



Décllic T^{le}

Maths

COMPLÉMENTAIRES

Programme 2020

Pour s'entraîner et réviser :

- ▶ Vidéos de cours
- ▶ Rappels de Seconde et Première avec des exercices interactifs

Accès libre :

Mon manuel toujours accessible en ligne sur mesmanuels.fr/4606019



Manuel numérique



Plateforme d'exercices

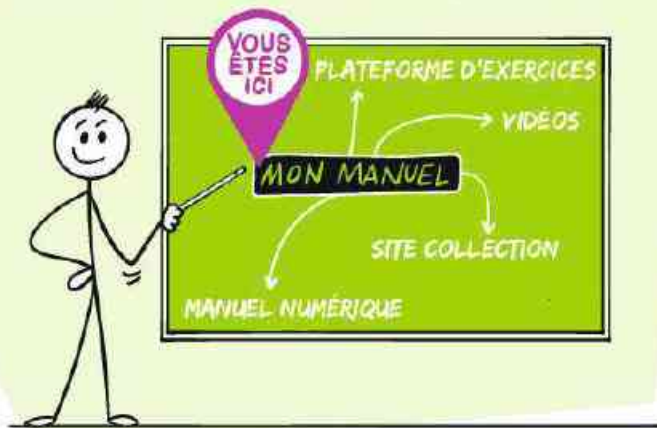


Ressources numériques



hachette
ÉDUCATION

JE DÉCOUVRE MON DÉCLIC



1 JE REVOIS MON COURS



L'ESSENTIEL
DU COURS
EN FICHES



JE TESTE MA
CONNAISSANCE
DU COURS
EXISTE
EN VERSION
INTERACTIVE
ET CORRIGÉE



COURS/MÉTHODE
LE COMBO 100% DÉCLIC

L'ORIGINAL



JE VAIS
ME DÉGOURDIR
LA MÉMOIRE



2 J'APPRENDS...



À
CHERCHER



DÉVELOPPER
DES
COMPÉTENCES



À
MODÉLISER

DES PAGES CENTRÉES SUR UN TRAVAIL DE RECHERCHE OU DE MODÉLISATION, AVEC DES ÉNONCÉS GUIDÉS PERMETTANT DE S'APPROPRIER PAS À PAS UN PROBLÈME CONSISTANT

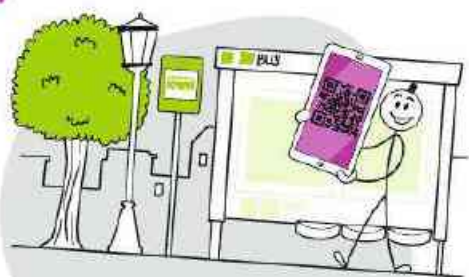
5 JE VOYAGE DANS LE TEMPS

LES GRANDS NOMS QUI ONT FAIT AVANCER LES MATHÉMATIQUES



DANS LES RABATS
 → 26 MATHÉMATICIEN(NE)S AVEC DES ANECDOTES, EN LIEN AVEC LE PROGRAMME DE TERMINALE
 → UNE FRISE CHRONOLOGIQUE

4 JE TRAVAILLE OÙ JE VEUX



QR CODE À FLASHER POUR RÉVISER MON COURS SUR MON TÉLÉPHONE AVEC LES VIDÉOS

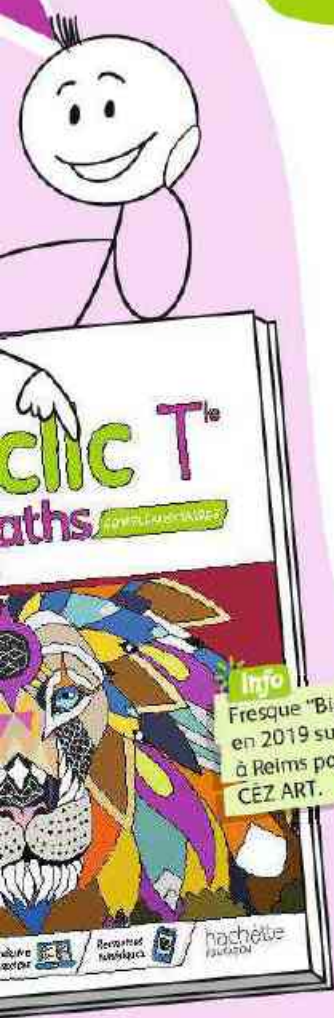
OU SUR LE SITE WWW.LYCEE.HACHETTE-EDUCATION.COM/DECLIC/TLE-COMPL



POUR TRAVAILLER SUR UN ORDI

ICI J'ACCÈDE AU SITE DECLIC

UNE PLATEFORME D'EXERCICES DE RÉVISION DE 2^{DE} ET 1^{RE} SUR [HTTPS://DECLIC.REUSSIRENMATHS.FR/TLE-COMPL](https://DECLIC.REUSSIRENMATHS.FR/TLE-COMPL)



Info Fresque "Biggy Lion" peinte en 2019 sur le mur d'un hôtel à Reims par l'artiste français CÉZ ART.

3 JE FAIS DES MATHS EN SITUATION

EN ÉCONOMIE

EN SCIENCES PHYSIQUES, CHIMIQUES, BIOLOGIQUES

EN DÉMOGRAPHIE

EN MÉDECINE



EN INFORMATIQUE, AÉRONAUTIQUE, LOGISTIQUE, MARKETING, ÉCOLOGIE, ÉLECTRICITÉ, SOCIOLOGIE, MÉCANIQUE, PHYSIQUE, ASTRONOMIE, MÉTÉOROLOGIE, ...



Décllic T^{le} Maths COMPLÉMENTAIRES

Jean-Paul Beltramone

Frédéric Boure

Céline Decarnin

Fabien Frontini

Aurélie Huillery-Perrin

Frédéric Léon

Claudine Merdy

Conception et réalisation des vidéos

Geoffroy Laboudigue

hachette
ÉDUCATION

Les auteurs remercient Ludovic Adamcik, Françoise Chaix-Tholozan, Odile Chazalviel, Fabrice Perrin, Yann Tholozan pour la qualité et la pertinence de leur contribution.

Les éditeurs tiennent à remercier les nombreux enseignants qui, par leurs avis exprimés lors de tables rondes ou de rencontres avec nos délégués pédagogiques dans les différentes académies, nous ont aidés à élaborer cet ouvrage.

Crédits photographiques

Couverture © "Biggy Lion" Cez Art ; **Plat III A**, © Mitrofanov Alexander/Shutterstock ; **B**, © Wikimedia ; **C**, © Emma Castelnovo ; **D**, © Wikimedia ; **E**, © Wikimedia ; **F**, © Académie des Sciences ; **W**, © Wikimedia ; **G**, © Getty Images ; **H**, © Caspar Netscher/Wikimedia ; **I**, © K.Itô's family ; **J**, © Le Paris de Poupie ; **K**, © Photo12/Alamy ; **L**, © Gallica ; **M**, © Héritage Images/Fine Art Images/akg-images ; **N**, © Photo12/Alamy/FLHC61 ; **O**, © Photo12/Alamy ; **Plat IV P**, © Wikimedia ; **Q**, © Photo12/Alamy/Geoff A. Howard ; **R**, © Wikipedia & Pinterest ; **S**, © Eddie Hausner/The NYTimes ; **T**, © JOCEFR ; **U**, © JOCEFR ; **V**, © Dr.Manuel at German/Wikimedia ; **W**, © RAMA/Wikimedia ; **X**, © Wikimedia ; **Y**, © Université Paris Sud ; **Z**, © MFO ; **6** © AFP ; **16** © steamroller_blues/Shutterstock ; **27** © Everett Historical/Shutterstock ; **30 h**, © AFP ; **b**, © Gqira/Shutterstock ; **33 g**, © juliewatsonphotography/Shutterstock ; **d**, © Potapov Alexander/Shutterstock ; **36** © Mariia Aleksandrova/Shutterstock ; **39 h**, © Photo12/Héritage Images/Fine Art Images ; **b**, © Imagno/La Collection ; **41** © Vaclav Volrab/Shutterstock ; **45** © Federico Rostagno/Shutterstock ; **47** © beerkoff/Shutterstock ; **55** © stockstation/Shutterstock ; **57** © Krasowit/Shutterstock ; **58 g**, © Arunee Rodloy/Shutterstock ; **d**, © Finalstock/Shutterstock ; **60** © Prostock-studio/Shutterstock ; **61** © S_E/Shutterstock ; **62** © Kuttelvaserova Stuchelova/Shutterstock ; **63 h**, © Mariia Aleksandrova/Shutterstock ; **b**, © Brett Hondaw/Shutterstock ; **64** © Nikolay Litov/Shutterstock ; **65** © Coatesy/Shutterstock ; **66** © Tim de Waele/Getty Images ; **68** © Piotr Piatrowski/Shutterstock ; **69 h**, © Photo12/Héritage Images/Fine Art Images ; **b**, © Photo12/Alamy/Sciences History Images ; **86** © Alexandar/Shutterstock ; **87** © paulzhuk/Shutterstock ; **89** © Africa Studio/Shutterstock ; **90 g**, © Ivan Majtan/Shutterstock ; **d**, © Serg54/Shutterstock ; **91** © arizampi/Shutterstock ; **92** © Christian Guéry ; **93** © Tim de Waele/Getty Images ; **98** © Frank Kuschmier/Shutterstock ; **116** © Kichigin/Shutterstock ; **117** © Creative Travel Projects/Shutterstock ; **118** © Yann Guichoua/Getty Images ; **119** © Artothek/La Collection ; **120 h**, © De Agostini Picture Library/Bridgeman ; **b**, © Aristo ; **1221**, © KREML/Shutterstock ; **2**, © Ryan DeBerardinis/Shutterstock ; **3**, © ikrame kekoura/Shutterstock ; **4**, © Jrimages/Shutterstock ; **125 1**, © Red_Shadow/Shutterstock ; **2**, © salajeon/Shutterstock ; **3**, © Maridav/Shutterstock ; **4**, © JeanLucIcard/Shutterstock ; **5**, © Syda Productions/Shutterstock ; **6**, © Roman Samborskyi/Shutterstock ; **126** © Bertrand Rieger/Hemis ; **145** © Neiryf/Shutterstock ; **148** © Bertrand Rieger/Hemis ; **149 h**, © Collection privée de Pascal Crosnier ; **b**, © PICADORPICTURES/Shutterstock ; **150** © Rob Hainer/Shutterstock ; **152** © Pina/REDUX-REA ; **159** © Proxima Studio/Shutterstock ; **167** © Insee ; **168** © Pina/REDUX-REA ; **169** © imtmphoto/Shutterstock ; **170** © Carole Castelli/Shutterstock ; **174** © Photo12/Alamy/Classic Image ; **176** © Gearst/Shutterstock ; **177 h.g**, © Wikimedia ; **h.d**, © Photo12/Héritage Images/Fine Art Images ; **b**, © angellodeco/Shutterstock ; **179 h**, © Singkham/Shutterstock ; **b**, © Phavoir/Shutterstock ; **181** © Evara/Shutterstock ; **186** © Ksenia Merenkova/Shutterstock ; **188** © Peakstock/Shutterstock ; **189** © WoodysPhotos/Shutterstock ; **191** © "A nice comment from Richard" Enkeling ; **193 h**, © Texelart/Shutterstock ; **b**, © cl.cam.ac.uk ; **194** © yashi0511/Shutterstock ; **195 h**, © Fédération Française de Cardiologie ; **b.g** et **b.d**, © HitTaon/Shutterstock ; **b.m**, © vector.person4/Shutterstock ; **196** © Margus Vilbas/Shutterstock ; **196** © Imagno/La Collection ; **199** © jvinasd/Shutterstock ; **205** © rafik beshay/Shutterstock ; **207** © welcomia/Shutterstock ; **214** © Planar/Shutterstock ; **220** © EFS ; **221 h**, © Margus Vilbas/Shutterstock ; **b**, © Imagno/La Collection ; **222** © Nathan AlliardPhototonstop ; **225** © TK Kurikawa/Shutterstock ; **226** © art_of_sun/Shutterstock ; **228** © Mangostar/Shutterstock ; **229** © Anton Starikov/Shutterstock ; **231** © GaudiLab/Shutterstock ; **235** © LightField Studios/Shutterstock ; **243** © RossHelen/Shutterstock ; **244** © Syda Productions/Shutterstock ; **245** © "Agoralude" et "Jura Buis" ; **248** © Phavoir/Shutterstock ; **250** © Elizaveta Galitkaia/Shutterstock ; **251** © art_of_sun/Shutterstock ; **252** © The Granger Collection New York & Collection Christophel ; **253** © Granger/Bridgeman ; **254** © Antoine Tavenaux ; **256** © Volodymyr Krasyuk/Shutterstock ; **258** © Hipotronics ; **259 h**, © Wikimedia ; **b**, © Collections historiques du Service Régional d'Identité Judiciaire de Paris/Jebulon/Wikimedia ; **261** © Stockvision/Shutterstock ; **263** © INED ; **270** © kaband/Shutterstock ; **271** © 3dmask/Shutterstock ; **272 h**, © Pokemon ; **b**, © JETACOM AUTOFOCUS/Shutterstock ; **273** © Brendan Smialowski/AFP ; **274** © Rawpixel.com/Shutterstock ; **275** © KuLouKu/Shutterstock ; **278 h**, © Volodymyr Krasyuk/Shutterstock ; **b**, © Sergey Kohl/Shutterstock ; **280** © Triff/Shutterstock ;

Édition : Corinne Lafont

Relecture orthographique et typographique : Florence Renout

Couverture et rabat avant : Gabriel Rebufello

Maquette intérieure : ADN

Mise en page : STDI

Schémas : STDI

Recherches iconographiques : Michèle Kerneis

Fabrication : Miren Zapirain



hachette s'engage pour l'environnement en réduisant l'empreinte carbone de ses livres. Celle de cet exemplaire est de : **1400 g éq. CO₂**
Rendez-vous sur www.hachette-durable.fr

© Hachette Livre 2020, 58 rue Jean Bleuzen 92170 Vanves

www.hachette-education.com

ISBN 978-2-0178-6615-2

ISBN à utiliser pour toute commande de l'ouvrage

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés pour tous pays.

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes des articles L.122-4 et L.122-5, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et, d'autre part, que « les analyses et les courtes citations » dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite ». Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, sans autorisation de l'éditeur ou du Centre français de droit de copie (20, rue des Grands-Augustins – 75006 Paris), constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par l'article L.335-2 du Code de la propriété intellectuelle.

Le programme de l'option « mathématiques complémentaires » en classe de Terminale présente une originalité forte : il est décliné en « thèmes d'étude » à l'intérieur desquels sont définis des « contenus associés ».

Afin de respecter au mieux l'esprit de ce programme, les auteurs du présent manuel ont choisi de le structurer selon dix grands thèmes, qui respectent strictement ceux définis par le programme officiel. Pour éviter un bloc trop volumineux, le thème « modèles d'évolution » proposé par le programme a toutefois été scindé en deux, selon que la modélisation choisie est discrète ou continue.

Un soin tout particulier a été par ailleurs porté aux « problèmes possibles » proposés par le programme dans les différents thèmes d'étude. Ils sont tous abordés sans exception, pour permettre au professeur de choisir ceux qu'il souhaite traiter parmi une palette de problèmes la plus large possible.

Résolument tourné vers la modélisation, ce manuel propose par ailleurs de nombreuses occasions de la pratiquer : activités en situation en début de thème, mais également pages « Maths en situation » en fin de thème, qui sont l'occasion de traiter les problèmes suggérés par le programme, et d'autres encore, dans divers champs disciplinaires.

Avec ce manuel de Terminale option « mathématiques complémentaires », la collection « Dédic » souhaite permettre aux élèves et à leurs professeurs de bénéficier d'un instrument de travail accessible, agréable à utiliser, qui donne des mathématiques un panorama large et motivant.

L'activité mathématique est le fil conducteur de l'ouvrage, à travers la résolution de problèmes, l'acquisition de méthodes, le travail du raisonnement, l'exercice des automatismes, l'approche algorithmique, ...

La plus grande attention a été portée à certains aspects mis en évidence dans le rapport « 21 mesures pour l'enseignement des mathématiques », synthèse des travaux de la commission pilotée par Cédric Villani et Charles Torossian.

Le cours a été conçu avec le souci de clarté, de la rigueur et de l'accessibilité. Il est éclairé de nombreux exemples.

La place de la preuve est réaffirmée, et confortée par de nombreuses démonstrations proposées en particulier dans les exercices.

Le travail du calcul et des automatismes est abordé de façon systématique, dans les activités et exercices proposés, mais aussi avec une page dédiée dans chaque thème, destinée à exercer la pratique régulière des automatismes et leur réinvestissement fréquent.

Le développement des compétences « représenter » et « modéliser », singulièrement importantes pour les élèves ayant choisi cette option « mathématiques complémentaires », est travaillé de façon particulière et bénéficie, entre autres, d'une page dédiée par thème.

L'exploitation des outils numériques est présente dans l'ensemble du manuel, et bénéficie dans chaque thème d'une page de travaux pratiques.

La démarche algorithmique est régulièrement mobilisée.

Les rubriques habituelles à la collection sont par ailleurs largement maintenues, dans l'objectif de permettre aux élèves de mener des travaux de recherche, mais aussi de s'autoévaluer, de trouver dans leur manuel des ressources détaillées concernant méthodes et démarches, de disposer de bilans de positionnement, de réfléchir à l'approche orale pour présenter certains résultats... L'exercice de l'autonomie des élèves est également régulièrement mobilisé, avec des rubriques « méthodes », des pages de synthèse de cours, des aides méthodologiques ...

Les auteurs souhaitent que le manuel qu'ils ont conçu soit un outil efficace et motivant pour les élèves et leurs professeurs, leur permettant d'apprécier tout au long de l'année scolaire la richesse et la variété de l'activité mathématique.

Les Auteurs

Sommaire des thèmes

1 Modèles définis par une fonction .. 6

1. Dérivation et applications 10
2. Fonctions continues..... 12
3. Étude de la convexité d'une fonction..... 14

Maths en situation 30

- En économie : Coût total, coût moyen, coût marginal. Rythme de production et rendements.
- En décoration : Le triskel.
- En sociologie : Modélisation d'un phénomène de société.
- En dynamique des populations : Modèle de Verlhust continu.
- En biologie : Modèles de croissance végétale.
- En géométrie : Optimisations de volumes.

2 Évolution : modèles discrets..... 36

1. Généralités sur les suites..... 40
2. Limite d'une suite..... 42
3. Limites et inégalités..... 44
4. Suites arithmético-géométriques..... 46

Maths en situation 60

- En économie : Évolution d'un capital. Amortissement d'une dette.
- En thermodynamique : Loi de refroidissement de Newton.
- En dynamique des populations : Modèle de Malthus, Modèle de Verlhust discrétisé.
- En démographie : Population mondiale.
- En écologie : Modèle proies/prédateurs discrétisé.

3 Évolution : modèles continus..... 66

1. Limite d'une fonction..... 70
2. Équation différentielle, primitives..... 72
3. Équation différentielle $y' = ay + b$ 74

Maths en situation 90

- En électricité : Décharge d'un condensateur.
- En thermodynamique : Loi de refroidissement de Newton (modèle continu).
- En physique nucléaire : Décroissance radioactive.
- En mécanique : Chute d'une bille dans un fluide visqueux.
- En microbiologie : Modèle de Verlhust continu (population de bactéries).
- En démographie : Modèle de Verlhust continu (population belge). Évolution du nombre de centenaires.
- En analyse : Problème des sous-tangentes constantes. Équation fonctionnelle.
- En sociologie : Évolution du nombre de SMS envoyés en France.
- En économie : PIB de la Chine.

4 Approche historique de la fonction logarithme 98

1. La fonction logarithme népérien..... 102
2. Étude de la fonction logarithme..... 104
3. Propriétés algébriques..... 106

Maths en situation 120

- En histoire des sciences : Table des logarithmes. Problème des sous-tangentes constantes. La quadrature de l'hyperbole.
- En démographie : Croissance d'une population.
- En économie : Fonction de satisfaction. Remboursement d'un prêt. Offre, demande et prix d'équilibre.
- En sismologie : échelle de Richter.

5 Calculs d'aires 126

1. Intégrale d'une fonction continue et positive..... 130
2. Cas général..... 132
3. Calculs d'aires – Méthode des rectangles..... 134

Maths en situation 146

- En science : Surface minimale. Point d'équilibre.
- En marketing : Problème de partage.
- En médecine : Circulation et pression sanguine. Pharmacocinétique.
- En ingénierie : Contrainte et résistance.
- En logistique : Volume d'un tonneau.

6 Répartition des richesses, inégalités 152

1. Des outils statistiques..... 156
2. Des outils issus de l'analyse..... 158

Maths en situation 168

- En économie : Riches, pauvres, classe moyenne. Place de la France dans la zone euro. Répartition de surfaces.
- En sociologie : Niveau de vie. Indice de développement.

7 Inférence bayésienne..... 174

1. Probabilité conditionnelle et arbre..... 178
2. Inversement du conditionnement..... 180
3. Rappels sur l'indépendance..... 180

Maths en situation 190

- En médecine : Tests diagnostiques.
- En informatique : Filtrage anti-spam.
- En épidémiologie : modèle « SIR ».
- En probabilités : Jeu d'argent.
- En économie : Concurrence et modèle des urnes de Pólya.

| | |
|--|------------|
| 8 Expériences répétées, échantillonnage | 196 |
| 1. Loi uniforme discrète | 200 |
| 2. Épreuve et loi de Bernoulli | 200 |
| 3. Schéma de Bernoulli..... | 202 |
| 4. Loi binomiale | 204 |
| 5. Échantillonnage et estimation..... | 206 |
| Maths en situation | 220 |

- En santé publique : Test de dépistage
- En droit : Analyse graphologique.
- En fiscalité : Fraude et optimisation.
- En physique : Radioactivité.
- En sociologie : Méthodologie de certains sondages.

| | |
|---|------------|
| 9 Temps d'attente | 226 |
| 1. Loi géométrique | 230 |
| 2. Lois continues à densité | 232 |
| 3. Loi uniforme continue sur $[a; b]$ | 234 |
| 4. Loi exponentielle..... | 236 |
| Maths en situation | 250 |

- Dans la vie quotidienne : Problème du collectionneur.
- En physique : Désintégration radioactive. Demi-vie d'un échantillon radioactif.
- En probabilités : Problème de rencontres.
- En théorie des jeux : Paradoxe de Saint Pétersbourg.

| | |
|---|------------|
| 10 Corrélation et causalité | 256 |
| 1. Statistiques à deux variables | 260 |
| 2. Ajustement affine | 262 |
| 3. Ajustement et changement de variable | 264 |
| Maths en situation | 276 |

- En démographie : Choix d'un modèle d'évolution.
- En écologie : Réchauffement climatique.
- En biologie : Masse du cerveau des mammifères.
- En informatique : Loi de Moore.
- En aéronautique : Vol en impesanteur.
- En astronomie : Loi de Hubble.
- En thermodynamique : Pression de vapeur saturante.
- En économie : Évolution du PIB.

| | |
|-------------------------------------|------------|
| Programme officiel | 282 |
| Pages calculatrices | 288 |
| Corrigés des exercices | 294 |

Livret élève

- vocabulaire ensembliste et logique
- formulaire
- tableau récapitulatif pour l'écriture d'un programme



sur le site collection :
lycee.hachette-education.com/declic/tle-compl

Plateforme Déclic

Exercices interactifs de révision de 2^{de} et 1^{re}
<https://declic.reussirenmaths.fr/tle-compl>

| Thème | Chapitre de 2 ^{de} | Chapitre de 1 ^{re} |
|-------|-----------------------------|-----------------------------|
| 1 | 4 et 6 | 2, 4 et 6 |
| 2 | 3 et 7 | 5 |
| 3 | 3, 4, 5 et 6 | 1, 2, 3, 4, 5 et 6 |
| 4 | / | 2, 4, 5 et 6 |
| 5 | 1, 2, 4, 5 et 6 | 2, 3, 4, 5 et 6 |
| 6 | 7 | 4 et 6 |
| 7 | 8 | 7 |
| 8 | 8 et 9 | 7 |
| 9 | 8 | 8 |
| 10 | 6 et 7 | 4 et 6 |

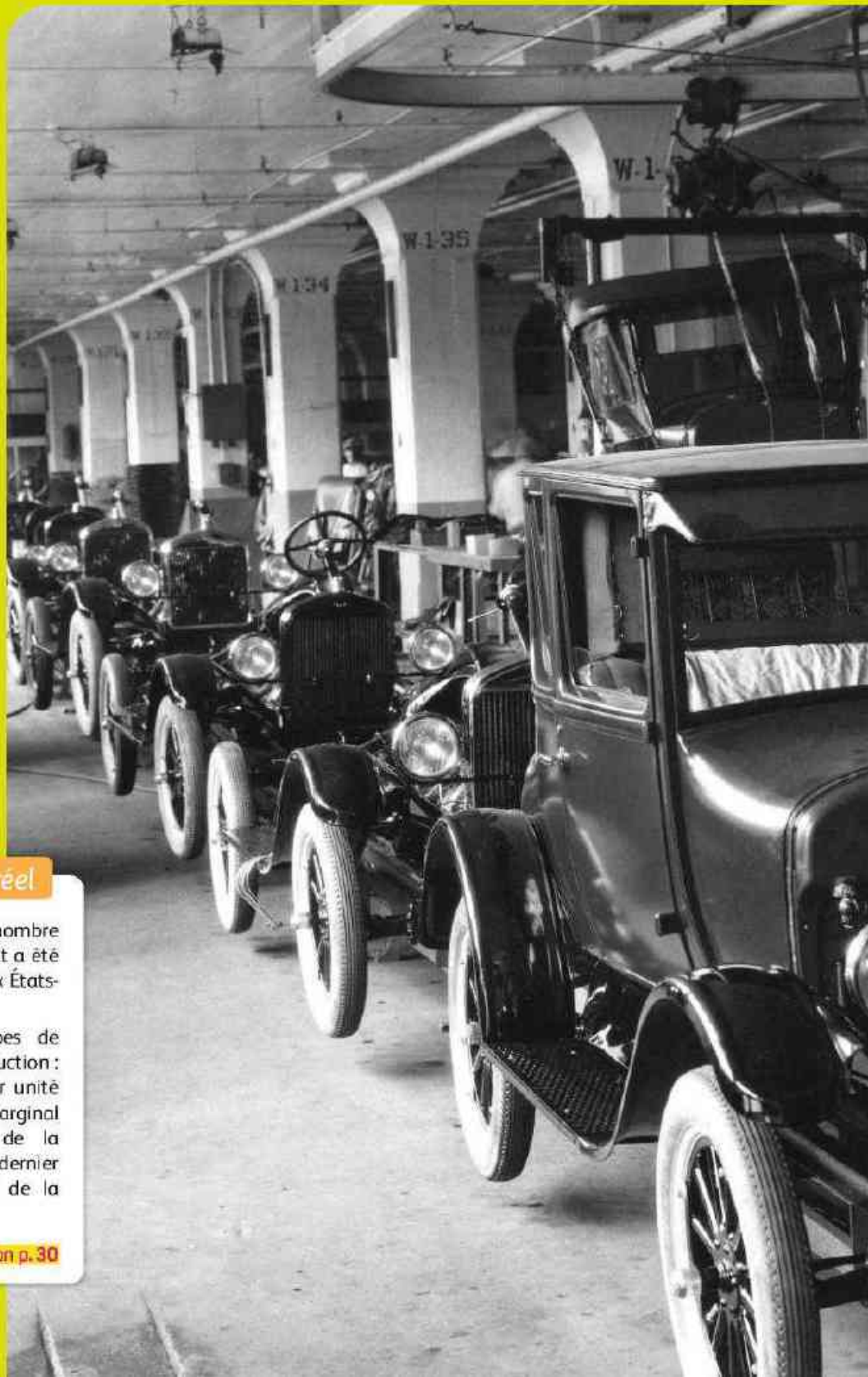
Les pictogrammes

- TABLEUR** Feuille de calcul sur tableur nécessaire
- PYTHON** Exercice avec programmation Python
- PYTHON** Exercice avec rédaction d'un programme Python
- ALGO** Exercice avec rédaction d'algorithme
- Exercice nécessitant l'ordinateur
- Exercice nécessitant la calculatrice
- Calculatrice non autorisée
- 1** Exercice corrigé en fin de manuel
- Démo**
1 Exercice avec démonstration
- ACTIVITÉS MENTALES RAPIDES**
 - Diaporama pour tester les bases
 - Diaporamas pour faire le point sur le cours

Modèles définis par une fonction

Les capacités du thème

- 1 Calculer une fonction dérivée
- 2 Dresser et exploiter un tableau de variations
- 3 Déterminer des valeurs approchées des solutions d'une équation du type $f(x) = k$
- 4 Reconnaître graphiquement la convexité, la concavité d'une fonction, un point d'inflexion
- 5 Étudier la convexité, la concavité d'une fonction deux fois dérivable sur un intervalle



Modélisation du réel

La fabrication en grand nombre d'unités d'un même produit a été initiée par Ford en 1908 aux États-Unis, avec la Ford T.

On définit différents types de coûts pour étudier une production : coût total, coût moyen par unité produite, ou encore coût marginal correspondant au coût de la dernière unité produite. Ce dernier est assimilé à la dérivée de la fonction coût total.

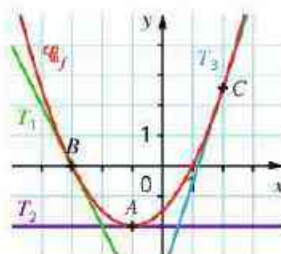
 Voir Maths en situation p. 30

A Diaporama pour tester les bases



B Lecture graphique

On considère une fonction f définie sur \mathbb{R} , dont la courbe \mathcal{C}_f est donnée ci-contre. Les droites T_1 , T_2 et T_3 sont les tangentes à \mathcal{C}_f aux points d'abscisses -3 ; -1 et 2 .



Justifier, par lecture graphique, si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. $f(0,5) = -2$
2. L'équation réduite de la tangente T_1 est $y = -2$.
3. $f'(-3) = 0$ 4. $f'(2) = 3$ 5. $f'(0,5) > 0$
6. $-1,5$ est une solution de l'équation $f(x) = 0$.
7. L'équation $f(x) = -3$ n'admet pas de solution.
8. Le tableau de signes de f est :

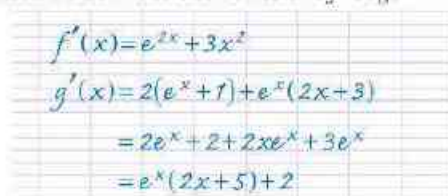
| | | | |
|--------|-----------|------|-----------|
| x | $-\infty$ | -1 | $+\infty$ |
| $f(x)$ | $-$ | 0 | $+$ |

C Calcul de fonctions dérivées

1. Soient f et g les fonctions définies sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = e^{2x} + x^3 - 5x \text{ et } g(x) = (2x+3)e^x + 1$$

Voici la copie d'un élève répondant à la question : « Déterminer les fonctions dérivées des fonctions f et g . »



Repérer, expliquer puis corriger les erreurs commises.

2. Démontrer le résultat obtenu à l'aide d'un logiciel de calcul formel à la ligne 2.

| | |
|---|---------------------------------------|
| 1 | $h(x) := (x^2 - 3) \cdot \exp(x) + 1$ |
| 2 | Factoriser(Dérivée(h(x))) |
| | $\rightarrow e^x(x-1)(x+3)$ |

D Étudier le signe d'une fonction

1. Parmi les fonctions suivantes, indiquer celles pour lesquelles l'étude de signe est immédiate et ne nécessite aucun calcul.

- | | |
|--------------------------|-------------------------|
| a. $f(x) = e^x + 6x^2$ | b. $f(x) = (x+1)e^x$ |
| c. $f(x) = e^x - 4$ | d. $f(x) = 4e^{-x} + 5$ |
| e. $f(x) = -x^2 - 5$ | f. $f(x) = xe^x$ |
| g. $f(x) = x^2 + 3x + 1$ | h. $f(x) = x^2 + x + 1$ |

2. En utilisant un tableau de signes, étudier le signe des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition.

- | | |
|---|-----------------------------|
| a. $f(x) = \frac{2x^2 - 4x - 6}{(x-2)^2}$ | b. $g(x) = (2x-3)(e^x - 1)$ |
|---|-----------------------------|



Ressources en +
sur le site collection :
lycee.hachette-
education.com/declic/
tle-comp



Consolider les bases

1 Débat : positive ou croissante ? négative ou décroissante ? les deux ?
Soit f une fonction définie et dérivable sur \mathbb{R} , on note f' sa fonction dérivée et I un intervalle de \mathbb{R} . Voici trois affirmations.

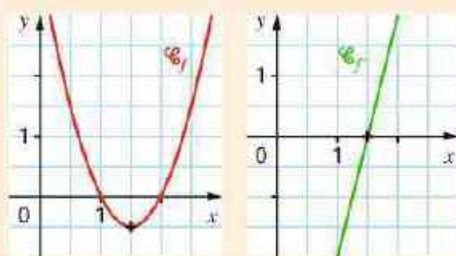
① Si f est négative sur I alors f' est décroissante sur I .

② Si f' est croissante sur I alors f est positive sur I .

③ Si f est croissante sur I alors f' est positive sur I .

On donne ci-contre la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur \mathbb{R} ainsi que celle de sa fonction dérivée f' .

En utilisant les courbes proposées, infirmer ou confirmer chacune des trois affirmations.



2 Soit f la fonction définie sur $[-3; 1]$ par $f(x) = (2x - 1)e^x$.

Justifier tous les éléments contenus dans les deux tableaux suivants.

| | | | |
|----------------------|------------|--------------|-----|
| x | -3 | -0,5 | 1 |
| Signe de $f'(x)$ | - | 0 | + |
| Variations de $f(x)$ | $-7e^{-3}$ | $-2e^{-0,5}$ | e |

| | | | |
|-----------------|----|-----|---|
| x | -3 | 0,5 | 1 |
| Signe de $f(x)$ | - | 0 | + |

Objectif

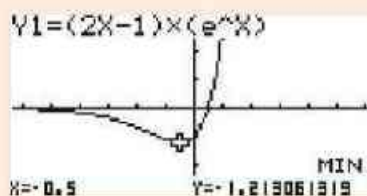
Redécouvrir le lien entre une fonction et sa dérivée. Étudier le signe et les variations d'une fonction.

Info

L'utilisation de la courbe représentative permet de se faire une **image mentale** des notions : « croissante » est associé à « la courbe monte », « positive » est associé à « la courbe est au-dessus de l'axe des abscisses ».

Il faut savoir utiliser sa calculatrice pour guider la recherche.

| X | Y1 |
|------|--------|
| -1 | -1,103 |
| -0,5 | -1,213 |
| 0 | -1 |
| 0,5 | 0 |



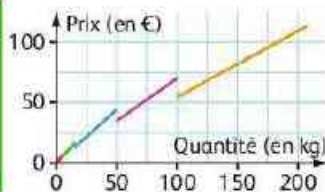
[Voir Pages calculatrices](#)

Situation 1 Modèle défini par une fonction

On s'intéresse à quatre situations de la vie courante.

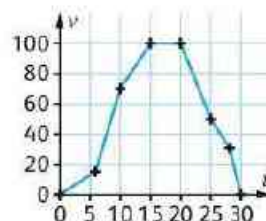
Situation ①

Pommes de Terre
de 1 à 5 kg 1€25 le kilo
+ 5 kg 1€10 le kilo
+ 15 kg 0€90 le kilo
+ 50 kg 0€70 le kilo
+ 100 kg 0€55 le kilo



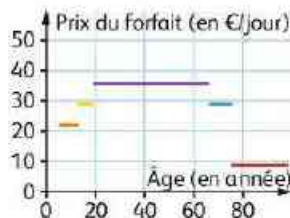
Situation ②

Au cours d'un voyage d'une durée de 30 minutes, on note la vitesse d'un véhicule (en km/h) en fonction du temps (en minute).



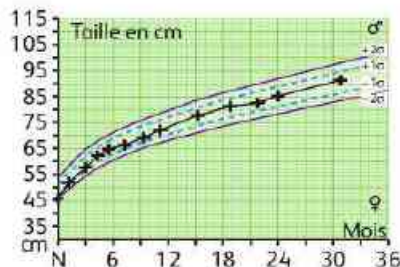
Situation ③

Forfait ski alpin 2019-2020
Adulte (de 1956 à 2001) 36 €
Jeune (de 2002 à 2007) 29,5 €
Enfant (de 2008 à 2014) 22,5 €
Sénior (de 1946 à 1955) 29,5 €
Sénior Plus (1945 et avant) 9 €



Situation ④

La maman de Théo note sa taille tous les mois depuis sa naissance.



Objectif

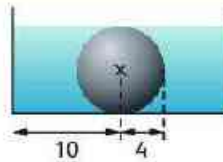
Découvrir la notion de continuité.

- Classer ces situations selon les caractéristiques de la courbe représentative de la fonction qui modélise la situation.
- Trouver d'autres situations de la « vie courante » pouvant être modélisées par une fonction et dont la courbe représentative aurait les mêmes critères de classement.

[Voir exercice n° 76 et TP Mener une recherche](#)

Situation 2 Une bille plongée dans l'eau

Dans un récipient cylindrique de rayon 10 cm, on place une bille de rayon 4 cm. On verse ensuite de l'eau jusqu'à recouvrir exactement la bille. Puis on retire la bille et on la remplace par une autre de rayon R (où R différent de 4).



Est-il possible que l'eau recouvre exactement cette nouvelle bille ?

- 1 a. Calculer le volume d'eau versé dans le récipient.
- b. En calculant de deux façons le volume « eau + bille », démontrer qu'une bille est solution du problème si son rayon x vérifie l'équation :

$$(E) : x^3 - 150x + 536 = 0$$

2 Résolution de l'équation (E)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3 - 150x + 536$.

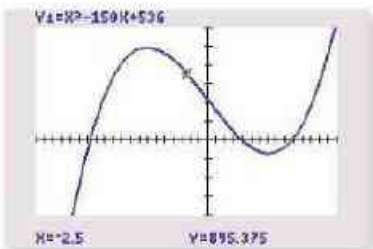
- a. Dresser le tableau de valeurs de la fonction f sur l'intervalle $[-14; 10]$ avec un pas de 2.
 - b. Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.
 - c. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet trois solutions dans \mathbb{R} .
- 3 a. À quel intervalle appartient le rayon R ?
 - b. Justifier que le problème admet une unique solution.
 - c. On a représenté ci-contre le tableau de valeurs de la fonction f sur l'intervalle $[0; 10]$ avec un pas de 1. Quel résultat retrouve-t-on pour $x = 4$? Justifier que la solution R est comprise entre 9 et 10.
 - d. Dresser le tableau de valeurs de la fonction f sur $[9; 10]$ avec un pas de 0,1. En déduire une valeur approchée du rayon R à 0,1 cm près.

Objectif

Introduire la propriété des valeurs intermédiaires.

Rappel

Le volume d'une boule de rayon R est $\frac{4}{3}\pi R^3$. Le volume d'un cylindre de hauteur h et de rayon de base r est $\pi r^2 h$.



| X | Y ₁ |
|----|----------------|
| 0 | 536 |
| 1 | 387 |
| 2 | 244 |
| 3 | 113 |
| 4 | 0 |
| 5 | -89 |
| 6 | -148 |
| 7 | -171 |
| 8 | -152 |
| 9 | -85 |
| 10 | 36 |

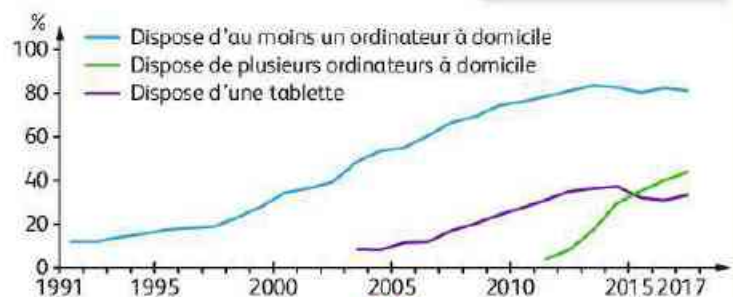
Situation 3 L'évolution du taux d'équipement en ordinateur

Le graphique ci-contre donne le taux d'équipement en ordinateur et en tablette en France de 1991 à 2017.

On admet que l'on peut modéliser le taux d'équipement en ordinateur à partir de 2003 par la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = 0,0006x^3 - 0,0162x^2 + 0,1504x + 0,3145$$

où x représente le nombre d'années depuis 2003.



Source : Credoc

1 Étude graphique

- a. Tracer la courbe représentative \mathcal{C}_f avec un logiciel de géométrie dynamique. Placer un point M mobile sur \mathcal{C}_f . Tracer la tangente T à \mathcal{C}_f en M .
- b. Visualiser la position de la courbe \mathcal{C}_f par rapport à sa tangente.
- c. Conjecturer une position de M pour laquelle la tangente est horizontale.

2 Étude algébrique

On note f' la fonction dérivée de f et f'' sa dérivée seconde.

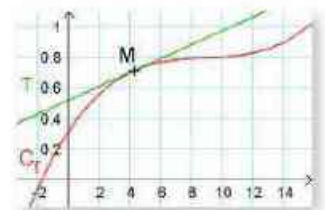
- a. Calculer $f'(x)$.
- b. Dresser le tableau de variations de f' .
- c. Quel(s) résultat(s) de la question 1 retrouve-t-on ?

3 Interprétation

Quelle influence semble avoir eu l'introduction des tablettes sur le marché sur l'évolution du taux d'équipement en ordinateur ?

Info

En 2018, le taux d'équipement en ordinateur est en baisse (78 %) et en tablette aussi (41 %). Le Smartphone est devenu l'équipement de référence, avec un taux d'équipement de 75 % en nette progression.



1 Dérivation et applications

a Formules de dérivation

On rappelle le formulaire suivant, valable sur les ensembles de définition.

| Fonction f | Dérivée f' | Fonction f | Dérivée f' |
|--------------------------------------|-------------------------------|------------------------------------|---|
| $f(x) = k$, avec k réel | $f'(x) = 0$ | Somme $u + v$ | $u' + v'$ |
| $f(x) = x$ | $f'(x) = 1$ | Produit $k \times u$, où k réel | $k \times u'$ |
| $f(x) = x^2$ | $f'(x) = 2x$ | Produit $u \times v$ | $u' \times v + u \times v'$ |
| $f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{N}$ | $f'(x) = nx^{n-1}$ | Inverse $\frac{1}{v}$ | $-\frac{v'}{v^2}$ |
| $f(x) = \frac{1}{x}$ | $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ | Quotient $\frac{u}{v}$ | $\frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$ |
| $f(x) = \sqrt{x}$ | $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ | | |
| $f(x) = e^x$ | $f'(x) = e^x$ | | |

Propriété Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I . La fonction u^2 définie sur I par $x \mapsto (u(x))^2$ est dérivable sur I et, pour tout réel x de I , on a : $(u^2)'(x) = 2 \times u'(x) \times u(x)$

↳ Voir exercice Démo n° 41

Remarque

On peut montrer de même que $(u^3)'(x) = 3 \times u'(x) \times u^2(x)$.

Propriété (admise) On considère un intervalle I et deux réels a et b .

Soit J l'intervalle formé des valeurs prises par $ax + b$ lorsque $x \in I$.

Si la fonction f est dérivable sur J , alors la fonction g définie sur I par $x \mapsto f(ax + b)$ est dérivable sur I et, pour tout réel x de I , on a :

$$g'(x) = a \times f'(ax + b)$$

Propriété (admise) Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I . La fonction e^u définie sur I par $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et, pour tout réel x de I , on a : $(e^u)'(x) = u'(x) \times e^{u(x)}$.

b Applications de la dérivation

Propriété (admise) On considère une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I .

- La fonction f est **croissante** sur I si, et seulement si, $f'(x) \geq 0$ sur I .
- La fonction f est **décroissante** sur I si, et seulement si, $f'(x) \leq 0$ sur I .
- La fonction f est **constante** sur I si, et seulement si, $f'(x) = 0$ sur I .

Définition - Propriété (admise) On considère une fonction f dérivable sur un intervalle I et a un réel de I .

La tangente à la courbe représentative \mathcal{C} de f au point $A(a; f(a))$ est la droite passant par A et de **coefficient directeur** $f'(a)$.

Elle admet pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Exemple

La fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = (4x + 1)^2$ peut s'écrire sous la forme $f(x) = (u(x))^2$, avec $u(x) = 4x + 1$. La fonction u est dérivable sur \mathbb{R} , $u'(x) = 4$.

La fonction f est donc dérivable sur \mathbb{R} et on a : $f'(x) = 2 \times 4 \times (4x + 1)$
 $f'(x) = 8(4x + 1)$

Exemple

Soit la fonction g définie sur $]2; +\infty[$ par : $g(x) = \sqrt{3x - 6}$.
 g est dérivable sur $]2; +\infty[$ et, pour tout $x > 2$:

$$g'(x) = 3 \times \frac{1}{2\sqrt{3x - 6}} = \frac{3}{2\sqrt{3x - 6}}$$

Info

Les deux dernières propriétés sont des cas particuliers de la dérivée de « fonctions composées ».

Exemple

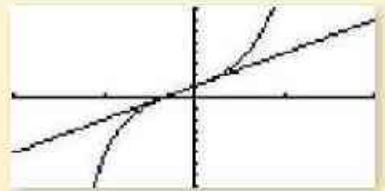
La fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{x^2}$ peut s'écrire sous la forme $f(x) = e^{u(x)}$, où $u(x) = x^2$. La fonction f est donc dérivable sur \mathbb{R} et on a, pour tout réel x :

$$f'(x) = 2x \times e^{x^2} = 2xe^{x^2}$$

Comme $e^{x^2} > 0$, on obtient le tableau de variations suivant pour f :

| | | | |
|---------|-----------|---|-----------|
| x | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | - | 0 | + |
| $f(x)$ | ↘ 1 ↗ | | |

Énoncé On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (3x+1)e^{x^2}$. On a tracé ci-contre \mathcal{C}_f sa courbe représentative ainsi que la tangente \mathcal{T} à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse 0.



- Calculer $f'(x)$.
- Étudier les variations de f .
- a. Déterminer l'équation réduite de la tangente \mathcal{T} .
- b. Étudier les positions relatives de la courbe \mathcal{C}_f et de la tangente \mathcal{T} .

Solution

1. La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} en tant que **produit** de fonctions dérivables sur \mathbb{R} . On a $f' = u'v + v'u$ avec $u(x) = 3x+1$ et $v(x) = e^{x^2}$. u est une fonction affine et $u'(x) = 3$; v est une composée avec **exponentielle** donc $v'(x) = 2x \times e^{x^2} = 2xe^{x^2}$.
Donc $f'(x) = 3 \times e^{x^2} + (3x+1) \times 2xe^{x^2} = e^{x^2}(3 + 2x(3x+1))$
 $f'(x) = e^{x^2}(6x^2 + 2x + 3)$

2. Pour étudier **les variations de f** , on doit **étudier le signe de $f'(x)$** . On sait que, pour tout réel x , $e^{x^2} > 0$. Donc $f'(x)$ est du signe du trinôme $6x^2 + 2x + 3$. On calcule le discriminant $\Delta = 2^2 - 4 \times 6 \times 3 = -68$. Ainsi, $\Delta < 0$, donc le trinôme est du signe du coefficient $a = 6$. On en déduit que, pour tout réel x : $6x^2 + 2x + 3 > 0$, et donc $f'(x) > 0$. La fonction f est donc **strictement croissante** sur \mathbb{R} .

3. a. La tangente \mathcal{T} admet pour équation $y = f'(0)(x-0) + f(0)$. Or $f'(0) = e^{0^2}(6 \times 0^2 + 2 \times 0 + 3) = 3$ et $f(0) = (3 \times 0 + 1)e^{0^2} = 1$. Ainsi \mathcal{T} admet pour équation: $y = 3(x-0) + 1 = 3x + 1$.

b. Pour tout réel x , on pose: $d(x) = f(x) - (3x+1)$. Autrement dit: $d(x) = (3x+1)e^{x^2} - (3x+1) = (3x+1)(e^{x^2} - 1)$

On étudie le signe de $d(x)$:

- $3x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{3}$
- $e^{x^2} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^{x^2} \geq 1$
 $\Leftrightarrow e^{x^2} \geq e^0 \Leftrightarrow x^2 \geq 0$

| | | | | |
|-------------|-----------|--------|-----|-----------|
| x | $-\infty$ | $-1/3$ | 0 | $+\infty$ |
| $3x+1$ | - | 0 | + | + |
| $e^{x^2}-1$ | + | + | 0 | + |
| $d(x)$ | - | 0 | + | + |

On en déduit que:

Sur $]-\infty; -\frac{1}{3}[$: $d(x) < 0$ donc la courbe \mathcal{C} est **en dessous** de \mathcal{T} .

Sur $]-\frac{1}{3}; +\infty[$: $d(x) \geq 0$ donc la courbe \mathcal{C} est **au-dessus** de \mathcal{T} .

$d\left(-\frac{1}{3}\right) = d(0) = 0$: \mathcal{C} et \mathcal{T} se coupent aux points d'abscisses $-\frac{1}{3}$ et 0 .

J'applique

- Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{x^2+x^2}$.
1. Dresser le tableau de variations de f .
2. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse -1 .

2 Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par:

$$f(x) = (x^3 - 1)^2, \text{ de courbe représentative } \mathcal{C}$$

Montrer que la courbe \mathcal{C} admet deux tangentes horizontales. Préciser en quelles abscisses.

3 Montrer que la fonction f définie sur $]-\infty; 3]$ par $f(x) = \sqrt{-3x+9}$ est monotone.

4 Soit h la fonction définie sur $I = [-2; 2]$ par:

$$h(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

1. Justifier que, pour tout $x \in I$, $h'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$.

2. Étudier le signe de $h'(x)$ puis dresser le tableau de variations de h sur $[-2; 2]$, en précisant les extrema.

Point méthode

1. Pour calculer la fonction dérivée de f , il faut bien **identifier la formule à utiliser**: produit, quotient, composée, exponentielle...

Point méthode

1. Un logiciel de calcul formel permet de vérifier ses résultats (ligne 3), mais aussi les étapes de calcul (formule du produit, ligne 2).

| | |
|---|--|
| 1 | $f(x) = (3x+1) \cdot \exp(x^2)$ |
| • | $\rightarrow f(x) := (3x+1) e^{(x^2)}$ |
| 2 | Dérivée(f(x)) |
| • | $\rightarrow 2x(3x+1)e^{(x^2)} + 3e^{(x^2)}$ |
| 3 | Factoriser(Dérivée(f(x))) |
| • | $\rightarrow e^{(x^2)}(6x^2 + 2x + 3)$ |

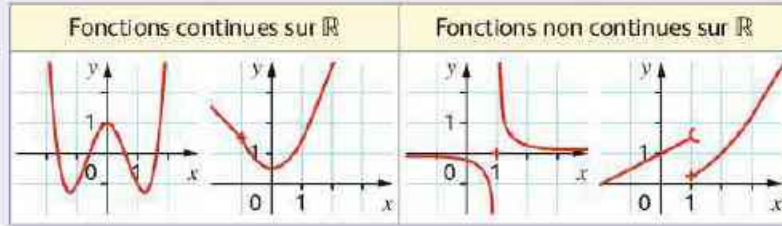
Point méthode

Il faut penser à vérifier la cohérence de ses réponses avec le graphique de l'énoncé (courbe, tangente...). Cependant, il ne faut pas s'en contenter pour conclure, car suivant la fenêtre d'affichage on ne « voit » pas toujours!

2 Fonctions continues

a Continuité d'une fonction

Définition Une fonction f définie sur un intervalle I est **continue** sur I si sa courbe représentative se trace d'un trait continu « sans lever le crayon ».



Propriété (admise) Toute fonction **dérivable** sur un intervalle est **continue** sur cet intervalle.

Remarque

La réciproque de cette propriété est fautive. La fonction racine carrée est continue sur $[0; +\infty[$, mais elle est dérivable seulement sur $]0; +\infty[$.

Conséquences Continuité des fonctions usuelles

- Les fonctions **polynômes** (affine, trinôme, cube...) sont continues sur \mathbb{R} .
- La fonction **inverse** est continue sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$.
- La fonction **exponentielle** est continue sur \mathbb{R} .

Remarque

Une fonction construite par opérations (somme, produit...) des fonctions usuelles est continue sur son ensemble de définition.

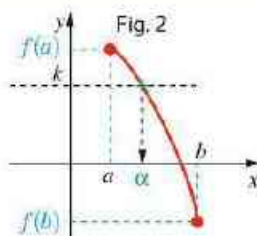
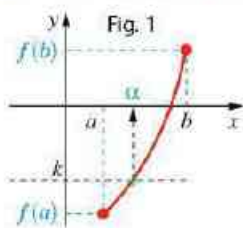
Convention Une flèche oblique dans un tableau de variations traduit la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré.

b Propriété des valeurs intermédiaires

Théorème (admis) Soit f une fonction définie et **continue** sur $[a; b]$. Pour tout nombre réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet **au moins une solution** dans l'intervalle $[a; b]$.

Conséquences Soit f une fonction définie, **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle $[a; b]$. (voir fig. 1 et 2 ci-dessous)

Pour tout nombre réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet **une solution unique** α dans l'intervalle $[a; b]$.

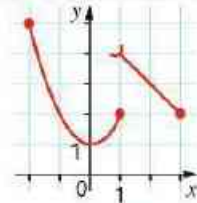


Cas particulier

Si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires alors l'équation $f(x) = 0$ admet **une solution unique** α dans l'intervalle $[a; b]$.

Exemple :

On donne la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-2; 3]$.



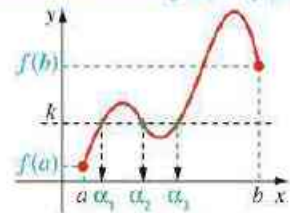
La fonction f est **continue** sur l'intervalle $[-2; 1]$, mais **pas** sur l'intervalle $[-2; 3]$. Sa courbe présente un **saut** en $x = 1$.

Exemple

La fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (2x+1)e^x$ est le produit de la fonction $x \mapsto 2x+1$ et de la fonction $x \mapsto e^x$, continues sur \mathbb{R} . La fonction f est donc continue sur \mathbb{R} .

Illustration graphique

La fonction f est **continue** sur $[a; b]$. Soit k un réel entre $f(a)$ et $f(b)$.



L'équation $f(x) = k$ admet **au moins une solution**. Ici, il y en a trois : α_1 , α_2 et α_3 .

Exemple

La fonction f admet le tableau de variations

| | | | |
|--------|-----|----------|---|
| x | 3 | α | 7 |
| $f(x)$ | -10 | 0 | 5 |

ci-contre. Sur $[3; 7]$, f est continue et strictement croissante. $f(3)$ et $f(7)$ sont de signes contraires, donc par la propriété des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α .

On en déduit le signe de la fonction f .

| | | | |
|--------|---|----------|---|
| x | 3 | α | 7 |
| $f(x)$ | - | 0 | + |

Déterminer des valeurs approchées des solutions d'une équation du type $f(x) = k$

Énoncé Soit la fonction f définie sur $[-1; 2]$ par $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 7$.

On admet le tableau de variations de f donné ci-contre.

| | | | |
|--------|----|---|---|
| x | -1 | 1 | 2 |
| $f(x)$ | 18 | 2 | 9 |

- Quel est le minimum de la fonction f sur $[-1; 2]$?
 - En déduire le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.
- Déterminer le nombre de solutions sur l'intervalle $[-1; 2]$ de l'équation $f(x) = 10$.
 - Déterminer, en utilisant la calculatrice, un encadrement au dixième de chacune des solutions.
- Reprendre la question 2. pour $f(x) = 5$.

Solution

1. a. D'après le tableau de variations, le minimum de f est égal à $f(1) = 2$.

b. On en déduit que, pour tout réel $x \in [-1; 2]$, on a $f(x) \geq 2$.

L'équation $f(x) = 0$ n'admet donc aucune solution dans $[-2; 1]$.

2. a. • Sur $[-1; 1]$, f est continue et strictement décroissante, à valeurs dans $[2; 18]$.

| | | | |
|--------|----|----------|---|
| x | -1 | α | 1 |
| $f(x)$ | 18 | 10 | 2 |

Or $10 \in [2; 18]$. Donc par la propriété des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 10$ admet une unique solution α dans $[-1; 1]$.

• Sur $[1; 2]$, le maximum de f est égal à 9, donc pour tout réel x de $[1; 2]$, on a $f(x) \leq 9$. L'équation $f(x) = 10$ n'admet donc pas de solution dans l'intervalle $[1; 2]$.

Donc sur $[-1; 2]$, l'équation $f(x) = 10$ admet une unique solution α .

b. Sur la calculatrice, on affiche un tableau de valeurs de la fonction f sur $[-1; 1]$ avec un pas de 0,1.

| X | Y1 |
|------|--------|
| -0.5 | 12.125 |
| -0.4 | 11.016 |
| -0.3 | 9.943 |
| -0.2 | 8.912 |

On a $f(-0,4) = 11,02$ et $f(-0,3) = 9,943$

$10 \in [f(-0,3); f(-0,4)]$, donc $-0,4 < \alpha < -0,3$.

3. Par un raisonnement analogue, on montre que 5 appartient à l'intervalle $[f(1); f(-1)]$ et à l'intervalle $[f(1); f(2)]$.

Donc l'équation $f(x) = 5$ admet deux solutions : la première β dans l'intervalle $[-1; 1]$ et la seconde γ dans l'intervalle $[1; 2]$.

| | | | | | |
|--------|----|---------|---|----------|---|
| x | -1 | β | 1 | γ | 2 |
| $f(x)$ | 18 | 5 | 2 | 5 | 9 |

À l'aide de la calculatrice, on obtient : $0,2 < \beta < 0,3$ et $1,6 < \gamma < 1,7$.

Point méthode

2. a. Sur chaque intervalle où la fonction est strictement monotone, on vérifie les hypothèses de la propriété des valeurs intermédiaires.

Celle-ci permet de localiser les solutions éventuelles, mais pas de donner leurs valeurs exactes.

Point méthode

2. b. Pour déterminer une valeur approchée, on procède par balayage à l'aide du tableau de valeurs de la calculatrice.

| Pour β : | | Pour γ : | |
|----------------|-------|-----------------|-------|
| X | Y1 | X | Y1 |
| 0.2 | 5.328 | 1.6 | 4.376 |
| 0.3 | 4.597 | 1.7 | 5.283 |
| 0.4 | 3.944 | 1.8 | 6.352 |

J'applique

5 Soit f la fonction définie sur $[-2; 2]$ par :

$$f(x) = x^3 - 0,5x^2 - 2x + 3$$

- Dresser le tableau de variations de la fonction f .
- Déterminer le nombre de solutions des équations suivantes : a. $f(x) = 3$ b. $f(x) = 1$ c. $f(x) = 6$

6 Soit g la fonction définie sur $[-3; 6]$ par :

$$g(x) = \frac{1}{3}x^3 - x - 8$$

- Dresser le tableau de variations de la fonction g .
- Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[-3; 6]$. Déterminer un encadrement de α au millièmes près.
- En déduire le tableau de signes de g sur $[-3; 6]$.

7 Soit f la fonction définie sur $[-2; 1]$ par :

$$f(x) = e^{3x} - 3x + 1$$

- Dresser le tableau de variations de la fonction f .
- Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 3$ sur l'intervalle $[-2; 1]$.
- Donner une valeur approchée au centième de chacune des solutions de l'équation $f(x) = 3$.

8 On donne ci-contre

le tableau de variations d'une fonction f . Déterminer, suivant la valeur du réel k , le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$.

| | | | |
|--------|----|----|---|
| x | -5 | 1 | 7 |
| $f(x)$ | 3 | -2 | 5 |


3 Étude de la convexité d'une fonction

On considère une fonction f dérivable sur un intervalle I .

a Fonction convexe, fonction concave

Définition La fonction f est **convexe** (resp. **concave**) sur l'intervalle I lorsque sa représentation graphique est située entièrement **au-dessus** (resp. **en dessous**) de chacune de ses tangentes.

Remarques

- La plupart des fonctions ne sont ni convexes ni concaves.
- Le panel des fonctions de référence permet de se faire une image mentale du graphique d'une fonction convexe (type exponentielle) ou concave (type racine carrée ou logarithmique). 

b Lien avec la dérivée

Propriété (admise) • f est **convexe** sur l'intervalle I si, et seulement si, sa fonction dérivée f' est **croissante** sur I .

• f est **concave** sur l'intervalle I si, et seulement si, sa fonction dérivée f' est **décroissante** sur I .


Remarque

L'étude de la convexité de f permet de qualifier son **rythme de croissance** ou de **décroissance**. Ainsi, en cas de croissance, une fonction convexe croît « de plus en plus », alors qu'une fonction concave croît « de moins en moins ».

Propriété (admise) Lorsque la fonction dérivée f' de f est elle-même dérivable, on note f'' sa dérivée appelée « dérivée seconde ». On a :

- f est **convexe** sur l'intervalle I si, et seulement si, f'' est **positive** sur I .
- f est **concave** sur l'intervalle I si, et seulement si, f'' est **négative** sur I .

Remarque

L'étude de la convexité de f nécessite donc l'étude des variations de la fonction f' , donc le signe de sa dérivée f'' . Il ne faut pas confondre avec l'étude des variations de la fonction f qui nécessite l'étude du signe de f' . 

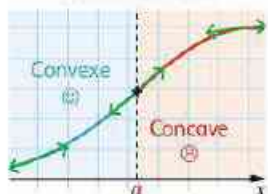
c Point d'inflexion

Définition La représentation graphique de la fonction f présente un **point d'inflexion** si elle traverse sa tangente en ce point.

Méthode

La courbe de f présente un point d'inflexion d'abscisse a lorsque :

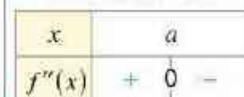
- f change de convexité en a



- f' change de sens de variation en a

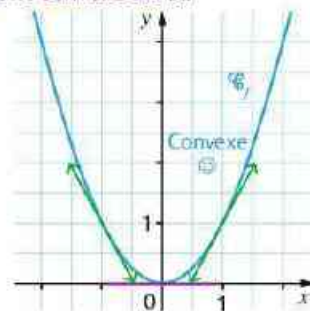


- f'' change de signe et s'annule en a

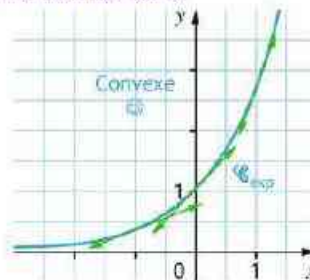


Exemples

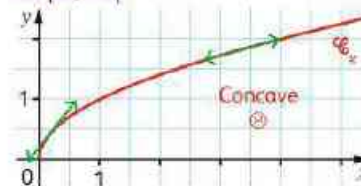
• **Fonction carré f** : sa courbe est située entièrement au-dessus de chacune de ses tangentes, elle est donc **convexe** sur \mathbb{R} .



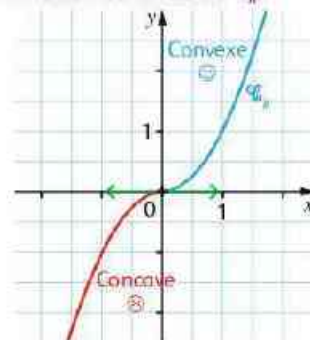
• **Fonction exponentielle** : sa courbe est entièrement située au-dessus de ses tangentes, elle est donc **convexe** sur \mathbb{R} .



• **Fonction racine carrée g** : sa courbe est située entièrement en dessous de chacune de ses tangentes, elle est donc **concave** sur $]0; +\infty[$.



• **Fonction cube h** : sa courbe représentative traverse sa tangente au point d'abscisse 0. Donc l'origine du repère est un point d'inflexion de la courbe \mathcal{C}_h .

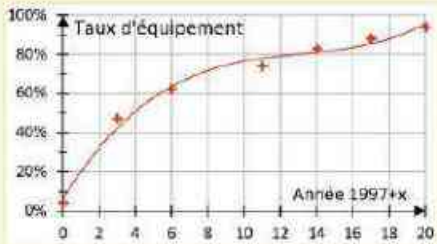




Énoncé Le graphique ci-contre nous donne le taux d'équipement de la population de 12 ans et plus en téléphone mobile et en Smartphone.

1. Commenter le titre de l'article *Smartphone, une décennie de croissance exponentielle*.

À l'aide d'un tableur, on décide de modéliser le taux d'équipement en téléphone mobile par une fonction f dont la représentation graphique est donnée ci-dessous.



Source : Arcep



2. a. Avec la précision permise par le graphique, étudier la convexité de la fonction f .
- b. En quel point la courbe semble-t-elle présenter un point d'inflexion ?
3. Interpréter graphiquement les conséquences de l'entrée sur le marché des Smartphones en 2011 sur le taux d'équipement en téléphone mobile.

Solution

1. De 2011 à 2017, on observe que le taux d'équipement en Smartphone ne fait qu'augmenter. Donc la fonction qui modélise ce taux est **croissante**. De plus, sur les deux premières périodes, on est presque sur un doublement du taux d'une fois sur l'autre, d'où l'expression « exponentielle ».

2. a. Par lecture graphique, la courbe représentant le taux d'équipement en téléphone mobile semble **au-dessus de ses tangentes** sur $[0; 14]$. Elle semble **en dessous de ses tangentes** sur $[14; 20]$.

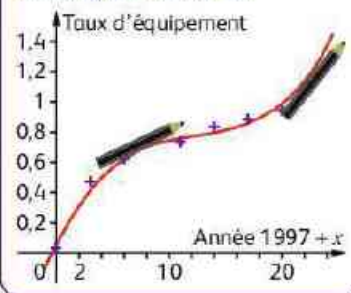
On en déduit que la fonction f semble **convexe** sur $[0; 14]$ et **concave** sur $[14; 20]$.

b. La fonction semble changer de convexité en $x = 14$. La courbe semble traverser sa tangente en ce point et admettre **un point d'inflexion au point d'abscisse 14**.

3. L'année 2011 correspond à $x = 14$. Sur l'intervalle $[0; 14]$, la fonction f est croissante et concave. On en déduit que sa croissance est ralentie. Au-delà de ce point d'inflexion, la fonction f est croissante et convexe donc la croissance est accélérée. Selon ce modèle, avec l'apparition des Smartphones en 2011, **le taux d'équipement en téléphone mobile continue de croître et sa croissance accélère** : l'apparition du Smartphone aurait relancé les équipements en téléphonie mobile.

Point méthode

2. a. Pour observer la position de la courbe par rapport à ses tangentes, on peut déplacer son crayon et observer.



Point méthode

3. Pour interpréter la convexité, il ne faut pas la dissocier des variations de la fonction. Il faut penser au « rythme de (dé) croissance ».

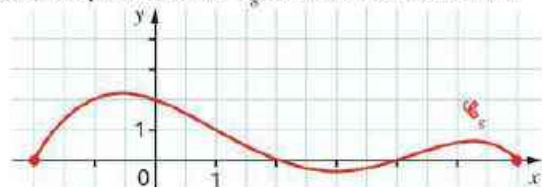
J'applique

9 Soit f la fonction dérivable sur $[-1; 7]$ dont la courbe représentative \mathcal{C}_f est donnée ci-dessous.



1. Étudier la convexité de f sur $[-1; 7]$.
2. \mathcal{C}_f admet-elle un point d'inflexion ?

10 Soit g la fonction dérivable sur $[-2; 6]$ dont la courbe représentative \mathcal{C}_g est donnée ci-dessous.



1. Étudier la convexité de g sur $[-2; 6]$.
2. Déterminer les éventuels points d'inflexion de \mathcal{C}_g .



2 Dresser et exploiter un tableau de variations

Énoncé Une entreprise fabrique chaque mois entre 5 et 60 vélos de course. Le coût moyen de fabrication, exprimé en millier d'euros, pour une production de x vélos de course, est modélisé par la fonction C définie pour x appartenant à l'intervalle $[5; 60]$ par : $C(x) = \frac{e^{0,1x} + 20}{x}$. On note C' la fonction dérivée de C .

On cherche à déterminer le nombre de vélos à produire pour que le coût moyen soit minimal.

1. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[5; 60]$, on a $C'(x) = \frac{0,1xe^{0,1x} - e^{0,1x} - 20}{x^2}$.
2. On considère la fonction f définie sur $[5; 60]$ par $f(x) = 0,1xe^{0,1x} - e^{0,1x} - 20$.
 - a. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $[5; 60]$.
 - b. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution α dans l'intervalle $[5; 60]$. Donner un encadrement de α entre deux entiers consécutifs.
 - c. En déduire le signe de $f(x)$ sur $[5; 60]$.
3. À l'aide de la question 2., étudier le signe de $C'(x)$ sur $[5; 60]$. En déduire les variations de C .
4. Répondre au problème posé.



Solution

1. La fonction C est dérivable en tant que quotient de fonctions dérivables.

$$\text{On a : } C'(x) = \frac{0,1e^{0,1x} \times x - (e^{0,1x} + 20) \times 1}{x^2} = \frac{0,1xe^{0,1x} - e^{0,1x} - 20}{x^2}$$

2. a. On calcule la dérivée f' afin d'étudier son signe.

$$f'(x) = 0,1 \times e^{0,1x} + 0,1x \times 0,1e^{0,1x} - 0,1e^{0,1x} - 0 = 0,1xe^{0,1x}$$

Une exponentielle est toujours strictement positive donc pour $x \in [5; 60]$,

$f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $[5; 60]$.

b. Sur $[5; 60]$, f est continue et strictement croissante, à valeurs dans $[f(5); f(60)]$.

Or, $f(5) \approx -20,82$ et $f(60) \approx 1997,1$ donc

$0 \in [f(5); f(60)]$. Par la propriété des

valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[5; 60]$.

Sur la calculatrice, on affiche le tableau de valeurs de la fonction f sur $[5; 60]$ avec un pas de 1. On a $f(25) \approx -1,7$ et $f(26) \approx 1,5$.

$0 \in [f(25); f(26)]$, donc $25 < \alpha < 26$.

c. La fonction f est strictement croissante et s'annule pour $x = \alpha$. Elle est donc négative sur $[5; \alpha]$ et positive sur $[\alpha; 60]$.

3. Comme $C'(x) = \frac{f(x)}{x^2}$, la dérivée $C'(x)$ est du signe de $f(x)$.

On obtient le tableau de variations ci-contre, avec $C(5) \approx 4,3$; $C(\alpha) \approx 1,3$ et $C(60) \approx 7$.

4. La fonction C admet un minimum en α , avec $25 < \alpha < 26$.

De plus, on a $C(25) \approx 1,2873$ et $C(26) \approx 1,2871$.

Le coût moyen est minimal pour une production de 26 vélos.

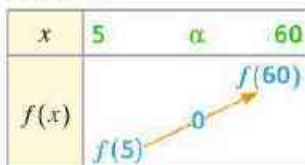
Point méthode

2. a. L'étude « directe » du signe de la dérivée $C'(x)$ est « impossible ». On introduit donc une fonction dite auxiliaire.

Point méthode

2. b. À la vue de la question, il ne faut pas se lancer dans la résolution de l'équation $f(x) = 0$, mais penser à la propriété des valeurs intermédiaires.

| X | Y ₁ |
|----|----------------|
| 23 | -7,034 |
| 24 | -4,568 |
| 25 | -1,726 |
| 26 | 1,542 |
| 27 | 5,2955 |



| x | 5 | α | 60 |
|---------|--------|-------------|---------|
| $C'(x)$ | - | 0 | + |
| $C(x)$ | $C(5)$ | $C(\alpha)$ | $C(60)$ |

Point méthode

4. On exploite le tableau de variations pour déterminer le minimum de la fonction.

J'applique

11 Avec les informations ci-dessous, déterminer le tableau de signes de la fonction f .

| x | -1 | 2 | 8 |
|--------|-----|----|-----|
| $f(x)$ | 1,3 | -1 | 0,4 |

$$f(-0,2) = 0; f(\alpha) = 0 \text{ avec } \alpha \approx 2,14$$

12 Soit f la fonction définie sur $[1; 4]$ par $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$.

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ?

- a. Sur $[1; 4]$, f' est positive.
- b. L'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1; 4]$.
- c. Si $1 \leq x < 2$, alors $e \leq f(x) < 0,25e^2$.

Énoncé Les observateurs d'une maladie nécessitant une hospitalisation s'intéressent à l'évolution du nombre de lits occupés par des malades pendant les trois mois d'hiver.

On admet que cette évolution peut être modélisée par la fonction f définie sur $[0; 3]$ par $f(x) = 2xe^{-0,5x^2}$ où $f(x)$ représente le nombre de lits occupés, exprimé en million, à l'instant x exprimé en mois.

1. a. Étudier les variations de la fonction f .
- b. Estimer le nombre de lits occupés lors du pic de la maladie.
2. a. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0; 3]$, on a $f''(x) = 2x(x^2 - 3)e^{-0,5x^2}$.

Étudier le signe de $f''(x)$ sur l'intervalle $[0; 3]$.

- b. En déduire le sens de variation de la fonction f' et la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[0; 3]$.

Donner les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe représentative de f .

3. Comment peut-on qualifier l'évolution du nombre de lits sur $[0; 1]$? sur $[1; 3]$?

Solution

1. a. $f'(x) = 2e^{-0,5x^2} + 2x \times (-0,5 \times 2x)e^{-0,5x^2} = (2 - 2x^2)e^{-0,5x^2}$

Une exponentielle est toujours strictement positive. Donc le signe de $f'(x)$ est celui de $2 - 2x^2 = 2(1+x)(1-x)$.

On a : $f(0) = 0$, $f(1) = 2e^{-0,5} \approx 1,21$ et $f(3) = 6e^{-4,5} \approx 0,067$.

On en déduit le tableau de variations ci-contre.

| | | | |
|---------|---|----------------|-----------------|
| x | 0 | 1 | 3 |
| $f'(x)$ | + | 0 | - |
| $f(x)$ | 0 | $\approx 1,21$ | $\approx 0,067$ |

b. Le maximum de f est atteint en 1 et vaut $f(1) \approx 1,21$. Donc le nombre de lits occupés lors du pic de la maladie peut être estimé à environ 1,21 million.

2. a. On a montré que $f'(x) = (2 - 2x^2)e^{-0,5x^2}$. En dérivant ce produit :

$$\begin{aligned} f''(x) &= -4xe^{-0,5x^2} + (2 - 2x^2) \times (-0,5 \times 2x)e^{-0,5x^2} \\ &= e^{-0,5x^2} (-4x - x(2 - 2x^2)) \\ &= e^{-0,5x^2} (-6x + 2x^3) \\ &= 2x(x^2 - 3)e^{-0,5x^2} \end{aligned}$$

| | | | |
|---------------|---|------------|---|
| x | 0 | $\sqrt{3}$ | 3 |
| $e^{-0,5x^2}$ | + | + | |
| $2x$ | 0 | + | + |
| $x^2 - 3$ | - | 0 | + |
| $f''(x)$ | 0 | - | 0 |

On obtient le tableau de signes ci-contre.

b. Sur $[0; \sqrt{3}]$, $f''(x) \leq 0$ donc f' est décroissante. On en déduit que f est concave. Sur $[\sqrt{3}; 3]$, $f''(x) \geq 0$ donc f' est croissante.

On en déduit que f est convexe. Les points d'abscisses 0 et $\sqrt{3}$ sont des points d'inflexion de la courbe représentative de f .

3. Sur $[0; 1]$, la fonction f est croissante et concave, le nombre de lits augmente avec une croissance ralentie.

Sur $[1; \sqrt{3}]$, la fonction f est décroissante et concave, le nombre de lits diminue avec une décroissance accélérée.

Sur $[\sqrt{3}; 3]$, la fonction f est décroissante et convexe, le nombre de lits diminue avec une décroissance ralentie.

J'applique

13 Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = x^4 - 3x^3 - 6x^2$$

1. Calculer $f''(x)$ et étudier son signe.
2. Étudier la convexité de f sur \mathbb{R} .

14 Soit f la fonction définie sur $[1; 5]$ par :

$$f(x) = \frac{3}{x+2}$$

1. Étudier les variations de f .
2. Étudier la convexité de f .

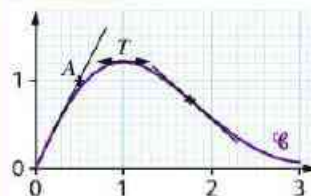
Point méthode

1. a. Pour simplifier l'étude de signes, il faut penser à factoriser au maximum l'expression de la fonction dérivée.

```
2 Factoriser(Derivee(f(x)))
→ -2e^{-3x^2}(x-1)(x+1)
```

Point méthode

1. b. On doit toujours vérifier la cohérence de ses réponses à l'aide de la représentation graphique de la fonction (variations et position des tangentes).



Point méthode

3. Pour qualifier l'évolution du nombre de lits, il faut à la fois prendre en compte les variations de la fonction f (croissance ou décroissance) et sa convexité (ralentie ou accélérée).

Les extrema marquent un changement de variation, les points d'inflexion un changement de rythme.

Formules de dérivation

| Fonction f | Dérivée f' |
|--------------------------------------|-------------------------------|
| $f(x) = k$, avec k réel | $f'(x) = 0$ |
| $f(x) = x$ | $f'(x) = 1$ |
| $f(x) = x^2$ | $f'(x) = 2x$ |
| $f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{N}$ | $f'(x) = nx^{n-1}$ |
| $f(x) = \frac{1}{x}$ | $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ |
| $f(x) = \sqrt{x}$ | $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| $f(x) = e^x$ | $f'(x) = e^x$ |

| Fonction f | Dérivée f' |
|---------------------------------------|---|
| Somme $u + v$ | $u' + v'$ |
| Produit $k \times u$, où k réel | $k \times u'$ |
| Produit $u \times v$ | $u' \times v + u \times v'$ |
| Inverse $\frac{1}{v}$ | $-\frac{v'}{v^2}$ |
| Quotient $\frac{u}{v}$ | $\frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$ |

| Fonction f | Dérivée f' |
|---|-----------------------|
| $f = u^2$ | $f' = 2u' u$ |
| $f(x) = g(ax + b)$ où a et b réels | $f'(x) = ag'(ax + b)$ |
| $f = e^u$ | $f' = u' e^u$ |

Continuité

- Une fonction f est **continue** sur un intervalle I lorsque sa courbe représentative se trace « sans lever le crayon ».
- Une fonction dérivable sur I est continue sur I .

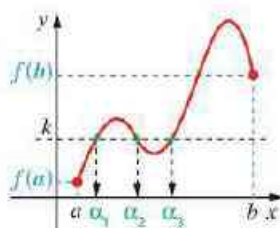
Les fonctions de **référence** sont continues sur tout intervalle de leur domaine de définition.

Variations de f

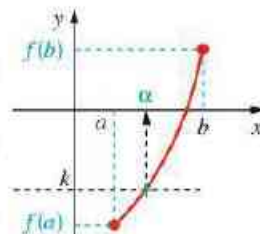
- f est **croissante** sur I si, et seulement si, f' est **positive** sur I .
- f est **décroissante** sur I si, et seulement si, f' est **négative** sur I .

Propriété des valeurs intermédiaires

- f continue sur $[a; b]$.
 - k compris entre $f(a)$ et $f(b)$.
- Alors l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans $[a; b]$.



- f continue sur $[a; b]$.
 - f strictement monotone sur $[a; b]$.
 - k compris entre $f(a)$ et $f(b)$.
- Alors l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a; b]$.

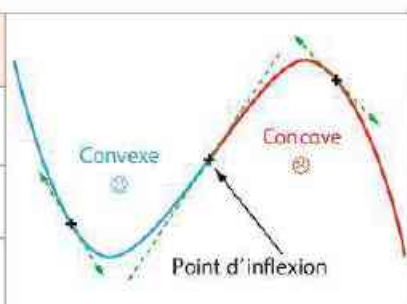


La propriété des valeurs intermédiaires permet de montrer l'**existence** d'une solution.

Pour déterminer une valeur **approchée**, on peut procéder par « balayage » en calculant des images.

Convexité de f

| | f est convexe sur I | f est concave sur I |
|--|---|--|
| Propriété sur \mathcal{C}_f | \mathcal{C}_f est au-dessus de toutes ses tangentes | \mathcal{C}_f est en dessous de toutes ses tangentes |
| Propriété sur la dérivée f' | f' est croissante sur I | f' est décroissante sur I |
| Propriété sur la dérivée seconde f'' | f'' est positive sur I | f'' est négative sur I |





Voir corrigés

QCM

Pour chacune des questions, indiquer la (ou les) bonne(s) réponse(s).

1. Si $f(x) = (4x+1)^2$, alors :

a $f'(x) = 2(4x+1)$

b $f'(x) = 32x+8$

c $f'(x) = 8(4x+1)$

2. Si $f(x) = (x^3+1)^2$, alors :

a $f'(x) = 6x^2(x^3+1)$

b $f'(x) = 2(3x^2+1)$

c $f'(x) = 3x^2(x^3+1)^2$

3. Si $f(x) = \sqrt{5x+1}$, alors :

a $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{5x+1}}$

b $f'(x) = \frac{5}{2\sqrt{5x+1}}$

c $f'(x) = \frac{5}{\sqrt{5x+1}}$

4. Si $f(x) = e^{5x+1}$, alors :

a $f'(x) = e^{5x+1}$

b $f'(x) = 5e^{5x+1}$

c $f''(x) = 25e^{5x+1}$

5. Si $f(x) = 3e^{-6x-2}$, alors :

a $f'(x) = -18e^{-6x-2}$

b $f'(x) = 18e^{-6x-2}$

c $f'(x) = 3e^{-6x-2}$

6. Si $f(x) = (2x+1)e^{-x}$, alors :

a $f''(x) = (2x-3)e^{-x}$

b $f'(x) = (-2x-1)e^{-x}$

c $f''(x) = (-2x+1)e^{-x}$

7. On considère une fonction f définie et dérivable sur $[-3; 8]$ dont le tableau de variations est donné ci-dessous.

| | | | |
|--------|----|----|---|
| x | -3 | 3 | 8 |
| $f(x)$ | 6 | -2 | 4 |

a L'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions.

b L'équation $f(x) = 5$ admet une unique solution comprise entre -2 et 6.

c L'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution sur $[-3; 8]$.

8. On considère une fonction h définie et dérivable sur $[-1; 7]$ dont le tableau de variations est donné ci-dessous.

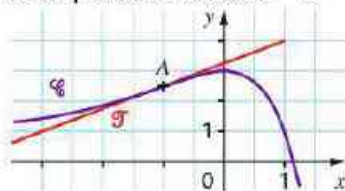
| | | | |
|--------|----|----|----|
| x | -1 | 0 | 7 |
| $h(x)$ | -5 | -2 | -3 |

a La fonction h est positive sur $[0; 7]$.

b La fonction h est négative sur $[-1; 7]$.

c La fonction h' est positive sur $[0; 7]$.

9. La courbe ci-dessous représente une fonction f définie et deux fois dérivable sur \mathbb{R} . La droite \mathcal{T} est la tangente à la courbe au point A d'abscisse -1.



a Le point A est un point d'inflexion de la courbe.

b La fonction f est convexe sur $]-\infty; -1]$.

c La fonction f est concave sur $[0; +\infty[$.

vrai

ou faux ?

Indiquer pour chaque affirmation si elle est vraie ou fausse. Justifier.

Partie A.

1. Si f est croissante sur I , alors f est convexe sur I .
2. Si f' est positive sur I , alors f est croissante sur I .
3. Si f' est négative sur I , alors f est concave sur I .
4. Si f est convexe sur I , alors f'' est positive sur I .
5. Si f' est croissante sur I , alors f est positive sur I .

Partie B.

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (x+1)e^x$.

1. f est positive sur \mathbb{R} .
2. f' est positive sur $[-2; +\infty[$.
3. f' est décroissante sur $]-\infty; -2]$.
4. Le point d'abscisse -3 est un point d'inflexion de la courbe représentative de f .

Automatismes et calculs

Automatismes transversaux

15 Expliquer et justifier les résultats obtenus sur l'écran de la calculatrice ci-dessous.



16 Montrer que, pour tout réel x , on a :

$$\frac{e^x - e^{2x}}{e^x + 1} = \frac{1 - e^x}{1 + e^{-x}}$$

17 Développer et réduire les expressions suivantes.

- $A(x) = e^x(e^x + 3) - e^{2x}$
- $B(x) = 3(x-2)(x+5)$
- $E(x) = (2x+3)e^x - 4$

18 Factoriser les expressions suivantes.

- $A(x) = e^{2x} - 4e^x$
- $B(x) = 2xe^x - (3x-1)e^x$
- $C(x) = e^{6x} - 9$

19 Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes.

- $(2x+1)(x^2+2x-15) = 0$
- $(3x-1)e^x = 0$
- $\frac{4x-3}{(e^x+1)^2} = 0$

20 Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes.

- $x^2 + x + 1 < 0$
- $(x+6)(e^x - 1) \geq 0$

21 Calculer les nombres suivants.

- $S = 1 + 2 + 3 + \dots + 50$
- $S = 1 + 3 + 9 + \dots + 243$

22 1. Soit u la suite géométrique de premier terme $u_0 = 40$ et de raison $q = 1,2$. Calculer u_1 ; u_{13} et u_{27} .

2. Soit v la suite géométrique de premier terme $v_1 = 40$ et de raison $q = 0,8$. Calculer v_2 ; v_{13} et v_{27} .

23 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,95u_n + 1$.

- Calculer les trois premiers termes de la suite.
- La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?

24 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , par $u_{n+1} = 3u_n + n + 1$. Quelle formule doit-on saisir dans la cellule B3 pour obtenir, par recopie vers le bas, les termes de la suite (u_n) ?

| | A | B |
|---|-----|--------|
| 1 | n | $u(n)$ |
| 2 | 0 | 1 |
| 3 | 1 | |
| 4 | 2 | |

Automatismes du thème

25 Étudier le signe des fonctions suivantes sur \mathbb{R} .

- $f(x) = -2x + 6$
- $g(x) = 3x + 2$
- $l(x) = 7x^2 + 2x + 3$
- $r(x) = -3x^2 + 4x$

26 Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = (-3x+1)e^{-x}$$

Le tableau de signes ci-contre comporte des erreurs. Les corriger.

| x | $-\infty$ | 0,33 | $+\infty$ |
|----------|-----------|------|-----------|
| e^{-x} | | - | |
| $-3x+1$ | + | 0 | - |
| $f(x)$ | - | 0 | + |

27 On donne ci-dessous le tableau de signes de la dérivée d'une fonction f définie et dérivable sur $[-7; 6]$.

Étudier les variations de f .

| x | -7 | -2 | 1 | 6 | |
|---------|----|----|---|---|---|
| $f'(x)$ | - | 0 | - | 0 | + |

28 On donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction f définie et dérivable sur $[1; 5]$.

Construire le tableau de signes de sa fonction dérivée f' .

| x | 1 | 3 | 4 | 5 |
|--------|---|-----|-----|-----|
| $f(x)$ | 7 | ↘ 1 | ↗ 3 | ↘ 2 |

29 Dans chacun des cas suivants, déterminer l'expression de la fonction dérivée.

- $f(x) = (4x+1)^2$
- $f(x) = (-6x+1)^2$
- $f(x) = 5e^{2x+4}$
- $f(x) = e^{-x^2+x+1}$
- $f(x) = (e^x+1)^2$
- $f(x) = -4e^{x^2}$

30 Démontrer les résultats ci-contre obtenus à l'aide d'un logiciel de calcul formel.

| | |
|---|--|
| 1 | $f(x) = \exp(2x) + x^2 - 2x + 2$ |
| 2 | $\rightarrow f'(x) := x^2 + e^{2x} - 2x + 2$ |
| 3 | Dérivée(Dérivée(f(x))) |
| 4 | $\rightarrow 4e^{2x} + 2$ |

31 Dans chacun des cas, déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a .

- $f(x) = \frac{4x+1}{e^x}$; $a = 0$
- $f(x) = x^3 + 4x^2 - 1$; $a = 1$

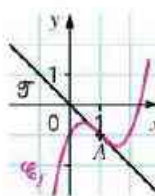
32 Dans chacun des cas, étudier la convexité de la fonction donnée sur \mathbb{R} .

- $f(x) = 1 - e^x$
- $f(x) = e^x + 3x^2 + 1$

33 On donne ci-contre la représentation graphique de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$. On a tracé la tangente \mathcal{T} à la courbe \mathcal{C}_f au point A d'abscisse 1.

1. Lire graphiquement $f(1)$; $f'(1)$ et $f''(1)$.

2. Montrer que A est un point d'inflexion de \mathcal{C}_f .



Consolider les bases

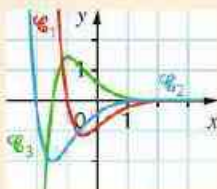
34 Construire, dans chaque cas, le tableau de signes de la fonction f définie par son expression sur \mathbb{R} .

- $f(x) = -0,3x^2 + 1,8x - 1,5$
- $f(x) = (-3x + 1)(2x + 8)$
- $f(x) = 2e^{-0,1x} + 1$
- $f(x) = 3e^{2x} - 3$

35 Dans chaque cas, on définit une fonction f sur un ensemble D . Exprimer $f'(x)$ en fonction de x .

- $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3x + 5$ sur $D = \mathbb{R}$.
- $f(x) = \frac{2}{x} - 3x^2 + 4\sqrt{x}$ sur $D =]0; +\infty[$
- $f(x) = 5e^x - x + 3$ sur $D = \mathbb{R}$

36 Dans le repère orthogonal ci-contre, on a tracé trois courbes \mathcal{C}_1 , \mathcal{C}_2 et \mathcal{C}_3 . L'une de ces courbes représente une fonction f ; une autre sa dérivée f' et la troisième sa dérivée seconde f'' . Déterminer pour chaque courbe quelle fonction elle représente.



37 Dans chaque cas, construire le tableau de variations de la fonction f , dont on donne la définition sur l'intervalle I .

- $f(x) = -0,1x^3 + 0,9x^2 - 1,5x + 2$ sur $I = [1; 10]$
- $f(x) = -3x^2 + 12x - 9$ sur $I = [5; 15]$
- $f(x) = \frac{2x+3}{3x+6}$ sur $I = [-1; 3]$

38 Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$$

On note \mathcal{C} sa courbe représentative.

- Justifier que la fonction f est croissante sur \mathbb{R} .
- Déterminer l'équation réduite de la tangente \mathcal{T} à \mathcal{C} au point d'abscisse 0.
- Étudier les positions relatives des courbes \mathcal{C} et \mathcal{T} .
- Vérifier à l'aide de la calculatrice.

39 On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

- Calculer $f'(x)$.
- Montrer qu'une équation de la tangente \mathcal{T} à la courbe représentative \mathcal{C}_f au point d'abscisse 0 est $y = 2x$.

3. a. Montrer que pour tout réel x :

$$f(x) - 2x = \frac{-2x^3}{x^2 + 1}$$

- En déduire les positions relatives de \mathcal{C}_f et de \mathcal{T} .
- Vérifier à l'aide de la calculatrice.

Connaître le cours

40 Deux diaporamas pour faire le point sur le cours.



Démo

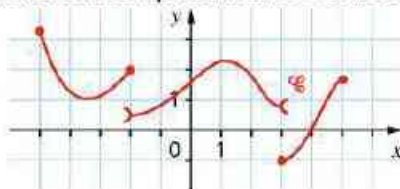
41 Soit une fonction u dérivable sur un intervalle I . On définit la fonction f sur I par :

$$f(x) = (u(x))^2 = u(x) \times u(x)$$

Justifier que la fonction f est dérivable sur I , puis montrer que, pour tout réel $x \in I$, $f'(x) = 2u'(x) \times u(x)$.

42 Vrai ou faux ?

On considère une fonction f définie sur $[-5; 5]$ dont on donne la courbe représentative \mathcal{C} ci-dessous.



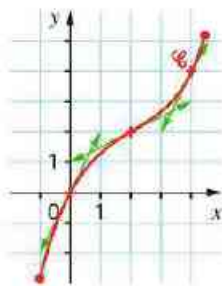
Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

- La fonction f est discontinue en 3.
- La fonction f est continue en 1.
- La fonction f est continue sur l'intervalle $[-3; 3]$.
- La fonction f est continue sur l'intervalle $]-2; 3[$.
- La fonction f est continue sur l'intervalle $[-5; 2]$.

43 Soit la fonction f définie sur $[-1; 4,5]$ par sa courbe représentative \mathcal{C} ci-contre.

On a représenté les tangentes aux points d'abscisse 0 ; 2 et 4.

- a.** Lire la position de \mathcal{C} par rapport à ses tangentes sur $[-1; 2]$.
- Sur $[-1; 2]$, f est-elle convexe ou concave ?
- Sur $[2; 4,5]$, f est-elle convexe ou concave ?
- a.** Que peut-on dire de la position de \mathcal{C} et de sa tangente au point d'abscisse 2 ?
- b.** La fonction f est-elle convexe sur $[-1; 4,5]$? concave sur $[-1; 4,5]$?



44 Fonctions de référence

Pour chacune des fonctions de référence (carré, inverse, cube, racine carrée, exponentielle), répondre aux questions suivantes.

- Tracer à la calculatrice la courbe représentative \mathcal{C} et observer la position de \mathcal{C} par rapport à ses tangentes.
- Conjecturer sur quel intervalle la fonction est convexe, concave. Préciser les points d'inflexion éventuels.
- Démontrer les conjectures précédentes en étudiant le signe de la dérivée seconde.

Travailler les capacités du thème

1 Calculer une fonction dérivée

Pour les exercices 45 à 48, dans chacun des cas, on définit une fonction f sur un ensemble D . Exprimer $f'(x)$ en fonction de x .

- 45 1. $f(x) = (2x^3 - 3)^2$ sur $D = \mathbb{R}$
 2. $f(x) = 4(-4x^2 + 3x + 5)^2$ sur $D = \mathbb{R}$
 3. $f(x) = 2(x-1)^3 + 0,5x + 2$ sur $D = \mathbb{R}$

46 1. $f(x) = \frac{2x+1}{3x+6}$ sur $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

2. $f(x) = \frac{-2x+1}{x^2+1}$ sur $D = \mathbb{R}$

3. $f(x) = \frac{x^2-3}{2x-8}$ sur $D = \mathbb{R} \setminus \{4\}$

47 1. $f(x) = 3e^{-x^2}$ sur $D = \mathbb{R}$

2. $f(x) = 4 - 3e^{-0,1x+3}$ sur $D = \mathbb{R}$

3. $f(x) = \sqrt{5x+10}$ sur $D =]-2; +\infty[$

48 1. $f(x) = (2x+1)e^{-0,5x}$ sur $D = \mathbb{R}$

2. $f(x) = (0,5x-1)e^{3x+1}$ sur $D = \mathbb{R}$

3. $f(x) = \frac{x+1}{e^{2x}}$ sur $D = \mathbb{R}$

2 Dresser et exploiter un tableau de variations

49 Dans chaque cas, on considère une fonction f définie sur un intervalle I .

Justifier que f est monotone sur I .

1. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ sur $I = \mathbb{R}$

2. $f(x) = 3e^{-0,1x} + 3$ sur $I = \mathbb{R}$

3. $f(x) = \frac{-5x+2}{2x+4}$ sur $I =]-2; +\infty[$

4. $f(x) = 10 - 4e^{2x}$ sur $I = \mathbb{R}$

50 Dans chaque cas, on considère une fonction f définie sur l'intervalle I .

Construire le tableau de variations de f sur I .

1. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 1$ sur $I = [-3; 6]$

2. $f(x) = \frac{2x-1}{x^2+1}$ sur $I = [-2; 4]$

3. $f(x) = 2xe^{-x}$ sur $I = [-5; 5]$

51 On reprend les données de l'exercice 48. Étudier dans chaque cas les variations de la fonction f sur l'ensemble D .

52 Vrai ou faux ?

On considère une fonction f continue, dont on donne le tableau de variations.

| | | | | | | |
|--------|-----|----|----|---|---|----|
| x | -10 | -5 | 1 | 2 | 4 | 5 |
| $f(x)$ | 3 | 0 | -2 | 0 | 2 | -1 |

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

- L'équation $f(x) = -1$ admet une unique solution.
- L'équation $f(x) = 1$ admet trois solutions.
- Le signe de f' est donné par le tableau suivant.

| | | | | |
|--------|-----|----|---|---|
| x | -10 | -5 | 2 | 5 |
| $f(x)$ | + | 0 | - | + |

53 Démontrer que l'équation $x^3 - 3x^2 - 1 = 0$ admet une unique solution dans \mathbb{R} et encadrer celle-ci par deux entiers consécutifs.

54 Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{e^x}{x}$. L'équation $f(x) = 1$ admet-elle des solutions ?

3 Déterminer des valeurs approchées des solutions d'une équation du type $f(x) = k$

55 La fonction f est définie sur $[-3; 6]$ par :

$$f(x) = x^3 - 12x$$

- Construire le tableau de variations de f sur $[-3; 6]$.
- Combien l'équation $f(x) = 50$ admet-elle de solutions sur $[-3; 6]$?

3. On a tabulé ci-contre la fonction f par pas de 1 à la calculatrice. En déduire un encadrement de la solution de l'équation $f(x) = 50$ entre deux entiers consécutifs.

| | |
|-----|--------|
| x | $f(x)$ |
| 0 | 0 |
| 1 | -11 |
| 2 | -16 |
| 3 | -9 |
| 4 | 16 |
| 5 | 65 |
| 6 | 144 |

4. En procédant de la même façon, obtenir un encadrement de la solution à 10^{-2} près.

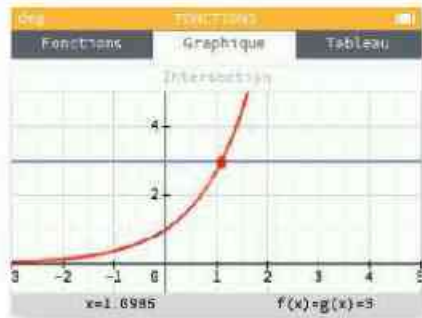
56 On considère la fonction f définie sur $[0; 4]$ par :

$$f(x) = 0,1x^2 + 2\sqrt{x} - 4$$

- Établir le tableau de variations de f , puis justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α .
- α . Calculer $f(2)$. Quel est son signe ? En déduire, entre les intervalles $[0; 2]$ et $[2; 4]$, lequel contient la solution α .
- Parmi $[2; 3]$ et $[3; 4]$, lequel contient α ?
- Déterminer un encadrement de α à 0,5 près.

57 Résolution graphique d'équations

1. Un élève doit résoudre de façon approchée l'équation $e^x = 3$. On donne ci-dessous la capture d'écran de sa calculatrice.



Après avoir expliqué la démarche de l'élève, donner une valeur approchée de la solution de l'équation à 0,001 près.

2. À l'aide des fonctionnalités de la calculatrice, résoudre graphiquement à 0,001 près les équations suivantes.

- a. $e^x = 0,5$
- b. $e^x = 5$
- c. $e^x = 20$
- d. $e^x = 50$
- e. $e^x = 200$
- f. $e^x = 500$

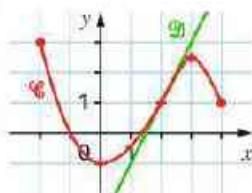
Reconnaître graphiquement la convexité, la concavité d'une fonction, un point d'inflexion

58 Vrai ou faux ?

On considère la fonction f définie sur $[-2; 4]$ par sa courbe représentative \mathcal{C} .

La droite \mathcal{D} est la tangente à \mathcal{C} au point d'abscisse 2.

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

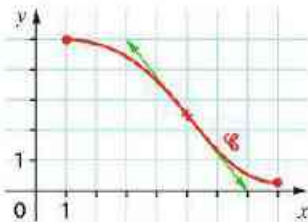


- La courbe \mathcal{C} admet un point d'inflexion en 2.
- La fonction f' est croissante sur $[-2; 2]$.
- La fonction f' est positive sur $[-2; -1]$.
- La fonction f est concave sur $[2; 4]$.

59 QCM

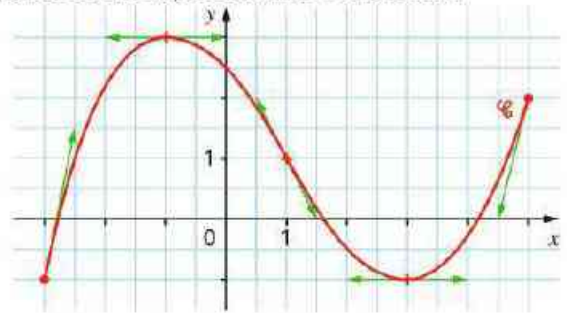
Soit une fonction f définie sur $[1; 8]$ par sa courbe représentative \mathcal{C} .

Pour chaque affirmation, déterminer la bonne réponse.



- f est convexe sur :
 - a. $[1; 8]$
 - b. $[1; 5]$
 - c. $[5; 8]$
- f est concave sur :
 - a. $[1; 8]$
 - b. $[1; 5]$
 - c. $[5; 8]$
- \mathcal{C} admet un point d'inflexion en :
 - a. 2,5
 - b. 5
 - c. 8

60 On considère une fonction f définie sur $[-3; 5]$ par sa courbe représentative \mathcal{C} ci-dessous.



On a tracé quelques tangentes à \mathcal{C} .

- En visualisant les coefficients directeurs des tangentes lorsque l'on parcourt la courbe \mathcal{C} , justifier que la fonction f' est décroissante sur $[-3; 1]$.
 - Que peut-on en déduire pour la fonction f ? Vérifier en visualisant la position de \mathcal{C} par rapport à ses tangentes sur $[-3; 1]$.
- Quel est le sens de variation de f' sur $[1; 5]$? Que peut-on en déduire pour la fonction f ?
- La courbe \mathcal{C} admet-elle un point d'inflexion ? Si oui, en quel réel ?

61 On considère quatre fonctions dérivables f, g, h et k , dont on donne ci-dessous les tableaux de variations, ainsi que ceux de leurs dérivées.

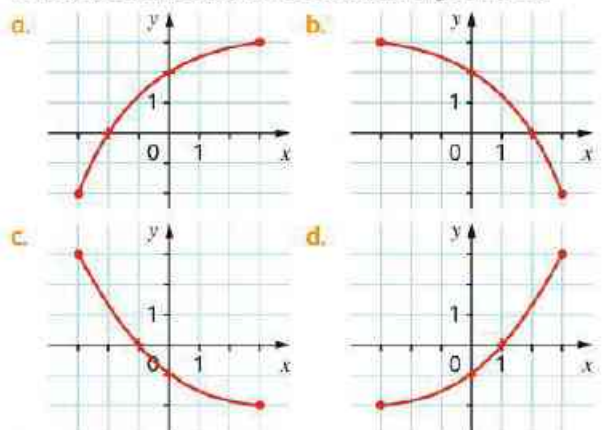
| | | |
|---------|----|---|
| x | -3 | 3 |
| $f'(x)$ | ↗ | |
| $f(x)$ | -2 | 3 |

| | | |
|---------|----|---|
| x | -3 | 3 |
| $g'(x)$ | ↘ | |
| $g(x)$ | -2 | 3 |

| | | |
|---------|----|----|
| x | -3 | 3 |
| $h'(x)$ | ↘ | |
| $h(x)$ | 3 | -2 |

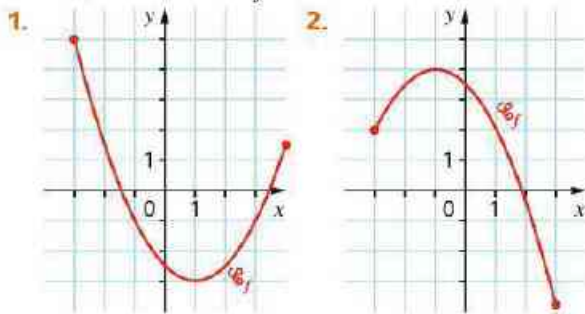
| | | |
|---------|----|----|
| x | -3 | 3 |
| $k'(x)$ | ↗ | |
| $k(x)$ | 3 | -2 |

1. Les courbes de ces fonctions sont données ci-dessous. Associer fonctions et courbes, en justifiant.

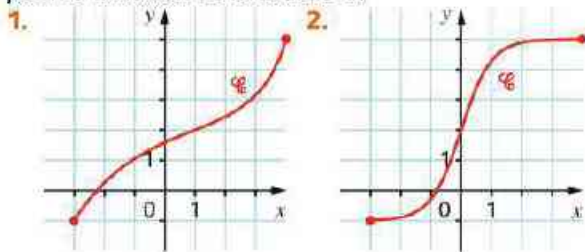


2. Préciser la convexité des fonctions f, g, h et k .

62 Dans chaque cas, préciser si la fonction f , représentée par la courbe \mathcal{C}_f , est convexe ou concave.



63 Dans chaque cas, préciser les coordonnées du point d'inflexion de la courbe \mathcal{C}_f .



5 Étudier la convexité, la concavité d'une fonction deux fois dérivable sur un intervalle

64 QCM

Soit f la fonction définie et deux fois dérivable sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{-5x+1}$.

Pour chaque affirmation, déterminer la (ou les) bonne(s) réponse(s).

- Sur \mathbb{R} , la fonction f est :
 - a. positive b. croissante c. convexe
- Sur \mathbb{R} , la fonction f' est :
 - a. positive b. croissante c. convexe

65 Vrai ou faux ?

Soit f une fonction dérivable sur $[0; 15]$ pour laquelle on connaît le tableau de variations de la dérivée f' .

| | | | |
|---------|----|----|----|
| x | 0 | 5 | 15 |
| $f'(x)$ | 30 | -5 | 20 |

Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

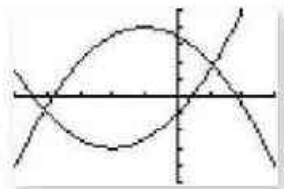
- La fonction f est convexe sur $[-5; 20]$.
- La fonction f est concave sur $[0; 5]$.
- La courbe \mathcal{C}_f admet un point d'inflexion en 5.
- La courbe \mathcal{C}_f admet une unique tangente parallèle à l'axe des abscisses.
- La fonction f'' est positive sur $[5; 15]$.

66 Soient les fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = 0,5x^2 + 2x - 1$$

$$\text{et } g(x) = -0,5x^2 - x + 3,5$$

1. On a obtenu à la calculatrice les courbes représentatives de f et g ci-contre. Après les avoir repérées, conjecturer si f , puis g , est convexe ou concave sur \mathbb{R} .



2. a. Calculer $f'(x)$, puis $f''(x)$.

b. Calculer $g'(x)$, puis $g''(x)$.

3. Démontrer les conjectures émises.

67 On considère la fonction f définie sur $[-1; 8]$ par :

$$f(x) = \frac{5x}{(x+2)^2}$$

On a obtenu les résultats suivants à l'aide d'un logiciel de calcul formel, que l'on utilisera sans justifier.

| | |
|---|---|
| 1 | $f(x) := 5 \cdot x / (x+2)^2$ |
| 2 | $\rightarrow f(x) := 5 \cdot \frac{x}{(x+2)^2}$ |
| 3 | $\rightarrow 10 \cdot \frac{x-4}{(x+2)^4}$ |

- Étudier le signe de $f''(x)$ sur $[-1; 8]$.
- Déterminer sur quel intervalle la fonction f est :
 - a. convexe b. concave
- En quel point la courbe \mathcal{C}_f admet-elle un point d'inflexion ?

68 On considère une fonction f définie sur \mathbb{R} .

Dans chacun des cas suivants, déterminer si la fonction f est convexe ou concave sur \mathbb{R} .

- $f(x) = x^4 - 3x + 2$
- $f(x) = 10e^{-0,5x} + 2$
- $f(x) = -2x^2 + 3$
- $f(x) = -5e^{3x} + 4$

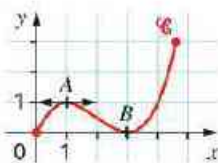
69 On considère une fonction f définie sur \mathbb{R} , de courbe représentative \mathcal{C}_f .

Dans chaque cas, déterminer les points d'inflexion éventuels de la courbe \mathcal{C}_f (on vérifiera en traçant la courbe \mathcal{C}_f à la calculatrice).

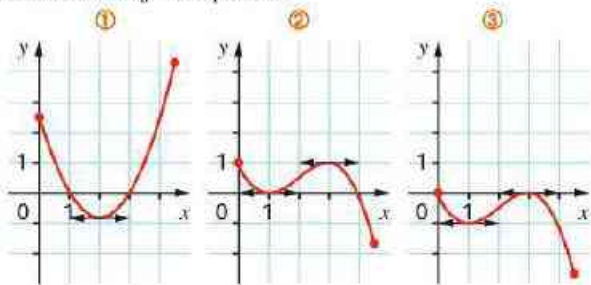
- $f(x) = x^3 - 3x + 5$
- $f(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2$
- $f(x) = (x-1)^3 + 2$
- $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$
- $f(x) = e^{-x^2}$
- $f(x) = xe^{-x}$

1 Dérivation et applications

70 On considère une fonction f définie et dérivable sur $[0; 4,5]$ et dont on donne la courbe \mathcal{C} ci-contre. La courbe \mathcal{C} passe par les points $O(0;0)$, $A(1;1)$ et $B(3;0)$.



1. L'une des trois courbes suivantes représente la fonction dérivée f' . Laquelle ?



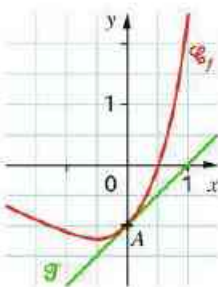
2. On admet que $f(x) = \frac{1}{4}x^3 + ax^2 + bx$ pour tout réel x de $[0; 4,5]$, où a et b sont des nombres réels.

- Calculer $f(1)$ et $f(3)$ en fonction de a et b .
 - En déduire les nombres réels a et b .
3. Justifier que la courbe \mathcal{C} admet des tangentes parallèles à l'axe des abscisses en A et en B .

71 Exercice guidé

La fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (ax + b)e^x$, où a et b sont deux réels, est représentée par la courbe \mathcal{C}_f ci-contre.

La droite \mathcal{T} est la tangente à \mathcal{C}_f au point $A(0; -1)$.



- Lire graphiquement $f(0)$.
 - En déduire la valeur de b .
- Lire graphiquement $f'(0)$.
 - Montrer que pour tout réel x : $f'(x) = (ax + a + b)e^x$.
 - En déduire la valeur de a .
- Déterminer en quel point :
 - la courbe \mathcal{C}_f coupe l'axe des abscisses ;
 - la courbe \mathcal{C}_f admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

Pistes de résolution

- Relier la lecture graphique et le calcul de $f(0)$.
 - Le nombre dérivé $f'(0)$ est le coefficient directeur de \mathcal{T} .
 - Utiliser la dérivée d'un produit $(u \times v)' = u'v + uv'$.
 - Relier la lecture graphique et le calcul de $f'(0)$.
- Il s'agit de résoudre l'équation $f(x) = 0$.
 - Il s'agit de résoudre l'équation $f'(x) = 0$.

72 La trypsine est une enzyme digestive qui a pour but de digérer les protéines.

Son efficacité lors de la digestion dépend du pH x du duodénum, selon la relation :

$$f(x) = 0,37x^3 - 9,35x^2 + 76,51x - 200,95$$

Le pH est compris entre 6 et 9. Ainsi $x \in [6; 9]$.

- Étudier les variations de la fonction f sur $[6; 9]$.
- Quel doit être le pH du duodénum pour que l'action de la trypsine soit la plus efficace possible ?

73 Une entreprise s'apprête à lancer sur le marché français un nouveau jouet. On modélise les ventes espérées par la fonction f définie sur $[0; 18]$ par :

$$f(x) = 4xe^{-0,25x}$$

où x est le nombre de jours écoulés depuis le début de la campagne publicitaire et $f(x)$ est le nombre de jouets vendus le x -ième jour, en millier.

1. Montrer que pour tout réel $x \in [0; 18]$:

$$f'(x) = (4 - x)e^{-0,25x}$$

- Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0; 18]$, puis dresser le tableau de variations de f sur $[0; 18]$.
- Déterminer le nombre de jours au bout duquel le maximum de ventes par jour est atteint, ainsi que le nombre de jouets vendus, arrondi à l'unité.

74 Une entreprise pharmaceutique peut produire entre 200 et 2 000 litres d'un soin antipelliculaire par semaine. Le bénéfice algébrique, en dizaine de milliers d'euros, réalisé pour la production et la vente de x centaine de litres de ce soin est donné par :

$$B(x) = (5x - 30)e^{-0,25x}, \text{ où } x \in [2; 20]$$

- Calculer le bénéfice réalisé par la fabrication et la vente de 500 litres de soin (arrondir à l'euro près).
- Construire le tableau de signes de B sur $[2; 20]$.
 - Quelle quantité de soin l'entreprise doit-elle produire et vendre pour obtenir un bénéfice positif ?
- Calculer $B'(x)$, puis construire le tableau de variations de B sur $[2; 20]$.
 - Quelle quantité de soin l'entreprise doit-elle produire et vendre pour réaliser le bénéfice maximal ?

75 Une entreprise fabrique et vend des pièces métalliques de type « ME70 ». Elle peut construire entre 0 et 800 pièces par mois. Le bénéfice, en millier d'euros, réalisé par la fabrication et la vente de x centaine de pièces est modélisé par la fonction B définie sur $[0; 8]$ par :

$$B(x) = (4x^2 + 2x - 2)e^{-x}$$

- Combien de pièces l'entreprise doit-elle fabriquer et vendre pour réaliser des bénéfices ?
- Combien de pièces l'entreprise doit-elle fabriquer et vendre pour réaliser le bénéfice maximal ?

2 Fonctions continues

76 On reprend la situation étudiée en p. 8.

| Pommes de Terre | |
|-----------------|--------------|
| de 1 à 5 kg | 1€25 le kilo |
| + 5 kg | 1€10 le kilo |
| + 15 kg | 0€90 le kilo |
| + 50 kg | 0€70 le kilo |
| + 100 kg | 0€55 le kilo |

Comme chaque année, Théo fait sa réserve de pommes de terre. À la première pesée, il cumule 44 kg. Le responsable de la ferme lui conseille alors de prendre un peu plus de pommes de terre, car il n'est pas loin de 50 kg et le tarif sera moins cher.

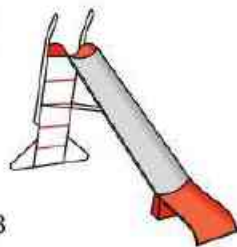
- Le responsable a-t-il raison ?
- Théo décide d'acheter 52 kg de pommes de terre. Fait-il ainsi des économies ?

77 On injecte du glucose à un patient. On estime que la glycémie, en gramme par litre de sang, au bout de t heures est modélisée par la fonction f définie sur $[0; 7]$ par :

$$f(t) = 0,6e^{-0,8t} + 0,84$$

- Déterminer la glycémie au moment de l'injection.
- Étudier le sens de variation de f . Interpréter.
- À l'aide de la calculatrice, déterminer, à 0,1 h près, le temps au bout duquel :
 - la glycémie descend à 1,24 gramme par litre ;
 - la glycémie aura diminué de 0,5 gramme par litre.

78 Un toboggan est formé d'une échelle oblique et d'une glissière.

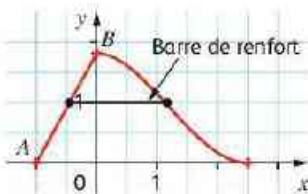


Celle-ci suit la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 2,5]$ par :

$$f(x) = 0,2304x^3 - 0,864x^2 + 1,8$$

Les dimensions sont en mètre.

- Pour des raisons de sécurité, la pente du toboggan doit être horizontale en haut de l'échelle et au niveau du sol. Est-ce le cas ?
- En quel point du toboggan la pente est-elle la plus forte ?
- On donne ci-contre la vue de profil du toboggan (l'échelle est représentée par $[AB]$). Pour consolider ce toboggan, le constructeur souhaite installer une barre de renfort horizontale, à 1 m du sol. Quelle est la longueur de la barre, arrondie au cm ?



Analyse d'un énoncé

79 ALGO Exercice commenté

La population, en dizaine de milliers d'habitants, à l'année $(2015+x)$, d'une ville nouvelle est modélisée pour les cinq premières années par la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{2x^3 + 1}{x^3 + 1}, \text{ pour } x \in [0; 5]$$

- Étudier les variations de f sur $[0; 5]$.
- Montrer que, pour la période considérée, la population de cette ville atteindra 18 500 habitants.

On pense aux conséquences de la propriété des valeurs intermédiaires.

2. a. Exécuter l'algorithme ci-contre.

b. En déduire la date au cours de laquelle le seuil des 18 500 habitants a été atteint.

```

x ← 1
Tant que f(x) < 1,85 Faire
    x ← x + 1/12
Fin Tant que
Afficher x
    
```

On peut remplir un tableau de suivi des variables.

| | | | | |
|----------------|------|--------------------|--------------------|-----|
| x | 1 | $1 + \frac{1}{12}$ | $1 + \frac{2}{12}$ | ... |
| $f(x)$ | 1,5 | ≈ 1,56 | ... | ... |
| $f(x) < 1,85?$ | Vrai | Vrai | ... | ... |

80 ALGO Application immédiate

Le taux de satisfaction d'un nouveau produit, en valeur décimale, est modélisé pour l'année $(2020+x)$, six mois après sa mise sur le marché, par la fonction f définie sur $[0,5; 4]$ par :

$$f(x) = \frac{3x}{x^2 + 2x + 1}$$

- Étudier les variations de f sur $[0,5; 4]$.
 - Montrer que, d'après ce modèle, le taux descendra à moins de 50 % sur la période 2020-2024.
2. a. Exécuter l'algorithme ci-dessous.
- b. À partir de quel semestre le taux de satisfaction sera-t-il inférieur à 50 % ?

```

x ← 0,5
Tant que f(x) > 0,5 Faire
    x ← x + 0,5
Fin Tant que
Afficher x
    
```

81 Fonction d'offre et de demande

Un éditeur spécialisé en ouvrages d'art diffuse, sur une année, 22 000 livres dont les prix varient de 15 à 75 €. On estime que les fonctions d'offre f et de demande g sont définies sur $[15; 75]$ par $f(x) = 55,8x + 1340$ et $g(x) = -0,03x^3 + 5x^2 - 300x + 8780$, où x est le prix d'un livre, en euro.

Cela signifie que lorsqu'un livre coûte x euro, l'éditeur est prêt à vendre $f(x)$ livres et les consommateurs sont prêts à acheter $g(x)$ livres.

1. a. Calculer $f(30)$ et $g(30)$. Interpréter les valeurs obtenues. L'offre est-elle supérieure à la demande ?
b. Mêmes questions avec $f(50)$ et $g(50)$.
2. Étudier les variations de f sur $[15; 75]$. Interpréter.
3. Étudier les variations de g sur $[15; 75]$. Interpréter.
4. On appelle **prix d'équilibre** le prix pour lequel l'offre est égale à la demande.

Après avoir justifié que l'équation $f(x) = g(x)$ admet une unique solution x_0 sur $[15; 75]$, déterminer, à l'aide de la calculatrice, une valeur approchée de x_0 , arrondie au centime d'euro près.

Quelles sont alors l'offre et la demande ? Arrondir à l'unité.

82 ALGO Pour fêter les

50 ans du Gateway Arch de Saint-Louis (USA), le producteur du spectacle souhaite placer de chaque côté des pieds de l'arche un laser dont le faisceau est tangent à l'arche aux points situés à 60 m de l'axe de symétrie.



On modélise l'arche par la fonction f définie sur l'intervalle $[-100; 100]$ par :

$$f(x) = 212 - 10,5(e^{0,033x} + e^{-0,033x})$$

1. a. Calculer $f'(x)$ et résoudre l'inéquation $f'(x) > 0$.
- b. Construire le tableau de variations de la fonction f .
- c. Exécuter l'algorithme ci-contre.

Que représentent les valeurs finales affichées dans le contexte de l'exercice ?

- d. Donner l'équation de la tangente à l'arche au point d'abscisse 60.

Arrondir les valeurs à 0,01 près.

2. En utilisant les résultats précédents, répondre aux questions suivantes.

- a. Quelle est la hauteur de l'arche ?
- b. Quelle est la largeur au sol de l'arche, à 0,1 m près ?
- c. À quelle distance des pieds de l'arche faut-il positionner les lasers ?

Info

Le Gateway Arch, conçu et terminé en 1965 par l'architecte d'origine finlandaise Eero Saarinen, est une « chaînette renversée ». L'arc dont la stabilité est assurée par son propre poids est utilisé dans de nombreuses constructions (Panthéon, dôme de la basilique de Florence...).

83 Modéliser une propagation

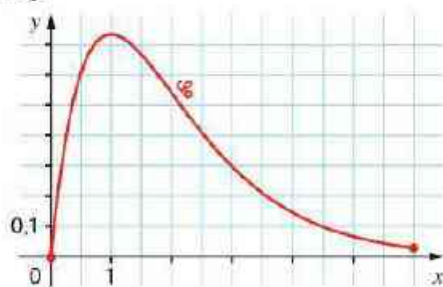
À la suite d'un accident industriel, un gaz se répand dans un local d'usine. On admet qu'au-delà de six minutes il n'y a quasiment plus de gaz dans l'air.

On modélise l'évolution du taux de gaz dans l'air grâce à la fonction f définie sur $[0; 6]$ par :

$$f(x) = 2xe^{-x}$$

où x est le nombre de minutes écoulées depuis l'accident et $f(x)$ le taux de gaz dans l'air exprimé en partie par million (ppm).

On donne la courbe représentative \mathcal{C} de la fonction f sur $[0; 6]$.



1. Déterminer le tableau complet des variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; 6]$.

2. a. Montrer que l'équation $f(x) = 0,65$ admet deux solutions x_1 et x_2 sur $[0; 6]$, avec $x_1 < x_2$.

b. À l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée de x_1 et de x_2 à 0,1 minute près.

3. On considère que le gaz a un effet irritant pour l'organisme si le taux dépasse 0,65 ppm pendant plus d'une minute.

Déterminer si le personnel de l'usine a été affecté ou non par la fuite de gaz, en explicitant la démarche.

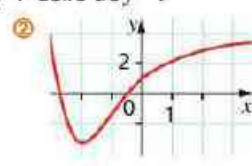
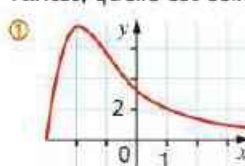
3 Étude de la convexité d'une fonction

84 Soit une fonction f deux fois

dérivable sur \mathbb{R} dont la représentation graphique de sa fonction dérivée est donnée ci-contre.



1. Parmi les représentations suivantes, quelle est celle de f ? Celle de f'' ?



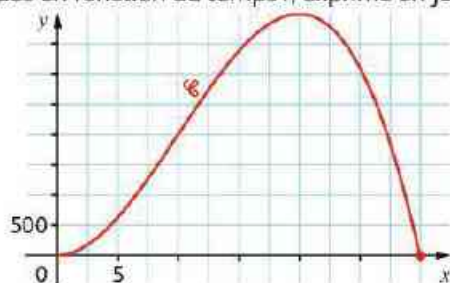
2. Combien la courbe représentant f admet-elle de points d'inflexion ?

85 Propagation d'une maladie

On étudie la propagation d'une maladie dans une ville.

Partie A. Lectures graphiques

La courbe \mathcal{C} représente le nombre de personnes malades en fonction du temps t , exprimé en jour.



- Déterminer les jours où il y a 2 000 malades.
- Déterminer le jour où le nombre de malades est maximal. Quel est alors ce maximum ?
- Proposer un intervalle sur lequel :
 - la progression de la maladie s'accélère ;
 - la progression de la maladie décélère ;
 - la maladie recule.
- Estimer le jour où la vitesse de propagation de la maladie est la plus grande.

Partie B. Étude théorique

On suppose que le nombre de personnes malades en fonction du temps t , exprimé en jour, peut être modélisé par la fonction f définie sur $[0; 30]$ par :

$$f(t) = -t^3 + 30t^2$$

La **vitesse de propagation** de la maladie au jour t est égale au nombre dérivé $f'(t)$.

- Déterminer le tableau de variations de f .
- Expliquer pourquoi au 5^e jour de l'épidémie, on estime que la maladie progresse au rythme de 225 nouvelles personnes par jour.
 - Estimer la vitesse de propagation de la maladie en nombre de nouvelles personnes malades par jour au 10^e jour, puis au 15^e jour de l'épidémie.
- Étudier le sens de variation de la dérivée f' . Mettre en relation avec les résultats de A. 3.
 - Que peut-on dire de la vitesse de propagation de la maladie le 10^e jour ?

86 Une entreprise fabrique des bouteilles toutes identiques, entre 20 000 et 70 000 par mois.

Pour une quantité q produite, en millier, on estime que les coûts de production, en millier d'euros, sont :

$$C(q) = 0,005(q - 40)^3 + 0,1q + 50$$

où $20 \leq q \leq 70$

- Montrer que la courbe représentative de C admet un point d'inflexion en 40.
 - Étudier la convexité de la fonction C .

2. On rappelle que le **coût marginal** est assimilé à la dérivée du coût total $C_m(q) = C'(q)$.

- Montrer que le coût marginal est minimal en 40.
- Mettre en relation les variations du coût marginal C_m et la convexité du coût total C .

87 Taux d'équipement en lecteurs de DVD

On étudie ici l'évolution du taux d'équipement des ménages français en lecteurs de DVD depuis 1998.

Partie A. De 1998 à 2010

Les valeurs constatées du taux d'équipement amènent à estimer, pour l'année 1998 + x , pour $0 \leq x \leq 12$, le taux d'équipement en lecteurs de DVD, en %, par :

$$f(x) = \frac{85}{1 + 150e^{-x}}$$

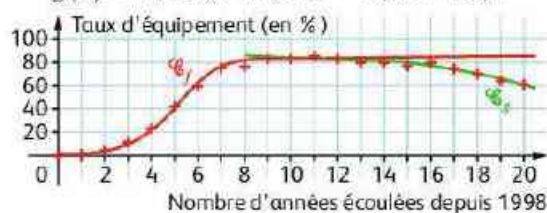


- Déterminer le sens de variation de f sur $[0; 12]$.
- Le **rythme de croissance (instantané)** du taux d'équipement est assimilé à la dérivée de f .
 - En utilisant le graphique, estimer en quelle année le rythme de croissance est maximal.
 - Déterminer algébriquement le point d'inflexion de la courbe représentative de f . Mettre en relation avec le résultat de la question 2. a.

Partie B. Depuis 2010

Le graphique suivant représente l'évolution du taux d'équipement des ménages français en lecteurs DVD entre 1998 et 2018. On y a également représenté la fonction g définie sur $[9; +\infty[$ par :

$$g(x) = -0,026x^3 + 0,92x^2 - 11,6x + 133,4$$

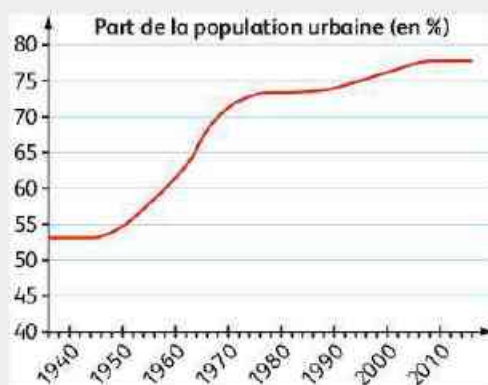


- Expliquer pourquoi la fonction f n'est plus adaptée pour modéliser l'évolution à partir de 2010, contrairement à la fonction g .
- Préciser le sens de variation de g sur $[9; +\infty[$.
- Étudier le sens de variation de g' sur $[9; +\infty[$. Interpréter dans le contexte de l'exercice.
 - La courbe \mathcal{C}_g admet-elle un point d'inflexion ? Si oui, quelle est son abscisse ?
- Selon le modèle, en quelle année plus aucun ménage français ne devrait posséder de lecteur DVD ?

La part de la population française vivant en ville plafonne

« 50 millions de personnes – plus des trois quarts de la population – habitent en ville, selon les données 2016 de l'Insee. **Le processus d'urbanisation s'est considérablement ralenti depuis la fin des années 1960 et il est à l'arrêt depuis dix ans.** La population continue à progresser mais se développe aussi bien en ville qu'à la campagne.

Au sortir de la Seconde Guerre mondiale, **le processus d'urbanisation de la France s'accélère.** La part de la population urbaine passe de 53 % en 1936 à 70 % en 1968 : l'emploi agricole s'écroule sous l'effet de la modernisation et les ruraux viennent grossir la population des villes portées par la progression de l'industrie et des services. **À partir des années 1970, la population urbaine croît beaucoup moins vite.** L'immigration (le plus souvent accueillie en ville)



est ralentie, la croissance économique se réduit. La périurbanisation se poursuit [...]. **Depuis dix ans la part de la population urbaine stagne, comme si un plafond avait été atteint.** »

Source : www.observationsociete.fr
Article du 5 mars 2019

1. a. Expliquer et commenter les quatre passages surlignés dans le texte à partir de l'interprétation du graphique.

b. Interpréter en termes de convexité de la fonction qui, à l'année, associe le taux de la population urbaine en France.

2. Un tableur a permis d'estimer l'évolution du **taux de la population urbaine en France**, en pourcentage, par :

$$f(x) = 0,00028x^3 - 0,0276x^2 + 0,968x + 62,5$$

où x est le nombre d'années écoulées depuis 1960.

Le **rythme de croissance (instantané)** du taux est assimilé à la dérivée de f .

a. Calculer la valeur estimée du taux de la population urbaine en 1968.

Calculer le pourcentage d'erreur par rapport à la valeur effective de ce taux en 1968, donnée dans le texte.

b. Exprimer $f'(x)$, puis $f''(x)$ en fonction de x .

c. Justifier que la fonction f est croissante sur $[0; +\infty[$. Interpréter.

d. D'après le modèle, au cours de quelle année le rythme de croissance est-il le plus faible ? Est-ce compatible avec les données du texte ?

e. Expliquer pourquoi, à partir d'un moment, la fonction f ne peut modéliser l'évolution du taux de population urbaine.

3. Le tableur permet d'obtenir le deuxième modèle suivant de l'évolution du taux de population urbaine, en pourcentage :

$$p(x) = \frac{80,4}{1 + 0,24 \exp(-0,04x)}$$

où x est le nombre d'années écoulées depuis 1960.

Ce modèle est-il davantage compatible avec les données du texte ?

Argumenter.

Lorsqu'on modélise une évolution par une fonction, il faut que ses valeurs, son sens de variation et son rythme de croissance soient compatibles avec les données observées.

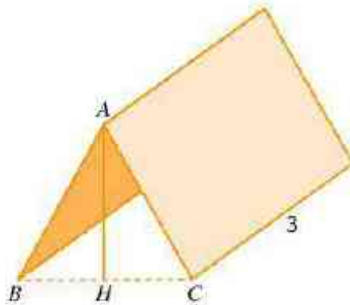


88

... en géométrie

Partir en camping

Un campeur dispose d'une bâche carrée de 3 m de côté qu'il utilise comme toile de tente, comme représenté ci-contre. On considère que le triangle ABC est isocèle et que la hauteur $[AH]$ représente l'un des piquets qui assure le maintien de la structure.



Quelle hauteur de piquet faut-il choisir pour que le volume de la tente soit maximum ?

On choisit de poser $BH = x$. Ainsi $0 \leq x \leq 1,5$.

1. Justifier que le volume de la tente est :

$$V(x) = 3x\sqrt{\frac{9}{4} - x^2}$$

2. Un logiciel de calcul formel permet d'obtenir l'expression de $V'(x)$ en fonction de x . En déduire la résolution du problème.

```

1  V(x) = 3x*sqrt(9/4-x^2)
2  - V'(x) := 3/2 * sqrt(-4*x^2 + 9)
Factoriser(Dérivée(V(x)))
2  - 3 (8*x^2 - 9) / (2 (2*x - 3) (2*x + 3))
    
```

89

... en économie

Coût total, coût moyen et coût marginal

Pour une entreprise fabriquant des objets, on définit les éléments suivants.

- Le **coût total de production** $C(q)$ est la somme des **coûts fixes** CF , essentiellement dus à l'achat de machines, de locaux, les salaires et charges..., et des **coûts variables** $CV(q)$, qui dépendent de la quantité q d'objets produits. Ainsi $C(q) = CF + CV(q)$.

En microéconomie, toute augmentation de la production entraîne une augmentation des coûts : la fonction coût total C est donc toujours une fonction croissante.

On constate souvent que le coût total croît vite au début de la production, lors de sa mise en route, puis plus lentement, et finalement rapidement à nouveau, car la fabrication de « beaucoup » de produits génère de plus en plus de frais et d'investissements.

- Le **coût moyen** ou **coût unitaire** est défini par $CM(q) = \frac{C(q)}{q}$.

On constate que le coût moyen n'est jamais défini en zéro ; en général, il diminue rapidement au début de la production : les coûts fixes sont de mieux en mieux rentabilisés. Puis dans un second temps, il augmente du fait de la loi des rendements décroissants.

Ainsi la courbe du coût moyen CM a la forme d'un « U ».

- Le **coût marginal** est défini par $C_m(q) = C(q) - C(q-1)$: c'est le coût de production du q -ième objet (le dernier objet produit) lorsqu'on en a produit q . On l'assimile au nombre dérivé de C , c'est-à-dire $C_m(q) = C'(q)$.

Une entreprise est spécialisée dans le recyclage de bouteilles d'eau en plastique et peut produire chaque jour entre 0 et 10 tonnes de plastique.



Le coût total quotidien de production, en euro, est modélisé par la fonction C définie sur $[0; 10]$ par :

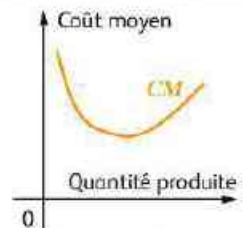
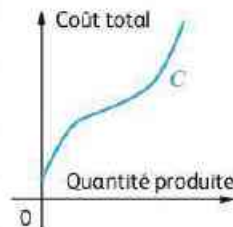
$$C(q) = 15q^3 - 100q^2 + 500q + 300$$

où q est la masse, en tonne, de plastique recyclé dans la journée.

On note CM le coût moyen et C_m le coût marginal.

1. Montrer que la fonction C est croissante sur $[0; 10]$.

2. Étudier les variations de la fonction C_m sur $[0; 10]$. Interpréter.



3. En utilisant l'égalité $CM(q) = \frac{C(q)}{q}$, démontrer que le coût moyen est minimal lorsqu'il est égal au coût marginal.

4. a. Exprimer $CM'(q)$ en fonction de q .

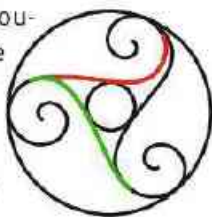
b. Justifier que l'équation $CM'(q) = 0$ admet une unique solution q_0 sur $]0; 10[$. Déterminer une valeur approchée de q_0 .

c. En déduire les variations de CM sur $]0; 10[$.

5. Représenter graphiquement les fonctions CM et C_m sur un même graphique. Vérifier que :

- le coût moyen est décroissant lorsque le coût marginal est inférieur au coût moyen ;
- le coût moyen est croissant lorsque le coût marginal est supérieur au coût moyen.

Une entreprise de décoration souhaite fabriquer en grand nombre des « triskels », à l'aide d'une machine-outil programmable. On modélise deux morceaux des trois branches par les courbes représentatives de :



- la fonction f définie sur $[-4,5; 4]$ par :

$$f(x) = 0,02x^3 + 0,08x^2 + 1,6$$

- la fonction g définie sur $[-4,5; 4]$ par :

$$g(x) = -0,4x^2 - 3x - 4$$

On se demande en quel point A il faut prévoir de raccorder les deux branches.

1. Justifier que le problème consiste à résoudre l'équation $h(x) = 0$ sur $[-4,5; 4]$, où :

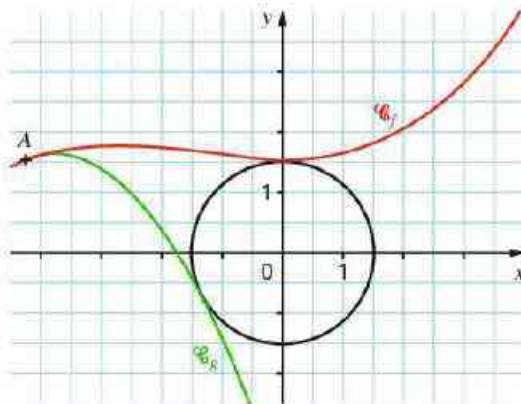
$$h(x) = 0,02x^3 + 0,48x^2 + 3x + 5,6$$

2. Étudier les variations de h sur l'intervalle $[-4,5; 4]$.

3. Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution x_0 sur $[-4,5; 4]$.

Déterminer la valeur exacte de x_0 .

4. Le raccordement en A est-il « bon », c'est-à-dire : les deux courbes ont-elles la même tangente en leur point de raccordement ?



Dans un disque en carton de rayon R , on découpe un secteur angulaire correspondant à un angle de mesure α radians. On superpose ensuite les bords afin de créer un cône de révolution. On souhaite choisir l'angle α pour obtenir un cône de volume maximal.

On appelle ℓ le rayon de la base circulaire de ce cône et h sa hauteur.



1. On choisit $R = 20$ cm.

- a. Montrer que le volume du cône, en fonction de sa hauteur h , est : $V(h) = \frac{\pi}{3}(400 - h^2) \times h$.

- b. Justifier qu'il existe une valeur de h qui rend le volume du cône maximum. Donner cette valeur.

- c. Déterminer la valeur de α , au degré près, qui rend le volume du cône maximum.

2. L'angle α dépend-il du rayon R du disque en carton ?



Le volume d'un cône ayant pour base un disque d'aire \mathcal{A} et pour hauteur h est $\frac{1}{3} \times \mathcal{A} \times h$ et la longueur d'un arc de cercle de rayon r et d'angle θ (en radian) est $r \times \theta$.

Une entreprise fabrique des boulons. En courte période, sa production totale P , en nombre de boulons, dépend du facteur travail L selon la relation :

$$P(L) = -15L^3 + 175L^2 + 150L$$

où la quantité de travail L , exprimée en heure, est comprise entre 0 et 8.

Le **rythme de production** V (ou vitesse de production) est égal à la dérivée P' , en boulons produits par heure :

$$V(L) = P'(L)$$

1. Quelle est la production au bout de 2 h de travail ? Au bout de 4 h de travail ?

2. a. Calculer $V(L)$. En déduire le rythme de production au bout de 2 h, puis 4 h de travail.

- b. Étudier le sens de variation de P sur $[0; 8]$. Interpréter.

3. a. Étudier le sens de variation de V sur $[0; 8]$.

- b. Pour quelle quantité de travail le rythme de production est-il maximum ? Arrondir à 10 minutes près.

- c. Phases de rendements

Sur un intervalle où le rythme de production est (dê)croissant, on parle de « **phase de rendements (dê)croissants** ».

Identifier ces deux phases pour la production. Interpréter graphiquement les résultats.

4. L'entreprise doit livrer une commande de 3 000 boulons.

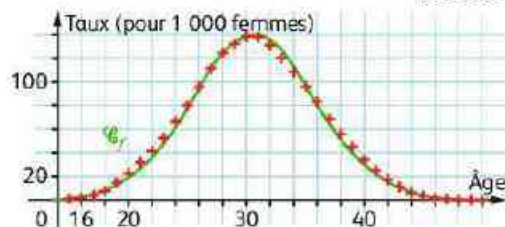
À l'aide de la calculatrice, déterminer le nombre d'heures de travail nécessaires pour honorer la commande, en arrondissant à 10 minutes près.

Lorsqu'on observe l'allure d'un nuage de points discrets $(x_i; y_i)$, on peut essayer de modéliser le phénomène par une fonction continue. On a alors accès aux outils de l'analyse (calculs d'images, dérivée...) qui permettent d'étudier mathématiquement le phénomène.

Partie A Taux de fécondité

Le graphique ci-dessous donne le taux de fécondité selon l'âge de la mère en France en 2018.

Source : INSEE



Par exemple, en 2018, 1 000 femmes de 25 ans ont mis au monde 80,4 enfants.

On peut alors modéliser le taux de fécondité pour une femme, en %, par :

$$f(x) = 140e^{-0,018(x-30,6)^2}$$

où x est son âge, entre 15 ans et 50 ans.

1. Étudier les variations de la fonction f sur $[15; 50]$. En déduire la valeur du taux de fécondité maximal et l'âge de la mère associé.

2. On admet que, pour tout réel x de $[15; 50]$:

$$f''(x) = 5,04(0,036(x-30,6)^2 - 1) \times e^{-0,018(x-30,6)^2}$$

En déduire les abscisses des points d'inflexion de la courbe représentative de f . Interpréter les résultats.

Partie B Taux de divorce

Le graphique ci-dessous représente le taux de divorce pour 1 000 mariages selon la durée du mariage en France en 2014.

Source : INSEE



Par exemple, pour 1 000 mariages célébrés en 2009, 24,6 ont été rompus par un divorce en 2014, soit 5 ans après.

On peut alors modéliser le taux de divorce pour 1 000 mariages par :

$$f(x) = 12x \times e^{0,0018x^2 - 0,195x}$$

où x est la durée du mariage, en année, avec $x \in [0; 30]$.

1. Montrer que, pour tout réel x de $[0; 30]$:

$$f'(x) = (0,0432x^2 - 2,34x + 12) \times e^{0,0018x^2 - 0,195x}$$

2. En déduire le tableau de variations de f sur $[0; 30]$.

3. Pour quelle durée du mariage le taux de divorce est-il maximal ?

4. Commenter la phrase suivante :

« Heureux qui sait se faire aimer après sept années de mariage. » Alfred de Musset, *Lorenzaccio* (1834).

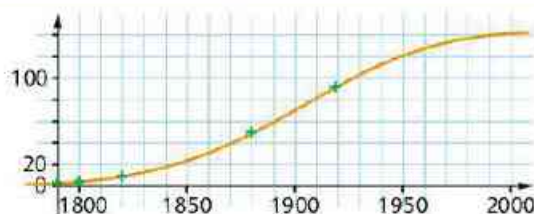
En 1838, le belge Verhulst propose, dans l'article « Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement », un modèle d'accroissement de la population française, belge et russe du début du XIX^e siècle, très proche des données observées à l'époque.

Un siècle plus tard, en 1920, les américains Raymond Pearl et Lowell J. Reed redécouvrent ce modèle et l'appliquent à la population américaine, à partir des données suivantes, où la population est en million :

| Années | 1790 | 1800 | 1820 | 1880 | 1919 |
|------------|------|------|------|-------|-------|
| Population | 3,93 | 5,31 | 9,64 | 50,16 | 91,97 |

On modélise alors la population américaine $f(t)$, en million, en fonction de l'année t par :

$$f(t) = \frac{147}{1 + 2,74 \times 10^{26} \times e^{-0,032t}}$$



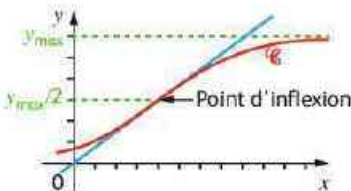
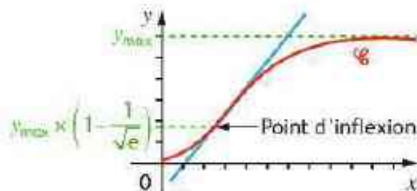
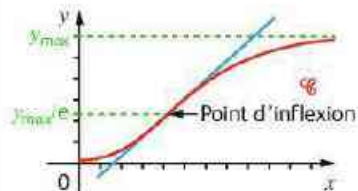
1. Justifier que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[1790; 2000]$.

2. Déterminer l'abscisse du point d'inflexion de la courbe représentative de f . Interpréter en termes de rythme de croissance.

3. a. Calculer l'erreur entre la population réelle et la population estimée par le modèle.

b. Depuis, on sait que la population américaine était de 179 300 milliers en 1960 et 226 500 milliers en 1980. Le modèle est-il toujours valable ?

Selon l'allure des courbes de croissance (vitesse de croissance, symétrie éventuelle, etc.), on choisit un modèle plutôt qu'un autre.

| Modèle logistique | Modèle gaussien modifié | Modèle de Gompertz |
|---|---|--|
| $f(x) = \frac{M}{1 + a \exp(-bx)}$ | $f(x) = M(1 - a \exp(-bx^2))$ | $f(x) = M \exp(-ae^{-bx})$ |
|  |  |  |
| Vitesse maximale à mi-croissance, croissance symétrique | Vitesse maximale au 2/5 ^e environ, dissymétrie gauche | Vitesse maximale au premier tiers environ, dissymétrie gauche |

Info

Le modèle de Gompertz, qui date de 1825, a été initialement introduit pour étudier le taux de mortalité en fonction de l'âge. Depuis, il permet de modéliser de nombreuses évolutions au cours du temps : taille ou masse des individus d'une population (comme le rat musqué, les pieds de maïs, des bactéries), mais aussi la croissance de tumeurs cancéreuses.

Cet exercice propose l'étude de deux exemples de modélisation.

Partie A Croissance d'un potiron

Une étude statistique a permis de modéliser l'évolution de la masse $f(x)$, en kg, d'un potiron en fonction du nombre x de jours par :

$$f(x) = \frac{5,4}{1 + 90 \exp(-0,4x)}$$

où $x \geq 0$.

Pour tout réel $x \geq 0$, la **vitesse de croissance** de la masse du potiron le jour x est assimilée au nombre dérivé $f'(x)$, en kg par jour.

1. a. Étudier le sens de variation de f sur $[0; +\infty[$.

Interpréter dans le contexte de l'exercice.

b. À l'aide de la calculatrice, estimer la masse du potiron au bout d'un temps « très long ».

2. a. Soit un réel $x \geq 0$. Exprimer $f''(x)$ et justifier que $f''(x)$ est du signe de $(90e^{-0,4x} - 1)$.

b. On pose $g(x) = 90e^{-0,4x} - 1$ pour $x \geq 0$.

Étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $[0; +\infty[$ et justifier que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0; +\infty[$.

On donnera une valeur approchée de α à 0,1 près.

c. En déduire le tableau de variations de f' sur $[0; +\infty[$.

d. En utilisant l'égalité $90e^{-0,4\alpha} = 1$, expliquer pourquoi on peut dire que la vitesse de croissance du potiron est maximale à mi-croissance.

3. On estime que le potiron est à maturité lorsque sa masse dépasse 5 kg. Au bout de combien de jours le potiron est-il à maturité ?



Partie B Croissance d'un pommier

On mesure régulièrement la taille d'un pommier. On modélise alors celle-ci, en cm, en fonction du nombre x de jours écoulés par :

$$f(x) = 125 \exp(-70e^{-0,06x})$$

où $x \in [0; +\infty[$

Pour tout réel $x \geq 0$, la **vitesse**

de croissance du pommier le jour x est assimilée à $f'(x)$, en centimètre par jour.

1. a. Étudier le sens de variation de f sur $[0; +\infty[$.

Interpréter dans le contexte de l'exercice.

b. À l'aide de la calculatrice, estimer la taille du pommier au bout d'un temps « très long ».

2. On admet que, pour tout réel $x \geq 0$:

$$f''(x) = g(x) \times 31,5e^{-0,06x} \times \exp(-70e^{-0,06x})$$

avec $g(x) = 70e^{-0,06x} - 1$.

a. Étudier le sens de variation de la fonction g sur $[0; +\infty[$.

b. Justifier que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0; +\infty[$.

c. À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de α à 0,1 près.

d. En déduire le tableau de variations de la dérivée f' sur $[0; +\infty[$.

3. a. Justifier que $f'(\alpha) = \frac{125}{e}$.

b. Expliquer pourquoi on peut dire que la vitesse de croissance du pommier est maximale environ au tiers de sa croissance.



Plusieurs méthodes de « résolution approchée »

Utiliser PYTHON

Il est très fréquent qu'on ne puisse pas déterminer la valeur exacte d'une solution d'une équation. Dans ce cas-là, on utilise une méthode numérique pour en déterminer une valeur approchée.

Ce TP a pour objet l'exposé de trois méthodes « classiques » sur l'équation :

$$(E) : x^3 - 2x - 5 = 0$$

que l'on souhaite résoudre de façon approchée sur l'intervalle $[1; 3]$.

On définit la fonction f sur $[1; 3]$ par $f(x) = x^3 - 2x - 5$.

Préliminaires

- Justifier que l'équation $(E) : f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1; 3]$.
- Vérifier que, pour tout réel $x \in [1; 3]$, $f'(x) \neq 0$.

Partie A Résolution par balayage

1. La capture d'écran ci-contre a été obtenue en tabulant la fonction f sur $[1; 3]$ avec un pas de 0,1.

En déduire un encadrement de α d'amplitude 0,1.

2. Procéder de même, de façon à obtenir un encadrement de α d'amplitude 0,01.

3. On considère le programme Python ci-contre.

a. Programmer et exécuter la fonction `resol_balayage(p)` pour $p = 0,1$, puis pour $p = 0,01$.

Mettre en relation avec les résultats obtenus aux questions 1. et 2.

b. Soit un réel $p \in]0; 2]$. Expliquer pourquoi la fonction `resol_balayage(p)` permet de résoudre de façon approchée l'équation (E) avec la précision p .

| x | f(x) |
|-----|--------|
| 1.8 | -2.768 |
| 1.9 | -1.941 |
| 2 | -1 |
| 2.1 | .061 |
| 2.2 | 1.248 |
| 2.3 | 2.567 |
| 2.4 | 4.024 |

```
def f(x):
    return x**3-2*x-5
def resol_balayage(p):
    x=1
    while f(x)<0:
        x=x+p
    return x
```

Partie B Résolution par dichotomie

1. a. Calculer $f(1)$, $f(3)$, puis $f(2)$.

En déduire que $2 \leq \alpha \leq 3$.

b. A-t-on $2 \leq \alpha \leq 2,5$ ou $2,5 \leq \alpha \leq 3$? Expliquer.

2. Soit $p > 0$. L'algorithme ci-contre, appelé *algorithme de dichotomie*, généralise la démarche précédente. Le programmer et comparer avec les résultats à la partie A.

3. Modifier l'algorithme précédent pour qu'il affiche également le nombre de boucles « Tant que » effectuées avant d'afficher le résultat final.

```
a ← 1
b ← 3
Tant que b - a > p. Faire
    m ← (a+b)/2
    Si f(m) > 0 Alors
        b ← m
    Sinon a ← m
Fin Si
Fin Tant que
Afficher a et b
```

Partie C Méthode de Newton

La méthode de Newton consiste à utiliser, de proche en proche, des tangentes à la courbe \mathcal{C}_f et leurs points d'intersection avec l'axe des abscisses.

Le graphique suivant illustre la démarche utilisée.

Les réels $a_0 = 3$, a_1 et a_2 sont des valeurs approchées de la solution α .



1. On pose $a_0 = 3$ et on note A_1 le point de la courbe représentative \mathcal{C}_f d'abscisse a_0 , \mathcal{T}_1 la tangente à la courbe \mathcal{C}_f en A_1 et a_1 l'abscisse du point d'intersection de \mathcal{T}_1 avec l'axe des abscisses.

a. En utilisant le fait que la droite \mathcal{T}_1 admet comme équation $y = f'(a_0)(x - a_0) + f(a_0)$, montrer que :

$$a_1 = a_0 - \frac{f(a_0)}{f'(a_0)}$$

2. De même, on note A_2 le point de la courbe \mathcal{C}_f d'abscisse a_1 , \mathcal{T}_2 la tangente à \mathcal{C}_f en A_2 et a_2 l'abscisse du point d'intersection de \mathcal{T}_2 avec l'axe des abscisses.

Démontrer que $a_2 = a_1 - \frac{f(a_1)}{f'(a_1)}$.

3. On poursuit le procédé et on définit la suite (a_n) par $a_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)}$$

a. Construire une fonction Python permettant de calculer le terme a_n en fonction du rang n .

b. Soit $p > 0$. Modifier la fonction précédente de façon à afficher le premier rang n tel que $|a_{n-1} - a_n| < p$.

À L'ÉCRIT OU À L'ORAL

Partie D Comparaison

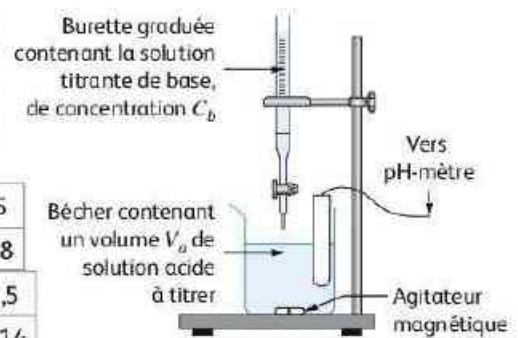
Comparer les trois méthodes précédentes : estimations de α obtenues, rapidité d'exécution, etc.

Dosage acido-basique en chimie

Mener une recherche

En chimie, pour déterminer la concentration C_a inconnue d'un acide faible, on peut réaliser un suivi pH-métrique, en versant au fur et à mesure, un volume V_b (en mL) d'une base forte de concentration C_b connue. Sandrine a réalisé l'expérience avec $V_a = 10,0$ mL et $C_b = 0,100$ mol/L. Elle a obtenu les relevés suivants.

| | | | | | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| V_b | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 8,5 |
| pH | 3,23 | 3,60 | 3,87 | 4,08 | 4,27 | 4,47 | 4,64 | 4,84 | 5,04 | 5,18 |
| V_b | 9 | 9,2 | 9,5 | 9,7 | 10 | 10,2 | 10,5 | 10,7 | 11 | 11,5 |
| pH | 5,34 | 5,43 | 5,57 | 5,65 | 5,85 | 6,03 | 6,41 | 6,90 | 9,03 | 10,14 |
| V_b | 12 | 12,5 | 13 | 13,5 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
| pH | 10,68 | 10,98 | 11,17 | 11,28 | 11,37 | 11,50 | 11,61 | 11,68 | 11,74 | 11,80 |



Partie A Détermination de l'équivalence

1. Construire la courbe d'évolution du pH en fonction du volume V_b versé.
2. Conjecturer la convexité de cette courbe. Interpréter en termes de rythme de croissance du pH.
3. En chimie, le point d'inflexion $E(V_{beq}; pH_{eq})$ de la courbe s'appelle **point d'équivalence**. À l'équivalence, lorsque la réaction est totale entre l'acide et la base, on peut montrer que :

$$C_a \times V_a = C_b \times V_{beq}$$

- a. Effectuer des recherches sur Internet et proposer deux méthodes différentes permettant d'obtenir graphiquement les coordonnées du point E.
- b. En déduire la concentration C_a inconnue de l'acide.

À L'ÉCRIT OU À L'ORAL

Partie B Bilan

Faire un compte rendu des recherches et exposer comment on détermine la concentration inconnue d'un acide faible.

Calcul de l'impôt sur le revenu

Mener une recherche

Le barème de l'impôt sur le revenu est progressif. Cela signifie que le revenu imposable est réparti dans les différentes tranches d'imposition. La somme des montants obtenus par tranche correspond à l'**impôt brut** du foyer fiscal **par part du quotient familial**. Le **quotient familial** d'un foyer fiscal est égal au quotient des revenus imposables par le nombre de parts du foyer (de façon simplifiée, chaque adulte compte pour 1 part et chaque enfant compte pour 0,5 part).

Partie A Étude pour l'année 2019

Voici le barème d'imposition appliqué en 2019.

| Tranche du quotient familial | Taux d'imposition |
|------------------------------|-------------------|
| De 0 et 10 064 € | 0 % |
| De 10 064 à 27 794 € | 14 % |
| De 27 794 à 74 517 € | 30 % |
| De 74 517 à 157 806 € | 41 % |
| Au-delà de 157 806 € | 45 % |

1. On considère un foyer comportant deux adultes et deux enfants, avec 72 000 € de revenu imposable.

- a. Vérifier que le quotient familial est égal à 24 000 €.
 - b. Justifier que, par part du quotient familial, le montant de l'impôt est arrondi à 1 951 €.
 - c. En déduire le montant brut d'imposition de ce foyer et vérifier que son taux d'imposition réel est 8,1 %.
2. On considère un foyer comportant deux adultes et un enfant, avec 75 000 € de revenu imposable. Calculer le montant brut d'imposition et le taux d'imposition réel de ce foyer.
 3. **PYTHON** Créer une fonction Python qui détermine le montant de l'impôt d'un foyer pour l'année 2019. Elle prendra en entrée les revenus imposables R et le nombre N de parts du foyer.

À L'ÉCRIT OU À L'ORAL

Partie B Impôt en fonction du revenu

On considère un célibataire et on s'intéresse à la fonction qui à son revenu imposable R associe le montant de son impôt.

Cette fonction est-elle continue ? Quel est son sens de variation ? Est-elle convexe ? concave ? Interpréter et argumenter.

Évolution : modèles discrets

Les capacités du thème

-  Modéliser un problème par une suite
-  Conjecturer le comportement d'une suite
-  Exploiter une suite géométrique
-  Modéliser un problème par une suite arithmético-géométrique

Modélisation du réel

La coccinelle, charmant petit insecte coloré, est un redoutable prédateur du puceron. Elle est ainsi utilisée en agriculture biologique pour éviter l'emploi d'insecticides chimiques.

Lorsque l'on étudie les populations d'un prédateur et de ses proies, quelques éléments semblent « d'évidence » : par exemple, si les proies se raréfient, le prédateur tend à disparaître. Mais la disparition du prédateur contribue à la prolifération des proies... Les études comparées des populations proies/prédateurs font l'objet d'une modélisation étudiée dans ce thème.

 Voir Maths en situation p. 83



Consolider les bases

1 On décrit ci-dessous quatre situations.

① Tous les ans, le nombre de licenciés d'une association augmente de 200. En 2019, il y avait 5 000 licenciés.

② Tous les ans, le nombre d'utilisateurs d'une application mobile augmente de 20 %. En 2019, il y avait 5 000 utilisateurs.

③ Tous les ans, le nombre d'habitants d'un village diminue de 200. En 2019, il y avait 5 000 habitants.

④ Tous les ans, le nombre d'abonnés à un journal diminue de 20 %. En 2019, il y avait 5 000 abonnés.

1. Justifier pourquoi chaque situation peut-être modélisée par une suite.
2. Pour tout entier n , on note u_n le nombre, en millier, de « ... » pour l'année 2019 + n .

Après avoir complété les pointillés, relier chaque situation à la définition par récurrence de la suite associée.

2 Pour chaque situation, répondre aux questions suivantes.

1. a. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
- b. En déduire, pour tout entier n , l'expression de u_n en fonction de n .
2. Calculer u_6 . Interpréter le résultat dans le contexte.
3. a. Pour tout entier naturel n , étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.
- b. En déduire les variations de la suite (u_n) .

Objectif

Redécouvrir les notions de suite arithmétique et géométrique.

- a $\begin{cases} u_{n+1} = 1,2u_n \\ u_0 = 5 \end{cases}$
- b $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 0,2 \\ u_0 = 5 \end{cases}$
- c $\begin{cases} u_{n+1} = u_n - 0,2 \\ u_0 = 5 \end{cases}$
- d $\begin{cases} u_{n+1} = 0,8u_n \\ u_0 = 5 \end{cases}$

Info

Le mathématicien Abraham de Moivre dormait 6 heures par nuit. On raconte qu'à 87 ans il avait remarqué qu'il dormait un quart d'heure de plus par nuit. S'aidant de cette suite arithmétique, il aurait deviné le jour de sa mort : celui où il dormirait 24 heures !

Situation 1 Évolution d'un capital

Guillaume dispose d'une somme de 1 000 euros qu'il souhaite placer sur un compte épargne. Il envisage pour cela deux formules de placement.

Formule A : un placement à intérêts composés au taux annuel de 1,5 %.

Formule B : un placement à intérêts composés au taux annuel de 0,75 %, avec un versement mensuel de 5 euros.

On suppose que, pendant la durée du placement, Guillaume ne fera ni retrait ni ajout supplémentaire sur son compte épargne.

Pour n entier naturel, on note u_n le capital disponible au bout de n années avec la formule A et v_n celui avec la formule B.

On a donc $u_0 = v_0 = 1000$.

1. Calculer le capital au bout d'un an, puis au bout de deux ans de placement avec chacune des formules. On arrondira au centime d'euro.
2. Pour n entier naturel, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n . Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
3. Montrer que, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = 1,0075 \times v_n + 60$.

2 Afin de comparer les deux formules, Guillaume utilise un tableur.

1. Quelles formules doit-il saisir dans les cellules B3 et C3 et recopier vers le bas afin d'obtenir le capital disponible chaque année avec chacune des formules ?

2. En utilisant un tableur, déterminer les éléments suivants.

- a. Le capital au bout de dix ans de placement avec chacune des formules. On arrondira au centime d'euro.
- b. Le nombre d'années nécessaires au doublement du capital initial avec chacune des formules.

Objectif

Utiliser un tableur pour étudier l'évolution d'un capital.

Info

Dans un placement à intérêts composés, chaque année, les intérêts acquis s'ajoutent au capital pour produire à leur tour des intérêts.

| | A | B | C |
|---|--------|-----------|-----------|
| 1 | Années | Formule A | Formule B |
| 2 | 0 | 1000 | 1000 |
| 3 | 1 | | |
| 4 | 2 | | |
| 5 | 3 | | |

Situation 2 Le modèle de Malthus

Histoire



Dans les années 1800, en se basant sur le rythme de croissance de la population américaine au XVIII^e siècle, l'économiste anglais Thomas Malthus écrit dans son *Essai sur le principe de la population* :

Nous pouvons être certains que lorsque la population n'est arrêtée par aucun obstacle, elle double tous les vingt-cinq ans, et croît ainsi de période en période selon une progression géométrique. Comparons maintenant l'accroissement de la population à celui de la nourriture. [...] Chaque période de vingt-cinq ans ajoute à la production [...] une quantité égale à sa production actuelle. Nous sommes donc en état d'affirmer [...], que les moyens de subsistance, [...] ne peuvent jamais augmenter à un rythme plus rapide que celui qui résulte d'une progression arithmétique.

1. L'Angleterre comptait 10 millions d'habitants en 1800 et on suppose que la production agricole pouvait alors nourrir toute la population.

Montrer qu'alors en moyenne, selon Malthus :

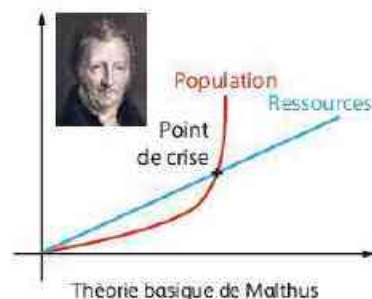
- la population augmente de 2,8 % par an ;
 - l'agriculture permet de nourrir 0,4 million d'habitants en plus par an.
2. Pour tout entier $n \geq 0$, pour l'année $1800 + n$, on note p_n le nombre d'habitants en million en Angleterre et a_n le nombre d'habitants en million que peut nourrir l'agriculture anglaise selon le modèle de Malthus.

Ainsi $p_0 = a_0 = 10$.

- Préciser la nature des suites p et a .
- Conjecturer la limite des suites p et a . Argumenter.
- D'après ce modèle, la production agricole serait-elle suffisante en 1820 pour nourrir toute la population anglaise ? Et en 1830 ?
- On considère l'algorithme ci-contre. L'exécuter et interpréter le résultat renvoyé dans le contexte de l'exercice.

Objectif

Comprendre un modèle en dynamique des populations. Approche intuitive de la notion de limite infinie.



Théorie basique de Malthus

Info

Pierre-François Verhulst, contemporain de Malthus, énonce un autre modèle en dynamique des populations, prenant en compte plus de contraintes.

👉 Voir Maths en situation p. 62

```
def algo():
    p, a = 10, 10
    n = 0
    while p <= a:
        n = n + 1
        p = p * 1.028
        a = a + 0.4
    return n
```

Situation 3 Loi de refroidissement de Newton

La loi de refroidissement de Newton peut s'énoncer ainsi : « L'accroissement de la température d'un corps inerte est proportionnel à la différence entre la température de ce corps et celle du milieu environnant. »

Une tasse de café est servie à une température initiale de 80 °C dans un milieu dont la température est supposée constante, égale à 10 °C.

La loi de refroidissement de Newton conduit à modéliser la température du café par une suite (T_n) vérifiant, pour tout entier naturel n , la relation $T_{n+1} - T_n = -0,2(T_n - 10)$, où T_n est la température du café, exprimée en degré Celsius, à l'instant n , exprimé en minute. On a ainsi $T_0 = 80$.

- Montrer que, pour tout entier naturel n , $T_{n+1} = 0,8T_n + 2$.
1. Dans un repère orthonormé du plan, en prenant 1 cm pour 10 unités, construire la droite \mathcal{D} représentant la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 0,8x + 2$, ainsi que la droite Δ d'équation $y = x$.
On remarquera dans la suite que, pour tout entier n , $T_{n+1} = f(T_n)$.
2. a. Placer le point de coordonnées $(T_0; 0)$. À l'aide de la droite \mathcal{D} , en remarquant que $T_1 = f(T_0)$, construire le point de coordonnées $(0; T_1)$.
b. En utilisant la droite Δ , construire le point de coordonnées $(T_1; 0)$.
3. Répéter ce procédé pour construire T_2, T_3, T_4 et T_5 sur l'axe des abscisses.
4. En utilisant cette représentation graphique, conjecturer le sens de variation de la suite (T_n) ainsi que sa limite éventuelle. Interpréter.

Objectif

Représenter graphiquement une suite récurrente et exploiter cette représentation pour conjecturer son comportement.

Info

Isaac Newton (1642-1727) est un physicien, philosophe, astronome, et mathématicien anglais, considéré comme l'un des plus grands scientifiques de tous les temps. Les contributions révolutionnaires de Newton ont permis d'expliquer une grande partie du monde qui nous entoure en termes mathématiques et ont permis de se rendre compte que la science était également en mesure d'expliquer un grand nombre de phénomènes.



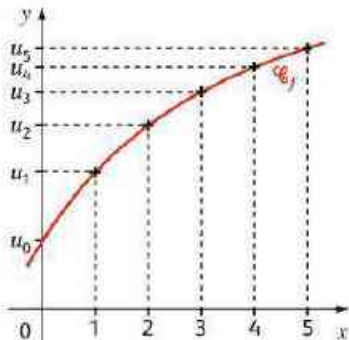
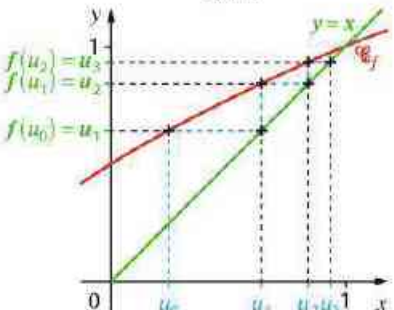
1 Généralités sur les suites

a Modes de génération d'une suite

Une suite numérique est une fonction définie sur \mathbb{N} à valeurs dans \mathbb{R} . Les termes d'une suite forment une **liste ordonnée de nombres réels**. Les suites permettent de modéliser les **phénomènes « discrets »**, dont on peut numérotter les différentes étapes.

Vocabulaire

Le nombre $u(n)$, image par u du nombre entier naturel n , est appelé **terme de rang** ou d'**indice** n , il est noté u_n .

| Suite définie explicitement | Suite définie par récurrence |
|---|---|
| <p>Pour tout entier naturel n :</p> <p>$u_n = f(n)$ où f est une fonction définie sur $[0; +\infty[$</p> <p>Exemple : on considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = \frac{3n+2}{n+4} = f(n)$. On note \mathcal{C}_f la courbe de $f : x \mapsto \frac{3x+2}{x+4}$ définie sur $]-4; +\infty[$.</p>  | <p>u_0 est donné (ou u_p pour $p \geq 0$) et, pour tout entier naturel n :</p> <p>$u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction</p> <p>Exemple : on considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0,24$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{3u_n+2}{u_n+4} = f(u_n)$. On note \mathcal{C}_f la courbe de $f : x \mapsto \frac{3x+2}{x+4}$ définie sur $]-4; +\infty[$.</p>  |

b Sens de variation

- Définition** • Une suite (u_n) est **croissante** si, pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1} \geq u_n$, autrement dit si $u_{n+1} - u_n$ est positif.
- Une suite (u_n) est **décroissante** si, pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1} \leq u_n$, autrement dit si $u_{n+1} - u_n$ est négatif.

Exemple

La suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n , par $u_n = (-2)^n$ n'est ni croissante ni décroissante. En effet, deux termes consécutifs sont de signes contraires.

c Suites arithmétiques et géométriques : rappels

| | Suite arithmétique (raison r , 1 ^{er} terme u_0) | Suite géométrique (raison q , 1 ^{er} terme u_0) |
|--|--|--|
| Définition (par récurrence) | Pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = u_n + r$ | Pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = u_n \times q$ |
| Expression explicite (où $p \in \mathbb{N}$, $p \leq n$) | Pour tout entier naturel n : $u_n = u_0 + nr$ $u_n = u_p + (n-p)r$ | Pour tout entier naturel n : $u_n = u_0 \times q^n$ $u_n = u_p \times q^{n-p}$ |
| Sens de variation | <ul style="list-style-type: none"> • Si $r > 0$, (u_n) est strictement croissante. • Si $r < 0$, (u_n) est strictement décroissante. • Si $r = 0$, (u_n) est constante. | <ul style="list-style-type: none"> • Si $0 < q < 1$ et si $u_0 > 0$ (resp. $u_0 < 0$), (u_n) est strictement décroissante (resp. strictement croissante). • Si $q = 0$ ou $q = 1$, (u_n) est constante. • Si $q < 0$, (u_n) n'est pas monotone. |
| Modélisation | Les variations absolues entre deux termes consécutifs $u_{n+1} - u_n$ sont constantes : une suite arithmétique permet donc de modéliser un phénomène d'évolution linéaire. | Les variations relatives entre deux termes consécutifs $\frac{u_{n+1} - u_n}{u_n}$ sont constantes : une suite géométrique permet de modéliser un phénomène d'évolution exponentielle. |



1 Modéliser un problème par une suite

Énoncé Dans un parc, on étudie une population de hérissons. Cette population était de 100 en fin d'année 2018. On estime que le nombre de hérissons diminue de 10 % chaque année. Des scientifiques estiment que l'espèce sera en danger de disparition lorsque la population de hérissons dans le parc sera inférieure à 40.



- On modélise par u_n le nombre de hérissons dans le parc à la fin de l'année 2018 + n .
 - Quelle est la nature de la suite (u_n) ? En déduire l'expression de u_n en fonction de n .
 - À l'aide de la calculatrice, déterminer au bout de combien d'années cette espèce sera en danger de disparition.
- Afin de préserver l'espèce, on décide de réintroduire 5 hérissons à la fin de chaque année à partir de 2019. On modélise par v_n le nombre de hérissons présents dans le parc à la fin de l'année 2018 + n . Ainsi $v_0 = 100$.
 - Justifier que, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = 0,9v_n + 5$.
 - Dans un repère, tracer les droites d'équation $y = 0,9x + 5$ et $y = x$ sur l'intervalle $[40; 110]$. Construire les huit premiers termes de la suite (v_n) sur l'axe des abscisses.
 - Par lecture graphique, conjecturer l'évolution de la population de hérissons.

Solution

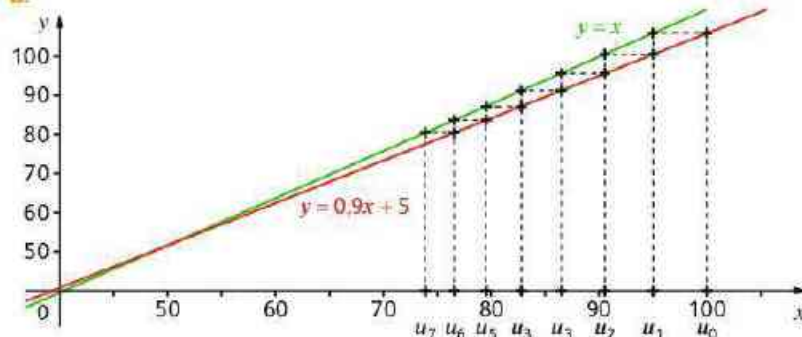
1. a. D'une année à la suivante, le nombre de hérissons diminue de 10 %, donc, pour tout entier naturel n , on a $u_{n+1} = \left(1 - \frac{10}{100}\right)u_n = 0,9u_n$. La suite (u_n) est donc une suite géométrique de raison 0,9 et de premier terme $u_0 = 100$.

On obtient donc, pour tout entier naturel n , $u_n = 100 \times 0,9^n$.

b. Avec la calculatrice, on obtient $u_8 > 40$ et $u_9 < 40$, donc les hérissons seront en danger de disparition en 2018 + 9 = 2027.

2. a. D'après l'énoncé, chaque année, le nombre de hérissons v_n diminue de 10 %, il reste alors $0,9v_n$ hérissons, mais puisqu'on réintroduit 5 hérissons en fin d'année, on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1} = 0,9v_n + 5$.

b.



c. Graphiquement, on conjecture que le nombre de hérissons va décroître pour se stabiliser autour de 50 sur le long terme.

Point méthode

1. a. Lorsque qu'une suite est arithmétique ou géométrique, on peut exprimer son terme général sous forme explicite.

| n | 3n |
|----|--------|
| 7 | 47,829 |
| 8 | 48,048 |
| 9 | 38,742 |
| 10 | 34,851 |

Point méthode

2. b. Pour construire les termes d'une suite définie par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, on place le point d'abscisse u_0 sur l'axe des abscisses.

Le point de coordonnées $(u_0; u_1)$ appartient à la courbe de f . On reporte alors u_1 sur l'axe des abscisses grâce à la droite d'équation $y = x$, et ainsi de suite.

J'applique

1 Pour évaluer la pression atmosphérique, les alpinistes utilisent la règle simplifiée suivante : « La pression atmosphérique diminue de 0,11 hectopascal quand l'altitude augmente de 1 mètre. » On rappelle que $p_{\text{atm}} = 1013,25$ hPa au niveau de la mer (0 mètre).

1. À combien les alpinistes évaluent-ils la pression atmosphérique à 1 500 mètres d'altitude ?

2. Pour tout entier naturel n , on note u_n la pression atmosphérique en hPa à l'altitude de n mètres, calculée avec la règle simplifiée. Ainsi $u_0 = 1013,25$.

a. Pour tout entier naturel n , exprimer u_n en fonction de n .

b. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

c. Déterminer la pression atmosphérique au sommet du mont Blanc (4 809 m).

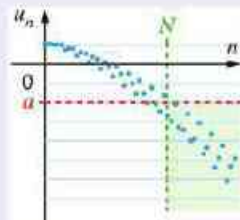
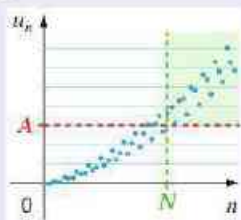
2 Limite d'une suite

a Notion de limite d'une suite

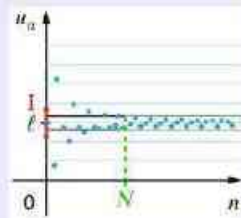
Définitions On considère une suite numérique (u_n) et ℓ un nombre réel.

u diverge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) et on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ (resp. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$) si, pour tout seuil A (resp. a), l'intervalle $]A; +\infty[$

(resp. $]-\infty; a[$) contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang N .



u converge vers ℓ et on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ si tout intervalle ouvert I contenant ℓ (aussi « petit » soit-il) contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang N .



b Limites des suites de référence

Propriétés (admissibles) Soit un entier $k \geq 1$, on a :

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^k = +\infty$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^k} = 0$

c Limites et opérations

Propriétés (admissibles) Soient u et v deux suites. Soient ℓ et ℓ' deux réels.

Somme de deux suites

| | | | | | | |
|--|----------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-------------------------|
| $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ | ℓ | ℓ | ℓ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ | ℓ' | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n)$ | $\ell + \ell'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | On ne peut pas conclure |

Produit de deux suites

| | | | | |
|---|---------------------|----------------|----------|-------------------------|
| $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ | ℓ | $\ell' \neq 0$ | ∞ | 0 |
| $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ | ℓ' | ∞ | ∞ | ∞ |
| $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \times v_n)$ | $\ell \times \ell'$ | ∞ | ∞ | On ne peut pas conclure |

Quotient de deux suites

v ne s'annulant pas et de signe constant à partir d'un certain rang.

| | | | | | | |
|--|----------------------|----------------|----------|----------|-------------------------|-------------------------|
| $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ | ℓ | $\ell' \neq 0$ | ℓ | ∞ | 0 | ∞ |
| $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ | $\ell' \neq 0$ | 0 | ∞ | ℓ | 0 | ∞ |
| $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n}$ | $\frac{\ell}{\ell'}$ | ∞ | 0 | ∞ | On ne peut pas conclure | On ne peut pas conclure |

Dans les cas où la limite du produit ou du quotient est infinie, on utilise la règle des signes pour conclure entre $+\infty$ et $-\infty$.

Remarque

Lorsqu'une suite (u_n) converge, sa limite est unique.

Exemples

- La suite (n^2) diverge vers $+\infty$.
- La suite $\left(\frac{1}{n+1}\right)$ converge vers 0.
- La suite de terme général $(-1)^n$ qui prend alternativement les valeurs 1 et -1 n'admet pas de limite, on dit également que cette suite est divergente.

Remarque

Ces règles opératoires sur les limites sont « naturelles ». Il convient de ne retenir que les quatre cas où on ne peut pas conclure directement. On parle alors de forme indéterminée.

Exemples

- Soit la suite u définie sur \mathbb{N} par $u_n = \frac{3}{4n-5}$. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3 = 3$ et par limite d'un produit et d'une différence, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (4n-5) = +\infty$ donc par limite d'un quotient, on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
- Soit la suite v définie sur \mathbb{N} par $v_n = 2n + n^2$. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$ donc par limite d'une somme, on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

Remarque

Pour lever les formes indéterminées :

➤ Voir exercices 2 et 3

2 Conjecturer le comportement d'une suite

Énoncé

1. On considère la suite u définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \frac{3n+1}{2n+4}$.

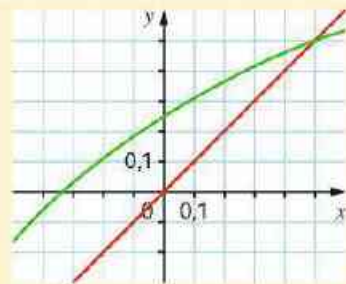
a. À l'aide d'un tableur, conjecturer le sens de variation de la suite u et sa limite éventuelle.

b. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = \frac{3}{2} - \frac{5}{2n+4}$.

Démontrer alors la conjecture précédente.

2. On a représenté ci-contre la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \frac{3x+1}{2x+4}$. Soit la suite v définie par $v_0 = -\frac{1}{2}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$v_{n+1} = f(v_n)$. Construire les premiers termes de la suite v . Conjecturer alors son sens de variation et sa limite.



Solution

1. a. À l'aide du tableur, on calcule les premiers termes de la suite u :

| n | A | B |
|---|---|------------|
| 1 | n | u_n |
| 2 | 0 | 0,25 |
| 3 | 1 | 0,40695652 |
| 4 | 2 | 0,475 |
| 5 | 3 | 0,5 |
| 6 | 4 | 0,51538462 |
| 7 | 5 | 0,52571429 |
| 8 | 6 | 0,53125 |

| | | |
|------|------|-----------|
| 2085 | 2083 | 1,4991492 |
| 2086 | 2034 | 1,4991465 |
| 2087 | 2055 | 1,4991488 |
| 2088 | 2016 | 1,4991481 |
| 2089 | 2037 | 1,4991494 |
| 2090 | 2018 | 1,4991497 |
| 2091 | 2039 | 1,4991495 |
| 2092 | 2040 | 1,4991502 |
| 2093 | 2041 | 1,4991508 |
| 2094 | 2042 | 1,4991508 |

Dans la cellule A3 (resp. B3), on a saisi puis recopié vers le bas la formule =A2+1 (resp. =(3*A2+1)/(2*A2+4)).

u semble être croissante et converger vers 1,5.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{3}{2} - \frac{5}{2n+4} = \frac{3(n+2)}{2(n+2)} - \frac{5}{2n+4} = \frac{3n+1}{2n+4} = u_n$.

Pour étudier les variations de u , on étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \left(\frac{3}{2} - \frac{5}{2(n+1)+4} \right) - \left(\frac{3}{2} - \frac{5}{2n+4} \right) = \frac{10}{(2n+6)(2n+4)}$.

Ainsi, $u_{n+1} - u_n > 0$ soit $u_{n+1} > u_n$. Donc (u_n) est strictement croissante.

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2n+4) = +\infty$, par limite d'un quotient, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{2n+4} = 0$ et

donc, par limite d'une différence, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{3}{2}$.

2. v est une suite récurrente du type $v_{n+1} = f(v_n)$. À partir de la représentation graphique de f et de la droite d'équation $y = x$, on construit les premiers termes de la suite v sur l'axe des abscisses.

On conjecture alors que la suite v semble strictement croissante et semble converger vers 0,5, abscisse d'un point d'intersection de la courbe représentative de f et de la droite d'équation $y = x$.

Point méthode

1. a. Un tableur ou la fonction TABLE de la calculatrice permettent de conjecturer le comportement global et la limite éventuelle d'une suite.

↳ Voir pages calculatrices

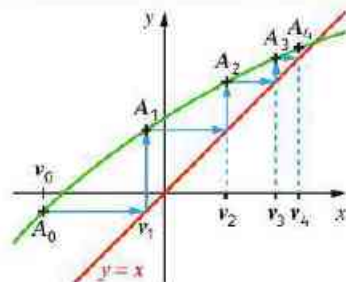
Point méthode

1. b. Pour lever une forme indéterminée, on exploite une autre écriture de u_n .

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} (3n+1) = +\infty$

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2n+4) = +\infty$, on ne peut

pas conclure directement quant à la limite du quotient u_n .



J'applique

2 On considère la suite u définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = n^3 - 2n + 5$.

1. À l'aide d'un tableur ou de la calculatrice, conjecturer la limite éventuelle de la suite u .

2. Après avoir vérifié que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = n^3 \left(1 - \frac{2}{n^2} \right) + 5$, justifier cette conjecture.

3 On considère la suite v définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = \frac{2n}{n^3 + 1}$.

1. À l'aide d'un tableur ou de la calculatrice, conjecturer la limite éventuelle de la suite u .

2. a. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{2}{n^2 + \frac{1}{n}}$.

b. Démontrer alors la conjecture émise en 1.

4 On considère la suite w définie par $w_0 = 0,4$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = f(w_n)$ où f est la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 2x^2$.

1. Représenter graphiquement la fonction f puis construire sur l'axe des abscisses les cinq premiers termes de la suite w .

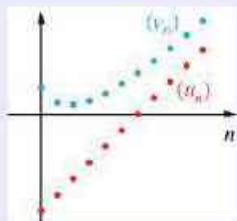
2. Conjecturer alors la limite éventuelle de la suite w .

3. Reprendre les questions précédentes avec $w_0 = 0,6$.

3 Limites et inégalités

a Théorèmes de comparaison

Propriétés (admisses) On considère trois suites u, v et w et N un entier.

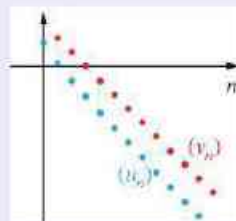


Théorème de minoration

Si, pour tout entier naturel $n \geq N$,

$u_n \leq v_n$ et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$$

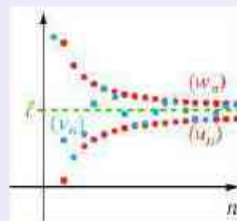


Théorème de majoration

Si, pour tout entier naturel $n \geq N$,

$u_n \leq v_n$ et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$$



Théorème des gendarmes

Si, pour tout entier naturel $n \geq N$,

$u_n \leq v_n \leq w_n$ et si les suites u et w convergent vers une même limite ℓ , alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$$

Propriété (admise) Passage à la limite dans les inégalités

Soient u et v deux suites convergentes de limites respectives ℓ et ℓ' . Soit N un entier. Si, pour tout entier $n \geq N$, on a $u_n \leq v_n$ alors $\ell \leq \ell'$.

b Limite d'une suite géométrique

Propriété (admise) Soit q un réel strictement positif.

- Si $0 < q < 1$, alors la suite (q^n) converge vers zéro.
- Si $q > 1$, alors la suite (q^n) diverge vers $+\infty$.

Remarque

Pour déterminer la limite d'une suite géométrique (u_n) de terme général $u_n = u_0 \times q^n$, on applique la limite d'un produit et la règle des signes.

c Somme des termes d'une suite géométrique

Propriété Pour tout nombre réel $q \neq 1$ et tout entier naturel n , on a :

| Somme des termes de la suite de terme général q^n | Somme des termes de la suite de terme général $u_n = u_0 \times q^n$ |
|--|---|
| $s_n = \sum_{k=0}^n q^k = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$ $= \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ | $S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + \dots + u_n$ $= u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ |
| <p>Si $0 < q < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \frac{1}{1 - q}$</p> <p>Si $q > 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = +\infty$</p> | <p>Si $0 < q < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{u_0}{1 - q}$</p> <p>Si $q > 1$, si $u_0 > 0$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$</p> <p>si $u_0 < 0$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = -\infty$</p> |

Remarque

Plus généralement, pour tous entiers naturels n et p tels que $p < n$:

$$u_p + \dots + u_n = u_p \times \frac{1 - q^{\text{nbre de termes}}}{1 - q} \quad \text{où nbre de termes} = n - p + 1$$

Exemples

• Soit la suite u géométrique de raison 2 et de premier terme $u_0 = -3$.

Pour tout entier naturel n , $u_n = -3 \times 2^n$. Comme $2 > 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$. En multipliant

par -3 (négatif), on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

• Soit la suite v géométrique de raison 0,3 et de premier terme $v_0 = 10$.

Pour tout entier naturel n , $v_n = 10 \times 0,3^n$. Comme $0 < 0,3 < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,3^n = 0$. En multipliant

par 10, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.

Exemples

• On note $s_n = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n$.

$$\text{Donc } s_{10} = \frac{1 - 2^{10+1}}{1 - 2} = 2047.$$

Et comme $2 > 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = +\infty$.

• Soit la suite w de raison 0,5 et de premier terme -20 .

On note $S_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n$.

$$\text{Alors } S_5 = -20 \times \frac{1 - 0,5^6}{1 - 0,5} = -39.$$

Et comme $0 < q < 1$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{-20}{1 - 0,5} = -40$$

👉 Voir exercice Démon n° 43



3 Exploiter une suite géométrique

Énoncé Au 1^{er} janvier 2018, un particulier fait installer 20 m² de panneaux photovoltaïques à son domicile. Ils produisent environ 95 kWh/m² au cours de la première année, puis l'usure et la salissure engendrent une perte de rendement de 3 % par an. Pour tout entier naturel n , on note u_n la quantité d'énergie produite par l'installation durant l'année 2018 + n .

1. a. Déterminer la nature de la suite (u_n) et préciser ses éléments caractéristiques.
- b. En déduire, pour tout entier naturel n , l'expression de u_n en fonction de n .
2. Que devient la quantité d'énergie produite au bout d'un grand nombre d'années ?
3. Pour tout entier naturel n , on note $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.
 - a. Calculer S_{24} et interpréter le résultat.
 - b. Écrire une fonction en langage naturel ou en langage Python qui, pour une valeur de n prise en argument, retourne la valeur de la somme S_n correspondante.
 - c. En gardant son installation pendant très longtemps, le particulier peut-il espérer produire plus de 70 MWh à compter du 1^{er} janvier 2018 ?



Solution

1. a. D'après l'énoncé, pour tout entier naturel n , on a :

$$u_{n+1} = \left(1 - \frac{3}{100}\right)u_n = 0,97u_n$$
 La suite (u_n) est donc géométrique de raison 0,97 et de premier terme $u_0 = 20 \times 95 = 1900$.
- b. On déduit de la réponse à la question précédente que, pour tout entier naturel n , $u_n = 1900 \times 0,97^n$.
2. Comme $0 < 0,97 < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,97^n = 0$, donc en multipliant par 1900, on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$. Au bout d'un grand nombre d'années, la production annuelle d'énergie de l'installation se rapproche de zéro.
3. a. $S_{24} = u_0 + u_1 + \dots + u_{24} = 1900 \times \frac{1 - 0,97^{24+1}}{1 - 0,97} = 33\,758$.
 Durant les 25 premières années, l'installation de panneaux photovoltaïques devrait produire environ 33 758 kWh.
- b. Voir ci-contre.
- c. Pour tout entier naturel n , $S_n = 1900 \times \frac{1 - 0,97^{n+1}}{1 - 0,97}$.
 Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1900}{1 - 0,97} = 63\,333$. En conservant son installation de très nombreuses années, ce particulier produira, à compter du 1^{er} janvier 2018, environ 63 333 kWh. Il ne pourra pas atteindre 70 MWh.

Point méthode

3. Pour exprimer la somme des termes d'une suite géométrique, il faut connaître le premier terme et la raison de la suite, ainsi que le nombre de termes sommés. De u_0 à u_n , on dénombre $n+1$ termes.

Fonction somme(n):

```
S ← 1900
Pour k allant de 1 à n Faire
    S ← S + 1900 × 0,97k
Retourner S
```

def somme (n):

```
S = 1900
for k in range(1, n+1):
    S = S + 1900 * 0.97**k
return S
```

J'applique

- 5 Pour chacune des suites (u_n) ci-dessous, déterminer sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.
 1. (u_n) est la suite géométrique de raison 5 et de premier terme $u_0 = 2$.
 2. (u_n) est la suite géométrique de raison 3 et de premier terme $u_0 = -7$.
 3. Pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$u_{n+1} = 0,99u_n \text{ et } u_1 = 3$$
 4. Pour tout entier naturel n , $u_n = -1\,000 \times 1,02^n$.
- 6 Dans chacun des cas suivants, calculer la somme des 10 premiers termes des suites (v_n) .

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -2 \times 1,5^n$.
 3. (v_n) est géométrique de raison 1,1 et de premier terme $v_0 = 4$.
- 7 Soit n un entier naturel, exprimer chacune des sommes suivantes sous forme d'un quotient, puis calculer sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.
1. $S_n = 1 + 0,2 + 0,2^2 + \dots + 0,2^n$
 2. $S_n = -5 - 5 \times 3 - 5 \times 3^2 - \dots - 5 \times 3^n$
 3. $S_n = 2 \times 0,92^2 + 2 \times 0,92^3 + \dots + 2 \times 0,92^n$

4 Suites arithmético-géométriques

a Définition et premier exemple

Définition On dit qu'une suite (u_n) est **arithmético-géométrique** s'il existe deux réels a et b tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$.

Remarques

Si $a = 1$, la suite (u_n) est arithmétique de raison b . Si $b = 0$, la suite (u_n) est géométrique de raison a .

Dans les cas où $a \neq 1$ et $b \neq 0$, la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

b Plan d'étude d'une suite arithmético-géométrique

Dans la suite, on considère une suite arithmético-géométrique (u_n) vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$ (avec $a \neq 1$).

| Étapes | Mise en œuvre sur l'exemple précédent |
|---|--|
| <p>Étape 1 : on recherche une suite constante α vérifiant la relation de récurrence de la suite (u_n). Autrement dit, on cherche le réel α tel que :</p> $\alpha = a \times \alpha + b$ | <p>On cherche le réel α tel que $\alpha = 0,5\alpha + 2$. Cette équation équivaut à :</p> $\alpha - 0,5\alpha = 2 \Leftrightarrow 0,5\alpha = 2 \Leftrightarrow \alpha = \frac{2}{0,5}$ $\Leftrightarrow \alpha = 4$ <p>La suite constante égale à 4 vérifie la même relation de récurrence que (u_n).</p> |
| <p>Étape 2 : on considère la suite auxiliaire (v_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = u_n - \alpha$. On justifie que (v_n) est géométrique.</p> | <p>On considère la suite (v_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = u_n - \alpha = u_n - 4$. (v_n) est géométrique, en effet, soit $n \in \mathbb{N}$:</p> $v_{n+1} = u_{n+1} - 4 = 0,5u_n + 2 - 4 = 0,5u_n - 2$ $= 0,5(u_n - 4) = 0,5v_n$ <p>(v_n) est bien géométrique de raison $q = 0,5$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 4 = -3$.</p> |
| <p>Étape 3 : on déduit une expression explicite de v_n puis de u_n.</p> | <p>Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$:</p> $v_n = v_0 \times q^n = -3 \times 0,5^n$ <p>D'où $u_n = v_n + 4 = 4 - 3 \times 0,5^n$.</p> |

Plus généralement, on a le résultat suivant.

Propriété Soient a et b deux réels tels que $a \neq 1$. Soit (u_n) une suite arithmético-géométrique vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$.

Si α est l'unique solution de l'équation $x = ax + b$, la suite (v_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = u_n - \alpha$ est géométrique de raison a .



Démonstration

Puisque $a \neq 1$, l'équation $ax + b = x$ admet pour unique solution $\frac{-b}{a-1}$.

On note α cette solution dans la suite. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} u_{n+1} = au_n + b & \textcircled{1} \\ \alpha = a\alpha + b & \textcircled{2} \end{cases}$

et donc, en retranchant ces deux égalités, on obtient $u_{n+1} - \alpha = a(u_n - \alpha)$ soit $v_{n+1} = av_n$.

Par conséquent (v_n) est une suite géométrique de raison a .

Remarque

On note f la fonction affine définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax + b$. α est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$. Cette solution est l'abscisse du point d'intersection de la droite d'équation $y = x$ avec la droite représentative de f . On dit que α est un **point fixe** de la fonction f .

Exemple

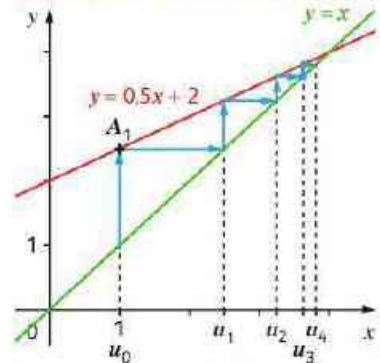
On considère la suite arithmético-géométrique (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 0,5u_n + 2 \end{cases}$$

On a $u_0 = 1$, $u_1 = 2,5$ et $u_2 = 3,25$. Or $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ donc (u_n) n'est pas arithmétique et $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$ donc (u_n) n'est pas géométrique.

Exemple (suite)

En considérant la fonction affine f définie par $f(x) = 0,5x + 2$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. On peut dès lors représenter graphiquement cette suite.



On conjecture que (u_n) semble strictement croissante et semble converger vers 4, abscisse du point d'intersection des droites d'équation $y = x$ et $y = 0,5x + 2$.

Exemple (suite)

L'étude précédente permet alors de justifier les conjectures graphiques.

- (u_n) et (v_n) ont le même sens de variation or $v_0 < 0$ et $0 < q < 1$ ainsi (v_n) et donc (u_n) sont strictement croissantes.

- Puisque $0 < q < 1$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,5^n = 0$$

et, par limite d'un produit, on déduit que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} -3 \times 0,5^n = 0$$

puis par limite d'une somme, on conclut que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 4 - 3 \times 0,5^n = 4$$

Ainsi (u_n) converge bien vers 4, point fixe de la fonction f .

Énoncé On administre à un patient un médicament. Une machine effectue à l'instant 0 une première injection de 10 mL de médicament. On estime que 20 % du médicament est éliminé chaque minute. Enfin, chaque minute, la machine réinjecte 1 mL de médicament. Pour tout entier naturel n , on note u_n la quantité de médicament, en mL, présente dans le sang du patient n minutes après l'injection initiale.



1. Justifier que, pour tout entier naturel n , on a $u_{n+1} = 0,8u_n + 1$.

Préciser la valeur de u_0 .

2. a. Déterminer une suite constante, notée α , vérifiant la même relation de récurrence que (u_n) .

b. On considère la suite auxiliaire (v_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = u_n - \alpha$.

Montrer que (v_n) est géométrique. On précisera la raison et le premier terme v_0 de cette suite.

c. En déduire l'expression de v_n puis de u_n en fonction de l'entier naturel n .

3. Déterminer la limite de la suite (u_n) . Quelle interprétation peut-on donner de cette limite ?

Solution

1. Pour obtenir la quantité de médicament présente dans l'organisme à la $(n+1)$ -ème minute, on diminue la quantité u_n présente à la n -ième minute de 20 % puis on réinjecte 1 mL. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} = \underbrace{\left(1 - \frac{20}{100}\right)u_n}_{\text{quantité restante de médicament après élimination de 20 \%}} + \underbrace{1}_{\substack{\text{nouvelle} \\ \text{injection} \\ \text{de 1 mL}}} = 0,8u_n + 1$$

2. a. On cherche le réel α tel que $\alpha = 0,8\alpha + 1$. Cette équation équivaut à :

$$-0,8\alpha = 1 \Leftrightarrow 0,2\alpha = -1 \Leftrightarrow \alpha = -5$$

La suite constante égale à -5 vérifie la même relation de récurrence que (u_n) .

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_{n+1} = u_{n+1} - 5 = 0,8u_n + 1 - 5 = 0,8(u_n - 5) = 0,8v_n$.

(v_n) est bien géométrique de raison $q = 0,8$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 5 = 10 - 5 = 5$.

c. Puisque (v_n) est géométrique, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = v_0 \times q^n = 5 \times 0,8^n \text{ d'où } u_n = v_n + 5 = 5 + 5 \times 0,8^n$$

3. Puisque $0 < q < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,8^n = 0$ et, par limite d'un produit, on

déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 5 \times 0,8^n = 0$ puis par limite d'une somme, on conclut

que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 5 + 5 \times 0,8^n = 5$. Ainsi (u_n) converge vers 5. Sur le long terme, la

quantité de médicament présent dans l'organisme de ce patient se stabilisera autour de 5 mL.

Point méthode

1. Lorsqu'on augmente (resp. diminue) une quantité de t %, alors on multiplie cette valeur par $1 + \frac{t}{100}$ (resp. par $1 - \frac{t}{100}$).

Point méthode

2. b. Pour montrer que (v_n) est géométrique, on montre qu'il existe un réel q tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $v_{n+1} = q \times v_n$.

c. Le fait que v soit géométrique permet d'obtenir une formule explicite du terme général v_n . On exploite le lien entre u_n et v_n pour exprimer u_n en fonction de n .

J'applique

8 Une grande université accueillait 27 500 étudiants en septembre 2019. La capacité d'accueil de ce campus ne peut excéder 33 000 étudiants.

D'après une étude statistique, chaque année, 156 étudiants démissionnent en cours d'année universitaire (entre le 1^{er} septembre et le 30 juin) ; de plus, les effectifs constatés à la rentrée de septembre connaissent une augmentation de 4 % par rapport à ceux du mois de juin qui précède. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note u_n le nombre d'étudiants estimé selon ce modèle à la rentrée de septembre 2019 + n .

1. Justifier que $u_{n+1} = 1,04u_n - 156$ pour tout entier naturel n . Préciser la valeur de u_0 .

2. a. Déterminer une suite constante, notée α , vérifiant la même relation de récurrence que (u_n) . Déterminer la nature de la suite (v_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = u_n - \alpha$.

b. Justifier alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_n = 23\,600 \times 1,04^n + 3\,900$$

3. a. Déterminer la limite de la suite (u_n) . Interpréter.

b. Déterminer l'année à partir de laquelle la capacité de 33 000 étudiants sera dépassée.

Suite arithmétique

• Relation de récurrence



Il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
 $u_{n+1} = u_n + r$

• Expressions explicites ($n, p \in \mathbb{N}$)

$$u_n = u_0 + nr \text{ et } u_n = u_p + (n-p)r$$

• Sens de variation

| $r > 0$ | $r = 0$ | $r < 0$ |
|--------------------|-------------------|----------------------|
| u est croissante | u est constante | u est décroissante |

• **Modélisation** : pour une quantité (population, prix...) qui augmente ou diminue d'une **même valeur** à période régulière.

Suite géométrique

• Relation de récurrence



Il existe $q \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
 $u_{n+1} = u_n \times q$

• Expressions explicites ($n, p \in \mathbb{N}, n > p$)

$$u_n = u_0 \times q^n \text{ et } u_n = u_p \times q^{n-p}$$

• Sens de variation de (q^n)

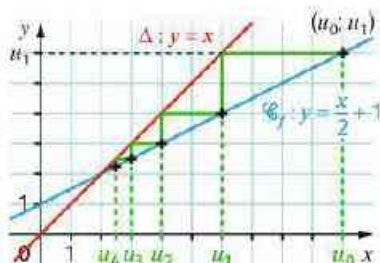
| $q > 1$ | $0 < q < 1$ | $q < 0$ |
|------------------------|--------------------------|----------------------------|
| (q^n) est croissante | (q^n) est décroissante | (q^n) n'est pas monotone |

Le sens de variation de u dépend de sa raison q et du **signe de son premier terme**.

• **Modélisation** : pour une quantité (population, prix...) qui augmente ou diminue d'un **même taux** à période régulière.

Représentation graphique d'une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$

On construit les termes sur l'axe des abscisses en utilisant la **courbe représentant f** et la **droite d'équation $y = x$** .



Limite d'une suite

• Un tableau ou un graphique permettent de conjecturer le comportement d'une suite u lorsque n tend vers l'infini. On distingue quatre cas.

① u_n se rapproche d'un réel ℓ : la suite **converge** vers ce réel et on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

② u_n devient aussi grand que l'on veut : la suite **diverge** vers $+\infty$ et on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

③ $-u_n$ devient aussi grand que l'on veut : la suite **diverge** vers $-\infty$ et on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

④ Sinon la suite u **diverge et n'a pas de limite**.

• Pour démontrer ces conjectures, on peut utiliser les règles opératoires sur les limites ou des théorèmes de comparaison.

Limite et suite géométrique

• Limite de (q^n) avec $q > 0$

| $0 < q < 1$ | $q = 1$ | $q > 1$ |
|--|--|--|
| $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$ | $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$ | $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$ |

• Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique (u_n) de raison $q \neq 1$:

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

• Si $0 < q < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{u_0}{1 - q}$.

Suite arithmético-géométrique

Pour étudier une suite arithmético-géométrique u :

$$u_{n+1} = au_n + b \text{ (avec } a \neq 1)$$

① on cherche une suite constante α vérifiant la même relation de récurrence que u ;

② on montre que la suite auxiliaire v définie par $v_n = u_n - \alpha$ est géométrique de raison a ;

③ on déduit alors une expression explicite de v_n puis de u_n en fonction de n .



Voir corrigés

QCM

Pour chacune des questions, indiquer la (ou les) bonne(s) réponse(s).

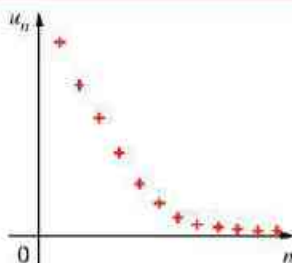
Pour les questions 1., 2. et 3., on considère la suite géométrique (u_n) de raison $q = 0,97$ et de premier terme $u_0 = 3$.

1. La suite (u_n) peut modéliser :

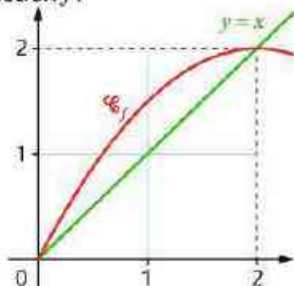
2. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$

3. Pour tout entier naturel n , $u_0 + u_1 + \dots + u_n =$

4. La suite représentée ci-contre semble :



5. On a tracé dans le repère ci-dessous la droite d'équation $y = x$ et la courbe \mathcal{C}_f d'une fonction f .



On définit la suite (v_n) pour tout entier naturel n par $v_{n+1} = f(v_n)$. On conjecture que :

| | a | b | c |
|----|--|--|--|
| 1. | une baisse de 0,03 unité à période régulière | une baisse de 3 % à période régulière | une hausse de 97 % à période régulière |
| 2. | 0 | 3 | $+\infty$ |
| 3. | $\frac{1-0,97^{n+1}}{1-0,97}$ | $3 \times \frac{1-0,97^n}{1-0,97}$ | $100 \times (1-0,97^{n+1})$ |
| 4. | ne pas admettre de limite | converger vers 0 | diverger vers $+\infty$ |
| 5. | si $0 < v_0 < 2$, alors la suite (v_n) semble converger vers 0, | si $v_0 > 2$, la suite (v_n) semble croissante et diverger. | si $v_0 = 0$ ou $v_0 = 2$, la suite (v_n) semble constante. |

vrai

ou faux ?

Indiquer pour chaque affirmation si elle est vraie ou fausse. Justifier.

Partie A.

1. On considère, pour tout entier naturel $n \geq 1$, la somme $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}$.

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = -2$.

2. Soit (u_n) une suite telle que, pour tout entier naturel n , $1,7^n \leq u_n$. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

3. Soit (v_n) une suite vérifiant, pour tout entier naturel n , $-2 \times 0,35^n \leq v_n \leq 10 \times 0,7^{n+1}$.

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.

Partie B.

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 0,7u_n + 1,8 \end{cases}$$

1. (u_n) est une suite arithmétique de raison 1,8.

2. La suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par $v_n = u_n - 6$ est géométrique de raison 0,7 et de premier terme -5 .

3. Pour tout entier naturel n , $u_n = -5 \times 0,7^n - 6$.

4. La suite (u_n) diverge vers $-\infty$.

Automatismes et calculs

Automatismes transversaux

9 Effectuer les calculs suivants.

- $\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{3}$
- $\frac{5}{7} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{2}{3}$
- $\frac{15}{9} + \frac{4}{3}$
- $\frac{3}{5} - 7$

10 Réduire les expressions suivantes.

- $2^n \times 5^n$
- $3^{2n} \times 27$
- $\frac{32}{2^5}$
- $4 \times \frac{1,2^{n+1}}{1,2}$

11 Simplifier au maximum les nombres suivants.

- $e^{-4} \times e$
- $(e+1)^2 - (e-1)^2$

12 Développer et réduire les expressions suivantes.

- $A(x) = (2x+3)^2$
- $B(x) = (4x+1)(2x-3) - 1$
- $C(x) = (x^2-2)(x^2+2)$

13 Factoriser les expressions suivantes.

- $A(x) = 9x^2 + 6x + 1$
- $B(x) = 16 - 25x^2$
- $C(x) = 4x^2 - 2x + 0,25$

14 Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes.

- $4x - 7 = 2x + 3$
- $5(x+3) = 7x$
- $x^2 - 2x = 3$
- $2x^2 - 3x = 0$
- $5e^x + 7 = 4(e^x + 2)$
- $e^{2x} + 3 = 0$

15 Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes.

- $(x+3)(x^2+x+1) \leq 0$
- $(4e^x + 7)(e^x - 1) \geq 0$

16 Démontrer les résultats ci-dessous obtenus à l'aide d'un logiciel de calcul formel.

| | |
|---|--|
| 1 | $f(x) := \exp(x) \cdot (x^2 - 2x + 4)$ $\rightarrow f(x) := (x^2 - 2x + 4) e^x$ |
| 2 | $h(x) := \text{Factoriser}(\text{Dérivée}(f(x)))$ $\rightarrow h(x) := (x^2 + 2) e^x$ |

17 On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = e^x - 4x + 7$$

On note \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère. Déterminer une équation de la tangente à la courbe \mathcal{C} au point d'abscisse 0.

18 On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \frac{3}{e^x + 5}$$

Étudier les variations de f .

Automatismes du thème

19 Soit la suite (u_n) définie, pour tout entier n , par :

$$u_n = 4(n-1)^2 + 3$$

Calculer les quatre premiers termes de la suite.

20 Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier n , par : $u_{n+1} = u_n + 2n - 3$.

Calculer les quatre premiers termes de la suite.

21 Dans chaque cas, on donne la raison r et le terme initial d'une suite arithmétique (u_n) . Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n , puis u_n en fonction de n .

- $r = -3$ et $u_0 = 17$
- $r = 2$ et $u_1 = 0,4$

22 Dans chaque cas, on donne la raison q et le terme initial d'une suite géométrique (u_n) . Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n , puis u_n en fonction de n .

- $q = 0,8$ et $u_0 = 100$
- $q = 1,2$ et $u_1 = 3$

23 Calculer la limite de (u_n) en $+\infty$ dans chacun des cas suivants.

- $u_n = 3n^2 - 4n + 1$
- $u_n = -5n^2 - n + 1$
- $u_n = (4n-5)(6n+1)$
- $u_n = \frac{4n^2 - 2n + 1}{3n - 1}$

24 Dans chaque cas, on donne la raison q et le terme initial d'une suite géométrique (u_n) .

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n)$.

- $q = 0,6$ et $u_0 = 7$
- $q = 0,3$ et $u_0 = -3$
- $q = 1,3$ et $u_0 = 1$
- $q = 1,75$ et $u_0 = -4$

25 Calculer la limite de (u_n) en $+\infty$ dans chacun des cas suivants.

- $u_n = 4 \times 0,8^n + 3$
- $u_n = -7 \times 0,75^n - 2$

26 Dans chaque cas, on donne la raison q et le terme initial d'une suite géométrique (u_n) .

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_0 + u_1 + \dots + u_n)$.

- $q = 0,6$ et $u_0 = 7$
- $q = 0,3$ et $u_0 = 1$
- $q = 0,3$ et $u_0 = 10$
- $q = 0,25$ et $u_0 = 8$

27 Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier n , $u_{n+1} = 3u_n + 4$.

1. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?

2. Pour tout entier n , on pose $v_n = u_n + 4$.

Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison.

Consolider les bases

28 On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n , par $u_n = \frac{n+3}{2n+1}$.

1. Calculer u_0, u_1, u_2 et u_{50} .

2. Montrer que, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-5}{(2n+1)(2n+3)}$$

En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .

29 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$, et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = -2u_n + 3$.

Calculer u_1, u_2 et u_3 .

30 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$, et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 2u_n + n + 3$.

Calculer u_1, u_2 et u_3 .

31 Étudier le sens de variation des suites (u_n) , (v_n) et (w_n) définies sur \mathbb{N} par : $u_n = n^2 + 3n - 2$,

$$\begin{cases} v_0 = -2 \\ v_{n+1} = v_n + e^{-n} + 1 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} w_0 = 2 \\ w_{n+1} = w_n(1 - w_n) \end{cases}$$

32 On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n , par $u_n = ne^{2n}$.

Étudier le sens de variation de la suite (u_n) en exploitant les variations d'une fonction.

33 Dans chacun des cas suivants, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n , puis u_n en fonction de n .

1. (u_n) est la suite arithmétique de raison -3 et de premier terme $u_0 = 2$.

2. (u_n) est la suite géométrique de raison $1,05$ et de premier terme $u_0 = 2000$.

34 Pour chacune des suites (u_n) suivantes, dire si elle est arithmétique ou géométrique en précisant la raison et le premier terme.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (n+1)^2 - (n+2)^2$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = -3 \times 4^n$

35 Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

1. La suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par $u_n = -3n + 5$ est une suite arithmétique de raison -3 .

2. La suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 2u_n + 3$ est une suite géométrique de raison 2 .

3. Si la suite (u_n) est définie sur \mathbb{N} par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 3u_n$, alors, pour tout entier n , $u_n = 3 \times 2^n$.

4. Si la suite (u_n) est définie sur \mathbb{N} par $u_0 = 120$ et $u_{n+1} = u_n + 50$, alors $u_{100} = 5120$.

Connaître le cours

36 Deux diaporamas pour faire le point sur le cours.

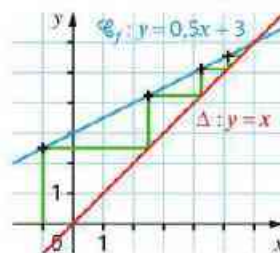


37 On a tracé ci-dessous dans un repère orthonormé la courbe représentative d'une fonction f et la droite Δ d'équation $y = x$. On a représenté les quatre premiers termes de la suite (u_n) , définie par son premier terme u_0 et, pour tout entier naturel n , par $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Donner la valeur de u_0 et lire des valeurs approchées de u_1, u_2 et u_3 .

2. Conjecturer le sens de variation et la limite de la suite (u_n) .

3. Pour n entier naturel, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n . Calculer u_1, u_2 et u_3 .



38 La suite (u_n) est définie par son premier terme u_0 et, pour tout entier naturel n , par $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$.

Dans chacun des cas suivants, représenter graphiquement sur l'axe des abscisses les cinq premiers termes de la suite (u_n) , puis conjecturer son sens de variation ainsi que la valeur de sa limite.

1. $u_0 = 10$

2. $u_0 = -4$

39 Les suites (u_n) et (v_n) sont définies sur \mathbb{N} par :

$$\begin{cases} u_0 = 200 \\ u_{n+1} = 1,03u_n \end{cases} \text{ et } \begin{cases} v_0 = -150 \\ v_{n+1} = v_n - 0,05v_n \end{cases}$$

Pour n entier naturel, exprimer u_n et v_n en fonction de n et déterminer les limites des suites (u_n) et (v_n) .

Pour les exercices **40** à **42**, calculer la limite des suites (u_n) et (v_n) données.

40 $u_n = n^2 + 3n - 1$ et $v_n = 2 - \frac{3}{n}$

41 $u_n = n(1 - 2n)$ et $v_n = n + \frac{2}{n^2 + 1}$

42 $u_n = 5 - 3n^2 - \sqrt{n}$ et $v_n = 1 - 2 \times 0,7^n$

Démo

43 Soit q un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0; 1[$. Pour n entier naturel, on pose :

$$S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$$

1. Donner l'expression de S_n en fonction de q et de n .

2. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{1-q}$.

3. Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q . On pose $T_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$. Déterminer la limite de (T_n) en fonction de q et de u_0 .

Travailler les capacités du thème

1 Modéliser un problème par une suite

44 Pour chaque situation ci-dessous, indiquer si elle peut être modélisée par une suite arithmétique ou géométrique, en précisant la raison dans chaque cas.

1. Le loyer de Mathilde augmente de 50 euros à chaque fin d'année.
2. Thomas a placé 2 000 euros sur un compte épargne rémunéré à 1 % d'intérêts composés pendant 10 ans.
3. Lors d'une première démarque, le prix d'un short a baissé de 20 %, puis de 30 % lors d'une deuxième démarque.
4. Tous les ans, une ville perd $\frac{1}{10}$ de sa population.

45 Pour chacune des suites (u_n) suivantes, définies sur \mathbb{N} , exprimer u_n en fonction de n .

1. (u_n) est la suite des carrés des entiers impairs rangés dans l'ordre croissant.
2. (u_n) est la suite des multiples de 3 rangés dans l'ordre croissant.
3. (u_n) est la suite des inverses des puissances de 2 rangées dans l'ordre croissant.

46 On souhaite modéliser les deux situations suivantes.

Situation 1 : un établissement scolaire voit partir chaque année 30 % de ses élèves et enregistre l'arrivée de 350 nouveaux élèves. En 2020, il y avait 1 000 élèves.

Situation 2 : un capital de 1 000 euros est placé à intérêts composés au taux annuel de 3 %. Chaque année, on retire 50 euros après avoir touché les intérêts.

On note (u_n) et (v_n) les suites modélisant ces situations.

1. Associer chaque situation à la bonne suite sachant que $u_1 = 980$ et $v_1 = 1050$.
2. Déterminer l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n puis celle v_{n+1} en fonction de v_n .
3. a. Calculer le nombre d'élèves dans le lycée en 2022.
b. Calculer le capital placé au bout de 4 ans.

47 Dans chacun des cas suivants, rédiger l'énoncé d'une situation concrète qui pourrait être modélisée par la suite (u_n) .

1. La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1200$, et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 1,03u_n$.
2. La suite (u_n) est définie, pour tout entier naturel n , par $u_n = 1200 + 150n$.
3. La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1200$, et, pour tout entier naturel n , par $u_{n+1} = 1,03u_n + 150$.

48 PYTHON On souhaite stériliser une boîte de conserve. Pour cela, on la prend à la température ambiante $T_0 = 25^\circ\text{C}$ et on la place dans un four à température constante $T_f = 100^\circ\text{C}$.

La stérilisation débute dès que la température de la boîte est supérieure à 85°C . On modélise la température de la boîte, en degré Celsius, par une suite (T_n) . L'algorithme ci-contre permet d'afficher la température T_n au bout de n minutes.

```
T ← 25
Pour k allant de 1 à n Faire
    T ← 0,85 × T + 15
Fin Pour
Retourner T
```

1. Pour n entier naturel, exprimer T_{n+1} en fonction de T_n .
2. Programmer et exécuter l'algorithme en Python pour diverses valeurs de n . Au bout de combien de minutes la stérilisation débute-t-elle ?

49 Deux récipients A et B sont séparés par une membrane perméable dans les deux sens. On place dans les récipients A et B deux solutions contenant respectivement 150 molécules et 20 molécules.

On suppose que toutes les heures, 20 % des molécules passent de A dans B et 10 % passent de B dans A. Pour tout entier naturel n , on note a_n et b_n les effectifs respectifs de molécules présentes dans A et B au bout de n heures. On a donc $a_0 = 150$ et $b_0 = 20$.

1. Calculer l'effectif de molécules présentes dans A et B au bout d'une heure.
2. Pour n entier naturel, exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n .
3. Calculer l'effectif de molécules présentes dans A et B au bout de quatre heures.
4. À l'aide d'un tableur, conjecturer les effectifs des molécules dans chaque compartiment à long terme.

50 Le mathématicien toscan Fibonacci, dit Léonard de Pise, pose en 1202 le « problème des lapins ».

Un couple de lapins, né le 1^{er} janvier, donne naissance à un autre couple de lapins chaque mois, dès qu'il atteint l'âge de deux mois. Les nouveaux couples de lapins suivent la même loi de reproduction. Combien y aura-t-il de couples de lapins le 1^{er} janvier de l'année suivante, en supposant qu'aucun couple n'ait disparu entre temps ?

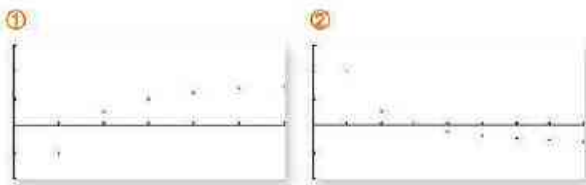
Pour n entier naturel non nul, on note u_n le nombre de couples de lapins au cours du n -ième mois. On a $u_1 = 1$.

1. Calculer u_2 , u_3 , u_4 et u_5 .
2. Justifier que pour tout entier $n \geq 1$:
$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$
3. Répondre alors au problème posé par Fibonacci.



Conjecturer le comportement d'une suite

51 On donne ci-dessous deux copies d'écran obtenues en programmant une suite (u_n) sur une calculatrice. Dans chaque cas, conjecturer le sens de variation et la limite de la suite (u_n) .

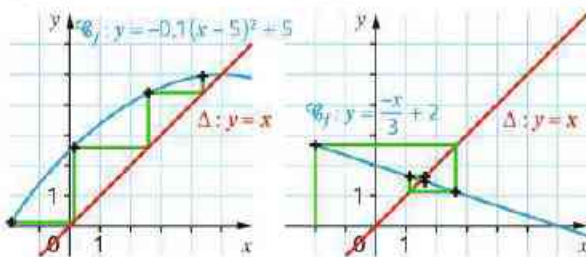


52 Dans chaque cas, on a tracé ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f et on a représenté les quatre premiers termes de la suite (u_n) , définie par son premier terme u_0 et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$. Dans chaque cas :

- donner la valeur de u_0 et des valeurs approchées de u_1 , u_2 et u_3 ;
- conjecturer le sens de variation et la limite de (u_n) .

Cas 1

Cas 2



53 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n , par $u_{n+1} = 0,8u_n + 1$.

- Déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites \mathcal{D} et Δ d'équations respectives $y = 0,8x + 1$ et $y = x$.
 - Tracer les droites \mathcal{D} et Δ dans un repère orthonormé d'unité 2 cm.
- Représenter sur l'axe des abscisses les cinq premiers termes de la suite (u_n) en explicitant le procédé de construction.
 - Conjecturer le sens de variation et la limite de la suite (u_n) .

54 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n , par $u_{n+1} = 1 + \frac{2}{u_n}$.

- Dans un repère orthonormé d'unité 2 cm, tracer la courbe représentative de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 1 + \frac{2}{x}$.
- Représenter sur l'axe des abscisses les cinq premiers termes de la suite (u_n) .
 - La suite (u_n) est-elle monotone ? Conjecturer la valeur de sa limite.

55 1. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par $f(x) = 2x(1-x)$.

- Étudier le sens de variation de la fonction f .
- Dans un repère orthonormé d'unité 10 cm, tracer la courbe \mathcal{C} représentative de la fonction f .

2. On étudie l'évolution d'une population de coccinelles. En 2015, on compte 100 000 coccinelles. On modélise l'effectif des coccinelles par la suite (u_n) définie par $u_0 = 0,1$, et pour tout entier naturel n , par $u_{n+1} = 2u_n(1-u_n)$, où u_n est l'effectif des coccinelles, exprimé en million d'individus, en 2015 + n .

- Sur le graphique de la question 1., représenter sur l'axe des abscisses les cinq premiers termes de la suite (u_n) en explicitant le procédé de construction.
 - Conjecturer le sens de variation et la limite de la suite (u_n) .
 - En supposant que ce modèle reste valide pour les années à venir, que peut-on dire de l'évolution de la population de coccinelles à long terme ?



Exploiter une suite géométrique

Pour les exercices **56** et **57**, calculer la limite de la suite (u_n) donnée.

- 56** 1. $u_n = 50 \times 0,7^n$ 2. $u_n = 3 \times 1,5^n$
3. $u_n = -2 \times 0,4^n + 3$ 4. $u_n = -15 \times 1,02^n$

- 57** 1. $u_n = 5 - 2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$ 2. $u_n = 3n + 2 \times \left(\frac{5}{3}\right)^n$

3. $u_n = 1,01^n - 10\,000$ 4. $u_n = -2 \left(\frac{3}{5}\right)^n + 2 \left(\frac{5}{3}\right)^n$

58 On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n , par $u_n = \frac{3^n}{3^n + 2^n}$.

- En utilisant la calculatrice, conjecturer la limite de la suite (u_n) .
- Montrer que, pour tout entier naturel n :

$$u_n = \frac{1}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

- Démontrer la conjecture formulée à la question 1.

59 Une entreprise commercialise une nouvelle peinture anti-bruit, composée de microbilles en verre, qui capture l'air lors de l'application d'une couche. Chaque couche permet de réduire l'intensité des sons de 20 %. Pour n entier naturel, on note I_n l'intensité en décibels (dB) d'un son traversant n couches de peinture isolante. On considère un son de 80 dB, donc $I_0 = 80$.

- Quelle est la nature de la suite (I_n) ?
- Donner l'expression de I_n en fonction de n .
- Déterminer la limite de la suite (I_n) et interpréter.

60 Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer, lorsque cela est possible, la limite de la suite (u_n) .

1. Pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq 0,5^n$.
2. Pour tout entier naturel n , $u_n \geq 1,03^n$.
3. Pour tout entier naturel n , $u_n \leq 2^n$.
4. Pour tout entier naturel n , $0,8^n \leq u_n \leq 0,9^n$.

Pour les exercices **61** à **63** :

- exprimer S_n et T_n en fonction de n ;
- calculer la limite des suites (S_n) et (T_n) .

61 1. $S_n = 1 + 0,9 + 0,9^2 + \dots + 0,9^n$

2. $T_n = 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^n$

62 1. $S_n = 1 + 0,25 + 0,25^2 + \dots + 0,25^{n-1}$

2. $T_n = \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{3}{4}\right)^n$

63 1. $S_n = 2 + 2 \times 0,7 + 2 \times 0,7^2 + \dots + 2 \times 0,7^n$

2. $T_n = -3 - \frac{3}{2} - \frac{3}{2^2} - \dots - \frac{3}{2^n}$

64 Un globe-trotter a parié de parcourir 5 000 km à pied. Frais et dispo, il peut parcourir 50 km en une journée. Mais chaque jour, la fatigue s'accumule et sa performance diminue de 1 % tous les jours.

Pour tout entier $n \geq 1$, on note d_n la distance parcourue le n -ième jour et D_n la distance totale parcourue au bout de n jours, en kilomètre.

1. a. Montrer que la suite (d_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

b. En déduire l'expression de d_n en fonction de n .

2. a. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$D_n = 5000(1 - 0,99^n)$$

b. Déterminer la limite de la suite (D_n) . Le globe-trotter peut-il gagner son pari ?

3. À l'aide de la calculatrice, déterminer le nombre minimal de jours qui lui seraient nécessaires pour parcourir 1 500 km.

65 On s'intéresse à une population de tortues vivant sur une île et dont le nombre d'individus diminue de façon inquiétante. Au début de l'an 2010, on comptait 300 tortues.

Une étude a permis de modéliser le nombre de tortues par la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0,3 \\ u_{n+1} = 0,9u_n(1 - u_n) \end{cases}$$

où u_n est le nombre de tortues, en millier, au début de l'année 2010 + n .

1. Calculer, suivant ce modèle, le nombre de tortues au début de l'année 2011, puis de l'année 2012.

2. À l'aide de la calculatrice :

- a. estimer le nombre de tortues en 2020 ;
 - b. conjecturer le sens de variation et la limite de (u_n) .
3. On admet que, pour tout entier naturel n , on a :

$$0 \leq u_n \leq 0,3 \times 0,9^n$$

- a. Déterminer la limite de la suite (u_n) .
- b. Que peut-on en conclure sur l'avenir de cette population de tortues ?

Modéliser un problème par une suite arithmético-géométrique

66 Un apiculteur étudie l'évolution de sa population d'abeilles. Au début de son étude, il évalue à 10 000 le nombre de ses abeilles. Chaque année, l'apiculteur observe qu'il perd 20 % des abeilles de l'année précédente, et il rachète 10 000 abeilles. On modélise l'effectif des abeilles par une suite (u_n) , où u_n désigne le nombre d'abeilles, en dizaine de milliers, au bout de la n -ième année. On a donc $u_0 = 1$.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n , on a :

$$u_{n+1} = 0,8u_n + 1$$

2. a. Dans un repère orthonormé, tracer les droites \mathcal{D} et Δ d'équations respectives $y = 0,8x + 1$ et $y = x$.

b. Représenter sur l'axe des abscisses les cinq premiers termes de la suite (u_n) .

c. Conjecturer la limite de la suite (u_n) .

3. Soit la suite (v_n) définie sur \mathbb{N} par $v_n = u_n - 5$.

a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n , on a :

$$u_n = 5 - 4 \times 0,8^n$$

c. Démontrer la conjecture formulée à la question 2. c. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

67 Un fabricant de calculatrices estime que, chaque année, les ventes augmentent de 5 % par rapport à l'année précédente et que la concurrence lui fait perdre 10 000 ventes. En 2019, il en a vendu 600 000. Pour n entier naturel, on note u_n le nombre de milliers de calculatrices vendues à l'année 2019 + n . On a donc $u_0 = 600$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n , on a :

$$u_{n+1} = 1,05u_n - 10$$

2. a. Déterminer une suite constante vérifiant la même relation de récurrence que (u_n) . On note α cette constante.

b. Montrer que la suite (v_n) , définie, pour tout entier naturel n , par $v_n = u_n - \alpha$, est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n .

4. Déterminer la limite de la suite (u_n) . Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

1 Généralités sur les suites

68 La suite (u_n) vérifie $u_0 = -1$, $u_2 = 0$ et $u_3 = 2$.

- Justifier que la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.
- Soit $f(x) = a(x - \alpha)(x - \beta)$. Déterminer les réels a , α et β afin que la suite (u_n) soit définie par $u_n = f(n)$.
- En déduire u_1 et u_{100} .

69 La suite (u_n) vérifie $u_0 = 2$, $u_3 = 2$ et $u_5 = 0$.

- Justifier que la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.
- Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$. Déterminer les réels a , b et c afin que la suite (u_n) soit définie par $u_n = f(n)$.
- En déduire u_2 et u_6 .

70 Christelle joue avec sa calculatrice : elle a tapé $\sqrt{10}$, puis a demandé la racine carrée du résultat en tapant $\sqrt{\text{ans}}$, puis a recommencé un grand nombre de fois.



- Comme Christelle, répéter cette opération un grand nombre de fois. Émettre une conjecture au sujet de la suite de nombres obtenus (monotonie, convergence).
- Soit (u_n) la suite représentant la manipulation de Christelle.
 - Déterminer u_0 , puis u_{n+1} en fonction u_n .
 - Représenter dans un repère la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ puis la suite (u_n) . Conjecturer les variations et la limite de la suite.

71 Soit la suite (u_n) définie sur \mathbb{N}^* par :

$$u_n = \frac{6}{n} \sum_{k=1}^n k^2$$

- Calculer u_1 , u_2 , u_3 et u_4 .
- À l'aide d'un logiciel, représenter graphiquement les premiers termes de la suite (u_n) .
- Les points $M(n; u_n)$ semblent appartenir à la courbe d'une fonction dont l'expression pourrait être (justifier) :
 - une fonction affine : $f(x) = mx + p$;
 - une fonction du second degré : $g(x) = ax^2 + bx + c$;
 - une fonction homographique : $h(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$.
- À l'aide des valeurs de (u_n) calculées en 1., identifier les coefficients de la fonction choisie.
- En admettant que l'expression de la fonction trouvée donne u_n en fonction de n , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donner une formule permettant de calculer la somme des carrés des n premiers entiers naturels non nuls.

72 Dans le plan muni d'un repère orthonormé, représenter les suites de points $M(x_n; y_n)$ définies par :

$$\begin{cases} x_{n+1} = ax_n + by_n \\ y_{n+1} = cx_n + dy_n \end{cases}$$

À partir de $M_0(0; 1)$:

| Suite | a | b | c | d |
|-------|------|-----|------|------|
| A | 0,25 | 0,5 | 0,75 | 1 |
| B | 0,5 | 1 | -1 | -0,5 |

1. Suite A

- Pour $n \geq 1$, quelle conjecture peut-on faire sur le nuage de points obtenu ?
- Infirmier ou confirmer la conjecture précédente.

2. Suite B

- Quelles conjectures peut-on faire sur le nuage de points obtenu ?
- Exprimer x_{n+2} en fonction de x_n , puis démontrer une des conjectures précédentes.

73 **PYTHON** Soit la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 0 \text{ et } u_{n+1} = 2u_n + (-1)^n$$

- Compléter le programme Python afin d'obtenir les premiers termes de la suite.

```
u = 0
for k in range(1, 10):
    u = 2*u + (-1)**k
    print("u", k+1, "=", u)
```

- On définit la suite (v_n) sur \mathbb{N} par :

$$v_{n+1} = u_{n+1} + u_n$$

Modifier le programme précédent afin d'afficher côte à côte les premières valeurs de (u_n) et (v_n) .

- Conjecturer l'expression de v_n en fonction de n pour $n \geq 1$.
- En admettant la conjecture précédente, donner l'expression de u_n en fonction de n .

74 Range ta chambre !

Samuel doit ranger sa chambre. Ce lundi, l'indice représentant l'état de saleté-bazar est de 100. Chaque jour, quoiqu'il fasse, cet indice augmente de 10 % ! Pour préserver l'ambiance familiale, Samuel a deux options : nettoyer un peu chaque jour, l'indice baisse alors de 12 unités par jour ; ou bien faire un grand ménage le dimanche, l'indice baisse alors de 98 unités chaque dimanche.

Modéliser ces situations à l'aide d'un logiciel. Une de ces stratégies lui permet-elle d'atteindre un indice de 0 ?



La fonction **MOD** sur tableur donne le reste de la division euclidienne ; en Python, cette fonction est l'opérateur %.

2 Limites d'une suite

75 Soient les suites (u_n) et (v_n) définies sur \mathbb{N} par :

$$\begin{cases} u_0 = 10 \\ u_{n+1} = \frac{5u_n - v_n}{4} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} v_0 = 20 \\ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

1. À l'aide d'un logiciel, déterminer puis représenter les premiers termes de (u_n) et (v_n) .
2. Conjecturer les variations et les limites de chacune de ces suites.
3. Soit (w_n) la suite définie sur \mathbb{N} par $w_n = v_n - 2u_n$.
 - a. Calculer les premiers termes de (w_n) . Émettre une conjecture au sujet de la suite (w_n) .
 - b. Exprimer w_{n+1} en fonction de w_n . En déduire l'expression de w_n en fonction de n .
 - c. En déduire les expressions de u_n et v_n en fonction de n , puis démontrer les conjectures émises en 2.

76 Attention : infini !

Les suites (u_n) et (v_n) sont définies sur \mathbb{N} . Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n)$. Commenter les résultats obtenus.

1. $u_n = n^2$ et $v_n = -4n + 4$
2. $u_n = n(n-1)$ et $v_n = 10 - n^2$
3. $u_n = n + \cos^2(n)$ et $v_n = \sin^2(n) - n$

77 Attention : infini ! (bis)

Les suites (u_n) et (v_n) sont définies sur \mathbb{N} . Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \times v_n)$. Commenter les résultats obtenus.

1. $u_n = (n+1)^2$ et $v_n = \frac{1}{2(n+1)}$
2. $u_n = e^{2n+1}$ et $v_n = e^{3-2n}$
3. $u_n = \sqrt{n}$ et $v_n = -\frac{2}{n}$

78 Remarquer que A et B peuvent s'écrire comme la limite de sommes des termes d'une suite géométrique, en déduire leur valeur.

$$A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

$$B = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots$$

79 Montrer que le réel $A = 7,777777\dots$ (une infinité de chiffres 7) est un nombre rationnel.

Aide

$$A = 7 + \frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + \dots$$

Autre méthode : calculer $A - \frac{A}{10} \dots$

80 On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par :

$$\begin{cases} a_0 = 50 \\ b_0 = 30 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{4} \\ b_{n+1} = \frac{a_n + 2b_n}{4} \end{cases}$$

1. a. À l'aide d'un tableur, obtenir les 12 premiers termes de chaque suite et leur représentation graphique.
- b. Conjecturer la monotonie et la convergence de chacune.
2. Soient (u_n) et (v_n) les suites définies sur \mathbb{N} par :

$$u_n = b_n + a_n \text{ et } v_n = b_n - a_n$$
 - a. Compléter la feuille de tableur afin d'obtenir les 12 premiers termes des suites (u_n) et (v_n) ainsi que leurs représentations graphiques.
 - b. Conjecturer la nature, la monotonie et la convergence de chacune.
 - c. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n . Confirmer ou infirmer la conjecture précédente.
 - d. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n . Confirmer ou infirmer la conjecture précédente.
 - e. En déduire les expressions explicites de (a_n) et (b_n) .

81 Nombre de Copeland-Erdős

Le n -ième terme de la suite de Copeland-Erdős est le nombre décimal de partie entière 0 et de partie décimale obtenue par concaténation des n premiers nombres premiers. Donc $u_1 = 0,2$; $u_2 = 0,23$ et $u_3 = 0,235$.

1. Donner les termes u_4 , u_5 et u_6 .
2. Déterminer le sens de variation de cette suite.
3. Justifier que $M = 0,3$ est un majorant de (u_n) , que penser de la convergence de (u_n) ?

82 Soit la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par :

$$u_{n+1} = \frac{2u_n}{1+u_n} \text{ et } u_0 = \frac{1}{2}$$

1. Remarquer que u_{n+1} peut s'écrire sous la forme $u_{n+1} = f(u_n)$, avec f une fonction à déterminer. En déduire les variations et la limite de (u_n) à l'aide d'une représentation graphique.
2. Résoudre $f(x) = x$.
3. Soit la suite (v_n) définie sur \mathbb{N} par $v_n = \frac{2^n}{1+2^n}$.
 - a. Calculer v_0 .
 - b. Calculer $\frac{2v_n}{1+v_n}$, en déduire une expression de u_n en fonction de n .
 - c. Montrer que $u_n = \frac{1}{1+\frac{1}{2^n}}$.

En déduire la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

83  La souris sort de son trou. À sa vue, le chat se précipite dans sa direction ! Surprise, la souris s'enfuit le long du mur avec la même vitesse que le chat.



Modélisation

Dans un repère orthonormé, la souris est en $(0; 0)$ et elle se déplace le long de l'axe des ordonnées positives ; le chat est initialement en $(200; 0)$ et il se déplace en direction de la souris. Le chat et la souris se déplacent de 20 unités à chaque étape.

1. Compléter le programme Python ci-dessous afin de représenter le déplacement du chat et de la souris.

```
import turtle as tl

souris, chat = tl.Turtle(), tl.Turtle()
souris.goto(0,0)
souris.setheading(90)
chat.up()
chat.goto(200,0)
chat.down()

chat.setheading(chat.towards(souris))
chat.forward(20)
souris.forward(20)

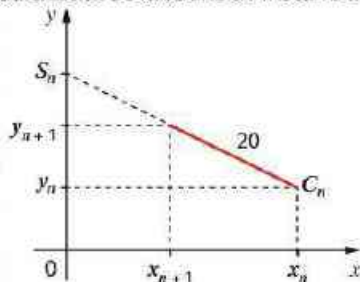
tl.mainloop()
```

Info

L'instruction `chat.setheading(chat.towards(souris))` tourne la tête du chat dans la direction de la souris.

2. Dans ce qui suit, les suites de points (C_n) et (S_n) représentent les positions du chat et de la souris à l'instant n .

À l'aide du schéma, en supposant $x_{n+1} > 0$, déterminer la distance d_n qui sépare le chat de la souris au bout de n secondes.



3. a. Justifier que si x_{n+1} est positif, alors les coordonnées du point C_n sont données par :

$$\begin{cases} x_{n+1} = \left(1 - \frac{20}{d_n}\right)x_n \\ y_{n+1} = \frac{400n - 20y_n}{d_n} + y_n \end{cases}$$

b. Créer une feuille de tableau afin de retrouver les résultats ci-contre.

| Coordonnées du chat | | | | |
|---------------------|--------|-------|--------|--|
| n | x | y | d_n | |
| 0 | 200,00 | 0,00 | 200,00 | |
| 1 | 180,00 | 2,00 | 180,50 | |
| 2 | 160,10 | 6,20 | 163,63 | |
| 3 | 140,63 | 12,76 | 149,26 | |
| 4 | 121,57 | 21,85 | 134,77 | |

c. Tabuler les formules jusqu'à $n = 19$. Quelle semble être la variation de la suite (d_n) ? Quelle semble être sa limite ?

d. Que se passe-t-il pour les valeurs de n suivantes ? Pourquoi le modèle ne représente-t-il plus la réalité ?

e. Si $x_n = 0$, alors le chat longe le mur (l'axe des ordonnées). Modifier les formules pour améliorer le modèle. Quelle est alors la limite de la suite (d_n) ? Interpréter dans le contexte de l'exercice.

3 Limites et inégalités

Pour les exercices **84** et **85**, la suite (u_n) est définie sur \mathbb{N} .

- Calculer les 4 premiers termes.
- Donner une représentation graphique.
- Donner sa limite en la comparant à celle de la suite (v_n) (et éventuellement à celle d'une seconde suite à déterminer).

84 1. $u_n = n + \cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right)$ et $v_n = n - 1$

2. $u_n = 2n + (-1)^n$ et $v_n = 2n - 1$

3. $u_n = \cos\left(\frac{\pi}{4}n^2\right) - n$ et $v_n = 1 - n$

4. $u_n = n^2 - (-1)^n \times 2n + 1$ et $v_n = (n - 1)^2$

85 1. $u_n = \frac{1 + \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)}{n + 1}$ et $v_n = \frac{2}{n + 1}$

2. $u_n = \frac{1}{n + e^{-n}}$ et $v_n = \frac{1}{n}$


86 Des spécialistes de l'éducation étudient le taux d'attention des élèves en cours de maths pendant l'année. Il dépend de plusieurs paramètres (jour de l'année scolaire, quantité de devoirs à rendre, charge de la batterie du Smartphone...). Une étude, menée en 2020, a permis d'estimer le taux d'attention à 0,9 le jour de la rentrée : 90 % de l'attention est alors disponible pour le cours de maths.

On modélise le taux d'attention par la suite (A_n) qui, à tout entier naturel n , associe le taux d'attention n mois après la rentrée.

On a ainsi $A_0 = 0,9$. Le modèle choisi est tel que, pour tout entier naturel n , on a : $A_{n+1} = A_n - 0,08A_n^2$.

1. On estime qu'en janvier le taux d'attention est proche de 0,7. Est-ce conforme au modèle ?
2. On définit la fonction f sur l'intervalle $[0; 1]$ par $f(x) = x - 0,08x^2$. La suite (A_n) vérifie donc, pour tout entier naturel n , $A_{n+1} = f(A_n)$.

- a. Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0; 1]$.
- b. Montrer que, pour entier naturel n , si $0 \leq A_n \leq 1$, alors $0 \leq A_{n+1} \leq 1$.
- c. Déterminer le sens de variation de (A_n) .
- d. Représenter graphiquement la suite (A_n) dans un repère. Avec du bon sens, déterminer sa limite quand n tend vers $+\infty$.

3. **PYTHON**  Compléter le programme Python afin de déterminer le mois à partir duquel le taux d'attention sera inférieur au seuil critique estimé à 47 %.

```
a = 0.9, 0
while a >= 0.47:
    a = a - 0.08 * (a**2)
    n = n + 1
print(n)
```

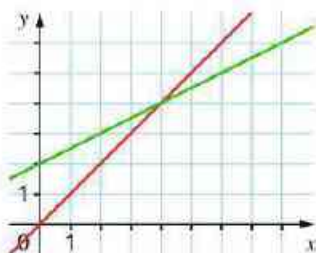
4 Suites arithmético-géométriques

87 Le graphique représente la droite d'équation $y = x$ et la courbe de la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = 0,5x + 2$$

Déterminer graphiquement le sens de variation et la limite en $+\infty$ de la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ quand :

1. $u_0 = 8$ 2. $u_0 = 1$

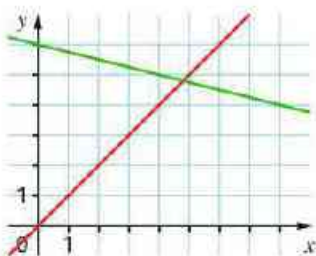


88 Le graphique représente la droite d'équation $y = x$ et la courbe de la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = 6 - 0,25x$$

Déterminer graphiquement le sens de variation et la limite en $+\infty$ de la suite (v_n) définie par $v_{n+1} = f(v_n)$ quand :

1. $v_0 = 2$ 2. $v_0 = 8$



89 Soit (u_n) la suite définie sur \mathbb{N} par :

$$u_{n+2} = \frac{5}{4}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \text{ et } u_0 = 4 \text{ et } u_1 = 7$$

1. À l'aide d'un logiciel, calculer les premiers termes de la suite. Conjecturer ses variations et son éventuelle limite.

2. Soit (v_n) la suite définie sur \mathbb{N} par $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$.

a. Calculer $v_{n+1} - v_n$. En déduire la nature de (v_n) .

b. En déduire une expression de u_{n+1} en fonction de u_n , puis la nature de la suite (u_n) .

c. Résoudre l'équation $\alpha = \frac{1}{4}\alpha + 6$. En déduire l'expression de u_n en fonction de n .

d. En déduire la limite de (u_n) .

90 Zorana s'est découverte une passion pour l'aquariophilie. Novice, elle demande régulièrement de l'aide sur les forums. « J'ai versé 240 litres d'eau



dans mon aquarium (121×41×55). J'aurais besoin de conseils ou de renseignements sur l'évaporation de mon aquarium, car il perd exactement 2 à 3 cm de hauteur d'eau par semaine. »

1. Combien de litres d'eau Zorana peut-elle rajouter avant que son aquarium déborde ?

2. Supposons que la hauteur de l'aquarium est 55 cm, la perte d'eau observée *exactement* 2 à 3 cm par semaine peut-elle être de 13,5 litres ? Déterminer alors le pourcentage d'évaporation (par rapport aux 240 litres initiaux).

3. Par la suite, on suppose que chaque semaine le taux d'évaporation est de 5 % et que Zorana rajoute toujours 13,5 litres. Soit (V_n) la suite représentant le volume d'eau dans l'aquarium chaque semaine. Justifier que $V_0 = 240$ et $V_{n+1} = 0,95V_n + 13,5$.

4. Soit (W_n) la suite définie sur \mathbb{N} par $W_n = V_n - 270$.

a. Vérifier que la suite (W_n) est géométrique, préciser la raison et le premier terme.

b. En déduire l'expression de V_n en fonction de n .

c. Si Zorana poursuit ce procédé chaque mois, son aquarium risque-t-il de déborder ?

91 Soit (u_n) la suite définie sur \mathbb{N} par :

$$u_0 = 5 \text{ et } u_{n+1} = -\frac{2}{3}u_n + \frac{7}{3}$$

1. Représenter graphiquement la suite dans un repère. Conjecturer les variations de la suite et la valeur de son éventuelle limite.

2. En suivant le plan de travail présenté dans le cours, déterminer l'expression de u_n en fonction de n .

3. On pose $S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n$. Démontrer

$$\text{que } S_n = \left(1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) \times \frac{54}{25} + \frac{7}{5}(n+1).$$

4. Avec du bon sens, justifier le commentaire : « Pour n assez grand, la somme des termes vaut environ $1,4n$. »

92 La romancière Literharry

étudie un audit concernant la vente de ses livres. Elle sort un livre tous les deux ans, qui, le mois de sa sortie, se vend à 5 000 exemplaires.

Ensuite, chaque mois, ses ventes diminuent de 20 % par rapport au mois précédent. Son éditeur lui propose différentes actions marketing afin d'augmenter les ventes : chaque mois, à la suite de ces actions, Literharry gagne ℓ nouveaux lecteurs. Existe-t-il une valeur de ℓ qui lui permettrait d'avoir 30 000 ventes sur deux ans ?

Plan de travail possible :

1. Modéliser le problème à l'aide d'une suite définie par une relation de récurrence.

2. Exprimer les termes de cette suite en fonction de n .

3. Calculer la somme des termes représentant une durée de deux ans.



Évolution de la population de Mayotte

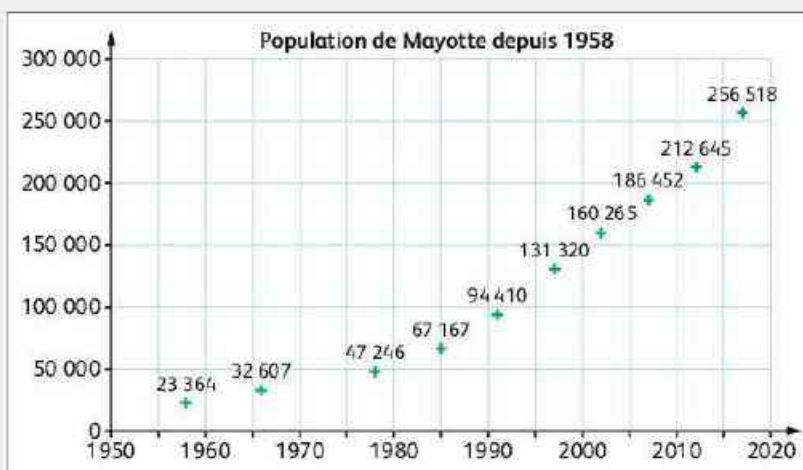
On considère l'extrait suivant, paru dans l'INSEE Analyse n° 15 – Décembre 2017.

En septembre 2017, 256 518 personnes vivent à Mayotte, soit **43 900 habitants de plus qu'en 2012**. Ainsi, sur les cinq dernières années, la population mahoraise continue de progresser, et plus rapidement qu'avant.

De 2012 à 2017, la croissance démographique atteint **+3,8 % par an en moyenne**, soit **8 800 habitants supplémentaires**

chaque année. De 2007 à 2012, la population avait augmenté moins vite (+2,7 % par an, soit 5 200 habitants supplémentaires par an).

Cette accélération rompt avec la tendance des vingt années précédentes : partant d'un rythme record de +5,8 % par an à la fin des



années 1980, la croissance démographique avait progressivement ralenti entre 1991 et 2012. Au total, la population mahoraise double en l'espace de vingt ans. Mayotte est ainsi le département français ayant la croissance démographique la plus forte.

1. a. Dans l'extrait précédent, on a surligné certains passages en **jaune**. En utilisant ces données, à quel type de progression peut-on penser pour modéliser l'évolution annuelle de la population de Mayotte entre 2012 et 2017 ?

b. Un autre passage a été surligné en **vert**. Le modèle précédent est-il compatible avec ce passage ?

c. Quel type de progression paraît le plus adapté pour modéliser l'évolution annuelle de la population de Mayotte entre 2012 et 2017 ? Argumenter.

2. Soit un entier naturel n . On souhaite estimer la population de Mayotte en $(2000 + n)$ par le terme u_n d'une suite. Parmi les expressions suivantes, laquelle paraît la plus adaptée ? Argumenter.

a. $u_n = 143\,369 \times e^{0,0422n}$

b. $u_n = 66,6n^2 + 5\,607,8n + 141\,982$

c. $u_n = 147\,747 \times 1,032^n$

d. $u_n = 5\,799n + 149\,284$

3. D'après l'INSEE, Mayotte comptait 260 372 habitants en 2018 et 270 372 habitants en 2019.

L'expression choisie à la question 2. est-elle toujours la plus adaptée ?

Pour choisir un modèle, on peut s'aider de la représentation graphique : les points paraissent-ils alignés ? La croissance paraît-elle plutôt exponentielle ?



Rémi souhaite économiser tous les mois. Il dispose d'un capital initial de 1 500 € qu'il place sur son livret A au taux d'intérêt annuel de 0,75 %. On suppose que ce taux reste inchangé à l'avenir. Puis il y verse 300 € tous les ans à la date anniversaire, sans effectuer d'autres versements ni retraits. Un livret A est un compte d'épargne rémunéré sans frais dont les intérêts cumulés sur l'année s'ajoutent au capital en fin de chaque année. Ils engendrent à leur tour des intérêts les années suivantes. Pour tout entier naturel n , on note u_n le capital, en euro, disponible au bout de n années de placement. Ainsi $u_0 = 1500$.

- Calculer le capital au bout d'une année, de deux années, puis de trois années (arrondir au centime).
- Pour un entier n , exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .

3. Après avoir résolu l'équation $x = 1,0075x + 300$, déterminer l'expression de u_n en fonction de n .

4. Quelle est la limite de la suite (u_n) ? Interpréter.

5. Rémi souhaite déterminer combien d'années sont nécessaires pour que le capital atteigne 2 000 €, 3 000 €... et de façon générale une somme S donnée.

a. Compléter pour cela la fonction seuil incomplète ci-contre.

```
def seuil(S):
    n=0
    u=1500
    while u<S:
        n=...
        u=...
    return n
```

b. La programmer et déterminer au bout de combien d'années le capital aura atteint le plafond du livret A, égal à 22 950 €.

6. L'affirmation suivante est-elle vraie : « Le capital placé augmente de plus en plus vite. » Argumenter.

Pour financer l'achat d'une voiture, un couple emprunte un capital de 20 000 €, avec des mensualités de remboursement constantes égales à 500 €.



Sa banque lui propose un taux annuel d'emprunt de 3,84 %, soit un taux mensuel de 0,32 %.

Chaque mois, la mensualité de 500 € se répartit entre des intérêts (0,32 % du capital restant dû en début de mois) et un remboursement du capital.

Partie A Étude à l'aide d'un tableur

On souhaite mettre en place la feuille de calcul suivante pour construire le tableau d'amortissement de la dette, qui donne chaque mois le capital restant dû.

| | A | B | C | D | E |
|----|---|--|----------|------------|--------------------------------------|
| | Nombre de mois depuis le début de l'emprunt | Capital restant dû en début de période | Intérêts | Mensualité | Capital restant dû en fin de période |
| 1. | | | | | |
| 2. | 1 | 20 000,00 € | | 500,00 € | |
| 3. | 2 | | | 500,00 € | |
| 4. | 3 | | | 500,00 € | |

- Justifier que les intérêts du premier mois s'élèvent à 64 € et que le capital restant dû à l'issue du premier mois est égal à 19 564 €.
- Calculer les intérêts du 2^e mois et le capital restant dû à l'issue de deux mois de remboursement.

3. Proposer des formules à entrer dans les cellules C2, E2 et B3, à recopier vers le bas, de façon à construire le tableau d'amortissement.

4. a. Après combien de mois sera remboursé le prêt? Quel sera le montant de la dernière mensualité?

b. À l'aide du tableur, calculer le coût du prêt, c'est-à-dire le montant que le couple verse à sa banque en plus du montant emprunté. Quelle proportion du montant emprunté celui-ci représente-t-il?

Partie B Étude à l'aide d'une suite

Pour tout entier $n \geq 0$, on note C_n le capital restant dû à la fin du n -ième mois de remboursement du prêt et I_n les intérêts du n -ième mois de remboursement. Ainsi $C_0 = 20 000$; $C_1 = 19 564$; $I_0 = 0$ et $I_1 = 64$.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n , on a :

$$C_{n+1} = 1,0032 \times C_n - 500$$

2. a. Montrer que la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par $u_n = C_n - 156 250$ est géométrique. Préciser sa raison.

b. En déduire l'expression de C_n en fonction de n .

c. À l'aide de la calculatrice, résoudre dans \mathbb{N} l'inéquation $C_n \leq 0$. Interpréter le résultat obtenu.

3. a. Justifier que, pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$I_n = 0,0032 \times C_{n-1}$$

b. En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$:

$$I_n = 500 - 436 \times 1,0032^{n-1}$$

4. Calculer la somme $I_1 + I_2 + \dots + I_{44}$. Interpréter le résultat obtenu.

Stéphanie, amatrice de thé, découvre la loi de refroidissement de Newton : « La perte de chaleur d'un corps est proportionnelle à la différence de température entre le corps et le milieu environnant. » Intriguée, elle décide de vérifier expérimentalement cette loi : elle se sert un mug de thé, puis relève la température (en degré Celsius) toutes les deux minutes.

| Temps (min) | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 |
|------------------|-----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Température (°C) | 100 | 80 | 66 | 55 | 46 | 40 | 35 | 31 | 28 | 26 | 25 |

En notant t_n la température du corps au bout de n minutes, alors la loi de Newton peut s'écrire, pour tout entier naturel n , $t_{n+1} - t_n = -\alpha(t_n - T)$, où α est une constante positive et T est la température du milieu ambiant. Ici $T = 20^\circ\text{C}$.

Partie A De l'expérience...

1. Mettre en place la feuille de calcul suivante à l'aide des données de l'expérience (certaines cellules restent vides). Puis représenter la suite des températures relevées à l'aide d'un nuage de points.

| | A | B | C | D |
|---|---------|-----------|-----------------|-------|
| 1 | t (min) | temp (°C) | suite (t_n) | alpha |
| 2 | 0 | 100 | | |
| 3 | 1 | | | |
| 4 | 2 | 80 | | |
| 5 | 3 | | | |
| 6 | 4 | 66 | | |



2. Exprimer t_{n+1} en fonction de t_n . Puis tabuler la suite (t_n) en colonne C, la valeur du paramètre α étant modifiable dans la cellule D2.

3. Modifier la valeur de la cellule D2 (avec une précision de 2 décimales) afin d'obtenir une suite (t_n) dont les valeurs sont proches des données expérimentales.

4. Conjecturer les variations de la suite (t_n) et son comportement à l'infini. Cela semble-t-il cohérent avec la réalité ?

Partie B ... à la théorie

Soit (u_n) la suite définie sur \mathbb{N} par $u_n = t_n - 20$ (pour l'expression de t_n , prendre la valeur de α trouvée à la question précédente).

1. Démontrer que (u_n) est une suite géométrique.

2. En déduire une expression de t_n en fonction de n .

L'économiste anglais Thomas Malthus (1766-1834) publie en 1798 son *Essai sur le principe des populations*, dans lequel il écrit :

« Le pouvoir multiplicateur de la population est infiniment plus grand que le pouvoir qu'a la terre de produire la subsistance de l'homme. [...] Si elle n'est pas freinée, la population s'accroît en progression géométrique. Les subsistances ne s'accroissent qu'en progression arithmétique. »

1. Dans cette question, on reprend la modélisation abordée dans la **Situation 2 p. 39**.

Ainsi, pour tout entier $n \geq 0$, pour l'année $(1800 + n)$, la population anglaise, en million, est estimée par $p_n = 10 \times 1,028^n$; et la population que peut nourrir l'agriculture anglaise, en million, est estimée par :

$$a_n = 10 + 0,4n$$

a. On considère l'algorithme ci-dessous.

Quel est son rôle ?

```
def limite(A):
    p=10
    n=0
    while p<A:
        n=n+1
        p=1.028*p
    return n
```

b. Recopier et compléter le tableau suivant.

| A | 15 | 20 | 25 | 50 | 100 |
|-----------------------------------|----|----|----|----|-----|
| Rang à partir duquel $p_n \geq A$ | | | | | |
| Rang à partir duquel $a_n \geq A$ | | | | | |

c. Comparer les évolutions des suites (p_n) et (a_n).

2. Malthus précise en 1803 :

« La race humaine croîtrait comme les nombres 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256 ; tandis que les subsistances croîtraient comme ceux-ci : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Au bout de deux siècles, la population serait aux moyens de subsistance comme 256 à 9 ; au bout de trois siècles, comme 4 096 est à 13 et, après deux mille ans, la différence serait immense et comme incalculable. »

Expliquer son raisonnement.

Info

Malthus conclut à la catastrophe démographique et préconise de limiter les naissances par la chasteté et le mariage tardif. Cette catastrophe ne s'est depuis pas réalisée, notamment grâce à la transition démographique et à la réduction des naissances, ainsi qu'à l'amélioration considérable des rendements agricoles et l'utilisation massive des énergies fossiles.

Pour Thomas Malthus, sur une période prise pour unité de temps, l'accroissement relatif de la population $\frac{N_{n+1}-N_n}{N_n}$ est constant, ce qui conduit à modéliser son évolution par une suite géométrique :

$$\frac{N_{n+1}-N_n}{N_n} = r,$$

ou encore $N_{n+1} = (1+r) \times N_n$ (avec $r > 0$).

Pierre-François Verhulst (1804-1849), mathématicien belge contemporain de Malthus, considère que, si la population peut se développer sans contrainte conformément au modèle de Malthus pendant une courte période, les ressources n'étant pas inépuisables, la croissance de la population sera ensuite ralentie et limitée. L'accroissement relatif de la population par unité de temps est donc « freiné » par la taille de la population : lorsque la population est réduite, son accroissement est important, alors que lorsque la population est grande, son accroissement est réduit. Le modèle discrétisé de Verhulst, appelé également modèle logistique, repose sur l'hypothèse que l'accroissement relatif $\frac{N_{n+1}-N_n}{N_n}$ est une fonction

affine décroissante de la population N_n , c'est-à-dire, pour tout entier $n \geq 0$:

$$\frac{N_{n+1}-N_n}{N_n} = r(k - N_n), \text{ avec } r > 0 \text{ et } k > 0$$

$$\text{ou encore } N_{n+1} = N_n + rN_n(k - N_n)$$

1. On suppose ici que la suite (N_n) admet une limite ℓ . Montrer qu'alors soit $\ell = 0$, soit $\ell = k$.

On dit que k est la capacité d'accueil du milieu.

2. On définit la suite (p_n) sur \mathbb{N} par $p_n = \frac{N_n}{k}$.

Justifier que, pour tout entier $n \geq 0$:

$$p_{n+1} = p_n + a \times p_n(1 - p_n), \text{ où } a = r \times k$$

Dans la suite de l'exercice, on définit la fonction f sur \mathbb{R} par $f(x) = x + ax(1-x)$ et on choisit $x_0 = 0,5$.

3. On suppose ici que $a = 0,5$.

a. Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé d'unité graphique 10 cm, ainsi que la droite Δ d'équation $y = x$.

b. Représenter les dix premiers termes de la suite (x_n) sur le graphique précédent.

c. Quel semble être le comportement asymptotique de la suite (x_n) ?

d. Mettre en place la feuille de calcul ci-contre et représenter graphiquement les 50 premiers termes de la suite (x_n) .

| | A | B |
|---|-------|----------------------|
| 1 | a | 0,5 |
| 2 | | |
| 3 | n | p_n |
| 4 | 0 | 0,5 |
| 5 | =A4+1 | =B4+\$B\$1*B4*(1-B4) |

Comparer avec les résultats obtenus à la question c.

4. Reprendre la question 3. dans le cas où $a = 1,5$.

5. Reprendre la question 3. dans le cas où $a = 2,5$.

6. Reprendre la question 3. dans le cas où $a = 3$.

Info

Le modèle logistique discret est tout à fait adapté pour modéliser certaines évolutions de populations, même dans les cas où un comportement chaotique apparaît. C'est notamment le cas pour certains insectes, comme le criquet pèlerin en Afrique. En temps normal, celui-ci vit en solitaire. Mais lorsque les conditions sont favorables, comme après de fortes pluies, il se reproduit et se multiplie très rapidement. Lorsqu'une densité « critique » est atteinte, il change de morphologie et de comportement, passant de la vie solitaire à une vie grégaire. Il vole alors en gigantesques essaim, pouvant atteindre une densité de 260 individus par mètre carré, et ravage les cultures. Cette transformation est réversible.



Population mondiale, en million.

Source: ONU

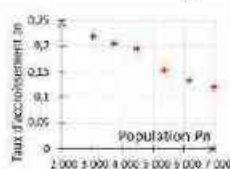
| Année | 1960 | 1970 | 1980 | 1990 | 2000 | 2010 | 2020 |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Pop. | 3 035 | 3 700 | 4 458 | 5 327 | 6 143 | 6 957 | 7 795 |

Pour tout entier naturel n , on note P_n la population mondiale, en million, pour l'année $(1960 + 10n)$.

1. Calculer le taux d'accroissement relatif $t_n = \frac{P_{n+1}-P_n}{P_n}$

de la population pour chaque entier n de 0 à 5, à 0,1 près.

2. On a placé les points de coordonnées $(P_n; t_n)$ dans le repère ci-contre. Commenter.



3. Un tableur permet d'obtenir : t_n environ égal à $0,3 - 0,000\,026 P_n$. On modélise alors la population mondiale après 2020, en million, par la suite (p_n) par $p_0 = 7\,795$ et $p_{n+1} = p_n + p_n \times (0,3 - 0,000\,026 p_n)$ (n désigne le nombre de dizaines d'années écoulées depuis 2020).

Estimer la population mondiale en 2030 et en 2040, en arrondissant au million.

4. D'après un scénario « moyen » de l'ONU, la population mondiale s'élèvera à 10 223 millions d'habitants en 2060 et à 11 184 millions d'habitants en 2100. Ces prévisions sont-elles compatibles avec le modèle de la question 3. ?

En 2000, l'Équipe Entomologie et Lutte biologique de l'INRIA d'Antibes a été mandatée pour étudier et modéliser l'efficacité prédatrice de la coccinelle *Harmonia axyridis* en lutte biologique contre le puceron *Aphis gossypii* en serre de concombres.

« L'objectif [...] est d'améliorer l'efficacité du traitement biologique, en utilisant les outils de l'automatique et des systèmes dynamiques ; pour cela, on écrira un modèle mathématique de l'interaction coccinelle/puceron et on le validera sur les données de terrain. »

Source : <http://www-sop.inria.fr/comore/cox/cox.html>, consulté le 26/09/19.

Attention, le modèle représente une réalité, il n'est pas la réalité !

Cet exercice propose un aperçu simplifié d'une recherche d'un modèle.



Partie A PYTHON Un modèle naïf

Les suites (C_n) et (P_n) représentent respectivement le nombre de coccinelles et de pucerons présents sur un plan de concombres chaque jour.

Chaque jour :

- chacune des populations est multipliée par 6 ;
- une coccinelle (larve ou adulte) mange 100 pucerons ;
- 10 % des coccinelles disparaissent (décès ou migration).

1. Justifier que ce modèle donne les relations de récurrences suivantes :

$$\begin{cases} P_{n+1} = \lfloor 6P_n - 100C_n \rfloor \\ C_{n+1} = \lfloor 5,9C_n \rfloor \end{cases}$$

où $\lfloor x \rfloor$ représente la partie entière de x .

2. Supposons qu'il y ait 2 000 pucerons et 2 coccinelles par plan.

Compléter le programme Python afin de connaître le nombre de coccinelles et de pucerons au bout de 10 jours.

```
from math import floor
p, c = 2000, 2
for _ in range(10):
    p = floor(6 * p - 100 * c)
    c = floor(5,9 * c)
print(p, c)
```

3. Que penser de la validité de ce modèle ?



Avec 100 000 pucerons, un plan de concombres meurt.

Partie B Un modèle Lokta - Volterra

En réalité, il faut prendre en compte d'autres paramètres : le nombre d'œufs pondus par les coccinelles dépend de la densité de pucerons ; le nombre de pucerons prédatés varie en fonction du stade de développement de la coccinelle ; une trop forte densité de pucerons tue le plan de concombres...



De plus, dans ce cas, les modèles se basent sur la biomasse des insectes plutôt que sur le nombre d'individus. Avec les hypothèses suivantes :

- la suite (p_n) (respectivement (c_n)) représente la biomasse journalière (en milligramme) des pucerons (resp. coccinelles) ; a, b et r sont des réels positifs et $s \in]0;1[$;
- le taux d'accroissement des pucerons est une fonction affine décroissante de la biomasse des coccinelles :

$$\frac{p_{n+1} - p_n}{p_n} = -ac_n + b$$

- le taux d'accroissement des coccinelles est une fonction affine croissante de la biomasse des pucerons :

$$\frac{c_{n+1} - c_n}{c_n} = rp_n - s$$

Un modèle possible peut être défini par les relations de récurrences suivantes :

$$\begin{cases} p_{n+1} = (1+b)p_n - ap_n c_n \\ c_{n+1} = (1-s)c_n + rp_n c_n \end{cases}$$

1. Que devient la population de pucerons en l'absence de coccinelles ?

2. Que devient la population de coccinelles en l'absence de pucerons ?

3. Supposons que la masse d'un puceron soit 1 mg et que celle d'une coccinelle soit 100 mg.

a. À l'aide d'un logiciel, représenter puis comparer l'évolution de (p_n) et (c_n) en fonction du temps sur une durée de 60 jours sachant que :

- initialement le plan de concombres compte 2 000 pucerons et on y place 2 coccinelles ;
- $a = 0,0016$; $b = 0,4$; $c = 8,5 \times 10^{-5}$ et $s = 0,15$.

b. Construire un graphique qui donne une représentation de c_n en fonction p_n pour les 60 premiers jours.

À L'ÉCRIT OU À L'ORAL

c. Ce type de modélisation est assez complexe : modifier « légèrement » les paramètres a, b, r ou s . Présenter vos conclusions (validité des modèles obtenus, représentations graphiques en fonction de certains paramètres...).

Évolution d'une épidémie : le modèle SIR

Utiliser un **TABLEUR**

Le but de ce TP est de proposer des modélisations d'une infection non mortelle au sein d'une population donnée.

La population est divisée en trois groupes d'individus :

- Sains (susceptibles d'être infectés),
- Infectés (infectés un certain temps, puis deviennent Résistants),
- Résistants (ne sont plus infectés et ne contaminent personne).

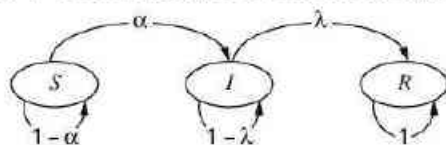
À chaque catégorie on associe les suites (S_n) , (I_n) et (R_n) représentant le nombre d'individus chaque semaine.

Objectif

Modéliser une situation réelle.
Utiliser un tableur pour visualiser le comportement de suites interdépendantes.

Partie A Un premier modèle

Le schéma représente la situation : chaque semaine, la proportion α de personnes saines est infectée ; la proportion $1 - \lambda$ des personnes infectées reste infectée...



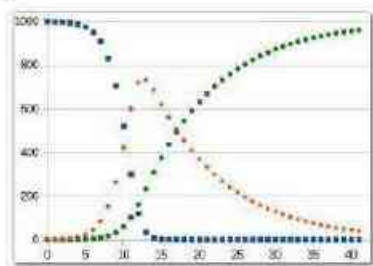
Initialement $S_0 = 999$, $I_0 = 1$ et $R_0 = 0$.

1. Définir les intervalles de α et β .
2. Dans ce modèle, $I_{n+1} = \alpha S_n + (1 - \lambda) I_n$. Exprimer S_n et R_n en fonction de n . Justifier que la population reste constante.
3. Donner la nature de la suite (S_n) , en déduire sa limite. Interpréter dans le contexte.
4. Supposons que n est très grand. Justifier que (I_n) peut être assimilée à une suite géométrique. Préciser alors sa raison puis sa limite. Interpréter cette limite dans le contexte.

Partie B Un modèle plus réaliste

1. On suppose que chaque Infecté rencontre chaque Sain : la semaine n , quelle sera le nombre de rencontres ?
2. Soit α la probabilité qu'une personne Saine soit infectée la semaine $(n + 1)$. Exprimer S_{n+1} en fonction de S_n , I_n et α .
3. Chaque semaine, une proportion β des Infectés devient Résistants. En déduire R_{n+1} en fonction de β , I_n et R_n .
4. En admettant que $I_{n+1} = (1 - \beta) I_n + \alpha S_n \times I_n$, vérifier que la population totale reste constante.

5. a. Représenter ces suites à l'aide d'un logiciel en prenant : $\alpha = 0,001$, $\beta = 0,1$, $S_0 = 999$, $I_0 = 1$ et $R_0 = 0$.
- b. Identifier chacune des suites sur la représentation ci-dessous.



À l'aide d'une lecture graphique, donner :

- les variations,
 - le maximum,
 - la limite de la suite (I_n) .
- c. Modifier les paramètres α et β . Expliquer pourquoi certaines valeurs invalident le modèle.
 - d. En posant $\alpha = 0,001$; $\beta = 0,1$; $I_0 = 1$ et une population initiale de 1 000 individus, faire varier R_0 . Ensuite, reprendre l'étude en posant $R_0 = 0$ et faire varier I_0 .

À L'ÉCRIT OU À L'ORAL

6. Faire le compte-rendu de vos observations :
 - variations des suites
 - limites
 - maximum
 - temps mis pour atteindre le maximum pour chacune des suites.
 Comment ces observations, dans ce modèle, plaident-elles en faveur de la vaccination ?



Le flocon de von Koch

Mener une recherche

Le mathématicien suédois von Koch (1870-1924) a proposé une construction simple d'un objet dit « fractal » en 1904, sur un document intitulé « Sur une courbe continue sans tangente, obtenue par une construction géométrique élémentaire ».

La construction de ce « flocon » repose sur un principe simple : le point de départ est un triangle équilatéral de côté 1.



Flocon d'ordre 0



Flocon d'ordre 1

Pour chacun de ses côtés, on effectue la construction suivante :

① diviser le segment en trois parties égales ;

② construire un triangle équilatéral « sur le segment central ».

On répète alors la construction précédente pour obtenir le flocon d'ordre 2, puis le flocon d'ordre 3, etc.

On note pour chaque entier naturel n :

- ℓ_n la longueur d'un côté du flocon d'ordre n ;
- c_n le nombre de côtés du flocon d'ordre n ;
- P_n le périmètre du flocon d'ordre n ;
- \mathcal{A}_n l'aire du flocon d'ordre n .

Partie A Des formules de récurrence

1. Calculer les valeurs initiales ℓ_0 , c_0 , P_0 et \mathcal{A}_0 .
2. Déterminer les relations de récurrence qui permettent de passer, pour tout entier n , de ℓ_n à ℓ_{n+1} , et de c_n à c_{n+1} .

3. Exprimer P_n en fonction de c_n et de ℓ_n .

4. On rappelle que l'aire d'un triangle équilatéral de côté a est égale à $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Trouver une relation de récurrence permettant de calculer \mathcal{A}_{n+1} en fonction de \mathcal{A}_n , c_n et ℓ_n .

Partie B Expérimenter

À l'aide du tableur, construire une feuille de calcul donnant la suite des valeurs des suites précédentes.

| | A | B | C | D | E |
|---|---------------------|-----------------------------|-----------------------|-----------------|----------------------|
| | Ordre n du flocon | Longueur ℓ_n d'un côté | Nombre de côtés c_n | Périmètre P_n | Aire \mathcal{A}_n |
| 1 | | | | | |
| 2 | 0 | 1 | 3 | 3 | 0,4330127 |
| 3 | 1 | 0,333333333 | 12 | 4 | 0,57735027 |
| 4 | 2 | 0,111111111 | 48 | 5,33333333 | 0,6415003 |

Quelles conjectures peut-on faire sur les comportements à l'infini des suites (ℓ_n) , (c_n) , (P_n) et (\mathcal{A}_n) ?

À L'ÉCRIT OU À L'ORAL

Partie C

À partir des résultats obtenus dans les parties A et B, exprimer les termes ℓ_n , c_n , P_n et \mathcal{A}_n en fonction d'un entier naturel n .

Prouver les conjectures émises dans la partie B.

Info

Von Koch, avec son « flocon », a été le premier à exhiber une courbe fermée, continue, dérivable en aucun point, et de périmètre infini pour une aire intérieure finie, confirmant que le concept de courbe, remis en cause par Cantor et Dedekind, était encore à (re)définir à l'époque.

Des espèces invasives : les lapins en Australie

Mener une recherche

En 1859, le colon britannique Thomas Austin a introduit, pour satisfaire ses envies de chasse, 12 couples de lapins en Australie. N'ayant aucun prédateur sur l'île, cette espèce s'est vite adaptée et s'est multipliée : en 1866, on comptait 14 000 lapins rien que sur la propriété d'Austin.



50 ans plus tard, malgré les 2 millions de lapins abattus chaque année par les chasseurs, il y avait plus de 600 millions de lapins en Australie. En 1940, on atteignait les 800 millions.

Le gouvernement a essayé plusieurs solutions pour limiter leur propagation, sans réel succès : pose de grillages, introduction de renards, diffusion de virus. Par exemple, en 1950, la diffusion du virus de la

myxomatose a décimé 80 % de la population. Les lapins sont devenus peu à peu résistants et, 5 ans plus tard, les effets du virus étaient quasi inexistantes. Avec encore 200 millions de lapins en 2017, les autorités australiennes ont décidé de disséminer un nouveau virus (RHDV1), très virulent : en deux mois, environ 42 % des lapins ont été éliminés.

À L'ÉCRIT OU À L'ORAL

En s'appuyant sur les données du texte, modéliser l'évolution de la population des lapins en Australie au cours des années. On pourra introduire différents modèles de suites suivant les périodes envisagées.

Évolution : modèles continus

Les capacités du thème

- 1 Calculer des limites, utiliser le calcul d'une limite
- 2 Déterminer les primitives d'une fonction
- 3 Résoudre une équation différentielle $y' = ay$
- 4 Vérifier qu'une fonction est solution d'une équation différentielle
- 5 Résoudre une équation différentielle $y' = ay + b$

Modélisation du réel

Pierre-François Verhulst est un mathématicien belge de la première moitié du XIX^e siècle. Il est à l'origine de l'utilisation, en démographie, des « fonctions logistiques ». Il a en effet proposé une modélisation de l'accroissement de la population de la Belgique utilisant la fonction exponentielle.

📖 Voir Maths en situation p. 93

Les fonctions logistiques sont également utilisées dans d'autres contextes, comme celui de la diffusion d'un produit nouveau en économie ou la description de réactions « autocatalytiques » en chimie.



A Diaporama pour tester les bases



B Savoir manipuler l'exponentielle

Pour chaque question, préciser la bonne réponse.

1. Pour tous nombres réels a et b :

a. $e^{a+b} = e^a + e^b$ b. $e^{a \times b} = e^a \times e^b$ c. $e^{a+b} = e^a \times e^b$

2. Pour tout nombre réel x :

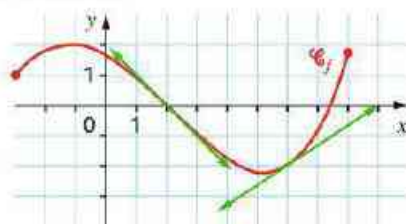
a. $e^{-x} \times e^{2x} = e^{2x^2}$ b. $e^x \times e^{-x} = 1$ c. $\frac{e^{2x+2}}{e^{x+1}} = e^2$

3. Pour tout réel x , l'expression $(e^x + 1)(e^x - 3)$ est égale à :

a. $e^{x^2} - 2e^x - 3$ b. $e^{2x} - 2e^x - 3$ c. $e^{2x} - 3$

C Savoir exploiter un graphique

Soit f la fonction définie et dérivable sur $[-3; 8]$ dont la représentation graphique \mathcal{C}_f est donnée ci-contre.



On a représenté les

tangentes à \mathcal{C}_f aux points d'abscisses 2 et 6.

1. Lire graphiquement $f(2)$, $f'(2)$, $f(6)$ et $f'(6)$.
2. Déterminer l'équation réduite de la tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse 2.
3. Avec la précision permise par le graphique, résoudre l'équation $f(x) = 0$.
4. Combien l'équation $f'(x) = 0$ admet-elle de solution ?
5. Citer un intervalle sur lequel f et f' sont simultanément négatives.

D Savoir calculer une dérivée

Calculer dans chaque cas la dérivée de la fonction f .

1. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1 + e^x$ 2. $f(x) = 2 + 3e^{2x} + e^{-2x}$

3. $f(x) = xe^{-x}$ 4. $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

E Savoir étudier les variations d'une fonction

Étudier dans chaque cas le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle indiqué.

1. $f(x) = 2(1 - e^{-2x})$ sur \mathbb{R} 2. $f(x) = x^3 - 3x + 1$ sur \mathbb{R}

3. $f(x) = (2x + 1)e^x$ sur \mathbb{R} 4. $f(x) = \frac{e^x}{x}$ sur $]0; +\infty[$

F Savoir vérifier une égalité

Parmi les fonctions suivantes, quelles sont celles qui vérifient, pour tout nombre réel x , l'égalité $f'(x) = -2f(x)$?

1. $f(x) = e^{-2x}$ 2. $f(x) = -2e^x$
3. $f(x) = e^{-2x} + 1$ 4. $f(x) = 1,5e^{-2x}$



Consolider les bases

La température de refroidissement d'un objet fabriqué industriellement est modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $f(t) = 20 + 200e^{-0,5t}$, où $f(t)$ est la température de l'objet, exprimée en degré Celsius, au bout de t heures. On note \mathcal{C} la courbe de la fonction f .

- 1 a. Quelle est la température initiale de cet objet ?
- b. Montrer que, pour tout réel $t \geq 0$, $f(t) > 20$. Interpréter.
- c. Étudier le sens de variation de la fonction f sur $[0; +\infty[$. Interpréter.
- d. Construire la courbe \mathcal{C} dans un repère d'unités graphiques 2 cm pour une heure en abscisse et 1 cm pour 20 °C en ordonnée.
- e. Avec la précision permise par le graphique, déterminer au bout de combien de temps la température de l'objet passe en dessous de 100 °C.
- 2 a. Écrire en Python une fonction f qui renvoie l'image d'un nombre t par la fonction f .

On considère la fonction `seuil` ci-contre écrite en Python.

- b. Décrire le rôle de cette fonction. Expliquer ce que représentent les variables h , m et s .

- c. Programmer et exécuter la fonction `seuil`. Interpréter le résultat retourné.

```
def seuil():
    t=0
    while f(t)>=100:
        t=t+1/3600
    h=int(t)
    m=int((t-h)*60)
    s=int(((t-h)*60-m)*60)
    return h,m,s
```

Objectif

Réactiver la fonction exponentielle dans un contexte de thermodynamique.



Situation 1 Élimination d'un médicament

À l'instant $t = 0$, on injecte dans le sang d'un patient, par piqûre intraveineuse, une certaine dose d'un médicament.

Pour tout nombre réel $t \geq 0$, on note $f(t)$ la quantité de médicament, exprimée en ml, présente dans le sang à l'instant t , exprimé en heure.

Une étude du processus d'élimination de ce médicament a permis d'observer que, à chaque instant t , la vitesse d'élimination du médicament, assimilée à $f'(t)$, est proportionnelle à la quantité $f(t)$, et que la fonction f vérifie, pour tout nombre réel $t \geq 0$, la relation (E) : $f'(t) = -0,1f(t)$.

- 1 a. Parmi les quatre fonctions suivantes, définies sur $[0; +\infty[$, quelles sont celles qui sont solutions de l'équation (E) ?

$$f_1(t) = e^{-0,1t}, f_2(t) = -0,1e^t, f_3(t) = -e^{0,1t}, f_4(t) = 2e^{-0,1t}.$$

- b. Proposer deux autres fonctions solutions de l'équation (E).
- c. Montrer que, pour tout nombre réel k , la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(t) = ke^{-0,1t}$ est solution de (E).

- 2 On considère une fonction f solution de (E) et la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par $g(t) = f(t)e^{0,1t}$.

- a. Montrer que, pour tout réel $t \geq 0$, $g'(t) = (f'(t) + 0,1f(t))e^{0,1t}$.
- b. En déduire qu'il existe un réel k , tel que, pour tout réel $t \geq 0$, $g(t) = k$.
- c. En déduire, pour $t \geq 0$, l'expression de $f(t)$ en fonction de t et de k .

- 3 À l'instant $t = 0$, on injecte une dose de 3 ml de médicament.

- a. Déterminer la valeur de k . En déduire que, pour $t \geq 0$, $f(t) = 3e^{-0,1t}$.
- b. Déterminer, à 10^{-2} près, la quantité de médicament présente dans le sang au bout de 6 heures.

Objectif

Découvrir et résoudre une équation différentielle de la forme $y' = ay$ dans le contexte de la pharmacocinétique.

Info

Lorsque qu'une fonction f vérifie, pour tout réel $t \geq 0$, la relation (E) : $f'(t) = -0,1f(t)$, on dit que f est solution, sur $[0; +\infty[$, de l'équation différentielle :
(E) : $y' = -0,1y$

Situation 2 De Malthus à Verhulst

- 1 a. En utilisant la calculatrice, décrire le comportement, lorsque t tend vers $+\infty$, des fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par $f(t) = e^{0,03t}$ et $g(t) = e^{-0,03t}$.
- b. Compléter $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{0,03t} = \dots$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,03t} = \dots$.

2 Le tableau ci-dessous donne la population américaine, en million d'habitants, entre 1800 et 1980.

| Année | 1800 | 1820 | 1840 | 1860 | 1920 | 1960 | 1980 |
|------------|------|------|------|------|------|-------|-------|
| Population | 5,3 | 9,64 | 17,1 | 31,4 | 106 | 179,3 | 226,6 |

En 1798, Thomas Malthus développe l'idée d'un accroissement exponentiel de la population. Suivant cette idée, on peut modéliser la population américaine, en million, par la fonction P_1 définie par $P_1(t) = 5,3e^{0,03t}$, où $P_1(t)$ est la population en 1800 + t .

- a. Comparer les valeurs données par la modélisation avec les valeurs réelles.
- b. Déterminer la limite de la fonction P_1 en $+\infty$.

3 Dans son article intitulé « Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement », publié en 1838, Pierre-François Verhulst écrit :

On sait que le célèbre Malthus a établi comme principe que la population humaine tend à croître en progression géométrique, de manière à se doubler après une certaine période, par exemple, tous les 25 ans. Cette proposition est incontestable, si l'on fait abstraction de la difficulté croissante de se procurer des subsistances. **L'accroissement virtuel de la population trouve donc une limite dans l'étendue de la fertilité du pays et la population tend, par conséquent, de plus en plus à devenir stationnaire.**

Le modèle proposé par Verhulst conduit à modéliser la population américaine, avec des notations analogues à la question 2, par la fonction P_2 définie par $P_2(t) = \frac{300}{1 + 55,6e^{-0,03t}}$.

- a. Comparer les valeurs données par la modélisation avec les valeurs réelles.
- b. Déterminer la limite de la fonction P_2 en $+\infty$.
- c. Expliquer et interpréter la phrase surlignée dans le texte.
- d. Comparer et critiquer les modèles proposés par Malthus et Verhulst.

Objectif

Découvrir la notion de limite d'une fonction dans un contexte de dynamique de population. Comparer deux modèles.

Info

Thomas Malthus est un économiste anglais (1766-1834). Dans son *Essai sur le principe de la population*, il développe l'idée d'un accroissement exponentiel de la population.



Info

Pierre-François Verhulst, mathématicien belge (1804-1849), s'est plus particulièrement intéressé aux évolutions de population. En 1838, il nuance les propos de Malthus en proposant un nouveau modèle : le modèle logistique, qui reste encore très utilisé de nos jours pour modéliser des évolutions en démographie, en écologie, en économie, en microbiologie...



Situation 3 Chute d'une bille

- 1 Résoudre l'équation différentielle $y' = -10$ revient à déterminer toutes les fonctions F , dérivables sur \mathbb{R} , telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = -10$.
- a. Donner deux solutions de l'équation différentielle $y' = -10$.
- b. Combien cette équation admet-elle de solution ? Les décrire toutes.
- c. Reprendre les questions précédentes avec $y' = -10x + 3$.

2 À l'instant $t = 0$, en seconde, on lance une bille de 1 gramme vers le haut à partir d'une hauteur de 1 mètre, avec une vitesse initiale de 3 m.s^{-1} . On admet que l'accélération, la vitesse et la hauteur de la bille à l'instant t , notées respectivement $a(t)$, $v(t)$ et $h(t)$, sont données par :

$$a(t) = -10, v'(t) = a(t) \text{ et } h'(t) = v(t)$$

- a. Que représente la fonction v pour la fonction a ? et h pour v ?
- b. Donner les valeurs de $v(0)$ et de $h(0)$.
- c. En déduire que $v(t) = -10t + 3$ et que $h(t) = -5t^2 + 3t + 1$.
- d. Déterminer le temps t_0 au bout duquel la bille atteint le sol.

Objectif

Découvrir la notion de primitives d'une fonction dans un contexte de cinématique.

Info

Une solution de l'équation différentielle $y' = f$ sur I est une fonction F , dérivable sur I , telle que, pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$. On dit que F est une primitive de f sur I .

1 Limite d'une fonction

Dans ce paragraphe, a et ℓ sont des nombres réels.

a Limite d'une fonction en l'infini

Définitions Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[a; +\infty[$.

① On dit que « f admet ℓ pour limite en $+\infty$ » lorsque les valeurs de $f(x)$ sont aussi proches de ℓ que l'on veut dès que x est suffisamment grand.

On note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$.

② On dit que « f admet $+\infty$ pour limite en $+\infty$ » lorsque les valeurs de $f(x)$ sont aussi grandes que l'on veut dès que x est suffisamment grand.

On note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Remarque

On définit de même $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$, etc.

Propriété Limites des fonctions de référence en l'infini

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

Définition Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ (ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$), la droite d'équation $y = \ell$ est asymptote horizontale à la courbe \mathcal{C}_f en $+\infty$ (ou en $-\infty$).

b Limite d'une fonction en un nombre réel

Définition Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert dont a est une borne. On dit que « f admet $+\infty$ pour limite en a » lorsque les valeurs de $f(x)$ sont aussi grandes que l'on veut dès que x est assez proche de a .

On note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$.

Remarque

Si f est définie sur $] -\infty; a[\cup] a; +\infty [$, on étudie les limites « à gauche » et « à droite » en a , notées respectivement $\lim_{x \rightarrow a}^- f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a}^+ f(x)$.

Propriété Les limites de la fonction inverse en 0 sont :

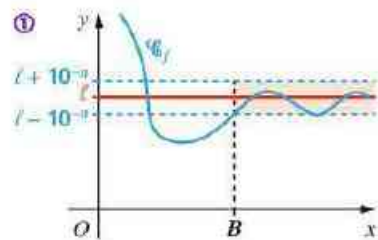
$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$$

Définition Lorsque $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ (ou $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$), on dit que la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à la courbe \mathcal{C}_f .

c Opérations et théorèmes de comparaison

Les propriétés relatives aux opérations sur les limites et les théorèmes de comparaison pour les limites de suites restent valables pour celles des fonctions.

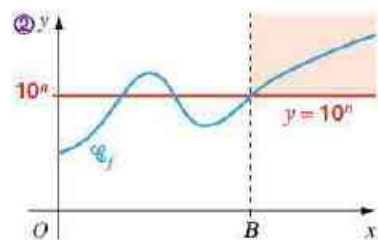
➔ Voir Thème 2 p. 42



$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$: pour tout $n \in \mathbb{N}$,

il existe un réel $B > 0$ tel que, pour tout $x > B$:

$$f(x) \in]\ell - 10^{-n}; \ell + 10^{-n}[$$

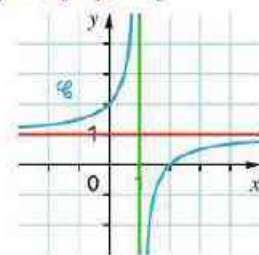


$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$: pour tout $n \in \mathbb{N}$,

il existe un réel $B > 0$ tel que, pour tout $x > B$, $f(x) > 10^n$.

Exemple

On donne la courbe \mathcal{C} d'une fonction f définie sur $] -\infty; 1[\cup] 1; +\infty [$.



• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

La courbe \mathcal{C} admet la droite d'équation $y = 1$ pour asymptote horizontale en $-\infty$ et en $+\infty$.

• $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$

La courbe \mathcal{C} admet la droite d'équation $x = 1$ pour asymptote verticale.

Remarque

On observe une compatibilité naturelle des limites avec les opérations, sauf dans les quatre cas de « formes indéterminées » :

« $+\infty - \infty$ », « $0 \times \infty$ », « $\frac{\infty}{\infty}$ » et « $\frac{0}{0}$ », où l'on ne peut pas conclure.



1 Calculer des limites, utiliser le calcul d'une limite

Énoncé 1. Calculer les limites suivantes. Interpréter graphiquement s'il y a lieu.

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right)$ b. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(3 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right)$

2. a. À l'aide de la calculatrice, conjecturer la limite en $+\infty$ de la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$.

b. Montrer que, pour tout réel $x > 0$, $f(x) = \frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}$. En déduire la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement.

3. On modélise la taille, exprimée en mm, d'une espèce de crevette en fonction de son âge t , exprimé en semaine, par la fonction L définie sur $[0; +\infty[$ par $L(t) = 87,5(1 - e^{-0,12t})$. Déterminer la limite de L en $+\infty$. Interpréter.

Solution

1. a. On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, par somme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right) = 3$.

La courbe \mathcal{C} de la fonction f définie par $f(x) = 3 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$ admet la droite d'équation $y = 3$ pour asymptote horizontale en $+\infty$.

b. On a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$, on est en présence d'une forme

indéterminée du type « $+\infty - \infty$ ». En réduisant au même dénominateur, on obtient, pour tout réel $x > 0$, $f(x) = \frac{3x^2 + 2x - 1}{x}$.

Or, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (3x^2 + 2x - 1) = -1$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x = 0^+$, par quotient $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$.

La courbe \mathcal{C} admet la droite d'équation $x = 0$ pour asymptote verticale.

2. a. On obtient la courbe ci-contre. Il semble que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$.

b. • Pour tout $x > 0$, $f(x) = \frac{x \left(2 - \frac{1}{x} \right)}{x \left(1 + \frac{1}{x} \right)}$, soit $f(x) = \frac{2 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}}$.

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{1}{x} \right) = 2$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right) = 1$.

Par quotient, on en déduit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$. La courbe \mathcal{C}_f admet la droite d'équation $y = 2$ pour asymptote horizontale en $+\infty$.

3. • On a $\lim_{t \rightarrow +\infty} -0,12t = -\infty$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^t = 0$, donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,12t} = 0$.

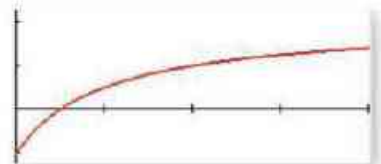
On en déduit alors, par somme et produit, que $\lim_{t \rightarrow +\infty} L(t) = 87,5$.

• La taille de ces crevettes tend vers une valeur limite de 87,5 mm.

Point méthode

1., 2. et 3. Pour calculer une limite :

- on utilise les limites des fonctions de référence ainsi que les règles opératoires sur les limites.
- en cas de forme indéterminée, on transforme l'expression de la fonction pour lever l'indétermination.



Point méthode

1. et 2. • Lorsque $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$,

la droite d'équation $y = \ell$ est asymptote horizontale à \mathcal{C}_f en $+\infty$.

• Lorsque $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ (ou $+\infty$), la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à la courbe \mathcal{C}_f .

J'applique

1 Déterminer les limites suivantes.

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-2x + 1 - \frac{1}{x^2} \right)$ 2. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x} - 1 \right)$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1-x)(e^x - 1)$ 4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x-1}{x}$

2 Calculer les limites en 2 et en $+\infty$ de la fonction f définie sur $]2; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x+1}{2-x}$. Interpréter.

3 On modélise le taux d'équipement des ménages français à l'Internet mobile pour l'année 2007 + x par la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{100}{1 + 9e^{-0,34x}}$.

- Étudier le sens de variation de f sur $[0; +\infty[$.
- a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
- b. Que peut-on en déduire pour la courbe \mathcal{C}_f ?
- Interpréter ces résultats dans le contexte.

2 Équation différentielle, primitives

a Notion d'équation différentielle

Définition Une équation différentielle du premier ordre est une équation liant une fonction inconnue y , dérivable sur un intervalle I , et sa dérivée y' .

b L'équation différentielle $y' = f$

Dans toute la suite, I désigne un intervalle de \mathbb{R} .

Définition Soit f une fonction définie sur I . On appelle primitive de f sur I , toute solution de l'équation différentielle $y' = f$.

Autrement dit, une primitive de f sur I est une fonction F , dérivable sur I , telle que, pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

Théorème Toute fonction continue sur I admet des primitives sur I .

Théorèmes Soit f une fonction continue sur I et F une primitive de f sur I .

- f admet une infinité de primitives sur I .
 - Toutes les primitives de f sur I sont les fonctions $x \mapsto F(x) + k$, où $k \in \mathbb{R}$.
- On dit que deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.

👉 Voir exo Démo n° 41

c Calculs de primitives

- Par lecture inverse du tableau des dérivées, on obtient le tableau des primitives des fonctions usuelles sur tout intervalle sur lequel elles sont définies et continues. k est une constante réelle et n un entier naturel.

| La fonction f définie par $f(x) = \dots$ | admet pour primitive la fonction F définie par $F(x) = \dots$ |
|--|---|
| k | kx |
| x | $\frac{1}{2}x^2$ |
| x^n | $\frac{1}{n+1}x^{n+1}$ |
| $\frac{1}{x^2}$ | $-\frac{1}{x}$ |
| e^x | e^x |
| $\frac{1}{\sqrt{x}}$ | $2\sqrt{x}$ |

- Dans le tableau suivant, f et g sont deux fonctions de primitives respectives F et G sur I , k une constante réelle et u est une fonction dérivable sur I .

| Une fonction de la forme | admet pour primitive |
|--------------------------|---|
| $f + g$ | $F + G$ |
| kf | kF |
| $u'e^u$ | e^u |
| $2uu'$ | u^2 |
| $\frac{u'}{u^2}$ | $-\frac{1}{u} \ (u(x) \neq 0 \text{ pour tout } x \in I)$ |

Exemples

- L'équation $(E): y' = 3y$ est une équation différentielle. Résoudre cette équation revient à déterminer toutes les fonctions f , dérivables sur \mathbb{R} , telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3f(x)$.
- La fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = e^{3x}$ est une solution de (E) . En effet, g est dérivable sur \mathbb{R} et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g'(x) = 3e^{3x} = 3g(x)$$

Exemples

- La fonction F définie sur \mathbb{R} par $F(x) = e^x + x^2$ est **une** solution de l'équation différentielle $y' = e^x + 2x$.
- F est **une** primitive sur \mathbb{R} de la fonction f définie par $f(x) = e^x + 2x$.
- Les primitives de f sur \mathbb{R} sont les fonctions $x \mapsto e^x + x^2 + k$, où k est une constante réelle.
- Il existe **une unique** primitive G de f qui vérifie $G(0) = 2$. En effet :

$$G(x) = e^x + x^2 + k$$

$$G(0) = 2 \Leftrightarrow 1 + k = 2 \Leftrightarrow k = 1$$

Donc $G(x) = e^x + x^2 + 1$.

Exemples

- Les primitives de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 - 3x + 1$ sont les fonctions F définies sur \mathbb{R} par :

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x + k, \quad k \in \mathbb{R}$$

- La fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 2(2x+1)(x^2+x)$ est de la forme $2uu'$, où $u(x) = x^2 + x$.

Les primitives de f sur \mathbb{R} sont les fonctions F définies par :

$$F(x) = (x^2 + x)^2 + k, \quad \text{où } k \in \mathbb{R}$$

- La fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{2x+1}$ admet pour primitives les fonctions F définies par $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x+1} + k$.

En effet :

$f(x) = \frac{1}{2} \times 2e^{2x+1}$, $x \mapsto 2e^{2x+1}$ est de la forme $u'e^u$, où $u(x) = 2x + 1$.

Donc $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x+1} + k$, où $k \in \mathbb{R}$.

Énoncé 1. Dans chaque cas, déterminer les primitives de la fonction f sur \mathbb{R} .

a. $f(x) = -x^3 + 4x^2 - 2x + 1$ b. $f(x) = (e^x - x)(e^x - 1)$

2. Déterminer la primitive F de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (4x + 2)e^{x^2+x}$ telle que $F(0) = 3$.

3. On étudie le nombre de truites d'un lac qui a tendance à diminuer. On modélise la population de truites par une fonction N , dérivable sur $[0; +\infty[$, où $N(t)$ est le nombre de truites au bout de t jours.

La vitesse d'évolution de la population de truites, assimilée à $N'(t)$, est donnée par $N'(t) = -125e^{-0,05t}$.

Déterminer l'expression de $N(t)$ en fonction de t , sachant qu'au début de l'étude 2 500 truites ont été recensées.

Solution

1. a. Les primitives de f sur \mathbb{R} sont les fonctions F définies par

$$F(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - x^2 + x + k, \text{ où } k \text{ est une constante réelle.}$$

b. En posant $u(x) = e^x - x$, on a $u'(x) = e^x - 1$. On écrit alors :

$$f(x) = \frac{1}{2} \times 2(e^x - x)(e^x - 1)$$

La fonction $x \mapsto 2(e^x - x)(e^x - 1)$ est de la forme $2uu'$ dont une primitive est u^2 . Les primitives de f sur \mathbb{R} sont les fonctions F définies par :

$$F(x) = \frac{1}{2}(e^x - x)^2 + k, \text{ où } k \text{ est une constante réelle.}$$

2. En posant $u(x) = x^2 + x$, on a $u'(x) = 2x + 1$.

On a $f(x) = 2 \times (2x + 1)e^{x^2+x}$. La fonction $x \mapsto (2x + 1)e^{x^2+x}$ est de la forme $u'e^u$ dont une primitive est e^u . Les primitives de f sur \mathbb{R} sont les fonctions F définies par $F(x) = 2e^{x^2+x} + k$, où k est une constante réelle.

Or $F(0) = 2 + k$, donc $F(0) = 3 \Leftrightarrow k = 1$.

La primitive cherchée est définie sur \mathbb{R} par $F(x) = 2e^{x^2+x} + 1$.

3. La fonction N est la primitive de la fonction $t \mapsto -125e^{-0,05t}$ qui vérifie $N(0) = 2500$. En posant $u(t) = -0,05t$, on a $u'(t) = -0,05$.

On écrit alors $N'(t) = -125 \times \frac{1}{-0,05} \times (-0,05e^{-0,05t})$, soit

$N'(t) = 2500 \times (-0,05e^{-0,05t})$. Une primitive de la fonction $t \mapsto -0,05e^{-0,05t}$, de la forme $u'e^u$, est $t \mapsto e^{-0,05t}$.

La fonction N est donc définie par $N(t) = 2500e^{-0,05t} + k$, où $k \in \mathbb{R}$.

Or $N(0) = 2500 + k$ d'où $N(0) = 2500 \Leftrightarrow k = 0$.

Donc $N(t) = 2500e^{-0,05t}$.

Point méthode

1. et 2. Pour déterminer les primitives d'une fonction :

- on utilise le tableau des primitives des fonctions usuelles, en utilisant le fait qu'une primitive de $f + g$ est $F + G$, et de kf , kF ;
- on reconnaît une forme connue ($2uu'$, $u'e^u$...);
- lorsqu'une forme connue n'apparaît pas explicitement, on peut la faire apparaître en « ajustant la constante », en utilisant le fait que $a \times \frac{1}{a} = 1$.

Point méthode

2. Pour déterminer la primitive F d'une fonction f vérifiant la condition $F(x_0) = y_0$, on détermine toutes les primitives de f , puis on calcule la constante k en traduisant la relation $F(x_0) = y_0$.

Point méthode

3. Déterminer les fonctions dont on connaît l'expression de la dérivée revient à déterminer les primitives de cette dérivée.

J'applique

4 Déterminer une primitive de chacune des fonctions f suivantes sur l'intervalle indiqué.

1. $f(x) = 2e^{-0,5x}$ sur \mathbb{R} .

2. $f(x) = -3e^x + 4x^2 - x - 1$ sur \mathbb{R} .

3. $f(x) = \frac{2}{x^2} + 1$ sur $]0; +\infty[$.

4. $f(x) = (-4x + 6)e^{-x^2+3x-1}$ sur \mathbb{R} .

5. $f(x) = (x^2 + 1)(x^3 + 3x - 1)$.

5 Une imprimerie a une capacité de production de 5 000 ouvrages par jour.

Le coût marginal par ouvrage, en euro, est donné par $f(q) = -2q + 15 - 10e^{-0,2q}$, où $q \in [0; 5]$ est le nombre d'ouvrages exprimé en millier. Les quantités étant très grandes, on assimile le coût marginal à la dérivée du coût total C .

Déterminer l'expression de $C(q)$ en fonction de q , sachant que $C(0) = 3$.

3 Équation différentielle $y' = ay + b$

a L'équation différentielle $y' = ay$

Propriété Soit a un nombre réel fixé. Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ sont les fonctions f définies sur \mathbb{R} par $f(x) = ke^{ax}$, où k est une constante réelle.



Démonstration

• La fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ke^{ax}$, où k est une constante réelle, est dérivable sur \mathbb{R} et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = kae^{ax}$, soit $f'(x) = af(x)$. Donc f est solution de l'équation différentielle $y' = ay$.

• Réciproquement, soient f une solution de l'équation différentielle $y' = ay$ et g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = f(x)e^{-ax}$. g est dérivable sur \mathbb{R} et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = f'(x)e^{-ax} + f(x)(-ae^{-ax})$, soit $g'(x) = (f'(x) - af(x))e^{-ax}$.

La fonction f étant solution de l'équation différentielle $y' = ay$, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = af(x)$, et donc $g'(x) = 0$. Il en résulte que la fonction g est constante sur \mathbb{R} et, en notant k la valeur de cette constante, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ke^{ax}$.

Remarque

L'équation différentielle $y' = ay$ admet une infinité de solutions. À chaque valeur de k correspond une solution particulière.

b L'équation différentielle $y' = ay + b$

Théorème Soient a et b deux nombres réels fixés avec $a \neq 0$.

- L'équation différentielle $y' = ay + b$ admet une unique solution particulière constante $u : x \mapsto \alpha$, où α est un nombre réel.
- Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions f définies sur \mathbb{R} par $f(x) = ke^{ax} + \alpha$, où k est une constante réelle.

Exemple de résolution d'une équation différentielle $y' = ay + b$

On considère l'équation différentielle (E) : $2y' + 3y = 6$.

L'équation (E) s'écrit $y' = -\frac{3}{2}y + 3$. Elle est de la forme $y' = ay + b$, avec $a = -\frac{3}{2}$ et $b = 3$.

- Recherche d'une solution particulière constante.

Soit u la fonction définie sur \mathbb{R} par $u(x) = \alpha$, où α est une constante réelle. La fonction u est solution de (E) si, et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$u'(x) = -\frac{3}{2}u(x) + 3$. Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = 0$, et donc $-\frac{3}{2}\alpha + 3 = 0$, ce qui donne $\alpha = 2$. La fonction constante u définie par $u(x) = 2$ est donc une solution particulière de (E).

- D'après le théorème, les solutions de (E) sont les fonctions f définies sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = ke^{-\frac{3}{2}x} + 2, \text{ où } k \text{ est une constante réelle}$$

Remarque

Une seule solution de (E) admet une courbe représentative passant par le point $A(0; 3)$. En effet $f(0) = 3 \Leftrightarrow k + 2 = 3 \Leftrightarrow k = 1$.

Il s'agit de la courbe de la solution f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{-\frac{3}{2}x} + 2$.

Exemples

• Les solutions de l'équation différentielle $y' = 2y$ sont les fonctions f définies sur \mathbb{R} par $f(x) = ke^{2x}$, où k est une constante réelle.

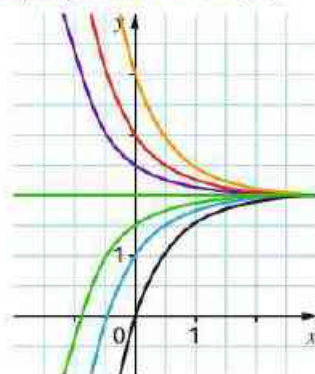
• Les solutions de l'équation différentielle $2y' + y = 0$, équivalente à $y' = -\frac{1}{2}y$, sont les fonctions f définies sur \mathbb{R} par $f(x) = ke^{-\frac{1}{2}x}$, où k est une constante réelle.

• L'équation différentielle $2y' + y = 0$ admet une unique solution f vérifiant $f(0) = -2$.

En effet $f(x) = ke^{-\frac{1}{2}x}$,
 $f(0) = -2 \Leftrightarrow k = -2$.

Donc $f(x) = -2e^{-\frac{1}{2}x}$.

Allure des courbes représentatives de quelques solutions de (E).





3 Résoudre une équation différentielle $y' = ay$

Énoncé 1. On considère l'équation différentielle (E) : $2y' + 3y = 0$.

a. Résoudre l'équation différentielle (E).

b. À l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel, représenter l'allure des courbes représentatives des solutions.

c. Montrer qu'il existe une unique solution de (E) dont la courbe représentative passe par le point $A(2; 1)$.

2. On introduit, à l'instant $t = 0$, 10 bactéries dans un milieu de culture. L'étude de l'évolution de la population de bactéries conduit à modéliser cette population par une fonction p , dérivable sur $[0; +\infty[$, vérifiant, pour tout nombre réel $t \geq 0$, $p'(t) = 2,5p(t)$, où $p(t)$ est l'effectif des bactéries au bout de t heures.

a. Déterminer l'expression de $p(t)$ en fonction de t .

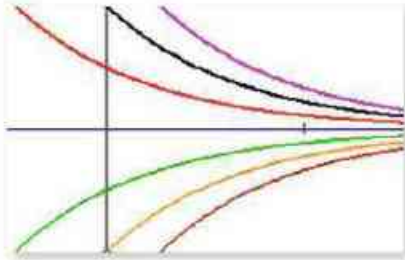
b. Donner un ordre de grandeur de la population de bactéries au bout de dix heures.

Solution

1. a. L'équation (E) est équivalente à l'équation $y' = -\frac{3}{2}y$.

Les solutions de (E) sont donc les fonctions f définies sur \mathbb{R} par $f(x) = ke^{-\frac{3}{2}x}$, où k est une constante réelle.

b. On a représenté ci-contre, à l'aide d'une calculatrice, les courbes représentatives de quelques solutions de (E) pour les valeurs suivantes de k : 0, 1, 2, 3, -1, -2 et -3.



c. Le point $A(2; 1)$ appartient à la courbe \mathcal{C}_k si, et seulement si, $f(2) = 1$, ce qui se traduit par

$$k \times e^{-3} = 1, \text{ soit } k = \frac{1}{e^{-3}}, \text{ et donc } k = e^3.$$

L'unique solution de (E) dont la courbe représentative passe par le point $A(2; 1)$ est donc la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = e^3 \times e^{-\frac{3}{2}x}, \text{ soit } f(x) = e^{-\frac{3}{2}x+3}$$

2. a. La fonction p est solution de l'équation différentielle $y' = 2,5y$.

Donc, pour tout réel $t \geq 0$, $p(t) = ke^{2,5t}$, où k est une constante réelle.

Or, $p(0) = 10$, donc $k \times e^0 = 10$, d'où $k = 10$.

On a donc, pour tout réel $t \geq 0$, $p(t) = 10e^{2,5t}$.

b. Au bout de 10 heures, la population de bactéries est $p(10) = 10e^{25}$.

On obtient $p(10) \approx 7 \times 10^{11}$.

Au bout de 10 heures, la population de bactéries est de l'ordre 700 milliards.

Point méthode

1. a. et 2. a. On écrit l'équation sous la forme $y' = ay$, dont les solutions sont les fonctions f définies sur \mathbb{R} par $f(x) = ke^{ax}$, où k est une constante réelle.

Point méthode

1. c. et 2. La connaissance de l'image d'un nombre par la fonction f (ou sa dérivée f') permet de déterminer la valeur de la constante k .

J'applique

6 Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $y' = 2y$

2. $y' = -y$

3. $4y' + 3y = 0$

4. $-3y + 5y' = 0$

7 Dans chaque cas, déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) vérifiant la condition indiquée.

1. (E) : $y' + y = 0$ et $f(0) = 1$.

2. (E) : $3y' - y = 0$ et $f(-1) = 3$.

8 On injecte à un malade une dose de 2 cm^3 d'un médicament. On modélise la quantité de médicament présente dans le sang par une fonction f , dérivable sur $[0; +\infty[$, vérifiant, pour tout réel $t \geq 0$:

$$f'(t) = -0,08f(t)$$

où $f(t)$ représente la quantité de médicament présente dans le sang, exprimée en cm^3 , t heures après l'injection.

1. Déterminer l'expression de $f(t)$ en fonction de t .

2. Déterminer, à 10^{-2} près, la quantité de médicament présente dans le sang au bout de 12 heures.

4 CAPACITÉ Vérifier qu'une fonction est solution d'une équation différentielle

Énoncé On considère les équations différentielles $(E): y' + y = e^{-x}$ et $(E'): y' + y = 0$.

1. Montrer que la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = xe^{-x}$ est une solution de (E) .
2. Soit f une solution de (E) . Montrer que la fonction h définie sur \mathbb{R} par $h(x) = f(x) - g(x)$ est solution de l'équation différentielle (E') .
3. Soit h une solution de (E') . Montrer que la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = h(x) + g(x)$ est solution de l'équation différentielle (E) .
4. Résoudre (E') . En déduire que les solutions de (E) sont les fonctions f définies sur \mathbb{R} par $f(x) = (x+k)e^{-x}$, où k est une constante réelle.

Solution

1. La fonction g est dérivable sur \mathbb{R} et, pour tout réel x , on a :

$$g'(x) = 1 \times e^{-x} + x \times (-e^{-x}), \text{ soit } g'(x) = e^{-x} - xe^{-x}$$

Pour tout réel x , $g'(x) + g(x) = e^{-x} - xe^{-x} + xe^{-x}$, ainsi,

$g'(x) + g(x) = e^{-x}$, ce qui montre que la fonction g est solution de (E) .

2. Pour tout réel x , $h'(x) + h(x) = f'(x) - g'(x) + f(x) - g(x)$.

D'où : $h'(x) + h(x) = f'(x) + f(x) - (g'(x) + g(x))$.

Or, f et g sont solutions de (E) , donc, pour tout réel x , $f'(x) + f(x) = e^{-x}$

et $g'(x) + g(x) = e^{-x}$.

Ainsi, pour tout réel x , $h'(x) + h(x) = 0$; h est donc solution de (E') .

3. Pour tout réel x , $f'(x) + f(x) = h'(x) + g'(x) + h(x) + g(x)$, donc :

$$f'(x) + f(x) = h'(x) + h(x) + g'(x) + g(x).$$

Or, h est solution de (E') et g est solution de (E) , donc, pour tout

réel x , $h'(x) + h(x) = 0$ et $g'(x) + g(x) = e^{-x}$, ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) + f(x) = e^{-x}.$$

Donc f est solution de (E) .

4. (E') s'écrit $y' = -y$, dont les solutions sont les fonctions h définies sur \mathbb{R} par $h(x) = ke^{-x}$, où k est une constante réelle.

D'après les questions 2 et 3, la fonction f est solution de (E) si, et seulement

si, la fonction h définie par $h(x) = f(x) - g(x)$ est solution de (E') .

Donc, pour tout réel x , $f(x) - g(x) = ke^{-x}$, d'où $f(x) = ke^{-x} + g(x)$.

Les solutions de (E) sont donc les fonctions f définies sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = ke^{-x} + xe^{-x}, \text{ soit } f(x) = (x+k)e^{-x}, \text{ où } k \text{ est une constante.}$$

Point méthode

1. à 3. Pour montrer qu'une fonction f est solution d'une équation différentielle du premier ordre, on calcule sa dérivée f' et on montre que la relation entre f et f' est vérifiée.

J'applique

- 9 On considère l'équation différentielle :

$$(E): y' + 2y = 4x + 3$$

1. Montrer que la fonction g définie sur \mathbb{R} par :

$$g(x) = 2x + \frac{1}{2} \text{ est solution de } (E)$$

2. Montrer que la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = g(x) + e^{-2x} \text{ est solution de } (E)$$

- 10 On considère l'équation différentielle :

$$(E): y' + 2y = e^{3x}$$

Déterminer le nombre réel a tel que la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ae^{3x}$ soit solution de l'équation différentielle (E) .

- 11 Montrer que la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

est solution de l'équation différentielle $y' = y(1-y)$.

- 12 On considère l'équation différentielle :

$$(E): y' - 2y = 8x^2 - 8x$$

1. Montrer que la fonction g définie sur \mathbb{R} par :

$$g(x) = -4x^2 \text{ est solution de } (E)$$

2. Montrer que la fonction f est solution de (E) si, et seulement si, la fonction h définie sur \mathbb{R} par :

$$h(x) = f(x) - g(x) \text{ est solution de } (E'): y' - 2y = 0$$

3. Résoudre (E') . En déduire les solutions de (E) .

Énoncé Lorsqu'un fil électrique est parcouru par un courant électrique d'intensité constante, celui-ci s'échauffe par « effet Joule ». Pour tout nombre réel positif t , on note $f(t)$ la température, exprimée en degré Celsius, du fil électrique à l'instant t , exprimé en seconde.

À l'instant $t = 0$ de la mise sous tension, la température du fil électrique est de 18°C . On a donc $f(0) = 18$.

On admet que la fonction f est solution de l'équation différentielle (E) : $y' = -0,05y + 2$.

1. Déterminer le nombre réel α tel que la fonction u définie par $u(t) = \alpha$ soit solution de (E).

2. Résoudre l'équation différentielle (E).

3. Montrer que, pour tout nombre réel $t \geq 0$, $f(t) = -22e^{-0,05t} + 40$.

4. Étudier le sens de variation de la fonction f sur $[0; +\infty[$ et déterminer sa limite en $+\infty$.

Interpréter ces résultats.

Solution

1. La fonction u est solution de l'équation différentielle (E) si, et seulement si, pour tout réel $t \geq 0$, $u'(t) = -0,05u(t) + 2$.

Or, pour tout réel $t \geq 0$, $u'(t) = 0$, donc le réel α vérifie $-0,05\alpha + 2 = 0$, ce qui donne $\alpha = \frac{2}{0,05}$, soit $\alpha = 40$.

La fonction constante u définie par $u(t) = 40$ est solution de (E).

2. L'équation (E) est de la forme $y' = ay + b$, avec $a = -0,05$ et $b = 2$.

Les solutions de (E) sont les fonctions f définies sur $[0; +\infty[$ par :

$f(t) = ke^{-0,05t} + 40$, où k est une constante réelle.

3. La condition $f(0) = 18$ donne $k + 40 = 18$ et donc $k = -22$.

La fonction f est donc définie sur $[0; +\infty[$ par $f(t) = -22e^{-0,05t} + 40$.

4. • Pour tout réel $t \geq 0$, $f'(t) = -22 \times (-0,05e^{-0,05t})$, soit $f'(t) = 1,1e^{-0,05t}$.

Pour tout $t \geq 0$, $e^{-0,05t} > 0$ donc $f'(t) > 0$.

La fonction f est donc strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

• On a $\lim_{t \rightarrow +\infty} -0,05t = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,05t} = 0$.

Par produit et somme $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 40$.

La température du fil électrique croît avec le temps et tend vers une température limite de 40°C au bout d'un long moment.

Point méthode

1. et 2. Pour résoudre une équation différentielle $y' = ay + b$, où a et b sont des réels avec $a \neq 0$:

- on cherche une solution particulière constante $u : x \mapsto \alpha$;
- les solutions de l'équation sont les fonctions f définies sur \mathbb{R} par $f(x) = ke^{ax} + \alpha$, où k est une constante réelle.

Point méthode

3. La connaissance de l'image d'un nombre par la fonction f (ou sa dérivée f') permet de déterminer la valeur de la constante k .

J'applique

13 Résoudre les équations différentielles suivantes en commençant par chercher une fonction constante solution.

1. $y' = -3y + 2$

2. $y' = \frac{1}{2}y - \frac{3}{4}$

3. $2y' - 3y = 1$

4. $-y' + y - 2 = 0$

14 Résoudre les équations différentielles suivantes en cherchant une fonction constante solution. Déterminer ensuite la solution f vérifiant la condition indiquée.

1. $y' = 2y - 5$ et $f(0) = 3$

2. $5y' - 3y = 2$ et $f(1) = -1$

15 À l'instant $t = 0$, on place 20 grammes d'une substance soluble dans de l'eau. Pour tout réel $t \geq 0$, on note $f(t)$ la quantité de substance dissoute, exprimée en gramme, au bout de t minutes.

On admet que la fonction f est solution de l'équation différentielle (E) : $y' = -0,14y + 2,8$.

1. Déterminer le nombre réel α tel que la fonction u définie par $u(t) = \alpha$ soit solution de (E).

2. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

3. Déterminer, pour tout réel $t \geq 0$, l'expression de $f(t)$ en fonction de t .

4. Déterminer, au gramme près, la quantité de substance dissoute au bout de dix minutes.

Limites des fonctions de référence

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

Opérations et interprétation graphique des limites

- Les limites sont compatibles avec les opérations usuelles, sauf dans quatre cas de formes indéterminées « $+\infty - \infty$ », « $0 \times \infty$ », « $\frac{\infty}{\infty}$ » et « $\frac{0}{0}$ ».
- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$, la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à la courbe \mathcal{C}_f .
- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$, la droite d'équation $y = \ell$ est asymptote horizontale à la courbe \mathcal{C}_f en $+\infty$ ou en $-\infty$.

Primitives

- Une primitive de f sur l'intervalle I est une fonction F , dérivable sur I , telle que, pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.
- Si f admet une primitive F sur I , alors elle en admet une infinité, et toutes les primitives de f sur I sont de la forme $x \mapsto F(x) + k$, où k est une constante réelle.

Primitives usuelles

| | | | | | | | |
|---|------|------------------|------------------|------------------------|----------------------|-----------------|-------|
| Fonction f définie par $f(x) = \dots$ | k | x | x^2 | x^n | $\frac{1}{\sqrt{x}}$ | $\frac{1}{x^2}$ | e^x |
| Une primitive de f est F définie par $F(x) = \dots$ | kx | $\frac{1}{2}x^2$ | $\frac{1}{3}x^3$ | $\frac{1}{n+1}x^{n+1}$ | $2\sqrt{x}$ | $-\frac{1}{x}$ | e^x |

Opérations sur les primitives

| | | | | |
|-----------|---------|------|--------|---------|
| Fonction | $f + g$ | kf | $2uu'$ | $u'e^u$ |
| Primitive | $F + G$ | kF | u^2 | e^u |

où k est un nombre réel, F et G des primitives de f et g respectivement, et u une fonction dérivable sur I .

Équation différentielle $y' = ay$

Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ sont les fonctions f définies sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = ke^{ax}$$

où k est une constante réelle.

Équation différentielle $y' = ay + b$, $a \neq 0$

• L'équation différentielle $y' = ay + b$ admet une unique fonction constante solution, définie sur \mathbb{R} par $u(x) = \alpha$, où α est une constante réelle.

• Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions f définies sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = ke^{ax} + \alpha$$

où k est une constante réelle.



Voir corrigés

QCM

Pour chacune des questions, indiquer la (ou les) bonne(s) réponse(s).

| | a | b | c |
|--|---|---|---|
| 1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{3}{e^x}\right)$ est égale à : | -1 | 2 | $-\infty$ |
| 2. La courbe de la fonction f définie par $f(x) = \frac{e^{2x}-4}{e^x+2}$ admet pour asymptote en $-\infty$ la droite d'équation : | $y = -2$ | $y = 1$ | $y = 0$ |
| 3. Si la fonction f est définie, pour tout $x \neq 1$, par $f(x) = \frac{x}{x-1}$, alors : | $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$ | $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty$ | $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = -\infty$ |
| 4. Si la courbe \mathcal{C}_f admet la droite d'équation $y = 1$ pour asymptote en $+\infty$, alors : | $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$ | $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ | $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 1) = 0$ |
| 5. Une primitive sur \mathbb{R} de f définie par $f(x) = 2x - e^{-x}$ est définie par $F(x) =$ | $x^2 + e^{-x}$ | $x^2 - e^{-x}$ | $x^2 + e^{-x} + 5$ |
| 6. Si, pour tout réel x , $f(x) \geq 0$, alors toutes les primitives de f sont : | décroissantes sur \mathbb{R} | croissantes sur \mathbb{R} | on ne peut pas savoir |
| 7. La primitive F de f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -3e^{-2x}$ qui vérifie $F(0) = 0$ est : | $F(x) = -3e^{-2x} + 3$ | $F(x) = \frac{3}{2}(e^{-2x} - 1)$ | $F(x) = 6e^{-2x} - 6$ |
| 8. Les fonctions solutions de l'équation différentielle $y' = -2y$ sont définies par : | $f(x) = ke^{-2x}$ | $f(x) = e^{-2x} + k$ | $f(x) = ke^{2x}$ |
| 9. La solution f de l'équation différentielle $y' = -2y$ qui vérifie $f(1) = 2$ est : | $f(x) = 2e^2 \times e^{-2x}$ | $f(x) = \frac{2}{e^{-2}} \times e^{-2x}$ | $f(x) = 2e^{-2(x-1)}$ |
| 10. La fonction constante u solution de l'équation différentielle $y' = 2y + 4$ est : | $u(x) = 2$ | $u(x) = -4$ | $u(x) = -2$ |
| 11. Les solutions de l'équation différentielle $y' = 2y + 4$ sont définies par : | $f(x) = ke^{2x} - 4$ | $f(x) = ke^{2x} - 2$ | $f(x) = e^{2x} + k$ |

vrai

ou faux ?

Indiquer pour chaque affirmation si elle est vraie ou fausse. Justifier.

Partie A.

1. La courbe de la fonction exponentielle admet l'axe des abscisses pour asymptote en $-\infty$.

2. Si la fonction f est telle que, pour tout $x \geq 1$,

$$\frac{1}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{1}{x}, \text{ alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

3. La fonction g définie par $g(x) = (e^x + 1)^2$ est une primitive sur \mathbb{R} de f définie par $f(x) = 2e^{2x} + 2e^x$.

4. Si f est solution de l'équation différentielle $2y' - y = 1$, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ke^{\frac{1}{2}x} + 1$, où k est une constante réelle.

Partie B.

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(t) = 2e^{-0,5t} - 4$, et \mathcal{C} sa courbe représentative.

1. \mathcal{C} admet une asymptote en $+\infty$.

2. La fonction f est croissante sur \mathbb{R} .

3. $\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = -4$

4. \mathcal{C} admet une asymptote en $-\infty$.

5. La fonction F définie par $F(t) = 4(e^{-0,5t} - t)$ est une primitive de f sur \mathbb{R} .

6. La fonction f est la solution de l'équation différentielle $y' = -0,5y - 2$ qui vérifie $f(0) = -2$.

Automatismes et calculs

Automatismes transversaux

16 Simplifier les écritures des nombres suivants :

$$A = e^5 \times e^{-7}, B = (e^2)^3 \times (e^{-3})^2 \text{ et } C = \frac{e^{-3}}{e^5}$$

17 Pour x nombre réel, simplifier au maximum les expressions suivantes.

1. $A = e^{2x} \times e^{-3x+1}$ 2. $B = (e^{-2x+1})^2 \times e^{-x+3}$

3. $C = \frac{e^{x-1}}{e^{3x+2}}$ 4. $D = \frac{-2}{e^{-x+4}}$

18 Vérifier, pour tout réel x , les égalités suivantes.

1. $(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2 = 4$

2. $\frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}} = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

19 Résoudre les équations suivantes.

1. $x^2 - 5x + 4 = 0$ 2. $-2x^2 + 3x - 2 = 0$

3. $e^{-3x+1} - 1 = 0$ 4. $e^{-2x} - e^{-x} = 0$

20 Résoudre les inéquations suivantes.

1. $3x^2 + 2x - 1 \geq 0$ 2. $-2x^2 + 3x > 0$

3. $2e^{-2x} + 1 \leq 3$ 4. $1 - e^{-3x+1} \geq 0$

21 1. Factoriser $x^2 + x - 2$. En déduire une factorisation de $f(x) = e^{2x} + e^x - 2$.

2. Déterminer, suivant les valeurs du nombre réel x , le signe de $f(x)$.

22 Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ke^{-2x}$, où k est un nombre réel. La courbe \mathcal{C} représentative de la fonction f passe par le point $A(1; -2)$.

- Déterminer la valeur du réel k .
- En déduire que, pour tout réel x , $f(x) = -2e^{-2(x-1)}$.
- Pour tout réel x , calculer $f'(x)$.
- Déterminer une équation de la tangente à la courbe \mathcal{C} au point A .

23 On considère les suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier naturel n , par $u_n = e^{-3n}$ et $v_n = e^{3n}$.

- Préciser la nature des suites (u_n) et (v_n) .
- Déterminer la limite des suites (u_n) et (v_n) .

Pour les exercices 24 et 25, étudier le sens de variation de chacune des fonctions f sur l'intervalle indiqué.

24 1. $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$ sur $]1; +\infty[$

2. $f(t) = \frac{t}{t^2+1}$ sur $[0; +\infty[$

25 1. $f(x) = e^{3x} - 3x + 1$ sur \mathbb{R}

2. $f(t) = 6(1 - e^{-0,1t})$ sur $[0; +\infty[$

Automatismes du thème

26 On donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction f .

| | | | | |
|--------|-----------|-----------|---|-----------|
| x | $-\infty$ | 1 | 3 | $+\infty$ |
| $f(x)$ | 0 | $+\infty$ | 4 | 1 |

Donner l'ensemble de définition de f , les limites de f aux bornes de cet ensemble, ainsi que les équations des asymptotes à la courbe \mathcal{C}_f .

27 Donner, s'il y a lieu, une interprétation graphique pour la courbe \mathcal{C}_f des limites suivantes.

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -3$ 2. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ 4. $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = -\infty$

28 Calculer les limites suivantes.

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right)$ 2. $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{2x}{x-1}$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + e^x)$ 4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)(e^{3x} - 1)$

29 Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{x^2+1}$ et F une primitive de f sur \mathbb{R} .

- Pour x réel, donner l'expression de $F'(x)$.
- En déduire le sens de variation de F sur \mathbb{R} .
- Déterminer le coefficient directeur de la tangente à la courbe de F au point d'abscisse 0.

30 Déterminer une primitive de chacune des fonctions f suivantes sur l'intervalle indiqué.

1. $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ sur \mathbb{R}

2. $f(x) = 2e^{2x}(e^{2x} - 1)$ sur \mathbb{R}

3. $f(x) = \frac{1}{x^2} + e^x - 3$ sur $]0; +\infty[$

4. $f(x) = 2e^{3x+1} - 1$ sur \mathbb{R}

31 Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $y' = e^{-2x}$ 2. $y' = -y$

3. $y' = 0,2y$ 4. $3y' - 2y = 0$

32 Montrer que la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = xe^{-x}$ est solution de l'équation différentielle $y' + y = e^{-x}$.

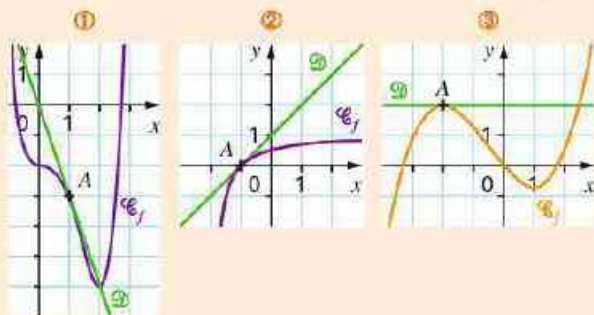
33 1. Déterminer une fonction constante solution de l'équation différentielle $(E): y' = 2y - 1$.

2. Résoudre (E) .

3. Déterminer la fonction f solution de (E) telle que $f(0) = -2$.

Consolider les bases

34 Chacun des graphiques ci-dessous représente la courbe \mathcal{C} d'une fonction f dérivable en a , ainsi que la droite \mathcal{D} tangente à la courbe \mathcal{C} au point $A(a; f(a))$.



Dans chaque cas, déterminer, par lecture graphique, les valeurs de a , $f(a)$ et $f'(a)$, puis une équation de la droite \mathcal{D} .

35 Soit f une fonction dérivable sur \mathbb{R} . On note \mathcal{C} sa courbe représentative.

- La tangente à la courbe \mathcal{C} au point $A(-1; 2)$ passe par le point $B(-2; 3)$. Déterminer $f(-1)$ et $f'(-1)$.
- La tangente à la courbe \mathcal{C} au point D d'abscisse 4 admet pour équation $y = -5x + 3$. Déterminer $f(4)$ et $f'(4)$.

36 On donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-5; 20]$.

| | | | | |
|--------|-----|----|----|----|
| x | -5 | 10 | 13 | 20 |
| $f(x)$ | -12 | 15 | 2 | 10 |

- Déterminer, en justifiant la réponse, le nombre de solutions de chacune des équations suivantes.
 - $f(x) = 0$
 - $f(x) = 2$
 - $f(x) = 16$
- Vrai ou faux ?**
Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.
 - $f'(0) < 0$
 - 13 est solution de l'équation $f'(x) = 0$.
 - Pour tout $x \in [10; 13]$, $f'(x) \leq 0$.

37 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[1; 2]$ par :

$$f(x) = e^{-2x} - x + 1$$

- Montrer que la fonction f est strictement décroissante sur $[1; 2]$.
- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[1; 2]$.
Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

Connaître le cours

38 Deux diaporamas pour faire le point sur le cours.



39 Compléter les pointillés.

- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$, alors la droite d'équation ... est ... à la courbe \mathcal{C}_f en
- Si $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$, alors la droite d'équation ... est ... à la courbe \mathcal{C}_f .
- Si la droite d'équation $y = -5$ est asymptote à la courbe \mathcal{C}_f en $-\infty$, alors

40 Soit f une fonction définie sur $]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$ dont le tableau de variations est le suivant.

| | | | |
|--------|-----------|-----------|-----------|
| x | $-\infty$ | 1 | $+\infty$ |
| $f(x)$ | -2 | $+\infty$ | 3 |

- Donner les limites de f aux bornes de son ensemble de définition ainsi que les équations des asymptotes à la courbe \mathcal{C}_f .
- Tracer une courbe pouvant représenter la fonction f .



41 Soient f une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I .

- Soit k un réel. Montrer que la fonction G définie sur I par $G(x) = F(x) + k$ est une primitive de f .
- Soit H une autre primitive de f sur I .
Calculer la dérivée de la fonction c , définie sur I , par $c(x) = F(x) - H(x)$.
- En déduire que deux primitives de f sur I diffèrent d'une constante.

42 **Vrai ou faux ?**

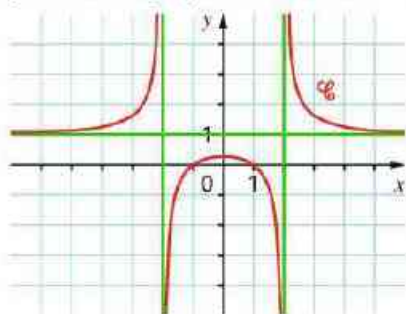
Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.

- La courbe de la fonction f définie par $f(x) = \frac{2}{e^x + 1}$ admet l'axe des ordonnées pour asymptote en $+\infty$.
- Si f est la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{-x^2}$, alors toutes les primitives de f sont croissantes sur \mathbb{R} .
- Les solutions de l'équation différentielle $y' + 2y = 0$ sont les fonctions f définies sur \mathbb{R} par $f(x) = ke^{2x}$, où k est une constante réelle.
- La fonction constante $x \mapsto 0,01$ est solution de l'équation différentielle $2y' + 0,5y = 0,05$.
- Les solutions de l'équation différentielle $y' = 3y - 6$ sont les fonctions f définies sur \mathbb{R} par $f(x) = ke^{3x} - 6$, où k est un nombre réel.

Travailler les capacités du thème

Calculer des limites, utiliser le calcul d'une limite

43 La courbe \mathcal{C} ci-dessous représente une fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$. Les droites d'équations $x = -2$, $x = 2$ et $y = 1$ sont asymptotes à la courbe \mathcal{C} .



Lire graphiquement les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

44 On donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction f de courbe représentative \mathcal{C} .

| | | | | |
|--------|-----------|-----------|-----|-----------|
| x | $-\infty$ | 0 | 2 | $+\infty$ |
| $f(x)$ | -1 | $+\infty$ | 1 | 3 |

Arrows indicate the direction of the function between these points: from $x = -\infty$ to $x = 0$, the function decreases from -1 to $+\infty$; from $x = 0$ to $x = 2$, it decreases from $+\infty$ to 1 ; from $x = 2$ to $x = +\infty$, it increases from 1 to 3 .

- Préciser les équations des asymptotes à \mathcal{C} .
- Tracer une allure possible de \mathcal{C} .

45 Dans chacun des cas suivants, donner une allure possible de la courbe \mathcal{C} représentant une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

2. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ et la droite d'équation $y = 2$ est asymptote à \mathcal{C} en $+\infty$.

Pour les exercices **46** à **52**, déterminer les limites proposées.

46 1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1 + e^x)$ 2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3e^x - 2x + 1)$

47 1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(2x - 3)$ 2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x^2(x + 2)$

48 1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1)e^x$ 2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2}{x} + 1\right)(e^x - 3)$

49 1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^2 + 3}$ 2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2e^x - 1}{e^x + 1}$

50 1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x+1}$

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x+1}$

51 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x-1}{x^2}$

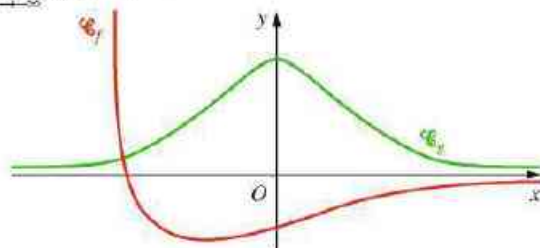
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{2}{x^2} + 1\right)(x-1)$

52 1. $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{2x+3}{x-1}$

2. $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{2x+3}{x-1}$

53 Vrai ou faux ?

Le graphique ci-dessous donne les courbes représentatives de deux fonctions f et g définies sur \mathbb{R} . L'axe des abscisses est asymptote à la courbe \mathcal{C}_f en $+\infty$ et à la courbe \mathcal{C}_g en $-\infty$ et en $+\infty$. On admet que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.



- Donner les limites de f et g en $-\infty$ et en $+\infty$.
- Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. Justifier.
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = +\infty$
 - $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) \times g(x)) = 0$
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$
- La courbe représentative de la fonction $f + g$ admet l'axe des ordonnées pour asymptote en $+\infty$.

Démo

54 On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = e^x - x$$

- Étudier le sens de variation de f sur $[0; +\infty[$.
- En déduire que, pour tout réel $x \geq 0$, $e^x > x$.
- En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x$.

55 Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[1; +\infty[$ telle que, pour tout réel $x \geq 1$, $\frac{1}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{1}{x}$.

- Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
- Que peut-on en déduire pour sa représentation graphique \mathcal{C}_f ?

56 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $f(x) = -\frac{2}{x^2} + 3$. On note \mathcal{C} sa courbe représentative.

- Montrer que \mathcal{C} admet l'axe des ordonnées pour asymptote verticale.
- Montrer que \mathcal{C} admet une asymptote horizontale en $-\infty$ et en $+\infty$ dont on donnera une équation.

57 On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \frac{2}{3+e^x} \text{ et } \mathcal{C} \text{ sa courbe représentative.}$$

- Tracer la courbe \mathcal{C} sur la calculatrice. Conjecturer les équations des asymptotes à \mathcal{C} en $-\infty$ et en $+\infty$.
- Démontrer les conjectures précédentes.

Déterminer les primitives d'une fonction

Pour les exercices **58** à **60**, résoudre les équations différentielles proposées.

- 58** 1. $y' = -1$ 2. $y' = 2x + 3$
- 59** 1. $y' = -x^2 + 2x - 1$ 2. $y' = -3e^x + 2$
- 60** 1. $y' = \frac{2}{x^2}$ 2. $y' = e^{2x} - 3$

Pour les exercices **61** à **63**, déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle indiqué.

- 61** 1. $f(x) = -2x^2 + 3x - 1$ sur \mathbb{R}
2. $f(x) = 1 - x + 2e^x$ sur \mathbb{R}
3. $f(x) = 5x - \frac{3}{x^2}$ sur $]0; +\infty[$
- 62** 1. $f(x) = -\frac{3}{\sqrt{x}} + 2e^{2x} - \frac{1}{2}$ sur $]0; +\infty[$
2. $f(x) = -2e^{-2x+1}$ sur \mathbb{R}
3. $f(x) = e^{3x+1}$ sur \mathbb{R}
- 63** 1. $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ sur $]1; +\infty[$
2. $f(x) = (x+1)e^{x^2+2x}$ sur \mathbb{R}
3. $f(x) = 2(x - e^{-x})(1 + e^{-x})$ sur \mathbb{R}

64 Dans chaque cas, déterminer la primitive F de la fonction f vérifiant la condition indiquée.

- $f(x) = x + e^{-x}$ et $F(0) = -1$
- $f(x) = 3xe^{-x^2}$ et $F(1) = 0$

65 Vrai ou faux ?

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. Justifier.

- La fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{2x}$ est solution de l'équation différentielle $y' = e^{2x}$.
- La fonction F définie par $F(x) = xe^{3x}$ est une primitive sur \mathbb{R} de f , définie par $f(x) = (3x+1)e^{3x}$.
- Toutes les primitives de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$ sont croissantes sur \mathbb{R} .
- Si F et G sont deux primitives d'une fonction f sur I , alors F et G ont le même sens de variation sur I .

Résoudre une équation différentielle

$$y' = ay$$

Pour les exercices **66** à **68**, résoudre les équations différentielles proposées.

- 66** 1. $y' = 5y$ 2. $y' = -0,75y$
3. $3y' = 2y$ 4. $y = -2y'$
- 67** 1. $4y' - 3y = 0$ 2. $-5y' + 6y = 0$
- 68** 1. $2y' - 3y = y' + y$ 2. $2(y' + 2y) = 3y' + 5y$

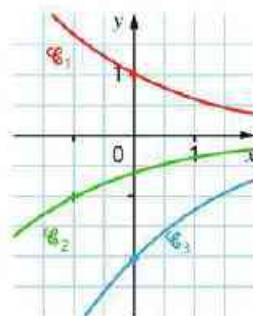
69 On considère l'équation différentielle (E) : $y' = 3y$.

- Résoudre l'équation différentielle (E) .
- À l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel, tracer l'allure des solutions de (E) .
- Déterminer la solution f de (E) qui vérifie $f(0) = -2$.
- Déterminer la solution g de (E) dont la courbe représentative passe par le point $A(-1; 3)$.

70 Pour chacune des fonctions f , définies sur \mathbb{R} , déterminer le réel a tel que f soit solution de l'équation différentielle $y' = ay$.

- $f(x) = e^{2x}$ 2. $f(x) = 2e^{-3x}$
- $f(x) = e^{-3x+4}$ 4. $f(x) = -2e^{x-1}$

71 Les courbes \mathcal{C}_1 , \mathcal{C}_2 et \mathcal{C}_3 représentées ci-contre sont les courbes représentatives de trois fonctions, solutions de l'équation différentielle $y' = -\frac{1}{2}y$.



Déterminer une équation de chacune de ces courbes.

72 Lors d'une hydrolyse du saccharose, on étudie l'évolution de sa concentration, exprimée en mol.L^{-1} , en fonction du temps t , exprimé en minute. Cette concentration est modélisée par une fonction C solution de l'équation différentielle $y' = -0,008y$. La concentration initiale du saccharose est de 10 mol.L^{-1} .

- Pour tout réel $t \geq 0$, exprimer $C(t)$ en fonction de t .
- Déterminer la concentration de saccharose après 2 h 30 d'hydrolyse.

73 Soit f une fonction dérivable sur \mathbb{R} vérifiant les propriétés suivantes :

- f est solution d'une équation différentielle $y' = ay$, où a est un nombre réel ;
 - la tangente à la courbe \mathcal{C} , représentative de la fonction f , au point $A(0; 2)$ passe par le point $B(-3; 1)$.
- Déterminer $f(0)$ et $f'(0)$.
 - En déduire la valeur de a .
 - Exprimer $f(x)$ en fonction de x .

4 Vérifier qu'une fonction est solution d'une équation différentielle

74 On considère l'équation différentielle :

$$(E): y' + 2y = 6x + 1$$

1. Montrer que la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = 3x - 1 \text{ est solution de } (E)$$

2. Montrer que la fonction g définie sur \mathbb{R} par :

$$g(x) = 2e^{-2x} + 3x - 1 \text{ est solution de } (E)$$

75 On considère l'équation différentielle :

$$(E): y' - y = e^x$$

1. Montrer que la fonction u définie sur \mathbb{R} par :

$$u(x) = xe^x \text{ est solution de } (E)$$

2. Montrer que, pour tout réel k , la fonction f_k définie sur \mathbb{R} par $f_k(x) = (x+k)e^x$ est solution de (E) .

76 Dans chaque cas, montrer que la fonction f est solution de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle indiqué.

1. $(E): y' + 2y = e^{-2x}$ et $f(x) = (x+1)e^{-2x}$ sur \mathbb{R}

2. $(E): -y' + y = \frac{e^x}{x^2}$ et $f(x) = \frac{e^x}{x}$ sur $]0; +\infty[$

3. $(E): y' = 2y(1-y)$ et $f(t) = \frac{1}{1+9e^{-2t}}$ sur \mathbb{R}

77 Soit l'équation différentielle $(E): y' + 3y = ae^{2x}$.

1. Déterminer le nombre réel a tel que la fonction u définie sur \mathbb{R} par $u(x) = ae^{2x}$ soit solution de (E) .

2. Montrer que, pour tout réel k , la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ke^{-3x} + ae^{2x}$ est solution de (E) .

78 Vrai ou faux ?

Pour les deux affirmations suivantes, dire si elles sont vraies ou fausses, en justifiant la réponse.

1. La fonction exponentielle est l'unique solution de l'équation différentielle $y' = y$.

2. Si la fonction u est solution de $(E): y' - 3y = 3$, alors la fonction v définie par $v(x) = u(x)e^{-2x}$ est solution de $(E'): y' - y = 3e^{-2x}$.

79 On considère l'équation différentielle :

$$(E): y' + 2y = 2x^2 + 1$$

1. Montrer que la fonction p définie sur \mathbb{R} par :

$$p(x) = x^2 - x + 1 \text{ est solution de } (E)$$

2. Soit f une solution de (E) . Montrer que la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = f(x) - p(x)$ est solution de l'équation différentielle $(E'): y' + 2y = 0$.

3. Réciproquement, montrer que si la fonction g est solution de (E') , alors la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = g(x) + p(x) \text{ est solution de } (E)$$

4. Résoudre (E') .

5. En déduire l'ensemble des solutions de (E) .

5 Résoudre une équation différentielle $y' = ay + b$

80 Soit l'équation différentielle $(E): y' = -5y + 1$.

1. Montrer que la fonction u définie sur \mathbb{R} par :

$$u(x) = \frac{1}{5} \text{ est solution de } (E)$$

2. Résoudre (E) .

81 Résoudre les équations différentielles suivantes en commençant par chercher une fonction constante solution.

1. $y' = 2y + 8$

2. $2y' - 5y = -3$

3. $8y' + 2y = 0,2$

82 Dans chaque cas, déterminer la fonction f solution de l'équation différentielle (E) vérifiant la condition indiquée.

1. $(E): y' + 2y = 3$ et $f(0) = -3$

2. $(E): y' - 5y + 10 = 0$ et $f(1) = 0$

3. $(E): 2y' + y = -3$ et $f(0) = 2$

83 Les courbes $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2,$

\mathcal{C}_3 et \mathcal{C}_4 représentées

ci-contre sont les

courbes représentatives

de quatre fonctions,

solutions d'une équation

différentielle de la

forme $2y' = -y + b$, où b

est un nombre réel fixé.

1. Déterminer la valeur

du réel b .

2. Déterminer une équation de chacune de ces

courbes.

84 La température de refroidissement d'un objet,

fabriquée industriellement, est modélisée par une fonction

f , où, pour tout réel $t \geq 0$, $f(t)$ représente la température

de l'objet, exprimée en degré Celsius, à

l'instant t , exprimé en heure. La fonction f est solution

de l'équation différentielle $(E): y' + \frac{1}{2}y = 10$.

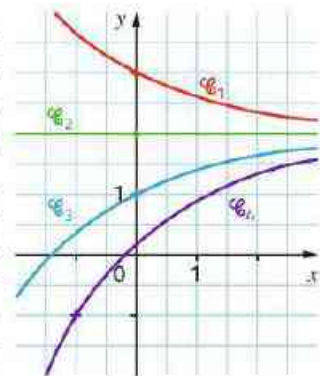
1. Résoudre l'équation différentielle (E) .

2. La température initiale de l'objet est 220°C . Déterminer, pour tout réel $t \geq 0$, l'expression de $f(t)$ en fonction de t .

3. a. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

b. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

c. Interpréter les résultats précédents dans le contexte de l'exercice.



1 Limite d'une fonction

85 Déterminer les limites suivantes.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - e^{-0,5x})$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{e^x}{1-x}$
- $\lim_{t \rightarrow +\infty} 2,8(1 - e^{-0,3t})$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 1)(e^{-x} - 1)$

86 Pour chacune des fonctions f suivantes, montrer que sa courbe représentative \mathcal{C} admet pour asymptote la droite D indiquée.

- $f(x) = -2(3e^{-x} - 1)$ et $D: y = 2$ en $+\infty$
- $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ et $D: x = -1$
- $f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 2}$ et $D: y = -\frac{1}{2}$ en $-\infty$
- $f(x) = \frac{3}{1 + e^{-2x+1}}$ et $D: y = 3$ en $+\infty$

87 Pour chacune des fonctions f vérifiant l'inégalité indiquée, déterminer sa limite en $+\infty$.

- Pour tout réel $x > 0$, $0 < f(x) < \frac{1}{\sqrt{x}}$.
- Pour tout réel x , $f(x) \geq 2e^x - 3$.
- Pour tout réel $x \geq 0$, $e^{-2x} \leq f(x) - 1 \leq e^{-x}$.

88 On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$$

- Déterminer la limite de f en $-\infty$.
- Montrer que, pour tout réel $x \neq 0$, on a :

$$f(x) = x^3 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right)$$

- En déduire la limite de f en $+\infty$.

89 Soient la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par :

$$f(x) = \frac{-2x+1}{x-2}$$

et \mathcal{C} sa représentation graphique.

- a. Déterminer les limites de f en 2.
- Que peut-on en déduire pour la courbe \mathcal{C} ?
- a. Expliquer pourquoi on ne peut pas déterminer directement les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
- b. Montrer que, pour tout réel x différent de 0 et de 2,

$$\text{on a } f(x) = \frac{-2 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{2}{x}}$$

- c. En déduire la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
- d. Que peut-on en déduire pour la courbe \mathcal{C} ?



Info Pour calculer la limite d'une fonction polynôme ou rationnelle en l'infini, on peut, en cas de forme indéterminée, factoriser par le terme de plus haut degré.

90 En utilisant le point info précédent, déterminer les limites suivantes.

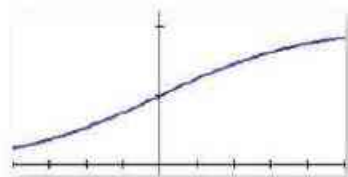
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x^3 - 2x^2 + 5x - 2)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x^2-2}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2+x-1}{2x+3}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2-1}{2x^2+3}$

91 On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^x - e^{2x}$ et \mathcal{C} sa représentation graphique.

- Montrer que la courbe \mathcal{C} admet l'axe des abscisses pour asymptote en $-\infty$.
- En factorisant $f(x)$, déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

92 Sur sa calculatrice, Marine a tracé la courbe de la fonction f définie sur \mathbb{R}

$$\text{par } f(x) = \frac{2e^{0,5x}}{e^{0,5x} + 1}$$



- Conjecturer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
- Montrer la conjecture formulée sur la limite de f en $-\infty$. Que peut-on en déduire pour la courbe \mathcal{C}_f ?
- a. Montrer que, pour tout réel x , $f(x) = \frac{2}{1 + e^{-0,5x}}$.
- b. En déduire la limite de f en $+\infty$. Que peut-on en déduire pour la courbe \mathcal{C}_f ?

93 Un protocole de traitement d'une maladie comporte une perfusion longue durée d'un médicament adapté. La concentration du médicament dans le sang, exprimée en micromole par litre, au cours du temps, exprimé en heure, est modélisée par la fonction

$$C \text{ définie sur } [0; +\infty[\text{ par } C(t) = 12 \left(1 - e^{-\frac{7}{80}t} \right)$$

En médecine, on appelle « plateau » la limite de la fonction C en $+\infty$.

- Étudier le sens de variation de la fonction C .
- Pour être efficace, le plateau doit être égal à 15. Le traitement est-il efficace ?

94 Un parachutiste de 80 kg saute d'une altitude de 1 000 m avec une vitesse verticale initiale de $1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. La distance $d(t)$, exprimée en mètre, parcourue par le parachutiste t secondes après son saut, est donnée par $d(t) = 10t + C(e^{-t} - 1)$, où C est une constante. La vitesse $v(t)$ du parachutiste à l'instant t est donnée par $v(t) = d'(t)$.

- Déterminer $v(t)$.
- Sachant que $v(0) = 1$, déterminer la valeur de C .
- Quelle est la vitesse limite que peut approcher le parachutiste ?

95 L'évolution de la hauteur d'un plant de maïs en fonction du temps est modélisée par la fonction h définie sur $[0, +\infty[$ par $h(t) = \frac{a}{1 + be^{-0,04t}}$, où a et b sont des constantes réelles



positives, t est la variable temps, exprimée en jour, et $h(t)$ la hauteur du plant, exprimée en mètre. On sait qu'initialement, pour $t = 0$, le plant mesure 0,1 m et que sa hauteur tend vers une limite de 2 m. Déterminer les valeurs de a et de b .

2 Équation différentielle, primitives

96 Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $y' = -x^3 + x^2 + x - 1$
2. $y' = -2e^{-x} + 1$
3. $y' = 2(1 - e^{-2t+3})$
4. $y' = -\frac{2}{x^2} + x^4 - 2$

97 Dans chaque cas, déterminer la solution f de l'équation différentielle proposée vérifiant la condition indiquée.

1. $y' = 3x^2e^{x^3} + 1$ et $f(0) = -2$.
2. $y' = -xe^{x^2-1}$ et $f(1) = 1$.
3. $y' = -2(x+1)(x^2+2x-3)$ et $f(0) = 2$.

98 Dans chaque cas, déterminer les primitives de la fonction f sur l'intervalle indiqué.

1. $f(x) = \frac{3x^2+1}{x^2}$ sur $]0; +\infty[$
2. $f(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$ sur \mathbb{R}
3. $f(x) = \frac{e^{2x} - 3e^x + 1}{e^{2x}}$ sur \mathbb{R}

99 On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = (3x - 4)e^{-x}$$

1. Montrer que la fonction F définie sur \mathbb{R} par $F(x) = (-3x + 1)e^{-x}$ est une primitive de f sur \mathbb{R} .
2. Déterminer la primitive G de f qui vérifie $G(0) = 3$.
3. Déterminer les primitives de la fonction h définie sur \mathbb{R} par $h(x) = (3x - 4)e^{-x} + 2x - 3$.

100 Dans chaque cas, indiquer si les fonctions F et G sont les primitives sur \mathbb{R} d'une même fonction sans calculer leur dérivée. Justifier.

1. $F(x) = (x+3)(x-2)$ et $G(x) = x^2 + x - 1$
2. $F(x) = (e^{-x} - 1)^2$ et $G(x) = -2e^{-2x} + e^{-2x}$
3. $F(x) = \frac{2x+4}{x^2+1}$ et $G(x) = \frac{2x-3}{x^2+1}$

101 On donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction f dérivable sur \mathbb{R} .

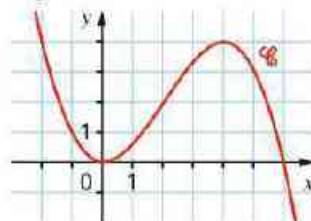
| | | | | | |
|---------|-----------|------|-----|-----|-----------|
| x | $-\infty$ | -1 | 0 | 1 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | 0 | - | 0 | + | 0 |
| | ↘ | ↘ | ↗ | ↗ | ↘ |
| | | -1 | | 2 | 1 |

Soit F une primitive de f sur \mathbb{R} .

1. Dresser le tableau de variations de F sur \mathbb{R} .
2. Si F vérifie $F(1) = -3$, déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de F au point d'abscisse 1.

102 Vrai ou faux ?

La courbe \mathcal{C} ci-dessous est la courbe représentative d'une fonction f dérivable sur \mathbb{R} .

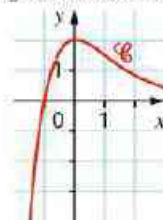


Soit F une primitive de f sur \mathbb{R} .

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fautive en justifiant la réponse.

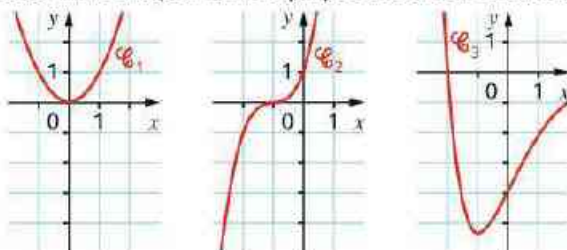
1. F est décroissante sur $[4; +\infty[$.
2. F est croissante sur $[-2; 6]$.
3. F admet un minimum en 0.
4. La courbe représentative de F admet des tangentes horizontales aux points d'abscisses 0 et 6.
5. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe de F au point d'abscisse 2 est 2.

103 La courbe \mathcal{C} ci-dessous est la courbe représentative d'une fonction f dérivable sur \mathbb{R} .

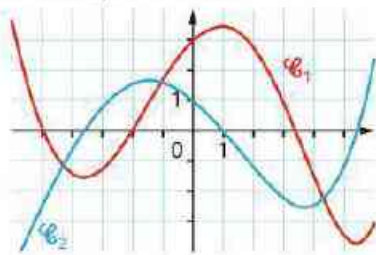


Une des trois courbes suivantes représente une primitive de la fonction f sur \mathbb{R} .

Déterminer laquelle, en expliquant le choix effectué.



104 On a représenté ci-dessous les courbes représentatives d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-6; 6]$ et de l'une de ses primitives F .



Identifier, en justifiant la réponse, la courbe de f et celle de F .

105 Une entreprise a une production maximale de 5 000 litres de liquide alimentaire. Le coût marginal, en millier d'euros, est défini, pour $x \in [0; 5]$ par :

$$C_m(x) = 10e^{-x} + 3x - 6$$

On rappelle que la fonction C_T , modélisant le coût total des x premiers milliers de litres produits, est une primitive de C_m .

- Déterminer toutes les primitives de C_m sur $[0; 5]$.
- Sachant que les coûts fixes s'élèvent à 50 000 euros, déterminer l'expression de $C_T(x)$ en fonction de x .
- En déduire le coût total de la production maximale.

106 Une boulangerie fabrique chaque jour des cupcakes avec un maximum de production quotidienne de 70 cupcakes. Le coût marginal de production, en euro, de x dizaines de cupcakes est donné par la fonction C_m définie sur $[0; 7]$ par :

$$C_m(x) = 6 - (-x + 1,5)e^{-x^2 + 3x}$$

- Déterminer les primitives de C_m sur $[0; 7]$.
- On considère que le coût marginal est la dérivée du coût total. Sachant que les coûts fixes de cette boulangerie s'élèvent à 300 euros, déterminer l'expression du coût total, en euro, de la production de x dizaines de cupcakes pour $x \in [0; 7]$.



3 Équation différentielle $y' = ay + b$

107 Soit f la fonction solution de l'équation différentielle $(E): y' = 3y - 5$ telle que $f(0) = -1$.

- Sans résoudre (E) , déterminer $f'(0)$.
 - En déduire une équation de la tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse 0.
- Résoudre l'équation (E) .
 - Retrouver alors les résultats obtenus à la question 1.
 - Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Que peut-on en déduire pour la courbe \mathcal{C}_f ?
 - Étudier le sens de variation de f sur \mathbb{R} .

108 Exercice guidé

Soit l'équation différentielle $(E): y' = -2y + 6$.

- Résoudre (E) .
- Thomas affirme que toutes les fonctions solutions de (E) sont décroissantes sur \mathbb{R} . A-t-il raison ? Justifier.
- Montrer que les courbes représentatives de toutes les solutions de (E) admettent la droite d'équation $y = 3$ pour asymptote en $+\infty$.

Pistes de résolution

- On reconnaît une équation différentielle $y' = ay + b$, on commence par chercher une fonction constante solution, puis on donne l'ensemble des solutions...
- On exprime la dérivée d'une fonction solution quelconque dont le signe dépend de...
- On calcule la limite de f en $+\infty$...

109 Soit f une fonction dérivable sur \mathbb{R} , de courbe représentative \mathcal{C} , vérifiant les propriétés suivantes :

- f est solution d'une équation différentielle de la forme $y' = ay + b$, où a et b sont des réels non nuls ;
 - la courbe \mathcal{C} admet la droite d'équation $y = 3$ pour asymptote en $+\infty$;
 - la courbe \mathcal{C} passe par le point $A(0; 1)$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur 2.
- Déterminer l'expression de $f(x)$ en fonction de x .

110 Après de violents orages, des eaux de ruissellement contenant 4 % de pesticides se déversent dans un bassin aménagé pour la baignade. Le système d'évacuation du bassin permet d'y maintenir un volume constant de 30 000 litres.

On admet que le volume de pesticide, en litre, dans ce bassin est modélisé par une fonction V définie sur $[0; +\infty[$ par $V(t) = f(t) + 1200$, où t est le temps, exprimé en minute, et f une fonction solution de l'équation différentielle $(E): y' + 0,005y = 0$.

- Résoudre l'équation différentielle (E) .
- On suppose qu'à l'instant $t = 0$, le volume de pesticide dans l'eau est nul.

En déduire que, pour tout réel $t \geq 0$:

$$V(t) = 1200(1 - e^{-0,005t})$$

- Calculer le volume limite de pesticide, noté V_L , défini par $V_L = \lim_{t \rightarrow +\infty} V(t)$.
- Étudier le sens de variation de la fonction V sur $[0; +\infty[$ et dresser son tableau de variations.
- Montrer que l'équation $V(t) = 600$ admet une unique solution α sur $[0; +\infty[$ dont on donnera une valeur approchée à l'unité près.
- Les services sanitaires considèrent que des affections cutanées peuvent survenir dès que le volume de pesticide dans le bassin atteint la moitié de la valeur limite. Au bout de combien de temps ce taux est-il atteint ?

Analyse d'un énoncé

111 Exercice commenté

Aux bornes d'une bobine de résistance R , exprimée en ohm, et d'inductance L , exprimée en henry, on branche, à l'instant $t = 0$, un générateur de force électromotrice E , exprimée en volt. L'intensité du courant dans le circuit, exprimée en ampère, est une fonction i , dérivable du temps t , exprimé en seconde, et solution de l'équation différentielle $Ly' + Ry = E$. On suppose qu'à l'instant $t = 0$ l'intensité est nulle. On prend $R = 5$, $L = 0,5$ et $E = 3$.

1. Montrer que la fonction i est solution de l'équation différentielle $y' = -10y + 6$.
2. En déduire, pour tout réel $t \geq 0$, l'expression de $i(t)$ en fonction de t .
3. Déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} i(t)$. Interpréter cette valeur.

En remplaçant L , R et E par leurs valeurs numériques, et en exprimant y' en fonction de y , on se ramène à une équation différentielle $y' = ay + b$, que l'on résout en commençant par chercher une fonction constante solution. On traduit ensuite que $i(0) = 0$, ce qui permet d'obtenir l'expression de $i(t)$ en fonction de t .

112 Application immédiate

Dans une pièce à température constante de 20°C , à l'instant $t = 0$, la température d'un liquide est égale à 70°C .

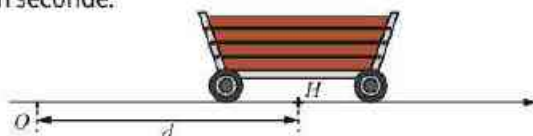
On admet que la température θ de ce liquide est une fonction dérivable du temps t , exprimé en minute, et que $\theta'(t)$ est proportionnelle à la différence entre la température $\theta(t)$ et celle de la pièce, de coefficient de proportionnalité égal à -2 .

1. Montrer que la fonction θ est solution de l'équation différentielle $y' = -2y + 40$.
2. En déduire, pour tout réel $t \geq 0$, l'expression de $\theta(t)$ en fonction de t .
3. Déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} \theta(t)$. Interpréter cette valeur.

- 113** On s'intéresse à la chute d'un parachutiste avant l'ouverture de son parachute. On admet que la vitesse du parachutiste pendant la chute, exprimée en $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, peut être modélisée par une fonction v , fonction du temps t , exprimé en seconde, solution de l'équation différentielle $(E): my' + ky = mg$, où m est la masse totale du parachutiste et de son parachute, g l'accélération de la pesanteur et k un coefficient dépendant de la résistance de l'air. On prendra $m = 80 \text{ kg}$, $g = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ et $k = 25$.

1. Montrer que la fonction v est solution de l'équation différentielle $(E): y' = -0,3125y + 10$.
2. Résoudre l'équation différentielle (E) .
3. Sachant que $v(0) = 0$, montrer que, pour tout réel $t \geq 0$, $v(t) = 32(1 - e^{-0,3125t})$.
4. Le parachutiste peut-il atteindre une vitesse de $50 \text{ Km}\cdot\text{h}^{-1}$?

- 114** Un chariot de masse 200 kg se déplace sur une voie rectiligne et horizontale. La position du chariot est repérée par la distance d , en mètre, du point H à l'origine O du repère en fonction du temps t , exprimé en seconde.



Les lois de Newton permettent de montrer que la fonction d vérifie, pour tout réel $t \geq 0$, la relation :

$$200d''(t) + 25d'(t) = 50$$

1. Pour $t \geq 0$, on note $v(t)$ la vitesse du chariot à l'instant t . On rappelle que, pour tout $t \geq 0$, $v(t) = d'(t)$. Montrer que la fonction v est solution de l'équation différentielle $(E): y' = -0,125y + 0,25$.
2. a. Résoudre l'équation différentielle (E) .
b. On suppose que $v(0) = 0$. Déterminer, pour tout réel $t \geq 0$, $v(t)$ en fonction de t .
c. Calculer $V = \lim_{t \rightarrow +\infty} v(t)$. Interpréter cette valeur.
3. a. Que représente la fonction d pour la fonction v ?
b. On suppose que $d(0) = 0$. Montrer que, pour tout réel $t \geq 0$, $d(t) = 2t - 16 + 16e^{-0,125t}$.
c. Déterminer, au décimètre près, la distance parcourue par le chariot au bout de 30 secondes.

- 115** Au début d'une épidémie, on constate que $0,01\%$ de la population est contaminée. Pour $t \in [0; 30]$, on note $f(t)$ le pourcentage de personnes touchées par la maladie après t jours. On a donc $f(0) = 0,01$. On admet que la fonction f est dérivable et strictement positive sur $[0; 30]$ et qu'elle est solution de l'équation différentielle $(E): y' = 0,05y(1 - y)$.

1. Soit la fonction g définie sur $[0; 30]$ par $g(t) = \frac{1}{f(t)}$.
a. Calculer $g(0)$.
b. Montrer que la fonction g est solution de l'équation différentielle $(F): y' = -0,05y + 0,05$.
c. Résoudre (F) . En déduire, l'expression de $g(t)$ en fonction de t .
2. a. Montrer que, pour tout réel $t \in [0; 30]$:

$$f(t) = \frac{1}{99e^{-0,05t} + 1}$$

- b. Calculer, à l'entier près, le pourcentage de la population infectée après 30 jours.

Des vers dans la farine...

Les recherches expérimentales à l'aide d'espèces élevées en laboratoire ont commencé dans les années 1930, avec les travaux de Gause (écologiste russe, 1910-1986), qui étudia, en 1935, l'évolution d'une population de coléoptères, le ténébrion meunier, plus communément appelé « vers de farine », en raison de sa capacité à se développer dans des denrées très sèches, notamment dans la farine.



En suivant l'évolution de dix vers placés dans 64 g de farine, il obtient les résultats suivants.

| | | | | | | | |
|-----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Nombre de jours | 0 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 |
| Nombre de vers | 10 | 26 | 58 | 165 | 320 | 743 | 1 100 |
| Nombre de jours | 70 | 80 | 90 | 100 | 110 | 120 | 130 |
| Nombre de vers | 1 340 | 1 450 | 1 650 | 1 760 | 1 690 | 1 600 | 1 750 |

Partie A Interprétation d'un graphique

- Représenter graphiquement ces résultats par un nuage de points. On prendra pour unités 1 cm pour 10 jours sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 100 vers sur l'axe des ordonnées.
- Cette représentation graphique met en évidence différentes phases dans la croissance de cette population : une phase de **croissance exponentielle**, une phase de **ralentissement** et une phase **stationnaire**. Identifier sur le graphique chacune des phases surlignées.

Partie B Modélisation par croissance exponentielle

Dans cette partie, on étudie l'évolution de la population de vers sur les 50 premiers jours.

- Sur cette période, on estime que le nombre de vers augmente en moyenne de 9 % par jour.
 - Calculer, à 10^{-3} près, le coefficient multiplicateur global sur une période de 10 jours.
 - Vérifier que les résultats expérimentaux sont conformes à cette estimation.
- Pour tout réel $t \in [0; 50]$, on note $N_1(t)$ le nombre de vers au bout de t jours. On considère que, sur cette période, la vitesse d'évolution de la population est proportionnelle à son effectif, et que la fonction N_1 est solution de l'équation différentielle $y' = 0,09y$.
 - Déterminer l'expression de $N_1(t)$ en fonction de t .
 - En supposant ce modèle encore valide au-delà du 50^e jour, quel serait le nombre de vers au bout de 80 jours ? au bout de 100 jours ?
 - Ce modèle paraît-il envisageable sur le long terme ?

Pour modéliser une évolution, on peut utiliser une représentation graphique qui donne une idée de la fonction à utiliser.

Partie C Modélisation par une fonction logistique

On souhaite modéliser l'évolution de la population de vers par une fonction logistique N , définie sur $[0; +\infty[$,

par $N(t) = \frac{K}{1 + ae^{-0,09t}}$, où K et a sont des constantes strictement positives.

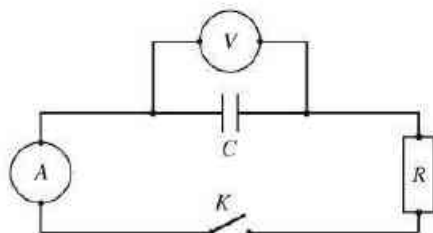
- Déterminer la limite de la fonction N en $+\infty$.
 - Dans la suite, on choisit $K = 1750$. Justifier ce choix.
- En utilisant la valeur de $N(0)$, déterminer la valeur de a et vérifier que, pour tout réel $t \geq 0$:

$$N(t) = \frac{1750}{1 + 174e^{-0,09t}}$$

- Représenter, sur le graphique de la **partie A**, la courbe représentative de la fonction N .
- Pour tout réel positif t , on assimile la vitesse d'évolution de la population de vers à l'instant t , au nombre dérivé $N'(t)$. Cette vitesse est maximale pour une certaine valeur t_0 . En expliquant la démarche, estimer graphiquement la valeur de t_0 . Que représente le point d'abscisse t_0 de la courbe de la fonction N ?



Un circuit « RC » est un circuit où sont montés en série une résistance R , exprimée en ohm, et un condensateur de capacité C , exprimée en farad.



On étudie un circuit RC composé d'un condensateur de capacité $C = 10^{-3}$ F, et d'une résistance R telle que $R = 10^4 \Omega$. Le condensateur a été chargé et la tension entre ses bornes, exprimée en volt, est notée E . À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur du circuit et on mesure la tension aux bornes du condensateur à intervalles de temps réguliers.

On note $u_C(t)$ cette tension à l'instant t , exprimé en seconde.

On obtient les résultats suivants.

| t | 0 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 |
|----------|----|-----|-----|-----|-----|------|
| $u_C(t)$ | 10 | 3,7 | 1,4 | 0,5 | 0,2 | 0,07 |

Info

Un condensateur est un composant fondamental des circuits électriques. Son rôle est de stocker les charges électriques. Il emmagasine de l'énergie au cours de sa charge, puis il la restitue lors de la décharge. La quantité d'énergie électrique emmagasinée dépend de la capacité du condensateur. On le trouve notamment dans les appareils contenant un flash. Il libère son énergie dans une lampe qui émet alors une lumière intense. Dans ce cas, la décharge est très rapide.



Partie A L'expérience

1. En utilisant le tableur d'un logiciel de géométrie dynamique, représenter les tensions relevées à l'aide d'un nuage de points.

2. a. Parmi les ajustements suivants proposés par le logiciel, lequel semble le plus adapté à la forme du nuage de points ?

- linéaire
- exponentiel
- polynôme

b. Quelle est alors l'équation de la courbe d'ajustement proposée par le logiciel ?

3. • En faisant un « clic droit » sur le graphique, sélectionner *copier vers graphique*.

- Tracer la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.
- Créer le point d'intersection de cette tangente avec l'axe des abscisses.

Déterminer l'abscisse de ce point, notée τ .

4. Vérifier qu'à l'instant τ , la tension aux bornes du condensateur a diminué d'environ 63 %.

5. Comparer la valeur de τ trouvée avec le produit RC .

Partie B La théorie

On admet que la fonction u_C est solution de l'équation différentielle (E): $\tau y' + y = 0$, où $\tau = RC$ est appelé le **temps caractéristique** du circuit.

1. Montrer que, pour tout réel $t \geq 0$, $u_C(t) = Ee^{-\frac{t}{\tau}}$.

2. a. Étudier le sens de variation de la fonction u_C sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

b. Déterminer la limite de u_C en $+\infty$.

c. Interpréter les résultats précédents.

3. Justifier que $u_C(\tau) \approx 0,37 \times E$. Vérifier alors le résultat obtenu à la question 4. de la **partie A**.

4. a. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe de la fonction u_C au point d'abscisse 0.

b. Montrer que cette tangente coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse τ .

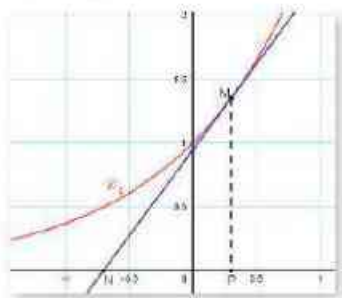
5. En utilisant les résultats précédents, proposer deux méthodes permettant de déterminer graphiquement le temps caractéristique d'un circuit RC.

Partie A Étude d'un exemple

Dans un repère orthonormé du plan, on note \mathcal{C}_1 la courbe de la fonction exponentielle $x \mapsto e^x$.

1. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique :

- tracer la courbe \mathcal{C}_1 et créer un curseur nommé t ;
- créer le point M sur \mathcal{C}_1 d'abscisse t et le point P , projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses ;
- tracer la tangente à \mathcal{C}_1 en M et créer le point N intersection de cette tangente avec l'axe des abscisses ;
- créer le segment $[PN]$.



En faisant varier le curseur, que peut-on conjecturer sur la longueur PN lorsque le point M décrit la courbe \mathcal{C}_1 ?

2. Démontrer cette conjecture.

Partie B Étude du cas général

Soient f une fonction définie et dérivable sur \mathbb{R} et \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère orthonormé. On suppose que, pour tout nombre réel x , $f(x) > 0$ et $f'(x) > 0$.

Pour tout nombre réel t , on note :

- M le point de la courbe \mathcal{C} d'abscisse t ;
- P le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses ;
- N le point d'intersection de la tangente en M à la courbe \mathcal{C} avec l'axe des abscisses.

On se propose de déterminer toutes les fonctions f pour lesquelles $PN = a$, où a est une constante réelle strictement positive.

1. a. Écrire l'équation réduite de la tangente à la courbe \mathcal{C} en M .

b. En déduire que les coordonnées du point N sont :

$$\left(t - \frac{f(t)}{f'(t)} ; 0 \right)$$

2. Calculer la distance PN en fonction de $f(t)$ et $f'(t)$.

3. En déduire que f est solution de l'équation différentielle (E) : $y' = \frac{1}{a}y$.

4. En déduire les fonctions f cherchées.

Dans sa cuisine, dont la température ambiante est constante et égale à 22 °C, Justine suit la recette d'une tarte qui doit cuire dans un four à la température de 180 °C et doit être servie idéalement à une température de 25 °C.

Vingt minutes après avoir sorti la tarte du four, Justine constate que la température de la tarte a diminué de 80 °C.

Elle souhaite connaître le temps qu'elle devra encore attendre pour déguster sa tarte. Justine connaît la loi de refroidissement de Newton : « La vitesse de refroidissement d'un corps inerte est proportionnelle à la différence de température entre ce corps et le milieu ambiant. » Elle traduit cette loi en notant $\theta(t)$ la température (en degré Celsius) de la tarte à l'instant t (en minute) par $\theta'(t) = \alpha(\theta(t) - 22)$, où α est une constante.



1. Quel est le signe de la constante α ?

2. a. Déterminer une fonction constante solution de l'équation différentielle (E) : $y' = \alpha y - 22\alpha$.

b. Résoudre l'équation différentielle (E).

c. En déduire que, pour tout nombre réel positif t : $\theta(t) = 158e^{20t} + 22$

3. Montrer que le réel α vérifie $e^{20\alpha} = \frac{39}{79}$.

4. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{20x}$.

a. Dresser le tableau de variations de la fonction f en précisant ses limites en $-\infty$ et en $+\infty$.

b. Montrer que l'équation $f(x) = \frac{39}{79}$ admet le réel α pour unique solution sur \mathbb{R} et que $\alpha \in]-1; 0[$.

5. PYTHON On considère la fonction suivante.

```
from math import exp
def alpha():
    x=0
    while exp(20*x)>39/79:
        x=x-0.0001
    return x
```

a. Quel est le rôle de la fonction alpha ?

b. La programmer et l'exécuter.

c. En déduire une valeur approchée de α à 10^{-4} près.

6. a. Déterminer la limite de la fonction θ en $+\infty$. Interpréter cette valeur.

b. Étudier le sens de variation de la fonction θ sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

c. Déterminer, à la minute près, le temps que devra attendre Justine avant de déguster sa tarte.



Un élément est dit radioactif lorsque la structure de ses atomes est instable. Il se transforme alors en un autre élément plus stable, en émettant des rayonnements qui peuvent être très énergétiques. On mesure la vitesse de cette transformation en utilisant la notion de « période » d'un élément radioactif : c'est la durée nécessaire pour que la moitié des atomes de l'élément instable se soit transformée en un élément plus stable.

Le polonium 210, noté ^{210}Po , est le premier élément radioactif découvert par Pierre et Marie Curie en 1889. Il se désintègre pour devenir du plomb.

Partie A Une modélisation discrète

Le tableau ci-dessous donne l'évolution de la masse M_n , en g, d'un échantillon contenant 1 g de ^{210}Po en fonction du nombre de jours n .

| | | | | | | | |
|-------|---|------|------|------|------|------|------|
| n | 0 | 40 | 80 | 120 | 160 | 200 | 240 |
| M_n | 1 | 0,82 | 0,67 | 0,55 | 0,45 | 0,37 | 0,30 |

1. Représenter graphiquement les données du tableau par un nuage de points. On prendra pour unités 2 cm pour 40 jours sur l'axe des abscisses et 2 cm pour 0,2 gramme sur l'axe des ordonnées.

2. Vérifier, sur les données du tableau, que le ^{210}Po perd en moyenne 0,5 % de sa masse par jour. On considérera ce pourcentage stable à long terme.

3. Montrer que la suite (M_n) est une suite géométrique et donner l'expression de M_n en fonction de n .

4. a. À partir des données du tableau, donner un encadrement de la période du ^{210}Po .

b. À l'aide de la calculatrice, donner, au jour près, la période du ^{210}Po .

Partie B Une modélisation continue

Le nombre de noyaux contenus dans 1 g de ^{210}Po est de l'ordre de $N_0 = 2,87 \times 10^{21}$.

Soit $N(t)$ le nombre de noyaux présents à l'instant t . L'expérience montre que le taux d'accroissement du nombre de noyaux qui se désintègrent entre les instants t et $t+h$ est proportionnel à $N(t)$.

Autrement dit, il existe une constante strictement positive λ telle que $\frac{N(t+h) - N(t)}{h} = -\lambda N(t)$.

1. Montrer que la fonction N est dérivable sur $[0; +\infty[$ et qu'elle est solution de l'équation différentielle :

$$y' = -\lambda y$$

2. En déduire que, pour tout réel $t \geq 0$, $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$.

3. Pour le ^{210}Po , on sait que $\lambda = 0,005T$.

a. Montrer que la période T du ^{210}Po vérifie $e^{0,005T} = 2$.

b. Montrer que l'équation $e^x = 2$ admet une unique solution sur $[0; +\infty[$. Cette solution est notée $\ln 2$.

c. Exprimer T en fonction du nombre $\ln 2$ et retrouver la période du ^{210}Po en utilisant la touche \ln de la calculatrice.

On note E l'ensemble des fonctions f définies sur \mathbb{R} et vérifiant, pour tous nombres réels x et y , la relation :

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Partie A

1. Existe-t-il des fonctions constantes appartenant à l'ensemble E ?

2. Donner un exemple de fonction non constante appartenant à E .

3. a. Soit une fonction $f \in E$. Montrer que $f(0) = 0$.

b. En remarquant que, pour tout nombre réel x , $x + (-x) = 0$, montrer que f est impaire.

4. Pour f appartenant à E , on note $a = f(1)$.

a. Exprimer $f(2)$, $f(3)$ et $f(4)$ en fonction de a .

b. Pour tout entier naturel n , exprimer $f(n)$ en fonction de a et de n . Cette relation est-elle encore valable si n est un entier relatif ?

Partie B

Soit f une fonction appartenant à l'ensemble E que l'on suppose dérivable en 0. On note $f'(0) = m$.

1. Rappeler la définition de « f est dérivable en 0 ».

2. En utilisant cette définition, justifier que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = m$$

3. Montrer que, pour tout nombre réel x et tout nombre réel $h \neq 0$, $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{f(h)}{h}$.

4. En déduire que la fonction f est dérivable sur \mathbb{R} et que, pour tout nombre réel x , $f'(x) = m$.

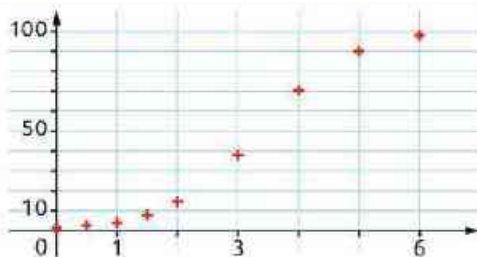
5. En déduire l'expression de $f(x)$ en fonction de x .

6. Réciproquement, vérifier que les fonctions trouvées à la question précédente appartiennent à E .

7. Déterminer la fonction f appartenant à E , dérivable en 0 et telle que $f(-2) = 3$.

On étudie l'évolution d'une population de bactéries dans un milieu de culture. Le tableau ci-dessous donne l'évolution de cette population que l'on a représentée ci-contre par un nuage de points. Le temps t est exprimé en heure et le nombre de bactéries N en million.

| t | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|-----|---|-----|-----|-----|------|------|------|------|----|
| N | 1 | 2 | 3,9 | 7,9 | 14,5 | 37,9 | 70,4 | 90,1 | 98 |



1. On modélise l'évolution du nombre de bactéries sur les deux premières heures par la fonction f_1 définie sur l'intervalle $[0; 2]$ par $f_1(t) = e^{1,4t}$.

a. Déterminer le nombre réel a tel que f_1 soit solution de l'équation différentielle $y' = ay$.

b. Justifier qu'au-delà de la deuxième heure cette modélisation donne une évolution trop rapide de la population de bactéries.

2. En 1938, Verhulst développe l'idée que, pour compenser une croissance devenue trop rapide, à partir d'un certain temps, le taux de croissance diminue au fur et à mesure que la population augmente. Il considère que le taux de croissance relatif sur l'intervalle $[t; t+h]$ est une fonction affine décroissante de la population au temps t . Ce qui se traduit ici, en notant $f(t)$ le nombre de bactéries au temps t , par :

$$\frac{f(t+h) - f(t)}{hf(t)} = a - bf(t), \text{ avec } a > 0 \text{ et } b > 0$$

En faisant tendre h vers 0, on obtient que f est dérivable sur $[0; +\infty[$ et solution de l'équation différentielle :

$$y' = ay - by^2$$

Pour la population de bactéries étudiée, on admet que $a = 1,4$ et $b = 0,014$.

La fonction f est donc solution de l'équation différentielle (E) : $y' = 1,4y - 0,014y^2$.

On considère la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$g(t) = \frac{1}{f(t)}$$

a. Calculer $g(0)$ et montrer que g est solution de l'équation différentielle (E') : $y' = -1,4y + 0,014$.

b. Résoudre l'équation différentielle (E') et montrer que, pour tout $t \geq 0$, $g(t) = 0,01 + 0,99e^{-1,4t}$.

c. En déduire que, pour tout $t \geq 0$, $f(t) = \frac{100}{1 + 99e^{-1,4t}}$.

d. Déterminer la limite de f en $+\infty$. Interpréter.

En 1845, Verhulst a appliqué à la population belge la modélisation qu'il avait décrite en 1838 dans son article « Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement », en se basant sur les données suivantes.

| Année | 1815 | 1830 | 1845 |
|------------|-----------|-----------|-----------|
| Population | 3 327 253 | 4 247 113 | 4 800 861 |

En notant $P(t)$ la population t dizaines d'années après 1815, il obtient $P(t) = \frac{6\,583\,700}{1 + e^{-0,262(t+0,281)}}$.

Verhulst conclut :

Ces résultats numériques nous apprennent que, si les lois et les mœurs de la Belgique n'éprouvaient aucun changement notable, la population de ce royaume, bien que toujours croissante, ne s'élèverait jamais à plus de 6 600 000 âmes. [...] Enfin, si l'on voulait savoir quel est le chiffre assigné, pour la population de la Belgique à la fin du XIX^e siècle, l'on trouvera pour réponse 6 064 000.



1. Comparer les valeurs données par la modélisation avec les valeurs réelles.

2. Justifier, en présentant les calculs adaptés, les affirmations de Verhulst surlignées dans le texte.

3. En 1847, dans son deuxième article, « Recherches mathématiques sur la loi d'accroissement de la population », Verhulst propose un autre modèle. Avec des notations analogues aux précédentes, il obtient : $P(t) = 9\,439\,000 - 5\,811\,747e^{-0,0751939t}$

a. Comparer les valeurs données par cette nouvelle modélisation avec les valeurs réelles.

b. Adapter les éléments surlignés dans le texte à cette nouvelle modélisation.

123

... en mécanique

Chute d'une bille dans un fluide visqueux

À l'instant $t = 0$, exprimé en seconde, on lâche, sans vitesse initiale, une bille dans une éprouvette contenant un fluide visqueux. Un système vidéo adapté permet de repérer la position instantanée de la bille sur un axe vertical $(O; \vec{j})$, orienté vers le bas.

Les résultats observés sont donnés dans le tableau suivant, où y_i désigne la position de la bille, exprimée en mètre, à l'instant t_i , exprimé en seconde.

| | | | | | | | | | | | | |
|-------|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| t_i | 0 | 0,04 | 0,08 | 0,12 | 0,16 | 0,2 | 0,24 | 0,28 | 0,32 | 0,36 | 0,4 | 0,44 |
| y_i | 0 | 0,005 | 0,019 | 0,038 | 0,065 | 0,092 | 0,123 | 0,157 | 0,190 | 0,223 | 0,259 | 0,297 |



Partie A TABLEUR De l'expérience...

La chute de la bille étant très rapide, on assimile sa vitesse v_i , à l'instant t_i , à la vitesse moyenne entre les instants t_{i-1} et t_{i+1} .

$$\text{On a donc } v_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}}.$$

1. Saisir les données de l'expérience dans une feuille de calcul d'un tableur, comme ci-dessous.

| | A | B | C |
|---|-------|-------|---------|
| 1 | t (s) | y (m) | v (m/s) |
| 2 | 0 | 0,000 | |
| 3 | 0,04 | 0,005 | |
| 4 | 0,08 | 0,019 | |

2. Quelle formule doit-on saisir dans la cellule C3 et recopier vers le bas pour afficher les vitesses aux différents instants ?

3. Représenter graphiquement sur la feuille de calcul le nuage de points $(t_i; y_i)$.

4. L'allure du nuage de points met en évidence une vitesse limite. Quelle est sa valeur ?

Partie B ... à la théorie

Lors de sa chute, la bille est soumise à trois forces : son poids, la poussée d'Archimède et une force de frottement du fluide. En appliquant la deuxième loi de Newton, on montre que la vitesse instantanée v de la bille vérifie, pour tout réel $t \geq 0$, $v'(t) = -\frac{k}{m}v(t) + \alpha$, où m est la masse de la bille et k et α des constantes strictement positives dépendant de la nature du fluide et des caractéristiques de la bille.

1. a. Résoudre l'équation différentielle $y' = -\frac{k}{m}y + \alpha$.

b. En utilisant la condition initiale $v(0) = 0$, montrer que, pour tout réel $t \geq 0$, $v(t) = \frac{\alpha m}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right)$.

2. Déterminer la limite de la fonction v en $+\infty$.

3. Pour la bille et le fluide étudiés, on donne :

$$m = 6,9 \times 10^{-3} \text{ kg}, k = 6,56 \times 10^{-2} \text{ et } \alpha = 8,51.$$

a. Calculer la vitesse limite de la bille.

b. Comparer cette valeur au résultat obtenu à la question 4. de la partie A. Commenter.

124

... en sociologie

Évolution du nombre de SMS envoyés en France

Le graphique ci-contre représente l'évolution du nombre de SMS, exprimé en million, envoyés en France entre 2006 et 2017.

Source : fr.statista.com

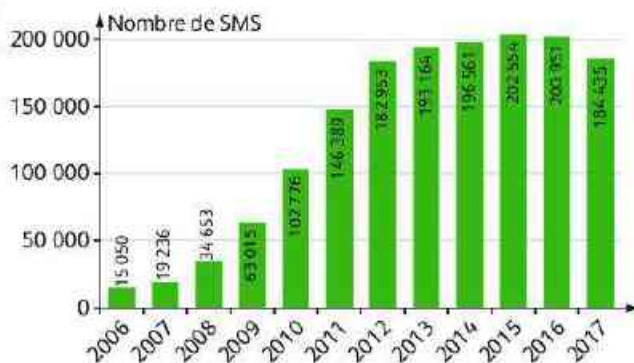
1. Entre 2006 et 2011, un logiciel a permis de modéliser cette évolution par la fonction f définie par $f(t) = 13,67e^{0,486t}$, où $f(t)$ est le nombre de SMS envoyés, en million, en 2006 + t .

a. Pour $t \geq 0$, calculer $\frac{f(t+1)}{f(t)}$.

b. En déduire le taux d'augmentation annuel du nombre de SMS envoyés en France durant cette période.

2. Afin de prendre en compte le ralentissement de la croissance à partir de 2011, on souhaite proposer une autre modélisation de cette évolution. Parmi les fonctions suivantes, laquelle paraît la plus adaptée pour modéliser le nombre de SMS envoyés en 2006 + t ? Argumenter.

$$f_1(t) = 19,75t + 19,83; f_2(t) = \frac{200}{1 + 31e^{-0,9t}}; f_3(t) = -1,95t^2 + 41,2t - 15,92 \text{ et } f_4(t) = 25,1e^{0,24t}.$$



Le tableau ci-contre reprend les données INSEE de 2016 et recense le nombre de centenaires en France métropolitaine entre 2000 et 2016. On souhaite modéliser l'évolution du nombre de centenaires en France jusqu'en 2060.

| | A | B | C |
|----|--------|-----------------|----------------------|
| 1 | Années | Rang de l'année | Efficacité observées |
| 2 | 2000 | 0 | 8063 |
| 3 | 2001 | 1 | 9291 |
| 4 | 2002 | 2 | 10867 |
| 5 | 2003 | 3 | 11741 |
| 6 | 2004 | 4 | 12131 |
| 7 | 2005 | 5 | 12867 |
| 8 | 2006 | 6 | 13216 |
| 9 | 2007 | 7 | 13981 |
| 10 | 2008 | 8 | 14504 |
| 11 | 2009 | 9 | 15403 |
| 12 | 2010 | 10 | 16267 |
| 13 | 2011 | 11 | 17224 |
| 14 | 2012 | 12 | 18355 |
| 15 | 2013 | 13 | 20320 |
| 16 | 2014 | 14 | 21411 |
| 17 | 2015 | 15 | 23293 |
| 18 | 2016 | 16 | 26508 |

Partie A Une première modélisation

1. Reproduire le tableau dans une feuille de calcul d'un tableur.
2. Sélectionner les colonnes B et C et insérer le nuage de points de cette série.
3. Par un clic droit sur un des points du nuage, insérer une courbe de tendance polynomiale de degré 3 et cocher la case affichant l'équation de la courbe obtenue sur le graphique. On note f la fonction obtenue.
4. Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0; 60]$.
5. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[50; 60]$. Déterminer la valeur approchée à l'unité par défaut de α .
6. Cette modélisation est-elle pertinente ? Justifier.

Partie B. Une deuxième modélisation

1. De la même manière que dans la **partie A**, insérer une courbe de tendance de type exponentielle. On note g la fonction obtenue.
2. Étudier les variations de la fonction g sur $[0; 60]$.

3. Étudier la convexité de la fonction g sur l'intervalle $[0; 60]$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

4. En quelle année, suivant ce modèle, le nombre de centenaires devrait-il dépasser 50 000 ? Justifier par un calcul.

Partie C PYTHON Une troisième modélisation

On admet que la fonction h définie sur l'intervalle $[0; 60]$ par $h(x) = \frac{400\,000}{1 + 36e^{-0,06x}} - 2058$ donne une modélisation du nombre de centenaires jusqu'en 2060, où x désigne le nombre d'années écoulées depuis 2000.

1. Le tableau ci-dessous indique les prévisions effectuées par l'INSEE.

| Année | 2030 | 2050 | 2060 |
|-------------------------------|--------|---------|---------|
| Nombre de centenaires estimés | 54 225 | 140 791 | 198 645 |

Vérifier que la fonction h permet des estimations plus proches de celles de l'INSEE que la fonction g de la **partie B**.

2. Montrer que la fonction h est strictement croissante sur l'intervalle $[0; 60]$.

3. Compléter l'algorithme ci-contre afin de déterminer en quelle année le nombre de centenaires devrait dépasser 100 000.

```

N ← 0
H ← 0
Tant que ... Faire
  N ← ...
  H ← ...
Fin Tant que
  
```

4. Programmer et exécuter cet algorithme en Python.

5. En quelle année le nombre de centenaires devrait-il dépasser 100 000 avec ce modèle ?

Le tableau ci-dessous donne le PIB de la Chine, en milliard de dollars, tous les dix ans de 1960 à 2010.

| Année | 1960 | 1970 | 1980 | 1990 | 2000 | 2010 |
|-------|------|------|-------|------|---------|---------|
| Rang | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| PIB | 59,2 | 91,5 | 189,7 | 359 | 1 205,3 | 6 039,7 |

1. a. À l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur, représenter graphiquement le nuage de points associé aux données du tableau.

b. Comment qualifier la croissance du PIB de la Chine entre 1960 et 2010 ?

2. a. Donner une estimation du PIB de la Chine pour l'année 2019. Justifier la démarche.

b. En 2019, le PIB de la Chine s'élevait à 14 217 milliards de dollars. Évaluer la pertinence de l'estimation précédente.

3. « Sur une planète dont les dimensions et les richesses sont finies, tout processus exponentiel ne peut qu'être éphémère. » Albert Jacquard, *Mon utopie*, 2006. Commenter cette citation en la mettant en relation avec les questions précédentes.

La méthode d'Euler pour construire une courbe intégrale

Utiliser un **TABLEUR** et **PYTHON**

Le but de ce TP est de présenter la méthode d'Euler, permettant de construire une courbe approchée d'une fonction f , dérivable sur un intervalle I , solution de l'équation différentielle $y' = g$, où g est une fonction continue sur I et telle que $f(x_0) = y_0$.

Objectif

Utiliser un tableur et un algorithme pour construire une courbe intégrale approchée.

Partie A Description de la méthode d'Euler

On considère une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I et $x_0 \in I$. \mathcal{C}_f désigne la représentation graphique de la fonction f .

- Rappeler la définition de « f est dérivable en x_0 ».
- En déduire que, pour h proche de 0, on a :

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + hf'(x_0)$$

- Vérifier que le point $M_1(x_0 + h; f(x_0) + hf'(x_0))$ appartient à la tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse x_0 .

On dit que, pour h proche de 0, $f(x_0) + hf'(x_0)$ est une approximation affine de $f(x_0 + h)$ au voisinage de x_0 .

Le principe de la méthode d'Euler est de réaliser des approximations affines successives.

- On place le point $M_0(x_0; y_0)$.
- Pour h proche de 0, on pose $x_1 = x_0 + h$. En notant, $y_1 = f(x_1)$, on a $y_1 \approx f(x_0) + hf'(x_0)$.

On place le point $M_1(x_1; y_1)$.

- On réitère ce procédé en posant $x_2 = x_1 + h$ et on place le point $M_2(x_2; y_2)$, et ainsi de suite.

- En reliant les points M_0, M_1, \dots et M_n par des segments, on obtient la courbe représentative d'une fonction, affine par intervalles, qui approche la courbe \mathcal{C}_f .

Partie B Mise en place de la méthode d'Euler avec un tableur

Dans toute la suite, la fonction g est définie sur \mathbb{R} par :

$$g(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

On note f la solution de l'équation différentielle $y' = g$ telle que $f(0) = 0$.

- En utilisant des approximations affines, déterminer des valeurs approchées, à 10^{-4} près, de $f(0,1)$ et $f(0,2)$.

- a. Afin d'automatiser les calculs précédents, on utilise un tableur. Mettre en place la feuille de calcul ci-dessous.

| | A | B | C |
|---|---|------|------|
| 1 | h | 0,1 | |
| 2 | x | F(x) | f(x) |
| 3 | | 0 | 0 |
| 4 | | | |

- Quelle formule doit-on saisir dans la cellule B3 et recopier vers le bas pour obtenir les valeurs de $f'(x)$?

- Dans les cellules A4 et C4, on saisit respectivement les formules `=A3+B1` et `=C3+B1*B3`, que l'on recopie vers le bas. Justifier ces formules.

- Représenter graphiquement le nuage de points de coordonnées $(x; f'(x))$ pour $x \in [0; 2]$ et relier les points entre eux par des segments.

- Reprendre la question précédente avec $h = 0,01$.

Partie C Mise en place de la méthode d'Euler avec un algorithme

- Écrire en Python une fonction g qui renvoie l'image d'un nombre x par la fonction g .
- On considère la fonction Euler donnée ci-dessous.

```
def Euler(h,n):
    ListeAbscisse=[0]
    ListeOrdonnée=[0]
    x=0
    y=0
    for i in range(n):
        x=x+h
        y=y+g(x)*h
        ListeAbscisse.append(x)
        ListeOrdonnée.append(y)
    return ListeAbscisse,ListeOrdonnée
```

- Expliquer le rôle de la fonction Euler.
- Que représentent les variables h et n ?
- Que va contenir la liste `ListeAbscisse` pour $h = 0,1$ et $n = 10$?

- Programmer la fonction Euler. L'exécuter pour $h = 0,1$ et $n = 20$. Comparer avec les résultats obtenus à la **partie B**.

- a. Compléter le programme précédent avec les instructions suivantes.

```
from pylab import*
grid()
X,Y=Euler(0.01,1000)
plot(X,Y,"x-",color="red")
show()
```

- Expliquer ce que permettent d'obtenir ces nouvelles instructions.

- Modifier les valeurs des arguments de la fonction Euler afin d'obtenir une approximation de la courbe de f sur l'intervalle $[0; 10]$.

Densité de population urbaine

Mener une recherche

Le développement d'une ville peut être caractérisé par plusieurs facteurs, en particulier la répartition de la densité urbaine.

Partie A Le modèle de Clark

En 1951, Colin Clark propose un modèle permettant de représenter la concentration de la population autour du centre-ville. Dans son article « *Urban Population Densities* », il énonce : « La loi fondamentale est que la densité tend à décroître comme une fonction exponentielle négative de la distance au centre de l'espace urbain. »

Il modélise alors la densité, à une distance r du centre-ville, exprimée en habitant par km^2 , par la fonction C définie sur $[0; +\infty[$ par $C(r) = D_0 e^{-br}$, où D_0 et b sont des constantes positives.

1. Que représente la constante D_0 ?
2. Justifier la partie surlignée dans le texte ci-dessus.
3. Calculer la limite de C en $+\infty$. Interpréter.

Partie B Le modèle de Newling

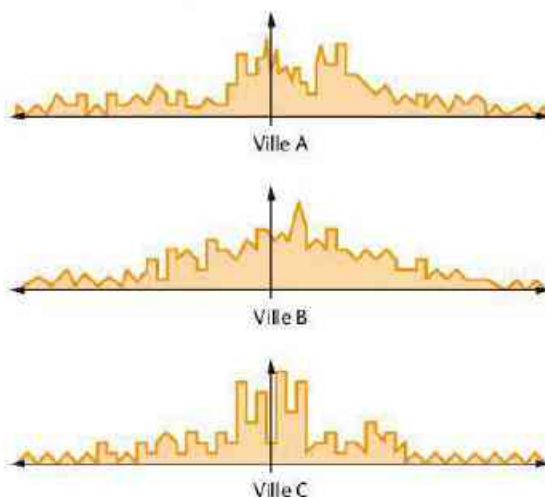
Pour tenir compte du développement des agglomérations urbaines, Newling propose, en 1969, en se basant sur les travaux de Clark, de modéliser la densité urbaine par la fonction N définie sur $[0; +\infty[$ par $N(r) = D_0 e^{br - cr^2}$, où $N(r)$ est la densité à une distance r du centre-ville et b et c des constantes positives.

1. Étudier les variations de la fonction N sur $[0; +\infty[$.
2. Déterminer la limite de la fonction N en $+\infty$.
3. Décrire la répartition de la population urbaine selon le modèle de Newling.

Partie C À chaque ville son modèle

Les trois schémas ci-dessous représentent la répartition de la densité urbaine de trois villes A, B et C. L'axe des ordonnées représente la densité urbaine et l'axe des abscisses la distance par rapport au centre-ville.

Pour quelle ville peut-on adopter le modèle de Clark ? et celui de Newling ?



À L'ÉCRIT OU À L'ORAL

Partie D

À partir des résultats obtenus dans les parties A et B, présenter et comparer les modèles de Clark et de Newling pour modéliser la densité urbaine d'une ville.

Équation différentielle à coefficients non constants

Mener une recherche

Partie A Méthode de résolution

Soit a une fonction continue sur un intervalle I . On considère l'équation différentielle $(E): y' = a(x)y$.

1. Justifier que la fonction a admet des primitives sur l'intervalle I . On note A l'une de ces primitives.
2. Soit k un réel. Montrer que la fonction g définie sur I par $g(x) = ke^{A(x)}$ est une solution de (E) .
3. Soit f une solution de (E) et h la fonction définie sur I par $h(x) = f(x)e^{-A(x)}$.
 - a. Montrer que h est dérivable sur I et que, pour tout $x \in I$, $h'(x) = 0$.
 - b. En déduire qu'il existe une constante réelle k , telle que, pour tout $x \in I$, $f(x) = ke^{A(x)}$.

4. En déduire l'ensemble des solutions de (E) .
5. Résoudre les équations différentielles suivantes.
 - a. $y' = 2xy$
 - b. $y' + e^{2x}y = 0$

À L'ÉCRIT OU À L'ORAL

Partie B

À l'aide de la partie A, présenter la méthode de résolution d'une équation différentielle de la forme $y' = a(x)y$, où a est une fonction continue sur un intervalle I .
Proposer et présenter une situation concrète pouvant être modélisée par une telle équation.

Approche historique de la fonction logarithme

Les capacités du thème

- 1 Exploiter les courbes de fonctions réciproques
- 2 Étudier une fonction comportant un logarithme
- 3 Résoudre une équation, une inéquation

Modélisation du réel

La sismologie est la discipline scientifique qui étudie les séismes, encore appelés « tremblements de terre ». La magnitude d'un séisme est une grandeur en rapport avec l'énergie libérée par ce séisme. Elle peut être exprimée dans « l'échelle de Richter », qui est un exemple d'échelle logarithmique.

En France, les territoires les plus exposés aux séismes sont les îles des Antilles, dans les Caraïbes.

Le très violent séisme de 1843, dont l'épicentre était situé en Guadeloupe, fut l'un des premiers séismes bien documentés.

 Voir Maths en situation p. 122



A Diaporama pour tester les bases



B Relation fonctionnelle de l'exponentielle

Indiquer pour chaque affirmation si elle est vraie ou fausse. Justifier.

- $e^1 = 0$
- $e^1 = 2,718$
- $e^5 \times e^3 = e^{15}$
- $\frac{e^{-1} \times e^5}{e^2 \times e^2} = 1$
- Pour tout réel x , $(e^x)^2 = e^{x+2}$.
- Pour tout réel x , $e^x \times e^{-x} = 1$.
- Pour tout réel x , $(e^x + 1)^2 = e^{2x} + 1$.

C Équation avec exponentielle

1. Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes.

- $e^{3x+1} = 0$
- $4e^x + 7 = 1$
- $8e^x - 10 = -2$
- $e^{0,5x-1} = 1$
- $e^{3x-1} = e^2$
- $e^{2x} = e^{x^2+1}$

2. a. Montrer que, pour tout réel x , on a :

$$2e^{2x} + e^x - 3 = (e^x - 1)(2e^x + 3)$$

b. En déduire les solutions de l'équation $2e^{2x} + e^x = 3$.

D Étude de fonction

Soit f la fonction définie sur $]-\infty; 0,5]$ par :

$$f(x) = e^{2x+1} - 2x + 1$$

On note f' sa fonction dérivée, f'' sa dérivée seconde et \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un repère.

1. a. Calculer $f\left(\frac{1}{2}\right)$ et $f\left(-\frac{1}{2}\right)$. b. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

2. a. Construire le tableau de variations de f .

b. En déduire le signe de f sur $]-\infty; 0,5]$.

3. Soit F une primitive de f sur $]-\infty; 0,5]$.

Peut-on affirmer que la fonction F est croissante sur l'intervalle $]-\infty; 0,5]$? Pourquoi ?

4. a. Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse 0.

b. Étudier la convexité de f .

c. En déduire la position relative de T et de \mathcal{C}_f .

5. Vérifier les résultats précédents à l'aide de la calculatrice.

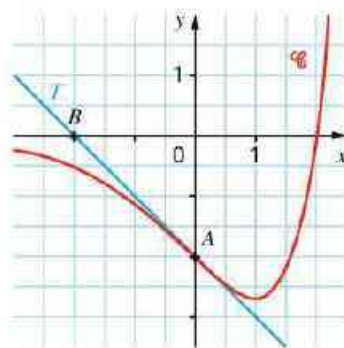
E Exploiter une courbe représentative

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = (ax + b)e^x$$

où a et b sont des réels.

On a représenté ci-contre sa courbe représentative \mathcal{C} et la tangente T au point d'abscisse 0 qui passe par les points $A(0; -2)$ et $B(-2; 0)$. Déterminer les valeurs des réels a et b .



Consolider les bases

Soient les fonctions f et g définies sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = x^2$ et $g(x) = \sqrt{x}$.

1 Tracer dans un repère orthonormé les courbes représentatives \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g . Conjecturer une propriété géométrique relative à ces deux courbes.

2 Soient x et y deux réels positifs. Compléter les pointillés :

$$M(x; y) \in \mathcal{C}_f \Leftrightarrow y = \dots \Leftrightarrow x = \dots \Leftrightarrow M'(y; \dots) \in \mathcal{C}_g$$

En déduire la preuve de la conjecture émise à la question 1.

3 Résoudre dans $[0; +\infty[$ les équations suivantes :

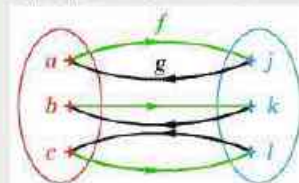
a. $x^2 = 49$ b. $\sqrt{x} = 9$ c. $\sqrt{x} = 16$ d. $x^2 = 5$

Objectif

Relier les courbes représentatives d'une fonction et de sa fonction réciproque.

Info

Les fonctions f et g sont dites réciproques l'une de l'autre.



Situation 1 Mettre en relation des produits et des sommes

À la fin de la Renaissance, avec les avancées scientifiques et techniques, le monde connaît une explosion de découvertes : navigation, astronomie, etc. Mais les calculs, effectués à la main, sont longs et fastidieux.

1 On suppose connue la table suivante des valeurs de $1,1^n$, pour les entiers n allant de 0 à 13 (les résultats sont arrondis à 10^{-5}).

| | | | | | | | |
|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| $1,1^n$ | 1 | 1,1 | 1,21 | 1,331 | 1,4641 | 1,61051 | 1,77156 |
| n | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| $1,1^n$ | 1,94872 | 2,14359 | 2,35795 | 2,59374 | 2,85312 | 3,13843 | 3,45227 |

a. On souhaite calculer le produit $1,331 \times 1,4641$ par simple lecture du tableau, sans poser l'opération. Expliquer le raisonnement suivant :

$$1,331 \times 1,4641 = 1,1^3 \times 1,1^4 = 1,1^{3+4} = 1,1^7 \approx 1,94872$$

b. Donner de même, à l'aide de la table, la valeur arrondie de $1,77156 \times 1,94872$ et de $1,331 \times 2,14359$. Vérifier à la calculatrice.

2 L'idée de remplacer les produits par des sommes commence donc à émerger. En 1614, l'écossois John Neper publie son traité *Mirifici logarithmorum canonicis descriptio* (De la merveilleuse règle des logarithmes) et révolutionne les techniques calculatoires. L'anglais Henry Briggs améliore le procédé et publie en 1624 dans *Arithmetica logarithmica* de nouvelles tables de logarithmes. Celles-ci furent très vite adoptées et utilisées jusqu'au milieu du xx^e siècle, les calculatrices devenant plus efficaces.

a. Observer les valeurs de $\log(1)$, $\log(10)$, $\log(100)$ et $\log(1000)$. Expliquer pourquoi les logarithmes de Briggs sont qualifiés de « décimaux ».

b. Lire les valeurs de $\log(2)$ et $\log(3)$, puis calculer leur somme à la main. Le logarithme de quel entier retrouve-t-on ?

c. Mêmes questions avec $\log(2)$ et $\log(4)$, puis $\log(2)$ et $\log(5)$.

d. Pour $a > 0$ et $b > 0$, conjecturer l'expression de $\log(a) + \log(b)$.

e. À l'aide des extraits ci-contre, déterminer la valeur du produit 114×786 en calculant une somme.

| | | | |
|-----|---------------|-------|---------------|
| 114 | 2,05690.48513 | 89601 | 4,95231.28567 |
| | | 89602 | 4,95231.77036 |
| 786 | 2,89542.25460 | 89603 | 4,95232.25505 |
| | | 89604 | 4,95232.73974 |
| | | 89605 | 4,95233.22442 |

Objectif

Mettre en relation des progressions géométriques et arithmétiques. Observer la relation fonctionnelle vérifiée par les fonctions logarithmes.

Info

En termes actuels, on met en relation des suites géométriques et arithmétiques.

Info

Le terme logarithme provient de « logos » (la raison, le rapport) et de « arithmos » (le nombre).

| Nu. | Logarithmi |
|-------|---------------|
| 1 | 0,00000.00000 |
| 2 | 0,30102.99957 |
| 3 | 0,47712.12547 |
| 4 | 0,60205.99913 |
| 5 | 0,69897.00043 |
| 6 | 0,77815.12504 |
| 7 | 0,84509.80400 |
| 8 | 0,90308.99870 |
| 9 | 0,95424.25094 |
| 10 | 1,00000.00000 |
| 100 | 2,00000.00000 |
| 1 000 | 3,00000.00000 |

Extrait de la table des logarithmes de Briggs.

➔ Voir exercice n° 113

Situation 2 Quadrature de l'hyperbole

Les déterminations d'aire sont des problèmes mathématiques très anciens. On s'intéresse ici à la **quadrature de l'hyperbole** : la détermination de l'aire du domaine délimité par l'hyperbole et une de ses asymptotes.

On note f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$, de courbe représentative \mathcal{H} et, pour tout réel $a \geq 1$, $\mathcal{A}(a)$ l'aire du domaine compris entre \mathcal{H} , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = a$.

- 1 a. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, tracer la courbe \mathcal{H} .
- b. En utilisant l'outil *Inspecteur de fonction*, compléter le tableau de valeurs suivant par pas de 1, en arrondissant à 10^{-4} .

| | | | | |
|------------------|---|--------|-----|--------|
| a | 1 | 2 | ... | 20 |
| $\mathcal{A}(a)$ | 0 | 0,6931 | ... | 2,9957 |

- 2 En 1647, Grégoire de Saint-Vincent affirme qu'à des abscisses en progression géométrique correspondent des aires hyperboliques en progression arithmétique, c'est-à-dire pour tous réels $a \geq 1$ et $b \geq 1$, on a :

$$\mathcal{A}(a \times b) = \mathcal{A}(a) + \mathcal{A}(b)$$

Vérifier son affirmation sur le tableau de la question 1.

Objectif

Découvrir une deuxième approche historique de la fonction logarithme.



➤ Voir exercice n° 120

➤ Voir Thème 5 exercice n° 86

Situation 3 Définir la fonction logarithme népérien

La notion de fonction est relativement récente : ce n'est qu'au XVIII^e siècle, avec Euler, qu'on amorce une réelle définition. À l'époque, une fonction est définie par son expression analytique, sous forme de formule.

Ainsi, en 1748, dans son ouvrage *Introduction à l'analyse infinitésimale*, Euler définit la fonction exponentielle en posant, pour tout réel z :

$$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1 \times 2} + \frac{z^3}{1 \times 2 \times 3} + \dots$$

Il fait alors le lien avec une autre fonction et écrit l'extrait suivant, où le réel a est strictement positif.

« Soit donc $y = a^z$, y sera une certaine fonction de z [...]. On peut conclure de chaque valeur de z , celle de y ; réciproquement ayant pris pour y une valeur quelconque positive, on conçoit qu'il existe pour z un nombre convenable pour que $a^z = y$; cette valeur de z , en tant qu'elle peut être regardée comme une fonction de y , s'appelle ordinairement le LOGARITHME de y . [...] le logarithme d'un nombre y n'est autre chose que l'exposant de la puissance a^z égale à ce nombre y . On a coutume d'indiquer le logarithme du nombre y de cette manière ly . Conséquemment, si $a^z = y$, alors $z = ly$. »

On choisit $a = \exp(1) = e$.

- 1 On considère un réel $y > 0$.
 - a. Justifier l'affirmation d'Euler surlignée en jaune dans le texte précédent.
 - b. Le réel z obtenu à la question précédente est-il unique ? En déduire la justification de l'extrait surligné en vert.
 - c. Pour quelle raison Euler impose-t-il la condition $y > 0$?

2 Euler écrit à la suite de l'extrait donné : « le logarithme du produit de deux nombres est égal à la somme des logarithmes des facteurs. » Démontrer ce résultat.

Objectif

Introduire la fonction logarithme comme fonction réciproque de la fonction exponentielle.

Info

Les logarithmes sont historiquement définis avant la fonction exponentielle. Depuis, le logarithme défini par Euler pour $a = e$, et qu'il appelle logarithme hyperbolique (en lien avec l'hyperbole), s'appelle **logarithme népérien**, en hommage à Neper, et se note \ln .

Info

Avec les notations actuelles, la propriété ci-contre s'écrit, pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$:

$$\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$$

1 La fonction logarithme népérien

a Fonction réciproque d'une fonction

Le théorème des valeurs intermédiaires permet de définir une nouvelle fonction à partir d'une fonction connue.

Propriété et définition. Soient I et J des intervalles de \mathbb{R} .

Si $f: I \rightarrow J$ est une **fonction continue et strictement monotone** sur I , et d'**intervalle-image** J , alors, pour tout réel $a \in J$, il existe un unique réel $b \in I$ tel que $f(b) = a$.

La fonction $g: J \rightarrow I$ qui au réel a associe le réel b est appelée **la fonction réciproque** de f . Pour tous $a \in J$ et $b \in I$, on a $a = f(b) \Leftrightarrow b = g(a)$.

Interprétation graphique

Dans un repère orthonormé, les courbes représentatives de ces deux fonctions sont symétriques par rapport à la droite Δ d'équation $y = x$.

b La fonction logarithme népérien

La fonction exponentielle est définie sur \mathbb{R} et a pour intervalle-image $]0; +\infty[$. Elle est continue et strictement croissante sur \mathbb{R} : elle admet donc une fonction réciproque.

Définition. Pour tout nombre réel $a > 0$, il existe un unique nombre réel b qui vérifie $e^b = a$. Le réel b est appelé **logarithme népérien** de a et noté $\ln(a)$. On a donc : $\ln(a) = b \Leftrightarrow a = e^b$.

La **fonction logarithme népérien**, notée **ln**, est la fonction qui, à tout nombre réel $x > 0$, associe le nombre réel $\ln(x)$.

Remarques

- Pour simplifier, on note parfois $\ln x$ au lieu de $\ln(x)$.
- Par abus de langage, on parle souvent de « fonction logarithme » au lieu de « fonction logarithme népérien ».

Valeurs particulières

$e^0 = 1$ et $e^1 = e$, on en déduit que $\ln(1) = 0$ et que $\ln(e) = 1$.

La courbe représentative de la fonction **ln** est obtenue par symétrie de la courbe de la fonction **exp**. On en déduit les propriétés suivantes.

Propriétés

- La fonction logarithme népérien est **continue** sur $]0; +\infty[$.
- $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$
- Pour tout réel $x > 0$, $e^{\ln x} = x$
- Pour tout réel y , $\ln(e^y) = y$

Interprétation graphique

La courbe représentative de la fonction logarithme admet une **asymptote verticale** d'équation $x = 0$.

Application

La fonction logarithme permet de résoudre des équations comportant des exponentielles, et inversement.

Pour tout réel x et tout réel $y > 0$, on a l'équivalence : $e^x = y \Leftrightarrow x = \ln y$.

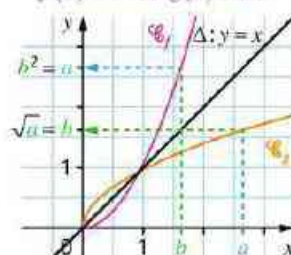
Par exemple, $e^x - 4 = 0 \Leftrightarrow e^x = 4 \Leftrightarrow x = \ln 4$

$$\ln x - 5 = 0 \Leftrightarrow \ln x = 5 \Leftrightarrow x = e^5$$

Exemple

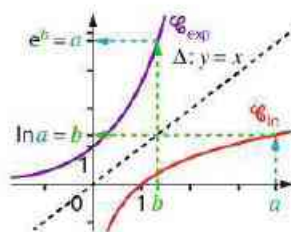
On considère les fonctions f et g définies sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 \text{ et } g(x) = \sqrt{x}$$



Les fonctions f et g sont réciproques l'une de l'autre.

📖 Voir Situation 3 p.101



Remarque

Le logarithme d'un réel négatif n'est pas défini, mais le logarithme d'un réel strictement positif peut être négatif.

| | |
|---------------|---------------|
| $\ln(0)$ | Erreur |
| $\ln(-2)$ | Erreur |
| $\ln(0,5)$ | Erreur |
| $\ln(0,0002)$ | -8,6931471806 |
| | -8,517193191 |

Exemples

- $e^{\ln 2} = 2$
- $\ln(e^5) = 5$
- $\ln(e^{-10}) = -10$

| | |
|----------------|-----|
| $\ln(1)$ | 0 |
| $e^{\ln(7)}$ | 7 |
| $\ln(e^{1,2})$ | 1,2 |
| $\ln(e)$ | 1 |



1 Exploiter les courbes de fonctions réciproques

Énoncé On s'intéresse aux fonctions **logarithme** et **exponentielle** et on note respectivement \mathcal{C}_{\ln} et \mathcal{C}_{\exp} leurs courbes représentatives dans un repère orthonormé.

1. a. À l'aide de la calculatrice, compléter le tableau de valeurs ci-contre. Arrondir à 10^{-2} .

b. À l'aide de la question a., compléter le tableau de valeurs de la fonction logarithme ci-contre. Arrondir à 10^{-2} .

c. À l'aide des tableaux de valeurs, construire point par point les courbes \mathcal{C}_{\exp} et \mathcal{C}_{\ln} dans un repère orthonormé.

2. a. Déterminer l'équation réduite de la tangente T à la courbe \mathcal{C}_{\exp} au point A d'abscisse 1.

b. En déduire que la tangente D à la courbe \mathcal{C}_{\ln} au point B d'abscisse e passe par l'origine du repère.

c. Tracer les droites D et T sur le graphique de la question 1.

| | | | | | | | | | |
|-----------|----|------|----|------|---|-----|---|-----|---|
| x | -2 | -1,5 | -1 | -0,5 | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 |
| $\exp(x)$ | | | | | | | | | |
| x | | | | | | | | | |
| $\ln x$ | -2 | -1,5 | -1 | -0,5 | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 |

Solution

1. a. On obtient le tableau suivant.

| | | | | | | | | | |
|-----------|------|------|------|------|---|------|------|------|------|
| x | -2 | -1,5 | -1 | -0,5 | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 |
| $\exp(x)$ | 0,14 | 0,22 | 0,37 | 0,61 | 1 | 1,65 | 2,72 | 4,48 | 7,39 |

b. La fonction logarithme est la fonction réciproque de la fonction exponentielle. On utilise donc l'équivalence $\ln(a) = b \Leftrightarrow a = e^b$.

| | | | | | | | | | |
|----------|------|------|------|------|---|------|------|------|------|
| x | 0,14 | 0,22 | 0,37 | 0,61 | 1 | 1,65 | 2,72 | 4,48 | 7,39 |
| $\ln(x)$ | -2 | -1,5 | -1 | -0,5 | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 |

c. On obtient le graphique ci-contre.

2. a. La tangente T admet pour équation : $y = \exp'(1)(x-1) + \exp(1)$.

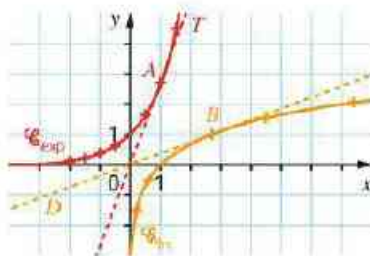
Autrement dit, $y = e(x-1) + e$ soit :

$$y = ex - e + e = ex$$

On en déduit que T passe par l'origine du repère.

b. On sait que $\exp(1) = e \Leftrightarrow \ln(e) = 1$.

Le point $B(e; 1)$ est le symétrique du point $A(1; e)$ par la symétrie axiale par rapport à la première bissectrice d'équation $y = x$. Cette symétrie transforme la tangente T à \mathcal{C}_{\ln} en A , qui passe par l'origine, en la tangente D à \mathcal{C}_{\exp} en B , qui passe aussi par l'origine du repère.



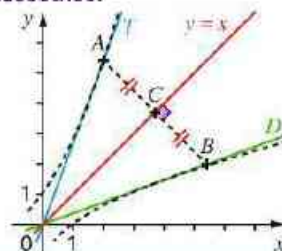
Point méthode

1. a. Pour compléter le tableau, on utilise le menu TABLE de la calculatrice :

| X | Y1 |
|------|--------|
| -2 | 0.1353 |
| -1.5 | 0.2231 |
| -1 | 0.3679 |
| -0.5 | 0.6065 |
| 0 | 1 |
| 0.5 | 1.5487 |
| 1 | 2.7183 |
| 1.5 | 4.4817 |
| 2 | 7.3891 |

Point méthode

1. b. et 2. On utilise la symétrie axiale par rapport à la première bissectrice.



J'applique

1 On rappelle le tableau des valeurs remarquables.

1. Justifier que la fonction cosinus admet

| | | | | | |
|----------|---|----------------------|----------------------|-----------------|-----------------|
| x | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
| $\cos x$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |

une fonction réciproque sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

2. À l'aide du tableau des valeurs et en utilisant la droite d'équation $y = x$, construire point par point la courbe de la fonction réciproque de la fonction cosinus.

2 **Vrai ou faux ?**

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elles sont vraies ou fausses. On justifiera les réponses en s'aidant des courbes représentatives.

1. $\ln e = 0$

2. L'équation $\ln x = -1$ n'admet pas de solution dans l'intervalle $]0; +\infty[$.

3. $\ln x = -3 \Leftrightarrow x = -e^3$

4. $e^x = 5 \Leftrightarrow x = \ln 5$

2 Étude de la fonction logarithme

a Dérivée et primitive

Propriété La fonction logarithme népérien, définie sur $]0; +\infty[$, est dérivable sur cet intervalle et, pour tout nombre réel $x > 0$, on a : $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.



Démonstration

On considère la fonction f définie, pour tout $x > 0$, par $f(x) = e^{\ln x}$.

f est de la forme e^u , où u est la fonction \ln , dérivable sur $]0; +\infty[$.

Donc f est dérivable sur $]0; +\infty[$. Or $(e^u)' = u'e^u$.

Donc, pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = \ln'(x) \times e^{\ln x}$.

Comme $e^{\ln x} = x$, on en déduit que, pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = \ln'(x) \times x$.

Par ailleurs, $f(x) = e^{\ln x} = x$, donc, pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = 1$.

On obtient donc $1 = \ln'(x) \times x$; et comme $x > 0$, on a : $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

Propriété (admise) Si u est une fonction définie, dérivable et strictement positive sur un intervalle I , alors la fonction définie sur I par $x \mapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur I et, pour tout réel x de I , on a : $(\ln(u))'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

Conséquences

- La fonction logarithme est la primitive de la fonction inverse qui s'annule en 1.
- Si u est une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I , alors la fonction $\ln(u)$ est une primitive de la fonction $\frac{u'}{u}$ sur I .

b Sens de variations et signes

Propriété La fonction logarithme est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

On sait par ailleurs que $\ln 1 = 0$, on déduit la propriété suivante.

Propriété La fonction logarithme népérien s'annule pour $x = 1$; elle est négative sur $]0; 1[$ et positive sur $]1; +\infty[$.

Propriété La fonction logarithme népérien est concave sur $]0; +\infty[$.



Démonstration

Pour tout réel $x > 0$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$, donc $\ln''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$.

La dérivée seconde est négative, donc la fonction \ln est concave sur $]0; +\infty[$.

Exemple

On note \mathcal{C}_{\ln} la courbe représentative de la fonction \ln .

On a $\ln 1 = 0$ et $\ln' 1 = \frac{1}{1} = 1$. La tangente T_1 au point A d'abscisse 1 à la courbe \mathcal{C}_{\ln} a pour équation : $y = 1(x - 1) + 0 = x - 1$.

On a $\ln e = 1$ et $\ln' e = \frac{1}{e}$. La tangente T_e au point B d'abscisse e à la courbe \mathcal{C}_{\ln} a pour équation : $y = \frac{1}{e}(x - e) + 1 = \frac{1}{e}x - 1 + 1 = \frac{1}{e}x$.

Comme la fonction \ln est concave, T_1 et T_e sont au-dessus de \mathcal{C}_{\ln} .

Exemple

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = 3 \ln x + x^2 - 1$$

$$\text{On a } f'(x) = 3 \times \frac{1}{x} + 2x = \frac{3 + 2x^2}{x}.$$

Remarque

On admet que la fonction \ln est dérivable sur $]0; +\infty[$.

Exemple

Soit h la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$h(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}, \quad h \text{ est de la forme } \frac{u'}{u}$$

avec $u(x) = x^2 + 1$, qui est strictement positive. Une primitive de h sur \mathbb{R} est définie par :

$$H(x) = \ln(x^2 + 1)$$

Tableau de variations

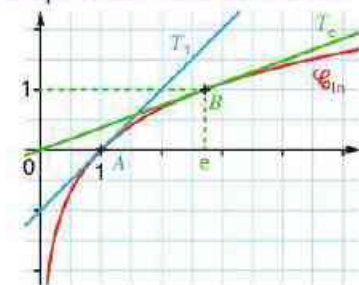
| | | |
|-------------------------|-----------|-----------|
| x | 0 | $+\infty$ |
| $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ | | + |
| $\ln(x)$ | $-\infty$ | $+\infty$ |

Tableau de signes

| | | | |
|----------|---|---|-----------|
| x | 0 | 1 | $+\infty$ |
| $\ln(x)$ | | - | + |

La fonction \ln est croissante et concave, sa représentation graphique croît « de moins en moins vite ».

On parle de croissance ralentie.



2 Étudier une fonction comportant un logarithme

- Énoncé** On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x + 1 + \ln x$.
On note f' la fonction dérivée, f'' la dérivée seconde et \mathcal{C} la courbe représentative de f .
- Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$. Interpréter graphiquement si possible.
 - Étudier les variations de la fonction f sur $]0; +\infty[$.
 - a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[0,2; 0,5]$.
Donner une valeur approchée de α arrondie au millième.
b. En déduire le signe de $f(x)$ sur $]0; +\infty[$.
 - a. Déterminer l'équation de la tangente T à \mathcal{C} au point d'abscisse 1.
b. Étudier la convexité de la fonction f sur $]0; +\infty[$.
c. En déduire la position de la courbe \mathcal{C} par rapport à T .

Solution

1. Avec $\lim_{x \rightarrow 0} (x+1) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$, par somme, on a $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$.

La courbe \mathcal{C} admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$, par somme, on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

2. Pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = 1 + \frac{1}{x}$, qui est **strictement positif** comme somme de termes strictement positifs.

La fonction f est donc **croissante sur $]0; +\infty[$** .

3 a. Sur $[0,2; 0,5]$, la fonction f est continue, strictement croissante et d'intervalle-image $[f(0,2); f(0,5)]$.

Or, $f(0,2) \approx -0,4$ et $f(0,5) \approx 0,8$ donc $0 \in [f(0,2); f(0,5)]$.

Par la **propriété des valeurs intermédiaires**, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0,2; 0,5]$.

Par balayage du tableau de valeurs, on obtient $\alpha \approx 0,278$.

b. La fonction f est **strictement croissante et s'annule pour $x = \alpha$** . Elle est donc **négative sur $]0; \alpha[$ et positive sur $]\alpha; +\infty[$** .

4 a. La tangente T admet pour équation $y = f'(1)(x-1) + f(1)$.

Or $f'(1) = 1 + \frac{1}{1} = 2$ et $f(1) = 1 + 1 + \ln 1 = 2$.

Ainsi T admet pour équation : $y = 2(x-1) + 2 = 2x$.

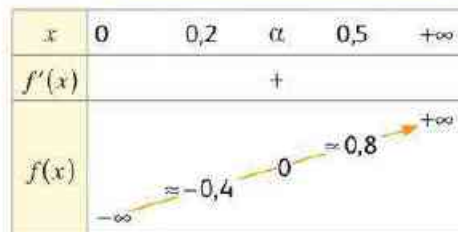
b. Pour tout réel $x > 0$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$, donc **$f''(x) < 0$** .

La fonction f est donc **concave sur $]0; +\infty[$** .

c. f est concave donc la tangente T est au-dessus de la courbe \mathcal{C} .

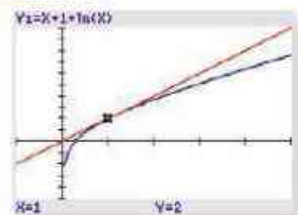
Point méthode

2. f est monotone, donc il n'est pas nécessaire de dresser le tableau de variations. Celui-ci permet néanmoins de vérifier la cohérence des limites et aide pour l'application de la propriété des valeurs intermédiaires.



Point méthode

On peut vérifier la cohérence des résultats (**variations, signes, concavité**) à l'aide de la calculatrice.



J'applique

3 Soit f la fonction définie sur $[0,5; 4]$ par :

$$f(x) = x^2 - 6 \ln x$$

On note \mathcal{C} sa courbe.

- Retrouver les résultats ci-contre obtenus à l'aide d'un logiciel de calcul formel.
- Étudier les variations de f .
- On note T la tangente à \mathcal{C} au point d'abscisse 1. Étudier la position relative de T et de \mathcal{C} .

```

1 f(x):=x^2-6ln(x)
  → f'(x) := x^2 - 6 ln(x)
2 Factoriser(Dérivée(f'(x)))
  → 2 · (x^2 - 3)
  x
3 Factoriser(Dérivée(Dérivée(f'(x))))
  → 2 · (x^2 + 3)
  x^2
    
```

4 Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \ln(e^x + 1)$$

- Justifier que la fonction f est définie sur \mathbb{R} .
- Étudier le sens de variations de f .
- Montrer que la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 admet pour équation :

$$y = \frac{1}{2}x + \ln 2$$

- Vérifier les résultats précédents à l'aide de la calculatrice.

3 Propriétés algébriques

a Relation fonctionnelle

Propriété Pour tous nombres réels $x > 0$ et $y > 0$, on a :

$$\ln(x \times y) = \ln x + \ln y$$

Démonstration

Soient x et y deux réels strictement positifs.

D'une part, par définition, on a : $e^{\ln(x \times y)} = x \times y$

D'autre part : $e^{\ln x + \ln y} = e^{\ln x} \times e^{\ln y} = x \times y$

On a donc l'égalité : $e^{\ln(x \times y)} = e^{\ln x + \ln y}$

Par propriété de l'exponentielle, on en déduit donc que $\ln(x \times y) = \ln x + \ln y$.

Propriété Pour tous nombres réels $x > 0$ et $y > 0$, on a :

$$\textcircled{1} \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x \quad \text{et} \quad \textcircled{2} \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$$

Démonstration de la propriété ①

Soit x un réel strictement positif.

D'une part, par définition, on a : $\ln\left(x \times \frac{1}{x}\right) = \ln 1 = 0$.

D'autre part, en utilisant la relation fonctionnelle : $\ln\left(x \times \frac{1}{x}\right) = \ln\left(\frac{1}{x}\right) + \ln(x)$.

On a donc l'égalité $\ln\left(\frac{1}{x}\right) + \ln(x) = 0$. Autrement dit, $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$.

b Relation $\ln(q^n) = n \ln q$

D'après la relation fonctionnelle, pour tout nombre réel $x > 0$ et pour tout entier naturel n , on a :

$$\ln(x^n) = \ln(x \times x \times \dots \times x) = \ln x + \ln x + \dots + \ln x = n \times \ln(x)$$

Cette égalité se généralise à tout entier n relatif.

Propriété Pour tout nombre réel $x > 0$ et pour tout entier relatif n , on a :

$$\ln(x^n) = n \times \ln(x)$$

Conséquence : recherche d'un seuil

Soient k et q des réels strictement positifs avec $q \neq 1$.

Les propriétés de la fonction logarithme permettent de déterminer le plus petit exposant entier n tel que $q^n > k$ ou $q^n < k$.

On cherche le plus petit entier n tel que :

$$1,2^n > 10$$

La fonction \ln étant strictement croissante, on a :

$$1,2^n > 10 \Leftrightarrow \ln(1,2^n) > \ln 10$$

Soit : $n \times \ln 1,2 > \ln 10$

Or comme $1,2 > 1$, $\ln 1,2 > 0$

$$\text{Donc } n > \frac{\ln 10}{\ln 1,2}$$

Or $\frac{\ln 10}{\ln 1,2} \approx 12,6$ et n est un entier naturel donc $n \geq 13$.

Le plus petit entier cherché est 13.

$$0,8^n < 0,1$$

La fonction \ln étant strictement croissante, on a :

$$0,8^n < 0,1 \Leftrightarrow \ln(0,8^n) < \ln 0,1$$

Soit : $n \times \ln 0,8 < \ln 0,1$

Or comme $0,8 < 1$, $\ln 0,8 < 0$

$$\text{Donc } n > \frac{\ln 0,1}{\ln 0,8}$$

Or $\frac{\ln 0,1}{\ln 0,8} \approx 10,3$ et n est un entier naturel donc $n \geq 11$.

Le plus petit entier cherché est 11.

Info

« L'invention du logarithme, en réduisant le temps passé au calcul de quelques mois à quelques jours, double pour ainsi dire la vie des astronomes. »

Pierre-Simon de Laplace

📌 Voir situation 1 p. 100

Exemples

$$\ln 0,5 + \ln 2 = \ln(0,5 \times 2) = \ln 1 = 0$$

$$\ln(4e) = \ln 4 + \ln e = \ln 4 + 1$$

$$\ln\left(\frac{1}{e}\right) = -\ln e = -1$$

$$\ln 10 - \ln 5 = \ln\left(\frac{10}{5}\right) = \ln 2$$

📌 Voir exercice Démo ② n° 36

$$\begin{array}{l} \ln(2^3) \\ 3 \times \ln 2 \\ \ln(e^2) \end{array} \quad \begin{array}{l} 2,079441542 \\ 2,079441542 \end{array}$$

Remarque

On peut vérifier les résultats en tabulant les valeurs à l'aide de la calculatrice.

Pour $1,2^n > 10$ Pour $0,8^n < 0,1$

| X | Y ₁ | X | Y ₁ |
|----|----------------|----|----------------|
| 5 | 2,985 | 6 | 0,2621 |
| 7 | 3,5832 | 7 | 0,2097 |
| 8 | 4,2998 | 8 | 0,1678 |
| 9 | 5,1598 | 9 | 0,1342 |
| 10 | 6,1917 | 10 | 0,1074 |
| 11 | 7,4301 | 11 | 0,0855 |
| 12 | 8,9161 | 12 | 0,0687 |
| 13 | 10,699 | 13 | 0,055 |
| 14 | 12,839 | 14 | 0,044 |
| 15 | 15,407 | 15 | 0,0352 |
| 16 | 18,488 | 16 | 0,0281 |



3 Résoudre une équation, une inéquation

Énoncé 1. Résoudre les équations suivantes.

a. $2e^x - 1 = 0$ dans \mathbb{R} b. $4\ln x + 16 = 0$ dans $]0; +\infty[$

2. Pour tout réel $x > 0$, on pose $A(x) = \ln(3x) + \ln\left(\frac{x}{3}\right) + \ln e^2$.

- a. Montrer que $A(x) = 2\ln x + 2$.
b. En déduire les solutions de l'équation $A(x) = 0$.

3. Résoudre les inéquations suivantes.

a. $-3e^x + 6 < 0$ dans \mathbb{R} b. $3 - \ln x \geq 0$ dans $]0; +\infty[$

Solution

1. a. $2e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

La solution de l'équation est $\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2$.

b. $4\ln x + 16 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -\frac{16}{4} \Leftrightarrow \ln x = -4 \Leftrightarrow x = e^{-4}$

La solution de l'équation est e^{-4} .

2. a. En appliquant les propriétés algébriques du logarithme, on obtient :

$$A(x) = \ln(3x) + \ln\left(\frac{x}{3}\right) + \ln e^2 = \ln 3 + \ln x + \ln x - \ln 3 + 2\ln e$$

Autrement dit $A(x) = \ln x + \ln x + 2 \times 1 = 2\ln x + 2$.

b. En utilisant l'expression trouvée à la question 2. a., on obtient :

$$A(x) = 0 \Leftrightarrow 2\ln x + 2 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1}$$

L'équation $A(x) = 0$ admet une solution : e^{-1} .

3. a. $-3e^x + 6 < 0 \Leftrightarrow -3e^x < -6 \Leftrightarrow e^x > \frac{-6}{-3} \Leftrightarrow e^x > 2 \Leftrightarrow e^x > e^{\ln 2}$

Or la fonction exponentielle est strictement croissante sur \mathbb{R} donc :

$$e^x > e^{\ln 2} \Leftrightarrow x > \ln 2$$

On a donc : $S =]\ln 2; +\infty[$.

b. $3 - \ln x \geq 0 \Leftrightarrow -\ln x \geq -3 \Leftrightarrow \ln x \leq 3 \Leftrightarrow \ln x \leq \ln e^3$

Or la fonction logarithme est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ donc :

$$\ln x \leq \ln e^3 \Leftrightarrow 0 < x \leq e^3$$

On a donc : $S =]0; e^3]$.

Point méthode

1. Dans une équation comprenant une seule exponentielle ou un seul logarithme, on l'isole. Puis on utilise l'équivalence, pour x réel et $y > 0$:

$$e^x = y \Leftrightarrow x = \ln y$$

Point méthode

2. Il est parfois nécessaire de transformer l'équation en utilisant les propriétés algébriques du logarithme avant de la résoudre.

Point méthode

3. Pour résoudre une inéquation comprenant une seule exponentielle ou un seul logarithme, on l'isole puis on utilise le fait que les fonctions sont strictement croissantes.

$$e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$$

$$\ln a < \ln b \Leftrightarrow 0 < a < b$$

Attention : la fonction \ln n'est définie que sur $]0; +\infty[$.

J'applique

5 1. Résoudre dans $]0; +\infty[$ les équations suivantes.

a. $3\ln x = 1$ b. $\ln x (\ln x - 4) = 0$

2. Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes.

a. $5e^{-x} - 1 = 0$ b. $(e^x + 3)(e^x - 7) = 0$

6 Résoudre les équations suivantes.

1. $\ln(x^2) + 4\ln x - 1 = 0$ dans $]0; +\infty[$

2. $\ln(x-1) + \ln(x-3) = 0$ dans $]3; +\infty[$

7 Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = (x+2)\ln x$$

1. Déterminer le (ou les) antécédent(s) de 0 par f .

2. Dresser le tableau de signes de f .

8 1. Soit u la suite définie, pour tout entier naturel n par : $u_n = 5 + 3 \times 2^n$.

Déterminer, par le calcul, le plus petit entier naturel n , tel que $u_n \geq 1000$.

2. Soit v la suite définie, pour tout entier naturel n par :

$$v_n = 5 + 3 \times 0,5^n$$

Déterminer, par le calcul, le plus petit entier naturel n , tel que $v_n \leq 5,01$.

3. Soit w la suite définie, pour tout entier naturel n par :

$$w_n = 5 - 3 \times 0,5^n$$

Déterminer, par le calcul, le plus petit entier naturel n , tel que $w_n \geq 4,999$.

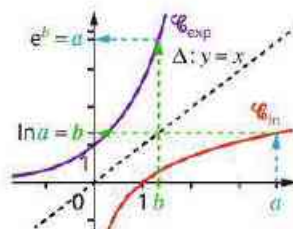
La fonction logarithme népérien

La fonction \ln est définie sur $]0; +\infty[$ comme **fonction réciproque de la fonction exponentielle**.

Autrement dit, pour tout $a > 0$ et tout réel b , on a : $\ln a = b \Leftrightarrow a = e^b$.

Pour tout $x > 0$, $e^{\ln(x)} = x$.

Pour tout réel y , $\ln(e^y) = y$.



Propriétés algébriques

Pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$ et, pour tout entier relatif n :

$$\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$$

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$$

$$\ln(x^n) = n \ln(x)$$

Équation et inéquation

Pour tous réels x et $y > 0$:

$$e^x = y \Leftrightarrow x = \ln y$$

$$\ln y = x \Leftrightarrow y = e^x$$

Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$:

$$\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$$

$$\ln a < \ln b \Leftrightarrow 0 < a < b$$

$f(x) = \ln(u(x))$

Soit u une fonction dérivable et **strictement positive** sur I .

• La fonction définie par $f(x) = \ln(u(x))$ est dérivable sur I et $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

• La fonction définie par $F(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ est une primitive de la fonction $f(x) = \ln(u(x))$.

Variations, signe et convexité

• La **fonction logarithme népérien** est définie, continue et dérivable sur $]0; +\infty[$.

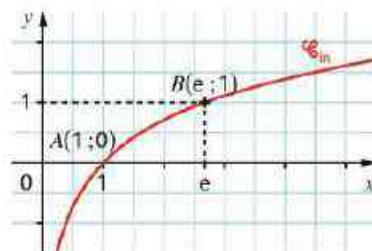
• $\ln 1 = 0$ et $\ln e = 1$

• Pour tout réel $x > 0$, on a $\ln' x = \frac{1}{x}$

• $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$; la courbe C_{\ln} admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$

| | | | | |
|-------------------------|-----------|---|-----|-----------|
| x | 0 | 1 | e | $+\infty$ |
| $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ | | | + | |
| $\ln(x)$ | $-\infty$ | 0 | 1 | $+\infty$ |



• Pour $0 < x < 1$, on a $\ln x < 0$.

Et pour $x > 1$, on a $\ln x > 0$.

• La fonction \ln est **concave** sur $]0; +\infty[$.



QCM

Pour chacune des questions, indiquer la (ou les) bonne(s) réponse(s).

[Voir corrigés](#)

| | a | b | c |
|--|--|--|------------------------------|
| 1. La fonction logarithme népérien est : | croissante sur $]0; +\infty[$ | positive sur $]0; +\infty[$ | convexe sur $]0; +\infty[$ |
| 2. La courbe représentative de la fonction logarithme népérien admet : | une asymptote verticale d'équation $x = 0$ | une asymptote horizontale d'équation $x = 0$ | un point d'inflexion |
| 3. Pour tout réel x tel que $0 < x < 1$: | $\ln x > 0$ | $\ln x < 0$ | $\ln x \leq 0$ |
| 4. $\ln 1 =$ | 0 | 1 | e |
| 5. $\ln e =$ | 0 | 1 | e |
| 6. $\ln\left(\frac{1}{e}\right) =$ | -1 | $\ln(-e)$ | $\ln e^{-1}$ |
| 7. Pour tout réel $x > 0$, on a $\ln(x^2) =$ | $(\ln x)^2$ | $\ln(2x)$ | $2\ln x$ |
| 8. $\ln(15) =$ | 2,71 | $\ln 5 + \ln 3$ | $\ln 5 \times \ln 3$ |
| 9. $A = 3\ln 2 + \ln 5 - 2\ln 10$ | $A < 0$ | $A = \ln(0,4)$ | $A = \ln(0,3)$ |
| 10. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + \ln x) =$ | $+\infty$ | $-\infty$ | 0 |
| 11. Si $f(x) = \ln(x^2 + 1)$, alors : | $f'(x) = \ln(2x)$ | $f'(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ | $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ |
| 12. Si $f(x) = x \ln x$, alors : | $f'(x) = 1 + \ln x$ | $f'(x) = \ln x$ | $f'(x) = \frac{1}{x}$ |

vrai

ou faux ?

Indiquer pour chaque affirmation si elle est vraie ou fausse. Justifier.

Partie A.

- Pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$, $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\ln x}{\ln y}$.
- Si $0 < a < b$, alors $\ln a < \ln b$.
- Pour tout réel $x > 0$, $\ln x > 0$.
- $5\ln e + \ln e^2 + 6\ln \frac{1}{e} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} (4x + 1 - \ln x) = -\infty$
- La tangente à la courbe de la fonction logarithme népérien au point d'abscisse e passe par l'origine.
- La fonction $g : x \mapsto \ln(3x + 1)$ est une primitive de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{3x + 1}$ sur $\left] -\frac{1}{3}; +\infty[$.

Partie B.

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 - 2\ln x$$

On note \mathcal{C} sa courbe représentative

- Pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = \frac{2(x-1)(x+1)}{x^2}$
- f admet un minimum sur $]0; +\infty[$.
- f est négative sur $]0; 1]$ puis positive sur $[1; +\infty[$.
- f est concave sur $]0; +\infty[$.
- La courbe \mathcal{C} passe par le point $(1; 2)$.
- La courbe \mathcal{C} admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

Automatismes transversaux

9 Effectuer les calculs suivants.

1. $\frac{1}{2} \times 13$

2. $\frac{1}{4} \times 32$

3. $\frac{1}{5} \times 75$

4. $0,8 \times 20$

5. $0,6 \times 30$

6. $0,3 \times 40$

10 Calculer dans chacun des cas suivants le taux d'évolution global après les différentes évolutions données.

1. Hausse de 10 % puis baisse de 10 %.

2. Baisse de 4 % puis hausse de 10 %.

3. Trois hausses successives de 6 %.

11 Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes.

1. $\frac{e^x + 3}{x^2 + 1} = 0$

2. $(x-2)(6x^2 + 2x - 8) = 0$

12 Dresser le tableau de signes de la fonction f .

1. $f(x) = (5x-2)e^x$ sur \mathbb{R}

2. $f(x) = (3-x)(x^2+x+1)$ sur \mathbb{R}

13 Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle donné.

1. $f(x) = 8x^3 + 6x^2 + 2x + 7$ sur \mathbb{R}

2. $f(x) = \frac{3}{x^2} + e^x$ sur $]0; +\infty[$

3. $f(x) = e^{2x-1} - 3$ sur \mathbb{R}

14 Montrer que F est une primitive de f sur \mathbb{R} .

1. $f(x) = (2x-3)e^{-x}$ et $F(x) = (-2x+1)e^{-x}$

2. $f(x) = (2x-1)(e^x+1)$ et $F(x) = x^2 - x + (2x-3)e^x$

15 Calculer la limite de (u_n) en $+\infty$ dans chaque cas.

1. $u_n = 4n^2 + 3n + 1$

2. $u_n = 3 \times 1,2^n + 1$

3. $u_n = (5n+1)(3-n)$

4. $u_n = 3 - 0,8^n$

16 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -3$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,95u_n + 1$.

Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = u_n - 20$.

Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

17 On donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction f . On note \mathcal{C} sa courbe représentative.

| | | | | | |
|--------|-----------|------|-----|-----|-----------|
| x | $-\infty$ | -1 | 4 | 7 | $+\infty$ |
| $f(x)$ | $+\infty$ | | 5 | | $+\infty$ |
| | | | | 2 | |
| | | | | | 1 |

Donner les limites de f aux bornes de son domaine de définition. Interpréter, si possible, graphiquement.

Automatismes du thème

18 Exprimer les nombres suivants en fonction de $\ln 2$.

1. $\ln 8 - \ln 16$

2. $\ln \frac{1}{32}$

3. $\ln 2^3 + 3 \ln 4$

4. $4 \ln(e^2) - e^{\ln 8} + \ln 2$

19 Justifier les résultats ci-contre obtenus à l'aide d'un logiciel de calcul formel.

| | |
|---|--|
| 1 | Simplifier $(\ln(x) + \ln(x+1))$ $\rightarrow \ln(x^2 + x)$ |
| 2 | Simplifier $(\ln(x^3) - \ln(x))$ $\rightarrow 2 \ln(x)$ |

20 Déterminer le signe de chacune des fonctions suivantes définies sur $]0; +\infty[$.

1. $f(x) = (2x+1)\ln x$

2. $f(x) = -x^2 \ln x$

21 Déterminer l'expression de la fonction dérivée de f sur l'intervalle I .

1. $f(x) = (2x+1)\ln x$ sur $I =]0; +\infty[$

2. $f(x) = \ln(2x-3)$ sur $I = \left] \frac{3}{2}; +\infty \right[$

22 Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle donné.

1. $f(x) = x^2 + 5x + 7 - \frac{2}{x}$ sur $]0; +\infty[$

2. $g(x) = \frac{1}{2x-1}$ sur $\left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$

3. $h(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$ sur \mathbb{R}

23 Calculer les limites suivantes.

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + \ln x)$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} + \ln x \right)$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x+1)(4 - \ln x)$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} (-2 \ln x - 1)$

24 Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = 2x + \ln x$$

1. Étudier les variations de f .

2. Étudier la convexité de f .

25 Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes.

1. $e^x - 4 = 0$

2. $2e^x - 6 = 8$

3. $(e^x + 1)(e^x - 5) = 0$

4. $e^{2x}(e^x - 3) = 0$

26 Résoudre dans $]0; +\infty[$ les équations suivantes.

1. $\ln x = 4$

2. $6 \ln x + 13 = 1$

3. $(x+2)\ln x = 0$

4. $(\ln x - 1)(\ln x + 1) = 0$

27 Dans chaque cas, déterminer, par le calcul, le plus petit entier naturel n vérifiant l'inégalité donnée.

1. $1,25^n > 100$

2. $1,1^n \geq 500$

3. $0,8^n \leq 0,02$

4. $0,5^n < 0,001$

Consolider les bases

28 Écrire les expressions suivantes sous la forme d'une exponentielle.

$$A = \frac{(e^x)^3 \times e^{-2x+1}}{e^{2x-3}} \quad B = \frac{e \times (e^{-x})^2}{e^{x-1} \times e^{3x}}$$

29 On définit les fonctions f et g sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Montrer que, pour tout réel x :

- $f(x)^2 - g(x)^2 = 1$
- $2f(x)^2 - 1 = f(2x)$
- $g(2x) = 2f(x) \times g(x)$

30 On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

- Quelle est la limite de e^x en $-\infty$? En déduire la limite de f en $-\infty$.
- a. Montrer que, pour tout réel x , $f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}$.
- Quelle est la limite de e^{-x} en $+\infty$? En déduire la limite de f en $+\infty$.
- Construire le tableau de variations complet de f .

31 On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = (x-2)e^x$$

Démontrer que la fonction f admet un minimum en 1. Préciser la valeur de ce minimum.

32 On considère la fonction f définie sur $[-5; 20]$ par :

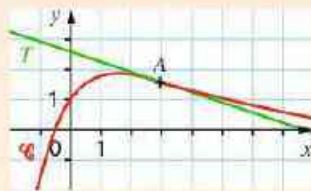
$$f(x) = xe^{-0,1x}$$

- Construire le tableau de signes de f sur $[-5; 20]$.
- Construire le tableau de variations de f sur $[-5; 20]$.
- Vérifier les résultats précédents à l'aide de la calculatrice.

33 On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = (2x+1)e^{-0,5x}$$

On note \mathcal{C} la courbe représentative de f et



T la tangente à la courbe \mathcal{C} au point d'abscisse 3.

- Étudier les variations de f sur \mathbb{R} .
- Étudier la convexité de f sur \mathbb{R} .
En déduire que la courbe \mathcal{C} admet un point d'inflexion, dont on précisera les coordonnées.
- a. Déterminer l'équation réduite de la droite T .
b. En utilisant la convexité de f , préciser les positions relatives de la courbe \mathcal{C} et de la droite T .

Connaître le cours

34 Deux diaporamas pour faire le point sur le cours.



35 QCM

Pour chacune des questions suivantes, indiquer la (ou les) bonne(s) réponse(s).

- $\ln 1$ est égal à :
a. 0 b. $\ln(1)$ c. e^0 d. 1
- $\ln e$ est égal à :
a. 0 b. $\ln(e)$ c. e^0 d. 1
- $e^{\ln 2}$ est égal à :
a. 2 b. $\ln e^2$ c. $\ln 2$ d. e^2
- $\ln e^2$ est égal à :
a. 2 b. $e^{\ln 2}$ c. $\ln 2$ d. e^2

Démo

36 Soient deux réels x et y strictement positifs.

- Rappeler les propriétés algébriques du logarithme d'un produit et du logarithme de l'inverse.
- En remarquant que $\frac{x}{y} = x \times \frac{1}{y}$, démontrer que :

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$$

37 Vrai ou faux ?

Pour chaque affirmation, préciser si elle est vraie ou fausse.

- $\ln 21 = \ln 7 \times \ln 3$
- $\ln 0,5 = \frac{1}{\ln 2}$
- $\ln 8 = 3 \ln 2$
- $\frac{\ln 16}{\ln 8} = \ln 2$
- $\ln(e^{-5}) = -5$
- $-2 \ln 3 = -\ln 9$

38 1. Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes.

a. $e^x - 5 = 0$ b. $4e^x - 2 = 0$

2. Résoudre dans $]0; +\infty[$ les équations suivantes.

a. $\ln x - 5 = 0$ b. $4 \ln x - 2 = 0$

39 Vrai ou faux ?

Pour chaque affirmation, préciser si elle est vraie ou fausse.

- La fonction inverse est une primitive de la fonction logarithme népérien sur $]0; +\infty[$.
- La dérivée de la fonction logarithme népérien est la fonction inverse.
- La fonction logarithme est croissante sur $]-\infty; +\infty[$.
- La fonction logarithme est positive sur $]0; +\infty[$.
- La fonction logarithme est concave $]0; +\infty[$.

40 Dans chacun des cas, comparer les nombres donnés.

- $\ln 2$ et $\ln 4,3$ 2. $\ln 0,6$ et $\ln 0,8$
- $\ln 1,4$ et $\ln e$ 4. $\ln 0,4$ et $\ln 1,3$

Travailler les capacités du thème

1 Exploiter les courbes de fonctions réciproques

41 Reprendre les questions de l'exercice 1 pour la fonction f définie sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \sin x$.

42 En utilisant les positions relatives des courbes représentatives de la fonction carré et de la fonction racine carrée, comparer les nombres donnés dans les cas suivants.

1. $a = 0,124$; $b = 0,124^2$ et $c = \sqrt{0,124}$

2. $a = 7,3$; $b = 7,3^2$ et $c = \sqrt{7,3}$

43 1. En remarquant que $2^2 = 4$ et $3^2 = 9$, justifier que $2 < \sqrt{7} < 3$.

2. Encadrer $\sqrt{13}$ entre deux entiers consécutifs.

44 On donne $e^2 \approx 7,4$ et $e^3 \approx 20,1$.

Donner une valeur approchée de $\ln 7$ et $\ln 20$.

Vérifier les résultats à l'aide d'une calculatrice.

45 En s'appuyant sur les courbes représentatives des fonctions exponentielle et logarithme, et sur la droite d'équation $y = x$, conjecturer une comparaison des réels x , $\ln x$ et e^x , pour tout réel $x > 0$.

Voir exercice n° 63

Info

L'inégalité obtenue permet de comparer les croissances des fonctions : le logarithme croît moins vite que la fonction identité, qui croît moins vite que l'exponentielle.

2 Étudier une fonction comportant un logarithme

46 QCM

Pour chacune des questions suivantes, indiquer la bonne réponse.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln 3x) =$ a. 0 b. $+\infty$ c. $-\infty$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} (-x + \ln 2x) =$ a. 0 b. $+\infty$ c. $-\infty$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + \ln 6x) =$ a. 0 b. $+\infty$ c. $-\infty$

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x - \ln x) =$ a. 0 b. $+\infty$ c. $-\infty$

5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x^2 + 1)) =$ a. 0 b. $+\infty$ c. $-\infty$

47 Déterminer les limites suivantes.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} (x + \ln x)$ 2. $\lim_{x \rightarrow 0} (3 - \ln x)$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x+1}$ 4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{10}{\ln x}$

48 Déterminer les limites suivantes.

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 3 \ln x)$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} ((1-x) \times \ln(x))$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - 4 \ln x)$

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2(6 - 2 \ln x))$

49 Soit f la fonction définie sur $]2; +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(4x - 8)$$

1. Justifier que f est définie sur $]2; +\infty[$.

2. On a obtenu ci-dessous la courbe représentative \mathcal{C} de f .

a. Quelles conjectures peut-on faire sur les limites de la fonction f aux bornes de son domaine de définition ?

b. Démontrer ces conjectures.



Pour les exercices **50** à **52**, déterminer l'expression de la fonction dérivée des fonctions f proposées, sans s'occuper de l'ensemble de définition.

50 1. $f(x) = 3 \ln x - 1$

2. $f(x) = 5 - 2 \ln x$

3. $f(x) = 2 \ln x - x + \frac{1}{x}$

4. $f(x) = x^2 - \ln x$

51 1. $f(x) = \ln(3x)$

2. $f(x) = 4 \ln(5x)$

3. $f(x) = \ln(2x) - 1$

4. $f(x) = \ln(2x - 1)$

52 1. $f(x) = x \ln x - x$

2. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

3. $f(x) = e^x \times \ln x$

4. $f(x) = \frac{e^x}{\ln x}$

Pour les exercices **53** et **54**, déterminer l'expression d'une primitive des fonctions f proposées, sans s'occuper de l'ensemble de définition.

53 1. $f(x) = \frac{1}{x} - 4x$

2. $f(x) = 3 - \frac{1}{x}$

3. $f(x) = \frac{2}{x} - x^2 + 1$

4. $f(x) = 2x - \frac{5}{x}$

54 1. $f(x) = \frac{3}{3x+1}$

2. $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

3. $f(x) = \frac{1}{5x+3}$

4. $f(x) = \frac{2}{x-1}$

55 Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = 2x + 3 + 4 \ln x$$

1. Calculer $f'(x)$.

2. Montrer que la fonction F définie sur $]0; +\infty[$ par $F(x) = x(x-1) + 4 \ln x$ est une primitive de f .

56 Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

- Calculer $f'(x)$.
- En remarquant que, pour $x > 0$, $\frac{\ln x}{x} = \frac{1}{x} \times \ln x$, déterminer une primitive de f .
- Déterminer la primitive de f s'annulant en e.

57 Démontrer les résultats ci-dessous obtenus à l'aide d'un logiciel de calcul formel.

| | |
|---|--|
| 1 | $f(x) = x^2 - 3x + 4 + \ln(x)$ → $f(x) := x^2 + 4 \ln(x) - 3x + 4$ |
| 2 | Factoriser(Dérivée(f(x))) → $\frac{2x^2 - 3x + 4}{x}$ |
| 3 | Factoriser(Dérivée(Dérivée(f(x)))) → $2 \cdot \frac{x^2 - 2}{x^2}$ |
| 4 | Intégrale(f(x)) → $\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4(x \ln(x) - x) + x + c_1$ |

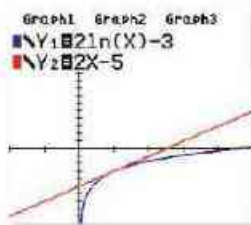


La ligne 4 permet de déterminer l'expression des primitives de la fonction f .

➔ Voir Thème 5

58 On a obtenu sur une calculatrice la copie d'écran ci-dessous.

- Quelle conjecture peut-on faire sur la droite d'équation $y = 2x - 5$ par rapport à la courbe représentative de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 2\ln x - 3$?
- Démontrer la conjecture.



59 QCM

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(2x)$$

Pour chacune des questions suivantes, indiquer la bonne réponse.

- $f(0,5) =$ a. 0 b. $\ln 2$ c. 1
- $f(e) =$ a. 1 b. $\ln 2 + 1$ c. 2
- Pour tout réel $x > 0$, on a :
a. $f'(x) = \frac{1}{2x}$ b. $f'(x) = \frac{1}{x}$ c. $f'(x) = \frac{2}{x}$
- Sur $]0; +\infty[$, la fonction f est :
a. croissante b. décroissante c. non monotone
- Sur $]0; +\infty[$, la fonction f est :
a. convexe b. concave c. ni convexe ni concave

60 1. Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(x) - 2$$

Un élève écrit :

| | | | | |
|--------------------------|--------|---|-------|-----------|
| f est croissante et | x | 0 | e^2 | $+\infty$ |
| $f(e^2) = 0$. On en | $f(x)$ | - | 0 | + |
| déduit le signe de f . | | | | |

L'élève a-t-il raison ? Justifier.

2. Dans chacun des cas suivants, construire le tableau de signes de la fonction f sur $]0; +\infty[$.

- $f(x) = \ln x - 1$
- $f(x) = \ln x - 3$
- $f(x) = 2\ln x - 10$
- $f(x) = 4 - 3\ln x$

On vérifiera les résultats à l'aide de la calculatrice.

61 On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x + \ln x$$

On note \mathcal{C} la courbe représentative de f et Δ la droite d'équation $y = x$.

- Montrer que la fonction f est croissante sur $]0; +\infty[$.
- Pour tout réel $x > 0$, on pose $h(x) = f(x) - x$.
a. Étudier le signe de h sur $]0; +\infty[$.
b. Que peut-on en déduire pour la courbe \mathcal{C} par rapport à la droite Δ ?

62 Vrai ou faux ?

On considère la fonction f définie sur $]1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\ln x}$$

On note \mathcal{C}_f sa courbe représentative.

Pour chaque affirmation, préciser si elle est vraie ou fautive.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
- \mathcal{C}_f admet une asymptote verticale d'équation $x = 1$.
- Pour tout réel $x > 1$, $f'(x) = -\frac{1}{(\ln x)^2}$.
- La fonction f est positive sur $]1; +\infty[$.

63 Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln x - x$$

- a. Montrer que, pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = \frac{1-x}{x}$.
b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]0; +\infty[$.
c. Dresser le tableau de variations de f sur $]0; +\infty[$.
- a. Déterminer le maximum de f sur $]0; +\infty[$.
En déduire le signe de $f(x)$ sur $]0; +\infty[$.
b. En déduire que, pour tout réel $x > 0$, on a $\ln x < x$.
c. Interpréter graphiquement le résultat.

64 Soit f la fonction définie sur $]-1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(1+x)$$

- a. Justifier que f est définie sur $]-1; +\infty[$.
b. Étudier les limites aux bornes du domaine de définition.
- Calculer $f'(x)$.
En déduire le sens de variations de la fonction f .
- Étudier la convexité de la fonction f .
- a. Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe de f au point d'abscisse 0.
b. Étudier la position relative de la tangente T et la courbe représentative de f .
- Vérifier les résultats précédents à l'aide de la calculatrice.

65 Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

Justifier tous les éléments obtenus dans le tableau de variations et dans le tableau de signes suivants.

| | | | |
|---------|---|---------------|-----------|
| x | 0 | e | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | + | 0 | - |
| $f(x)$ | | $\frac{1}{e}$ | |

| | | | |
|--------|---|---|-----------|
| x | 0 | 1 | $+\infty$ |
| $f(x)$ | - | 0 | + |

3 Résoudre une équation, une inéquation

66 QCM

Pour chacune des questions suivantes, indiquer la (ou les) bonne(s) réponse(s).

- La solution de l'équation $e^x = 3$ est :
a. 3 b. e^3 c. $\ln 3$
- La solution de l'équation $\ln(x) = 5$ est :
a. 5 b. e^5 c. $\ln 5$
- L'équation $\ln x = 0$ admet pour solution :
a. 0 b. 1 c. e
- L'équation $2\ln x + 10 = 0$ admet pour ensemble-solution :
a. \emptyset b. $\{e^{-5}\}$ c. $\{\ln 5\}$
- L'équation $2e^x + 10 = 0$ admet pour ensemble-solution :
a. \emptyset b. $\{e^{-5}\}$ c. $\{\ln 5\}$

Pour les exercices **67** à **69**, résoudre, dans chaque cas, l'équation donnée.

- 67** 1. $\ln x = 10$ 2. $5\ln x - 8 = 0$
3. $(x-2)\ln x = 0$ 4. $(\ln x + 1)(\ln x - 3) = 0$

- 68** 1. $e^x = 10$ 2. $e^x + 5 = 0$ 3. $2e^x - 3 = 0$

- 69** 1. $\ln(x+1) = 2$ 2. $\ln(x-1) = 0$
3. $2\ln(x+3) = 10$ 4. $\ln(x) \times \ln(x+2) = 0$

Pour les exercices **70** à **72**, résoudre, dans chaque cas, l'inéquation donnée.

- 70** 1. $e^x < 5$ 2. $e^x > 4$ 3. $e^x + 1 \leq 0$

- 71** 1. $\ln x \leq 3$ 2. $\ln x + 3 \leq 0$ 3. $\ln x > 4$

Attention

$\ln x$ n'existe que si $x > 0$.

- 72** 1. $\ln(x+1) \geq 3$ 2. $\ln(x-1) < 2$

73 Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = (e^x + 1)(e^x - 3)$$

Dresser le tableau de signes de f sur \mathbb{R} .

74 Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln x \times (\ln x + 1)$$

Dresser le tableau de signes de f sur $]0; +\infty[$.

75 Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = -x \ln x$$

- Monter que, pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = -1 - \ln x$.
- a. Résoudre dans $]0; +\infty[$ l'inéquation $-1 - \ln x > 0$.
b. En déduire le tableau de signes de $f'(x)$ sur $]0; +\infty[$.
- a. Dresser le tableau de variations de f .
b. En déduire que, pour tout $x > 0$, $f(x) \leq e^{-1}$.

76 Un élève doit déterminer le plus petit entier naturel n tel que $0,8^n \leq 10^{-5}$. Il écrit :

$$\begin{aligned} 0,8^n \leq 10^{-5} &\Leftrightarrow \ln(0,8^n) \leq \ln(10^{-5}) \\ &\Leftrightarrow n \ln(0,8) \leq \ln(10^{-5}) \\ &\Leftrightarrow n \leq \frac{\ln(10^{-5})}{\ln(0,8)} \\ \text{Or } \frac{\ln(10^{-5})}{\ln(0,8)} &\approx 51,6 \text{ et } n \text{ est un entier naturel.} \\ \text{Donc le plus petit entier cherché est } &51. \end{aligned}$$

L'élève a-t-il raison ? Justifier.

77 Vrai ou faux ?

Pour chaque affirmation suivante, déterminer si elle est vraie ou fausse, en justifiant.

- Le plus petit entier naturel n tel que $2^n > 10^3$ est égal à $\frac{\ln(10^3)}{\ln(2)}$.
- Le plus petit entier naturel n tel que $0,5^n < 10^{-3}$ est égal à 10.
- Le plus petit entier naturel n tel que $3 \times 5^n > 450$ est égal à 3.

78 Déterminer le plus petit entier naturel n tel que :

1. $1,5^n > 100$ 2. $1,1^n > 10^3$ 3. $0,9^n \leq 10^{-5}$

79 On lâche une balle de tennis d'une hauteur de 2 mètres. Après chaque rebond, la balle remonte aux trois quarts de la hauteur du rebond précédent.



Pour tout entier n , on note h_n la hauteur atteinte par la balle au n -ième rebond.

- Calculer la hauteur, en mètre, atteinte après un, deux, puis trois rebonds.
- Combien de rebonds faut-il avant que la hauteur de rebond soit inférieure à 1 cm ?

1 La fonction logarithme népérien

80 On a tracé dans le repère orthonormé ci-dessous la courbe représentative \mathcal{C}_{exp} de la fonction exponentielle, sa tangente T au point A d'abscisse 0, ainsi que la droite Δ d'équation $y = x$.



- À quelle condition deux droites sont-elles parallèles ? Démontrer que les droites T et Δ sont parallèles.
- Quelles sont les coordonnées du point A ? En déduire celles du point B , image de A par la symétrie d'axe Δ .
- Déterminer, par symétrie, l'équation de la droite D , image de T par la symétrie par rapport à la droite Δ .
- Que représente la droite D pour la courbe représentative de la fonction logarithme népérien ? Vérifier à l'aide de la calculatrice.

81 On considère les courbes représentatives \mathcal{C}_{exp} et \mathcal{C}_{\ln} des fonctions exponentielle et logarithme dans un repère orthonormé, et la droite Δ d'équation $y = x$.

- Quelle est l'ordonnée du point A d'abscisse 1 sur la courbe \mathcal{C}_{exp} ? En déduire l'abscisse du point B d'ordonnée 1 sur la courbe \mathcal{C}_{\ln} .
- Démontrer que la tangente à la courbe \mathcal{C}_{exp} en A passe par l'origine du repère.
- En déduire l'équation de la tangente à la courbe \mathcal{C}_{\ln} au point B . Vérifier à l'aide de la calculatrice.

82 Justifier les résultats suivants, obtenus avec la calculatrice.

| | |
|------------------------------------|----|
| $e^{\ln(7)} + 3\ln(e) + 5\ln(1)$ | 10 |
| $\ln(e^3) - 4\ln(1)$ | 3 |
| $e^{\ln(4)} - 3\ln(e) + 2\ln(e^4)$ | 9 |

83 Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes.

1. $e^{x+1} = 3$ 2. $e^{-2x+1} = 10$ 3. $e^{2x} + 3 = 0$

84 Résoudre les équations suivantes.

1. $\ln(x+1) = 5$ 2. $\ln(2x) = 0$ 3. $\ln(1-x) = 3$

85 Dans chaque cas, dresser le tableau de signes de la fonction f définie sur \mathbb{R} .

1. $f(x) = 3e^x - 6$ 2. $f(x) = 4 - 3e^x$
 3. $f(x) = (2x+1)(e^x - 5)$ 4. $f(x) = (2x-5)(e^x + 1)$

86 Exercice guidé

On considère la fonction f définie sur $[-4; 2]$ par :

$$f(x) = e^{2x} - 3x$$

- Calculer $f'(x)$. En déduire le tableau de variations de la fonction f sur $[-4; 2]$.
- a. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 10$.
 b. Donner une valeur approchée de chaque solution, à 0,01 près.
- Étudier la convexité de f sur $[-4; 2]$.

Pistes de résolution

- L'étude du signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x permet de conclure sur les variations de f . Il faut penser à calculer les images et à les placer dans le tableau de variations.
- a. Le tableau de variations et la propriété des valeurs intermédiaires permettent de déterminer le nombre de solutions d'une équation de la forme $f(x) = k$.
 b. On utilise le menu TABLE de la calculatrice.
- C'est le signe de la dérivée seconde f'' qui permet de déterminer si f est convexe ou concave.

87 Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = e^x(e^x - 4)$$

Un logiciel de calcul formel permet d'obtenir les résultats ci-contre.

| | |
|---|---------------------------------------|
| 1 | $t(x) := \exp(x) \cdot (\exp(x) - 4)$ |
| ● | $\rightarrow f(x) := (e^x - 4) e^x$ |
| 2 | Factoriser($f'(x)$) |
| ○ | $\rightarrow 2 e^x (e^x - 2)$ |
| 3 | Factoriser($f''(x)$) |
| ○ | $\rightarrow 4 e^x (e^x - 1)$ |

- Justifier les résultats obtenus par le logiciel.
- a. Étudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x .
 b. En déduire les variations de f sur \mathbb{R} .
- a. Étudier le signe de $f''(x)$ suivant les valeurs de x .
 b. En déduire la convexité de f sur \mathbb{R} .

2 Étude de la fonction logarithme

Pour les exercices **88** à **90**, répondre aux questions suivantes.

- Calculer $f'(x)$.
- Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire les variations de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$.

88 1. $f(x) = 4x - \ln x$ 2. $f(x) = 2x + \ln x$

89 1. $f(x) = x^2 - 2\ln x$ 2. $f(x) = 4\ln x - x + \frac{3}{x}$

90 1. $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 6x - 5\ln x$

2. $f(x) = x - \frac{8}{x} - 6\ln x$

91 QCM

Pour chaque question suivante, déterminer l'unique réponse correcte.

1. Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = 3\ln x - 2x + 1$$

La tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse 1 est la droite d'équation :

a. $y = x - 2$ b. $y = -2x - 3$ c. $y = x$

2. Soit la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = -1,5x^2 + x^2 \ln x$$

Pour tout réel $x > 0$:

a. $g'(x) = -x + 1$ b. $g'(x) = 2x \ln x - 2x$
 c. $g'(x) = -3x + 2$ d. $g'(x) = -x \ln x - 0,5x$

3. La courbe de la fonction h définie sur $]0; +\infty[$ par

$$h(x) = \ln x + \frac{1}{x}$$
 admet un point d'inflexion en :
 a. 1 b. 2 c. $\ln 2$ d. e^2

4. La fonction u est définie sur $I =]0; +\infty[$ par :

$$u(x) = 2x^2 \ln x - 5x^2$$

a. u est concave sur I b. u est concave sur $[e^{-1}; +\infty[$
 c. u est convexe sur I d. u est convexe sur $[e; +\infty[$

Analyse d'un énoncé

92 Exercice commenté

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = 3x^2 \ln x$$

1. Montrer que $f'(x) = 3x(2 \ln x + 1)$.

☞ Pour aboutir à ce résultat factorisé, il faut d'abord dériver la fonction f , qui est un produit $u \times v$.

2. Déterminer le signe de $f'(x)$ sur $]0; +\infty[$.

☞ On résout l'inéquation $2 \ln x + 1 > 0$ pour déterminer le signe du second facteur de la dérivée.

3. En déduire les variations de f sur $]0; +\infty[$.

☞ Il faut utiliser tous les résultats qui précèdent.

93 Application immédiate

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{3 \ln x}{x^2}$$

1. Montrer que $f'(x) = \frac{3(1 - 2 \ln x)}{x^3}$

2. Déterminer le signe de $f'(x)$.

3. En déduire les variations de f sur $]0; +\infty[$.

94 On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x \times \ln x$. On note \mathcal{C} la courbe représentative de f et Δ la droite d'équation $y = x$.

1. a. Montrer que, pour tout réel x , $f'(x) = \ln x + 1$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]0; +\infty[$.

En déduire le tableau de variations de f sur $]0; +\infty[$.

2. Étudier le signe de la fonction f sur $]0; +\infty[$.

Que peut-on en déduire pour la courbe \mathcal{C} ?

3. Pour tout réel $x > 0$, on pose : $h(x) = f(x) - x$.

a. Factoriser $h(x)$. En déduire le signe de h sur $]0; +\infty[$.

b. Que peut-on en déduire pour la courbe \mathcal{C} par rapport à la droite Δ ?

95 ALGO Une entreprise produit chaque année entre 100 et 900 pneus pour tracteurs.

On considère la fonction f définie sur $[1; 9]$ par :

$$f(x) = 0,5x^2 - 7x + 14 + 6 \ln x$$

On admet que la fonction f modélise le coût moyen annuel de fabrication d'un pneu, exprimé en centaine d'euros, pour x centaines de pneus produits.

1. a. Montrer que, pour tout réel $x \in [1; 9]$:

$$f'(x) = \frac{x^2 - 7x + 6}{x}$$

b. En déduire le tableau de variations de la fonction f .

2. a. Justifier que l'équation $f(x) = 5$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1; 9]$.

b. Donner un encadrement au centième près de α .

c. On considère l'algorithme ci-dessous.

```

x ← 1;   y ← 7,5
Tant que y > 5 Faire
    x ← x + 0,01
    y ← 0,5x² - 7x + 14 - 6 ln x
Fin Tant que
    
```

À la fin de l'exécution de l'algorithme, quelle valeur numérique contient la variable x ?

3. Pour quelle quantité de pneus le coût moyen annuel de fabrication est-il minimal ? À combien s'élève-t-il ?

96 Sur une portion de 6 kilomètres du boulevard périphérique, le trafic peut être perturbé entre 7 h et 11 h du matin. Au début de cette portion, un panneau indique, à chaque instant, le temps de parcours d'un véhicule sur ces 6 kilomètres.



On modélise l'évolution du trafic à l'aide de la fonction f définie sur $[1; 5]$ par :

$$f(t) = \frac{22 \ln t}{t} + 4$$

Le nombre $f(t)$ est alors le temps de parcours indiqué sur le panneau et exprimé en minute, à un instant t exprimé en heure. Il est 7 h du matin à l'instant $t = 1$. Le panneau indique « trafic fluide » s'il faut moins de 6 minutes pour parcourir les 6 kilomètres, il indique « trafic perturbé » s'il faut plus de 11 minutes.

1. Étudier les variations de f sur $[1; 5]$ et dresser son tableau de variations.

2. En déduire que le trafic n'est pas fluide à 7 h 10 min et qu'il en est ainsi jusqu'à 11 h.

97 Une entreprise fabrique chaque jour entre 100 et 2 500 pièces électroniques pour des vidéoprojecteurs. Toutes les pièces fabriquées sont identiques. On admet que lorsque x centaines de pièces sont fabriquées, avec $1 \leq x \leq 25$, le coût moyen de fabrication d'une pièce est, en euro :

$$f(x) = \frac{x+2-\ln x}{x}$$

1. a. Montrer que, pour tout réel $x \in [1; 25]$:

$$f'(x) = \frac{\ln x - 3}{x^2}$$

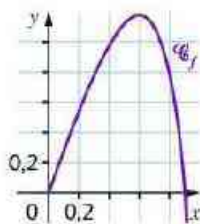
b. En déduire le tableau de variations de f sur $[1; 25]$.

c. Déterminer, à l'unité près, le nombre de pièces à fabriquer pour que le coût moyen de fabrication d'une pièce soit minimal. Déterminer alors ce coût moyen, au centime d'euro près.

2. Justifier qu'il est possible que le coût moyen de fabrication d'une pièce soit inférieur ou égal à 1,50 €.

3. Est-il possible que le coût moyen d'une pièce soit de 50 centimes ? Justifier.

98 Lors d'une expérience en laboratoire, on lance un projectile dans un milieu fluide. Dans ce cas, le modèle parabolique usuel pour la trajectoire n'est pas adapté. On modélise le projectile par un point qui se déplace, dans un plan vertical, sur la courbe représentative de la fonction f définie sur $[0; 1]$ par :



$$f(x) = 5x + 2\ln(1-x)$$

où x est l'abscisse du projectile, $f(x)$ son ordonnée, toutes les deux exprimées en mètre.

1. a. Montrer que, pour tout réel $x \in [0; 1]$:

$$f'(x) = \frac{3-5x}{1-x}$$

b. En déduire le tableau de variations de f .

c. Quelle est la hauteur maximale atteinte par le projectile ?

2. a. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions sur $[0; 1]$: 0 et un réel $\alpha > 0,8$.

Donner une valeur approchée de α à 0,001 près.

b. Interpréter la valeur de α dans le contexte.

99 Pour un épicéa dont l'âge est compris entre 20 et 120 ans, on modélise la relation entre son âge (en année) et le diamètre de son tronc (en mètre) mesuré à 1,30 m du sol par la fonction f définie sur $]0; 1[$ par :

$$f(x) = 30 \ln \left(\frac{20x}{1-x} \right)$$

où x désigne le diamètre exprimé en mètre et $f(x)$ l'âge en année.

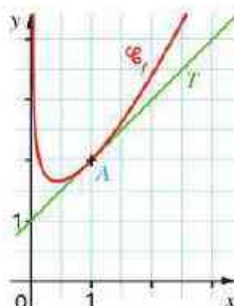


1. Étudier le sens de variation de f sur $]0; 1[$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

2. Déterminer les valeurs du diamètre x du tronc pour que l'âge calculé dans ce modèle reste conforme à ses conditions de validité, c'est-à-dire compris entre 20 et 120 ans.

100 La courbe ci-contre représente une fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = ax + b \ln x$, où a et b sont deux réels inconnus.

La courbe passe par le point A et admet en ce point la tangente T .



1. a. Lire graphiquement $f(1)$.

b. En déduire la valeur du nombre a .

2. a. Montrer que $f'(x) = 2 + \frac{b}{x}$.

b. Lire graphiquement $f'(1)$.

c. En déduire la valeur du nombre b .

3. Étudier les variations de la fonction f .

Démo

101 Soit u une fonction définie, dérivable et strictement positive sur un intervalle I . On note f la fonction définie sur I par $f(x) = \ln(u(x))$.

1. Exprimer $f''(x)$.

2. Étudier le signe de $f'(x)$ en fonction de celui de $u'(x)$ et $u(x)$.

3. En déduire que la fonction f a les mêmes variations que la fonction u .

3 Propriétés algébriques

102 Vrai ou faux ?

Soient deux réels $a > 0$ et $b > 0$.

Pour chaque affirmation suivante, préciser si elle est vraie ou fausse.

1. $\ln(a+b) = \ln a \times \ln b$

2. $\ln(a^2) = 2 \ln a$

3. $\ln(2a) = \ln 2 + \ln a$

4. $\ln(ea) = 1 + \ln a$

103 Vérifier les égalités suivantes.

1. $\ln 3 + \ln 9 + 3 \ln \left(\frac{1}{3} \right) = 0$

2. $2 \ln 4 + 3 \ln 2 + 6 \ln \left(\frac{1}{2} \right) = \ln 2$

3. $3 \ln e + \ln(e^4) + 5 \ln \left(\frac{1}{e} \right) = 2$

104 Écrire sous la forme d'un seul logarithme les nombres suivants.

$A = 2 \ln 5 + 3 \ln 2 - \ln 16$

$B = -3 \ln 3 + \ln 9 + 1$

$C = 4 \ln 3 + 2 \ln 5 + 4 \ln 1$

$D = 2 \ln 4 - 3 \ln 3$

105 Justifier les résultats suivants, obtenus à l'aide d'un logiciel de calcul formel.

| | |
|---|--|
| 1 | Simplifier $(\ln(4)+3\ln(2)-\ln(8))$ → $2 \ln(2)$ |
| 2 | Simplifier $(3\ln(7)-2\ln(49))$ → $-\ln(7)$ |

106 Écrire sous la forme d'une somme de logarithmes les nombres suivants.

$$A = \ln\left(\frac{3 \times 5}{7}\right); B = \ln(5^4 \times 2^3) \text{ et } C = \ln\left(\frac{3^4 \times 5^2}{7^3}\right).$$

107 Logarithme népérien d'une racine carrée

1. Soit $x > 0$.

En utilisant $\sqrt{x^2} = x$, montrer que $\ln\sqrt{x} = \frac{1}{2}\ln x$.

2. a. Montrer que :

$$\ln\sqrt{2} + \ln\sqrt{8} = 2\ln 2 \qquad 2\ln\sqrt{3} + \ln(1+3) \qquad 0$$

b. Justifier la capture d'écran ci-contre.

$$\ln\sqrt{e^1+4} - \ln e^3 \qquad 1.5$$

108 Vrai ou faux ?

On considère l'équation suivante dans $]0; +\infty[$:

$$\ln(x^2) - \ln\left(\frac{x^5}{e}\right) + \ln 2 = \ln(2x) + 5$$

L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ?

« $\frac{1}{e}$ est l'unique solution de cette équation dans l'intervalle $]0; +\infty[$. »

109 Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul et tout nombre réel $k > 0$, l'équation $x^n = k$ admet pour unique solution $x = e^{\frac{1}{n}\ln k}$ dans $]0; +\infty[$.

Info

Cette solution s'appelle la racine n -ième de k .

On la note $\sqrt[n]{k}$ ou $k^{\frac{1}{n}}$.

110 D'après l'INSEE, la population en France (hors collectivités d'outre-mer) est passée de 65,027 millions d'habitants en 2011 à 67,064 millions d'habitants en 2020. On suppose que chaque année, entre 2011 et 2020, le nombre d'habitants a augmenté en moyenne de t %.

1. a. On note CM le coefficient multiplicateur associé à l'augmentation annuelle de t %.

Justifier que $CM^9 = \frac{67,064}{65,027}$.

b. Justifier que le résultat suivant, obtenu à l'aide de la calculatrice, permet de déterminer une valeur approchée de CM .

$$e^{\frac{1}{9}\ln\left(\frac{67,064}{65,027}\right)} \qquad 1.003433082$$

c. En déduire la valeur de t , arrondi à 0,01 près.

d. Interpréter le résultat obtenu.

Info

t s'appelle le taux d'évolution moyen annuel.

3. On suppose que cette évolution annuelle moyenne se maintient dans les années à venir.

a. Estimer le nombre d'habitants en 2025.

b. Estimer la première année à partir de laquelle la population française devrait dépasser les 70 millions d'habitants.

c. Cette estimation est-elle cohérente avec la projection de l'INSEE qui prévoit en 2030 une population de 70,281 millions d'habitants ?

▶ Voir Thème 6 p. 173

111 Voici un extrait d'un article, publié en avril 2019, de *futura-sciences.com* :

Selon des estimations, les glaciers alpins s'étendaient sur un peu moins de 340 km² au milieu des années 1980. À la fin des années 2000, en revanche, cette superficie avait fortement diminué, atteignant 275 km². Soit une baisse de 20 % environ en vingt-cinq ans.

1. Vérifier l'affirmation surlignée en jaune.

2. Soit t le taux de diminution moyen annuel, exprimé en pourcentage, de la fonte des glaciers sur ces 25 ans.

a. Justifier que $(1-t)^{25} = 0,8$.

b. Montrer que $t \approx 0,889$ %.

3. Dans le même article, on peut lire : « Les glaciers alpins risquent de fondre à 90 % d'ici 2100. »

Que peut-on penser de cette affirmation ?

112 Le musée du quai Branly à Paris a accueilli 1,26 million de visiteurs en 2018, soit une hausse de 7 % par rapport à 2017. On suppose que cette évolution se maintient et on s'intéresse au nombre d'entrées en 2018 + n où n est un entier naturel.



1. Déterminer le nombre d'entrées en 2019 et 2020.

2. a. Déterminer la plus petite valeur de l'entier n telle que $1,26 \times 1,07^n > 2$.

b. Que signifie le résultat pour le musée ?

3. Dans le même temps, en 2018, le musée du Louvre a battu son record de fréquentation en accueillant 10,2 millions de visiteurs. Déterminer en quelle année le musée du quai Branly devrait accueillir pour la première fois plus de 10 millions de visiteurs ?

Que peut-on penser du résultat obtenu ?

Modéliser l'évolution de la population

L'extrait ci-dessous est issu de l'*Introduction à l'analyse infinitésimale* d'Euler, publiée en 1647.

« La terre ayant été repeuplée après le déluge par six hommes ; supposons qu'au bout de deux cents ans le nombre des hommes se soit élevé à 1 000 000, on demande de quelle partie il a dû augmenter tous les ans. Supposons que pendant ce temps le nombre des hommes se soit accru tous les ans de $\frac{1}{x}$, le nombre des hommes pendant deux cents ans sera nécessairement monté à

$$\left(\frac{1+x}{x}\right)^{200} \times 6 = 1\,000\,000, \text{ d'où l'on tire } \frac{1+x}{x} = \left(\frac{1\,000\,000}{6}\right)^{\frac{1}{200}}.$$

$$\text{Donc } \ln\left(\frac{1+x}{x}\right) = \frac{1}{200} \ln\left(\frac{1\,000\,000}{6}\right) = \frac{1}{200} \times 5,2218487 = 0,0261092 ;$$

conséquemment $\frac{1+x}{x} = \frac{1061963}{1\,000\,000}$ et $1\,000\,000 = 61963x$. Donc $x = 16$ environ.

Ainsi, pour une aussi grande population, il aurait fallu que le genre humain se fût accru tous les ans d'un seizième ; ce que la durée de vie des premiers hommes rend vraisemblable. Si la même augmentation eût continué d'avoir lieu pendant 400 ans, le nombre des hommes fût monté à $1\,000\,000 \times \frac{1\,000\,000}{6} = 166\,666\,666\,666$. Ce nombre d'habitants est si considérable, que toute la terre n'eût pas suffi pour les nourrir. »



Info
Euler note « / » la fonction logarithme népérien, c'est-à-dire : « /x » signifie « ln(x) ».

- Dans l'extrait ci-dessus, à quel problème s'intéresse Euler ?
- Euler suppose qu'au commencement le nombre d'hommes est 6, que celui-ci s'accroît tous les ans de la partie $\frac{1}{x}$ et qu'il atteint 1 000 000 au bout de 200 ans.
Ainsi le réel x est un entier naturel non nul inconnu.
 - Expliquer alors le passage surligné en jaune.
 - En déduire la justification du passage surligné en vert.
- Résoudre l'équation $\ln\left(\frac{1+x}{x}\right) = 0,0261092$ dans $]0; +\infty[$.
 - Mettre en relation la résolution précédente avec l'extrait surligné en violet.
- Expliquer le passage surligné en bleu.
- Euler conclut l'extrait par : « Ce nombre d'habitants est si considérable, que toute la terre n'eût pas suffi pour les nourrir. »
Que peut-on en déduire sur le modèle de croissance exponentielle étudié ?
- 150 ans plus tard, en se basant sur l'observation du rythme de croissance de la population américaine au XVIII^e siècle, l'anglais Malthus écrivait :

« Nous pouvons être certains que lorsque la population n'est arrêtée par aucun obstacle, elle double tous les vingt-cinq ans [...]. »

Voir Thème 2 Situation 2 p. 39

- En utilisant la démarche d'Euler, déterminer de quelle partie la population augmente chaque année.
- Malthus conclut à la catastrophe démographique. Expliquer pourquoi.

S'accroître de $\frac{1}{3}$, c'est ajouter $\frac{1}{3}$ de la quantité initiale ; c'est donc multiplier la quantité initiale par $\left(1 + \frac{1}{3}\right)$.
Et donc s'accroître de $\frac{1}{x}$, cela revient à multiplier par ...



À la fin du XVI^e siècle, du fait du développement de l'astronomie et de la navigation, pour simplifier des calculs longs, fastidieux et soumis à des erreurs d'arrondis, les mathématiciens cherchèrent à trouver une méthode permettant de remplacer des produits par des sommes. Cela revenait, en termes actuels, à trouver une fonction f vérifiant, pour tous réels a et b strictement positifs :

$$f(a \times b) = f(a) + f(b)$$

En 1614, l'écossois John Neper publie dans *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* des tables de correspondance entre deux séries de nombres : à un produit dans une colonne correspond une somme dans une autre colonne.



Les logarithmes, qui signifient « nombres de raison » (du grec *logos* et *arithmos*), c'est-à-dire « nombres en progression arithmétique », sont nés. Mais les calculs ne sont pas aisés. En particulier, le logarithme de 1 n'est pas égal à 0.

Après de longs échanges avec lui, l'anglais Henry Briggs améliore le procédé et publie dans *Arithmetica logarithmica* en 1624 les premières tables de logarithmes, que nous appelons aujourd'hui « logarithmes décimaux ». Il fixe ainsi le logarithme de 1 comme égal à 0 et celui de 10 égal à 1.

Cet exercice présente le procédé utilisé par Briggs pour construire la table de valeurs de la fonction logarithme décimal (notée de nos jours \log) vérifiant :

- ① $\log(1) = 0$
- ② $\log(10) = 1$
- ③ pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$:

$$\log(a \times b) = \log(a) + \log(b)$$

Comme Briggs, on admet que la fonction \log existe et qu'elle est croissante sur $]0; +\infty[$.

1. Établissement de propriétés

Soient deux réels a et b tels que $0 < a < b$.

- a. En utilisant la relation ③, montrer que :

$$\log(\sqrt{ab}) = \frac{\log(a) + \log(b)}{2}$$

- b. Dédire des relations ① et ② que $\log(\sqrt{10}) = \frac{1}{2}$.

Déterminer de même $\log(\sqrt{\sqrt{10}})$.

- c. Montrer que $a < \sqrt{ab} < b$.

- d. Justifier que, pour tout réel $x \in [a; b]$:

- si $x \leq \sqrt{ab}$, alors $\log(a) \leq \log(x) \leq \frac{\log(a) + \log(b)}{2}$;

- sinon, $\frac{\log(a) + \log(b)}{2} \leq \log(x) \leq \log(b)$.

2. Construction du tableau de valeurs sur [1; 10]

- a. Soit un réel $x \in [1; 10]$. En s'appuyant sur la question 1., justifier que l'algorithme suivant, qui traduit la démarche de Briggs en termes actuels, permet d'estimer la valeur de $\log(x)$.

Fonction Logarithme(x)

$a \leftarrow 1; b \leftarrow 10$

$\log a \leftarrow 0; \log b \leftarrow 1$

Tant que $x - a \geq 10^{-5}$ Faire

 Si $x \leq \sqrt{ab}$ Alors

$b \leftarrow \sqrt{ab}$

$\log b \leftarrow \frac{\log a + \log b}{2}$

 Sinon

$a \leftarrow \sqrt{ab}$

$\log a \leftarrow \frac{\log a + \log b}{2}$

 Fin Si

Fin Tant que

Renvoyer $\log a; \log b$

Fin Fonction

- b. Programmer en langage Python l'algorithme précédent et tabuler la fonction \log sur $[1; 10]$ par pas de 1.

- c. Comparer avec les résultats ci-contre obtenus par Briggs.

- d. La calculatrice (touche \log) affiche-t-elle les mêmes valeurs ?

3. Généralisation

- a. Soit un réel $x \in [10; 1000]$. Modifier l'algorithme de la question 2. a. pour estimer la valeur de $\log(x)$.

- b. Même question pour un réel x tel que $10^{-5} \leq x \leq 1$.

| Nu. | Logarithmi |
|-----|---------------|
| 1 | 0,00000 00000 |
| 2 | 0,30102 99957 |
| 3 | 0,47712 12547 |
| 4 | 0,60205 99913 |
| 5 | 0,69897 00043 |
| 6 | 0,77815 12504 |
| 7 | 0,84509 80400 |
| 8 | 0,90308 99870 |
| 9 | 0,95424 25094 |
| 10 | 1,00000 00000 |

Info

La démarche de Briggs repose sur de nombreux calculs de racines carrées successives, avec une précision de 30 décimales à une époque où les calculatrices n'existaient pas ! Calculateur hors-pair, il a utilisé que : $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$, dès que x est très proche de 0 (inférieur à 10^{-15}). Les tables de logarithmes décimaux de Briggs furent très vite diffusées à l'ensemble de l'Europe et rapidement adoptées par tous. Elles sont à la base de la construction de la règle à calcul.

utilisée par les bacheliers français jusque dans les années 1970.





Le tableau suivant donne la population africaine, en million, à 1 million près, depuis 1950. Source : Nations unies

| | | | | | | | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|
| Année | 1950 | 1955 | 1960 | 1965 | 1970 | 1975 | 1980 | 1985 | 1990 | 1995 | 2000 | 2005 |
| Pop. | 228 | 253 | 283 | 320 | 363 | 415 | 476 | 549 | 630 | 717 | 811 | 916 |
| Année | 2010 | 2011 | 2012 | 2013 | 2014 | 2015 | 2016 | 2017 | 2018 | 2019 | 2020 | |
| Pop. | 1 039 | 1 066 | 1 094 | 1 123 | 1 152 | 1 182 | 1 213 | 1 244 | 1 276 | 1 308 | 1 341 | |

1. a. Représenter l'évolution de la population africaine en fonction du temps à l'aide d'un tableau.

Comment peut-on qualifier sa croissance ?

b. Choisir une échelle logarithmique pour l'axe des ordonnées. Que constate-t-on ?

2. On choisit de modéliser la population africaine, en million, pour l'année $(1950 + x)$ par $f(x) = a \times e^{bx}$, où a et b sont des réels à déterminer.

On choisit d'imposer $f(0) = 228$ et $f(70) = 1341$.

a. Déterminer les valeurs des réels a et b , en arrondissant à 10^{-4} si besoin.

b. D'après le modèle, à combien peut-on estimer la population africaine en 1960 ? En 1970 ?

c. D'après le modèle, à partir de quelle année la population africaine dépassera-t-elle 2 milliards ?

3. Dans un article du *Monde* du 20/09/2017, on lisait : « La population de l'Afrique va-t-elle quadrupler d'ici la fin du siècle ? La population du continent africain s'accroît rapidement. Estimée à 140 millions en 1900, elle atteignait un milliard d'habitants en 2010. Elle comptera 2,5 milliards en 2050 et plus de 4 milliards en 2100, selon le scénario moyen des projections des Nations unies. » Le scénario moyen des projections de l'ONU est-il cohérent avec le modèle de la question 2. ? Si non, proposer des hypothèses qui expliqueraient les différences observées.

Une fonction de « satisfaction » f prend ses valeurs entre 0 et 100. Lorsqu'elle atteint la valeur 100, on dit qu'il y a « saturation ».

La fonction « envie » est la fonction dérivée f' . On dira qu'il y a « souhait » lorsqu'elle est positive et qu'il y a « rejet » lorsqu'elle est strictement négative.

La direction des ressources humaines d'une entreprise modélise la satisfaction d'un salarié en fonction de son salaire annuel x , en millier d'euros, par :

$$f(x) = \frac{90}{1 + 400e^{-0,25x}}, \text{ où } x \in [10; 35]$$

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Interpréter le résultat.

2. a. Exprimer $f'(x)$ en fonction de x .

b. En déduire les variations de f sur $[0; +\infty[$. Interpréter dans le contexte de l'exercice.

c. Est-il possible qu'il y ait saturation ? Interpréter dans le contexte de l'exercice.

3. a. Exprimer $f''(x)$ en fonction de x .

b. Résoudre l'inéquation $400e^{-0,25x} - 1 > 0$.

c. En déduire la convexité de f sur $[0; +\infty[$.

d. À partir de quel salaire peut-on estimer que la fonction « envie » décroît ?

Lorsqu'une personne emprunte une somme de 50 000 €, remboursable par n mensualités constantes de A euros, avec un intérêt mensuel de 0,4 %, le montant de cette mensualité A est donné par :

$$A = \frac{200}{1 - 1,004^{-n}}$$

On ne demande pas d'établir cette relation.

1. Calculer la mensualité A lorsque cette personne emprunte 50 000 € remboursables par 120 mensualités pour un intérêt mensuel de 0,4 %. On donnera une valeur arrondie au centime d'euro.

Calculer alors le montant total des intérêts pour ce prêt.

2. Mêmes questions avec un emprunt de 50 000 € sur 8 ans à 0,4 % mensuel.

3. Afin de payer le moins d'intérêts possible, l'emprunteur doit augmenter le montant de la mensualité et diminuer la période de remboursement. Mais il ne peut supporter au maximum que des remboursements de 950 euros par mois.

a. Résoudre dans \mathbb{N} l'inéquation $\frac{200}{1 - 1,004^{-n}} \leq 950$.

b. En déduire le nombre entier n minimum de mensualités pour lequel la mensualité A est inférieure à 950 €. Que valent alors la mensualité A et le montant total des intérêts ?

117

... en économie

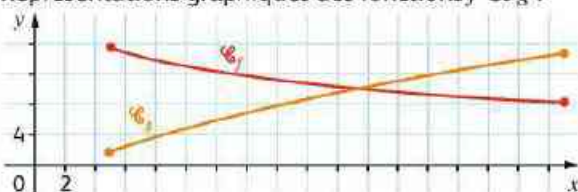
Offre, demande et prix d'équilibre

Une entreprise vend des sacs à main dont le prix est fixé entre 50 et 350 €.

La **demande** est la quantité de sacs à main, en millier d'unités, achetée par la clientèle lorsque le prix est de x dizaines d'euros l'unité. Elle est modélisée par la fonction f définie sur $[5; 35]$ par $f(x) = 21,8 - 3,8 \ln x$. L'**offre** est la quantité de sacs à main, en millier d'unités, produite par l'entreprise pour être vendue au prix de x dizaines d'euros le sac à main. Elle est modélisée par la fonction g définie sur $[5; 35]$ par :

$$g(x) = 4,6 + 0,3x - e^{-0,1x+2}$$

Représentations graphiques des fonctions f et g :



Partie A Étude de la demande et de l'offre

1. Résoudre l'inéquation $f(x) < 13$.

Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

2. Étudier les variations de la fonction f , puis celles de g sur $[5; 35]$. Interpréter les résultats.

Partie B Étude du prix d'équilibre

Le **prix d'équilibre** est le prix pour lequel la demande et l'offre sont égales.

1. On considère la fonction h définie sur $[5; 35]$ par :

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

a. Montrer que h est décroissante sur $[5; 35]$.

b. Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[21; 22]$.

c. Déterminer une valeur approchée de α à 0,01 près.

2. Comparer l'offre et la demande lorsque :

a. le prix de vente est inférieur à α euros ;

b. le prix de vente est supérieur à α euros.

118

... en sismologie

Échelle de Richter

La fonction logarithme décimal, définie sur $]0; +\infty[$ par $\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$, est souvent utilisée pour étudier des phénomènes physiques.

La **magnitude d'un séisme** est une valeur intrinsèque de celui-ci, ne dépendant ni du lieu d'observation, ni des témoignages de la population. Elle a été introduite en 1935 par l'américain Charles Francis Richter. La **magnitude locale** est donnée par : $M_L = \log(A) - \log(A_0)$ où A est l'amplitude maximale de l'onde sismique lue sur un sismographe, en mm, et où A_0 est une amplitude de référence, en mm.



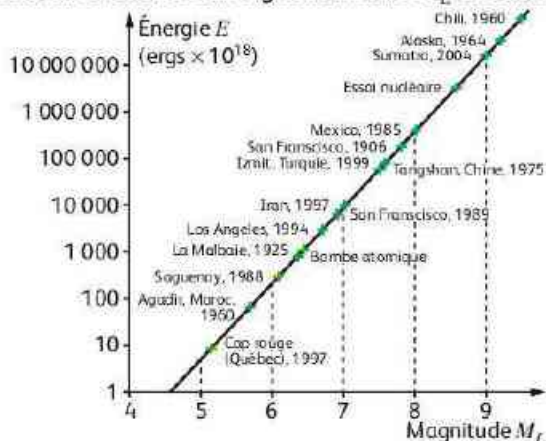
Partie A Comprendre l'échelle de Richter

1. Dans la définition originale de Richter, l'amplitude de référence A_0 est choisie pour que la magnitude soit égale à 3 pour une amplitude de 1 mm. Déterminer la valeur de A_0 et justifier que $M_L = \log(10^{-3}A)$.

2. On entend souvent que la magnitude maximale de l'échelle de Richter est égale à 9. Est-ce vrai ?

Partie B Magnitude et énergie

On s'intéresse à l'énergie E libérée à l'épicentre, en joule, en fonction de la magnitude locale M_L du séisme.



1. Justifier pourquoi on peut conjecturer qu'il existe deux réels a et b tels que $\log(E) = aM_L + b$.

2. En 1958, Richter a établi la loi empirique :

$$\log E = 1,5M_L + 4,8$$

Retrouver cette relation en utilisant que le séisme de magnitude la plus élevée observé jusqu'à présent a eu lieu au Chili en 1960, avec une magnitude de 9,5 et une énergie de $1,1 \times 10^{19}$ joules.

3. Lorsque la magnitude augmente de 1, par combien est multipliée l'énergie libérée par le séisme ?

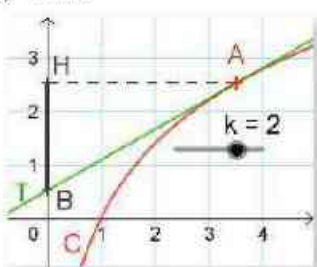
On s'intéresse ici à une propriété remarquable des tangentes aux courbes logarithmiques, appelée historiquement « problème des sous-tangentes constantes ».

Partie A Cas des courbes logarithmiques

Soit un réel $k \neq 0$. On considère la courbe représentative \mathcal{C} de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = k \ln x$$

Pour tout réel $a > 0$, on note A le point de \mathcal{C} d'abscisse a , H le projeté orthogonal de A sur l'axe des ordonnées, T la tangente à \mathcal{C} en A , et B le point d'intersection de T avec l'axe des ordonnées.



1. Réaliser la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie.
2. Que peut-on conjecturer sur la valeur de $y_H - y_B$?
3. Démontrer la conjecture.

Partie B Le problème réciproque

Soit un réel $k \neq 0$. On considère une fonction f dérivable sur $]0; +\infty[$, de courbe représentative \mathcal{C} .

Pour tout réel $a > 0$, on note A le point de \mathcal{C} d'abscisse a , H le projeté orthogonal de A sur l'axe des ordonnées, T la tangente à \mathcal{C} en A , et B le point d'intersection de T avec l'axe des ordonnées.

On suppose que, pour tout réel $a > 0$, $y_H - y_B = k$.

1. Soit un réel $a > 0$. Exprimer y_H en fonction de a .
2. En utilisant l'équation réduite de T , montrer que :

$$y_B = f(a) - a \times f'(a)$$

3. En déduire que $f'(a) = \frac{k}{a}$.

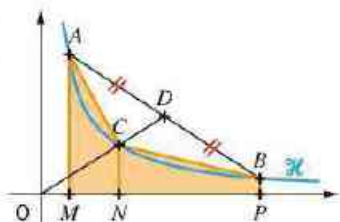
2. En déduire la forme de la fonction f .

Les problèmes de calculs d'aire sont des problèmes très anciens. Mais il a fallu attendre le milieu du XVII^e siècle pour que la quadrature de l'hyperbole soit étudiée de façon rigoureuse par Grégoire de Saint-Vincent.

Cet exercice expose les résultats qu'il a établis, mais à l'aide d'outils inconnus à l'époque : les coordonnées. On s'intéresse ici à l'hyperbole \mathcal{H} d'équation $y = \frac{1}{x}$, tracée dans un repère orthonormé d'origine O .

Partie A Moyenne géométrique et trapèzes

Soient deux points A et B de \mathcal{H} , d'abscisses respectives a et b strictement positives. On note D le milieu de $[AB]$ et C le point d'intersection de \mathcal{H} et de $[OD]$. On note respectivement M, N et P les projetés orthogonaux des points A, C et B sur l'axe des abscisses.



1. Déterminer l'équation réduite de la droite (OD) en fonction de a et b .
2. En déduire que le point C a pour abscisse \sqrt{ab} .
3. Démontrer que les trapèzes $MNCA$ et $NPBC$ ont la même aire. On rappelle que l'aire d'un trapèze de bases b et B , et de hauteur h est $\mathcal{A} = \frac{b+B}{2} \times h$.

Partie B Moyenne géométrique et triangles

On note E le milieu de $[AC]$, F celui de $[BC]$, et G (resp. H) le point d'intersection de \mathcal{H} et $[OE]$ (resp. $[OF]$).

1. En utilisant la **partie A**, justifier que l'abscisse de G est $\sqrt{a\sqrt{ab}}$. Exprimer de même l'abscisse de H .

2. Démontrer que les triangles ACG et BCH ont la même aire. On utilisera que l'aire d'un triangle RST dans un repère orthonormé est $\mathcal{A}(RST) = \frac{1}{2} |\det(\vec{RS}, \vec{RT})|$.

Info

Historiquement, Saint-Vincent raisonne par exhaustion, c'est-à-dire par un double raisonnement par l'absurde : si l'aire \mathcal{A}_1 est strictement inférieure à l'aire \mathcal{A}_2 , il aboutit à une contradiction ; si $\mathcal{A}_1 > \mathcal{A}_2$, il aboutit à une autre contradiction. Il en conclut que $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$.

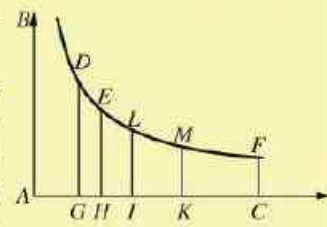
Partie C Le résultat de Saint-Vincent

Saint-Vincent poursuit « indéfiniment » la construction de la **partie B**, sur l'arc d'hyperbole \mathcal{H} compris entre A et B , et conclut que l'aire du domaine compris entre \mathcal{H} et le segment $[AC]$ est égale à l'aire du domaine compris entre \mathcal{H} et le segment $[BC]$.

En utilisant ce résultat, démontrer le résultat de Saint-Vincent écrit ci-dessous en termes actuels :

« On considère des points D, E, L, M et F sur \mathcal{H} , de projetés orthogonaux respectifs G, H, I, K et C sur l'axe des abscisses. On suppose que les abscisses des points D, E, L, M et F sont en progression géométrique.

Alors les aires des « trapèzes concaves » $GHED$, $HILE$, $IKML$ et $KCFM$ construits sous \mathcal{H} sont égales. »



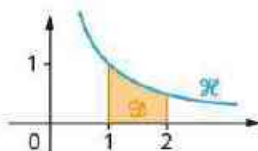
➤ Voir Thème 5 exercice n° 86

Algorithme de Brouncker

Utiliser PYTHON

Le plan étant muni d'un repère orthonormé, on considère l'hyperbole \mathcal{H} d'équation $y = \frac{1}{x}$.

En 1654, Lord William Brouncker a démontré que l'aire du domaine \mathcal{D} compris entre l'hyperbole \mathcal{H} , l'axe des abscisses et les droites verticales d'équation $x=1$ et $x=2$ est égale à $\ln 2$, résultat publié en 1669 dans l'article « *The squaring of the hyperbola by an infinite series of rational numbers, together with its demonstration* ». On admet ce résultat pour obtenir une estimation de $\ln 2$.



Objectif

Compléter un algorithme de calcul de terme d'une suite définie par une somme.

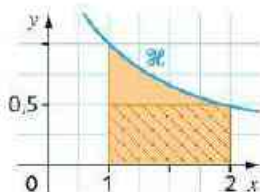
Voir Thème 5

Partie A Découpage à l'aide de rectangles

Brouncker choisit de partager le domaine \mathcal{D} en une suite de rectangles de plus en plus petits et dont on sait calculer l'aire de chacun.

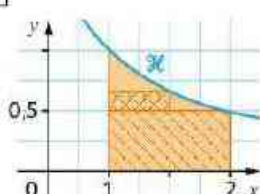
1. Étape 1

À l'aide de la figure ci-contre, justifier que $\frac{1}{1 \times 2} \leq \ln 2$.



2. Étape 2 : on procède par dichotomie en considérant les intervalles $\left[1; \frac{3}{2}\right]$ et $\left[\frac{3}{2}; 2\right]$.

a. Quelles sont les dimensions du rectangle hachuré construit ci-contre au-dessus de $\left[1; \frac{3}{2}\right]$?

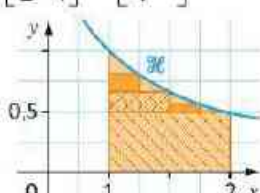


b. En déduire que :

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{3 \times 4} \leq \ln 2$$

3. Étape 3 : on poursuit la démarche en considérant les intervalles $\left[1; \frac{5}{4}\right]$, $\left[\frac{5}{4}; \frac{3}{2}\right]$, $\left[\frac{3}{2}; \frac{7}{4}\right]$ et $\left[\frac{7}{4}; 2\right]$.

a. Déterminer les dimensions de chacun des deux rectangles coloriés construits ci-contre au-dessus de $\left[1; \frac{5}{4}\right]$ et $\left[\frac{3}{2}; \frac{7}{4}\right]$.



b. En déduire que :

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{5 \times 6} + \frac{1}{7 \times 8} \leq \ln 2$$

Partie B Estimation de $\ln 2$

Brouncker poursuit le procédé de la **Partie A** et approche l'aire du domaine \mathcal{D} par la somme des aires de rectangles.

En posant, pour tout entier naturel n :

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k+1)(2k+2)}$$

c'est-à-dire :

$$u_n = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$$

Brouncker démontre que $\ln 2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

1. Compléter la fonction *Brouncker(n)* suivante pour qu'elle renvoie le terme u_n .

Fonction *Brouncker(n)*

```

λ ← 0
Somme ← 0
Tant que λ ≤ n Faire
    Somme ← ...
    λ ← ...
Fin Tant que
Renvoyer Somme
Fin Fonction
    
```

2. a. Programmer cette fonction en Python et l'exécuter pour n égal à 10, 20, 50, 100 puis 1 000.

b. Comparer les résultats obtenus avec $\ln 2$.

Que peut-on conjecturer sur la vitesse de la convergence de la suite (u_n) vers $\ln 2$?

3. a. Soit un entier naturel k . Simplifier $\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2}$.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n :

$$u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2n+2} = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k+1}$$

c. Expliquer pourquoi, pour tout entier naturel n :

$$u_n \leq \ln 2 \leq u_n + \frac{1}{2n+3}$$

d. À partir de quel rang N est-on certain d'avoir, pour tout entier $n > N$, $|u_n - \ln 2| < 10^{-4}$? Confirmer à l'aide du programme Python.

Info

Euler a démontré que, pour tout réel $x \in]-1; 1[$:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

Cette écriture s'appelle **développement en série entière**.

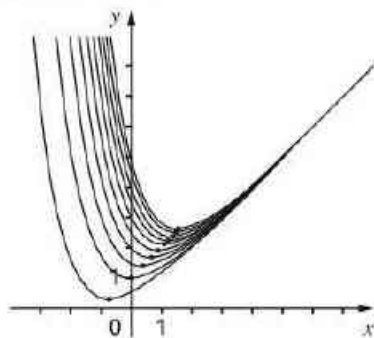
Des points alignés ou non ?

Pour tout réel k , on définit la fonction f_k sur \mathbb{R} par :

$$f_k(x) = x + ke^{-x}$$

On note \mathcal{C}_k la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthonormé.

On a représenté ci-dessous quelques courbes \mathcal{C}_k pour différentes valeurs de k .



Intensité et niveau sonore

La fonction logarithme décimal est définie sur $]0; +\infty[$ par $\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$. Elle vérifie les mêmes propriétés algébriques que la fonction logarithme népérien.

En physique, le **niveau sonore** N (en décibel dB) d'un son d'intensité acoustique I (en watt par m^2) est donné par la relation : $N(I) = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$, où $I_0 = 10^{-12} W/m^2$ est la plus faible intensité perceptible par l'oreille humaine.

Partie A Quelques exemples

1. Quel est le niveau sonore N_0 lorsque $I = I_0$?
2. a. L'intensité d'une moto est estimée à $10^{-5} W/m^2$. Quel est le niveau sonore associé ?
b. Le niveau sonore d'une salle de classe est estimé à 55 dB. Quelle est l'intensité acoustique associée ?
3. Les scientifiques estiment que le seuil de la douleur est atteint à partir d'un niveau sonore de 120 dB. Quelle est l'intensité acoustique associée ?

Partie B Rapport entre niveau sonore et intensité

1. Au 1^{er} octobre 2018, la législation sur le niveau sonore dans les discothèques et salles de concert a évolué. La limite de 105 dB est passée à 102 dB pour une écoute de 15 min. Comment a évolué le niveau sonore associé ?
2. L'intensité de la sonnerie d'un téléphone portable est de 60 dB, celle d'un avion au décollage à 200 m à 120 dB. Combien faudrait-il de téléphones pour égaler le volume sonore d'un avion au décollage ?
3. **Vrai ou faux ?** Lorsque l'intensité acoustique est multipliée par 10, le niveau sonore augmente de 10 dB.

Mener une recherche

Il semble que :

- pour tout réel $k > 0$, la fonction f_k admet un minimum sur \mathbb{R} , atteint en l'abscisse du point noté A_k de la courbe \mathcal{C}_k ;
- les points A_k soient tous alignés.

Partie A Comprendre les conjectures

1. Soit un réel $k > 0$. Étudier le signe de f'_k sur \mathbb{R} .
 2. Conjecturer l'équation réduite de la droite à laquelle appartiendraient tous les points A_k .
- On pourra s'aider d'un logiciel de géométrie dynamique et des outils *Curseur* et *Trace affichée d'un point*.

À L'ÉCRIT OU À L'ORAL

Partie B

Démontrer les conjectures émises.

Mener une recherche

À L'ÉCRIT OU À L'ORAL

Partie C

En complétant les résultats des parties A et B par l'étude des deux documents ci-dessous, présenter un résumé du lien entre intensité et niveau sonore.

Doc. 1 Échelle des niveaux sonores



Doc. 2 Durée limite d'exposition (sans protection) avant dommage

- De 120 à 140 dB : quelques secondes suffisent à provoquer des dégâts irréversibles.
- 100 dB : 5 min/jour
- 95 dB : 15 min/jour
- 92 dB : 30 min/jour
- 89 dB : 1 h/jour
- 86 dB : 2 h/jour
- 80 dB : 8 h/jour

Les capacités du thème

- 1** Estimer une aire à partir d'une représentation graphique
- 2** Calculer une intégrale, une valeur moyenne
- 3** Calculer l'aire sous une courbe, entre deux courbes

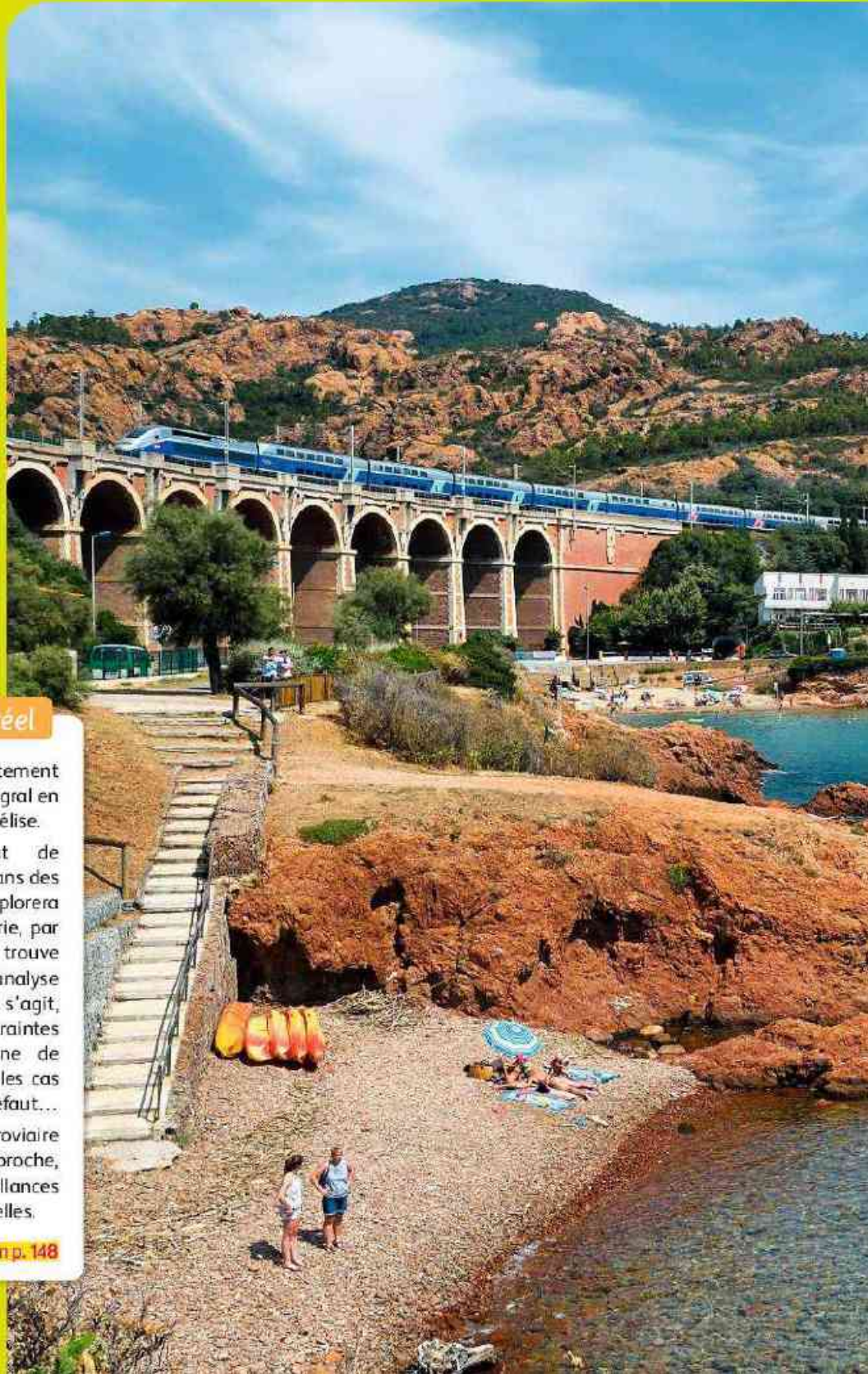
Modélisation du réel

Le calcul d'aires est directement lié à la notion de calcul intégral en mathématiques, qui le modélise.

Ces calculs connaissent de nombreuses applications dans des champs divers, que l'on explorera dans ce thème. En ingénierie, par exemple, le calcul intégral trouve des applications dans l'analyse de fiabilité des systèmes. Il s'agit, dans un système de contraintes donné, d'évaluer la « zone de défaillance », qui modélise les cas où un système est mis en défaut...

La gestion du risque ferroviaire met en œuvre ce type d'approche, avec des causes de défaillances nombreuses et multifactorielles.

 Voir Maths en situation p. 148

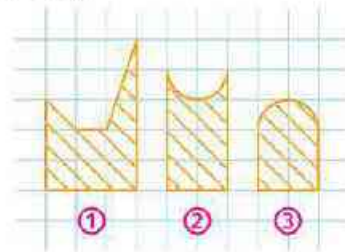


A Diaporama pour tester les bases



B Aire des figures usuelles

1. Rappeler les formules usuelles permettant de calculer l'aire d'un rectangle, d'un triangle, d'un trapèze et d'un disque.
2. Calculer l'aire, en unité d'aire, de chacune des figures suivantes, où les arcs sont des demi-cercles (1 carreau correspond à 1 unité d'aire).



C Dérivées

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes.

1. $f : x \mapsto \frac{e^x}{1+e^x}$ sur \mathbb{R}
2. $g : x \mapsto \ln(x+5)$ sur $]-5; +\infty[$
3. $h : x \mapsto \sqrt{4-x^2}$ sur $]-2; 2[$
4. $k : x \mapsto \frac{x+1}{1-x}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

D Primitives

Déterminer une primitive des fonctions suivantes.

1. $f : x \mapsto e^{2-x}$ sur \mathbb{R}
2. $g : x \mapsto \frac{2x}{x^2+1}$ sur \mathbb{R}
3. $h : x \mapsto \frac{2}{(x+3)^2}$ sur $]-3; +\infty[$
4. $k : x \mapsto x^2+3x+2$ sur \mathbb{R}

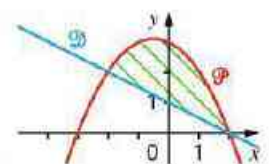
E Symbole Σ

Écrire les sommes suivantes à l'aide du symbole Σ .

1. $A = 1^2 \times h + 2^2 \times h + 3^2 \times h + \dots + n^2 \times h$
2. $B = 1 \times \delta + \frac{1}{2} \times \delta + \frac{1}{3} \times \delta + \dots + \frac{1}{n} \times \delta$

F Caractériser un domaine du plan

On donne la parabole \mathcal{P} d'équation $y = -0,5(x+3)(x-2)$ et la droite \mathcal{D} d'équation $y = -0,5x+1$, qui se coupent aux points $(-2; 2)$ et $(2; 0)$. Caractériser les points de la surface hachurée à l'aide d'inégalités portant sur leurs coordonnées.

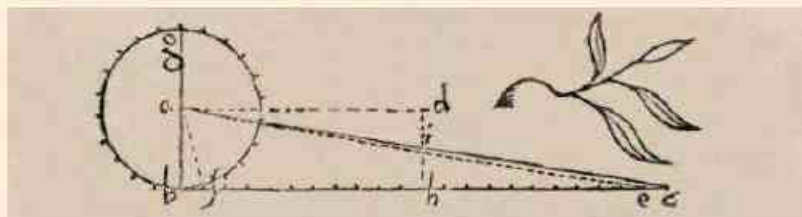


Ressources en +
sur le site collection :
lycee.hachette-
education.com/declic/
t1e-comp1



Consolider les bases

Au début de son ouvrage *Nova stereometria doliorum vinariorum* (Nouvelle mesure des tonneaux de vin), Johannes Kepler reprend les travaux d'Archimède : « L'aire du disque par rapport au carré du diamètre est comme 11 à 14. » Suit le schéma suivant :

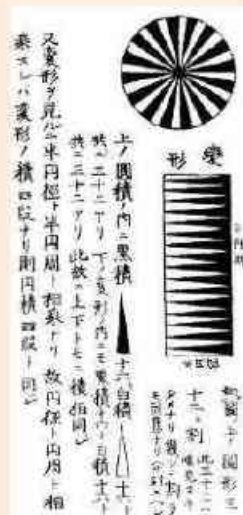


Le raisonnement d'Archimède peut être résumé par la figure ci-contre (extrait de l'ouvrage japonais *Tengen Shinan*, 1698). Archimède avait calculé que le rapport de la circonférence du cercle au diamètre était le même que 22 à 7.

En se basant sur les documents proposés, expliquer son affirmation concernant l'aire du disque.

Objectif

Revoir le calcul de l'aire d'un disque et découvrir une méthode pour la calculer.



Situation 1 Depuis Archimède...

Dans les *Œuvres d'Archimède*, traduites par F. Peyrard en 1807, on trouve la proposition XXIV suivante :

Un segment quelconque compris par une droite et par une parabole est égal à quatre fois le tiers d'un triangle qui a la même base et la même hauteur que ce segment.

Soit un repère orthonormé d'origine O , la parabole d'équation $y = x^2$, et les points $A(1;0)$, $B(1;1)$, $C(0;1)$ et $D(-1;1)$. On veut montrer que l'aire \mathcal{A} du domaine délimité par le segment $[BD]$ et l'arc de parabole « est égale » aux quatre tiers de l'aire de OBD . Répondre aux questions suivantes qui reprennent le raisonnement d'Archimède.

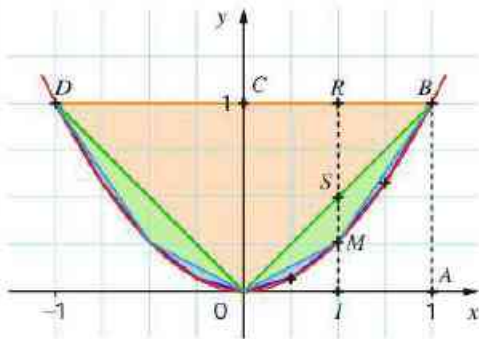
- 1 Calculer l'aire de OBD , en déduire la valeur de \mathcal{A} prévue par la proposition d'Archimède.
- 2 I est le milieu de $[OA]$. À l'aide des informations données par le graphique, montrer que $IM = \frac{1}{4}OC$. En déduire que l'aire de MSB est égale au huitième de celle de OBC .
- 3 En déduire le rapport entre l'aire de la partie verte et celle de OBD .
- 4 Archimède réitère le procédé à partir des milieux de $[OI]$ et $[IA]$ pour obtenir quatre segments de même longueur entre O et A , puis considère de nouveau les milieux de ces segments pour en définir huit, etc.

En admettant que la partie bleue est le quart de la partie verte, en déduire que $\mathcal{A} \approx 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{4^n}$.

- 5 Calculer la valeur de \mathcal{A} quand n tend vers $+\infty$.

Objectif

Déterminer l'aire au-dessus d'un arc de parabole à l'aide de la méthode d'Archimède.



Idée

Prendre $[SM]$ comme base du triangle MSB et $[RB]$ comme hauteur.

Situation 2 ... jusqu'à Roberval

Dans son *Traité des indivisibles*, Roberval propose de calculer le rapport entre l'aire du domaine sous la parabole, défini par l'arc de parabole et les droites (CB) et (AB) , et celle du rectangle $ABCD$ (cf. figure ci-contre).

1 Au début de son ouvrage, il écrit que le rapport entre la somme des carrés $(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2)$ et le cube (n^3) est de $\frac{1}{3}$.

De même si les lignes suivoient entr'elles l'ordre des quarréz, la somme de toutes ces lignes ou des points qui les représentent, seroit à la dernière prise autant de fois, comme la somme des quarréz au cube, ou comme la pyramide à la colonne, sçavoir comme 1 à 3.

1. À l'aide d'un calcul (ou d'un logiciel de calcul formel), déterminer l'expression de $\sum_{k=1}^n k^2$ en fonction de n .

2. Justifier que le rapport entre $\sum_{k=1}^n k^2$ et n^3 peut être approximé par $\frac{1}{3}$ quand n est très grand.

2 Par la suite, la méthode de Roberval définit une partition du segment $[AD]$ en n parties, avec $AE = 1$; $AF = 2$; ...; $AD = n$; et que $EL = AE^2 = 1^2$; $FM = AF^2 = 2^2$; ...; $DC = AD^2 = n^2$.

1. Préciser l'aire de $ABCD$ en fonction de n .

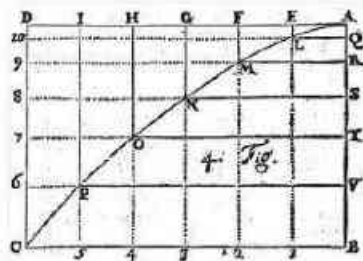
2. Justifier que l'aire comprise entre les droites (AD) , (DC) et l'arc de parabole peut être approximée par : $\mathcal{A} = \sum_{k=1}^n k^2$.

3. En déduire une justification de l'affirmation suivante de Roberval.

Ainsi la Parabole $ABCPONMLA$ sera les deux tiers du parallélogramme ou quarré $CDAB$, ce qui a été démontré par Archimède d'une autre manière.

Objectif

Déterminer l'aire de la parabole.
Utiliser le symbole Σ .



Info

Gilles Personne de Roberval (1602-1675) est l'un des sept savants qui fondent l'Académie Royale des Sciences en 1666.

Aide

Pour la question **2**, penser à dessiner des rectangles de base AE, EF, \dots

Situation 3 Aire sous la courbe

1 Soit la fonction $t \mapsto \mathcal{A}(t)$ sur $[1; +\infty[$ qui donne l'aire du domaine délimité par l'hyperbole, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = t$.

1. Par simple bon sens, donner les variations de \mathcal{A} sur $[1; +\infty[$.

2. Que vaut $\mathcal{A}(1)$?

2 1. À l'aide de considérations géométriques, justifier que, pour $h > 0$:

$$\mathcal{A}(t) + \frac{h}{t+h} \leq \mathcal{A}(t+h) \leq \mathcal{A}(t) + \frac{h}{t}$$

2. En déduire que $\frac{1}{t+h} \leq \frac{\mathcal{A}(t+h) - \mathcal{A}(t)}{h} \leq \frac{1}{t}$.

3. En procédant de la même façon, écrire l'inégalité obtenue avec $h < 0$.

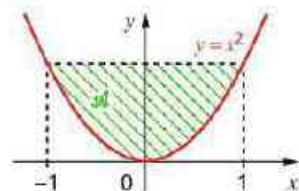
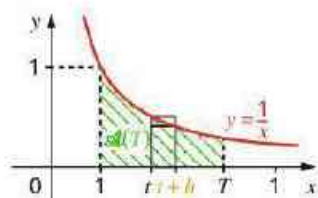
4. En déduire que la fonction \mathcal{A} est dérivable, en utilisant le résultat de la question **1**, donner l'expression de \mathcal{A} en fonction de t .

3 1. En reprenant la même démarche, montrer que l'aire du domaine délimité par la parabole d'équation $y = x^2$, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = 1$ est de un tiers d'unité d'aire.

2. En remarquant que la fonction carré est paire, en déduire l'aire du domaine en vert sur la figure ci-contre.

Objectif

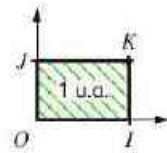
Déterminer l'aire d'un domaine délimité par la courbe d'une fonction.



1 Intégrale d'une fonction continue et positive

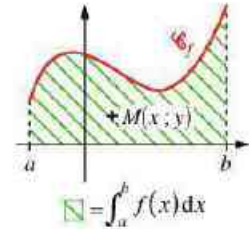
Dans tout le thème 5, le plan est muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$. L'aire du rectangle $OIKJ$ est donc de 1 unité d'aire (1 u.a.).

Dans cette page de cours, les fonctions f et g , de courbes représentatives \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g , sont continues et positives sur un intervalle $[a; b]$.



a Définition

Définition Le domaine délimité par les droites d'équation $x = a$, $x = b$, la courbe \mathcal{C}_f et l'axe des abscisses est l'ensemble des points $M(x; y)$ vérifiant $a \leq x \leq b$ et pour tout $x \in [a; b]$, $0 \leq y \leq f(x)$. L'aire de ce domaine (en unité d'aire) est l'**intégrale** de a à b de la fonction f . Cette aire se note $\int_a^b f(x) dx$.



Remarques

- $\int_a^b f(x) dx$ représente un réel positif.
- Si $a = b$, alors $\int_a^a f(x) dx = 0$. En effet le domaine est alors réduit à un segment, d'aire nulle.
- a et b sont les **bornes** de l'intégrale, le symbole d précède le nom de la « variable d'intégration ».

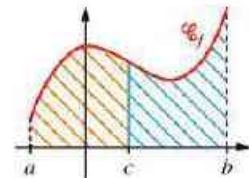
Vocabulaire

On dit que la variable d'intégration est « muette » : le nombre $\int_a^b f(x) dx$ est le même que $\int_a^b f(t) dt$.

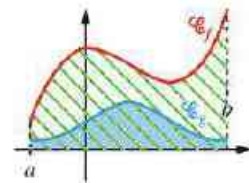
b Propriétés

Relation de Chasles Pour tout réel $c \in [a; b]$:

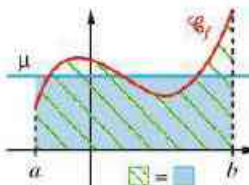
$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$



Conservation de l'ordre Si, pour tout réel $x \in [a; b]$, on a $g(x) \leq f(x)$, alors $\int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx$.



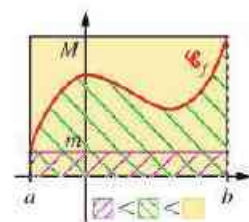
Valeur moyenne La valeur moyenne de f sur l'intervalle $[a; b]$ est le réel μ défini par $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.



Sur la figure ci-contre, l'aire du rectangle est égale à celle de l'intégrale ; c'est-à-dire :

$$(b-a) \times \mu = \int_a^b f(x) dx$$

Inégalité de la moyenne Si, pour tout $x \in [a; b]$, il existe m et M tels que $m \leq f(x) \leq M$, alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$.



Remarque

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a) \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M \\ \Leftrightarrow m \leq \mu \leq M$$

Ainsi, la valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle $[a; b]$ est comprise entre les valeurs extrêmes de cette fonction sur $[a; b]$.



1 Estimer une aire à partir d'une représentation graphique

Énoncé \mathcal{C}_f est la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; I; J)$.

1. Soit k un réel strictement positif et f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = k$.

a. Donner une représentation graphique du domaine défini par l'axe des abscisses, \mathcal{C}_f et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 3$.

b. Donner la valeur de $\int_{-1}^3 f(x) dx$.

2. Soit f la fonction définie sur $[-4; 4]$ par $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$.

a. Justifier que \mathcal{C}_f est un demi-cercle.

b. En déduire la valeur de $\int_{-4}^4 \sqrt{16 - x^2} dx$.

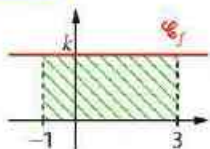
3. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = |x - 2| + 1$.

a. Calculer $\int_0^3 f(x) dx$.

b. En déduire la valeur moyenne de f sur $[0; 3]$.

Solution

1. a.



b. $\int_{-1}^3 f(x) dx$ est l'aire d'un rectangle de côtés 4 et k , donc $\int_{-1}^3 f(x) dx = 4k$.

2. a. Soit $M(x; y) \in \mathcal{C}_f$ alors $y = \sqrt{16 - x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y^2 + x^2 = 4^2 \end{cases}$

Donc M appartient au demi-cercle de centre O et rayon 4 tel que $y \geq 0$.

b. $\int_{-4}^4 \sqrt{16 - x^2} dx = \frac{1}{2} \pi 4^2 = 8\pi$

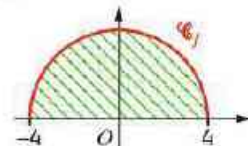
3. a. $\int_0^3 f(x) dx$ est l'aire de la réunion des deux trapèzes, donc, avec la relation de Chasles :

$$\int_0^3 f(x) dx = \frac{(3+1) \times 2}{2} + \frac{(1+2) \times 1}{2} = \frac{11}{2}$$

b. Valeur moyenne : $\mu = \frac{1}{3-0} \int_0^3 f(x) dx = \frac{11}{6}$.

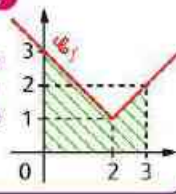
Point méthode

1. a. Un schéma permet de voir le domaine dont on cherche l'aire.



Point méthode

3. Penser à étudier le signe de l'expression dont on calcule la valeur absolue.



J'applique

1 Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = -x + 3$$

1. Donner une représentation graphique du domaine défini par l'axe des abscisses, \mathcal{C}_f et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 3$.

2. En déduire la valeur de $\int_{-1}^3 f(x) dx$.

2 1. Démontrer que $y = \sqrt{4x - x^2}$ est l'équation d'un demi-cercle dans un repère orthonormé. Préciser son centre et son rayon.

2. En déduire $\int_0^4 \sqrt{4x - x^2} dx$.

3 Soit la fonction f définie sur $[0; 3]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}$$

1. Étudier les variations de f , en déduire ses extremums sur $[0; 3]$. Justifier que $3 \leq \int_0^3 f(x) dx \leq 9$.

2. Calculer $\int_0^3 f(x) dx$ à l'aide d'un logiciel et/ou de la calculatrice.

Aide

Les calculatrices ont une fonction Int et GeoGebra a un outil inspecteur de fonction.

2 Cas général

a Théorème fondamental du calcul intégral

Théorème Si f est une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$, alors la fonction F définie sur $[a; b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est dérivable sur $[a; b]$ et a pour dérivée f .



Démonstration partielle...

...dans le cas d'une fonction continue, croissante et positive sur $[a; b]$.

Soit $[x_0; x] \subset [a; b]$, on a $x_0 \leq t \leq x$.

Comme f est croissante sur $[a; b]$: $f(x_0) \leq f(t) \leq f(x)$.

D'après l'inégalité de la moyenne :

$$f(x_0)(x - x_0) \leq \int_{x_0}^x f(t) dt \leq f(x)(x - x_0).$$

D'après la relation de Chasles : $\int_a^x f(t) dt = \int_a^{x_0} f(t) dt + \int_{x_0}^x f(t) dt$

$$\Leftrightarrow \int_{x_0}^x f(t) dt = \int_a^x f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt$$

$$\Leftrightarrow \int_{x_0}^x f(t) dt = F(x) - F(x_0)$$

L'inégalité peut donc s'écrire :

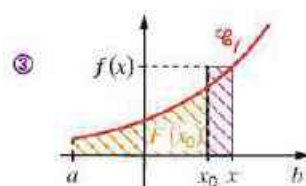
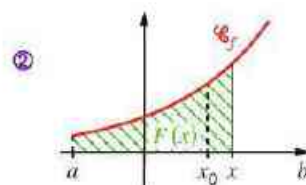
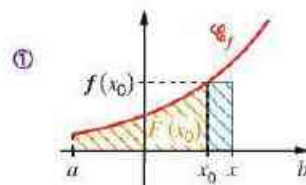
$$f(x_0)(x - x_0) \leq F(x) - F(x_0) \leq f(x)(x - x_0)$$

$$\Leftrightarrow f(x_0) \leq \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \leq f(x)$$

f est continue donc $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$; à l'aide du « théorème des gendarmes »

on en déduit que F est dérivable en x_0 et de nombre dérivée $f(x_0)$.

Justification graphique



- $F(x_0) + f(x_0)(x - x_0)$ ①
- $< F(x) <$ ②
- $F(x_0) + f(x)(x - x_0)$ ③

b Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque

Rappels

- Soient F et f des fonctions définies sur un intervalle I . Si f est la fonction dérivée de F , alors F est une primitive de f .
- Si la fonction F est une primitive de f sur I , alors, quel que soit $k \in \mathbb{R}$, la fonction définie pour tout $x \in I$ par $G(x) = F(x) + k$ est aussi une primitive de la fonction f .

Définition Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$, et F une primitive (quelconque) de f sur $[a; b]$, alors :

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Propriété (linéarité)

Quelques soient les fonctions f et g continues sur un intervalle I , et pour tous réels α et β :

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

Relation de Chasles

Quelques soient les réels a, b et c de I :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Remarques

- $F(b) - F(a)$ se note $[F(x)]_a^b$.
- La différence $F(b) - F(a)$ ne dépend pas de la primitive de f choisie.

Conséquence

$$\int_a^a f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^a f(x) dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

2 Calculer une intégrale, une valeur moyenne

Énoncé 1. Déterminer une primitive de la fonction f définie sur l'intervalle $[a; b]$, puis calculer $\int_a^b f(x) dx$.

a. $f(x) = 3x^2$, $[a; b] = [1; 4]$

b. $f(x) = e^x + x$, $[a; b] = [0; 1]$

c. $f(x) = \frac{1}{2+x}$, $[a; b] = [-1; 2]$

2. a. Vérifier que la fonction F définie sur $]0; +\infty[$ par $F(x) = \frac{1}{2}x^2 \left(\ln(x) - \frac{1}{2} \right)$ est une primitive de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x \ln(x)$.

b. En déduire la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[1; e]$.

Solution

1. a. La fonction $f : x \mapsto 3x^2$ admet pour primitive $F : x \mapsto x^3$, donc :

$$\int_1^4 3x^2 dx = F(4) - F(1) = 4^3 - 1^3 = 63$$

b. La fonction $f : x \mapsto e^x + x$ admet pour primitive $F : x \mapsto e^x + \frac{1}{2}x^2$, donc :

$$\int_0^1 (e^x + x) dx = F(1) - F(0) = e + \frac{1}{2} - (e^0 + 0) = e - \frac{1}{2}$$

c. $f : x \mapsto \frac{1}{2+x}$ est de la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u : x \mapsto 2+x$, qui est strictement positive sur $[-1; 2]$; une primitive de f sur $[-1; 2]$ est $F : x \mapsto \ln(2+x)$.

$$\int_{-1}^2 \frac{1}{2+x} dx = F(2) - F(1) = \ln(2+2) - \ln(2-1) = \ln(4)$$

2. a. Pour vérifier que F est une primitive de f , on peut dériver F et vérifier que, pour tout $x \in]0; +\infty[$, $F'(x) = f(x)$.

F est de la forme $u \times v$ avec $u : x \mapsto \frac{1}{2}x^2$ et $v : x \mapsto \ln(x) - \frac{1}{2}$.

$$\text{Donc } F'(x) = x \left(\ln(x) - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2}x^2 \times \frac{1}{x} = x \ln(x) - \frac{x}{2} + \frac{x}{2} = f(x).$$

Ainsi, f est la dérivée de F , et F est une primitive de f .

b. La valeur moyenne de f sur $[1; e]$ est :

$$\mu = \frac{1}{e-1} \int_1^e f(x) dx = \frac{1}{e-1} (F(e) - F(1)) = \frac{1}{e-1} \times \left(\frac{1}{4}e^2 - \left(-\frac{1}{4} \right) \right) = \frac{e^2 + 1}{4(e-1)}$$

Point méthode

Une bonne connaissance des dérivées usuelles permet de trouver rapidement l'expression d'une primitive.

Point méthode

1. c. Quand la fonction à intégrer est de la forme $\frac{u'}{u}$, ne pas oublier de vérifier le signe de u sur l'intervalle d'intégration.

J'applique

Pour les exercices 4 à 7, calculer l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ après avoir vérifié que F est une primitive de f sur $[a; b]$.

4 $\int_{-2}^5 x^2 - 4x + 5 dx$ $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 5x$

5 $\int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ $F(x) = 2\sqrt{x}$

6 $\int_0^{\ln 2} x e^x dx$ $F(x) = (x-1)e^x$

7 $\int_1^e \ln(x) dx$ $F(x) = x \ln(x) - x$

8 Sachant que $I = \int_0^1 \sqrt{1-x} dx = \frac{2}{3}$ et

$J = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{4}$, calculer la valeur de l'intégrale

$$K = \int_0^1 4\sqrt{1-x^2} + 6\sqrt{1-x} dx.$$

9 Soit f la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2}{x^2 - 1}$$

Vérifier que $f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$.

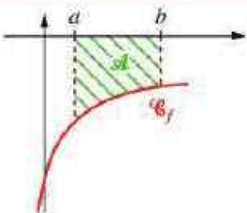
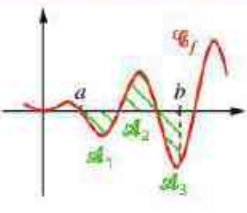
En déduire l'intégrale : $I = \int_2^4 \frac{2}{x^2 - 1} dx$.

3 Calculs d'aires - Méthode des rectangles

Dans cette partie, on étend les notions d'aires aux fonctions continues de signe quelconque.

a Intégrales et calculs d'aires

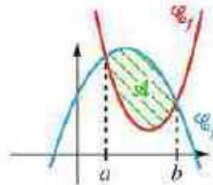
Une intégrale peut être interprétée en termes d'aire pour les fonctions de signe quelconque :

| Si f est négative sur $[a; b]$ | Si f est de signe quelconque sur $[a; b]$ |
|---|---|
|  $\int_a^b f(x) dx = -S$ |  $\int_a^b f(x) dx = -S_1 + S_2 - S_3$ |

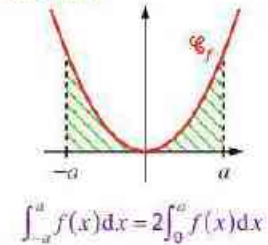
Aire entre deux courbes

On suppose que sur l'intervalle $[a; b]$, on a : $g(x) \geq f(x)$. L'aire S du domaine délimité par les courbes des fonctions f et g et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est alors donnée par :

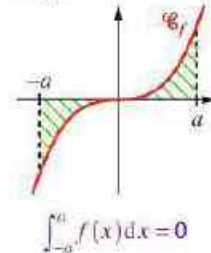
$$S = \int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx$$



Si f est paire



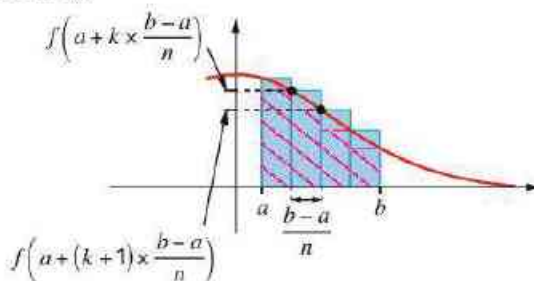
Si f est impaire



b Méthode des rectangles

Pour certaines fonctions dont on ne connaît pas de primitive, la « méthode des rectangles » permet d'obtenir une valeur approchée de l'intégrale.

Pour calculer $\int_a^b f(x) dx$, on découpe l'intervalle $[a; b]$ en n intervalles de même amplitude et on encadre l'intégrale entre la somme des aires des rectangles situés sous la courbe et la somme des aires des rectangles situés au-dessus de la courbe, comme indiqué sur la figure ci-dessous (où $n = 4$ et k varie de 0 à 3).



Exemple

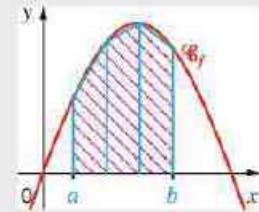
Soit f une fonction positive et décroissante sur $[a; b]$, on a :

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{b-a}{n} \times k\right) \geq \int_a^b f(x) dx \geq \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{b-a}{n} \times k\right)$$

On trouve une valeur approchée de l'intégrale à l'aide du « théorème des gendarmes ».

Remarques

- On peut appliquer ce procédé avec des fonctions croissantes.
- On peut aussi utiliser la méthode des trapèzes.



☑ Voir exercices n° 85 et 89



3 Calculer l'aire sous une courbe, entre deux courbes

Énoncé 1. a. Calculer l'intégrale $I = \int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx$ à l'aide d'un calcul d'aire.

b. En déduire $J = \int_{-2}^2 (x^2 + 2\sqrt{4-x^2}) dx$.

2. Soient les fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par $f(x) = 0,5x^2 - 3x + 5$ et $g(x) = 8 - 0,5x$.

On note \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g leurs courbes représentatives.

a. À l'aide d'un logiciel ou d'une calculatrice, tracer \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g : conjecturer leurs positions relatives.

b. Démontrer la conjecture précédente.

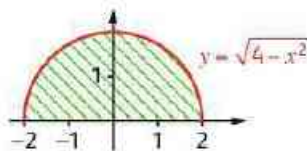
c. En déduire l'aire du domaine (en unité d'aire) délimité par les courbes \mathcal{C}_f , \mathcal{C}_g et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 6$.

Solution

1. a. $f(x) = y = \sqrt{4-x^2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y^2 = 4 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

donc l'intégrale représente l'aire d'un demi-disque, centré en $(0; 0)$ et rayon 2.



On en déduit que $I = \frac{1}{2}\pi 2^2 = 2\pi$.

$$\begin{aligned} \text{b. } J &= \int_{-2}^2 (x^2 + 2\sqrt{4-x^2}) dx = \int_{-2}^2 x^2 dx + 2 \int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_{-2}^2 + 2 \times 2\pi = \frac{8}{3} - \frac{-8}{3} + 4\pi = \frac{16}{3} + 4\pi \end{aligned}$$

2. a. Par lecture graphique : \mathcal{C}_g est au-dessus de \mathcal{C}_f sur $[-0,8; 6]$.

b. On cherche x tel que $g(x) - f(x) \geq 0$,

$$g(x) - f(x) = 8 - 0,5x - (0,5x^2 - 3x + 5) = -0,5x^2 + 2,5x + 3$$

On cherche les racines de $-0,5x^2 + 2,5x + 3$; une racine évidente est $x_1 = -1$,

on en déduit que l'autre racine est $x_2 = 6$.

Comme le coefficient de x^2 est négatif, on sait que la différence $g(x) - f(x)$ est positive sur $[-1; 6]$ et est négative à l'extérieur de cet intervalle.

Donc sur $[-1; 6]$, on a $g(x) \geq f(x)$.

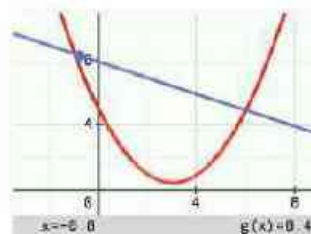
c. Sur $[-1; 6]$, \mathcal{C}_g est au-dessus de \mathcal{C}_f , donc l'aire du domaine est :

$$\int_{-1}^6 (g(x) - f(x)) dx$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^6 (g(x) - f(x)) dx &= \int_{-1}^6 (-0,5x^2 + 2,5x + 3) dx = \left[-\frac{0,5}{3}x^3 + \frac{2,5}{2}x^2 + 3x \right]_{-1}^6 \\ &= -36 + 45 + 18 - \left(\frac{0,5}{3} + \frac{2,5}{2} - 3 \right) = \frac{343}{12} \approx 28,58 \text{ u.a.} \end{aligned}$$

Point méthode

1. a. Une intégrale permet de calculer une aire. Ici, une aire bien connue permet de calculer une intégrale...



Point méthode

2. b. Pour déterminer la position de \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g , on peut étudier le signe de $g(x) - f(x)$.

Rappel

Dans un polynôme de la forme $ax^2 + bx + c$, le produit des racines est $-\frac{c}{a}$.

J'applique

10 Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{x}{2} + \sin x$.

1. Calculer $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$.

2. Quelle particularité de f aurait permis d'éviter une recherche de primitive pour calculer cette intégrale ?

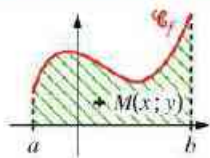
11 Soit f la fonction définie sur $[0; 3]$ par $f(t) = te^{-t}$.

1. Chercher une primitive F de f sous la forme $F(t) = (at + b)e^{-t}$, avec a et b entiers relatifs.

2. En déduire $\int_0^3 f(t) dt$.

12 Soient les fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par $f(x) = 4 - (x-2)^2$ et $g(x) = x$ de courbes respectives \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g . Déterminer les coordonnées des points d'intersection de \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g . En déduire l'aire du domaine (en unité d'aire) compris entre \mathcal{C}_f , \mathcal{C}_g et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 3$.

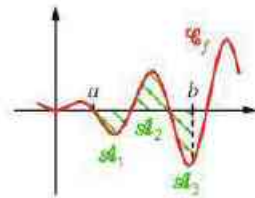
Aire du domaine sous la courbe pour f positive



$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

avec F une primitive de f sur $[a; b]$.

Intégrale et primitive

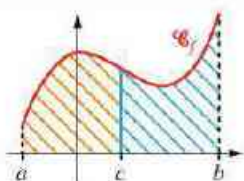


$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

avec F une primitive de f sur $[a; b]$.

$$\int_a^b f(x) dx = -s_1 + s_2 - s_3$$

Relation de Chasles



Pour tout réel $c \in [a; b]$:

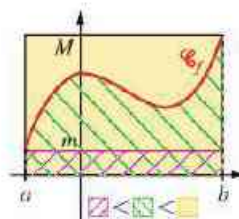
$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Linéarité de l'intégrale

Sur $[a; b]$, $h(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$, alors:

$$\int_a^b h(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

Valeur moyenne

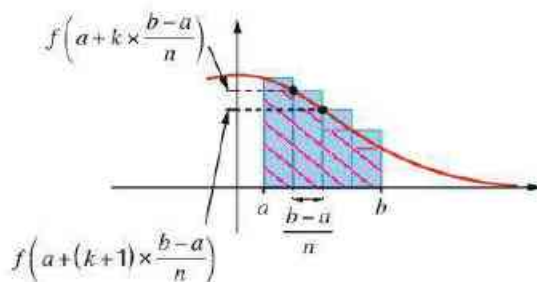


La valeur moyenne de f sur l'intervalle $[a; b]$ est le réel μ défini par:

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Si, pour tout $x \in [a; b]$, on a $f(x) \in [m; M]$, alors on a toujours $m < \mu < M$.

Méthode des rectangles



Exemple pour f décroissante sur l'intervalle $[a; b]$:

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{b-a}{n} \times k\right) \geq \int_a^b f(x) dx \geq \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{b-a}{n} \times k\right)$$

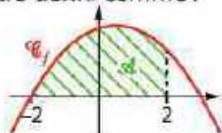


[Voir corrigés](#)

QCM

Pour chacune des questions, indiquer la (ou les) bonne(s) réponse(s).

1. \mathcal{A} peut être défini comme :



2. f est une fonction telle que pour $x \in [-2; 5]$, $f(x) \in [3; 7]$ et $I = \int_{-2}^5 f(x) dx$, alors :

3. Soit $I = \int_1^2 3x^2 - 2x + 1 dx$, alors :

4. La valeur moyenne de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $[1; e]$ est :

5. Sachant que $\int_0^\pi (t - \cos(t)) dt = \frac{\pi^2}{2}$, alors :

| | a | b | c |
|----|--|--------------------------------|---|
| 1. | l'ensemble des points compris entre \mathcal{C}_f et l'axe des abscisses | $\int_{-2}^2 f(x) dx$ | l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $-2 \leq x \leq 2$ et $0 \leq y \leq f(x)$ |
| 2. | f est croissante sur $[-2; 7]$ | f est positive sur $[-2; 7]$ | $-2 \times 4 \leq I \leq 5 \times 4$ |
| 3. | $I = 5$ | $I = x^3 - 2x + x$ | $\int_1^2 3x^2 - 2x dx + 1$ |
| 4. | $\frac{1}{e-1}$ | $e+1$ | $\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{e} \right)$ |
| 5. | $\int_0^\pi t dt = \frac{\pi^2}{2} + \int_\pi^0 \cos(t) dt$ | $\int_0^\pi \cos(t) dt = \pi$ | $\int_0^\pi \cos(t) dt = 0$ |

Pour les questions 6. à 8., on considère la fonction f , dérivable sur \mathbb{R} dont le tableau de variations est ci-contre.

| | | | | |
|--------|-----------|------|-----|-----------|
| x | $-\infty$ | -2 | 2 | $+\infty$ |
| $f(x)$ | -1 | -3 | 1 | $0,5$ |

6. Si $I = \int_{-2}^2 f(x) dx$, alors :

7. Le signe de $\int_0^2 f(x) dx$ est :

8. Soit F une primitive de f et G la fonction définie par $G(x) = F(x) - F(2)$, alors :

| | | | |
|----|---|---------------------------------------|--|
| 6. | $-12 \leq I \leq 4$ | $-3 \leq I \leq 1$ | impossible d'encadrer I avec les informations du tableau |
| 7. | négatif | positif | impossible à déterminer avec ce tableau |
| 8. | G est décroissante sur $[0; +\infty[$ | G est croissante sur $[0; +\infty[$ | les informations du tableau ne permettent pas de connaître le sens de variation de G |

vrai

ou faux ?

Indiquer pour chaque affirmation si elle est vraie ou fausse. Justifier.

1. Si, pour tout $x \in [a; b]$, $f(x) \leq g(x)$, alors :

$$\int_a^b (g(x) - f(x)) dx \geq 0$$

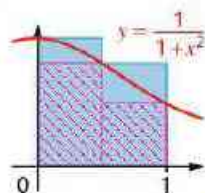
2. Si $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$, alors, pour tout $x \in [a; b]$ on a $f(x) = g(x)$.

3. La fonction F définie sur \mathbb{R} par $F(x) = \int_0^x t(t+2) dt$ est croissante sur $[0; +\infty[$.

4. Si u est une fonction telle que $\int_0^1 u'(x) \times u(x) dx = 0$, alors $u(0) = u(1)$ ou $u(0) = -u(1)$.

5. Le graphique permet d'affirmer que :

$$\frac{13}{20} \leq \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \leq \frac{9}{10}$$



Automatismes transversaux

13 Calculer les sommes suivantes.

$$1. S = \sum_{k=1}^4 \frac{1}{k}$$

$$2. T = \sum_{k=0}^5 k^2$$

$$3. U = \sum_{k=2}^{10} 1$$

$$4. V = \sum_{k=2}^8 k+3$$

14 Écrire les sommes à l'aide du symbole Σ .

$$1. S = 2+5+8+\dots+(n+3)$$

$$2. T = 2+6+12+\dots+(n^2+n)$$

15 Développer et réduire les expressions suivantes.

$$1. A = (2+e^x)(3-e^x) \quad 2. B = (1-e^x)^2$$

$$3. C = (e^x - e^{-x})^2 \quad 4. D = e^{-x}(5-e^x)$$

16 Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes.

$$1. x^2 + 4x - 6 = 0$$

$$2. 3x^2 = 12$$

$$3. x^3 = 5x^2 + 4x$$

$$4. \frac{2}{x^2+1} = x$$

17 Calculer les sommes suivantes.

$$1. S = u_0 + u_1 + \dots + u_{12} \text{ avec } u_n = 4n - 7.$$

$$2. T = v_1 + v_2 + \dots + v_{10} \text{ avec } v_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

18 Résoudre sur l'intervalle I les équations suivantes.

$$1. \ln(3x+2) = 7 \text{ sur } I =]0; +\infty[$$

$$2. e^{5-0,2x} = 8 \text{ sur } I = \mathbb{R}$$

19 Calculer le pourcentage d'évolution global et préciser s'il s'agit d'une hausse ou d'une baisse.

1. Hausse de 5 % suivie d'une hausse de 10 %.

2. Hausse de 7 % suivie d'une baisse de 7 %.

3. Baisse de 3,5 % suivie d'une baisse de 6,5 %.

20 Donner le minimum et le maximum des fonctions suivantes sur l'intervalle $[-10; 15]$.

$$1. f(x) = 4x^2 + 3x - 5$$

$$2. g(x) = -1,4x^2 + 9,7x - 15$$

21 Déterminer une équation de la droite (AB) .

$$1. A(-3; 9) \text{ et } B(-4; 5)$$

$$2. A(10; 342) \text{ et } B(150; 543)$$

22 Déterminer si les équations suivantes sont des équations de cercle.

$$1. x^2 + y^2 + 8x - 6y + 16 = 0$$

$$2. x^2 + y^2 - 4x + 8y + 64 = 0$$

23 Déterminer le volume en litre :

1. d'un cylindre de rayon 4 cm et de hauteur 10 cm ;

2. d'un cône de diamètre 20 cm et de hauteur 43 cm ;

3. d'un cube d'arête 10 cm.

Automatismes du thème

24 Déterminer une primitive de chaque fonction.

$$1. f : x \mapsto x^3 + x^2 + 3 \text{ définie sur } \mathbb{R}.$$

$$2. g : x \mapsto \frac{x^3 + x^2 + 3}{x} \text{ définie sur }]0; +\infty[.$$

$$3. h : x \mapsto \frac{x^3 + x^2 + 3}{x^2} \text{ définie sur }]0; +\infty[.$$

25 Déterminer une primitive de chaque fonction.

$$1. f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ définie sur }]0; +\infty[.$$

$$2. g : x \mapsto \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}} \text{ définie sur }]0; +\infty[.$$

$$3. h : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} \text{ définie sur }]-2; 2[.$$

26 Déterminer les valeurs des intégrales à l'aide de considérations géométriques.

$$1. I = \int_{-4}^4 \sqrt{16-x^2} dx \quad 2. J = 4 \int_{-3}^3 \sqrt{9-x^2} dx$$

$$3. K = 6 \int_0^2 (t+1) dt$$

27 Déterminer les valeurs des intégrales à l'aide de considérations géométriques.

$$1. I = \int_1^9 \sqrt{16-(x-5)^2} dx \quad 2. J = \int_1^5 (8-t) dt$$

$$3. K = \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx$$

28 Calculer les intégrales suivantes.

$$1. I = \int_{-2}^4 (x^2+2) dx \quad 2. J = \int_1^4 \left(t + \frac{1}{t}\right) dt$$

$$3. K = \int_2^8 \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{u^2}\right) du$$

29 Calculer les intégrales suivantes.

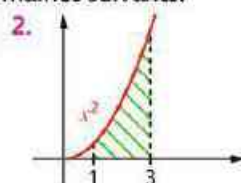
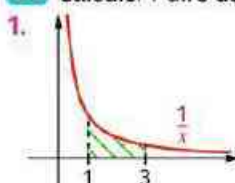
$$1. I = \int_{-\ln 3}^{\ln 3} e^x dx \quad 2. J = \int_0^{\ln 7} \frac{e^t}{e^t+3} dt \quad 3. K = \int_2^9 \frac{2t}{t^2+3} dt$$

30 Sachant que $\int_0^\pi \sin t dt = 2$ et que la fonction sinus est impaire et 2π -périodique, calculer les intégrales suivantes.

$$1. I = \int_{-\pi}^{\pi} \sin t dt \quad 2. J = \int_0^{2\pi} \sin t dt \quad 3. K = \int_{2\pi}^{3\pi} \sin x dx$$

31 Vérifier que $F : x \rightarrow x\sqrt{x}$ est une primitive de $f : x \rightarrow \frac{3}{2}\sqrt{x}$ sur $]0; +\infty[$, puis calculer $I = \int_1^9 \sqrt{x} dx$.

32 Calculer l'aire des domaines suivants.



Consolider les bases

33 Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes.

1. $f: x \mapsto x^2$ sur \mathbb{R} 2. $g: x \mapsto \frac{1}{(x+1)^2}$ sur $]-1; +\infty[$

34 Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes.

1. $f: x \mapsto x + e^x$ sur \mathbb{R} 2. $g: x \mapsto \frac{1}{x+1}$ sur $]-\infty; -1[$

3. $h: x \mapsto \frac{3}{2\sqrt{x}}$ sur $]0; +\infty[$

35 Soit la fonction F définie sur \mathbb{R} par $F(x) = (x-1)e^x$.

1. Vérifier que $F'(x) = xe^x$.

2. En déduire $\int_1^2 xe^x dx$.

36 Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x \ln(x) - x$$

1. Déterminer la dérivée de f .

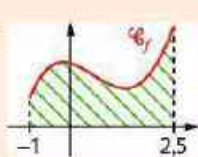
2. Calculer $I = \int_1^3 \ln(x) dx$.

37 1. Vérifier que $\frac{1}{(x+2)(x+3)} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}$.

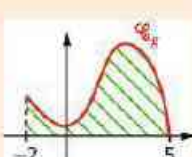
2. En déduire une primitive de la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{(x+2)(x+3)}$.

38 Définir chacun des domaines suivants et écrire son aire sous forme d'intégrale.

1.



2.



39 À l'aide d'une lecture graphique, donner une équation de chaque demi-disque.



40 Dans un repère, représenter l'ensemble des points compris entre la courbe de la fonction $x \mapsto \sqrt{x+1}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=0$ et $x=4$.

41 Dans un repère, représenter l'ensemble des points compris entre la courbe de la fonction $x \mapsto x^2 - x - 2$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=-1$ et $x=2$.

Connaître le cours

42 Deux diaporamas pour faire le point sur le cours.



43 Vrai ou faux ?

f est une fonction continue et positive sur \mathbb{R} , indiquer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.

1. $\int_{-2}^5 f(x) dx + \int_5^9 f(x) dx = \int_{-2}^9 f(x) dx$

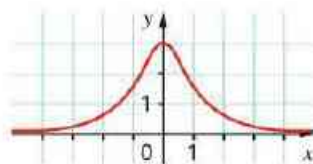
2. Si f est paire, alors $\int_{-4}^8 f(x) dx = 2 \int_0^6 f(x) dx$.

3. La valeur moyenne de f sur $[3; 7]$ est $\frac{1}{10} \int_3^7 f(x) dx$.

4. $\int_0^2 f(x) + 2x dx = 4 + \int_0^2 f(x) dx$

44 Vrai ou faux ?

Répondre aux questions suivantes par vrai ou par faux à l'aide du graphique.



1. $\int_{-3}^0 f(x) dx = \int_0^3 f(x) dx$

2. $\int_0^1 f(x) dx = \int_1^3 f(x) dx$ 3. $1 \leq \int_1^2 f(x) dx \leq 2$

4. La valeur moyenne de f sur $[-2; 2]$ est 1.

45 Soient f et g deux fonctions telles que :

$$\int_{-1}^3 f(x) dx = 5 \text{ et } \int_{-1}^3 g(x) dx = 2$$

1. Calculer : • $I = \int_{-1}^3 f(x) + g(x) dx$

• $J = \int_{-1}^3 f(x) - g(x) dx$

2. Existe-t-il deux réels α et β tels que :

$$\int_{-1}^3 \alpha f(x) + \beta g(x) dx = 10 ?$$

46 Déterminer la dérivée de la fonction f définie sur I .

1. $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$ avec $I =]0; +\infty[$

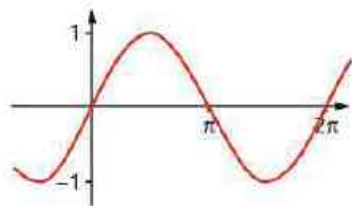
2. $f(x) = \int_1^x \frac{1}{t^2} dt$ avec $I = [1; +\infty[$

47 Le graphique représente la fonction sinus. En admettant que $\int_0^\pi \sin x dx = 1$, calculer les intégrales suivantes.

1. $I = \int_0^\pi \sin x dx$

2. $J = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx$

3. $K = \int_{\frac{4\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx$

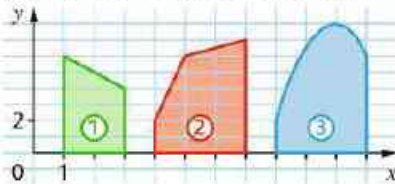


Travailler les capacités du thème

1 Estimer une aire à partir d'une représentation graphique

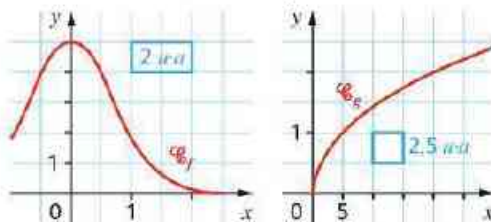
48 Vrai ou faux ?

On suppose que l'unité correspond à 2 cm sur l'axe des abscisses et à 1 cm sur l'axe des ordonnées. Dire si les affirmations sont vraies ou fausses.



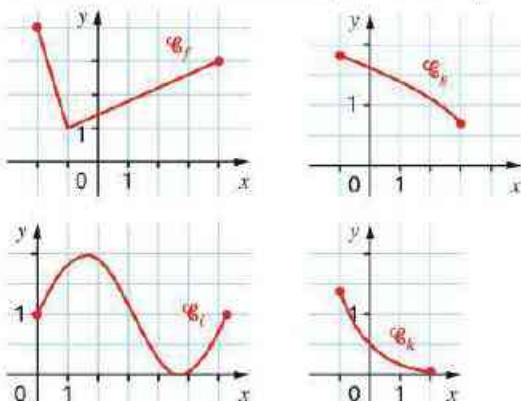
- L'aire du domaine vaut ① 10 cm².
- L'aire du domaine vaut ① 10 carreaux.
- L'aire du domaine ② vaut plus de 28 cm².
- L'aire du domaine ③ est supérieure à celle du domaine ②.
- L'aire du domaine ③ est comprise en 36 cm² et 48 cm².

49 Estimer l'aire des domaines au demi carreau près, puis en unité d'aire, à l'unité près.



- Le domaine 1 est compris entre l'axe des abscisses, la courbe C_f , les droites d'équation $x = -0,5$ et $x = 1$.
- Le domaine 2 est compris entre l'axe des abscisses, la courbe C_g , les droites d'équation $x = 5$ et $x = 20$.

50 Pour chacune des représentations, à l'aide d'une lecture graphique, estimer la valeur moyenne de la fonction sur l'intervalle sur lequel elle est représentée.



2 Calculer une intégrale, une valeur moyenne

Pour les exercices 51 à 58, calculer les intégrales.

51 1. $I = \int_3^7 (x^2 + 2x - 9) dx$ 2. $J = \int_{-4}^{-1} \left(x + \frac{1}{x}\right) dx$

52 1. $I = \int_{-2}^2 (x^3 + x) dx$ 2. $J = \int_1^4 \left(\frac{1}{2\sqrt{t}} - \frac{1}{t^2}\right) dt$

53 1. $I = \int_{-1}^0 \frac{1}{x+2} dx$ 2. $J = \int_0^4 \frac{2t}{\sqrt{t^2+3}} dt$

54 1. $I = \int_0^4 \frac{2x}{(x^2+3)^2} dx$ 2. $J = \int_{-1}^1 e^{2t-1} dt$

55 1. $I = \int_1^3 \frac{\ln x}{x} dx$ 2. $J = \int_{-2}^5 4t(2t^2+3)^2 dt$

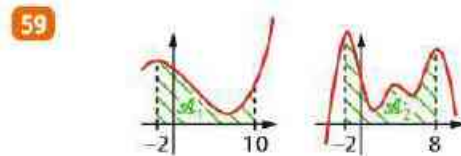
56 1. $I = \int_{-2}^4 (3x-1)e^{15x^2-x+3} dx$

2. $J = \int_1^2 (-3t^2+4t)(-t^3+2t^2+1) dt$

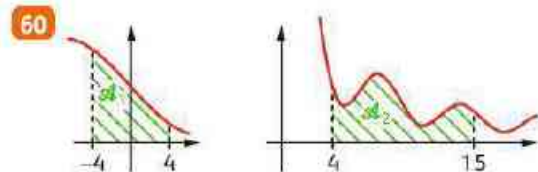
57 1. $I = \int_{-4}^0 \frac{2x-5}{x^2-5x+3} dx$ 2. $J = \int_{-5}^{-4} \frac{2}{(2t+7)^2} dt$

58 1. $I = \int_1^3 \frac{7-6x}{\sqrt{9+7x-3x^2}} dx$ 2. $J = \int_{e^{-1}}^e \frac{(\ln t)^2}{t} dt$

Pour les exercices 59 et 60, exprimer l'aire hachurée sous forme d'intégrale, puis en déduire la valeur moyenne de la fonction sur I .



- 59 1. $\mathcal{A}_1 = 48$ u.a. 2. $\mathcal{A}_2 = 45$ u.a.



- 60 1. $\mathcal{A}_1 = 4$ u.a. 2. $\mathcal{A}_2 = 2,5$ u.a.

61 Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$ et $I = \int_{-3}^3 f(x) dx$.

- Donner une valeur approchée de I à l'aide de la calculatrice.
- Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - \frac{e^x}{1+e^x}$.
- Calculer la valeur exacte de I .
- En déduire la valeur moyenne de f sur $[-3; 3]$.

62 Soit l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{t^2}{t+2} dt$.

- Déterminer une valeur approchée de I à l'aide de la calculatrice.
- Montrer que, pour tout $t \in [0; 1]$, $\frac{t^2}{t+2} = t - 2 + \frac{4}{t+2}$.
- Calculer la valeur exacte de I .
- En déduire la valeur moyenne de I sur $[0; 1]$.

63 Soit la fonction f définie sur $[0; 1]$ par :

$$f(x) = \frac{x-2}{(2x+3)^2}$$

- Déterminer les réels a et b tels que :

$$f(x) = \frac{a}{(2x+3)^2} + \frac{b}{2x+3}$$

- Déterminer le signe de $2x+3$ sur $[0; 1]$, puis en déduire $I = \int_0^1 \frac{x-2}{(2x+3)^2} dx$.

64 Soient les fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par :

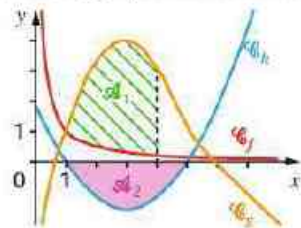
$$f(x) = \frac{x}{1+x^2} \text{ et } g(x) = \frac{x^3}{1+x^2}$$

- Calculer $I = \int_0^1 f(x) dx$.
- Soit $J = \int_0^1 g(x) dx$. Calculer $I+J$, en déduire la valeur de J .

3 Calculer une aire sous une courbe, entre deux courbes

65 Les courbes \mathcal{C}_f , \mathcal{C}_g et \mathcal{C}_h représentent les fonctions f , g et h sur $]0; +\infty[$ dans un repère orthonormé d'unité graphique 1 cm.

On a $f(x) = \frac{1}{x}$ et $h(x) = \frac{3}{8}(x-1)(x-5)$. On ne donne pas l'expression de $g(x)$ en fonction de x .



- Calculer l'aire du domaine défini par \mathcal{C}_f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=1$ et $x=4$.
- Exprimer les aires \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 à l'aide d'intégrales.
- Vérifier (en justifiant) que $\mathcal{A}_2 = 4 \text{ cm}^2$.
- Sachant que, pour tout $x \in [1; 3]$, $1 \leq g(x) \leq 4$, et que, sur $[3; 4]$, $3 \leq g(x) \leq 4$; montrer que :

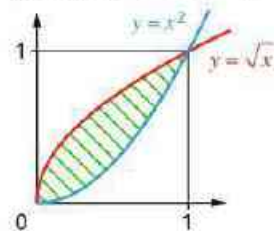
$$5 \leq \int_1^4 g(x) dx \leq 12$$

- En déduire un encadrement de \mathcal{A}_1 .

Pour les exercices **66** et **67**, utiliser la propriété suivante.

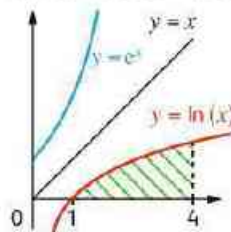
Propriété Les courbes représentatives dans un repère orthonormé de deux fonctions réciproques l'une de l'autre sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y=x$.

66 1. Calculer l'aire du domaine délimité par la courbe de la fonction $x \mapsto x^2$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=0$ et $x=1$.



- À l'aide de considérations géométriques, donner la valeur de $\int_0^1 (1-\sqrt{x}) dx$.
- En déduire l'aire du domaine délimité par les courbes des fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ et les droites d'équation $x=0$ et $x=1$.

67 1. Écrire l'aire du domaine défini par la courbe de la fonction \ln , l'axe des abscisses, les droites d'équation $x=1$ et $x=4$ sous forme d'intégrale.



Aide
Résoudre $e^x = 4$.

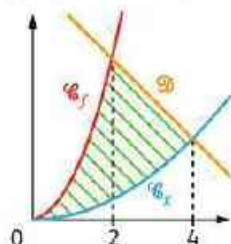
- Pourquoi le calcul de l'intégrale est-il impossible avec les connaissances actuelles ?
- À l'aide du graphique, trouver une méthode pour calculer l'aire du domaine.

68 Soient \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g les courbes représentatives des fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = x^2 \text{ et } g(x) = \frac{x^2}{8}$$

La droite \mathcal{D} a pour équation $y=6-x$.

Les informations sont données sur le graphique, l'unité est le centimètre : montrer que l'aire du domaine hachuré est 6 cm^2 .



Aide
On pourra travailler sur $[0; 2]$, puis sur $[2; 4]$.

1 Intégrale d'une fonction continue et positive

69 En remarquant que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^3 = x^3 + 2x - 2x$, calculer $I = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \frac{x^3}{x^2+2} dx$.

70 1. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par $f(t) = (1+t)\sqrt{1+t}$. Calculer $f'(t)$.

2. En déduire $I = \int_0^1 \sqrt{1+t} dt$.

3. En admettant que $J = \int_0^1 t\sqrt{1+t} dt = \frac{4}{15}(1+\sqrt{2})$, en déduire $\int_0^1 f(t) dt$.

71 Soit la fonction I définie sur $[0; +\infty[$ pour tout $\lambda > 0$ par $I(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt$.

1. Calculer $I(x)$.

2. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} I(x)$. Interpréter graphiquement.

Pour les exercices **72** et **73**, utiliser la propriété suivante.

Propriété La longueur de la courbe représentant la fonction f sur l'intervalle $[a; b]$ se calcule à l'aide de la formule : $L = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2} dx$ (où f' est la dérivée de la fonction f).

72 Une chaînette est la courbe représentative de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

1. Donner l'expression de $f'(x)$, la dérivée de la fonction f .

2. Montrer que la fonction g définie sur \mathbb{R} par :

$$g(x) = 1 + (f'(x))^2 = \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2$$

3. Déterminer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, le signe de $e^x + e^{-x}$.

4. Justifier que la longueur L de la chaînette entre -4 et 4 est donnée par $L = \int_0^4 (e^x + e^{-x}) dx$.

5. En déduire la valeur exacte de L , puis une valeur approchée à 10^{-2} .

Info

La chaînette est la forme prise par un fil pesant flexible infiniment mince, homogène, inextensible, suspendu entre deux points, dans un champ de pesanteur uniforme.

73 1. Montrer que la fonction F définie sur \mathbb{R} par $G(x) = \frac{1}{2}(x\sqrt{1+x^2} - \ln(-x + \sqrt{1+x^2}))$ est une primitive de la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = \sqrt{1+x^2}$.

2. En déduire la longueur exacte de l'arc de parabole défini par la fonction $f: x \mapsto \frac{1}{2}x^2$ sur $[0; 1]$, puis une valeur approchée à 10^{-2} de cette longueur.

74 Soit la fonction f définie sur $[0; 4]$ par :

$$f(x) = x^2 e^{-x}$$

1. Étudier les variations de f sur $[0; 4]$, en déduire que le maximum de f sur $[0; 4]$ est $4e^{-2}$.

2. Justifier que $64e^{-4} \leq \int_0^4 f(x) dx \leq 16e^{-2}$.

3. Déterminer une primitive F de f telle que $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$, avec a, b et c trois réels à déterminer.

4. En déduire la valeur exacte de $\int_0^4 f(x) dx$.

Analyse d'un énoncé

75 Exercice commenté

On pose $I = \int_0^1 \frac{1}{e^x + 1} dx$ et $J = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} dx$.

1. Calculer $I + J$. 2. Calculer J , en déduire I .

► L'intégrale I ne peut pas être calculée directement, l'exercice propose une astuce reposant sur la linéarité de l'intégrale :

$$\int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx = \int_a^b (f(x) + g(x)) dx$$

76 Application immédiate

Soient les intégrales $I = \int_0^1 \frac{2e^u + 1}{e^u + 1} du$ et $J = \int_0^1 \frac{du}{e^u + 1}$.

1. Calculer $I + J$ puis $I - J$. 2. En déduire I et J .

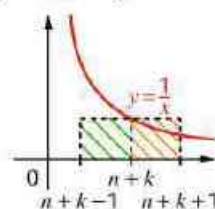
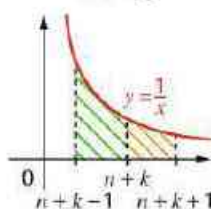
77 Limite d'une suite

L'objectif de cet exercice est de déterminer si la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$ a une limite finie, et si oui, de déterminer cette limite.

1. Écrire u_n en utilisant la notation Σ .

2. À l'aide de considérations géométriques, en déterminant les aires représentées sur chacun des graphiques, justifier que, pour $n \geq 1$ et $k \geq 0$:

$$\int_{n+k-1}^{n+k} \frac{1}{x} dx \geq \frac{1}{n+k} \geq \int_{n+k}^{n+k+1} \frac{1}{x} dx$$



3. Montrer que $\int_n^{2n} \frac{1}{x} dx \geq u_n \geq \int_{n+1}^{2n+1} \frac{1}{x} dx$.

4. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Rappel

$$\ln(a) - \ln(b) = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

2 Cas général

78 1. Soit f une fonction paire définie sur \mathbb{R} .

a. À partir d'une propriété géométrique de la courbe d'une fonction paire, déterminer, pour tout $a > 0$, une relation entre $\int_{-a}^0 f(x) dx$ et $\int_0^a f(x) dx$.

b. Soit $a > 0$, montrer que :

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

2. Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = x^2(e^x + e^{-x})$$

a. Démontrer que f est paire.

b. En admettant que $\int_0^1 f(x) dx = e - 5e^{-1}$, calculer $\int_{-1}^1 f(x) dx$.

79 Soit f la fonction de période 4 définie sur \mathbb{R} telle que, pour tout x appartenant à $[0; 4[$:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0; 2[\\ \frac{(x-4)^2}{2} & \text{si } x \in [2; 4[\end{cases}$$

1. Calculer :

a. $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ et $f(2)$

b. $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$ et $f(0)$

Interpréter graphiquement les résultats.

2. Tracer la courbe représentative de f sur $[-8; 8]$.

3. Calculer $\int_0^2 f(x) dx$ et $\int_0^4 f(x) dx$.

4. En déduire $\int_0^8 f(x) dx$ et $\int_{-4}^4 f(x) dx$.

80 Soit f la fonction 2π -périodique définie sur \mathbb{R} telle que, pour tout $t \in [0; 2\pi[$:

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \in [0; \pi[\\ 2\pi - t & \text{si } t \in [\pi; 2\pi[\end{cases}$$

1. Calculer :

a. $\lim_{t \rightarrow \pi^-} f(t)$ et $f(\pi)$

b. $\lim_{t \rightarrow 2\pi^-} f(t)$ et $f(0)$

Interpréter graphiquement les résultats.

2. Tracer la courbe représentative de f sur $[-4\pi; 4\pi]$.

3. Calculer $\int_0^\pi f(t) dt$ et $\int_0^{2\pi} f(t) dt$.

4. En déduire $\int_{-2\pi}^{2\pi} f(t) dt$ et $\int_{-4\pi}^{3\pi} f(t) dt$.

81 Soit f une fonction continue sur un intervalle I ; a et b sont deux réels de I .

1. On suppose f positive sur I . Donner le signe de $\int_a^b f(x) dx$ dans le cas où :

a. $a \leq b$

b. $a \geq b$

2. Reprendre la question précédente avec f négative sur I .

3. Donner le signe des intégrales suivantes sans les calculer.

a. $I_1 = \int_{-1}^2 \frac{dx}{x-3}$

b. $I_2 = \int_2^{-3} (2x+1)^2 dx$

c. $I_3 = \int_e^{1-e} \frac{dt}{t^2+1}$

d. $I_4 = \int_{e^{-1}}^1 \ln(t) dt$

3 Calculs d'aires

82 Samu-L, célèbre artiste de Street Art, vient d'être engagé par l'Union Européenne pour peindre une œuvre célébrant la chute du mur de Berlin. Il doit peindre une fresque sur un mur dont la forme est donnée par le schéma ci-dessous : la hauteur initiale est 19,61 mètres et la fonction symbolisant le profil du mur doit être une des trois proposées.

① $f(t) = \frac{19,61}{1+t}$

② $g(t) = 19,61 \left(\frac{1}{1+t} \right)^2$

③ $h(t) = \frac{19,61}{\sqrt{1+t}}$



1. Pour chaque projet, déterminer la surface à peindre en mètre carré si la longueur au sol est de 19,89 mètres.

2. Afin de pousser le symbolisme, Samu-L imagine peindre un mur dont la longueur au sol est infinie ! Déterminer la quantité de peinture nécessaire pour chaque projet.

83 Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = (x^2 + 1)e^{2-x}$$

On note \mathcal{C} la courbe représentative de f dans un repère orthogonal (d'unité 1 cm) et Δ la droite d'équation :

$$y = \frac{5}{2}x$$

On note \mathcal{A} l'aire (exprimée en unité d'aire) du domaine limité par la courbe \mathcal{C} , la droite Δ et l'axe des ordonnées. On note O et P les points de coordonnées respectives $(0; 0)$ et $(0; 5)$.

1. a. Représenter la courbe dans un repère et compléter le graphique au fur et à mesure des questions.

b. Calculer les coordonnées du point R , intersection de \mathcal{C} et de l'axe des ordonnées.

c. Vérifier que le point Q de coordonnées $(2; 5)$ est le point d'intersection de \mathcal{C} et Δ .

d. Calculer les aires des triangles OPQ et OQR , en déduire un encadrement de \mathcal{A} .

2. Soit G la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$G(x) = -(x^2 + 2x + 3)e^{2-x}$$

a. Calculer G' , la dérivée de G .

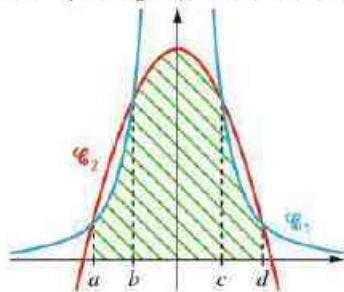
b. En déduire une primitive de la fonction f .

c. Écrire \mathcal{A} sous forme d'une intégrale, puis calculer sa valeur exacte.

84 Le domaine de la figure est délimité par l'axe des abscisses et les courbes \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 représentant les fonctions :

$$f : x \mapsto 5 - x^2$$

$$\text{et } g : x \mapsto \frac{4}{x^2}$$



1. a. Reproduire la figure à l'aide d'un logiciel.

b. Identifier la fonction associée à chacune des courbes \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 .

c. Lire les abscisses des points d'intersection des deux courbes.

2. Retrouver ces abscisses par le calcul.

Aide

On pourra poser $X = x^2$ et résoudre ainsi une équation du second degré en X .

3. Déterminer les abscisses des points d'intersection de la parabole avec l'axe des abscisses.

4. À l'aide de considérations géométriques, justifier que l'aire cherchée est le nombre :

$$\mathcal{A} = 2 \left(\int_0^1 (5 - x^2) dx + \int_1^2 \frac{4}{x^2} dx + \int_2^{\sqrt{5}} (5 - x^2) dx \right)$$

5. Calculer la valeur exacte de \mathcal{A} .

85 PYTHON Méthode des rectangles

Louna cherche à calculer l'aire \mathcal{D}_a du domaine délimité par \mathcal{C}_a , la courbe de la fonction g_a , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -a$ et $x = a$.

La fonction g_a est définie sur \mathbb{R} par $g_a(x) = \frac{1}{a} e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^2}$ avec $a > 0$.

Comme elle n'arrive pas à trouver de primitive de la fonction g_a , elle décide d'approximer l'aire à l'aide de la méthode des rectangles qu'elle code dans un programme écrit en Python.

1. Démontrer que la fonction g_a est paire.
2. Calculer la dérivée de g_a , en déduire le tableau de variations de la fonction g_a .

3. Justifier que :
a. pour limiter les calculs, Louna peut restreindre son programme au calcul du domaine délimité par \mathcal{C}_a , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = a$;

b. on a : $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a}{n} g_a\left(\frac{a}{n} \times k\right) \approx \mathcal{D}_a \approx \sum_{k=1}^n \frac{a}{n} g_a\left(\frac{a}{n} \times k\right)$.

4. image est la liste des images de la fonction pour les valeurs de k de l'intervalle $\llbracket 0; n+1 \rrbracket$.

Expliquer et compléter les lignes définissant rect_sup et rect_inf.

Expliquer dans la commande print la présence du facteur 2, puis compléter la ligne.

```
from math import exp

def g_a(x):
    return 1/a * exp(-(x/a)**2)

a, n = 1, 1000
image = [g_a(a/n * k) for k in range(n+1)]
rect_sup = a/n * sum(image[1:n])
rect_inf = a/n * sum(image[1:n])
print(2*rect_inf, " <= aire <= ", 2*rect_sup)
```

5. À l'aide du programme, donner un encadrement au millième de l'aire du domaine \mathcal{D}_a .

6. a. Louna teste ensuite son programme avec différentes valeurs de a . Que constate-t-elle ?

b. À l'aide d'un logiciel, représenter les courbes \mathcal{C}_a pour les différentes valeurs de a testées précédemment et donner une interprétation des résultats obtenus.

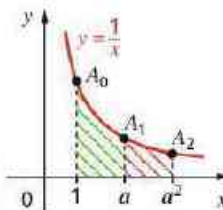
86 Grégoire de Saint-Vincent

En 1647, Grégoire de Saint-Vincent publie *Opus geometricum* : 1 230 pages, dix grands chapitres, dont le chapitre 6, *De Hyperbola*.

Sa proposition CIX peut s'énoncer :

« Si les abscisses des points A_n de l'hyperbole sont en progression géométrique, alors les aires des domaines délimités par l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = a^n$ et $x = a^{n-1}$ et l'hyperbole sont égales. »

Suit une démonstration géométrique assez compliquée : le calcul intégral n'existant pas à cette époque !



Voir Thème 4 : situation 2 p. 101

1. Soit a un réel strictement supérieur à 1 et (I_n) la suite définie sur \mathbb{N}^* par $I_n = \int_{a^{n-1}}^{a^n} \frac{dx}{x}$.

a. Exprimer I_1 et I_2 en fonction de a .
b. Exprimer I_n en fonction de a .
c. Interpréter ces résultats dans le contexte de l'énoncé.

2. Soit (\mathcal{A}_n) la suite définie sur \mathbb{N} par $\mathcal{A}_n = \int_1^{a^n} \frac{dx}{x}$.

a. Déterminer la nature de cette suite.
b. En déduire une autre formulation possible de la proposition CIX :

« Si les abscisses des points A_n sont en progression ..., alors les aires des domaines délimités par les droites d'équation $x = 1$, $x = a^n$, l'axe des abscisses et l'hyperbole sont en progression ... »

Du spaghetti au triangle

Stéphanie coupe au hasard un spaghetti en deux morceaux, puis recoupe le plus grand des deux morceaux en deux : quelle est la probabilité qu'elle puisse **construire un triangle** avec les trois morceaux obtenus ?

Pistes de travail

- On pourra **représenter** le spaghetti comme un segment de longueur 1 unité. Un premier nombre au hasard $x \in]0; 1[$ représente la longueur de la première coupe en pourcentage de la longueur totale ; un deuxième nombre au hasard $y \in]0; 1[$ représente la longueur de la deuxième coupe en pourcentage de la longueur du grand morceau.

- On pourra **associer un point du plan** à chaque couple $(x; y)$.

Le problème n'étant pas classique, des pistes de travail sont proposées : il ne faut pas hésiter à les suivre !



- Si possible, expérimenter avec quelques spaghettis de façon à mieux appréhender le problème.
- Construire un triangle** : le spaghetti (de longueur L) a été découpé en trois morceaux de longueurs a, b et c .
 - Déterminer la somme : $a + b + c$.
 - À quelles conditions (il y en a trois) les réels positifs a, b et c peuvent-ils représenter des longueurs permettant de former un triangle ?

- Représenter** : un schéma de la situation peut aider à mieux la comprendre.

a. Dans le cas où x est supérieur à $\frac{1}{2}$, le grand morceau qui doit être redécoupé correspond à la première coupe.

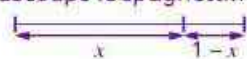
Comprendre le schéma et justifier que quand $x \geq \frac{1}{2}$, les couples $(x; y)$ permettant de construire un triangle vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ y \leq \frac{1}{2x} \\ y \geq 1 - \frac{1}{2x} \end{cases}$$

b. Représenter le schéma correspondant à la situation où x est inférieur à $\frac{1}{2}$ et en déduire, que dans ce cas, les couples $(x; y)$ permettant de construire un triangle vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \\ y \leq \frac{1}{2(1-x)} \\ y \geq 1 - \frac{1}{2(1-x)} \end{cases}$$

Je découpe le spaghetti...



puis je découpe le grand morceau



donc j'obtiens :



- Associer un point du plan**

a. Dans un repère, représenter l'ensemble des points M dont les coordonnées $(x; y)$ vérifient les conditions précédentes (on pourra s'aider d'un logiciel).

b. À l'aide de considérations géométriques, justifier que l'aire du domaine défini par l'ensemble des points M est le nombre $\mathcal{A} = 1 - 4 \int_{0,5}^1 \left(1 - \frac{1}{2x}\right) dx$.

- En déduire la probabilité, arrondie au millième, que Stéphanie arrive à construire un triangle.



87 ... en recherche fondamentale

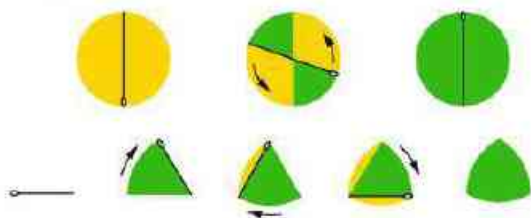
Au début du xx^e siècle, le mathématicien japonais Soichi Kakeya pose le problème suivant.

Quelle est la plus petite surface à l'intérieur de laquelle il est possible de déplacer une aiguille de manière à la retourner complètement ?

La recherche de la solution est aujourd'hui encore l'occasion de trouver de nouveaux outils mathématiques ! Cette aventure est racontée dans le livre (librement téléchargeable) *En cheminant avec Kakeya* de Vincent Borrelli et Jean-Luc Rullière.

Partie A Premières solutions

Deux premières solutions simples : le disque et le « triangle de Reuleaux ».



Pour la suite, on suppose que l'aiguille a pour longueur 1.

- Déterminer l'aire du disque.
- Déterminer l'aire du « triangle de Reuleaux ».
- Vérifier que l'aire du « triangle de Reuleaux » est inférieure à celle du disque.

Recherche d'une surface minimale

Partie B Pour continuer

Pour trouver cette surface minimale, les chercheurs ont été amenés à calculer l'aire d'une « boucle », qui est l'ensemble des points $M(x(t); y(t))$ avec :

$$\begin{cases} x(t) = t^3 - t \\ y(t) = 1 - t^2 \end{cases} \quad (t \text{ étant un réel})$$

- Étudier la parité des fonctions x et y .
- Recopier et compléter le tableau, puis placer les huit points de cette « boucle » de coordonnées $(x(t); y(t))$ dans un repère.

| t | 0 | 0,1 | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,7 | 0,9 | 1 |
|--------|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|---|
| $x(t)$ | | | | | | | | |
| $y(t)$ | | | | | | | | |

- Compléter le graphique à l'aide de huit autres points obtenus grâce à la parité des fonctions x et y .

Info

GeoGebra permet d'obtenir l'ensemble des points M en écrivant dans la barre de saisie : $M=(t^3-t; 1-t^2)$.

- La formule de Stokes permet de calculer l'aire du domaine délimité par la boucle :

$$sA = \int_{-1}^1 x(t)y'(t)dt$$

(où y' est la dérivée de la fonction y)

- Calculer $y'(t)$, en déduire l'expression de $x(t)y'(t)$ en fonction de t .
- Déterminer la valeur exacte de l'aire sA .

88 ... en physique Point d'équilibre

On peut démontrer que les coordonnées du centre de gravité G d'une plaque homogène représentée par le domaine \mathcal{D} délimité par la courbe d'une fonction f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ sont données par :

$$x_G = \frac{\int_a^b xf'(x)dx}{\int_a^b f(x)dx} \quad \text{et} \quad y_G = \frac{1}{2} \frac{\int_a^b (f(x))^2 dx}{\int_a^b f(x)dx}$$

Pour les questions suivantes, on prendra $a = 0$ et $b = 4$.

- Cas où $f(x) = x$
 - Représenter le domaine \mathcal{D} dans un repère orthonormé.
 - Dans un triangle, le centre de gravité est le point de concours des médianes : construire le centre de gravité et lire ses coordonnées.
 - Calculer les coordonnées de G à l'aide des formules.

2. Cas où $f(x) = x^2$

Représenter le domaine \mathcal{D} dans un repère orthonormé. Calculer les coordonnées de G à l'aide des formules.

3. Cas où $f(x) = \sqrt{x}$

Représenter le domaine \mathcal{D} dans un repère orthonormé. Calculer les coordonnées de G à l'aide des formules.

Aide

\sqrt{x} peut s'écrire $x^{\frac{1}{2}}$.

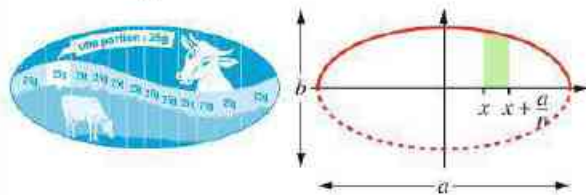
À L'ÉCRIT OU À L'ORAL

- Vérifier les résultats obtenus en découpant ces domaines dans une feuille de carton : elle doit tenir en équilibre sur le point G .

Une marque de fromage a décidé de dessiner sur le fond de l'emballage 12 portions de 25 grammes : elle demande à sa graphiste, Zorana, de déterminer les endroits où placer les traits de coupe.

Zorana modélise le fond de l'emballage par une ellipse d'équation $0,25x^2 + y^2 - 16 = 0$ d'axes de longueur $a = 16$ cm et $b = 4$ cm.

L'aire d'une ellipse dont les axes ont pour longueurs a et b est $\frac{ab}{4}\pi$.



1. Calculer l'aire (en cm^2) de la boîte, en déduire la surface de chacune des douze parts.

2. Justifier que l'arc d'ellipse tel que $y \geq 0$ est la courbe de la fonction f définie sur l'intervalle $[-8; 8]$ par :

$$f(x) = \sqrt{16 - 0,25x^2}$$

3. Déterminer la parité de la fonction f . En déduire que la recherche des largeurs peut se restreindre à l'intervalle $[0; 8]$.

Zorana doit ainsi partager cet intervalle en 6 parts convenables, donc déterminer 5 abscisses adaptées.

4. Pour chercher les abscisses x_1, x_2, \dots, x_5 , Zorana utilise la méthode des trapèzes : elle approxime la surface par une somme d'aires de trapèzes.

a. Donner la formule permettant de calculer l'aire d'un trapèze dans le contexte de l'exercice.

b. Compléter la définition de la fonction `fond` qui renvoie l'image d'un réel situé sur le bord supérieur de la boîte.

c. Expliquer le test `part < 4.18879`.

d. Expliquer le raisonnement de Zorana pour trouver les abscisses des traits de coupe, et compléter la ligne `part = part + ...`.

```
from math import sqrt

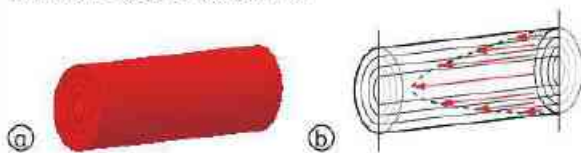
def fond(x):
    return sqrt(16 - 0.25*x**2)

n = 500
pas = 8/n
x, part = 0, 0
for _ in range(5):
    while part < 4.18879:
        part = part + fond(x)
        x = x + pas
    print("couper à x=", x-pas)
    part = 0
```

5. Déterminer les abscisses des traits de coupe, confirmer les résultats obtenus en calculant les intégrales à l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel.

Jean-Louis Marie Poiseuille (1797-1869) est un médecin physiologiste français. En 1840, il présente à l'Académie des sciences un mémoire intitulé *Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides, dans les tubes de très petits diamètres* qui va apporter plusieurs contributions significatives au domaine de la mécanique des fluides ainsi qu'à son application en physiologie.

On peut considérer un vaisseau sanguin comme un tube de longueur L et de rayon R . À cause des frottements, la vitesse le long de la paroi du vaisseau est inférieure à celle au centre.



Cette vitesse (en cm/s) en un point situé à une distance r du centre du vaisseau est donnée par la

formule $v(r) = \frac{P}{4\eta L}(R^2 - r^2)$, où P désigne la différence de pression aux extrémités du vaisseau, et η la viscosité du sang.

Poiseuille montre que le débit volumique de liquide, noté D , est égal à $\int_0^R 2\pi r v(r) dr$.

1. Calculer D en fonction de P , L et R .

2. Justifier la remarque suivante de Poiseuille, écrite à la page 522 des *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie royale des sciences de l'Institut de France, et imprimés par son ordre*.

[...] il résulte qu'en considérant les systèmes capillaires de deux organes, si les vaisseaux capillaires de l'un sont, par exemple, d'un diamètre deux fois plus grand que celui des capillaires de l'autre, il en passera dans le premier, toutes choses égales d'ailleurs, seize fois plus de liquide que dans le second.



De nombreux domaines industriels nécessitent une analyse de fiabilité des systèmes. Une méthode est l'approche « contrainte-résistance ».

Exemples :

- Pour être homologué, un câble d'une grue pour une charge de deux tonnes (contrainte) doit permettre de lever une masse mobile, soumise aux vents ; pour prendre en compte l'usure des câbles (résistance), le câble sera prévu pour un levage de trois tonnes.
- La SNCF a étudié les risques des vents traversiers (contrainte) sur la ligne TGV Méditerranée afin d'améliorer la stabilité des trains et éviter des déraillements (résistance) : il a été ainsi décidé de construire des murs de protection anti-vent sur certains tronçons.



La fiabilité d'un ensemble d'éléments peut être modélisé par une « loi de Weibull » :

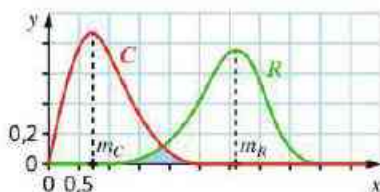
$$f(x) = \begin{cases} \frac{k}{\lambda} \left(\frac{x-\delta}{\lambda} \right)^{k-1} e^{-\left(\frac{x-\delta}{\lambda} \right)^k} & \text{pour } x \geq \delta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Rôle des paramètres

a. À l'aide d'un logiciel, créer trois curseurs positifs : k , λ et δ , puis tracer la courbe de f en fonction de ces curseurs.

b. Faire varier les curseurs et observer la forme de la courbe. Traditionnellement, le paramètre λ s'appelle la forme et k l'échelle. Identifier le rôle de δ .

Pour la suite, on suppose que la contrainte C suit la loi de Weibull de paramètres $\lambda=1$, $k=2$ et $\delta=0$; la résistance R suit la loi de Weibull de paramètres $\lambda=3$, $k=6$ et $\delta=0,2$.



2. La zone de défaillance

La partie bleue sur le graphique ci-dessus est la zone de défaillance du système dont la surface dépend de la valeur de m_R (liée à des coûts financiers) : elle résulte d'un choix de défaillance en fonction d'un coût de production.

- Donner l'expression des fonctions C et R .
- Lire sur le graphique les valeurs moyennes m_C et m_R associées à C et R .
- Interpréter graphiquement le nombre p défini par $p = \int_0^3 \min(C(x), R(x)) dx$ où $\min(a; b)$ est la fonction qui renvoie a si $a < b$ et b sinon.

3. La méthode de Monte-Carlo

L'aire de la zone de défaillance peut se calculer à l'aide de la méthode de Monte-Carlo.

a. Compléter le programme suivant qui donne une approximation de l'aire de la zone de défaillance.

```
from random import uniform

def C(x):
    return 2 * x * exp(-x**2)

def R(x):
    return 2 * (x - 0.2) ** 5 * exp(-(x - 0.2) ** 6)

pts, pts_dans_zone = 5000, 0
for _ in range(pts):
    x = uniform(0, 3)
    y = uniform(0, 2)
    if y < min(C(x), R(x)):
        pts_dans_zone += 1
print("proba défaillance =", .4 * pts_dans_zone / pts)
```

- Tester le programme et vérifier que la probabilité cherchée est d'environ 0,058.
- Pour des raisons de sécurité, la probabilité de défaillance doit être inférieure à 0,005.

Dans le programme, modifier la fonction R .

```
def R(x, d):
    return 2 * ((x - d) / 3) ** 5 * exp(-(x - d) ** 6)
```

Créer une fonction `proba` puis copier les lignes suivantes à la fin du programme.

```
d = .2
while proba() > 0.005:
    d += 0.01
print("si d=", d-0.01, " alors p < 0.005")
```

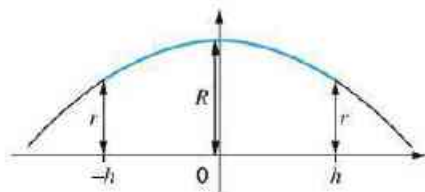
d. En déduire la valeur de m_R .

De tout temps, le calcul du volume d'un tonneau a posé problème : les formes de tonneaux ne sont pas standards, elles peuvent changer en fonction du cerclage...



En 1615, Johannes Kepler (1571-1630) écrit *Nova stereometria doliorum vinariorum*, un ouvrage dans lequel il propose des mesures de la capacité d'un tonneau en fonction de sa forme.

On modélise le profil du tonneau par un arc de parabole \mathcal{P} . Les données sont celles du graphique ci-dessous.



1. Démontrer que l'arc de parabole \mathcal{P} est la représentation de la fonction f définie par $f(x) = \frac{r-R}{h^2}x^2 + R$.

2. Donner l'expression de la fonction g définie sur $[-h; h]$ par $g(x) = (f(x))^2$ et démontrer que g est une fonction paire.

3. Le volume engendré par la rotation de la courbe de la parabole \mathcal{P} sur l'intervalle $[-h; h]$ autour de l'axe des abscisses est donné par :

$$V = \pi \int_{-h}^h (f(x))^2 dx$$

a. Justifier que le volume du tonneau est donné par :

$$V = 2\pi \int_0^h (f(x))^2 dx$$

b. Exprimer le volume du tonneau en fonction de R , r et h .

4. Une des formules attribuée à Kepler est :

$$V = \frac{\pi h}{3}(r^2 + 2R^2)$$

On suppose qu'on a, en cm :

$$h = 90, R = 25 \text{ et } r = 20$$

a. Calculer le volume d'un tonneau avec la formule trouvée en 3. b. ; puis avec celle de Kepler.

b. Calculer l'erreur de contenance en pourcentage de la méthode de Kepler par rapport à la formule donnée par l'intégrale.



À L'ÉCRIT OU À L'ORAL

c. Chercher d'autres formules permettant de calculer le volume d'un tonneau. Les comparer entre elles.

Un médicament est présenté sous deux formes pharmaceutiques : en préparation injectable (A) et en comprimé (B). (A) est administré par voie intraveineuse



directe à la dose D_A de 350 mg. La pharmacocinétique de la forme injectable répond à un modèle « monocompartimental » et l'équation qui traduit les variations de la concentration en fonction du temps est de la forme :

$$C_A(t) = 6e^{-0,25t}$$

(6 en $\text{mg}\cdot\text{L}^{-1}$, et 0,25 en h^{-1})

(B) est administré par voie orale à la dose D_B de 500 mg. La pharmacocinétique de la forme comprimé répond à un modèle monocompartimental et l'équation qui traduit les variations de la concentration en fonction du temps est de la forme :

$$C_B(t) = -5,2e^{-1,5t} + 5e^{-0,26t}$$

(5,2 et 5 en $\text{mg}\cdot\text{L}^{-1}$ et 1,5 et 0,26 en h^{-1})

La biodisponibilité du médicament (B) sur 24 heures est F_B avec :

$$F_B = \frac{\int_0^{24} C_B(t) dt}{\int_0^{24} C_A(t) dt} \times \frac{D_A}{D_B}$$

Calculer F_B .

Calculs de volumes

Utiliser PYTHON

Calculer le volume d'un solide n'est pas toujours facile. Certains ont recours à des calculs faisant intervenir des outils mathématiques tels que l'intégration, d'autres préféreront une méthode plus expérimentale...

Objectif
Déterminer un volume.
Manipuler une boucle,
des conditions.

Partie A Du beau vase ...

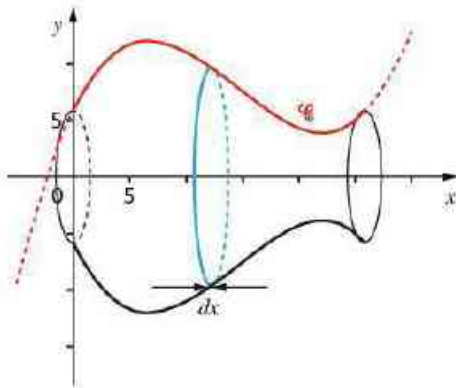
Sarah a offert un magnifique vase à sa maman et se demande quelle en est la contenance. Elle trouve dans un livre de mathématiques que le volume d'un solide de révolution (ici, c'est le solide formé par la rotation de la courbe \mathcal{C} autour de l'axe des abscisses) se calcule à l'aide de la formule suivante :

$$\int_a^b \pi (f(x))^2 dx$$

Elle reporte la forme du vase sur une feuille et trouve la fonction du contour sur l'intervalle $[0; 26]$:

$$f(x) = \frac{6}{1331}x^3 - \frac{47}{242}x^2 + 2x + 6$$

(les dimensions sont en centimètre)



1. Vérifier que :

$$(f(x))^2 = \frac{36}{1771561}x^6 - \frac{282}{161051}x^5 + \frac{3265}{58564}x^4 - \frac{962}{131}x^3 + \frac{202}{121}x^2 + 24x + 36$$

Aide

Écrire $f(x) = \left(\frac{6}{1331}x^3 - \frac{47}{242}x^2 \right) + (2x + 6)$.



2. Déterminer une primitive de $(f(x))^2$.
3. En déduire la valeur de la contenance du vase en centimètre cube (arrondi à l'unité), puis en litre.
4. Étonnée par son résultat, Sarah veut le vérifier.
 - a. Elle lit sur le graphique une valeur qui pourrait être la valeur moyenne μ de f' sur $[0; 26]$.
 - b. Déterminer le solide obtenu quand on remplace le profilé du vase par la fonction $y = \mu$.
 - c. En déduire une estimation du volume du vase, en litre. Le résultat est-il cohérent avec la valeur trouvée précédemment ?
5. Fière de son travail, Sarah demande à sa mère si elle connaît le volume du vase qu'elle lui a offert. Étonnée, celle-ci prend une bouteille d'eau de 1,5 litre, la remplit et la verse quatre fois de suite dans le vase : « Environ 6 litres », répond-elle. Dépitée par cette approche pragmatique, Sarah se lance un nouveau défi : graduer le vase en litre !

Partie B ...au vase doseur

Sarah décide de graduer le vase en litre : elle cherche donc les abscisses des traits de graduation.

1. Son idée est de découper le vase en *tranches* composées de cylindres de rayon $f(x)$ et d'épaisseur dx . Donner dans ce cas la formule permettant de calculer le volume d'une *tranche de vase*.
2. Pour mettre en œuvre son idée, elle écrit un algorithme qu'elle programme en Python.

```
from math import pi

def f(x):
    return 6/1331 * x**3 - 47/242 * x**2 + 2*x + 6

x, dx, vol = 0, .1, 0
while x < 26: # hauteur du vase en cm
    if vol < 1000:
        vol = vol + pi * (f(x))**2 * dx
    else:
        print("manque à x=", x-dx)
        vol = 0
    x = x + dx
```

- a. Repérer dans le programme la valeur choisie pour la hauteur des *tranches*.
- b. Comprendre le programme, puis le compléter.
- c. Donner les abscisses (arrondies au millimètre) des traits de graduation.

Triangle et parabole

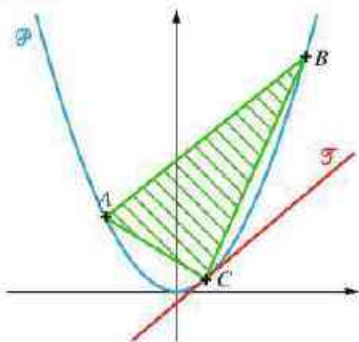
Mener une recherche

Dans un repère orthogonal, \mathcal{P} est la parabole d'équation $y = x^2$.

Les points A et B sont les points de la parabole d'abscisses respectives a et b (avec $a < b$).

Le point C d'abscisse c appartient à la parabole et la droite \mathcal{T} , tangente à \mathcal{P} en C , est parallèle à la droite (AB) .

Le but de la recherche est de trouver une relation entre l'aire \mathcal{A}_T du triangle ABC et l'aire \mathcal{A}_P du domaine délimité par le segment $[AB]$ et l'arc de parabole allant de A à B .



1. **a.** Montrer que l'équation réduite de la droite (AB) est $y = (a+b)x - ab$.

b. Déterminer une équation de \mathcal{T} en fonction de c .

c. En déduire les coordonnées de C en fonction de a et b .

2. **a.** Construire la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie (le point C et la tangente doivent se déplacer en fonction de la position des points A et B).

b. Calculer le rapport $\frac{\mathcal{A}_P}{\mathcal{A}_T}$. Émettre une conjecture.

3. **a.** Déterminer l'aire du triangle ABC en fonction de $(b-a)^3$.

Aide

On peut voir l'aire de ABC comme la différence de celle d'un trapèze et de la somme de deux autres... et écrire c en fonction de a et b .

b. Calculer $I = \int_a^b x^2 dx$, en déduire l'aire du domaine \mathcal{A}_P en fonction de $(b-a)^3$.

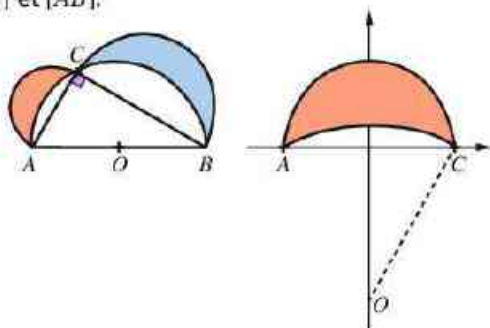
c. En déduire le rapport $\frac{\mathcal{A}_P}{\mathcal{A}_T}$.

Lunules d'Hippocrate

Mener une recherche

En cherchant à résoudre la quadrature du cercle (trouver un disque dont l'aire est celle d'un carré), Hippocrate de Chios (-470-410) chercha la somme de l'aire des lunules :

- le triangle ABC est rectangle en C ;
- les demi-cercles ont pour diamètres respectifs $[AC]$, $[BC]$ et $[AB]$.



Partie A Aire des lunules

À l'aide de considérations géométriques, calculer la somme des aires des lunules.

Aide

Le triangle ABC est rectangle en C , donc $AB^2 = \dots$

Partie B Aire d'une lunule

L'objectif de cette partie est de déterminer l'aire de la lunule associée au segment $[AC]$.

On se place dans le cas particulier où $AO = AC$.

1. Justifier que le triangle OAC est équilatéral. Déterminer la valeur de la hauteur.

2. On place la figure dans un repère orthonormé, l'axe des abscisses est la droite (AC) , l'axe des ordonnées est la médiatrice de ce segment. Dans ce repère, les points A et C ont pour coordonnées respectives $(-1; 0)$ et $(1; 0)$.

En déduire les coordonnées du point O .

3. Justifier que l'équation du demi-disque de diamètre $[AC]$ est $y = \sqrt{1-x^2}$, puis en déduire la valeur de l'intégrale $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$.

4. Trouver l'équation du cercle de centre O passant par le point C . En déduire l'équation du cercle correspondant à la partie inférieure de la lunule.

5. En admettant que $\int_{-1}^1 \sqrt{4-x^2} dx = \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}$, calculer l'aire exacte de la lunule, puis donner une valeur approchée de cette aire au centième.

Répartitions des richesses, inégalités

Les capacités du thème

- 1 Comparer des séries statistiques
- 2 Interpréter une intégrale, une valeur moyenne



Modélisation du réel

Les courbes de Lorenz et l'indice de Gini sont des outils fondamentaux pour décrire la façon dont un tout est réparti plus ou moins équitablement au sein d'une population.

La photographie ci-contre a fait le tour du monde comme illustration des inégalités sociales, un immeuble de grand luxe surplombant une favela très pauvre, au sud de Sao Paulo.

 Voir Maths en situation p. 168

A Diaporama pour tester les bases



B Indicateurs de position, de dispersion

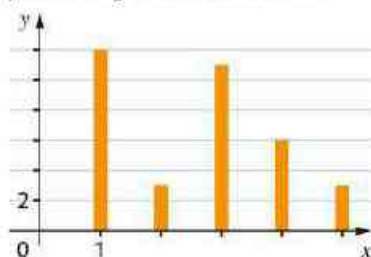
On considère une série statistique. Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier.

1. La médiane est toujours une valeur de la série.
2. L'écart interquartile est un indicateur qui mesure la dispersion des valeurs de la série autour de la moyenne.
3. L'écart type peut être nul.
4. La variance peut être une valeur négative.
5. Le premier quartile est toujours inférieur au troisième quartile.
6. Plus l'écart type est grand, plus les valeurs de la série sont resserrées autour de la moyenne.

C Statistiques à une variable

On considère la série définie par le diagramme ci-dessous.

1. Construire le tableau d'effectifs de la série.
2. Calculer le couple (moyenne ; écart type).
3. Calculer le couple (médiane ; écart interquartile).



D Primitives

1. Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de f (sans se préoccuper du domaine de définition).

- a. $f(x) = x^3 + x^2 - x + 3$ b. $f(x) = 4e^x + 1$
 c. $f(x) = \frac{1}{x^2} + 2x$ d. $f(x) = e^{2x} + x - 1$ e. $f(x) = \frac{2}{x} + 3x$

2. Dans chacun des cas suivants, montrer que F est une primitive de f (sans se préoccuper du domaine de définition).

- a. $f(x) = (3x+2)e^x$ et $F(x) = (3x-1)e^x$
 b. $f(x) = 4\ln x + 2x + 1$ et $F(x) = 4x\ln x - 3x + x^2$

E Calcul intégral et calcul d'aire

On a tracé ci-contre la courbe représentative d'une fonction f définie sur \mathbb{R} .

1. Encadrer l'aire \mathcal{A} , exprimé en unité d'aire, entre deux entiers consécutifs.

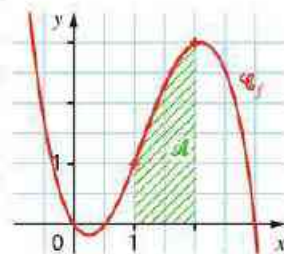
2. L'aire \mathcal{A} est égale à :

- a. $\int_0^3 f(x) dx$ b. $\int_1^3 f(x) dx$ c. $\int_1^2 f(x) dx$ d. $\int_2^3 f(x) dx$

3. On admet que la fonction f est définie pour tout réel x par :

$$f(x) = -x^3 + 3,5x^2 - 1,5x$$

Calculer la valeur exacte, puis approchée à 10^{-2} de \mathcal{A} .



Ressources en +
sur le site collection :
lycee.hachette-
education.com/declic/
tle-comp



Consolider les bases

1 Voici la réponse de plusieurs élèves à la question : « Déterminer une primitive F de la fonction f , sans se préoccuper du domaine de définition. » Identifier leurs erreurs et corriger, si possible, leurs réponses.

Élève A $f(x) = 4x^2 - 6x^2 + x - 1$
 $F(x) = 4x^4 - 6x^3 + x^2 - x + 3$

Élève B $f(x) = xe^x$ $F(x) = \frac{1}{2}x^2e^x$

Élève C $f(x) = 4x - 1/x$ $F(x) = 4 - \frac{1}{x}$

Élève D $f(x) = \frac{e^{2x}}{2x-3}$ $F(x) = \frac{0,5e^{2x}}{x^2-3x}$

2 Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :
 $f(x) = (2x-1)e^{-x}$

Un logiciel de calcul formel donne les résultats ci-contre.

Justifier les résultats obtenus aux lignes 2 ; 3 et 4.

1 $f(x) = (2x-1) \cdot \exp(-x)$
 $\rightarrow f(x) := (2x-1)e^{-x}$

2 Factoriser(Dérivée(f(x)))
 $\rightarrow -e^{-x}(2x-3)$

Objectif

Revoir les notions de fonction, dérivée, dérivée seconde, primitive.

Info

Il est parfois impossible de déterminer directement une primitive par lecture directe du tableau de dérivées usuelles.

3 Factoriser(Dérivée(Dérivée(f(x))))
 $\rightarrow e^{-x}(2x-5)$

4 Intégrale(f(x))
 $\rightarrow (-2x-1)e^{-x} + 0$

Situation 1 Répartition des salaires en 2016

Le tableau ci-contre donne la répartition des salaires nets mensuels en France, en euro, en équivalent temps plein, pour l'année 2016.

- Écrire une phrase donnant la signification des nombres du tableau écrits sur fond violet.
- Comment ont été calculés les nombres écrits sur fond orange ? Et ceux écrits sur fond bleu ?
- Quel est le salaire maximal que gagne l'ensemble des 10 % des salariés les moins payés ?

Ce nombre s'appelle le 1^{er} décile de la série « Ensemble ». On le note D_1 .

- Préciser les valeurs des 4^e et 8^e déciles, notés D_4 et D_8 , pour la série « Ensemble ».
- Quel autre nom statistique peut-on donner au 5^e décile D_5 ?

2 La classe moyenne est constituée des 50 % des salariés du milieu de la répartition, situés au-dessus des 30 % les moins bien payés et en dessous des 20 % les mieux payés. Déterminer la fourchette des salaires perçus par la classe moyenne en 2016.

3 Comparer les répartitions de salaires chez les femmes et les hommes pour 2016. On utilisera des outils adaptés pour argumenter : graphiques, écart interdécile $D_9 - D_1$, rapports interdéciles D_9/D_1 , D_5/D_1 et D_9/D_5 , etc.

Objectif

Découvrir et utiliser la notion de déciles.

Source : Insee et Observatoire des inégalités

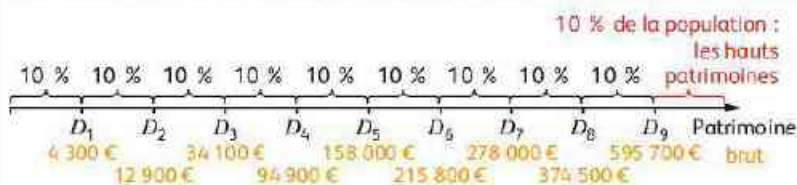
| | Ensemble | Hommes | Femmes |
|--|----------|--------|--------|
| 10 % des salariés gagnent moins de ... euros | 1 186 | 1 245 | 1 145 |
| 20 % ... | 1 346 | 1 420 | 1 270 |
| 30 % ... | 1 479 | 1 566 | 1 383 |
| 40 % ... | 1 621 | 1 721 | 1 499 |
| 50 % ... | 1 789 | 1 899 | 1 639 |
| 60 % ... | 1 995 | 2 121 | 1 821 |
| 70 % ... | 2 273 | 2 431 | 2 064 |
| 80 % ... | 2 709 | 2 931 | 2 417 |
| 90 % ... | 3 576 | 3 926 | 3 091 |
| 95 % ... | 4 668 | 5 189 | 3 893 |
| 99 % ... | 8 629 | 9 925 | 6 583 |
| Rapport entre les 90 % et les 10 % | 3,0 | 3,2 | 2,7 |
| Écart entre les 90 % et les 10 % (en euro) | 2 390 | 2 681 | 1 946 |
| Rapport entre les 99 % et les 10 % | 7,3 | 8,0 | 5,7 |
| Écart entre les 99 % et les 10 % (en euro) | 7 443 | 8 680 | 5 438 |

Info

L'INSEE ne fait pas d'étude statistique tous les ans. On est donc souvent amené à étudier des données datant de plusieurs années.

Situation 2 Répartition du patrimoine en 2015

Dans l'édition 2018 de l'étude sur le patrimoine des ménages français (hors Mayotte) de l'INSEE, on trouve cette représentation pour l'année 2015.



1 Cette représentation propose des déciles « régulièrement espacés ». Est-ce réellement le cas ? Peut-on dire que le patrimoine est également réparti sur l'ensemble des ménages ?

2 Le tableau ci-contre est issu de la même étude INSEE. On note N le nombre total de ménages français en 2015.

a. Justifier que :

- l'ensemble du patrimoine français est égal à $268\,980 \times N$ euros ;
- le patrimoine détenu par 10 % des ménages ayant le patrimoine le plus faible est égal à $2\,000 \times \frac{N}{10}$ euros.

b. En déduire que le patrimoine détenu par 10 % des ménages ayant le patrimoine le plus faible représente environ 0,07 % du patrimoine total.

c. Justifier que le patrimoine détenu par 20 % des ménages ayant le patrimoine le plus faible représente environ 0,36 % du patrimoine total.

d. Recopier et compléter le tableau suivant.

| | | | | | | |
|-------------------------------|-----|--------|--------|-----|---------|-------|
| Part cumulée de la population | 0 % | 10 % | 20 % | ... | 90 % | 100 % |
| Part cumulée du patrimoine | 0 % | 0,07 % | 0,36 % | ... | 53,38 % | 100 % |

3 a. Placer dans un repère orthonormé les points $(0;0)$, $(10\%;0,07\%)$, $(20\%;0,36\%)$, ..., $(100\%;100\%)$ issus du tableau précédent.

b. Relier ces points par une courbe \mathcal{C} « adaptée ».

c. Que peut-on dire :

- de la convexité de la fonction représentée par la courbe \mathcal{C} ?
- de la position de \mathcal{C} par rapport à la droite Δ d'équation $y=x$?

d. Peut-on dire que le patrimoine est réparti de façon « égalitaire » ?

Objectif

Construire et utiliser une courbe de Lorenz.

Info

Le patrimoine brut d'un ménage regroupe le patrimoine immobilier (résidences principale et secondaire), les revenus fonciers, ainsi que le patrimoine résiduel : voiture, équipement de la maison, bijoux, œuvres d'art, etc.

Patrimoine brut moyen (en €)

| | |
|----------------------|-----------|
| Inf. à D_1 | 2 000 |
| Entre D_1 et D_2 | 7 800 |
| Entre D_2 et D_3 | 21 700 |
| Entre D_3 et D_4 | 61 300 |
| Entre D_4 et D_5 | 128 500 |
| Entre D_5 et D_6 | 186 500 |
| Entre D_6 et D_7 | 245 100 |
| Entre D_7 et D_8 | 319 100 |
| Entre D_8 et D_9 | 463 800 |
| Sup. à D_9 | 1 254 000 |
| Ensemble | 268 980 |

Info

La courbe \mathcal{C} s'appelle courbe de Lorenz, en hommage à l'économiste américain Max Otto Lorenz. Elle permet de visualiser des inégalités de répartition : revenus, patrimoine, niveau de vie.

Situation 3 Mesure du degré d'inégalité d'une répartition

On reprend la situation 2 : dans le repère ci-contre, les points O , A et B ont pour coordonnées $(0;0)$, $(1;1)$ et $(1;0)$ et la courbe \mathcal{C} de Lorenz représente la répartition du patrimoine chez les ménages français en 2015. Pour mesurer le degré d'inégalité de la répartition, on calcule l'indice de Gini (ou coefficient de Gini), noté G , qui est égal au double de l'aire \mathcal{A} de la partie délimitée par la courbe de Lorenz \mathcal{C} et le segment $[OA]$.

1 a. Expliquer pourquoi on a toujours $0 \leq G \leq 1$.

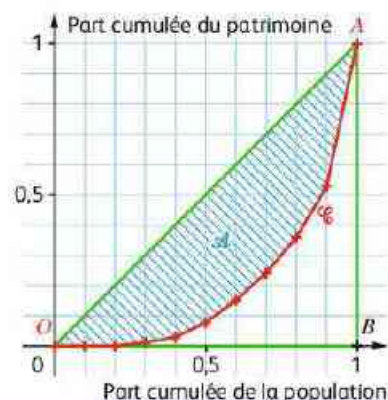
b. Justifier que plus G est proche de 0, plus la répartition est égalitaire, alors que plus G est proche de 1, plus la répartition est inégalitaire.

2 a. À l'aide du quadrillage, estimer l'aire \mathcal{A} , puis l'indice G .

b. On approche la courbe \mathcal{C} par la courbe d'équation $y = x^2(0,8x^3 + 0,2)$. Calculer \mathcal{A} , puis G à l'aide d'une intégrale. Comparer avec la question a.

Objectif

Découvrir la notion d'indice de Gini.



1 Des outils statistiques

a Moyenne et écart type

On considère la série statistique ci-contre.

| | | | | |
|----------|-------|-------|-----|-------|
| Valeur | x_1 | x_2 | ... | x_p |
| Effectif | n_1 | n_2 | ... | n_p |

Définitions

- La **moyenne** d'une série, notée \bar{x} , est égale à :

$$\bar{x} = \frac{n_1 \times x_1 + n_2 \times x_2 + \dots + n_p \times x_p}{n_1 + n_2 + \dots + n_p}$$

- La **variance** V de la série est la moyenne des carrés des écarts des valeurs

à la moyenne : $V = \frac{n_1 \times (x_1 - \bar{x})^2 + n_2 \times (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + n_p \times (x_p - \bar{x})^2}{n_1 + n_2 + \dots + n_p}$

- L'**écart type** σ de la série est la racine carrée de la variance : $\sigma = \sqrt{V}$.

b Médiane, écart interquartile, rapport interdécile

On considère une série statistique dont les valeurs sont rangées dans l'ordre croissant.

- La **médiane** partage la série en **deux séries de même taille**.
- Les **quartiles** partagent la série en **quatre séries de même taille**.
- Les **déciles** partagent la série en **dix séries de même taille**.

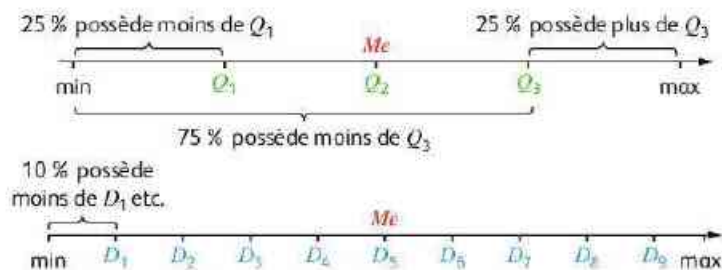
Définitions

- Le **premier quartile** Q_1 (resp. le **troisième** Q_3) est la plus petite valeur de la série telle qu'au moins 25 % (resp. 75 %) des valeurs de la série lui soient inférieures ou égales.

On appelle **écart interquartile** le nombre $Q_3 - Q_1$.

- Pour k allant de 1 à 9, le k^{e} **décile**, noté D_k , est la plus petite valeur de la série telle qu'au moins $(k \times 10)\%$ des valeurs de la série lui soient inférieures ou égales.

Le **rapport interdécile** D_9/D_1 est le rapport entre le 9^e et le 1^{er} décile.



c Mesures de l'inégalité

- L'**écart type** est un **indicateur de dispersion associé à la moyenne**. Plus il est grand, plus les valeurs de la série sont dispersées autour de la moyenne. Le couple (moyenne ; écart type) a l'avantage d'utiliser toutes les valeurs de la série et de se prêter aux calculs algébriques.
- L'**écart interquartile** est un **indicateur de dispersion associé à la médiane**. Il rend compte de la répartition de 50 % des valeurs autour de la médiane. Plus il est grand, plus les valeurs sont dispersées autour de la médiane. Le couple (médiane ; écart interquartile) est peu sensible aux valeurs extrêmes de la série.
- Le **rapport** D_9/D_1 **met en évidence le rapport entre le haut et le bas de la distribution**. C'est aussi un indicateur d'inégalité de répartition.

Exemple

Soit la série statistique suivante.

| | | | | | |
|-----------|----|----|----|----|----|
| Valeurs | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 |
| Effectifs | 10 | 4 | 13 | 14 | 9 |
| ECC | 10 | 14 | 27 | 41 | 50 |

La moyenne \bar{x} de la série est égale à :

$$2 \times 10 + 4 \times 4 + 13 \times 6 + 14 \times 8 + 9 \times 10$$

$$10 + 4 + 13 + 14 + 9$$

$$\bar{x} = 6,32$$

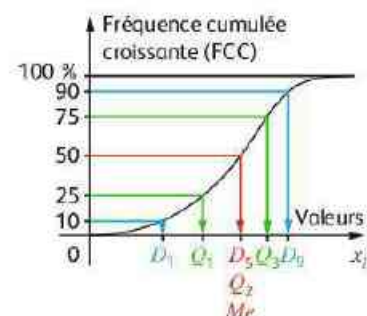
La variance V est égale à :

$$10 \times (2 - 6,32)^2 + \dots + 9 \times (10 - 6,32)^2$$

$$V = 7,4176$$

On en déduit l'écart type :

$$\sigma = \sqrt{7,4176} = 2,72$$



Dans l'exemple précédent :

L'effectif total est égal à $N = 50$.

$$\text{On a } \frac{N}{2} = 25 ; \frac{N}{4} = 12,5$$

$$\text{et } \frac{3N}{4} = 37,5.$$

À l'aide de la ligne des effectifs cumulés croissants (ECC) du tableau, on a :

$$Me = 6 ; Q_1 = 4 \text{ et } Q_3 = 8.$$



Il faut savoir utiliser sa calculatrice pour déterminer les paramètres d'une série.

```

Stats-Var
x̄=6.32
Σx=316
Σx²=2368
Sx=2.751177855
σx=2.723527125
n=50
minX=2
Q1=4
Med=6
Q3=8
maxX=10
    
```

1 Comparer des séries statistiques

Énoncé On s'intéresse à la répartition par tranche d'âges de la population en France et en Allemagne en 2019.

1. On donne ci-dessous le tableau de la répartition de la population allemande. Source : population.pyramid.net

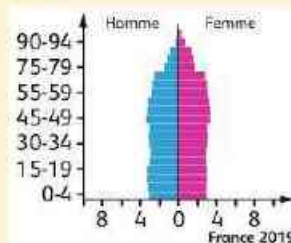
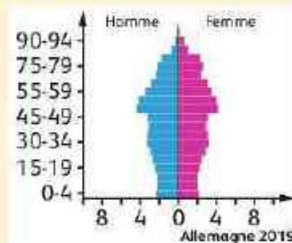
| Âge | [0;10[| [10;20[| [20;30[| [30;40[| [40;50[| [50;60[|
|----------|------------|-----------|-----------|------------|-----------|------------|
| Effectif | 6 886 516 | 7 177 289 | 8 825 857 | 10 416 224 | 9 866 297 | 13 574 955 |
| Âge | [60;70[| [70;80[| [80;90[| [90;100[| [100;+∞[| TOTAL |
| Effectif | 10 445 254 | 7 683 008 | 4 688 273 | 897 647 | 13 755 | 80 475 075 |

a. Déterminer l'âge moyen \bar{x}_A de la population allemande.

b. À l'aide de la calculatrice, déterminer l'écart type σ_A de cette série (arrondir à 10^{-1}).

2. La population française est estimée à 65 466 334 habitants au 1^{er} janvier 2019. L'âge moyen \bar{x}_F de la population française est estimé à environ 42 ans avec un écart type $\sigma_F \approx 24,5$. On donne de plus les pyramides des âges de chacune des deux populations en 2019.

Comparer les deux séries.



Solution

1. a. Les données sont regroupées par tranches d'âge. Pour déterminer la moyenne, on attribue l'âge de 35 ans à toute personne ayant entre 30 et 40 ans. Et on attribue l'âge de 100 ans à toute personne de la classe d'âge des plus de 100 ans. La moyenne de cette série est donc :

$$\bar{x}_A = \frac{6\,886\,516 \times 5 + 7\,177\,289 \times 15 + \dots + 100 \times 13\,755}{80\,475\,075} = 45,46$$

L'âge moyen de la population allemande en 2019 est environ 45 ans.

```
1 variable
=45,45798
Σx = 3,6582e+09
Σx² = 2,1056e+11
σx = 23,4544756
sx = 23,4544758
n = 8,0475e+07 ↓
```

b. À l'aide du module statistique de la calculatrice, on obtient : $\sigma_A \approx 23,5$.

2. L'âge moyen des Allemands est plus élevé de trois ans que l'âge moyen des Français. L'écart type des deux populations est sensiblement le même. Les deux populations sont relativement homogènes, mais la population allemande est plus vieillissante.

On retrouve cette interprétation dans les pyramides des âges, qui sont régulières, mais avec une base plus resserrée et une partie plus renflée entre 50 et 65 ans pour l'Allemagne.

Point méthode

1. Lorsqu'une série est regroupée en classes, on utilise le centre des classes pour effectuer les calculs.

La valeur de l'écart type se trouve alors minimisée, puisqu'on ne prend pas en compte la dispersion à l'intérieur de chaque classe.

Point méthode

2. Une représentation graphique est souvent plus « parlante » et permet de visualiser les différences entre les deux séries.

J'applique

1 On reprend les données précédentes. On a :

| Indicateurs | D_1 | Q_1 | Me | Q_3 | D_9 |
|-------------|-------|-------|------|-------|-------|
| Allemagne | 11,6 | 26,9 | 47 | 63,5 | 76,8 |
| France | 8,3 | 20,7 | 41,7 | 61,3 | 75,6 |

1. Pour la France, puis pour l'Allemagne, calculer :

a. l'écart interquartile ; b. le rapport interdécile.

2. Construire sur une même figure les diagrammes en boîte des séries associées à l'Allemagne et à la France.

3. Comparer les deux séries.

2 Une épreuve de concours est notée sur 100. On donne les notes de 20 candidats.

| | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 45 | 50 | 82 | 38 | 39 | 18 | 75 | 14 | 32 | 80 |
| 63 | 62 | 20 | 26 | 52 | 40 | 73 | 60 | 56 | 60 |

1. Calculer les indicateurs statistiques de la série.

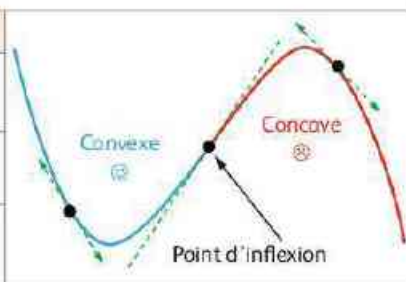
2. Les résultats nationaux du concours donnent les résultats suivants : $\bar{x} = 45$; $\sigma = 25$ et $Me = 39$; $Q_1 = 24$; $Q_3 = 68$. Que peut-on penser des résultats des 20 candidats ?

2 Des outils issus de l'analyse

a Convexité

f désigne une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I .

| | f est convexe sur I | f est concave sur I |
|--|---|--|
| Propriété sur \mathcal{C}_f | \mathcal{C}_f est au-dessus de toutes ses tangentes | \mathcal{C}_f est en dessous de toutes ses tangentes |
| Propriété sur la dérivée f' | f' est croissante sur I | f' est décroissante sur I |
| Propriété sur la dérivée seconde f'' | f'' est positive sur I | f'' est négative sur I |



b Intégration et valeur moyenne

Définitions Soit f une fonction continue et positive sur $[a; b]$, de courbe représentative \mathcal{C} dans un repère orthonormé.

- L'intégrale de a à b de la fonction f , notée $\int_a^b f(x)dx$, est égale à l'aire du domaine compris entre la courbe \mathcal{C} , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

- La valeur moyenne de f sur $[a; b]$ est le nombre μ défini par :

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

Théorème (admis) Soit f une fonction continue sur $[a; b]$ et F une primitive de f sur $[a; b]$. On a alors : $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Interprétation

La valeur moyenne μ pour une fonction f a une interprétation similaire à la moyenne \bar{x} pour une série statistique.

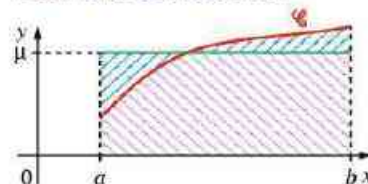
Interprétation

La convexité de f permet de qualifier son rythme de croissance. Par exemple, une fonction croissante convexe croît « de plus en plus ». Une fonction croissante concave croît de « moins en moins ».

[Voir Thème 1](#)

Interprétation graphique

μ est la hauteur du rectangle de base $[a; b]$ ayant la même aire que le domaine sous la courbe.



Les deux domaines hachurés en bleu ont la même aire.

[Voir Thème 5](#)

c Courbe de Lorenz et indice de Gini

Définitions • Une courbe de Lorenz est une représentation graphique qui met en relation la proportion $x\%$ d'une population détentrice d'une part d'une grandeur à la part $y\%$ de la grandeur détenue.

Elle passe toujours par les points $O(0;0)$ et $A(1;1)$.

- L'indice de Gini noté G est égal au double de l'aire \mathcal{A} de la partie délimitée par la courbe \mathcal{C} de Lorenz et le segment $[OA]$: $G = 2 \times \mathcal{A}$.

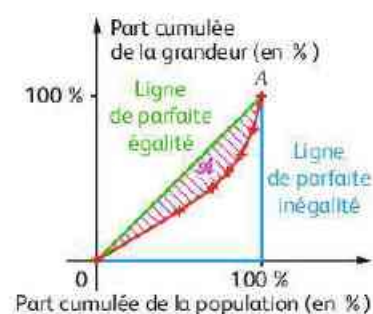
Commentaires

- Une courbe de Lorenz permet de visualiser la répartition de la grandeur étudiée au sein de la population.
- L'indice de Gini varie entre 0 (égalité parfaite) et 1 (inégalité maximale). Plus les inégalités sont importantes, plus la courbe de Lorenz s'éloigne du segment $[OA]$ et plus l'indice de Gini est élevé.

Remarque

Une courbe de Lorenz est souvent modélisée par la représentation graphique d'une fonction L définie sur $[0;1]$ telle que :

- ① $L(0) = 0$ et $L(1) = 1$
- ② L est croissante et convexe sur $[0;1]$
- ③ pour $x \in [0;1]$, $L(x) \leq x$



Dans une population parfaitement égalitaire, le partage de la grandeur est tel que, pour $0 \leq x \leq 100$, $x\%$ de la population détient $x\%$ de la richesse.

[Voir Situations 2 et 3](#)



2 Interpréter une intégrale, une valeur moyenne

Énoncé Une chaîne de télévision étudie son audience journalière depuis son lancement en 2000. On admet que le nombre journalier de téléspectateurs, en millier, peut être modélisé par la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = (20x^2 - 80x + 460)e^{-0,1x}$ où x est le nombre d'années depuis 2000.

1. Montrer que la fonction F définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$F(x) = (-200x^2 - 3200x - 36600)e^{-0,1x} \text{ est une primitive de } f$$

2. Déterminer, à mille près, l'audience journalière moyenne entre le 1^{er} janvier 2018 et le 1^{er} janvier 2020.



Solution

1. En utilisant la dérivée d'un produit, pour tout réel $x \geq 0$, on a :

$$F'(x) = (-400x - 3200)e^{-0,1x} + (-200x^2 - 3200x - 36600)(-0,1)e^{-0,1x}$$

$$= e^{-0,1x}(-400x - 3200 + 20x^2 + 320x + 3660)$$

$$F'(x) = (20x^2 - 80x + 460)e^{-0,1x} = f(x)$$

On a donc $F'(x) = f(x)$, F est une primitive de f sur $[0; +\infty[$.

2. L'audience moyenne de téléspectateurs entre 2018 et 2020 est donnée par la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[18; 20]$.

$$\mu = \frac{1}{20-18} \int_{18}^{20} f(x) dx = \frac{1}{2} (F(20) - F(18))$$

$$F(20) = (-200 \times 20^2 - 3200 \times 20 - 36600)e^{-0,1 \times 20} = -180600e^{-2}$$

$$F(18) = (-200 \times 18^2 - 3200 \times 18 - 36600)e^{-0,1 \times 18} = -159000e^{-1,8}$$

$$\text{D'où : } \mu = \frac{1}{2} (-180600e^{-2} + 159000e^{-1,8}) \approx 920,486.$$

Arrondi à l'unité, on obtient $\mu \approx 920$.

L'audience journalière moyenne entre 2018 et 2020 est d'environ 920 000 téléspectateurs.

Point méthode

1. Pour montrer que F est une primitive de f , on calcule $F'(x)$ et on vérifie que $F'(x) = f(x)$.

Point méthode

2. • Dans le calcul de la valeur moyenne, on peut vérifier le calcul intermédiaire de l'intégrale à l'aide de la calculatrice.

$$\int_{18}^{20} ((20x^2 - 80x + 460) \times e^{-0,1x}) dx$$

1840,971075

• La valeur moyenne est exprimée dans la même unité que la fonction, ici en millier.

J'applique

3. Pour être rentable, un artisan glacier doit vendre entre 40 et 80 glaces par jour. Le coût unitaire en euro de production de x dizaines de glaces est modélisé par la fonction f définie sur $[4; 8]$ par :

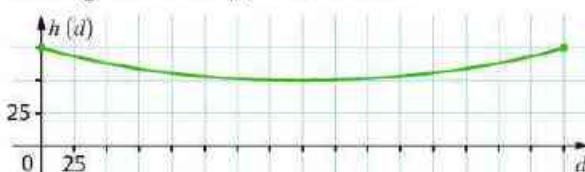
$$f(x) = 0,1x - 0,5 + 0,6e^{-0,2x+1}$$

Déterminer, au centime d'euro près, le coût unitaire moyen pour des productions quotidiennes comprises entre 40 et 80 glaces.

4. On souhaite niveler un terrain, dont le profil est modélisé par :

$$h(d) = \frac{d^2}{1600} - \frac{d}{4} + 75, \text{ où } 0 \leq d \leq 400.$$

Les longueurs d et $h(d)$ sont en mètre.



À quelle hauteur faut-il situer le terrain nivelé pour que les remblais équilibrent exactement les déblais ?

1. Répondre à cette question en utilisant le graphique.
2. Répondre à cette question en calculant la valeur moyenne de h sur $[0; 400]$.

5. Une société fabrique et vend du mobilier entre 200 et 600 meubles par mois. Le bénéfice algébrique (en millier d'euros) généré par la fabrication et la vente de x centaines de meubles est modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle $[2; 6]$ par :

$$f(x) = -0,9x^2 + 3 + 20 \ln(x)$$

1. Montrer que la fonction F définie sur $[2; 6]$ par $F(x) = -0,3x^3 - 17x + 20x \ln(x)$ est une primitive de f .

2. Calculer $\int_2^6 f(x) dx$.

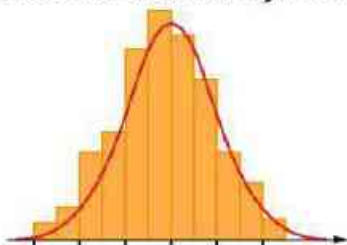
3. En déduire la valeur moyenne du bénéfice mensuel pour des ventes comprises entre 200 et 600 meubles. On arrondira le résultat obtenu à l'euro près.

Indicateurs statistiques

Moyenne – écart type

Choisir ces indicateurs, c'est prendre en compte toutes les valeurs de la série.

Plus l'écart type est grand, plus les valeurs de la série sont dispersées autour de sa moyenne.

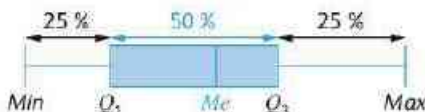


Sensible aux valeurs extrêmes, ce couple est privilégié lorsque la série a un diagramme en bâtons « régulier ».

Médiane, écart interquartile, rapport interdécile

Choisir ces indicateurs, c'est partager la série en sous-groupes de même taille :

- de 25 % de l'effectif total pour les quartiles,
- de 10 % de l'effectif total pour les déciles.



Plus l'écart interquartile $Q_3 - Q_1$ est grand, plus les valeurs de la série sont dispersées autour de la médiane.

Le rapport interdécile D_9 / D_1 met en évidence le rapport entre le haut et le bas de la distribution.

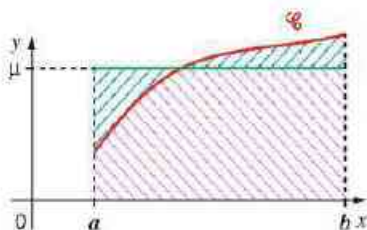
Intégrale, valeur moyenne

- L'intégrale d'une fonction f sur $[a; b]$ est égale à la variation d'une primitive F entre a et b :

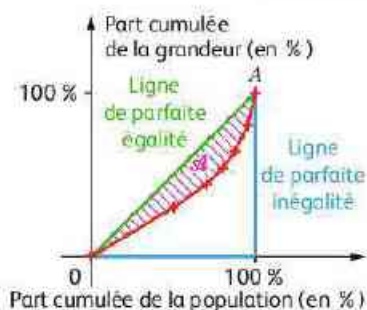
$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

- La valeur moyenne de f sur $[a; b]$ est le nombre μ défini par :

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$



Courbe de Lorenz - Indice de Gini



La courbe de Lorenz permet de calculer l'indice de Gini :

$$G = 2 \times sI$$

Plus les inégalités sont importantes, plus la courbe de Lorenz s'éloigne du segment $[OA]$ et plus l'indice de Gini est élevé et se rapproche de 1.



↳ Voir corrigés

QCM

Pour chacune des questions, indiquer la (ou les) bonne(s) réponse(s).

1. Une série a un écart type égal à 1,4. Une série de même moyenne, mais plus homogène, aura un écart type σ tel que :

a $\sigma > 1,4$

b $\sigma < 1,4$

c $\sigma > 0$

2. On donne la série suivante.

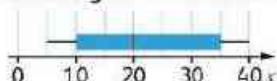
| | | | | | |
|-------|---|---|---|---|---|
| x_i | 3 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| n_i | 1 | 5 | 3 | 2 | 4 |

$\bar{x} = 106$

$Me = 7$

$\sigma \approx 1,6$

3. On donne le diagramme en boîte suivant.



$Me = 20$

$Q_3 - Q_1 = 25$

$Q_3 = 40$

4. Une primitive de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 1 - 2\ln x$ est :

$F(x) = 3x - 2x \ln x$

$F(x) = x - \frac{2}{x}$

$F(x) = \frac{2}{x}$

5. Si $f(x) = e^{3x} + 1$, alors une primitive F de f est donnée par :

$F(x) = e^{3x} + x$

$F(x) = \frac{1}{3}e^{3x} + x$

$F(x) = 3e^{3x}$

6. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 3x^2$. La valeur moyenne de f sur $[1; 4]$ est :

$\frac{1}{3} \int_1^4 f(x) dx$

21

63

vrai

ou faux ?

Indiquer pour chaque affirmation si elle est vraie ou fausse. Justifier.

Partie A.

- L'écart interquartile est un indicateur qui mesure la dispersion autour de la moyenne.
- Le premier décile D_1 est la plus petite valeur de la série telle qu'au moins 10 % des valeurs de la série lui soient supérieures ou égales.
- Le cinquième décile est égale au deuxième quartile.
- Si, pour tout réel $x \in [a; b]$, on a $m \leq f(x) \leq M$, alors la valeur moyenne μ de la fonction sur $[a; b]$ est comprise entre m et M .
- Plus l'indice de Gini est proche de 1, moins les inégalités sont importantes.

Partie B.

La répartition des salaires annuels nets, exprimés en euro, dans une entreprise est donnée ci-dessous par décile.

| | | | | |
|--------|--------|--------|--------|----------|
| D_1 | D_2 | D_3 | D_4 | D_5 |
| 12 345 | 16 734 | 18 254 | 22 536 | 24 576 |
| D_6 | D_7 | D_8 | D_9 | D_{10} |
| 25 786 | 32 345 | 34 578 | 54 609 | 72 253 |

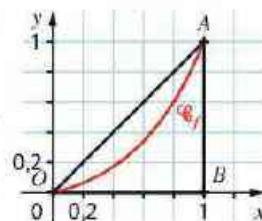
- Les 20 % des salariés les moins bien payés de l'entreprise gagnent au plus 16 734 euros par an.
- La médiane est égale à 24 576 euros.
- $32\,345 < Q_3 < 34\,578$
- Le rapport interdécile D_9/D_1 est environ égal à 42 264.

Partie C.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par :

$$f(x) = 0,7x^3 + 0,3x$$

de courbe représentative \mathcal{C}_f dans un repère orthonormé d'origine O , et les points $A(1; 1)$ et $B(1; 0)$.



- f est concave sur $[0; 1]$.
- La courbe \mathcal{C}_f peut être la modélisation d'une courbe de Lorenz.
- L'aire du triangle OAB est égale à 1.
- L'aire du domaine défini par la courbe \mathcal{C}_f , l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$ est égale à 0,325 unité d'aire.

Automatismes transversaux

6 Donner le coefficient multiplicateur associé à chaque évolution.

+15 % ; -6 % ; +33 % ; -10 % ; -1 % ; +7 %

2. Donner l'évolution en pourcentage associée à chaque coefficient multiplicateur.

1,08 ; 1,265 ; 0,95 ; 0,87 ; 1,2 ; 0,5 ; 2.

7 Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes.

1. $4x^2 - 7x = 0$ **2.** $(-5x + 1)e^{-x} = 0$

8 Dresser le tableau de signes de la fonction f .

1. $f(x) = (5x - 2)e^x$ sur \mathbb{R} .

2. $f(x) = (3 - x)(x^2 + x + 1)$ sur \mathbb{R} .

9 Dans chacun des cas, déterminer l'expression de la fonction dérivée, sans étudier l'ensemble de dérivabilité.

1. $f(x) = (4x - 1)e^x$ **2.** $f(x) = \frac{2}{x} + 3x - 1$

3. $f(x) = 4\sqrt{x} - 3$ **4.** $f(x) = 2xe^x$

5. $f(x) = \frac{2x - 3}{x - 1}$ **6.** $f(x) = \frac{6x + 7}{e^x}$

10 1. Soit u la suite géométrique telle que $u_0 = 4$ et de raison $q = 0,8$. Pour tout entier naturel n :

a. exprimer u_{n+1} en fonction de u_n ;

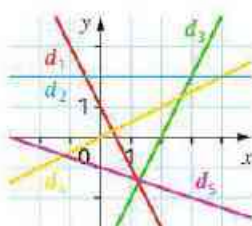
b. exprimer u_n en fonction de n .

2. Soit v la suite géométrique telle que $v_1 = 6$ et de raison $q = 1,04$. Pour tout entier naturel n non nul :

a. exprimer v_{n+1} en fonction de v_n ;

b. exprimer v_n en fonction de n .

11 Lire le coefficient directeur de chacune des droites tracées dans le repère ortho-normé ci-contre.



12 On donne ci-dessous la loi de probabilité d'une variable aléatoire X .

| | | | | | |
|-------|-----|------|-----|------|-----|
| x_i | -4 | -1 | 0 | 2 | 3 |
| p_i | 0,1 | 0,05 | 0,3 | 0,15 | 0,4 |

1. Calculer $P(X > 0)$. **2.** Calculer $P(X \leq 2)$.

3. Calculer $E(X)$.

13 On considère deux événements A et B d'une expérience aléatoire. On sait que :

$P(A) = 0,6$; $P(B) = 0,5$ et $P(A \cap B) = 0,2$

Calculer $P(\bar{A})$; $P_B(A)$; $P_A(B)$; $P(\bar{A} \cap B)$; $P(\bar{A} \cap \bar{B})$.

Automatismes du thème

14 Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

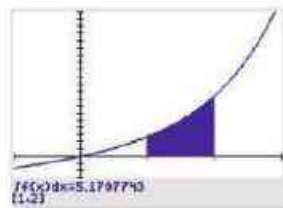
1. $f(x) = 4x^3 - x^2 + 7x - 1$ sur \mathbb{R} .

2. $f(x) = 2x - \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$ **3.** $f(x) = 4e^x - 1$ sur \mathbb{R} .

15 Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$f(x) = e^x + x - 1$

Expliquer et justifier les résultats obtenus sur l'écran de la calculatrice ci-contre.



16 Dans chacun des cas, calculer la valeur moyenne de la fonction f sur I .

1. $f(x) = 3x^2 + 1$ sur $I = [0; 2]$

2. $f(x) = e^x$ sur $I = [0; 3]$ **3.** $f(x) = \frac{2}{x}$ sur $I = [1; 5]$

17 Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$f(x) = (3x + 1)e^{-2x}$

Justifier les résultats ci-contre obtenus à l'aide d'un logiciel de calcul formel.

| | |
|---|------------------------------------|
| 2 | Factoriser(Dérivée(f(x))) |
| | $-e^{-2x}(6x - 1)$ |
| 3 | Factoriser(Dérivée(Dérivée(f(x)))) |
| | $-4e^{-2x}(3x - 2)$ |

18 Étudier la convexité des fonctions données.

1. $f(x) = 4 - e^{-x}$ sur \mathbb{R} **2.** $f(x) = 1 - 4 \ln x$ sur $]0; +\infty[$

19 On considère la série statistique suivante.

| | | | | | | |
|-----------|----|----|----|----|----|----|
| Valeurs | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 |
| Effectifs | 7 | 14 | 23 | 30 | 10 | 16 |

1. Compléter le tableau par la ligne des fréquences cumulées croissantes.

2. En déduire les valeurs de Me , Q_1 , Q_3 , D_1 et D_9 .

20 On considère la série statistique suivante.

| | | | | | | |
|-----------|----|----|---|----|----|----|
| Valeurs | 1 | 3 | 4 | 5 | 7 | 10 |
| Effectifs | 23 | 12 | 2 | 11 | 10 | 12 |

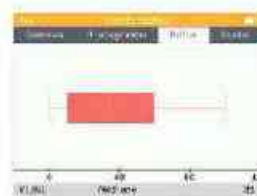
À l'aide de la calculatrice, déterminer :

1. la moyenne et l'écart-type ;

2. la médiane et l'écart interquartile.

21 On donne ci-contre le diagramme en boîte d'une série statistique.

Lire les valeurs du minimum, du maximum, de la médiane Me , des quartiles Q_1 et Q_3 .



Consolider les bases

22 Soit f une fonction polynôme définie sur \mathbb{R} . On note f' sa dérivée, f'' sa dérivée seconde et F une primitive. Dans chacun des cas, déterminer f' , f'' et F .

- $f(x) = 8x^3 - 6x^2 + 2x + 7$
- $f(x) = 0,003x^3 + 0,01x^2 + 0,005x$
- $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{5}{3}x^2 + \frac{1}{12}x - \frac{1}{3}$

23 Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 e^x$.

- Étudier les variations de f .
- Étudier la convexité de f .
- a. Montrer que la fonction F définie \mathbb{R} par : $F(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x$ est une primitive de f sur \mathbb{R} .
b. En déduire la valeur exacte, puis une valeur approchée à 10^{-1} de $I = \int_0^1 f(x) dx$.

24 Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x + 2 + \ln x$$

- Étudier les variations de f .
- Étudier la convexité de f .
- a. Montrer que la fonction F définie $]0; +\infty[$ par : $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 1 + x \ln x$ est une primitive de f .
b. En déduire la valeur de $I = \int_1^2 f(x) dx$.

Connaître le cours

25 Deux diaporamas pour faire le point sur le cours.



26 Recopier et compléter les phrases suivantes.

- L'écart type mesure la dispersion autour de la ...
- ... mesure la dispersion autour de la médiane.
- Plus l'écart type est grand, plus ...
- La médiane partage la série en ..., les quartiles en ... et les ... en dix séries de même taille.
- D_1 est la plus petite valeur de la série telle que ...

27 Vrai ou Faux ?

Soit f une fonction continue sur $[a; b]$ et F une primitive de f sur $[a; b]$.

- Pour tout réel $x \in [a; b]$, $f'(x) = F(x)$.
- $\int_a^b f(x) dx = f(b) - f(a)$
- La valeur moyenne de f sur $[a; b]$ est égale à :

$$\mu = \frac{1}{b-a} (F(b) - F(a))$$

- L'aire du domaine du plan compris entre la courbe représentative de f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à $\int_a^b f(x) dx$.

Travailler les capacités du thème

1 Comparer des séries statistiques

28 QCM

On considère une série statistique pour laquelle on a obtenu les résultats ci-contre à l'aide de la calculatrice.

Dans chacun des cas, indiquer la bonne réponse.

```

Stats1=Var
X=10.02857143
Max=351
Min=4503
Sx=5.376887982
sx=5.299518654
n=35
minX=2
Q1=5
Med=9
Q3=15
MaxX=23
    
```

1. La moyenne de la série est environ égale à :

- a. 10 b. 9 c. 351

2. Le cinquième décile est égal à :

- a. 10 b. 9 c. 23

3. L'écart type est environ égal à :

- a. 5,38 b. 4 503 c. 5,30

4. L'écart interquartile est égal à :

- a. 21 b. 10 c. 15

29 On considère les séries S_1 et S_2 suivantes.

- S_1 : 90 ; 100 ; 100 ; 110
- S_2 : 95 ; 95 ; 105 ; 105

1. Calculer, à la main, la moyenne de la série 1, puis celle de la série 2.

Peut-on les différencier à l'aide de cet indicateur ?

- a. Quelle semble être la série la plus dispersée ?
b. Calculer, à la main, l'écart type de la série 1, puis celui de la série 2. Comparer finalement les deux séries.

30 Dans un questionnaire, on demande aux personnes interrogées une valeur numérique sur leur degré de satisfaction, qui est un nombre entier entre 0 (pas du tout satisfait) et 10 (totalement satisfait). On note σ l'écart type de la série des réponses obtenues. Pour chaque valeur de σ associer une situation.

- ① $1 \leq \sigma \leq 2$ ② $\sigma \geq 6$ ③ $\sigma = 0$

- Les personnes sondées sont unanimement d'accord.
- Les personnes sondées sont partagées.
- Les personnes sondées sont globalement d'accord.

31 Vrai ou Faux ?

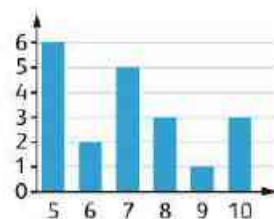
Un échantillon est représenté par ce diagramme.

1. La médiane de cette série est 7,5.

2. L'écart interquartile $Q_3 - Q_1$ vaut 3.

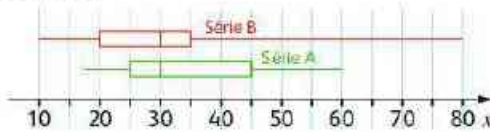
$$3. \bar{x} = \frac{5 \times 6 + 6 \times 2 + 7 \times 5 + 8 \times 3 + 9 + 10 \times 3}{6}$$

4. Un autre échantillon a un écart type égal à 3. Il est plus homogène que l'échantillon ci-dessus.



32 Vrai ou faux ?

On donne ci-dessous les diagrammes en boîte de deux séries A et B.



Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse.

- L'étendue de la série A est plus petite que l'étendue de la série B.
- La série B et la série A ont la même médiane.
- La série B est plus dispersée que la série A.

33 On donne des informations statistiques pour trois séries de salaires horaires bruts (en euro) en 2014.

Source : Eurostat

| Pays | France | Allemagne | Royaume-Uni |
|-----------|--------|-----------|-------------|
| D_1 | 9,9 | 8,0 | 8,5 |
| Me | 14,8 | 15,3 | 14,7 |
| D_9 | 26,7 | 30,2 | 32,7 |
| Me/D_1 | 1,5 | 1,9 | 1,7 |
| D_9/D_1 | 2,7 | 3,8 | 3,8 |
| D_9/Me | 1,8 | 2,0 | 2,2 |

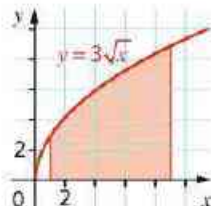
- Donner les valeurs de D_1 , D_9 et de la médiane de la série des salaires horaires bruts pour la France. En donner la signification pour chacune.
 - Vérifier les valeurs données des ratios Me/D_1 , D_9/D_1 et D_9/Me . Interpréter les résultats dans le contexte de l'exercice.
- Entre la France, l'Allemagne et le Royaume-Uni, quel pays a la plus grande disparité :
 - parmi la partie basse de la répartition des salaires ?
 - parmi la partie haute de la répartition des salaires ?
 - sur l'ensemble de la répartition des salaires ?

2 Interpréter une intégrale, une valeur moyenne

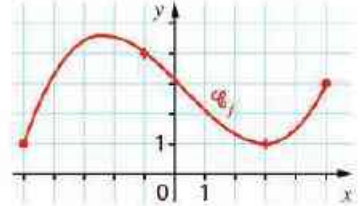
34 QCM

Pour chaque question, indiquer la (ou les) bonne(s) réponse(s).

- L'aire, en unité d'aire, du domaine coloré est :
 - $\int_1^9 3\sqrt{x} dx$
 - $\int_1^9 3\sqrt{t} dt$
 - $\int_0^9 3\sqrt{x} dx$
 - 24



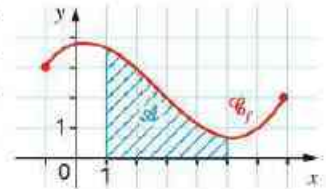
2. Soit \mathcal{C}_f la courbe représentant une fonction f continue sur $[-5; 5]$.



- $\int_{-5}^{-1} f(x) dx \leq 0$
- $1 \leq \int_{-5}^{-1} f(x) dx \leq 4$
- $1 \leq \int_3^5 f(x) dx \leq 6$

35 Soit f la fonction définie sur $[-1; 7]$ représentée ci-dessous.

- Exprimer, à l'aide d'une intégrale, l'aire \mathcal{A} .
- Par lecture graphique, donner une valeur approchée de cette aire en unité d'aire.



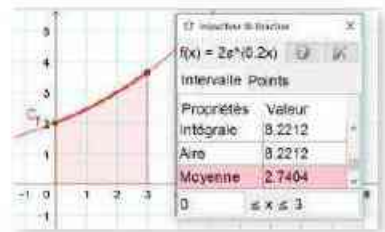
- En déduire une valeur approchée de la valeur moyenne de la fonction f sur $[1; 5]$.
- Vérifier graphiquement en utilisant la hauteur d'un rectangle construit sur l'intervalle $[1; 5]$.

36 La croissance d'une population, en million, est modélisée par la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = 2e^{0,2x}$$

où x est le nombre d'années écoulées.

On a réalisé la recherche précédente à l'aide d'un logiciel de géométrie.



- Que signifient les valeurs « Aire » et « Moyenne » affichées par le logiciel dans le contexte de l'exercice ?
- Démontrer les résultats obtenus par le logiciel.

37 Vrai ou faux ?

Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

- La valeur moyenne de la fonction f définie par $f(x) = x^3$ sur $[-2; 2]$ est 0.
- La valeur moyenne de la fonction g définie par $g(x) = e^{2x-1}$ sur $[0; 4]$ est $e-1$.
- La valeur moyenne de la fonction h définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $[2; 5]$ est $\ln \frac{5}{2}$.

38 Dans chacun des cas suivants, calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle I donné.

- $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$ sur $I = [-2; 2]$
- $f(x) = 0,01x^3 - 0,99x^2$ sur $I = [0; 1]$
- $f(x) = 4x - 1 + 3e^x$ sur $I = [0; 1]$
- $f(x) = 3 - \frac{2}{x}$ sur $I = [1; e]$

1 Des outils statistiques

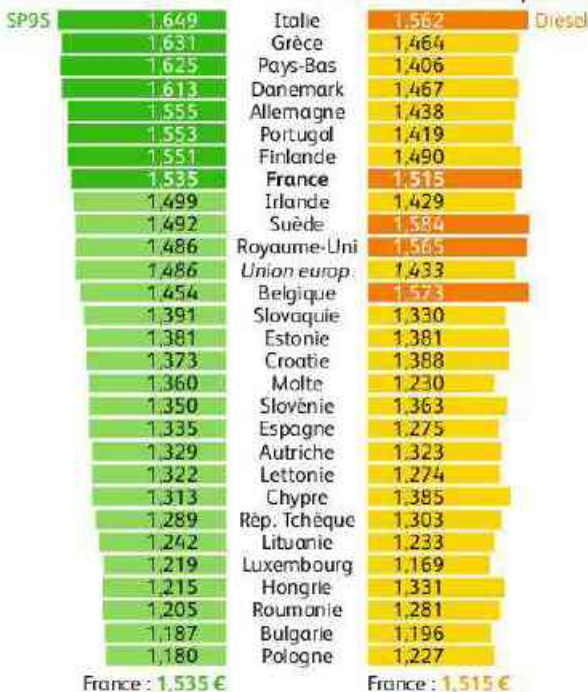
39 En 2019, une entreprise employait deux cadres et six ouvriers.

| Catégorie | Cadre | Ouvrier |
|-----------|---------|---------|
| Salaire | 6 000 € | 1 400 € |

- Calculer le salaire moyen d'un employé.
- Les résultats de l'entreprise étant bons, le chef d'entreprise décide d'augmenter tous les salaires de 10 % et d'engager cinq ouvriers supplémentaires. Un employé affirme : « Malgré nos augmentations, le salaire moyen de l'entreprise a baissé. » S'est-il trompé ?

40 On donne ci-dessous les prix, en €/L, des carburants dans l'Union européenne en novembre 2018.

Source : Commission européenne



- Calculer les indicateurs statistiques (moyenne, écart type, médiane et quartiles) des deux séries.
- La ligne « Union européenne » indique un prix de 1,486 €/L pour le SP95 et 1,433 €/L pour le Diesel. Ces valeurs correspondent-elles aux deux moyennes calculées dans la question précédente ? Expliquer pourquoi.
 - Expliquer et commenter pourquoi certaines cases sont colorisées en vert foncé ou en orange foncé.
- Un journaliste, s'appuyant sur ces données, souhaite intituler un article : « La France, un des pays de l'UE où le prix des carburants est le plus cher. » Sur quel(s) indicateur(s) statistique(s) s'appuie-t-il ?
- D'après l'INSEE, le salaire médian net est de 1 710 € par mois en France en 2017. Calculer le nombre de pleins de 50 litres que l'on peut faire en France avec un mois de salaire médian.

b. En se basant sur le salaire médian en 2017 et les prix des carburants en 2018, la Commission européenne donne le nombre de pleins de 50 litres que l'on peut faire avec l'équivalent d'un mois de revenu médian. Ces données peuvent-elles remettre en cause les analyses faites à la question 3. ?

| | SP95 | Diesel |
|------------|------|--------|
| Luxembourg | 51,4 | 49,3 |
| Roumanie | 3,6 | 3,8 |

41 L'INSEE donne le poids des dépenses de logement selon les revenus, en %, pour 2001, 2006 et 2013.

| | 2001 | 2006 | 2013 |
|----------------------------|------|------|------|
| Les 10 % les plus modestes | 31,4 | 34,1 | 42,1 |
| Les 10 à 20 % | 22,9 | 24,2 | 28,5 |
| Les 20 % à 30 % | 21,3 | 22,9 | 25,3 |
| Les 30 à 40 % | 20,6 | 21,7 | 23,5 |
| Les 40 à 50 % | 19,6 | 20,0 | 22,3 |
| Les 50 à 60 % | 18,3 | 18,8 | 21,0 |
| Les 60 à 70 % | 17,0 | 17,6 | 19,0 |
| Les 70 à 80 % | 15,7 | 15,7 | 17,6 |
| Les 80 à 90 % | 13,9 | 14,5 | 15,1 |
| Les 10 % les plus riches | 9,8 | 10,0 | 10,8 |

Fin 2017, l'Observatoire des inégalités écrivait : « Les 10 % les plus modestes consacrent 42 % de leurs revenus au logement, soit quatre fois plus que les 10 % les plus aisés. Le poids des dépenses de logement s'est fortement accentué depuis 2001, essentiellement pour les ménages les plus pauvres. » Justifier.

2 Des outils issus de l'analyse

Info

- On appelle **courbe de Lorenz** la représentation graphique d'une fonction L définie sur $[0; 1]$ vérifiant :
 - $L(0) = 0$ et $L(1) = 1$;
 - L est croissante et convexe sur $[0; 1]$;
 - pour tout réel x de $[0; 1]$, $L(x) \leq x$.
- En notant $O(0; 0)$ et $A(1; 1)$, l'**indice de Gini** est le double de l'aire du domaine compris entre la courbe représentative de L et le segment $[OA]$, en unité d'aire.

Pour les exercices 42 à 47, montrer que la courbe représentative de la fonction f définie sur $[0; 1]$ par l'expression donnée est une courbe de Lorenz. Puis calculer la valeur exacte de l'indice de Gini.

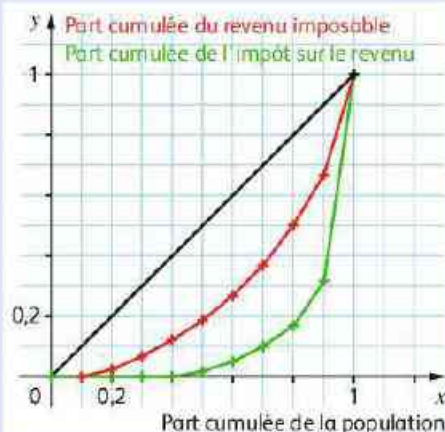
- 42** $f(x) = x^4$ **43** $f(x) = 0,2x^2 + 0,8x$
- 44** $f(x) = \frac{2}{2-x} - 1$ **45** $f(x) = \frac{4}{3} \times \frac{1}{(x-2)^2} - \frac{1}{3}$

46 $f(x) = \frac{20}{5-x} - 4$ 47 $f(x) = \frac{7,2}{(3-x)^2} - 0,8$

Analyse d'un énoncé

48 Exercice commenté

Le graphique suivant donne la répartition du revenu imposable et du montant de l'impôt sur le revenu en France en 2016. Source : Sénat



On modélise les fonctions de répartition du revenu imposable et du montant de l'impôt sur le revenu respectivement par les fonctions f et g définies sur $[0; 1]$ par : $f(x) = 0,75x^4 + 0,25x$

$$\text{et } \begin{cases} \text{si } 0 \leq x \leq 0,4, & g(x) = 0 \\ \text{si } 0,4 \leq x \leq 1, & g(x) = \frac{e^{8(x-0,4)} - 1}{e^{4,8} - 1} \end{cases}$$

où x correspond à la part cumulée de la population.

1. a. Montrer que la courbe représentative de f est une **courbe de Lorenz**.

- Il faut vérifier que :
 - $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$;
 - f est croissante et convexe sur $[0; 1]$;
 - et pour tout $x \in [0; 1]$ $f(x) \leq x$.

b. Calculer l'intégrale $I = \int_0^1 f(x) dx$. En déduire l'**indice de Gini** pour les revenus imposables en 2016.

• L'indice de Gini est le nombre $G = 2 \times \mathcal{A}$, avec \mathcal{A} l'aire du domaine délimité par $[OA]$ et la courbe de Lorenz. Il faut utiliser la valeur de I .

2. a. Montrer que la fonction g est continue, croissante et convexe sur $[0; 1]$.

b. On admet que la courbe représentative de g est une courbe de Lorenz. Calculer l'indice de Gini pour l'impôt sur le revenu pour 2016.

3. **Comparer les deux répartitions**. En donner une explication.

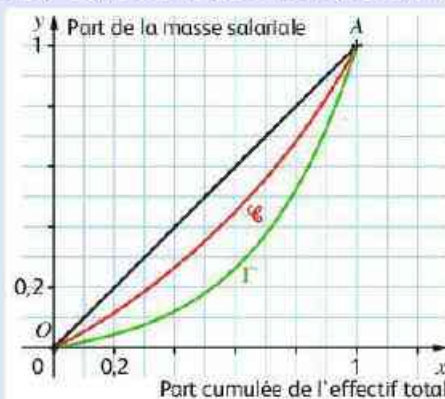
• Plus l'indice de Gini est petit, plus la répartition est égalitaire.

49 Application immédiate

Les répartitions des salaires dans deux entreprises A et B sont respectivement modélisées par les fonctions f et g définies sur $[0; 1]$ par :

$$f(x) = 0,25x^3 + 0,25x^2 + 0,5x \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{e^{3x} - 1}{e^3 - 1}$$

x représente la part cumulée de salariés ayant les salaires les plus faibles dans chaque entreprise et $f(x)$ (resp. $g(x)$) représente la part de la masse salariale totale que touche cette proportion x de salariés dans l'entreprise A (resp. l'entreprise B). On rappelle que la **masse salariale** est la somme des rémunérations brutes des salariés de l'entreprise. On note \mathcal{L} et Γ les courbes représentatives respectives de f et g , et les points $O(0; 0)$ et $A(1; 1)$.



1. a. Montrer que \mathcal{L} est une courbe de Lorenz.

b. Calculer l'intégrale $I = \int_0^1 f(x) dx$.

2. a. Calculer $g(0)$ et $g(1)$.

b. Justifier que la fonction g est croissante et convexe sur $[0; 1]$.

c. Pour tout réel $x \in [0; 1]$, on pose $h(x) = g(x) - x$. Justifier les éléments donnés dans les tableaux de signes et de variations ci-contre.

| | | |
|----------|---------|---------|
| x | 0 | 1 |
| $h''(x)$ | + | |
| $h'(x)$ | $h'(0)$ | $h'(1)$ |
| $h'(x)$ | - | |
| $h(x)$ | 0 | |
| $h(x)$ | 0 | - |

d. En déduire que la courbe Γ est une courbe de Lorenz.

e. Montrer que :

$$\int_0^1 g(x) dx = \frac{1}{3} \times \frac{e^3 - 4}{e^3 - 1}$$

3. Calculer, pour chaque entreprise, la valeur exacte de l'indice de Gini des salaires.

4. a. Dans quelle entreprise la distribution des salaires est-elle la plus irrégulièrement répartie ?

b. Le graphique permettait-il de prévoir ce résultat ?

Pourquoi prendre en compte l'inflation ?

« Baguette de pain, essence, voiture neuve, sucre, œufs... Une infographie réalisée par le site de la Dépêche du Midi qui circule beaucoup sur Facebook depuis quelques semaines (plus de 60 000 partages rien que sur ce compte) montre une inflation galopante sur de nombreux produits du quotidien depuis 1980.

La baguette de pain est ainsi passée en près de 40 ans de 0,25 euro à 0,87 euro, le litre de lait de 0,38 euro à 0,94 euro, la consultation médicale de 6,56 euros à 25 euros et celui d'une voiture neuve de 4 300 à 10 000 euros. Ces prix bruts laissent donc entendre que le pouvoir d'achat des Français a été massacré depuis 1980.

Sauf qu'il y a un problème et l'article de la Dépêche qui accompagne l'infographie est bien plus nuancé : ces prix ne tiennent pas compte de l'inflation globale (un franc de 1980 n'avait pas la même valeur que le franc au moment du passage à l'euro et, converti en euro, il a encore moins de valeur aujourd'hui) et de l'évolution des salaires depuis 38 ans. [...] Et ça change évidemment tout. »

Source : bfmtv.com/economie - 28/11/2018



- En s'appuyant sur les passages surlignés en jaune, expliquer le problème exposé.
 - Donner les deux critères supplémentaires qu'il faut CHERCHER pour analyser l'évolution des prix.

2. Analyse brute des données

a. Calculer le coefficient multiplicateur CM des prix, à 0,01 près, pour chaque produit entre 1980 et 2018.

| Produit | Baguette | Bœuf | Lait | ... | Voiture |
|---------|----------|------|------|-----|---------|
| CM | 3,48 | ... | ... | | ... |

b. Calculer la moyenne des CM. Interpréter le résultat en termes d'évolution des prix entre 1980 et 2018.

3. En prenant en compte l'inflation globale

Ci-contre un autre extrait de l'article.

- Vérifier les calculs surlignés en jaune.
- D'après le convertisseur Franc/Euro de l'INSEE, compte tenu de l'érosion monétaire due à l'inflation, le pouvoir d'achat de 1,67 F en 1980 est le même que celui de 0,72 € en 2018.

Expliquer et commenter cette information.

La baguette coûtait 1,67 franc en 1980 selon le site France-Inflation. Si on utilise la conversion légale de l'euro en franc (1 euro = 6,55957 francs), on arrive effectivement au prix de 0,25 euro la baguette. Ce qui fait effectivement beaucoup moins cher que le tarif actuel.

4. En prenant en compte l'évolution des salaires

Au 1^{er} juillet 1980, le SMIC horaire brut était 13,97 Francs (2,13 €) et au 1^{er} janvier 2018 de 9,88 € (64,81 Francs). Commenter et analyser les prix donnés en fonction de la valeur du SMIC horaire.

5. Mener une comparaison des prix des objets du quotidien entre 1980 et 2018.

Il est rarement judicieux d'utiliser des données brutes, souvent mises en valeur par des représentations « visuellement parlantes » sans chercher de données complémentaires.



À partir de quel revenu est-on « riche » ou « pauvre » ?

L'Observatoire des Inégalités considère que :

- la **classe moyenne** est constituée des personnes situées entre les 30 % les plus pauvres et les 20 % les plus riches ;
- une personne est qualifiée de « pauvre » lorsque son revenu est inférieur au **seuil de pauvreté**, égal à la moitié du revenu médian ;
- une personne est qualifiée de « riche » lorsque son revenu est supérieur au **seuil de richesse**, égal au double du revenu médian.



Le tableau suivant donne la répartition des revenus disponibles par ménage selon la tranche de revenu pour l'année 2015.

Source : INSEE

| Tranche de revenu annuel disponible | Limite supérieure de tranche (décile) | Revenu annuel moyen | Part détenue (en %) |
|-------------------------------------|---------------------------------------|---------------------|---------------------|
| Inf. à D_1 | 13 630 | 10 030 | 2,8 |
| De D_1 à D_2 | 17 470 | 15 630 | 4,3 |
| De D_2 à D_3 | 21 120 | 19 280 | 5,3 |
| De D_3 à D_4 | 25 390 | 23 210 | 6,4 |
| De D_4 à D_5 | 30 040 | 27 680 | 7,6 |
| De D_5 à D_6 | 35 060 | 32 470 | 8,9 |
| De D_6 à D_7 | 41 290 | 38 080 | 10,5 |
| De D_7 à D_8 | 49 350 | 45 070 | 12,4 |
| De D_8 à D_9 | 63 210 | 55 300 | 15,2 |
| Sup. à D_9 | /// | 96 240 | 26,5 |

La colonne « Part détenue (en %) » contient, pour chaque tranche, la part que représente la totalité des revenus disponibles de la tranche par rapport à l'ensemble de tous les revenus disponibles.

Partie A Analyse des données

1. Lire le revenu disponible annuel médian. En déduire les valeurs annuelles, puis mensuelles du seuil de pauvreté et du seuil de richesse, en euro.
2. Préciser la fourchette des revenus disponibles annuels, puis mensuels pour la classe moyenne.
3. Calculer le rapport interdécile. Interpréter.
4. a. Représenter les données en plaçant :
 - en abscisses, la part cumulée des ménages ;
 - en ordonnées, le montant des déciles.
- b. En supposant que la répartition des revenus est régulière dans chaque tranche, estimer graphiquement :

- la proportion de ménages situés en dessous du seuil de pauvreté ;
- la proportion de ménages situés au-dessus du seuil de richesse.

Partie B Courbe de Lorenz et indice de Gini

1. a. Calculer le revenu disponible annuel moyen de l'ensemble des ménages français en 2015.
b. En notant N l'effectif total des ménages en 2015, justifier que :
 - la somme de tous les revenus disponibles est égale à $36\,299 \times N$;
 - la somme de tous les revenus disponibles inférieurs à D_1 est égale à $10\,030 \times \frac{N}{10}$.
- c. En déduire que la masse des revenus détenus par la tranche « Inf. à D_1 » est égale à environ 2,8 % .
d. Justifier de même que la masse des revenus détenus par la tranche « Sup. à D_9 » est égale à environ 26,5 % .
2. La courbe \mathcal{C} donnée ci-contre est la courbe de Lorenz des revenus disponibles pour l'année 2015. Expliquer comment cette courbe a été construite.
3. La courbe \mathcal{C} peut être approchée par la courbe représentant la fonction f définie sur $[0; 1]$ par :



$$f(x) = 0,7x^3 + 0,3x$$

On considère les points $O(0; 0)$ et $A(1; 1)$.

- a. Justifier que la fonction f est croissante et convexe sur $[0; 1]$ puis que, pour tout réel $x \in [0; 1]$, $f(x) \leq x$.
- b. Calculer l'intégrale $I = \int_0^1 f(x) dx$.
- c. En déduire la valeur de l'indice de Gini des revenus disponibles, égal à l'aire du domaine compris entre le segment $[OA]$ et la courbe \mathcal{C} .
- d. Sur le site de l'INSEE, on peut lire que l'indice de Gini pour les revenus disponibles était égal à 0,348 en 2015. Y a-t-il moins de 0,1 % d'écart avec la valeur obtenue à la question c. ?

Info

Les ménages peuvent prendre des formes très différentes : célibataires, couples, avec ou sans enfants, etc. Il est souvent plus pertinent d'étudier les revenus disponibles pour chaque sous-groupe, ou alors d'étudier le niveau de vie des ménages, qui prend en compte leurs différences de taille (voir exercice 52).

Le tableau ci-contre donne, dans la zone Euro pour l'année 2018 :

- le **rapport interquintile** $\frac{D_8}{D_2}$ de revenu disponible équivalent, c'est-à-dire le rapport entre le revenu total perçu par les 20 % de la population ayant le revenu le plus élevé (quintile supérieur) et le revenu total perçu par les 20 % de la population ayant le revenu le plus bas (quintile inférieur) ;
- le **coefficient de Gini** G du revenu disponible équivalent.

| Pays | D_8/D_2 | G | Pays | D_8/D_2 | G |
|-----------|-----------|-------|-------------------|-----------|-------|
| Allemagne | 5,07 | 0,311 | Italie | 6,09 | 0,334 |
| Autriche | 4 | 0,268 | Lettonie | 6,8 | 0,356 |
| Belgique | 3,78 | 0,256 | Lituanie | 7,09 | 0,369 |
| Chypre | 4,29 | 0,291 | Luxembourg | 5,72 | 0,332 |
| Espagne | 6,03 | 0,332 | Malte | 4,28 | 0,287 |
| Estonie | 5,07 | 0,306 | Pays-Bas | 4,05 | 0,274 |
| Finlande | 3,6 | 0,259 | Portugal | 5,22 | 0,321 |
| France | 4,23 | 0,285 | Slovaquie | 3,03 | 0,234 |
| Grèce | 5,51 | 0,323 | Slovénie | 3,4 | 0,234 |
| Irlande | 4,23 | 0,289 | Total (Zone Euro) | 5,07 | 0,306 |

Source : Eurostat

Étudier la position de la France en Europe quant à la dispersion des revenus. On calculera des caractéristiques statistiques (position et dispersion) et on construira un graphique pour argumenter.

Voici ce que l'on trouve dans l'édition 2018 de l'INSEE sur *les revenus et le patrimoine des ménages*.

« Le concept de **niveau de vie** est utilisé pour comparer les ressources des personnes vivant dans des ménages de taille ou de composition différente. Conventionnellement, tous les membres du ménage ont le même niveau de vie, calculé en rapportant le **revenu disponible** du ménage au nombre d'**unités de consommation** (UC) qui le composent.

Afin de tenir compte des économies d'échelle procurées par la vie en commun, le premier adulte du ménage compte pour 1 UC, toute personne supplémentaire de 14 ans ou plus pour 0,5 UC et chaque enfant de moins de 14 ans pour 0,3 UC. Un ménage ayant 1 000 euros de revenu disponible a donc un niveau de vie de 1 000 euros s'il se compose d'une seule personne, mais de 667 euros si ce ménage est un couple ou encore de 476 euros s'il s'agit d'un couple avec deux enfants de moins de 14 ans. »

La colonne « Part détenue (en %) » contient, pour chaque tranche, la part que représente la totalité des niveaux de vie de la tranche par rapport à l'ensemble de tous les niveaux de vie.



| Tranche de niveau de vie | Limite supérieure de tranche (décile) | Niveau de vie moyen | Part détenue (en %) |
|--------------------------|---------------------------------------|---------------------|---------------------|
| Inf. à D_1 | 10 860 | 8 280 | 3,5 |
| De D_1 à D_2 | 13 670 | 12 350 | 5,3 |
| De D_2 à D_3 | 15 970 | 14 840 | 6,3 |
| De D_3 à D_4 | 18 150 | 20 070 | 7,3 |
| De D_4 à D_5 | 20 300 | 19 220 | 8,2 |
| De D_5 à D_6 | 22 570 | 21 420 | 9,1 |
| De D_6 à D_7 | 25 500 | 23 970 | 10,2 |
| De D_7 à D_8 | 29 790 | 27 490 | 11,7 |
| De D_8 à D_9 | 37 510 | 33 130 | 14,1 |
| Sup. à D_9 | /// | 56 640 | 24,3 |

Source : INSEE

1. Le tableau ci-dessus donne la répartition des niveaux de vie selon la tranche de niveau de vie en 2015.

a. Construire, dans un repère orthonormé, la courbe de Lorenz \mathcal{L} du niveau de vie, qui met en relation la part cumulée de la population avec la part détenue cumulée du niveau de vie.

b. Tracer sur le graphique précédent la courbe d'équation $y = 0,56x^3 + 0,44x$. Que constate-t-on ?

c. En déduire une estimation de l'indice de Gini du niveau de vie en France pour l'année 2015.

2. Selon l'INSEE, la distribution des niveaux de vie est plus resserrée que celle des revenus disponibles. Justifier cette affirmation en comparant les données de l'exercice avec celles de l'exercice 50.

Le tableau suivant donne la répartition des surfaces agricoles utilisées (SAU) en France métropolitaine pour les années 2010, 2013 et 2016.

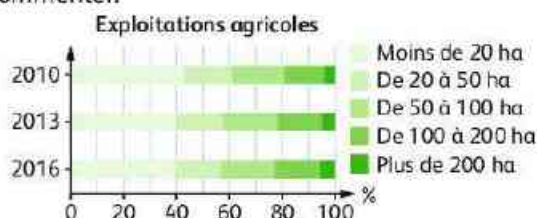
Source : Agreste

| SAU | | Proportion du nombre total d'exploitations (en %) | | | Proportion de la SAU totale (en %) | | |
|-----|-----------------|---|------|------|------------------------------------|------|------|
| | | 2010 | 2013 | 2016 | 2010 | 2013 | 2016 |
| SAU | Moins de 20 ha | 43,0 | 40,4 | 40,1 | 4,5 | 3,9 | 3,7 |
| | De 20 à 50 ha | 17,9 | 17,4 | 16,9 | 10,8 | 9,6 | 9,1 |
| | De 50 à 100 ha | 19,9 | 20,6 | 20,2 | 25,4 | 24,4 | 23,2 |
| | De 100 à 200 ha | 14,8 | 16,4 | 17,2 | 36,1 | 36,9 | 37,6 |
| | Plus de 200 ha | 4,3 | 5,2 | 5,6 | 23,2 | 25,2 | 26,3 |



Partie A Comparaison entre 2010, 2013 et 2016

1. Le tableau a permis de construire les diagrammes en bande suivants pour le nombre d'exploitations. Commenter.



2. Analyser l'évolution de la surface agricole totale (SAU) en fonction de la taille des exploitations en France métropolitaine entre 2010 et 2016.

Peut-on dire que les structures agricoles ont tendance à s'agrandir entre 2010 et 2016 ?

3. On a construit ci-contre la courbe de Lorenz de la SAU en France métropolitaine pour l'année 2010.



a. Expliquer comment cette courbe a été construite.

b. Reproduire la figure dans un repère orthonormé en prenant 1 cm pour 0,1 unité.

Puis construire les courbes de Lorenz de la SAU des années 2013 et 2016. Que constate-t-on ?

4. On modélise les courbes précédentes par celle de la fonction f définie sur $[0;1]$ par :

$$f(x) = \frac{\exp(4,5x) - 1}{\exp(4,5) - 1}$$

a. Calculer $f(0)$ et $f(1)$, puis justifier que f est croissante et convexe sur $[0;1]$.

b. Calculer l'intégrale $I = \int_0^1 f(x) dx$.

c. En déduire l'indice de Gini pour la surface agricole utile en France métropolitaine.

Partie B Comparaison avec la Réunion

On modélise la répartition de la SAU à la Réunion pour l'année 2016 par la fonction g définie sur $[0;1]$ par :

$$g(x) = \frac{0,11}{1,1-x} - 0,1$$

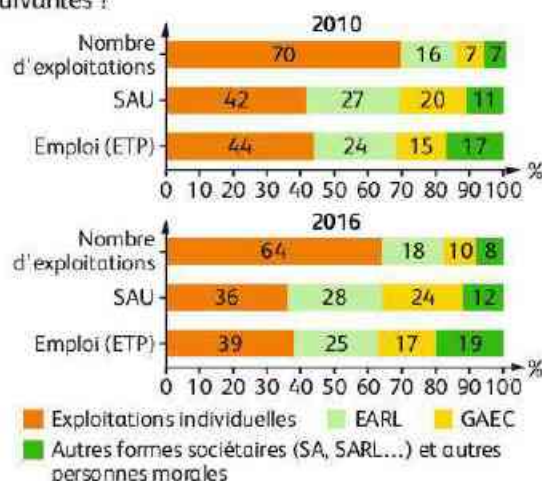
où x représente la part cumulée des exploitations les plus petites et $g(x)$ la part cumulée de la SAU détenue par ces exploitations.

1. Démontrer que la courbe représentant g est une courbe de Lorenz.

2. Comparer les répartitions de la SAU en France métropolitaine et à la Réunion, en argumentant.

Partie C Transformation des exploitations

Dans le tableau de l'Économie française de 2019, on peut lire : « L'agrandissement des exploitations s'accompagne du développement des formes sociétaires. » Cette affirmation est-elle cohérente avec les données suivantes ?



Lecture

ETP : Équivalent temps plein
 EARL : Exploitation agricole à responsabilité limitée
 GAEC : Groupement agricole d'exploitation en commun

L'indice de développement humain (IDH) est utilisé par les Nations unies pour mesurer le niveau de développement des pays, en prenant en compte des données économiques, mais aussi des données plus qualitatives.

Il intègre les données suivantes :

- l'espérance de vie à la naissance (qui donne une idée de l'état sanitaire de la population du pays) ;
- le niveau d'instruction mesuré par la durée moyenne de scolarisation et la durée attendue de scolarisation, avec l'idée que l'acquisition des connaissances facilite les choix de vie des individus et leur liberté ;
- le P.I.B. par habitant, calculé en parité de pouvoir d'achat (PPA) (c'est-à-dire un montant assurant le même pouvoir d'achat dans tous les pays) ; le P.I.B. par habitant donne une indication sur le niveau de vie moyen du pays.

L'IDH est un nombre sans unité, compris entre 0 et 1. Plus l'IDH se rapproche de 1, plus le niveau de développement du pays est élevé.

L'IDH d'un pays est égal à :

$$(I_{\text{Longévité}} \times I_{\text{Éducation}} \times I_{\text{Revenu}})^{1/3}$$

où :

- $I_{\text{Longévité}}$ est l'indice de longévité ;
- $I_{\text{Éducation}}$ est l'indice d'éducation ;
- I_{Revenu} est l'indice de revenu.

Ces trois indices se calculent à partir des valeurs mesurées dans chaque pays, selon des formules choisies et actualisées chaque année par les Nations unies.

Ainsi, pour l'IDH d'un pays en 2017 :

- L'indice de longévité est :

$$I_{\text{Longévité}} = \frac{\text{Espérance de vie à la naissance} - 20}{85 - 20}$$

- On définit l'indice de la durée moyenne de scolarisation :

$$I_{\text{moy}} = \frac{\text{Durée moyenne de scolarisation} - 0}{15 - 0}$$

et l'indice de la durée attendue de scolarisation :

$$I_{\text{att}} = \frac{\text{Durée attendue de scolarisation} - 0}{18 - 0}$$

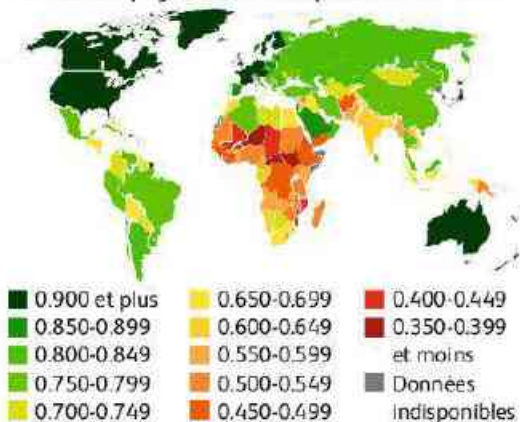
L'indice d'éducation est la moyenne de ces indices :

$$I_{\text{Éducation}} = \frac{I_{\text{moy}} + I_{\text{att}}}{2}$$

- L'indice de revenu est :

$$I_{\text{Revenu}} = \frac{\ln(\text{Revenu National Brut / hab}) - \ln(100)}{\ln(75\,000) - \ln(100)}$$

Carte des pays du monde par IDH en 2017



Le tableau suivant détaille les données de quelques pays pour l'année 2017.

Source : Nations unies

| Pays | Espérance de vie à la naissance (en année) | Durée moyenne de scolarisation (en année) | Durée attendue de scolarisation (en année) | Revenu National Brut par habitant (PPA en \$) |
|------------|--|---|--|---|
| Norvège | 82,271 | 12,567 | 18,061 | 68 059 |
| Allemagne | 81,180 | 14,132 | 17,096 | 46 946 |
| Canada | 82,315 | 13,315 | 16,091 | 43 602 |
| France | 82,541 | 11,417 | 15,486 | 40 511 |
| Japon | 84,470 | 12,800 | 15,231 | 40 799 |
| États-Unis | 78,851 | 13,413 | 16,274 | 56 140 |
| Qatar | 80,1 | 9,7 | 12,2 | 110 489 |

Peut-on affirmer, en argumentant, que :

1. Plus l'espérance de vie à la naissance est grande, plus l'IDH est grand ?
2. Plus la scolarisation est importante, plus l'IDH est grand ?
3. Plus le revenu national brut par habitant, en PPA (parité de pouvoir d'achat), est grand, plus l'IDH est grand ?

Comparaison de la répartition du patrimoine et des revenus en France

Utiliser un **TABLEUR**

On a vu comment calculer l'indice de Gini d'une répartition en modélisant la courbe de Lorenz par la courbe représentative d'une fonction adaptée.

Ce TP a pour but de calculer cet indice sans avoir recours à cette modélisation, en utilisant la répartition par décile.

On étudie ici la répartition du patrimoine brut et des revenus disponibles dans l'ensemble des ménages français en 2015.

Objectif

Automatiser des calculs en vue de déterminer un coefficient de Gini.

Répartition du patrimoine en 2015

La population est triée par patrimoine croissant.

| Part de la population | Part détenue du patrimoine total |
|-----------------------|----------------------------------|
| Inf. à 10 % | 0,07 % |
| De 10 % à 20 % | 0,29 % |
| De 20 % à 30 % | 0,81 % |
| De 30 % à 40 % | 2,28 % |
| De 40 % à 50 % | 4,78 % |
| De 50 % à 60 % | 6,93 % |
| De 60 % à 70 % | 9,11 % |
| De 70 % à 80 % | 11,86 % |
| De 80 % à 90 % | 17,24 % |
| Sup. à 90 % | 46,62 % |

Répartition des revenus disponibles en 2015

La population est triée par revenu croissant.

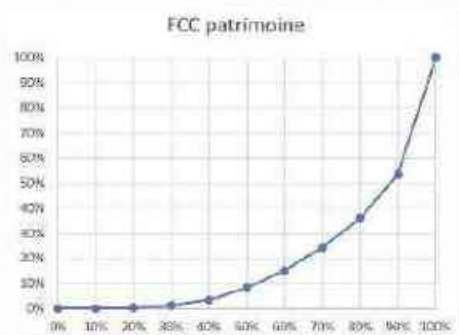
| Part de la population | Part détenue du revenu total |
|-----------------------|------------------------------|
| Inf. à 10 % | 2,8 % |
| De 10 % à 20 % | 4,3 % |
| De 20 % à 30 % | 5,3 % |
| De 30 % à 40 % | 6,4 % |
| De 40 % à 50 % | 7,6 % |
| De 50 % à 60 % | 8,9 % |
| De 60 % à 70 % | 10,5 % |
| De 70 % à 80 % | 12,4 % |
| De 80 % à 90 % | 15,2 % |
| Sup. à 90 % | 26,5 % |

Partie A Étude de la répartition du patrimoine

1. Saisir les données du patrimoine dans une feuille de calcul en colonnes A et B, puis calculer, en colonne C, les fréquences cumulées croissantes de la part détenue (FCC) à l'aide d'une formule entrée en C3.

| | A | B | C |
|---|-----------------------|--------------------|----------------|
| | Part de la population | Part du patrimoine | FCC patrimoine |
| 1 | | | |
| 2 | 0% | 0% | 0% |
| 3 | 10% | 0,07% | 0,07% |
| 4 | 20% | 0,29% | 0,36% |

2. Sélectionner de façon discontinue (touche Ctrl) les colonnes A et C, puis représenter graphiquement la fonction de répartition du patrimoine, affine par morceaux (insérer la représentation *nuage de points*).



3. Le domaine compris entre la courbe de répartition du patrimoine précédente et l'axe des abscisses est une succession de trapèzes.

a. On rappelle que l'aire d'un trapèze est :

$$A = \frac{\text{grande base} + \text{petite base}}{2} \times \text{hauteur}$$

Justifier que l'on peut saisir la formule $= (C3 + C2) / 2 * 10\%$ en D3, à recopier vers le bas, pour calculer l'aire du trapèze construit entre chaque décile.

b. Déterminer, à l'aide d'une formule en D14, l'aire du domaine compris entre la courbe de répartition du patrimoine et l'axe des abscisses.

c. En déduire l'indice de Gini G pour le patrimoine.

4. Dans la situation 3 p. 155, on avait estimé cet indice par une intégrale et on avait obtenu $G \approx 0,6$.

Comparer avec le résultat de la question 3. c.

Partie B Étude et comparaison de la répartition des revenus disponibles

1. Reprendre la **partie A** pour la répartition des revenus disponibles.

2. Comparer avec l'indice de Gini des revenus disponibles mesuré par l'INSEE en 2015 : 0,348.

3. Comparer les répartitions du patrimoine et des revenus disponibles en 2015.

2070 : projection de la population française

Mener une recherche

Le document suivant est basé sur une publication de l'INSEE étudiant la répartition de la population française par tranche d'âges sur différentes années.

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|------|--|----------|-----------|-----------|-----------|----------------|
| | | Popul. en (en milliers) au 1er janvier | 0-19 ans | 20-59 ans | 60-69 ans | 65-74 ans | 75 ans et plus |
| 1 | 2019 | 64613 | 24,6% | 52,0% | 6,0% | 7,8% | 8,8% |
| 2 | 2013 | 67779 | 24,6% | 51,6% | 6,1% | 8,5% | 9,0% |
| 3 | 2030 | 70281 | 28,0% | 47,4% | 6,1% | 11,1% | 12,2% |
| 4 | 2070 | 38448 | 21,3% | 44,2% | 5,8% | 10,8% | 17,9% |

Info

Le nombre d'habitants à l'horizon 2070 dépend des hypothèses, surtout celles retenues sur la fécondité et les migrations.

Partie A Étude de la répartition en 2013

Dans cette partie, on pourra travailler avec un tableau.

1. Construire le diagramme circulaire représentant la répartition de la population en 2013.
2. Compléter le tableau suivant donnant les effectifs et les fréquences cumulées croissantes (FCC).

| | Population (en milliers) au 1er janvier | 0-19 ans | 20-59 ans | 60-69 ans | 65-74 ans | 75 ans et plus |
|----|---|----------|-----------|-----------|-----------|----------------|
| 8 | 2013 | | | | | |
| 9 | Centre de la classe | | | | | |
| 10 | Effectifs | 69 719 | | | | |
| 11 | | | | | | |

3. a. En utilisant le centre des classes, calculer la moyenne et l'écart type.
- b. Construire la courbe des FCC. En déduire une valeur de la médiane et des quartiles Q_1 et Q_3 .
- c. Construire le diagramme en boîte associé.

Partie B Étude de la répartition en 2070

Par analogie avec la partie A, étudier la répartition de la population en 2010, 2030 et 2070.

À L'ÉCRIT OU À L'ORAL

Partie C Analyse et interprétation

En s'appuyant sur les calculs des parties précédentes, expliquer comment la projection de la population en 2070 peut impacter la répartition des richesses et les inégalités en France.

Différences salariales entre homme et femme

Mener une recherche

Doc. 1 Distribution du revenu salarial annuel en France en 2015

Source : INSEE

| | Femmes | Hommes | Ensemble |
|-------------------------------|--------|--------|----------|
| 1 ^{er} décile (D1) | 2 110 | 2 930 | 2 470 |
| 1 ^{er} quartile (Q1) | 8 040 | 11 120 | 9 250 |
| Médiane (D5) | 16 750 | 20 030 | 18 370 |
| 3 ^e quartile (Q3) | 23 630 | 28 570 | 26 070 |
| 9 ^e décile (D9) | 32 270 | 41 980 | 37 160 |
| Rapport interdécile (D9/D1) | 15,3 | 14,3 | 15,0 |
| D9/Médiane | 1,9 | 2,1 | 2,0 |
| Médiane/D1 | 7,9 | 6,8 | 7,4 |

Champ : France hors Mayotte, hors salariés agricoles et apprentis stagiaires, hors salaires versés par des particuliers employeurs.

Doc. 2 Évolution du salaire net mensuel en France



Source : INSEE, Observatoire des inégalités

Doc. 3 Écart de rémunération entre les femmes et les hommes en Europe

Différence de salaire horaire brut moyen entre les hommes et les femmes, en % du salaire horaire brut moyen des hommes.

| | 2010 2017 | | | 2010 2017 | | | |
|--------------|--------------------------|------|------|--------------------------|------|------|------|
| | Évolution en points de % | | | Évolution en points de % | | | |
| Rép. Tchèque | 21,6 | 21,1 | -0,5 | Danemark | 17,1 | 14,7 | -2,4 |
| Allemagne | 22,3 | 21,0 | -1,3 | Norvège | 16,1 | 14,3 | -1,8 |
| Royaume-Uni | 23,3 | 20,8 | -2,5 | Hongrie | 17,6 | 14,2 | -3,4 |
| Autriche | 24,0 | 19,9 | -4,1 | Irlande | 13,9 | 13,9 | 0,0 |
| Slovaquie | 19,6 | 19,8 | 0,5 | Bulgarie | 13,0 | 13,6 | 0,6 |
| Suisse | 17,8 | 17,0 | -0,8 | Suède | 15,4 | 12,6 | -2,8 |
| Finlande | 20,3 | 16,7 | -3,6 | Grèce | 15,0 | 12,5 | -2,5 |
| Portugal | 12,8 | 16,3 | 3,5 | Croatie | 5,7 | 11,6 | 5,9 |
| Union europ. | 17,1 | 16,0 | -1,1 | Pologne | 4,5 | 7,2 | 2,7 |
| France | 15,6 | 15,4 | -0,2 | Belgique | 10,2 | 6,0 | -4,2 |
| Pays-Bas | 17,8 | 15,2 | -2,6 | Italie | 5,3 | 5,0 | -0,3 |
| Espagne | 16,2 | 15,1 | -1,1 | Roumanie | 8,8 | 3,5 | -5,3 |

Source : Eurostat, Observatoire des inégalités

À L'ÉCRIT OU À L'ORAL

En s'appuyant sur l'étude des documents et en complétant avec des recherches personnelles, étudier les différences salariales entre hommes et femmes en argumentant.

Inférence bayésienne

Les capacités du thème

ÉTAPE 1

Exploiter un arbre pondéré

ÉTAPE 2

Calculer des probabilités simples et conditionnelles

Modélisation du réel

Au XIX^e siècle, une étude statistique sur la population de Londres mettait en évidence que les quartiers hauts de la ville étaient moins touchés par le choléra que les quartiers bas. Ce résultat semblait confirmer une théorie répandue à l'époque : la qualité de l'air influait sur la propagation du choléra qui, pensait-on, se contractait par inhalation. On a découvert, presque au même moment, que l'origine du choléra était microbienne, que le microbe était ingéré et que c'était la qualité de l'eau qui était en cause... La qualité de l'air était un « facteur concomitant », sans rapport de causalité avec le choléra.

☑ Voir Apprendre à raisonner p. 189



A Diaporama pour tester les bases

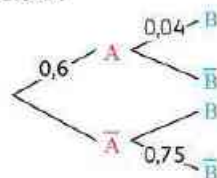


B Vrai/Faux : un arbre pondéré

Soient A et B deux événements d'un univers Ω .

On donne l'arbre pondéré ci-contre.

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fautive en justifiant la réponse.



Affirmation 1 : $P(\bar{A}) = 0,4$.

Affirmation 2 : $P_{\bar{A}}(B) = 0,96$.

Affirmation 3 : $P(\bar{A} \cap B) = 0,25$.

Affirmation 4 : $P(B) = 0,29$.

Affirmation 5 : $P_B(A) = \frac{6}{31}$.

C QCM : interprétation d'un énoncé

Dans un lycée, on sait que 55 % des élèves sont des filles. On sait également que 35 % des filles déjeunent à la cantine et que 31,5 % des élèves sont des garçons ne déjeunant pas à la cantine. On choisit, au hasard, un élève du lycée.

On considère les événements F « l'élève est une fille » et D « l'élève déjeune à la cantine ».

Préciser dans chaque cas la ou les bonnes réponses.

- $P(F)$ est égale à : a. 55 b. 0,55 c. $\frac{55}{100}$
- 0,35 est la valeur de la probabilité de :
a. D sachant que F est réalisé b. F sachant que D est réalisé
c. $F \cap D$
- 0,315 est la valeur de la probabilité de :
a. D sachant que \bar{F} est réalisé b. \bar{F} sachant que D est réalisé
c. $\bar{F} \cap \bar{D}$
- $P(D)$ est égale à :
a. $0,35 + 0,315$ b. $P_F(D) + P_{\bar{F}}(D)$ c. $P(F \cap D) + P(\bar{F} \cap D)$

D Des événements indépendants

Un maroquinier achète des sacs en cuir à un grossiste. Ces sacs peuvent présenter deux types de défauts indépendants l'un de l'autre : 2 % des sacs présentent un défaut de coloration du cuir et 10 % un défaut de couture.

On choisit au hasard une sacoche dans le stock du maroquinier. On considère les événements A « la sacoche présente un défaut de coloration » et B « la sacoche présente un défaut de couture ».

Calculer la probabilité qu'une sacoche prise au hasard :

- présente les deux défauts ;
- ne présente aucun défaut ;
- présente au moins l'un des deux défauts ;
- présente un seul défaut.

Ressources en +
sur le site collection :
lycee.hachette-
education.com/declic/
tle-comp



Consolider les bases

Dans un groupe d'adultes âgés de 18 à 65 ans ayant été scolarisés en France, on constate que :

- 82 % d'entre eux ont effectué une scolarité complète au collège.
- Parmi les personnes ayant effectué une scolarité complète au collège, 97 % ne sont pas en situation d'illettrisme.
- Une personne sur quatre, parmi celles qui ont interrompu leur scolarité avant la fin du collège, est en situation d'illettrisme.

On interroge au hasard une personne de la population étudiée. On considère les événements C « la personne a effectué une scolarité complète au collège » et I « la personne est en situation d'illettrisme ».

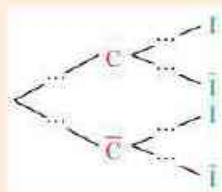
- Interpréter les trois données numériques de l'énoncé en terme de probabilités simples ou de probabilités conditionnelles.
 - Compléter l'arbre pondéré ci-contre modélisant la situation.
- Calculer la probabilité que la personne choisie ait effectué une scolarité complète au collège et soit en situation d'illettrisme.
 - Une enquête de l'INSEE affirme que « 7 % de la population adulte âgée de 18 à 65 ans ayant été scolarisée en France est en situation d'illettrisme ». Ce constat est-il valable pour le groupe étudié ? Justifier.
- Déterminer et interpréter les probabilités $P_C(\bar{I})$ et $P_I(\bar{C})$.

Objectif

Remobiliser les connaissances sur les probabilités conditionnelles.

Info

On parle d'illettrisme chez l'adulte lorsqu'un adulte instruit n'a pas acquis une maîtrise suffisante de la lecture, de l'écriture et du calcul pour être autonome dans les situations simples de la vie courante.



Situation 1

De quelle urne provient cette boule ? PYTHON

On lance un dé cubique équilibré. Si on obtient 1, on choisit une boule dans l'urne n° 1 contenant 90 boules rouges (numérotées de 1 à 90) et 10 noires (numérotées de 91 à 100) ; sinon, on choisit une boule dans l'urne n° 2 contenant 30 boules rouges (numérotées de 1 à 30) et 70 noires (numérotées de 31 à 100). Ces boules sont indiscernables au toucher.

On a prélevé une boule rouge, peut-on prévoir l'urne dont elle provient ?

- Intuitivement, de quelle urne cette boule a-t-elle plus de chance de provenir ?
- Simulation de l'expérience aléatoire avec Python
 - En utilisant la fonction `randint` du module `random`, écrire une fonction `de()` qui simule le lancer du dé et retourne le numéro d'une face.
 - Compléter la fonction `prelev_urne1()` ci-contre qui simule le tirage d'une boule dans l'urne n° 1 et retourne la couleur de la boule prélevée.
 - De même, écrire une fonction `prelev_urne2()`.
 - Compléter la fonction `simul(n)` qui simule n répétitions de l'expérience et qui compte le nombre d'apparitions d'une boule rouge, le nombre de fois qu'on a prélevé une boule rouge provenant de l'urne n° 1, puis de l'urne n° 2. Cette fonction retournera ces trois nombres entiers dans cet ordre.
 - Utiliser cette fonction pour déduire une conjecture au problème posé.
- Étude théorique du problème

a. On note U_1 l'événement « tirer une boule dans l'urne n° 1 », U_2 « tirer une boule dans l'urne n° 2 » et R « tirer une boule rouge ».

À l'aide d'un arbre pondéré, calculer $P(R)$. En déduire $P_R(U_1)$.

b. En déduire une réponse au problème posé et confronter ce résultat à celui obtenu par simulation dans la question 2.

Objectif

Utiliser la notion de probabilité conditionnelle pour résoudre un problème du type « de quelle urne vient cette boule ? » (probabilité inverse).



```
def prelev_urne1():
    nb_boule_prelevee=randint(1,100)
    if nb_boule_prelevee<=90:
        return "rouge"
    else:
        return "noir"
```

```
def simul(n):
    nb_boule_rge=0
    nb_tirage_rge_urne1=0
    nb_tirage_rge_urne2=0
    for k in range(n):
        if de()==1:
            if prelev_urne1()=="rouge":
                nb_boule_rge+=1
                nb_tirage_rge_urne1+=1
            else:
                nb_tirage_rge_urne2+=1
        else:
            if prelev_urne2()=="rouge":
                nb_boule_rge+=1
                nb_tirage_rge_urne2+=1
            else:
                nb_tirage_rge_urne1+=1
    return nb_boule_rge, nb_tirage_rge_urne1, nb_tirage_rge_urne2
```

Situation 2 Formules de Bayes

Histoire



Dans son *Mémoire sur la probabilité des causes par les événements* publié en 1774, Laplace écrit :

Si un événement peut être produit par un nombre n de causes différentes, les probabilités de l'existence de ces causes prises de l'événement sont entre elles comme les probabilités de l'événement prises de ces causes, et la probabilité de l'existence de chacune d'elles est égale à la probabilité de l'événement prise par cette cause, divisée par la somme de toutes les probabilités de l'événement prises de chacune de ces causes.

Interprétation avec les notations mathématiques actuelles

On considère quatre événements C_1 , C_2 , C_3 et B de probabilités non nulles tels que C_1 , C_2 et C_3 forment une partition de l'univers Ω . Si B est un événement qui peut résulter des causes C_1 , C_2 et C_3 , alors :

$$P_B(C_1) = \frac{P_{C_1}(B) \times P(C_1)}{P(C_1) \times P_{C_1}(B) + P(C_2) \times P_{C_2}(B) + P(C_3) \times P_{C_3}(B)} \quad (*)$$

- 1 a. Justifier la formule dite de Bayes : $P_B(C_1) = \frac{P_{C_1}(B) \times P(C_1)}{P(B)}$.
- b. En déduire la relation (*) en exploitant la formule des probabilités totales. Donner des relations similaires concernant $P_B(C_2)$ et $P_B(C_3)$.

2 **Application.** Une entreprise fabrique des pièces automobiles grâce à trois machines. La machine A fabrique 40 % des pièces, la machine B en produit 35 % et la machine C produit le reste. 2 % des pièces de la machine A sont défectueuses contre 3 % pour la machine B. Enfin, 99 % des pièces de la machine C sont conformes.

On prélève une pièce dans la production de cette usine, celle-ci est défectueuse. Quelle est la probabilité qu'elle soit issue de la machine A ?

Objectif

Découvrir et appliquer les formules de Bayes.

Info



Thomas Bayes
(1702-1761)



Pierre Simon
de Laplace
(1749-1827)

Les formules de Bayes sont apparues indépendamment dans les travaux de Bayes et de Laplace concernant le problème de « la probabilité inverse » appelée également formule des « probabilités des causes ». Ces formules permettent en effet de « remonter le temps », c'est-à-dire de calculer la probabilité de réalisation d'une cause sachant la réalisation de sa conséquence.

Situation 3 Efficacité d'un test de dépistage

Un laboratoire a mis au point un test de dépistage d'une maladie. Ce laboratoire indique les caractéristiques suivantes :

- la probabilité qu'un individu atteint par la maladie présente un test positif est égale à 0,99 ;
- la probabilité qu'un individu non atteint par la maladie présente un test négatif est également égale à 0,99.

On s'intéresse à une population « cible » dans laquelle on procède à un test de dépistage systématique. La proportion de personnes malades dans cette population cible est notée p . Un individu est choisi au hasard dans cette population, on considère les événements M « cet individu est malade » et T « le test de cet individu est positif ».

1 a. Interpréter les données de l'énoncé en terme de probabilité et traduire la situation à l'aide d'un arbre pondéré.

b. Montrer que $p_T(M)$ a pour expression : $f(p) = \frac{99p}{1+98p}$.

c. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; 1]$. Interpréter.

2 Calculer la valeur des probabilités $p_T(M)$ et $p_T(\bar{M})$ lorsque $p = 0,7$ puis lorsque $p = 0,005$. Commenter les résultats obtenus.

Objectif

Mobiliser la formule de Bayes dans un contexte médical.



Info

Un test n'est jamais parfait. Les « faux-positifs » et « faux-négatifs » sont une difficulté inhérente à tous les tests. Pour éviter les surdiagnostics, on évalue la probabilité qu'une personne soit saine alors que le test se révèle positif. Cette probabilité dépend fortement de la proportion de malades dans la population cible (prévalence).

1 Probabilité conditionnelle et arbre

On considère une expérience aléatoire, d'univers Ω muni d'une probabilité P .

a Probabilités conditionnelles

Définition Soient A et B deux événements de Ω tel que $P(A) \neq 0$.

Pour tout événement B , on appelle **probabilité de l'événement B sachant que l'événement A est réalisé** le nombre $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

Remarque

$P_A(B)$ se lit « probabilité conditionnelle de B sachant A ».

Propriétés Soient A et B deux événements de Ω avec $P(A) \neq 0$.

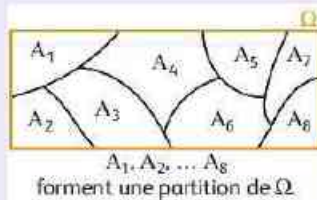
- $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$ (Formule des probabilités composées)
- $P_A(\bar{B}) = 1 - P_A(B)$ (Probabilité de l'événement contraire)

Remarque

Si $P(B) \neq 0$, on a également $P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)$.

b Formule des probabilités totales et arbre pondéré

Définition On appelle **partition de l'univers Ω** (ou système complet d'événements) toute collection d'événements, de probabilités non nulles, deux à deux incompatibles dont la réunion est égale à Ω .



Propriété Formule des probabilités totales

Soient A_1, A_2, \dots, A_n une partition de l'univers Ω et B un événement quelconque dans Ω . On a :

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B)$$

soit $P(B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + \dots + P(A_n) \times P_{A_n}(B)$



Démonstration

B est la réunion des événements $B \cap A_1, B \cap A_2, \dots, B \cap A_n$ qui sont deux à deux disjoints. Ainsi :

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B)$$

La deuxième formule découle de la formule des probabilités composées.

La formule des probabilités totales s'illustre par un **arbre pondéré**.

Règles de construction d'un arbre pondéré

- A_1, A_2, A_3 forment une partition de Ω , de même pour B et \bar{B} .
- Les poids des branches primaires sont des **probabilités simples**.
- Les poids des branches secondaires sont des **probabilités conditionnelles** (sachant que l'événement du nœud précédent est réalisé).
- La somme des poids des branches reliant un même nœud vaut 1.
- La probabilité d'un « chemin » (d'une intersection d'événements) est le **produit** des poids des branches qui le constitue.
- La probabilité de l'événement B est la **somme** des probabilités des chemins qui mènent à l'événement B .

Exemple

Iris a 80 plants de fleurs rouges ou blanches, dont 60 ont été achetés à un horticulteur, les autres ont été semés par ses soins. 40 % des plants achetés font des fleurs rouges et 80 % de ceux de sa production font des fleurs blanches. On choisit au hasard un plant. On considère les événements H « le plant choisi a été acheté », I « le plant choisi a été semé par Iris » et R « le plant choisi fait une fleur rouge ».

D'après l'énoncé, on a :

$$P(H) = \frac{60}{80} = 0,75 ; P_H(R) = 0,4 \text{ et } P_I(\bar{R}) = 0,8.$$

On en déduit que la probabilité de choisir un plant provenant de l'horticulteur et faisant une fleur rouge est égale à :

$$P(H \cap R) = P(H) \times P_H(R) = 0,75 \times 0,4 = 0,3$$

On a également $P(I) = \frac{20}{80} = 0,25$ et $P_I(R) = 1 - P_I(\bar{R}) = 1 - 0,8 = 0,2$.

Remarque

Si A est un événement tel que $P(A) \in]0; 1[$, alors A et \bar{A} forment une partition de l'univers Ω .

Exemple (suite)

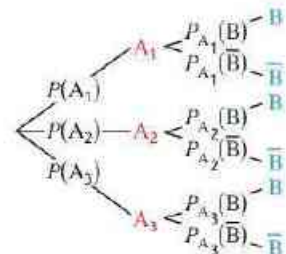
Les événements H et I forment une partition de l'univers donc :

$$P(R) = P(R \cap H) + P(R \cap I) = P(H \cap R) + P(I) \times P_I(R)$$

Donc :

$$P(R) = 0,3 + 0,25 \times 0,2 = 0,35$$

La probabilité de choisir un plant à fleurs rouges est égale à 0,35.



1 Exploiter un arbre pondéré

Énoncé Il existe trois types d'eau qui peuvent être conditionnés : les eaux minérales, les eaux de source et les eaux rendues potables par traitements. Les contrôles sanitaires aux points de conditionnement de l'eau, effectués par des agences régionales de santé, révèlent que :



- 37 % des prélèvements ont été effectués sur des eaux minérales. Parmi eux, 97 % étaient conformes.
- 61 % des prélèvements ont été effectués sur des eaux de source. Parmi eux, 99 % étaient conformes.
- Parmi les prélèvements d'eaux rendues potables par traitements, 96 % étaient conformes.

On choisit un prélèvement au hasard dans l'ensemble des prélèvements. On considère les événements suivants : M « le prélèvement a été effectué sur une eau minérale », S « le prélèvement a été effectué sur une eau de source », R « le prélèvement a été effectué sur une eau rendue potable par traitements » et C « le prélèvement est conforme ».

1. Représenter la situation de l'énoncé par un arbre pondéré.
2. Décrire par une phrase l'événement $S \cap C$, puis calculer sa probabilité.
3. Calculer la probabilité que le prélèvement choisi soit conforme.
4. On choisit un prélèvement au hasard parmi les prélèvements non conformes, quelle est la probabilité qu'il ait été effectué sur une eau minérale ? (Arrondir le résultat au millième près.)

Solution

1. D'après l'énoncé, on a $P(M) = 0,37$,
 $P_M(C) = 0,97$, $P(S) = 0,61$,
 $P_S(C) = 0,99$ et $P_R(C) = 0,96$.

2. L'événement $S \cap C$ désigne « le prélèvement a été effectué sur une eau de source et est conforme ».

On applique la formule des probabilités composées
 $P(S \cap C) = P(S) \times P_S(C) = 0,61 \times 0,99 = 0,6039$

3. Les événements M, S et R forment une partition de l'univers. On applique la formule des probabilités totales :

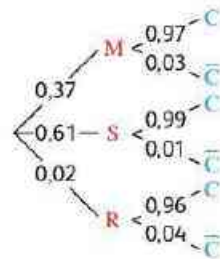
$$P(C) = P(M) \times P_M(C) + P(S) \times P_S(C) + P(R) \times P_R(C)$$

Donc $P(C) = 0,37 \times 0,97 + 0,61 \times 0,99 + 0,02 \times 0,96 = 0,982$.

La probabilité que le prélèvement choisi soit conforme est 0,982.

4. La probabilité recherchée se note $P_{\bar{C}}(M)$.

$$P_{\bar{C}}(M) = \frac{P(\bar{C} \cap M)}{P(\bar{C})} = \frac{0,37 \times 0,03}{1 - 0,982} \approx 0,617. \text{ Environ } 61,7 \% \text{ des prélèvements non conformes ont été effectués sur des eaux minérales.}$$



Point méthode

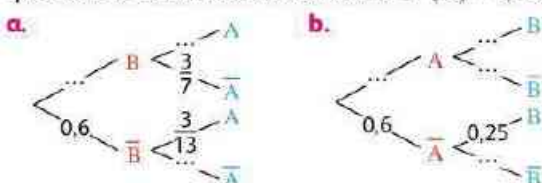
1. Pour modéliser une situation par un arbre pondéré de probabilités :

- ① On interprète les données numériques de l'énoncé en terme de probabilités.
- ② On trace l'arbre et on pondère les branches à l'aide des données précédentes. **Attention, sur les branches secondaires, on place des valeurs de probabilités conditionnelles.**
- ③ On complète les poids des branches en utilisant le fait que la somme des poids des branches, reliant un même nœud, est égale à 1.

J'applique

1 A et B sont des événements d'un univers Ω .

1. Compléter les arbres pondérés ci-dessous sachant que dans le deuxième cas on donne $P(B) = 0,35$.



2. Calculer $P(A)$ dans le cas du premier arbre.

2 Dans une classe, les garçons représentent le quart de l'effectif. Une fille sur trois a eu son permis de conduire du premier coup, alors que seulement un garçon sur dix l'a eu du premier coup. On interroge un élève au hasard.



1. Quelle est la probabilité que l'élève choisi ait eu son permis du premier coup ?
2. On interroge un élève ayant eu son permis du premier coup. Quelle est la probabilité que ce soit un garçon ?

2 Inversement du conditionnement

Propriété (formule de Bayes) Soient A et B deux événements de Ω de probabilités non nulles. On a :

$$P_B(A) = \frac{P(A) \times P_A(B)}{P(B)}$$



Démonstration

Par définition, on a $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \times P_A(B)}{P(B)}$, la seconde égalité découlant de la formule des probabilités composées.

Remarque

Cette formule relie les deux probabilités conditionnelles $P_A(B)$ et $P_B(A)$.

Propriété (conséquence de la formule de Bayes) Soient $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$

une partition de l'univers Ω et B un événement de probabilité non nulle. Pour tout entier i , tel que $1 \leq i \leq n$, on a :

$$P_B(A_i) = \frac{P(A_i) \times P_{A_i}(B)}{P(B)} = \frac{P(A_i) \times P_{A_i}(B)}{P(A_1) \times P_{A_1}(B) + \dots + P(A_n) \times P_{A_n}(B)}$$

En particulier, si A est un événement tel que $P(A) \in]0; 1[$. Puisque A et \bar{A} forment une partition de l'univers, on a :

$$P_B(A) = \frac{P(A) \times P_A(B)}{P(B)} = \frac{P(A) \times P_A(B)}{P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B)}$$



Démonstration

Soit i un entier tel que $1 \leq i \leq n$, alors, d'après la formule de Bayes, on a

$P_B(A_i) = \frac{P(A_i) \times P_{A_i}(B)}{P(B)}$. Puisque $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ forment une partition de l'univers Ω , on a, par la formule des probabilités totales :

$P(B) = P(A_1 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B) + \dots + P(A_n) \times P_{A_n}(B)$
d'où la formule énoncée dans la propriété.

Remarque

En pratique, on retrouve immédiatement cette formule en exploitant la formule de Bayes et la formule des probabilités totales.

3 Rappels sur l'indépendance

Définition Soient A et B deux événements d'un même univers Ω .

On dit que A et B sont **indépendants** lorsque $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Propriété Soient A et B deux événements de probabilités non nulles d'un même univers Ω . On a :

$$A \text{ et } B \text{ indépendants} \Leftrightarrow P_A(B) = P(B) \Leftrightarrow P_B(A) = P(A)$$

Remarque

- L'égalité $P_A(B) = P(B)$ traduit le fait que la réalisation de l'événement A ne modifie pas la probabilité de réalisation de B.
- Ne pas confondre événements *indépendants* et *incompatibles*.

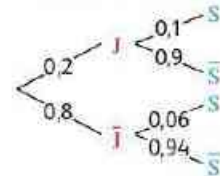
Propriété Soient A et B deux événements d'un même univers Ω .

Les propositions suivantes sont équivalentes :

- A et B sont indépendants
- \bar{A} et B sont indépendants
- A et \bar{B} sont indépendants
- \bar{A} et \bar{B} sont indépendants

Exemple

20 % des assurés d'une compagnie d'assurance sont jeunes conducteurs (J), les autres étant des conducteurs expérimentés. Une étude statistique indique que la probabilité qu'un assuré jeune conducteur ait un sinistre responsable (S) au cours de l'année est de 10 % contre 6 % pour les assurés expérimentés.



La probabilité qu'un assuré ayant eu un sinistre au cours de l'année soit jeune conducteur est :

$$P_S(J) = \frac{P(J \cap S)}{P(S)} = \frac{P(J) \times P_J(S)}{P(S)}$$

Or, par la formule des probabilités totales, on a :

$$P(S) = P(J) \times P_J(S) + P(\bar{J}) \times P_{\bar{J}}(S)$$

D'où

$$P_S(J) = \frac{P(J) \times P_J(S)}{P(J) \times P_J(S) + P(\bar{J}) \times P_{\bar{J}}(S)} = \frac{0,2 \times 0,1}{0,2 \times 0,1 + 0,8 \times 0,06} = 0,29$$

Exemple

On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. Les événements A « la carte tirée est un as » et T « la carte tirée est un trèfle » sont indépendants. En effet, on a :

$$P(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8} \text{ et } P(T) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$$

et de plus :

$$P(A \cap T) = \frac{1}{32} = P(A) \times P(T)$$

On aurait pu aussi remarquer que :

$$P_T(A) = \frac{1}{8} = P(A)$$

Exemple

Un photocopieur peut être sujet à seulement deux types de pannes A et B, indépendantes. De plus, $P(A) = 0,01$ et $P(B) = 0,02$. La probabilité que le photocopieur soit en état de marche est égale à :

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \times P(\bar{B}) = 0,99 \times 0,98 = 0,97$$



2 Calculer des probabilités simples et conditionnelles

Énoncé Une population peut être atteinte par deux maladies A et B. Une étude statistique a révélé que :

- la probabilité pour une personne d'être atteinte par la maladie A est 0,2 ;
- la probabilité pour une personne d'être atteinte par la maladie B est 0,3 ;
- la probabilité pour une personne non atteinte par B de l'être par A est de 0,1.

On choisit une personne au hasard dans cette population.

On considère les événements suivants :

A : « la personne choisie est atteinte de la maladie A » ; B : « la personne choisie est atteinte de la maladie B ».

1. **a.** Interpréter les données chiffrées de l'énoncé en termes de probabilités simples ou conditionnelles.
b. Représenter la situation de l'énoncé par un arbre pondéré.
2. **a.** On note $x = P_B(A)$. Exprimer $P(A)$ en fonction de x .
b. En déduire la valeur de x puis compléter les probabilités manquantes de l'arbre de probabilité précédent.
3. Calculer la probabilité qu'une personne non atteinte par la maladie A ne le soit pas non plus de la maladie B.
4. Les maladies A et B frappent-elles indépendamment les individus de cette population ?



Solution

1. **a.** D'après l'énoncé, on a $P(A) = 0,2$; $P(B) = 0,3$ et $P_{\bar{B}}(A) = 0,1$.

b. Voir arbre ci-contre.

2. **a.** Les événements B et \bar{B} forment une partition de l'univers. Par la formule des probabilités totales, on a :

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) \\ = P(B) \times P_B(A) + P(\bar{B}) \times P_{\bar{B}}(A) = 0,3x + 0,07$$

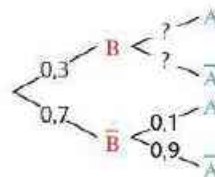
b. Puisque $P(A) = 0,2$, on a alors $0,3x + 0,07 = 0,2$ d'où

$$x = P_B(A) = \frac{0,13}{0,3} = \frac{13}{30}. \text{ On déduit alors que } P_B(\bar{A}) = 1 - P_B(A) = \frac{17}{30}.$$

3. La probabilité recherchée est la probabilité conditionnelle $P_{\bar{A}}(\bar{B})$.

$$\text{Or } P_{\bar{A}}(\bar{B}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{A})} = \frac{0,7 \times 0,9}{0,8} = 0,7875.$$

4. Puisque $P_B(A) \neq P(A)$, alors les événements A et B ne sont pas indépendants.



Point méthode

1. **b.** Connaissant la valeur de la probabilité conditionnelle $P_B(A)$, il est plus judicieux d'indiquer B et \bar{B} aux extrémités des branches principales de l'arbre. La valeur de $P(A)$ sera exploitée dans la suite pour compléter les probabilités conditionnelles des deux branches restantes.

Point méthode

3. et 4. Pour résoudre ces questions, on exploite les probabilités préalablement calculées dans l'exercice.

J'applique

3 A et B sont des événements d'un même univers Ω tels que $P(A) = 0,4$; $P_A(B) = 0,3$ et $P_{\bar{A}}(B) = 0,6$. Calculer les probabilités $P(B)$, $P_B(A)$ et $P_{\bar{B}}(A)$.

4 A et B sont des événements d'un même univers Ω tels que $P(A) = 0,6$; $P_A(B) = 0,1$ et $P(\bar{A} \cap B) = 0,2$. Calculer les probabilités $P(B)$, $P_{\bar{A}}(\bar{B})$ et $P_{\bar{B}}(\bar{A})$.

5 A, B et C sont des événements qui forment une partition d'un même univers Ω . De plus, $P(A) = 0,2$ et $P(B) = 0,7$. Soit D un événement de l'univers tel que : $P_A(D) = 0,2$, $P_B(D) = 0,8$ et $P(C \cap D) = 0,05$.

1. Construire un arbre pondéré modélisant la situation.
2. À l'aide de la formule de Bayes, calculer $P_D(A)$.

6 Deux grossistes proposent des bulbes de tulipe. Le premier produit des bulbes à fleurs rouges dont 90 % donnent une fleur. Le second produit des bulbes à fleurs jaunes dont 80 % donnent une fleur. Un bulbe donne au plus une fleur.

Un horticulteur achète 70 % de ses bulbes au premier grossiste et le reste au second.

Un client a planté un bulbe de tulipe acheté chez cet horticulteur. Celle-ci a fleuri.

Quelle est la probabilité que cette fleur soit jaune ?

Probabilité conditionnelle

Soient A et B deux événements d'un même univers Ω avec $p(A) \neq 0$.

• La **probabilité conditionnelle de B sachant A**, notée $P_A(B)$, est le nombre :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

• Propriétés

① Événement contraire : $P_A(\bar{B}) = 1 - P_A(B)$

② Formule des probabilités composées :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$

Événements indépendants

Soient A et B deux événements de probabilités non nulles d'un même univers Ω .

• A et B sont **indépendants** lorsque l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

① $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

② $P_A(B) = P(B)$

③ $P_B(A) = P(A)$

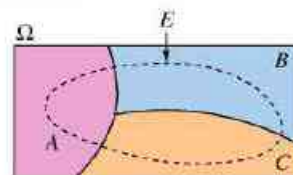
• Si A et B sont indépendants, il en est de même de \bar{A} et B, de A et \bar{B} et, de \bar{A} et \bar{B} .

Formule des probabilités totales - Arbre de probabilités

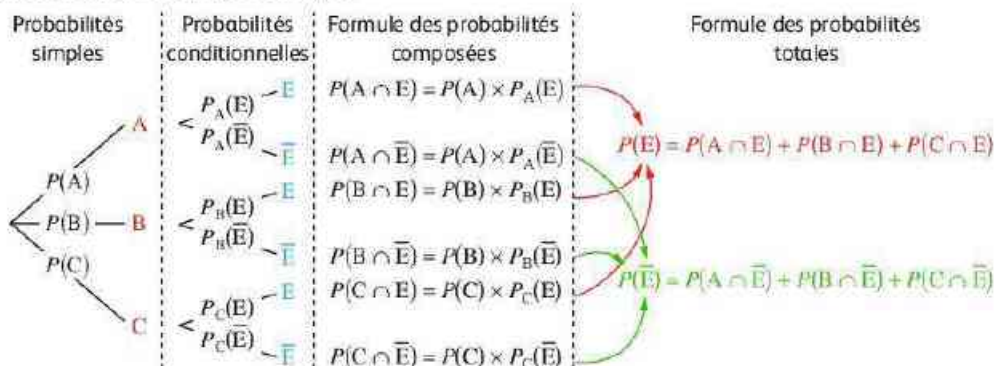
• **Formule des probabilités totales**

Soient A, B et C trois événements formant une partition de l'univers Ω et E un événement quelconque. Alors :

$$P(E) = P(A \cap E) + P(B \cap E) + P(C \cap E)$$



• **Exploitation d'un arbre de probabilités**



Formules de Bayes et probabilités des causes

• **Formule de Bayes**

Soient A et B deux événements de probabilités non nulles.

$$P_A(B) = \frac{P(B) \times P_B(A)}{P(A)}$$

Cette formule fait le lien entre les probabilités conditionnelles $P_A(B)$ et $P_B(A)$.

• **Conséquence de la formule de Bayes**

Soient A, B et C trois événements de probabilités non nulles formant une partition de l'univers Ω et E un événement quelconque de probabilité non nulle. Alors :

$$P_E(A) = \frac{P(A) \times P_A(E)}{P(E)} = \frac{P(A) \times P_A(E)}{P(A \cap E) + P(B \cap E) + P(C \cap E)}$$



[Voir corrigés](#)

QCM

Pour chacune des questions, indiquer la (ou les) bonne(s) réponse(s).

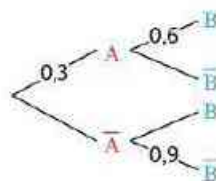
Pour les questions 1. à 5., on considère l'arbre pondéré ci-contre.

Pour les questions 6. à 9., on considère le jeu suivant.

On lance un dé cubique équilibré :

- si le dé donne 3 ou 5, alors on prélève une boule dans l'urne 1 contenant deux boules noires et trois boules rouges toutes indiscernables ;
- sinon, on prélève une boule dans l'urne 2 composée de trois boules noires et deux boules rouges toutes indiscernables.

On note U_1 l'événement « tirer une boule dans l'urne 1 » et N l'événement « tirer une boule noire ».



| | a | b | c |
|---|---------------------------------|-------------------------------|----------------------------|
| 1. 0,6 est la probabilité : | $P(B)$ | $P_A(B)$ | $P(A \cap B)$ |
| 2. $P_{\bar{A}}(B)$ est égale à : | $1 - P_A(B)$ | $1 - P_{\bar{A}}(\bar{B})$ | 0,1 |
| 3. La probabilité $P(B)$ est égale à : | 0,7 | 0,6 | 0,25 |
| 4. La probabilité conditionnelle $P_B(A)$ est égale à : | $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ | 0,72 | $P_A(B)$ |
| 5. $P(\bar{A} \cap B)$ est égale à : | $1 - P(A \cap B)$ | $P(\bar{A}) \times P(B)$ | $P(A) - P(A \cap B)$ |
| 6. D'après l'énoncé, on a : | $P(U_1) = \frac{1}{3}$ | $P(U_1 \cap N) = \frac{2}{5}$ | $P_{U_1}(N) = \frac{3}{5}$ |
| 7. La probabilité $P(N)$ d'obtenir une boule noire à l'issue du jeu est égale à : | $\frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1$ | $\frac{8}{15}$ | $\frac{7}{15}$ |
| 8. La probabilité d'obtenir une boule rouge prélevée dans l'urne 2 est : | $P(\bar{N} \cap \bar{U}_1)$ | $P_{\bar{N}}(\bar{U}_1)$ | $P_{\bar{U}_1}(\bar{N})$ |
| 9. À l'issue du jeu, on tire une boule rouge. La probabilité qu'elle ait été prélevée dans l'urne 2 est égale à : | $\frac{2}{5}$ | $\frac{4}{15}$ | $\frac{4}{7}$ |

vrai

ou faux ?

Indiquer pour chaque affirmation si elle est vraie ou fausse. Justifier.

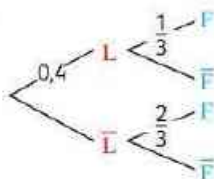
Partie A.

Dans une classe de 20 élèves, 15 sont des filles, et il y a 8 élèves qui portent des lunettes. Par ailleurs, un tiers des filles portent des lunettes. On choisit un élève au hasard. Soient les événements F « l'élève est une fille » et L « l'élève porte des lunettes ».

1. On peut modéliser la situation de l'énoncé par l'arbre ci-contre.

2. On a $P(L \cap \bar{F}) = \frac{3}{20}$.

3. Parmi les garçons de cette classe, trois portent des lunettes.



Partie B.

Zoé se rend à son travail à pied ou en voiture. Dans sa région, il pleut un jour sur quatre. Lorsqu'il pleut, Zoé se rend en voiture à son travail dans 80 % des cas. Lorsqu'il ne pleut pas, elle se rend à pied à son travail avec une probabilité égale à 0,6.

1. La probabilité que Zoé prenne sa voiture est égale à 0,65.

2. Un matin, Zoé se rend au travail à pied. La probabilité qu'il pleuve est égale à 0,1.

3. Les événements « Zoé prend sa voiture » et « il pleut un jour donné » ne sont pas indépendants.

Automatismes transversaux

7 Calculer et donner les résultats suivants sous forme de fraction irréductible.

1. $\frac{-15}{24} \times \frac{42}{30}$

2. $\frac{27}{12} \times \left(\frac{7}{9} - \frac{1}{3}\right)$

3. $\frac{97}{100} - \frac{11}{20}$

4. $\frac{1}{3} \times \frac{4}{5} - \frac{9}{10} \times 2$

5. $\frac{12}{13} + \frac{48}{39}$

6. $\left(1 - \frac{5}{3}\right) + \left(2 \times \left(-\frac{7}{18}\right)\right)$

8 Écrire sous la forme d'une unique puissance les nombres suivants.

1. $(5^2)^3 \times 5^8$

2. $1000 \times \left(\frac{10^{-2}}{0,0001}\right)^3$

3. $\frac{2^6 \times (2^3)^{-2}}{2^{-10}}$

4. $\frac{5^6 \times 2^6}{10^3}$

5. $\frac{6^4}{2^4} \times 3^{-5}$

6. $\sqrt{7^{10} \times 7^{-2}}$

9 Résoudre les équations suivantes.

1. $p + 0,003 = 1$

2. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}p = \frac{3}{4}$

3. $0,36 + 0,1p = 0,365$

4. $\frac{p}{0,2} = 0,3$

5. $0,02(1-p) + 0,7 = 0,718$

6. $\frac{9}{10}p + \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$

10 Même consigne que l'exercice 9.

1. $(2x-3)(x-4) = 0$

2. $x^2 + 6x + 9 = 0$

3. $2x^2 - 16 = 0$

4. $5x(x^2 - 4) = 0$

11 Étudier le sens de variation sur \mathbb{R} de chacune des fonctions suivantes.

1. $f: x \mapsto x^3 - 12x + 4$

2. $g: x \mapsto \frac{x}{x^2 + 4}$

3. $h: x \mapsto xe^{-x}$

4. $i: x \mapsto \ln(x^2 + 3)$

12 Déterminer une primitive sur I de chacune des fonctions suivantes.

1. $f: x \mapsto 3x^3 - 2x + 5$ sur $I = \mathbb{R}$

2. $g: x \mapsto x + 1 + \frac{1}{x^3}$ sur $I =]0; +\infty[$

3. $h: x \mapsto 6x^2 - e^x$ sur $I = \mathbb{R}$

4. $j: x \mapsto 3x + \frac{5}{x}$ sur $I =]0; +\infty[$

5. $k: x \mapsto \frac{x}{2x^2 + 3}$ sur $I = \mathbb{R}$

13 Calculer les intégrales ci-dessous.

1. $\int_{-2}^3 (2x+3) dx$

2. $\int_0^{\ln 3} e^{2x} dx$

3. $\int_{-1}^4 \frac{1}{x+2} dx$

4. $\int_4^{20} \frac{1}{\sqrt{x+5}} dx$

Automatismes du thème

14 Voici la répartition de 1 200 lycéens.

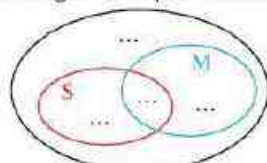
| | Fille | Garçon |
|---|-------|--------|
| Est inscrit dans un club de sport | 144 | 216 |
| N'est pas inscrit dans un club de sport | 490 | 350 |

On choisit au hasard un lycéen et on note G l'événement « le lycéen est un garçon » et C l'événement « le lycéen est inscrit dans un club de sport ».

- Calculer les probabilités des événements suivants : \bar{G} , \bar{C} , $G \cap C$ et $G \cup C$
- On sait que le lycéen est un garçon. Quelle est la probabilité qu'il ne soit pas inscrit dans un club de sport ?
- Calculer la probabilité qu'une fille soit inscrite dans un club de sport.

15 Dans une classe de 30 élèves, 10 pratiquent au moins une activité sportive, 8 pratiquent au moins une activité musicale et 3 pratiquent les deux. On note S l'événement « l'élève pratique une activité sportive » et M « l'élève pratique une activité musicale ».

- Compléter le diagramme par des effectifs.



- Calculer $P(S \cap M)$, $P(S \cup M)$ et $P_M(S)$.

16 On considère deux événements A et B d'un univers tels que $P(A) = 0,3$, $P(B) = 0,2$ et $P(A \cup B) = 0,4$. Donner les valeurs exactes des probabilités suivantes : $P(A \cap B)$, $P(\bar{A})$, $P_A(B)$ et $P_B(A)$

17 On considère deux événements A et B d'un univers tels que $P(A) = 0,3$ et $P(B) = 0,4$. Calculer les probabilités $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$, $P_B(A)$ et $P_B(A)$ dans chacun des cas suivants :

- les événements A et B sont incompatibles ;
- les événements A et B sont indépendants ;
- $P_A(B) = 0,1$

18 On considère un dé tétraédrique truqué dont les faces sont numérotées de 1 à 4. On sait que la probabilité d'obtenir la face 1 est le double de celle d'obtenir la face 2, qui est elle-même le triple de celle d'obtenir la face 3. Enfin la probabilité d'obtenir la face 4 est le quart de celle d'obtenir la face 1.

Déterminer la probabilité d'obtenir chacune des faces de ce dé.

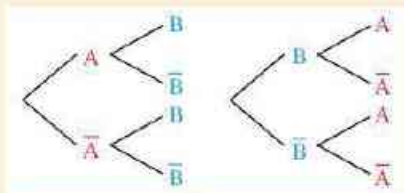
Consolider les bases

19 On choisit au hasard une personne dans une population. On note les événements H « la personne est un homme » et D « la personne est daltonienne ». Associer chaque proposition à sa probabilité.

- | | | | |
|--|---|---|------------------------|
| 8 % des hommes sont daltoniens | • | • | $P(\bar{H})$ |
| 51 % des personnes sont des femmes | • | • | $P(D)$ |
| 4,175 % des personnes sont daltoniennes | • | • | $P_{\bar{H}}(D)$ |
| Parmi les femmes, 0,5 % sont daltoniennes | • | • | $P(H \cap \bar{D})$ |
| Près de 94 % des daltoniens sont des hommes | • | • | $P_D(H)$ |
| 45,08 % des personnes sont des hommes non daltoniens | • | • | $P_{\bar{H}}(\bar{D})$ |

20 Soient A et B deux événements tels que : $P(A) = 0,3$, $P_A(B) = 0,6$ et $P_{\bar{A}}(B) = 0,25$

1. a. Parmi les deux arbres suivants, lequel est le plus pertinent à exploiter avec les données dont on dispose ?



- b. Pondérer les branches de l'arbre choisi.
2. Déterminer les probabilités de $A \cap B$ et $\bar{A} \cap B$.
3. En déduire la probabilité de l'événement B .
4. Calculer la probabilité $P_B(A)$.

21 Soient A et B deux événements indépendants tels que $P(A) = 0,3$ et $P(B) = 0,6$. Calculer les probabilités suivantes :

- | | |
|------------------------------|------------------------|
| 1. $P(A \cap B)$ | 2. $P(\bar{A} \cup B)$ |
| 3. $P_B(A)$ | 4. $P(\bar{A} \cap B)$ |
| 5. $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ | 6. $P_A(\bar{B})$ |

22 Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 5000 \\ u_{n+1} = 1,03u_n - 60, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
2. a. Déterminer une suite constante α vérifiant la même relation de récurrence que (u_n) .
- b. Déterminer la nature de la suite (v_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = u_n - \alpha$. Justifier.
- c. En déduire l'expression de u_n en fonction de n .
3. Étudier la limite de la suite (u_n) .

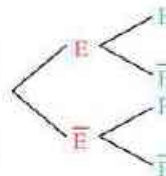
Connaître le cours

23 Deux diaporamas pour faire le point sur le cours.



24 QCM

Soient E et F deux événements de probabilités non nulles. On donne l'arbre ci-contre.



Pour chaque question, donner la bonne réponse.

1. La probabilité conditionnelle de F sachant E se note :

- a. $P(E \cap F)$ b. $P_F(E)$ c. $P_E(F)$

2. Cette probabilité est égale à :

- a. $P(E) \times P(F)$ b. $\frac{P(E \cap F)}{P(E)}$ c. $\frac{P(E \cap F)}{P(F)}$

3. La probabilité $P_E(\bar{F})$ est égale à :

- a. $1 - P_E(F)$ b. $1 - P_E(\bar{F})$ c. $1 - P(E \cap \bar{F})$

4. La probabilité de $\bar{E} \cap F$ est égale à :

- a. $P(\bar{E}) \times P(F)$ b. $P(\bar{E}) \times P_{\bar{E}}(F)$ c. $P(\bar{E}) \times P_F(\bar{E})$

5. La probabilité de F est égale à :

- a. $P_E(F) + P_{\bar{E}}(F)$ b. $P_E(F)$ c. $P(E \cap F) + P(\bar{E} \cap F)$

6. La probabilité $P_F(E)$ est égale à :

- a. $\frac{P(E \cap F)}{P(E \cap F) + P(\bar{E} \cap F)}$ b. $\frac{P(E)}{P(F)}$ c. $\frac{P_E(F)}{P(E)}$

25 Soient deux événements A et B d'un même univers et de probabilités non nulles. Rappeler la formule de Bayes liant les probabilités conditionnelles $P_A(B)$ et $P_B(A)$.

Quel est l'intérêt de cette formule ?

26 Donner deux méthodes permettant de justifier que deux événements A et B sont indépendants.

27 Soient A et B deux événements d'un même univers tels que :

$$P(A) = 0,7, P_A(B) = 0,25 \text{ et } P_{\bar{A}}(B) = 0,5$$

1. Modéliser la situation par un arbre pondéré.
2. En exploitant l'arbre choisi, calculer les probabilités suivantes :

- a. $P(B)$ b. $P(\bar{B})$ c. $P(\bar{A} \cap B)$ d. $P_B(A)$

28 Soient A et B deux événements d'un même univers tels que :

$$P(B) = 0,4, P(A \cap B) = 0,16 \text{ et } P_B(A) = 0,3$$

1. Modéliser la situation par un arbre pondéré.
2. En exploitant l'arbre choisi, calculer les probabilités suivantes :

- a. $P(A)$ b. $P(\bar{A} \cap B)$ c. $P_A(\bar{B})$ d. $P_{\bar{A}}(B)$

Travailler les capacités du thème

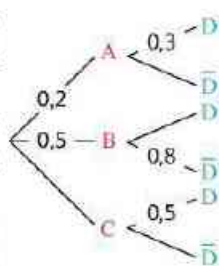
1 Exploiter un arbre pondéré

29 Vrai ou Faux ?

On considère l'arbre de probabilité ci-contre où A, B et C forment une partition de l'univers.

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier.

1. $P(C) = 0,3$
2. $P_{\bar{B}}(D) = 0,2$
3. $P_{\bar{D}}(C) = 0,5$
4. $P(D) = 0,3$
5. $P(B \cap \bar{D}) = 0,4$
6. $P(\bar{D}) = 0,69$



30 Dans une entreprise spécialisée dans les technologies high-tech, le personnel est réparti en trois catégories : 28 % sont ingénieurs de recherche (I), 45 % sont ouvriers spécialisés (O) et le restant sont techniciens supérieurs (T). Parmi les techniciens, on dénombre 45 % de femmes (F). Seulement 30 % des ingénieurs sont des femmes. 70 % des ouvriers sont des hommes (H). On interroge au hasard un membre du personnel.

1. Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.
2. a. Quelle est la probabilité que la personne interrogée soit une ingénieure ? une ouvrière ?
b. Déterminer la probabilité que la personne interrogée soit une femme.
3. Calculer la probabilité que la personne interrogée soit ingénieur sachant que cette personne est une femme.

31 Une urne contient dix boules indiscernables au toucher : 7 noires et 3 blanches. On tire au hasard successivement et sans remise deux boules de l'urne.

1. Modéliser la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Déterminer la probabilité :
a. de prélever deux boules blanches ;
b. de prélever deux boules de couleurs différentes ;
c. que la deuxième boule prélevée soit noire.
3. On vient de prélever deux boules de l'urne. La seconde est noire. Quelle est la probabilité que la première soit blanche ?

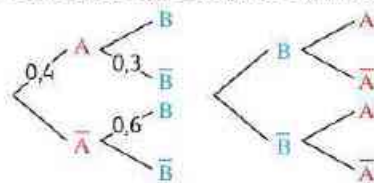
32 Emma habite une petite ville où il pleut en moyenne un jour sur quatre. Lorsqu'il ne pleut pas, elle sort son chien avec une probabilité de $\frac{4}{5}$.



Lorsqu'il pleut, elle sort son chien dans 10 % des cas. Déterminer la probabilité qu'Emma sorte son chien un jour quelconque de la semaine.

2 Calculer des probabilités simples ou conditionnelles

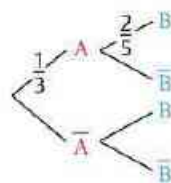
33 On considère les deux arbres pondérés suivants où A et B sont deux événements d'un même univers.



Compléter ces arbres pondérés par les probabilités manquantes en justifiant les calculs nécessaires.

34 On considère l'arbre pondéré ci-contre.

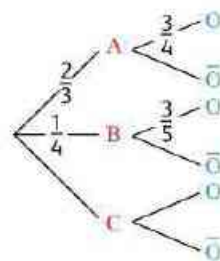
On sait de plus que $P(B) = \frac{2}{3}$.



1. Compléter cet arbre de probabilité en détaillant tous les calculs nécessaires.
2. Calculer les probabilités $P_B(A)$ et $P_{\bar{B}}(\bar{A})$.

35 Une association envisage de proposer des livraisons de paniers de produits fermiers contenant ou non des œufs frais. Pour savoir si ses adhérents sont intéressés, elle réalise un sondage. On interroge un adhérent au hasard. L'adhérent peut choisir des paniers de petite taille (A), de taille moyenne (B) ou de grande taille (C). On considère l'événement O :

« l'adhérent est intéressé par un panier contenant des œufs frais ». On dispose de certaines données, qui sont résumées dans l'arbre ci-contre.



1. Dans cette question, on ne cherchera pas à compléter l'arbre intégralement.
a. Calculer la probabilité que l'adhérent choisisse un panier de petite taille et soit intéressé par une livraison d'œufs.
b. Calculer $P(B \cap \bar{O})$ puis interpréter ce résultat à l'aide d'une phrase.
c. La livraison d'œufs frais ne sera mise en place que si la probabilité de l'événement O est supérieure à 0,6. Est-ce que ce sera le cas ici ?
2. On sait de plus que $P(O) = 0,675$.
a. À l'aide de la formule des probabilités totales, calculer $P(C \cap O)$.
b. Démontrer que $P_C(O) = 0,3$. Compléter alors l'arbre précédent.
c. Un adhérent a choisi une livraison d'œufs. Quelle est la probabilité qu'il ait choisi un panier de grande taille ?

1 Probabilité conditionnelle et arbre

Analyse d'un énoncé

36 Exercice commenté

Le responsable d'un club d'astronomie adresse un questionnaire à ses adhérents pour mieux les connaître. Il obtient les informations suivantes :

- 64 % des personnes interrogées sont des nouveaux adhérents ;
- 27 % des personnes interrogées sont des anciens adhérents qui possèdent un télescope personnel ;
- 65 % des nouveaux adhérents n'ont pas de télescope personnel.

On choisit au hasard un adhérent.

On pourra nommer des événements puis interpréter les données chiffrées en termes de probabilités. Ici, 27 % correspond-il à une probabilité simple ou conditionnelle ? Construire alors un arbre que l'on pondérera au fur et à mesure de l'exercice.

1. Montrer que la probabilité que l'adhérent choisi possède un télescope personnel est 0,494.

Exploiter l'arbre et la formule des probabilités totales.

2. On choisit au hasard un adhérent parmi ceux qui possèdent un télescope personnel. Quelle est la probabilité que ce soit un nouvel adhérent ?

Quelle est la nature de la probabilité à calculer ? Quelle(s) formule(s) peut-on exploiter ici ?

37 Application immédiate

Un logiciel antispam détecte les messages indésirables appelés spams et les déplace dans un dossier « spam ». Comme indiqué par le concepteur du logiciel, 95 % des spams sont déplacés. De plus, 60 % des messages reçus sont des spams. Après installation du logiciel, on constate que 58,6 % des messages reçus sont déplacés comme spams. On choisit un message au hasard et on considère les événements S « le message est un spam » et D « le message est déplacé ».

- Calculer la probabilité $P(S \cap D)$. Interpréter.
- Quelle est la probabilité que le message soit déplacé sachant qu'il ne s'agit pas d'un spam ?
- On choisit au hasard un message non déplacé. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un spam ?

38 Exercice guidé

Une enquête commandée par un supermarché révèle que, parmi les clients ayant choisi de passer à une borne automatique, 86 % attendent moins de 10 minutes.

De plus, parmi les clients passant en caisse « classique », 63 % attendent moins de 10 minutes.

Une attente supérieure à 10 minutes à une caisse engendre chez le client une perception négative du magasin. Ainsi, le gérant souhaite qu'au moins 75 % des clients attendent moins de 10 minutes.

Déterminer la proportion minimale de clients choisissant une borne automatique de paiement pour que cet objectif soit atteint.

Pistes de résolution

En notant p la proportion de clients choisissant une borne automatique, exprimer, en fonction de p , la probabilité qu'un client attende moins de 10 minutes à la caisse. Écrire alors une inéquation vérifiée par p .

39 Suite récurrente et probabilités

Chaque semaine, un agriculteur propose un panier de produits frais contenant une bouteille de jus de fruits consignée. Une étude statistique révèle que :

- à l'issue de la première semaine, la probabilité qu'un client rapporte la bouteille consignée la semaine suivante est 0,9 ;
- si le client a rapporté la bouteille une semaine, alors il la ramène la semaine suivante avec une probabilité égale à 0,95 ;
- si le client n'a pas rapporté la bouteille une semaine, il ramène la bouteille la semaine suivante avec une probabilité égale à 0,2.

On choisit au hasard un client de cet agriculteur.

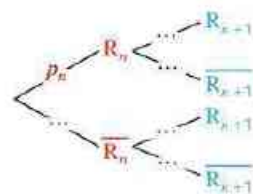
Pour tout entier $n \geq 1$, on note R_n l'événement « le client rapporte la bouteille de la n -ième semaine ».

1. a. Modéliser la situation étudiée pour les deux premières semaines à l'aide d'un arbre pondéré.

b. Montrer que $P(R_2) = 0,875$. Interpréter.

2. Pour tout entier $n \geq 1$, on note p_n la probabilité que le client rapporte la bouteille la n -ième semaine. Ainsi, on a $p_n = P(R_n)$.

a. Recopier et compléter l'arbre de probabilité ci-contre.



b. Justifier que, pour tout entier $n \geq 1$:

$$p_{n+1} = 0,75p_n + 0,2$$

Quelle est la nature de la suite $(p_n)_{n \geq 1}$?

c. Déterminer une suite constante, notée α , vérifiant la même relation de récurrence que (p_n) .

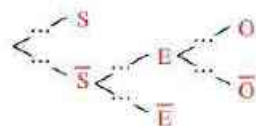
d. Déterminer la nature de la suite (u_n) définie, pour tout entier $n \geq 1$, par $u_n = p_n - \alpha$. Justifier.

e. Exprimer, pour tout entier $n \geq 1$, u_n en fonction de n . En déduire que $p_n = 0,1 \times 0,75^{n-1} + 0,8$.

f. Quelle est la limite de la suite (p_n) ? Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

40 Pour recruter ses futurs étudiants, une grande école procède en trois étapes : à l'issue de l'étude de leur dossier scolaire, 20 % des candidats sont reçus. Les autres candidats passent un test écrit dont le taux de réussite est de 40 %. Les candidats ayant réussi ce test sont convoqués à un entretien oral dont un quart sont finalement admis. On considère un candidat au hasard et les événements suivants : S « le candidat est admis sur dossier scolaire », E « le candidat a passé et réussit le test écrit » et O : « le candidat a passé l'entretien et est admis à son issue ».

1. Compléter l'arbre pondéré suivant modélisant la situation.



- Montrer que la probabilité que le candidat soit admis dans cette école est égale à 0,28.
- Parmi les candidats admis, quelle est la proportion de candidats admis sur dossier scolaire ?

2 Inversement du conditionnement

41 Lors d'une soirée, une chaîne a retransmis un concours culinaire suivi d'une émission proposant des recettes rapides. On sait que :

- 56 % des téléspectateurs ont regardé le concours culinaire ;
- un quart des téléspectateurs ayant regardé le concours ont aussi regardé l'émission suivante ;
- 16,2 % des téléspectateurs ont regardé l'émission proposant des recettes rapides.

Quelle est la probabilité qu'un téléspectateur ait regardé l'émission de recettes sachant qu'il n'a pas regardé le concours culinaire ?

42 Un audioprothésiste compte parmi ses clients 75 % de personnes de plus de 50 ans. Parmi celles-ci, 80 % souffrent de problèmes d'audition aux deux oreilles. Ce taux chute à 40 % parmi les clients de moins de 50 ans.

Un client ne souffre pas de problème auditif aux deux oreilles, quelle est la probabilité qu'il soit âgé de plus de 50 ans ?



43 Le chikungunya est une maladie virale transmise d'un être humain à l'autre par les piqûres de moustiques femelles infectés. Un test a été mis au point pour le dépistage de ce virus. Le laboratoire fabriquant ce test fournit les caractéristiques suivantes :

- la probabilité qu'une personne atteinte par le virus ait un test positif est de 0,98 ;
- la probabilité qu'une personne non atteinte par le virus ait un test positif est de 0,01.

On procède à un test de dépistage systématique dans une population « cible ». Un individu est choisi au hasard dans cette population. On considère les événements M « l'individu choisi est atteint du chikungunya » et T « le test de l'individu choisi est positif ». On note p (avec $p \in [0; 1]$) la proportion de personnes atteintes par la maladie dans la population cible.

- Représenter la situation par un arbre pondéré.
 - Exprimer $P(M \cap T)$, puis $P(T)$ en fonction de p .
- Montrer que la probabilité de M sachant T est égale à $f(p) = \frac{98p}{97p+1}$.
 - Étudier et interpréter les variations de f sur $[0; 1]$.
- On décide de considérer que le test est fiable lorsque la probabilité qu'une personne ayant un test positif soit réellement atteinte du chikungunya est supérieure à 0,95. À partir de quelle proportion p de malades dans la population cible le test est-il fiable ?

3 Rappels sur l'indépendance

44 Dans une classe de 30 élèves, 10 font partie du club photo et 6 sont membres du club théâtre. Enfin, deux élèves sont membres des deux clubs.

On interroge un élève de la classe pris au hasard. Montrer que les événements C « l'élève fait partie du club photo » et T « l'élève fait partie du club théâtre » sont indépendants.

45 Une usine d'horlogerie fabrique une série de montres. Au cours de la fabrication peuvent apparaître deux types de défauts, désignés par a et b, indépendants l'un de l'autre. 2 % des montres fabriquées présentent le défaut a et 10 % le défaut b.

Une montre est tirée au hasard dans la production. On définit les événements suivants :

- A « la montre tirée présente le défaut a » ;
- B « la montre tirée présente le défaut b ».

- Montrer que la probabilité que la montre tirée ne présente aucun des deux défauts est égale à 0,882.
- Déterminer la probabilité que la montre présente au moins un défaut.
- Déterminer la probabilité que la montre présente un et un seul des deux défauts.

Paradoxe de Simpson

Quatre médecins britanniques ont mené en 1986 une étude comparative quant à l'efficacité de différents traitements contre les calculs rénaux. Ces modes de traitement, que l'on nommera Traitement A et Traitement B dans la suite, ont respectivement été mis au point dans les années 1972-1980 et dans les années 1980-1985.



Cette étude a mis en évidence le succès global et le nombre de traitements pour chacune de ces méthodes.

Tableau 1 - Résultats globaux

| Traitement A | Traitement B |
|--|--|
| 273 succès / 350 patients (78 % de succès) | 289 succès / 350 patients (83 % de succès) |

En ajoutant des données concernant la taille des calculs rénaux traités, cette étude révèle les chiffres suivants.

Tableau 2 - Résultats en fonction de la taille des calculs rénaux

| Petits calculs rénaux | | Gros calculs rénaux | |
|--|--|--|--|
| Traitement A | Traitement B | Traitement A | Traitement B |
| 81 succès / 87 patients (93 % de succès) | 234 succès / 270 patients (87 % de succès) | 192 succès / 263 patients (73 % de succès) | 55 succès / 80 patients (69 % de succès) |

Ces deux tableaux affichent des données chiffrées qui semblent, *a priori*, **contradictoires**. L'information au **sujet de la taille des calculs a inversé les conclusions** concernant l'efficacité de chaque traitement.

1. Vérifier que les données chiffrées des deux tableaux de cette étude sont cohérentes.
2. En quoi les résultats obtenus dans chacun de ces tableaux mettent en évidence un **paradoxe** ?

3. Explication du paradoxe

On choisit au hasard un patient de cette étude. On considère les événements suivants :

A « le patient a subi le traitement A », B « le patient a subi le traitement B » et G « le patient est atteint de gros calculs rénaux ». Enfin, S désigne l'événement « le patient a été traité avec succès ».

- a. Déterminer les probabilités $P_G(A)$, $P_G(B)$, $P_{\bar{G}}(A)$ et $P_{\bar{G}}(B)$.
- b. De même, calculer les probabilités $P_G(S)$ et $P_{\bar{G}}(S)$.
- c. À l'aide de ces calculs, expliquer les passages **surlignés** du texte suivant.

Le second tableau, qui introduit une variable supplémentaire (ici la taille des calculs rénaux), montre que cette dernière a un véritable impact sur les probabilités de succès. Elle a une influence à la fois sur le **choix du traitement** (les calculs de taille élevée ont été plus souvent traités par le traitement A) et sur le **résultat du traitement** (les calculs de taille élevée sont plus difficiles à soigner). Cette variable est appelée *facteur de confusion*.

Le traitement de données statistiques doit se faire avec prudence. Les probabilités conditionnelles permettent d'évaluer avec finesse les chances de traitement dans une sous-population ciblée.



4. Quel traitement un médecin doit-il conseiller à un patient souffrant de calculs rénaux ? Expliquer.
5. Mener des recherches sur la notion de *facteur de confusion*.

D'après PACES

Une étude a été menée pour estimer les performances diagnostiques du test sérologique Luminex[®] de détection du virus Ebola. La sensibilité a été estimée à 90 % et la spécificité à 95 %.

Partie A Étude du cas de la Guinée

En Guinée, la prévalence de l'infection au virus Ebola est estimée à 5 %.

1. En reprenant les définitions et notations des événements ci-dessous, représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité qu'un test soit positif.
3. Calculer les valeurs prédictives positive et négative. Interpréter dans le contexte de l'énoncé.
4. Calculer la probabilité p_e qu'un test commette une erreur.

Définitions et notations

Pour l'étude des performances d'un test de dépistage, on utilise la terminologie suivante :

en notant T l'événement « le test est positif » et M l'événement « le sujet souffre de la maladie étudiée »

- la **prévalence** notée P est $P(M)$;
- la **sensibilité** notée SE est $P_M(T)$;
- la **spécificité** notée SP est $P_{\bar{M}}(\bar{T})$;
- la **valeur prédictive positive** notée VPP est $P_T(M)$;
- la **valeur prédictive négative** notée VPN est $P_{\bar{T}}(\bar{M})$.

Lorsqu'un test est positif sur un sujet sain, on parle de **faux-positif** et lorsqu'un test est négatif sur un sujet malade, on parle de **faux-négatif**.

Partie B **TABLEUR** Influence de la prévalence sur les résultats du test Luminex[®]

Dans cette partie, la proportion de malades dans la population est p (où $p \in]0; 1[$).

1. Exprimer $P(T)$ en fonction de p .
2. En déduire $P(\bar{T})$ en fonction de p .
3. Montrer que la valeur prédictive positive du test Luminex[®] est égale à $\frac{0,9p}{0,85p+0,05}$.

De même, exprimer la valeur prédictive négative du test Luminex[®] en fonction de p .

4. a. Ouvrir une feuille de calcul d'un tableur et compléter la première ligne comme ci-dessous.

| | A | B | C |
|---|-----------------------|----------------------------|----------------------------|
| 1 | proportion de malades | valeur prédictive positive | valeur prédictive négative |
| 2 | p | VPP | VPN |
| 1 | | 0,153846154 | 0,998937865 |
| 3 | 0,02 | 0,268656716 | 0,997856377 |

- b. Dans la colonne A, entrer les valeurs de p comprises entre 0,1 et 0,99 avec un pas de 0,01.
- c. Quelles formules peut-on saisir dans les cellules B2 et C2 pour compléter les colonnes B et C par recopie vers le bas ?

- d. Tracer les graphiques représentant les valeurs prédictives en fonction de p .

(Dans l'onglet *Insertion*, choisir *Graphique* puis l'icône *Nuage de points*.)

- e. Quelle semble être l'influence de la prévalence sur les valeurs prédictives ?

4. On note f la fonction qui à $p \in]0; 1[$ associe :

$$f(p) = \frac{0,9p}{0,85p+0,05}$$

- a. Étudier les variations de la fonction f sur $]0; 1[$.
- b. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Info

Dans la construction d'une enquête épidémiologique, il est fondamental de connaître la prévalence de la maladie, souvent faible (inférieure à 1 %). Un dépistage systématique de toute la population pour une maladie rare a l'inconvénient de fournir beaucoup de faux-positifs. Ceci génère alors beaucoup d'inquiétude dans la population, c'est l'un des problèmes éthiques liés à la mise en place de tests de dépistage systématiques d'une maladie rare.

Partie C Comparaison de deux tests

Un second test, Elisa, a été également utilisé en Guinée. Voici dans le tableau ci-dessous les résultats du test Elisa effectué sur un échantillon de 100 sujets malades et sur un autre échantillon de 100 sujets sains.

| | Échantillon de sujets malades | Échantillon de sujets sains |
|----------------------|-------------------------------|-----------------------------|
| Tests Elisa positifs | 95 | 10 |
| Tests Elisa négatifs | 5 | 90 |

On supposera dans la suite que ces données peuvent être généralisées à l'ensemble de la population de la Guinée.

Les données du test Luminex[®] sont celles citées précédemment.

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, et justifier vos réponses.

Affirmation 1 : Un individu malade est mieux détecté par le test Elisa que par le test Luminex[®].

Affirmation 2 : La probabilité d'erreur avec le test Elisa est plus faible qu'avec le test Luminex[®].

Affirmation 3 : Au Zaïre où la prévalence de l'infection au virus Ebola était plus élevée qu'en Guinée, la valeur prédictive positive avec le test Elisa est plus élevée qu'en Guinée.

Le « filtrage bayésien » constitue une méthode de filtrage des spams. C'est un système fondé sur « l'apprentissage » d'une grande quantité de spams et courriels légitimes par le logiciel, qui lui permet ensuite de « décider » si un courriel est indésirable ou non. Le message à identifier est découpé en morceaux (mots, expressions...) et, par comparaison avec le corpus de nombreux courriels, le logiciel détermine la fréquence d'apparition des différents morceaux dans les deux catégories (spam ou ham).



Le **spam**, courriel indésirable ou **pourriel** est une communication électronique non sollicitée (principalement un courriel électronique). Par opposition, les logiciels de filtrage de courrier électronique définissent comme « **ham** » tout message électronique légitime. Le spam représente entre 55 et 95 % du trafic total de l'e-mail. La majeure partie (près de 90 %) est filtrée en amont par les outils anti-spam des messageries et est donc invisible aux yeux des internautes.

Ci-contre une typographie de l'artiste allemande Symen Veenstra s'inspirant de contenus de spams.

On reçoit un message contenant un mot suspect. Pour catégoriser ce message comme « spam » ou « ham », le logiciel évalue sa « spamicité », c'est-à-dire la probabilité que ce message soit un spam sachant qu'il contient un mot suspect. Si cette « spamicité » est au-dessus d'un seuil donné (par exemple : 95 %), le logiciel classe ce message comme spam. On considère les événements :

- S « le courriel est un spam » ;
- M « le courriel contient le mot suspect ».

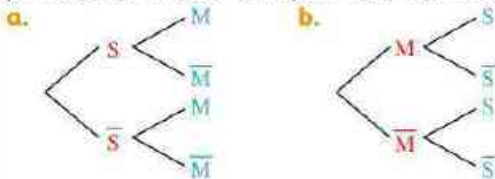
Pour évaluer la « spamicité » du message, le logiciel dispose des probabilités suivantes issues de l'apprentissage et de données statistiques :

$$P_S(M), P_{\bar{S}}(M) \text{ et } P(S)$$

1. Interpréter concrètement les probabilités $P_S(M)$, $P_{\bar{S}}(M)$ et $P(S)$.

Pour chacune des questions 2. à 6., choisir la bonne réponse.

2. Vu les données dont le logiciel dispose, quel arbre permettra d'évaluer la « spamicité » du message ?



3. $P(M)$ est égal à :

- a. $P_S(M) + P_{\bar{S}}(M)$
- b. $P_S(M) \times P(S) + P_{\bar{S}}(M) \times P(\bar{S})$
- c. $P(S \cap M) \times P(S) + P(\bar{S} \cap M) \times P(\bar{S})$

4. La « spamicité » $P_M(S)$ du message est égale à :

- a. $\frac{P_S(M) \times P(S)}{P(M)}$
- b. $\frac{P(M \cap S)}{P(S)}$
- c. $\frac{P(S)}{P(M)}$

5. La « spamicité » du message est aussi égale à :

- a. $\frac{P(S)}{P_S(M) + P_{\bar{S}}(M)}$
- b. $\frac{P_S(M) \times P(S)}{P_S(M) \times P(S) + P_{\bar{S}}(M) \times P(\bar{S})}$
- c. $\frac{P_M(S) \times P(M)}{P_M(S) \times P(M) + P_{\bar{M}}(S) \times P(\bar{M})}$

6. La plupart des logiciels bayésiens de détection du spam sont dits « non biaisés », c'est-à-dire qu'ils considèrent qu'il n'y a pas de raison *a priori* qu'un message reçu soit un spam plutôt qu'un ham. Ils considèrent donc que $P(S) = P(\bar{S}) = 0,5$.

Sous cette hypothèse, on obtient :

- a. $P_M(S) = \frac{P_S(M)}{P_S(M) + P_{\bar{S}}(M)}$
- b. $P_M(S) = \frac{P_S(M)}{P_S(M) + 0,5 \times P_{\bar{S}}(M)}$
- c. $P_M(S) = \frac{1}{0,5 \times P_S(M)}$

7. Cas d'un logiciel « non biaisé »

Dans les trois cas suivants, indiquer si le message reçu sera considéré comme un spam, autrement dit si sa « spamicité » dépasse le seuil de 95 %.

- a. $P_S(M) = 0,003$ et $P_{\bar{S}}(M) = 0,01$;
- b. $P_S(M) = 0,001$ et $P_{\bar{S}}(M) = 0,0005$;
- c. $P_S(M) = 0,002$ et $P_{\bar{S}}(M) = 0,002$.

8. Pour aller plus loin : cas d'un logiciel biaisé

Des statistiques récentes montrent que la probabilité qu'un message quelconque soit un spam est égale à 80 %.

- a. Exprimer, dans ce cas, la « spamicité » $P_M(S)$ du message reçu en fonction de $P_S(M)$ et $P_{\bar{S}}(M)$.
- b. Reprendre la question 7. dans ce nouveau contexte.

48 ... en épidémiologie Le modèle « SIR »

On étudie un modèle de propagation d'un virus dans une population, semaine après semaine. Chaque individu de la population peut être dans l'un des trois états suivants : **état S** susceptible d'être atteint par le virus ; **état I** infecté par le virus ; **état R** rétabli et ne pouvant plus être infecté par le virus.

Un individu est dans l'état R lorsqu'il a été vacciné ou lorsqu'il a guéri après avoir été infecté par le virus.

Pour tout entier naturel n , le modèle de propagation du virus est défini par les règles suivantes :

① Parmi les individus à l'état S une semaine donnée, 85 % restent à cet état la semaine suivante, 5 % deviennent malades et 10 % sont rétablis.

② Parmi les individus infectés (à l'état I) une semaine donnée, 65 % restent malades et 35 % sont rétablis.

③ Tout individu rétabli une semaine donnée l'est également la semaine suivante.

On choisit au hasard un individu dans la population. On considère les événements suivants :

S_n : « l'individu est à l'état S en semaine n », I_n : « l'individu est à l'état I en semaine n » et R_n : « l'individu est à l'état R en semaine n ». En semaine 0, tous les individus sont à l'état S, ainsi $P(S_0) = 1$, $P(I_0) = P(R_0) = 0$. On note, pour tout entier naturel n , $u_n = P(S_n)$, $v_n = P(I_n)$ et $w_n = P(R_n)$.

Partie A Évolution au cours des deux premières semaines

1. Construire un arbre de probabilité modélisant la situation pour les deux premières semaines.

2. Montrer que $P(R_2) = 0,2025$.

3. Calculer et interpréter $P_{R_2}(I_1)$. Arrondir au millième.

Partie B Évolution sur le long terme

1. Justifier que, pour tout entier naturel n , on a :

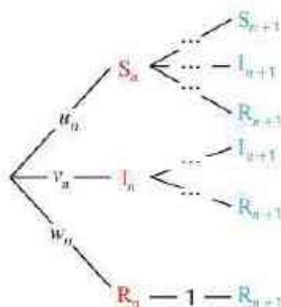
$$u_n + v_n + w_n = 1$$

2. a. Compléter l'arbre de probabilité ci-contre.

b. Justifier que, pour tout entier naturel n , on a :

$$u_{n+1} = 0,85u_n$$

et $v_{n+1} = 0,65v_n + 0,05u_n$



3. a. À l'aide d'un tableur, calculer et représenter les termes de ces trois suites pour les 20 premières semaines.

b. On admet que les termes de la suite v augmentent puis diminuent à partir d'un certain rang N appelé « pic épidémique ». En utilisant la feuille de tableur précédente, déterminer le pic épidémique.



Info

Le pic épidémique est l'indice de la semaine pendant laquelle la probabilité d'être malade pour un individu choisi au hasard est la plus grande

4. a. Quelle est la nature de la suite u ? En déduire l'expression de u_n en fonction de n .

On admettra dans la suite que, pour tout entier naturel n , on a : $v_n = 0,25(0,85^n - 0,65^n)$.

b. Calculer les limites des suites u , v et w .

Que peut-on en déduire quant à l'évolution de l'épidémie prévue à long terme par ce modèle ?

49 ... en probabilités Étude d'un jeu d'argent

Une urne contient k boules noires et trois boules blanches (k étant un entier tel que $k \geq 2$). Ces boules sont indiscernables au toucher. Une partie consiste à prélever au hasard successivement et avec remise deux boules dans cette urne. On établit la règle de jeu suivante :

- un joueur perd 9 euros si les deux boules tirées sont de couleur blanche ;
- un joueur perd 1 euro si les deux boules tirées sont de couleur noire ;
- un joueur gagne 5 euros si les deux boules tirées sont de couleurs différentes.

Partie A Avec 10 boules dans l'urne et $k = 7$

Ainsi l'urne contient trois boules blanches et sept boules noires indiscernables au toucher.

1. Un joueur fait une partie. Montrer que la probabilité que le joueur gagne 5 euros est égale à 0,42.

2. Quelle est la probabilité que la première boule prélevée soit blanche sachant que le joueur a gagné 5 euros ?

Partie B Avec $k + 3$ boules dans l'urne

Dans cette partie, k est un entier naturel quelconque tel que $k \geq 2$. On note Y_k la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

1. a. Justifier que $P(Y_k = 5) = \frac{6k}{(k+3)^2}$.

b. Déterminer la loi de probabilité de Y_k .

2. Le jeu est favorable au joueur lorsque $E(Y_k) > 0$. Pour quelles valeurs de k ce jeu est-il défavorable au joueur ?

On considère un modèle économique dans lequel deux marques sont en concurrence et où les acheteurs ont tendance à choisir la marque dominante. Initialement, on suppose que deux marques concurrentes se partagent équitablement le marché. À chaque achat par un consommateur d'un produit d'une marque donnée, celle-ci gagne alors en notoriété et augmente ainsi la probabilité d'être choisie par un futur consommateur. Ce modèle économique peut être formalisé par un modèle d'urne appelé « urne de Pólya ».



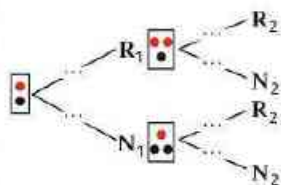
On modélise le marché par une urne contenant initialement une boule rouge et une boule noire (chaque couleur de boule symbolisant une de ces deux marques). On répète alors le protocole suivant : on tire une boule de l'urne, on la remet dans l'urne et on ajoute une boule de la même couleur dans cette urne. On s'intéresse à la composition de cette urne après k tirages en suivant ce protocole.

Partie A Étude du modèle d'urne de Pólya pour $k = 2$ puis $k = 3$

On considère, pour tout entier naturel i , les événements : R_i « tirer une boule rouge au i -ème tirage » et N_i « tirer une boule noire au i -ème tirage ».

On note, pour tout entier $k \geq 1$, X_k le nombre de boules rouges présentes dans l'urne à l'issue de k tirages en suivant le protocole décrit précédemment.

1. a. On répète deux fois le protocole. Compléter l'arbre de probabilités ci-contre en indiquant, aux extrémités de chaque branche de l'arbre, la composition finale de l'urne à l'issue de ces deux tirages.



b. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X_2 .

c. Existe-t-il, à l'issue des deux tirages, une composition d'urne plus probable que les autres ?

3. Reprendre l'étude précédente lorsqu'on répète trois fois le protocole. En déduire la loi de probabilité de la variable aléatoire X_3 .

4. Interpréter les résultats précédents dans le cadre du marché concurrentiel.

Partie B Simulations de k tirages avec $k > 3$

On propose, dans la suite, de simuler k tirages successifs selon le protocole de Pólya. Pour cela, on considère la fonction Python `composition(nb_tirages)` ci-après qui prend en argument le nombre de tirages successifs à effectuer et retourne la configuration finale de l'urne, autrement dit le nombre de boules noires et rouges finalement présentes dans l'urne.

```
1 from random import random
2
3 def composition(nb_tirages):
4     r=1 # nbre initial de boules rouges
5     n=1 # nbre initial de boules noires
6     for i in range(nb_tirages):
7         if random() < r/(r+n):
8             r+=1
9         else:
10            n+=1
11    return n,r
```

1. a. Supposons qu'à un instant donné l'urne contienne r boules rouges et n boules noires. Quelle est la probabilité de prélever une boule rouge de cette urne ?

b. Quel est le rôle de la condition `random() < r/(r+n)` dans la fonction précédente ?

c. Compléter la ligne 10 de cette fonction.

2. On réalise 10 000 simulations de 10 tirages successifs selon le protocole de Pólya.

a. Combien de configurations d'urnes différentes peut-on obtenir à l'issue des 10 tirages ?

b. Voici les fréquences obtenues pour chaque configuration d'urnes possibles :

| | | | | |
|----------------------|---------|---------|---------|---------|
| Composition $(n; r)$ | (1; 11) | (2; 10) | (3; 9) | (4; 8) |
| Fréquence | 0,09085 | 0,09117 | 0,09152 | 0,09171 |
| Composition $(n; r)$ | (5; 7) | (6; 6) | (7; 5) | (8; 4) |
| Fréquence | 0,09157 | 0,09025 | 0,09085 | 0,08956 |
| Composition $(n; r)$ | (9; 3) | (10; 2) | (11; 1) | |
| Fréquence | 0,09269 | 0,08934 | 0,09049 | |

Ces résultats sont-ils en accord avec ceux obtenus dans la **partie A** ? Expliquer.

3. Pour aller plus loin

Écrire un script Python permettant de réaliser 10 000 simulations de 10 tirages successifs selon le protocole de Pólya et qui stocke dans une liste les fréquences (ou les effectifs) de chaque occurrence d'urne suivant sa composition.



Le modèle des urnes de Pólya, initialement imaginé par George Pólya (1887-1985) pour modéliser des phénomènes de contagion d'une maladie, trouve aussi des applications concrètes dans la modélisation de propagation d'opinions par mimétisme ou encore en économie.



Calcul de probabilités en génétique

Utiliser PYTHON

Nous allons étudier le génotype des générations successives du lupin, plante se reproduisant par autogamie. On suppose que le lupin de la génération 0 est hétérozygote, c'est-à-dire de génotype Aa.

Objectif

Étudier la descendance par autogamie d'une plante hétérozygote.



Info

Étant donné un gène possédant un couple d'allèles A et a, on dit qu'une plante est **homozygote** lorsqu'elle contient les deux mêmes allèles sur une paire de chromosomes homologues : elle est alors de génotype AA ou aa. Une plante est **hétérozygote** lorsqu'elle est de génotype Aa.

Certaines plantes se reproduisent par **autofécondation** (ou autogamie) : tout se passe pour la descendance comme si on fécondait deux plantes de même génotype, chaque chromosome d'une paire étant sélectionné au hasard.

Partie A Première génération

1. Construire un arbre permettant de lister tous les couplages d'allèles possibles pour un descendant de première génération d'un lupin hétérozygote.
2. En déduire les probabilités que la descendance de première génération du lupin soit de génotype Aa, AA ou aa.

Partie B Générations successives

On note les événements :

- AA_n « la plante de la n -ième génération est de génotype AA » ;
- Aa_n « la plante de la n -ième génération est de génotype Aa » ;
- aa_n « la plante de la n -ième génération est de génotype aa ».

On pose, pour tout entier naturel n :

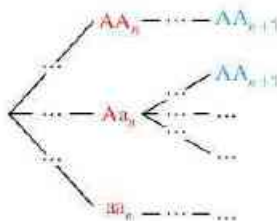
$$x_n = P(AA_n), y_n = P(Aa_n) \text{ et } z_n = P(aa_n)$$

Dans notre cas, on a donc $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ et $z_0 = 0$.

1. Donner les valeurs des probabilités x_1 , y_1 et z_1 .
2. Donner les valeurs des probabilités conditionnelles suivantes :

$$P_{AA_n}(AA_{n+1}), P_{Aa_n}(AA_{n+1}) \text{ et } P_{Aa_n}(Aa_{n+1})$$

3. Compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



4. En déduire que, pour tout entier naturel n :

$$x_{n+1} = x_n + 0,25y_n \text{ et } y_{n+1} = 0,5y_n$$

5. Exprimer z_n en fonction de x_n et y_n .

Partie C Évolution dans le temps

1. a. Compléter le script Python ci-dessous afin de calculer, sous forme de listes, les dix premiers termes des suites (x_n) , (y_n) et (z_n) .

```
1# probabilités génération 0
2x,y,z=0,1,0
3
4# création de trois listes
5liste_x=[x]
6liste_y=[y]
7liste_z=[z]
8
9for i in range(1,10):
10    x=x+1/4*y
11    y=...
12    z=...
13    liste_x.append(x)
14    liste_y.append(y)
15    liste_z.append(z)
```

- b. À l'aide du script précédent, conjecturer le sens de variation et la limite des suites (x_n) , (y_n) et (z_n) .
2. a. Quelle est la nature de la suite (y_n) ? Exprimer y_n en fonction de l'entier naturel n .
- b. En déduire l'expression de $x_{n+1} - x_n$ en fonction de n .
- c. En remarquant que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x_n - x_0 = (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \dots + (x_1 - x_0)$$
 exprimer x_n puis z_n en fonction de n .
3. Déterminer les limites des suites (x_n) , (y_n) et (z_n) . Interpréter ces résultats.

Partie D Pour aller plus loin

1. Quelle est la probabilité p_n pour qu'une plante de la n -ième génération ne soit pas homozygote ?
2. À partir de quelle génération a-t-on $p_n \leq 0,01$? Justifier.

Tabac et infarctus

À l'occasion de la journée mondiale sans tabac 2018, dédiée au risque cardio-vasculaire lié au tabagisme, la Fédération française de cardiologie alerte sur les méfaits du tabac pour les artères et le cœur à travers cette infographie.



Mener une recherche

- D'après l'infographie, quel est l'effet du tabac sur les infarctus chez les femmes ?
- On estime, qu'en France, en 2018, 28 % des femmes de moins de 60 ans sont fumeuses. On prélève une personne parmi les femmes françaises. On note I l'événement « la femme prélevée a été victime d'un infarctus » et F « la femme est fumeuse ».
 - Interpréter la phrase de l'infographie en termes de probabilité.
 - Exprimer les probabilités $P_F(I)$ et $P_{\bar{F}}(I)$ en fonction de $P(I)$.
 - Montrer que $P_{\bar{F}}(I) \approx 4 \times P_F(I)$. Interpréter ce résultat.

Les repas végétariens à la cantine

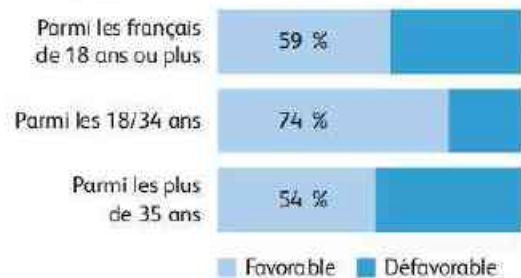
En avril 2018, l'institut de sondages BVA a interrogé un échantillon de la population en posant la question suivante : « Êtes-vous favorable à la mise en place de repas végétariens dans les cantines scolaires ? »

À L'ÉCRIT OU À L'ORAL

Quelle est la proportion de personnes de plus de 35 ans interrogées ? Expliquer.

Mener une recherche

Les résultats sont donnés ci-dessous :



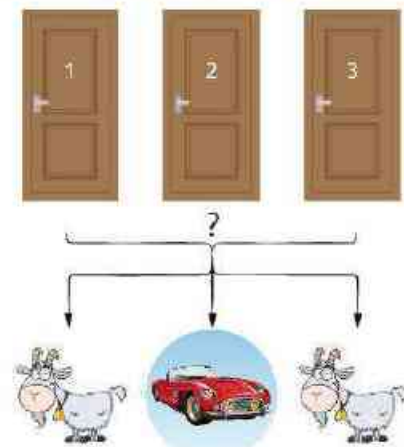
Jeu de Monthy-Hall

Dans un jeu télévisé, le candidat se retrouve devant trois portes. Derrière l'une d'entre elles, se trouve un gros lot ; alors que derrière les deux autres se trouve une chèvre.

À L'ÉCRIT OU À L'ORAL

Le candidat désigne une porte ; mais, pour ménager le suspense, le présentateur du jeu ouvre une des deux portes que le candidat n'a pas choisies et derrière laquelle se trouve une chèvre !
Le candidat peut alors modifier son choix. Que lui conseillez-vous ?

Mener une recherche



Expériences répétées, échantillonnage

Les capacités du thème

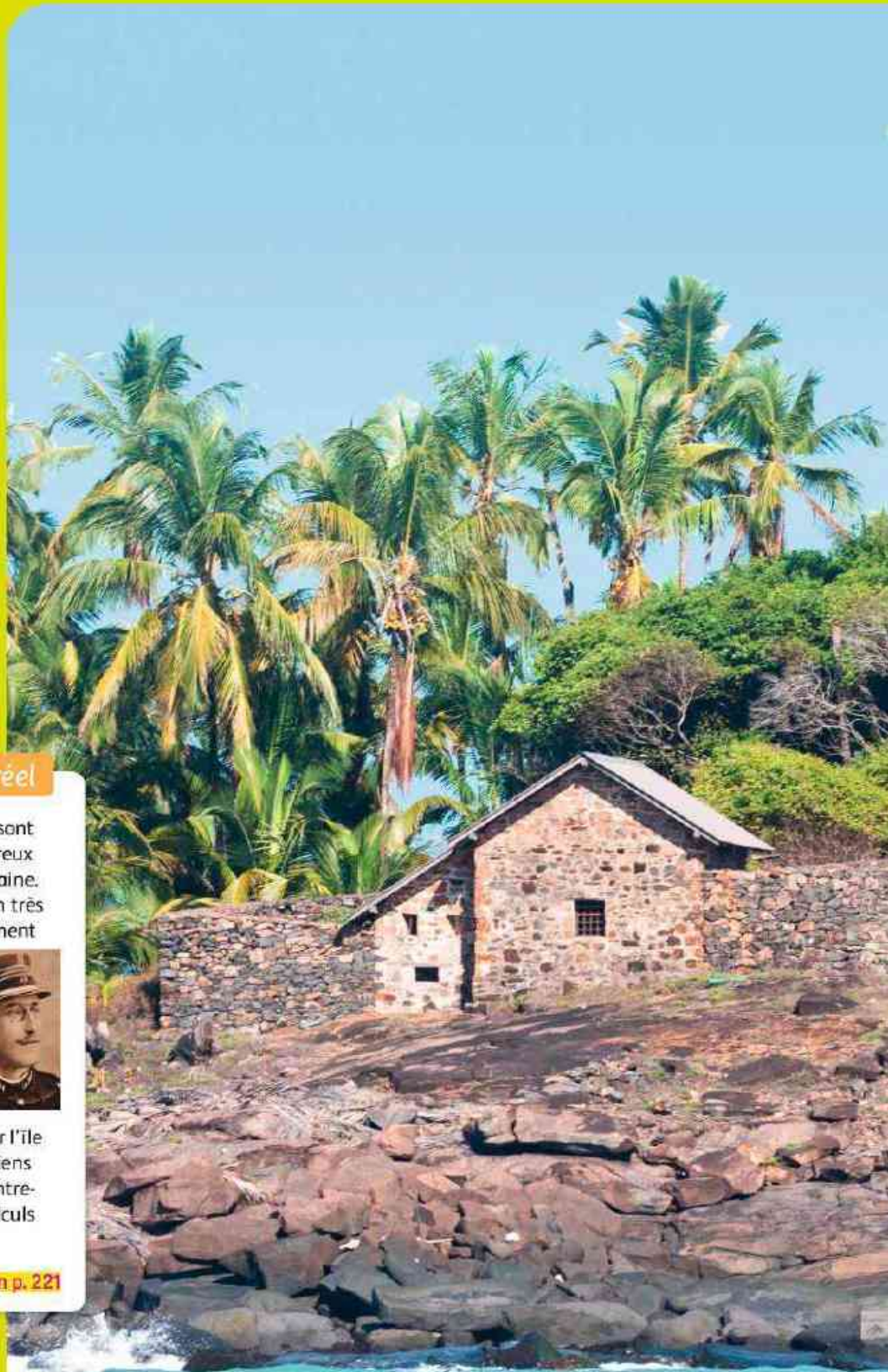
- 1 Identifier des situations : loi uniforme, loi de Bernoulli
- 2 Déterminer des coefficients binomiaux, triangle de Pascal
- 3 Calculer des probabilités dans le cadre d'une loi binomiale
- 4 Déterminer un intervalle de fluctuation et prendre une décision

Modélisation du réel

Statistiques et probabilités sont utilisées dans de très nombreux domaines de l'activité humaine. Elles sont apparues de façon très malheureuse dans le traitement de « l'affaire Dreyfus » (1894-1906), à l'occasion d'une « expertise » (menée par Bertillon) qui fit condamner à tort l'accusé à la déportation sur l'île du Diable. Des mathématiciens de renom établirent une contre-expertise dénonçant des calculs erronés.



 Voir Maths en situation p. 221



A Diaporama pour tester les bases



B Vrai ou Faux ?

On donne ci-dessous la loi de probabilité d'une variable aléatoire X et on considère la variable aléatoire Y vérifiant $Y = 3X + 2$.

| | | | | | |
|--------------------|-----|------|------|---|-----|
| x_i | -5 | -2 | 0 | 3 | 6 |
| $p_i = P(X = x_i)$ | 0,4 | 0,05 | 0,25 | | 0,1 |

Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

- $P(X = 3) = 0,2$
- $E(X) = -0,9$
- $P(X \leq 0) = 0,45$
- $\sigma(X) = 2,9$
- $P(X > -2) = 1 - P(X = -5)$
- $E(Y) = 3,3$

C Variable aléatoire en contexte

Le foyer des élèves du lycée organise une tombola pour financer un nouveau billard. Il met en vente 400 tickets, au prix de 5 euros chacun. Parmi ces tickets, 20 font gagner un lot de 10 euros, 40 font gagner un lot de 20 euros et 15 font gagner un lot de 40 euros. Tous les autres tickets sont perdants. Une personne achète, au hasard, un ticket.

On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique du ticket, en euro.

- Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire X ?
- Déterminer la loi de probabilité de X .
- Calculer $P(X \geq 15)$ puis $P(X < 30)$. Interpréter ces deux probabilités.
- Déterminer puis interpréter l'espérance mathématique de la variable aléatoire X .

D Répétition d'épreuves et variable aléatoire

Lors d'un escape game, tous les joueurs de chaque équipe doivent se soumettre à un jeu d'adresse. Statistiquement, un tiers des participants réussit cette épreuve, les autres échouent.

Lorsqu'un joueur réussit l'épreuve, son équipe gagne cinq minutes supplémentaires pour la suite de l'escape game, mais elle perd trois minutes en cas d'échec.

On considère que le résultat d'un joueur n'a pas d'influence sur celui des autres joueurs.

On note X la variable aléatoire donnant la durée (algébrique) gagnée par l'équipe à l'issue de ce jeu.

- On considère que l'équipe compte deux joueurs.
 - À l'aide d'un arbre pondéré, déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .
 - Calculer l'espérance mathématique de X .
 - Interpréter concrètement cette espérance mathématique.
- Reprendre la question 1. avec une équipe de trois joueurs.

Ressources en +
sur le site collection :
lycee.hachette-
education.com/decllic/
tle-comp



Consolider les bases

Un professeur de mathématiques propose à ses élèves, pour évaluer leurs connaissances, un QCM composé de trois questions. Chaque question comporte quatre propositions dont une seule est exacte. Bastien, peu enclin à réfléchir ce matin-là, fait confiance à sa « bonne étoile » et décide de répondre au hasard et de manière indépendante à chacune des trois questions posées.

- En exploitant un arbre de probabilités, déterminer :
 - la probabilité que Bastien réponde correctement aux trois questions ;
 - la probabilité que Bastien donne trois réponses inexactes ;
 - la probabilité que Bastien donne une réponse exacte et deux inexactes.
- On note X la variable aléatoire donnant le nombre de réponses exactes de Bastien à l'issue du QCM. Déterminer la loi de probabilité de X , puis calculer son espérance.
- Le professeur utilise le barème suivant pour évaluer le travail de ses élèves : toute bonne réponse est gratifiée de deux points et toute mauvaise réponse est sanctionnée d'un point. On note Y la variable aléatoire donnant le nombre (algébrique) de points obtenus à l'issue du QCM. Calculer l'espérance de Y et en donner une interprétation.

Objectif

Remobiliser la notion de variable aléatoire dans le cadre d'une répétition d'épreuves indépendantes.

Info

On répète ici trois fois la même **expérience aléatoire** qui aboutit à deux issues qu'on peut appeler **Succès** (Bastien répond correctement à la question) et **Échec** (Bastien ne répond pas correctement). Une telle expérience est appelée épreuve de Bernoulli.

Info

La variable aléatoire X compte le nombre de Succès à l'issue des trois épreuves de Bernoulli. La loi de probabilité de X est appelée loi binomiale de paramètres :

- $n = 3$ (trois épreuves) ;
- $p = \frac{1}{4}$ (probabilité de Succès).

Situation 1 Chemins à Manhattan...

TRAVAIL DE GROUPE

Objectif

Introduire les coefficients binomiaux et leurs propriétés.

Sonia participe à un échange franco-américain à Manhattan, quartier de New York où les avenues sont orientées nord-sud et les rues est-ouest. Chaque matin, elle étudie dans un institut de langues I situé à 6 pâtés de maison à l'est et 7 pâtés de maison au nord de son lieu de résidence R (cf. figure ci-contre). Pour se rendre à l'institut, elle parcourt alors la longueur de 13 pâtés de maison (elle se dirige uniquement vers le nord et l'est). L'objectif de cette activité est de déterminer le nombre de chemins possibles qui mènent du point R au point I (on a représenté ci-contre l'un de ces chemins).

1 Étude de cas particuliers

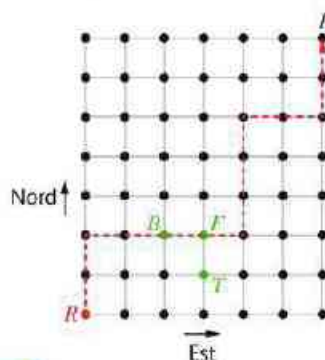
À proximité de son lieu de résidence, Sonia fréquente régulièrement une bibliothèque, un salon de thé et une salle de fitness matérialisée par B , T et F sur le plan ci-contre.

- Déterminer le nombre de chemins qui mènent du point R au point B , puis le nombre de chemins qui mènent du point R au point T .
- En déduire le nombre de chemins qui mènent du point R au point F .

2 Notion de coefficient binomial

- Tout chemin du point R au point B compte exactement 2 déplacements vers l'est parmi les 4 déplacements. Le nombre total de tels chemins se note $\binom{4}{2}$. D'après ce qui précède, quelle est la valeur de $\binom{4}{2}$?
- De même, préciser la valeur de $\binom{4}{3}$ et $\binom{5}{3}$. Quelle relation peut-on écrire entre ces trois coefficients binomiaux ?

- En exploitant la relation précédente à d'autres points du plan, répondre au problème posé.



Aide

- Pour se rendre du point R au point F , on doit nécessairement passer par B ou T .

Info

- Le nombre $\binom{4}{2}$ est appelé coefficient binomial et se lit « 2 parmi 4 ».

Info

- Cette relation, appelée relation de Pascal, permet de calculer de proche en proche n'importe quel coefficient binomial.

Situation 2 Tirages successifs dans une urne

On considère une urne contenant cinq boules indiscernables au toucher : 3 rouges et 2 noires. On répète quatre fois l'épreuve consistant à prélever une boule de l'urne, à noter sa couleur, puis à la remettre dans l'urne. On s'intéresse au nombre de fois où une boule rouge a été prélevée de l'urne.

1 Le tirage d'une boule dans l'urne constitue une **épreuve de Bernoulli**. Préciser l'événement Succès S et sa probabilité de réalisation.

On répète cette épreuve de Bernoulli quatre fois dans les mêmes conditions et de manière indépendante : on constitue ainsi un **schéma de Bernoulli** à quatre épreuves.

On note X la variable aléatoire, qui, à l'issue d'un schéma de Bernoulli à quatre épreuves, compte le nombre de Succès obtenus.

2 Simulations en Python de schémas de Bernoulli PYTHON

a. Compléter les fonctions Python ci-contre. La fonction `epreuve()` permet de simuler une épreuve de Bernoulli et la fonction `schema()` permet de simuler un schéma de Bernoulli à 4 épreuves et retourne le nombre de Succès obtenus à l'issue du schéma.

b. On souhaite simuler n schémas de Bernoulli (avec $n \in \mathbb{N}^*$) et stocker dans une liste les fréquences d'apparition du nombre de Succès. Compléter la fonction `repetition_schema(n)` qui effectue ces simulations et retourne la liste des fréquences d'apparition.

c. Effectuer des simulations pour $n = 10$, $n = 1000$ puis $n = 10\,000$. Quelles observations peut-on faire ?

3 Loi de probabilité de X : exploitation d'un arbre pondéré

Construire un arbre pondéré modélisant le schéma de Bernoulli, puis l'exploiter pour répondre aux questions suivantes.

a. Calculer les probabilités $P(X = 0)$ et $P(X = 4)$.

b. Combien de chemins de l'arbre correspondent à la réalisation d'un Succès et de trois Échecs ? En déduire le calcul de la probabilité $P(X = 1)$. Par une méthode analogue, déterminer $P(X = 3)$.

c. Exprimer, à l'aide d'un coefficient binomial, le nombre de chemins correspondant à la réalisation de deux Succès et deux Échecs. Quelle est la probabilité de chacun de ces chemins ?

Calculer alors la probabilité $P(X = 2)$.

d. Confronter les probabilités calculées avec les fréquences obtenues lors des simulations de la question **2**.

Objectif

Exploiter des simulations et les coefficients binomiaux pour évaluer des probabilités dans le cadre d'un schéma de Bernoulli.

Rappel

Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire admettant deux issues appelées Succès (S) et Échec (E) de probabilités notées respectivement p et $1-p$.



```
from random import random

def epreuve():
    if random() <= ... :
        return 'succes'
    else:
        return ...
```

```
def schema():
    nbr_succes=0
    for i in range(...):
        if epreuve()=='succes':
            nbr_succes+=...
    return ...
```

```
def repetition_schema(n):
    frequences=[0,0,0,0,0]
    for i in range(n):
        nbr_succes=schema()
        frequences[nbr_succes]+=...
    return ...
```

Situation 3 Vous avez dit truquée ? TRAVAIL DE GROUPE

On dispose de deux pièces dont une seule est truquée :



1 Individuellement, réfléchir à un protocole permettant d'identifier la pièce truquée.

2 En groupe, en analysant les résultats obtenus dans le fichier `delecte_ch08_p199_situation3.csv`, identifier, si possible, la pièce truquée.

Objectif

Sensibiliser à la notion de test statistique.

1 Loi uniforme discrète

a Définition

Définition La variable aléatoire X suit la loi uniforme discrète sur $[[a; b]]$ (avec a et b entiers) si :

- X prend toutes les valeurs entières de $[[a; b]]$:
- $P(X = a) = P(X = a+1) = \dots = P(X = b) = \frac{1}{b-a+1}$

b Espérance

Propriété Si la variable aléatoire X suit la loi uniforme discrète sur $[[a; b]]$, alors son espérance vérifie $E(X) = \frac{a+b}{2}$.

Démonstration

La loi de X peut se représenter ainsi :

| | | | | |
|------------|-----|-------|-----|-----|
| k | a | $a+1$ | ... | b |
| $P(X = k)$ | p | p | ... | p |

avec $p = \frac{1}{b-a+1}$

$$E(X) = p \times a + p(a+1) + \dots + p \times b$$

$$= p(a + (a+1) + \dots + b) = p \times (b-a+1) \times \frac{a+b}{2} = \frac{b-a+1}{b-a+1} \times \frac{a+b}{2} = \frac{a+b}{2}$$

Info

Si a et b sont deux entiers tels que $a \leq b$, on note $[[a; b]]$ l'ensemble des entiers n tels que $a \leq n \leq b$; il contient $b-a+1$ entiers.

Exemple

Dans une urne, 20 boules indiscernables au toucher sont numérotées de 10 à 29. On tire une boule au hasard. Si la variable aléatoire X prend pour valeur le numéro k de la boule, alors X suit la loi uniforme discrète sur $[[10; 29]]$ et, pour tout $k \in [[10; 29]]$:

$$P(X = k) = \frac{1}{29-10+1} = \frac{1}{20}$$

$$E(X) = \frac{10+29}{2} = 19,5$$

Remarque

$S = a + (a+1) + \dots + b$ est la somme des $(b-a+1)$ premiers termes d'une suite arithmétique de premier terme a et de raison 1. Donc : $S = (b-a+1) \times \frac{a+b}{2}$.

2 Épreuve et loi de Bernoulli

a Définitions

Définition Une **épreuve de Bernoulli** est une épreuve aléatoire n'ayant que deux issues (souvent appelées « Succès » et « Échec ») de probabilités respectives p et $(1-p)$, avec $p \in [0; 1]$.

Définition Soit p un réel de l'intervalle $[0; 1]$. On dit que la variable aléatoire X suit la **loi de Bernoulli** de paramètre p si :

- X prend la valeur 0 si l'issue de l'épreuve est l'Échec ou la valeur 1 si l'issue de l'épreuve est le Succès ;
- $P(X = 1) = p$ et $P(X = 0) = 1-p$.

b Espérance, écart type

Propriété Soit X une variable aléatoire qui suit la **loi de Bernoulli** de paramètre p , alors :

- l'espérance de X est $E(X) = p$
- la variance et l'écart type de X sont respectivement égaux à :

$$V(X) = p(1-p) \quad \sigma(X) = \sqrt{p(1-p)}$$

Démonstration

La loi de X peut se représenter ainsi :

| | | |
|------------|-------|-----|
| k | 0 | 1 |
| $P(X = k)$ | $1-p$ | p |

$$E(X) = 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1)$$

$$= p$$

D'après la formule de Koëning :

$$V(X) = P(X = 0) \times 0^2$$

$$+ P(X = 1) \times 1^2 - p^2$$

$$= p - p^2 = p(1-p)$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{p(1-p)}$$

Exemples

- On lance une pièce équilibrée, si le Succès est « obtenir Face », la variable aléatoire F , qui vaut 1 en cas de Succès et 0 sinon, suit la loi de Bernoulli de paramètre 0,5.
- Dans le choix d'une carte dans un jeu de 32 cartes classique, si le Succès est « obtenir la dame de cœur », la variable aléatoire D , qui vaut 1 en cas de Succès et 0 sinon, suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{32}$.

Rappels

$$E(X) = \sum_{k=0}^n p_k \cdot x_k$$

$$V(X) = \sum_{k=0}^n p_k (x_k - E(X))^2$$

$$= \left(\sum_{k=0}^n p_k x_k^2 \right) - (E(X))^2$$

(Formule de Koëning)



1 Identifier des situations : loi uniforme, loi de Bernoulli

Énoncé On lance deux dés à six faces classiques équilibrés, l'un rouge, l'autre bleu. On définit les variables aléatoires :

- R et B qui ont pour valeurs respectives les points des faces supérieures du dé rouge et du dé bleu.
- S qui a pour valeur la somme des points obtenus.
- T qui a pour valeur 6 fois les points obtenus par le dé rouge additionnés aux points obtenus par le dé bleu.
- H qui a pour valeur 1 si la somme des points obtenus est supérieure ou égale à huit et zéro sinon.

1. Déterminer la loi des variables aléatoires R et B .
2. Déterminer les valeurs que peut prendre la variable aléatoire S , puis indiquer si S suit une loi uniforme discrète et, dans l'affirmative, déterminer sur quel intervalle.
3. Même question pour la variable aléatoire T .
4. Justifier que la variable aléatoire H suit une loi de Bernoulli et préciser son paramètre p .

Solution

1. R prend toutes les valeurs entières entre 1 et 6, comme le dé est équilibré, on a bien $P(R=1) = P(R=2) = \dots = P(R=6) = \frac{1}{6}$. De même pour B .

| | | dé bleu | | | | | |
|----------|---|---------|---|---|----|----|----|
| | | S | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| dé rouge | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

| | | dé bleu | | | | | |
|----------|---|---------|----|----|----|----|----|
| | | T | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| dé rouge | 1 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| | 2 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| | 3 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| | 4 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| | 5 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 |
| | 6 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 |

Remarque

Une variable aléatoire définie comme combinaison de deux variables aléatoires qui suivent une loi uniforme ne suit pas forcément une loi uniforme !

Point méthode

1. Un tableau (ou un autre visuel) qui permet de recenser tous les cas est souvent une aide précieuse.

2. On remarque que S prend toutes les valeurs entières de $[[2; 12]]$, mais $P(S=2) \neq P(S=7)$, donc S ne suit pas la loi uniforme.
3. T prend toutes les valeurs de $[[7; 42]]$ et, pour tout $k \in [[7; 42]]$, $P(T=k) = \frac{1}{42-7+1} = \frac{1}{36}$, donc T suit la loi uniforme discrète sur $[[7; 42]]$.
4. H ne prend que deux valeurs 0 ou 1, et le tableau construit pour la variable S permet de trouver la probabilité du Succès : $p = P(S \geq 8) = \frac{15}{36}$.

J'applique

- 1 Pour chacune des situations suivantes, vérifier si la variable aléatoire suit une loi uniforme discrète ou une loi de Bernoulli.

Dans l'affirmative, préciser la valeur du paramètre de la loi.

Situation 1

Dans un sac, il y a 50 jetons indiscernables au toucher numérotés de 1 à 50. Les jetons portant un nombre pair sont rouges, les autres sont verts.

X est la variable aléatoire qui prend la valeur du jeton choisi.

R est la variable aléatoire qui vaut 1 si le jeton est rouge et 0 sinon.

Situation 2

Dans un jeu de 52 cartes, les Valets, les Dames et les Rois prennent respectivement les valeurs 11 ; 12 et 13. Les autres cartes ont pour valeur celle affichée sur la carte. On choisit une carte au hasard.

N est la variable aléatoire qui vaut 1 si la carte est Pique ou Trèfle, 0 sinon.

Y est la variable aléatoire qui vaut la valeur de la carte augmentée de 10 si la couleur est Trèfle, de 20 si la couleur est Carreau, de 30 si la couleur est Cœur.

- 2 Proposer deux situations (autres que celles développées ici) qui peuvent être modélisées par une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli.

3 Schéma de Bernoulli

Soit n un entier naturel non nul, un **schéma de Bernoulli** est la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

a Représentation par un arbre

On peut représenter un schéma de Bernoulli à l'aide d'un arbre pondéré. L'arbre permet de compter le nombre de chemins correspondant à un nombre de succès donnés.

Ici, **3 chemins** parmi les 8 sont composés de 2 Succès et 1 Échec.

b Coefficients binomiaux

Définition On considère un schéma de Bernoulli correspondant à la répétition de n épreuves de Bernoulli ($n > 0$). Le nombre de façons d'obtenir k Succès ($0 \leq k \leq n$) parmi les n épreuves se note $\binom{n}{k}$ et se lit « k parmi n ». Les nombres $\binom{n}{k}$ s'appellent les *coefficients binomiaux*.

Dans un arbre à n niveaux, $\binom{n}{k}$ est le nombre de chemins comportant k Succès et $(n-k)$ Échecs.

- $\binom{n}{0} = 1$, car il n'y a qu'un seul chemin ne contenant aucun Succès ;
- $\binom{n}{n} = 1$, car il n'y a qu'un seul chemin contenant n Succès ;
- $\binom{n}{1} = n$, car il y a exactement n chemins contenant un seul Succès.

c Triangle de Pascal

Propriétés Soient n et k deux entiers naturels.

- **Propriété 1 :** $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ pour $0 \leq k \leq n$
- **Propriété 2 :** $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ pour $1 \leq k \leq n-1$



Idées de démonstrations

Propriété 1

Parmi les n épreuves, s'il y a k Succès, il y a $(n-k)$ Échecs, il y a donc autant de façons d'obtenir k Succès que d'obtenir les $(n-k)$ Échecs correspondants.

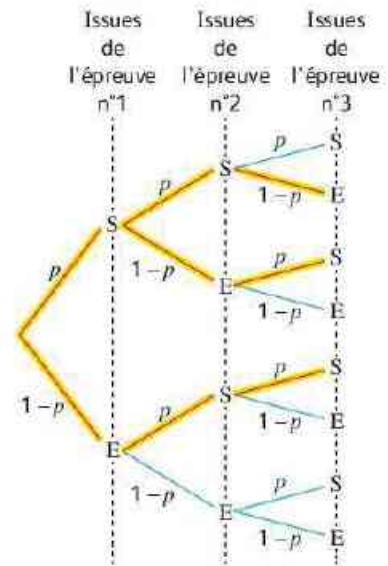
Propriété 2

Un chemin de longueur n avec k lettres S : peut commencer par E , suivi d'un chemin de longueur $(n-1)$ qui contient k lettres S (il y a $\binom{n-1}{k}$ chemins de ce type) ou bien commencer par S suivi d'un chemin de longueur $(n-1)$ qui ne contient plus que $(k-1)$ lettres S (il y a $\binom{n-1}{k-1}$ chemins de ce type).

Calcul des coefficients binomiaux à l'aide du Triangle de Pascal :

Pour tout $n > 0$: $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ avec la convention $\binom{0}{0} = 1$

Puis, pour $1 \leq k \leq n-1$: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$



Dans cet arbre, exactement **3 chemins** comptent **2 Succès** parmi les **3 épreuves**, ainsi on a $\binom{3}{2} = 3$.

Remarque

De même, $\binom{n}{n-1} = n$.

Le triangle de Pascal

| $n \backslash k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|------------------|---|---|----|----|---|---|
| 0 | 1 | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | | | | |
| 2 | 1 | 2 | 1 | | | |
| 3 | 1 | 3 | 3 | 1 | | |
| 4 | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | |
| 5 | 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 |

On lit : $\binom{3}{2} = 3$

On calcule $\binom{5}{3} = \binom{4}{3} + \binom{4}{2}$

En dehors des valeurs 1, chaque case contient la somme de la case du dessus et de celle immédiatement à sa gauche.

La présentation ci-dessous du triangle de Pascal met en évidence la symétrie des coefficients.

| | | | | | | |
|---|---|----|----|---|---|---|
| | | | 1 | | | |
| | | 1 | 2 | 1 | | |
| | 1 | 3 | 3 | 1 | | |
| | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | |
| 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | 1 |



2 Déterminer des coefficients binomiaux, triangle de Pascal

Énoncé Les questions 1. à 4. sont indépendantes.

1. Donner la valeur des coefficients binomiaux suivants : $\binom{20}{0}$; $\binom{20}{1}$; $\binom{20}{19}$ et $\binom{20}{20}$.

2. a. Reprendre le triangle de Pascal du cours et le compléter jusqu'au rang $n = 7$.

b. En utilisant ce triangle de Pascal, déterminer la valeur des coefficients binomiaux suivants :

$$\binom{5}{3} ; \binom{7}{4} ; \binom{7}{5} \text{ et } \binom{8}{5}$$

3. Calculer $\binom{20}{8}$ à la calculatrice puis, sans calculatrice, donner un autre coefficient binomial qui lui est égal.

4. On considère un schéma de Bernoulli composé de 5 épreuves de Bernoulli et l'arbre de probabilités associé. Sans construire cet arbre, déterminer le nombre de chemins de cet arbre composé :

a. uniquement d'Échecs ;

b. de deux Succès et de trois Échecs.

Solution

1. $\binom{20}{0} = 1$; $\binom{20}{1} = 20$; $\binom{20}{19} = \binom{20}{1} = 20$; $\binom{20}{20} = \binom{20}{0} = 1$

2. a. Triangle de Pascal complété :

| $n \backslash k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|------------------|---|---|----|----|----|----|---|---|
| 0 | 1 | | | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | | | | | | |
| 2 | 1 | 2 | 1 | | | | | |
| 3 | 1 | 3 | 3 | 1 | | | | |
| 4 | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | | |
| 5 | 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | | |
| 6 | 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 | |
| 7 | 1 | 7 | 21 | 35 | 35 | 21 | 7 | 1 |

b. Par lecture du triangle de Pascal : $\binom{5}{3} = 10$; $\binom{7}{4} = 35$; $\binom{7}{5} = 21$.

Par la relation de Pascal, on a : $\binom{8}{5} = \binom{7}{4} + \binom{7}{5} = 35 + 21 = 56$.

3. La calculatrice donne $\binom{20}{8} = 125\,970$. Par la propriété de symétrie des coefficients binomiaux, on a également $\binom{20}{8} = \binom{20}{20-8} = \binom{20}{12}$.

4. Le nombre de chemins composés :

a. uniquement d'Échecs est égal à $\binom{5}{0} = 1$;

b. de deux Succès et de trois Échecs est égal à $\binom{5}{2} = \binom{5}{3} = 10$.

J'applique

3. Déterminer les coefficients binomiaux suivants :

$$\binom{10}{1} ; \binom{10}{9} ; \binom{2020}{0} \text{ et } \binom{2020}{2019}$$

4. Déterminer $\binom{10}{7}$ et $\binom{10}{8}$ à l'aide du triangle de Pascal. Quels autres coefficients binomiaux peut-on alors déduire ?

5. À la calculatrice, déterminer $\binom{25}{14}$. Sans calculatrice, donner un coefficient binomial qui lui est égal.

6. À l'aide du triangle de Pascal, déterminer la valeur de la somme $\binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5}$.

Point méthode

1. On exploite ici, pour $n \in \mathbb{N}$, les relations :

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

Point méthode

2. b. La relation de Pascal permet de calculer les coefficients binomiaux $\binom{8}{k}$ avec $k \in [0; 8]$ connaissant les coefficients au niveau $n = 7$.

Aide calculatrice

Calcul de $\binom{n}{k}$

TI MATHS PROB 3 combinaison

Casio OPTN PRB nCr

NumWorks boîte à outils, menu Dénombrement

Point méthode

4. $\binom{n}{k}$ correspond au nombre de façons d'obtenir k Succès parmi les n épreuves d'un schéma de Bernoulli.

4 Loi binomiale

Soit n un entier naturel non nul et p un nombre réel tel que $0 \leq p \leq 1$.

a La loi du nombre de Succès

Définition et théorème Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de Succès dans un schéma de Bernoulli à n épreuves où p désigne la probabilité du Succès. Cette variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres n et p (on écrit $\mathcal{B}(n; p)$).

- X prend toutes les valeurs entières de $\llbracket 0; n \rrbracket$
- pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$



Idée de démonstration

On imagine un arbre à n niveaux : il y a $\binom{n}{k}$ chemins composés de k Succès et $(n-k)$ Échecs. La probabilité de chacun de ces chemins se calcule à l'aide du principe multiplicatif et est égale à $p^k \times (1-p)^{n-k}$ d'où :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Exemple 1

On lance 5 fois un dé tétraédrique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 (As) à 4. X est la variable aléatoire comptant le nombre d'As obtenus. X suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}(5; 0,25)$.

La probabilité d'obtenir exactement trois As à l'issue des cinq lancers est :

$$P(X = 3) = \binom{5}{3} \times 0,25^3 \times (1-0,25)^{5-3} = 10 \times 0,25^3 \times 0,75^2 \approx 0,0879$$

Exemple 2

Samuel répond au hasard aux 20 questions d'un QCM. Chaque question propose 3 réponses dont une seule est exacte.

La variable aléatoire N qui compte le nombre de bonnes réponses obtenues par Samuel suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(20; \frac{1}{3}\right)$.

La probabilité d'avoir au moins 10 bonnes réponses est :

$$P(N \geq 10) = 1 - P(N \leq 9) \approx 0,092$$

b Espérance, écart type

Propriétés admises Soit X une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{B}(n; p)$.

- L'espérance de X est $E(X) = np$.
- La variance et l'écart type de X sont données par :

$$V(X) = np(1-p) \text{ et } \sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$$



Démonstration dans le cas où $n = 2$

Si X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(2; p)$, grâce à un arbre pondéré, on obtient la loi de probabilité de X ci-contre.

| k | 0 | 1 | 2 |
|------------|-----------|-----------|-------|
| $P(X = k)$ | $(1-p)^2$ | $2p(1-p)$ | p^2 |

$$E(X) = 0 \times (1-p)^2 + 1 \times 2p(1-p) + 2 \times p^2 = 2p - 2p^2 + 2p^2 = 2p$$

c Représentation graphique

À l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel, on peut obtenir une représentation de la loi binomiale sous forme d'un diagramme à bâtons.

Calcul des probabilités

On peut exploiter un arbre pondéré illustrant le schéma de Bernoulli associé à cette loi binomiale lorsque n est relativement petit. Quand le nombre de chemins contenant k Succès ne peut être représenté par un arbre, on calcule les probabilités (ou les coefficients binomiaux) à l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel.

À retenir

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$$

nombre de chemins menant à k Succès parmi les n épreuves
 k Succès
 $n - k$ Échecs

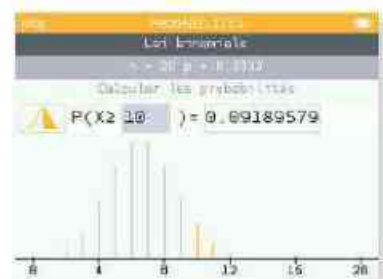
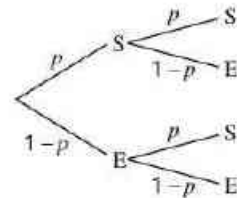
$\binom{5}{3}$ peut se calculer à l'aide du triangle de Pascal.

Notation

L'événement « N est au moins égal à 10 » s'écrit aussi $\{N \geq 10\}$.

Remarque

Certaines calculatrices ne permettent que de calculer $P(X \leq k)$ d'où la nécessité de calculer la probabilité de l'événement contraire.



3 Calculer des probabilités dans le cadre d'une loi binomiale

Énoncé À 67 ans, le professeur Nofle enseigne encore au lycée, mais quand il fait cours, il a une chance sur sept de se tromper de chapitre. Aujourd'hui, il assure huit heures de cours à huit classes différentes. On suppose que l'erreur de chapitre pour une classe est indépendante de celle des autres classes.

La variable aléatoire X est le nombre de classes n'ayant pas eu cours avec le chapitre prévu.

- Justifier que X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.
- Calculer la probabilité que toutes les classes aient eu le cours prévu (arrondir au millième).
- Exprimer la probabilité que seules deux classes aient eu le cours prévu, puis calculer cette probabilité à l'aide des fonctions de la calculatrice.
- Déterminer une valeur approchée à 10^{-4} de la probabilité qu'au moins les trois quarts des classes aient eu le cours prévu.

Solution

1. Quand le professeur Nofle fait cours, il n'y a que deux issues possibles : il a traité le bon chapitre ou il n'a pas traité le bon chapitre. Il s'agit donc d'une épreuve de Bernoulli ; on répète huit fois cette épreuve indépendamment d'une classe à l'autre : on a donc un schéma de Bernoulli avec $n = 8$. X compte le nombre de Succès, l'événement Succès étant ne pas avoir le chapitre prévu, qui a pour probabilité $\frac{1}{7}$. Donc X suit la loi binomiale

$$\mathcal{B}\left(8; \frac{1}{7}\right).$$

2. L'événement « toutes les classes ont le cours prévu » s'écrit $\{X = 0\}$. La probabilité du Succès est $\frac{1}{7}$, donc celle de l'Échec est $\frac{6}{7}$.

$$P(X = 0) = \left(\frac{6}{7}\right)^8 \approx 0,291$$

3. L'événement « seules deux classes ont le cours prévu » s'écrit $\{X = 6\}$.

$$P(X = 6) = \binom{8}{6} \times \left(\frac{1}{7}\right)^6 \times \left(\frac{6}{7}\right)^2$$

À l'aide de la calculatrice, on obtient : $P(X = 6) \approx 0,0002$.

4. Au moins les trois quarts des classes ont eu le cours prévu revient à « au moins 6 classes ont eu le cours prévu » ; donc 2 classes au maximum n'ont pas eu le cours prévu. Il faut calculer : $P(X \leq 2) \approx 0,90642$.

Point méthode

2. Pour se figurer l'événement $\{X = 0\}$, on imagine un arbre à 8 niveaux et on suit le chemin qui ne comporte que des Échecs.

Aide calculatrice

| | $P(X = k)$ | $P(X \leq k)$ |
|----------|-------------------|---------------|
| TI | binomFdp | binomFRép |
| Casio | Bpd | Bcd |
| Numworks | menu probabilités | |

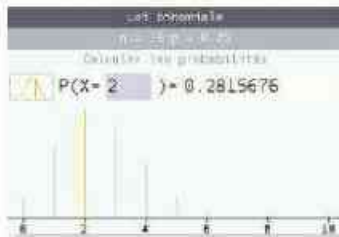
Point méthode

4. On peut calculer $P(X \leq 2)$ directement à l'aide de la calculatrice ou écrire :

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

J'applique

7 1. Répondre aux questions à l'aide de la copie d'écran de la calculatrice.



a. Lire les paramètres de la loi binomiale représentée.

b. Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de $P(X = 2)$.

c. Avec la précision permise par le graphique, donner une estimation de $P(X \leq 2)$.

d. Lire la probabilité $P(X = 9)$.

2. À l'aide d'une calculatrice, calculer $P(X \leq 2)$ et $P(X = 9)$ à 10^{-5} près.

8 Quand il joue au baby-foot avec son fils, Raphaël n'a qu'une chance sur trois d'arriver à gagner la partie. Ce soir, ils décident de faire 5 parties.



1. Donner la valeur exacte, puis approchée de la probabilité que Raphaël « sauve l'honneur » en gagnant au moins une partie.

2. Sur un très grand nombre de soirées à cinq parties, combien de parties, en moyenne, Raphaël peut-il espérer gagner ?

5 Échantillonnage et estimation

a Intervalle de fluctuation et prise de décision

Dans une population, on pense pouvoir affirmer que la proportion d'apparition d'un caractère est p . Comment décider si cette affirmation est acceptable ou non ?

Définition Si X est une variable aléatoire qui suit la binomiale $\mathcal{B}(n; p)$, alors un **intervalle de fluctuation** au seuil $1 - \alpha$ ($0 \leq \alpha \leq 1$) de la fréquence

$F = \frac{X}{n}$ est $I = \left[\frac{k_1}{n}; \frac{k_2}{n} \right]$ où k_1 et k_2 sont les plus petits entiers vérifiant :

$$P(X \leq k_1) > \frac{\alpha}{2} \text{ et } P(X \leq k_2) \geq 1 - \frac{\alpha}{2}$$

Règle de décision. Avec les notations précédentes, on formule l'hypothèse « Dans la population, la proportion du caractère étudié est p ».

- si $f_{\text{obs}} \in I$, alors on ne rejette pas l'hypothèse ;
- si $f_{\text{obs}} \notin I$, alors on rejette l'hypothèse (avec une probabilité α de la rejeter à tort).

Exemple : Comment décider qu'une pièce de monnaie est équilibrée ?

① On fait l'hypothèse que l'apparition de Pile est $p = 0,5$.

On lance $n = 50$ fois la pièce. La variable aléatoire X qui donne le nombre de Pile suit la loi binomiale $\mathcal{B}(50; 0,5)$.

② Après 50 lancers, on observe 19 apparitions de Pile donc $f_{\text{obs}} = \frac{19}{50}$.

③ À l'aide de la calculatrice, on cherche l'intervalle de fluctuation à 95 %, c'est-à-dire $1 - \alpha = 0,95$ soit $\alpha = 0,05$. On détermine les plus petits entiers k_1 et k_2 tels que $P(X \leq k_1) > 0,025$ et $P(X \leq k_2) \geq 0,975$. On obtient $k_1 = 18$ et $k_2 = 32$. L'intervalle de fluctuation pour la fréquence est $I = \left[\frac{18}{50}; \frac{32}{50} \right]$.

④ Comme $f_{\text{obs}} \in I$, on ne rejette pas l'hypothèse que la proportion de Pile est 0,5, c'est-à-dire que la pièce est équilibrée.

b Intervalle de confiance et estimation

Dans une population, on cherche à estimer, à partir d'un échantillon, la proportion inconnue p d'un caractère donné.

Propriété admise Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$ (p est la proportion **inconnue** d'apparition d'un caractère) et

$F = \frac{X}{n}$ la fréquence associée à X .

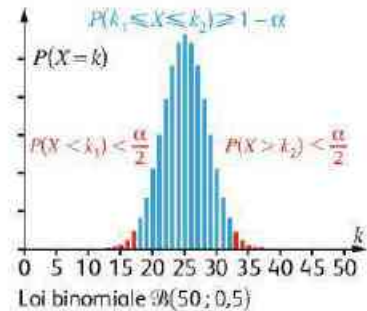
Alors, pour n suffisamment grand, p appartient à l'intervalle

$$\left[F - \frac{1}{\sqrt{n}}; F + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] \text{ avec une probabilité supérieure ou égale à } 95 \%$$

Exemple

Un sac opaque contient un très grand nombre de boules rouges ou bleues indiscernables au toucher. Lors d'un tirage de 100 boules, on obtient 41 boules rouges et 59 boules bleues. La fréquence observée f_{obs} de boules rouges dans l'échantillon est donc 0,41.

L'intervalle $\left[0,41 - \frac{1}{\sqrt{100}}; 0,41 + \frac{1}{\sqrt{100}} \right] = [0,40; 0,42]$ est un **intervalle de confiance au niveau de confiance de 95%** de la proportion p de boules rouges dans le sac.



Méthode

- ① On procède au tirage aléatoire et avec remise de n individus. On définit la variable aléatoire X comptant le nombre d'individus possédant le caractère observé. X suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$.
- ② On calcule la fréquence f_{obs} du caractère observé dans l'échantillon prélevé.
- ③ On calcule les bornes de l'intervalle de fluctuation associé à la fréquence $F = \frac{X}{n}$ associée à la variable aléatoire X .
- ④ On applique la règle de décision.

Méthode

- ① On procède au tirage d'un échantillon de n individus.
- ② On calcule la fréquence f_{obs} du caractère étudié dans l'échantillon.
- ③ On calcule les bornes de l'intervalle de confiance pour la proportion inconnue p .

Remarque

- Si la population est « suffisamment grande par rapport à n », le tirage **sans** remise de n individus peut être considéré comme un tirage **avec** remise.
- On ne peut pas savoir si p appartient ou non à cet intervalle de confiance...

Énoncé Dans un casino, une machine est programmée pour que la fréquence du Succès soit de 0,06.

1. Un contrôleur de la brigade des jeux veut vérifier le bon réglage de la machine, pour cela, il procède à une simulation de 100 parties et constate que 4 d'entre elles sont gagnantes.

- Déterminer l'intervalle de fluctuation à 95 % pour la fréquence dans cette situation.
- Que va conclure le contrôleur ?

2. Un joueur apprend que la machine est programmée pour que la fréquence du Succès soit 0,06.

- S'il joue 77 parties, combien de parties peut-il espérer gagner ?
- Combien de parties doit-il jouer pour que la probabilité de gagner au moins une fois sur l'ensemble des parties jouées soit supérieure à 90 % ?



Solution

1. a. Chaque partie est indépendante de la précédente et n'a que deux issues (gagné ou perdu). La variable aléatoire X qui compte le nombre de parties gagnées suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}(100; 0,06)$.

L'intervalle de fluctuation à 95 % pour la fréquence est $\left[\frac{k_1}{100}; \frac{k_2}{100} \right]$ avec k_1 le plus petit entier tel que $P(X \leq k_1) > 0,025$ et k_2 le plus petit entier tel que $P(X \leq k_2) \geq 0,975$. On trouve $I = \left[\frac{2}{100}; \frac{11}{100} \right]$.

b. On veut tester l'hypothèse « La machine est correctement paramétrée ». La fréquence observée est $f_{\text{obs}} = \frac{4}{100}$. Comme $f_{\text{obs}} \in I$, le contrôleur ne rejette pas l'hypothèse du bon réglage de la machine.

2. a. Soit G la variable aléatoire donnant le nombre de parties gagnées par le joueur. G suit la loi binomiale $\mathcal{B}(77; 0,06)$. Le nombre de gain moyen est donné par $E(G) = 77 \times 0,06 = 4,62$.

Donc le joueur peut espérer gagner environ 4 ou 5 parties.

b. Dans ce cas, G suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n; 0,06)$. On cherche le nombre n tel que : $P(G \geq 1) \geq 0,9 \Leftrightarrow 1 - P(G = 0) \geq 0,9 \Leftrightarrow 0,94^n \leq 0,1$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,1)}{\ln(0,94)} \Leftrightarrow n \geq 38$$

Si le joueur fait 38 parties, il a 90 % de chances d'en avoir au moins une gagnante.

Point méthode

1. a. Penser à vérifier qu'il s'agit d'une loi binomiale puis déterminer ses paramètres.

Point méthode

1. b. Ne pas oublier de formuler l'hypothèse qui est testée !

Point méthode

2. b. Pour calculer $P(G \geq 1)$, il est souvent plus facile de calculer la probabilité de l'événement contraire, c'est-à-dire $P(G = 0)$. Un seul chemin ne contient aucun Succès, donc $P(G = 0) = (1 - p)^n$ (avec n longueur du chemin et p la probabilité du Succès).

J'applique

9 Une usine fabrique des pièces dont le dernier contrôle qualité a montré que 92 % d'entre elles sont conformes aux normes en vigueur. Au bout de quelques semaines, on veut vérifier si la proportion de pièces conformes est restée la même. Dans un prélèvement au hasard de 250 pièces, 225 sont conformes. Doit-on accepter ou rejeter au seuil de 99 % l'hypothèse « 92 % des pièces de la production sont conformes aux normes en vigueur » ?

10 En préparant une paëlla congelée conditionnée en sachet de 900 grammes, Louna constate qu'il ne contient que 4 crevettes. Une crevette décortiquée

pèse 9 grammes, elle modélise donc la situation en considérant que le sachet est composé de 100 portions de 9 grammes. À chaque portion, elle associe la variable aléatoire C qui vaut 1 si c'est une crevette et 0 sinon.

- Déterminer la loi de C et l'un de ses paramètres.
- En déduire l'intervalle de confiance de p au seuil de 95 %.
- Interpréter ce résultat en donnant un encadrement du nombre de crevettes qu'elle peut espérer trouver dans un sachet de cette paëlla.

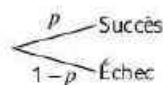
2. Elle lit la liste des ingrédients : « Contient 5 % de crevettes décortiquées. » Que penser de cette affirmation ?

Loi uniforme discrète

- X prend toutes les valeurs entières sur $[[a; b]]$.
- Pour tout $k \in [[a; b]]$, $P(X = k) = \frac{1}{b - a + 1}$.
- $E(X) = \frac{a + b}{2}$
- **Situations classiques** : lancer d'un dé équilibré, tirage de boules numérotées et indiscernables.

Épreuve et loi de Bernoulli

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire qui admet deux issues.



- X prend les valeurs 0 (Échec) ou 1 (Succès).
- $P(X = 0) = 1 - p$
- $P(X = 1) = p$
- $E(X) = p$
- $\sigma(X) = \sqrt{p(1 - p)}$

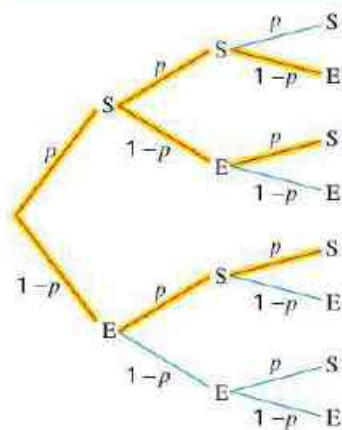
Schéma de Bernoulli et loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$

- La répétition à l'identique et de façon indépendante de n épreuves de Bernoulli de probabilité p donne un schéma de Bernoulli.
- X compte le nombre de Succès à l'issue du schéma et prend toutes les valeurs entières dans $[[0; n]]$.
- Pour tout $k \in [[0; n]]$, $P(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1 - p)^{n - k}$.
- $E(X) = np$; $\sigma(X) = \sqrt{np(1 - p)}$



nombre de chemins menant à k Succès parmi les n épreuves

Loi binomiale et arbre



$$P(X = 2) = \binom{3}{2} \times p^2 \times (1 - p)^1$$

Coefficients binomiaux et triangle de Pascal

L'entier $\binom{3}{2}$ se lit 2 parmi 3 et il vaut 3.

On calcule $\binom{5}{3} = \binom{4}{3} + \binom{4}{2}$.

L'entier $\binom{5}{3}$ se lit 3 parmi 5 et il vaut 10.

| $n \backslash k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|------------------|---|---|----|----|---|---|
| 0 | 1 | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | | | | |
| 2 | 1 | 2 | 1 | | | |
| 3 | 1 | 3 | 3 | 1 | | |
| 4 | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | |
| 5 | 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 |

Pour tous entiers n, k tels que $n > 0$ et $0 \leq k \leq n$, $\binom{n}{k}$ représente le nombre de chemins de longueur n ayant k Succès et par symétrie :

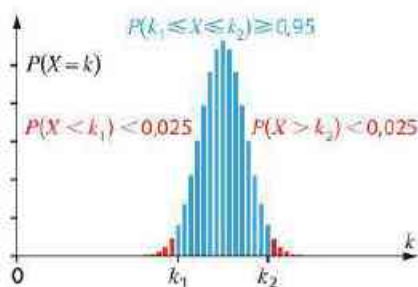
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n - k} \quad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n - 1} = n$$

Relation de Pascal

Pour tout $n \geq 1$ et $1 \leq k \leq n - 1$, on a :

$$\binom{n}{k} = \binom{n - 1}{k} + \binom{n - 1}{k - 1}$$

Intervalle de fluctuation



X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$.

L'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la fréquence $F = \frac{X}{n}$ est $\left[\frac{k_1}{n}; \frac{k_2}{n} \right]$. On prélève un échantillon.

Si $f_{obs} \notin I$, on rejette l'hypothèse que la proportion du caractère dans la population est égale à p .



Voir corrigés

QCM

Pour chacune des questions, indiquer la (ou les) bonne(s) réponse(s).

1. Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[[5; 20]]$.

a $P(X=4) = \frac{4}{15}$

b $P(X=4) = \frac{1}{16}$

c $E(X) = 12,5$

2. $\binom{10}{6}$ est égal à :

a $\binom{10}{4}$

b $\binom{6}{10}$

c $\frac{10}{6}$

3. $\binom{7}{2} + \binom{7}{3}$ est égal à :

a $\binom{7}{3}$

b $\binom{8}{3}$

c $\binom{7}{5}$

Dans les questions 4. à 8., on considère un schéma de Bernoulli de 7 répétitions dont la probabilité de Succès est $P(S) = \frac{2}{5}$. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de Succès à l'issue du schéma.

4. Le nombre de chemins dans l'arbre correspondant à $X=3$ est égal à :

a $\binom{7}{3}$

b 3

c 35

5. $P(X=4)$ est égale à :

a $\frac{3024}{15625}$

b $\binom{7}{4} \times \left(\frac{2}{5}\right)^3 \times \left(\frac{3}{5}\right)^4$

c $\binom{7}{4} \times \left(\frac{2}{5}\right)^4 \times \left(\frac{3}{5}\right)^3$

6. $P(X < 7)$ est égale à :

a 1

b $1 - \left(\frac{2}{5}\right)^7$

c $1 - \left(\frac{3}{5}\right)^7$

7. $P(X \geq 2)$ est égale à :

a $1 - P(X \leq 2)$

b $1 - P(X=0) - P(X=1)$

c $1 - P(X=2)$

8. L'espérance et la variance de X sont égales à :

a $E(X) = \sqrt{\frac{14}{5}}$

b $V(X) = \frac{42}{25}$

c $V(X) = \frac{6}{25}$

9. Si X suit $\mathcal{B}(15; 0,4)$, un intervalle de fluctuation à 95 % de la variable aléatoire fréquence $F = \frac{X}{15}$ est :

a $\left[\frac{2}{15}; \frac{2}{5}\right]$

b $\left[\frac{9}{15}; \frac{12}{15}\right]$

c $\left[\frac{3}{5}; \frac{7}{15}\right]$

vrai

ou faux ?

Indiquer pour chaque affirmation si elle est vraie ou fausse. Justifier.

Partie A. Dans une urne, on dispose cinq boules rouges numérotées de 1 à 5 et trois boules noires numérotées de 6 à 8 (toutes ces boules sont indiscernables). On prélève au hasard une boule. On note Y la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée et Z la variable aléatoire qui prend la valeur 0 si la boule tirée est rouge et 1 sinon.

1. Y suit une loi uniforme discrète sur $[[1; 8]]$.

2. Z suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{5}{8}$.

Partie B. On tire au hasard et avec remise une boule dans l'urne de la **partie A.** et on répète 24 fois ce tirage.

1. La probabilité d'obtenir exactement 13 boules rouges est égale à $\binom{24}{13} \times \left(\frac{3}{8}\right)^{13} \times \left(\frac{5}{8}\right)^{11}$.

2. Le nombre moyen de boules rouges obtenues est 15.

3. La probabilité d'obtenir au plus 12 boules rouges est environ 0,146.

Partie C. On souhaite vérifier l'hypothèse selon laquelle 67 % des français seraient prêts à changer leurs habitudes alimentaires pour des produits issus de l'agriculture biologique. Pour cela, on choisit au hasard 100 français. On constate que, parmi ceux-ci, seuls 60 seraient prêts à changer leurs habitudes alimentaires.

1. L'intervalle de fluctuation à 95 % permettant de valider (ou non) l'hypothèse est celui associé à la variable aléatoire fréquence $F = \frac{X}{60}$ où X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(60; 0,67)$.

2. Un tel intervalle de fluctuation à 95 % est $I = [0,58; 0,76]$.

3. L'hypothèse est rejetée avec un risque d'erreur de 5 %.

Automatismes et calculs

Automatismes transversaux

11 Écrire sous la forme d'une unique puissance les nombres suivants.

- $2^7 \times (2^{-3})^3$
- $\frac{3^5 \times 9^{-2}}{3^{-5}}$
- $\frac{5^4 \times 2^4}{10^8} \times \frac{100}{0,0001}$

12 Résoudre les équations suivantes sur l'intervalle I indiqué.

- $3x + 2(5x - 4) = -2x + 2$ sur $I = \mathbb{R}$
- $2x^2 - 4x = 6$ sur $I = \mathbb{R}$
- $(2x - 1)(x^2 + 6x + 9) = 0$ sur $I = \mathbb{R}$
- $e^{3x-1} = e^{-x}$ sur $I = \mathbb{R}$
- $\ln(2x + 7) = 0$ sur $I =]-\frac{7}{2}; +\infty[$

13 Calculer la fonction dérivée des fonctions suivantes sur l'intervalle I indiqué.

- $f(x) = -3x^3 - 2x^2 + 1$ sur $I = \mathbb{R}$
- $g(x) = xe^{-x^2}$ sur $I = \mathbb{R}$
- $h(x) = \frac{e^x}{x+1}$ sur $I =]-1; +\infty[$
- $i(x) = \ln(e^x + 2x + 1)$ sur $I = [0; +\infty[$

14 Étudier, suivant les valeurs du réel x appartenant à l'intervalle I , le signe des expressions suivantes.

- $A(x) = (2x - 1)(x^2 + 3)$ sur $I = \mathbb{R}$
- $B(x) = (x + 3)e^{-5x}$ sur $I = \mathbb{R}$
- $C(x) = \frac{3x^2 - 27}{x^2 - 1}$ sur $I =]1; +\infty[$
- $D(x) = \ln(2x + 4)$ sur $I =]-2; +\infty[$

15 Calculer les intégrales suivantes.

- $\int_0^3 (x^2 + 3) dx$
- $\int_0^1 e^{2x} dx$
- $\int_1^e \frac{1}{3x} dx$

16 Pour chacune des suites suivantes définies par récurrence, donner une expression explicite de leur terme général.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = 3u_n$ avec $u_0 = -2$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_{n+1} = u_n - 5$ avec $u_1 = 8$.

17 Déterminer les limites suivantes.

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2n^2 + 3)$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} 5 \times 0,2^n$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (5 - 2 \times 3^n)$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{3 + 0,2^n} \right)$

18 Résoudre dans \mathbb{N} les inéquations suivantes.

- $0,95^n \leq 0,2$
- $1 - 0,75^n \geq 0,99$
- $1,05^n \geq 2,1$
- $0,4^n \leq 0,001$

Automatismes du thème

19 Dans chacun des cas suivants, calculer l'espérance et l'écart type (sauf pour la question 1.) de la variable aléatoire X .

- X suit une loi uniforme discrète sur $[[2; 10]]$.
- X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = 0,3$.
- X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$ avec $n = 10$ et $p = 0,2$.

20 On considère un schéma de Bernoulli à 7 épreuves et l'arbre de probabilités associé à ce schéma de Bernoulli. Exprimer, à l'aide d'un coefficient binomial, le nombre de chemins de cet arbre composé :

- de 5 Succès et 2 Échecs ;
- d'exactly 7 Échecs ;
- d'exactly 4 Échecs.

21 Construire le triangle de Pascal jusqu'au rang $n = 6$.

22 Déterminer la valeur des coefficients binomiaux suivants.

- $\binom{50}{0}$
- $\binom{200}{1}$
- $\binom{30}{30}$
- $\binom{25}{24}$
- $\binom{100}{0}$

23 Pour chacun des coefficients binomiaux suivants, proposer un autre coefficient binomial qui lui est égal.

- $\binom{5}{3}$
- $\binom{10}{8}$
- $\binom{15}{6}$
- $\binom{100}{75}$
- $\binom{200}{90}$

24 À l'aide du triangle de Pascal, déterminer la valeur des coefficients binomiaux suivants.

- $\binom{5}{3}$
- $\binom{4}{2}$
- $\binom{6}{4}$
- $\binom{7}{3}$
- $\binom{7}{5}$

25 X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$ avec $n = 6$ et $p = 0,2$. Calculer les probabilités suivantes.

- $P(X = 0)$
- $P(X = 1)$
- $P(X \geq 1)$
- $P(X < 6)$

26 X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$ avec $n = 20$ et $p = 0,3$. À l'aide de la calculatrice, calculer les probabilités suivantes.

- $P(X = 8)$
- $P(X \leq 5)$
- $P(X \geq 6)$
- $P(X < 13)$
- $P(X > 10)$
- $P(6 \leq X \leq 12)$

Consolider les bases

27 Vrai ou faux ?

On donne ci-dessous la loi de probabilité d'une variable aléatoire X .

p est un réel de l'intervalle $[0; 1]$.

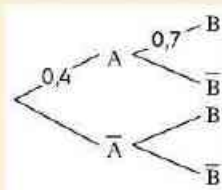
| | | | | | |
|--------------------|-----|-----|-------|-----|------|
| x_i | -2 | -1 | 0 | 2 | 3 |
| $p_i = P(X = x_i)$ | p | 0,1 | p^2 | 0,2 | 0,14 |

Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

- $p^2 + p = 0,56$
- $P(X = 0) = 0,16$
- $P(X > 2) = 0,34$
- $P(X \leq 0) = 0,66$
- $E(X) = 0$
- $\sigma(X) = 1,9$

28 QCM

Soient A et B deux événements d'un même univers Ω . On donne l'arbre de probabilités ci-dessous.



On sait de plus que $P(B) = 0,4$.

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer la (ou les) réponse(s) correcte(s).

- La probabilité $P(B)$ est égale à :
 - $P_A(B) + P_{\bar{A}}(B)$
 - $P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$
 - $P_B(A) + P_B(\bar{A})$
 - $0,28 + P(\bar{A} \cap B)$
- La probabilité $P(\bar{A} \cap B)$ est égale à :
 - $1 - P(A \cap B)$
 - $P(\bar{A}) \times P(B)$
 - 0,72
 - 0,12
- La probabilité conditionnelle $P_{\bar{A}}(B)$ est égale à :
 - 0,2
 - 0,12
 - $\frac{2}{3}$

29 Pour jouer à un jeu, on mise deux euros puis on lance un dé cubique équilibré. Si on obtient 2 ou 4, alors la mise est remboursée ; si on obtient un nombre impair, on perd la mise et si on obtient 6, la mise est remboursée et on gagne cinq euros.

On note X la variable aléatoire donnant le gain (algébrique) du joueur à l'issue d'un jeu.

- Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .
- Calculer son espérance $E(X)$. Ce jeu est-il favorable au joueur ?
- Le jeu est dit équitable lorsque $E(X) = 0$. Quel gain doit-on attribuer à l'obtention d'un 6 afin de rendre ce jeu équitable ?

Connaître le cours

30 Deux diaporamas pour faire le point sur le cours.



31 Dans chacun des cas suivants, indiquer si X suit une loi uniforme discrète et, si c'est le cas, donner sa loi de probabilité puis son espérance mathématique.

- Dans une urne contenant des boules indiscernables numérotées de 5 à 20, on en prélève une et on note X la variable aléatoire donnant son numéro.
- On lance deux dés cubiques équilibrés. On note X la variable aléatoire donnant la somme des points.
- Dans un jeu de 32 cartes, on enlève l'ensemble des figures (rois, dames et valets). On prélève au hasard une carte et on note X la variable aléatoire donnant la valeur de la carte prélevée.

32 1. Définir la notion d'épreuve de Bernoulli.

2. Pour chacun des contextes suivants, définir une épreuve de Bernoulli (en précisant un événement Succès et sa probabilité).

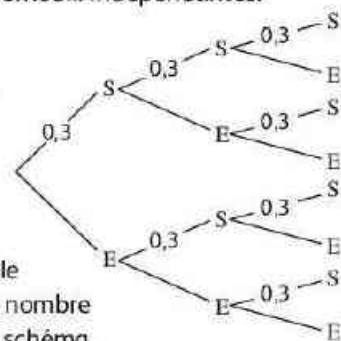
- On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes.
- On lance un dé tétraédrique équilibré.
- On lance deux dés cubiques équilibrés.
- On tire une boule dans une urne contenant 2 boules noires et 3 boules blanches indiscernables au toucher.

33 On considère l'arbre ci-dessous décrivant la répétition d'épreuves de Bernoulli indépendantes.

1. Quelle est la probabilité d'un chemin comptant exactement 2 Succès ?

2. Combien de chemins comptent exactement 2 Succès ?

3. On note X la variable aléatoire comptant le nombre de Succès à l'issue du schéma. Déterminer la valeur de $P(X = 2)$ puis de $P(X = 1)$.



34 Soient $n, k \in \mathbb{N}$ et p un réel de l'intervalle $p \in [0; 1]$. Compléter les phrases suivantes.

1. Pour $0 \leq k \leq n$, on a $\binom{n}{k} = \binom{n}{\dots}$.

2. Pour $1 \leq k \leq n-1$, la relation de Pascal s'écrit :

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{\dots} = \binom{\dots}{\dots}$$

3. X suit la loi $\mathcal{B}(n; p)$, alors, pour tout $k \in [0; n]$:

$$P(X = k) = \binom{\dots}{\dots} \times p^{\dots} \times \dots$$

On a alors $E(X) = \dots$ et $\sigma(X) = \dots$

Travailler les capacités du thème

1 Identifier des situations : loi uniforme, loi de Bernoulli

35 QCM

Dans chaque cas, relever les réponses correctes.

1. Une association organise un loto. Parmi 100 billes indiscernables au toucher numérotées de 1 à 100, on en tire une au hasard et on note X la variable aléatoire égale au numéro de cette bille.

a. X suit une loi de Bernoulli. b. $E(X) = 55,5$

2. On lance trois pièces équilibrées. Si on obtient le même résultat pour les trois pièces, on dit qu'on obtient un Succès. La variable aléatoire X prend la valeur 1 en cas de Succès et 0 sinon.

a. X suit une loi de Bernoulli.
b. $E(X) = \frac{1}{2}$ c. $\sigma(X) = \frac{\sqrt{3}}{4}$

36 Dans chaque cas, indiquer si la variable aléatoire X suit une loi uniforme, une loi de Bernoulli ou aucune de ces deux lois. Le cas échéant, préciser les paramètres de cette loi et l'épreuve de Bernoulli associée.

1. On lance un dé cubique équilibré. La variable aléatoire X prend la valeur 0 si on obtient un multiple de trois et prend la valeur 1 sinon.

2. On lance un dé tétraédrique équilibré. On note X la variable aléatoire égale au double des points qu'affiche le dé.

3. On lance deux dés équilibrés. La variable aléatoire X prend la valeur 0 si on obtient un double et 1 sinon.

4. Un jeu de tarot compte 78 cartes dont 21 atouts numérotés de 1 à 21. On tire une carte au hasard parmi les atouts d'un jeu de tarot. X est la variable aléatoire égale au numéro de l'atout tiré.

5. Dans un jeu de tarot, on tire une carte au hasard. X est la variable aléatoire égale à 1 si on obtient un atout et égale à 0 sinon.

37 On considère une variable aléatoire X suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[[3; 21]]$.

1. Décrire une expérience aléatoire mettant en jeu une telle variable aléatoire X .

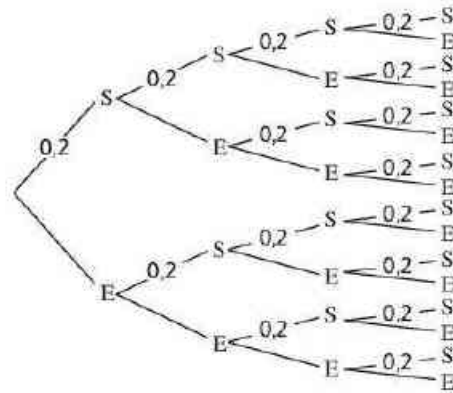
2. Déterminer la loi de probabilité et l'espérance de X .

38 Lors d'une épreuve de biathlon, épreuve olympique mêlant ski de fond et tir à la carabine, chaque skieur doit parcourir un circuit à l'issue duquel il tire sur 5 cibles distantes de 50 mètres. Un biathlète rate sa cible dans 3 % des cas. Cette situation peut-elle être modélisée par une variable aléatoire de Bernoulli ? Dans l'affirmative, préciser son paramètre.

2 Déterminer des coefficients binomiaux, triangle de Pascal

39 Vrai ou faux ?

On considère l'arbre de probabilités suivant dans lequel S désigne l'événement Succès et E l'événement Échec.



Indiquer si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse. Justifier.

1. Cet arbre modélise un schéma de Bernoulli à 2 épreuves.

2. Dans cet arbre, il existe un unique chemin ne contenant que des Échecs.

3. Dans cet arbre, il existe exactement $\binom{4}{1}$ chemins contenant un seul Échec et trois Succès.

4. Dans cet arbre, exactement 6 chemins contiennent 2 Échecs et 2 Succès.

40 QCM

Dans chaque cas, déterminer la (ou les) bonne(s) réponse(s).

1. $\binom{20}{1} =$ a. 0 b. 1 c. 20 d. $\binom{20}{19}$

2. $\binom{5}{2} =$ a. 3 b. $\binom{5}{3}$ c. 10 d. $\binom{4}{1} + \binom{4}{2}$

3. $\binom{5}{3} + \binom{5}{4} =$ a. $\binom{10}{7}$ b. $\binom{6}{4}$ c. 15 d. $\binom{6}{2}$

41 On considère un jeu de 32 cartes. On prélève successivement et avec remise trois cartes de ce jeu. On compte le nombre de figures obtenues à l'issue de ces trois tirages.

1. Modéliser la situation par un arbre de probabilités.

2. Cette expérience aléatoire constitue-t-elle un schéma de Bernoulli ? Dans l'affirmative, préciser ses paramètres.

3. Déterminer la probabilité qu'exactly deux cartes sur les trois cartes prélevées soient des figures.

42 Reprendre les questions et la situation de l'exercice **41** lorsque les tirages se font successivement et sans remise.

43 Déterminer la valeur des coefficients binomiaux suivants.

1. $\binom{4}{1}$ 2. $\binom{10}{9}$ 3. $\binom{15}{1}$ 4. $\binom{30}{0}$ 5. $\binom{20}{20}$

44 On a obtenu les résultats suivants à l'aide de la calculatrice.

| | |
|-----------------------|-----------------------|
| NumWorks | Casio |
| $\binom{18}{7}$ 31824 | $\binom{18}{8}$ 43758 |

Sans calculatrice, déduire de ces résultats la valeur des coefficients binomiaux suivants.

1. $\binom{18}{11}$ 2. $\binom{18}{10}$ 3. $\binom{19}{8}$ 4. $\binom{19}{11}$

45 À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur des coefficients binomiaux suivants.

1. $\binom{15}{12}$ 2. $\binom{18}{16}$ 3. $\binom{20}{10}$ 4. $\binom{30}{16}$

3 Calculer des probabilités dans le cadre d'une loi binomiale

46 QCM

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,2$.

Dans chaque cas, indiquer les réponses correctes.

- La (les) probabilité(s) correcte(s) est (sont) :
 a. $P(X = 10) = 0,2^{10}$ b. $P(X = 2) = 0,2^2 \times 0,8^8$
 c. $P(X = 0) = 0,2^0$ d. $P(X = 3) = 120 \times 0,2^3 \times 0,8^7$
- L'espérance mathématique de X est égale à :
 a. 8 b. 10 c. 2 d. 1,6
- L'écart type de X est égale à :
 a. 1,6 b. $\sqrt{2}$ c. $\sqrt{1,6}$ d. 0,4

47 QCM

On appelle X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,6$.

Dans chaque cas, indiquer les réponses correctes.

- La probabilité $P(X = 0)$ est égale à :
 a. $0,4^5$ b. $5 \times 0,4^5$ c. $0,6^5$ d. $5 \times 0,6^5$
- La probabilité $P(X \geq 1)$ est égale à :
 a. $1 - P(X = 0)$ b. $1 - 0,4^5$ c. $1 - 0,6^5$ d. $0,6^5$
- La probabilité $P(X < 5)$ est égale à :
 a. $P(X \leq 4)$ b. $1 - 0,4^5$ c. $1 - 0,6^5$ d. $0,4^5$

48 X suit une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,3$. À l'aide de la calculatrice, déterminer les probabilités suivantes.

1. $P(X = 4)$ 2. $P(X \leq 7)$ 3. $P(X > 9)$ 4. $P(X \geq 5)$

Dans les exercices **49** à **51**, indiquer si la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Dans l'affirmative, préciser ses paramètres.

49 Selon l'INJEP, en 2015, 47 % des jeunes Français de 16 ans ont une pratique sportive hebdomadaire. On interroge au hasard et de façon indépendante 20 jeunes Français de 16 ans dans la population. On note X la variable aléatoire donnant le nombre de jeunes de cet échantillon ayant une pratique sportive hebdomadaire.

50 Dans un stock de 20 vis dont 3 sont trop longues, on prélève successivement 15 vis au hasard et sans remise. On note X la variable aléatoire donnant le nombre de vis qui ont la bonne longueur parmi les 15 vis choisis.

51 On lance un dé tétraédrique équilibré à six reprises. X est la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où on a obtenu 4.

52 Le conseil régional dote un lycée de 20 nouveaux ordinateurs. Une étude montre qu'un ordinateur de ce type tombera en panne durant la période de garantie avec une probabilité de 5 %. On suppose que ces ordinateurs sont tous du même type et qu'ils peuvent tomber en panne indépendamment les uns des autres. On note X la variable aléatoire égale au nombre d'ordinateurs qui tomberont en panne durant la période de garantie.

- Quelle est la loi suivie par X ? Justifier.
- Calculer la probabilité des événements suivants.
 a. Au moins un ordinateur tombe en panne durant la période de garantie.
 b. Exactement cinq ordinateurs tombent en panne durant la période de garantie.
 c. Au plus sept ordinateurs tombent en panne durant la période de garantie.
- Calculer et interpréter l'espérance mathématique de la variable aléatoire X .

53 Un restaurateur a constaté qu'au déjeuner neuf clients sur dix prennent un café. Huit clients se présentent pour déjeuner et commandent de façon indépendante. On note X la variable aléatoire égale au nombre de clients qui commandent un café sur l'ensemble des huit clients ayant déjeuné.

- X suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.
- Calculer la probabilité des événements suivants.
 a. Un seul client prend un café.
 b. Exactement trois clients prennent un café.
 c. Au moins un client prend un café.
 d. Au plus quatre clients prennent un café.
- Calculer et interpréter l'espérance de X .

54 Achats éco-responsables

Une étude Ipsos menée en novembre 2019 indique qu'en réaction au phénomène de surconsommation 54 % des Français privilégient désormais les marques éthiques et éco-responsables ou les articles recyclés lors de leurs achats en ligne. On interroge douze Français au hasard et de façon indépendante. On note Y la variable aléatoire donnant le nombre de personnes parmi les douze personnes interrogées qui adoptent un tel comportement lors de leurs achats en ligne.

- Quelle est la loi suivie par Y ? Justifier.
- On a réalisé le calcul suivant sur une calculatrice :

$$\binom{12}{3} \times 0,54^3 \times 0,46^9 = 8,03194659$$

Quelle probabilité ce calcul permet-il d'obtenir ?

- Calculer et interpréter la probabilité $P(Y = 5)$.
- Déterminer la probabilité qu'au moins une personne interrogée adopte un comportement éco-responsable lors de ses achats en ligne.
- Déterminer la probabilité qu'au moins la moitié des personnes interrogées adopte un comportement éco-responsable lors de ses achats en ligne.

Déterminer un intervalle de fluctuation et prendre une décision

55 Vrai ou faux ?

Soit X une variable aléatoire de loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$ avec $n = 13$ et $p = 0,3$. On a tabulé ci-dessous les probabilités $P(X \leq k)$ pour $k \in \llbracket 0; 15 \rrbracket$ (valeurs arrondies à 0,001 par défaut).

| | | | | | |
|---------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| k | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $P(X \leq k)$ | 0,009 | 0,063 | 0,202 | 0,42 | 0,654 |
| k | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| $P(X \leq k)$ | 0,834 | 0,937 | 0,981 | 0,995 | 0,999 |

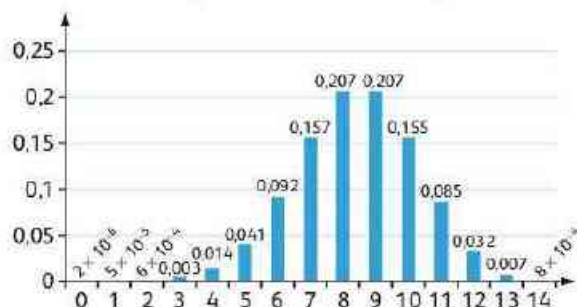
Enfin, pour $k \in \llbracket 10; 12 \rrbracket$, on a $P(X \leq k) \approx 0,999$ et $P(X \leq 13) = 1$.

- Le plus petit $a \in \mathbb{N}$ tel que $P(X \leq a) > 0,025$ est 1.
- Le plus petit $b \in \mathbb{N}$ tel que $P(X \leq b) \geq 0,975$ est 6.
- Le plus petit $k \in \mathbb{N}$ tel que $P(X \leq k) \geq 0,995$ est 8.
- On a $P(1 \leq X \leq 7) \geq 0,95$. Ainsi, l'intervalle $[1; 7]$ est un intervalle de fluctuation à 95 % de X .

56 Pièce équilibrée ?

On lance 200 fois une pièce de monnaie. On obtient 123 fois Pile. Peut-on remettre en question, au seuil de 95 %, le fait que cette pièce soit équilibrée ?

- On a représenté ci-dessous la distribution de la loi binomiale de paramètres $n = 14$ et $p = 0,6$.



En utilisant ces informations, déterminer un intervalle de fluctuation à 95 % pour une variable aléatoire X de loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$. En déduire un intervalle de fluctuation de la variable aléatoire fréquence $F = \frac{X}{14}$ associée à X .

58 Une machine d'un

laboratoire pharmaceutique fabrique, en très grande quantité, un médicament sous forme de gélules. Lorsque cette machine est bien réglée, au moins 97 % des gélules sont conformes.



Afin d'évaluer le bon réglage de cette machine, on effectue un contrôle en prélevant un échantillon de 1 000 gélules dans la production. Celle-ci étant supposée suffisamment importante, on assimile ce prélèvement à 1 000 tirages successifs avec remise. Le contrôle effectué a permis de dénombrer 53 gélules non conformes dans l'échantillon prélevé.

- Quelle est la fréquence de gélules conformes dans l'échantillon ?
- Grâce à un tableur, on a calculé les probabilités $P(X \leq k)$ où X suit la loi $\mathcal{B}(n; p)$ avec $n = 1000$ et $p = 0,97$.

| | A | B | | A | B |
|-----|-----|---------------|-----|-----|---------------|
| 1 | k | $P(X \leq k)$ | 1 | k | $P(X \leq k)$ |
| 958 | 956 | 0,0088 | 979 | 977 | 0,9226 |
| 959 | 957 | 0,0135 | 980 | 978 | 0,9481 |
| 960 | 958 | 0,0204 | 981 | 979 | 0,9667 |
| 961 | 959 | 0,0302 | 982 | 980 | 0,9796 |
| 962 | 960 | 0,0437 | 983 | 981 | 0,9881 |
| 963 | 961 | 0,0619 | 984 | 982 | 0,9934 |

- Donner les plus petits entiers a et b tels que $P(X \leq a) > 0,025$ et $P(X \leq b) \geq 0,975$.
- En déduire un intervalle de fluctuation à 95 % de la fréquence associée à X .
- Le contrôle remet-il en question les réglages faits par le laboratoire ?

1 Loi uniforme discrète

59 PYTHON Simulations d'un lancer de dé

La fonction `random()` issue de la bibliothèque `random` de Python renvoie un nombre réel aléatoire de l'intervalle $[0; 1[$ et ceci de manière équirépartie.

1. Compléter la fonction suivante de telle sorte qu'elle simule le lancer d'un dé tétraédrique équilibré, c'est-à-dire qu'elle renvoie un entier de l'intervalle $[1; 4]$ avec équirépartition.

```
1 from random import random
2
3 def de_tetraedrique():
4     x=random()
5     if x<0.25:
6         return 1
7     elif x<.5:
8         return 2
9     elif x<... :
10        return ...
11    else:
12        return ...
```

2. Un autre point de vue. La fonction `int(x)` renvoie la partie entière d'un réel x , c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à x .

a. On saisit la commande `4*random()` dans la console Python. Dans quel intervalle peuvent varier les valeurs retournées par cette commande ?

b. Reprendre la question précédente pour la commande `int(4*random())`, puis `int(4*random()+1)`.

c. En déduire une autre façon de simuler le lancer d'un dé tétraédrique équilibré.

3. De même, construire une fonction `de_cubique()` simulant le lancer d'un dé cubique équilibré (on proposera deux méthodes).

Info

En général, on utilisera la fonction `randrange(a, b)` de la bibliothèque `random` qui permet directement de renvoyer un entier au hasard dans $[a; b[$.

60 PYTHON Simulations de lancers successifs

Le programme suivant, écrit en Python, simule des lancers d'un dé cubique classique, puis affiche le nombre d'apparitions de chacune des faces.

```
from random import randrange

dice = [0]*6
for _ in range(1000):
    face = randrange(1, 7)
    dice[face - 1] += 1
print(dice)
```

Adapter ce programme afin de simuler les événements suivants.

- 4 000 lancers d'un dé tétraédrique équilibré.
- 1 000 lancers d'une pièce de monnaie équilibrée.
- 2 000 tirages d'une des cartes as, 2, 3, ... dame, roi parmi les 14 cartes de cœur possibles.

Info

L'instruction `[0]*6` crée une liste de six zéros.

61 On considère l'équation $x^2 + bx + c = 0$ où le couple $(b; c)$ est obtenu de la manière suivante : b est le résultat du premier jet d'un dé équilibré tétraédrique dont les faces portent les numéros 2, 3, 4, 5 ; c est le résultat du second jet du même dé. Chaque couple a la même probabilité d'apparition.

1. Soit B la variable aléatoire qui prend les valeurs obtenues lors du premier lancer. Déterminer la loi de B .

2. Soit D la variable aléatoire qui prend la valeur $b^2 - 4c$. D suit-elle une loi uniforme ?

3. Soit S la variable aléatoire qui vaut 0 quand l'équation n'admet pas de solution et 1 sinon. Déterminer la loi de S .

2 Épreuve et loi de Bernoulli

3 Schéma de Bernoulli

62 Code de la route et chemins dans un arbre

Pour obtenir le Code de la route, il faut répondre à 40 questions et faire un nombre de fautes inférieur ou égal à 5.

1. Un candidat répond au hasard à chacune des 40 questions : montrer que cette situation est celle d'un schéma de Bernoulli dont on précisera le nombre de répétitions.

2. En imaginant l'arbre associé à cette situation, calculer le nombre de chemins de cet arbre correspondant à :

a. exactement 35 bonnes réponses ;

b. au plus 5 fautes ;

c. au moins 38 bonnes réponses.

3. Interpréter, en termes de chemins, les nombres suivants.

a. $\binom{40}{10}$

b. $\sum_{k=1}^3 \binom{40}{k}$

63 Dé ou cartes ? Telle est la question...

On joue avec un dé cubique parfaitement équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et un jeu classique de 32 cartes.

On choisit le dé ou bien le jeu de cartes.

- Si on a choisi le dé : on le lance 5 fois, on gagne si on obtient au moins une fois le 1 ;

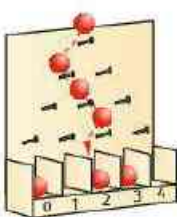
- Si on a choisi le jeu de cartes : on tire avec remise 7 cartes dans le paquet, on gagne si on obtient au moins une fois un as.

À l'aide d'un arbre pondéré, répondre, en justifiant, au problème suivant :

Pour avoir le plus de chances de gagner, est-il préférable de choisir le dé ou le jeu de cartes ?

64 Planche de Galton

La planche de Galton, dispositif inventé par Francis Galton (1822-1911), est constitué d'une planche dans laquelle sont plantés quatre rangées de clous en quinconce. Lorsqu'on lâche une bille au sommet de la planche, cette dernière rencontre une succession de clous. À chaque clou rencontré, la bille passe à sa droite ou à sa gauche avec équiprobabilité. En fin de parcours, elle tombe dans une case.



1. Exploitation de simulations avec tableur

On souhaite construire une feuille tableur du type :

| | A | B | C | D | E | F |
|---|------------|----------|----------|----------|----------|--------------|
| 1 | Simulation | Clou n°1 | Clou n°2 | Clou n°3 | Clou n°4 | Case arrivée |
| 2 | 1 | D | G | D | G | 2 |
| 3 | 2 | G | G | D | D | 2 |
| 4 | 3 | D | D | G | D | 3 |

a. Expliquer la formule saisie dans la cellule B2. De la même façon, compléter les cellules C2 à E2.

b. En exploitant la fonction NB.SI, écrire une formule pour la cellule F2.

c. Recopier les cellules vers le bas pour effectuer 1 000 puis 10 000 simulations de trajectoires.

d. En utilisant la fonction NB.SI, calculer les fréquences des billes présentes dans chaque case. On pourra rafraîchir les simulations en appuyant sur **F9**.

2. Modélisation par un schéma de Bernoulli

a. Justifier que la chute d'une bille peut être modélisée par un schéma de Bernoulli.

b. Quelle est la probabilité qu'une bille tombe dans la case n° 0 ? la case n° 4 ?

c. Dénombrer les chemins qui mènent à la case n° 2. Quelle est la probabilité d'un tel chemin ? En déduire la probabilité qu'une bille tombe dans la case n° 2.

d. De la même façon, déterminer la probabilité que la bille tombe en case n° 1, puis en case n° 3.

65 PYTHON Quand elle tape « coefficient binomial » dans un moteur de recherche, Zoé découvre la formule :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

1. Construire les cinq premières lignes du triangle de Pascal.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre $n!$ se lit « factorielle n » et est défini par $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1$. Par convention $0! = 1$.

a. Calculer $A = \binom{3}{2}$ et $B = \binom{5}{3}$ à l'aide des factorielles.

b. Vérifier ces résultats à l'aide du triangle de Pascal.

3. a. Pour $n \geq 1$, exprimer $n!$ en fonction de $(n-1)!$

b. Compléter le programme ci-contre, écrit en Python, conduisant au calcul de $n!$.

```
def facto(n):
    if n==0:
        return ...
    else:
        return ... * facto(...)
```

c. Écrire une fonction en Python qui permet de calculer $\binom{n}{p}$ à l'aide de la fonction facto.

4 Loi binomiale

Analyse d'un énoncé

66 Exercice commenté

L'entraîneur d'une équipe de foot junior a constaté que son meilleur buteur réussit 70 % de ses penaltys. L'entraîneur a prévu de lui faire tirer une série de 10 penaltys (on suppose que ses tirs sont indépendants). On note X la variable aléatoire égale au nombre de penaltys réussis.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

► Pour cela, identifier une répétition de n épreuves identiques et indépendantes de Bernoulli (à décrire), en précisant le succès et sa probabilité. Indiquer que X compte le nombre de succès.

2. Déterminer la probabilité de :

a. réussir 3 penaltys ; b. ne réussir aucun penalty ;

c. réussir au moins 1 penalty.

► L'événement « réussir au moins un penalty » est l'événement contraire de l'événement précédent.

d. réussir au plus 6 penaltys.

► Exploiter les fonctionnalités de la calculatrice.

3. Sur un échantillon de 10 tirs, combien de penaltys ce buteur réussit-il en moyenne ?

► Moyenne rime avec espérance mathématique...

67 Application immédiate

Une étude indique qu'environ 23 % des Français consultent leur Smartphone avant de s'endormir. On interroge 15 personnes au hasard en France (on assimile le choix des 15 personnes à un tirage avec remise). On note X la variable aléatoire égale au nombre de personnes qui consultent leur Smartphone avant de s'endormir parmi les 15 personnes interrogées.

1. Déterminer la loi de probabilité de X .

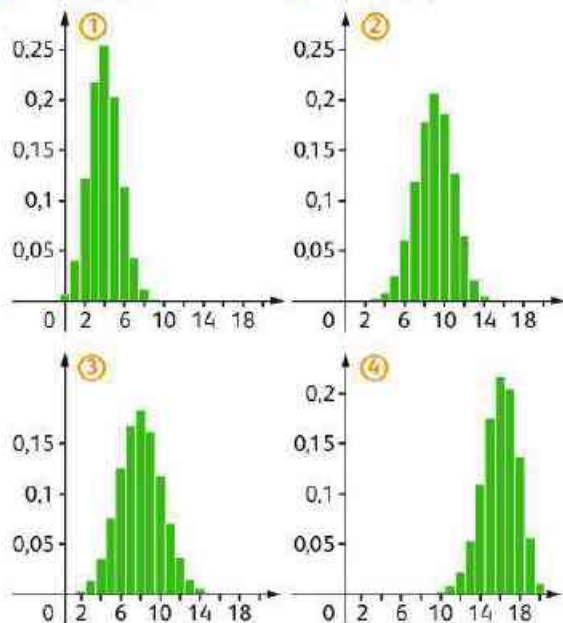
2. Calculer et interpréter $P(X=4)$ et $P(X \leq 5)$.

3. Calculer la probabilité qu'au moins une personne parmi celles interrogées consulte son Smartphone avant de s'endormir.

4. Calculer et interpréter $E(X)$.

68 Associer chaque schéma avec la loi binomiale lui correspondant, puis vérifier à l'aide d'un logiciel ou de la calculatrice.

1. $\mathcal{B}(15; 0,6)$ 2. $\mathcal{B}(20; 0,4)$
 3. $\mathcal{B}(20; 0,8)$ 4. $\mathcal{B}(10; 0,4)$



69 Lors d'une assemblée de copropriétaires, il faut que le nombre de présents (ou mandatés) représente au moins la moitié de la propriété (on dit alors que le *quorum* est atteint). Une copropriété compte 22 copropriétaires représentant chacun $\frac{1}{22}$ de la propriété. La probabilité qu'un copropriétaire assiste (ou soit représenté) à l'assemblée est de 80 % et est indépendante de la venue des autres.

Quelle est la probabilité que, lors de la prochaine assemblée, le quorum soit atteint ?

70 Exercice guidé

On suppose qu'une urne contient 1 boule blanche et 99 boules noires. On effectue n tirages successifs d'une boule avec remise.

Déterminer le plus petit entier naturel n pour que la probabilité de tirer au moins une fois la boule blanche soit supérieure ou égale à 0,95.

Pistes de résolution

On pourra introduire la variable aléatoire X égale au nombre de boules blanches obtenues à l'issue des n tirages. Exprimer $P(X \geq 1)$ en fonction de n puis remarquer que le problème se ramène à résoudre une inéquation d'inconnue n .

71 Louna affirme : « Avec un dé classique bien équilibré, on a autant de chances d'obtenir au moins un 6 en quatre lancers que d'obtenir au moins deux 6 avec huit lancers. » Sarah pense que Louna a tort, car il lui semble plus facile d'obtenir deux 6 en huit lancers.

- Soit Q la variable aléatoire qui compte le nombre de 6 obtenus en lançant quatre fois le dé. Préciser la loi de Q puis calculer la probabilité d'obtenir au moins un 6 en quatre lancers.
- De la même façon, déterminer la probabilité d'obtenir au moins deux 6 en huit lancers.
- Conclure.

72 Une entreprise fabrique chaque jour 100 000 briques de plastique pour des jeux de construction. Chaque brique présente un défaut, indépendamment des autres, avec la probabilité 0,0007. Si la brique est repérée comme étant défectueuse, elle est refondue. Une vérification coûte 0,1 € et une refonte coûte 1 €.

1. Soit D la variable aléatoire qui donne le nombre de briques défectueuses.

- Déterminer la loi de D puis, à l'aide de la calculatrice, déterminer le plus grand entier k tel que $P(D \leq k) \leq 0,05$. Interpréter.
- Déterminer le coût de contrôle (vérification et destruction) moyen journalier.

2. À la suite d'un audit, on met en place une nouvelle procédure :

- on groupe les briques par lots de vingt ;
- on vérifie chaque lot pour un coût de 0,25 €/lot ;
- si au moins une des briques d'un lot est défectueuse, ce lot est refondu pour un coût de 10 €/lot.

On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de lots refondus.

- À l'aide de la calculatrice, déterminer le plus grand entier k tel que $P(X \leq k) \leq 0,05$. Interpréter.
- Déterminer le coût de contrôle (vérification et destruction) moyen journalier de ce nouveau dispositif. Calculer l'économie moyenne espérée par jour.

73 Un QCM comporte 20 questions. Pour chaque question, quatre réponses sont proposées dont une seule est correcte. Chaque réponse juste rapporte 1 point, une réponse fausse retire 0,25 point et l'absence de réponse n'apporte et n'enlève aucun point (la note finale peut donc être négative). On suppose qu'un candidat répond au hasard à chaque question.

- Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre de bonnes réponses du candidat. Déterminer la loi de X .
 - Calculer et interpréter l'espérance de X .
 - Calculer la probabilité que le candidat obtienne au moins la moyenne à ce QCM.

2. Soit N la variable aléatoire qui donne la note du candidat (sur 20).

- Exprimer N en fonction de X . En déduire la note moyenne qu'il peut espérer obtenir.
- Déterminer le nombre de points à attribuer à une réponse fausse afin qu'un candidat qui répond au hasard puisse espérer obtenir une note de 5 à ce QCM.

74 Une entreprise dans l'aéronautique utilise des composants électroniques d'un certain type en grande quantité. Elle les commande par lots à une compagnie spécialisée. La probabilité qu'un composant soit défectueux est 0,005.

Cette entreprise souhaite que la probabilité d'avoir au moins un composant défectueux dans un lot acheté ne dépasse pas les 10 %. Quelle est la taille maximale des lots qu'elle peut acheter ?

5 Échantillonnage et estimation

75 Dés équilibrés ?

Un casino achète en grande quantité des dés qui doivent être parfaitement équilibrés. Le directeur du casino décide, pour tester l'un de ces dés, de le lancer 100 fois et de noter les résultats obtenus. Il observe alors 28 apparitions du numéro 6. L'objectif de cet exercice est de déterminer si le directeur doit considérer que le dé est équilibré ou non.

1. Intervalle de fluctuation au seuil de 95 %

a. En considérant le dé testé équilibré et en notant X la variable aléatoire égale au nombre de 6 obtenus à l'issue de 100 lancers, déterminer la loi de X .

b. À l'aide de la calculatrice, déterminer les plus petits entiers k_1 et k_2 tels que :

$$P(X \leq k_1) > 0,025 \text{ et } P(X \leq k_2) \geq 0,975$$

c. En déduire un intervalle de fluctuation pour la fréquence associée à la variable aléatoire X .

2. Prise de décision

a. Le directeur doit-il accepter, au seuil de 95 %, l'hypothèse selon laquelle la probabilité que son dé tombe sur 6 est égale à $\frac{1}{6}$?

b. Que doit-il en déduire sur son dé ? Peut-il être sûr de sa décision ?

76 Le maire d'une commune prétend que 40 % de ses administrés sont favorables à la construction d'une rocade desservant les communes avoisinantes. Une association de lutte contre les nuisances sonores doute de la réalité de cette affirmation et décide de réaliser un sondage auprès de 150 habitants. La population de la ville étant importante, on considère que le choix de ces 150 habitants est assimilable à un tirage avec remise de 150 individus.

1. En supposant que le maire dise vrai, déterminer la loi de la variable aléatoire X qui, à un échantillon de 150 habitants choisis au hasard, associe le nombre de personnes favorables à la rocade.

2. Déterminer un intervalle de fluctuation au seuil de 99 % de la variable aléatoire fréquence associée à X .

3. Sur les 150 personnes interrogées par l'association, 50 se déclarent favorables à la construction de cette rocade. Sur la base de cet échantillon, l'association peut-elle remettre en cause l'affirmation du maire ?

77 PYTHON Python Intervalle de fluctuation et Python

On souhaite écrire une fonction Python permettant de déterminer un intervalle de fluctuation au seuil de 0,95 de la variable aléatoire X de loi $\mathcal{B}(n; p)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0; 1]$.

1. On considère la fonction Python suivante permettant de déterminer le plus petit entier k_1 vérifiant $P(X \leq k_1) > 0,025$.

```

1 from scipy.special import binom
2
3 def coeff_k1(n,p):
4     k=0
5     proba=...
6     proba_cumule=proba
7     while proba_cumule<=...:
8         k=k+1
9         proba=...
10        proba_cumule=proba_cumule+...
11    return ...

```

a. En ligne 5 et en ligne 9, écrire une formule permettant de calculer respectivement $P(X = 0)$ et $P(X = k)$. Pour cela, on utilisera la fonction `binom(n, k)` de la bibliothèque `scipy.special`.

b. La variable `proba_cumule` permet de stocker la valeur de $P(X \leq k)$. Compléter alors les lignes 7, 10 et 11 de cette fonction, puis la tester.

2. De même, écrire une fonction Python permettant de déterminer le plus petit entier k_2 vérifiant $P(X \leq k_2) \geq 0,975$.

3. En déduire une fonction Python retournant les bornes d'un intervalle de fluctuation de la variable aléatoire fréquence $F = \frac{X}{n}$.

4. Pour aller plus loin

Modifier les fonctions précédentes afin de déterminer un intervalle de fluctuation au seuil $1 - \alpha$ où $\alpha \in [0; 1]$ est un réel donné en argument.

78 Une étude a montré que 2 % de la population de Bossedurie est sujet à la procrastination. Le professeur Obrufe pense que cela est dû à l'allèle A^+ du gène A . Des tests cliniques ont montré que, sur un échantillon de 900 personnes possédant cet allèle, 21 personnes sont sujettes à la procrastination.

À la suite de cette étude, le professeur Obrufe peut-il affirmer, au seuil de 95 %, que l'allèle A^+ du gène A a une influence sur la procrastination dans la population de Bossedurie ?

Décimales de π : une loi uniforme ?

Le logiciel de calcul formel Xcas permet d'obtenir les 500 premières décimales de π : $\pi = 3,$

14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510 58209 74944 59230 78164 06286
20899 86280 34825 34211 70679 82148 08651 32823 06647 09384 46095 50582 23172 53594 08128
48111 74502 84102 70193 85211 05559 64462 29489 54930 38196 44288 10975 66593 34461 28475
64823 37867 83165 27120 19091 45648 56692 34603 48610 45432 66482 13393 60726 02491 41273
72458 70066 06315 58817 48815 20920 96282 92540 91715 36436 78925 90360 01133 05305 48820
46652 13841 46951 94151 16094 33057 27036 57595 91953 09218 61173 81932 61179 31051 18548
07446 23799 62749 56735 18857 52724 89122 79381 83011 94912

On peut ensuite compter les occurrences de chacune d'elles :

| Chiffre | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Apparition | 45 | 59 | 54 | 50 | 53 | 50 | 48 | 36 | 53 | 52 |

Question : les 500 premières décimales de π peuvent-elles être considérées comme le tirage aléatoire de dix valeurs qui suivent une loi uniforme discrète ?

Partie A Traitement des données

1. Loi uniforme discrète

a. Supposons que les décimales de π suivent une loi équirépartie, déterminer alors la probabilité p d'apparition de chaque chiffre.

b. Recopier et compléter la ligne *Fréquence* du tableau (arrondir au millième).

| Chiffre | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Apparition | 45 | 59 | 54 | 50 | 53 | 50 | 48 | 36 | 53 | 52 |
| Fréquence | | | | | | | | | | |

Partie B Modélisation

Afin de répondre au problème posé, il est nécessaire d'évaluer si la valeur moyenne d_{obs} trouvée précédemment est aberrante (ce qui remettrait en question l'hypothèse d'équirépartition) ou non.

Le programme Python suivant simule 1 000 séries de 500 simulations de la loi uniforme sur $[[0; 9]]$ afin d'évaluer les fluctuations d'échantillonnage des distances d_i .

Pour chacune de ces 1 000 séries, on calcule la moyenne d des distances d_i (tel que décrit précédemment). Ainsi, on est en mesure de déterminer un intervalle de fluctuation au seuil de 10 % de la variable aléatoire D associée à la distance d .

- Expliquer ce qu'affiche le programme à la fin de son exécution.
- La moyenne d_{obs} calculée à la question 1. appartient-elle à l'intervalle $[d_{25}; d_{975}]$? Interpréter dans le contexte de l'exercice.

```
from random import randrange
import numpy as np

D = np.zeros(1000)
for k in range(1000):
    occ = np.zeros(10)
    for _ in range(500):
        chiffre = randrange(0,10)
        occ[chiffre] += 1
    D[k] = np.mean(np.asscalar(occ) / 500 - .1)
D = np.sort(D)
print("d25 =", D[24], " d975 =", D[974])
```

- Être considérées comme le tirage aléatoire : un critère possible est d'interpréter la moyenne des distances entre la probabilité théorique p (trouvée à la question 1.) et la fréquence observée. Pour chaque fréquence observée (notée f_i), calculer $d_i = |f_i - p|$, puis la moyenne d_{obs} des valeurs d_i (i entier de 1 à 10).

Pour évaluer si la valeur moyenne d_{obs} trouvée est aberrante, on peut écrire un programme et observer les fluctuations d'échantillonnage.



Dans un document de recommandations sur le dépistage des infections transmissibles par transfusion dans les dons de sang publié en 2010 par l'Organisation mondiale de la santé (OMS), on peut lire : « Le regroupement (*pooling*) des échantillons avant les tests a été une question controversée pendant un certain nombre d'années. Il est considéré comme une mesure permettant de réduire les coûts, mais toute économie réalisée sur les coûts doit être mise en balance avec le risque de laisser passer un don de sang positif sans le détecter. »



Supposons qu'il existe un test quasi-infaillible (l'OMS recommande des tests fiables à au moins 99,5 %) pour dépister une infection dans un don du sang. Pour des raisons politiques et/ou économiques, on décide de ne pas analyser chaque échantillon sanguin, mais de grouper n échantillons puis d'effectuer l'analyse de ce groupe (ce regroupement est aussi appelé un *pool*).

- Si le test est négatif : tous les individus étaient sains. On économise $n - 1$ analyses ;
- Si le test est positif : au moins un des individus est malade. On teste alors chaque échantillon : on doit faire n analyses supplémentaires, donc $n + 1$ analyses en tout.

L'objectif de cette étude est de répondre à la question : quelle est la valeur de n qui permet d'optimiser le nombre d'analyses en fonction de p (la probabilité qu'un individu soit sain) ?

1. Soit S la variable aléatoire donnant le nombre d'individus sains dans une population de n individus. On suppose que S suit la loi $\mathcal{B}(n; p)$.

a. Donner la probabilité de l'événement « tous les individus sont sains » en fonction de n et de p .

Préciser le nombre d'analyses nécessaires dans ce cas.

b. Donner la probabilité qu'au moins un individu soit malade en fonction de n et de p .

Préciser le nombre d'analyses nécessaires dans ce cas.

2. Soit A la variable aléatoire qui, à un groupe de n échantillons sanguins, associe le nombre total d'analyses à effectuer.

a. Recopier et compléter le tableau donnant la loi de A .

| | | |
|--------------|---|-------|
| a_i | 1 | $n+1$ |
| $P(A = a_i)$ | | |

b. En déduire que, pour chaque individu, il faut effectuer en moyenne $m = 1 - \left(p^n - \frac{1}{n}\right)$ analyses.

Ainsi, le nombre $p^n - \frac{1}{n}$, s'il est positif, représente « l'économie moyenne » réalisée en groupant les échantillons à analyser.

3. Supposons qu'on ne puisse grouper que 10 prélèvements au maximum (pour ne pas trop diluer les composants), on cherche alors la valeur qui maximise $p^n - \frac{1}{n}$ en fonction de p pour des valeurs de n allant de 2 à 10.

a. Compléter le programme Python : pour chaque valeur de p (de 0,001 à 1, par pas de 0,001), il donne l'effectif n du *pool* qui permet de réaliser l'économie maximale.

```
p, pas = 0.001, 0.001

while p < 1:
    eco_max, n_max = 0, 1
    for n in range(2, 11):
        eco =
        if eco > eco_max:
            eco_max, n_max = eco, n
    print("pour p=", p, " n_max=", n_max)
    p = p + pas
```

b. Recopier et compléter le tableau indiquant le pourcentage d'économie réalisé en fonction de n et de p . Pourcentage d'économie maximale en fonction des valeurs de n et de p .

| | | | | | | | | | |
|--------------|-------|-------|----|---|---|---|---|---|----|
| p | 0,694 | 0,877 | | | | | | | |
| n | 1 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| % d'économie | 0 | 34 | 51 | | | | | | 81 |

Lecture : pour $0,694 \leq p < 0,877$, l'économie maximale est réalisée en groupant les échantillons par 3 et est égale au maximum à $0,877^3 - \frac{1}{3} \approx 0,34$.

Conclusion : plus la probabilité d'être malade est faible (c'est-à-dire celle d'être sain est proche de 1), plus le *pool* peut contenir d'individus... à condition d'être certain de la fiabilité du test !

Article premier : Tous les êtres humains naissent libres et égaux en dignité et en droits. Ils sont doués de raison et de conscience et doivent agir les uns envers les autres dans un esprit de fraternité.

Article 2 : Chacun peut se prévaloir de tous les droits et de toutes les libertés proclamées dans la présente Déclaration, sans distinction aucune, notamment de race, de couleur, de sexe, de langue, de religion, d'opinion politique ou de toute autre opinion, d'origine nationale ou sociale, de fortune, de naissance ou de toute autre situation. De plus, il ne sera fait aucune distinction fondée sur le statut politique, juridique ou international du pays ou du territoire dont une personne est ressortissante, que ce pays ou territoire soit indépendant, sous tutelle, non autonome ou soumis à une limitation quelconque de souveraineté.

Article 3 : Tout individu a droit à la vie, à la liberté et à la sûreté de sa personne.

Partie A Analyse de monsieur B.

Monsieur B., expert, pense que le texte manuscrit ci-dessus contient un message codé. En effet, le texte est écrit sur un réseau de lignes verticales (presque invisibles), et certains points des *i* sont exactement sur des verticales ! (Les lettres *i* concernées sont repérées par des points rouges).

Le texte original date de 1894 et est écrit à la plume (donc les points des lettres *i* ont une certaine épaisseur). D'après cet expert, si le texte est écrit sans mise en forme particulière, l'événement (dû au hasard) « le point du *i* est presque sur une verticale » a une probabilité de 0,2.

Monsieur B. explique : « Pour vérifier l'hypothèse "le texte est écrit sans mise en forme particulière" : je compte le nombre X de points des lettres *i* qui sont sur une verticale parmi les n lettres *i* du texte (X suit donc une loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$) ; puis je calcule la probabilité $P(X = 13)$ car il y a 13 *i* dont le point est sur une verticale. »

1. Déterminer les valeurs de n et p .
2. Calculer $P(X = 13)$.

Partie B Analyse de monsieur P.

Un autre expert, monsieur P., affirme que monsieur B. n'a pas effectué le bon calcul : il faut calculer $P(X \geq 13)$.

1. Décrire par une phrase, dans le contexte de l'exercice, $P(X \geq 13)$.
2. Calculer $P(X \geq 13)$.

Partie C Analyse de Zorana

Zorana, élève de Terminale, se dit qu'il faudrait utiliser l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % pour valider ou non l'hypothèse « le texte est écrit sans mise en forme particulière ».

1. Calculer les bornes de l'intervalle de fluctuation associé à la variable X .
2. Que va conclure Zorana ?

À L'ÉCRIT OU À L'ORAL

Partie D

Proposer une interprétation des résultats de messieurs B. et P. dans le contexte de l'exercice. Comparer avec l'interprétation de Zorana.



Info

Ce débat autour du modèle et du calcul de probabilité à propos d'un texte écrit sur un papier filigrané est une version simplifiée des nombreuses querelles d'experts autour d'un document présenté à charge contre Alfred Dreyfus lors de son procès pour trahison en 1894. Alphonse Bertillon, l'inventeur de l'anthropométrie judiciaire, présenta une thèse bâtie sur des calculs de probabilités.

Ces calculs furent réfutés lors du procès de 1904 par les mathématiciens Henri Poincaré, Gaston Darboux et Paul Appell.



Île du Diable où fut détenu Dreyfus.



Certaines municipalités constatent une recrudescence des fraudes au stationnement dans leur commune. Afin de lutter contre cette fraude, elles disposent de deux leviers :

- augmenter le montant de l'amende forfaitaire pour défaut de stationnement ;
- augmenter les contrôles de stationnement par la police municipale.

Partie A Contexte de l'étude

Une mairie procède à une étude basée sur 30 jours ouvrables consécutifs. On admet que les contrôles effectués par la police municipale sont indépendants les uns des autres et on note p la probabilité pour tout véhicule stationné d'être contrôlé.

Le coût du stationnement est forfaitaire et vaut 10 €, le montant de l'amende forfaitaire fixée par la mairie en cas de stationnement impayé est noté m .

On considère un automobiliste, fraudant systématiquement chaque jour du mois, soumis à cette étude. On considère X la variable aléatoire donnant le nombre de contrôles effectués par la police municipale pour cet automobiliste sur la période de 30 jours (on exclut la possibilité de plusieurs contrôles le même jour pour un véhicule donné).

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. On note Y la variable aléatoire qui prend pour valeur le gain algébrique réalisé par l'automobiliste fraudeur.
 - a. Justifier que $Y = 300 - mX$.
 - b. Exprimer alors l'espérance de Y en fonction de m et p .

Partie B Impact du montant m de l'amende

La mairie souhaite agir sur le montant m de l'amende forfaitaire afin de dissuader la fraude systématique. Les données fournies par la mairie concernant le nombre d'agents dédiés aux contrôles de stationnement permettent d'estimer que $p = 0,05$.

1. Déterminer la probabilité que l'automobiliste fraudeur soit contrôlé exactement deux fois sur cette période de 30 jours.
2. Déterminer $P(X \leq 2)$. En déduire la probabilité que cet automobiliste soit contrôlé au moins trois fois.
3. La mairie considère que l'amende forfaitaire a un caractère dissuasif si $E(Y) \leq -200$. Déterminer les montants possibles de l'amende forfaitaire de sorte qu'elle dissuade les automobilistes de frauder systématiquement.



Partie C Impact du nombre de contrôles

La mairie souhaite établir une autre stratégie pour lutter contre les fraudes. Elle désire désormais agir sur le nombre de contrôles, autrement dit sur la probabilité p qu'un véhicule quelconque soit contrôlé, de sorte que l'automobiliste systématiquement fraudeur subisse au moins trois contrôles par mois avec une probabilité supérieure à 99 %.

1. Démontrer que :

$$P(X \leq 2) = (1-p)^{28} (406p^2 + 28p + 1)$$

2. a. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par :

$$f(x) = (1-x)^{28} (406x^2 + 28x + 1)$$

Cette fonction f est dérivable sur $[0; 1]$ et un logiciel de calcul formel permet de calculer sa dérivée :

| Calcul formel | |
|---------------|---|
| 1 | $f(x) := (1-x)^{28} (406x^2 + 28x + 1)$ |
| | $\rightarrow f'(x) := (-x + 1)^{28} (406x^2 + 28x + 1)$ |
| 2 | Factoriser(Dérivée(f(x))) |
| | $\rightarrow 12180x^2(x-1)^{27}$ |

En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0; 1]$.

- b. Justifier que l'équation :

$$f'(x) = 0,01$$

admet une unique solution dans l'intervalle $[0; 1]$. En donner une valeur approchée arrondie à 10^{-3} près.

3. Déduire des questions précédentes la valeur minimale qu'il faut attribuer à p de sorte que l'automobiliste fraudeur subisse au moins trois contrôles par mois avec une probabilité supérieure ou égale à 99 %.

En mars 2015, le CRIIRAD a procédé à des contrôles radiologiques sur des pendentifs censés apporter bien-être, santé, traiter les douleurs... L'étude est réalisée à l'aide d'un compteur Geiger. Il permet de mesurer le taux de radioactivité d'un objet en comptant le nombre de particules émises par seconde (« coups » par seconde, CPS). La radioactivité naturelle du laboratoire (« bruit de fond ») a été mesurée à 40 CPS. Dans le laboratoire, durant chaque centième de seconde, le compteur peut compter un coup de bruit de fond avec une probabilité 0,4. Dans ces mêmes conditions, on mesure la radioactivité des pendentifs. On souhaite savoir si la différence observée est assez importante pour considérer ces pendentifs comme radioactifs.

1. Exploitation de simulations

a. Compléter le script Python suivant afin de simuler et compter le bruit de fond du laboratoire durant une seconde.

```
1 from statistics import mean
2 from random import random
3
4 def comptage_bruit_fond():
5     nbre_coups = 0
6     for k in range(...):
7         coup = int(random()+.4)
8         nbre_coups = nbre_coups + ...
9     return nbre_coups
```

b. Modifier le script précédent afin d'effectuer 100 comptages successifs et indépendants d'une seconde de bruit de fond. Dans une liste `comptages`, on stockera le résultat de ces 100 comptages.

c. Saisir la commande `comptages.sort()` et `mean(comptages)` dans la console Python. Quels résultats obtient-on ?

Un comptage supérieur ou égal à 45 CPS semble-t-il exceptionnel ?

2. Traitement probabiliste du problème

a. On note X la variable aléatoire modélisant un comptage de bruit de fond pendant une seconde. Justifier que X suit une loi binomiale de paramètres n et p à préciser.

b. Soit N le plus petit entier tel que : $P(X \leq N) \geq 0,95$. On dira qu'il y a radioactivité significative si le nombre de coups est supérieur ou égal à $N + 1$.

Déterminer la valeur de N .

c. Un pendentif a été mesuré à 450 CPS et un autre à 48 CPS. Interpréter ces mesures.

Pour obtenir des statistiques sur certaines questions, les sondeurs ont mis au point des techniques basées sur le hasard ! L'objectif : obtenir la probabilité de la réponse *oui* à la question, tout en préservant la vie privée des personnes interrogées ! Ici, la question posée est : « Êtes-vous gaucher ? »

Partie A Recueil des données

Chaque élève suit le protocole suivant.

1. Lancer, en cachette du sondeur, deux dés équilibrés et faire la somme des points obtenus.

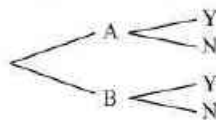
2. Si la somme vaut 4, répondre **honnêtement** par Oui ou par Non à l'affirmation A : « Je suis une personne gauchère. »

3. Si la somme est différente de 4, répondre **honnêtement** par Oui ou par Non à l'affirmation B : « Je suis une personne droitère. »

4. Le sondeur compte uniquement le nombre de Oui et de Non.

Partie B Arbre de probabilités

On note p la proportion de gauchers dans la classe. On considère A (resp. B) l'évènement « la personne répond à la question A (resp. B) » et Y (resp. N) l'évènement « la personne répond Oui (resp. Non) à la question posée ».



1. Calculer $p(A)$ puis $p(B)$.

2. Montrer que $p(Y) = \frac{11}{12} - \frac{5}{6}p$.

3. On note f la fréquence de Oui obtenue dans la classe. En déduire la proportion cherchée p .

Partie C Estimation par intervalle de confiance

On a posé une question dont la réponse est Oui ou Non à un échantillon de n personnes, qu'on juge représentatif d'une population, on obtient la fréquence f des réponses Oui.

1. Calculer les bornes de l'intervalle de confiance au seuil de 95 % de $p(Y)$, puis de la proportion cherchée p .

2. Déduire de l'étude précédente un intervalle de confiance de la proportion de gauchers dans le lycée.

À L'ÉCRIT OU À L'ORAL

Partie D Protocole

Réaliser un protocole de sondage anonyme afin d'estimer la proportion de la population présentant un certain caractère.

Triangle de Pascal

Utiliser PYTHON

Certains objets mathématiques revêtent des propriétés étonnantes, c'est le cas du triangle de Pascal.

Les deux parties de ce TP sont indépendantes.

Objectif

Programmer en Python le triangle de Pascal.
Découvrir une propriété artistique de ce triangle.

Partie A Programmation du triangle de Pascal

Le programme suivant, écrit en Python, doit afficher un tableau carré de $(n+1)$ lignes représentant le triangle de Pascal (il doit afficher 0 pour les valeurs ne correspondant pas à un coefficient binomial).

```
import numpy as np

def triangleP(n):
    tp = np.array([[0] * (n+1)] * (n+1))
    tp[0][0] = 1
    for lig in range(1, n+1):
        tp[lig][0] =
        for col in range(1, lig):
            tp[lig][col] =
        tp[lig][lig] =
    return tp

print(triangleP(5))
```

1. Répondre par vrai ou faux aux questions suivantes.

- Le triangle est complété ligne par ligne.
 - Les n colonnes du carré sont testées dans la boucle `for col in...`
- Compléter le programme à l'aide des propriétés des coefficients binomiaux et le tester.
 - Déterminer le premier coefficient binomial supérieur ou égal à 2020.

Partie B Triangle de Pascal et art fractal

1. Sur un quadrillage 15×15 , construire les 15 premières lignes du triangle de Pascal, puis noircir les cases contenant un nombre impair.

2. Un motif semble apparaître. Stéphanie veut le vérifier pour un grand nombre de lignes du triangle de Pascal.

a. L'opérateur Python `%` renvoie le reste de la division euclidienne. Évaluer les expressions Python suivantes : $10\%2$ et $21\%2$.

b. Déterminer la parité de la somme $a + b$ de deux entiers a et b en fonction la parité de a et b . On pourra compléter le tableau suivant :

| $a \backslash b$ | b | b pair | b impair |
|------------------|-----|----------|------------|
| a pair | | | |
| a impair | | | |

c. Montrer que les expressions Python suivantes renvoient le même résultat : $a\%2 + b\%2$ et $(a + b)\%2$.

d. Recopier et compléter le programme de Stéphanie.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def triangleP2(n):
    """n lignes du triangle de Pascal modulo 2"""
    tp = np.array([[0] * (n+1)] * (n+1))
    tp[0][0] =
    for lig in range(1, n+1):
        tp[lig][0] =
        for col in range(1, lig):
            tp[lig][col] =
        tp[lig][lig] =
    return tp

plt.matshow(1-triangleP2(15))
plt.gray()
plt.title("triangle de Pascal, modulo 2")
plt.axis('equal')
plt.axis('off')
plt.show()
```

- Si un coefficient binomial est pair, quelle sera sa valeur dans le triangle défini par cette fonction ?
- Expliquer ce que fait l'instruction `1-triangleP2(15)`. Vérifier que pour $n = 15$, le motif obtenu est celui trouvé à la question 1., puis tester avec d'autres valeurs.

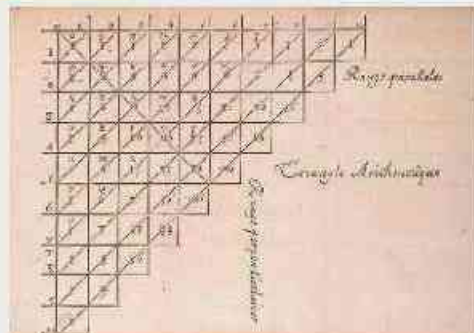
À L'ÉCRIT OU À L'ORAL

3. Pour aller plus loin

S'inspirer du programme de Stéphanie pour construire des triangles de Pascal modulo m (m est un entier).

Observer les différents motifs en fonction de la primalité de m .

Point Histoire



Traité du triangle arithmétique, avec quelques autres petits traités sur la même matière, B. Pascal, 1665.

Les premières traces de ce triangle remontent au XIV^e siècle dans les écrits du mathématicien chinois Zhū Shijī (1303).

Surréservation

Pour optimiser les coûts, les compagnies aériennes pratiquent souvent la surréservation (ou surbooking) : pour un vol donné, ces



compagnies proposent un nombre de réservations supérieur au nombre de places effectives dans l'avion. Cette pratique vise notamment à compenser les empêchements imprévisibles de certains voyageurs contraints d'annuler leur réservation à la dernière minute (ce qui représenterait un manque à gagner pour la compagnie).

Une compagnie pratiquant le surbooking affrète des avions de 300 places pour ses vols moyen-courrier. Pour un vol donné, elle prend n réservations avec $n \geq 300$. Si plus de 300 passagers se présentent à l'embarquement, seuls les 300 premiers arrivés prennent leur vol et les autres sont indemnisés financièrement.

On estime qu'un passager ne se présente pas à l'embarquement avec une probabilité de 15 % et on considère que le comportement d'un passager est indépendant de celui des autres passagers. On note X_n la variable aléatoire qui, à un vol donné, associe

Mener une recherche

le nombre de passagers qui se présentent effectivement à l'embarquement sur l'ensemble des n réservations.

1. Calcul de probabilités

- Justifier que X_n suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
- La compagnie effectue $n = 320$ réservations.
 - Quelle est la probabilité qu'exactement 300 passagers se présentent à l'embarquement ?
 - Déterminer et interpréter la probabilité $P(X_n \geq 300)$.

2. Optimisation des frais de dédommagement

La compagnie souhaite optimiser ses coûts : vendre un maximum de places sans risquer de payer des frais de dédommagement importants du fait du surbooking. Ainsi, elle cherche à déterminer le plus grand entier naturel $n \geq 300$ tel que :

$$P(X_n \leq 300) \geq 0,99$$

- Interpréter concrètement l'inégalité précédente dans le cadre de cet exercice.
- À l'aide d'un script Python ou d'un tableur, déterminer ce plus grand entier n . Interpréter ce résultat.
- Pour aller plus loin.** Écrire une fonction Python permettant de déterminer le plus grand entier naturel $n \geq 300$ tel que $P(X_n \leq 300) \geq p$ où $p \in [0; 1]$ est un réel entré en argument. Étudier le comportement de n en fonction de p .

Sondages et interprétation

Mener une recherche

Lors de la campagne présidentielle de 2017 en France, les cinq derniers sondages avant le premier tour ont donné les résultats suivants :

| Institut | Taille de l'échantillon | JL. Mélenchon | E. Macron | F. Fillon | M. Le Pen |
|------------|-------------------------|---------------|-----------|-----------|-----------|
| Odoxa | 953 | 19 % | 24,5 % | 19 % | 23 % |
| BVA | 1 494 | 19,5 % | 23 % | 19 % | 23 % |
| Ifop | 2 823 | 18,5 % | 24,5 % | 19,5 % | 22,5 % |
| OpinionWay | 1 500 | 18 % | 23 % | 21 % | 22 % |
| Ipsos | 1 401 | 19 % | 24 % | 19 % | 22 % |

- Parmi ces sondages, certains permettaient-ils d'affirmer au seuil de 95 % que le candidat E. Macron arriverait en première position au premier tour ?
- Parmi ces sondages, certains permettaient-ils d'affirmer au seuil de 95 % que le candidat JL. Mélenchon arriverait en quatrième position au premier tour ?
- Finalement, les résultats du premier tour ont été les suivants :

| JL. Mélenchon | E. Macron | F. Fillon | M. Le Pen |
|---------------|-----------|-----------|-----------|
| 19,58 % | 24,01 % | 20,01 % | 21,30 % |

Peut-on considérer *a posteriori* que certains échantillons utilisés n'étaient pas représentatifs de la population ?

Temps d'attente

Les capacités du thème

- ÉTAGE 1** Utiliser une loi géométrique
- ÉTAGE 2** Calculer des probabilités en utilisant une densité de probabilité
- ÉTAGE 3** Calculer des probabilités dans le cadre de la loi uniforme
- ÉTAGE 4** Calculer des probabilités dans le cadre de la loi exponentielle

Modélisation du réel

La désintégration des noyaux d'éléments radioactifs suit une loi étudiée dans ce thème. L'étude du phénomène de radioactivité a permis de très nombreuses applications, par exemple, la méthode de datation au carbone 14. Grâce à la connaissance de la vitesse de désintégration de cet élément radioactif, on peut, en évaluant sa quantité dans un reste végétal ou animal, dater la période à laquelle il était vivant.

 Voir Maths en situation p. 251



A Diaporama pour tester les bases



B Loi binomiale dans une station de ski

Dans une station de ski, une étude statistique a établi qu'un client sur quatre pratique le surf. Une télécabine peut accueillir 80 clients de la station. On note X la variable aléatoire qui, à un échantillon de 80 clients présents dans une télécabine, associe le nombre de surfeurs.

Choisir la bonne réponse.

Les valeurs approchées sont arrondies au millième.

1. X suit une loi binomiale de paramètres :

a. $n = 0,25$, $p = 80$ b. $n = 80$, $p = 0,25$ c. $n = 80$, $p = 0,75$

2. La probabilité que 10 des 80 clients soient surfeurs est environ égale à :

a. 0,003 b. 0,005 c. 0,998

3. $P(X \geq 25) =$

a. $\binom{80}{25} \times 0,25^{25} \times 0,75^{55}$ b. $1 - P(X \leq 25)$ c. $1 - P(X \leq 24)$

4. $P(X < 30) \approx$

a. 0,991 b. 0,995 c. 0,009

5. $E(X) =$

a. 80,25 b. 320 c. 20

6. L'écart type de X est environ égal à :

a. 4,472 b. 3,873 c. 10

C Lien entre aire et intégrale

On a tracé dans le repère ci-contre les courbes représentatives de deux fonctions f et g .

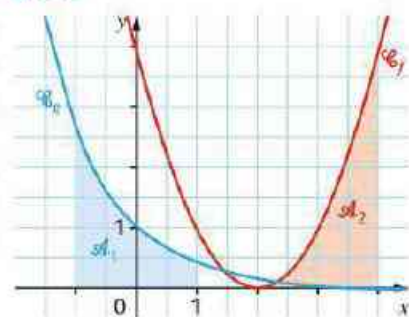
1. À l'aide du quadrillage, donner un encadrement à l'unité des aires des domaines \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 en unité d'aire.

2. Les expressions des fonctions f et g sont :

$$f(x) = x^2 - 4x + 4 \text{ et } g(x) = e^{-x}$$

a. Exprimer les aires des domaines \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 en unité d'aire à l'aide d'une intégrale.

b. Calculer les valeurs exactes des aires de \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 .



D Une variable aléatoire

La variable aléatoire X a pour la loi de probabilité :

| | | | | | |
|--------------|------|-----|-----|-----|-----|
| x_j | -3 | -1 | 0 | 5 | 7 |
| $P(X = x_j)$ | 0,15 | 0,5 | 0,1 | p | 0,2 |

1. Calculer la valeur manquante p dans le tableau.

2. Déterminer $P(X \geq 0)$.

3. Calculer $E(X)$ l'espérance de X .



Consolider les bases

Une épreuve de culture générale consiste en un questionnaire à choix multiple (QCM) de vingt questions. Pour chacune d'entre elles, le sujet propose quatre réponses possibles dont une seule est correcte. Il est attribué un point par réponse correcte, aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse incorrecte. Boris répond complètement au hasard à chacune des vingt questions.

- 1 Quelle est la probabilité que Boris réponde correctement à une seule question ?
- 2 On note X la variable aléatoire égale à la note obtenue par Boris.
 - a. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Justifier.
 - b. Quelle est la probabilité que Boris obtienne la note de 10 ?
 - c. À l'aide de la calculatrice, donner l'arrondi au millième de la probabilité $P(X > 10)$. Détailler votre raisonnement.
 - d. Quelle note Boris peut-il espérer obtenir en répondant au hasard ?
 - e. Boris est certain d'avoir répondu correctement à au moins cinq des questions. Quelle est la probabilité que sa note soit supérieure à 10 ?

Objectif

Remobiliser les connaissances sur la loi binomiale.



Situation 1

Premier Succès dans un schéma de Bernoulli

On considère une urne contenant 20 boules rouges et 80 boules noires. On tire successivement avec remise une boule de l'urne jusqu'à l'obtention d'une boule rouge. Les tirages sont indépendants les uns des autres.

- 1 Quelle est la probabilité p de tirer une boule rouge lors d'un tirage ?
- 2 a. Compléter la fonction `tirages_avant_rouge()` ci-contre qui simule l'expérience aléatoire précédente et retourne le nombre de tirages nécessaires jusqu'à l'apparition d'une boule rouge.
 - b. On répète l'expérience 10 000 fois et on s'intéresse à celles qui nécessitent au plus 30 tirages successifs avant d'obtenir une boule rouge. Compléter le programme ci-dessous qui stocke dans la liste `liste_nbtirages` le nombre d'expériences nécessitant entre 1 et 30 tirages, puis affiche l'histogramme correspondant.

```
# on répète 10000 fois l'épreuve
liste_nbtirages=[0]*30
for i in range(...):
    t=tirages_avant_rouge()
    if t<=30:
        liste_nbtirages[t-1]=...

# construction du diagramme en bâtons du nombre de tirage
pyplot.xlabel('Nb de tirages effectués avant boule rouge')
pyplot.ylabel('Effectifs')
pyplot.bar(range(1,31),liste_nbtirages,width=0.5,color='blue')
pyplot.show()
```

- 3 On note S_i l'événement « obtenir une boule rouge au i -ème tirage ». À chaque épreuve, la variable aléatoire R associe le nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule rouge.
 - a. Quelles valeurs peut prendre la variable aléatoire R ? Donner $P(R = 1)$.
 - b. À l'aide de l'arbre pondéré ci-contre, répondre aux questions suivantes.
 - Calculer les probabilités $P(R = 2)$ et $P(R = 3)$.
 - Plus généralement, conjecturer, pour tout entier naturel n non nul, une expression de $P(R = n)$.

Objectif

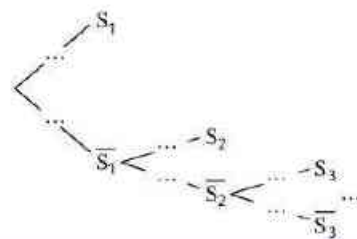
Introduire la loi géométrique comme temps d'attente du premier Succès d'un schéma de Bernoulli.

```
from random import *
import matplotlib.pyplot as pyplot

def tirages_avant_rouge() :
    nb_tirages=1
    alea=random()
    while alea>... :
        alea=...
        nb_tirages=...
    return nb_tirages
```

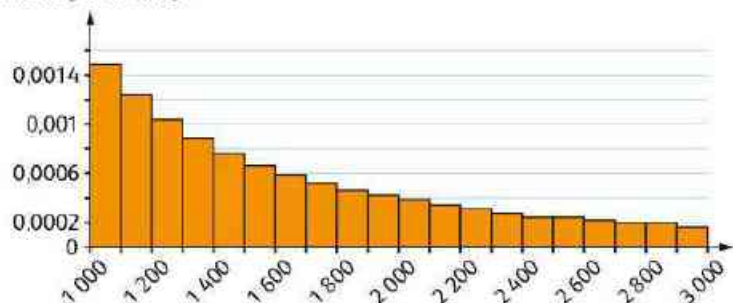
Info

La variable aléatoire R suit la loi géométrique de paramètre $p = 0,2$. C'est la loi de probabilité, lors d'une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes, de la variable aléatoire donnant le rang du 1^{er} Succès. Elle modélise aussi la durée de vie d'une entité qui aurait, à tout instant, la probabilité p de mourir.



Situation 2 Durée de vie d'une ampoule

La durée de fonctionnement d'un type d'ampoule peut varier, selon le constructeur, entre 1 000 et 3 000 heures. L'histogramme ci-dessous donne la répartition des fréquences en fonction de la durée de fonctionnement (en heure).



1 Estimer graphiquement la proportion d'ampoules ayant une durée de fonctionnement :

- comprise entre 1 200 et 2 200 heures ;
- de plus de 2 000 heures ;
- de moins de 1 500 heures.

2 La « limite haute » de l'histogramme peut être approchée par la courbe représentative de la fonction f , définie sur $[1000; 3000]$ par :

$$f(x) = \frac{3000}{2x^2}$$

- Justifier que la fonction f est positive sur $[1000; 3000]$.
- Calculer l'intégrale $I = \int_{1000}^{3000} f(x) dx$. Interpréter ce résultat.
- On choisit au hasard une ampoule de ce type dans l'ensemble de la production et on note X la variable aléatoire égale à sa durée de fonctionnement. À l'aide de la fonction f , calculer les probabilités :

① $P(1200 \leq X \leq 2200)$ ② $P(X > 2000)$ ③ $P(X \leq 1500)$

Comparer avec les résultats obtenus dans la question 1.

Objectif

Découvrir la notion de densité de probabilité.



Info

2 La fonction f est appelée **densité de probabilité**. Elle permet de définir une loi de probabilité sur l'intervalle $I = [1000; 3000]$. Pour deux réels a et b de cet intervalle tels que $a < b$, la probabilité d'un événement $\{a \leq X \leq b\}$ correspond à l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

Situation 3 Propriété d'absence de mémoire

1 Steven, basketteur amateur, s'entraîne aux tirs à 3 points. La probabilité qu'il réussisse un tel tir est égale à 0,15. Il réalise autant de tirs successifs nécessaires jusqu'à réussir son tir (on suppose que ces tirs sont indépendants). On note X la variable aléatoire qui, à cette série de tirs successifs, associe le rang du premier tir réussi.

- Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X ? Exprimer, pour tout entier $k \geq 1$, la valeur de $P(X = k)$ en fonction de k .
- Justifier que, pour tout entier $n \geq 1$, on a $P(X \leq n) = 1 - 0,85^n$.
- En déduire l'expression de $P(X > n)$, pour tout entier $n \geq 1$.
- Justifier alors que $P_{(X>2)}(X > 5) = P(X > 3)$. Interpréter concrètement cette égalité. Ce résultat est-il étonnant? Expliquer.

2 La durée de vie, en heure, d'un composant électronique est modélisée par une variable aléatoire Y de loi exponentielle de paramètre $\lambda = 5 \times 10^{-3}$.

- Quelle est la probabilité que ce composant fonctionne plus de 300 heures? plus de 400 heures? plus de 700 heures?
- Calculer la probabilité conditionnelle $P_{(Y>400)}(Y \geq 700)$. Comparer avec la probabilité $P(Y \geq 300)$. Qu'observe-t-on? Interpréter.

Objectif

Découvrir la notion de loi de probabilité « sans mémoire ».

Rappel

1 b. Pour $q \neq 1$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

1 d. Si $P(A) \neq 0$:

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Info

1 d. et 2 b. Les égalités observées dans ces questions se généralisent et caractérisent les lois géométriques et exponentielles. Ces lois sont qualifiées de « loi de probabilité sans mémoire ».

1 Loi géométrique

a Définition et expression

Situation : On considère une épreuve de Bernoulli de probabilité de Succès p , où $p \in]0; 1[$. On répète cette épreuve de façon identique et indépendante les unes des autres jusqu'à l'apparition du premier Succès. Le nombre d'épreuves n'est donc pas fixé à l'avance.

On note X la variable aléatoire qui, à cette répétition d'épreuves, associe le rang du premier Succès.

Définition et propriété La variable aléatoire X telle que décrite ci-dessus suit une loi géométrique de paramètre p . X prend ses valeurs dans \mathbb{N}^* .

Si X suit une loi géométrique de paramètre p , alors, pour tout entier naturel k non nul :

$$P(X = k) = p \times (1 - p)^{k-1}$$

Démonstration

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour remporter un premier Succès à l'épreuve k , il faut précédemment avoir eu $k - 1$ Échecs (de probabilité $1 - p$), soit par indépendance des épreuves :

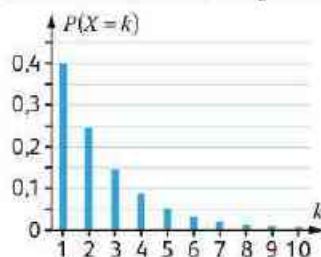
$$P(X = k) = \underbrace{(1-p) \times (1-p) \times \dots \times (1-p)}_{k-1 \text{ Échecs}} \times \underbrace{p}_{1 \text{ Succès}} = (1-p)^{k-1} \times p$$

Remarques

Le caractère aléatoire n'est donc pas le nombre de Succès, mais le nombre d'épreuves. La loi géométrique n'a qu'un seul paramètre.

Représentation graphique d'une loi géométrique

On considère une variable aléatoire X de loi géométrique $p = 0,4$.



b Propriétés de la loi géométrique

Soit p un réel de $]0; 1[$.

Propriété (admise) Si X suit une loi géométrique de paramètre p , alors son espérance mathématique vaut : $E(X) = \frac{1}{p}$.

Propriété caractéristique La loi géométrique de paramètre p est une loi de probabilité sans mémoire, autrement dit, pour tous entiers naturels non nuls m et n : $P_{(X>m)}(X > m + n) = P(X > n)$

Voir exercices Démo n° 40 et 60

Interprétation

La probabilité pour que, dans une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes de même loi, le premier Succès arrive après la n -ième épreuve est la probabilité pour que, dans le même cas, le premier Succès arrive après la $n + m$ -ième épreuve, sachant que les m premières épreuves ont donné lieu à un Échec.

Exemple

On lance une pièce de monnaie truquée dont la probabilité d'« obtenir Pile » est 0,75. On note X le nombre de lancers nécessaires pour « obtenir Pile » sur la face supérieure de la pièce. Alors X suit une loi géométrique de paramètre 0,75.

Remarque

La propriété ci-contre justifie le qualificatif « géométrique » de cette loi : on reconnaît la formule générale d'une suite géométrique de premier terme p et de raison $1 - p$.

Exemple (suite)

La probabilité que Pile apparaisse pour la première fois au premier lancer est :

$$P(X = 1) = p = 0,75$$

La probabilité que Pile apparaisse pour la première fois au quatrième lancer est égale à :

$$\begin{aligned} P(X = 4) &= p \times (1 - p)^3 \\ &= 0,75 \times (1 - 0,75)^3 \\ &= 0,0117 \end{aligned}$$

Exemple (suite)

On a $E(X) = \frac{1}{0,75} = 1,33$.

Si on répète un grand nombre de fois l'expérience aléatoire, Pile apparaîtra en moyenne avant le deuxième lancer.

Exemple (suite)

Pile n'est pas apparu lors des deux premiers lancers. Quelle est la probabilité qu'il n'apparaisse pas lors du prochain lancer ?

$$\begin{aligned} P_{(X>2)}(X > 2 + 1) &= P(X > 1) \\ &= 1 - P(X = 1) \\ &= 0,25 \end{aligned}$$



1 Utiliser une loi géométrique

Énoncé Un client cherche à joindre par téléphone l'assistance technique de son fournisseur Internet. On estime que la probabilité que son appel soit pris sans attente est de 0,2. Si son appel n'est pas pris sans attente, le client raccroche son téléphone et effectue de nouveaux appels jusqu'à joindre un technicien. On suppose que les appels sont indépendants les uns des autres.

On note T la variable aléatoire égale au rang de son premier appel pris sans attente.

1. Quelle est la loi de probabilité de T ? Justifier.
2. Calculer $P(T=3)$.
3. Quelle est la probabilité que le client doive effectuer plus de 2 appels pour joindre le service technique?
4. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire T et interpréter ce résultat.
5. Le client a déjà effectué 2 appels infructueux. Quelle est la probabilité qu'il doive en passer de nouveau 2?



Solution

1. T peut prendre toutes les valeurs entières strictement positives.
« Joindre l'assistance technique » est une épreuve de Bernoulli de Succès « l'appel est pris sans attente » de probabilité $p=0,2$ et d'Échec « l'appel est mis en attente ». On répète cette épreuve de façon identique et indépendamment les unes des autres jusqu'à l'apparition du premier Succès. La variable aléatoire T associe le rang du premier Succès donc T suit la loi géométrique de paramètre $p=0,2$.

2. On a $P(T=3)=(1-0,2)^2 \times 0,2=0,128$.

3. $P(T>2)=1-P(T \leq 2)=1-(P(T=1)+P(T=2))$
 $=1-(0,2+0,8 \times 0,2)=0,64$

4. $E(T)=\frac{1}{0,2}=10$. En moyenne, un client doit appeler 10 fois pour joindre l'assistance technique sans attente.

5. On cherche $P_{(T>2)}(T>2+2)=P(T>2)$ d'après la propriété de loi sans mémoire donc $P_{(T>2)}(T>4)=0,64$.

Point méthode

1. La loi géométrique est la loi d'apparition du premier Succès dans un schéma de Bernoulli. Il faut donc vérifier que :

- ① l'on étudie une épreuve de Bernoulli ;
- ② ces épreuves sont répétées de façon identique et indépendamment les unes des autres ;
- ③ l'expérience s'arrête lors de l'apparition du premier Succès ;
- ④ la variable aléatoire associée à l'expérience correspond au rang du premier Succès.

J'applique

1 On considère une variable aléatoire X qui suit une loi géométrique de paramètre 0,3.

1. Calculer les probabilités :

$$P(X=4), P(X \leq 2) \text{ et } P(X > 3).$$

On arrondira les résultats au millième.

2. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$.

2 On suppose que le temps d'attente (en minute) d'un métro à une station est modélisé par une variable aléatoire T qui suit une loi géométrique.

Le temps d'attente moyen d'un métro pour une ligne est de 3 minutes.

1. Quel est le paramètre de la loi géométrique pour cette ligne?
2. Quelle est la probabilité d'attendre entre 1 et 3 minutes une rame de cette ligne?
3. Quelle est la probabilité d'attendre plus de 5 minutes?

3 Un veilleur de nuit doit ouvrir une porte dans le noir (il a perdu sa lampe !). Il est équipé d'un trousseau de 10 clés dont une seule ouvre la porte.

Soit X la variable aléatoire qui dénombre le nombre de clés essayées jusqu'à ce que la porte s'ouvre. Les clés n'étant pas différenciées, il choisit à chaque essai une clé au hasard parmi les 10.

1. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire X ? Préciser son paramètre.

2. Quelle est la probabilité que le veilleur ouvre la porte au premier essai?

3. Déterminer la probabilité $P(X > 2)$. Interpréter.

4. Calculer $P_{(X>5)}(X > 8)$. Interpréter ce résultat.

5. On considère désormais que le veilleur de nuit teste une clé puis met la clé testée dans sa poche.

Quelle est la probabilité d'ouvrir la porte lors du troisième essai? On pourra s'aider d'un arbre.

2 Lois continues à densité

On considère deux réels a et b tels que $a < b$.

a Densité de probabilité

Définition On considère une fonction f continue et positive sur un intervalle $[a; b]$. On dit que f est une **fonction de densité** (ou une **densité de probabilité**) sur l'intervalle $[a; b]$ si $\int_a^b f(x) dx = 1$.

Définition Soit f une fonction de densité sur $[a; b]$.

On dit que X suit la **loi de probabilité de fonction de densité f** si, pour tous réels c et d de $[a; b]$ tels que $c \leq d$, la probabilité de l'événement $X \in [c; d]$ est :

$$P(X \in [c; d]) = P(c \leq X \leq d) = \int_c^d f(x) dx$$

Remarques

- L'aire du domaine compris entre la courbe représentative de f , l'axe des abscisses et les droites verticales d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à une unité d'aire.

- Pour tout réel $c \in [a; b]$, $P(X = c) = 0$, en effet : $\int_c^c f(x) dx = 0$.

- Pour tous réels c et d (avec $c \leq d$) de l'intervalle $[a; b]$, on a :

$$P(c \leq X \leq d) = P(c \leq X < d) = P(c < X \leq d) = P(c < X < d)$$

- X est une variable aléatoire continue à valeurs réelles dans $[a; b]$.

Dans la suite, on considère que X est une variable aléatoire continue à valeurs réelles dans l'intervalle $[a; b]$ et de densité de probabilité f .

b Fonction de répartition d'une loi à densité

Définition La **fonction de répartition** de la variable aléatoire X est la fonction F qui, à tout réel t de $[a; b]$, associe la probabilité d'obtenir une valeur inférieure ou égale à t :

$$F(t) = P(X \leq t) = \int_a^t f(x) dx$$

Remarque

F est ainsi la primitive de f qui s'annule en a .

On en déduit que, pour tous réels c et d ($c \leq d$) de l'intervalle $[a; b]$:

$$P(c \leq X \leq d) = F(d) - F(c) = P(X \leq d) - P(X \leq c)$$

c Espérance et variance d'une loi à densité

Définitions L'espérance mathématique de X est le réel :

$$E(X) = \int_a^b x f(x) dx$$

La **variance de X** est le réel $V(X) = \int_a^b x^2 f(x) dx - (E(X))^2$.

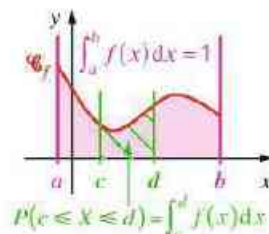
Remarque

L'écart type de la variable aléatoire X est égal à $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Exemple

La fonction définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = 2x$ est une densité de probabilité sur $[0; 1]$. En effet :

- elle est continue sur $[0; 1]$
- elle est positive sur $[0; 1]$
- $\int_0^1 f(x) dx = [x^2]_0^1 = 1^2 - 0^2 = 1$



Remarque

On peut aussi définir une densité de probabilité sur un intervalle non borné comme $[a; +\infty[$. Dans ce cas, la condition sur l'intégrale s'écrit :

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt = 1$$

Exemple

La fonction g définie sur $[2; +\infty[$ par $g(t) = \frac{2}{t^2}$ est une fonction de densité sur $[2; +\infty[$ puisque :

- elle est positive et continue sur $[2; +\infty[$;
- pour tout réel b tel que $b \geq 2$,

$$\int_2^b g(t) dt = \left[-\frac{2}{t} \right]_2^b = 1 - \frac{2}{b}$$

$$\text{et } \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{b} \right) = 1.$$

Exemple

On considère la variable aléatoire X suivant la loi de probabilité de densité $f(x) = 2x$ sur $[0; 1]$.

$$P(0 \leq X \leq 0,5) = \int_0^{0,5} f(x) dx = [x^2]_0^{0,5} = 0,25$$

$$E(X) = \int_0^1 x f(x) dx = \left[\frac{2x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$\text{Puisque } \int_0^1 x^2 f(x) dx = \left[\frac{x^4}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\text{alors } V(X) = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3} \right)^2 = \frac{1}{18}.$$

Énoncé 1. Montrer que la fonction $f: t \mapsto \frac{3000}{2t^2}$ est une densité de probabilité sur $I = [1000; 3000]$.

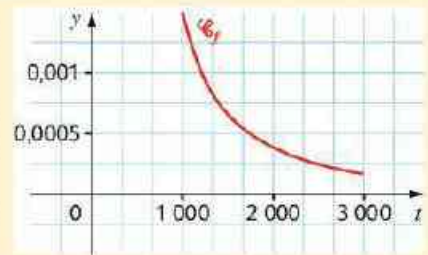
2. La durée de fonctionnement, exprimée en heure, d'un lot d'ampoules à led est une variable aléatoire T sur $[1000; 3000]$ de densité de probabilité f .

a. Sur le graphique ci-contre, on a tracé la courbe \mathcal{C}_f de la fonction f sur I .

Reproduire et hachurer la surface correspondant à $P(2000 \leq T \leq 3000)$.

b. Calculer la probabilité qu'une ampoule prise au hasard dans le lot ait une durée de vie comprise entre 2 000 et 3 000 heures.

c. Calculer l'espérance de la variable aléatoire T . Arrondir le résultat à l'unité, puis l'interpréter.



Solution

1. La fonction f est continue et positive sur $[1000; 3000]$. De plus, une primitive de f sur I est $t \mapsto -\frac{3000}{2t}$.

$$\int_{1000}^{3000} f(t) dt = \left[-\frac{3000}{2t} \right]_{1000}^{3000} = -\frac{3000}{2 \times 3000} - \left(-\frac{3000}{2 \times 1000} \right) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1$$

On en déduit que la fonction f est une densité de probabilité sur I .

2. a. Comme f est la densité de T , $P(2000 \leq T \leq 3000)$ correspond à l'aire du domaine du plan délimité par l'axe des abscisses, la courbe \mathcal{C}_f et les droites d'équation $x = 2000$ et $x = 3000$. (voir figure ci-contre)

b. On cherche $P(2000 \leq T \leq 3000)$ or :

$$\begin{aligned} P(2000 \leq T \leq 3000) &= \int_{2000}^{3000} f(t) dt = \left[-\frac{3000}{2t} \right]_{2000}^{3000} \\ &= -\frac{3000}{2 \times 3000} - \left(-\frac{3000}{2 \times 2000} \right) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

c. L'espérance mathématique de la variable aléatoire T est égale à :

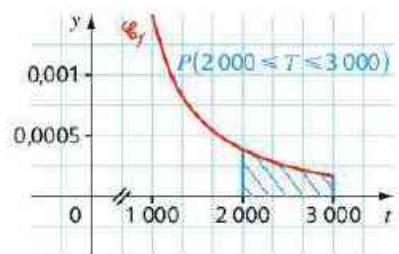
$$\begin{aligned} E(T) &= \int_{1000}^{3000} t f(t) dt = \int_{1000}^{3000} \frac{3000}{2t} dt = [1500 \ln t]_{1000}^{3000} \\ &= 1500(\ln 3000 - \ln 1000) = 1648 \end{aligned}$$

En moyenne, une ampoule du stock fonctionne pendant environ 1 648 h.

Point méthode

1. Pour démontrer qu'une fonction f est une densité de probabilité sur un intervalle $[a; b]$, il suffit de vérifier que :

- ① f est positive sur $[a; b]$
- ② f est continue sur $[a; b]$
- ③ $\int_a^b f(t) dt = 1$



J'applique

4. On a représenté ci-contre la densité de probabilité g définie sur $[0; 10]$.

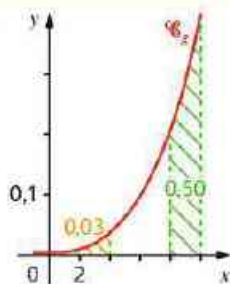
On note X la variable aléatoire qui suit la loi de probabilité de densité g .

1. Rappeler la valeur de $P(0 \leq X \leq 10)$.

2. Écrire la probabilité qui correspond à l'aire hachurée en orange, puis à celle hachurée en vert.

3. En déduire les valeurs de :

$$P(4 < X < 8), P(X \geq 4) \text{ et } P(X \leq 8)$$



5. Déterminer, dans chaque cas, si la fonction f est une densité de probabilité sur l'intervalle donné.

- 1. $f(x) = 3x^2$ sur $[0; 1]$
- 2. $f(x) = \frac{2}{x^2}$ sur $[1; 2]$
- 3. $f(x) = 0,5 - x$ sur $[-1; 1]$
- 4. $f(x) = e^x$ sur $[0; \ln 2]$

6. On considère la fonction f définie sur $I = [2; 4]$ par $f(t) = kt$ où k est un réel strictement positif.

1. Déterminer la valeur du réel k pour que la fonction f soit une densité de probabilité sur I .

2. On note X la variable aléatoire de loi de probabilité f .

- a. Calculer $P(X \leq 3)$.
- b. Calculer $E(X)$, puis $V(X)$.

3 Loi uniforme continue sur $[a; b]$

a Loi uniforme sur $[0; 1]$

On considère l'expérience aléatoire « choisir un nombre **au hasard** dans l'intervalle $[0; 1]$ ». On note X la variable aléatoire qui prend une valeur au hasard dans l'intervalle $[0; 1]$. On s'intéresse à la probabilité des événements de la forme $X \in [c; d]$ où $0 \leq c \leq d \leq 1$.

Définition On dit qu'une variable aléatoire X , prenant ses valeurs dans l'intervalle $[0; 1]$, suit la **loi uniforme** sur l'intervalle $[0; 1]$ si, quel que soit l'intervalle $[c; d]$ contenu dans $[0; 1]$, la probabilité de l'événement $\{X \in [c; d]\}$ est égale à la longueur de l'intervalle $[c; d]$, c'est-à-dire :
pour tous réels c et d tels que $0 \leq c \leq d \leq 1$, $P(c \leq X \leq d) = d - c$

Dans la suite, on considère deux réels a et b tels que $a < b$.

b Loi uniforme sur $[a; b]$

Définition On appelle **loi uniforme sur $[a; b]$** la loi de probabilité dont la densité de probabilité est la fonction constante f définie sur $[a; b]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{b-a}$$

Remarque

La différence $b - a$ correspond à la longueur de l'intervalle $[a; b]$.

La loi uniforme sur $[a; b]$ est une loi à densité, elle vérifie donc toutes les propriétés étudiées dans le paragraphe 2, en particulier $\int_a^b f(x) dx = 1$.

Propriété Si une variable aléatoire X suit une loi uniforme sur $[a; b]$, alors la **fonction de répartition F** associée à cette variable aléatoire est définie, pour tout réel t de $[a; b]$ par :

$$F(t) = P(X \leq t) = \frac{t-a}{b-a}$$



Démonstration

Une primitive sur \mathbb{R} de $f : x \mapsto \frac{1}{b-a}$ est $x \mapsto \frac{x}{b-a}$. On en déduit que, pour tout

réel t de $[a; b]$, $F(t) = P(X \leq t) = P(a \leq X \leq t) = \int_a^t \frac{1}{b-a} dx = \left[\frac{x}{b-a} \right]_a^t = \frac{t-a}{b-a}$

Conséquence Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[a; b]$, si c et d sont deux réels tels que $a \leq c \leq d \leq b$, alors :

$$P(c \leq X \leq d) = \frac{d-c}{b-a}$$



Démonstration

Pour tous réels c et d tels que $a \leq c \leq d \leq b$,

$$P(c \leq X \leq d) = F(d) - F(c) = \frac{d-a}{b-a} - \frac{c-a}{b-a} = \frac{d-c}{b-a}$$

c Espérance et variance de la loi uniforme sur $[a; b]$

Propriété Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[a; b]$.

L'espérance mathématique de X est $E(X) = \frac{a+b}{2}$.

La variance et l'écart type de X sont $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$ et $\sigma(X) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$.

Exemple

Dans l'expérience aléatoire ci-contre, on note A l'événement « obtenir un nombre inférieur à 0,5 » et B « obtenir un nombre supérieur à 0,7 »

$$P(A) = P(0 \leq X \leq 0,5) = 0,5$$

$$P(B) = P(0,7 \leq X \leq 1) = 0,3$$

Remarque

La loi uniforme sur $[a; b]$ permet de modéliser le choix « au hasard » d'un nombre réel dans $[a; b]$. Ce choix ne privilégie aucun nombre dans l'intervalle $[a; b]$ d'où le caractère uniforme.

Info Python

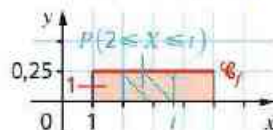
La fonction `uniform(a, b)` de la bibliothèque `random` permet de simuler une loi uniforme sur $[a; b]$, autrement dit, le « tirage » au hasard d'un réel de $[a; b]$.

Exemple

On considère la variable aléatoire X de loi uniforme sur $[1; 5]$.

La densité de probabilité de X est $f(x) = \frac{1}{5-1} = \frac{1}{4}$ sur $[1; 5]$.

$$P(1 \leq X \leq 3) = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}$$



Soit $t \in [1; 5]$, $P(2 \leq X \leq t) = \frac{t-2}{4}$.

Remarques

• On retiendra que, pour tous réels $c \leq d$ de $[a; b]$:

$$P(c \leq X \leq d) = \frac{\text{longueur de } [c; d]}{\text{longueur de } [a; b]}$$

• La valeur $\frac{a+b}{2}$ de l'espérance est égale au centre de $[a; b]$.



3 Calculer des probabilités dans le cadre de la loi uniforme

Énoncé Chaque jour, Antoine s'entraîne au billard américain entre 20 minutes et 1 heure. On modélise la durée de son entraînement, en minute, par une variable aléatoire X qui suit une loi uniforme sur l'intervalle $[20; 60]$.

- Donner la fonction densité définissant la loi de X .
- Calculer la probabilité que l'entraînement d'Antoine dure :
 - entre 30 et 45 minutes ;
 - plus de 30 minutes ;
 - moins de 30 minutes ;
 - exactement une heure.
- En moyenne, combien de temps dure un entraînement d'Antoine ?



Solution

1. X suit la loi uniforme sur l'intervalle $[20; 60]$, donc sa fonction densité est définie, pour tout réel x de $[20; 60]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{60-20} = \frac{1}{40}$$

2. a. On a $P(30 \leq X \leq 45) = \frac{45-30}{60-20} = \frac{3}{8} = 0,375$ (voir figure ci-contre).

b. On a $P(X \geq 30) = P(30 \leq X \leq 60) = \frac{60-30}{60-20} = 0,75$.

c. $P(X < 30) = P(20 \leq X < 30) = \frac{30-20}{60-20} = \frac{1}{4} = 0,25$.

d. La loi uniforme est une loi continue, l'événement $\{X = 60\}$ est un événement quasi-impossible et $P(X = 60) = 0$.

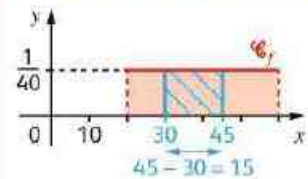
3. La moyenne en probabilité est l'espérance de la variable aléatoire donc :

$$E(X) = \frac{20+60}{2} = 40$$

En moyenne, l'entraînement d'Antoine dure 40 minutes.

Point méthode

2. a. On peut modéliser la situation par la figure suivante :



Déterminer la probabilité

$P(30 \leq X \leq 45)$ revient alors à calculer l'aire du rectangle

hachuré en bleu soit $15 \times \frac{1}{40} = \frac{3}{8}$.

J'applique

7 Un élève saisit l'instruction `random()`, du module `random`, dans une console Python. On note N la variable aléatoire qui associe le nombre retourné par cette commande.

Déterminer la probabilité des événements suivants :

- « le nombre retourné est compris entre 0,3 et 0,7 » ;
- « le nombre retourné est strictement inférieur à 0,6 » ;
- « le nombre retourné est au moins égal à 0,3 » ;
- « le nombre retourné est égal à $1/3$ ».

Info

Les fonctions suivantes génèrent un nombre réel aléatoire de l'intervalle $[0; 1[$:

Python `random()`

TI

NbrAleat

Casio `ran#`

NumWorks

`random()`

8 Une entreprise se fait distribuer son courrier tous les matins aléatoirement entre 9 h et 10 h 30. On considère la variable aléatoire X donnant la durée, en minute, écoulée entre 9 h et la distribution. On admet que X suit une loi uniforme.

- Déterminer la probabilité que le courrier soit livré après 9 h 30.
- Déterminer la probabilité que le courrier soit livré au plus tard à 10 h 10.
- Calculer $E(X)$. En donner une interprétation.

9 On considère une variable aléatoire X suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[5; 20]$.

Comparer les probabilités suivantes :

$$P(X \leq 8), P(X \geq 17) \text{ et } P(11 \leq X \leq 14).$$

Que peut-on en déduire ?

4 Loi exponentielle

a Définition et premières propriétés

Définition Soit λ un réel strictement positif.

La loi exponentielle de paramètre λ est la loi de probabilité sur $[0; +\infty[$ dont la fonction densité f est définie sur $[0; +\infty[$ par :
pour tout réel $x \geq 0$, $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$

Remarque

Une variable aléatoire suivant une loi exponentielle est à valeurs dans $[0; +\infty[$. On remarque que $f(0) = \lambda$.

Propriété Soit λ un réel strictement positif. Si une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ , alors la fonction de répartition F est définie, pour tout réel $t \geq 0$ par :

$$F(t) = P(X \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$$



Démonstration

Une primitive sur $[0; +\infty[$ de $f : x \mapsto \lambda e^{-\lambda x}$ est $x \mapsto -e^{-\lambda x}$.

Donc, pour tout réel t positif, $F(t) = P(X \leq t) = P(0 \leq X \leq t)$.

Donc $F(t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx = [-e^{-\lambda x}]_0^t = -e^{-\lambda t} - (-e^{-\lambda \times 0}) = -e^{-\lambda t} + 1$.

Conséquence Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Pour tous réels c et d positifs tels que $c \leq d$:

$$P(c \leq X \leq d) = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d} \quad \text{et} \quad P(X \geq c) = e^{-\lambda c}$$



Démonstration

Pour tous réels c et d positifs tels que $c \leq d$:

$$\begin{aligned} P(c \leq X \leq d) &= P(X \leq d) - P(X \leq c) = F(d) - F(c) \\ &= 1 - e^{-\lambda d} - (1 - e^{-\lambda c}) = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d} \end{aligned}$$

L'événement $\{X \geq c\}$ étant le contraire de l'événement $\{X \leq c\}$, alors :

$$P(X \geq c) = 1 - P(X < c) = 1 - P(X \leq c) = e^{-\lambda c}$$

b Espérance et loi exponentielle

Propriété L'espérance d'une variable aléatoire X de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ est égale à :

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

☞ Voir exercice Démo n° 73

c Propriété d'absence de mémoire

Propriété d'absence de mémoire Si X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ alors, pour tous réels positifs t et h :

$$P_{(X \geq t)}(X \geq t+h) = P(X \geq h)$$



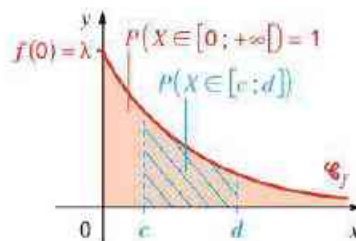
Démonstration

Pour tous réels t et h positifs :

$$P_{(X \geq t)}(X \geq t+h) = \frac{P((X \geq t+h) \cap (X \geq t))}{P(X \geq t)}$$

Or l'événement $(X \geq t+h) \cap (X \geq t)$ est l'événement $(X \geq t+h)$ donc :

$$P_{(X \geq t)}(X \geq t+h) = \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} = \frac{e^{-\lambda t} \times e^{-\lambda h}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda h} = P(X \geq h)$$



On peut vérifier que :

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \int_0^h f(x) dx = 1$$

Exemple

Soit T une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 0,1. La fonction densité associée est définie, pour tout réel $x \geq 0$ par :

$$f(x) = 0,1 e^{-0,1x}$$

$$P(T \leq 10) = 1 - e^{-0,1 \times 10}$$

$$= 1 - e^{-1} \approx 0,63$$

$$P(5 \leq T \leq 20) = e^{-\lambda \times 5} - e^{-\lambda \times 20}$$

$$= e^{-0,5} - e^{-2} \approx 0,47$$

Remarque

La loi exponentielle permet de modéliser la durée de vie de certains composants électroniques ou d'éléments radioactifs.

Dans ce cadre, l'espérance $\frac{1}{\lambda}$ est appelée « durée de vie moyenne » de la variable aléatoire considérée. Connaissant cette valeur, on peut facilement en déduire la valeur du paramètre λ .

Exemple (suite)

$$\text{On a } E(T) = \frac{1}{0,1} = 10.$$

Remarque

Cette propriété d'absence de mémoire (ou de durée de vie « sans vieillissement ») montre que la durée de vie X sur un laps de temps h ne dépend pas de l'âge t à partir duquel on considère cet événement.

Énoncé Lors de l'appel à leur mutuelle, les clients sont systématiquement mis en attente avec un message préenregistré sur fond musical. Le temps d'attente, exprimé en seconde, est modélisé par la variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,02$.

1. Quelle est la durée moyenne d'attente lors d'un appel à ce standard téléphonique ?
2. Calculer la probabilité qu'un adhérent soit mis en attente plus de 1 minute.
3. Déterminer la valeur minimale de t , arrondie à la seconde, telle que $P(X < t) > 0,9$. Interpréter ce résultat.
4. Une cliente attend depuis plus d'une minute. Lassée d'attendre, elle raccroche et recompose le numéro. Elle espère attendre moins de trente secondes cette fois-ci. Le fait de raccrocher puis de rappeler augmente-t-il ses chances de limiter à 30 secondes l'attente supplémentaire ou bien aurait-elle mieux fait de rester en ligne ?

Solution

1. Comme X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,02$,

$$E(X) = \frac{1}{0,02} = 50. \text{ Donc le temps moyen d'attente est de 50 secondes.}$$

2. On a $P(X > 60) = 1 - P(X \leq 60) = 1 - (1 - e^{-\lambda \times 60}) = e^{-1,2} \approx 0,3$.

3. On a $P(X < t) = 1 - e^{-0,02t}$. On est ainsi ramené à résoudre l'inéquation $1 - e^{-0,02t} > 0,9$:

$$\begin{aligned} 1 - e^{-0,02t} > 0,9 &\Leftrightarrow -e^{-0,02t} > -0,1 \Leftrightarrow e^{-0,02t} < 0,1 \\ &\Leftrightarrow -0,02t < \ln 0,1 \Leftrightarrow t > \frac{\ln 0,1}{-0,02} \Leftrightarrow t > 115,1 \end{aligned}$$

On en déduit que plus de 90 % des clients attendent moins de 116 s.

4. La probabilité que la cliente attende au maximum 30 secondes supplémentaires sachant qu'elle a déjà attendu plus d'une minute est égale à :

$$\begin{aligned} P_{(X > 60)}(X < 60 + 30) &= 1 - P_{(X > 60)}(X \geq 60 + 30) \\ &= 1 - P(X \geq 30) = P(X < 30) \end{aligned}$$

d'après la propriété de loi sans mémoire de la loi exponentielle. On obtient ainsi la probabilité que la cliente attende moins de 30 secondes lors d'un nouvel appel.

Le fait de raccrocher n'augmente donc pas les chances de la cliente de limiter son attente.

Point méthode

1. La notion de moyenne est à relier à l'espérance de la variable aléatoire X .
2. Pour calculer des probabilités mettant en jeu une variable aléatoire suivant une loi exponentielle, on peut utiliser sa fonction de répartition et les propriétés qui en résultent : pour tout réel t positif, $P(X \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$.
4. Pour calculer une probabilité conditionnelle mettant en jeu une variable aléatoire suivant une loi exponentielle, on exploite sa propriété de loi sans mémoire : pour tous réels positifs t et h ,

$$P_{(X > t)}(X > t + h) = P(X > h)$$

J'applique

10 On s'intéresse à la durée d'attente des clients à l'entrée d'un restaurant sans réservation.

Cette durée, en minute, est modélisée par une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

Une étude statistique a permis d'observer que le temps moyen d'attente pour obtenir une table est de 10 minutes.

On arrondira les résultats à 10^{-4} si besoin.

1. Déterminer la valeur de λ .
2. Quelle est la probabilité qu'un client attende entre 10 et 20 minutes pour obtenir une table ?
3. Un client a attendu depuis plus de 10 minutes. Quelle est la probabilité que sa durée d'attente totale dépasse 20 minutes ?

11 La durée de vie d'un robot, exprimée en année, jusqu'à ce que survienne la première panne est une variable aléatoire D qui suit une loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$. On sait que la probabilité qu'un robot fonctionne sans panne plus de 6 ans est égale à 0,3.

1. Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de λ . Pour la suite de l'exercice, on prendra $\lambda = 0,2$.

2. Montrer que la probabilité qu'un robot n'ait pas subi de panne au cours des deux premières années est égale à $e^{-0,4}$.

3. Déterminer et interpréter la probabilité :

$$P(2 \leq X \leq 5)$$

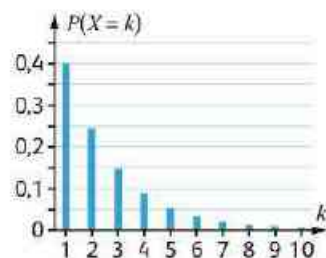
4. Déterminer le réel t tel que $P(X \leq t) = 0,5$. Interpréter concrètement ce résultat.

Loi géométrique

- Une variable aléatoire X suit la loi **géométrique de paramètre** $p \in]0; 1[$ si, pour tout entier naturel k non nul :

$$P(X = k) = p \times (1-p)^{k-1}$$

- X est à valeurs **discrètes** et prend ses valeurs dans \mathbb{N}^* .
- L'espérance de X est égale à $E(X) = \frac{1}{p}$.
- La loi géométrique de paramètre p est une loi de probabilité **sans mémoire** : pour tous entiers naturels non nuls m et n , $P_{(X>m)}(X > m+n) = P(X > n)$.



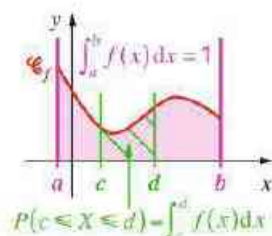
Loi continue à densité

- Une **fonction densité** sur un intervalle $[a; b]$ est une fonction f continue et positive sur $[a; b]$ qui vérifie $\int_a^b f(x) dx = 1$.

- X suit la loi de probabilité de fonction de densité f sur $[a; b]$ si, pour tous réels c et d de $[a; b]$ tels que $c \leq d$:

$$P(c \leq X \leq d) = \int_c^d f(x) dx$$

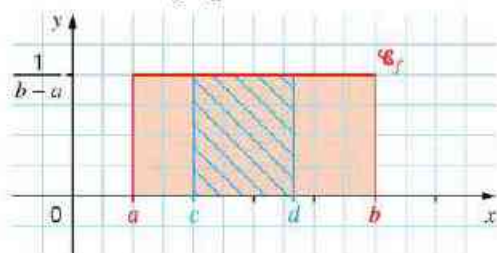
- X est à valeurs **réelles** et prend ses valeurs dans $[a; b]$.
- L'espérance de X est égale à $E(X) = \int_a^b x f(x) dx$.



Loi continue uniforme sur $[a; b]$

- Une variable aléatoire X suit la loi **uniforme** sur $[a; b]$ si sa fonction de densité f est la fonction constante :

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \text{ définie sur } [a; b]$$



- Si c et d sont deux réels de $[a; b]$ tels que $c \leq d$, alors :

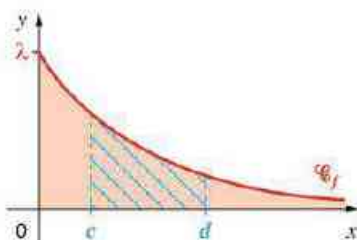
$$P(c \leq X \leq d) = \frac{d-c}{b-a}$$

- L'espérance de X est $E(X) = \frac{a+b}{2}$.
- La variance de X est $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

Loi exponentielle de paramètre λ

- Une variable aléatoire X suit la loi **exponentielle de paramètre** λ si sa fonction de densité f est la fonction :

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \text{ définie sur } [0; +\infty[$$



- Pour tous réels c et d positifs tels que $c \leq d$:

$$P(c \leq X \leq d) = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$$

- L'espérance de X est $E(X) = \frac{1}{\lambda}$.
- La loi exponentielle est une loi sans mémoire, pour tous réels positifs t et h :

$$P_{(X>t)}(X \geq t+h) = P(X \geq h)$$



Voir corrigés

QCM

Pour chacune des questions, indiquer la (ou les) bonne(s) réponse(s).

| | a | b | c |
|---|---------------------------|------------------------|-------------------------|
| 1. La variable aléatoire X suit la loi géométrique de paramètre 0,8, alors pour tout entier $k > 0$, $P(X = k) =$ | $0,2 \times 0,8^k$ | $0,8 \times 0,2^{k-1}$ | $0,8 \times 0,2^k$ |
| 2. L'espérance de X est égale à : | 1,25 | 8 | 5 |
| 3. La fonction $f : x \mapsto 0,25x^3$ est une densité de probabilité sur $[0; 2]$ d'une variable aléatoire X . Alors : | $P(X < 1) = \frac{1}{16}$ | $P(X \geq 0,5) = 1$ | $P(X = 1) = 0$ |
| 4. La fonction définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = kx^2$ est une densité sur $[0; 1]$ si : | $k = 1$ | $k = \frac{1}{2}$ | $k = 3$ |
| 5. La fonction $g : t \mapsto \frac{2}{t^2}$ est une densité sur I si : | $I = [1; 5]$ | $I = [1; 2]$ | $I = [-2; -1]$ |
| 6. La fonction densité définissant une loi uniforme sur $[2; 8]$ est la fonction $f :$ | $x \mapsto \frac{x}{6}$ | $x \mapsto 6$ | $x \mapsto \frac{1}{6}$ |
| 7. L'espérance d'une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[-5; 3]$ est égale à : | $\frac{1}{8}$ | -1 | -2 |

Soit T une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

| | | | |
|--|---------------------------------|------------------------------------|---------------------------------|
| 8. Pour tout réel $t \geq 0$, $P(T \leq t) =$ | $1 - e^{-\lambda t}$ | $e^{\lambda t}$ | $e^{-\lambda t}$ |
| 9. L'espérance de T est égale à | $\frac{\lambda}{2}$ | λ | $\frac{1}{\lambda}$ |
| 10. On a $P(T \geq 10) = 0,4$, alors : | $\lambda = -\ln \frac{0,4}{10}$ | $\lambda = \frac{\ln 0,4}{\ln 10}$ | $\lambda = -\frac{\ln 0,4}{10}$ |
| 11. $P_{(T > 2)}(T \geq 6)$ est égale à : | $P(T \geq 6)$ | $P(T \geq 4)$ | $P(T \geq 8)$ |

vrai

ou faux ?

Indiquer pour chaque affirmation si elle est vraie ou fausse. Justifier.

Partie A.

1. Jules lance plusieurs fois un dé équilibré à 6 faces jusqu'à obtenir un six. En moyenne, le premier six apparaîtra au sixième lancer.

2. La durée, en heure, du trajet domicile-travail du personnel d'une entreprise est une variable aléatoire uniformément répartie sur $[0; 1]$. La probabilité qu'un employé ait une durée de trajet comprise entre 15 min et 20 min est égale à $\frac{1}{20-15}$.

3. La durée de vie, exprimée en heure, d'un transistor jusqu'à ce que survienne la première panne suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,0005$.

En moyenne, la durée de vie des transistors est 5 000 h.

Partie B.

1. Un joueur de fléchettes touche la zone centrale de la cible avec une probabilité égale à 0,1. Il rate le centre de la cible lors de ses quatre premiers tirs, la probabilité qu'il rate son tir suivant est égale à 0,9.

2. La durée T , en minute, d'une conversation téléphonique suit une loi exponentielle de paramètre 0,25. La conversation dure depuis 15 minutes, la probabilité que l'un des interlocuteurs raccroche dans les 5 minutes suivantes est égale à $P(T \leq 20)$.

3. On choisit un nombre réel au hasard entre -3 et 6. La probabilité qu'il soit inférieur à 3 sachant qu'il est positif est égale à $\frac{1}{3}$.

Automatismes transversaux

12 Déterminer une primitive sur \mathbb{R} de chacune des fonctions suivantes.

1. $f(x) = x^2 - 6x + 1$ 2. $g(x) = \frac{1}{7}$
 3. $h(x) = 3e^{3x}$ 4. $j(x) = 3e^{-3x}$

13 Calculer les intégrales suivantes.

1. $\int_{-2}^{10} \frac{1}{2} dx$ 2. $\int_0^{1000} 0,3e^{-0,3x} dx$
 3. $\int_1^8 (x-1) dx$ 4. $\int_0^{\ln 4} e^{2x} dx$

14 Donner la valeur exacte des intégrales suivantes.

1. $\int_0^3 e^{-2x} dx$ 2. $\int_2^5 \frac{4}{x^2} dx$
 3. $\int_2^8 \frac{1}{3} dx$ 4. $\int_{-2}^6 \frac{1}{x+3} dx$

15 Écrire, en fonction de $\ln 2$ et $\ln 5$, les expressions :

1. $\ln(10^3)$ 2. $\ln(2^4 \times 125)$
 3. $\ln\left(\frac{5^8}{32}\right)$ 4. $\ln(500) - 2\ln(10)$

16 Résoudre dans \mathbb{R} les équations et inéquations :

1. $e^{-2x} = 4$ 2. $e^{-x} > \frac{1}{2}$
 3. $1 - e^{-0,5x} = 0,85$ 4. $1 - e^{-0,07x} \geq 0,3$
 5. $e^{-0,2x} = 1 - e^{-0,2}$ 6. $e^{-0,6x}(1 - e^{-0,2x}) < 0$

17 Résoudre dans \mathbb{N} les équations et inéquations :

1. $0,5^n = 0,1$ 2. $0,85^n < 0,2$
 3. $9 \times 1,2^n = 20$ 4. $0,3 \times 2^{n-1} \geq 1000$

18 Donner le signe des fonctions suivantes sur l'intervalle I précisé.

1. $f(x) = -3x^2 - 12x + 15, I = \mathbb{R}$
 2. $g(x) = (x+1)e^{-x}, I = \mathbb{R}$
 3. $h(x) = \frac{2}{x-5}, I =]5; +\infty[$
 4. $j(x) = \ln(x+6), I =]-6; +\infty[$

19 On considère deux événements A et B de probabilités non nulles d'un même univers Ω tels que :

$$P(A) = \frac{1}{3}, P_A(B) = \frac{2}{5} \text{ et } P(\bar{A} \cap B) = \frac{1}{2}$$

Calculer les probabilités suivantes.

1. $P(A \cap B)$ 2. $P(B)$ 3. $P_A(\bar{B})$ 4. $P_{\bar{A}}(B)$

20 La variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,2$.

1. Calculer les probabilités suivantes.
 a. $P(X=1)$ b. $P(X < 2)$ c. $P(X \geq 1)$ d. $P(X=4)$
 2. Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$.

Automatismes du thème

21 La variable aléatoire X suit une loi géométrique de paramètre $0,1$. Calculer les probabilités suivantes.

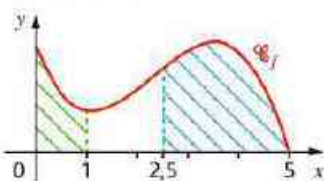
1. $P(X=1)$ 2. $P(X=3)$

22 Dans chacun des cas suivants, dire si la fonction est une densité de probabilité sur l'intervalle I .

1. $f_1(x) = 2-x, I = [0; 3]$ 2. $f_2(x) = \frac{1}{3}, I = [2; 4]$
 3. $f_3(x) = 3x^2, I = [0; 1]$ 4. $f_4(x) = \frac{2}{x^2}, I = [1; 2]$

23 On considère une variable aléatoire X suivant la loi de probabilité de densité f sur l'intervalle $[0; 5]$ dont on donne la courbe ci-dessous.

L'aire de la partie hachurée en vert est égale à $0,23$ unité d'aire et celle hachurée en bleu est égale à $0,6$ unité d'aire.



Déterminer les probabilités suivantes.

1. $P(X > 1)$ 2. $P(1 \leq X \leq 2,5)$
 3. $P(X \leq 2,5)$ 4. $P(X = 2,5)$

24 La variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[0; 1]$. Calculer les probabilités suivantes.

1. $P(X \geq 0,5)$ 2. $P(X < 0,75)$
 3. $P(X < 0)$ 4. $P(X = 0,333)$

25 La variable aléatoire X suit une loi uniforme sur $[10; 20]$. Calculer les probabilités suivantes.

1. $P(X \geq 12)$ 2. $P(X < 15)$
 3. $P(X \geq 20)$ 4. $P(X = 13)$

26 La variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,2$. Donner les valeurs exactes des probabilités suivantes.

1. $P(X \geq 0)$ 2. $P(X < 5)$
 3. $P(2 \leq X \leq 4)$ 4. $P(X = 3)$

27 Par quelle loi de probabilité peut-on modéliser les expériences aléatoires suivantes ? Préciser ses caractéristiques.

1. Une rame de métro arrive en station aléatoirement entre 7 h 10 et 7 h 20.
 2. Mathilde pioche aléatoirement un bonbon dans un paquet en contenant 20, dont 4 au goût citron, tous identiques au toucher. Elle le remet dans le paquet jusqu'à en choisir un au goût citron.
 3. On s'intéresse à la durée de vie d'un isotope radioactif de durée de vie moyenne 15 jours.

Consolider les bases

28 On considère une épreuve de Bernoulli de probabilité de Succès $p = 0,1$. On répète quatre fois cette épreuve en supposant ces épreuves indépendantes. On note X la variable aléatoire comptant le nombre de Succès.

- Quelle est la loi de X ? Préciser ses paramètres.
- Calculer les probabilités suivantes.
 - $P(X = 0)$
 - $P(X \geq 1)$
 - $P(X = 2)$
 - $P(X < 4)$
 - $P(X > 3)$
 - $P(X \geq 3)$

29 Éric s'amuse, à ses heures perdues, à lancer des boulettes de papier dans sa corbeille distante de quelques mètres de son bureau. Il réalise une série de plusieurs lancers successifs (supposés indépendants) et s'arrête dès qu'il échoue. La probabilité qu'il réussisse un lancer est égale à 0,9.

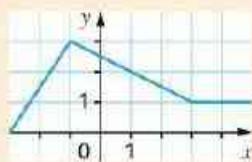
- Quelle est la probabilité qu'Éric échoue dès le premier lancer? au second? et au troisième lancer? On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
- Soit n un entier naturel non nul. Quelle est la probabilité qu'Éric échoue au n -ième lancer?

30 On considère une variable aléatoire X dont la loi est donnée dans le tableau ci-dessous.

| k | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|------------|------|-----|------|-----|-----|
| $P(X = k)$ | 0,05 | 0,1 | 0,25 | 0,4 | 0,2 |

- Calculer les probabilités suivantes.
 - $P(X \geq 4)$
 - $P(X \geq 2)$
 - $P(2 \leq X \leq 3)$
- Calculer les probabilités conditionnelles suivantes.
 - $P_{(X \geq 2)}(X \leq 3)$
 - $P_{(X \geq 2)}(X \geq 4)$
 - $P_{(X < 4)}(X \geq 2)$

31 On considère la fonction f affine par morceaux représentée ci-contre. Par des considérations d'aire, déterminer la valeur des intégrales suivantes.



- $\int_3^5 f(x) dx$
- $\int_{-3}^{-1} f(x) dx$
- $\int_{-3}^1 f(x) dx$

32 On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 4x^2$ et F la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par :

$$F(t) = \int_1^t f(x) dx$$

- Quelle est la valeur de $F(1)$?
- Calculer la valeur de $F(3)$.
- Interpréter géométriquement l'intégrale $F(t)$ puis la différence $F(3) - F(2)$.
- Calculer, pour tout réel $t \geq 1$, l'expression de $F(t)$. Quel lien existe-t-il entre les fonctions f et F ?

Connaître le cours

33 Deux diaporamas pour faire le point sur le cours.



34 On considère les expériences aléatoires suivantes.

Expérience A – On lance un dé cubique équilibré et on gagne lorsqu'on obtient le 6.

Expérience B – On lance une pièce équilibrée et on recommence tant qu'on n'a pas obtenu Face.

Expérience C – On tire une main de 5 cartes avec remise dans un jeu de 32 cartes et on compte le nombre de figures obtenues dans cette main. Pour chacune de ces expériences aléatoires, définir une variable aléatoire et préciser sa loi.

35 Soit X une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre $p = 0,25$.

- Quelles sont les valeurs prises par X ?
- Calculer les probabilités $P(X = 1)$, $P(X = 2)$, puis $P(X = 3)$.
- Plus généralement, exprimer $P(X = k)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$. Donner l'espérance de X .
- Décrire une expérience aléatoire mettant en jeu la variable aléatoire X .

36 1. Rappeler les trois conditions pour qu'une fonction f soit une fonction densité de probabilité sur un intervalle $I = [a; b]$ d'une variable aléatoire X .

2. On considère la fonction f définie sur $[-2; 4]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{24}x^2$$

- Vérifier que f est une densité de probabilité sur l'intervalle $[-2; 4]$.
- Exprimer à l'aide d'une intégrale puis calculer : $P(-1 \leq X \leq 2)$; $P(X \leq 3)$ et $P(X \geq 0)$
- Quelle est la valeur de $P(X = -1)$?

37 Soit Y une variable aléatoire de loi uniforme sur l'intervalle $[-2; 6]$.

- Préciser la densité de probabilité de Y .
- Calculer les probabilités suivantes : $P(-1 \leq Y \leq 3)$; $P(Y \leq 4)$ et $P(Y \geq -1)$
- Calculer l'espérance mathématique de Y .

38 On modélise la durée de vie, en heure, d'un transistor par une variable aléatoire T de loi exponentielle de paramètre $\lambda = 2,5 \times 10^{-5}$.

- Préciser la densité f de probabilité de T . Préciser la valeur de $f(0)$ puis l'espérance de T . Interpréter.
- Calculer $P(T \leq 15\,000)$, $P(T > 50\,000)$ et $P(10\,000 \leq T \leq 30\,000)$. Interpréter.

Travailler les capacités du thème

1 Utiliser une loi géométrique

39 Vrai ou faux ?

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.

1. On considère une variable aléatoire X de loi géométrique de paramètre $p = 0,9$.

- a. $P(X = 0) = 0,9^0$ b. $P(X = 1) = 0,9^1$
 c. $P(X = 2) = 0,9 \times 0,1$ d. $P(X = 3) = 0,9^2 \times 0,1$

2. On répète plusieurs épreuves de Bernoulli indépendantes dont la probabilité du Succès est $0,3$.

Le nombre $0,3^3 \times 0,7$ est :

- a. la probabilité d'obtenir exactement 3 Succès en répétant 4 fois cette épreuve de Bernoulli ;
 b. la probabilité d'obtenir 3 Succès puis 1 Échec ;
 c. la probabilité d'obtenir 3 Échecs puis 1 Succès ;
 d. la probabilité $P(X = 3)$ où X suit une loi géométrique de paramètre $0,3$.



40 Absence de mémoire et loi géométrique

On considère une variable aléatoire X de loi géométrique de paramètre $p \in]0; 1[$. On note $q = 1 - p$.

1. Rappeler, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'expression de $P(X = k)$.

2. a. En exploitant la somme de termes d'une suite géométrique, justifier que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P(X \leq n) = 1 - q^n$$

b. En déduire l'expression de $P(X > n)$ pour tout entier $n \geq 1$.

c. Justifier alors que, pour tous entiers naturels m et n non nuls, $P_{(X > m)}(X > m + n) = P(X > n)$.

41 Marie joue avec des pièces d'un euro, provenant de la collection de son grand-père, réunies dans une grande boîte opaque. Parmi ses 100 pièces, le grand-père a réuni 16 pièces ne provenant pas de France, mais de 16 pays différents de la zone euro. Les pièces sont indiscernables au toucher.

Marie choisit une pièce dans la boîte au hasard et avec remise.

1. Quelle est la probabilité que Marie tire une pièce avec une face étrangère au premier tirage ?

2. On note X la variable aléatoire qui, à l'issue des tirages successifs de Marie, associe le rang d'obtention de la première pièce ayant une face étrangère.

- a. Quelle loi suit la variable aléatoire X ?
 b. Quelle est la probabilité que Marie obtienne sa première pièce ayant une face étrangère au 3^e tirage ?
 c. Calculer $P(X \leq 2)$. Interpréter ce résultat.
 d. Déterminer puis interpréter $P_{(X > 3)}(X > 5)$.

42 D'après la Foutaise des Jeux, 15 % des tickets de jeu *Gratte-Gratte* sont gagnants. À chaque fois que Corinne se rend chez son buraliste, elle achète un ticket *Gratte-Gratte*. Elle continue de racheter un nouveau ticket tant qu'elle n'obtient pas un ticket gagnant.

1. On note Y la variable aléatoire donnant le nombre total de tickets achetés par Corinne. Quelle est la loi de probabilité de Y ?

2. Déterminer la probabilité $P(Y = 4)$. Interpréter.

3. Quel est le nombre moyen de tickets achetés par Corinne chez son buraliste ?

43 On lance une pièce truquée jusqu'à obtenir Pile. La probabilité d'obtenir Pile est égale à $0,3$.

On note X la variable aléatoire donnant le rang d'obtention du premier Pile.

Déterminer les entiers $k > 0$ tels que :

$$P(X = k) \leq 0,01$$

2 Calculer des probabilités en utilisant une densité de probabilité

44 QCM

1. Parmi les fonctions suivantes, déterminer celle(s) qui définit(ssent) une densité de probabilité sur l'intervalle $[1; 4]$.

- a. $f(x) = \frac{2}{15}x$ b. $g(x) = \frac{1}{21}x^2$
 c. $h(x) = 2x - 5$ d. $i(x) = 4x^3$

2. Parmi les fonctions représentées ci-dessous, déterminer celle(s) qui définit(ssent) une densité de probabilité sur l'intervalle $[0; 2]$.



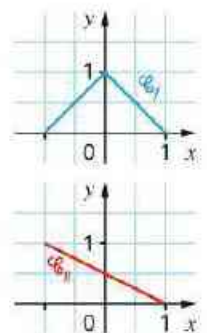
45 On a représenté ci-contre deux fonctions f et g définies sur l'intervalle $[-1; 1]$.

1. Par des considérations géométriques, justifier que f et g sont des fonctions de densité.

2. On note X la variable aléatoire suivant la loi de probabilité de densité f . Calculer les probabilités suivantes.

- a. $P(-1 \leq X \leq 0)$ b. $P(0 \leq X \leq 0,5)$
 c. $P(X \geq 0)$ d. $P(-0,5 \leq X \leq 0,5)$

3. Reprendre la question 2. lorsque X suit la loi de probabilité de densité g .



46 Un boulanger reçoit tous les matins des livraisons entre 5 h et 7 h. On admet que la variable aléatoire X donnant l'heure d'arrivée de l'un des camions de livraison a pour fonction de densité la fonction f définie sur $[5; 7]$ par $f(x) = \begin{cases} x-5 & \text{si } x \leq 6 \\ 7-x & \text{sinon} \end{cases}$



1. a. Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[5; 7]$.

b. Par des considérations graphiques, montrer que f est une fonction de densité.

2. Calculer $P(X \leq 6)$. Interpréter le résultat obtenu.

3. Calculer la probabilité des événements suivants :

- A : « le camion de livraison arrive avant 5 h 30 » ;
- B : « le camion de livraison arrive après 6 h 15 ».

4. Un matin, le boulanger n'est toujours pas livré à 6 h. Quelle est la probabilité qu'il le soit avant 6 h 30 ?

47 Dans chacun des cas suivants, déterminer le réel k pour que la fonction f soit une fonction de densité sur l'intervalle I donné.

1. $f(x) = k$ sur $I = [0; 10]$

2. $f(x) = kx$ sur $I = [0; 4]$

3. $f(x) = kx^2$ sur $I = [0; 2]$

4. $f(x) = \frac{k}{x}$ sur $I = [1; e^2]$

48 On considère une variable aléatoire X dont la fonction de densité f est définie sur $[1; 5]$ par une relation de la forme $f(x) = \frac{k}{x^2}$.

1. Déterminer la valeur du réel k .

2. Calculer la probabilité des événements suivants.

- a. $(X \leq 3)$ b. $(X \geq 2)$ c. $(2 < X \leq 4)$

3. On rappelle que l'espérance mathématique de X est le réel $E(X)$ défini par $E(X) = \int_1^5 (x \times f(x)) dx$.

Calculer l'espérance de X .

49 Hakim se rend au guichet de sa banque. On modélise son temps d'attente, en minute, par une variable aléatoire X dont la fonction de densité est définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = ke^{-0,5x}$, où k est une constante positive. Pour tout réel $a > 0$, on note :

$$F(a) = \int_0^a f(x) dx$$

1. Justifier que, pour tout réel $a > 0$, on a $F(a) = k(2 - 2e^{-0,5a})$. Exprimer $\lim_{a \rightarrow +\infty} F(a)$ en fonction de k puis en déduire la valeur de k .

2. Déterminer la probabilité des événements suivants.

- a. A : « Hakim attend moins de 2 minutes ».
 b. B : « Hakim attend entre 3 et 4 minutes ».
 c. C : « Hakim attend plus de 10 minutes ».

Calculer des probabilités dans le cadre de la loi uniforme

50 Vrai ou faux ?

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

1. Si X est une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0; 1]$, alors $P(X \in [0,1; 0,6]) = 0,6$.

2. Si la variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[0; 100]$, alors $P(X < 75) = P(X > 25)$.

3. Si la variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[20; 80]$, alors $E(X) = 50$.

51 On choisit un nombre réel au hasard entre -1 et 5 .

1. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre strictement inférieur à 2 ?

2. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre supérieur ou égal à 3 ?

3. Quelle est la probabilité que le nombre choisi soit strictement inférieur à 2, sachant qu'il est strictement positif ?

52 QCM

1. Y est une variable aléatoire de loi uniforme sur l'intervalle $[10; 20]$. Sa densité f s'écrit :

a. $f(x) = \frac{1}{10+20}$

b. $f(x) = \frac{10}{20}$

c. $f(x) = \frac{1}{10}$

d. $f(x) = \frac{1}{20}$

2. Une variable aléatoire T suit la loi uniforme sur un intervalle $[2; x]$, où x est un réel strictement supérieur à 2. Si $P(2 \leq T \leq 3) = 0,25$, alors x vaut :

a. 2,25

b. 6

c. 8

d. 10

3. La durée d'attente à un guichet, exprimée en heure, suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0; 1]$. La probabilité que la durée d'attente d'une personne prise au hasard soit comprise entre 15 min et 20 min est :

a. $\frac{1}{3}$

b. $\frac{1}{5}$

c. $\frac{1}{12}$

d. $\frac{1}{4}$

4. Dans une station de ski, le temps d'attente à un télésiège, exprimé en minute, peut être modélisé par une variable aléatoire X qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0; 5]$. On a :

a. $E(X) = \frac{2}{5}$

b. $P(X > 2) = \frac{3}{5}$

c. $P(X \leq 2) = \frac{3}{5}$

d. $P(X \leq 5) = 0$

5. Deux collègues communiquent régulièrement par vidéoconférence. On suppose que la durée d'une communication entre ces deux personnes, exprimée en minute, suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0; 120]$. Sachant que la communication dure depuis 30 minutes, la probabilité que la durée de la communication ne dépasse pas 90 minutes est égale à :

a. $\frac{1}{3}$

b. $\frac{1}{2}$

c. $\frac{2}{3}$

d. $\frac{3}{4}$

53 On casse au hasard un spaghetti de longueur 25 cm en deux morceaux. On note D la variable aléatoire égale à la longueur du morceau de gauche.

1. Quelle est la loi de la variable aléatoire D ?
2. Donner la fonction densité définissant la loi de D .
3. Quelle est la probabilité que la longueur du morceau de spaghetti obtenu mesure moins de 8 cm ?
4. On sait que la longueur du morceau de spaghetti obtenu mesure plus de 12 cm. Quelle est la probabilité qu'il mesure moins de 20 cm ?

Demo

54 Espérance et variance de la loi uniforme

On considère deux réels tels que $a < b$ et une variable aléatoire X de loi uniforme sur un intervalle $[a; b]$.

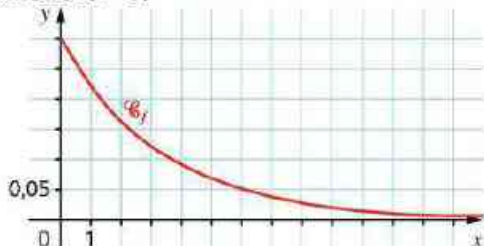
1. Rappeler la densité de probabilité f associée à X .
2. On rappelle que l'espérance mathématique de X est définie par $E(X) = \int_a^b (x \times f(x)) dx$. Calculer la valeur de $E(X)$ en fonction de a et b .
3. La variance de X est définie par :

$$V(X) = \int_a^b (x^2 \times f(x)) dx - (E(X))^2$$

Justifier alors que $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

Calculer des probabilités dans le cadre de la loi exponentielle

55 On a représenté ci-dessous la courbe \mathcal{C}_f d'une densité de probabilité f d'une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.



1. Déterminer graphiquement la valeur de λ .
2. En déduire l'expression de $f(x)$ pour tout réel x positif.

Dans la suite de l'exercice, on note X une variable aléatoire qui suit la loi de probabilité de densité f .

3. Préciser la valeur de l'aire du domaine du plan compris entre la courbe \mathcal{C}_f , l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.

Interpréter cette valeur par une probabilité sur X .

4. a. Reproduire le graphique ci-dessus et hachurer le domaine du plan correspondant à $P(4 \leq X \leq 10)$.
b. Hachurer le domaine du plan correspondant à $P(X \leq 2)$.

5. Calculer la valeur exacte des probabilités :

$$P(4 \leq X \leq 10) \text{ et } P(X \leq 2)$$

56 Vrai ou faux ?

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

La durée d'attente, en seconde, à la caisse d'un supermarché est une variable aléatoire Y qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,01.



1. La densité de probabilité de Y est la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(t) = e^{-0,01t}$.
2. Pour tout réel t positif, $P(Y \geq t) = 1 - e^{-0,01t}$.
3. La probabilité d'attendre moins de 3 minutes à cette caisse est, à 0,01 près, égale à 0,16.
4. Il y a plus d'une chance sur deux que l'attente à cette caisse soit supérieure à une minute.

57 QCM

Pour chacune des questions, choisir la réponse correcte. On s'intéresse à la durée de vie D , exprimée en année, d'un appareil ménager avant la première panne. On peut modéliser cette situation par une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. Pour tout réel $t > 0$, la valeur exacte de $P(D \geq t)$ est :

a. $1 - e^{-\lambda t}$ b. $e^{-\lambda t}$ c. $1 + e^{-\lambda t}$

2. La valeur de t pour laquelle on a $P(D \leq t) = P(D \geq t)$

est égale à :

a. $\ln(2\lambda)$ b. $\lambda \ln 2$ c. $\frac{\lambda}{2}$

3. D'après une étude statistique, la probabilité que l'appareil tombe en panne avant la fin de la première année est 0,18.

La valeur exacte de λ est alors :

a. $\ln \frac{50}{41}$ b. $\ln \frac{41}{50}$ c. $\frac{\ln 82}{\ln 100}$

4. Sachant que cet appareil n'a connu aucune panne au cours des deux premières années après sa mise en service, la probabilité qu'il ne connaisse aucune panne l'année suivante est :

a. $P(D \geq 1)$ b. $P(D \geq 3)$ c. $P(2 \leq D \leq 3)$

5. Dans cette question, on admet que $\lambda = 0,2$.

La probabilité que l'appareil n'ait pas eu de panne au cours des trois premières années, arrondie à 10^{-4} près, est :

a. 0,5523 b. 0,5488 c. 0,4512

1 Loi géométrique

58 Sortir de l'écurie...

Dans le grenier de sa grand-mère, Lise retrouve un jeu de « petits chevaux ». Ce jeu consiste à déplacer des pions en forme de cheval sur un plateau. Pour sortir un pion de l'écurie, le joueur doit obtenir un six en lançant un dé cubique équilibré.



On note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires pour qu'un joueur réussisse à faire sortir un cheval de l'écurie.

- Quelle est la loi de probabilité de X ? Justifier.
- Quelle est la probabilité de réussir à faire sortir son cheval de l'écurie au premier lancer de dé ? au second ? au cinquième lancer de dé ?
- Quel est le nombre de lancers moyens nécessaires pour faire sortir un cheval de l'écurie ?
- Déterminer la probabilité de réussir à faire sortir son cheval en moins de 5 lancers.

Démo

59 Probabilités cumulées et loi géométrique

Soit une variable aléatoire X de loi géométrique de paramètre p avec $p \in]0; 1[$, on note $q = 1 - p$.

1. a. Exprimer, en fonction de l'entier naturel $n \geq 1$ et du réel q , la somme :

$$1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}$$

b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, on a $P(X \leq n) = 1 - q^n$.

c. Montrer alors que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n P(X = k) = 1$$

Ce résultat est-il étonnant ?

2. **Application.** Un entraîneur d'une équipe de football amateur demande à son gardien de but de s'entraîner à une série d'arrêts de tirs au but. Ses statistiques montrent qu'il arrête 10 % des tirs. L'entraîneur lui demande de s'entraîner tant qu'il n'a pas arrêté un tir. On note X le rang du premier tir arrêté.

- Quelle est la loi de la variable aléatoire X ?
- Déterminer la probabilité que le goal ait à arrêter au plus 10 tirs ?
- Déterminer le plus petit entier naturel $n \geq 1$ tel que $P(X \leq n) > 0,9$. Interpréter concrètement le résultat obtenu.

Démo

60 Loi discrète sans mémoire

L'objectif de cet exercice est de démontrer que si une variable aléatoire discrète X à valeurs dans \mathbb{N}^* vérifie la propriété (\mathcal{P}) d'absence de mémoire :

(\mathcal{P}) : pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$, $P_{(X > m)}(X > m + n) = P(X > n)$ alors elle suit une loi géométrique.

1. On suppose que X suit la propriété (\mathcal{P}) . Montrer alors que, pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$P(X > m + n) = P(X > n) \times P(X > m)$$

2. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = P(X > n)$. On note également $u_1 = q$ et $p = 1 - q$.

a. En utilisant la question 1., montrer que (u_n) est une suite géométrique de raison q .

b. En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = q^n$.

c. Vérifier que, pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$P(X = n) = u_{n-1} - u_n$$

En déduire que $P(X = n) = pq^{n-1}$. Conclure.

61 Le problème du collectionneur (Acte 1)

Fabien collectionne les figurines présentes dans ses paquets de céréales favorites. Chaque paquet contient une figurine de la saga *Star Wars*.

Parmi ces figurines, il convoite celle du sinistre Darth Terror, présente dans 5 % des boîtes de céréales. On suppose que les vingt figurines différentes sont équitablement réparties dans l'ensemble des paquets.

1. Déterminer la probabilité d'obtenir la figurine Darth Terror à l'issue de quatre achats.

2. Déterminer la probabilité que les parents de Fabien doivent acheter au moins 5 paquets pour obtenir la figurine tant convoitée.

3. Sachant qu'après l'achat de 10 paquets Fabien n'a toujours pas eu sa figurine Darth Terror, déterminer la probabilité qu'il faille acheter moins de 15 paquets de céréales pour y parvenir.

4. En moyenne, combien de paquets est-il nécessaire d'acheter pour obtenir cette figurine ?

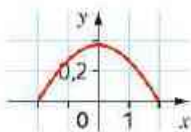
62 Deux jeux A et B consistent à répondre à une série de questions indépendantes. Dans le jeu A (resp. jeu B), il y a trois (resp. quatre) réponses par question dont une seule est exacte. Dès que le joueur a trouvé une bonne réponse, le jeu s'arrête. Un joueur répond au hasard à toutes les questions.

1. Calculer la probabilité que le jeu s'arrête à la première question avec le jeu A, puis avec le jeu B. Quelle est la situation la plus probable ?

2. On appelle X (resp. Y) la variable aléatoire égale au n^* de la question où le jeu A (resp. B) s'arrête. Déterminer les valeurs de $k \in \mathbb{N}^*$ pour lesquelles $P(X = k) \leq P(Y = k)$. Interpréter ce résultat.

2 Lois continues à densité

63 On a représenté ci-contre la fonction f définie sur l'intervalle $[-2; 2]$ par $f(x) = a(1-x^2)$ avec $a > 0$.



1. Déterminer la valeur de a de sorte que f soit une densité de probabilité sur $[-2; 2]$.

2. a. Montrer que f est une fonction paire. Que peut-on en déduire quant à sa courbe représentative ?

b. Soit Y une variable aléatoire de densité f . Justifier par des arguments géométriques que pour tout $t \in [0; 2]$, on a :

$$\textcircled{1} P(Y \leq -t) = P(Y \geq t) = \frac{1}{2} - P(0 \leq Y \leq t)$$

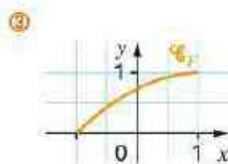
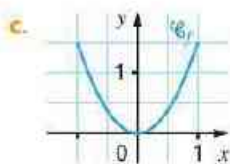
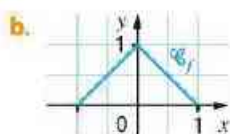
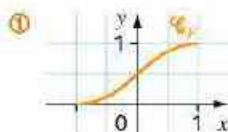
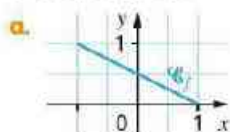
$$\textcircled{2} P(-t \leq Y \leq t) = 1 - 2P(Y > t)$$

64 1. Soit X une variable aléatoire continue à valeurs dans l'intervalle $[-1; 1]$ et de densité f .

On note F sa fonction de répartition définie sur I par $F(t) = P(X \leq t)$ pour tout réel $t \in I$.

Exprimer $F(t)$ à l'aide d'une intégrale et en donner une interprétation graphique.

2. Associer alors à chacune des fonctions densités f (représentées à gauche) définies sur l'intervalle $I = [-1; 1]$ sa fonction de répartition F (représentée à droite). Justifier.



65 Soient m un nombre réel et f la fonction définie sur $[1; e]$ par : $f(x) = \frac{m}{x}$.

1. Déterminer le réel m de sorte que f soit une densité de probabilité.

2. Représenter f dans un repère orthonormé.

3. Soit X la variable aléatoire de densité de probabilité f . On note F sa fonction de répartition sur $[1; e]$.

a. Exprimer $F(t)$ en fonction de t .

b. Déterminer la valeur des probabilités :

$\textcircled{1} P(X \leq 2)$ $\textcircled{2} P(1,5 \leq X \leq 2)$ $\textcircled{3} P(X > 1,5)$

3 Loi uniforme continue sur $[a; b]$

66 Le petit chaperon rouge doit se rendre chez sa mère-grand. Elle arrive au hasard entre 10 h et 11 h 30. Son heure d'arrivée est modélisée par la variable aléatoire X suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[10; 11,5]$. Déterminer la probabilité que la fillette :

- arrive entre 10 h 30 et 10 h 45 ;
- arrive avant 11 h ;
- arrive après 10 h 30 ;
- n'arrive pas entre 10 h 30 et 11 h ;
- arrive après 11 h sachant qu'à 10 h 30 elle n'est toujours pas arrivée.

67 Une puce électronique contrôle la couleur diffusée par un spot en choisissant aléatoirement une longueur d'onde comprise entre 380 et 780 nm.

Le tableau suivant donne les couleurs associées à la longueur d'onde de la lumière diffusée.

| Longueur d'onde (nm) | Couleur |
|----------------------|---------|
| 478-483 | Bleu |
| 510-541 | Vert |
| 575-579 | Jaune |
| 605-622 | Rouge |

1. Modéliser le choix d'une longueur d'onde par une loi de probabilité à préciser.

2. Déterminer la probabilité des événements :

- A : « la lampe diffuse une lumière verte » ;
 B : « la lampe diffuse une lumière jaune ou rouge » ;
 C : « la lampe ne diffuse pas une lumière bleue ».

68 Chaque matin, Thomas donne rendez-vous à un ami pour se rendre au lycée. Statistiquement, il se rend compte que son temps d'attente dure, aléatoirement, entre 0 et 15 minutes. On note X la variable aléatoire donnant ce temps d'attente.

1. Préciser la loi de probabilité de X .

2. Déterminer la probabilité des événements :

- A : « Thomas attend moins de 3 minutes » ;
 B : « Thomas attend au moins 10 minutes ».

3. Un matin donné, Thomas a déjà attendu 5 minutes. Quelle est la probabilité qu'il n'attende pas plus de 5 minutes supplémentaires ?

4. Déterminer le réel t tel que $P(X \leq t) = 0,95$.

Interpréter le résultat obtenu.

69 X est une variable aléatoire de loi uniforme sur $[100; b]$. Dans chaque cas, déterminer b tel que :

- $E(X) = 210$
- $P(X \leq 240) = 0,2$
- $P(225 \leq X \leq 250) = 0,125$
- $P(X > 150) = 0,5$

4 Loi exponentielle

Analyse d'un énoncé

70 Exercice commenté

Un magasin vend des moteurs électriques tous identiques.

Une étude a permis d'établir que la probabilité qu'un moteur tombe en panne pendant la première année d'utilisation est égale à 0,12.

On admet que la durée de vie sans panne, exprimée en année, de chaque moteur est une variable aléatoire Y qui suit une loi exponentielle de paramètre λ , où λ est un réel strictement positif.

Tous les résultats seront arrondis à 10^{-3} près.

1. Exprimer $P(Y \leq 1)$ en fonction de λ .

• Y suit la loi exponentielle de paramètre λ donc, pour tout réel t positif, on a $P(Y \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$.

En déduire la valeur exacte de λ .

• Cela revient à résoudre l'équation $e^{-\lambda} = 0,88$, il reste à utiliser la fonction logarithme népérien.

Pour la suite de l'exercice, on prendra $\lambda = 0,128$.

2. Quelle est la probabilité qu'un moteur dure plus de 3 ans sans panne ?

3. Quelle est la probabilité qu'un moteur fonctionne plus de 4 ans sans panne sachant qu'il a duré plus d'un an ?

• Exploiter le fait que la loi exponentielle est une loi sans mémoire.

71 Application immédiate

Une usine fabrique des batteries lithium-ion. La probabilité qu'une telle batterie cesse de fonctionner avant 4 années après sa mise en service est égale à 0,565.

On admet que la variable aléatoire T qui, à une batterie lithium-ion prélevée au hasard dans le stock de l'usine, associe sa durée de vie, exprimée en année, suit la loi exponentielle de paramètre λ .

Dans cet exercice, on arrondira les résultats à 10^{-3} près.

1. Déterminer la valeur exacte de λ .

2. Pour la suite, on prendra $\lambda = 0,208$.

a. Déterminer la probabilité qu'une batterie lithium-ion soit encore en état de fonctionnement au bout de 8 ans sachant qu'elle fonctionne encore quatre années après sa mise en service.

b. Déterminer la durée de vie moyenne d'une batterie.

c. Déterminer le réel t_0 tel que $P(T > t_0) = 0,75$. On donnera la valeur exacte et la valeur arrondie à l'unité. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

72 Une grande entreprise dispose d'un vaste réseau informatique. On observe le temps de fonctionnement normal séparant deux pannes informatiques. Ce temps sera appelé « temps de fonctionnement ». Soit X la variable aléatoire égale au temps de fonctionnement, exprimé en heure.

On admet que X suit une loi exponentielle de paramètre λ , où $\lambda > 0$.

1. On sait que le temps de fonctionnement moyen est égal à 7 heures et 30 minutes.

Déterminer la valeur exacte de λ .

Dans les questions suivantes, les résultats seront donnés à 10^{-2} près.

2. Montrer que la probabilité que le temps de fonctionnement soit supérieur à 5 heures est environ égale à 0,513.

3. Calculer la probabilité que le temps de fonctionnement soit supérieur à 9 heures sachant qu'il n'y a pas eu de panne au cours des quatre premières heures.

4. Calculer la probabilité que le temps de fonctionnement soit compris entre 6 et 10 heures.

5. On relève aléatoirement huit temps de fonctionnement, qu'on suppose indépendants. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de relevés correspondant à des temps de fonctionnement supérieurs ou égaux à 5 heures.

a. Quelle est la loi suivie par Y ? Justifier.

b. Calculer la probabilité que trois temps parmi ces huit soient supérieurs ou égaux à 5 heures.

c. Calculer l'espérance mathématique de Y (on arrondira à l'entier le plus proche).

Démo

73 Espérance de la loi exponentielle

Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. Rappeler l'expression de la fonction densité f de X en fonction de x .

2. L'espérance mathématique de la variable aléatoire X est le réel défini par :

$$E(X) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t x f(x) dx$$

a. On note g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$g(x) = x f(x)$$

Montrer que $G : x \mapsto \left(-x - \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda x}$ est une primitive de g sur $[0; +\infty[$.

b. Soit t un réel positif. Exprimer $\int_0^t x f(x) dx$ en fonction de t .

c. En déduire la valeur de $E(X)$.

3. Application

La durée, en minute, des conversations téléphoniques de Monsieur Bavard suit une loi exponentielle de paramètre 0,011.

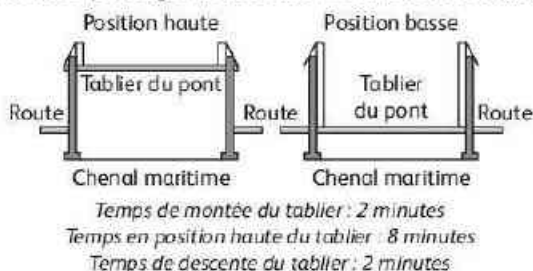
Quelle est la durée moyenne d'une conversation téléphonique de Monsieur Bavard en heure et minute ?

74 Prise d'initiative

La durée moyenne entre deux appels dans une hotline téléphonique est de 3 minutes. Simon, standardiste, a raccroché son combiné il y a deux minutes. Quelle est la probabilité que son téléphone ne sonne pas dans les quatre minutes à venir ?



75 Un pont levant enjambant un canal peu fréquenté est constitué d'un tablier qui, une fois relevé, permet le passage de bateaux de différentes tailles.



Partie A. Sur la route

Un automobiliste se présente devant le pont. Le tablier du pont est en position haute. On s'intéresse ici au temps d'attente D , de l'automobiliste avant qu'il puisse franchir le canal, pont baissé (hors incident).

1. Combien de temps l'automobiliste attend-il au minimum ? au maximum ?

On admet que le temps d'attente, en minute, de l'automobiliste pour franchir le pont est une variable aléatoire D de loi uniforme sur $[2; 10]$.

2. Déterminer l'espérance $E(D)$ de la variable aléatoire D et interpréter le résultat dans le contexte.

3. Calculer la probabilité que le temps d'attente de l'automobiliste ne dépasse pas 5 minutes.

Partie B. Sur l'eau

Lorsqu'un bateau est passé, le tablier du pont revient en position basse. Le temps de latence, exprimé en heure, avant que le bateau suivant se présente devant le pont est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,05$.

1. Calculer et interpréter l'espérance $E(T)$.

2. Soit la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = 0,05e^{-0,05x}$. Donner une primitive F de f puis justifier que, pour tout réel t positif, on a :

$$P(T \leq t) = 1 - e^{-0,05t}$$

3. Calculer la probabilité que le temps de latence soit inférieur à une demi-journée, soit 12 heures.

4. Une journée donnée, aucun bateau ne s'est présenté devant le pont. Quelle est la probabilité qu'aucun bateau ne se présente le lendemain ?

76 Exercice guidé

Théo construit des circuits électroniques. Il achète des composants dont certains présentent un défaut. On estime que la probabilité qu'un composant soit défectueux est égale à 0,02.

On suppose que la durée de vie T_1 , en heure, de chaque composant défectueux suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_1 = 5 \times 10^{-4}$ et que la durée de vie T_2 , en heure, de chaque composant non défectueux suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_2 = 10^{-4}$.

1. Calculer la probabilité que la durée de vie d'un composant soit supérieure à 1 000 heures :

- lorsque ce composant est défectueux ;
- lorsque ce composant n'est pas défectueux.

Arrondir ces probabilités à 10^{-2} près.

2. Soit T la durée de vie, en heure, d'un composant acheté au hasard.

Montrer que la probabilité que ce composant soit encore en état de marche après t ($t \geq 0$) heures de fonctionnement est :

$$P(T \geq t) = 0,02e^{-5 \times 10^{-4}t} + 0,98e^{-10^{-4}t}$$

3. Sachant que le composant acheté fonctionne 1 000 heures après son installation, quelle est la probabilité que ce composant soit défectueux ?

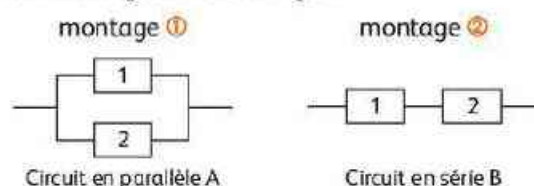
Pistes de résolution

2. On construira un arbre pondéré mettant en jeu les événements C : « le composant est défectueux », \bar{C} , $\{X < t\}$ et $\{X \geq t\}$.

77 Un circuit électronique est constitué de deux composants identiques numérotés ① et ②.

Les durées de vie, en année, de ces composants sont indépendantes et suivent la même loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,5$.

Deux montages sont envisagés :



1. Lorsque les composants sont montés « en parallèle », le circuit A est défaillant uniquement si les deux composants sont simultanément défaillants.

Calculer la probabilité que le circuit A soit défaillant avant un an.

2. Lorsque les composants sont montés « en série », le circuit B est défaillant dès que l'un au moins des deux composants est défaillant.

Calculer la probabilité que le circuit B soit défaillant avant un an.

Paradoxe de l'autobus

On considère un arrêt de bus et on suppose que la durée moyenne séparant l'arrivée de deux bus consécutifs est égale à dix minutes. On supposera dans la suite que lorsqu'un usager se rend, à un moment aléatoire de la journée, à cet arrêt de bus, il prend le premier bus qui arrive. On organise un micro-trottoir auprès des usagers de cette ligne de bus et on leur pose la question suivante :

« À combien de minutes évalueriez-vous la durée d'attente moyenne d'un usager à cet arrêt ? »

Voici quelques-unes de leurs réponses.

| | | |
|---|---|--|
| Usager 1 : « Au minimum, on attend 0 minute et au maximum 10, donc je dirais que l'attente moyenne est de 5 minutes. » | Usager 2 : « Dans tous les cas, s'il y a du monde à l'arrêt, c'est signe qu'on attendra très peu de temps le prochain bus. » | Usager 3 : « Tout dépend de la régularité des passages, mais vu que tout s'équilibre, je dirais une dizaine de minutes. » |
|---|---|--|

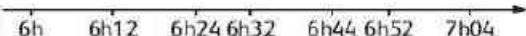
Pour analyser les réponses des usagers et apporter une réponse à la question posée, on doit s'interroger sur le choix du modèle (déterministe ou probabiliste) qui régit le passage des bus.

Partie A Un premier modèle déterministe : la durée entre deux bus consécutifs est de 10 minutes

- On suppose que dès 6 h du matin, un bus s'arrête toutes les dix minutes à cet arrêt. Un usager se présente à cet arrêt et on appelle X la variable aléatoire de loi uniforme égale à la durée d'attente de cet usager.
 - Quelles valeurs peut prendre X ? Calculer la durée moyenne d'attente de cet usager.
 - Pour ce modèle, quelle(s) affirmation(s) parmi celles données par les usagers est (sont) valide(s) ?
- Ce modèle est-il envisageable en pratique ?

Partie B Un second modèle probabiliste : la durée entre deux bus consécutifs est de 12 ou 8 minutes avec équiprobabilité

On a représenté ci-contre une configuration de ce type :



- Justifier que, lorsqu'un usager se présente à cet arrêt à un instant au hasard, la probabilité qu'il arrive pendant un intervalle de temps entre deux bus de 12 minutes est égale à 0,6.
- Lorsque l'usager arrive sur un intervalle de temps entre deux bus de 12 minutes, quelle sera sa durée d'attente moyenne ? et pour un intervalle de 8 minutes ?
- En déduire que la durée moyenne d'attente à cet arrêt est égale 5,2 minutes.
- Dans ce modèle, que peut-on penser de l'affirmation des deux premiers usagers ? Expliquer.

Un modèle mathématique consiste à mathématiser un phénomène réel. Souvent, plusieurs modèles sont envisageables et parfois certains sont remis en cause car ils viennent contredire les faits observés.



Partie C Un troisième modèle probabiliste : la durée séparant l'arrivée de deux bus consécutifs suit une loi exponentielle de paramètre λ

- La durée moyenne entre deux passages est de 10 minutes. En déduire λ .
- Exécuter le script Python `declickle_ch09_p249_autobus.py` qui simule les durées de passages des bus à l'arrêt, l'instant d'arrivée d'un usager à l'arrêt de bus et qui retourne la durée d'attente de l'usager. En exploitant cette simulation, analyser, dans le cadre de ce troisième modèle les affirmations des trois usagers.



Interprétation du paradoxe de l'autobus
Plus l'amplitude d'un intervalle entre deux passages de bus est grande, plus la probabilité qu'un usager se présente dans cet intervalle de temps est importante.

Hugo adore les céréales Crakovor qu'il dévore à chaque petit déjeuner. Il les apprécie d'autant plus que chaque paquet de céréales contient une figurine de dinosaure. Différentes espèces sont réparties en proportions égales dans les paquets de céréales. Chaque semaine, ses parents lui achètent un paquet de céréales Crakovor. On s'interroge ici sur le nombre moyen de paquets à acheter pour obtenir à terme la série complète de figurines.



Partie A Simulations à l'aide de Python

On suppose que la collection comporte ici 4 figurines différentes numérotées de 0 à 3. On considère la fonction Python `tps_attente_collection()` suivante.

```

1 from random import randint
2 from statistics import mean
3
4 def tps_attente_collection():
5     nb_achat=0
6     collection=[0]*4
7     while 0 in collection:
8         figurine=randint(0,3)
9         collection[figurine]=...
10        nb_achat=...
11    return nb_achat
    
```

Cette fonction simule, tant que la collection de figurines est incomplète, les achats successifs de paquets de céréales. Une fois la collection complète, elle retourne le nombre de paquets achetés.

1. Expliquer le rôle de la ligne 8.
2. Dans cette fonction, la liste `collection` est initialement `[0, 0, 0, 0]`. Cette liste permet de stocker l'état de la collection au fur et à mesure des achats. Ainsi, pour indiquer que la collection ne comprend que des figurines numéro 0 et 3, cette liste sera égale à `[1, 0, 0, 1]` (on ne compte pas le nombre de figurines similaires obtenues).
 - a. Lorsqu'une figurine numéro n apparaît, on modifie le n -ième élément de la liste `collection` à la valeur 1. Compléter alors la ligne 9.
 - b. Que teste la condition `0 in collection` de la boucle `while` en ligne 7 ?
 3. On rappelle que la variable `nb_achat` compte le nombre total de paquets de céréales achetés jusqu'à l'obtention de la collection complète. Compléter la ligne 10 puis tester cette fonction.
 4. Effectuer une série de 100, 1 000 puis 10 000 simulations. On stockera les résultats de ces simulations dans une liste.
 5. À l'aide de la fonction `mean()` du module `statistics`, évaluer le nombre moyen de paquets à acheter pour obtenir la série complète de figurines.

6. Pour aller plus loin

Modifier la fonction `tps_attente_collection()` afin d'évaluer ce nombre moyen pour des collections comprenant 5, 6 ou 7 figurines différentes.

Partie B Étude théorique du problème

On considère que la collection compte $N = 4$ types de figurines à collectionner.

On considère, pour tout $k \in \llbracket 1; 4 \rrbracket$, la variable aléatoire T_k égale au nombre d'achats nécessaires pour que la collection compte k figurines différentes sachant que la collection compte déjà $k - 1$ figurines différentes. Par exemple, T_2 est la variable aléatoire donnant le nombre d'achats nécessaires pour obtenir une figurine différente de celle toujours obtenue jusqu'alors.

1. Justifier que $T_1 = 1$.
2. a. On considère que notre collection compte un seul modèle de figurine. Quelle est la probabilité, lors de l'achat d'un paquet de céréales, d'obtenir un nouveau modèle de figurine ?
b. En déduire que T_2 suit une loi géométrique de paramètre $\frac{3}{4}$.
3. Par un raisonnement similaire, déterminer la loi de probabilité des variables aléatoires T_3 et T_4 .
4. On note T la variable aléatoire donnant le nombre total d'achats nécessaires pour obtenir une collection complète.
 - a. Exprimer T en fonction de T_1, T_2, T_3 et T_4 .
 - b. En admettant que l'espérance d'une somme de variables aléatoires est égale à la somme de leurs espérances. Montrer alors que :

$$E(T) = 4 \times \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right)$$

Confronter ce résultat à ceux obtenus par simulation précédemment dans la question A. 5.

Partie C Pour aller encore plus loin

On considère que la collection compte $N \geq 2$ figurines à collectionner. Démontrer que :

$$E(T) = N \times \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{N} \right)$$

Ce résultat est-il en accord avec ceux obtenus précédemment par simulation dans la question A. 6. ?

Partie A Étude macroscopique de la désintégration de noyaux radioactifs

En sciences physiques, l'expérience montre que, pour une substance radioactive donnée, on peut modéliser la désintégration des noyaux selon les hypothèses suivantes.



① La durée de vie d'un noyau radioactif est modélisée par une même loi de probabilité pour tous les noyaux d'une même substance radioactive.

② La désintégration d'un noyau n'affecte pas la désintégration d'un autre noyau.

③ Un noyau se désintègre sans avoir « vieilli », autrement dit, la loi de probabilité régissant sa durée de vie est une loi sans mémoire.

Ainsi, la durée de vie T d'un noyau radioactif suit une loi exponentielle de paramètre λ . Ce paramètre λ , appelé **constante radioactive**, est propre à chaque élément radioactif.

On considère un noyau radioactif de constante radioactive λ et T la variable aléatoire donnant sa durée de vie (c'est-à-dire la durée écoulée avant sa désintégration).

1. Étant donné un réel $t \geq 0$, exprimer, en fonction de λ et t , la probabilité $P(T \geq t)$. Interpréter cette probabilité dans le contexte du problème.

2. On considère qu'initialement, à l'instant $t = 0$, la substance radioactive compte N_0 noyaux non désintégrés. On considère la variable aléatoire $X(t)$ donnant le nombre de noyaux non désintégrés à l'instant $t > 0$.

a. En utilisant les points ① à ③ et la question précédente, justifier que $X(t)$ suit une loi binomiale de paramètres à préciser.

b. En déduire que le nombre moyen $N(t)$ de noyaux non désintégrés à l'instant t est égal à :

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

Partie B Un modèle discret de désintégration de noyaux radioactifs

Dans cette partie, on discrétise le temps, c'est-à-dire qu'on observe l'évolution de la durée de vie T d'un noyau radioactif à chaque unité de temps. On considère alors la variable aléatoire Y à valeurs dans \mathbb{N}^* définie, pour tout entier $k > 0$ par :

$$\{Y = k\} = \{k - 1 < T \leq k\}$$



Datation radiométrique par le carbone 14

Le carbone 14 est un isotope radioactif du carbone dont la demi-vie est égale à 5 734 ans (à 40 ans près). Tout organisme contient ce radiocarbone en infime proportion. Dès qu'il meurt, la quantité de radiocarbone qu'il contient et sa radioactivité décroissent avec le temps selon une loi exponentielle permettant ainsi la datation de sa mort.

1. Interpréter concrètement l'événement $\{Y = k\}$.

2. a. Justifier que, pour tout entier $k > 0$, on a :

$$P(k - 1 < T \leq k) = e^{-\lambda(k-1)}(1 - e^{-\lambda})$$

b. On pose $p = 1 - e^{-\lambda}$. Vérifier que $0 < p < 1$.

Déduire de la question précédente que Y suit une loi géométrique de paramètre p .

3. En cours de sciences physiques, on simule le comportement d'un noyau radioactif en lançant chaque seconde un dé cubique équilibré : si on obtient un 6, on considère qu'il se désintègre et on arrête ; sinon, on poursuit.

On note Y la variable aléatoire donnant l'instant de désintégration du noyau selon ce modèle.

a. Dans ce modèle, quelle est la probabilité qu'un noyau se désintègre en une unité de temps ?

b. Quelle est la loi de Y ?

c. En utilisant la question 2. b., déterminer la constante radioactive λ associée au noyau radioactif simulé par cette expérience de lancer de dé.

Partie C Demi-vie et durée de vie moyenne de noyaux radioactifs

On appelle demi-vie d'un élément radioactif la durée notée $\tau_{1/2}$ telle que $P(T \leq \tau_{1/2}) = 0,5$.

1. Montrer que $\tau_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$.

2. On rappelle que le nombre moyen $N(t)$ de noyaux non désintégrés à l'instant t est égal à :

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

où N_0 est le nombre initial de noyaux radioactifs.

Justifier que la demi-vie correspond au temps nécessaire pour que la moitié des noyaux présents se soit désintégrée.

3. La durée de vie moyenne notée m d'un noyau radioactif est l'espérance mathématique de T .

Exprimer m en fonction de λ puis justifier que :

$$\tau = 1,44 \tau_{1/2}$$

4. **Application.** En médecine nucléaire, on utilise le technétium 99m (^{99m}Tc) comme marqueur, car sa courte demi-vie de 6 heures permet de limiter la dose d'irradiation du patient.

a. Déterminer la constante radioactive du ^{99m}Tc .

b. Calculer la probabilité qu'un atome de ^{99m}Tc se désintègre avant 5 heures ? après 9 heures ?

c. En notant T la variable aléatoire donnant la durée de vie d'un tel atome, déterminer le réel $t \geq 0$ tel que $P(T \leq t) = 0,95$. Interpréter ce nombre.

Bonnie et Clyde se sont donné rendez-vous entre 12 h et 13 h au saloon d'Arcadia avant de braquer la banque située à proximité.

Afin de ne pas être repéré par le shérif, chacun d'eux a promis d'attendre un quart d'heure, pas plus, et en aucun cas après 13 h.



Quelle est la probabilité que Bonnie et Clyde se retrouvent ?

On suppose que les heures d'arrivée de Bonnie et Clyde suivent des lois uniformes sur l'intervalle $[0;1]$ (où 0 correspond à 12 h et 1 à 13 h).

On note B l'instant d'arrivée de Bonnie et C celui de Clyde.

Partie A Questions préliminaires

1. a. Bonnie arrive à 12 h 20. Dans quel intervalle de temps Clyde doit-il arriver pour qu'ils se rencontrent ?
- b. Reprendre la question précédente si elle arrive à 12 h 50.
2. Exprimer la durée d'attente en fonction de C et B selon que Clyde ou Bonnie arrive en premier au saloon.
3. Justifier que Bonnie et Clyde se rencontreront si et seulement si $|C - B| \leq \frac{1}{4}$.

Partie B Simulations PYTHON

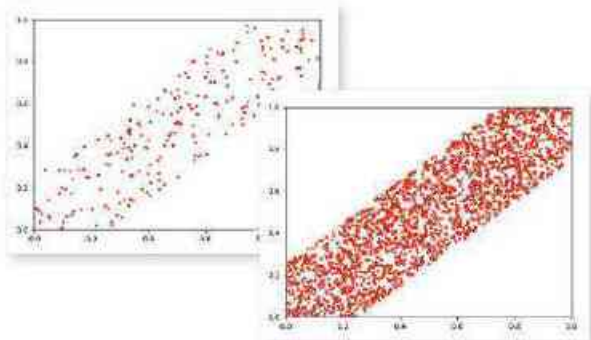
Dans cette partie, on simule des rencontres à l'aide d'un programme Python et on souhaite évaluer la probabilité de rencontre de Bonnie et Clyde.

1. Compléter puis programmer la fonction `rencontre()` ci-dessous qui affecte un nombre aléatoire compris dans $[0;1]$ aux variables C et B , et retourne 1 si la rencontre a lieu et 0 sinon.

```
from random import *
def rencontre():
    C=random()
    B=random()
    d=abs(C-B)
    if ... :
        rv=1
    else:
        ...
    return rv
```

2. Écrire une fonction `simulations(N)` qui prend en argument le nombre de simulations N souhaitées et retourne la fréquence des rencontres ayant eu lieu. Cette nouvelle fonction fera appel à `rencontre()`.
3. Simuler 500, 1 000 puis 5 000 rendez-vous et noter la fréquence des rencontres ayant eu lieu.
4. À l'issue de l'algorithme précédent, on a fait représenter les rencontres ayant eu lieu par un point rouge de coordonnées $(x; y)$ où x est l'instant d'arrivée de Bonnie et y celui de Clyde.

Les résultats obtenus pour 500 et 5 000 simulations sont donnés ci-dessous.



Expliquer comment peuvent être évaluées les fréquences obtenues à l'issue du programme sur ces graphiques.

Partie C Démonstration géométrique

On note x une valeur prise par B et y une valeur de C .

1. Justifier qu'une rencontre entre Bonnie et Clyde a eu lieu si le couple $(x; y)$ vérifie les conditions suivantes :

$$(S): \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq 1 \\ x - 0,25 \leq y \leq x + 0,25 \end{cases}$$

2. a. Dans un repère orthonormé $(O; I; J)$ d'unité 4 cm, tracer le carré $OIKJ$ de côté 1 unité.
- b. Colorier la partie \mathcal{P} du carré dont les coordonnées des points vérifient le système (S) .

Indication

On pourra tracer les droites d'équation réduite : $y = x - 0,25$ et $y = x + 0,25$

- c. Calculer l'aire de la partie \mathcal{P} .
3. On admet que la probabilité p de l'événement « la rencontre entre Bonnie et Clyde a eu lieu » est donnée par :

$$p = \frac{\text{aire}(\mathcal{P})}{\text{aire}(OIKJ)}$$

Donner la valeur exacte de p .

On détaille ici le « jeu de Saint-Petersbourg », formulé par Nicolas Bernoulli en 1713 puis approfondi par son cousin Daniel Bernoulli dans son ouvrage *Les transactions de l'academie de Saint-Petersbourg* :

Un joueur joue contre la banque au jeu de « pile ou face » en misant toujours face. Il mise un ducat au premier coup, et s'il perd, double la mise au coup suivant tant que face n'apparaît pas. S'il gagne, il récupère sa mise augmentée d'une somme équivalente à cette mise.

On note X la variable aléatoire qui donne le rang d'apparition du premier Face et Y la variable aléatoire qui donne le gain du joueur.



Le ducat est une ancienne monnaie d'argent et d'or circulant à l'origine dans l'Europe du Moyen Âge à partir du XII^e siècle notamment dans l'Empire austro-hongrois.

1. Est-il raisonnable de miser toutes ses économies à ce jeu ?
2. Compléter le tableau ci-dessous (où n est un entier naturel non nul).

| Rang d'apparition du premier « face » : k | 1 | 2 | 3 | 4 | n |
|---|---------------|---|---|---|-----|
| Mise du joueur (en ducat) | 1 | 2 | | | |
| Gain du joueur : y_k | 1 | | | | |
| $P(X = k)$ | $\frac{1}{2}$ | | | | |

3. a. Quelles valeurs prend la variable aléatoire X ? Quelle est la loi de X ? Justifier.

- b. Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire Y ?

4. a. Justifier que, pour tout entier $k > 0$:

$$P(Y = y_k) = P(X = k)$$

- b. En déduire que l'espérance de Y est égale à :

$$E(Y) = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2^2} + 2^2 \times \frac{1}{2^3} + \dots + 2^{n-1} \times \frac{1}{2^n} + \dots$$

- c. Combien valent chacun des termes de la somme ci-dessus ? Combien de termes comporte-t-elle ?

On a ainsi montré que l'espérance de gain à ce jeu est une somme infinie de termes tous égaux à $\frac{1}{2}$.

- d. Conclure en donnant la valeur de l'espérance de gain à ce jeu. Un joueur a-t-il intérêt à jouer à ce jeu ?

Info

Le **paradoxe de Saint-Petersbourg** n'est pas un problème purement mathématique, mais de comportement de jeu : pourquoi les joueurs refusent-ils de jouer tout leur argent alors que l'espérance de gain est infinie ? La théorie des probabilités démontre un résultat qu'aucun individu raisonnable ne suivrait. Aussi, ce paradoxe montre que la notion d'espérance n'est pas toujours suffisante en probabilités : si le gain est ici infini en moyenne, il ne faut pas oublier que le joueur doit disposer de fonds eux aussi infinis et qu'il doit jouer une infinité de fois pour pouvoir bénéficier des gains.

Partie A Simulation d'une loi exponentielle à partir d'une loi uniforme sur $[0; 1]$

Soit λ un réel strictement positif. On considère une variable aléatoire U de loi uniforme sur $[0; 1]$ et T la variable aléatoire définie par $T = -\frac{\ln(U)}{\lambda}$.

1. Montrer, pour tout $t \geq 0$, l'égalité :

$$\{T \leq t\} = \{U \leq 1 - e^{-\lambda t}\}$$

2. En déduire que $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$.

3. Quelle est alors la loi suivie par T ?

Partie B Durée de vie et simulations

On considère un échantillon de N atomes radioactifs de caractéristique $\lambda > 0$. On rappelle que la demi-vie $\tau_{1/2}$ est la durée nécessaire pour que la moitié des atomes de l'échantillon se soient désintégrés.

- a. En utilisant la fonction `random()` du module `random`, écrire une fonction `realisation_exp(lambda)` qui permet de simuler et renvoyer la durée de vie d'un atome radioactif de caractéristique `lambda`.

- b. En utilisant une boucle, construire une fonction `echantillon(N, lambda)` qui construit et renvoie une liste de durées de vie de N atomes radioactifs indépendants.

- c. En exploitant la méthode `sort`, écrire une fonction `demi_vie(N, lambda)` qui appelle la fonction `echantillon`, calcule et retourne la demi-vie de l'échantillon simulé.

- d. Exploiter cette fonction pour $N = 10\,000$ et $\lambda = 0,1$. Confronter les résultats obtenus au résultat théorique :

$$\tau_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

La méthode de Monte-Carlo

Utiliser PYTHON

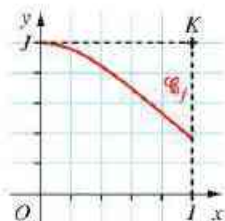
On souhaite calculer l'intégrale $I = \int_0^1 e^{-x^2} dx$ sans connaître de primitive de la fonction f définie sur $[0;1]$ par $f(x) = e^{-x^2}$. Pour cela, nous allons utiliser une méthode dite « de Monte-Carlo ».

Objectif
Évaluer une intégrale par une méthode probabiliste.

Info

Les méthodes de Monte-Carlo désignent des méthodes algorithmiques permettant le calcul approché de valeurs numériques par des techniques probabilistes.

On note \mathcal{C}_f la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; I; J)$ et on considère le carré unité $OIKJ$.



Partie A Lien entre aire et intégrale

1. Interpréter géométriquement l'intégrale I .
2. Déterminer un encadrement de l'intégrale I par lecture graphique.

Partie B Méthode de Monte-Carlo

Principe de la méthode de Monte-Carlo

- On tire au hasard un grand nombre N de points dans le carré unité $OIKJ$.
- On compte le nombre k de points situés sous la courbe représentative de f .
- La fréquence $\frac{k}{N}$ est une valeur approchée de :

$$\frac{I}{\text{aire}(OIKJ)}$$

1. On considère un point M de coordonnées $(x; y)$ situé dans le carré $OIKJ$. À quelle condition est-il situé sous la courbe \mathcal{C}_f ?

2. Justifier que $\frac{I}{\text{aire}(OIKJ)} = I$.

3. a. On considère la fonction `points_sous_courbe` ci-contre qui prend en argument N le nombre de points que l'on souhaite tester.

Compléter cette fonction pour qu'elle :

- place N points dont les coordonnées sont choisies aléatoirement (dans un carré unitaire) et les affiche en rouge s'ils sont sous la courbe de \mathcal{C}_f et en noir sinon ;
- compte et retourne le nombre de points situés sous la courbe \mathcal{C}_f .

- b. Compléter la fonction `aire_sous` qui prend en argument le nombre de points testés et retourne une valeur approchée de I . Cette fonction appellera la fonction `points_sous_courbe`.
- c. Exécuter ce programme avec 500, 1 000, 5 000 et 10 000 points choisis au hasard.
- d. En déduire une valeur approchée de I .

```

1 from random import *
2 from math import *
3 from matplotlib.pyplot import *
4
5 def points_sous_courbe(N):
6     nbpoint=0
7     # parametrage de la fenetre
8     xlim(0,1)
9     ylim(0,1)
10    # simulations
11    for i in ...:
12        x=random()
13        y=random()
14        if ...:
15            nbpoint=...
16            plot(x,y,'.r')
17        else:
18            plot(x,y,'.k')
19    # affichage
20    show()
21    return nbpoint
22
23 def aire_sous(N):
24     k=...
25     return k
    
```

Info

La fonction $x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$ est omniprésente en théorie des statistiques et des probabilités. Sa courbe, en forme de cloche, est souvent appelée courbe de Gauss. Cette fonction est une densité de probabilité sur \mathbb{R} , celle de la loi normale centrée réduite. Cette fonction intervient, entre autres, dans la théorie des sondages et des tests statistiques. On n'en connaît pas de primitive.



Une politique nataliste qui questionne

Des pratiques de discrimination sexuelle à la naissance sont malheureusement observées dans de nombreux pays. Dans un pays totalitaire fictif, les autorités décident que chaque famille arrêtera de procréer après la naissance d'un garçon.

Cette politique aura-t-elle une conséquence sur la répartition des sexes dans la population ?

Dans ce problème, on fera l'hypothèse qu'à chaque naissance la détermination du sexe est indépendante du sexe des enfants précédents, que les deux possibilités « garçon » et « fille » sont équiprobables et qu'il n'y a pas de naissances jumeaux.

Partie A Conjectures à l'aide de simulations Python

1. Justifier que `int(random()+0.5)` donne 0 ou 1 avec équiprobabilité.

2. Compléter la fonction `fratrie()` ci-contre qui simule les naissances successives dans une famille et retourne le nombre d'enfants de la fratrie.

```
1 from random import random
2 from statistics import mean
3
4 def fratrie():
5     nbre_enfants=0
6     nbre_garcons=0
7     while ...:
8         nbre_garcons=...
9         nbre_enfants=...
10    return ...
```

Mener une recherche

3. a. Compléter la fonction `simulations(N)` ci-contre qui effectue N simulations de fratries et

```
12 def simulations(N):
13     simul=[]
14     for k in range(...):
15         simul.append(...)
16     return ...
```

affiche une liste des effectifs des N fratries.

b. Mettre en œuvre $N=100$ puis $N=1000$ simulations de fratries indépendantes. Estimer le nombre moyen d'enfants, de filles et de garçons dans une fratrie. Utiliser la fonction `mean` module `statistics`.

Partie B Modélisation et démonstration

Pour une famille de ce pays, on considère les variables aléatoires :

- N qui représente le nombre d'enfants
- G qui représente le nombre de garçons

1. Pour tout entier strictement positif k , interpréter l'événement $N=k$ en termes de rang de naissance. En déduire la loi puis l'espérance de la variable aléatoire N .

2. Donner l'espérance de la variable aléatoire G .

À L'ÉCRIT OU À L'ORAL

Émettre un avis sur la politique nataliste de ce pays quant à la répartition des sexes.

Paradoxe de Bertrand

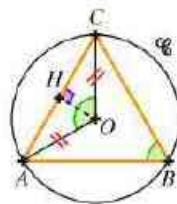
En 1889, dans son ouvrage *Calcul des probabilités*, Joseph Bertrand présente le problème suivant :

« Étant donné un cercle \mathcal{C} de rayon 1, quelle est la probabilité qu'une corde choisie au hasard soit plus longue que le côté du triangle équilatéral inscrit dans ce cercle ? »

Étude de trois modélisations

On considère ABC un triangle équilatéral inscrit dans le cercle \mathcal{C} de centre O et de rayon 1.

1. À l'aide des codages de la figure ci-contre, montrer que le côté de ce triangle est égal à $\sqrt{3}$.

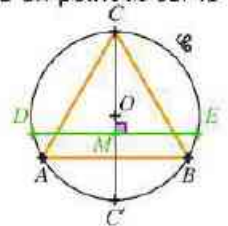


2. Choix 1 : on choisit un point M quelconque sur le cercle \mathcal{C} et on trace la corde $[AM]$. On note X la longueur de la corde $[AM]$.

- Où doit-on placer le point M pour que $AM \geq \sqrt{3}$?
- Donner la longueur de l'arc \widehat{AB} .
- En déduire la probabilité $P(X \geq \sqrt{3})$.

Mener une recherche

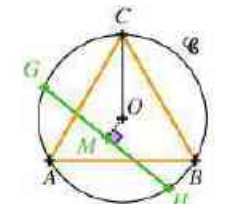
3. Choix 2 : on choisit au hasard un point M sur le rayon $[OC']$ et on trace la corde $[DE]$ perpendiculaire à (OC') de milieu M . On note Y la longueur DE .



a. Où doit se situer le point M pour que DE soit supérieure à AB ?

b. En déduire $P(Y \geq \sqrt{3})$.

4. Choix 3 : on choisit au hasard un point M sur le disque \mathcal{C} et on trace la corde $[GH]$ perpendiculaire à OM passant par M . On note $L = GH$.



a. Montrer que $L = 2\sqrt{1-OM^2}$.

b. Montrer que $L \geq \sqrt{3}$ si et seulement si M appartient au disque de centre O et de rayon 0,5.

c. En déduire $P(L \geq \sqrt{3})$.

À L'ÉCRIT OU À L'ORAL

5. À l'aide des réponses précédentes et de recherches documentaires, justifier le nom « paradoxe de Bertrand » de ce problème.

Corrélation et causalité

Les capacités du thème

- 1 Représenter un nuage de points
- 2 Calculer les coordonnées d'un point moyen
- 3 Déterminer une droite de régression
- 4 Utiliser un ajustement pour interpoler, extrapoler



Modélisation du réel

En 1965, Gordon E. Moore, ingénieur américain, postula que la complexité des semi-conducteurs doublerait tous les ans à coût constant. Il modifia son postulat en 1975 pour affirmer que le nombre de transistors des microprocesseurs sur une puce en silicium doublerait tous les deux ans. Cette « loi » s'est trouvée étonnamment vérifiée pendant de nombreuses années....

📖 Voir Maths en situation p. 278

A Diaporama pour tester les bases



B Moyenne d'une série statistique simple

On donne ci-dessous l'extrait d'une feuille de calcul.

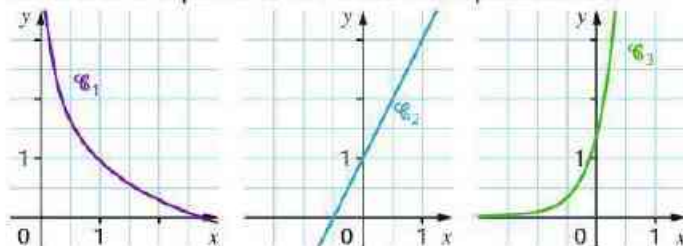
| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|--------|------|------|------|------|------|-----|---------|
| 1 | | | | | | | | Moyenne |
| 2 | Liste1 | 123 | 345 | 29 | 65 | 76 | 157 | 132,5 |
| 3 | Liste2 | 0,7 | 0,43 | 0,65 | 0,76 | 8,9 | 2 | 2,24 |
| 4 | Liste3 | 1178 | 1254 | 899 | 765 | 1453 | 124 | 945,5 |

- Quelle formule peut-on avoir saisi dans la cellule H2 pour obtenir par recopie vers le bas la moyenne de chaque série ?
 a. =MOYENNE(A2 : H2) b. =MOYENNE(B2 : G2)
 c. =MOYENNE(B2;G2) d. =MOYENNE(B2; H2)
- Retrouver les résultats de la colonne H « à la main », puis à l'aide de la calculatrice en utilisant le menu **STATS**.

C Fonctions usuelles

Solent f , g et h trois fonctions définies pour x appartenant à l'intervalle I : $f(x) = 1 - \ln x$, $I =]0; +\infty[$; $g(x) = 1,5e^{3x}$, $I = \mathbb{R}$ et $h(x) = 2x + 1$, $I = \mathbb{R}$.

- Associer chaque fonction à sa courbe représentative.



- Associer à chaque courbe un mot dans la liste ci-dessous permettant de qualifier ses variations.

Croissance linéaire - Croissance exponentielle
 Croissance logarithmique - Décroissance linéaire
 Décroissance exponentielle - Décroissance logarithmique

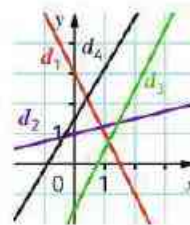
- Dans chacun des cas, dresser le tableau de valeurs de la fonction sur l'intervalle D avec le pas p .

- La fonction f , $D =]0; 2]$ et $p = 0,25$.
- La fonction g , $D = [-1; 1]$ et $p = 0,5$.
- La fonction h , $D = [-1; 2]$ et $p = 0,5$.

D Droites

Indiquer pour chaque affirmation si elle est vraie ou fausse. Justifier.

- La droite d_1 admet pour équation réduite $y = -2x + 3$.
- La droite d_2 admet pour équation réduite $y = 4x + 1$.
- Le point $A(3; 4)$ appartient à la droite d_3 .
- Le coefficient directeur de la droite d_4 est égal à 1,7 et l'ordonnée à l'origine est égal à 1,5.

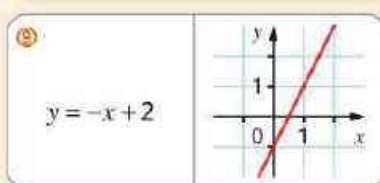
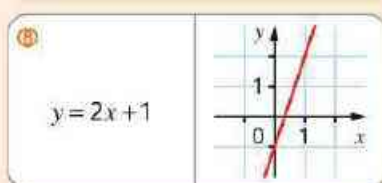
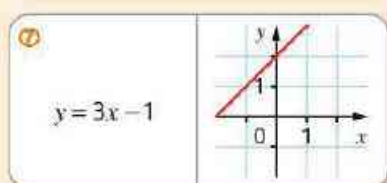
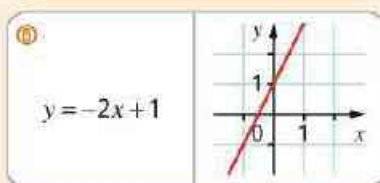
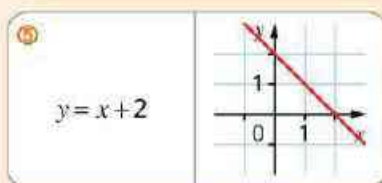
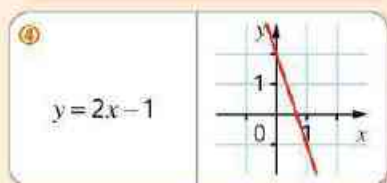
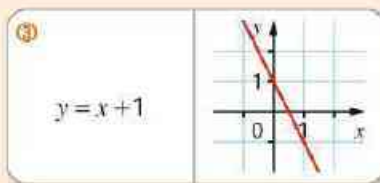
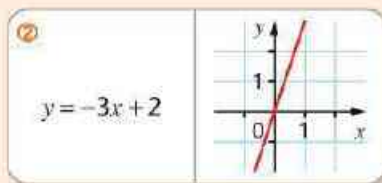
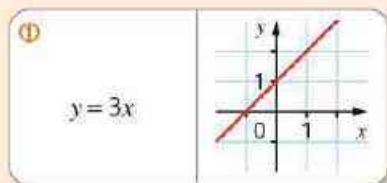


Ressources en +
 sur le site collection :
lycee.hachette-education.com/declic/tle-comp1



Consolider les bases

1 On considère les dominos « équation/droite » suivants. Reconstituer le chemin des dominos, sachant qu'il commence par une droite dont le coefficient directeur est égal à 3.



2 Soit d la droite d'équation $y = 3x + 1$.

- Le point $A(1; 4)$ appartient-il à la droite d ? et le point $B(-1; 3)$?
- Déterminer les coordonnées de deux points C et D appartenant à la droite d . Tracer la droite d dans un repère.
- Déterminer l'ordonnée du point E de la droite d d'abscisse -2 .
- Déterminer l'abscisse du point F de la droite d d'ordonnée -2 .

Objectif

Redécouvrir la notion de droite et d'équation réduite.

Info

Vers 300 av. J.-C., Euclide pose les fondements de la géométrie. Au XVII^e, les objets géométriques ne sont plus définis uniquement par leurs propriétés, mais par leur équation dans un repère. La géométrie cartésienne (ou analytique) est née.

Situation 1 Loi d'Ohm

Romain branche une résistance aux bornes d'un générateur de courant continu. Puis il fait varier la tension délivrée par celui-ci, en mesurant à chaque fois l'intensité du courant traversant cette résistance.



| | | | | | | | | | |
|-----------------------|---|-----|-----|------|------|------|------|-----|------|
| Tension U (en V) | 0 | 1,0 | 1,5 | 2,0 | 3,0 | 4,5 | 6,0 | 9,0 | 12,0 |
| Intensité I (en mA) | 0 | 4,9 | 7,8 | 10,6 | 16,3 | 24,8 | 33,2 | 51 | 67 |

1 a. Représenter graphiquement les données, en plaçant l'intensité I sur l'axe des abscisses et la tension U sur l'axe des ordonnées.

Que constate-t-on ?

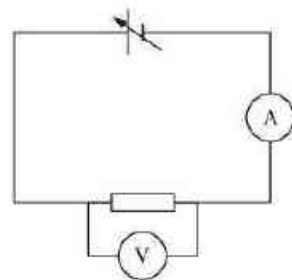
b. En déduire une relation mathématique reliant l'intensité I et la tension U de la forme $U = f(I)$. Cette relation s'appelle la **loi d'Ohm**.

2 a. Quelle est l'intensité du courant si le générateur délivre une tension de 10 V ?

b. Quelle est la tension délivrée par le générateur si Romain mesure une intensité de 100 mA ?

Objectif

Construire le nuage de points associé à une série, conjecturer et utiliser un ajustement.



Rappel

Le coefficient directeur d'une droite (AB) est :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Situation 2 Une relation entre l'envergure et la taille ?

Histoire



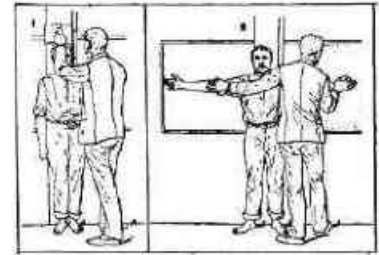
Objectif

Découvrir la « qualité » d'un ajustement au sens des moindres carrés.

Avant la fin du XIX^e siècle, on ne disposait d'aucun moyen fiable pour identifier une personne. Ce n'est qu'en 1882, grâce à Alphonse Bertillon, qu'ont été mises en place des fiches « d'anthropométrie », sur lesquelles on indiquait différentes mesures du corps : taille, envergure, longueur du buste, de la tête, de l'oreille droite... Accompagnées des photos « profil/face » et des empreintes digitales, ces fiches ont été utilisées en France jusqu'en 1970.

En 1900, Charles Perrier, médecin à la prison de Nîmes, publie *Les criminels – Étude sur 859 condamnés*, d'où sont extraits les relevés suivants de mesures, en centimètre, effectuées sur dix hommes.

| | | | | | | | | | | |
|-----------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Taille x_i | 154 | 158 | 162 | 163 | 164 | 165 | 167 | 168 | 170 | 174 |
| Envergure y_i | 159 | 160 | 166 | 164 | 168 | 174 | 170 | 174 | 174 | 179 |



1 On considère un repère orthonormé du plan où les axes sont gradués à partir de la graduation 100 et où 1 cm représente 10 cm.

Après avoir construit le nuage de points $(x_i; y_i)$, justifier pourquoi la taille et l'envergure sont deux grandeurs qu'on peut qualifier de « corrélées ».

2 On cherche à obtenir une relation affine entre taille et envergure, c'est-à-dire de la forme : envergure $\approx a \times$ taille $+ b$.

a. En se basant sur 8 265 sujets, Bertillon écrit : « L'envergure l'emporte généralement sur la hauteur de la taille de 3 à 4 centimètres. »

Tracer sur le graphique la droite d d'équation $y = x + 4$.

Que peut-on penser de l'affirmation de Bertillon ?

b. On considère maintenant la droite \mathcal{D} d'équation $y = 1,06x - 5,8$.

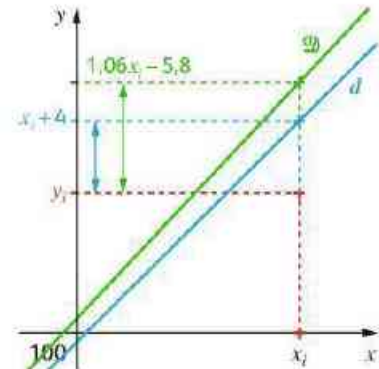
Laquelle des droites d ou \mathcal{D} semble « le mieux » ajuster le nuage de points ?

3 On souhaite maintenant comparer « numériquement » les ajustements du nuage de points par les droites d ou \mathcal{D} .

a. Compléter le tableau suivant, donnant, pour chaque abscisse x_i , les carrés des écarts entre l'ordonnée y_i et l'image $(x_i + 4)$ d'une part, et entre y_i et l'image $(1,06x_i - 5,8)$ d'autre part, en arrondissant à 10^{-2} .

| | | | | | |
|-----------------------------|------|-----|-----|------|-------|
| x_i | 154 | 158 | ... | 174 | Total |
| y_i | 159 | 160 | ... | 179 | |
| $(y_i - (x_i + 4))^2$ | 1 | 4 | ... | ... | ... |
| $(y_i - (1,06x_i - 5,8))^2$ | 2,43 | ... | ... | 0,13 | ... |

b. Quelle droite ajuste le mieux le nuage au sens « des moindres carrés » ?



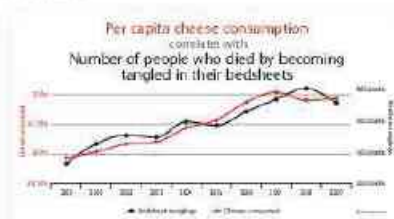
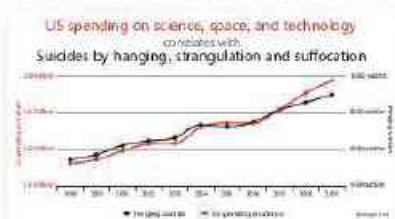
Situation 3 Corrélation et causalité

Objectif

Distinguer corrélation et causalité.

Sur le site internet tylervigen.com/spurious-correlations, on trouve les trois graphiques suivants.

Commenter les termes *spurious correlations*.



1 Statistiques à deux variables

On considère une population dans laquelle on étudie deux quantités X et Y , dans cet ordre. En recueillant les résultats pour n individus de la population, on obtient une liste de n couples $(x_1; y_1), (x_2; y_2), \dots, (x_n; y_n)$. On parle de **série statistique à deux variables**.

a Nuage de points, point moyen

Définitions On considère une série statistique à deux variables.

| N° individu | 1 | 2 | 3 | ... | n | Moyenne |
|--------------|-------|-------|-------|-----|-------|---|
| Quantité X | x_1 | x_2 | x_3 | ... | x_n | $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ |
| Quantité Y | y_1 | y_2 | y_3 | ... | y_n | $\bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n}$ |

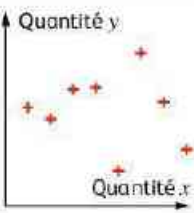
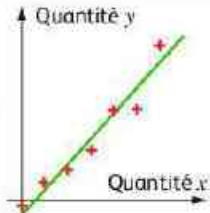
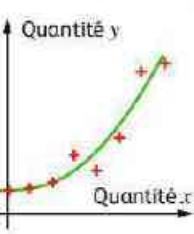
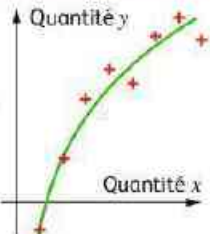
- Dans un repère du plan, le **nuage de points** associé à cette série statistique est formé des points de coordonnées $(x_1; y_1), (x_2; y_2), \dots$ et $(x_n; y_n)$.
- Le **point moyen** de la série est le point de coordonnées $(\bar{x}; \bar{y})$.

b Ajustement d'un nuage de points : quelques exemples

On se demande s'il existe une relation « simple » entre les quantités X et Y . Celle-ci n'existant généralement pas de façon exacte, on cherche une relation approchée satisfaisante de la forme $Y \approx f(X)$.

L'allure du nuage de points permet d'apprécier visuellement si une telle relation existe, selon que les points sont « proches » ou non d'une courbe que l'on peut définir simplement à partir de fonctions usuelles.

Effectuer un ajustement de la série consiste à trouver une fonction f telle que la courbe d'équation $y = f(x)$ passe « près » des points du nuage.

| Pas de forme particulière | Nuage de forme « allongée », proche d'une droite |
|---|---|
| <p>Pas d'ajustement possible</p>  | <p>Possibilité d'un ajustement affine</p>  |
| Nuage à croissance « accélérée » | Nuage à croissance « ralentie » |
| <p>Possibilité d'un ajustement de type parabolique ou exponentiel</p>  | <p>Possibilité d'un ajustement de type racine carrée ou logarithmique</p>  |

Lorsqu'un ajustement est possible, on dit que les variables X et Y sont **corrélées** : il y a un lien mathématique entre ces deux grandeurs. Mais cela ne présage en rien un lien de cause à effet.

Exemple

Le responsable d'un site Internet diffusant des vidéos a effectué les relevés suivants.

| Nombre d'utilisateurs connectés x_i (en millier) | Durée de chargement de la vidéo y_i (en seconde) |
|--|--|
| 0,5 | 0,3 |
| 2,5 | 0,6 |
| 3 | 0,9 |
| 4 | 1,3 |
| 6 | 2,8 |

Le nuage de points représentant cette série est :



Comme

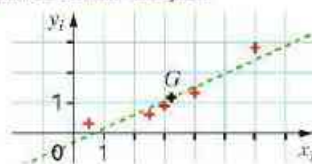
$$\bar{x} = \frac{0,5 + 2,5 + 3 + 4 + 6}{5} = 3,2$$

et

$$\bar{y} = \frac{0,3 + 0,6 + 0,9 + 1,3 + 2,8}{5} = 1,18,$$

le point moyen G a pour coordonnées $(3,2; 1,18)$.

Les points du nuage sont quasiment alignés : un ajustement affine semble adapté.



Commentaire

D'autres ajustements sont possibles, comme par exemple les ajustements de type hyperbolique, logistique ou puissance.



1 Représenter un nuage de points

2 Calculer les coordonnées d'un point moyen

Énoncé Un hôtel cherche à attirer une nouvelle clientèle durant les week-ends. Pour cela, le responsable commercial a décidé de mettre en place une offre « week-end détente », qui inclut une chambre pour une nuit, un accès au spa et d'autres options. Depuis 2015, le responsable a testé plusieurs prix pour cette offre en fonction des options proposées. Voici les résultats obtenus.

| | | | | | |
|--|-----|-----|-----|-----|-----|
| Prix x_i proposé (en euro) | 150 | 180 | 200 | 250 | 270 |
| Nombre y_i d'offres « week-end » vendues | 130 | 111 | 97 | 70 | 57 |



- Représenter graphiquement le nuage de points associé à la série statistique $(x_i; y_i)$.
- Calculer les coordonnées du point moyen G de ce nuage. Le placer sur le graphique précédent.
- Quel type d'ajustement paraît adapté pour ajuster le nuage ?
 - En déduire par estimation graphique le nombre d'offres « week-end » vendues si le prix est fixé à 230 €.

Solution

1. On place ci-contre les prix en abscisse et les nombres d'offres vendues associés en ordonnée, en choisissant des échelles adaptées sur chaque axe pour visualiser « en entier » le nuage de points (ni trop petit ni trop grand).

2. La série comporte cinq points, avec :

$$\bar{x} = \frac{150+180+200+250+270}{5} = 210$$

et $\bar{y} = \frac{130+111+97+70+57}{5} = 93$. Donc le point moyen G a pour coordonnées $(210; 93)$.

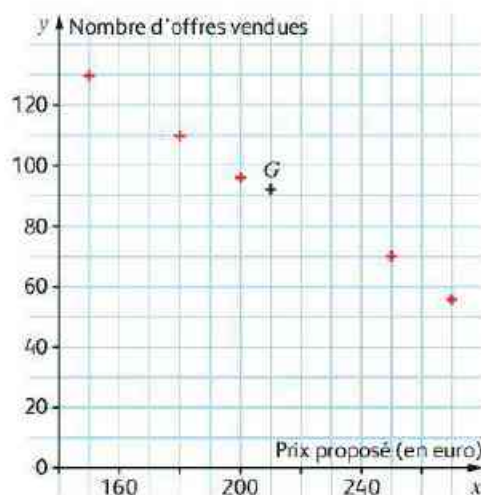
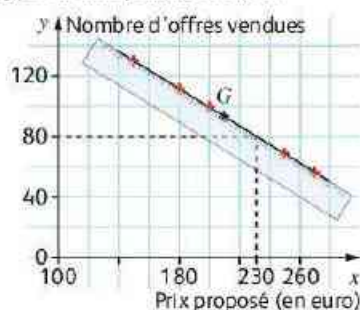
3. a. Les points du nuage sont presque alignés.

On en déduit qu'un ajustement de type affine paraît adapté.

b. À l'aide d'une règle, on trace une droite qui passe « près » des points du nuage.

On choisit une droite passant par le point moyen G .

On en déduit que pour un prix de 230 €, environ 80 offres « week-end » seraient vendues.



Point méthode

2. Pour obtenir les coordonnées du point moyen d'une série statistique, on calcule la moyenne des abscisses et la moyenne des ordonnées des points du nuage.

J'applique

1. Dans chaque cas, représenter graphiquement la série $(x_i; y_i)$ considérée. Puis préciser, en argumentant, si un ajustement affine semble envisageable ou non.

1.

| | | | | | |
|-------|---|---|---|---|---|
| x_i | 2 | 5 | 6 | 8 | 9 |
| y_i | 5 | 3 | 4 | 3 | 6 |

2.

| | | | | | | |
|-------|----|---|----|----|----|----|
| x_i | 3 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 |
| y_i | 10 | 7 | 4 | 3 | 4 | -1 |

3.

| | | | | | | | |
|-------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| x_i | 100 | 200 | 250 | 300 | 400 | 500 | 700 |
| y_i | 1,2 | 2,3 | 2,8 | 3,5 | 4,5 | 4,9 | 7,4 |

4.

| | | | | | | | |
|-------|-----|-----|-----|-----|----|-----|-----|
| x_i | 2,5 | 3,2 | 3,6 | 3,7 | 4 | 4,1 | 4,4 |
| y_i | 20 | 25 | 35 | 40 | 50 | 60 | 100 |

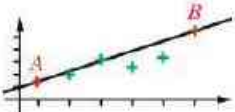
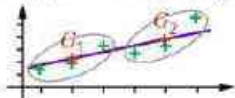
2. Pour chaque série de l'exercice précédent, calculer les coordonnées du point moyen.

2 Ajustement affine

Quand le nuage de points $(x_i; y_i)$, où $1 \leq i \leq n$, a une forme allongée, proche d'une droite, on privilégie une relation de type affine pour ajuster le nuage, à l'aide d'une droite \mathcal{D} d'équation $y = ax + b$.

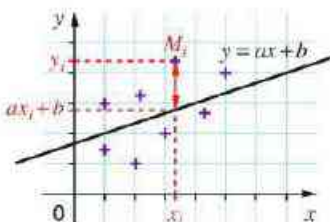
a Exemples d'ajustement affine

Plusieurs méthodes existent pour obtenir un ajustement affine.

| Droite des points extrêmes | Droite de Mayer |
|---|---|
| <p>On choisit pour \mathcal{D} la droite (AB) passant par les points du nuage ayant les abscisses minimale et maximale.</p>  | <p>Le nuage est partagé en deux groupes de même effectif, de points moyens respectifs G_1 et G_2. On choisit pour \mathcal{D} la droite (G_1G_2).</p>  |

b Droite des moindres carrés

La méthode d'ajustement par les moindres carrés repose sur le principe que l'écartement entre le nuage de points $(x_i; y_i)$ et une droite d'équation $y = ax + b$ peut être mesuré par la somme des carrés des écarts « verticaux » $(y_i - (ax_i + b))^2$.



Définition - Propriété

La droite \mathcal{D} de régression par les moindres carrés (de y en x) est la droite d'équation $y = ax + b$ telle que la somme $\sum (y_i - (ax_i + b))^2$ est la plus petite possible.

Les coefficients a et b sont obtenus par les formules :

$$a = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2} \text{ et } b = \bar{y} - a\bar{x}$$

Remarques

- Comme $\bar{y} = a\bar{x} + b$, le point moyen G du nuage appartient à la droite \mathcal{D} .
- En utilisant la covariance $\text{cov}(X; Y)$, égale à $\frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$, et la variance $V(X)$, égale à $\frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2$, on a : $a = \frac{\text{cov}(X; Y)}{V(X)}$.

c Coefficient de corrélation

Définition - Propriété

Le coefficient de corrélation est le nombre :

$$r = \frac{\text{cov}(X; Y)}{\sqrt{V(X) \times V(Y)}} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2} \times \sqrt{\sum (y_i - \bar{y})^2}}$$

On a toujours : $-1 \leq r \leq 1$.

Interprétation

- Si $|r| \approx 1$, alors les points du nuage sont quasiment alignés, l'ajustement affine par les moindres carrés est adapté.
- Si $r = 0$, alors les points sont très dispersés autour de la droite, l'ajustement affine par les moindres carrés n'est pas adapté.

Exemple

On considère la série suivante.

| | | | | |
|-------|---|---|---|---|
| x_i | 1 | 3 | 4 | 8 |
| y_i | 1 | 4 | 2 | 5 |

- La droite des points extrêmes passe par les points $A(1; 1)$ et $B(8; 5)$. Elle admet pour équation :

$$y = \frac{4}{7}x + \frac{3}{7}$$

- Le point moyen des deux premiers points du nuage est $G_1(2; 2,5)$. Le point moyen des deux derniers points du nuage est $G_2(6; 3,5)$. La droite de Mayer (G_1G_2) admet pour équation $y = 0,25x + 2$.

Dans l'exemple précédent, on a : $\bar{x} = 4$ et $\bar{y} = 3$.

| | | | | |
|------------------|----|----|----|----|
| x_i | 1 | 3 | 4 | 8 |
| y_i | 1 | 4 | 2 | 5 |
| $X_i = x_i - 4$ | -3 | -1 | 0 | 4 |
| $Y_i = y_i - 3$ | -2 | 1 | -1 | 2 |
| $X_i \times Y_i$ | 6 | -1 | 0 | 8 |
| X_i^2 | 9 | 1 | 0 | 16 |
| Y_i^2 | 4 | 1 | 1 | 4 |

Donc :

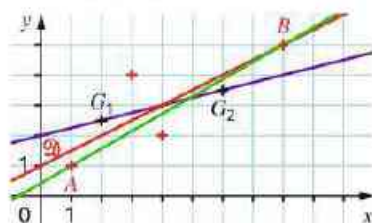
$$a = \frac{6 - 1 + 0 + 8}{9 + 1 + 0 + 16} = \frac{13}{26} = 0,5$$

Et $b = 3 - 0,5 \times 4 = 1$.

La droite \mathcal{D} de régression par les moindres carrés admet pour équation $y = 0,5x + 1$.

Le coefficient de corrélation est :

$$r = \frac{13}{\sqrt{26} \times \sqrt{4 + 1 + 1 + 4}} \approx 0,81$$



3 Déterminer une droite de régression

Énoncé Le tableau suivant donne la population française (métropole + DOM) à chaque recensement depuis 1999.

Source : INED

| Année du recensement | 1999 | 2006 | 2013 | 2019 |
|---|--------|--------|--------|--------|
| Rang x_i depuis 1999 | 0 | 7 | 14 | 20 |
| Population française y_i (en millier) | 60 148 | 63 186 | 65 564 | 66 993 |



On note $\mathcal{D}: y = ax + b$ la droite de régression par les moindres carrés associée à la série statistique $(x_i; y_i)$.

- Déterminer par le calcul les coefficients a et b , en arrondissant a à 10^{-2} et b à l'entier. Puis calculer le coefficient de corrélation r , à 0,001 près. L'ajustement affine est-il adapté ?
- Vérifier les résultats précédents : **a.** à l'aide de la calculatrice ; **b.** à l'aide d'un tableur.

Solution

1. On commence par calculer : $\bar{x} = (0 + 7 + 14 + 20) / 4 \approx 10$ et $\bar{y} = (60\,148 + 63\,186 + 65\,564 + 66\,993) / 4 \approx 63\,973$. Alors :

- $\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \approx (0 - 10) \times (60\,148 - 63\,973) + \dots + (20 - 10) \times (66\,993 - 63\,973) \approx 77\,175$
- $\sum (x_i - \bar{x})^2 \approx (0 - 10)^2 + \dots + (20 - 10)^2 = 225$
- $\sum (y_i - \bar{y})^2 \approx (60\,148 - 63\,973)^2 + \dots + (66\,993 - 63\,973)^2 \approx 26\,901\,675$

Donc $a \approx \frac{77\,175}{225} \approx 343$ et $b \approx 63\,973 - \frac{77\,175}{225} \times 10 \approx 60\,453$.

Ainsi la droite \mathcal{D} admet pour équation $y = 343x + 60\,453$.

Le coefficient de corrélation est : $r \approx \frac{77\,175}{\sqrt{225} \times \sqrt{26\,901\,675}} \approx 0,99$, qui est très proche de 1. Ainsi, l'ajustement affine est adapté.

Point méthode

2. a. Pour déterminer l'équation de la droite de régression par les moindres carrés à l'aide de la calculatrice, on entre les valeurs x_i dans la liste 1 et les valeurs y_i dans la liste 2. Puis on utilise les fonctionnalités de la calculatrice.

2. a.

Casio

Menu Stats : CALC REG X ax+b

| Liste 1 | Liste 2 | Liste 3 | Liste 4 |
|---------|---------|---------|---------|
| 0 | 60148 | | |
| 7 | 63186 | | |
| 14 | 65564 | | |
| 20 | 66993 | | |

GRPH CALC TEST INTG DIST D

Régl. Linéaire (ax+b)

a = 343,382647
 b = 60453,07786
 r = 0,992518327
 r² = 0,9850925347
 MSe = 200516,546
 y = ax + b

TI

Stats CALC 4 : RegLin(ax+b)

| L1 | L2 | L3 | L4 | L5 | L6 |
|----|-------|----|----|----|----|
| 0 | 60148 | | | | |
| 7 | 63186 | | | | |
| 14 | 65564 | | | | |
| 20 | 66993 | | | | |

RegLin

y = ax + b
 a = 343,3826474
 b = 60453,07786
 r = 0,992518327

NumWorks

Menu Régression

| Xi | Yi |
|----|-------|
| 0 | 60148 |
| 7 | 63186 |
| 14 | 65564 |
| 20 | 66993 |

b. Les formules suivantes permettent de confirmer les résultats du 1.

En B4 =PENTE(B2:E2;B1:E1)

En B5 =ORDONNEE.ORIGINE(B2:E2;B1:E1)

En B6 =COEFFICIENT.CORRELATION(B2:E2;B1:E1)

| | A | B | C | D | E |
|---|------------|-----------|--------|--------|--------|
| 1 | Rang x_i | 0 | 7 | 14 | 20 |
| 2 | Pop. y_i | 60 148 | 63 186 | 65 564 | 66 993 |
| 3 | | | | | |
| 4 | a | 343,38265 | | | |
| 5 | b | 60453,078 | | | |
| 6 | r | 0,9925183 | | | |

J'applique

3 Dans chaque cas, déterminer l'équation de la droite des moindres carrés de la série et le coefficient de corrélation, puis vérifier à l'aide de la calculatrice.

1.

| | | | | |
|-------|---|---|----|----|
| x_i | 1 | 5 | 8 | 10 |
| y_i | 3 | 6 | 10 | 15 |

2.

| | | | | | |
|-------|----|-----|-----|-----|-----|
| x_i | 0 | 7 | 12 | 15 | 26 |
| y_i | 10 | 150 | 200 | 250 | 300 |

3.

| | | | | | | |
|-------|----|-----|-----|-----|-----|-----|
| x_i | 50 | 120 | 150 | 210 | 250 | 300 |
| y_i | 57 | 40 | 37 | 30 | 25 | 21 |

3 Ajustement et changement de variable

Principe

On considère une série statistique $(x_i; y_i)$ à deux variables pour laquelle le nuage de points ne suggère pas un ajustement affine.

Dans certains cas, un « changement de variable » permet d'obtenir un nouveau nuage de points pour lequel un ajustement affine est adapté.

En « remontant » le changement de variable, on obtient un ajustement du nuage initial. C'est le cas notamment d'ajustements à l'aide des fonctions exponentielle ou logarithme, de trinômes du second degré...

Exemple

Le tableau suivant donne l'évolution du volume de données mobiles consommées en France entre 2008 et 2017, en téraoctet.

Source : Statista

| | | | | | |
|--------------|---------|---------|---------|-----------|-----------|
| Année | 2008 | 2009 | 2010 | 2011 | 2012 |
| Rang x_i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Volume y_i | 2 930 | 13 267 | 30 331 | 55 805 | 94 999 |
| Année | 2013 | 2014 | 2015 | 2016 | 2017 |
| Rang x_i | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| Volume y_i | 155 278 | 304 471 | 557 561 | 1 056 887 | 2 308 551 |

① Le nuage suggère qu'un ajustement affine n'est pas adapté, alors qu'un **ajustement exponentiel** de la forme $y = ke^{ax}$ pourrait convenir.

② On effectue le changement de variable $z = \ln(y)$ et on obtient le tableau de valeurs suivant, où les données sont arrondies à 0,1 près.

| | | | | | | | | | | |
|------------------|-----|-----|------|------|------|------|------|------|------|------|
| x_i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| $z_i = \ln(y_i)$ | 8,0 | 9,5 | 10,3 | 10,9 | 11,5 | 12,0 | 12,6 | 13,2 | 13,9 | 14,7 |

La calculatrice ou un tableur permet d'obtenir l'équation de la droite de régression de z en x par la méthode des moindres carrés :

③ $z = 0,67x + 8,627$, avec comme coefficient de corrélation $r \approx 0,991$, qui est très proche de 1. Cet ajustement affine est donc adapté.

On estime alors que $z = 0,67x + 8,63$.

④ On revient à la variable y en utilisant l'égalité : $z = \ln(y)$.

Donc $\ln(y) = 0,67x + 8,63$, c'est-à-dire : $y = e^{0,67x + 8,63} = e^{8,63} \times e^{0,67x}$.

En arrondissant, on obtient l'ajustement : $y = 5597 \times e^{0,67x}$.

④ Cet ajustement peut être utilisé pour réaliser des prévisions.

Ainsi, en 2018, on peut estimer que le volume de données mobiles consommées en France était de $5597 \times e^{0,67 \times 10}$ téraoctets, soit environ 4 547 000 téraoctets.

Remarque

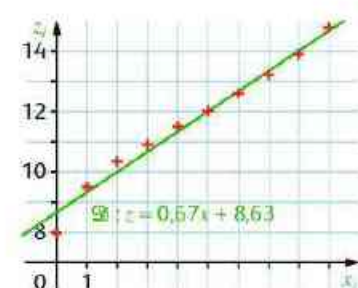
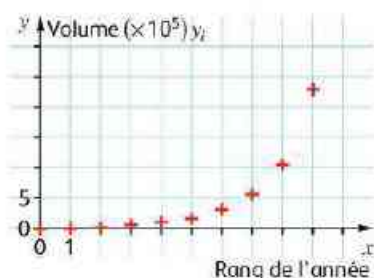
La calculatrice et le tableur permettent d'obtenir un tel ajustement.



Vocabulaire

Lorsqu'on utilise un ajustement pour estimer :

- « au-delà » du nuage de points, on réalise une **extrapolation** ;
- à « l'intérieur » du nuage de points, on réalise une **interpolation**.

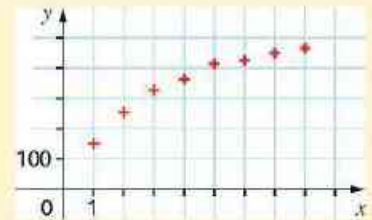




4 Utiliser un ajustement pour interpoler, extrapoler

Énoncé Anna a créé un site web. Le tableau ci-dessous présente l'évolution du nombre hebdomadaire de visiteurs de ce site au cours des huit premières semaines suivant sa création.

| | | | | | | | | |
|---------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Rang x_i de la semaine | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| Nombre y_i de visiteurs | 152 | 253 | 327 | 361 | 412 | 426 | 451 | 465 |



Après avoir représenté le nuage de points associé à cette série, Anna constate que l'augmentation du nombre de visiteurs ralentit les dernières semaines : un ajustement affine n'est pas adapté. Elle envisage plutôt un ajustement de type « logarithmique » et pose $z = \ln(x)$.

1. a. Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant, en arrondissant à 0,001 près.

b. À l'aide de la calculatrice, déterminer l'équation $y = az + b$ de la droite des moindres carrés ajustant le nuage de points $(z_i; y_i)$ et le coefficient de corrélation r associé. Arrondir les valeurs a et b à l'unité.

| | | | | | | | | |
|------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| x_i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| $z_i = \ln(x_i)$ | 0 | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| y_i | 152 | 253 | 327 | 361 | 412 | 426 | 451 | 465 |

c. En déduire un ajustement du nuage de points $(x_i; y_i)$.

2. En utilisant le modèle obtenu à la question 1. c., estimer le nombre de visiteurs lors de la 10^e semaine.

3. Selon le modèle, à partir de quelle semaine peut-on penser que le nombre de visiteurs dépassera 600 ?

Solution

1. a. On obtient :

| | | | | | | | | |
|------------------|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| x_i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| $z_i = \ln(x_i)$ | 0 | 0,693 | 1,099 | 1,386 | 1,609 | 1,792 | 1,946 | 2,079 |
| y_i | 152 | 253 | 327 | 361 | 412 | 426 | 451 | 465 |

b. On obtient $a \approx 154$ et $b \approx 152$. Donc, de façon approchée, la droite d'ajustement des moindres carrés de y en z est : $y = 154z + 152$.

$r \approx 0,998$, très proche de 1. Donc l'ajustement précédent est adapté.

c. Comme $z = \ln(x)$, on obtient l'ajustement : $y = 154 \ln(x) + 152$.

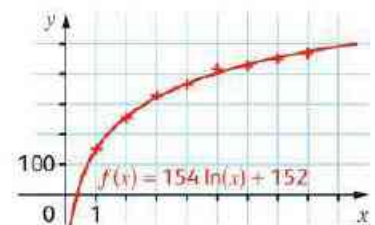
2. On calcule $154 \ln(10) + 152 \approx 506,6$. Donc, selon le modèle, on peut estimer qu'il y aura environ 507 visiteurs lors de la 10^e semaine.

3. On résout $154 \ln(x) + 152 > 600 \Leftrightarrow 154 \ln(x) > 448 \Leftrightarrow \ln(x) > 32/11$.

En passant à l'exponentielle, on obtient $x > e^{32/11}$.

Comme $e^{32/11} \approx 18,3$ et x étant entier, on estime que, selon ce modèle, le nombre de visites devrait dépasser 600 à partir de la 19^e semaine.

```
Régression Linéaire (ax+b)
a = 153,644182
b = 152,219742
r = 0,99823374
r² = 0,9964786
MSe = 48,2544221
y = ax + b
```



Point méthode

2. Pour réaliser une estimation à l'aide d'un modèle, on remplace les variables x ou y par les données de l'énoncé.

J'applique

4. On donne l'évolution d'une production y en fonction du nombre x d'années écoulées depuis 2015.

| | | | | | |
|------------------|---|-----|-----|-----|-----|
| x_i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| y_i (en tonne) | 2 | 2,3 | 2,9 | 3,5 | 3,8 |

1. Déterminer l'équation de la droite de régression des moindres carrés ajustant le nuage $(x_i; y_i)$.

2. L'ajustement précédent est-il adapté ?

3. En supposant que l'évolution se poursuit pendant plusieurs années selon le modèle de la question 1. :

a. estimer la production en 2022 ;

b. déterminer à partir de quelle année la production dépassera 7 tonnes.

5. Reprendre l'exercice 4. avec le tableau suivant.

| | | | | | |
|------------------|-----|-----|-----|-----|-----|
| x_i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| y_i (en tonne) | 1,5 | 2,1 | 2,9 | 3,4 | 3,9 |

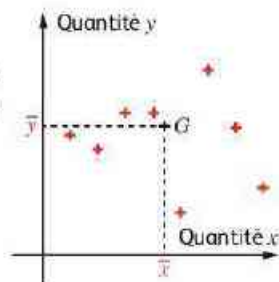
Statistiques à deux variables

On considère une population dans laquelle on étudie deux quantités X et Y .

On résume la série statistique dans un **tableau**.

| | | | | |
|--------------|-------|-------|-----|-------|
| Individu | 1 | 2 | ... | n |
| Quantité X | x_1 | x_2 | ... | x_n |
| Quantité Y | y_1 | y_2 | ... | y_n |

On visualise la série par le **nuage de points** associé, c'est-à-dire l'ensemble des points de coordonnées $(x_i; y_i)$.

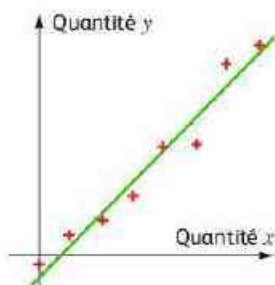


Le **point moyen** G de la série est le point de coordonnées $(\bar{x}; \bar{y})$.

Ajustement affine

Lorsque le nuage de points a une forme « **allongée** », on peut envisager un **ajustement affine** :

$$Y = aX + b$$



Droite des moindres carrés

La **droite de régression de Y en X par les moindres carrés** est la droite d'équation $y = ax + b$ telle que :

$$a = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum(x_i - \bar{x})^2} \quad \text{et} \quad b = \bar{y} - a\bar{x}$$

On peut calculer les coefficients a et b « à la main » ou à l'aide de la calculatrice ou du tableur.

Le **coefficient de corrélation**, s'il est « proche » de 1 ou de -1, permet de valider la qualité de l'ajustement affine.

$$r = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum(x_i - \bar{x})^2} \times \sqrt{\sum(y_i - \bar{y})^2}}$$

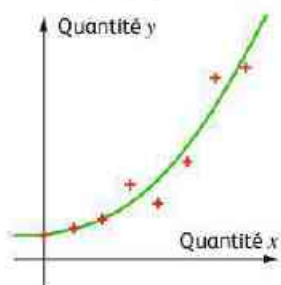
Changement de variables

Lorsque le nuage de points ne suggère pas un ajustement affine, on effectue un **changement de variable**.

On utilise **les fonctions usuelles**.

Ajustement de type...

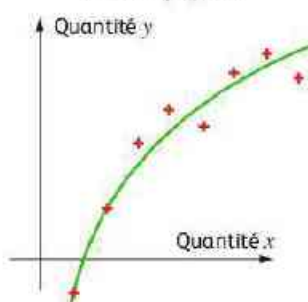
...exponentiel
 $Y = ke^{aX}$



On pose :

$$Z = \ln(Y)$$

...logarithmique
 $Y = a \ln(X) + b$



$$Z = \ln(X)$$

Pourquoi ?

Lorsqu'un ajustement est possible, cela signifie qu'il existe un **lien mathématique** entre les deux grandeurs : elles **sont corrélées**.

À ne pas confondre avec un **lien de cause à effet**.

On utilise cet ajustement pour **prévoir, estimer**.

On parle :

- d'**interpolation** pour calculer une valeur « intermédiaire » de la série ;
- d'**extrapolation** pour calculer une valeur « en dehors » de la série.



Voir corrigés

QCM

Pour chacune des questions, indiquer la (ou les) bonne(s) réponse(s).

On donne ci-dessous le tableau donnant la consommation annuelle de pizzas en France entre 2012 et 2017. Les données concernant l'année 2016 ne sont pas connues.

Source : Gira conseil, l'essentiel sur le marché de la pizza

| Année | 2012 | 2013 | 2014 | 2015 | 2017 |
|--|------|------|------|------|------|
| Rang x_i | 0 | 1 | 2 | 3 | 5 |
| Nombre de pizzas consommées y_i (en million) | 821 | 799 | 809 | 819 | 745 |

| | a | b | c |
|--|---------------------|--------------------|-----------------------|
| 1. Le point $A(2; 809)$ appartient au nuage de points représentant la série. | Vrai | Faux | On ne peut pas savoir |
| 2. Le point $B(4; 713)$ appartient au nuage de points représentant la série. | Vrai | Faux | On ne peut pas savoir |
| 3. Le point $C(2012; 821)$ appartient au nuage de points représentant la série. | Vrai | Faux | On ne peut pas savoir |
| 4. Le point moyen de la série a pour coordonnées : | $(2,2; 798,6)$ | $(2014,2; 798,6)$ | $(11; 3993)$ |
| 5. L'année 2016 est l'année de rang : | 6 | 16 | 4 |
| 6. L'année 2022 est l'année de rang : | 10 | 22 | 2022 |
| 7. On note $D: y = ax + b$ la droite de régression par les moindres carrés en arrondissant a et b à 10^{-1} . On a : | $y = -12,54x + 826$ | $y = -12,5x + 826$ | $y = -12,5 + 826,2$ |

On admet que la droite d'équation $y = -12,5x + 826$ réalise un ajustement affine adapté de la série.

| | | | |
|--|---------|---------|------------------------|
| 8. On peut alors estimer le nombre de pizzas consommées en 2016 (en million) à : | 24 374 | 776 | $-12,5 \times 4 + 826$ |
| 9. On peut estimer que le nombre de pizzas sera inférieur pour la première fois à 600 millions : | en 2019 | en 2031 | 19 ans après 2012 |

vrai

ou faux ?

Indiquer pour chaque affirmation si elle est vraie ou fausse. Justifier.

Partie A.

- Le point moyen d'une série appartient toujours à une courbe d'ajustement de celle-ci.
- Un ajustement affine est toujours possible.
- Le coefficient de corrélation peut être négatif.
- Si on peut réaliser un ajustement, alors il y a un lien de cause à effet entre les deux quantités considérées.

Partie B.

On considère la série ci-contre.

| | | | | |
|-------|----|---|---|---|
| x_i | -1 | 2 | 4 | 7 |
| y_i | -2 | 1 | 2 | 3 |

- Le point moyen a pour coordonnées $(3; 1)$.
- $\text{cov}(X; Y) = 21$ 3. $V(X) = 34$ 4. $V(Y) = 3,5$
- La droite d'équation $y = 0,6x - 1$ réalise un ajustement affine adapté du nuage de points $(x_i; y_i)$.

Automatismes transversaux

6 Retrouver les résultats ci-contre obtenus à l'aide d'une calculatrice.

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$$

$$\left(1 - \frac{1}{7}\right)^2$$

7 Dans chacun des cas suivants, donner le coefficient multiplicateur associé au taux d'évolution donné.

1. $t = +20\%$ 2. $t = -3\%$ 3. $t = +2,5\%$
 4. $t = +100\%$ 5. $t = -50\%$ 6. $t = -22\%$

8 Dans chacun des cas suivants, donner le taux d'évolution, en pourcentage, associé au coefficient multiplicateur donné.

1. $CM = 1,06$ 2. $CM = 0,98$ 3. $CM = 1,12$
 4. $CM = 0,76$ 5. $CM = 3$ 6. $CM = 0,975$

9 Développer et réduire les expressions suivantes.

1. $A(x) = 4(x-3)(x+2)$
 2. $B(x) = (7x+1)(2x-1)+1$
 3. $C(x) = x(x-4) - (x+2)^2$

10 Développer et réduire les expressions suivantes.

1. $A(x) = e^x(e^x - 1)$
 2. $B(x) = (e^x + 4)^2$
 3. $C(x) = (e^x - 4)(e^x - 1)$

11 Factoriser les expressions suivantes.

1. $A(x) = (x+3)(2x-1) - 4(x+3)$
 2. $B(x) = 7e^{2x} - e^x$

12 Factoriser les expressions suivantes.

1. $A(x) = e^{2x} - 9$
 2. $B(x) = e^{2x} - 10e^x + 25$

13 Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes.

1. $4(e^x - 1)(e^x + 5) = 0$
 2. $(2x-3)e^{-4x} = 0$

14 On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = (4x-1)e^{-2x}$$

1. Étudier le signe de f .
 2. Étudier les variations de f .
 3. Vérifier les résultats à la calculatrice.

15 Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = -2$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 3u_n - 1$.
Calculer les quatre premiers termes de la suite.

16 Soit la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par :

$$u_n = n^3 - 2n + 1$$
 Calculer les quatre premiers termes de la suite.

Automatismes du thème

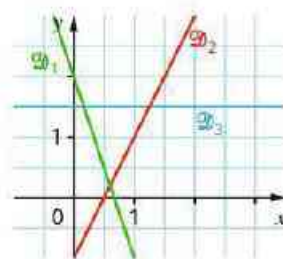
17 Le plan est muni d'un repère orthonormé. Dans chacun des cas suivants, déterminer les coordonnées de deux points appartenant à la droite d .

1. $d : y = 0,14x + 1,2$
 2. $d : y = -7,3x + 22$
 3. $d : y = 4,52x - 1,32$

18 Le plan est muni d'un repère orthonormé. Dans chacun des cas suivants, déterminer si le point A appartient à la droite d .

1. $d : y = 2x + 3 ; A(-1; 1)$ 2. $d : y = -2x + 5 ; A(-1; 1)$

19 On a représenté sur le graphique ci-contre trois droites \mathcal{D}_1 , \mathcal{D}_2 et \mathcal{D}_3 .



Déterminer pour chacune d'elle son coefficient directeur.

20 On considère la série statistique à deux variables donnée par le tableau suivant.

| | | | | | | |
|--|-------|----|-----|-----|-----|---|
| Déterminer les coordonnées du point moyen. | x_i | -3 | 1,5 | -1 | 2 | 4 |
| | y_i | 1 | -1 | 0,5 | 2,5 | 2 |

21 On considère la série statistique à deux variables donnée par le tableau suivant.

| | | | | | |
|-------|-----|------|-----|------|------|
| x_i | 1 | -0,5 | 0,5 | -2,5 | -1,5 |
| y_i | 3,5 | -2 | 0,5 | -1,5 | -3,5 |

Déterminer les coordonnées du point moyen.

22 On considère la série statistique à deux variables donnée par le tableau suivant.

| | | | | | |
|-------|-------|-------|------|------|------|
| x_i | -1,76 | -0,32 | 0,28 | 1,82 | 2,74 |
| y_i | 1 | -1,24 | 0 | 0,84 | 0,48 |

Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une équation de la droite d'ajustement de y en x par la méthode des moindres carrés (arrondir les coefficients au dixième).

23 On considère la série statistique à deux variables donnée par le tableau suivant.

| | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| x_i | 166,8 | 55,9 | 9,24 | 115,1 | 67,2 |
| y_i | 37,1 | 112,9 | 115,3 | 59,7 | 67,58 |

Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une équation de la droite d'ajustement de y en x par la méthode des moindres carrés (arrondir les coefficients au centième).

Consolider les bases

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

24 Dans chacun des cas, déterminer l'équation réduite de la droite (AB) .

- $A(-3; -2)$ et $B(2; -1)$
- $A(-1; 6)$ et $B(2; 3)$
- $A(1; 2)$ et $B(4; 3)$
- $A(4; 3)$ et $B(-1; 5)$

25 Dans chacun des cas, déterminer deux points appartenant à la droite (d) et tracer (d) .

- $(d): y = 2x - 1$
- $(d): y = -3x + 4$
- $(d): y = x + 4$
- $(d): y = -2x + 1$

26 Vrai ou faux ?

Soit (d) la droite d'équation $y = -x + 4$. Pour chaque question, indiquer si l'affirmation est vraie ou fausse. Justifier.

- Le coefficient directeur de la droite (d) est égal à 4.
- La droite (d) passe par le point $A(4; 0)$.
- La droite (d) passe par le point $B(0; 4)$.
- Le point $C(1,5; 2,5)$ appartient à (d) .

27 On a représenté ci-contre les fonctions f , g , h définies sur \mathbb{R} par :

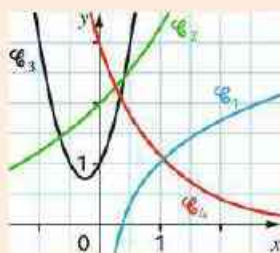
$$f(x) = 2e^{0,5x}$$

$$g(x) = 3e^{-x}$$

$$h(x) = 4x^2 + 2x + 1$$

Et la fonction k définie sur $]0; +\infty[$ par $k(x) = \ln x + 1$.

Associer à chaque courbe son expression algébrique.



28 À l'aide de la calculatrice, recopier et compléter les tableaux de valeurs suivants (arrondir à 10^{-1}).

| | | | | |
|-----------|--------|---------|---------|-----------|
| x_i | 12 453 | 104 567 | 256 734 | 1 327 654 |
| $\ln x_i$ | | | | |

| | | | | | |
|-----------|--------|-------|---|---|----|
| x_i | 0,0034 | 0,650 | 4 | 7 | 12 |
| e^{x_i} | | | | | |

29 Calculer les réels suivants.

- $\ln(e^4)$
- $\ln(e^{-3})$
- e^{h5}
- $e^{2\ln 5}$
- $e^{-2\ln 3}$
- $\ln(e^7)$

30 1. Dans chacun des cas, écrire l'expression donnée à l'aide du symbole Σ .

$$A = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 \text{ et } B = 1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + n \times (n+1)$$

2. Dans chacun des cas, écrire l'expression donnée sans l'aide du symbole Σ .

$$C = \sum_{i=1}^n (x_i - 1) \text{ et } D = \sum_{i=0}^n 2^i$$

Connaître le cours

31 Deux diaporamas pour faire le point sur le cours.



32 Vrai ou faux ?

On considère la série statistique ci-contre. Pour chaque question, indiquer si l'affirmation est vraie ou fausse. Corriger les affirmations fausses.

| | | | |
|-------|-------|-------|-------|
| x_i | x_1 | x_2 | x_3 |
| y_i | y_1 | y_2 | y_3 |

1. $\bar{x} = y_1 \times x_1 + y_2 \times x_2 + y_3 \times x_3$

2. $V(X) = \frac{1}{3}((x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2)$

3. $V(Y) = 3(y_1 - \bar{y})^2 + (y_2 - \bar{y})^2 + (y_3 - \bar{y})^2$

4. $\text{cov}(X, Y) = \frac{1}{3}(x_1 - y_1) + (x_2 - y_2) + (x_3 - y_3)$

33 On considère la série statistique suivante.

On note $D: y = ax + b$ la droite de régression par les moindres carrés associée à cette série.

| | | | |
|-------|-------|-------|-------|
| x_i | x_1 | x_2 | x_3 |
| y_i | y_1 | y_2 | y_3 |

Écrire sans utiliser le symbole Σ :

- les valeurs des coefficients a et b ;
- la valeur du coefficient de corrélation r .

34 On considère la série $(x_i; y_i)$ donnée ci-contre. On a obtenu à l'aide d'une calculatrice les résultats suivants.

| L1 | L2 |
|-----|------|
| -1 | 2.5 |
| 1 | 2.15 |
| 2 | 3.4 |
| 3.5 | 3.1 |
| 5 | 4.2 |
| 8 | 4.5 |

Régl-in
 $y = ax + b$
 $a = 0.2545956079$
 $b = 2.570077901$
 $r^2 = 0.8218441093$
 $r = 0.906556181$

1. Donner une équation de la droite de régression par les moindres carrés :

- en arrondissant les coefficients à 10^{-1} ;
- en arrondissant les coefficients à 10^{-2} .

2. Donner la valeur, arrondie au centième, du coefficient de corrélation. Interpréter.

35 **TABLEUR** Soit la série statistique donnée dans la feuille de calcul ci-dessous. On note $D: y = ax + b$ la droite de régression par les moindres carrés associée à la série et r le coefficient de corrélation.

| | A | B | C | D | E | F |
|---|----------------|--------|----|----|----|-----|
| 1 | x _i | 12 | 45 | 67 | 87 | 112 |
| 2 | y _i | 43 | 65 | 88 | 24 | 33 |
| 3 | | | | | | |
| 4 | a | -0,268 | | | | |
| 5 | b | 56,01 | | | | |
| 6 | r | -0,620 | | | | |

Quelles formules peut-on saisir dans les cellules B4, B5 et B6 afin d'obtenir les coefficients a , b et r ?

Travailler les capacités du thème

1 Représenter un nuage de points

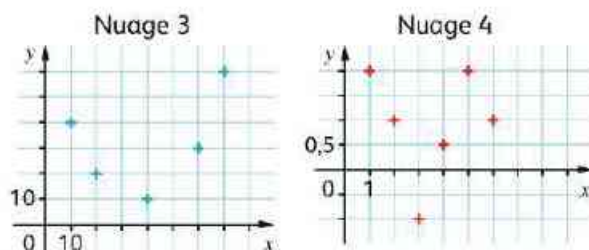
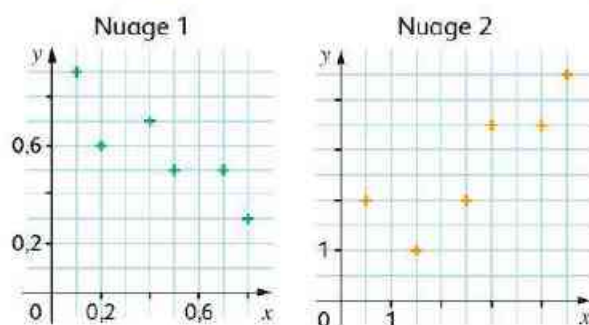
36 On donne ci-dessous quatre séries statistiques doubles et quatre nuages de points.

| | | | | | | | |
|---------|-------|---|---|----|-----|---|---|
| Série A | x_i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| | y_i | 2 | 1 | -1 | 0,5 | 2 | 1 |

| | | | | | | |
|---------|-------|----|----|----|----|----|
| Série B | x_i | 10 | 20 | 40 | 60 | 70 |
| | y_i | 40 | 20 | 10 | 30 | 60 |

| | | | | | | | |
|---------|-------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Série C | x_i | 0,1 | 0,2 | 0,4 | 0,5 | 0,7 | 0,8 |
| | y_i | 0,9 | 0,6 | 0,7 | 0,5 | 0,5 | 0,3 |

| | | | | | | | |
|---------|-------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Série D | x_i | 0,5 | 1,5 | 2,5 | 3 | 4 | 4,5 |
| | y_i | 2 | 1 | 2 | 3,5 | 3,5 | 4,5 |



- Associer chacune de ces séries et le nuage de points qui la représente.
- Peut-on envisager un ajustement affine pour chacun de ces nuages de points ? Argumenter.

37 On définit les séries statistiques suivantes.

| | | | | | | | |
|---------|-------|----|----|-----|-----|-----|-----|
| Série 1 | x_i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| | y_i | 52 | 96 | 145 | 213 | 345 | 567 |

| | | | | | | |
|---------|-------|------|------|------|------|------|
| Série 2 | x_i | 1970 | 1980 | 1990 | 2000 | 2010 |
| | y_i | 0,1 | 1,2 | 2,3 | 4,5 | 6 |

- En choisissant des unités adaptées dans chacun des cas, représenter le nuage de points dans un repère.
- Dans chacun des cas, quel type d'ajustement paraît adapté pour ajuster le nuage ?

2 Calculer les coordonnées d'un point moyen

38 Calculer les coordonnées du point moyen pour chacune des séries statistiques de l'exercice 36.

39 On a noté, pour six valeurs différentes du prix au kilogramme, le nombre de kilogrammes de cèpes vendus par un marchand.



On obtient la série statistique suivante.

| | | | | | | |
|-------------------------------|------|-----|------|----|-----|------|
| Prix x_i (en €/kg) | 21,5 | 22 | 23,5 | 24 | 26 | 27,5 |
| Quantité vendue y_i (en kg) | 10 | 8,5 | 8 | 7 | 6,5 | 5 |

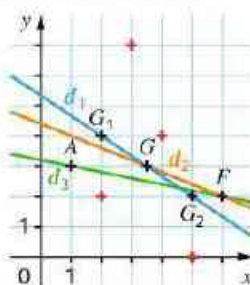
- Représenter dans un repère le nuage de points.
- Calculer les coordonnées du point moyen. Interpréter les résultats dans le contexte de l'exercice.

3 Déterminer une droite de régression

40 On considère la série statistique suivante.

| | | | | | | |
|-------|---|---|---|---|---|---|
| x_i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| y_i | 3 | 2 | 7 | 4 | 0 | 2 |

On a tracé ci-contre le nuage de points associé ainsi que les trois droites d'ajustement : droite des points extrêmes, droite de Mayer et droite des moindres carrés.



- Identifier chacune des droites d_1 , d_2 et d_3 .
- a. Montrer que la droite des points extrêmes admet pour équation $y = -0,2x + 3,2$.
- b. Montrer que la droite de Mayer admet pour équation $y = \frac{2}{3}x + \frac{16}{3}$.
- c. Montrer que la droite de régression par les moindres carrés admet pour équation $y = -0,4x + 4,4$.

41 On s'intéresse au taux d'emploi, en %, des seniors en France métropolitaine. Source : INSEE

| A | B | C | D | E | F | G |
|----|-------|------------|-------------------|---------------------------|---|---|
| 1 | Année | Rang x_i | Taux emploi y_i | Taux d'emploi des seniors | | |
| 2 | 2008 | 0 | 55,1 | | | |
| 3 | 2009 | 1 | 53,4 | | | |
| 4 | 2010 | 2 | 53,9 | | | |
| 5 | 2011 | 3 | 54,7 | | | |
| 6 | 2012 | 4 | 56,6 | | | |
| 7 | 2013 | 5 | 57,5 | | | |
| 8 | 2014 | 6 | 58,5 | | | |
| 9 | 2015 | 7 | 59,5 | | | |
| 10 | 2016 | 8 | 60,2 | | | |
| 11 | 2017 | 9 | 61,2 | | | |

Retrouver à l'aide de la calculatrice les résultats donnés par le graphique de la feuille de calcul ci-dessus.

42 Une brasserie vend des boissons rafraîchissantes. Son responsable relève les ventes et la température maximale (en °C) six jours de suite. Les résultats sont donnés dans le tableau suivant.

| | | | | | | |
|-------------------|----|----|----|-----|-----|-----|
| Température x_i | 20 | 22 | 24 | 28 | 30 | 32 |
| Ventes y_i | 44 | 64 | 80 | 120 | 152 | 170 |

- Représenter le nuage de points $(x_i; y_i)$ dans un repère orthogonal. On prendra pour unités graphiques : 1 cm pour 1 °C en abscisse, en graduant à partir de 16, et 1 cm pour 10 boissons vendues en ordonnée.
- Justifier que l'on peut envisager un ajustement affine de ce nuage de points.
- Vérifier, par le calcul, que la droite (d) d'équation $y = 10,5x - 166$ passe par le premier point et le sixième point du nuage. Tracer cette droite.
- On admet que la droite (d) constitue un ajustement affine adapté du nuage de points.
 - Déterminer graphiquement le nombre de boissons vendues si la température maximale est de 29 °C.
 - Retrouver le résultat par le calcul.

43 Un voyageur veut proposer à ses clients une nouvelle croisière d'une semaine dans la mer des Caraïbes. Avant de la mettre en vente, le voyageur réalise une étude pour déterminer, selon le prix d'une semaine en cabine de type Royal, le nombre de clients susceptibles de réserver cette proposition.

| | | | | |
|--------------------------------|-------|-------|-------|-------|
| Prix x_i cabine Royal (en €) | 2 000 | 3 000 | 4 000 | 5 000 |
| Nb. y_i de pers. intéressées | 170 | 145 | 112 | 93 |
| Prix x_i cabine Royal (en €) | 6 000 | 7 000 | 8 000 | 9 000 |
| Nb. y_i de pers. intéressées | 84 | 57 | 34 | 25 |

- Représenter graphiquement le nuage de points.
 - Un ajustement affine est-il envisageable ?
- On décide d'ajuster le nuage de points par la droite de Mayer.
 - Montrer que le point moyen des quatre premiers points du nuage est $G_1(3\,500; 130)$ et que le point moyen des quatre derniers points du nuage est $G_2(7\,500; 50)$.
 - En déduire l'équation réduite de la droite de Mayer, puis estimer le nombre de personnes intéressées en fixant un prix de cabine à 10 000 €.

44 On considère la série à deux variables suivante.

| | | | | | | | |
|-------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| x_i | 10 | 20 | 25 | 30 | 40 | 50 | 70 |
| y_i | 1,2 | 2,3 | 2,8 | 3,5 | 4,5 | 4,9 | 7,4 |

On note $D: y = ax + b$ la droite de régression par les moindres carrés associée à la série statistique.

- Déterminer par le calcul les coefficients a et b .
- Calculer le coefficient de corrélation r , à 0,01 près.
- Vérifier les résultats précédents à la calculatrice.

Utiliser un ajustement pour interpoler, extrapoler

45 On s'intéresse aux connexions à l'Internet mobile. Le tableau ci-dessous présente la part des personnes de plus de 15 ans résidant en France (en pourcentage, arrondi au dixième) qui se sont connectées sur une période fixe

Source : INSEE



| | | | | | |
|------------|------|------|------|------|------|
| Année | 2009 | 2010 | 2011 | 2012 | 2013 |
| Rang x_i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Part y_i | 17,7 | 26,4 | 28,4 | 39,5 | 46,5 |
| Année | 2014 | 2015 | 2016 | 2017 | |
| Rang x_i | 5 | 6 | 7 | 8 | |
| Part y_i | 53,4 | 55,8 | 55,1 | 62,4 | |

- Représenter le nuage de points dans un repère.
- À l'aide de la calculatrice, déterminer l'équation réduite de la droite d'ajustement de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés.
 - Tracer cette droite sur le graphique.
- Estimer graphiquement la part des personnes de plus de 15 ans qui se connecteraient à l'Internet mobile en 2020.
 - Retrouver le résultat par le calcul.
- Cet ajustement reste-t-il valable sur le long terme ?

46 Dans un livre de révision du Code de la route, on peut trouver le tableau ci-contre.

| Vitesse | Distance de freinage |
|----------|----------------------|
| 20 km/h | 2 m |
| 30 km/h | 4,5 m |
| 40 km/h | 8 m |
| 50 km/h | 12,5 m |
| 60 km/h | 18 m |
| 70 km/h | 24,5 m |
| 80 km/h | 32 m |
| 90 km/h | 40,5 m |
| 100 km/h | 50 m |
| 110 km/h | 60,5 m |
| 120 km/h | 72 m |

- Montrer que la droite d'équation $y = 0,7x - 19,5$ réalise un bon ajustement affine de y en x , où x est la vitesse en km/h et y la distance de freinage en mètre.
- Estimer la distance de freinage pour une vitesse de 55 km/h.
 - Quelle vitesse correspond à une distance de freinage de 47 mètres ?
- Estimer la distance de freinage pour une vitesse de 150 km/h.
 - Dans le livre du Code de la route, on donne la formule suivante pour calculer la distance de freinage D , en m, en fonction de la vitesse V , en km/h :

$$D = (V + 10)^2 / 2$$

Montrer que la distance de freinage pour une vitesse de 150 km/h est alors de 112,5 mètres.

- Comparer les deux valeurs obtenues en 3. a. et 3. b.

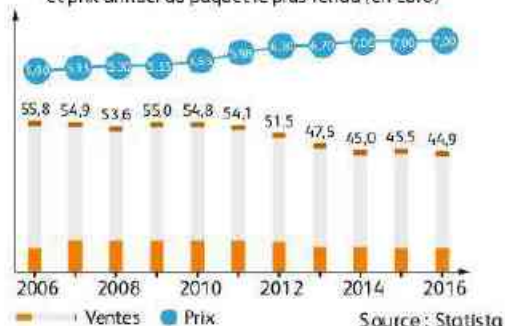


On dit que la distance de freinage est une **fonction quadratique** de la vitesse.

1 Statistiques à deux variables

47 On étudie le schéma ci-dessous.

L'effet du prix des cigarettes sur la consommation en France
Ventes de cigarettes (en milliard d'unités)
et prix annuel du paquet le plus vendu (en euro)



- Quelles sont les deux quantités étudiées ? Quelle quantité va-t-on choisir pour X ? pour Y ?
- a. Résumer les données dans un tableau.
b. Représenter le nuage de points associé.
- Les quantités étudiées sont-elles corrélées ? Peut-on dire qu'il existe un lien de cause à effet entre ces deux quantités ?

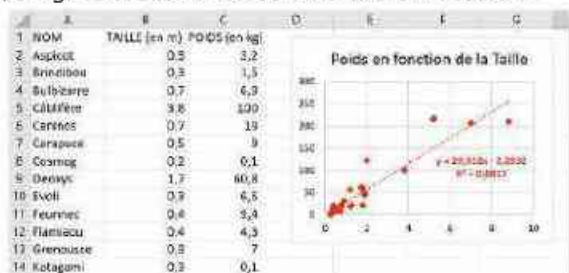
48 Fabrice, fan de handball, étudie les statistiques de son équipe favorite, le MHB (Montpellier Handball Club). Il s'intéresse aux nombres de tirs marqués/tentés par les 10 meilleurs joueurs de l'équipe lors de la saison 2018-2019.

Source : LNH

| Joueurs | Total Buts |
|-----------------------|------------|
| 1 Richardson Melvyn | 163/251 |
| 2 Parce Valentin | 84/169 |
| 3 Kavtchenk Vad | 84/127 |
| 4 Pettersson Fredric | 77/87 |
| 5 Sausi Mohamed | 65/71 |
| 6 Villeminot Kyllian | 61/72 |
| 7 Grebille Mathieu | 48/76 |
| 8 Truchanovskis Jonas | 40/79 |
| 9 Mandouh Mohamed | 37/59 |
| 10 Guilgou Michael | 33/43 |

- Quelles sont les deux quantités étudiées ? Quelle quantité va-t-on choisir pour X ? Et pour Y ?
- a. Résumer les données dans un tableau.
b. Représenter le nuage de points associé.
- Les quantités étudiées sont-elles corrélées ? Peut-on dire qu'il existe un lien de cause à effet entre ces deux quantités ?

49 Rémi, collectionneur de cartes, a répertorié ses Pokémon en fonction de la taille (en m) et du poids (en kg). Il a obtenu la feuille de calcul ci-dessous.



- Le Pokemon Pikachu mesure 40 cm pour un poids de 6 kg. Ces données sont-elles cohérentes avec l'ajustement obtenu à l'aide de la feuille de calcul ?
- Peut-on dire que la taille et le poids des Pokémon sont deux variables corrélées ? Peut-on en déduire un lien de cause à effet ?



2 Ajustement affine

50 Le tableau suivant donne les chiffres d'affaires trimestriels en millier d'euros d'une entreprise hôtelière pour 2017 et 2018.



| | | | | |
|--------------------------|-----|-----|-----|-----|
| Rang du trimestre x_i | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Chiffre d'affaires y_i | 245 | 225 | 230 | 200 |
| Rang du trimestre x_i | 5 | 6 | 7 | 8 |
| Chiffre d'affaires y_i | 220 | 180 | 180 | 160 |

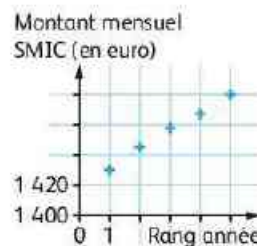
- Représenter graphiquement le nuage de points associé à la série $(x_i ; y_i)$.
- Calculer les coordonnées du point moyen G . Le placer sur le graphique précédent.
- On choisit de réaliser un ajustement du nuage précédent par la droite \mathcal{D} passant par le point G et dont l'équation est de la forme : $y = -10x + b$.
a. Déterminer la valeur de b .
b. Tracer sur le graphique la droite \mathcal{D} .
- On suppose que cet ajustement est valable de 2017 à 2020. À l'aide de cet ajustement, quel chiffre d'affaires peut-on prévoir au 2^e trimestre 2019 ?

51 Le tableau suivant donne le montant mensuel brut, en euro, du SMIC pour 35 heures de travail hebdomadaire, entre 2013 et 2017. Source : INSEE

| Année | 2013 | 2014 | 2015 | 2016 | 2017 |
|------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Rang x_i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| SMIC y_i | 1 430,22 | 1 445,38 | 1 457,52 | 1 466,62 | 1 480,27 |

On a représenté ci-contre le nuage de points associé.

- Peut-on envisager un ajustement affine ? Justifier.
- a. Déterminer une équation de la droite d'ajustement de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés. Les coefficients seront arrondis au centième.



b. Calculer le coefficient de corrélation r arrondi à 10^{-3} . Interpréter.

3. a. Calculer le montant mensuel brut du SMIC (en euro) estimé à l'aide de ce modèle en 2019.

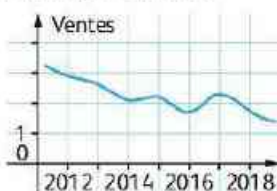
b. Sur le site *smic-horaire.com*, on peut lire : « Au 1^{er} janvier 2019, le SMIC a progressé de 1,52 % pour atteindre un taux horaire de 10,03 € brut, ce qui correspond à un montant de 1 521,22 € mensuel (pour 35 h hebdomadaire) et 18 254,60 € annuel. »

Comparer ces données avec l'estimation faite à la question 3. a. Commenter.

52 La vente des costumes pour homme en France connaît un réel déclin depuis quelques années.

Le graphique ci-contre donne l'évolution des ventes annuelles de costumes en France en million d'unités de 2011 à 2019.

Source : Kantar



On note x le rang de l'année (l'année 2011 étant de rang 1) et y le nombre de ventes annuelles en million d'unités.

1. Un ajustement affine de y en x est-il envisageable ?

2. On admet que la droite d'équation $y = -0,2x + 3,3$ est une droite d'ajustement de y en x .

a. Estimer le nombre de ventes de costumes en 2020.

b. À partir de quelle année peut-on estimer que le nombre de ventes annuelles de costumes en France passera en dessous du million d'unités ?

Info

Jusqu'à il y a peu, le patron de Facebook ne portait que des jeans et des T-shirts gris, mais on le voit de plus en plus en costume notamment lorsqu'il se présente devant le congrès américain. Le *New York Times* a même surnommé son complet le « costume je suis désolé » (« I'm sorry suit »).



53 Afin de mesurer l'impact de son budget publicitaire sur son chiffre d'affaires, une entreprise a créé la feuille de tableur ci-dessous. Le chiffre d'affaires et le budget publicitaire sont exprimés en millier d'euros.

| Années | Budget publicitaire | Chiffre d'affaires | |
|--------|---------------------|--------------------|-----|
| 1 | N-5 | 9 | 112 |
| 2 | N-4 | 12 | 125 |
| 3 | N-3 | 34 | 172 |
| 4 | N-2 | 37 | 183 |
| 5 | N-1 | 38 | 234 |
| 6 | N | 21 | 243 |
| 7 | N | | |
| 8 | | | |
| 9 | a^* | 12,06 | |
| 10 | b^* | -2,97 | |
| 11 | r^* | 0,97 | |

1. Un ajustement affine est-il envisageable ? Justifier.

2. On note $d : y = ax + b$ la droite de régression par les moindres carrés et r le coefficient de corrélation.

a. Donner les formules à saisir dans les cellules B9, B10 et B11 afin d'obtenir les coefficients a , b et r .

b. Donner une équation de la droite (d).

3. Quel sera le chiffre d'affaires prévisionnel si on investit 230 000 € en publicité à l'année $N+1$?

Analyse d'un énoncé

54 Exercice commenté

Léa vient de créer une application informatique. Chaque mois, elle relève le nombre de personnes l'ayant téléchargée. Le rang 0 correspond au mois de mars 2019.

| Rang du mois x_i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|--|-----|-----|-----|-----|-----|
| Nombre y_i de téléchargements (en millier) | 150 | 180 | 210 | 260 | 296 |

1. Représenter graphiquement le nuage de points.

2. a. Déterminer à l'aide de la calculatrice l'équation réduite de la droite d'ajustement de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés. On arrondira les coefficients au dixième.

b. Tracer la droite dans le repère.

3. a. Estimer graphiquement le nombre de téléchargements attendus au mois de janvier 2020 ?

b. Retrouver le résultat par le calcul.

► Pour représenter le nuage de points, il faut penser à choisir des échelles adaptées sur chaque axe.

► L'équation de la droite s'obtient grâce au menu STAT de la calculatrice.

► Le mois de janvier 2020 correspond au rang 10.

55 Application immédiate

Le tableau suivant donne le nombre d'abonnements à Internet en très haut débit, en million, en France du premier trimestre 2018 au premier trimestre 2019.

Source : Arcep

| Trimestre | T1 2018 | T2 2018 | T3 2018 | T4 2018 | T1 2019 |
|-------------------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Rang x_i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Abonnements y_i | 7,481 | 7,847 | 8,350 | 8,965 | 9,532 |

1. Représenter graphiquement le nuage de points.

2. a. Déterminer à l'aide de la calculatrice l'équation réduite de la droite d'ajustement de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés. On arrondira les coefficients au dixième.

b. Tracer la droite dans le repère.

3. a. Estimer graphiquement le nombre d'abonnements au premier trimestre 2020.

b. Retrouver le résultat par le calcul.

3 Ajustement et changement de variable

56 Un restaurateur effectue une étude de marché dans l'intention d'installer un établissement proposant un « grand buffet à volonté » avec des tarifs allant de 15 à 35 euros. À l'issue de cette étude, il dispose du tableau ci-dessous donnant le nombre de couverts potentiels y_i en fonction du tarif x_i (en euro).



| | | | | | | | |
|-------|-----|-----|-----|------|-----|----|----|
| x_i | 15 | 17 | 20 | 22,5 | 25 | 30 | 35 |
| y_i | 500 | 350 | 270 | 190 | 140 | 75 | 50 |

1. Représenter graphiquement le nuage de points associé à la série statistique $(x_i; y_i)$.
Un ajustement affine paraît-il adapté ?

2. a. Recopier et compléter le tableau suivant, en arrondissant à 10^{-2} près.

| | | | | | |
|------------------|----|----|-----|----|----|
| x_i | 15 | 17 | ... | 30 | 35 |
| $z_i = \ln(y_i)$ | | | | | |

b. À l'aide de la calculatrice, déterminer l'équation de la droite de régression de z en x par les moindres carrés, en arrondissant les coefficients à 10^{-3} , ainsi que le coefficient de corrélation.

Cet ajustement affine est-il adapté ?

c. En déduire que la fonction f définie sur $[15; 35]$ par $f(x) = 2639e^{-0,116x}$ permet de modéliser le nombre de couverts en fonction du tarif x (en euro).

3. Le restaurateur estime que si moins de 100 couverts sont servis, son projet ne sera pas viable. Déterminer le prix maximum qu'il doit fixer pour assurer la rentabilité de son restaurant.

57 On donne l'évolution de la cote Argus, en euro, d'un monospace tous les 1^{er} janvier à partir de 2010.

| | | | | | |
|------------|--------|--------|--------|--------|--------|
| Année | 2010 | 2011 | 2012 | 2013 | 2014 |
| Rang x_i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Cote y_i | 24 163 | 22 180 | 17 284 | 15 681 | 13 840 |
| Année | 2015 | 2016 | 2017 | 2018 | 2019 |
| Rang x_i | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| Cote y_i | 12 215 | 10 148 | 9 221 | 7 393 | 6 050 |

1. a. Déterminer l'équation réduite de la droite de régression de y en x par les moindres carrés, en arrondissant les coefficients à 10^{-3} , ainsi que le coefficient de corrélation.

b. En utilisant cet ajustement, estimer la cote Argus du monospace entre 2020 et 2025.

2. a. Recopier et compléter le tableau suivant, en arrondissant à 0,001 près.

| | | | | |
|------------------|--------|-----|-----|-------|
| x_i | 0 | 1 | ... | 9 |
| $z_i = \ln(y_i)$ | 10,093 | ... | ... | 8,708 |

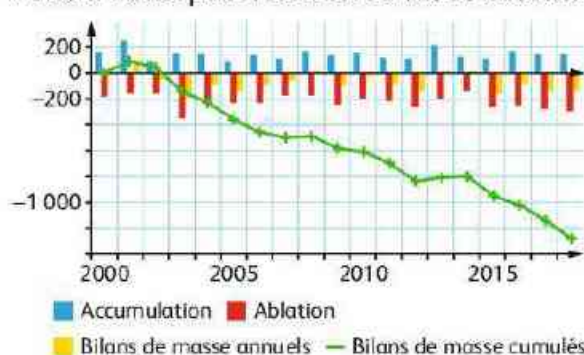
b. Déterminer l'équation de la droite de régression de z en x par les moindres carrés, en arrondissant les coefficients à 10^{-3} , ainsi que le coefficient de corrélation.

c. En déduire un ajustement exponentiel de la cote y en fonction du rang x de l'année.

d. En utilisant cet ajustement, estimer la cote Argus du monospace entre 2020 et 2025.

3. Lequel des ajustements précédents (affine et exponentiel) paraît le plus adapté ? Argumenter.

58 Le site du parc national des Écrins titrait en 2019 : « Glacier Blanc : perte record sur 20 ans de mesures. »



Le tableau suivant donne le bilan m_i de masse cumulée (en cm) à partir de l'année 2000 en fonction du nombre x_i d'années écoulées depuis 2000 Source: PNE

| | | | | | | | |
|-------|------|------|------|--------|--------|--------|------|
| x_i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| m_i | -8 | 99 | 49 | -137 | -225 | -361 | -450 |
| x_i | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | |
| m_i | -502 | -489 | -584 | -607 | -698 | -838 | |
| x_i | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | |
| m_i | -811 | -796 | -947 | -1 025 | -1 155 | -1 289 | |

1. Réaliser un ajustement affine du nuage de points $(x_i; m_i)$. En déduire une estimation du bilan de masse cumulée pour l'année 2019.

2. En réalité, le bilan de masse cumulée était de 1 479 cm en 2019. Est-ce cohérent avec l'estimation précédente ?

3. On pose $y = \ln(|m_i|)$.

a. Déterminer un ajustement affine de y en x par les moindres carrés, pour la série entre 2013 et 2018.

b. En déduire un ajustement exponentiel de m en fonction de x .

c. Cet ajustement prévoyait-il « mieux » la valeur observée en 2019 que l'ajustement affine ?

Une modélisation historique

De nombreuses populations biologiques évoluent dans un milieu disposant de ressources restreintes. Initialement, leur croissance est rapide et de type exponentiel. Mais au bout d'un certain temps, le rythme de croissance ralentit et la population stagne.



Le biologiste T. Carlson a étudié en 1913 une population de levures (*saccharomyces*) et a obtenu les résultats suivants.

| | | | | | | | | | | |
|--------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Temps t_i (en heure) | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| Population m_i (en mg) | 9,6 | 18,3 | 29,0 | 47,2 | 71,1 | 119,1 | 174,6 | 257,3 | 350,7 | 441,5 |
| Temps t_i (en heure) | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | |
| Population m_i (en mg) | 513,3 | 559,7 | 594,8 | 629,4 | 640,8 | 651,1 | 655,9 | 659,8 | 661,8 | |

1. Représenter le nuage de points $(t_i; m_i)$ et vérifier l'affirmation surlignée en jaune dans le texte.

2. On étudie ici la croissance de la population jusqu'à 8 h.

a. Recopier et compléter le tableau suivant, en arrondissant à 0,001 près :

| | | | | |
|------------------|-------|-----|-----|-------|
| t_i | 0 | 1 | ... | 8 |
| $y_i = \ln(m_i)$ | 2,262 | ... | ... | 5,860 |

b. Déterminer un ajustement par les moindres carrés de y en t et étudier la qualité de cet ajustement en calculant le coefficient de corrélation.

c. En déduire un ajustement de m en fonction de t .

Que peut-on penser de l'affirmation surlignée en vert ?

3. On cherche une relation entre le temps t et la population m sur $[0; +\infty[$ de la forme :

$$m = \frac{M}{1 + k \times \exp(-\lambda t)}$$

où les coefficients M , k et λ sont strictement positifs.

a. Quelle est la limite du quotient $\frac{M}{1 + k \times \exp(-\lambda t)}$ lorsque t tend vers $+\infty$?

b. Dans la suite, on choisit $M = 665$. Expliquer ce choix en utilisant la représentation graphique de la question 1.

c. Recopier et compléter le tableau ci-contre. Arrondir à 0,001 près.

| | | | | |
|---|-------|-----|-----|--------|
| t_i | 0 | 1 | ... | 18 |
| $z_i = \ln\left(\frac{665 - m_i}{m_i}\right)$ | 4,223 | ... | ... | -5,332 |

d. Déterminer un ajustement par les moindres carrés de z en t et étudier la qualité de cet ajustement en calculant le coefficient de corrélation.

En déduire un ajustement de m en fonction de t .

4. Tracer sur le graphique de la question 1. la courbe représentative de la fonction f définie par :

$$f(t) = \frac{665}{1 + 64,5 \exp(-0,531t)}$$

Commenter la qualité de l'ajustement réalisé avec la fonction f .

La représentation graphique d'une série par un nuage de points oriente le choix d'un modèle mathématique.



La connaissance des données démographiques permet de dégager des tendances d'évolution et d'effectuer des prévisions, en supposant que cette tendance se maintient. On étudie ici deux exemples : l'Espagne et le Canada.

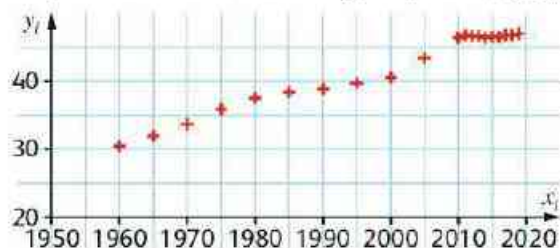
Partie A L'Espagne

Le tableau suivant donne l'évolution de la population espagnole depuis 1960.

Source : Eurostats

| | | | | | | | | | | |
|-------------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Année x_i | 1960 | 1965 | 1970 | 1975 | 1980 | 1985 | 1990 | 1995 | 2000 | 2005 |
| Population y_i (en million) | 30,3 | 31,8 | 33,6 | 35,6 | 37,3 | 38,4 | 38,9 | 39,6 | 40,5 | 43,3 |
| Année x_i | 2010 | 2011 | 2012 | 2013 | 2014 | 2015 | 2016 | 2017 | 2018 | 2019 |
| Population y_i (en million) | 46,5 | 46,7 | 46,8 | 46,7 | 46,5 | 46,4 | 46,4 | 46,5 | 46,7 | 46,9 |

On représente ci-dessous le nuage de points $(x_i; y_i)$.



1. a. On considère ici la série $(x_i; y_i)$ formée par le tableau de 1960 à 2019. Déterminer l'équation réduite de la droite de régression de y en x par les moindres carrés. On arrondira les coefficients à 10^{-3} près.

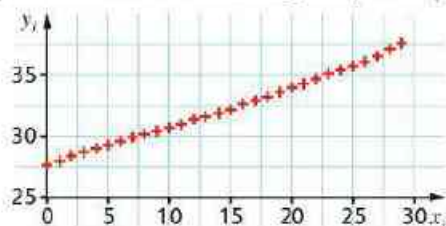
Partie B Le Canada

Le tableau suivant donne l'évolution de la population canadienne depuis 1990.

Source : Statcan

| | | | | | | | | | | |
|-----------------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Nombre x_i d'années depuis 1990 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| Population y_i (en million) | 27,7 | 28,0 | 28,4 | 28,7 | 29,0 | 29,3 | 29,6 | 29,9 | 30,2 | 30,4 |
| Nombre x_i d'années depuis 1990 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
| Population y_i (en million) | 30,7 | 31,0 | 31,4 | 31,6 | 31,9 | 32,2 | 32,6 | 32,9 | 33,2 | 33,6 |
| Nombre x_i d'années depuis 1990 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 |
| Population y_i (en million) | 34,0 | 34,3 | 34,7 | 35,1 | 35,4 | 35,7 | 36,1 | 36,5 | 37,1 | 37,6 |

On représente ci-dessous le nuage de points $(x_i; y_i)$.



On pourra utiliser un tableur pour répondre aux questions suivantes.

1. a. Déterminer l'équation réduite de la droite des moindres carrés de y en x , en arrondissant à 10^{-3} près.
 b. Cet ajustement est-il adapté ?
 c. En utilisant ce modèle, estimer la population canadienne entre 2020 et 2025, à 0,1 million près.

b. Calculer le coefficient de corrélation, à 0,01 près. L'ajustement précédent est-il adapté ?

c. En supposant que l'évolution se poursuit selon le modèle de la question 1. a., estimer la population espagnole entre 2020 et 2025, à 0,1 million près.

2. Le nuage de points laisse penser qu'il y a un ralentissement du rythme de croissance depuis 2010.

On choisit ici de considérer la série statistique formée seulement par le deuxième tableau (depuis 2010).

Reprendre la question 1.

3. Comparer les ajustements des questions 1. et 2. On pourra effectuer des recherches sur la population espagnole depuis 2020.

2. Le nuage de points laisse penser qu'il y a une accélération du rythme de croissance de la population.

a. Recopier et compléter le tableau suivant.

| | | | | |
|------------------|-----|-----|-----|-----|
| x_i | 0 | 1 | ... | 29 |
| $z_i = \ln(y_i)$ | ... | ... | ... | ... |

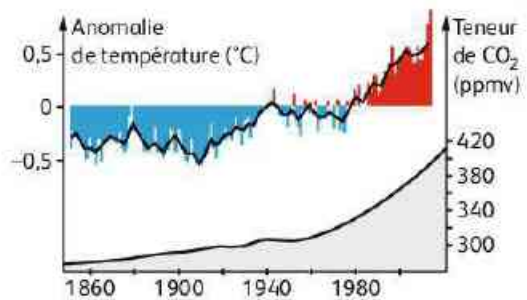
b. Déterminer l'équation réduite de la droite des moindres carrés de z en x , en arrondissant à 10^{-3} près. Cet ajustement est-il adapté ?

c. En déduire un ajustement du nuage de points $(x_i; y_i)$ de la forme $y = ae^{bx}$, puis, en utilisant ce modèle, estimer la population canadienne entre 2020 et 2025, à 0,1 million près.

3. Comparer les deux modèles d'évolution.

Le graphique et le tableau suivants donnent les anomalies de températures moyennes t_i , en °C, relevées à la surface du globe, ainsi que la teneur c_i en CO_2 dans l'atmosphère (en ppm).

| | | | | | | | |
|--------------|------|------|------|------|------|------|------|
| Année x_i | 2000 | 2001 | 2002 | 2003 | 2004 | 2005 | 2006 |
| Temp. t_i | 0,42 | 0,54 | 0,59 | 0,65 | 0,56 | 0,68 | 0,65 |
| Teneur c_i | 369 | 370 | 372 | 374 | 377 | 378 | 381 |
| Année x_i | 2007 | 2008 | 2009 | 2010 | 2011 | 2012 | 2013 |
| Temp. t_i | 0,59 | 0,55 | 0,73 | 0,63 | 0,6 | 0,74 | 0,68 |
| Teneur c_i | 383 | 385 | 387 | 389 | 391 | 393 | 396 |
| Année x_i | 2014 | 2015 | 2016 | 2017 | 2018 | 2019 | |
| Temp. t_i | 0,79 | 0,95 | 0,94 | 0,86 | 0,83 | 0,95 | |
| Teneur c_i | 398 | 400 | 403 | 406 | 408 | 411 | |



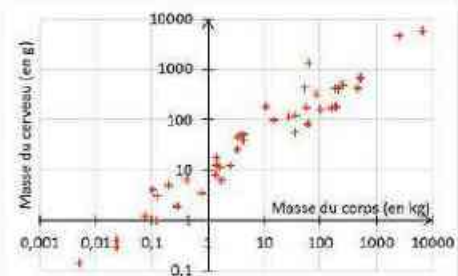
- À l'aide d'ajustements affines, estimer, pour les années 2020 à 2025 :
 - les anomalies de température moyenne ;
 - les teneurs en CO_2 dans l'atmosphère.
- Les anomalies de températures et la teneur en CO_2 sont-elles corrélées ?

Il semble « naturel » de penser que plus une espèce a un gros corps, plus son cerveau a tendance à être gros. On souhaite exprimer ici cette relation en étudiant la série suivante, où on donne les masses m_i des corps en kg et les masses c_i des cerveaux en g pour 42 espèces de mammifères adultes.

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---------|--------|-----------|--------|-------|---------------|--------|------------|-----------|-----------|------------|--------|----------|--------------------|-----------------|--------|-----------------|--------|---------|---------|----------|--------|
| Espèces | Âne | Babouin | Castor | Chat | Chauve-souris | Cheval | Chèvre | Chevreuil | Chimpanzé | Chinchilla | Cochon | Écureuil | Éléphant d'Afrique | Éléphant d'Asie | Galago | Genette | Girafe | Gorille | Hamster | Hérisson | Humain |
| m_i | 187 | 10,55 | 1,35 | 3,3 | 0,023 | 521 | 27,7 | 14,83 | 52,16 | 0,4 | 192 | 0,101 | 6 654 | 2 547 | 0,2 | 1 | 529 | 207 | 0,12 | 0,8 | 62 |
| c_i | 419 | 179,5 | 8,1 | 25,6 | 0,3 | 655 | 115 | 98,2 | 440 | 6,4 | 180 | 4 | 5 712 | 4 603 | 5 | 18 | 680 | 406 | 1 | 3,5 | 1 320 |
| Espèces | Jaguar | Kangourou | Lapin | Lonis | Loup | Mouton | Musaraigne | Okapi | Opossum | Phalanger | Phoque | Rat | Rat taupe | Raton laveur | Renard | Renard arctique | Souris | Tapir | Tatou | Taupe | Vache |
| m_i | 100 | 35 | 2,5 | 1,4 | 36 | 56 | 0,005 | 250 | 1,7 | 1,62 | 85 | 0,3 | 0,12 | 4,3 | 4,24 | 3,385 | 0,02 | 160 | 60 | 0,08 | 465 |
| c_i | 157 | 56 | 12 | 12,5 | 120 | 175 | 0,14 | 490 | 6,3 | 11,4 | 325 | 1,9 | 3 | 39 | 50,4 | 44,5 | 0,4 | 169 | 81 | 1,2 | 423 |

On pose $x_i = \ln(m_i)$ et $y_i = \ln(c_i)$.

- À l'aide d'un tableur :
 - déterminer la série $(x_i ; y_i)$;
 - déterminer un ajustement affine par les moindres carrés de y en x . Cet ajustement est-il adapté ?
- En déduire un ajustement de la masse c du cerveau en fonction de la masse m du corps pour un mammifère adulte.



Gordon E. Moore est l'un des fondateurs de la société Intel®. Il a constaté que le nombre de transistors utilisés dans les microprocesseurs augmentait très rapidement au cours du temps et énonçait en 1975 la loi empirique suivante.

The complexity for minimum component costs has increased at a rate of roughly a factor of two per year. Certainly over the short term this rate can be expected to continue, if not to increase. Over the longer term, the rate of increase is a bit more uncertain, although there is no reason to believe it will not remain nearly constant for at least 10 years.



Autrement dit : « La complexité des composants, à coût minimum, a augmenté à un rythme d'environ un facteur deux par an. Certes, à court terme, on peut s'attendre à ce que ce taux continue, voire augmente. À plus long terme, le taux d'augmentation est un peu plus incertain, même s'il n'y a aucune raison de penser qu'il ne restera pas presque constant avant au moins 10 ans. »

| | | | | | | | | | | | | |
|--------------------------------|-------|--------|---------|---------|-----------------|-------------------|-------------------|-------------------|------------------|-------------------|-----------------|------------------|
| Processeur | 4004 | 8086 | 286 | 386 | 4-6 | Pentium | Pentium II | Pentium III | Pentium IV | Core 2 | GT400 | |
| Année | 1971 | 1978 | 1982 | 1985 | 1989 | 1994 | 1997 | 1999 | 2000 | 2008 | 2011 | 2018 |
| Nb. d'années x_i depuis 1971 | 0 | 7 | 11 | 14 | 18 | 23 | 26 | 28 | 29 | 37 | 40 | 47 |
| Nombre de transistors y_i | 2 300 | 29 000 | 134 000 | 275 000 | 2×10^6 | $3,1 \times 10^6$ | $7,5 \times 10^6$ | $9,5 \times 10^6$ | 42×10^6 | 410×10^6 | 3×10^9 | 20×10^9 |

Partie A Adaptation du nuage de points

1. À quel problème est-on confronté si on souhaite construire le nuage de points $(x_i; y_i)$ dans un repère ?
2. Recopier et compléter le tableau suivant, en arrondissant à 10^{-2} près.

| | | | | | | |
|------------------|------|-----|-----|-----|-----|-------|
| x_i | 0 | 7 | 11 | ... | 40 | 47 |
| $z_i = \ln(y_i)$ | 7,74 | ... | ... | ... | ... | 23,72 |

3. Construire le nuage de points $(x_i; z_i)$ dans un repère. Un ajustement affine de z en x paraît-il adapté ?

Partie B Un ajustement exponentiel

1. Déterminer, en arrondissant à 10^{-2} près :
 - a. une équation de la droite de régression de z en x obtenue par la méthode des moindres carrés ;
 - b. le coefficient de corrélation.

2. Un ajustement affine de z en x est-il adapté ?
3. En déduire que le nombre y de transistors par microprocesseurs en fonction du nombre x d'années écoulées depuis 1971 peut être estimé par :

$$f(x) = \exp(0,33x + 7,8)$$

4. Soit un réel $x \geq 0$. Calculer $\frac{f(x+2)}{f(x)}$.

Mettre en relation le résultat obtenu avec la loi empirique énoncée par Moore en 1975.

Info

La loi de Moore est restée étonnamment vérifiée, même 50 ans après avoir été énoncée. Les ordinateurs sont ainsi devenus de moins en moins coûteux et de plus en plus performants. Mais cela a des conséquences importantes : obsolescence rapide des ordinateurs, consommation importante d'énergie, problème de gestion des déchets, etc.

En décrivant des paraboles, l'airbus A 300 ZÉRO G permet de simuler l'absence de pesanteur, appelée impesanteur. Lors d'un vol, cet avion effectue 12 trajectoires paraboliques dont les durées sont indiquées dans le tableau ci-dessous en fonction de sa vitesse au moment où il entame la parabole.

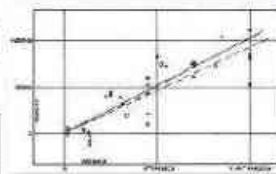


| | | | | | | | | | | | | |
|------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Vitesse v_i (en m/s) | 484 | 490 | 499 | 504 | 509 | 514 | 519 | 524 | 536 | 545 | 565 | 611 |
| Durée t_i (en s) | 19,3 | 19,6 | 20,1 | 20,2 | 20,4 | 20,5 | 20,8 | 20,9 | 21,4 | 21,9 | 22,4 | 24,5 |

Établir une relation entre la vitesse de l'avion et la durée de la trajectoire parabolique.

En 1929, Edwin Hubble effectue les relevés suivants sur 21 galaxies et se rend compte que plus la distance d d'éloignement d'une galaxie est grande, plus sa vitesse d'éloignement v est importante. Les distances sont en 10^6 parsec et les vitesses en km/s.

| | | | | | | | | | | | |
|----------------|------|-------|-------|------|------|------|------|-------|-------|------|------|
| Distance d_i | 1,52 | 3,45 | 2,37 | 0,62 | 1,16 | 1,42 | 0,67 | 1,24 | 0,79 | 1 | |
| Vitesse v_i | 650 | 1 800 | 1 300 | 300 | 800 | 700 | 400 | 600 | 290 | 600 | |
| Distance d_i | 1,74 | 1,49 | 1,1 | 1,27 | 1,53 | 1,79 | 1,2 | 2,35 | 2,23 | 2,06 | 1,73 |
| Vitesse v_i | 940 | 810 | 600 | 730 | 800 | 800 | 580 | 1 100 | 1 140 | 900 | 650 |



1. Représenter graphiquement le nuage de points $(d_i; v_i)$ dans un repère d'origine O .
2. Déterminer les coordonnées du point moyen G , puis l'équation de la droite (OG) .
3. Tracer la droite (OG) . Que constate-t-on ?

Info

La relation de proportionnalité entre la distance et la vitesse s'appelle **loi de Hubble**. Elle est à l'origine de la théorie du big bang et de l'expansion de l'Univers, aujourd'hui acceptée par l'ensemble de la communauté scientifique.



La pression de vapeur saturante de l'eau est la pression à laquelle la vapeur d'eau est en équilibre entre les états liquide et gazeux. Le tableau suivant donne des données expérimentales de la pression mesurée de vapeur saturante (en hPa) en fonction de la température ambiante (en °C).

| | | | | | | | | | |
|---------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|
| Température t_i (en °C) | -60 | -40 | -20 | -15 | -10 | -5 | 0 | 4 | 8 |
| Pression P_i (en hPa) | 0,001 | 0,13 | 1,03 | 1,9 | 2,6 | 4,6 | 6,11 | 8,13 | 10,73 |
| Température t_i (en °C) | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 | 50 |
| Pression P_i (en hPa) | 12,28 | 17,05 | 23,38 | 31,67 | 42,43 | 56,23 | 73,75 | 95,83 | 123,34 |

- a. À l'aide d'un tableur, entrer les températures t_i en ligne 1 et les pressions P_i associées en ligne 2.
 - b. Représenter graphiquement le nuage de points $(t_i; P_i)$. Un ajustement affine du nuage est-il adapté ?
 - c. Un ajustement affine de ce nuage paraît-il adapté ?
 - d. Ajouter une courbe de tendance de type « linéaire » et calculer le coefficient de corrélation. Ces résultats confirment-ils la conjecture de la question 2. c. ?
3. En déduire une formule exprimant la pression de vapeur saturante P (en hPa) en fonction de la température T (en Kelvin). Cette relation s'appelle la **formule de Rankine**.

Le tableau suivant donne l'évolution du Produit Intérieur Brut (PIB) de la France, en milliard d'euros, entre les années 2000 et 2018.

Source : INSEE

| | | | | | | | | | | |
|-------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Année | 2000 | 2001 | 2002 | 2003 | 2004 | 2005 | 2006 | 2007 | 2008 | 2009 |
| PIB | 1 485,3 | 1 544,6 | 1 594,3 | 1 637,4 | 1 710,8 | 1 772,0 | 1 853,3 | 1 945,7 | 1 995,8 | 1 939,0 |
| Année | 2010 | 2011 | 2012 | 2013 | 2014 | 2015 | 2016 | 2017 | 2018 | |
| PIB | 1 998,5 | 2 059,3 | 2 091,1 | 2 115,7 | 2 141,1 | 2 181,1 | 2 228,9 | 2 291,7 | 2 282,8 | |

Au cours du temps, le PIB a-t-il évolué de façon plutôt affine, exponentielle ou logarithmique ? Argumenter.

Troisième loi de Kepler

Utiliser un **TABLEUR**

À la fin du XVII^e siècle, l'astronome danois Tycho Brahe a réalisé des mesures, très précises pour l'époque, sur la position des planètes du système solaire. Celles-ci ont permis à Johannes Kepler de décrire le mouvement des planètes autour du Soleil et d'établir, en 1618, une relation entre le demi-grand axe a de l'orbite d'une planète et sa période de révolution T .

Ce TP a pour but d'établir cette relation, appelée **3^e loi de Kepler**, à partir des données de Tycho Brahe.

| Planète | Demi-grand axe a (en 10^6 m) | Période de révolution T (en jour) |
|---------|-------------------------------------|--|
| Mercuré | 57 910 | 87,97 |
| Vénus | 108 200 | 224,7 |
| Terre | 149 600 | 365,26 |
| Mars | 227 940 | 686,98 |
| Jupiter | 778 330 | 4 332,71 |

Objectif

Établir la relation nommée « 3^e loi de Kepler » à partir d'une méthode d'ajustement.



Partie A Conjectures graphiques

On note (a_i) la série des demi-grands axes (en 10^6 m) et (t_i) la série des périodes de révolution (en jour).

1. Mettre en place la feuille de calcul suivante.

| | A | B | C | D | E | F |
|---|-------|-------|--------|--------|--------|---------|
| 1 | a_i | 57910 | 108200 | 149600 | 227940 | 778330 |
| 2 | t_i | 87,97 | 224,7 | 365,26 | 686,98 | 4332,71 |

2. Représenter graphiquement la série $(a_i ; t_i)$ en insérant un *Nuage de points*.

Les points paraissent-ils alignés ?

3. Obtenir le graphique suivant en choisissant une échelle logarithmique pour chacun des deux axes.



Que constate-t-on ?

Partie B Ajustement grâce à un changement de variables

On pose $x_i = \ln(a_i)$ et $y_i = \ln(t_i)$ et on souhaite déterminer, à l'aide du tableur, l'équation $y = ax + b$ de la droite \mathcal{D} des moindres carrés ajustant le nuage de points $(x_i ; y_i)$. On rappelle que :

$$a = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2} \quad \text{et} \quad b = \bar{y} - a \times \bar{x}$$

1. a. Calculer, à l'aide de formules, les valeurs x_i en ligne 4 et les valeurs y_i en ligne 5.

b. Calculer, à l'aide d'une formule, en G4 la moyenne \bar{x} des x_i et en G5 la moyenne \bar{y} des y_i .

2. On note $X_i = x_i - \bar{x}$ et $Y_i = y_i - \bar{y}$ et on considère la feuille de calcul suivante.

| | | | | | | | |
|---|-----------|--------|--------|--------|--------|--------|------------|
| 4 | x_i | 10,957 | 11,582 | 11,816 | 12,337 | 13,565 | 12,0751682 |
| 5 | y_i | 4,477 | 5,4148 | 5,9006 | 6,5323 | 8,3739 | 6,13972903 |
| 6 | X_i | | | | | | |
| 7 | Y_i | | | | | | |
| 8 | $X_i Y_i$ | | | | | | |
| 9 | X_i^2 | | | | | | |

a. Parmi les formules suivantes, laquelle permet de compléter la ligne 6 par recopie vers la droite ?

=B4-12,075 =B4-G4 =B4-\$G\$4

b. Compléter les lignes 6 à 9.

c. Quelle formule permet d'obtenir le coefficient directeur de la droite \mathcal{D} ? Et son ordonnée à l'origine ?

d. En déduire que la droite \mathcal{D} admet pour équation approchée $y = \frac{3}{2}x - 11,97$.

3. Compléter la feuille de calcul de façon à calculer le coefficient de corrélation associé à la droite \mathcal{D} .

L'ajustement affine est-il adapté ?

4. En utilisant la relation $\ln(T) = \frac{3}{2} \ln(a) - 11,97$, obtenir la 3^e loi de Kepler :

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{constante}$$

5. On connaît depuis Kepler les données suivantes.

| Planète | Demi-grand axe (en 10^6 m) | Période de révolution (en jour) |
|---------|---------------------------------|------------------------------------|
| Saturne | 1 430 000 | 10 759 |
| Uranus | 2 871 000 | 30 685 |
| Neptune | 4 498 000 | 60 266 |

Ces planètes vérifient-elles la relation établie à la question 4. ?

Les lois empiriques d'Engel

Mener une recherche

En 1857, le statisticien allemand Ernst Engel faisait le constat suivant : plus un individu, une famille, un peuple sont pauvres, plus grande est la proportion de leurs revenus qu'ils doivent consacrer à leur alimentation.

On donne la composition des dépenses des Français, en 2011, selon le quintile du niveau de vie. Source : INSEE

| En % de la dépense de consommation totale | Q1 | Q2 | Q3 | Q4 | Q5 |
|--|--------|--------|--------|--------|--------|
| Produits alimentaires et boissons non alcoolisées | 16,2 % | 14,3 % | 14,1 % | 12,8 % | 11,4 % |
| Boissons alcoolisées et tabac | 4,3 % | 4,3 % | 3,7 % | 3,1 % | 3,0 % |
| Articles d'habillement et chaussures | 4,2 % | 3,8 % | 3,6 % | 3,7 % | 3,9 % |
| Logement, eau, gaz, électricité et autres combustibles | 27,8 % | 26,1 % | 27,3 % | 26,2 % | 25,3 % |
| Meubles, articles de ménage et entretien courant de l'habitation | 3,8 % | 4,3 % | 4,4 % | 5,1 % | 6,4 % |
| Santé | 4,2 % | 4,8 % | 4,3 % | 4,2 % | 3,8 % |
| Transport | 11,8 % | 14,3 % | 14,3 % | 14,9 % | 13,7 % |
| Communication | 4,4 % | 3,7 % | 3,2 % | 2,8 % | 2,3 % |
| Loisirs et culture | 7,2 % | 7,8 % | 8,1 % | 8,9 % | 9,9 % |
| Éducation | 1,3 % | 1,0 % | 0,6 % | 0,8 % | 0,9 % |
| Hôtels, cafés et restaurants | 4,3 % | 4,9 % | 5,6 % | 6,5 % | 8,3 % |
| Autres biens et services | 10,5 % | 10,8 % | 10,9 % | 11,1 % | 11,0 % |

Lecture : Pour les 20 % des personnes ayant le niveau de vie le plus faible (quintile Q1), la part que représente les dépenses de santé était de 4,2 % de leur consommation totale en 2011.

Partie A La France de 2011

1. Vérifier la loi d'Engel sur le tableau précédent.

2. Engel avait aussi constaté que :

- la proportion consacrée au logement ou à l'habillement reste constante en fonction du revenu ;
- les dépenses consacrées à la santé, à l'éducation et aux loisirs augmentent en même temps que le revenu.

Ces constats peuvent-ils encore être faits dans la France de 2011 ?

À L'ÉCRIT OU À L'ORAL

Partie B

Faire un compte-rendu de la partie A et modéliser l'évolution des différents postes de dépenses selon le niveau de vie, en argumentant.

Pourquoi utiliser le terme de « régression » ?

Mener une recherche

À la fin du XIX^e siècle, Francis Galton, cousin de Darwin, essaya de trouver un lien entre la taille des enfants et celle de leurs parents. Ayant constaté qu'en moyenne un homme était 8 % plus grand qu'une femme, il introduit la notion de « parent-moyen », dont la taille est égale à la moyenne des tailles des pères et des mères augmentées de 8 %. En 1889, il publia *Natural Inheritance*, d'où est extrait le tableau suivant. Les tailles sont exprimées en pouce.

| | | Taille des enfants (à l'âge adulte) | | | | | | | | | | | | | | Moy. | Total |
|-------------------------------|--------|-------------------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|--------|------|-------|
| | | < 62,2 | 62,2 | 63,2 | 64,2 | 65,2 | 66,2 | 67,2 | 68,2 | 69,2 | 70,2 | 71,2 | 72,2 | 73,2 | > 73,2 | | |
| Taille des « parents-moyens » | > 72,5 | | | | | | | | | | | | 1 | 3 | | | 4 |
| | 72,5 | | | | | | | 1 | 2 | 1 | 2 | 7 | 2 | 4 | | 72,2 | 19 |
| | 71,5 | | | | | 1 | 3 | 4 | 3 | 5 | 10 | 4 | 9 | 2 | 2 | 69,9 | 43 |
| | 70,5 | 1 | | 1 | | 1 | 1 | 3 | 12 | 18 | 14 | 7 | 4 | 3 | 3 | 69,5 | 68 |
| | 69,5 | | | 1 | 16 | 4 | 17 | 27 | 20 | 33 | 25 | 20 | 11 | 4 | 5 | 68,9 | 183 |
| | 68,5 | 1 | | 7 | 11 | 16 | 25 | 31 | 34 | 48 | 21 | 18 | 4 | 3 | | 68,2 | 219 |
| | 67,5 | | 3 | 5 | 14 | 15 | 36 | 38 | 28 | 38 | 19 | 11 | 4 | | | 67,6 | 211 |
| | 66,5 | | 3 | 3 | 5 | 2 | 17 | 17 | 14 | 13 | 4 | | | | | 67,2 | 78 |
| | 65,5 | 1 | | 9 | 5 | 7 | 11 | 11 | 7 | 7 | 5 | 2 | 1 | | | 66,7 | 66 |
| | 64,5 | 1 | 1 | 4 | 4 | 1 | 5 | 5 | | 2 | | | | | | 65,8 | 23 |
| | < 64,5 | 1 | | 2 | 4 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | | | | | | | 14 |
| | Total | 5 | 7 | 32 | 59 | 48 | 117 | 138 | 120 | 167 | 99 | 64 | 41 | 17 | 14 | | 928 |

À L'ÉCRIT OU À L'ORAL

Galton affirmait que les enfants de parents de grande taille ont tendance à être plus petits qu'eux, et que les enfants de parents de petite taille ont tendance à être plus grands qu'eux. Il parlait de **régression vers la médiocrité**, c'est-à-dire **vers la moyenne**. Expliquer son raisonnement

Thèmes d'études

■ Modèles définis par une fonction d'une variable

Descriptif

Les fonctions d'une variable réelle interviennent dans des problèmes variés, internes aux mathématiques ou issus des sciences expérimentales, économiques et sociales.

La fonction peut être donnée ou déterminée par l'élève lors d'une résolution de problème. Un équilibre est à garder entre les phases de recherche et de modélisation, et les phases de calcul. C'est l'occasion de réinvestir les connaissances des années précédentes sur les études de fonctions, notamment l'étude des variations et des extremums, et d'introduire de nouvelles notions du programme en les appliquant dans des contextes mathématiques, notamment géométriques, ou issus des autres disciplines.

Ce thème très large peut être croisé avec d'autres thèmes (fonction logarithme, répartition de richesse, calcul d'aire, modèles d'évolution). Il peut se répartir sur l'année en fonction des besoins ou de l'avancée des contenus.

Problèmes possibles

- Modèles issus de contextes géométriques (expression de distance, d'aires, de volumes en fonction d'un paramètre), physiques, biologiques, économiques (fonctions de coût, coût marginal, coût moyen).
- Études de variations, résolutions d'équation, optimisation dans des configurations géométriques, physiques, économiques, etc.

Contenus associés

- Continuité, théorème des valeurs intermédiaires.
- Fonction dérivée. Sens de variation. Extremums.
- Fonctions de référence.
- Convexité.
- Statistique à deux variables.

Exemple d'algorithme

- Résolution d'équations par balayage, par dichotomie.

■ Modèles d'évolution

Descriptif

Il s'agit ici de modéliser des phénomènes qui dépendent du temps, à l'aide de suites ou de fonctions d'une variable réelle.

Les suites ou fonctions considérées peuvent être données *a priori* ou être obtenues lors d'une résolution de problème : suites vérifiant une relation de récurrence, fonctions solutions d'une équation différentielle, ajustement statistique d'une série chronologique.

La mise en regard des modèles discrets et des modèles continus est un objectif important.

Ce thème très large peut être étudié au fil de l'année en fonction des besoins ou de l'avancée des contenus.

Problèmes possibles

- Évolution d'un capital, amortissement d'une dette.
- Loi de décroissance radioactive : modèle discret, modèle continu.
- Décharge, charge d'un condensateur, à partir de l'équation différentielle.
- Loi de refroidissement de Newton (modèle discret).
- Chute d'un corps dans un fluide visqueux.
- Dynamique des populations : modèle de Malthus (géométrique), modèle de Verhulst (logistique) discret $N_{i+1} = N_i + rN_i(k - N_i)$, ou continu : $y' = ay(b - y)$.
- Modèle proie-prédateur discrétisé : évolution couplée de deux suites récurrentes.

Contenus associés

- Suites récurrentes.
- Suites géométriques. Fonction exponentielle.
- Suites arithmético-géométriques. Équation différentielle $y' = ay + b$.
- Limites.

Exemples d'algorithme

- Calcul des termes d'une suite.
- Recherche de seuils.
- Méthode d'Euler.

■ Approche historique de la fonction logarithme

Descriptif

Il s'agit de montrer qu'un objet mathématique, ici la fonction logarithme népérien, peut être étudié selon divers points de vue. Le volet des contenus l'introduit comme fonction réciproque de la fonction exponentielle, étudiée en classe de première. Le thème décrit comment elle a été introduite historiquement, avec ses deux aspects fondamentaux : équation fonctionnelle, quadrature de l'hyperbole.

Problèmes possibles

- Le développement des besoins pratiques de calcul, notamment pour l'astronomie ou la navigation conduit à la recherche de méthodes facilitant multiplication, division, extraction de racine. Influence des tables trigonométriques.
- Lien entre suites arithmétiques et géométriques (depuis Archimède). Construction de tables d'intérêts.
- Les travaux de Neper. Le passage du discret au continu.
- Vision fonctionnelle $f(xy) = f(x) + f(y)$ plus tardive.
- Quadrature de l'hyperbole, problème des sous-tangentes constantes.

Contenus associés

- Suites arithmétiques, suites géométriques.
- Fonction logarithme.
- Calcul intégral.

Exemples d'algorithme

- Algorithme de Briggs.
- Approximation de $\ln 2$ par dichotomie selon l'algorithme de Brouncker.

■ Calculs d'aires

Descriptif

Des calculs d'aires menés selon différentes méthodes permettent d'aboutir à l'introduction de l'intégrale d'une fonction continue et positive sur un intervalle $[a, b]$ de \mathbb{R} en montrant alors la puissance de calcul qu'apporte dans ce domaine la détermination des primitives. Différentes approches sont possibles : méthodes historiques d'approximation des aires, méthode des rectangles et des trapèzes pour l'aire sous une courbe, méthodes probabilistes et bien sûr le calcul intégral.

Ce thème est l'occasion de revoir les aires des figures planes usuelles : triangles, trapèzes, rectangles, carrés et disques, ainsi que l'utilisation de propriétés classiques : additivité, invariance par symétrie et translation.

Les calculs d'aires par approximations successives se prêtent tout particulièrement à la mise en œuvre d'algorithmes notamment dans le cas d'aires sous des courbes de fonctions dont on ne sait pas déterminer de primitives. Leur histoire et les différentes méthodes peuvent aussi être sources d'exposés réalisés par les élèves.

Ce thème peut s'étendre à des calculs de volumes notamment pour des solides de révolution (cylindre, cône, sphère, parabolôïde de révolution ...).

Problèmes possibles

- Quadrature de la parabole par la méthode d'Archimède.
- Quadrature de l'hyperbole par une ou deux méthodes (Brouncker, Grégoire de Saint-Vincent).
- Approximation de l'aire sous la courbe de la fonction exponentielle sur $[0, 1]$ par la méthode des rectangles.
- Estimation de l'aire sous une courbe par la méthode de Monte-Carlo.
- Approximation de π et aire d'un disque.

Contenus associés

- Limites de suites.
- Intégrale d'une fonction continue et positive.
- Primitives.
- Continuité et dérivation.
- Probabilités.

Exemples d'algorithmes

- Calcul d'un terme de rang donné d'une suite.
- Recherche d'une valeur approchée de précision donnée.

■ Répartition des richesses, inégalités

Descriptif

L'étude de la répartition de richesses dans la population d'un pays, des salaires dans une entreprise, etc., et la comparaison des différentes répartitions sont des occasions de réinvestir des connaissances antérieures de statistique descriptive et de construire de nouveaux outils d'analyse faisant intervenir les fonctions d'une variable (notamment des fonctions de répartition) et le calcul intégral.

Problèmes possibles

- Courbe de Lorenz : sur des données réelles, présentation, définition, lecture, construction d'une ligne polygonale à partir des quantiles, interprétation. Modélisation par la courbe représentative d'une fonction continue, croissante,

convexe de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ et ayant 0 et 1 comme points fixes. Position par rapport à la première bissectrice.

- Indice de Gini : définition, calcul, interprétation comme mesure du degré d'inégalité d'une répartition, Comparaison de plusieurs répartitions. Évolution de l'indice sur une période.

Contenus associés

- Statistique descriptive : caractéristiques de dispersion (médiane, quartiles, déciles, rapport interdécile).
- Fonctions d'une variable.
- Convexité.
- Calcul intégral.

■ Inférence bayésienne

Descriptif

Le raisonnement bayésien est à la base de nombreux algorithmes de décision et se retrouve dans de nombreux domaines pratiques : sport, médecine, justice ... où l'on doit raisonner à partir de probabilités et d'informations incomplètes. Il s'agit ici de décrire et mettre en œuvre les principes du calcul utilisant des probabilités conditionnelles et notamment la formule de Bayes pour l'inversion des conditionnements.

La question d'intérêt est représentée par un événement A de probabilité $P(A)$, dite probabilité *a priori*. L'observation d'un événement B conduit à remplacer la probabilité *a priori* $P(A)$ par la probabilité conditionnelle $P_B(A)$, dite *a posteriori*. La formule de Bayes

$$P_B(A) = \frac{P_A(B)P(A)}{P(B)}$$

permet d'exprimer la probabilité *a posteriori* lorsque l'expression du second membre est évaluable. Elle montre la distinction essentielle entre $P_B(A)$ et $P_A(B)$. Bien comprendre cette distinction est un objectif majeur.

Problèmes possibles

- Tests binaires pour le diagnostic médical. Notion de vrais/faux positifs et négatifs, sensibilité, spécificité, valeurs prédictives positive (diagnostique) et négative, lien avec les probabilités conditionnelles. Tests de dépistage de sensibilité et de spécificité données : étude des valeurs prédictives en fonction de la proportion de malades et interprétation.
- Exemples de problèmes du type : « De quelle urne vient la boule ? ».

Contenus associés

- Probabilités conditionnelles, inversion du conditionnement, formule de Bayes.
- Étude de fonction.

■ Répétition d'expériences indépendantes, échantillonnage

Descriptif

Ce thème vise à illustrer le modèle probabiliste de la répétition d'expériences aléatoires indépendantes et de l'échantillonnage ainsi que ses applications à l'inférence statistique, où il s'agit, à partir de l'observation d'un échantillon, d'induire des propriétés de la population dont il est issu.

Le schéma de Bernoulli et la loi binomiale forment un cas fondamental, où il s'agit de considérer d'une part des probabilités ou proportions théoriques, et d'autre part des fréquences observées.

La réalisation de simulations est indispensable. C'est l'occasion de montrer l'intérêt de la loi uniforme sur $[0, 1]$ pour simuler d'autres lois parmi lesquelles les lois uniformes discrètes et les lois binomiales.

Problèmes possibles

- Tirages aléatoires avec remise d'une boule dans une urne contenant des boules de deux couleurs différentes. Simulations. Calculs de probabilité.
- Test d'une pièce, par construction d'un intervalle I centré en $n/2$ tel que $P(X \in I) \geq 1 - \alpha$ où X est une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$.
- Surréservation. Construction d'un intervalle I de la forme $[0, k]$ tel que $P(X \in I) \geq 1 - \alpha$ où X est une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.
- Sondages par échantillonnage aléatoire simple. Fourchette de sondage. Réflexion sur la réalisation effective d'un sondage et les biais possibles (représentativité, sincérité des réponses, etc.).
- Démarche des tests d'hypothèse et de l'estimation. Les observations étant vues comme un échantillon aléatoire d'expériences régies par une loi inconnue (à découvrir), il s'agit de confronter une modélisation théorique proposée avec les résultats mesurés. Une bonne adéquation peut permettre de valider *a priori* le modèle (avec un certain degré de confiance), tandis que l'observation d'événements donnés avec une probabilité très faible dans le modèle peut conduire à rejeter le modèle et à en chercher un autre.

Contenus associés

- Épreuve et loi de Bernoulli.
- Schéma de Bernoulli et loi binomiale.
- Lois uniformes discrètes et continues sur $[0, 1]$.

Exemples d'algorithme

- Dans le cadre de la loi binomiale : calcul de coefficients binomiaux (triangle de Pascal), de probabilités ; détermination d'un intervalle I pour lequel la probabilité $P(X \in I)$ est inférieure à une valeur donnée α , ou supérieure à $1 - \alpha$.
- Simulation avec Python d'une variable aléatoire (de la loi de Bernoulli, d'une loi uniforme discrète, etc.) d'un échantillon de taille n d'une variable aléatoire. Fonction Python renvoyant une moyenne pour un échantillon. Série des moyennes pour N échantillons de taille n d'une variable aléatoire d'espérance μ et d'écart type σ . Calcul de l'écart type s de la série des moyennes des échantillons observés, à comparer à σ / \sqrt{n} . Calcul de la proportion des cas où l'écart entre m et μ est inférieur ou égal à $k\sigma / \sqrt{n}$ ou à ks , pour $k = 2$ ou $k = 3$.

■ Temps d'attente

Descriptif

Certains phénomènes physiques (temps de désintégration d'un atome radioactif) ou biologiques (durée de vie de certains organismes) possèdent la propriété d'absence de mémoire. Leur modélisation mathématique repose sur l'utilisation des

lois géométriques et exponentielles selon que le temps est considéré comme discret ou continu. La loi géométrique est vue soit comme la distribution du premier succès dans un schéma de Bernoulli, soit comme une loi discrète possédant la propriété d'absence de mémoire. La loi exponentielle peut être introduite à partir de la propriété d'absence de mémoire.

Problèmes possibles

- Durée de vie d'un atome radioactif. Discrétisation d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle.
- Exemples de modélisation par une variable aléatoire suivant une loi géométrique ou exponentielle : durée entre deux appels téléphoniques, durée de vie d'un composant électronique, période de retour de crue, etc.
- Utilisation de la loi uniforme. Temps d'attente à un arrêt de bus, paradoxe de l'inspection.

Contenus associés

- Lois à densité.
- Loi géométrique, loi exponentielle.
- Absence de mémoire, discrète ou continue.

Exemples d'algorithme

- Simulation d'une variable aléatoire de loi géométrique à partir du schéma de Bernoulli.
- Simulation d'une loi exponentielle à partir d'une loi uniforme.
- Demi-vie d'un échantillon de grande taille d'atomes radioactifs.

■ Corrélation et causalité

Descriptif

À travers l'étude de séries statistiques à deux variables, l'objectif de ce thème est d'amener l'élève à évaluer une corrélation entre deux phénomènes, à développer une réflexion critique sur le lien entre deux phénomènes corrélés, et finalement à distinguer corrélation et causalité. C'est aussi l'occasion de travailler sur la droite de régression, et de faire percevoir le sens de l'expression « moindres carrés ». Des ajustements affines ou s'y ramenant à l'aide d'un changement de variable permettent des interpolations et des extrapolations, sur lesquelles l'élève porte un regard critique.

Ce thème d'étude a d'innombrables applications en sciences expérimentales ou en sciences sociales. La corrélation entre deux variables peut être une première approche vers une loi déterministe ou non. Quand une des variables est le temps, le problème de l'extrapolation prend souvent une importance particulière, comme le montre l'exemple du changement climatique.

Problèmes possibles

- Établissement de la loi d'Ohm.
- Loi de désintégration radioactive.
- Évolution de la température et des émissions de gaz à effet de serre dans le cadre du réchauffement climatique.
- Loi de Moore.

Contenus associés

- Fonctions usuelles.
- Représentations graphiques.
- Minimum d'une fonction trinôme.
- Séries statistiques à deux variables.

Contenus

■ Analyse

Suites numériques, modèles discrets

Contenus

| | Déclic |
|--|---------|
| Approche intuitive de la notion de limite, finie ou infinie, d'une suite, des opérations sur les limites, du passage à la limite dans les inégalités et du théorème des gendarmes. | Thème 2 |
| Limite d'une suite géométrique de raison positive. | |
| Limite de la somme des termes d'une suite géométrique de raison positive strictement inférieure à 1. | |
| Suites arithmético-géométriques. | |

Capacités attendues

- Modéliser un problème par une suite donnée par une formule explicite ou une relation de récurrence.
- Calculer une limite de suite géométrique, de la somme des termes d'une suite géométrique de raison positive et strictement inférieure à 1.
- Représenter graphiquement une suite donnée par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction continue d'un intervalle I dans lui-même. Conjecturer le comportement global ou asymptotique d'une telle suite.
- Pour une récurrence arithmético-géométrique : recherche d'une suite constante solution particulière ; utilisation de cette suite pour déterminer toutes les solutions.

Démonstration possible

- Limite des sommes des termes d'une suite géométrique de raison positive strictement inférieure à 1.

Exemples d'algorithme

- Recherche de seuils.
- Pour une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$, calcul des termes successifs.
- Recherche de valeurs approchées de constantes mathématiques, par exemple π , $\ln 2$, $\sqrt{2}$.

Fonctions : continuité, dérivabilité, limites, représentation graphique

Contenus

| | Déclic |
|--|---------|
| Notion de limite. Lien avec la continuité et les asymptotes horizontales ou verticales. Limites des fonctions de référence (carré, cube, racine carrée, inverse, exponentielle, logarithme). | Thème 3 |
| Théorème des valeurs intermédiaires (admis). Cas des fonctions strictement monotones. | Thème 1 |
| Réciproque d'une fonction continue strictement monotone sur un intervalle, représentation graphique. | Thème 4 |

| | |
|--|---------------|
| Fonction logarithme népérien : réciproque de la fonction exponentielle. Limites, représentation graphique. Équation fonctionnelle. Fonction dérivée. | Thème 4 |
| Fonction dérivée de $x \mapsto f(ax+b)$, $x \mapsto e^{u(x)}$, $x \mapsto \ln u(x)$, $x \mapsto u(x)^2$ | Thèmes 1 et 4 |

Capacités attendues

- Calculer une fonction dérivée, calculer des limites. Dresser un tableau de variation.
- Dans le cadre de la résolution de problème, utiliser le calcul des limites, l'allure des courbes représentatives des fonctions inverse, carré, cube, racine carrée, exponentielle et logarithme.
- Exploiter le tableau de variation pour déterminer le nombre de solutions d'une équation du type $f(x) = k$, pour résoudre une inéquation du type $f(x) \leq k$.
- Déterminer des valeurs approchées, un encadrement d'une solution d'une équation du type $f(x) = k$.
- Utiliser l'équation fonctionnelle de l'exponentielle ou du logarithme pour transformer une écriture, résoudre une équation, une inéquation.
- Utiliser la relation $\ln q^n = n \ln q$, pour déterminer un seuil.

Démonstrations possibles

- Relations $\ln(ab) = \ln a + \ln b$, $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$.
- Calcul de la fonction dérivée du logarithme, en admettant sa dérivabilité.
- Calcul de la fonction dérivée de $\ln u$, de $\exp u$.

Exemples d'algorithme

- Méthodes de recherche de valeurs approchées d'une solution d'équation du type $f(x) = k$: balayage, dichotomie, méthode de Newton.
- Algorithme de Briggs pour le calcul de logarithmes.

Primitives et équations différentielles

Contenus

| | Déclic |
|---|---------|
| Sur des exemples, notion d'une solution d'équation différentielle. | Thème 3 |
| Notion de primitive, en liaison avec l'équation différentielle $y' = f$. Deux primitives d'une même fonction continue sur un intervalle diffèrent d'une constante. Exemples. | |
| Équation différentielle $y' = ay + b$, où a et b sont des réels ; allures des courbes. | |

Capacités attendues

- Vérifier qu'une fonction donnée est solution d'une équation différentielle.
- Déterminer les primitives d'une fonction, en reconnaissant la dérivée d'une fonction de référence ou une fonction de la forme $2uu'$, $e^u u'$, ou u'/u .
- Résoudre une équation différentielle $y' = ay$. Pour une équation différentielle $y' = ay + b$: déterminer une solution particulière constante ; utiliser cette solution pour déterminer la solution générale.

Démonstrations possibles

- Deux primitives d'une même fonction continue sur un intervalle diffèrent d'une constante.
- Résolution de l'équation différentielle $y' = ay$.

Exemple d'algorithme

- Sur des exemples, résolution approchée d'une équation différentielle par la méthode d'Euler.

Fonctions convexes

Contenus

| | Déclic |
|--|---------------|
| Dérivée seconde d'une fonction. | Thème 1 |
| Fonction convexe sur un intervalle : définition par la position relative de la courbe représentative et des sécantes, équivalence admise, lorsque f est dérivable, avec la position par rapport aux tangentes. | Thèmes 1 et 6 |
| Caractérisation admise par la croissance de f' , la positivité de f'' . | Thème 1 |
| Point d'inflexion. | |

Capacités attendues

- Reconnaître sur une représentation graphique une fonction convexe, concave, un point d'inflexion.
- Étudier la convexité, la concavité, d'une fonction deux fois dérivable sur un intervalle.

Intégration

Contenus

| | Déclic |
|---|---------|
| Définition de l'intégrale d'une fonction continue et positive sur $[a, b]$ comme aire sous la courbe. Notation $\int_a^b f(x) dx$. Relation de Chasles. | Thème 5 |
| Valeur moyenne d'une fonction continue sur $[a, b]$. Approche graphique et numérique. La valeur moyenne est comprise entre les bornes de la fonction. | |
| Approximation d'une intégrale par la méthode des rectangles. | |
| Présentation de l'intégrale des fonctions continues de signe quelconque. | |
| Théorème : si f est continue sur $[a, b]$, la fonction F définie sur $[a, b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est dérivable sur $[a, b]$ et a pour dérivée f . | |
| Calcul d'intégrales à l'aide de primitives : si F est une primitive de f , alors $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ | |

Capacités attendues

- Estimer graphiquement ou encadrer une intégrale, une valeur moyenne.
- Calculer une intégrale, une valeur moyenne.

- Calculer l'aire sous une courbe ou entre deux courbes.
- Interpréter une intégrale, une valeur moyenne dans un contexte issu d'une autre discipline.

Démonstration possible

- Dérivée de $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ lorsque f est une fonction continue positive croissante.

Exemples d'algorithme

- Méthode des rectangles, des trapèzes.
- Méthode de Monte-Carlo pour un calcul d'aire.

■ Probabilités et statistique

Probabilités conditionnelles

Contenus

| | Déclic |
|---|---------|
| Probabilités conditionnelles, inversion du conditionnement. | Thème 7 |
| Formules de Bayes. | |

Capacités attendues

- Manipuler les probabilités conditionnelles.
- Distinguer $P_B(A)$ et $P_A(B)$.

Lois discrètes

Contenus

| | Déclic |
|--|---------|
| Loi uniforme sur $\{1, 2, \dots, n\}$. Espérance. | Thème 8 |
| Épreuve de Bernoulli. Loi de Bernoulli : définition, espérance et écart type. | |
| Schéma de Bernoulli. Représentation par un arbre. | |
| Coefficients binomiaux : définition (nombre de façons d'obtenir k succès dans un schéma de Bernoulli de taille n), triangle de Pascal, symétrie. | |
| Variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Interprétation : nombre de succès dans le schéma de Bernoulli. Expression, espérance et écart type (admis). Représentation graphique. | Thème 9 |
| Loi géométrique : définition, expression, espérance (admise), représentation graphique et propriété caractéristique (loi sans mémoire). | |

Capacités attendues

- Identifier des situations où une variable aléatoire suit une loi de Bernoulli, une loi binomiale ou une loi géométrique.
- Déterminer des coefficients binomiaux à l'aide du triangle de Pascal.
- Dans le cas où X suit une loi binomiale, calculer à l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel, les probabilités des événements de type $P(X = k)$ ou $P(X \leq k)$, etc. Calculer explicitement ces probabilités pour une variable aléatoire suivant une loi géométrique.

- Dans le cas où X suit une loi binomiale, déterminer un intervalle I pour lequel la probabilité $P(X \in I)$ est inférieure à une valeur donnée α , ou supérieure à $1 - \alpha$.
- Dans le cadre de la résolution de problème, utiliser l'espérance des lois précédentes.
- Utiliser en situation la caractérisation d'une loi géométrique par l'absence de mémoire.
- Calculer des probabilités dans des situations faisant intervenir des probabilités conditionnelles, des répétitions d'expériences aléatoires.

Démonstrations possibles

- Espérance et écart type d'une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli.
- Espérance d'une variable aléatoire uniforme sur $\{1, 2, \dots, n\}$.
- Espérance d'une variable aléatoire suivant une binomiale ($n \leq 3$).
- Caractérisation d'une loi géométrique par l'absence de mémoire.

Lois à densité

Contenus

| | Déclic |
|---|---------|
| Notion de loi à densité à partir d'exemples. Représentation d'une probabilité comme une aire. Fonction de répartition $x \mapsto P(X \leq x)$. | Thème 9 |
| Espérance et variance d'une loi à densité, expressions sous forme d'intégrales. | |
| Loi uniforme sur $[0, 1]$ puis sur $[a, b]$. Fonction de densité, fonction de répartition. Espérance et variance. | |
| Loi exponentielle. Fonction densité, fonction de répartition. Espérance, propriété d'absence de mémoire. | |

Capacités attendues

- Déterminer si une fonction est une densité de probabilité. Calculer des probabilités.
- Calculer l'espérance d'une variable aléatoire à densité.

Exemples d'algorithme

- Simulation d'une variable de Bernoulli ou d'un lancer de dé (ou d'une variable uniforme sur un ensemble fini) à partir d'une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$.
- Simulation du comportement de la somme de n variables aléatoires indépendantes et de même loi.

Statistique à deux variables quantitatives

Contenus

| | Déclic |
|--|----------|
| Nuage de points. Point moyen. | Thème 10 |
| Ajustement affine. Droite des moindres carrés. Coefficient de corrélation. | |
| Ajustement se ramenant par changement de variable à un ajustement affine. | |
| Application des ajustements à des interpolations ou extrapolations. | |

Capacités

- Représenter un nuage de points.
- Calculer les coordonnées d'un point moyen.
- Déterminer une droite de régression, à l'aide de la calculatrice, d'un logiciel ou par calcul.
- Dans le cadre d'une résolution de problème, utiliser un ajustement pour interpoler, extrapoler.

Démonstration possible

- Droite des moindres carrés.

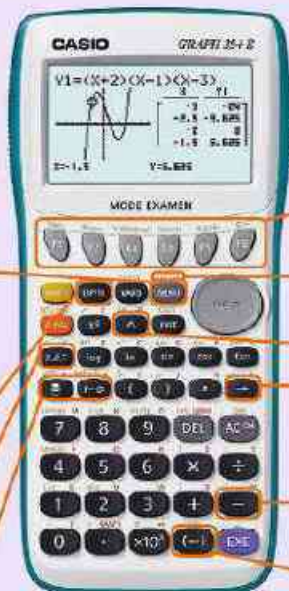
pour choisir le menu :

- pour calculer
- pour utiliser les fonctions de statistiques et de probabilités
- pour tracer des courbes et utiliser le solveur graphique
- pour tabuler une fonction
- pour écrire et exécuter un programme

pour accéder à des commandes, classées par grands thèmes : **LIST**, **STAT** ou **PRB**

la variable « X » lorsqu'on définit une fonction dans les menus et

pour calculer avec des fractions



pour choisir une commande écrite en bas de l'écran

pour paramétrer la calculatrice : angle en degré ou radian, quadrillage affiché ou non, ...

pour élever à une puissance, exemple 2^3

pour stocker une valeur dans une variable

⚠ ne pas confondre ces deux touches :
 (-) pour le signe négatif d'un nombre
 - pour l'opération soustraction

Je calcule des probabilités et j'étudie des séries statistiques

1. Calculer et utiliser un coefficient binomial dans le menu

a. On utilise nCr obtenu par **OPTN** > **PROB**

pour calculer $\binom{10}{4}$

b. On peut en déduire la probabilité :

$$P(X=4) = \binom{10}{4} \times 0,2^4 \times 0,8^6$$

10C4

210

on lit $\binom{10}{4} = 210$

$$10C4 \times 0,2^4 \times 0,8^6$$

0,088080384

on lit $P(X=4) = 0,088$

2. Calculer une probabilité mettant en jeu une loi binomiale dans le menu

Sélectionner **DIST** puis **BINM** (loi binomiale). On traite l'exemple d'une variable aléatoire X de loi binomiale $n = 10$ et $p = 0,2$.

a. Calculer $P(X=3)$ avec **Bpd**

```
Binomial P.D
Data :Variable
x :3
Numtrial:10
P :0.2
Save Res:None
Execute
KCALC
```

on lit $P(X=3) = 0,201$

```
Binomial P.D
P=0.20132659
```

b. Calculer $P(X \leq 2)$ avec **Bcd**

```
Binomial C.D
Data :Variable
x :2
Numtrial:10
P :0.2
Save Res:None
Execute
KCALC
```

on lit $P(X \leq 2) = 0,678$

```
Binomial C.D
P=0.67779952
```

c. Calculer le plus petit entier k tel que $P(X \leq k) \geq 0,975$ avec **InvB**

```
Inverse Binomial
Data :Variable
Area :0.975
Numtrial:10
P :0.2
Save Res:None
Execute
KCALC
```

on lit $k = 5$

```
Inverse Binomial
xInv=5
```

3. Étudier une série statistique à deux variables et déterminer l'équation d'une droite de régression dans le menu

a. On saisit les données dans chaque liste

| | List 1 | List 2 | List 3 | List 4 |
|-----|--------|--------|--------|--------|
| SUB | | | | |
| 1 | 0 | 60148 | | |
| 2 | 1 | 63186 | | |
| 3 | 14 | 65564 | | |
| 4 | 20 | 66993 | | |

Dans **CALC** puis **SET**, on indique :

```
2Var XList :List1
2Var YList :List2
```

b. On calcule les indicateurs avec **2VAR**

```
2-Variable
x̄ =10.25
x̄max =41
x̄min =645
ȳ =63972.75
ȳmax =255891
ȳmin =1.6396E+10
```

on lit $(\bar{x}; \bar{y})$, coordonnées du point moyen

c. L'équation $y = ax + b$ de la droite de régression s'obtient avec **RegX** et **ax+b**

```
LinearReg(ax+b)
a =343.382647
b =60453.0778
r =0.99251832
r² =0.98509263
MSe =200516.546
y=ax+b
```

on lit les coefficients a et b

on lit le coefficient de corrélation r

J'étudie une fonction

On traite l'exemple de la fonction f définie par :

$$f(x) = -0,25x^2 - x + 1 \text{ sur } [-6; 3]$$

2. Dresser le tableau de valeurs de f : menu $\frac{\text{TABLE}}{\text{TABLE}}$

a. Définir les paramètres de tabulation : $\frac{\text{SET}}{\text{SET}}$

Table Settings

Start: -6 } début et fin de l'intervalle d'étude
 End : 3 }
 Step : 1 } pas de la tabulation

b. Afficher le tableau de valeurs : $\frac{\text{TABL}}{\text{TABL}}$

$Y1 = -0,25X^2 - X + 1$

| X | Y1 |
|----|-------|
| -6 | -2 |
| -5 | -0,25 |
| -4 | 1 |
| -3 | 1,75 |

on se déplace avec les flèches

4. Utiliser le solveur graphique dans le menu $\frac{\text{MATH}}{\text{MATH}}$

a. Le sélectionner : $\frac{\text{SHIFT}}{\text{SHIFT}}$ $\frac{\text{G-SLV}}{\text{G-SLV}}$

pour les racines }
 pour les extrema }
 pour les points d'intersection }

1. Saisir l'expression de f : menu $\frac{\text{Y-VARS}}{\text{Y-VARS}}$ ou $\frac{\text{TABLE}}{\text{TABLE}}$

X est obtenu par $\frac{\text{X01}}{\text{X01}}$ Table Func : Y= $Y1 = -0,25X^2 - X + 1$ [—]

3. Tracer $\frac{\text{GRAPH}}{\text{GRAPH}}$ et se déplacer sur $\frac{\text{GRAPH}}{\text{GRAPH}}$: menu $\frac{\text{GRAPH}}{\text{GRAPH}}$

a. Définir la fenêtre d'affichage : $\frac{\text{SHIFT}}{\text{SHIFT}}$ $\frac{\text{V-WIN}}{\text{V-WIN}}$

View Window
 Xmin : -6 } x compris entre -6 et 3
 Xmax : 3 }
 scale : 1 } échelle sur (0x)
 dot : 0,07142857 }
 Ymin : -3 } y compris entre -3 et 3
 Ymax : 3 }
 INIT TRIG STD STO RCL

b. Tracer $\frac{\text{DRAW}}{\text{DRAW}}$ et se déplacer sur $\frac{\text{SHIFT}}{\text{SHIFT}}$ $\frac{\text{TRCE}}{\text{TRCE}}$

$Y1 = -0,25X^2 - X + 1$

on déplace le point avec les flèches
 on lit ses coordonnées

X = -1 } Y = 1,75

b. Choisir l'instruction souhaitée et lire la solution

$Y1 = -0,25X^2 - X + 1$

le maximum est 2, atteint en $x = -2$

X = -2 } Y = 2 } MAX

5. Calculer un nombre dérivé ou une intégrale : menu $\frac{\text{MATH}}{\text{MATH}}$

$\frac{d}{dx}(-3x^2 - 3x + 1) \Big|_{x=1}$ } le réel a
 -9 } ici $f'(1) = -9$
 $\int_{-1}^3 -3x^2 - 3x + 1 dx$ }
 -36 } on lit $\int_p^q f(x) dx = -36$
 Solve d/dx d/dx: d/dx Solve }
 D }
 d/dx et dx obtenu par $\frac{\text{OPTN}}{\text{OPTN}}$ $\frac{\text{CALC}}{\text{CALC}}$ } l'expression $f(x)$

6. Calculer et représenter une intégrale : menu $\frac{\text{MATH}}{\text{MATH}}$

$Y1 = -0,25X^2 - X + 1$

① on sélectionne $\frac{\text{SHIFT}}{\text{SHIFT}}$ $\frac{\text{G-SLV}}{\text{G-SLV}}$ puis $\frac{\text{dx}}{\text{dx}}$
 ② on renseigne les bornes lower et upper
 LOWER = -3 } UPPER = 0 }
 f dx = 5,25 }
 ③ on lit la valeur de l'intégrale

J'étudie une suite définie par récurrence

On traite l'exemple de la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = 2u_n + 1$, avec $u_0 = 2$.

1. Saisir l'expression de la suite (u_n) : menu $\frac{\text{RECUR}}{\text{RECUR}}$

pour avoir accès à u_n et n

Recursion
 $u_{n+1} = 2u_n + 1$ [—]
 $u_0 = 2$ [—]
 $n_0 = 0$ [—]
 SET DEL TYPE MODE SET TABL

2. Dresser le tableau de valeurs de la suite (u_n)

On appuie sur $\frac{\text{TABL}}{\text{TABL}}$:

Table Settings n+1
 Start: 0 }
 End : 10 }
 a0 : 2 }
 b0 : 0 }
 c0 : 0 }
 anStr: 0 }
 a0 | a1

$u_{n+1} = 2u_n + 1$

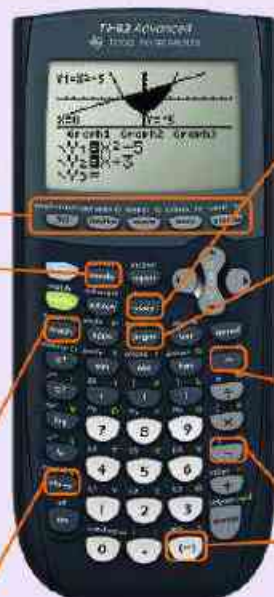
| n | u _n |
|---|----------------|
| 0 | 2 |
| 1 | 5 |
| 2 | 11 |
| 3 | 23 |

FORM DEL } WEB G-CON G-PLT } 2

pour définir l'indice et la valeur du terme initial

pour définir les indices des termes initial et final de la tabulation

on se déplace dans le tableau avec les flèches



pour accéder aux commandes liées aux graphiques ou aux tabulations

pour accéder aux commandes liées aux statistiques

pour paramétrer la calculatrice : angle en degré ou radian, quadrillage affiché ou non, ...

pour accéder aux commandes liées à la programmation

pour accéder à d'autres commandes, classées par grands thèmes : **MATH**, **NUM** ou **PRB**

pour élever à une puissance, exemple 2^3

pour stocker une valeur dans une variable

⚠ ne pas confondre ces deux touches : **(-)** pour le signe négatif d'un nombre **-** pour l'opération soustraction

Je calcule des probabilités et j'étudie des séries statistiques

1. Calculer et utiliser un coefficient binomial

a. On calcule $\binom{10}{4}$ avec **math** **PROB** puis **3** **Combinaison**

b. On peut en déduire la probabilité :

$$P(X=4) = \binom{10}{4} \times 0,2^4 \times 0,8^6$$

```
10 Combinaison 4
210
Rep*0.2^4*0.8^6
.088080384
```

on lit $\binom{10}{4} = 210$

on lit $P(X=4) = 0,088$

2. Calculer une probabilité mettant en jeu une loi binomiale

Sélectionner **distriB** (touches **2nde** **var**). On traite l'exemple d'une variable aléatoire X de loi binomiale $n = 10$ et $p = 0,2$.

a. Calculer $P(X=3)$ avec **A** **binomFdp**

b. Calculer $P(X \leq 2)$ avec **B** **binomFRép**

c. Calculer le plus petit entier k tel que $P(X \leq k) \geq 0,975$ en comptant le nombre de probabilités $P(X \leq k)$ qui sont inférieures à $0,975$.

```
binomFdp
trials:10
P:0.2
X value:3
Paste
```

renseigner les paramètres, sélectionner Paste

```
binomFdp(10,0.2)
.201326592
```

on lit $P(X=3) = 0,201$

```
binomFRép
trials:10
P:0.2
X value:2
Paste
```

```
binomFRép(10,0.)
.677799526
```

on lit $P(X \leq 2) = 0,678$

« somme » : **2nde** **stats** (listes) puis **Math** et **5:somme**
« < » : **2nde** **math** (tests)

```
binomFRép(10,0.2)
)→L1
(.1073741824 .3)
somme(L1<0.975)
5
```

on lit $k=5$

3. Étudier une série statistique à deux variables et déterminer l'équation d'une droite de régression : **stats**

a. On saisit les données avec **Edite**

| L1 | L2 | L3 | 3 |
|--------|-------|----|---|
| 0 | 60148 | | |
| ? | 63186 | | |
| 14 | 66584 | | |
| 20 | 68993 | | |
| ----- | | | |
| L3(1)= | | | |

b. On calcule les indicateurs avec **stats** menu **CALC** puis **2** **Stats 2-Var**
On sélectionne L_1 et L_2 pour $XList$ et $YList$ puis on valide avec **Calculs**

```
Stats 2-Var
X=10.25
Σx=41
Σx^2=645
n=4
q=63972.75
Σy=255891
My^2=1.6397E10
```

on lit $(\bar{x}; \bar{y})$, coordonnées du point moyen

c. L'équation $y = ax + b$ de la droite de régression s'obtient avec **stats** menu **CALC** puis **4** : **RegLin(ax+b)**

```
RegLin
y=ax+b
a=343.3826474
b=60453.07786
```

on lit les coefficients a et b

Le coefficient de corrélation linéaire s'obtient par **Vars** **5:Statistiques** puis Menu **EQ7** :

```
.9925183297
```

J'étudie une fonction

On traite l'exemple de la fonction f définie par :

$$f(x) = -0,25x^2 - x + 1 \text{ sur } [-6; 3]$$

2. Dresser le tableau de valeurs de f

a. Définir les paramètres de tabulation : **2nde** **def table**

TABLE SETUP
TblStart=-6 } début de l'intervalle d'étude
ΔTbl=1 } pas de la tabulation
Indpt: Ask
Depnd: Ask

b. Afficher le tableau de valeurs : **2nde** **table**

| X | Y1 |
|----|-------|
| -6 | -2 |
| -5 | -1,25 |
| -4 | -1,75 |
| -3 | -1,75 |

on se déplace avec les flèches

1. Saisir l'expression de f dans $f(x)$

X est obtenu par **x, t, 0, n** Plot1 Plot2 Plot3
Y1 = -0,25X^2 - X + 1

3. Tracer \mathcal{C}_f et se déplacer sur \mathcal{C}_f

a. Définir la fenêtre d'affichage : **fenêtre**

WINDOW
Xmin=-6 } x compris entre -6 et 3
Xmax=3 }
Xscl=1 } échelle sur (0,x)
Ymin=-3 } y compris entre -3 et 3
Ymax=3 }
Yscl=1 }

b. Tracer \mathcal{C}_f **graphe** et se déplacer sur \mathcal{C}_f **trace**

Y1 = -0,25X^2 - X + 1

on déplace le point avec les flèches
on lit ses coordonnées

4. Utiliser le solveur graphique dans le menu **graphe**

a. Le sélectionner : **2nde** **calculs**

calculs
1: value } pour les racines
2: zero }
3: minimum } pour les extrema
4: maximum }
5: intersect } pour les points d'intersection
6: dy/dx }

b. Choisir l'instruction souhaitée et lire la solution

le maximum est 2, atteint en $x = -2$

5. Calculer un nombre dérivé ou une intégrale (menu **calculs**, Touche **math**)

« d/dx » et l'intégrale s'obtiennent par
8 : nombreDérivé
et 9 : intégrFonct
on précise la variable X par x

le réel a

$$\frac{d}{dx} (-0,25x^2 - x + 1) \Big|_{x=-1} = -1,5$$

$$\int_{-4}^{-1} (-0,25x^2 - x + 1) dx = 5,25$$

l'expression $f(x)$ } on lit $f'(1) = -1,5$

6. Déterminer une équation de tangente ou une intégrale (menu **graphe**)

Équation de tangente
2nde **prgm** (dessin) puis **5: Tangent** (et indiquer l'abscisse du point de tangence.)

$x = 1$
 $y = -1,5x + 1,25$

Calcul d'une intégrale
2nde **trace** (calculs) puis **7: f(x)dx** et indiquer les bornes inférieure et supérieure de l'intégrale.

$f(x)dx = 5,25$

J'étudie une suite définie par récurrence

On traite l'exemple de la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = 2u_n + 1$, avec $u_0 = 2$.

1. Définir le mode « Suite » : **mode**

FONC pour définir une fonction,
SUITE pour une suite récurrente

2nde **prgm** **2**

2nde **xt, 0, n**

2. Saisir l'expression $u_n = f(x)$

Plot1 Plot2 Plot3
ZMin=0 }
ZMax=20 }
ZScl=1 }
u(n) = 2u(n-1) + 1
u(0) = 2

pour définir l'indice et la valeur du terme initial

3. Dresser le tableau de valeurs de la suite (u_n) : **2nde** **graphe**

| n | u(n) |
|---|------|
| 0 | 2 |
| 1 | 5 |
| 2 | 11 |
| 3 | 23 |
| 4 | 47 |
| 5 | 95 |
| 6 | 191 |

on se déplace dans le tableau avec les flèches

pour choisir le menu :

- pour calculer
- pour utiliser les fonctions
- pour faire des statistiques
- pour étudier numériquement une suite
- pour programmer en Python
- pour paramétrer les calculs
- pour calculer des probabilités
- pour résoudre des équations
- pour obtenir des droites et courbes de régression



pour valider une instruction

pour revenir au menu ou à l'instruction précédente

la variable « x » lorsqu'on définit une fonction

touche « Boîte à outils » pour faire apparaître des fonctionnalités de calculs (dénombrement, probabilités, statistiques...)

pour élever à une puissance, exemple 2^3

pour calculer une exponentielle ou un logarithme

Je calcule des probabilités et j'étudie des séries statistiques

1. Calculer et utiliser un coefficient binomial dans le menu

a. Boîte à outils puis *Dénombrement* puis *Binomial* pour

calculer $\binom{10}{4}$

$$\binom{10}{4} = 210$$

on lit $\binom{10}{4} = 210$

b. On peut en déduire la probabilité :

$$P(X=4) = \binom{10}{4} \times 0,2^4 \times 0,8^6$$

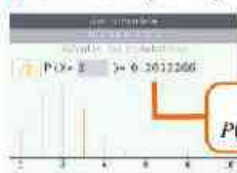
$$\binom{10}{4} \times 0,2^4 \times 0,8^6 = 0,08808038$$

on lit $P(X=4) = 0,088$

2. Calculer une probabilité mettant en jeu une loi binomiale dans le menu

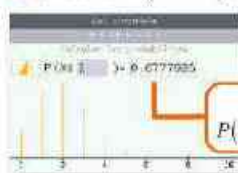
Sélectionner *Binomiale* et renseigner les paramètres n et p . Ici, on considère la variable aléatoire X de loi binomiale $n=10$ et $p=0,2$.

a. Calculer $P(X=3)$ avec



on lit $P(X=3) = 0,201$

b. Calculer $P(X \leq 2)$ avec



on lit $P(X \leq 2) = 0,678$

c. Calculer le plus petit entier k tel que $P(X \leq k) \geq 0,975$ avec



on tâtonne en faisant varier k . On trouve $k=5$

3. Étudier une série statistique à deux variables et déterminer l'équation d'une droite de régression dans le menu

a. On saisit les données dans chaque liste dans l'onglet *Données*.

| X1 | Y1 | X2 |
|----|-------|----|
| 0 | 40148 | |
| 7 | 28186 | |
| 14 | 65564 | |
| 20 | 56595 | |

b. On lit les indicateurs dans l'onglet *Stats*



on lit $(\bar{x}; \bar{y})$, coordonnées du point moyen

c. On trace le nuage et la droite de régression dans l'onglet *Graphique*



on lit les coefficients a et b , le coefficient de corrélation r

J'étudie une fonction

On traite l'exemple de la fonction f définie par :

$$f(x) = -0,25x^2 - x + 1 \text{ sur } [-6; 3]$$

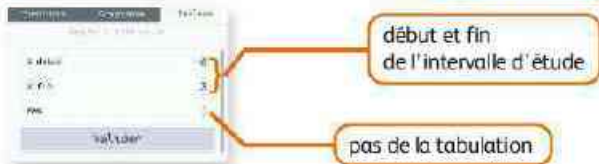
1. Saisir l'expression de f dans

x est obtenu par **x,n,t**



2. Dresser le tableau de valeurs de f : **Afficher les valeurs** **OK**

a. Définir les paramètres de tabulation : **Régler l'intervalle**

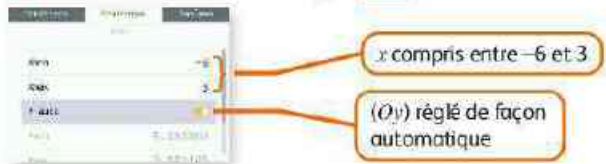


b. Afficher le tableau de valeurs

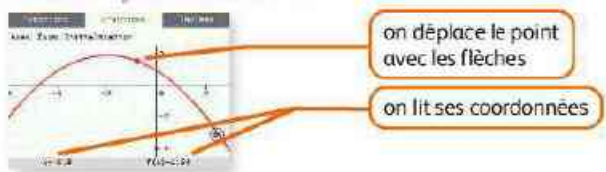


3. Tracer \mathcal{C}_f et se déplacer sur \mathcal{C}_f : **Tracer le graphique** **OK**

a. Définir la fenêtre d'affichage : **Axes**

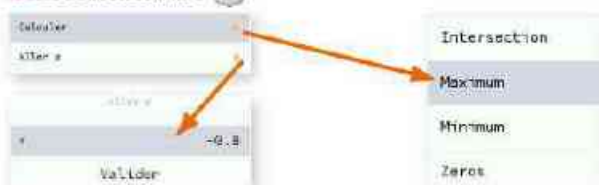


b. Tracer \mathcal{C}_f et se déplacer sur \mathcal{C}_f

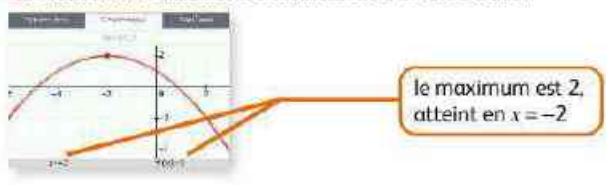


4. Utiliser le solveur graphique

a. Le sélectionner : **OK**



b. Choisir l'instruction souhaitée et lire la solution



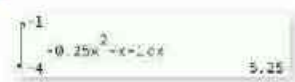
5. Calculer un nombre dérivé $f'(a)$ ou une intégrale

Menu **Calculs** avec **Boîte à outils Calculs**

• **diff(f(x),x,a)** :



• **int(f(x),x,a,b)** :



6. Déterminer une équation de tangente ou une intégrale dans le menu **Calculs**

Une fois la courbe \mathcal{C}_f tracée, appuyer sur **OK** puis sélectionner **Calculer** puis les outils **Tangente** ou **Intégrale**.



Entrer l'abscisse du point de tangence puis **OK**



Entrer la borne inférieure et supérieure puis **OK**

J'étudie une suite définie par récurrence

On traite l'exemple de la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = 2u_n + 1$, avec $u_0 = 2$.

1. Définir la suite en choisissant son « type » :

- u_n (explicite)
- u_{n+1} (récursive d'ordre 1)



2. **Afficher les valeurs** et **régler l'intervalle** :

on se déplace avec les flèches



Thème 1

Méthode

2. $f'(x) = 2 \times (x^3 - 1) \times 3x^2 = 6x^2(x^3 - 1)$
 $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2(x^3 - 1) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0$ ou $x^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$

La courbe \mathcal{C} admet donc deux tangentes horizontales au point d'abscisse $x = 0$ et $x = 1$.

7. 1. $f'(x) = 3e^{3x} - 3 = 3(e^{3x} - 1)$. On a donc :

| | | | |
|---------|---------|---|--------|
| x | -2 | 0 | 1 |
| $f'(x)$ | - | 0 | + |
| $f(x)$ | $f(-2)$ | | $f(1)$ |

$f(-2) = e^{-6} + 7 \approx 7.002$

$f(1) = e^3 - 2 \approx 18.1$

2. En appliquant la propriété des valeurs intermédiaires, on trouve deux solutions à l'équation $f(x) = 3$. Une solution x_1 sur l'intervalle $[-2; 0]$ et une solution x_2 sur l'intervalle $[0; 1]$.

3. Par balayage à la calculatrice, on trouve $x_1 \approx -0,61$ et $x_2 \approx 0,38$.

10. 1. Par lecture graphique, la courbe semble en dessous de ses tangentes sur $[-2; 1]$ et sur $[4; 6]$, et au-dessus de ses tangentes sur $[1; 4]$. On en déduit que la fonction g semble concave sur $[-2; 1]$ et sur $[4; 6]$ et convexe sur $[1; 4]$.

2. La fonction semble changer de convexité en $x = 1$ et $x = 4$. La courbe semble traverser sa tangente en ces points et admettre un point d'inflexion au point d'abscisse 1 et un autre au point d'abscisse 4.

11

| | | | | |
|--------|----|------|----------|---|
| x | -1 | -0,2 | α | 8 |
| $f(x)$ | + | 0 | - | 0 |

13. 1. $f'(x) = 4x^3 - 9x^2 - 12x$ et $f''(x) = 12x^2 - 18x - 12$. On a $\Delta = 900$ et $x_1 = -0,5$ et $x_2 = 2$. D'où le tableau de signes de f'' :

| | | | | |
|----------|-----------|------|---|-----------|
| x | $-\infty$ | -0,5 | 2 | $+\infty$ |
| $f''(x)$ | + | 0 | - | 0 |

2. Sur $]-\infty; -0,5]$ et sur $[2; +\infty[$, f'' est positive, donc f' est croissante et f est convexe.

Sur $]-0,5; 2]$, f'' est négative, donc f' est décroissante et f est concave.

La courbe de f admet deux points d'inflexion : aux points d'abscisse $-0,5$ et 2 .

J'évalue mes connaissances

QCM

1. b et c 2. a 3. b 4. b et c 5. a
 6. a et c 7. a 8. b 9. a, b et c

Vrai ou faux ?

- Partie A. 1. Faux 2. Vrai 3. Faux 4. Faux 5. Faux
 Partie B. 1. Faux 2. Vrai 3. Faux 4. Vrai

Exercices Application

46. 1. $f'(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$

2. $f'(x) = 2 \frac{x^2 - x - 1}{(x^2 + 1)^2}$

3. $f'(x) = \frac{x^2 - 8x + 3}{(2x - 8)^2}$

49. 1. $f'(x) = 3x^2 - 6x + 4$

$\Delta = -12 < 0$ donc f' est positive et f est croissante sur \mathbb{R} .

2. $f'(x) = -0,3e^{-0,3x}$ donc f' est négative et f est décroissante sur \mathbb{R} .

3. $f'(x) = \frac{-6}{(x+2)^2}$ donc f' est négative et f est décroissante sur $]-2; +\infty[$.

4. $f'(x) = -8e^{2x}$ donc f' est négative et f est décroissante sur \mathbb{R} .

55. 1. $f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x-2)(x+2)$

| | | | | |
|---------|----|----|-----|-----|
| x | -3 | -2 | 2 | 6 |
| $f'(x)$ | + | 0 | - | 0 |
| $f(x)$ | 9 | 16 | -16 | 144 |

2. Sur $[-3; 2]$, le maximum de f est 16, l'équation $f(x) = 50$ n'admet pas de solution.

Sur $[2; 6]$, f est continue, strictement croissante, à valeurs dans $[f(2); f(6)]$ et $50 \in [f(2); f(6)]$, donc par la propriété des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = 50$ admet une solution.

Sur $[-3; 6]$, l'équation $f(x) = 50$ admet donc une unique solution notée α .

3. $4 < \alpha < 5$

4.

| X | Y ₁ |
|------|----------------|
| 4.7 | 47.423 |
| 4.71 | 47.967 |
| 4.72 | 48.514 |
| 4.73 | 49.064 |
| 4.74 | 49.616 |
| 4.75 | 50.172 |
| 4.76 | 50.73 |
| 4.77 | 51.291 |

$4,74 < \alpha < 4,75$

58. 1. Vrai 2. Vrai 3. Faux 4. Vrai

65. 1. Faux 2. Vrai 3. Vrai 4. Faux 5. Vrai

Exercices Entraînement

70. 1. La courbe \mathcal{C} est positive, négative puis positive et s'annule en $x = 1$ et $x = 3$. Ce qui correspond aux variations de f . C'est donc la courbe de f' .

2. a. $f(1) = \frac{1}{4} \times 1^3 + a \times 1^2 + b \times 1 = \frac{1}{4} + a + b$

$f(3) = \frac{1}{4} \times 3^3 + a \times 3^2 + b \times 3 = \frac{27}{4} + 9a + 3b$

b. La courbe \mathcal{C} passe par les points $A(1; 1)$ et $B(3; 0)$ donc $f(1) = 1$ et $f(3) = 0$.

On doit donc résoudre le système
$$\begin{cases} \frac{1}{4} + a + b = 1 \\ \frac{27}{4} + 9a + 3b = 0 \end{cases}$$

On trouve : $a = -\frac{3}{2}$ et $b = \frac{9}{4}$.

D'où $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{4}x$.

$$3. f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x + \frac{9}{4}$$

$f'(1) = \frac{3}{4} - 3 + \frac{9}{4} = 0$ et $f'(3) = 0$. Donc la courbe \mathcal{C} admet deux tangentes horizontales aux points A et B.

77 1. $f(0) = 1,44$. La glycémie est de 1,44 g/L au moment de l'injection.

2. $f'(t) = -0,48e^{-0,2t}$ donc f' est négative et f est décroissante sur $[0; 7]$.

La glycémie diminue au fil des heures.

3. a. $f(0,5) \approx 1,24$. La glycémie descend à 1,24 gramme par litre en environ 30 minutes.

b. $1,44 - 0,5 = 0,94$

$f(2,2) \approx 0,9432$ et $f(2,3) \approx 0,935$ donc au bout d'environ 2,3 heures, la glycémie a baissé de 0,5 gramme par litre.

84 1. La fonction f' est positive sur $]-\infty; -2]$ et négative sur $[-2; +\infty[$. Donc la fonction f est croissante sur $]-\infty; -2]$ et décroissante sur $[-2; +\infty[$ ce qui correspond à la courbe ①. La fonction f'' est décroissante sur $]-\infty; -1]$ et croissante sur $[-1; +\infty[$. Donc la fonction f''' est négative sur $]-\infty; -1]$ et positive sur $[-1; +\infty[$ ce qui correspond à la courbe ③.

2. La fonction f' change une fois de variation en $x = -1$ donc la courbe de f admet un point d'inflexion en $x = -1$.

Thème 2

Méthode

3 1. v_n semble tendre vers 0.

2. a. En factorisant la forme initiale par n au numérateur et dénominateur, on obtient la forme proposée.

b. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 1}{n} = +\infty$ par somme, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ par quotient.

6 1. $S_{10} = \frac{1 - 0,5^{10}}{1 - 0,5} \approx 1,998$

2. $S_{10} = -2 \times \frac{1 - 1,5^{10}}{1 - 1,5} = -226,7$ 3. $S_{10} = 4 \times \frac{1 - 1,1^{10}}{1 - 1,1} \approx 63,75$

J'évalue mes connaissances

QCM

1. b 2. a 3. c 4. b 5. c

Vrai ou faux ?

Partie A. 1. Faux. La limite est 1.
2. Vrai. Par comparaison.
3. Vrai. Théorème des gendarmes.

Partie B. 1. Faux. $u_1 = 2,5$ donc (u_n) ne peut être arithmétique de raison 1,8.
2. Vrai. On écrit v_{n+1} et on obtient $0,7v_n$.
3. Faux. C'est +6 et non -6.
4. Faux. (u_n) converge vers 5.

Exercices Application

46 1. En 2021, l'établissement scolaire comptera $0,7 \times 1000 + 350 = 1050$ élèves, ce qui correspond à v_1 .

La situation 1 est modélisée par la suite (v_n) et la situation 2 par la suite (u_n) .

2. $u_{n+1} = 1,03u_n - 50$

$v_{n+1} = 0,7v_n + 350$

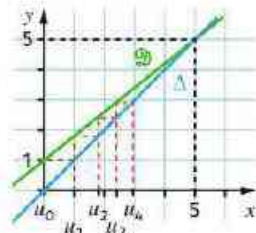
3. a. $v_2 = 1085$

b. $u_4 = 916,33 \text{ €}$

53 1. a. $x = 0,8x + 1 \Leftrightarrow x = 5$, donc les deux droites sont sécantes en $A(5; 5)$.

1. b. et 2. a. Voir graphique ci-contre.

b. (u_n) semble être croissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 5$.



61 1. $S_n = 1 \times \frac{1 - 0,9^{n+1}}{1 - 0,9} = 10(1 - 0,9^{n+1})$.

• $0 < 0,9 < 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,9^{n+1} = 0$.

Par différence et produit $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 10$.

2. $T_n = 1 \times \frac{1 - (\frac{1}{3})^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \left(1 - (\frac{1}{3})^{n+1} \right)$.

• $0 < \frac{1}{3} < 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\frac{1}{3})^{n+1} = 0$.

Par différence et produit $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = \frac{3}{2}$.

66 1. Il perd 20 % chaque année, cela revient à multiplier l'effectif précédent par 0,8. On rajoute 1, qui correspond en dizaine de milliers aux abeilles rachetées.

2. a. et b. Voir graphique ci-contre.

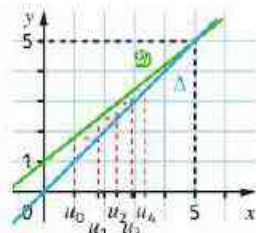
c. La limite semble être 5.

3. a. $v_{n+1} = u_{n+1} - 5 = 0,8(u_n - 5) = 0,8v_n$ donc (v_n) est géométrique de raison 0,8 et de premier terme $v_0 = u_0 - 5 = -4$.

b. $v_n = v_0 \times 0,8^n$ donc $u_n = v_n + 5 = 5 - 4 \times 0,8^n$.

c. $0 < 0,8 < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,8^n = 0$. Par produit et somme,

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 5$. Au bout d'un long moment, la population d'abeilles va se rapprocher de 50 000 et se stabiliser.



Exercices Entraînement

69 1. $u_0 = u_3 \neq u_5$ donc la suite n'est pas arithmétique. $u_5 = 0$ et $2 \times q^2$ ne peut être égal à 0, donc la suite n'est pas géométrique.

2. $f(x) = -0,2x^2 + 0,6x + 2$ 3. $u_2 = 2,4$ et $u_n = 1,2$

76 1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + v_n = +\infty$

2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + v_n = -\infty$

3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + v_n = 1$

Ils s'agit de formes indéterminées.

84 1. • $u_0 = 1$; $u_1 = 0,5$; $u_2 = 1,5$; $u_3 = 4$

• $u_n \geq v_n$ donc (u_n) tend vers $+\infty$

2. • $u_0 = 1; u_1 = 1; u_2 = 5; u_3 = 5$
 • $u_n \geq v_n$ donc (u_n) tend vers $+\infty$
3. • $u_0 = 1; u_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1; u_2 = -3; u_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} - 3$
 • $u_n \leq v_n$ donc (u_n) tend vers $-\infty$
4. • $u_0 = 1; u_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{\pi}; u_2 = 0,5 - \frac{6}{\pi}; u_3 = -1 - \frac{9}{\pi}$
 • $u_n \leq v_n$ donc (u_n) tend vers $-\infty$
5. • $u_0 = 1; u_1 = 4; u_2 = 1; u_3 = 16$
 • $u_n \geq (n-1)^2$ donc (u_n) tend vers $+\infty$

- 87 1. (u_n) est décroissante et tend vers 4 en $+\infty$.
 2. (u_n) est croissante et tend vers 4 en $+\infty$.

Thème 3

Méthode

2. • On a $\lim_{x \rightarrow 2} (x+1) = 3$ et $\lim_{x \rightarrow 2} (2-x) = 0$ donc, par quotient, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty$.

• Pour tout $x > 2$, $f(x) = \frac{x(1 + \frac{1}{x})}{x(\frac{2}{x} - 1)} = \frac{1 + \frac{1}{x}}{\frac{2}{x} - 1}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{x}) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{2}{x} - 1) = -1$ donc, par quotient, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$.

• La courbe \mathcal{C}_f admet la droite d'équation $x = 2$ pour asymptote verticale et la droite d'équation $y = -1$ pour asymptote horizontale en $+\infty$.

5. La fonction C est la primitive de la fonction f qui vérifie la condition $C(0) = 3$.

On a $C(q) = -q^2 + 15q - 10 \times \frac{1}{-0,2} e^{-0,2q} + k$, soit

$C(q) = -q^2 + 15q + 50e^{-0,2q} + k$, où $k \in \mathbb{R}$.

Or $C(0) = 50 + k = 3$, donc $k = -47$.

Ainsi $C(q) = -q^2 + 15q + 50e^{-0,2q} - 47$.

- 7 1. L'équation (E) s'écrit $y' = -y$ donc $f(x) = ke^{-x}$, où $k \in \mathbb{R}$. Or $f(0) = k = 1$. Donc $f(x) = e^{-x}$.

2. L'équation (E) s'écrit $y' = \frac{1}{3}y$ donc $f(x) = ke^{\frac{1}{3}x}$.

Or $f(-1) = ke^{-\frac{1}{3}} = 3$, d'où $k = 3e^{\frac{1}{3}}$.

Donc $f(x) = 3e^{\frac{1}{3}(x+1)}$.

- 10 f est solution de (E) si, et seulement si, pour tout réel x , $f'(x) + 2f(x) = e^{3x}$. Or $f'(x) = 3ae^{3x}$, donc $3ae^{3x} + 2ae^{3x} = e^{3x}$, ce qui équivaut à $5a = 1$, et donc $a = \frac{1}{5}$.

- 14 1. On cherche une fonction constante $u: x \mapsto \alpha$ solution. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = 2u(x) - 5$, avec $u'(x) = 0$. Le réel α vérifie donc $2\alpha - 5 = 0$, soit $\alpha = \frac{5}{2}$.

On a donc $f(x) = ke^{2x} + \frac{5}{2}$, où $k \in \mathbb{R}$.

$f(0) = k + \frac{5}{2} = 3$, donc $k = \frac{1}{2}$. D'où $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{5}{2}$.

2. L'équation s'écrit $y' = \frac{3}{5}y + \frac{2}{5}$. La fonction constante u définie par $u(x) = -\frac{2}{3}$ est solution de l'équation, donc $f(x) = ke^{\frac{3}{5}x} - \frac{2}{3}$.
 $f(1) = ke^{\frac{3}{5}} - \frac{2}{3} = -1$, donc $k = -\frac{1}{3}e^{-\frac{3}{5}}$.
 Donc $f(x) = -\frac{1}{3}e^{\frac{3}{5}(x-1)} - \frac{2}{3}$.

J'évalue mes connaissances

QCM

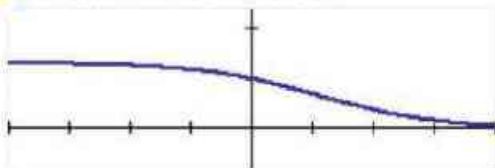
1. b 2. a 3. b et c 4. b et c
 5. a et c 6. b 7. b 8. a
 9. a, b et c 10. c 11. b

vrai ou faux ?

- Partie A. 1. Vrai 2. Faux 3. Vrai 4. Faux
 Partie B. 1. Vrai 2. Faux 3. Faux 4. Faux
 5. Faux 6. Vrai

Exercices Application

- 57 1. On obtient la courbe ci-dessous.



Il semble que \mathcal{C} admette pour asymptotes horizontales les droites d'équations $y = \frac{2}{3}$ en $-\infty$ et $y = 0$ en $+\infty$.

2. • On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3 + e^x) = 3$, par quotient,

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{2}{3}$.

- On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3 + e^x) = +\infty$, par quotient,

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Ce qui valide les conjectures formulées à la question 1.

- 64 1. On a $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - e^{-x} + k$, où $k \in \mathbb{R}$.

Or $F(0) = -1 + k = -1$, d'où $k = 0$.

Donc $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - e^{-x}$.

2. On a $f(x) = -\frac{3}{2} \times (-2xe^{-x^2})$, donc :

$F(x) = -\frac{3}{2}e^{-x^2} + k$, où $k \in \mathbb{R}$

Or $F(1) = -\frac{3}{2}e^{-1} + k = 0$, donc $k = \frac{3}{2}e^{-1}$.

D'où $F(x) = -\frac{3}{2}e^{-x^2} + \frac{3}{2}e^{-1}$.

- 72 1. Pour tout $t \geq 0$, on a $C(t) = ke^{-0,008t}$, où $k \in \mathbb{R}$.

Or $C(0) = k = 10$, donc $C(t) = 10e^{-0,008t}$.

2. $C(2,5) = 9,8$. La concentration de saccharose au bout de 2 h 30 est d'environ 9,8 mol.L⁻¹.

77 1. u est solution de (E) si, et seulement si, pour tout réel x , $u'(x) + 3u(x) = e^{2x}$, avec $u'(x) = 2ae^{2x}$. Donc $2ae^{2x} + 3ae^{2x} = e^{2x}$, ce qui équivaut à $5a = 1$, et donc $a = \frac{1}{5}$.

2. Pour tout réel x , $f'(x) = -3ke^{-3x} + \frac{2}{5}e^{2x}$.

$$f'(x) + 3f(x) = -3ke^{-3x} + \frac{2}{5}e^{2x} + 3\left(ke^{-3x} + \frac{1}{5}e^{2x}\right)$$

Donc $f'(x) + 3f(x) = e^{2x}$. f est bien solution de (E) .

80 1. Pour tout réel x , $u'(x) = 0$ et $-5u(x) + 1 = 0$, donc $u'(x) = -5u(x) + 1$. u est solution de (E) .

2. Les solutions de (E) sont les fonctions f définies sur \mathbb{R} par $f(x) = ke^{-5x} + \frac{1}{5}$, où $k \in \mathbb{R}$.

Exercices Entraînement

91 1. On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0$.

Par différence $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

L'axe des abscisses est donc asymptote à \mathcal{C} en $-\infty$.

2. On a $f(x) = e^x(1 - e^{-x})$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - e^{-x}) = -\infty$,

donc par produit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

99 1. F est dérivable sur \mathbb{R} et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} F'(x) &= -3e^{-x} + (-3x+1)(-e^{-x}) \\ &= (-3+3x-1)e^{-x} = (3x-4)e^{-x} = f(x) \end{aligned}$$

Donc F est une primitive de f sur \mathbb{R} .

2. Les primitives de f sur \mathbb{R} sont définies par :

$$G(x) = F(x) + k, \text{ où } k \in \mathbb{R}.$$

Or $G(0) = F(0) + k = 1 + k = 3$, donc $k = 2$.

Donc $G(x) = (-3x+1)e^{-x} + 2$.

3. Les primitives de h sont les fonctions définies sur \mathbb{R} par :

$$H(x) = (-3x+1)e^{-x} + x^2 - 3x + k, \text{ où } k \in \mathbb{R}$$

107 1. a. $f'(0) = 3f(0) - 5$, donc $f'(0) = -8$.

b. $T: y = f'(0)(x-0) + f(0)$, donc :

$$T: y = -8x - 1$$

2. a. On cherche une fonction constante $u: x \mapsto \alpha$ solution. On a $u'(x) = 3u(x) - 5$, avec $u'(x) = 0$. Le réel α vérifie donc

$$3\alpha - 5 = 0, \text{ soit } \alpha = \frac{5}{3}.$$

On a donc $f(x) = ke^{3x} + \frac{5}{3}$, où $k \in \mathbb{R}$.

Or $f(0) = k + \frac{5}{3} = -1$, donc $k = -\frac{8}{3}$.

$$\text{Donc } f(x) = -\frac{8}{3}e^{3x} + \frac{5}{3}.$$

b. On a $f'(x) = -\frac{8}{3} \times 3e^{3x} = -8e^{3x}$. On retrouve $f'(0) = -8$, ainsi que l'équation de la tangente.

3. a. • On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{3x} = 0$.

Par somme $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{5}{3}$.

• On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{3x} = +\infty$.

Par produit et somme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

La courbe \mathcal{C}_f admet la droite d'équation $y = \frac{5}{3}$ pour asymptote horizontale en $-\infty$.

b. Pour tout réel x , $f'(x) = -8e^{3x}$.

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{3x} > 0$, donc $f'(x) < 0$.

La fonction f est strictement décroissante sur \mathbb{R} .

Thème 4

méthode

2 1. Faux 2. Faux 3. Faux 4. Vrai

4 1. Pour tout réel x , $e^x + 1 > 0$, donc $\ln(e^x + 1)$ est défini.

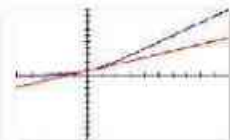
2. $f'(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$ donc, pour tout réel x , $f'(x) > 0$ donc f est croissante sur \mathbb{R} .

3. $f(0) = \ln 2$ et $f'(0) = \frac{1}{2}$. D'où l'équation de la tangente :

$$y = \frac{1}{2}(x-0) + \ln 2 = \frac{1}{2}x + \ln 2$$

4. Graph1 Graph2 Graph3

$\bullet \forall x \in \mathbb{R}, \ln(e^x + 1)$
 $\bullet \forall x \in \mathbb{R}, 5x + \ln(2)$
 $\bullet \forall x =$



8 1. $5 + 3 \times 2^n \geq 1000 \Leftrightarrow 2^n \geq \frac{995}{3}$

$$\Leftrightarrow n \ln(2) \geq \ln \frac{995}{3} \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln \left(\frac{995}{3} \right)}{\ln 2}$$

$$\frac{\ln \left(\frac{995}{3} \right)}{\ln 2} \approx 8,4 \text{ donc } n \geq 9$$

2. $5 + 3 \times 0,5^n \leq 5,01 \Leftrightarrow 0,5^n \leq \frac{1}{300}$

$$\Leftrightarrow n \ln(0,5) \leq \ln \frac{1}{300} \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln \left(\frac{1}{300} \right)}{\ln 0,5}$$

$$\frac{\ln \left(\frac{1}{300} \right)}{\ln 0,5} = \frac{\ln 300}{\ln 2} \approx 8,2 \text{ donc } n \geq 9$$

3. $5 - 3 \times 0,5^n \geq 4,999 \Leftrightarrow 0,5^n \leq \frac{1}{3000}$

$$\Leftrightarrow n \ln(0,5) \leq \ln \frac{1}{3000} \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln \left(\frac{1}{3000} \right)}{\ln 0,5}$$

$$\frac{\ln \left(\frac{1}{3000} \right)}{\ln 0,5} = \frac{\ln 3000}{\ln 2} \approx 11,6 \text{ donc } n \geq 12$$

J'évalue mes connaissances

QCM

- | | | | |
|-----------|-----------|-------|-------|
| 1. a | 2. a | 3. b | 4. a |
| 5. b | 6. a et c | 7. c | 8. b |
| 9. a et b | 10. a | 11. c | 12. a |

vrai ou faux ?

- | | | | | |
|-----------|---------|---------|---------|---------|
| Partie A. | 1. Faux | 2. Vrai | 3. Faux | 4. Vrai |
| | 5. Faux | 6. Vrai | 7. Faux | |
| Partie B. | 1. Faux | 2. Vrai | 3. Faux | 4. Faux |
| | 5. Faux | 6. Vrai | | |

Exercices Application

44 $\ln 7 \approx 2$ et $\ln 20 \approx 3$

À la calculatrice : $\ln(7)$ 1.945910149
 $\ln(20)$ 2.995732274

63 1. a. $f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$

b. $x > 0$ et $1-x > 0 \Leftrightarrow x < 1$

c.

| | | | |
|---------|---|----|-----------|
| x | 0 | 1 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | + | 0 | - |
| $f(x)$ | | -1 | |

2. a. Le maximum de f est égal à -1 , atteint en $x=1$. La fonction f est donc négative sur $]0; +\infty[$.

b. Pour tout réel $x > 0$, $f(x) < 0 \Leftrightarrow \ln x - x < 0 \Leftrightarrow \ln x < x$.

c. La courbe représentative du logarithme est en dessous de la bissectrice d'équation $y=x$.

74

| | | | | |
|-------------|---|----------|---|-----------|
| x | 0 | e^{-1} | 1 | $+\infty$ |
| $\ln x$ | - | - | 0 | + |
| $\ln x + 1$ | - | 0 | + | + |
| $f(x)$ | + | 0 | - | + |

Exercices Entraînement

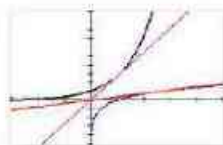
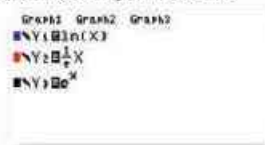
81 1. $e^1 = e$. L'ordonnée de A est e donc l'abscisse de B est e .

2. $y = \exp'(1)(x-1) + \exp(1) = e(x-1) + e = ex - e + e = ex$. La tangente passe par l'origine du repère.

3. Par symétrie, la tangente au point B passe aussi par l'origine du repère. Donc elle admet une équation de la forme : $y = mx$.

Elle passe de plus par le point $B(e; 1)$ donc : $1 = me \Leftrightarrow m = \frac{1}{e}$.
 La tangente admet pour équation $y = \frac{1}{e}x$.

À la calculatrice, on obtient :



88 1. $f'(x) = 4 - \frac{1}{x} = \frac{4x-1}{x}$

$x > 0$ et $4x-1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{4}$

| | | | |
|---------|---|------|-------------|
| x | 0 | 0,25 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | | - | 0 |
| $f(x)$ | | | $1 + \ln 4$ |

2. $f'(x) = 2 + \frac{1}{x}$ donc, pour tout réel $x > 0$, $f'(x) > 0$ donc la fonction f est croissante sur $]0; +\infty[$.

104 $A = \ln \frac{25}{2}$; $B = \ln \left(\frac{1}{3}e\right)$; $C = \ln 2025$ et $D = \ln \frac{16}{27}$

Thème 5

Méthode

2 1. $y = \sqrt{4x-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ x^2 - 4x + y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ (x-2)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$

C'est l'équation d'un demi-cercle de centre $(2; 0)$ et de rayon 2.

2. $\int_0^4 \sqrt{4x-x^2} dx = \frac{1}{2}\pi 2^2 = 2\pi$

5 On cherche à calculer $\int_4^9 f(x) dx$ avec $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

On remarque que $F'(x) = 2\sqrt{x}$ a pour dérivée :

$$F'(x) = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} = f(x)$$

On en déduit que :

$$\int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = [2\sqrt{x}]_4^9 = F(9) - F(4) = 2\sqrt{9} - 2\sqrt{4} = 2$$

11 1. On a $F'(t) = (-at + a - b)e^{-t}$; d'où $a = b = -1$ et $F(t) = (-t-1)e^{-t}$.

2. $\int_0^3 f(t) dt = [(-t-1)e^{-t}]_0^3 = -4e^{-3} - (-1)e^0 = 1 - 4e^{-3}$.

J'évalue mes connaissances

QCM

1. c 2. b 3. a 4. a
 5. a et c 6. a 7. c 8. b

vrai ou faux ?

1. Vrai. Pour tout $x \in [a; b]$,

$$f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow g(x) - f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \int_a^b g(x) - f(x) dx \geq 0$$

2. Faux. Par exemple si $g(x) = \mu$ avec μ la valeur moyenne de f sur $[a; b]$, on a $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$, avec $f(x) \neq g(x)$ sur $[a; b]$.

3. Vrai. La fonction $t \mapsto t(t+2)$ est positive sur $[0; +\infty[$, donc F est croissante sur $[0; +\infty[$.

4. Vrai. $\int_0^1 u'(x) \times u(x) dx = \left[\frac{1}{2} u(x)^2 \right]_0^1$
 $= \frac{1}{2} (u(1)^2 - u(0)^2)$
 $= \frac{1}{2} (u(1) - u(0))(u(1) + u(0))$

Pour que $\int_0^1 u'(x) \times u(x) dx = 0$, il faut que $u(0) = u(1)$ ou $u(0) = -u(1)$.

5. Vrai. Méthode des rectangles : $f(0) = 1$; $f(0,5) = \frac{4}{5}$; $f(1) = \frac{1}{2}$.

Aire hachurée : $0,5 \times \frac{4}{5} + 0,5 \times \frac{1}{2} = \frac{13}{20}$.

Aire bleue : $0,5 \times 1 + 0,5 \times \frac{4}{5} = \frac{9}{10}$.

Exercices Application

35 Soit la fonction F définie sur \mathbb{R} par $F(x) = (x-1)e^x$.

1. $F'(x) = 1 \times e^x + (x-1) \times e^x = xe^x$

2. $\int_1^2 xe^x dx = [(x-1)e^x]_1^2 = e^2$

49 • Le domaine 1 : environ 12,5 carreaux, soit 25 u.a.

• Le domaine 2 : environ 9,5 carreaux, soit 24 u.a.

56 1. la fonction définie par $f(x) = (3x-1)e^{1,5x^2-x+3}$ est de la forme $u'e^v$ avec $u : x \mapsto 1,5x^2 - x + 3$.

On en déduit :

$$I = \int_{-2}^4 (3x-1)e^{1,5x^2-x+3} dx = \left[e^{1,5x^2-x+3} \right]_{-2}^4 = e^{23} - e^{11}$$

2. La fonction définie par $f(t) = (-3t^2 + 4t)(-t^3 + 2t^2 + 1)$ est de la forme $u'u'$ avec $u : t \mapsto -t^3 + 2t^2 + 1$.

On en déduit $J = \left[\frac{1}{2}(-t^3 + 2t^2 + 1)^2 \right]_1^2 = \frac{1}{2}(1-4) = -\frac{3}{2}$

66 1. $\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3}$.

2. Par symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$:

$$\int_0^1 1 - \sqrt{x} dx = \frac{1}{3}$$

3. $\int_0^1 \sqrt{x} - x^2 dx = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ (avec 1 l'aire du carré).

Exercices Entraînement

79 1. a. $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x = 2$

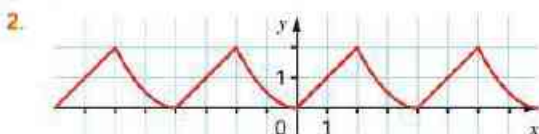
b. $f(2) = \frac{(2-4)^2}{2} = 2 = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

La fonction f est donc continue en 2.

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)^2}{2} = 0$$

$$f(0) = 0 = \lim_{x \rightarrow 4} f(x)$$

Par translation, $f(0) = f(4)$, donc la fonction f est continue en 4.



3. $\int_0^2 f(x) dx = \frac{2 \times 2}{2} = 2$ (aire du triangle)

$$\begin{aligned} \int_0^4 f(x) dx &= \int_0^2 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx = 2 + \int_2^4 \frac{1}{2}x^2 - 4x + 8 dx \\ &= 2 + \left[\frac{1}{6}x^3 - 2x^2 + 8x \right]_2^4 \\ &= 2 + \frac{32}{3} - 32 + 32 - \left(\frac{4}{3} - 8 + 16 \right) \\ &= 2 + \frac{4}{3} = \frac{10}{3} \end{aligned}$$

4. $\int_0^8 f(x) dx = \int_0^4 f(x) dx + \int_4^8 f(x) dx = 2 \times \int_0^4 f(x) dx$

(translation) ; donc $\int_0^8 f(x) dx = \frac{20}{3}$.

De même $\int_{-4}^4 f(x) dx = \frac{20}{3}$.

84 1. b. La courbe \mathcal{C}_2 correspond à la courbe f et la courbe \mathcal{C}_1 correspond à la courbe g .

c. On lit $a = -2$, $b = -1$, $c = 1$ et $d = 2$.

2. On cherche x tel que :

$$\frac{4}{x^2} = 5 - x^2 \Leftrightarrow x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = x^2 \\ X^2 - 5X + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = x^2 \\ X = 1 \\ X = 4 \end{cases}$$

(racines évidentes)

donc $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 1$

ou $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = -2$ ou $x = 2$

3. On cherche x tel que $5 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{5}$.

4. Les fonctions sont paires, donc symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. On découpe le domaine en tranches correspondant à chacune des fonctions.

$$\begin{aligned} 5. \mathcal{A} &= 2 \left(\int_0^1 5 - x^2 dx + \int_1^2 \frac{4}{x^2} dx + \int_2^{\sqrt{5}} 5 - x^2 dx \right) \\ &= 2 \left(\left[5x - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 + \left[-\frac{4}{x} \right]_1^2 + \left[5x - \frac{1}{3}x^3 \right]_2^{\sqrt{5}} \right) \\ &= 2 \left(5 - \frac{1}{3} + (-2) + 4 + 5\sqrt{5} - \frac{5\sqrt{5}}{3} - 10 + \frac{8}{3} \right) \\ &= \frac{-4 + 20\sqrt{5}}{3} \end{aligned}$$

Thème 6

Méthode

2 1. On a $\bar{x} = 49,25$; $\sigma = \sqrt{406,4875} \approx 20,16$; $Q_1 = 32$; $Me = 51$ et $Q_3 = 62$.

2. La moyenne des 20 candidats est supérieure à la moyenne nationale avec un écart type plus faible. La médiane aussi est supérieure, avec un écart interquartile plus faible. Les 20 candidats ont mieux réussi et de manière plus homogène que la moyenne nationale. Cependant, le troisième quartile est plus bas, les 25 % les meilleurs ont de moins bons résultats que les 25 % les meilleurs au niveau national.

5 1. $F'(x) = -0,3 \times 3x^2 - 17 + 20 \ln(x) + 20x \times \frac{1}{x}$
 $= -0,9x^2 + 20 \ln(x) - 17 + 20$
 $= -0,9x^2 + 20 \ln(x) + 3$.

Pour tout réel $x \in [2; 6]$, on a $F'(x) = f'(x)$ donc F est une primitive de f .

2. $\int_2^6 f(x) dx = F(6) - F(2)$, avec :

$$F(2) = -0,3 \times 2^3 - 17 \times 2 + 20 \times 2 \times \ln 2 = -36,4 + 40 \ln 2$$

$$F(6) = -0,3 \times 6^3 - 17 \times 6 + 20 \times 6 \times \ln 6 = -166,8 + 120 \ln 6$$

Donc $\int_2^6 f(x) dx = 80 \ln 2 + 120 \ln 3 - 130,4$.

3. $\mu = \frac{1}{6-2} \int_2^6 f(x) dx$. Donc $\mu = 20 \ln 2 + 30 \ln 3 - 32,6 \approx 14,221$.
 La valeur moyenne du bénéfice est d'environ 14 221 euros.

J'évalue mes connaissances

QCM

1. b et c 2. b et c 3. a et b
 4. a 5. b 6. a et b

vrai ou faux ?

Partie A. 1. Faux 2. Faux 3. Vrai 4. Vrai 5. Faux

Partie B. 1. Vrai 2. Vrai 3. Vrai 4. Faux

Partie C. 1. Faux 2. Vrai 3. Faux 4. Vrai

E exercices Application

29 1. $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = 100$. Les deux séries ont la même moyenne, on ne peut pas les comparer à l'aide de cet indicateur.

2. a. La série S_1 semble la plus dispersée.

b. $\sigma_1 = \sqrt{50}$ et $\sigma_2 = \sqrt{25} = 5$. On a $\sigma_1 > \sigma_2$ ce qui confirme que la série S_1 est la plus dispersée.

35 1. $s_d = \int_1^5 f(x) dx$

2. En comptant les carreaux égaux à une unité d'aire, on trouve $s_d \approx 8$.

3. $\mu = \frac{1}{5-1} s_d = \frac{1}{4} s_d$. Donc on peut estimer que $\mu = 2$.

4. Le rectangle de hauteur 2 et de largeur 4 a bien pour aire 8. Ce qui est cohérent avec la valeur moyenne trouvée en 2.

E exercices Entraînement

39 1. $\bar{x} = \frac{2 \times 6\,000 + 6 \times 1400}{8} = \frac{20\,400}{8} = 2\,550$

2. Avec l'augmentation de 10 %, le salaire des 2 cadres est de 6 600 € et le salaire des 11 ouvriers de 1 540 €. Le salaire moyen avec l'augmentation est donc :

$$m = \frac{2 \times 6\,600 + 11 \times 1\,540}{13} = \frac{30\,140}{13} \approx 2\,318.$$

L'employé a raison.

44 On a $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

$f'(x) = \frac{2}{(2-x)^2}$, donc sur $[0; 1]$, f' est positive, f est croissante.

$f''(x) = -\frac{4}{(2-x)^3}$, donc sur $[0; 1]$, f'' est positive et f est convexe.

$f(x) - x = \frac{x(x-1)}{2-x}$, donc sur $[0; 1]$, $f(x) - x \leq 0$ donc $f(x) \leq x$.

La courbe représentative de la fonction f est une courbe de Lorenz.

On calcule l'indice de Gini : $G = 2 \times s_d$ avec $s_d = \frac{1}{2} - \int_0^1 f(x) dx$.

$F(x) = -2 \ln(2-x) - x$ est une primitive de f .

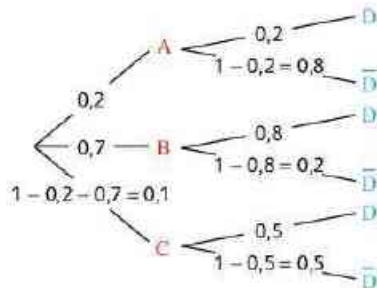
On a donc $I = \int_0^1 f(x) dx = -1 + 2 \ln 2$.

$$s_d = \frac{3}{2} - 2 \ln 2 \text{ et } G = 3 - 4 \ln 2 \approx 0,227$$

Thème 7

méthode

5 1.



2. On a $P(D) = P(A) \times P_A(D) + P(B) \times P_B(D) + P(C) \times P_C(D)$
 $= 0,2 \times 0,2 + 0,7 \times 0,8 + 0,1 \times 0,5 = 0,6$.

On en déduit $P_D(A) = \frac{P(A) \times P_A(D)}{P(D)} = \frac{0,2 \times 0,2}{0,6} = \frac{1}{15}$

J'évalue mes connaissances

QCM

1. b 2. b et c 3. c 4. a et b 5. b
 6. a et c 7. b 8. a 9. c

vrai ou faux ?

Partie A.

D'après l'énoncé, on a $P_F(L) = \frac{1}{3}$.

$$P(L) = \frac{8}{20} = 0,4 \text{ et } P(F) = \frac{15}{20} = 0,75.$$

1. Faux, on a $P_F(L) = \frac{1}{3}$ et non $P_1(F) = \frac{1}{3}$.

On peut ainsi tracer l'arbre ci-contre.

2. Vrai, d'après la formule des probabilités

totales :

$$P(L \cap \bar{F}) = P(L) - P(F \cap L) = 0,4 - 0,75 \times \frac{1}{3} = \frac{3}{20}$$

3. Vrai, on cherche $P_{\bar{F}}(L) = \frac{P(\bar{F} \cap L)}{P(\bar{F})} = \frac{0,15}{1 - 0,25} = 0,6 = \frac{3}{5}$.

Donc 3 élèves sur 5 portent des lunettes.

Partie B.

En notant P l'événement « il pleut dans la région » et V « Zoë se rend au travail en voiture », la situation se modélise par l'arbre ci-contre.

1. Faux, on applique la formule des probabilités totales :

$$P(V) = P(P \cap V) + P(\bar{P} \cap V) = 0,25 \times 0,8 + 0,75 \times 0,4 = 0,5$$

2. Vrai, $P_V(P) = \frac{P(P \cap V)}{P(V)} = \frac{0,25 \times 0,2}{0,5} = 0,1$.

3. Vrai, on a $P(P) = 0,25$ et $P(V) = 0,5$ donc $P(P) \times P(V) = 0,125$

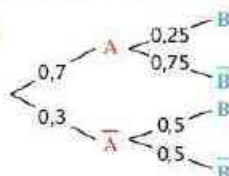
et $P(V \cap P) = P(P) \times P_P(V) = 0,25 \times 0,8 = 0,2$.

Ainsi, $P(V \cap P) \neq P(P) \times P(V)$.

Les événements P et V ne sont donc pas indépendants.

E exercices Application

27 1.



2. a. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(B) = P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B) = 0,7 \times 0,25 + 0,3 \times 0,5 = 0,325$$

b. \bar{B} est l'événement contraire de B, donc :

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 0,675$$

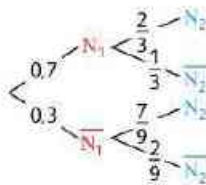
c. D'après la formule des probabilités composées :

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(\bar{B}) = 0,3 \times 0,5 = 0,15$$

d. D'après la définition de probabilité conditionnelle :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,7 \times 0,25}{0,325} = \frac{7}{13}$$

31 1. Notons N_1 l'évènement « on obtient une boule noire au premier tirage » et N_2 l'évènement « on obtient une boule noire au deuxième tirage ». On peut représenter la situation par l'arbre ci-contre.



2. a. $P(\overline{N_1} \cap \overline{N_2}) = P(\overline{N_1}) \times P_{\overline{N_1}}(\overline{N_2}) = 0,3 \times \frac{2}{9} = \frac{1}{15}$
 b. $P(N_1 \cap \overline{N_2}) + P(\overline{N_1} \cap N_2) = 0,7 \times \frac{3}{9} + 0,3 \times \frac{7}{9} = \frac{7}{15}$
 c. $P(N_2) = P(N_1 \cap N_2) + P(\overline{N_1} \cap N_2) = \frac{7}{10}$
 3. $P_{N_2}(\overline{N_1}) = \frac{P(\overline{N_1} \cap N_2)}{P(N_2)} = \frac{1}{3}$

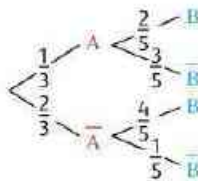
34 1. On calcule $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = \frac{2}{3}$

et $P(A \cap B) = \frac{2}{15}$,

donc $P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{8}{15}$.

Ainsi, $P_{\overline{A}}(B) = \frac{4}{5}$.

On en déduit l'arbre pondéré complet ci-contre.



2. $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{5}$ et $P_{\overline{B}}(\overline{A}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{2}{5}$.

Thème 8

Méthode

2. • On choisit au hasard une carte dans un jeu de 54 cartes. La variable aléatoire T , qui prend la valeur 1 si la carte choisie est une tête et 0 sinon, suit la loi de Bernoulli.

• On choisit au hasard un élève dans une classe de Terminale. La variable aléatoire F , qui prend la valeur 1 si l'élève a fait son travail et 0 sinon, suit la loi de Bernoulli.

4. En continuant le triangle de Pascal, on trouve : $\binom{10}{7} = 120$

et $\binom{10}{8} = 45$.

Par symétrie des coefficients : $\binom{10}{7} = \binom{10}{10-7} = \binom{10}{3} = 120$;

$\binom{10}{8} = \binom{10}{10-8} = \binom{10}{2} = 45$.

Par propriété additive des coefficients :

$$\binom{10}{7} + \binom{10}{8} = \binom{11}{8} = 165$$

Par symétrie : $\binom{11}{8} = \binom{11}{11-8} = \binom{11}{3} = 165$.

8. Soit R la variable aléatoire donnant le nombre de parties gagnées par Raphaël : R suit la loi $\mathcal{B}\left(5; \frac{1}{3}\right)$.

1. On cherche :

$$P(R \geq 1) = 1 - P(R = 0) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^5 = 1 - \frac{32}{243} = \frac{211}{243} \approx 0,867$$

2. On calcule $E(X) = 5 \times \frac{1}{3} = 1,67$. Raphaël gagnera entre 1 et 2 parties.

10. 1. a. C suit la loi binomiale $\mathcal{B}(100; p)$.

b. On calcule $f_{\text{obs}} = \frac{4}{100}$, donc l'intervalle de confiance au seuil de 95 % de p est :

$$I_C = \left[\frac{4}{100} - \frac{1}{\sqrt{100}}; \frac{4}{100} + \frac{1}{\sqrt{100}} \right] = [-0,06; 0,14]$$

c. On a donc $p \in [0; 0,14]$, si C suit la loi $\mathcal{B}(100; 0)$, $E(C) = 0$; si C suit la loi $\mathcal{B}(100; 0,14)$, $E(C) = 14$.

Elle peut donc espérer trouver de 0 à 14 crevettes !

2. On cherche à valider l'affirmation : « le sachet contient 5 % de crevettes ».

En utilisant un intervalle de fluctuation au seuil de 95 %.

C suit la loi $\mathcal{B}(100; 0,05)$; $I_n = \left[\frac{2}{100}; \frac{10}{100} \right]$, comme $\frac{4}{100} \in I_n$, on accepte l'affirmation.

J'évalue mes connaissances

QCM

1. b 2. a 3. b 4. a et c
 5. a et c 6. b 7. b 8. b 9. a

vrai
ou faux ?

Partie A. 1. Vrai 2. Faux

Partie B. 1. Faux 2. Vrai 3. Faux

Partie C. 1. Faux 2. Vrai 3. Faux

Exercices Application

37. 1. Une situation possible est : Pour qu'une partie de jeu en ligne commence, il faut que le nombre de joueurs soit compris entre 3 et 21. Le serveur informatique choisit de façon aléatoire le nombre de joueurs.

La variable aléatoire X donnant le nombre de joueurs dans une partie suit donc la loi uniforme dans $[3; 21]$.

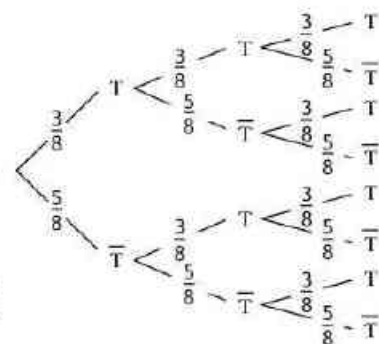
2. X suit la loi uniforme de paramètre $\frac{1}{21-3+1} = \frac{1}{19}$; et $E(X) = \frac{3+21}{2} = 12$.

41. 1. À chaque

tirage, le jeu contient $4 \times 3 = 12$ têtes parmi les 32 cartes. La probabilité d'obtenir une tête est donc

$$p = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}$$

Soit T l'évènement : « la carte choisie est une tête ».



2. Chaque tirage ne comporte que deux issues : la carte est une tête (Succès) ou la carte n'est pas une tête (Échec). À chaque tirage, les probabilités restent les mêmes et les épreuves sont indépendantes : il s'agit d'un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 3$ et $p = \frac{3}{8}$.

3. Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de têtes à l'issue des trois tirages.

$$P(X = 2) = \binom{3}{2} \left(\frac{3}{8}\right)^2 \times \left(\frac{5}{8}\right)^{3-2} = 3 \times \frac{3^2}{8^2} \times \frac{5}{8} = \frac{135}{512} \approx 0,26$$

43 1. $\binom{4}{1} = 4$ car $\binom{n}{1} = n$

2. $\binom{10}{9} = 10$ car $\binom{n}{n-1} = n$ 3. $\binom{15}{1} = 15$ car $\binom{n}{1} = n$

4. $\binom{30}{0} = 1$ car $\binom{n}{0} = 1$ 5. $\binom{20}{20} = 1$ car $\binom{n}{n} = 1$

52 1. Chaque ordinateur tombe en panne indépendamment des autres ; la probabilité d'une panne est la même pour chaque ordinateur ; c'est donc une expérience de Bernoulli.

X suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,05$ (le Succès est l'ordinateur tombe en panne).

2. a. Au moins un ordinateur... : $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 0,64$.

b. Exactement 5 ordinateurs... : $P(X = 5) \approx 0,002$.

c. Au plus 7 ordinateurs... : $P(X \leq 7) \approx 1$.

3. $E(X) = 20 \times 0,05 = 1$; en moyenne, il y a aura un ordinateur qui tombera en panne durant la période de garantie.

57 Ici, l'intervalle de fluctuation de la variable X est $I_X = [k_1; k_2]$ tel que $P(X \leq k_1) > \frac{0,05}{2}$ et $P(X \leq k_2) \geq 1 - \frac{0,05}{2}$.

À l'aide du graphique : $k_1 = 3$ et $k_2 = 13$, donc $I_X = [3; 13]$.

L'intervalle de fluctuation de la fréquence $F = \frac{X}{14}$ est donc

$$I_F = \left[\frac{3}{14}; \frac{13}{14} \right].$$

Exercices Entraînement

63 Soit F la variable aléatoire donnant le nombre de fois où la face 1 est sortie à l'issue des cinq lancers de dés. On peut imaginer la situation avec un arbre pondéré de 5 niveaux, la probabilité du Succès (celle de F) est $p = \frac{1}{6}$.

La probabilité d'obtenir au moins une fois le 1 est donc $P(F \geq 1) = 1 - P(F = 0) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^5 = 0,598$.

Soit A la variable aléatoire donnant le nombre de fois où on tire un As à l'issue des sept tirages. On peut imaginer la situation avec un arbre pondéré de 7 niveaux, la probabilité du Succès (celle de A) est $p = \frac{1}{8}$.

La probabilité d'obtenir au moins une fois un As est donc :

$$P(A \geq 1) = 1 - P(A = 0) = 1 - \left(\frac{7}{8}\right)^7 \approx 0,607$$

Il vaut mieux choisir le jeu de cartes pour augmenter les chances de gagner.

68 Graphique ① : $\mathcal{B}(10; 0,4)$ Graphique ② : $\mathcal{B}(15; 0,6)$

Graphique ③ : $\mathcal{B}(20; 0,4)$ Graphique ④ : $\mathcal{B}(20; 0,8)$

Thème 9

Méthode

2 1. D'après l'énoncé, le temps d'attente moyen est 3 minutes, soit $E(T) = 3$. Donc, en notant $p > 0$ le paramètre de la loi géométrique suivie par T , $\frac{1}{p} = 3$ d'où $p = \frac{1}{3}$.

2. $P(1 \leq T \leq 3) = P(T = 1) + P(T = 2) + P(T = 3)$

Soit $P(1 \leq T \leq 3) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2$

Donc $P(1 \leq T \leq 3) = \frac{19}{27} \approx 0,7$.

3. $P(T > 5) = 1 - P(T \leq 5) = 1 - P(1 \leq T \leq 5)$

Or $P(1 \leq T \leq 5) = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^4 \right)$.

En reconnaissant la somme des cinq premiers termes d'une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$, on obtient :

$$P(1 \leq T \leq 5) = \frac{1}{3} \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^5}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{211}{243}$$

Ainsi, $P(T > 5) = 1 - \frac{211}{243} = \frac{32}{243} \approx 0,13$.

4 1. X est une variable aléatoire à densité définie sur $[0; 10]$ donc $P(0 \leq X \leq 10) = 1$.

2. L'aire de la partie du plan hachurée en orange s'interprète par $P(0 \leq X \leq 4) = 0,03$ et celle hachurée en vert par $P(8 \leq X \leq 10) = 0,5$.

3. $P(4 < X < 8) = 1 - P(0 \leq X \leq 4) - P(8 \leq X \leq 10) = 1 - 0,03 - 0,5 = 0,47$

$P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - P(0 \leq X \leq 4) = 0,97$

$P(X \leq 8) = 1 - P(X > 8) = 1 - P(8 \leq X \leq 10) = 0,5$

8 X suit une loi uniforme sur l'intervalle $[0; 90]$.

1. $P(X > 30) = \frac{90 - 30}{90} = \frac{60}{90} = \frac{2}{3}$ 2. $P(X < 70) = \frac{70}{90} = \frac{7}{9}$

3. $E(X) = \frac{0 + 90}{2} = 45$.

En moyenne, le courrier est remis à l'entreprise à 9 h 45.

10 1. D'après l'énoncé, $E(X) = 10$ donc $\frac{1}{\lambda} = 10$.

On en déduit que $\lambda = 0,1$.

2. $P(10 \leq X \leq 20) = e^{-0,1 \times 10} - e^{-0,1 \times 20} = 0,2325$

3. $P_{(X > 10)}(X \geq 20) = P_{(X \geq 10)}(X \geq 10 + 10) = P(X \geq 10)$ d'après la propriété de loi sans mémoire suivie de la loi exponentielle. Ainsi $P_{(X > 10)}(X \geq 20) = e^{-0,1 \times 10} = 0,3679$.

J'évalue mes connaissances

QCM

1. b 2. a 3. a et c 4. c 5. b et c
6. c 7. b 8. a 9. c 10. c 11. b

vrai

ou faux ?

Partie A.

1. Vrai. On considère la variable aléatoire X qui, aux lancers successifs du dé, associe le rang d'apparition du premier six. X suit une loi géométrique de paramètre $p = \frac{1}{6}$. Donc $E(X) = \frac{1}{p} = 6$.

2. Faux. En notant D la durée, en heure, du trajet d'un salarié, on a $P(0,25 \leq D \leq 0,3) = \frac{0,3 - 0,25}{1} = 0,05$.

3. Faux. On note T la durée de vie, en heure, d'un transistor avant sa première panne.

On a $E(T) = \frac{1}{0,0005} = 2000$.

Partie B.

1. Vrai. On note X le rang du premier tir réussi. X suit une loi géométrique de paramètre 0,1. D'après la propriété d'absence de mémoire de la loi géométrique, on a :

$$P_{(X > 4)}(X > 5) = P(X > 1) = 1 - P(X = 1) = 0,9$$

2. Faux. T suit une loi exponentielle ayant la propriété d'absence de mémoire. Donc :

$$P_{(T \geq 15)}(T \leq 15 + 5) = 1 - P_{(T \geq 15)}(T > 20) \\ = 1 - P(T > 5) = P(T \leq 5)$$

3. Faux. Soit X la variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[-3; 6]$.

$$P_{(X > 0)}(X \leq 3) = \frac{P(0 \leq X \leq 3)}{P(X \geq 0)} = \frac{3 - 0}{6 - (-3)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Exercices Application

43. $P(X = k) \leq 0,01 \Leftrightarrow 0,3 \times (1 - 0,3)^{k-1} \leq 0,01$

$$\Leftrightarrow 0,7^{k-1} \leq \frac{0,01}{0,3} \Leftrightarrow (k-1)\ln 0,7 \leq \ln \frac{1}{30}$$

$$\Leftrightarrow k \leq \frac{\ln \frac{1}{30}}{\ln 0,7} + 1$$

Les solutions sont les entiers de l'intervalle $[1; 10]$.

48. 1. f est une fonction de densité sur $[1; 5]$ si $\int_1^5 f(x) dx = 1$.

$$\text{Or } \int_1^5 f(x) dx = \left[-\frac{k}{x} \right]_1^5 = -\frac{k}{5} - \left(-\frac{k}{1} \right) = \frac{4}{5}k$$

$$\text{On en déduit } \int_1^5 f(x) dx = 1 \Leftrightarrow \frac{4}{5}k = 1 \Leftrightarrow k = \frac{5}{4}$$

$$\text{Pour tout réel } x \text{ de } [1; 5], f(x) = \frac{5}{4x^2}.$$

2. Une primitive de f sur $[1; 5]$ est la fonction $x \mapsto -\frac{5}{4x}$.

$$a. P(X \leq 3) = \int_1^3 f(x) dx = \left[-\frac{5}{4x} \right]_1^3 = -\frac{5}{12} + \frac{5}{4} = \frac{5}{6}$$

$$b. P(X \geq 2) = \int_2^5 f(x) dx = \left[-\frac{5}{4x} \right]_2^5 = \frac{3}{8}$$

$$c. P(2 < X \leq 4) = \int_2^4 f(x) dx = \left[-\frac{5}{4x} \right]_2^4 = \frac{5}{16}$$

$$3. \text{On a } E(X) = \int_1^5 x f(x) dx = \int_1^5 \frac{5}{4x} dx = \left[\frac{5}{4} \ln x \right]_1^5 = \frac{5}{4} \ln 5$$

50. 1. Faux. $P(X \in [0,1; 0,6]) = \frac{0,6 - 0,1}{1 - 0} = 0,5$

2. Vrai. $P(X < 75) = \frac{75 - 0}{100 - 0} = 0,75$ et

$$P(X > 25) = \frac{100 - 25}{100 - 0} = 0,75$$

3. Vrai. $E(X) = \frac{80 + 20}{2} = 50$

56. 1. Faux. Pour tout réel t positif, $f(t) = 0,01e^{-0,01t}$.

2. Faux. Pour tout réel t positif :

$$P(Y \geq t) = 1 - P(Y < t) \\ = 1 - \int_0^t f(x) dx = 1 - \left[-e^{-0,01x} \right]_0^t \\ = 1 - (-e^{-0,01t} + 1) = e^{-0,01t}$$

3. Faux. $P(Y \leq 3 \times 60) = 1 - e^{-1,80 \times 0,01} \approx 0,83$

4. Vrai. $P(Y \geq 60) = e^{-0,01 \times 60} \approx 0,55 > 0,5$

Exercices Entraînement

70. 1. On a $P(Y \leq 1) = 1 - e^{-\lambda}$.

Et d'après l'énoncé, on a $P(Y \leq 1) = 0,12$.

Il faut donc résoudre l'équation $1 - e^{-\lambda} = 0,12$.

Soit $e^{-\lambda} = 0,88 \Leftrightarrow \lambda = -\ln 0,88$.

2. $P(Y > 3) = e^{-3\lambda} = e^{-0,384} \approx 0,681$

3. La probabilité cherchée est $P_{(Y > 1)}(Y > 4)$, or d'après la propriété d'absence de mémoire de la loi exponentielle, on a :

$$P_{(Y > 1)}(Y > 4) = P_{(Y > 1)}(Y > 1 + 3) = P(Y > 3)$$

En reprenant le résultat obtenu à la question précédente, $P_{(Y > 1)}(Y > 4) = e^{-0,384}$.

Thème 10

Méthode

2. 1. Le point moyen a pour coordonnées $(6; 4,2)$.

2. Le point moyen a pour coordonnées $(15; 4,5)$.

3. Le point moyen a pour coordonnées $(350; 3,8)$.

4. Le point moyen a pour coordonnées $\left(\frac{51}{14}; \frac{330}{7}\right)$.

3. 1. $a \approx 1,28$; $b = 0,8$ et $r \approx 0,97$.

2. $a \approx 10,9$; $b = 51,1$ et $r = 0,95$.

3. $a \approx -0,14$; $b = 59,88$ et $r \approx -0,976$.

4. 1. $y = 0,48x + 1,94$

2. Comme $r \approx 0,992$, très proche de 1, l'ajustement affine précédent est adapté.

3. a. La production en 2022 est estimée à :

$$0,48 \times 7 + 1,94 = 5,3 \text{ tonnes}$$

b. $0,48x + 1,94 > 7 \Leftrightarrow x > \frac{253}{24}$. Comme $\frac{253}{24} \approx 10,5$, la production dépassera 7 tonnes à partir de $2015 + 11 = 2026$.

J'évalue mes connaissances

QCM

1. a 2. b 3. b 4. a 5. c

6. a 7. c 8. b et c 9. b et c

Vrai ou faux ?

Partie A. 1. Faux 2. Vrai 3. Vrai 4. Faux

Partie B. 1. Vrai 2. Faux 3. Faux 4. Vrai 5. Vrai

Exercices Application

36. 1. La série A est représentée par le nuage 2 ; la série B est représentée par le nuage 3 ; la série C est représentée par le nuage 1 et la série D est représentée par le nuage 4.

2. On peut envisager un ajustement affine seulement pour les séries C et D, car les points des nuages sont presque alignés.

| 38 | Série A | Série B | Série C | Série D |
|-------------|-----------------------------------|------------|-----------------------------------|----------------------------------|
| Point moyen | $\left(3,5; \frac{11}{12}\right)$ | $(40; 32)$ | $\left(0,45; \frac{7}{12}\right)$ | $\left(\frac{8}{3}; 2,75\right)$ |

40. 1. La droite des points extrêmes est d_3 et la droite de Mayer est d_4 . Donc la droite des moindres carrés est d_2 .

2. a. Le coefficient directeur de la droite de Mayer (AF) est :

$$\frac{y_F - y_A}{x_F - x_A} = \frac{2 - 3}{6 - 1} = -0,2$$

L'ordonnée à l'origine est $y_A - (-0,2) \times x_A = 3 + 0,2 \times 1 = 3,2$.

Donc (AF) : $y = -0,2x + 3,2$.

b. Le point moyen G_1 des 3 premiers points du nuage a pour coordonnées $\left(\frac{1+2+3}{3}; \frac{3+2+7}{3}\right) = (2; 4)$.

De même, le point moyen G_2 des 3 derniers points du nuage a pour coordonnées $(5; 2)$.

La droite (G_1G_2) admet :

- pour coefficient directeur $\frac{2-4}{5-2} = -\frac{2}{3}$;
- pour ordonnée à l'origine $4 - \left(-\frac{2}{3}\right) \times 2 = \frac{16}{3}$.

Donc (G_1G_2) : $y = -\frac{2}{3}x + \frac{16}{3}$.

c. Comme $\bar{x} = 3,5$ et $\bar{y} = 3$, on peut construire le tableau suivant.

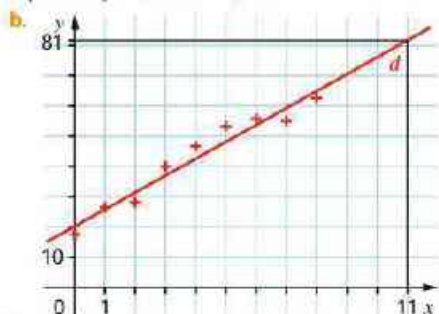
| | | | | | | | |
|-----------------------|------|------|------|------|------|------|-------|
| x_i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | |
| y_i | 3 | 2 | 7 | 4 | 0 | 2 | |
| $X_i = x_i - \bar{x}$ | -2,5 | -1,5 | -0,5 | 0,5 | 1,5 | 2,5 | |
| $Y_i = y_i - \bar{y}$ | 0 | -1 | 4 | 1 | -3 | -1 | Somme |
| $X_i \times Y_i$ | 0 | 1,5 | -2 | 0,5 | -4,5 | -2,5 | -7 |
| $(X_i)^2$ | 6,25 | 2,25 | 0,25 | 0,25 | 2,25 | 6,25 | 17,5 |
| $(Y_i)^2$ | 0 | 1 | 16 | 1 | 9 | 1 | 28 |

Alors $a = \frac{-7}{17,5} = -0,4$ et $b = 3 - (-0,4) \times 3,5 = 4,4$.

Donc d_2 : $y = -0,4x + 4,4$.

45 1. Voir graphique ci-dessous.

2. a. La droite d'ajustement par les moindres carrés admet pour équation $y = 5,56x + 20,56$.



3. a. En 2020, on estime que la proportion des plus de 15 ans qui se connectent à l'Internet mobile est environ 81 %.

b. Pour $x = 11$, $y = 5,56 \times 11 + 20,56 = 81,72$. On retrouve le résultat précédent.

4. L'ajustement ne reste pas valable sur le long terme, car la proportion ne peut pas dépasser 100 %.

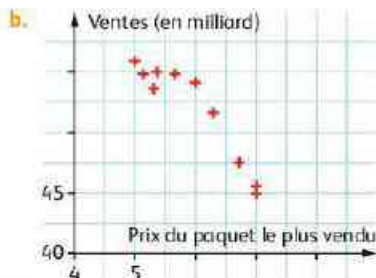
Exercices Entraînement

47 1. Les quantités étudiées sont les ventes de cigarettes et le prix du paquet le plus vendu.

On peut choisir pour X le prix du paquet le plus vendu, et pour Y les ventes de cigarettes associées.

2. a. On obtient :

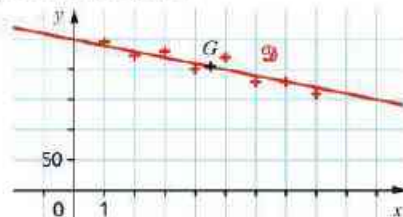
| | | | | | | |
|---------------------------|------|------|------|------|------|------|
| Prix x_i (en €) | 5 | 5,13 | 5,3 | 5,35 | 5,65 | 5,98 |
| Vente y_i (en milliard) | 55,8 | 54,9 | 53,6 | 55 | 54,8 | 54,1 |
| Prix x_i (en €) | 6,3 | 6,7 | 7 | 7 | 7 | |
| Vente y_i (en milliard) | 51,5 | 47,5 | 45 | 45,5 | 44,9 | |



3. Les points du nuage sont presque alignés : on peut dire que les données sont corrélées.

Ici, on peut dire qu'il existe un lien de cause à effet entre le prix d'un paquet de cigarettes et les ventes.

50 1. 2. et 3. b.

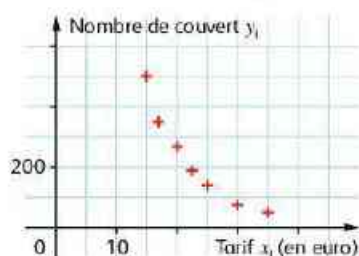


2. $G(4,5; 205)$.

3. a. On résout $205 = -10 \times 4,5 + b$. Donc $b = 250$.

4. Pour $x = 10$, $y = -10 \times 10 + 250 = 150$. On peut prévoir 150 milliers d'euros de chiffre d'affaires pour le 2^e trimestre 2019.

56 1.



Un ajustement affine ne semble pas adapté.

2. a.

| | | | | | | | |
|-------|------|------|------|------|------|------|------|
| x_i | 15 | 17 | 20 | 22,5 | 25 | 30 | 35 |
| z_i | 6,21 | 5,86 | 5,60 | 5,25 | 4,94 | 4,32 | 3,91 |

b. On obtient $z = -0,116x + 7,878$, avec $r \approx -0,997$.

Cet ajustement affine est adapté.

c. Comme $z = \ln(y)$, on a $\ln(y) = -0,116x + 7,878$.

Donc $y = e^{-0,116x + 7,878} = e^{7,878} \times e^{-0,116x}$.

Or $e^{7,878} \approx 2639$. Donc la fonction f définie sur $[15; 35]$ par $f(x) = 2639 \times e^{-0,116x}$ permet de modéliser la situation.

3. On résout

$$f(x) \geq 100 \Leftrightarrow 2639 \times e^{-0,116x} \geq 100$$

$$\Leftrightarrow e^{-0,116x} \geq \frac{100}{2639} \Leftrightarrow -0,116x \geq \ln\left(\frac{100}{2639}\right)$$

$$\Leftrightarrow x \leq -\frac{1}{0,116} \ln\left(\frac{100}{2639}\right)$$

$$\text{Or } -\frac{1}{0,116} \ln\left(\frac{100}{2639}\right) \approx 28,215.$$

En arrondissant au centime, le prix maximum du buffet est 28,21 euros.

Abel

Niels
1802 – 1829 (Norvège)

Sur son bulletin scolaire, on peut lire l'appréciation : « À l'excellence de son intelligence s'unit une passion et un intérêt insatiables pour la mathématique, si bien qu'à n'en pas douter, s'il lui est donné de vivre, il deviendra probablement un très grand mathématicien. »



Suites

Briggs

Henry
1561 – 1630 (Angleterre)

En 1614, Briggs lit le livre (écrit en latin) de Napier traitant des logarithmes. Il écrivit plus tard (au sujet de Napier) : « J'espère le voir cet été, si cela plaît à Dieu, car je n'ai jamais vu un livre qui me fit plus plaisir ou me rende plus émerveillé. »



Logarithme

Erdős

Paul
1913 – 1996 (Hongrie)

Erdős aimait poser des problèmes : conjectures faciles à écrire, mais difficiles à démontrer. Mathématicien itinérant, il a eu de nombreux collaborateurs : le nombre d'Erdős est une illustration du « petit monde ». Einstein a le nombre 2.



Théorie des nombres

Fermat (de)

Pierre
1601 – 1665 (France)

« Pour x, y et z entier, si $n > 2$, l'équation $x^n + y^n = z^n$ n'a pas de solutions ». Fermat écrit : « J'en ai découvert une démonstration merveilleuse, mais je n'ai pas la place de la mettre dans la marge. » La démonstration d'Andrew Wiles (en 1994) compte plus de 1 000 pages !



Probabilités

Itô

Kiyoshi
1915 – 2008 (Japon)

« The beauty in mathematical structures, however, cannot be appreciated without understanding of a group of numerical formulae that express laws of logic. Only mathematicians can read 'musical scores' containing many numerical formulae, and play that 'music' in their hearts. »



Modèles stochastiques

Jacotin (Dubreil)

Marie-Louise
1905 – 1972 (France)

Sa thèse portait sur la mécanique des fluides, suite à sa rencontre avec Emmy Noether elle travailla sur des problèmes d'algèbre. À la demande de François Le Lionnais, elle rédige un chapitre consacré à la place des femmes dans les sciences pour le livre *Les Grands Courants de la pensée mathématique*.



Algèbre

Moivre (De)

Abraham
1667 – 1754
(France – Angleterre)

Une légende entoure la mort de de Moivre (27 novembre 1754) : il se serait rendu compte qu'il dormait chaque nuit $\frac{1}{4}$ d'heure supplémentaire. S'aidant de cette suite, il aurait deviné le jour de sa mort : celui où il dormirait pendant 24 heures. Il ne s'était pas trompé !



Loi binomiale

Noether

Emmy
1882 – 1935 (Allemagne – USA)

Pionnière dans un milieu masculin où la place de la femme est résumée par le trio *Kinder, Küche und Kirche*, Emmy Noether est souvent considérée comme « la mère de l'algèbre moderne ». Humble, elle a souvent laissé la paternité de ses découvertes à ses étudiants : les *Noether's boys*.



Géométrie algébrique

Castelnuovo

Emma

1913 – 2014 (Italie)

Le 7 mars 2009, le président italien lui décerne le titre de *Grande Ufficiale* « pour la passion et l'engagement déployés dans son travail ». Cinquante ans d'enseignement des mathématiques lui ont permis d'élaborer des propositions didactiques innovantes.



Enseignement

Diophante

200 – 284 (Égypte)

Épitaphe de Diophante: « L'enfance de Diophante occupa $\frac{1}{6}$ de toute sa vie, $\frac{1}{12}$ fut pris par son adolescence. Après une nouvelle période équivalente à $\frac{1}{7}$ de sa vie, il se maria. Cinq ans plus tard, il eut un fils. La vie de ce fils fut exactement une demié de celle de son père. Diophante mourut 4 ans après la mort de son fils. »



Équation

Galton

Francis

1822 – 1911 (Angleterre)

Cousin de Darwin, il est considéré comme le fondateur de l'eugénisme. Il se base sur des études statistiques pour défendre ses concepts de race inférieure et supérieure... Hétéroclite, il découvre les empreintes digitales et introduit le coefficient de corrélation en statistiques.



Statistiques

Huygens

Christiaan

1629 – 1695 (Pays-Bas)

Grand ami de Colbert, il participe sous Louis XIV à la création de l'Académie des sciences. Mathématicien incontournable du XVII^e siècle, il fut aussi un grand physicien. Il étudie le mouvement du pendule et on lui doit, entre autres, l'invention de l'horloge à balancier.



Espérance mathématique

Kolmogorov

Andreï

1903 – 1987 (Russie)

Comme Euclide pour la géométrie ou Hilbert pour l'analyse, on lui doit d'avoir posé les fondements modernes de la théorie des probabilités. Enseignant émérite, il participa à l'élaboration de nouveaux programmes sous l'empire soviétique.



Probabilités

Leibniz

Gottfried

1646 – 1716 (Allemagne)

Dans *Novissima Sinica*, en 1697, Leibniz définit l'Eurasie: « La Providence a-t-elle commandé un tel ordonnement afin que les peuples les plus cultivés et distants étendent leurs bras l'un vers l'autre, pour que ceux qui se trouvent entre les deux puissent graduellement être amenés à une meilleure vie? »



Dérivée

Oleinik

Olga

1925 – 2001 (Russie)

Auteur (unique ou en collaboration) de plus de 370 articles, elle reçoit en 1996 le prix *Noether Lecture* par l'*Association for Women in Mathematics (AWM)* qui récompense chaque année des femmes qui ont apporté des contributions décisives aux mathématiques.



Equations différentielles

Perelman

Grigori

1966 (Russie)

Il est connu comme « le génie qui a refusé un million de dollars ». En 2003, il a démontré la célèbre conjecture de Poincaré. Il a pour cela obtenu la médaille Fields qu'il a refusée. La conjecture faisait partie des 7 problèmes à \$1 000 000 proposés par le *Clay Institute*: il a aussi refusé.



Démonstration

Quine

Willard

1908 – 2000 (USA)

À la fin du XIX^e siècle, Cantor crée « la théorie des ensembles », une nouvelle branche des mathématiques. Suite à la découverte de certains paradoxes, Russell créa une axiomatique basée sur la théorie des types que Quine simplifia par la suite.



Logique

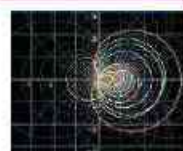
Riemann

G. F. Bernhard

1826 – 1866

(Allemagne – Italie)

En 1859, il définit la fonction zêta pour étudier la répartition des nombres premiers. L'hypothèse sur les zéros non triviaux de la fonction zêta, formulée dans cet article, n'est toujours pas démontrée et fait partie des 23 problèmes de Hilbert ainsi que des 7 problèmes du millénaire.



Intégration

Sullivan

Raymond

1919 – 2017 (USA)

Logicien et mathématicien états-unien, il écrit des livres d'énigmes logiques, dont *Quel est le titre de ce livre ?* qui emmène le lecteur jusqu'au théorème d'incomplétude de Gödel ; il s'intéresse aussi à la « logique rétrograde » dans *Mystères sur échiquier avec Sherlock Holmes*.



Logique

Thompson

Abigail

1958 (USA)

Célèbre pour ses travaux sur la théorie des nœuds, elle est membre de l'AMS (American Mathematical Society) depuis 2001. Choquée par la vacuité de l'enseignement des mathématiques dans le primaire et le secondaire, elle participe à la réforme des enseignements et à la formation des enseignants.



Théorie des nœuds

Uhlenbeck

Karen

1942 (USA)

« On m'a dit, lorsque je cherchais un emploi après mon année au MIT et deux ans à Berkeley, que les gens n'engageaient pas de femmes, que les femmes étaient censées rentrer chez elles et avoir des bébés. C'était les années 1970... En 2019, elle devient la première femme récompensée du prix Abel.



Dérivées

Viète

François

1540 – 1603 (France)

En 1593, le mathématicien Adriaan Van Roomen lança un défi : $x^{25} - 45x^{20} + 975x^{15} + \dots - 3795x^3 + 45 = K$. L'ambassadeur des Pays-Bas prétendit qu'aucun français n'en était capable ! Henri IV chargea Viète de défendre l'honneur de la France : il trouva les 23 racines positives de cette équation !



Calcul littéral

Wronski (Hoëné)

Josef

1776 – 1853 (Pologne – France)

Il pense que la philosophie prime sur les preuves mathématiques rigoureuses... En 1812, il définit le déterminant qui porte son nom : le « wronskien », qui est utilisé dans la résolution des équations différentielles linéaires.



Équation différentielle

Xiaotong

Wang

580 – 640 (Chine)

Très jeune, il lit les *Neuf chapitres sur l'art mathématique*. Sa contribution majeure a été le *Jigu Suanjing* (« Continuation des anciennes mathématiques ») qui devient un texte pour les examens impériaux. On y trouve, entre autres, les méthodes de résolution de 25 équations cubiques de la forme $ax^3 + px^2 + qx = N$.



Arithmétique

Yoccoz

Jean-Christophe

1957 – 2016 (France)

Leader mondial de la théorie des systèmes dynamiques qui cherchent à décrire le mouvement sur le long terme. Par exemple : comprendre si le système solaire est stable ; si une planète pourrait en être éjectée soudainement. Il reçoit la médaille Fields en 1994.



Équation différentielle

Zermelo

Ernst

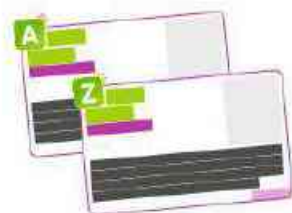
1871 – 1953 (Allemagne)

En 1908, il construit un système d'axiomes (proposition non démontrée, une vérité de base) pour la théorie des ensembles. Parmi ces axiomes, il inclut « l'axiome de choix » dont l'acceptation reste controversée.



Théorie des ensembles

26 mathématicien(ne)s de Abel à Zermelo



26 cartes pour jouer, chercher, préparer un oral,
découvrir des hommes et des femmes

Avec des canettes, Emma Castelnuovo a fait réaliser à ses élèves une figure célèbre, laquelle ?

L'épithaphe de Diophante permet-elle vraiment de calculer son âge à sa mort ?

Que signifie l'expression « *Kinder, Küche, Kirche* » qui résume la place de la femme dans la société allemande à l'époque d'Emmy Noether ?

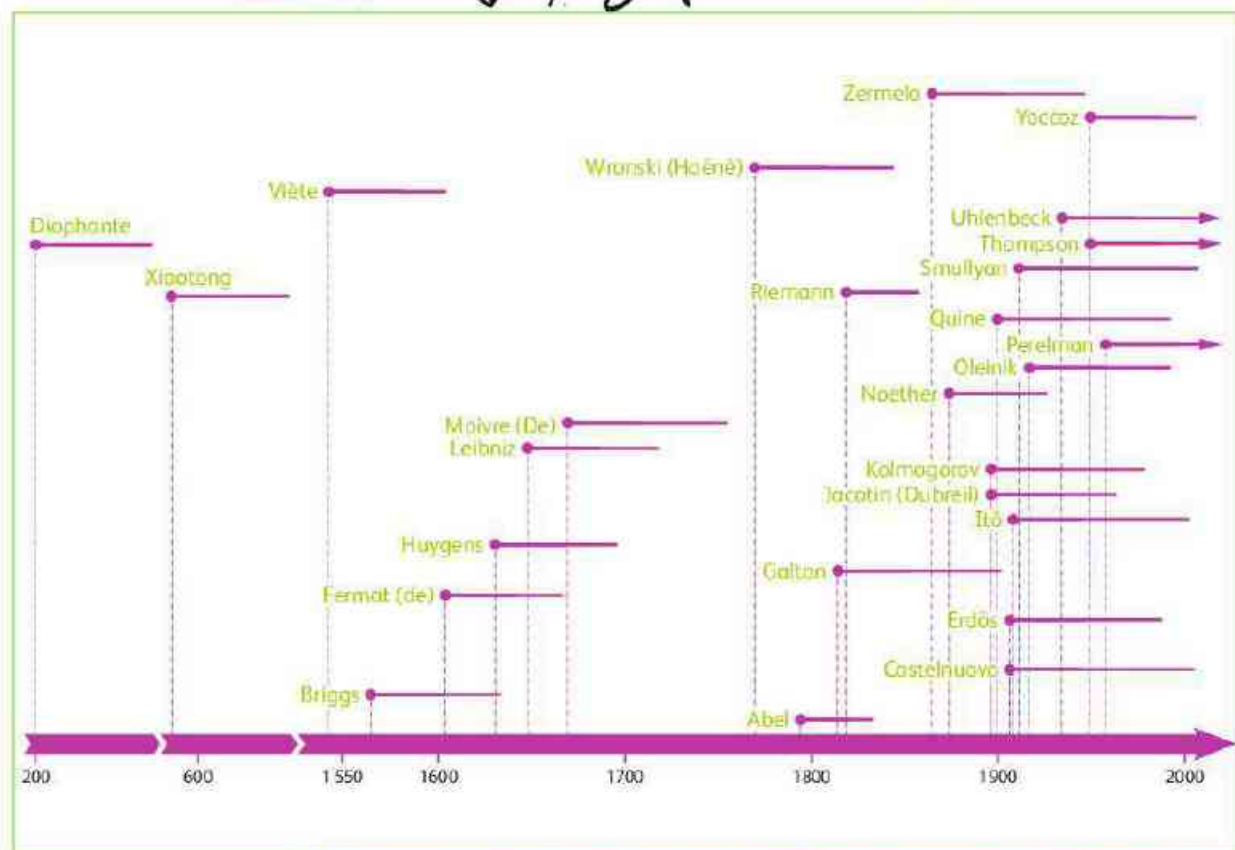
La médaille Fields est décernée tous les quatre ans à un mathématicien de moins de quarante ans pour récompenser ses travaux. Il y a au moins un homme de cet abécédaire qui a été honoré par cette distinction.

Quels sont les deux peuples les « plus cultivés » dont parle Leibniz quand il définit l'Eurasie ?

Quel est le mathématicien qui a refusé un prix d'un million de dollars ?

Quel jour Abraham De Moivre a-t-il effectué le calcul donnant la date de sa mort ?

Une rue de Paris porte son nom : qui est-ce ?



Décllic T^{le} Maths COMPLÉMENTAIRES

Programme 2020

Un manuel organisé autour des thèmes du programme

Accès libre Mon manuel toujours accessible en ligne sur mesmanuels.fr/4606019

Le manuel numérique Premium

Fini les sacs trop lourds !

- avec
- Des vidéos pour mieux comprendre
 - Des QCM interactifs pour s'auto-évaluer
 - Tous les fichiers logiciels

En vente sur www.kiosque-edu.com/familles



Ressources en +

Les ressources numériques de mon manuel en accès direct

- Avec les QR Codes dans le manuel
- Sur le site collection www.lycee.hachette-education.com/declic/tle-compl



Un accès gratuit à la plateforme d'exercices Décllic

De nombreux exercices interactifs, pour réviser les notions de 2^{de} et 1^{re}

<https://declic.reussirenmaths.fr/tle-compl>



35 1407 8

ISBN 978-2-0178-6615-2



9 782017 866152

hachette
ÉDUCATION

www.hachette-education.com