Maman Sani Boubé / Rabiou Ousman

MATHÉMATIQUES TERMINALE D

$$\begin{cases} \cos\theta \quad \dfrac{1}{2} \\ \sin\theta \quad \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{soit} \quad \theta \quad \frac{\pi}{3}\,(2\pi)$$

Epreuves et corrigées Bac Niger

EXAM

…man Sani Boubé

Rabiou Ousman

MATHEMATIQUES TERMINALE D

ÉPREUVES ET CORRIGÉS BAC NIGER 1983- 2004

ÉDITIONS ALPHA

MSKOH - AM

Maquette et composition
Abba Mahmoudou

Editions Alpha Mars 2005

ISBN : 2284551-050-0
Deuxième Edition

Préface

MSKOH est la formule désormais célèbre créée par le Pr Abdou Moumouni pour que chacun se mette honnêtement et résolument au travail. Elle est traduite dans la langue courante par la devise « aime, souffre et potasse. »

Cette invite au travail d'abord et au travail bien fait dans la modestie et dans l'humilité prend tout son sens aujourd'hui quand on sait que les résultats des élèves en classe et aux différents examens de fin d'année sont de plus en plus médiocres.

Les Editions Alpha ont voulu amener leur contribution au rehaussement du niveau des élèves en les accompagnant aussi bien dans les classes d'examens que dans les classes intermédiaires. C'est la raison pour laquelle elles ont pensé à cette collection en puisant dans l'héritage du Pr Abdou Moumouni la fameuse formule qui propose l'amour du travail bien fait dans l'honnêteté et dans la douleur de l'apport personnel.

Parce que le succès scolaire se bâtit dans le travail méthodique sans tricherie, les Editions Alpha proposent aux élèves d'accepter de se faire violence en respectant la démarche proposée dans les annales d'épreuves et solutions ainsi que dans les livres d'exercices et solutions avec quelques brefs rappels de cours.

Les annales sont des ouvrages d'appui aux apprentissages en classe. Elles s'utilisent individuellement ou collectivement. Elles aident à mieux diriger l'élève pour la résolution des exercices et des problèmes qui lui sont proposés.

Les livres de rappels de cours présentent, de manière condensée, chaque leçon vue en classe afin que l'élève s'approprie rapidement les formules et l'essentiel théorique dont il va se servir pour traiter les épreuves qui lui sont soumises.

Tout naturellement, les solutions sont disponibles pour permettre à l'élève de comprendre ses points faibles et ses points forts. Elles ne doivent être consultées que quand l'élève a suffisamment «potassé» et qu'il (elle) n'est pas arrivé(e) à trouver la solution de lui (elle)-même. Regarder la solution permet également de départager le groupe de travail quand il y a des discussions sur les résultats : c'est alors le chemin de la vérification.

Il reste que seule une utilisation honnête des ouvrages lui garantira la compréhension dans les différentes matières ainsi que le succès en classe et ou aux examens.

L'éditeur

ÉPREUVES

Session de juin 1983

Exercice N°1

Soit F la transformation du plan affine P associée à l'application f définie de la manière suivante :

$$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$
$$z \mapsto z' = \frac{1}{2}(1-i)z + \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$$

1°) Donner la nature et les éléments caractéristiques de la transformation F.

2°) On considère une suite de points $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ du plan tels que $M_n = F(M_{n-1})$

a) Donner une construction géométrique du point $M_2 = F(M_1)$ tel que $M_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$. Prendre pour unité 2 cm.

b) Calculer les coordonnées du point M_0.

c) Donner la nature de la transformation $F^4 = FoFoFoF$ et en déduire les coordonnées du points M_4.

Exercice N°2

Au Niger, une conférence réunit 12 commerçants. Tous parlent haoussa, 5 parlent foulfouldé, 6 parlent zarma et 3 foulfouldé et zarma.

On choisit au hasard et simultanément 3 personnes.

Chaque groupe de 3 personnes a la même probabilité d'être choisi.

1°) a) Quelle est la probabilité pour que ces 3 personnes parlent au moins une autre langue que le haoussa ?

b) Quelle est la probabilité pour que ces 3 personnes ne parlent que le haoussa ?

2°) Soit X la variable aléatoire qui à chaque groupe de 3 personnes associe le nombre de personnes parlant foulfouldé et zarma.

a) Déterminer la loi de probabilité de X .
b) Calculer la probabilité pour qu'il ait au moins 2 personnes parlant foulfouldé et zarma.

N.B. Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles

Problème

1 . Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$\forall\ x > 0\ ,\ f(x) = xe^{-\frac{1}{x}}$$

$$f(0) = 0$$

$$\forall\ x < 0\ , f(x)\ =\ -xLog|x|$$

1°) La fonction f est-elle continue, dérivable au point $x_0 = 0$?

La fonction f est –elle continue sur $\mathbb{R}$?

2°) Etudier les variations de la fonction f .

3°) Soit (C) le graphe de f dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ avec $\left\|\vec{i}\right\| = \left\|\vec{j}\right\| = 2cm$

a) Démontrer que la droite d'équation $y = x-1$ est asymptote à la courbe (C) quand x tend vers $+\infty$.
Que se passe-t-il quand x tend vers $-\infty$?
b) Donner les équations des demi-tangentes à la courbe (C) au point O d'abscisse $x_0 = 0$.
c) Soit A le point d'intersection de la courbe (C) et de l'axe xox', différent du point O.
Donner l'équation de la tangente en A à (C).
d) Construire le graphe (C) de f .

II. Soit E le domaine défini par $\begin{cases} -1 \leq x \leq 0 \\ f(x) \leq y \leq 0 \end{cases}$

Nous nous proposons de calculer l'aire $A(E)$ de ce domaine.

1°) Pour cela, calculer auparavant l'aire du domaine E_λ défini par :

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq \lambda \\ f(x) \leq y \leq 0 \end{cases} \quad \text{avec } -1 \leq \lambda < 0.$$

2°) En déduire l'aire $A(E)$.

III Soit un point matériel M en mouvement dans le plan rapporté au repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ dont la position à l'instant t est définie

$$\text{par : } \begin{cases} x = -\dfrac{1}{Logt} \\ y = -\dfrac{t}{Logt} \end{cases} \quad t \in \left]0, 1\right[$$

1°) Que fait le point M lorsque t tend vers 0 ?
Au temps $t = 0$, on suppose donc que le point M est en $O(0.0)$

2°) Démontrer que pour $t \in \left[0, 1\right[$, la trajectoire (Γ) du point M est une partie du graphe (C) que l'on précisera.

3°) Déterminer le vecteur vitesse $\vec{V}(t)$ à l'instant t et construire le vecteur $\vec{V}_1$ au point $t_1 = \dfrac{1}{e}$

4°) Donner l'équation de la tangente D en M_1 à (Γ) à la date t_1.

Session de juin 1984

Exercice N°1

Dans un sac, on met un jeton portant le numéro 1, deux jetons portant le numero 2, trois jetons portant le numéro 3, …, n jetons portant le numéro n.

1°) Déterminer que la somme de n premiers entiers naturels non nuls est égale à $\frac{n(n+1)}{2}$. En déduire le nombre de jetons que l'on a mis dans le sac.
2°) On suppose que les jetons sont indiscernables au toucher et on tire au hasard un jeton du sac. Soit k un entier naturel non nul inférieur ou égal à n.
Quelle est, en fonction de n et de k, la probabilité de tirer un jeton dont le numéro soit inférieur ou égal à k ?
3°) On suppose que $n = 5$.
X est la variable aléatoire qui à un tirage fait correspondre le numéro du jeton tiré.
Définir et représenter graphique-ment la fonction de répartition de X.
Calculer l'espérance mathématique de X.

Exercice N°2

1°) A l'aide d'une intégration par parties, calculer :

$$I_n = \int_0^{2n} x e^{-x}\,dx\ ,\ n \in \mathbb{N}^*$$

et montrer que $I_n = 1 - (2n+1)e^{-2n}$.

2°) On pose $U_n = \frac{1}{2n+1}\left(1 - I_n\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on precisera le premier terme et la raison

c) Etudier le sens de variation de la suite (v_n).
La suite (v_n) est-elle convergente ?

3°) On pose $u_n = Log\, v_n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

Problème

I. Soit F la fonction définie de $\mathbb{C}-\{1\}$ dans $\mathbb{C}$ par $F(z) = \dfrac{z^2}{i(1-z)}$

1°) On pose $z = x + iy$; $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que la partie réelle de $F(z)$ est égale à $\dfrac{y(-x^2 - y^2 + 2x)}{(1-x)^2 + y^2}$. Déterminer la partie imaginaire de $F(z)$.

2°) Déterminer l'ensemble des points M du plan complexe d'affixe z tels que $F(z)$ soit imaginaire pur. Représenter cet ensemble

II. Soit la fonction définie par $f(x) = |x|\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

1°) Déterminer l'ensemble de définition de f

2°) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en $x = 0$ et en $x = 1$.

3°) Montrer que pour $x \in]-1\,;\,0[\,\cup\,]0\,;\,1[$,

$$f'(x) = |x|\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{1-x-x^2}{x(1-x^2)}$$

4°) a) Etudier les variations de f.

b) Déterminer les équations des demi-tangentes aux points d'abscisses 0 et 1, et de l'asymptote à la courbe (C) représentant la fonction de f

c) Construire (C) dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (unité : $2\ cm$).

5°) Déterminer l'ensemble H des points M d'affixe z tels que $F(z)$ soit réel. Déduire la représentation de H de la courbe (C).

III. Soit M un point mobile en mouvement dans le plan précédent dont les coordonnées à l'instant t sont telles que :

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t - tg\left(\dfrac{t}{2}\right) \end{cases} \quad , t \in [0, \pi[$$

1°) Déterminer la trajectoire de M. Représenter cette trajectoire. Préciser le sens de parcours de M sur cette trajectoire.
2°) Construire les représentants des vecteurs vitesse et accélération du point mobile M aux instants $t = 0$ et $t = \dfrac{\pi}{2}$
3°) Etudier la nature du mouvement.

Session de juin 1985 – Série D

Exercice N°1

Soit f le polynôme tel que, pour tout z complexe :

$$f(z) = z^3 - (7 + 9i)z^2 - (14 - 39i)z + 50$$

1°) Montrer que l'équation $f(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure que l'on déterminera.
2°) Résoudre l'équation $f(z) = 0$
3°) Soient A, B et C les points du plan euclidien, d'affixes respectives $2i$; $3 + 4i$ et $4 - 3i$.

a) Déterminer le barycentre G des points A, B et C affectés respectivement des coefficients 1 ; -1 et 1.

b) Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que : $MA^2 - MB^2 + MC^2 = 4$.

Exercice N°2

1°) Dresser le tableau de variation de la fonction f définie sur $[0 ; 1]$ par : $f(x) = x^6(1-x)^{94}$

Pour quelle valeur de x admet-elle un maximum ?

2°) On se propose d'estimer le nombre d'autruches N, inconnu mais bien défini et supérieur à 30, d'une réserve d'animaux. L'objet de l'exercice est de déterminer la valeur la plus probable de N en se basant sur les expériences suivantes

Dans un premier temps on captive au hasard et en différents endroits de la réserve, 30 autruches que l'on marque toutes et que l'on relâche

a) A supposer qu'ensuite on attrape une autruche, exprimer en fonction de N la probabilité p que cette autruche soit marquée.

En fait, quelques jours plus tard, on attrape successivement 100 autruches que l'on relâche chaque fois.

Soit X la variable aléatoire comptant le nombre d'autruches marquées sur les 100 capturées.

b) Déterminer la loi de probabilité de X et donner l'expression de $p(X = k)$ en fonction de p.

3°) Après avoir ainsi capturé 100 autruches on constate que 6 seulement étaient marquées.

En admettant que l'évènement "$X = 6$", qui est réalisé à l'expérience, est le plus probable des évènements "$X = k$", déterminer la valeur de N pour laquelle $P(X = 6)$ est maximale.

Problème

1. Soit u la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$u(x) = x^2 + Log\,|1-x|$$

1°) Donner l'ensemble de définition de u et étudier ses variations

2°) Construire la représentation graphique (U) de u dans un repère orthonormé $\left(O_1, \vec{i_1}, \vec{j_1}\right)$ d'unité 1 cm.

3°) Déduire de la question précédente que l'équation $u(x) = 0$ possède exactement deux solutions, l'une $x_0 = 0$ et l'autre x_1 strictement comprise entre 1 et 2.

On indique pour la suite du problème que $x_1 \approx 1,22$.

4°) Soit v la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$v(x) = -(x-1)^2 - Log|1-x|$$

Etudier le sens de variation de v et établir que pour tout x de $\mathbb{R} - \{1\}$:

$$v(x) \leq -\frac{1}{2}(1 + Log\, 2)$$

N.B : On ne demande pas d'étudier les limites de v aux bornes de son ensemble de définition.

II. Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x^2 + Log|1-x|}{1-x}$

et (C) sa représentation graphique dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ d'unité 2 cm.

1°) A l'aide des résultats de la partie I, étudier les variations de f.

2°) a) Montrer que la droite (D) : $y = -x - 1$ est asymptote à (C).

b) Donner une equation de l'autre asymptote à (C).

3°) Montrer que le point $I(1, -2)$ est centre de symetrie de la courbe.

4°)Déterminer une équation de la tangente (T_0) à (C) au point d'abscisse 0 puis une équation de la tangente (T_2) au point d'abscisse 2.

5°) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (C) et de l'asymptote (D).

6°) Tracer la représentation graphique (C) de f dans le repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. On donne : $\frac{1}{e} \approx 0,37$.

I. Soit m un réel supérieur à $1 + \frac{1}{e}$.

1°) Calculer l'intégrale : $I = \int_{1+\frac{1}{e}}^{m} \frac{Log(x-1)}{x-1}$

2°) Déduire de la question précédente l'aire $A(m)$ de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équation $x = 1 + \frac{1}{e}$ et $x = m$.

Calculer $A(e+1)$ et la limite de $A(m)$ lorsque m tend vers plus l'infini

Session de juin 1986

Exercice N°1

1°) Déterminer deux nombres complexes a et b tels que :
$a-b = 5-4i$, $ab = 3(1-3i)$ et $|a| > |b|$.
Mettre a sous forme trigonométrique.

2°) On considère dans le plan euclidien rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$,les points A, B, C et D d'affixes respectives a , $\frac{a^2}{18}$, b et b^2.

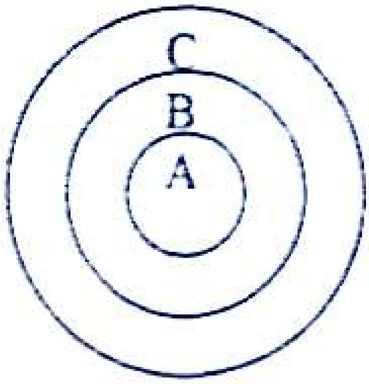
a) Déterminer les coordonnées du barycentre G des points A, B, C, D affectés des coefficients respectifs 1 ;-1 ;1 ;1.

b) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :
$MA^2 - MB^2 + MC^2 + MD^2 = k$ où k est un réel donné.
Discuter suivant les valeurs de k.

3°) Soit S la transformation géométrique qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = az + b$.
Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de S

Exercice N°2

La cible d'un jeu de fléchettes est constituée par trois cercles concentriques de rayons respectifs R, $2R$, $3R$.
On note A la partie centrale de la cible et B, C les anneaux entourant A



1°) Calculer, en fonction de R, les aires des parties A, B, C.
2°) Un joueur lance une fléchette vers la cible précédente. On admettra que la probabilité d'atteindre une des parties de la cible est proportionnelle à l'aire de cette partie. Soit p la probabilité d'atteindre la partie A de la cible.

a) Calculer, en fonction de p, les probabilités respectives d'atteindre les parties B et C.
b) On suppose que la probabilité d'atteindre une des parties de la cible est 0,75. En déduire la valeur de p.

3°) On suppose que les parties A, B, C sont affectees respectivement des points suivants : 100, 50, 25 points, un joueur n'atteignant pas la cible marquant 0 point.
Soit X la variable aléatoire qui exprime le nombre de points obtenus par un joueur lançant deux fléchettes.

a) Quelle est la loi de probabilité de X ?
b) Calculer l'espérance mathématique de X.

Problème

N.B : Dans tout le problème, la notation $\ln x$ désigne le logarithme népérien de x. On rappelle que $\ln 2 \simeq 0,69$.
A Soit f la fonction numérique à variable réelle x définie par

$f(x) = 2x^2 - 1 - \ln x.$

1°) Etudier les variations de f et tracer la courbe représentative de cette fonction dans un repère orthonormé (unité 2 cm)

2°) Déduire de cette représentation que $\forall x \in]0, +\infty[$, $f(x) > 0$

B. Soit g la fonction numérique à variable réelle x définie

par :
$$\begin{cases} g(x) = 2x + \dfrac{\ln|x|}{x} & \text{si } x \in]-\infty;0[\cup]0;+\infty[\\ g(0) = 0 \end{cases}$$

1°) Quel est le domaine de définition de g ? La fonction est-elle continue en $x = 0$? Est-elle dérivable en ce point ?

2°) Montrer que la fonction g est impaire et en déduire une propriété de la courbe (C) représentant ses variations.

3°) Calculer $g'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*_+$ et déduire de la partie A le sens de variation de g.

Etudier la limite de $g(x)$ quand $x \to +\infty$ et démontrer l'existence d'une asymptote oblique.

Préciser la position de (C) par rapport à cette asymptote.

4°) Faire le tableau des variations de g et tracer la courbe (C) dans un nouveau repère (unités : 1cm). On précisera en particulier l'intersection de (C) dans un nouveau repère (unités 1cm)

On précisera en particulier l'intersection de (C) avec son asymptote oblique.

5°) Soit $a > 1$. Calculer, en fonction de a, l'aire $A(a)$ de la surface comprise entre (C), son asymptote oblique et les droites d'équations $x = 1$ et $x = a$. Quelle est la limite de $A(a)$ quand $a \to +\infty$?

C. Soit M un point mobile du plan dont les coordonnées, à l'instant t, sont :
$$\begin{cases} x = e^{-t} \\ y = e^{-t}(2 - te^{2t}) \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}^*$$

sani Moussa Mayaki

1°) Calculer les coordonnées des vecteurs vitesse $\vec{V}_M$ et accélération $\vec{\Gamma}_M$ du point M à l'instant t.
2°) Montrer que la trajectoire du point M est une partie de (C) que l'on précisera
3°) Préciser dans les cas $t = 0$ et $t = \ln 2$ la position du point M.

les coordonnées de $\vec{V}_M$ et $\vec{\Gamma}_M$ et la nature de son mouvement (accéléré ou retardé).

Session de juin 1987

Exercice N°1

a) Soient deux personnes prises au hasard, quelle est la probabilité pour qu'elles soient nées un même jour de la semaine ?

b) Dans un groupe de 4 personnes, quelle est la probabilité pour que toutes soient nées des jours différents de la semaine ?
Est-ce alors faire un pari gagnant que d'affirmer que deux d'entre elles au moins sont nées le même jour de la semaine ?

c) Quelle est la probabilité pour que parmi n personnes l'une au moins soit née un lundi ? Combien doit-il y avoir de personnes dans un groupe pour que l'affirmation « au moins l'un d'entre vous est né un lundi » soit un pari gagnant ?
On donne les approximations suivantes :
$\ln 2 \simeq 0{,}693$, $\ln 6 \simeq 1{,}791$; $\ln 7 \simeq 1{,}945$
<u>**NB**</u> : « Faire un pari gagnant » signifie que l'événement choisi a une probabilité supérieure ou égale à $\frac{1}{2}$. ln désigne le logarithme népérien.

Exercice N°2

Soit l'expression $P(z)$ définie pour tout nombre complexe z par : $P(z) = z^3 - z^2 + z(-1+i) - 2 - 2i$

a) Démontrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution réelle x et une solution imaginaire pure y que l'on calculera

b) Déterminer la $3^{ème}$ solution z à l'aide d'une factorisation. On donnera les formes trigonométriques des trois solutions

c) On appelle respectivement A, B et C les images dans le plan complexe des nombres x, y, z. Montrez que le triangle ABC est isocèle et rectangle. Quel est l'affixe du milieu I de$[AC]$?

Déterminer l'image D de A dans la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$

Quelle est enfin la nature du quadrilatère $ABCD$?

Problème

Dans tout ce qui suit ln désignera le logarithme népérien. On donne les approximations suivantes : $e \simeq 2.7$, $\sqrt{2} \simeq 1.4$. On choisira un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2 cm

Soit f la fonction numérique de la variable x définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 2x\ln(-x) & , si\ x < 0 \\ f(x) = x + \sqrt{x^2 - x} & , si\ x \geq 0 \end{cases}$$

A.

1°) a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en $x_0 = 0$.

La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Sur quels intervalles de $\mathbb{R}$ f est-elle dérivable ?

b) Montrer l'existence d'une branche parabolique quand $x \to -\infty$, pour la courbe représentative de f. Quelle direction a-t-elle ?

2°) a) Montrer que la droite d'équation $y - 2x - \frac{1}{2} = 0$ est une asymptote pour la courbe (C).

Quelle est la position de (C) par rapport à cette droite, quand $x \to +\infty$?

b) Montrer que, pour $x \geq 0$ (C) ne coupe pas l'asymptote.

3°) a) Etudier les variations de f. Montrer l'existence de deux extréma A et B dont on calculera les coordonnées.

b) Calculer $f(-e)$, $f(-1)$, $f(-\frac{1}{e})$, $f(0)$, $f(1)$

Etablir un tableau de variations de f.

c) Dessiner la courbe (C) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Reporter les demi-tangentes, puis la tangente à la courbe de direction ox (axe des abscisses).

Déterminer l'équation de la tangente à (C) en $x_0 = 1$

B.1°) Démontrer que la restriction de f à $]1, +\infty[$ admet une bijection réciproque f^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition et l'ensemble image. Ne pas chercher à calculer $f^{-1}(x)$, mais dessiner sa courbe représentative $(C)^{-1}$ dans le même repère que celui de (C).

2°) Calculer, en cm^2, l'aire géométrique du domaine (A) limité par les frontières $x = -1$; $x = -\frac{1}{e}$, l'axe ox et la courbe (C).

On effectuera une intégration par parties. Ne pas chercher à simplifier les résultats obtenus à la fin du calcul.

A. Un point $M\binom{x}{y}$ est animé d'un mouvement plan, curviligne, et sa position en fonction du temps t est donnée par :

$$\begin{cases} x = t - 1 \\ y = t + 1 + \sqrt{t^2 + 3t + 2} \end{cases}, \text{ avec } t \geq 0$$

1°) Montrer que la trajectoire de M est une partie de (C) que l'on précisera. Quel est le sens de parcours de M ?

2°) Déterminer et représenter le vecteur vitesse $\vec{V}$ et le vecteur accélérateur $\vec{\Gamma}$ à $t = 1$.

Le mouvement est-il accéléré ou retardé à cet instant ?

3°) Montrer que le vecteur vitesse est toujours tangent à la trajectoire du point M.

Session de juin 1988

Dans tout ce qui suit ln désignera le logarithme népérien, de base e

Exercice N°1

$\mathbb{N}^*$ désignant l'ensemble des entiers naturels privé de zéro, on donne la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ à termes positifs, de premier terme $u_1 = 1$ et telle que pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, on ait $(u_{n+1})^2 = eu_n$.

1°) Calculer u_2, u_3, u_4 (on donnera les résultats sous forme e^r ; r étant rationnel).

2°) On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \ln u_n - a$ où a est un réel strictement positif

.a) Déterminer a pour que (v_n) soit une suite géométrique dont on précisera la raison.

b) Calculer dans ce cas la limite de v_n, puis celle de u_n quand n tend vers $+\infty$.

3°) Soit $a = 1$; on désigne par A_k la somme des k premiers termes de la suite géométrique (v_n) et par B_k le produit des k premiers termes de la suite (u_n). Calculer A_k et B_k en fonction de k. Déterminer les limites de A_k et B_k quand k tend vers $+\infty$

Exercice N°2

Soit dans le plan complexe, l'application associant au point a d'affixe z, le point A d'affixe : $Z = z + 1 - \dfrac{2}{z+1}$, $(z \neq -1)$

1°) Calculer (X, Y) coordonnées de A, en fonction de (x, y) coordonnées de a.

2°) a) Déterminer l'ensemble E des points a tels que Z soit réel.

Une partie de E est un cercle de centre $\Omega(-1\ ,\ 0)$ Construire cet ensemble.

b) Déterminer l'ensemble F des points a tels que Z soit imaginaire pur.

3°) On suppose $|z+1| = 1$, déterminer z tel que l'on ait $|Z|=1$. En déduire Z.

Problème

On donne les approximations suivantes : $e \simeq 2.7 \quad e^2 \simeq 7,4$

A. On considère les fonctions numériques de la variable réelle x, dépendant du paramètre réel m, non nul, définies par :

$$f_m(x) = \frac{e^{2x} - m}{2e^x}$$

1°) Etudier les variations de f_m suivant les valeurs de m (on distinguera les cas où $m < 0$ et $m > 0$).

2°) Déterminer les valeurs de m pour lesquelles, on a la relation :

pour tout réel x : $\left|(f'_m(x))^2 - (f_m(x))^2\right| = 1$ où f'_m est la fonction dérivée de f_m.

B. On considère les fonctions numériques définies par :

$x \mapsto f_1(x) = \dfrac{e^{2x} - 1}{2e^x}$ (si $m = 1$) et $f_{-1}(x) = \dfrac{e^{2x} - 1}{2e^x}$ (si $m = -1$)

de courbes C_1 et C_{-1}.

1°) a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f_1(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{et} \qquad f_{-1}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

b) Vérifier que f_1 et f_{-1} sont respectivement paire et impaire, et montrer que C_{-1} admet un point d'inflexion.

2°) Quelle est la position relative de C_1 par rapport à C_{-1} ? Construire

C_1 et C_{-1} dans un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2 cm. On précisera les branches infinies et $\lim_{x \to +\infty} (f_1(x) - f_{-1}(x))$

Tracer la tangente à C_{-1} au point d'inflexion.

3°) Calculer en cm^2 l'aire $A(\lambda)$ du domaine défini par

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq \lambda \\ f_{-1}(x) \leq y \leq f_1(x) \end{cases} \text{ où } \lambda \text{ décrit }]0, +\infty[$$

Calculer la limite de $A(\lambda)$ quand $\lambda \to +\infty$.

4°) Soit la fonction numérique $x \mapsto h(x) = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - 1}\right|$

a) Déterminer D_h, l'ensemble de définition de h. Montrer que h est impaire, (on pourra montrer que pour tout $x \in D_h$,
$h(x) + h(-x) = 0$)

b) Montrer que $x + \sqrt{x^2 - 1} < 0$ si et seulement si $x \in]-\infty, -1]$

En déduire l'expression de $h(x)$ sans le symbole de valeur absolue

5°) a) Montrer que la restriction de f_1 à $[0, +\infty[$ admet une bijection réciproque g, définie de : $[1, +\infty[\to [0, +\infty[$ par $g(x) = h(x)$.

c) Déterminer l'équation de la demi-tangente T à la courbe de g au point A, de coordonnées $(1, 0)$. Tracer la demi-tangente T, et la courbe de g dans le même repère que C_1. En déduire le tracé de la courbe de h.

C. Soit M un point du plan dont les coordonnées dans le repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$ sont données à l'instant t par : $\begin{cases} x = \ln t \\ y = \dfrac{t^2 + 1}{2t} \end{cases}$

1°) Déterminer la trajectoire de M quand t décrit $]0, +\infty[$

2°) Déterminer à chaque instant t le vecteur-vitesse $\vec{V}(t)$ et le vecteur accélération $\vec{\Gamma}(t)$ du point M.

3°) Montrer que l'application : $t \mapsto \left\| \vec{V}(t) \right\|$ est décroissante. En déduire la nature du mouvement de M.

Session de juin 1989

Exercice N°1

1°) a) Vérifier que $-2i = (1-i)^2$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z^2 - 2(1+i)z + 4i)(z^2 - 4z + 8) = 0$

Les images des racines dans le plan complexe sont notées A, B, C et D telles que A et B ont même abscisse et A et C ont même ordonnée

2°) Définir la similitude directe S du plan complexe telle que $S(A) = C$ et $S(B) = D$

En donner l'angle, le rapport et le centre Ω ?

3°) Soit M_0 le point d'affixe $2 + 3i$.

On pose pour tout entier naturel n $M_{n+1} = S(M_n)$, puis $U_n = \left\| \overrightarrow{\Omega M_n} \right\|$

a) Que dire de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

b) Exprimer U_n en fonction de n et étudier U_n quand $n \to +\infty$.

Exercice N°2

Un couple souhaite avoir n enfants ($n \in \mathbb{N}^*$). On considère qu'à chaque naissance il ne vient qu'un enfant (garçon noté G, ou fille notée F). La probabilité d'avoir une fille est double de celle d'avoir un garçon. Les naissances sont indépendantes les unes des autres. Soit X_j la variable aléatoire associée à la j-ème naissance et prenant la valeur 0 pour G et 1 pour F et $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$.

1°) Dans cette partie $n = 4$

a) Donner la loi de probabilité de X

b) Construire la fonction de réparation de X

c) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ et la variante $V(X)$

2°) Déterminer n pour que la probabilité de ne pas avoir de garçon soit inférieure strictement à $\frac{1}{100}$.

Problème

I. On considère la fonction u définie par :

$$u(x) = \ln(1 - x^2) + 2 + \frac{2}{x^2 - 1}$$

Etudier la variation de u.

En déduire le signe de $u(x)$ pour tout x appartenant au domaine de définition D_u de u.

II On considère la fonction f définie par : $f(x) = x\ln(1-x^2)$

et C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1°) Montrer que f est impaire

2°) Etudier la variation de f

3°) Etudier la position de la courbe C de f par rapport à la tangente T au point d'abscisse 0.

4°) Tracer la courbe C et la tangente T dans le repère $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité = 2 cm)

5°) Montrer que f admet une bijection réciproque dont on dressera le tableau de variation. En déduire sa courbe représentative C^{-1} dans le même repère $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

III. Soit la fonction h définie par :

$$h(x) = \frac{1}{2}|x|\sqrt{1 - x^2}$$

1°) Montrer que h est paire et étudier sa dérivabilité.

2°) Etudier la variation de h

3°) Tracer la courbe C' de h dans le même repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$,et en déduire le tracé de la courbe de Γ d'équation $y^2 = \frac{x^2 - x^4}{4}$

4°) Calculer l'intégrale $\int_0^1 h(x)dx$ .En déduire l'aire du domaine délimité par la courbe Γ , en cm^2.

5°) Soit , α un réel tel que $0 \leq \alpha < 1$

Calculer l'aire $A(\alpha)$ du domaine E des points de coordonnées (x, y) tels que $0 \leq x \leq \alpha$ et $f(x) \leq y \leq h(x)$.

(On pourra dériver d'abord : $-\frac{1}{2}\left[(1 - x^2)\ln(1 - x^2) + x^2\right]$)

Calculer $\lim_{\alpha \to 1} A(\alpha)$.

<u>N.B</u> ln désigne le logarithme népérien

session de juin 1991

Exercice N°1

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(o, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points A_1, A_2, A_3 d'affixes respectives i , $3 + i$, $9 - 5i$ (on rappelle que i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$).

1°) Montrez qu'il existe une similitude plane directe S transformant A_1 en A_2 et A_2 en A_3

Précisez les éléments caractéristiques de S.

2°) Soit B un point du plan et B' son image par S , déterminez l'affixe z de B telle que B' soit symétrique de B par rapport au point O.

3°) Soit G le barycentre des point A_1, A_2, A_3 affectés des coefficient respectifs 2, 1, -1.

Déterminez l'image G' de G par S.

Exercice N°2

Au cours d'une kermesse, un stand propose le jeu suivant : le joueur doit tirer successivement sur quatre boîtes de dimensions de plus en plus réduites : B_1, B_2, B_3, B_4, dans cet ordre.
Pour chaque cible visée, le joueur ne dispose que d'un essai ; en cas de succès (la boîte est atteinte) le joueur tire sur la boîte suivante, ainsi de suite jusqu'à la quatrième boîte ; en cas d'échec, le jeu s'arrête immédiatement.

Un joueur A se présente avec les probabilités $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{5}$ de toucher respectivement les boîtes B_1, B_2, B_3, B_4.
1°) Décrire toutes les éventualités du jeu de A(par exemple : A atteint B_1, puis B_2 mais rate B_3) On notera $w_1, w_2, \ldots$ ces éventualités et on calculera la probabilité de chacune d'elles
2°) Lorsque le joueur tire sur une boîte et l'atteint, il gagne 1000 F ; lorsqu'il tire sur une boîte et la rate, il perd 1 000 F.
A chacune des éventualités décrites au 1°) on associe le gain en fin de partie. On définit ainsi une variable aléatoire X

- Quelle est la loi de probabilité de X ?
- Quelle est son espérance mathématique ?

3°) Le joueur A s'engage en cas de succès à verser la moitié de son gain total à un fonds de solidarité. Calculer la probabilité pour que A verse au moins 500 F au dit fonds.

Problème

A. On désigne par (P) le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 1 cm).

Les coordonnées du vecteur vitesse $\vec{V}$ d'un point M mobile dans (P) sont données à tout instant t par :

$$\begin{cases} x' = e^{t} \\ y' = 1 - e^{1-t} \end{cases} \qquad t \in [0\,;+\infty[$$

1°) Déterminer les coordonnées (x, y) de M sachant qu'à l'instant $t = 1$, le mobile M est en $A(e ; 2)$.

2°) Calculer les coordonnées du vecteur accélérateur $\vec{\Gamma}$ de M. A quel instant le vecteur $\vec{V}$ et $\vec{\Gamma}$ sont-ils égaux ?

3°) Déterminer une équation cartésienne du support de la trajectoire de M

B. Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$f(x) = \ln x + \frac{e}{x}$, ln désigne le logarithme népérien.

1°) Etudier les variations de f

2°) Construire la courbe (C) représentative de f dans le repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$. On précisera, en particulier, la tangente au point A d'abscisse 2 e.

Mettre en évidence sur (C) la trajectoire du point M.

3°) Calculer l'aire de l'ensemble E des points du plan (P) défini par :

$E = \{M(x ; y) \quad 1 \leq x \leq 2e \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)\}$

C. 1°) Soit la suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$u_n = f(e^n) - n \; ; n \in \mathbb{N}$ .Montrer que cette suite est géométrique.

On note $s_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$. Exprimer s_n en fonction de n. Calculer alors, en fonction de n, la somme $\sum_n = f(1) + f(e) + f(e^2) + \ldots + f(e^n)$

2°) Etudier les limites de s_n et de $\sum_n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Session de Juin 1992

Exercice N°1

Soit X un aléa numérique sur un univers Ω ; on pose $X(\Omega) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, les x_i étant dans l'ordre croissant.

1) Comment doit-on choisir le réel k pour que le tableau ci-dessous

définisse une loi de probabilité de X ?

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$P(X = x_i)$	k	$\frac{4k}{5}$	$\frac{2k}{5}$	$\frac{4k}{5}$	k

2) k étant ainsi choisi, déterminer x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 sachant que (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) forme une progression arithmétique telle que $x_5 = 7x_2$ et que l'espérance mathématique de X est 3.

3) Calculer la variance et l'écart-type de X.

4) Définir la fonction de réparition de X et construire sa représentation graphique.

Exercice N°2

Dans le plan affine euclidien P muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère les points A ,B , C d'affixes respectives 2i , $\sqrt{3} - i$, $-3\sqrt{3} - i$ (i étant le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$)

1°) a) Déterminer le barycentre des points A, B, C affectés respectivement des coefficients 2 , 3 ,1.

Quelle est la nature du triangle ABC ?

b) Montrer que l'ensemble des points M du plan tels que $2MA^2 + 3MB^2 - MC^2 = 72$ est un cercle (C) dont on déterminera le centre et le rayon. Vérifier que les points A et B appartiennent au cercle (C).

2°) Déterminer les éléments géométriques de la similitude directe S définie par $S(A) = B$ et $S(B) = C$.

3°) Déterminer les éléments géométriques de la similitude directe S' telle que la composée SoS' soit la translation T de vecteur. $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$.

Problème

A. Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :
$f(x) = |x-1|e^{2x}$

1°) a) Quel est l'ensemble de définition Df de f ?

b) Etudier la continuité de f sur Df.

c) Etudier la dérivabilité de f sur Df et donner suivant les valeurs de x, l'expression de la dérivée $f'(x)$.

2°) Etudier les variations de f.

3°) On désigne par (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité graphique 1 cm, $\|\vec{i}\| = 2$, $\|\vec{j}\| = 1$).

a) Faire une étude soignée des branches infinies de (C).

b) Montrer que le point I de (C) d'abscisse $x = 0$ est un point d'inflexion pour (C), déterminer une équation de la tangente à (C) en ce point, construire cette tangente.

c) Montrer qu'au point J d'abscisse $x = 1$, la courbe (C) admet deux demi-tangentes dont on donnera les équations. Préciser la position de (C) par rapport à chaque demi-tangente ; construire ces demi-tangentes.

__N.B.__ on prendra $e = 2,7$ et $e^2 = 7,4$.

d) Construire la courbe (C).

B. Soit α un réel tel que $\alpha \leq \frac{1}{2}$; déterminer l'aire A_α du domaine plan ensemble des points M de coordonnées $(x;y)$ vérifiant $\alpha \leq x \leq \frac{1}{2}$ et $0 \leq y \leq f(x)$.

Cette aire admet-elle une limite lorsque α tend vers $-\infty$

C. On considère un mobile N du plan affine euclidien dont les coordonnées sont définies pour $t > e$ par

$$\begin{cases} x = \ln t \\ y = (\ln t - 1)t^2 \end{cases}$$

ln désignant le logarithme népérien.

1). Déterminer la trajectoire (T) de N.

2). Déterminer les vecteurs vitesse $\vec{V}(t)$ et accélération $\vec{\Gamma}(t)$ de N.

3). Les vecteurs $\vec{V}(t)$ et $\vec{\Gamma}(t)$ peuvent-ils être colinéaires ? Justifier.

Session de juin 1994

Exercice N°1

On considère les entiers A, B, C, D définis par :

$$A = \sum_{k=0}^{n} k^2, \quad B = \sum_{k=0}^{n} (1+k)^3, \quad C = \sum_{k=0}^{n} k^3, \quad D = \sum_{k=0}^{n} k$$

1°) Exprimer B en fonction de C

2°) Montrer que $D = \dfrac{n(n+1)}{2}$

3°) En développant B et en utilisant 2°), en déduire la valeur de A.

Exercice N°2

On considère le polynôme complexe P défini par :

$$P(z) = 2z^4 - 9z^3 + 17z^2 - 19z - 15$$

1°) Démontrer que pour tout nombre complexe z on a $\overline{P(z)} = P(\bar{z})$

2°) Démontrer que $z_0 = 1 - 2i$ est une racine de $P(z)$, et en déduire une autre racine z_1.

3°) Donner une factorisation de P(z) et en déduire deux autres solutions de l'équation P(z) = 0

4°) On donne le nombre complexe $z' = -1$.

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, sur un même graphique :

a) Placer le point O' d'affixe z'

b) Représenter l'ensemble E des points M(x, y) du plan tels que

$$x^2 + y^2 - 2x - 7 = 0$$

c) Placer les points A et B d'affixes respectives z_0 et z_1.

Problème

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(0) = 0$ et $f(x) = (\ln(x))^2 - 2\ln(x) - 3$ si x est strictement positif, où ln désigne la fonction logarithme népérien

1°) a) Etudier la continuité de f en 0

b) Déterminer la limite de f quand x tend vers $+\infty$

c) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a :

$$\frac{(\ln(x))^2}{x} = \left[\frac{2\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\right]^2$$ En déduire les limites suivantes :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln(x))^2}{x} \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0^+} x(\ln(x))^2$$

d) Soit (C) la courbe représentative de f dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. La courbe (C) admet-elle des asymptotes ? Si oui, déterminer ces asymptotes.

2°) a) Etudier la dérivabilité de f en 0.

b) Calculer les dérivées f', f'' de f sur $\mathbb{R}_+^*$ et étudier les variations de f et de f' sur $\mathbb{R}_+^*$

c) Soit (D) la tangente à (C) au point d'abscisse 1.
Déterminer une équation de (D)

d) Construire la courbe (C) et la droite (D) dans le plan rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On prendra deux centimètres pour unité

3°) a) Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$ on a : $f(e^y) > y$.

b) Montrer que la courbe (C) n'admet aucune tangente parallèle à la première bissectrice.

4°) a) En utilisant une intégration par partie, montrer que l'on a :

$$\int_1 \ln x\,dx = \left[x \ln x\right]_1 - \left[x\right]$$

b) En utilisant une intégration par partie, déterminer une primitive de $(\ln x)^2$.

c) Soit $A(\lambda)$ la partie du plan définie par

$A(\lambda) = \{(x,y) / \lambda \le x \le e$ et $y \le f(x)\}$ où λ est élément de $]0, e[$

On désigne par $a(\lambda)$ l'aire géométrique de $A(\lambda)$.

Déterminer $a(\lambda)$ et $\lim\limits_{\lambda \to 0} a(\lambda)$

Session de novembre 1995

Exercice N°1

On considère la suite réelle $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ U_n = \int_{n-1} (\ln 3)^{n}\,dx$$

1°) Montrer que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme

2°) Montrer que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente

3°) On définit la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par : $S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$ pour $n \ge 1$

a) Exprimer S_n en fonction de n.

b) La suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est-elle convergente ?

Exercice N°2

Les quatre faces d'un dé tétraédrique sont numérotées de 1 à 4. Ce dé est pipé de telle sorte que la probabilité p(i) pour que la face i soit cachée est proportionnelle au carré de i.

On pourra écrire $p(i) = ci^2$, où c est une constante réelle

1°) Déterminer la constante c

2°) On lance le dé une fois et on appelle X la variable aléatoire : « Somme des numéros visibles ».
Donner la loi de probabilité de X.
Calculer l'espérance mathématique et la variante de X.
3°) Quelle est la probabilité pour qu'au cours de cinq lancers, X soit paire au moins deux fois ?

Problème

A. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère un point mobile M dont les coordonnées sont définies par :

$$\begin{cases} x(t) = \ln(\cos t) \\ y(t) = \dfrac{\cos^2 t + 1}{\cos t}, \end{cases} \quad t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

1°) Déterminer la trajectoire du point M.

2°) Déterminer l'instant t_0 où le vecteur vitesse $\vec{v}(t)$ est orthogonal au vecteur $-\dfrac{1}{2\cos t}\vec{i} - \vec{j}$.

B. On considère la fonction f_m définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_m(x) = \frac{e^{mx} + 1}{e^x}, \text{ où } m \text{ est un paramètre réel.}$$

1°). On désigne par C_m la courbe représentant la fonction f_m.

a) Montrer que les courbes C_m passent par un point fixe.

b) Suivant les valeurs de m, calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f_m(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_m(x)$

c) Pour quelles valeurs de m, les courbes C_m admettent-elles un extremum M_m. Donner les coordonnées de M_m.

d) Parmi les courbes C_m, déterminer celle dont la tangente au point de coordonnées (0 ; 2) est parallèle à la première bissectrice des axes. Donner alors l'équation de cette tangente.

2°). Etudier les variations de f_1 et f_2

a) Tracer les courbes C_1 et C_2. Indiquer la trajectoire du mobile M.

b) Montrer que la restriction f_2 de à $]0,+\infty[$ admet une fonction réciproque Tracer la courbe Γ de f_2^{-1}.

c) Soit α un nombre réel strictement positif.

ii) Calculer l'aire $S(\alpha)$ du domaine du plan délimité par les courbes C_1 et C_2, les droites d'équation $x = 0$ et $x = \alpha$

iii) Déterminer l'ensemble des valeurs de α pour lesquelles $S(\alpha) = S(-\alpha)$.

<u>N.B.</u> Les courbes C_1, C_2 et Γ doivent être tracées dans le même repère.

Session de juillet 1996

Exercice N°1

Soit dans le plan complexe **P** rapporté à un repère orthonormé $R = (O, \vec{u}, \vec{v})$, la transformation F qui, à tout point M de coordonnées (x, y) dans R, associe le point M' de coordonnées (x', y') définies par

$$\begin{cases} x' = x + \sqrt{3}y - 2\sqrt{3} \\ y' = -\sqrt{3}x - y + \sqrt{3} \end{cases}$$

1°)a)Déterminer l'affixe z' de M' en fonction de l'affixe z de M

b)Quelle est la nature de F ? Déterminer ses éléments géométriques

2°)Soit (a, b) un élément de $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ et G la transformation de **P** qui, au point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par

$z' = az + b$.

a)Déterminer (a, b) pour que $G = F$ soit l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{2}$.

b) Soient $B(-\sqrt{3}, -1)$ et $C(-3\sqrt{3}, 1)$ deux points de $\mathbb{P}$.

Déterminer (a, b) pour que $G = F$ soit la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

Viens de Paraître
Aux Editions Alpha

EDITIONS ALPHA

C. Les coordonnées dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de M, point mobile, sont à l'instant t définies par : $\begin{cases} x = e^t \\ y = te^{2t} \end{cases}$, $(t \in [0, +\infty[)$

1°) Démontrer que la trajectoire Γ, de M quand t décrit $[0, +\infty[$ est une partie de C à préciser.

2°) Déterminer l'équation cartésienne de l'ensemble Γ' des points m tels que : $\vec{Om} = \vec{V}$ où $\vec{V}$ est le vecteur vitesse de M à l'instant t.

3°)Soit m_0 le point de Γ' de coordonnées (1 ,1) . Déterminer l'équation de la tangente à Γ' en m_0.

Vérifier que le vecteur accélération de M à l'instant $t_0 = 0$ est un vecteur directeur de cette tangente.

Session de juillet 1997

Exercice N°1

On donne la série statistique suivante :

x_i	39	41	43	49	51	53	55	51	63	63	65
y_i	155	162	167	162	177	170	183	173	179	185	190

1°) Placer les points M_i de coordonnées $(x_i ; y_i)$ dans un repère orthonormé : on pourra prendre comme origine le point de coordonnées (39 ; 155) et 1 cm pour 2 unités sur chaque axe.
Déterminer les coordonnées du point moyen du nuage.

2°) a) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre x et y.

b) Un ajustement linéaire est-il possible ? Si oui, déterminer par la méthode des moindres carrés, les équations des droites de régression de y en x et de x en y. Tracer ces droites.

Exercice N°2

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes on donne :

$$P(z) = z^3 - 2(1+i)z^2 - 4z + 8 + 8i$$

1°) Calculer P(2). Trouver trois nombres complexes a, b et c tels que l'on ait, pour tout nombre complexe z, $P(z) = (z-2)(az^2 + bz + c)$.

2°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$. On appellera z_1 la solution réelle positive, z_2 la solution réelle négative, z_3 la troisième solution.

3°) Soient A, A' et B les images respectives de z_1, z_2, z_3 dans un plan affine euclidien orienté rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Déterminer le centre Ω, le rapport et l'angle de la similitude plane directe S qui transforme A' en O et O en B.

4°) Quelle est la transformée de la droite $(O, \vec{i})$ par S ?

M étant un point de la droite $(O, \vec{i})$, M' son image par S, montrer que les vecteurs $\overrightarrow{\Omega M}$ et $\overrightarrow{MM'}$ sont orthogonaux.

En déduire une construction simple de l'image par S d'un point quelconque de la droite $(O, \vec{i})$.

Problème

A. On considère l'équation différentielle du second ordre :

$$y'' + 6y' + 9y = 0 \qquad \text{(E)}.$$

1°) Montrer que si f est solution de (E) alors $g = |f|$ est aussi solution de (E).

2°) a) Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 1$ et $f(-1) = 0$.

b) Montrer que $g(x) = |x+1|e^{-3x}$. (g est la fonction définie en 1°).

3°) a) Etudier la dérivabilité de la fonction g au point d'abscisse -1. Conséquences graphiques ?

b). Tracer la courbe (C) de la fonction g après avoir étudié ses variations. On se placera dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

c). Montrer que la restriction de la fonction g à $\left]\frac{-2}{3};+\infty\right[$ admet une bijection réciproque g_1.

Tracer la courbe C' de g_1 dans le même repère que C.

4°) Soit α un réel strictement positif supérieur à -1.

a). Calculer l'aire $A(\alpha)$ délimitée par la courbe C et les droites d'équations $x=-1$ et $x=\alpha$.

b). Calculer $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} A(\alpha)$.

B. 1°) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique de raison r telle que pour tout n, $u_n \neq -1$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ v_n=\frac{f(u_n)}{u_n+1}$$, où f est la fonction déterminée au 2°.a).

a) Démontrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q, qu'on exprimera en fonction de r.

b) Discuter suivant les valeurs de r la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

c). Calculer en fonction de u_0, r et n la somme

$$S_{0,n}=\frac{f(u_0)}{u_0+1}+\frac{f(u_1)}{u_1+1}+\dots+\frac{f(u_n)}{u_n+1}$$ et discuter suivant les valeurs de r la limite de la suite $(S_{0,n})_{n\in\mathbb{N}}$

2°) On donne $u_0=\frac{1}{3}$ et $r=\frac{1}{3}$

a). Exprimer v_n en fonction de n

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{0,n}$

Session de Juillet 1998

Exercice N°1

On considère la série statistique suivante où α et β sont deux nombres entiers naturels.

x_i	40	50	α	80	90	120	β	150	180
y_i	165	172	182	180	190	194	183	188	193

1°) a) Sachant que la moyenne des x_i est 100 et leur écart type $\frac{20\sqrt{46}}{3}$, calculer α et β.

b) Construire le nuage de points.

2°) Déterminer par la méthode des moindres carrés, l'équation de la droite de régression de x en y

3°) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre x et y.

Exercice N°2

Soit, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$z_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}\ ,\ z_{n+1} = \left(\frac{1+i}{2}\right) z_n$$

On note M_n le point d'affixe z_n dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. (unités :8 cm).

1°) Calculer z_1, z_2, z_3 et z_4. Placer les points M_1, M_2, M_3 et M_4

2°) a) Calculer le quotient $\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}}$

b) Quelle est la nature du triangle OM_nM_{n+1} ?

3°) Pour tout entier naturel n, on pose : $r_n = |z_{n+1} - z_n|$

a) Donner une interprétation géométrique de r_n

b) Montrer que la suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme

c) Determiner en fonction de n la longueur de la ligne brisée joignant les points M_0 , M_1 , ..., M_n

Problème

Soit m un paramètre réel non nul. On considère la fonction numérique g_m définie par :

$$\begin{cases} g_m(x) = x(-1+\ln(mx)) & si \quad x \neq 0 \\ g_m(0) = 0 \end{cases}$$

A. 1°) a) Déterminer suivant les valeurs de m, l'ensemble de définition de g_m

b) Etudier en fonction de m, la continuité et la dérivabilité de g_m en $x_0 = 0$

2°) Etudier les variations de g_m et donner en fonction de m, les différents tableaux de variation de g_m.

3°) On note (C_m) la courbe représentative de la fonction g_m dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unités 2 cm)

Comparer $-g_m(x)$ et $g_{-m}(-x)$. Quelle conclusion géométrique peut-on tirer pour les courbes représentatives (C_m) et (C_{-m}) des fonctions $-g_m$ et g_{-m}

B. On pose $m = 1$; $m = 2$.

1°) En utilisant les résultats précédents, déduire les tableaux de variation des fonctions g_1 et g_2

2°) Etudier les branches infinies de g_1 et g_2

3°) Soit f_1 la restriction de g_1 à $[1, +\infty[$. Démontrer que f_1 admet une fonction réciproque f_1^{-1} dont on donnera les propriétés essentielles.

(on ne demande pas de calculer $f_1^{-1}(x)$)

Donner l'équation de la tangente à (Γ) au point d'abscisse 0. ((Γ) désigne la courbe représentative de f_1^{-1}).

C. 1°) Etudier la position de (C_1) par rapport à (C_2)

2°) Tracer dans le même repère les courbes (C_1), (C_2) et (Γ)

3°) Déterminer l'aire de la partie du plan délimité par les droites d'équations $x=\frac{1}{2}$, $x=\frac{e}{2}$ et les courbes (C_1), (C_2)

4°) On considère la fonction numérique h définie par :

$$\begin{cases} h(x)=x(-1+\ln(2|x|)) & x\neq 0 \\ h(0)=0 \end{cases}$$

Utiliser les résultats précedents pour déduire le tracé de la courbe représentative de la fonction h. (On pourra s'aider de la parité de h)

Session de juillet 1999

Exercice N°1

A. Le tiercé est une forme de pari où l'on parie sur trois chevaux engagés dans une même course, en précisant l'ordre d'arrivée.
Le PMU-Niger annonce une course de 18 chevaux numerotés de 1 à 18. Tous les chevaux ont la même chance de gagner la course.
Amadou choisit dans l'ordre les chevaux portant les numeros 15, 13 et 8. Tous les chevaux ayant pris part à la course, on demande de calculer la probabilité pour que Amadou gagne le tiercé :

a) dans l'ordre

b) dans le désordre

B. On considère un club de parieurs comprenant des hommes et des femmes ; le nombre des hommes étant le double de celui des femmes. On suppose que 6 % des femmes gagnent le tiercé dans l'ordre et 12 % des hommes le gagnent dans l'ordre. On note respectivement O, H et F les événement suivants :

O : « gagner le tiercé dans l'ordre »

H : « le parieur est un homme »

F : « le parieur est une femme »

1°) Quelle est la probabilité pour que :

a) Un membre du club gagne le tiercé dans l'ordre ?

b) Un gagnant dans l'ordre de ce club soit un homme ?

2°) On choisit au hasard 6 parieurs parmi les gagnants ; le nombre d[e] gagnants est suffisamment grand pour que les choix puissent être assimilés à des choix successifs indépendants.

Déterminer la probabilité pour qu'il y ait exactement deux hommes parmi ces 6 parieurs.

Exercice N°2

Dans $\mathbb{C}$, corps des nombres complexes, on considère le polynôme [P] défini par $P(z) = z^3 - 4iz^2 - (6+i)z + 3i - 1$

1°) Résoudre l'équation $P(z) = 0$, sachant que cette équation admet une racine imaginaire pure notée z_0.

2°) Achever de résoudre cette équation. On désignera par z_1 la racine de l'équation $P(z) = 0$ ayant une partie réelle négative et par z_2 l'autre racine.

3°) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, placer les points M_0, M_1 et M_2 d'affixes respectives z_0, z_1, z_2.

4°) Montrer qu'il existe une similitude directe unique de centre M_0 qui transforme M_1 en M_2.

Donner une mesure de l'angle et le rapport de cette similitude.

5°) Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des points M du plan qui sont les centres des similitudes directes transformant M_1 en M_2 dans un rapport égal à $\sqrt{2}$.

Déterminer $\mathcal{C}$ et le tracer dans le plan complexe.

Problème

A. On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x \ln x & si\ x > 0 \\ x - 1 + e^x & si\ x \leq 0 \end{cases}$$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un plan affine rapporté à un repère orthonormé

$(O, \vec{i}, \vec{j})$ On prendra 2 cm pour unité de longueur.

1°) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f

2°) La fonction f est-elle continue en $x = 0$?

3°) Etudier la dérivabilité de f en $x = 0$

4°) En déduire que la courbe (C) admet au point O une demi-tangente à gauche dont on donnera l'équation.

5°) Calculer les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition et étudier les variations de f.

6°) Montrer que la droit (D) d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe (C)

7°) Tracer la courbe (C), la droite (D) et la demi-tangente à gauche à (C).

8°) Déterminer les abscisses des points d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses. Soit A le point d'intersection dont l'abscisse est strictement positive. Ecrire l'équation de la tangente (Δ) à la courbe (C) au point A

Déterminer les coordonnées du point B, intersection de (Δ) avec l'axe des ordonnées.

B. Soit λ un réel strictement positif, calculer en intégrant par parties

$$I(\lambda) = \int_{\lambda}^{e} x \ln x dx$$

Exprimer en cm² l'aire de la portion du plan limitée par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$ (on donnera une valeur approchée du résultat à 10^{-2} près).

C. Soit g la restriction de f à l'intervalle $J =]1, +\infty[$

1°) Montrer que g est une bijection de J sur un intervalle K que l'on déterminera.

2°) On note g^{-1} la bijection réciproque de g. Tracer dans le repère précédent la courbe (Γ) représentative de g^{-1}

NB : On ne demande pas d'expliciter g^{-1}.

Exercice N°1

Soit θ un angle tel que $0 \leq \theta < \pi$

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation en z suivante : $z^2 - 4(1+\cos\theta)z + 8(1+\cos\theta) = o$ (E)

On désignera par z_1 et z_2 les solutions de (E)

2. Déterminer en fonction de $\frac{\theta}{2}$, le module et l'argument de chacune des solutions z_1 et z_2

3. Trouver θ pour que le produit $z_1 z_2$ soit égal à 8.

Exercice N°2

En 1990, l'effectif de la population d'une région donnée est P_0 et, avec un accroissement annuel de 1,2 %, devient P_n, n années après.

1. Montrer que (P_n) est une suite géometrique dont on precisera la raison. En déduire l'expression de P_n en fonction de n et P_0.

2. En quelle année cette région aura-t-elle une population double de ce qu'elle était en 1990 ?

3. En 1990, le nombre d'agriculteurs de cette région, que l'on désigne par A_0, représente les 78 % de la population totale.

Chaque année ce pourcentage diminue de 0,5 %. En désignant par A_n le nombre d'agriculteurs au bout de n années après 1990, exprimer alors A_n en fonction de P_n.

Trouver l'année à partir de laquelle le nombre d'agriculteurs représente moins de la moitié de la population totale de la région.

<u>NB</u> : On donne : ln2 = 0,6931 ; ln(1,012) = 0,0119 où ln désigne le logarithme népérien.

Problème

La partie C est indépendante des parties A et B..

A. On considère les deux équations différentielles (E) et (H) suivantes dans lesquelles y est une fonction numérique de la variable réelle x, *e* désignant la base du logarithme népérien :

$$(E) : y'' - 9y = 6e^{-3x}$$

$$(H) : y'' - 9y = 0$$

1. Vérifier que la fonction numérique u définie par : $u(x) = -xe^{-3x}$ est une solution particulière de (E)
2. Déterminer la solution générale de l'équation (H)
3. Soit f une fonction numérique deux fois dérivable.
   a. Montrer que f est solution de (E) si et seulement si $(f - u)$ est solution de (H).
   b. En déduire toutes les solutions de (E) et donner la solution particulière f de (E) vérifiant : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ et $f'(0) = 0$

B. On considère la fonction numérique g de la variable réelle x définie par : $g(x) = -\left(x + \dfrac{1}{3}\right)e^{-3x}$

Soit (C) la courbe représentative de g dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 3 cm.

1) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variations
2) Donner l'équation de la droite (T_1) tangente à la courbe (C) au point d'abscisse $x = -\dfrac{1}{3}$
3) Donner l'équation de la droite (T_2) tangente à la courbe (C) au point d'abscisse $x = \dfrac{1}{3}$
4) tracer (T_1), (T_2) et (C)
5) Soit t un réel positif. Calculer l'intégrale : $I(t) = \displaystyle\int_{-\frac{1}{3}}^{t} g(x)dx$
6) Déterminer la limite de $I(t)$ lorsque $t \to +\infty$

C. Soient a et b deux nombres réels.

On considère la fonction numérique $f_{a,b}$ de la variable réelle x définie par : $f_{a,b}(x) = \left[x^2 - 2(a-1)x + 2(a+1) - b\right]e^x$

1) Etudier le sens de variation de la fonction $f_{a,b}$ et dresser son tableau de variation, discuter selon les valeurs de a et b.
2) On suppose que les réels a et b sont les résultats de deux lancers successifs d'un dé dont les faces, numérotées de 1 à 6, ont la même probabilité d'apparition

Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants

Evènement A : « $f_{a,b}(0) \geq 12$ »

Evènement B : « $f_{a,b}$ admet un maximum et un minimum »

Session 2001

Exercice N°1

Pour élire leur conseiller départemental, les habitants du village de ZATA ont à choisir parmi 3 candidats : Ado, Bala et Kadri

Chaque électeur vote pour un seul candidat.

A la fin du vote, on a constaté que 60 % des habitants de ZATA ont effectivement voté.

On suppose que la probabilité pour qu'un électeur choisisse Ado est égal à 3/8, celle de Bala est égale à ½ et celle de Kadri est égal à 1/8, et ceci indépendamment des autres électeurs

1. On prend au hasard et successivement 5 habitants de ZATA

Quelle est la probabilité pour que ces 5 habitants aient effectivement voté ?

2. Calculer la probabilité pour qu'un habitant quelconque de ZATA choisisse Bala.
3. On prend au hasard 5 habitants de ZATA et on note X la variable aléatoire égale au nombre de voix obtenues par Bala.

Déterminer la loi de probabilité de X. Calculer son espérance mathématique E(X) et sa variance V(X).

4. Calculer la probabilité pour qu'un habitant de ZATA choisisse Kadri
5. Soit n un entier supérieur ou égal à 1 et P_n la probabilité pour que, parmi n habitants qui votent, aucun ne choisissent Kadri Calculer P_n.
6. Quel est le nombre minimum d'habitants qui doivent voter pour que Kadri obtienne au moins une voix avec une probabilité supérieure ou égal à 15/16 ?

Exercice N°2

Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation en z suivante : $z^4 - (5-14i)z^2 - 24 - 10i = 0$

Problème

Le problème comporte deux parties : I et II

Partie I n étant un entier naturel non nul, on note f_n la fonction de la variable réelle x définie dans l'intervalle $]0, +\infty[$ par :

$f_n(x) = x - n + \frac{n}{2}\ln(x)$, ln désignant logarithme népérien

1. Dresser le tableau de variation de f_n. En déduire l'existence d'un reel unique a_n solution de l'équation $f_n(x) = 0$
2. Demontrer que $1 \leq a_n \leq e^2$ et que $\ln(a_n) = 2 - \frac{2}{n}a_n$.
3. Exprimer $f_{n+1}(a_n)$ en fonction de a_n et de n, puis en déduire le sens de variation de la suite de terme général a_n.
4. Démontrer que la suite de terme général a_n est convergente. On note ℓ sa limite.
5. En utilisant les résultats de la deuxième question, calculer la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\ln(a_n)$. En déduire ℓ

Partie II Soit g la fonction définie dans l'intervalle $]0, +\infty[$ par :

$g(x) = \frac{2x - \ln(x)}{2\sqrt{x}}$ et la fonction h définie par : $h(x) = \sqrt{x}$.

(C) et (C') désignent les représentations graphiques de g et h respectivement dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan (unité 2 cm)

1. Calculer les limites de g lorsque x tend vers 0 et lorsque x tend vers $+\infty$
2. Vérifier que $g'(x) = \dfrac{f_1(x)}{2x\sqrt{x}}$

En déduire le tableau de variation de g

3. Préciser les positions relatives des deux courbes (C) et (C') et calculer la limite lorsque x tend vers $+\infty$ de $[g(x) - h(x)]$
4. Tracer les courbes (C) et (C')
5. On pose : $I = \int_1^2 g(x)dx$

   a. Calculer $J = \int_1^2 \dfrac{\ln(x)}{2\sqrt{x}}dx$ à l'aide d'une intégration par parties

   b. En déduire la valeur de I

Session de juillet 2002

Exercice N°1

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes les équations

$$(E_1): \quad 3z^2 - 2(2-3i)z - \frac{5}{3} - 4i = 0$$

$$(E_2): \quad 3z^2 + 2(2-3i)z - \frac{5}{3} - 4i = \bar{z} - \frac{2}{3} + i$$

où i est tel que $i^2 = -1$ et $\bar{z}$ est le conjugué de z.

1°) a) Résoudre l'équation (E_1)

b) Montrer que $9(z+\frac{2}{3}-i)^2 = 3\bar{z}+2+3i$

c) En déduire que pour tout nombre complexe z solution de l'équation (E_2), il existe un nombre complexe $\varphi(z)$ tel que $[\varphi(z)]^2 = \overline{\varphi(z)}$.

d) En posant $\varphi(z) = T$, démontrer que $T = 0$ ou $|T| = 1$, puis résoudre l'équation $T^2 = \bar{T}$.

2°) Résoudre l'équation (E_2)

3°) On donne dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé les points A, B, C d'affixes respectives

$$z_1 = -\frac{1}{3}+i\ ;\ z_2 = -\frac{5}{6}+(1+\frac{\sqrt{3}}{6})i\ ;\ z_3 = -\frac{5}{6}+(1-\frac{\sqrt{3}}{6})i$$

a) Quelle est la nature du triangle ABC ?

b) Déterminer l'affixe du point D tel que le quadrilatère $ABDC$ soit un losange

Exercice N°2

Le budget d'une entreprise, en fonction du temps exprimé en années, est donné en millions de francs par le tableau suivant

Temps(x_i)	1	2	3	4	5	6	7	8
Recettes(y_i)	4	5	5	7	8	9	9	9
Dépenses(z_i)	4	5	α	8	7	8	β	9

1°) a) Représenter le nuage de points des recettes en fonction du temps.

b) Déterminer, par la méthode des moindres carrés, l'équation de la droite d'ajustement des recettes par rapport au temps. Tracer cette droite

2°) On suppose que la moyenne des dépenses, notée $\bar{z}$, est égale à 7 et que la variance $V(z)$ vaut 3. Déterminer α et β tels que α < β

Problème

I. Soit (E) l'équation différentielle $y'' + 2y' - y = 0$.
Déterminer la solution g de (E) vérifiant les conditions suivantes :
$g(0) = 1$ et $g(1) = \frac{2}{e}$; e désignant la base du logarithme népérien.

II. 1°) On pose $h(x) = (1+x)e^{-x}$.
On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{h(x)}{\sqrt{x+1}} & \text{si } x \in \left]-1;+\infty\right[\\ f(-1) = 0 \end{cases}$$

a) Démontrer que f est continue sur $[-1 \,; +\infty[$
b) Etudier la dérivabilité de f à droite en $x = -1$.
c) Calculer : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$
d) Etudier le sens de variation de f

2°) Tracer la courbe représentative Γ de f dans un repère orthonormé (unité = 4 cm).

3°) Soit f_1 la restriction de f à l'intervalle $\left[-1;-\frac{1}{2}\right]$.

a) Démontrer que f_1 est une bijection de $\left[-1;-\frac{1}{2}\right]$ sur un intervalle J que l'on précisera. On notera f_1^{-1} la bijection réciproque de f_1 .Calculer $f_1^{-1}(\sqrt{\frac{e}{2}})$.
b) Etudier la continuité et la dérivabilité de f_1^{-1} au point $x = 0$.
c) Tracer la courbe représentative Γ^{-1} de f_1^{-1} dans le même repère que Γ.

4°)a)Montrer que pour tout $x \in \left[-1;-\frac{1}{2}\right]$, on a : $0 \leq f(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}e$.

b)En déduire que : $0 \leq \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} f(x)dx \leq \frac{e\sqrt{2}}{4}$

c)Soit S l'aire en cm² du domaine du plan limité par les droites d'équations $x = 0$, $x = \sqrt{\frac{e}{2}}$, $y = -\frac{1}{2}$ et la courbe Γ^{-1}.

Donner un encadrement de S à 10^{-2} près.

III Soit (u_n) la suite définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int_n^{n+1} f(x)dx$

1°) Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[n ; n+1]$, on a :

$f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$

En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n+1) \leq u_n \leq f(n)$

2°) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante et convergente

N.B On prendra : $e = 2,72$; $\sqrt{e} = 1,65$.

Session de juin 2003

Exercice N°1 :

Le tableau suivant donne la répartition de cent ménages selon les deux caractères x et y suivants x désigne le nombre de pièces habitées et y le nombre d'enfants par ménage :

x \ y	0	1	2	3	4	Total $n_{i.}$
1	6	2	1	0	0	9
2	5	12	8	1	1	27
3	2	7	15	11	3	38
4	0	1	8	14	3	26
Total $n_{.j}$	13	22	32	26	7	100

On donne :

$$\sum_{j=1}^{4} n_{.j} x_j = 281 \quad ; \quad \sum_{j=1}^{4} n_{.j} x_j^2 = 875$$

$$\sum_{i=1}^{4} n_{i.} y_i = 192 \quad ; \quad \sum_{i=1}^{4} n_{i.} y_i^2 = 496 \quad ; \quad \sum_{j=1}^{4}\sum_{i=1}^{4} n_{ij} x_j y_i = 604$$

1°) a) Calculer pour la série x (en tenant compte des effectifs $n_{.j}$ de chaque valeur de x) la moyenne arithmétique $\bar{x}$, et l'écart type σ_x.

b) Calculer pour la série y (en tenant compte des effectifs $n_{i.}$ de chaque valeur de y) la moyenne arithmétique $\bar{y}$, et l'écart type σ_y.

2°) Calculer le coefficient de corrélation linéaire. Existe-t-il une liaison linéaire entre les deux variables x et y ? Justifier la réponse.

Exercice N°2

Un sac contient trois boules indiscernables au toucher marquées 1, 2 et 3. Une épreuve consiste à prélever une première boule du sac dont le numéro sera noté a, puis sans la remettre dans le sac, une seconde boule dont le numéro sera noté b. Au résultat (a, b) d'une épreuve, on associe l'application du plan complexe rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ dans lui-même, qui à tout point M d'affixe $z = x + iy$ fait correspondre le point M' d'affixe $z' = x' + iy'$ tel que

$$z' = \alpha z \text{ avec } \alpha = \frac{a}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}b\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}b\right)\right].$$

1°) Quels sont les résultats (a, b) possibles ?

Caractériser géométriquement les applications correspondantes.

2°) Soit A le point d'affixe $z_0 = \sqrt{3} - i$ et A' le point d'affixe $z_0' = \alpha z_0$, image de A par l'application associée au résultat d'une épreuve. Calculer le module et l'argument de z_0 et ceux de z'_0 suivant les valeurs de (a, b).

3°) Calculer la probabilité de l'événement E_1 : « O, A, A' sont alignés », puis celle de l'événement E_2 : « z'_0 est imaginaire pur ».

4°) Quelle est la loi de probabilité de l'aléa numérique X qui au résultat (a, b) d'une épreuve associe le module de z'_o ? Calculer l'espérance mathématique de X.

Problème

On désigne par f_m la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$f_m(x) = \ln(x^2 - m)$ où $m \in \mathbb{R}$. (ln désigne le logarithme népérien)

1°)a) Indiquer suivant les valeurs de m, l'ensemble de définition de f_m et les limites de f_m aux bornes de l'ensemble de définition.

b) Etudier la parité de f_m.

c) Etudier les variations de f_m. Donner les différents tableaux de variation de f_m selon les valeurs de m.

d) Donner la nature des branches infinies des courbes représentatives C_m des fonctions f_m lorsque x tend vers $+\infty$ et lorsque x tend vers $-\infty$.

e) Tracer dans un même repère orthonormé (unité : 2 cm) les courbes C_{-1}, C_0, C_1. Préciser les points d'intersection avec l'axe des abscisses, et les tangentes en ces points.

2°) Dans cette question, on pose $m = -\frac{3}{4}$.

a) On se propose d'étudier la position de la courbe $C_{-\frac{3}{4}}$ par rapport à la demi-droite D dont une équation est $y = x$, pour x positif seulement. Pour cela, on considère la fonction g définie par :

$\forall x \in \mathbb{R}^+, g(x) = x - \ln(x^2 + \frac{3}{4})$.

Etudier le sens de variation de cette fonction.

Calculer une valeur approchée à 10^{-2} près de $g(0)$ et $g(\frac{3}{2})$.

En déduire que $g(x)$ est positif et la position de $C_{-\frac{3}{4}}$ par rapport à D.

N.B : On ne demande pas l'étude de la limite de g quand x tend vers $+\infty$, ni la représentation graphique de g. On donne $ln2 = 0.69$ et $ln3 = 1,09$.

b) Montrer que la fonction $f_{\frac{-3}{4}}$ définie une bijection de $\mathbb{R}^{+}$ vers un ensemble que l'on précisera.

Déterminer la fonction réciproque, indiquer son ensemble de définition et son sens de variation.

c) Tracer dans un même repère orthonormé (unité : $2\ cm$) autre que le précédent, la représentation graphique de $f_{\frac{-3}{4}}$ pour x positif et celle de sa fonction reciproque.

3) Dans cette question, on pose $m = 0$.

Calculer l'aire de l'ensemble des points M dont les coordonnées x et y vérifient : $\begin{cases} \alpha \le x \le 1 \\ f_0(x) \le y \le 0 \end{cases}$. $(\alpha \in]0,1[)$

Quelle est la limite de cette aire lorsque α tend vers 0 par valeurs supérieures ?

Session de juin 2004

Exercice N°1

1 On considère la suite (u_n) définie par ses premiers termes $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$ et par la relation de récurrence :

$$\forall x \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \frac{2}{3}u_{n+1} + \frac{1}{3}u_n \qquad (1)$$

1°) Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = u_{n+1} - u_n$ est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison

2°) Déterminer v_n en fonction de n. En déduire u_n en fonction de n.

3°) Déterminer la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$

II. On définit la suite (w_n) par ses premiers termes w_0 et w_1 ($w_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ et $w_1 \in \mathbb{R}^{+*}$) et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+2} = \sqrt[5]{(w_{n+1})^2 (w_n)^3}$$

1°) Montrer que la suite (t_n) définie par $t_n = \ln(w_n)$ (où ln désigne le logarithme népérien) vérifie la relation (1).

2°) En déduire la limite de la suite (t_n), puis de la suite (w_n) quand n tend vers $+\infty$.

Exercice N°2

1°) Soit, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $z^3 - m(1-i)z^2 - im^2z = 0$ où m est un complexe donné non nul.

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)

b) Soient O, A, B les points images des solutions de l'équation (E) tels que B soit l'image de A par la rotation R de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$

Montrer que OAB est un triangle isocèle rectangle en O

2°) a) Déterminer m pour que l'équation (E) admette pour solution le complexe $1 - i$.

b) Résoudre l'équation (E) dans chacun des cas trouvés

3°) Soit M le point d'affixe m, on suppose que M décrit dans le plan complexe le cercle (C) d'équation $x^2 + y^2 - x = 0$.

a) Déterminer le centre et le rayon du cercle (C)

b) Déterminer l'image du cercle (C) par la rotation R.

Problème

Partie A :

Soit f_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = (2 - x)e^x - k$ où k est un réel fixé tel que $0 < k < e$.

1°) Déterminer les limites de f_k en $-\infty$ et en $+\infty$.

2°) Calculer $f_k'(x)$. En deduire le tableau de variation de f_k

3°) a) Etablir que l'équation $f_k(x) = 0$ a deux solutions, une notée α_k appartenant à $]-\infty, 1[$ et une autre notée β_k appartenant à $]1, +\infty[$

b) Montrer que $e^{\alpha_k} - k\alpha_k = \left(e^{\alpha_k} - k\right)(\alpha_k - 1)$

On démontrerait de même $e^{\beta_k} - k\beta_k = \left(e^{\beta_k} - k\right)(\beta_k - 1)$

4°) Préciser le signe de $f_k(x)$ suivant les valeurs de x

Partie B

k est un réel fixé tel que $0 < k < e$

1°) Soit u la fonction de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par

$$u(x) = e^x - kx$$

a) Etudier le sens de variation de u

b) Justifier la propriété suivante : pour tout réel x, $e^x - kx > 0$

2°) Soit g_k la fonction définie par $g_k(x) = \dfrac{e^x - k}{e^x - kx}$

On note C_k la courbe représentative de g_k dans le plan rapporté à un repère orthogonal

a) Déterminer la limite de g_k en $+\infty$ et en $-\infty$

b) Prouver que $g_k'(x) = \dfrac{kf_k(x)}{(e^x - kx)^2}$

c) En déduire le tableau de variation de g_k. Calculer $g_k(1)$

3°) On note M_k et N_k les points de la courbe C_k d'abscisses respectives α_k et β_k

a) En utilisant la question 3.b (partie A), montrer que

$$g_k(\alpha_k) = \frac{1}{\alpha_k - 1}$$

b) Donner de même $g_k(\beta_k)$.

c) Déduire de la question précédente que lorsque k varie les points M_k et N_k sont sur une courbe fixe H dont on donnera une équation.

4°) a) Déterminer la position relative des courbes C_1 et C_2.

b) Prouver que $\alpha_2 = 0$.

c) En prenant comme unités 2 *cm* sur l'axe des abscisses et 4 *cm* sur l'axe des ordonnées, construire les courbes C_1, C_2 et H sur le même graphique.

On prendra $\alpha_1 = -1,1$; $\beta_1 = 1,8$; $\beta_2 = 1,6$

5°) Soit λ un nombre réel strictement supérieur à 1.

a) Calculer, en cm^2, l'aire $A(\lambda)$ du domaine du plan défini par :

$$\begin{cases} 1 \leq x \leq \lambda \\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x) \end{cases}$$

b) Calculer $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} A(\lambda)$.

CORRIGÉS

Session de juin 1983

Exercice N°1

Soit F la transformation du plan affine P associée à l'application f définie de C dans C par : $f(z) = z' = \frac{1}{2}(1-i)z + \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$.

1°) Nature et éléments caractéristiques de F

$f(z)$ est de la forme $az+b$ avec $a = \frac{1}{2}(1-i)$ ($a \in \mathbb{C}^*$) et $b = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$.

Donc F associée à f est une similitude plane directe.

Le rapport de F est $k = \left|\frac{1}{2}(1-i)\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

L'angle de F a pour mesure θ tel que :

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{7\pi}{4} \quad (2\pi)$$

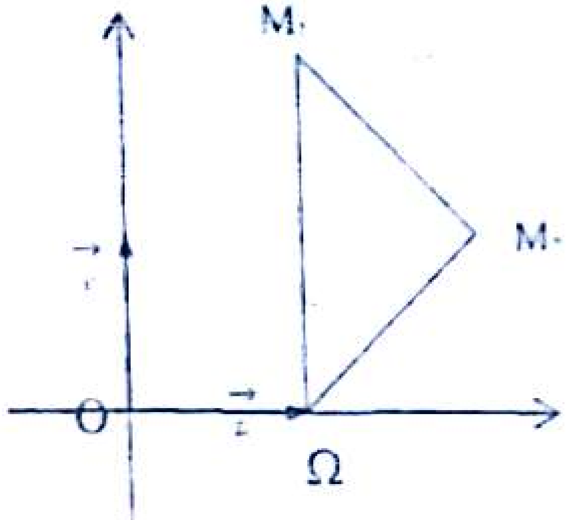
Le centre Ω de F a pour affixe $z_\Omega = \frac{b}{1-a} = \frac{1+i}{1+i} = 1$

En conclusion, F est une similitude plane directe de centre Ω (1, 0), de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et dont une mesure de l'angle est $\frac{7\pi}{4}$

2°) Soit (M_n) une suite de points tels que : $M_n = F(M_{n-1})$

a) Construction de M_2

$M_2 = F(M_1)$ avec $M_1(1, 2)$. Le triangle $\Omega M_1 M_2$ est un triangle rectangle et isocèle en M_2.



b) <u>Coordonnées du point</u> M_0.

$M_1 = F(M_0)$ équivaut à $z_1 = f(z_0)$ soit $1+2i = \frac{1}{2}(1-i)z_0 + \frac{1+i}{2}$.

ou $(1-i)z_0 = 1+3i \Rightarrow z_0 = -1+2i$

Donc les coordonnées de M_0 sont $(-1, 2)$

c) <u>Nature de la transformation</u> F^4

L'application complexe associée à F^4 est f^4 définie par

$f^4(z) = f^2\left[f^2(z)\right]$ or $f^2(z) = f\left[\frac{1-i}{2}z + \frac{1+i}{2}\right] = -\frac{i}{2}z + \frac{2+i}{2}$.

donc $f^4(z) = f^2\left[-\frac{i}{2}z + \frac{2+i}{2}\right] = -\frac{1}{4}z + \frac{5}{4}$

Ainsi, F^4 est la transformation du plan associée à f^4 définie

par : $\forall z \in \mathbb{C}$, $z' = f^4(z) = -\frac{1}{4}z + \frac{5}{4}$

Comme $a = -\frac{1}{4} \in \mathbb{R}^* - \{1\}$, alors F^4 est une homothétie de centre

$\Omega(1, 0)$ de rapport $-\frac{1}{4}$.

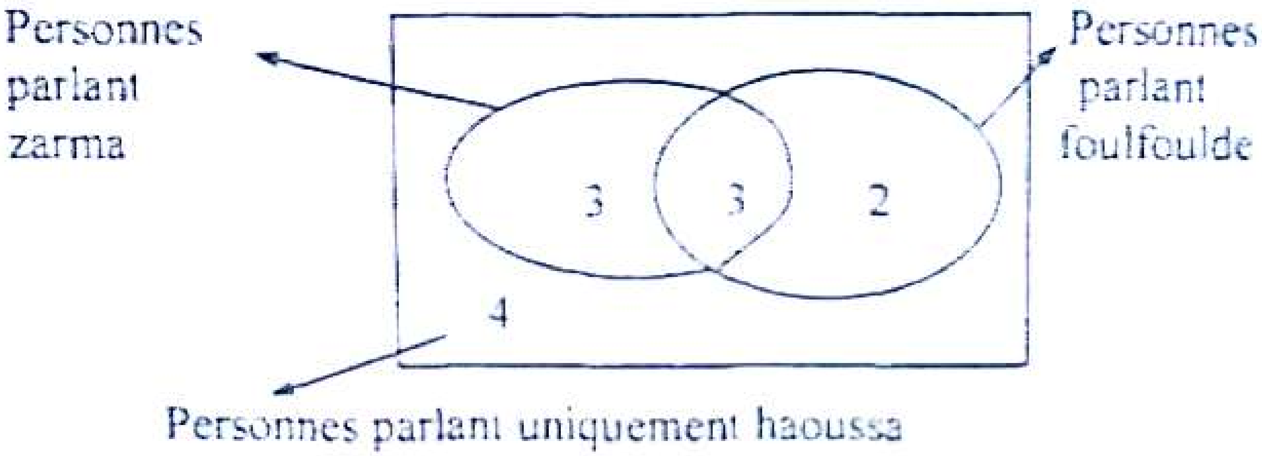
Coordonnées du point $M_4(z_4)$

$M_4 = F^4(M_0)$ équivaut à $z_4 = f^4(z_0) = -\frac{1}{4}z_0 + \frac{5}{4}$

Donc $z_4 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$; $M_4\left(\frac{3}{2}, \frac{-1}{2}\right)$

Exercice N°2

L'univers Ω est l'ensemble des parties de 3 eléments d'un ensemble de 12, d'où $Card\Omega = C_{12}^3 = 220$. Comme on choisit au hasard 3 personnes, tous les groupes de 3 personnes sont équiprobables



1°) a) Soit l'événement A : «les 3 personnes choisies parlent au moins une autre langue que le haoussa»

Alors $CardA = C_8^3 = 56$, donc $P(A) = \frac{CardA}{Card\Omega} = \frac{14}{55}$

b) Soit l'événement B : «les 3 personnes choisies ne parlent que le haoussa »

Alors $CardB = C_4^3 = 4$,donc $p(B) = \frac{CardB}{Card\Omega} = \frac{1}{55}$

2°) Soit X la variable aleatoire égale au nombre de personnes parlant foulfouldé et zarma.

L'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X est : $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$

a) La loi de probabilité de X

$$p(X=0)=\frac{C_9^3}{Card\Omega}=\frac{21}{55}\ ; \qquad p(X=1)=\frac{C_3^1C_9^2}{Card\Omega}=\frac{27}{55}$$

$$p(X=2)=\frac{C_3^2C_9^1}{Card\Omega}=\frac{27}{220}\ ; \qquad p(X=3)=\frac{C_3^3}{Card\Omega}=\frac{1}{220}$$

Soit sous forme de tableau

x_i	0	1	2	3
$p(X=x_i)$	$\frac{21}{55}$	$\frac{27}{55}$	$\frac{27}{220}$	$\frac{1}{220}$

b) Soit l'événement D «il y a au moins deux personnes parlant fulfuldé et zarma»

$$P(D)=P(X\geq 2)=\frac{7}{55}$$

Problème

I Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par

$$f(x)=\begin{cases} xe^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x>0 \\ -xLog|x| & \text{si } x<0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$$

1°) * <u>Continuité de f au point 0</u>

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim_{t\to -\infty}\left(-\frac{1}{t}e^{t}\right)=0=f(0) \quad \text{en posant } t=\frac{-1}{x}$$

f est continue à droite en 0.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} -xLog(-x)=\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} tLogt=0=f(0) \quad \text{en posant } t=-x$$

f est continue à gauche en 0

En conclusion, f est continue au point 0.

* Dérivabilité de f au point 0

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left(e^{\frac{-1}{x}} \right) = \lim_{t \to -\infty} \left(e^{t} \right) = 0 \text{ en posant } t = \frac{-1}{x}$$

f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \left(-Log(-x) \right) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \left(-Log t \right) = +\infty \text{ en posant}$$

$t = -x$. f n'est pas dérivable à gauche en 0. Par conséquent, f n'est pas dérivable au point 0.

* Continuité de f sur $\mathbb{R}$

Les fonction $x \mapsto x$ et $x \mapsto e^{\frac{-1}{x}}$ sont respectivement continues sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^*$, donc la restriction de f à $]0, +\infty[$ est continue

Les fonctions $x \mapsto -x$ et $x \mapsto Log|x|$ sont respectivement continues sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^*$, donc la restriction de f à $]-\infty, 0[$ est continue

De plus f est continue au point 0. On déduit que f est continue sur $\mathbb{R}$

2°) Variations de f

* Limites

$$\lim_{-\infty} f = \lim_{x \to -\infty} \left(-xLog(-x) \right) = \lim_{t \to +\infty} \left(tLog t \right) = +\infty, \text{ en posant } t = -x$$

$$\lim_{+\infty} f = \lim_{x \to +\infty} \left(xe^{\frac{-1}{x}} \right) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t < 0}} \frac{-e^{t}}{t} = +\infty, \text{ en posant } t = \frac{-1}{x}.$$

* Sens de variations de f

On vérifie aisément que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

$$\forall x \in]0, +\infty[\quad , \quad f'(x) = \frac{1+x}{x} e^{\frac{-1}{x}}.$$

Comme $\forall x \in]0, +\infty[$, $f'(x) > 0$; alors f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$

$$\forall x \in]-\infty, 0[, \quad f'(x) = -1 - Log|x|.$$

Comme $f'(x)$ s'annule pour $x = \frac{-1}{e}$. alors :

$\forall x \in \left]-\infty, -\frac{1}{e}\right]$, $f'(x) \leq 0$; d'où f est décroissante sur $\left]-\infty, -\frac{1}{e}\right]$

$\forall x \in \left[-\frac{1}{e}, 0\right[$ $f'(x) \geq 0$: d'où f est croissante sur $\left[-\frac{1}{e}, 0\right[$.

* <u>Tableau de variations de f</u>

x	$-\infty$		$-\frac{1}{e}$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$+\infty$ ‖ 0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3°) a) <u>Branches infinies de (C)</u>

* $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x-1)] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[x\left(e^{\frac{-1}{x}} - 1\right) + 1 \right] = \lim\limits_{\substack{u \to 0 \\ u < 0}} \left(1 - \frac{e^u - 1}{u} \right) = 0$

(en posant $u = \frac{-1}{x}$ et puisque $\lim\limits_{u \to 0} \frac{e^u - 1}{u} = 1$).

La droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe (C) quand x tend vers $+\infty$.

* $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} [-Log(-x)] = \lim\limits_{t \to +\infty} [-Log t] = -\infty$

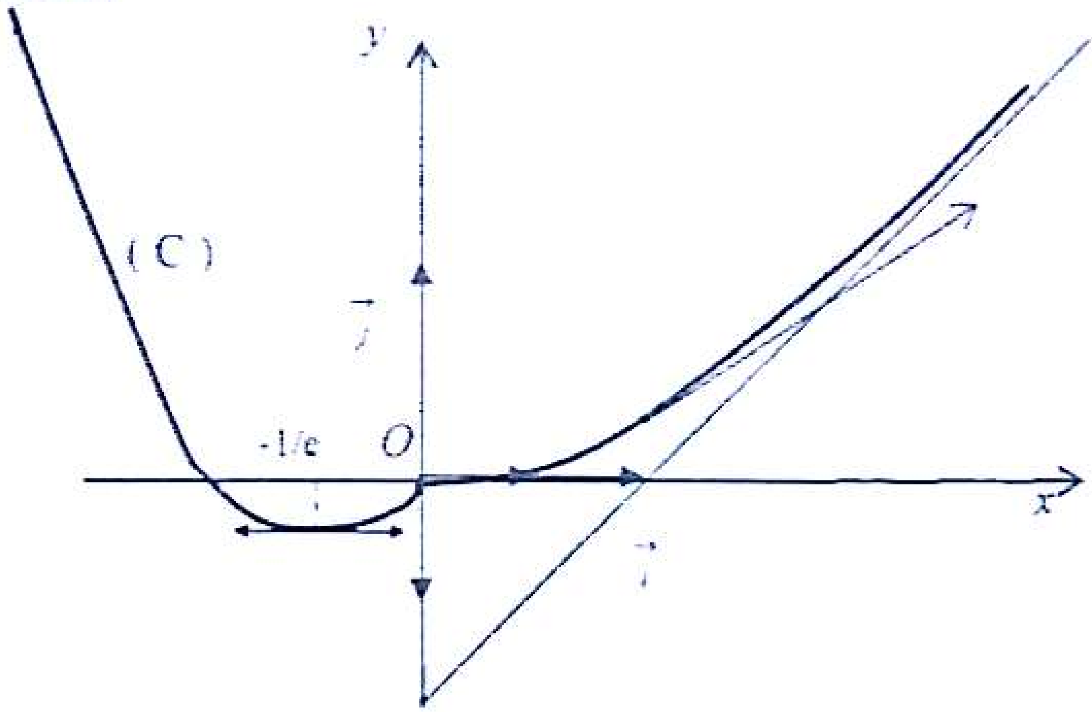
  en posant $t = -x$. (C) admet une branche parabolique de direction (oy) quand x tend vers $-\infty$.

b) La demi-tangente à droite au point d'abscisse 0 a pour équation $y=0$.

La demi-tangente à gauche au point d'abscisse 0 a pour équation $x = 0$.

c) Le point d'intersection de (C) et de l'axe $(x'ox)$ différent de l'origine est $A(-1, 0)$. L'équation de la tangente en A à (C) est $y = -x-1$.

d) Tracé de (C)



II. Soit le domaine $E = \{M(x, y) / -1 \leq x \leq 0 \text{ et } f(x) \leq y \leq 0\}$

1°) Aire du domaine E_λ où $\lambda \in]-1, 0[$

$E_\lambda = \{M(x, y) / -1 \leq x \leq \lambda \text{ et } f(x) \leq y \leq 0\}$

$\forall x \in [-1, \lambda]$ on a $f(x) \leq 0$.

D'où $A(E_\lambda) = 4\left(-\int_1^\lambda f(x)\,dx\right)$ *en* $cm^2 = 4\int_1^\lambda Log(-x)\,dx$ *en* cm^2

Calculons $\int_1^\lambda xLog(-x)\,dx$ par intégration par parties.

Posons $\begin{cases} u = Log(-x) \\ v' = x \end{cases}$ prenons $\begin{cases} u' = \dfrac{1}{x} \\ v = \dfrac{1}{2}x^2 \end{cases}$

$$\text{D'où } \int_1^\lambda xLog(-x)\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\,Log(-x)\right]_1^\lambda - \int_1^\lambda \frac{1}{2}x\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2\,Log(-x)\right]_{-1}^\lambda - \left[\frac{1}{4}x^2\right]_{-1}^\lambda$$

$$= \frac{1}{2}\lambda^2\,Log(-\lambda) - \frac{1}{4}\lambda^2 + \frac{1}{4}$$

Donc $A(E_\lambda) = 2\lambda^2\,Log(-\lambda) - \lambda^2 + 1$ cm^2

2°) <u>Valeur de $A(E)$</u>

$$A(E) = \lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ \lambda < 0}} A(E_\lambda) = \lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ \lambda < 0}} \left[1 - \lambda^2 + 2\lambda^2 Log(-\lambda)\right] = 1$$

Car $\lim\limits_{\substack{\lambda \to 0 \\ \lambda < 0}} \left(\lambda^2\,Log(-\lambda)\right) = 0.$

Donc $A(E) = 1\,cm^2$.

III. Soit un point mobile en mouvement dans le plan, défini par :

$$\begin{cases} x = \dfrac{-1}{Log\,t} \\ y = \dfrac{-t}{Log\,t} \end{cases} \quad \text{où } t \in \left]0\,.\,1\right[$$

1°) $\lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} x = \lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \left(\dfrac{-1}{Logt} \right) = 0$ car $\lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} (Logt) = -\infty$

$\lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} y = \lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \left(\dfrac{-t}{Logt} \right) = 0$

On déduit que le mobile M se rapproche de l'origine O du repère quand t tend vers 0.

2°) Trajectoire du mobile M

$x = \dfrac{-1}{Log\, t}$ équivaut à $t = e^{\frac{-1}{x}}$. Or $t \in \left]0\,,1\right[$. d'où $x \in \left]0\,,+\infty\right[$

De plus $y = \dfrac{-t}{Logt} = xe^{\frac{-1}{x}}$ donc $y = f(x)$ avec $x > 0$.

La trajectoire du mobile M est la partie de la courbe (C) dans $\mathbb{R}^{*}_{+}$.

3°) Vecteur vitesse

Le vecteur vitesse est défini par : $\vec{V}(t) = \dfrac{d\vec{M}}{dt}$. Soit $\vec{V} \begin{cases} x' = \dfrac{1}{t(Logt)^2} \\ y' = \dfrac{1-Logt}{(Logt)^2} \end{cases}$

A la date $t_1 = \dfrac{1}{e}$, le mobile est en $M_1\left(1\,, \dfrac{1}{e}\right)$ avec un vecteur vitesse $\overrightarrow{V_1}$ (e , 2).Voir la partie I-3°)d) pour la construction du vecteur vitesse $\overrightarrow{V_1}$.

4°) Equation de la tangente D en M_1 à (Γ)

Soit $P(X\,,Y)$ un point quelconque de (Γ).

$P \in \Gamma$ équivaut à $\overrightarrow{M_1P}$ et $\overrightarrow{V_1}$ sont colinéaires.

Soit $\det(\overrightarrow{M_1P}, \overrightarrow{V_1}) = 0 \Leftrightarrow 2X - eY - 1 = 0$.

Donc la tangente D en M_1 à (Γ) à la date t_1 a pour équation : $2X - eY - 1 = 0$.

Session de juin 1984

Exercice N°1

1°) Posons $S = 1 + 2 + 3 + ... + n$, somme des n premiers entiers naturels non nuls. Ainsi S est la somme de n premiers termes d'une suite arithmétique de raison 1 et de premier terme 1 : d'où $S = \frac{n(n+1)}{2}$.

On en déduit que le nombre de jetons mis dans le sac est :

$$Card\Omega = 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2°) Probabilité de l'événement A : « Le jeton tiré porte le numéro k »

Alors $CardA = k$ donc $p(A) = \frac{CardA}{Card\Omega} = \frac{2k}{n(n+1)}$.

Probabilité de l'événement B : «Le jeton tiré a un numéro inférieur ou égal à k ».

Alors $CardB = 1+2+3+...+k = \frac{k(k+1)}{2}$.

Donc $p(B) = \frac{CardB}{Card\Omega} = \frac{k(k+1)}{n(n+1)}$.

3°) <u>Cas particulier $n = 5$</u>

Soit X la variable aléatoire égale au numéro du jeton tiré.

L'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X est $X(\Omega) = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5\}$.

La loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant :

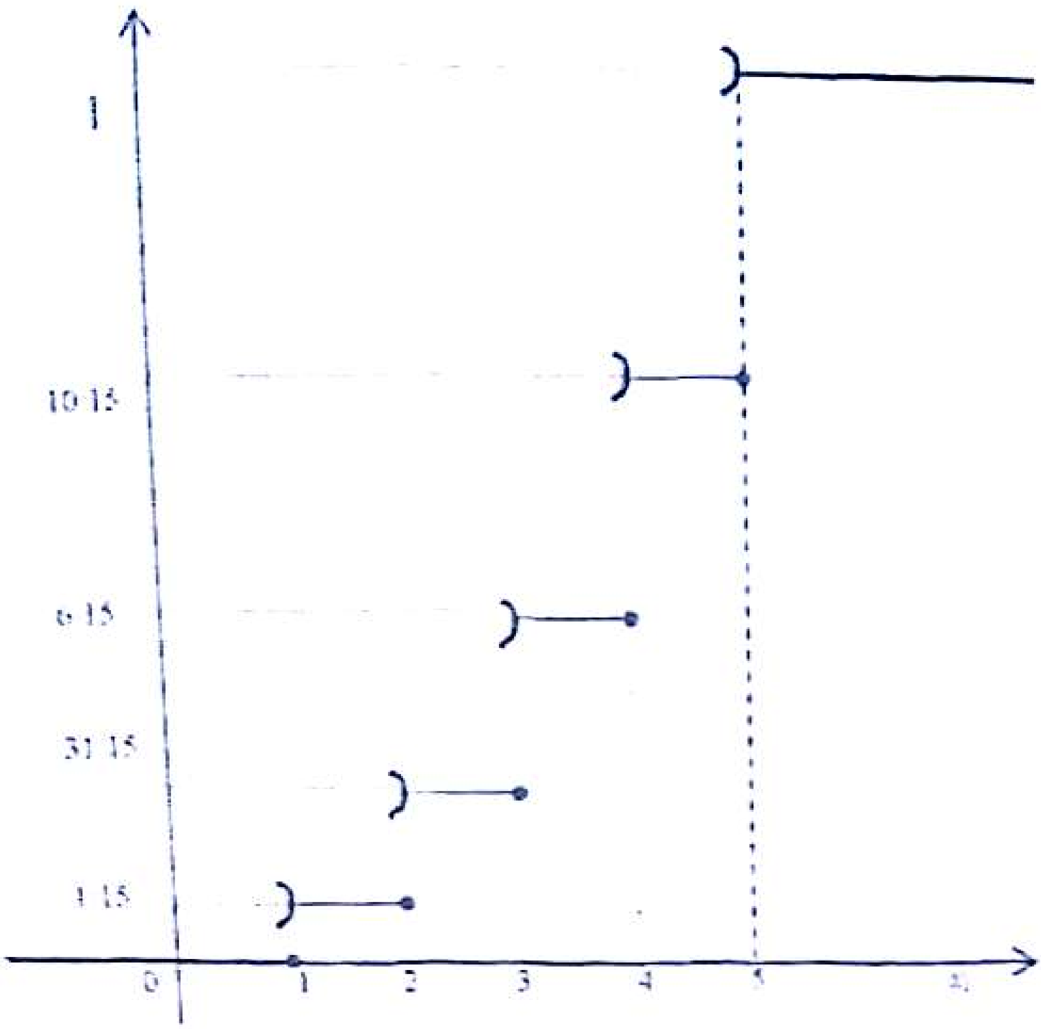
x_i	1	2	3	4	5
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{3}$

* <u>Fonction de répartition de X</u>

La fonction de répartition F de X est définie par :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x)=P(X<x)$

Ainsi F est définie par : $F(x)=\begin{cases} 0 & si\ x \leq 1 \\ \dfrac{1}{15} & si\ 1 < x \leq 2 \\ \dfrac{1}{5} & si\ 2 < x \leq 3 \\ \dfrac{2}{5} & si\ 3 < x \leq 4 \\ \dfrac{2}{3} & si\ 4 < x \leq 5 \\ 1 & si\ x > 5 \end{cases}$



* Espérance mathématique de X

L'espérance mathématique $E(X)$ de X est définie par

$$E(X) = \sum_{i=1}^{5} x_i \, p(X = x_i) = \frac{1 + 4 + 9 + 16 + 25}{15} = \frac{11}{3}$$

Donc $E(X) = \dfrac{11}{3}$.

Exercice N°2

Soit $I_n = \int_0^{2n} x e^{-x} dx$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$

1°) Calcul de I_n

Faisons une intégration par parties

Posons $\begin{cases} u = x \\ v' = e^{-x} \end{cases}$ prenons $\begin{cases} u' = 1 \\ v = -e^{-x} \end{cases}$

$$I_n = \left[-xe^{-x}\right]_0^{2n} + \int_0^{2n} e^{-x}\,dx = \left[-xe^{-x}\right]_0^{2n} + \left[-e^{-x}\right]_0^{2n}$$

Donc $I_n = 1 - (2n-1)e^{-2n}$

2°) On pose $V_n = \dfrac{1}{2n+1}(1 - I_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $V_n = e^{-2n}$

a) Nature de la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $V_{n+1} = e^{-2n-2} = e^{-2}V_n$, relation qui montre que (V_n) est une suite géométrique de raison $q = e^{-2}$ et de premier terme $V_1 = e^{-2}$

b) Sens de variations et convergence de $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $V_{n+1} - V_n = e^{-2n}(e^{-2} - 1)$.

Comme $e^{-2} < 1$, alors $e^{-2} - 1 < 0$ d'où $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $V_{n+1} < V_n$,

la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $V_n = e^{-2n} > 0$ doù la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est positive, donc minorée.

D'où la suite (V_n) est convergente.

3°) Nature de la suite (U_n)

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \text{Log}V_n \Rightarrow U_n = -2n$. Ainsi $U_{n+1} - U_n = -2$

En conclusion, la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite arithmétique de raison -2.

Problème

I. F la fonction définie de $\mathbb{C} - \{1\}$ dans $\mathbb{C}$ par : $F(z) = \dfrac{z^2}{i(1-z)}$

1) Forme algébrique de $F(z)$

On pose $z = x + iy$

$$F(z) = \frac{x^2 - y^2 + 2ixy}{(1-x)i + y} = \frac{\left(x^2 - y^2 + 2ixy\right)\left(y - (1-x)i\right)}{(1-x)^2 + y^2}$$

$$F(z) = \frac{-yx^2 - y^3 + 2xy + i\left(-x^2 + x^3 + xy^2 - y^2\right)}{(1-x)^2 + y^2}$$

Donc la partie réelle de $F(z)$ est $\dfrac{y\left(-x^2 - y^2 + 2x\right)}{(1-x)^2 + y^2}$ et la partie imaginaire de $F(z)$ est $\dfrac{-x^2 + x^3 + xy^2 - y^2}{(1-x)^2 + y^2}$

2°) Ensemble des points M tels que $F(z)$ soit imaginaire pure

$F(z)$ est imaginaire pure si la partie réelle est nulle, d'où

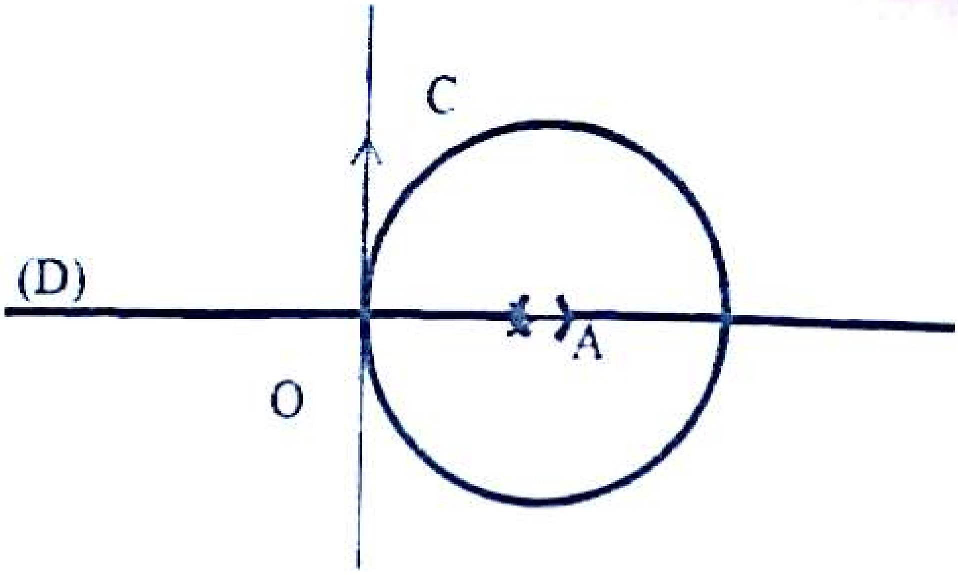
$y(-x^2 - y^2 + 2x) = 0$ avec $(x ; y) \neq (1 ; 0)$.

Soit $y = 0$ ou $-x^2 - y^2 + 2x = 0$ avec $(x ; y) \neq (1 ; 0)$.

$y = 0$ ou $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ avec $(x ; y) \neq (1 ; 0)$.

Soit D la droite d'équation $y = 0$ et C le cercle de centre $A(1 ; 0)$ et de rayon 1

Donc l'ensemble cherché est la réunion de la droite D privée de A et du cercle C.



II. f la fonction numérique définie par : $f(x) = |x|\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

1°) <u>Ensemble de définition de f</u>

$$D_f = \left\{ x \,/\, x \in \mathbb{R} \;,\; 1 - x \neq 0 \;\; et \;\; \frac{1-x}{1+x} \geq 0 \right\}.$$

$$\frac{1-x}{1+x} \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left]-1\,;\,1\right]. \text{ donc } D_f = \left]-1\,,\,1\right]$$

2°) * <u>Continuité de f aux points 0 et 1.</u>

On vérifie aisément que f est continue aux points 0 et 1.

* <u>Dérivabilité de f au point 0</u>

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \left(-\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right) = -1$$

f est dérivable à gauche au point 0 et $f'_g(0) = -1$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right) = 1$$

f est dérivable à droite au point 0 et $f'_d(0)$ 1.

Comme $f'_g(0) \neq f'_d(0)$, alors f n'est pas dérivable au point 0.

- Dérivabilité de f au point 1

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \frac{|x|\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}{x-1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \frac{-|x|}{(1-x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}$$

$$= \lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \frac{-|x|}{\sqrt{(1-x)(1+x)}} = -\infty \text{ , car } \lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \sqrt{(1-x)(1+x)} = 0$$

Donc f n'est pas dérivable au point 1.

3°) Calcul de la dérivée de f

Comme $|x| = \sqrt{x^2}$, on peut donc écrire $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-x^3}{1+x}}$.

Posons $u(x) = \frac{x^2-x^3}{1+x}$, d'où $u'(x) = \frac{2x(1-x-x^2)}{(1-x)^2}$

$\forall x \in]-1\,;0[\cup]0\,,1[$, $f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \sqrt{u(x)} \cdot \frac{u'(x)}{2u(x)}$

$$f'(x) = f(x) \times \frac{\frac{x(1-x-x^2)}{(1+x)^2}}{\frac{x^2-x^3}{1+x}} \Rightarrow f'(x) = f(x) \times \frac{1-x-x^2}{x(1-x^2)}$$

Donc $\forall x \in]-1\,;0[\cup]0\,;1[$, $f'(x) = |x|\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{1-x-x^2}{x(1-x^2)}$

4°) a) Variations de f

* $D_f =]-1\,;1]$

* $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} |x|\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} = +\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \left(\dfrac{1-x}{1+x}\right) = +\infty$

* <u>Sens de variations de f</u>

$f'(x)$ est du signe de $x(1-x-x^2)$ car pour tout x de $]-1;0[\cup]0;1[$, $1-x^2>0$

L'équation $1-x-x^2 = 0$ a pour solution $x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ dans $]-1;1[$

Le tableau de signe de $x(1-x-x^2)$ dans $]-1;1[$ est :

x	-1		0		$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$		1
$1-x-x^2$		$+$		$+$	0	$-$	
x		$-$	0	$+$		$+$	
$x(1-x-x^2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On en déduit que :

$\forall x \in]-1;0[\cup]\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}, 1[$, $f'(x) < 0$, d'où f est strictement décroissante sur $]-1, 0[$ et $]\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}, 1[$.

$\forall x \in]0, \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}[$, $f'(x) > 0$; d'où f est strictement croissante sur $]0, \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}[$.

$f'(x) = 0$ pour $x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

<u>Tableau de variations de f</u>

x	-1		0		$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$		1
$f'(x)$	‖	$-$	-1 ‖ 1	$+$	0	$-$	$-\infty$ ‖
f	‖ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	M	$\searrow$	0

Le maximum de f est $M = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\sqrt{-2+\sqrt{5}} \approx 0.3$

a) * <u>Equations des demi-tangentes à (C)</u>

La demi-tangente à droite au point O a pour équation $y = x$

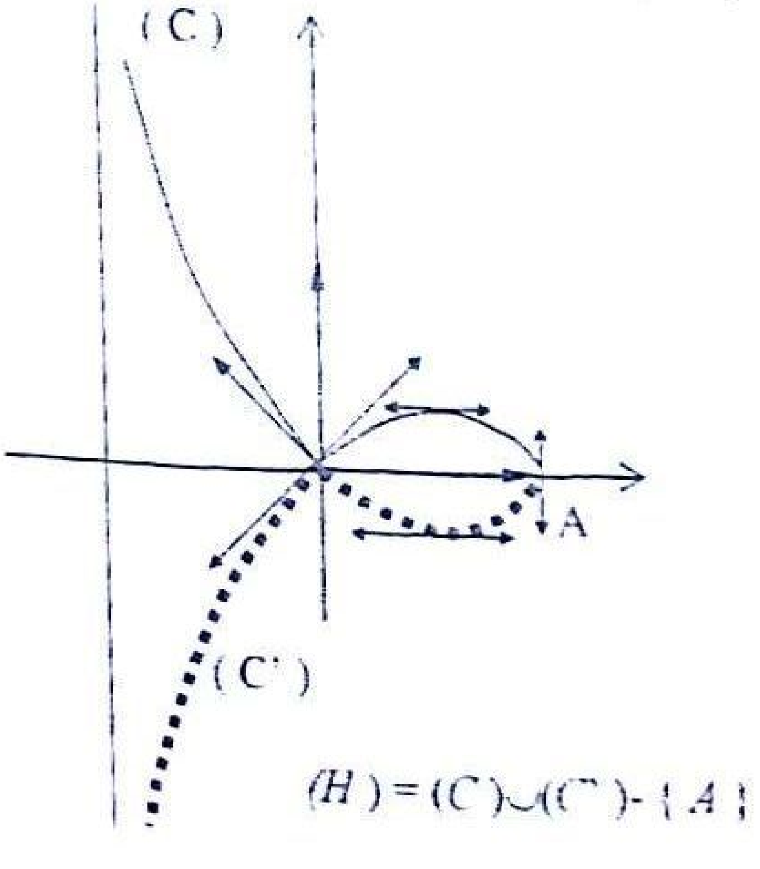
La demi-tangente à gauche au point O a pour équation $y = -x$

La demi-tangente à droite au point I a pour équation $x = 1$

* <u>Equation de l'asymptote à (C)</u>

$\lim\limits_{x \to -1} f(x) = +\infty$, d'où la droite d'équation $x = -1$ est asymptote à la courbe (C).

b) <u>Trace des courbes (C) et (H)</u>



5°) <u>Ensemble H des points M du plan tel que $F(z)$ soit réel</u>

$F(z)$ est réel si la partie imaginaire de $F(z)$ est nulle.

Soit $x^2 - x^3 - y^2(1+x) = 0$ avec $(x\,;y) \neq (1\,;0)$.

d'où $y^2 = x^2\,\dfrac{1-x}{1+x}$ avec $(x\,;y) \neq (1\,;0)$.

Comme $x \in]-1\,,1]$, alors $\dfrac{1-x}{1+x} \geq 0$ d'où $y = \sqrt{x^2\,\dfrac{1-x}{1+x}}$ ou

$y = -\sqrt{x^2\,\dfrac{1-x}{1+x}}$. Soit $y = f(x)$ ou $y = -f(x)$

* Si $y \geq 0$ alors $y = f(x)$ avec $(x\,;y) \neq (1\,;0)$ donc (H) et (C) sont confondues.

* Si $y < 0$ alors $y = -f(x)$ avec $(x\,;y) \neq (1\,;0)$ donc (H) et (C) sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

En conclusion, $H = (C \cup C') - \{A\}$ avec $A(1\,;0)$ et C' le symétrique de C par rapport à l'axe (ox). Voir la question 4°) pour le tracé de H.

III. M un point mobile en mouvement dans le plan défini par

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t - tg\left(\dfrac{t}{2}\right) \end{cases} \quad \text{avec } t \in [0\,,\pi[$$

1°) Trajectoire de M.

Si $t \in [0\,;\pi[$ alors $\cos t \in]-1\,;1]$ donc $x \in]-1\,;1]$

Rappelons les formules suivantes :

$$\cos t = \frac{1 - tg^2\left(\dfrac{t}{2}\right)}{1 + tg^2\,\dfrac{t}{2}} \quad \text{et} \quad \sin t = \frac{2tg\,\dfrac{t}{2}}{1 + tg^2\,\dfrac{t}{2}}$$

L'égalité $y = \sin t - tg\,\dfrac{t}{2}$ devient alors $y = \dfrac{1 - tg^2\,\dfrac{t}{2}}{1 + tg^2\,\dfrac{t}{2}} \cdot \left(tg\,\dfrac{t}{2}\right)$

soit $y = x tg\frac{t}{2}$ comme $x = \dfrac{1 - tg^2\frac{t}{2}}{1 + tg^2\frac{t}{2}}$ alors $tg^2\frac{t}{2} = \dfrac{1-x}{1+x}$

Or $t \in [0, \pi[$ d'où $\frac{t}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $tg\frac{t}{2} > 0$. Donc $tg\frac{t}{2} = \sqrt{\dfrac{1-x}{1-x}}$

car $x \in]-1 ;1]$. Par conséquent, $y = x\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ car $x \in]-1 ;1]$.

La trajectoire du mobile M est la réunion de (C) dans $[0 ; 1]$ et (C') dans $]-1 ;0]$.

A la date $t = 0$, le mobile est au point $A(1 ;0)$.

Si t croit de 0 à π, alors le mobile M va de A à l'infini.

2°) <u>Vecteurs vitesse et accélération.</u>

Le vecteur accélération est défini par $\vec{V}(t) = \dfrac{d\vec{M}}{dt}$

Soit $\vec{V}(t) \begin{cases} x' = -\sin t \\ y' = \cos t - \frac{1}{2}\left(1 + tg^2\frac{t}{2}\right) \end{cases}$

le vecteur accélération est défini par $\vec{\Gamma}(t) = \dfrac{d\vec{V}}{dt}$

soit $\vec{\Gamma}(t) \begin{cases} x'' = -\cos t \\ y'' = -\sin t - \frac{1}{2}\, tg\frac{t}{2}\left(1 + tg^2\frac{t}{2}\right) \end{cases}$

A l'instant $t = 0$, le mobile est en $A(1 ;0)$ avec un vecteur vitesse $\vec{V}_0\left(0, \frac{1}{2}\right)$ et un vecteur accélération $\vec{\Gamma}_0(-1, 0)$.

A la date $t = \frac{\pi}{2}$, le mobile est en $O(0\,;0)$ avec un vecteur vitesse $\vec{V_1}\,(-1,\,+1)$ et un vecteur accélération $\vec{\Gamma_1}\,(0\,,\,-2)$

3°) Nature du mouvement de M

Pour tout t de $]\,0\,;\pi\,[$ on a :

$$\vec{V(t)} \bullet \vec{\Gamma(t)} = -\frac{1}{2}(\cos t)\times tg\frac{t}{2}\left(1+tg^2\frac{t}{2}\right)+\frac{1}{2}\sin t\left(1+tg^2\frac{t}{2}\right)+\frac{1}{4}tg\frac{t}{2}\left(1+tg^2\frac{t}{2}\right)^2$$

Comme $\cos t = \dfrac{1-tg^2\frac{t}{2}}{1+tg^2\frac{t}{2}}$ et $\sin t = \dfrac{2tg\frac{t}{2}}{1+tg^2\frac{t}{2}}$,

alors on a: $\vec{V(t)} \bullet \vec{\Gamma(t)} = -\frac{1}{2}tg\frac{t}{2}\left(1-tg^2\frac{t}{2}\right)-tg\frac{t}{2}+\frac{1}{4}tg\frac{t}{2}\left(1+tg^2\frac{t}{2}\right)^2$

$$= \frac{1}{2}tg\frac{t}{2}\left(1+tg^2\frac{t}{2}\right)+\frac{1}{4}tg\frac{t}{2}\left(1+tg^2\frac{t}{2}\right)^2$$

soit $\vec{V(t)}\,.\,\vec{\Gamma(t)} = \frac{1}{4}tg\frac{t}{2}\left(1+tg^2\frac{t}{2}\right)\left(3+tg^2\frac{t}{2}\right)$

$\forall t \in \left]0\,,\pi\right[\quad tg\frac{t}{2}>0$ donc $\vec{V(t)}\,.\,\vec{\Gamma(t)} > 0$

Le mouvement de M est accéléré.

Session de juin 1985

Exercice N°1

f le polynôme défini par $f(z) = z^3 - (7-9i)z^2 - (14-39i)z + 50$

1°) Recherche d'une solution imaginaire pure.

Soit $z = bi$, $b \in \mathbb{R}$, une solution imaginaire pure de l'équation $f(z) = 0$.
Alors $f(bi) = 0$. Or, la forme algébrique de $f(bi)$ est

$f(bi) = (7b^2 - 39b + 50) + (-b^3 + 9b^2 - 14b)i$

$$f(bi) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 7b^2 - 39b + 50 = 0 & (1) \\ -b^3 + 9b^2 - 14b = 0 & (2) \end{cases}$$

La résolution de *(1)* donne $b = 2$ ou $b = \dfrac{25}{7}$. Or, seule la solution

$b = 2$ vérifie l'équation *(2)*.

Donc l'équation $f(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure $z = 2i$.

2°) <u>Résolution de l'équation $f(z) = 0$</u>

Comme 2i est un zéro du polynôme f, alors pour tout nombre complexe z, on a : $f(z) = (z - 2i)(az^2 + bz + c)$

Soit $f(z) = az^3 + (b - 2ai)z^2 + (c - 2bi)z - 2ci$

On a aussi $f(z) = z^3 - (7 - 9i)z^2 - (14 - 39i)z + 50$

Par identification, on obtient le système :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - 2ai = -7 - 9i \\ c - 2bi = -14 + 39i \\ -2ci = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -7 - 7i \\ c = 25i \end{cases}$$

Donc $\forall z \in \mathbb{C}$, $f(z) = (z - 2i)[z^2 - (7 + 7i)z - 25i]$

Ainsi $f(z) = 0 \Leftrightarrow z = 2i$ ou $z^2 - (7 + 7i)z + 25i = 0$ *(3)*

Le discriminant de l'équation *(3)* est $\Delta = -2i = (1-i)^2$

Les solutions de l'équation *(3)* sont $z_1 = 4 + 3i$ et $z_2 = 3 + 4i$

L'ensemble des solutions de l'équation $f(z) = 0$ est

$$S = \{ 2i \,;\, 4+3i \,;\, 3-4i \}$$

3°) *A*, *B* et *C* les points d'affixes respectives $2i$, $3+4i$, $4+3i$.

a) G le barycentre des points pondérés $(A ; 1)$, $(B ; -1)$ et $(C ; 1)$

Alors on a $\vec{GA} - \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$ d'où $\vec{OG} = \vec{OA} - \vec{OB} + \vec{OC}$

On déduit que l'affixe de G notée $z_G = z_A - z_B + z_C$ donc $z_G = 1 + i$

b) Pour tout point M du plan, on a :

$$MA^2 - MB^2 + MC^2 = (\vec{MG} + \vec{GA})^2 - (\vec{MG} + \vec{GB})^2 + (\vec{MG} + \vec{GC})^2$$

$$= MG^2 + 2\vec{MG}.(\vec{GA} - \vec{GB} + \vec{GC}) + GA^2 - GB^2 + GC^2$$

or $\vec{GA} - \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$ car G barycentre des points pondérés $(A, 1)$, $(B, -1)$ et $(C, 1)$.

Donc $MA^2 - MB^2 + MC^2 = MG^2 + GA^2 - GB^2 - GC^2$.

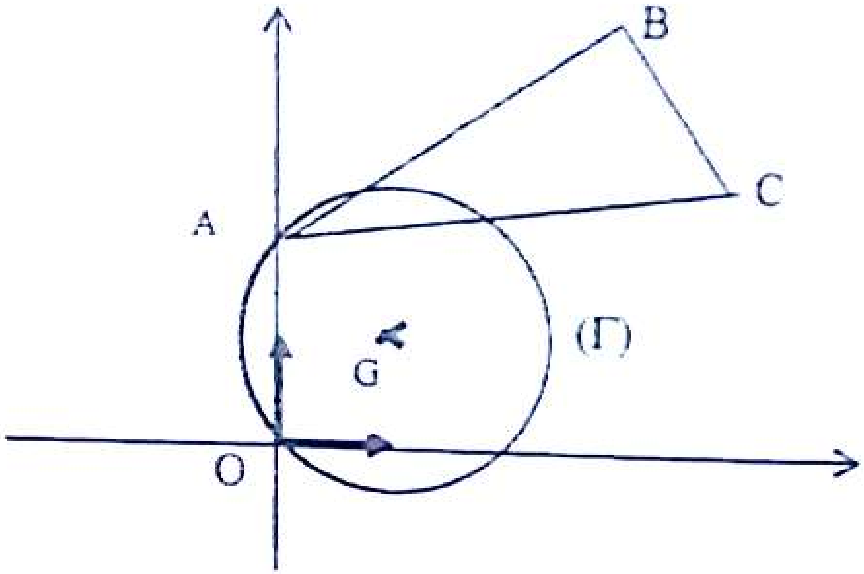
Or $GA = z_A - z_G = -1 - i = \sqrt{2}$; $GB = z_B - z_G = 2+3i = \sqrt{13}$

$GC = z_C - z_G = 3+2i = \sqrt{13}$.

Ainsi, $MA^2 - MB^2 - MC^2 = 4 \Leftrightarrow MG^2 + 2 = 4$

$\Leftrightarrow MG^2 = 2 \quad \Leftrightarrow MG = \sqrt{2}$.

L'ensemble cherché est le cercle Γ de centre G et de rayon $\sqrt{2}$ (on remarque que $A \in \Gamma$)



Exercice N°2

1°) <u>Tableau de variation de f</u> : $x \mapsto x^6(1-x)^{94}$ définie sur $[0,1]$

$\forall x \in [0 ; 1]$, $f'(x) = x^5(1-x)^{93}(6 - 100x)$

Le signe de $f'(x)$ sur $[0 , 1]$ est celui de $6 - 100x$

$\forall x \in [0 ; \frac{3}{50}]$, $f'(x) \geq 0$ d'où f croissante sur $[0 ; \frac{3}{50}]$

$\forall x \in [\ \frac{3}{50} ; 1\ ], f'(x) \leq 0$ d'où f décroissante sur $[\ \frac{3}{50} ; 1\ ]$.

x	0		$\frac{3}{50}$		1
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
			M		
f	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

Le maximum de f sur $[0 ; 1]$ est $M = \left(\frac{3}{50}\right)^6 \left(\frac{47}{50}\right)^{94}$ obtenu pour $x = \frac{3}{50}$

2°) On considère une réserve d'animaux contenant N autruches $(N > 30)$ dont 30 sont marquées.

a) La probabilité pour qu'une autruche attrapée soit marquée est $P = \frac{30}{N}$

b) Soit X la variable aléatoire comptant le nombre d'autruches marquées sur les 100 capturées. Comme on attrape successive ment 100 autruches que l'on relâche chaque fois, alors X suit une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $P = \frac{30}{N}$

Donc, $P(X = k) = C_{100}^{k} \left(\frac{30}{N}\right)^k \left(100 - \frac{30}{N}\right)^{100-k}$ pour $k \in \{0, 1, ..., 100\}$

3°) $P(X = 6) = C_{100}^{6} \left(\frac{30}{N}\right)^6 \left(\frac{70}{N}\right)^{94} = C_{100}^{6} f(\frac{30}{N})$

$P(X = 6)$ est maximale équivaut à $f(\frac{30}{N})$ maximale .

Or $f(\frac{30}{N})$ maximale pour $\frac{30}{N} = \frac{3}{50}$ soit $N = 500$.

Donc $P(X = 6)$ est maximale pour 500 autruches.

Problème

I. u la fonction définie par $u(x) = x^2 + Log|1 - x|$

1°) Variations de u

* u est définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$

$\lim\limits_{+\infty} u = \lim\limits_{-\infty} u = +\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} u(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} u(x) = -\infty$ car $\lim\limits_{x \to 1} Log|1 - x| = -\infty$

Les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto Log|1-x|$ sont respectivement dérivables sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R} - \{1\}$ d'où u somme de ces 2 fonctions est dérivable sur $\mathbb{R} - \{1\}$.

$\forall x \in \mathbb{R} - \{1\},\ u'(x) = \dfrac{2x^2 - 2x + 1}{x - 1}$.

Le signe de $u'(x)$ est celui de $x - 1$ car pour tout réel x, $2x^2 - 2x + 1 > 0$ puisque $\Delta = -4 < 0$.

$\forall x \in]-\infty ; 1[$, $u'(x) < 0$, alors u est décroissante sur $]-\infty; 1[$

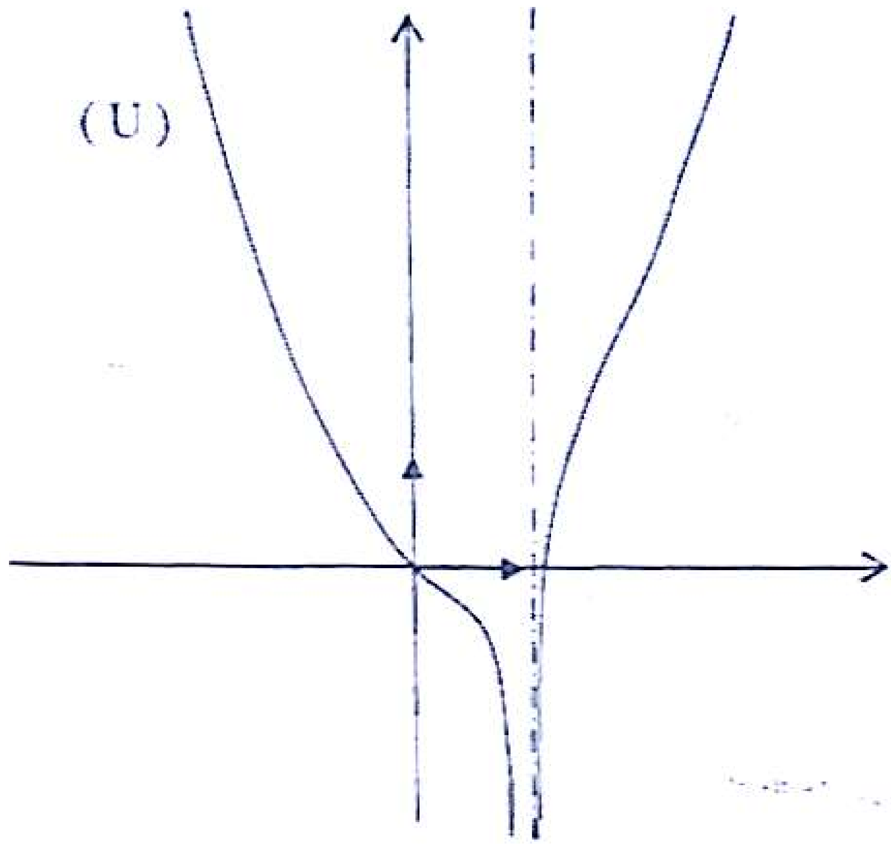
$\forall x \in]1 ; +\infty[$ $u'(x) > 0$, alors u est croissante sur $]1 ; +\infty[$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$u'(x)$		$-$	‖	$+$	
u	$+\infty$ ↘	$-\infty$	‖	$-\infty$ ↗	$+\infty$

2°) Tracé de la courbe *(U)* de *u*

Tableau de valeurs de *u*

x	-2	-1	- 0.5	0	0.5	1.5	2	3
$u(x)$	5,09	1,69	0,65	0	- 0,44	1,55	4	9,69



3°) La restriction de u à $]-\infty; 1[$ est continue et strictement décroissante ; donc elle est bijective de $]-\infty; 1[$ vers $\mathbb{R}$.
Or $0 \in \mathbb{R}$ d'où $u(x) = 0$ admet une solution unique x_0 dans $]-\infty ; 1[$.
Comme $u(0) = 0$ alors $x_0 = 0$.
La restriction de u à $]1 ; +\infty[$ est continue et strictement croissante ; donc elle est bijective de $]1 ; +\infty[$ vers $\mathbb{R}$.
Or $0 \in \mathbb{R}$ d'où $u(x) = 0$ admet une solution unique x_1 dans $]1 ; +\infty[$.
De plus $u(2) = 4 > 0$ et $\lim\limits_{x \to 1} u(x) = -\infty$ donc $x_1 \in]1 ;2[$.

4°) v la fonction numérique définie par : $v(x) = -(x-1)^2 + Log|1-x|$

v est définie et dérivable sur $\mathbb{R} - \{1\}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}-\{1\},\ v'(x) = \frac{-2x^2+4x-1}{x-1}.$$

Le signe de $v'(x)$ est celui de $(x-1)(-2x^2+4x-1)$

$$\forall x \in \left]-\infty, \frac{2-\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left]1, \frac{2+\sqrt{2}}{2}\right],\ v'(x) \geq 0$$

v est croissante sur $\left]-\infty, \frac{2-\sqrt{2}}{2}\right]$ et $\left]1, \frac{2+\sqrt{2}}{2}\right]$.

$$\forall x \in \left[\frac{2-\sqrt{2}}{2}, 1\right[\cup \left[\frac{2+\sqrt{2}}{2}, +\infty\right[,\ v'(x) \leq 0$$

v est décroissante sur $\left[\frac{2-\sqrt{2}}{2}, 1\right[$ et $\left[\frac{2+\sqrt{2}}{2}, +\infty\right[$

De ce qui précède, v admet deux maximums aux points $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ et $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$.

Sur $]-\infty;1[$, v présente un maximum au point $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$.

D'où, $\forall x \in]-\infty;1[$, $v(x) \leq v(\frac{2-\sqrt{2}}{2})$ or $v(\frac{2-\sqrt{2}}{2}) = \frac{-1}{2}(1+Log2)$.

Donc $\forall x \in]-\infty;1[$, $v(x) \leq \frac{-1}{2}(1+Log\,2)$.

Sur $]1;+\infty[$, v présente un maximum au point $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$.

D'où, $\forall x \in]1;+\infty[$, $v(x) \leq v(\frac{2+\sqrt{2}}{2})$ or $v(\frac{2+\sqrt{2}}{2}) = \frac{-1}{2}(1+Log2)$.

donc $\forall x \in]1\,;+\infty[$, $v(x) \leq \frac{-1}{2}(1+Log2)$

En conclusion, $\forall x \in \mathbb{R}-\{1\}$, $v(x) \leq \frac{-1}{2}(1+Log2)$.

II. f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2 + Log|1-x|}{1-x}$

1°) <u>Variations de f</u>

* f est définie sur $\mathbb{R}-\{1\}$

$\lim\limits_{-\infty} f = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[-x + \dfrac{Log|1-x|}{1-x}\right] = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x) = +\infty$

et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{Log|1-x|}{1-x} = 0$

De même $\lim\limits_{-\infty} f = \lim\limits_{x\to-\infty}(-x) = +\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} \dfrac{1}{1-x^2}(1+Log|1-x|) = -\infty$ .car $\lim\limits_{\substack{x\to\\x<1}}\left(\dfrac{1}{1-x^2}\right) = -\infty$

et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} Log|1-x| = -\infty$ .On a de même $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = -\infty$

* f est dérivable sur $\mathbb{R}-\{1\}$

$\forall x \in \mathbb{R}-\{1\}$, $f'(x) = \dfrac{-x^2+2x-1+Log|1-x|}{(1-x)^2}$, $f'(x) = \dfrac{v(x)}{(1-x)^2}$.

Or $\forall x \in \mathbb{R}-\{1\}$, $v(x) \leq \frac{-1}{2}(1+ln2) < 0$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}-\{1\}$, $f'(x) < 0$. f est strictement décroissante sur $]-\infty;1[$ et $]1\,;+\infty[$.

Tableau de variation de f

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

2°)

a) Asymptote oblique

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(-x-1)\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+Log(1-x)}{1-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{Log|1-x|}{1-x}$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{Log|t|}{t}=0 \quad \text{en posant} \quad t=1-x$$

De même $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(-x-1)\right]=0$.

Donc la droite (D) d'équation $y=-x-1$ est asymptote à la courbe (C).

b) Autre asymptote

$\lim_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x)=-\infty$ et $\lim_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x)=-\infty$, donc la droite d'équation $x=1$ est asymptote à (C).

3°) Centre de symétrie

$\forall x\in\mathbb{R}-\{1\}, 2-x\in\mathbb{R}-\{1\}$.

$$\forall x\in\mathbb{R}-\{1\}, f(2-x)+4=\frac{(2-x)^2+Log|1-x|}{-1+x}+4$$

$$=\frac{4-4x+x^2+Log|1-x|+4(-1+x)}{-1+x}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{1\},\ f(2-x)+4 = \frac{x^2 + Log|1-x|}{-1+x} = -f(x).$$

Donc $I(1\ ;-2)$ est centre de symétrie de (C).

4°) Equation des tangentes (T_o) et (T_2)

La tangente (T_o) à la courbe (C) au point d'abscisse 0 a pour équation $y = -x$

La tangente (T_2) à la courbe (C) au point d'abscisse 2 a pour équation $y = -x-2$.

5°) Intersection de (C) et de l'asymptote (D)

On résout l'équation $f(x) = -x - 1$. soit : $\dfrac{1+Log|1-x|}{1-x} = 0$

$$\frac{1+Log|1-x|}{1-x} = 0 \Rightarrow Log|1-x| = -1$$

$$Log|1-x| = -1 \Leftrightarrow |1-x| = \frac{1}{e}$$

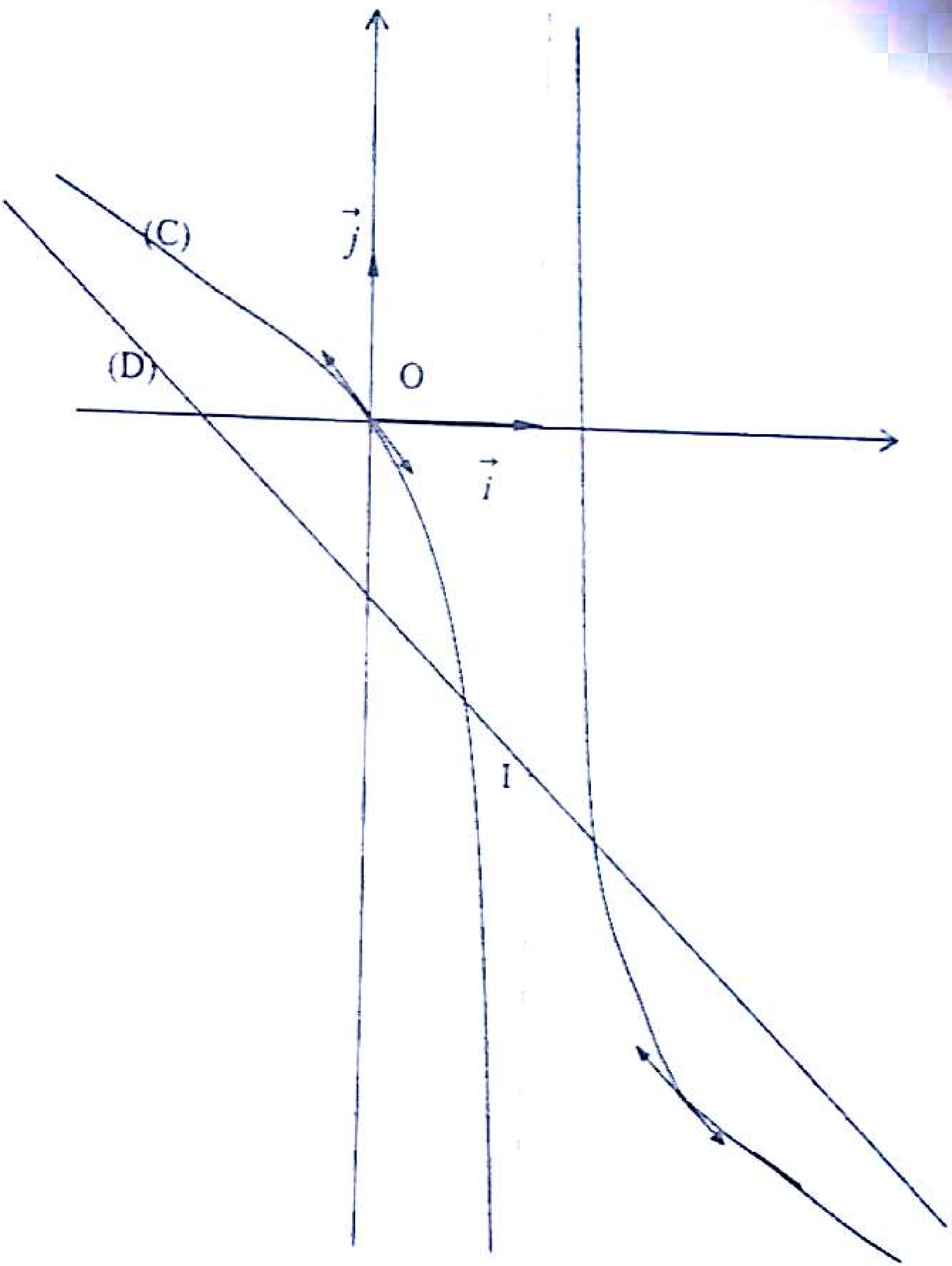
$$\Leftrightarrow \left(1-x = \frac{1}{e} \text{ ou } 1-x = -\frac{1}{e}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(x = 1-\frac{1}{e} \text{ ou } x = 1+\frac{1}{e}\right).$$

On a donc deux points d'intersection de (C) et (D) qui sont :

$K\left(1-\frac{1}{e}\ ,\ -2+\frac{1}{e}\right)$ et $J\left(1+\frac{1}{e}\ ,\ -2-\frac{1}{e}\right)$

6°) Tracé de (C)



2°) Montrons que $D = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

$$D = \sum_{k=0}^{n} k = 0 + 1 + 2 + \ldots + n.$$

D est la somme de $(n+1)$ premiers termes d'une suite arithmétique de raison 1. et de premier terme 0.

D'où $D = \dfrac{n(n+1)}{2}$

On peut écrire aussi :

$D = 0 + 1 + \ldots\ldots + (n-1) + n$

$D = n + (n-1) + \ldots + 1 + 0$

En additionnant membre à membre. ces 2 égalités. on obtient :

$$2D = \underbrace{n + n + \ldots\ldots + n}_{(n+1)\ \text{termes}}$$

Soit $2D = n(n+1)$ d'où $D = \dfrac{n(n+1)}{2}$

3°) <u>Valeur de A</u>

$$B = \sum_{k=0}^{n} (1+k)^3 = \sum_{k=0}^{n} (1 + 3k + 3k^2 + k^3)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} 1 + 3\sum_{k=0}^{n} k + 3\sum_{k=0}^{n} k^2 + \sum_{k=0}^{n} k^3$$

$B = (n+1) + 3D + 3A + C$ (1).

Or $B = C + (n+1)^3$ d'après la 2ème question, donc (1) devient :

$$C + (n+1)^3 = (n+1) + 3D + 3A + C.$$

$$\text{D'où } A = \frac{(n+1)^3 - (n+1) - 3D}{3} = \frac{(n+1)\left[(n+1)^2 - 1 - \dfrac{3n}{2}\right]}{3}$$

$$\text{Donc } A = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Exercice N°2

Soit le polynôme complexe P défini par :

$$P(z) = 2z^4 - 9z^3 + 17z^2 - 19z - 15$$

1°) Montrons que $\overline{P(z)} = P(\bar{z})$

$$\overline{P(z)} = \overline{2z^4 - 9z^3 + 17z^2 - 19z - 15}$$

$$= \overline{2z^4} - \overline{9z^3} + \overline{17z^2} - \overline{19z} - 15$$

$$= 2(\bar{z})^4 - 9(\bar{z})^3 + 17(\bar{z})^2 - 19\bar{z} - 15 = P(\bar{z}).$$

Donc $\overline{P(z)} = P(\bar{z})$

2°) Calcul de $P(1-2i)$

$$P(1-2i) = 2(1-2i)^4 - 9(1-2i)^3 + 17(1-2i)^2 - 19(1-2i) - 15$$

$$= 2(-7-24i) - 9(-11-2i) + 17(-3-4i) - 19 + 38i - 15$$

$$= -14 - 48i - 99 - 18i - 51 - 68i - 19 + 38i - 15$$

$$= 99 - 86i - 99 - 86i = 0$$

Donc $z_0 = 1-2i$ est une racine de $P(z)$. D'après la première question,

$\overline{P(z_0)} = P(\bar{z}_0) = 0$. Donc $z_1 = \bar{z}_0 = 1 + 2i$ est aussi une racine de $P(z)$

.3°) <u>Factorisation et résolution de $P(z)$</u>

Comme z_0 et z_1 sont des zéros du polynôme P,

Alors $P(z) = (z-z_0)(z-z_1)(az^2+bz+c) = (z^2-2z+5)(az^2+bz+c)$

$= az^4 + (b-2a)z^3 + (c-2b+5a)z^2 + (-2c+5b)z + 5c$

or $P(z) = 2z^4 - 9z^3 - 17z^2 - 19z - 15$.

Par identification, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} a = 2 \\ b - 2a = -9 \\ c - 2b + 5a = -17 \\ -2c + 5b = -19 \\ 5c = -15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -5, \\ c = -3 \end{cases}$$

donc $P(z)=(z-z_0)(z-z_1)(2z^2-5z-3)$.

Résolution de l'équation $2z^2-5z-3 = 0$

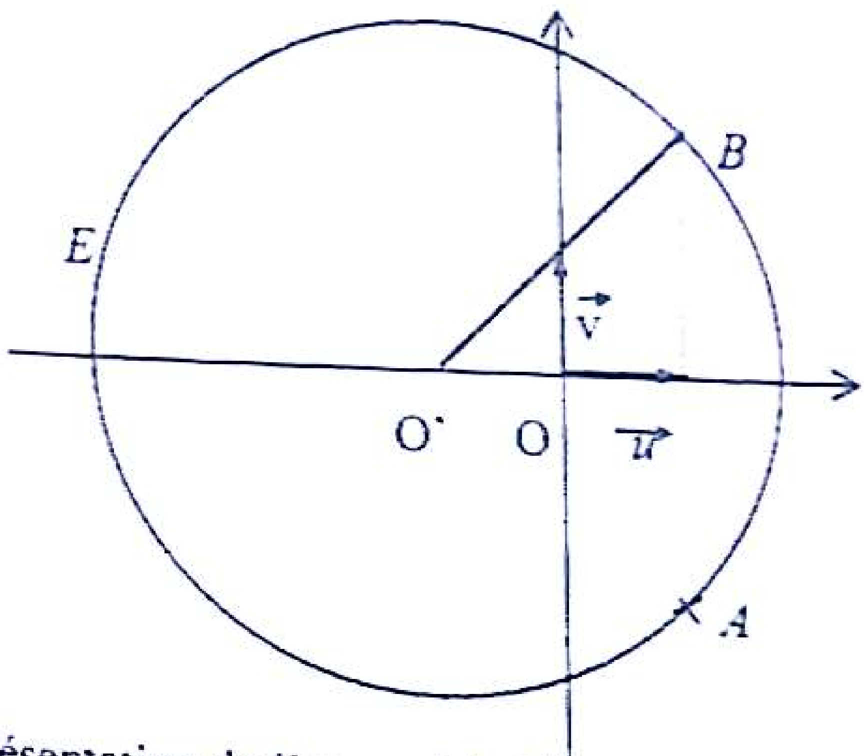
$\Delta = 49$ d'où $z_2 = 3$ et $z_3 = -\frac{1}{2}$.Donc $P(z)=(z-1+2i)(z-1-2i)(z-3)(2z+1)$

Les solutions de l'équation $P(z)=0$ sont :

$$z_0 = 1-2i \;;\; z_1 = 1+2i \;;\; z_2 = 3 \text{ et } z_3 = -\frac{1}{2}.$$

4°)

a) Le point O' a pour affixe z' = -1 ; d'où O'(-1 , 0)



b) Représentation de l'ensemble E (voir figure ci-dessus)

$E=\{M(x,y)/x^2+y^2-2x-7=0\}$.

Or, $x^2+y^2+2x-7=0 \Leftrightarrow (x+1)^2+y^2=8$

Donc E est le cercle de centre O' et de rayon $2\sqrt{2}$

Or le point $B(1,\ 2)$ appartient au cercle (C) .

En conclusion, E est le cercle de centre O' et de rayon $O'B$.

c) Soit le point A d'affixe z_0 et B d'affixe z_1. Donc $A(1,\ -2)$ et $B(1,\ 2)$

Les points A et B appartiennent au cercle E (voir figure ci-dessus).

Problème

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x)=\begin{cases}(\ln x)^2-2\ln x+3 & \text{si } x>0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$$

1°)a)Continuité de f en 0

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(\ln x)^2\left[1-\frac{2}{\ln x}+\frac{3}{(\ln x)^2}\right]=+\infty$$

car $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{2}{\ln x}\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{3}{(\ln x)^2}=0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x)^2=+\infty$.

Donc f n'est pas continue au point 0.

b) Limite de f en $+\infty$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}(\ln x)^2\left(1-\frac{2}{\ln x}+\frac{3}{(\ln x)^2}\right)=+\infty \text{ car}$$

$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2}{\ln x}=0$, $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3}{(\ln x)^2}=0$ et $\lim\limits_{x\to +\infty}(\ln x)^2=+\infty$

c)$\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, on a $x=(\sqrt{x})^2$, d'où

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ \frac{(\ln x)^2}{x}=\frac{\left[\ln(\sqrt{x})^2\right]^2}{(\sqrt{x})^2}=\left[\frac{2\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right]^2$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=\lim_{x\to +\infty}4\left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2=0 \text{ car } \frac{\ln t}{t}\to 0 \text{ en } +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+}x(\ln x)^2=\lim_{x\to 0^+}\left(2\sqrt{x}\ln\sqrt{x}\right)^2=\lim_{x\to 0^+}4\left(\sqrt{x}\ln\sqrt{x}\right)^2=0 \text{ car } t\ln t\to 0 \text{ en } 0^+$$

d) On note (C) la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ d'où la droite d'équation $x = 0$ est asymptote à (C)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^2}{x}\left[1 - \frac{2}{\ln x} + \frac{3}{(\ln x)^2}\right] = 0$$

car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{\ln x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{(\ln x)^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{x} = 0$.

donc (C) admet une branche parabolique de direction (ox) en $+\infty$.

2°) a) Dérivabilité de f en 0

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln x)^2}{x}\left[1 - \frac{2}{\ln x} + \frac{3}{(\ln x)^2}\right] = +\infty$$

car $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2}{\ln x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{3}{(\ln x)^2} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{(\ln x)^2}{x} = +\infty$.

Donc f n'est pas dérivable en 0.

b) Calcul de f' et f'' sur $\mathbb{R}_+^*$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \dfrac{2\ln x}{x} - \dfrac{2}{x} = \dfrac{2(\ln x - 1)}{x}$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f''(x) = \dfrac{2 - 2(\ln x - 1)}{x^2} = \dfrac{2(2 - \ln x)}{x^2}$

Variation de f

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = e$

$\forall x \in]0, e]$, $f'(x) \leq 0$ donc f est décroissante sur $]0, e]$

$\forall x \in [\, e\,, +\infty\,[\,,\quad f\,'(x) \geq 0$ donc f est croissante sur $[\, e\,, +\infty\,[$.

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

<u>Variation de f'</u>

$f\,''(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - \ln x = 0 \Leftrightarrow x = e^2$

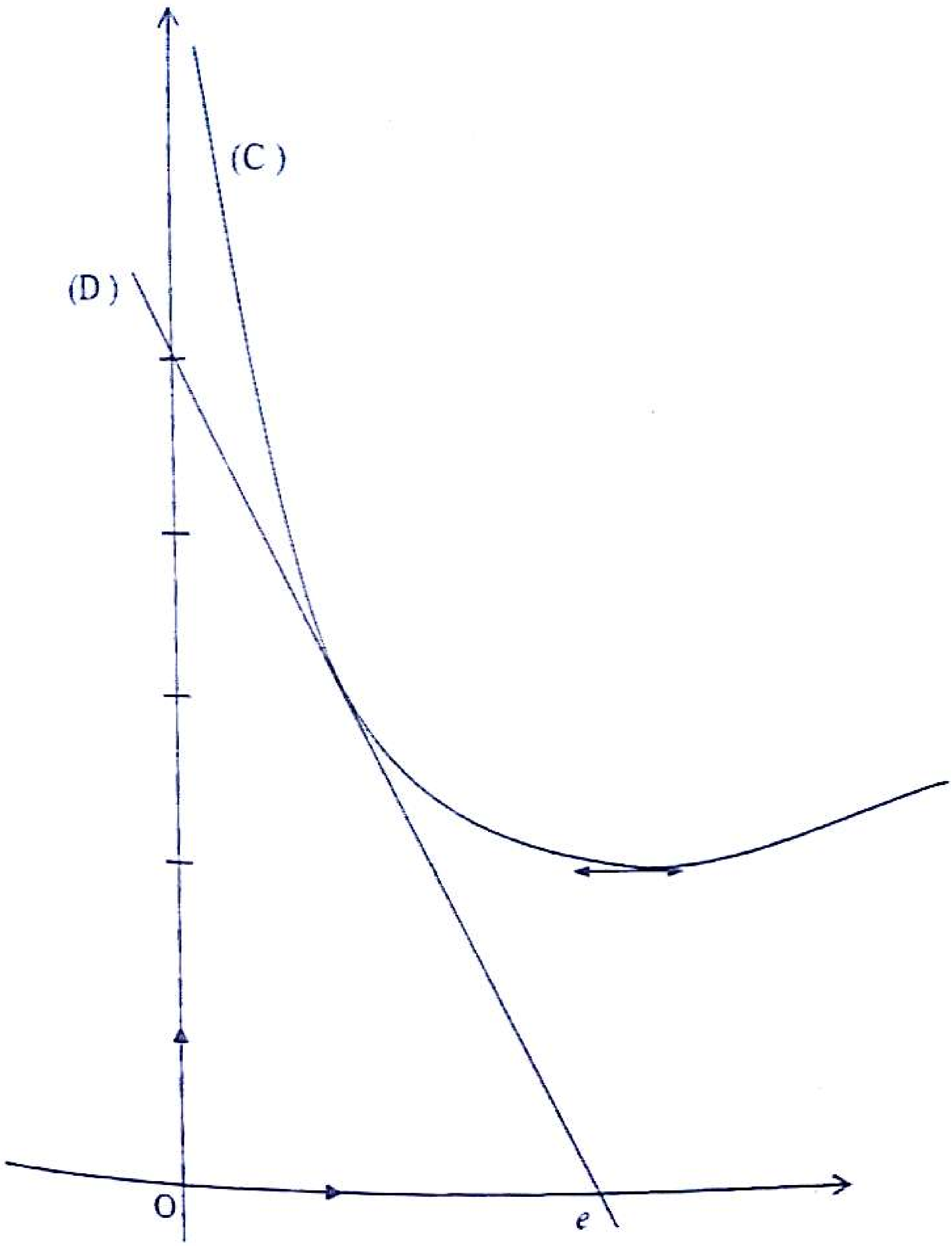
$\forall x \in \,]\, 0\,, e^2\,]\,,\ f\,''(x) \geq 0$, donc $f\,'$ est croissante sur $]\, 0\,, e^2\,]$

$\forall\, x \in [\, e^2\,, +\infty\,[\ , f\,''(x) \leq 0$, donc $f\,'$ est décroissante sur $[\, e^2\,, +\infty\,[$

x	0		e^2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
f'	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{2}{e^2}$	$\searrow$	0

c)La tangente (D) à la courbe (C) au point d'abscisse 1 , a pour équation $y = -2x+5$ car $f(1) = 3$ et $f\,'(1) = -2$.

d) Tracé de (C)



3°) a) Montrons que $\forall y \in \mathbb{R}_+^*$, $f(e^y) > y$

or $f(e^y) = (\ln e^y)^2 - 2\ln e^y + 3 = y^2 - 2y + 3$,

d'où $\forall y \in \mathbb{R}_+^*$, $f(e^y) - y = y^2 - 3y + 3 = \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$

$\forall y \in \mathbb{R}_+^*$, $\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$, par conséquent $\forall y \in \mathbb{R}_+^*$, $f(e^y) > y$.

b) Soit (T) la tangente à (C) au point d'abscisse x_0

S'il existe $x_0 > 0$ tel que (T) soit parallèle à la première bissectrice alors on aura : $f'(x) = 1$.

Or. $f'(x_0) = 1 \Leftrightarrow \dfrac{2(\ln x_0 - 1)}{x_0} = 1 \Leftrightarrow 2\ln x_0 - x_0 - 2 = 0$

En posant $h(x) = 2\ln x - x - 2$. alors x_0 est solution de $h(x) = 0$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $h'(x) = \dfrac{2}{x} - 1 = \dfrac{2-x}{x}$.

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

$\forall x \in]0\,,2]$, $h'(x) \geq 0$ et $\forall x \in [2\,,+\infty[$, $h'(x) \leq 0$.

Donc h admet un maximum au point 2. d'où $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $h(x) \leq h(2)$.

Comme $h(2) = 2\ln 2 - 4 < 0$, alors $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $h(x) < 0$

donc $h(x) = 0$ n'a pas de racine dans $\mathbb{R}_+^*$.

Donc il n'existe pas de tangente à (C) parallèle à la première bissectrice.

4°) a) <u>Calcul de</u> $\int_1^e \ln x\,dx$

En faisant une intégration par parties, on pose :

$\begin{cases} u' = 1 \\ v = \ln x \end{cases}$ Prenons $\begin{cases} u = x \\ v' = \dfrac{1}{x} \end{cases}$.

D'où $\int_1^e \ln x dx = [x\ln x]_1^e - \int_1^e dx = [x\ln x]_1^e - [x]_1^e = 1$

b) <u>Primitive de $(\ln x)^2$</u>

On pose : $\begin{cases} u' = 1 \\ v = (\ln x)^2 \end{cases}$ prenons $\begin{cases} u = x \\ v' = \dfrac{2\ln x}{x} \end{cases}$

$$\int (\ln x)^2 dx = x(\ln x)^2 - \int 2\ln x dx$$

$$= x(\ln x)^2 - 2x\ln x - 2x$$

c) On note $A(\lambda)$ la partie du plan définie par

$A(\lambda) = \{M(x,y) \quad \lambda \le x \le e \quad \text{et} \quad y \le f(x)\}$, où $\lambda \in]0, e[$

$$a(\lambda) = \int_\lambda^e f(x)dx = \int_\lambda^e (\ln x)^2 dx + \int_\lambda^e (3 - 2\ln x)dx$$

$$= [x(\ln x)^2 - 2x\ln x - 2x]_\lambda^e + [3x - 2x\ln x + 2x]_\lambda^e$$

$$= [x(\ln x)^2 - 4x\ln x + 3x]_\lambda^e$$

$$= e - 4e - 3e - \lambda(\ln\lambda)^2 - 4\lambda\ln\lambda - 3\lambda$$

donc $a(\lambda) = -\lambda(\ln\lambda)^2 + 4\lambda\ln\lambda - 3\lambda$

$$\lim_{\lambda\to 0^+} a(\lambda) = \lim_{\lambda\to 0^+}\left[-4(\sqrt{\lambda}\ln\sqrt{\lambda})^2 + 4(\lambda\ln\lambda) - 3\lambda\right] = 0$$

car $\lim_{\lambda\to 0^+} \sqrt{\lambda}\ln\sqrt{\lambda} = \lim_{\lambda\to 0^+} \lambda\ln\lambda = 0$, donc $\lim_{\lambda\to 0^+} a(\lambda) = 0$

Session de Novembre 1995

Exercice N°1

Soit la suite réelle $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \int_{n-1}^{n} (\ln 3)^x dx$

1°) Une primitive de la fonction f définie par : $f(x) = (ln3)^{-x}$ est la fonction F telle que : $F(x) = \frac{-1}{\ln(\ln 3)}(\ln 3)^{-x}$.

D'où $U_n = F(n) - F(n-1) = \frac{-1}{\ln(\ln 3)}\left[(\ln 3)^{-n} - (\ln 3)^{-n+1}\right]$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n = \frac{(\ln 3)^{-n}}{\ln(\ln 3)}(-1 + \ln 3)$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, U_{n+1} = \frac{(\ln 3)^{-n-1}}{\ln(\ln 3)}(-1 + \ln 3) = \frac{(\ln 3)^{-n}}{\ln(\ln 3)}(-1 + \ln 3) \times \frac{1}{\ln 3}$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_{n+1} = \frac{1}{\ln 3}U_n$

Donc $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{\ln 3}$ et de premier terme $u_1 = \frac{1-(\ln 3)^{-1}}{\ln(\ln 3)}$

2°) <u>Convergence de $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$</u>

Comme $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{\ln 3}$ et.

$|q| < 1$ car $\ln 3 > 1$, alors la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

3°) <u>Somme des termes d'une suite géométrique</u>

a) <u>Calcul de S_n</u>

$S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$

S_n est la somme de n premiers termes d'une suite géométrique de

raison $q = \frac{1}{\ln 3}$ et de premier terme $U_1 = \frac{1-(\ln 3)^{-1}}{\ln(\ln 3)}$.

d'où $S_n = U_1 \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1-(\ln 3)^{-1}}{\ln(\ln 3)} \times \frac{1-(\ln 3)^{-n}}{1-(\ln 3)^{-1}}$. Donc $S_n = \frac{1-(\ln 3)^{-n}}{\ln(\ln 3)}$.

b) Convergence de (S_n)

$$\lim_{x \to +\infty} S_n = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\ln(\ln 3)}\left[1-(\ln 3)^{-n}\right] = \frac{1}{\ln(\ln 3)}$$

Car $(\ln 3)^{-n} = \frac{1}{(\ln 3)^n} \to 0$ quand $n \to +\infty$.

Donc la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\frac{1}{\ln(\ln 3)}$.

Exercice N°2

On considère un dé tétraédrique pipé, dont les faces sont numérotés de 1 à 4 telles que $p(i) = ci^2$.

1°) Calcul de c

$\sum_{i=1}^{4} p_i = p(1)+p(2)+p(3)+p(4) = 30c$, or $\sum_{i=1}^{4} p_i = 1$ d'où $c = \frac{1}{30}$.

Ainsi donc $p(1) = \frac{1}{30}$; $p(2) = \frac{2}{15}$; $p(3) = \frac{3}{10}$ et $p(4) = \frac{8}{15}$

2°) Loi de X - Espérance et variance de X

X la variable aléatoire "somme des numéros visibles"

L'ensemble des valeurs prises par X, est égal à $X(\Omega) = \{6, 7, 8, 9\}$

Loi de X

La loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant :

x_i	6	7	8	9
$p(X = x_i)$	$\frac{8}{15}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{30}$

Calcul de $E(X)$

L'espérance mathématique de X, est définie par

$$E(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i\, p(X = x_i) = \frac{96 + 63 + 32 + 9}{30} = \frac{20}{3} \quad \text{Donc } E(X) = \frac{20}{3}$$

Calcul de $V(X)$

La variance de X est définie par $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$, or

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{4} x_i^2\, p(X = x_i) = \frac{576 + 441 + 256 + 81}{30} = \frac{677}{15}$$

d'où $V(X) = \frac{677}{15} - (\frac{20}{3})^2 = \frac{31}{45}$ Donc $V(X) = \frac{31}{45}$

3°)Soit A l'événement « X est paire au moins deux fois au cours de 5 lancers ». Or la probabilité p pour que X soit paire en un seul lancer est $p = p(X = 6) + p(X = 8) = 2/3$

D'où $p(A) = 1 - p(\overline{A}) = 1 - \left[C_5^1\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^4 + \left(\frac{1}{3}\right)^5\right] = 1 - \frac{11}{243} = \frac{232}{243}$

donc $p(A) = 0,95$

Problème

A Soit M un point mobile défini par :

$$\begin{cases} x(t) = \ln(\cos t) \\ y(t) = \dfrac{1+\cos^2 t}{\cos t} \end{cases} \quad \text{avec} \quad t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

1°) <u>Trajectoire du mobile M</u>

Si $t \to 0$, $\cos t \to 1$ d'où $x \to 0$

$t \to \frac{\pi}{2}$, $\cos t \to 0^+$ d'où $x \to -\infty$

Ainsi, $\forall t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ alors $x \in \left]-\infty, 0\right[$

Or $x = \ln(\cos t) \Leftrightarrow \cos t = e^x$

D'où $y = \dfrac{1+\cos^2 t}{\cos t} = \dfrac{1-e^{2x}}{e^x}$ avec $x < 0$

La trajectoire du mobile M est donc contenue dans la courbe (C) d'équation $y = \dfrac{1+e^{2x}}{e^x}$ avec $x < 0$

2°) <u>Vecteur vitesse</u>

Le vecteur vitesse $\vec{V}(t)$ est défini par $\vec{V}(t) = \dfrac{d\vec{M}}{dt}$

D'où $\vec{V}(t)\begin{cases} x' = \dfrac{-\sin t}{\cos t} \\ y' = \dfrac{\sin^2 t}{\cos^2 t} \end{cases}$

Le vecteur $\vec{V}(t)$ est orthogonal au vecteur $\vec{W}(t) = \dfrac{-1}{2\cos t}\vec{i} - \vec{j}$ si et seulement si $\vec{V}(t).\vec{W}(t) = 0$

Or $\vec{V}(t).\vec{W}(t) = \dfrac{\sin t(1-2\sin^2 t)}{2\cos^2 t} = \dfrac{\sin t \times \cos 2t}{2\cos^2 t}$

$\vec{V}(t).\vec{W}(t)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin t = 0 \\ ou \\ \cos 2t = 0 \end{cases}$ avec $t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

or $\forall t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[\quad \sin t \neq 0$

$\cos 2t = 0 \Leftrightarrow 2t = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow t = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$

Comme $t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, alors $\cos 2t = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{\pi}{4}$

Donc pour $t_0 = \dfrac{\pi}{4}$, $\vec{V}(t)$ est orthogonal à $\vec{W}(t)$.

B. f_m la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f_m(x) = \dfrac{e^{mx}+1}{e^x}$ où $m \in \mathbb{R}$

1°)<u>Point fixe de (C)</u>

Soit $I(x_0, y_0)$, le point fixe de C_m.

Si toutes les courbes C_m passent par un point fixe I, alors

$\forall m\in \mathbb{R}$, $I(x_0, y_0)\in C_m$ équivaut à $\forall m\in \mathbb{R}$, $y_0 = e^{(m-1)x_0} + e^{-x_0}$

équivaut à $\forall m\in \mathbb{R}$, $(m-1)x_0 = \ln\left(y_0 - e^{-x_0}\right)$

équivaut à $\forall m\in \mathbb{R}$, $mx_0 + x_0 - \ln\left(y_0 - e^{-x_0}\right) = 0$ (E)

On obtient une équation de la forme $am + b = 0$ pour toute valeur réelle de m, d'où $a = b = 0$

Ainsi donc $(E) \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 + \ln(y_0 - e^{-x_0}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 2 \end{cases}$

Donc le point fixe est $I(0, 2)$

b)<u>Etude des limites de f_m en $-\infty$ et $+\infty$</u>

$$\lim_{x\to+\infty} f_m(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[e^{(m-1)x} + e^{-x}\right] = \lim_{x\to+\infty} e^{(m-1)x}$$

$$\text{mais } \lim_{x\to+\infty} e^{(m-1)x} = \begin{cases} +\infty & \text{si } m>1 \\ 1 & \text{si } m=1 \\ 0 & \text{si } m<1 \end{cases}$$

D'où $\lim_{x\to-\infty} f_m(x) = \lim_{x\to-\infty}\left[e^{(m-1)x} - e^{-x}\right] = -\infty$ pour toute valeur réelle de m

c)<u>Recherche d'extremum de C_m</u>

f_m est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$\forall x\in \mathbb{R}$, $f_m'(x) = (m-1)e^{(m-1)x} - e^{-x} = \left[(m-1)e^{mx} - 1\right]e^{-x}$

III Soit m un réel supérieur à $1 + \frac{1}{e}$

1°) Calcul d'intégrale

$$I = \int_{1+\frac{1}{e}}^{m} \frac{Log(x-1)}{x-1}dx = \left[\frac{1}{2}Log^2(x-1)\right]_{1+\frac{1}{e}}^{m} \text{ ,donc } I = \frac{1}{2}Log^2(m-1) - \frac{1}{2}$$

2°) Calcul d'aire

On remarque que $\forall x \in \left]1+\frac{1}{e}, m\right[\quad f(x) \leq -x-1$

Donc l'aire $A(m)$ de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations $x = 1+\frac{1}{e}$ et $x = m$ est egale à

$$A(m) = \int_{1+\frac{1}{e}}^{m}(-x-1-f(x))dx = \int_{1+\frac{1}{e}}^{m}\left(\frac{1}{x-1} + \frac{Log(x-1)}{x-1}\right)dx$$

$$= \int_{1+\frac{1}{e}}^{m}\frac{dx}{x-1} + I = \left[Log|x-1|\right]_{1+\frac{1}{e}}^{m} + I$$

Donc $A(m) = \frac{1}{2}\left[Log(m-1)+1\right]^2$ en U.A.

Ainsi $A(e+1) = \frac{1}{2}(Log\,e+1)^2 = 2$ en U.A. Comme U.A. = 4 cm²

Donc $A(e+1) = 8$ cm²

De plus $\lim\limits_{m \to +\infty} A(m) = \lim\limits_{m \to +\infty} \frac{1}{2}\left[Log(m-1)+1\right]^2 = +\infty$.

Car $\lim\limits_{m \to +\infty} Log(m-1) = +\infty$.

Session de juin 1986

Exercice N°1

1°) Détermination des nombres complexes a et b

$a - b = 5 - 4i$; $ab = 3 - 9i$ et $|a| > |b|$. Les nombres complexes a et b sont solutions de l'équation : $x^2 - (5 - 4i)x + 3 - 9i = 0$ (1). $\Delta = -3-4i$

Soit δ une racine carrée de Δ, alors $\delta^2 = \Delta$

En posant $\delta = \alpha + i\beta$, on a $\alpha^2 - \beta^2 + 2i\,\alpha\,\beta = \delta^2$

$$\text{Alors } \begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = -3 \\ |\delta^2| = |\Delta| \\ \alpha\beta < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = -3 \\ \alpha^2 + \beta^2 = 5 \\ \alpha\beta < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \text{ ou } \alpha = -1 \\ \beta = 2 \text{ ou } \beta = -2 \\ \alpha\beta < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \text{ et } \beta = -2 \\ \alpha = -1 \text{ et } \beta = 2 \end{cases}$$

Donc une racine carrée de Δ est $\delta = 1 - 2i$

Les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (1) sont :

$$X_1 = \frac{5 - 4i + (1 - 2i)}{2} = 3 - 3i \; ; \; X_2 = \frac{5 - 4i - (1 - 2i)}{2} = 2 - i.$$

Comme $|X_1| = 3\sqrt{2}$, $|X_2| = \sqrt{5}$ et $|X_1| > |X_2|$, alors on a : $a = 3 - 3i$ et $b = 2 - i$;

$|a| = |3-3i| = 3\sqrt{2}$; on peut donc écrire

$$a = 3\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} - i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$$

La forme trigonométrique de $a = \left[3\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4}\right]$

2°) On note A, B, C, D les points d'affixes respectives a, $\frac{a^2}{18}$, b et b^2.

Donc $A(3 - 3i)$, $B(-i)$, $C(2 - i)$, $D(3 - 4i)$

a) <u>Coordonnées barycentriques</u>

Le point G est barycentre des points pondérés $(A,1)$, $(B,-1)$, $(C,1)$ et $(D,1)$ équivaut à $\vec{GA}-\vec{GB}+\vec{GC}+\vec{GD}=\vec{0}$.

$$\text{soit } \vec{OG}=\frac{1}{2}\vec{OA}-\frac{1}{2}\vec{OB}+\frac{1}{2}\vec{OC}+\frac{1}{2}\vec{OD}$$

Par conséquent $z_G=\dfrac{z_A-z_B+z_C+z_D}{2}=\dfrac{8-7i}{2}$. Donc G = $\left(4,\dfrac{-7}{2}\right)$

a) <u>Recherche de l'ensemble des points M tels que</u> :

$$MA^2-MB^2+MC^2+MD^2=k$$

On sait que G est barycentre des points A, B, C, D

Alors : $MA^2-MB^2+MC^2+MD^2=$

$$\left(\vec{MG}+\vec{GA}\right)^2-\left(\vec{MG}+\vec{GB}\right)^2+\left(\vec{MG}+\vec{GC}\right)^2+\left(\vec{MG}+\vec{GD}\right)^2$$

$$=2MG^2+2\vec{MG}\cdot\left(\vec{GA}-\vec{GB}+\vec{GC}+\vec{GD}\right)+GA^2-GB^2+GC^2+GD^2$$

or $\vec{GA}-\vec{GB}+\vec{GC}+\vec{GD}=\vec{0}$ car G est barycentre.

$GA^2=\dfrac{5}{4}$; $GB^2=\dfrac{89}{4}$; $GC^2=\dfrac{41}{4}$; $GD^2=\dfrac{5}{4}$.

Donc $MA^2-MB^2+MC^2+MD^2=2MG^2-\dfrac{19}{2}$

La relation $MA^2-MB^2+MC^2+MD^2=k$ équivaut à $2MG^2-\dfrac{19}{2}=k$

Soit $MG^2=\dfrac{2k+19}{4}$

- Si $k<-\dfrac{19}{2}$, l'ensemble cherché est vide
- Si $k=-\dfrac{19}{2}$, $MG=0$, l'ensemble cherché est le singleton $\{G\}$

- Si $k > -\frac{19}{2}$, on a $MG = \frac{1}{2}\sqrt{2k+19}$, l'ensemble cherché est le cercle de centre G et de rayon $\frac{1}{2}\sqrt{2k+19}$

3°) Nature et éléments caractéristiques de S

L'application complexe associée à S est de la forme $z' = az + b$ avec $a = 3-3i$ et $b = 2-i$.

Donc S est une similitude plane directe.

D'après 1°) la forme trigonométrique de a est $\left[3\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4}\right]$.

Donc le rapport de S est $3\sqrt{2}$ et une mesure de l'angle de S est $\frac{7\pi}{4}$

Le centre de S a pour affixe $z_0 = \frac{b}{1-a}$ soit $z_0 = -\frac{7}{13} - \frac{4}{13}i$

En conclusion, S est une similitude plane directe de centre $\Omega\left(-\frac{7}{13}; -\frac{4}{13}\right)$, de rapport $3\sqrt{2}$ et dont une mesure de l'angle est $\frac{7\pi}{4}$

Exercice N°2

1°) Calcul d'aires des parties A, B, C

Notons S_A, S_B, S_C, les aires respectives des parties A, B, C.

On a donc $S_A = \pi R^2$, $S_B = 3\pi R^2$ et $S_C = 5\pi R^2$

2°) a) Probabilités d'atteindre les parties B et C en fonction de p

Soit P_B et P_C les probabilités d'atteindre les parties B et C respectivement. Comme les probabilités p, P_B, P_C sont proportionnelles à S_A, S_B et S_C respectivement, alors:

$$\frac{p}{S_A} = \frac{P_B}{S_B} = \frac{P_C}{S_C}, \text{ donc } P_B = 3p \text{ et } P_C = 5p$$

b) Valeur de p

La probabilité d'atteindre une partie de la cible étant 0,75, on a alors $p + P_B + P_C = 0{,}75$ d'où $p = \frac{1}{12}$. Ainsi $P_B = \frac{1}{4}$, $P_C = \frac{5}{12}$ et la probabilité pour qu'un joueur lançant une fléchette manque la cible est $q = \frac{1}{4}$

3°) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de points obtenus par un joueur lançant deux fléchettes. L'ensemble des valeurs prises par X, noté $X(\Omega) = \{0 ; 25 ; 50 ; 75 ; 100 ; 125 ; 150 ; 200\}$

a) La loi de probabilité de X

$P(X = 0) = q^2 = \frac{1}{16}$; $P(X = 25) = 2qP_C = \frac{5}{24}$

$P(X = 50) = P_C^2 + 2qP_B = \frac{43}{144}$; $P(X = 75) = 2P_BP_C = \frac{5}{24}$

$P(X = 100) = P_B^2 + 2qp = \frac{5}{48}$; $P(X = 125) = 2pP_C = \frac{5}{72}$

$P(X = 150) = 2p\,P_B = \frac{1}{24}$; $P(X = 200) = p^2 = \frac{1}{144}$

La loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant

x_i	0	25	50	75	100	125	150	200
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{43}{144}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{5}{48}$	$\frac{5}{72}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{144}$

b) Espérance mathématique de X

$$E(X) = \sum_{i=1}^{8} x_i P(X = x_i)$$

$$E(X) = \frac{25(30 + 86 + 90 + 60 + 50 + 36 + 8)}{144}, \text{ donc } E(X) = 62{,}5$$

Problème

A. La fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = 2x^2 + 1 - \ln x$

1°) <u>Variation de f</u>

* $Df =]0, +\infty[$

* <u>Limites</u>

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (f(x)) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (2x^2 + 1 - \ln x) = +\infty \quad car \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (\ln x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^2\left(2 + \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2}\right) = +\infty$$

$$car \ \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x^2}\right) = 0 \text{ et } \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln x}{x^2}\right) = 0$$

* <u>Sens de variations de f</u>

On vérifie aisément que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ f'(x) = \frac{4x^2 - 1}{x} = \frac{(2x-1)(2x+1)}{x}$$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $(2x-1)$ car pour tout $x > 0$, $2x+1 > 0$.

$\forall x \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$ $\quad f'(x) \leq 0 \quad$ f décroissante sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$

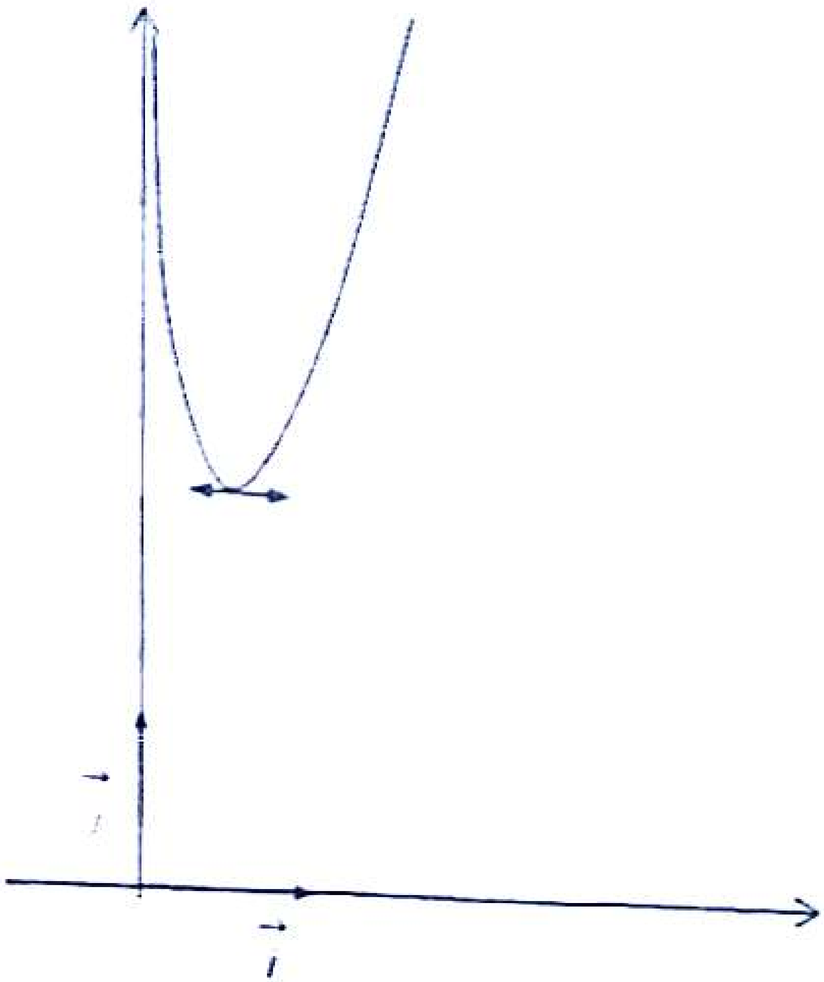
$\forall x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$ $\quad f'(x) \geq 0 \quad$ f croissante sur $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$

<u>Tableau de variations de f</u>

x	0		$1/2$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ $+\infty$		$\frac{3}{2} - \ln 2$		$+\infty$

* Trace de la courbe de f

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ donc la courbe de f admet une branche parabolique de direction (oy) quand $x \to +\infty$



2°) Signe de $f(x)$

La fonction f admet un minimum au point $x_0 = \frac{1}{2}$ donc

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) \geq f(\frac{1}{2})$ Or $f(\frac{1}{2}) = \frac{3}{2} + \ln 2 \Rightarrow f(\frac{1}{2}) > 0$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) > 0$

B Etude de la fonction g définie par :

$$\begin{cases} g(x) = 2x + \dfrac{\ln|x|}{x} & \text{si } x \in]-\infty;0[\cup]0,+\infty[\\ g(x) = 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1°) <u>Continuité et dérivabilité au point 0</u>

* $D_g = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

* $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{\ln x}{x} = -\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \ln x = -\infty$,d'où g n'est pas continue à droite en 0. Donc g n'est pas continue au point 0

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \left(2 + \frac{\ln x}{x^2}\right) = -\infty$, d'où g n'est pas dérivable à droite en 0 Donc g n'est pas dérivable au point 0.

2°) <u>Parité de g</u>

$\forall x \in \mathbb{R}^*, -x \in \mathbb{R}^*$ et $g(-x) = -2x - \frac{\ln|x|}{x} = -g(x)$ et $g(0) = 0$

Donc g est une fonction impaire. La courbe (C) de g admet l'origine du repère comme centre de symétrie

3°) <u>Sens de variations de g</u>

$\forall x \in \mathbb{R}^*_+$, $g'(x) = 2 + \frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{f(x)}{x^2}$, or $\forall x \in \mathbb{R}^*_+$, $f(x) > 0$,

d'où $\forall x \in \mathbb{R}^*_+$, $g'(x) > 0$. g est strictement croissante sur $\mathbb{R}^*$.

* <u>Asymptote oblique à la courbe (C)</u>

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(2x + \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln x}{x}\right) = 0$

De plus, $\lim\limits_{x \to +\infty} (g(x) - 2x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln x}{x}\right) = 0$.

Donc la droite d'équation $y = 2x$ est asymptote à la courbe (C) si x tend vers $+\infty$

* <u>Position de la courbe (C) par rapport à cette asymptote</u>

$\forall x \in \mathbb{R}^*_+$, $g(x) - 2x = \dfrac{\ln x}{x}$. Le signe de $(g(x) - 2x)$ est celui de $\ln x$

Dans $]0\,;1[$, la courbe (C) est au-dessous de l'asymptote et dans $]1;+\infty[$, la courbe (C) est au-dessus de l'asymptote.

4°) Tableau de variation

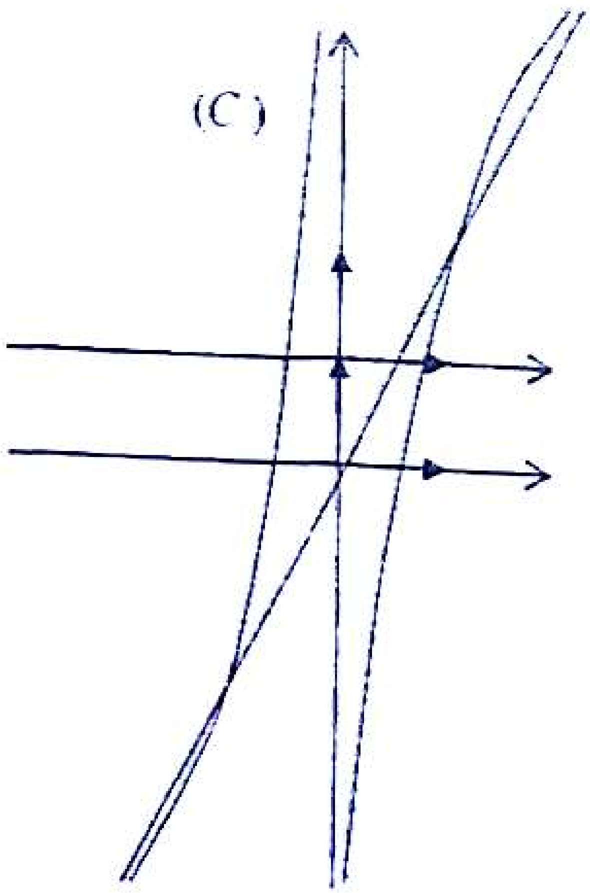
x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$\|\|$	$+$
g	0 ↗	$+\infty$

Tracé de la courbe (C)

Intersection de (C) avec son asymptote oblique :

On a $g(x) = 2x$, soit $\ln|x| = 0 \Leftrightarrow (x = -1$ ou $x = 1)$.

On obtient ainsi deux point $I(1- ;-2)$ et $J(1, 2)$



5°) Calcul d'aire

$\forall x \in [1, +\infty[$, $g(x) - 2x \geq 0$, donc l'aire du domaine plan défini par $1 \leq x \leq a$ et $g(x) \leq y \leq 2x$ est $A(a) = \int_1^a [g(x) - 2x]dx$ en cm^2

Or $\int_1^a [g(x) - 2x]dx = \int_1^a \frac{\ln x}{x}dx = \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^a = \frac{1}{2}\ln^2 a$

Donc $A(a) = \frac{1}{2} \ln^2 a$ en cm^2.

$\lim\limits_{a \to +\infty} A(a) = \lim\limits_{a \to +\infty} \frac{1}{2}(\ln a)^2 = +\infty$ car $\lim\limits_{a \to +\infty} (\ln a) = +\infty$

C M un point mobile du plan dont les coordonnées, à l'instant t, sont $\begin{cases} x = e^{-t} \\ y = e^{-t}(2 - te^{2t}) \end{cases}$ pour $t \in \mathbb{R}$.

1°) Vecteur vitesse – vecteur accélération

Le vecteur vitesse de M est défini par $\vec{V}(t) = \frac{d\vec{M}}{dt}$, donc

$$\vec{V}(t)\begin{cases} x' = -e^{-t} \\ y' = e^{-t}(-2 - e^{2t} - te^{2t}) \end{cases}$$

Le vecteur accélérateur de M est défini par : $\vec{\Gamma}(t) = \frac{d\vec{V}}{dt}$, donc

$$\vec{\Gamma}(t)\begin{cases} x'' = e^{-t} \\ y'' = e^{-t}(2 - 2e^{2t} - te^{2t}) \end{cases}$$

2°) Trajectoire du mobile M

Si $t \geq 0$ alors $e^t \geq 1$ d'où $0 < e^{-t} \leq 1$ donc $x \in]0, 1]$

De plus, $x = e^{-t} \Leftrightarrow t = -\ln x$, d'où $y = e^{-t}(2 - te^{2t}) = x(2 - \frac{\ln x}{x^2})$

$y = 2x + \dfrac{\ln x}{x} = g(x)$ avec $x \in \left]0\ ,1\right]$

La trajectoire de M est la partie de (C) dans l'intervalle $]0\ ;1]$.

3°) Nature du mouvement de M

* Cas où $t = 0$

A la date $t = 0$, le mobile est en $M_0\ (1\ .\ 2)$ avec pour vecteur vitesse $\vec{V}_0\ (-1\ ;-3)$ et pour vecteur accélération $\vec{\Gamma}_0\ (1\ ;0)$

De plus $\vec{V}_0 \cdot \vec{\Gamma}_0 = -1$ d'où $\vec{V}_0 \cdot \vec{\Gamma}_0 < 0$. Donc le mouvement de M est retardé

* Cas où $t = \ln 2$

A la date $t = \ln 2$, le mobile est en $M_1\left(\dfrac{1}{2}, 1 - 2\ln 2\right)$ avec pour vecteur vitesse $\vec{V}_1\left(-\dfrac{1}{2}, -3 - 2\ln 2\right)$ et pour vecteur accélération

$\vec{\Gamma}_1\left(\dfrac{1}{2}, -3 - 2\ln 2\right)$

De plus $\vec{V}_1 \cdot \vec{\Gamma}_1 = \dfrac{35}{4} + 12\ln 2 + 4\ln^2 2$ d'où $\vec{V}_1 \cdot \vec{\Gamma}_1 > 0$

Donc le mouvement de M est accéléré.

Session de juin 1987

Exercice N°1

a) Soit l'événement A : « les 2 personnes prises au hasard sont nées un même jour de la semaine ». Alors $\mathrm{Card}A = 7$

Or le nombre de cas possibles est $card\Omega_1 = 7^2 = 49$.

Donc $p(A) = \dfrac{\text{CardA}}{\text{Card}\Omega_1} = \dfrac{1}{7} \cong 0{,}142$.

b) Soit l'événement B « toutes les 4 personnes du groupe sont nées à des jours différents de la semaine ». Alors $CardB = A_7^4 = 840$.

Or le nombre des cas possibles est $Card\Omega_2 = 7^4 = 2401$

Donc $p(B) = \dfrac{\text{CardB}}{\text{Card}\Omega_2} = \dfrac{120}{343} \cong 0{,}349$.

L'événement contraire de B noté $\overline{B}$ est : « au moins deux d'entre elles sont nées le même jour de la semaine ».

Ainsi donc $p(\overline{B}) = 1 - P(B) = \dfrac{223}{343} \cong 0{,}650$.

Comme $p(\overline{B}) > \dfrac{1}{2}$, alors on a fait un pari gagnant en affirmant que deux d'entre elles sont nées le même jour de la semaine

c) Soit l'événement C « une des n personnes, au moins est née un lundi »

Alors l'evénement contraire de C est de $\overline{C}$: « aucune des n personnes n'est née un lundi ». Ainsi $p(\overline{C}) = \left(\frac{6}{7}\right)^n$ donc $p(C) = 1 - \left(\frac{6}{7}\right)^n$

L'affirmation « au moins l'une des personnes du groupe est née un lundi » est un pari gagnant si $P(C) \geq \frac{1}{2}$.

Ainsi on a : $1 - \left(\frac{6}{7}\right)^n \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{6}{7}\right)^n \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow n\ln\frac{6}{7} \leq \ln\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{-\ln 2}{\ln\frac{6}{7}} \text{ car } \ln\frac{6}{7} < 0$$

D'où $n \geq 4{,}5$. Comme n est un entier naturel, on a $n \geq 5$.

Donc il faut au moins 5 personnes dans un groupe pour que cette affirmation soit un pari gagnant.

Exercice N°2

$$P(z) = z^3 - z^2 + (-1 + i)z - 2 + 2i.$$

a) <u>Recherche de solutions réelle et imaginaire pure de</u> $P(z) = 0$

* Soit x la solution réelle Alors on a $P(x) = 0$.

En écrivant $P(x)$ sous forme algébrique, on obtient :

$$P(x) = \left(x^3 - x^2 - x - 2\right) + i\,(x-2)$$

Ainsi $P(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - x^2 - x - 2 = 0 \\ x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$

Donc la solution réelle est $x = 2$.

* Soit $y = bi$, avec $b \in \mathbb{R}$, la solution imaginaire pure.

Alors on a $P(y) = 0$,or la forme algébrique de $P(y)$ est :

$$P(y) = P(bi) = \left(b^2 - b - 2\right) + i\left(-b^3 - b - 2\right)$$

Ainsi $P(y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - b - 2 = 0 & (1) \\ -b^3 - b - 2 = 0 & (2) \end{cases}$

La résolution de (1) donne deux solutions qui sont : $b = -1$ et $b = 2$

Or, seule la solution $b = -1$ vérifie l'équation (2).

Donc la solution imaginaire pure est $y = -i$.

b) <u>Factorisation de $P(z)$</u>

Comme 2 et –i sont des zéros du polynôme P, il existe alors un polynôme de degré 1 (puisque P est de degré 3) tel que pour tout z complexe on a $P(z) = (z-2)(z-i)(az+b)$

En développant ce produit, on obtient :

$$P(z) = az^3 + \left(-2a - b + ia\right)z^2 + \left(-2ia - 2b - bi\right)z - 2bi$$

Or $P(z) = z^3 - z^2 + \left(-1 + i\right)z - 2 + 2i$

Par identification, on a : $\begin{cases} a = 1 \\ -2a + b + ia = -1 \\ -2ia - 2b + bi = -1 + i \\ -2bi = -2 + 2i \end{cases}$

On vérifie aisément que ce système admet une solution unique . $a = 1$ et $b = 1 - i$. Donc $P(z) = (z - 2)(z + i)(z + 1 - i)$

La 3ème solution est : $z = -1 + i$.

Les formes trigonométriques des solutions de l'équation $P(z) = 0$ sont : $x = 2 = [2, 0]$; $y = -i = \left[1, \frac{3\pi}{2}\right]$, $z = -1 + i = \left[\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right]$

c) Nature du triangle ABC

On note A, B, C les points images des nombres complexes x, y, z respectivement.

Calculons : $\dfrac{z - y}{x - y} = \dfrac{-1 + 2i}{2 + i} = \dfrac{(-1 + 2i)(2 - i)}{5} \Rightarrow \dfrac{z - y}{x - y} = i$

Ainsi : $\left|\dfrac{z - y}{x - y}\right| = 1 \Rightarrow |z - y| = |x - y|$ donc $BC = BA$.

Le triangle ABC est isocèle de sommet B

De plus $\arg\left(\dfrac{z - y}{x - y}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ (2\pi) \Rightarrow \left(\vec{BA}, \vec{BC}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ (2\pi)$

Le triangle ABC est un triangle rectangle en B

En conclusion, ABC est un triangle rectangle et isocèle de sommet B.

* Nature du quadrilatère $ABCD$

Soit I le milieu de $[AC]$ Alors : $z_I = \dfrac{x + z}{2} = \dfrac{1 + i}{2}$

L'application complexe r associée à la rotation R de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$ est définie par : $r(z) = e^{i\frac{\pi}{2}} z + b$; soit $r(z) = iz + b$.

Or I est centre de R donc $r(z_I) = z_I$ soit $b = (1 - i)z_I = 1$.

En conclusion, la rotation R est définie par : $z' = iz + 1$. Comme

$D = R(A)$ alors $z_D = ix + 1 = 1 + 2i$ donc D a pour affixe $1+2i$, ainsi le quadrilatère $ABCD$ est carré.

Problème

$$f(x) = \begin{cases} 2x\ln(-x) & \text{si } x < 0 \\ x + \sqrt{x^2 + x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

A. 1°)a) Continuité et dérivabilité de f

* $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} (2x\ln(-x)) = \lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} (-2t\ln t) = 0 = f(0)$. en posant $t = -x$

donc f est continue à gauche en 0. De plus f est continue sur $\mathbb{R}_+$.
D'où f est continue au point 0.

* $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \left(\dfrac{f(x) - f(0)}{x}\right) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} (2\ln(-x)) = -\infty$

D'où f n'est pas dérivable à gauche en 0.

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left(\dfrac{f(x) - f(0)}{x}\right) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left[1 + \sqrt{1 + \dfrac{1}{x}}\right] = +\infty$. donc f n'est pas dérivable à droite en 0. En conclusion, f n'est pas dérivable au point 0.

On vérifie aisément que f est continue sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. De plus, f est continue en 0. Donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

*Les fonctions $x \mapsto 2x$ et $x \mapsto \ln(-x)$ sont dérivables respectivement sur $\mathbb{R}$ et $]-\infty ; 0[$. Donc la fonction f est dérivable sur $]-\infty ; 0[$ car produit de deux fonctions dérivables sur $]-\infty ; 0[$.

Les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto \sqrt{x^2 + x}$ sont dérivables respectivement sur $\mathbb{R}$ et $]0, +\infty[$. Donc f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ car somme de deux fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$. Or f n'est pas dérivable au point 0.

En conclusion f est dérivable sur les intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$

b) Recherche d'une branche parabolique

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (2x\ln(-x)) = \lim_{t \to -\infty} (-2t\ln(t)) = -\infty, \text{ (avec } t = -x)$$

De plus $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} (2\ln(-x)) = +\infty$ Donc la courbe (C) de f admet une branche parabolique de direction (Oy) quand $x \to -\infty$

2°) a) Asymptote oblique

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x\left[1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x}}\right] = +\infty \text{ car } \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$\text{De plus } \lim_{x \to +\infty}\left[f(x) - \left(2x + \frac{1}{2}\right)\right] = \lim_{x \to +\infty}\left[\sqrt{x^2 + x} - \left(x + \frac{1}{2}\right)\right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-\frac{1}{4}}{\sqrt{x^2 + x} + x + \frac{1}{2}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{4x\left[\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1 + \frac{1}{2x}\right]} = 0,$$

car $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$. Donc la droite d'équation $y = 2x + \frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe (C) quand x tend vers $+\infty$.

Pour $x \geq 0$ $f(x) - \left(2x + \frac{1}{2}\right) = \frac{-\frac{1}{4}}{\sqrt{x^2 + x} + x + \frac{1}{2}}$

Donc, pour $x \geq 0$ $f(x) - \left(2x + \frac{1}{2}\right) < 0$

Par conséquent (C) est en dessous de son asymptote.

b) Pour $x \geq 0$ $f(x) - (2x + \frac{1}{2}) = \dfrac{-\frac{1}{4}}{\sqrt{x^2 + x} + x + \frac{1}{2}} \neq 0$

Donc (C) ne coupe pas son asymptote.

3°) a) Variations de f

* $D_f =]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$

* Limites

$\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$

* Sens de variations de f

$\forall x \in]-\infty, 0[$ $\quad f'(x) = 2(1 + \ln(-x))$

$1 + \ln(-x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(-x) \geq -1 \Leftrightarrow x \leq -\frac{1}{e}$.

Ainsi $\forall x \in \left]-\infty, -\frac{1}{e}\right]$ $f'(x) \geq 0$ f est croissante sur $\left]-\infty, -\frac{1}{e}\right]$.

$\forall x \in \left[-\frac{1}{e}, 0\right[$ $\quad f'(x) \leq 0$ $\quad f$ est décroissante sur $\left[-\frac{1}{e}, 0\right[$

$\forall x \in]0, +\infty[$ $f'(x) = 1 + \dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}$, donc

$\forall x \in]0, +\infty[$ $f'(x) > 0$ f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$

- Tableau de variations de f

x	$-\infty$		$-\frac{1}{e}$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-\infty$ || $+\infty$	$+$	
f	$-\infty$		$\frac{2}{e}$		0		$+\infty$

Existence des extrêma

f est croissante sur $\left]-\infty\,,-\frac{1}{e}\right]$ et decroissante sur $\left[-\frac{1}{e}\,,0\right[$

donc f admet un maximum au point $A\left(-\frac{1}{e}\,,\frac{2}{e}\right)$ f est strictement decroissante sur $\left]-\frac{1}{e}\,,0\right[$ et strictement croissante sur $]0\,,+\infty[$

Donc f admet un minimum au point $B(0\,;0)$

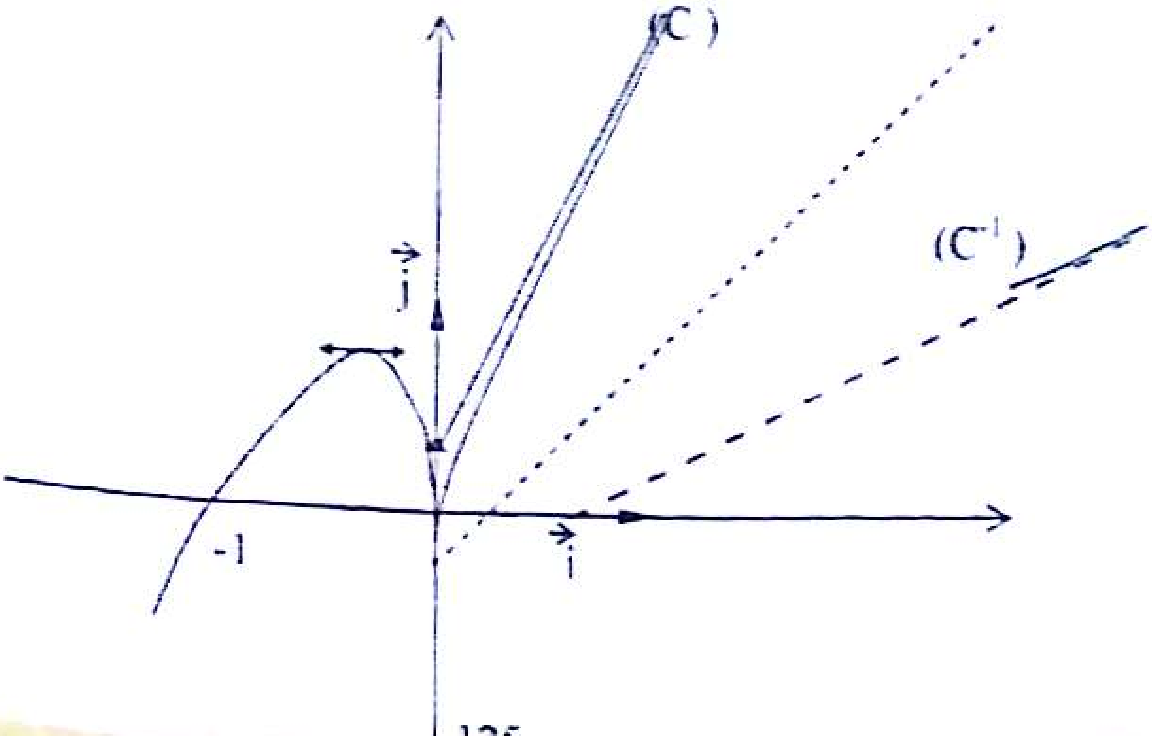
b) Images de quelques valeurs

$f(-e) = -2e$, $f(-1) = 0$ · $f\left(-\frac{1}{e}\right) = \frac{2}{e}$,

$f(0) = 0$ et $f(1) = 1-\sqrt{2}$

c) Trace des courbes (C) et (C^{-1})

(C) admet au point d'abscisse 0 une demi- tangente à droite verticale et une demi- tangente à gauche verticale de même sens que $\vec{j}$ La tangente à (C) au point d'abscisse 1 a pour equation $y = \frac{4+3\sqrt{2}}{4}x + \frac{\sqrt{2}}{4}$.



B 1°) Bijection réciproque

f est continue sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $[1, +\infty[$. De plus, f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$. Donc la restriction de f à $[1, +\infty[$ est bijective de $[1, +\infty[$ sur $f([1, +\infty[)$.

Or $f(1) = 1 + \sqrt{2}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$,

d'où $f([1, +\infty[) = [1+\sqrt{2}, +\infty[$

Par conséquent, f admet une bijection réciproque f^{-1} de $[1+\sqrt{2}, +\infty[$ vers $[1, +\infty[$.

Les courbes (C^{-1}) de f^{-1} et (C) de f sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ (puisque le repère est orthonormé)

Voir A) 3°) c°) pour le tracé de (C^{-1})

2°) Calcul d'aire

$\forall x \in \left[-1, \dfrac{-1}{e}\right]$ $f(x) > 0$. Donc l'aire, en cm^2, du domaine plan défini par : $-1 \leq x \leq \dfrac{-1}{e}$ et $f(x) \leq y \leq 0$ est :

$$\mathcal{A} = 4\left(\int_{-1}^{\frac{-1}{e}} f(x)dx\right) en\ cm^2. \quad \text{Or } \int_{-1}^{\frac{-1}{e}} f(x)dx = \int_{-1}^{\frac{-1}{e}} 2x\ln(-x)dx.$$

Intégrons par parties : posons $\begin{cases} U = \ln(-x) \\ V' = 2x \end{cases}$, prenons $\begin{cases} U' = \dfrac{1}{x} \\ V = x^2 \end{cases}$

D'où $\int_{-1}^{1} f(x)dx = \left[x^2 \ln(-x)\right]_{-1}^{-\frac{1}{e}} - \int_{-1} x dx = \left[x^2 \ln(-x)\right]_{-1}^{-\frac{1}{e}} - \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}$

$= -\frac{3}{2e^2} + \frac{1}{2}$ Donc $a = (2 - 6e^{-2})\,cm^2$

C Point $M(x, y)$ de position donnée par

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = t + 1 + \sqrt{t^2 + 3t + 2} \end{cases}, \text{ avec } t \geq 0$$

1°) Trajectoire de M

Si $t \geq 0$ alors $t+1 \geq 1$. Donc $x \in [1, +\infty[$. De plus $x = t + 1 \Leftrightarrow t = x - 1$

D'où $y = t + 1 + \sqrt{t^2 + 3t + 2} = x + \sqrt{x^2 + x} = f(x)$ avec $x \geq 1$

En conclusion, la trajectoire de M est la partie de (C) dans l'intervalle $[1, +\infty[$. A la date $t = 0$, le mobile est en $M_0(1, 1 + \sqrt{2})$

Si t croît de 0 à $+\infty$, alors le mobile va de M_0 à l'infini

2°) Nature du mouvement à l'instant $t = 1$

Le vecteur vitesse est défini par :

$$\vec{V}(t) = \frac{d\vec{M}}{dt} \text{ ; donc } \vec{V}(t) \begin{cases} x' = 1 \\ y' = 1 + \dfrac{2t + 3}{2\sqrt{t^2 + 3t + 2}} \end{cases}$$

Le vecteur accélération est défini par :

$$\vec{\Gamma}(t) = \frac{d\vec{V}}{dt} \text{ ; donc } \vec{\Gamma}(t) \begin{cases} x'' = 0 \\ y'' = \dfrac{-1}{4\sqrt{(t^2 + 3t + 2)^3}} \end{cases}$$

A la date $t = 1$, le mobile est en $M_1\ (2; 2 + \sqrt{6})$. Avec un vecteur vitesse $\vec{V}_1(1; 1 + \frac{5\sqrt{6}}{12})$ et un vecteur accélération $\vec{\Gamma}_1(0; \frac{-\sqrt{6}}{144})$

A l'instant $t = 1$, $\vec{V_1} \cdot \vec{\Gamma_1} < 0$. donc le mouvement de M est retardé

3°) Pour tout $t \geq 0$, $\vec{V}(t)$. est non nul Donc le vecteur vitesse est toujours tangent à la trajectoire du point M

Session de juin 1988

Exercice N°1

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$: $u_1 = 1$ et $(u_{n+1})^2 = eu_n$ On a donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \sqrt{eu_n}$

1°) Calcul de u_2, u_3 et u_4

$u_1 = 1$

$$u_2 = \sqrt{eu_1} = \sqrt{e} \Rightarrow u_2 = e^{\frac{1}{2}}.$$

$$u_3 = \sqrt{eu_2} = \sqrt{e \times e^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{e^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow u_3 = e^{\frac{3}{4}}.$$

$$u_4 = \sqrt{eu_3} = \sqrt{e \times e^{\frac{3}{4}}} = \sqrt{e^{\frac{7}{4}}} \Rightarrow u_4 = e^{\frac{7}{8}}$$

2°) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $V_n = \ln u_n - a$ $(a > 0)$

a) Recherche de a pour que (V_n) soit une suite géométrique

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $V_{n+1} = \ln u_{n+1} - a$

Or, $u_{n+1} = (eu_n)^{\frac{1}{2}}$ d'où $V_{n+1} = \ln(eu_n)^{\frac{1}{2}} - a$ soit $V_{n+1} = \frac{1}{2}\ln u_n + \frac{1}{2} - a$

donc $V_{n+1} = \frac{1}{2}V_n + \frac{1 - a}{2}$. (V_n) est une suite géometrique pour $a = 1$. La raison est donc $q = \frac{1}{2}$ et le 1[er] terme $V_1 = -1$

b) Limite de V_n et u_n

D'après question précédente (V_n) est une suite géometrique.

alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $V_n = -(\frac{1}{2})^{n-1}$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} V_n = 0$ car $|q| = \frac{1}{2} < 1$.

On a : $V_n = \ln u_n - 1 \Rightarrow u_n = e^{V_n+1}$,

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} V_n = 0$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n = e$.

3°) Cas particulier $a = 1$

On pose $A_k = V_1 + V_2 + \ldots + V_k$; $B_k = u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_k$.

(Vn) étant une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$, de premier terme -1 ,

alors la somme des k premiers termes de cette suite est $A_k = \dfrac{V_1 - V_{k+1}}{1 - \frac{1}{2}}$.

$A_k = 2\,[-1 + (\frac{1}{2})^k]$ donc $A_k = -2 + (\frac{1}{2})^{k-1}$.

Comme $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = e^{V_n+1}$, on a alors $B_k = e^{V_1+1} . e^{V_2+1} \ldots e^{V_k+1}$ ou

encore $B_k = e^{V_1+V_2+\ldots+V_k+k} = e^{A_k+k}$ Donc $B_k = e^{-2+k+\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}}$.

Comme $\lim\limits_{k \to +\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 0$, alors $\lim\limits_{k \to +\infty} A_k = -2$ et $\lim\limits_{k \to +\infty} B_k = +\infty$.

Exercice N°2

A (Z) image de a (z) tel que $Z = z + 1 + \dfrac{2}{z+1}$ avec $z \neq -1$.

1 Calcul de (X, Y) en fonction de (x, y)

Comme a et A sont les points images des complexes z et Z respectivement, on a donc $Z = X + iY$ et $z = x + iy$ avec $(x, y) \neq (-1 , 0)$.

$$Z = z + 1 + \frac{2}{z+1} = x + 1 + iy + \frac{2}{x+1+iy} = x + 1 + iy + \frac{2(x+1-iy)}{(x+1)^2+y^2}$$

$$Z = x + 1 - \frac{2x+2}{(x+1)^2+y^2} + i\left(y - \frac{2y}{(x-1)^2+y^2}\right)$$

On a donc

$$\begin{cases} X = (x+1)\left(1 + \dfrac{2}{(x+1)^2+y^2}\right) \\ Y = y\left(1 - \dfrac{2}{(x+1)^2-y^2}\right) \end{cases} \quad \text{avec } (x, y) \neq (-1, 0).$$

2°) a) <u>Détermination de l'ensemble E des points tels que z ∈ ℝ</u>

$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Y = 0$

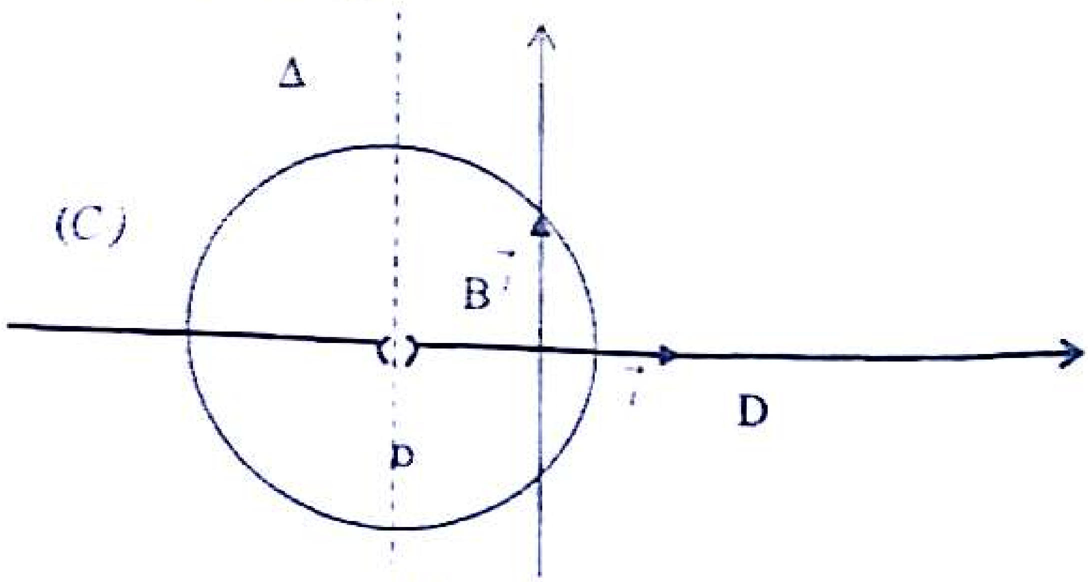
$$\Leftrightarrow y\left(1 - \frac{2}{(x+1)^2+y^2}\right) = 0 \Leftrightarrow \left(y = 0 \text{ ou } (x+1)^2 + y^2 - 2 = 0\right).$$

avec $(x, y) \neq (-1, 0)$.

Soit D la droite d'équation $y = 0$ et (C) le cercle de centre $\Omega(-1,0)$ et de rayon $\sqrt{2}$. Donc $E = (D - \{\Omega\}) \cup (C)$.

<u>Construction de E</u>

On remarque que $B(0, 1) \in (C)$.



Ω

b°) <u>Détermination de l'ensemble F tel que Z imaginaire pur</u>

Z est imaginaire pur si et seulement si $X = 0$

$$X=0 \Leftrightarrow (x+1)\left(1+\frac{2}{(x+1)^2+y^2}\right)=0 \text{ , avec } (x\,,y)\neq(-1\,,0)$$

$$\Leftrightarrow x+1=0 \text{ avec } (x\,,y)\neq(-1\,,0)\text{ , car } 1+\frac{2}{(x+1)^2+y^2}\neq 0 .$$

Soit Δ la droite d'équation $x = -1$. Donc $F = \Delta - \{\Omega\}$

3°) <u>Recherche de z tel que $|Z| = 1$ si $|z+1| = 1$</u>

$|z+1| = 1$ équivaut à $(x+1)^2+y^2=1$ (1) (avec $z = x+iy$).

Donc $|Z|^2 = X^2+Y^2$

$$=(x+1)^2\left(1+\frac{2}{(x+1)^2+y^2}\right)^2+y^2\left(1-\frac{2}{(x+1)^2+y^2}\right)^2$$

Comme $(x+1)^2+y^2=1$ on obtient alors $|Z|^2 = 9(x+1)^2+y^2$

$|Z| = 1 \Leftrightarrow 9(x+1)^2+y^2=1$ (2)

En faisant (1) − (2), on obtient $(x+1)^2=0$ soit $x=-1$.

La relation (2) donne $y^2=1$ soit $y=1$ ou $y=-1$.

Il existe donc deux nombres complexes tels que $|Z| = 1$ si $|z+1| = 1$.

Ces nombres sont $z_1 = -1+i$ et $z_2 = -1-i$.

si $z_1 = -1+i$, alors $Z_1 = -i$

si $z_2 = -1-i$, alors $Z_2 = i$.

<u>Problème</u>

A $f_m(x)=\dfrac{e^{2x}+m}{2e^x}$ où $m \in \mathbb{R}^*$

1°) Variations de f_m suivant les valeurs de m

f_m est définie sur $\mathbb{R}$ car $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$

* Limites

$$\lim_{-\infty} f_m = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{e^x + me^{-x}}{2} \right) = \begin{cases} +\infty & \text{si } m > 0 \\ -\infty & \text{si } m < 0 \end{cases}$$, car $\lim_{x \to -\infty} (e^x) = 0$ et $\lim_{x \to -\infty} (e^{-x}) = +\infty$.

$$\lim_{+\infty} f_m = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{e^x + me^{-x}}{2} \right) = +\infty$$ pour tout $m \in \mathbb{R}^*$,

car $\lim_{x \to +\infty} (e^x) = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} (e^{-x}) = 0$.

* sens de variations de f

On vérifie aisément que f_m est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_m'(x) = \frac{e^{2x} - m}{2e^x}$$

1^er^ cas : $m < 0$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{2x} - m > 0$ donc $f_m'(x) > 0$, f_m est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

2^e^ cas $m > 0$

Le signe de $f_m'(x)$ est celui de $e^{2x} - m$.

$$e^{2x} - m \geq 0 \Leftrightarrow e^{2x} \geq m \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}\ln m$$

$\forall x \in \left]-\infty, \frac{1}{2}\ln m\right]$, $f_m'(x) \leq 0$, f_m est décroissante sur $\left]-\infty, \frac{1}{2}\ln m\right]$

$\forall x \in \left[\frac{1}{2}\ln m, +\infty\right[$ $f_m'(x) \geq 0$, f_m est croissante sur $\left[\frac{1}{2}\ln m, +\infty\right[$.

Tableau de variations de f_m

1$^{\text{er}}$ cas : $m < 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'_m(x)$		$+$	
f_m	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2$^{\text{e}}$ cas : $m > 0$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}\ln m$		$+\infty$
$f'_m(x)$		$-$	0	$+$	
f_m	$+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{m}$	$\nearrow$	$+\infty$

2°) Recherche des valeurs de m telles que $\left|(f_m(x))^2 - (f_{-m}(x))^2\right| = 1$

Cette relation devient : $\left|\left(\dfrac{e^{2x} - m}{2e^x}\right)^2 - \left(\dfrac{e^{2x} + m}{2e^x}\right)^2\right| = 1$,

soit $|m| = 1$ donc $m = -1$ ou $m = 1$

B. 1°) a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_1(x) = \dfrac{e^x\left(e^x + e^{-x}\right)}{2e^x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f_{-1}(x) = \dfrac{e^x\left(e^x - e^{-x}\right)}{2e^x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

b) Parité des fonctions f_1 et f_{-1}

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f_1(-x) = \dfrac{e^{-x} + e^x}{2} = f_1(x)$ Donc f_1 est paire.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f_{-1}(-x) = \dfrac{e^{-x} - e^x}{2} = -f_{-1}(x)$. Donc f_{-1} est impaire.

f_{-1} étant impaire et définie en 0, alors l'origine O du repère est centre de symétrie et par suite point d'inflexion.

2°) Position relative de C_1 par rapport à C_{-1} et tracé de C_1 et C_{-1}

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f_1(x) - f_{-1}(x) = e^{-x} \Rightarrow f_1(x) - f_{-1}(x) > 0$.

Donc la courbe C_1 est au-dessus de C_{-1}.

Tableau de variations de f_1

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_1'(x)$		$-$	0	$+$	
f_1	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

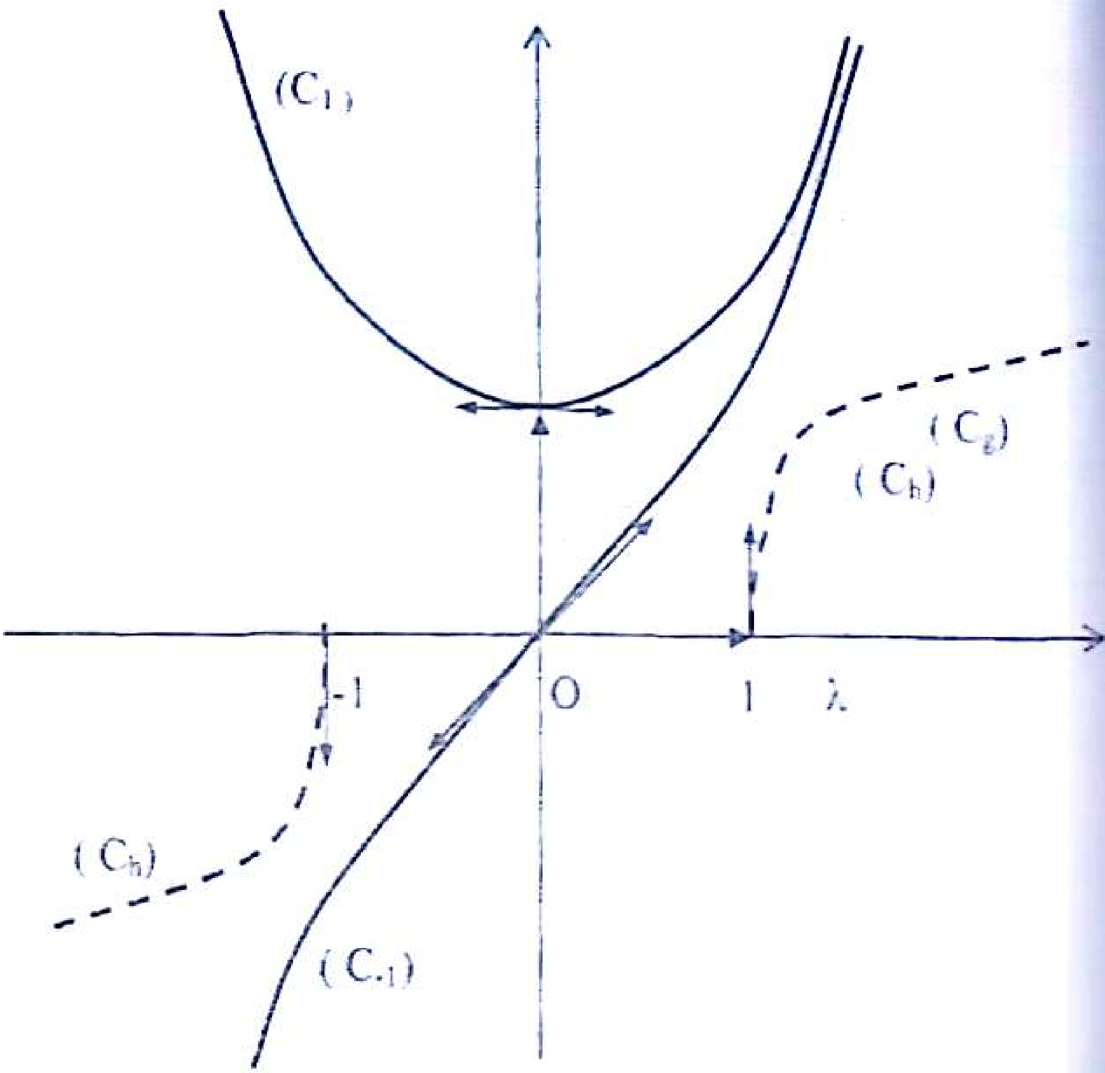
Tableau de variations de f_{-1}

x	$-\infty$		$+\infty$
$f_{-1}'(x)$		$+$	
f_{-1}	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

C_1 et C_{-1} admettent des branches paraboliques de direction (Oy)

De plus $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f_1(x) - f_{-1}(x)\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(e^{-x}\right) = 0$

Donc C_1 et C_{-1} sont des courbes asymptotes l'une de l'autre pour les x positifs. La tangente à C_{-1} au point d'inflexion a pour équation $y = x$



3°) Calcul d'aire

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f_1(x) - f_{-1}(x) > 0$. Donc l'aire demandée est :

$$A(\lambda) = 4\int_0^{\lambda} \left[f_1(x) - f_{-1}(x)\right]dx \text{ en cm}^2 = 4\int_0^{\lambda} e^{-x}dx = 4\left[-e^{-x}\right]_0^{\lambda}$$

Donc $A(\lambda) = 4\left(1 - e^{-\lambda}\right)cm^2$.

$\lim\limits_{\lambda \to +\infty} A(\lambda) = \lim\limits_{\lambda \to +\infty} 4\left(1 - e^{-\lambda}\right) = 4$ car $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} e^{-\lambda} = 0$.

donc $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} A(\lambda) = 4\, cm^2$

4°) $h(x) = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - 1}\right|$

a) <u>Ensemble de définition et parité de h</u>

*<u>Ensemble de définition de h</u>

h est définie si et seulement si $x^2-1\geq 0$ et $x+\sqrt{x^2-1}\neq 0$

$x^2-1\geq 0 \Leftrightarrow x\in\,]-\infty\,,-1\,]\cup[\,1\,,+\infty[$.

posons $x+\sqrt{x^2-1}=0$, soit $\sqrt{x^2-1}=-x$;

$$\sqrt{x^2-1}=-x \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 0 \\ x^2-1\geq 0 \\ x^2-1=x^2 \end{cases} \quad \text{impossible.}$$

d'où $\forall x\in\,]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[\;\; x+\sqrt{x^2-1}\neq 0$ Donc $D_h=\,]-\infty\,,-1\,]\cup[\,1\,,+\infty\,[$

* <u>Parité de h</u>

$\forall x\in D_h$, $-x\in D_h$ et $h(x)+h(-x)=\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+\ln\left|-x+\sqrt{x^2-1}\right|$

$$=\ln\left|\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\left(-x+\sqrt{x^2-1}\right)\right|$$

$=\ln 1=0$. Donc h est impaire

b) <u>Expression de $h(x)$ sans le symbole de valeur absolue</u>

$x+\sqrt{x^2-1}<0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-1}<-x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 0 \\ x^2-1\geq 0 \\ x^2-1<x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in\,]-\infty\,,-1\,] \\ -1<0 \quad \textit{vrai} \end{cases} \Leftrightarrow x\in\,]-\infty\,,-1\,]$$

donc $x+\sqrt{x^2-1}<0 \Leftrightarrow x\in\,]-\infty\,,-1\,]$.

$$\text{Ainsi}\quad h(x)=\begin{cases} \ln\left(-x-\sqrt{x^2-1}\right) & si\ x\leq -1 \\ \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) & si\ x\geq 1 \end{cases}$$

5°) a) <u>Bijection réciproque</u>

f_1 est continue sur $\mathbb{R}$ d'où la restriction de f_1 à $\mathbb{R}_-$ est continue. De plus, f_1 est strictement croissant sur $\mathbb{R}_-$.

Donc la restriction de f_1 à $\mathbb{R}_-$ est une bijection de $\mathbb{R}_-$ sur $f_1(\mathbb{R}_-)$

Comme $f_1(0)=1$ et $\lim\limits_{+\infty} f_1 = +\infty$, alors $f_1(\mathbb{R}_+) = [1, +\infty[$.

Par conséquent f_1 est une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[1, +\infty[$ et il existe une bijection réciproque g définie de $[1, +\infty[$ vers $\mathbb{R}_+$.

* <u>Calcul de $g(x)$</u>

$\forall y \in [1, +\infty[\ \exists!\ x \in [0, +\infty[,\ f_1(x) = y$ car f_1 est une bijection.

Or, $f_1(x) = y$ équivaut à $\dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = y$, soit $e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0$ (E)

En posant $t = e^x$, l'équation (E) devient $t^2 - 2yt + 1 = 0$

$\Delta = 4(y^2 - 1)$ est donc ≥ 0.

D'où $t_1 = y - \sqrt{y^2 - 1}$ et $t_2 = y + \sqrt{y^2 - 1}$. Ce qui donne les valeurs suivantes de x : $x_1 = \ln(y - \sqrt{y^2 - 1})$ et $x_2 = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$.

Comme $x \in [0, +\infty[$, la solution $x = \ln(y - \sqrt{y^2 - 1})$ ne convient pas

En effet, pour tout $y > 1$, on a $y - \sqrt{y^2 - 1} < 1$ ce qui donne $\ln(y - \sqrt{y^2 - 1}) < \ln 1$ d'où $x < 0$;

on a donc $g(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$.

b) <u>Equation de la demi-tangente T à la courbe de g au point</u> $A(1, 0)$

Comme $g(1) = 0$ alors $f_1(0) = 1$ or $f'_1(0) = 0$ d'où g n'est pas dérivable au point 1. Donc T a pour équation $x = 1$.

Pour le tracé de C_g et C_h, voir la partie B°) 2°).

Comme h est impaire, alors C_h et C_g coïncident sur $[1, +\infty[$ et sont symétriques par rapport à l'origine du repère sur $]-\infty, -1]$.

C) M point du plan de coordonnées : $\begin{cases} x = \ln t \\ y = \dfrac{t^2+1}{2t} \end{cases}$ avec $t > 0$

1°) <u>Trajectoire de M</u>

Si $t > 0$ alors $\ln t \in \mathbb{R}$ donc $x \in \mathbb{R}$. De plus $x = \ln t \Leftrightarrow t = e^x$.

D'où $y = \dfrac{t^2+1}{2t} = \dfrac{e^{2x}+1}{2e^x} = f_1(x)$ avec $x \in \mathbb{R}$

La trajectoire de M est la courbe C_1.

2°) Vecteur vitesse – vecteur accélération

Le vecteur vitesse $\vec{V}(t)$ est défini par $\vec{V}(t) = \dfrac{d\vec{M}}{dt}$ Donc $\vec{V}(t) \begin{cases} x' = \dfrac{1}{t} \\ y' = \dfrac{t^2-1}{2t^2} \end{cases}$

Le vecteur accélération $\vec{\Gamma}(t)$ est défini par $\vec{\Gamma}(t) = \dfrac{d\vec{V}}{dt}$.

$$\text{Donc } \vec{\Gamma}(t) \begin{cases} x'' = \dfrac{-1}{t^2} \\ y'' = \dfrac{1}{t^3} \end{cases}$$

3°) Nature du mouvement de M

Soit $k : t \mapsto \left\|\vec{V}(t)\right\|^2$ Calculons $k'(t)$. On sait que $\left\|\vec{V}(t)\right\|^2 = \vec{V}(t)\cdot\vec{V}(t)$

D'où $k'(t) = \left(\left\|\vec{V}(t)\right\|^2\right)' = 2\vec{\Gamma}(t)\cdot\vec{V}(t) = 2\left(\dfrac{-1}{t^3} + \dfrac{t^2-1}{2t^5}\right)$

Donc, $k'(t) = -2\dfrac{1+t^2}{2t^5}$. Et $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $k'(t) < 0$. Donc k est décroissante sur $]0, +\infty[$. On en déduit que le mouvement de M est retardé.

Session de juin 1989

Exercice N°1

1°) a) On vérifie aisément que $(1-i)^2 = -2i$

b) $(z^2 - 2(1+i)z + 4i)(z^2 - 4z + 8) = 0$ équivaut à ($z^2 - 2(1+i)z + 4i = 0$

ou $z^2 + 4z + 8 = 0$)

<u>Résolution de</u> $z^2 - 2(1+i)z + 4i = 0$

$\Delta = -8i = 4(1-i)^2$ Les solutions sont $z_1 = 2$ et $z_2 = 2i$

<u>Résolution de</u> $z^2 - 4z + 8 = 0$

$\Delta = -16 = (4i)^2$ Les solutions sont $z_3 = -2 - 2i$ et $z_4 = -2 + 2i$

A, B, C, D les points images des racines de cette équation tels que *A* et *B* ont même abscisse, *A* et *C* ont même ordonnée, donc

A a pour affixe $z_4 = -2 + 2i$, $A(-2, 2)$

B a pour affixe $z_3 = -2 - 2i$; $B(-2, -2)$

C a pour affixe $z_2 = 2i$, $C(0, 2)$

D a pour affixe $z_1 = 2$; $D(2, 0)$

2°) <u>Eléments géométriques de la similitude *S*</u>

La similitude plane directe *S* est telle que $S(A) = C$ et $S(B) = D$. Soit *s* l'application complexe associée à *S*. *s* est définie par $s(z) = az + b$

$S(A) = C \Leftrightarrow s(z_4) = z_2 \Leftrightarrow az_4 + b = z_2$ (1)

$S(B) = D \Leftrightarrow s(z_3) = z_1 \Leftrightarrow az_3 + b = z_1$ (2)

En faisant (1) - (2), on obtient $a = \dfrac{z_2 - z_1}{z_4 - z_3}$

Soit $a = \dfrac{2i - 2}{4}$ c'est-à-dire $a = \dfrac{1+i}{2}$;

$z_2 = az_4 + b \Rightarrow b = z_2 - az_4$

$b = 2i - (1+i)(-1-i)$, soit $b = 2 + 2i$

Donc S est définie par : $z' = \dfrac{1+i}{2}z + 2 + 2i$

Le rapport de S est $k = \left|\dfrac{1+i}{2}\right| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

L'angle de S a pour mesure θ telle que $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{4} \ (2\pi)$

Le centre Ω de S a pour affixe $z_\Omega = \dfrac{b}{1-a}$. soit $z_\Omega = \dfrac{4+4i}{1-i} = 4i$

Donc Ω (0 . 4)

En conclusion, S est une similitude plane directe, de centre Ω (0 . 4), de rapport $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et dont une mesure de l'angle est $\dfrac{\pi}{4}$.

3°) <u>Etude d'une suite</u>

M_0 d'affixe $z_0 = 2 + 3i$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $M_{n+1} = S(M_n)$, puis $u_n = \left\|\overrightarrow{\Omega M_n}\right\|$

a) S étant une similitude directe de centre Ω et de rapport $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

alors, $S(M_n) = M_{n+1}$ entraine $\left\|\overrightarrow{\Omega M}_{n+1}\right\| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left\|\overrightarrow{\Omega M}_n\right\|$. soit $u_{n+1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} u_n$

relation qui montre que (u_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

et de premier terme $u_0 = \left\|\overrightarrow{\Omega M_0}\right\| = |z_0 - z_\Omega| = |2 - i| = \sqrt{5}$

b) Comme (u_n) est géometrique, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{5}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$

De plus $|q| = \dfrac{\sqrt{2}}{2} < 1$ Donc (u_n) converge vers 0.

Exercice N°2

La probabilité d'avoir une fille étant double de celle d'avoir un garçon alors on a $P(F) = \dfrac{2}{3}$ et $P(G) = \dfrac{1}{2}$.

1°) <u>cas particulier $n = 4$</u>

D'où $X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$

L'ensemble des valeurs prises par X, noté $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

a) <u>La loi de probabilité de X</u>

Les naissances étant indépendantes les unes des autres, la loi de probabilité de X est une loi binomiale de paramètre $n=4$ et $p=P(F)=2/3$. $\forall k \in \{0,1,2,3,4\}$ $P(X=k) = C_4^k\left(\frac{2}{3}\right)^k\left(\frac{1}{3}\right)^{4-k}$

Donnons cette loi dans le tableau suivant :

k	0	1	2	3	4
$P(X=k)$	$1/81$	$8/81$	$24/81$	$32/81$	$16/81$

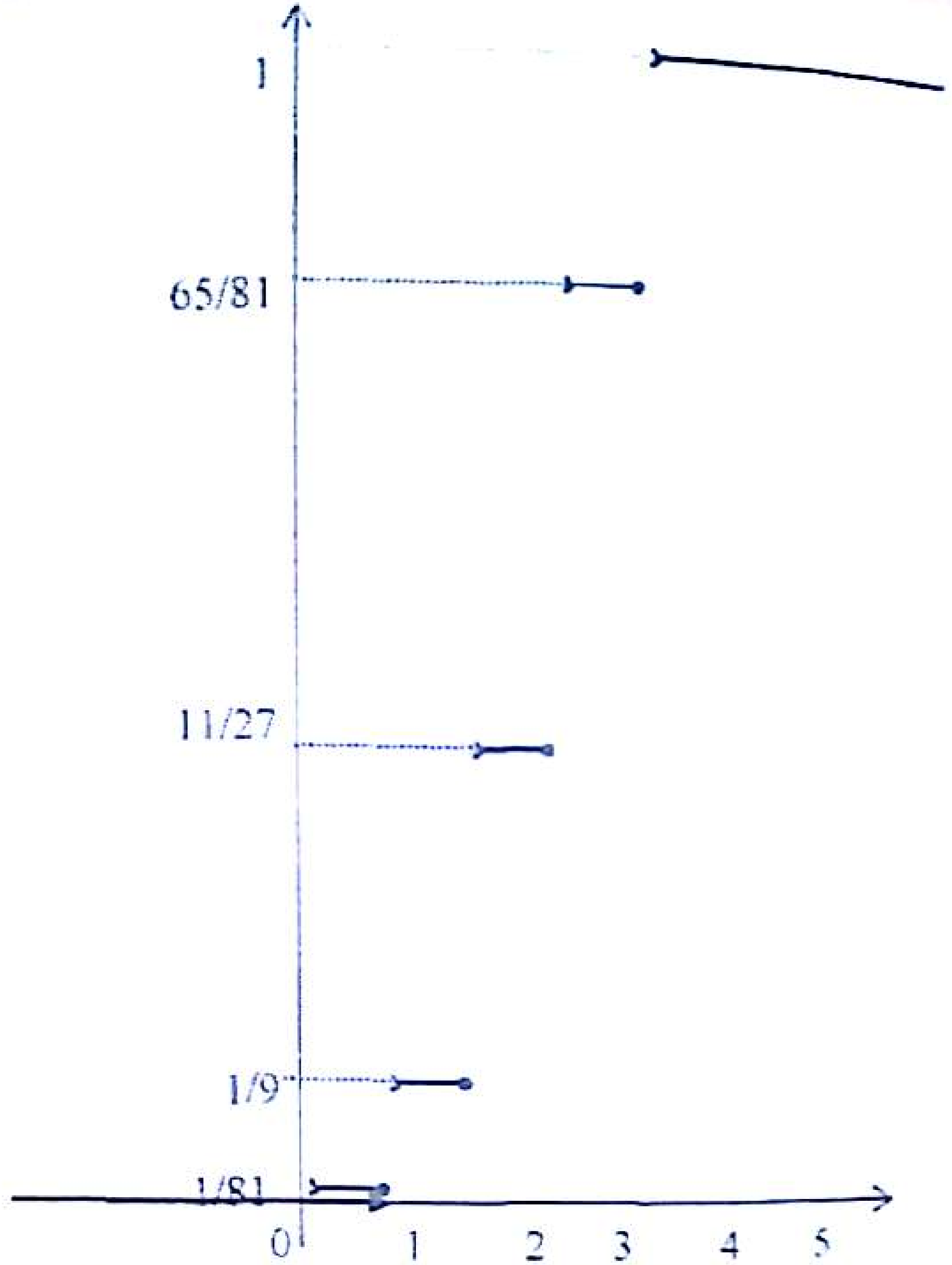
<u>Fonction de répartition de X</u>

La fonction de répartition F de X est définie par

$\forall x \in \mathbb{R}$ $F(x) = P(X<x)$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{81} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ \frac{1}{9} & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ \frac{11}{27} & \text{si } 2 < x \leq 3 \\ \frac{65}{81} & \text{si } 3 < x \leq 4 \\ 1 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

Tracé de F



C°) Comme X suit une loi binomiale de paramètre $n=4$ et $p=2/3$, alors on a $E(X) = np$, soit $E(X) = 8/3$ et $V(X) = np(1-p)$, soit $V(X) = 8/9$

2°) Soit p_n la probabilité de ne pas avoir de garçons. Alors $p_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

$$p_n < \frac{1}{100} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^n < \frac{1}{100}$$

$$\Leftrightarrow n\ln\frac{2}{3} < \ln\frac{1}{100}$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{-2\ln 10}{\ln 2/3} \quad \text{car} \quad \ln 2/3 < 0$$

d'où $n>11,5$. Comme n est un entier naturel, on a $n \geq 12$.

Problème

1. $u(x) = \ln(1-x^2) - 2 - \dfrac{2}{x^2-1}$

<u>Variations de u</u>

$D_u =]-1, 1[$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} u(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{1}{x^2-1}\left[(x^2-1)\ln(1-x^2) - 2(x^2-1) + 2\right] = -\infty$$

car $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\left(\frac{1}{x^2-1}\right) = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}(x^2-1)\ln(1-x^2) = 0$

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} u(x) = \lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \frac{1}{x^2-1}\left[(x^2-1)\ln(1-x^2) - 2(x^2-1) + 2\right] = -\infty$$

car $\displaystyle\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}}\left(\frac{1}{x^2-1}\right) = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}}(x^2-1)\ln(1-x^2) = 0$

u est dérivable sur $]-1\ ,\ 1[$

$$\forall x \in]-1\ ,\ 1[,\ u'(x) = \frac{-2x}{1-x^2} - \frac{4x}{(x^2-1)^2} = \frac{-2x(3-x^2)}{(x^2-1)^2}$$

$u'(x)$ est du signe de $(-x)$ car $\forall x \in]-1\ ,\ 1[\quad 3-x^2 > 0$ et $(x^2-1)^2 > 0$

d'où $\forall x \in]-1\ ,\ 0]\quad u'(x) \geq 0$ et $\forall x \in [0\ ,\ 1[\quad u'(x) \leq 0$.

x	-1		0		1
$u'(x)$		$+$	0	$-$	
u	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

Signe de $u(x)$: u est croissante sur $]-1,0]$ et décroissante sur $[0,1[$ donc u admet un maximum au point 0, d'où $\forall x\in]-1,1[$ $u(x)\le u(0)$. Or $u(0)=0$ donc $\forall x\in]-1,1[$ $u(x)\le 0$.

II. La fonction f donnée par $f(x)=x\ln(1-x^2)$ est définie sur $]-1,1[$

1°) Parité de f

$\forall x\in]-1,1[$, $-x\in]-1,1[$ et $f(-x)=-x\ln(1-x^2)=-f(x)$

Donc f est impaire. On peut donc étudier f sur l'intervalle $[0,1[$, puis déduire la courbe (C) de f par symétrie par rapport à l'origine du repère

2°) Variations de f

Comme f est impaire, on peut l'étudier sur $[0,1[$

$\forall x\in[0,1[$, $f'(x)=\ln(1-x^2)-\dfrac{2x}{1-x^2}=u(x)$, donc $\forall x\in[0,1[$ $f'(x)\le 0$

De plus $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} x\ln(1-x^2)=-\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\ln(1-x^2)=-\infty$,

puisque $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}(1-x^2)=0^+$

Tableau de variations de f

x	0		1
$f'(x)$	0	$-$	‖
f	0 ↘	$-\infty$	‖

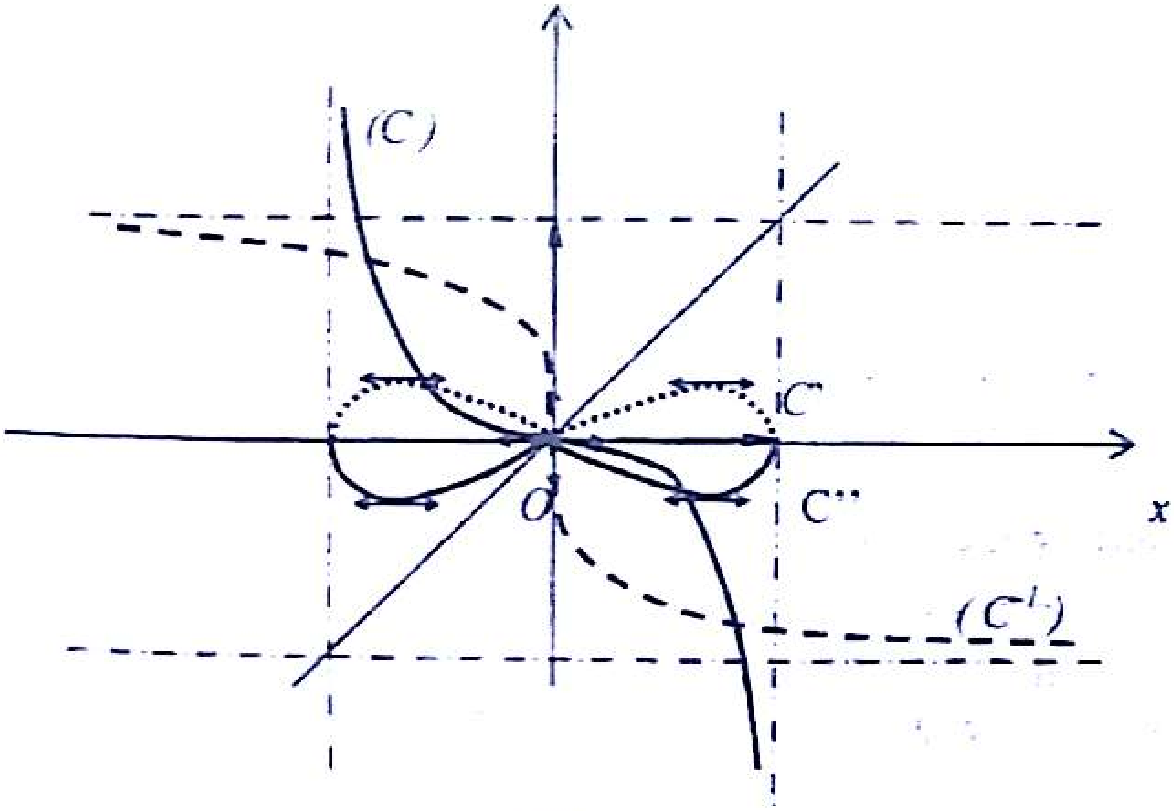
3°) Position de (C) par rapport à la tangente (T)

La tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0 a pour équation $y = 0$.
Etudions alors le signe de $f(x)-y(x) = x\ln(1-x^2)$.
Comme $\forall x \in]-1\ ,\ 1[$, $1-x^2 < 1$, alors $\ln(1-x^2)<0$ d'où $f(x)-y$ est du signe contraire de x donc : $\forall x \in]-1,0[$, $f(x) - y > 0$ et $\forall x \in]0,1[$, $f(x) - y < 0$.
En conclusion, (C) est au-dessus de (T) dans $]-1,0[$, puis (C) est en dessous de (T) dans $]0,1[$, (C) et (T) se coupent à l'origine.

4°)Tracé de (C), (C^{-1}), (C') et (Γ)

Les droites d'équation $x = -1$ et $x = 1$ sont asymptotes à la courbe (C).

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{4} \approx -0{,}15$ $\quad f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4}\ln\frac{7}{16} \approx -0{,}62$



5)Bijection réciproque

f est dérivable sur $]-1,1[$, donc continue sur $]-1,1[$. De plus f est strictement décroissante sur $]-1,1[$. Donc f est bijective de $]-1,1[$ sur $f(\,]-1,1[\,)$. Or $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} x\ln(1-x^2) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x) = +\infty$

d'où $f(\,]-1,1[\,) = \mathbb{R}$. Donc, f admet une réciproque f^{-1} de $\mathbb{R}$ vers $]-1,1[$.

Tableau de variation de f^{-1}

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\left(f^{-1}\right)'(x)$		$-$	$\|\|$	$-$	
f^{-1}	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

Les courbes (C^{-1}) de f^{-1} et (C) de f sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

III. La fonction h définie par : $h(x) = \frac{1}{2}|x|\sqrt{1-x^2}$

1°) Parité de h

h est définie sur $[-1,1]$.

$\forall x \in [-1,1]$, $-x \in [-1,1]$ et $h(-x) = \frac{1}{2}|x|\sqrt{1-x^2} = h(x)$. Donc h est paire.

On peut alors étudier h sur $[0,1]$, puis déduire la courbe de h par symétrie par rapport à l'axe (oy).

Dérivabilité de h

Les fonctions $x \mapsto |x|$ et $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ sont respectivement dérivables sur $\mathbb{R}^*$ et $]-1,1[$. D'où f, produit de fonctions dérivables, est dérivable sur $]-1,0[$ et $]0,1[$.

Etude de la dérivabilité de f en 0

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{h(x)-h(0)}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}\right) = -\frac{1}{2}$$

d'où h est dérivable à gauche en 0 et $h'_g(0) = -\frac{1}{2}$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{h(x)-h(0)}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}\right) = \frac{1}{2}$$. d'où h est dérivable à droite en 0, et $h'_d(0) = \frac{1}{2}$. Comme $h'_d(0) \neq h'_g(0)$, alors h n'est par dérivable en 0.

Etude de la dérivabilité au point 1

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{h(x)-h(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{-x(1+x)}{2\sqrt{1-x^2}} = -\infty$$, donc h n'est pas dérivable en 1.

Comme h est paire, alors h n'est pas aussi dérivable au point -1.

2°) Variations de h

On étudie h sur $[0,1]$

$$\forall x \in]0,1[,\ h'(x) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{1-2x^2}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{(1-x\sqrt{2})(1+x\sqrt{2})}{2\sqrt{1-x^2}}.$$

Le signe de $h'(x)$ sur $]0,1[$ dépend de celui de $1-x\sqrt{2}$

$\forall x \in]0, \frac{\sqrt{2}}{2}]$, $h'(x) \geq 0$ d'où h croissante sur $]0, \frac{\sqrt{2}}{2}]$.

$\forall x \in [\frac{\sqrt{2}}{2}, 1[$, $h'(x) \leq 0$ d'où h décroissante sur $[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1[$.

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1
$h'(x)$	$\frac{1}{2}$	+	0	-	||
h	0	↗	$\frac{1}{4}$	↘	0

3°) Voir II 4) pour le tracé des courbes C' et Γ.

$$y^2 = \frac{x^2(1-x^2)}{4} \Leftrightarrow \left(y = \frac{1}{2}|x|\sqrt{1-x^2} \text{ ou } y = -\frac{1}{2}|x|\sqrt{1-x^2} \right),$$

soit $y = h(x)$ ou $y = -h(x)$ donc $\Gamma = C' \cup C''$ où C'' est le symétrique de C' par rapport à l'axe (ox).

4° Calcul d'intégrale

Soit H une primitive de h sur $[0,1]$ où h est définie par

$$h(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} = -\frac{1}{4}(-2x)(1-x^2)^{1/2} \quad \text{Donc } H(x) = -1/6(1-x^2)^{3/2}$$

$$I = \int_0^1 h(x)dx = H(1)-H(0) = \frac{1}{6} \quad \text{donc} \quad I = \frac{1}{6}$$

L'aire, en cm^2, du domaine délimité par la courbe Γ est :

$$a = \left(4\int_0^1 f(x)dx\right) \times 4cm^2 \quad \text{donc} \quad a = \frac{8}{3}\ cm^2$$

5°) Calcul d'aire

Soit $0 \leq \alpha < 1$. Alors $\forall x \in [0,\alpha[$, $h(x)-f(x) \geq 0$

L'aire $A(\alpha)$ du domaine tel que $0 \leq x \leq \alpha$ et $f(x) \leq y \leq h(x)$ est égale à

$$A(\alpha) = 4\left(\int_0^\alpha (h(x) - f(x))dx\right) \text{ en } cm^2.$$

Posons $v(x) = -\frac{1}{2}[(1-x^2)\ln(1-x^2) - x^2]$. On verifie aisément que la dérivée de v est f. Donc v est une primitive de f sur $[0,1]$

$$A(\alpha) = 4\left(\int_0^\alpha h(x)dx - \int_0^\alpha f(x)dx\right) \text{ en } cm^2$$

$$= 4\,(H(\alpha) - H(0) - v(\alpha) + v(0)) \text{ en } cm^2$$

$$= 4\left[-\frac{1}{6}\left(1-\alpha^2\right)^3 + \frac{1}{6} + \frac{1}{2}\left(1-\alpha^2\right)\ln\left(1-\alpha^2\right) - \alpha^2\right].$$

Par conséquent, $A(\alpha) = 2(1-\alpha^2)\ln(1-\alpha^2) - 2\alpha^2 + \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\left(1-\alpha^2\right)^3$.

Limite de $A(\alpha)$

Si $\alpha \to 1$ alors $\left(1-\alpha^2\right) \to 0^+$ d'où $\lim\limits_{\alpha \to 1}\left(1-\alpha^2\right)\ln\left(1-\alpha^2\right) = 0$

Donc $\lim\limits_{\alpha \to 1} A(\alpha) = 2 + \frac{2}{3}$ c'est-à-dire $\lim\limits_{\alpha \to 1} A(\alpha) = \frac{8}{3}$ cm²

session de juin 1991

Exercice N°1

On donne les points A_1, A_2, A_3 d'affixes respectives i, 3 −i, 9-5i

1°) S'il existe une similitude plane directe S transformant A_1 en A_2, et A_2 en A_3, alors S est de la forme $z' = az + b$

D'où $S(A_1) = A_2 \Leftrightarrow z_{A_2} = a z_{A_1} + b \ (1)$

$S(A_2) = A_3 \Leftrightarrow z_{A_3} = a z_{A_2} + b \ (2)$

En faisant (1) − (2), on obtient $a = \dfrac{z_{A_2} - z_{A_3}}{z_{A_1} - z_{A_2}} = \dfrac{-6+6i}{-3}$ Donc a = 2 −2i

De l'égalité (1), on tire que $b = z_{A_2} - a z_{A_1} \Leftrightarrow b = 1 - i$

La similitude plane directe cherchée est définie par :

$S : M(z) \mapsto M'(z')$ tel que $z' = (2-2i)z + 1 - i$

Eléments caractéristiques de S

Le rapport $k = |2-2i| = 2\sqrt{2}$

L'angle de S est $\theta = \arg(2-2i)$ tel que :

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{-\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ soit } \theta = \frac{-\pi}{4} \quad (2\pi)$$

Le centre Ω de S a pour affixe $Z_\Omega = \dfrac{1-i}{1-(2-2i)} = \dfrac{1-i}{-1+2i} = \dfrac{-3}{5} - \dfrac{1}{5}i$

Donc S est une similitude de centre $\Omega\left(-\dfrac{3}{5}, -\dfrac{1}{5}\right)$ de rapport $2\sqrt{2}$ et dont une mesure de l'angle est $-\dfrac{\pi}{4}$

2°) On note B' l'image de B par S. B' est symétrique de B par rapport à O équivaut à $Z_{B'} = -Z_B$. or $S(B) = B'$

$S(B) = B' \Leftrightarrow Z_{B'} = (2-2i)Z_B + (1-i)$

$S(B) = B' \Leftrightarrow -Z_B = (2-2i)Z_B - 1 - i$ car $Z_{B'} = Z_{B'} = -Z_B$

$\Leftrightarrow (3+2i)\, Z_B = -1-i$

$\Leftrightarrow Z_B = \dfrac{-1-i}{3+2i} = \dfrac{-1}{13} + \dfrac{5}{13}i$

Donc l'affixe de B cherchée est : $z = \dfrac{-1}{13} + \dfrac{5}{13}i$

3°) <u>Image G' de G par S</u> :

Comme G barycentre de $(A_1, 2)$, $(A_2, 1)$ et $(A_3, -1)$ alors

$2\vec{GA_1} + \vec{GA_2} - \vec{GA_3} = \vec{O}$ ou encore $\vec{OG} = \dfrac{2\vec{OA_1} + \vec{OA_2} - \vec{OA_3}}{2}$

L'affixe de G est $z_G = \dfrac{2z_{A_1} + z_{A_2} - z_{A_3}}{2} = -3 + 4i$. Donc G (-3 , 4)

L'image G' de G par S a pour affixe :

$z_{G'} = (2-2i)z_G + 1 - i = (2-2i)(-3+4i) + 1 - i = 3 + 13i$. Donc G' (3 , 13)

Exercice N°2

Le joueur tire successivement sur 4 boites, de dimensions de plus en plus réduites B_1, B_2, B_3, B_4, dans cet ordre. On note p_i la probabilité de toucher la boite numérotée i, pour $i = 1, 2, 3, 4$

Un joueur A se présente avec $p_1 = \frac{4}{5}$, $p_2 = \frac{3}{5}$, $p_3 = \frac{2}{5}$, $p_4 = \frac{1}{5}$

1°) Les éventualités du jeu du joueur A sont :

w_1 « A rate B_1 »

w_2 « A atteint B_1, mais rate B_2 »

w_3 « A atteint B_1, puis B_2 mais rate B_3 »

w_4 « A atteint B_1, puis B_2 et B_3 mais rate B_4 »

w_5 « A atteint B_1, puis B_2, puis B_3 et B_4 »

Le probabilité de chacune de ces éventualités est :

$p(w_1) = 1 - p_1 = \frac{1}{5}$; $\qquad p(w_2) = p_1(1 - p_2) = \frac{8}{25}$

$p(w_3) = p_1 \times p_2 \times (1 - p_3) = \frac{36}{125}$;

$p(w_4) = p_1 \times p_2 \times p_3 \times (1 - p_4) = \frac{96}{625}$;

$p(w_5) = p_1 \times p_2 \times p_3 \times p_4 = \frac{24}{625}$

2) X la variable aléatoire " le gain obtenu en fin de partie".
On sait que le joueur gagne 1000 F, s'il tire sur une boîte et l'atteint, et perd 1000F s'il tire sur une boîte et la rate. D'où l'ensemble des valeurs prises par X est $X(\Omega) = \{-1000, 0, 1000, 2000, 4000\}$

a) Loi de probabilité de X

$P(X = -1000) = p(w_1) = 1/5$; $\qquad P(X=0) = p(w_2) = 8/25$

$P(X=1000) = p(w_3) = 36/125$; $\qquad P(X=2000) = p(w_4) = 96/625$

$P(X=4000)=p(w_5)=24/625$

Le tableau récapitulatif de la loi de X est

x_i	-1000	0	1000	2000	4 000
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{8}{25}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{96}{625}$	$\frac{24}{625}$

Espérance mathématique de X

$$E(X)=\sum_{i=1}^{5} x_i\, p(X=x_i)$$

$$=\frac{1}{625}(-1000\times125+0\times200+1000\times180+2000\times96+4000\times24)$$

$$E(X)=\frac{343000}{625}=548{,}8 \quad \text{donc } E(X)=548.8$$

3°) Calcul de probabilité pour que A verse au moins 500 F

Soit B l'événement "le joueur A verse au moins 500F à un fonds de solidarité "

$p(B)=p(X\geq1000)=1-p(X<1000)=1-p(X=0)-p(X=-1000).$

$$=1-\frac{8}{25}-\frac{1}{5}=\frac{12}{25}, \quad \text{donc } p(B)=\frac{12}{25}$$

Problème

A. Les coordonnées du vecteur vitesse $\vec{v}$ d'un point M mobile dans le plan (P) sont :

$$\begin{cases} x'=e^{t} \\ y'=1-e^{1-t} \end{cases} \quad \text{avec } t\in[0,+\infty[$$

1°) Coordonnées (x, y) du mobile M

Comme $x' = e^t$ alors $x = e^t + C_1$

Comme $y' = 1 - e^{1-t}$ alors $y = t + e^{1-t} + C_2$

Or à l'instant $t = 1$, le mobile est en $A(e, 2)$, d'où $C_1 = 0$ et $C_2 = 0$.

Donc $M\begin{cases} x = e^t \\ y = t + e^{1-t} \end{cases}$.

2°) Vecteur accélérateur

Le vecteur accélérateur est défini par :

$$\vec{\Gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt} \text{ d'où } \vec{\Gamma}\begin{cases} x'' = e^t \\ y'' = e^{1-t} \end{cases}$$

Les vecteurs $\vec{V}(t)$ et $\vec{\Gamma}(t)$ sont égaux si et seulement si $y' = y''$

or $y' = y''$ équivaut à $e^{1-t} = \frac{1}{2}$ soit $t = 1 + \ln 2$

A l'instant $t = 1 + \ln 2$, les vecteurs $\vec{V}(t)$ et $\vec{\Gamma}(t)$ sont égaux.

3°) Equation de la trajectoire

$\forall t \geq 0$, $e^t \geq 1$ d'où $x \in [1, +\infty[$. De plus, $x = e^t \Leftrightarrow t = \ln x$

Ainsi $y = t + e^{1-t} = t + \frac{e}{e^t}$. D'où $y = \ln x + \frac{e}{x}$. Une équation du suppon de la trajectoire du point mobile M est $y = \ln x + \frac{e}{x}$.

B f la fonction numérique définie par : $f(x) = \ln x + \frac{e}{x}$

1°) Variation de f

f est définie sur $]0, +\infty[$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x}(x \ln x + e) = +\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (x \ln x) = 0$

$\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln x + \dfrac{e}{x}\right) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e}{x}\right) = 0$

La fonction $x \mapsto \ln x$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction $x \mapsto \dfrac{e}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. D'où f, somme de ces fonctions, est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{e}{x^2} = \dfrac{x-e}{x^2}$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e$

$f'(x)$ a le même signe que $x-e$

$\forall x \in]0,e],\ f'(x) \leq 0$ d'où f est décroissante sur $]0,e]$

$\forall x \in [e,+\infty[,\ f'(x) \geq 0$ d'où f est croissante sur $[e,+\infty[$

Tableau de variations de f

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

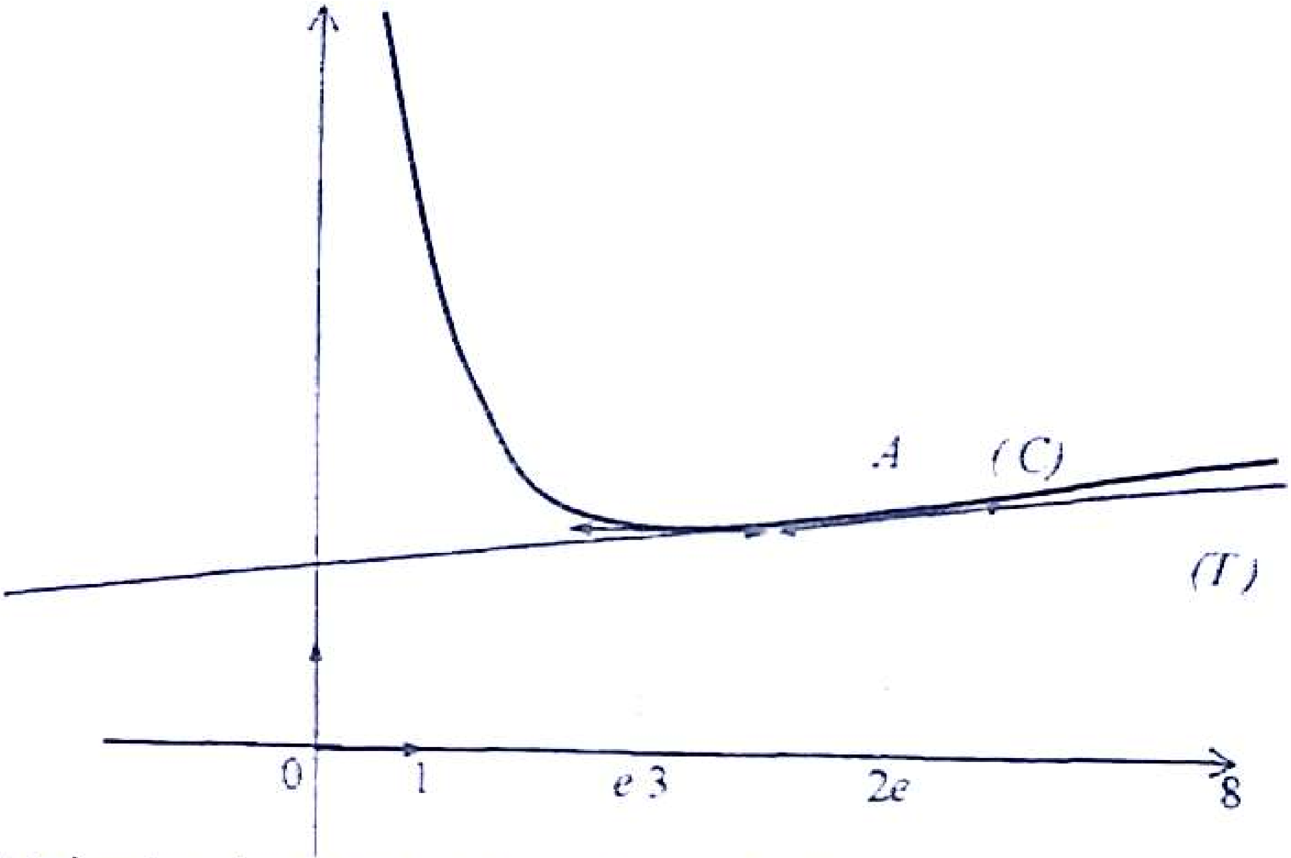
2°) Tracé de la courbe (C)

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$ d'où la droite d'équation $x = 0$ est asymptote à (C).

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{e}{x^2}\right) = 0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x}\right) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e}{x^2}\right) = 0$

La courbe (C) admet une branche parabolique de direction (ox) quand $x \to +\infty$

La tangente (T) à la courbe (C) au point A(2e, $\frac{3}{2}+\ln 2$) a pour équation $y = \frac{1}{4e}x + 1 + \ln 2$



La trajectoire du mobile M est la partie de la courbe (C) dans l'intervalle $[1, +\infty[$

3°) <u>Calcul d'aire</u>

Soit $E = \{M(x, y) \quad 1 \leq x \leq 2e$ et $0 \leq y \leq f(x)\}$

$\forall x \in [1, 2e], f(x) \geq 0$ d'où l'aire du domaine E est égale à

$A(E) = \int_1^{2e} f(x)dx$ en cm^2, or $\int_1^{2e} f(x)dx = \int_1^{2e}\left(\ln x + \frac{e}{x}\right)dx$

$\int_1^{2e} f(x)dx = [(x+e)\ln x - x]_1^{2e} = 3e\ln 2e - 2e + 1 = 1 + 3e\ln 2 + e$

donc $A(E) = (1+e+3e\ln 2)\ cm^2$.

C La suite (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n = f(e^n) - n$

1°) Montrons que (u_n) est une suite géométrique

On a $f\left(e^n\right) = \ln e^n + \dfrac{e}{e^n} = n + e^{1-n}$ d'où $u_n = e^{1-n}$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = e^{-n} = e^{-1} \times e^{1-n} = \dfrac{1}{e} u_n$ donc (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 1/e$ et de premier terme $u_0 = e$

<u>Calcul de S_n en fonction de n</u>

$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ est la somme de $(n+1)$ premiers termes d'une suite géométrique de raison $q = 1/e$ et de premier terme e.

$$\text{D'où } S_n = e\frac{1-\left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{e}}. \qquad S_n = \frac{e^2}{e-1}\left(1-e^{-n-1}\right).$$

<u>Calcul de Σ_n en fonction de n</u>

On pose $\Sigma_n = f(1) + f(e) + f(e^2) + \ldots + f(e^n)$

On sait que $u_n = f(e^n) - n \Leftrightarrow f(e^n) = u_n + n$. Ainsi

$\Sigma_n = (u_0 + 0) + (u_1 + 1) + (u_2 + 2) + \ldots + (u_n + n)$

$\quad = (u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n) + (1 + 2 + 3 + \ldots + n) = S_n + (1 + 2 + 3 + \ldots + n)$.

Or $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ est la somme de n premiers termes d'une suite arithmétique de raison 1 et de premier terme 1, donc vaut $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

D'où $\quad \Sigma_n = S_n + \dfrac{n(n+1)}{2}$

2°) <u>Limites de S_n et Σ_n quand $n \to +\infty$</u>

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty}\left(e^{-n-1}\right) = 0$ alors on a :

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{e^2}{e-1}\left(1-e^{-n-1}\right) = \frac{e^2}{e-1}.$$

$$\lim_{n \to +\infty} \Sigma_n = \lim_{n \to +\infty}\left[S_n + \frac{n^2+n}{2}\right] = +\infty \text{ car } \lim_{n \to +\infty}\left(\frac{n^2+n}{2}\right) = +\infty.$$

Exercice N°1

X un aléa numérique sur un univers Ω et

1°) <u>Détermination du réel k</u>

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$p(X = x_i)$	k	$\frac{4k}{5}$	$\frac{2k}{5}$	$\frac{4k}{5}$	k

Pour que le tableau ci-dessus définisse une loi de probabilité de X, il faut que $\sum_{i=1}^{5} p(X = x_i) = 1$ or $\sum_{i=1}^{5} p(X = x_i) = 2k + \frac{8}{5}k + \frac{2}{5}k = 4k \Rightarrow 4k = 1$

donc $k = \frac{1}{4}$

2) <u>Détermination des réels</u> x_1 , x_2 , x_3 , x_4 et x_5 .

Puisque $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ forme une progression arithmétique de raison r, on a alors : $x_1 = x_3 - 2r$; $x_2 = x_3 - r$, $x_4 = x_3 + r$ et $x_5 = x_3 + 2r$

L'espérance mathématique de X est égale à

$$E(X) = \sum_{i=1}^{5} x_i\, p(X = x_i) = k(x_1 + x_5) + \frac{4k}{5}(x_2 + x_4) + \frac{2k}{5}x_3$$

$$= 2kx_3 + \frac{8k}{5}x_3 + \frac{2k}{5}x_3, \qquad \text{donc } E(X) = x_3 .$$

Or $E(X) = 3$ donc $x_3 = 3$. De plus $x_5 = 7x_2$ d'où $x_3 + 2r = 7\,(x_3 - r)$ soit $9r = 6x_3$ donc $r = \frac{2x_3}{3} = 2$.

Ainsi donc $x_1 = -1$; $x_2 = 1$; $x_3 = 3$; $x_4 = 5$ et $x_5 = 7$

3°) <u>Variance et écart type de X</u>

La loi de probabilité de X est

x_i	-1	1	3	5	7
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$

La variance de X est égale à $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

or $E(X) = 3$ et $E(X^2) = \sum_{i=1}^{5} x_i^2 p(X = x_i) = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{9}{10} + 5 + \frac{49}{4} = \frac{93}{5}$

Ainsi donc $V(X) = \frac{93}{5} - 9 = \frac{48}{5}$, $V(X) = 9{,}6$.

L'écart type de X est égal à $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{9.6}$, donc $\sigma(X) = 3{,}098$

4°) <u>Fonction de répartition de X</u>

La fonction de repartition de X est definie par .
$\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = p(X \le x)$.
Soit

$\forall x \in]-\infty, -1]$, $F(x) = 0$;

$\forall x \in]-1, 1]$, $F(x) = p(X=-1) = \frac{1}{4}$;

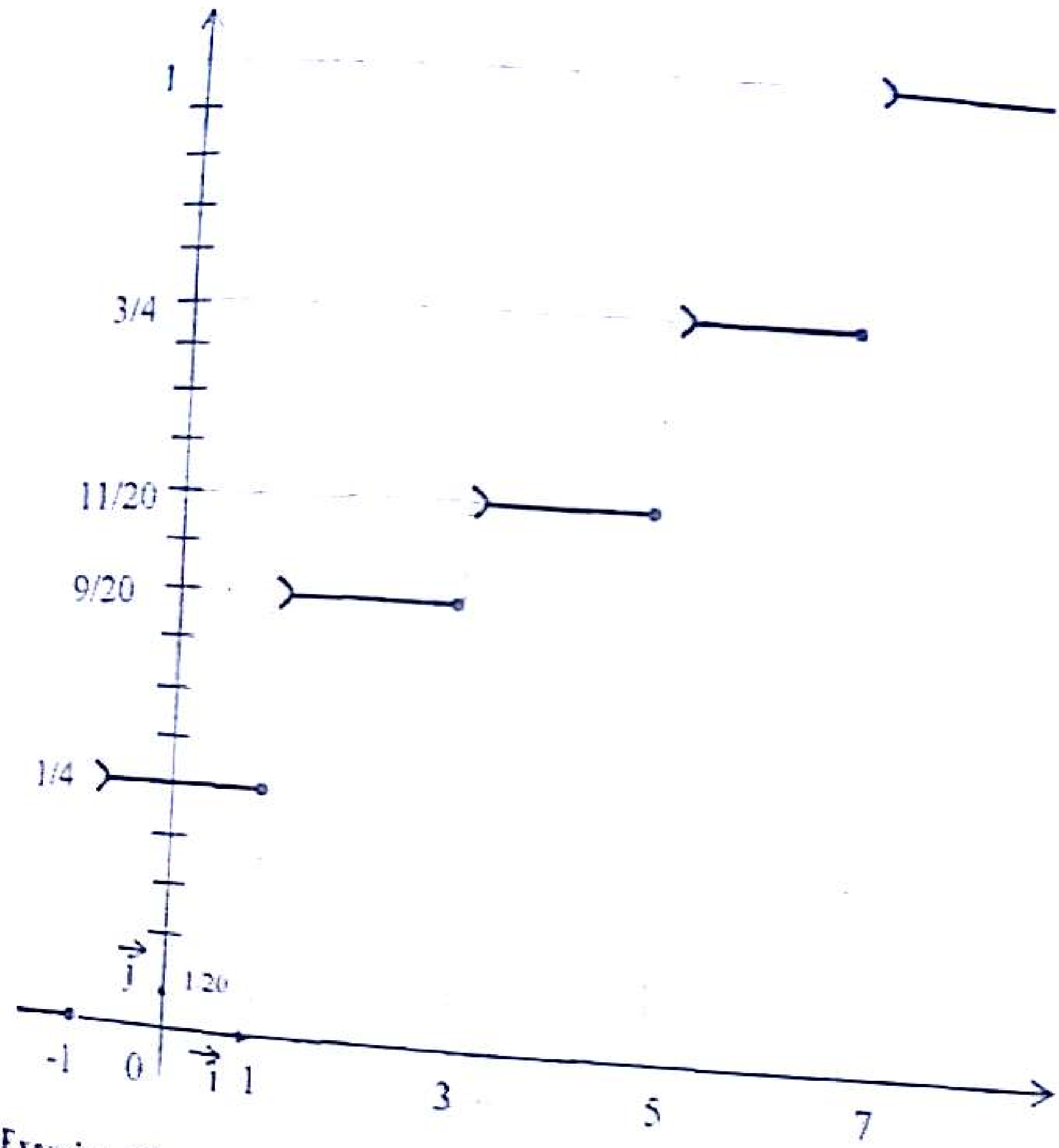
$\forall x \in]1, 3]$; $F(x) = p(X=-1) + p(X=1) = \frac{9}{20}$;

$\forall x \in]3, 5]$, $F(x) = p(X=-1) + p(X=1) + p(X=3) = \frac{11}{20}$;

$\forall x \in]5, 7]$, $F(x) = p(X=-1) + p(X=1) + p(X=3) + p(X=5) = \frac{15}{20}$;

$\forall x \in]7, +\infty[$, $F(x) = 1$.

Tracé de la fonction de répartition de X



Exercice N°2

A, B, C d'affixes respectives $2i$, $\sqrt{3}-i$ et $-3\sqrt{3}-i$.

1°)a) Soit z_0 l'affixe du barycentre des points pondérés $(A, 2)$, $(B, 3)$ et $(C, 1)$.

Alors $z_0 = \dfrac{2z_A + 3z_B + z_C}{6}$ d'où $z_0 = \dfrac{4i + 3\sqrt{3} - 3i - 3\sqrt{3} - i}{6} = 0$.

Donc, le barycentre des points pondérés $(A, 2)$, $(B, 3)$ et $(C, 1)$ est l'origine du repère

*<u>Nature du triangle ABC</u>

$AB = |z_B - z_A| = |\sqrt{3} - 3i| = 2\sqrt{3}$; $BC = |z_C - z_B| = |-4\sqrt{3}| = 4\sqrt{3}$

$AC = |z_C - z_A| = |-3\sqrt{3} - 3i| = 6$ Comme $AB^2+AC^2=12+36=48=BC^2$,

alors le triangle ABC est rectangle en A.

b) <u>Ensemble des points M tels que</u> $2MA^2 + 3MB^2 + MC^2 = 72$

Pour tout point M du plan, on a

$$2MA^2 + 3MB^2 + MC^2 = 2(\vec{MO}+\vec{OA})^2 + 3(\vec{MO}+\vec{OB})^2 + (\vec{MO}+\vec{OC})^2$$

$$= 6MO^2 + 2\vec{MO}\cdot(2\vec{OA}+3\vec{OB}+\vec{OC}) + 2OA^2 + 3OB^2 + OC^2$$

$= 6MO^2 + 2OA^2 + 3OB^2 + OC^2$, car l'origine O est barycentre des points pondérés $(A, 2)$; $(B, 3)$ et $(C, 1)$.

Or $OA = |Z_A| = 2$; $OB = |Z_B| = 2$ et $OC = |Z_C| = 2\sqrt{7}$.

Donc $2MB^2 + 3MB^2 + MC^2 = 6MO^2 + 48$

L'égalité $2MB^2 + 3MB^2 + MC^2 = 72$ devient $6MO^2 + 48 = 72$

soit $MO^2 = 4$ d'où $OM = 2$.

L'ensemble cherché est donc le cercle (C) de centre O et de rayon 2

De plus $OA = OB = 2$, donc les points A et B appartiennent au cercle (C)

2°) <u>Eléments géométriques de la similitude S</u>

La similitude plane directe S est définie par :

$$Z' = aZ + b,\ a \in \mathbb{C}^* \text{ et } b \in \mathbb{C}$$

$S(A) = B$ équivaut à $aZ_A + b = Z_B$ (1)

$S(B) = C$ équivaut à $aZ_B + b = Z_C$ (2)

(1) − (2) devient $a(Z_A - Z_B) = Z_B - Z_C$

on déduit $a = \dfrac{Z_B - Z_C}{Z_A - Z_B} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3i - \sqrt{3}} = -1 - i\sqrt{3}$

$aZ_A + b = Z_B$ entraîne $b = -aZ_A + Z_B$ d'où $b = -\sqrt{3} + i$.

S est définie par $Z' = (-1 - i\sqrt{3})Z + i - \sqrt{3}$. Le rapport de S est $k = |1 - i\sqrt{3}| = 2$.

L'angle de S a pour mesure θ telle que :

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{-1}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ soit } \theta = \frac{4\pi}{3} \ (2\pi)$$

Le centre Ω de S a pour affixe $Z_\Omega = \dfrac{b}{1-a} = \dfrac{-\sqrt{3}+i}{2+i\sqrt{3}} = \dfrac{-\sqrt{3}}{7} + \dfrac{5}{7}i$.

En conclusion, S est une similitude plane directe de centre $\Omega(\dfrac{-\sqrt{3}}{7}, \dfrac{5}{7})$, de rapport 2 et dont une mesure de l'angle est $\dfrac{4\pi}{3}$

3°) Elements géométriques de la similitude directe S'

La similitude directe S' est définie par $Z' = \alpha Z + \beta$. Ainsi donc, la composée SoS' est une similitude définie par

$$Z' = (-1 - i\sqrt{3})\alpha Z + \beta(-1-i\sqrt{3}) + i - \sqrt{3}$$

SoS' est la translation T de vecteur $\vec{u}$ d'affixe 1 − i si et seulement si on a

$$\begin{cases} (-1 - i\sqrt{3})\alpha = 1 \\ \beta(-1 - i\sqrt{3}) + i - \sqrt{3} = 1 + i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{-1}{1 + i\sqrt{3}} \\ \beta = \dfrac{-1 - \sqrt{3}}{1 + i\sqrt{3}} \end{cases}$$

Donc $\begin{cases} \alpha = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{4} \\ \beta = \dfrac{(1 + \sqrt{3})(-1 + i\sqrt{3})}{4} \end{cases}$

Ainsi, S' est définie par :

$$Z' = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{4} Z + \frac{(1 + \sqrt{3})(-1 + i\sqrt{3})}{4}$$

Le rapport de S' est $k' = \left|\frac{-1 + i\sqrt{3}}{4}\right| = \frac{1}{2}$. L'angle de S' a pour mesure

θ' telle que : $\begin{cases} \cos\theta' = \frac{-1}{2} \\ \sin\theta' = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ soit $\theta' = \frac{2\pi}{3}(2\pi)$

Le centre Ω' de S' a pour affixe $Z_{\Omega} = \frac{\beta}{1-\alpha} = \frac{(1+\sqrt{3})(-1+i\sqrt{3})}{5-i\sqrt{3}}$, donc

$$Z_{\Omega} = \frac{(1+\sqrt{3})(-4+2i\sqrt{3})}{11}$$

En conclusion, S' est la similitude directe de centre Ω d'affixe $\frac{(1+\sqrt{3})(-4+2i\sqrt{3})}{11}$, de rapport $\frac{1}{2}$ et dont une mesure de l'angle est $\frac{2\pi}{3}$.

Problème

A. f la fonction définie par $f(x) = |x-1|e^{2x}$

1°)a) f est définie sur $\mathbb{R}$.

b) <u>Continuité de f</u>

Les fonctions $x \mapsto |x-1|$ et $x \mapsto e^{2x}$ sont continues sur $\mathbb{R}$; donc f est continue sur $\mathbb{R}$ car produit de 2 fonctions continues.

c) <u>Dérivabilité de f</u>

Les fonctions $x \mapsto |x-1|$ et $x \mapsto e^{2x}$ sont respectivement dérivables sur $\mathbb{R}-\{1\}$ et $\mathbb{R}$, donc f, produit de ces deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}-\{1\}$, est dérivable sur $\mathbb{R}-\{1\}$.

Dérivée de f :

$\forall x \in]-\infty ; 1[$, $f(x) = (1 - x)e^{2x}$ et $f'(x) = (1 - 2x)e^{2x}$

$\forall x \in]1 ; +\infty[$, $f(x) = (x - 1)e^{2x}$ et $f'(x) = (2x - 1)e^{2x}$

2°) Variation de f

*Limites

$$\lim_{-\infty} f = \lim_{x \to -\infty} (1 - x)e^{2x} = \lim_{x \to -\infty} \left(e^{2x} - xe^{2x}\right) = 0$$

car $\lim_{x \to -\infty} \left(e^{2x}\right) = 0$ et $\lim_{x \to -\infty} \left(-xe^{2x}\right) = 0$

$$\lim_{+\infty} f = \lim_{x \to +\infty} (x - 1)e^{2x} = +\infty \quad \text{car} \quad \lim_{x \to +\infty} \left(e^{2x}\right) = +\infty$$

*Sens de variations de f

$\forall x \in]-\infty, 1[$, $f'(x) = (1-2x)e^{2x}$, $f'(x)$ est du signe de $(1-2x)$;

$\forall x \in]-\infty, \frac{1}{2}]$, $f'(x) \geq 0$ d'où f est croissante sur $]-\infty, \frac{1}{2}]$.

$\forall x \in [\frac{1}{2}, 1[$, $f'(x) \leq 0$ d'où f est décroissante sur $[\frac{1}{2}, 1[$

$\forall x \in]1, +\infty[$, $f'(x) = (2x-1)e^{2x}$ $f'(x)$ est du signe de $(2x-1)$.

$\forall x \in]1, +\infty[$, $f'(x) > 0$ d'où f est strictement croissante sur $]1, +\infty[$

*Tableau de variations de f

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-e^2$ ‖ e^2	$+$	
f	0	↗	$\frac{1}{2}e$	↘	0	↗	$+\infty$

3°) a) Branches infinies de la courbes (C) de f

$\lim_{-\infty} f = 0$ d'où la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à (C) en $-\infty$

$\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$. De plus $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right) e^{2x} = +\infty$ car

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(e^{2x}\right) = +\infty$. d'où (C) admet une branche parabolique de direction (oy) quand x tend vers $+\infty$.

b) <u>Point d'inflexion de (C)</u>

$\forall x \in]-\infty , 1[$, $f''(x) = -4xe^{2x}$. $f''(x)$ est du signe de $(-x)$. Ainsi $f''(x)$ s'annule en $x = 0$ tout en changeant de signe.

Donc $I(0,1)$ est un point d'inflexion de (C).

L'équation de la tangente à (C) en ce point est $y = x + 1$.

c) <u>Equations des demi-tangentes</u>

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \left(-e^{2x}\right) = -e^2$$

f est dérivable à gauche au point 1 et $f'_g(1) = -e^2$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \left(e^{2x}\right) = e^2$$

f est dérivable à droite au point 1, et $f'_d(1) = e^2$

Comme $f'_g(1) \neq f'_d(1)$, alors f n'est pas dérivable au point 1. Mais (C) admet une demi-tangente à gauche T_1 d'équation $y = (1 - x)e^2$, et une demi-tangente T_2 d'équation $y = (x - 1)e^2$.

*<u>Position de (C) par rapport aux demi-tangentes</u>

$T_1 : y = (1 - x)e^2$

$f(x) - y = (1 - x)e^{2x} - (1 - x)e^2 = (1 - x)(e^{2x} - e^2)$

si $x < 1$ alors $1 - x > 0$ et $e^{2x} < e^2$ d'où $f(x) - y < 0$

Dans $]-\infty , 1[$, (C) est en dessous de T_1.

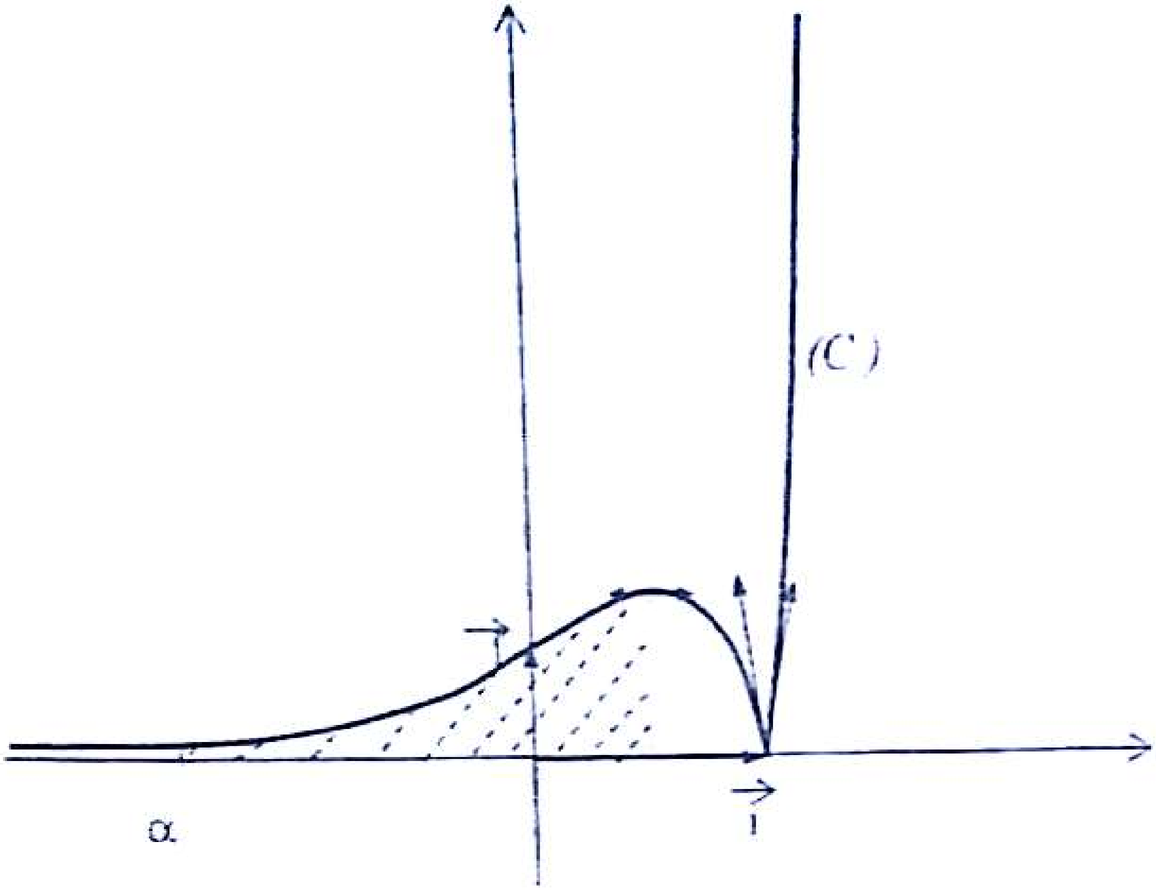
$T_2 : y = (x - 1)e^2$

$f(x) - y = (x - 1)e^{2x} - (x - 1)e^2 = (x - 1)(e^{2x} - e^2)$

si $x > 1$ alors $x - 1 > 0$ et $e^{2x} > e^2$ d'où $f(x) - y > 0$

Dans $]1, +\infty[$, (C) est au-dessus de T_2.

d) Tracé de la courbe (C)



B. Calcul d'aire

α un réel tel que $\alpha \leq \frac{1}{2}$. Or $\forall \in [\alpha, \frac{1}{2}]$ $f(x) > 0$. D'où l'aire, en cm^2, du domaine plan délimité par les droites $x = \alpha$, $x = \frac{1}{2}$, $y = 0$ et la courbe (C) est égale à $A_\alpha = 2 \times \int_\alpha^{\frac{1}{2}} f(x)dx = 2 \times \int_\alpha^{\frac{1}{2}} (2-2x)e^{2x}dx$.

En faisant une intégration par parties.

on pose $\begin{cases} u = 2 - 2x \\ v' = e^{2x} \end{cases}$ prenons $\begin{cases} u' = -2 \\ v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$

D'où $A_\alpha = \left[(1-x)e^{2x}\right]_\alpha^{\frac{1}{2}} + \int_\alpha^{\frac{1}{2}} e^{2x}dx$

$$= \left[(1-x)e^{2x} + \frac{1}{2}e^{2x}\right]_\alpha^{\frac{1}{2}} = \left[\left(\frac{3}{2}-x\right)e^{2x}\right]_\alpha^{\frac{1}{2}}$$

$A_\alpha = e - \left(\frac{3}{2}-\alpha\right)e^{2\alpha} cm^2$

<u>Calcul de</u> $\lim\limits_{\alpha \to -\infty} A_\alpha$

On sait que $\lim\limits_{\alpha \to -\infty} \left(e^{2\alpha}\right) = 0$ et $\lim\limits_{\alpha \to -\infty} \left(\alpha\, e^{2\alpha}\right) = 0$

D'où $\lim\limits_{\alpha \to -\infty} A_\alpha = \lim\limits_{\alpha \to -\infty} \left[e - \frac{3}{2}e^{2\alpha} + \alpha\, e^{2\alpha}\right] = e$. Donc $\lim\limits_{\alpha \to -\infty} A_\alpha = e\, cm^2$

C). N un point mobile du plan affine euclidien défini par

$$\begin{cases} x = \ln t \\ y = (\ln t - 1)t^2 \end{cases} \quad \text{pour } t > e$$

1°)<u>Trajectoire de N</u>

Comme $t > e$, alors $\ln t > 1$ d'où $x > 1$

$x = \ln t \Leftrightarrow t = e^x$ or $y = (\ln t - 1)t^2 = (x-1)e^{2x} = f(x)$ avec $x \in]1, +\infty[$

La trajectoire (T) du mobile N est la partie de la courbe (C) dans l'intervalle $]1, +\infty[$.

2°)<u>Vecteur vitesse et vecteur accélérateur</u>

Le vecteur vitesse $\vec{V}(t)$ est défini par $\vec{V}(t) = \dfrac{d\vec{M}}{dt}$

D'où $\vec{V}(t)\begin{cases} x' = \dfrac{1}{t} \\ y' = 2t\ln t - t \end{cases}$

Le vecteur accélérateur $\vec{\Gamma}(t)$ est défini par $\vec{\Gamma}(t) = \frac{d\vec{V}}{dt}$

D'où $\vec{\Gamma}(t) \begin{cases} x'' = -\frac{1}{t^2} \\ y'' = 1 + 2\ln t \end{cases}$

3°) Colinearite des vecteurs $\vec{V}(t)$ et $\vec{\Gamma}(t)$

$$\det\left(\vec{V}(t), \vec{\Gamma}(t)\right) = \begin{vmatrix} \frac{1}{t} & -\frac{1}{t^2} \\ 2t\ln t - t & 1 + 2\ln t \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{t}(1 - 2\ln t) + \frac{1}{t}(2\ln t - 1) = \frac{4\ln t}{t}$$

Comme $t > e$ alors $\ln t > 1$ d'où $\ln t > 0$

D'où $\forall t > e$, $\det(\vec{V}(t), \vec{\Gamma}(t)) > 0$ Les vecteurs $\vec{V}(t)$ et $\vec{\Gamma}(t)$ ne peuvent pas être colinéaires

Session de juin 1994

Exercice N°1

$$A = \sum_{k=0}^{n} k^2, \quad B = \sum_{k=0}^{n} (1+k)^3, \quad C = \sum_{k=0}^{n} k^3, \quad D = \sum_{k=0}^{n} k$$

1°) Expression de B en fonction de C

$B = \sum_{k=0}^{n} (1+k)^3$, en posant $l = 1 + k$, on a $B = \sum_{l=1}^{n+1} l^3$,

$$B = \sum_{l=1}^{n} l^3 + (n+1)^3 = \sum_{l=0}^{n} l^3 + (n+1)^3$$

Donc $B = C + (n+1)^3$

$f'_m(x)$ est du signe de $(m-1)e^{mx}-1$

$f'_m(x)=0 \Leftrightarrow (m-1)e^{mx}-1=0 \quad (E')$

Si $m=1$ alors (E') est impossible

D'où $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'_1(x)=-e^{-x}<0$. Donc C_m n'admet pas d'extremum

Si $m<1$ alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $(m-1)e^{mx}-1<0$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'_m(x)<0$. Donc C_m n'admet pas d'extremum

Si $m>1$ alors (E') équivaut à $x=\dfrac{-1}{m}\ln(m-1)$

Donc C_m admet un extremum M_m pour les valeurs de $m>1$

Les coordonnées de M_m sont :

$$M_m\left(\frac{-1}{m}\ln(m-1),\ \frac{m}{\sqrt[m]{(m-1)^{m}}}\right)$$

a) <u>Courbe C_m de tangente en $I(0, 2)$ parallèle à la 1^e bissectrice</u>

La tangente à C_m au point $I(0\ ,\ 2)$ est parallèle à la première bissectrice si et seulement si $f'_m(0)=1$. Or $f'_m(0)=m-2$

D'où $f'_m(0)=1 \Leftrightarrow m=3$. Donc la valeur de m cherchée est 3

L'équation de cette tangente en $I(0\ .\ 2)$ à C_3 est $y=x+2$

2) <u>Etude des variations de f_{-1}</u> . ($m=-1$ et $m<1$)

* $D_{f_{-1}}=\mathbb{R}$

* $\lim\limits_{-\infty} f_{-1}=-\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f_{-1}=0$

* f_{-1} est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'_{-1}(x)$		$-$	
f_{-1}	$+\infty$	$\searrow$	0

Etude des variations de f_2 ($m = 2$ et $m > 1$)

$D_{f_2} = \mathbb{R}$

$\lim\limits_{-\infty} f_2 = +\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f_2 = +\infty$

$f'_2(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-1}{m}\ln(m-1)$, $x = \dfrac{-1}{2}\ln(2-1) = 0$. f est strictement décroissante sur $]-\infty\,,\,0\,]$ et croissante sur $[0\,,\,+\infty[$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'_2(x)$		$+$	0	$-$	
f_2	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

a) Tracé des courbes C_{-1} et C_2

* Cherchons les branches infinies de C_{-1}

$\lim\limits_{+\infty} f_{-1} = 0$, d'où la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à C_{-1} en $+\infty$

$\lim\limits_{-\infty} f_{-1} = +\infty$

De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f_{-1}(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{e^{-2x}}{x} + \dfrac{e^{-x}}{x}\right) = -\infty$

car $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{-2x}}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{-x}}{x} = -\infty$

C_{-1} admet une branche parabolique de direction *(oy)* en $-\infty$

Cherchons les branches infinies de C_2

$\lim\limits_{+\infty} f_2 = +\infty$. De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_2(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^{x}}{x} + \dfrac{e^{-x}}{x}\right) = +\infty$

car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{-x}}{x} = 0$.

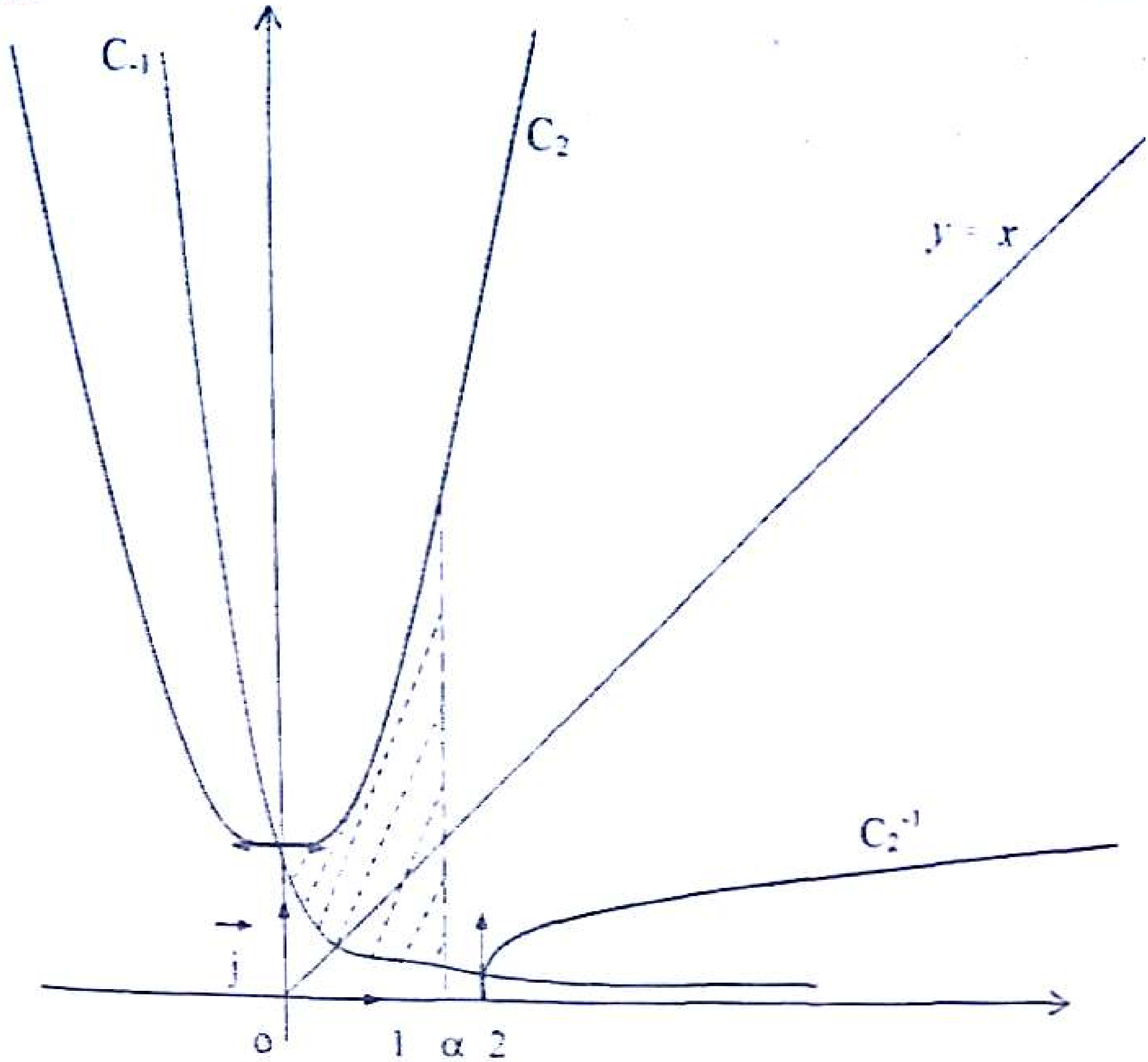
C_2 admet une branche parabolique de direction *(oy)* en $+\infty$

$\lim\limits_{-\infty} f_2 = -\infty$. De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f_2(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{e^{x}}{x} + \dfrac{e^{-x}}{x}\right) = +\infty$,car

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{e^{x}}{x}\right) = 0$

C_2 admet une branche parabolique de direction *(oy)* en $-\infty$

Courbe



La trajectoire du mobile M est la partie de C_2 dans l'intervalle $]-\infty, 0[$

b)Bijection réciproque de f_2

La fonction f_2,définie par $f_2(x) = e^x+e^{-x}$, est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc continue sur $\mathbb{R}$, et en particulier sur $[0, +\infty[$ Ainsi la restriction de f_2 à $[0, +\infty[$ est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$, donc elle est bijective de $[0, +\infty[$ sur $f([0 +\infty[) = [2, +\infty[$ Donc elle admet une réciproque f_2^{-1} de $[2, +\infty[$ vers $[0, +\infty[$. De plus les courbes C_2 et Γ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

c)

i) Calcul d'aire

$\forall x \in [0, \alpha]$, $f_2(x) \geq f_1(x)$, d'où l'aire du domaine plan délimité par les courbes C_1 et C_2 et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \alpha$ est égale à

$$S(\alpha) = \int_0^\alpha (f_2(x) - f_1(x))dx \text{ Unité d'aire}$$

$$= \int_0^\alpha (e^x - e^{-2x})dx \; U.A$$

$$= \left[e^x + \frac{1}{2}e^{-2x} \right]_0^\alpha U.A$$

donc $S(\alpha) = \left(e^\alpha + \frac{1}{2}e^{-2\alpha} - \frac{3}{2} \right) U.A$

ii) Ensemble des valeurs de α tel que $S(\alpha) = S(-\alpha)$

$$S(\alpha) = S(-\alpha) \Leftrightarrow e^{4\alpha} - 2e^{3\alpha} + 2e^{\alpha} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (e^\alpha - 1)^3 (e^\alpha + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow e^\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0,$$

or $\alpha > 0$, donc l'ensemble des valeurs de α pour lesquelles $S(\alpha) = S(-\alpha)$ est vide

Session de juillet 1996

Exercice N°1

La transformation F dans P $M(x, y) \mapsto M'(x', y')$

telle que $\begin{cases} x' = x + \sqrt{3}y - 2\sqrt{3} \\ y' = -\sqrt{3}x + y + \sqrt{3} \end{cases}$

1°)a) Calcul de z' en fonction de z

On note z l'affixe du point M et z' l'affixe du point M'.

Ainsi, on a $z' = x' + iy'$

$$= \left(1 - i\sqrt{3}\right)x + \left(\sqrt{3} + i\right)y - 2\sqrt{3} + i\sqrt{3}$$

$$= \left(1 - i\sqrt{3}\right)(x + iy) + \sqrt{3}(-2 + i)$$

Donc $z' = \left(1 - i\sqrt{3}\right)z + \sqrt{3}(-2 + i)$

b) Nature et éléments géométriques de F

Soit f la transformation complexe associée à F.

$f(z)$ étant de la forme $f(z) = az + b$ avec $a = 1 - i\sqrt{3}$ et $b = \sqrt{3}(-2 + i)$

alors F est une similitude plane directe de rapport $k = \left|1 - i\sqrt{3}\right| = 2$.

L'angle de F a pour mesure θ telle que :

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{2} \\ \sin\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{3}\ (2\pi).$$

Le centre Ω de F a pour affixe $Z_0 = \dfrac{b}{1 - a} = \dfrac{\sqrt{3}(-2 + i)}{i\sqrt{3}} = 1 + 2i$

Donc F est une similitude plane directe de centre Ω(1 , 2), de rapport 2 et dont une mesure de l'angle est $-\dfrac{\pi}{3}$.

2°) La transformation G dans P : $M(z) \mapsto M'(z')$ telle que $z' = az + b$

Notons g la transformation complexe associée à G

$$\forall z \in \mathbb{C},\ g(z) = az + b$$

Recherchons la transformation complexe associée à GoF, notée $g\circ f$.

Ainsi, $\forall z \in \mathbb{C}$, $g\circ f(z) = g[f(z)] = af(z) + b$

donc $g\circ f(z) = a(1 - i\sqrt{3})z + a\sqrt{3}(-2 + i) + b$

a) Calcul de a et b tels que GoF soit une homothétie.

GoF est l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{2}$ si et seulement si

l'on a $\begin{cases} a(1 - i\sqrt{3}) = \frac{1}{2} \\ b + a\sqrt{3}(-2 + i) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1 + i\sqrt{3}}{8} \\ b = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{8} + \frac{6 - \sqrt{3}}{8} i \end{cases}$

b) Calcul de a et b tels que GoF soit une translation

Le vecteur $\overrightarrow{BC}$ a pour affixe $-2\sqrt{3} + 2i$

GoF est la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$ $(-2\sqrt{3} + 2i)$ si et seulement si

$\begin{cases} a(1 - i\sqrt{3}) = 1 \\ b + a\sqrt{3}(-2 + i) = -2\sqrt{3} + 2i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1 - i\sqrt{3}}{4} \\ b = \frac{3 - 6\sqrt{3}}{4} + \frac{14 - \sqrt{3}}{4} i \end{cases}$

c) Calcul de l'image du barycentre par F

Soit G barycentre des points pondérés $(O, 2)$, $(B, -1)$ et $(C, 1)$. Par définition, on a : $2\overrightarrow{GO} - \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{O} \Leftrightarrow \overrightarrow{OG} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$. Ainsi

donc $z_G = \frac{-z_B + z_C}{2}$; soit $z_G = -\sqrt{3} + i$

Notons G' l'image de G par F

$$z_{G'} = (1 - i\sqrt{3})z_G + \sqrt{3}(-2+i)$$
$$= (1 - i\sqrt{3})(-\sqrt{3}+i) + \sqrt{3}(-2+i)$$
$$= -2\sqrt{3} + (4+\sqrt{3})i.$$

Donc $G'(-2\sqrt{3}, 4+\sqrt{3})$.

Exercice N°2

L'urne contient 3 jetons sur lesquels sont gravées la lettre A. 2 jetons la lettre T et 1 jeton la lettre L.On tire simultanément 3 jetons de l'urne.

L'univers Ω a pour cardinal C_6^3 soit $\mathrm{card}\Omega = 20$

1°)a)Probabilité d'avoir au moins une lettre A

Soit l'événement E « avoir au moins une lettre A »

Donc $\overline{E}$ est l'événement : « n'avoir aucune lettre A »

D'où $p(\overline{E})=1/20$.

Or $p(E)=1-p(\overline{E}) \Rightarrow p(E)=19/20$.

b) Probabilité d'avoir les lettres du mot "LAT"

Soit l'événement F : « avoir les lettres du mot LAT »

Donc $cardF = C_3^1 C_2^1 = 6$ or $p(F) = \dfrac{cardF}{card\Omega}$ d'où $p(F) = \dfrac{3}{10}$

2°) La variable aléatoire X égale au gain algébrique dans ce jeu.

L'ensemble des valeurs prises par X. noté $X(\Omega) = \{-70 ; 10a ; 10\}$

La loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant :

x_i	-70	$10a$	10
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{13}{20}$

Or $x<0 \Rightarrow 2x-1<0$ d'où $1-\left(\dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}\right) > 0$

$\forall x \in]-\infty, 0[$, $f'(x) > 0$ d'où f est strictement croissante sur $]-\infty, 0[$.
$\forall x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = x(2\ln x + 1)$.

Or $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2\ln x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \dfrac{1}{\sqrt{e}}$

$\forall x \in \left[\dfrac{1}{\sqrt{e}}, +\infty\right[$, $f'(x) \geq 0$ d'où f est croissante sur $\left[\dfrac{1}{\sqrt{e}}, +\infty\right[$

$\forall x \in \left]0, \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right]$, $f'(x) \leq 0$ d'où f est décroissante sur $\left]0, \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right]$

<u>Tableau de variations</u>

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{\sqrt{e}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$+\infty$ ‖ 0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	0	↘	$\frac{-1}{2e}$	↗	$+\infty$

4°) <u>Asymptote oblique et position relative de la courbe à l'asymptote</u>

Calculons $\lim\limits_{x \to -\infty}\left[f(x) - \left(2x - \dfrac{1}{2}\right)\right]$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-\left(2x-\frac{1}{2}\right)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[-x+\frac{1}{2}-\sqrt{x^2-x}\right]$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{4}}{-x+\frac{1}{2}+|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-4x\left(1-\frac{1}{2x}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)}=0$$

car $\lim_{x\to-\infty}-\frac{1}{x}=0$.

Donc la droite d'équation $y=2x-\frac{1}{2}$ est asymptote à (C) en $-\infty$.

Signe de $f(x)-\left(2x-\frac{1}{2}\right)$ sur $]-\infty,0]$

On a $f(x)-\left(2x-\frac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{-4x+2+4\sqrt{x^2-x}}$

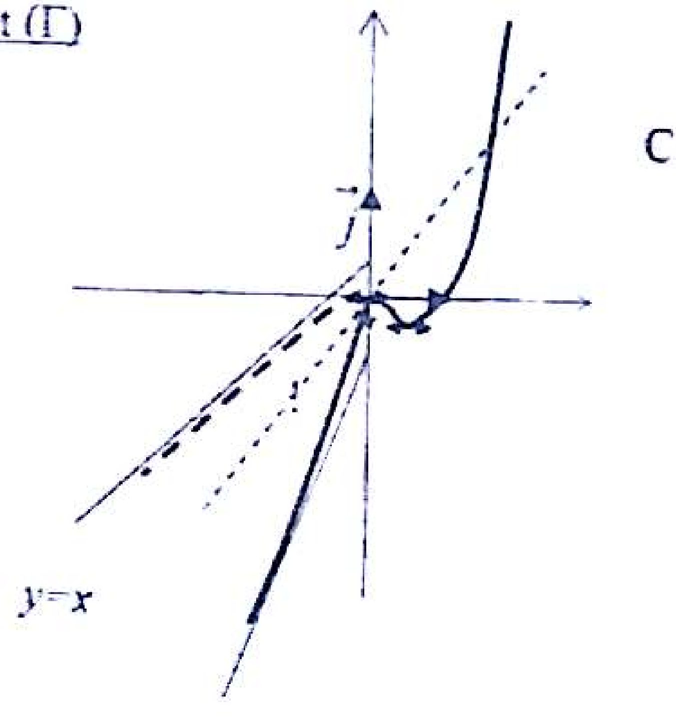
Or $x\leq 0$ d'où $-4x\geq 0$

Donc $\forall x\in]-\infty,0]$ on a $-4x+2+4\sqrt{x^2-x}>0$

Ainsi $\forall x\in]-\infty,0]$, $f(x)-\left(2x-\frac{1}{2}\right)>0$

Donc la courbe (C) est au-dessus de son asymptote sur $]-\infty,0]$.

5°) <u>Construction de (C) et (Γ)</u>



B°) L'application $\varphi :]-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ $\quad x \mapsto \varphi(x) = f(x) = x - \sqrt{x^2 - x}$

1°) φ bijective

On vérifie aisément que la fonction φ est continue sur] -∞ , 0].
De plus φ est strictement croissante sur] -∞ , 0]. Donc φ est une bijection de]- ∞ , 0] sur J =]- ∞ , 0].

2°) Recherche de φ^{-1}

Comme φ est une bijection de]- ∞ , 0] sur J =]- ∞ , 0], alors on a :
$\forall y \in]-\infty, 0], \exists ! x \in]-\infty, 0], \varphi(x) = y$

or $\varphi(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x} = x - y$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x = (x-y)^2 \\ x - y \geq 0 \\ x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{y^2}{2y-1}, \text{ car } 2y-1 < 0 .$$

Donc $\varphi^{-1} :]-\infty, 0] \to]-\infty, 0]$, telle que $x \mapsto \dfrac{x^2}{2x-1}$

3°) Propriétés de φ^{-1}

Le tableau de variations de φ^{-1} se déduit de celui de φ .

x	$-\infty$	0
$(\varphi^{-1})'(x)$	$+$	0
φ^{-1}	$-\infty \nearrow$	0

* La courbe de φ admet pour asymptote oblique en - ∞ la droite d'équation $y = 2x - \dfrac{1}{2}$, donc la courbe (Γ) de φ^{-1} admet pour

asymptote oblique en $-\infty$ la droite d'équation $x = 2y - \frac{1}{2}$ soit $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$.

φ^{-1} est continue et strictement croissante sur $]-\infty, 0]$.

La courbe (Γ) de φ^{-1} et celle de φ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Voir la partie A°)5) pour le tracé de (Γ).

4°)a) Décomposition de $\varphi^{-1}(x)$

$\forall x \in]-\infty, 0]$, $\varphi^{-1}(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \frac{1}{4(2x-1)}$, donc $\alpha = \frac{1}{2}$; $\beta = \frac{1}{4}$; $\gamma = \frac{1}{4}$

b) Primitive de φ^{-1} sur $]-\infty, 0]$

Soit Φ une primitive de φ^{-1} sur $]-\infty, 0]$

$$\forall x \in I,\ \Phi(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}\ln(1-2x)$$

5°) Calcul d'aires

a) Soit A_1 l'aire, en cm^2, du domaine E_1

$$A_1 = \int_{-1-\sqrt{2}}^{-1} \left[\varphi^{-1}(x) + 1\right]dx = \left[\frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{4}x + \frac{1}{8}\ln(1-2x)\right]_{-1-\sqrt{2}}^{-1}$$

donc $A_1 = \frac{1}{8}\left(-4 + 6\sqrt{2} + \ln\frac{3}{3+2\sqrt{2}}\right)$ cm^2

b) Soit A_2 l'aire, en cm^2, du domaine E_2

$$A_2 = \int_{-1}^{0} \left[\varphi^{-1}(x) - x\right]dx = \left[-\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}\ln(1-2x)\right]_{-1}^{0}$$

donc $A_2 = \frac{1}{8}(4 - \ln 3)$ cm^2

c) $A(E_1 \cup E_2) = A(E_1) + A(E_2) = \frac{1}{8}\left(6\sqrt{2} - \ln(3+2\sqrt{2})\right)$ cm^2

$A(E) = A(E_1 \cup E_2) +$ Aire du triangle AOB

$$= \frac{1}{8}\left(6\sqrt{2} - \ln(3 + 2\sqrt{2})\right) + \frac{1}{2}$$

donc $A(E) = \frac{1}{8}\left(4 + 6\sqrt{2} - \ln(3 + 2\sqrt{2})\right)\ cm^2$

C) Les coordonnées dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de M, point mobile, sont à l'instant t définies par $\begin{cases} x = e^t \\ y = te^{2t} \end{cases}$ avec $t \geq 0$

1°) Trajectoire de M

si $t \geq 0$ alors $e^t > 0$ donc $x \in [1, +\infty[$

$x = e^t \Leftrightarrow t = \ln x$ d'où $y = x^2 \ln x$

La trajectoire Γ de M est contenue dans la courbe (C) de f pour $x \in [1, +\infty[$

2°) Vecteur vitesse $\vec{V}$

$x = e^t \quad \Rightarrow x' = e^t$

$y = te^{2t} \quad \Rightarrow y' = (1 + 2t)e^{2t}$, donc le vecteur vitesse $\vec{V}\begin{pmatrix} e^t \\ e^{2t} + 2te^{2t} \end{pmatrix}$

Soit $\Gamma' = \{ m \in P \,/\, \vec{Om} = \vec{V} \}$

Posons $m(X, Y)$ alors $X = e^t$ et $Y = (1 + 2t)e^{2t}$. Or $X = e^t$ donne $t = \ln X$, d'où $Y = X^2 + 2X^2 \ln X$

Donc, une équation de Γ' est $Y = X^2 + 2X^2 \ln X$ avec $X \geq 1$.

3°) Equation de la tangente à Γ' en $m_0(1,1)$

si $Y = X^2 + 2X^2 \ln X$ alors $Y' = 4X + 4X \ln X$

Pour $X = 1$ alors $Y' = 4$. Donc, la tangente à Γ' en m_0 (1, 1) a pour équation $y = 4(x - 1) + 1$ soit $y = 4x - 3$.

Le vecteur accélération est $\vec{\Gamma}\begin{pmatrix} e^t \\ 4e^{2t} + 4te^{2t} \end{pmatrix}$

A $t_0 = 0$, $\vec{\Gamma}(0) = \vec{i} + 4\vec{j}$ qui est un vecteur directeur de cette tangente.

Session de juin 1997

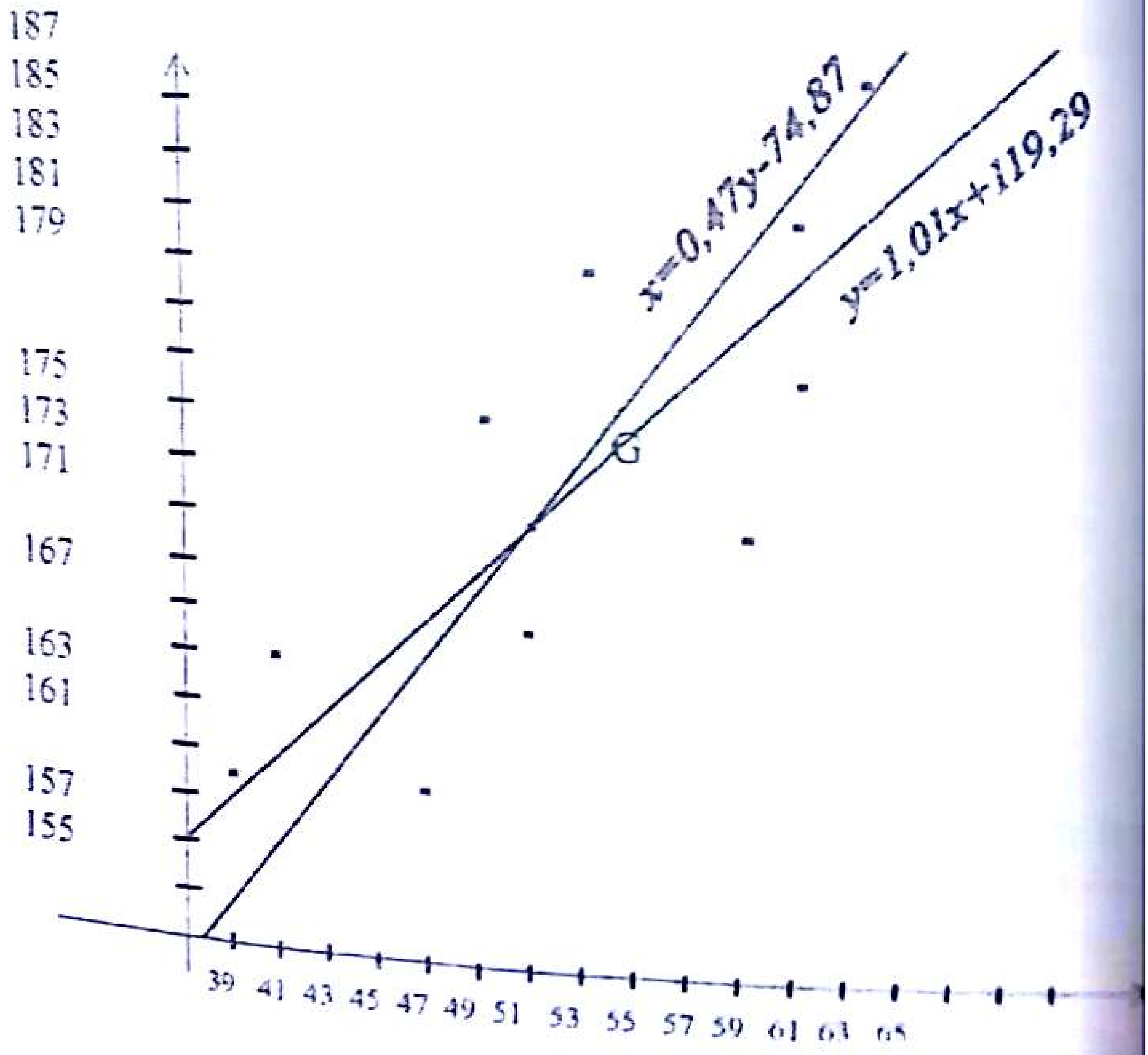
Exercice N°1

x_i	39	41	43	49	51	53	55	61	63	63	65
y_i	155	162	167	162	177	170	183	173	179	185	190

1°) Nuage de points - Point moyen

* Nuage de points :

Origine : le point (39 ; 155) ; échelle : 0,5 cm pour 2 unités.



* Coordonnées du point moyen G :

$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ d'où $\bar{x} = \frac{583}{11} = 53$

$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$ d'où $\bar{y} = \frac{1903}{11} = 173$. Donc G(53;173)

2°). Coefficient de corrélation - Droites de régression

a) Calcul du coefficient de corrélation linéaire :

Il est défini par : $\rho = \frac{\text{cov}(x,y)}{\sigma_x \sigma_y}$ or $\text{cov}(x,y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x}\bar{y}$

$\text{cov}(x,y) = \frac{101743}{11} - 9169 = 80{,}3636$ d'où $\text{cov}(x,y) = 80{,}36$

$V(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2$

$V(x) = \frac{31771}{11} - 2809 = 79{,}2727$ d'où $V(x) = 79{,}27$

Ainsi $\sigma_x = \sqrt{V(x)} = \sqrt{79{,}2727} = 8{,}9035$ d'où $\sigma_x = 8{,}90$

$V(y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \bar{y}^2$

$V(y) = \frac{330415}{11} - 29929 = 108{,}7272$ d'où $V(y) = 108{,}73$

Ainsi $\sigma_y = \sqrt{V(y)} = \sqrt{108{,}7272} = 10{,}4272$ d'où $\sigma_y = 10{,}43$

Le coefficient de corrélation linéaire entre x et y est :

$\rho = \frac{\text{cov}(x,y)}{\sigma_x \sigma_y} = 0{,}8656$ donc $\rho \approx 0{,}87$

b) Equations des droites de régression :

Comme $|\rho| \geq 0,8$ alors il y a une corrélation entre les variables x et y

Donc un ajustement linéaire est possible.

* Equation de la droite de régression de y en x :

$y = ax + b$ avec $a = \dfrac{\text{cov}(x, y)}{V(x)}$ et $b = \bar{y} - a\bar{x}$

$a = \dfrac{\text{cov}(x, y)}{V(x)} = \dfrac{80,3636}{11} = 1,0137$ d'où $a = 1,01$

$b = \bar{y} - a\bar{x}$

$b = 173 - (53 \times 1,0137) = 119,27$ d'où $b = 119,27$

La droite de régression de y en x a pour équation $y = 1,01x - 119,27$

* Equation de la droite de régression de x en y :

$x = \alpha y + \beta$ avec $\alpha = \dfrac{\text{cov}(x, y)}{V(y)}$ et $\beta = \bar{x} - \alpha\bar{y}$

$\alpha = \dfrac{\text{cov}(x, y)}{V(y)} = \dfrac{80,3636}{108,7272} = 0,7391$ d'où $\alpha = 0,74$

$\beta = \bar{x} - \alpha\bar{y}$.

$\beta = 53 - (173 \times 0.7391) = -74,8695$ d'où $\beta = -74,87$

La droite de régression de x en y a pour équation : $x = 0,74y - 74,87$

ou $y = 1,35x + 101,30$

* Tracé des droites de régression (voir figure, question 1)

Ces deux droites passent toutes par le point $G(53\ ;173)$.

Exercice N°2

$$P(z) = z^3 - 2(1+i)z^2 - 4z + 8 + 8i$$

1°) Factorisation de P(z) :

* Calcul de P(2) :

$P(2) = (2)^3 - 2(1+i)(2)^2 - 4(2) + 8 + 8i$

$= 8 - 8 - 8i - 8 + 8 + 8i$ d'où $P(2) = 0$.

* Détermination des réels a, b, c :

$P(z) = (z-2)(az^2 + bz + c)$ soit $P(z) = az^3 + (b-2a)z^2 + (c-2b)z - 2c$

or $P(z) = z^3 - 2(1+i)z^2 - 4z + 8 + 8i$

Par identification, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - 2a = -2 - 2i \\ c - 2b == -4 \\ -2c = 8 + 8i \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = -2i \\ c = -4 - 4i \end{cases}$$

Donc $P(z) = (z-2)(z^2 - 2iz - 4 - 4i)$

2°) Résolution de l'équation $P(z) = 0$

$P(z) = 0 \iff (z = 2 \text{ ou } z^2 - 2iz - 4 - 4i = 0)$

Résolution de $z^2 - 2iz - 4 - 4i = 0$.

$\Delta' = 3 + 4i = (2+i)^2$ d'où

$z' = i + 2 - i = 2 + 2i$ et $z'' = i - 2 - i = -2$

Comme z_1 est la solution réelle positive, et z_2 la solution négative,

on a donc : $z_1 = 2$ $z_2 = -2$ et $z_3 = 2 + 2i$

donc $S = \{-2 ; 2 ; 2 + 2i\}$

3°) Eléments caractéristiques de la similitude S

$A(z_1 = 2)$, $A'(z_2 = -2)$ et $B(z_3 = 2 + 2i)$

Soient M et M' les points d'affixes respectives z et z'. La similitude S est définie par : $S : M(z) \mapsto M'(z')$ telle que $z' = az + b$.

*Détermination de S

On a $S(O) = B \iff az_0 + b = z_3$. D'où $b = 2 + 2i$ car $z_0 = 0$

$S(A') = O \Leftrightarrow az_2 + b = z_0$ d'où $a = \frac{-b}{z_2} = 1+i$; $a = 1+i$.

Donc la similitude S est définie par :

$S : M(z) \mapsto M'(z')$ telle que $z' = (1+i)z + 2 + 2i$

*<u>Eléments caractéristiques de</u> S

Le centre Ω de la similitude S a pour affixe : $z_\Omega = \frac{b}{1-a} = -2+2i$.

Le rapport k de la similitude S est $k = |1+i| = \sqrt{2}$

L'angle de la similitude S a pour mesure $\theta = \arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$

<u>Conclusion</u> :S est la similitude plane directe de centre $\Omega(-2;2)$, de rapport $\sqrt{2}$ et dont une mesure de l'angle est $\frac{\pi}{4}$.

4°) Transformée d'une droite par S. Construction

* <u>Transformée de la droite</u> $(O;\vec{i})$ par S :

Si $M(z) \in (O;\vec{i})$ alors z est réel, c'est-à-dire $z = x \in \mathbb{R}$.

D'où $S(M) = M'(z')$ avec $z' = (1+i)x + 2 + 2i$,

soit $z' = (1+i)(x+2)$.

Ainsi $M'(z')$ est sur la première bissectrice. Donc la transformée par S de la droite $(O;\vec{i})$ est la droite d'équation $y = x$.

*<u>Construction de l'image par S d'un point de</u> $(O;\vec{i})$

Soit M un point de $(O;\vec{i})$ et $M' = S(M)$.

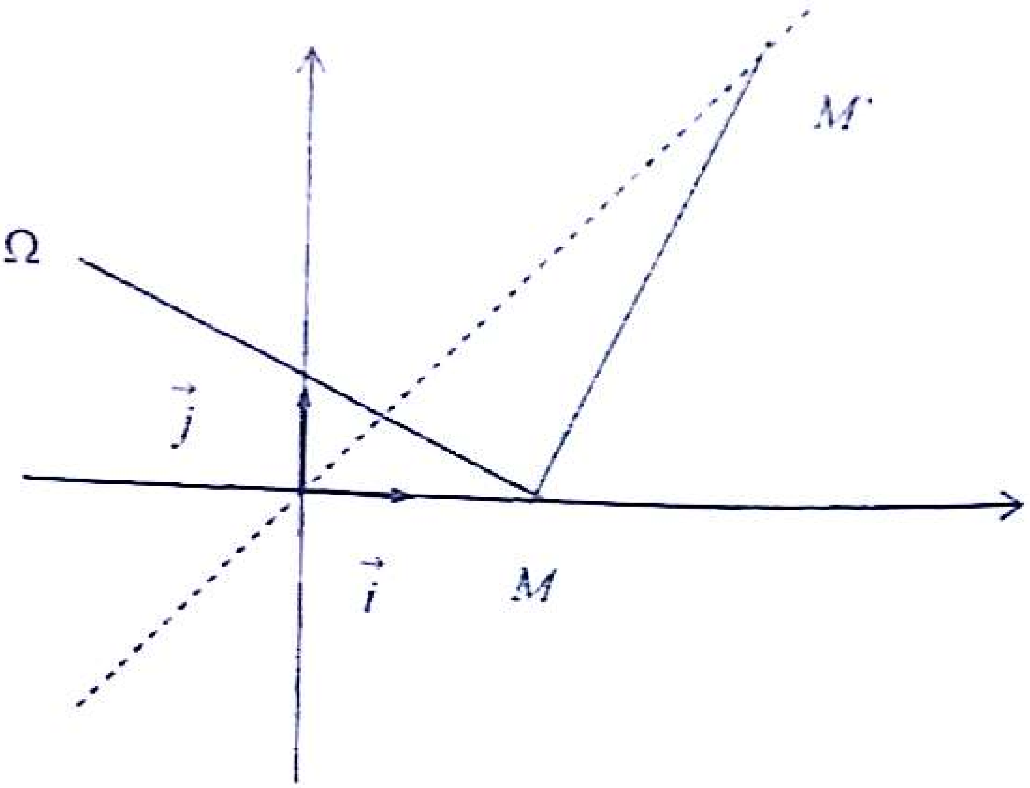
Donc $z_M \in \mathbb{R}$ et $z_{M'} = (1+i)(z_M + 2)$

Ainsi $z_{\overrightarrow{\Omega M}} = z_M - z_\Omega = z_M + 2 - 2i$

et $z_{\overrightarrow{MM'}} = z_{M'} - z_M = iz_M + 2 + 2i = i(z_M + 2 - 2i)$

d'où $z_{\overrightarrow{MM'}} = i\, z_{\overrightarrow{\Omega M}}$ ou encore $\dfrac{z_{\overrightarrow{MM'}}}{z_{\overrightarrow{\Omega M}}} = i$

Comme $\arg\left(\dfrac{z_{\overrightarrow{MM'}}}{z_{\overrightarrow{\Omega M}}}\right) = \arg(i) = \dfrac{\pi}{2}\ (2\pi)$, alors les vecteurs $\overrightarrow{\Omega M}$ et $\overrightarrow{MM'}$ sont orthogonaux. Ainsi, pour construire M' l'image par S d'un point M de la droite $(O;\vec{i})$, il suffit de construire le triangle $\Omega MM'$ rectangle et isocèle en M.



Problème

A. On considère l'équation différentielle suivante :

$$y'' + 6y' + 9y = 0 \quad (E)$$

1°) Si f est une solution de (E) alors $f'' + 6f' + 9f = 0$ soit :

$$-f''(x) - 6f'(x) - 9f(x) = 0$$

$(-f)''(x) + 6(-f)'(x) + 9(-f)(x) = 0$ .d'où $-f$ est une solution de (E). Comme $g = |f| = \begin{cases} f & \text{sur tout intervalle où } f(x) \geq 0 \\ -f & \text{sur tout intervalle où } f(x) < 0 \end{cases}$

on en déduit que $g = |f|$ est aussi solution de (E).

2°) a) L'équation caractéristique associée à (E) est $r^2 + 6r + 9 = 0$

$(r+3)^2 = 0 \Leftrightarrow r = -3$

La solution générale de (E) est : $y = (Ax + B)e^{-3x}$

f est solution de (E) implique $f(x) = (Ax + B)e^{-3x}$

or $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(-1) = 0 \end{cases}$ c'est à dire $\begin{cases} B = 1 \\ -A + B = 0 \end{cases}$ donc $A = B = 1$.

En conclusion, on a : $f(x) = (x+1)e^{-3x}$.

a) Comme f définie par $f(x) = (x+1)e^{-3x}$ est solution de (E) alors $g(x) = |f(x)| = |x+1|e^{-3x}$. Donc $g(x) = |x+1|e^{-3x}$.

3°) a) <u>Dérivabilité de g au point d'abscisse -1</u>

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} \frac{g(x) - g(-1)}{x+1} = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} \left(-e^{-3x}\right) = -e^3$$

g est dérivable à gauche en -1, et $g'_g(-1) = -e^3$.

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \frac{g(x) - g(-1)}{x+1} = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \left(e^{-3x}\right) = e^3.$$

g est dérivable à droite en -1, et $g'_d(-1) = e^3$.

Comme $g'_d(-1) \neq g'_g(-1)$ alors g n'est pas dérivable au point -1.

Conséquence graphique : la courbe (C) de g admet une demi-tangente à droite et une demi-tangente à gauche au point d'abscisse -1.

Ce point est un point anguleux.

b) Etude des variations de g :

$D_g = \left]-\infty, +\infty\right[$

Cherchons $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (-x-1)e^{-3x}$

On a : $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} (-x-1) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} (e^{-3x}) = +\infty \end{array}\right\}$ d'où $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$

Cherchons $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (-xe^{-3x} + e^{-3x})$

On a : $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-3x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^{3x}} = 0 \quad \left(\text{car } \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{3x}}{x} = +\infty\right) \\ \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-3x} = 0 \end{array}\right\}$

d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$

La fonction $u : x \mapsto |x+1|$ est derivable sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ et la fonction $v : x \mapsto e^{-3x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ d'où $g = u.v$, produit de ces deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R} - \{-1\}$, est dérivable sur $\mathbb{R} - \{-1\}$.

$\forall x \in \left]-\infty, -1\right[$, $g(x) = (-x-1)\, e^{-3x}$ donc $g'(x) = (3x+2)\, e^{-3x}$

Dans $\left]-\infty, -1\right[$, $3x + 2 < 0$ d'où $g'(x) < 0$ et donc g est strictement décroissante sur $\left]-\infty, -1\right[$.

$\forall x \in \left]-1, +\infty\right[$, $g(x) = (x+1)\, e^{-3x}$ donc $g'(x) = (-3x-2)\, e^{-3x}$.

$g'(x)$ a le même signe que $(-3x-2)$

$\forall x \in \left]-1, -\frac{2}{3}\right]$, $g'(x) \geq 0$ donc g est croissance sur $\left]-1, -\frac{2}{3}\right]$

$\forall x \in \left]-\frac{2}{3}, +\infty\right]$, $g'(x) \leq 0$ donc g est décroissante sur $\left[\frac{-2}{3}, +\infty\right[$

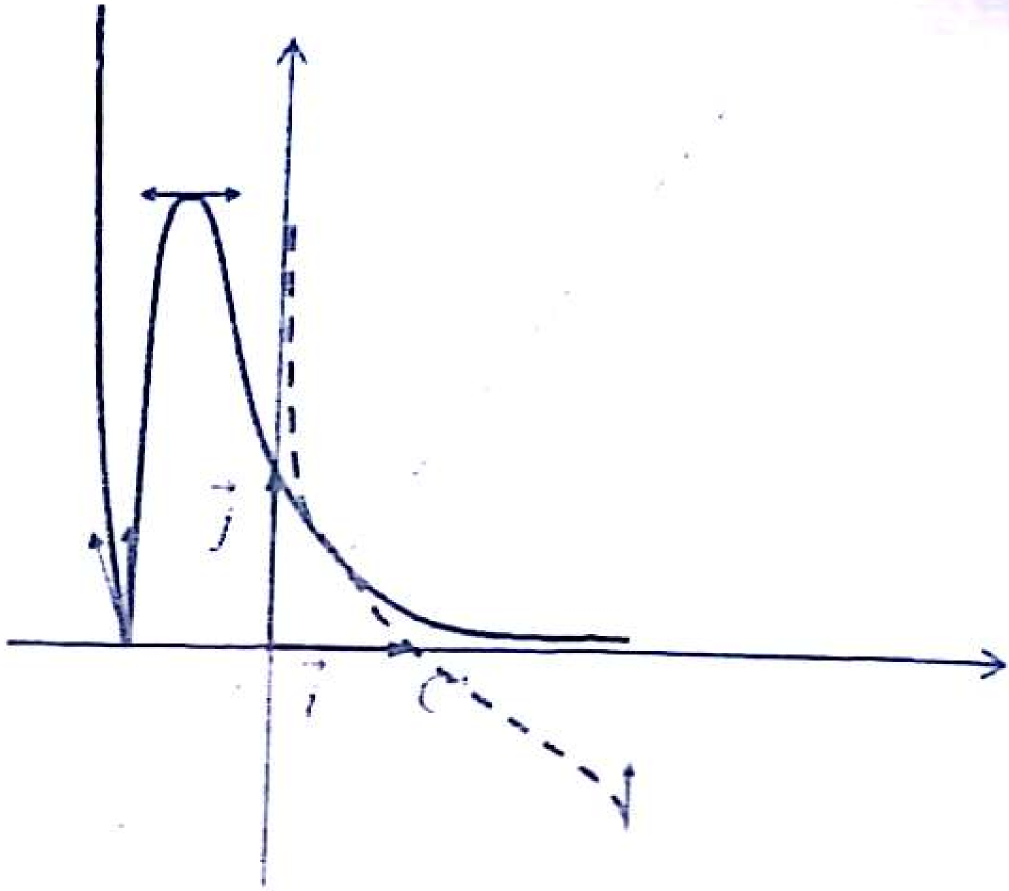
<u>Tableau de variation</u>

x	$-\infty$		-1		$-2/3$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	$-e^3$ ‖ e^3	$+$	0	$-$	
g	$+\infty$	↘	0	↗	$e^{2/3}$	↘	0

<u>Représentation graphique de (C)</u> :

La courbe de g admet une asymptote d'équation $y = 0$ en $+\infty$

De plus on a $g(-1) = 0$; $g(0) = 1$; $g(\frac{-3}{2}) = 46$; $g(1) \approx 0{,}09$



c) <u>Fonction réciproque</u>

On a montré que g est dérivable sur $\mathbb{R} - \{-1\}$, en particulier sur $\left]\frac{-2}{3}, +\infty\right[$. On en déduit que g est continue sur $\left]\frac{-2}{3}, +\infty\right[$.

De plus, $\forall x \in \left]\frac{-2}{3}, +\infty\right[$, $g'(x) < 0$. Ainsi g est continue et strictement décroissante sur $\left]\frac{-2}{3}, +\infty\right[$. Donc la restriction de g à $\left]\frac{-2}{3}, +\infty\right[$ est une bijection de $\left]\frac{-2}{3}, +\infty\right[$ vers $\left]0, e^{\frac{2}{3}}\right[$ et admet une bijection réciproque g_1 définie sur $\left]0, e^{\frac{2}{3}}\right[$.

<u>Tracé de la courbe</u> (C') de g_1.

Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les courbes (C) de g et (C') de g_1 sont symétriques par rapport à la droite $y = x$.

4°) <u>Calcul d'aire</u>

α un réel tel que $\alpha > -1$.

a) $A(\alpha) = \int_{-1}^{\alpha} g(x)dx$ .unités d'aire $= \int_{-1}^{\alpha}(x+1)e^{-3x}dx$.

Faisons une intégration par parties : posons

$u = x + 1 \qquad u' = 1$

$v' = e^{-3x} \qquad v = -\frac{1}{3}e^{-3x}$

D'où $\int_{-1}^{\alpha}(x+1)e^{-3x}dx = \left[-\frac{1}{3}(x+1)e^{-3x}\right]_{-1}^{\alpha} + \frac{1}{3}\int_{-1}^{\alpha} e^{-3x}dx$

$$= \left[-\frac{1}{3}(x+1)e^{-3x}\right]_{-1}^{\alpha} - \frac{1}{9}\left[e^{-3x}\right]_{-1}^{\alpha}$$

$$= -\frac{1}{3}(\alpha+1)e^{-3\alpha} - \frac{1}{9}e^{-3\alpha} + \frac{1}{9}e^{3}$$

Finalement $A(\alpha) = -\frac{1}{3}\alpha e^{-3\alpha} - \frac{4}{9}e^{-3\alpha} + \frac{1}{9}e^{3}$ U.A

b) <u>Calcul de</u> $\lim_{\alpha \to +\infty} A(\alpha)$

Comme $\lim_{\alpha \to +\infty} \alpha e^{-3\alpha} = \lim_{\alpha \to +\infty} \frac{\alpha}{e^{3\alpha}} = 0$ et $\lim_{\alpha \to +\infty} e^{-3\alpha} = 0$, alors $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} A(\alpha) = \frac{1}{9} e^{3}$ $U.A$

B. $(u_n)_{n\in \mathbb{N}}$ suite arithmétique telle que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq -1$

1°) Expression de v_n en fonction de n

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{f(u_n)}{u_n + 1}$$

Or, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x+1)e^{-3x}$, donc $f(u_n) = (1 + u_n)e^{-3u_n}$.

d'où $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad v_n = e^{-3u_n}$.

b) (v_n) suite géométrique :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = e^{-3u_{n+1}}$

or $u_{n+1} = u_n + r$ $\quad$ *car* (u_n) est une suite arithmétique de raison r

d'où $\quad v_{n+1} = e^{-3u_n - 3r} = e^{-3u_n} e^{-3r}$ ou encore $v_{n+1} = e^{-3r} v_n$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = e^{-3r}$ et de premier terme $v_0 = e^{-3u_0}$

b) Limite de (v_n)

- si $r = 0$ *alors* $q = 1$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0$

  et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = v_0 = e^{-3u_0}$

- si $r > 0$ *alors* $q = e^{-3r} < 1$

  Or, $0 < q < 1 \Rightarrow q^n \to 0$ *quand* $n \to +\infty$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$

- si $r > 0$ alors $q = e^{-3r} > 1$ donc

  $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ $\quad$ (*car* $v_0 > 0$).

c) Calcul de $S_{0,n}$

$S_{0,n} = \frac{f(u_0)}{u_0+1} + \frac{f(u_1)}{u_1+1} + \dots \frac{f(u_n)}{u_n+1}$ équivaut à $S_{0,n} = v_0 + v_1 + \dots + v_n$.

1^er^ Cas : $r \neq 0$

$S_{0,n}$ est la somme de $(n+1)$ termes d'une suite géométrique de raison

$q = e^{-3r}$ et de 1^er^ terme $v_0 = e^{-3u_0}$, donc $S_{0,n} = \frac{e^{-3u_0}}{1-e^{-3r}}\left(1-e^{-3nr-3r}\right)$

2^e^ Cas : $r = 0$

$S_{0,n}$ *est la somme de* $(n+1)$ *termes d'une suite constante* (car (v_n) est une suite constante) donc $S_{0,n} = (n+1)v_0 = (n+1)e^{-3u_0}$

Calcul de la limite de $S_{0,n}$

- Si $r = 0$, alors $S_{0,n} = (n+1)e^{-3u_0}$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} S_{0,n} = +\infty$
- Si $r > 0$, alors $q = e^{-3r} < 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(q^{n+1}\right) = 0$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} S_{0,n} = \frac{e^{-3u_0}}{1-e^{-3r}}$

- Si $r < 0$, alors $q = e^{-3r} > 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(q^{n+1}\right) = +\infty$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} S_{0,n} = +\infty$

2. Cas particulier : $u_0 = \frac{1}{3}$ *et* $r = \frac{1}{3}$

a) Expression de v_n *en fonction de n* :

Comme (v_n) est une suite géométrique de raison

$q = e^{-3r} = e^{-1} = \frac{1}{e}$ et de premier terme $v_0 = e^{-3u_0} = \frac{1}{e}$, alors

$\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = e^{-n-1}$

b) Calcul de limite de v_n et de $S_{0,n}$

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = 0 \quad \text{car } r = \frac{1}{3} > 0 \text{ d'après B) 1. b)}$$

$$\lim_{n \to +\infty} S_{0,n} = \frac{1}{e-1} \quad \text{car } r = \frac{1}{3} > 0 \text{ d'après B) 1.c)}$$

Session de juillet 1998

Exercice N°1

Série statistique donnée (où α et β deux entiers naturels).

x_i	40	50	α	80	90	120	β	150	180
y_i	165	172	182	180	190	194	183	188	193

1°) a) Détermination des entiers naturels α et β.

On sait que $\bar{x} = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9} x_i$ et $\sigma_x^2 = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9} x_i^2 - \bar{x}^2$

Comme $\bar{x} = 100$ et $\sigma_x = \frac{20\sqrt{46}}{3}$, on obtient alors le système suivant

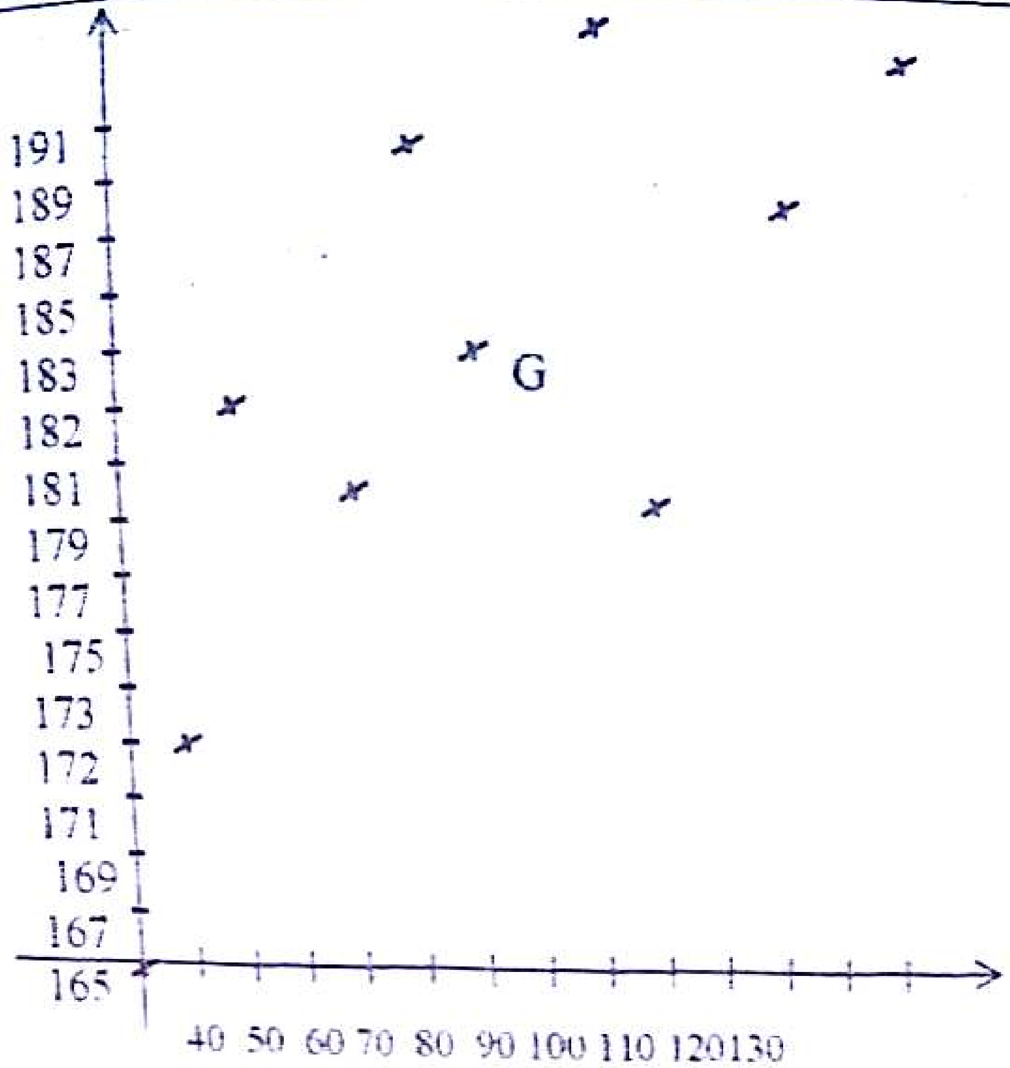
$$\begin{cases} \alpha + \beta = 190 \\ \alpha^2 + \beta^2 = 20500 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \alpha + \beta = 190 \\ \alpha\beta = 7800 \end{cases} \quad (S)$$

α et β sont solutions de l'équation $X^2 - 190X + 7800 = 0$.
Les solutions de cette équation sont $X_1 = 60$ et $X_2 = 130$.
Le système (S) admet deux couples de solutions :

(60 , 130) ou (130 , 60).

Les x_i sont rangés dans l'ordre croissant, on a : α = 60 et β = 130.

b) Construction du nuage de points
Prenons pour origine, le point de coordonnées (40, 165).



2°)<u>Détermination de la droite de régression de x en y</u>

Cette droite a pour équation $x = \alpha y - \beta$

avec $\alpha = \dfrac{\mathrm{cov}(x,y)}{V(y)}$ et $\beta = \bar{x} - \alpha\bar{y}$

Or $\bar{x} = 100$; $\bar{y} = 183$; $V(y) = \dfrac{1}{9}\sum_{i=1}^{9} y_i^2 - (\bar{y})^2 = 83{,}33$

et $\mathrm{cov}(x,y) = \dfrac{1}{9}\sum_{i=1}^{9} x_i y_i - \bar{x}\,\bar{y} = 325{,}55$

d'où $\alpha = 3{,}906$ et $\beta = -614{,}90$

Donc la droite de régression de x en y a pour équation :

$x = 3{,}906y - 614{,}9$ ou $y = 0{,}256x + 157{,}42$

3°) Calcul du coefficient de corrélation r

r est défini par $r = \dfrac{\operatorname{cov}(x, y)}{\sigma_x \sigma_y}$.

Ainsi $r = \dfrac{325{,}55}{\sqrt{83{,}33} \times \dfrac{20\sqrt{46}}{3}} \approx 0{,}789$, donc $r \approx 0{,}80$

Exercice N°2

La suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $z_0 = 1$, et $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\quad z_{n+1} = \dfrac{1+i}{2} z_n$

M_n d'affixe z_n dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$

1°) Calcul des termes z_1, z_2, z_3 et z_4.

$z_0 = 1$

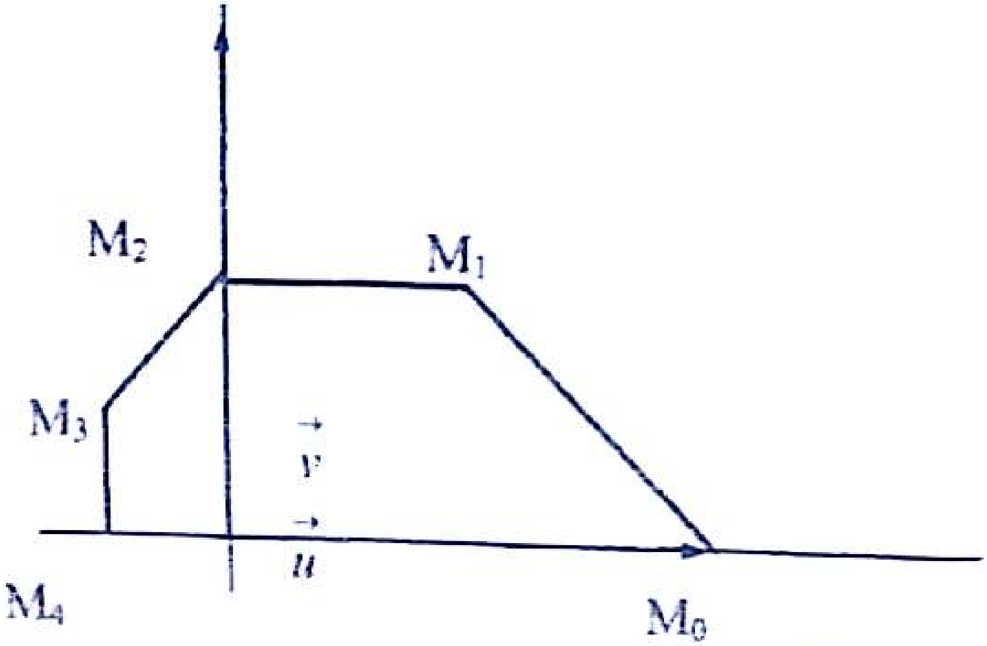
$$z_1 = \frac{1+i}{2} z_0 \Rightarrow z_1 = \frac{1+i}{2}$$

$$z_2 = \frac{1+i}{2} z_1 \Rightarrow z_2 = \frac{1}{2} i$$

$$z_3 = \frac{1+i}{2} z_2 \Rightarrow z_3 = \frac{-1+i}{4}$$

$$z4 = \frac{1+i}{2} z_3 \Rightarrow z_4 = \frac{-1}{4}.$$

Donc $M_0(1, 0)$, $M_1(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$; $M_2(0, \frac{1}{2})$; $M_3(\frac{-1}{4}, \frac{1}{4})$ et $M_4(\frac{-1}{4}, 0)$



2°) a°) <u>Calcul du quotient</u> $\dfrac{Z_{n+1}-Z_n}{Z_{n+1}}$

$$\frac{Z_{n+1}-Z_n}{Z_{n+1}} = \frac{\frac{1+i}{2}Z_n - Z_n}{\frac{1+i}{2}Z_n} \Rightarrow \frac{Z_{n+1}-Z_n}{Z_{n+1}} = i$$

b) <u>Nature du triangle</u> OM_nM_{n+1}

Interprétons géométriquement le module et l'argument de $\dfrac{Z_{n+1}-Z_n}{Z_{n+1}}$

Comme z_{n+1} est l'affixe du vecteur $\overline{OM}_{n+1}$ et $Z_{n+1}-Z_n$ est l'affixe du vecteur $\overline{M_nM}_{n+1}$, alors

$$\left|\frac{Z_{n+1}-Z_n}{Z_{n+1}}\right| = \frac{M_nM_{n+1}}{OM_{n+1}} \text{ et } \operatorname{Arg}\left(\frac{Z_{n+1}-Z_n}{Z_{n+1}}\right) = \left(\overrightarrow{OM}_{n+1}, \overrightarrow{M_nM}_{n+1}\right)$$

Puisque $\dfrac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}} = i$, alors $\left|\dfrac{Z_{n+1}-Z_n}{Z_{n+1}}\right| = 1$, soit $M_nM_{n+1} = OM_{n+1}$, donc le triangle OM_nM_{n+1} est isocèle au point M_{n+1}.

De plus, $\arg\left(\dfrac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ (2\pi)$, soit $\left(\overline{OM}_{n+1}, \overline{M_nM}_{n+1}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ (2\pi)$

Le triangle OM_nM_{n-1} est rectangle en M_{n-1}

En conclusion, le triangle OM_nM_{n-1} est rectangle et isocèle en M_{n-1}

3°) a°) Interprétation de r_n

$$\forall n \in \mathbb{N},\ r_n = |Z_{n+1} - Z_n| = M_nM_{n+1}$$

b°) Nature de la suite (r_n)

$\forall n \in \mathbb{N},\ r_{n+1} = |Z_{n+2} - Z_{n+1}|$

$$= \left| \frac{1+i}{2} Z_{n+1} - \frac{1+i}{2} Z_n \right| = \left|\frac{1+i}{2}\right| |Z_{n+1} - Z_n| = \frac{\sqrt{2}}{2} r_n$$

Donc (r_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et de premier terme $r_0 = |Z_1 - Z_0| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c°) Calcul de la longueur de la ligne brisée

Notons S_n cette longueur.

$S_n = M_0M_1 + M_1M_2 + \dots + M_{n-1}M_n = r_0 + r_1 + \dots\dots\dots + r_{n-1}$

S_n est la somme de n 1ers termes d'une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et de 1er terme $\frac{\sqrt{2}}{2}$ d'où $S_n = \frac{\sqrt{2}}{2} \dfrac{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}$

Donc $S_n = (1+\sqrt{2})\left(1 - 2^{-\frac{n}{2}}\right)$

Problème

$m \in \mathbb{R}^*$, et g_m définie par : $g_m(x) = \begin{cases} x(-1 + \ln mx) & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$

A°) 1°) a°) Ensemble de définition de g_m

$Dg_m = \{x \in \mathbb{R} \mid mx > 0\} \cup \{0\}$

Si $m < 0$ alors $Dg_m =]-\infty, 0]$

Si $m > 0$ alors $Dg_m = [0, +\infty[$

b°) Continuité et dérivabilité de g_m en 0

1er cas : m < 0

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} g_m(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} (-x + x \ln mx) = 0 = g_m(0)$$

car $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} (x \ln mx) = 0$ Donc g_m est continue au point 0.

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{g_m(x)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} (-1 + \ln mx) = -\infty \quad \text{car } \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} (\ln mx) = -\infty$$

Donc g_m n'est pas dérivable au point 0

2^e cas : m> 0

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} g_m(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} (-x + x \ln mx) = 0 = g_m(0)$$

car $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} (x \ln mx) = 0$. Donc g_m est continue au point 0.

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{g_m(x)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} (-1 + \ln mx) = -\infty \quad \text{car } \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} (\ln mx) = -\infty.$$

Donc g_m n'est pas dérivable au point 0

En conclusion, pour tout m de $\mathbb{R}^*$, g_m est continue au point 0, et g_m n'est pas dérivable en 0

2°) Variation de g_m

Cas où $m < 0$, $Dg_m =]-\infty, 0]$

g_m est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$, et $\forall x \in \mathbb{R}_-^*$, $g'_m(x) = \ln mx$.

Si $x \geq \frac{1}{m}$ alors $g'_m(x) \leq 0$. Donc g_m est décroissante sur $\left[\frac{1}{m}, 0\right[$ et croissante sur $\left]-\infty, \frac{1}{m}\right]$.

$\lim\limits_{-\infty} g_m = \lim\limits_{x \to -\infty} x(-1 + \ln mx) = -\infty$ car $\lim\limits_{x \to -\infty} (\ln mx) = +\infty$

x	$-\infty$		$\frac{1}{m}$		0
$g'_m(x)$		$+$	0	$-$	$-\infty$ ||
g_m	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{-1}{m}$	$\searrow$	0

<u>Cas où $m > 0$</u> $\quad D g_m =]0, +\infty[$

$\lim\limits_{+\infty} g_m = \lim\limits_{x \to +\infty} x(-1 + \ln mx) = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln mx) = +\infty$

g_m est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g'_m(x) = \ln mx$.

Si $x \leq \frac{1}{m}$ alors $g'_m(x) \leq 0$. Donc g_m est décroissante sur $\left]0, \frac{1}{m}\right]$ et croissante sur $\left[\frac{1}{m}, +\infty\right[$

x	0		$\frac{1}{m}$		$+\infty$
$g_m'(x)$	$\|\| -\infty$	$-$	0	$+$	
g_m	0	$\searrow$	$\frac{-1}{m}$	$\nearrow$	$+\infty$

3°) Comparaison de $g_{-m}(-x)$ et $-g_m(x)$

$$g_{-m}(-x) = -x(-1 + \ln mx) = -g_m(x)$$

Les courbes C_m et C_{-m} sont symétriques par rapport à l'origine O du repère.

B°) Cas particulier($m=1$ et $m=2$)

1°) Tableau de variations de g_1 et g_2

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g_1(x) = x(-1 + \ln x)$ et $g_1(0) = 0$

x	0		1		$+\infty$
$g_1'(x)$	$\|\| -\infty$	$-$	0	$+$	
g_1	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g_2(x) = x(-1 + \ln 2x)$ et $g_2(0) = 0$

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g_2'(x)$	$\|\|$ $-\infty$	$-$	0	$+$	
g_2	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

2°) <u>Etude des branches infinies de</u> g_1 et g_2

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{g_1(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} (-1 + \ln x) = +\infty$. Donc (C_1) admet une branche parabolique de direction (oy).

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{g_2(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} (-1 + \ln 2x) = +\infty$. Donc (C_2) admet une branche parabolique de direction (oy)

3°) <u>Fonction réciproque</u>

Soit f_1 la restriction de g_1 à $[1, +\infty[$. D'après la partie A°) 2°), la fonction g_1 est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc g_1 est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. En particulier, $f_1 = g_1$ est continue sur $[1, +\infty[$. De plus, f_1 est strictement croissante sur $[1, +\infty[$. Donc f_1 est bijective de $[1, +\infty[$ vers $[-1, +\infty[$ et f_1 admet une fonction réciproque f_1^{-1} qui est également bijective

* f_1^{-1} est définie, continue et strictement croissante sur $[-1, +\infty[$.
* La courbe (Γ) de f_1^{-1} admet une branche parabolique de direction (ox). (Γ) est symétrique à (C_1) par rapport à la droite d'équation $y = x$.

La tangente (T) à la courbe (Γ) au point d'abscisse 0, a pour équation $y = (f_1^{-1})'(0)x + (f_1^{-1})(0)$ Or $f_1^{-1}(0) = e$ et

$$(f_1^{-1})'(0) = \frac{1}{f'\left[f^{-1}(0)\right]} = \frac{1}{f(e)} = 1, \quad \text{donc} \quad (T) : y = x + e$$

C°) 1°) <u>Position des courbes</u> (C_1) et (C_2)

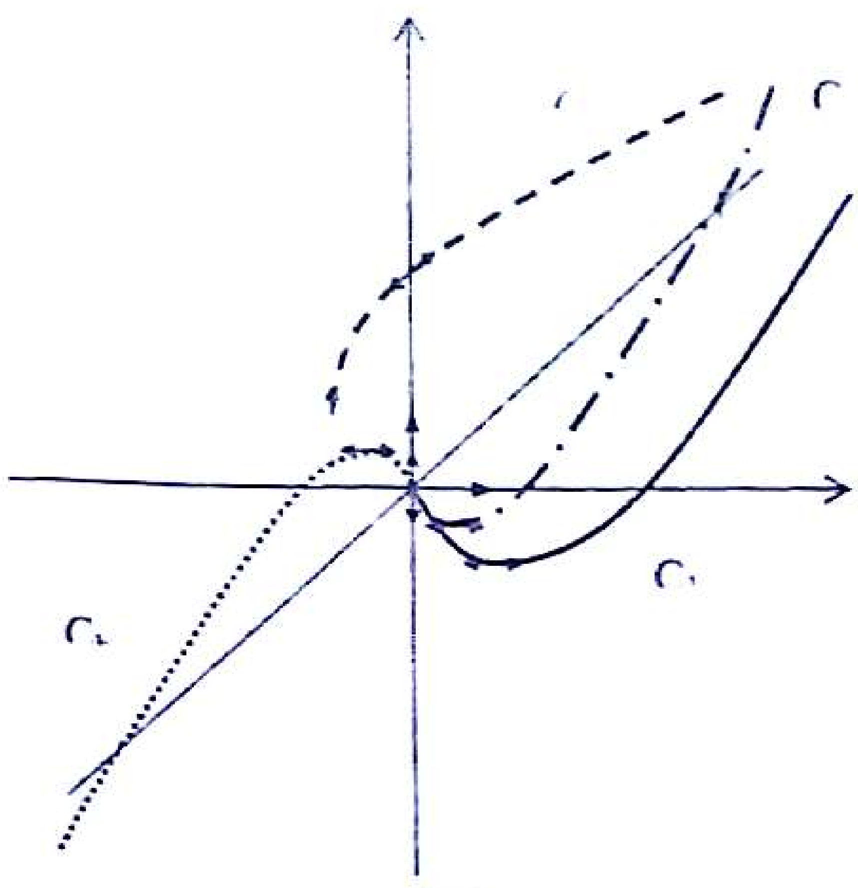
$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g_1(x) - g_2(x) = -x\ln 2$ d'où $g_1(x) - g_2(x) < 0$

Donc (C_1) est en dessous de (C_2)

2°) <u>Tracé des courbes</u> (C_1), (C_2) et (Γ)

x	e	1	4	e^2
$g_1(x)$	0	-4	16	e^2

x	$\frac{1}{2}$	$\frac{e}{2}$	$\frac{e^2}{2}$
$g_2(x)$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{e^2}{2}$



3°) Calcul d'aire

Soit $\mathcal{a}$ l'aire, en cm^2, de la partie du plan délimitée par les droites d'équations $x = \frac{1}{2}$; $x = \frac{e}{2}$ et les courbes (C_1), (C_2)

$$\mathcal{a} = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}} \left[g_2(x) - g_1(x) \right] dx \times 4\,cm^2 = \left(\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}} x \ln 2\, dx \right) \times 4cm^2.$$

Donc $\mathcal{a} = \dfrac{(e^2 - 1)\ln 2}{2} cm^2$

4°) Construction de la courbe de h

h est définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \begin{cases} x(-1 + \ln 2|x|) & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $h(-x) = -h(x)$ donc h est impaire

$\forall x \in]0, +\infty[$, $h(x) = g_2(x)$, et d'après A°] 3°), la courbe C'_2 est symétrique de C_2 par rapport à l'origine du repère.

Donc $C_h = C_2 \cup C'_2$

Session de juillet 1999

Exercice N°1

A°) L'univers Ω est l'ensemble des arrangements des 18 chevaux trois à trois. D'où $card\Omega = A_{18}^3 = 4896$. Il s'agit d'une équiprobabilité.

a) Soit l'événement A " Amadou gagne le tiercé dans l'ordre".

$cardA = 1$ Donc $p(A) = \dfrac{1}{4896}$

b) Soit l'événement B "Amadou gagne le tiercé dans le désordre"

$cardB = 3! - 1 = 5$ Donc $p(B) = \dfrac{5}{4896}$

B°) Soit les événements suivants :

O :" gagner le tiercé dans l'ordre"

H :"Le parieur est un homme"

F :"Le parieur est une femme"

Le nombre des hommes étant le double de celui des femmes, on déduit que $p(F)=\frac{1}{3}$ et $p(H)=\frac{2}{3}$

On sait que 6% des femmes gagnent le tiercé dans l'ordre et 12% des hommes le gagnent dans le désordre. Ce qui se traduit par :

$$p(O/F) = 0{,}06 \quad \text{et} \quad p(O/H) = 0{,}12$$

1°)a) Soit l'événement C "un membre du club gagne le tiercé dans l'ordre".

$$p(C) = p(O\cap F) + p(O\cap H) = p(O/F)\times p(F) + p(O/H)\times p(H)$$

$$= \frac{6}{100}\times\frac{1}{3} + \frac{12}{100}\times\frac{2}{3} \quad d'où \quad p(C) = \frac{1}{10}$$

b) Soit l'événement D " un gagnant dans l'ordre de ce club soit un homme"

$$p(D) = p(H/C) = \frac{p(H\cap C)}{p(C)} = \frac{p(O\cap H)}{p(C)} = \frac{p(O/H)p(H)}{p(C)}$$

$$\text{d'où } p(D) = \frac{0{,}12\times\frac{2}{3}}{0{,}1} = 0{,}8 \qquad c-à-d \quad p(D) = \frac{4}{5}$$

2°) Soit l'événement E'' il y a exactement deux hommes parmi ces 6 parieurs''

$$p(E)=C_6^2\left(\frac{4}{5}\right)^2\left(\frac{1}{5}\right)^4 \quad donc \quad p(E)=0{,}01536$$

Exercice N°2

$p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tel que $z \to p(z)=z^3-4iz^2-(6+i)z+3i-1$

1°) Soit $z_0 = ib$ une racine imaginaire pure de l'équation p(z) = 0

$p(z_0) = p(ib) = (b-1)-i(-b^3-4b^2-6b-3)$

$$p(z_0)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} b-1=0 \\ -b^3+4b^2-6b-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow b=1$$

Donc la racine imaginaire pure est $z_0 = i$

2) D'après la première question, on déduit que :

$$\begin{aligned} p(z) &= (z-i)(z^2+az-b) \\ &= z^3-(a-i)z^2-(b-ia)z-ib \end{aligned}$$

or $p(z) = z^3 - 4iz^2 - (6+i)z + 3i - 1$

Par identification, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} a - i = -4i \\ b - ia = -6 - i \\ -ib = 3i - 1 \end{cases} \text{ qui équivaut à } \begin{cases} a = -3i \\ b = -3 - i \end{cases}$$

D'où $p(z) = (z - i)(z^2 - 3iz - 3 - i)$.

$p(z) = 0 \Leftrightarrow (z = i \text{ ou } z^2 - 3iz - 3 - i = 0)$

Résolution de $z^2 - 3iz - 3 - i = 0$

$\Delta = 4i + 3$

Si on note δ une racine carrée de Δ et on $\delta = a - ib$,
alors $\Delta = \delta^2 = a^2 - b^2 + 2iab$. Ce qui se traduit par :

$$\delta^2 = \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ a^2 + b^2 = 5 \\ ab > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 1 \\ ab > 0 \end{cases}$$

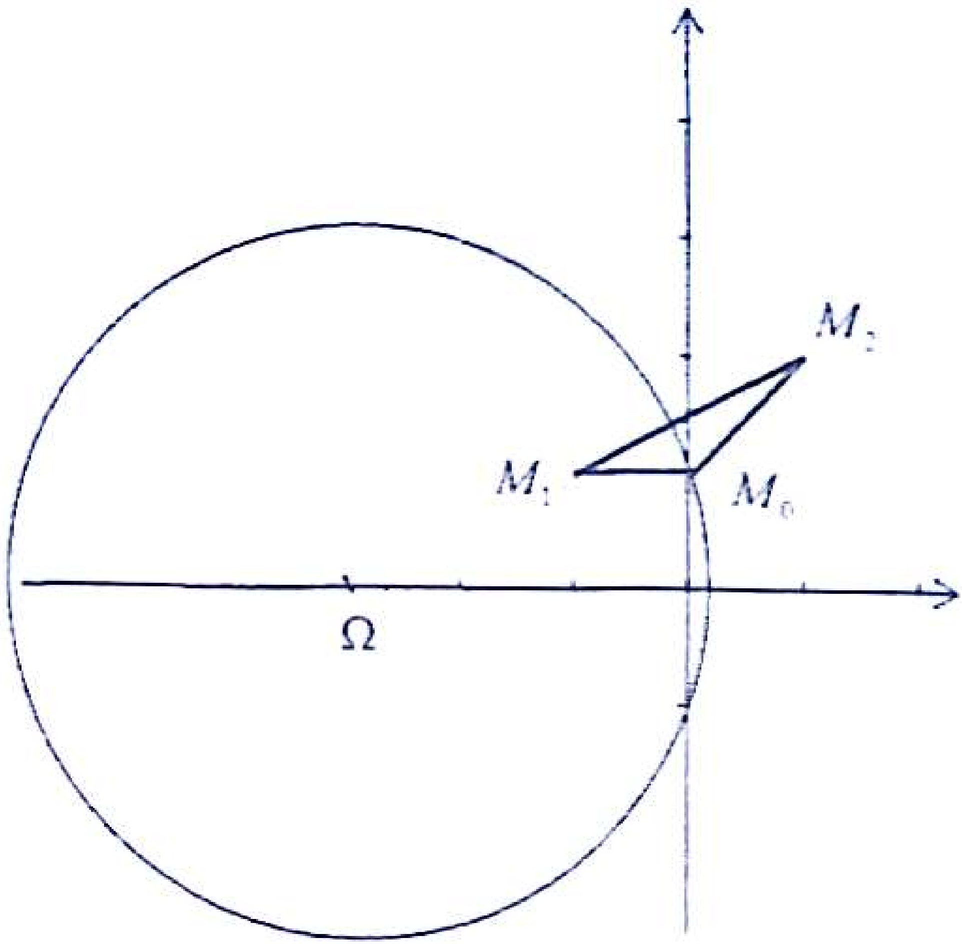
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \text{ ou } -2 \\ b = 1 \text{ ou } -1 \\ ab > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \text{ et } b = 1 \\ a = -2 \text{ et } b = -1 \end{cases}$$

D'où une racine carrée de Δ est $\delta = 2 + i$ et les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 - 3iz - 3 - i = 0$ sont :

$$z' = \frac{3i + (2+i)}{2} = 1 + 2i \; ; \; z'' = \frac{3i - (2+i)}{2} = -1 + i$$

Comme z_1 est la racine ayant une partie réelle négative, alors $z_1 = -1 + i$ et $z_2 = 1 + 2i$.

3°) Plaçons dans le plan complexe, les points M_o, M_1 et M_2 d'affixes respectives $z_0 = i$, $z_1 = -1 + i$, $z_2 = 1 + 2i$



4°) Supposons qu'il existe une similitude plane directe S de centre Mo qui transforme M_1 en M_2. Alors l'application complexe f associée à S est définie par $f(z) = az + b$.

$S(M_1) = M_2 \Leftrightarrow f(z_1) = z_2 \Leftrightarrow az_1 + b = z_2$

$S(M_0) = M_0 \Leftrightarrow f(z_0) = z_0 \Leftrightarrow az_0 + b = z_0$

On résout alors le système suivant :

$$\begin{cases} az_1 + b = z_2 \\ az_0 + b = z_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} \\ b = (1 - a)z_0 \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} a = -1-i \\ b = -1+2i \end{cases}$$

Donc S : $M(z) \mapsto M'(z')$ telle que $z' = (-1-i)z - 1 + 2i$.

Soit k le rapport et θ une mesure de l'angle de S. Alors :

$k = |-1-i| = \sqrt{2}$

θ est défini par : $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \theta = \dfrac{5\pi}{4} \quad (2\pi)$

En conclusion, S est une similitude directe de centre M_0, de rapport $\sqrt{2}$ et dont une mesure de l'angle θ est $\dfrac{5\pi}{4}$.

5°) <u>Determination et tracé de C</u>

Comme les points M sont les centres des similitudes directes transformant M_1 en M_2 dans un rapport égal à $\sqrt{2}$, alors on a $MM_2 = \sqrt{2}\, MM_1$.

$MM_2 = \sqrt{2}\, MM_1 \Leftrightarrow MM_2^2 - 2\, MM_1^2 = 0 \quad (1)$.

Si on note Ω le barycentre des points pondérés $(M_1, -2)$ et $(M_2, 1)$ alors on a : $-2\overrightarrow{\Omega M_1} + \overrightarrow{\Omega M_2} = \vec{0}$ ou encore $\overrightarrow{O\Omega} = 2\overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_2}$.

Par conséquent $z_\Omega = 2z_1 - z_2 \Rightarrow z_\Omega = -3$

Ainsi $MM_2^2 - 2MM_1^2 = \left(\overrightarrow{M\Omega} + \overrightarrow{\Omega M_2}\right)^2 - 2\left(\overrightarrow{M\Omega} + \overrightarrow{\Omega M_1}\right)^2$

$$= -M\Omega^2 + 2\overrightarrow{M\Omega} \bullet \left(\overrightarrow{\Omega M_2} - 2\overrightarrow{\Omega M_1}\right) + \Omega M_2^2 - 2\Omega M_1^2$$

$$= -M\Omega^2 + \Omega M_2^2 - 2\Omega M_1^2 \text{ car } \overrightarrow{\Omega M_2} - 2\overrightarrow{\Omega M_1} = \vec{0}$$

$$= -M\Omega^2 + |z_2 - z_\Omega|^2 - 2|z_1 - z_\Omega|^2 = -M\Omega^2 + 10$$

La relation (1) devient alors $M\Omega^2 = 10$ d'où $M\Omega = \sqrt{10}$.

Donc l'ensemble C est le cercle de centre Ω et de rayon $\sqrt{10}$ passant par M_0.

<u>Autre méthode</u> :

$MM_2 = \sqrt{2}\, MM_1 \Leftrightarrow MM_2^2 - 2\, MM_1^2 = 0 \Leftrightarrow |z_2 - z|^2 = 2|z_1 - z|^2 \quad (2)$

or $|z_2 - z|^2 = (1 - x)^2 + (2 - y)^2 = x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5$

$|z_1 - z|^2 = (-1 - x)^2 + (1 - y)^2 = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2$

La relation (2) devient : $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 - 2x^2 - 2y^2 - 4x + 4y - 4$

soit $x^2 + y^2 + 6x - 1 = 0$ ou encore $(x + 3)^2 + y^2 - 10 = 0$

On obtient l'équation d'un cercle de centre $\Omega(-3, 0)$ et de rayon $\sqrt{10}$

Donc, l'ensemble C est le cercle de centre Ω et de rayon $\sqrt{10}$ passant par M_0.

Pour le tracé du cercle C, voir la question 3).

Problème

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \begin{cases} x\ln x & \text{si } x > 0 \\ x-1+e^x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

1°) $D_f =]-\infty, 0] \cup]0, +\infty[= \mathbb{R}$.

2°)<u>Etude de la continuité de f au point 0</u>

Il suffit d'étudier la continuité de f à droite au point 0.

$f(0) = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} (x \ln x) = 0 = f(0)$.

Donc f est continue au point 0.

3°)<u>Etude de la dérivabilité de f au point 0</u>

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{x - 1 + e^x}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \left(1 + \frac{e^x - 1}{x}\right)$$

or $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$ d'où $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = 2$

f est dérivable à gauche au point 0, et $f'_g(0) = 2$.

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{x \ln x}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} (\ln x) = -\infty$, donc f n'est pas dérivable à droite au point 0.

En conclusion, f n'est pas dérivable au point 0.

4°) Comme $f'_g(0) = 2$, alors la courbe C admet à l'origine une demi-tangente à gauche d'équation $y = f'_g(0)\, x + f(0)$ c'est à dire $y = 2x$.

5°) <u>Etude des variations de f</u>

$\lim\limits_{-\infty} f = \lim\limits_{-\infty}(x-1+e^x) = \lim\limits_{-\infty}(x-1) = -\infty$ car $\lim\limits_{-\infty} e^x = 0$

$\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{+\infty}(x\ln x) = +\infty$ car $\lim\limits_{+\infty} \ln x = +\infty$

<u>Sens de variations de f</u>

La fonction $x \mapsto x\ln x$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ car produit de 2 fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$.

La fonction $x \mapsto x - 1 + e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $\mathbb{R}_-^*$ car somme de 2 fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$

On a déjà montré que f n'est pas dérivable en 0.

En conclusion, f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

$\forall x \in]-\infty, 0[$, $f'(x) = 1 + e^x$

Comme $e^x > 0$ alors $\forall x \in]-\infty, 0[$, $f'(x) > 0$ et f est strictement croissante sur $]-\infty, 0[$

$\forall x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = \ln x + 1$

Or $\ln x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq -1 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{e}$.

$\forall x \in]0, \frac{1}{e}]$, $f'(x) \leq 0$ donc f est décroissante sur $]0, \frac{1}{e}]$

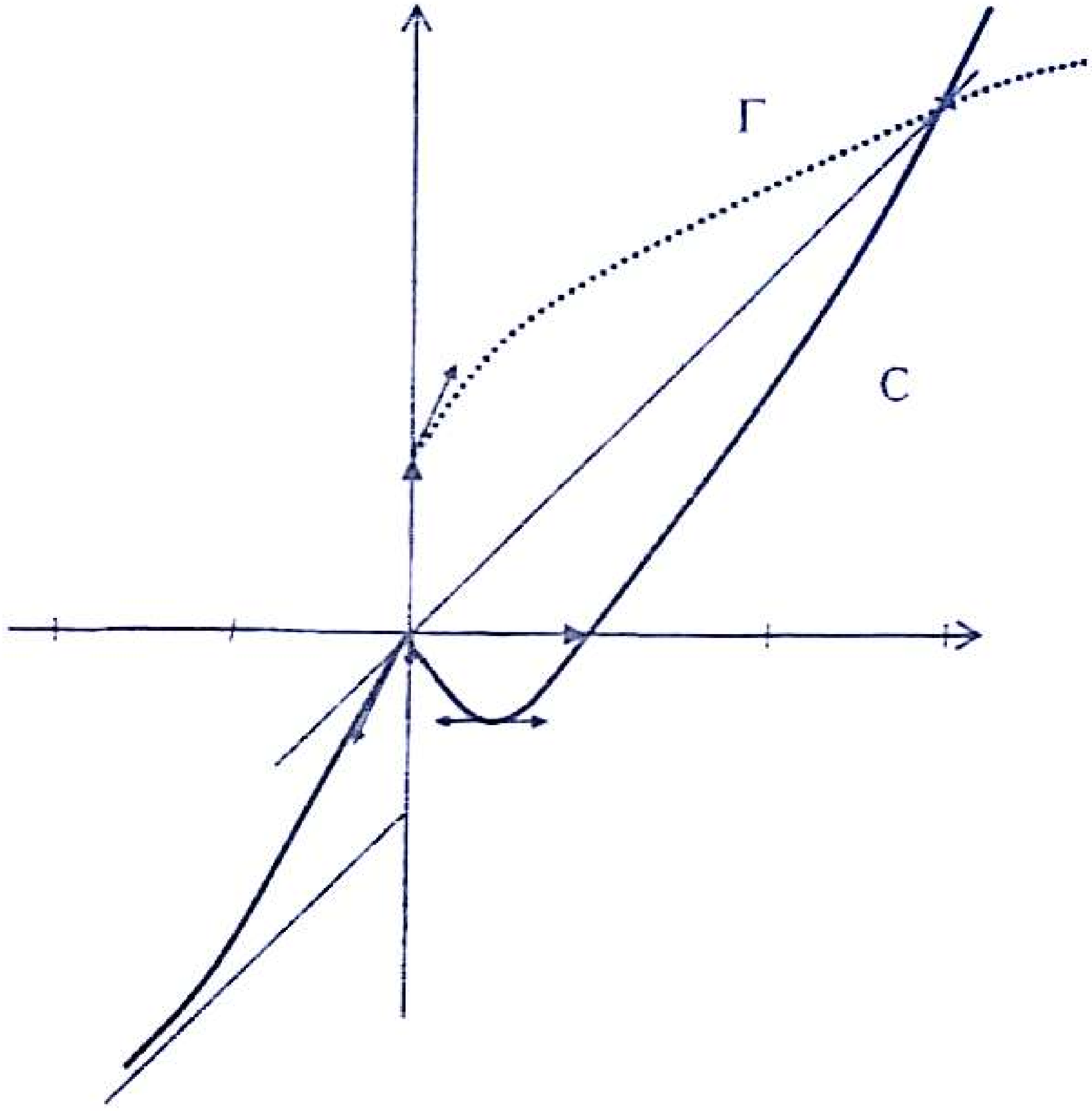
$\forall x \in [\frac{1}{e}, +\infty[$, $f'(x) \geq 0$ donc f est croissante sur $[\frac{1}{e}, +\infty[$

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	2 || $-\infty$	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	0	↘	$\frac{-1}{e}$	↗	$+\infty$

6°) Montrons que D est une asymptote à C.

$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (x-1)] = \lim_{x \to -\infty} (e^x) = 0$, d'où D est une asymptote à C en - ∞.

7°) Tracé de la courbe C



8°) Points d'intersection de C avec l'axe des abscisses

$f(0)=0$

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x\ln x = 0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x = 0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$$

Donc les abscisses des points d'intersection de la courbe C avec l'axe des abscisses sont 0 et 1. D'où A(1, 0) et (Δ) a pour équation $y = x-1$.

$(\Delta) \cap (y'0y) = \{ B(0, -1)\}$

B°) Calcul d'intégrale

$\lambda > 0$ et $I(\lambda) = \int_{\lambda}^{e} x \ln x dx$

Calculons $I(\lambda)$ en intégrant par parties

Posons $\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = x \end{cases}$ d'où $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{1}{2}x^2 \end{cases}$

Ainsi $I(\lambda) = \left[\frac{1}{2}x^2 \ln x\right]_{\lambda}^{e} - \int_{\lambda}^{e} \frac{1}{2} x dx = \left[\frac{1}{2}x^2 \ln x\right]_{\lambda}^{e} - \left[\frac{1}{4}x^2\right]_{\lambda}^{e}$

Donc $I(\lambda) = \frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{2}\lambda^2 \ln \lambda + \frac{1}{4}\lambda^2$

Calcul d'aire

Soit D la portion du plan limitée par C, l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 1 et x = e.

$A(D) = 4cm^2 \left(\int_{1}^{e} f(x)dx\right) = 4 \times I(1)cm^2$

d'où $A(D) = (1 + e^2)cm^2 \approx 8,39cm^2$

C°) g restriction de f à l'intervalle J = $[1, +\infty[$

1°) On a montré que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, d'où g, restriction de f à J, est dérivable sur $[1, +\infty[$ donc g est continue sur $[1, +\infty[$. Aussi, on a montré que f est strictement croissante sur $[\frac{1}{e}, +\infty[$ d'où g est strictement croissante sur $[1, +\infty[$. Donc, g est continue et strictement croissante sur $J = [1, +\infty[$. D'où g est une bijection de $J = [1, +\infty[$ sur $K = g([1, +\infty[)$.

Comme $g(1) = f(1) = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} g = \lim\limits_{+\infty} f = +\infty$, alors $K = [0, +\infty[$.

Conclusion : g est une bijection de $J = [1, +\infty[$ sur $K = [0, +\infty[$.

2°) <u>Courbe (Γ) de g^{-1}</u>

Comme le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est orthonormé, alors la courbe (Γ) de g^{-1} (réciproque de g) et la courbe (C) de g sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Comme la tangente à (C) au point A(1 , 0) a pour équation $y = x - 1$, on déduit que la tangente à (Γ) au point $A'(0, 1)$ a pour équation $y = x + 1$.

Pour le tracé de (Γ), voir la question n°7.

Session de juin 2000

Exercice N°1

θ un angle tel que $0 \leq \theta < \pi$

1°) Résolution dans $\mathbb{C}$ de (E)

(E) : $z^2 - 4(1 + \cos\theta)z + 8(1 + \cos\theta) = o$

$\Delta' = 4(1 + \cos\theta)^2 - 8(1 + \cos\theta) = -4\sin^2\theta = (2i\sin\theta)^2$

Donc les solutions de l'équation (E) sont :

$z_1 = 2(1 + \cos\theta) + 2i\sin\theta$ et $z_2 = 2(1 + \cos\theta) - 2i\sin\theta$

$S = \{2(1 + \cos\theta) + 2i\sin\theta ; 2(1 + \cos\theta) - 2i\sin\theta\}$

2°) <u>Module et argument de</u> z_1 et z_2

On sait que $1 + \cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$ et $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$.

D'où $z_1 = 4\cos^2\frac{\theta}{2} + 4i\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} = 4\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)$

et $z_2 = 4\cos^2\frac{\theta}{2} - 4i\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} = 4\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\left(-\frac{\theta}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\theta}{2}\right)\right)$

$|z_1| = |z_2| = 4\cos\frac{\theta}{2}$ car $0 \leq \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$; $\arg z_1 = \frac{\theta}{2}$ et $\arg z_2 = -\frac{\theta}{2}$

3) Valeur de θ telle que $z_1 z_2 = 8$

Comme $z_1 = \overline{z_2}$ alors on a $z_1 z_2 = |z_1|^2 = 16\cos^2\frac{\theta}{2}$

$z_1 z_2 = 8 \Leftrightarrow \cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$ ($\cos\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\cos\frac{\theta}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$), mais comme $o \leq \frac{\theta}{2} \leq \frac{\pi}{2}$ alors $\cos\frac{\theta}{2} > 0$ d'où $\cos\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et donc $\theta = \frac{\pi}{2}$

Exercice N°2

P_n la population en $1990 + n$ avec un accroissement annuel de 1,2%

1). Suite géométrique (P_n)

La population en 1991 est : $P_1 = 0{,}012\ P_0 + P_0 = 1{,}012\ P_0$

Comme P_{n+1} est la population en $1990 + (n+1)$ et P_n celle en $1990 + n$, alors $P_{n+1} = 0{,}012\ P_n + P_n = 1{,}012\ P_n$, donc $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $P_{n+1} = 1{,}012\ P_n$ d'où (P_n) est une suite géométrique de raison 1,012 et de premier terme P_0.

2). L'année du doublement de la population

Soit P_n cette population double de P_0.

$P_n = 2\ P_0 \Leftrightarrow (1{,}012)^n P_0 = 2\ P_0 \Leftrightarrow (1{,}012)^n = 2 \Leftrightarrow n \ln(1{,}012) = \ln 2$

$$\Leftrightarrow n = \frac{\ln 2}{\ln 1{,}012} = \frac{0{,}6931}{0{,}0119} \simeq 58{,}24.$$

La population aura doublé 59 ans après c'est à dire à partir de 2049

3. Population agricole

A_n nombre d'agriculteurs en $1990 + n$.

$A_0 = 0{,}78\ P_0$ en 1990 et le taux de 78% diminue de 0,5 % par an.

Ainsi $A_1 = (0.78 - 0,005)\, P_1$ et donc l'expression de A_n en fonction de P_n est : $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n = (0.78 - 0,005n)\, P_n$.

Soit n le nombre d'années où la population agricole est moins de la moitié de la population totale. Alors on a : $A_n < \frac{1}{2} P_n$, d'où

$$(0,78 - 0,005n) P_n < \frac{1}{2} P_n \Leftrightarrow n > \frac{0,78 - 0,5}{0,005} = 56.$$

L'année est donc 2046.

Problème

A. On considère les équations différentielles suivantes :

$$(E) : y'' - 9y = 6e^{-3x}$$

$$(H) : y'' - 9y = 0$$

1). <u>Solution particulière de (E)</u> :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $u(x) = -xe^{-3x}$, $u'(x) = -e^{-3x} + 3xe^{-3x}$, $u''(x) = 6e^{-3x} - 9xe^{-3x}$.

D'où $u''(x) - 9u(x) = 6e^{-3x} - 9xe^{-3x} + 9xe^{-3x} = 6e^{-3x}$, ce qui montre que u vérifie (E). Donc u est une solution particulière de (E).

2). <u>Solution générale de (H)</u>

Equation caractéristique : $r^2 - 9 = 0$ d'où $r = 3$ ou $r = -3$

La solution générale de (H) est : $y = ae^{3x} + be^{-3x}$ (a et b constantes)

3). Soit f une fonction 2 fois dérivable

a). <u>Solution générale de (E)</u> :

$(f - u)$ solution de (H) équivaut à $(f - u)'' - 9(f - u) = 0$

équivaut à $f''(x) - u''(x) - 9f(x) + 9u(x) = 0$

équivaut à $f''(x) - 9f(x) = u''(x) - 9u(x)$

Or $u''(x) - 9u(x) = 6e^{-3x}$ d'où $f''(x) - 9f(x) = 6e^{-3x}$, donc f solution de (E).

Conclusion : f solution de (E) équivaut à $(f-u)$ solution de (H).

b). <u>Toutes les solutions de (E)</u> :

$(f - u)$ solution de (H) donc $f - u = ae^{3x} + be^{-3x}$ avec a et b deux constantes

D'où toute solution f de (E) est de la forme $f(x) = ae^{3x} + be^{-3x} - xe^{-3x}$ (a et b constantes).

Recherche de la solution particulière de (E) telle que :

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $f'(0) = 0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(ae^{3x} + be^{-3x} - 3xe^{-3x}\right) = 0 \Leftrightarrow a = 0$

car $\lim_{x\to+\infty}\left(e^{-3x}\right) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty}\left(xe^{-3x}\right) = 0$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (3ae^{3x} - 3be^{-3x} + 3xe^{-3x} - e^{-3x})$,

en particulier, $f'(0) = 3a - 3b - 1$, d'où

$f'(0) = 0 \Leftrightarrow 3a - 3b - 1 = 0 \Leftrightarrow b = \dfrac{-1}{3}$ car $a = 0$.

Donc cette solution est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -\frac{1}{3}e^{-3x} - xe^{-3x} = -\left(x + \frac{1}{3}\right)e^{-3x}$$

B. On a la fonction g : $g(x) = -\left(x + \dfrac{1}{3}\right)e^{-3x}$

1) <u>Etude des variations de g et tableau de variation</u>

$D_g = \mathbb{R}$

Derivabilité et dérivée : g est le produit d'une fonction affine et d'une fonction exponentielle définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et

$\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 3xe^{-3x}$

Comme $g'(x)$ est de même signe que x, alors g est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et décroissante strictement sur $]-\infty, 0]$.

Limites aux bornes :

$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$ car $\lim_{x\to-\infty}\left(e^{-3x}\right) = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{3}e^{-3x} - xe^{-3x}\right) = 0$ car $\lim_{x\to+\infty}\left(e^{-3x}\right) = 0$ et

$$\lim_{x\to+\infty}\left(xe^{-3x}\right)=0.$$

Tableau de variation

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{3}$	$\nearrow$	0

2) Equation de la tangente (T_1) à (C) au point d'abscisse $-\frac{1}{3}$

Comme $g'\left(\frac{-1}{3}\right)=e$ et $g\left(\frac{-1}{3}\right)=0$ alors (T_1) a pour équation

$y = g'\left(\frac{-1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)+g\left(\frac{-1}{3}\right)$. Donc (T_1) : $y=-e\left(x+\frac{1}{3}\right)$

Equation de la tangente (T_2) à (C) au point d'abscisse $\frac{1}{3}$

Comme $g\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{-2}{3e}$ et $g'\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{e}$, alors (T_2) a pour équation :

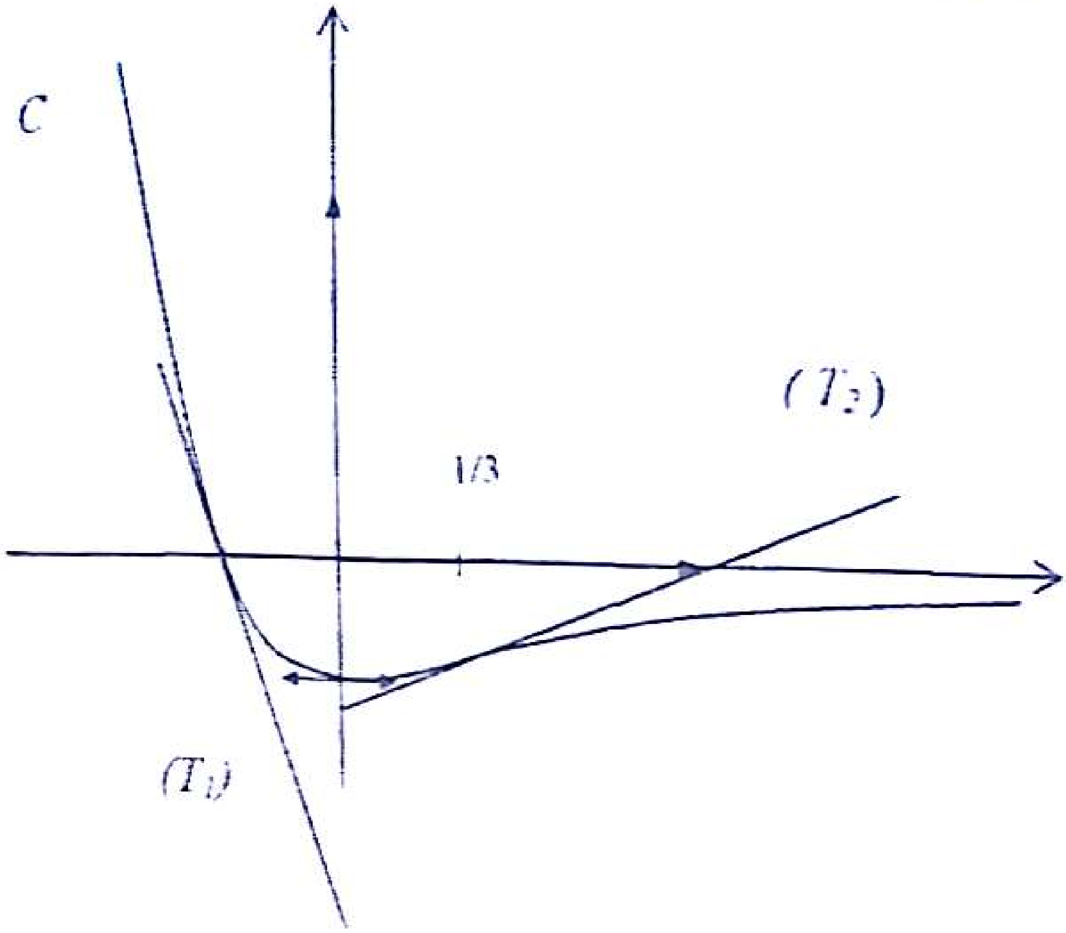
$y=g'\left(\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)-g\left(\frac{1}{3}\right)$. Donc (T_2) : $y = \frac{1}{e}(x-1)$.

4) Tracés de (T_1), (T_2) et (C) (unité : 3 cm)

La courbe (C) admet une asymptote en $+\infty$ d'équation $y=0$.

De plus $\lim_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(-1-\frac{1}{3x}\right)e^{-3x}=-\infty$ car $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{3x}\right)=0$ et

$$\lim_{x \to -\infty} \left(e^{-3x}\right) = +\infty$$



5) <u>Calcul d'integrale</u>

En intégrant par parties on a :

$$I(t) = \int_{-\frac{1}{3}}^{t} g(x)\,dx = \left[\frac{1}{3}\left(x + \frac{2}{3}\right)e^{-3x}\right]_{-\frac{1}{3}}^{t} \quad \text{Donc } I(t) = \frac{1}{3}\left(t - \frac{2}{3}\right)e^{-3t} - \frac{e}{9}.$$

6) <u>Calcul de limite de $I(t)$</u>

$$\lim_{t \to +\infty} I(t) = \lim_{t \to +\infty}\left[\frac{1}{3}\left(t + \frac{2}{3}\right)e^{-3t} - \frac{e}{9}\right] = \lim_{t \to +\infty}\left[\frac{1}{3}te^{-3t} + \frac{2}{9}e^{-3t} - \frac{e}{9}\right] = -\frac{e}{9}$$

car $= \lim_{t \to +\infty}\left[\frac{1}{3}te^{-3t}\right] = 0$ et $= \lim_{t \to +\infty}\left[e^{-3t}\right] = 0$.

C. $f_{a,b}(x) = \left[x^2 - 2(a-1)x + 2(a+1) + b\right] e^{x}$; $a, b \in \mathbb{R}$.

Scanned by CamScanner

1°) Variations de $f_{a,b}$

Domaine de définition : $Df_{a,b} = \mathbb{R}$.

Dérivée et tableau de variations :

$f_{a,b}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\forall x \in \mathbb{R}, f'_{a,b}(x) = (x^2-2ax+b)e^x$.

$f'_{a,b}(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2ax + b = 0$

$\Delta' = a^2 - b$

1^er^ Cas : $a^2 > b > 0$ ou $b \leq 0$

On a : $f'_{a,b}(x) = 0 \Leftrightarrow \left(x_1 = a - \sqrt{a^2 - b} \text{ ou } x_2 = a + \sqrt{a^2 - b}\right)$

$\forall x \in]x_1;x_2[, f'_{a,b}(x) < 0$, donc $f_{a,b}$ est strictement décroissante sur $]x_1, x_2[$;

$\forall x \notin]x_1, x_2[, f'_{a,b}(x) \geq 0$, donc $f_{a,b}$ est strictement croissante sur $]-\infty; x_1]$ et $[x_2; +\infty[$

x	$-\infty$		$a-\sqrt{a^2-b}$		$a+\sqrt{a^2-b}$		$+\infty$
$f'_{a,b}(x)$		+	0	-	0	+	
$f_{a,b}(x)$	0	$\nearrow$	$f_{a,b}(a-\sqrt{a^2-b})$	$\searrow$	$f_{a,b}(a+\sqrt{a^2-b})$	$\nearrow$	$+\infty$

$$f_{a,b}(a-\sqrt{a^2-b}) = 2\,(1+\sqrt{a^2-b})e^{a-\sqrt{a^2-b}}$$

$$f_{a,b}(a+\sqrt{a^2-b}) = 2\,(1-\sqrt{a^2-b})e^{a+\sqrt{a^2-b}}$$

2^e^ Cas : $b>0$ et $a^2 < b$

On a $\Delta' < 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f'_{a,b}(x) > 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'_{a,b}(x)$		$+$	
$f_{a,b}(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

<u>3ᵉ Cas</u> : $a^2 = b$

On a $\Delta' = 0$ et $f'_{a,b}(x) = 0 \Leftrightarrow x = a$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'_{a,b}(x) \geq 0$, $f_{a,b}$ est croissante sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		a		$+\infty$
$f'_{a,b}(x)$		$+$		$+$	
$f_{a,b}(x)$	0	$\nearrow$	$f_{a,b}(a)$	$\nearrow$	$+\infty$

2°) <u>Calcul des probabilites</u>

$\Omega = \{ (a, b), 1 \leq a \leq 6 \text{ et } 1 \leq b \leq 6 \}$ cardΩ=36.

Il s'agit d'une équiprobabilité.

$A = \{ (a, b) \in \Omega, 1 \leq a \leq 6 \text{ et } 1 \leq b \leq 6 \}$

$B = \{ (a, b) \in \Omega, a^2 - b > 0 \}$

On déduit : cardA = 21 et cardB = 26

D'où $P(A) = \dfrac{cardA}{card\Omega} = \dfrac{21}{36} = \dfrac{7}{12}$

$P(A) = \dfrac{cardB}{card\Omega} = \dfrac{26}{36} = \dfrac{13}{18}$.

Session juillet 2001

Exercice N°1

On note les évènements suivants :

A "un électeur a choisi ADO"

B " un électeur a choisi BALA"

K "un électeur a choisi KADRI"

Z "un habitant de ZATA a voté"

On donne les probabilités suivantes:

$P(A/Z)=\frac{3}{8}$; $P(B/Z)=\frac{1}{2}$; $P(K/Z)=\frac{1}{8}$; $P(Z)=\frac{60}{100}=\frac{3}{5}$

1°) La probabilité pour que 5 habitants de ZATA aient voté est égale à

$$P_1=\left(\frac{3}{5}\right)^5=\frac{243}{3125}=0{,}077$$

2°) La probabilité pour qu'un habitant de ZATA choisisse BALA est égale à $P_2=p(B\cap Z)=p(B/Z)p(Z)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}$ donc $p_2=\frac{3}{10}=0{,}3$

3°) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de voix obtenues par BALA parmi les 5 habitants.

La loi de probabilité de X est une loi binomiale de paramètre $n=5$ et $p=0{,}30$

$\forall k\in\{0,1,2,3,4,5\}$, $p(X=k)=C_5^k(0{,}3)^k(0{,}7)^{5-k}$

k	0	1	2	3	4	5
$p(X=k)$	0,1680	0,3602	0,3087	0,1323	0,0284	0,0024

Comme X suit une loi binomiale, alors $E(X)=np=5\times0{,}3=1{,}5$ et $V(X)=npq=5\times0{,}3\times0{,}7=1{,}05$. Donc $E(X)=1{,}5$ et $V(X)=1{,}05$.

4°) La probabilité pour qu'un habitant de ZATA choisisse KADRI est égale à $P_3=p(Z\cap K)=p(K/Z)p(Z)=\frac{1}{8}\times\frac{3}{5}$ donc $p_3=\frac{3}{40}=0{,}075$

On note p_n la probabilité pour que parmi n habitants votant, aucun ne choisisse KADRI :

$$p_n = \left(\frac{37}{40}\right)^n$$

6°) La probabilite pour que KADRI obtienne au moins une voix est

$p'_n = 1 - p_n$ donc $p'_n = 1 - \left(\frac{37}{40}\right)^n$

Le nombre minimum d'habitants qui doivent voter pour que Kadri obtienne au moins une voix avec une probabilité $\geq \frac{15}{16}$ vérifie

$p'_n \geq \frac{15}{16} \Leftrightarrow \left(\frac{37}{40}\right)^n \leq \frac{1}{16}$ donc $n \geq \frac{\ln 16}{\ln 40 - \ln 37}$ ou $n \geq 35{,}56$

Le nombre minimum d'habitants est de 36.

Exercice N°2

<u>Résolution de l'équation (E)</u> : $Z^4 - (5-14i)Z^2 - 24 - 10i = 0$

Posons $X = Z^2$.

(E) devient alors : $X^2 - (5 - 14i)X - 24 - 10i = 0$ (E')

$\Delta = (5 - 14i)^2 - 4(-24 - 10i)$

$\Delta = -75 - 100i$

Soit $\delta = a + ib$ tel que $\delta^2 = \Delta$

$$\delta^2 = \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = -75 \\ a^2 + b^2 = 125 \\ ab < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 25 \\ b^2 = 100 \\ ab < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \text{ et } b = -10 \\ \text{ou} \\ a = -5 \text{ et } b = 10 \end{cases}$$

Les racines carrées de Δ sont : $\delta_1 = 5 - 10i$ et $\delta_2 = -5 + 10i$.

Les solutions de l'équation (E') sont donc :

$X_1 = \frac{5-14i+5-10i}{2} = 5-12i$ et $X_2 = \frac{5-14i-5+10i}{2} = -2i$

- Résolution de $Z^2 = -2i$.

Posons $Z = x + iy$

$$Z^2 = -2i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 2 \\ xy < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 1 \\ xy < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ et } y = -1 \\ ou \\ x = -1 \text{ et } y = 1 \end{cases}$$

Les solutions de $Z^2 = -2i$ sont donc $Z_1 = 1 - i$ et $Z_2 = -1 + i$.

- Résolution de $Z^2 = 5 - 12i$

Posons $Z = x + iy$

$$Z^2 = 5 - 12i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ x^2 + y^2 = 13 \\ xy < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 9 \\ y^2 = 4 \\ xy < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \text{ et } y = -2 \\ ou \\ x = -3 \text{ et } y = 2 \end{cases}$$

Les solutions de $Z^2 = 5 - 12i$ sont donc : $Z_3 = 3 - 2i$ et $Z_4 = -3 + 2i$

Donc l'ensemble des solutions de (E) : $S = \{1 - i; -1 + i; 3 - 2i; -3 + 2i\}$.

Problème

Partie I. f_n de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ telle que $x \mapsto x - n + \frac{n}{2}\ln x$. $(n \in \mathbb{N}^*)$

1°) <u>Variations de f_n</u>

f_n est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\lim\limits_{0^+} f_n = -\infty$, $\lim\limits_{+\infty} f_n = +\infty$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_n'(x) = \dfrac{2x + n}{2x}$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_n'(x) > 0$ d'où f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

x	0		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	
f_n	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

f_n est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, d'où f_n est bijective de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$. Comme $0 \in \mathbb{R}$, alors l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique $a_n \in \mathbb{R}_+^*$.

2°) <u>Démontrons que</u> $1 \leq a_n \leq e^2$ et $\ln a_n = 2 - \frac{2}{n} a_n$

$$\begin{cases} f_n(1) = 1 - n \\ f_n(e^2) = e^2 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad f_n(1) \times f_n(e^2) < 0, \ \text{donc } a_n \in \left[1 ; e^2\right].$$

De plus : $f_n(a_n) = 0 \Leftrightarrow a_n - n + \frac{n}{2} \ln a_n = 0 \Leftrightarrow \ln a_n = 2 - \frac{2}{n} a_n$.

Donc $\ln a_n = 2 - \frac{2}{n} a_n$

3°) <u>Expression de $f_{n-1}(a_n)$ en fonction de a_n</u>

$f_{n+1}(a_n) = a_n - (n+1) + \frac{n+1}{2} \ln a_n$ or

$\ln a_n = 2(1 - \frac{1}{n} a_n)$ d'où $f_{n+1}(a_n) = \frac{-1}{n} a_n$

4°) <u>Sens de variations de (a_n)</u>

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_{n+1}(a_{n+1}) - f_{n+1}(a_n) = \frac{1}{n} a_n$

or $a_n > 0$ d'où $f_{n+1}(a_{n+1}) - f_{n+1}(a_n) > 0$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_{n+1}(a_{n+1}) > f_{n+1}(a_n)$ or f_{n+1} est bijective et croissante d'où $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_{n+1} > a_n$ donc (a_n) est croissante sur $\mathbb{N}^*$.

La suite de terme général a_n est majorée par e^2 et croissante, elle est donc convergente. Soit l sa limite.

5°) <u>limite de (a_n)</u>

On a montré que $\ln a_n = 2 - \frac{2}{n} a_n$.

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} (a_n) = l$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{a_n}{n}\right) = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (\ln a_n) = 2$

Par conséquent, $\lim\limits_{n \to +\infty} (a_n) = e^2$.

Partie II.

g et h les fonctions définies par : $g(x) = \dfrac{2x - \ln x}{2\sqrt{x}}$ et $h(x) = \sqrt{x}$

1°) <u>Calcul des limites</u>

$\lim\limits_{0^+} g = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(\sqrt{x} - \dfrac{\ln x}{2\sqrt{x}}\right) = +\infty$ car $\lim\limits_{0^+} \left(\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}\right) = -\infty$

$\lim\limits_{+\infty} g = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x} - \dfrac{\ln x}{2\sqrt{x}}\right) = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}\right) = 0.$

2°) <u>Tableau de variations de g</u>

g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g'(x) = \frac{\left(2 - \frac{1}{x}\right)\left(2\sqrt{x}\right) - \frac{1}{\sqrt{x}}(2x - \ln x)}{4x} = \frac{2x - 2 + \ln x}{4x\sqrt{x}} = \frac{f_1(x)}{2x\sqrt{x}}$$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g'(x) = \dfrac{f_1(x)}{2x\sqrt{x}}$, donc $g'(x)$ a le même signe que $f_1(x)$. Or

$f_1(x) = x - 1 + \dfrac{1}{2}\ln x$, donc $f_1(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ d'où $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$\forall x \in]0, 1]$, $g'(x) \leq 0$ donc g est décroissante sur $]0, 1]$

$\forall x \in [1 ; +\infty[$, $g'(x) \geq 0$ donc g est croissante sur $[1, +\infty[$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
g	‖ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

3°) <u>Position relation des courbes C et C'</u>

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x) - h(x) = \dfrac{-\ln x}{2\sqrt{x}}$. Donc $g(x) - h(x)$ a le signe de $-\ln x$.

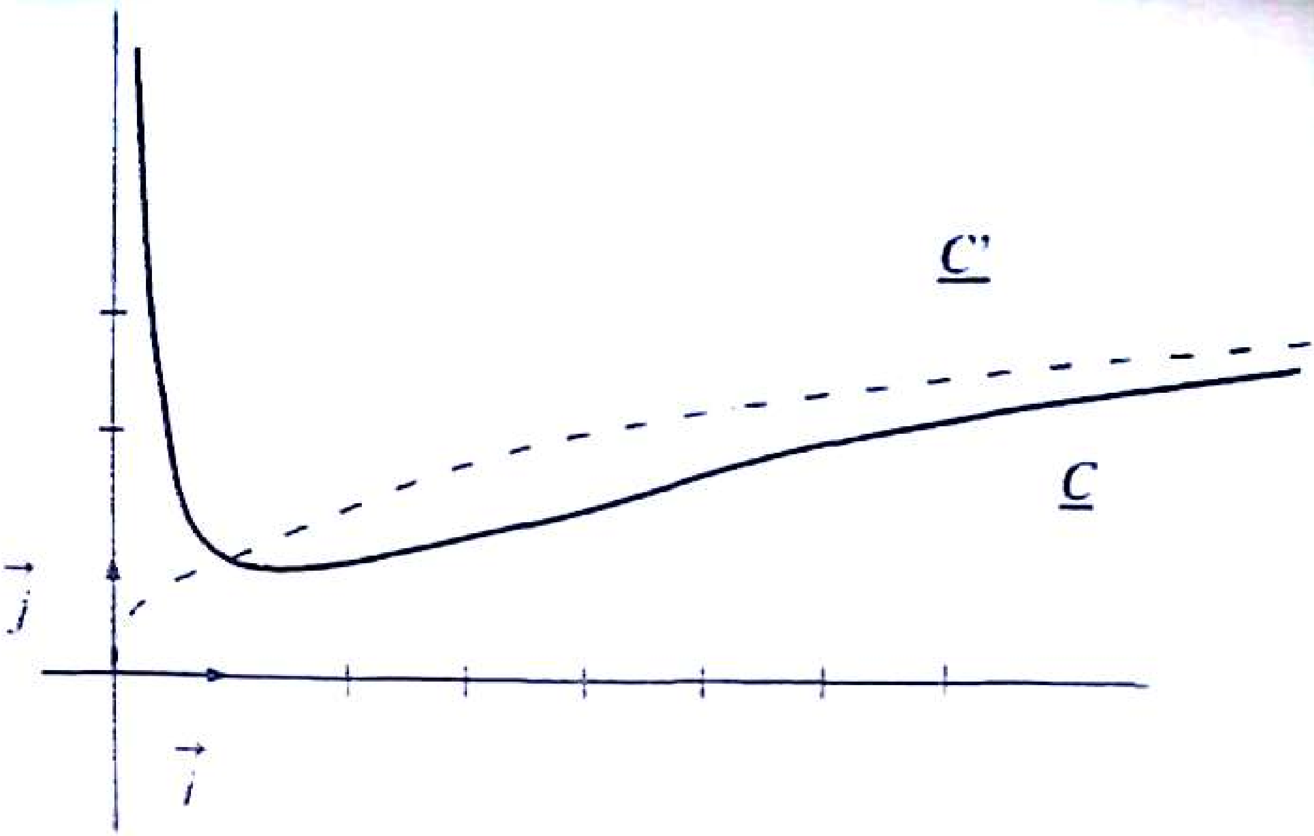
$\forall x \in]0, 1[$, $g(x) - h(x) > 0$ d'où C est au-dessus de C' dans $]0, 1[$;

$\forall x \in]1 ; +\infty[$, $g(x) - h(x) < 0$ d'où C est en dessous de C' dans $]1 ; +\infty[$.

C et C' se coupent en un point $I(1, 1)$

De plus $\lim\limits_{x \to +\infty} [g(x) - h(x)] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[-\dfrac{\ln x}{2\sqrt{x}}\right] = 0$, donc les courbes C et C' sont asymptotes en $+\infty$.

4°) Tracé des courbes C et C'



$g(9) = \dfrac{18 - \ln 9}{6} = 2{,}63$; $g(1) = 1$; $g(\frac{1}{2}) = \dfrac{1 + \ln 2}{2\sqrt{0,5}} \approx 1{,}20$

$g(\frac{1}{4}) = \dfrac{0{,}5 + \ln 4}{2\sqrt{0{,}25}} \approx 1{,}9$; $g(4) = \dfrac{8 - \ln 4}{4} \approx 1{,}65$

5°) Calcul d'intégrale

a) Calcul de $J = \int_1^2 \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} dx$ à l'aide d'une intégration par parties

$J = \left[\sqrt{x} \ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \left[\sqrt{x} \ln x - 2x\right]_1^2$ $\qquad J = \sqrt{2} \ln 2 - 2\sqrt{2} + 2$

b) Calcul de $I = \int_1^2 g(x) dx$

$I = \int_1^2 \left(\sqrt{x} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\right) dx = \int_1^2 \sqrt{x} dx - J = \left[\frac{2}{3} x\sqrt{x}\right]_1^2 - J = \frac{1}{3}\left(10\sqrt{2} - 3\sqrt{2}\ln 2 - 8\right).$

Scanned by CamScanner

Session de juin 2002

Exercice N°1

(E_1) : $3z^2 + 2(2-3i)z - \frac{5}{3} - 4i = 0$

(E_2) : $3z^2 + 2(2-3i)z - \frac{5}{3} - 4i = \bar{z} + \frac{2}{3} + i$ où $\bar{z}$ est le conjugué de z.

1°) a) Résolution de l'équation (E_1)

Le discriminant de l'équation (E_1) est nul ; d'où (E_1) admet une racine double $z_0 = -\frac{2}{3} + i$.

b) Montrons que $9\left(z + \frac{2}{3} - i\right)^2 = 3\bar{z} + 2 + 3i$

Comme $z_0 = -\frac{2}{3} + i$ est une racine double de l'équation (E_1), alors on a : $3z^2 + 2(2-3i)z - \frac{5}{3} - 4i = 3(z - z_0)^2 = 3\left(z + \frac{2}{3} - i\right)^2$.

De plus (E_2) devient $3\left(z + \frac{2}{3} - i\right)^2 = \bar{z} + \frac{2}{3} + i$,

D'où $9\left(z + \frac{2}{3} - i\right)^2 = 3\bar{z} + 2 + 3i$.

c) Existence du complexe $\varphi(z)$ tel que : $[\varphi(z)]^2 = \overline{\varphi(z)}$.

Posons $\varphi(z) = 3\bar{z} + 2 + 3i$.

Si z est solution de (E_2) alors $9\left(z + \frac{2}{3} - i\right)^2 = 3\bar{z} + 2 + 3i = 3\left(\bar{z} + \frac{2}{3} + i\right)$

soit $[\varphi(z)]^2 = \overline{\varphi(z)}$.

d) Montrons que $T = 0$ ou $|T| = 1$, et résolution de $T^2 = \overline{T}$.

Posons $T = \varphi(z)$.

$[\varphi(z)]^2 = \overline{\varphi(z)}$ devient $T^2 = \overline{T}$.

Or $|\overline{T}| = |T|$ d'où $T^2 = \overline{T} \Rightarrow |T^2| = |T|$ soit $T = 0$ ou $|T| = 1$.

Posons $T = x + iy$, alors $T^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$.

$$T^2 = \overline{T} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = x \\ 2xy = -y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \quad \text{ou} \quad x = -\dfrac{1}{2} \\ x^2 - y^2 = x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \text{ ou } 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ y = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Les solutions de l'équation $T^2 = \overline{T}$ sont :

$$T_0 = 0 \ ; \quad T_1 = 1 \ ; \quad T_2 = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \ ; \quad T_3 = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$$

$$S_1 = \left\{ 0 \ ; 1 \ ; -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \ ; -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} \right\}$$

2°) Résolution de l'équation (E_2)

(E_2) devient $T^2 = \overline{T}$ en posant $T = \varphi(z)$ on a :

$$\varphi(z) = T \Leftrightarrow 3z + 2 - 3i = T \Leftrightarrow z = \frac{1}{3}(-2 + 3i + T).$$

Pour $T = 0$ on a $z = -\dfrac{2}{3} + i$

Pour $T = 1$ on a $z = -\dfrac{1}{3} + i$

Pour $T = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{i\sqrt{3}}{2}$ on a $z = -\dfrac{5}{6} + (1 + \dfrac{\sqrt{3}}{6})i$

Pour $T = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$ on a $z = -\frac{5}{6} + (1 - \frac{\sqrt{3}}{6})i$

Donc $S = \left\{ -\frac{2}{3} + i \ ; \ -\frac{1}{3} + i \ ; -\frac{5}{6} + (1 + \frac{\sqrt{3}}{6})i \ ; -\frac{5}{6} + (1 - \frac{\sqrt{3}}{6})i \right\}$

3) A, B, C les points d'affixes respectives $z_1 = -\frac{1}{3} + i$,

$z_2 = -\frac{5}{6} + \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)i$ et $z_3 = -\frac{5}{6} + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)i$

a) <u>Nature du triangle ABC</u>

$AB = |z_2 - z_1| = \left| -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} i \right| = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$AC = |z_3 - z_1| = \left| -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} i \right| = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$BC = |z_3 - z_2| = \left| -\frac{\sqrt{3}}{3} i \right| = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Comme $AB = AC = BC = \frac{\sqrt{3}}{3}$, alors le triangle ABC est équilatéral.

b) <u>Détermination de l'affixe de D tel que $ABDC$ soit un losange</u>

Soit $z_d = a + bi$ l'affixe du point D

Si $ABDC$ est un losange, alors les diagonales [AD] et [BC] sont perpendiculaires, et les 4 côtés sont égaux.

or $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} a + \frac{1}{3} \\ b - 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow b - 1 = 0 \Leftrightarrow b = 1$

De plus $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix} a+\frac{5}{6} \\ -\frac{\sqrt{3}}{6} \end{pmatrix}$ d'où $BD^2 = \left(a+\frac{5}{6}\right)^2 + \frac{1}{12}$

$BD^2 = AB^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow \left(a+\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{1}{4}$

d'où $\begin{cases} a+\frac{5}{6} = \frac{1}{2} \\ ou \\ a+\frac{5}{6} = -\frac{1}{2} \end{cases}$ soit $\begin{cases} a = -\frac{1}{3} \\ ou \\ a = -\frac{4}{3} \end{cases}$

$a = -\frac{1}{3}$ ne convient pas car le point $D = A$.

Donc $ABDC$ est un losange pour $z_D = -\frac{4}{3} + i$.

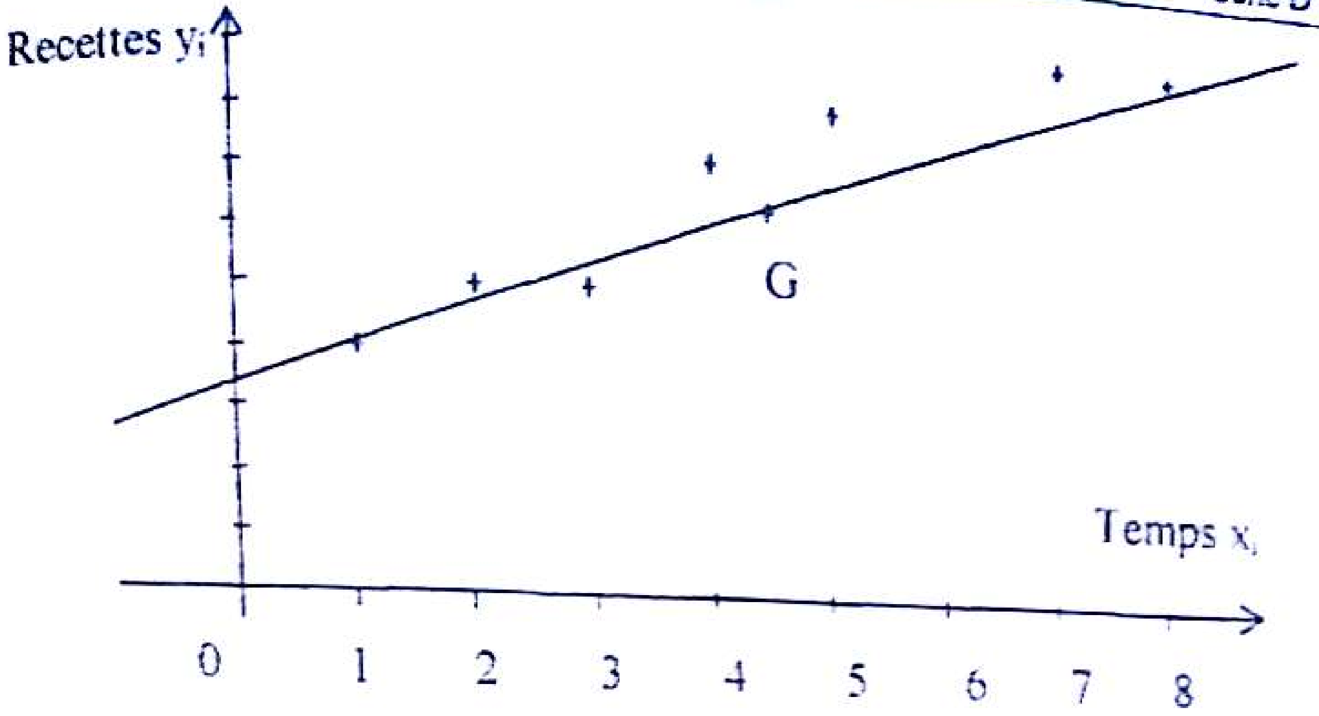
Exercice N°2

Le budget d'une entreprise, en fonction du temps exprimé en années, est donne en millions de francs par le tableau suivant

Temps(x_i)	1	2	3	4	5	6	7	8
Recettes(y_i)	4	5	5	7	8	9	9	9
Depenses(z_i)	4	5	α	8	7	8	β	9

1-a) <u>Nuage de points des recettes en fonction du temps</u>

Le point moyen G du nuage est $G\left(\frac{9}{2}, 7\right)$



b) <u>Equation de la droite d'ajustement des recettes par rapport au temps</u>

L'équation de cette droite est $y = ax + b$

Avec $a = \dfrac{\operatorname{cov}(x,y)}{\operatorname{var} x}$ et $b = \bar{y} - a\bar{x}$

	x_i	y_i	z_i	x_i^2	$x_i y_i$	z_i^2
	1	4	4	1	4	16
	2	5	5	4	10	25
	3	5	α	9	15	α^2
	4	7	8	16	28	64
	5	8	7	25	40	49
	6	9	8	36	54	64
	7	9	β	49	63	β^2
	8	9	9	64	72	81
Total	36	56	$\alpha+\beta+41$	204	286	$\alpha^2+\beta^2+299$

$\bar{x} = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} x_i = \frac{36}{8} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow \bar{x} = 4{,}5$; $\quad \bar{y} = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} y_i = \frac{56}{8} = 7 \Leftrightarrow \bar{y} = 7$

$$\text{var}\, x = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} x_i^{\,2} - \bar{x}^2 = \frac{204}{8} - \left(\frac{9}{2}\right)^2 = \frac{21}{4} \Rightarrow \text{var}\, x = 5{,}25$$

$$\text{cov}(x,y) = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} x_i y_i - \overline{x}\,\overline{y} = \frac{286}{8} - \left(\frac{9}{2}\right)(7) = \frac{17}{4} \Rightarrow \text{cov}(x,y) = 4.25$$

Ainsi donc, on a :

$$a = \frac{\text{cov}(x,y)}{\text{var}\, x} = \frac{17}{21} \approx 0{,}81 \quad \text{et } b = \bar{y} - a\bar{x} = 7 - \left(\frac{17}{21}\right)\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{47}{14} \approx 3{,}357$$

Donc l'équation de la droite d'ajustement des recettes par rapport au temps est : $y = \frac{17}{21}x + \frac{47}{14}$.

2°) Détermination des réels α et β tels que $\bar{z} = 7$ et $\text{var}\, z = 3$

comme $\bar{z} = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} z_i$ et $\text{var}\, z = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} z_i^{\,2} - \bar{z}^2$, alors

$$\bar{z} = \frac{\alpha + \beta + 41}{8} = 7 \quad \text{et} \quad \text{var}\, z = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + 299}{8} - \bar{z}^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - 93}{8}$$

Ainsi $\bar{z} = 7 \Rightarrow \alpha + \beta = 15$ et $\text{var}\, z = 3 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 117$

or $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 225 - 2\alpha\beta = 117$ d'où $\alpha\beta = 54$.

Les réels α et β sont solutions de l'equation $T^2 - 15T + 54 = 0$ soit $(T - 6)(T - 9) = 0$ d'où $T = 6$ ou $T = 9$. Ainsi $\alpha = 9$ et $\beta = 6$ ou $\alpha = 6$ et $\beta = 9$. Comme $\alpha < \beta$, alors les réels sont : $\alpha = 6$ et $\beta = 9$.

Problème

I. Détermination de la solution de (E)

(E) l'équation différentielle $y'' + 2y' + y = 0$.

L'équation caractéristique de (E) : $r^2 + 2r + 1 = 0$ soit $(r + 1)^2 = 0$ donc $r = -1$.

Les solutions générales de (E) sont de la forme $y = (Ax + B)e^{-x}$.

Si g est solution de (E) telle que $g(0) = 1$ et $g(1) = \frac{2}{e}$; alors on a

$g(x) = (Ax + B)e^{-x}$ avec $g(0) = B = 1$ et $g(1) = \frac{A+B}{e} = \frac{2}{e}$.

D'où B = 1 et A = 1. Donc la solution g de (E) vérifiant $g(0) = 1$ et $g(1) = \frac{2}{e}$ est définie par : $g(x) = (x + 1)e^{-x}$.

II. 1°) h définie par $h(x)=(1 + x)e^{-x}$

$\forall x \in]-1 ; +\infty[$, $\frac{h(x)}{\sqrt{1+x}} = \frac{(1+x)e^{-x}}{\sqrt{1+x}} = e^{-x}\sqrt{1+x}$

Donc la fonction f est définie sur $[-1 ; +\infty[$ par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}\sqrt{1+x} & \text{si } x > -1 \\ 0 & \text{si } x = -1 \end{cases}$$

a) <u>Continuité de f</u>

La fonction $x \mapsto e^{-x}$ est continue sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x}$ est continue sur $]-1 ; +\infty[$, d'où f est continue sur $]-1 ; +\infty[$. De plus $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} [e^{-x}\sqrt{1+x}] = 0 = f(-1)$, donc f est continue à droite au point 0. Conclusion : f est continue sur $[-1 ; +\infty[$.

b) <u>Dérivabilité de f au point -1</u>

$\lim\limits_{x \to -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{x \to -1^+} \left[\frac{e^{-x}}{\sqrt{1+x}}\right] = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to -1^+} \sqrt{1+x} = 0^+$

Donc f n'est pas dérivable à droite au point -1.

c) Limite de f en $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{(1+x)e^{-x}}{\sqrt{1+x}}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\sqrt{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{-x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}\times\frac{\sqrt{x}}{e^{x}}\right] = 0 \text{ car } \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{e^{x}} = 0. \quad \text{Donc } \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

d) Sens de variations de f

La fonction $x \mapsto e^{-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x}$ est dérivable sur $]-1\,;+\infty[$ d'où f est dérivable sur $]-1\,;+\infty[$.

$\forall x\in]-1\,;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{-1-2x}{2\sqrt{1+x}}e^{-x}$

$f'(x)$ a le même signe que $(-1-2x)$.

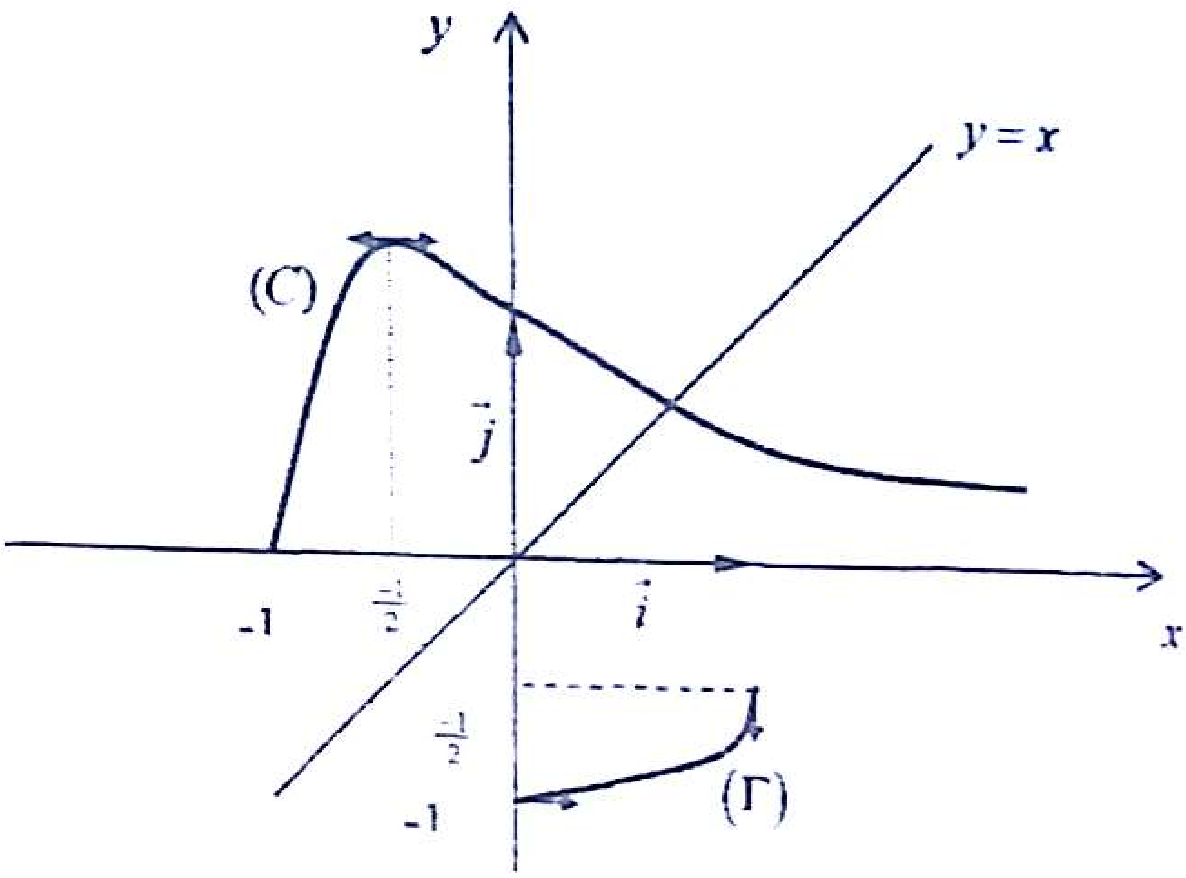
$\forall x\in]-1, -\frac{1}{2}]$, $f'(x) \geq 0$, donc f est croissante sur $]-1\,; -\frac{1}{2}]$

$\forall x\in[-\frac{1}{2}\,;+\infty[$, $f'(x) \leq 0$, donc f est décroissante sur $[-\frac{1}{2}\,;+\infty[$.

x	-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	0	+	
f	0	↗	$\sqrt{\frac{e}{2}}$	↘	0

2°) Représentation graphique de f

La courbe (C) de f admet une asymptote d'équation $y = 0$ en $+\infty$ et une demi-tangente verticale de même sens que $\vec{j}$ au point $(-1\,;\,0)$.



3°) f_1 la restriction de f à $\in[-1\,;-\frac{1}{2}]$

a) Bijection de $[-1\,;-\frac{1}{2}]$ sur un intervalle J

On a montré que f est continue et strictement croissante sur $[-1\,;-\frac{1}{2}]$.

D'où la restriction f_1 de f à l'intervalle $[-1\,;-\frac{1}{2}]$ est une bijection de $[-1\,;-\frac{1}{2}]$ vers $J = f_1([-1\,;-\frac{1}{2}]) = [0\,;\,\sqrt{\frac{e}{2}}]$.

Comme $f_1(-\frac{1}{2}) = \sqrt{\frac{e}{2}}$, alors $f_1^{-1}(\sqrt{\frac{e}{2}}) = -\frac{1}{2}$.

b) Continuité et dérivabilité de f_1^{-1} au point 0

Etudions d'abord la dérivabilité de f_1^{-1} au point 0

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f_1^{-1}(x) - f_1^{-1}(0)}{x} = \lim\limits_{y \to -1} \dfrac{y+1}{f(y)}$, en posant $y = f_1^{-1}(x)$ et $f_1^{-1}(0) = -1$.

on obtient $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f_1^{-1}(x) - f_1^{-1}(0)}{x} = \lim\limits_{y \to -1} \dfrac{1}{\dfrac{f(y)}{y+1}}$

or $\lim\limits_{y \to -1} \dfrac{f(y)}{y+1} = +\infty$ d'après la question II.1°)b), d'où $\lim\limits_{y \to -1} \dfrac{1}{\dfrac{f(y)}{y+1}} = 0$

donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f_1^{-1}(x) - f_1^{-1}(0)}{x} = 0$; f_1^{-1} est dérivable au point 0. Comme toute fonction dérivable en un point est continue en ce point, alors f_1^{-1} est continue au point 0.

c) Représentation graphique de f_1^{-1}

Voir le repère précédent, pour la courbe de f_1^{-1}.

4°) a) Montrons que $0 \le f(x) \le \dfrac{\sqrt{2}}{2}e$.

Pour tout x de $[-1 ; -\dfrac{1}{2}]$, on a $\dfrac{1}{2} \le -x \le 1 \Rightarrow \sqrt{e} \le e^{-x} \le e$ (1).

De plus $x \in \left[-1; \dfrac{-1}{2}\right] \Rightarrow 0 \le 1 + x \le \dfrac{1}{2}$ d'où $0 \le \sqrt{1+x} \le \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (2).

Or $f(x) = e^{-x} \times \sqrt{1+x}$. Alors en multipliant, membre à membre, les inégalités (1) et (2) on obtient $0 \le f(x) \le \dfrac{\sqrt{2}}{2}e$.

Remarque

On pourra aussi utiliser les variations de f :

$\forall x \in \left[-1; \frac{-1}{2}\right]$, on a $0 \leq f(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}e$, d'où $0 \leq \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} f(x)dx \leq \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{2}}{2}e dx$

Soit $0 \leq \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} f(x)dx \leq \frac{\sqrt{2}}{4}e$.

C. Calcul d'aire

L'aire S en cm^2 du domaine du plan limité par les droites $x = 0$,

$x = \sqrt{\frac{e}{2}}$, $y = -\frac{1}{2}$ et la courbe Γ^{-1} est : $S = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} f(x)dx \times 16cm^2$ par

symétrie. Or, $0 \leq \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} f(x)dx \leq \frac{\sqrt{2}}{4}e$ d'où $0 \leq \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} f(x)dx \times 16 \leq \frac{\sqrt{2}}{4}e \times 16$

Soit $0 \leq S \leq 4e\sqrt{2}$ donc $0 \leq S \leq 15{,}39cm^2$.

III. (u_n) la suite définie par $u_n = \int_n^{n+1} f(x)dx$

1°) Montrons que $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$

Comme f est décroissante sur $[0 ; +\infty[$, alors pour tout x tel que

$n \leq x \leq n+1$ on a : $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$.

$\forall x \in \mathbb{N}$, $\int_n^{n+1} f(n+1)dx \leq \int_n^{n+1} f(x)dx \leq \int_n^{n+1} f(n)dx$

Donc $f(n+1) \leq u_n \leq f(n)$.

2°) Nature de la suite (u_n)

$$\begin{cases} f(n+1) \leq u_n \leq f(n) \\ f(n+2) \leq u_{n+1} \leq f(n+1) \end{cases} \text{ d'où } f(n+2) - f(n) \leq u_{n+1} - u_n \leq 0$$

donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$; d'où la suite (u_n) est decroissante

De plus $\forall x \in [n, n+1]$, $f(x) \geq 0$, d'où $u_n \geq 0$.
La suite (u_n) est décroissante et minorée (par 0).
Donc la suite (u_n) est convergente.

Session de juillet 2003

Exercice N°1

Notons n_{ij} le nombre de ménages habitant x_j pièces et ayant y_i enfants
$n_{.j}$ le nombre de ménages habitant x_j pièces
$n_{i.}$ Le nombre de ménages ayant y_i enfants
N l'effectif total de la population ($N = 100$)

1°) a) Calcul de la moyenne $\bar{x}$ et de l'écart type σ_x de la série x

La moyenne $\bar{x}$ est donnée par $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{4} n_{.j} x_j$ d'où $\bar{x} = \frac{281}{100} = 2{,}81$.

La variance σ^2_x est donnée par $\sigma^2_x = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{4} n_{.j} x^2_j - (\bar{x})^2$

d'où $\sigma^2_x = \frac{875}{100} - \left(\frac{281}{100}\right)^2 = \frac{8539}{10.000}$ donc $\sigma_x = \sqrt{0{,}8539} \cong 0{,}924$.

b) Calcul de la moyenne $\bar{y}$ et de l'écart type σ_y de la série y.

La moyenne $\bar{y}$ est donnée par $\bar{y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{4} n_i y_i$ d'où $\bar{y} = \frac{192}{100} = 1,92$

La variance σ^2_y est donnée par $\sigma^2_y = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{4} n_i y_i$ d'où

$\sigma^2_y = \frac{496}{100} - \left(\frac{192}{100}\right)^2 = \frac{12736}{10.000}$ donc $\sigma_y = \sqrt{1,2736} \simeq 1,129$.

2°) Calcul du coefficient de corrélation linéaire.

Le coefficient de corrélation linéaire r est donnée par : $r = \frac{\text{cov}(x,y)}{\sigma_x \sigma_y}$.

Or la covariance entre les séries x et y est donnée par :

$\text{cov}(x, y) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{4}\sum_{i=1}^{4} nij\, x_j y_i - \bar{x}\bar{y}$

d'où $\text{cov}(x, y) = \frac{604}{100} - \frac{281}{100} \cdot \frac{192}{100} = \frac{6448}{10.000}$

ainsi $r = \frac{\text{cov}(x,y)}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{6448}{\sqrt{8539} \times \sqrt{12736}}$ donc $r \simeq 0,62$

L'existence d'une liaison entre les séries x et y

$|r| = 0,62$ ce coefficient est faible car $|r| < 0,7$

Donc l'ajustement linéaire entre les séries x et y n'est pas valide.

Exercice N° 2

L'épreuve considérée est un tirage successif sans remise de 2 boules parmi trois boules indiscernables.

1°) Déterminons l'ensemble des résultats possibles

Comme un résultat est un arrangement de 2 chiffres parmi les trois, alors l'ensemble des résultats possibles est :

$\Omega = \{(1 ; 2), (1 ; 3), (2 ; 1), (2 ; 3), (3 ; 1), (3 ; 2)\}$

<u>Caractérisation des applications :</u> M (z) $\mapsto$ M' (z') tel que :

$z' = \alpha z$ avec $\alpha = \frac{a}{2}[\cos(\frac{\pi}{3}b) + i\sin(\frac{\pi}{3}b)]$

Ces applications sont des similitudes de centre O, de rapport $k = \frac{a}{2}$ et dont une mesure de l'angle est $\theta = \frac{\pi}{3}b$.

Résumons cette étude dans le tableau suivant :

(a, b)	Rapport $k = \frac{a}{2}$	Angle $\theta = \frac{\pi}{3}b$	Centre	Nature de la transformation
(1 ; 2)	1/2	$2\pi/3$	O	Similitude directe
(1 ; 3)	1/2	π	O	Homothétie
(2 ; 1)	1	$\pi/3$	O	Rotation
(2 ; 3)	1	π	O	Symétrie centrale
(3 ; 1)	3/2	$\pi/3$	O	Similitude directe
(3 ; 2)	3/2	$2\pi/3$	O	Similitude directe

2) <u>Calcul de module et d'argument.</u>

Pour $z_o = \sqrt{3} + i$, on a : $|z_o| = 2$ et $\arg z_o = \frac{\pi}{6}$ $[2\pi]$

Pour $z'_o = \alpha z_o$, on a : $|z'_o| = |\alpha|\ |z'_o| = a$

et $\arg z'_o = \arg\alpha + \arg z_o$ $[2\pi]$

soit $\arg z'_o = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}b$ $[2\pi]$.

Résumons dans le tableau ci-dessous, le module et l'argument de z'_o suivant les valeurs de (a, b).

(a, b)	Module z'_o	Argument z'_o
(1 ; 2)	1	$5\pi/6$
(1 ; 3)	1	$7\pi/6$
(2 ; 1)	2	$\pi/2$
(2 ; 3)	2	$7\pi/6$
(3 ; 1)	3	$\pi/2$
(3 ; 2)	3	$5\pi/6$

3°) Calcul des probabilités

Pour l'évenement E_1 : ''les points O, A et A' sont alignes'' :
Les points O, A et A' ont pour affixes respectives 0, z_o et z'_o, or ''O, A, A' alignés'' équivaut à '' $\frac{z}{z_o}$ réel'' ; c'est-à-dire $(a ; b) = (1 ; 3)$ ou $(2,3)$ d'où card $E_1 = 2$. Comme card $\Omega = 6$ alors $p(E_1) = \frac{1}{3}$

Pour l'événement E_2 : ''z'_o est imaginaire pur'' :
z'_o imaginaire pur équivaut à $\arg z'_o = \frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$ C'est-à-dire $(a , b) = (3 ; 1)$ ou $(2,1)$ d'où card $E_2 = 2$. Comme card $\Omega = 6$, alors $p(E_2) = \frac{1}{3}$

4°) Loi de probabilité de X

L'ensemble des valeurs prises par X est $X(\Omega) = \{1 ; 2 ; 3\}$

$p(X = 1) = \frac{card\{X = 1\}}{card\Omega}$ or $\{X=1\} = \{(1 ; 2), (1 ; 3)\}$ d'où

$p(X = 1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

$p(X = 2) = \frac{card\{X = 2\}}{card\Omega}$ or $\{X=2\} = \{(2 ; 1), (2 ; 3)\}$ d'où

$p(X = 2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$p(X = 3) = \frac{card\{X = 3\}}{card\Omega}$ or $\{X=3\} = \{(3 ; 1), (3 ; 2)\}$ d'où

$p(X = 3) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

La loi de X est résumée dans le tableau suivant :

x_i	1	2	3
$P(X = x_i)$	1/3	1/3	1/3

Calcul de l'espérance mathématique de X

L'espérance mathématique de X est egale à $E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i\, p(X = x_i)$

$E(X) = 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{3}$ donc $E(X) = 2$

Problème

f_m fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_m(x) = ln(x^2 - m)$ où $m \in \mathbb{R}$

1°) a°) Ensemble de définition de f_m suivant les valeurs de m

L'ensemble de définition de f_m est : $D_{fm} = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - m > 0\}$

Si $m < 0$ alors pour tout réel x, $x^2 - m > 0$ donc $D_{fm} = \mathbb{R}$

Si $m = 0$ alors $x^2 - m > 0$ pour tout $x \neq 0$ donc $D_{fm} = \mathbb{R}^*$

Si $m > 0$ alors $x^2 - m > 0$ équivaut à $(x - \sqrt{m})(x + \sqrt{m}) > 0$ soit

$x \in]-\infty, -\sqrt{m}[\cup]\sqrt{m}, +\infty[$ donc $D_{fm} =]-\infty ; -\sqrt{m}[\cup]\sqrt{m}, +\infty[$

Limites aux bornes de f_m suivant les valeurs de m

1er cas : $m < 0$ d'où $D_{fm} =]-\infty, +\infty[$;

$\lim\limits_{-\infty} f_m = +\infty$, car $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2 - m) = +\infty$

$\lim\limits_{+\infty} f_m = +\infty$, car $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2 - m) = +\infty$

2ème cas : $m = 0$ d'où $D_{fm} =]-\infty ; 0[\cup]0, +\infty[$

Dans ce cas, $f_0(x) = \ln x^2$

$\lim\limits_{-\infty} f_0 = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}(2\ln|x|) = +\infty$

$\lim\limits_{+\infty} f_0 = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}(2\ln x) = +\infty$

$\lim\limits_{0^-} f_0 = \lim\limits_{x\to 0^-}(2\ln|x|) = -\infty$

$\lim\limits_{0^+} f_0 = \lim\limits_{x\to 0^+}(2\ln|x|) = -\infty$

3ème cas : $m > 0$ d'où $D_{fm} =]-\infty ; -\sqrt{m}[\cup]\sqrt{m}, +\infty[$.

$\lim\limits_{-\infty} f_m = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2 - m) = +\infty$

$\lim\limits_{+\infty} f_m = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2 - m) = +\infty$

$\lim\limits_{(-\sqrt{m})^-} f_m = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to(-\sqrt{m})^-}(x^2 - m) = 0^+$

$\lim\limits_{(-\sqrt{m})^+} f_m = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to(-\sqrt{m})^+}(x^2 - m) = 0^+$

b°) Etude de la parité de f_m

Pour tout réel m, on a :

$\forall x \in D_{fm}$, $-x \in D_{fm}$ et $f_m(x) = \ln[(-x)^2 - m] = \ln(x^2 - m) = f_m(x)$.

Donc f_m est paire.

C°) Etude des variations de f_m suivant les valeurs de m.

La fonction f_m est dérivable sur D_{fm} et $\forall x \in D_{fm}$, $f'_m(x) = \dfrac{2x}{x^2 - m}$

On remarque que f'_m est du signe de x sur D_{fm}.

Donc f_m est strictement décroissante sur $D_{f_m} \cap \mathbb{R}^{-}$

f_m est strictement croissante sur $D_{f_m} \cap \mathbb{R}^{+}$

<u>Les tableaux de variation selon les valeurs de m</u>

Cas où $m < 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'_m(x)$		$-$	0	$+$	
f_m	$+\infty$	$\searrow$	$\ln(-m)$	$\nearrow$	$+\infty$

Cas où m = 0

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'_m(x)$		$-$	$\|$	$+$	
f_m	$+\infty$	$\searrow$ $-\infty$	$\|$	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

Cas où $m > 0$

x	$-\infty$		$-\sqrt{m}$		$+\sqrt{m}$		$+\infty$
$f'_m(x)$		$-$	$\|$		$\|$	$+$	
f_m	$+\infty$	$\searrow$ $-\infty$	$\|$		$\|$	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

d°) Etude des branches infinies de la courbe (C_m)

$$\lim_{|x|\to+\infty} \frac{f_m(x)}{x} = \lim_{|x|\to+\infty} \frac{\ln[x^2(1-\frac{m}{x^2})]}{x} = \lim_{|x|\to+\infty} [2\frac{\ln|x|}{x} + \frac{\ln(1-\frac{m}{x^2})}{x}]$$

or $\lim_{|x|\to+\infty} \frac{\ln|x|}{x} = 0$ et $\lim_{|x|\to+\infty} \frac{\ln(1-\frac{m}{x^2})}{x} = 0$. D'où $\lim_{|x|\to+\infty} \frac{f_m(x)}{x} = 0$

Donc la courbe (C_m) admet des branches paraboliques de direction (Oy) en $-\infty$ et en $+\infty$.

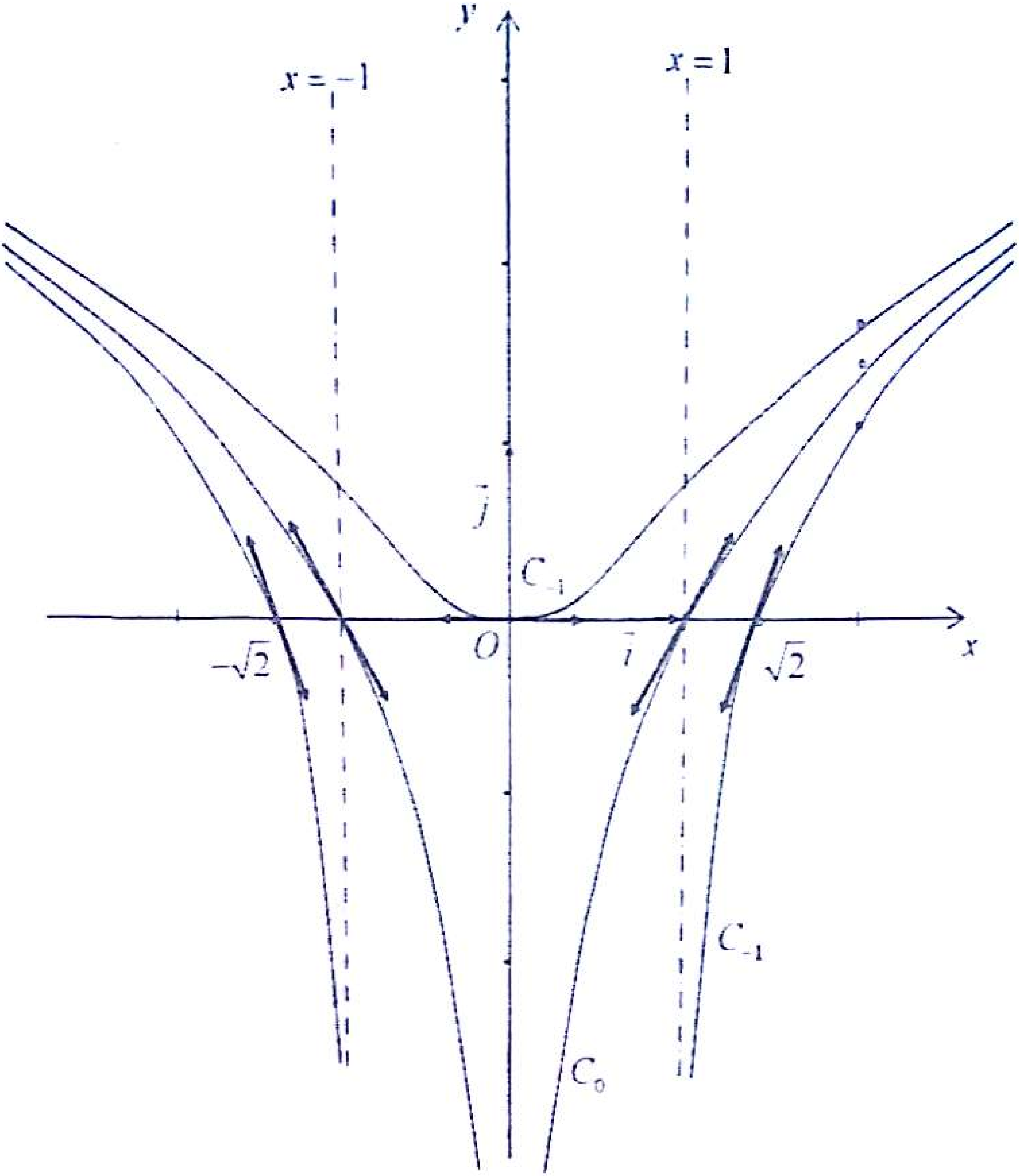
e°) Représentations graphiques des courbes (C_{-1}), (C_0) et (C_1)

- La courbe (C_{-1}), pour $m = -1$ ($m < 0$), admet un minimum au point d'abscisse 0 et des branches paraboliques de direction (Ox) en $-\infty$ et en $+\infty$.

  De plus $(C_{-1}) \cap (x'ox) = \{O(0,0)\}$ et la tangente à l'origine a pour équation $y = 0$.
- La courbe (C_0), pour $m = 0$, admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$ et des branches paraboliques de direction (Ox) en $-\infty$ et en $+\infty$.

  De plus $(C_0) \cap (x'ox) = \{A(-1, 0) ; A'(1, 0)\}$ et les tangentes aux points A et A' ont pour équations respectives $y = -2x - 2$ et $y = 2x - 2$.
- La courbe (C_1), pour $m = 1$ ($m > 0$), admet deux asymptotes verticales d'équations $x = -1$ et $x = 1$ et des branches paraboliques de direction (Ox) en $-\infty$ et en $+\infty$.

  De plus $(C_1) \cap (x'ox) = \{B(-\sqrt{2}, 0) ; (B'(\sqrt{2}, 0)\}$ et les tangentes aux points B et B' ont pour équations respectives $y = 2\sqrt{2}x - 4$ et $y = -2\sqrt{2}x - 4$.



y
x = −1
x = 1
$\vec{j}$
C_{-1}
O
$\vec{i}$
x
$-\sqrt{2}$
$\sqrt{2}$
C_{-1}
C_0

2°) <u>Cas où</u> $m = \frac{-3}{4}$

a°)<u>Position de</u> $(C_{\frac{-3}{4}})$ <u>par rapport à la demi-droite (D) d'équation</u> $y = x$.

La fonction g définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $g(x) = x - ln(x^2 + \frac{3}{4})$

<u>Etude du sens de variations de g sur $\mathbb{R}^+$</u>

g est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ car somme de 2 fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^+$

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ g'(x) = 1 - \frac{2x}{x^2 + \frac{3}{4}} = \frac{x^2 - 2x + \frac{3}{4}}{x^2 + \frac{3}{4}}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ g'(x) = \frac{(x - \frac{1}{2})(x - \frac{3}{2})}{x^2 + \frac{3}{4}}$$

Comme $x^2 + \frac{3}{4} > 0$, alors $g'(x)$ est du signe du numérateur

$(x - \frac{1}{2})(x - \frac{3}{2})$; d'où g est strictement croissante sur $[0\ ;\ \frac{1}{2}[$ et

$]\frac{3}{2}\ ;\ +\infty[$ et g strictement décroissante sur $]\frac{1}{2}\ ;\ \frac{3}{2}[$

x	0		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
g	$\ln\frac{4}{3}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$\frac{3}{2}-\ln 3$	$\nearrow$	$+\infty$

Calcul d'une valeur approchée à 10^{-2} près de $g(0)$ et $g(\frac{3}{2})$

$g(0) = \ln\frac{4}{3} = 0{,}29$; $g(\frac{3}{2}) = \frac{3}{2} - \ln 3 = 0{,}41$

Déduction du signe de $g(x)$ et de la position de $(C_{-\frac{3}{4}})$ par rapport à (D)

$\forall\, x \in [0\,;\,\frac{1}{2}]$, $g(x) \in [\ln\frac{4}{3}\,;\,\frac{1}{2}]$. De plus $\ln\frac{4}{3} > 0$, d'où $\forall\, x \in [0\,;\,\frac{1}{2}]$, $g(x) > 0$.

Sur $[\frac{1}{2}\,;+\infty[$ g admet un minimum qui est égal à $\frac{3}{2} - \ln 3$. De plus $\frac{3}{2} - \ln 3 > 0$, d'où $\forall\, x \in [\frac{1}{2}\,;+\infty[$, $g(x) > 0$.

En conclusion, pour tout x de $[0\,;+\infty[$, $g(x) > 0$.

Comme $g(x) = x - \ln(x^2 + \frac{3}{4}) = x - f_{-\frac{3}{4}}(x)$ alors on a :

$g(x) > 0$ équivaut à $x > f_{-\frac{3}{4}}(x)$.

Donc la demi-droite (D) est au-dessus de $(C_{-\frac{3}{4}})$ dans $[0\,;+\infty[$.

b°) <u>Bijection réciproque de $f_{-\frac{3}{4}}$ sur $\mathbb{R}^+$</u>

Pour $m = -\frac{3}{4}$ $(m < 0)$, la fonction $f_{-\frac{3}{4}}$ est continue et strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$ d'après l'étude faite en 1°) c°) On en déduit que $f_{-\frac{3}{4}}$ réalise une bijection de $[0 ; +\infty[$ vers $[\ln\frac{3}{4} , +\infty[$

<u>Détermination de la fonction reciproque</u>

Soit $y \in [\ln\frac{3}{4} ; +\infty[$. Déterminons $x \in [0 ; +\infty[$ tel que $f_{-\frac{3}{4}}(x) = y$

$$f_{-\frac{3}{4}}(x) = y \Leftrightarrow ln(x^2 + \frac{3}{4}) = y \Leftrightarrow x^2 = e^y - \frac{3}{4}$$

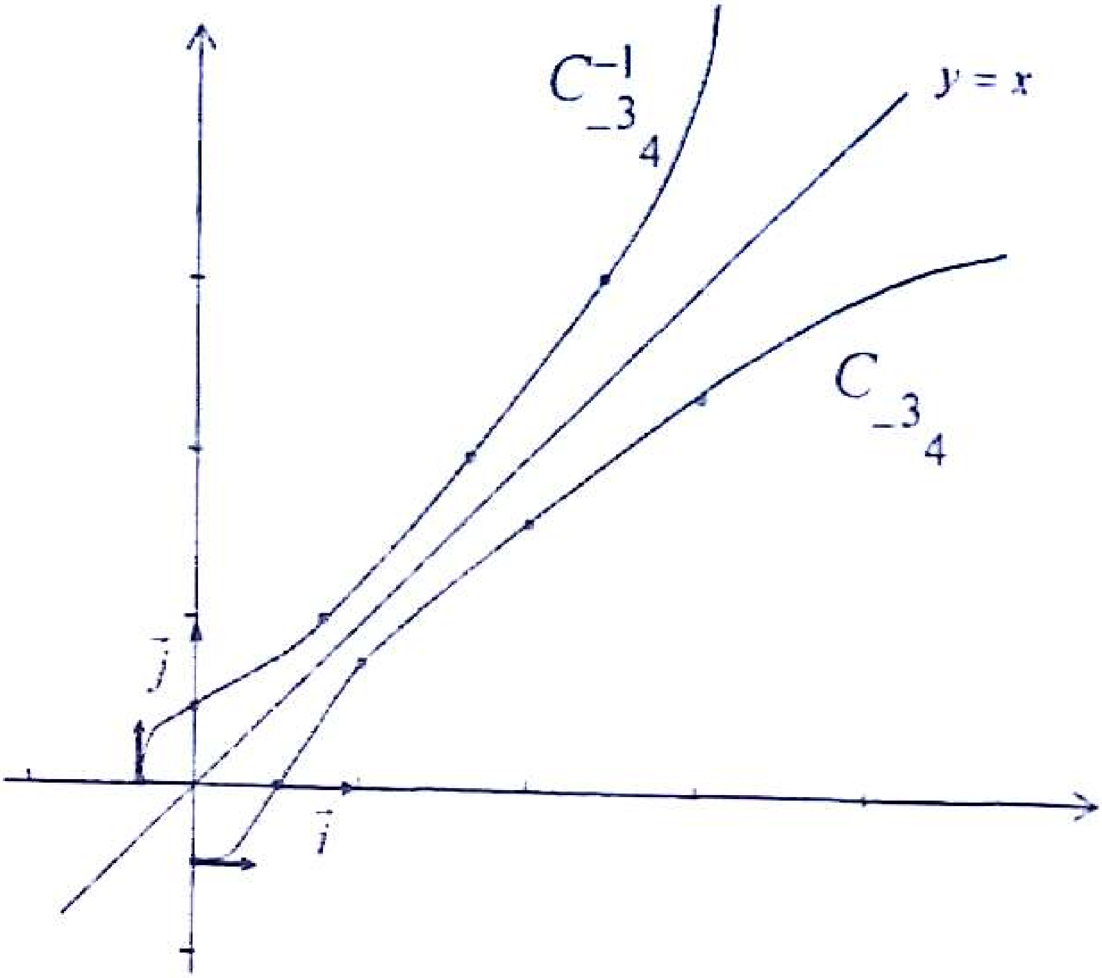
$$\Leftrightarrow (x = \sqrt{e^y - \frac{3}{4}} \text{ ou } x = -\sqrt{e^y - \frac{3}{4}})$$

Comme $x \in [0 ; +\infty[$ alors $x = \sqrt{e^y - \frac{3}{4}}$.

La réciproque $f_{-\frac{3}{4}}^{-1}$ a pour ensemble de définition $[\ln\frac{3}{4} , +\infty[$ et est croissante sur $[\ln\frac{3}{4} ; +\infty[$, car $f_{-\frac{3}{4}}$ est croissante sur $[0 , +\infty[$

De plus, pour tout x de $[\ln\frac{3}{4} ; +\infty[$ on a $f_{-\frac{3}{4}}^{-1}(x) = \sqrt{e^x - \frac{3}{4}}$

c°) Représentation graphique de $f_{-\frac{3}{4}}$ et $f_{-\frac{3}{4}}^{-1}$



3°) Calcul d'aire

$A(\alpha)$ l'aire de l'ensemble des points M(x, y) tels que :

$$\begin{cases} \alpha \leq x \leq 1 \\ f_0(x) \leq y \leq 0 \end{cases}, \text{ avec } \alpha \in \,]0\,;\,1[$$

Or, pour tout x de $[\alpha\,;\,1]$ on a $f_0(x) < 0$.

D'où $A(\alpha) = \left(-\int_{\alpha}^{1} f_0(x)dx\right) \times 4cm^2$

Une primitive de f_0 sur $[\alpha\,;\,1]$ est la fonction F_0 définie par :
$F_0(x) = 2x\ln x - 2x$.

Ainsi, $A(\alpha) = ([-2x\ln x + 2x]_{\alpha}^{1} \times 4cm^2$

$= (2 + 2\alpha\ln\alpha - 2\alpha) \times 4cm^2$

donc $A(\alpha) = (8 + 8\alpha\ln\alpha - 8\alpha)cm^2$

Calcul de la limite de $A(\alpha)$ quand $\alpha \to 0^+$

$\lim\limits_{\alpha \to 0^+} A(\alpha) = \lim\limits_{\alpha \to 0^+} (8 + 8\alpha\ln\alpha - 8\alpha) = 8$ Car $\lim\limits_{\alpha \to 0^+} (\alpha\ln\alpha) = 0$

Donc $\lim\limits_{\alpha \to 0^+} A(\alpha) = 8cm^2$

Session de juillet 2004

Exercice N°1

I –La suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \; ; \; u_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N} \; , \; u_{n+2} = \frac{2}{5}u_{n+1} + \frac{3}{5}u_n \end{cases} \quad (1)$$

1°) Nature de la suite (v_n) définie par $v_n = u_{n+1} - u_n$

Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1}$

$v_{n+1} = \left(\frac{2}{5}u_{n+1} + \frac{3}{5}u_n\right) - u_{n+1}$ car $u_{n+2} = \frac{2}{5}u_{n+1} + \frac{3}{5}u_n$

$= -\frac{3}{5}u_{n+1} + \frac{3}{5}u_n = \frac{-3}{5}(u_{n+1} - u_n)$ D'où $v_{n+1} = -\frac{3}{5}v_n$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{3}{5}$ et de premier terme

$v_0 = 1$ car $v_0 = u_1 - u_0$

2°) Expression de v_n, puis de u_n en fonction de n

Calcul de v_n en fonction de n

Comme (v_n) est une suite géométrique, de raison $(-\frac{3}{5})$ et de 1er terme $v_0 = 1$, alors le terme général est égal à $v_n = \left(-\frac{3}{5}\right)^n$.

Calcul de u_n en fonction de n

Comme $v_n = u_{n-1} - u_n$, alors on a :

$$\sum_{i=0}^{n-1} v_i = (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \dots + (u_{n-1} - u_{n-2}) + (u_n - u_{n-1}) = -u_0 + u_n$$

d'où $u_n = u_0 + \sum_{i=0}^{n-1} v_i$

Or $\sum_{i=0}^{n-1} v_i = v_0 \dfrac{1-(-\frac{3}{5})^n}{1-(-\frac{3}{5})} = \frac{5}{8}[1-(-\frac{3}{5})^n]$ car (v_n) est géométrique.

Ainsi, $u_n = u_0 + \sum_{i=0}^{n-1} v_i = 1 + \frac{5}{8}[1-(-\frac{3}{5})^n]$

Donc, pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{13}{8} - \dfrac{5}{8}\left(-\dfrac{3}{5}\right)^n$.

3°) Détermination de la limite de u_n en $+\infty$

Pour tout n entier naturel, $u_n = \dfrac{13}{8} - \dfrac{5}{8}\left(-\dfrac{3}{5}\right)^n$.

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} (\frac{-3}{5})^n = 0$ car $|q| = \left|\dfrac{-3}{5}\right| < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \dfrac{13}{8}$.

II - (w_n) définie par : $w_0 > 0$, $w_1 > 0$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $w_{n+2} = \sqrt[5]{(w_{n+1})^2 (w_n)^3}$

1°) Montrons que la suite (t_n) vérifie la relation (1)

Pour tout n de $\mathbb{N}$, $t_{n+2} = ln(w_{n+2})$, or $w_{n+2} = (w_{n+1})^{\frac{2}{5}} (w_n)^{\frac{3}{5}}$

d'où $t_{n+2} = ln\,(w_{n+1})^{\frac{2}{5}} + ln(w_n)^{\frac{3}{5}}$ soit $t_{n+2} = \dfrac{2}{5}\, ln(w_{n+1}) + \dfrac{3}{5}\, ln(w_n)$

c'est-à-dire $t_{n+2} = \dfrac{2}{5}\, t_{n+1} + \dfrac{3}{5}\, t_n$.

Ainsi, (t_n) vérifie bien la relation (1) du paragraphe I, donc (t_n) est de même nature que (u_n).

2°) Détermination des limites de (t_n) et (w_n) en $+\infty$

D'après le paragraphe I. 2°), $t_n = t_0 + \sum_{i=0}^{n-1} v_i$ or

$$\sum_{i=0}^{n-1} v_i = v_0 \frac{1-(-\frac{3}{5})^n}{1-(-\frac{3}{5})} = \frac{5}{8}(\ln\frac{w_1}{w_0})[1-(-\frac{3}{5})^n]$$ car (v_n) est une suite

géométrique de raison $-\dfrac{3}{5}$ et de premier terme v_0 :

$v_0 = t_1 - t_0 = ln\, w_1 - ln w_0 = \ln \dfrac{w_1}{w_0}$. Donc pour tout n de $\mathbb{N}$,

$t_n = ln w_0 + \dfrac{5}{8}\ln\dfrac{w_1}{w_0}[1-(-\dfrac{3}{5})^n]$ or $\lim\limits_{n\to+\infty}(-\dfrac{3}{5})^n = 0$.

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = \ln w_0 + \dfrac{5}{8}\ln\dfrac{w_1}{w_0}$ Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = \dfrac{5}{8}\ln w_1 + \dfrac{3}{8}\ln w_0$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, $t_n = ln\, w_n$, d'où $w_n = e^{t_n}$ et donc

$\lim\limits_{n\to+\infty}(w_n) = e^{\frac{5}{8}\ln w_1} \times e^{\frac{3}{8}\ln w_0}$ soit $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = w_1^{\frac{5}{8}} \times w_0^{\frac{3}{8}} = \sqrt[8]{w_1^{\,5} w_0^{\,3}}$.

Exercice N°2

Dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $z^3 - m(1+i)z^2 + im^2z = 0$ où $m \in \mathbb{C}^*$

1°) a°) <u>Résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E)</u>

L'équation (E) devient $z[z^2 - m(1+i)z + im^2] = 0$ d'où

$(z = 0$ ou $z^2 - m(1+i)z + im^2 = 0)$.

Résolvons $z^2 - m(1+i)z + im^2 = 0$

Le discriminant de cette équation est $\Delta = -2im^2$ ou encore

$\Delta = m^2(1-i)^2 = [m(1-i)]^2$.

Les solutions de cette équation du second degré sont :

$$z_1 = \frac{m(1+i) - m(1-i)}{2} = mi \quad et \quad z_2 = \frac{m(1+i) + m(1-i)}{2} = m$$

Les solutions de l'équation (E) sont : $z = 0$ ou $z = m$ ou $z = mi$

Donc $S_{\mathbb{C}} = \{0 \,;\, m \,;\, mi\}$

b°) <u>Nature du triangle OAB</u>

B étant l'image de A par R, rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre O, alors A a pour affixe m et B a pour affixe mi.

$R(A) = B$ équivaut à : $\begin{cases} OA = OB \\ \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \end{cases}$

Comme $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$, alors le triangle OAB est rectangle en O

De plus $OA = OB$, donc le triangle OAB est rectangle et isocèle en O.

2°) a°) Valeur de m pour $1+i$ solution de (E)

Si $1+i$ est solution de (E) alors on a :

$$\begin{cases} 1+i = m \\ \text{ou} \\ 1+i = im \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} m = 1+i \\ \text{ou} \\ m = 1-i \end{cases}$$

Donc, le complexe $1+i$ est solution de (E) pour les valeurs de m égales à $1+i$ ou $1-i$.

b°) Résolution de (E) pour chacune des valeurs trouvées

1er cas $m = 1+i$

Dans ce cas, (E) a pour solutions $z = 0$ ou $z = 1+i$ ou $z = -1+i$

2ème cas : $m = 1-i$

Dans ce cas, (E) a pour solutions $z = 0$ ou $z = 1-i$ ou $z = 1+i$

3°) a°) Détermination du centre et du rayon du cercle (C)

(C) d'équation $x^2 + y^2 - x = 0$.

$$x^2 + y^2 - x = 0 \text{ équivaut à } (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$

Donc le cercle (C) a pour centre le point $\Omega(\frac{1}{2} ; 0)$ et pour rayon $\frac{1}{2}$

b°) Détermination de l'image de (C) par R

Soit $M \in (C)$ et $M' = R(M)$ d'affixes respectives z et z'.

$R(M) = M'$ équivaut à $z' = e^{i\frac{\pi}{2}} z = iz$ Comme $z_\Omega = \frac{1}{2}$ affixe de Ω

alors $z'_\Omega = \frac{1}{2} i$.

Donc l'image du cercle (C) par la rotation R est le cercle (C') de centre $\Omega'(0 ; \frac{1}{2})$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

Problème

f_k définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = (2-x)e^x - k$; où $k \in]0\,;e[$.

1°) <u>Détermination des limites de f_k en $-\infty$ et en $+\infty$</u>

f_k est définie sur $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{-\infty} f_k = \lim\limits_{x\to-\infty} [2e^x - xe^x - k] = -k$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} (e^x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} (xe^x) = 0$

$\lim\limits_{+\infty} f_k = \lim\limits_{x\to+\infty} [(\frac{2}{x} - 1)xe^x - k] = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} (\frac{2}{x} - 1) = -1$ et

$\lim\limits_{x\to+\infty} (xe^x) = +\infty$.

<u>Etude des variations de f_k</u>

On vérifie aisément que f_k est dérivable sur $\mathbb{R}$, et

$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f'_k(x) = (1-x)\,e^x$.

Le signe de $f'_k(x)$ est celui de $(1-x)$.

D'où f_k est strictement croissante sur $]-\infty\,;1[$ et

f_k est strictement décroissante sur $]1\,;+\infty[$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'_k(x)$		$+$	0	$-$	
f_k	$-k$	$\nearrow$	$e-k$	$\searrow$	$-\infty$

3°) a°) <u>Recherche des solutions de l'équation $f_k(x) = 0$</u>

D'après question précédente f_k est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc continue sur $\mathbb{R}$. De plus f_k est strictement croissante sur $]-\infty\,;1[$ et strictement décroissante sur $]1\,;+\infty[$. En plus, $f_k(1) = e - k > 0$ car $k \in]0\,;e[$

$\lim_{-\infty} f_k = -k < 0$ et $\lim_{+\infty} f_k = -\infty$, donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f_k(x) = 0$ admet une solution unique α_k dans $]-\infty\,;1[$ et une solution unique β_k dans $]1\,;+\infty[$

b°) <u>Montrons que</u> $e^{\alpha_k} - k\alpha_k = (e^{\alpha_k} - k)(\alpha_k - 1)$

D'après la question 3°) a°), α_k est solution de $f_k(x) = 0$

d'où $f_k(\alpha_k) = 0 \Leftrightarrow (2 - \alpha_k)\, e^{\alpha_k} - k = 0$

$$\Leftrightarrow 2e^{\alpha_k} - \alpha_k e^{\alpha_k} - k = 0$$
$$\Leftrightarrow e^{\alpha_k} = \alpha_k e^{\alpha_k} + k - e^{\alpha_k}$$
$$\Leftrightarrow e^{\alpha_k} - k\alpha_k = \alpha_k e^{\alpha_k} + k - e^{\alpha_k} - k\alpha_k$$
$$\Leftrightarrow e^{\alpha_k} - k\alpha_k = (\alpha_k - 1)\, e^{\alpha_k} + k(1 - \alpha_k)$$
$$\Leftrightarrow e^{\alpha_k} - k\alpha_k = (\alpha_k - 1)(e^{\alpha_k} - k)$$

En conclusion, on a $e^{\alpha_k} - k\alpha_k = (\alpha_k - 1)(e^{\alpha_k} - k)$ de même, comme β_k est solution de $f_k(x) = 0$, alors β_k vérifie la relation

$e^{\alpha_k} - k\alpha_k = (\alpha_k - 1)(e^{\alpha_k} - k)$ soit $e^{\beta_k} - k\beta_k = (\beta_k - 1)(e^{\beta_k} - k)$

4°) <u>Signe de $f_k(x)$ suivant les valeurs de x</u>

On sait que $f_k(x) = 0$ pour les valeurs α_k et β_k (avec $\alpha_k < \beta_k$) de x.

Dans l'intervalle $]-\infty\,;\alpha_k[$ f_k est strictement croissante d'où, pour tout x vérifiant $x < \alpha_k$, alors $f_k(x) < f_k(\alpha_k)$ soit $f_k(x) < 0$ car $f_k(\alpha_k) = 0$

Dans l'intervalle $]\alpha_k\,, 1[$, f_k est strictement croissante d'où pour tout x vérifiant $\alpha_k < x < 1$ alors $f_k(\alpha_k) < f_k(x) < f_k(1)$ soit $f_k(x) > 0$ car $f_k(\alpha_k) = 0$ et $f_k(1) > 0$

Dans l'intervalle $]1\,;\beta_k[$, f_k est strictement décroissante d'où, pour tout x vérifiant $1 < x < \beta_k$, alors $f_k(\beta_k) < f_k(x) < f_k(1)$ soit $f_k(x) > 0$ car $f_k(\beta_k) = 0$ et $f_k(1) > 0$.

Dans l'intervalle $]\beta_k, +\infty[$, f_k est strictement décroissante d'où, pour tout x vérifiant $x > \beta_k$, alors $f_k(x) < f_k(\beta_k)$ soit $f_k(x) < 0$ car $f_k(\beta_k) = 0$.

En conclusion, on a : $\begin{cases} \forall x \in]-\infty ; \alpha_k[& , \quad f_k(x) < 0 \\ \forall x \in]\alpha_k , 1[& , \quad f_k(x) > 0 \\ \forall x \in]1, \beta_k[& , \quad f_k(x) > 0 \\ \forall x \in]\beta_k , +\infty[& , \quad f_k(x) < 0 \\ \text{pour } x = \alpha_k \text{ ou } \beta_k \text{ alors } f_k(x) = 0 \end{cases}$

Partie B

k réel fixé tel que $0 < k < e$

1°) u la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = e^x - kx$

a°) <u>Etude du sens de variation de</u> x

u est dérivable sur $\mathbb{R}$ car somme des fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto -kx$ qui sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = e^x - k$;

$\forall x \in]-\infty ; \ln k[$, $u'(x) < 0$ d'où u est strictement décroissante sur $]-\infty ; \ln k[$;

$\forall x \in]\ln k ; +\infty[$, $u'(x) > 0$ d'où u est strictement croissante sur $]\ln k ; +\infty[$.

b°) <u>Signe de $u(x)$</u>

D'après la question B.1) a), u admet un minimum absolu au point $\ln k$.
D'où, pour tout x réel, $u(x) > u(\ln k)$.
Or $u(\ln k) = k - k\ln k = k(1 - \ln k)$ et $u(\ln k) > 0$ car $0 < k < e$;
donc pour tout x réel, $u(x) > 0$.

2°) g_k la fonction numérique définie par $g_k(x) = \dfrac{e^x - k}{e^x - kx}$.

La fonction g_k est définie sur $\mathbb{R}$ car $e^x - kx > 0$ pour tout réel x.

a°) <u>Détermination des limites de g_k en $-\infty$ et $+\infty$</u>

$$\lim_{-\infty} g_k = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x - k}{e^x - kx} = 0 \text{ car } \lim_{x \to -\infty}(e^x) = 0 \text{ et } \lim_{x \to -\infty}(kx) = -\infty$$

$$\lim_{+\infty} g_k = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x(1 - \frac{k}{e^x})}{e^x(1 - \frac{kx}{e^x})} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - \frac{k}{e^x}}{1 - \frac{kx}{e^x}} = 1 \quad \text{car } \lim_{x \to +\infty}\left(\frac{k}{e^x}\right) = 0 \text{ et}$$

$$\lim_{x \to +\infty}\left(\frac{kx}{e^x}\right) = 0$$

b°) <u>Dérivée de g_k</u>

g_k est dérivable sur $\mathbb{R}$ car quotient des fonctions $x \mapsto e^x - k$ et $x \mapsto e^x - kx$ qui sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et $e^x - kx > 0$ pour tout x reel.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g'_k(x) = \frac{e^x(e^x - kx) - (e^x - k)(e^x - k)}{(e^x - kx)^2}$$

$$= \frac{k(-x+2)e^x - k^2}{(e^x - kx)^2} = \frac{kf_k(x)}{(e^x - kx)^2}$$

donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'_k(x) = \dfrac{kf_k(x)}{(e^x - kx)^2}$.

c°) <u>Tableau de variation de g_k et calcul de $g_k(1)$</u>

$g'_k(x)$ a le même signe que $f_k(x)$ d'où le tableau de variation de g_k :

x	$-\infty$		α_k		β_k		$+\infty$
$g'_k(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
g_k	0	$\searrow$	$g_k(\alpha_k)$	$\nearrow$	$g_k(\beta_k)$	$\searrow$	1

<u>Calcul de $g_k(1)$</u> : $g_k(1) = \dfrac{e-k}{e-k} = 1$ donc $g_k(1) = 1$

3°) M_k et N_k les points de (C_k), d'abscisses respectives α_k et β_k

a°) <u>Montrons que</u> : $g_k(\alpha_k) = \dfrac{1}{\alpha_k - 1}$

$g_k(\alpha_k) = \dfrac{e^{\alpha_k} - k}{e^{\alpha_k} - k\alpha_k}$ or $e^{\alpha_k} - k\alpha_k = (e^{\alpha_k} - k)(\alpha_k - 1)$ d'après la question A)3°)a°).

D'où $g_k(\alpha_k) = \dfrac{(e^{\alpha_k} - k)}{(e^{\alpha_k} - k)(\alpha_k - 1)} = \dfrac{1}{\alpha_k - 1}$ donc $g_k(\alpha_k) = \dfrac{1}{\alpha_k - 1}$.

b°) <u>Montrons que</u> $g_k(\beta_k) = \dfrac{1}{\beta_k - 1}$

$g_k(\beta_k) = \dfrac{e^{\beta_k} - k}{e^{\beta_k} - k\beta_k} = \dfrac{(e^{\beta_k} - k)}{(e^{\beta_k} - k)(\beta_k - 1)} = \dfrac{1}{\beta_k - 1}$ d'après la question A)3°)a°). donc $g_k(\beta_k) = \dfrac{1}{\beta_k - 1}$.

c°) Courbe fixe (H) des points M_k et N_k

Quand k varie, les points M_k et N_k sont sur la courbe fixe (H) d'équation $y = \dfrac{1}{x-1}$.

4°) a°) Position relative des courbes (C_1) et (C_2)

(C_1) est la courbe de la fonction $g_1 : x \mapsto g_1(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x - x}$

(C_2) est la courbe de la fonction $g_2 : x \mapsto g_2(x) = \dfrac{e^x - 2}{e^x - 2x}$

Pour la position relative de (C_1) et (C_2) etudions le signe de $g_1(x) - g_2(x)$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g_1(x) - g_2(x) = \frac{e^x(1-x)}{(e^x - x)(e^x - 2x)}$$

$g_1(x) - g_2(x)$ est du signe de $(1 - x)$. Par conséquent.

$$\forall x \in]1\ ,+\infty[,\ g_1(x) - g_2(x) < 0$$

$$\text{et } \forall x \in]-\infty\ ,1[,\ g_1(x) - g_2(x) > 0$$

Donc (C_1) est en dessous de (C_2) dans $]1\ ,+\infty[$ et (C_1) est au-dessus de (C_2) dans $]-\infty\ ;1[$

b°) Prouvons que $\alpha_2 = 0$

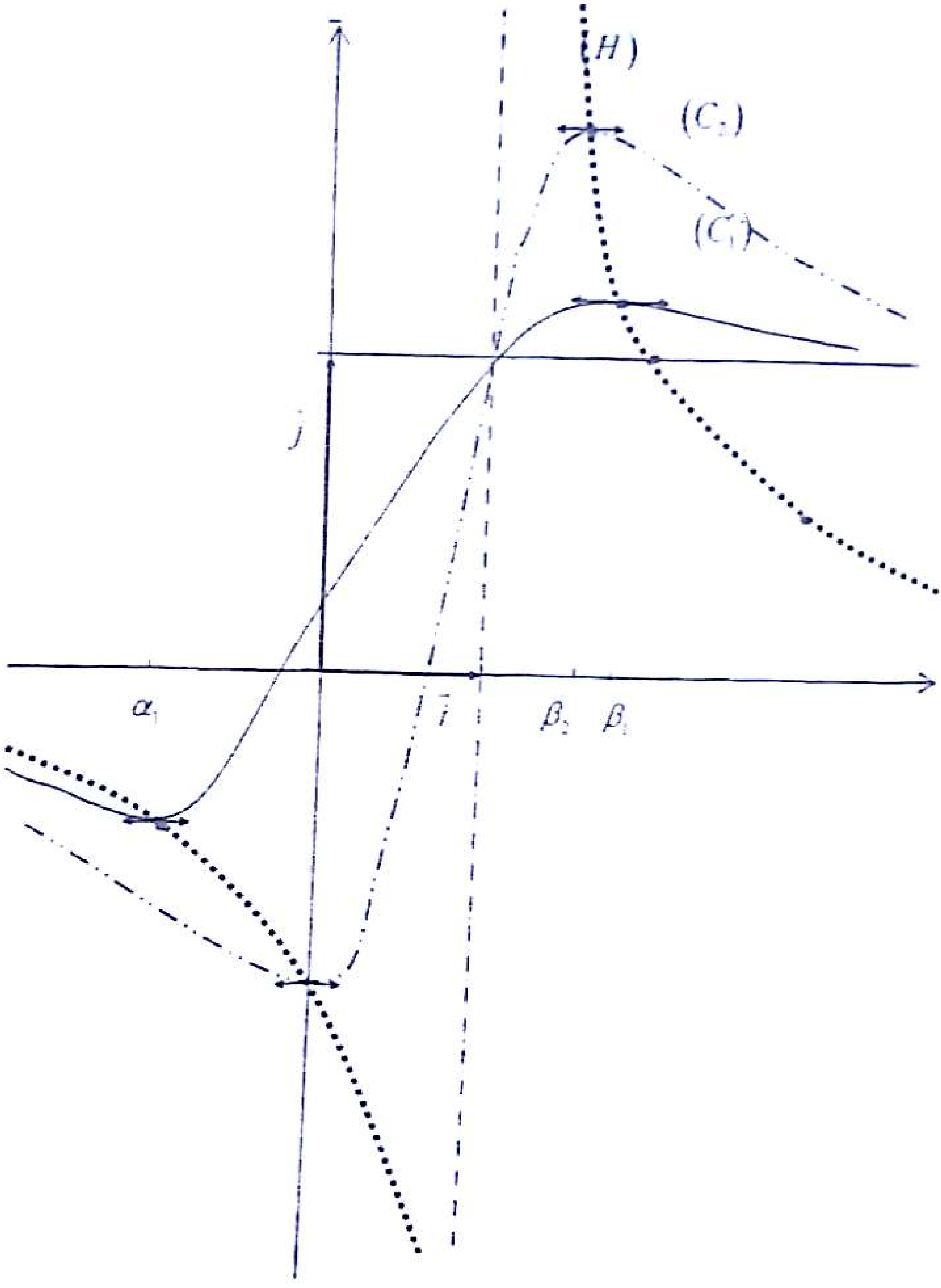
D'après la question A)3°)a°), α_k est l'unique solution de l'équation $f_k(x) = 0$ dans $]-\infty\ ; 1[$. Or pour $k = 2$, on a $f_2(x) = (2 - x)e^x - 2$ et $f_2(0) = 2 - 2 = 0$ donc $\alpha_2 = 0$.

c°) Traçons les courbes (C_1), (C_2) et (H)

Les courbes (C_1) et (C_2) ont pour asymptotes horizontales, les droites d'équations $y = 0$ en $-\infty$ et $y = 1$ en $+\infty$.

La courbe (H) a pour asymptote horizontale la droite d'équation $y = 0$ et pour asymptote verticale la droite d'équation $x = 1$.

$\alpha_1 = -1,1$; $\alpha_2 = 0$; $\beta_1 = 1,8$; $\beta_2 = 1,6$



5°)a°) <u>Calcul d'aire A(λ)</u>

A(λ) l'aire du domaine du plan défini par :

$$\begin{cases} 1 \leq x \leq \lambda \\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x) \end{cases} \quad \text{avec } \lambda > 1$$

D'après la question B°)4°)a°), pour tout x de $]1\ ;+\infty[$, on a : $g_1(x) - g_2(x) < 0$,

d'où $A(\lambda) = [\int_1^{\lambda} (g_2(x) - g_1(x))\, dx\ ] \times 8cm^2$.

Or $\int_1^{\lambda}(g_2(x) - g_1(x)dx = [\int_1^{\lambda}(\frac{e^x - 2}{e^x - 2x})dx - \int_1^{\lambda}\frac{e^x - 1}{e^x - x}dx$

$$= [\ln(e^x - 2x)]_1^{\lambda} - [\ln(e^x - x)]_1^{\lambda}$$

$$= \ln(e^{\lambda} - 2\lambda) - \ln(e - 2) - \ln(e^{\lambda} - \lambda) + \ln(e - 1)$$

$$= \ln(\frac{e^{\lambda} - 2\lambda}{e^{\lambda} - \lambda}) - \ln(\frac{e - 1}{e - 2})$$

Donc $A(\lambda) = (8\ \ln(\frac{e^{\lambda} - 2\lambda}{e^{\lambda} - \lambda}) + 8\ln(\frac{e - 1}{e - 2}))cm^2$

b°) <u>Limite de A(λ) en + ∞</u>

$\lim_{\lambda \to +\infty} A(\lambda) = 8\ln\frac{e - 1}{e - 2}cm^2$

car $\lim_{\lambda \to +\infty} \ln\frac{e^{\lambda} - 2\lambda}{e^{\lambda} - \lambda} = \lim_{\lambda \to +\infty} (\ln\frac{1 - 2\lambda e^{-\lambda}}{1 - \lambda e^{-\lambda}}) = 0$

puisque $\lim_{\lambda \to +\infty} (\lambda e^{-\lambda}) = 0$.