposé.

Les droites (AM) et (BC) se coupent alors en A' distinct de B et C, (BM) et (CA) en B' distinct de A et C, (CM) et (AB) en C' distinct de A et B (figure 9).

a) Soit α, β, γ trois réels tels que M soit le barycentre du système $(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)$. Démontrer que $\beta + \gamma \neq 0$.

b) Soit A_1 le barycentre des points pondérés (B, β) et (C, γ). Démontrer que les points A_1 et A' sont confondus et en déduire que :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = -\frac{\gamma}{\beta}.$$

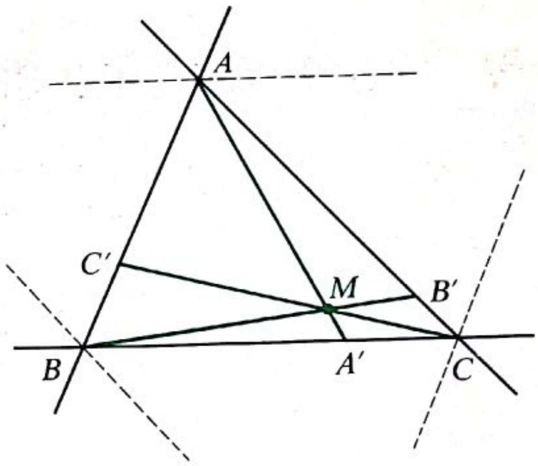


Figure 9

c) Exprimer de même les quotients $\dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}$ et $\dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}$ en fonction de α, β, γ.

En déduire le **théorème de Ceva :**

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1 \qquad (1)$$

2° Réciproquement, considérons trois points A', B', C' appartenant respectivement aux côtés (BC), (CA), (AB), distincts des sommets A, B, C et vérifiant la relation (1).

a) On suppose que les droites (BB') et (CC') sont parallèles. Que peut-on dire de la droite (AA')?

b) On suppose que les droites (BB') et (CC') sont sécantes en M.

Démontrer que le point M n'appartient pas à la droite passant par A et parallèle à (BC). Les droites (AM) et (BC) sont alors sécantes en un point A_1. Utiliser le théorème de Ceva pour montrer que $A_1 = A'$.

D'où la réciproque du théorème de Ceva :

Soit trois points A', B', C' distincts des sommets d'un triangle ABC et appartenant respectivement aux côtés (BC), (CA) et (AB).

Si $\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1$, alors les trois droites (AA'), (BB') et (CC') sont soit parallèles, soit concourantes.

• Exercices d'application

15. On donne trois points A, B, C non alignés. A tout réel m, on associe le barycentre G_m, s'il existe, du système $(A, 2)$, $(B, m-1)$, $(C, m+1)$.
a) Déterminer l'ensemble des points G_m lorsque m décrit $\mathbb{R}$.
b) Reprendre la question *a)* avec les systèmes :
- $(A, m+1)$, $(B, -2)$, $(C, 3)$;
- $(A, 2)$, $(B, 1-m)$, $(C, m+1)$.

16. Dans le plan $\mathscr{P}$ soit (A, α), (B, β), (C, γ) un système de trois points pondérés dont la masse est nulle, la masse de chaque point n'étant pas nulle.
1° Quand le point M décrit $\mathscr{P}$, démontrer que le vecteur $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC}$ reste constant. On note $\vec{u}$ ce vecteur.
2° On suppose $\vec{u} = \vec{0}$. Montrer que chaque point est barycentre des deux autres points. En déduire que les points A, B, C sont alignés.
3° On suppose dans cette question que les points A, B, C ne sont pas alignés.
Démontrer que les trois droites passant par un des points et le barycentre des deux autres sont parallèles.

17. Dans le plan $\mathscr{P}$, soit G le barycentre de trois points A, B, C affectés de coefficients α, β, γ non nuls et de somme non nulle.
On note $\mathscr{S}$ le système (A, α), (B, β), (C, γ), $(G, -\alpha-\beta-\gamma)$.
1° Étudier la fonction vectorielle de Leibniz du système $\mathscr{S}$.
2° Démontrer que tout point du système $\mathscr{S}$ est barycentre des trois autres points.
3° Démontrer que si deux points du système $\mathscr{S}$ ont un barycentre, il en est de même des deux autres points et que ces barycentres sont confondus.

18. Soit $\mathscr{S} = (A_i, \alpha_i)_{i \in \mathbb{N}_n}$ un système de n points pondérés dont la fonction vectorielle de Leibniz est la fonction nulle.
1° Démontrer que chaque point de masse non nulle est barycentre des autres points.
2° On considère une partition du système $\mathscr{S}$ en deux sous-systèmes $\mathscr{S}'$ et $\mathscr{S}''$.
Démontrer que si $\mathscr{S}'$ possède un barycentre, il en est de même de $\mathscr{S}''$ et que ces deux barycentres sont égaux.

19. *Théorème de Gergonne*
On donne sur les côtés $[B, C]$, $[C, A]$ et $[A, B]$ d'un triangle ABC trois points A', B', C' tels que les droites (AA'), (BB') et (CC') soient concourantes en M. En considérant trois réels α, β, γ tels que M soit le barycentre du système (A, α), (B, β), (C, γ), démontrer le théorème de Gergonne :

$$\frac{\overline{A'M}}{\overline{A'A}} + \frac{\overline{B'M}}{\overline{B'B}} + \frac{\overline{C'M}}{\overline{C'C}} = 1.$$

20. Soit A, B, C trois points distincts et non alignés du plan $\mathscr{P}$. Soit a un réel. On considère l'application f_a qui à tout point M de $\mathscr{P}$ associe le point M' de $\mathscr{P}$ tel que

$$\overrightarrow{MM'} = a\overrightarrow{MA} + a\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}.$$

1° Déterminer a pour que f_a soit une translation, dont on précisera le vecteur. On note a_0 la valeur obtenue.
2° a est différent de a_0 dans toute la suite de l'exercice.
a) Montrer que f_a admet un seul point invariant, noté Ω_a.
b) Déterminer et représenter l'ensemble des points Ω_a, lorsque a décrit $\mathbb{R} \setminus \{a_0\}$.
c) Montrer que, si de plus a est distinct de 1, f_a est une homothétie dont on déterminera les éléments caractéristiques. Que peut-on dire de f_1 ?

21. On considère un triangle isocèle ABC de côtés $BC = 2a$, $AB = AC = 3a$, a étant un réel positif fixé. On note A' le milieu de $[B, C]$ et H l'orthocentre du triangle.
1° Soit θ la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$. Montrer que $\cos\theta = \dfrac{7}{9}$.
2° Soit B' le projeté orthogonal de B sur la droite (AC). Calculer $\dfrac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}}$. En déduire deux réels α et γ tels que le point B' soit le barycentre du système $\{(A, \alpha), (C, \gamma)\}$.
3° En s'aidant de la deuxième question, déterminer trois réels a, b, c tels que le point H soit le barycentre du système :

$$\{(A, a), (B, b), (C, c)\}.$$

FONCTION NUMÉRIQUE DE LEIBNIZ

Une application φ de l'espace $\mathscr{E}$ (ou du plan $\mathscr{P}$) dans $\mathbb{R}$ étant donnée, rappelons que pour tout réel k on appelle **surface** (ou **ligne**) **de niveau** k de φ, l'ensemble des *antécédents* de k par φ.

Autrement dit, la surface de niveau k de φ est l'ensemble $\mathscr{S}_k$ des points M de l'espace tels que $\varphi(M) = k$:

$$\mathscr{S}_k = \{ M \in \mathscr{E} / \varphi(M) = k \}.$$

L'ensemble $\mathscr{S}_k$ peut, pour certaines valeurs de k, être vide.

Par un point M_0 de l'espace, il passe une surface de niveau unique, à savoir celle qui correspond au réel $k = \varphi(M_0)$.

En classe de Première on a établi le résultat suivant qu'il convient de bien connaître :

Un point M_0 et un vecteur $\vec{u}$ *non nul* de l'espace étant donnés, les surfaces de niveau de l'application $\varphi : M \mapsto \vec{u} \cdot \overrightarrow{M_0M}$ sont les plans orthogonaux à la droite de repère $(M_0, \vec{u})$. (Dans le plan les lignes de niveau de φ sont les droites orthogonales à la droite $(M_0, \vec{u})$.)

Intéressons-nous maintenant aux lignes de niveau des applications φ de la forme :

$$M \mapsto \varphi(M) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i MA_i^2,$$

où $A_1, A_2, ..., A_n$ sont des points fixés du plan ou de l'espace, et $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ des réels fixés.

L'application φ est appelée **fonction numérique de Leibniz** du système de points pondérés $(A_i, \alpha_i)_{i \in \mathbb{N}_n}$.

Transformation de $\varphi(M)$

Pour tout point M, le réel $\varphi(M)$ s'exprime à l'aide des points A_i et des coefficients α_i. Peut-on obtenir une expression *réduite* de $\varphi(M)$?

Pour tout bipoint (M, M') on a, quel que soit i appartenant à $\mathbb{N}_n$:

$$\alpha_i MA_i^2 = \alpha_i(\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'A_i})^2 = \alpha_i MM'^2 + 2\alpha_i \overrightarrow{MM'} \cdot \overrightarrow{M'A_i} + \alpha_i M'A_i^2.$$

Il en résulte :

$$\varphi(M) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) MM'^2 + 2\overrightarrow{MM'} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{M'A_i}\right) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i M'A_i^2,$$

soit, en posant $m = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ et en remarquant que le vecteur $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{M'A_i}$ n'est autre que l'image du point M' par la fonction vectorielle de Leibniz, f, du système $(A_i, \alpha_i)_{i \in \mathbb{N}_n}$:

$$\boldsymbol{\varphi(M) = \varphi(M') + 2\overrightarrow{MM'} \cdot \overrightarrow{f(M')} + mMM'^2} \qquad (1)$$

L'examen de cette expression de $\varphi(M)$ conduit à distinguer deux situations selon que la masse m du système $(A_i, \alpha_i)_{i \in \mathbb{N}_n}$ est nulle ou non :

1° $m = 0$.

On sait que dans ce cas le vecteur $\overrightarrow{f(M')}$ est indépendant du point M'. En désignant par $\vec{c}$ ce vecteur constant, l'égalité (1) s'écrit :

$$\boldsymbol{\varphi(M) = \varphi(M') + 2\overrightarrow{MM'} \cdot \vec{c}} \qquad (2)$$

A noter que si le vecteur $\vec{c}$ est nul, on obtient, quels que soient les points M et M', $\varphi(M) = \varphi(M')$, ce qui montre que l'application φ est alors constante.

2° $m \neq 0$.

Dans ce cas le système $(A_i, \alpha_i)_{i \in \mathbb{N}_n}$ possède un barycentre G tel que :

$$\overrightarrow{f(G)} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}.$$

En remplaçant M' par G dans l'égalité (1), on obtient :

$$\boldsymbol{\varphi(M) = \varphi(G) + mMG^2}$$

Cette formule, vérifiée par tout point M de l'espace, et connue sous le nom de **formule de Leibniz,** (3)
donne, lorsque m est non nul, une expression réduite de $\varphi(M)$.

Elle met en évidence que la valeur prise par la fonction φ au point G est soit *minimale*, soit *maximale*. En effet :

- Si $m > 0$, pour tout point M on a $mMG^2 \geqslant 0$, d'où $\varphi(M) \geqslant \varphi(G)$; la fonction φ présente donc un *minimum* au point G et ce minimum est *strict* puisque $M \neq G$ entraîne $\varphi(M) > \varphi(G)$.
- Si $m < 0$, pour tout point M distinct de G, on a $\varphi(M) < \varphi(G)$; la fonction φ présente donc un *maximum strict* au point G.

Surfaces de niveau de la fonction φ

Les formules (2) et (3) permettent respectivement, dans les cas $m = 0$ et $m \neq 0$, de déterminer facilement les surfaces, ou les lignes, de niveau de l'application φ.

Il est inutile de les retenir : il suffit de se rappeler comment s'effectue la transformation de $\varphi(M)$: en choisissant un point M' et en remplaçant, pour tout i, MA_i^2 par $(\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'A_i})^2$.

Lorsque m est nul, M' est choisi de manière à faciliter le calcul de $\varphi(M')$.

Lorsque m n'est pas nul, M' est choisi égal à G.

Exemples de résolution

1. *La lettre a désignant un réel strictement positif, on considère un triangle ABC de l'espace $\mathscr{E}$ tel que* $AB = 3a$, $AC = 4a$, $BC = 5a$.

1° Déterminer le barycentre des points A, B, C affectés respectivement des coefficients $-5, 4, 3$.

2° Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que, k désignant un nombre réel donné, on ait $-5MA^2 + 4MB^2 + 3MC^2 = ka^2$. *Discuter. Examiner le cas* $k = 12$.

1° Remarquons que le triangle ABC est rectangle en $A (AB^2 + AC^2 = BC^2)$.

Le barycentre, G, des points pondérés $(A, -5)$, $(B, 4)$, $(C, 3)$ est défini par :

$$-5\overrightarrow{GA} + 4\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GC} = \vec{0},$$

soit en choisissant A comme origine :

$$5\overrightarrow{AG} + 4(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AG}) + 3(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AG}) = \vec{0}.$$

Il en résulte : $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{AB} + \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AC}$,

égalité qui montre que les coordonnées de G dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ du plan (ABC) sont : $\left(2, \dfrac{3}{2}\right)$ (figure 10).

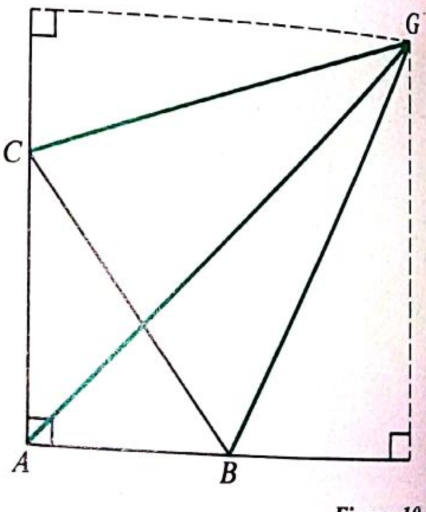


Figure 10

2° L'ensemble cherché est la surface de niveau ka^2, $\mathscr{S}_k$, de la fonction numérique de Leibniz φ du système $(A, -5)$, $(B, 4)$, $(C, 3)$. Transformons $\varphi(M) = -5MA^2 + 4MB^2 + 3MC^2$:

$$\begin{aligned}\varphi(M) &= -5(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + 4(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + 3(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2 \\ &= 2MG^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot (-5\overrightarrow{GA} + 4\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GC}) - 5GA^2 + 4GB^2 + 3GC^2 \\ &= 2GM^2 + \varphi(G).\end{aligned}$$

Calculons $\varphi(G) = -5GA^2 + 4GB^2 + 3GC^2$; le théorème de Pythagore donne :

$$GA^2 = 36a^2 + 36a^2 = 72a^2, \quad GB^2 = 9a^2 + 36a^2 = 45a^2,$$
$$GC^2 = 4a^2 + 36a^2 = 40a^2,$$

d'où $\varphi(G) = -60a^2$. Il en résulte $\varphi(M) = 2GM^2 - 60a^2$, et par suite :

$$\mathscr{S}_k = \{ M \in \mathscr{E} / GM^2 = \left(30 + \frac{k}{2}\right) a^2 \}.$$

Discussion :

- si $30 + \frac{k}{2} > 0$, c'est-à-dire si $k > -60$, $\mathscr{S}_k$ est la sphère de centre G et de rayon $a\sqrt{30 + \frac{k}{2}}$;
- si $k = -60$, $\mathscr{S}_k$ est réduite au singleton $\{G\}$;
- si $k < -60$, $\mathscr{S}_k$ est l'ensemble vide.

En particulier si $k = 12$, $\mathscr{S}_k$ est la sphère de centre G et de rayon $6a$.

2. *Dans le plan $\mathscr{P}$, on considère un triangle équilatéral ABC dont les côtés ont pour longueur a. Soit f l'application qui, à tout point M de $\mathscr{P}$, associe le vecteur $\overrightarrow{f(M)} = 4\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + m\overrightarrow{MC}$, où $m \in \mathbb{R}$.*

1° Déterminer m pour que $f(M)$ soit un vecteur constant $\vec{u}$ et exprimer $\vec{u}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

2° On suppose dans cette question que m a la valeur trouvée à la question précédente. Déterminer l'ensemble Δ des points M de $\mathscr{P}$ tels que $4MA^2 - MB^2 + mMC^2 = a^2$. (On remarquera qu'un des trois points A, B, C appartient à Δ.)

1° L'application f est la fonction vectorielle de Leibniz du système de points pondérés $(A, 4)$, $(B, -1)$, (C, m).

Pour que le vecteur $\overrightarrow{f(M)}$ soit constant il faut et il suffit que la masse du système, $4 - 1 + m$, soit nulle, c'est-à-dire que $m = -3$.

On a alors (figure 11) :

$$\vec{u} = \overrightarrow{f(A)} = -\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}.$$

2° L'ensemble Δ est la ligne de niveau a^2 de la fonction numérique de Leibniz, φ, du système de points pondérés $(A, 4)$, $(B, -1)$, $(C, -3)$, système dont la masse est nulle et qui ne possède donc pas de barycentre.

Transformons $\varphi(M)$, en faisant jouer à A un rôle particulier :

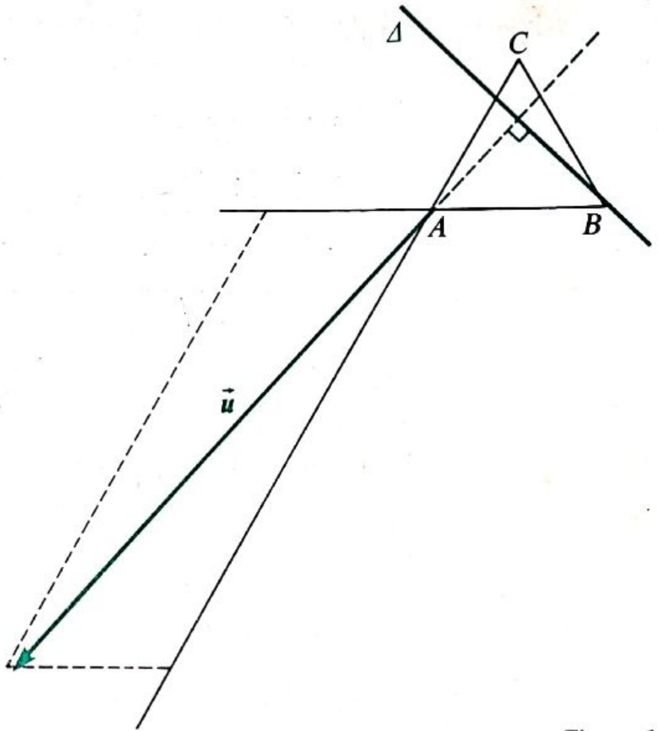


Figure 11

$$\begin{aligned}\varphi(M) &= 4MA^2 - MB^2 - 3MC^2 \\ &= 4MA^2 - (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB})^2 - 3(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC})^2 \\ &= 2\overrightarrow{MA} \cdot (-\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}) - AB^2 - 3AC^2 \\ &= 2\overrightarrow{MA} \cdot \vec{u} - 4a^2.\end{aligned}$$

Il en résulte : $\Delta = \left\{ M \in \mathscr{P} / \vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = -\frac{5}{2} a^2 \right\}$; Δ est donc la ligne de niveau $-\frac{5}{2} a^2$ de l'application $M \mapsto \vec{u} \cdot \overrightarrow{AM}$. Par suite, Δ est une droite orthogonale à la droite de repère $(A, \vec{u})$.

Vérifions maintenant qu'un des trois points A, B, C appartient à Δ, et pour cela calculons $\varphi(A)$, $\varphi(B)$, $\varphi(C)$:

$$\varphi(A) = -4a^2, \quad \varphi(B) = a^2, \quad \varphi(C) = 3a^2.$$

Comme $\varphi(B) = a^2$, B appartient à Δ.

Finalement, Δ est la droite passant par B et orthogonale à la droite de repère $(A, \vec{u})$.

Applications

1. *1° On donne dans l'espace $\mathscr{E}$ trois points non alignés A, B, C et le point I défini par $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. De quels coefficients a, b, c faut-il affecter respectivement les points A, B, C pour que I soit leur barycentre?*

2° On suppose maintenant que le triangle ABC est rectangle en A et que $AB = 2$ et $AC = 1$. On pose :

$$\mathscr{S} = \{ M \in \mathscr{E} \ / \ MA^2 - 2MB^2 - MC^2 = -3 \}.$$

Démontrer que $\mathscr{S}$ est une sphère dont on précisera le centre et le rayon.

2. *Soit trois points non alignés A, B, C du plan $\mathscr{P}$. Quels que soient les points P et Q du plan on notera PQ la distance de ces points. On pose $BC = a$, $CA = b$ et $AB = c$. On désigne par I le milieu du segment [B, C].*

1° Établir l'égalité $b^2 + c^2 = 2AI^2 + \dfrac{a^2}{2}$.

2° A tout point M du plan $\mathscr{P}$ on associe le réel :

$$\varphi(M) = MB^2 + MC^2 - MA^2.$$

a) Soit G le barycentre des points B, C et A affectés respectivement des coefficients 1, 1 et -1. Donner une détermination simple de G et placer ce point sur la figure.
b) Exprimer $\varphi(M)$ à l'aide de MG, a, b, c. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur a, b, c pour qu'il existe un point M au moins vérifiant $\varphi(M) = 0$. Cette condition étant remplie, quel est l'ensemble des points M du plan tels que $\varphi(M) = 0$?

3. *Soit A et B deux points distincts de l'espace $\mathscr{E}$, de milieu C. Étudier, suivant les valeurs des réels m et k, l'ensemble Σ des points M de $\mathscr{E}$ tels que $MA^2 + mMB^2 - 2MC^2 = k$. Examiner le cas : $m = 3$ et $k = AB^2$.*

4. *On donne dans le plan $\mathscr{P}$ un triangle équilatéral ABC tel que $AB = a$.*

1° Déterminer et construire le point G barycentre du système de points A, B, C affectés des coefficients respectifs 1, 1, 2. Calculer GA^2, GB^2 et GC^2 en fonction de a.

2° Déterminer l'ensemble des points M tels que :

$$MA^2 + MB^2 + 2MC^2 = k^2, \quad \text{où} \quad k \in \mathbb{R}.$$

Discuter en fonction de k et de a.

5. *Dans le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on considère les points A, B, C de coordonnées respectives (3, 1), (− 2, 3), (1, 0).*

1° Soit G le barycentre des points A, B, C affectés des coefficients 2, 1, − 1. Trouver les coordonnées de G.
Trouver, suivant les valeurs du nombre réel k, l'ensemble des points M tels que :

$$2\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 - \overrightarrow{MC}^2 = k.$$

2° Trouver l'ensemble des points M tels que :

$$2\overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 - \overrightarrow{MC}^2 = 8.$$

3° Trouver l'ensemble des points M tels que :

$$\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\|.$$

6. *On note MN la distance de deux points quelconques M et N du plan $\mathcal{P}$.*

1° Soit A, B, C trois points de $\mathcal{P}$ tels que $AB = AC = 5$ et $BC = 6$.

Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

2° On désigne par G le barycentre du système $(A, 2), (B, 3), (C, 3)$. Construire le point G et calculer la distance GA.

3° On considère l'application f de $\mathcal{P}$ dans $\mathbb{R}$ qui, à tout point M de $\mathcal{P}$ associe le réel :

$$f(M) = 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}.$$

Démontrer que l'on a, pour tout point M de $\mathcal{P}$:

$$f(M) = f(G) + 4MG^2.$$

Calculer numériquement $f(A)$ et $f(G)$.

4° Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que $f(M) = f(A)$.

7. *On donne dans le plan $\mathcal{P}$, un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et deux points A et B. Déterminer les extrema des applications de $\mathcal{C}$ dans $\mathbb{R}$ suivantes :*

a) $M \mapsto MA^2 + MB^2$;

b) $M \mapsto 2MA^2 + MB^2$;

c) $M \mapsto -4MA^2 + MB^2$;

d) $M \mapsto \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$.

8. *On donne trois points A, B, C non alignés du plan $\mathcal{P}$ affectés respectivement des coefficients -3, 5, 2.*

1° Construire le barycentre G du système $(A, -3), (B, 5)$ et $(C, 2)$. Indiquer les coordonnées de G dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

2° On considère l'application f de $\mathcal{P}$ dans $\mathbb{R}$ qui au point M associe :

$$f(M) = -3MA^2 + 5MB^2 + 2MC^2.$$

Existe-t-il un point M de $\mathcal{P}$ en lequel $f(M)$ est minimale?

3° Cas particulier. Faire une autre figure. Donner la valeur de ce minimum lorsque les coordonnées de A, B, C dans un repère orthonormal sont :

$$A(0, 0), \qquad B(4, 0), \qquad C(0, 8).$$

9. *Dans le plan $\mathcal{P}$, on considère le triangle ABC isocèle rectangle en A tel que $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AC}\| = 3a$ $(a \in \mathbb{R}_+^*)$.*

1° Déterminer le barycentre G des points A, B, C affectés respectivement des coefficients 4, -3, 2. Construire ce point.

2° Soit $f : \mathcal{P} \mapsto \mathbb{R}$

$$M \mapsto f(M) = 4\|\overrightarrow{MA}\|^2 - 3\|\overrightarrow{MB}\|^2 + 2\|\overrightarrow{MC}\|^2.$$

Déterminer l'ensemble des point M du plan tels que $f(M) = -36a^2$. Représenter cet ensemble.

ENSEMBLE DES POINTS TELS QUE $\dfrac{MA}{MB} = k$

Soit A et B deux points distincts de l'espace $\mathcal{E}$ et soit k un réel *strictement positif* et distinct de 1. On se propose d'étudier l'ensemble Σ des points M de l'espace tels que $MA = kMB$. (Lorsque $k = 1$, Σ est le plan médiateur du segment $[A, B]$.)

- **Première méthode**

1° Démontrer que l'ensemble Σ est la surface de niveau 0 de l'application $f : M \mapsto MA^2 - k^2 MB^2$.

En déduire que Σ est une sphère dont le centre est le point G de la droite (AB) tel que $\dfrac{\overline{GA}}{\overline{GB}} = k^2$.

2° Calculer le rayon de la sphère Σ en fonction de $a = AB$ et de k.

- **Seconde méthode**

1° Démontrer que la condition $MA = kMB$ est équivalente à :

$$(\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB}) = 0.$$

2° Exprimer cette égalité à l'aide des points I, barycentre des points pondérés $(A, 1)$, (B, k), et J, barycentre des points pondérés $(A, 1)$, $(B, -k)$.
En déduire que l'ensemble Σ est la sphère de diamètre $[I, J]$.

Nous retiendrons :

Étant donnés deux points distincts A et B et un réel k, différent de 0 et 1, l'ensemble des points M de l'espace tels que $\dfrac{MA}{MB} = k$ est une sphère centrée sur la droite (AB).

Les mêmes démonstrations montrent que dans le plan l'ensemble Σ est un cercle centré sur la droite (AB).

Construction de Σ

Pour construire Σ il suffit de construire les points I et J tels que :

$$\overrightarrow{IA} + k\overrightarrow{IB} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{JA} - k\overrightarrow{JB} = \vec{0}, \quad \text{soit} \quad \frac{\overline{IA}}{\overline{IB}} = -k \quad \text{et} \quad \frac{\overline{JA}}{\overline{JB}} = k.$$

Σ est alors la sphère ou le cercle, de diamètre $[I, J]$.

1° Construire Σ dans les cas suivants :

a) $AB = 6$ cm, $k = \frac{1}{2}$; *b)* $AB = 5$ cm, $k = \frac{3}{2}$; *c)* $AB = 5$ cm, $k = \sqrt{2}$.

2° Soit M un point de Σ non situé sur la droite (AB). Démontrer que les droites (MI) et (MJ) sont respectivement les bissectrices intérieure et extérieure de l'angle $\widehat{AMB}$. En déduire la construction de l'ensemble Σ quand on connaît un de ses points, M.

3° Soit $\mathcal{P}$ un plan contenant la droite (AB) et soit, dans ce plan, la médiatrice Δ de $[A, B]$ et un cercle $\mathcal{C}$ passant par A et B et sécant avec Δ en C et D.
Démontrer que chacune des quatre droites passant par un des deux points C et D et par un des deux points I et J recoupe $\mathcal{C}$ en un point M appartenant à Σ.
En déduire la construction de Σ quand on connaît un des deux points I, J.

Applications

1. *Soit A et B deux points distincts du plan $\mathcal{P}$. Déterminer et construire l'ensemble des points M de $\mathcal{P}$ tels que :*

a) $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = MA$; *b)* $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = \|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\|$;
c) $\|3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\| = \|-5\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\|$.

2. *On donne deux points distincts A et B. Quels sont les ensembles des points M et N tels que $MB = MN$ et tels que A soit le milieu du bipoint (M, N).*

3. *On donne un triangle ABC.*

1° Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que :

a) $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MC}\|$; *b)* $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$;
c) $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\|$.

2° Soit k un réel donné. Déterminer, suivant les valeurs de k, l'ensemble des points M tels que $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MC}\|$.

3° Reprendre le 2° pour l'ensemble des points M tels que $\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + k\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\|$.

OPTIMISATION D'UNE FONCTION ÉCONOMIQUE

Enveloppe convexe

1. On appelle barycentre de n nombres réels $a_1, a_2, ..., a_n$ affectés des coefficients respectifs $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ dont la somme n'est pas nulle, le réel g défini par :

$$g = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}.$$

On suppose que les coefficients α_i sont tous positifs ou nuls et l'on note respectivement λ et μ le plus petit et le plus grand des réels a_i.
Démontrer que le barycentre g appartient à l'intervalle $[\lambda, \mu]$.

2. On rappelle :

- L'ensemble des barycentres de deux points A et B affectés de coefficients positifs ou nuls, dont la somme n'est pas nulle, est le segment $[A, B]$.
- Une partie $\mathscr{F}$ du plan ou de l'espace est dite convexe si elle contient tout segment ayant pour extrémités deux, quelconques, de ses points.

Soit, dans le plan ou dans l'espace, n points $A_1, A_2, ..., A_n$. On note Π l'ensemble des barycentres de ces n points affectés de coefficients positifs ou nuls dont la somme n'est pas nulle.

1° Démontrer que Π contient tous les points A_i.

2° Démontrer que Π est une partie convexe.

3° Démontrer que toute partie convexe $\mathscr{F}$ contenant les points A_i contient Π.

Nous retiendrons :

L'ensemble Π des barycentres de n points $A_1, A_2, ..., A_n$ affectés de coefficients positifs ou nuls est le plus petit ensemble convexe contenant les n points. On l'appelle l'enveloppe convexe des points $A_1, A_2, ..., A_n$.

3. *Dans le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère, on considère n points $A_1, A_2, ..., A_n$, leur enveloppe convexe Π, et l'application f de Π dans $\mathbb{R}$ qui à tout point M de Π, de coordonnées (x, y), associe le réel $f(M) = px + qy$, où p et q sont des réels donnés.*

1° Démontrer que si M est le barycentre des points $A_1, A_2, ..., A_n$ affectés des coefficients positifs ou nuls $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, alors $f(M)$ est le barycentre des nombres $a_1 = f(A_1), a_2 = f(A_2), ..., a_n = f(A_n)$ affectés des coefficients $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$.

2° On note respectivement λ et μ le plus petit et le plus grand des nombres $a_i = f(A_i)$. Démontrer que tout point M de Π est tel que : $\lambda \leqslant f(M) \leqslant \mu$. En déduire que la fonction f possède un minimum et un maximum atteints en l'un des points $A_1, A_2, ..., A_n$.

La même méthode, appliquée à des points de l'espace, conduit au résultat suivant :

Soit dans l'espace $\mathscr{E}$ muni d'un repère, n points $A_1, A_2, ..., A_n$, leur enveloppe convexe Π et l'application f de Π dans $\mathbb{R}$ qui, à tout point M de Π de coordonnées (x, y, z), associe le réel $f(M) = px + qy + rz$, où p, q, r sont des réels donnés.
Alors l'application f possède un minimum et un maximum atteints en l'un des points $A_1, A_2, ..., A_n$.

Exemple de résolution

Nous allons montrer sur un exemple simple comment ce qui précède peut être utilisé pour *optimiser* le profit d'une production.

Une usine fabrique deux sortes de pièces, A et B, à l'aide de deux machines M_1 et M_2. Chaque pièce doit passer successivement sur les deux machines dans un ordre indifférent, et pendant des temps exprimés en minutes dans le tableau ci-contre.

	M_1	M_2
A	30	40
B	20	10

La machine M_1 est disponible 6 000 min par mois, et la machine M_2, 4 000 min.
Le profit réalisé sur une pièce A est de 600 F, celui réalisé sur une pièce B de 300 F.
Combien doit-on fabriquer par mois de pièces A et de pièces B pour obtenir un profit maximal?

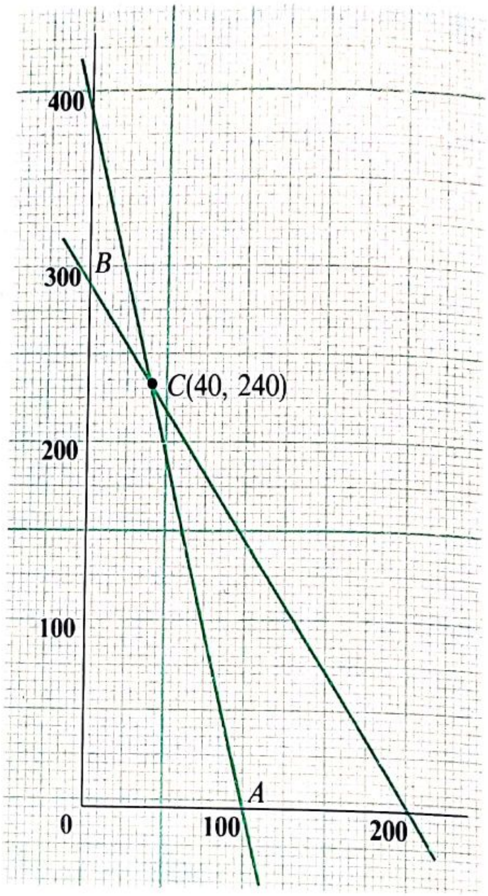
Désignons par x le nombre de pièces A et par y celui de pièces B fabriquées par mois. Le couple (x, y) est le **programme de fabrication.**

A ce programme correspond le profit mensuel $f(x, y) = 600x + 300y$.

L'application $f : (x, y) \mapsto 600x + 300y$ est la **fonction économique.**

Les composantes x et y du couple (x, y) sont assujetties à un certain nombre de conditions ou **contraintes** :

$$(\mathrm{I}) \begin{cases} x \geqslant 0 \quad \text{et} \quad x \in \mathbb{N} \\ y \geqslant 0 \quad \text{et} \quad y \in \mathbb{N} \\ 30x + 20y \leqslant 6\,000 \\ 40x + 10y \leqslant 4\,000 \end{cases}$$



Les deux dernières inégalités traduisent les limites de la durée de fonctionnement mensuel des machines M_1 et M_2.

Si l'on associe au programme (x, y) le point M de coordonnées (x, y) dans un repère du plan, le système de conditions (I) exprime, outre le fait que le point est à coordonnées entières, que ce point appartient à l'ensemble convexe Π, intersection des quatre demi-plans d'équations :

$$x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0, \quad 30x + 20y \leqslant 6\,000, \quad 40x + 10y \leqslant 4\,000,$$

c'est-à-dire à l'enveloppe convexe des points O, A, B, C (figure ci-contre). Le problème consiste alors à trouver le point de Π pour lequel la fonction économique f est maximale. On sait que ce point est l'un des quatre points O, A, B, C.

Le lecteur montrera facilement qu'il s'agit du point $C(40, 240)$. C'est donc le programme $(40, 240)$ qui optimise la production.

Applications

1. *Une entreprise fabrique deux objets A et B.*

- *Un objet A nécessite 1 kg de matière première, 3 h de travail, 2 h de peinture et 1 h d'emballage.*
- *Un objet B nécessite 0,5 kg de matière première, 2 h de travail, 4 h de peinture et 1 h d'emballage.*

On dispose de 375 kg de matière première, de 720 h de travail, de 900 h de peinture et de 300 h d'emballage.
Les articles A et B sont commercialisés respectivement 250 F et 200 F.

Quel est le programme de fabrication qui procure un prix de vente maximal?

2. *Une coopérative vinicole dispose de vin rouge, de vin rosé et de vin blanc à vendre au détail. On a décidé de proposer à la vente deux types d'assortiments :*

- *un assortiment A comprenant 4 ℓ de vin rouge, 3 ℓ de vin rosé et 2 ℓ de vin blanc;*
- *un assortiment B comprenant 3 ℓ de chacun des vins.*

L'assortiment A est vendu 50 F; l'assortiment B est vendu 40 F.
On dispose au total de 1 320 ℓ de vin rouge, de 1 050 ℓ de vin rosé et de 900 ℓ de vin blanc.
Combien doit-on préparer d'assortiments de chaque sorte pour espérer une rentrée maximale d'argent?

3. *Un éleveur de poulets doit fournir journellement à chacun de ses volatiles une alimentation contenant quatre produits indispensables A, B, C et D. Chaque poulet doit absorber tous les jours au moins* 75 g *de* A, 30 g *de* B, 10 g *de* C *et* 20 g *de* D.

Sur le marché, il existe deux aliments tout préparés, P et Q, contenant respectivement :

- *pour P :* 50 % *de A,* 10 % *de B,* 20 % *de C;*
- *pour Q :* 30 % *de A,* 20 % *de B,* 40 % *de D.*

Dans quelle proportion doit-on acheter les produits P et Q pour réaliser l'alimentation des poulets dans les conditions les meilleures et au meilleur prix :

a) *sachant que P et Q sont vendus au même prix?*
b) *sachant que P est deux fois plus cher que Q?*
c) *sachant que Q est deux fois plus cher que P?*

4. *Une usine fabrique trois sortes de pièces, A, B et C, à l'aide de deux machines M_1 et M_2. Chaque pièce doit passer nécessairement sur les deux machines, dans un ordre indifférent, et pendant des temps exprimés en minutes dans le tableau ci-contre. La machine M_1 est disponible* 6 000 min *par mois, et la machine M_2,* 4 000 min.

	M_1	M_2
A	30	40
B	25	10
C	15	20

Les profits réalisés sur les pièces A, B, C sont respectivement 500 F, 300 F, *et* 600 F.

Quel est le programme de fabrication mensuel qui optimise le profit?

EXERCICES ET PROBLÈMES

ISOBARYCENTRE

22. Démontrer que deux tétraèdres $ABCD$ et $A'B'C'D'$ ont même centre de gravité si, et seulement si :

$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{DD'} = \vec{0}.$$

Est-ce le cas lorsque les points A', B', C', D' sont les centres de gravité respectifs des triangles BCD, CDA, DAB, ABC?

23. *1°* Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des points du plan $\mathscr{P}$ dont les coordonnées dans un repère de $\mathscr{P}$ vérifient $y \geqslant x^2$.
A_1 de coordonnées (a_1, b_1) et A_2 de coordonnées (a_2, b_2) étant deux points de $\mathscr{E}$, on considère le barycentre G de ces points affectés des coefficients λ et $1-\lambda$, avec $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Calculer les coordonnées (X, Y) de G et montrer que $G \in \mathscr{E}$.
2° a) Établir par récurrence sans nouveau calcul que, si n points $A_1, A_2, ..., A_n$ appartiennent à $\mathscr{E}$, leur isobarycentre appartient à $\mathscr{E}$.
b) On considère le cas où les points $A_1, A_2, ..., A_n$ d'abscisses $a_1, a_2, ..., a_n$ sont sur la courbe d'équation $y = x^2$. Déduire du *a)* l'inégalité suivante :

$$(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2 \leqslant n(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2).$$

24. Un plan $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. A tout point C du plan de coordonnées (p, q), on associe l'isobarycentre G des points $A(q, 0)$, $B(0, p)$, $C(p, q)$.
a) Calculer les coordonnées de G en fonction de p et q. Quel est l'ensemble $\mathscr{D}$ des points G lorsque le point C décrit $\mathscr{P}$?
b) Soit G_0 un point de $\mathscr{D}$ d'abscisse λ. Déterminer l'ensemble Δ des points C qui ont G_0 pour point associé. En déduire que l'application qui transforme C en G est la composée de deux applications simples.
c) Un point C étant fixé, démontrer que l'ensemble des points M du plan $\mathscr{P}$ tels que :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2(p^2 + q^2)$$

est un cercle Γ contenant O.
Quel est l'ensemble des centres des cercles Γ lorsque le point C décrit $\mathscr{P}$?

25. *Centre de gravité d'un polygone régulier*
On considère, dans le plan $\mathscr{P}$, n points $A_1, A_2, ..., A_n$.
1° On suppose que l'ensemble $\mathscr{S}$ de ces n points est globalement invariant par la symétrie centrale de centre O.
Quel est l'isobarycentre des n points $A_1, A_2, ..., A_n$?
2° On suppose que l'ensemble $\mathscr{S}$ est globalement invariant par la symétrie d'axe $\mathscr{D}$ et de direction δ. Démontrer que l'isobarycentre de $\mathscr{S}$ est un point de la droite $\mathscr{D}$.
3° On suppose que les points $A_1, A_2, ..., A_n$ sont les sommets d'un polygone régulier convexe inscrit dans un cercle de centre O. Déterminer l'isobarycentre de ces n points.
4° Déduire de la question *3°* les relations :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos \frac{2k\pi}{n} = \sum_{k=0}^{n-1} \sin \frac{2k\pi}{n} = 0.$$

FONCTIONS VECTORIELLES ET NUMÉRIQUES DE LEIBNIZ

26. Dans le plan $\mathscr{P}$ on considère un triangle ABC, rectangle en A, tel que $AC = 2AB = 2d$ (d réel strictement positif donné).
1° a) Construire le point G, barycentre des points pondérés $(A, 1)$, $(B, 2)$, $(C, 1)$.
b) Construire le point G_2, barycentre des points pondérés $(A, 5)$, $(B, 2)$, $(C, -3)$.
c) Calculer G_1G_2 en fonction de d.
2° a) Déterminer suivant la valeur du paramètre réel k la nature de l'ensemble :

$$E_k = \{ M \in \mathscr{P} / MA^2 + 2MB^2 + MC^2 = 4k \}.$$

b) Construire E_k pour $k = \dfrac{3}{2} d^2$.

3° Étudier suivant la valeur du réel positif a la nature de l'ensemble : $E_a = \{ M \in \mathscr{P} / MG_1 + MG_2 = 2a \}$.

27. Dans le plan $\mathscr{P}$ on considère un triangle équilatéral ABC. On pose :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{BC}\| = \|\overrightarrow{CA}\| = a, \quad a > 0.$$

1° Déterminer le point G barycentre du système : $(A, 2)$, $(B, 1)$, $(C, 1)$.
2° Déterminer et construire l'ensemble E_1 des points M du plan qui vérifient :

$$2\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 = 2a^2.$$

3° Déterminer et construire l'ensemble E_2 des points M du plan qui vérifient :

$$2\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \frac{3a^2}{2}.$$

(On pourra utiliser le point G et le point I milieu du segment $[A, G]$.)

28. Dans le plan $\mathscr{P}$ on considère le triangle rectangle ABC, d'hypoténuse $[B, C]$ de longueur $2a$. Soit f l'application :

$$M \mapsto \overrightarrow{f(M)} = 4\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + m\overrightarrow{MC}, \quad m \in \mathbb{R}.$$

1° Déterminer m pour que $\overrightarrow{f(M)}$ soit un vecteur constant $\vec{v}_0$ et calculer $\vec{v}_0$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2° On prend $m = -1$. Démontrer que le barycentre G du système $(A, 4)$, $(B, -1)$, $(C, -1)$ est le symétrique par rapport à A du milieu I de $[B, C]$.
3° Déterminer l'ensemble :

$$\mathscr{C} = \{ M \in \mathscr{P} / 4\overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 - \overrightarrow{MC}^2 = -4a^2 \}.$$

(On remarquera que $A \in \mathscr{C}$.)

29. Soit un triangle ABC et soit M un point du plan de ce triangle.
1° Démontrer que le vecteur :

$$\vec{v}_M = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}$$

est égal à un vecteur $\vec{v}$ indépendant de M.

2° Soit P le point tel que $\overrightarrow{AP} = \vec{b}$. La droite AP coupe la droite BC en un point U. Démontrer que $\overrightarrow{UB} = 3\overrightarrow{UC}$.
3° Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. Établir la relation :

$$2\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 - 3\overrightarrow{MC}^2 = 2\overrightarrow{MO} \cdot \vec{b}.$$

En déduire que l'ensemble des points M, tels que :

$$2MA^2 + MB^2 - 3MC^2 = 0,$$

est la droite passant par O et orthogonale à la droite (AU).

30. On donne un triangle ABC de centre de gravité G. Soit M un point de son plan.
1° Exprimer :

$$f(M) = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$$

en fonction des distances MG, BC, CA et AB.
2° Quel est l'ensemble $\mathscr{F}$ des points M du plan ABC tels que $f(M) = 0$?
Quels sont les points de $\mathscr{F}$ qui appartiennent au cercle de diamètre $[B, C]$?

31. Soit, dans le plan $\mathscr{P}$, un carré $ABCD$, de côté de longueur c, où $c \in \mathbb{R}_+^*$.
On considère un réel α et f_α l'application du plan dans lui-même :

$$f_\alpha : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$$
$$M \mapsto M'$$

telle que $\overrightarrow{MM'} = \alpha\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \alpha\overrightarrow{MD}$.

1° Déterminer, suivant les valeurs de α, la nature et les éléments caractéristiques de f_α.
2° Déterminer, puis construire, l'ensemble E_1 des points M du plan $\mathscr{P}$ tels que :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 4c^2.$$

3° Déterminer, puis construire, l'ensemble E_2 des points M du plan $\mathscr{P}$ tels que :

$$\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\|.$$

4° Déterminer, puis construire, l'ensemble E_3 des points M du plan $\mathscr{P}$ tels que :

$$(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}) \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}) = 2c^2.$$

32. Dans un plan $\mathscr{P}$, on considère un triangle ABC isocèle et rectangle en A tel que $\|\overrightarrow{AB}\| = a$ (a est un réel strictement positif donné).
1° Déterminer et construire le barycentre G des points pondérés $(A, 2)$, $(B, 1)$ et $(C, 1)$.
2° Pour tout point M du plan $\mathscr{P}$, on pose :

$$\vec{v} = -2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}.$$

Démontrer que $\vec{v}$ est un vecteur constant, indépendant de M.
Construire le point A' tel que $\overrightarrow{AA'} = \vec{v}$.
Calculer $\|\overrightarrow{AA'}\|$ et $\|\overrightarrow{AG}\|$ en fonction de a.
3° Déterminer et construire l'ensemble Γ des points M du plan $\mathscr{P}$ tels que :

$$\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|-2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|.$$

4° Déterminer et construire l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M du plan $\mathscr{P}$ tels que :

$$-2MA^2 + MB^2 + MC^2 = a^2.$$

(On pourra remarquer que le point G appartient à $\mathscr{E}$.)

33. Soit dans le plan $\mathscr{P}$ un triangle ABC rectangle en A tel que $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AC}\| = 2a$ (a étant un réel strictement positif).
1° Déterminer et construire le barycentre G des points A, B et C affectés respectivement des coefficients 2, 1 et 1.
2° Déterminer l'ensemble des points M de $\mathscr{P}$ tels que :

$$\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\|.$$

3° Déterminer l'ensemble des points M de $\mathscr{P}$ tels que :

$$2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 7a^2.$$

34. Dans le plan $\mathscr{P}$, on donne un triangle équilatéral ABC tel que $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{BC}\| = \|\overrightarrow{CA}\| = 1$.
Soit A' le milieu du segment $[B, C]$.
1° Montrer que le milieu G du segment $[A, A']$ est le barycentre de A, B, C respectivement affectés des coefficients 2, 1, 1.
2° Soit h l'application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui, à tout point M de $\mathscr{P}$, associe le point M' de $\mathscr{P}$ tel que :

$$\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}.$$

Montrer que h est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.
3° Calculer $2GA^2 + GB^2 + GC^2$.
4° Trouver l'ensemble des points N de $\mathscr{P}$ tels que :

$$2NA^2 + NB^2 + NC^2 = 2.$$

35. Soit A et B deux points distincts d'un plan $\mathscr{P}$ et λ un réel différent de $-\dfrac{1}{3}$.
On considère, dans $\mathscr{P}$, l'application f_λ qui, à tout point M, associe le point M' barycentre de la famille $(A, 1)$, (B, λ), $(M, 2\lambda)$.
1° Soit $\lambda = -1$. Montrer que f_{-1} est une translation dont on précisera le vecteur.
2° Soit $\lambda \neq -1$.
a) Montrer qu'il existe une valeur λ_1 de λ telle que le milieu I de (A, B) soit le barycentre de $(A, 1)$ et (B, λ).
En déduire qu'alors, quel que soit M de $\mathscr{P}$, M' est le milieu de (I, M) et préciser la nature de l'application f_{λ_1} correspondante.
b) Plus généralement, démontrer que si λ est différent de zéro f_λ est une homothétie dont on donnera le centre Ω et le rapport k en fonction de λ.
3° Construction dans un cas particulier (il n'est pas nécessaire d'avoir traité le 2° *b*).
Soit $\lambda = 3$ et C un point de $\mathscr{P}$ tel que le triangle ABC soit rectangle en A et isocèle.
Construire avec précision, en le justifiant, le point $C' = f_3(C)$. On prendra $AB = 4$ cm.

36. Dans un plan on considère trois points non alignés A, B et C. Pour tout réel α on définit l'application f_α du plan dans lui-même qui à un point M associe le point M' tel que :

$$\overrightarrow{MM'} = 2\alpha\overrightarrow{MA} - \alpha\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}.$$

1° Montrer que f_1 est une translation que l'on caractérisera.
2° *a)* On suppose que α est différent de 1. Montrer que f_α admet un unique point invariant G_α.
Montrer que $\overrightarrow{CG_\alpha} = k(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ où k est un réel dépendant de α que l'on déterminera.
b) Déterminer l'ensemble des points G_α lorsque α appartient à $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.
3° α étant toujours supposé différent de 1, exprimer $\overrightarrow{G_\alpha M'}$ en fonction de $\overrightarrow{G_\alpha M}$ et en déduire que :
a) f_2 est une application constante;
b) si α est différent de 1 et de 2, f_α est une homothétie dont on précisera le rapport et le centre.

37. Dans le plan $\mathscr{P}$ on considère trois points A, B, C tels que :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AC}\| = 4d \quad \text{et} \quad \|\overrightarrow{BC}\| = 2d,$$

où d est un réel strictement positif donné.
On considère les points A, B et C affectés respectivement des coefficients λ, 1 et 1 où $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{-2\}$.
1° Déterminer l'ensemble Δ des barycentres G_λ de ces points lorsque λ décrit $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.
2° Dans le cas où $\lambda = -1$, on appelle G le barycentre des points A, B, C affectés respectivement des coefficients -1, 1, 1.
a) Déterminer G.
b) Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M du plan vérifiant l'égalité :

$$\|\overrightarrow{MB}\|^2 + \|\overrightarrow{MC}\|^2 = \|\overrightarrow{MA}\|^2.$$

3° *a)* Démontrer que pour tout point M du plan $\mathscr{P}$, $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MA}$ est un vecteur constant que l'on déterminera.
b) Déterminer l'ensemble Δ' des points M du plan $\mathscr{P}$ tels que :

$$\|\overrightarrow{MB}\|^2 + \|\overrightarrow{MC}\|^2 - 2\|\overrightarrow{MA}\|^2 = 32d^2.$$

38. A, B, C et D sont quatre points non coplanaires de l'espace. I et J sont les milieux respectifs des segments $[A, B]$ et $[C, D]$.
m étant un réel non nul, G_m est le barycentre des quatre points A, B, C et D affectés respectivement des coefficients 1, 1, $m-2$ et m.
1° On construit G_m dans deux cas particuliers.
a) Construire G_2 ($m = 2$).
b) Construire G_1 ($m = 1$).
c) En déduire que G_2 est le milieu du segment $[G_1, J]$.
2° Montrer que :

$$\overrightarrow{IG_m} = \frac{1}{2m}[(m-2)\overrightarrow{IC} + m\overrightarrow{ID}].$$

En déduire que l'ensemble $\mathscr{S}$ des points G_m, lorsque m décrit $\mathbb{R}^*$, est inclus dans un plan que l'on précisera.
3° Montrer que $m\overrightarrow{JG_m}$ est un vecteur constant. En déduire l'ensemble $\mathscr{S}$.

39. Soit $\mathscr{E}$ l'espace rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$; on appelle $\mathscr{P}$ le plan de repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et $\mathscr{D}$ et Δ les droites de $\mathscr{E}$ définies par les équations :

$$D : \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \qquad \Delta : \begin{cases} x = 2 + y \\ z = 1 - y \end{cases}$$

On appelle f la projection sur $\mathscr{D}$ parallèlement à $\mathscr{P}$ et g la projection sur Δ parallèlement à $\mathscr{P}$.
Soit h l'application de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ qui à tout point M associe le point M_1 barycentre des points $M' = f(M)$ et $M'' = g(M)$ affectés respectivement des coefficients λ et $1-\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
1° Exprimer les coordonnées de M' et M'' en fonction de celles de M.
2° Déterminer la nature de h et préciser ses éléments caractéristiques.

40. On donne un tétraèdre $ABCD$.
1° Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que :

$$(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) \cdot \overrightarrow{MD} = 3k,$$

où k est un nombre réel donné. Discuter suivant les valeurs de k.
2° Déterminer l'ensemble des points P de l'espace tels que :

$$\|\overrightarrow{PA} - 2\overrightarrow{PB} + 4\overrightarrow{PC}\| = 3\|\overrightarrow{PD}\|.$$

41. Soit $ABCD$ un tétraèdre tel que :

$$AB = AC = AD = BC = CD = DB = a.$$

1° G étant le centre de gravité du tétraèdre, calculer, en fonction de a :

$$GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2.$$

2° Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = ka^2,$$

où k est un nombre réel donné. Discuter.

42. *Bissectrices d'un triangle*

1° Sur les côtés Ox et Oy d'un angle $\widehat{xOy}$ ni nul, ni plat, on considère deux points E et F distincts de O et tels que $OE = OF$.
Soit R et S les points définis par :

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OF}.$$

Démontrer que les droites (OR) et (OS) sont respectivement la bissectrice intérieure et la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{xOy}$.
(On rappelle que la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{xOy}$ est l'axe Δ de la réflexion qui échange les demi-droites Ox et Oy et que la bissectrice extérieure est la droite orthogonale à Δ passant par O.)
2° On considère un triangle ABC et on note $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$.
Soit I le barycentre des points (A, a), (B, b), (C, c). Démontrer que I appartient à la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{A}$. En déduire que les trois bissectrices intérieures sont concourantes.
3° Soit J le barycentre des points $(A, -a)$, (B, b), (C, c). Démontrer que J appartient à la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{A}$ et aux bissectrices extérieures des angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$.
4° Démontrer que la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{A}$ coupe la droite (BC) en un point A' tel que $\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = -\dfrac{c}{b}$.

5° On suppose $b \neq c$. Démontrer que la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{A}$ coupe (BC) en un point A'' tel que $\dfrac{\overline{A''C}}{\overline{A''C}} = \dfrac{c}{b}$.

6° On confectionne un triangle ABC avec un fil métallique rigide qui matérialise les côtés du triangle. Quel est le centre de gravité de ce système matériel?

EXTREMA

43. L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On appelle $\mathscr{P}$ le plan d'équation :

$$3x + y + 4z - 8 = 0.$$

1° Soit M un point n'appartenant pas à $\mathscr{P}$, de coordonnées (x, y, z) et $M'(x', y', z')$ le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{P}$.
Exprimer x', y', z' en fonction de x, y, z.
2° On considère les points $A(1, 1, -2)$, $B(0, -1, 2)$ et $C(-12, 0, -7)$.
a) Déterminer les coordonnées du barycentre G des points A, B, C affectés respectivement des coefficients 2, 2, 1.
b) Calculer GA^2, GB^2 et GC^2.
c) Soit φ l'application de $\mathscr{E}$ dans $\mathbb{R}$ définie, pour tout point $M \in \mathscr{E}$, par $\varphi(M) = 2MA^2 + 2MB^2 + MC^2$.
Quel est le minimum de $\varphi(M)$ quand M décrit $\mathscr{P}$?

44. Dans ce problème, $\mathscr{S}$ désigne un ensemble fini dont les éléments sont des points ou des droites de l'espace $\mathscr{E}$ et f l'application de $\mathscr{E}$ dans $\mathbb{R}_+$ qui, à tout point M, associe la somme des carrés des distances de M aux différents éléments de $\mathscr{S}$.
On dit que f présente un *minimum strict* en un point I de $\mathscr{E}$ si, pour tout point M de $\mathscr{E}$ distinct de I : $f(I) < f(M)$.
1° Démontrer qu'il existe *au plus* un tel point I.
2° On suppose dans cette question que :

$$\mathscr{S} = \{A, B, C, D\},$$

où A, B, C, D sont les sommets d'un tétraèdre. On a alors :

$$f(M) = MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2.$$

a) G étant l'isobarycentre des points A, B, C, D, démontrer que : $f(M) = f(G) + 3MG^2$.
b) En déduire que f présente un minimum strict en G.
3° On suppose dans cette question que $\mathscr{S} = \{A, \mathscr{D}\}$, où A est un point et $\mathscr{D}$ une droite ne passant pas par A. On a alors :

$$f(M) = MA^2 + MM'^2,$$

où M' est le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{D}$.
a) Démontrer que pour tout point I de projeté orthogonal I' sur $\mathscr{D}$, on a :

$$\begin{aligned} f(M) = f(I) &+ 2\overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{II'}) \\ &+ MI^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{M'I'})^2. \end{aligned}$$

b) Démontrer que si $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{II'} = \vec{0}$, alors f présente un minimum strict en I.
En déduire l'existence et la position d'un tel point I.
4° On suppose dans cette question que :

$$\mathscr{S} = \{\text{droite } AB, \text{ droite } BC, \text{ droite } CA\},$$

où A, B, C sont les trois sommets d'un triangle.
On a alors :

$$f(M) = MA'^2 + MB'^2 + MC'^2,$$

où A', B', C' sont les projetés orthogonaux respectifs de M sur les droites (BC), (CA) et (AB).
a) Démontrer que pour tout point I de projetés orthogonaux respectifs α, β, γ sur les droites (BC), (CA) et (AB), on a :

$$\begin{aligned} f(M) = f(I) &+ 2\overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{I\alpha} + \overrightarrow{I\beta} + \overrightarrow{I\gamma}) \\ &+ (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{\alpha A'})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{\beta B'})^2 \\ &+ (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{\gamma C'})^2. \end{aligned}$$

En déduire que si I est l'isobarycentre des points α, β, γ, alors f présente un minimum strict en I.
b) En rapportant le plan ABC à un repère orthonormal dans lequel les points A, B, C ont des coordonnées de la forme $(a, 0)$, $(b, 0)$, $(0, c)$, démontrer analytiquement l'existence d'un point I, isobarycentre de ses projetés orthogonaux α, β, γ sur les droites (BC), (CA) et (AB).
Conclure.
5° On suppose dans cette question que $\mathscr{S} = (\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2)$, où $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont deux droites non coplanaires. Démontrer l'existence d'un point I en lequel f présente un minimum strict. Préciser la position de I.

45. On donne dans l'espace $\mathscr{E}$, une droite $\mathscr{D}$ et deux points A et B. On désigne par f l'application de $\mathscr{D}$ dans $\mathbb{R}_+$ qui, à tout point M de $\mathscr{D}$, associe le réel :

$$f(M) = 2MA^2 + MB^2.$$

1° Soit G le barycentre des points A et B affectés des coefficients respectifs 2 et 1. Démontrer que pour tout point M de $\mathscr{D}$, on a :

$$f(M) = 3MG^2 + \frac{2}{3}AB^2.$$

2° Soit H le projeté orthogonal de G sur $\mathscr{D}$. Démontrer que l'application f présente un minimum strict en H, c'est-à-dire que pour tout point M de $\mathscr{D}$ distinct de H, on a : $f(H) < f(M)$.
3° On suppose dans cette question que l'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, que les points A et B ont pour coordonnées respectives $(1, -2, 1)$ et $(2, 1, -2)$ et que $\mathscr{D}$ est la droite passant par A et dont un vecteur directeur est $\vec{u}(2, 1, -1)$. Pour tout point M de $\mathscr{D}$ de paramètre t dans le repère $(A, \vec{u})$, exprimer $f(M)$ en fonction de t. En déduire l'existence d'un point H de $\mathscr{D}$ pour lequel f présente un minimum strict.
4° Soit $(A_i, \alpha_i)_{i \in \mathbb{N}_n}$ un système de n points pondérés dont la masse m est strictement positive et soit F l'application de $\mathscr{D}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$F(M) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i MA_i^2.$$

a) Démontrer qu'il existe un point H de $\mathscr{D}$ en lequel f présente un minimum strict.
b) Que devient ce résultat lorsque la masse m du système est strictement négative?
c) Lorsque $m = 0$, démontrer que l'application F est constante, ou bien telle que $F(\mathscr{D}) = \mathbb{R}$.

CHAPITRE 7

ANGLES ORIENTÉS DANS LE PLAN

Ce chapitre reprend et prolonge l'étude, faite en classe de Première, des angles orientés de demi-droites et de vecteurs.

Dans tout ce qui suit, on suppose que le plan $\mathscr{P}$ est orienté de la façon usuelle : en choisissant le sens contraire des aiguilles d'une montre comme sens direct.

I – ANGLES ORIENTÉS DE DEMI-DROITES ET DE VECTEURS

ANGLES ORIENTÉS DE DEMI-DROITES

Définition

Soit Ox et Oy deux demi-droites de même origine, O. Le couple (Ox, Oy) détermine un **angle orienté** de demi-droites (figure 1) noté $\widehat{(Ox, Oy)}$.

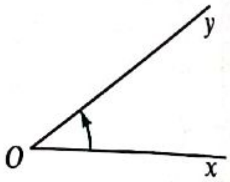


Figure 1

Mesure principale

La **mesure principale** en radians d'un angle orienté $\widehat{(Ox, Oy)}$ est le réel θ ainsi défini :

- Lorsque $\widehat{(Ox, Oy)}$ est nul, $\theta = 0$.
- Lorsque $\widehat{(Ox, Oy)}$ est plat, $\theta = \pi$.
- Lorsque $\widehat{(Ox, Oy)}$ n'est ni nul, ni plat, la valeur absolue de θ est la mesure en radians de l'angle non orienté $\widehat{xOy}$. Quant au signe de θ, il s'obtient en imaginant une demi-droite mobile Ot, d'origine fixe, se déplaçant dans le secteur angulaire $[\widehat{xOy}]$ de Ox vers Oy : si Ot se déplace dans le sens direct (figure 2), θ est positif, et si Ot se déplace dans le sens indirect (figure 3), θ est négatif.

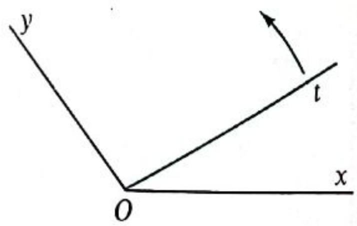


Figure 2

A noter que pour tout angle orienté $\widehat{(Ox, Oy)}$ de mesure principale θ rad, le réel θ appartient à l'intervalle $]-\pi, \pi]$, et que la mesure de l'angle non orienté $\widehat{xOy}$ est égale à $|\theta|$ rad.

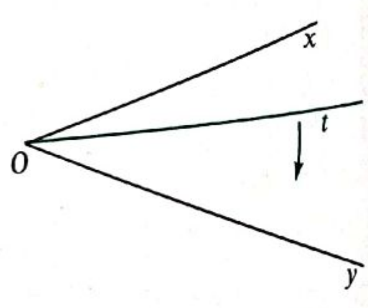


Figure 3

Ensemble des mesures

Par définition l'ensemble des réels de la forme $\theta + k \times 2\pi$, lorsque k décrit $\mathbb{Z}$, est l'ensemble des mesures en radians de l'angle orienté $\widehat{(Ox, Oy)}$.

Pour tout élément α de cet ensemble, on écrit $\overline{(Ox, Oy)} = \alpha$ rad, ou plus simplement $(Ox, Oy) = \alpha$ rad. (Lire : *α est* ***une*** *mesure en radians de l'angle orienté* $\widehat{(Ox, Oy)}$.)

L'ensemble des mesures en radians de $\widehat{(Ox, Oy)}$ s'obtient en ajoutant à l'une quelconque d'entre elles, α, un multiple entier, positif, négatif ou nul, de 2π.

Propriétés

1. Pour tout angle orienté $\widehat{(Ox, Oy)}$ de mesure α, une mesure de $\widehat{(Oy, Ox)}$ est $-\alpha$.

2. Pour toute demi-droite Ox du plan et pour tout réel α, il existe une demi-droite Oy, et une seule, telle que $(Ox, Oy) = \alpha$ rad.

3. Étant données trois demi-droites Ox, Oy, Oz de même origine, la somme d'une mesure en radians, quelconque, de l'angle $\widehat{(Ox, Oy)}$ et d'une mesure en radians, quelconque, de l'angle $\widehat{(Oy, Oz)}$ est une mesure en radians de l'angle $\widehat{(Ox, Oz)}$.
Autrement dit : $(Ox, Oy) + (Oy, Oz) = (Ox, Oz) + k \times 2\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$.
Cette relation est appelée **formule de Chasles** des mesures d'angles orientés.

4. L'image par une réflexion d'axe $\mathscr{D}$ d'un angle orienté $\widehat{(Ox, Oy)}$ de mesure α est un angle orienté $\widehat{(O'x', O'y')}$ de mesure $-\alpha$ (figure 4).

5. L'image par une translation d'un angle orienté $\widehat{(Ox, Oy)}$ de mesure α est un angle orienté $\widehat{(O'x', O'y')}$ de mesure α (figure 5).

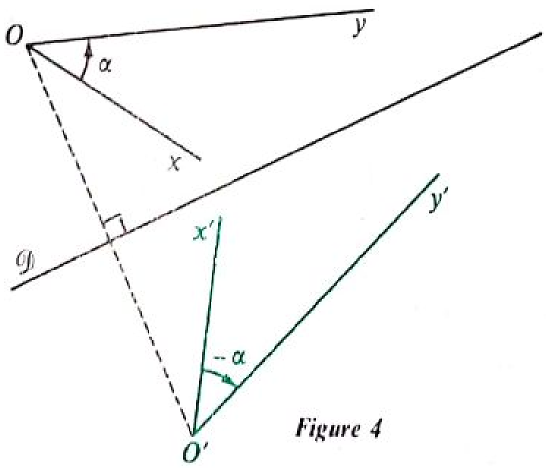


Figure 4

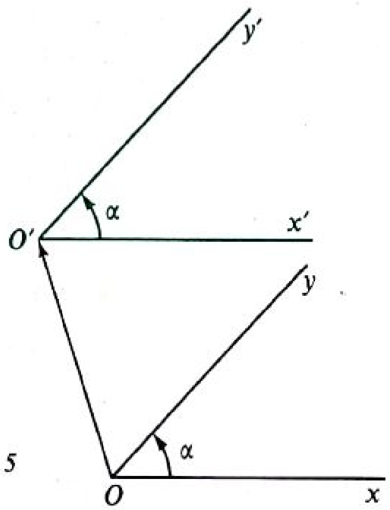


Figure 5

ANGLES ORIENTÉS DE VECTEURS

Définitions

Soit, dans le plan $\mathscr{P}$ orienté, un couple $(\vec{u}, \vec{v})$ de vecteurs *non nuls*.

A étant un point du plan, considérons les points B et C définis par $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$, et les demi-droites Ax et Ay, d'origine A, contenant respectivement B et C (figure 6).

L'angle de demi-droites $\widehat{(Ax, Ay)}$ est dit associé au couple de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$.

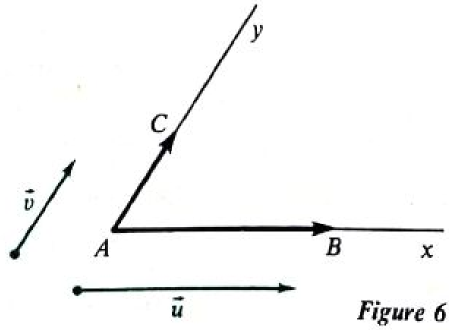


Figure 6

Soit $(\widehat{A'x', A'y'})$ un autre angle de demi-droites associé à $(\vec{u}, \vec{v})$ (figure 7).

L'image de l'angle $(\widehat{Ax, Ay})$ par la translation t de vecteur $\overrightarrow{AA'}$ est l'angle $(\widehat{A'x', A'y'})$.

Comme une translation conserve les mesures des angles orientés, les angles $(\widehat{Ax, Ay})$ et $(\widehat{A'x', A'y'})$ ont mêmes mesures.

Tous les angles de demi-droites associés à un couple de vecteurs non nuls ont donc même ensemble de mesures.

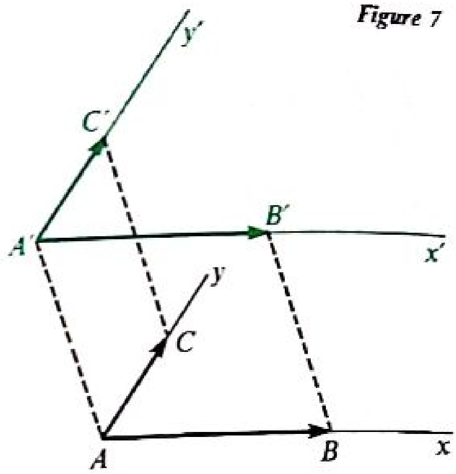


Figure 7

On appelle angle orienté de vecteurs, et on note $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$, un couple $(\vec{u}, \vec{v})$ de vecteurs *non nuls* et les angles orientés de demi-droites qui lui sont associés.

L'ensemble des mesures d'un angle orienté de vecteurs est l'ensemble des mesures de l'un quelconque de ses angles de demi-droites.

La mesure principale des angles de demi-droites associés au couple $(\vec{u}, \vec{v})$ est la mesure principale de l'angle de vecteurs $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$.

Pour toute mesure en radians, α, de l'angle $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$ on note : $\overline{(\vec{u}, \vec{v})} = \alpha$ rad ou, plus simplement, $(\vec{u}, \vec{v}) = \alpha$ rad. (Lire : *α est une mesure en radians de l'angle de vecteurs $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$*.)

REMARQUE : Soit $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs non nuls et soit $\vec{u}', \vec{v}'$ deux autres vecteurs non nuls respectivement de même direction et de même sens que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ($\vec{u}' = a\vec{u}, \vec{v}' = b\vec{v}, a > 0, b > 0$). Pour tout point A, l'angle de demi-droites $(\widehat{Ax, Ay})$ associé au couple $(\vec{u}, \vec{v})$ est aussi associé au couple $(\vec{u}', \vec{v}')$. Les angles de vecteurs $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$ et $\widehat{(\vec{u}', \vec{v}')}$ ont donc même ensemble de mesures.

Propriétés

1. Étant donnés un vecteur $\vec{u}$ non nul, un réel $a > 0$ et un réel α, il existe un vecteur $\vec{v}$, unique, tel que :

$$\|\vec{v}\| = a \quad \text{et} \quad (\vec{u}, \vec{v}) = \alpha \text{ rad.}$$

2. Pour toute mesure α d'un angle de vecteur $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$, $-\alpha$ est une mesure de l'angle $\widehat{(\vec{v}, \vec{u})}$.

3. Étant donnés trois vecteurs non nuls $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, la somme d'une mesure en radians, quelconque, de l'angle $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$ et d'une mesure en radians, quelconque, de l'angle $\widehat{(\vec{v}, \vec{w})}$ est une mesure en radians de l'angle $\widehat{(\vec{u}, \vec{w})}$. Autrement dit :

$$(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{w}) + k \times 2\pi, \quad \text{où} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

4. Considérons deux vecteurs non nuls $\vec{u}, \vec{v}$ et trois points A, B, C tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ (figure 8).

Soit θ rad la mesure principale de l'angle $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$ et α rad une mesure quelconque de cet angle.

Il existe un entier relatif k tel que $\alpha = \theta + k \times 2\pi$, d'où $\cos \alpha = \cos \theta$, puisque $k \times 2\pi$ est *une* période de la fonction cosinus.

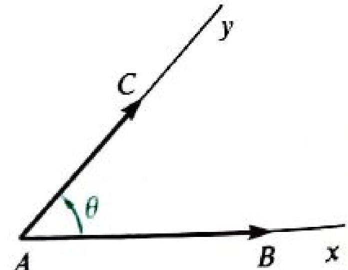


Figure 8

D'autre part l'angle non orienté $\widehat{BAC}$ a pour mesure $|\theta|$ rad.
D'où $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos|\theta|$, soit $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos|\theta|$.
Or $|\theta| = \theta$ ou $|\theta| = -\theta$; dans les deux cas, $\cos|\theta| = \cos\theta$ puisque, pour tout réel t, $\cos(-t) = \cos t$.

Par suite $\cos|\theta| = \cos\theta = \cos\alpha$, et par conséquent : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\alpha$.

Pour tout angle orienté de vecteurs $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$ de mesure α rad : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\alpha$.

ÉGALITÉ MODULO 2π (OU MODULO π)

Étant donnés deux réels α et β, on dit que α est égal à β modulo 2π s'il existe un entier relatif k tel que $\alpha - \beta = k \times 2\pi$, et on écrit : $\alpha = \beta \quad (2\pi)$.

On définit de même une égalité modulo π :

$$\alpha = \beta \quad (\pi) \quad \text{signifie que :} \quad \alpha - \beta = k\pi, \quad \text{où} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

vité

1° Démontrer les propriétés suivantes :
a) Pour tout réel α : $\alpha = \alpha \quad (2\pi)$.
b) Quels que soient les réels α, β : si $\alpha = \beta \quad (2\pi)$, alors $\beta = \alpha \quad (2\pi)$.
c) Quels que soient les réels α, β, γ : si $\alpha = \beta \quad (2\pi)$ et $\beta = \gamma \quad (2\pi)$, alors $\alpha = \gamma \quad (2\pi)$.

2° Quels que soient les réels α, β, γ, démontrer que :

$$\text{si} \quad \alpha = \beta \quad (2\pi), \quad \text{alors} \quad \alpha + \gamma = \beta + \gamma \quad (2\pi).$$

En déduire :
a) si $\alpha + \beta = \gamma \quad (2\pi)$, alors $\alpha = \gamma - \beta \quad (2\pi)$;
b) si $\alpha = \beta \quad (2\pi)$ et $\alpha' = \beta' \quad (2\pi)$, alors $\alpha + \alpha' = \beta + \beta' \quad (2\pi)$ et $\alpha - \alpha' = \beta - \beta' \quad (2\pi)$.

3° Les propriétés ci-dessus s'appliquent-elles aux égalités modulo π?

4° Démontrer les implications :
a) si $\alpha = \beta \quad (2\pi)$, alors $\alpha = \beta \quad (\pi)$;
b) si $\alpha = \beta + \pi \quad (2\pi)$, alors $\alpha = \beta \quad (\pi)$;
c) si $\alpha = \beta \quad (2\pi)$, alors $\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\beta}{2} \quad (\pi)$.

5° Démontrer les équivalences :
a) $\alpha = 0 \quad (2\pi)$ ou $\alpha = \pi \quad (2\pi)$ si, et seulement si $\alpha = 0 \quad (\pi)$.
b) $\alpha = \dfrac{\pi}{2} \quad (2\pi)$ ou $\alpha = -\dfrac{\pi}{2} \quad (2\pi)$ si, et seulement si $\alpha = \dfrac{\pi}{2} \quad (\pi)$.

Les égalités modulo 2π ou π sont particulièrement bien adaptées aux mesures des angles de vecteurs et aux calculs dans lesquels ces mesures interviennent.

Exemples

1. Pour tout angle orienté $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$ de mesure α rad, toute autre mesure $(\vec{u}, \vec{v})$ de cet angle est égale à α modulo 2π :

$$(\vec{u}, \vec{v}) = \alpha \quad (2\pi).$$

2. La relation de Chasles peut s'écrire :

$$(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{w}) \quad (2\pi).$$

3. Trois points distincts A, B, C sont alignés si et seulement si :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0 \quad (2\pi) \quad \text{ou} \quad (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \pi \quad (2\pi),$$

c'est-à-dire si, et seulement si : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0 \quad (\pi)$.

De même deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si, et seulement si :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 0 \quad (\pi).$$

4. Deux droites (AB) et (CD) sont orthogonales si, et seulement si :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \frac{\pi}{2} \quad (2\pi) \quad \text{ou} \quad (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = -\frac{\pi}{2} \quad (2\pi),$$

c'est-à-dire si, et seulement si : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \frac{\pi}{2} \quad (\pi)$.

5. Considérons un angle de vecteurs $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$ de mesure α rad : $(\vec{u}, \vec{v}) = \alpha \quad (2\pi)$, et un vecteur $\vec{u}'$, non nul, de même direction que $\vec{u}$.

- Si $\vec{u}'$ est de même sens que $\vec{u}$, on a $(\vec{u}', \vec{u}) = 0 \quad (2\pi)$, d'où :

$$(\vec{u}', \vec{v}) = (\vec{u}', \vec{u}) + (\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) \quad (2\pi).$$

- Si $\vec{u}'$ est de sens contraire à $\vec{u}$, on a $(\vec{u}', \vec{u}) = \pi \quad (2\pi)$, d'où :

$$(\vec{u}', \vec{v}) = (\vec{u}', \vec{u}) + (\vec{u}, \vec{v}) = \pi + (\vec{u}, \vec{v}) \quad (2\pi).$$

Par suite, dans les deux cas : $(\vec{u}', \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) \quad (\pi)$.

Il en résulte les règles suivantes concernant les égalités de mesures d'angles de vecteurs dans lesquelles les seules opérations rencontrées sont des additions ou des soustractions.

- Si, dans une telle égalité modulo 2π, on remplace plusieurs vecteurs par d'autres ayant respectivement même direction et même sens, on obtient une égalité modulo 2π.
- Si, dans une telle égalité modulo π, on remplace plusieurs vecteurs par d'autres ayant respectivement même direction, on obtient une égalité modulo π.

Attention : Les règles précédentes sont en défaut lorsque les remplacements s'effectuent sur des expressions de la forme $\frac{1}{2}(\vec{u}, \vec{v})$.

UNE PROPRIÉTÉ DE LA BISSECTRICE D'UN ANGLE

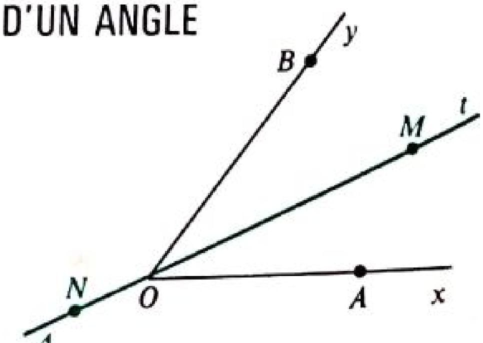


Figure 9

Rappelons que la **bissectrice intérieure** d'un angle non orienté $\widehat{AOB}$ est l'axe Δ de la réflexion s qui échange les deux demi-droites Ox et Oy, d'origine O et contenant respectivement A et B (figure 9).

1° Soit M un point de Δ distinct de O et soit Ot la demi-droite d'origine O contenant M. L'image par la réflexion s de l'angle de demi-droites $\widehat{(Ox, Ot)}$ est $\widehat{(Oy, Ot)}$. D'où :

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = -(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OM}) \quad (2\pi), \quad \text{soit} \quad (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OB}) \quad (2\pi).$$

La relation de Chasles : $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) + (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \quad (2\pi)$, donne alors :

$$2(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \quad (2\pi), \quad \text{soit} \quad (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \quad (\pi).$$

2° Réciproquement, considérons un point N du plan, distinct de O, tel que :

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{ON}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \quad (\pi).$$

M étant un point de la bissectrice Δ, distinct de O, on a :

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{ON}) - (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = 0 \quad (\pi),$$

soit :

$$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) = 0 \quad (\pi),$$

ce qui montre que les points O, M, N sont alignés, et donc que N appartient à Δ.

Pour qu'un point M, distinct du sommet O d'un angle non orienté $\widehat{AOB}$, appartienne à la bissectrice intérieure de cet angle, il faut et il suffit que :

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \quad (\pi).$$

REMARQUE : La **bissectrice extérieure** de l'angle $\widehat{AOB}$ est la droite Δ' passant par O et orthogonale à la bissectrice intérieure Δ. Il résulte alors de la propriété ci-dessus que :

Un point M', distinct du sommet O d'un angle non orienté $\widehat{AOB}$ appartient à la bissectrice extérieure de cet angle si, et seulement si :

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM'}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) + \frac{\pi}{2} \quad (\pi).$$

Exercices d'application

1. *1°* Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul. Quelle est la mesure principale de l'angle $\widehat{(\vec{u}, -\vec{u})}$?

2° Soit $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$ un angle de vecteurs et α une de ses mesures. Déterminer une mesure de chacun des angles $\widehat{(-\vec{u}, \vec{v})}$, $\widehat{(\vec{u}, -\vec{v})}$ et $\widehat{(-\vec{u}, -\vec{v})}$.

Plus généralement, λ et μ étant deux réels non nuls, déterminer suivant leurs signes une mesure de l'angle $\widehat{(\lambda\vec{u}, \lambda\vec{v})}$.

3° On considère un triangle ABC.

Démontrer que :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \pi \quad (2\pi).$$

4° On suppose le triangle ABC isocèle en A $(AB = AC)$.

a) Démontrer que :

$$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \quad (2\pi).$$

b) On désigne par α et β les mesures principales respectives des angles $\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}$ et $\widehat{(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})}$. On donne un de ces deux réels; calculer l'autre :

$$\alpha = \frac{\pi}{4}; \quad \alpha = \frac{2\pi}{3}; \quad \alpha = -\frac{\pi}{3}; \quad \beta = \frac{\pi}{6}; \quad \beta = -\frac{\pi}{3}.$$

2. On considère un triangle ABC rectangle en A, le milieu O de l'hypoténuse $[B, C]$ et le milieu E de $[A, B]$. Soit α une mesure de $\widehat{(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})}$ (figure 10).

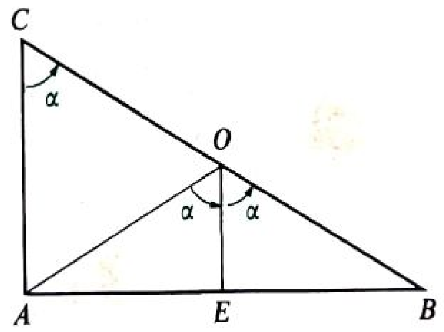


Figure 10

1° Démontrer que α est une mesure de $\widehat{(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OB})}$.

2° En utilisant la réflexion d'axe (OE), démontrer que α est une mesure de $\widehat{(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OE})}$.

3° Déduire de *1°* et *2°* que 2α est une mesure de $\widehat{(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})}$.

3. Programmez votre machine à calculer de manière à obtenir, à partir d'une mesure en radians, α, de l'angle $\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}$:

a) La mesure principale de $\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}$.

b) La mesure de l'angle non orienté $\widehat{BAC}$.

c) Appliquez ces programmes pour $\alpha = 1\,857$. Vérifiez par le calcul les résultats obtenus.

II – BASES ORTHONORMALES DIRECTES

DÉFINITION

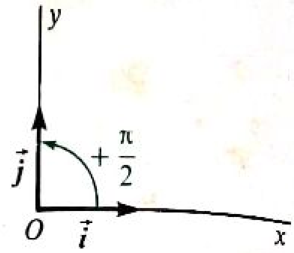


Figure 11

Soit, dans le plan orienté $\mathscr{P}$, une base orthonormale $(\vec{i}, \vec{j})$ et soit $(\widehat{Ox, Oy})$ un angle de demi-droites associé au couple de vecteurs $(\vec{i}, \vec{j})$ (figure 11).

L'angle non orienté $\widehat{xOy}$ est droit et de mesure $\frac{\pi}{2}$ rad. Il en résulte que la mesure principale de l'angle $(\widehat{Ox, Oy})$ est soit $+\frac{\pi}{2}$, soit $-\frac{\pi}{2}$. D'où : $(\widehat{\vec{i}, \vec{j}}) = +\frac{\pi}{2} \quad (2\pi)$ ou $(\widehat{\vec{i}, \vec{j}}) = -\frac{\pi}{2} \quad (2\pi)$.

On dit qu'une base orthonormale $(\vec{i}, \vec{j})$ est directe lorsque $(\widehat{\vec{i}, \vec{j}}) = \frac{\pi}{2} \quad (2\pi)$.

Lorsque $(\widehat{\vec{i}, \vec{j}}) = -\frac{\pi}{2} \quad (2\pi)$, la base orthonormale $(\widehat{\vec{i}, \vec{j}})$ est dite **indirecte.**

Un repère orthonormal **direct** (resp. **indirect**) est un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ dont la base $(\vec{i}, \vec{j})$ est orthonormale directe (resp. indirecte).

Il résulte de la propriété **1** (page 178) que pour tout vecteur unitaire $\vec{i}$, il existe un vecteur unitaire $\vec{j}$, et un seul, tel que $(\vec{i}, \vec{j})$ soit une base orthonormale directe.

COORDONNÉES DANS UNE BASE ORTHONORMALE DIRECTE

Soit $\vec{u}$ un vecteur *non nul* de coordonnées (x, y) dans une base orthonormale *directe* $(\vec{i}, \vec{j})$ et soit α une mesure en radians de l'angle $(\widehat{\vec{i}, \vec{u}})$ (figure 12).

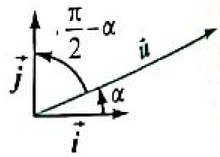


Figure 12

La formule de Chasles : $\quad (\widehat{\vec{u}, \vec{j}}) = (\widehat{\vec{u}, \vec{i}}) + (\widehat{\vec{i}, \vec{j}}) \quad (2\pi)$

montre qu'une mesure de l'angle $(\widehat{\vec{u}, \vec{j}})$ est $\frac{\pi}{2} - \alpha$.

On a, d'une part : $\begin{cases} \vec{i} \cdot \vec{u} = \vec{i} \cdot (x\vec{i} + y\vec{j}) = x(\vec{i})^2 + y\,\vec{i} \cdot \vec{j} = x \\ \vec{j} \cdot \vec{u} = \vec{j} \cdot (x\vec{i} + y\vec{j}) = x\,\vec{j} \cdot \vec{i} + y(\vec{j})^2 = y \end{cases}$

et d'autre part (propriété **4** page 179) :

$$\vec{i} \cdot \vec{u} = \|\vec{i}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos\alpha = \|\vec{u}\| \times \cos\alpha$$

$$\vec{j} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{j} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{j}\| \times \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \|\vec{u}\| \times \sin\alpha.$$

D'où : $\quad x = \|\vec{u}\| \cos\alpha \quad$ et $\quad y = \|\vec{u}\| \sin\alpha.$

Dans une base orthonormale directe $(\vec{i}, \vec{j})$, les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ non nul tel que $(\widehat{\vec{i}, \vec{u}}) = \alpha \quad (2\pi)$ sont données par :

$$\boldsymbol{x = \|\vec{u}\| \cos\alpha \quad \text{et} \quad y = \|\vec{u}\| \sin\alpha.}$$

En particulier, lorsque le vecteur $\vec{u}$ est *unitaire* : $x = \cos\alpha$ et $y = \sin\alpha$.

VECTEUR DIRECTEMENT ORTHOGONAL À UN VECTEUR $\vec{u}$

Définition

Pour tout vecteur $\vec{u}$ *non nul* il existe un vecteur $\vec{u}'$, unique, tel que :

$$\|\vec{u}'\| = \|\vec{u}\| \quad \text{et} \quad (\vec{u}, \vec{u}') = \frac{\pi}{2} \quad (2\pi).$$

On dit que $\vec{u}'$ est le **vecteur directement orthogonal** à $\vec{u}$.

Lorsque le vecteur $\vec{u}$ est nul, son vecteur directement orthogonal est, par définition, le vecteur nul.

Coordonnées dans une base orthonormale directe

Calculons les coordonnées de $\vec{u}'$ dans une base orthonormale directe $\mathscr{B} = (\vec{i}, \vec{j})$, en fonction de celles, (a, b), de $\vec{u}$.

Supposons d'abord $\vec{u} \neq \vec{0}$ (figure 13). Soit α rad une mesure de l'angle $\widehat{(\vec{i}, \vec{u})}$; on a :

$$a = \|\vec{u}\| \cos \alpha \quad \text{et} \quad b = \|\vec{u}\| \sin \alpha. \qquad (1)$$

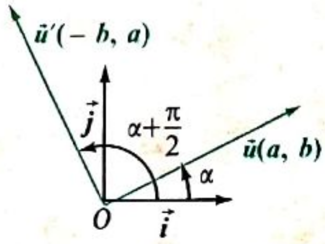


Figure 13

La formule de Chasles $(\vec{i}, \vec{u}') = (\vec{i}, \vec{u}) + (\vec{u}, \vec{u}') \quad (2\pi)$, montre alors qu'une mesure de l'angle $\widehat{(\vec{i}, \vec{u}')}$ est :

$$\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \text{ rad.}$$

Les coordonnées (a', b') du vecteur $\vec{u}'$ sont ainsi données par :

$$a' = \|\vec{u}'\| \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{et} \quad b' = \|\vec{u}'\| \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right).$$

Or : $$\|\vec{u}'\| = \|\vec{u}\|, \quad \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \alpha, \quad \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \alpha.$$

D'où : $$a' = -\|\vec{u}\| \sin \alpha \quad \text{et} \quad b' = \|\vec{u}\| \cos \alpha,$$

soit, d'après (1) : $$a' = -b \quad \text{et} \quad b' = a.$$

Ces formules s'appliquent aussi lorsque $\vec{u} = \vec{0}$. En effet le vecteur de coordonnées $(-b, a)$ est dans ce cas le vecteur nul, c'est-à-dire le vecteur directement orthogonal à $\vec{0}$.

Pour tout vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (a, b) dans une base orthonormale directe, le vecteur $\vec{u}'$ directement orthogonal à $\vec{u}$ a pour coordonnées $(-b, a)$.

DÉTERMINANT DANS UNE BASE ORTHONORMALE DIRECTE

Rappelons qu'étant donnés deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées respectives (a, b) et (c, d) dans une base $\mathscr{B}$ du plan vectoriel $\mathscr{V}$, on appelle déterminant du couple $(\vec{u}, \vec{v})$ dans la base $\mathscr{B}$, le réel $ad - bc$, noté $\text{dét}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v})$ ou $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$:

$$\text{dét}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Rappelons également que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, $\text{dét}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

Lorsque la base $\mathscr{B}$ est orthonormale, on peut interpréter le réel $ad - bc$ comme le produit scalaire $\vec{u}' \cdot \vec{v}$, où $\vec{u}'$ est le vecteur directement orthogonal à $\vec{u}$.

En effet $\vec{u}'$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives $(-b, a)$ et (c, d); d'où :

$$\vec{u}' \cdot \vec{v} = (-b)c + ad, \quad \text{soit} \quad \text{dét}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{u}' \cdot \vec{v}.$$

Pour tout couple $(\vec{u}, \vec{v})$ de vecteurs et pour toute base orthonormale directe $\mathscr{B}$, on a $\text{dét}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{u}' \cdot \vec{v}$, où $\vec{u}'$ est le vecteur directement orthogonal à $\vec{u}$.

Conséquences

1. Le résultat précédent montre que le déterminant d'un couple de vecteurs dans une base orthonormale directe $\mathscr{B}$ est indépendant du choix de $\mathscr{B}$.

2. Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls, soit $\vec{u}'$ le vecteur directement orthogonal à $\vec{u}$ et soit α rad une mesure de l'angle de vecteurs $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ (figure 14).

La formule de Chasles :

$$(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{u}') + (\vec{u}', \vec{v}) \quad (2\pi),$$

montre qu'une mesure de l'angle $(\widehat{\vec{u}', \vec{v}})$ est :

$$\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \text{rad}.$$

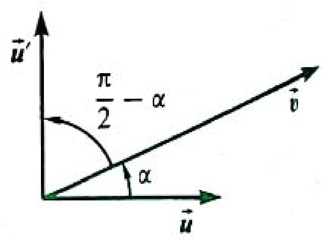


Figure 14

Il s'ensuit : $$\text{dét}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{u}' \cdot \vec{v} = \|\vec{u}'\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right).$$

Or $\|\vec{u}'\| = \|\vec{u}\|$ et $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \sin \alpha$; d'où $\text{dét}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin \alpha$.

Pour tout angle orienté de vecteurs $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ de mesure α rad et pour toute base orthonormale directe $\mathscr{B}$, on a :

$$\text{dét}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin \alpha.$$

3. Les formules :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos \alpha \quad \text{et} \quad \text{dét}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin \alpha$$

permettent de calculer le cosinus et le sinus des mesures d'un angle orienté de vecteurs, à partir des coordonnées de ces vecteurs dans une base orthonormale directe. Il est alors possible, à l'aide d'une machine à calculer, de déterminer la mesure principale de l'angle (ou du moins une valeur approchée de cette mesure principale).

Exemple

Pour $\vec{u}(-2, 1)$ et $\vec{v}(3, 4)$, on a :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{5}, \quad \|\vec{v}\| = 5, \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = -2, \quad \text{dét}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v}) = -11,$$

d'où, pour toute mesure α de l'angle $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$:

$$\cos \alpha = \frac{-2}{5\sqrt{5}} \approx -0{,}1789 \quad \text{et} \quad \sin \alpha = \frac{-11}{5\sqrt{5}} \approx -0{,}9839.$$

Une machine à calculer, fonctionnant en mode radians, donne à partir de :

$$\cos\alpha \approx -0{,}1789$$

la valeur absolue de la mesure principale θ, de l'angle $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$, soit $|\theta| \approx 1{,}7506$ rad.
Comme $\sin\theta$ est négatif : $\theta \approx -1{,}7506$ rad.

4. Soit trois points non alignés A, B, C et soit E le point tel que $ABEC$ soit un parallélogramme (figure 15). Désignons par $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}'$ les aires respectives du parallélogramme $ABEC$ et du triangle ABC, et par θ rad la mesure principale de l'angle orienté de vecteurs $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$.

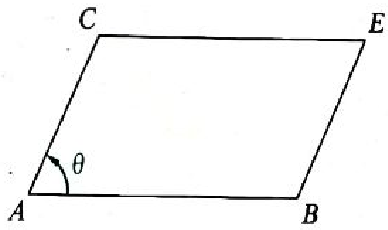


Figure 15

La mesure de l'angle non orienté $\widehat{BAC}$ est alors $|\theta|$ rad, et l'on a, $\mathscr{B}$ étant une base orthonormale directe :

- d'une part : $\mathscr{A} = 2\mathscr{A}' = AB \times AC \times \sin|\theta|$;
- d'autre part : $\text{dét}_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = AB \times AC \times \sin\theta$.

Comme $|\sin\theta| = \sin|\theta|$, il s'ensuit : $\mathscr{A} = 2\mathscr{A}' = |\text{dét}_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})|$.

Cette formule permet de calculer l'aire d'un triangle ABC ou d'un parallélogramme $ABEC$ à partir des coordonnées des sommets A, B, C, dans un repère orthonormal direct.

Exemple

Pour $A(-1, 2)$, $B(2, 3)$, $C(4, -5)$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont pour coordonnées respectives $(3, 1)$ et $(5, -7)$. D'où :

$$\text{dét}_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} = -26,$$

et par suite, aire $ABC = 13$.

Activité

1° Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de coordonnées respectives (a, b) et (c, d) dans une base orthonormale directe. Programmer le calcul de $\cos\theta$, où θ est la mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$.

Réponse (CASIO FX-180P)

$\boxed{\text{MODE}}$ 0	mise en mode programme
$\boxed{P_1}$	programme de saisie des données
$\boxed{\text{ENT}}$ 1 $\boxed{\text{Kin}}$ 1 $\boxed{\text{ENT}}$ 1 $\boxed{\text{Kin}}$ 2	entre a dans K_1 et b dans K_2
$\boxed{\text{ENT}}$ 1 $\boxed{\text{Kin}}$ 3 $\boxed{\text{ENT}}$ 1 $\boxed{\text{Kin}}$ 4	entre c dans K_3 et d dans K_4
$\boxed{P_2}$	programme de calcul
$\boxed{\text{Kout}}$ 1 $\boxed{\times}$ $\boxed{\text{Kout}}$ 3 $\boxed{+}$ $\boxed{\text{Kout}}$ 2 $\boxed{\times}$ $\boxed{\text{Kout}}$ 4 $\boxed{=}$	calcule $\vec{u} \cdot \vec{v} = ac + bd$
$\boxed{\div}$ $\boxed{(}$ $\boxed{\text{Kout}}$ 1 $\boxed{x^2}$ $\boxed{+}$ $\boxed{\text{Kout}}$ 2 $\boxed{x^2}$ $\boxed{)}$ $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{=}$	divise $\vec{u} \cdot \vec{v}$ par $\lVert\vec{u}\rVert = \sqrt{a^2 + b^2}$
$\boxed{\div}$ $\boxed{(}$ $\boxed{\text{Kout}}$ 3 $\boxed{x^2}$ $\boxed{+}$ $\boxed{\text{Kout}}$ 4 $\boxed{x^2}$ $\boxed{)}$ $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{=}$	calcule $\cos\theta = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\lVert\vec{u}\rVert \times \lVert\vec{v}\rVert}$

	retour en mode calcul
MODE •	
P_1 a ENT b ENT c ENT d ENT	entrée des données a, b, c, d
P_2	affiche $\cos\theta$

1° Montrer que le programme précédent permet de calculer $\sin\theta$.

3° Utiliser ce programme pour traiter les exercices **4** *et* **5** *ci-dessous.*

Exercices d'application

4. On donne deux vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ par leurs coordonnées dans une base orthonormale directe $(\vec{i}, \vec{j})$ du plan vectoriel $\mathscr{V}$.
Déterminer la mesure principale en radians, degrés et grades, de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$, dans les cas suivants :

a) $\vec{u}(3, -\sqrt{3})$, $\vec{v}(-1, 2)$ (en radians);
b) $\vec{u}(2, -3)$, $\vec{v}(3, 5)$ (en degrés);
c) $\vec{u}\left(-\frac{7}{2}, \frac{4}{3}\right)$, $\left(\frac{3}{4}, -\frac{7}{5}\right)$ (en grades).

5. On donne trois points A, B, C par leurs coordonnées dans un repère orthonormal direct du plan $\mathscr{P}$.
Déterminer l'aire du triangle ABC et les mesures principales en radians des angles :

$$(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}),\quad (\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}),\quad (\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}),$$

dans les cas suivants :
a) $A(-1, 2)$, $B(-4, 1)$, $C(-7, -5)$;
b) $A(2, 3)$, $B(-3, -1)$, $C(3, 0)$.

6. On donne dans le plan $\mathscr{P}$ deux points distincts A et B et un réel α tel que $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ (π).

1° Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormale directe. Pour tout point M distinct de A et B démontrer que les conditions ci-après sont équivalentes :

$$(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) = \alpha \quad (\pi) \qquad (1)$$

$$\frac{\text{dét}_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})}{\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}} = \tan\alpha \qquad (2)$$

2° On note $a = AB$. Montrer qu'il existe un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ dans lequel les points A et B ont pour coordonnées respectives $\left(-\frac{a}{2}, 0\right)$, $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$.

3° Démontrer analytiquement que l'ensemble des points M du plan tels que :

$$(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) = \alpha \quad (\pi)$$

est un cercle passant par A et B, privé des points A et B.

7. Le plan $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit H le point défini par $(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OH}}) = \theta$ (2π) et $OH = a$. Montrer qu'une équation de la droite passant par H et orthogonale à (OH) est :

$$x\cos\theta + y\sin\theta = a.$$

Quel est, lorsque θ décrit $]-\pi, \pi]$, l'ensemble des droites d'équations :

$$x\cos\theta + y\sin\theta = 3?$$

III – PROPRIÉTÉS ANGULAIRES DU CERCLE

THÉORÈME FONDAMENTAL

On considère un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et deux de ses points A et B, distincts.

1° Soit M un point de $\mathscr{C}$ distinct de A et B. On se propose de montrer que pour toute mesure α de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}})$, 2α est une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}})$.

a) Le résultat est évident lorsque les points A et B sont diamétralement opposés sur $\mathscr{C}$ (figure 16); les droites (MA) et (MB) sont alors orthogonales, et l'on a :

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \quad (2\pi) \quad \text{ou} \quad \alpha = -\frac{\pi}{2} \quad (2\pi).$$

Dans les deux cas 2α est bien une mesure de l'angle plat $\widehat{(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})}$.

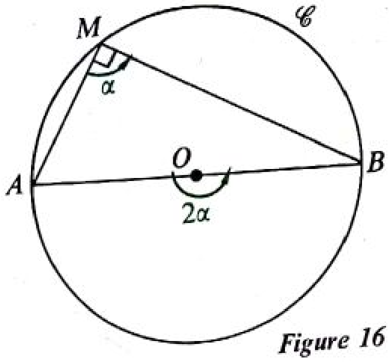


Figure 16

b) Lorsque A et B ne sont pas diamétralement opposés, supposons d'abord que M soit diamétralement opposé à l'un des deux points A, B; à A par exemple (figure 17).

Soit E le milieu de $[A, B]$; on a :

- $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OE}) = \alpha \quad (2\pi)$, car $\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{OE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MB}$;
- $(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OB}) = \alpha \quad (2\pi)$, car (OE) est la médiatrice de $[A, B]$.

La relation de Chasles :

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OE}) + (\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OB}) \quad (2\pi),$$

montre alors qu'une mesure de $\widehat{(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})}$ est 2α.

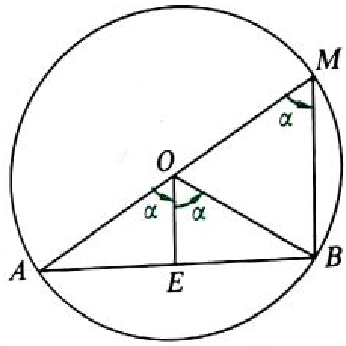


Figure 17

c) Dans le cas général, considérons le point M' diamétralement opposé à M (figure 18). D'après ***b***, on a :

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM'}) = 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MM'}) \quad (2\pi),$$
$$(\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{OB}) = 2(\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{MB}) \quad (2\pi),$$

d'où :

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM'}) + (\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{OB}) = 2[(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MM'}) + (\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{MB})] \quad (2\pi),$$

soit : $\quad (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \quad (2\pi).$

Il en résulte qu'une mesure de l'angle $\widehat{(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})}$ est 2α.

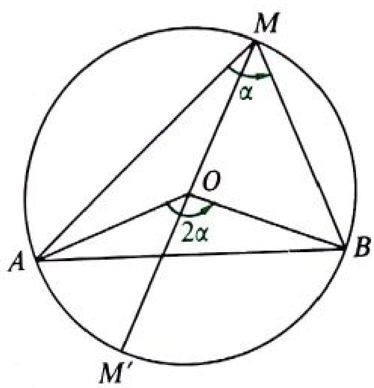


Figure 18

2° Considérons maintenant la droite $\mathscr{D}$ tangente à $\mathscr{C}$ en A et un point T de cette tangente, distinct de A. Montrons que pour toute mesure α de l'angle $\widehat{(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB})}$, une mesure de $\widehat{(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})}$ est 2α.

a) Comme en **1°** ***a***, le résultat est immédiat lorsque les points A et B sont diamétralement opposés puisque les droites (AT) et (AB) sont orthogonales (figure 19).

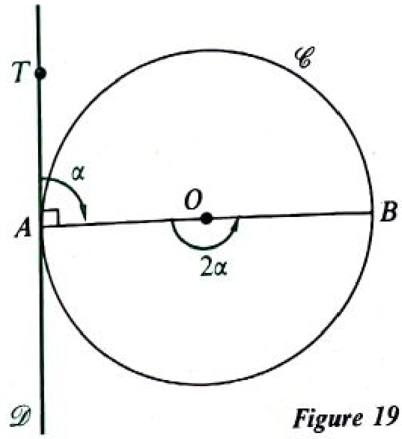


Figure 19

b) Lorsque A et B ne sont pas diamétralement opposés, considérons le point A' diamétralement opposé à A (figure 20).

On a : $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = 2(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AA'}) \quad (2\pi)$ (d'après **2° *a***),

et : $(\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OB}) = 2(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{AB}) \quad (2\pi)$ (d'après **1° *b***).

Il s'ensuit :

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) + (\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OB}) = 2[(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AA'}) + (\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{AB})] \quad (2\pi),$$

soit : $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) \quad (2\pi)$.

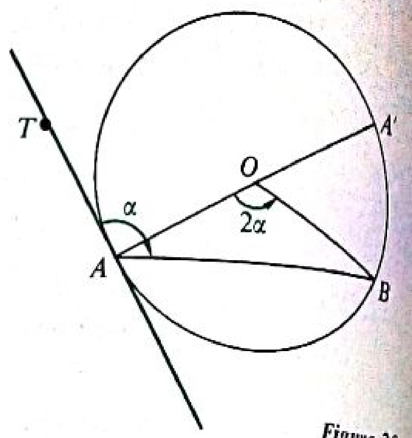


Figure 20

Il en résulte qu'une mesure de $\widehat{(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})}$ est 2α.

Nous retiendrons :

THÉORÈME 1

Étant donnés un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et deux de ses points A et B :

1° Pour tout point M de $\mathscr{C}$ distinct de A et B :

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \quad (2\pi).$$

2° Pour tout point T, distinct de A, de la tangente en A à $\mathscr{C}$:

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) \quad (2\pi).$$

TANGENTE EN A À UN CERCLE ABC

Considérons un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et trois points A, B, C de $\mathscr{C}$ (figure 21).

1° Soit α rad une mesure de $\widehat{(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})}$ et soit At la demi-droite d'origine A telle que $(\overrightarrow{At}, \overrightarrow{AB}) = \alpha \quad (2\pi)$, c'est-à-dire telle que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{At}) = -\alpha \quad (2\pi)$.

On a $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2\alpha \quad (2\pi)$, et, pour tout point T de la tangente à $\mathscr{C}$ en A :

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) \quad (2\pi).$$

D'où : $2(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) = 2\alpha \quad (2\pi)$,

soit : $(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) = \alpha \quad (\pi)$.

On a donc :

$$(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) = \alpha + k\pi, \quad \text{où } k \in \mathbb{Z}.$$

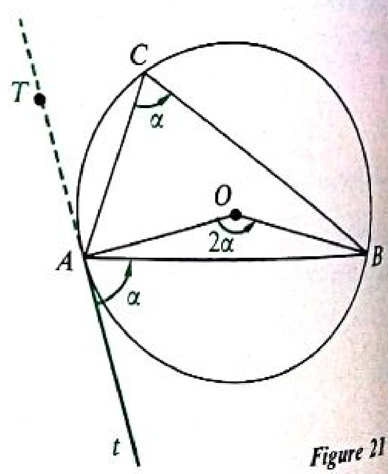


Figure 21

Il s'ensuit :

- si k est pair : $(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) = \alpha \quad (2\pi)$, et le point T appartient à la demi-droite At.
- si k est impair : $(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) = \alpha + \pi \quad (2\pi)$, et le point T appartient à la demi-droite At' opposée à At.

Dans les deux cas la demi-droite At est incluse dans la droite (AT) tangente à $\mathscr{C}$ en A.

2° Montrons que la demi-droite At est située dans le demi-plan de frontière (AB) ne contenant pas C. Pour cela rapportons le plan au repère orthonormal direct $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ tel que Ω soit le milieu de (A, B) et tel que $\vec{i} = \frac{1}{AB}\overrightarrow{AB}$ (figure 22).

Notons $a = AB$; les coordonnées de A et B sont alors respectivement $\left(-\frac{a}{2}, 0\right)$ et $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$.

Désignons par (x_C, y_C) celles de C et par (x_D, y_D) celles d'un point D de At.

On a :

$$\text{dét}_{(\vec{i}, \vec{j})}(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = CA \times CB \times \sin\alpha,$$

soit :

$$\begin{vmatrix} -\frac{a}{2} - x_C & \frac{a}{2} - x_C \\ -y_C & -y_C \end{vmatrix} = CA \times CB \times \sin\alpha,$$

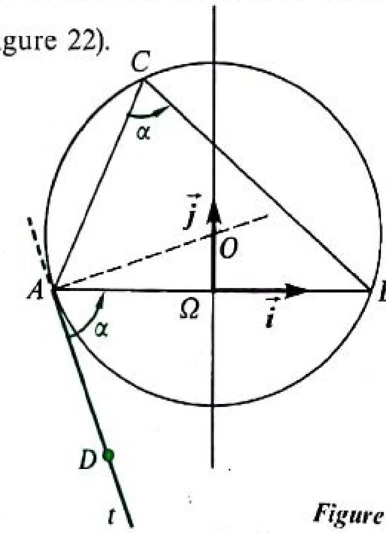


Figure 22

soit : $$ay_C = CA \times CB \times \sin\alpha, \quad \text{d'où } y_C = \frac{CA \times CB \times \sin\alpha}{a}.$$

De même : $$\text{dét}_{(\vec{i}, \vec{j})}(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) = \begin{vmatrix} x_D + \frac{a}{2} & a \\ y_D & 0 \end{vmatrix} = AD \times AB \times \sin\alpha,$$

soit : $$-ay_D = AD \times AB \times \sin\alpha, \quad \text{d'où } y_D = -AD\sin\alpha.$$

On constate alors que y_C et y_D sont de signes contraires et donc que les points C et D sont situés de part et d'autre de la droite (AB).

Nous retiendrons :

Étant donnés trois points A, B, C non alignés, la demi-droite At telle que $(\overrightarrow{At}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \quad (2\pi)$ est tangente au cercle ABC et située dans le demi-plan de frontière (AB) ne contenant pas C.

CONDITION POUR QUE QUATRE POINTS SOIENT COCYCLIQUES

On dit que des points sont **cocycliques** lorsqu'ils appartiennent à un même cercle.

1° Soit A, B, C, D quatre points d'un cercle $\mathscr{C}$ de centre O (figure 23). On a :

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \quad (2\pi),$$
$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) \quad (2\pi),$$

d'où :

$$2(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = 2(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) \quad (2\pi)$$

soit : $$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) \quad (\pi). \qquad (1)$$

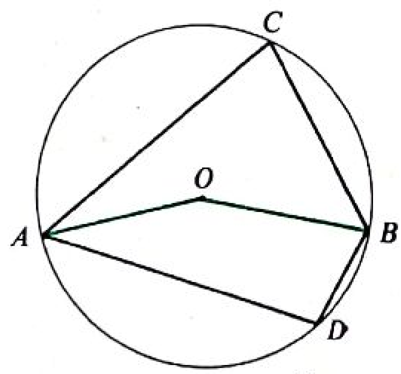


Figure 23

2° Réciproquement, soit A, B, C, D quatre points non alignés vérifiant la condition (1).

Les points A, B, C ne sont pas alignés, sinon on aurait $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = 0 \quad (\pi)$ et, d'après (1), $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) = 0 \quad (\pi)$. Le point D appartiendrait, comme le point C, à la droite (AB) et les points A, B, C, D seraient alignés, ce qui est contraire à l'hypothèse.

On démontre de même que les points A, B, D ne sont pas alignés.
Soit maintenant $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ les cercles circonscrits aux triangles ABC et ABD.
Les demi-droites At et At' telles que :

$$(At, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \quad (2\pi) \quad \text{et} \quad (At', \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) \quad (2\pi)$$

sont respectivement tangentes à $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$. De plus :

$$(At, \overrightarrow{AB}) - (At', \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) - (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) \quad (2\pi)$$

soit : $$(At, At') = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) - (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) \quad (2\pi).$$

Comme $\alpha = \beta \quad (2\pi)$ entraîne $\alpha = \beta \quad (\pi)$, il s'ensuit :

$$(At, At') = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) - (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) \quad (\pi),$$

d'où d'après (1) : $(At, At') = 0 \quad (\pi)$.

Les demi-droites At et At' sont donc soit confondues, soit opposées.

Dans les deux cas les cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ ont même tangente en A : la droite $\mathscr{D}$ contenant At et At'.

Les centres des cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont alors confondus puisqu'ils appartiennent l'un comme l'autre à la médiatrice de $[A, B]$ et à la droite passant par A et orthogonale à $\mathscr{D}$ (figure 24).

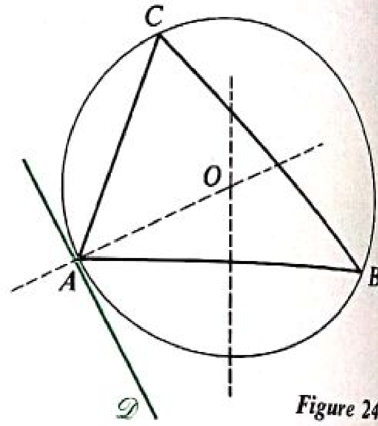


Figure 24

Il en résulte que les cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont égaux et que par suite les points A, B, C, D sont cocycliques.

THÉORÈME 2	**La condition $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) \quad (\pi)$ est nécessaire et suffisante pour que quatre points distincts A, B, C, D non alignés soient cocycliques.**

REMARQUE : Pour quatre points A, B, C, D distincts, *alignés ou non*, la condition $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) \quad (\pi)$ est nécessaire et suffisante pour que ces points soient alignés ou cocycliques.

UNE PROPRIÉTÉ DE L'ORTHOCENTRE D'UN TRIANGLE

On considère un triangle ABC, son orthocentre H (H est le point commun aux trois hauteurs du triangle) et le point H', symétrique orthogonal de H par rapport à la droite (BC) (figure 25).

- Si H est l'un des deux points B, C, le point H' est confondu avec H et appartient au cercle ABC.
- Si H est différent de B et C, l'angle $(\overrightarrow{H'B}, \overrightarrow{H'C})$ est l'image de $(\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC})$ par la réflexion d'axe (BC).

D'où :

$$(\overrightarrow{H'B}, \overrightarrow{H'C}) = (\overrightarrow{HC}, \overrightarrow{HB}) \quad (2\pi),$$

et par suite :

$$(\overrightarrow{H'B}, \overrightarrow{H'C}) = (\overrightarrow{HC}, \overrightarrow{HB}) \quad (\pi). \qquad (1)$$

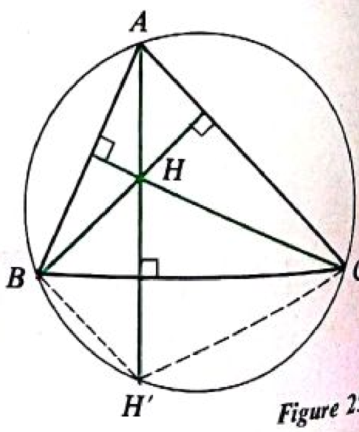


Figure 25

De plus les droites (HC) et (AB) d'une part, (HB) et (AC) d'autre part étant orthogonales, on a :

$$(\overrightarrow{HC}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2} \quad (\pi).$$

Il s'ensuit : $(\overrightarrow{HC}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{HB}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{HB}) + (\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{AC}) \quad (\pi),$

soit :
$$(\overrightarrow{HC}, \overrightarrow{HB}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \quad (\pi). \qquad (2)$$

De (1) et (2) il résulte : $(\overrightarrow{H'B}, \overrightarrow{H'C}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \quad (\pi)$, ce qui prouve que les points A, B, C, H sont alignés ou cocycliques. Comme A, B, C ne sont pas alignés, H' appartient au cercle ABC.

Nous retiendrons :

Les symétriques orthogonaux de l'orthocentre d'un triangle par rapport aux côtés appartiennent au cercle circonscrit au triangle.

• Exercices d'application

8. On donne un cercle $\mathscr{C}$ de centre O, deux points A et B de $\mathscr{C}$ et les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ respectivement tangentes à $\mathscr{C}$ en A et B. Une droite Δ tangente à $\mathscr{C}$ coupe $\mathscr{D}$ en R et $\mathscr{D}'$ en S. Démontrer que :

$$(\overrightarrow{OR}, \overrightarrow{OS}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \quad (\pi).$$

9. On donne un triangle ABC isocèle en A et son cercle circonscrit $\mathscr{C}$. Soit M un point variable sur $\mathscr{C}$, distinct des sommets A, B, C. La droite (AM) coupe la droite (BC) en P.
1° Démontrer que les cercles BMP et CMP sont respectivement tangents aux droites (AB) et (AC).
2° Quels sont les lieux géométriques des centres O et O' des cercles BMP et CMP?

10. On considère un triangle ABC; un point D de la droite (AB), un point E de la droite (AC) et un point M du cercle ABC. Les cercles BDM et CEM se recoupent en P. Démontrer que les points D, E, P sont alignés.

11. On donne un quadrilatère $ABCD$ et un point M de la droite (BC). Les cercles ABM et CDM se recoupent en P.
1° Lorsque les droites (AB) et (CD) se coupent en E, démontrer que le point P appartient au cercle AED.
2° Lorsque les droites (AB) et (CD) sont parallèles, démontrer que le point P appartient à la droite (AD).

12. Deux droites strictement parallèles $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ coupent respectivement un cercle $\mathscr{C}$ en A et B et en A' et B'. Démontrer, pour tout point M du cercle différent des points A, B, A', B', que :

$$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MA'}) = (\overrightarrow{MB'}, \overrightarrow{MB}) \quad (\pi)$$

13. On considère un triangle ABC et trois points D, E, F appartenant respectivement aux côtés $[B, C]$, $[C, A]$ et $[A, B]$.
1° Démontrer que les trois cercles AEF, BFD et CDE passent par un même point M.
2° Démontrer que :

$$(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DF}) = (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}) - (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \quad (\pi).$$

Que peut-on dire du point M lorsque les points D, E, F sont alignés?

14. Soit A, B, C, D quatre points distincts deux à deux, cocycliques et tels que les droites (AB) et (CD) soient orthogonales. On note O le point d'intersection de (AB) et (CD) et O' le milieu de $[AD]$. Montrer que (OO') est orthogonale à (CB).

TRAVAUX PRATIQUES

ENSEMBLE DES POINTS M TELS QUE $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha \quad (2\pi)$

Deux points distincts A et B et un réel α étant donnés, étudions l'ensemble, noté $\mathscr{A}$, des points M du plan tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha \quad (2\pi)$.

1° Déterminer $\mathscr{A}$ lorsque :
a) $\alpha = 0 \quad (2\pi)$;
b) $\alpha = \pi \quad (2\pi)$.

2° On suppose maintenant $\alpha \neq 0 \quad (\pi)$, c'est-à-dire α non multiple de π.
a) Soit M un point de l'ensemble $\mathscr{A}$, s'il en existe. Démontrer que les points A, B, M ne sont pas alignés. On désigne par $\mathscr{C}$ le cercle passant par ces trois points (figure 26).
b) Démontrer que la demi-droite At telle que :

$$(At, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \quad (2\pi),$$

ne dépend que des données A, B, α. En déduire que $\mathscr{C}$ est un cercle fixe et que M appartient à un des deux arcs du cercle $\mathscr{C}$ d'extrémités A et B. Préciser lequel à l'aide de At.

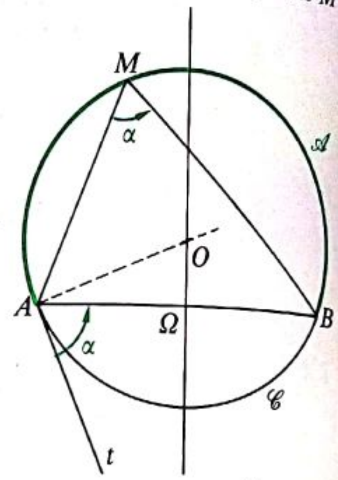


Figure 26

3° Démontrer réciproquement que tout point N de cet arc, distinct de A et B, appartient à l'ensemble $\mathscr{A}$.

4° Construire l'ensemble $\mathscr{A}$ avec précision pour les valeurs suivantes de α : $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6}$ (prendre $AB = 6$ cm).

Nous retiendrons :

Étant donnés deux points distincts A et B :

1. L'ensemble des points M du plan tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = 0 \quad (2\pi)$ est la droite (AB) privée du segment $[A, B]$.

2. L'ensemble des points M du plan tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \pi \quad (2\pi)$ est le segment $[A, B]$ privé des points A et B.

3. L'ensemble des points M du plan tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha \quad (2\pi)$, où α est un réel non multiple de π, est un arc de cercle $\mathscr{A}$ d'extrémités A et B privé des points A et B.
L'arc $\mathscr{A}$ est déterminé par la demi-droite At telle que $(At, \overrightarrow{AB}) = \alpha \quad (2\pi)$:

- **son centre est le point d'intersection de la médiatrice de $[A, B]$ et de la droite passant par A et orthogonale à At;**
- **il est situé dans le demi-plan de frontière (AB) ne contenant pas At.**

4° Application :
Soit deux points distincts O et A et un réel α. A tout point M du plan on associe son symétrique M' par rapport à A. Quel est l'ensemble des points M tels que : $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \alpha \quad (2\pi)$?
Construire cet ensemble avec précision dans les cas suivants : $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\alpha = \frac{2\pi}{3}$.

ENSEMBLE DES POINTS M TELS QUE $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha \quad (\pi)$

Deux points distincts A et B et un réel α étant donnés, étudions l'ensemble, noté Γ, des points M du plan tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha \quad (\pi)$.

1° Déterminer Γ lorsque $\alpha = 0 \quad (\pi)$.

2° Supposons maintenant $\alpha \neq 0$ (π), c'est-à-dire α non multiple de π.
a) Démontrer qu'un point M du plan appartient à l'ensemble Γ si, et seulement si :

$$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha \quad (2\pi) \quad ou \quad (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha + \pi \quad (2\pi).$$

En déduire que Γ est la réunion de deux arcs $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$ d'extrémités A et B, privés des points A et B.
b) Démontrer que $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$ sont deux arcs d'un même cercle, situés de part et d'autre de la droite (AB). En déduire que Γ est un cercle passant par A et B privé des points A et B.
c) Préciser comment on obtient le centre de Γ à partir des données A, B, α.
Construire Γ avec précision pour les valeurs suivantes de α : $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}$.

Nous retiendrons :

Étant donnés deux points distincts A et B :

1. L'ensemble des points M du plan tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = 0$ (π) est la droite (AB) privée des points A et B.

2. L'ensemble des points M du plan tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha$ (π), où α est un réel non multiple de π, est un cercle Γ passant par A et B privé des points A et B. Le cercle Γ est déterminé par la demi-droite At telle que $(At, \overrightarrow{AB}) = \alpha$ (2π) : son centre est le point d'intersection de la médiatrice de $[A, B]$ et de la droite passant par A et orthogonale à At.

3° Application :
On donne deux droites (OB) et (OB′) telles que $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OB'}) = \alpha$ (π), et un point A n'appartenant ni à (OB), ni à (OB′), de projetés orthogonaux respectifs H et H′ sur (OB) et (OB′).
Deux points M et M′ se déplacent respectivement sur (OB) et (OB′) de manière que $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB'})$ (2π). Soit K le projeté orthogonal de A sur (MM′).
a) Démontrer que $(\overrightarrow{KH}, \overrightarrow{KH'}) = \alpha - (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB'})$ (π).
b) En déduire que le point K se déplace sur une droite fixe ou sur un cercle fixe. Quel est l'ensemble des points A pour lesquels K se déplace sur une droite fixe?

ANGLES ORIENTÉS ET NOMBRES COMPLEXES

Le plan $\mathscr{P}$ étant muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, à tout point M du plan de coordonnées (x, y) est associé le nombre complexe $z = x + iy$ appelé affixe de M.

1° Démontrer le résultat suivant :

Étant donnés trois points A, B, M deux à deux distincts d'affixes respectives a, b, z, l'ensemble des mesures de l'angle de vecteurs $\widehat{(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})}$ est l'ensemble des arguments du nombre complexe $\frac{z-a}{z-b}$.

On retiendra ce résultat que l'on peut aussi exprimer par l'égalité modulo 2π :

$$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \arg \frac{z-a}{z-b} \quad (2\pi).$$

2° Les notations étant celles de la question 1°, on pose $Z = \frac{z-a}{z-b}$.
Déterminer l'ensemble des points M tels que :
a) Z soit un réel positif; un réel négatif; un réel;
b) Z soit un imaginaire pur;
c) $\arg Z = \frac{\pi}{3}$ (2π);
d) Z^2 soit réel; imaginaire pur;
e) Z^3 soit réel; imaginaire pur.

3° Démontrer que trois points A, B, C deux à deux distincts, d'affixes respectives a, b, c, sont alignés si, et seulement si, le quotient $\frac{c-a}{c-b}$ est réel.

4° Démontrer que quatre points A, B, C, D deux à deux distincts, d'affixes respectives a, b, c, d, sont cocycliques ou alignés si et seulement si le quotient $\frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b}$ *est réel.*

5° Soit A le point d'affixe 1. *A tout point M d'affixe z on associe le point M' d'affixe* iz. *Déterminer l'ensemble des points M tels que A, M, M' soient alignés.*

6° Soit A et B les points d'affixes respectives 1 *et* -1. *Deux points m et M d'affixes z et Z varient de manière à ce que l'on ait* $Z = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

a) Démontrer que la droite (Mm) est bissectrice de l'angle $\widehat{AMB}$ *et que :*

$$Mm^2 = MA \times MB.$$

b) Démontrer que $\frac{Z-1}{Z+1} = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2$. *En déduire* $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = 2(\overrightarrow{mA}, \overrightarrow{mB}) \quad (2\pi)$.

c) Quel est l'ensemble des points M lorsque m décrit un cercle passant par A et B ?

DROITE DE SIMSON

Un triangle ABC étant donné, à tout point M du plan on associe ses projetés orthogonaux respectifs A', B', C' sur les côtés (BC), (CA) et (AB) (figure 27). On se propose de répondre à la question : pour quels points M du plan les points A', B', C' sont-ils alignés?

1° Démontrer que les sommets du triangle ABC répondent à la question.

2° On suppose maintenant que M est distinct des sommets A, B, C.

a) Démontrer qu'une condition nécessaire et suffisante d'alignement des points A', B', C' est :

$$(\overrightarrow{B'M}, \overrightarrow{B'A'}) = (\overrightarrow{B'M}, \overrightarrow{B'C'}) \quad (\pi). \qquad (1)$$

b) Démontrer que :

$$(\overrightarrow{B'M}, \overrightarrow{B'A'}) = (\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CA'}) \quad (\pi).$$

et : $$(\overrightarrow{B'M}, \overrightarrow{B'C'}) = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC'}) \quad (\pi).$$

c) En déduire que la condition (1) *s'exprime aussi sous la forme :*

$$(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) \quad (\pi). \qquad (2)$$

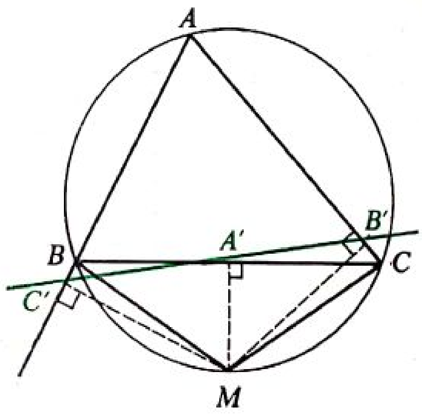


Figure 27

Montrer que la condition (2) *permet de répondre à la question posée.*

L'ensemble des points M du plan dont les projetés orthogonaux sur les côtés d'un triangle sont alignés est le cercle circonscrit au triangle.

Pour tout point M du cercle ABC, la droite $(A'B'C')$ est appelée **droite de Simson** de M.

Applications

1. *On considère un triangle ABC et une de ses transversales A'B'C'. Les cercles ABC et AB'C' se recoupent en E.*

1° Démontrer que les projetés orthogonaux du point E sur les droites (AB), (AC), (BC) et (B'C') sont alignés.

2° En déduire que le point E appartient aux cercles A'B'C et A'BC'.

2. *On considère un triangle ABC, un point M de son cercle circonscrit et les projetés orthogonaux respectifs A', B', C' de M sur les côtés* $[B, C]$, $[C, A]$ *et* $[A, B]$.

(Les points A', B', C' sont alignés sur la droite de Simson de M.)

La droite (MA') recoupe le cercle ABC en A".

1° Démontrer que la droite (AA") est parallèle à la droite de Simson de M.

2° En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que les droites de Simson de deux points M et N du cercle ABC soient orthogonales.

3° Combien y a-t-il de points du cercle ABC dont les droites de Simson sont parallèles à une droite donnée?

3. *Quel est l'ensemble des points de l'espace dont les projetés orthogonaux sur les trois côtés d'un triangle ABC sont alignés?*

4. *On donne un triangle ABC et une de ses transversales $A'B'C'$. Quel est l'ensemble des points de l'espace dont les projetés orthogonaux sur les droites (AB), (BC), (CA) et $(A'B'C')$ sont alignés?*

5. *Soit, dans le plan $\mathscr{P}$, deux droites orthogonales Δ et Δ' et soit A un point n'appartenant ni à Δ ni à Δ'. On considère l'ensemble des droites $\mathscr{D}$ qui coupent respectivement Δ et Δ' en deux points M et M' tels que l'angle $\widehat{MAM'}$ soit droit.*
Déterminer l'ensemble des projetés orthogonaux du point A sur les droites $\mathscr{D}$.

DROITE DE STEINER

On considère un triangle ABC, un point M de son cercle circonscrit et les points A', B', C' projetés orthogonaux respectifs de M sur les côtés $[B, C]$, $[C, A]$ et $[A, B]$. On sait que les points A', B', C' sont alignés sur une droite Δ appelée la droite de Simson du point M (figure 28).

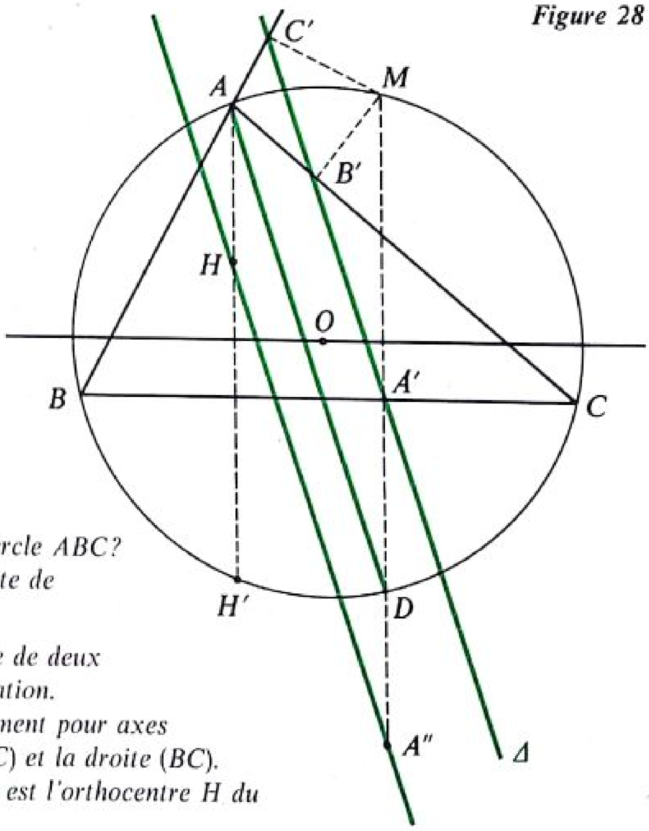


Figure 28

1° La droite (MA') recoupe le cercle ABC en D.
Démontrer que :

$$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{DA}) = (\overrightarrow{A'M}, \overrightarrow{A'B'}) \quad (\pi).$$

En déduire le parallélisme des droites (AD) et Δ.
Cette propriété reste-t-elle valable lorsque la droite (MA') est tangente au cercle ABC?
Donner une construction rapide de la droite de Simson d'un point M.

2° On rappelle que l'application composée de deux réflexions d'axes parallèles est une translation.
Soit s et s' les réflexions ayant respectivement pour axes le diamètre du cercle ABC parallèle à (BC) et la droite (BC).
a) Démontrer que l'image de A par $s' \circ s$ est l'orthocentre H du triangle ABC.
Déterminer l'image A'' de D par $s' \circ s$.
b) Démontrer que les droites Δ et (HA'') sont parallèles.
En déduire que l'image de la droite Δ par l'homothétie de centre M et de rapport 2 est la droite (HA''),
Que peut-on dire du milieu du segment $[M, H]$?

Conclusion : L'image de la droite de Simson de M par l'homothétie de centre M et de rapport 2 passe par l'orthocentre du triangle ABC.

On peut exprimer ce résultat sous la forme suivante :

Étant donnés un triangle ABC et un point M du cercle ABC, l'orthocentre du triangle et les symétriques orthogonaux de M par rapport aux côtés sont quatre points alignés sur une droite appelée la droite de Steiner du point M.

La droite de Steiner de M est l'image de la droite de Simson de M par l'homothétie de centre M et de rapport 2.

EXERCICES ET PROBLÈMES

POINTS COCYCLIQUES OU ALIGNÉS

15. Deux cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ se coupent en A et B. Soit C un point de $\mathscr{C}$ et D un point de $\mathscr{C}'$ non situé sur la droite (AC). Une droite passant par B recoupe $\mathscr{C}$ en M et $\mathscr{C}'$ en N. Les droites (CM) et (DN) se coupent en R. Démontrer que les points A, C, D, R sont cocycliques.

16. Soit quatre points A, B, C, D cocycliques. Les points B et D se projettent orthogonalement sur (AC) en B' et D'. Les points A et C se projettent orthogonalement sur (BD) en A' et C'. Démontrer que les quatre points A', B', C', D' sont cocycliques.

17. Soit A, B, C, D quatre points cocycliques et soit quatre cercles : Γ_1 passant par A et B, Γ_2 passant par B et C, Γ_3 passant par C et D, Γ_4 passant par D et A. Les cercles Γ_1 et Γ_2 se recoupent en A', Γ_2 et Γ_3 en B', Γ_3 et Γ_4 en C', et Γ_4 et Γ_1 en D'.
Démontrer que les points A', B', C', D' sont alignés ou cocycliques.

18. On donne un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et une droite $\mathscr{D}$ extérieure au cercle. Deux diamètres de $\mathscr{C}$, orthogonaux, coupent $\mathscr{D}$ en P et Q. Les tangentes à $\mathscr{C}$ passant par P et Q se coupent en quatre points distincts de P et Q. Démontrer que ces quatre points sont cocycliques.

19. Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon R ($R > 0$) et soient A et B deux points diamétralement opposés sur $\mathscr{C}$.
1° Pour tout point M de $\mathscr{C}$, distinct de A et B, on construit le point Q tel que $MABQ$ soit un parallélogramme.
Déterminer l'ensemble décrit par le milieu I du segment $[M, Q]$, puis l'ensemble décrit par le centre de gravité G du triangle BQM lorsque M décrit $\mathscr{C}$ privé des points A et B.
2° On note N le symétrique de A par rapport à M et P le point d'intersection des droites (ON) et (BM). Quel rôle joue le point P relativement au triangle ANB?
Trouver une homothétie de centre B transformant M en P et déterminer l'ensemble décrit par le point P lorsque M décrit $\mathscr{C}$ privé des points A et B.
3° On considère les cercles circonscrits aux triangles OBP et MNP.
a) Pourquoi ces cercles ne sont-ils pas tangents en P?
b) On note K l'autre point commun à ces deux cercles. En utilisant des angles orientés de vecteurs dont les mesures sont respectivement égales, modulo π, à celles de $\widehat{(\overrightarrow{KB}, \overrightarrow{KP})}$ et $\widehat{(\overrightarrow{KP}, \overrightarrow{KM})}$, montrer que les points K, A, B, M sont cocycliques.
Faire une figure soignée.

CERCLES AYANT UN POINT COMMUN

20. On donne quatre points A, B, C, D tels que trois quelconques d'entre eux ne soient pas alignés. On désigne par Γ_A le cercle passant par les milieux des bipoints (A, B), (A, C), (A, D) et l'on définit de même les cercles Γ_B, Γ_C, Γ_D. Démontrer que ces quatre cercles ont un point commun.

21. On considère quatre droites deux à deux sécantes, aucune ne passant par le point d'intersection de deux autres.
1° Combien de triangles ces droites déterminent-elles?
2° Démontrer que les cercles circonscrits à ces triangles ont un point commun.

22. On donne un triangle ABC et un point M. On considère les trois cercles MAB, MBC, MCA et leurs symétriques respectifs par rapport aux droites AB, BC et CA. Démontrer que ces trois derniers cercles passent par un même point M'.

23. Sur les côtés $[B, C]$, $[C, A]$, $[A, B]$ d'un triangle, on considère trois points P, Q, R.
Démontrer que les cercles AQR, BRP, CPQ passent par un même point I puis démontrer que A, B, C, I sont cocycliques si, et seulement si, les points P, Q et R sont alignés.

24. Soit ABC un triangle (de sens direct) ayant ses trois angles aigus.
1° Construire les cercles $\mathscr{C}_a$, $\mathscr{C}_b$ et $\mathscr{C}_c$ tels que :
- $\mathscr{C}_a \setminus \{C, B\}$ soit l'ensemble des points P tels que :
$$(\overrightarrow{PC}, \overrightarrow{PB}) = \frac{\pi}{3} \quad (\pi);$$
- $\mathscr{C}_b \setminus \{A, C\}$ soit l'ensemble des points Q tels que :
$$(\overrightarrow{QA}, \overrightarrow{QC}) = \frac{\pi}{3} \quad (\pi);$$
- $\mathscr{C}_c \setminus \{B, A\}$ soit l'ensemble des points R tels que :
$$(\overrightarrow{RB}, \overrightarrow{RA}) = \frac{\pi}{3} \quad (\pi).$$

(On pourra utiliser les triangles équilatéraux construits à l'extérieur du triangle ABC et dont un côté est $[C, B]$, $[A, C]$ ou $[B, A]$.)
Démontrer que $\mathscr{C}_a$, $\mathscr{C}_b$ et $\mathscr{C}_c$ ont un point commun, noté I.
2° Soit P un point de $\mathscr{C}_a$ extérieur au triangle ABC. La droite (PC) recoupe $\mathscr{C}_b$ en un point Q. Soit R le point d'intersection des droites (QA) et (PB). Montrer que R est un point de $\mathscr{C}_c$. Quelle est la nature du triangle PQR?
3° A chaque triangle PQR on associe :
$$l(PQR) = IP + IQ + IR.$$
a) Déterminer P pour que IP soit maximal. Soit P_0 ce point.
Construire le triangle $P_0Q_0R_0$ obtenu à partir de P_0.
b) Montrer que $l(PQR)$ est maximal pour $P_0Q_0R_0$.

DROITES PARALLÈLES OU CONCOURANTES

25. Deux cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ se coupent en A et B. Une droite passant par A recoupe $\mathscr{C}$ en C et $\mathscr{C}'$ en D. Une droite passant par B coupe $\mathscr{C}$ en E et $\mathscr{C}'$ en F. Démontrer que les droites (CE) et (DF) sont parallèles.

26. On considère deux cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sécants en A et B et un point M du cercle $\mathscr{C}$ distinct de A et B. Les droites (MA) et (MB) recoupent respectivement le cercle $\mathscr{C}'$ en M' et N'.
Démontrer que la droite $(M'N')$ est parallèle à la tangente en M au cercle $\mathscr{C}$.

27. On considère un triangle ABC et un point M distinct des points A, B, C. Soit A', B', C' trois points tels que : $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AA'})\quad(2\pi)$

$$(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BB'})\quad(2\pi)$$

$$(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CA}) = (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CC'})\quad(2\pi).$$

1° Démontrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont parallèles ou concourantes.
Démontrer qu'elles sont parallèles si et seulement si M appartient au cercle ABC.
2° Lorsque les droites (AA'), (BB'), (CC') sont concourantes, leur point commun M' est appelé *point inverse* de M par rapport au triangle ABC.
Quel est le point inverse de l'orthocentre du triangle?

LIEUX GÉOMÉTRIQUES

28. Un cercle fixe $\mathscr{C}$ passe par deux points fixes A et B non diamétralement opposés. Un point M décrit la droite (AB). Les deux cercles passant par M et tangents à $\mathscr{C}$ en A et B se recoupent en P.
Déterminer le lieu géométrique du point P.

29. On considère un triangle ABC et un point M, fixé, de la droite (BC). Une droite variable contenant M coupe la droite (AC) en N et la droite (AB) en P.
Quel est l'ensemble décrit par le point S, deuxième point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles CMN et BMP?

30. On donne un triangle ABC et trois points E, F, G tels que :

$$(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AE}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BF}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CG}) = \alpha\quad(2\pi).$$

(BF) et (CG) se coupent en A', (AE) et (CG) en B' et (AE) et (BF) en C'.
1° Quels sont les lieux géométriques des points A', B', C' lorsque le réel α décrit $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$?
2° Montrer que les trois lieux du *1°* passent par l'orthocentre H du triangle ABC. Que représente le point H pour le triangle $A'B'C'$?

31. Un point M décrit un demi-cercle de diamètre $[A, B]$. Quel est le lieu géométrique du projeté orthogonal de A sur la bissectrice de l'angle $\widehat{AMB}$?
Même question lorsque le point M décrit un cercle de diamètre $[A, B]$.

32. On donne un triangle ABC et le point F diamétralement opposé à A sur le cercle ABC. Pour un point M du plan la droite passant par M et orthogonale à (MF) coupe (AB) en P et (AC) en Q.
1° Démontrer que :

$$(\overrightarrow{FP}, \overrightarrow{FQ}) + (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})\quad(\pi).$$

2° Déterminer l'ensemble des points M pour lesquels les points F, P, Q sont alignés.
3° Déterminer l'ensemble des points M tels que :

$$(\overrightarrow{FP}, \overrightarrow{FQ}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})\quad(\pi).$$

4° Soit un réel α tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \neq \alpha\quad(\pi)$. Déterminer l'ensemble des points M tels que $(\overrightarrow{FP}, \overrightarrow{FQ}) = \alpha\quad(\pi)$.

33. Soit deux points distincts O et A et un réel α. A tout point M, on associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OA}$.
Quel est l'ensemble des points M tels que :

$$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \alpha\quad(\pi)\ ?$$

34. Un point A décrit un cercle passant par deux points fixes B et C. Quel est le lieu géométrique de l'orthocentre du triangle ABC?

35. Soit $\mathscr{A}$ un arc de cercle d'extrémités A et B.
A tout point C de $\mathscr{A}$, distinct de A et B, on associe le point I centre du cercle inscrit dans le triangle ABC (I est le point commun aux trois bissectrices intérieures des angles du triangle).
1° Démontrer que : $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) + \frac{\pi}{2}\quad(\pi)$.

2° En déduire le lieu de I lorsque C décrit $\mathscr{A}$.

NOMBRES COMPLEXES

36. L'équation $z^2 - 2pz + 1 = 0$ a deux racines z' et z'' appartenant à l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.
Dans un plan $\mathscr{P}$, muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on considère les points A, B, P, M' et M'' d'affixes respectives $1, -1, p, z'$ et z''.
On suppose que p est un nombre complexe non réel.
1° Démontrer, sans calculer z' et z'', que P est le milieu de $[M', M'']$; que $OM' \times OM'' = OA^2 = OB^2$ et que la droite $(x'x)$ de repère $(O, \vec{e}_1)$ est bissectrice de l'angle $\widehat{M'OM''}$.
2° Démontrer que les points A, B, M', M'' sont cocycliques.
3° Calculer $(z' - p)^2$ et $(z'' - p)^2$ en fonction de p. En déduire que $PA \times PB = PM'^2 = PM''^2$ et que la droite $(M'M'')$ est bissectrice de l'angle $\widehat{APB}$.
4° Le point P étant donné, construire les points M' et M''.

37. Le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est identifié à l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes. M_1 et M_2 sont les images des racines complexes z_1 et z_2 de l'équation (E) définie par :

$$z^2 - 2(a + ib)z + a + b + \frac{1}{8} = 0.$$

où a et b sont des paramètres réels et où i est le nombre complexe dont l'image a pour coordonnées $(0, +1)$.
I – *1°* Quelle est la somme des arguments de z_1 et z_2?
2° Quelles sont les bissectrices de l'angle $\widehat{M_1OM_2}$?
II – *1°* Quelle est l'affixe du milieu de $[M_1, M_2]$?
Comment doit-on choisir a et b pour que l'équation (E) ait ses deux racines égales et réelles? On vérifiera qu'il existe deux couples (a, b) répondant à cette question et l'on notera P et Q les images des racines doubles correspondantes.
2° Comment doit-on choisir a et b pour que l'équation (E) ait ses deux racines égales et imaginaires pures? On vérifiera qu'il existe aussi deux couples (a, b) répondant à la question et l'on notera R et S les images des racines doubles correspondantes.
3° Vérifier que l'un quelconque des points P, Q, R, et S est l'orthocentre du triangle ayant pour sommets les trois autres points.

4° Former les équations des deux cercles admettant pour diamètres $[P, Q]$ et $[R, S]$. Vérifier que ces deux cercles sont orthogonaux.

III — Étant donnés deux nombres réels x et y, on appelle T le point d'affixe $t = x + iy$.

1° Calculer, en fonction de a, b, x et y, la partie réelle u et la partie imaginaire v du nombre complexe :

$$\omega = (t - z_1)(t - z_2),$$

où z_1 et z_2 sont toujours les racines de l'équation (E). Vérifier que u et v peuvent être mises sous la forme :

$$u = Aa + Bb + C \quad \text{et} \quad A'a + B'b + C',$$

où A, B, C, A', B', et C' sont des fonctions de x et y.

2° A chaque nombre complexe $t = x + iy$, on associe l'ensemble E_t constitué dans le plan par les points d'affixe ω obtenus lorsque a et b décrivent l'ensemble des réels. Préciser, suivant la valeur t, la nature de E_t en distinguant les cas où les vecteurs $\vec{\alpha}$ [de composantes scalaires (A, A')] et $\vec{\beta}$ [de composantes scalaires (B, B')] sont colinéaires ou non. Dans le cas de la colinéarité, démontrer que E_t contient O si et seulement si, T est l'un des points O, T_1 et T_2, où T_1 et T_2 désignent les points communs aux cercles de diamètres $[P, Q]$ et $[R, S]$.

3° Déduire des résultats précédents que les bissectrices des angles $\widehat{M_1T_1M_2}$ et $\widehat{M_1T_2M_2}$ sont indépendantes de a et de b. Quelles sont ces bissectrices?

38. $\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes.
Le plan complexe (P) est rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (on prendra 3 cm pour unité de longueur).
On considère l'application f de $\mathbb{C}$ privé de $(-2 - i)$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $\quad f(z) = \dfrac{z + 1 - 2i}{z + 2 + i}$.

1° Représenter dans (P) le point A d'affixe $(-3 + i)$.
Calculer $f(-3 + i)$ et représenter son image A' dans (P).

2° Déterminer et représenter dans (P) l'ensemble E_1 des points M d'affixe z tels que $|f(z)| = 1$.

3° Déterminer et représenter dans (P) l'ensemble E_2 des points M d'affixe z tels qu'un argument de $f(z)$ soit $\dfrac{\pi}{2}$.

4° Déterminer $E_1 \cap E_2$ et contrôler ainsi le résultat de la première question.

39. On considère dans $\mathbb{C}$ les complexes z_1 et z_2 de modules 1 et d'arguments respectifs α et β.

1° Montrer que $\dfrac{(z_1 + z_2)^2}{z_1 z_2}$ est un réel positif ou nul.
Dans quel cas est-il nul?

2° Soit deux points A et B d'un plan complexe d'origine O d'affixes respectives a et b (on supposera O, A et B non alignés).
Calculer en fonction de a et b l'affixe z du point I barycentre de $(A, |b|)$ et $(B, |a|)$.

3° A l'aide du *1°* montrer que $\dfrac{z^2}{ab}$ est un réel strictement positif.
En déduire une relation entre $\arg z$, $\arg a$ et $\arg b$.
Quel rôle joue la droite (OI) pour l'angle $\widehat{AOB}$?

40. Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On désigne par A, B et M les points d'affixes respectives -1, -2 et z, où z représente un nombre complexe différent de -1 et -2.

Posons $Z = \dfrac{z + 2}{z + 1}$. $|Z|$ désigne le module de Z et $\arg Z$ désigne la mesure de l'argument de Z appartenant à $[-\pi, \pi[$.

1° Justifier que $|Z| = \dfrac{BM}{AM}$ et que $\arg Z$ est une mesure en radians de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}})$, en utilisant la définition et les propriétés du module et de l'argument d'un nombre complexe.

2° Utiliser le rappel ci-dessus pour déterminer géométriquement les ensembles des points M dont l'affixe z est respectivement telle que :

a) Z est réel;
b) Z est imaginaire pur;
c) Z est un réel strictement négatif;
d) $\arg Z = \dfrac{\pi}{2}$;
e) $|Z| = 1$;
f) $|Z| = 2$.

41. Soit f l'application de $\mathbb{C} \setminus \{-4i\}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$f(z) = \frac{z - 2i}{iz - 4}.$$

1° Déterminer et construire l'ensemble E_1 des points M d'affixe z tels que $f(z)$ soit réel.

2° Déterminer et construire l'ensemble E_2 des points M d'affixe z tels qu'un argument de $f(z)$ soit $\dfrac{\pi}{2}$.

3° Déterminer et construire l'ensemble E_3 des points M d'affixe z tels que le module de $f(z)$ soit 2.

42. Dans le plan complexe, on considère les points : A d'affixe $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$, B d'affixe $2i$, M d'affixe z, $z \neq \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$.

Soit $z' = \dfrac{z - 2i}{2z - 1 - i}$.

1° Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que z' soit réel.

2° Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que z' soit imaginaire pur.

3° Déterminer et construire l'ensemble des points M tels qu'un argument de z' soit égal à $\dfrac{3\pi}{2}$.

43. On considère dans le plan complexe les points O d'affixe zéro, A d'affixe 1, B d'affixe -1. A tout point M du plan d'affixe $z \neq 1$, on associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{z - 1}{1 - \bar{z}}$.

1° *a)* Établir que $|z'| = 1$.

b) Établir que $\dfrac{z' - 1}{z - 1}$ est réel.

c) Établir que $\dfrac{z' + 1}{z - 1}$ est imaginaire pur.

2° *a)* Interpréter géométriquement, à l'aide des points M, M', O, A, B les trois propriétés établies dans la question précédente.

b) Donner une construction géométrique de M' connaissant M.

CHAPITRE

8

PRODUIT VECTORIEL

En 1839, dans un ouvrage sur la théorie des marées, Hermann Günther Grassmann développe la notion de **produit géométrique** de deux vecteurs qu'il présente comme une aire *dirigée*, constituée par l'aire du parallélogramme construit sur les deux vecteurs et par un vecteur perpendiculaire au plan de ce parallélogramme. Il établit la propriété d'antisymétrie de ce produit ainsi que sa distributivité par rapport à l'addition. Représenté aujourd'hui par un vecteur et non par une aire dirigée, le produit vectoriel est directement issu du produit géométrique de Grassmann.

I — ORIENTATION DE L'ESPACE

REPÈRES DIRECTS, INDIRECTS

Considérons, dans l'espace $\mathscr{E}$, un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les points I, J, K définis par $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$, $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$, $\overrightarrow{OK} = \vec{k}$, et les demi-droites Ox, Oy, Oz, d'origine O et contenant respectivement I, J, K.

Imaginons un observateur placé sur Ox, les pieds en O et regardant Oy et Oz. Deux situations peuvent se présenter :

- Oy est à la droite de l'observateur et Oz à sa gauche (figure 1);
- Oy est à la gauche de l'observateur et Oz à sa droite (figure 2).

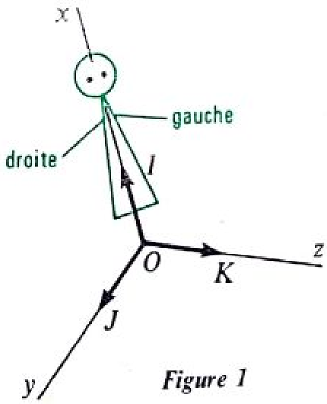


Figure 1

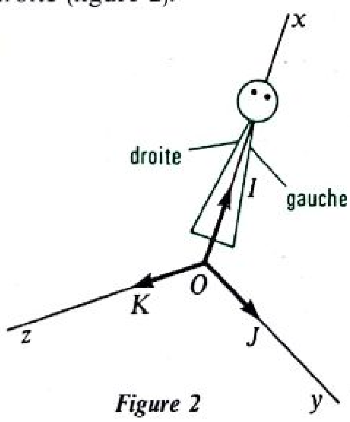


Figure 2

Ce constat expérimental permet de partager l'ensemble des repères de l'espace en deux *classes*. **Orienter l'espace,** c'est choisir une de ces deux classes et convenir que les repères de cette classe sont **directs** et que ceux de l'autre sont **indirects.**

Habituellement, et il en sera ainsi dans tout cet ouvrage, les repères directs sont ceux pour lesquels l'observateur placé sur Ox se trouve dans la situation de la figure 1 : Oy à sa droite et Oz à sa gauche.

Soulignons que cette manière d'orienter l'espace fait appel à notre capacité de distinguer le *côté gauche* du *côté droit*.

Propriétés

Nous allons maintenant admettre des propriétés qu'il est facile de vérifier expérimentalement.

1. Deux repères $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $(O', \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ qui ne diffèrent que par leur origine ont la même orientation (figure 3).

Cette propriété permet d'étendre la notion d'orientation aux bases de l'espace vectoriel $\mathscr{W}$: une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est dite **directe** (resp. **indirecte**) lorsque, pour tout point O de l'espace, le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est direct (resp. indirect).

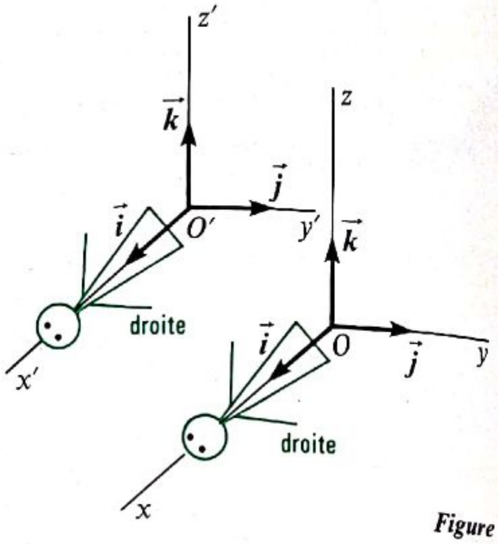


Figure 3

2. Pour tout repère $\mathscr{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

• **les repères $(O, \vec{j}, \vec{k}, \vec{i})$ et $(O, \vec{k}, \vec{i}, \vec{j})$ ont la même orientation que $\mathscr{R}$;**

• **les repères $(O, \vec{j}, \vec{i}, \vec{k})$, $(O, \vec{i}, \vec{k}, \vec{j})$ et $(O, \vec{k}, \vec{j}, \vec{i})$ n'ont pas la même orientation que $\mathscr{R}$.**

La figure 4 illustre ces résultats pour un repère $\mathscr{R}$ direct.

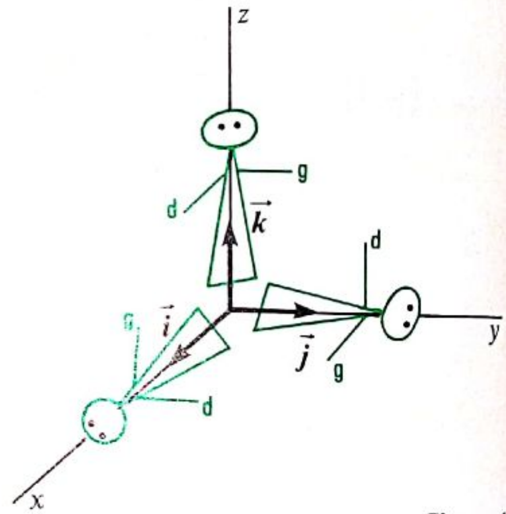


Figure 4

On retiendra ces propriétés en remarquant qu'une *permutation circulaire* des vecteurs d'un repère :

$$\vec{i} \to \vec{j}, \qquad \vec{j} \to \vec{k}, \qquad \vec{k} \to \vec{i},$$

conserve l'orientation, alors que l'échange de deux vecteurs :

$$\vec{i} \to \vec{j}, \qquad \vec{j} \to \vec{i}, \qquad \vec{k} \to \vec{k},$$

change l'orientation.

3. Soit A, B, C, D quatre points non coplanaires et soit P un point n'appartenant pas au plan $\mathscr{P}$ passant par A, C, D (figure 5).

• Si B et P sont situés d'un même côté de $\mathscr{P}$, les repères $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ et $(A, \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ ont la même orientation.

• Si B et P sont situés de part et d'autre de $\mathscr{P}$, les repères $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ et $(A, \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ n'ont pas la même orientation.

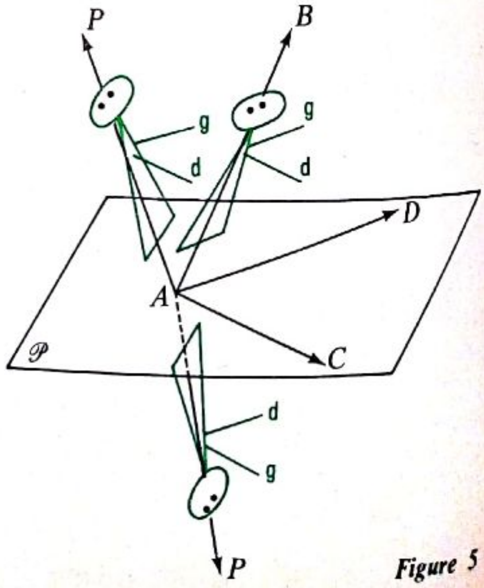


Figure 5

ORIENTATION D'UN PLAN DANS L'ESPACE

Considérons, dans l'espace $\mathscr{E}$, un plan $\mathscr{P}$ et une demi-droite Oz, ayant pour origine un point O de $\mathscr{P}$, et orthogonale à $\mathscr{P}$ (figure 6).

Un observateur placé sur Oz, les pieds en O, peut orienter le plan $\mathscr{P}$ en choisissant comme sens direct sur les cercles de $\mathscr{C}$, le sens contraire des aiguilles d'une montre.

Dans l'espace $\mathscr{E}$ toute demi-droite orthogonale à un plan $\mathscr{P}$ et dont l'origine est un point de $\mathscr{P}$ définit une orientation du plan $\mathscr{P}$.

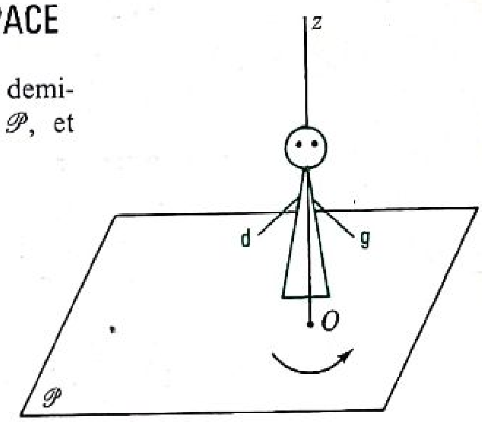


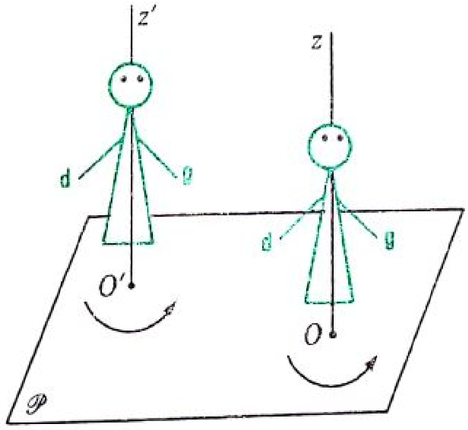
Figure 6

Propriétés

1. Soit Oz et $O'z'$ deux demi-droites orthogonales à $\mathscr{P}$ et dont les origines O et O' sont deux points de $\mathscr{P}$. On constate expérimentalement, et nous admettrons, que :

- Si Oz et $O'z'$ sont d'un même côté de $\mathscr{P}$, c'est-à-dire parallèles et de même sens, elles définissent dans $\mathscr{P}$ la même orientation (figure 7).
- Si Oz et $O'z'$ sont de part et d'autre de $\mathscr{P}$, elles définissent dans $\mathscr{P}$ des orientations différentes (figure 8).

Figure 7



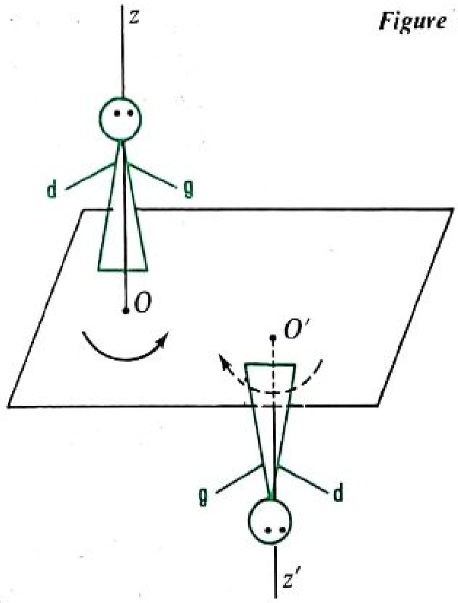


Figure 8

2. Soit $\vec{u}$ un vecteur normal du plan $\mathscr{P}$. Soit O et O' deux points de $\mathscr{P}$ et soit A et A' les points définis par $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{O'A'} = \vec{u}$ (figure 9).

Les demi-droites Oz, d'origine O et contenant A et $O'z'$, d'origine O' et contenant A', sont orthogonales à $\mathscr{P}$ et situées d'un même côté de $\mathscr{P}$.

Elles définissent donc, dans $\mathscr{P}$, la même orientation. Cette orientation ne dépend que du vecteur $\vec{u}$. Autrement dit :

Tout vecteur normal du plan $\mathscr{P}$ définit une orientation de $\mathscr{P}$.

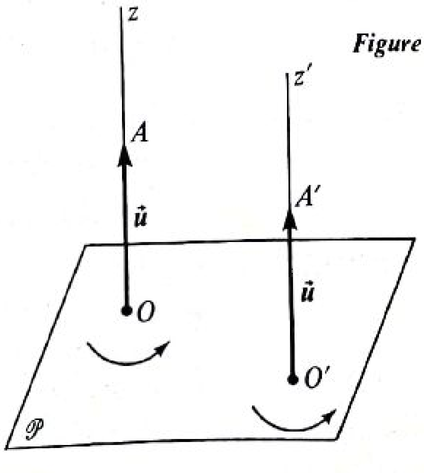


Figure 9

3° Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormal *direct* de l'espace. Orientons le plan $\mathscr{P}$, de repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ par le vecteur normal $\vec{k}$ (figure 10).
On constate expérimentalement qu'avec cette orientation, la mesure principale de l'angle orienté $\widehat{(\vec{i}, \vec{j})}$ est $+\dfrac{\pi}{2}$ rad. Autrement dit :

Étant donné un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, dans le plan $\mathscr{P}$ de repère $\mathscr{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$, orienté par le vecteur $\vec{k}$, le repère $\mathscr{R}$ est orthonormal direct.

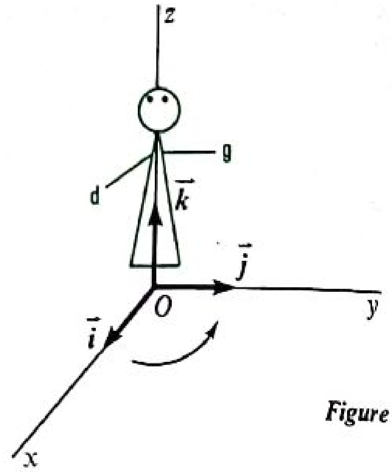


Figure 10

II — PRODUIT VECTORIEL

ÉTUDE PRÉLIMINAIRE

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs *non colinéaires* d'angle (non orienté) θ rad ($\theta \in]0, \pi[$).

Associons à un point A de l'espace les points B et C tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$, et le parallélogramme $ABEC$ dont deux côtés consécutifs sont $[A, B]$ et $[A, C]$ (figure 11).

Comme $\widehat{BAC} = \theta$ rad, l'aire de ce parallélogramme est mesurée par le réel strictement positif :

$$a = AB \times AC \times \sin\theta.$$

Sur la droite $\mathscr{D}$ passant par A et orthogonale au plan (ABC), il existe deux points dont la distance à A est a.

Pour *un seul* de ces points, P, la base $(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est directe : un observateur placé sur la demi-droite d'origine A contenant P, les pieds en A et regardant les points B et C, voit B à sa droite et C à sa gauche.

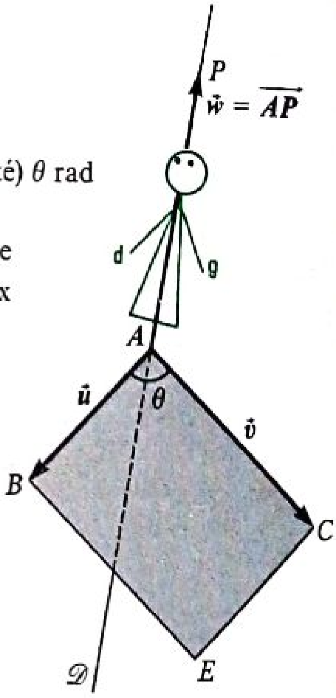


Figure 11

Le vecteur $\vec{w} = \overrightarrow{AP}$ ne dépend que des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et non du choix du point A utilisé pour construire P : sa *direction*, orthogonale à celle de $\vec{u}$ et à celle de $\vec{v}$, est indépendante de A, et il en est de même de son *sens*, tel que la base $(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})$ soit directe, et de sa *norme* égale au produit $\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin\theta$.

DÉFINITION 1	**On appelle produit vectoriel d'un vecteur $\vec{u}$ par un vecteur $\vec{v}$, le vecteur $\vec{w}$ ainsi défini :** • **Lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, $\vec{w} = \vec{0}$.** • **Lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires, considérons trois points A, B, C, tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$. Sur la droite passant par A et orthogonale au plan (ABC) il existe un point P, et un seul, tel que $AP = AB \times AC \times \sin\widehat{BAC}$ et tel que la base $(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ soit directe. Le vecteur $\vec{w}$ est alors égal à $\overrightarrow{AP}$.**

Le produit vectoriel de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ est noté, soit $\vec{u} \wedge \vec{v}$, soit $\vec{u} \times \vec{v}$.

Cette définition et l'étude qui l'a précédée permettent d'énoncer trois propriétés du produit vectoriel :

PROPRIÉTÉS 1 — **Le produit vectoriel de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ est un vecteur orthogonal à chacun des deux vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$.**

PROPRIÉTÉS 2 — **Pour tout couple $(\vec{u}, \vec{v})$ de vecteurs non nuls, d'angle θ rad :**

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin \theta.$$

PROPRIÉTÉS 3 — **Étant donnés deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et leur produit vectoriel $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$, le triplet $(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})$ est une base directe de l'espace vectoriel $\mathscr{W}$.**

ANNULATION DU PRODUIT VECTORIEL

Le produit vectoriel de deux vecteurs colinéaires est nul par définition.

D'autre part, étant donnés deux vecteurs *non colinéaires* $\vec{u}$, $\vec{v}$ d'angle θ rad ($\theta \in]0, \pi[$), les réels $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$ et $\sin \theta$ sont strictement positifs. Il en est de même de la norme du produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$, égale à $\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin \theta$. Le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ n'est donc pas nul.

PROPRIÉTÉ 4 — **Le produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est nul si, et seulement si, les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ sont colinéaires.**

En particulier :

- Le vecteur nul et tout vecteur $\vec{u}$ sont colinéaires; donc : $\vec{0} \wedge \vec{u} = \vec{u} \wedge \vec{0} = \vec{0}$.
- Tout vecteur $\vec{u}$ est colinéaire à lui-même; donc : $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$.

ANTISYMÉTRIE DU PRODUIT VECTORIEL

Considérons deux vecteurs *non colinéaires* $\vec{u}$, $\vec{v}$ et trois points A, B, C tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$. Les points P et P', définis par :

$$\overrightarrow{AP} = \vec{u} \wedge \vec{v} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AP'} = \vec{v} \wedge \vec{u},$$

appartiennent à la droite $\mathscr{D}$ passant par A et orthogonale au plan (ABC) (figure 12).

De plus : $AP = AP' = AB \times AC \times \sin \widehat{BAC}$.

Enfin, les bases $(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et $(\overrightarrow{AP'}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$ sont directes.

Les points P et P' sont distincts, sinon les deux bases $(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et $(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$ seraient directes, ce qui est impossible puisque la seconde qui s'obtient par échange de deux vecteurs de la première n'a pas la même orientation que la première. Les points P et P' sont donc symétriques par rapport à A.

D'où $\overrightarrow{AP'} = -\overrightarrow{AP}$, soit $\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}$.

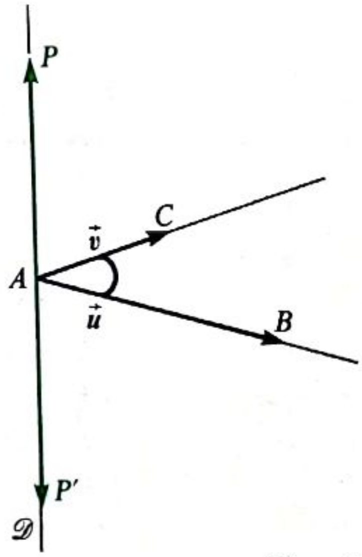


Figure 12

Cette égalité, vérifiée par deux vecteurs non colinéaires, l'est aussi par deux vecteurs colinéaires, puisque dans ce cas, les deux produits vectoriels $\vec{u} \wedge \vec{v}$ et $\vec{v} \wedge \vec{u}$ sont nuls.

PROPRIÉTÉ 5 | **Pour tout couple $(\vec{u}, \vec{v})$ de vecteurs, $\vec{v} \wedge \vec{u} = -(\vec{u} \wedge \vec{v})$.**

On exprime cette propriété en disant que le produit vectoriel est **antisymétrique.**

APPLICATION AUX BASES ORTHONORMALES DIRECTES

On considère une base *orthonormale directe* $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace vectoriel $\mathscr{W}$. Soit O un point de l'espace et I, J, K les points définis par $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$, $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$, $\overrightarrow{OK} = \vec{k}$ (figure 13).

Le point P tel que $\overrightarrow{OP} = \vec{i} \wedge \vec{j}$ est ainsi déterminé :

- P appartient à la droite passant par O et orthogonale au plan (OIJ), c'est-à-dire à la droite (OK);
- $OP = OI \times OJ \times \sin \widehat{IOJ} = 1$;
- La base $(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ est directe.

Il en résulte que $P = K$.
D'où $\vec{i} \wedge \vec{j} = \overrightarrow{OK}$, soit $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$, et, d'après l'*antisymétrie* du produit vectoriel, $\vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k}$.
On démontre de même que :

$$\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i} \quad \text{et} \quad \vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i}$$

et que : $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$ et $\vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}$.

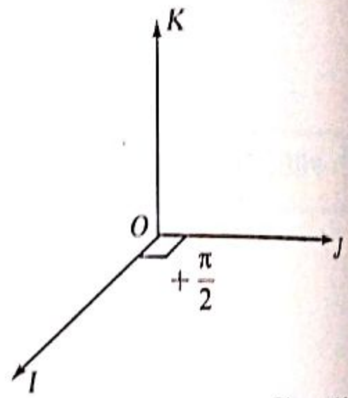


Figure 13

Par suite :

Pour toute base orthonormale directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace vectoriel $\mathscr{W}$:

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j},$$
$$\vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k}, \quad \vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i}, \quad \vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}.$$

Exercices d'application

1. On considère, dans l'espace $\mathscr{E}$, un triangle ABC tel que :

$$AB = 2, \qquad AC = 3, \qquad \widehat{BAC} = \frac{\pi}{4} \text{ rad.}$$

Déterminer le point P tel que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AP}$.

2. Même question pour un triangle équilatéral ABC tel que $AB = a$.
Pour un triangle ABC, rectangle en A, tel que $AB = 3$ et $AC = 4$.
Pour un triangle ABC tel que $AB = 2$, $AC = 3$, $BC = \sqrt{7}$.

3. Soit $\mathscr{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormale de l'espace vectoriel $\mathscr{W}$. Lorsque $\mathscr{B}$ est directe, on sait que $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$. Exprimer simplement le produit vectoriel $\vec{i} \wedge \vec{j}$, lorsque $\mathscr{B}$ est indirecte. En déduire un moyen de reconnaître qu'une base orthonormale est directe ou indirecte.

4. Soit $\vec{i}$, $\vec{j}$ deux vecteurs unitaires et orthogonaux. On pose $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$.
Démontrer que le triplet $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormale directe de l'espace vectoriel $\mathscr{W}$.

5. Soit, dans l'espace $\mathscr{E}$, trois points A, B, C, non alignés. Déterminer l'ensemble des points M de l'espace, tels que :
a) $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM} = \vec{0}$; *b)* $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CM} = \vec{0}$.

6. Soit $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs non nuls d'angle θ rad. Démontrer que :

$$(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 + \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \times \|\vec{v}\|^2.$$

7. On considère, dans l'espace $\mathscr{E}$, un triangle ABC, rectangle en A. Démontrer que :

$$(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \wedge \overrightarrow{AC} = -AC^2\overrightarrow{AB}.$$

III — PROPRIÉTÉS DE LINÉARITÉ DU PRODUIT VECTORIEL

Activité **Une autre construction de $\vec{u} \wedge \vec{v}$**

Considérons deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ non colinéaires, d'angle θ rad, trois points A, B, C tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$, et le point P tel que $\overrightarrow{AP} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ (figure 14). Le plan $\mathscr{Q}$ passant par A et orthogonal à la droite (AB) contient P.

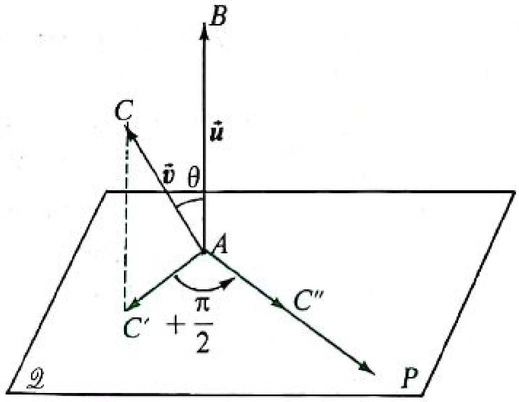


Figure 14

1° Soit C' le projeté orthogonal de C sur $\mathscr{Q}$.
Démontrer que $AC' = AC \times \sin\theta$.
(On distinguera trois cas : $\theta < \frac{\pi}{2}, \theta = \frac{\pi}{2}, \theta > \frac{\pi}{2}$.)

2° Démontrer que l'angle $\widehat{C'AP}$ est droit. Que peut-on dire de la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{AP})$? En déduire que dans le plan $\mathscr{Q}$, orienté par $\overrightarrow{AB}$, la mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{AP}})$ est $+\frac{\pi}{2}$ rad.

3° Dans le plan $\mathscr{Q}$, orienté par $\overrightarrow{AB}$, soit C'' l'image de C' par la rotation de centre A et d'angle $+\frac{\pi}{2}$. Démontrer que $\overrightarrow{AP} = \|\overrightarrow{AB}\| \overrightarrow{AC''}$.

Cette étude permet de donner une autre construction du vecteur $\overrightarrow{AP} = \vec{u} \wedge \vec{v}$, à partir de trois points A, B, C tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ (figure 14) :

- soit C' le projeté orthogonal de C sur le plan $\mathscr{Q}$ passant par A et orthogonal à (AB);
- dans le plan $\mathscr{Q}$, orienté par $\overrightarrow{AB}$, soit C'' l'image de C' par la rotation d'angle $+\frac{\pi}{2}$ rad et de centre A;
- le point P est alors défini par : $\overrightarrow{AP} = \|\vec{u}\| \overrightarrow{AC''}$.

UNE EXPRESSION DE $\vec{u} \wedge \vec{v}$

Désignons par π la projection vectorielle associée à la projection orthogonale sur le plan $\mathscr{Q}$. On a (figure 14) :

$$\overrightarrow{AC'} = \pi(\overrightarrow{AC}) = \pi(\vec{v}).$$

Dans le plan $\mathscr{Q}$ orienté par le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, désignons par r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ rad, et par ρ sa rotation vectorielle associée.

On a $r(A) = A$ et $r(C') = C''$, d'où : $\overrightarrow{AC''} = \rho(\overrightarrow{AC'}) = \rho[\pi(\vec{v})]$.

L'égalité $\overrightarrow{AP} = \|\vec{u}\|\, \overrightarrow{AC''}$ de l'activité précédente s'écrit donc $\overrightarrow{AP} = \|\vec{u}\|\, \rho[\pi(\vec{v})]$, soit :

$$\boxed{\vec{u} \wedge \vec{v} = \|\vec{u}\|\, \rho[\pi(\vec{v})]}$$

Ce résultat établi pour deux vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ non colinéaires reste valable pour un vecteur $\vec{u}$ non nul et un vecteur $\vec{v}$ colinéaire à $\vec{u}$. En effet, dans ce cas, on a : $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ et $\pi(\vec{v}) = \vec{0}$; d'où $\rho[\pi(\vec{v})] = \vec{0}$ et $\|\vec{u}\|\, \rho[\pi(\vec{v})] = \vec{0}$.

Conséquences

1. Formule $\vec{u} \wedge (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = (\vec{u} \wedge \vec{v}_1) + (\vec{u} \wedge \vec{v}_2)$

Cette formule est évidente lorsque le vecteur $\vec{u}$ est nul. Lorsque $\vec{u}$ n'est pas nul, elle découle de la linéarité de la projection vectorielle π et de la rotation vectorielle ρ. Posons $\vec{v}_1' = \pi(\vec{v}_1)$ et $\vec{v}_2' = \pi(\vec{v}_2)$.

On a, d'une part : $\quad \vec{u} \wedge \vec{v}_1 = \|\vec{u}\|\, \rho(\vec{v}_1')$ et $\vec{u} \wedge \vec{v}_2 = \|\vec{u}\|\, \rho(\vec{v}_2')$,

et d'autre part :

$$\begin{aligned} \vec{u} \wedge (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) &= \|\vec{u}\|\, \rho[\pi(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)] = \|\vec{u}\|\, \rho[\pi(\vec{v}_1) + \pi(\vec{v}_2)] \\ &= \|\vec{u}\|\, \rho(\vec{v}_1' + \vec{v}_2') = \|\vec{u}\|\, [\rho(\vec{v}_1') + \rho(\vec{v}_2')] \\ &= \|\vec{u}\|\, \rho(\vec{v}_1') + \|\vec{u}\|\, \rho(\vec{v}_2'). \end{aligned}$$

D'où : $$\vec{u} \wedge (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = (\vec{u} \wedge \vec{v}_1) + (\vec{u} \wedge \vec{v}_2).$$

2. Formule $\vec{u} \wedge b\vec{v} = b(\vec{u} \wedge \vec{v})$

Comme la précédente, cette formule est évidente lorsque $\vec{u} = \vec{0}$, et elle découle de la linéarité des applications π et ρ, lorsque $\vec{u}$ n'est pas nul :

$$\begin{aligned} \vec{u} \wedge b\vec{v} &= \|\vec{u}\|\, \rho[\pi(b\vec{v})] = \|\vec{u}\|\, \rho[b\pi(\vec{v})] \\ &= \|\vec{u}\|\, b\rho[\pi(\vec{v})] = b(\|\vec{u}\|\, \rho[\pi(\vec{v})]). \end{aligned}$$

D'où : $$\vec{u} \wedge b\vec{v} = b(\vec{u} \wedge \vec{v}).$$

3. Formules $(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) \wedge \vec{v} = (\vec{u}_1 \wedge \vec{v}) + (\vec{u}_2 \wedge \vec{v})$ et $a\vec{u} \wedge \vec{v} = a(\vec{u} \wedge \vec{v})$

Ces formules découlent des deux précédentes et de l'antisymétrie du produit vectoriel. Démontrons la première :

$$\begin{aligned} (\vec{u}_1 + \vec{u}_2) \wedge \vec{v} &= -[\vec{v} \wedge (\vec{u}_1 + \vec{u}_2)] = -[(\vec{v} \wedge \vec{u}_1) + (\vec{v} \wedge \vec{u}_2)] \\ &= [-(\vec{v} \wedge \vec{u}_1)] + [-(\vec{v} \wedge \vec{u}_2)] = (\vec{u}_1 \wedge \vec{v}) + (\vec{u}_2 \wedge \vec{v}). \end{aligned}$$

En résumé, quels que soient les réels a, b et les vecteurs $\vec{u}, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{v}, \vec{v}_1, \vec{v}_2$:

$$\boxed{\begin{array}{lll} (\vec{u}_1 + \vec{u}_2) \wedge \vec{v} &= (\vec{u}_1 \wedge \vec{v}) + (\vec{u}_2 \wedge \vec{v}) & (1) \\ (a\vec{u}) \wedge \vec{v} &= a(\vec{u} \wedge \vec{v}) & (2) \\ \vec{u} \wedge (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) &= (\vec{u} \wedge \vec{v}_1) + (\vec{u} \wedge \vec{v}_2) & (3) \\ \vec{u} \wedge (b\vec{v}) &= b(\vec{u} \wedge \vec{v}) & (4) \end{array}}$$

L'application $(\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \vec{u} \wedge \vec{v}$ possède donc *deux* propriétés de linéarité : par rapport au premier vecteur (égalités (1) et (2)) et par rapport au second vecteur (égalités (3) et (4)). On dit que le produit vectoriel est **bilinéaire.**

• Exercices d'application

8. Soit deux vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$. Démontrer que :
$$(-\vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (-\vec{v}) = -\vec{u} \wedge \vec{v}.$$

9. Soit trois vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{v}$. Démontrer que :
$$(\vec{u}_1 - \vec{u}_2) \wedge \vec{v} = (\vec{u}_1 \wedge \vec{v}) - (\vec{u}_2 \wedge \vec{v}).$$

10. Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs *non colinéaires* et soit $\vec{p}$ le produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$.
1° Exprimer, en fonction de $\vec{p}$, les produits vectoriels :

$$\vec{u} \wedge (\vec{u} + \vec{v}), \quad \vec{u} \wedge (\vec{u} - \vec{v}),$$
$$(\vec{u} + \vec{v}) \wedge (\vec{u} - \vec{v}), \qquad (2\vec{u} - 3\vec{v}) \wedge (-4\vec{u} + 5\vec{v}).$$

2° Soit a, b, a', b' des réels donnés. On pose :

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v} \quad \text{et} \quad \vec{w}' = a'\vec{u} + b'\vec{v}.$$

Exprimer, en fonction de a, b, a', b' et $\vec{p}$, le produit vectoriel $\vec{w} \wedge \vec{w}'$.
En déduire que $\vec{w}$ et $\vec{w}'$ sont colinéaires si, et seulement si, $ab' - ba' = 0$.

11. Soit $\vec{u}$ un vecteur donné, non nul, de l'espace vectoriel $\mathscr{W}$. On désigne par φ l'application de $\mathscr{W}$ dans $\mathscr{W}$ qui, à tout vecteur $\vec{v}$, associe le vecteur $\varphi(\vec{v}) = \vec{u} \wedge \vec{v}$.
1° Démontrer que l'application φ est linéaire.
2° Déterminer l'ensemble, $\mathscr{N}$, des vecteurs $\vec{v}$ de $\mathscr{W}$ tels que $\varphi(\vec{v}) = \vec{0}$.
3° Soit $\vec{v}_0$ un vecteur de $\mathscr{W}$. Déterminer l'ensemble des vecteurs $\vec{v}$ de $\mathscr{W}$ tels que :

$$\varphi(\vec{v}) = \varphi(\vec{v}_0).$$

12. On donne dans l'espace $\mathscr{E}$ deux points distincts A et B. Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que :
a) $(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}) \wedge \overrightarrow{MB} = \vec{0}$;
b) $(2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}) \wedge (\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}) = \vec{0}$.

13. On considère, dans l'espace $\mathscr{E}$, un triangle ABC. Démontrer que :

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA}.$$

En déduire les formules :

$$\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}}.$$

14. On donne dans l'espace $\mathscr{E}$ un triangle ABC. Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que :
a) $(\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}) \wedge (\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}) = \vec{0}$;
b) $(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 5\overrightarrow{MC}) \wedge (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) = \vec{0}$;
c) $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}) \wedge (\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = \vec{0}$.

15. On donne dans l'espace $\mathscr{E}$ trois points A, B, C non alignés.
1° Déterminer l'ensemble des points M de $\mathscr{E}$ tels que $\overrightarrow{AM} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = 0$.
2° Déterminer l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot (\overrightarrow{BM} \wedge \overrightarrow{CM}) = 0$.
3° Soit D un point de $\mathscr{E}$ non situé dans le plan ABC. Déterminer l'ensemble des points M de $\mathscr{E}$ tels que :

$$(\overrightarrow{MD} + 2\overrightarrow{MA}) \cdot [(\overrightarrow{MD} - 3\overrightarrow{MB}) \wedge (\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MC})] = 0.$$

IV – COORDONNÉES DU PRODUIT VECTORIEL

Activité

L'espace vectoriel $\mathscr{W}$ est muni d'une base orthonormale directe $\mathscr{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1° Exprimer, le plus simplement possible, les produits vectoriels :

$$\vec{i} \wedge \vec{i}; \quad \vec{j} \wedge \vec{j}; \quad \vec{k} \wedge \vec{k};$$
$$\vec{i} \wedge \vec{j}; \quad \vec{j} \wedge \vec{k}; \quad \vec{k} \wedge \vec{i};$$
$$\vec{j} \wedge \vec{i}; \quad \vec{k} \wedge \vec{j}; \quad \vec{i} \wedge \vec{k}.$$

2° Exprimer, en fonction des vecteurs $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, les produits vectoriels :

$$2\vec{i} \wedge 3\vec{j}; \quad (\vec{i} + \vec{j}) \wedge \vec{k}; \quad (2\vec{i} - 3\vec{j}) \wedge 3\vec{k};$$
$$(2\vec{i} - \vec{k}) \wedge (3\vec{j} + 4\vec{k});$$
$$(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) \wedge \vec{i}; \quad (2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}) \wedge (\vec{i} - 3\vec{j});$$
$$(2\vec{i} - 5\vec{j} - \vec{k}) \wedge (\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}).$$

3° Soit $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ deux vecteurs de coordonnées respectives (a, b, c) et (a', b', c') dans la base $\mathscr{B}$.
En utilisant la bilinéarité et l'antisymétrie du produit vectoriel, démontrer que :

$$\vec{u} \wedge \vec{u}' = (bc' - cb')\vec{i} + (ca' - ac')\vec{j} + (ab' - ba')\vec{k}.$$

L'égalité démontrée dans l'activité précédente montre que les coordonnées du produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{u}'$ sont :

$$X = bc' - cb', \qquad Y = ca' - ac', \qquad Z = ab' - ba'.$$

Chacune de ces coordonnées peut s'écrire sous la forme d'un déterminant :

$$X = \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix}, \qquad Y = \begin{vmatrix} c & c' \\ a & a' \end{vmatrix}, \qquad Z = \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}.$$

Pratiquement, on obtient ces déterminants à partir du tableau :

$$\begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \\ c & c' \end{pmatrix}$$

dont la première colonne est formée des coordonnées de $\vec{u}$ et la seconde de celles de $\vec{u}'$:

- le *premier* déterminant s'obtient en supprimant, dans ce tableau, la *première* ligne;
- le *deuxième* s'obtient en supprimant la *deuxième* ligne et en échangeant les deux lignes restantes;
- le *troisième* s'obtient en supprimant la *troisième* ligne.

Par exemple, étant donnés deux vecteurs $\vec{u}$, $\vec{u}'$, de coordonnées respectives $(1, -2, 0)$ et $(-1, 2, 3)$ dans une base orthonormale directe $\mathscr{B}$, les coordonnées X, Y, Z du produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$, s'obtiennent à partir du tableau $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$:

$$X = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -6, \qquad Y = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3, \qquad Z = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

AIRE D'UN PARALLÉLOGRAMME OU D'UN TRIANGLE

Considérons trois points A, B, C non alignés de l'espace $\mathscr{E}$ et le point E, quatrième sommet du parallélogramme dont deux côtés sont $[A, B]$ et $[A, C]$ (figure 15).

Désignons par $\mathscr{A}$ l'aire du parallélogramme $ABEC$ et par $\mathscr{A}'$ celle du triangle ABC; on a : $\mathscr{A}' = \frac{1}{2}\mathscr{A}$. De plus, d'après la définition du produit vectoriel de deux vecteurs, les réels positifs qui expriment la norme du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ et l'aire du parallélogramme $ABEC$ sont égaux.

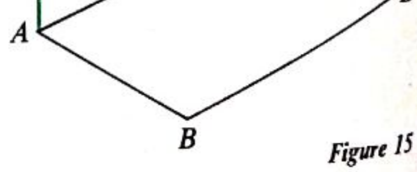


Figure 15

Par suite : $\mathscr{A} = \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$ et $\mathscr{A}' = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$.

A noter que ces formules restent valables lorsque les points A, B, C sont alignés puisque dans ce cas : $\mathscr{A} = \mathscr{A}' = 0$ et $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{0}$, d'où $\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = 0$.

Nous retiendrons :

$$\boxed{\textbf{aire } ABC = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|}$$

Exercice résolu

Dans l'espace $\mathscr{E}$, muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les points $A(3, -2, 5)$, $B(3, 2, 4)$, $C(1, 3, 4)$.

Démontrer que les points A, B, C ne sont pas alignés et calculer l'aire du triangle ABC.

Pour démontrer que A, B, C ne sont pas alignés, il suffit de démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires ou, ce qui est équivalent, que le produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ n'est pas nul.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont pour coordonnées : $\overrightarrow{AB}(0, 4, -1)$, $\overrightarrow{AC}(-2, 5, -1)$.

Les coordonnées (X, Y, Z) de $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ s'obtiennent à partir du tableau $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$:

$$X = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1, \quad Y = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2, \quad Z = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 8.$$

On en déduit : $\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \sqrt{1 + 4 + 64} \approx 8{,}306$. D'où :

$$\text{aire } ABC \approx 4{,}153.$$

Activité

1° Programmer le calcul des coordonnées (X, Y, Z) du produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{u}$, $\vec{u}'$ en fonction des coordonnées respectives (a, b, c) et (a', b', c') de ces deux vecteurs dans une base orthonormale directe.

Réponse (HP-11C)

[P/R]	met en mode programme
[PRGM]	efface la mémoire programme
[LBL] [A]	programme de saisie de a, b,c
[STO] 3 [R↓] [STO] 2 [R↓] [STO] 1	place c dans R_3, b dans R_2, a dans R_1
[R/S]	
[LBL] [B]	programme de saisie de a', b', c'
[STO] 6 [R↓] [STO] 5 [R↓] [STO] 4	place c' dans R_6, b' dans R_5, d' dans R_4
[R/S]	
[LBL] [C]	programme de calcul de X, Y, Z
[RCL] 2 [RCL] 6 [×] [RCL] 3 [RCL] 5 [×] [−]	calcule $X = bc' - cb'$
[R/S]	
[RCL] 3 [RCL] 4 [×] [RCL] 1 [RCL] 6 [×] [−]	calcule $Y = ca' - ac'$
[R/S]	
[RCL] 1 [RCL] 5 [×] [RCL] 2 [RCL] 4 [×] [−]	calcule $Z = ab' - ba'$
[RTN]	fin du programme
[P/R]	retour en mode calcul
a [ENTER] b [ENTER] c [A]	affiche a
a' [ENTER] b' [ENTER] c' [B]	affiche a'

C	affiche X
R/S	affiche Y
R/S	affiche Z

2° Tester le programme avec $\vec{u}(-2, 7, 3)$, $\vec{u}'(3, -5, 4)$.

3° a) Programmer le calcul de la norme du produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{u}'$.

b) Utiliser ce programme pour calculer l'aire du tétraèdre ABCD dont les sommets ont pour coordonnées :

$$A(-2, 1, 3), \quad B(5, -3, 1), \quad C(0, 3, -2), \quad D(2, -6, 1).$$

ÉQUATION D'UN PLAN

Considérons, dans l'espace $\mathscr{E}$, un plan $\mathscr{P}$ de repère $(M_0, \vec{u}, \vec{u}')$. Comme les vecteurs $\vec{u}, \vec{u}'$ ne sont pas colinéaires, leur produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{u}'$ n'est pas nul. De plus le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{u}'$ est normal à $\mathscr{P}$ (figure 16).

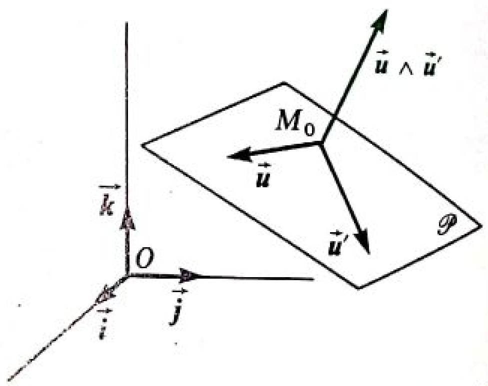


Figure 16

La connaissance des coordonnées (x_0, y_0, z_0) du point M_0 dans un repère orthonormal direct de l'espace et de celles des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{u}'$ permet alors d'obtenir une équation de $\mathscr{P}$.

Il suffit pour cela de calculer les coordonnées (a, b, c) de $\vec{u} \wedge \vec{u}'$, et d'exprimer analytiquement la condition d'appartenance d'un point $M(x, y, z)$ de l'espace au plan $\mathscr{P}$ déterminé par un de ses points M_0 et le vecteur normal $\vec{u} \wedge \vec{u}'$, soit :

$$\overrightarrow{M_0M} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{u}') = 0.$$

On obtient : $$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

Exemple

Supposons que les coordonnées du point M_0 et des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{u}'$ soient :

$$M_0(3, 4, -1), \quad \vec{u}(1, -1, 2), \quad \vec{u}'(2, 1, -3).$$

Les coordonnées (a, b, c) du vecteur $\vec{u} \wedge \vec{u}'$ s'obtiennent à partir du tableau $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$:

$$a = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 1, \quad b = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7, \quad c = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

Une équation de $\mathscr{P}$ est donc :

$$(x - 3) + 7(y - 4) + 3(z + 1) = 0,$$

soit $$x + 7y + 3z - 28 = 0.$$

Exercices d'application

Dans les exercices **16** à **21**, l'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormal direct :

$$\mathscr{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}).$$

16. On considère les trois points A, B, C de coordonnées :

$$A(-2, 1, 3), \quad B(1, -1, 0), \quad C(0, 0, -2)$$

1° Déterminer une équation du plan (ABC).
2° Calculer les coordonnées du point d'intersection de ce plan et de la droite passant par l'origine du repère et dont un vecteur directeur est $\vec{u}(1, -1, 1)$.

17. Soit A le point tel que $\overrightarrow{OA} = \vec{k}$.
Déterminer l'ensemble des points M de $\mathscr{E}$ tels que :

$$\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{MA} = \|\overrightarrow{MO} \wedge \overrightarrow{MA}\|^2.$$

18. Soit A, B, C les points tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{i}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{j}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{k}$.
1° Déterminer l'ensemble des points M tels que :

$$\|\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC}\|.$$

2° Déterminer l'ensemble des points M tels que :

$$\|\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MA}\|.$$

19. On donne les points $A(-1, 1, 2)$, $B(1, 2, 0)$, $C(0, 4, 6)$.
1° Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, AB et AC. En déduire $\cos \widehat{BAC}$.
Peut-on déduire de la valeur de $\cos \widehat{BAC}$ la mesure en degrés de l'angle $\widehat{BAC}$? Si oui quelle est cette mesure?
2° Calculer la norme du produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. En déduire $\sin \widehat{BAC}$. Peut-on déduire de la valeur de $\sin \widehat{BAC}$ la mesure en degrés de l'angle $\widehat{BAC}$?

20. On considère les vecteurs $\vec{i}'\left(\frac{8}{9}, -\frac{4}{9}, \frac{1}{9}\right)$ et $\vec{j}'\left(\frac{1}{9}, \frac{4}{9}, \frac{8}{9}\right)$.
Démontrer que $\vec{i}'$ et $\vec{j}'$ sont unitaires et orthogonaux et déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{k}'$ tel que $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ soit une base orthonormale directe (voir exercice **4**, page 204).

21. On considère deux plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sécants suivant une droite Δ, un vecteur $\vec{v}_1$ normal à $\mathscr{P}_1$, et un vecteur $\vec{v}_2$ normal à $\mathscr{P}_2$.
1° Soit A un point de Δ et soit B_1 et B_2 les points tels que $\overrightarrow{AB}_1 = \vec{v}_1$ et $\overrightarrow{AB}_2 = \vec{v}_2$.
Démontrer que la droite Δ est orthogonale au plan (AB_1B_2). En déduire que $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$ est un vecteur directeur de Δ.
2° On suppose que $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ ont pour équations respectives, dans un repère orthonormal direct de l'espace :

$$2x + 3y - z + 1 = 0 \quad \text{et} \quad 3x - y + 2z = 0.$$

Déterminer, par leurs coordonnées, un point et un vecteur directeur de Δ.
3° On suppose que $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont respectivement définis par les repères :
- $M_1(2, -1, 3)$, $\vec{u}_1(1, 1, 1)$, $\vec{u}'_1(-1, 2, 1)$;
- $M_2(3, 0, 2)$, $\vec{u}_2(1, -1, 0)$, $\vec{u}'_2(3, -2, 1)$.

Déterminer, par leurs coordonnées, un point et un vecteur directeur de Δ.

22. Soit, dans l'espace vectoriel $\mathscr{W}$, un vecteur unitaire $\vec{k}$. On désigne par φ l'application de $\mathscr{W}$ dans lui-même qui, à tout vecteur $\vec{u}$, associe le vecteur $\varphi(\vec{u})$ défini par $\varphi(\vec{u}) = \vec{k} \wedge (\vec{k} \wedge \vec{u})$.
1° Démontrer que l'application φ est linéaire. Calculer $\varphi(\vec{0})$ et $\varphi(\vec{k})$.
2° Démontrer que l'ensemble des vecteurs $\vec{u}$ tels que $\varphi(\vec{u}) = \vec{0}$ est l'ensemble des vecteurs colinéaires à $\vec{k}$.
3° Pour tout vecteur $\vec{u}$, démontrer que le vecteur $\varphi(\vec{u})$ est orthogonal à $\vec{k}$.
4° Pour tout vecteur $\vec{u}$, démontrer que :

$$\varphi(\vec{u}) = (\vec{k} \cdot \vec{u})\vec{k} - \vec{u}.$$

(On pourra rapporter $\mathscr{W}$ à une base orthonormale directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ dont le troisième vecteur est $\vec{k}$.)
Calculer l'image d'un vecteur $\vec{u}$ orthogonal à $\vec{k}$.

23. Soit $\vec{u}$ et $\vec{w}$ deux vecteurs quelconques de l'espace vectoriel $\mathscr{W}$.
1° Vérifier la relation :

$$(\vec{u} \wedge \vec{w}) \wedge \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{w} - \|\vec{w}\|^2\vec{u}. \qquad (1)$$

(On pourra montrer qu'on peut choisir une base orthonormale directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\mathscr{W}$ dans laquelle $\vec{u}$ a pour coordonnées $(a, 0, 0)$ et $\vec{w}(b, c, 0)$.)
2° On suppose que $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont deux vecteurs donnés, orthogonaux non nuls.
a) En utilisant la relation (1), démontrer qu'il existe un seul vecteur $\vec{u}_0$, orthogonal à $\vec{w}$ et tel que $\vec{u}_0 \wedge \vec{w} = \vec{v}$.
b) En déduire que l'ensemble des vecteurs $\vec{u}$, tels que $\vec{u} \wedge \vec{w} = \vec{v}$, est défini par $\vec{u} = \vec{u}_0 + t\vec{w}$, lorsque t décrit $\mathbb{R}$.

TRAVAUX PRATIQUES

SYSTÈMES DE TROIS ÉQUATIONS À TROIS INCONNUES

Soit le système (S) : $\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d''. \end{cases}$

L'espace vectoriel $\mathscr{W}$ étant muni d'une base orthonormale directe, considérons les vecteurs :

$$\vec{A}(a, a', a''), \quad \vec{B}(b, b', b''), \quad \vec{C}(c, c', c''), \quad \vec{D}(d, d', d'').$$

Le système (S) traduit l'égalité des coordonnées respectives des deux vecteurs $x\vec{A} + y\vec{B} + z\vec{C}$ et $\vec{D}$, et donc l'égalité de ces deux vecteurs. Le système (S) est donc équivalent à l'équation vectorielle (E) :

$$(E) \quad x\vec{A} + y\vec{B} + z\vec{C} = \vec{D}.$$

1° On pose $\Delta = \vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C})$ (Δ est le produit scalaire des vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B} \wedge \vec{C}$).

a) Démontrer que si Δ n'est pas nul, les vecteurs $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ ne sont pas coplanaires. Ces vecteurs forment alors une base de l'espace vectoriel $\mathscr{W}$.

Dans tout ce qui suit on suppose $\Delta \neq 0$.

b) Démontrer que l'équation (E), et donc le système (S), possède un unique triplet solution noté (x_0, y_0, z_0).

2° a) Calculer $(x_0\vec{A} + y_0\vec{B} + z_0\vec{C}) \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C})$. En déduire la valeur de x_0. (On remarquera que $\vec{B} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{C} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{0}$.)

b) Calculer $(x_0\vec{A} + y_0\vec{B} + z_0\vec{C}) \cdot (\vec{A} \wedge \vec{C})$. En déduire la valeur de y_0.

c) Calculer $(x_0\vec{A} + y_0\vec{B} + z_0\vec{C}) \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B})$. En déduire la valeur de z_0.

3° Programmer le calcul du réel $\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C})$ en fonction des coordonnées des trois vecteurs $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$.

Réponse (HP-11C)

P/R	met en mode programme
PRGM	efface la mémoire programme
LBL A	programme saisie des coordonnées de $\vec{A}$
STO 3 R↓ STO 2 R↓ STO 1	place a'' dans R_3, a' dans R_2, a dans R_1
R/S	
LBL B	programme saisie des coordonnées de $\vec{B}$
STO 6 R↓ STO 5 R↓ STO 4	place b'' dans R_6, b' dans R_5, b dans R_4
R/S	
LBL C	programme saisie des coordonnées de $\vec{C}$
STO 9 R↓ STO 8 R↓ STO 7	place c'' dans R_9, c' dans R_8, c dans R_7
R/S	
LBL D	programme de calcul de $\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C})$
RCL 5 RCL 9 × RCL 6 RCL 8 × −	calcule $b'c'' - c'b''$
RCL 1 ×	multiplie $b'c'' - c'b''$ par a
STO + 0	place $a(b'c'' - c'b'')$ dans R_0
RCL 6 RCL 7 × RCL 4 RCL 9 × −	calcule $cb'' - bc''$
RCL 2 ×	multiplie $cb'' - bc''$ par a'

STO + 0	ajoute $a'(cb'' - bc'')$ au contenu de R_0
RCL 4 RCL 8 × RCL 5 RCL 7 × −	calcule $bc' - cb'$
RCL 3 ×	multiplie $bc' - cb'$ par a''
STO + 0	ajoute $a''(bc' - cb')$ au contenu de R_0
RCL 0	rappelle le contenu de R_0 : $\vec{A}.(\vec{B} \wedge \vec{C})$
RTN	fin du programme
P/R	retour en mode calcul
a ENTER a' ENTER a'' A	affiche a
b ENTER b' ENTER b'' B	affiche b
c ENTER c' ENTER c'' C	affiche c
D	affiche le réel cherché $\vec{A}.(\vec{B} \wedge \vec{C})$

4° *Utiliser le programme précédent pour résoudre les systèmes :*

a) $\begin{cases} 3x - y + z = 10 \\ -x + 5y - z = -18; \\ x - y + 3z = 8 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 3x - y + 2z = 1 \\ -x + 2y + z = -1; \\ x + 3y + 2z = 2 \end{cases}$ *c)* $\begin{cases} 3x + y - 3z = 6 \\ 3x - 2y + 2z = 3. \\ 4x - 3y + z = 7 \end{cases}$

5° *On a démontré au 1° que si $\Delta = \vec{A}.(\vec{B} \wedge \vec{C})$ n'est pas nul, les vecteurs $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ ne sont pas coplanaires. Étudier la réciproque.*

Préciser, dans les cas suivants, si les vecteurs $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ sont coplanaires ou non :

a) $\vec{A}(1, 3, -5)$, $\vec{B}(2, 7, -2)$, $\vec{C}(5, 1, 0)$;

b) $\vec{A}(12, -24, 37)$, $\vec{B}(31, -15, 52)$, $\vec{C}(17, -29, -43)$;

c) $\vec{A}(5, -2, 7)$, $\vec{B}(12, -4, 9)$, $\vec{C}(9, -2, -3)$.

6° *Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ les vecteurs de coordonnées respectives* $(1, -1, 1)$, $(2, -1, 2)$ *et* $(3, -2, 2)$ *dans une base orthonormale directe $\mathscr{B}$ de l'espace vectoriel $\mathscr{W}$.*

a) Démontrer que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de $\mathscr{W}$.

b) Soit $\vec{a}$ le vecteur de coordonnées $(1, -1, 3)$ *dans la base $\mathscr{B}$. Calculer les coordonnées de $\vec{a}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.*

DISTANCE D'UN POINT À UNE DROITE

Soit, dans l'espace $\mathscr{E}$, une droite $\mathscr{D}$ de repère $(A, \vec{u})$ et un point M_0 de projeté orthogonal H sur $\mathscr{D}$ (figure 17).

1° *Démontrer que :*

a) $\overrightarrow{M_0A} \wedge \vec{u} = \overrightarrow{M_0H} \wedge \vec{u}$;

b) $\|\overrightarrow{M_0H} \wedge \vec{u}\| = M_0H \times \|\vec{u}\|$.

2° *En déduire que la distance d du point M_0 à la droite $\mathscr{D}$ est donnée par la formule :*

$$d = \frac{\|\overrightarrow{M_0A} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}.$$

3° *On suppose que l'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère orthonormal direct $\mathscr{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.*

Calculer la distance d, dans les cas suivants :

a) $M_0 = O$, $A(-2, 1, 3)$, $\vec{u}(2, 2, -1)$;

b) $M_0(2, 1, -3)$, $A(-1, 2, 1)$, $\vec{u}(1, 1, -1)$.

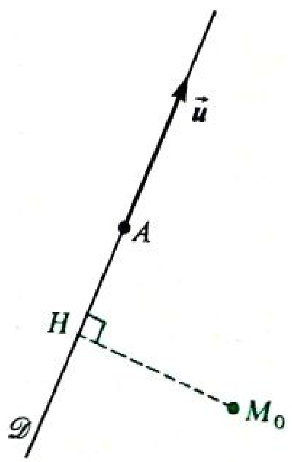


Figure 17

4° On considère la droite $\mathscr{D}$ de repère $(O, \vec{k})$ et la droite $\mathscr{D}'$ passant par les points $I(1, 0, 0)$ et $J(0, 1, 0)$.
a) Calculer les distances d'un point M de coordonnées (x, y, z) aux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.
b) On désigne par $\mathscr{S}$ l'ensemble des points M de l'espace équidistants de $\mathscr{D}$ et de $\mathscr{D}'$. Déterminer une équation de $\mathscr{S}$.
c) Étudier les intersections de $\mathscr{S}$ avec les plans d'équations $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$.

5° On se propose d'étudier l'ensemble $\mathscr{S}$ des points M de l'espace équidistants de deux droites non coplanaires $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.

Choix d'un repère : Soit (AA') la perpendiculaire commune à $\mathscr{D}$ et à $\mathscr{D}'$ et soit O le milieu de $[A, A']$. Les droites Δ et Δ' passant par O et respectivement parallèles à $\mathscr{D}$ et à $\mathscr{D}'$ déterminent un plan $\mathscr{P}$ orthogonal à la droite (AA').

Dans le plan $\mathscr{P}$ les bissectrices des angles formés par les droites Δ et Δ' sont deux droites perpendiculaires $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$. Soit $\vec{i}$ et $\vec{j}$ des vecteurs directeurs unitaires respectifs des droites $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ et soit $\vec{k} = \vec{i} \wedge \vec{j}$. $\mathscr{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthonormal direct de l'espace $\mathscr{E}$.

Dans ce repère, le point A a pour coordonnées $(0, 0, a)$ et un vecteur directeur unitaire $\vec{u}$ de $\mathscr{D}$ a pour coordonnées $(\alpha, \beta, 0)$. (Les réels a, α, β sont non nuls et $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.)

a) Démontrer que le vecteur $\vec{u}'(\alpha, -\beta, 0)$ est un vecteur directeur unitaire de $\mathscr{D}'$.
b) Calculer les distances d'un point $M(x, y, z)$ aux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$. En déduire une équation de $\mathscr{S}$.
c) Soit M_0 un point de $\mathscr{S}$. Démontrer que par M_0 il passe deux droites contenues dans $\mathscr{S}$.

DISTANCE DE DEUX DROITES

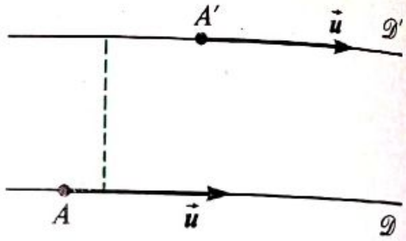


Figure 18

1° On considère deux droites parallèles $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ de repères respectifs $(A, \vec{u})$ et $(A', \vec{u})$.
On rappelle que la distance d des droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ est la distance d'un point de l'une à l'autre (figure 18).

Démontrer que $d = \dfrac{\|\overrightarrow{AA'} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$.

Calculer d lorsque les coordonnées des points A et A' et du vecteur $\vec{u}$ dans un repère orthonormal direct $\mathscr{R}$ sont :

$$A(0, 2, -4), \quad A'(5, -7, 1), \quad \vec{u}(1, -1, 2).$$

2° On considère deux droites non coplanaires $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$, de repères respectifs $(A, \vec{u})$ et $(A', \vec{u}')$, et leur perpendiculaire commune (HH') (figure 19).
On rappelle que la distance des droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ est la distance des points H et H'.
a) On note $\vec{v}$ le produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{u}'$.
Démontrer que les deux produits scalaires :

$$\overrightarrow{HH'} \cdot \vec{v} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AA'} \cdot \vec{v}$$

sont égaux; soit m leur valeur commune.
b) Démontrer que $|m| = HH' \times \|\vec{u} \wedge \vec{u}'\|$. *En déduire :*

$$d(\mathscr{D}, \mathscr{D}') = \frac{|m|}{\|\vec{u} \wedge \vec{u}'\|}$$

Cette formule s'applique-t-elle à deux droites concourantes de l'espace? A deux droites parallèles?

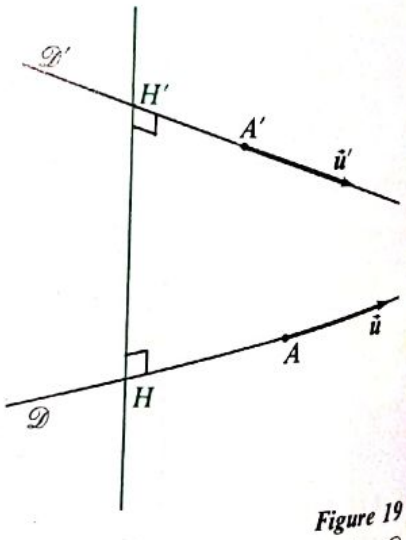


Figure 19

c) L'espace $\mathscr{E}$ étant rapporté à un repère orthonormal direct $\mathscr{R}$, calculer la distance des droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ de repères respectifs $(A, \vec{u})$ et $(A', \vec{u}')$ dans les cas suivants :

- $A(-3, 1, 2)$, $\vec{u}(-2, 1, 1)$, $A'(1, 0, -1)$, $\vec{u}'(1, -1, -3)$;
- $A(2, 1, -3)$, $\vec{u}(1, 3, -2)$, $A'(4, 7, -7)$, $\vec{u}'(2, -5, 7)$.

DISTANCE D'UN POINT À UN PLAN

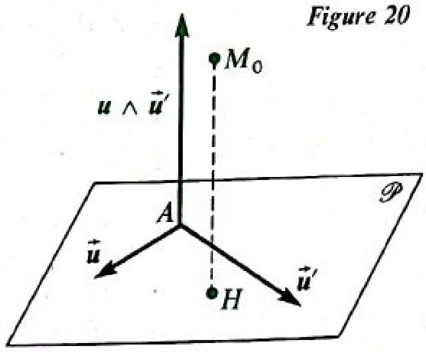


Figure 20

On considère dans l'espace $\mathscr{E}$, un plan $\mathscr{P}$ de repère $(A, \vec{u}, \vec{u}')$ et un point M_0 de projeté orthogonal H sur le plan $\mathscr{P}$ (figure 20). On désigne par h la distance du point M_0 au plan $\mathscr{P}$, par $\vec{v}$ le produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{u}'$, et par m le produit scalaire $\overrightarrow{AM_0} \cdot \vec{v}$.

1° Démontrer que $m = \overrightarrow{HM_0} \cdot \vec{v}$. En déduire une expression de h en fonction de m et $\vec{v}$.

2° L'espace $\mathscr{E}$ étant rapporté à un repère orthonormal direct $\mathscr{R}$, calculer h, dans les cas suivants :

a) $A(0, -2, 0)$, $\vec{u}(1, -3, 0)$, $\vec{u}'(3, 1, -1)$, $M_0(1, 1, 1)$;
b) $A(2, -1, 3)$, $\vec{u}(1, 1, 1)$, $\vec{u}'(-1, 2, 1)$, $M_0(-1, 3, 4)$;
c) $A(1, 3, -5)$, $\vec{u}(2, -1, 3)$, $\vec{u}'(1, 5, -2)$, $M_0(-1, 1, -1)$.

3° Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$ (1) dans le repère $\mathscr{R}$. Un au moins des trois réels a, b, c n'est pas nul. Supposons par exemple $a \neq 0$.

a) L'équation (1) est équivalente au système :
$$\begin{cases} x = -\dfrac{d}{a} + \left(-\dfrac{b}{a}\right)y + \left(-\dfrac{c}{a}\right)z \\ y = \quad 0 + 1y + 0z \\ z = \quad 0 + 0y + 1z. \end{cases}$$

En déduire un repère $(A, \vec{u}, \vec{u}')$ du plan $\mathscr{P}$.

b) Calculer la distance d'un point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ au plan $\mathscr{P}$ en appliquant la formule établie à la question 1°. Comparer avec le résultat trouvé à la page 135.

4° On considère deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sécants suivant une droite $\mathscr{D}$ et un réel k strictement positif. On se propose de déterminer l'ensemble $\mathscr{H}$ des points M de l'espace tels que $d(M, \mathscr{P}) = kd(M, \mathscr{Q})$.
Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormal de $\mathscr{P}$ tel que $(O, \vec{i})$ soit un repère de la droite $\mathscr{D}$. On pose $\vec{k} = \vec{i} \wedge \vec{j}$ et on rapporte l'espace au repère orthonormal direct $\mathscr{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

a) Soit $\vec{u}$ un vecteur tel que $(O, \vec{i}, \vec{u})$ soit un repère orthonormal du plan $\mathscr{Q}$.
Démontrer que les coordonnées (α, β, γ) de $\vec{u}$ sont telles que $\alpha = 0$, $\gamma \neq 0$, $\beta^2 + \gamma^2 = 1$.

b) Pour tout point M de coordonnées (x, y, z) calculer $d(M, \mathscr{P})$ et $d(M, \mathscr{Q})$ en fonction de x, y, z.

c) En déduire que l'ensemble $\mathscr{F}$ cherché est la réunion de deux plans contenant la droite $\mathscr{D}$. A quelle condition ces deux plans sont-ils perpendiculaires?

VOLUME D'UN PARALLÉLÉPIPÈDE OU D'UN TÉTRAÈDRE

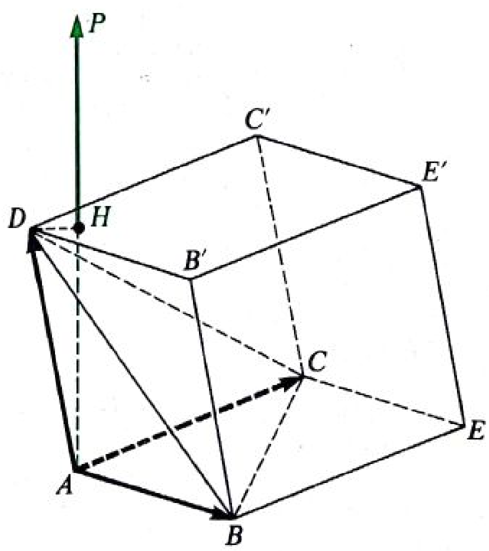


Figure 21

On considère un tétraèdre $ABCD$ et le parallélépipède $ABECDB'E'C'$ dont trois arêtes sont $[A, B]$, $[A, C]$ et $[A, D]$ (figure 21). On désigne par V le volume du tétraèdre et par V' celui du parallélépipède.
Soit P le point tel que $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$, et H le projeté orthogonal de D sur la droite (AP).

1° Démontrer que $|\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AD}| = AP \times AH$.

2° En déduire : $V' = |(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}|$ et
$$V = \frac{1}{6}|(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}|.$$

3° Calculer V lorsque les coordonnées des points A, B, C, D dans un repère orthonormal direct de l'espace sont :

$A(-1, 2, 3)$, $B(-2, 0, 0)$, $C(0, 3, 0)$, $D(0, 0, -4)$.

EXERCICES ET PROBLÈMES

24. On donne deux points A et B de l'espace et un vecteur $\vec{u}$ *non nul*. Déterminer l'ensemble $\mathscr{F}$ des points M de l'espace tels que $\vec{u} \wedge \overrightarrow{AM} = \vec{u} \wedge \overrightarrow{AB}$.

25. On donne un plan $\mathscr{P}$ de l'espace $\mathscr{E}$ et un vecteur $\vec{u}$ normal à $\mathscr{P}$.
On considère dans $\mathscr{P}$ deux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sécantes en O et perpendiculaires. Soit M un point de $\mathscr{P}$, H son projeté orthogonal sur $\mathscr{D}$ et K son projeté orthogonal sur $\mathscr{D}'$. Déterminer l'ensemble des points M du plan $\mathscr{P}$ tels que $\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{HK} = \vec{u}$.
(On pourra rapporter l'espace $\mathscr{E}$ à un repère orthonormal direct convenablement choisi.)

26. Soit, dans l'espace $\mathscr{E}$, un plan $\mathscr{P}$ de repère $(O, \vec{u}, \vec{u}')$. On désigne par f l'application de $\mathscr{E}$ dans $\mathbb{R}$ qui, à tout point M associe le réel $f(M)$ défini par :

$$f(M) = \vec{u} \cdot (\vec{u}' \wedge \overrightarrow{OM}).$$

Démontrer que les surfaces de niveau de l'application f sont les plans parallèles à $\mathscr{P}$. Quelle est la surface de niveau 0 de f?

27. Dans l'espace vectoriel $\mathscr{W}$, rapporté à la base orthonormale directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les vecteurs $\vec{a}(1, 1, 2)$, $\vec{b}(2, -1, 0)$ et l'application f qui au vecteur $\vec{u}(x, y, z)$ associe le vecteur $\vec{U}(X, Y, Z)$ tel que :

$$\vec{U} = \vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{u}).$$

1° Démontrer que l'application f est linéaire et exprimer X, Y, Z en fonction de x, y, z.
2° Démontrer que l'ensemble des vecteurs $\vec{u}$ tels que $f(\vec{u}) = \vec{0}$ est l'ensemble des vecteurs colinéaires à $\vec{b}$.

28. Soit O un point de l'espace $\mathscr{E}$ et soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs orthogonaux, $\vec{u}$ n'étant pas nul. On désigne par $\mathscr{P}$ le plan passant par O et dont un vecteur normal est $\vec{u}$.
1° Démontrer qu'il existe un point H, et un seul, appartenant à $\mathscr{P}$, tel que :

$$\overrightarrow{OH} \wedge \vec{u} = \vec{v}.$$

2° Démontrer que l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{u} = \vec{v}$ est une droite.

29. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs distincts de l'espace vectoriel $\mathscr{W}$. Déterminer l'ensemble des vecteurs $\vec{x}$ tels que $\vec{u} \wedge \vec{x} = \vec{v} \wedge \vec{x}$.

30. On donne deux points distincts A et B et un vecteur $\vec{u}$ non nul. On note Δ l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} = \vec{u}$.
1° Démontrer que si Δ n'est pas vide, alors $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = 0$.
2° On suppose que $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = 0$. Déterminer Δ en rapportant l'espace à un repère orthonormal direct convenablement choisi.

31. On donne un triangle ABC. Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que :
a) $(2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) \wedge \overrightarrow{BC} = \vec{0}$;
b) $(\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}) \wedge (\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}) = \vec{0}$;
c) $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) \wedge (3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 4\overrightarrow{MC}) = \vec{0}$.

32. On donne un point O, un vecteur $\vec{u}$ non nul et un réel a strictement positif. Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que $\|\overrightarrow{OM} \wedge \vec{u}\| = a$.

33. On donne deux points distincts A et B et un réel a strictement positif. Déterminer l'ensemble des joints M de l'espace tels que $\|\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}\| = a$.

34. On donne un point O, un vecteur $\vec{u}$ non nul et deux réels strictement positifs a et b. Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que $\|\overrightarrow{OM} \wedge \vec{u}\| = a$ et $OM = b$.

35. On considère trois demi-droites Ox, Oy, Oz, de même origine, O, non coplanaires et deux à deux orthogonales. Soit A un point de Ox différent de O, B un point de Oy différent de O et C un point de Oz différent de O. Démontrer qu'il existe un point de l'espace, et un seul, tel que :

$$\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OC}.$$

36. Dans l'espace $\mathscr{E}$ rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le vecteur $\vec{u}(1, 1, 1)$ et l'application f de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ qui, à tout point M, associe le point M' défini par :

$$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} - \vec{u} \wedge \overrightarrow{OM}.$$

1° Définir analytiquement l'application f. Établir que f est bijective et définir analytiquement f^{-1}.
2° Démontrer que l'ensemble des points invariants par f est une droite $\mathscr{D}$.
(On donnera une démonstration vectorielle et une démonstration analytique.)
3° Démontrer que, si M n'appartient pas à $\mathscr{D}$, la droite (MM') est orthogonale au plan déterminé par M et $\mathscr{D}$.
4° Démontrer que la distance MM' est proportionnelle à la distance du point M à la droite $\mathscr{D}$.

37. Deux points mobiles A et B se déplacent dans l'espace $\mathscr{E}$ d'un mouvement rectiligne uniforme. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ leurs vecteurs-vitesses respectifs, supposés distincts ($\vec{u} \neq \vec{v}$). A l'instant $t = 0$, A est en A_0 et B est en B_0.
On dit qu'il y a *rencontre* entre A et B lorsque, à un instant t, éventuellement négatif, A et B occupent la même position.
1° On suppose qu'il y a rencontre entre A et B. Démontrer que :

$$\overrightarrow{A_0B_0} \wedge \vec{u} = \overrightarrow{A_0B_0} \wedge \vec{v}.$$

2° On suppose que $\overrightarrow{A_0B_0} \wedge \vec{u} = \overrightarrow{A_0B_0} \wedge \vec{v}$. Démontrer qu'il y a rencontre entre A et B et que l'instant de la rencontre est $t = \dfrac{\overrightarrow{A_0B_0} \cdot (\vec{u} - \vec{v})}{\|\vec{u} - \vec{v}\|^2}$.
3° Application : Dans l'espace $\mathscr{E}$ muni d'un repère orthonormal, on donne : $A_0(0, 0, 1)$, $\vec{u}(2, -1, 3)$, $B_0(4, 0, -3)$, $\vec{v}(1, -1, 4)$.
Les points A et B se rencontrent-ils? Si oui à quel instant?

CHAPITRE 9

NOTIONS SUR LES COURBES PARAMÉTRÉES DU PLAN

I — GÉNÉRALITÉS

DÉFINITION

Lorsqu'on étudie au cours du temps le mouvement du centre de gravité G d'un objet quelconque, à chaque instant t le point G occupe une position $G(t)$.

Un repère $\mathscr{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace étant donné, les coordonnées $(f(t), g(t), h(t))$ du vecteur $\overrightarrow{OG}(t)$ dans le repère $\mathscr{R}$ déterminent la position de $G(t)$.

Dans un intervalle de temps I, $G(t)$ décrit une courbe Γ. On dit que Γ est une **courbe paramétrée,** de représentation paramétrique dans le repère $\mathscr{R}$:

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \quad t \in I. \\ z = h(t) \end{cases}$$

Dans ce chapitre, nous nous limiterons à l'étude des courbes paramétrées planes, ce qui revient à ne considérer que des mouvements plans.
La variable t est appelée **paramètre;** elle peut bien sûr être désignée par une autre lettre.
Dans l'étude du mouvement d'un point, le paramètre est le temps; mais le paramètre d'une courbe paramétrée n'est pas toujours le temps, comme le montre l'exemple de la page suivante.

DÉFINITION 1	**On appelle courbe paramétrée Γ du plan, toute application d'une partie $\mathscr{D}$ de $\mathbb{R}$ dans le plan : $t \mapsto M(t)$. Si $\mathscr{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère du plan, Γ est déterminée par les coordonnées $(x(t), y(t))$ du point $M(t)$ dans $\mathscr{R}$:** $$\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}.$$ **L'ensemble des points $M(t)$ lorsque t décrit $\mathscr{D}$ est le support de la courbe paramétrée.**

On utilise souvent la même notation, Γ par exemple, pour désigner la courbe paramétrée $t \mapsto M(t)$, où $t \in \mathscr{D}$, et son support.
Dans le cas du mouvement d'un point $M(t)$, le support de la courbe paramétrée est appelée la **trajectoire** du point $M(t)$.

Exemple

Considérons, dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormal $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$, le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon R (figure 1).

A tout réel θ de l'intervalle $[0, 2\pi[$ associons le point $M(\theta)$ de $\mathcal{C}$ tel que $(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = \theta \quad (2\pi)$.

Les coordonnées (x, y) du point $M(\theta)$ dans le repère $\mathcal{R}$ sont $(R \cos \theta, R \sin \theta)$.

De plus quand θ décrit l'intervalle $[0, 2\pi[$, le point $M(\theta)$ parcourt le cercle $\mathcal{C}$. Par suite :

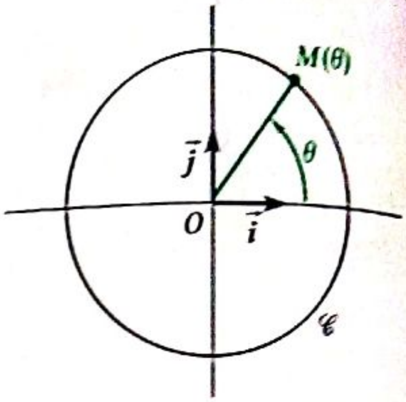


Figure 1

Une représentation paramétrique du cercle $\mathcal{C}(O, R)$ est : $\begin{cases} x = R \cos \theta \\ y = R \sin \theta \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi[.$

VECTEUR DÉRIVÉ

Dans l'exemple ci-dessus du cercle $\mathcal{C}$, le vecteur $\dfrac{\overrightarrow{M(\theta_0)M(\theta)}}{\theta - \theta_0}$ est un vecteur directeur de la droite Δ_θ passant par les points $M(\theta_0)$ et $M(\theta)$ (figure 2); il s'écrit :

$$\frac{\overrightarrow{M(\theta_0)M(\theta)}}{\theta - \theta_0} = R\,\frac{\cos \theta - \cos \theta_0}{\theta - \theta_0}\,\vec{i} + R\,\frac{\sin \theta - \sin \theta_0}{\theta - \theta_0}\,\vec{j}.$$

Lorsque θ tend vers θ_0, le quotient $\dfrac{\cos \theta - \cos \theta_0}{\theta - \theta_0}$ tend vers $-\sin \theta_0$, et le quotient $\dfrac{\sin \theta - \sin \theta_0}{\theta - \theta_0}$ tend vers $\cos \theta_0$.

Le vecteur $-R \sin \theta_0 \vec{i} + R \cos \theta_0 \vec{j}$, dont les coordonnées sont les limites, lorsque θ tend vers θ_0, de celles du vecteur $\dfrac{\overrightarrow{M(\theta_0)M(\theta)}}{\theta - \theta_0}$, est non nul et orthogonal à $\overrightarrow{OM}(\theta_0)$: c'est donc un vecteur directeur de la tangente Δ au cercle $\mathcal{C}$ en $M(\theta_0)$.

On dit que la droite Δ_θ *tend* vers la droite Δ lorsque θ tend vers θ_0. On note :

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta}(\theta_0) = -R \sin \theta_0\,\vec{i} + R \cos \theta_0\,\vec{j}.$$

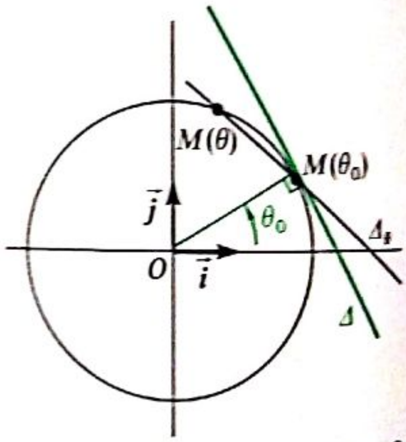


Figure 2

$\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta}(\theta_0)$ est appelé **vecteur dérivé** de $\overrightarrow{OM}(\theta)$ au point de paramètre θ_0. Ce vecteur non nul est un vecteur directeur de la tangente au cercle $\mathcal{C}$ en $M(\theta_0)$.

Plus généralement :

DÉFINITION 2	**Soit une courbe paramétrée définie par $\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$.** **Si les fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sont dérivables en t_0, on appelle vecteur dérivé en t_0 le vecteur, noté $\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t_0)$, défini par $\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t_0) = x'(t_0)\vec{i} + y'(t_0)\vec{j}$.**

Lorsque le paramètre t représente le temps, le vecteur dérivé $\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t_0)$ est appelé **vecteur vitesse** à l'instant t_0 du mouvement $t \mapsto M(t)$.

A noter que les vecteurs vitesse à l'instant t_0 des points $P(t)$ et $Q(t)$, projetés orthogonaux respectifs du point $M(t)$ sur les axes $x'Ox$ et $y'Oy$ du repère (figure 3), sont :

$$\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt}(t_0) = x'(t_0)\vec{i}, \quad \frac{d\overrightarrow{OQ}}{dt}(t_0) = y'(t_0)\vec{j}.$$

On dit que $x'(t_0)$ (resp. $y'(t_0)$) est la **vitesse instantanée** à l'instant $t = t_0$ de $P(t)$ (resp. $Q(t)$).

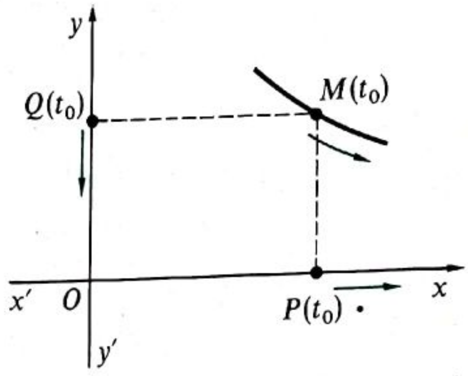


Figure 3

TANGENTE EN UN POINT D'UNE COURBE PARAMÉTRÉE

Soit Γ une courbe paramétrée $t \mapsto M(t)$ possédant en t_0 un vecteur dérivé $\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t_0)$. Si ce vecteur est *non nul*, la droite de repère $\left(M(t_0), \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t_0)\right)$ est dite tangente à Γ en $M(t_0)$.

Cette définition généralise celle de la tangente en un point d'une courbe d'équation $y = f(x)$, représentation graphique d'une fonction f dérivable. Un vecteur directeur de la tangente au point M_0 d'abscisse x_0 a en effet pour coordonnées $(1, f'(x_0))$ puisque le coefficient directeur de la tangente en M_0 est $f'(x_0)$.
Or cette courbe d'équation $y = f(x)$ peut être considérée comme le support de la courbe paramétrée définie par $\overrightarrow{OM}(t) = t\vec{i} + f(t)\vec{j}$.
On constate alors que :

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(x_0) = \vec{i} + f'(x_0)\vec{j}.$$

II – EXEMPLES DE REPRÉSENTATIONS PARAMÉTRIQUES

DROITE

Soit, dans un repère du plan, la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = a + \alpha t \\ y = b + \beta t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

où a, b, α, β sont des réels donnés, $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$.
On sait que l'ensemble décrit par le point $M(t)$ de coordonnées $(a + \alpha t, b + \beta t)$ est la droite Δ passant par le point $A(a, b)$ et dont un vecteur directeur est $\vec{V}(\alpha, \beta)$.
Cette représentation paramétrique de la droite Δ n'est autre que la traduction analytique de l'égalité vectorielle : $\overrightarrow{AM}(t) = t\vec{V}$.

Notons que : $\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t) = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$, c'est-à-dire $\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t) = \vec{V}$.

COURBE D'ÉQUATION $y = f(x)$

La représentation graphique, dans un repère du plan, d'une fonction numérique f est la courbe d'équation $y = f(x)$, c'est-à-dire l'ensemble Γ des points M dont les coordonnées (x, y) vérifient la relation $y = f(x)$.

Si l'on désigne par $\mathscr{D}_f$ l'ensemble de définition de la fonction f, Γ peut être considérée comme la courbe paramétrée :

$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases} \quad t \in \mathscr{D}_f.$$

Notons que, si f est dérivable : $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t) = \vec{i} + f'(t)\vec{j}.$

CERCLE

Comme on l'a fait pour le cercle de centre O et de rayon R, on démontre qu'une représentation paramétrique, dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, du cercle de centre $A(a, b)$ et de rayon R est :

$$\begin{cases} x = a + R\cos\theta \\ y = b + R\sin\theta \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi[.$$

Dans cette représentation paramétrique, le paramètre θ est la mesure en radians de l'angle orienté $(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM}(\theta)})$ appartenant à l'intervalle $[0, 2\pi[$.

CYCLOÏDE

Supposons qu'un cercle de centre Ω et de rayon R roule sans glisser sur une droite Δ. La courbe décrite par un point M de ce cercle est appelée **cycloïde**. Nous nous proposons de chercher une représentation paramétrique de cette courbe.

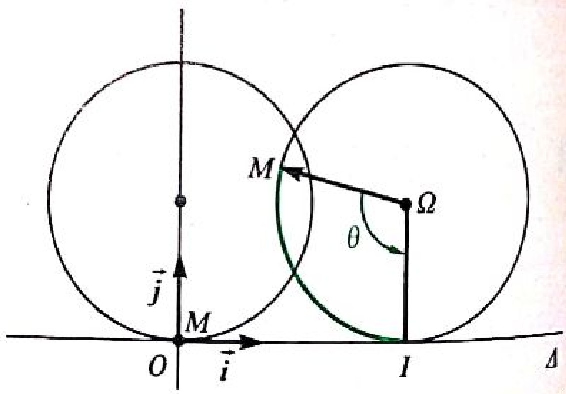


Figure 4

Supposons qu'au départ le point M soit en contact avec la droite Δ, au point O, et considérons la position du cercle à un autre instant (figure 4). Le cercle est alors tangent à Δ en I.

La condition de roulement sans glissement signifie $\|\overrightarrow{OI}\| = \ell(\widehat{IM})$, où $\ell(\widehat{IM})$ désigne la longueur de l'arc $\widehat{IM}$. Si θ est la mesure en radians de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega I}})$ telle que $\theta \in [0, 2\pi[$, on a $\ell(\widehat{IM}) = R\theta$.

Soit $\vec{i}$ le vecteur directeur unitaire de Δ dont le sens est le sens du mouvement du point I et soit $\vec{j}$ le vecteur unitaire directement orthogonal à $\vec{i}$. Rapportons le plan au repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On a alors : $\overrightarrow{O\Omega} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{I\Omega} = R\theta\vec{i} + R\vec{j}.$

De plus : $(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{\Omega M}}) = (\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{\Omega I}}) + (\widehat{\overrightarrow{\Omega I}, \overrightarrow{\Omega M}}) = -\dfrac{\pi}{2} - \theta \quad (2\pi).$

Il en résulte que $-\theta-\frac{\pi}{2}$ est une mesure en radians de l'angle $(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{\Omega M}})$. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\Omega M}$, dans le repère $\mathscr{R}$, sont donc :

$$R\cos\left(-\theta-\frac{\pi}{2}\right), \quad R\sin\left(-\theta-\frac{\pi}{2}\right).$$

Comme $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M}$, les coordonnées x et y de M dans le repère $\mathscr{R}$ sont :

$$\begin{cases} x = R\theta + R\cos\left(-\theta-\dfrac{\pi}{2}\right) \\ y = R + R\sin\left(-\theta-\dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}, \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x = R(\theta - \sin\theta) \\ y = R(1-\cos\theta). \end{cases}$$

On vient d'obtenir une représentation paramétrique de la cycloïde. L'allure de cette courbe est illustrée par la figure 5 qui suit l'activité ci-après.

Au point $M(\theta)$, le vecteur dérivé est : $\dfrac{d\overrightarrow{OM}(\theta)}{d\theta} = R(1-\cos\theta)\vec{i} + R\sin\theta\vec{j}$.

Il en résulte qu'au point $M(\pi)$ la tangente a pour vecteur directeur $2R\vec{i}$: elle est donc parallèle à l'axe des abscisses.
En $\theta = 0$, le vecteur dérivé est nul. Pour déterminer la direction de la tangente, il convient de chercher la limite lorsque θ tend vers 0 du coefficient directeur, $\dfrac{1-\cos\theta}{\theta-\sin\theta}$, de la droite $(OM(\theta))$.

On démontre (cf. activité ci-dessous) que $\lim\limits_{\substack{> \\ \theta\to 0}} \dfrac{1-\cos\theta}{\theta-\sin\theta} = +\infty$. Il en résulte que la tangente au point $M(0)$ est parallèle à l'axe des ordonnées. De même la tangente au point $M(2\pi)$ est parallèle à l'axe des ordonnées.

Activité

1. *Démontrer que les inégalités suivantes sont vérifiées pour tout réel* $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:

a) $\dfrac{2\theta}{\pi} \leqslant \sin\theta \leqslant \theta$;

b) $0 \leqslant \theta - \sin\theta \leqslant \dfrac{\theta^3}{6}$.

En déduire que $\lim\limits_{\substack{> \\ \theta\to 0}} \dfrac{1-\cos\theta}{\theta-\sin\theta} = +\infty$.

2. Construction d'une arche de cycloïde

Considérons l'arche de cycloïde de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = R(\theta-\sin\theta) \\ y = R(1-\cos\theta) \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

On se propose de calculer les coordonnées des points $M(\theta_i)$, *pour les valeurs* θ_i *du paramètre ainsi définies :* $\theta_0 = 0$ *et* $\theta_{i+1} = \theta_i + \dfrac{2\pi}{n}$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

Le réel $\dfrac{2\pi}{n}$ est le **pas** du calcul.

1° Programmer ce calcul.

Réponse (CASIO FX-180P)
L'idée consiste à stocker θ_i dans une mémoire et à ajouter le pas (incrémentation) pour obtenir θ_{i+1}.

$\boxed{\text{MODE}}$ 0	mise en mode programme
$\boxed{\text{P}_1}$	programme de saisie des données
$\boxed{\text{ENT}}$ $\boxed{\text{Kin}}$ 1	entre le pas dans la mémoire K1
$\boxed{\text{ENT}}$ $\boxed{\text{Kin}}$ 2	entre θ_0 dans la mémoire K2
$\boxed{\text{ENT}}$ $\boxed{\text{Kin}}$ 3	entre R dans la mémoire K3
$\boxed{\text{P}_2}$	programme de calcul des coordonnées
$\boxed{\text{Kout}}$ 2 $\boxed{-}$ $\boxed{\text{Kout}}$ 2 $\boxed{\sin}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{\text{Kout}}$ 3 $\boxed{=}$ $\boxed{\text{HLT}}$	calcule $x = R(\theta - \sin\theta)$
1 $\boxed{-}$ $\boxed{\text{Kout}}$ 2 $\boxed{\cos}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{\text{Kout}}$ 3 $\boxed{=}$ $\boxed{\text{HLT}}$	calcule $y = R(1 - \cos\theta)$
$\boxed{\text{Kout}}$ 1 $\boxed{\text{Kin}}$ $\boxed{+}$ 2	ajoute le pas au contenu de K2
$\boxed{\text{RTN}}$	renvoie au début du programme $\boxed{\text{P}_2}$
$\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{\bullet}$	retour en mode calcul
$\boxed{\text{KAC}}$	vide les mémoires
$\boxed{\text{MODE}}$ 5	choisit le radian comme unité de mesure
$\boxed{\text{P}_1}$ 2π $\boxed{\div}$ n $\boxed{=}$ $\boxed{\text{ENT}}$ 0 $\boxed{\text{ENT}}$ R $\boxed{\text{ENT}}$	entrée des données n et R
$\boxed{\text{P}_2}$	affiche l'abscisse du premier point
$\boxed{\text{RUN}}$	affiche l'ordonnée du premier point
$\boxed{\text{RUN}}$	affiche l'abscisse du deuxième point
$\boxed{\text{RUN}}$	affiche l'ordonnée du deuxième point

2° Appliquer le programme du 1° en prenant $n = 10$ et $R = 2$. Regrouper les résultats obtenus dans un tableau indiquant pour chaque valeur de θ $\left(0, \frac{2\pi}{10}, \frac{4\pi}{10}, ..., \frac{20\pi}{10}\right)$ les coordonnées du point $M(\theta)$. Construire l'arche de cycloïde à l'aide de ce tableau de valeurs.

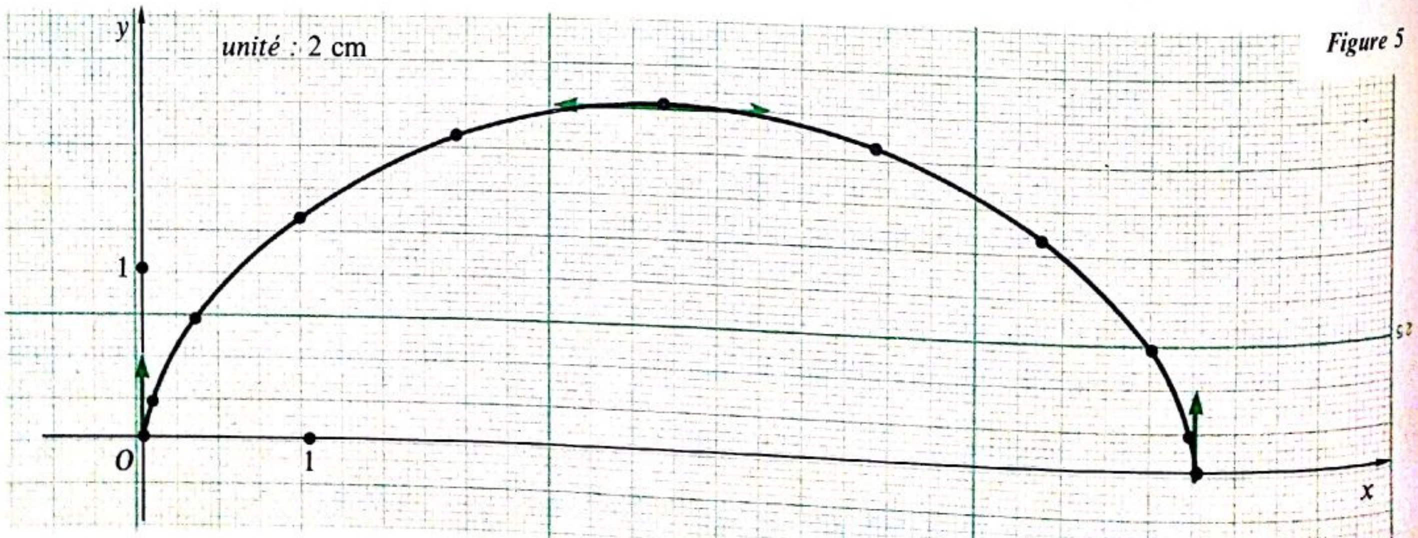


Figure 5

• Exercices d'application

Dans tous ces exercices le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer l'ensemble des points $M(x, y)$ dont une représentation paramétrique est :

a) $\begin{cases} x = 2 - 3t^2 \\ y = -1 + t^2 ; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = 2 - 5\cos t \\ y = -3 + 2\cos t ; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = \dfrac{2t}{1-t} \\ y = \dfrac{2-3t}{1-t} ; \end{cases}$

d) $\begin{cases} x = -2\sqrt{1-t^2} \\ y = 2 + \sqrt{1-t^2} ; \end{cases}$

2. A tout réel t on associe le point $M(t)$ de coordonnées :

$$\begin{cases} x = 2 + 2\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ y = -3 + \dfrac{4t}{1+t^2}. \end{cases}$$

Démontrer que, quel que soit t, $M(t)$ appartient à un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
Tout point du cercle est-il un point $M(t)$.

3. On considère dans le plan $\mathscr{P}$ deux points distincts A et B et deux vecteurs distincts $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$. Deux points M_1 et M_2 se déplacent dans le plan de manière qu'à chaque instant t, $t \in \mathbb{R}$, on ait $\overrightarrow{AM_1}(t) = t\vec{V_1}$ et $\overrightarrow{BM_2}(t) = t\vec{V_2}$.
1° Démontrer que M_1 et M_2 se rencontrent si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{V_1} - \vec{V_2}$ sont colinéaires.
2° On définit les points A, B et les vecteurs $\vec{V_1}$, $\vec{V_2}$ par leurs coordonnées :

$A(2, 3)$, $B(-1, 6)$, $V_1(2, -4)$, $V_2(3, -5)$.

Les points M_1 et M_2 se rencontrent-ils et si oui à quel instant?

4. Soit A le point de coordonnées $(2a, 0)$, où a est un réel positif non nul, et soit $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre $[O, A]$ (O est l'origine du repère).
1° Trouver une équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}$.
2° Pour tout point M du cercle $\mathscr{C}$ distinct de O, on désigne par θ la mesure principale en radians de l'angle orienté $(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM}})$ ($\theta \in]\pi, \pi]$).
Exprimer les coordonnées (x, y) du point M en fonction de θ. On obtient ainsi une représentation paramétrique de $\mathscr{C}$.
Dans quel intervalle suffit-il de faire varier θ pour obtenir le cercle $\mathscr{C}$?

5. Dans un plan $\mathscr{P}$ rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points M_1 et M_2, dont les coordonnées sont définies en fonction du temps respectivement par :

M_1 : $x = a\cos t$ et $y = a\sin t$

M_2 : $x = a\cos 2t$ et $y = -a\sin 2t$,

a étant un réel non nul fixé.
1° Quelles sont les trajectoires des points M_1 et M_2?
2° Soit M le point défini par :

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(2\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}).$$

Démontrer que M appartient au segment $[M_1, M_2]$. A quelles dates M, M_1 et M_2 sont-ils confondus?
3° Soit $\vec{V}$ le vecteur-vitesse du point M; démontrer que $\vec{V}$ et $\overrightarrow{M_1M_2}$ sont orthogonaux à une date quelconque.

III — ÉTUDE D'UNE COURBE PARAMÉTRÉE

CONSEILS PRATIQUES GÉNÉRAUX

On suppose que le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\mathscr{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ d'axes $x'x$ et $y'y$ et on considère la courbe paramétrée Γ définie par :

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \quad t \in \mathscr{D}.$$

1° On cherche à réduire l'ensemble $\mathscr{D}$ en étudiant la périodicité des fonctions f et g, ainsi que leur parité.

C'est ainsi que :

- Si T est une période de f et de g, les points $M(t)$ et $M(t+T)$ sont égaux : il suffit de faire varier t dans l'ensemble $\mathscr{D} \cap [0, T[$ ou $\mathscr{D} \cap \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right[$.
- Si f et g sont paires, les points $M(t)$ et $M(-t)$ sont égaux : il suffit de faire varier t dans l'ensemble $\mathscr{D}_+ = \mathscr{D} \cap \mathbb{R}_+$.
- Si f et g sont impaires, les points $M(t)$ et $M(-t)$ sont symétriques par rapport à l'origine O du repère : il suffit de faire varier t dans l'ensemble $\mathscr{D}_+$ et d'étudier la courbe paramétrée Γ_1 relative à $\mathscr{D}_+$; si Γ_2 est l'image de Γ_1 par la symétrie de centre O, Γ est la réunion de Γ_1 et Γ_2.
- Si f est paire et g impaire, les points $M(t)$ et $M(-t)$ qui ont même abscisse et dont les ordonnées sont opposées sont symétriques par rapport à $x'x$ parallèlement à $y'y$: il suffit de faire varier t dans $\mathscr{D}_+$ et d'étudier la courbe paramétrée Γ_1 relative à $\mathscr{D}_+$; si Γ_2 est l'image de Γ_1 dans la réflexion d'axe $x'x$, $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$.
- De même si f est impaire et g paire, on a : $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, où Γ_2 est l'image de Γ_1 par la réflexion d'axe $y'y$.

2° On étudie les variations de x et de y en fonction de t, à l'aide des signes des dérivées des fonctions f et g lorsque ces fonctions sont dérivables.

3° On marque sur du papier millimétré les points $M(t)$ correspondants à quelques valeurs de t en notant, à côté de chaque point, la valeur du paramètre t. Lorsque les fonctions f et g sont dérivables, on calcule pour chacune des valeurs de t choisies le vecteur dérivé $\vec{V}(t) = f'(t)\vec{i} + g'(t)\vec{j}$.

- Si pour $t = t_0$, le vecteur $\vec{V}(t_0)$ n'est pas nul, c'est un vecteur directeur de la tangente à la courbe Γ au point $M(t_0)$; on dessine alors cette tangente.
- Si $\vec{V}(t_0) = \vec{0}$, le point $M(t_0)$ est dit *stationnaire*. Le coefficient directeur de la tangente s'obtient alors en calculant, si elle existe, la limite du quotient $\dfrac{g(t) - g(t_0)}{f(t) - f(t_0)}$ quand t tend vers t_0.

REMARQUE : On déterminera en particulier les points de Γ où la tangente est parallèle à l'un des axes de coordonnées.

4° On trace approximativement la courbe Γ à l'aide des indications précédentes, et on oriente la courbe dans le sens des « t croissants » par quelques flèches.

CAS PARTICULIER

Lorsque t décrit $\mathscr{D}$, $x = f(t)$ décrit un ensemble Δ. Si pour tout x de Δ il existe un unique t de $\mathscr{D}$ tel que $f(t) = x$, c'est-à-dire si f est une bijection de $\mathscr{D}$ sur Δ, on a $t = f^{-1}(x)$, où f^{-1} est l'application réciproque de f, et donc $y = g[f^{-1}(x)]$.

La courbe Γ est alors l'ensemble des points M dont les coordonnées (x, y) sont telles que :

$$x \in \Delta \quad \text{et} \quad y = g[f^{-1}(x)].$$

Autrement dit Γ est la représentation graphique de l'application $g \circ f^{-1}$ de Δ dans $\mathbb{R}$.

Exemple

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère la courbe paramétrée Γ définie par :

$$M(t)\begin{cases} x = -1 + \ln t \\ y = -2t + t\ln t \end{cases} \quad \text{où} \quad t > 0.$$

Lorsque t décrit l'intervalle $]0, +\infty[$, x décrit $\mathbb{R}$.

De plus, pour tout réel x, l'équation $x = 1 + \ln t$ a pour unique solution $t = e^{x+1}$.

Il s'ensuit $y = -2\,e^{x+1} + e^{x+1}(x+1)$, soit $y = e^{x+1}(x-1)$.

Une équation cartésienne de Γ est donc $y = e^{x+1}(x-1)$, où $x \in \mathbb{R}$.

Construisons Γ. On a : $\dfrac{dy}{dx} = e^{x+1}x$ et $\dfrac{d^2y}{dx^2} = e^{x+1}(x+1)$, d'où le tableau de variation :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$\dfrac{dy}{dx}$			$-$		0		$+$		
y	0	$\searrow$	-2	$\searrow$	$-e$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Quand x tend vers $-\infty$, e^{x+1} tend vers 0 et $x\,e^{x+1}$ tend vers 0, car :

$$\ln|x\,e^{x+1}| = \ln|x| + x + 1 = x\left(\frac{\ln|x|}{x} + 1 + \frac{1}{x}\right),$$

donc $\ln|x\,e^{x+1}|$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$.

La courbe change de concavité au point d'abscisse -1. Pour x inférieur à -1, elle est concave et, pour x supérieur à -1, elle est convexe (figure 6).

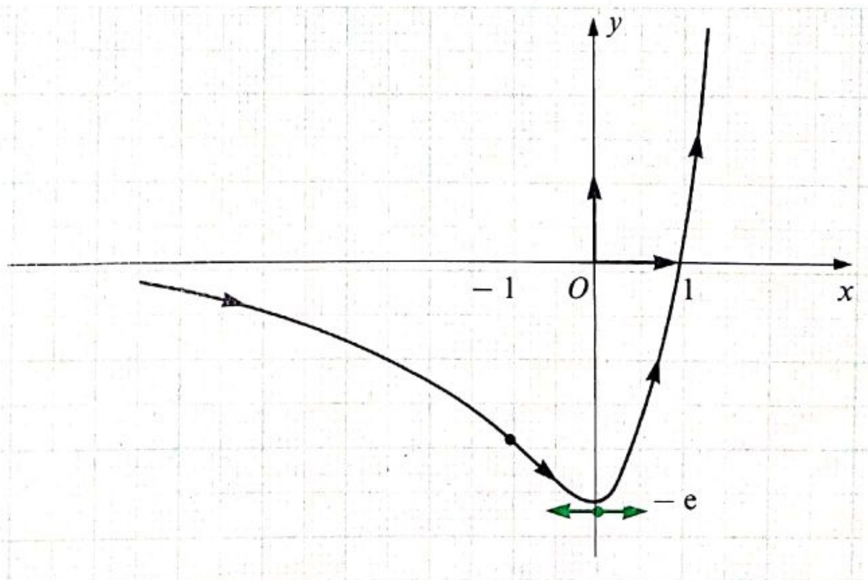


Figure 6

COURBE DE LISSAJOUS

Soit la courbe paramétée définie par $\begin{cases} x = \sin 2t \\ y = \sin 3t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$.

Nous remarquons que :

- x et y ont 2π pour période commune; ainsi $M(t + 2\pi) = M(t)$;
- $M(-t)$ et $M(t)$ sont symétriques par rapport à O;
- $x(t + \pi) = x(t)$ et $y(t + \pi) = -y(t)$, donc $M(t)$ et $M(t + \pi)$ sont symétriques par rapport à Ox, parallèlement à Oy.

Il suffit donc d'étudier la courbe sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, d'effectuer une symétrie par rapport à O puis une symétrie par rapport à Ox pour avoir toute la courbe.

A cette fin, dressons le tableau de variation de x et de y.

On a :

$$x' = 2\cos 2t$$

et $$y' = 3\cos 3t.$$

On remarque que la courbe est dans le carré de centre O, de côtés de longueur 2 et parallèles aux axes (figure 7).

t	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
x'	2	$+$		$+$	0	$-$	-1		-2
x	0	↗	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	↗	1	↘	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	↘	0
y	0	↗	1	↘	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	↘	0	↘	-1
y'	3	$+$	0	$-$		$-$	-3		0

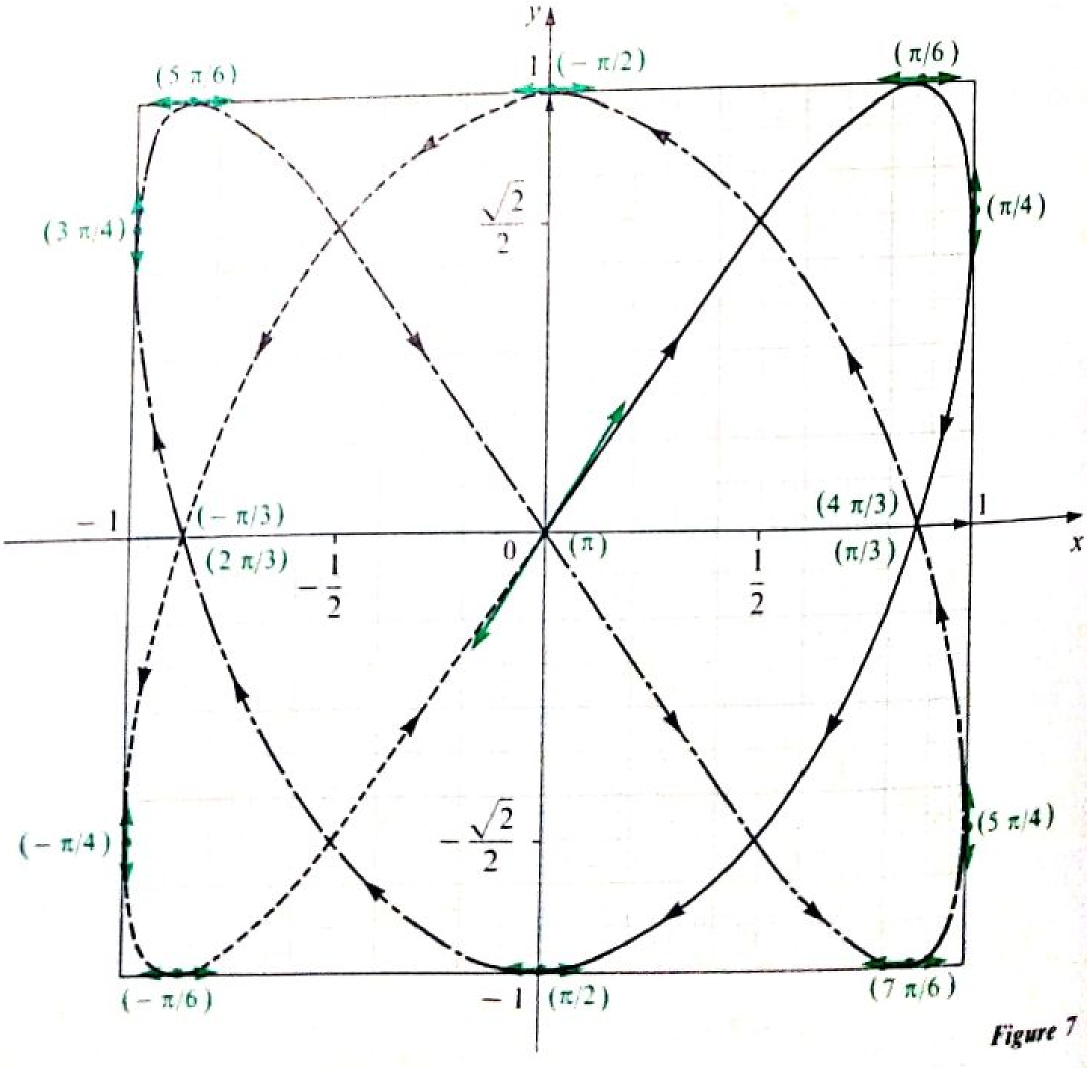


Figure 7

- En $M(0)$, la tangente admet pour vecteur directeur le vecteur de composantes $(2, 3)$;
- en $M\left(\frac{\pi}{6}\right)$, la tangente est parallèle à $(x'x)$;
- en $M\left(\frac{\pi}{4}\right)$, la tangente est parallèle à $(y'y)$;
- en $M\left(\frac{\pi}{2}\right)$, la tangente est parallèle à $(x'x)$.

La courbe en trait plein est obtenue pour t parcourant $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

La courbe en pointillé est obtenue pour t parcourant $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$.

La courbe tracée en tiret-point est obtenue pour t parcourant $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

La flèche indique le sens de parcours suivant les «t croissants».

REMARQUES :

1. La précision du tracé de la courbe dépend du nombre de points et de tangentes dessinés sur le graphique.

2. Le tracé de la courbe met en évidence des points tels que $M(t_1) = M(t_2)$ pour $t_1 \neq t_2$. On les appelle *points multiples*. Déterminons les, pour t_1 et t_2 dans l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Il s'agit de résoudre : $\sin 2t_1 = \sin 2t_2$ et $\sin 3t_1 = \sin 3t_2$; cela donne :

$$\left\{t_2 = t_1 \ (\pi) \text{ ou } t_2 = \frac{\pi}{2} - t_1 \ (\pi)\right\} \quad \text{et} \quad \left\{t_2 = t_1 \left(\frac{2\pi}{3}\right) \text{ ou } t_2 = \frac{\pi}{3} - t_1 \left(\frac{2\pi}{3}\right)\right\},$$

soit : $$\left\{t_2 = t_1 \ (\pi) \text{ et } t_2 = t_1 \left(\frac{2\pi}{3}\right)\right\} \quad \text{ou} \quad \left\{t_2 = t_1 \ (\pi) \text{ et } t_2 = \frac{\pi}{3} - t_1 \left(\frac{2\pi}{3}\right)\right\}$$

$$\text{ou} \quad \left\{t_2 = \frac{\pi}{2} - t_1 \ (\pi) \text{ et } t_2 = t_1 \left(\frac{2\pi}{3}\right)\right\} \quad \text{ou} \quad \left\{t_2 = \frac{\pi}{2} - t_1 \ (\pi) \text{ et } t_2 = \frac{\pi}{3} - t_1 \left(\frac{2\pi}{3}\right)\right\}.$$

En conclusion, puisque t_1 et t_2 sont cherchés dans l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, on a, après calculs :

$M(0) = M(\pi)$, coordonnées $(0, 0)$;

$M\left(-\frac{\pi}{3}\right) = M\left(\frac{2\pi}{3}\right)$, coordonnées $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$;

$M\left(\frac{\pi}{3}\right) = M\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$ coordonnées $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$;

$M\left(\frac{7\pi}{12}\right) = M\left(\frac{-\pi}{12}\right)$, coordonnées $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

$M\left(\frac{5\pi}{12}\right) = M\left(\frac{13\pi}{12}\right)$, coordonnées $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

$M\left(\frac{11\pi}{12}\right) = M\left(-\frac{5\pi}{12}\right)$, coordonnées $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

$M\left(\frac{17\pi}{12}\right) = M\left(\frac{\pi}{12}\right)$, coordonnées $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

3. On peut visualiser les courbes de Lissajous sur un oscillographe cathodique en injectant des tensions sinusoïdales sur les entrées X et Y.

Voici un programme BASIC, sur compatible IBM PC, qui construit cette courbe. L'écran est divisé en 640 colonnes et 200 lignes (instruction 30).

L'origine des axes est placée au centre de l'écran (instruction 40). L'axe $y'Oy$ est dirigé vers le haut.

```
10    'COURBE x=sin2t ,y=sin3t
20 CLS
30 SCREEN 2
40 WINDOW (320,-100)-(-320,100)
50 LINE (0,-100)-(0,100)
60 LINE (-320,0)-(320,0)
70 LINE (-200,-100)-(-200,100)
80 LINE -(200,100)
90 LINE -(200,-100)
100 LINE -(-200,-100)
110 PI=4*ATN(1)
120 PSET (0,0)
130 FOR K=0 TO 100
140 LINE- (200*SIN(4*K*PI/100),100*SIN(6*K*PI/100))
150 NEXT
160 END
```

Exercices d'application

6. Soit f la fonction numérique définie par :
$$f(x) = \ln\left|1 - \frac{2}{x}\right|.$$
1° Étudier les variations de f.
2° Tracer la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On prendra $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2$ cm.
3° Les coordonnées (x, y) d'un point mobile M sont données en fonction du temps t par :
$$x = \frac{2}{1-t} \quad \text{et} \quad y = \ln t, \quad \text{avec} \quad 0 < t < 1.$$
a) Montrer que la trajectoire du point $M(t)$ est une partie Γ, que l'on précisera, de la courbe $\mathscr{C}$.
b) Dessiner avec précision les points $M(0,2)$, $M(0,4)$, $M(0,6)$, $M(0,8)$. Décrire le mouvement de $M(t)$ sur la trajectoire Γ.

7. Construire la courbe paramétrée :
$$\begin{cases} x = \cos 3t \\ y = \cos t \sin t. \end{cases}$$

8. Construire la courbe paramétrée :
$$\begin{cases} x = \cos 4t + 4\cos t \\ y = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}\sin 3t. \end{cases}$$
Préciser la forme de la courbe au voisinage du point $M\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

9. Construire la courbe paramétrée :
$$\begin{cases} x = t - 1 \\ y = 1 - \dfrac{1}{t} - \ln t. \end{cases}$$
On précisera le sens de parcours sur la courbe quand t croît.

10. Construire la courbe paramétrée
$$\begin{cases} x = t\ln t \\ y = \dfrac{1}{t}\ln t. \end{cases}$$
(On montrera que l'on peut réduire l'ensemble de variation de t en comparant les points $M(t)$ et $M\left(\frac{1}{t}\right)$.)

11. Construire la courbe paramétrée :
$$\begin{cases} x = \dfrac{t^2+1}{2t} \\ y = \dfrac{2t-1}{t^2}. \end{cases}$$

12. Construire les courbes paramétrées :
a) $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t + t^3; \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x = 3t - t^3 \\ y = 3t^2. \end{cases}$

TRAVAUX PRATIQUES

ÉTUDE D'UNE COURBE PARAMÉTRÉE

On considère la courbe paramétrée Γ, $t \mapsto M(t)$, définie, dans un repère orthonormal du plan par :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{3}{t^2 - 2t} \\ y(t) = \dfrac{t^2 - 3}{t}. \end{cases}$$

1° Pour quelles valeurs du paramètre t le point $M(t)$ est-il défini?

2° Étudier les variations des fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$. Rassembler les résultats dans un même tableau.

3° Étude des branches infinies de Γ.
a) Étudier les limites de $x(t)$ et $y(t)$ lorsque $t \to -\infty$. En déduire l'allure de la courbe Γ lorsque $t \to -\infty$.
b) Même question lorsque $t \to +\infty$, lorsque $t \overset{>}{\to} 2$, lorsque $t \overset{<}{\to} 2$,
c) Étudier les limites de $x(t)$ et $y(t)$ lorsque $t \overset{>}{\to} 0$. Montrer que $\dfrac{y(t)}{x(t)}$ a une limite finie, a, lorsque $t \overset{>}{\to} 0$, et que $y(t) - ax(t)$ a une limite finie, b, lorsque $t \overset{>}{\to} 0$.
En déduire que la droite Δ d'équation $y = ax + b$ est asymptote à Γ.
Montrer que Δ et Γ n'ont pas de point commun. En déduire l'allure de Γ lorsque $t \overset{>}{\to} 0$.
d) Étudier de même l'allure de Γ lorsque $t \overset{<}{\to} 0$.

4° Démontrer qu'il existe deux valeurs distinctes, t_1 et t_2, du paramètre t telles que $M(t_1) = M(t_2)$. Calculer t_1 et t_2 et déterminer les tangentes à Γ au point $M(t_1)$ et au point $M(t_2)$.

5° Tracer la courbe Γ en utilisant les indications précédentes. On dessinera avec précision les points $M(t)$, et les tangentes à Γ en ces points, pour les valeurs suivantes de t : $-3, -2, -1, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 3, 4, 5$.

On orientera les différentes branches de Γ dans le sens des « t croissants ».

ÉPICYCLOÏDE, HYPOCYCLOÏDE

Partie I

Le plan $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'axes $x'Ox$ et $y'Oy$. Le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon R $(R > 0)$ coupe la demi-droite Ox en A.

Soit γ le cercle de centre ω et de rayon r $(r > 0)$ tangent extérieurement à $\mathscr{C}$ en A. On fait rouler sans glisser le cercle γ sur le cercle $\mathscr{C}$ dans le sens direct.

On se propose de déterminer le lieu du point M de γ initialement confondu avec A.

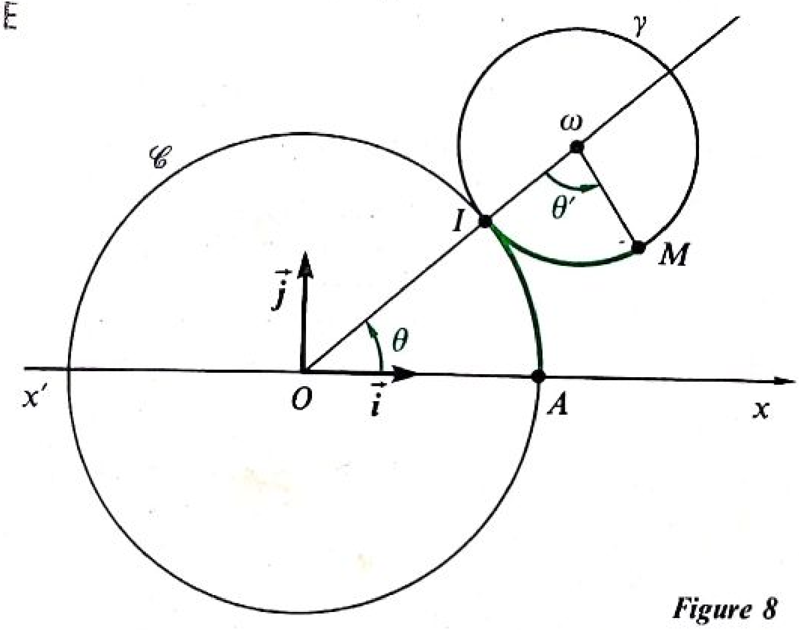


Figure 8

La figure 8 représente une position du cercle γ au cours du roulement; I est le point de contact de $\mathscr{C}$ et de γ.

1° On pose $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OI}) = \theta$ rad (2π) et $(\overrightarrow{\omega I}, \overrightarrow{\omega M}) = \theta'$ rad (2π) *de sorte qu'au cours du roulement* θ *et* θ' *décrivent l'intervalle* $[0, +\infty[$.
La condition de roulement sans glissement se traduit par l'égalité des longueurs des arcs $\widehat{AI}$ *de* $\mathscr{C}$ *et* $\widehat{IM}$ *de* γ. *En déduire que* $\theta' = \dfrac{R}{r}\theta$.

2° Démontrer que les coordonnées de M *sont :*

$$\begin{cases} x = (R+r)\cos\theta - r\cos\left[\left(1+\dfrac{R}{r}\right)\theta\right] \\ y = (R+r)\sin\theta - r\sin\left[\left(1+\dfrac{R}{r}\right)\theta\right]. \end{cases}$$

On obtient ainsi une représentation paramétrique du lieu Γ *de* M, *le paramètre* θ *décrivant l'intervalle* $[0, +\infty[$.
On dit que la courbe Γ est une **épicycloïde.**

3° On suppose que $r = R = 3$ cm *et que* $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ cm. *On se propose de construire* Γ.
a) Que peut-on dire des points $M(\theta)$ *et* $M(\theta + 2\pi)$*? Des points* $M(\theta)$ *et* $M(2\pi - \theta)$*? En déduire une réduction de l'intervalle de variation de* θ.
b) Pour les valeurs suivantes de θ : $\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{6}, \pi$, *construire avec précision les points* $M(\theta)$ *et les tangentes à* Γ *en ces points.*
c) Calculer le coefficient directeur $m(\theta)$ *de la droite* $(AM(\theta))$. *Étudier la limite de* $m(\theta)$ *lorsque* θ *tend vers* 0 *par valeurs* > 0.
En déduire l'existence d'une tangente à Γ *au point* $M(0)$.
d) Construire la courbe Γ *en utilisant les indications précédentes.*

4° On suppose maintenant que $r = \dfrac{R}{2} = 2$ cm *et que* $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ cm. *Programmer le calcul des coordonnées des points* $M(\theta)$. *Construire* Γ.
On montrera que l'on peut réduire l'intervalle de variation de θ *à* $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ *et l'on déterminera les points de* Γ *où la tangente est parallèle à l'un des axes de coordonnées.*

Partie II

On suppose maintenant que γ est initialement tangent intérieurement à $\mathscr{C}$ en A (ce qui suppose $r < R$) et que γ roule sans glisser sur $\mathscr{C}$, à l'intérieur de $\mathscr{C}$, dans le sens direct (figure 9).

On pose :

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OI}) = \theta \quad (2\pi)$$

et $$(\overrightarrow{\omega M}, \overrightarrow{\omega I}) = \theta' \quad (2\pi),$$

de sorte qu'au cours du mouvement θ et θ' décrivent l'intervalle $[0, +\infty[$.

1° Montrer que les coordonnées de M *s'expriment en fonction de* θ *par :*

$$\begin{cases} x = (R-r)\cos\theta + r\cos\left[\left(1-\dfrac{R}{r}\right)\theta\right] \\ y = (R-r)\sin\theta + r\sin\left[\left(1-\dfrac{R}{r}\right)\theta\right]. \end{cases}$$

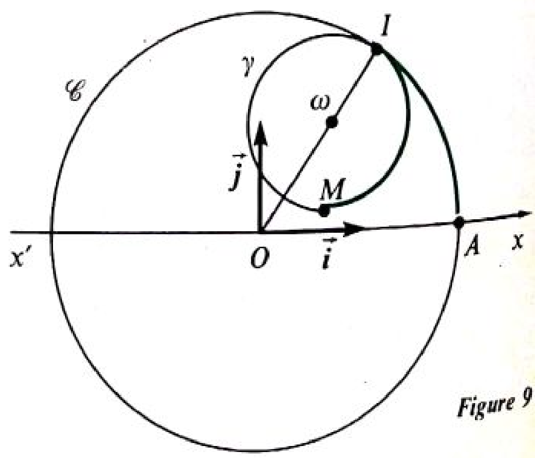


Figure 9

On obtient ainsi une représentation paramétrique du lieu Γ *de* M, *le paramètre* θ *décrivant l'intervalle* $[0, +\infty[$.
On dit que la courbe Γ est une **hypocycloïde.**

2° Quel est le lieu de M *lorsque* $r = \dfrac{R}{2}$*?*

3° On suppose dans cette question que $r = \dfrac{R}{4}$.

a) Démontrer que x et y s'expriment simplement à l'aide de $\cos^3 \theta$ *et* $\sin^3 \theta$.

b) Que peut-on dire des points $M(\theta)$ *et* $M(\theta + 2\pi)$*?* $M(\theta)$ *et* $M(2\pi - \theta)$*?* $M(\theta)$ *et* $M(\pi - \theta)$*?* $M(\theta)$ *et* $M\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$*? Conclure.*

c) Étudier les variations de x et y en fonction de θ.

d) Déterminer la tangente à Γ *au point* $M(0)$.

e) On suppose $R = 6$ cm, $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ cm.

Programmer le calcul des coordonnées des points $M(\theta)$.

Construire la courbe Γ. (On dit que Γ est une **astroïde.**)

COURBE DE BÉZIER

Partie I

1° Soient A, B, C trois points non alignés du plan $\mathscr{P}$.

Montrer que pour chaque réel t du segment $[0, 1]$, *il existe un unique point* $M(t)$ *tel que :*

$$(1 - t)^2\overrightarrow{M(t)A} + 2t(1 - t)\overrightarrow{M(t)B} + t^2\overrightarrow{M(t)C} = \vec{0}.$$

2° On considère un repère orthonormal $(A, \vec{i}, \vec{j})$, *d'origine A, tel que* $\vec{i} = \dfrac{\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AC}\|}$. *Dans ce repère B a pour coordonnées* (x_B, y_B) *et C* $(x_C, 0)$.

a) Quelles sont les coordonnées de $M(t)$ *dans le repère* $(A, \vec{i}, \vec{j})$*?*

b) Montrer que le support Γ *de la courbe paramétrée* $t \mapsto M(t)$, *où* $t \in [0, 1]$, *est inclus dans le triangle défini par A, B et C. Déterminer* $M(0)$ *et* $M(1)$.

On dit que Γ est la **courbe de Bézier** associée au triplet (A, B, C).

c) Quelles sont les tangentes à la courbe en $M(0)$ *et* $M(1)$*?*

3° Tracer la courbe Γ *dans les cas suivants :*

a) $x_B = 1$, $y_B = 1$, $x_C = 3$;

b) $x_B = 3$, $y_B = 1$, $x_C = 1$.

Partie II

1° Soient A_1, A_2, A_3, A_4 *quatre points du plan* $\mathscr{P}$, *sommets d'un carré.*

Montrer que pour chaque réel t du segment $[0, 1]$, *il existe un unique point* $M(t)$ *tel que :*

$$C_3^0(1 - t)^3\overrightarrow{M(t)A_1} + C_3^1(1 - t)^2 t\overrightarrow{M(t)A_2} + C_3^2(1 - t)t^2\overrightarrow{M(t)A_3} + C_3^3 t^3\overrightarrow{M(t)A_4} = \vec{0}.$$

2° Montrer que, selon la disposition des points A_1, A_2, A_3, A_4, *la ligne polygonale* $A_1A_2A_3A_4$, *réunion des trois segments* $[A_1, A_2]$, $[A_2, A_3]$, $[A_3, A_4]$, *peut présenter trois formes différentes. Dans chacun de ces trois cas de figure :*

a) Choisir un repère convenable et déterminer les coordonnées de $M(t)$.

b) Montrer que le support Γ *de la courbe paramétrée* $t \mapsto M(t)$, *où* $t \in [0, 1]$, *est inclus dans le carré.*

On dit que Γ est la courbe de Bézier associée au 4-uplet (A_1, A_2, A_3, A_4).

c) Montrer que la tangente à Γ *en* $M(0)$ *est la droite* (A_1A_2) *et que la tangente à* Γ *en* $M(1)$ *est la droite* (A_3A_4).

d) Construire Γ *dans chacun des cas de figure. (Prendre la longueur du côté du carré égale à* 10 cm.*)*

ÉTUDE LOCALE D'UNE COURBE PARAMÉTRÉE

Soit Γ *une courbe paramétrée définie, dans un repère* $\mathscr{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$, *par :*

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \quad t \in \mathscr{D}.$$

On suppose qu'il existe un intervalle $[t_0 - h, t_0 + h]$ *dans lequel* $f(t)$ *et* $g(t)$ *s'écrivent sous la forme :*

$$\begin{cases} f(t) = a_0 + a_1(t - t_0) + a_2(t - t_0)^2 + (t - t_0)^2\varepsilon_1(t) \\ g(t) = b_0 + b_1(t - t_0) + b_2(t - t_0)^2 + (t - t_0)^2\varepsilon_2(t), \end{cases}$$

où $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$ *sont des réels donnés et où* ε_1 *et* ε_2 *sont deux fonctions qui tendent vers 0 lorsque* t *tend vers* t_0.

1° Montrer que $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t_0) = a_1\vec{i} + b_1\vec{j}$.

2° On pose $\vec{V} = a_1\vec{i} + b_1\vec{j}$ *et* $\vec{W} = a_2\vec{i} + b_2\vec{j}$ *et on suppose que* $\vec{V}$ *et* $\vec{W}$ *ne sont pas colinéaires. Démontrer que les coordonnées* (X, Y) *du point* $M(t)$ *dans le repère* $(M(t_0), \vec{V}, \vec{W})$ *peuvent s'écrire sous la forme :*

$$\begin{cases} X = (t - t_0)[1 + (t - t_0)\alpha_1(t)] \\ Y = (t - t_0)^2[1 + \alpha_2(t)], \end{cases}$$

où α_1 *et* α_2 *sont deux fonctions tendant vers 0 quand* t *tend vers* t_0.
En déduire que si t *est suffisamment voisin de* t_0, *on a :*

$$\operatorname{sgn} X = \operatorname{sgn}(t - t_0) \quad \text{et} \quad Y \geqslant 0.$$

Utiliser ce résultat pour donner l'allure de la courbe Γ *au voisinage du point* $M(t_0)$ *et pour orienter cette courbe dans le sens des « t croissants ».*

3° Dans cette question Γ *est la courbe paramétrée définie par :*

$$\begin{cases} x = -1 + t - t^2 \\ y = 2 - 2t + 3t^2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

a) Donner l'allure de Γ *au voisinage du point* $M(0)$.
b) Donner l'allure de Γ *au voisinage du point* $M(1)$. *On déterminera des réels* $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$ *tels que :*

$$\begin{cases} x = a_0 + a_1(t - 1) + a_2(t - 1)^2 \\ y = b_0 + b_1(t - 1) + b_2(t - 1)^2. \end{cases}$$

c) On note $\vec{A} = \vec{i} - 2\vec{j}$ *et* $\vec{B} = -\vec{i} + 3\vec{j}$. *Trouver une équation cartésienne de* Γ *dans le repère* $(M(0), \vec{A}, \vec{B})$. *Construire* Γ.

LIEUX GÉOMÉTRIQUES

Les exemples suivants montrent comment on peut résoudre certains problèmes de lieux géométriques à l'aide d'un paramétrage.

1. *Soit* $\mathscr{D}$ *et* $\mathscr{D}'$ *deux droites orthogonales, sécantes en O. Les extrémités A et B d'un segment* $[A, B]$ *de longueur constante a se déplacent respectivement sur* $\mathscr{D}$ *et* $\mathscr{D}'$ *(figure 10).*
On se propose de déterminer le lieu géométrique d'un point M lié au segment $[A, B]$.

1° Quels sont les lieux des points A et B?

2° Déterminer géométriquement le lieu du milieu I de $[A, B]$. *(On montrera que I appartient à une courbe* $\mathscr{C}$ *et, réciproquement que tout point de* $\mathscr{C}$ *est le milieu d'un segment* $[A, B]$ *de longueur a tel que* $A \in \mathscr{D}$ *et* $B \in \mathscr{D}'$.)

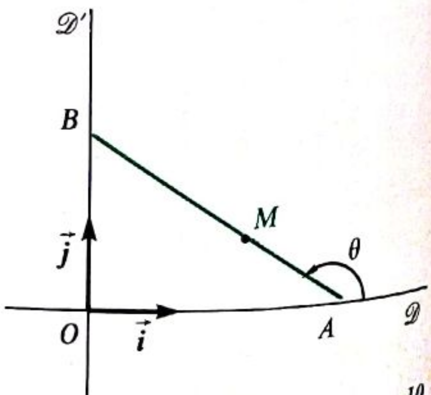


Figure 10

3° Pour traiter le cas général, on rapporte le plan à un repère orthonormal direct $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ *d'origine O et tel que* $\vec{i}$ *et* $\vec{j}$ *soient respectivement des vecteurs directeurs unitaires de* $\mathcal{D}$ *et* $\mathcal{D}'$. *On pose* $AM = \ell$ *et on désigne par* θ *la mesure principale de l'angle orienté* $(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{AB}})$ $(\theta \in]-\pi, \pi])$.

a) Exprimer les coordonnées (x, y) *de M en fonction de a,* ℓ *et* θ.

b) On suppose $a = 8$ cm, $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ cm. *Construire sur le même graphique le lieu de M dans les cas suivants :* $\ell = 2, \ell = 4, \ell = 6$.

2. *On considère un cercle* $\mathcal{C}$ *de centre* Ω *et de rayon R et un point O de ce cercle. On se propose de déterminer l'ensemble* Γ *des projetés orthogonaux de O sur les tangentes à* $\mathcal{C}$.

On rapporte le plan $\mathcal{P}$ *au repère orthonormal direct* $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ *tel que* $\vec{i} = \frac{1}{R}\overrightarrow{O\Omega}$. *Pour tout point M de* $\mathcal{C}$ *on note* θ *la mesure principale en radians de l'angle orienté* $(\widehat{\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega M}})$ $(\theta \in]-\pi, \pi])$.

1° Démontrer que les coordonnées du projeté orthogonal H de O sur la tangente à $\mathcal{C}$ *en* $M(\theta)$ *sont :*

$$\begin{cases} x = R(1 + \cos\theta)\cos\theta \\ y = R(1 + \cos\theta)\sin\theta. \end{cases}$$

2° a) Calculer les coordonnées du vecteur $\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta}$.

b) Déterminer θ *de manière que* $\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta} = \vec{0}$. *Pour chacune des valeurs de* θ *trouvées, déterminer la tangente à* Γ *au point* $M(\theta)$.

c) Pour quelles valeurs de θ *la tangente au point* $M(\theta)$ *est-elle parallèle à l'un des axes du repère* $\mathcal{R}$ *?*

3° Construction de la courbe Γ *avec les données :* $R = 5$ cm, $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ cm.

a) Que peut-on dire des points $M(\theta)$ *et* $M(-\theta)$*? En déduire une propriété de la courbe* Γ.

b) Construire géométriquement les points $M(\theta)$ *correspondant aux valeurs suivantes de* θ *:* $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \pi$.

Construire les tangentes en ces points.

c) Tracer la courbe Γ *en utilisant les indications précédentes.*

3. *Soit* $\mathcal{C}$ *un cercle de centre* Ω *et de rayon R et soit un point O tel que* $O\Omega = 2R$. *Étudier l'ensemble des projetés orthogonaux de O sur les tangentes à* $\mathcal{C}$.

EXERCICES ET PROBLÈMES

13. Le plan $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$; $\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres complexes; i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

Les affixes des points de $\mathscr{P}$ sont toujours donnés par rapport au repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$; f est l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$f(z) = z^3 + 4(1 - \mathrm{i})z^2 - 2(2 + 7\mathrm{i})z - 16 + 8\mathrm{i}.$$

Un point mobile du plan $\mathscr{P}$ a son affixe $z(t)$ donnée, en fonction du temps t par $z(t) = f(\mathrm{i}t) + 10 - 6\,\mathrm{i}$, quand t décrit l'intervalle $[0, 2]$ de $\mathbb{R}$. On notera $M(t)$ le point correspondant à l'instant t.

1° Déterminer les coordonnées $(x(t), y(t))$ de $M(t)$ dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, ainsi que les coordonnées dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$ du vecteur vitesse du mobile à l'instant t.

2° Faire un tableau indiquant les variations de x et de y en fonction de t.

3° Construire les points de la trajectoire du mobile correspondant aux valeurs : $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1, \frac{7}{4}, 2$ du réel t et un vecteur directeur des tangentes à la trajectoire pour les valeurs : $0, \frac{2}{3}, \frac{7}{4}, 2$ de t.

4° Déduire de ce qui précède le tracé de la trajectoire du mobile, en indiquant le sens du parcours, quand t décrit $[0, 2]$.

14. L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit Γ la courbe paramétrée définie par :

$$\begin{cases} x = 1 + 3t + t^2 \\ y = 2 + 2t^2 \\ z = 3 + 4t - 2t^2. \end{cases}$$

On note A le point $M(0)$, $\vec{u}$ le vecteur de coordonnées $(3, 0, 4)$ et $\vec{v}$ le vecteur de coordonnées $(1, 2, -2)$.

1° Démontrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires. Calculer $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$, et une valeur approchée en degrés de l'angle non orienté des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$.

2° Montrer que la courbe Γ est contenue dans le plan $\mathscr{P}$ de repère $(A, \vec{u}, \vec{v})$.

3° Trouver une équation cartésienne de Γ dans le repère $(A, \vec{u}, \vec{v})$. Tracer Γ dans le repère $(A, \vec{u}, \vec{v})$ de $\mathscr{P}$.

15. On considère un cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[O, A]$ et la droite $\mathscr{D}$ tangente à $\mathscr{C}$ en A. Pour tout point M de $\mathscr{C}$ distinct de O, la droite (OM) coupe $\mathscr{D}$ en Q. Soit P le point défini par $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{PQ}$.

On se propose de déterminer le lieu Γ de P lorsque M décrit $\mathscr{C} \setminus \{O\}$.

On pose $OA = 2a$ $(a > 0)$ et on rapporte le plan au repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\vec{i} = \frac{1}{2a}\overrightarrow{OA}$. Soit θ la mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM}})$.

1° Calculer les coordonnées de M en fonction de θ.

2° En déduire les coordonnées de P en fonction de θ.

3° Construire la courbe Γ.

16. Reprendre l'exercice précédent lorsque $\mathscr{D}$ est le diamètre de $\mathscr{C}$ orthogonal à (OA).

17. L'unité de temps est la seconde, l'unité de longueur est le centimètre. Un point M se déplace dans le plan rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de façon qu'à chaque instant t $(t > 0)$ les coordonnées du vecteur vitesse soient :

$$\left(x' = \frac{1}{t^2},\ y' = \frac{1}{t}\right).$$

1° Déterminer les coordonnées du point M sachant qu'en $t = 1$, M est en $A(0, 2)$.

2° Donner une équation cartésienne de la trajectoire, et la tracer.

18. Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (On prendra 4 cm pour unité.)

I — Soit n un entier naturel. On considère l'application f_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$\begin{cases} f_n(x) = nx + |x| \ln(x^2) & \text{si } x \neq 0 \\ f_n(0) = 0 & \text{(ln désigne le logarithme népérien).} \end{cases}$$

On désigne par :

- $\mathscr{C}_n$, la courbe représentative de f_n dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$;
- $\mathscr{C}_n^+$, la partie de la courbe $\mathscr{C}_n$ dont les points ont une abscisse positive;
- $\mathscr{C}_n^-$, la partie de la courbe $\mathscr{C}_n$ dont les points ont une abscisse négative.

1° Donner l'expression de $f_n(x)$ pour x strictement positif puis pour x strictement négatif.

Démontrer que f_n est continue en 0. f_n est-elle dérivable en 0?

2° Étudier les variations de f_n.

3° Soit A_n le point de $\mathscr{C}_n^+$ en lequel la tangente est parallèle à l'axe $(x'x)$.

Déterminer les coordonnées de A_n; démontrer que les points A_n, quand n décrit $\mathbb{N}$, appartiennent à une droite fixe $\mathscr{D}$ que l'on déterminera.

4° Soit B_n le point d'intersection autre que O de $\mathscr{C}_n^+$ avec l'axe $(x'x)$.

Démontrer que la tangente à $\mathscr{C}_n$ en B_n a une direction indépendante de n.

II — Un point mobile M a pour coordonnées dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$:

$$\begin{cases} x = \mathrm{e}^t \\ y = 2(1 + t)\,\mathrm{e}^t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

1° Déterminer la trajectoire du point M et son sens de parcours. Construire cette courbe.

2° Calculer les coordonnées du vecteur vitesse $\overrightarrow{V}(t)$ de M au temps t.

Déterminer si la fonction qui, à t, associe $\|\overrightarrow{V(t)}\|^2$ est croissante ou décroissante.

19. On considère dans l'espace $\mathscr{E}$ un mobile M, de coordonnées dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$x = \frac{1}{1+t^2}, \quad y = \frac{t}{1+t^2}, \quad z = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

t désignant le temps et décrivant l'intervalle $[0, +\infty[$.
1° Montrer que le point M appartient à un plan $\mathscr{P}$ dont on donnera une équation.
2° Vérifier que le point O' de coordonnées $\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$ et les vecteurs $\vec{u} = \vec{j}$ et $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} - \vec{k})$ constituent un repère orthonormal de $\mathscr{P}$. Trouver un vecteur $\vec{w}$ tel que $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ soit un repère orthonormal de $\mathscr{E}$.
3° Exprimer, en fonction de t, les coordonnées X, Y et Z du point mobile M dans le repère $(O', \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$. En déduire que le point M appartient à la courbe Γ du plan $\mathscr{P}$ d'équation $4X^2 + 2Y^2 = 1$.
Tracer cette courbe dans le repère $(O', \vec{u}, \vec{v})$. Préciser la trajectoire de M et le sens de parcours sur sa trajectoire.

20. Soit $\mathscr{P}$ le plan orienté muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On considère un point C situé sur le cercle de centre O de rayon 8, tel que l'angle de vecteurs $(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OC}})$ ait une mesure t appartenant à l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
On désigne respectivement par A, B et M les projections orthogonales de C sur les droites Ox, Oy et (AB).
1° Vérifier que $\|\overrightarrow{AB}\|$ est constante.
2° Montrer qu'une équation de la droite (AB) est :

$$x \sin t + y \cos t - 8 \sin t \cos t = 0.$$

Démontrer que les coordonnées de M sont :

$$\begin{cases} x = 8 \cos^3 t \\ y = 8 \sin^3 t. \end{cases}$$

3° Préciser la trajectoire de M quand t décrit l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
4° Calculer les composantes du vecteur vitesse $\vec{V}(t)$ de M à l'instant t; en déduire le réel :

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \|\vec{V}(t)\| \, dt.$$

5° On suppose dans cette question que t appartient à l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
a) Déterminer une équation cartésienne de la tangente en M à la trajectoire. Reconnaître cette droite.
b) Linéariser $\sin^3 t$ et $\cos^3 t$. Exprimer l'affixe de M en fonction de $\alpha = \cos t + i \sin t$.
c) Soit I le barycentre des points O, A, B affectés respectivement des coefficients -2, 3, et 3.
Vérifier que M est l'image de C dans la rotation de centre I et dont une mesure de l'angle est $-4t$. En déduire d'une part une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{IM}})$, et d'autre part que M est sur un cercle de centre I et de rayon indépendant de t.

21. I – *Question préliminaire :*
Soit g la fonction polynôme définie dans $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = x^2 + x - m,$$

où m est un paramètre réel non nul.
1° Résoudre l'équation $g(x) = 0$.
2° Lorsque cette équation a deux racines réelles distinctes x' et x'' ($x' < x''$), placer -1 et 0 par rapport à x' et x''. Pour cela on pourra étudier le signe de $g(0)$ et $g(-1)$ et démontrer que :
- si $m > 0$, -1 et 0 sont situés entre x' et x'';
- si $m < 0$, les racines x' et x'' sont négatives et situées entre -1 et 0.

Les parties II, III et IV sont dans une large mesure indépendantes. Dans ces trois parties on appelle $\mathscr{P}$ un plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

II – Soit $m > 0$. Soit f_m l'application définie sur $\mathbb{R}^* \setminus \{-1\}$ par :

$$f_m(x) = x + 1 + m \ln\left|1 + \frac{1}{x}\right|$$

et $\mathscr{C}_m$ sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
1° Donner les limites de f_m aux bornes de son ensemble de définition.
2° Étudier les variations de f_m.
3° Étudier les branches infinies de $\mathscr{C}_m$. Étudier complètement la position des courbes $\mathscr{C}_m$ par rapport à leur asymptote oblique $\mathscr{D}$.
4° Démontrer que toutes les courbes $\mathscr{C}_m$ passent par un point fixe I. Démontrer que I est centre de symétrie de chaque courbe $\mathscr{C}_m$.
5° Construire $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_1$ dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On prendra comme unité 2 cm. (On ne précisera pas les points d'intersection avec les axes ni les points d'inflexion.)
6° Soit λ un réel tel que $0 < \lambda < 1$ et soit $\mathscr{A}(\lambda)$ l'aire de la partie du plan limitée par les courbes $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_1$, et les droites d'équation $x = \lambda$ et $x = 1$. Calculer $\mathscr{A}(\lambda)$. Quelle est la limite de $\mathscr{A}(\lambda)$ lorsque λ tend vers 0^+ ?

III – Soit $t \in \mathbb{R}^*$ et g_t l'application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ telle que

$$g_t : M(x, y) \mapsto M'(x', y') \begin{cases} x' = x \\ y' = (1-t)x + ty + 1 - t. \end{cases}$$

1° Quel est l'ensemble des points invariants par g_t?
2° Soit H l'image de M par la projection sur la droite $\mathscr{D}$ (dont une équation est $y = x + 1$), parallèlement à l'axe des ordonnées.
Exprimer $\overrightarrow{HM'}$ en fonction de $\overrightarrow{HM}$.
3° Soit $\mathscr{F} = \{\mathscr{C}_m, m > 0\}$, où $\mathscr{C}_m$ est la courbe définie en II.
a) Démontrer que, $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, l'image par g_t d'un élément de $\mathscr{F}$ est un élément de $\mathscr{F}$.
b) Déterminer le réel t tel que l'image de $\mathscr{C}_2$ par g_t soit $\mathscr{C}_1$.

IV – Soit M un point mobile dans le plan $\mathscr{P}$ dont les coordonnées à la date t ($t \in \mathbb{R}_+^*$) sont :

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{e^t - 1} \\ y = \dfrac{1}{e^t - 1} + 2t + 1. \end{cases}$$

1° Démontrer que la trajectoire γ du point M est contenue dans la courbe $\mathscr{C}_2$.
2° Déterminer l'image de l'intervalle $]0, +\infty[$ par la fonction $h : t \mapsto \dfrac{1}{e^t - 1}$. En déduire la trajectoire γ. Préciser le sens de parcours de M.

22. Il n'est pas nécessaire d'avoir traité la partie II pour aborder la suite.
Soit $\mathscr{P}$ un plan orienté rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$; les points de $\mathscr{P}$ sont repérés soit par leurs coordonnées (x, y), soit par leur affixe $x + iy$. Le but de ce problème est l'étude de l'ensemble Γ des points $M(t)$, $t \in \mathbb{R}$, du plan $\mathscr{P}$, de coordonnées $(x(t), y(t))$ telles que :

$$\begin{cases} x(t) = e^t \cos t \\ y(t) = e^t \sin t. \end{cases}$$

I – *1° a)* Vérifier, pour tout t réel, les relations :

$$\cos t - \sin t = \sqrt{2} \cos (t + \pi/4)$$

et

$$\cos t + \sin t = \sqrt{2} \sin (t + \pi/4).$$

b) Étudier les variations des fonctions : $x(t \mapsto x(t))$ et $y(t \mapsto y(t))$ sur l'intervalle $[0, \pi/2]$.
c) Tracer dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la portion de Γ, ensemble des points $M(t)$ lorsque t décrit $[0, \pi/2]$. (On aura soin, en particulier, de représenter les points $M(0)$, $M(\pi/4)$, $M(\pi/2)$ et les tangentes à Γ en ces points.)
2° Calculer, pour tout réel t :

$$\cos\left(\overrightarrow{OM}(t), \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right) \quad \text{et} \quad \sin\left(\overrightarrow{OM}(t), \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right).$$

En déduire que l'angle $\widehat{\left(\overrightarrow{OM}(t), \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)}$ est constant et en donner une mesure.
3° On pose, pour tous réels a et b, $L_a^b = \displaystyle\int_a^b \left\| \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right\| dt.$
Donner l'expression de $L_0^{\pi/2}$ et en calculer une valeur approchée à 10^{-2} près. Étudier la limite éventuelle de L_t^0 lorsque t tend vers $-\infty$.

II – *1°* Montrer que les fonctions x et y sont des solutions sur $\mathbb{R}$ d'une même équation différentielle linéaire et homogène du second ordre à coefficients constants.
2° Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$X'' - 2X' + 2X = 0.$$

III – *1°* Pour tout réel t, on note f_t l'application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui, au point M d'affixe Z, fait correspondre le point M_1 d'affixe Z_1 telle que : $Z_1 = z(t)Z$, où $z(t)$ est l'affixe du point $M(t)$ défini dans la partie I.
a) Préciser la nature de f_t et ses éléments remarquables.
b) Montrer que, pour tous t et t' réels : $f_t \circ f_{t'} = f_{t+t'}$.
2° a) Montrer que, pour tous t et t_1 réels :

$$f_t(M(t_1)) = M(t + t_1).$$

En déduire que, pour tout réel t, $f_t(\Gamma) = (\Gamma)$.
b) Montrer que, si $M_1 = M(t_1)$ est un point quelconque de Γ, l'ensemble : $\{ f_t(M_1), t \in \mathbb{R} \}$ est égal à Γ.

IV – Soit t un réel fixé non nul. On note A_0 le point $M(0)$ et on définit les points A_n $(n \in \mathbb{N}^*)$ par la relation de récurrence :

$$A_n = f_t(A_{n-1}) \quad \text{si} \quad n \geq 1.$$

1° a) Calculer en fonction de t la longueur A_0A_1.
b) Montrer que la suite $(A_{n-1}A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ des longueurs $A_{n-1}A_n$ est une suite géométrique.
c) En déduire une expression de :

$$L_n(t) = A_0A_1 + A_1A_2 + \dots + A_{n-1}A_n$$

en fonction de n et t.
2° On suppose $t < 0$. Montrer l'existence de $\lim\limits_{n \to +\infty} L_n(t)$ et calculer sa valeur $L(t)$.
Montrer que $\dfrac{e^{2t} - 2e^t \cos t + 1}{(1 - e^t)^2} = 1 + 2e^t \dfrac{1 - \cos t}{(1 - e^t)^2}$.
En déduire la limite de $L(t)$ lorsque t tend vers zéro par valeurs négatives. Comparer ce résultat à la limite L_t^0 trouvée en I – *3°*.

23. I – *Partie préliminaire :* Factoriser, dans $\mathbb{R}$, le polynôme $2x^2 - \sqrt{2}x - 1$, et étudier, sur l'intervalle $[0, \pi]$, le signe de l'expression :

$$f(\theta) = 2\cos^2 \theta - \sqrt{2}\cos \theta - 1.$$

On introduira dans cette étude l'unique réel $\theta_0 \in]0, \pi[$ tel que : $\cos \theta_0 = \dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{10}}{4}$. (Pour la suite du problème, on considère que θ_0 radians correspondent approximativement à 116 degrés.)

II – Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, l'unité de longueur est le centimètre; on considère le point A d'affixe -4 et le cercle $\mathscr{C}$ de centre A et de rayon $4\sqrt{2}$.
Objet du problème : A tout réel θ on associe le point $P(\theta) \in \mathscr{C}$ tel que θ soit une mesure en radians de l'angle $\widehat{(\vec{i}, \overrightarrow{AP(\theta)})}$. Soit $T(\theta)$ la tangente à $\mathscr{C}$ au point $P(\theta)$; on appelle $M(\theta)$ le projeté orthogonal de O sur $T(\theta)$.
On se propose d'étudier le lieu $\mathscr{L}$ des points $M(\theta)$ obtenus lorsque θ décrit $\mathbb{R}$.
1° a) Représenter graphiquement sur papier millimétré, avec le plus grand soin, les points $P(\theta)$ et $M(\theta)$ obtenus pour :

$$\theta \in \left\{0, \pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \theta_0\right\}.$$

On disposera ainsi des premiers éléments d'une figure destinée, sous le nom de « figure 1 », à être complétée aux questions *2°c*, *2°d* et *3°*.
b) Démontrer que la droite (OA) est un axe de symétrie de $\mathscr{L}$.
c) θ étant quelconque, on note $\vec{u}(\theta)$ le vecteur unitaire tel que $(\vec{i}, \vec{u}(\theta)) = \theta$, et $H(\theta)$ le projeté orthogonal de O sur la droite $(AP(\theta))$.
Représenter O, A, $\mathscr{C}$, $P(\theta)$, $T(\theta)$, $M(\theta)$, $\vec{u}(\theta)$, $H(\theta)$ sur une nouvelle figure (figure 2) devant être complétée à la question *4°b*.
Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{AP(\theta)}$ et $\overrightarrow{AH(\theta)}$ au moyen du vecteur $\vec{u}(\theta)$; en déduire que les coordonnées $(x(\theta), y(\theta))$ du point $M(\theta)$ sont données par :

$$\begin{cases} x(\theta) = 4(\sqrt{2} - \cos \theta) \cos \theta \\ y(\theta) = 4(\sqrt{2} - \cos \theta) \sin \theta. \end{cases}$$

d) Démontrer que l'affixe $m(\theta)$ du point $M(\theta)$ est donnée par $m(\theta) = 4\sqrt{2}\, e^{i\theta} - 2e^{2i\theta} - 2 \quad (i \in \mathbb{C};\ i^2 = -1)$.

e) De même, démontrer que l'affixe $h(\theta)$ du point $H(\theta)$ est donnée par : $h(\theta) = -2 + 2e^{2i\theta}$.

2° Construction du lieu $\mathscr{L}$:

a) Expliquer pourquoi on peut, dans un premier temps, se limiter au cas où : $\theta \in [0, \pi]$.

b) Étudier les variations, sur $[0, \pi]$, des fonctions $\theta \mapsto x(\theta)$ et $\theta \mapsto y(\theta)$. (On établira en particulier que : $y'(\theta) = -4f(\theta)$, avec les notations de la partie I.)

c) Représenter sur la figure 1 les tangentes à $\mathscr{L}$ aux points $M(0)$, $M\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $M(\theta_0)$, $M(\pi)$, $M\left(\frac{\pi}{2}\right)$. (On rappelle que la tangente à $\mathscr{L}$ au point $M(\theta)$ est dirigée par le vecteur de coordonnées $(x'(\theta), y'(\theta))$, noté $\frac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta}(\theta)$, si ce vecteur n'est pas nul.)

d) Achever le tracé de $\mathscr{L}$, en se conformant aux résultats précédents.

3° Construction de la tangente en un point quelconque du lieu $\mathscr{L}$:

Démontrer que l'affixe du vecteur $\frac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta}(\theta)$ s'obtient en multipliant par i l'affixe du vecteur $\overrightarrow{H(\theta)M(\theta)}$. Interpréter géométriquement, et en déduire une construction pratique de la tangente à $\mathscr{L}$ en n'importe quel point; illustrer ce résultat (sur la figure 1) dans le cas particulier où $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

4° Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, calculer l'affixe $m(\theta + \pi)$ du point $M(\theta + \pi)$, et démontrer que l'affixe du milieu $L(\theta)$ du segment $[M(\theta)M(\theta + \pi)]$ est donnée par :

$$\ell(\theta) = -2(1 + e^{2i\theta}).$$

b) Démontrer que le lieu du point $L(\theta)$, lorsque θ décrit $\mathbb{R}$, est le cercle Γ de diamètre $[O, A]$. Illustrer ce résultat, sur la figure 2.

c) Démontrer que $H(\theta)$ est le point de Γ diamétralement opposé à $L(\theta)$.

24. Soit la famille de fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par $f_a(x) = x\,e^{-ax+1}$ où a est un nombre réel.

Le plan $\mathscr{P}$ étant muni du repère orthonormal $\mathscr{R}(O, \vec{i}, \vec{j})$, on note $\mathscr{C}_a$ la courbe représentative de f_a dans le repère $\mathscr{R}$.

I — *1°* Démontrer que, pour tous réels x et a, $f_a(-x) + f_{-a}(x) = 0$. En déduire une construction de $\mathscr{C}_{-a}$ à partir de $\mathscr{C}_a$.

2° Démontrer que pour tous réels x et a non nul, $f_a(x) = \frac{1}{a} f_1(ax)$. En déduire une construction de $\mathscr{C}_a$ à partir de $\mathscr{C}_1$ $(a \neq 0)$.

3° Étudier les variations de f_a lorsque a n'est pas nul. (On pourra, par exemple, étudier d'abord les variations de f_1 et en déduire les variations de f_a, avec a non nul.) Préciser les limites de f_a en $+\infty$ et en $-\infty$.

4° Soit E l'ensemble des points du plan $\mathscr{P}$ dont les coordonnées (x, y) vérifient la condition : $xy > 0$. Démontrer que, par tout point de E, il passe une courbe $\mathscr{C}_a$ et une seule. En déduire les positions respectives des courbes $\mathscr{C}_a$.

5° Construire sur la même figure les courbes $\mathscr{C}_a$ pour $a \in \{0, 1, -2\}$. On précisera (pour $a \neq 0$) leurs tangentes aux points d'abscisses respectives 0, $\frac{1}{a}$ et $\frac{2}{a}$.

(On prendra 5 cm pour unité.)

II — *1°* Résoudre l'équation différentielle :

$$(\sigma) \quad y'' + 2y' + y = 0.$$

2° Déterminer la solution de (σ) satisfaisant à : $y'(1) = 0$ et $y'(2) = -e$.

3° Démontrer que toutes les représentations graphiques des solutions de (σ) passant par O ont une tangente horizontale au point d'abscisse 1.

III — Dans cette partie a est un réel *strictement positif*.

On pose $I_a(1) = \int_0^1 f_a(x)\,dx$.

1° Justifier l'existence de $I_a(1)$ et en donner une interprétation géométrique.

2° Calculer $I_a(1)$ en fonction de a.

3° On se propose de démontrer que pour tout a appartenant à $\mathbb{R}_+^*$, $\frac{1}{2}e^{1-a} \leqslant I_a(1) \leqslant \frac{e}{2}$.

a) Démontrer que pour tout a ppartenant à $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout x appartenant à $[0, 1]$, on a :

$$x\,e^{1-a} \leqslant x\,e^{1-ax} \leqslant x\,e.$$

b) En déduire que $\frac{1}{2}e^{1-a} \leqslant I_a(1) \leqslant \frac{1}{2}e$.

4° Déduire de la question *3°* que, si a tend vers 0 $(a > 0)$, $I_a(1)$ a une limite que l'on déterminera.

IV — On considère dans le plan $\mathscr{P}$ le point mobile M dont les coordonnées (dans le repère $\mathscr{R}$) sont données en fonction du temps par :

$$\begin{cases} x(t) = \ln t \\ y(t) = \dfrac{\ln t}{t}\,e \end{cases} \quad t \in [e, +\infty[.$$

1° Déterminer la trajectoire $\mathscr{C}$ du point M lorsque t décrit l'intervalle $[e, +\infty[$.

2° Calculer les coordonnées du vecteur vitesse $\vec{V}(t)$ du point M.

25. Soit $\mathscr{P}$ le plan rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On note Δ la droite d'équation $x - y = 0$.

I — On considère f, la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

sur $E =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

1° Étudier les variations de cette fonction et représenter graphiquement f dans le plan $\mathscr{P}$. On note $\mathscr{C}$ la courbe ainsi obtenue.

2° *a*) Montrer que la restriction f_1 de f à $]1, +\infty[$ est une application bijective de $]1, +\infty[$ sur un intervalle I_1 à déterminer. En déduire que f est une application bijective de E sur E.

b) Exprimer $f^{-1}(x)$ et en déduire que $\mathscr{C}$ admet Δ pour axe de symétrie.

c) Démontrer que $\mathscr{C}$ est invariante dans la réflexion ayant pour axe la droite d'équation $x + y = 0$.

d) Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$U_0 \in]1, +\infty[\quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad U_{n+1} = f(U_n).$$

Calculer les trois premiers termes de la suite en fonction de U_0 et déterminer la valeur de U_0 pour laquelle la suite est convergente.

3° Soit $\alpha \in]1, \sqrt{2}[$; calculer l'aire $A(\alpha)$ de l'ensemble des points M dont les coordonnées (x, y) vérifient :

$$\begin{cases} \alpha \leqslant x \leqslant \sqrt{2} \\ x \leqslant y \leqslant f(x). \end{cases}$$

Étudier la limite de $A(\alpha)$ lorsque α tend vers 1; en déduire l'aire de la partie du plan délimitée par $\mathscr{C}$ et les droites d'équation $x = 1$, $y = 1$.

II — A tout point $M(a, b)$ de $\mathscr{P}$ on fait correspondre les points P et Q, projections orthogonales de M respectivement sur l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées. Si M est distinct de O, on associe à M le point M', projection orthogonale de O sur la droite (PQ). Dans le cas où $M = O$, P et Q sont confondus avec O, et on associe à M le point M' tel que $M' = O$.
Soit Φ l'application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ telle que $M' = \Phi(M)$, et, si $\mathscr{D}$ est un sous-ensemble de P, on notera $\mathscr{D}'$ son image par Φ.

1° Construire un point M et son image par Φ. Quelles sont les images des axes de coordonnées par Φ?

2° *a*) Soit $M \neq O$, démontrer que les coordonnées (a', b') du point M' vérifient :

$$a' = \frac{ab^2}{a^2 + b^2}, \quad b' = \frac{a^2 b}{a^2 + b^2}.$$

b) Soient $A(4, 0)$, $B(0, 4)$ et I milieu de $[A, B]$. Déterminer A', B' et I'. L'application Φ conserve-t-elle les milieux des segments?

c) Soit σ la symétrie de centre O et s la réflexion d'axe Δ. Démontrer que l'on a :

$$\sigma \circ \Phi = \Phi \circ \sigma \quad \text{et} \quad s \circ \Phi = \Phi \circ s.$$

3° Soit $\mathscr{D}_m$ la droite d'équation $y = mx$, avec $m \neq 0$. Montrer que $\mathscr{D}'_m$ est une droite dont on précisera l'équation.

III — *1°* Soit $\mathscr{L}$ la droite d'équation $y = 1$.

a) Construire l'image M' d'un point M de $\mathscr{L}$ par Φ et montrer que M' appartient à un cercle fixe.

b) On définit paramétriquement $\mathscr{L}$ par les équations :

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Déterminer les équations paramétriques de $\mathscr{L}'$. Étudier et représenter $\mathscr{L}'$.

2° Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentée en I – *1°* et définie paramétriquement par :

$$\begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{t}{\sqrt{t^2 - 1}} \end{cases} \quad t \in E.$$

Démontrer que $\mathscr{C}'$ est contenue dans le cercle de centre O et de rayon 1.

3° Déterminer les images des asymptotes de $\mathscr{C}$ par Φ et représenter ces images ainsi que $\mathscr{C}'$ dans un même repère.

26. *Note préliminaire :* Toutes les représentations graphiques demandées dans ce problème seront faites sur la même feuille de papier millimétré. L'unité sera de 5 cm.
Le plan est rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

I — *1°* Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre $\Omega(1, 0)$ et de rayon 1. Tracer le cercle $\mathscr{C}$ et en donner une équation dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2° Soient Δ la droite d'équation $x = 1$ et $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = tx$ où t est un réel. $\mathscr{D}$ coupe la droite Δ au point M_0 et le cercle $\mathscr{C}$ aux points O et M_1. On définit le point M par la relation : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{M_0 M_1}$.

a) Tracer Δ, $\mathscr{D}$, M_0, M_1 et M dans les cas particuliers où $t = 0$, $t = \dfrac{1}{2}$ et $t = 1$.

b) Calculer les coordonnées de M_0, M_1 puis celles de M en fonction de t.

3° Lorsqu'on fait varier t dans $\mathbb{R}$, démontrer que les points M se trouvent sur la courbe $\mathscr{S}$ d'équation :

$$(x - 1)x^2 + (x + 1)y^2 = 0.$$

II — Le but de cette partie est de représenter graphiquement la courbe $\mathscr{S}$.

1° On définit la fonction numérique f par :

$$f(x) = x\sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}.$$

a) Donner l'ensemble de définition, D_f, de f.

b) Donner l'ensemble de définition de la fonction dérivée de f, f' et calculer cette fonction.

c) Étudier le signe de f'. En déduire le tableau de variation de f.

2° *a*) Calculer $\displaystyle\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$. Que peut-on en conclure?

b) Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point O.

3° *a*) Représenter graphiquement f. Soit $\mathscr{S}_1$ la courbe obtenue.

b) Comment peut-on déduire $\mathscr{S}$ de $\mathscr{S}_1$? Représenter graphiquement $\mathscr{S}$.

III — On considère maintenant M comme un point mobile dont les coordonnées sont données, dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, en fonction du temps t par :

$$\begin{cases} x = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2} \\ y = \dfrac{t(1 - t^2)}{1 + t^2} \end{cases} \quad t \in [0, +\infty[.$$

1° *a*) Donner la trajectoire du mobile M et indiquer le sens dans lequel elle est parcourue.

b) A quel instant le mobile traverse-t-il l'axe (Oy)? A quel instant le mobile atteint-il son ordonnée maximale?

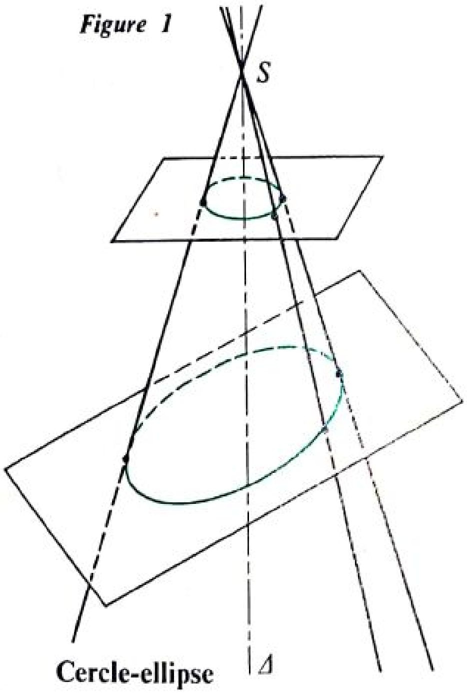
2° Calculer le vecteur vitesse $\vec{V}$ du mouvement en fonction du temps t.

CHAPITRE 10

CONIQUES

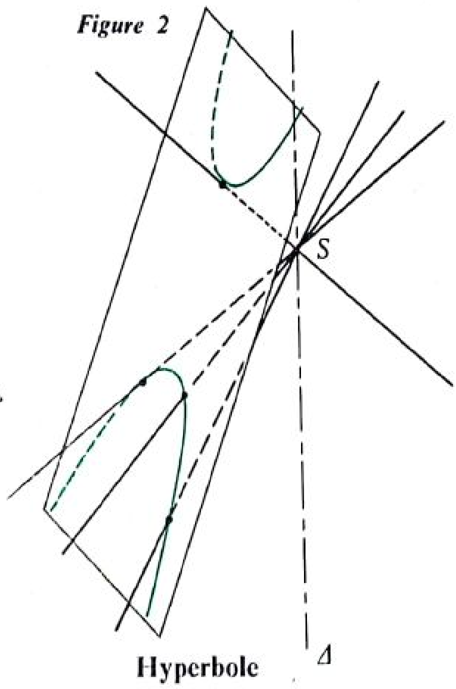
Étymologiquement, les coniques sont les courbes obtenues en coupant un cône circulaire, droit ou oblique, par un plan. Lorsque le plan ne passe pas par le sommet du cône, on obtient une **conique propre : cercle, ellipse, hyperbole, parabole,** selon l'inclinaison du plan sur l'axe du cône (figures 1, 2, 3). Lorsque le plan passe par le sommet du cône, la conique est dite **impropre,** ou **décomposée,** soit réduite au sommet du cône, soit formée de deux arêtes, distinctes ou confondues, du cône.

Figure 1



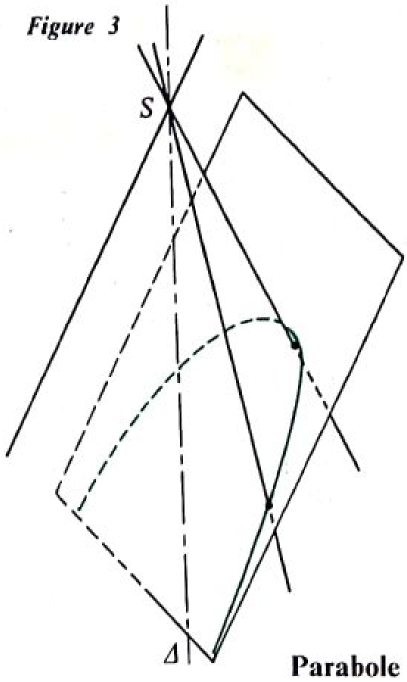
Cercle-ellipse

Figure 2



Hyperbole

Figure 3



Parabole

Liée au problème de la duplication du cube (voir activité, page 245), la découverte des sections planes d'un cône circulaire est due au géomètre et astronome grec Menechme (vers 375-325 av. J.C.). Mais c'est Appolonios de Perga (vers 260-200 av. J.C.), le *grand géomètre* comme l'appelaient ses contemporains, qui marqua sur cette question la période des mathématiques grecques. Son traité sur les sections coniques qui ne contient pas moins de 400 propositions est un exposé théorique extrêmement complet, même si, il est intéressant de le souligner, les notions d'*excentricité* et de *directrice* en sont absentes.

Au XVIIe siècle, René Descartes (1596-1650) généralise l'utilisation des équations algébriques pour représenter des courbes et reconnaît dans les coniques les courbes du second degré. A la même époque Gérard Désargues développe dans son *Brouillon project d'une atteinte aux événements des rencontres du cône avec un plan*, une étude des coniques qui constitue le point de départ de la géométrie projective. Ce sont les idées de Désargues qui sont à l'origine des contributions de Pascal à la géométrie projective, notamment de son *Essay pour les coniques*, où il établit la propriété d'alignement des trois points d'intersection des côtés opposés d'un hexagone inscrit dans une conique.

I – CONIQUES DÉFINIES PAR FOYER ET DIRECTRICE

Problème

Un point F, une droite $\mathcal{D}$ ne passant pas par F et un réel e strictement positif étant donnés, étudions l'ensemble (Γ) des points M du plan vérifiant l'égalité $\frac{MF}{MH} = e$, où H est le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$. (A noter que (Γ) est la ligne de niveau e de l'application $M \mapsto \frac{MF}{MH}$ qui, à tout point M du plan n'appartenant pas à $\mathcal{D}$, associe le rapport $\frac{MF}{MH}$ des distances de M au point F et à la droite $\mathcal{D}$.)

La droite Δ passant par F et orthogonale à $\mathcal{D}$ est axe de symétrie de l'ensemble (Γ) : si un point M appartient à (Γ), il en est de même de son symétrique dans la réflexion d'axe Δ.

Désignons par K le point d'intersection des droites $\mathcal{D}$ et Δ (figure 4).

L'égalité $\frac{MF}{MH} = e$ est équivalente à

$$MF^2 - e^2 MH^2 = 0. \qquad (1)$$

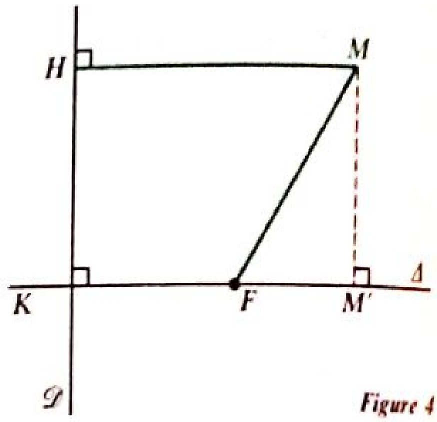


Figure 4

Appelons M' le projeté orthogonal de M sur Δ. La relation (1) s'écrit :

$$M'M^2 + M'F^2 - e^2 M'K^2 = 0,$$

soit encore : $$M'M^2 + (\overrightarrow{M'F} + e\overrightarrow{M'K}) \cdot (\overrightarrow{M'F} - e\overrightarrow{M'K}) = 0.$$

Deux cas sont alors à considérer selon que e est égal à 1 ou différent de 1.

1° $e = 1$.

Le milieu A de $[K, F]$ est le seul point de Δ appartenant à (Γ).

D'autre part (figure 5) :

$$\overrightarrow{M'F} + \overrightarrow{M'K} = 2\overrightarrow{M'A}$$

et $$\overrightarrow{M'F} - \overrightarrow{M'K} = \overrightarrow{KF}.$$

D'où :

$$(\overrightarrow{M'F} + \overrightarrow{M'K}) \cdot (\overrightarrow{M'F} - \overrightarrow{M'K}) = 2\overrightarrow{M'A} \cdot \overrightarrow{KF} = 2\overline{M'A} \times \overline{KF}.$$

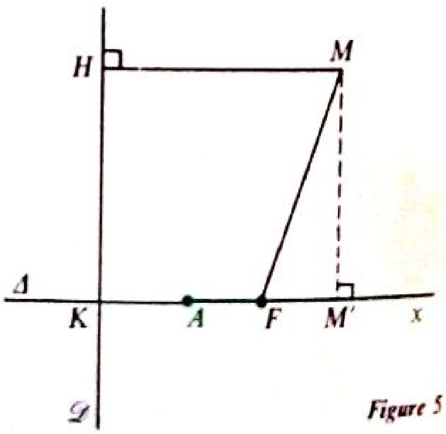


Figure 5

Par suite :

$$(\Gamma) = \{ M \in \mathcal{P} / M'M^2 = 2\overline{AM'} \times \overline{KF} \}.$$

Cette définition montre que pour tout point M de (Γ) de projeté orthogonal M' sur Δ, le produit $\overline{AM'} \times \overline{KF}$ est positif ou nul; le point M' appartient donc à la demi-droite Ax d'origine A contenant F.

De plus, tout point M' de Ax est le projeté orthogonal sur Δ de deux points de (Γ) : les points M_1 et M_2 de la droite passant par M' et orthogonale à Δ, tels que :

$$M'M_1 = M'M_2 = \sqrt{2\overline{AM'} \times \overline{KF}}.$$

2° $e \neq 1$.

On a :

$$\overrightarrow{M'F} + e\overrightarrow{M'K} = (1+e)\overrightarrow{M'A}, \quad \text{où } A \text{ est le barycentre du système } (F, 1), (K, e),$$

$$\overrightarrow{M'F} - e\overrightarrow{M'K} = (1-e)\overrightarrow{M'A'}, \quad \text{où } A' \text{ est le barycentre du système } (F, 1), (K, -e).$$

A et A' sont les deux points qui partagent le segment $[F, K]$ suivant le rapport e : $\dfrac{AF}{AK} = \dfrac{A'F}{A'K} = e$. Ce sont les seuls points de (Γ) appartenant à Δ.

L'ensemble (Γ) est alors défini par $(\Gamma) = \{ M \in \mathscr{P} / M'M^2 = (e^2 - 1)\overline{M'A} \times \overline{M'A'} \}$.

De plus :

- **Si $e < 1$,** pour tout point M de (Γ) le produit $\overline{M'A} \times \overline{M'A'}$ est négatif ou nul; le point M' appartient donc au segment $[A', A]$ (figure 6).

Tout point M' de $[A', A]$ est le projeté orthogonal sur Δ de deux points de (Γ) : les points M_1 et M_2 de la droite passant par M' et orthogonale à Δ, tels que :

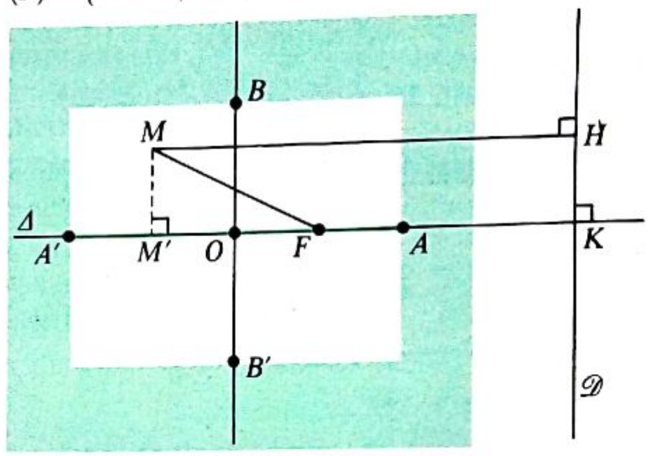


Figure 6

$$M'M_1 = M'M_2 = \sqrt{(e^2 - 1)\overline{M'A} \times \overline{M'A'}} = \sqrt{(1 - e^2)\overline{A'M'} \times \overline{M'A}}.$$

REMARQUE : L'égalité $xy = \dfrac{(x+y)^2 - (x-y)^2}{4}$ montre que le produit de deux réels x, y dont la somme $x + y$ est constante est maximal lorsque $x = y$.

Posons : $x = \overline{A'M'}$, $y = \overline{M'A}$; on a $x + y = \overline{A'A}$. Il s'ensuit que le produit $\overline{A'M'} \times \overline{M'A}$ est maximal lorsque $\overline{A'M'} = \overline{M'A}$, c'est-à-dire lorsque M' est au milieu O de $[A', A]$.

Les points B et B' de (Γ) correspondant à cette position O de M' sont tels que : $OB = OB' = \sqrt{1 - e^2}\, OA$. La courbe (Γ) est donc située à l'intérieur du rectangle limité par la zone colorée de la figure 6.

- **Si $e > 1$,** pour tout point M de (Γ) le produit $\overline{M'A} \times \overline{M'A'}$ est positif ou nul; le point M' appartient donc à l'une ou l'autre des deux demi-droites Ax et $A'x'$ d'origines respectives A et A' et ne contenant pas K.

Tout point M' d'une de ces demi-droites est le projeté orthogonal sur Δ de deux points de (Γ) : les points M_1 et M_2 de la droite passant par M' et orthogonale à Δ, tels que :

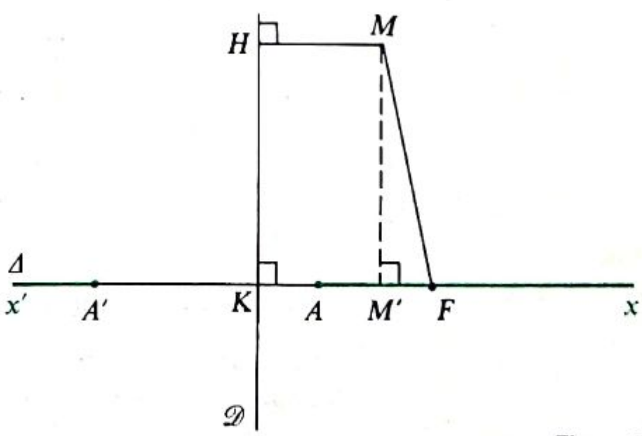


Figure 7

$$M'M_1 = M'M_2 = \sqrt{(e^2 - 1)\overline{M'A} \times \overline{M'A'}}.$$

On constate que, dans ce cas, la longueur $M'M_1$ n'est pas bornée.

DÉFINITION 1	**Un point F, une droite $\mathscr{D}$ ne passant pas par F et un réel $e > 0$ étant donnés, on appelle conique de foyer F, de directrice associée $\mathscr{D}$ et d'excentricité e, l'ensemble (Γ) des points M du plan vérifiant l'égalité $\dfrac{MF}{MH} = e$, où H est le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{D}$.**

THÉORÈME 1 et DÉFINITION 2	**Soit (Γ) la conique de foyer F, de directrice associée $\mathscr{D}$ et d'excentricité e. La droite Δ passant par F et orthogonale à $\mathscr{D}$ en K est un axe de symétrie de (Γ), appelé axe focal.** **• Si $e = 1$, il existe un seul point de (Γ), le milieu A de $[K, F]$, sur l'axe Δ et l'ensemble des points M', projetés orthogonaux des points de (Γ) sur Δ, est la demi-droite d'origine A contenant F. On dit alors que la conique (Γ) est une parabole.** **• Si $e < 1$, il existe deux points de (Γ), A et A', sur Δ et l'ensemble des points M' est le segment $[A', A]$. On dit alors que la conique (Γ) est une ellipse.** **• Si $e > 1$, il existe deux points de (Γ), A et A' sur Δ et l'ensemble des points M' est la réunion des demi-droites d'origines respectives A et A' ne contenant pas K. On dit alors que la conique (Γ) est une hyperbole.**

Le cas du cercle

On démontre, et nous l'admettrons, que l'ellipse, l'hyperbole et la parabole, définies dans ce paragraphe par *foyer* et *directrice*, sont, avec le cercle, les courbes que l'on obtient en coupant un cône circulaire par un plan ne passant pas par son sommet.

On peut alors se demander si le cercle peut, lui aussi, être défini par foyer et directrice. Autrement dit : Une conique (Γ) de foyer F, de directrice associée $\mathscr{D}$ et d'excentricité $e > 0$ peut-elle être un cercle?

Si la réponse était positive, l'axe focal Δ, qui est axe de symétrie de (Γ), serait un diamètre du cercle (Γ) et aurait avec ce cercle deux points communs A et A'.

Pour tout point M de (Γ), de projeté orthogonal M' sur Δ, on aurait alors :

$$M'M^2 = (e^2 - 1)\overline{M'A} \times \overline{M'A'}. \quad (1)$$

Or, comme (Γ) est un cercle, le triangle AMA' est rectangle en M et :

$$M'M^2 = -\overline{M'A} \times \overline{M'A'}. \quad (2)$$

La comparaison de (1) et (2) donne $e = 0$. Or on a supposé $e > 0$. Il en résulte qu'il est impossible de définir un cercle par foyer et directrice.

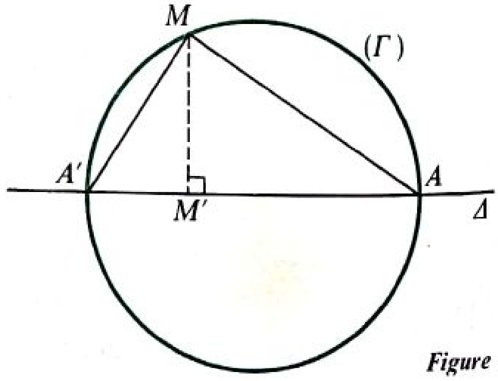


Figure 8

$\left(\text{Pour } e = 0, \text{ la définition } (\Gamma) = \left\{ M \in \mathscr{P} / \dfrac{MF}{MH} = 0 \right\} \text{ donne } (\Gamma) = \{F\}.\right)$

Cette impossibilité ne retire pas au cercle son statut de conique ; section plane d'un cône circulaire, courbe représentée par une équation du second degré, le cercle est une conique.

On trouvera à l'exercice d'application **2** ci-après une définition commune à l'ellipse, à l'hyperbole et au cercle, mais excluant la parabole.

Exercices d'application

1. On donne, dans le plan $\mathscr{P}$, un point F et une droite $\mathscr{D}$ passant par F.
Étudier suivant les valeurs du réel positif e l'ensemble des points M du plan vérifiant l'égalité $\dfrac{MF}{MH} = e$, où H est le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{D}$.

2. On donne deux points distincts A et A' du plan $\mathscr{P}$. Pour tout réel m non nul, on note (Γ_m) l'ensemble des points M du plan vérifiant l'égalité $\overline{M'M}^2 = m\,\overline{M'A} \times \overline{M'A'}$, où M' est le projeté orthogonal de M sur la droite (AA').
Démontrer que (Γ_m) est une conique dont on déterminera la nature suivant les valeurs de m.

3. On donne une droite $\mathscr{D}$ et un point A n'appartenant pas à $\mathscr{D}$. Quel est l'ensemble des centres des cercles passant par A et tangents à $\mathscr{D}$?

4. On donne une droite $\mathscr{D}$ et un cercle (C) de centre Ω. Quel est l'ensemble des centres des cercles tangents à (C) et à $\mathscr{D}$?
(On distinguera les trois cas :
- $\mathscr{D}$ est extérieure à (C),
- $\mathscr{D}$ est tangente à (C),
- $\mathscr{D}$ est sécante à (C).)

5. On donne, dans le plan $\mathscr{P}$, un point A, une droite $\mathscr{D}$ ne passant pas par A et une droite $\mathscr{D}'$ sécante avec $\mathscr{D}$. Un triangle AMB, isocèle en M $(MA = MB)$, varie de la façon suivante :
- le sommet B décrit la droite $\mathscr{D}$;
- le côté $[B, M]$ reste parallèle à $\mathscr{D}'$.

Quel est le lieu du sommet M?

6. Dans le plan, on donne deux points distincts A et B. Soit $\mathscr{D}$ la droite perpendiculaire à (AB) en B. On considère tous les cercles (C) du plan caractérisés par la propriété suivante : T et T' étant les points de contact des tangentes menées de A à un cercle (C), le triangle ATT' est équilatéral.
1° En étudiant le rapport des distances du centre d'un cercle (C) aux points A et B, déterminer et préciser la nature de l'ensemble des centres des cercles (C) qui passent par B.
2° Déterminer et préciser la nature de l'ensemble des centres des cercles (C) tangents à la droite $\mathscr{D}$.
Pour faire une figure, on prendra $AB = 6$ cm.

7. Démontrer que l'image d'une conique par une similitude est une conique de même excentricité que la première.

II – ÉQUATION RÉDUITE ET FORME DES CONIQUES

CERCLE

Parmi les coniques, le cercle nous est familier. Rappelons simplement que dans un repère orthonormal $\mathscr{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$, l'équation du cercle (C) de centre O, origine du repère $\mathscr{R}$, et de rayon a est :

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

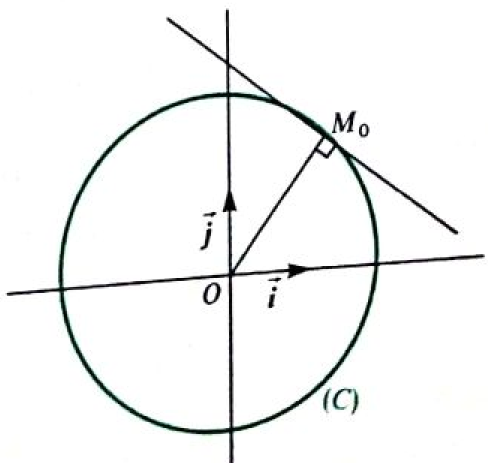


Figure 9

Rappelons également qu'en tout point $M_0(x_0, y_0)$ de (C), il existe une tangente à (C) : la droite passant par M_0 et orthogonale au diamètre (OM_0) (figure 9).
L'équation dans le repère $\mathscr{R}$ de cette tangente est :

$$x_0x + y_0y = a^2.$$

PARABOLE

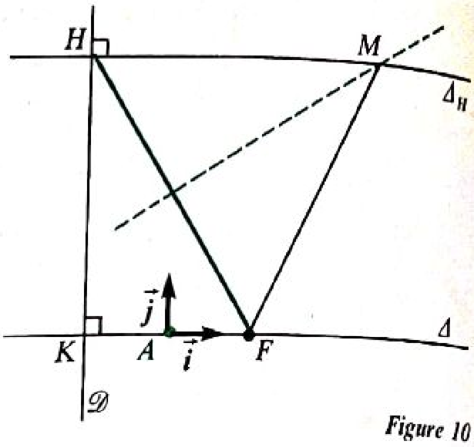


Figure 10

Soit (P) la parabole de foyer F et de directrice $\mathscr{D}$:

$$(P) = \left\{ M \in \mathscr{P} / \frac{MF}{MH} = 1 \right\}.$$

L'axe focal Δ, passant par F et orthogonal à $\mathscr{D}$, est axe de symétrie de (P); il coupe $\mathscr{D}$ en K.

Il existe un unique point de (P) appartenant à l'axe Δ : le milieu A de (F, K), appellé **sommet** de P.

Plus généralement, sur toute droite Δ_H orthogonale à $\mathscr{D}$ en H, il existe un point de la parabole (P) et un seul : le point d'intersection, M, de Δ_H et de la médiatrice du segment $[F, H]$ (figure 10).

Équation réduite de (P)

Rapportons le plan $\mathscr{P}$ à un repère orthonormal $\mathscr{R} = (A, \vec{i}, \vec{j})$ ayant pour origine le sommet A de (P) et tel que $\vec{i} = \frac{1}{KF}\overrightarrow{KF}$, et désignons par p la distance KF appelée **paramètre** de la parabole.

Dans le repère $\mathscr{R}$ les coordonnées des points F et K sont respectivement $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ et $\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$, et la condition $FM^2 = FH^2$ d'appartenance d'un point $M(x, y)$ à la parabole (P) se traduit par l'équation :

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2,$$

soit :

$$\boxed{y^2 = 2px} \qquad (1)$$

Réciproquement, on vérifie que la courbe d'équation $y^2 = 2px$ dans un repère orthonormal $(A, \vec{i}, \vec{j})$ est la parabole de foyer $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ et de directrice la droite $\mathscr{D}$ d'équation $x = -\frac{p}{2}$.

Activité **Construction de (P)**

Il résulte de l'équation (1) que la parabole (P) est la réunion des représentations graphiques respectives (P_1) et (P_2), dans le repère $\mathscr{R}$, des fonctions :

$$f_1 : \ x \mapsto \sqrt{2px} \quad \text{et} \quad f_2 : \ x \mapsto -\sqrt{2px}.$$

Comme (P_2) est symétrique de (P_1) par rapport à l'axe des abscisses, il suffit d'étudier f_1.

1° Étudier la fonction f_1. Tracer (P_1) et (P).

2° Montrer qu'en tout point $M_0(x_0, y_0)$ de (P), il existe une tangente d'équation :

$$px - y_0 y + px_0 = 0.$$

Établir les trois propriétés suivantes :

a) En tout point M_0 de (P), de projeté orthogonal H sur la directrice $\mathscr{D}$, la tangente est la médiatrice du segment [F, H]. En déduire une construction des points de (P) et des tangentes en ces points.

b) Le projeté orthogonal du foyer F sur toute droite tangente à (P) appartient à la tangente au sommet.

c) La tangente à (P) en un point M_0 distinct du sommet coupe la directrice en un point T tel que l'angle $\widehat{M_0FT}$ soit droit.

On exprime cette dernière propriété en disant que la portion de tangente comprise entre la parabole et sa directrice est vue du foyer sous un angle droit.

Sur la figure 11, la parabole (*P*) a été construite en prenant $p = 3$. Cette figure, où se trouvent les éléments remarquables de (*P*), est accompagnée du rappel des notations usuelles et des propriétés qu'il est indispensable de retenir.

- **(P)** $= \left\{ M \in \mathscr{P} / \dfrac{MF}{MH} = 1 \right\}$
- **Sommet :** **milieu** A **de** (F, K)
- **Paramètre :** $p = FK$
- **Équation réduite :** $y^2 = 2px$
- **Équation de la tangente au point** $M_0(x_0, y_0)$ **:** $px - y_0y + px_0 = 0$
- **Propriétés de la tangente** (M_0T) **: c'est la médiatrice de** $[F, H]$ **et l'angle** $\widehat{M_0FT}$ **est droit.**

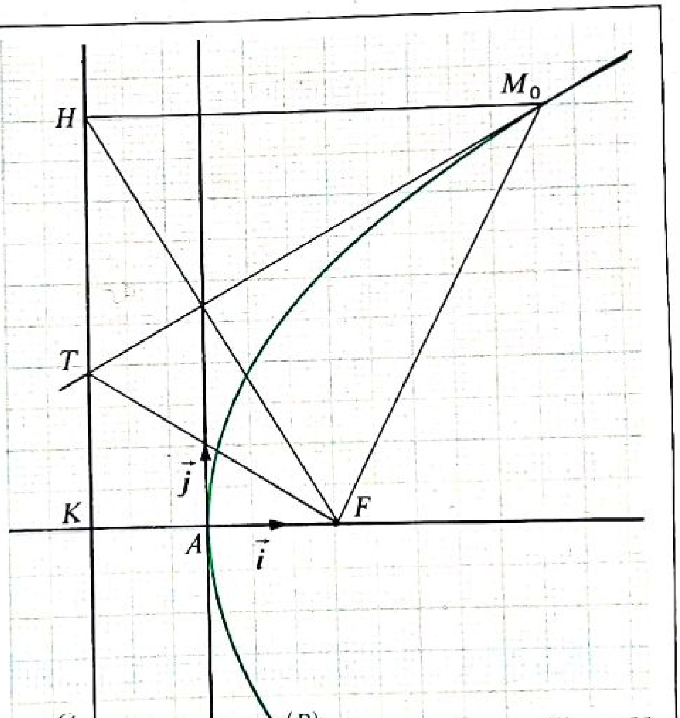


Figure 11

Activité — Problème de la duplication du cube

Étant donné un cube d'arête a, comment obtenir l'arête x d'un cube de volume double du premier?

Cette question est, avec celle de la trisection de l'angle, un des problèmes importants étudiés par les mathématiciens Grecs (Hippocrate de Chio, Menechme, Nicomède). La construction de x à partir de a, à la règle et au compas, est impossible.

1° Montrer que le problème de la duplication du cube revient à déterminer deux réels x et y tels que : $\dfrac{a}{x} = \dfrac{x}{y} = \dfrac{y}{2a}$.

2° En déduire une solution du problème par intersection de deux paraboles dont on précisera les foyers et les directrices respectifs.

ELLIPSE

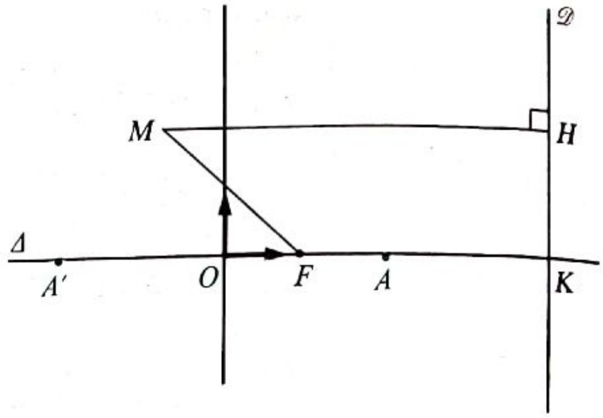


Figure 12

Soit (E) l'ellipse de foyer F, de directrice associée $\mathscr{D}$ et d'excentricité e $(e < 1)$:

$$E = \left\{ M \in \mathscr{P} / \frac{MF}{MH} = e \right\}.$$

L'axe focal Δ, passant par F et orthogonal à $\mathscr{D}$, est axe de symétrie de (E); il coupe $\mathscr{D}$ en K et deux de ses points, A et A', définis par $\overline{AF} + e\overline{AK} = 0$ et $\overline{A'F} - e\overline{A'K} = 0$ appartiennent à l'ellipse (figure 12).

Il en résulte que le milieu O de $[A, A']$ vérifie les relations :

$$\overline{OF} + e\overline{OK} = (1 + e)\overline{OA} \quad \text{et} \quad \overline{OF} - e\overline{OK} = (1 - e)\overline{OA'},$$

d'où l'on tire: $$\overline{OF} = e\overline{OA} \quad \text{et} \quad \overline{OK} = \frac{1}{e}\overline{OA}.$$

On note habituellement $a = OA$ et $c = OF$; il résulte alors des égalités ci-dessus :

$$c = ea \quad \text{et} \quad OK = \frac{a}{e}.$$

A noter que l'inégalité $e < 1$, entraîne $c < a$ et $OK > a$.

De plus : $FK = \dfrac{a}{e} - c$, soit $FK = \dfrac{a^2 - c^2}{c}$.

La droite passant par F et orthogonale à Δ coupe (E) en deux points M_1 et M_2 tels que $\dfrac{FM_1}{FK} = \dfrac{FM_2}{FK} = e$, soit $FM_1 = FM_2 = \dfrac{a^2 - c^2}{a}$.

La distance FM_1 est appelée **paramètre** de l'ellipse et notée p.

Équation réduite de (*E*)

Rapportons le plan $\mathscr{P}$ à un repère orthonormal $\mathscr{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ ayant pour origine le milieu O de $[A, A']$ et tel que $\vec{i} = \dfrac{1}{OA}\overrightarrow{OA}$.

Dans $\mathscr{R}$, les coordonnées des points A, F, K sont respectivement $(a, 0)$, $(ea, 0)$, $\left(\dfrac{a}{e}, 0\right)$, et la condition $MF^2 = e^2 MH^2$ d'appartenance d'un point $M(x, y)$ à l'ellipse se traduit par $(x - ea)^2 + y^2 = e^2\left(x - \dfrac{a}{e}\right)^2$, soit, en réduisant et en remplaçant e par $\dfrac{c}{a}$:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1} \qquad (2)$$

Réciproquement, on vérifie sans difficulté que, dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$, où $0 < c < a$, est l'ellipse d'excentricité $e = \dfrac{c}{a}$, de foyer $F(c, 0)$ et de directrice associée la droite $\mathscr{D}$ d'équation $x = \dfrac{a^2}{c}$.

Conséquences

1. Cette équation de (E) fait apparaître, outre l'axe focal Δ, deux autres éléments de symétrie de l'ellipse :

- le milieu O de $[A, A']$, appelé **centre** de (E);
- la droite orthogonale à Δ en O, appelée **axe non focal.**

2. Sur l'axe non focal, d'équation $x = 0$ dans le repère $\mathscr{R}$, il existe deux points de (E), les points B et B' tels que :

$$OB = OB' = \sqrt{a^2 - c^2}.$$

On note habituellement b la distance OB. Cette distance étant inférieure à a, on a $BB' < AA'$, ce qui explique pourquoi les axes (AA') et (BB') sont aussi appelés respectivement **grand axe** et **petit axe** de l'ellipse (figure 13).

A noter que le paramètre p de l'ellipse s'exprime en fonction de a et b : $p = \dfrac{b^2}{a}$.

3. L'existence de l'axe de symétrie (BB') montre que l'ellipse (E) peut aussi être considérée comme l'ensemble des points M vérifiant l'égalité $\dfrac{MF'}{MH'} = e$, où F' est le symétrique de F dans la réflexion d'axe (BB') et H' le projeté orthogonal de M sur la droite $\mathscr{D}'$ symétrique de $\mathscr{D}$ dans la réflexion d'axe (BB').

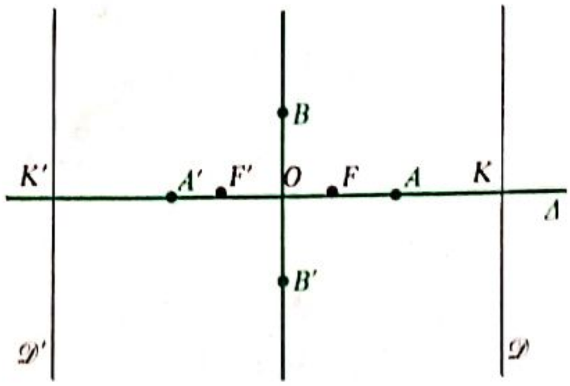


Figure 13

L'ellipse (E) possède donc deux paires de foyer et directrice associés : $\{F, \mathscr{D}\}$ et $\{F', \mathscr{D}'\}$. On démontre que ce sont les seules.

Activité — Construction de (E)

Compte tenu de l'égalité $b^2 = a^2 - c^2$, l'équation (2) de l'ellipse (E) s'écrit :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Il en résulte que (E) est la réunion des représentations graphiques (E_1) et (E_2), dans le repère $\mathscr{R}$, des fonctions :

$$f_1 : \quad x \mapsto \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \quad \text{et} \quad f_2 : \quad x \mapsto -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Comme (E_2) est symétrique de (E_1) par rapport à l'axe des abscisses, il suffit d'étudier f_1.

1° Étudier la fonction $f_1 :\ x \mapsto \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$. *Tracer* (E).

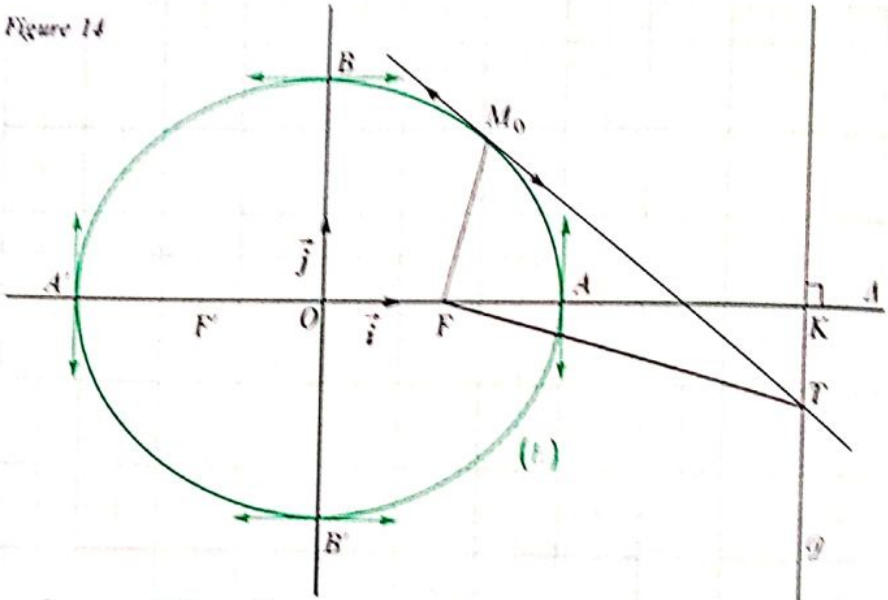
2° a) Montrer qu'en tout point $M_0(x_0, y_0)$ *de* (E), *il existe une tangente d'équation :*

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1.$$

b) La tangente en un point M_0 non situé sur l'axe focal coupe la directrice $\mathscr{D}$ en T.
Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{FM_0} \cdot \overrightarrow{FT}$.
En déduire que la portion de tangente comprise entre l'ellipse et une directrice est vue du foyer associé sous un angle droit.

Sur la figure 14 l'ellipse (E) a été construite en prenant $a = 3$ et $e = \frac{1}{2}$. Cette figure, où se trouvent les éléments remarquables de (E), est accompagnée du rappel des notations usuelles et des résultats à retenir.

Figure 14



- $E = \left\{ M \in \mathscr{P} \,/\, \frac{MF}{MH} = e \right\}$
- $a = OA = OA'$ • $c = OF = OF' = ea$ • $b = OB = OB' = \sqrt{a^2 - c^2}$
- $OK = \frac{a}{e}$ • $FK = \frac{b^2}{c}$ • *Paramètre :* $p = \frac{b^2}{a}$
- **Équation réduite :** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
- **Équation de la tangente en $M_0(x_0, y_0)$:** $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$
- **L'angle $\widehat{M_0FT}$ est droit.**

HYPERBOLE

Soit (H) l'hyperbole de foyer F, de directrice associée $\mathscr{D}$ et d'excentricité e $(e > 1)$:

$$(H) = \left\{ M \in \mathscr{P} \,/\, \frac{MF}{MH} = e \right\}.$$

L'axe focal Δ coupe $\mathscr{D}$ en K et possède, en commun avec (H), les deux points A et A', de milieu O, définis par $\overline{AF} + e\overline{AK} = 0$ et $\overline{A'F} - e\overline{A'K} = 0$.

Comme pour l'ellipse, on note habituellement :

$$a = OA \quad \text{et} \quad c = OF$$

et l'on a $c = ea$, $OK = \dfrac{a}{e}$

et $FK = c - \dfrac{a}{e} = \dfrac{c^2 - a^2}{c}$.

A noter que l'inégalité $e > 1$ entraîne $c > a$ et $OK < a$ (figure 15).

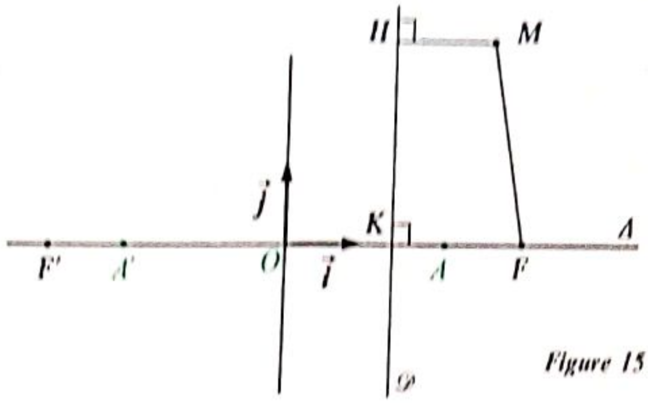


Figure 15

La droite passant par F et orthogonale à Δ coupe (H) en deux points M_1 et M_2 tels que $\dfrac{FM_1}{FK} = \dfrac{FM_2}{FK} = e$, soit $FM_1 = FM_2 = \dfrac{c^2 - a^2}{a}$.

La distance FM_1 est appelée **paramètre** de l'hyperbole et notée p.

Équation réduite

Dans un repère orthonormal, $\mathscr{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ ayant pour origine le milieu O de $[A, A']$ et tel que $\vec{i} = \dfrac{1}{OA}\overrightarrow{OA}$, l'hyperbole (H) a la même équation que l'ellipse : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$, soit, en posant $b = \sqrt{c^2 - a^2}$:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1} \qquad (3)$$

Réciproquement, on vérifie sans difficulté que, dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, où $a > 0$, $b > 0$, est, c désignant le réel égal à $\sqrt{a^2 + b^2}$, l'hyperbole d'excentricité $e = \dfrac{c}{a}$, de foyer $F(c, 0)$ et de directrice associée la droite $\mathscr{D}$ d'équation $x = \dfrac{a^2}{c}$.

Conséquences

1. Le milieu O de $[A, A']$ est **centre de symétrie** de l'hyperbole (H).

2. La droite passant par le centre O et orthogonale à l'axe focal Δ est un axe de symétrié de l'hyperbole, appelé **axe non focal.**

3. L'hyperbole possède un autre foyer F' et une autre directrice $\mathscr{D}'$, respectivement symétriques de F et de $\mathscr{D}$ par rapport à l'axe non focal.

Activité — Construction de (H)

L'équation $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ montre que (H) est la réunion des représentations graphiques (H_1) et (H_2), dans le repère $\mathscr{R}$, des fonctions :

$$f_1 : \; x \mapsto \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \quad \text{et} \quad f_2 : \; x \mapsto -\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

Comme (H_2) est symétrique de (H_1) par rapport à l'axe des abscisses, il suffit d'étudier f_1.

1° Étudier la fonction $f_1 : x \mapsto \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$. *Tracer (H).*

Montrer notamment que (H_1) *possède deux droites asymptotes d'équations respectives* $y = \frac{b}{a}x$ *et* $y = -\frac{b}{a}x$, *et préciser la position de* (H_1) *par rapport à ces asymptotes.*

Démontrer que les projetés orthogonaux R et S du foyer F sur les deux asymptotes appartiennent à la directrice $\mathscr{D}$ *et sont tels que* $OR = OS = a$ *et* $FR = FS = b$.

2° a) Montrer qu'en tout point $M_0(x_0, y_0)$ de (H), *il existe une tangente d'équation :*

$$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1.$$

b) Montrer que la tangente au sommet A coupe les asymptotes en deux points U et V tels que $AU = AV = b$.

c) La tangente en un point M_0 *de H non situé sur l'axe focal coupe la directrice* $\mathscr{D}$ *en T. Démontrer que l'angle* $\widehat{M_0FT}$ *est droit.*

3° On dit que l'hyperbole (H) est **équilatère** si ses asymptotes sont orthogonales. *Démontrer que (H) est équilatère si, et seulement si, son excentricité est égale à* $\sqrt{2}$.

Sur la figure 16, l'hyperbole (H) a été construite en prenant $a = 2$ et $e = \frac{3}{2}$. Cette figure, où se trouvent les éléments remarquables de (E), est accompagnée du rappel des notations usuelles et des résultats à retenir.

- $(H) = \left\{ M \in \mathscr{P} \,/\, \frac{MF}{MH} = e \right\}$
- $OA = OA' = a$
- $OF = OF' = c = ea$
- $OK = \frac{a}{e} = \frac{a^2}{c}$; $p = \frac{b^2}{a}$
- $b = \sqrt{c^2 - a^2}$
- $AU = AV = b$
- $FR = FS = b$
- **Équation réduite :**

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

- **Équations des asymptotes :**

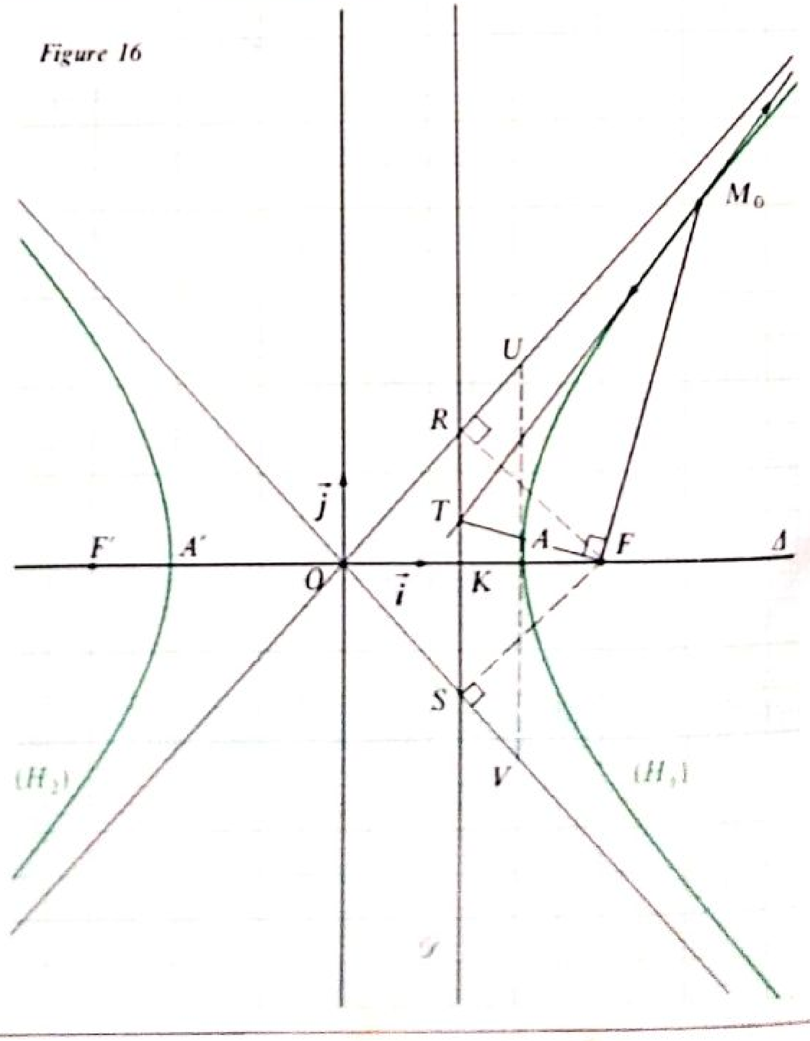
$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$$

- **Équation de la tangente en** $M_0(x_0, y_0)$ **:**

$$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

- **L'angle** $\widehat{M_0FT}$ **est droit.**

Figure 16



Activité — Détermination de coniques

La recherche d'un lieu géométrique par voie analytique conduit souvent à une courbe (Γ) définie, dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, par une équation cartésienne $f(x, y) = 0$.

Si cette équation est du second degré, il est légitime de penser que (Γ) est une des coniques étudiées dans ce paragraphe : cercle, ellipse, hyperbole, parabole.

Un moyen d'exploiter cette idée consiste à rechercher un repère orthornormal dans lequel l'équation de (Γ) prendra la forme $Y^2 = \alpha X$ ou $\alpha X^2 + \beta Y^2 + \gamma = 0$ et, s'il existe un tel repère, à reconnaître ensuite en (Γ) une conique définie par une équation réduite.

A noter que l'on peut constater immédiatement que (Γ) est, ou non, un cercle : selon que son équation peut, ou non, se mettre sous la forme $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$.

L'activité donne des exemples de détermination de coniques.

1. *1° La courbe (Γ) a pour équation $y = \frac{1}{2} x^2 + x$.*

a) Montrer qu'il existe un point O' tel que dans le repère $(O', \vec{i}, \vec{j})$, (Γ) ait pour équation $x'^2 = 2y'$. Quelle est l'équation de (Γ) dans le repère $(O', \vec{j}, \vec{i})$?

b) En déduire que (Γ) est une parabole dont on déterminera le foyer et la directrice.

2° Reconnaître de même la courbe d'équation $y = -x^2 + 3x - 2$.

3° Généraliser, en démontrant le résultat suivant :

Toute courbe d'équation $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est une parabole dont le sommet S et le foyer F ont pour coordonnées :

$$S\left(x_0 = -\frac{b}{2a},\quad y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}\right), \qquad F\left(x_F = x_0,\quad y_F = y_0 + \frac{1}{4a}\right),$$

et dont la directrice a pour équation $y = y_0 - \frac{1}{4a}$.

2. *1° (Γ) est la courbe d'équation $3x^2 + 2y^2 - 12x + 4y + 8 = 0$. Démontrer qu'il existe un point O' tel que dans le repère $(O', \vec{i}, \vec{j})$ la courbe (Γ) ait une équation de la forme $\alpha X^2 + \beta Y^2 + \gamma = 0$.*

2° En déduire que la courbe (Γ) est une conique dont on précisera la nature et dont on déterminera le centre, les axes, les sommets, un foyer et la directrice associée, les asymptotes éventuelles.

3° Déterminer de même les courbes d'équation :

a) $x^2 - 2y^2 + 6x + 4y + 8 = 0$; *c)* $-9x^2 + 4y^2 + 18x - 16y - 29 = 0$;

b) $x^2 + 4y^2 + 2x + 4y - 2 = 0$; *d)* $9x^2 + 4y^2 + 18x + 18y - 23 = 0$.

3. *1° La courbe (Γ) a pour équation $5x^2 + 5y^2 - 2xy - 12 = 0$. Démontrer qu'il existe un repère orthonormal $(O, \vec{i}', \vec{j}')$ dans lequel (Γ) a une équation de la forme $\alpha X^2 + \beta Y^2 + \gamma = 0$.*

2° En déduire que (Γ) est une conique dont on déterminera la nature et que l'on construira.

3° Déterminer de même et construire la courbe d'équation :

$$7x^2 + 13y^2 + 6xy\sqrt{3} - 16 = 0.$$

4. *Déterminer la nature et construire la courbe (Γ) d'équation :*

$$x^2 - 3xy - y^2 + 8x + y - 3 = 0.$$

Exercices d'application

8. Le plan est rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'axes $x'Ox$, $y'Oy$.
Soit (Γ) la courbe d'équation :

$$x^2 - 3y^2 + 8x + 12y + 16 = 0.$$

1° Démontrer que (Γ) est une conique dont on précisera les éléments caractéristiques : centre, axes de symétrie, foyers, directrices, asymptotes, excentricité. Tracer (Γ).
2° Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y - 3 = 0$.
On désigne par $d(M, \mathscr{D})$ la distance du point M à la droite $\mathscr{D}$. Soit P le point de coordonnées $(-4, 6)$; $d(M, P)$ désigne la distance de M à P. Quel est l'ensemble des points M tels que $d(M, P) = 2d(M, \mathscr{D})$?

9. Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
1° On considère la courbe (H) d'équation $x^2 - 2y^2 = 1$.
Quelle est la nature de cette courbe? Déterminer ses sommets, ses asymptotes et la dessiner.
2° On considère dans le plan $\mathscr{P}$ le mouvement du point $M(x, y)$ tel que :

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\cos 2t} \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \tan 2t \end{cases} \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right[.$$

a) Montrer que la trajectoire (T) est une partie de (H) que l'on précisera.
b) Déterminer les composantes du vecteur vitesse $\vec{V}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$. Vérifier que le mouvement est accéléré, c'est-à-dire que la fonction $t \mapsto \|\vec{V}(t)\|$ est croissante.

10. Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soit (Γ) l'ensemble des points dont les coordonnées (x, y) vérifient l'équation :

$$4x|x| + y^2 - 16x - 20 = 0.$$

1° Montrer que (Γ) est la réunion d'une partie d'une conique (Γ_1) et d'une partie d'une conique (Γ_2). Déterminer pour chacune des coniques (Γ_1) et (Γ_2) la nature, le centre, les sommets et, éventuellement, les asymptotes.
2° Montrer qu'en chacun des points où les courbes (Γ_1) et (Γ_2) coupent la droite $(O, \vec{j})$, elles ont même tangente.
3° Dessiner la courbe (F) en prenant pour unité le centimètre.

11. Dans le plan $\mathscr{P}$, on considère un carré $ABCD$ dont les diagonales $[A, C]$ et $[B, D]$ ont pour longueur le réel donné a, strictement positif. Soit t un paramètre réel.
1° A quelle condition sur t le système de points pondérés (A, t), $(B, 1 - 2t)$, (C, t), $(D, 3 - 4t)$ admet-il un barycentre? Déterminer la position de ce barycentre.
2° On note (E_t) l'ensemble des points M du plan $\mathscr{P}$ vérifiant la relation :

$$t\,\|\overrightarrow{MA}\|^2 + (1 - 2t)\,\|\overrightarrow{MB}\|^2 + t\,\|\overrightarrow{MC}\|^2 + (3 - 4t)\,\|\overrightarrow{MD}\|^2 = a^2(1 - t).$$

Déterminer la nature et les éléments remarquables de (E_t). On discutera suivant la valeur de t. Vérifier que le centre du carré $ABCD$ appartient à (E_t).

12. Soit $\mathscr{P}$ un plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. A tout nombre réel m, on associe l'ensemble (Γ_m) des points $M(x, y)$ dont les coordonnées vérifient l'équation :

$$mx^2 - 4mx - (m - 1)y^2 + 2 = 0.$$

Étudier, suivant les valeurs de m, la nature de (Γ_m).

13. Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
On appelle F l'application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui, à tout point M d'affixe le nombre complexe z, associe le point $F(M)$ d'affixe $z^2 + 2z + \dfrac{1}{2}$.
1° L'application F est-elle une bijection de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$?
2° Déterminer les points de $\mathscr{P}$ invariants par F.
3° Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation $x = -\dfrac{1}{2}$ dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$. M étant un point de $\mathscr{D}$, calculer les coordonnées de $F(M)$ en fonction de l'ordonnée de M.
Écrire une équation cartésienne de l'image de $\mathscr{D}$ par F. Reconnaître la courbe obtenue et la tracer.

14. Soit $\mathscr{P}$ un plan orienté et $\mathscr{R} = (O, \vec{u}, \vec{v})$ un repère orthonormal direct de $\mathscr{P}$. A tout nombre complexe z, $z = x + iy$, on associe le point M de coordonnées (x, y) dans le repère $\mathscr{R}$. Le nombre complexe conjugué de z est noté $\bar{z}$. Soit (E) l'ensemble des points de $\mathscr{P}$ dont l'affixe z vérifie la relation :

$$2|z|^2 - \frac{i}{2}(z^2 - (\bar{z})^2) = 1.$$

Soit r la rotation de centre O dont une mesure de l'angle est $\dfrac{\pi}{4}$ en radians. Soit (E') l'image de (E) par r.
1° Déterminer une équation cartésienne de (E') dans le repère $\mathscr{R}$. Reconnaître la nature de (E').
2° En déduire le tracé de (E) dans le repère $\mathscr{R}$; on prendra 5 cm pour unité graphique.

15. Soit $\mathscr{P}$ un plan, $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ un repère orthonormal, f l'application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = z^2 + iz + 1$.
1° Déterminer l'ensemble des points M dont l'image par f est le point A d'affixe $3i$.

2° Soit M un point de $\mathscr{P}$, de coordonnées x et y, et $M' = f(M)$ son image par f, de coordonnées x' et y'.
Déterminer x' et y' en fonction de x et y.
3° Soit (Γ) l'ensemble des points M du plan dont l'image est sur la droite d'équation $x = -1$.
Déterminer une équation cartésienne de (Γ).
4° Soit (C) l'image par f de la droite $(O, \vec{e}_1)$.
Déterminer une équation cartésienne de (C).
5° Montrer que (Γ) et (C) sont des coniques dont on déterminera les éléments remarquables (notamment le centre, les axes, les asymptotes et les sommets lorsqu'ils existent) et que l'on construira.

16. Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. L'unité de longueur est 3 cm.
1° Construire la courbe (E) d'équation $2x^2 + 6y^2 = 3$. On précisera les coordonnées des foyers.
2° Un point mobile $M(x, y)$ se déplace dans le plan; son mouvement est défini par :

$$\begin{cases} x = \sin \pi t \\ y = \sin\left(\pi t + \dfrac{\pi}{3}\right). \end{cases}$$

a) Comparer les positions M_1 et M_2 de M aux instants t_1 et $t_2 = \dfrac{2}{3} - t_1$. En déduire que la trajectoire (T) de M admet un axe de symétrie dont on précisera l'équation.
b) Démontrer que (T) a pour équation :

$$x^2 + y^2 - xy = \frac{3}{4}.$$

17. On considère deux hyperboles (H) et (H') ayant les mêmes sommets A et A'. Une demi-droite d'origine R appartenant à la droite (AA') et orthogonale à cette droite coupe (H) et (H') respectivement en M et en M'.
Démontrer que le rapport $\dfrac{RM'}{RM}$ est constant.

18. On considère une droite $\mathscr{D}$ incluse dans le plan $\mathscr{P}$ et deux points distincts A et B. tels que la droite (AB) n'est pas parallèle à $\mathscr{D}$.
Quel est l'ensemble des sommets des paraboles contenant A et B et dont l'axe est parallèle à $\mathscr{D}$?

19. Soit une ellipse (E) d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, dans un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
1° Exprimer, en fonction de a, b et d'une mesure α de l'angle $(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM}})$, le carré de la distance OM.
2° En déduire que, si M et M' sont deux points de l'ellipse tels que $\overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{OM'}$, on a :

$$\frac{1}{OM^2} + \frac{1}{OM'^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

La réciproque est-elle vraie?

20. Soit M un point d'une ellipse de grand axe (AA'), de petit axe (BB') et de centre O. Démontrer que la somme des carrés des aires des triangles OMA et OMB est constante.

21. Soit (E) l'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
1° Démontrer qu'une droite $\mathscr{D}$ d'équation :

$$ux + vy + w = 0$$

est tangente à (E) si, et seulement si :

$$a^2u^2 + b^2v^2 - w^2 = 0.$$

2° Étudier le nombre des tangentes à (E) contenant un point M_0 de coordonnées x_0 et y_0. Discuter.
3° Déterminer l'ensemble des points d'intersection de deux droites orthogonales et tangentes à (E).
4° Étudier le nombre des tangentes à (E) ayant une direction donnée. Discuter.

22. Soit (E) une ellipse de centre O qui n'est pas un cercle. Démontrer qu'un point M appartenant à (E) est un sommet de (E) si et seulement si la tangente à (E) en M est orthogonale à la droite (OM).

23. Soit (H) l'hyperbole d'équation :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
1° Démontrer qu'une droite $\mathscr{D}$, d'équation :

$$ux + vy + w = 0,$$

est tangente à (H) si, et seulement si :

$$a^2u^2 - b^2v^2 - w^2 = 0 \quad \text{et} \quad w \neq 0.$$

2° Étudier le nombre des tangentes à (H) contenant un point M_0 de coordonnées x_0 et y_0. Discuter.
3° Déterminer l'ensemble des points d'intersection de deux droites orthogonales tangentes à (H).
4° Étudier le nombre des tangentes à (H) ayant une direction donnée. Discuter.

24. Soit (H) une hyperbole de centre O. Démontrer qu'un point M appartenant à (H) est un sommet de (H) si, et seulement si, la tangente à (H) en M est orthogonale à la droite (OM).

25. Soit (P) une parabole d'équation $y^2 = 2px$, dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
1° Démontrer qu'une droite $\mathscr{D}$, d'équation :

$$ux + vy + w = 0,$$

est tangente à (P) si, et seulement si :

$$pv^2 - 2uw = 0.$$

2° Étudier le nombre des tangentes à (P) contenant un point M_0 de coordonnées x_0 et y_0. Discuter.

3° Déterminer l'ensemble des points d'intersection de deux droites orthogonales et tangentes à (P).
4° Étudier le nombre des tangentes à (P) ayant une direction donnée. Discuter.

26. Soit (P) une parabole. Démontrer qu'un point M appartenant à (P) est le sommet de (P) si et seulement si la tangente à (P) en M est orthogonale à l'axe de (P).

27. Soit (P) une parabole de foyer F et de directrice $\mathscr{D}$.
1° Démontrer qu'une droite Δ contenant F et différente de l'axe de (P) coupe (P) en deux points M' et M''.
2° Démontrer que le cercle (C) de diamètre $[M', M'']$ est tangent à $\mathscr{D}$ en un point I et que F est le projeté orthogonal de I sur la droite $(M'M'')$. Quelles sont les tangentes à (P) en M' et M''? Démontrer qu'elles sont orthogonales.

III – REPRÉSENTATION PARAMÉTRIQUE D'UNE CONIQUE

Paramétrer une conique (Γ) du plan $\mathscr{P}$ dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de $\mathscr{P}$, c'est trouver deux fonctions f et g définies sur une partie I de $\mathbb{R}$, telles que :

- pour tout réel t de I, le point $M(t)$ de coordonnées $(f(t), g(t))$ appartient à (Γ);
- pour tout point M de (Γ), il existe un réel t de I tel que $M = M(t)$.

Si, pour une valeur t_0 du paramètre $(t \in I)$, les fonctions f et g sont dérivables et si le vecteur dérivé $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t_0) = f'(t_0)\vec{i} + g'(t_0)\vec{j}$ n'est pas nul, la droite de repère $\left(M(t_0), \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t_0)\right)$ est la tangente à (Γ) au point $M(t_0)$.

REPRÉSENTATION PARAMÉTRIQUE D'UNE PARABOLE

Une parabole (P) étant donnée, il existe un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ dans lequel (P) a pour équation $y^2 = 2px \quad (p > 0)$.

De cette équation, on tire immédiatement x en fonction de y : $x = \dfrac{y^2}{2p}$.

Pour paramétrer la parabole (P), il suffit donc de choisir pour paramètre t, l'ordonnée d'un point de (P). On obtient alors la représentation paramétrique :

$$\boxed{\begin{cases} x = \dfrac{t^2}{2p} \\ y = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}}$$

Cette représentation paramétrique montre l'existence, en tout point M de paramètre t appartenant à la parabole (P), d'une tangente de vecteur directeur $\vec{u}\left(\dfrac{t}{p}, 1\right)$.

• Exercices d'application

28. La droite d'équation $x = ty$ coupe la parabole (P) d'équation $y^2 = 2px$ en O et M. Paramétrer (P) en prenant le réel t comme paramètre.

29. Soit $\mathscr{C}$ un demi-cercle de diamètre $[A, B]$. A tout point C de $\mathscr{C}$ on associe le milieu E de la corde passant par C et parallèle à (AB) et le point d'intersection M des droites (AE) et (OC), lorsque ces droites sont sécantes.
1° Démontrer géométriquement que M se déplace sur une parabole dont on précisera le foyer et la directrice.
2° On rapporte le plan à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ dont l'origine O est le milieu de $[A, B]$ et tel que $\vec{i} = \dfrac{1}{AO}\overrightarrow{AO}$. En prenant comme paramètre l'abscisse t du point C, donner une représentation paramétrique de l'ensemble (Γ) des points M. Préciser l'ensemble (Γ).

REPRÉSENTATION PARAMÉTRIQUE D'UNE ELLIPSE ET D'UN CERCLE

Activité

Soit (E) une ellipse de centre O; soit A, A' les sommets du grand axe et B, B' ceux du petit axe. On note $a = OA$, $b = OB$ et l'on désigne par (C) le cercle de diamètre $[A, A']$ (figure 17).

(C) est appelé **cercle principal** de (E).

1° Une droite Δ et un réel k, non nul, étant donnés, on appelle **affinité orthogonale** d'axe Δ et de rapport k l'application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui, à tout point M de projeté orthogonal H sur Δ, associe le point M' tel que $\overrightarrow{HM'} = k\overrightarrow{HM}$.

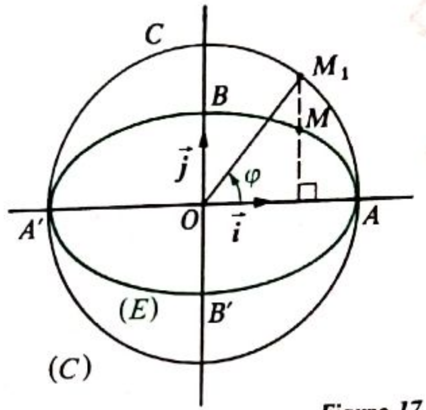


Figure 17

On sait que tout point M de l'ellipse (E) se projette orthogonalement sur l'axe (A'A) en un point M' vérifiant l'égalité :

$$M'M^2 = (e^2 - 1)\overline{M'A} \times \overline{M'A'},$$ *où e est l'excentricité de l'ellipse.*

La demi-droite d'origine M' contenant M coupe (C) en M_1. Démontrer que M est l'image de M_1 par l'affinité orthogonale f d'axe (AA') et de rapport $\frac{b}{a}$.

Toute ellipse de grand axe (AA') est l'image de son cercle principal par l'affinité orthogonale d'axe (AA') et de rapport $\frac{b}{a}$.

2° On rapporte le plan $\mathscr{P}$ au repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ dont l'origine est le centre de (E) et tel que $\vec{i} = \frac{1}{OA}\overrightarrow{OA}$.

Pour tout point M_1 de (C), on désigne par φ la mesure principale ($\varphi \in]-\pi, \pi]$) de l'angle de vecteurs $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM_1})$. Exprimer en fonction de φ les coordonnées (x_1, y_1) du point M_1, puis celles (x, y) du point $M = f(M_1)$.

En déduire une représentation paramétrique du cercle (C) et de l'ellipse (E).

On peut établir directement ce paramétrage.

Une ellipse (E) étant donnée, il existe un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ dans lequel (E) a pour équation :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (0 < b < a).$$

Pour tout point M de (E) de coordonnées (x, y), la somme des carrés des réels $\frac{x}{a}$ et $\frac{y}{b}$ est égale à 1. Il en résulte qu'il existe un réel φ, et un seul, appartenant à l'intervalle $]-\pi, \pi]$ et tel que :

$$\begin{cases} \frac{x}{a} = \cos\varphi \\ \frac{y}{b} = \sin\varphi \end{cases}, \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x = a\cos\varphi \\ y = b\sin\varphi. \end{cases}$$

Réciproquement, pour tout réel $\varphi \in]-\pi, \pi]$, le point M de coordonnées ($x = a \cos \varphi$, $y = b \sin \varphi$) appartient à (E) puisque $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

D'où la représentation paramétrique de l'ellipse :

$$\boxed{\begin{cases} x = a \cos \varphi \\ y = b \sin \varphi \end{cases} \quad \varphi \in]-\pi, \pi]}$$

L'activité précédente donne une interprétation du paramètre φ : c'est la mesure principale de l'angle de vecteurs $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM_1})$ (figure 17).

A noter que pour $a = b$, on obtient la représentation paramétrique du cercle principal de (E), de centre O et de rayon a :

$$\begin{cases} x = a \cos \varphi \\ y = a \sin \varphi \end{cases} \quad \varphi \in]-\pi, \pi].$$

La représentation paramétrique de l'ellipse (E) : $x = a \cos \varphi$, $y = b \sin \varphi$, prouve l'existence, en tout point $M(\varphi)$ de (E), d'une tangente de vecteur directeur :

$$\vec{u} = -a \sin \varphi \, \vec{i} + b \cos \varphi \, \vec{j}.$$

Un autre paramétrage de l'ellipse

Soit l'ellipse (E) de représentation paramétrique $\begin{cases} x = a \cos \varphi \\ y = b \sin \varphi \end{cases}$ $\varphi \in]-\pi, \pi]$, dans un repère orthonormal du plan.

Pour tout réel φ de l'intervalle $]-\pi, \pi[$, posons $t = \tan \dfrac{\varphi}{2}$.

Comme $\cos \varphi = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\sin \varphi = \dfrac{2t}{1+t^2}$, on obtient :

$$\begin{cases} x = a\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ y = \dfrac{2bt}{1+t^2} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}. \qquad (1)$$

Réciproquement, si $t \in \mathbb{R}$ il existe un unique réel φ de $]-\pi, \pi[$ tel que $\tan \dfrac{\varphi}{2} = t$.

Le point de coordonnées $\left(a\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \dfrac{2bt}{1+t^2}\right)$ appartient à (E) privée de $A'(-a, 0)$, car $\dfrac{1-t^2}{1+t^2} = \cos \varphi$ et $\dfrac{2t}{1+t^2} = \sin \varphi$.

Il s'ensuit que (1) est une représentation paramétrique de l'ellipse (E) privée de son sommet A'.

- **Exercice d'application**

30. Dans le plan $\mathscr{P}$ rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les deux cercles (C) et (C') de même centre O et de rayons respectifs R et R' $(R > R')$.
Soit Ou la demi-droite d'origine O et de vecteur directeur $\vec{u} = \cos \varphi \, \vec{i} + \sin \varphi \, \vec{j}$ (où φ est un réel quelconque).
Soit Ou' la demi-droite image de Ou dans la réflexion d'axe $(O, \vec{i})$.
Ou coupe (C) en M et Ou' coupe (C') en M'.
1° a) Calculer les coordonnées de M et M' en fonction de R, R' et φ.
b) Quel est l'ensemble (E) des points P milieux des segments $[M, M']$ lorsque φ varie?

c) Montrer que la tangente en P à (E) est orthogonale à (MM').

d) Quelle relation doivent vérifier R et R' pour que la courbe (E) soit tangente au cercle (C')?

2° Dans cette question on prend $R = 6$ cm et $R' = 2$ cm.

a) Faire une figure soignée de (E), (C), (C').

b) Trouver une affinité orthogonale f d'axe $(O, \vec{j})$ et de rapport positif telle que (E) soit l'image de (C') par f.

On désigne par f^{-1} l'affinité réciproque de f.

Soit r la rotation de centre O et dont une mesure de l'angle est $\frac{\pi}{2}$.

Soit P' l'image de P par $f \circ r \circ f^{-1}$.

Démontrer que P' appartient à (E) et que :

$$OP^2 + OP'^2 = 20.$$

REPRÉSENTATION PARAMÉTRIQUE D'UNE HYPERBOLE

Une hyperbole (H) étant donnée, il existe un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ dans lequel (H) a pour équation :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0),$$

soit $1 + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2}$. Nous allons établir une représentation paramétrique de (H) à partir de la formule de trigonométrie $1 + \tan^2 \varphi = \frac{1}{\cos^2 \varphi}$ vérifiée par tout réel φ différent de $\frac{\pi}{2}$ modulo π.

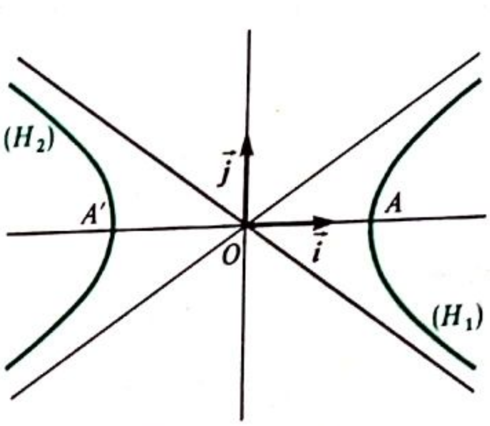


Figure 18

L'hyperbole (H) est la réunion de deux branches, l'une (H_1) dont les points sont d'abscisses positives et l'autre (H_2) dont les points sont d'abscisses négatives (figure 18).

1° Soit M un point de (H_1) de coordonnées (x, y) $(x > 0)$.

Il existe un réel φ, et un seul, appartenant à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\frac{y}{b} = \tan \varphi$.

Il en résulte $\frac{x^2}{a^2} = 1 + \tan^2 \varphi = \frac{1}{\cos^2 \varphi}$. Or x est positif et sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ $\cos \varphi$ est positif. D'où $x = \frac{a}{\cos \varphi}$.

Finalement, pour tout point M de (H_1), il existe un réel $\varphi \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $x = \frac{a}{\cos \varphi}$ et $y = b \tan \varphi$.

2° Réciproquement, pour tout réel $\varphi \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, le point de coordonnées $\left(x = \frac{a}{\cos \varphi}, y = b \tan \varphi\right)$ appartient à (H_1), car $x > 0$ et $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

D'où la représentation paramétrique de la branche H_1 :

$$\begin{cases} x = \dfrac{a}{\cos \varphi} \\ y = b \tan \varphi \end{cases} \quad \varphi \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

Il est immédiat qu'en faisant décrire au paramètre φ l'intervalle $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$, on obtient la branche (H_2).

Finalement, une représentation paramétrique de l'hyperbole (H) est :

$$\boxed{\begin{cases} x = \dfrac{a}{\cos\varphi} \\ y = b\tan\varphi \end{cases} \quad \varphi \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[}$$

Cette représentation paramétrique montre l'existence, en tout point M de paramètre φ appartenant à l'hyperbole (H), d'une tangente de vecteur directeur :

$$\vec{u}(-a\sin\varphi, b).$$

Activité

1. Deux autres paramétrages d'une hyperbole

I — On appelle **cosinus hyperbolique** et **sinus hyperbolique** d'un réel t les deux réels respectivement notés ch t et sh t, définis par :

$$\text{ch}\, t = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}), \qquad \text{sh}\, t = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}).$$

1° Étudier les fonction $t \mapsto \text{ch}\, t$ et $t \mapsto \text{sh}\, t$ et tracer leurs représentations graphiques respectives dans un même repère orthonormal.
On précisera la position relative de ces deux courbes au voisinage de $+\infty$.
2° Démontrer que tout réel t vérifie l'égalité : $\text{ch}^2\, t - \text{sh}^2\, t = 1$.
Utiliser cette formule pour obtenir une représentation paramétrique de la branche d'hyperbole définie par :

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ x > 0. \end{cases}$$

II — *On considère l'hyperbole (H) d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ dans un repère orthonormal.*

Poser $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = t$. En déduire la représentation paramétrique de (H) :

$$\begin{cases} x = \dfrac{a}{2}\left(t + \dfrac{1}{t}\right) \\ y = \dfrac{b}{2}\left(t - \dfrac{1}{t}\right) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}^*.$$

2. Intersection d'une conique et d'une droite

1° En considérant une des représentations paramétriques trouvées précédemment pour chacune des coniques, montrer qu'une droite rencontre une conique en deux points au plus.
2° Montrer qu'une droite est tangente à une ellipse (E) si, et seulement si, elle rencontre (E) en un seul point.
3° a) Montrer qu'une droite tangente à une parabole (P) n'est pas parallèle à l'axe Δ de (P).
b) Montrer qu'une droite non parallèle à Δ est tangente à (P) si, et seulement si, elle rencontre (P) en un seul point.
c) Caractériser les tangentes à (P).
4° Caractériser de même les tangentes à une hyperbole (H).

Exercices d'application

31. Dans un plan $\mathscr{P}$ rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, les coordonnées d'un point mobile M sont définies, en fonction du temps t, par :

$$\begin{cases} x = \dfrac{3}{2}\left(t + \dfrac{1}{t}\right) \\ y = 2\left(t - \dfrac{1}{t}\right) \end{cases} \quad t \in [1, +\infty[.$$

1° Montrer que la trajectoire du mobile est incluse dans une hyperbole (H). (On pourra calculer t et $\dfrac{1}{t}$ en fonction de x et y et en déduire une équation cartésienne de (H).)
Préciser les sommets, les asymptotes, les foyers de l'hyperbole et la construire dans le plan $\mathscr{P}$ rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 1 cm).
2° Étudier, lorsque t décrit $[1, +\infty[$, les variations de l'ordonnée du mobile M. Préciser la trajectoire (T) décrite par M et le sens du mouvement sur cette trajectoire.
3° Calculer, à l'instant t, les coordonnées du vecteur vitesse $\overrightarrow{V(t)}$ du mobile M.

32. *1°* Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$$z^2 - \frac{4}{\sin t} z + \frac{13}{\sin^2 t} - 9 = 0,$$

où z désigne l'inconnue et t un paramètre réel de l'intervalle $]0, \pi[$.
2° Dans le plan $\mathscr{P}$, muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormal, on considère le point M mobile d'affixe $z = \dfrac{2}{\sin t} + 3i \cos t$, t décrivant l'intervalle $]0, \pi[$.
a) Soit (T) la trajectoire du mobile; démontrer que (T) est une partie d'une courbe dont on précisera les éléments caractéristiques.
Préciser et construire (T).
b) Calculer les coordonnées du vecteur vitesse $\vec{V}$ à l'instant t et déterminer t pour que $\|\vec{V}\| = 3$.

33. Dans un plan $\mathscr{P}$ orienté muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on donne les points A de coordonnées $(-1, 0)$ et A' de coordonnées $(1, 0)$ et le cercle (C) de centre O et de rayon égal à 1. On considère deux points P et P' du cercle (C), symétriques par rapport à la droite (AA').

On appelle θ une mesure de l'angle $\widehat{(\vec{i}, \overrightarrow{OP})}$; on suppose que $\theta \neq k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.
1° On appelle I le point d'intersection des droites (AP) et $(A'P')$, quand il existe. Calculer en fonction de θ les coordonnées du point I.
2° On appelle (H) l'ensemble des points I quand θ, prend toutes les valeurs possibles.
a) Donner une équation cartésienne de (H).
b) Représenter (H); on précisera ses éléments caractéristiques.
3° Montrer que les bissectrices de l'angle $\widehat{AIA'}$ sont parallèles aux bissectrices des axes de coordonnées.

34. Soit A et A' deux points distincts du plan $\mathscr{P}$. On appelle triangle $\mathscr{T}$ tout triangle AMA' tel que :

$$|\widehat{A'AM} - \widehat{AA'M}| = \frac{\pi}{2}.$$

Démontrer que l'ensemble des points M du plan tels que AMA' soit un triangle $\mathscr{T}$ est l'hyperbole équilatère de sommets A et A'.

35. Soit l un nombre réel strictement positif et soit α et β deux nombres réels donnés tels que $\alpha + \beta \neq 0$ et $\alpha\beta \neq 0$.
$\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ étant deux droites orthogonales du plan $\mathscr{P}$, on considère l'ensemble des bipoints (M_1, M_2) tels que :

$$M_1 \in \mathscr{D}_1, \quad M_2 \in \mathscr{D}_2, \quad M_1M_2 = l.$$

Déterminer l'ensemble des barycentres des systèmes $M_1(\alpha)$, $M_2(\beta)$.

36. Soit $\mathscr{D}$ et Δ deux droites orthogonales du plan $\mathscr{P}$ sécantes en O et soit (C) et (C') deux cercles de centre O et de rayons respectifs a et b $(a > b)$. Toute demi-droite Ot d'origine O coupe (C) en M et (C') en M'; on désigne par R et S les deux points tels que le quadrilatère $MRM'S$ est un rectangle dont les côtés sont parallèles aux droites $\mathscr{D}$ et Δ.
Quel est l'ensemble des points R et S?

TRAVAUX PRATIQUES

DÉFINITION BIFOCALE DE L'ELLIPSE

Soit (E) une ellipse de grand axe (AA'), de centre O, de foyers F et F', et de directrices associées $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$. Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ coupent l'axe focal respectivement en K et K'.

Rappelons que si l'on pose $a = OA = OA'$, $c = OF = OF'$, on a $OK = OK' = \dfrac{a^2}{c}$.

1° Pour tout point M de (E), démontrer que $MF + MF' = 2a$. (On pourra remarquer que le projeté orthogonal M' de M sur l'axe focal est tel que $M'K + M'K' = KK'$.)

2° On rapporte le plan à un repère orthonormal $\mathscr{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$, où $\vec{i} = \dfrac{1}{a}\overrightarrow{OA}$.

a) Quelle est l'équation de l'ellipse (E) dans ce repère?
b) Pour tout point M du plan $\mathscr{P}$ de coordonnées (x, y), calculer $MF^2 - MF'^2$ en fonction de x, y, a, c.
c) Démontrer que pour tout point M(x, y) du plan tel que $MF + MF' = 2a$, on a :

$$MF = a - \frac{cx}{a}, \quad MF' = a + \frac{cx}{a}.$$

En déduire que M appartient alors à l'ellipse (E).

On peut conclure cette étude par le théorème :

Étant donnés deux points distincts F et F' tels que $FF' = 2c$ et un réel $a > c$, l'ensemble des points M du plan tels que $MF + MF' = 2a$ est l'ellipse de foyers F et F' et dont la distance des sommets de l'axe focal est 2a.

3° Soit (C) le cercle de centre F et de rayon 2a.
a) Démontrer que l'ellipse (E) est l'ensemble des centres des cercles passant par F' et tangents à (C).
b) Démontrer qu'à tout point T de (C) correspond un point M centre d'un cercle de centre M passant par F' et tangent à (C) en T. Construire M.

4° Démontrer qu'en tout point M de (E) la tangente est la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{F'MF}$. (On montrera que le point d'intersection I, s'il existe, de la tangente en M avec l'axe focal est tel que $\dfrac{IF}{IF'} = \dfrac{MF}{MF'}$, en utilisant 2° c.)

Applications

1. *Étant donnés deux points distincts F et F' du plan $\mathscr{P}$, dans tout cet exercice, on appelle ellipse de foyers F et F' l'ensemble des points N de $\mathscr{P}$ tels que $NF + NF' = 2a$ où a est un réel strictement positif vérifiant $2a > FF'$. Soit B un point du plan distinct de F.*

1° Quel est l'ensemble (C) des points O tels qu'il existe une ellipse de centre O, vérifiant les deux conditions suivantes :

- *ses deux foyers sont distincts et l'un d'eux est F;*
- *B est l'un des sommets du petit axe.*

2° Quel est, pour ces ellipses, l'ensemble des foyers distincts de F.

3° Pour une ellipse (E) vérifiant les conditions du 1°, la droite (BF') recoupe (E) en un point M distinct de B. Montrer que les demi-droites [F'B) et [F'M) sont opposées. Montrer que M reste situé sur une ellipse fixe quand (E) varie.

2. *On donne trois points distincts A, B, C, alignés et tels que B soit à l'extérieur du segment [A, C]. On considère l'ensemble des cercles $\mathscr{C}$ tangents en B à la droite (AC). Les tangentes à $\mathscr{C}$ passant par A et C et autres que (AC) se coupent en M. Quel est l'ensemble des points M?*

3. *Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Si A et B sont deux points de $\mathscr{P}$, on notera d(A, B) la distance de ces deux points.*

Soit (Γ) l'ensemble des points M de $\mathcal{P}$ vérifiant la condition $d(M, F) + d(M, F') = 4$, *où F désigne le point de coordonnées* $(1, 0)$ *et F' le point de coordonnées* $(-1, 0)$.

1° Vérifier que (Γ) contient les points A, B, C, D et E de coordonnées respectives $(-2, 0)$, $(2, 0)$, $\left(-1, \frac{3}{2}\right)$, $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ *et* $\left(1, -\frac{3}{2}\right)$.

2° Quelle est la nature de (Γ)? Montrer qu'une équation cartésienne de (Γ) dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est :

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

3° Représenter la courbe (Γ) et les points A, B, C, D et E (on prendra 3 cm *comme unité de longueur). Soit M_0 un point de $\mathcal{P}$ de coordonnées (x_0, y_0) qui n'appartient ni à la droite (BC) ni à la tangente en B à (Γ). Déterminer les coordonnées du point P d'intersection des droites (DE) et (BM_0) ainsi que les coordonnées du point Q d'intersection des droites (AE) et (CM_0). En déduire que le point M_0 appartient à (Γ) si, et seulement si, les points P et Q ont la même ordonnée.*

4. *Soit (E) une ellipse de foyers F et F'.*
Déterminer l'ensemble des projetés orthogonaux de F sur les tangentes à (E).

5. *Soit (E) une ellipse de centre O et soit F un foyer de (E). La droite contenant O et orthogonale à la tangente en un point M de l'ellipse coupe la droite (FM) en P.*
Quel est l'ensemble décrit par P quand M décrit (E)?

6. *Soit H et H' les projetés orthogonaux respectifs des foyers F et F' d'une ellipse (E) sur la tangente en M à cette conique.*
Démontrer que le produit scalaire $\overrightarrow{FH} \cdot \overrightarrow{F'H'}$ est constant.

7. *Soit H et H' les projetés orthogonaux respectifs des foyers F et F' d'une ellipse (E) sur la tangente en M à cette ellipse. Les droites (FH') et (F'H) se coupent en I.*

1° Démontrer que la droite (MI) est normale à l'ellipse.

2° Soit J le symétrique de M par rapport à I. Quel est l'ensemble décrit par J quand M décrit (E)?

8. *Soit (E) une ellipse de foyers F et F' et soit A et A' les sommets de l'axe focal.*

1° La tangente en un point M de l'ellipse coupe les tangentes en A et A', respectivement en P et P'. Démontrer que le produit scalaire $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{A'P'}$ est constant et que le cercle de diamètre [P, P'] contient les foyers F et F'.

2° La droite (PP') coupe les tangentes aux sommets de l'axe non focal en Q et Q'. Démontrer que les points d'intersection des cercles de diamètres [P, P'] et [Q, Q'] appartiennent à la normale à (E) en M. Démontrer que cette normale contient le point d'intersection K des droites (FP') et (F'P).

DÉFINITION BIFOCALE DE L'HYPERBOLE

Soit (H) une hyperbole de sommets A et A', de centre O, de foyers F et F' et de directrices associées $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ coupent respectivement l'axe focal (AA') en K et K'.

Rappelons que si l'on pose $a = OA = OA'$ et $c = OF = OF'$, on a $OK = OK' = \dfrac{a^2}{c}$.

1° Pour tout point M de (H), démontrer, en utilisant le projeté orthogonal M' de M sur l'axe focal, que $|MF - MF'| = 2a$.

2° On rapporte le plan à un repère orthonormal $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$, *où* $\vec{i} = \dfrac{1}{a}\overrightarrow{OA}$.

a) Quelle est l'équation de l'hyperbole (H) dans ce repère?
b) Pour tout point M du plan de coordonnées (x, y), démontrer que si $|MF - MF'| = 2a$, *on a :*

$$MF = \left|\frac{cx}{a} - a\right| \quad \text{et} \quad MF' = \left|\frac{cx}{a} + a\right|.$$

En déduire que si $|MF - MF'| = 2a$, *alors M appartient à l'hyperbole (H).*

On peut conclure cette étude par le théorème :

Étant donnés deux points distincts F et F' tels que $F'F = 2c$ et un réel a tel que $0 < a < c$, l'ensemble des points M du plan tels que $|MF - MF'| = 2a$ est l'hyperbole de foyers F et F' et dont la distance des sommets est $2a$.

3° Soit (C) le cercle de centre F et de rayon 2a.
a) Démontrer que l'hyperbole (H) est l'ensemble des centres des cercles passant par F' et tangents à (C).
b) Démontrer qu'à tout point T de (C) correspond, en général, un point M centre d'un cercle passant par F' et tangent à (C) en T. Construire M. Quels sont les points de (C) qui n'ont pas de correspondant M?

4° Démontrer que la tangente à l'hyperbole (H) en un de ses points M est la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{F'MF}$.

Applications

1. *On donne trois points distincts A, B, C alignés dans cet ordre, et on considère l'ensemble des cercles $\mathscr{C}$ tangents en B à la droite (AC). Les tangentes à $\mathscr{C}$ passant par A et C et autres que (AC) se coupent en M.*

Quel est l'ensemble des points M?

2. *Soit (H) une hyperbole de foyers F et F'. Déterminer l'ensemble des projetés orthogonaux de F sur les tangentes à (H).*

3. *Soit (H) une hyperbole de centre O et soit F un foyer de (H). La droite passant par O et orthogonale à la tangente en un point M de (H) coupe la droite (FM) en P.*

Quel est l'ensemble des points P lorsque M décrit (H)?

4. *Soit H et H' les projetés orthogonaux respectifs des foyers F et F' d'une hyperbole (H) sur une tangente à (H). Démontrer que le produit scalaire* $\overrightarrow{FH} \cdot \overrightarrow{F'H'}$ *est constant.*

ÉQUATION D'UNE HYPERBOLE RAPPORTÉE À SES ASYMPTOTES

Une hyperbole (H) étant donnée, on sait qu'il existe un repère orthonormal $\mathscr{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ dans lequel (H) a une équation de la forme :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

où a et b sont deux réels strictement positifs.

1° Établir les équations des asymptotes de (H) et montrer que le vecteur $\vec{i'} = a\vec{i} - b\vec{j}$ est un vecteur directeur de l'une, notée $\mathscr{D}_1$ et que le vecteur $\vec{j'} = a\vec{i} + b\vec{j}$ est un vecteur directeur de l'autre, notée $\mathscr{D}_2$.

2° Déterminer l'équation de (H) dans le repère $(O, \vec{i'}, \vec{j'})$.

3° Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs directeurs quelconques des droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$.
Il existe deux réels non nuls, λ et μ, tels que $\vec{u} = \lambda\vec{i'}$ et $\vec{v} = \mu\vec{j}$.
Démontrer que l'équation de (H) dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est de la forme $XY = k$, où k est un réel non nul.

On peut conclure :

Toute hyperbole est représentée, dans un repère dont les axes sont les asymptotes de (H), par une équation de la forme $xy = k$, où k est un réel non nul.

Réciproquement, l'ensemble (H) des points M dont les coordonnées (X, Y) dans un repère quelconque $(O, \vec{u}, \vec{v})$ du plan vérifient l'équation $XY = k$, où k est un réel non nul, est-il une hyperbole?

Nous supposerons $k > 0$ (si k est négatif, l'ensemble (H) a pour équation dans le repère $(O, -\vec{u}, \vec{v})$: $XY = -k$, avec $-k > 0$).

1° Construire la courbe (H) en la considérant comme représentation graphique de la fonction f : $X \mapsto \frac{k}{X}$*, et montrer que les axes du repère* $(O, \vec{u}, \vec{v})$ *sont des asymptotes de (H).*

2° Déterminer l'équation de (H) dans le repère $(O, \vec{u}', \vec{v}')$ *tel que :*

$$\vec{u}' = \frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}, \quad \vec{v}' = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}.$$

3° Démontrer que les vecteurs $\vec{i}' = \vec{u}' + \vec{v}'$ *et* $\vec{j}' = -\vec{u}' + \vec{v}'$ *sont orthogonaux et non colinéaires et que l'équation de (H) dans le repère* $(O, \vec{i}', \vec{j}')$ *est :*

$$x'^2 - y'^2 = k', \quad \text{avec} \quad k' = k \times \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|.$$

4° Démontrer que le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$*, où* $\vec{i} = \frac{1}{\|\vec{i}'\|}\vec{i}'$ *et* $\vec{j} = \frac{1}{\|\vec{j}'\|}\vec{j}'$*, est orthonormal et que l'équation de (H) dans ce repère est de la forme :*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{avec} \quad a > 0 \quad \text{et} \quad b > 0.$$

En déduire que (H) est une hyperbole.

On peut conclure :

Dans un repère quelconque du plan, la courbe d'équation $XY = k$, où k est un réel non nul, est une hyperbole dont les asymptotes sont les supports des axes du repère.

Applications

1. *On considère la courbe (Γ) d'équation* $y = \frac{2x-1}{x+3}$ *dans un repère quelconque* $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Démontrer qu'il existe un point O' tel que, dans le repère $(O', \vec{i}, \vec{j})$*, la courbe (Γ) soit représentée par une équation de la forme* $XY = k$*. En déduire la nature de la courbe (Γ).*

2. *Plus généralement, démontrer que toute courbe d'équation* $y = \frac{ax+b}{cx+d}$*, où a, b, c, d sont des réels tels que* $c \neq 0$ *et* $ad - bc \neq 0$*, est une hyperbole.*

3. *Étudier la fonction* $f : x \mapsto x - 1 + \frac{2}{2x-3}$ *et tracer sa représentation graphique (H) dans un repère orthonormal. Démontrer que (H) est une hyperbole.*

4. *Tracer la courbe d'équation* $y = \frac{2x^2 + x + 2}{x+1}$ *dans un repère orthonormal et montrer que cette courbe est une hyperbole.*

PROPRIÉTÉS D'UNE HYPERBOLE RELATIVE À SES ASYMPTOTES

1. *Montrer que, deux droites sécantes* $\mathcal{D}_1$ *et* $\mathcal{D}_2$ *et un point* M_0 *n'appartenant ni à* $\mathcal{D}_1$*, ni à* $\mathcal{D}_2$*, étant donnés, il existe une hyperbole (H) et une seule, passant par* M_0 *et dont les asymptotes sont* $\mathcal{D}_1$ *et* $\mathcal{D}_2$.

2. *Soit (H) une hyperbole d'équation* $xy = k$*, dans un repère d'axes x'Ox et y'Oy.*

1° La tangente en un point M de (H) rencontre les asymptotes en T_1 *et* T_2*. Montrer que M est le milieu de* $[T_1, T_2]$.

2° Une droite $\mathcal{D}$ *coupe (H) en deux points M' et M" et les asymptotes de (H) en* R_1 *et* R_2*, montrer que les segments [M', M"] et* $[R_1, R_2]$ *ont même milieu. En déduire une construction géométrique de (H) à partir de ses deux asymptotes et de l'un de ses points.*

3. *Soit (H) une hyperbole de sommets A, A' et de foyers F, F'. On désigne par* $\mathcal{D}_1$ *et* $\mathcal{D}_2$ *les asymptotes de (H), par O son centre et on note :*

$$a = OA, \; c = OF, \; b = \sqrt{c^2 - a^2}.$$

1° Démontrer que le produit $OT_1 \times OT_2$ des longueurs des segments déterminés par une tangente variable à (H) sur les asymptotes est constant et égal à c^2.

2° Démontrer que l'aire des triangles OT_1T_2 est constante et égale à ab.

3° a) On considère un triangle OT_1T_2 et le milieu M de $[T_1, T_2]$. On note :

$$\alpha = OT_1, \quad \beta = OT_2, \quad \theta = \widehat{T_1OT_2}.$$

Soit (H') l'hyperbole passant par M et dont les asymptotes sont (OT_1) et (OT_2). Calculer, en fonction de α, β, et θ, les longueurs a, b, c et l'excentricité e de (H').

b) Soit (Γ) la courbe d'équation $y = \dfrac{x^2 + 2x}{x + 1}$ dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Construire (Γ) et démontrer que c'est une hyperbole. Calculer l'excentricité de (Γ).

c) Reprendre le b) pour la courbe d'équation $y = \dfrac{3x^2 - 2x + 11}{4(x - 1)}$.

Applications

1. *Soit (H) une hyperbole d'asymptotes $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ et soit M_0 et M_1 deux points distincts de (H). On considère le parallélogramme dont les côtés sont parallèles aux asymptotes et dont M_0 et M_1 sont deux sommets opposés.*

Démontrer que la diagonale qui ne contient pas ces points contient le centre de l'hyperbole. En déduire la construction du centre d'une hyperbole connaissant trois points de la courbe et les directions asymptotiques.

2. *Soit ABC un triangle rectangle en A, inscrit dans une hyperbole équilatère (H).*

1° Démontrer que la tangente en A à l'hyperbole est orthogonale à la droite (BC).

2° En déduire que, si M et M' sont deux points diamétralement opposés sur une hyperbole équilatère, tout cercle $\mathscr{C}$ contenant M et M' recoupe l'hyperbole en deux points P et P' diamétralement opposés sur le cercle $\mathscr{C}$.

3. *On considère deux hyperboles équilatères telles que les axes de l'une sont les asymptotes de l'autre. Démontrer que ces deux hyperboles se coupent en deux points et qu'en chacun de ces points les tangentes sont orthogonales.*

4. *Soit (H) une hyperbole de sommets A et A'.*

1° La tangente à (H) en l'un de ses points M, distinct de A et de A', coupe l'axe non transverse en T. La normale en M coupe cet axe en N. Démontrer que le cercle MTN coupe l'axe transverse en deux points fixes F et F' tels que $\overrightarrow{OT} \cdot \overrightarrow{ON} = -OF^2 = -OF'^2$.

2° La tangente en M coupe l'axe transverse en T' et la normale en M coupe cet axe en N'. Démontrer que $\overrightarrow{OT'} \cdot \overrightarrow{ON'} = OF^2 = OF'^2$.

5. *Quel est l'ensemble des foyers de hyperboles qui ont une asymptote donnée et une directrice donnée?*

6. *Soit (H) une hyperbole de centre O, de foyers F et F', d'asymptotes Δ et Δ'. La tangente à (H) en un point M coupe Δ en T et Δ' en T'. Soit T_1 le symétrique de T' par rapport à l'axe non transverse.*

1° Démontrer que $\overrightarrow{OT} \cdot \overrightarrow{OT_1} = -OF^2$ *et que les points T, T', F et F' appartiennent à un même cercle $\mathscr{C}$.*

2° La normale en M à (H) coupe l'axe non transverse en N et la parallèle à la droite (FF') contenant M coupe Δ en J. Démontrer que J est le milieu du segment $[T, T_1]$ et en déduire que les droites (NJ) et Δ sont orthogonales.

Applications : *Construire les normales à une hyperbole passant par un point de l'axe non transverse.*

7. *Démontrer que le produit des distances d'un point d'une hyperbole à ses asymptotes est constant et égal à $\dfrac{a^2b^2}{c^2}$.*

EXERCICES ET PROBLÈMES

37. On donne dans le plan deux points fixes distincts F et A. On considère les ellipses (E) dont un foyer est F et A le sommet de l'axe focal le plus voisin de F.
1° *a)* Quel est l'ensemble des points O centres des ellipses (E)?
b) Soit O un point de cet ensemble et soit $\mathscr{D}$ la perpendiculaire en O à la droite (AF). Construire (au moyen du compas seulement) les sommets B et B' de l'ellipse (E) appartenant à $\mathscr{D}$.
2° *a)* Soit B un sommet du petit axe d'une ellipse (E); montrer que B appartient à une parabole (P) de foyer F dont on déterminera la directrice Δ.
b) Déterminer la partie de (P) qui est l'ensemble des points B.

38. Soit $\mathscr{P}$ un plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
1° Soit (Γ) l'ensemble des points de $\mathscr{P}$ dont les coordonnées (x, y) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ vérifient :

$$16x^4 + 81y^4 + 72x^2y^2 - 1\,296y^2 = 0.$$

Montrer que (Γ) est la réunion de deux conique (Γ_1) et (Γ_2) (on remarquera que le membre de gauche est une différence de deux carrés).
2° Représenter (Γ) après avoir précisé le centre et les sommets des coniques (Γ_1) et (Γ_2).

39. Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation $x = 6$ et F le point de coordonnées $(8, 0)$.

Soit θ un nombre réel tel que $0 \leqslant \theta < \dfrac{\pi}{2}$.

On désigne par (Γ_θ) l'ensemble des points M du plan tels que $\dfrac{MF}{MH} = \dfrac{1}{\cos\theta}$, où H est le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{D}$.
1° Préciser la nature de (Γ_θ) suivant les valeurs de θ.
2° Construire la courbe (Γ_0) correspondant à $\theta = 0$.
3° *a)* Écrire une équation cartésienne de la courbe $(\Gamma_{\frac{\pi}{6}})$ correspond à $\theta = \dfrac{\pi}{6}$.
b) Préciser les éléments caractéristiques de cette courbe (foyers, sommets, éléments de symétrie, asymptotes).
c) Construire la courbe $(\Gamma_{\frac{\pi}{6}})$.
4° Soit (C) le cercle de centre O et de rayon 10.
a) Écrire une équation cartésienne de la courbe (E) transformée de (C) par l'affinité orthogonale ayant pour axe la droite d'équation $y = 0$ et de rapport $\dfrac{3}{5}$.
b) Préciser les foyers de (E). En déduire que les tangentes à $(\Gamma_{\frac{\pi}{6}})$ et à (E) aux points d'intersection de ces courbes sont perpendiculaires.

40. Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
1° Soit z un élément de $\mathbb{C}$. Trouver une équation cartésienne de l'ensemble (E) des points M d'affixe z tels que les points d'affixes z, z^2 et z^5 soient alignés.
2° Montrer que (E) est la réunion d'une droite $\mathscr{D}$ et d'une conique (Γ) dont on précisera la nature et dont on donnera les éléments remarquables : centre, axes, sommets, foyers, excentricité.

41. Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère le mouvement d'un point M dont les coordonnées sont données en fonction du temps par :

$$x = \frac{2}{\sin t}, \quad y = \sqrt{5}\,\frac{\cos t}{\sin t}, \quad \text{avec} \quad t \in]0, \pi[.$$

1° Calculer les coordonnées du vecteur vitesse à l'instant t. Montrer que la trajectoire (T) du mouvement est une partie de l'hyperbole (H) d'équation $5x^2 - 4y^2 = 20$; construire (H) et préciser T.
2° Déterminer les sommets, les foyers et les directrices de (H); les placer sur le graphique.
3° Montrer que l'ordonnée au point M prend, au cours du mouvement, une fois et une seule la valeur $\dfrac{4\sqrt{5}}{3}$ (on ne calculera pas la valeur correspondante de t). Quelle est alors l'abscisse de M?
Pour cette position de M, calculer les distances d_1 de M au foyer F d'abscisse positive et d_2 à la directrice $\mathscr{D}$ associée à F. Construire dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 3 cm) le point M en utilisant les valeurs d_1 et d_2, puis la tangente en M à l'hyperbole (H) en indiquant la méthode utilisée.

42. On considère, dans le plan $\mathscr{P}$, une droite donnée $\mathscr{D}$ et un point donné A, n'appartenant pas à $\mathscr{D}$.
1° Quel est l'ensemble des foyers des paraboles passant par le point A et ayant pour directrice la droite $\mathscr{D}$? Représenter cet ensemble dans le plan.
2° Démontrer que l'ensemble des sommets des paraboles passant par A et ayant $\mathscr{D}$ pour directrice est inclus dans une ellipse (E). Déterminer les axes et les foyers de (E). Dessiner (E) sur la figure précédente.

43. Soit $\mathscr{P}$ un plan rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.
1° Déterminer et construire l'ensemble (H) des points M de $\mathscr{P}$ d'affixe complexe z tels que :

$$z\bar{z} - (z^2 + \bar{z}^2) + 1 = 0.$$

Préciser les sommets, les foyers et les asymptotes. Donner une mesure de l'angle de chacune des asymptotes avec la droite $(O, \vec{e}_1)$.
2° Soit M un point de (H) d'affixe complexe z. On pose $|z| = r$ et on désigne par θ l'argument de z. Calculer r en fonction de $\cos\theta$.

44. Le plan orienté $\mathscr{P}$ est rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
1° Déterminer l'ensemble (E) des points M de $\mathscr{P}$ dont l'affixe z vérifie :

$$10z\bar{z} + 3(z^2 + \bar{z}^2) = 4,$$

où $\bar{z}$ est le complexe conjugué de z. Indiquer ses foyers F et F' ainsi que ses directrices.

2° Soit f la composée de l'homothétie de centre O et de rapport 2 et de la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
Déterminer l'équation de (E'), image de (E) par f.
3° Montrer que (E') est une ellipse de foyer $f(F)$ et $f(F')$.
Comparer les excentricités de (E) et (E').
4° Construire (E) et (E') sur une même figure.

45. Dans le plan $\mathscr{P}$ muni du repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on définit les trois points :

$$A(1, 0),\quad B\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right),\quad C\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

et la droite $\mathscr{D}$ dont une équation est $x = 1$.
1° Déterminer les coordonnées du point G tel que $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB}$.
Quelle est la nature du quadrilatère (A, B, G, C)?
2° On note (Γ) l'ensemble des points M de $\mathscr{P}$, de coordonnées (x, y), qui vérifient la relation :

$$-MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2(x-1)^2.$$

a) Montrer que B et C appartiennent à (Γ).
b) Montrer que (Γ) est l'ensemble des points M de $\mathscr{P}$ tels que $MG = \sqrt{2}\, d(M, \mathscr{D})$, où $d(M, \mathscr{D})$ désigne la distance de M à la droite $\mathscr{D}$.
c) En déduire la nature de (Γ) et préciser ses éléments remarquables. Représenter (Γ) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

46. Soit (Γ) la courbe d'équation :

$$y^2 = \frac{16}{9}x^2 - \frac{32}{3}x$$

dans le repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
1° Montrer que (Γ) admet un centre de symétrie Ω dont on déterminera les coordonnées.
2° Montrer que (Γ) est une conique. Déterminer ses foyers F et F' et son excentricité e.
3° Montrer que la conique de foyers F et F' et d'excentricité $e' = \frac{1}{2}e$ est une ellipse (E).
Déterminer une équation de (E) dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$.

47. Le plan est rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Pour les représentations graphiques, on adoptera pour unité de longueur 2 cm.
1° Soit (H) l'hyperbole d'équation cartésienne :

$$y^2 - 4x^2 = 4.$$

Représenter graphiquement (H) en précisant les coordonnées de ses sommets et les équations cartésiennes de ses asymptotes. Déterminer l'excentricité et les coordonnées des foyers de (H).
2° Soit F et F' les points de coordonnées respectives $(0, \sqrt{3})$ et $(0, -\sqrt{3})$. Déterminer une équation cartésienne de l'ellipse (E) de foyers F et F' et d'excentricité $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Représenter graphiquement (E) en précisant les coordonnées de ses sommets.

48. Dans le plan orienté rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on donne le point A de coordonnées $(0, 1)$ et le cercle (C) de centre A et de rayon 1. Soit B un point de l'axe des abscisses, distincts de O. Soit (C') le cercle de centre B passant par A.
1° On appelle φ la mesure de l'angle $(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AB})$, appartenant à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$. Exprimer en fonction de φ l'abscisse de B et le rayon du cercle (C').
2° a) Déterminer les deux homothéties qui transforment (C) en (C') : on déterminera le rapport et les coordonnées du centre de chacune de ces homothéties.
b) Montrer que l'ensemble des centres de ces homothéties, lorsque B parcourt l'axe des abscisses (en restant distinct de O), est inclus dans une parabole que l'on demande de construire.

49. Dans le plan rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère la courbe (Γ_m) d'équation :

$$mx^2 + y^2 - 2x = 0.$$

1° Discuter suivant les valeurs de m la nature de la courbe (Γ_m).
2° Tracer les courbes (Γ_0) et (Γ_2) sur une même figure.
L'unité de longueur est 4 cm.

50. Soit $\mathscr{P}$ le plan complexe, rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$, et f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$f(z) = 2z^2 - 2(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)z - \sin\theta(\sin\theta - \mathrm{i}\cos\theta),$$

où θ est un réel de l'intervalle $[0, 2\pi]$.
On pose $z = x + \mathrm{i}y$ avec x et y réels et on appelle M l'image de z dans le plan $\mathscr{P}$.
1° Calculer la partie réelle de $f(z)$ en fonction de x et y.
2° Déterminer l'ensemble (Γ_θ) des points M de $\mathscr{P}$ pour lesquels $f(z)$ est un imaginaire pur. On montrera que (Γ_θ) est une conique dont on précisera la nature et le centre Ω_θ.
3° Quel est l'ensemble des points Ω_θ quand θ décrit $[0, 2\pi]$?
4° Représenter (Γ_θ) pour $\theta = \frac{3\pi}{4}$ et préciser les éléments caractéristiques (foyers, directrices,...).

51. Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, soit (E) l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que :

$$x^2 + 4y^2 - 2|x| - 3 = 0.$$

Étudier et construire (E). En particulier, préciser les axes de symétrie, les points où les tangentes sont parallèles aux axes et les demi-tangentes aux points d'abscisse nulle.

52. Soit A et A' deux points distincts donnés du plan, Δ et Δ' les droites perpendiculaires à la droite (AA'), passant respectivement par A et A', et O le milieu de $[A, A']$. On pose $OA = r$.
Pour tout point F du segment $[A, A']$, distinct de A et de A', on note (P) la parabole de foyer F et de sommet A, (P') la parabole de foyer F et de sommet A', $\mathscr{D}$ la directrice de (P) et $\mathscr{D}'$ la directrice de (P').
1° Dans cette question, F est fixé et on suppose donné un point M commun à (P) et (P').
a) Placer les éléments géométriques précédents sur une figure.

b) Soit H et H' les projections orthogonales de M sur $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.
Montrer que le cercle (C) de centre M passant par F est tangent à $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ aux points H et H' et que $MF = 2r$. Montrer que les droites (FH) et (FH') sont orthogonales; en déduire que les tangentes à (P) et (P') au point M sont orthogonales.
c) Prouver que le milieu I de $[F, M]$ appartient à la médiatrice de $[A, A']$ et que $OF^2 + OI^2 = r^2$. (On utilisera l'homothétie h de centre F et de rapport $\frac{1}{2}$.)

2° On suppose maintenant que F parcourt le segment $[A, A']$.
a) Prouver que (P) et (P') se coupent en deux points M_1 et M_2 symétriques par rapport à la droite (AA') et indiquer comment on peut construire ces points.
b) A l'aide de *1° c* déterminer le lieu géométrique des milieux I_1 et I_2 de $[F, M_1]$ et $[F, M_2]$.
c) En employant un repère cartésien convenablement choisi, déterminer le lieu géométrique (E) des points M_1 et M_2 et placer (E) sur la figure.

N.B. — On admettra le théorème suivant : «Soit (P) la parabole de foyer F et de directrice $\mathscr{D}$; soit M un point de (P) et H sa projection orthogonale sur $\mathscr{D}$; la tangente en M à (P) est la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{HMF}$».

53. Dans un plan $\mathscr{P}$ rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère la parabole (P) d'équation :

$$y^2 = -2x + 1.$$

I — *1°* Dessiner (P). Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (P) avec l'axe $(O, \vec{j})$ et les tangentes à (P) en ces points. Déterminer les coordonnées du foyer de (P) et une équation de sa directrice.
2° Soit l'application s définie analytiquement par :

$$\begin{cases} x' = x + 2y - 2 \\ y' = \quad -y + 2. \end{cases}$$

Montrer que s est une symétrie dont on précisera l'axe et la direction. Montrer que la direction de s est la direction de la tangente à (P) en A, où A est l'intersection de l'axe de s et de (P).
3° Montrer que (P) est globalement invariante par s.
4° On considère l'équation :

$$y^2 = -2x + 1, \quad (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}. \qquad (1)$$

En remarquant que $(0, -1)$ est solution de (1), déduire des deux questions précédentes une autre solution de (1) différente de $(0, 1)$.
5° Définir analytiquement la symétrie s' par rapport à la droite d'équation $y = -1$ et de direction celle de la tangente à (P) au point $B(0, -1)$. Vérifier que (P) est globalement invariante par s'.
A partir de la solution de (1) trouvée au *4°*, déduire à l'aide de s', une autre solution de (1).
6° Indiquer clairement comment on peut déterminer une infinité de solutions de (1) en partant de $(0, -1)$ et en utilisant s et s'. Indiquer comment on peut déterminer une autre suite infinie de solutions de (1) en partant de $(0, 1)$; donner les quatre premiers couples de cette suite.

II — Dans cette partie, chaque point $M(x, y)$ de $\mathscr{P}$ est repéré par son affixe complexe $z = x + iy$.

1° Soit H la projection orthogonale du point M d'affixe z sur la droite d'équation $x = 1$. Quel est l'ensemble des points M tels que $d(M, H) = |z|$?
2° Montrer que, quel que soit le réel $\theta \in]-\pi, +\pi[$, le point M d'affixe $z = \dfrac{1}{1 + \cos\theta}(\cos\theta + i\sin\theta)$ est sur la parabole (P).
3° Montrer que, $\forall \theta \in]-\pi, +\pi[$:

$$\frac{\sin\theta}{1 + \cos\theta} = \tan\frac{\theta}{2}.$$

En déduire que, lorsque θ varie dans $]-\pi, +\pi[$, le point M d'affixe :

$$z = \frac{1}{1 + \cos\theta}(\cos\theta + i\sin\theta)$$

décrit toute la parabole (P).
4° Soit f l'application de $\mathscr{P} \setminus \{O\}$ dans lui-même qui, au point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{1}{\bar{z}}$, où $\bar{z}$ désigne le conjugué de z.
θ étant un réel fixé de $]-\pi, \pi[$, on considère le point M de (P) d'affixe :

$$z = \frac{1}{1 + \cos\theta}(\cos\theta + i\sin\theta).$$

a) Exprimer l'affixe z' de $M' = f(M)$ en fonction de θ et l'écrire sous forme trigonométrique.
b) Soit M'' le point de $\mathscr{P}$ d'affixe :

$$\alpha = \cos\theta(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Montrer que M'' appartient au cercle (C) de centre $\Omega\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$.
c) Montrer que les points O, M, M', M'' sont alignés. Calculer l'affixe de $\overrightarrow{M''M'}$, puis la norme de $\overrightarrow{M''M'}$. Expliquer comment on peut construire M' à partir du point M'' de (C). En construisant quelques points M', donner l'allure générale de la courbe image de (P) par f.

54. Le but du problème est d'étudier quelques propriétés géométriques relatives à une parabole.

I — Le plan étant supposé orienté, la notation $(\vec{u}, \vec{v})$ désignera l'une des mesures de l'angle orienté du couple de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$.
Soit ABC un triangle non rectangle inscrit dans un cercle $\mathscr{C}$ de centre O, et soit H son orthocentre. Soient $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ les cercles de centres O_1 et O_2, symétriques du cercle $\mathscr{C}$, respectivement par rapport aux droites (AB) et (AC).
1° Soit α le symétrique de H par rapport à la droite (AB).
Montrer que $(\overrightarrow{\alpha A}, \overrightarrow{\alpha C}) = -(\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{\alpha C})$ (π).
Montrer que $(\overrightarrow{\alpha A}, \overrightarrow{\alpha C}) = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ (π). Que peut-on en déduire pour α, puis pour H?
Déterminer $\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2$.
2° Montrer que $\mathscr{C}_2$ est l'image de $\mathscr{C}_1$ par une rotation R de centre A dont on précisera une mesure de l'angle.
3° Soit M un point quelconque du cercle $\mathscr{C}$, dont les symétriques respectifs par rapport aux droites (AC) et (AB) sont B' et C'. Justifier les égalités suivantes :

$$R(C') = B', \quad (\overrightarrow{HB'}, \overrightarrow{HA}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{O_2B'}, \overrightarrow{O_2A}) \quad (\pi),$$

$$(\overrightarrow{HC'}, \overrightarrow{HA}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{O_1C'}, \overrightarrow{O_1A}) \quad (\pi),$$

$$(\overrightarrow{O_2B'}, \overrightarrow{O_2A}) = (\overrightarrow{O_1C'}, \overrightarrow{O_1A}) \quad (2\pi).$$

En déduire que $(\overrightarrow{HB'}, \overrightarrow{HC'}) = 0 \quad (\pi)$. Que peut-on déduire pour les points H, B', C' puis pour les points H, A', B', C' où A' est le symétrique de M par rapport à la droite (BC)?

4° Montrer que les points I, J, K, milieux respectifs des segments $[M, A']$, $[M, B']$, $[M, C']$, sont alignés.

5° Réciproquement, soit M un point quelconque du plan dont les projections orthogonales K, J, I sur les droites (AB), (AC), (BC) sont alignés. Démontrer que M appartient au cercle $\mathscr{C}$. (On pourra montrer que les points M, I, J, C d'une part et M, I, K, B d'autre part sont cocycliques.)

II — Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (Oy) désigne l'axe des ordonnées.
Soit (P) la conique d'équation $y^2 = 4x$; un point de coordonnées (x, y) vérifiant $y^2 > 4x$ est dit extérieur à (P); il sera admis que, par un tel point, passent deux tangentes à la conique (P).

1° Préciser la nature de (P) ainsi que ses éléments caractéristiques : foyer F, sommet S, directrice $\mathscr{D}$, axe, tangente au sommet. Construire (P) ainsi que ses éléments caractéristiques.

2° Soit M un point de (P) de projeté orthogonal M' sur $\mathscr{D}$. Soit Δ la tangente au point M. Soient T un point de Δ et U le milieu du segment $[M', F]$.
En rappelant les résultats du cours, que peut-on dire des distances MM' et MF? du triangle $MM'F$? de la droite Δ pour ce triangle? du triangle TFM'? Démontrer que U appartient à l'axe (Oy).

3° Soit A un point extérieur à (P). En utilisant les remarques précédentes, indiquer une construction à la règle et au compas des deux tangentes à (P) issues de A.

4° Montrer qu'une droite Δ', telle que la projection orthogonale de F sur Δ' appartienne à l'axe (Oy), est tangente à (P).

5° *a)* Soit un triangle ABC non rectangle et extérieur à (P), tel que ses trois côtés soient tangents à (P).
Démontrer que A, B, C, F sont cocycliques (on pourra utiliser la partie I). Démontrer que l'orthocentre H du triangle ABC appartient à $\mathscr{D}$.
b) Indiquer la construction du triangle ABC, connaissant les projections orthogonales I, J, K de F sur les côtés (BC), (AC), (AB), ces trois points étant donnés sur l'axe (Oy).

N.B. — Les questions 1°, 2°, 3°, 4° de la partie II sont indépendantes de la partie I.

55. Sauf pour les notations, les trois parties du problème sont indépendantes.
$\mathscr{P}$ est un plan orienté muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$; $\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres complexes; i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

Les affixes des points de $\mathscr{P}$ étant toujours données par rapport au repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, f et g sont les deux applications de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$ définies, $\forall z \in \mathbb{C}$, par :

$$\begin{cases} f(z) = z^3 + 4(1-\mathrm{i})z^2 - 2(2+7\mathrm{i})z - 16 + 8\mathrm{i} \\ g(z) = z^3 + 2 - 2\mathrm{i}. \end{cases}$$

I — *1°* Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes z vérifiant $g(z) = 0$. Représenter les points dont les affixes sont les nombres trouvés et démontrer que ces points forment un triangle équilatéral.

2° Démontrer qu'il existe un et un seul réel r, que l'on déterminera, qui vérifie $f(r) = 0$.
Déterminer les deux nombres complexes a et b de façon à avoir :

$$f(z) = (z - r)(z^2 + az + b), \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

3° Résoudre l'équation : $z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = 0$.
Démontrer que les points dont les affixes sont les solutions de cette équation forment un triangle rectangle dans le plan $\mathscr{P}$.

4° A, B, C sont les points de $\mathscr{P}$ dont les affixes respectives sont : $-1 + 3\mathrm{i}$, $1 + \mathrm{i}$, -4. Déterminer l'affixe du barycentre G des points A, B, C affectés respectivement des coefficients 4, 3, 5.

5° On désigne par h l'application de $\mathscr{P}$ vers $\mathbb{R}$ qui à tout point M de $\mathscr{P}$ associe le réel :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA}.$$

Calculer $h(C)$. Exprimer $h(M)$ en fonction de $\|\overrightarrow{MG}\|^2$ et $h(G)$. Déterminer et dessiner l'ensemble des points M de $\mathscr{P}$ qui vérifient $h(M) = 18$.

II — A tout point M de $\mathscr{P}$ d'affixe z on associe le point M' de $\mathscr{P}$ d'affixe : $f(z) - g(z)$.

1° Déterminer les coordonnées (x', y') de M' dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ en fonction des coordonnées (x, y) de M dans le même repère.

2° A, B, C sont des points définis au I — 4°. Donner une équation de l'ensemble (H_1) des points M de $\mathscr{P}$ tels que O, B et M' soient alignés. Démontrer que (H_1) est une hyperbole dont on précisera le centre et les asymptotes.

3° Donner une équation de l'ensemble (H_2) des points M de $\mathscr{P}$ tels que O, I et M' soient alignés, I étant le centre de gravité de A, B, C. Démontrer que (H_2) est une hyperbole dont on précisera le centre et les asymptotes : on pourra, par exemple, donner une équation de (H_2) sous la forme $y = \varphi(x)$.

4° Démontrer qu'un point M est commun à (H_1) et (H_2) si, et seulement si, M' est confondu avec O.
Résoudre l'équation : $z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = g(z)$.
En déduire les points communs à (H_1) et (H_2).
Construire (H_1) et (H_2) dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

III — Un mobile du plan $\mathscr{P}$ a son affixe $z(t)$ donnée, en fonction du temps t, par :

$$z(t) = f(\mathrm{i}t) + 10 - 6\mathrm{i},$$

quand t décrit l'intervalle $[0, 2]$ de $\mathbb{R}$. On notera $M(t)$ le point correspondant à l'instant t.

1° Déterminer les coordonnées $(x(t), y(t))$ de $M(t)$ dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, ainsi que les coordonnées dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$ du vecteur vitesse du mobile à l'instant t.

2° Faire un tableau indiquant les variations de x et de y en fonction de t.

3° Construire les points de la trajectoire du mobile correspondant aux valeurs : $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1, \frac{7}{4}, 2$ du réel t et un vecteur directeur des tangentes à la trajectoire pour les valeurs : $0, \frac{2}{3}, \frac{7}{4}, 2$. Tracer la trajectoire pour $t \in [0, 2]$.

CHAPITRE 11

ISOMÉTRIES DU PLAN

I – ACTIVITÉS PRÉLIMINAIRES

Rappelons qu'une **isométrie** du plan $\mathscr{P}$ est une application f de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ *conservant les distances*, c'est-à-dire vérifiant la propriété : **pour tout bipoint (M, N) d'image (M', N') par f, $MN = M'N'$.**

C'est le cas de l'application identique du plan $\mathscr{P}$, des translations, des symétries centrales, des réflexions, des rotations.

Activité

1. Rotations

1° Soit un point A et un réel θ.

a) Rappeler la définition de la rotation r de centre A et d'angle de mesure θ rad.

(Par abus de langage on dit que r est la rotation de centre A et d'angle θ rad.)

b) Que peut-on dire de r lorsque $\theta = 0 \quad (2\pi)$? lorsque $\theta = \pi \quad (2\pi)$?

c) Démontrer que si $\theta \neq 0 \quad (2\pi)$, le centre A de r est le seul point invariant.

2° En utilisant la définition, montrer que la rotation r est une isométrie.

3° Montrer que l'application r est bijective et reconnaître sa bijection réciproque r^{-1}.

4° Soit r' la rotation de même centre, A, que r et d'angle θ' rad. *Reconnaître l'application composée $r' \circ r$.*

5° Soit B et B' deux points distincts. Démontrer qu'il existe une rotation g d'angle $\frac{\pi}{3}$ rad, *et une seule, telle que $g(B) = B'$. Construire avec soin le centre C de g.*

Plus généralement démontrer que pour tout réel θ tel que $\theta \neq 0 \quad (2\pi)$, il existe une rotation d'angle θ, et une seule, transformant B en B'.

2. Isométries fixant un point

L'étude des isométries a été abordée dans le cours de Première, où nous nous sommes particulièrement intéressés à celles qui admettent au moins un point *invariant*, ou point *fixe*. Nous avons alors établi le résultat suivant :

Si une isométrie f admet au moins un point invariant A, alors f est soit une réflexion dont l'axe passe par A, soit une rotation de centre A.

La détermination de la nature de f, réflexion ou rotation, peut alors se faire à l'aide de l'ensemble $\mathscr{F}$ des points invariants par f. Trois cas peuvent se présenter :

- $\mathscr{F}$ est une droite $\mathscr{D}$: f est alors la réflexion d'axe $\mathscr{D}$.
- $\mathscr{F}$ est réduit à $\{A\}$: f est alors une rotation de centre A, et d'angle non nul.
- $\mathscr{F}$ est le plan $\mathscr{P}$: f est alors l'application identique de $\mathscr{P}$, que l'on peut considérer comme la rotation de centre A et d'angle nul.

Ces résultats peuvent être utilisés pour déterminer la nature d'une isométrie définie analytiquement.

Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1° On considère l'application f définie analytiquement par :

$$\begin{cases} x' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x + y - 1 + \sqrt{2}) \\ y' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x - y - 1). \end{cases}$$

a) Démontrer que f est une isométrie.
b) Déterminer l'ensemble des points invariants par f. En déduire la nature de f.

2° Soit g l'application définie analytiquement par :

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{2}(x + y\sqrt{3} + 1) \\ y' = \dfrac{1}{2}(-x\sqrt{3} + y + \sqrt{3}). \end{cases}$$

a) Démontrer que g est une isométrie.
b) Déterminer l'ensemble des points invariants par g. En déduire que g est une rotation et préciser les coordonnées de son centre A.
c) Déterminer la mesure principale de l'angle de g. (Considérer un point B distinct de A, l'image B' de B et calculer, θ étant la mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB'}})$, $\cos\theta$ et $\sin\theta$.)

3° Reconnaître les applications définies analytiquement par :

$$a) \begin{cases} x' = \dfrac{1}{5}(-3x + 4y - 12) \\ y' = \dfrac{1}{5}(-4x - 3y + 4) \end{cases};\quad b) \begin{cases} x' = -y + 1 \\ y' = x + 1 \end{cases};\quad c) \begin{cases} x' = \dfrac{1}{2}(x\sqrt{3} + y - 1) \\ y' = \dfrac{1}{2}(x - y\sqrt{3} + 2 + \sqrt{3}). \end{cases}$$

On déterminera leurs éléments caractéristiques : axe s'il s'agit d'une réflexion, centre et mesure principale de l'angle s'il s'agit d'une rotation.

3. Bijection réciproque d'une isométrie

Rappelons, qu'étant donnés deux points distincts A et B du plan :

- tout point M du segment $[A, B]$ est tel que $AM + MB = AB$;
- tout point M du plan tel que $AM + MB = AB$ appartient à $[A, B]$;
- l'ensemble des points M tels que $MA^2 - MB^2 = k$, où k est un réel donné, est une droite orthogonale à (AB).

Soit f une isométrie du plan $\mathscr{P}$, trois points non alignés A, B, C et leurs images respectives A', B', C' par f.

1° Si A', B', C' étaient alignés, un de ces points appartiendrait au segment ayant pour extrémités les deux autres; par exemple C' appartiendrait à $[A', B']$. Démontrer que C appartiendrait alors à $[A, B]$. En déduire que A', B', C' ne sont pas alignés.

2° Soit M' un point du plan $\mathscr{P}$. On pose $x = M'A'^2 - M'B'^2$ et $y = M'A'^2 - M'C'^2$.

a) Démontrer qu'il existe un point M, unique, tel que :

$$MA^2 - MB^2 = x \quad \text{et} \quad MA^2 - MC^2 = y.$$

b) Soit M'' l'image de M par f. Démontrer que M'' est confondu avec M'.

3° Il résulte de 2° que tout point M' possède au moins un antécédent, M, par f. Démontrer que tout point N distinct de M a pour image un point N' distinct de M'. Le point M est donc le seul antécédent de M'. L'isométrie f est donc bijective.

4° Démontrer que la bijection réciproque de f est une isométrie.

On peut conclure :

Toute isométrie f du plan est bijective et sa bijection réciproque f^{-1} est une isométrie.

4. Composée de deux isométries

Démontrer que :

L'application composée $f_2 \circ f_1$ de deux isométries f_1 et f_2 est une isométrie.

5. Conservation du produit scalaire

1° Démontrer que le milieu d'un segment $[M, N]$ est l'unique point O du plan tel que :

$$OM = ON = \frac{1}{2} MN.$$

2° Soit f une isométrie du plan $\mathcal{P}$ et soit trois points A, B, C d'images respectives A', B', C'.

a) Démontrer que l'image I' du milieu I de $[B, C]$ est le milieu de $[B', C']$.

b) Démontrer que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AI^2 - \frac{1}{4} BC^2$. En déduire que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{A'C'}$.

On exprime cette propriété en disant que **toute isométrie conserve le produit scalaire.**

Réciproquement, une application qui conserve le produit scalaire est-elle une isométrie?

c) Pour tout réel t démontrer que les carrés scalaires $(\overrightarrow{AC} - t\overrightarrow{AB})^2$ et $(\overrightarrow{A'C'} - t\overrightarrow{A'B'})^2$ sont égaux. En déduire que si $\overrightarrow{AC} = t\overrightarrow{AB}$, alors $\overrightarrow{A'C'} = t\overrightarrow{A'B'}$.

On retiendra :

Trois points quelconques A, B, C et leurs images respectives A', B', C' par une isométrie f sont tels que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{A'C'}$.

De plus si $\overrightarrow{AC} = t\overrightarrow{AB}$, alors $\overrightarrow{A'C'} = t\overrightarrow{A'B'}$.

6. Conservation du barycentre

1° Soit trois points A, B, M d'images respectives A', B', M' par une isométrie f. Pour tout couple (α, β) de nombres réels, démontrer que les carrés scalaires $(\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB})^2$ et $(\alpha\overrightarrow{M'A'} + \beta\overrightarrow{M'B'})^2$ sont égaux.

En déduire que si M est le barycentre des points pondérés (A, α) et (B, β), ce qui suppose $\alpha + \beta \neq 0$, alors M' est le barycentre des points pondérés (A', α) et (B', β).

On exprime cette propriété en disant que f conserve le barycentre de deux points.

2° Démontrer de même que l'isométrie f conserve le barycentre de trois points pondérés.

3° Plus généralement, démontrer que :

Toute isométrie conserve le barycentre de n points pondérés.

7. Image d'une droite par une isométrie

I — On considère une droite $\mathcal{D}$, deux points distincts A et B de $\mathcal{D}$ et leurs images respectives A' et B' par l'isométrie f (A' et B' sont distincts).

1° A tout réel t on associe le point M tel que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$ et son image $M' = f(M)$. Quels sont les lieux géométriques de M et M' :

a) quand t décrit $\mathbb{R}$?

b) quant t décrit $\mathbb{R}_+$?

c) quant décrit l'intervalle $[0, 1]$?

On dit que σ est une **réflexion vectorielle.**

Déterminons l'image par σ d'un vecteur $\vec{u}$ de $\mathscr{V}$.

Soit A un point de $\mathscr{D}$ et M le point tel que $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$ (figure 1). Le point A est invariant par $s_{\mathscr{D}}$, le point M a pour image le point M′ symétrique orthogonal de M par rapport $\mathscr{D}$. On a donc :

$$\sigma(\vec{u}) = \overrightarrow{AM'}.$$

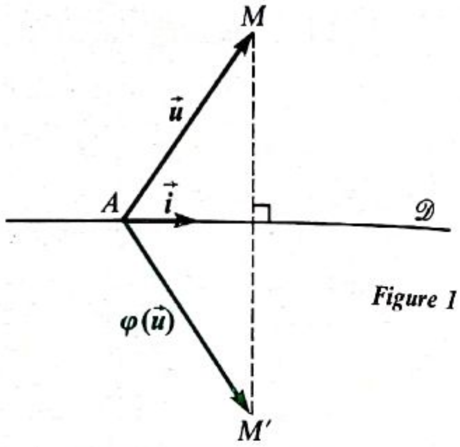


Figure 1

Activité

1° Soit $\vec{i}$ un vecteur directeur unitaire de l'axe $\mathscr{D}$ de la réflexion $s_{\mathscr{D}}$.

a) Démontrer que pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un réel t tel que :

$$\vec{u} + \sigma(\vec{u}) = t\vec{i}.$$

b) Démontrer que le vecteur $\vec{i}$ est invariant par σ. En déduire que $\vec{u} \cdot \vec{i} = \sigma(\vec{u}) \cdot \vec{i}$.

c) Déduire de a) et b) que $t = 2(\vec{u} \cdot \vec{i})$, puis que $\sigma(\vec{u}) = 2(\vec{u} \cdot \vec{i})\vec{i} - \vec{u}$.

2° La formule précédente définit la transformation vectorielle σ. Utiliser cette formule pour vérifier la linéarité de σ.

On retiendra :

THÉORÈME 1

La réflexion vectorielle σ associée à la réflexion $s_{\mathscr{D}}$ d'axe $\mathscr{D}$ est l'application qui, à tout vecteur $\vec{u}$ de $\mathscr{V}$, fait correspondre le vecteur :

$$\sigma(\vec{u}) = 2(\vec{u} \cdot \vec{i})\vec{i} - \vec{u},$$

où $\vec{i}$ est un vecteur directeur unitaire de la droite $\mathscr{D}$.

Effet d'une réflexion vectorielle sur les mesures d'un angle orienté de vecteurs

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs *non nuls* d'images respectives $\vec{u}'$, $\vec{v}'$ par la réflexion vectorielle σ, associée à la réflexion $s_{\mathscr{D}}$ d'axe $\mathscr{D}$.

A, B, C étant trois points tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$, et A', B', C' étant leurs images respectives par $s_{\mathscr{D}}$, on a (figure 2) :

$$\vec{u}' = \overrightarrow{A'B'} \quad \text{et} \quad \vec{v}' = \overrightarrow{A'C'}.$$

De plus, on sait que si α est est une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$, alors $-\alpha$ est une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}})$.

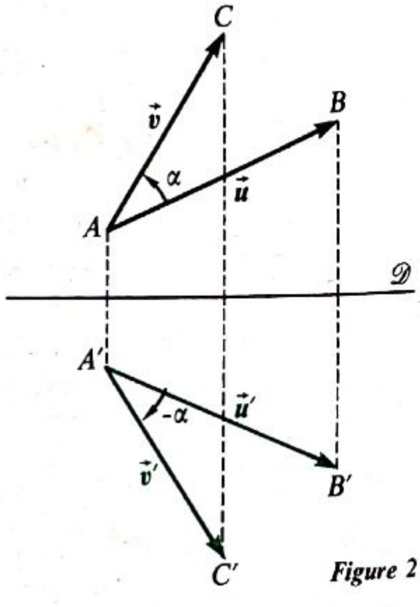


Figure 2

Il en résulte :

Une réflexion vectorielle transforme tout angle orienté $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ en un angle orienté $(\widehat{\vec{u}', \vec{v}'})$ dont les mesures sont opposées à celles du premier.

Effet d'une réflexion vectorielle sur un déterminant

Le plan vectoriel $\mathscr{V}$ est muni d'une base orthonormale directe.

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs d'images respectives $\vec{u}'$, $\vec{v}'$ par une réflexion vectorielle σ.

• Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ sont non nuls, soit α une mesure en radians de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$; $-\alpha$ est alors une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u}', \vec{v}'})$, et l'on a :

$$\text{dét}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin \alpha$$

et
$$\text{dét}_{\mathscr{B}}(\vec{u}', \vec{v}') = \|\vec{u}'\| \times \|\vec{v}'\| \times \sin(-\alpha).$$

Comme $\|\vec{u}\| = \|\vec{u}'\|$, $\|\vec{v}\| = \|\vec{v}'\|$ et $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$, il s'ensuit :

$$\text{dét}_{\mathscr{B}}(\vec{u}', \vec{v}') = -\text{dét}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v}).$$

• Si l'un au moins des deux vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ est nul, il en est de même de son image par l'application linéaire σ. Les déterminants de $(\vec{u}, \vec{v})$ et $(\vec{u}', \vec{v}')$ sont alors nuls, et donc opposés.

Une réflexion vectorielle transforme tout couple $(\vec{u}, \vec{v})$ de vecteurs en un couple $(\vec{u}', \vec{v}')$ dont le déterminant dans une base orthonormale directe est l'opposé de celui du premier.

REMARQUE : On démontre, et on l'admettra, que ce résultat s'applique aussi lorsque les déterminants sont calculés dans une base orthonormale indirecte.
Par contre il ne s'applique pas lorsque la base n'est pas orthonormale.

ROTATION VECTORIELLE

Définition

Toute rotation r de centre A et d'angle θ est une isométrie. Il lui est donc associée une transformation vectorielle φ du plan vectoriel $\mathscr{V}$ dans lui-même.

Déterminons l'image par φ d'un vecteur $\vec{u}$ de $\mathscr{V}$.

• Comme l'application φ est linéaire $\varphi(\vec{0}) = \vec{0}$.

• Lorsque $\vec{u}$ n'est pas nul, considérons le point M tel que $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$ et son image $M' = r(M)$ (figure 3).

L'image par r du bipoint (A, M) est le bipoint (A, M'). D'où l'égalité $\varphi(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{AM'}$, qui montre que l'image de $\vec{u}$ par φ est le vecteur $\vec{u}' = \overrightarrow{AM'}$.

Comme $AM = AM'$ et $(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}}) = \theta \quad (2\pi)$, il en résulte :

$$\|\vec{u}\| = \|\vec{u}'\| \quad \text{et} \quad (\widehat{\vec{u}, \vec{u}'}) = \theta \quad (2\pi). \qquad (1)$$

Les relations (1) déterminent, θ et $\vec{u}$ étant donnés, un vecteur $\vec{u}'$ et un seul.

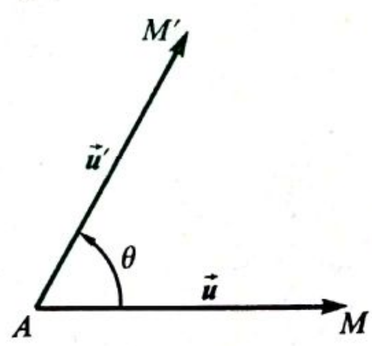


Figure 3

THÉORÈME 2 et DÉFINITION 1	**La transformation vectorielle associée à une rotation r d'angle θ est l'application φ du plan vectoriel $\mathscr{V}$ dans lui-même qui laisse le vecteur nul invariant et qui, à tout vecteur $\vec{u}$ non nul, associe le vecteur $\vec{u}'$ défini par : $\|\vec{u}\| = \|\vec{u}'\|$ et $(\vec{u}, \vec{u}') = \theta \quad (2\pi)$. On dit que φ est la rotation vectorielle d'angle θ.**

Effet d'une rotation vectorielle sur les mesures d'un angle orienté de vecteurs

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs *non nuls* d'images respectives $\vec{u}'$, $\vec{v}'$ par la rotation vectorielle φ d'angle θ. On a :

$$(\vec{u}, \vec{u}') = (\vec{v}, \vec{v}') = \theta \quad (2\pi),$$

d'où :

$$(\vec{u}, \vec{u}') + (\vec{u}', \vec{v}) = (\vec{u}', \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{v}') \quad (2\pi),$$

soit :

$$(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}', \vec{v}') \quad (2\pi).$$

Par suite :

Une rotation vectorielle transforme tout angle orienté de vecteurs $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$ en un angle orienté $\widehat{(\vec{u}', \vec{v}')}$ dont les mesures sont égales à celles du premier.

Conséquences :

Soit r une rotation de centre A et d'angle θ et soit φ sa rotation vectorielle associée.

1. Pour tout bipoint (M, N) d'image (M', N') par r, on a $\varphi(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{M'N'}$.
Il en résulte $MN = M'N'$ et, si M est dictinct de N, $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}) = \theta \quad (2\pi)$.

Deux points distincts M et N et leurs images respectives M' et N' par une rotation d'angle θ sont tels que :

$$MN = M'N' \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}) = \theta \quad (2\pi).$$

2. Soit trois points S, B, C deux à deux distincts et leurs images respectives S', B', C' par la rotation r (figure 4). On a :

$$\varphi(\overrightarrow{SB}) = \overrightarrow{S'B'},$$
$$\varphi(\overrightarrow{SC}) = \overrightarrow{S'C'},$$

d'où :

$$(\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}) = (\overrightarrow{S'B'}, \overrightarrow{S'C'}) \quad (2\pi).$$

Il en résulte :

Une rotation conserve les mesures de tout angle orienté de vecteurs.

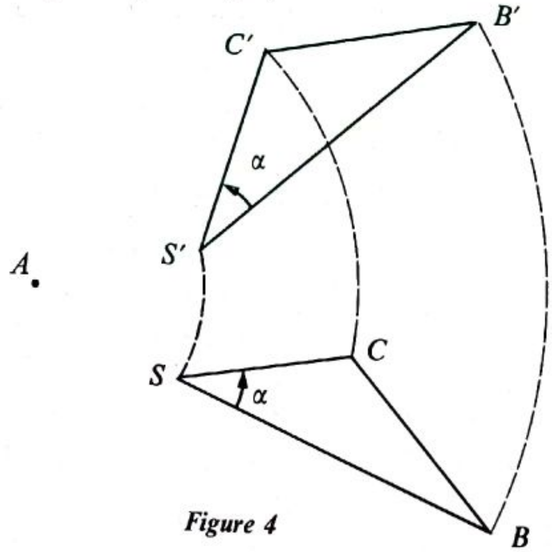


Figure 4

Effet d'une rotation vectorielle sur un déterminant

Le plan vectoriel $\mathscr{V}$ est muni d'une base orthonormale directe.
Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs d'images respectives $\vec{u}'$, $\vec{v}'$ par une rotation vectorielle φ.

• Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, soit α une mesure en radians de l'angle orienté $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$; α est aussi une mesure de l'angle orienté $\widehat{(\vec{u}', \vec{v}')}$, et l'on a :

$$\text{dét}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin\alpha = \|\vec{u}'\| \times \|\vec{v}'\| \times \sin\alpha = \text{dét}_{\mathscr{B}}(\vec{u}', \vec{v}').$$

• Si l'un au moins des deux vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ est nul, il en est de même de son image par l'application linéaire φ. Les déterminants de $(\vec{u}, \vec{v})$ et de $(\vec{u}', \vec{v}')$ sont alors nuls, et donc égaux.

Une rotation vectorielle transforme tout couple $(\vec{u}, \vec{v})$ de vecteurs en un couple $(\vec{u}', \vec{v}')$ dont le déterminant dans une base orthonormale directe est égal à celui du premier.

REMARQUE : Ce résultat s'applique aussi lorsque les déterminants sont calculés dans une base orthonormale indirecte.
Par contre il ne s'applique pas lorsque la base n'est pas orthonormale.

Activité

1. *Soit r une rotation de centre A et d'angle θ, $\theta \neq 0$ (π), et soit une droite (MN) ne passant pas par A, d'image $(M'N')$ par r :*

$$r(M) = M',\ r(N) = N'.$$

Démontrer que les droites (MN) et $(M'N')$ sont sécantes et que leur point d'intersection I, le centre A de r, et les points M et M' sont cocycliques (figure 5).

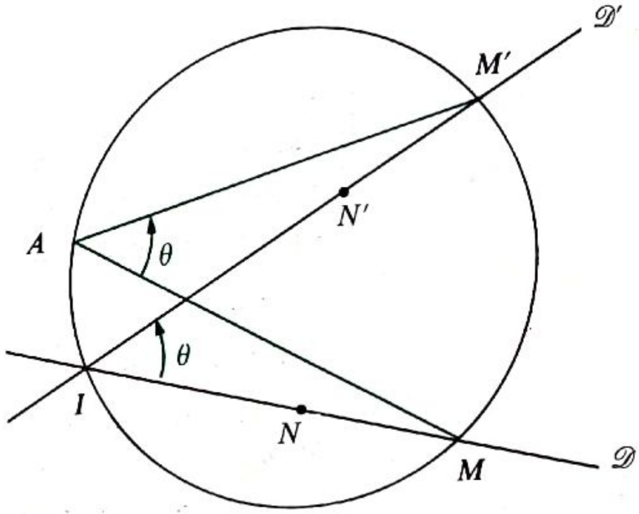


Figure 5

On peut conclure :

Pour toute rotation r d'angle ni nul, ni plat, le centre de r, un point M, son image M', et le point d'intersection I d'une droite $\mathscr{D}$ passant par M avec son image $\mathscr{D}'$, sont quatre points cocycliques.

2. *Soit r une rotation de centre A et d'angle θ ni nul, ni plat, et soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O' passant par A. L'image de $\mathscr{C}$ par r est le cercle $\mathscr{C}'$, de centre $O' = r(O)$ et de même rayon que $\mathscr{C}$. Les cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ se coupent en A et B (figure 6).*

Soit M un point de $\mathscr{C}$, distinct de A, d'image $M' = r(M)$. Démontrer que $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{BM'}, \overrightarrow{BA})$ (π), et en déduire que les points B, M, M' sont alignés.

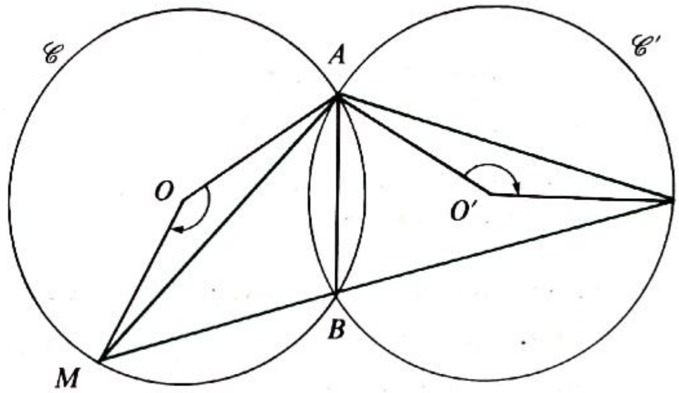


Figure 6

Cette propriété mérite d'être retenue et il convient de l'avoir à l'esprit lorsqu'on étudie une configuration où se trouvent deux cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ de même rayon, sécants en A et B.
Pour toute droite passant par B et recoupant $\mathscr{C}$ en M et $\mathscr{C}'$ en M', le point M' est l'image de M par la rotation de centre A transformant le centre O de $\mathscr{C}$ en le centre O' de $\mathscr{C}'$.

D'où : $AM = AM'$ et $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}) = (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AO'})$ (2π).

3. Expression analytique d'une rotation

Le plan $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1° Soit r la rotation de centre $A(3, -1)$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ rad, et soit M un point distinct de A, d'image $M' = r(M)$.

a) Démontrer que si l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AM}$ est $\rho e^{i\alpha}$, alors l'affixe de $\overrightarrow{AM'}$ est $\rho e^{i\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right)}$.
b) En déduire l'expression des coordonnées (x', y') de M' en fonction de celles (x, y) de M.

2° Définir analytiquement la rotation de centre $A(-2, 3)$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

3° Définir analytiquement la rotation de centre $A(x_0, y_0)$ et d'angle θ.

• Exercices d'application

6. Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormal direct. Soit f l'application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui à tout point M de coordonnées (x, y) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ associe le point M' de coordonnées (x', y') telles que :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y. \end{cases}$$

1° a) Montrer que f est bijective et déterminer l'ensemble des points invariants par f.
b) Déterminer l'ensemble des points M de $\mathscr{P}$ tels que O, M, M' soient alignés.
2° On désigne par M_1 et M_2 les projections orthogonales du point M respectivement sur les droites $(O, \vec{i})$ et $(O, \vec{j})$.
Montrer que M' est le transformé de M_1 dans une rotation de centre M_2 dont on déterminera une mesure de l'angle.

7. Dans le plan $\mathscr{P}$, on considère un triangle équilatéral ABC tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = +\frac{\pi}{3}$ (2π), inscrit dans un cercle $\mathscr{C}$. Soit M un point, distinct de A et de C, situé sur celui des arcs AC dont B n'est pas élément.
I est le point du segment $[M, B]$ tel que $MI = MA$.
1° Montrer que le triangle IMA est équilatéral.
2° Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ rad.
Déterminer les images par r des points B et I.
En déduire que $MA + MC = MB$.

8. Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
1° Montrer qu'il existe une rotation, r, et une seule, de centre O, qui transforme le point $A(1, 0)$ en le point $A'\left(\frac{5}{13}, -\frac{12}{13}\right)$.
Calculer une valeur approchée d'une mesure, θ, de l'angle de cette rotation.
Donner l'expression analytique de cette rotation, c'est-à-dire exprimer les coordonnées du point $M' = r(M)$ en fonction des coordonnées du point M.
2° Soit t la translation de vecteur $\vec{v}\left(-\frac{16}{23}, \frac{28}{13}\right)$.
Donner l'expression analytique de $t \circ r$; $t \circ r$ est une transformation simple que l'on caractérisera.

9. Soit A et B deux points distincts. A tout point M du plan on associe le point M' défini par les conditions :

$$BM' = AM \quad \text{et} \quad \left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM'}\right) = \frac{\pi}{2} \quad (2\pi).$$

1° Démontrer que l'application $r : M \mapsto M'$ est une rotation dont on déterminera le centre et l'angle.
2° Soit $\mathscr{D}$ une droite passant par A. Quelle est l'image de $\mathscr{D}$ par r?
3° Démontrer que lorsque M décrit la droite $\mathscr{D}$:
a) le cercle $(MM'I)$, où I est le point d'intersection de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$, passe par un point fixe autre que I.
b) le milieu R de (M, M') se déplace sur une droite fixe.

10. On donne dans le plan $\mathscr{P}$ un point O et un vecteur $\vec{u}$ non nul.
1° M étant un point du plan, de transformé M' par la translation T de vecteur $\vec{u}$ et M'' étant le transformé de M par la symétrie S de centre O, quel est l'ensemble des points M tels que :

$$\|\overrightarrow{M'M''}\| = \|\vec{u}\|?$$

2° Quels sont les points fixes respectifs des deux transformations $S \circ T$ et $T \circ S$?
3° Démontrer que chacune des deux transformations $S \circ T$ et $T \circ S$ est involutive.

11. Le plan orienté $\mathscr{P}$ est rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'axes $(x'x)$ et $(y'y)$. Soit $\mathscr{D}_1$ la droite d'équation $x + y\sqrt{3} = 0$ et $\mathscr{D}_2$ la droite d'équation $\sqrt{3}x - y = 0$. Soit M un point du plan de coordonnées (x, y).
On appelle M_1 le projeté, parallèlement à $x'x$, de M sur $\mathscr{D}_1$ et M_2 le projeté, parallèlement à $y'y$, de M sur $\mathscr{D}_2$.
a et b étant deux nombres réels non nuls, soit M' le point défini par la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{OM'} = a\overrightarrow{OM_1} + b\overrightarrow{OM_2}.$$

1° Calculer les coordonnées x' et y' de M' en fonction de celles, x et y, de M.
2° Lorsque les nombres a et b sont fixés, montrer que l'application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$, qui au point M fait correspondre le point M', est une bijection que l'on notera $T_{a,b}$.
3° Pour quelles valeurs du couple (a, b) l'application $T_{a,b}$ est-elle involutive?
4° Pour quelles valeurs du couple (a, b) l'application $T_{a,b}$ est-elle une rotation de centre O? Pour chaque couple (a, b) trouvé, déterminer une mesure de cette rotation.

III — DÉPLACEMENTS

DÉCOMPOSITION D'UNE ISOMÉTRIE

Soit f une isométrie du plan $\mathscr{P}$. Un point A de $\mathscr{P}$ étant donné, considérons son image A' par f et la translation t_1 de vecteur $\overrightarrow{A'A}$.

Comme f et t_1 sont des isométries, il en est de même de l'application composée $g = t_1 \circ f$.

De plus, l'isométrie g laisse le point A invariant :

$$g(A) = (t_1 \circ f)(A) = t_1[f(A)] = t_1(A') = A.$$

La translation t_1 est une bijection de $\mathscr{P}$ dont la bijection réciproque t_1^{-1} est la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$, notée t. L'égalité $g = t_1 \circ f$ implique alors : $f = t \circ g$.

Supposons qu'il existe une autre décomposition de f, $f = t' \circ g'$, où t' est une translation et g' une isométrie fixant A.

On a alors : $(t' \circ g')(A) = (t \circ g)(A) = A'$, soit $t'(A) = t(A) = A'$.

Les vecteurs des translations t et t' sont donc égaux à $\overrightarrow{AA'}$. Il s'ensuit : $t = t'$, d'où $t \circ g = t \circ g'$, et par conséquent $g = g'$.

On peut donc énoncer :

THÉORÈME 3	**Un point A du plan étant donné, toute isométrie f se décompose de manière unique sous la forme $f = t \circ g$, où g est une isométrie fixant A et t une translation.**

Comme elle laisse le point A invariant, l'isométrie g est soit une rotation r de centre A, soit une réflexion $s_{\mathscr{D}}$ dont l'axe $\mathscr{D}$ passe par A.

Il en résulte : $f = t \circ r$ ou $f = t \circ s_{\mathscr{D}}$.

DÉPLACEMENTS ET ANTIDÉPLACEMENTS

Comparons dans chacun des deux cas $f = t \circ r$ et $f = t \circ s_{\mathscr{D}}$, les mesures d'un angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}})$ et celles de son image $(\widehat{\overrightarrow{S'B'}, \overrightarrow{S'C'}})$ par l'isométrie f.

1° Cas $f = t \circ r$.

La rotation r et la translation t conservent les mesures des angles orientés de vecteurs. Il en est de même de l'application composée $f = t \circ r$. Par conséquent :

$$(\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}) = (\overrightarrow{S'B'}, \overrightarrow{S'C'}) \quad (2\pi). \qquad (1)$$

2° Cas $f = t \circ s_{\mathscr{D}}$.

L'image de $(\widehat{\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}})$ par la réflexion $s_{\mathscr{D}}$ est un angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{S_1B_1}, \overrightarrow{S_1C_1}})$ tel que (figure 7) :

$$(\widehat{\overrightarrow{S_1B_1}, \overrightarrow{S_1C_1}}) = -(\widehat{\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}}) \quad (2\pi).$$

L'image de $(\widehat{\overrightarrow{S_1B_1}, \overrightarrow{S_1C_1}})$ par la translation t est $(\widehat{\overrightarrow{S'B'}, \overrightarrow{S'C'}})$ et :

$$(\widehat{\overrightarrow{S'B'}, \overrightarrow{S'C'}}) = (\widehat{\overrightarrow{S_1B_1}, \overrightarrow{S_1C_1}}) \quad (2\pi).$$

Par suite :

$$(\widehat{\overrightarrow{S'B'}, \overrightarrow{S'C'}}) = -(\widehat{\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}}) \quad (2\pi). \quad (2)$$

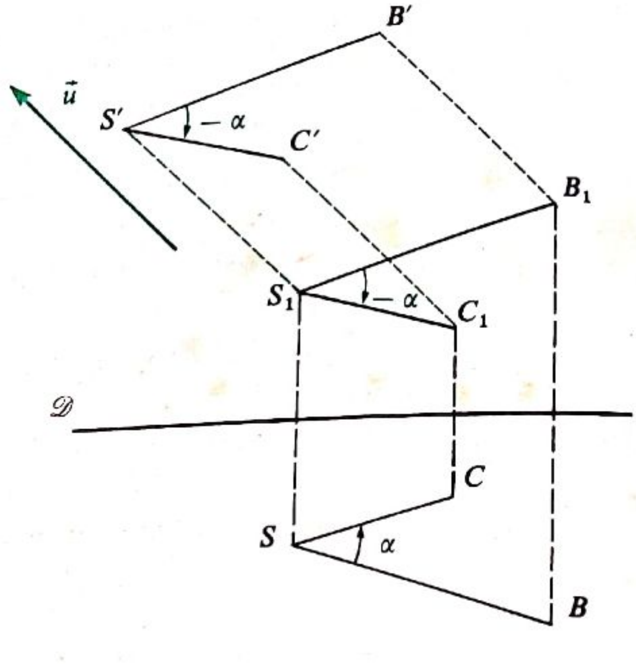


Figure 7

Les situations (1) et (2) sont incompatibles : une isométrie ne peut en effet transformer *tout* angle en un angle dont les mesures sont à la fois égales et opposées à celles du premier. Cela impliquerait que tout angle serait nul ou plat.

THÉORÈME 4 et DÉFINITION 2	**Toute isométrie f vérifie une, et une seule, des propriétés suivantes :** **1° L'image par f de tout angle de vecteurs est un angle de vecteurs de mesures égales à celles du premier. On dit alors que l'isométrie f est un déplacement.** **2° L'image par f de tout angle de vecteurs est un angle de vecteurs de mesures opposées à celles du premier. On dit alors que l'isométrie f est un antidéplacement.**

Les translations et les rotations sont des déplacements, les réflexions des antidéplacements.

Si l'on désigne par $\mathscr{I}$ l'ensemble des isométries, par $\mathscr{D}$ celui des déplacements et par $\mathscr{A}$ celui antidéplacements, on a :

$$\mathscr{I} = \mathscr{D} \cup \mathscr{A} \quad \text{et} \quad \mathscr{D} \cap \mathscr{A} = \varnothing.$$

Il en résulte que les ensembles $\mathscr{D}$ et $\mathscr{A}$ forment une *partition* de $\mathscr{I}$.

Conséquences

1. Soit f une isométrie et soit f^{-1} son isométrie réciproque.

Pour tout angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{S'A'}, \overrightarrow{S'B'}})$ d'image $(\widehat{\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}})$ par f^{-1}, $(\widehat{\overrightarrow{S'A'}, \overrightarrow{S'B'}})$ est l'image de $(\widehat{\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}})$ par f. Il en résulte que si f est un déplacement (resp. antidéplacement), les mesures de $(\widehat{\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}})$ sont égales (resp. opposées) à celles de $(\widehat{\overrightarrow{S'A'}, \overrightarrow{S'B'}})$.

Par suite :

- si f est un déplacement, alors f^{-1} est un déplacement;
- si f est un antidéplacement, alors f^{-1} est un antidéplacement.

2. Tout déplacement conserve les mesures des angles orientés de vecteurs. Tout antidéplacement change les signes de ces mesures.

Par conséquent :

- si f et g sont deux déplacements, alors $g \circ f$ est un déplacement;
- si f est un déplacement et g un antidéplacement, alors $g \circ f$ et $f \circ g$ sont des antidéplacements;
- si f et g sont deux antidéplacements, alors $g \circ f$ est un déplacement.

ANGLE D'UN DÉPLACEMENT

Considérons un déplacement f, un bipoint propre (A, B), c'est-à-dire tel que $A \neq B$, et son image (A', B') par f. Désignons par θ une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}})$.

Pour tout autre bipoint propre (M, N), d'image (M', N') par f, on a, f conservant les mesures des angles orientés :

$$(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{M'N'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MN}) \quad (2\pi),$$

d'où : $$(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{A'B'}) + (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{M'N'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MN}) + (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{A'B'}) \quad (2\pi),$$

soit : $$(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \theta \quad (2\pi).$$

On peut donc énoncer :

THÉORÈME 5 et DÉFINITION 3	**Pour tout déplacement f, il existe un réel θ tel que l'on ait, pour tout bipoint propre (M, N) d'image (M', N') par f :** $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}) = \theta \quad (2\pi)$. **On dit que le réel θ, défini modulo 2π, est une mesure de l'angle du déplacement f.**

On dit aussi, par abus de langage, que f est un déplacement d'angle θ.

Exemples

1. Une translation t est un déplacement d'angle nul. En effet pour tout bipoint propre (M, N) d'image (M', N') par t, on a $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}$, d'où $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}) = 0 \quad (2\pi)$.

2. Une rotation r d'angle θ est un déplacement d'angle θ. En effet, pour tout bipoint propre (M, N) d'image (M', N') par r, on a $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}) = \theta \quad (2\pi)$.

Propriétés

1. Soit f un déplacement d'angle θ, de déplacement réciproque f^{-1}. Pour tout bipoint propre (M', N') d'image (M, N) par f^{-1}, (M', N') est l'image de (M, N) par f.

D'où : $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}) = \theta \quad (2\pi)$, soit $(\overrightarrow{M'N'}, \overrightarrow{MN}) = -\theta \quad (2\pi)$.

Par suite :

Pour tout déplacement f d'angle θ, le déplacement réciproque f^{-1} est d'angle $-\theta$.

2. Soit f_1 et f_2 deux déplacements d'angles respectifs θ_1 et θ_2. Considérons un bipoint propre (M, N), son image (M_1, N_1) par f_1 et l'image (M', N') de (M_1, N_1) par f_2; (M', N') est alors l'image de (M, N) par le déplacement $f_2 \circ f_1$, et l'on a :

$$(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M_1N_1}) = \theta_1 \quad (2\pi) \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{M_1N_1}, \overrightarrow{M'N'}) = \theta_2 \quad (2\pi),$$

d'où : $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}) = (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M_1N_1}) + (\overrightarrow{M_1N_1}, \overrightarrow{M'N'}) = \theta_1 + \theta_2 \quad (2\pi)$.

Par suite :

Pour tous déplacements f_1 et f_2 d'angles respectifs θ_1 et θ_2, le déplacement composé $f_2 \circ f_1$ est d'angle $\theta_1 + \theta_2$.

DÉTERMINATION D'UN DÉPLACEMENT

Problème : Deux points A, A' et un réel θ étant donnés, existe-t-il un déplacement d'angle θ transformant A en A'?

1° S'il existe un déplacement f répondant à la question, il n'en existe qu'un. En effet l'image par f d'un point quelconque M, distinct de A, est un point M' tel que :

$$AM = A'M' \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'M'}) = \theta \quad (2\pi). \tag{1}$$

Or les relations (1) ci-dessus définissent, A, A', θ et M étant donnés, un unique point M'; f est donc l'application qui à A associe A', et à tout point M distinct de A associe le point M' défini par (1).

2° Montrons maintenant l'existence d'un déplacement solution du problème.

- Si $\theta = 0 \quad (2\pi)$, la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$ répond à la question.
- Si $\theta \neq 0 \quad (2\pi)$ et si $A = A'$, la rotation r de centre A et d'angle θ répond à la question.
- Si $\theta \neq 0 \quad (2\pi)$ et si $A \neq A'$, il existe un unique point Ω tel que :

$$\Omega A = \Omega A' \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega A'}) = \theta \quad (2\pi).$$

(Lorsque $\theta = \pi \quad (2\pi)$, Ω est le milieu de $[A, A']$ et lorsque $\theta \neq \pi \quad (2\pi)$, Ω est le point d'intersection de la médiatrice de $[A, A']$ et de l'arc de cercle Γ, ensemble des points M tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MA'}) = \theta \quad (2\pi)$.)

La rotation de centre Ω et d'angle θ transforme A en A' : elle répond à la question.

On peut donc énoncer :

THÉORÈME 6

Deux points A et A' et un réel θ étant donnés, il existe un unique déplacement f, d'angle θ transformant A en A'. De plus :

- **si $\theta = 0 \quad (2\pi)$, f est une translation;**
- **si $\theta \neq 0 \quad (2\pi)$, f est une rotation.**

Conséquences

1. Un déplacement est *déterminé* par la donnée de son angle θ, d'un point A quelconque et de l'image $A' = f(A)$ de ce point.

2. Le théorème **6** montre que les seuls déplacements sont les translations et les rotations. Plus précisément :

Tout déplacement d'angle θ :

- **est une translation si $\theta = 0 \quad (2\pi)$;**
- **est une rotation si $\theta \neq 0 \quad (2\pi)$.**

3. Considérons deux bipoints propres (A, B) et (A', B') tels que $AB = A'B'$ et désignons par θ une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}})$.

S'il existe un déplacement f transformant A en A' et B en B', f est l'unique déplacement d'angle θ tel que $f(A) = A'$.

Réciproquement, ce déplacement f transforme A en A' et B en le point B'' tel que $AB = A'B''$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B''}) = \theta \quad (2\pi)$, c'est-à-dire en le point B'.

On peut énoncer :

THÉORÈME 7 | **Étant donnés deux bipoints propres (A, B) et (A', B') tels que $AB = A'B'$, il existe un unique déplacement f transformant A en A' et B en B'.**

Il en résulte qu'un déplacement f est déterminé par la donnée de deux points distincts A, B et de leurs images respectives A', B' par f.

A noter que :

- si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$, le déplacement f est la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$;
- si $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{A'B'}$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \theta \quad (2\pi)$, f est une rotation r d'angle θ; le centre Ω de r est le point d'intersection des médiatrices des segments $[A, A']$ et $[B, B']$. (Lorsque l'un des deux points A, B est invariant, Ω est ce point invariant, et lorsque les segments $[A, A']$ et $[B, B']$ sont parallèles, Ω est le point d'intersection des droites (AB) et $(A'B')$.)

Activité

1. Produit de deux déplacements

L'application composée $f_2 \circ f_1$ de deux déplacements f_1 et f_2 d'angles respectifs θ_1 et θ_2 est un déplacement d'angle $\theta_1 + \theta_2$.

- Si $\theta_1 + \theta_2 = 0 \quad (2\pi)$, $f_2 \circ f_1$ est une translation dont le vecteur $\vec{u}$ est déterminé par un point E du plan et son image $E' = (f_2 \circ f_1)(E)$: $\vec{u} = \overrightarrow{EE'}$.

En particulier, lorsque f_1 et f_2 sont des translations de vecteurs respectifs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$, $f_2 \circ f_1$ est la translation de vecteur $\vec{u}_1 + \vec{u}_2$.

- Si $\theta_1 + \theta_2 \neq 0 \quad (2\pi)$, $f_2 \circ f_1$ est une rotation d'angle $\theta_1 + \theta_2$ et dont le centre A est défini, à partir d'un point E du plan et de son image $E' = (f_2 \circ f_1)(E)$, par les relations :

$$AE = AE' \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AE'}) = \theta_1 + \theta_2 \quad (2\pi).$$

A est le point d'intersection de la médiatrice du segment $[E, E']$ et de l'ensemble Γ des points M du plan tels que $(\overrightarrow{ME}, \overrightarrow{ME'}) = \theta_1 + \theta_2 \quad (2\pi)$. (Si $\theta_1 + \theta_2 \neq \pi \quad (2\pi)$, Γ est un arc de cercle d'extrémités E et E'; si $\theta_1 + \theta_2 = \pi \quad (2\pi)$, Γ est le segment $[E, E']$ privé des points E et E' et $f_2 \circ f_1$ est le demi-tour de centre A, milieu de $[E, E']$.)

I — *Soit r une rotation de centre A et d'angle θ* rad *et soit t une translation de vecteur $\vec{u}$. On suppose $\theta \neq 0 \quad (2\pi)$ et $\vec{u} \neq \vec{0}$.*

1° Préciser l'angle et la nature des déplacements $t \circ r$ et $r \circ t$.

2° a) Décrire la construction du centre B de $t \circ r$ à partir du point A et de son image $A' = (t \circ r)(A)$. (On indiquera brièvement les différentes étapes de la construction.)

b) Décrire la construction du centre C de $r \circ t$ à partir du point A'', antécédent de A par t.

c) Démontrer que $\overrightarrow{CB} = \vec{u}$. A-t-on $r \circ t = t \circ r$?

3° a) Construire sur une même figure les points B et C lorsque $\theta = \frac{\pi}{3}$ rad (prendre $\|\vec{u}\| = 5$ cm).

b) Même question dans les cas suivants : $\theta = -\frac{\pi}{4}$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\theta = \frac{2\pi}{3}$, $\theta = \pi$.

II — Soit r_1 et r_2 deux rotations de centres respectifs A_1 et A_2 et d'angles respectifs θ_1 et θ_2. On suppose $A_1 \neq A_2$.

1° On suppose dans cette question que $\theta_1 + \theta_2 = 0 \quad (2\pi)$.

a) Préciser la nature des déplacements $r_2 \circ r_1$ et $r_1 \circ r_2$.

b) Décrire la construction des vecteurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $r_2 \circ r_1$ et $r_1 \circ r_2$. Faire cette construction lorsque $\theta_1 = \frac{\pi}{6}$ rad (prendre $A_1A_2 = 5$ cm).

Démontrer que $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$ et $(\vec{u} + \vec{v}) \perp \overrightarrow{A_1A_2}$. A-t-on $r_2 \circ r_1 = r_1 \circ r_2$?

c) Étudier le cas particulier $\theta_1 = \pi \quad (2\pi)$.

2° On suppose maintenant que $\theta_1 + \theta_2 \neq 0 \quad (2\pi)$.

a) Préciser la nature des déplacements $r_2 \circ r_1$ et $r_1 \circ r_2$.

b) Décrire la construction des centres respectifs A et B de $r_2 \circ r_1$ et $r_1 \circ r_2$. Faire cette construction dans le cas $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ et $\theta_2 = \frac{\pi}{6}$.

c) Démontrer que A et B sont symétriques orthogonaux par rapport à la droite (A_1A_2). (On pourra remarquer que $(r_1 \circ r_2)^{-1}$ est une rotation de même centre que la rotation $r_1 \circ r_2$.) A-t-on $r_1 \circ r_2 = r_2 \circ r_1$?

2. Décomposition d'une rotation

1° Soit $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ deux droites sécantes en A.

a) Démontrer que l'application composée $s_{\mathscr{D}'} \circ s_{\mathscr{D}}$, où $s_{\mathscr{D}}$ et $s_{\mathscr{D}'}$ sont les réflexions d'axes respectifs $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$, est une rotation r de centre A.

b) Soit B un point de $\mathscr{D}$ distinct de A et C un point de $\mathscr{D}'$ distinct de A. Démontrer que si α est une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$, alors 2α est une mesure de l'angle de la rotation r.

2° Soit r une rotation de centre A et d'angle θ et soit $\mathscr{D}$ une droite passant par A.

a) B étant un point de $\mathscr{D}$ distinct de A, on considère les points B_1 et B_2 tels que :

$$AB = AB_1 = AB_2, \quad (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB_1}) = \frac{\theta}{2} \quad (2\pi), \quad (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB_2}) = -\frac{\theta}{2} \quad (2\pi).$$

On désigne par Δ_1 la droite (AB_1) et par Δ_2 la droite (AB_2). Démontrer que :

$$r = s_{\Delta_1} \circ s_{\mathscr{D}} = s_{\mathscr{D}} \circ s_{\Delta_2},$$

où $s_{\mathscr{D}}$, s_{Δ_1} et s_{Δ_2} sont les réflexions d'axes respectifs $\mathscr{D}$, Δ_1, Δ_2.

b) Soit $s_{\Delta'_1}$ une réflexion d'axe Δ'_1 telle que $r = s_{\Delta'_1} \circ s_{\mathscr{D}}$. Démontrer que les droites Δ_1 et Δ'_1 sont confondues.

c) Démontrer de même que si $s_{\Delta'_2}$ est une réflexion d'axe Δ'_2 telle que $r = s_{\mathscr{D}} \circ s_{\Delta'_2}$, alors $\Delta_2 = \Delta'_2$.

On peut conclure par l'énoncé :

Pour toute rotation r de centre A et pour toute droite $\mathscr{D}$ passant par A :

- **il existe une droite Δ_1 unique telle que $r = s_{\Delta_1} \circ s_{\mathscr{D}}$;**
- **il existe une droite Δ_2 unique telle que $r = s_{\mathscr{D}} \circ s_{\Delta_2}$.**

3° Soit r_1 et r_2 les rotations de centres respectifs A_1 et $A_2 (A_1 \neq A_2)$ et d'angles respectifs $-\frac{\pi}{3}$ et $\frac{3\pi}{4}$. On note $\mathscr{D}$ la droite (A_1A_2).

a) Construire les droites Δ_1 et Δ_2 telles que $r_1 = s_{\mathscr{D}} \circ s_{\Delta_1}$ *et* $r_2 = s_{\Delta_2} \circ s_{\mathscr{D}}$.

b) Montrer que $r_2 \circ r_1$ est une rotation dont le centre est le point d'intersection des droites Δ_1 et Δ_2.

c) Construire par la même méthode le centre de la rotation $r_1 \circ r_2$.

Exercices d'application

12. Soit t une translation de vecteur $\vec{u}$ non nul et r une rotation de centre A et d'angle θ non nul.

1° Démontrer que les applications composées $r_1 = t \circ r$ et $r_2 = r \circ t$ sont des rotations d'angle θ dont on construira les centres respectifs A_1 et A_2. A-t-on $r_1 = r_2$?

2° Démontrer que $\overrightarrow{A_2A_1} = \vec{u}$, $AA_1 = AA_2$, $(\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{AA_2}) = \theta \quad (2\pi)$.

13. On considère la rotation r_1 de centre O_1 et d'angle $\frac{\pi}{4}$ et la rotation r_2 de centre O_2 et d'angle $\frac{3\pi}{4}$ $(O_1 \neq O_2)$.

1° Démontrer que les applications composées $s = r_2 \circ r_1$ et $s' = r_1 \circ r_2$ sont des symétries centrales dont on construira les centres respectifs A et A'.

2° Démontrer que les points O_1, O_2, A, A' sont cocycliques et que la droite (O_1O_2) est la médiatrice du segment $[A, A']$. Déterminer une mesure des angles $(\widehat{\overrightarrow{O_1A}, \overrightarrow{O_1A'}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{O_2A'}, \overrightarrow{O_2A}})$.

14. On donne une droite $\mathscr{D}$ et un point O de $\mathscr{D}$. On désigne par s la réflexion d'axe $\mathscr{D}$ et par r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$ rad.

Déterminer la nature des transformations $r \circ s$ et $s \circ r$ et construire leurs éléments caractéristiques.

15. On donne un point O, un vecteur $\vec{u}$ non nul et un réel θ de l'intervalle $]0, 2\pi[$.

1° Construire un bipoint (A, B) tel que :

$$OA = OB, \quad \overrightarrow{AB} = -\vec{u}, \quad (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \theta \quad (2\pi).$$

2° On considère la translation t de vecteur $\vec{u}$ et la rotation r de centre O et d'angle θ. Démontrer que l'application composée $t \circ r$ est une rotation dont on déterminera l'angle et le centre.

16. On considère la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$ et la rotation r' de centre O' et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ (O' est distinct de O).

1° Déterminer l'application composée :

$$f = r' \circ r.$$

2° Déterminer les applications r^{-1} et r'^{-1}, réciproques de r et r'.

3° Déterminer les deux applications composées :

$$f_1 = r'^{-1} \circ r^{-1} \circ r' \circ r \quad \text{et} \quad f_2 = r^{-1} \circ r'^{-1} \circ r' \circ r.$$

17. On appelle R_A la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{6}$ et R_B la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Quelle est la nature de l'application composée $R_B \circ R_A$? (On indiquera les éléments caractérisant cette application.)

Démontrer que les transformés respectifs A' et B' des points A et B par $R_B \circ R_A$ appartiennent à la médiatrice du segment $[A, B]$.

18. Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère l'application f de $\mathscr{P}$ dans lui-même qui au point M de coordonnées (x, y) fait correspondre le point M' de coordonnées (x', y') définies par :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{5}(-3x - 4y + 3) \\ y' = \frac{1}{5}(-4x + 3y + 14). \end{cases}$$

1° Démontrer que f est un antidéplacement de $\mathscr{P}$.

2° Déterminer l'ensemble des points invariants par f.

3° Démontrer qu'il existe une droite Δ et un vecteur $\vec{u}$ de même direction que Δ tels que $f = S_\Delta \circ T_{\vec{u}} = T_{\vec{u}} \circ S_\Delta$, où S_Δ est la réflexion d'axe Δ et $T_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$.

Déterminer une équation de Δ et les coordonnées de $\vec{u}$.

19. Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On considère l'application f qui au point $M(x, y)$ associe le point $M'(x', y')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + \frac{13}{5} \\ y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + \frac{6}{5}. \end{cases}$$

1° Montrer que f est une isométrie. f est-elle un déplacement ou un antidéplacement?

2° Déterminer $f \circ f$.

3° Déterminer le vecteur $\vec{v}$ et la droite $\mathscr{D}$ de vecteur directeur $\vec{v}$ tels que $f = s \circ t = t \circ s$, t étant la translation de vecteur $\vec{v}$ et s la réflexion d'axe $\mathscr{D}$.

20. Dans le plan $\mathscr{P}$, on considère un carré $ABCD$ de centre O. On note :

$$T = \{A, B, C\} \quad \text{et} \quad T' = \{A, C, D\},$$

et on appelle F l'ensemble des isométries de $\mathscr{P}$ qui transforment T en T'.

1° a) Montrer que toute isométrie de F transforme B en D et O en lui-même.

b) Déterminer les isométries de F.

2° Soit $G = \{f \circ g, f \in F, g \in F\} \cup F$. Déterminer les éléments de G. Montrer que G contient l'isométrie composée de deux quelconques de ses éléments et l'isométrie réciproque de chacun de ses éléments.

TRAVAUX PRATIQUES

PROGRAMMATION

1° Programmer le calcul de la mesure principale θ de l'angle orienté de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ définis par leurs coordonnées respectives (a, b) et (a', b') dans un repère orthonormal direct du plan $\mathscr{P}$.

Réponse (TI-62)

[ON/C] [CP]	efface la mémoire programme
[LRN]	met en mode programme
[RCL] 1 [×] [RCL] 3	
[+] [RCL] 2 [×] [RCL] 4 [=]	calcule $\vec{u} \cdot \vec{u}' = aa' + bb'$
[÷] [(] [RCL] 1 [x^2]	
[+] [RCL] 2 [x^2] [)] [$\sqrt{x}$] [=]	divise $\vec{u} \cdot \vec{u}'$ par $\lVert\vec{u}\rVert = \sqrt{a^2 + b^2}$
[÷] [(] [RCL] 3 [x^2]	
[+] [RCL] 4 [x^2] [)] [$\sqrt{x}$] [=]	divise $\dfrac{\vec{u} \cdot \vec{u}'}{\lVert\vec{u}\rVert}$ par $\lVert\vec{u}'\rVert = \sqrt{a'^2 + b'^2}$ (calcul de $\cos\theta$)
[INV] [COS] [STO] 0	calcule $\lvert\theta\rvert$ et place $\lvert\theta\rvert$ dans la mémoire 0
[R/S]	affiche $\lvert\theta\rvert$
[RCL] 1 [×] [RCL] 4 [−] [RCL] 2	
[×] [RCL] 3 [=]	calcule dét $(\vec{u}, \vec{u}')$
[INV] [$\lvert x\rvert$] [×] [RCL] 0 [=]	calcule le signe de θ, puis θ
[R/S] [RST]	affiche θ et réinitialise le pointeur
[LRN]	retour en mode calcul
a [STO] 1 b [STO] 2	entrée des coordonnées (a, b) de $\vec{u}$
a' [STO] 3 b' [STO] 4	entrée des coordonnées (a', b') de $\vec{u}'$
[R/S]	affiche $\lvert\theta\rvert$
[R/S]	affiche θ

Avant d'exécuter le programme, il convient bien entendu de sélectionner l'unité d'angle appropriée (degré, grade ou radian) avec la fonction [DRG→].

2° Dans le plan orienté $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $A(1, 1)$, $B(3, 2)$, $A'(-1, 5)$, $B'(-2, 3)$.

a) Montrer qu'il existe un déplacement f transformant A en A' et B en B'.
Utiliser le programme du 1° pour calculer l'angle de f en degrés et en radians.

b) Préciser la nature de f et déterminer ses éléments caractéristiques.

3° Reprendre la question 2° pour les points $A(1, 1)$, $B(14, 1)$, $A'(3, 2)$, $B'(8, -10)$.

LIEUX GÉOMÉTRIQUES

Lorsque, dans une figure, un point *variable* M décrit un ensemble $\mathscr{L}$ (droite, cercle,...), on dit que $\mathscr{L}$ est le **lieu géométrique** de M. Si un autre point M' se déduit de M par une transformation f, le lieu géométrique de M' se déduit de celui de M : c'est l'image $f(\mathscr{L})$ de $\mathscr{L}$ par f.

Exemple de résolution

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et de rayon ρ passant par un point A. Deux points B et C du cercle $\mathscr{C}$ varient de manière que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \theta \quad (\pi)$, *$\theta$ étant un réel donné.*

Déterminer le lieu géométrique du point B', symétrique orthogonal de B par rapport à la droite (AC).

Le point B' est tel que (figure 8) :

$$\begin{cases} AB = AB' \\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB'}) = 2\theta \quad (2\pi) \end{cases}$$

Il en résulte que B' est l'image de B par la rotation r de centre A et d'angle 2θ.

Le lieu géométrique de B' est donc le cercle $\mathscr{C}'$, image du cercle $\mathscr{C}$ par la rotation r. (Rappelons que $\mathscr{C}'$ est le cercle de centre $O' = r(O)$ et de même rayon, ρ, que $\mathscr{C}$.)

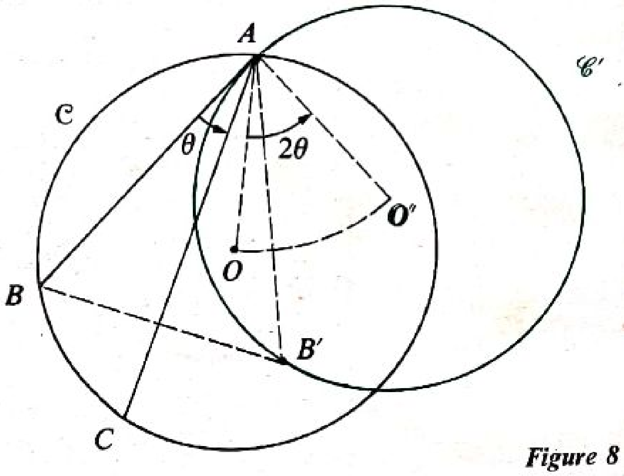


Figure 8

Exercices à résoudre

1. *On donne un cercle fixe de centre O et un point fixe Ω. Un point A variable décrit $\mathscr{C}$. On considère le carré $ABCD$ de centre Ω. Trouver les lieux géométriques des sommets B, C, D.*

2. *On donne une droite $\mathscr{D}$ et un point A n'appartenant pas à $\mathscr{D}$. Un point variable B décrit la droite $\mathscr{D}$. Déterminer le lieu du sommet C du triangle équilatéral direct ABC.*

3. *Rappelons que, lorsqu'un point M décrit un arc de cercle γ d'extrémités A et B ouvert en A et B, les mesures de l'angle de vecteurs $(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}})$ restent invariantes.*
A tout point M de γ on associe le point N de la demi-droite Bx contenant M, tel que $BN = AM$.

1° Déterminer le centre et l'angle de la rotation r telle que :

$$r(A) = B \quad \text{et} \quad r(M) = N.$$

2° En déduire le lieu géométrique de N, lorsque M décrit γ.

PROBLÈMES DE CONSTRUCTION

On a déjà montré, notamment dans l'activité de la page 138, comment des transformations telles que translations, homothéties ou symétries, pouvaient servir à résoudre certains problèmes de construction.

Voici d'autres exemples pour lesquels la transformation utilisée est une rotation ou une réflexion.

Exemple de résolution

On donne deux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ et un point A n'appartenant ni à $\mathscr{D}$, ni à $\mathscr{D}'$. Construire un triangle équilatéral ABC tel que B appartienne à $\mathscr{D}$ et C à $\mathscr{D}'$.

1° Étudions une configuration répondant à la question (figure 9).

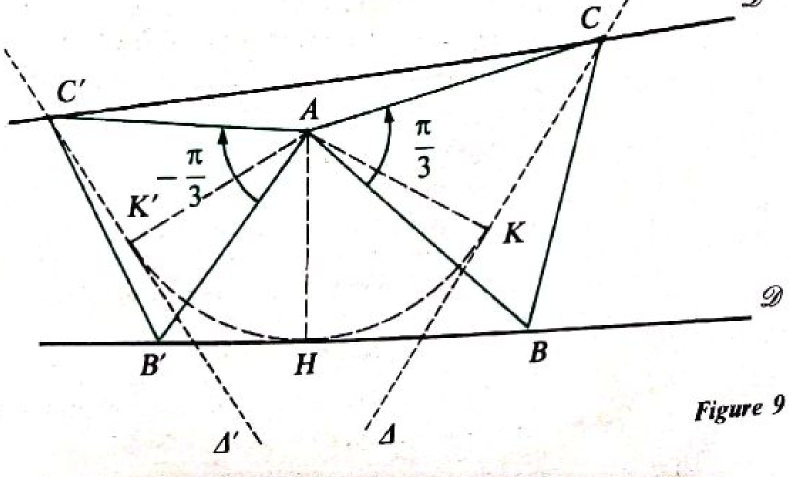


Figure 9

Le triangle ABC étant équilatéral deux situations peuvent se présenter :

$$AB = AC \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3} \quad (2\pi), \quad \text{ou} \quad AB = AC \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{3} \quad (2\pi).$$

Supposons par exemple $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3} \quad (2\pi)$.

Le point C est alors l'image de B par la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Comme B appartient à $\mathscr{D}$, C appartient à la droite Δ image de $\mathscr{D}$ par r.

Lorsque $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{3} \quad (2\pi)$, le point C appartient à la droite Δ' image de $\mathscr{D}$ par la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

2° La construction demandée découle de ces résultats.

On construit les droites Δ et Δ' images respectives de $\mathscr{D}$ par les rotations de centre A et d'angles $\frac{\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{3}$. (Sur la figure 9, Δ et Δ' ont été obtenues à partir des images K et K' du point H projeté orthogonal de A sur $\mathscr{D}$.)

Les droites Δ et Δ' coupent en général $\mathscr{D}'$, respectivement en C et C'. Le point B se déduit alors de C par la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{3}$; le point B' se déduit de C' par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Le problème admet donc en général deux solutions.

Exercices à résoudre

1. *On donne un réel $a > 0$ et, dans le plan $\mathscr{P}$, deux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ concourantes en I et deux points A et A' appartenant respectivement à $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.*

Construire deux points M et M' tels que :

$$M \in \mathscr{D}, \quad M' \in \mathscr{D}', \quad AM = A'M', \quad MM' = 2a.$$

2. *On donne trois droites $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$, $\mathscr{D}_3$. Construire un carré $ABCD$ dont les sommets A et C appartiennent à $\mathscr{D}_1$, et dont les sommets B et D appartiennent respectivement à $\mathscr{D}_2$ et $\mathscr{D}_3$.*

3. *On donne une droite $\mathscr{D}$ et deux points A et B n'appartenant pas à $\mathscr{D}$.*

1° Construire un point M de $\mathscr{D}$ tel que $\mathscr{D}$ soit une des bissectrices (intérieure ou extérieure) de l'angle $\widehat{AMB}$.

2° a) Que peut-on dire de la somme $MA + MB$ lorsque A et B sont d'un même côté de $\mathscr{D}$?
b) Que peut-on dire de la différence $|MA - MB|$ lorsque A et B sont de part et d'autre de $\mathscr{D}$?

PROPRIÉTÉS D'UNE FIGURE

Une isométrie peut aussi se révéler comme un outil très efficace pour établir une propriété d'une configuration géométrique.

L'exemple résolu suivant donne une démonstration de la propriété d'alignement connue sous le nom de **droite de Steiner.** (Une démonstration de cette propriété a déjà été proposée au chapitre 7, page 195.)

Exemple de résolution

On considère dans le plan $\mathscr{P}$ un triangle ABC, son orthocentre H et son cercle circonscrit $\mathscr{C}$. Soit M un point de $\mathscr{C}$ et M_1, M_2, M_3 ses symétriques orthogonaux respectifs par rapport aux côtés (BC), (CA) et (AB).

Démontrer que les points M_1, M_2, M_3 et H sont alignés (figure 10).

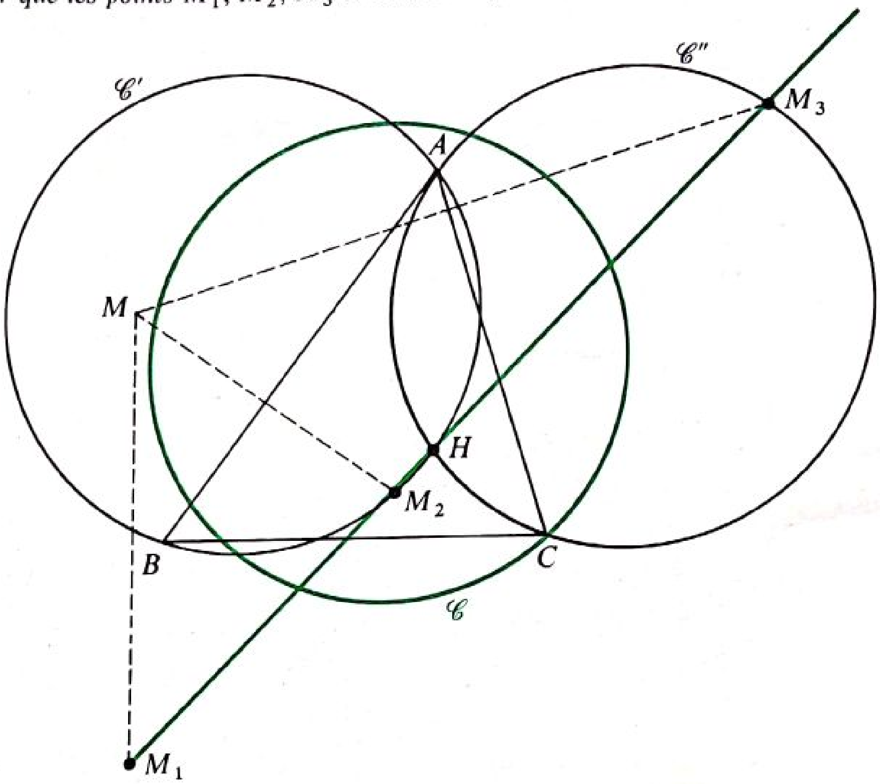


Figure 10

On sait que les symétriques orthogonaux de l'orthocentre H par rapport aux côtés du triangle ABC appartiennent au cercle circonscrit à ce triangle.

Il en résulte que l'image du cercle $\mathscr{C}$ par la réflexion s_1 d'axe (AB) est un cercle $\mathscr{C}'$ passant par A, B, M_2 et H. De même, l'image de $\mathscr{C}$ par la réflexion s_2 d'axe (AC) est un cercle $\mathscr{C}''$ passant par A, C, M_3 et H.

Le cercle $\mathscr{C}''$ apparaît comme l'image de $\mathscr{C}'$ par l'application composée $s_2 \circ s_1$. Or $s_2 \circ s_1$ est une rotation r de centre A. De plus, $r(M_2) = M_3$. On sait alors que les points M_2, M_3 et H sont alignés (voir activité 2, page 279).

On démontre de même l'alignement des points M_1, M_2 et H.

Il en résulte que les quatre points M_1, M_2, M_3 et H sont alignés; la droite Δ contenant ces quatre points est la **droite de Steiner** du point M.

Exercices à résoudre

1. *On considère deux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sécantes en I, deux points distincts A et B de $\mathscr{D}$ et deux points A' et B' de $\mathscr{D}'$ tels que $AB = A'B'$.*

A tout point M de $\mathscr{D}$, de paramètre t dans le repère $(A, \overrightarrow{AB})$ de $\mathscr{D}$, on associe le point M' de $\mathscr{D}'$, de paramètre t dans le repère $(A', \overrightarrow{A'B'})$ de $\mathscr{D}'$.

1° Lorsque M varie sur $\mathscr{D}$, démontrer que la médiatrice du segment $[M, M']$ passe par un point fixe O.

Que peut-on dire de l'angle de vecteurs $(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}})$?

2° Démontrer que le cercle (IMM') passe par deux points fixes.

3° Démontrer que le projeté orthogonal de O sur la droite (MM') appartient à une droite fixe.

Pour traiter cet exercice, on pourra considérer la rotation r telle que $r(A) = A'$ et $r(B) = B'$ et montrer que $r(M) = M'$.

2. I — *Soit deux points distincts A et B et soit M un point de la droite (AB). On pose $MA = a$ et $MB = b$. Démontrer que le point M est le seul point de la droite (AB) dont les distances à A et à B sont respectivement a et b.*

II — *On considère un triangle isocèle ABC $(AB = AC)$. A tout point N de la droite (BC), on associe* *le point d'intersection M de la droite (AB) et de la droite passant par N et parallèle à la droite (AC) et le point d'intersection M' de la droite (AC) et de la droite passant par N et parallèle à la droite (AB).*

1° Démontrer que, s'il existe une rotation r telle que $r(M) = M'$, r transforme le bipoint (A, B) en le bipoint (C, A).

2° Démontrer que la rotation r transformant (A, B) en (C, A) est telle que $r(M) = M'$.
(On utilisera la partie I.*)*

3° Déterminer le centre et l'angle de la rotation r.

4° Démontrer que lorsque le point N décrit la droite (BC) :
a) la médiatrice de [M, M'] passe par un point fixe, O;
b) les mesures de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}})$ restent invaraintes;
c) le milieu du segment [M, M'] se déplace sur une droite fixe;
d) le cercle (AMM') passe par deux points fixes.

3. *On considère un triangle ABC direct (si on décrit le cercle circonscrit au triangle dans le sens direct en partant de A, B est le second sommet rencontré).*
Soit I, J, K les milieux respectifs des côtés [B, C], [C, A] et [A, B]. Soit N l'image de C par le quart de tour direct de centre I et P l'image de A par le quart de tour direct de centre K.

1° Démontrer que $KP = JI$.

2° Soit r la rotation transformant K en J et P en I. Quel est l'angle de r?

3° Déterminer l'image de I par r. En déduire que les segments [P, I] et [I, N] ont même longueur et sont orthogonaux.

4° Soit r_1 le quart de tour direct de centre P et r_2 le quart de tour direct de centre N.
a) Démontrer que $r_2 \circ r_1$ est une symétrie centrale. Déterminer l'image de B par $r_2 \circ r_1$. En déduire le centre de $r_2 \circ r_1$.
b) Soit Q l'image de P par $r_2 \circ r_1$. Démontrer que le triangle PNQ est rectangle isocèle. Retrouver ainsi les propriétés des segments [P, I] et [I, N] démontrées au 3°.

ISOMÉTRIES LAISSANT INVARIANT UN ENSEMBLE DONNÉ

$\mathcal{F}$ étant une partie du plan $\mathcal{P}$, désignons respectivement par $\mathcal{I}'$ et $\mathcal{D}'$ les ensembles des isométries et des déplacements de $\mathcal{P}$ laissant $\mathcal{F}$ invariante.

L'ensemble $\mathcal{I}'$ est une partie de l'ensemble $\mathcal{I}$ des isométries de $\mathcal{P}$.

- L'application identique de $\mathcal{P}$ appartient à $\mathcal{I}'$.
- L'application composée $g \circ f$ de deux éléments de $\mathcal{I}'$ est une isométrie telle que :

$$(g \circ f)(\mathcal{F}) = g[f(\mathcal{F})] = g(\mathcal{F}) = \mathcal{F}.$$

Il en résulte que $g \circ f$ est un élément de $\mathcal{I}'$. On exprime cette propriété en disant que l'ensemble $\mathcal{I}'$ est stable pour la composition des applications.

- Tout élément f de $\mathcal{I}'$ est une isométrie dont l'isométrie réciproque f^{-1} est telle que :

$$f^{-1}(\mathcal{F}) = f^{-1}[f(\mathcal{F})] = (f^{-1} \circ f)(\mathcal{F}) = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}.$$

L'ensemble $\mathcal{I}'$ contient donc l'isométrie réciproque de chacun de ses éléments.

On démontre de même que l'ensemble $\mathcal{D}'$ des déplacements laissant $\mathcal{F}$ invariante :

- contient l'application identique de $\mathcal{P}$;
- est stable pour la composition des applications;
- contient le déplacement réciproque de chacun de ses éléments.

Afin de faciliter l'étude de tels ensembles, récapitulons un certain nombre de résultats.

1. Soit f une isométrie laissant invariante une partie *finie* $\mathcal{F}$. Comme toute isométrie conserve les barycentres, il en résulte que l'isobarycentre des points de $\mathcal{F}$ est invariant par f.

En particulier, si la partie $\mathcal{F}$ est formée de deux points A et B, le milieu du bipoint (A, B) est invariant par f.

2. Soit f une isométrie du plan $\mathscr{P}$ laissant invariant un point A de $\mathscr{P}$.

- Si f est un déplacement, f est une rotation de centre A.
- Si f est un antidéplacement, f est une réflexion dont l'axe passe par A.

3. Soit f une isométrie du plan $\mathscr{P}$ laissant invariants deux points *distincts* A et B :

$$f(A) = A \quad \text{et} \quad f(B) = B.$$

- Si f est un déplacement, f est l'application identique de $\mathscr{P}$.
- Si f est un antidéplacement, f est la réflexion dont l'axe est la droite (AB).

4. Soit A et B deux points *distincts* du plan et soit f une isométrie telle que :

$$f(A) = B \quad \text{et} \quad f(B) = A.$$

Le milieu O du bipoint (A, B) est invariant par f. Par suite :

- Si f est un déplacement, f est la symétrie centrale de centre O.
- Si f est un antidéplacement, f est la réflexion dont l'axe est la médiatrice du segment $[A, B]$.

5. Une droite $\mathscr{D}$ est invariante par une réflexion s_{Δ} d'axe Δ si, et seulement si :

$$\mathscr{D} = \Delta \quad \text{ou} \quad \mathscr{D} \perp \Delta.$$

Exemples de résolution

1. *Étudier les ensembles $\mathscr{I}'$ et $\mathscr{D}'$ des isométries et des déplacements laissant invariant l'ensemble $\mathscr{F} = \{A, B\}$ formé de deux points* distincts *A et B.*

Soit f un élément de $\mathscr{I}'$.

- Si f est un déplacement et si $f(A) = A$ et $f(B) = B$, alors $f = \mathrm{Id}_{\mathscr{P}}$.
- Si f est un déplacement et si $f(A) = B$ et $f(B) = A$, alors f est la symétrie centrale, s_O, dont le centre est le milieu O du bipoint (A, B).
- Si f est un antidéplacement et si $f(A) = A$ et $f(B) = B$, alors f est la réflexion $s_{\mathscr{D}}$ dont l'axe est la droite $\mathscr{D}$ passant par A et B.
- Si f est un antidéplacement et si $f(A) = B$ et $f(B) = A$, alors f est la réflexion s_{Δ} dont l'axe est la médiatrice Δ du segment $[A, B]$.

Réciproquement, il est immédiat que $\mathrm{Id}_{\mathscr{P}}$, s_O, $s_{\mathscr{D}}$ et s_{Δ} sont quatre isométries laissant invariante la partie $\{A, B\}$.

Par suite : $\mathscr{D}' = \{\mathrm{Id}_{\mathscr{P}}, s_O\}$,

$\mathscr{I}' = \{\mathrm{Id}_{\mathscr{P}}, s_O, s_{\mathscr{D}}, s_{\Delta}\}$.

La table de composition de l'ensemble $\mathscr{I}'$ est donnée ci-contre.

	$\mathrm{Id}_{\mathscr{P}}$	s_O	$s_{\mathscr{D}}$	s_{Δ}
$\mathrm{Id}_{\mathscr{P}}$	$\mathrm{Id}_{\mathscr{P}}$	s_O	$s_{\mathscr{D}}$	s_{Δ}
s_O	s_O	$\mathrm{Id}_{\mathscr{P}}$	s_{Δ}	$s_{\mathscr{D}}$
$s_{\mathscr{D}}$	$s_{\mathscr{D}}$	$s_{''}$	$\mathrm{Id}_{\mathscr{P}}$	s_O
s_{Δ}	s_{Δ}	$s_{\mathscr{D}}$	s_O	$\mathrm{Id}_{\mathscr{P}}$

A noter que tout élément f de $\mathscr{I}'$ est involutif, c'est-à-dire égal à sa transformation réciproque f^{-1}.

2. *Étudier les ensembles $\mathscr{I}'$ et $\mathscr{D}'$ des isométries et des déplacements laissant invariant l'ensemble $\mathscr{F} = \{A, B, C\}$ formé des trois sommets d'un triangle équilatéral.*

Pour toute isométrie f laissant la partie $\mathscr{F}$ invariante, le centre de gravité O du triangle ABC est invariant par f (figure 11).

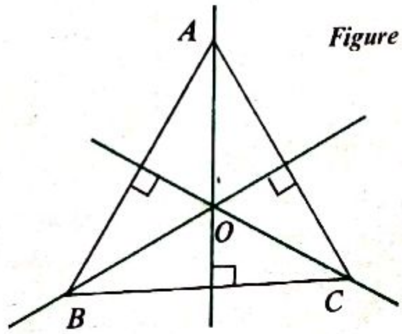


Figure 11

- Si f est antidéplacement, f est une réflexion dont l'axe passe par O et par un des sommets du triangle. L'isométrie f est donc une des trois réflexions $s_{(OA)}$, $s_{(OB)}$, $s_{(OC)}$ d'axes respectifs (OA), (OB) et (OC).

Réciproquement, il est immédiat que ces trois réflexions laissent la partie $\{A, B, C\}$ invariante.

- Si f est un déplacement, f est une rotation de centre O et l'application composée $f \circ s_{(OA)}$ est une réflexion dont l'axe passe par O.

Comme de plus cette réflexion laisse $\mathscr{F}$ invariante, on a :

$$f \circ s_{(OA)} = s_{(OA)} \quad \text{ou} \quad f \circ s_{(OA)} = s_{(OB)} \quad \text{ou} \quad f \circ s_{(OA)} = s_{(OC)}.$$

D'où :

$$f = \mathrm{Id}_{\mathscr{P}} \quad \text{ou} \quad f = s_{(OB)} \circ s_{(OA)} \quad \text{ou} \quad f = s_{(OC)} \circ s_{(OA)}.$$

Réciproquement, il est immédiat que les trois rotations $\mathrm{Id}_{\mathscr{P}}$, $s_{(OB)} \circ s_{(OA)}$, $s_{(OC)} \circ s_{(OA)}$ laissent $\mathscr{F}$ invariante.

Finalement : $\mathscr{D}' = \{\mathrm{Id}_{\mathscr{P}}, s_{(OB)} \circ s_{(OA)}, s_{(OC)} \circ s_{(OA)}\}$,

$$\mathscr{I}' = \{\mathrm{Id}_{\mathscr{P}}, s_{(OB)} \circ s_{(OA)}, s_{(OC)} \circ s_{(OA)}, s_{(OA)}, s_{(OB)}, s_{(OC)}\}.$$

Le lecteur pourra établir, à titre d'exercice, la table de composition de l'ensemble $\mathscr{I}'$.

Exercice à résoudre

$\mathscr{F}$ étant une partie du plan $\mathscr{P}$, on désigne respectivement par $\mathscr{D}'$ et $\mathscr{I}'$ les ensembles des déplacements et des isométries laissant la partie $\mathscr{F}$ invariante. Déterminer $\mathscr{D}'$ et $\mathscr{I}'$ et construire, lorsque $\mathscr{I}'$ est fini, la table de composition de l'ensemble $\mathscr{I}'$, dans les cas suivants :

a) A, B, C sont les trois sommets d'un triangle isocèle ($AB = AC$) non équilatéral; $\mathscr{F} = \{A, B, C\}$.

b) A, B, C, D sont les quatre sommets d'un rectangle non carré; $\mathscr{F} = \{A, B, C, D\}$.

c) A, B, C, D sont les quatre sommets d'un losange non carré; $\mathscr{F} = \{A, B, C, D\}$.

d) A, B, C, D sont les quatre sommets d'un carré; $\mathscr{F} = \{A, B, C, D\}$.

e) Δ est une droite; $\mathscr{F} = \Delta$.

f) Δ et Δ' sont deux droites strictement parallèles; $\mathscr{F} = \Delta \cup \Delta'$.

g) Δ et Δ' sont deux droites orthogonales; $\mathscr{F} = \Delta \cup \Delta'$.

h) A, B, C, D, E sont les cinq sommets d'un pentagone régulier; $\mathscr{F} = \{A, B, C, D, E\}$.

i) A, B, C, D, E, F sont les six sommets d'un hexagone régulier; $\mathscr{F} = \{A, B, C, D, E, F\}$.

j) Γ est un cercle de centre O; $\mathscr{F} = \Gamma$.

DÉCOMPOSITION CANONIQUE D'UN ANTIDÉPLACEMENT

On sait que tout antidéplacement f peut s'exprimer sous la forme $f = t \circ s_{\mathscr{D}}$, où t est une translation, de vecteur $\vec{u}$, et $s_{\mathscr{D}}$ une réflexion d'axe $\mathscr{D}$.

1° On considère un point M quelconque du plan et les points $M_1 = s_{\mathscr{D}}(M)$ et $M' = t(M_1)$ (figure 12).
Soit H et I les milieux respectifs des bipoints (M, M_1) et (M, M').
Démontrer que $\overrightarrow{HI} = \frac{1}{2}\vec{u}$. En déduire que le point I appartient à une droite fixe Δ parallèle à $\mathscr{D}$.

2° Soit M_2 le symétrique orthogonal de M par rapport à Δ et K le milieu de (M, M_2).

a) Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{HK}$, $\overrightarrow{KI}$ et $\overrightarrow{M_2M'}$ sont constants.

b) On note $\overrightarrow{M_2M'} = \vec{u}_1$ et on désigne par t_1 la translation de vecteur $\vec{u}_1$ et par s_Δ la réflexion d'axe Δ. Démontrer que :

$$f = t_1 \circ s_\Delta = s_\Delta \circ t_1.$$

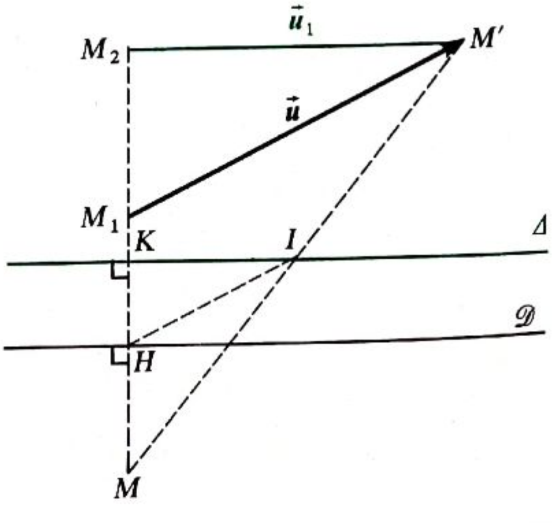


Figure 12

On peut conclure par l'énoncé :

Soit f un antidéplacement du plan $\mathscr{P}$.

1. Pour tout point M d'image M', le milieu du bipoint (M, M') appartient à une droite fixe Δ appelée l'axe de l'antidéplacement.

2. De plus f peut se décomposer sous la forme $f = t_1 \circ s = s \circ t_1$, où s est la réflexion d'axe Δ et t_1 une translation dont le vecteur $\vec{u}_1$, s'il n'est pas nul, a même direction que Δ.

EXERCICES ET PROBLÈMES

21. Soit un triangle isocèle (OAB) $(OA = OB)$ et un point P variable du segment $[A, B]$, $P \neq A$ et $P \neq B$. La parallèle menée de P à la droite (OB) coupe la droite (OA) en A' et la parallèle menée de P à la droite (OA) coupe la droite (OB) en B'.
1° Démontrer que $OA' = BB'$.
2° En déduire qu'il existe une rotation r telle que $r(O) = B$ et $r(A') = B'$ dont on déterminera l'angle en fonction de l'angle des vecteurs $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}})$.
Démontrer que $r(A) = O$. Déterminer alors le centre Ω de cette rotation.
3° Démontrer que les quatre points O, A', B', Ω sont cocycliques.

22. Dans un plan orienté $\mathscr{P}$, on considère un triangle équilatéral ABC direct, c'est-à-dire tel que l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$ ait pour mesure $\frac{\pi}{3}$.

On désigne par r_1 la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et par r_2 la rotation de centre B et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

Pour tout point M du plan, on pose $N = r_1(M)$, $M' = r_2(N)$. On pose $r = r_2 \circ r_1$.
1° *a)* Soit D le symétrique de C par rapport à la droite (AB). Déterminer $r(D)$ et $r(B)$.
b) Montrer que r est la symétrie de centre Ω milieu de $[B, D]$.
2° *a)* Montrer que l'ensemble Γ des points M du plan tels que M, N et M' soient alignés est un cercle passant par les points A et Ω (on pourra considérer l'angle $(\widehat{\overrightarrow{M\Omega}, \overrightarrow{MA}})$).
b) Prouver que Γ admet $[A, D]$ pour diamètre et que le milieu I de $[A, B]$ appartient à Γ.
Construire le cercle Γ.

23. Dans le plan orienté on considère un carré $ABCD$ de sens direct et de centre O. Soit $A'B'C'D'$ le carré transformé de $ABCD$ par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
1° Quel est son centre?
2° Soit f une isométrie transformant $\{A, B, C, D\}$ en $\{A', B', C', D'\}$; montrer que $f(O) = O$. En déduire les déplacements, puis les antidéplacements transformant $\{A, B, C, D\}$ en $\{A', B', C', D'\}$.

24. Soit ABC un triangle équilatéral direct d'un plan $\mathscr{P}$. On désigne par A', B', C' les milieux respectifs des segments $[B, C]$, $[C, A]$ et $[A, B]$.
On se propose de déterminer l'ensemble $\mathscr{I}$ des isométries f de $\mathscr{P}$ telles que :

$$B = f(A) \quad \text{et} \quad C' = f(B').$$

1° Démontrer que $\mathscr{I}$ contient une rotation R que l'on précisera. Quelle est l'image du triangle ABC par R?
2° Démontrer que $\mathscr{I}$ contient un antidéplacement g dont on donnera la forme réduite. Quelle est l'image du triangle ABC par g?
3° f étant un élément de $\mathscr{I}$, quelles sont les images possibles du triangle équilatéral $A'B'C'$ par f? En déduire que $\mathscr{I} = \{R, g\}$.

25. Soit, dans un plan $\mathscr{P}$, un triangle $A_1A_2A_3$.
A tout point M du plan, distinct des sommets A_1, A_2, A_3 du triangle on associe :

- les points M_1, M_2, M_3, symétriques de M dans les réflexions $s_{(A_2A_3)}$, $s_{(A_3A_1)}$, $s_{(A_1A_2)}$ d'axes respectifs les droites (A_2A_3), (A_3A_1), (A_1A_2);
- les droites Δ_1, Δ_2, Δ_3 issues des sommets A_1, A_2, A_3 et respectivement perpendiculaires aux droites (M_2M_3), (M_3M_1), (M_1M_2). Les réflexions d'axes Δ_i, $i \in [1, 3]$, sont notées s_{Δ_i}.

1° Démontrer que Δ_1 est la médiatrice du segment $[M_2, M_3]$.
2° Soit $s = s_{(A_1A_2)} \circ s_{\Delta_1} \circ s_{(A_1A_3)}$.
a) Quelle est la nature de s?
b) Déterminer $s(A_1)$, $s(M)$. Caractériser s.
3° On suppose, dans cette question, que les points M_1, M_2, M_3 ne sont pas alignés.
a) Démontrer que les droites Δ_1, Δ_2, Δ_3, sont concourantes en un point P que l'on caractérisera pour le triangle $M_1M_2M_3$.
Ce point P est appelé l'associé du point M.
b) Quel est l'associé d'un point M appartenant aux côtés du triangle $A_1A_2A_3$ et distinct des sommets de ce triangle?

26. Un point M décrit la base $[B, C]$ d'un triangle isocèle ABC. Les parallèles à (AB) et à (AC) menées par M coupent $[A, C]$ en F et $[A, B]$ en E.
1° Montrer que la médiatrice de $[E, F]$ passe par un point fixe. (On pourra faire intervenir la rotation qui transforme (A, B) en (C, A).)
2° Montrer que le cercle circonscrit au triangle EFA passe par un point fixe autre que A.

27. Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC. A', B', et C' désignent les milieux respectifs des bipoints (B, C), (C, A) et (A, B).
1° Montrer qu'il existe un point P et un seul vérifiant les conditions suivantes : $PA = PC$ et une mesure en radians de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PC}})$ est égale à $\frac{\pi}{2}$.

Soit Q le point tel que : $QA = QB$ et une mesure en radians de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{QB}, \overrightarrow{QA}})$ est égale à $\frac{\pi}{2}$.

2° *a)* On désigne par :

- r_P la rotation de centre P et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$;
- r_Q la rotation de centre Q et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$;
- $s_{A'}$ la symétrie de centre A'.

Étudier l'image de A par l'application $f = r_Q \circ s_{A'} \circ r_P$.
Que peut-on dire de f?
b) Quelle est la nature du triangle $A'PQ$?

28. Dans le plan $\mathscr{P}$ orienté, rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points distincts A, B et C d'affixes respectives a, b, et $-b$.
1° Donner une condition néessaire et suffisante vérifiée par a et b pour que les points A, B et C soient alignés.

On suppose dans la suite que les points A, B et C ne sont pas alignés et que la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est de sens direct.
2° Sur les droites (AB) et (AC), à l'extérieur du triangle ABC, on construit les carrés $AFGB$ et $ACDE$ et le parallélogramme $AEHF$ de façon que les bases $(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AB})$ et $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE})$ soient de sens direct.
a) En considérant la rotation de centre A qui transforme C en E, montrer que l'affixe e du point E est :

$$e = -\mathrm{i}b + a(1 - \mathrm{i}).$$

b) Calculer les affixes f, h et d des points respectifs F, H et D en fonction de a et b.
3° Déduire du *2°* que :
a) $FE = 2OA$ et que les droites (EF) et (OA) sont perpendiculaires;
b) $BD = CH$ et que les droites (BD) et (CH) sont perpendiculaires.

29. Dans le plan $\mathscr{P}$ orienté, on considère un triangle équilatéral ABC tel qu'une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ soit $\frac{\pi}{3}$. On appelle $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC.
La médiatrice de $[B, C]$ coupe $\mathscr{C}$ en A et D; on appelle A' le point d'intersection des droites (BD) et (AC).
1° Démontrer que A' est le symétrique de A par rapport à C.
2° On désigne par $S_{BD}, S_{DC}, S_{CA}, S_{AB}$ les réflexions d'axes (BD), (DC), (CA), (AB) respectivement.
a) Quelle est la nature des applications $S_{BD} \circ S_{DC}$ et $S_{CA} \circ S_{AB}$? On précisera les éléments caractéristiques.
b) Soit Δ la parallèle à (DC) menée par A et S_Δ la réflexion d'axe Δ. Démontrer que :

$$S_{BD} \circ S_{DC} = S_{DC} \circ S_{DA} \quad \text{et} \quad S_{CA} \circ S_{AB} = S_{DA} \circ S_\Delta.$$

c) Retrouver le résultat du *1°* en utilisant l'application :

$$t = S_{BD} \circ S_{DC} \circ S_{CA} \circ S_{AB}$$

que l'on caractérisera.

30. On considère quatre points A, B, C, D non alignés tels que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$ dans le plan.
1° On considère la rotation R_1 de centre A et d'angle $\widehat{(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB})}$ et la rotation R_2 de centre B et d'angle $\widehat{(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})}$.
a) Construire l'image de A par l'application $R_2 \circ R_1$.
b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $R_2 \circ R_1$.
2° Soit R_3 la rotation de centre C, d'angle $\widehat{(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD})}$ et R_4 la rotation de centre D et d'angle $\widehat{(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA})}$.
Déterminer avec précision l'application :

$$R_4 \circ R_3 \circ R_2 \circ R_1.$$

3° Cette composée peut-elle être l'application identique du plan?
Préciser alors la nature du quadrilatère (A, B, C, D).

31. Le plan orienté $\mathscr{P}$ étant rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on désigne par A, B, et C les points de $\mathscr{P}$ de coordonnées respectives $(1, 0)$, $(0, \sqrt{3})$ et $(-1, 0)$ dans le repère.
On appelle r la rotation de centre B, d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$, r' la rotation de centre A, d'angle de mesure $-\frac{2\pi}{3}$, et s la symétrie de centre I, milieu de $[A, B]$; soit f l'application $r' \circ s \circ r$.
1° Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f (on utilisera $f(C)$ et $f(B)$).
2° Déterminer les applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ associées à r, r', s et f, et retrouver ainsi les résultats du *1°*.

32. Dans le plan $\mathscr{P}$ rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$, T désigne l'application ponctuelle qui, à tout point M d'affixe z, fait correspondre le point M' d'affixe $z' = -\mathrm{i}\bar{z} + 1$.
1° Montrer que $T \circ T$ est une translation dont on précisera le vecteur.
2° Soit t la translation de vecteur $\frac{1}{2}(\vec{u} - \vec{v})$.
Montrer que $T \circ t^{-1} = t^{-1} \circ T = s$, s étant une réflexion d'axe $\mathscr{D}$ que l'on précisera.
En déduire $T = t \circ s = s \circ t$.
3° Soit k la translation de vecteur $\vec{u}$, r la rotation de centre O dont une mesure de l'angle est $\frac{\pi}{2}$, b la réflexion d'axe $(O, \vec{u})$.
Démontrer que $T = k \circ r \circ b$. En déduire que $T = k \circ S$, où S est une réflexion d'axe Δ que l'on précisera.
A l'aide du *2°*, démontrer que $s = l \circ S$ où l est une translation de vecteur $\frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v})$.
Retrouver géométriquement l'axe $\mathscr{D}$ de s.

33. Soit dans le plan un triangle équilatéral ABC. La bissectrice intérieure de $\widehat{A}$ recoupe le cercle circonscrit en D. On suppose que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3} \quad (2\pi)$.
Réduire à une transformation simple le produit :

$$S_{BD} \circ S_{DC} \circ S_{CA} \circ S_{AB},$$

où S_{XY} désigne la réflexion d'axe (XY).

34. Le plan orienté $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit A, B, C et D les points de coordonnées respectives $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ et $(0, -1)$.
On appelle R_1 la rotation de centre D et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$, R_2 la rotation de centre B et d'angle de mesure π, R_3 la rotation de centre C et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$. On pose $T = R_1 \circ R_2 \circ R_3$.
1° Quelle est la nature de T? Déterminer complètement T.
2° On pose $\varphi = R_3 \circ T$.
Quelle est la nature de φ? Déterminer complètement φ.

35. Dans un plan orienté, rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points A et B de coordonnées respectives $(6, 0)$, $(3, \sqrt{3})$ ainsi que la rotation R_1 de centre A, d'angle $\frac{\pi}{6}$, et la rotation R_2 de centre B, d'angle $\frac{2\pi}{3}$.
1° Un point M quelconque du plan a pour coordonnées

(x, y). Donner en fonction de x et y les coordonnées de $R_1(M)$ et celles de $R_2(M)$.
2° Montrer que l'application composée $R_1 \circ R_2$ est une rotation dont on déterminera le centre ω et l'angle. (On pourra utiliser les nombres complexes.)
3° Soit s la réflexion d'axe (AB).
Montrer qu'il existe deux réflexions s_1 et s_2 d'axes $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ telles que $R_1 = s_1 \circ s$ et $R_2 = s \circ s_2$. En déduire que $R_1 \circ R_2 = s_1 \circ s_2$.
Montrer que $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont sécantes en ω.

36. $\mathscr{P}$ est le plan orienté. On appelle triangle équilatéral direct tout triplet (A, B, C) de points de $\mathscr{P}$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \text{le triangle } ABC \text{ est équilatéral,} \\ \dfrac{\pi}{3} \text{ est une mesure en radians de l'angle } (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}). \end{cases}$$

On donne un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon R et une droite $\mathscr{D}$ ne coupant pas $\mathscr{C}$.
1° Soit A un point de $\mathscr{D}$. On note (E_A) l'ensemble des points M et $\mathscr{P}$ vérifiant la propriété : « Il existe un point N de $\mathscr{C}$ tel que le triplet (A, M, N) soit un triangle équilatéral direct». Montrer que (E_A) est un cercle dont on déterminera le centre Ω_A et le rayon R_A. Construire (E_A).
2° Quel est l'ensemble des points Ω_A lorsque A décrit $\mathscr{D}$? Construire cet ensemble.

37. Dans le plan complexe $\mathscr{P}$ on considère les points A, B, M d'affixes respectives a, b, z avec $a \neq b$.
M_1 est l'image de M dans la rotation r_1 de centre A, d'angle de mesure θ.
M_2 est l'image de M dans la rotation r_2 de centre B, d'angle de mesure θ'.
1° Montrer que l'affixe z' du milieu M' du segment $[M_1, M_2]$ est définie par :

$$z' = \frac{e^{i\theta} + e^{i\theta'}}{2} z + \frac{a(1 - e^{i\theta}) + b(1 - e^{i\theta'})}{2}.$$

2° Comment choisir θ et θ' pour qu'il y ait une rotation r telle que $\forall M \in \mathscr{P}$ le point M' soit l'image de M dans la rotation r? Définir alors la rotation r.
3° Comment choisir θ et θ' pour que M' soit indépendant de M? Cette condition étant réalisée et Ω étant le milieu de $[A, B]$, exprimer l'affixe de $\overrightarrow{\Omega M'}$ en fonction de celle de $\overrightarrow{\Omega B}$.
En déduire l'ensemble $\mathscr{C}$ des points M' quand θ varie.

38. Dans $\mathscr{P}$, plan orienté muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, deux points A et B ont pour coordonnées respectives $(-a, 0)$ et $(a, 0)$, où a est un réel strictement positif.
r_A est la rotation de centre A, d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{3}$.
r_B est la rotation de centre B, d'angle de mesure $-\dfrac{2\pi}{3}$.
Pour tout point M du plan $\mathscr{P}$, on note $M_A = r_A(M)$ et $M_B = r_B(M)$.
1° M étant un point donné de $\mathscr{P}$, construire les points M_A et M_B; justifier la construction.
2° Démontrer que le milieu du segment $[M_A, M_B]$ est un point fixe indépendant du choix de M :
a) en composant les applications r_A^{-1} puis r_B;
b) en utilisant les nombres complexes.
3° Démontrer, par le procédé de votre choix, que lorsque $M \neq M_A$ et $M \neq M_B$:

$$(\widehat{\overrightarrow{MM_A}, \overrightarrow{MM_B}}) = (\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) + \frac{\pi}{2} \quad (2\pi).$$

Quel est l'ensemble des points M du plan $\mathscr{P}$ tels que M, M_A, M_B soient alignés?
Construire cet ensemble.

39. On considère un triangle isocèle OAB de sommet O. On note H le pied de la hauteur issue de O. On mène, à un cercle variable (O) de centre O, les tangentes (AC) et (BD), $(C \in (O)$ et $D \in (O))$, non symétriques par rapport à la hauteur (OH).
1° Quels sont les lieux géométriques de C, de D et du point M intersection de (AC) et (BD). (On pourra, pour trouver le lieu de M, utiliser la rotation de centre O qui transforme A en B.)
2° Montrer que la droite (CD) passe par le point H.
3° Montrer que les bissectrices de l'angle $\widehat{AMB}$ passent par des points fixes.

40. Dans le plan $\mathscr{P}$ orienté, on donne deux droites parallèles $\mathscr{D}$ et Δ, et un point A n'appartenant à aucune de ces droites.
Construire un triangle ABC vérifiant simultanément les conditions suivantes :
a) ABC est rectangle en A;
b) ABC est isocèle;
c) B est sur $\mathscr{D}$ et C est sur Δ.
Préciser le nombre de solutions au problème posé. (Toute méthode pourra être utilisée : géométrique, analytique, utilisation de nombres complexes,...)

41. Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
1° Soit a, b, c, d quatre nombre réels. On considère les deux systèmes de relations :

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ b^2 + d^2 = 1 \\ ab + cd = 0, \end{cases} \quad (1) \quad \text{et} \quad \begin{cases} |ad - bc| = 1 \\ a^2 = d^2 \\ b^2 = c^2. \end{cases} \quad (2)$$

Démontrer, soit algébriquement, soit trigonométriquement (en remarquant que, si $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, il existe au moins un nombre réel θ tel que $\alpha = \cos\theta$ et $\beta = \sin\theta$), que (1) implique (2). La réciproque est-elle vraie?
2° On considère la transformation ponctuelle R qui, à chaque point m de coordonnées (x, y), fait correspondre le point M' de coordonnées (X', Y') telles que :

$$X' = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y, \quad Y' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y.$$

a) Quels sont les points fixes de R?
b) Démontrer que $Om = OM'$ et que, si P' est l'image de p, on a toujours $pm = P'M'$.
c) Donner une mesure de l'angle de vecteurs $(\widehat{\overrightarrow{Om}, \overrightarrow{OM'}})$.
Quelle est la nature de R?
3° Dans les mêmes conditions, on considère la transformation $\mathscr{S}$ qui, à chaque point $m(x, y)$, fait correspondre le point $M''(X'', Y'')$ tel que :

$$X'' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y, \quad Y'' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y.$$

a) Quels sont les points fixes de S?
b) Démontrer que S est une réflexion dont on précisera l'axe.
4° Plus généralement, tout système de relations :

$$\begin{cases} X = ax + by \\ Y = cx + dy, \end{cases}$$

où a, b, c, d sont des nombres réels vérifiant l'inégalité $ad - bc \neq 0$, définit une transformation ponctuelle T par laquelle tout point $m(x, y)$ a pour image $M(X, Y)$.
Rechercher un ensemble de conditions nécessaires et suffisantes entre les nombres a, b, c, d pour que la transformation correspondante soit une isométrie.
A quelle condition cette isométrie est-elle un déplacement?
A quelle condition est-elle une réflexion?
5° On se propose maintenant d'étudier la transformation T' définie par :

$$\begin{cases} X = x \\ Y = 3x + 2y. \end{cases}$$

a) A-t-elle des points fixes?
b) Quelle est la figure transformée, soit d'une droite parallèle à la droite des abscisses, soit d'une droite parallèle à la droite des ordonnées?
c) Donner un procédé graphique simple de construction de l'image M d'un point quelconque m.

42. Dans tout le problème, le plan $\mathscr{P}$ orienté est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

I — *1°* Soit un point m, μ le symétrique orthogonal de m par rapport à la droite d'équation $y = x$ et m' le symétrique orthogonal de μ par rapport à la droite d'équation $y = 0$. Calculer les coordonnées x' et y' de m' en fonction de celles, x et y de m. Préciser l'application qui transforme m en m'.
2° On associe au point $m(x, y)$ le point $M(X, Y)$ tel que :

$$\begin{cases} X = 1 + y \\ Y = 1 - x. \end{cases}$$

Démontrer que l'application, notée T_1, définie par $T_1(m) = M$, est une rotation que l'on caractérisera par son centre ω et par une de ses mesures.
3° Le point m décrit la droite d'équation $y = x$. Quel est l'ensemble des points M correspondants? Quel est l'ensemble des milieux des segments $[m, M]$?

II — *1°* On associe au point $m(x, y)$ le point $M'(X', Y')$ tel que :

$$\begin{cases} X' = x \sin\theta + y \cos\theta \\ Y' = -x \cos\theta + y \sin\theta, \end{cases}$$

θ étant un nombre réel donné. Démontrer que l'application, notée T_2, définie par $T_2(m) = M'$, est une rotation que l'on caractérisera par son centre et par une de ses mesures. Que peut-on dire de T_2 lorsque $\sin\theta = 1$?

2° On associe au point $m(x, y)$ le point $M''(X'', Y'')$ tel que :

$$\begin{cases} X'' = a + x \sin\theta + y \cos\theta \\ Y'' = a - x \cos\theta + y \sin\theta, \end{cases}$$

a étant un nombre réel donné non nul et θ étant un nombre réel donné.
Démontrer que l'application, notée T_3, définie par $T_3(m) = M''$, est une rotation dans le cas où $\sin\theta$ est différent de 1.
Calculer les coordonnées (x_0, y_0) du centre Ω de T_3 en fonction de a et θ.
Calculer $x_0 + y_0$ et $\dfrac{y_0}{x_0}$. $\left(\text{On exprimera } \dfrac{y_0}{x_0} \text{ en fonction de } \tan\dfrac{\theta}{2}\right)$.
Démontrer que si θ varie, a restant fixe, l'ensemble des points Ω est une droite $\mathscr{D}$, et que si a varie, θ étant fixe, l'ensemble des points Ω est une droite $\mathscr{D}'$ de vecteur directeur $\vec{u} = \cos\dfrac{\theta}{2}\vec{i} - \sin\dfrac{\theta}{2}\vec{j}$.
Donner, en fonction de θ, une mesure de l'angle de vecteurs $(\widehat{\vec{i}, \vec{u}})$. Utiliser les résultats précédents pour donner une construction géométrique simple de Ω connaissant a et θ.

III — Démontrer que l'application T_1 est un cas particulier de l'application T_3 et retrouver ainsi les résultats de la question II — *2°*.

43. Dans le plan orienté $\mathscr{P}$, on considère deux points distincts O et E, la droite Δ_1 passant par O et par le point F tel que :

$$OE = OF \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OF}) = \frac{\pi}{3} \quad (2\pi),$$

et la droite Δ_2 contenant O et orthogonale à la droite (OE). On note S_1 la réflexion d'axe Δ_1, S_2 la réflexion d'axe Δ_2 et T la translation de vecteur $\overrightarrow{OE}$.
Étant donné un point quelconque M du plan $\mathscr{P}$, on note M_1 son transformé par S_1, M_2 le transformé de M_1 par S_2 et M' le transformé de M_2 par T.
1° Quelle est la transformation $S_2 \circ S_1$? En déduire que la transformation $T \circ S_2 \circ S_1$ (qui transforme M en M') est une rotation R. Déterminer une mesure et le centre I de R.
2° Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormal direct de $\mathscr{P}$ tel que le point O soit l'origine et que le point E ait pour abscisse 2 et pour ordonnée 0.
Calculer, en fonction des coordonnées x et y du point M, les coordonnées x_1 et y_1 de M_1, puis les coordonnées x_2 et y_2 de M_2. Vérifier enfin que les coordonnées x' et y' du point M' sont :

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}y + 2 \\ y' = \dfrac{\sqrt{3}}{2}y. \end{cases}$$

Trouver les coordonnées du centre I de la rotation R définie au *1°*. Exprimer x et y en fonction de x' et y'.
3° Soit m un paramètre réel. Démontrer que la droite $\mathscr{D}_m$ d'équation $mx - y + \sqrt{3} = 0$ contient un point fixe A. Quelle est l'équation de la droite $\mathscr{D}'_m$, transformée de $\mathscr{D}_m$ par la rotation R? Démontrer géométriquement que $\mathscr{D}'_m$ contient un point fixe A'. Le vérifier analytiquement.

CHAPITRE 12

SIMILITUDES DIRECTES DU PLAN

I — ACTIVITÉS PRÉLIMINAIRES

1. *On considère dans le plan orienté $\mathscr{P}$ une homothétie h de centre A et de rapport k.*

1° Pour tous points M, N tels que $h(M) = M'$ et $h(N) = N'$, comparer les distances MN et $M'N'$.

2° On suppose $k > 0$. Démontrer que h conserve les mesures des angles orientés de vecteurs.

3° On suppose $k < 0$. Démontrer que h peut s'écrire sous la forme $h = h' \circ f$, où h' est l'homothétie de centre A et de rapport $-k$ et f une transformation que l'on précisera. En déduire que h conserve les mesures des angles orientés de vecteurs.

En conclusion :

Toute homothétie de rapport k multiplie les distances par $|k|$ et conserve les mesures des angles orientés de vecteurs.

2. *Le plan $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.*
Soit f l'application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ définie analytiquement par :

$$\begin{cases} x' = 2x + y + 4 \\ y' = x - 2y. \end{cases}$$

1° Démontrer qu'il existe un réel λ strictement positif tel que la distance de deux points quelconques M et N et celle de leurs images M' et N' vérifient la relation $M'N' = \lambda MN$.

2° Démontrer que l'application f possède un point fixe unique, noté A.

3° Soit M un point du plan d'image $f(M) = M'$ et soit M_1 l'image de M par l'homothétie h de centre A et de rapport le réel λ déterminé à la question 1°.
Démontrer que le milieu du segment $[M_1, M']$ appartient à une droite fixe $\mathscr{D}$ et que le vecteur $\overrightarrow{M_1M'}$ est orthogonal à $\mathscr{D}$.
En déduire une construction géométrique simple du point $M' = f(M)$ et une décomposition de l'application f sous la forme $s_{\mathscr{D}} \circ h$, où h est l'homothétie définie ci-dessus et $s_{\mathscr{D}}$ la réflexion d'axe $\mathscr{D}$.

3. *Dans le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormal direct, on considère l'application f définie analytiquement par :*

$$\begin{cases} x' = 2x - 2y + 1 \\ y' = 2x + 2y + 2. \end{cases}$$

1° Démontrer qu'il existe un point A, et un seul, invariant par f.

2° Pour tout point M distinct de A et d'image $M' = f(M)$, démontrer :
a) que $AM' = \lambda AM$, où λ est un réel indépendant de M que l'on calculera;

b) que la mesure principale θ de l'angle de vecteurs $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'})$ reste constante lorsque M varie. (On calculera θ.)

3° Déduire de la question 2° une décomposition de f sous la forme $f = r \circ h$ où h et r sont respectivement une homothétie et une rotation de même centre A dont on précisera le rapport et l'angle. Montrer que $r \circ h = h \circ r$.

II — SIMILITUDES DIRECTES

PRODUIT D'UNE HOMOTHÉTIE ET D'UNE ROTATION DE MÊME CENTRE

Dans le plan orienté considérons l'homothétie h de centre A et de rapport k, strictement positif, et la rotation r de centre A et d'angle θ. Posons $f = r \circ h$.

• Le point A, invariant par h et par r, est invariant par f.

• Soit M un point distinct de A, $M_1 = h(M)$ et $M' = r(M_1)$ (figure 1). On a :

$$f(M) = M', \quad \overrightarrow{AM_1} = k\overrightarrow{AM}, \quad AM_1 = AM'$$

et $$(\overrightarrow{AM_1}, \overrightarrow{AM'}) = \theta \quad (2\pi).$$

Comme $k > 0$, il s'ensuit :

$$AM' = kAM$$

et $$(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}) = \theta \quad (2\pi) \qquad (1)$$

D'autre part, le point $M'_1 = r(M)$ est tel que :

$$AM = AM'_1$$

et $$(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'_1}) = \theta \quad (2\pi) \qquad (2)$$

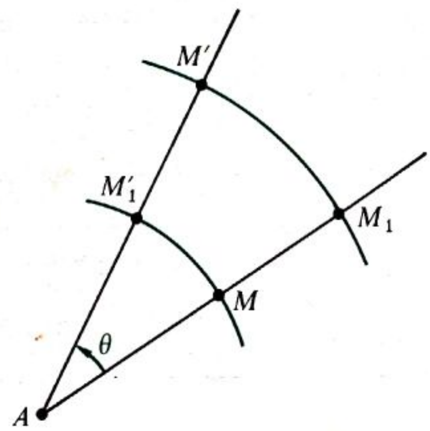


Figure 1

De (1) et (2) on déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AM'}$ et $\overrightarrow{AM'_1}$ sont colinéaires et de même sens, et que $AM' = kAM'_1$.

Il en résulte $\overrightarrow{AM'} = k\overrightarrow{AM'_1}$, soit $M' = h(M'_1)$.

Finalement : $M' = (h \circ r)(M) = (r \circ h)(M)$, et par conséquent $h \circ r = r \circ h$.

On retiendra :

Le produit d'une homothétie h de rapport positif et d'une rotation r de même centre est commutatif : $h \circ r = r \circ h$.

REMARQUE : La propriété est encore vraie lorsque le rapport k de l'homothétie h est négatif. Il suffit pour le montrer de décomposer h en le produit, commutatif, de l'homothétie h' de rapport $-k$ et de même centre, A, que h et de la symétrie centrale s_A de centre A : $h = s_A \circ h' = h' \circ s_A$. Comme la rotation r commute avec h' et avec s_A, elle commute avec h.

Deux propriétés du produit $f = r \circ h$

1. Considérons deux points M et N, leurs images respectives M_1 et N_1 par h et les images M' et N' de M_1 et N_1 par r : $M' = f(M)$, $N' = f(N)$.

Comme h est une homothétie de rapport k, on a : $\overrightarrow{M_1N_1} = k\overrightarrow{MN}$, d'où, k étant positif, $M_1N_1 = kMN$. De plus, r étant une rotation, $M'N' = M_1N_1$.

Finalement $M'N' = kMN$; l'application f multiplie les distances par le réel positif k.

2. Supposons que M et N soient distincts et considérons deux autres points distincts P et Q d'images respectives P_1 et Q_1 par h et P' et Q' par f (figure 2).

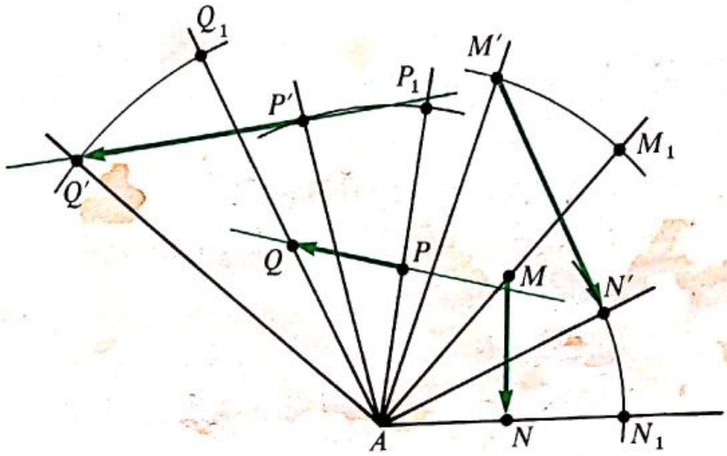


Figure 2

Comme h et r conservent les mesures des angles orientés, on a :

$$(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{PQ}) = (\overrightarrow{M_1N_1}, \overrightarrow{P_1Q_1}) \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{M_1N_1}, \overrightarrow{P_1Q_1}) = (\overrightarrow{M'N'}, \overrightarrow{P'Q'}) \quad (2\pi)$$

d'où :

$$(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{PQ}) = (\overrightarrow{M'N'}, \overrightarrow{P'Q'}) \quad (2\pi).$$

L'application f conserve les mesures des angles orientés de vecteurs.

REMARQUES :

1. Les propriétés précédentes sont encore vraies lorsque le rapport k de l'homothétie h est négatif :

- $f = r \circ h$ multiplie alors les distances par $|k|$;
- $f = r \circ h$ conserve les mesures des angles orientés de vecteurs.

2. Plus généralement, pour toute homothétie h de rapport k, positif ou négatif, et pour tout déplacement d, les produits $f = d \circ h$ et $g = h \circ d$ multiplient les distances par $|k|$ et conservent les mesures des angles orientés de vecteurs. De plus, comme h et d sont des transformations du plan $\mathscr{P}$ (bijections de $\mathscr{P}$ sur lui-même), il en est de même des produits $d \circ h$ et $h \circ d$.

ENSEMBLE DES SIMILITUDES DIRECTES

DÉFINITION 1	**On appelle similitude directe du plan orienté $\mathscr{P}$ toute transformation de $\mathscr{P}$ qui multiplie les distances par un réel strictement positif λ et conserve les mesures des angles orientés de vecteurs. Le réel λ est appelé rapport de la similitude.**

Exemples

Les déplacements (translations et rotations) sont les similitudes directes de rapport 1.

Toute homothétie de rapport k est une similitude directe de rapport $|k|$.

Tout produit $d \circ h$ ou $h \circ d$, où d est un déplacement et h une homothétie de rapport k, est une similitude directe de rapport $|k|$.

Produit de deux similitudes directes

L'application composée $s' \circ s$ de deux similitudes directes s et s' de rapports respectifs λ et λ' multiplie les distances par $\lambda'\lambda$.

De plus, comme s et s' conservent les mesures des angles orientés de vecteurs, il en est de même de $s' \circ s$.

Enfin, s et s' étant bijectives, $s' \circ s$ est une bijection du plan sur lui-même.

Il en résulte que $s' \circ s$ est une similitude directe de rapport $\lambda'\lambda$.

L'application composée $s' \circ s$ de deux similitudes directes s et s' de rapports respectifs λ et λ' est une similitude directe de rapport $\lambda'\lambda$.

Réciproque d'une similitude directe

Si s est une similitude directe de rapport λ, son application réciproque s^{-1} est une transformation du plan $\mathscr{P}$ multipliant les distances par $\frac{1}{\lambda}$ et conservant les mesures des angles orientés de vecteurs. Ainsi :

L'application réciproque d'une similitude directe de rapport λ est une similitude directe de rapport $\frac{1}{\lambda}$.

• Exercices d'application

1. Soit s une similitude directe de rapport λ.
1° Démontrer que s transforme trois points quelconques A, B, C en trois points A', B', C' tels que :

$$\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{A'C'} = \lambda^2 \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}.$$

2° En déduire que si trois points A, B, M sont tels que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$, où $t \in \mathbb{R}$, leurs images respectives A', B', M' sont telles que : $\overrightarrow{A'M'} = t\overrightarrow{A'B'}$.
3° Utiliser cette propriété pour montrer que :
a) s conserve le milieu d'un bipoint.
b) s conserve l'équipollence.
c) s transforme les droites en droites.
4° Quel est l'effet d'une similitude directe de rapport λ sur le déterminant d'un couple de vecteurs dans une base orthonormale directe?

2. Soit h une homothétie de rapport $k \neq 1$ et soit r une rotation d'angle θ non nul ($\theta \neq 0 \quad (2\pi)$).
1° Démontrer que le centre ω de h est le seul point du plan invariant par h.
2° Démontrer que le centre Ω de r est le seul point invariant par r.
3° Déduire de *1°* et *2°* que si $h \circ r = r \circ h$ alors les points ω et Ω sont confondus.

3. Le plan $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.
1° Soit r la rotation de centre $\Omega(\alpha, \beta)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et soit h l'homothétie de centre Ω et de rapport k. Définir analytiquement la similitude directe $s = h \circ r$.
2° Étant donnés trois réels a, b, c dont le premier a n'est pas nul, quelle est l'application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ définie analytiquement par :

$$\begin{cases} x' = -ay + b \\ y' = ax + c \end{cases} ?$$

4. Dans le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormal, on considère l'application f définie analytiquement par :

$$\begin{cases} x' = x - 3y - 3 \\ y' = -3x - y + 1. \end{cases}$$

1° Démontrer que f multiplie les distances par un réel positif λ que l'on déterminera.
2° Démontrer qu'il existe un point A, unique, invariant par f.
3° Déterminer l'ensemble $\mathscr{D}$ des points M du plan d'image M' tels que $\overrightarrow{AM'} = \lambda\overrightarrow{AM}$.
Déterminer de même l'ensemble Δ des points M tels que $\overrightarrow{AM'} = -\lambda\overrightarrow{AM}$ (λ est le réel déterminé à la question *1°*). Démontrer que $\mathscr{D}$ et Δ sont deux droites orthogonales.
4° Démontrer, sans calculs, que :

$$f = s_{\mathscr{D}} \circ h = h \circ s_{\mathscr{D}},$$

où $s_{\mathscr{D}}$ est la réflexion d'axe $\mathscr{D}$ et h l'homothétie de centre A et de rapport λ.
Trouver une autre décomposition de f.
L'application f est-elle une similitude directe?

III — ANGLE D'UNE SIMILITUDE DIRECTE

DÉFINITION

Soit s une similitude directe. Considérons quatre points A, B, M, N d'images respectives A', B', M', N' (figure 3).

Si A, B d'une part et M, N d'autre part sont distincts, il en est de même de A', B' et de M', N' et l'on a, s conservant les mesures des angles orientés :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MN}) = (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{M'N'}) \quad (2\pi)$$

D'où :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MN}) + (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{A'B'}) = (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{A'B'}) + (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{M'N'}) \quad (2\pi),$$

soit :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}) \quad (2\pi).$$

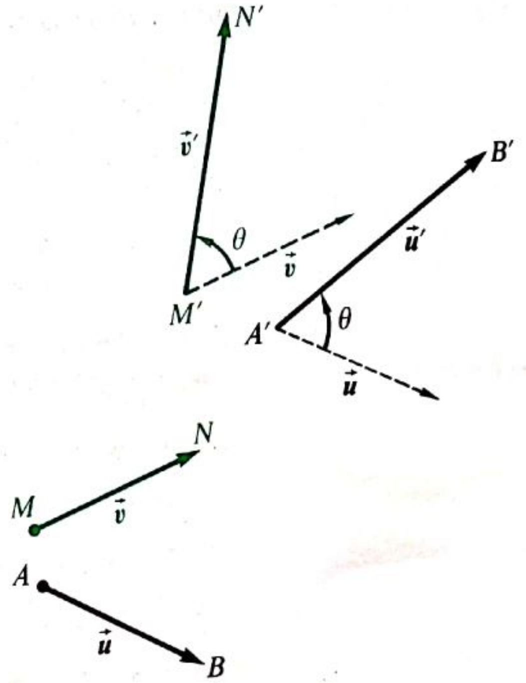


Figure 3

Il s'ensuit que si θ est une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}})$, θ est aussi une mesure de tout autre angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}})$.

On peut donc énoncer :

THÉORÈME 1 et DÉFINITION 2	**Une similitude directe s étant donnée, il existe un réel θ, défini modulo 2π, tel que pour tout bipoint propre (M, N) d'image (M', N') :** $$(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}) = \theta \quad (2\pi).$$ **On dit alors que s est une similitude directe d'angle de mesure θ, ou plus simplement d'angle θ.**

● **Exercice résolu**

Dans le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on considère l'application s définie analytiquement par :

$$\begin{cases} x' = x - y + 1 \\ y' = x + y \end{cases}.$$

1° Démontrer que s possède un point invariant M_0, unique.

2° Pour tout point M distinct de M_0 d'image $M' = s(M)$, comparer les distances M_0M et M_0M' et démontrer que l'angle $(\widehat{\overrightarrow{M_0M}, \overrightarrow{M_0M'}})$ est constant.

En déduire que s est une similitude directe. Quel est son rapport et quel est son angle?

1° Un point M_0 de coordonnées x_0, y_0 est invariant par s, si, et seulement si :

$$\begin{cases} x_0 = x_0 - y_0 + 1 \\ y_0 = x_0 + y_0. \end{cases}$$

La résolution de ce système donne $x_0 = 0, y_0 = 1$.

Il en résulte qu'il existe un point, et un seul, invariant par s : le point M_0 de coordonnées (0, 1).

2° Pour tout point $M(x, y)$ d'image $M'(x', y')$, on a :

$$M_0M^2 = x^2 + (y-1)^2$$

et :

$$\begin{aligned} M_0M'^2 &= x'^2 + (y'-1)^2 \\ &= (x-y+1)^2 + (x+y-1)^2 \\ &= 2[x^2 + (y-1)^2] \end{aligned}$$

D'où : $\quad M_0M'^2 = 2M_0M^2,$

soit : $\quad M_0M' = \sqrt{2}M_0M. \qquad (1)$

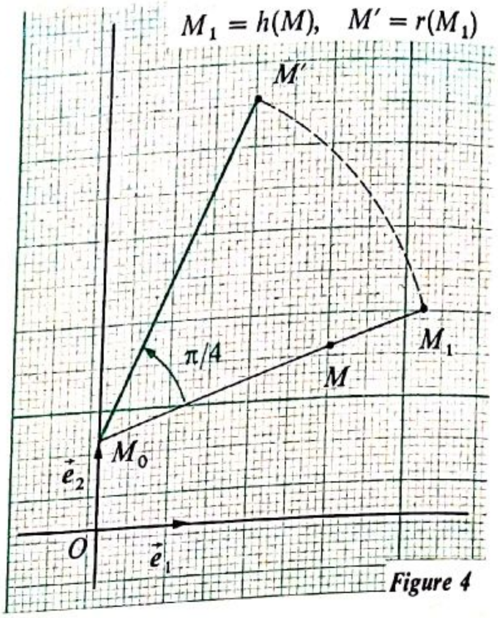


Figure 4

Si M est distinct de M_0, il en est de même de M'. Pour montrer l'invariance de l'angle $(\overrightarrow{M_0M}, \overrightarrow{M_0M'})$, montrons que sa mesure principale, θ, reste constante. Le cosinus et le sinus de θ sont donnés par les formules :

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{M_0M} \cdot \overrightarrow{M_0M'}}{M_0M \times M_0M'} = \frac{x(x-y+1) + (y-1)(x+y-1)}{\sqrt{2} \times M_0M^2} = = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\sin\theta = \frac{\text{dét}_{(\vec{e}_1, \vec{e}_2)}(\overrightarrow{M_0M}, \overrightarrow{M_0M'})}{M_0M \times M_0M'} = \frac{x^2 + y^2 - 2y + 1}{\sqrt{2}(x^2 + y - 2y + 1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Il en résulte $\theta = \dfrac{\pi}{4}$. Par suite, quel que soit M :

$$(\overrightarrow{M_0M}, \overrightarrow{M_0M'}) = \frac{\pi}{4} \qquad (2)$$

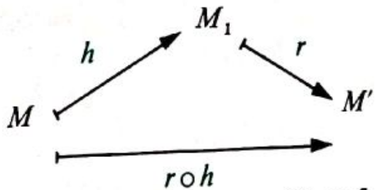


Figure 5

Les propriétés (1) et (2) montrent alors que s est égale à l'application composée $r \circ h$ de l'homothétie h de centre M_0 et de rapport $\sqrt{2}$ et de la rotation r de centre M_0 et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ (figures 4 et 5); l'application s est donc une similitude directe de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.

PROPRIÉTÉS

1. Similitudes directes d'angle nul

Soit s une similitude directe de rapport λ et d'angle nul. Pour tout bipoint propre (M, N) d'image (M', N') par s, on a :

$$M'N' = \lambda MN \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}) = 0 \quad (2\pi), \quad \text{soit} \quad \overrightarrow{M'N'} = \lambda\overrightarrow{MN}.$$

On sait alors que s est une homothétie-translation. Plus précisément :

- si $\lambda = 1$, s est une translation;
- si $\lambda \neq 1$, s est une homothétie de rapport λ.

Réciproquement, toute translation, toute homothétie de rapport positif, est une similitude directe d'angle nul.

Les similitudes directes d'angle nul sont les translations et les homothéties de rapport positif.

REMARQUE : On démontre de même que les similitudes d'angle plat sont les homothéties de rapport négatif.

2. Comme on l'a fait pour un déplacement d'angle θ (page 283), on démontre :

Pour toute similitude s d'angle θ, la similitude réciproque s^{-1} est d'angle $-\theta$.

3. De même, comme c'est le cas pour deux déplacements (page 284) :

Pour toutes similitudes s_1 et s_2 d'angles respectifs θ_1 et θ_2, l'angle de la similitude $s_2 \circ s_1$ est $\theta_1 + \theta_2$.

DÉTERMINATION D'UNE SIMILITUDE DIRECTE

Problème

Deux points A, A', un réel $\lambda > 0$ et un réel θ étant donnés, existe-t-il une similitude directe s de rapport λ et d'angle θ transformant A en A'?

1° Si une telle similitude s existe, elle est unique. En effet l'image par s d'un point quelconque M, distinct de A, est un point M' tel que :

$$A'M' = \lambda AM \quad \text{et} \quad (\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'M'}}) = \theta \quad (2\pi). \quad (1)$$

Or les relations (1) ci-dessus définissent, A, A', λ, θ et M étant donnés, un point unique M' (figure 6); s est donc l'application qui à A associe A', et à tout point M distinct de A associe le point M' défini par (1).

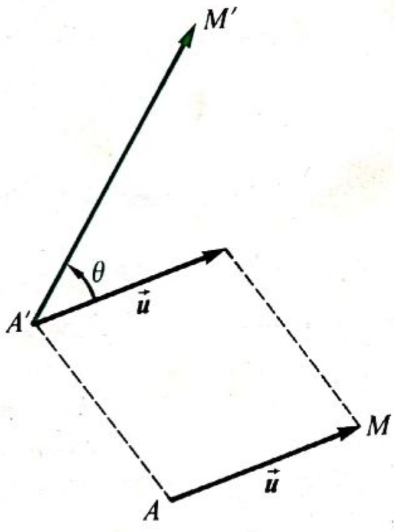


Figure 6

2° Montrons maintenant l'existence d'une solution au problème posé.

Soit d le déplacement d'angle θ transformant A en A' et h l'homothétie de centre A' et de rapport λ. La composée $h \circ d$ est une similitude d'angle θ, de rapport λ transformant A en A' : elle répond à la question.

On peut donc énoncer :

THÉORÈME 2	**Deux points A, A', un réel $\lambda > 0$ et un réel θ étant donnés, il existe une unique similitude directe s, de rapport λ et d'angle θ, transformant A en A'.**

Il en résulte qu'une similitude directe s est *déterminée* par la donnée de son rapport λ, de son angle θ, d'un point A quelconque et de l'image $A' = s(A)$ de ce point.

Similitude directe déterminée par deux points distincts et leur image

Considérons quatre points A, B, A', B' tels que $AB \neq 0$ et $A'B' \neq 0$, et désignons par θ une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}})$.

S'il existe une similitude directe transformant A en A' et B en B', son rapport est $\frac{A'B'}{AB}$ et son angle est de mesure θ. Or il existe une similitude directe unique s de rapport $\frac{A'B'}{AB}$, d'angle θ et transformant A en A'. De plus s transforme B en le point B'' tel que :

$$A'B'' = \frac{A'B'}{AB} AB = A'B' \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B''}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \theta \quad (2\pi),$$

c'est-à-dire en le point B'. On peut énoncer :

THÉORÈME 3	**Étant donnés quatre points A, B, A', B' tels que $AB \neq 0$ et $A'B' \neq 0$, il existe une similitude directe s unique transformant A en A' et B en B'. Son rapport est $\frac{A'B'}{AB}$ et son angle $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}})$.**

Il en résulte qu'une similitude directe s est déterminée par la donnée de deux points distincts A, B et de leurs transformés respectifs A', B'.

A noter que :

- si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$, s est la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$;
- si $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$, où k est un réel non nul et distinct de 1, s est une homothétie de rapport k.

• Exercices d'application

5. Soit h une homothétie de rapport k, $k < 0$, et soit d un déplacement d'angle θ. Démontrer que $d \circ h$ est une similitude directe.
Quel est son rapport et quel est son angle?

6. On donne deux points distincts A et A'. Soit s la similitude directe de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$ transformant A en A'.

1° Démontrer que si un point Ω du plan est invariant par s, il vérifie les conditions :

$$\frac{\Omega A'}{\Omega A} = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega A'}) = \frac{\pi}{3} \quad (2\pi).$$

2° Démontrer qu'il existe un point Ω, et un seul, vérifiant ces deux conditions. Construire ce point.

3° Soit h l'homothétie de centre Ω et de rapport $\sqrt{2}$ et soit r la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Démontrer que :

$$s = r \circ h = h \circ r.$$

7. *1°* Quelle est l'image d'un triangle équilatéral par une similitude directe?

2° On donne deux triangles équilatéraux ABC et DEF. Déterminer les similitudes directes transformant le premier triangle en le second.

3° Reprendre les questions *1°* et *2°* pour des carrés.

8. On dit qu'un triangle $A'B'C'$ est *directement semblable* à un triangle ABC s'il existe une similitude directe s telle que $A' = s(A)$, $B' = s(B)$, $C' = s(C)$.

1° Démontrer que si $A'B'C'$ est directement semblable à ABC, alors ABC est directement semblable à $A'B'C'$.

2° Démontrer que si les triangles ABC et $A'B'C'$ sont directement semblables, alors :

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA},$$

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) \quad (2\pi),$$

$$(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{B'C'}, \overrightarrow{B'A'}) \quad (2\pi),$$

$$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{C'A'}, \overrightarrow{C'B'}) \quad (2\pi).$$

3° Démontrer que deux triangles ABC et $A'B'C'$ tels que :

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC}$$

et $$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) \quad (2\pi)$$

sont directement semblables.

4° Démontrer que deux triangles ABC et $A'B'C'$ tels que :

$$\begin{cases} (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{B'C'}, \overrightarrow{B'A'}) & (2\pi) \\ (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) = (\overrightarrow{C'B'}, \overrightarrow{C'A'}) & (2\pi) \end{cases}$$

sont directement semblables.

IV — DÉCOMPOSITION D'UNE SIMILITUDE DIRECTE

Soit s une similitude directe de rapport λ. Considérons une homothétie h de centre A, arbitrairement choisi, et de rapport λ. Son application réciproque h^{-1} est l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{\lambda}$.

Comme h^{-1} et s sont deux similitudes directes de rapports respectifs $\frac{1}{\lambda}$ et λ, la composée $f = s \circ h^{-1}$ est une similitude directe de rapport 1, c'est-à-dire un déplacement.

Il s'ensuit : $s = f \circ h$; s est donc la composée d'une homothétie de rapport λ et d'un déplacement.

On peut énoncer :

THÉORÈME 4	**Toute similitude directe s de rapport λ est la composée $f \circ h$ d'une homothétie h de rapport λ et d'un déplacement f.**

A noter que la composée $g = h^{-1} \circ s$ est aussi un déplacement et que s est donc la composée $h \circ g$ d'un déplacement g et d'une homothétie h de rapport λ.

REMARQUE : Une similitude directe décomposée sous la forme $d \circ h$, où d est un déplacement d'angle θ et h une homothétie de rapport λ, $\lambda > 0$, est de rapport λ et d'angle θ.

Conséquences

1. Sachant que les homothéties et les déplacements conservent les barycentres, on en conclut que les similitudes directes conservent les barycentres.

En particulier, toute similitude directe conserve les milieux des bipoints et transforme donc deux bipoints équipollents en deux bipoints équipollents.

2. De même, toute similitude directe :

- transforme une droite, une demi-droite ou un segment en une droite, une demi-droite ou un segment;
- transforme deux droites parallèles (resp. orthogonales) en deux droites parallèles (resp. orthogonales);
- transforme un cercle $\mathscr{C}$ en un cercle $\mathscr{C}'$ (le centre de $\mathscr{C}'$ est l'image du centre de $\mathscr{C}$ et son rayon est le produit du rapport de la similitude par le rayon de $\mathscr{C}$);
- transforme deux cercles tangents en deux cercles tangents.

3. Soit s une similitude directe de rapport λ décomposée sous la forme $s = d \circ h$, où h est une homothétie de rapport λ et d un déplacement.

On sait que d conserve les aires et que h les multiplie par λ^2. Il s'ensuit que s multiplie les aires par λ^2 :

Toute similitude directe de rapport λ multiplie les aires par λ^2.

TRANSFORMATION VECTORIELLE ASSOCIÉE À UNE SIMILITUDE DIRECTE

Définition

Il résulte du théorème 4 que, comme les homothéties et les déplacements, toute similitude directe s transforme trois points A, B, C tels que $\overrightarrow{AC} = t\overrightarrow{AB}$ en trois points A', B', C' tels que $\overrightarrow{A'C'} = t\overrightarrow{A'B'}$.

On peut donc, comme on l'a déjà fait pour les projections et les isométries, associer à s une application σ du plan vectoriel $\mathscr{V}$ dans lui-même telle que, pour tous points A, B d'images respectives A', B' par s :

$$\sigma(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{A'B'}.$$

Si λ et θ sont respectivement le rapport et une mesure de l'angle de s, on a :

$$A'B' = \lambda AB \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \theta \quad (2\pi).$$

On en conclut :

La transformation vectorielle associée à une similitude directe de rapport λ et d'angle θ laisse le vecteur nul invariant et transforme tout vecteur $\vec{u}$ non nul en le vecteur $\vec{u}'$ tel que :

$$\|\vec{u}'\| = \lambda \|\vec{u}\| \quad \text{et} \quad (\vec{u}, \vec{u}') = \theta \quad (2\pi).$$

Propriétés

1. L'application vectorielle σ associée à une similitude directe s est linéaire :

$$\sigma(\vec{u} + \vec{v}) = \sigma(\vec{u}) + \sigma(\vec{v})$$
$$\sigma(t\vec{u}) = t\sigma(\vec{u})$$

2. Comme on l'a fait pour les isométries, on démontre :

a) Si s_1 et s_2 sont deux similitudes directes d'applications vectorielles associées respectives σ_1 et σ_2, l'application vectorielle associée à la similitude directe $s_2 \circ s_1$ est $\sigma_2 \circ \sigma_1$.

b) L'application vectorielle σ associée à une similitude directe s est bijective, et sa bijection réciproque est l'application vectorielle associée à la similitude directe s^{-1}.

3. Soit s une similitude directe de rapport λ et d'angle θ, décomposée sous la forme $s = d \circ h$, où h est une homothétie de rapport λ et d un déplacement.

Le déplacement d est d'angle θ et sa transformation vectorielle associée est la rotation vectorielle ρ d'angle θ (page 277). La transformation vectorielle associée à h est l'homothétie vectorielle φ de rapport λ (page 119).

Comme h et d sont des similitudes directes, à $s = d \circ h$ est associée la composée $\rho \circ \varphi$.

En décomposant s sous la forme $s = h' \circ d'$, où d' est un déplacement d'angle θ et h' une homothétie de rapport λ, on démontre de même qu'à $s = h' \circ d'$ est associée la composée $\varphi \circ \rho$. On en conclut :

La transformation vectorielle associée à une similitude directe de rapport λ et d'angle θ est la composée $\rho \circ \varphi$, où φ et ρ sont respectivement l'homothétie vectorielle de rapport λ et la rotation vectorielle d'angle θ. De plus $\rho \circ \varphi = \varphi \circ \rho$.

● Exercices d'application

9. Soit un triangle ABC d'image $A'B'C'$ par une similitude directe s. Quelle est l'image par s :
a) du centre de gravité G du triangle ABC?
b) de son orthocentre H?
c) du centre O de son cercle circonscrit?

10. Quelle est l'image par une similitude directe s de la figure formée par un angle non orienté $\widehat{xOy}$ et sa bissectrice Δ? En déduire l'image par s d'un triangle ABC et de son cercle inscrit.

11. Quelle est l'image par une similitude directe de la figure formée par un segment et sa médiatrice?

12. Quelle est l'image d'un conique (Γ) de foyer F, de directrice associée $\mathscr{D}$ et d'excentricité e par une similitude directe s?

Quelle est l'image par s de la tangente en un point M de (Γ)?

13. Quel est le lieu géométrique du sommet C d'un triangle ABC restant directement semblable (voir exercice **8**) à un triangle donné, sachant que A est fixe et que B décrit une droite fixe?

14. Un triangle ABC a le sommet A fixe. Les sommets B et C se déplacent sur une droite fixe $\mathscr{D}$ de manière que l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$ reste constant.

Quels sont les lieux des pieds des hauteurs issues de B et C dans le triangle ABC?

15. Deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont rectangles, respectivement en A et A'. Démontrer que si $(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}) = (\widehat{\overrightarrow{B'A'}, \overrightarrow{B'C'}})$ (2π), les deux triangles sont directement semblables.

16. Construire un carré $ABCD$ connaissant le sommet A et sachant que les sommets B et C appartiennent respectivement à deux droites $\mathscr{D}$ et Δ.

V — ÉCRITURE COMPLEXE D'UNE SIMILITUDE DIRECTE

TRANSFORMATION ASSOCIÉE À L'APPLICATION $z \mapsto az + b$

Le plan $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Deux nombres complexes a et b étant donnés, tels que a soit non nul, on considère l'application φ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $\varphi(z) = az + b$.

A φ on associe l'application s de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui, à tout point M d'affixe z, fait correspondre le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \varphi(z) = az + b.$$

Point(s) fixe(s) de s

Un point M_0 d'affixe z_0 est invariant par s si, et seulement si, $z_0 = az_0 + b$, soit :

$$(1 - a)z_0 = b. \tag{1}$$

• **Si $a = 1$ et $b = 0$,** tout nombre complexe est solution de l'équation (1), et par suite tout point M du plan est invariant s. Il en résulte que s est l'application identique du plan $\mathscr{P}$.

• **Si $a = 1$ et $b \neq 0$,** l'équation (1) n'a pas de solution, et par suite s n'a pas de point fixe. Dans ce cas, l'application s est définie par la relation $z' = z + b$, soit $z' - z = b$. Le vecteur image de $z' - z$ est alors égal au vecteur image $\vec{u}$ de b : $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$. Il en résulte que s est la translation de vecteur $\vec{u}$.

• **Si $a \neq 1$,** l'équation (2) a une solution, et une seule : $z_0 = \dfrac{b}{1-a}$. L'application s possède donc un point invariant, et un seul : le point M_0 d'affixe $z_0 = \dfrac{b}{1-a}$.

Pour tout point $M(z)$ d'image $M'(z')$, la soustraction membre à membre des égalités $z' = az + b$ et $z_0 = az_0 + b$, donne :

$$z' - z_0 = a(z - z_0). \tag{2}$$

Décomposition de s dans le cas $a \neq 1$

Posons $|a| = \lambda$ et $\arg a = \theta$ (2π).

L'égalité (2) s'interprète géométriquement de la manière suivante :

1° $M_0M' = \lambda M_0M$ (égalité des modules).

2° $\arg(z' - z_0)$
$$= \arg a + \arg(z - z_0) \quad (2\pi)$$
(égalité des arguments modulo 2π), c'est-à-dire :
$$\arg(z' - z_0) - \arg(z - z_0) = \theta \quad (2\pi).$$
Comme :
$$(\overrightarrow{M_0M}, \overrightarrow{M_0M'}) = \arg(z' - z_0) - \arg(z - z_0) \quad (2\pi),$$
on a finalement (figure 7) :
$$M_0M' = \lambda M_0M \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{M_0M}, \overrightarrow{M_0M'}) = \theta \quad (2\pi).$$

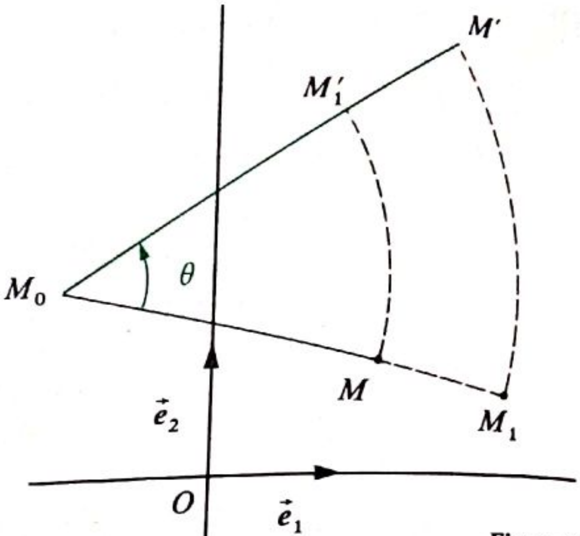


Figure 7

L'étude faite au paragraphe **II** (page 300) montre alors que M' est l'image de M par la composée $r \circ h$ (égale à $h \circ r$) de l'homothétie h, de centre M_0 et de rapport λ, et de la rotation r, de centre M_0 et d'angle θ.

Il en résulte que s est une similitude directe de rapport λ et d'angle θ.

On peut conclure :

Toute relation $z' = az + b$, où a est un nombre complexe *non nul* de module λ et d'argument θ et b un nombre complexe, définit dans le plan muni d'un repère orthonormal direct une similitude directe s de rapport λ et d'angle θ.

- **Si $a = 1$, s est la translation dont le vecteur est le vecteur image de b.**
- **Si $a \neq 1$, s possède un unique point invariant M_0, appelé centre de s, et l'on a : $s = r \circ h = h \circ r$, où h est l'homothétie de centre M_0 et de rapport λ et r la rotation de centre M_0 et d'angle θ.**

ÉCRITURE COMPLEXE D'UNE SIMILITUDE DIRECTE DONNÉE

On vient de voir que toute application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ de la forme $z \mapsto az + b$, où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$, définit une similitude directe. Réciproquement, toute similitude directe s peut-elle être définie de cette façon?

Considérons deux points *distincts* A et B, leurs images $A' = s(A)$ et $B' = s(B)$ et les affixes respectives α, β, α', β' des points A, B, A', B'.

Pour qu'à l'application $z \mapsto az + b$ soit associée la similitude s, il faut et il suffit qu'il existe des nombres complexes a et b tels que :
$$\begin{cases} \alpha' = a\alpha + b \\ \beta' = a\beta + b. \end{cases}$$

Or ce système admet une unique solution : $a = \dfrac{\alpha' - \beta'}{\alpha - \beta}$, $\quad b = \dfrac{\alpha\beta' - \beta\alpha'}{\alpha - \beta}$.

Il en résulte, a n'étant pas nul, que pour ces valeurs de a et b, la relation $z' = az + b$ définit la similitude directe donnée initialement.

THÉORÈME 5	**Dans le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormal direct, toute similitude directe peut être définie par une relation $z' = az + b$, où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.**

Propriétés

Soit s la similitude directe définie par une relation $z' = az + b$.

1° Si $a = 1$, s est une translation.

2° Si $a \neq 1$, s possède un point invariant $M_0(z_0)$ unique, appelé **centre de la similitude** s, et s n'est donc pas une translation.

Dans ce cas, s peut s'exprimer sous la forme $r \circ h$ ou $h \circ r$, où h est l'homothétie de centre M_0 et de rapport $|a|$ et r la rotation de centre M_0 et d'angle $\theta = \arg a$.

La décomposition $s = r \circ h = h \circ r$ est appelée **décomposition canonique** de la similitude s. L'angle de la rotation r est l'angle de s.

Une similitude directe s qui n'est pas une translation est déterminée par son centre M_0, son rapport λ et une mesure θ de son angle; M_0, λ et θ sont les éléments caractéristiques de s.

• Si a est réel, on a soit $\theta = 0 \quad (2\pi) \quad (a > 0)$, soit $\theta = \pi \quad (2\pi) \quad (a < 0)$.

Lorsque $\theta = 0 \quad (2\pi)$, la rotation r est l'application identique de $\mathscr{P}$ et s l'homothétie de centre M_0 et de rapport a.

Lorsque $\theta = \pi \quad (2\pi)$, la rotation r est la symétrie centrale de centre M_0, h est l'homothétie de centre M_0 et de rapport $-a$ et s l'homothétie de centre M_0 et de rapport a.

Finalement si a, distinct de 1, est réel, s est l'homothétie de centre M_0 et de rapport a.

• Si a n'est pas réel, on a $\theta \neq 0 \quad (2\pi)$ et pour tout point M différent de M_0, d'image $M' = s(M)$, l'égalité $(\overrightarrow{M_0M}, \overrightarrow{M_0M'}) = \theta \quad (2\pi)$ montre que les points M_0, M, M'ne sont pas alignés, et donc que s n'est pas une homothétie.

3° On sait que le rapport de la similitude directe s définie par $z' = az + b$ est égal à $|a|$. Il en résulte que s est un déplacement si, et seulement si, $|a| = 1$.

• Si $a = 1$, ce déplacement est une translation.

• Si $a \neq 1$, ce déplacement est la rotation dont le centre est l'unique point fixe de s et dont une mesure de l'angle est un argument de a.

On peut résumer cette étude :

THÉORÈME 6	**Soit s une similitude directe définie par une relation $z' = az + b$:** • **s est une translation si, et seulement si, $a = 1$.** • **s est une homothétie-translation si, et seulement si, a est réel.** • **s est un déplacement si, et seulement si, $\|a\| = 1$.**

• Exercices d'application

17. On considère l'application s qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' dont l'affixe z' est donné par la relation :

$$z' = 2iz + 1 - i.$$

Déterminer la nature de l'application s et ses éléments caractéristiques.

18. Reprendre l'exercice **17** avec :

a) $z' = z + 2 - i$;
b) $z' = 2z - i$;
c) $z' = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}z - 1 + i$;
d) $z' = iz$;
e) $z' = (1 + i)z - i$;
f) $z' = -\dfrac{3}{2}z + 2 - 3i$;
g) $z' = (\sqrt{3} - i)z + 1 + i(\sqrt{3} - 1)$.

19. *1°* Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) :

$$z^3 - (2 - i)z^2 + (5 - 3i)z - 2 + 6i = 0,$$

sachant que l'une des solutions est imaginaire pure. Soit z_1 cette solution. On trouvera deux autres solutions; on appellera z_2 celle de partie imaginaire négative et z_3 celle de partie imaginaire positive.
2° Soit A le point d'affixe z_1, B le point d'affixe z_2, C le point d'affixe z_3 et Ω le point d'affixe 1. On définit la similitude directe s telle que :

$$s(A) = \Omega \quad \text{et} \quad s(B) = C.$$

Déterminer son centre, son rapport et une mesure de son angle.

20. Dans un repère orthonormal direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ du plan $\mathscr{P}$, on donne les points $A\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ et $B(1, -1)$. On considère l'application s de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui, à tout point M, associe le point M' ainsi défini : M_1 est l'image de M par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$, et M' est l'image de M_1 par l'homothétie de centre B et de rapport 3.
1° Le plan $\mathscr{P}$ étant identifié à l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on note z l'affixe de M et z' celle de M'. Exprimer z' en fonction de z.
2° Déterminer la nature de s et ses éléments caractéristiques.

21. Le plan $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.
1° On considère l'application f de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui, à tout point M de coordonnées (x, y), associe le point M' de coordonnées (x', y') définies par :

$$\begin{cases} x' = x - y\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \\ y' = x\sqrt{3} + y - \sqrt{3}. \end{cases}$$

Démontrer que f possède un point fixe, unique.
2° On désigne par z et z' les affixes des points M et M'. Montrer que z et z' sont liés par une relation du type :

$$z' - z_0 = a(z - z_0),$$

où a et z_0 sont des nombres complexes que l'on déterminera. Caractériser alors l'application f.

22. Le plan $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthonormal direct. On note z l'affixe d'un point M de ce plan.
1° Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :

$$|(1 + i)z - 2i| = 2.$$

2° Étudier la transformation de $\mathscr{P}$ qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z' = (1 + i)z - 2i$.
Trouver en particulier le point qui coïncide avec son image.
3° En utilisant la transformation précédente, retrouver le résultat de la première question.

23. On considère dans un plan muni d'un repère orthonormal direct, les deux transformations s_1 et s_2 qui associent respectivement au point M d'affixe z, le point M_1 d'affixe $z_1 = (-1 + i\sqrt{3})z$ et le point M_2 d'affixe $z_2 = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})z$.
1° Quelle est la nature de ces deux transformations? Donner leurs éléments respectifs.
2° Exprimer, en fonction de z, l'affixe de l'image de M par la transformation $s_2 \circ s_1$ et donner les éléments de cette transformation.

24. Déterminer les similitudes directes involutives.

25. Soit s une similitude directe. Étudier l'application qui, à tout point M, associe le milieu du bipoint (M, M'), M' étant l'image de M par s.

26. Soit s_0 la similitude directe définie par la relation $z' = iz + 2$.
1° Déterminer les similitudes directes s qui commutent avec s_0, c'est-à-dire telles que $s \circ s_0 = s_0 \circ s$.
Quel est le centre d'une telle similitude?
2° On note $\mathscr{S}$ l'ensemble des similitudes qui commutent avec s_0. Démontrer que la composée de deux éléments de $\mathscr{S}$ appartient à $\mathscr{S}$ et que la réciproque d'un élément de $\mathscr{S}$ appartient à $\mathscr{S}$.

TRAVAUX PRATIQUES

PROPRIÉTÉS DU CENTRE D'UNE SIMILITUDE DIRECTE

On considère une similitude directe s de centre O, de rapport λ et d'angle θ ni nul, ni plat : $\theta \neq 0 \quad (\pi)$.

1. *On donne λ, θ, un point A distinct de O et son image $A' = s(A)$.*
En remarquant que O appartient à un cercle et un arc de cercle déterminés à partir des données, donner une construction de O.

Effectuer cette construction avec soin lorsque $\lambda = 2$ et $\theta = -\frac{\pi}{3}$.

2. *Soit (AB) une droite ne passant pas par O et son image $(A'B')$ $(A' = s(A),\ B' = s(B))$.*

1° Démontrer que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \theta \quad (2\pi)$. En déduire que les droites (AB) et $(A'B')$ sont sécantes en un point I.

2° Démontrer que les points O, A, A', I sont cocycliques, et qu'il en est de même des points O, B, B', I.

3. *Soit une droite $\mathscr{D}$ et son image $\mathscr{D}' = s(\mathscr{D})$. $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ se coupent en I.*

1° Démontrer que l'image par s du point H, projeté orthogonal de O sur $\mathscr{D}$, est le point H', projeté orthogonal de O sur $\mathscr{D}'$. En déduire que le centre O de s appartient à l'ensemble (Γ) des points M du plan dont le rapport des distances $\frac{MK'}{MK}$ aux droites $\mathscr{D}'$ et $\mathscr{D}$ est égal à k.

2° Préciser la nature de (Γ). (On pourra à cet effet choisir un repère orthonormal $(I, \vec{u}, \vec{v})$ où $\vec{u}$ est un vecteur directeur unitaire de $\mathscr{D}$, la droite $\mathscr{D}'$ étant définie par un vecteur directeur $\vec{u}'$ de coordonnées (α, β).)

PROGRAMMATION

1° Une similitude directe s étant définie par $z' = az + b$, où $a \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ et $b \in \mathbb{C}$, programmer le calcul des coordonnées du centre de s, de son rapport et de la mesure principale de son angle.

Réponse (SHARP EL-5050)

Dans ce programme, on note $a = a_1 + ia_2$, $b = b_1 + ib_2$, $d = (a_1 - 1)^2 + a_2^2$, k le rapport de s et *ang* la mesure principale de l'angle de s.

Le couple (x, y) des coordonnées du centre de s est solution du système :

$$\begin{cases} (a_1 - 1)x - a_2 y = -b_1 \\ a_2 x + (a_1 - 1)y = -b_2. \end{cases}$$

AER	mode programme
SIMILITUDE [ENT]	titre du programme
[1] [VAR] d [≠] [VAR] 0	expression conditionnelle $d \neq 0$ — *procédure principale*
[−Y→[]] [2] [◣] [−Y→[]]	séquence exécutée si $d \neq 0$ — *procédure principale*
[−N→[]] [3] [◣] [−N→[]]	séquence exécutée si $d = 0$ — *procédure principale*
[SUB]	*sous-programme 1*
[VAR] d [=] [(] a1 [−] [VAR] 1 [)] [y^x] 2 [+] [(] [VAR] a2 [)] [y^x] [VAR] 2	calcul de $d = (a_1 - 1)^2 + a_2^2$
[SUB]	*sous-programme 2*
[VAR] x [=] [(−)] [(] b1 [×] [(] a1 [−] [VAR] 1 [)] [+] [VAR] a2 [×] b2 [)] [÷] d [,]	calcul de l'abscisse x du centre de s
y [=] [(−)] [(] b2 [×] [(] a1 [−] [VAR] 1 [)] [−] [VAR] a2 [×] b1 [)] [÷] d [,]	calcul de l'ordonnée y du centre de s
k [=] a1 [→POL] a2 [,]	calcul du rapport k
ang [=] [VAR] Z	calcul de la mesure principale *ang*

SUB	*sous-programme 3*
VAR d = VAR 0	si $d = 0$, le calcul n'est pas possible
ENT	fin et enregistrement du programme

On met ensuite la SHARP EL-5050 en mode calcul (mode COMP) et, à l'aide de la touche TITLE, on sélectionne le programme SIMILITUDE. Puis on entre successivement les données a_1, a_2, b_1 et b_2 à l'aide de la touche COMP. Enfin, on affiche successivement les résultats x, y, k et ang, toujours à l'aide de la touche COMP.

Remarques : 1) Lorsque $d = 0$, la calculatrice affiche $d = 0$. 2) Avant d'exécuter le programme, il convient de choisir l'unité d'angle désirée à l'aide de la touche DRG.

2° Utiliser le programme de la question 1° pour traiter les exercices **17** *et* **18** *de la page* 311.

DIVISIONS RECTILIGNES SEMBLABLES

On donne dans le plan $\mathcal{P}$ deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sécantes en I, deux points distincts A et B de $\mathcal{D}$ et deux points distincts A' et B' de $\mathcal{D}'$. A tout point M de $\mathcal{D}$ de paramètre t dans le repère $(A, \overrightarrow{AB})$, on associe le point M' de $\mathcal{D}'$ de paramètre t dans le repère $(A', \overrightarrow{A'B'})$ (figure 8).

1° Démontrer qu'il existe une similitude directe s, unique et telle que, quel que soit le point M de $\mathcal{D}$, $s(M) = M'$.
Construire le centre O de s.

2° Démontrer que lorsque M décrit la droite $\mathcal{D}$:
a) les mesures de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}})$ restent constantes;
b) le rapport $\dfrac{OM'}{OM}$ reste constant;
c) le cercle OMM' passe par I;
d) le point K projeté orthogonal de O sur la droite (MM') reste sur une droite fixe.

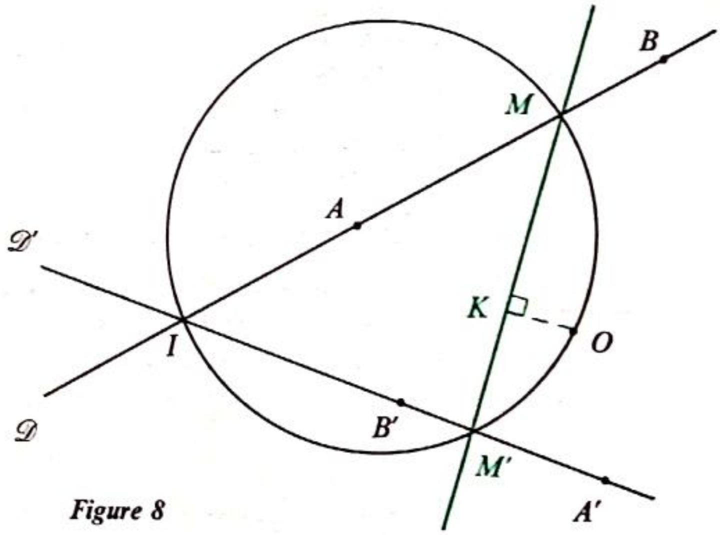


Figure 8

UNE PROPRIÉTÉ DE DEUX CERCLES SÉCANTS

On donne deux cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ de centres respectifs O et O' et de rayons respectifs r et r', sécants en A et B (figure 9).

1° Démontrer qu'il existe une similitude directe s de centre A, et une seule, transformant $\mathscr{C}$ en $\mathscr{C}'$.
Préciser le rapport et l'angle de s.

2° Pour tout point M de $\mathscr{C}$ d'image $M' = s(M)$, démontrer que les points B, M, M' sont alignés. Que peut-on dire de la droite (MM') lorsque M est en B? Lorsque M' est en B?

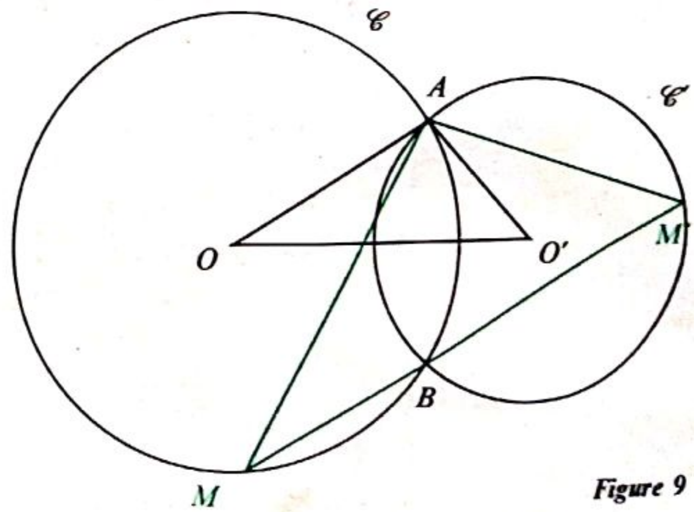


Figure 9

3° Une droite variable Δ passant par B recoupe $\mathscr{C}$ en N et $\mathscr{C}'$ en N' (le point N, comme N', peut être en B).

Démontrer que l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AN'}})$ et le rapport $\dfrac{AN'}{AN}$ restent constants.

SIMILITUDES INDIRECTES

Le plan $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

1° Deux nombres complexes a et b étant donnés, a non nul, considérons l'application φ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui à tout complexe z fait correspondre $\varphi(z) = a\bar{z} + b$, où $\bar{z}$ est le complexe conjugué de z.

On associe à φ l'application σ de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui transforme tout point M d'affixe z en le point M' d'affixe $z' = a\bar{z} + b$.

a) Démontrer que σ peut se décomposer sous la forme $\sigma = s \circ s_\Delta$, où s_Δ est la réflexion d'axe $(O, \vec{e}_1)$ et s la similitude directe définie par la relation $z' = az + b$.

b) En déduire que l'application σ multiplie les distances par $|a|$ et transforme tout angle orienté en un angle orienté de mesures opposées à celles du premier.

On dit que σ est une **similitude indirecte** de rapport $|a|$.

2° Soit σ une similitude indirecte définie par la relation $z' = a\bar{z} + b$.

a) On suppose que $a = 1$. Donner une définition géométrique simple de σ.

b) Démontrer que σ est une isométrie si et seulement si $|a| = 1$. Préciser s'il s'agit d'un déplacement ou d'un antidéplacement.

c) On suppose $|a| = 1$. Démontrer que σ est une réflexion si et seulement si $a\bar{b} + b = 0$. (On pourra remarquer que σ est une réflexion si et seulement si $\sigma \circ \sigma = \mathrm{Id}_{\mathscr{P}}$.)

d) Reconnaître l'application σ définie par la relation $z' = \mathrm{i}\bar{z} + 1 - \mathrm{i}$.

3° On considère dans cette question une similitude indirecte σ définie par une relation $z' = a\bar{z} + b$, où le nombre complexe a est de module différent de 1.

a) Démontrer qu'il existe un point M_0, unique, invariant par σ, d'affixe $z_0 = \dfrac{a\bar{b} + b}{1 - |a|^2}$.

Écrire la relation $z' = a\bar{z} + b$ sous la forme $z' - z_0 = a\overline{(z - z_0)}$ (1).

b) Soit θ un argument de a. Déduire de (1) que, pour tout point M d'image $M' = \sigma(M)$:

- $M_0M' = |a| \times M_0M$
- *et, si M est différent de M_0,* $(\vec{e}_1, \overrightarrow{M_0M}) + (\vec{e}_1, \overrightarrow{M_0M'}) = \theta \quad (2\pi)$.

c) Démontrer que la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{MM_0M'}$ reste fixe lorsque M varie dans $\mathscr{P}$. Soit $\mathscr{D}$ cette droite.

d) Soit h l'homothétie de centre M_0 et de rapport $|a|$ et $s_{\mathscr{D}}$ la réflexion d'axe $\mathscr{D}$. Démontrer que :

$$\sigma = h \circ s_{\mathscr{D}} = s_{\mathscr{D}} \circ h.$$

On peut conclure :

Soit σ une similitude indirecte définie par la relation $z' = a\bar{z} + b$.

- **Si $|a| = 1$, σ est un antidéplacement et cet antidéplacement est une réflexion si, et seulement si, $a\bar{b} + b = 0$.**
- **Si $|a| \neq 1$, σ possède un point invariant M_0, et un seul, et peut se décomposer sous la forme $\sigma = h \circ s_{\mathscr{D}} = s_{\mathscr{D}} \circ h$, où $s_{\mathscr{D}}$ est une réflexion d'axe $\mathscr{D}$ passant par M_0 et h l'homothétie de centre M_0 et de rapport $|a|$. Le point M_0, la droite $\mathscr{D}$ et le rapport $|a|$ sont les éléments caractéristiques de σ.**

e) Déterminer les éléments caractéristiques des similitudes indirectes définies respectivement par les relations : $z' = 2\bar{z} + 3\mathrm{i}$, $z' = (1 + \mathrm{i})\bar{z} - \mathrm{i}$, $z' = \mathrm{i}\sqrt{2}\bar{z} + 1 - \mathrm{i}\sqrt{2}$.

EXERCICES ET PROBLÈMES

27. Le triangle ABC est quelconque, M est le milieu du segment $[B, C]$. Les triangles BAB' et CAC' sont rectangles isocèles de sommet A et extérieurs à ABC.
Le but de l'exercice est de montrer que les droites (AM) et $(B'C')$ sont perpendiculaires et que $B'C' = 2AM$.
1° Méthode géométrique.
a) Soit h l'homothétie de centre B et de rapport 2. Déterminer les images des points A et M par h.
Trouver une rotation r telle que $r \circ h$ transforme A en B' et M en C'.
b) En déduire que les droites (AM) et $(B'C')$ sont perpendiculaires et que $B'C' = 2AM$.
2° Utilisation des nombres complexes.
Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct d'origine A dans lequel B et C ont pour affixes respectives b et c.
a) Quelles sont les affixes m, b', c' des points M, B', C'?
b) Retrouver les résultats du *1° b*.

28. Un point M décrit un cercle $\mathscr{C}$. Son transformé M' par une similitude directe s de centre O décrit donc un cercle $\mathscr{C}'$. Soit M'' le barycentre de $(M, 1)$ et $(M', -r)$ où r désigne un nombre réel différent de 1, donné.
Démontrer que le triangle OMM'' reste directement semblable à un triangle fixe. En déduire le lieu de M''.
Quels sont les lieux de l'orthocentre, du centre de gravité du triangle $OM'M''$? Quel est le lieu de la projection orthogonale de O sur la droite (MM')?

29. Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère l'équation (E) :

$$z^3 - (6 + 4i)z^2 + (8 + 14i)z - 12i = 0.$$

1° Montrer que (E) admet une unique solution réelle.
2° Résoudre (E) dans $\mathbb{C}$. On note z_1 la solution réelle, z_2 et z_3 les deux autres solutions, avec $|z_2| < |z_3|$.
3° Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points M_1, M_2, M_3 d'affixes respectives z_1, z_2, z_3.
Déterminer la similitude directe de centre M_2 qui transforme M_1 en M_3; donner ses éléments caractéristiques.

30. Dans un plan $\mathscr{P}$ orienté, on donne deux droites parallèles $\mathscr{D}$ et Δ, et un point A n'appartenant à aucune de ces droites. Construire un triangle ABC vérifiant simultanément les conditions suivantes :

- ABC est rectangle en A,
- ABC est isocèle,
- B est sur $\mathscr{D}$ et C est sur Δ.

Précisez le nombre de solutions au problème posé. (Toute méthode est acceptée : géométrique, analytique, utilisation des nombres complexes.)

31. $ABCD$ est un quadrilatère et α est un nombre complexe de module r et d'argument θ. a, b, c, d représentent les affixes de A, B, C et D dans un plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormal direct.

- La similitude directe de centre A, de rapport r et d'angle θ, transforme B en Q.
- La similitude directe de centre B, de rapport r et d'angle θ, transforme C en M.
- La similitude directe de centre C, de rapport r et d'angle θ, transforme D en N.
- La similitude directe de centre D, de rapport r et d'angle θ, transforme A en P.

On appellera q, m, n, p les affixes de Q, M, N et P.
1° Déterminer q en fonction de α, a et b.
2° a) Montrer que : $MNPQ$ est un parallélogramme équivaut à :

$$n + q = m + p.$$

b) En déduire que : $MNPQ$ est un parallélogramme équivaut à :

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \text{ou } ABCD \text{ est un parallélogramme.}$$

3° On suppose que $ABCD$ est un parallélogramme et que $\alpha = \dfrac{1+i}{2}$. En déduire que $MNPQ$ est un carré.

32. Soient $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormal du plan, A_0 le point d'affixe 6 et s la similitude de centre O, de rapport $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{6}$. On pose $A_{n+1} = s(A_n)$ pour $n = 0, 1, \ldots, 11$.
1° Déterminer en fonction de n l'affixe du point A_n et vérifier que A_{12} appartient à la demi-droite $(O, \vec{i})$.
2° Établir que le rectangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1}.
Représenter les points $A_0, A_1, \ldots, A_{12}$ (on ne demande pas de calculer explicitement leurs coordonnées) et tracer les segments OA_0, OA_1, ..., OA_{12} et A_0A_1, A_1A_2, ..., $A_{11}A_{12}$.
3° Calculer la longueur du segment A_0A_1. En déduire la longueur ℓ de la ligne polygonale $A_0A_1A_2 \ldots A_{12}$. Donner une valeur approchée de ℓ à 10^{-3} près.

33. On donne dans le plan $\mathscr{P}$ orienté, un triangle isocèle $OO'A$ avec $(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AO'}) = \dfrac{\pi}{2}$ (2π). Les cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ passant par A et de centres respectifs O et O' se recoupent en B. A tout point M de $\mathscr{C}$, on associe le point M' de $\mathscr{C}'$ tel que $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{O'M'}) = -\dfrac{\pi}{2}$ (2π).
1° Montrer qu'il existe une rotation r, que l'on caractérisera, transformant O en O' et M en M'.
2° M étant distinct de B, les droites (BM) et (BM') recoupent respectivement $\mathscr{C}'$ en N' et $\mathscr{C}$ en N. Montrer que N' est l'image de N par la rotation r.
3° On construit les carrés $MBM'P$ et $NBN'Q$. Montrer que les points P et Q sont respectivement les images des points M et N par une similitude directe s dont on précisera le centre, le rapport et l'angle. En déduire les ensembles des points P et Q quand M varie sur $\mathscr{C}$.
Les différents éléments de cet exercice paraîtront sur une figure soignée.

34. Étant donnés deux nombres complexes a et b tels que $a \neq 0$, $a \neq 1$, $b \neq 0$, on définit la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$z_0 = 0, \quad z_{n+1} = az_n + b \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

Dans un plan $\mathscr{P}$ rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on notera M_n le point d'affixe z_n.
1° Montrer par récurrence que, pour $n \geqslant 1$, on a :

$$z_n = \frac{b(1-a^n)}{1-a}.$$

2° p étant un entier naturel supérieur ou égal à 2, on pose dans cette question $a = \cos\frac{2\pi}{p} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{p}$. Montrer qu'alors la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique, de période p.
3° α étant un réel donné tel que $\alpha \neq k\pi$ quel que soit $k \in \mathbb{Z}$, on pose dans cette question $a = \cos 2\alpha + \mathrm{i}\sin 2\alpha$ et $b = 2\sin\alpha$.
Quelle est la nature de l'application qui, au point M du plan $\mathscr{P}$ d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z' = az + b$? En déduire que l'ensemble des points M_n est inclus dans un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

Faire une figure pour $\alpha = \frac{\pi}{6}$ et placer les points M_0, M_1, M_2, M_3, M_4 dans ce cas particulier.

35. Dans un plan $\mathscr{P}$ orienté, une similitude directe s_0 de centre O transforme un couple donné (A, B) de points distincts, autres que O, en un couple (A', B'). De plus :
- la similitude directe s_A de centre A qui transforme B en B' transforme O en P;
- la similitude directe s_B de centre B qui transforme A en A' transforme O en Q.

Démontrer que O est le milieu de $[P, Q]$.

36. Soit s_0 la similitude définie par la relation :

$$z' = a_0 z + b_0.$$

Déterminer l'ensemble des similitudes directes s telles que $s \circ s = s_0$.

37. Dans le plan $\mathscr{P}$ rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on donne les points $A(1, 0)$ et $B(-1, 0)$. A tout point M du plan de coordonnées (x, y), on associe le nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$, affixe de M.
1° Soit T l'application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui, à tout point M, associe le point M_1 d'affixe $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$ telle que : $z_1 = \mathrm{i}z - (\mathrm{i}+1)$.
a) Montrer que l'on a :

$$(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM_1}) = \frac{\pi}{2} \quad (2\pi) \quad \text{et} \quad \|\overrightarrow{BM_1}\| = \|\overrightarrow{AM}\|.$$

b) Préciser la nature de T et ses éléments caractéristiques.
c) Calculer les coordonnées de M_1 en fonction de celles de M.
d) Quel est l'ensemble des points M_1 lorsque M décrit le cercle de diamètre $[A, B]$?
2° Le nombre réel λ étant fixé mais quelconque, on considère l'application T_λ de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui, à tout point M, associe le point M', barycentre de M affecté du coefficient λ, de M_1 affecté de $-\lambda$ et de A affecté de 1. On note $z' = x' + \mathrm{i}y'$ l'affixe du point M'.
a) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{OM'}$ en fonction de $\lambda, \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OA}$. En déduire, entre z et z' la relation :

$$z' = \lambda(1-\mathrm{i})z + \lambda(1+\mathrm{i}) + 1.$$

b) Démontrer que T_λ est une similitude directe et déterminer l'affixe de son centre, son rapport et son angle.
Préciser pour quelles valeurs de λ l'application T_λ est une rotation et donner dans ce cas son angle et l'affixe de son centre.

38. Dans le plan complexe, au point m d'affixe z, on fait correspondre le point M d'affixe Z, par la transformation T_k définie par $Z = kiz + 1 + k^2$, k étant un paramètre réel strictement positif.
1° Quelle est la nature de la transformation T_k?
Montrer que T_k possède un point invariant ω_k, et un seul, que l'on déterminera. Préciser les éléments caractéristiques de T_k.
2° Déterminer l'ensemble des points ω_k lorsque k décrit l'ensemble des réels positifs.
3° k_1 et k_2 étant deux réels strictement positifs, on considère les transformations $T_{k_2} \circ T_{k_1}$ et $T_{k_1} \circ T_{k_2}$.
Montrer que $T_{k_1} \circ T_{k_2} = T_{k_2} \circ T_{k_1}$ si, et seulement si, $k_1 = k_2$.
Quelle est la nature de la transformation $T_k \circ T_k$?

39. On considère un plan $\mathscr{P}$ rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ d'axes Ox et Oy.
1° a) On désigne par $\mathscr{H}$ l'homothétie de centre A, de coordonnées $(a, 0)$, et de rapport k $(k > 0)$. Soit M un point du plan, d'affixe $z = x + \mathrm{i}y$. On note $M_1 = \mathscr{H}(M)$.
Donner l'expression de z_1, affixe de M_1, en fonction de z, a et k.
b) On désigne par $\mathscr{R}$ la rotation de centre O et de mesure θ. On appelle u le nombre complexe de module 1 et d'argument θ. Soit $\mathscr{S} = \mathscr{R} \circ \mathscr{H}$.
On note $M' = \mathscr{S}(M)$. Soit $z' = x' + \mathrm{i}y'$ l'affixe de M'.
Démontrer que $z' = kuz + au(1-k)$.
Indiquer la nature de la transformation $\mathscr{S}$. Déterminer l'affixe de son point invariant, I, lorsque $\mathscr{S}$ n'est pas la transformation identique.
2° On suppose dans la suite que $u = \mathrm{i}$ et $a = 5$.
Calculer les coordonnées (α, β) du point I en fonction de k. Déterminer l'ensemble des points I lorsque k décrit l'ensemble des réels positifs. (On remarquera que $\alpha = k\beta = 0$.)
Déterminer les points I dont les deux coordonnées sont des entiers relatifs.
3° On suppose maintenant $u = \mathrm{i}$, $a = 5$ et $k = 3$.
Calculer les coordonnées du point M' en fonction des coordonnées de M. Soit P le point de coordonnées $(3, 2)$. Déterminer l'ensemble des points M tels que les trois points M, M' et P soient alignés.

40. Soit $\mathscr{P}$ le plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
I — *1°* On prend pour point M_0 l'origine O du repère; soit alors M_1 le point du plan $\mathscr{P}$ tel que $\overrightarrow{M_0M_1} = \vec{i}$.
On fixe un nombre réel $r > 0$ et un nombre réel θ dans $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. Soit M_2 le point du plan $\mathscr{P}$ tel que :

$$\begin{cases} \|\overrightarrow{M_1M_2}\| = r\,\|\overrightarrow{M_0M_1}\|, \\ \theta = (\overrightarrow{M_0M_1}, \overrightarrow{M_1M_2}) \quad (2\pi). \end{cases}$$

Calculer l'affixe v_0 du vecteur $\overrightarrow{M_0M_1}$ et l'affixe v_1 du vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$.
2° Les points M_0, M_1, M_2 ayant été définis ci-dessus,

pour tout $n \geqslant 1$ dans $\mathbb{N}$, on définit le point M_{n+1} à partir des points M_{n-1} et M_n, par :

$$\begin{cases} \|\overrightarrow{M_n M_{n+1}}\| = r \|\overrightarrow{M_{n-1} M_n}\|, \\ (\overrightarrow{M_{n-1} M_n}, \overrightarrow{M_n M_{n+1}}) = \theta \quad (2\pi). \end{cases}$$

On obtient ainsi une suite de points $M_0, M_1, M_2, ..., M_n, ...$ et la figure obtenue en traçant les segments $M_0M_1, M_1M_2, ..., M_nM_{n+1}, ...$ est appelée « polygone ».

On note v_n l'affixe du vecteur $\overrightarrow{M_nM_{n+1}}$.

a) Démontrer que pour $n \geqslant 1$, $v_n = r\,e^{i\theta} v_{n-1}$.

b) En déduire, pour tout $n \geqslant 0$, l'expression de v_n en fonction de n, r et θ.

c) Dans cette question, on suppose $r = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $\theta = \dfrac{\pi}{4}$.

Calculer v_n pour $0 \leqslant n \leqslant 3$ et placer les points M_0, M_1, M_2, M_3, M_4, en prenant 8 cm pour unité graphique.

II — Dans toute la suite du problème, on suppose $0 < r < 1$ et, pour tout $n \geqslant 0$, on note z_n l'affixe du point M_n.

1° Calculer z_0, z_1 et z_2.

2° Pour tout $n \geqslant 0$, exprimer v_n en fonction de z_n et z_{n+1}; en déduire que, pour tout $n \geqslant 1$:

$$z_n = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1}.$$

3° On rappelle que pour tout nombre complexe $z \neq 1$, on a :

$$1 + z + z^2 + ... + z^{n-1} = \frac{1 - z^n}{1 - z}.$$

Calculer, pour tout $n \geqslant 0$, z_n en fonction de n, r et θ.

4° *a*) Démontrer que le module du nombre complexe $z_n - \dfrac{1}{1 - r\,e^{i\theta}}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

b) On note Ω le point du plan $\mathscr{P}$ d'affixe $\omega = \dfrac{1}{1 - r\,e^{i\theta}}$.

Interpréter géométriquement le résultat de la question *4° a*.

5° Pour tout $n \geqslant 0$, on note z'_n l'affixe du vecteur $\overrightarrow{\Omega M_n}$.

a) Calculer z'_n en fonction de n, r et θ.

b) Établir qu'il existe un nombre complexe $a \neq 0$ tel que, pour tout $n \geqslant 1$, $z'_n = a z'_{n-1}$.

c) En interprétant géométriquement la relation précédente, déterminer une similitude directe f telle que, pour tout $n \geqslant 1$, $f(M_{n-1}) = M_n$; préciser le centre, le rapport et l'angle de cette similitude.

d) Dans cette question, on suppose $r = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $\theta = \dfrac{\pi}{4}$; calculer les coordonnées du point Ω et placer ce point sur la figure précédemment tracée. Indiquer une construction géométrique simple de M_n connaissant Ω et M_{n-1} et placer les points M_5, M_6, M_7 et M_8 sur la figure.

41. Dans le plan $\mathscr{P}$, orienté, on considère trois points distincts Ω, M et M' formant un triangle isocèle rectangle en M, et de sens direct.

1° Déterminer le rapport et l'angle de la similitude directe s_Ω de centre Ω telle que $s_\Omega(M) = M'$.

2° Soit ABC un triangle du plan $\mathscr{P}$, de sens direct. A l'extérieur du triangle ABC, on construit le triangle isocèle ABR rectangle en B, le triangle isocèle BCP rectangle en C et le triangle isocèle CAQ, rectangle en A.

On note s_P, s_Q, s_R les similitudes directes de rapport $\sqrt{2}$, d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ et de centres respectifs P, Q et R.

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application $f = s_R \circ s_P \circ s_Q$. (On pourra chercher l'image de A par f.)

3° Dans cette question, on suppose donné un triangle PQR du plan $\mathscr{P}$, et on cherche à construire un triangle ABC, tel que les constructions de la question 2° redonnent ce triangle PQR.

a) Montrer que si un triangle ABC solution du problème existe, alors le point A est déterminé de manière unique. Par quelles rotations peut-on obtenir C, connaissant P, Q, R et A, puis B connaissant tous les autres points? En déduire qu'il existe un seul triangle ABC répondant à la question.

b) On veut maintenant construire ABC, dans le cas particulier où PQR est un triangle isocèle rectangle en Q et de sens direct. On note I le milieu de $[P, R]$, I' le symétrique de R par rapport à Q et S le symétrique de P par rapport à Q.

Déterminer $f(I)$; comparer les angles $(\widehat{\overrightarrow{QI}, \overrightarrow{QI'}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AI'}})$; en déduire que A appartient à un cercle que l'on précisera.

Déterminer $f(Q)$; démontrer que :

$$(\widehat{\overrightarrow{SQ}, \overrightarrow{SR}}) = (\widehat{\overrightarrow{AQ}, \overrightarrow{AR}}) \quad (\pi);$$

en déduire que A appartient à un autre cercle que l'on précisera.

Construire le triangle ABC. On fera une figure en prenant 8 cm comme longueur de $[P, Q]$.

42. Soit $\mathscr{P}$ un plan orienté rapporté à un repère orthonormal direct $\mathscr{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit M un point de $\mathscr{P}$ de coordonnées (x, y) et d'affixe $z = x + iy$.

On donne des réels r et α, avec $r > 0$ et $\alpha = \dfrac{5\pi}{4}$ et on note u le nombre complexe de module r, d'argument α.

1° On construit les points A_n de $\mathscr{P}$ répondant aux conditions :

- A_0 est l'origine du repère;
- A_1 est le point d'affixe i;
- pour tout entier n supérieur ou égal à 2, le point A_n est l'image de A_{n-2} par la similitude directe de centre A_{n-1}, de rapport r, dont une mesure de l'angle est α.

On note z_n l'affixe du point A_n.

a) Écrire pour tout entier n supérieur ou égal à 2 une relation entre z_n, z_{n-1} et z_{n-2}.

b) Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a $z_n - z_{n-1} = (-u)^{n-1}$i.

c) Déterminer l'expression de l'affixe z_n de A_n en fonction de n et de u.

2° *a*) Montrer qu'il existe une similitude directe s, et une seule, telle que $A_1 = s(A_0)$ et $A_2 = s(A_1)$.

Préciser les éléments caractéristiques de s.

b) Montrer que pour tout entier naturel n, on a $A_{n+1} = s(A_n)$.

On note s_0 l'application identique de $\mathscr{P}$, et pour tout entier naturel n, on pose $s_{n+1} = s \circ s_n$. Soit $p \in \mathbb{N}$; montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_{n+p} = s_n(A_p)$.

c) Montrer que s_4 est une homothétie.

d) En déduire que les points A_n sont éléments d'un ensemble formé par la réunion de quatre droites que l'on précisera.

3° On suppose maintenant $r = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. On appelle Ω le centre de la similitude s.

a) Démontrer que pour tout entier naturel n, les vecteurs $\overrightarrow{\Omega A_{n+1}}$ et $\overrightarrow{A_n A_{n+1}}$ sont orthogonaux.

b) Représenter graphiquement les points $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_9$ dans le repère orthonormal $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 4 cm).

c) Calculer $\|\overrightarrow{\Omega A_n}\|$ en fonction de n et de $\|\overrightarrow{\Omega A_0}\|$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \|\overrightarrow{\Omega A_n}\|$.

d) Pour tout entier naturel n, calculer :

$$L_n = \sum_{i=0}^{n} \|\overrightarrow{A_i A_{i+1}}\|.$$

Étudier la limite de la suite $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ quand n tend vers $+\infty$.

4° On suppose toujours que u est de module $r = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et d'argument $\alpha = \dfrac{5\pi}{4}$.

a) Vérifier que la similitude directe s est l'application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui au point M d'affixe $x + iy$ associe le point M' d'affixe $x' + iy'$ tel que :

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{2}(x - y) \\ y' = \dfrac{1}{2}(x + y) + 1. \end{cases}$$

b) Soit (Γ) la courbe du plan $\mathscr{P}$ dont une équation dans $\mathscr{R}$ est $xy = -1$. Déterminer une équation de l'image (Γ') de (Γ) par s. Préciser la nature de (Γ').

c) Tracer les courbes (Γ) et (Γ') dans le repère $\mathscr{R}$ (sur le même dessin).

43. $\mathscr{P}$ est un plan orienté rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormal. À tout point M de $\mathscr{P}$ de coordonnées (x, y) on associe le nombre complexe $z = x + iy$ appelé affixe de M.

I — 1° Étant donnés un complexe non nul $w = u + iv$, avec u et v réels, et un réel λ, déterminer l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie $\bar{w}z + w\bar{z} = \lambda$.

2° Soit $\mathscr{D}$ une droite dont une équation est :

$$ax + by + c = 0$$

avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$; $(a, b) \neq (0, 0)$.

Trouver un complexe non nul w et un réel λ tels que $\mathscr{D}$ soit l'ensemble des points de $\mathscr{P}$ dont l'affixe z vérifie $\bar{w}z + w\bar{z} = \lambda$.

II — 1° Étant donnés un complexe w et un réel k, déterminer l'ensemble des points M de $\mathscr{P}$ dont l'affixe z vérifie : $\quad z\bar{z} - \bar{w}z - w\bar{z} + k = 0.$

(On aura à discuter en fonction du signe de $|w|^2 - k$.)

2° Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre le point de coordonnées (a, b), de rayon R. Trouver un complexe w et un réel k tels que $\mathscr{C}$ soit l'ensemble des points de $\mathscr{P}$ dont l'affixe z vérifie : $\quad z\bar{z} - \bar{w}z - w\bar{z} + k = 0.$

III — On considère l'application f de $\mathscr{P} \setminus \{O\}$ dans $\mathscr{P} \setminus \{O\}$ qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \dfrac{1}{\bar{z}}$.

1° Montrer que pour tout point M de $\mathscr{P} \setminus \{O\}$, les points M et $M' = f(M)$ appartiennent à une même demi-droite d'origine O.

2° Montrer que f est involutive. Préciser l'ensemble des points M de $\mathscr{P}$ tels que $f(M) = M$ et donner ses éléments remarquables.

3° *a)* Soit $\mathscr{D}$ une droite ne contenant pas le point O. En utilisant les parties I et II, déterminer l'image de $\mathscr{D}$ par l'application f. Préciser la nature géométrique de cette image et donner ses éléments remarquables.

b) Soit Δ une droite contenant O. Déterminer l'image de $\Delta \setminus \{O\}$ par f.

4° Soit C un cercle passant par O. Déterminer l'image de $\mathscr{C} \setminus \{O\}$ par f. Préciser la nature géométrique de cette image.

IV — Si M et N sont deux points quelconques de $\mathscr{P}$, on rappelle que la distance MN de M et N est égale au module de la différence des affixes de M et de N.

1° Soit A et B deux points distincts de $\mathscr{P} \setminus \{O\}$ d'images respectives A' et B' par f. Exprimer $A'B'$ en fonction de AB, OA et OB.

2° Soit un cercle $\mathscr{C}$ passant par O et trois points R, S, T sur ce cercle tels que O, R, S et T soient deux à deux distincts et que le point d'intersection des droites (OS) et (RT) appartienne au segment $[R, T]$. Montrer que :

$$OS \times RT = OR \times TS + OT \times RS.$$

(On pourra considérer l'image par f de $\mathscr{C} \setminus \{O\}$ et utiliser le fait qu'un point B appartient à un segment $[A, C]$ si, et seulement si $AB + BC = AC$.)

3° Soit trois points R, S, T du plan P tels que O, R, S, T soient distincts deux à deux et tels que :

$$OS \times RT = OR \times TS + OT \times RS.$$

Montrer que O, R, S, T sont sur un même cercle ou sur une même droite.

CHAPITRE 13

TRANSFORMATIONS ÉLÉMENTAIRES DE L'ESPACE

I — HOMOTHÉTIES-TRANSLATIONS

Activité

L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit t la translation de vecteur $\vec{u} = -2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$ et soit h l'homothétie de centre $\Omega(1, -3, 4)$ et de rapport $-\frac{2}{3}$.

1° Définir analytiquement l'application composée $f = h \circ t$.

2° Démontrer qu'il existe un point A, et un seul, invariant par f, puis que f est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.

3° Reconnaître de même l'application composée $g = t \circ h$. A-t-on $h \circ t = t \circ h$?

4° Soit h' l'homothétie de centre O, origine du repère, et de rapport k $(k \neq 0)$.

a) Définir analytiquement les applications composées $h' \circ h$ et $h \circ h'$.

b) Discuter suivant la valeur du réek k la nature de ces deux applications. Préciser leurs éléments caractéristiques : vecteur s'il s'agit d'une translation, centre et rapport s'il s'agit d'une homothétie.

ENSEMBLE DES HOMOTHÉTIES-TRANSLATIONS

Désignons respectivement par $\mathscr{H}$ et $\mathscr{T}$ l'ensemble des homothéties et l'ensemble des translations de l'espace $\mathscr{E}$.

La réunion $\mathscr{H} \cup \mathscr{T}$ est appelée **ensemble des homothéties-translations** de l'espace $\mathscr{E}$. Les éléments de cet ensemble sont les homothéties-translations.

Propriété caractéristique de $\mathscr{H} \cup \mathscr{T}$

1° Soit f une homothétie-translation et soit un bipoint (M, N) d'image (M', N').

• Si f est une translation de vecteur $\vec{u}$, on a (figure 1) :

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'} = \vec{u},$$

d'où : $$\overrightarrow{M'N'} = 1\overrightarrow{MN}.$$

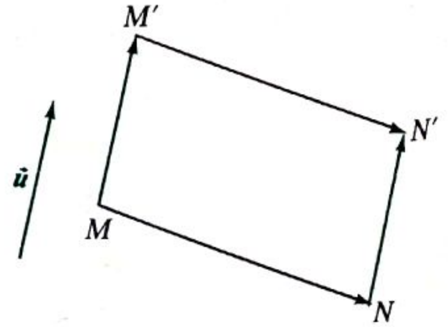


Figure 1

• Si f est une homothétie de centre O et de rapport k, on a (figure 2) :

$$\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{ON'} = k\overrightarrow{ON},$$

d'où $\overrightarrow{ON'} - \overrightarrow{OM'} = k(\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM})$, soit :

$$\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}.$$

Il en résulte que toute homothétie-translation possède la propriété suivante :

Il existe un réel k, non nul, tel que pour tout bipoint (M, N) d'image (M', N') :

$$\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}.$$

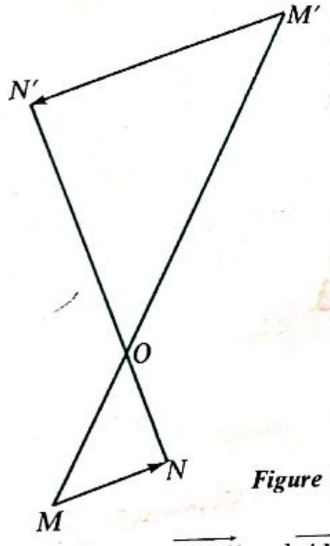


Figure 2

2° Réciproquement, considérons une application f de l'espace $\mathscr{E}$ dans lui-même possédant cette propriété.

Soit A un point donné d'image A'. Pour tout point M d'image M', on a $\overrightarrow{A'M'} = k\overrightarrow{AM}$, égalité que l'on peut écrire, M_0 étant un point quelconque du plan, sous la forme :

$$\overrightarrow{M_0M'} - \overrightarrow{M_0A'} = k(\overrightarrow{M_0M} - \overrightarrow{M_0A}),$$

soit :

$$\overrightarrow{M_0M'} - k\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{M_0A'} - k\overrightarrow{M_0A}. \qquad (1)$$

• Si $k = 1$, l'égalité (1) devient $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA'}$. L'application f est alors la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$.

• Si $k \neq 1$, les points pondérés $(A', 1)$ et $(A, -k)$ ont un barycentre O défini par $\overrightarrow{OA'} - k\overrightarrow{OA} = \vec{0}$.

L'égalité (1), écrite avec $M_0 = O$, donne alors $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$. L'application f est donc l'homothétie de centre O et de rapport k.

THÉORÈME 1	**Pour qu'une application f de l'espace $\mathscr{E}$ dans lui-même soit une homothétie-translation, il faut et il suffit qu'il existe un réek k *non nul* tel que, pour tout bipoint (M, N) d'image (M', N') :** $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}.$

REMARQUES :

1. L'application identique, $\mathrm{Id}_{\mathscr{E}}$, de l'espace $\mathscr{E}$, peut être considérée à la fois comme la translation de vecteur nul et comme une homothétie dont le centre est un point quelconque de $\mathscr{E}$ et dont le rapport est égal à 1.

$\mathrm{Id}_{\mathscr{E}}$ est la seule transformation appartenant à la fois à $\mathscr{T}$ et à $\mathscr{H}$.

2. Soit f une homothétie-translation et soit k le réel non nul tel que, pour tout bipoint (M, N) d'image (M', N'), $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$:

- Si $k \neq 1$, f est une homothétie de rapport k.
- Si $k = 1$, f est une translation.

APPLICATION COMPOSÉE DE DEUX HOMOTHÉTIES-TRANSLATIONS

Soit f_1 et f_2 deux homothéties-translations.

Il existe deux réels *non nuls* k_1 et k_2 tels que, si (M, N) est un bipoint quelconque, (M_1, N_1)

son image par f_1, et (M', N') l'image de (M_1, N_1) par f_2, on a :

$$\overrightarrow{M_1N_1} = k_1\overrightarrow{MN} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{M'N'} = k_2\overrightarrow{M_1N_1},$$

d'où :

$$\overrightarrow{M'N'} = k_2k_1\overrightarrow{MN}.$$

Le réel k_2k_1, produit de deux réels non nuls, est non nul. D'autre part, le bipoint (M', N') est l'image de (M, N) par l'application composée $f_2 \circ f_1$. Il en résulte que $f_2 \circ f_1$ est une homothétie-translation. Par suite :

L'application composée de deux homothéties-translations est une homothétie-translation.

On peut préciser ce résultat en notant que :

- si $k_2k_1 \neq 1$, $f_2 \circ f_1$ est une homothétie de rapport k_2k_1;
- si $k_2k_1 = 1$, $f_2 \circ f_1$ est une translation.

La détermination des éléments caractéristiques de l'application composée $f_2 \circ f_1$, *vecteur* s'il s'agit d'une translation, *centre* et *rapport* s'il s'agit d'une homothétie, a été proposée en Travaux pratiques à la page 136.

BIJECTION RÉCIPROQUE D'UNE HOMOTHÉTIE-TRANSLATION

Soit f une homothétie-translation.

- **Si f est la translation de vecteur $\vec{u}$, f est bijective et sa bijection réciproque est la translation de vecteur $-\vec{u}$.**
- **Si f est l'homothétie de centre O et de rapport k, f est bijective et sa bijection réciproque est l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{k}$.**

Par suite :

Toute homothétie-translation f est bijective et sa bijection réciproque f^{-1} est une homothétie-translation.

CONSERVATION DES BARYCENTRES

Soit G le barycentre d'un système de n points pondérés $(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), ..., (A_n, \alpha_n)$ dont la masse $m = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$ n'est pas nulle :

$$\alpha_1\overrightarrow{GA_1} + \alpha_2\overrightarrow{GA_2} + ... + \alpha_n\overrightarrow{GA_n} = \vec{0}. \qquad (1)$$

Désignons par G' l'image de G par une homothétie-translation f et par A'_i l'image de chaque point A_i $(i = 1, 2, ..., n)$.

On sait qu'il existe un réel k non nul tel que, pour tout bipoint (M, N) d'image (M', N') par f : $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$. En multipliant les deux membres de l'égalité (1) par le réel k, on obtient alors :

$$\alpha_1\overrightarrow{G'A'_1} + \alpha_2\overrightarrow{G'A'_2} + ... + \alpha_n\overrightarrow{G'A'_n} = \vec{0},$$

ce qui montre que G' est le barycentre du système $(A'_i, \alpha_i)_{i\in\mathbb{N}_n}$.

On retiendra :

L'image par une homothétie-translation du barycentre de n points pondérés est le barycentre des images de ces points affectés des mêmes coefficients.

On exprime aussi cette propriété en disant qu'une homothétie-translation conserve les barycentres. En particulier, une homothétie-translation conserve les milieux des segments, et par conséquent l'équipollence des bipoints.

IMAGE D'UNE DROITE OU D'UN PLAN

De la même façon qu'on a établi la propriété de conservation des barycentres, on démontre :

Une homothétie-translation f étant donnée :

- **Trois points A, B, M tels que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$ ont pour images respectives par f, trois points A', B', M' tels que $\overrightarrow{A'M'} = t\overrightarrow{A'B'}$.**
- **Quatre points A, B, C, M tels que $\overrightarrow{AM} = t_1\overrightarrow{AB} + t_2\overrightarrow{AC}$ ont pour images respectives par f, quatre points A', B', C', M' tels que $\overrightarrow{A'M'} = t_1\overrightarrow{A'B'} + t_2\overrightarrow{A'C'}$.**

Image d'une droite, d'une demi-droite, d'un segment

Soit f une homothétie-translation.

Considérons deux points *distincts* A et B et, pour tout réel t, le point M tel que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$. Les points $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $M' = f(M)$ vérifient la relation $\overrightarrow{A'M'} = t\overrightarrow{A'B'}$. De plus A' et B' sont distincts.

Lorsque t décrit $\mathbb{R}$, le point M, tel que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$, décrit la droite (AB), et son image M', telle que $\overrightarrow{A'M'} = t\overrightarrow{A'B'}$, décrit la droite $(A'B')$.

A noter que la droite $(A'B')$ est parallèle à (AB) car il existe un réel k, non nul, tel que $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$ (figure 3).

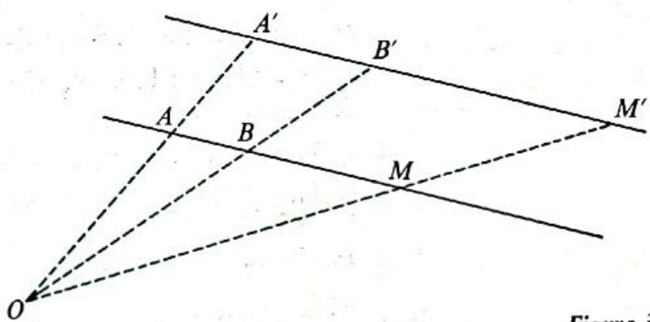


Figure 3

De même lorsque t décrit $\mathbb{R}_+$, M décrit la demi-droite $[AB)$ et M' la demi-droite $[A'B')$, et lorsque t décrit l'intervalle $[0, 1]$, M décrit le segment $[A, B]$ et M' le segment $[A', B']$.

On peut donc énoncer :

L'image d'une droite, d'une demi-droite ou d'un segment, par une homothétie-translation est une droite, une demi-droite ou un segment, parallèle à la première, ou au premier.

REMARQUE :

Si f est une translation ou une homothétie de rapport positif, toute demi-droite $[AB)$ et son image $[A'B')$ sont parallèles et de *même sens*.

Si f est une homothétie de rapport négatif $[AB)$ et $[A'B')$ sont parallèles et de sens contraire.

Image d'un plan

Considérons trois points *non alignés* A, B, C et, pour tout couple (t_1, t_2) de réels, le point M tel que :

$$\overrightarrow{AM} = t_1\overrightarrow{AB} + t_2\overrightarrow{AC}.$$

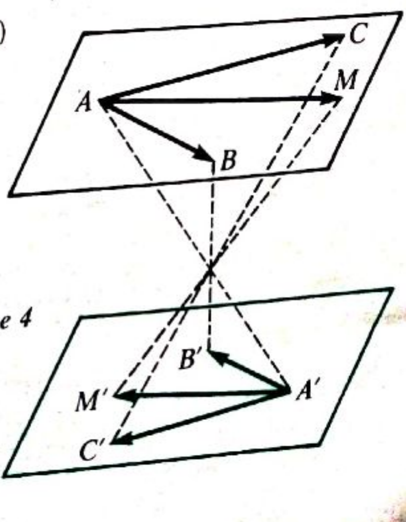


Figure 4

Les points $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $C' = f(C)$ et $M' = f(M)$ vérifient la relation :

$$\overrightarrow{A'M'} = t_1\overrightarrow{A'B'} + t_2\overrightarrow{A'C'}.$$

De plus A', B', C' ne sont pas alignés : s'ils l'étaient, on aurait $\overrightarrow{A'C'} = \lambda\overrightarrow{A'B'}$, d'où $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$, et A, B, C seraient eux aussi alignés.

Lorsque (t_1, t_2) décrit $\mathbb{R}^2$, le point M, tel que $\overrightarrow{AM} = t_1\overrightarrow{AB} + t_2\overrightarrow{AC}$, décrit le plan (ABC) et son image M', telle que $\overrightarrow{A'M'} = t_1\overrightarrow{A'B'} + t_2\overrightarrow{A'C'}$, décrit le plan $(A'B'C')$.

A noter que les droites (AB) et $(A'B')$ sont parallèles et qu'il en est de même de (AC) et $(A'C')$. Il s'ensuit que le plan $(A'B'C')$ est parallèle au plan (ABC). (Rappelons que deux plans sont parallèles si, et seulement si, il existe deux droites sécantes de l'un parallèles à l'autre.)

On retiendra :

L'image d'un plan par une homothétie-translation est un plan parallèle au premier.

IMAGE D'UNE SPHÈRE ET D'UN CERCLE

Activité

1. Image d'une sphère

Soit $\mathcal{S}$ une sphère de centre O et de rayon R; on note $f\langle\mathcal{S}\rangle$ son image par une homothétie-translation f ($f\langle\mathcal{S}\rangle$ est l'ensemble des images par f de tous les points de $\mathcal{S}$).

1° a) Soit O' l'image de O par f. Démontrer que pour tout point M de $\mathcal{S}$, d'image $M' = f(M)$, la distance $O'M'$ est constante. En déduire que $f\langle\mathcal{S}\rangle$ est inclus dans une sphère $\mathcal{S}'$ de centre O'.
b) Démontrer que tout point de $\mathcal{S}'$ est l'image par f d'un point de $\mathcal{S}$. Conclure en énonçant un théorème.

2° Soit A un point de $\mathcal{S}$ et soit $\mathcal{P}$ le plan tangent à $\mathcal{S}$ en A. Que peut-on dire de l'image de $\mathcal{P}$ par f?

3° a) Calculer le volume V' de $\mathcal{S}' = f\langle\mathcal{S}\rangle$ en fonction du volume V de $\mathcal{S}$. (On distinguera deux cas selon que f est une translation ou une homothétie de rapport k.)
b) Même question pour l'aire de $\mathcal{S}'$.

4° On donne deux sphères $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ de centres respectifs O_1 et O_2, et de rayon respectifs R_1 et R_2.
a) On suppose $R_1 = R_2$. Démontrer qu'il existe une translation t, unique, transformant $\mathcal{S}_1$ en $\mathcal{S}_2$. Existe-t-il une homothétie transformant $\mathcal{S}_1$ en $\mathcal{S}_2$?
b) On suppose $R_1 \neq R_2$. Démontrer qu'il existe deux homothéties, et deux seulement, transformant $\mathcal{S}_1$ en $\mathcal{S}_2$. On montrera que leurs rapports sont respectivement $\frac{R_2}{R_1}$ et $-\frac{R_2}{R_1}$ et on déterminera leurs centres.

2. Image d'un cercle

Soit, dans un plan $\mathcal{P}$, un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon R.

1° En considérant $\mathcal{C}$ comme l'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la sphère $\mathcal{S}$ de centre O et de rayon R, démontrer que l'image $f\langle\mathcal{C}\rangle$ de $\mathcal{C}$ par une homothétie-translation f est un cercle $\mathcal{C}'$ dont on précisera le plan, le centre et le rayon.

2° On donne, dans l'espace $\mathcal{E}$, deux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ de centres respectifs O_1 et O_2 et de rayons respectifs R_1 et R_2.
a) A quelle condition, nécessaire, portant sur les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ des cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ existe-t-il une homothétie-translation transformant $\mathcal{C}_1$ en $\mathcal{C}_2$?
b) Cette condition étant supposée satisfaite, déterminer les homothéties-translations transformant $\mathcal{C}_1$ en $\mathcal{C}_2$.

EFFET D'UNE HOMOTHÉTIE-TRANSLATION SUR LES AIRES PLANES ET LES VOLUMES

Activité

Soit f une homothétie-translation et soit k le réel non nul tel que, pour tous points M, N d'images respectives M', N' par f, $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$. On dit que k est le rapport de f (si f est une translation, $k = 1$).

1° Démontrer que l'image par f d'un triangle est un triangle dont l'aire est le produit de celle du premier par k^2.
Même question pour un carré, un rectangle, un parallélogramme, un cercle.

D'une façon plus générale, nous admettrons :

Toute homothétie-translation de rapport k multiplie les aires planes par k^2.

2° Démontrer que l'image par f d'un tétraèdre est un tétraèdre dont le volume est le produit de celui du premier par $|k|^3$.
Même question pour un cube, un parallélépipède rectangle, une pyramide, un cône à base circulaire, un cylindre à bases circulaires, une sphère.

D'une façon plus générale, nous admettrons :

Toute homothétie-translation de rapport k multiplie les volumes par $|k|^3$.

• Exercice d'applications

1. On considère trois points A, B, C de l'espace et leurs images respectives A', B', C' par une homothétie-translation f.
Comparer les deux produits vectoriels $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{A'B'} \wedge \overrightarrow{A'C'}$ et les deux produits scalaires $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{A'C'}$.

2. Dans l'espace, on considère trois points non alignés A, B, C et un point O. On désigne par G l'isobarycentre des points A, B, C. Soit A', B', C' les points définis par les relations :

$$\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}, \quad \overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA},$$
$$\overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}.$$

1° Montrer que les segments $[A, A']$, $[B, B']$, $[C, C']$ ont le même milieu I et calculer $\overrightarrow{OI}$ en fonction de $\overrightarrow{OG}$.
2° On se propose de retrouver les résultats de la question *1°* en utilisant des transformations convenables.
a) Soit A_1, B_1, C_1 les milieux respectifs des segments $[B, C]$, $[C, A]$, $[A, B]$. Montrer qu'il existe une homothétie f de centre G et une seule transformant A en A_1, B en B_1, C en C_1; préciser le rapport de f.
b) Montrer qu'il existe une homothétie g de centre O et une seule transformant A_1 en A', B_1 en B', C_1 en C'; préciser le rapport de g.
c) Déterminer la nature de $g \circ f$; conclure.

3. Dans l'espace $\mathscr{E}$, on considère un tétraèdre $ABCD$. Pour tout réel k on définit l'application f_k de l'espace dans lui-même qui, à tout point M, associe le point M' tel que :

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} + k\overrightarrow{MD}.$$

Préciser, suivant les valeurs de k, la nature de l'application f_k et les éléments permettant de la définir.

4. On donne trois droites de l'espace, $\mathscr{D}, \mathscr{D}', \mathscr{D}''$, concourantes en O et non coplanaires, et un point G n'appartenant à aucune d'elles.
Démontrer qu'il existe un triangle ABC, et un seul, de centre de gravité G et dont les sommets A, B, C appartiennent respectivement aux droites $\mathscr{D}, \mathscr{D}', \mathscr{D}''$.

5. On considère dans l'espace $\mathscr{E}$ un tétraèdre $ABCD$. A tout point M de $\mathscr{E}$, on associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$.
1° Démontrer que l'application $f : M \mapsto M'$ est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.
2° Déterminer l'ensemble des points M dont le point associé M' appartient à la droite (BD).

6. On donne deux plans sécants $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ et un point A n'appartenant ni à $\mathscr{P}$, ni à $\mathscr{P}'$. On dit qu'un point M de $\mathscr{P}$ vérifie la propriété Π s'il existe un point M' de $\mathscr{P}'$ tel que A soit le barycentre du système $\{(M, -1), (M', 3)\}$.
Déterminer l'ensemble des points M de $\mathscr{P}$ vérifiant la propriété Π.

7. On donne, dans l'espace $\mathscr{E}$, une droite $\mathscr{D}$ et un plan $\mathscr{P}$ sécants.

1° Un vecteur $\vec{u}$ étant donné, démontrer qu'il existe un bipoint (M, M') unique tel que :

$$M \in \mathscr{D},\ M' \in \mathscr{P},\ \overrightarrow{MM'} = \vec{u}.$$

2° Un point A n'appartenant ni à $\mathscr{D}$, ni à $\mathscr{P}$, étant donné, démontrer qu'il existe un bipoint (N, N') unique tel que :

$$N \in \mathscr{D},\ N' \in \mathscr{P},\ 2\overrightarrow{AN} + 3\overrightarrow{AN'} = \vec{0}.$$

8. Dans l'espace $\mathscr{E}$ on donne un point O et un vecteur $\vec{u}$ non nul.

A tout point M de $\mathscr{E}$ on associe le point M' tel que :

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$$

et le point M'' symétrique du point M par rapport à O.

Quel est l'ensemble des points M tels que :

$$\|\overrightarrow{M'M''}\| = \|\vec{u}\|\ ?$$

II — ISOMÉTRIES DANS L'ESPACE

On appelle **isométrie** de l'espace $\mathscr{E}$ toute *transformation* de $\mathscr{E}$ (*bijection* de $\mathscr{E}$ sur $\mathscr{E}$) conservant les distances, c'est-à-dire transformant deux points quelconques M et N en deux points M' et N' tels que $MN = M'N'$.

ACTIVITÉS PRÉLIMINAIRES

1. Réflexions

1° On considère, dans l'espace $\mathscr{E}$, un plan $\mathscr{P}$.

a) Rappeler la définition de la symétrie orthogonale, ou réflexion, par rapport à $\mathscr{P}$. Démontrer que cette réflexion, notée $s_{\mathscr{P}}$, est bijective et définir sa bijection réciproque $s_{\mathscr{P}}^{-1}$. Quel est l'ensemble des points invariants par $s_{\mathscr{P}}$?

b) Soit M et N deux points distincts d'images respectives M' et N', et H et K les milieux respectifs des bipoints (M, M') et (N, N').

Démontrer que $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{M'N'} = 2\overrightarrow{HK}$ et $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MM'} - \overrightarrow{NN'}$. Calculer le produit scalaire $(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{M'N'}) \cdot (\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{M'N'})$, et en déduire $MN = M'N'$.

c) Les questions a) et b) montrent que la réflexion $s_{\mathscr{P}}$ est une isométrie. Retrouver ce résultat analytiquement en rapportant l'espace à un repère orthonormal convenablement choisi.

2° Dans l'espace $\mathscr{E}$ muni d'un repère orthonormal, définir analytiquement la réflexion par rapport au plan d'équation $x + 2y - z + 2 = 0$.

3° Dans l'espace $\mathscr{E}$ muni d'un repère orthonormal, on considère l'application f qui, à tout point M de coordonnées (x, y, z) associe le point M' dont les coordonnées (x', y', z') sont données par :

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{3}(x + 2y - 2z + 6) \\[2ex] y' = \dfrac{1}{3}(2x + y + 2z - 6) \\[2ex] z' = \dfrac{1}{3}(-2x + 2y + z + 6). \end{cases}$$

a) Démontrer que l'ensemble des points fixes de f est un plan $\mathscr{P}$.

b) Pour tout point M d'image M' par f démontrer que :

- *le milieu H du bipoint (M, M') appartient à $\mathscr{P}$;*
- *le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est orthogonal à $\mathscr{P}$.*

En déduire la nature de l'application f.

4° On considère un plan $\mathscr{P}$ et deux points A et B n'appartenant pas à $\mathscr{P}$ et situés d'un même côté de $\mathscr{P}$. Déterminer un point M de $\mathscr{P}$ tel que la somme $MA + MB$ soit minimale. (Utiliser le symétrique orthogonal de A par rapport à $\mathscr{P}$.)

5° On considère un point A, une droite $\mathscr{D}$ ne passant pas par A et un plan variable $\mathscr{P}$ contenant $\mathscr{D}$. Quel est le lieu géométrique du point A', symétrique orthogonal de A par rapport à $\mathscr{P}$?

2. Demi-tours

Soit $\mathscr{D}$ une droite de l'espace $\mathscr{E}$. A tout point M de $\mathscr{E}$ on associe le point H, projeté orthogonal de M sur $\mathscr{D}$, puis le point M' tel que H soit le milieu de (M, M'). On dit que M est le **symétrique orthogonal** de M par rapport à $\mathscr{D}$. L'application, notée $s_{\mathscr{D}}$, qui à M associe M', est la **symétrie orthogonale,** ou **demi-tour,** d'**axe** $\mathscr{D}$.

1° Démontrer que $s_{\mathscr{D}}$ est bijective et définir sa bijection réciproque. Quel est l'ensemble des points invariants par $s_{\mathscr{D}}$?

2° Démontrer vectoriellement (comme à la question 1° b de l'activité **1***), puis analytiquement, que $s_{\mathscr{D}}$ est une isométrie.*

3° Dans l'espace $\mathscr{E}$ muni d'un repère orthonormal, définir analytiquement le demi-tour dont l'axe est la droite $\mathscr{D}$ de repère $(A, \vec{u})$:

a) $A(-1, 2, 1)$, $\vec{u}(1, 2, -3)$;
b) $A(0, 0, 0)$, $\vec{u}(1, 1, 1)$.

4° Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, on considère l'application f définie analytiquement par :

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{9}(-8x + 4y + z + 12) \\[2mm] y' = \dfrac{1}{9}(4x + 7y + 4z - 4) \\[2mm] z' = \dfrac{1}{9}(x + 4y - 8z + 8). \end{cases}$$

a) Démontrer que l'ensemble des points invariants par f est une droite $\mathscr{D}$ dont on déterminera un repère $(A, \vec{u})$.
b) Pour tout point M d'image $M' = f(M)$, démontrer que :
- *le milieu du bipoint (M, M') appartient à $\mathscr{D}$;*
- *les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{MM'}$ sont orthogonaux.*

En déduire la nature de l'application f.

5° On donne deux points distincts A et B et une droite variable $\mathscr{D}$ passant par A. Quel est le lieu géométrique du point B', symétrique orthogonal de B par rapport à $\mathscr{D}$?

PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

Comme on l'a fait pour les isométries planes, on démontre, pour les isométries de l'espace, les propriétés suivantes :

1. La bijection réciproque d'une isométrie est une isométrie.

2. L'application composée de deux isométries est une isométrie.

3. Toute isométrie conserve les produits scalaires : trois points quelconques A, B, C et leurs images respectives A', B', C' sont tels que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{A'C'}$.

4. Si trois points A, B, C sont tels que $\overrightarrow{AC} = t\overrightarrow{AB}$, leurs images respectives A', B', C' par une isométrie sont telles que $\overrightarrow{A'C'} = t\overrightarrow{A'B'}$.

5. Toute isométrie conserve les barycentres.

6. L'image d'une droite, d'une demi-droite ou d'un segment par une isométrie est une droite, une demi-droite ou un segment.

Activité

1. *Soit f une isométrie de l'espace possédant au moins quatre points A, B, C, D invariants non coplanaires.*

1° On rapporte l'espace au repère $\mathcal{R} = (A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$. Démontrer que tout point M de l'espace peut être considéré comme le barycentre des points A, B, C, D affectés de coefficients que l'on exprimera en fonction des coordonnées (x, y, z) de M dans le repère $\mathcal{R}$.

2° Déduire du 1° que tout point M est invariant par f.

On peut conclure :

Toute isométrie de l'espace $\mathcal{E}$ qui admet au moins quatre points non coplanaires invariants est la transformation identique de $\mathcal{E}$.

2. *Soit f une isométrie de l'espace, différente de $\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$, possédant au moins trois points invariants non alignés.*

1° En s'inspirant de l'activité **1** *ci-dessus, démontrer que tout point du plan (ABC) est invariant par f.*

2° Soit M un point de l'espace n'appartenant pas au plan (ABC).
a) Démontrer que M n'est pas invariant par f. On note $M' = f(M)$.
b) Démontrer que le plan (ABC) est le plan médiateur du segment $[M, M']$.
c) Reconnaître l'isométrie f.

3° Que peut-on dire d'une isométrie dont l'ensemble des points invariants est un plan $\mathcal{P}$?

On retiendra :

Toute isométrie de l'espace, distincte de $\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$ et admettant au moins trois points invariants A, B, C non alignés, est la réflexion par rapport au plan (ABC).

Toute isométrie de l'espace dont l'ensemble des points invariants est un plan $\mathcal{P}$ est la réflexion par rapport à $\mathcal{P}$.

3. *Soit f une isométrie de l'espace dont l'ensemble des points invariants est une droite $\mathcal{D}$.*

1° Soit A un point de l'espace n'appartenant pas à $\mathcal{D}$ et son image $A' = f(A)$. Démontrer que le plan médiateur, $\mathcal{P}$, de $[A, A']$ contient la droite $\mathcal{D}$.

2° On note $s_{\mathcal{P}}$ la réflexion par rapport à $\mathcal{P}$. Démontrer que la composée $s_{\mathcal{P}} \circ f$ est la réflexion par rapport au plan $\mathcal{Q}$ contenant A et $\mathcal{D}$. En déduire $f = s_{\mathcal{P}} \circ s_{\mathcal{Q}}$.

On peut conclure :

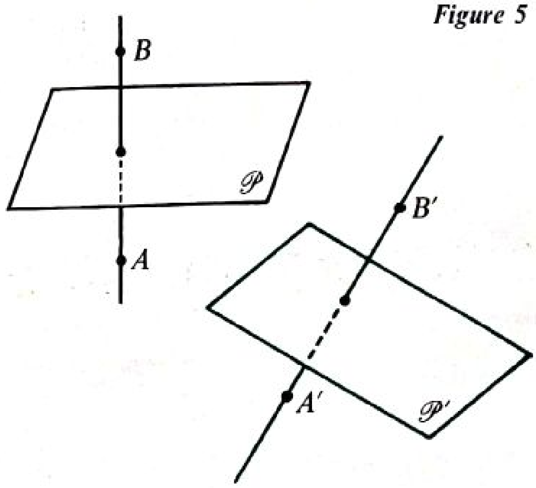
Toute isométrie de l'espace dont l'ensemble des points invariants est une droite $\mathcal{D}$ est la composée de deux réflexions par rapport à deux plans sécants suivant la droite $\mathcal{D}$.

IMAGE D'UN PLAN

Considérons un plan $\mathcal{P}$ de l'espace et son image $f\langle \mathcal{P} \rangle$ par une isométrie f.

Soit A un point n'appartenant pas à $\mathscr{P}$ et B son symétrique orthogonal par rapport à $\mathscr{P}$ (figure 5). $\mathscr{P}$ est le *plan médiateur* du segment $[A, B]$, et l'on sait qu'un point M de l'espace appartient à $\mathscr{P}$ si, et seulement si, $MA = MB$.

Figure 5



Soit A' et B' les images respectives de A et B par f.

• Pour tout point M de $\mathscr{P}$ d'image M' par f, on a $MA = MB$, d'où, f conservant les distances : $M'A' = M'B'$. Il en résulte que M' appartient au plan médiateur $\mathscr{P}'$ du segment $[A', B']$. Par suite : $f\langle \mathscr{P} \rangle \subset \mathscr{P}'$.

• Pour tout point N' de $\mathscr{P}'$ d'antécédent N par f, on a $N'A' = N'B'$, d'où $NA = NB$. Le point N' est donc l'image d'un point N de $\mathscr{P}$. Par suite : $\mathscr{P}' \subset f\langle \mathscr{P} \rangle$.

Finalement : $f\langle \mathscr{P} \rangle = \mathscr{P}'$.

L'image d'un plan par une isométrie est un plan.

Conséquences

1. Les notations étant celles de l'étude ci-dessus, comme $\mathscr{P}$ est le plan médiateur de $[A, B]$, la droite (AB) est orthogonale à $\mathscr{P}$ (figure 5). De même la droite $(A'B')$, image de (AB) par f, est orthogonale à $\mathscr{P}'$.

Il s'ensuit :

Une droite et un plan orthogonaux ont respectivement pour images par une isométrie une droite et un plan orthogonaux.

2. Soit $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ deux plans parallèles d'images respectives $\mathscr{P}'$ et $\mathscr{Q}'$ par une isométrie f et soit $\mathscr{D}$ une droite orthogonale à $\mathscr{P}$, et donc à $\mathscr{Q}$, d'image $\mathscr{D}'$ par f (figure 6).

D'après la propriété précédente, les plans $\mathscr{P}'$ et $\mathscr{Q}'$ sont orthogonaux à $\mathscr{D}'$; ils sont donc parallèles.

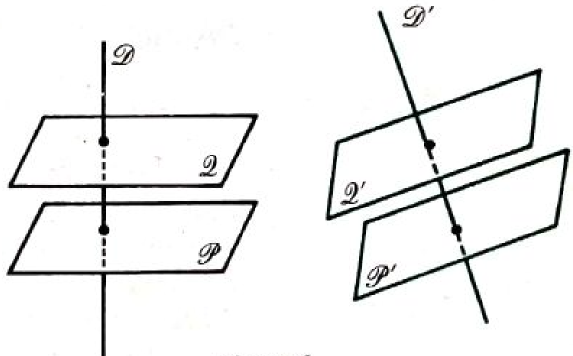


Figure 6

Les images de deux plans parallèles par une isométrie sont deux plans parallèles.

3. Soit $\mathscr{D}$ et Δ deux droites parallèles d'images respectives $\mathscr{D}'$ et Δ' par une isométrie f et soit $\mathscr{P}$ un plan orthogonal à $\mathscr{D}$, et donc à Δ, d'image $\mathscr{P}'$ par f (figure 7).

Les droites $\mathscr{D}'$ et Δ' sont orthogonales à $\mathscr{P}'$; elles sont donc parallèles.

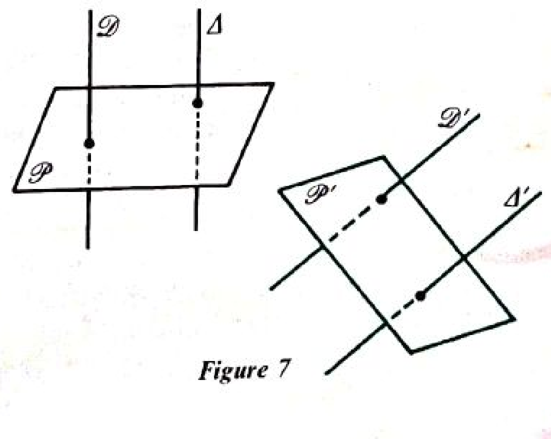


Figure 7

Les images de deux droites parallèles par une isométrie sont deux droites parallèles.

4. Soit $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ deux plans perpendiculaires d'images respectives $\mathscr{P}'$ et $\mathscr{Q}'$ par une isométrie f. Comme $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont perpendiculaires, $\mathscr{P}$ contient une droite $\mathscr{D}$ orthogonale à $\mathscr{Q}$ (figure 8).

L'image $\mathscr{D}'$ de $\mathscr{D}$ est incluse dans $\mathscr{P}'$ et orthogonale à $\mathscr{Q}'$. Les plans $\mathscr{P}'$ et $\mathscr{Q}'$ sont donc perpendiculaires.

Les images de deux plans perpendiculaires par une isométrie sont deux plans perpendiculaires.

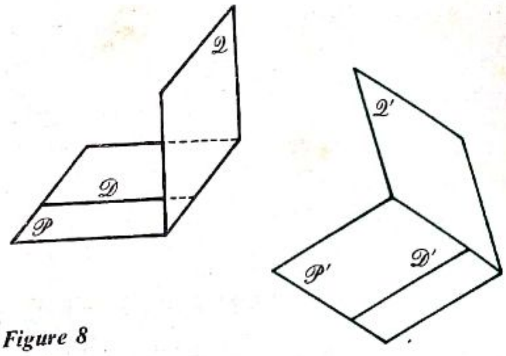


Figure 8

5. Soit $\mathscr{D}$ et Δ deux droites orthogonales d'images respectives $\mathscr{D}'$ et Δ' par une isométrie f.

Un plan $\mathscr{P}$ orthogonal à $\mathscr{D}$ et un plan $\mathscr{Q}$ orthogonal à Δ sont perpendiculaires (figure 9). Leurs images respectives $\mathscr{P}'$ et $\mathscr{Q}'$ par f sont aussi perpendiculaires.

Comme les droites $\mathscr{D}'$ et Δ' sont respectivement orthogonales à $\mathscr{P}'$ et $\mathscr{Q}'$, elles sont orthogonales.

Les images de deux droites orthogonales par une isométrie sont deux droites orthogonales.

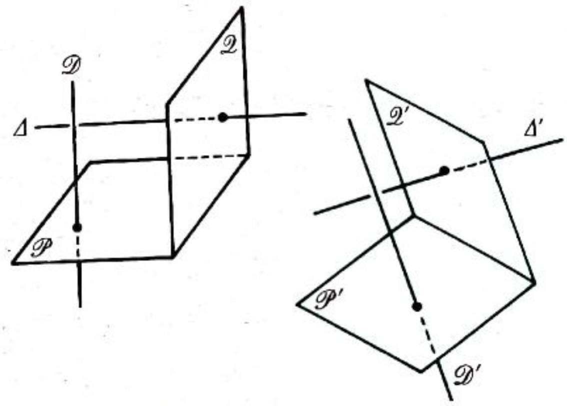


Figure 9

IMAGE D'UNE SPHÈRE ET D'UN CERCLE

Image d'une sphère

Soit $\mathscr{S}$ une sphère de centre O et de rayon R; on note $f\langle \mathscr{S} \rangle$ son image par une isométrie f et $O' = f(O)$.

- Pour tout point M de $\mathscr{S}$ d'image $M' = f(M)$, on a $O'M' = OM$, c'est-à-dire $O'M' = R$. Le point M' appartient donc à la sphère $\mathscr{S}'$ de centre O' et de rayon R. Par suite : $f\langle \mathscr{S} \rangle \subset \mathscr{S}'$.
- Soit N' un point de $\mathscr{S}'$; son antécédent N appartient à $\mathscr{S}$ puisque $ON = O'N' = R$. Tout point de $\mathscr{S}'$ est donc l'image par f d'un point de $\mathscr{S}$. Par suite : $\mathscr{S}' \subset f\langle \mathscr{S} \rangle$.

Finalement : $f\langle \mathscr{S} \rangle = \mathscr{S}'$.

L'image d'une sphère par une isométrie est une sphère de même rayon que la première et dont le centre est l'image du centre de la première.

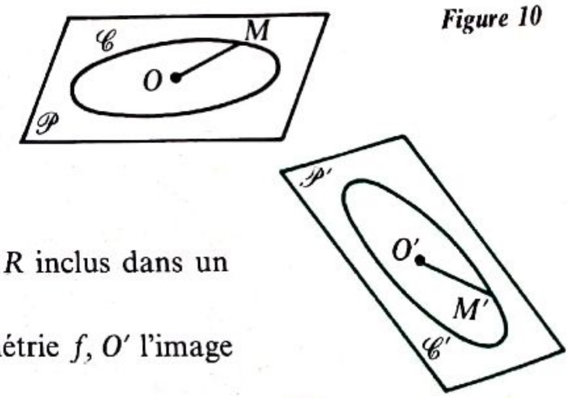


Figure 10

Image d'un cercle

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et de rayon R inclus dans un plan $\mathscr{P}$ de l'espace (figure 10).

On note $f\langle \mathscr{C} \rangle$ l'image de $\mathscr{C}$ par une isométrie f, O' l'image de O et $\mathscr{P}'$ le plan image de $\mathscr{P}(O' \in \mathscr{P}')$.

• Pour tout point M de $\mathscr{C}$ d'image $M' = f(M)$, on a :

$$M' \in \mathscr{P}' \quad \text{et} \quad O'M' = OM = R.$$

Le point M' appartient donc au cercle $\mathscr{C}'$ de centre O' et de rayon R inclus dans $\mathscr{P}'$. Par suite $f\langle \mathscr{C} \rangle \subset \mathscr{C}'$.

• Soit N' un point de $\mathscr{C}'$; son antécédent N est situé dans $\mathscr{P}$ et appartient à $\mathscr{C}$ puisque $ON = O'N' = R$. Tout point de $\mathscr{C}'$ est donc l'image par f d'un point de $\mathscr{C}$. Par suite $\mathscr{C}' \subset f\langle \mathscr{C} \rangle$.

Finalement : $f\langle \mathscr{C} \rangle = \mathscr{C}'$.

L'image d'un cercle $\mathscr{C}$ par une isométrie est un cercle $\mathscr{C}'$ de même rayon que $\mathscr{C}$ et dont le plan et le centre sont les images respectives du plan et du centre de $\mathscr{C}$.

EFFET D'UNE ISOMÉTRIE SUR LES AIRES PLANES ET LES VOLUMES

Activité

1. *Démontrer que l'image d'un triangle par une isométrie de l'espace est un triangle de même aire que le premier.*
Même question pour un carré, un rectangle, un parallélogramme, un cercle.

D'une façon plus générale, nous admettrons :

Toute isométrie de l'espace conserve les aires des figures planes.

2. *Démontrer que l'image d'un tétraèdre par une isométrie de l'espace est un tétraèdre de même volume que le premier.*
Même question pour un cube, un parallélépipède rectangle, une pyramide, un cône à base circulaire, un cylindre à bases circulaires, une sphère.

D'une façon plus générale, nous admettrons :

Toute isométrie de l'espace conserve les volumes.

• Exercices d'application

9. Quelles sont les images, par une isométrie f de l'espace $\mathscr{E}$, des configurations suivantes :
a) deux droites non coplanaires $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$ et leur perpendiculaire commune Δ;
b) une sphère $\mathscr{S}$, un point A de $\mathscr{S}$ et le plan $\mathscr{P}$ tangent en A à $\mathscr{S}$;
c) un segment $[A, B]$ et son plan médiateur;
d) un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et son axe Δ?

10. Une isométrie f transforme une droite $\mathscr{D}$ en une droite $\mathscr{D}'$ et un point A en un point A'.
Démontrer que le transformé par f du point H, projeté orthogonal de A sur $\mathscr{D}$, est le point H', projeté orthogonal de A' sur $\mathscr{D}'$.
Comparer les distances de A à $\mathscr{D}$ et de A' à $\mathscr{D}'$.
Énoncer un théorème.

11. Une isométrie f transforme un plan $\mathscr{P}$ en un plan $\mathscr{P}'$ et un point A en un point A'.
Démontrer que le transformé par f du point H, projeté orthogonal de A sur $\mathscr{P}$, est le point H' projeté orthogonal de A' sur $\mathscr{P}'$.
Comparer les distances de A à $\mathscr{P}$ et de A' à $\mathscr{P}'$.
Énoncer un théorème.

12. L'espace $\mathscr{E}$ étant rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère l'application f de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ définie analytiquement par :

$$\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y \\ z' = -z + 2. \end{cases}$$

1° Démontrer que f est une isométrie.

2° Démontrer que, pour tout point M de transformé M' par f, le milieu du bipoint (M, M') appartient à un plan fixe $\mathscr{P}$. Démontrer que le point M_1, symétrique orthogonal de M par rapport au plan $\mathscr{P}$, est tel que le vecteur $\overrightarrow{M_1M'}$ soit constant.
En déduire que f peut s'écrire comme application composée de deux transformations simples.

3° Déterminer analytiquement et géométriquement l'ensemble des points M de transformés M' par f tels que :
a) $OM = OM'$;

b) les points O, M, M' soient alignés;
c) $MM' = a$ (a est un nombre réel positif).

13. Soit $s_{\mathscr{D}}$ le demi-tour d'axe $\mathscr{D}$. Une droite Δ non coplanaire avec $\mathscr{D}$ a pour image par $s_{\mathscr{D}}$ une droite Δ'.
1° La perpendiculaire commune à $\mathscr{D}$ et Δ coupe $\mathscr{D}$ en H et Δ en A.
Démontrer que la droite (AH) est aussi la perpendiculaire commune à Δ et Δ'.
2° Soit A' l'image de A par $s_{\mathscr{D}}$. On considère un point B de Δ, distinct de A, les points B' et B'' de Δ' tels que $A'B' = A'B'' = AB$, et les milieux respectifs I et J des bipoints (B, B') et (B, B'').
Démontrer que $\mathscr{D}$ est l'une des droites (HI), (HJ).
3° Deux droites Δ et Δ', non coplanaires, étant données, démontrer qu'il existe deux demi-tours échangeant Δ et Δ'.

14. L'espace $\mathscr{E}$ étant rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère l'application f de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ définie analytiquement par :

$$\begin{cases} x' = z + 2, \\ y' = x, \\ z' = y. \end{cases}$$

1° Démontrer que f est une isométrie.

2° Soit un point M, soit M' son transformé par f et soit M'' le transformé de M' par f. Déterminer l'ensemble Δ des points M tels que M, M', M'' soient alignés. Démontrer que Δ est l'ensemble des points M tels que la distance MM' soit minimale.

III — ROTATIONS DANS L'ESPACE

ANGLE DE DEUX DEMI-PLANS

Soit $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ deux demi-plans limités par une même droite Δ et soit $\vec{k}$ un vecteur directeur unitaire de Δ (figure 11). La droite Δ orientée par le vecteur $\vec{k}$ est un **axe**, noté $\Delta_{\vec{k}}$.

Le triplet $(\widehat{\mathscr{P}, \Delta_{\vec{k}}, \mathscr{P}'})$ est **un angle orienté de demi-plans.**

Les demi-plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont les **faces** de l'angle et l'axe $\Delta_{\vec{k}}$ son **arête.**

Tout plan Π orthogonal à l'arête $\Delta_{\vec{k}}$ est orienté par le vecteur $\vec{k}$: le sens direct va de la droite vers la gauche d'un observateur placé comme l'indique la figure 12.

Le plan Π coupe Δ en O et les faces $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ suivant deux demi-droites Ox et Ox' d'origine O (figure 13).

Nous admettrons que les mesures de l'angle de demi-droites $(\widehat{Ox, Ox'})$ dans le plan orienté Π restent invariantes lorsque Π varie en restant orthogonal à Δ.

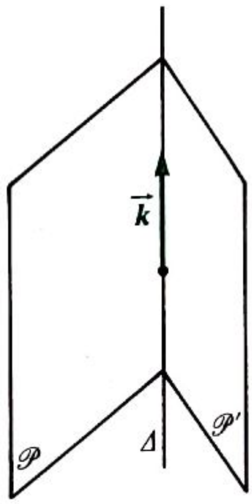


Figure 11

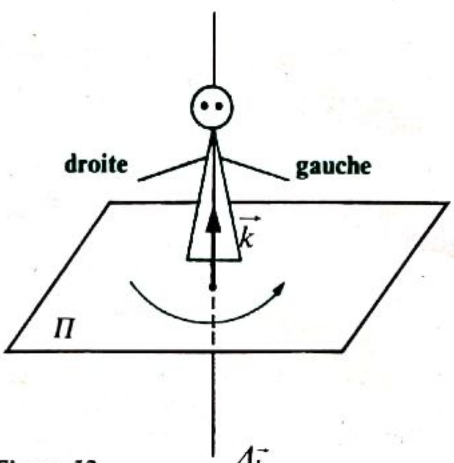


Figure 12

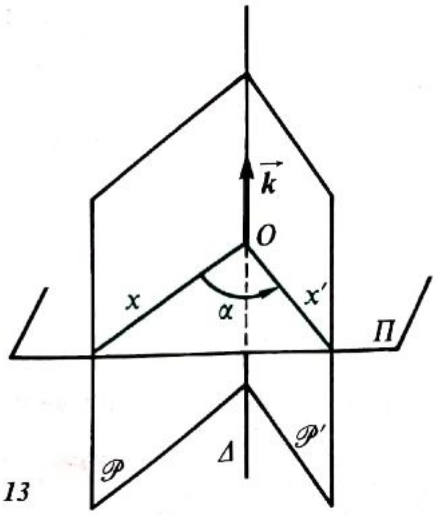


Figure 13

Ces mesures sont par définition celles de l'angle orienté de demi-plans $(\widehat{\mathscr{P}, \Delta_{\vec{k}}, \mathscr{P}'})$. Si α est l'une d'elles, on note :

$$(\mathscr{P}, \Delta_{\vec{k}}, \mathscr{P}') = \alpha \quad (2\pi).$$

Nous retiendrons que les mesures d'un angle de demi-plans $(\widehat{\mathscr{P}, \Delta_{\vec{k}}, \mathscr{P}'})$ sont les mesures de l'angle de demi-droites déterminé par l'un, quelconque, des plans Π orthogonaux à Δ, orienté par le vecteur $\vec{k}$.

Propriétés

1. On donne un axe $\Delta_{\vec{k}}$, un demi-plan $\mathscr{P}$ limité par Δ et un réel α (figure 14). Soit Π un plan orthogonal à Δ en O; Π coupe $\mathscr{P}$ suivant une demi-droite Ox d'origine O.

Dans le plan Π orienté par $\vec{k}$, il existe une demi-droite Ox' unique d'origine O et telle que :

$$(Ox, Ox') = \alpha \quad (2\pi).$$

Il en résulte qu'il existe un demi-plan $\mathscr{P}'$ unique limité par Δ et tel que $(\mathscr{P}, \Delta_{\vec{k}}, \mathscr{P}') = \alpha \quad (2\pi)$: le demi-plan déterminé par Δ et Ox'.

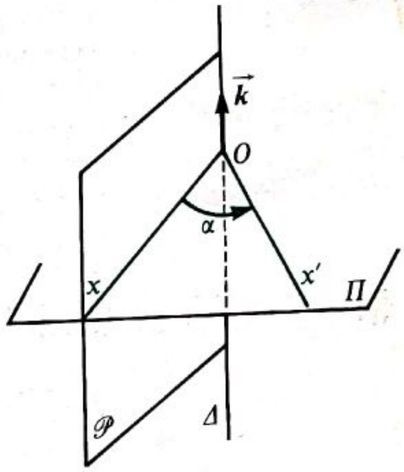


Figure 14

Un axe $\Delta_{\vec{k}}$ et un réel α étant donnés, pour tout demi-plan $\mathscr{P}$ limité par Δ il existe un demi-plan $\mathscr{P}'$, et un seul, limité par Δ et tel que :

$$(\mathscr{P}, \Delta_{\vec{k}}, \mathscr{P}') = \alpha \quad (2\pi).$$

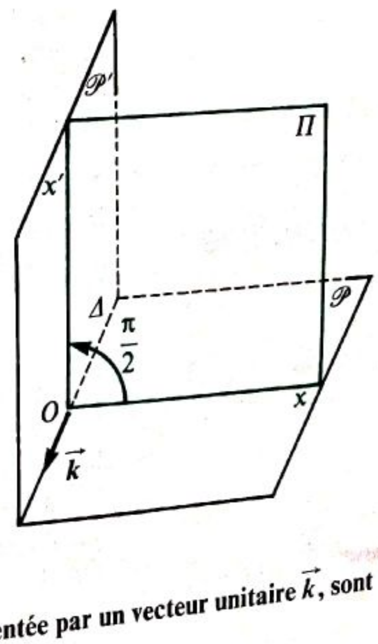
2. La **formule de Chasles** des angles de demi-droites s'étend immédiatement aux angles de demi-plans, pour des demi-plans limités par une même droite :

$$(\mathscr{P}, \Delta_{\vec{k}}, \mathscr{P}') + (\mathscr{P}', \Delta_{\vec{k}}, \mathscr{P}'') = (\mathscr{P}, \Delta_{\vec{k}}, \mathscr{P}'') \quad (2\pi).$$

Lorsque dans cette formule les demi-plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}''$ sont confondus, on obtient :

$$(\mathscr{P}', \Delta_{\vec{k}}, \mathscr{P}) = -(\mathscr{P}, \Delta_{\vec{k}}, \mathscr{P}') \quad (2\pi).$$

Figure 15



3. Soit $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ deux demi-plans limités par une droite Δ et soit $\vec{k}$ un vecteur unitaire de Δ. Un plan Π orthogonal à Δ en O et orienté par le vecteur $\vec{k}$ coupe respectivement $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ suivant les demi-droites Ox et Ox' (figure 15).

Les demi-plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont perpendiculaires si, et seulement si, les demi-droites Ox et Ox' sont orthogonales, c'est-à-dire si, et seulement si :

$$(Ox, Ox') = \frac{\pi}{2} \quad (\pi)$$

soit : $$(\mathscr{P}, \Delta_{\vec{k}}, \mathscr{P}') = \frac{\pi}{2} \quad (\pi).$$

Autrement dit :

Deux demi-plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$, limités par une droite Δ orientée par un vecteur unitaire $\vec{k}$, sont perpendiculaires si, et seulement si, $(\mathscr{P}, \Delta_{\vec{k}}, \mathscr{P}') = \frac{\pi}{2} \quad (\pi)$.

PRODUIT DE DEUX RÉFLEXIONS

Étudions l'application composée $r = s_{\mathscr{P}'} \circ s_{\mathscr{P}}$ de deux réflexions par rapport à deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ passant par une même droite Δ.

Un vecteur unitaire $\vec{k}$ de Δ étant choisi, désignons par α une mesure de l'angle $\overline{(\mathscr{P}_1, \Delta_{\vec{k}}, \mathscr{P}'_1)}$, où $\mathscr{P}_1$ est un des deux demi-plans de $\mathscr{P}$ limité par Δ et $\mathscr{P}'_1$ un des deux demi-plans de $\mathscr{P}'$ limité par Δ.

- Si $\mathscr{P} = \mathscr{P}'$, r est l'application $\mathrm{Id}_{\mathscr{E}}$.
- Supposons maintenant $\mathscr{P} \neq \mathscr{P}'$.

Tout point de la droite Δ est invariant par $s_{\mathscr{P}}$ et par $s_{\mathscr{P}'}$ et donc par r.

Soit M un point n'appartenant pas à Δ. Le plan Π passant par M et orthogonal à Δ coupe Δ en O; il coupe respectivement les demi-plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}'_1$ suivant deux demi-droites Ox et Ox' d'origine O (figure 16).

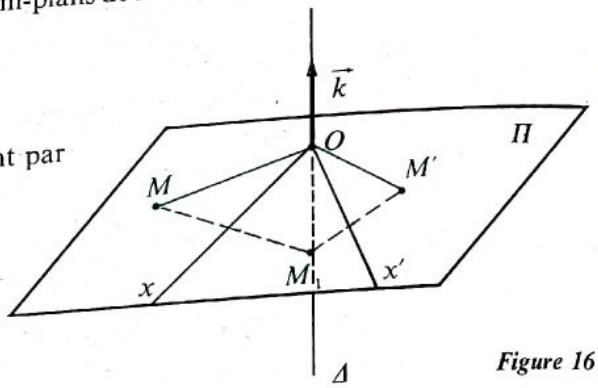


Figure 16

Le point M_1, symétrique orthogonal de M par rapport à Ox, est le symétrique orthogonal de M par rapport à $\mathscr{P}$. De même le point M', symétrique orthogonal de M_1 par rapport à Ox', est le symétrique orthogonal de M_1 par rapport à $\mathscr{P}'$.

Or, dans le plan Π orienté par le vecteur $\vec{k}$, on a :

$$(Ox, Ox') = \alpha \quad (2\pi).$$

Il en résulte que le point $M' = r(M)$ est, dans ce plan, l'image de M par la rotation de centre O et d'angle 2α. La *restriction* de r au plan Π est donc la rotation de centre O et d'angle 2α.

ROTATION DANS L'ESPACE

L'étude du produit $s_{\mathscr{P}'} \circ s_{\mathscr{P}}$ de deux réflexions par rapport à deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ passant par une même droite nous conduit à définir, à partir d'un axe $\Delta_{\vec{k}}$ et d'un réel θ, une nouvelle application de l'espace $\mathscr{E}$ dans lui-même.

DÉFINITION 1	**On appelle rotation d'axe $\Delta_{\vec{k}}$ et d'angle θ, l'application de l'espace $\mathscr{E}$ dans lui-même dont la restriction à tout plan Π, orthogonal à Δ en O et orienté par le vecteur $\vec{k}$, est la rotation de centre O et d'angle θ.**

L'image par la rotation r d'axe $\Delta_{\vec{k}}$ et d'angle θ d'un point M de l'espace est donc le point M' ainsi défini : Soit Π le plan passant par M et orthogonal à Δ, orienté par le vecteur $\vec{k}$, et soit O le point d'intersection de Π et de Δ (figure 17): alors :

- $M' \in \Pi$; $\quad OM = OM'$;
- si $M \neq O$, $\quad (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \theta \quad (2\pi)$.

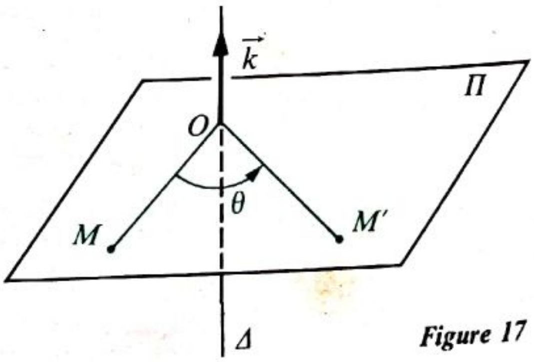


Figure 17

Notons que la rotation r laisse invariants les points de Δ; en général, si $\theta \neq 0 \quad (2\pi)$, elle transforme tout point M n'appartenant pas à Δ en un point M' distinct de M.

Exemples

La rotation d'axe $\Delta_{\vec{k}}$ et d'angle nul est l'application identique de l'espace $\mathscr{E}$.

La rotation d'axe $\Delta_{\vec{k}}$ et d'angle π ou $-\pi$ est la symétrie orthogonale par rapport à la droite Δ, ou demi-tour d'axe Δ.

REMARQUE : Une droite Δ possède deux vecteurs directeurs unitaires; si $\vec{k}$ désigne l'un d'eux, l'autre est $-\vec{k}$. Il existe donc deux façons d'orienter la droite Δ.
Les deux rotations, r d'axe $\Delta_{\vec{k}}$ et d'angle θ et r' d'axe $\Delta_{-\vec{k}}$ et d'angle $-\theta$, sont égales.

Propriétés

1. L'étude du produit de deux réflexions, qui a conduit à la définition des rotations de l'espace, permet d'énoncer :

THÉORÈME 2	**L'application composée $r = s_{\mathscr{P}'} \circ s_{\mathscr{P}}$ de deux réflexions par rapport à deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ passant par une même droite Δ est une rotation de l'espace. Plus précisément, $\mathscr{P}_1$ étant un des deux demi-plans de $\mathscr{P}$ limité par Δ et $\mathscr{P}'_1$ un des deux demi-plans de $\mathscr{P}'$ limité par Δ, si $(\mathscr{P}_1, \Delta_{\vec{k}}, \mathscr{P}'_1) = \alpha \quad (2\pi)$, r est la rotation d'axe $\Delta_{\vec{k}}$ et d'angle 2α.**

Cas particulier :

Soit $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ deux plans perpendiculaires et soit $\vec{k}$ un vecteur unitaire de leur droite d'intersection Δ (figure 18).

$\mathscr{P}_1$ étant un des deux demi-plans de $\mathscr{P}$ limité par Δ et $\mathscr{P}_1$ un des deux demi-plans de $\mathscr{P}'$ limité par Δ, on a :

$$(\mathscr{P}_1, \Delta_{\vec{k}}, \mathscr{P}'_1) = \frac{\pi}{2} \quad (2\pi)$$

$$\text{ou} \quad (\mathscr{P}_1, \Delta_{\vec{k}}, \mathscr{P}'_1) = -\frac{\pi}{2} \quad (2\pi).$$

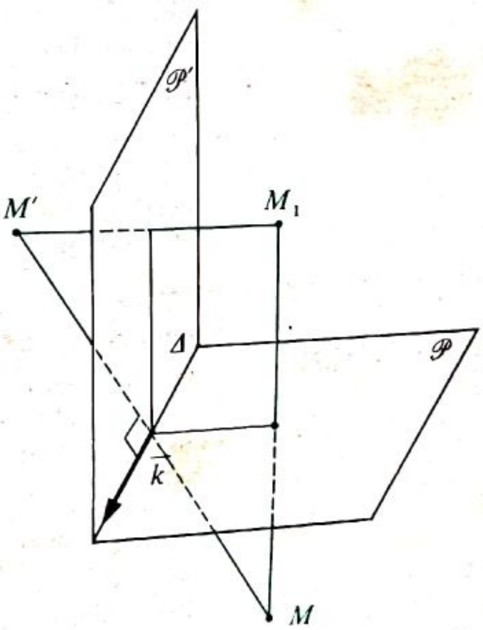


Figure 18

Il en résulte que l'application composée $s_{\mathscr{P}'} \circ s_{\mathscr{P}}$ est la rotation d'axe $\Delta_{\vec{k}}$ et d'angle π ou $-\pi$, c'est-à-dire le demi-tour dont l'axe est la droite Δ.

L'application composée $s_{\mathscr{P}'} \circ s_{\mathscr{P}}$ de deux réflexions par rapport à deux plans perpendiculaires $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ est le demi-tour dont l'axe est la droite d'intersection de ces deux plans.

REMARQUE : Lorsque les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont perpendiculaires : $s_{\mathscr{P}'} \circ s_{\mathscr{P}} = s_{\mathscr{P}} \circ s_{\mathscr{P}'}$.

2. Soit r une rotation d'axe $\Delta_{\vec{k}}$ et d'angle θ.

D'après le théorème **2**, pour tout couple $(\mathscr{P}_1, \mathscr{P}'_1)$ de demi-plans limités par Δ et tels que

$(\mathscr{P}_1, \Delta_{\vec{k}}, \mathscr{P}'_1) = \dfrac{\theta}{2}\ (2\pi)$, la rotation r peut se décomposer sous la forme $r = s_{\mathscr{P}'} \circ s_{\mathscr{P}}$, où $s_{\mathscr{P}}$ et $s_{\mathscr{P}'}$ sont les réflexions par rapport aux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ contenant respectivement $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}'_1$.

THÉORÈME 3	**Toute rotation r d'axe $\Delta_{\vec{k}}$ et d'angle θ peut se décomposer sous la forme $r = s_{\mathscr{P}'} \circ s_{\mathscr{P}}$, où $s_{\mathscr{P}}$ et $s_{\mathscr{P}'}$ sont les réflexions par rapport aux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ contenant respectivement deux demi-plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}'_1$ limités par $\Delta_{\vec{k}}$ et tels que $(\mathscr{P}_1, \Delta_{\vec{k}}, \mathscr{P}'_1) = \dfrac{\theta}{2}\ (2\pi)$.**

A noter que le choix d'un des deux plans $\mathscr{P}$, $\mathscr{P}'$, passant par Δ, est arbitraire, mais que lorsque ce choix est fait, l'autre plan est déterminé par la condition :

$$(\mathscr{P}_1, \Delta_{\vec{k}}, \mathscr{P}'_1) = \frac{\theta}{2}\ (2\pi).$$

3. Il résulte du théorème **3** que toute rotation r d'axe $\Delta_{\vec{k}}$ et d'angle θ est une isométrie de l'espace $\mathscr{E}$.

- Si $\theta = 0\ (2\pi)$, la rotation r est la transformation identique de $\mathscr{E}$.
- Si $\theta \neq 0\ (2\pi)$, l'ensemble des points invariants par r est la droite Δ.

D'autre part, l'étude développée dans l'activité 3 de la page 328 a montré que toute isométrie dont l'ensemble des points invariants est une droite $\mathscr{D}$ est l'application composée de deux réflexions par rapport à deux plans sécants suivant la droite $\mathscr{D}$, c'est-à-dire une rotation d'angle non nul.

Nous retiendrons :

Toute rotation d'axe $\Delta_{\vec{k}}$ et d'angle θ non nul est une isométrie dont l'ensemble des points fixes est la droite Δ.

Toute isométrie de l'espace dont l'ensemble des points invariants est une droite $\mathscr{D}$ est une rotation d'axe $\mathscr{D}$ et d'angle non nul.

• Exercices d'application

15. On donne dans l'espace $\mathscr{E}$ deux points distincts A et A'.
1° On suppose qu'il existe une rotation r d'axe $\Delta_{\vec{k}}$ telle que $r(A) = A'$.
Démontrer que la droite Δ est incluse dans le plan médiateur $\mathscr{P}$ du segment $[A, A']$.
2° Réciproquement, tout axe $\Delta_{\vec{k}}$ de $\mathscr{P}$ est-il l'axe d'une rotation r transformant A en A'?

16. Soit A, B, A', B' quatre points non coplanaires tels que $AB = A'B'$.
1° Démontrer que les plans médiateurs $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ des segments respectifs $[A, A']$ et $[B, B']$ se coupent suivant une droite Δ.
2° Le plan Π contenant B et orthogonal à Δ passe par B'. Soit A_1 et A'_1 les projetés orthogonaux respectifs de A et A' sur Π. Dans le plan Π, démontrer qu'il existe une rotation ρ telle que $\rho(B) = B'$ et $\rho(A_1) = A'_1$.
3° Soit $\vec{k}$ un vecteur unitaire de la droite Δ. Déduire de la question *2°* l'existence d'une rotation r d'axe $\Delta_{\vec{k}}$ telle que $r(A) = A'$ et $r(B) = B'$.
Démontrer l'unicité d'une rotation transformation A en A' et B en B'.
Conclure en énonçant un théorème.

17. Une rotation r d'axe $\Delta_{\vec{k}}$ et d'angle θ transforme une droite $\mathscr{D}$ en une droite $\mathscr{D}'$.
1° Étudier les positions relatives des droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ dans les cas suivants :
a) $\mathscr{D}$ est parallèle à Δ;
b) $\mathscr{D}$ est sécante avec Δ;
c) $\mathscr{D}$ est orthogonale à Δ.
2° On suppose que $\mathscr{D}$ et Δ ne sont pas coplanaires.
a) Démontrer qu'il en est de même de Δ et $\mathscr{D}'$.
b) Soit (OH) la perpendiculaire commune à $\mathscr{D}$ et Δ ($O \in \Delta$ et $H \in \mathscr{D}$) et soit H' l'image de H par r. Que peut-on dire de la droite (OH')?

18. Soit $\Delta_{\mathscr{P}}$ et $\Delta_{\mathscr{P}'}$ les réflexions par rapport à deux plans sécants $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$. Démontrer que la perpendicularité des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ est une condition nécessaire et suffisante pour que $s_{\mathscr{P}} \circ s_{\mathscr{P}'} = s_{\mathscr{P}'} \circ s_{\mathscr{P}}$. Préciser la nature de $s_{\mathscr{P}'} \circ s_{\mathscr{P}}$ lorsque $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont perpendiculaires.

19. Soit une droite $\mathscr{D}$ incluse dans un plan $\mathscr{P}$ et soit $s_{\mathscr{D}}$ et $s_{\mathscr{P}}$ les symétries orthogonales par rapport à $\mathscr{D}$ et à $\mathscr{P}$. Définir l'application composée $s_{\mathscr{P}} \circ s_{\mathscr{D}}$ et montrer que :

$$s_{\mathscr{P}} \circ s_{\mathscr{D}} = s_{\mathscr{D}} \circ s_{\mathscr{P}}.$$

20. Une rotation r d'axe $\Delta_{\vec{k}}$ et d'angle θ transforme un plan $\mathscr{P}$ en le plan $\mathscr{P}'$.
1° Soit A un point de Δ de projeté orthogonal H sur $\mathscr{P}$. Que peut-on dire du point $H' = r(H)$?
2° Étudier l'intersection des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ dans les cas suivants :
a) $\mathscr{P}$ est parallèle à Δ;
b) $\mathscr{P}$ est orthogonal à Δ;
c) $\mathscr{P}$ coupe Δ en un point B.

21. On donne deux points distincts A et B et une droite $\mathscr{D}$ non coplanaire avec la droite (AB).
1° Démontrer qu'il existe une rotation r d'axe $\mathscr{D}$ transformant le demi-plan $\mathscr{P}$ limité par $\mathscr{D}$ et contenant A en le demi-plan $\mathscr{P}'$ limité par $\mathscr{D}$ et contenant B.
2° Utiliser le point $A' = r(A)$ pour déterminer un point M de $\mathscr{D}$ tel que la somme $MA + MB$ soit minimale.

22. Soit une droite $\mathscr{D}$ et un plan $\mathscr{P}$ sécants en un point O et soit $s_{\mathscr{D}}$ et $s_{\mathscr{P}}$ les symétries orthogonales par rapport à $\mathscr{D}$ et à $\mathscr{P}$. Démontrer que l'orthogonalité de $\mathscr{D}$ et de $\mathscr{P}$ est une condition nécessaire et suffisante pour que $s_{\mathscr{P}} \circ s_{\mathscr{D}} = s_{\mathscr{D}} \circ s_{\mathscr{P}}$.
Définir, lorsque $\mathscr{D}$ et $\mathscr{P}$ sont orthogonaux, l'application composée $s_{\mathscr{P}} \circ s_{\mathscr{D}}$.

23. Soit r une rotation d'axe Δ et soit t une translation dont le vecteur est orthogonal à Δ. Démontrer que l'application composée $r \circ t$ est une rotation d'axe parallèle à Δ.

24. Soit $\mathscr{D}$, $\mathscr{D}'$, $\mathscr{D}''$ trois droites concourantes en O et deux à deux orthogonales. On note $s_{\mathscr{D}}$, $s_{\mathscr{D}'}$, $s_{\mathscr{D}''}$ les demi-tours d'axes respectifs $\mathscr{D}$, $\mathscr{D}'$, $\mathscr{D}''$.
Remplir la table de composition ci-dessous :

	$\mathrm{Id}_{\mathscr{E}}$	$s_{\mathscr{D}}$	$s_{\mathscr{D}'}$	$s_{\mathscr{D}''}$
$\mathrm{Id}_{\mathscr{E}}$				
$s_{\mathscr{D}}$				
$s_{\mathscr{D}'}$				
$s_{\mathscr{D}''}$				

En déduire que l'ensemble $\{\mathrm{Id}_{\mathscr{E}}, s_{\mathscr{D}}, s_{\mathscr{D}'}, s_{\mathscr{D}''}\}$ contient la composée de deux, quelconques, de ses éléments et la réciproque de chacun de ses éléments.

TRAVAUX PRATIQUES

ISOMÉTRIES INVOLUTIVES DE L'ESPACE

1° Soit f une application d'un ensemble E dans lui-même. Démontrer que les deux énoncés suivants sont équivalents :

- $f \circ f = \mathrm{Id}_E$;
- *f est bijective et* $f^{-1} = f$.

Une application vérifiant l'une ou l'autre de ces conditions est dite **involutive.**

2° Donner des exemples d'isométries de l'espace $\mathscr{E}$, involutives. Pour chaque exemple donné, vérifier que f possède au moins un point invariant.

3° Soit f une isométrie involutive de l'espace $\mathscr{E}$, R un point de $\mathscr{E}$ et son image $R' = f(R)$.
Quelle est l'image de l'ensemble $\{R, R'\}$ par f?
En déduire que le milieu A du segment $[R, R']$ est invariant par f.

Toute isométrie involutive possède au moins un point invariant.

4° Soit f une isométrie involutive de l'espace $\mathscr{E}$, distincte de $\mathrm{Id}_{\mathscr{E}}$ et possédant au moins trois points A, B, C non alignés invariants. Reconnaître l'isométrie f.

5° Soit f une isométrie involutive de l'espace $\mathscr{E}$.
On suppose que f n'est ni l'application identique de $\mathscr{E}$, ni une réflexion, et qu'il existe au moins deux points distincts A et B invariants par f.
Soit M un point quelconque d'image $M' = f(M)$.

a) Démontrer que le milieu I du segment $[M, M']$ appartient à la droite (AB).

b) Démontrer l'égalité des produits scalaires $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM'}$ et en déduire l'orthogonalité des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MM'}$.

c) Reconnaître l'isométrie f.

6° Soit f une isométrie involutive de l'espace possédant un seul point invariant, A.
Démontrer que f est la symétrie centrale de centre A.

Conclusion :

L'ensemble des isométries involutives de l'espace $\mathscr{E}$ est formé :

- **de l'application identique de $\mathscr{E}$;**
- **des réflexions;**
- **des symétries orthogonales par rapport à une droite, ou demi-tours;**
- **des symétries centrales.**

7° a) Montrer que l'on peut déterminer la nature d'une isométrie involutive de l'espace à partir de l'ensemble $\mathscr{I}$ de ses points invariants. Énoncer un théorème.

b) L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté au repère orthonormal $\mathscr{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On désigne par f l'application de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ qui à tout point M de coordonnées (x, y, z) associe le point M' de coordonnées (x', y', z') telles que :

$$\begin{cases} x' = \dfrac{2}{3}x - \dfrac{2}{3}y - \dfrac{1}{3}z + \dfrac{4}{3} \\[2mm] y' = -\dfrac{2}{3}x - \dfrac{1}{3}y - \dfrac{2}{3}z + \dfrac{8}{3} \\[2mm] z' = -\dfrac{1}{3}x - \dfrac{2}{3}y + \dfrac{2}{3}z + \dfrac{4}{3}. \end{cases}$$

Montrer que f est une isométrie involutive de $\mathscr{E}$. Déterminer l'ensemble des points invariants par f.
Définir f.

c) *Reprendre la question précédente pour les applications g et h respectivement définies par :*

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(-x + 2y + 2z - 4) \\ y' = \frac{1}{3}(2x - y + 2z + 2) \\ z' = \frac{1}{3}(2x + 2y - z + 2) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x' = -x + 3 \\ y' = -y - 5 \\ z' = -z + 2. \end{cases}$$

DÉFINITION ANALYTIQUE D'UNE ROTATION

On considère la rotation r d'axe $\Delta_{\vec{u}}$ et d'angle θ (le vecteur $\vec{u}$ est unitaire).

1° Soit M un point de l'espace n'appartenant pas à Δ.
On note M' l'image de M par r, Ω le projeté orthogonal de M sur Δ et M_1 le point défini par : $\overrightarrow{\Omega M_1} = \vec{u} \wedge \overrightarrow{\Omega M}$ (figure 19).
a) Démontrer que le plan $(\Omega M M_1)$ est orthogonal à Δ et que $\Omega M = \Omega M' = \Omega M_1$.
b) Dans le plan $(\Omega M M_1)$ orienté par le vecteur unitaire $\vec{u}$, démontrer que :

$$(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M_1}) = \frac{\pi}{2} \quad (2\pi)$$

et
$$(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta \quad (2\pi).$$

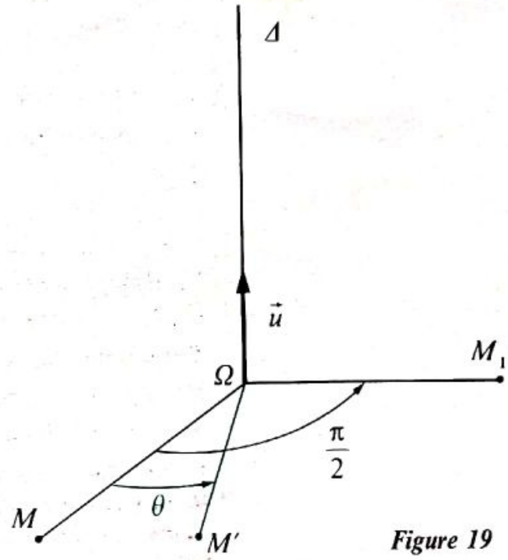


Figure 19

c) Déduire de a) et b) la formule :

$$\overrightarrow{\Omega M'} = \cos\theta \, \overrightarrow{\Omega M} + \sin\theta \, (\vec{u} \wedge \overrightarrow{\Omega M}) \tag{1}$$

A noter que cette formule, établie pour tout point M n'appartenant pas à Δ, vaut aussi pour les points de Δ.

2° Application : *L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. L'axe $\Delta_{\vec{u}}$ est déterminé par un de ses points, A, et par le vecteur unitaire $\vec{u}$. Utiliser la formule* (1) *pour définir analytiquement, dans les cas suivants, la rotation d'axe $\Delta_{\vec{u}}$ et d'angle θ :*

a) $A(0, 0, 0)$, $\vec{u}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\theta = \frac{2\pi}{3}$;

b) $A(1, -2, 3)$, $\vec{u}\left(\frac{1}{9}, \frac{4}{9}, -\frac{8}{9}\right)$, $\theta = -\frac{\pi}{6}$.

RECONNAÎTRE UNE ROTATION

Dans l'espace $\mathscr{E}$ muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère l'application r définie analytiquement par :

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = z - 1 \\ z' = -x + 1. \end{cases}$$

1° Démontrer que r est une isométrie.

2° Déterminer l'ensemble Δ des points invariants par r. En déduire que l'isométrie r est une rotation. Déterminer un vecteur unitaire $\vec{u}$ de Δ.

3° L'isométrie r est une rotation d'axe $\Delta_{\vec{u}}$. On se propose de déterminer la mesure principale θ de l'angle de r.

a) Soit A un point n'appartenant pas à Δ, d'image $A' = r(A)$ et de projeté orthogonal Ω sur Δ. Démontrer que :

$$\overrightarrow{\Omega A} \cdot \overrightarrow{\Omega A'} = \Omega A^2 \cos\theta,$$
$$\overrightarrow{\Omega A} \wedge \overrightarrow{\Omega A'} = \Omega A^2 \sin\theta.$$

b) Choisir un point A de l'espace et utiliser les formules précédentes pour calculer $\cos\theta$ *et* $\sin\theta$. *En déduire θ.*

4° Reconnaître de la même façon l'application f qui à tout point $M(x, y, z)$ associe le point $M'(x', y', z')$ défini par :

$$\begin{cases} x' = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{\sqrt{6}}{4}y + \dfrac{\sqrt{6}}{4}z \\[2mm] y' = \dfrac{\sqrt{6}}{4}x + \dfrac{1}{4}y + \dfrac{3}{4}z \\[2mm] z' = -\dfrac{\sqrt{6}}{4}x + \dfrac{3}{4}y + \dfrac{1}{4}z. \end{cases}$$

ISOMÉTRIES LAISSANT INVARIANT UN ENSEMBLE DONNÉ

Soit $\mathscr{F}$ une partie non vide de l'espace $\mathscr{E}$. On note $\mathscr{I}_{\mathscr{F}}$ l'ensemble des isométries f de $\mathscr{E}$ laissant globalement invariante *la partie $\mathscr{F}$, c'est-à-dire telles que $f\langle \mathscr{F} \rangle = \mathscr{F}$.*

1° Démontrer que $\mathscr{I}_{\mathscr{F}}$ contient la composée de deux quelconques de ses éléments et la réciproque de chacun de ses éléments.

2° On suppose que $\mathscr{F}$ est une partie finie. Démontrer que tout élément f de $\mathscr{I}_{\mathscr{F}}$ laisse invariant l'isobarycentre des points de $\mathscr{F}$.

3° On suppose dans cette question $\mathscr{F} = \{A, B\}$, où A et B sont deux points distincts. Déterminer les éléments de $\mathscr{I}_{\mathscr{F}}$.

4° On suppose dans cette question que $\mathscr{F} = \{A, B, C\}$, où A, B, C sont trois points non alignés tels que $AB = AC$ et $AB \neq BC$. Déterminer les éléments de $\mathscr{I}_{\mathscr{F}}$.
Même question lorsque A, B, C sont les sommets d'un triangle équilatéral.

5° On suppose que $\mathscr{F} = \{A, B, C, D\}$, où A, B, C, D sont les sommets d'un carré.
Déterminer les éléments de $\mathscr{I}_{\mathscr{F}}$ et construire la table de composition de l'ensemble $\mathscr{I}_{\mathscr{F}}$.

6° Soit $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ deux droites non coplanaires et non orthogonales et soit $\mathscr{F} = \mathscr{D} \cup \mathscr{D}'$.
On désigne par Δ la perpendiculaire commune aux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ et par H et H' les points d'intersection respectifs de Δ avec $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.
a) Démontrer que tout élément f de $\mathscr{I}_{\mathscr{F}}$ laisse globalement invariantes la droite Δ et la paire $\{H, H'\}$.
b) En déduire les éléments de $\mathscr{I}_{\mathscr{F}}$. Construire la table de composition de l'ensemble $\mathscr{I}_{\mathscr{F}}$.
Même question lorsque $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont deux droites non coplanaires et orthogonales.

7° Déterminer les éléments de l'ensemble $\mathscr{I}_{\mathscr{F}}$ et, lorsque $\mathscr{I}_{\mathscr{F}}$ est fini, construire sa table de composition dans les cas suivants :

a) $A, B, C, D, A', B', C', D'$ sont les huit sommets d'un cube et $\mathscr{F} = \{A, B, C, D, A', B', C', D'\}$.
b) $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont deux droites strictement parallèles et $\mathscr{F} = \mathscr{D} \cup \mathscr{D}'$.
c) $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont deux droites sécantes et orthogonales et $\mathscr{F} = \mathscr{D} \cup \mathscr{D}'$.
d) $\mathscr{D}, \mathscr{D}', \mathscr{D}''$ sont trois droites sécantes en O et deux à deux orthogonales et $\mathscr{F} = \mathscr{D} \cup \mathscr{D}' \cup \mathscr{D}''$.
e) $\mathscr{D}$ et $\mathscr{P}$ sont une droite et un plan strictement parallèles et $\mathscr{F} = \mathscr{D} \cup \mathscr{P}$.
f) $\mathscr{D}$ et $\mathscr{P}$ sont une droite et un plan orthogonaux et $\mathscr{F} = \mathscr{D} \cup \mathscr{P}$.
g) $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont deux plans perpendiculaires et $\mathscr{F} = \mathscr{P} \cup \mathscr{P}'$.

PRODUIT DE DEUX ROTATIONS D'AXES COPLANAIRE

On sait que l'application composée $f = s_{\mathscr{P}'} \circ s_{\mathscr{P}}$ de deux réflexions par rapport à deux plans sécants $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ est une rotation.

1° Que peut-on dire de $f = s_{\mathscr{P}'} \circ s_{\mathscr{P}}$ lorsque les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont confondus?

2° On suppose désormais que $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont strictement parallèles. Une droite Δ orthogonale à $\mathscr{P}$, et donc à $\mathscr{P}'$, coupe respectivement ces deux plans en H et K (figure 20).
Démontrer que lorsque Δ varie en restant orthogonale à $\mathscr{P}$, le vecteur $\overrightarrow{HK}$ reste constant. On note $\vec{v}$ ce vecteur constant.

3° Démontrer que l'application composée $s_{\mathscr{P}'} \circ s_{\mathscr{P}}$ est une translation dont on exprimera le vecteur en fonction de $\vec{v}$.

4° Soit t une translation de vecteur $\vec{u}$ non nul et soit $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ deux plans orthogonaux au vecteur $\vec{u}$.
A quelle condition a-t-on $t = s_{\mathscr{P}'} \circ s_{\mathscr{P}}$?

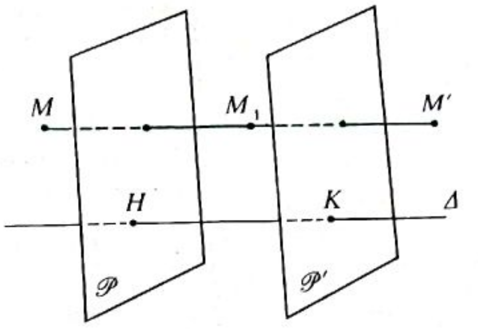


Figure 20

Nous retiendrons :

1. L'application composée $s_{\mathscr{P}'} \circ s_{\mathscr{P}}$ de deux réflexions par rapport à deux plans parallèles $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ est la translation de vecteur $2\overrightarrow{HK}$, où H est un point, quelconque, de $\mathscr{P}$ et K son projeté orthogonal sur $\mathscr{P}'$.

2. Dans l'espace, toute translation t de vecteur $\vec{u}$ non nul peut se décomposer sous la forme $t = s_{\mathscr{P}'} \circ s_{\mathscr{P}}$, où $s_{\mathscr{P}}$ et $s_{\mathscr{P}'}$ sont deux réflexions par rapport à deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ orthogonaux à $\vec{u}$. L'un des plans $\mathscr{P}$, $\mathscr{P}'$ peut être choisi arbitrairement; l'autre est alors déterminée par l'une des conditions :

- **$\mathscr{P}'$ est l'image de $\mathscr{P}$ par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\vec{u}$;**
- **$\mathscr{P}$ est l'image de $\mathscr{P}'$ par la translation de vecteur $-\frac{1}{2}\vec{u}$.**

La propriété de décomposition de toute rotation en un produit de deux réflexions par rapport à deux plans passant par l'axe de la rotation permet d'étudier l'application composée $r' \circ r$ de deux rotations d'axes $\Delta_{\vec{k}}$ et $\Delta'_{\vec{k}'}$ coplanaires.

En effet, s'il existe trois plans $\mathscr{P}$, $\mathscr{P}'$, $\mathscr{P}''$ tels que $r = s_{\mathscr{P}} \circ s_{\mathscr{P}'}$ et $r' = s_{\mathscr{P}''} \circ s_{\mathscr{P}}$, on aura :

$$\begin{aligned} r' \circ r &= (s_{\mathscr{P}''} \circ s_{\mathscr{P}}) \circ (s_{\mathscr{P}} \circ s_{\mathscr{P}'}) \\ &= s_{\mathscr{P}''} \circ (s_{\mathscr{P}} \circ s_{\mathscr{P}}) \circ s_{\mathscr{P}'} \\ &= s_{\mathscr{P}''} \circ \mathrm{Id}_{\mathscr{E}} \circ s_{\mathscr{P}'} \\ &= s_{\mathscr{P}''} \circ s_{\mathscr{P}'}. \end{aligned}$$

L'application $r' \circ r$ sera alors, soit une translation si $\mathscr{P}'$ et $\mathscr{P}''$ sont parallèles, soit une rotation si $\mathscr{P}'$ et $\mathscr{P}''$ sont sécants.

Or la détermination des plans $\mathscr{P}$, $\mathscr{P}'$, $\mathscr{P}''$ est toujours possible : $\mathscr{P}$ devant passer par les axes des rotations r et r' et ces axes étant coplanaires, $\mathscr{P}$ est le plan les contenant; $\mathscr{P}'$ et $\mathscr{P}''$ sont alors déterminées comme on l'a vu à la page 336 (théorème 3).

Les figures 21, 22 et 23 illustrent les différentes situations possibles. Lorsque les axes des rotations r et r' sont sécants en Ω (figure 23), l'application composée $r' \circ r$ laisse le point Ω invariant; c'est une rotation dont l'axe passe par Ω.

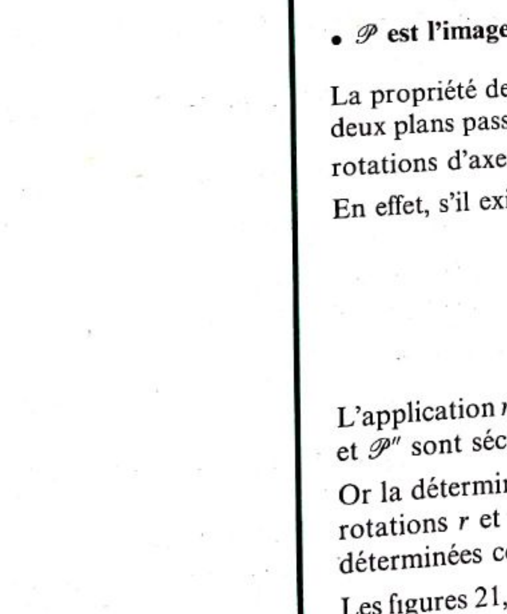


Figure 21

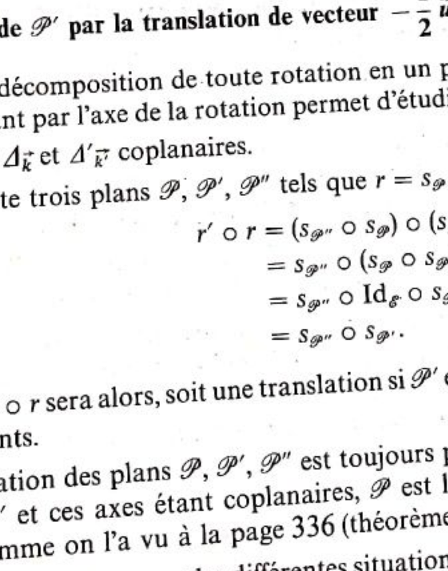


Figure 22

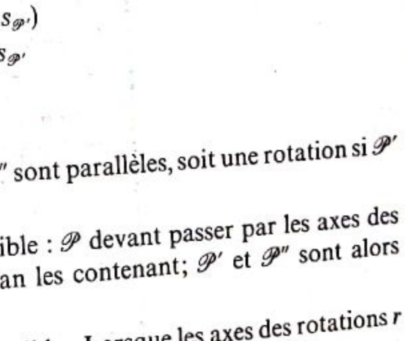


Figure 23

Nous retiendrons :

L'application composée de deux rotations d'axes coplanaires est une rotation ou une translation.

Applications

1. *Démontrer que l'application composée $s_{\mathcal{D}'} \circ s_{\mathcal{D}}$ de deux demi-tours d'axes $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ parallèles est la translation de vecteur $2\overrightarrow{HK}$, où H est un point de $\mathcal{D}$ et K son projeté orthogonal sur $\mathcal{D}'$.*

2. *Soit $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites de l'espace sécantes en O et soit $s_{\mathcal{D}}$ et $s_{\mathcal{D}'}$ les demi-tours d'axes respectifs $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.*

1° Démontrer que l'application composée $s_{\mathcal{D}'} \circ s_{\mathcal{D}}$ est une rotation dont l'axe est porté par la perpendiculaire commune Δ à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.
A quelle condition $s_{\mathcal{D}'} \circ s_{\mathcal{D}}$ est-elle un demi-tour?

2° Orientons le plan contenant $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ par un vecteur unitaire $\vec{k}$ de Δ. Soit α une mesure de l'angle orienté $(\widehat{Ox, Ox'})$, où Ox et Ox' sont respectivement une des demi-droites de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ d'origine O. Démontrer qu'une mesure de l'angle de la rotation $s_{\mathcal{D}'} \circ s_{\mathcal{D}}$ est 2α.

3. *Soit un parallélépipède rectangle; $ABCD$ en est une face, $[A, A']$, $[B, B']$, $[C, C']$, $[D, D']$ en sont des arêtes. On désigne par s_1 le demi-tour d'axe (AD), par s_2 le demi-tour d'axe (BB') et par s_3 le demi-tour d'axe $(C'D')$.*
Démontrer que l'application composée $s_3 \circ s_2 \circ s_1$ est une translation dont on déterminera le vecteur.

4. *Soit $s_{\mathcal{D}}$ et $s_{\mathcal{D}'}$ les demi-tours ayant pour axes respectifs deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ non coplanaires de l'espace $\mathcal{E}$. On étudie l'application composée $f = s_{\mathcal{D}'} \circ s_{\mathcal{D}}$.*

1° La perpendiculaire commune Δ aux deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ les coupe respectivement en H et H'; on note $\mathcal{D}''$ la droite passant par H et parallèle à $\mathcal{D}'$ et $s_{\mathcal{D}''}$ le demi-tour d'axe $\mathcal{D}''$.
a) Montrer que $f = (s_{\mathcal{D}'} \circ s_{\mathcal{D}''}) \circ (s_{\mathcal{D}''} \circ s_{\mathcal{D}})$.
b) En déduire que f peut s'écrire sous la forme $f = t \circ r$, où r est une rotation d'angle non nul et t une translation dont le vecteur est non nul et de même direction que l'axe de r.
c) Démontrer que $f = r \circ t$.

(On appelle **vissage** toute isométrie de l'espace pouvant s'écrire sous la forme $t \circ r$, où r est une rotation d'angle non nul et t une translation dont le vecteur est non nul et de même direction que l'axe de r.)

2° On suppose dans cette question que les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont ainsi définies : $ABCD$ étant un tétraèdre régulier, $\mathcal{D}$ est la droite (AB) et $\mathcal{D}'$ la droite (CD). Déterminer alors l'axe et l'angle de la rotation r et le vecteur de la translation t.

5. *L'espace orienté $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.*

On considère le point O' $(0, 0, 1)$, le vecteur $\vec{u} = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$ et les droites : $\mathcal{D}_1$ passant par O et de vecteur directeur $\vec{i}$, $\mathcal{D}_2$ passant par O' et de vecteur directeur $\vec{i}$ et $\mathcal{D}_3$ passant par O' et de vecteur directeur $\vec{u}$. On désigne par :

- *R_1 la rotation d'axe $\mathcal{D}_1$, orienté par $\vec{i}$ et d'angle de mesure π;*
- *R_2 la rotation d'axe $\mathcal{D}_2$, orienté par $\vec{i}$ et d'angle de mesure π;*
- *R_3 la rotation d'axe $\mathcal{D}_3$, orienté par $\vec{u}$ et d'angle de mesure π.*

Définir analytiquement et géométriquement les transformations suivantes :

$$f_1 = R_2 \circ R_1, \quad f_2 = R_3 \circ R_2, \quad f_3 = f_2 \circ f_1.$$

EXERCICES ET PROBLÈMES

25. Dans l'espace $\mathscr{E}$ muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère l'application f définie analytiquement par :

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{3}(x - 2y - 2z + 3) \\ y' = \dfrac{1}{3}(-2x + y - 2z) \\ z' = \dfrac{1}{3}(-2x - 2y + z - 6). \end{cases}$$

1° Démontrer que pour tout point M d'image M', le milieu du bipoint (M, M') appartient à un plan fixe $\mathscr{P}$. Démontrer que le point M_1, symétrique orthogonal de M par rapport à $\mathscr{P}$, est tel que le vecteur $\overrightarrow{M_1M'}$ est constant. En déduire que f est le produit de deux transformations simples et que f est une isométrie.
2° Soit A un point appartenant au plan $\mathscr{P}$. Déterminer géométriquement les ensembles des points M, d'images M', tels que :
a) $AM = AM'$;
b) les points A, M, M' soient alignés;
c) $MM' = a$ (a est un réel positif donné).

26. On donne dans l'espace $\mathscr{E}$ un point O et un vecteur unitaire $\vec{k}$.
On note f l'application de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ qui, à tout point M, associe le point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = \vec{k} \wedge \overrightarrow{OM}$.
1° Définir analytiquement f dans un repère orthonormal direct convenablement choisi.
L'application f est-elle une isométrie? La restriction de f au plan $\mathscr{P}$ passant O et orthogonal à $\vec{k}$ est-elle une isométrie de $\mathscr{P}$?
2° Démontrer que f peut se décomposer sous la forme $g \circ p$, où p et g sont respectivement une projection orthogonale et une isométrie de l'espace que l'on définira.

27. L'espace $\mathscr{E}$ étant rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère l'application f de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ définie analytiquement par :

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{9}(-8x + 4y + z + 16) \\ y' = \dfrac{1}{9}(4x + 7y + 4z - 6) \\ z' = \dfrac{1}{9}(x + 4y - 8z + 8). \end{cases}$$

1° Démontrer que f est une isométrie.
2° Déterminer l'ensemble des points invariants par f. En déduire la nature de f.
3° Déterminer l'ensemble des points M de transformé M' par f tels que le milieu I du bipoint (M, M') appartienne au plan d'équation $z = 0$.

28. L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère orthonormal $\mathscr{R}$. On désigne par f l'application de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ qui à tout point M de coordonnées (x, y, z) associe le point M' de coordonnées (x', y', z') telles que :

$$\begin{cases} x' = \dfrac{2}{3}x - \dfrac{2}{3}y - \dfrac{1}{3}z + \dfrac{4}{3} \\ y' = -\dfrac{2}{3}x - \dfrac{1}{3}y - \dfrac{2}{3}z + \dfrac{8}{3} \\ z' = -\dfrac{1}{3}x - \dfrac{2}{3}y + \dfrac{2}{3}z + \dfrac{4}{3}. \end{cases}$$

1° Montrer que f est une isométrie de $\mathscr{E}$.
2° Déterminer l'ensemble des points invariants par f. En déduire la nature de f.

29. L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
1° Soit s la réflexion par rapport au plan $\mathscr{P}$ dont une équation est :

$$y + 3z - 5 = 0.$$

Étant donné un point M de $\mathscr{E}$ de coordonnées (x, y, z), calculer les coordonnées (x', y', z') de son image M' par s.
2° On considère l'application f de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ qui, à tout point M de coordonnées (x, y, z), associe le point M'' dont les coordonnées (x'', y'', z'') sont données par les relations :

$$\begin{cases} x'' = x \\ y'' = \dfrac{-4y + 3z - 3}{5} \\ z'' = \dfrac{3y + 4z + 1}{5}. \end{cases}$$

Montrer que f est une isométrie involutive. Préciser sa nature et ses éléments remarquables.
3° Trouver la nature et les éléments remarquables de $f \circ s$ par des considérations géométriques simples.

30. L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
1° f désigne l'application de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ définie analytiquement par :

$$\begin{cases} x' = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x - \dfrac{1}{2}y \\ z' = z. \end{cases}$$

Démontrer que f est une rotation; préciser son axe et une mesure de son angle.
2° On considère les quatre points :

$$A(2, 0, 0), \quad B(-1, \sqrt{3}, 0), \quad C(-1, -\sqrt{3}, 0,), \quad D(0, 0, 4).$$

On pose $\mathscr{F} = \{A, B, C, D\}$.
a) Vérifier que (ABC) est un triangle équilatéral de centre de gravité O.
b) Vérifier que l'application f laisse $\mathscr{F}$ globalement invariant.
3° Soit g une isométrie de $\mathscr{E}$ qui laisse $\mathscr{F}$ globalement invariant.

a) Déterminer l'isobarycentre G des quatre points A, B, C, D. Calculer $\|\overrightarrow{GA}\|$, $\|\overrightarrow{GB}\|$, $\|\overrightarrow{GC}\|$, $\|\overrightarrow{GD}\|$.
b) En déduire que g laisse invariant les points G et D.
c) En déduire l'ensemble $\mathscr{I}$ des isométries de $\mathscr{E}$ qui laissent $\mathscr{F}$ globalement invariant.

31. Soit Δ l'axe défini par un point O et un vecteur unitaire $\vec{k}$. On note r la rotation d'axe Δ et d'angle θ, $\theta \in]-\pi, \pi]$ et $\theta \neq 0$, t la translation de vecteur $\lambda\vec{k}$, $\lambda \neq 0$, et f l'application composée $t \circ r$.
1° Démontrer que f est une isométrie et que $f = r \circ t$.
2° Démontrer que, pour tout point M d'image M' par f, on a, d désignant la distance du point M à la droite Δ :

$$MM'^2 = 2d^2(1 - \cos\theta) + \lambda^2.$$

3° En déduire que Δ est l'ensemble des points M tels que la distance MM' soit minimale.
4° a étant un réel positif donné, quel est l'ensemble des points M tels que $MM' = a$?
5° Soit un point M et les points $M' = f(M)$ et $M'' = f(M')$. Étudier l'ensemble des points M tels que les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{M'M''}$ soient orthogonaux.

32. L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère orthonormal $\mathscr{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère l'application f de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ qui, à tout point M de coordonnées (x, y, z), associe le point M' dont les coordonnées (x', y', z') sont telles que :

$$\begin{cases} x' = -x + 2 \\ y' = z + 1 \\ z' = y + 1. \end{cases}$$

1° Démontrer que f est une isométrie. L'isométrie f possède-t-elle des points fixes?
2° Pour tout point M d'image $M' = f(M)$, calculer MM'^2 en fonction des coordonnées de M. En déduire que l'ensemble des points M pour lesquels la distance MM' est minimale est une droite Δ que l'on définira par un de ses points et un de ses vecteurs directeurs.
3° Démontrer que l'image R' de tout point R de Δ appartient à Δ et que le vecteur $\overrightarrow{RR'}$ est constant. On note $\vec{u}$ ce vecteur et t la translation de vecteur $-\vec{u}$.
4° Définir analytiquement l'application composée $r = t \circ f$ et montrer que r est une rotation d'axe Δ. En déduire que f est la composée d'une translation et d'une rotation.

33. L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On appelle $\mathscr{C}$ le cube de sommets O, A, B, C, D, E, F, G, défini par :

$$\overrightarrow{OA} = \vec{i},\ \overrightarrow{OC} = \vec{j},\ \overrightarrow{OB} = \vec{i} + \vec{j},$$
$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{BF} = \vec{k}.$$

1° Dessiner $\mathscr{C}$; soit r_1 la rotation de $\mathscr{E}$, d'axe (OA) dirigé par $\vec{i}$, dont une mesure de l'angle est $+\dfrac{\pi}{2}$; soit r_2 la rotation de $\mathscr{E}$, d'axe (OC) dirigé par $\vec{j}$, dont une mesure de l'angle est $-\dfrac{\pi}{2}$.
On pose $f = r_2 \circ r_1$ et $g = r_1 \circ r_2$.
Montrer que f et g sont définies par :

$$M\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \mapsto f(M)\begin{vmatrix} -x \\ -z, \\ y \end{vmatrix} \qquad M\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \mapsto g(M)\begin{vmatrix} -z \\ -x \\ y \end{vmatrix}$$

En déduire que f et g sont des rotations. (On déterminera l'ensemble des points invariants de f et g.)
2° On note A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1, G_1 les images respectives par f des points A, B, C, D, E, F, G et $A_2, B_2, C_2, D_2, E_2, F_2, G_2$ les images respectives par g des points A, B, C, D, E, F, G. Montrer que :

$$\{A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1, G_1\} = \{A_2, B_2, C_2, D_2, E_2, F_2, G_2\}.$$

3° On pose $\varphi = g \circ f^{-1}$. Quelle est l'image $\mathscr{C}_2$ par φ de la liste ordonnée de points $\mathscr{C}_1 = (A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1, G_1)$?
Montrer que φ est une rotation dont on précisera l'axe.

34. L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On désigne par $\mathscr{D}$ la droite de repère $(O, \vec{i})$, par $\mathscr{D}'$ la droite de repère $(O, \vec{j})$, et l'on considère les deux rotations :

- r, d'axe $\mathscr{D}$ et de mesure 2α relativement au vecteur $\vec{i}$ $(2\alpha \in]0, \pi])$.
- r', d'axe $\mathscr{D}'$ et de mesure 2β relativement au vecteur $\vec{j}$ $(2\beta \in]0, \pi])$.

1° a) En considérant chaque rotation comme l'application composée de deux réflexions, et en faisant en sorte que l'une des réflexions soit commune, démontrer que l'application composée $r' \circ r$ est une rotation d'axe Δ contenant le point O.
b) Démontrer que le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(\cot\beta, \cot\alpha, -1)$ est un vecteur directeur de Δ.
c) Démontrer que si 2θ est une mesure de la rotation $r' \circ r$, on a $\cos\theta = \cos\alpha\cos\beta$.
A quelle condition la rotation $r' \circ r$ est-elle un demi-tour?
d) Quel est l'ensemble des droites Δ lorsque β décrit $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, α restant fixe?
2° a) L'axe Δ coupe le plan $\mathscr{P}$ d'équation $z = -1$ en un point M dont on donnera les coordonnées en fonction de α et β.
Lorsque β décrit $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, α restant fixe, quel est l'ensemble des points M? Retrouver ainsi le résultat du *1° d*.
b) On suppose que $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$.
Quel est l'ensemble des points M lorsque α décrit $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$?
c) On suppose que $\alpha = \dfrac{\beta}{2}$. Démontrer que, lorsque β décrit $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, l'ensemble des points M est dans le plan $\mathscr{P}$, une courbe (Γ) qui se projette orthogonalement sur le plan d'équation $z = 0$ suivant une partie de la courbe d'équation $y^2 - 2xy - 1 = 0$. Construire cette courbe.

d) On considère la surface engendrée par Δ lorsque M décrit la courbe (Γ). Le plan $\mathcal{Q}$ d'équation $y = 1$ coupe cette surface suivant une courbe (Γ'). Construire la courbe (Γ'), projetée orthogonale de (Γ) sur le plan d'équation $y = 0$.

35. Dans l'espace $\mathcal{E}$, on donne un cube $ABCDEFGH$ $(\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{DH})$. Soit I le milieu de l'arête $[H, D]$ et J le symétrique de H par rapport à D.
1° Établir que le plan (ACI) est le plan médiateur du segment $[F, J]$.
2° Démontrer qu'il existe une isométrie f, unique, laissant les points A, C, I invariants et transformant F en J. Caractériser f.

36. L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
a et b étant deux réels, on considère l'application, notée $\varphi_{a,b}$, qui à tout point M de coordonnées (x, y, z) associe le point M' de coordonnées (x', y', z') telles que :

$$\begin{cases} x' = a^2x - by - abz \\ y' = abx + ay - b^2z \\ z' = bx + az. \end{cases}$$

1° Montrer que $\varphi_{-1,0}$ est un demi-tour dont on précisera l'axe.
2° Comment faut-il choisir a et b pour que $\varphi_{a,b}$ soit une isométrie?
Cette condition étant supposée réalisée, chercher l'ensemble des points invariants par $\varphi_{a,b}$. Quelle est la nature de $\varphi_{a,b}$?

37. On considère un carré $ABCD$ situé dans un plan $\mathcal{P}$ de l'espace. O désigne le centre de ce carré, H un point distinct de O de la droite Δ perpendiculaire en O au plan $\mathcal{P}$ et H' son symétrique par rapport à O.
On note E l'ensemble $\{A, B, D\}$ et F l'ensemble $\{B, C, D\}$.
L'objectif de l'exercice est de décrire l'ensemble W des isométries de l'espace qui appliquent E sur F.
1° Démontrer que l'ensemble W n'est pas vide.
2° Soit f un élément de W. Prouver les égalités :

$$f(A) = C, \quad f(\{B, D\}) = \{B, D\},$$
$$f(O) = O, \quad f(H) = H \quad \text{ou} \quad f(H) = H'$$

3° Déterminer et reconnaître tous les éléments de W.

38. On considère dans l'espace quatre points A, B, C, D tels que :

$$AC = AB = BC = BD = AD = a,$$

où a est un réel positif donné.
1° a) I étant le milieu du segment $[A, B]$, montrer que les droites (IC) et (ID) sont perpendiculaires à la droite (AB).
b) Montrer que $IC = ID$ et exprimer cette longueur en fonction de a.
2° Soit S_1 la réflexion par rapport au plan (ABC) et S_2 la réflexion par rapport au plan (ABD).
a) Quelle est la nature de la transformation :

$$R = S_1 \circ S_2?$$

b) Déterminer en fonction de a la longueur $x = CD$ pour que R soit une rotation d'angle plat.

39. Dans l'espace $\mathcal{E}$ rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère l'application f de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui, au point M de coordonnées (x, y, z), associe le point M' de coordonnées (x', y', z') telles que :

$$\begin{cases} x' = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}y + \dfrac{\sqrt{2}}{2}z + \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ y' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x - \dfrac{1}{2}y - \dfrac{1}{2}z + \dfrac{3}{2} \\ z' = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}x - \dfrac{1}{2}y - \dfrac{1}{2}z + \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

1° Montrer que f est une isométrie de $\mathcal{E}$ qui admet un et un seul point invariant I, dont on déterminera les coordonnées.
2° Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $y + z - 1 = 0$ et $s_{\mathcal{P}}$ la réflexion par rapport à $\mathcal{P}$. Donner l'expression analytique de $s_{\mathcal{P}}$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
3° Montrer qu'il existe une et une seule rotation r de $\mathcal{E}$ telle que $f = s_{\mathcal{P}} \circ r$. Déterminer l'axe $\mathcal{D}$ de la rotation r. Quelle est la position relative de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$?

40. Dans l'espace $\mathcal{E}$ rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les points $A(0, 0, -2)$, $B(0, 1, -1)$, $C(0, 0, 4)$, $D(0, -1, 3)$.
1° Montrer qu'il existe un, et un seul, demi-tour, noté f, tel que $f(O) = A$ et $f(B) = B$.
Caractériser géométriquement ce demi-tour et donner sa représentation analytique.
2° Soit g l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui à tout point $M(x, y, z)$ associe $M'(x', y', z')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \\ z' = -z + 2. \end{cases}$$

Démontrer que g est un demi-tour dont on déterminera l'axe. Préciser les images de A et B par g.
3° Soit $h = f \circ g$. Définir analytiquement h.
Montrer que h peut s'écrire sous la forme $d \circ t$ où d est un demi-tour dont on précisera l'axe Δ et t une translation dont le vecteur est parallèle à Δ.

41. Dans le problème, l'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ dont les axes sont notés (Ox), (Oy) et (Oz).
I – On note Ω et Ω' les points de coordonnées respectives $(0, 0, 1)$ et $(0, 0, -1)$. On dira qu'une isométrie f laisse invariante une partie $\mathcal{F}$ de l'espace $\mathcal{E}$ si $f\langle \mathcal{F} \rangle = \mathcal{F}$.
1° Soit f une isométrie de $\mathcal{E}$ vérifiant $f(O) = O$ et laissant la droite (Oz) invariante.
a) Démontrer que $f(\Omega)$ est égal à Ω ou à Ω', et que f laisse invariant le plan (xOy).
b) Soit un point M de coordonnées (x, y, z), et soit (x', y', z') les coordonnées de son image M' par f.
Montrer que $z^2 = z'^2$, et en déduire que :

$$x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2.$$

2° Quelles sont toutes les isométries f de $\mathcal{E}$ vérifiant $f(O) = O$ et laissant la droite (Oz) invariante?

II — Dans toute la suite du problème, on note Γ le sous-ensemble de $\mathscr{E}$ défini par l'équation :

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0.$$

1° *a)* Étudier l'intersection de Γ avec le plan d'équation $x = 0$; faire une figure.
b) Pour tout réel λ, on note $\mathscr{P}_\lambda$ le plan d'équation $z = \lambda$. Donner une équation de $\mathscr{P}_\lambda \cap \Gamma$ dans le repère $(\omega_\lambda, \vec{i}, \vec{j})$ de $\mathscr{P}_\lambda$, où ω_λ est le point de coordonnées $(0, 0, \lambda)$. Quelle est la nature de $\mathscr{P}_\lambda \cap \Gamma$ lorsque $\lambda \neq 0$? Préciser $\mathscr{P}_0 \cap \Gamma$.
2° *a)* Soit A un point quelconque de Γ, distinct de O. Montrer que la droite (OA) est incluse dans Γ.
b) Soit Δ une droite incluse dans Γ. Démontrer que Δ passe par O. (On pourra étudier l'intersection de Δ et $\mathscr{P}_0$.)

III — *1°* Soit f une isométrie de $\mathscr{E}$ vérifiant $f(O) = O$ et laissant la droite (Oz) invariante. Déduire de I — *1°* que $f(\Gamma) = \Gamma$.
Dans la question suivante, on va établir qu'il s'agit là des seules isométries laissant Γ invariant.
2° Soit, maintenant, f une isométrie de $\mathscr{E}$ vérifiant $f(\Gamma) = \Gamma$.
a) Établir que $f(O) = O$. (On pourra considérer deux droites distinctes incluses dans Γ.)
b) Soit M un point de Γ, de coordonnées (x, y, z). Quelle est, en fonction de z seulement, la distance MO?
Soit $\mathscr{S}$ la sphère de centre O et de rayon $\sqrt{2}$. Vérifier que $\mathscr{S} \cap \Gamma$ est la réunion de deux cercles dont on précisera les plans, les rayons et les centres.
c) Montrer que $f(\mathscr{S} \cap \Gamma) = \mathscr{S} \cap \Gamma$; en déduire que $f(\Omega)$ est égal à Ω ou à Ω'. Que peut-on en conclure pour l'image de la droite (Oz) par f?

IV — On considère le plan Π d'équation :

$$y + z\sqrt{3} = \sqrt{3}.$$

1° Déterminer par leurs coordonnées les points B et C d'intersection de Π avec, respectivement, (Oy) et (Oz).
On définit $\vec{u}$ par $\vec{u} = \dfrac{1}{\|\overrightarrow{BC}\|}\overrightarrow{BC}$. Vérifier que $(B, \vec{i}, \vec{u})$ est un repère orthonormal de Π.
2° Soit M un point quelconque de Π, de coordonnées (X, Y) dans le repère $(B, \vec{i}, \vec{u})$.
Montrer que les coordonnées (x, y, z) de M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\mathscr{E}$ sont données par :

$$\begin{cases} x = X \\ y = \sqrt{3} - Y\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ z = \dfrac{Y}{2}. \end{cases}$$

3° Soit $E = \Gamma \cap \Pi$. Trouver une équation cartésienne de E dans le repère $(B, \vec{i}, \vec{u})$ de Π. Quelle est la nature de E? Le plan Π étant pris comme plan de la feuille de dessin, tracer E.
4° On considère l'application g de $\mathscr{E}$ dans lui-même qui, à tout point M de coordonnées (x, y, z), associe le point M' de coordonnées (x', y', z') définies par :

$$\begin{cases} x' = x\sqrt{2} \\ y' = y\sqrt{3} + z \\ z' = y + z\sqrt{3}. \end{cases}$$

Comparer $x'^2 + y'^2 - z'^2$ et $x^2 + y^2 - z^2$. Quelle est l'image du plan Π par g? Commentez ce résultat.

42. Soit θ un réel différent de 0 modulo 2π, $\Delta_{\vec{u}}$ un axe de l'espace $\mathscr{E}$ et $\vec{v}$ un vecteur directeur de Δ.
On appelle vissage d'axe $\Delta_{\vec{u}}$, d'angle θ et de vecteur $\vec{v}$, l'isométrie f de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ définie par $f = t \circ r$, où r est la rotation d'axe $\Delta_{\vec{u}}$ et d'angle θ et t la translation de vecteur $\vec{v}$.
L'espace $\mathscr{E}$ étant muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère l'application f dans $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ qui, à tout point M de coordonnées (x, y, z), associe le point M' de coordonnées (x', y', z') définies par :

$$\begin{cases} x' = -z + 1 \\ y' = -x \\ z' = y - 2. \end{cases}$$

1° Montrer que f est une isométrie. Déterminer l'ensemble des points fixes de f.
2° On se propose de montrer que f est un vissage. Si tel est le cas, on désigne par Δ le support de l'axe de f, par $\vec{v}$ le vecteur de f et par (a, b, c) les coordonnées de $\vec{v}$.
a) Dans l'hypothèse où f est un vissage, démontrer que la restriction de f à Δ est la translation de vecteur $\vec{v}$.
b) Le vecteur $\vec{v}$ est un vecteur de Δ. Soit M_0 un point de Δ de coordonnées (x_0, y_0, z_0); un système d'équations paramétriques de Δ est alors :

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda c. \end{cases}$$

En utilisant la question *a)*, montrer que, quel que soit λ :

$$\begin{cases} x_0 + \lambda a + a = -(z_0 + \lambda c) + 1 \\ y_0 + \lambda b + b = -(x_0 + \lambda a) \\ z_0 + \lambda c + c = y_0 + \lambda b - 2. \end{cases}$$

En déduire un système (S) de six équations à six inconnues a, b, c, x_0, y_0, z_0. (On utilisera la propriété suivante : α et β étant deux réels, si l'égalité $\alpha m + \beta = 0$ est vérifiée quel que soit le réel m, alors $\alpha = \beta = 0$.)
Calculer a, b, c.
3° Soit t la translation de vecteur $\vec{v}$. Démontrer que l'application $g = t^{-1} \circ f$ est une rotation donc l'axe a la même direction que $\vec{v}$. Conclure.
4° Utiliser la méthode précédente pour montrer que l'application de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$, définie analytiquement par :

$$\begin{cases} x' = y + 3 \\ y' = x - 2 \\ z' = -z, \end{cases}$$

est un vissage dont on déterminera l'axe et le vecteur.

Imprimé en France par Hérissey à Évreux — N° 42547