

# CARGO

Collection de Mathématiques



**LIVRE DU PROFESSEUR**

ISBN : 978.2.7531.0755.7

© Hachette Livre International, 2016

**Suivi éditorial et mise en page :** Acquansù

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés pour tous pays.

L'article L. 122-4 du Code de la propriété intellectuelle dispose que « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite, il en est de même pour la traduction, l'adaptation ou la transformation ».

Ne sont autorisées aux termes de l'article L. 122-5 du Code que « les copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et « les analyses et les courtes citations notamment dans un but d'exemple et d'illustration ». Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, sans autorisation de l'éditeur constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle français. Le Centre Français de l'exploitation de la Copie (20, rue des Grands-Augustins 75006 Paris France) est, conformément à l'article L.122-10 du Code de la propriété intellectuelle, le seul habilité à délivrer des autorisations de reproduction par reprographie, sous réserve en cas d'utilisation aux fins de vente, de location, de publicité ou de promotion de l'accord de l'auteur ou des ayants droit.

# Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Angle inscrit et polygones inscriptibles</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>Transformations du plan</b>	<b>80</b>
	Activités d'introduction	5		Activités d'introduction	80
	Savoir-faire	6		Savoir-faire	83
	Exercices d'entraînement	7		Exercices d'entraînement	84
	Faire le point	12		Faire le point	91
	Exercices d'approfondissement	13		Exercices d'approfondissement	93
<b>2</b>	<b>Angles orientés et trigonométrie</b>	<b>19</b>	<b>7</b>	<b>Géométrie dans l'espace</b>	<b>100</b>
	Activités d'introduction	19		Activités d'introduction	100
	Savoir-faire	20		Savoir-faire	102
	Exercices d'entraînement	21		Exercices d'entraînement	103
	Faire le point	26		Faire le point	109
	Exercices d'approfondissement	28		Exercices d'approfondissement	110
<b>3</b>	<b>Vecteurs</b>	<b>32</b>	<b>8</b>	<b>Statistiques</b>	<b>118</b>
	Activités d'introduction	32		Activités d'introduction	118
	Savoir-faire	33		Savoir-faire	120
	Exercices d'entraînement	34		Exercices d'entraînement	121
	Faire le point	40		Faire le point	124
	Exercices d'approfondissement	41		Exercices d'approfondissement	126
<b>4</b>	<b>Produit scalaire</b>	<b>46</b>	<b>9</b>	<b>Calculs dans <math>\mathbb{R}</math></b>	<b>129</b>
	Activités d'introduction	46		Activités d'introduction	129
	Savoir-faire	48		Savoir-faire	131
	Exercices d'entraînement	49		Exercices d'entraînement	132
	Faire le point	55		Faire le point	139
	Exercices d'approfondissement	57		Exercices d'approfondissement	140
<b>5</b>	<b>Équations de droites et de cercles</b>	<b>65</b>	<b>10</b>	<b>Fonctions – Généralités</b>	<b>146</b>
	Activités d'introduction	65		Activités d'introduction	146
	Savoir-faire	65		Savoir-faire	147
	Exercices d'entraînement	66		Exercices d'entraînement	149
	Faire le point	73		Faire le point	153
	Exercices d'approfondissement	74		Exercices d'approfondissement	154

### **11 fonctions usuelles** ..... **160**

Activités d'introduction .....	160
Savoir-faire .....	162
Exercices d'entraînement .....	164
Faire le point .....	170
Exercices d'approfondissement .....	171

### **12 Polynômes et fractions rationnelles** ..... **176**

Activités d'introduction .....	176
Savoir-faire .....	177
Exercices d'entraînement .....	178
Faire le point .....	185
Exercices d'approfondissement .....	186

### **13 Équations et inéquations dans $\mathbb{R}$** ..... **192**

Activités d'introduction .....	192
Savoir-faire .....	193
Exercices d'entraînement .....	194
Faire le point .....	200
Exercices d'approfondissement .....	202

### **14 fonctions usuelles** ..... **207**

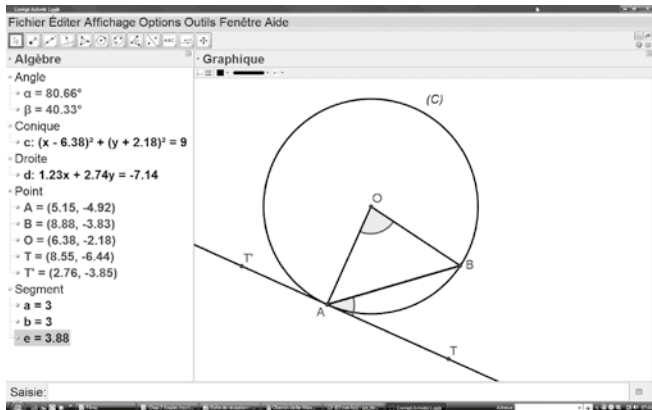
Activités d'introduction .....	207
Savoir-faire .....	208
Exercices d'entraînement .....	209
Faire le point .....	215
Exercices d'approfondissement .....	216

# 1 Angles inscrits et polygones inscrits

## Activités d'introduction

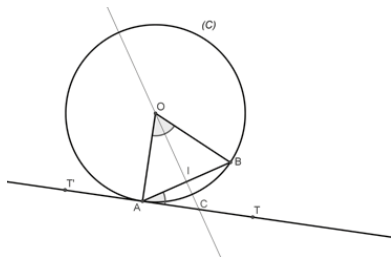
### 1 Angle inscrit et demi-tangente

1. a. Voir figure ci-dessous.



b. On conjecture que  $\widehat{TAB} = \frac{1}{2} \widehat{AOB}$ .

2. a.



b. Le triangle  $OAB$  est isocèle en  $O$  et  $I$  est le milieu de  $[AB]$ , donc  $(OI) \perp (AB)$ ; de plus  $\widehat{TAB} \neq 90^\circ$ ; donc les droites  $(OI)$  et  $(AT)$  ne sont pas parallèles. Elles sont donc sécantes en un point  $C$ .

c. Puisque  $(OI) \perp (AT)$ :

• dans le triangle  $AIC$ , on a :  $\widehat{AOI} + \widehat{OAB} = 90^\circ$  et ;

• dans le triangle  $AOC$  rectangle en  $A$  (puisque  $(AT)$  est tangente au cercle), on a :  $\widehat{CAB} + \widehat{OAB} = 90^\circ$  d'où l'égalité.

d.  $\widehat{CAB} = \widehat{TAB}$  donc :

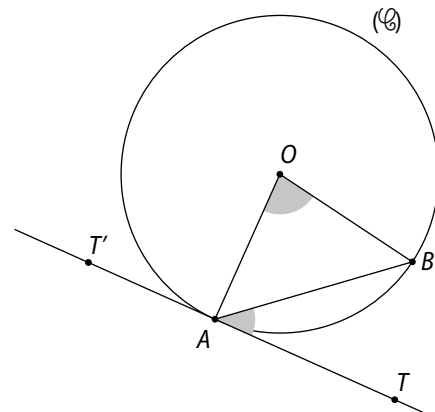
$$\widehat{TAB} = \widehat{AOI} + \widehat{OAB} - \widehat{OAB} = \widehat{AOI}.$$

Or, puisque le triangle  $AOB$  est isocèle en  $O$ ,  $(OI)$  est aussi la bissectrice de l'angle  $\widehat{AOB}$ .

Ainsi,  $\widehat{AOB} = 2 \times \widehat{AOI}$  et  $\widehat{TAB} = \frac{1}{2} \widehat{AOB}$ .

### 2 À l'entraînement

1. a.



b. On observe que  $\widehat{BAD} + \widehat{DCB} = 180^\circ$  et que  $\widehat{CBA} + \widehat{ADC} = 180^\circ$ .

2. a. L'angle inscrit  $\widehat{BAD}$  intercepte l'arc  $\widehat{BD}$ ; tandis que l'angle inscrit  $\widehat{DCB}$  intercepte l'arc  $\widehat{BD}$ .

On en déduit que  $\widehat{DAB} + \widehat{DCB} = 180^\circ$ .

b. Puisque  $\widehat{B} + \widehat{D} \neq 180^\circ$ , c'est que le polygone  $ABCD$  n'est plus inscrit dans le cercle  $(C)$ ; un joueur est sorti du cercle : le jeu s'arrête.

3. a.  $\widehat{C} = 180^\circ - \widehat{A}$ , or l'angle inscrit  $\widehat{A}$  intercepte l'arc  $\widehat{BD}$ , donc l'angle  $\widehat{C}$  intercepte l'arc  $\widehat{BD}$  et est situé sur le même cercle que  $A, B$  et  $D$ .

b. Les points  $A, B, C, D$  sont donc tous situés sur le même cercle. On en déduit que le quadrilatère  $ABCD$  est inscrit.

### 3 Sinus d'un angle

1. a.  $\sin \widehat{BAC} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \frac{BC}{AC}$ .

b.  $\mathcal{A}_b = \frac{AC \times BH}{2}$ ;  $\sin \widehat{BAC} = \frac{BH}{AB}$ .

c.  $\mathcal{A}_c = \frac{AB \times CK}{2}$ ;  $\sin \widehat{BAC} = \frac{CK}{AC}$ .

d. De l'égalité  $\frac{AC \times BH}{2} = \frac{AB \times CK}{2}$ , on déduit que

$$CK = \frac{AC \times BH}{AB}.$$

Ainsi  $\sin \widehat{BAC} = \frac{CK}{AC} = \frac{AC \times BH}{AB \times AC} = \frac{AC \times BH}{AB \times AC} = \frac{BH}{AC}$ , d'où l'égalité.

2. a.  $\mathcal{A}_b = \frac{AC \times BH}{2} = \frac{AB \times CK}{2}$

d'où  $2 \mathcal{A}_b = AC \times BH = AB \times CK$ .

b. On en déduit que  $\frac{AC}{CK} = \frac{AB}{BH}$ .

#### 4 Relations métriques dans un triangle

1. a.  $\widehat{A}$  : angle aigu  $\rightarrow \sin \widehat{A} = \frac{CK}{AC} = \frac{CK}{b}$  ;

$\widehat{A}$  : angle droit  $\rightarrow \sin \widehat{A} = \frac{CA}{AC} = 1$  ;

$\widehat{A}$  : angle obtus  $\rightarrow \sin \widehat{A} = \frac{CK}{AC} = \frac{CK}{b}$ .

b. Dans chacun des cas :

$\mathcal{A}_b = \frac{AB \times CK}{2} = \frac{AB \times AC \sin \widehat{A}}{2} = \frac{BC \sin \widehat{A}}{2}$ .

c.  $\mathcal{A}_b = \frac{BC \times AB \sin \widehat{B}}{2} = \frac{ac \sin \widehat{B}}{2}$

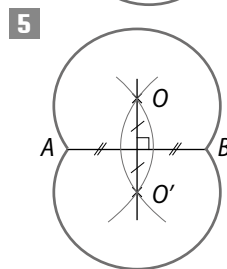
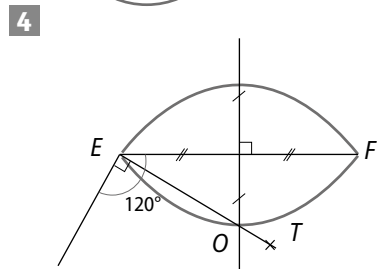
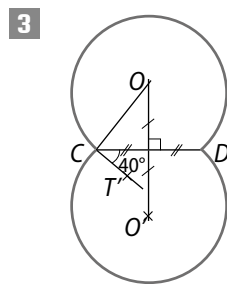
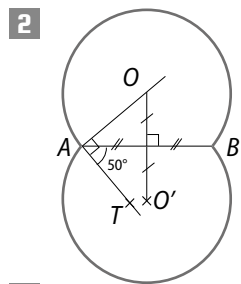
et  $\mathcal{A}_b = \frac{AC \times BC \sin \widehat{C}}{2} = \frac{ab \sin \widehat{C}}{2}$ .

2. a.  $\frac{abc}{2 \mathcal{A}_b} = \frac{abc}{BC \sin \widehat{A}} = \frac{a}{\sin \widehat{A}}$ .

b. En procédant de même avec les expressions obtenues au 1. c., on en déduit que :

$\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}}$ .

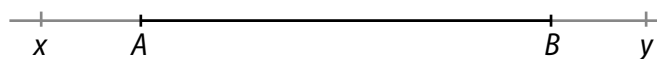
### Savoir-faire



6 a. Les points  $M$  vérifient  $\widehat{AMB} \approx 130^\circ$ .

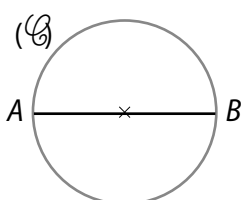
b. Les points  $M$  vérifient  $\widehat{AMB} \approx 50^\circ$ .

7 a.  $\widehat{AMB} = 0^\circ$ .



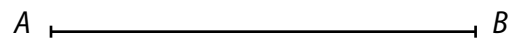
L'ensemble des points  $M$  est constitué des demi-droites  $]Ax)$  et  $]By)$ .

b.  $\widehat{AMB} = 90^\circ$ .



L'ensemble des points  $M$  est constitué du cercle (G) de diamètre  $[AB]$  à l'exception des points  $A$  et  $B$ .

c.  $\widehat{AMB} = 180^\circ$



L'ensemble des points  $M$  est constitué du segment  $[AB]$  à l'exception des points  $A$  et  $B$ .

10 a. Les arcs  $\widehat{AB}$  et  $\widehat{BC}$  sont de même longueur, donc  $\widehat{ADB} = \widehat{CDB}$ .

Ainsi,  $(BD)$  est la bissectrice de l'angle  $\widehat{ADC}$ .

b. Puisque l'angle  $\widehat{ADB}$  intercepte l'arc  $\widehat{AB}$  et l'angle  $\widehat{ACB}$  intercepte l'arc  $\widehat{AB}$ ,  $\widehat{ADB} = \widehat{ACB}$ .

Or le triangle  $ABC$  est équilatéral, donc  $\widehat{ABC} = 60^\circ$ .

Ainsi  $\widehat{ADB} = 60^\circ$ .

11 On utilise les propriétés du paragraphe 3. b.

•  $\frac{e}{\sin \widehat{E}} = 2R$  d'où  $\sin \widehat{E} = \frac{8\sqrt{2}}{2 \times 8} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,

donc  $\widehat{E} = 45^\circ$ .

• Puisque le triangle  $EFG$  est isocèle en  $\widehat{E}$  :

$\widehat{F} = \widehat{G} = \frac{180^\circ - \widehat{E}}{2} = 67,5^\circ$ .

## Exercices d'entraînement

12 a.  $\widehat{BD}$  ; b.  $\widehat{BD}$  ; c.  $\widehat{DC}$ .

13  $\widehat{BFD}$  et  $\widehat{BED}$ .

14 a. Le triangle  $ABC$  est isocèle en  $A$ .

b. Les arcs  $\widehat{BA}$  et  $\widehat{AC}$  sont de même longueur.

c. Les arcs  $\widehat{BA}$  et  $\widehat{AC}$  sont de même longueur.

15 a.  $\widehat{ADC}$  et  $\widehat{AOC}$ .

b.  $\widehat{ABC}$  et  $\widehat{ADC}$ .

16 a.  $(AA')$  est la bissectrice de l'angle  $\widehat{BAC}$ .

b. Les trois bissectrices d'un triangle sont concourantes donc  $(AA')$ ,  $(BB')$  et  $(CC')$  sont concourantes.

17 a. Les angles  $\widehat{DAE}$  et  $\widehat{ACB}$  sont correspondants et  $(OA) \parallel (BC)$ , donc  $\text{mes } \widehat{DAE} = \text{mes } \widehat{ACB} = 30^\circ$ .

Or,  $\text{mes } \widehat{AOB} = 2 \text{ mes } \widehat{ACB}$ , donc  $\text{mes } \widehat{AOB} = 60^\circ$ .

b.  $\text{mes } \widehat{AOB} = 60^\circ$  et  $OA = OB$ , donc le triangle  $AOB$  est équilatéral.

18 a.  $\widehat{ACB}$  et  $\widehat{AEB}$ .

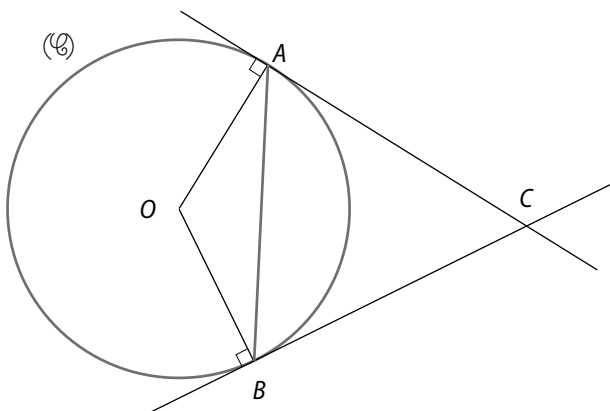
b.  $\widehat{AFB}$  et  $\widehat{ADB}$ .

19  $\widehat{ACB}$  et  $\widehat{TBA}$ .

20 a. l'angle  $\widehat{NOP}$  est complémentaire à  $\widehat{NMP}$  puisque  $\text{mes } \widehat{NOP} = 2 \text{ mes } \widehat{NMP} = 60^\circ$ .

b. L'angle  $\widehat{QST}$  est supplémentaire à  $\widehat{NMP}$  puisque  $\text{mes } \widehat{NMP} = \text{mes } \widehat{RQS} = \text{mes } \widehat{TSR} = 30^\circ$ , donc  $\text{mes } \widehat{QST} = 150^\circ$ .

21 a.



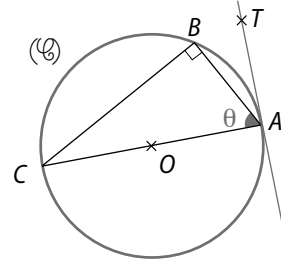
b.  $\text{mes } \widehat{BAC} = \frac{1}{2} \text{ mes } \widehat{BOC}$

et  $\text{mes } \widehat{ABC} = \frac{1}{2} \text{ mes } \widehat{BOC}$ , donc  $\text{mes } \widehat{ABC} = \text{mes } \widehat{BAC}$ .

Le triangle  $ABC$  est donc isocèle en  $C$ .

22 Puisque le triangle  $ABC$  est rectangle en  $B$  :  
 $\text{mes } \widehat{BCA} = 90^\circ - \text{mes } \widehat{BAC} = 90^\circ - \theta$ .

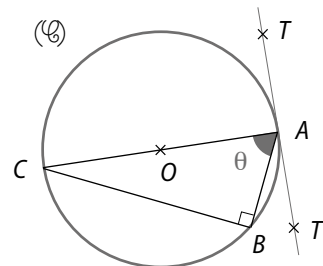
• Premier cas :  $\text{mes } \widehat{TAB} = \text{mes } \widehat{BCA} = 90^\circ - \theta$ .



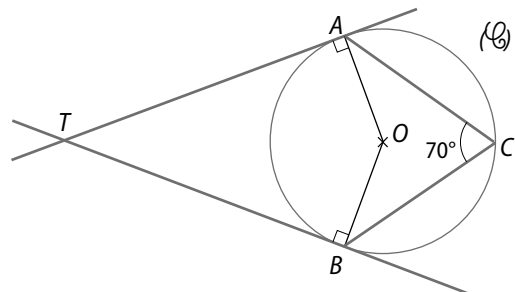
• Deuxième cas :

$\text{mes } \widehat{TAB} = 180^\circ - \text{mes } \widehat{T'AB}$ , or  $\text{mes } \widehat{T'AB} = \text{mes } \widehat{BCA}$ ,  
 donc  $\text{mes } \widehat{TAB} = 180^\circ - (90^\circ - \theta)$

$\text{mes } \widehat{TAB} = 90^\circ + \theta$ .



23



• Le triangle  $ABC$  est isocèle en  $C$ , donc  $\text{mes } \widehat{CAB} = \text{mes } \widehat{ABC} = \frac{180^\circ - 70^\circ}{2} = 55^\circ$ .

•  $(OC)$  est la bissectrice de l'angle  $\widehat{ACB}$  car  $(OC)$  est la médiatrice de  $[AB]$  et que le triangle  $ABC$  est isocèle en  $C$ , donc  $\text{mes } \widehat{OCB} = 35^\circ$ .

• Le triangle  $OBC$  est isocèle en  $O$  car  $OB = OC$ , donc  $\text{mes } \widehat{OCB} = 35^\circ$ .

• Puisque  $(TB)$  est tangente à  $(\mathcal{C})$  en  $B$ ,  $\text{mes } \widehat{OBT} = 90^\circ$ .

• Ainsi  $\text{mes } \widehat{CBT} = \text{mes } \widehat{OCB} + \text{mes } \widehat{OBT} = 125^\circ$ .

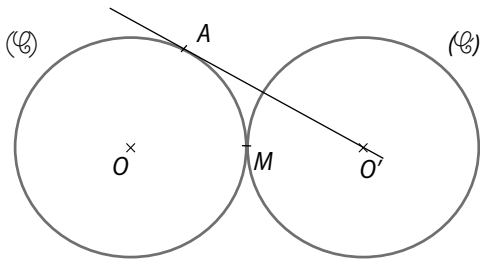
• De même,  $\text{mes } \widehat{CAT} = 125^\circ$ .

• Dans le quadrilatère  $ATBC$  :

$\text{mes } \widehat{ATB} = 360^\circ - (\text{mes } \widehat{CBT} + \text{mes } \widehat{CAT} + \text{mes } \widehat{ACB})$

$\text{mes } \widehat{ATB} = 360^\circ - (125^\circ + 125^\circ + 70^\circ) = 40^\circ$ .

24



a. • Puisque  $(AO')$  est tangente à  $(\mathcal{C})$  en  $A$ ,  $(OA) \perp (AO')$ , donc le triangle  $OAO'$  est rectangle en  $A$ .

• Le triangle  $OAO'$  est rectangle en  $A$  donc il est inscrit dans un cercle dont le diamètre est  $[OO']$ .  $M$  est le milieu de  $[OO']$  et donc le centre de ce cercle. Ainsi  $MA = MO'$ .

D'où on en déduit que le triangle  $MAO'$  est isocèle en  $M$ .

• Puisque  $MO' = MA = MO = OA$ , on en déduit que le triangle  $OAM$  est équilatéral.

b.  $\widehat{AMO'} = 180^\circ - \widehat{AMO} = 120^\circ$ .

•  $\widehat{AO'M} = \widehat{MAO'}$  puisque le triangle  $AMO'$  est isocèle en  $M$ .

De plus, puisque  $(AO')$  est tangente à  $(\mathcal{C})$  en  $A$  :

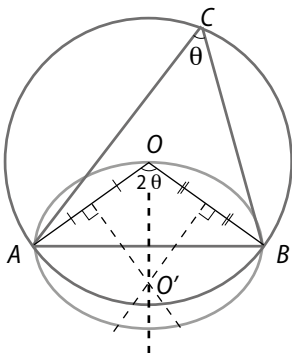
$$\widehat{MAO'} = \frac{1}{2} \widehat{AOM} = 30^\circ.$$

Ainsi,  $\widehat{AO'M} = 30^\circ$ .

25 Il s'agit du cercle de diamètre  $[AB]$  à l'exception des points  $A$  et  $B$ .

26 Oui, tous les autres points situés sur l'arc de cercle symétrique de  $\widehat{AB}$  par rapport à  $(AB)$ .

27



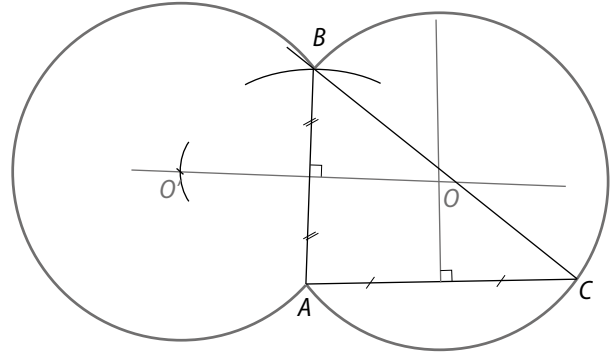
• Puisque  $\widehat{ACB} = \theta$ , on en déduit que  $\widehat{AOB} = 2\theta$ .

• On trace alors le point  $O'$ , centre du cercle circonscrit au triangle  $AOB$ .

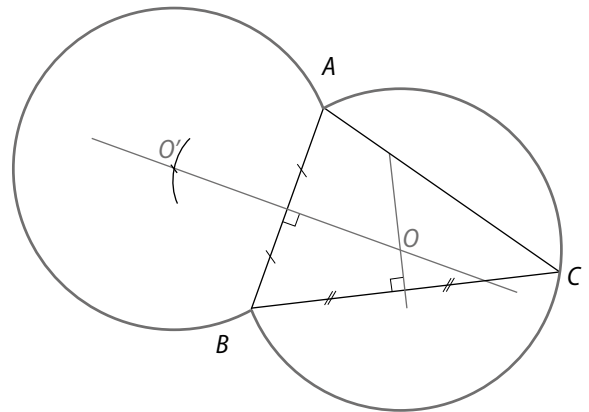
• L'arc de cercle vert passant par  $O$  et d'extrémités  $A$  et  $B$  est l'un des arcs capables cherchés.

• Le deuxième arc capable vert est obtenu par symétrie par rapport à  $(AB)$ .

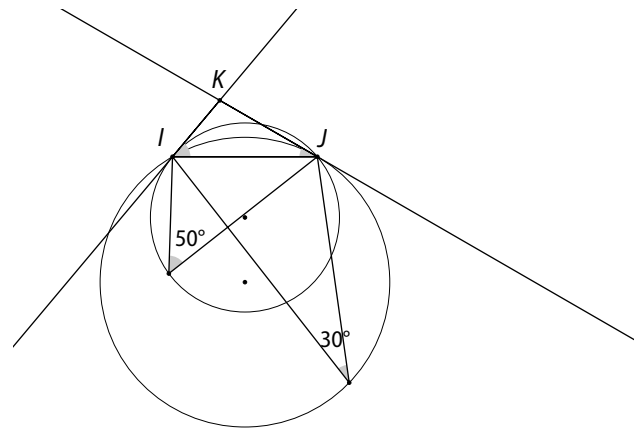
28 a., b., c.



29



30 L'ensemble des points  $M$  tels que  $\widehat{IMJ} = 30^\circ$  est situé sur le (l'un des) cercle(s) tangent(s) à  $(JK)$  en  $J$  et l'ensemble des points  $M$  tels que  $\widehat{JMK} = 50^\circ$  est situé sur le (l'un des) cercle(s) tangent(s) à  $(IK)$  en  $I$ .



31  $\widehat{AKB} = 60^\circ$ .

Le triangle  $ABK$  est isocèle en  $K$ , donc :

$$\widehat{KAB} = \widehat{KBA} = \frac{180 - 60}{2} = 60^\circ.$$

Donc le triangle  $ABK$  est équilatéral.

Ainsi  $AB = BK = AK = 2$  et, d'après la propriété de Pythagore :

$$OK^2 = BK^2 - OB^2$$

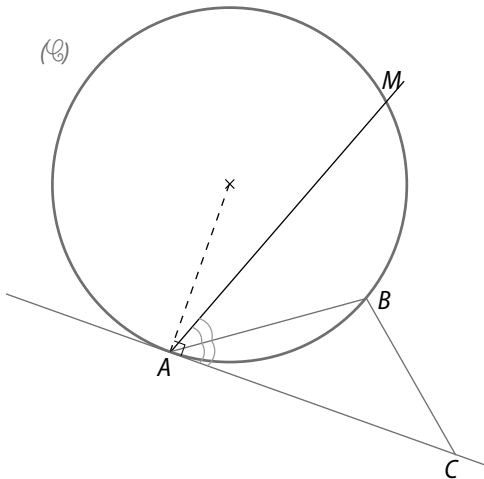
$$OK^2 = 2^2 - 1^2$$

$$OK^2 = 3 \text{ d'où } OK = \sqrt{3} \text{ et } MK = \sqrt{3} - 1.$$

**32**  $\widehat{BMC} = \widehat{BMA} + \widehat{AMC}$   
 $\widehat{BMC} = 115^\circ + 65^\circ$   
 $\widehat{BMC} = 180^\circ$

Donc les points  $B, M$  et  $C$  sont alignés.

**33**



•  $[AC]$  est la demi-tangente en  $A$  au cercle  $(\mathcal{C})$  passant par  $A$  et  $B$ , donc tout point  $M$  du cercle  $(\mathcal{C})$  vérifie :  $\widehat{AMB} = \widehat{BAC}$ .

• Il suffit alors de choisir le point  $M$  de  $(\mathcal{C})$  tel que :  $\widehat{CAB} = \widehat{MAB}$ .

**34 a.** Les arcs rouges sont les arcs capables d'extrémités  $A$  et  $B$  et de mesure  $135^\circ$ .

**b.** Les arcs verts sont les arcs capables d'extrémités  $A$  et  $B$  et de mesure  $45^\circ$ .

**35 a.** Oui car deux de ses angles opposés sont supplémentaires ( $\widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ$ ).

**b.** Oui car deux de ses angles opposés ont même mesure ( $\widehat{E} = \widehat{H} = 30^\circ$ ).

**c.** Oui car deux de ses angles opposés sont supplémentaires ( $\widehat{I} + \widehat{K} = 180^\circ$ ).

**d.** Oui car deux de ses angles opposés sont de même mesure ( $\widehat{M} = \widehat{O} = 90^\circ$ ).

**36 a.**  $\alpha = 50^\circ$  ; **b.**  $\alpha = 70^\circ$  ; **c.**  $\alpha = 90^\circ$  ; **d.**  $\alpha = 20^\circ$ .

**37**  $ABCD$  désigne un parallélogramme.

• Si  $ABCD$  est un rectangle, alors il est inscrit car  $\widehat{A} + \widehat{C} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ .

• Si  $ABCD$  est un parallélogramme inscrit alors, d'une part  $\widehat{A} = \widehat{C}$  (car c'est un parallélogramme) et d'autre part  $\widehat{A} + \widehat{C} = 180^\circ$  (car il est inscrit), donc  $\widehat{A} = 90^\circ$ .

Ainsi  $ABCD$  est un rectangle.

**38**  $ABCD$  désigne un losange.

• Si  $ABCD$  est un carré, alors il est inscrit car :  $\widehat{A} + \widehat{C} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ .

• Si  $ABCD$  est un losange inscrit alors, d'une part  $\widehat{A} = \widehat{C}$  (car c'est un losange et que le triangle  $ABC$  est isocèle en  $B$ ) et d'autre part  $\widehat{A} + \widehat{C} = 180^\circ$  (car il est inscrit), donc  $\widehat{A} = 90^\circ$ .

Ainsi  $ABCD$  est un carré.

**39 a.** Dans le quadrilatère  $MPNQ$ , on déduit que :

$\widehat{QMP} = \widehat{QNP} = 36^\circ$ .

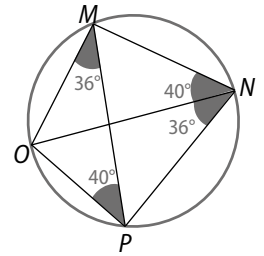
• Dans le quadrilatère croisé  $MNPQ$ , on déduit que :

$\widehat{MNQ} = \widehat{MPQ} = 40^\circ$ .

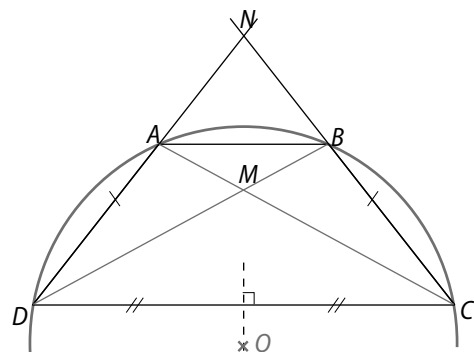
• Dans le quadrilatère  $MNPQ$ , on déduit que :

$\widehat{MQP} = 180^\circ - \widehat{MNP} = 104^\circ$ .

**b.**  $\widehat{MNP} = 76^\circ$ .



**40**



**a.** Puisque le trapèze  $ABCD$  est isocèle, on a :

$\widehat{D} = \widehat{C}$  et  $\widehat{A} = \widehat{B}$ .

Or  $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 360^\circ$ , donc :

$\widehat{A} + \widehat{C} = 180^\circ$ , donc  $ABCD$  est inscrit.

**b.**  $\widehat{DOM} = \widehat{DOA} + \widehat{AOM}$

$$= 2 \widehat{DCA} + \frac{1}{2} \widehat{AOB}$$

$$= 2 \widehat{DCA} + \widehat{ACB}$$

$$= \widehat{BDC} + \widehat{BDC} + \widehat{ADB}$$

$$= \widehat{BDC} + \widehat{ADC}$$

$$= \widehat{DCA} + \widehat{ADC}$$

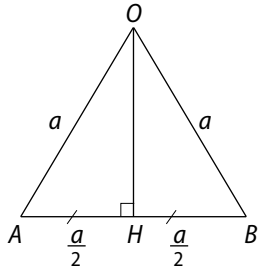
$$= 180^\circ - \widehat{DAC}$$

$$= 180^\circ - \widehat{DAM}$$

Ainsi,  $\widehat{DOM} + \widehat{DAM} = 180^\circ$ , donc le quadrilatère  $AMOD$  est inscrit.

- 41** Triangle équilatéral :  $\alpha = 60^\circ, \theta = 120^\circ$   
 Carré :  $\alpha = 45^\circ, \theta = 90^\circ$   
 Pentagone régulier :  $\alpha = 36^\circ, \theta = 72^\circ$   
 Hexagone régulier :  $\alpha = 30^\circ, \theta = 60^\circ$

**42a.** On note  $ABCDEF$  cet hexagone régulier de centre  $O$  et d'aire  $\mathcal{A}_6 = 24\sqrt{3} \text{ dm}^2$ .  
 Il est constitué de six triangles équilatéraux de côté  $a$  et d'aire  $\mathcal{A}'$ .



Or, d'une part,  $\mathcal{A}' = \frac{\mathcal{A}_6}{6} = 4\sqrt{3} \text{ cm}^2$  et, d'autre part,  $\mathcal{A}' = \frac{OH \times AB}{2}$

où  $OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a}{2}\sqrt{3} \text{ dm}$ .

donc  $\mathcal{A}' = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{3} \times a}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Ainsi,  $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$  d'où  $a^2 = 16$  et  $a = 4 \text{ dm}$ .

**b.** Le rayon de son cercle inscrit est  $OH = 2\sqrt{3} \text{ dm}$ .

**43** On note  $ABCDE$  ce pentagone régulier de centre  $O$  et d'aire  $\mathcal{A}_5 = 5 \text{ cm}^2$ .

Or  $ABCDE$  est constitué de cinq triangles isocèles identiques à  $OAB$ , donc  $\mathcal{A}(OAB) = \frac{5}{5} = 1 \text{ cm}^2$ .

Or,  $\mathcal{A}(OAB) = \frac{1}{2} \times a \times a \times \sin 72^\circ$

$\mathcal{A}(OAB) = \frac{a^2}{8} \times \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$

Ainsi,  $a^2 = \frac{8}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$  et  $a = \sqrt{\frac{8}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}}$ .

**44** Puisque  $ABCDEFGH$  est un octogone régulier,

$\text{mes } \widehat{AOB} = \frac{360}{8} = 45^\circ$ .

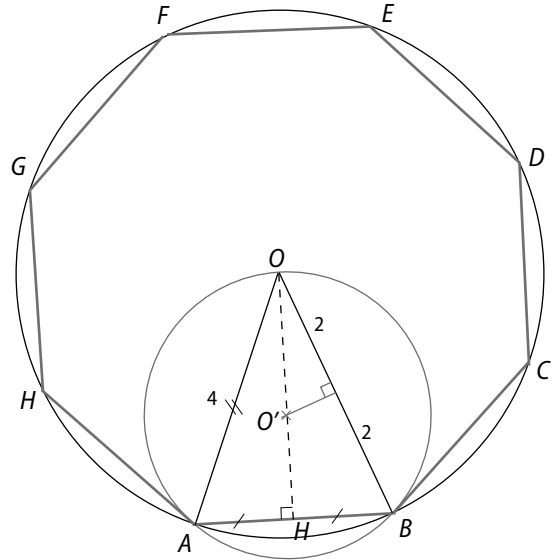
Dans le triangle  $OAB$ , on note  $H$  le pied de la hauteur issue de  $O$  et  $O'$  le point d'intersection de la médiatrice de  $[OB]$  et  $[OH]$ .

$O'$  est le centre du cercle circonscrit au triangle  $OAB$ .

Or,  $\cos 22,5 = \frac{2}{OO'}$  donc  $OO' = \frac{2}{\cos 22,5} \approx 2,17$ .

Ainsi,  $\frac{AB}{\sin \widehat{AOB}} = 2 \times OO'$  donc  $AB \approx 2 \times 2,17 \times \sin 45^\circ$ .

$AB \approx 3,07$ .



**45** L'hexagone régulier est constitué de six triangles équilatéraux d'aire  $\mathcal{A}_6 = \frac{1}{2} R \times R \times \sin 60^\circ$ , c'est-à-dire  $\mathcal{A}_6 = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$ .

Donc l'aire de l'hexagone est :  $\mathcal{A}' = 6 \times \mathcal{A}_6 = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$ .  
 Or l'aire du disque de rayon  $R$  est  $\pi \times R^2$ .

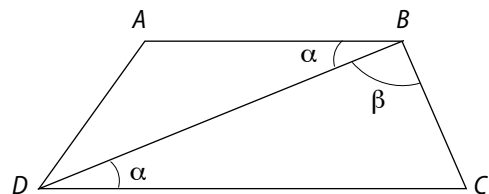
Ainsi l'aire en rouge est  $\pi R^2 - \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$ .

**46**  $ABCD$  désigne un trapèze.

Si  $ABCD$  est isocèle, alors  $\text{mes } \widehat{A} = \text{mes } \widehat{D}$  et  $\text{mes } \widehat{B} = \text{mes } \widehat{C}$ . Or,  $\text{mes } \widehat{A} + \text{mes } \widehat{B} + \text{mes } \widehat{C} + \text{mes } \widehat{D} = 360^\circ$ .

Donc  $\text{mes } \widehat{A} + \text{mes } \widehat{C} = 180^\circ$ . Ainsi, il est inscrit.

Si  $ABCD$  est inscrit, alors  $\text{mes } \widehat{A} + \text{mes } \widehat{C} = 180^\circ$ .



Puisque  $(AB) \parallel (CD)$  :

$\text{mes } \widehat{ABD} = \text{mes } \widehat{BDC} = \alpha$  et  $\text{mes } \widehat{C} = 180^\circ - \alpha - B$ .

De plus,  $\text{mes } \widehat{A} = 180^\circ - \text{mes } \widehat{C}$ , donc dans le triangle  $ABD$ ,  $\text{mes } \widehat{ABD} = 180^\circ - (180^\circ - \text{mes } \widehat{C}) - \alpha$ .

$\text{mes } \widehat{ADB} = \text{mes } \widehat{C} - \alpha$ .

$$\begin{aligned} \text{Ainsi mes } \widehat{D} &= \text{mes } \widehat{ADB} + \text{mes } \widehat{BDC} \\ &= \text{mes } \widehat{C} - \alpha + \alpha \\ &= \text{mes } \widehat{C}. \end{aligned}$$

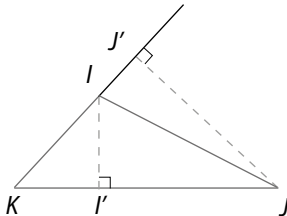
Ce qui prouve que le trapèze  $ABCD$  est isocèle.

$$47 \text{ a. } \sin \widehat{A} = \frac{BH}{AB}; \text{ b. } \sin \widehat{A} = \frac{BK}{AB}; \text{ c. } \sin \widehat{A} = \frac{CK}{AC};$$

$$\text{d. } \sin \widehat{A} = \frac{BH}{AB}.$$

48 Le projeté orthogonal de  $N$  sur  $(MP)$  ou le projeté orthogonal de  $P$  sur  $(MN)$ .

49 On note  $I'$  (resp.  $J'$ ) le projeté orthogonal de  $I$  sur  $(KJ)$  (resp. de  $J$  sur  $(IK)$ ).



$$\bullet \sin \widehat{I} = \frac{JJ'}{IJ}; \bullet \sin \widehat{J} = \frac{II'}{IJ}; \sin \widehat{K} = \frac{II'}{KI}.$$

50 Il s'agit de triangles isocèles rectangles en  $A$ .

$$51 \text{ a. } \mathcal{A} = \frac{1}{2} \times 2 \times 3 \times \sin 30^\circ = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{b. } \frac{10 \times 9,5 \times 8,5}{2 \mathcal{A}} = 2 \times 5 \text{ d'où } \mathcal{A} = 40,375.$$

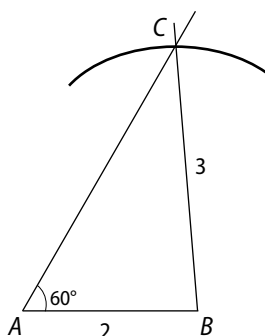
52 a. De  $\mathcal{A} = \frac{1}{2} bc \sin \widehat{A}$ , on déduit que :

$$\frac{(1 + \sqrt{6}) \sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \times (1 + \sqrt{6}) \times 2 \times \sin \widehat{A}$$

$$\text{donc } \sin \widehat{A} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ donc mes } \widehat{A} = 60^\circ.$$

$$\text{b. } 2R = \frac{a}{\sin \widehat{A}}, \text{ donc } R = \frac{3}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{3}.$$

c.



53 1. a.  $\mathcal{A} = \frac{AB \times CH}{2}$  où  $H$  est le projeté orthogonal de  $C$  sur  $(AB)$

$$\text{or } \sin \widehat{A} = \frac{CH}{AC} \text{ donc } CH = AC \times \sin \widehat{A}$$

$$\text{Ainsi, } \mathcal{A} = \frac{bc \sin \widehat{A}}{2}.$$

$$\text{b. } \frac{abc}{2 \mathcal{A}} = \frac{abc}{2 \times \frac{bc \sin \widehat{A}}{2}} = \frac{a}{\sin \widehat{A}}.$$

2. Puisque la somme des trois mesures des angles d'un triangle est égale à  $180^\circ$ , un triangle possède toujours au moins un angle aigu.

$$3. \text{ a. } \sin \widehat{BOH} = \frac{BH}{OB} = \frac{\frac{a}{2}}{R} = \frac{a}{2R}.$$

$$\text{b. } \text{mes } \widehat{BOH} = \frac{1}{2} \text{ mes } \widehat{BOC} = \text{mes } \widehat{A}.$$

$$\text{c. Du 3. a., on déduit que } \sin \widehat{A} = \frac{a}{2R} \text{ donc } 2R = \frac{a}{\sin \widehat{A}}.$$

$$54 \sin \widehat{A} = \frac{a}{2R}, \text{ de même } \sin \widehat{B} = \frac{b}{2R} \text{ et } \sin \widehat{C} = \frac{c}{2R}.$$

$$\text{Donc, } \sin \widehat{A} + \sin \widehat{B} + \sin \widehat{C} = \frac{a+b+c}{2R}.$$

$$\text{Or } 2R = \frac{abc}{2 \mathcal{A}}, \text{ donc } \sin \widehat{A} + \sin \widehat{B} + \sin \widehat{C} = 2 \mathcal{A} \times \frac{a+b+c}{abc}.$$

$$55 \text{ a. } \mathcal{A} = \frac{1}{2} bc \sin \widehat{A} = \frac{1}{2} \times 3 \times 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{b. } \mathcal{A} = \frac{1}{2} ab \sin \widehat{C} = \frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{5}}{4}.$$

$$56 \text{ a. } \text{mes } \widehat{BAC} = \frac{1}{2} \text{ mes } \widehat{BOC} = 50^\circ.$$

De plus,  $\text{mes } \widehat{BAD} = \text{mes } \widehat{DAC}$ , donc  $\text{mes } \widehat{BAD} = 25^\circ$ .

b. Dans le triangle  $ABD$ ,  $\frac{AB}{\sin \widehat{BDA}} = 2 \times R$ , donc

$$\sin \widehat{BDA} = \frac{10}{14} \text{ d'où } \text{mes } \widehat{BDA} \approx 45,6^\circ.$$

$$\text{Donc } \text{mes } \widehat{ABD} = 180^\circ - 25^\circ - 45,6^\circ \approx 109,4^\circ.$$

$$\text{De même, } \frac{AD}{\sin \widehat{ABD}} = 2 \times R,$$

$$\text{donc } AD = 2 \times 7 \times \sin \widehat{ABD} \approx 13,2 \text{ cm.}$$

$$57 \text{ mes } \widehat{ABP} = 120^\circ \text{ donc } \text{mes } \widehat{ABP} = 30^\circ.$$

Ainsi, le triangle  $ABP$  est isocèle en  $B$  et  $BP = 700 \text{ m}$ .

$$\text{Or, } \frac{AP}{\sin \widehat{B}} = \frac{BP}{\sin \widehat{A}} \text{ donc } AP = \frac{BP}{\sin \widehat{A}} \times \sin \widehat{B}$$

$$AP = \frac{700}{\sin 30^\circ} \times \sin 120^\circ = \frac{700}{\frac{1}{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 700 \sqrt{3}.$$

58 a. mes  $\widehat{HB_1C} = 53^\circ$  ; mes  $\widehat{CB_1B_2} = 127^\circ$  ;  
 mes  $\widehat{B_1B_2C} = 180^\circ - (137^\circ + 22^\circ) = 31^\circ$ .

b. D'après la propriété de Pythagore, dans le triangle  $B_1HC$  rectangle en  $H$ , on a  $B_1C = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ .

$$\text{Ainsi, } \frac{B_1B_2}{\sin 22^\circ} = \frac{10}{\sin 31^\circ}.$$

$$\text{donc } B_1B_2 = \frac{10}{\sin 31^\circ} \times \sin 22^\circ \approx 10/0,52 \times 0,38 \approx 7,3.$$

La largeur d'un but de football est environ 7,3 m.

## Faire le point

59. L'arc rouge est noté  $\widehat{AC}$  et l'arc vert  $\widetilde{AC}$ .

• L'angle  $\widehat{EHD}$  est un angle inscrit et l'angle  $\widehat{IOC}$  est au centre.

• Le polygone  $ABCDEFGHI$  est un octogone régulier et inscrit.

60 a. Fodje : « mes  $\widehat{AMB} = 63^\circ$  »

Fodje : « Non, dans ce cas,  $\widehat{AMB}$  n'a pas de sens ».

b. Non, les arcs capables sont les arcs rouges à l'exception des points  $A$  et  $B$ .

61 Le rayon calculé ici est le rayon du cercle circonscrit au triangle  $AOB$ , tandis que  $R$  est le rayon du cercle circonscrit au pentagone  $ABCDE$ .

Dans le triangle  $AOB$ , on note  $I$  le milieu de  $[AB]$  qui est également le projeté orthogonal de  $O$  sur  $(AB)$  puisque le triangle  $AOB$  est isocèle en  $O$ .

$$\text{mes } \widehat{IOB} = 36^\circ$$

$$\sin \widehat{IOB} = \frac{IB}{OB} \text{ donc } \sin 36^\circ = \frac{2,5}{R}$$

$$\text{ainsi } R = \frac{2,5}{\sin 36^\circ} \approx 4,25.$$

62 1. Tracer le segment  $[AB]$ .

2. Tracer la demi-droite  $[AT)$  telle que mes  $\widehat{BAT} = \theta$ .

3. Tracer la droite  $(\Delta)$  perpendiculaire à  $[AT)$  passant par  $A$ .

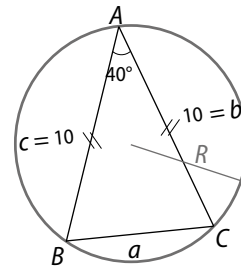
4. Tracer la médiatrice de  $[AB]$ , elle coupe  $(\Delta)$  au point  $O$ .

5. L'arc de cercle, de centre  $O$ , passant par les points  $A$  et  $B$  et situé dans le demi-plan délimité par  $(AB)$  ne contenant pas  $O$ , est l'un des arcs capables.

6. Le deuxième arc capable est obtenu par symétrie par rapport à  $(AB)$ .

Remarque : ne pas oublier de préciser que les points  $A$  et  $B$  ne font pas partie des solutions.

63



$$\text{a. } \mathcal{A}_b = \frac{1}{2} \times 10 \times 10 \times \sin 40^\circ = 50 \times \sin 40^\circ.$$

$$\mathcal{A}_b \approx 32,1.$$

$$\text{b. mes } \widehat{B} = \text{mes } \widehat{C} = 70^\circ. \mathcal{A}_b = \frac{1}{2} \times a \times b \times \sin \widehat{C}.$$

$$32,1 \approx \frac{1}{2} \times a \times 10 \times \sin 70^\circ. a \approx \frac{32,1}{5 \times \sin 70^\circ} \approx 6,8.$$

$$\text{c. } \frac{abc}{2 \mathcal{A}_b} = 2R \text{ c'est-à-dire } \frac{10 \times 10 \times 6,8}{2 \times 32,1} \approx 2R.$$

donc  $R \approx 5,3$ .

64 • D'après la propriété de Pythagore,  $BC^2 = AC^2 - AB^2$ .  
 $BC^2 = 144 - 36$  donc  $BC = 6\sqrt{3}$ .

Dans le triangle  $ABC$  rectangle en  $\widehat{B}$  :

$$\sin \widehat{A} = \frac{BC}{AC} \text{ donc } BC = AC \times \sin \widehat{A}.$$

$$\text{ainsi } BC = 12 \times \sin 60^\circ = 6\sqrt{3}.$$

• Les points  $C, B, B'$  sont alignés ; les points  $C, A, A'$  sont alignés et  $(AB) \parallel (A'B')$ .

D'après la propriété de Thalès :

$$\frac{CA}{CA'} = \frac{CB}{CB'} = \frac{AB}{AB'} \text{ donc } \frac{CB}{7\sqrt{3}} = \frac{6}{7}.$$

$$\text{ainsi } CB = 6\sqrt{3}.$$

• L'aire du triangle  $ABC$  est :  $\mathcal{A}_b = \frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin 60^\circ$ .

$$\mathcal{A}_b = \frac{1}{2} \times 6 \times 12 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{3}.$$

$$\text{Or } \mathcal{A}_b = \frac{AB \times BC}{2} = 3 \times BC, \text{ donc } BC = 6\sqrt{3}.$$

## Se tester

**65** 1. vrai ; 2. faux ; 3. vrai ; 4. faux.

**66** 1. vrai. Le quadrilatère  $EHFG$  est un quadrilatère croisé inscriptible, donc  $\widehat{EHF} = \widehat{EGF}$  ; puisque  $\widehat{EHF} = \frac{1}{2} \widehat{EOF} = 45^\circ$  ; ces deux angles sont complémentaires.

2. vrai. Le triangle  $OEF$  est isocèle rectangle en  $E$ , donc  $\widehat{OEF} = 45^\circ$ . De plus,  $\widehat{EGF} = \widehat{JEF} = 45^\circ$ .

Donc  $(EF)$  est la bissectrice de l'angle  $\widehat{JEF}$ .

3. faux.  $\widehat{EOF} \neq \widehat{EJF}$  donc le quadrilatère  $EOFJ$  n'est pas inscriptible.

4. faux.

L'aire du triangle  $EFJ$  est égale à  $\frac{OE \times EJ}{2} = \frac{4 \times 1,5}{2} = 3$ .

**67** 1. a. ; 2. b. ; 3. a.

**68** 1. b. En effet, tous les angles au centre entre deux sommets consécutifs ont même mesure puisque ce polygone est régulier, donc  $7 \times \widehat{COD} = 360^\circ$ , ainsi,  $\widehat{COD} \approx 51^\circ$ .

2. b. En effet :

$$\widehat{EAC} = \frac{1}{2} \widehat{EOC} \text{ et } \widehat{EOC} = 2 \widehat{COD}.$$

Donc  $\widehat{EAC} \approx 51^\circ$

3. c. En effet, le triangle  $OAB$  est isocèle en  $O$ , donc le milieu  $I$  de  $[AB]$  est également le pied de la hauteur issue de  $O$ .

Ainsi, dans le triangle  $OIB$  rectangle en  $I$ ,  $\sin \widehat{IOB} = \frac{IB}{OB}$   
donc  $\sin 25,5 = \frac{5}{R}$ , donc  $R = \frac{5}{\sin 25,5} \approx \frac{5}{0,43} \approx 11,6$ .

4. a. En effet, l'aire de cet heptagone régulier est égale à sept fois l'aire  $\mathcal{A}_b$  du triangle  $OAB$ .

$$\text{Or } \mathcal{A}_b = \frac{1}{2} \times OA \times OB \times \sin \widehat{AOB},$$

$$\text{c'est-à-dire } \mathcal{A}_b = \frac{1}{2} \times R^2 \times \sin 51^\circ,$$

$$\text{donc } \mathcal{A}_b \approx \frac{1}{2} \times 11,6^2 \times 0,78 \approx 52,47.$$

Donc, l'aire de l'heptagone est environ :

$$7 \times 52,47 \approx 367.$$

## Exercices d'approfondissement

**69** 1. Supposons que  $\widehat{A} = \widehat{B} = 45^\circ$ .

Dans ce cas,  $\mathcal{A}_b = \frac{1}{2} bc \sin 45^\circ = \frac{bc\sqrt{2}}{2}$  et  $\mathcal{A}_b = \frac{1}{2} ac \sin 45^\circ = \frac{ac\sqrt{2}}{2}$ .

Or, d'après l'énoncé,  $\mathcal{A}_b = 3\sqrt{2}$ , ainsi  $bc = 12$  et  $ac = 12$ .

• Puisque  $\widehat{A} = \widehat{B}$ , le triangle  $ABC$  est isocèle en  $C$ , donc  $a = b$ .

• Les différents cas possibles avec  $a, b, c$  des nombres entiers naturels sont donc :

1<sup>er</sup> cas :  $a = 1, b = 1, c = 12$  ;

2<sup>e</sup> cas :  $a = 2, b = 2, c = 3$ .

1<sup>er</sup> cas : puisque  $\frac{abc}{2\mathcal{A}_b} = \frac{c}{\sin \widehat{C}}$ , on a  $\sin \widehat{C} = 2\mathcal{A}_b = 2 \times 3\sqrt{2}$ ,

ce qui est impossible car  $0 \leq \sin \widehat{C} \leq 1$ .

Donc un tel triangle n'existe pas.

2. Supposons que  $\widehat{A} = 30^\circ$

Dans ce cas,  $\frac{a}{\sin \widehat{A}} = 2R$ .

$$\frac{a}{\sin 30^\circ} = 2 \times 2\sqrt{3}$$

$$\text{donc } a = 4\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = 2\sqrt{3}.$$

Donc, il n'existe pas de tel triangle.

**70** a. On considère les aires de chacun des triangles du quadrilatère :

$$\mathcal{A}_b(AOD) = \frac{1}{2} OA \times OD \times \sin \widehat{AOD} ;$$

$$\mathcal{A}_b(BOC) = \frac{1}{2} OB \times OC \times \sin \widehat{BOC} ;$$

$$\mathcal{A}_b(AOB) = \frac{1}{2} OA \times OB \times \sin \widehat{AOB} ;$$

$$\mathcal{A}_b(COD) = \frac{1}{2} OC \times OD \times \sin \widehat{COD}.$$

Or,  $\widehat{AOD} = \widehat{BOC}$  donc  $\sin \widehat{AOD} = \sin \widehat{BOC}$  ;

de plus, les angles  $\widehat{AOD}$  et  $\widehat{COD}$  sont supplémentaires, donc ils ont le même sinus :  $\sin \widehat{AOD} = \sin \widehat{COD}$ .

De même,  $\sin \widehat{AOB} = \sin \widehat{COD}$ .

Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_b(ABCD) &= \mathcal{A}_b(AOD) + \mathcal{A}_b(BOC) + \mathcal{A}_b(AOB) + \mathcal{A}_b(COD) \\ &= \frac{1}{2} \sin \widehat{AOD} (OA \times OD + OB \times OC + OA \times OB + OC \times OD) \\ &= \frac{1}{2} \sin \widehat{AOD} [OA(OD + OB) + OC(OB + OD)] \\ &= \frac{1}{2} \sin \widehat{AOD} (OA \times BD + OC \times BD) \\ &= \frac{1}{2} \sin \widehat{AOD} (AC \times BD) \\ &= \frac{1}{2} AC \times BD \times \sin \widehat{AOD}. \end{aligned}$$

b.  $\mathcal{A}_b(ABCD) = 1 \times 56 \times 32 \times \sin 110^\circ \approx 842 \text{ m}^2$ .

71 1.  $\sin \widehat{C} = \frac{AH}{b}$  donc  $b = \frac{AH}{\sin \widehat{C}}$ . Ainsi, puisque

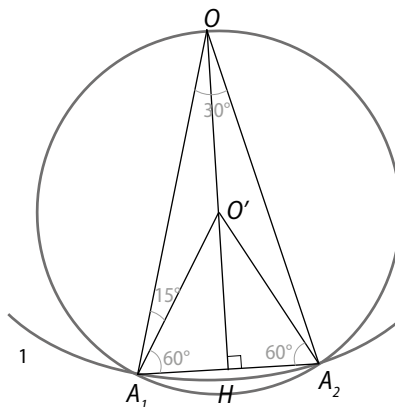
$$2R = \frac{b}{\sin \widehat{B}}, \text{ on obtient : } R = \frac{b}{2 \sin \widehat{B}} = \frac{AH}{2 \sin \widehat{B} \sin \widehat{C}}.$$

2. D'après le 1.,  $AH = 2R \sin \widehat{B} \sin \widehat{C}$ . De même, on obtient  $BH = 2R \sin \widehat{A} \sin \widehat{C}$  et  $CH = 2R \sin \widehat{A} \sin \widehat{B}$ .

a.  $AH + BH + CH = 2R (\sin \widehat{B} \sin \widehat{C} + \sin \widehat{A} \sin \widehat{C} + \sin \widehat{A} \sin \widehat{B})$ .

b.  $AH \times BH \times CH = 8R^3 \sin^2 \widehat{A} \sin^2 \widehat{B} \sin^2 \widehat{C}$ .

72



1.  $\text{mes } \widehat{AOA} = \frac{360}{12} = 30^\circ$ .

2. a. Les triangle  $O'A_1O$  est isocèle en  $O'$ , donc  $\text{mes } \widehat{OA_1O'} = 15^\circ$ , ainsi,  $\text{mes } \widehat{O'A_1A_2} = 60^\circ$ .

De même,  $\text{mes } \widehat{O'A_1A_2} = 60^\circ$ .

Dans le triangle  $O'HA_1$ , rectangle en  $H$ ,  $O'A_1 = A_1A_2 = OO'$ .

$$\sin 60^\circ = \frac{OH'}{O'A_1} \text{ donc } O'H = O'A_1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = A_1A_2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ainsi,  $OH = OO' + O'H$ .

$$OH = A_1A_2 + O'H.$$

$$OH = A_1A_2 + A_1A_2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$OH = A_1A_2 \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

b.  $\mathcal{A}_b(OA_1A_2) = \frac{1}{2} OA_1 \times OA_2 \times \sin \widehat{A_1OA_2}$ .

$$\mathcal{A}_b(OA_1A_2) = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \frac{1}{2}.$$

$$\mathcal{A}_b(OA_1A_2) = \frac{1}{4}.$$

• De plus,  $\mathcal{A}_b(OA_1A_2) = \frac{OH \times A_1A_2}{2}$

$$\mathcal{A}_b(OA_1A_2) = \frac{A_1A_2 \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) A_1A_2}{2}$$

$$\mathcal{A}_b(OA_1A_2) = A_1A_2^2 \times \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$$

• D'où,  $A_1A_2^2 \times \frac{2 + \sqrt{3}}{4} = \frac{1}{4}$

$$\text{et } A_1A_2 = \sqrt{\frac{1}{2 + \sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})}} = \sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

c. Dans le triangle  $OA_1H_1$ ,  $\cos 15^\circ = \frac{OH}{OA_1}$ , donc  $\cos 15^\circ = OH$ .

$$\text{Ainsi, } \cos 15^\circ = \sqrt{2 - \sqrt{3}} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\text{et } \sin 15^\circ = \frac{A_1H}{OA_1}, \text{ donc } \sin 15^\circ = A_1H = \frac{A_1A_2}{2};$$

$$\text{ainsi, } \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}.$$

73 1. Puisque  $OA = 1$  et que le triangle  $AOB$  est isocèle rectangle en  $B$ , on en déduit, d'après la propriété de Pythagore, que  $C_0 = \sqrt{2}$ .

2. Dans le triangle  $OAH$  rectangle en  $H$ , d'après la propriété de Pythagore :

$$OH = \sqrt{1 - \left(\frac{C_0}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{C_0^2}{4}} = 1 - \sqrt{1 - \frac{C_0^2}{4}}.$$

• Ainsi,  $HA_1 = 1 - \sqrt{1 - \frac{C_0^2}{4}}$ .

• Dans le triangle  $AHA_1$ , rectangle en  $H$ , d'après la propriété de Pythagore :

$$AA_1 = \sqrt{\left(\frac{C_0}{2}\right)^2 + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{C_0^2}{4}}\right)^2}$$

$$AA_1 = \sqrt{\frac{C_0^2}{4} + 1 - 2\sqrt{1 - \frac{C_0^2}{4}} + 1 - \frac{C_0^2}{4}}$$

$$AA_1 = \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \frac{C_0^2}{4}}}$$

$$C_1 = \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \frac{C_0^2}{4}}}$$

3. On procède de même en notant  $H'$  le pied de la médiatrice du segment  $[AA_1]$ .

$$\text{Ainsi, } OH' = \sqrt{1 - \frac{C_1^2}{4}}, HA_2 = 1 - \sqrt{1 - \frac{C_1^2}{4}}$$

$$\text{et } AA_2 = C_2 = \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \frac{C_1^2}{4}}}$$

4. a. Le  $n^{\text{e}}$  polygone possède  $4 \times 2^n$  côtés.

b. En tenant le même raisonnement qu'aux questions 2 et 3 :

$$C_n = \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \frac{C_{n-1}^2}{4}}}. \text{ Donc } P_n = 2 \times 2^n \times C_n.$$

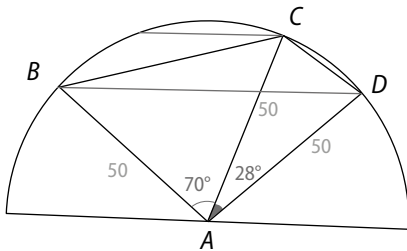
c. •  $C_1 \approx 0,765$  ;  $C_2 \approx 0,39$  ;  $C_3 \approx 0,196$  ;  $C_4 \approx 0,098$  ;  
 $C_5 \approx 0,049$  ;  $C_6 \approx 0,0245$  ;  $C_7 \approx 0,01225$  ;  $C_8 \approx 0,006$ .

•  $P_1 \approx 3,06$  ;  $P_2 \approx 3,12$  ;  $P_3 \approx 3,14$  ;  $P_4 \approx 3,14$  ;  $P_5 \approx 3,14$  ;  
 $P_6 \approx 3,14$  ;  $P_7 \approx 3,14$  ;  $P_8 \approx 3,14$ .

Plus le nombre de côtés du polygone augmente, plus le polygone se rapproche du demi-cercle.

Le périmètre du demi-cercle étant  $\pi$ , le demi-périmètre du polygone se rapproche de  $\pi$  lorsque le nombre de côtés devient grand.

**74**



• Pour le triangle  $ABC$  : le triangle  $ABC$  est isocèle en  $A$ ,

donc  $\text{mes } \widehat{ABC} = \text{mes } \widehat{ACB} = \frac{180 - 70}{2} = 55^\circ$ .

$$\text{Ainsi, } \frac{BC}{\sin 70^\circ} = \frac{AB}{\sin 55^\circ}$$

$$\text{d'où } BC = \frac{50}{\sin 55^\circ} \times \sin 70^\circ \approx 57,35 \text{ m.}$$

• Pour le triangle  $ACD$ , on procède de la même façon et on obtient :

$$\text{mes } \widehat{CDA} = 76^\circ \text{ et } CD = \frac{50}{\sin 76^\circ} \times \sin 28^\circ \approx 24,2 \text{ m.}$$

• Pour le triangle  $ABD$ , on procède de la même façon et on obtient :

$$\text{mes } \widehat{ABD} = 41^\circ \text{ et } BD = \frac{50}{\sin 41^\circ} \times \sin 98^\circ \approx 75,5 \text{ m.}$$

• Pour le triangle  $BCD$  :

$$\text{mes } \widehat{BCD} = \text{mes } \widehat{BCA} + \text{mes } \widehat{ACD} = 55^\circ + 76^\circ = 131^\circ.$$

$A$  est le centre du cercle circonscrit au triangle  $BCD$ , donc :

$$\frac{BD}{\sin \widehat{BCD}} = 2AC \text{ d'où } BD = 2 \times 50 \times \sin 131^\circ \approx 75,5 \text{ m.}$$

b. On note  $\mathcal{A}_b$  l'aire du triangle  $BCD$ .

$$\bullet \text{ D'une part, } \mathcal{A}_b = \frac{1}{2} BC \times BD \times \sin \widehat{BCD}$$

$$\mathcal{A}_b \approx \frac{1}{2} \times 57,35 \times 75,5 \times \sin 131^\circ$$

$$\mathcal{A}_b \approx 1634 \text{ m}^2.$$

D'autre part,  $\mathcal{A}_b = BD \times \frac{CH}{2}$  où  $H$  est le pied de la hauteur issue de  $C$ .

$$\text{Ainsi, } BD \times \frac{CH}{2} = 1634, \text{ donc } CH \approx \frac{1634 \times 2}{75,5} \approx 43,3 \text{ m.}$$

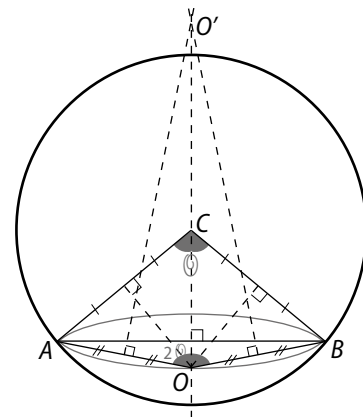
La rivière est large d'environ 43 m.

**75** On note  $O$  le centre du cercle circonscrit au triangle  $ABC$ . Dès lors,  $\text{mes } \widehat{AOB} = 2\theta$ .

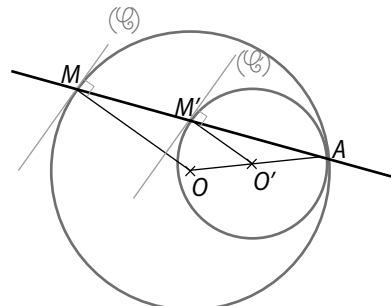
• On trace alors le point  $O'$ , centre du cercle circonscrit au triangle  $AOB$ .

• l'arc de cercle vert passant par  $O$  et d'extrémités  $A$  et  $B$  est l'un des arcs capables cherchés.

• le deuxième arc capable vert est obtenu par symétrie par rapport à  $(AB)$ .



**76** 1. a.

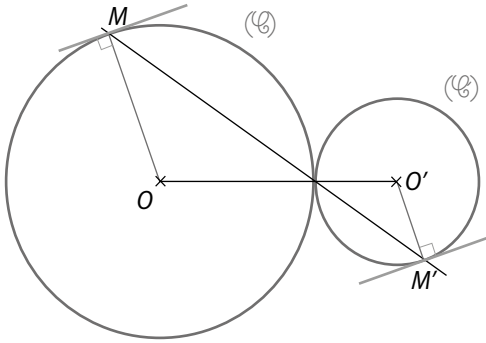


b. Le triangle  $OAM$  est isocèle en  $O$  et le triangle  $O'AM'$  est isocèle en  $O'$ .

c. Puisque les triangles  $OAM$  et  $O'AM'$  sont isocèles et que  $\widehat{OAM} = \widehat{O'AM'}$ , on en déduit que  $\widehat{AMO} = \widehat{AM'O'}$  et enfin que  $\widehat{AOM} = \widehat{A'O'M'}$ . Ainsi, les droites  $(OM)$  et  $(O'M')$  sont parallèles.

Or, la tangente en  $M$  à  $(\mathcal{C})$  est perpendiculaire à  $(OM)$  et la tangente en  $M'$  à  $(\mathcal{C}')$  est perpendiculaire à  $(O'M')$ , donc ces deux tangentes sont perpendiculaires.

2. a.



b. et c. Réponses identiques au 1. b. et c.

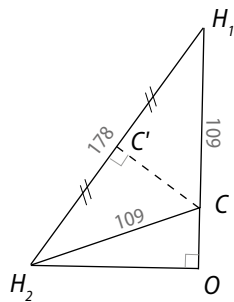
3. On note  $R$  (resp.  $R'$ ) le rayon de cercle  $(\mathcal{C})$  (resp.  $(\mathcal{C}')$ ). Les points  $A, O, O'$  sont alignés ; les points  $A, M, M'$  sont alignés dans le même ordre ; de plus,  $\frac{AO}{AO'} = \frac{R}{R'}$  et  $\frac{AM}{AM'} = \frac{R}{R'}$  donc  $\frac{AO}{AO'} = \frac{AM}{AM'}$ .

Ainsi, d'après la propriété de Thalès,  $(OM) \parallel (O'M')$ .

Or, la tangente à  $(\mathcal{C})$  (resp. à  $(\mathcal{C}')$ ) en  $M$  (resp. en  $M'$ ) est perpendiculaire à  $(OM)$  (resp. à  $(O'M')$ ).

Donc ces deux tangentes sont perpendiculaires.

77 a. On considère un triangle  $H_1CH_2$ , où  $C$  représente l'atome de carbone et  $H_1, H_2$  deux atomes d'hydrogène. Le triangle  $H_1CH_2$  est isocèle en  $C$ , donc le projeté orthogonal  $C'$  de  $C$  sur  $[H_1H_2]$  est aussi le milieu de  $[H_1H_2]$ .



Dans le triangle  $H_1CC'$ , rectangle en  $C'$  :

$$\cos \widehat{CH_1C'} = \frac{H_1C'}{H_1C} = \frac{89}{109} \text{ d'où } \widehat{CH_1C'} \approx 35^\circ.$$

De même,  $\widehat{CH_2C'} \approx 35^\circ$ .

Ainsi,  $\widehat{H_1CH_2} = 180^\circ - (\widehat{CH_1C'} + \widehat{CH_2C'})$

$\widehat{H_1CH_2} \approx 110^\circ$ .

b. Sur le schéma précédent, on note  $O$  le point d'intersection de  $(H_1C)$  et de la perpendiculaire à  $(H_1C)$  passant par  $H_2$ .

$\widehat{OCH_2} = 180^\circ - \widehat{H_1CH_2} \approx 70^\circ$ .

Dans le triangle  $OCH_2$  rectangle en  $O$ ,

$$\cos \widehat{OCH_2} = \frac{OC}{H_2C} \text{ d'où } OC = H_2C \times \cos \widehat{OCH_2}$$

$$OC = 109 \times \cos 70^\circ \approx 37 \text{ pm.}$$

Finalement,  $OH_2 = OC + CH_2 \approx 109 + 37 \approx 146 \text{ pm.}$

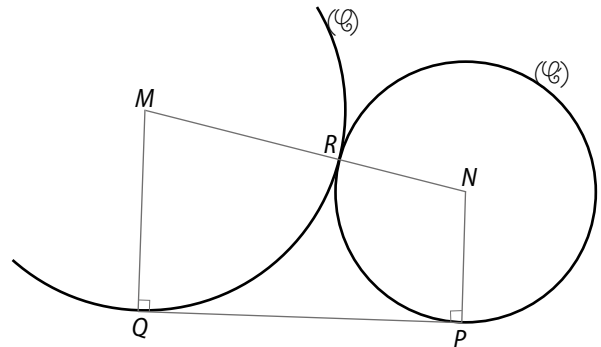
78 Puisque  $EF = FG$ , les arcs de cercle  $\widehat{EF}$  et  $\widehat{FG}$  sont de même longueur, donc  $\widehat{EHF} = \widehat{FHG}$ .

Or, il faut que  $\widehat{FHG} = 32^\circ$  donc que  $\widehat{EHG} = 64^\circ$ .

Le quadrilatère étant inscrit, les angles  $\widehat{EHG}$  et  $\widehat{EFG}$  sont supplémentaires.

La condition cherchée est donc  $\widehat{EFG} = 180^\circ - 64^\circ$  c'est-à-dire  $\widehat{EFG} = \alpha = 116^\circ$ .

79 1. a.



b. La droite  $(QP)$  est une tangente commune aux cercles  $(\mathcal{C})$  et  $(\mathcal{C}')$ .

2. a. La somme des mesures des quatre angles d'un quadrilatère est égale à  $360^\circ$ , or  $\widehat{MQP} = \widehat{QPN} = 90^\circ$ , donc  $\widehat{QMN} + \widehat{MNP} = 180^\circ$ .

Les angles  $\widehat{QMN}$  et  $\widehat{MNP}$  sont supplémentaires.

b.  $(QP)$  est la demi-tangente à  $(\mathcal{C})$  en  $Q$ , donc :

$$\widehat{RQP} = \frac{1}{2} \widehat{QMR} = \frac{1}{2} \widehat{QMN}.$$

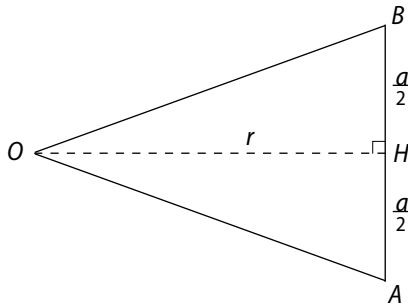
c.  $(PQ)$  est la demi-tangente à  $(\mathcal{C}')$  en  $P$ , donc :

$$\widehat{RPQ} = \frac{1}{2} \widehat{RNP} = \frac{1}{2} \widehat{MNP}.$$

$$\begin{aligned} \text{d. } \widehat{RPQ} + \widehat{RQP} &= \frac{1}{2} \widehat{MNP} + \widehat{QMN} \\ &= \frac{1}{2} (\widehat{MNP} + \widehat{QMN}) \\ &= \frac{1}{2} \times 180^\circ = 90^\circ. \end{aligned}$$

Les angles  $\widehat{RPQ}$  et  $\widehat{RQP}$  du triangle  $PQR$  sont complémentaires, donc  $\widehat{PRQ} = 90^\circ$ , c'est-à-dire que le triangle  $PQR$  est rectangle en  $\widehat{R}$ .

**80 a.** • Ce nonagone régulier est constitué de neuf triangles isocèles identiques au triangle  $OAB$ .



$$\text{mes } \widehat{AOB} = \frac{360^\circ}{9} = 40^\circ, \text{ donc mes } \widehat{HOB} = 20^\circ.$$

$$\tan \widehat{HOB} = \frac{BH}{OH} \text{ d'où } \tan 20^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{r},$$

$$\text{ainsi } r = \frac{a}{2 \tan 20^\circ} \approx \frac{a}{0,72}.$$

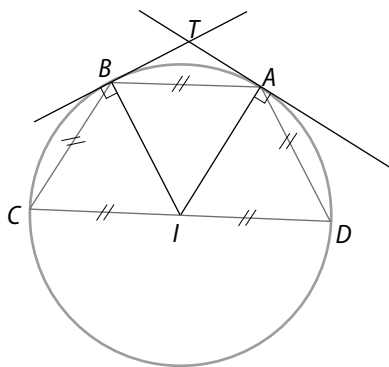
$$\bullet \mathcal{A}(OAB) = AB \times \frac{BH}{2} = a \times \frac{r}{2} = \frac{a \times \frac{a}{0,72}}{2} = \frac{a^2}{1,44}.$$

Ainsi, l'aire  $\mathcal{A}$  du polygone est :  $\mathcal{A} = 9 \frac{a^2}{1,44}$ .

**b.** L'aire de la partie colorée en rouge est égale à l'aire du polygone à laquelle on soustrait l'aire du disque de rayon  $r$ , c'est-à-dire :

$$9 \frac{a^2}{1,44} - \pi r^2 = 9 \frac{a^2}{1,44} - \pi \left( \frac{a}{0,72} \right)^2 = a^2 \left( \frac{9}{1,44} - \frac{\pi}{0,72^2} \right) \approx 0,189a^2$$

**81**



On note  $E$  le point d'intersection des droites  $(AD)$  et  $(BC)$ . D'après le théorème des milieux, le triangle  $CDE$  est équilatéral donc mes  $\widehat{CDE} = 60^\circ$ .

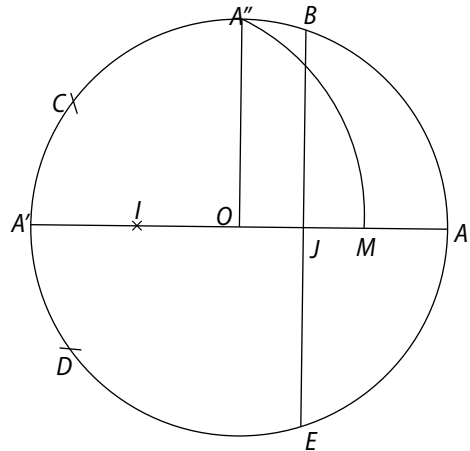
Or, pour  $I$  milieu de  $[CD]$ ,  $ID = DA$  et mes  $\widehat{IDA} = 60^\circ$ , donc le triangle  $IDA$  est équilatéral.

Il en est de même pour les triangles  $IBC$  et  $IAB$  ; et  $I$  est le centre du cercle  $(\mathcal{C})$  circonscrit à  $ABCD$ .

$$\text{Ainsi, mes } \widehat{TAB} = \frac{1}{2} \text{ mes } \widehat{AIB} = 30^\circ.$$

De même, mes  $\widehat{TBA} = \frac{1}{2} \text{ mes } \widehat{AIB} = 30^\circ$ .  
D'où, mes  $\widehat{ATB} = 180^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 120^\circ$ .

**82 1.**



**2. a.** Dans le triangle  $OJB$  rectangle en  $J$ ,  $\cos \widehat{JOB} = \frac{OJ}{OB}$  ;  
or  $\widehat{JOB} = \widehat{AOB}$  et  $OB = 1$ , d'où l'égalité :  $OJ = \cos \widehat{JOB}$ .

**b.** • D'après la propriété de Pythagore dans le triangle  $IOA''$  rectangle en  $O$  :

$$IA'' = \sqrt{IO^2 + OA''^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

$$\bullet IM = IA'' = \sqrt{5}/2,$$

$$\text{donc } OM = IM - OI = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

$$\text{et } OJ = \frac{OM}{2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} \text{ car } J \text{ est le milieu de } [OM].$$

**c.** D'après **b.**, **c.** et le fait que  $\cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$ , on en déduit que mes  $\widehat{AOB} = 72^\circ$ .

D'après la construction :

$$\text{mes } \widehat{AOB} = \text{mes } \widehat{AOE} = \text{mes } \widehat{BOC} = \text{mes } \widehat{COD}$$

$$= \text{mes } \widehat{DOE} = 72^\circ, \text{ donc le polygone } ABCDE \text{ est un polygone régulier.}$$

**83 1. a.** Le triangle  $OA_0A_1$  est isocèle en  $O$  (puisque  $OA_0 = OA_1$ ), donc mes  $\widehat{OA_0A_1} = \text{mes } \widehat{OA_1A_0} = \theta$ .

**b.**  $\alpha = \text{mes } \widehat{PA_1M} = 180^\circ - (\text{mes } \widehat{MA_1O} + \text{mes } \widehat{OA_1A_0})$   
donc  $\alpha = 180^\circ - 2\theta$ .

**2. a.** Tous les triangles  $OA_nA_{n+1}$  sont isocèles en  $O$  et identiques car  $OA_0 = OA_1 = \dots = OA_n = OA_{n+1}$ , donc  $A_0A_1 = A_1A_2 = \dots = A_nA_{n+1}$ .

La ligne brisée constituée des points  $A_0, A_1, \dots, A_{n+1}$  est formée de segments de même longueur.

**b.** Si  $\theta = 54^\circ$ , alors mes  $\widehat{A_0OA_1} = 180^\circ - (54^\circ + 54^\circ) = 72^\circ$ .

De même,  $\widehat{A_1OA_2} = \widehat{A_2OA_3} = \widehat{A_3OA_4}$   
 $= \widehat{A_4OA_0} = 72^\circ$ ,

et  $A_0A_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_0$ .

Ainsi,  $A_0A_1A_2A_3A_4$  est un pentagone régulier.

c. Si  $\theta = 18^\circ$ , alors  $\widehat{A_0OA_1} = 180^\circ - (18^\circ - 18^\circ) = 144^\circ$ .

De même,  $\widehat{A_1OA_2} = \widehat{A_2OA_3} = \widehat{A_3OA_4} = \widehat{A_4OA_0} = 144^\circ$ , et  $A_0A_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_0$ .  
 Ainsi,  $A_0A_1A_2A_3A_4$  est le pentagone décrit, appelé pentagone régulier étoilé.

3. Le rayon lumineux fait une fois le tour lorsque :

$$\widehat{A_0OA_1} + \dots + \widehat{A_nOA_0} = 360^\circ,$$

c'est-à-dire lorsque  $n \times \widehat{A_0OA_1} = 360^\circ$ .

$$\text{Ainsi } \widehat{A_0OA_1} = \frac{360^\circ}{n}.$$

Or,  $\widehat{A_0OA_1} + 2\theta = 180^\circ$ ,

$$\text{donc } \theta = \frac{180^\circ - \widehat{A_0OA_1}}{2} = 90^\circ - \frac{180^\circ}{n}.$$

4. • Supposons que  $n$  est pair :  $n = 2k$  avec  $k \in \mathbb{N}^*$ .

Le rayon lumineux fait deux fois le tour lorsque :

$$\widehat{A_0OA_1} + \dots + \widehat{A_nOA_0} = 720^\circ, \text{ c'est-à-dire :}$$

$n \times \widehat{A_0OA_1} = 720^\circ$  et qu'il n'est pas ressorti au bout d'un tour, c'est-à-dire :

$$\widehat{A_0OA_1} + \dots + \widehat{A_kOA_0} \neq 360^\circ,$$

soit  $k \times \widehat{A_0OA_1} \neq 360^\circ$ .

Or, si  $n = 2k$  et que  $n \times \widehat{A_0OA_1} = 720^\circ$ , alors, on a nécessairement  $k \times \widehat{A_0OA_1} = 360^\circ$ , donc il faut prendre  $n$  impair.

Dans ce cas,  $\widehat{A_0OA_1} + 2\theta = 180^\circ$ ,

$$\text{donc } \theta = \frac{180^\circ - \widehat{A_0OA_1}}{2} = 90^\circ - \frac{360^\circ}{n}.$$

**84 a.** On note  $J$  le point d'intersection des droites  $(BI_1)$  et  $(AI_2)$ .

• Dans le triangle  $ABJ$ ,

$$\widehat{AJB} = 180^\circ - (\widehat{JAB} + \widehat{JBA})$$

$$\widehat{AJB} = 75^\circ.$$

$$\frac{AJ}{\sin 42^\circ} = \frac{BJ}{\sin 63^\circ} = \frac{AB}{\sin 75^\circ}$$

$$\text{donc } AJ = \frac{900}{\sin 75^\circ} \times \sin 42^\circ \approx 623,5 \text{ m.}$$

$$BJ = \frac{900}{\sin 75^\circ} \times \sin 63^\circ \approx 830,2 \text{ m.}$$

• Dans le triangle  $AI_1J$ ,

$$\widehat{AJI_1} = 180^\circ - \widehat{AJB} = 105^\circ;$$

$$\widehat{AI_1J} = 180^\circ - (\widehat{AJI_1} + \widehat{JAI_1})$$

$$\widehat{AI_1J} = 51^\circ$$

$$\frac{I_1J}{\sin 24^\circ} = \frac{AI_1}{\sin 105^\circ} = \frac{AJ}{\sin 51^\circ}$$

$$\text{donc } I_1J \approx \frac{623,5}{\sin 51^\circ} \times \sin 24^\circ \approx 326,3 \text{ m ;}$$

$$AI_1 \approx \frac{623,5}{\sin 51^\circ} \times \sin 105^\circ \approx 775 \text{ m.}$$

• Dans le triangle  $BI_2J$ ,  $\widehat{BJI_2} = \widehat{AJI_1} = 105^\circ$  ;

$$\widehat{BI_2J} = 180^\circ - (\widehat{BJI_2} + \widehat{JBI_2}) = 36^\circ.$$

$$\frac{JI_2}{\sin 39^\circ} = \frac{BI_2}{\sin 105^\circ} = \frac{BJ}{\sin 36^\circ}$$

$$\text{donc } JI_2 \approx \frac{BJ}{\sin 36^\circ} \times \sin 39^\circ \approx 888,9 \text{ m ;}$$

$$BI_2 \approx \frac{830,2}{\sin 36^\circ} \times \sin 105^\circ \approx 1\,364,3 \text{ m.}$$

• Ainsi,  $AI_1 \approx 775 \text{ m}$

et  $AI_2 = AJ + JI_2 \approx 623,5 + 888,9 \approx 1512 \text{ m.}$

b. En utilisant  $OBI_2$ , on déduit que :

$$\widehat{BI_2O} = 180^\circ - (42^\circ + 42^\circ + 39^\circ) = 59^\circ$$

$$\text{donc } \widehat{JI_2I_1} = 21^\circ.$$

$$\text{Dans le triangle } JI_1I_2, \frac{I_1I_2}{\sin \widehat{JI_1I_2}} = \frac{JI_1}{\sin \widehat{JI_2I_1}}$$

$$\text{d'où } I_1I_2 = \frac{326,5}{\sin 21^\circ} \times \sin 75^\circ \approx 880.$$

La distance entre les deux îlots est d'environ 880 m.

c. La longueur du trajet  $A-I_1-I_2-B$  est d'environ :

$$775 + 880 + 1\,364 = 3\,019 \text{ m.}$$

**85** Les quadrilatères  $ADME$ ,  $CEMF$  et  $BDFM$  sont tous les trois non croisés et inscrits dans les cercles  $(\mathcal{C}_1)$ ,  $(\mathcal{C}_3)$  et  $(\mathcal{C}_2)$ .

$$\text{Ainsi, } \widehat{MDA} + \widehat{MEA} = 180^\circ ;$$

$$\widehat{MFC} + \widehat{MEC} = 180^\circ ;$$

$$\widehat{MFB} + \widehat{MDB} = 180^\circ.$$

Or :

$$\begin{aligned} \widehat{MFB} + \widehat{MFC} &= 180^\circ - \widehat{MDB} + 180^\circ - \widehat{MEC} \\ &= 180^\circ - (180^\circ - \widehat{MDA}) + 180^\circ - (180^\circ - \widehat{MEA}) \\ &= \widehat{MDA} + \widehat{MEA} = 180^\circ. \end{aligned}$$

Ainsi,  $\widehat{MFB} + \widehat{MFC} = 180^\circ$ , donc les points  $B$ ,  $F$ ,  $C$  sont alignés.

# 2 Angles orientés et trigonométrie

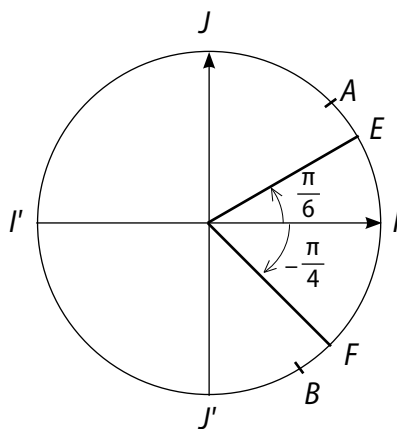
## Activités d'introduction

### 1 Une nouvelle unité de mesure d'un angle

1. a. • La longueur du cercle  $(\mathcal{C})$  est égale à  $2\pi$ .  
 • La longueur de l'arc  $\widehat{II'}$  est égale à  $\pi$ .  
 • La longueur de l'arc  $\widehat{IJ}$  est égale à  $\frac{\pi}{2}$ .
- b. Ainsi,  $\text{mes}(\widehat{IOI'}) = \pi \text{ rad}$  et  $\text{mes}(\widehat{IOJ}) = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$ .
2. a. •  $(EF)$  étant la bissectrice de l'angle  $\widehat{IOJ}$ , la longueur de l'arc  $\widehat{IE}$  est égale à  $\frac{\pi}{4}$ .  
 • Les points  $E, O, F$  étant alignés, la longueur de l'arc  $\widehat{EF}$  est  $\pi$  et celle de  $\widehat{IF}$  est égale à  $\frac{3\pi}{4}$ .  
 • Ainsi,  $\text{mes}(\widehat{IOE}) = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$ ,  $\text{mes}(\widehat{IOF}) = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4} \text{ rad}$  et  $\text{mes}(\widehat{EOF}) = \pi \text{ rad}$ .
- b. • Comme par construction  $IA = OI$  et comme  $OA = OI$ , le triangle  $OAI$  est équilatéral.  
 • Ainsi, la longueur de l'arc  $\widehat{IA}$  est égale à  $\frac{\pi}{3}$  et celle de  $\widehat{AB}$  est égale à  $\frac{2\pi}{3}$ .

### 2 Angles orientés et mesure principale

1. a. b.



c.  $\text{mes}(\widehat{OI, OJ}) = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$ .

2. b.

	« longueur » de l'arc orienté $\widehat{IM}$	$\text{mes}(\widehat{OI, OM})$	« longueur » de l'arc orienté $\widehat{IN}$	$\text{mes}(\widehat{OI, ON})$
Départ	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$
2 <sup>e</sup> passage	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6} + 2\pi$	$-\frac{\pi}{4} - 2\pi$	$-\frac{\pi}{4} - 2\pi$

c. La mesure principale de  $(\widehat{OI, OM})$  est  $\frac{\pi}{6}$  car  $\frac{\pi}{6} \in ]-\pi, \pi]$ .

La mesure principale de  $(\widehat{OI, ON})$  est  $-\frac{\pi}{4}$  car  $-\frac{\pi}{4} \in ]-\pi, \pi]$ .

### 3 Cosinus et sinus

1.

Point $M$	$M_1$	$M_2$	$M_3$	$M_4$	$M_5$	$I$	$J$	$I'$
Abscisse	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	-1
Ordonnée	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	1	0
Mesure principale de $(\widehat{OI, OM})$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$

2.

$\alpha$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

3. Les abscisses coïncident avec les cosinus, et les ordonnées coïncident avec les sinus. En effet, si  $\alpha = \text{mes}(\widehat{OI, OM})$ , alors l'abscisse de  $M$  est  $\cos(\alpha)$  et l'ordonnée de  $M$  est  $\sin(\alpha)$ .

### 4 Tangente

a. Les points  $O, T, M$  d'une part et les points  $O, I, M'$  d'autre part sont alignés. Les droites  $(IT)$  et  $(MM')$  sont parallèles. D'après le théorème de Thalès, on a :  $\frac{OT}{OM} = \frac{OI}{OM'} = \frac{IT}{MM'}$ .

De la relation  $\frac{OI}{OM'} = \frac{IT}{MM'}$ , on déduit que  $MM' = OM' \times \frac{IT}{OI}$ . Or  $OI = 1$ , donc  $MM' = IT \times OM'$ .

b. Dans le triangle  $OMM'$  rectangle en  $M'$ , comme le segment  $[MM']$  est le côté opposé à l'angle  $\widehat{MOM'}$  et le segment  $[OM']$  est le côté adjacent à l'angle  $\widehat{MOM'}$ , on a :  $\tan(\alpha) = \tan(\widehat{MOM'}) = \frac{MM'}{OM'}$ .

c. On a alors :  $\tan(\alpha) = \frac{MM'}{OM'} = IT \times \frac{OM'}{OM'} = IT$ .

## Savoir faire

4 a.  $36^\circ \times \frac{\pi}{180} = \frac{18 \times 2}{18 \times 10} \times \pi = \frac{\pi}{5}$ .  $36^\circ$  correspond

à  $\frac{\pi}{5}$  rad. b.  $105^\circ \times \frac{\pi}{180} = \frac{15 \times 7}{15 \times 12} \times \pi = \frac{7\pi}{12}$ .

$105^\circ$  correspond à  $\frac{7\pi}{12}$  rad. c.  $-\frac{4\pi}{5} \times \frac{180}{\pi} = -144$ .

$-\frac{4\pi}{5}$  rad correspond à  $-144^\circ$ .

d.  $\frac{5\pi}{4} \times \frac{180}{\pi} = 225$ .  $\frac{5\pi}{4}$  rad correspond à  $225^\circ$ .

5 a.  $47 = 3 \times 12 + 11$

donc  $\frac{47\pi}{6} = 3 \times \frac{12\pi}{6} + \frac{11\pi}{6} = \frac{11\pi}{6} [2\pi]$ .

b.  $-\frac{22\pi}{3} = -\frac{24\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = -8\pi + \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} [2\pi]$ .

c.  $\frac{15\pi}{4} = \frac{16\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 4\pi - \frac{\pi}{4} [2\pi]$ .

d.  $\frac{20\pi}{8} = \frac{5\pi}{2} = \frac{4\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} [2\pi]$

$$6 \cdot \text{mes}(\overrightarrow{FB}, \overrightarrow{FG}) = -\left(\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\pi}{6} [2\pi].$$

$$\cdot \text{mes}(\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{EA}) = -\frac{\pi}{3} [2\pi].$$

$$\cdot \text{mes}(\overrightarrow{CG}, \overrightarrow{CE}) = \frac{\pi}{3} [2\pi].$$

En effet, la somme des mesures des trois angles d'un triangle est égale à  $\pi$  et chacun des trois angles d'un triangle équilatéral mesure  $\frac{\pi}{3}$  rad.

$$10 \quad A(x) = 5 \cos(x - 2\pi) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

$$A(x) = 5 \cos(x) + \cos(x) - 6 \cos(x).$$

$$11 \quad B(x) = 3 \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 2 \sin(\pi - x).$$

$$B(x) = -3 \sin(x) - 2 \sin(x). \quad B(x) = -5 \sin(x).$$

$$12 \quad \sin^2(x) = 1 - \cos^2(x) = 1 - \frac{9}{49} = \frac{40}{49}$$

$$\text{donc } \sin(x) = -\sqrt{\frac{40}{49}} \text{ ou } \sin(x) = -\sqrt{\frac{40}{49}}$$

$$\text{donc } \sin(x) = -\frac{2\sqrt{10}}{7} \text{ ou } \sin(x) = \frac{2\sqrt{10}}{7}.$$

Comme  $x \in ]\frac{\pi}{2}; \pi[$ ,  $\sin(x) > 0$ , on en déduit :

$$\sin(x) = \frac{2\sqrt{10}}{7}.$$

## Exercices d'entraînement

13 a. Vrai. b. Vrai. c. Faux. d. Vrai.

14 Une. b.  $2\pi$ . c.  $-\frac{\pi}{3}$ .

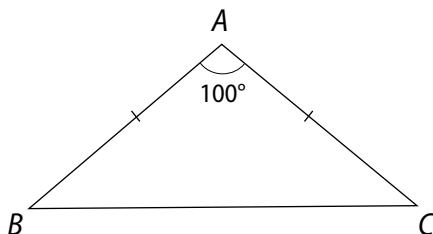
15

Degrés	25	$\frac{180}{7}$	$\frac{135}{2}$	80	120	480	240
Radians	$\frac{5\pi}{36}$	$\frac{\pi}{7}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{4\pi}{9}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{8\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$

$$25 \times \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{36}; \frac{\pi}{7} \times \frac{180}{\pi} = \frac{180}{7}; \frac{3\pi}{8} \times \frac{180}{\pi} = \frac{135}{2};$$

$$\frac{80 \times \pi}{180} = \frac{4\pi}{9}; 120 \times \frac{\pi}{180} = \frac{2\pi}{3}; \frac{8\pi}{3} \times \frac{180}{\pi} = 480.$$

16



$ABC$  est nécessairement isocèle en  $A$  car  $100^\circ < 180^\circ$ .

$$\text{Ainsi : } \widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \frac{180 - 100}{2} = \frac{80}{2} = 40^\circ$$

(la somme des mesures des trois angles non orientés d'un triangle étant égale à  $180^\circ$ ).

Par conséquent :

$$\cdot \text{mes}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + \text{mes}(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) + \text{mes}(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = 100^\circ + (-40^\circ) + (-40^\circ) = 20^\circ.$$

$$\cdot \text{mes}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + \text{mes}(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) + \text{mes}(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = 100^\circ + 40^\circ + 40^\circ = 180^\circ.$$

$$17 \cdot \text{mes}(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{2} \text{ rad.}$$

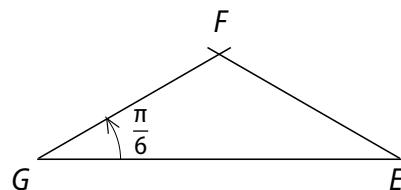
$$\cdot \text{mes}(\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{2} \text{ rad.}$$

Comme  $\left\{ \begin{array}{l} 20^\circ \text{ est égal à } 20 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{9} \text{ rad} \\ BCE \text{ est rectangle en } C, \end{array} \right.$

$$\text{on a : } \text{mes}(\overrightarrow{EC}, \overrightarrow{EB}) = -\left(\pi - \frac{\pi}{9} - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{7\pi}{18}.$$

$$\cdot \text{mes}(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BA}) = 0 \text{ rad.}$$

18 a.



b. Comme  $\text{mes}(\overrightarrow{GE}, \overrightarrow{GF}) = \frac{\pi}{6}$  rad et comme  $EFG$  est

isocèle en  $F$ , on a :  $\text{mes}(\overrightarrow{FG}, \overrightarrow{FE}) = \pi - 2 \times \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$  rad et

$$\text{mes}(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EG}) = \frac{\pi}{6} \text{ rad}; \text{mes}(\overrightarrow{FE}, \overrightarrow{FG}) = -\frac{2\pi}{3} \text{ rad.}$$

19 a.  $\text{mes}(\widehat{OI, OU}) = \text{mes}(\widehat{OI, OR}) + \text{mes}(\widehat{OR, OU})$   
 $= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{8\pi}{6} + \frac{3\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \text{ rad.}$

b.  $\text{mes}(\widehat{OI, OS}) = \text{mes}(\widehat{OI, OR}) + \text{mes}(\widehat{OR, OS})$   
 $= \frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{2} = \frac{2\pi}{6} + \frac{9\pi}{6} = \frac{11\pi}{6} \text{ rad.}$

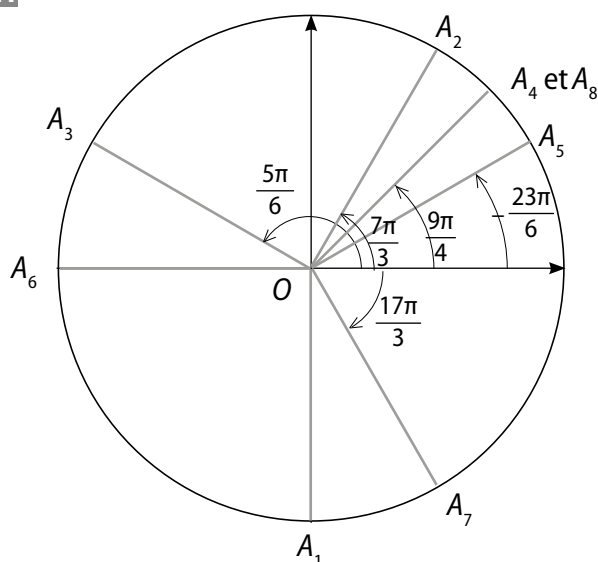
c.  $\text{mes}(\widehat{OI, OT}) = \text{mes}(\widehat{OI, OR}) + \text{mes}(\widehat{OR, OT})$   
 $= \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3} \text{ rad.}$

d.  $\text{mes}(\widehat{OU, OT}) = \frac{\pi}{2} \text{ rad.}$

20 a.  $]-\pi; \pi]$ . b. Complémentaires.

c.  $\pi - \text{mes}(\widehat{u, v}) = \text{mes}(\widehat{v, -u}) [2\pi]$ .

21



22 a.  $\frac{43\pi}{2} = \frac{44\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 11 \times 2\pi - \frac{\pi}{2}$  donc  $-\frac{\pi}{2}$  est la mesure principale de  $\frac{43\pi}{2}$ .

b.  $-\frac{15\pi}{2} = -\frac{16\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = -4 \times 2\pi + \frac{\pi}{2}$  donc  $\frac{\pi}{2}$  est la mesure principale de  $-\frac{15\pi}{2}$ .

c.  $\frac{109\pi}{2} = \frac{108\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 54 \times 2\pi + \frac{\pi}{2}$  donc  $\frac{\pi}{2}$  est la mesure principale de  $\frac{109\pi}{2}$ .

d.  $\frac{51\pi}{2} = \frac{52\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 26 \times 2\pi - \frac{\pi}{2}$  donc  $-\frac{\pi}{2}$  est la mesure principale de  $\frac{51\pi}{2}$ .

23 a.  $-\frac{49\pi}{4} = -\frac{48\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -3 \times 2\pi - \frac{\pi}{4}$  donc  $-\frac{\pi}{4}$  est la mesure principale de  $-\frac{49\pi}{4}$ .

b.  $\frac{23\pi}{4} = \frac{24\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 3 \times 2\pi - \frac{\pi}{4}$  donc  $-\frac{\pi}{4}$  est la mesure principale de  $\frac{23\pi}{4}$ .

c.  $\frac{75\pi}{4} = \frac{72\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = 9 \times 2\pi + \frac{3\pi}{4}$  donc  $\frac{3\pi}{4}$  est la mesure principale de  $\frac{75\pi}{4}$ .

d.  $-\frac{36\pi}{4} = -9\pi = -10\pi + \pi$  donc  $\pi$  est la mesure principale de  $-\frac{36\pi}{4}$ .

24 a.  $\frac{19\pi}{3} = \frac{18\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = 3 \times 2\pi + \frac{\pi}{3}$  donc  $\frac{\pi}{3}$  est la mesure principale de  $\frac{19\pi}{3}$ .

b.  $\frac{62\pi}{3} = \frac{60\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = 10 \times 2\pi + \frac{2\pi}{3}$  donc  $\frac{2\pi}{3}$  est la mesure principale de  $\frac{62\pi}{3}$ .

c.  $-\frac{35\pi}{3} = -\frac{36\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = -6 \times 2\pi + \frac{\pi}{3}$  donc  $\frac{\pi}{3}$  est la mesure principale de  $-\frac{35\pi}{3}$ .

d.  $-\frac{50\pi}{3} = -\frac{48\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} = -8 \times 2\pi - \frac{2\pi}{3}$  donc  $-\frac{2\pi}{3}$  est la mesure principale de  $-\frac{50\pi}{3}$ .

25 a.  $\frac{25\pi}{6} = \frac{24\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = 2 \times 2\pi + \frac{\pi}{6}$  donc  $\frac{\pi}{6}$  est la mesure principale de  $\frac{25\pi}{6}$ .

b.  $-\frac{37\pi}{6} = -\frac{36\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = -3 \times 2\pi - \frac{\pi}{6}$  donc  $-\frac{\pi}{6}$  est la mesure principale de  $-\frac{37\pi}{6}$ .

c.  $\frac{41\pi}{6} = \frac{36\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} = 3 \times 2\pi + \frac{5\pi}{6}$  donc  $\frac{5\pi}{6}$  est la mesure principale de  $\frac{41\pi}{6}$ .

d.  $-\frac{14\pi}{6} = -\frac{12\pi}{6} - \frac{2\pi}{6} = -2\pi - \frac{\pi}{3}$  donc  $-\frac{\pi}{3}$  est la mesure principale de  $-\frac{14\pi}{6}$ .

26 • Le triangle ABC est isocèle rectangle en A.

Donc  $\text{mes}(\widehat{AB, AC}) = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$  et

$\text{mes}(\widehat{CA, CB}) = \frac{1}{2} \left( \pi - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} \text{ rad.}$

• Le triangle CBD est équilatéral donc :

$\text{mes}(\widehat{CB, CD}) = \frac{\pi}{3} \text{ rad.}$

27 • Comme l'hexagone ABCDEF est régulier, de centre O, chaque angle au centre, de sommet O, mesure  $\frac{360}{6} = 60^\circ$  soit  $\frac{\pi}{3} \text{ rad.}$

Par conséquent :  $\text{mes}(\widehat{OA, OB}) = \frac{\pi}{3} \text{ rad.}$

• Le triangle  $OAB$  est équilatéral donc :

$$\text{mes}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OB}) = -\frac{\pi}{3} \text{ rad.}$$

•  $\text{mes}(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \text{mes}(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BO}) + \text{mes}(\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BA})$  (Chasles)

$$= \frac{\pi}{3} \times 2 = \frac{2\pi}{3} \text{ rad.}$$

•  $[AD]$  est un diamètre du cercle ( $\mathcal{C}$ ) et  $B$  est un point du cercle ( $\mathcal{C}$ ) donc  $\text{mes}(\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{2}$  rad.

•  $\text{mes}(\overrightarrow{EC}, \overrightarrow{EA}) = \text{mes}(\overrightarrow{EC}, \overrightarrow{EF}) + \text{mes}(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EA})$  (Chasles)

$$= -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}(\pi - \frac{2\pi}{3}) = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$$

$$= -\frac{3\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = -\frac{2\pi}{6} = -\frac{\pi}{3} \text{ rad.}$$

•  $\text{mes}(\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{ED}) = \text{mes}(\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FE}) + \text{mes}(\overrightarrow{FE}, \overrightarrow{ED})$  (Chasles)

$$= \frac{2\pi}{3} - [\pi - \text{mes}(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{ED})] = \frac{2\pi}{3} - (\pi - \frac{2\pi}{3})$$

$$= \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} \text{ rad.}$$

**28** • Le triangle  $ABC$  est isocèle en  $A$  donc :

$$\text{mes}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \pi - 2 \times \frac{\pi}{8} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \text{ rad et}$$

$$\text{mes}(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{8} \text{ rad.}$$

• Les points  $A, C, D$  étant alignés :

$$\text{mes}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = [\pi - \text{mes}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})] = -(\pi - \frac{3\pi}{4}) = -\frac{\pi}{4} \text{ rad.}$$

• Les angles opposés d'un parallélogramme sont de même mesure.

Ainsi,  $\text{mes}(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EB}) = \frac{\pi}{4}$  rad.

**29** Comme  $AB = AO = OB$ , le triangle  $AOB$  est équilatéral.

Ainsi,  $\text{mes}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{3}$  rad.

•  $\text{mes}(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB}) = \text{mes}(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}) + \text{mes}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$  (Chasles)

$$= \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{9\pi}{12} + \frac{4\pi}{12} + \frac{13\pi}{12}$$

$$= \frac{13\pi}{12} - 2\pi [2\pi] = -\frac{11\pi}{12} [2\pi].$$

•  $\text{mes}(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OC}) = \text{mes}(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}) - \text{mes}(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA})$

$$= \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = \frac{9\pi}{12} - \frac{4\pi}{12} = \frac{5\pi}{12} \text{ rad}$$

(le triangle  $OCA$  est équilatéral).

•  $\text{mes}(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OD}) = \text{mes}(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OC}) - \text{mes}(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OC})$

$$= \frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{12} - \frac{4\pi}{12} = \frac{\pi}{12} \text{ rad}$$

(le triangle  $ODC$  est équilatéral).

**30** a. Faux. b. Vrai. c. Vrai. d. Faux.

**31** a. Faux. b. Vrai. c. Faux. d. Vrai.

**32** a.  $\frac{15\pi}{4} = \frac{16\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 2 \times 2\pi - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} [2\pi]$

et  $\begin{cases} \cos\left(\frac{15\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\left(\frac{15\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$

b.  $-\frac{21\pi}{4} = -\frac{24\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} [2\pi]$

et  $\begin{cases} \cos\left(-\frac{21\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\left(-\frac{21\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$

c.  $\frac{27\pi}{4} = \frac{24\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} [2\pi]$

et  $\begin{cases} \cos\left(\frac{27\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\left(\frac{27\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$

**33** a.  $\frac{31\pi}{6} = \frac{36\pi}{6} - \frac{5\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6} [2\pi]$

et  $\begin{cases} \cos\left(\frac{31\pi}{6}\right) = \cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\left(\frac{31\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}. \end{cases}$

b.  $-\frac{51\pi}{6} = -\frac{48\pi}{6} + \frac{3\pi}{6} = \frac{3\pi}{6} [2\pi] = \frac{\pi}{2} [2\pi]$

donc  $\begin{cases} \cos\left(-\frac{51\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ \sin\left(-\frac{51\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1. \end{cases}$

c.  $\frac{45\pi}{6} = \frac{48\pi}{6} - \frac{3\pi}{6} [2\pi] = -\frac{\pi}{2} [2\pi]$

donc  $\begin{cases} \cos\left(\frac{45\pi}{6}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ \sin\left(\frac{45\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1. \end{cases}$

**34** a.  $\frac{8\pi}{3} = \frac{6\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} [2\pi]$

et  $\begin{cases} \cos\left(\frac{8\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \\ \sin\left(\frac{8\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

b.  $\frac{112\pi}{3} = \frac{108\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} [2\pi] = -\frac{2\pi}{3} [2\pi]$

et  $\begin{cases} \cos\left(\frac{112\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \\ \sin\left(\frac{112\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$

$$c. \frac{70\pi}{3} = \frac{66\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} [2\pi] = -\frac{2\pi}{3} [2\pi]$$

$$\text{et } \begin{cases} \cos\left(\frac{70\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \\ \sin\left(\frac{70\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$35 \text{ a. } \frac{11\pi}{2} = \frac{12\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$$\text{et } \begin{cases} \cos\left(\frac{11\pi}{2}\right) = 0 \\ \sin\left(\frac{11\pi}{2}\right) = -1 \end{cases}$$

$$b. \frac{81\pi}{2} = \frac{80\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$$\text{et } \begin{cases} \cos\left(\frac{81\pi}{2}\right) = 0 \\ \sin\left(\frac{81\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

$$c. -\frac{501\pi}{2} = -\frac{500\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

$$\text{et } \begin{cases} \cos\left(-\frac{501\pi}{2}\right) = 0 \\ \sin\left(-\frac{501\pi}{2}\right) = -1 \end{cases}$$

$$36 \text{ a. } \text{mes}(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) = -\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6} \text{ rad}$$

$$b. \text{mes}(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) = \frac{3\pi}{4} \text{ rad}$$

$$c. \text{mes}(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) = -\frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

$$d. \text{mes}(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) = \pi \text{ rad}$$

37 Les coordonnées du point  $M$  sont  $\cos(x)$  et  $\sin(x)$  avec  $x = \text{mes}(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ .

$$a. \cos(x) = \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{8\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{et } \sin(x) = \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$b. \cos(x) = \cos\left(-\frac{25\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{24\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\text{et } \sin(x) = \sin\left(-\frac{25\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$c. \cos(x) = \cos\left(\frac{24\pi}{6} + \frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{et } \sin(x) = \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$d. \cos(x) = \cos\left(\frac{-17\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{-12\pi}{6} - \frac{5\pi}{6}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{-5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{et } \sin(x) = \sin\left(\frac{-5\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$38 \text{ a. } x \approx 1,3 \text{ rad ; b. } x \approx 0,6 \text{ rad ;}$$

$$c. x \approx 2,3 \text{ rad ; d. } x \approx -1 \text{ rad.}$$

$$39 \text{ a. } x \approx 1,718 \text{ rad ; b. } x \approx -0,047 \text{ rad ;}$$

$$c. x \approx 1,896 \text{ rad ; d. } x \approx 0,277 \text{ rad ;}$$

$$e. x \approx -0,381 \text{ rad ; f. } x \approx 0,333 \text{ rad.}$$

40 a. Le pentagone  $ABCDE$  étant un pentagone régulier de centre  $O$ , chaque angle au centre, de sommet  $O$ , mesure  $\frac{360}{5} = 72^\circ$ , soit  $\frac{2\pi}{5}$  radians.

$$\bullet \text{mes}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{2\pi}{5} \text{ rad ;}$$

$$\bullet \text{mes}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) = 2 \times \frac{2\pi}{5} = \frac{4\pi}{5} \text{ rad ;}$$

$$\bullet \text{mes}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD}) = 3 \times \frac{2\pi}{5} = \frac{6\pi}{5} = \frac{10\pi}{5} - \frac{4\pi}{5} = -\frac{4\pi}{5} [2\pi] ;$$

$$\bullet \text{mes}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OE}) = -\frac{2\pi}{5} \text{ rad.}$$

b. Pour tout point  $M$  du cercle de centre  $O$  et de rayon  $a$  :

$$\begin{cases} x_M = a \times \cos(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) \\ y_M = a \times \sin(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) \end{cases}$$

On en déduit que :

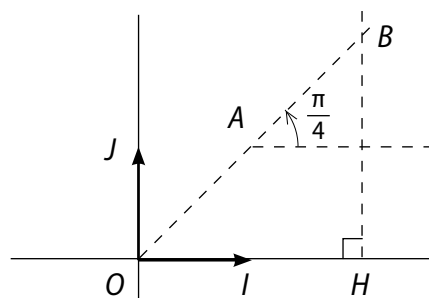
$$B \text{ a pour coordonnées } \left(a \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right); a \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right);$$

$$C \text{ a pour coordonnées } \left(a \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right); a \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right);$$

$$D \text{ a pour coordonnées } \left(a \cos\left(\frac{-4\pi}{5}\right); a \sin\left(\frac{-4\pi}{5}\right)\right);$$

$$E \text{ a pour coordonnées } \left(a \cos\left(\frac{-2\pi}{5}\right); a \sin\left(\frac{-2\pi}{5}\right)\right).$$

41



• Les points  $A, B, O$  sont alignés. En effet :

$$\text{mes}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \text{mes}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OI}) + \text{mes}(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB}) \text{ (Chasles)}$$

$$= -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 0 [2\pi].$$

$$\text{Ainsi, mes}(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{4} [2\pi].$$

• Dans le triangle  $OBH$  rectangle en  $H$ , on a :

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{OH}{OB} = \frac{2}{OB} \text{ donc } \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{OB}$$

$$\text{donc } OB = \frac{4}{\sqrt{2}} = 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}.$$

• Des égalités  $OB = 2\sqrt{2}$  et  $\text{mes}(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{4} [2\pi]$ , on déduit que l'ordonnée de  $B$  est égale à :

$$2\sqrt{2} \times \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2.$$

• Les coordonnées de  $K$  sont donc,

$$\begin{cases} x_k = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1 + 2}{2} = \frac{3}{2} \\ y_k = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{1 + 2}{2} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\mathbf{42} \text{ a. } \frac{4\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{3} \rightarrow \text{Vrai. b. } \frac{5\pi}{6} = \pi + \left(-\frac{\pi}{6}\right) \rightarrow \text{Vrai.}$$

$$\text{c. } \frac{4\pi}{5} = \pi - \frac{\pi}{5} \rightarrow \text{Vrai.}$$

$$\text{d. } \frac{9\pi}{2} = 4\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} [2\pi] \rightarrow \text{Faux.}$$

$$\mathbf{43} \text{ a. } \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{7}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\pi - \frac{\pi}{7}\right) = 0.$$

$$\text{b. } \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.$$

$$\mathbf{44} \text{ a. } \cos(\pi - x) + \cos(-x) = -\cos(x) + \cos(x) = 0.$$

$$\text{b. } \sin(-x) + \sin(\pi - x) = -\sin(x) + \sin(x) = 0.$$

$$\mathbf{45} \text{ a. } \tan x = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{b. } \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\frac{\sqrt{48}}{7} \times \frac{7}{1} = -\sqrt{48}.$$

$$\mathbf{46} \text{ a. } \cos(2\pi - x) + 2 \cos(\pi + x) + 3 \cos(-x) \\ = \cos(-x) + 2(-\cos(x)) + 3 \cos(x) = 2 \cos(x).$$

$$\text{b. } \sin(3\pi - x) - \sin(\pi + x) + 5 \sin(16\pi + x) \\ = \sin(\pi - x) - (-\sin(x)) + 5 \sin(x) \\ = \sin(x) + \sin(x) + 5 \sin(x) = 7 \sin(x).$$

$$\text{c. } \sin(x + 7\pi) - 3 \cos(x + 5\pi) - 4 \cos(x - 4\pi) \\ = \sin(x + \pi) - 3 \cos(x + \pi) - 4 \cos(x) \\ = -\sin(x) + 3 \cos(x) - 4 \cos(x) = -\sin(x) - \cos(x).$$

$$\mathbf{47} \text{ a. } 3 \cos(x) + 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos(\pi - x) \\ = 3 \cos(x) + 2 \cos(x) - \cos(x) = 4 \cos(x).$$

$$\text{b. } 2 \sin(-x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos\left(x - \frac{5\pi}{2}\right) \\ = -2 \sin(x) - \sin(x) + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \\ = -3 \sin(x) + \sin(x) = -2 \sin(x).$$

$$\mathbf{48} \text{ a. } \cos\left(\frac{\pi}{9}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{9}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{9}\right) \\ = \cos\left(\frac{\pi}{9}\right) + \cos\left(\pi - \frac{\pi}{9}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) + \cos\left(\pi - \frac{4\pi}{9}\right) \\ = 0 + 0 = 0.$$

$$\text{b. } \sin\left(\frac{\pi}{11}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{11}\right) + \sin\left(\frac{7\pi}{11}\right) + \sin\left(\frac{21\pi}{11}\right) \\ = \sin\left(\frac{\pi}{11}\right) + \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{11}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{11}\right) + \sin\left(\pi - \frac{4\pi}{11}\right) \\ = \sin\left(\frac{\pi}{11}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{11}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{11}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{11}\right) \\ = 0 + 2 \sin\left(\frac{4\pi}{11}\right) - 2 \sin\left(\frac{4\pi}{11}\right).$$

$$\text{c. } \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\frac{5\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\frac{7\pi}{8}\right) \\ = \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\pi - \frac{3\pi}{8}\right) \\ = 2 \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + 2 \cos^2\left(\frac{3\pi}{8}\right).$$

$$\mathbf{49} \text{ a. } \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{7\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{b. } \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + 2 \cos\left(\frac{-3\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) \\ = \cos\left(\frac{2\pi}{4} + \frac{3\pi}{4}\right) + 2 \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(\pi + \frac{3\pi}{4}\right) \\ = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{4}\right) + 2 \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(\pi + \frac{3\pi}{4}\right) \\ = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{4}\right) + 2 \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \\ = -\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}.$$

$$\text{c. } \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \tan\left(\frac{5\pi}{4}\right) \\ = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) \\ = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) + (-\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)) + \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = 1.$$

50 a.  $\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = -\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$ .

b.  $\tan(\pi - x) = \frac{\sin(\pi - x)}{\cos(\pi - x)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = -\tan(x)$ .

c.  $\tan(\pi + x) = \frac{\sin(\pi + x)}{\cos(\pi + x)} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x)$ .

51 a.  $\cos(2n\pi) = 1$  et  $\sin(2n\pi) = 0$ .

b.  $\cos((2n + 1)\pi) = \cos(2n\pi + \pi) = \cos(\pi) = -1$  et  $\sin((2n + 1)\pi) = 0$ .

c.  $\cos(n\pi) = 1$  si  $n$  pair ou  $-1$  si  $n$  impair et  $\sin(n\pi) = 0$ .

d.  $\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$  et  $\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ .

e.  $\cos\left(\frac{-\pi}{2} + 2n\pi\right) = \cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) = 0$

et  $\sin\left(\frac{-\pi}{2} + 2n\pi\right) = \sin\left(\frac{-\pi}{2}\right) = -1$ .

f.  $\cos\left(\frac{\pi}{2} + (2n + 1)\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

et  $\sin\left(\frac{\pi}{2} + (2n + 1)\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$ .

g.  $\cos\left(\frac{-\pi}{2} + (2n + 1)\pi\right) = \cos\left(\frac{-\pi}{2} + \pi\right) = -\cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) = 0$

et  $\sin\left(\frac{-\pi}{2} + (2n + 1)\pi\right) = \sin\left(\frac{-\pi}{2} + \pi\right) = -\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right) = 1$ .

52 a. Comme  $\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $x = \pi - \frac{\pi}{6}$  ou  $x = -\pi + \frac{\pi}{6}$

c'est-à-dire  $x = \frac{5\pi}{6}$  ou  $x = -\frac{5\pi}{6}$ .

De plus,  $\sin(x) < 0$ , donc  $x = -\frac{5\pi}{6}$ .

b. Comme  $\sin(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $x = -\frac{\pi}{4}$  ou  $x = -(\pi - \frac{\pi}{4})$

c'est-à-dire  $x = -\frac{\pi}{4}$  ou  $x = -\frac{3\pi}{4}$ .

De plus,  $\cos(x) > 0$ , donc  $x = -\frac{\pi}{4}$ .

53 a.  $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$  donc :

$\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$  ou  $\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Comme  $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $\cos(x) > 0$ . Ainsi,  $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

b.  $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x) = 1 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

donc  $\sin(x) = \frac{1}{2}$  ou  $\sin(x) = -\frac{1}{2}$ .

Comme  $x \in [-\pi; 0]$ ,  $\sin(x) \leq 0$  donc  $\sin(x) = -\frac{1}{2}$ .

54 a.  $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x) = 1 - 0,36 = 0,64$

donc  $\sin(x) = \sqrt{0,64} = 0,8$  ou  $\sin(x) = -0,8$ .

b.  $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x) = 1 - 0,04 = 0,96$

donc  $\cos(x) = \sqrt{0,96}$  ou  $\cos(x) = -\sqrt{0,96}$ .

c.  $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x) = 1 - \left(-\frac{4}{9}\right)^2 = 1 - \frac{16}{81} = \frac{65}{81}$

donc  $\sin(x) = \frac{\sqrt{65}}{9}$  ou  $\sin(x) = -\frac{\sqrt{65}}{9}$ .

55  $\frac{\pi}{10} \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$  donc  $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) > 0$

or  $\sin^2\left(\frac{\pi}{10}\right) = 1 - \frac{2\sqrt{5} + 10}{16} = \frac{6 - 2\sqrt{5}}{16} = \frac{3 - \sqrt{5}}{8}$

donc  $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{8}} = \frac{\sqrt{3 - \sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$ .

Ainsi,  $\tan\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)} = \frac{\sqrt{3 - \sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} \times \frac{4}{\sqrt{2\sqrt{5} + 10}}$   
 $= \frac{2\sqrt{3 - \sqrt{5}}}{\sqrt{4\sqrt{5} + 20}}$ .

## Faire le point

56 • Mesure principale de  $\frac{107\pi}{6}$

**Méthode 1** – On cherche  $\alpha \in ]-\pi; \pi]$  et  $k \in \mathbf{Z}$  tels que

$\alpha = \frac{107\pi}{6} + 2k\pi$ .

On a :  $-\pi \leq \frac{107\pi}{6} + 2k\pi \leq \pi$

$\Leftrightarrow -\frac{113}{6}\pi \leq 2k\pi \leq -\frac{101}{6}\pi \Leftrightarrow -\frac{113}{12} \leq k \leq -\frac{101}{12}$ .

Donc  $k = -9$ . Ainsi :  $\alpha = \frac{107\pi}{6} - 18\pi = -\frac{\pi}{6}$ .

**Méthode 2** – On effectue la division euclidienne de 107 par 12 :

$107 = 12 \times 8 + 11$ ,

donc  $\frac{107\pi}{6} = 16\pi + \frac{11\pi}{6} = \frac{11\pi}{6} [2\pi] = \frac{11\pi}{6} - 2\pi [2\pi]$   
 $= -\frac{\pi}{6} [2\pi]$ .

• Mesure principale de  $-\frac{83\pi}{4}$

**Méthode 1** – On cherche  $\alpha \in ]-\pi ; \pi]$  et  $k \in \mathbf{Z}$  tels que

$$\alpha = -\frac{83\pi}{4} + 2k\pi. \text{ On a : } -\pi \leq -\frac{83\pi}{4} + 2k\pi \leq \pi$$

$$\Leftrightarrow \frac{79\pi}{4} \leq 2k\pi \leq \frac{87\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{79}{8} \leq k \leq \frac{87}{8}$$

$$\Leftrightarrow 9,875 \leq k \leq 10,875.$$

$$\text{Donc } k = 10. \text{ Ainsi : } \alpha = -\frac{83\pi}{4} + 20\pi = -\frac{3\pi}{4}.$$

**Méthode 2** – On effectue la division euclidienne de

$$83 \text{ par } 8 ; 83 = 8 \times 10 + 3 \text{ donc } -\frac{83\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} [2\pi].$$

$$\begin{aligned} \text{57} \cdot \cos\left(\frac{8\pi}{3}\right) &= \cos\left(\frac{6\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(2\pi + \frac{2\pi}{3}\right) \\ &= \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \\ &= -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\cdot \sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\cdot \text{On a : } -\frac{19\pi}{6} = \frac{-24\pi + 5\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} [2\pi]$$

$$\text{donc } \begin{cases} \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{et } \tan\left(-\frac{19\pi}{6}\right) &= \tan\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

$$\text{58 } \text{mes}(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CA}) = \frac{\pi}{2} [2\pi] \text{ (ACDE carré).}$$

$$\cdot \text{mes}(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{3} [2\pi] \text{ (ABC équilatéral).}$$

$$\begin{aligned} \cdot \text{Mais } \text{mes}(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{BA}) &= \text{mes}(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{CA}) + \text{mes}(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BA}) \\ &= \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{-3\pi}{6} + \frac{-2\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6} [2\pi]. \end{aligned}$$

Joseph n'a pas tenu compte de l'orientation.

$$\text{59 a. } \text{mes}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5} \text{ rad ; le décagone est régulier, donc chaque angle au centre (de sommet } O) \text{ mesure } \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}.$$

$$\text{b. } \text{mes}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OE}) = 4 \times \text{mes}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{4\pi}{5} \text{ rad.}$$

$$\text{c. } \text{mes}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OG}) = 6 \times \text{mes}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{6\pi}{5} \text{ rad.}$$

$$\text{d. } \text{mes}(\overrightarrow{FO}, \overrightarrow{FE}) = \text{mes}(\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{EF}) = -\frac{\pi}{5} \text{ rad.}$$

**60 1. a.** L'abscisse de  $M$  est égale à  $r \times \cos(\alpha)$ .

**b.** L'ordonnée de  $M$  est égale à  $r \times \sin(\alpha)$ .

**2. a.** • L'abscisse de  $P$  est égale à  $3 \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$  ;

• l'ordonnée de  $P$  est égale à  $3 \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ .

**b.** L'abscisse de  $Q$  est égale à  $0,2 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$  ;

• l'ordonnée de  $Q$  est égale à  $0,2 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ .

**c.** On note  $\alpha = \text{mes}(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OR})$

$$\text{Des égalités : } \begin{cases} \frac{1}{7} = \cos(\alpha) \\ \frac{4\sqrt{3}}{7} = \sin(\alpha), \end{cases}$$

il vient que  $\alpha = \arccos\left(\frac{1}{7}\right) \approx 1,4 \text{ rad}$

(ou  $\alpha = \arcsin\left(\frac{4\sqrt{3}}{7}\right) \approx 1,4 \text{ rad}$ ).

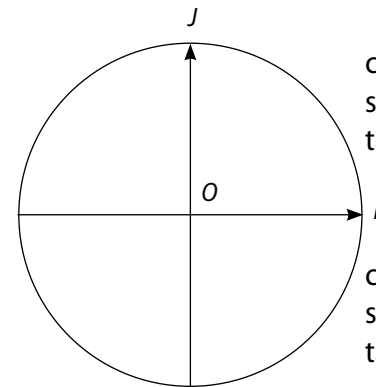
**61**

$$\begin{aligned} \cos(x) &< 0 \\ \sin(x) &> 0 \\ \tan(x) &< 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(x) &> 0 \\ \sin(x) &> 0 \\ \tan(x) &> 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(x) &< 0 \\ \sin(x) &< 0 \\ \tan(x) &> 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(x) &> 0 \\ \sin(x) &< 0 \\ \tan(x) &< 0 \end{aligned}$$



**62** • Ali est parti de la bonne égalité :  $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$ , mais ne discute pas selon le signe de  $\cos(x)$ . De plus,  $\sqrt{25} = 5$  et non 25.

• Namandou se trompe d'égalité ! On écrit :

$$\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x) \text{ et non pas } \cos(x) = 1 - \sin(x) !$$

• Correction

$$\cos^2(x) = 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2 = 1 - \frac{1}{25} = \frac{24}{25} \text{ donc } \cos(x) = \frac{\sqrt{24}}{5} \text{ ou}$$

$$\cos(x) = -\frac{\sqrt{24}}{5}. \text{ Comme } x \in \left]-\pi ; \frac{\pi}{2}\right[, \cos(x) < 0, \text{ donc}$$

$$\cos(x) = -\frac{\sqrt{24}}{5} = -\frac{\sqrt{4 \times 6}}{5} = -2 \frac{\sqrt{6}}{5}.$$

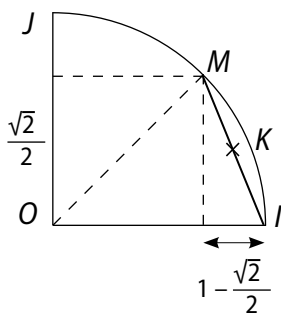
## Se tester

63 à 66 Voir Manuel de l'élève page 257.

## Exercices d'approfondissement

67 1. a. Les coordonnées de  $M$  sont  $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$  et  $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$  car le point  $M$  appartient au cercle trigonométrique.

b.



$$IM = \sqrt{\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \sqrt{2} + \frac{2}{4} + \frac{2}{4}} = \sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

c.  $K$  désigne le milieu du segment  $[MI]$ . Dans le triangle  $OIK$  rectangle en  $K$ , on a :

$$\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{IK}{IO} = IK. \text{ Ainsi, } IM = 2 \times IK = 2 \sin\left(\frac{\pi}{8}\right).$$

$$\text{On a alors : } \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}.$$

$$\text{Puis } \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1 - \frac{2 - \sqrt{2}}{4} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}.$$

Comme  $\frac{\pi}{8} \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$ , donc :

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2 + \sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Et enfin, } \tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}.$$

2.  $N$  désigne le point du cercle  $(\mathcal{C})$  tels que :

$$\text{mes}(\widehat{OI, ON}) = \frac{\pi}{6} [2\pi].$$

• Ses coordonnées sont  $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$  et  $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ .

$$\bullet IN = \sqrt{\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \sqrt{3} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

• Soit  $K'$  le milieu de  $[IN]$ . Dans le triangle  $OIK'$  rectangle

$$\text{en } K', \text{ on a : } \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{IK'}{IO} = IK'.$$

$$\text{Ainsi, } IN = 2 \times IK' = 2 \sin\left(\frac{\pi}{12}\right).$$

• On conclut que  $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$ .

• Puis,  $\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1 - \frac{2 - \sqrt{3}}{4} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$ .

Comme  $\frac{\pi}{12} \in ]0, \frac{\pi}{2}[$   $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0$  donc :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}, \text{ et enfin, } \tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}.$$

68 a. Dans le triangle  $ABH$  rectangle en  $H$  :

$$\sin(x) = \frac{BH}{AB} \text{ donc } BH = a \sin(x).$$

$$\text{Donc } BC = 2BH = 2a \sin(x)$$

b. • Dans le triangle  $AHC$  rectangle en  $C$  :

$$\text{mes}(\widehat{HCA}) = \frac{\pi}{2} - x \text{ rad.}$$

• Dans le triangle  $BCI$  rectangle en  $I$  :

$$\text{mes}(\widehat{IBC}) = \frac{\pi}{2} - \text{mes}(\widehat{HCA}) = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = x \text{ rad}$$

• Dans le triangle  $BCI$  rectangle en  $I$ ,  $\cos(x) = \frac{BI}{BC}$  donc  $BI = BC \cos(x)$

c. Dans le triangle  $ABI$  rectangle en  $I$ ,  $\sin(2x) = \frac{BI}{AB}$  donc  $BI = a \sin(2x)$

d. On a donc :  $a \sin(2x) = BC \cos(x) = 2a \sin(x) \cos(x)$  or  $a > 0$  donc  $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$ .

69 a.  $AIB$  est équilatéral donc  $AI = AB$ .

• Ainsi :  $AI = AB = AD$  donc  $AID$  est isocèle en  $A$ .

$$\text{b. • } \text{mes}(\widehat{AB, AI}) = \frac{\pi}{3} [2\pi]$$

$$\bullet \text{mes}(\widehat{AI, AD}) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{6} - \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{6} [2\pi]$$

$$\bullet \text{mes}(\widehat{DI, DA}) = -\frac{1}{2} \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{5\pi}{12} [2\pi]$$

$$\begin{aligned} \text{c. } \text{mes}(\widehat{DI, DH}) &= \text{mes}(\widehat{DA, DH}) - \text{mes}(\widehat{DA, DI}) = \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{12} \\ &= \frac{6\pi}{12} - \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{12} [2\pi]. \end{aligned}$$

d. • Calcul de  $IK$  : dans le triangle  $AIK$  rectangle en  $K$ , on

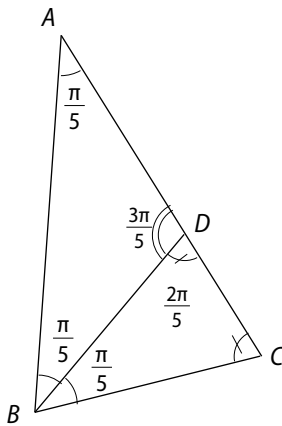
$$\text{a : } \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{IK}{AI} = IK \text{ donc } IK = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Ainsi, } IH = KH - IK = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

• Dans le triangle  $DIH$  rectangle en  $H$ , on a :

$$\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{ID}{IH} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{2 - \sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = 2 - \sqrt{3}.$$

70 a.



b. • Le triangle  $ABC$  étant isocèle en  $A$  :

$$\text{mes}(\widehat{ABC}) = \frac{1}{2} \times (\pi - \frac{\pi}{5}) = \frac{2\pi}{5} \text{ rad.}$$

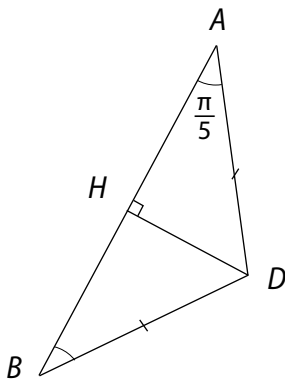
•  $(BD)$  étant la bissectrice de l'angle  $ABC$  :

$$\text{mes}(\widehat{ABD}) = \text{mes}(\widehat{DBC}) = \frac{\pi}{5} \text{ rad.}$$

• Dans ce triangle  $ABD$ ,  $\text{mes}(\widehat{ADB}) = \frac{3\pi}{5}$ , et dans le triangle  $BDC$ ,  $\text{mes}(\widehat{BCD}) = \frac{2\pi}{5}$  car la somme des mesures des trois angles d'un triangle est égale à  $\pi$ .

c.

•



$H$  désigne le pied de la hauteur issue de  $D$  dans le triangle  $ABD$ .

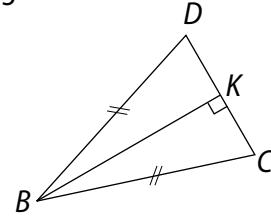
Comme  $ABD$  est isocèle en  $D$ ,  $AB = 2 \times AH$ .

De plus, dans le triangle  $AHD$  est rectangle en  $H$  :

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{AH}{AD}.$$

$$\text{Donc } AB = 2 \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \times AD.$$

•



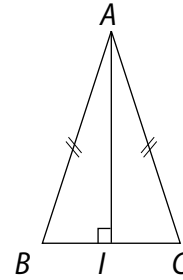
$K$  désigne le pied de la hauteur issue de  $B$  dans le triangle  $BDC$ .

Comme  $BDC$  est isocèle en  $B$ ,  $CD = 2 \times CK$ . De plus,

$$\text{dans le triangle } BKC \text{ rectangle en } K, \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{CK}{BC}.$$

$$\text{Donc } CD = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \times BC.$$

•



$I$  désigne le pied de la hauteur issue de  $A$  dans le triangle  $ABC$ .

Comme  $ABC$  est isocèle en  $A$ ,  $BC = 2 \times BI$ . De plus, dans

$$\text{le triangle } BAI \text{ rectangle en } I, \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{BI}{BA}.$$

$$\text{Donc } BC = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \times AB = 4 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \times AD$$

• En outre, comme  $\text{mes}(\widehat{BAD}) = \text{mes}(\widehat{ABD})$  le triangle  $ABD$  est isocèle en  $D$ , donc  $AD = BD$ .

Comme  $\text{mes}(\widehat{BDC}) = \text{mes}(\widehat{DCB})$ , le triangle  $BDC$  est isocèle en  $B$  donc  $BC = BD$

$$\text{• Ainsi, on a : } \begin{cases} AB = 2 \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) BC \\ CD = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) BC \\ BC = 4 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) BC \end{cases}$$

$$\text{d. • Comme } BC > 0, \text{ on a } 1 = 4 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \cos\left(\frac{\pi}{5}\right).$$

• Comme  $AC = AD + DC$  et  $AB = AC$  :

$$2 \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \times BC = BC + 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \times BC.$$

$$\text{Donc } BC = BC \left(2 \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right).$$

$$\text{Or } BC > 0 \text{ donc } \frac{1}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

• On obtient le système :

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1}{2} \\ \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{1}{4} \end{cases}$$

e. De plus,  $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$

Donc en posant  $a = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$  et  $b = \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ ,

on a :  $(a + b)^2 = 4 \times \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$ .

Comme  $\frac{\pi}{5} \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  et  $\frac{2\pi}{5} \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ ,  $a > 0$  et  $b > 0$ , donc  $a + b > 0$ .

• Ainsi,  $a + b = \frac{\sqrt{5}}{2}$ . De plus,  $a - b = \frac{1}{2}$ .

Donc  $a = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}$  et  $b = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$ .

71 D'après la relation de Chasles :

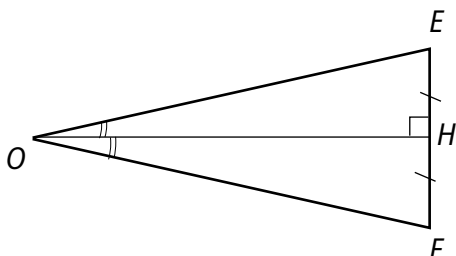
$$\begin{aligned} \text{mes}(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AC}) &= \text{mes}(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AB}) + \text{mes}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) + \text{mes}(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}) \\ &= \frac{2\pi}{3} + \frac{3\pi}{4} - \frac{5\pi}{12} = \frac{8\pi}{12} + \frac{9\pi}{12} - \frac{5\pi}{12} \\ &= \frac{12\pi}{12} = \pi \text{ rad.} \end{aligned}$$

Donc les points A, E, C sont alignés.

72 D'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} \text{mes}(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DC}) &= \text{mes}(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{BA}) + \text{mes}(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) + \text{mes}(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DC}) \\ &= \pi + \left(-\frac{2\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{5} = \frac{15\pi - 10\pi + 3\pi}{15} = \frac{8\pi}{15} [2\pi]. \end{aligned}$$

73



Dans le triangle OEH rectangle en H :

$$\sin\left(\frac{3}{2\pi}\right) = \frac{EH}{OE} \text{ donc } EH = 6 \sin\left(\frac{3}{2\pi}\right).$$

Donc  $EF = 12 \sin\left(\frac{3}{2\pi}\right) \approx 5,51 \text{ m.}$

74 a. Comme le cercle a pour rayon 100 m :

$\text{mes}(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) = \frac{\widehat{MN}}{100}$  rad où  $\widehat{MN}$  est la longueur de l'arc  $\widehat{MN}$ .

De plus,  $\widehat{MN} = 100 - (d_M - d_N)$  où  $d_M$  et  $d_N$  désignent les distances parcourues respectivement par le coureur M et le coureur N.

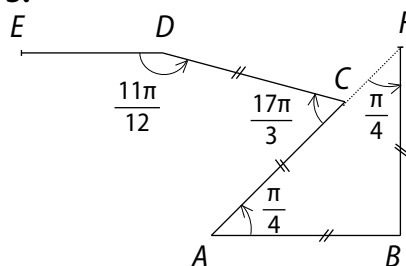
De la relation :  $d = v \times t$ , on déduit que :

$$\text{mes}(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) = \frac{100 - t(v_M - v_N)}{100} = 1 - \frac{t}{100}(v_M - v_N)$$

b. On a :  $\begin{cases} 100 = 12,5 \times v_M \\ 100 = 50(v_M - v_N) \end{cases}$

Donc  $\begin{cases} v_M = \frac{100}{12,5} = 8 \text{ m. s.} \\ v_N = \frac{-100 + 50 \times v_M}{50} = 6 \text{ m. s.} \end{cases}$

75 1. 2. 3.



4. D'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} \text{mes}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DE}) &= \text{mes}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + \text{mes}(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DC}) + \text{mes}(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DE}) \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{17\pi}{3} + \left(-\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} - \frac{11\pi}{12} \\ &= \frac{3\pi}{12} - \frac{4\pi}{12} - \frac{11\pi}{12} = -\pi [2\pi] \end{aligned}$$

donc les droites (AB) et (DE) sont parallèles.

6. D'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} \text{mes}(\overrightarrow{BF}, \overrightarrow{AB}) &= \text{mes}(\overrightarrow{BF}, \overrightarrow{AF}) + \text{mes}(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AB}) \\ &= -\frac{\pi}{4} + \text{mes}(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) \\ &= -\frac{\pi}{4} + -\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} \text{ rad} \end{aligned}$$

Donc les droites (AB) et (BF) sont perpendiculaires.

76 Étant donnés trois points A, B et C alignés, on construit le cercle circonscrit au triangle ABC. Pour cela, on construit les médiatrices de deux segments, par ex. [AB] et [AC] ; ils se coupent en le centre du cercle circonscrit.

a. Les points  $M$  tels que  $\text{mes}(\widehat{MA, MB}) = \text{mes}(\widehat{CA, CB})$  sont les points de l'arc de cercle  $\widehat{AB}$  contenant le point  $C$ .

b. Les points  $M$  tels que :  
 $\text{mes}(\widehat{MA, MB}) = -\text{mes}(\widehat{CA, CB})$  sont les points de l'arc de cercle  $\widehat{AB}$  ne contenant pas le point  $C$ .

**77** a. Les points  $B, I, A$  et  $B, O, C$  étant alignés, les droites  $(OI)$  et  $(AC)$  étant parallèles, d'après le théorème de Thalès, on a :  $\frac{BI}{BA} = \frac{BO}{BC} = \frac{OI}{AC}$ .

Donc  $\frac{BI}{BA} = \frac{1}{2}$  donc  $I$  est le milieu de  $[AB]$ .

b. Dans le triangle  $ABC$  rectangle en  $A$  (car  $[BC]$  est un diamètre du cercle et  $A$  un point de ce cercle), on a :

$$\cos(\alpha) = \frac{AB}{BC}, \text{ donc } AB = 2 \cos(\alpha)$$

c. • Dans le triangle  $ABH$  rectangle en  $H$ ,  $\cos(\alpha) = \frac{BH}{AB}$   
 donc  $BH = AB \cos(\alpha) = 2 \cos^2(\alpha)$ .

• Ainsi,  $OH = BH - OB = 2 \cos^2(\alpha) - 1$

d. L'angle  $\widehat{ABC}$  inscrit et l'angle  $\widehat{AOC}$  au centre interceptent le même arc  $\widehat{AC}$  de cercle. Donc  $\text{mes}(\widehat{AOC}) = 2\alpha$ .

• Dans le triangle  $OAH$  rectangle en  $H$ ,  $\cos(2\alpha) = \frac{OH}{OA}$   
 donc  $OH = \cos(2\alpha)$

• Par conséquent :  $OH = \cos(2\alpha)$  et  $OH = 2 \cos^2(\alpha) - 1$ .

$$\text{Donc } \cos^2(\alpha) = \frac{\cos(2\alpha) + 1}{2}$$

$$\text{puis } \sin^2(\alpha) = 1 - \cos^2(\alpha) = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{e. } \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) &= \frac{\cos\left(2 \times \frac{\pi}{8}\right) + 1}{2} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + 1}{2} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right) \times \frac{1}{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + 2}{4} \end{aligned}$$

$$\text{et } \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$$

Comme  $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$  et  $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$  ( $\frac{\pi}{8} \in ]0; \frac{\pi}{2}[$ ),

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{\sqrt{2} + 2}}{2} \text{ et } \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

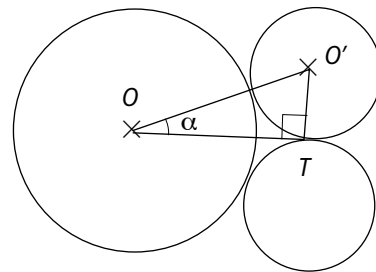
$$\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2}(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + 1) = \frac{\sqrt{3} + 2}{4}$$

$$\text{et } \sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2}(1 - \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)) = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$$

Comme  $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0$  et  $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0$ , ( $\frac{\pi}{12} \in ]0; \frac{\pi}{2}[$ ),

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3 + \sqrt{2}}}{2} \text{ et } \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

**78** 1. Huit sphères de dimension identique sont tangentes à la neuvième. Ainsi, l'angle  $\alpha$  représenté ci-dessous est tel que  $8 \times 2\alpha = 2\pi$ , donc  $\alpha = \frac{\pi}{8}$ .



$$O'T = r$$

Dans le triangle  $CO'T$  rectangle en  $T$ ,  $\sin \alpha = \frac{O'T}{O'C}$  donc

$$O'T = O'C \sin \alpha; \text{ donc } r = O'C \sin\left(\frac{\pi}{8}\right).$$

2. Dans le triangle  $OO'C$  rectangle en  $C$ , l'égalité de Pythagore s'écrit :  $OO'^2 = OC^2 + O'C^2$

$$\text{donc } (R + r)^2 = (R - r)^2 + O'C^2$$

$$\text{donc } O'C^2 = (R + r)^2 - (R - r)^2 = 4Rr$$

$$\text{3. a. } \begin{cases} r^2 = O'C^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) \\ O'C^2 = 4Rr \end{cases}$$

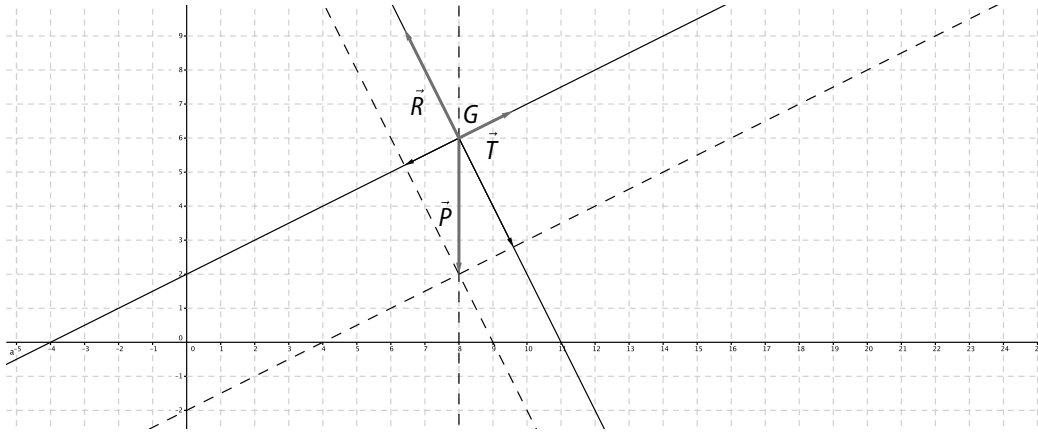
$$\text{donc } \frac{r^2}{\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)} = 4Rr; \text{ donc } \frac{r}{R} = 4 \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right).$$

$$\text{b. } \frac{r}{R} \approx 0,59.$$

# 3 Vecteurs

## Activités d'introduction

### 1 En équilibre



### 2 Comète

$$1. \vec{h}_1 = 2,8(0,5\vec{i} + 0,25\vec{j}) - 0,4(-0,25\vec{i} + 0,5\vec{j}) = 1,4\vec{i} + 0,7\vec{j} + 0,1\vec{i} - 0,2\vec{j} = 1,5\vec{i} + 0,5\vec{j}$$

Dans le repère terrien, on a  $\vec{h}_1(1,5; 0,5)$ .

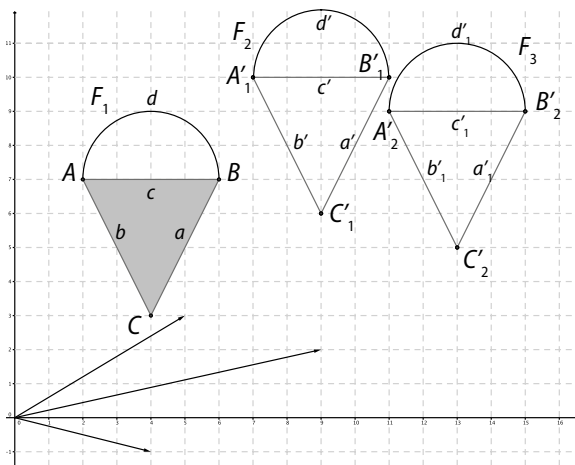
$$2. a. \begin{cases} \vec{u} = 0,5\vec{i} + 0,25\vec{j} \\ \vec{v} = -0,25\vec{i} + 0,5\vec{j} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} = 0,5\vec{i} + 0,25\vec{j} \\ 2\vec{v} = -0,5\vec{i} + \vec{j} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} = 0,5\vec{i} + 0,25\vec{j} \\ \vec{u} + 2\vec{v} = 1,25\vec{j} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} = 0,5\vec{i} + 0,25\vec{j} \\ \vec{j} = 0,8\vec{u} + 1,6\vec{v} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} = 0,5\vec{i} + 0,25(0,8\vec{u} + 1,6\vec{v}) \\ \vec{j} = 0,8\vec{u} + 1,6\vec{v} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} = 0,5\vec{i} + 0,2\vec{u} + 0,4\vec{v} \\ \vec{j} = 0,8\vec{u} + 1,6\vec{v} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,8\vec{u} - 0,4\vec{v} = 0,5\vec{i} \\ \vec{j} = 0,8\vec{u} + 1,6\vec{v} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{i} = 1,6\vec{u} - 0,8\vec{v} \\ \vec{j} = 0,8\vec{u} + 1,6\vec{v} \end{cases}$$

$$b. \vec{h}_2 = 1,25(1,6\vec{u} - 0,8\vec{v}) + 1,25(0,8\vec{u} + 1,6\vec{v}) = 2\vec{u} - \vec{v} + \vec{u} + 2\vec{v} = 3\vec{u} + \vec{v}. \text{ Dans le repère de la station, on a } \vec{h}_2(3; 1).$$

### 3 Montgolfière

1. 2. 3. a.

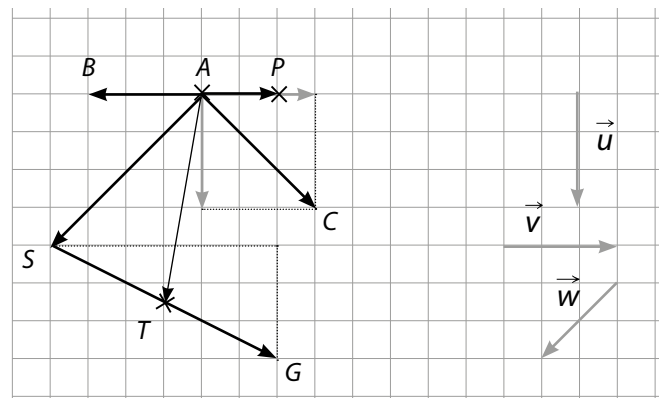


b. On remarque que  $F_3$  est la translatée de  $F_2$  par la translation de vecteur  $\vec{v}$ .

c. Appliquer successivement deux translations de vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  revient à appliquer la translation de vecteur  $\vec{u} + \vec{v}$ .

### 4 Carte au trésor

a. b.



$$c. \vec{ST} = \frac{1}{2}\vec{SG} = \frac{1}{2}(2\vec{v} + \vec{u}) = \frac{1}{2}\vec{u} + \vec{v}.$$

$$d. \vec{AT} = \vec{AS} + \vec{ST} = 2\vec{w} + \frac{1}{2}\vec{SG} = 2\vec{w} + \frac{1}{2}(2\vec{v} + \vec{u}) = \frac{1}{2}\vec{u} + \vec{v} + 2\vec{w}.$$

## Savoir faire

$$\begin{aligned}
 \text{3 c. } \vec{AD} &= \vec{BC} = \vec{BA} + \vec{AC} = -\vec{AB} + \vec{AC} \\
 &= -(2\vec{u} - 3\vec{v}) + (\vec{u} + 2\vec{v}) \\
 &= -\vec{u} + 5\vec{v}.
 \end{aligned}$$

4  $ABCD$  parallélogramme  $\Leftrightarrow \vec{AB} = \vec{DC}$  et  $CDEF$  parallélogramme  $\Leftrightarrow \vec{DC} = \vec{EF}$ .  
On en déduit que  $\vec{AB} = \vec{EF}$  et donc, que  $ABFE$  est un parallélogramme.

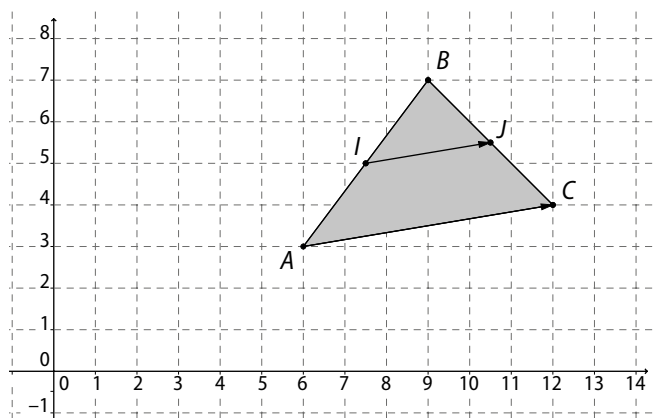
$$5 \text{ a. } \vec{AD} = \vec{AE} + \vec{ED} \text{ (Relation de Chasles).}$$

$\vec{AE} = \vec{EC}$  car  $E$  est le milieu de  $[AC]$ .

D'où  $\vec{AD} = \vec{EC} + \vec{ED}$ .

$$\begin{aligned}
 \text{b. } \vec{AB} + \vec{AD} &= \vec{AB} + \vec{BC} \text{ (} ABCD \text{ parallélogramme).} \\
 &= \vec{AC} \text{ (Relation de Chasles).} \\
 &= 2\vec{EC} \text{ (} E \text{ milieu de } [AC]).
 \end{aligned}$$

6



$$\vec{IJ} = \vec{IB} + \vec{BJ} \text{ (Relation de Chasles) (1).}$$

$$\vec{IB} = \frac{1}{2} \vec{AB} \text{ (} I \text{ milieu de } [AB]).$$

$$\vec{BJ} = \frac{1}{2} \vec{BC} \text{ (} J \text{ milieu de } [BC]).$$

En remplaçant dans (1), on obtient :

$$\vec{IJ} = \frac{1}{2} \vec{AB} + \frac{1}{2} \vec{BC} = \frac{1}{2} \vec{AC}.$$

$$9 \vec{BN} = \vec{BA} + \vec{AN} \text{ (Relation de Chasles)}$$

$$= \vec{BA} + 3\vec{AC} \text{ (énoncé)}$$

$$= 3\left(\frac{1}{3}\vec{BA} + \vec{AC}\right)$$

$$= 3(\vec{MA} + \vec{AC}) \text{ (énoncé)}$$

$$= 3\vec{MC}.$$

Les vecteurs  $\vec{BN}$  et  $\vec{MC}$  sont colinéaires.  
Les droites  $(BN)$  et  $(MC)$  sont donc parallèles.

$$10 \vec{DP} = \vec{DM} + \vec{MP} \text{ (Relation de Chasles).}$$

$$\vec{DP} = 2\vec{DC} + 2\vec{MB} \text{ (énoncé).}$$

$$\vec{DP} = 2\vec{AB} + 2\vec{MB} \text{ (} ABCD \text{ parallélogramme).}$$

$$\vec{DP} = 2\vec{AB} + 2\vec{BP} = 2(\vec{AB} + \vec{BP}) = 2\vec{AP}.$$

Les vecteurs  $\vec{DP}$  et  $\vec{AP}$  sont colinéaires.

Les points  $D, A$  et  $P$  sont donc alignés.

13 a.  $\det(\vec{u}, \vec{v}) = (-2) \times (-4, 5) - 3 \times 3 = 0$ .  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires.

b.  $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 3 \times 4 - (-2) \times 6 = 24$  et  $24 \neq 0$ .  
 $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ne sont pas colinéaires.

$$14 \text{ a. } \vec{AB}(4; 2), \vec{CD}(6; 3).$$

$\det(\vec{AB}, \vec{CD}) = 0$  donc  $(AB) \parallel (CD)$ .

$$\text{b. } \vec{AC}(4; -5), \vec{BD}(6; -4).$$

$\det(\vec{AC}, \vec{BD}) \neq 0$  donc  $(AB)$  et  $(CD)$  ne sont pas parallèles.

$$15 \text{ a. } \vec{u}(2; 0), \vec{v}(2; 2).$$

b.  $\det(\vec{u}, \vec{v}) \neq 0$  donc  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ne sont pas colinéaires. Ils constituent donc une base.

$$\text{c. } \begin{cases} \vec{u} = 2\vec{j} \\ \vec{v} = 2\vec{i} + 2\vec{j} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{j} = \frac{1}{2}\vec{u} \\ \vec{i} = -\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} \end{cases}$$

16 a. Les droites  $(AB)$  et  $(AD)$  ne sont pas parallèles.

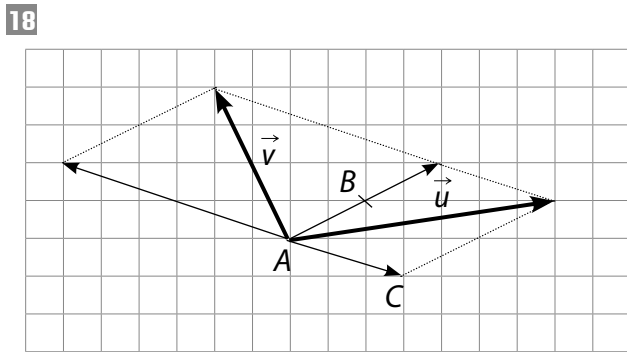
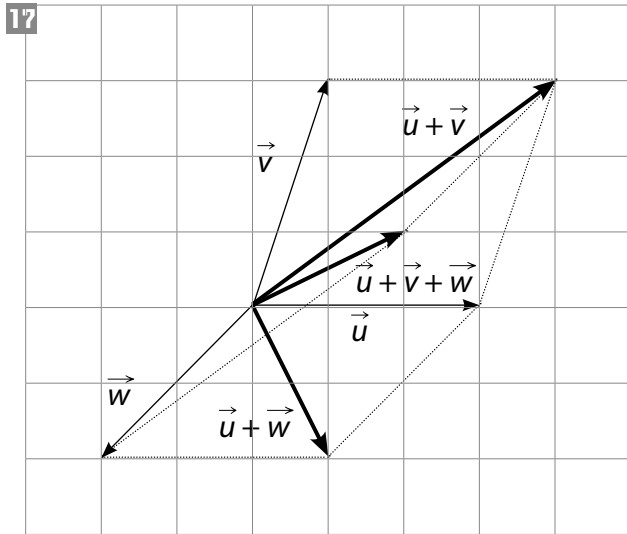
Les vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{AD}$  ne sont pas colinéaires et constituent donc une base.

$$\text{b. } A(0; 0), B(1; 0), C(1; 1), D(0; 1) \text{ et } O\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right).$$

$$\text{c. } \vec{AE} = 3\vec{AO} + \vec{BO} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - 1\right) \\ y_E = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right). \end{cases}$$

D'où :  $E(1; 2)$ .

## Exercices d'entraînement



- 19 a.  $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ ;  
 b.  $\vec{BA} + \vec{AC} = \vec{BC}$ ;  
 c.  $\vec{OA} + \vec{AE} = \vec{OE}$ ;  
 d.  $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} = \vec{AD}$ .

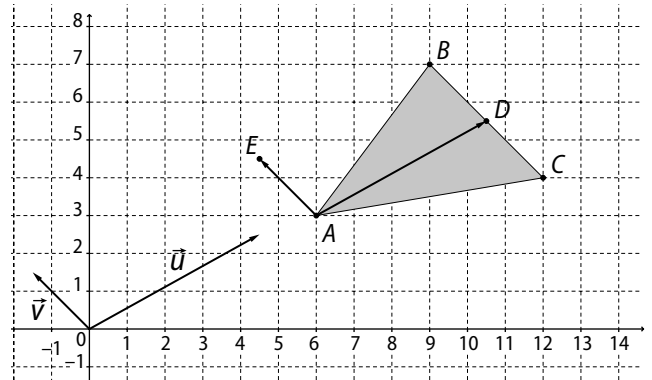
- 20 a.  $\vec{c} = \vec{f}$ ; b.  $\vec{a} = -\vec{e}$  ou  $\vec{d} = -\vec{g}$ ;  
 c.  $\vec{b}$ ,  $\vec{d}$  et  $\vec{g}$  ont même direction.

- 21 a.  $\vec{AD} + \vec{DC} = \vec{AC}$ ; b.  $\vec{AD} + \vec{AC} = \vec{AF}$ ;  
 c.  $\vec{BD} + \vec{EF} = \vec{BC}$ ; d.  $\vec{EC} + \vec{AD} = \vec{EF}$ ;  
 e.  $\vec{EC} + \vec{BD} = \vec{0}$ ; f.  $\vec{AE} + \vec{FB} = \vec{0}$ .

22 
$$\begin{cases} \vec{AD} + \vec{AE} = \vec{AB} \\ \vec{AD} - \vec{AE} = \vec{AC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{AC} \\ 2\vec{AE} = \vec{AB} - \vec{AC} \end{cases}$$

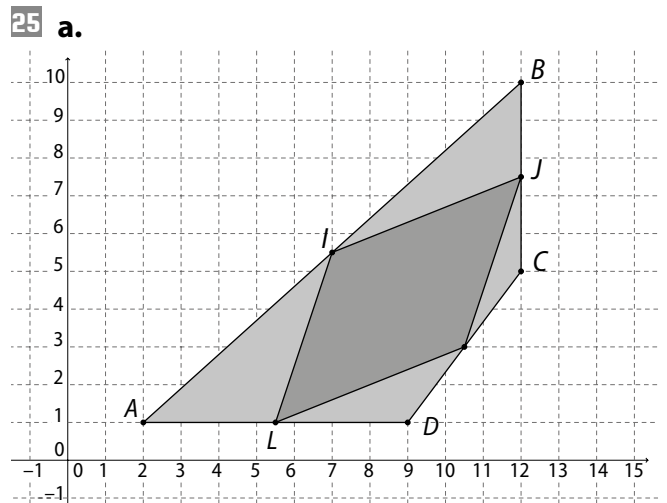
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{AD} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC}) \\ \vec{AE} = \frac{1}{2}(\vec{AB} - \vec{AC}) \end{cases}$$

D'où la construction des points D et E.



- 23 a.  $\vec{CD} + \vec{DB} = \vec{CB}$ ;  
 b.  $\vec{AD} - \vec{AB} = \vec{BD}$ ;  
 b.  $\vec{AC} + \vec{CB} = \vec{AB}$ ;  
 d.  $\vec{AC} + \vec{DC} + \vec{AD} = 2\vec{AC}$ ;  
 e.  $\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{AA} = \vec{0}$ ;  
 f.  $\vec{BD} - \vec{BA} + \vec{DA} - \vec{DB} = \vec{BD}$ .

- 24 • I est le milieu de [AB], donc  $\vec{IA} = \frac{1}{2}\vec{BA}$ ;  
 • J est le milieu de [AC], donc  $\vec{JA} = \frac{1}{2}\vec{CA}$ ;  
 •  $\vec{IJ} = \vec{IA} + \vec{AJ}$  d'après la relation de Chasles ;  
 •  $\vec{IJ} = \frac{1}{2}\vec{BA} + \frac{1}{2}\vec{AC} = \frac{1}{2}(\vec{BA} + \vec{AC}) = \frac{1}{2}\vec{BC}$ .

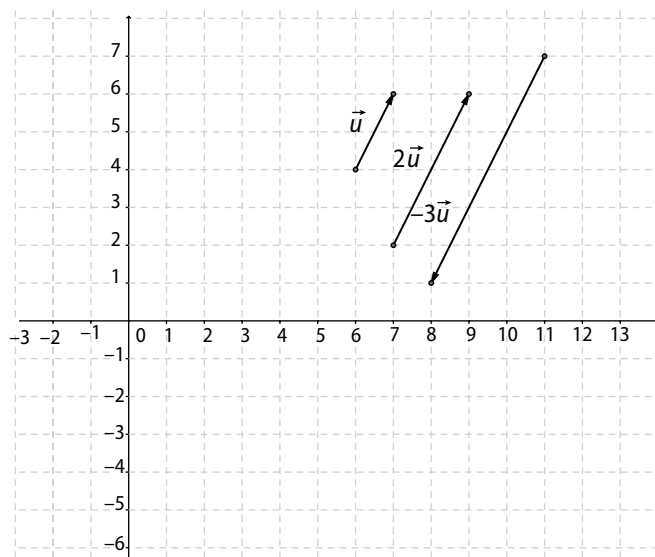


IJKL est un parallélogramme.

b.  $\vec{IJ} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BC} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{BC}) = \frac{1}{2}\vec{AC}$ .

$\vec{LK} = \frac{1}{2}\vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{DC} = \frac{1}{2}(\vec{AD} + \vec{DC}) = \frac{1}{2}\vec{AC}$ .

D'où  $\vec{IJ} = \vec{LK}$  et IJKL est un parallélogramme.

**26 1.**

**2.**  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont colinéaires.

**3.**  $\vec{v} = -\frac{2}{3}\vec{w}$ .

**27**  $k = -\frac{3}{2}; m = \frac{2}{3}$ .

**28 a.** L'addition des deux égalités vectorielles de l'énoncé donne :  $2\vec{u} - 4\vec{w} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u} = 2\vec{w}$ .

 La soustraction des deux égalités vectorielles de l'énoncé donne :  $4\vec{v} - 2\vec{w} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{v} = \frac{1}{2}\vec{w}$ .

**b.**  $\vec{CE} = 2\vec{AB}$  et  $\vec{FD} = \frac{1}{2}\vec{AB}$ .

**29 1. a.** Les quatre points  $A, B, M$  et  $I$  sont alignés.

 Les vecteurs  $\vec{MI}$  et  $\vec{MA} + \vec{MB}$  sont colinéaires.

**b.**  $\vec{MA} = \vec{MI} + \vec{IA}$  (relation de Chasles).

$\vec{MB} = \vec{MI} + \vec{IB}$  (relation de Chasles).

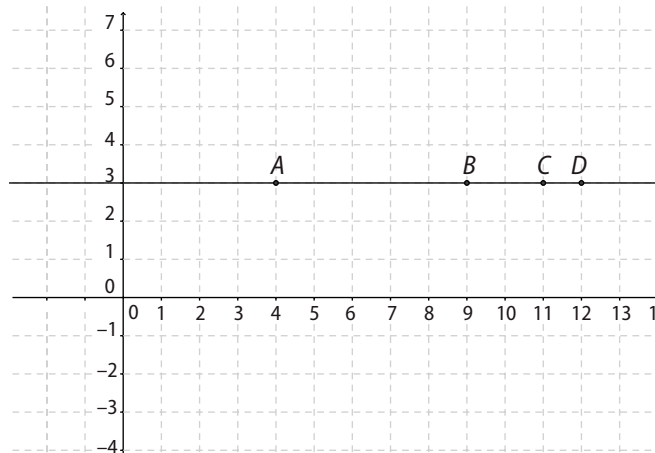
$\vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MI} + \vec{IA} + \vec{IB} = 2\vec{MI}$  ( $I$  milieu de  $[AB]$ ).

Donc  $\vec{MI} = \frac{1}{2}(\vec{MA} + \vec{MB})$  et  $k = \frac{1}{2}$ .

**2.** Les égalités vectorielles du **1. b.** ne dépendent pas de la position du point  $M$  et restent valables.

**3.** Pour tout point  $M$ , on a  $\vec{MI} = \frac{1}{2}(\vec{MA} + \vec{MB})$ .

**30 a.** Oui ; **b.** Oui ; **c.** Oui ; **d.** Oui.

**31**

**a.**  $A, B, C$  et  $D$  sont alignés.

**b.**  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$  colinéaires, donc  $A, B$  et  $C$  sont alignés.

 $\vec{BC}$  et  $\vec{BD}$  colinéaires, donc  $B, C$  et  $D$  sont alignés.

Les quatre points sont donc bien alignés.

**32 a.**  $\vec{BM} = \vec{AB}$  et  $\vec{DN} = \vec{CD}$ .

 $ABCD$  parallélogramme  $\Leftrightarrow \vec{AB} = \vec{DC}$ .

 On déduit de ces trois égalités que :  $\vec{BM} = \vec{ND}$ , autrement dit  $MBND$  est un parallélogramme.

**b.**  $\vec{AM} = \vec{NC} \Leftrightarrow AMCN$  parallélogramme ;

 $\vec{AB} = \vec{DC} \Leftrightarrow ABCD$  parallélogramme ;

 $\vec{BM} = \vec{ND} \Leftrightarrow MBND$  parallélogramme.

**33**  $\vec{a} = -3\vec{d} = 5\vec{e}$  donc  $\vec{a}, \vec{d}$  et  $\vec{e}$  sont colinéaires.

 $\vec{c} = -2\vec{b} = -4\vec{f}$  donc  $\vec{c}, \vec{b}$  et  $\vec{f}$  sont colinéaires.

**34 a.**  $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$ 

$\Leftrightarrow \vec{GA} + \vec{GA} + \vec{AB} + \vec{GA} + \vec{AC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\vec{GA} + \vec{AB} + \vec{AC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \vec{GA} = -\frac{1}{3}\vec{AB} - \frac{1}{3}\vec{AC}$ .

**c.**  $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AI} + \vec{IB} + \vec{AI} + \vec{IC}$ .

 Or  $I$  milieu de  $[BC] \Leftrightarrow \vec{IB} + \vec{IC} = \vec{0}$ .

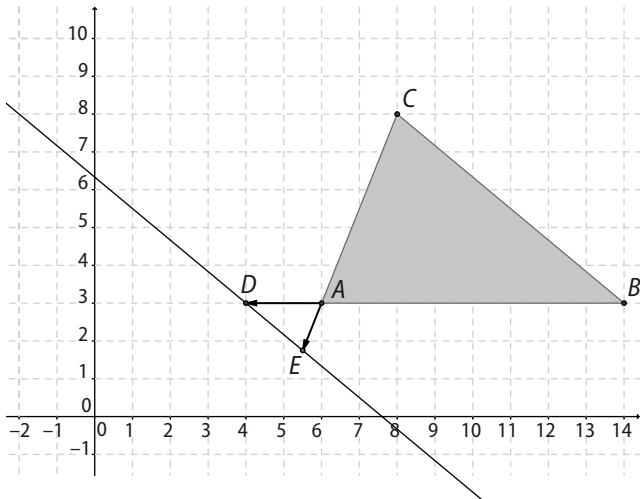
 Donc, on a bien :  $\vec{AB} + \vec{AC} = 2\vec{AI}$ .

**d.** On a démontré que :  $\vec{GA} = -\frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AC})$ .

Donc  $\vec{GA} = -\frac{2}{3}\vec{AI}$ .

**e.** Les points  $A, G$  et  $I$  sont donc alignés.

35 a.



b.  $\vec{DE} = \vec{DA} + \vec{AE}$  (Relation de Chasles)

$$\Leftrightarrow \vec{DE} = \frac{1}{4}\vec{AB} - \frac{1}{4}\vec{AC} = -\frac{1}{4}(\vec{BA} + \vec{AC}) = -\frac{1}{4}\vec{BC}$$

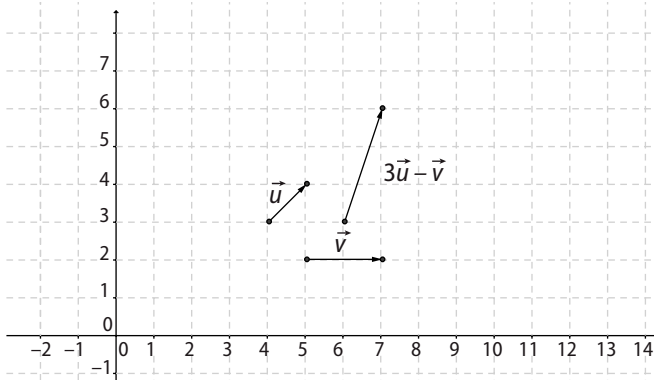
Les vecteurs  $\vec{DE}$  et  $\vec{BC}$  sont colinéaires. Par conséquent,  $(DE) \parallel (BC)$ .

36  $\|\vec{u}\| = 3; \|\vec{v}\| = 2; \|\vec{w}\| = \sqrt{13}$ .

37  $\vec{BC} = \vec{BA} + \vec{AC}$  donc  $BC \leq AB + AC \Leftrightarrow BC \leq 5$ .

Donc on a  $0 \leq BC \leq 5$ .

38 a.



b.  $\|3\vec{u} - \vec{v}\| \leq \|3\vec{u}\| + \|\vec{v}\| \leq 3 \times 4 + 3$ .

D'où :  $\|3\vec{u} - \vec{v}\| \leq 15$ .

39  $\|(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}\| \leq \|\vec{u} + \vec{v}\| + \|\vec{w}\|$   
 $\leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$ .

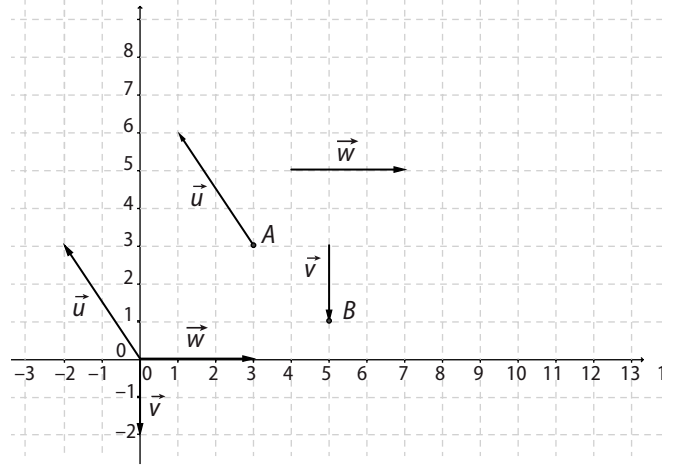
40 a. Possible car  $\|\vec{AB}\| \leq \|\vec{AC}\| + \|\vec{BC}\|$  ainsi que  $\|\vec{AC}\| \leq \|\vec{AB}\| + \|\vec{BC}\|$  et  $\|\vec{BC}\| \leq \|\vec{AC}\| + \|\vec{AB}\|$ .

b. Impossible car  $\|\vec{BC}\| \geq \|\vec{AC}\| + \|\vec{AB}\|$ .

c. Possible, mais triangle aplati. Les trois points A, B et C sont alignés.

41 a.  $\vec{u}(-4; -1)$ ; b.  $\vec{v}(0; -3)$ ; c.  $\vec{AB}(2; 2)$ ;  
 d.  $\vec{AD}(3; 0)$ ; e.  $\vec{CB}(0; 6)$ ;  $\vec{CD}(1; 4)$ .

42 1. a. b. c.



2.  $\|\vec{u}\| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}$ ;

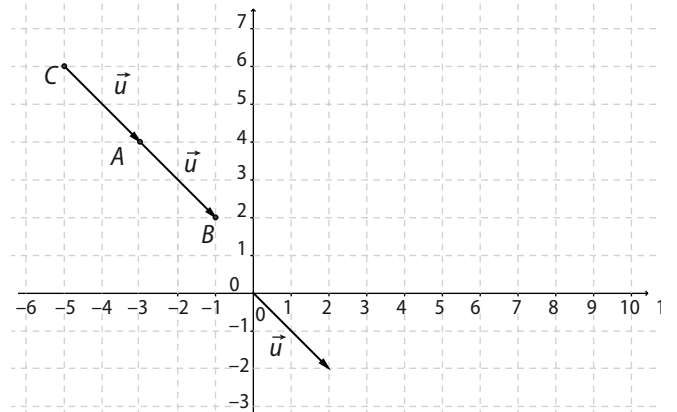
$\|\vec{v}\| = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = \sqrt{4} = 2$ ;

$\|\vec{w}\| = \sqrt{3^2 + 0^2} = \sqrt{9} = 3$ .

43 a.  $\vec{u} + \vec{v}(1; -1)$ ; b.  $-3\vec{v}(3; -6)$ ;

c.  $\vec{u} - 2\vec{v}(4; -7)$ .

44 a.



b.  $B(-1; 2); C(-5; 6)$ .

c.  $\vec{AB} = \vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B - (-3) = 2 \\ y_B - 4 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = -1 \\ y_B = 2. \end{cases}$

$\vec{CA} = \vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 - x_C = 2 \\ 4 - y_C = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_C = 5 \\ -y_C = -6 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_C = -5 \\ y_C = 6 \end{cases}$

d. Le point A est le milieu de [BC] car :

$\vec{AB} = \vec{CA} \Rightarrow AB = CA$  et A, B et C alignés.

**45 a.** Conjecture :  $D(-2; -4)$ .

**b.**  $ABCD$  parallélogramme  $\Leftrightarrow \vec{CD} = \vec{BA}$ .

$$\vec{CD} = \vec{BA} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D - 1 = -1 - 2 \\ y_D - (-3) = 2 - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -2 \\ y_D = -4. \end{cases}$$

**46**  $\|\vec{u}\| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$ .

$$\vec{v} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \text{ donc } \vec{v}(45; \frac{3}{5}).$$

**47 a.**  $\vec{AB}(-2 - (-1); -1 - 2)$  donc  $\vec{AB}(-1; -3)$  d'où :

$$\|\vec{AB}\| = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{10};$$

$\vec{AC}(-1 - 2; 3 - 2)$  donc  $\vec{AC}(-3; 1)$  d'où :

$$\|\vec{AC}\| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{10}.$$

**b.** Le triangle  $ABC$  est isocèle de sommet  $A$ .

**48 1. a.**  $\vec{AB}(3; 4); \|\vec{AB}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ ;

**b.**  $\vec{AC}(5; -1); \|\vec{AC}\| = \sqrt{5^2 + (-1)^2} = \sqrt{26}$ ;

**c.**  $\vec{BC}(2; -5); \|\vec{BC}\| = \sqrt{2^2 + (-5)^2} = \sqrt{29}$ .

**2.** Si le triangle  $ABC$  est rectangle, son hypoténuse est le côté le plus long  $[BC]$ .

$BC^2 \neq AB^2 + AC^2$ . Donc  $ABC$  n'est pas rectangle.

**49 a.**  $\vec{AB}(5 - (-1); 2 - 1) = (6; 1)$ ;

$\vec{DC}(4 - (-2); -2 - (-3)) = (6; 1)$ .

$\vec{AB} = \vec{DC} \Leftrightarrow ABCD$  est un parallélogramme.

**b.**  $I$  et  $J$  désignent les milieux respectifs de  $[AC]$  et  $[BD]$ .

$I(-1 + \frac{4}{2}; 1 + \frac{(-2)}{2})$  donc  $I(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2})$ ;

$J(5 + \frac{(-2)}{2}; 2 + \frac{(-3)}{2})$  donc  $J(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2})$ .

Les milieux des diagonales étant confondus,  $ABCD$  est un parallélogramme.

**50 b.**  $E(-2; 2); F(3; 4); G(1; 0); H(-4; -2)$ .

$\vec{EF}(3 - (-2); 4 - 2) = (5; 2)$ ;

$\vec{HG}(1 - (-4); 0 - (-2)) = (5; 2)$ .

$\vec{EF} = \vec{HG} \Leftrightarrow EFGH$  est un parallélogramme.

**d.**  $\vec{EG}(3; -2); \vec{EH}(-2; -4)$

$$\vec{EI} = \vec{EG} + \vec{EH} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I - (-2) = 3 + (-2) \\ y_I - 2 = -2 + (-4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = -1 \\ y_I = -4 \end{cases}$$

**e.**  $\vec{HI}(-1 - (-4); -4 - (-2)) = (3; -2)$ ;

$\vec{EG}(3; -2)$ .

$\vec{EG} = \vec{HI} \Leftrightarrow EGIH$  est un parallélogramme.

$$\mathbf{51 a.} \vec{AE} = \vec{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E - 0 = 2 - (-2) \\ y_E - 4 = -1 - (-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E = 4 \\ y_E = 4 \end{cases}$$

donc  $E(4; 4)$ .

$$\vec{FA} = \vec{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 - x_F = 2 - (-2) \\ 4 - y_F = -1 - (-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_F = 4 \\ -y_F = -4 \end{cases}$$

donc  $F(-4; 4)$ .

$$\vec{GB} = \vec{CA} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 - x_G = 0 - 2 \\ -1 - y_G = 4 - (-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_G = 0 \\ -y_G = 4 \end{cases}$$

donc  $G(0; -4)$ .

**b.**  $AB = \sqrt{(-2)^2 + (-5)^2} = \sqrt{29}$ ;

$AC = \sqrt{2^2 + (-5)^2} = \sqrt{29}$ .

$AB = AC$  donc  $ABC$  isocèle en  $A$ .

$GF = \sqrt{4^2 + (-8)^2} = \sqrt{80}$ ;

$EG = \sqrt{(-4)^2 + (-8)^2} = \sqrt{80}$ .

$GF = EG$  donc  $FGE$  isocèle en  $G$ .

**52 1.**  $\vec{F}_1(-2; 1); \vec{F}_2(2; 3)$ .

**2.**  $\vec{F}_3(-2 + 2; 1 + 3)$  donc  $\vec{F}_3(0; 4)$ .

**3. a.** Verticale de haut en bas.

**b.**  $P = \|\vec{F}_3\| = \sqrt{0^2 + 4^2} = 4$ .

D'où  $mg = 4 \Leftrightarrow 9,81m = 4 \Leftrightarrow m = \frac{4}{9,81} \approx 0,4$  kg.

**53**  $\det(\vec{a}, \vec{b}) = 2 \times 2 - 4 \times (-1) = 8, 8 \neq 0$  donc  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  ne sont pas colinéaires.

$\det(\vec{b}, \vec{c}) = (-1) \times 1 - 2 \times (-0,5) = 0$ , donc  $\vec{b}$  et  $\vec{c}$  sont colinéaires.

On en déduit que  $\vec{a}$  et  $\vec{c}$  ne sont pas colinéaires.

**54 a.**  $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 1 \times 6 - (-2) \times (-3) = 0$ ,  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont donc colinéaires.

**b.**  $\vec{v} = -3\vec{u}$ .

**55**  $\vec{AB}(2; 2); \vec{AC}(4; 5)$ .

$\det(\vec{AB}, \vec{AC}) = 2 \times 5 - 2 \times 4 = 2, 2 \neq 0$  donc  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$  ne sont pas colinéaires. Les points  $A, B$  et  $C$  ne sont pas alignés.

**56**  $\vec{EF}(3; -1); \vec{GH}(6; -2)$ .

$\det(\vec{EF}, \vec{GH}) = 3 \times (-2) - (-1) \times 6 = 0$ , donc  $\vec{EF}$  et  $\vec{GH}$  sont colinéaires. Les droites  $(EF)$  et  $(GH)$  sont parallèles.

**57 a.**  $\vec{AB}(2; 3); \vec{CD}(-2; -3)$ .

$\det(\vec{AB}, \vec{CD}) = 2 \times (-3) - 3 \times (-2) = 0$ , les droites  $(AB)$  et  $(CD)$  sont parallèles.

b.  $\vec{AB}(4; 2); \vec{CD}(-2; 1)$ .

dét  $(\vec{AB}, \vec{CD}) = 4 \times 1 - 2 \times (-2) = 8, 8 \neq 0$ , les droites  $(AB)$  et  $(CD)$  ne sont pas parallèles.

c.  $\vec{AB}(-3; -3\sqrt{3}); \vec{CD}(3; 3\sqrt{3})$ .

dét  $(\vec{AB}, \vec{CD}) = -3 \times 3\sqrt{3} - (-3\sqrt{3}) \times 3 = 0$ , les droites  $(AB)$  et  $(CD)$  sont parallèles.

58  $\vec{AB}(3; 1); \vec{CD}(6; -1)$ .

dét  $(\vec{AB}, \vec{CD}) = 3 \times (-1) - 1 \times 6 = -9, -9 \neq 0$  donc les droites  $(AB)$  et  $(CD)$  sont sécantes.

59  $\vec{AB}(-4; 3); \vec{CD}(12; -9)$ .

dét  $(\vec{AB}, \vec{CD}) = -4 \times (-9) - 3 \times 12 = 0$  donc  $\vec{AB}$  et  $\vec{CD}$  sont colinéaires. Ainsi les droites  $(AB)$  et  $(CD)$  sont parallèles et  $ABCD$  est un trapèze.

60 a.  $\vec{AD}(4; -2); \vec{BC}(8; -4)$ .

dét  $(\vec{AD}, \vec{BC}) = 4 \times (-4) - (-2) \times 8 = 0$  donc  $\vec{AD}$  et  $\vec{BC}$  sont colinéaires. Ainsi les droites  $(AD)$  et  $(BC)$  sont parallèles et  $ABCD$  est un trapèze.

b.  $\vec{AC}(8; 0); \vec{BD}(4; -6)$ .

dét  $(\vec{AC}, \vec{BD}) = 8 \times (-6) - 0 \times 4 = -48, -48 \neq 0$  donc  $\vec{AC}$  et  $\vec{BD}$  ne sont pas colinéaires. Ainsi les droites  $(AC)$  et  $(BD)$  sont sécantes.

c.  $M(0,7; 3)$ . d.  $I\left(\frac{-2+2}{2}; \frac{3+1}{2}\right) = (0; 2);$

$J\left(\frac{-2+6}{2}; \frac{7+3}{2}\right) = (2; 5)$ .

e. La lecture des coordonnées étant approximative, on ne peut que faire une conjecture.

$\vec{MI}(-0,7; -1); \vec{IJ}(2; 3)$ .

dét  $(\vec{MI}, \vec{IJ}) = -0,7 \times 3 - (-1) \times 2 = -0,1$ .

Avec la valeur exacte de  $x_M = \frac{2}{3}$ , on trouverait 0, donc les points  $I, J$  et  $M$  sont alignés.

61 a.  $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 2 \times 9 - 3 \times x = 18 - 3x$ .

$\vec{u}$  et  $\vec{v}$  colinéaires  $\Leftrightarrow 18 - 3x = 0 \Leftrightarrow x = 6$ .

b.  $\det(\vec{u}, \vec{v}) = -1 \times x - 3 \times 2 = -x - 6$ .

$\vec{u}$  et  $\vec{v}$  colinéaires  $\Leftrightarrow -x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = -6$ .

c.  $\det(\vec{u}, \vec{v}) = -2 \times (1+x) - 4 \times 1 = -6 - 2x$ .

$\vec{u}$  et  $\vec{v}$  colinéaires  $\Leftrightarrow -6 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = -3$ .

62 a.  $I\left(\frac{3+5}{2}; \frac{4-1}{2}\right) = \left(4; \frac{3}{2}\right)$ .

b.  $G\left(\frac{1+3+5}{3}; \frac{3+4-1}{3}\right)$  donc  $G(3; 2)$ .

c.  $\vec{AG}(2; -1); \vec{AI}\left(3; -\frac{3}{2}\right)$ .

dét  $(\vec{AG}, \vec{AI}) = 2 \times -\frac{3}{2} - (-1) \times 3 = 0$  donc les points  $A, G$  et  $I$  sont alignés.

63  $D$  est sur l'axe des ordonnées donc  $x_D = 0$ .

$(AB) \parallel (CD)$  donc  $\vec{AB}$  et  $\vec{CD}$  sont colinéaires.

$\vec{AB}(2; -4); \vec{CD}(-2; y_D)$ .

dét  $(\vec{AB}, \vec{CD}) = 0 \Leftrightarrow 2 \times y_D - (-4) \times (-2) = 0$

$\Leftrightarrow 2y_D - 8 = 0 \Leftrightarrow y_D = 4$ .

64 1.  $\vec{AB}(6; 0) = \vec{DC}(6; 0)$  donc  $ABCD$  est un parallélogramme.  $AB = 6; AD = 3; BD = \sqrt{45}$ , la réciproque du théorème de Pythagore assure que le triangle  $ABD$  est rectangle en  $A$ .  $ABCD$  est donc un rectangle.

2. a.  $I\left(\frac{7+1}{2}; \frac{4+4}{2}\right)$  donc  $I(4; 4)$ .

b.  $\vec{BJ} = \vec{IB} \Leftrightarrow \begin{cases} x_J - 7 = 3 \\ y_J - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_J = 10 \\ y_J = 4 \end{cases}$ .

c.  $\vec{AK} = 3\vec{AD} \Leftrightarrow \begin{cases} x_K - 1 = 3 \times 0 \\ y_K - 4 = 3 \times (-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_K = 1 \\ y_K = -5 \end{cases}$ .

d.  $\vec{KC}(6; 6); \vec{CJ}(3; -3)$ .

dét  $(\vec{KC}, \vec{CJ}) = -6 \times -3 - 6 \times 3 = 0$  donc les points  $K, C$  et  $J$  sont alignés.

65 1. a.  $\vec{AB}(1; 1); \vec{AC}(-4; -4)$ .

dét  $(\vec{AB}, \vec{AC}) = 1 \times -4 - 1 \times (-4) = 0$  donc les points  $A, B$  et  $C$  sont alignés.

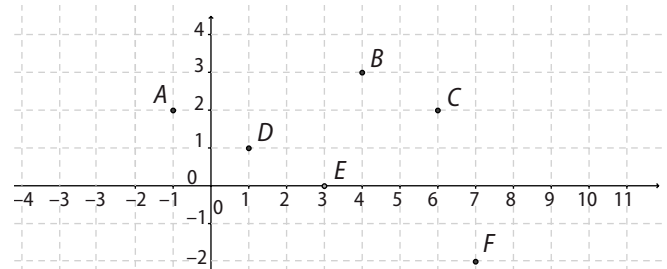
b.  $-\frac{1}{4}\vec{AC}(1; 1)$  donc  $\vec{AB} = -\frac{1}{4}\vec{AC}$ .

2.  $\vec{BE} = 5\vec{BD} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E - 3 = 5 \times 1 \\ y_E - 2 = 5 \times (-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E = 8 \\ y_E = -3 \end{cases}$ .

3.  $\vec{AD}(2; 0); \vec{CE}(10; 0)$ .

dét  $(\vec{AD}, \vec{CE}) = 2 \times 0 - 0 \times 10 = 0$  donc les droites  $(AD)$  et  $(CE)$  sont parallèles.

66 1. a. b.



c.  $D(1; 1)$ .

$$2. \vec{AD} = \vec{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D - (-1) = 2 \\ y_D - 2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 1 \\ y_D = 1 \end{cases}$$

$$4. \vec{ED}(-2; 1); \vec{EF}(4; -2).$$

$\det(\vec{ED}, \vec{EF}) = -2 \times (-2) - 1 \times 4 = 0$  donc les points  $E, D$  et  $F$  sont alignés.

$$67. \text{ a. } \det(\vec{u}, \vec{v}) = 3 \times 2 - (-1) \times 3, 5 = 9, 5.$$

$9, 5 \neq 0$  donc  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ne sont pas colinéaires. Les trajectoires ne sont pas parallèles.

**b.**  $\det(\vec{AC}, \vec{u}) = 0$ , l'archer placé en  $A$  atteindra la cible.

68. **a.**  $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 2 \times (-1) - 0 \times 0 = -2$  et  $-1 \neq 0$  donc  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ne sont pas colinéaires et constituent une base du plan.

$$\text{b. } \begin{cases} \vec{u} = 2\vec{i} \\ \vec{v} = -\vec{j} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{i} = \frac{1}{2}\vec{u} \\ \vec{j} = -\vec{v} \end{cases}$$

donc  $\vec{i}(\frac{1}{2}; 0)$  et  $\vec{j}(0; -1)$ .

69. **a.**  $\vec{AB}$  et  $\vec{AD}$  ne sont pas colinéaires.

**b.**  $A(0; 0), B(1; 0), C(1; 1)$  et  $D(0; 1)$ .

**c.**  $\vec{AC}(1; 1); \vec{BC}(0; 1)$ .

70. **1. a.**  $\vec{u} = 11\vec{i} - 9\vec{j}$ ; **b.**  $\vec{v} = -4\vec{i} - 7\vec{j}$ ; **c.**  $\vec{w} = \vec{0}$ .

**2.**  $\vec{u}(11; -9); \vec{v}(4; -7); \vec{w}(0; 0)$ .

71. **a.**  $\det(\vec{u}, \vec{v}) = -1$  et  $-1 \neq 0$  donc  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ne sont pas colinéaires et constituent une base du plan. Dans cette base,  $\vec{i}(0; 1)$  et  $\vec{j}(1; 0)$ .

**b.**  $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 1$  et  $1 \neq 0$  donc  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ne sont pas colinéaires et constituent une base du plan. Dans cette base,  $\vec{i}(1; 0)$  et  $\vec{j}(-1; 1)$ .

**c.**  $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 2$  et  $2 \neq 0$  donc  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ne sont pas colinéaires et constituent une base du plan. Dans cette base,  $\vec{i}(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$  et  $\vec{j}(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ .

71. **a.**  $\det(\vec{i}, \vec{j}) = 1$ ; **b.**  $\det(2\vec{i}, 3\vec{j}) = 6$ ;

**c.**  $\det(\vec{i}, \vec{i} + \vec{j}) = 1$ ; **d.**  $\det(\vec{i} + \vec{j}, \vec{i} - \vec{j}) = -2$ .

73. **1.**  $A(0; 0); B(1; 0); C(0; 1)$ .

$A'(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}); B'(0; \frac{1}{2}); C'(\frac{1}{2}; 0); G(\frac{1}{3}; \frac{1}{3})$ .

**a.**  $\vec{BC}(-1; 1)$ ; **b.**  $\vec{AA}'(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ ;

**c.**  $\vec{AG}(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}); \vec{GA}'(\frac{1}{6}; \frac{1}{6})$ .

**2.**  $G(0; 0); B(1; 0); C(0; 1); A(-1; -1)$ .

$A'(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}); B'(-\frac{1}{2}; 0); C'(0; -\frac{1}{2})$ .

**a.**  $\vec{BC}(1; -1)$ ; **b.**  $\vec{AA}'(\frac{3}{2}; \frac{3}{2})$ ;

**c.**  $\vec{AG}(1; 1); \vec{GA}'(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ .

74. **b.**  $\vec{AB}$  et  $\vec{AD}$  ne sont pas colinéaires.

$D(0; 1); E(\frac{1}{2}; \sqrt{\frac{3}{2}}); F(1 + \sqrt{\frac{3}{2}}; \frac{1}{2})$ .

$\vec{DE}(\frac{1}{2}; \sqrt{\frac{3}{2}} - 1); \vec{DF}(1 + \sqrt{\frac{3}{2}}; -\frac{1}{2})$ .

$$\begin{aligned} \text{c. } \det(\vec{DE}, \vec{DF}) &= \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) - \left(\sqrt{\frac{3}{2}} - 1\right) \times \left(1 + \sqrt{\frac{3}{2}}\right) \\ &= -\frac{1}{4} - \left(\frac{3}{4} - 1\right) = 0. \end{aligned}$$

Les vecteurs  $\vec{DE}$  et  $\vec{DF}$  sont colinéaires, donc les points  $D, E$  et  $F$  sont alignés.

75. **a.**  $A(1; 0), B(1; 0), C(0; 1)$  et  $D(0; 1)$ .

**b.**  $A(0; 0), B(1; 1), C(1; 1)$  et  $D(0; 0)$ .

**c.**  $A(0; 0), B(0; 1), C(1; 0)$  et  $D(-1; 1)$ .

76. **a.**  $\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{AC}; \vec{AE} = \vec{AB} + 2\vec{AC}; \vec{AF} = 3\vec{AC}$ .

**b.**  $A(0; 0); B(1; 0); C(0; 1); D(1; 1); E(1; 2); F(0; 3)$ .

## Faire le point

**77 a.** On prend comme repère :  $(A; \vec{AB}, \vec{AD})$

**b.**  $I(\frac{1}{2}; 0); C(1; 1); P(x; 1-x)$ .

**c.**  $\vec{IP}(x - \frac{1}{2}; 1-x); \vec{IC}(\frac{1}{2}; 1)$ .

$$\det(\vec{IP}, \vec{IC}) = 0 \Leftrightarrow (x - \frac{1}{2}) \times 1 - (1-x) \times \frac{1}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{3x}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$

Le point  $M$  est donc situé aux  $\frac{2}{3}$  de  $[AB]$ .

**78 1.** ligne 1 : coordonnées

ligne 2 : déterminant

ligne 4 :  $k\vec{AC}$

ligne 6 : nul non nul  
colinéaires non colinéaires.

**2. a.**  $\vec{AB}(3; -2); \vec{AC}(6; -4)$ .

$\det(\vec{AB}, \vec{AC}) = 0$  donc  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$  sont colinéaires.

**a.**  $\vec{AB}(4; -3); \vec{AC}(6; -4)$ .

$\det(\vec{AB}, \vec{AC}) = 2$  et  $2 \neq 0$  donc  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$  ne sont pas colinéaires.

**79 a.**  $\vec{u}(1; 1)$ .

**b.**  $\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ .

**c.** La mesure donne 2,2 cm. L'erreur est que le repère n'est pas orthonormé, l'unité sur l'axe des ordonnées étant deux fois plus grande que celle sur l'axe des abscisses.

**80 1.**  $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 2$  et  $2 \neq 0$  donc  $(\vec{u}, \vec{v})$  est une base du plan.

$$2. \begin{cases} \vec{u} = \vec{i} + \vec{j} \\ \vec{v} = -\vec{i} + \vec{j} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{i} = \frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v} \\ \vec{j} = -\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} \end{cases}$$

**3. a.**  $\vec{AM}(x-3; y-2)$

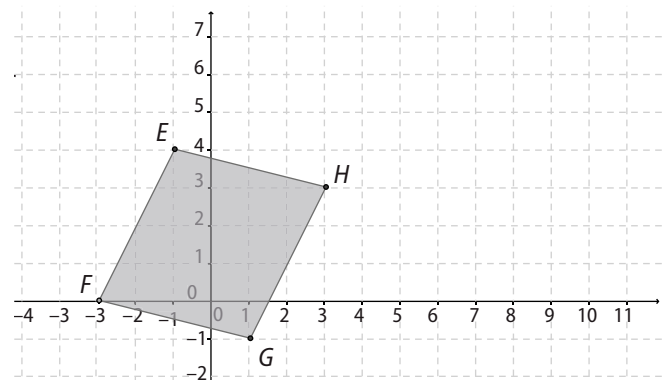
**b.**  $\vec{AM} = (x-3)\vec{i} + (y-2)\vec{j}$

$$= (x-3)\left(\frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}\right) + (y-2)\left(\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}\right)$$

$$= \frac{x+y-5}{2}\vec{u} + \frac{-x+y+1}{2}\vec{v}$$

$$c. \begin{cases} x' = \frac{x+y-5}{2} \\ y' = \frac{-x+y+1}{2} \end{cases}$$

**81 1.**



$H(3; 3)$ .

**2. b.** L'erreur porte sur les coordonnées de  $\vec{FG}$ .

$$\begin{cases} x_D + 1 = 1 - (-3) \\ y_D - 4 = -1 - 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 3 \\ y_D = 3 \end{cases}$$

**82 a.**  $\vec{IJ} = \vec{IA} + \vec{AB} + \vec{BJ} = \vec{AB} + \vec{IA} + \vec{IB}$   
 $= \vec{AB} + \vec{0} = \vec{AB}$ .

**b.**  $\vec{IJ} = \vec{IB} + \vec{BJ} = 2\vec{IB}$ ;  $\vec{AB} = \vec{AI} + \vec{IB} = \vec{IB} + \vec{IB} = 2\vec{IB}$ .  
D'où  $\vec{IJ} = \vec{AB}$ .

**83 a.** Les points semblent alignés.

**b.**  $\vec{AB}(7; -5); \vec{AC}(4; -2, 9)$ .

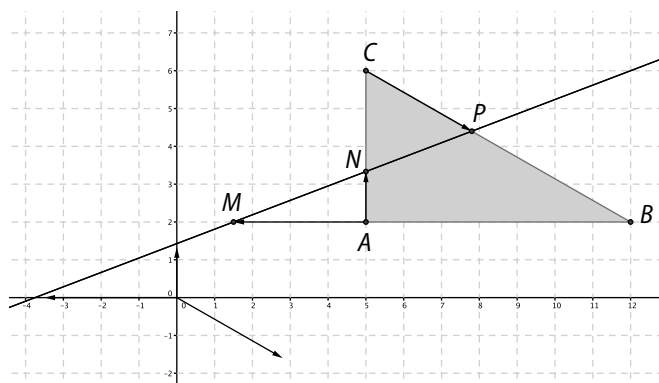
$\det(\vec{AB}, \vec{AC}) = 7 \times (-2, 9) - (-5) \times 4 = -0,3$  et  $-0,3 \neq 0$  donc les points  $A, B$  et  $C$  ne sont pas alignés.

## Se tester

**84 à 87** Voir Manuel de l'élève pages 257-258.

## Exercices d'approfondissement

## 88 Piste 1



## Piste 2. a.

$$\vec{MN} = \vec{MA} + \vec{AN} = -\frac{1}{2}\vec{BA} + \frac{1}{3}\vec{AC} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC}$$

$$\vec{AP} = \vec{AC} + \vec{CP} = \vec{AC} + \frac{2}{5}\vec{CB}$$

$$= \vec{AC} + \frac{2}{5}(\vec{CA} + \vec{AB}) = \frac{2}{5}\vec{AB} + \frac{3}{5}\vec{AC}$$

$$\text{b. } \vec{MP} = \vec{MA} + \vec{AP} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{2}{5}\vec{AB} + \frac{3}{5}\vec{AC}$$

$$= \frac{9}{10}\vec{AB} + \frac{3}{5}\vec{AC}$$

$$\text{c. } \vec{MP} = \frac{9}{5}\left(\frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC}\right) = \frac{9}{5}\vec{MN}$$

Les vecteurs  $\vec{MP}$  et  $\vec{MN}$  sont colinéaires. Les points  $M$ ,  $P$  et  $N$  sont donc alignés.

## Piste 3

a.  $ABC$  est un triangle rectangle en  $A$ , donc les vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$  sont orthogonaux.

$$\text{b. } M\left(-\frac{1}{2}; 0\right); N\left(0; \frac{1}{3}\right);$$

$$\begin{cases} x_p - 0 = \frac{2}{5}(1 - 0) \\ y_p - 1 = \frac{2}{5}(0 - 1) \end{cases} \quad \text{donc } P\left(\frac{2}{5}; \frac{3}{5}\right).$$

$$\text{c. } \vec{MP}\left(\frac{9}{10}; \frac{3}{5}\right); \vec{MN}\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right); \det(\vec{MP}, \vec{MN}) = 0.$$

Les vecteurs  $\vec{MP}$  et  $\vec{MN}$  sont colinéaires. Les points  $M$ ,  $P$  et  $N$  sont donc alignés.

89 On se place dans le repère d'origine  $A$  et de base les vecteurs unitaires colinéaires à  $\vec{d}$  et  $\vec{AB}$ .

$$\text{a. } \vec{d}(3; 0); \vec{u}(0; 10).$$

Le déplacement réel du bac est donné par le vecteur  $\vec{u} + \vec{d}(3; 10)$ .

$$\det(\vec{AB}, \vec{u} + \vec{d}) = 0 \Leftrightarrow x_B \times 10 - 3 \times y_B = 0.$$

Comme  $y_B = 40$ , on en déduit que  $x_B = 12$ .

b. Le bac aurait dû donc partir 12 m avant  $A$ .

$$\text{c. } \vec{u}(a; b).$$

$$\det(\vec{AB}, \vec{u} + \vec{d}) = 0 \Leftrightarrow 0 \times b - 40 \times (3 + a) = 0$$

entraîne que  $a = -3$ .

La valeur de  $b$  est un nombre réel positif quelconque.

$$90 \quad 1. \vec{IC} = \vec{IB} + \vec{BC} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \vec{BC}$$

$$\begin{aligned} \vec{IP} &= \vec{IB} + \vec{BN} + \vec{NP} = \frac{1}{2}\vec{AB} + (1-x)\vec{BC} + (-1+x)\vec{AB} \\ &= \left(x - \frac{1}{2}\right)\vec{AB} + (1-x)\vec{BC}. \end{aligned}$$

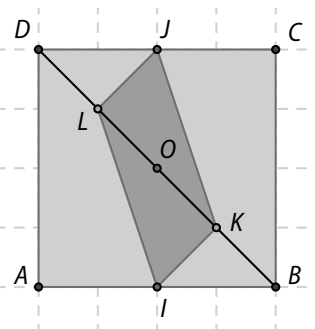
$$2. \begin{cases} x - \frac{1}{2} = \frac{k}{2} \\ 1 - x = k. \end{cases}$$

$$3. \text{a. } x = \frac{2}{3}; k = \frac{1}{3}.$$

b. Le système a une solution unique, donc le nombre  $k$  existe. Par conséquent les points  $I$ ,  $P$  et  $C$  sont alignés.

4. Le point  $M$  est situé aux  $\frac{2}{3}$  de  $[AB]$ .

## 91 a.



b.  $ABCD$  est un carré, donc les vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{AD}$  sont orthogonaux.

$$I\left(\frac{1}{2}; 0\right); J\left(\frac{1}{2}; 1\right); K(x; 1-x); L(1-x; x).$$

$$\text{c. } \vec{IK}\left(x - \frac{1}{2}; 1-x\right) \text{ et } \vec{LJ}\left(x - \frac{1}{2}; 1-x\right).$$

$$\vec{IK} = \vec{LJ}; \text{ donc } IKJL \text{ est un parallélogramme.}$$

d. Deux positions possibles : milieu de  $[OD]$  et de  $[OB]$ .

$$92 \quad \text{a. } I\left(0; \frac{1}{2}\right); J\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right); F(0; m+1); E(1+k; 0).$$

$$\text{b. } \vec{IE}\left(1+k; -\frac{1}{2}\right); \vec{JF}\left(-\frac{1}{2}; m + \frac{1}{2}\right).$$

$$\det(\vec{IE}, \vec{JF}) = (1+k)\left(m + \frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \quad (1)$$

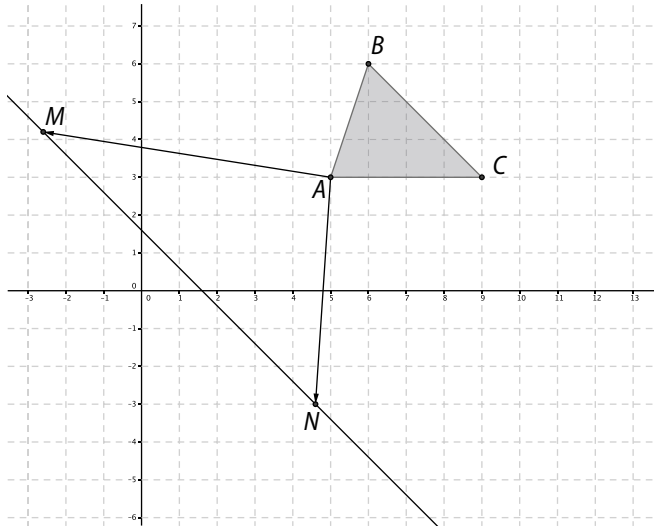
$$\text{c. } (1) \Leftrightarrow 2\left(m + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow m = -38.$$

$$\text{d. } (1) \Leftrightarrow -\frac{1}{4} = 0 \text{ impossible.}$$

Le point  $E$  est confondu avec  $A$  donc  $(IE) = (AC)$  et comme  $J \notin (AC)$ ,  $(JE)$  et  $(AC)$  sont sécantes.

93 1.  $\vec{AM} = \vec{AN}$  donc  $M = N$ . La droite  $(MN)$  n'existe pas.

2. a.



$$\begin{aligned} \text{b. } \vec{MN} &= \vec{AN} - \vec{AM} = -2\vec{AB} + x\vec{AC} - x\vec{AB} + 2\vec{AC} \\ &= -(x+2)\vec{AB} + (x+2)\vec{AC} \\ &= (x+2)(-\vec{AB} + \vec{AC}) = (x+2)\vec{BC}. \end{aligned}$$

Donc, si  $x \neq -2$ ,  $\vec{MN}$  et  $\vec{BC}$  sont colinéaires et  $(MN) \parallel (BC)$ .

94 1. a.  $\det(\vec{OR}, \vec{u}) = 0 \Leftrightarrow x_R \times 2 - y_R \times 1 = 0$ .

Or  $y_R = 10$  on a donc  $x_R = 5$ .

b.  $\det(\vec{RI}, \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow (x_I - 5) \times (-1) - (y_I - 10) \times 2 = 0$

Or  $x_I = 10$  on a donc  $y_I = 7, 5$ .

2. a.  $\det(\vec{OR}, \vec{u}) = 0 \Leftrightarrow x_R \times b - y_R \times a = 0$ .

Or  $y_R = 10$  on a donc  $x_R = \frac{10a}{b}$ .

$$\begin{aligned} \text{b. } 0 \leq x_R \leq 10 &\Leftrightarrow 0 \leq \frac{10a}{b} \leq 10 \Leftrightarrow 0 \leq 10a \leq 10b \\ &\Leftrightarrow 0 \leq a \leq b. \end{aligned}$$

c.  $\det(\vec{RI}, \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow (x_I - \frac{10a}{b}) \times (-a) - (y_I - 10) \times b = 0$ .

Or  $x_I = 10$  on a donc :

$$(10 - \frac{10a}{b})(-a) - (y_I - 10) \times b = 0$$

$$y_I = 10 - \frac{a}{b} \left(10 - \frac{10a}{b}\right).$$

3. La balle touche le bord si  $0 \leq y_I \leq 10$ .

$$0 \leq a \leq b \Leftrightarrow 0 \leq \frac{a}{b} \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{10a}{b} \leq 10;$$

$$0 \leq 10 - \frac{10a}{b} \leq 10 \text{ et donc } 0 \leq y_I \leq 10.$$

95 a.  $m\vec{SA} + m\vec{SB} = \vec{0} \Leftrightarrow m\vec{SA} + m(\vec{SA} + \vec{AB}) = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \vec{AS} = \frac{m}{m+M} \vec{AB}.$$

$$\text{b. } AS = \frac{60}{300} AB = \frac{1}{2} AB.$$

$$\begin{aligned} \text{c. } 0,2 &= \frac{60}{60+M} \times 3 \Leftrightarrow 0,2(60+M) = 180 \\ &\Leftrightarrow 60+M = 900 \Leftrightarrow M = 840. \end{aligned}$$

96 On doit vérifier que  $\|\vec{AB} + \vec{AC}\| \leq \|\vec{AB}\| + \|\vec{AC}\|$ .

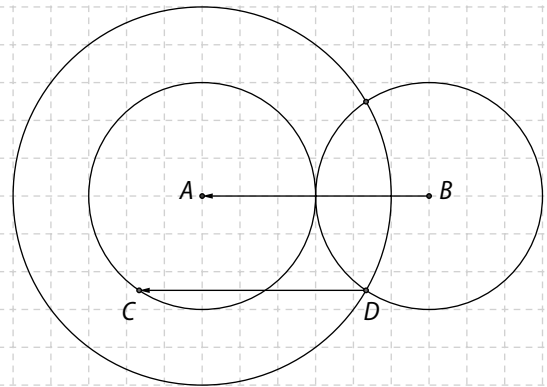
Vrai pour a., mais faux pour b.

Tracer le cercle de centre A et de rayon  $AC = 3$  et le cercle de centre A et de rayon 5.

Tracer le cercle de centre B et de rayon 3.

Les deux derniers cercles se coupent en D.

Tracer le représentant du vecteur  $\vec{BA}$  d'origine D.



Ce protocole de construction n'est pas unique.

$$\text{97 a. } \vec{IJ} = \vec{IB} + \vec{BJ} = \frac{1}{2} \vec{AB} + \frac{1}{2} \vec{BC} = \frac{1}{2} \vec{AC}.$$

$$\text{b. } \vec{LK} = \vec{LD} + \vec{DK} = \frac{1}{2} \vec{ED} + \frac{1}{2} \vec{DC} = \frac{1}{2} \vec{EC}.$$

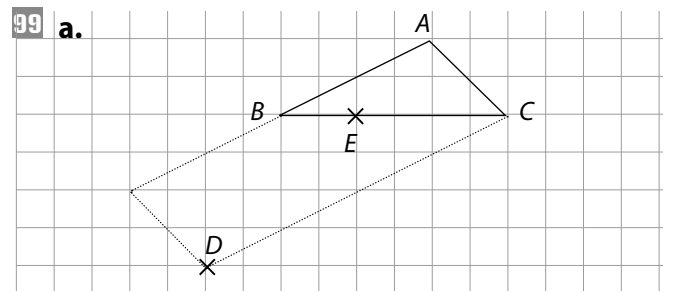
$$\text{c. } \vec{MA} = \frac{1}{2} \vec{EA} = \frac{1}{2} (\vec{EC} + \vec{CA}) = \vec{JI} + \vec{LK}.$$

d. Construire le point A en premier en utilisant le résultat du c. Ensuite, par symétries par rapport aux milieux, construire B, E et enfin C et D.

98 a. Aire du carré : 64 ; aire du rectangle : 65.

b. On prend un repère orthonormé d'origine A et de base les vecteurs unitaires portés par les côtés du rectangle.  $A(0; 0)$  ;  $B(8; 3)$  et  $C(13; 5)$ .

c.  $\vec{AB}(8; 3)$  ;  $\vec{BC}(5; 2)$ .  $\det(\vec{AB}, \vec{BC}) = 1$  ;  $1 \neq 0$  donc les points A, B et C ne sont pas alignés. Il y a donc un trou dans cette figure entre les pièces.



**b. Méthode 1**

$$\begin{aligned} \vec{AE} &= \vec{AB} + \vec{BE} = \vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{BC} \\ &= \vec{AB} + \frac{1}{3}(\vec{BA} + \vec{AC}) = \frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC} = \frac{1}{3}\vec{AD}. \end{aligned}$$

**• Méthode 2**

On se place dans le repère  $(A; \vec{AB}, \vec{AC})$   $A(0; 0)$ ;  $B(1; 0)$ ;  $C(0; 1)$ ;  $D(2; 1)$ .

$$\vec{BE} = \frac{1}{3}\vec{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E - 1 = -\frac{1}{3} \\ y_E = \frac{1}{3} \end{cases}; E\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right).$$

$$\vec{AE}\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right); \vec{AD}(2; 1); \det(\vec{AE}, \vec{AD}) = 0.$$

**100 1.**  $AB = \sqrt{(-1+3)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}.$

**2. a.**  $AD^2 = (1+3)^2 + (y-1)^2 = 16 + (y-1)^2.$

**b.**  $16 + (y-1)^2 = 20 \Leftrightarrow (y-1)^2 = 4.$

**c.**  $(y-1)^2 = 4 \Leftrightarrow y-1 = -2$  ou  $y-1 = 2.$

D'où  $D_1(1; -1)$  et  $D_2(1; 3).$

**3.**  $\vec{BC}_1 = \vec{AD}_1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_{C_1} + 1 = 1 + 3 \\ y_{C_1} - 5 = -1 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{C_1} = 3 \\ y_{C_1} = 3 \end{cases};$

$\vec{BC}_2 = \vec{AD}_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_{C_2} + 1 = 1 + 3 \\ y_{C_2} - 5 = 3 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{C_2} = 3 \\ y_{C_2} = 7 \end{cases}.$

**4.**  $AC_1 = \sqrt{(3+3)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{40}.$

$BD_1 = \sqrt{(1+1)^2 + (-1-5)^2} = \sqrt{40}.$

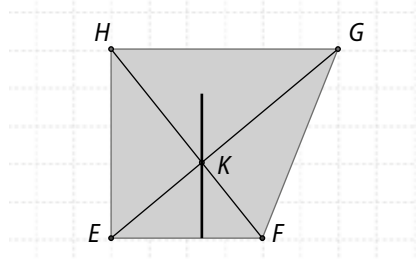
$AC_1 = BD_1$  donc  $ABC_1D_1$  est un carré.

$AC_2 = \sqrt{(3+3)^2 + (7-1)^2} = \sqrt{72}.$

$BD_2 = \sqrt{(1+1)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{8}.$

$AC_2 \neq BD_2$  donc  $ABC_2D_2$  n'est pas un carré.

**101 a.** Le lieu de points semble être une droite parallèle à  $(EH).$



**b.** Dans un repère  $(E; \vec{i}, \vec{j})$  avec  $\vec{i}$  unitaire de  $(EF)$  et  $\vec{j}$  unitaire de  $(EH).$

$E(0; 0)$ ;  $F(4; 0)$ ;  $H(0; h)$ ;  $G(6; h)$  et  $K(x; y).$

$\vec{EK}(x; y)$ ;  $\vec{EG}(6; h).$

$\det(\vec{EK}, \vec{EG}) = 0 \Leftrightarrow xh - 6y = 0$  (1)

$\vec{HK}(x; y-h)$ ;  $\vec{HF}(4; -h).$

$\det(\vec{HK}, \vec{HF}) = 0 \Leftrightarrow -xh - 4(y-h) = 0$  (2)

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \begin{cases} xh = 6y \\ -6y - 4y + 4h = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xh = 6y \\ y = 0, 4h \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, 4 \\ y = 0, 4h \end{cases} \end{aligned}$$

Le point  $K$  se trouve donc sur la droite verticale d'équation  $x = 2, 4.$

**102 2. a.**  $\vec{CN} = \vec{CA} + \vec{AN} = \vec{CA} + \frac{3}{2}\vec{AM}$   
 $= \vec{CA} + \frac{3}{2}(\vec{AC} + \vec{CM}) = \frac{1}{2}\vec{AC} + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\vec{CB}\right)$   
 $= \frac{1}{2}(\vec{AC} + \vec{CB}) = \frac{1}{2}\vec{AB}.$

**b.**  $ABCD$  parallélogramme donc  $\vec{AB} = \vec{DC}.$

D'où  $\vec{CN} = \frac{1}{2}\vec{DC}.$  Les vecteurs  $\vec{CN}$  et  $\vec{DC}$  sont colinéaires et les points  $D, C$  et  $N$  sont alignés.

**3. a.** On se place dans le repère  $(D; \vec{DC}, \vec{DA}).$

$D(0; 0)$ ;  $C(1; 0)$ ;  $A(0; 1)$ ;  $B(1; 1).$

$\vec{CM} = \frac{1}{3}\vec{CB} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M - 1 = \frac{1}{3}(1-1) \\ y_M - 0 = \frac{1}{3}(1-0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 1 \\ y_M = \frac{1}{3} \end{cases}.$

$\vec{AN} = \frac{3}{2}\vec{AM} \Leftrightarrow \begin{cases} x_N - 0 = \frac{3}{2}(1-0) \\ y_N - 1 = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3} - 1\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_N = \frac{3}{2} \\ y_N = 0 \end{cases}.$

$\vec{DC}(1; 0)$ ;  $\vec{DN}\left(\frac{3}{2}; 0\right).$

$\vec{DN} = \frac{3}{2}\vec{DC}.$  Les points  $D, C$  et  $N$  sont alignés.

**103 1.**  $\|\vec{F}_u\| = 16000 \cos 30 = 13856;$

$\|\vec{F}_d\| = 16000 \sin 30 = 8000.$

**2. a.**  $\|\vec{R}_{2d}\| = 20000 \sin \alpha = 8000.$

$\sin \alpha = \frac{8000}{20000} = 0,4$  d'où  $\alpha = 24^\circ.$

**b.** Force utile =  $13856 + 20000 \cos 24 = 32187.$

**104 1. a.**  $\vec{MA} + \vec{MB} - 2\vec{MC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 - x - 2 - x - 2(-3 - x) = 0 \\ -1 - y + 2 - y - 2(-1 - y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8 = 0 \\ 3 = 0 \end{cases}.$

Système impossible, il n'y a pas de point  $M.$

**b.**  $\Leftrightarrow \begin{cases} 4 - x - 2 - x - 2(1 - x) = 0 \\ 2 - y + 2 - y - 2(2 - y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}.$

Il y a une infinité de solutions.

**2.**  $\vec{MA} + (\vec{MA} + \vec{AB}) - 2(\vec{MA} + \vec{AC}) = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{AB} = 2\vec{AC}.$

**105 a.**  $(\vec{CD}, \vec{AD})$  est une base du plan car  $ABCD$  est un rectangle.

$$\vec{BP} = \vec{BA} + \vec{AP} = \vec{CD} + \frac{11}{7} \vec{AD}; \vec{BP} \left( 1; \frac{11}{7} \right).$$

$$\vec{BR} = \vec{BC} + \vec{CR} = \vec{AD} + \frac{2}{3} \vec{CD}; \vec{BR} \left( \frac{2}{3}; 1 \right).$$

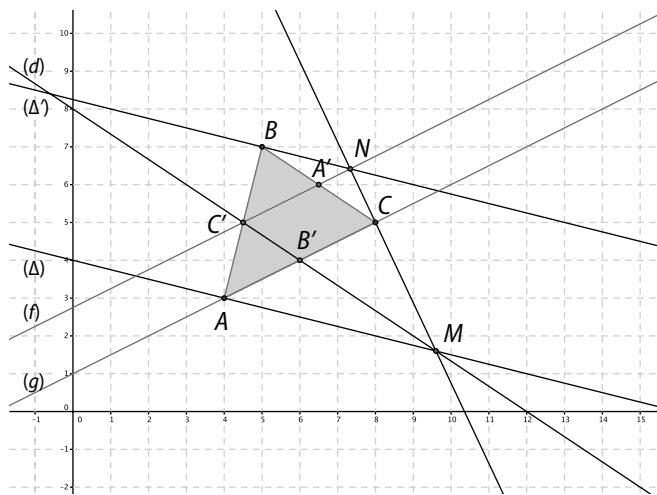
Les vecteurs ne sont pas colinéaires.

$$\text{b. } \vec{BR} = \vec{BC} + \vec{CR} = \vec{AD} + \frac{x}{3} \vec{CD}; \vec{BR} \left( \frac{x}{3}; 1 \right).$$

B, P et R sont alignés si  $\vec{BP}$  et  $\vec{BR}$  sont colinéaires, donc s'il existe un nombre réel k tel que  $\vec{BP} = k\vec{BR}$ .

$$\begin{cases} 1 = k \frac{x}{3} \\ \frac{11}{7} = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{21}{11} \\ \frac{11}{7} = k. \end{cases}$$

**106 1.**



2. a. ABC est un triangle donc les vecteurs  $\vec{BA}$  et  $\vec{BC}$  ne sont pas colinéaires.

b.  $B(0; 0); A(1; 0); C(0; 1); A' \left( 0; \frac{1}{2} \right); B' \left( \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right); C' \left( \frac{1}{2}; 0 \right).$

c. Les points B' et C' ont la même abscisse  $\frac{1}{2}$  et M étant sur la droite (B'C'), l'abscisse de M est aussi égale à  $\frac{1}{2}$ .

d.  $\det(\vec{MN}, \vec{MC}) = 0$

$$\Leftrightarrow \left( x - \frac{1}{2} \right) (1 - k) - (y - k) \left( -\frac{1}{2} \right) = 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow (1 - k)x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} = 0.$$

$$\det(\vec{AM}, \vec{BN}) = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}y - kx = 0 \Leftrightarrow y = -2kx.$$

$$(1) \Leftrightarrow (1 - k)x + \frac{1}{2}(-2kx) - \frac{1}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2(1 - 2k)} \quad y = \frac{-k}{1 - 2k}.$$

e.  $\vec{A'N} \left( \frac{1}{2(1 - 2k)}; -\frac{1}{2(1 - 2k)} \right); \vec{AC} (1; -1).$

Les vecteurs sont donc colinéaires.

**107 a.**  $AN = AM = BM = BN =$  rayon donc ANBM est un parallélogramme.

b. A milieu de  $[N_1N]$  donc  $\vec{N_1A} = \vec{AN}$ .

ANBM parallélogramme donc  $\vec{AN} = \vec{MB}$ .

Finalement,  $\vec{N_1A} = \vec{MB}$ .

B milieu de  $[N_2N]$  donc  $\vec{BN_2} = \vec{NB}$ .

c.  $\vec{N_1M} = \vec{N_1A} + \vec{AM} = \vec{MB} + \vec{BN_2} = \vec{MN_2}.$

**108 1. a.**  $\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AE}$  donc A et E sont confondus.

$\vec{AC} = \vec{AD} - \vec{AB} = \vec{AD} + \vec{BA} = \vec{BD}$  donc ABDC est un parallélogramme. Le point K est confondu avec D et E.

b.  $\vec{DA} = \vec{BA} - \vec{CA} = -\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AE}.$

$$\vec{DB} = \vec{DA} + \vec{AB} = \vec{BC} + \vec{AB} = \vec{AC};$$

$$\vec{BM} = \vec{BC} + \vec{CM} = \vec{AE} + \vec{EC} = \vec{AC};$$

Donc  $\vec{BM} = \vec{DB}.$

Le point K est confondu avec le point M et est tel que ABKC est un parallélogramme.

2. a.  $D(1; k); E(k; 1).$

b.  $\vec{DE} (k - 1; 1 - k); \vec{BC} (-1; 1).$

$$\vec{DE} = (1 - k) \vec{BC} \text{ donc } (DE) \parallel (BC).$$

c.  $\vec{CK} = \vec{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x_K = 1 \\ y_K - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_K = 1 \\ y_K = 1. \end{cases}$

$\vec{BK} (0; 1); \vec{BD} (0; k)$  ces vecteurs sont colinéaires, donc B, K et D sont alignés.

$\vec{CK} (1; 0); \vec{CE} (k; 0)$  ces vecteurs sont colinéaires, donc C, K et E sont alignés. Le point K est bien l'intersection de (BD) et (CE).

**109 1.**  $G \left( \frac{0 + 3 + 9}{3}; \frac{0 + 3 + 0}{3} \right) = (4; 1).$

2. a. (AC) est l'axe des abscisses, par conséquent la médiatrice de [AC] est parallèle à l'axe des ordonnées.

Donc  $x_0 = \frac{9}{2}.$

b.  $OA = OB \Rightarrow OA^2 = OB^2$

$$\Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 = (3 - x_0)^2 + (3 - y_0)^2$$

$$\Leftrightarrow 0 = 18 - 6x_0 - 6y_0 \Leftrightarrow 0 = 18 - 6 \frac{9}{2} - 6y_0$$

$$\Leftrightarrow y_0 = -\frac{3}{2}.$$

3. a. La hauteur relative à [AC] est parallèle à l'axe des ordonnées. Donc  $x_H = x_B = 3.$

b.  $\vec{AH} = k\vec{OA'} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = k \left( 6 - \frac{9}{2} \right) \\ y_H = k \left( \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = k \left( \frac{3}{2} \right) \\ y_H = 3k \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ y_H = 6 \end{cases}.$$

4.  $\vec{GO}\left(\frac{1}{2}; -\frac{5}{2}\right)$ ;  $\vec{HG}(1; -5)$ .  $\vec{HG}=2\vec{GO}$  donc  $H, G$  et  $O$  sont alignés.

**110** On se place dans le repère  $(E; \vec{ED}, \vec{EF})$ .  $A(2; 0)$ ;  $B(2; 1)$ ;  $C(1; 1)$ ;  $D(1; 0)$ ;  $E(0; 0)$ ;  $F(0; 1)$ ;  $I\left(\frac{3}{2}; 1\right)$ .

Si les droites sont concourantes, elles se coupent en un point  $K$ . Il existe un nombre réel  $k_1$  tel que :

$$\vec{DK} = k_1 \vec{DI} \Leftrightarrow \begin{cases} x_K - 1 = \frac{k_1}{2} \\ y_K = k_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_K = 1 + \frac{k_1}{2} \\ y_K = k_1 \end{cases}$$

d'où  $2x_K - y_K - 2 = 0$ .

Il existe un nombre réel  $k_2$  tel que :

$$\vec{EK} = k_2 \vec{EB} \Leftrightarrow \begin{cases} x_K = 2k_2 \\ y_K = k_2 \end{cases} \text{ d'où } x_K - 2y_K = 0.$$

Il existe un nombre réel  $k_3$  tel que :

$$\vec{AK} = k_3 \vec{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_K - 2 = -k_3 \\ y_K = k_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_K = 2 - k_3 \\ y_K = k_3 \end{cases}$$

d'où  $x_K + y_K - 2 = 0$ .

On obtient donc le système : 
$$\begin{cases} 2x_K - y_K - 2 = 0 \\ x_K - 2y_K = 0 \\ x_K + y_K - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4y_K - y_K = 2 \\ x_K = 2y_K \\ x_K + y_K - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_K = \frac{4}{3} \\ y_K = \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} + \frac{4}{3} - 2 = 0 \end{cases} .$$

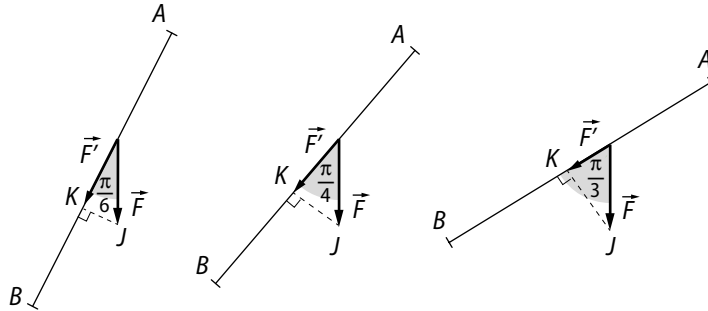
Ce système a pour solution  $\left(\frac{4}{3}; \frac{2}{3}\right)$ .

# 4 Produit scalaire

## Activités d'introduction

### 1 Poussé par le vent

1. a.



b. Dans chacune des situations, le triangle  $IJK$  est rectangle en  $K$ , donc  $\cos(\widehat{IK, IJ}) = \frac{IK}{IJ} = \frac{\|\vec{F}'\|}{\|\vec{F}\|}$ , donc  $\|\vec{F}'\| = \|\vec{F}\| \times \cos(\widehat{IK, IJ})$ .

Ainsi,  $W = AB \times \|\vec{F}'\| \times \cos(\widehat{AB, F})$ .

c. • Situation 1 :  $W = 10 \times 2 \times \cos \frac{\pi}{6} = 10\sqrt{3}$ .

• Situation 2 :  $W = 10 \times 2 \times \cos \frac{\pi}{4} = 10\sqrt{2}$ .

• Situation 3 :  $W = 10 \times 2 \times \cos \frac{\pi}{3} = 10$ .

2. • Lorsque  $\vec{AB}$  et  $\vec{F}$  sont colinéaires,  $W = AB \times \|\vec{F}\| = 10 \times 2 = 20$ .

• Lorsque  $\vec{AB}$  et  $\vec{F}$  sont orthogonaux,  $W = 0$ .

### 2 Premières propriétés

1. a. On note  $\vec{v}'$  le projeté orthogonal de  $\vec{v}$  sur  $\vec{u}$ .

Dans les trois cas, on a alors  $\|\vec{v}'\| = \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{u, v})$ .

Or d'après la remarque qui précède,  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}'\|$  on en déduit que  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{u, v})$ .

b. ①  $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$  car  $\cos(\widehat{u, v}) > 0$  ;

②  $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$  car  $\cos(\widehat{u, v}) > 0$  ;

③  $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$  car  $\cos(\widehat{u, v}) < 0$  ;

④  $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$  car  $\cos(\widehat{u, v}) < 0$ .

2. a. • On suppose que  $\vec{u} \neq \vec{0}$  et  $\vec{v} \neq \vec{0}$ .

Puisque, pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ ,  $\cos x = \cos(-x)$ , on a  $\cos(\widehat{u, v}) = \cos(-\widehat{u, v}) = \cos(\widehat{v, u})$ .

Ainsi,  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ .

• On suppose que  $\vec{v} = \vec{0}$  ; dans ce cas, le projeté orthogonal de  $\vec{v}$  sur  $\vec{u}$  est  $\vec{0}$  et  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{0}\| = 0$  et  $\vec{v} \cdot \vec{u} = \|\vec{0}\| \times \|\vec{u}\| = 0$ . D'où l'égalité.

b. Puisque pour tout nombre réel  $x$ ,  $-1 \leq \cos x \leq 1$ , on en déduit que  $|\cos x| \leq 1$ .

D'où,  $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ .

c. •  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$  ; •  $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$  ; •  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ .

### 3 Théorème de la médiane

1. a.  $AB^2 + AC^2 = \vec{AB}^2 + \vec{AC}^2 = (\vec{AA}' + \vec{A'B})^2 + (\vec{AA}' + \vec{A'C})^2$ .
- b.  $A^2 + AC^2 = \vec{AA}'^2 + 2\vec{AA}' \cdot \vec{A'B} + \vec{A'B}^2 + \vec{AA}'^2 + 2\vec{AA}' \cdot \vec{A'C} + \vec{A'C}^2$   
 $= 2\vec{AA}'^2 + 2\vec{AA}' \cdot (\vec{A'B} + \vec{A'C}) + \vec{A'B}^2 + \vec{A'C}^2$   
 $= 2\vec{AA}'^2 + \vec{A'B}^2 + \vec{A'C}^2 + 2\vec{AA}' \cdot (\vec{A'B} + \vec{A'C})$ .
- c.  $\vec{A'B} = -\frac{1}{2}\vec{BC}$  et  $\vec{A'C} = \frac{1}{2}\vec{BC}$ , donc  $\vec{A'B} + \vec{A'C} = \vec{0}$ .
- d.  $AB^2 + AC^2 = 2\vec{AA}'^2 + \vec{A'B}^2 + \vec{A'C}^2 + 2\vec{AA}' \cdot \vec{0}$   
 $= 2\vec{AA}'^2 + \frac{BC^2}{2}$  car  $\vec{A'B}^2 = \vec{A'C}^2 = \left(\frac{BC}{2}\right)^2 = \frac{BC^2}{4}$ .

2. Avec la configuration précédente, on note  $A$  le point où se trouve le photographe,  $B$  le point de départ,  $C$  le point d'arrivée et  $A'$  le point de mi-course.

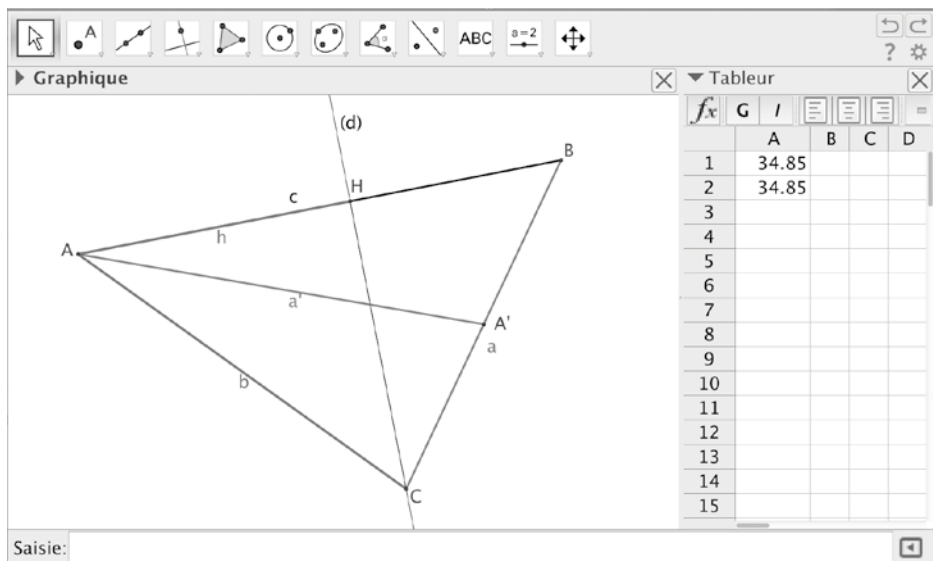
Ainsi,  $AB = 60$ ,  $AC = 50$ ,  $BC = 100$ .

Donc  $60^2 + 50^2 = 2AA'^2 + \frac{100^2}{2}$ , ainsi  $6100 = 2AA'^2 + 5000$ , donc  $AA'^2 = 550$  et  $AA' \approx 23,45$ .

Le photographe se trouvera à environ 23,5 m au moment de la photo.

### 4 Une autre formule de la médiane

1. a. b. c.



- d.  $c \times h = \vec{AB} \cdot \vec{AC}$ ;  $AA'^2 - \frac{BC^2}{4} = \vec{AB} \cdot \vec{AC}$ .
2. a.  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$ , ainsi  $b^2 + c^2 - a^2 = 2bc \cos \hat{A}$   
 et puisque  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = c \times b \times \cos \hat{A}$ , on en déduit que  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2)$ .
- b. D'après le théorème de la médiane,  $b^2 + c^2 = 2a'^2 + \frac{a^2}{2}$ ,  
 donc  $\frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2) = a'^2 + \frac{a^2}{4} - \frac{1}{2}a^2 = a'^2 - \frac{a^2}{4}$ .  
 Finalement,  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = a'^2 - \frac{a^2}{4} = AA'^2 - \frac{BC^2}{4}$ .

## Savoir-faire

- 3** a.  $\vec{AB} \cdot \vec{AE} = AB \times AB = 100$  ;  
 b.  $\vec{CB} \cdot \vec{FC} = -CB \times EC = -200$  ;  
 c.  $\vec{OA} \cdot \vec{EC} = \vec{EO} \cdot \vec{OC} = -5 \times 10 = -50$  ;  
 d.  $\vec{BO} \cdot \vec{O'O} = \vec{O'D} \cdot \vec{O'O} = -10 \times 5 = -50$ .

- 4**  $\vec{ED} \cdot \vec{EF} = ED \times EF \times \cos(\widehat{ED, EF})$   
 $\vec{ED} \cdot \vec{EF} = ED \times EF \times \cos \widehat{DEF}$   
 donc  $20 = 5 \times 8 \times \cos \widehat{DEF}$   
 ainsi,  $\cos \widehat{DEF} = \frac{20}{5 \times 8} = \frac{1}{2}$ .  
 Donc,  $\text{mes} \widehat{DEF} = \frac{\pi}{3}$  rad.

- 5**  $\vec{HG} \cdot \vec{HI} = GH \times IH \times \cos(\widehat{HG, HI})$   
 donc  $\cos(\widehat{HG, HI}) = \frac{\vec{HG} \cdot \vec{HI}}{GH \times IH}$ .

a.  $\cos(\widehat{HG, HI}) = \frac{-7}{7 \times \sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

donc  $\text{mes}(\widehat{HG, HI}) = \frac{\pi}{4}$  rad.

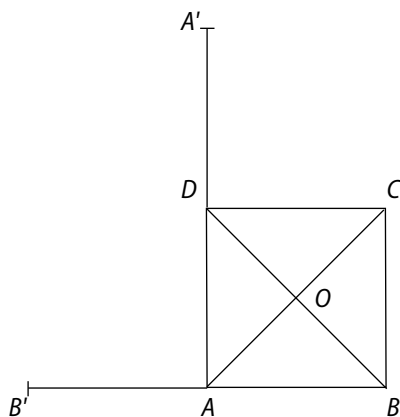
b.  $\cos(\widehat{HG, HI}) = \frac{-7}{7 \times \sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

donc  $\text{mes}(\widehat{HG, HI}) = \frac{3\pi}{4}$  rad.

- 8** D'après les codages,  $(BH)$  et  $(CK)$  sont les hauteurs de  $B$  et  $C$  dans le triangle  $OBC$ . Elles sont sécantes en  $I$ , donc  $(OI)$  est la hauteur issue de  $O$  dans le triangle  $OBC$ .

Ainsi,  $(OI) \perp (BC)$  et  $\vec{OI} \cdot \vec{BC} = 0$ .

- 9** 1.



- 2. a.** Dans le repère  $(A, \vec{AB}, \vec{AD})$  orthonormé,  $O(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ ,  $A'(0; 2)$ ,  $B'(-1; 0)$ .

- b.**  $\vec{OA}'(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2})$  et  $\vec{OB}'(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2})$ .

Ainsi,  $\vec{OA}' \cdot \vec{OB}' = -\frac{1}{2} \times (-\frac{3}{2}) + \frac{3}{2} \times (-\frac{1}{2}) = 0$ .

Donc  $(OA') \perp (OB')$ .

- 12** a. De la relation  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$ , on déduit que :  $\cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

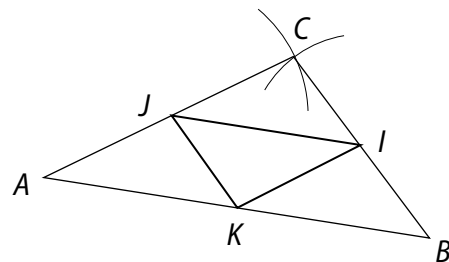
$\cos \hat{I} = \frac{2,5^2 + 1,2^2 - 3^2}{2 \times 2,5 \times 1,2} \approx -0,218$  d'où  $\text{mes} \hat{I} \approx 1,8$  rad ;

$\cos \hat{J} = \frac{3^2 + 1,2^2 - 2,5^2}{2 \times 3 \times 1,2} \approx 0,582$  d'où  $\text{mes} \hat{J} \approx 0,9$  rad ;

$\cos \hat{K} = \frac{3^2 + 2,5^2 - 1,2^2}{2 \times 3 \times 2,5} \approx 0,921$  d'où  $\text{mes} \hat{K} \approx 0,4$  rad.

- b.**  $\frac{KJ}{\sin \hat{I}} = 2R$ , donc  $R \approx \frac{3}{2 \times \sin 1,8} \approx 1,54$ .

- 13** a.



- b.** Les trois longueurs à calculer sont celles des médianes du triangle  $ABC$ . D'après la propriété du cours :

$$AB^2 + AC^2 = 2AA'^2 + \frac{BC^2}{2} \text{ d'où } AA'^2 = \frac{AB^2 + AC^2 - \frac{BC^2}{2}}{2}.$$

Ainsi, appliqué à cet exemple :

$$AI^2 = \frac{7^2 + 5^2 - \frac{4^2}{2}}{2} = 33, \text{ donc } AI = \sqrt{33} ;$$

$$BJ^2 = \frac{7^2 + 4^2 - \frac{5^2}{2}}{2} = 26,25, \text{ donc } BJ = \sqrt{26,25} ;$$

$$CK^2 = \frac{5^2 + 4^2 - \frac{7^2}{2}}{2} = 8,25, \text{ donc } CK = \sqrt{8,25}.$$

**c.**  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AI^2 - \frac{BC^2}{4} = 33 - \frac{4^2}{2} = 29$ .

**d.**  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$ , donc  
 $\cos \widehat{BAC} = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{AB \times AC} = \frac{29}{7 \times 5} = \frac{29}{35}$ .

Ainsi,  $\text{mes} \widehat{BAC} \approx 0,6$  rad.

## Exercices d'entraînement

14 a.  $\vec{AB} = 1$ ; b.  $\vec{BC} = 3$ ; c.  $\vec{CB} = -3$ ; d.  $\vec{DA} = -6$ .

15 a.  $\vec{AB} = 4$ ;  $\vec{CD} = -1$ . b.  $\vec{AB} = -2$ ;  $\vec{CD} = \frac{1}{2}$ .

16 1. a.  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \times \vec{AH}$ ; b.  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AH$ .

2. a.  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \times \vec{AH}$ ; b.  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -AB \times AH$ .

3. a.  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AH} \times \vec{AC}$ ; b.  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AH \times AC$ .

4. a.  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AH} \times \vec{AC}$ ; b.  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -AH \times AC$ .

17 a.  $\vec{HH'} \cdot \vec{HB} = \vec{HH'} \times \vec{HH'} = 16$ ;

b.  $\vec{CD} \cdot \vec{AC} = \vec{CD} \times \vec{HC} = 6 \times (-5) = -30$ ;

c.  $\vec{DC} \cdot \vec{AD} = \vec{DC} \times \vec{HD} = 6 \times (-1) = -6$ ;

d.  $\vec{OH'} \cdot \vec{BA} = \vec{O'B} \times \vec{BA} = -2 \times 4 = -8$  où  $O'$  est le projeté orthogonal de  $O$  sur  $(AB)$ .

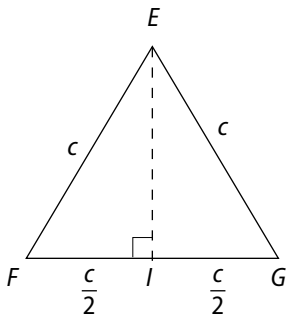
18 a.  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \times \vec{AB} = 1$ ;

b.  $\vec{AD} \cdot \vec{CB} = \vec{AD} \times \vec{DA} = -1$ ;

c.  $\vec{AC} \cdot \vec{BD} = 0$  car  $(AC) \perp (BD)$ ;

d.  $\vec{AB} \cdot \vec{DB} = \vec{AB} \times \vec{AB} = 1$ .

19



a.  $\vec{GE} \cdot \vec{GF} = \vec{GI} \times \vec{GF} = \frac{c^2}{2}$ ;

b.  $\vec{GF} \cdot \vec{FG} = \vec{GF} \times \vec{FG} = -c^2$ ;

c.  $\vec{EI} \cdot \vec{EF} = \vec{EI} \times \vec{EI} = EI^2 = EF^2 - FI^2 = c^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2 = \frac{3c^2}{4}$ ;

d.  $\vec{GI} \cdot \vec{IF} = \vec{GI} \times \vec{IF} = \frac{c^2}{4}$ .

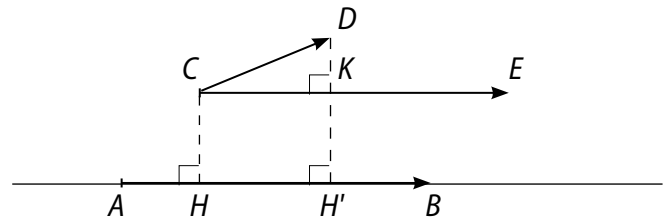
20 a.  $h = \sqrt{c^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2} = \frac{c\sqrt{3}}{2}$ .

b.  $\vec{MN} \cdot \vec{PN} = -c \times \frac{c\sqrt{3}}{2} = -\frac{c^2\sqrt{3}}{2}$ ;

$\vec{QN} \cdot \vec{RQ} = -c \times \frac{c\sqrt{3}}{2} = -\frac{c^2\sqrt{3}}{2}$ ;

$\vec{RS} \cdot \vec{RQ} = \frac{c}{2} \times \frac{c\sqrt{3}}{2} = \frac{c^2\sqrt{3}}{4}$ .

21 a. et b.



c.  $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = \vec{CE} \cdot \vec{CD}$   
 $= \vec{CE} \times \vec{CK}$   
 $= \vec{AB} \times \vec{HH'}$

22 a.  $\vec{u} \cdot \vec{u} = 4$ ;

b.  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4 \times 1 = 4$ ;

c.  $\vec{u} \cdot \vec{w} = 4 \times (-3) = -12$ ;

d.  $\vec{u} \cdot \vec{t} = 4 \times (-1) = -4$ .

23 a. Voir figure ci-contre.

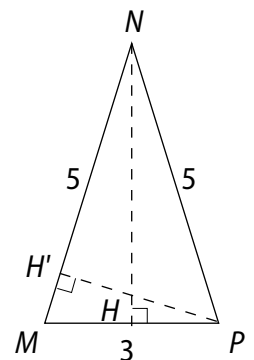
b.  $\vec{MN} \cdot \vec{MP} = \vec{MH} \times \vec{MP} = 4,5$ ;

$\vec{PN} \cdot \vec{PM} = \vec{PH} \times \vec{PM} = 4,5$ ;

$\vec{NP} \cdot \vec{PM} = \vec{HP} \times \vec{PM} = -4,5$ .

c.  $\vec{MN} \cdot \vec{MP} = \vec{MN} \times \vec{MH'}$ .

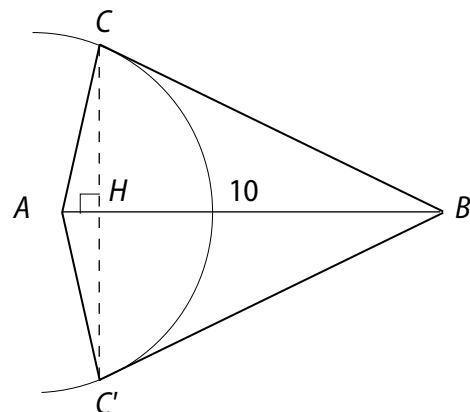
Or, d'après le b.,  $\vec{MN} \cdot \vec{MP} = 4,5$ ,  
 donc  $MH' = 4,5/5 = 0,9$ .



Ainsi,  $PH'^2 = MP^2 - MH'^2 = 3^2 - 0,9^2 = 8,19$ .

$PH' = \sqrt{8,19}$ .

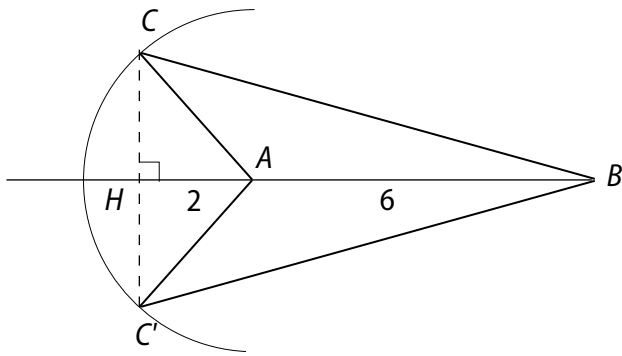
24 a.



$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \times \vec{AH} = 6$  où  $H$  est le projeté orthogonal de  $C$  sur  $(AB)$  donc  $AH = 15/10 = 1,5$ .

Les deux triangles  $ABC$  et  $ABC'$  conviennent.

b.



$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \times \vec{AH} = -12$  où  $H$  est le projeté orthogonal de  $C$  sur  $(AB)$ .

donc  $\vec{AH} = -\frac{12}{6} = -2$

Les deux triangles  $ABC$  et  $ABC'$  conviennent.

**25**  $\cdot \vec{u} \cdot \vec{v}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ;  $\cdot \vec{u} \cdot \vec{v}_2 = -\frac{1}{2}$ ;  $\cdot \vec{u} \cdot \vec{v}_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ;  $\cdot \vec{u} \cdot \vec{v}_4 = \frac{1}{2}$ .

**26** a.  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$ ;

b.  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 10 \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$ ;

c.  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0,1 \times 20 \times (-1) = -10$ .

**27** a.  $\vec{OB} \cdot \vec{OC} = 0$ ;

$\vec{BC} \cdot \vec{OA} = \vec{BC} \cdot \vec{CO} = \vec{OC} \times \vec{CO} = -16$ ;

$\vec{BC} \cdot \vec{AB} = 0$ .

b.  $\vec{OB} \cdot \vec{OC} = OB \times OC \times \cos(\widehat{OB, OC})$   
 $= 4 \times 4 \times \cos \frac{2\pi}{3} = -8$ ;

$\vec{BC} \cdot \vec{OA} = 0$ ;

$\vec{BC} \cdot \vec{AB} = BC \times AB \times \cos \frac{\pi}{3} = a^2 \times \frac{1}{2}$  où  $a$  est la longueur d'un côté du triangle. Or, en utilisant la propriété de Pythagore, on trouve que  $4^2 = 2^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$   
 Ainsi,  $a^2 = 48$ .

Finalement,  $\vec{BC} \cdot \vec{AB} = 24$ .

**28**  $W_1 = \vec{AB} \cdot \vec{F}_1 = 9 \times 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 18\sqrt{2}$  J.

$W_2 = \vec{AB} \cdot \vec{F}_2 = 9 \times 4 \times 0 = 0$  J.

$W_3 = \vec{AB} \cdot \vec{F}_3 = 9 \times 4 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -18\sqrt{3}$  J.

$W_4 = \vec{AB} \cdot \vec{F}_4 = 9 \times 4 \times (-1) = -36$  J.

$W_5 = \vec{AB} \cdot \vec{F}_5 = 9 \times 4 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -18\sqrt{2}$  J.

$W_6 = \vec{AB} \cdot \vec{F}_6 = 9 \times 4 \times \frac{1}{2} = 18$  J.

**29** a. • Trajet de 50 m

$W = \|\vec{F}\| \times 50 \times \cos \frac{\pi}{12}$

$W = 3\,000 \times 50 \times \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

$W = 3\,750 (\sqrt{6} + \sqrt{2})$  J.

• Trajet de 1 km

$W = 750\,000 (\sqrt{6} + \sqrt{2})$  J.

b.  $300\,000 = \|\vec{F}\| \times 100 \times \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

d'où  $\|\vec{F}\| = \frac{12\,000}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} \approx 3\,100$  J.

**30**  $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$ , d'où :

a.  $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = -\frac{4\sqrt{2}}{4} \times 2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ , ainsi  $\text{mes}(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{3\pi}{4}$  rad.

b.  $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{6\sqrt{3}}{3 \times 4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , ainsi  $\text{mes}(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\pi}{6}$  rad.

**31**  $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$ , d'où :

a.  $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = -\frac{1}{\sqrt{3} \times 5}$  ainsi,  $\text{mes}(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \approx 1,687$  rad.

b.  $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{4\sqrt{3}}{7 \times \sqrt{2}}$  ainsi,  $\text{mes}(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \approx 0,796$  rad.

**32** a.  $\text{mes} \widehat{AOB} = \frac{360}{5} = 72^\circ$  d'où  $\text{mes} \widehat{ADB} = 36^\circ$ .

On en déduit que  $\text{mes} \widehat{DBA} = 72^\circ$ .

Ainsi,  $\vec{AB} \cdot \vec{DB} = AB \times DB \times \cos 72^\circ$ .

Or,  $\vec{AB} \cdot \vec{DB} = \vec{AB} \times \vec{HB}$  où  $H$  est le projeté orthogonal de  $D$  sur  $[AB]$ , c'est-à-dire que  $H$  est le milieu de  $[AB]$ .

$\vec{AB} \cdot \vec{DB} = 5 \times 2,5 = 12,5$ .

Ainsi,  $12,5 = 5 \times DB \times \cos 72^\circ$ .

$DB = \frac{2,5}{\cos 72^\circ} \approx 8,1$ .

**33** a.  $\text{mes}(\widehat{OC, OD}) = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$  rad.

Ainsi,  $\vec{AD} \cdot \vec{OC} = AD \times OC \times \cos \frac{\pi}{3} = 8 \times 4 \times \frac{1}{2} = 16$ .

b. • Le triangle  $OEF$  est équilatéral, donc  $OE = OF = EF$ . Dans le triangle  $BEF$  rectangle en  $F$ ,  $BF = \sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{3}$ .

•  $\text{mes}(\widehat{BE, BF}) = \frac{1}{2} \text{mes}(\widehat{OE, OF}) = \frac{\pi}{6}$  rad.

•  $\vec{BF} \cdot \vec{OE} = BF \times OE \times \cos \frac{\pi}{6} = 4\sqrt{3} \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 24$ .

**34 a.**  $\vec{AB} \cdot \vec{AM} = AB \times AM \times \cos(\widehat{AB, AM})$

d'où  $1 = 1 \times 1 \times \cos(\widehat{AB, AM})$

donc  $\cos(\widehat{AB, AM}) = 1$

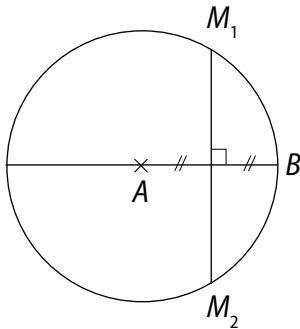
$M = B$  est le seul point qui convient.

**b.**  $\vec{AB} \cdot \vec{AM} = AB \times AM \times \cos(\widehat{AB, AM})$

d'où  $\frac{1}{2} = 1 \times 1 \times \cos(\widehat{AB, AM})$

donc  $\cos(\widehat{AB, AM}) = \frac{1}{2}$ .

$M_1$  et  $M_2$  sont les points cherchés.



**35 a.**  $\vec{u}^2 = 2^2 = 4$ ; **b.**  $\vec{v}^2 = 1^2 = 1$ ; **c.**  $\vec{w}^2 = 2^2 + 1^2 = 5$ ;

**d.**  $\vec{t}^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ ; **e.**  $(\vec{u} + \vec{v})^2 = 2^2 + 1^2 = 5$ ;

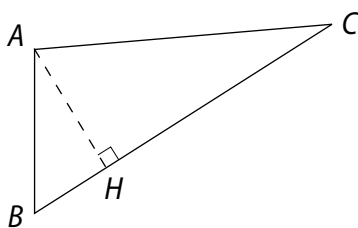
**f.**  $(\vec{v} + \vec{t})^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ .

**36** • Lorsque  $\vec{u} = \vec{0}$ ,  $\vec{u}^2 = \vec{0} \cdot \vec{0} = 0$ . D'où l'égalité.

Lorsque  $\vec{u} \neq \vec{0}$ :

$$\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{u})}) = \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\| \times 1 = \|\vec{u}\|^2.$$

**37 a.**



**b.**  $BA^2 = \vec{BA} \cdot \vec{BA} = (\vec{BC} + \vec{CA}) \cdot \vec{BA} = \vec{BC} \cdot \vec{BA} + \vec{CA} \cdot \vec{BA}$   
 $= \vec{BC} \times \vec{BH} + 0$  car  $(AB) \perp (AC)$   
 $= \vec{BC} \times \vec{BH}.$

**38 1. a.**  $(\vec{u} + \vec{v})^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v}$   
 $= \vec{u}^2 + 2 \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$  car  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}.$

**b.**  $(\vec{u} - \vec{v})^2 = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v}$   
 $= \vec{u}^2 - 2 \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$  car  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}.$

**c.**  $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$  car  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}.$

**2.** On utilise le résultat du **1. a.** pour écrire :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2 \vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = 2 \vec{u} \cdot \vec{v}$$

Ainsi,  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2).$

**39**  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}) = 3 \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$

$$(\vec{u} - \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2 \vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = 3^2 - 2 \times \frac{3}{2} + 1^2 = 7.$$

$$\begin{aligned} (3\vec{u} + 4\vec{v})^2 &= (3\vec{u} + 4\vec{v}) \cdot (3\vec{u} + 4\vec{v}) \\ &= 9\vec{u}^2 + 12\vec{u} \cdot \vec{v} + 12\vec{v} \cdot \vec{u} + 16\vec{v} \cdot \vec{v} \\ &= 9\|\vec{u}\|^2 + 24 \vec{u} \cdot \vec{v} + 16\|\vec{v}\|^2 \\ &= 9 \times 3^2 + 24 \times \frac{3}{2} + 16 \times 1 = 133. \end{aligned}$$

**40**  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})})$   
 $= 0,1 \times 0,4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,02\sqrt{2}.$

$$\begin{aligned} (\vec{u} - \vec{v})^2 &= \|\vec{u}\|^2 - 2 \vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \\ &= 0,1^2 - 2 \times 0,02\sqrt{2} + 0,4^2 = 0,17 - 0,04\sqrt{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3\vec{u} + 4\vec{v})^2 &= (3\vec{u} + 4\vec{v}) \cdot (3\vec{u} + 4\vec{v}) \\ &= 9\vec{u}^2 + 12\vec{u} \cdot \vec{v} + 12\vec{v} \cdot \vec{u} + 16\vec{v} \cdot \vec{v} \\ &= 9\|\vec{u}\|^2 + 24 \vec{u} \cdot \vec{v} + 16\|\vec{v}\|^2 \\ &= 9 \times 0,1^2 + 24 \times 0,02\sqrt{2} + 16 \times 0,4^2 \\ &= 2,65 + 0,48\sqrt{2}. \end{aligned}$$

**41**  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})})$   
 $= \sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$

$$\begin{aligned} (\vec{u} - \vec{v})^2 &= \|\vec{u}\|^2 - 2 \vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \\ &= \sqrt{2}^2 - 2 \times \frac{3\sqrt{2}}{2} + \sqrt{3}^2 = 5 - 3\sqrt{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3\vec{u} + 4\vec{v})^2 &= (3\vec{u} + 4\vec{v}) \cdot (3\vec{u} + 4\vec{v}) \\ &= 9\vec{u}^2 + 12\vec{u} \cdot \vec{v} + 12\vec{v} \cdot \vec{u} + 16\vec{v} \cdot \vec{v} \\ &= 9\|\vec{u}\|^2 + 24 \vec{u} \cdot \vec{v} + 16\|\vec{v}\|^2 \\ &= 9 \times \sqrt{2}^2 + 24 \times \frac{3\sqrt{2}}{2} + 16 \times \sqrt{3}^2 \\ &= 66 + 36\sqrt{2}. \end{aligned}$$

**42**  $AD^2 - AB^2 = (\vec{AD} + \vec{AB}) \cdot (\vec{AD} - \vec{AB})$   
 $= \vec{AC} \cdot (\vec{AD} + \vec{BA})$   
 $= \vec{AC} \cdot \vec{BD}.$

43  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$ .

$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2} (2,3^2 - 1^2 - 1,5^2) = 1,02$

De plus,  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{AB, AC})$

d'où  $\cos(\widehat{AB, AC}) \approx 0,44$ .

44 a.  $\vec{IJ} \cdot \vec{JK} = \frac{1}{2} (\|\vec{IJ} + \vec{JK}\|^2 - \|\vec{IJ}\|^2 - \|\vec{JK}\|^2)$   
 $= \frac{1}{2} (IK^2 - IJ^2 - JK^2) = \frac{1}{2} (3^2 - 2^2 - 4^2)$   
 $= -\frac{11}{2}$ .

$\vec{IJ} \cdot \vec{KI} = \frac{1}{2} (\|\vec{IJ} + \vec{KI}\|^2 - \|\vec{IJ}\|^2 - \|\vec{KI}\|^2)$   
 $= \frac{1}{2} (KJ^2 - IJ^2 - KI^2) = \frac{1}{2} (4^2 - 2^2 - 3^2) = \frac{3}{2}$ .

b.  $\vec{IJ} \cdot \vec{IK} = IJ \times IK \times \cos(\widehat{IJ, IK})$  donc :

$-\frac{3}{2} = 2 \times 3 \times \cos(\widehat{IJ, IK})$  ainsi,  $\cos(\widehat{IJ, IK}) = -\frac{1}{4}$ .

$\widehat{I} \approx 1,8$  rad.

45  $AB^2 - AC^2 = \vec{AB}^2 + \vec{AC}^2 = (\vec{AI} + \vec{IB})^2 + (\vec{AI} + \vec{IC})^2$   
 $= \vec{AI}^2 + 2\vec{AI} \cdot \vec{IB} + \vec{IB}^2 + \vec{AI}^2 + 2\vec{AI} \cdot \vec{IC} + \vec{IC}^2$   
 $= 2\vec{AI}^2 + 2\vec{AI} \cdot (\vec{IB} + \vec{IC}) + 2\vec{IB}^2$ .

Or, I est le milieu de [BC], donc  $\vec{IB} + \vec{IC} = \vec{0}$  et  $IB = \frac{BC}{2}$ .

Ainsi,  $AB^2 - AC^2 = 2\vec{AI}^2 + 2\vec{AI} \cdot \vec{0} + 2 \times \left(\frac{BC}{2}\right)^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$ .

46  $AB^2 - AC^2 = \vec{AB}^2 - \vec{AC}^2 = (\vec{AH} + \vec{HB})^2 - (\vec{AH} + \vec{HC})^2$   
 $= \vec{AH}^2 + 2\vec{AH} \cdot \vec{HB} + \vec{HB}^2 - \vec{AH}^2 - 2\vec{AH} \cdot \vec{HC} - \vec{HC}^2$   
 $= 2\vec{AH} \cdot (\vec{HB} - \vec{HC}) + \vec{HB}^2 - \vec{HC}^2$   
 $= 2\vec{AH} \cdot \vec{CB} + \vec{HB}^2 - \vec{HC}^2$   
 $= \vec{HB}^2 - \vec{HC}^2$  car  $(AH) \perp (BC)$ .

47 a.  $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1 \times (-4) + 2 \times (-3) = -2$ .

b.  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times (-4) + 4 \times (-2) = -12$ .

48 a.  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 5 \times 7 + 2 \times (-1) = 33$ .

b.  $\vec{BC} \cdot \vec{AB} = 2 \times 5 + (-3) \times 2 = 4$ .

c.  $\vec{AC} \cdot \vec{BD} = 7 \times (-2) + (-1) \times (-6) = -8$ .

d.  $\vec{CB} \cdot \vec{AD} = (-2) \times 3 + 3 \times (-4) = -18$ .

49  $AB^2 = \vec{AB}^2 = \vec{AB} \cdot \vec{AB}$   
 $= (x_B - x_A) \times (x_B - x_A) + (y_B - y_A) \times (y_B - y_A)$   
 $= (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$ .

D'où la formule.

50 a.  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 10$ ;  $\|\vec{u}\| = \sqrt{13}$ ;  $\vec{v}^2 = 17$ ;  
 $\cos(\widehat{u, v}) = \frac{10}{\sqrt{13} \times \sqrt{17}}$  donc  $\widehat{u, v} \approx 0,8$  rad.

b.  $\vec{u} \cdot \vec{v} = -4$ ;  $\|\vec{u}\| = 4$ ;  $v^2 = 26$ ;

$\cos(\widehat{u, v}) = \frac{-4}{4 \times \sqrt{26}} = -\frac{1}{\sqrt{26}}$  donc  $\widehat{u, v} \approx 1,8$  rad.

51 a.  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \sqrt{2} - \sqrt{3}$ ;  $\|\vec{u}\| = \sqrt{3}$ ;  $\vec{v}^2 = 4$ ;

$\cos(\widehat{u, v}) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times 2}$  donc  $\widehat{u, v} \approx 1,7$  rad.

b.  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1,4$ ;  $\|\vec{u}\| = \frac{\sqrt{37}}{2}$ ;  $\vec{v}^2 = \frac{401}{25}$ ;

$\cos(\widehat{u, v}) = \frac{1,4}{\frac{\sqrt{37}}{2} \times \frac{\sqrt{401}}{5}}$  donc  $\widehat{u, v} \approx 1,5$  rad.

52 a.  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 9,9$ ;  $\|\vec{u}\| = \frac{\sqrt{101}}{2}$ ;  $\vec{v}^2 = \frac{101}{25}$ ;

$\cos(\widehat{u, v}) = \frac{9,9}{\frac{\sqrt{101}}{2} \times \frac{\sqrt{101}}{5}}$  donc  $\widehat{u, v} \approx 0,2$  rad.

b.  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 5$ ;  $\|\vec{u}\| = \sqrt{10}$ ;  $\vec{v}^2 = 55$ ;

$\cos(\widehat{u, v}) = \frac{5}{\sqrt{10} \times \sqrt{55}}$  donc  $\widehat{u, v} \approx 1,4$  rad.

53  $\cos \hat{A} = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{AB \times AC} = \frac{2 \times 4 + 3 \times (-1)}{\sqrt{13} \times \sqrt{17}} = \frac{5}{\sqrt{13} \times \sqrt{17}}$   
 donc  $\widehat{A} \approx 1,2$  rad.

•  $\cos \hat{B} = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{BA \times BC} = \frac{-2 \times 2 + (-3) \times (-4)}{\sqrt{13} \times \sqrt{20}} = \frac{8}{\sqrt{13} \times \sqrt{20}}$   
 donc  $\widehat{B} \approx 1,1$  rad.

•  $\cos \hat{C} = \frac{\vec{CA} \cdot \vec{CB}}{CA \times CB} = \frac{-4 \times (-2) + 1 \times 4}{\sqrt{17} \times \sqrt{20}} = \frac{12}{\sqrt{17} \times \sqrt{20}}$   
 donc  $\widehat{C} \approx 0,9$  rad.

54 a.  $\vec{u} \cdot \vec{v} = x \times z + y \times t$  et  $\vec{v} \cdot \vec{u} = z \times x + t \times y$  d'où l'égalité.

b.  $(\vec{u} + \vec{u}') \cdot \vec{v} = (x + x') \times z + (y + y') \times t$   
 $= x \times z + y \times t + x' \times z + y' \times t = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u}' \cdot \vec{v}$

c.  $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{v}') = x \times (z + z') + y \times (t + t')$   
 $= x \times z + y \times t + x \times z' + y \times t' = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{v}'$

d.  $k(\vec{u} \cdot \vec{v}) = k(x \times z + y \times t) = kx \times z + ky \times t$   
 $= (k\vec{u}) \cdot \vec{v} = x \times kz + y \times kt = \vec{u} \cdot (k\vec{v})$

55  $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 10$ ;  $OA = \sqrt{25 + \lambda^2}$ ;  $OB = 2$ .

a.  $\widehat{AOB} = \frac{\pi}{3}$  donc  $\cos \widehat{AOB} = \frac{1}{2}$ .

Or,  $\cos \widehat{AOB} = \frac{\vec{OA} \cdot \vec{OB}}{OA \times OB} = \frac{10}{2\sqrt{25 + \lambda^2}}$

On cherche  $\lambda$  tel que  $\frac{10}{2\sqrt{25 + \lambda^2}} = \frac{1}{2}$ ,

donc  $\sqrt{25 + \lambda^2} = 10$  c'est à dire  $25 + \lambda^2 = 100$

donc  $\lambda^2 = 75$ , ainsi  $\lambda = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$

ou  $\lambda = -\sqrt{75} = -5\sqrt{3}$ .

**b.**  $\text{mes } \widehat{AOB} = \frac{\pi}{4}$  donc  $\cos \widehat{AOB} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Or  $\cos \widehat{AOB} = \frac{\vec{OA} \cdot \vec{OB}}{OA \times OB} = \frac{10}{2\sqrt{25 + \lambda^2}}$

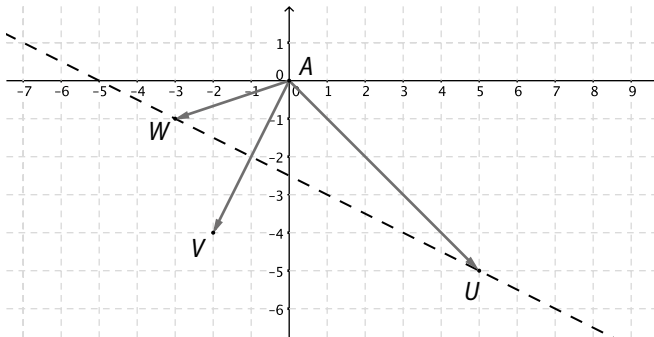
On cherche  $\lambda$  tel que  $\frac{10}{2\sqrt{25 + \lambda^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,

donc  $\sqrt{25 + \lambda^2} = \frac{10}{\sqrt{2}}$  c'est-à-dire  $25 + \lambda^2 = \frac{100}{2}$

donc  $\lambda^2 = 25$ , ainsi  $\lambda = -5$  ou  $\lambda = 5$ .

**56 a.**  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 10$ ;  $\vec{w} \cdot \vec{v} = 10$ .

**b.**



Les points  $U$  et  $W$  ont même projeté orthogonal sur la droite  $(OV)$ .

**57 a.**  $\vec{AB} (2; -1)$  et  $\vec{DC} (2; -1)$  donc  $\vec{AB} = \vec{DC}$

Ainsi,  $ABCD$  est un parallélogramme.

**b.**  $AB = \sqrt{5}$ ,  $AD = \sqrt{13}$ .

$\cos \widehat{BAD} = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AD}}{AB \times AD} = \frac{2 \times 3 + (-1) \times 2}{\sqrt{5} \times \sqrt{13}} = \frac{4}{\sqrt{65}}$

d'où  $\text{mes } \widehat{BAD} \approx 1,1$  rad.

De plus,  $\text{mes } \widehat{BCD} = \text{mes } \widehat{BAD} \approx 1,1$  rad ;

ensuite,  $\text{mes } \widehat{ABC} = \pi - \text{mes } \widehat{BAD} \approx 2,1$  rad ;

enfin,  $\text{mes } \widehat{ADC} = \text{mes } \widehat{ABC} \approx 2,1$  rad.

**c.**  $AC^2 + BD^2 = 26 + 10 = 36$  et  $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 5 + 13 + 5 + 13 = 36$ , d'où l'égalité.

**58 a.**  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ ;

**b.**  $\vec{u}^2 = 1$ ;

**c.**  $-\vec{v}^2 = -2$ ;

**d.**  $\vec{u}^2 + \vec{v}^2 = 1 + 2 = 3$

**59 a.**  $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1 \times 4 + 4 \times \frac{1}{4} = -3 \neq 0$  donc  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ne sont pas orthogonaux.

**b.**  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 0,5 + 0,2 \times (-5) = 0$  donc  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux.

**c.**  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \sqrt{2} \times (-\sqrt{3}) + (-\sqrt{3}) \times (-\sqrt{2}) = -\sqrt{6} + \sqrt{6} = 0$  donc  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux.

**d.**  $\vec{u} \cdot \vec{v} = (1 + \sqrt{5}) \times 4 + 4 \times (-\sqrt{5}) = 4 \neq 0$  donc  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ne sont pas orthogonaux.

**60** Dans le repère  $(M; \vec{MQ}, \vec{MN})$  orthonormé,  $\vec{MI} (\frac{1}{2}; 1)$  et  $\vec{IJ} (\frac{1}{2}; -\frac{1}{4})$  donc  $\vec{MI} \cdot \vec{IJ} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + 1 \times (-\frac{1}{4}) = 0$  donc  $(MI) \perp (IJ)$ .

**61 a.**  $\vec{EI} \cdot \vec{FH} = \vec{EI} \cdot (\vec{FG} + \vec{GH}) = \vec{EI} \cdot \vec{FG} + \vec{EI} \cdot \vec{GH}$   
 $= \vec{FG} \cdot \vec{FG} + \vec{EI} \cdot \vec{GH} = \vec{FG}^2 + \vec{EI} \cdot \vec{GH}$ .

**b.**  $\vec{EI} \cdot \vec{GH} = (\vec{EF} + \vec{FG} + \vec{GI}) \cdot \vec{GH} = \vec{EF} \cdot \vec{GH} + \vec{FG} \cdot \vec{GH} + \vec{GI} \cdot \vec{GH}$   
 $= -EF \times GH + 0 + 2\vec{GI}^2 = -3 \times 2 + 0 + 2 = -4$ .

**c.**  $\vec{EI} \cdot \vec{FH} = \vec{FG}^2 + \vec{EI} \cdot \vec{GH} = 2^2 - 4 = 0$  donc  $(EI) \perp (FH)$ .

**62** Lorsque  $\vec{u} = \vec{0}$  (ou  $\vec{v} = \vec{0}$ ),  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$  et  $\vec{u} \perp \vec{v}$  par notation (voir le paragraphe 2 du cours).

Lorsque  $\vec{u} \neq \vec{0}$  et  $\vec{v} \neq \vec{0}$ , si  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$  c'est que

$\cos(\widehat{u, v}) = 0$  donc  $\text{mes}(\widehat{u, v}) = \pm \frac{\pi}{2}$  rad donc  $\vec{u} \perp \vec{v}$ .

Si  $\vec{u} \perp \vec{v}$  alors  $\cos(\widehat{u, v}) = 0$  donc  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .

**63** Lorsque  $\vec{u} = \vec{0}$  ou  $\vec{v} = \vec{0}$ , l'équivalence est immédiate.

Lorsque  $\vec{u} \neq \vec{0}$  et  $\vec{v} \neq \vec{0}$ ,

$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$\Leftrightarrow 0 = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$

$\Leftrightarrow \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$ .

**64**  $M \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow (AM) \perp (MB)$

$\Leftrightarrow \vec{AM} \cdot \vec{MB} = 0$ .

**a.**  $\vec{AC} \cdot \vec{CB} = 2 \times 5 + (-2) \times 5 = 0$  donc  $C \in (\mathcal{C})$ .

**b.**  $\vec{AD} \cdot \vec{DB} = 6 \times 1 + (-1) \times 4 = 2 \neq 0$  donc  $D \notin (\mathcal{C})$ .

**c.**  $\vec{AE} \cdot \vec{EB} = 5 \times 2 + 5 \times (-2) = 0$  donc  $E \in (\mathcal{C})$ .

**d.**  $\vec{AF} \cdot \vec{FB} = 0 \times 7 + 3 \times 0 = 0$  donc  $F \in (\mathcal{C})$ .

**65 a.**  $\vec{AB} (5; 1)$ ,  $\vec{BC} (1; -5)$ , donc  $AB = BC = \sqrt{26}$  et  $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 5 \times 1 + 1 \times (-5) = 0$ .

$ABC$  est donc un triangle isocèle rectangle en  $B$ .

**b.**  $\vec{AB} (3; 4)$ ,  $\vec{BC} (5; -3)$ , donc  $AB = 5$  et  $BC = \sqrt{34}$  donc le triangle  $ABC$  n'est pas isocèle en  $B$ .

$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 3 \times 5 + 4 \times (-3) = 3 \neq 0$ . Ce triangle n'est pas non plus rectangle en  $B$ .  $ABC$  est un triangle quelconque.

$$\begin{aligned} \|\vec{i}\|^2 &= \vec{i} \cdot \vec{i} = (4\vec{u} - \vec{v}) \cdot (4\vec{u} - \vec{v}) = 16\vec{u} \cdot \vec{u} - 8\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} \\ &= 16 \times 2 - 8 \times 7 + 25 = 1 \end{aligned}$$

donc  $\|\vec{i}\| = 1$ , le vecteur  $\vec{i}$  est unitaire.

$$\begin{aligned} \|\vec{j}\|^2 &= \vec{j} \cdot \vec{j} = (-3\vec{u} + \vec{v}) \cdot (-3\vec{u} + \vec{v}) = 9\vec{u} \cdot \vec{u} - 6\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} \\ &= 9 \times 2 - 6 \times 7 + 25 = 1 \end{aligned}$$

donc  $\|\vec{j}\| = 1$ , le vecteur  $\vec{j}$  est unitaire.

$$\begin{aligned} \vec{i} \cdot \vec{j} &= (4\vec{u} - \vec{v}) \cdot (-3\vec{u} + \vec{v}) = -12\vec{u} \cdot \vec{u} + 4\vec{u} \cdot \vec{v} + 3\vec{v} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{v} \\ &= -12 \times 2 + 4 \times 7 + 3 \times 7 - 25 = 0, \end{aligned}$$

donc  $\vec{i} \perp \vec{j}$ . La base  $(\vec{i}, \vec{j})$  est bien orthonormée.

**67 a.**  $\vec{u}(1; -1), \vec{v}(2; 3)$  donc  $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$ , les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ne sont pas orthogonaux.

La base  $(\vec{u}, \vec{v})$  n'est ni orthonormée, ni orthogonale.

**b.** On a  $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| = 1$ , donc ces vecteurs sont unitaires.

$$\begin{aligned} \text{Par contre, } \vec{a} \cdot \vec{b} &= \frac{3}{\sqrt{13}} \times \frac{-1}{\sqrt{17}} + \frac{2}{\sqrt{13}} \times \frac{-4}{\sqrt{17}} \\ &= \frac{-11}{\sqrt{13} \times \sqrt{17}} \neq 0 \end{aligned}$$

donc les vecteurs  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  ne sont pas orthogonaux et la base  $(\vec{a}, \vec{b})$  n'est pas orthonormée.

$$\text{68 a. } BC^2 = 3^2 + 2,5^2 - 2 \times 3 \times 2,5 \times \cos \frac{\pi}{6}$$

$$BC^2 = 9 + 6,25 - 7,5\sqrt{3}.$$

$$BC = \sqrt{15,25 - 7,5\sqrt{3}}.$$

$$\text{b. } BC^2 = 10^2 + 10^2 - 2 \times 10 \times 10 \times \cos \frac{\pi}{4}$$

$$BC^2 = 100 + 100 - 100\sqrt{2}.$$

$$BC = \sqrt{200 - 100\sqrt{2}}.$$

$$\text{69 Dans tous les cas, } \cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

$$\text{a. } \cos \hat{A} = \frac{30^2 + 23^2 - 10^2}{2 \times 30 \times 23} \approx 0,963 \text{ donc } \text{mes } \hat{A} \approx 0,3 \text{ rad.}$$

$$\cos \hat{B} = \frac{30^2 + 10^2 - 23^2}{2 \times 30 \times 10} \approx 0,785 \text{ donc } \text{mes } \hat{B} \approx 0,7 \text{ rad.}$$

$$\cos \hat{C} = \frac{23^2 + 10^2 - 30^2}{2 \times 10 \times 23} \approx -0,589 \text{ donc } \text{mes } \hat{C} \approx 2,2 \text{ rad.}$$

$$\text{b. } \cos \hat{A} = \frac{2^2 + 3,4^2 - 1,5^2}{2 \times 2 \times 3,4} \approx 0,978 \text{ donc } \text{mes } \hat{A} \approx 0,2 \text{ rad.}$$

$$\cos \hat{B} = \frac{2^2 + 1,5^2 - 3,4^2}{2 \times 2 \times 1,5} \approx -0,885 \text{ donc } \text{mes } \hat{B} \approx 2,7 \text{ rad.}$$

$$\cos \hat{C} = \frac{3,4^2 + 1,5^2 - 2^2}{2 \times 3,4 \times 1,5} \approx 0,962 \text{ donc } \text{mes } \hat{C} \approx 0,3 \text{ rad.}$$

**70** On utilise la formule du cours :

$$AB^2 + AC^2 = 2AA'^2 + \frac{BC^2}{2}$$

$$\text{qui donne } AA'^2 = \frac{1}{2} \left( AB^2 + AC^2 - \frac{BC^2}{2} \right).$$

$$\bullet AA'^2 = \frac{1}{2} \left( 2^2 + 3^2 - \frac{1,8^2}{2} \right) = 5,69 \text{ donc } AA' = \sqrt{5,69}.$$

$$\bullet BB'^2 = \frac{1}{2} \left( 1,8^2 + 2^2 - \frac{3^2}{2} \right) = 1,37 \text{ donc } BB' = \sqrt{1,37}.$$

$$\bullet CC'^2 = \frac{1}{2} \left( 3^2 + 1,8^2 - \frac{2^2}{2} \right) = 5,2 \text{ donc } CC' = \sqrt{5,12}.$$

**71** On utilise la formule du cours :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AA'^2 - \frac{BC^2}{4}.$$

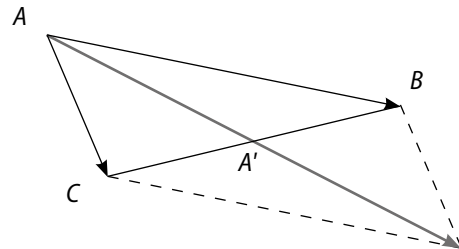
$$\text{a. } \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 7^2 - \frac{(4\sqrt{37})^2}{4} = -99.$$

$$\text{b. } \vec{BA} \cdot \vec{BC} = (\sqrt{75})^2 - \frac{10^2}{4} = 50.$$

$$\text{c. } \vec{CB} \cdot \vec{CA} = (\sqrt{106})^2 - \frac{(6\sqrt{2})^2}{4} = 88.$$

$$\text{d. } \vec{BA} \cdot \vec{AC} = -\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 99.$$

**72**



$$\begin{aligned} \vec{AB} \cdot \vec{AC} &= \frac{1}{2} (\|\vec{AB} + \vec{AC}\|^2 - \|\vec{AB}\|^2 - \|\vec{AC}\|^2) \\ &= \frac{1}{2} (\|2\vec{AA}'\|^2 - \|\vec{AB}\|^2 - \|\vec{AC}\|^2) \\ &= \frac{1}{2} [4AA'^2 - (AB^2 + AC^2)] \\ &= \frac{1}{2} [4AA'^2 - (2AA'^2 + \frac{BC^2}{2})] = AA'^2 - \frac{BC^2}{4}. \end{aligned}$$

$$\text{73 } AA'^2 = \frac{c^2 + b^2 - \frac{a^2}{2}}{2}; \quad BB'^2 = \frac{a^2 + c^2 - \frac{b^2}{2}}{2}$$

$$CC'^2 = \frac{a^2 + b^2 - \frac{c^2}{2}}{2} \text{ donc :}$$

$$\begin{aligned} AA'^2 + BB'^2 + CC'^2 &= \frac{1}{2} (2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - a^2 + b^2 + \frac{c^2}{2}) \\ &= a^2 + b^2 + c^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} = \frac{3}{4} (a^2 + b^2 + c^2) \end{aligned}$$

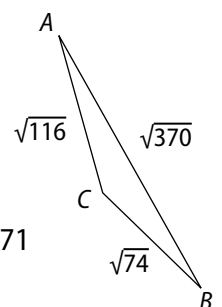
**74** Les trois côtés du terrain triangulaire mesurent respectivement  $\sqrt{370}, \sqrt{116}$  et  $\sqrt{74}$ .

$$\sqrt{370}^2 = \sqrt{116}^2 + \sqrt{74}^2$$

$$- 2 \times \sqrt{116} \times \sqrt{74} \times \cos \hat{C}$$

$$\text{d'où } \cos \hat{C} = \frac{116 + 74 - 370}{2 \times \sqrt{116} \times \sqrt{74}} \approx -0,971$$

ainsi,  $\text{mes } \hat{C} \approx 2,9 \text{ rad.}$



• On note  $\mathcal{A}$  l'aire de la surface du lac :  
 $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times \sqrt{116} \times \sqrt{74} \times \sin \hat{C} \approx 11,1$  acres.

**75 1. a.**  $AB^2 = 20^2 + 23,8^2 - 2 \times 20 \times 23,8 \times \cos \frac{\pi}{11}$   
 $AB^2 \approx 53$  et  $AB \approx 7,3$  m.

La largeur d'un but est d'environ 7,3 m.

**b.**  $CC'^2 = \frac{1}{2} \left( CA^2 + CB^2 - \frac{AB^2}{2} \right)$

$CC'^2 \approx \frac{1}{2} \left( 23,8^2 + 20^2 - \frac{7,3^2}{2} \right)$

$CC'^2 \approx 469,8975$

$CC' \approx 21,7$ .

Le gardien se trouve à environ 21,7 m du ballon.

**2.**  $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AC \times BC \times \cos \widehat{ABC}$

$AC^2 \approx 7,3^2 + 25^2 - 2 \times 7,3 \times 25 \times \cos \frac{\pi}{6}$

$AC^2 \approx 362,19$

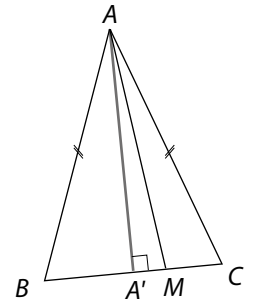
$AC \approx 19$  m.

**76** On suppose que  $BM \geq CM$ .

On note  $A'$  le pied de la hauteur issue de  $A$  qui est aussi le milieu de  $[BC]$ .

Dans le triangle  $ABA'$  rectangle en  $A'$  :  $AB^2 = AA'^2 + BA'^2$ .

Dans le triangle  $AMA'$  rectangle en  $A'$  :  $AM^2 = AA'^2 + A'M^2$ .



Ainsi :

$$\begin{aligned} AM^2 - AB^2 &= A'M^2 - BA'^2 = (\vec{A'M} + \vec{BA'}) \cdot (\vec{A'M} - \vec{BA'}) \\ &= (\vec{BA'} + \vec{A'M}) \cdot (\vec{A'M} + \vec{CA'}) = \vec{BM} \cdot \vec{CM} \\ &= BM \times CM. \end{aligned}$$

**77** D'après la propriété du paragraphe 4a du cours, puisque  $ABC$  est un triangle rectangle en  $A$  :

$$\begin{aligned} \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} &= \frac{AC^2 + AB^2}{AB^2 \times AC^2} = \frac{BC^2}{\overline{BC} \times \overline{BH} \times \overline{CB} \times \overline{CH}} \\ &= \frac{\overline{BC} \times \overline{BC}}{\overline{BC} \times \overline{BH} \times \overline{CB} \times \overline{CH}} = \frac{1}{-\overline{BH} \times \overline{CH}} = \frac{1}{-\overline{HB} \times \overline{HC}} = \frac{1}{\overline{AH}^2}. \end{aligned}$$

## faire le point

**78 1.**  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$  car le produit scalaire est un nombre.  
 $\vec{AB}^2 = 4$  car  $\vec{AB}^2 = AB^2 \geq 0$ .

**2. a.**  $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$  ;

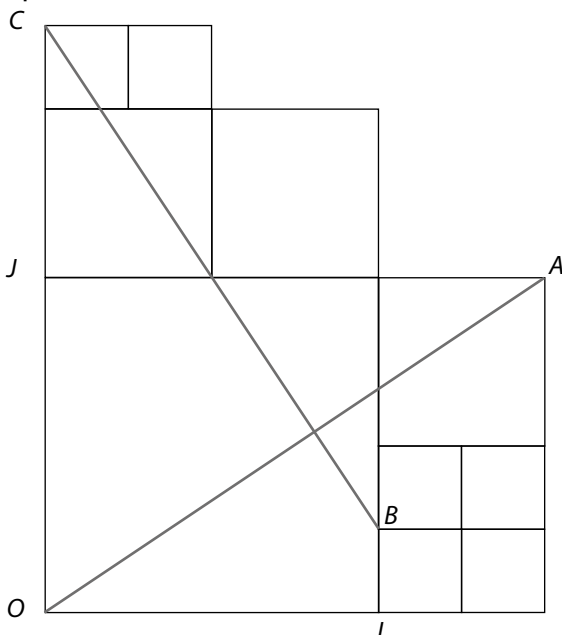
**b.**  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$  ;

**c.**  $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$  ;

**d.**  $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$

**79 a.** On nomme certains points de la figure, utiles à la démonstration

Le repère  $(O, I, J)$  est orthonormé.



**b.** Dans le repère  $(O, I, J)$  orthonormé,  $O(0; 0), A(1,5; 1), B(1; 0,25), C(0; 1,75)$ .

**c.**  $\vec{OA}(1,5; 1)$  et  $\vec{BC}(-1; 1,5)$ .

Ainsi,  $\vec{OA} \cdot \vec{BC} = 1,5 \times (-1) + 1 \times 1,5 = 0$ . Donc  $(OA) \perp (BC)$ .

**80 a.** On utilise la formule liant produit scalaire et parallélogramme.

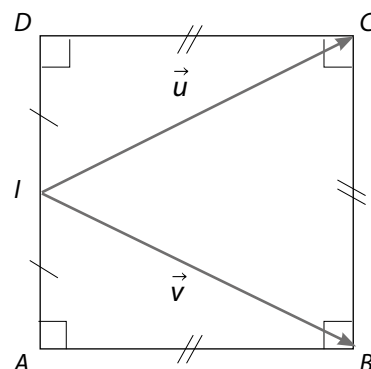
$\vec{u}(7; -4), \vec{v}(1; -5)$  donc  $\vec{u} + \vec{v}(8; -9)$ .

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) \\ &= \frac{1}{2} [8^2 + (-9)^2 - (7^2 + (-4)^2) - (1^2 + (-5)^2)] = 27. \end{aligned}$$

• On utilise la formule du produit scalaire dans un repère orthonormé.

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 7 \times 1 + (-4) \times (-5) = 27$ .

**b.** On utilise la formule liant produit scalaire et parallélogramme.



Si on pose  $AB = a$ , alors  $\|\vec{u}\|^2 = \|\vec{v}\|^2$   
 $= a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{5a^2}{4}$ .  
 $\vec{u} + \vec{v} = 2\vec{AB}$   
 $\|\vec{u} + \vec{v}\| = (2a)^2 = 4a^2$ .  
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$   
 $= \frac{1}{2} \left(4a^2 - \frac{5a^2}{4} - \frac{5a^2}{4}\right) = \frac{3}{4} a^2$ .

• On utilise la formule du produit scalaire dans un repère orthonormé.

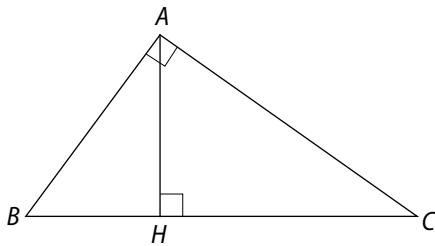
Dans le repère orthonormé  $(A; \vec{i}, \vec{j})$  avec  $\vec{i}$  et  $\vec{AB}$  colinéaires et de même sens, de même que  $\vec{j}$  et  $\vec{AD}$  :

$A(0; 0), I(0; \frac{a}{2}), B(a; 0), C(a; a), D(0; a)$ .

Ainsi,  $\vec{u} = \vec{IC}$  et  $\vec{IC}(a; \frac{a}{2})$  et  $\vec{v} = \vec{IB}$  et  $\vec{IB}(a; -\frac{a}{2})$ .

Donc,  $\vec{u} \cdot \vec{v} = a \times a + \frac{a}{2} \times \left(-\frac{a}{2}\right)$   
 $= a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3}{4} a^2$ .

**81**  $ABC$  est un triangle rectangle en  $A$ .



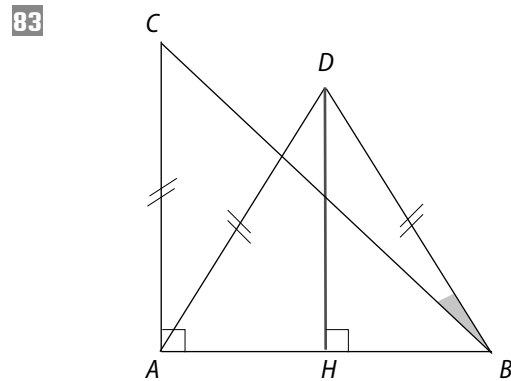
Or,  $BA^2 = \vec{BA}^2 = \vec{BA} \cdot \vec{BA} = (\vec{BC} + \vec{CA}) \cdot \vec{BA}$   
 $= \vec{BC} \cdot \vec{BA} + \vec{CA} \cdot \vec{BA}$   
 $= \vec{BC} \cdot \vec{BA}$  car  $(AB) \perp (AC)$   
 $= BC \times BH$  car  $H$  est le projeté orthogonal de  $A$  sur  $(BC)$ .

De plus,  $\vec{BC} = \vec{BH} + \vec{HC}$   
 donc  $BA^2 = (\vec{BH} + \vec{HC}) \cdot \vec{BA} = \vec{BH} \cdot \vec{BA} + \vec{HC} \cdot \vec{BA}$   
 d'où  $BA^2 - BH^2 = -\vec{HB} \cdot \vec{HC}$  ainsi  $AH^2 = -\vec{HB} \cdot \vec{HC}$  car le triangle  $ABH$  est rectangle en  $H$ .

•  $AH^2 = -\vec{HB} \cdot \vec{HC} = \vec{BH} \cdot \vec{HC}$   
 $= \vec{BA} \cdot \vec{HC} = \vec{BA} \cdot (\vec{HA} + \vec{AC})$   
 $= \vec{BA} \cdot \vec{HA} + \vec{BA} \cdot \vec{AC}$   
 $= \vec{AB} \cdot \vec{AH} + \vec{BA} \cdot \vec{AC}$   
 $= AH^2 + \vec{BA} \cdot \vec{AC}$ , donc  $\vec{BA} \cdot \vec{AC} = 0$ ,

ce qui prouve que  $(AB) \perp (AC)$  et que le triangle  $ABC$  est rectangle en  $A$ .

**82**  $\vec{IJ} \cdot \vec{JK} = IJ \times JK \times \cos(\widehat{IJ, JK})$   
 $= IJ \times JK \times \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$   
 $= 3,4 \times 5 \times \cos \frac{2\pi}{3}$   
 $= 3,4 \times 5 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -8,5$ .



**1. a.**  $\vec{BD} \cdot \vec{BA} = \frac{c^2}{2}$ ;  
 $\vec{BD} \cdot \vec{AC} = HD \times AC = \sqrt{c^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2} \times c = \frac{c^2 \sqrt{3}}{2}$ ;  
 $\vec{BD} \cdot \vec{BC} = \vec{BD} \cdot (\vec{BA} + \vec{AC}) = \frac{c^2(1 + \sqrt{3})}{2}$ .

**b.** Le triangle  $ABC$  est rectangle isocèle en  $A$ , donc  $\text{mes } \widehat{ABC} = \frac{\pi}{4}$ ; le triangle  $ABD$  est équilatéral, donc  $\text{mes } \widehat{ABD} = \frac{\pi}{3}$ ; ainsi,  $\text{mes } \widehat{CBD} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$ .

•  $\vec{BD} \cdot \vec{BC} = BD \times BC \times \cos \widehat{CBD}$ , ainsi :  
 $\frac{c^2(1 + \sqrt{3})}{2} = c \times c\sqrt{2} \times \cos \frac{\pi}{12}$ .  
 Finalement,  $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ .

**2. a.** D'après la propriété de l'angle inscrit et de l'angle au centre interceptant le même arc  $\widehat{BC}$  :  
 $\text{mes } \widehat{BAC} = \frac{1}{2} \text{mes } \widehat{BOC} = \frac{\pi}{12}$  rad.

**b.** Dans le triangle  $ACH$  rectangle en  $H$ ,  $\cos \widehat{BAC} = \frac{AH}{AC}$ .  
 Dans le triangle  $ABC$  rectangle en  $C$ ,  $\cos \widehat{BAC} = \frac{AC}{AB}$ .  
 Ainsi,  $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{AH}{AC} = \frac{AC}{AB}$ .

**c.**  $\cos^2 \frac{\pi}{12} = \frac{AH}{AC} \times \frac{AC}{AB} = \frac{1 + \cos \frac{\pi}{6}}{2}$ .  
 Finalement,  $\cos \frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$ .

## Se tester

84 à 87 Voir Manuel de l'élève page 258.

## Exercices d'approfondissement

88 a.  $2\vec{IH} + 3\vec{EF} = 2(\vec{IE} + \vec{EH}) + 6\vec{EI} = 4\vec{EI} + 2\vec{EH}$   
 $= 2\vec{EF} + 2\vec{EH} = 2(\vec{EF} + \vec{EH}) = 2\vec{EG}$ .

b.  $\vec{EG} \cdot \vec{IH} = \frac{1}{2}(2\vec{IH} + 3\vec{EF}) \cdot \vec{IH} = \vec{IH}^2 + \frac{3}{2}\vec{EF} \cdot \vec{IH}$   
 $= IH^2 + \frac{3}{2} \times \overline{EF} \times \overline{IE} = EP^2 + EH^2 + \frac{3}{2} \times \overline{EF} \times \overline{IE}$   
 $= 2^2 + (2\sqrt{2})^2 + \frac{3}{2} \times 4 \times (-2) = 0$

donc  $(EG) \perp (IH)$ .

89 1. Le repère  $(B ; \vec{BI}, \vec{BM})$  est orthonormé puisque  $BI = BM = 1$  et que  $(BI) \perp (BM)$ .

2. a. Dans le repère précédent :

$O(1 ; -0,5) ; P(0,5 ; 1) ; N(4 ; 0,5) ; \vec{OP}(-0,5 ; 1,5)$  et  $\vec{ON}(3 ; 1)$ .

Ainsi,  $\vec{OP} \cdot \vec{ON} = -0,5 \times 3 + 1,5 \times 1 = 0$  donc  $(OP) \perp (ON)$ .

Le triangle  $OPN$  est rectangle en  $O$ .

b. On note le  $(\mathcal{C})$  le cercle circonscrit au triangle  $OPN$  son diamètre est  $[PN]$  (il existe plusieurs façons de répondre).

•  $D(2 ; -1)$ . Donc  $\vec{DP}(-1,5 ; 2)$  et  $\vec{DN}(2 ; 1,5)$ .

Ainsi,  $\vec{DP} \cdot \vec{DN} = -1,5 \times 2 + 2 \times 1,5 = 0$ .

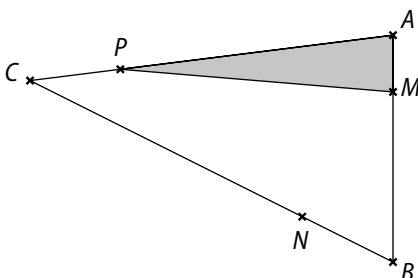
Le triangle  $DPN$  est rectangle en  $D$ , donc  $D$  appartient au cercle  $(\mathcal{C})$  de diamètre  $[PN]$ .

•  $J(1 ; 2)$ . Donc  $\vec{JP}(-0,5 ; -1)$  et  $\vec{JN}(3 ; -1,5)$ .

Ainsi  $\vec{JP} \cdot \vec{JN} = -0,5 \times 3 + (-1) \times (-1,5) = 0$ .

Le triangle  $JPN$  est rectangle en  $J$ , donc  $J$  appartient au cercle  $(\mathcal{C})$  de diamètre  $[PN]$ .

90 1. a.



b. Lorsque  $x = \frac{1}{2}$ ,  $M, N, P$  sont les milieux des côtés du triangle  $ABC$ .

2. a.  $\mathcal{A}(AMP) = \frac{1}{2}AM \times AP \times \sin \hat{A}$   
 $= \frac{1}{2}x AB(1-x) AC \sin \hat{A}$   
 $= \frac{1}{2}x(1-x) AC \sin \hat{A} = \frac{1}{2}x(1-x) bc \sin \hat{A}$ .

b.  $\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2}bc \sin \hat{A} = \frac{1}{2}ac \sin \hat{B} = \frac{1}{2}ab \sin \hat{C}$ .

c.  $\mathcal{A}(AMP) = x(1-x) \mathcal{A}(ABC)$ .

On montre de même que :  $\mathcal{A}(BMP) = x(1-x) \mathcal{A}(ABC)$  et  $\mathcal{A}(CPN) = x(1-x) \mathcal{A}(ABC)$ .

Ainsi  $\mathcal{A}(AMP) = \mathcal{A}(BMP) = \mathcal{A}(CPN)$ .

d.  $\mathcal{A}(MNP) = \mathcal{A}(ABC) - 3 \times \mathcal{A}(AMP)$   
 $= \frac{1}{2}bc \sin \hat{A} - 3 \times \frac{1}{2}x(1-x) bc \sin \hat{A}$   
 $= \frac{1}{2}bc \sin \hat{A} [1 - 3x(1-x)]$   
 $= \mathcal{A}(ABC) [1 - 3x(1-x)]$ .

3. a.  $\mathcal{A}(MNP) = \mathcal{A}(ABC) \Leftrightarrow 1 - 3x(1-x) = \frac{3}{4}$   
 $\Leftrightarrow 3x^2 - 3x + \frac{3}{4} = 0$ .

b. L'aire est maximale (et vaut l'aire  $ABC$ ) pour  $x = 1$ .

91 1. On peut raisonner en utilisant les coordonnées de vecteurs dans une base orthonormée.

$\vec{u}(a ; b), \vec{v}(a' ; b'), \vec{w}(x ; y)$

a.  $\begin{cases} \vec{w} \text{ colinéaire à } \vec{u} \\ \vec{w} \text{ colinéaire à } \vec{v} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \det(\vec{w}, \vec{u}) = 0 \\ \det(\vec{w}, \vec{v}) = 0 \end{cases}$   
 $\Leftrightarrow \begin{cases} ay - bx = 0 \\ a'y - b'x = 0 \end{cases}$   
 $\Leftrightarrow \begin{cases} a'ay - a'bx = 0 \\ a'ay - ab'x = 0 \end{cases}$   
 $\Leftrightarrow \begin{cases} ay - bx = 0 \\ (ab' - a'b)x = 0 \end{cases}$

Or,  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ne sont pas colinéaires, donc  $ab' - a'b \neq 0$ , ainsi  $x = 0$  et  $y = 0$

Réciproquement, si  $\vec{w} = \vec{0}$  alors il est colinéaire à  $\vec{u}$  et à  $\vec{v}$ .

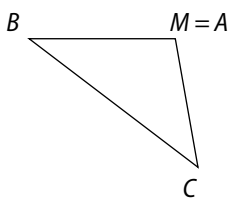
$$\begin{aligned} \text{b. } \begin{cases} \vec{w} \text{ orthogonal à } \vec{u} \\ \vec{w} \text{ orthogonal à } \vec{v} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} ax - by = 0 \\ a'x - b'y = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a'ax + a'by = 0 \\ a'ax - ab'y = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} ax + by = 0 \\ (a'b - ab')y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Or,  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ne sont pas colinéaires, donc  $a'b - ab' \neq 0$  ainsi,  $y = 0$  et  $x = 0$ .

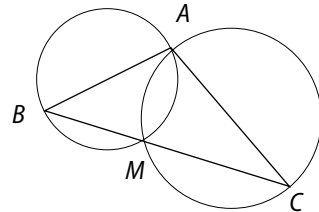
Réciproquement, si  $\vec{w} = \vec{0}$ , alors il est orthogonal à  $\vec{u}$  et à  $\vec{v}$ .

**2. a. et b.**

Premier cas



Deuxième cas



**b. Premier cas :**  $\vec{BM}$  et  $\vec{CM}$  ne sont pas colinéaires (c'est-à-dire que les points  $B, C, M$  ne sont pas alignés).

Dans ce cas, en posant  $\vec{u} = \vec{BM}$ ,  $\vec{v} = \vec{CM}$  et  $\vec{w} = \vec{AM}$ , on retrouve la question 1. a.

Donc  $\vec{w} = \vec{0}$  et  $M = A$

**Deuxième cas :**  $\vec{BM}$  et  $\vec{CM}$  sont colinéaires (c'est à dire que les points  $B, C, M$  sont alignés)

$\vec{AM} \cdot \vec{BM} = 0 \Leftrightarrow ABM$  est un triangle rectangle en  $M$   
ou  $M = A$  ou  $M = B$

$\Leftrightarrow M \in (\mathcal{C})$  où  $(\mathcal{C})$  est le cercle de diamètre  $[AB]$ .

De même,  $\vec{AM} \cdot \vec{CM} = 0 \Leftrightarrow M \in (\mathcal{C}')$  où  $(\mathcal{C}')$  est le cercle de diamètre  $[AC]$ .

Ainsi,  $M$  est le point d'intersection de  $(\mathcal{C})$  et de  $(\mathcal{C}')$ ; de plus  $M, B, C$  sont alignés.

**92 1.**  $\vec{MA} \cdot \vec{BC} + \vec{MB} \cdot \vec{CA} + \vec{MC} \cdot \vec{AB}$   
 $= \vec{MA} \cdot \vec{BC} + (\vec{MA} + \vec{AB}) \cdot \vec{CA} + (\vec{MA} + \vec{AC}) \cdot \vec{AB}$   
 $= \vec{MA} \cdot (\vec{BC} + \vec{CA} + \vec{AB}) + \vec{AB} \cdot (\vec{CA} + \vec{AC})$   
 $= \vec{MA} \cdot \vec{0} + \vec{AB} \cdot \vec{0} = 0$

**2.**  $H$  est le point d'intersection de deux des trois hauteurs (celle issue de  $A$  et celle issue de  $B$ ).

On sait donc que  $\vec{HA} \cdot \vec{BC} = 0$  et  $\vec{HB} \cdot \vec{CA} = 0$

Or, d'après le 1.,  $\vec{HA} \cdot \vec{BC} + \vec{HB} \cdot \vec{CA} + \vec{HC} \cdot \vec{AB} = 0$

$0 + 0 + \vec{HC} \cdot \vec{AB} = 0$  donc  $(HC) \perp (AB)$ .

Ainsi,  $(HC)$  est la hauteur issue de  $C$  et les trois hauteurs sont concourantes en  $H$ .

**93 1.** Dans le triangle  $ABD$ :

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \times AB \times AD \cos \hat{A}$$

d'où  $\cos \hat{A} = \frac{222,9^2 + 173,7^2 - 249,7^2}{2 \times 222,9 \times 173,7} \approx 0,226$  donc  $\text{mes } \hat{A} \approx 1,34$  rad.

$$\begin{aligned} \text{Ainsi } \mathcal{A}(ABD) &= \frac{1}{2} AB \times AD \times \sin \hat{A} \\ &\approx \frac{1}{2} \times 222,9 \times 173,7 \times \sin 1,34 \\ &\approx 18\,845,5 \text{ m}^2. \end{aligned}$$

• Dans le triangle  $BCD$ :

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2 \times BC \times CD \times \cos \hat{C}$$

d'où  $\cos \hat{C} = \frac{112,6^2 + 175^2 - 249,7^2}{2 \times 112,6 \times 175} \approx -0,483$   
donc  $\text{mes } \hat{C} \approx 2,075$  rad.

$$\begin{aligned} \text{Ainsi } \mathcal{A}(BCD) &= \frac{1}{2} BC \times CD \times \sin \hat{C} \\ &\approx \frac{1}{2} \times 112,6 \times 175 \times \sin 2,075 \\ &\approx 8\,626,5 \text{ m}^2. \end{aligned}$$

Finalement, l'aire de la surface du terrain d'Abdou est environ  $18\,845,5 + 8\,626,5$  c'est à dire  $24\,472 \text{ m}^2$ .

**2.** On cherche la mesure de l'angle  $\hat{ABC}$ .

•  $\mathcal{A}(ABD) = \frac{1}{2} BD \times BA \sin \hat{ABD}$   
donc  $\sin \hat{ABD} \approx \frac{2 \times 18\,845,5}{249,7 \times 222,9} \approx 0,6772$   
d'où  $\text{mes } \hat{ABD} \approx 0,74$  rad.

•  $\mathcal{A}(BCD) = \frac{1}{2} BC \times BD \times \sin \hat{CBD}$   
donc  $\sin \hat{CBD} \approx \frac{2 \times 8\,626,5}{249,7 \times 112,6} \approx 0,6136$   
d'où  $\text{mes } \hat{CBD} \approx 0,66$ .

Ainsi,  $\text{mes } \hat{ABC} \approx 0,74 + 0,66 \approx 1,4$  rad.

• Finalement,

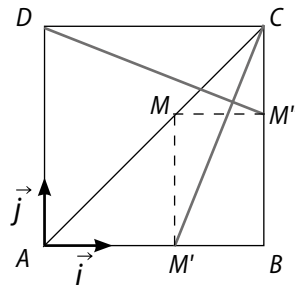
$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 - 2AB \times BC \times \cos \hat{ABC} \\ AC^2 &\approx 222,9^2 + 112,6^2 - 2 \times 222,9 \times 112,6 \times \cos 1,4 \\ AC^2 &\approx 53\,831. \end{aligned}$$

Ainsi,  $AC \approx 232$  m.

**94 1.** On conjecture que  $(CM')$  et  $(DM'')$  sont orthogonales.

**2.** On note  $a = AB$  et  $x = AM'$ . Ainsi,  $0 \leq x \leq a$ .

Dans le repère orthonormé  $(A; \vec{i}, \vec{j})$ ,  $M'(x; 0)$ ,  $C(a; a)$ ,  $M''(a; x)$ ,  $D(0; a)$ .



Ainsi,  $\vec{CM}'(x - a; -a)$  et  $\vec{DM}''(a; x - a)$ .

D'où  $\vec{CM} \cdot \vec{DM}'' = (x - a) \times a + (-a) \times (x - a) = 0$ .

Donc  $(CM') \perp (DM'')$ .

**95 a.** Dans le triangle  $A_1A_2H$ , mes  $\widehat{A_1A_2H} = 180^\circ - 57^\circ = 123^\circ$ ; mes  $\widehat{A_1HA_2} = 180^\circ - (123^\circ + 17^\circ) = 40^\circ$ .

$$\frac{50}{\sin \widehat{A_1HA_2}} = \frac{A_2H}{\sin \widehat{A_1A_2H}}$$

$$\text{donc } A_2H = \frac{50 \times \sin 17^\circ}{\sin 40^\circ} \approx 22,7 \text{ m.}$$

**b.** D'une part,  $\mathcal{A}(A_1A_2H) = \frac{1}{2} A_1A_2 \times A_2H \sin \widehat{A_1A_2H}$

$$\mathcal{A}(A_1A_2H) \approx \frac{1}{2} \times 50 \times 22,7 \times \sin 123^\circ$$

$$\mathcal{A}(A_1A_2H) \approx 476 \text{ m}^2.$$

$$\text{D'autre part, } \mathcal{A}(A_1A_2H) = \frac{A_1A_2 \times HB}{2}$$

$$\text{d'où } HB \approx 2 \times \frac{476}{50} \approx 19,04.$$

Finalement,  $h = HB + BC \approx 20,8$ .

La hauteur de la mosquée de Djenné est d'environ 21 m.

**96 1. a.** mes  $(\vec{OA}, \vec{OB}) = b - a$ .

$$\begin{aligned} \text{b. } \vec{OA} \cdot \vec{OB} &= OA \times OB \times \cos(\vec{OA}, \vec{OB}) \\ &= 1 \times 1 \times \cos(b - a) = \cos(b - a). \end{aligned}$$

**2.**  $\vec{OA}(\cos a; \sin a)$ ,  $\vec{OB}(\cos b; \sin b)$ .

$$\text{Donc } \vec{OA} \cdot \vec{OB} = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

**3.** Puisque  $\cos(-x) = \cos x$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  :

$$\cos(b - a) = \cos(a - b).$$

D'après le **1. b.** et le **2.**, on en déduit que :

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$$

**4. a.** On pose  $b' = -b$ . Ainsi, d'après le **3.** :

$$\begin{aligned} \cos(a + b) &= \cos a \cos(-b') + \sin a \sin(-b) \\ &= \cos a \cos b' - \sin a \sin b'. \end{aligned}$$

**b.** On pose  $a' = \frac{\pi}{2} - a$ .

$$\begin{aligned} \text{D'une part, } \cos(a' + b) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - a + b\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - (a - b)\right) = \sin(a - b). \end{aligned}$$

D'autre part,  $\cos(a' + b) = \cos a' \cos b - \sin a' \sin b$

$$\begin{aligned} &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cos b - \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \sin b \\ &= \sin a \cos b - \cos a \sin b. \end{aligned}$$

Ainsi,  $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$ .

**c.** On pose  $b' = -b$ .

$$\begin{aligned} \sin(a + b') &= \sin a \cos(-b) - \cos a \sin(-b) \\ &= \sin a \cos b' + \cos a \sin b'. \end{aligned}$$

**97 1.**  $\vec{CA} \cdot \vec{BD} = \vec{CA} \cdot \vec{HK} = \vec{CA} \times \vec{HK} = -CA \times HK$ .

$$\begin{aligned} \vec{CA} \cdot \vec{BD} &= (\vec{CB} + \vec{BA}) \cdot \vec{BD} = \vec{CB} \cdot \vec{BD} + \vec{BA} \cdot \vec{BD} = \vec{CB} \cdot \vec{BC} + \\ &\vec{BA} \cdot \vec{BA} = -BC^2 + BA^2 = -L^2 + l^2. \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } -CA \times HK = -L^2 + l^2 \text{ d'où } HK = \frac{L^2 - l^2}{CA} = \frac{L^2 - l^2}{\sqrt{L^2 + l^2}}.$$

$$\text{2. a. } AC = 3HK \Leftrightarrow \sqrt{L^2 + l^2} = 3 \times \frac{L^2 - l^2}{\sqrt{L^2 + l^2}}$$

$$\Leftrightarrow L^2 + l^2 = 3L^2 - 3l^2 \Leftrightarrow 4l^2 = 2L^2$$

$$\Leftrightarrow L^2 = 2l^2 \Leftrightarrow L = l\sqrt{2}.$$

**b.**  $\mathcal{A}(BHDK) = DK \times HK$ . Or,  $AH = HK = KC$  puisque

$$AC = 3HK, \text{ donc } HK = \frac{\sqrt{L^2 + l^2}}{3} \text{ et comme } CK = \frac{\sqrt{L^2 + l^2}}{3},$$

on en déduit que (dans le triangle  $DKC$  rectangle en  $K$ ),

$$DK^2 = l^2 - CK^2 = \frac{8l^2 - L^2}{9} \text{ d'où } DK = \frac{\sqrt{8l^2 - L^2}}{3}.$$

$$\text{Ainsi, } \mathcal{A}(BHDK) = \frac{\sqrt{8l^2 - L^2}}{3} \times \frac{\sqrt{L^2 + l^2}}{3}.$$

Or,  $L = l\sqrt{2}$  donc  $L^2 = 2l^2$ , on simplifie :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(BHDK) &= \frac{\sqrt{8l^2 - 2l^2}}{3} \times \frac{\sqrt{2l^2 + l^2}}{3} \\ &= \frac{\sqrt{6l^2} \times \sqrt{3l^2}}{3 \times 3} = \frac{l^2 \sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$

**98 1.**  $MA^2 + MB^2 = \vec{MA}^2 + \vec{MB}^2 = (\vec{MI} + \vec{IA})^2 + (\vec{MI} + \vec{IB})^2$

$$= \vec{MI}^2 + 2\vec{MI} \cdot \vec{IA} + \vec{IA}^2 + \vec{MI}^2 + 2\vec{MI} \cdot \vec{IB} + \vec{IB}^2$$

$$= 2\vec{MI}^2 + 2\vec{MI} \cdot (\vec{IA} + \vec{IB}) + \vec{IA}^2 + \vec{IB}^2$$

$$= 2\vec{MI}^2 + 2\vec{MI} \cdot \vec{0} + \vec{IA}^2 + \vec{IB}^2$$

$$= 2MI^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 \text{ (car } IA = IB = \frac{AB}{2})$$

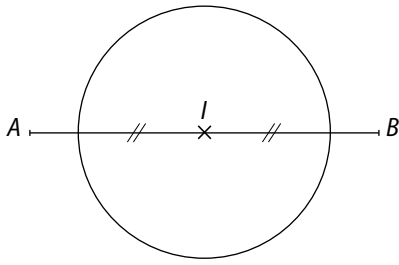
$$= 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}.$$

$$\text{2. a. } MA^2 + MB^2 = 12 \Leftrightarrow 2MI^2 + \frac{AB^2}{2} = 12$$

$$\Leftrightarrow 2MI^2 + \frac{4^2}{2} = 12$$

$$\Leftrightarrow MI^2 = 2 \Leftrightarrow MI = \sqrt{2}.$$

$M$  appartient au cercle de centre  $I$  et de rayon  $\sqrt{2}$ .

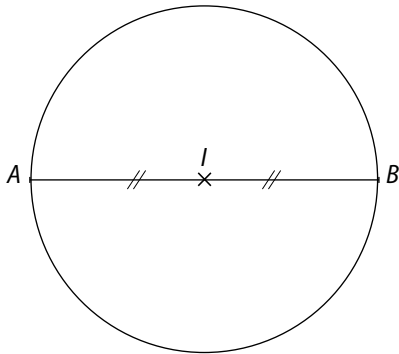


b. En procédant de même, on trouve :

$$MA^2 + MB^2 = -3 \Leftrightarrow MI = -\frac{11}{2}.$$

Donc il n'existe pas de tels points M.

c. En procédant de même, on trouve :  $MA^2 + MB^2 = 16$   
 $\Leftrightarrow MI = 4$ . M appartient au cercle de diamètre [AB].

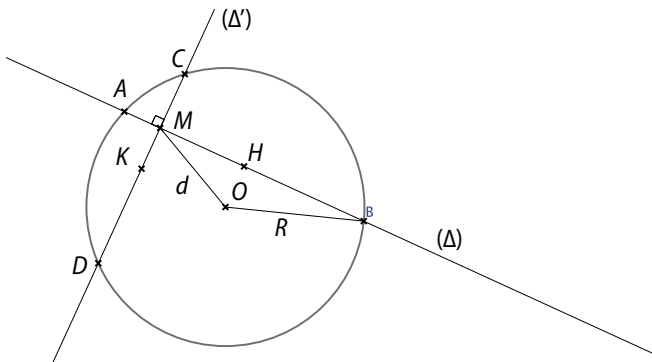


d. En procédant de même, on trouve :

$$MA^2 + MB^2 = 8 \Leftrightarrow MI = 0.$$

Donc le seul point M qui convient est le point I.

99 a.



b.  $OH^2 + OK^2 = d^2$  car OKMH est un rectangle

c. Dans le triangle AOB, d'après le théorème de la médiane :

$$OA^2 + OB^2 = 2OH^2 + \frac{AB^2}{2}; 2R^2 = 2OH^2 + \frac{AB^2}{2}$$

donc  $AB^2 = 4(R^2 - OH^2)$ .

• Dans le triangle COD, d'après le théorème de la médiane :

$$OC^2 + OD^2 = 2OK^2 + \frac{CD^2}{2}$$

$$2R^2 = 2OK^2 + \frac{CD^2}{2} \text{ donc } CD^2 = 4(R^2 - OK^2)$$

Ainsi,  $AB^2 + CD^2 = 8R^2 - 4(OH^2 + OK^2)$

$$AB^2 + CD^2 = 8R^2 - 4d^2.$$

$$\begin{aligned} \text{d. } MA^2 + MB^2 &= (\vec{MA} + \vec{HA})^2 + (\vec{MH} + \vec{HB})^2 \\ &= \vec{MH}^2 + 2\vec{MH} \cdot \vec{HA} + \vec{HA}^2 + \vec{MH}^2 + 2\vec{MH} \cdot \vec{HB} + \vec{HB}^2 \\ &= 2MH^2 + 2\vec{MH} \cdot (\vec{HA} + \vec{HB}) + HA^2 + HB^2 \\ &= 2MH^2 + \frac{AB^2}{2}. \end{aligned}$$

• On montre de même que :  $MC^2 + MD^2 = 2MK^2 + \frac{CD^2}{2}$ .

• Ainsi,

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 &= 2MH^2 + 2MK^2 + AB^2 + \frac{CD^2}{2} \\ &= 2d^2 + \frac{8R^2 - 4d^2}{2} = 4R^2. \end{aligned}$$

100 a. On note  $\alpha = \text{mes}(\widehat{GH, GE})$ , ainsi :

$$\text{mes}(\widehat{GI, GF}) = 2\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \alpha = \pi - \alpha.$$

$$\vec{GH} \cdot \vec{GE} = GH \times GE \times \cos \alpha; \vec{GI} \cdot \vec{GF} = GI \times GF \times \cos(\pi - \alpha).$$

• Or,  $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$ ;  $GH = GE$  et  $GF = GI$ , donc  $\vec{GH} \cdot \vec{GE} = -\vec{GI} \cdot \vec{GF}$  et finalement,  $\vec{GH} \cdot \vec{GE} + \vec{GI} \cdot \vec{GF} = 0$ .

b.  $\vec{GH} \cdot \vec{GE} + \vec{GI} \cdot \vec{GF} = 0$  est successivement équivalent

$$\text{à : } (\vec{GF} + \vec{FH}) \cdot \vec{GE} + \vec{GI} \cdot (\vec{GH} + \vec{HF}) = 0$$

$$\vec{GF} \cdot \vec{GE} + \vec{FH} \cdot \vec{GE} + \vec{GI} \cdot \vec{GH} + \vec{GI} \cdot \vec{HF} = 0$$

$$0 + \vec{FH} \cdot \vec{GE} + 0 + \vec{GI} \cdot \vec{HF} = 0$$

$$\vec{FH} \cdot \vec{GE} + \vec{IG} \cdot \vec{FH} = 0$$

$$\vec{FH} \cdot \vec{GE} + \vec{FH} \cdot \vec{IG} = 0$$

$$\vec{FH} \cdot (\vec{IG} + \vec{GE}) = 0$$

$$\vec{FH} \cdot \vec{IE} = 0, \text{ donc } (FH) \perp (IE).$$

### 101 Méthode 1

Dans le triangle CDE rectangle en C,  $\tan \widehat{CED} = \frac{8}{13}$ .

Dans le triangle ADF rectangle en A,  $\tan \widehat{ADF} = \frac{5}{8}$ .

Donc  $\tan \widehat{CED} \neq \tan \widehat{ADF}$ .

Ainsi  $\text{mes} \widehat{CED} \neq \text{mes} \widehat{ADF}$  donc les points E, D, F ne sont pas alignés.

### Méthode 2

On note I le point de [BC] tel que BI = 1 et J le point de [BA] tel que BJ = 1.

Ainsi, le repère (B, I, J) est orthonormé.

Dans ce repère,  $E(21; 0)$ ,  $D(8; 8)$ ,  $F(0; 13)$ .

$$\vec{ED}(-13; 8), \vec{DF}(-8; 5).$$

$$\det(\vec{ED}, \vec{DF}) = -13 \times 5 - 8 \times (-8) = -1 \neq 0 \text{ donc } \vec{ED}$$

et  $\vec{DF}$  ne sont pas colinéaires donc D, E, F ne sont pas alignés.

**102 1.** Lorsque  $M \in (\mathcal{C})$ ,  $\mathcal{P}_M = \vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$  car alors le triangle  $AMB$  est rectangle en  $M$  (ou  $M = A$  et  $\vec{MA} = \vec{0}$  ou  $M = B$  et  $\vec{MB} = \vec{0}$ ).

**2. a.** Le triangle  $ABA'$  est rectangle en  $B$ , donc  $B$  est le projeté orthogonal de  $A'$  sur  $(AB)$ , donc  $\vec{MA} \cdot \vec{MA}' = \vec{MA} \cdot \vec{MB}$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_M &= \vec{MA} \cdot \vec{MA}' = (\vec{MO} + \vec{OA}) \cdot (\vec{MO} + \vec{OA}') \\ &= \vec{MO}^2 + \vec{MO} \cdot (\vec{OA} + \vec{OA}') + \vec{OA} \cdot \vec{OA}' \\ &= d^2 + \vec{MO} \cdot \vec{0} + \vec{OA} \times \vec{OA}' = d^2 - R^2. \end{aligned}$$

**3.** On note  $A'$  le point diamétralement opposé à  $A$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_M &= \vec{MA} \cdot \vec{MA}' = (\vec{MO} + \vec{OA}) \cdot (\vec{MO} + \vec{OA}') \\ &= \vec{MO}^2 + \vec{MO} \cdot (\vec{OA} + \vec{OA}') + \vec{OA} \cdot \vec{OA}' \\ &= d^2 + \vec{MO} \cdot \vec{0} + \vec{OA} \times \vec{OA}' = d^2 - R^2. \end{aligned}$$

**4. a.**  $\mathcal{P}_M$  ne dépend pas de  $A$  et  $B$  puisqu'il ne dépend que de  $d$  et de  $R$ , c'est-à-dire de la distance du point  $M$  au centre du cercle et du rayon du cercle.

**b.** Lorsque  $M$  est extérieur à  $(\mathcal{C})$ ,  $d > R$  donc  $\mathcal{P}_M > 0$  ;  
lorsque  $M \in (\mathcal{C})$ ,  $\mathcal{P}_M = 0$  ;

lorsque  $M$  est intérieur à  $(\mathcal{C})$ ,  $d < R$  donc  $\mathcal{P}_M < 0$ .

**5. a.**  $M$  doit être situé à l'intérieur du cercle  $(\mathcal{C})$  et à l'extérieur du cercle  $(\mathcal{C}')$ .

$$\mathcal{P}_M = d^2 - R^2 = d^2 - 25 ; \mathcal{P}_M' = d'^2 - R'^2 = d'^2 - 9.$$

$$\text{Donc } \mathcal{P}_M + \mathcal{P}_M' = 2d^2 - 34.$$

$$2d^2 - 34 = 0 \Leftrightarrow d^2 = 17 \Leftrightarrow d = \sqrt{17} \text{ (car } d > 0).$$

Donc l'ensemble des points  $M$  cherchés est le cercle de centre  $O$  et de rayon  $\sqrt{17}$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_M = \mathcal{P}_M' &\Leftrightarrow d^2 - R^2 = d'^2 - R'^2 \Leftrightarrow d^2 = d'^2 \Leftrightarrow d = d' \\ &\Leftrightarrow M \text{ est équidistant de } O \text{ et } O'. \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des points  $M$  est la médiatrice de  $[OO']$ .

**c.** Les deux points doivent être situés à l'intérieur de  $(\mathcal{C})$  ou à l'extérieur de  $(\mathcal{C})$ .

$$\mathcal{P}_K - \mathcal{P}_M = OK^2 - R^2 - d^2 + R^2 = OK^2 - d^2.$$

$$\text{Donc } OK^2 - d^2 = 0, \text{ c'est-à-dire } d = OK.$$

Donc l'ensemble des points  $M$  est le cercle de centre  $O$  et de rayon  $OK$ .

**103 1. a.**  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$  donc

$$\cos \hat{C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

$$\mathcal{A}_b = \frac{1}{2} ab \sin C ; \mathcal{A}_b = \frac{1}{2} ab \sqrt{1 - \cos^2 \hat{C}}.$$

$$\mathcal{A}_b = \frac{1}{2} ab \sqrt{(1 + \cos^2 \hat{C})(1 - \cos^2 \hat{C})}$$

$$\mathcal{A}_b = \frac{1}{2} ab \sqrt{\left(1 + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right) \left(1 - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)}$$

$$\mathcal{A}_b = \frac{1}{2} ab \sqrt{\left(\frac{2ab + a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right) \left(\frac{2ab - a^2 - b^2 + c^2}{2ab}\right)}$$

$$\mathcal{A}_b = \frac{1}{4} \sqrt{[(a+b)^2 - c^2][c^2 - (a-b)^2]}$$

$$\mathcal{A}_b = \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)}$$

$$\mathcal{A}_b = \frac{1}{4} \sqrt{2p(2p-2c)(2p-2b)(2p-2a)}$$

$$\mathcal{A}_b = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\mathbf{2. a.} \quad p = 3,6 + 4 + \frac{6,6}{2} = 7,1$$

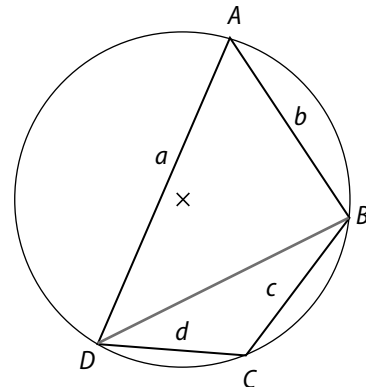
$$\text{Donc } \mathcal{A}_b = \sqrt{7,1(7,1-3,6)(7,1-4)(7,1-6,6)} \approx 6,2.$$

$$\mathbf{b.} \quad \frac{abc}{2\mathcal{A}_b} = 2R \text{ donc } R = \frac{abc}{4\mathcal{A}_b} \approx \frac{3,6 \times 4 \times 6,6}{4 \times 6,2} \approx 3,8.$$

**104 1. a.** Le quadrilatère étant inscrit dans un cercle, on a :

- $\text{mes } \hat{A} = \text{mes } \hat{C}$  lorsque le quadrilatère est croisé, donc  $\sin \hat{A} = \sin \hat{C}$  ;

- $\text{mes } \hat{A} = \pi - \text{mes } \hat{C}$  lorsque le quadrilatère est non croisé comme c'est le cas ici, donc  $\sin \hat{A} = \sin(\pi - \hat{C}) = \sin \hat{C}$ .



$$\mathcal{A}_b = \mathcal{A}_b(ABD) + \mathcal{A}_b(BCD)$$

$$\mathcal{A}_b = \frac{1}{2} ab \sin \hat{A} + \frac{1}{2} cd \sin \hat{C} = \frac{1}{2} (ab + cd) \sin \hat{A}.$$

$$\mathbf{b.} \quad DB^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{A} \text{ (triangle ABD)}$$

$$DB^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cos \hat{C} \text{ (triangle DCB), d'où l'égalité.}$$

Ainsi, puisque  $\cos \hat{A} = \cos(\pi - \hat{C}) = -\cos \hat{C}$ , on en déduit que :

$$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2ab \cos \hat{A} - 2cd \cos \hat{C}$$

$$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2ab \cos \hat{A} + 2cd \cos \hat{A}$$

$$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2(ab + cd) \cos \hat{A}$$

$$c. 16\mathfrak{A}^2 = 16 \times \frac{1}{4} (ab + cd)^2 \sin^2 \hat{A}$$

$$16\mathfrak{A}^2 = 4 (ab + cd)^2 (1 - \cos^2 \hat{A})$$

$$16\mathfrak{A}^2 = 4 (ab + cd)^2 - 4 (ab + cd)^2 \cos^2 \hat{A}.$$

$$d. p - a = \frac{a + b + c + d}{2} - a = \frac{-a + b + c + d}{2};$$

$$\text{de même, } p - b = \frac{a - b + c + d}{2}$$

$$p - c = \frac{a + b - c + d}{2} \text{ et } p - d = \frac{a + b + c - d}{2}.$$

D'après le **b.**,  $2(ab + cd) \cos \hat{A} = a^2 + b^2 - c^2 - d^2$  donc  $4(ab + cd)^2 \cos^2 \hat{A} = (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2$ .

$$\begin{aligned} \text{Donc } 16\mathfrak{A}^2 &= 4 (ab + cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 \\ &= [2(ab + cd) + a^2 + b^2 - c^2 - d^2][2(ab + cd) - a^2 - b^2 + c^2 + d^2] \\ &= [(a + b)^2 - (c - d)^2][-(a - b)^2 + (c + d)^2] \\ &= (a + b + c - d)(a + b - c + d)(-a + b + c + d)(a - b + c + d) \\ &= 2(p - d) 2(p - c) 2(p - b) = 16(p - a)(p - b)(p - c)(p - d). \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } \mathfrak{A} = \sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)}.$$

$$2. a. p = 5 + 6 + 9 + \frac{8}{2} = 14.$$

$$\text{Donc } \mathfrak{A} = \sqrt{(14 - 5)(14 - 6)(14 - 9)(14 - 8)} = \sqrt{2160}$$

$$\mathfrak{A} = 12\sqrt{15}.$$

$$\bullet \mathfrak{A} = \frac{1}{2} (6 \times 5 + 8 \times 9) \sin \hat{B}$$

$$12\sqrt{15} = 51 \times \sin \hat{B}$$

$$\sin \hat{B} = \frac{12\sqrt{15}}{51} = \frac{4\sqrt{15}}{17} \text{ donc mes } B \approx 65,68^\circ.$$

$$\mathfrak{A}(ABC) \approx 13,7.$$

$$b. \mathfrak{A}(ABC) = \frac{1}{2} AC \times AB \sin \widehat{BAC}$$

Or,  $\widehat{BOC}$  est l'angle au centre interceptant l'arc  $\widehat{BC}$ ,

$$\text{donc mes } \widehat{BAC} = \frac{1}{2} \text{ mes } \widehat{BOC} = 30^\circ.$$

$$\text{Ainsi, } 13,7 \approx \frac{1}{2} AC \times 6 \sin 30^\circ.$$

$$AC \approx 4 \times 13,7/6 \approx 9,1.$$

**105** 1.  $O(0; 0)$ ,  $B(b; 0)$ ,  $C(0; c)$ ,  $D(b; -b)$ ,  $E(0; -b)$ ,  $F(-c; c)$ ,  $G(-c; 0)$ .

$$2. a. \begin{cases} C \in (CD) \\ D \in (CD) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_C = m x_C + p \\ y_D = m x_D + p \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = m \times 0 + p \\ -b = m \times b + p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = c \\ m = \frac{-b + c}{m} \end{cases}$$

La droite  $(CD)$  a pour équation  $y = -\frac{b+c}{b}x + c$ .

$$\begin{cases} B \in (BF) \\ F \in (BF) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_B = m'x_B + p' \\ y_F = m'x_F + p' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = m' \times b + p' \\ c = m' \times (-c) + p' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = m'(-b - c) \\ 0 = m' \times b + p' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m' = -\frac{c}{b+c} \\ 0 = -\frac{c}{b+c} \times b + p' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m' = -\frac{c}{b+c} \\ p' = -\frac{bc}{b+c} \end{cases}$$

La droite  $(BF)$  a pour équation  $y = -\frac{c}{b+c}x + \frac{bc}{b+c}$ .

**b.**  $H$  est le point d'intersection de ces deux droites.

$$\begin{cases} y_K = -\frac{b+c}{b}x_H + c \\ y_H = -\frac{b+c}{b+c}x_H + \frac{bc}{b+c} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{b+c}{b}x_H + c = -\frac{c}{b+c}x_H + \frac{bc}{b+c} \\ y_H = -\frac{b+c}{b}x_H + c \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{c}{b+c} - \frac{b+c}{b}\right)x_H = \frac{bc}{b+c} - c \\ y_H = -\frac{b+c}{b}x_H + c \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{bc - (b+c)^2}{(b+c)^2}x_H = \frac{b^2c - bc(b+c)}{b(b+c)} \\ y_H = -\frac{b+c}{b}x_H + c \end{cases}$$

$$\begin{cases} bc - (b+c)^2x_H = b^2c - bc(b+c) \\ y_H = -\frac{b+c}{b}x_H + c \end{cases}$$

$$\begin{cases} bc - (b+c)^2x_H = -bc^2 \\ y_H = -\frac{b+c}{b}x_H + c \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_H = \frac{-b^2c}{bc - (b+c)^2} \\ y_H = -\frac{b+c}{b} \times \frac{-b^2c}{bc - (b+c)^2} + c \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_H = \frac{-b^2c}{bc - (b+c)^2} \\ y_H = \frac{bc^2 + c^3 + bc^2 - c(b+c)^2}{bc - (b+c)^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_H = \frac{-b^2c}{bc - (b+c)^2} \\ y_H = \frac{bc^2 + c^3 + bc^2 - cb^2 - 2bc^2 - c^3}{bc - (b+c)^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_H = \frac{-b^2c}{bc - (b+c)^2} \\ y_H = \frac{-b^2c}{bc - (b+c)^2} \end{cases}$$

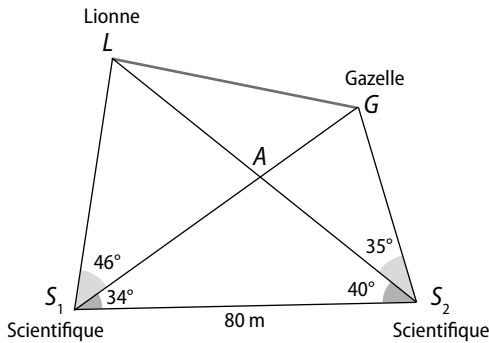
**b.**  $\vec{OH} \left( \frac{-b^2c}{bc - (b+c)^2}; \frac{-b^2c}{bc - (b+c)^2} \right)$  et  $\vec{BC}(-b; c)$  donc

$$\vec{OH} \cdot \vec{BC} = \frac{b^2c^2}{bc - (b+c)^2} + \frac{-b^2c}{bc - (b+c)^2} = 0.$$

Donc  $(OH)$  est la hauteur issue de  $O$  dans le triangle  $OBC$ .

• La droite  $(OH)$  passe par l'origine du repère, elle a donc pour équation  $y = m''x$  avec  $m'' = \frac{y_H}{x_H}$ .  
 $(OH) : y = \frac{b}{c} x$ .

106



• Dans le triangle  $AS_1S_2$  :

$$\frac{S_1S_2}{\sin \widehat{S_1AS_2}} = \frac{AS_1}{\sin \widehat{AS_1S_2}} = \frac{AS_2}{\sin \widehat{AS_2S_1}}$$

donc  $AS_1 = \frac{80 \times \sin 34^\circ}{\sin 106^\circ} \approx 46,54 \text{ m}$  ;

$AS_2 = \frac{80 \times \sin 40^\circ}{\sin 106^\circ} \approx 53,5 \text{ m}$ .

- mes  $\widehat{LAG} = \text{mes } \widehat{S_1AS_2} = 106^\circ$ .
- mes  $\widehat{LAS_1} = \text{mes } \widehat{GAS_2} = 74^\circ$ .
- mes  $\widehat{AGS_2} = 180^\circ - \text{mes } \widehat{GAS_2} - \text{mes } \widehat{AS_2G} = 180^\circ - 74^\circ - 35^\circ = 71^\circ$ .
- mes  $\widehat{ALS_1} = 180^\circ - \text{mes } \widehat{LAS_1} - \text{mes } \widehat{AS_1L} = 180^\circ - 74^\circ - 46^\circ = 60^\circ$ .

• Dans le triangle  $AS_2G$  :

$$\frac{AS_2}{\sin \widehat{AGS_2}} = \frac{AG}{\sin \widehat{AS_2G}} = \frac{GS_2}{\sin \widehat{GAS_2}}$$

donc  $AG = \frac{53,5 \times \sin 35^\circ}{\sin 71^\circ} \approx 32,45 \text{ m}$  ;

$GS_2 = \frac{53,5 \times \sin 74^\circ}{\sin 71^\circ} \approx 54,4 \text{ m}$ .

• Dans le triangle  $LAS_1$  :

$$\frac{AL}{\sin \widehat{AS_1L}} = \frac{AS_1}{\sin \widehat{ALS_1}} = \frac{LS_1}{\sin \widehat{LAS_1}}$$

donc  $AL = \frac{43,54 \times \sin 46^\circ}{\sin 60^\circ} \approx 38,66 \text{ m}$  ;

$LS_1 = \frac{43,54 \times \sin 74^\circ}{\sin 60^\circ} \approx 51,66 \text{ m}$ .

• Dans le triangle  $LGS_2$  :

$$LG^2 = LS_2^2 + GS_2^2 - 2LS_2 \times GS_2 \times \cos 35^\circ$$

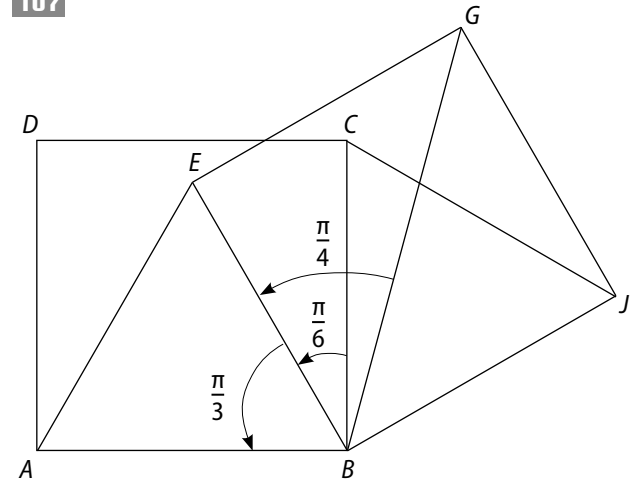
$$LG^2 \approx (38,66 + 53,5)^2 + 54,4^2 - 2 \times (38,66 + 53,5) \times 54,4 \cos 35^\circ$$

$LG^2 \approx 3239,2$

$LG \approx 57 \text{ m}$ .

La distance entre la lionne et la gazelle est d'environ 57 m. La distance entre la lionne et le scientifique le plus proche est  $LS_1 \approx 52 \text{ m}$ .

107



a. On commence par déterminer quelques longueurs (par la propriété de Pythagore) et quelques mesures d'angles utiles pour la suite.

$AC = BD = BG = \sqrt{2}$  ; mes  $\widehat{ABE} = \frac{\pi}{3}$  ; mes  $\widehat{ABD} = \frac{\pi}{4}$  donc mes  $\widehat{DBE} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$  ;

de même mes  $\widehat{GBC} = \frac{\pi}{12}$  et comme mes  $\widehat{EBC} = \frac{\pi}{6}$ ,

en déduit que mes  $\widehat{DBG} = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3}$ .

Ainsi :

$$\begin{aligned} \vec{DE} \cdot \vec{BG} &= (\vec{DB} + \vec{BE}) \cdot \vec{BG} = \vec{DB} \cdot \vec{BG} + \vec{BE} \cdot \vec{BG} \\ &= -\vec{BD} \cdot \vec{BG} + \vec{BE} \cdot \vec{BG} \\ &= -BD \times BG \times \cos \widehat{BGD} + BE \times BG \times \cos \widehat{EBG} \\ &= -\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \cos \frac{\pi}{3} + 1 \times \sqrt{2} \times \cos \frac{\pi}{4} \\ &= -2 \times \frac{1}{2} + 1 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 0. \end{aligned}$$

Donc  $(DE) \perp (BG)$

b. De plus,  $[EJ]$  et  $[BG]$  sont les diagonales du carré  $BJGE$ , donc  $(EJ) \perp (BG)$ .

Ainsi,  $(DE)$  et  $(EJ)$  sont parallèles, mais comme elles ont un point commun, elles sont confondues :  $D, E, J$  sont donc alignés.

**108 a.**  $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$

$$= (\vec{OG} + \vec{GA}) + (\vec{OG} + \vec{GB}) + (\vec{OG} + \vec{GC})$$

$$= 3\vec{OG} + \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = 3\vec{OG} + \vec{0}$$

$$= 3\vec{OG} \text{ (car } G \text{ est le centre de gravité du triangle } ABC).$$

$$\vec{OB} + \vec{OC} = 2\vec{OA}' \text{ (d'après la règle du parallélogramme)}$$

$$\text{donc } \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OA} + 2\vec{OA}' = \vec{OH} + \vec{HA} + 2\vec{OA}'.$$

**b.** D'après le **a.**,  $3\vec{OG} = \vec{OH} + \vec{HA} + 2\vec{OA}'$ , donc

$$3\vec{OG} - \vec{OH} = \vec{HA} + 2\vec{OA}'.$$

Or,  $(HA) \perp (BC)$  car  $(HA)$  est la hauteur issue de  $A$ , et  $(OA') \perp (BC)$  car  $(OA')$  est la médiatrice de  $[BC]$ , donc les vecteurs  $\vec{HA} + 2\vec{OA}'$  et  $\vec{BC}$  sont orthogonaux.

Ainsi, les vecteurs  $\vec{OH} - 3\vec{OG}$  et  $\vec{BC}$  sont orthogonaux.

**c.** En procédant comme au **a.**, on peut montrer que  $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 3\vec{OG} = \vec{OH} + \vec{HB} + 2\vec{OB}'$  puis que  $3\vec{OG} - \vec{OH} = \vec{HB} + 2\vec{OB}'$  et enfin que  $\vec{OH} - 3\vec{OG}$  et  $\vec{AC}$  sont orthogonaux.

$$\text{Ainsi, } \begin{cases} (\vec{OH} - 3\vec{OG}) \cdot \vec{BC} = 0 \\ (\vec{OH} - 3\vec{OG}) \cdot \vec{AC} = 0 \end{cases}$$

donc  $\vec{OH} - 3\vec{OG} = \vec{0}$  (car il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires).

$$\text{Finalement, } \vec{OH} = 3\vec{OG}.$$

Donc, les points  $O$ ,  $G$  et  $H$  sont alignés.

**d.** De  $\vec{OH} - 3\vec{OG} = \vec{0}$ , on déduit que  $\vec{HA} - 2\vec{OA}' = \vec{0}$  donc  $\vec{AH} = 2\vec{OA}'$ .

**109 1. a.**  $CD^2 - CB^2 = 2^2 - 1^2 = 3$

$$\bullet KD^2 = AD^2 + AK^2 = 1^2 + \left(\frac{3}{4} \times 2\right)^2 = \frac{13}{4};$$

$$KB^2 = \left(\frac{1}{4} \times 2\right)^2 = \frac{1}{4} \text{ donc } KD^2 - KB^2 = \frac{13}{4} - \frac{1}{4} = 3.$$

**b.**  $MD^2 - MB^2 = (\vec{MD} + \vec{MB}) \cdot (\vec{MD} - \vec{MB})$

$$= (\vec{MD} + \vec{MB}) \cdot \vec{BD} = (\vec{MD} + \vec{MD}) \cdot \vec{BD} \cdot \vec{BD}$$

$$= 2\vec{MD} \cdot \vec{BD} - BD^2$$

$$= 2\vec{MD} \cdot \vec{BD} - BD^2.$$

**c.**  $MD^2 - MB^2 = 3 \Leftrightarrow 2\vec{MD} \cdot \vec{BD} - BD^2 = 3$

$$\Leftrightarrow 2\vec{MD} \cdot \vec{BD} = -3 + BD^2$$

$$\Leftrightarrow 2\vec{MD} \cdot \vec{BD} = 3 + 2^2 + 1^2$$

$$\Leftrightarrow \vec{MD} \cdot \vec{BD} = 4.$$

**d.** On cherche l'ensemble des points  $M$  tels que  $\vec{MB} \cdot \vec{BD} = 4$ .

On note  $H$  le projeté orthogonal de  $M$  sur  $(BD)$  :

$$\vec{MD} \cdot \vec{BD} = 4 \Leftrightarrow \vec{HD} \times \vec{BD} = 4 \Leftrightarrow HD = \frac{4}{BD} \Leftrightarrow HD = \frac{4}{\sqrt{5}}.$$

L'ensemble de ces points  $M$  est donc la droite  $(\Delta)$  perpendiculaire à  $(BD)$ , passant par  $H$ .

Or, d'après le **a.**,  $C \in (\Delta)$  et  $K \in (\Delta)$ , donc  $(\Delta) = (KC)$  et  $(KC) \perp (BD)$ .

**2.** On note  $I$  le milieu de  $[AB]$ . Le repère  $(A, I, D)$  est orthonormé. Dans ce repère,  $\vec{KC} \left(\frac{1}{2}; 1\right)$  et  $\vec{BD}(-2; 1)$ .

$$\text{Donc } \vec{KC} \cdot \vec{BD} = \frac{1}{2} \times (-2) + 1 \times 1 = 0.$$

Ainsi,  $(KC) \perp (BD)$ .

# 5 Équations de droites et de cercles

## Activités d'introduction

### 1 Équation cartésienne d'une droite

1. a.  $\overrightarrow{AB}(-3; 2)$ .

b.  $M \in (AB) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$  et  $\overrightarrow{AB}$  sont colinéaires.

c.  $\overrightarrow{AM}(x-1; y-2)$ .

$$M \in (AB) \Leftrightarrow -3(y-2) - 2(x-1) = 0 \Leftrightarrow -2x - 3y + 8 = 0.$$

2. a.  $-2x_D - 3y_D + 8 = -8 + 8 = 0$  donc  $D \in (AB)$ .

$-2x_E - 3y_E + 8 = -12 + 6 + 8 = 2 \neq 0$  donc  $E \notin (AB)$ .

b.  $\overrightarrow{DE}(2; -2)$  est un vecteur directeur de  $(DE)$ .

$\overrightarrow{DM}(x-4; y)$

$M \in (DE) \Leftrightarrow \overrightarrow{DM}$  et  $\overrightarrow{DE}$  sont colinéaires

$$\Leftrightarrow 2y - (-2)(x-4) = 0 \Leftrightarrow 2y + 2(x-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x + 2y - 8 = 0 \Leftrightarrow x + y - 4 = 0$$

### 2 Ensemble de points vérifiant une équation

a.  $3x_A - 2y_A + 4 = 0 \Leftrightarrow -6 - 2y_A + 4 = 0$   
 $\Leftrightarrow -2y_A - 2 = 0 \Leftrightarrow y_A = -1.$

## Savoir-faire

3  $\overrightarrow{OA}(-2; 1)$  est un vecteur directeur de la droite  $(OA)$ . Donc une équation de  $(OA)$  est de la forme  $1x - (-2)y + c = 0, x + 2y + c = 0.$

$O \in (OA)$ , donc  $x_O + 2y_O + c = 0, 0 + 0 + c = 0$  et  $c = 0.$

Une équation de  $(OA)$  est  $x + 2y = 0.$

$\overrightarrow{AB}(5; -3)$  est un vecteur directeur de la droite  $(AB)$ . Donc une équation de  $(AB)$  est de la forme :

$$-3x - 5y + c = 0.$$

$A \in (AB)$ , donc  $-3x_A - 5y_A + c = 0$ , c'est-à-dire :  $6 - 5 + c = 0$  et  $c = -1.$

Une équation de  $(AB)$  est  $-3x - 5y - 1 = 0.$

4  $M(x; y)$  désigne un point quelconque du plan ainsi,  $\overrightarrow{AM}(x+3; y-1)$ .

$M$  appartient à la droite passant par  $A$  et dirigée par  $\vec{u}(3; -1)$  si et seulement si  $\det(\overrightarrow{AM}; \vec{u}) = 0.$

$$\begin{vmatrix} x+3 & 3 \\ y-1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -1(x+3) - 3(y-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow -x - 3y = 0.$$

De même,  $y_B = 2, y_C = 5$  et  $y_D = 8.$

b. On constate que les points  $A, B, C$  et  $D$  sont alignés.

c.  $E(-4; -4)$ . Il est aligné avec  $A, B, C$  et  $D.$

2. L'ensemble des points du plan dont les coordonnées vérifient l'équation  $3x - 2y + 4 = 0$  est une droite.

### 3 Représentation paramétrique d'une droite

2. a. Pour  $t = 0, M(1; -2).$

b.  $\overrightarrow{AM}(x-1; y+2)$  d'où  $\overrightarrow{AM}(2t; -3t)$  et  $\overrightarrow{AM} = t\vec{v}.$

On en déduit que les vecteurs  $\overrightarrow{AM}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires et que  $M$  appartient à la droite passant par  $A$  et dirigée par  $\vec{v}.$

### 4 Équation cartésienne d'un cercle

a.  $M(x; y) \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow IM = 3 \Leftrightarrow IM^2 = 9.$

b.  $M(x; y) \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow IM^2 = 9 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 9.$

7 a.  $\overrightarrow{EF}(8; 4)$  et  $\overrightarrow{CD}(3; -8).$

$\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{CD} = 8 \times 3 + 4(-8) = 24 - 32 = -8 \neq 0$  donc  $(EF)$  et  $(CD)$  ne sont pas perpendiculaires.

b.  $\vec{v}(4; -1)$  est un vecteur directeur de  $(d')$  or  $(d) // (d')$  donc  $\vec{v}(4; -1)$  est un vecteur directeur de  $(d).$

Une représentation paramétrique de  $(d)$  est :

$$\begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = 3 - t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

8 a.  $I\left(\frac{-2+2}{2}; \frac{-3-1}{2}\right)$ , c'est-à-dire  $I(0; -2).$

$\vec{CI}(-1; -4)$  est un vecteur directeur de la médiane  $(CI).$

$$M(x; y) \in (CI) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{CM}; \vec{CI}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ y-2 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow -4(x-1) - (-1)(y-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow -4x + 4 + y - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -4x + y + 2 = 0.$$

b.  $-4x_D + y_D + 2 = -12 + 10 + 2 = 0$ , donc  $D \in (CI).$

**11 a.** Les coordonnées du milieu  $I$  de  $[AB]$  sont  $I(\frac{1}{2}; \frac{3}{2})$  et  $CI^2 = (\frac{1}{2} - 1)^2 + (\frac{3}{2} - 0)^2$   

$$= \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}.$$

Une équation cartésienne du cercle de centre  $C$  et de rayon  $CI$  est  $(x - 1)^2 + (y - 0)^2 = \frac{5}{2}$ , c'est-à-dire  $(x - 1)^2 + y^2 = \frac{5}{2}$  ou encore  $x^2 + y^2 - 2x - \frac{3}{2} = 0$ .

**b.**  $\vec{AM}(x + 3; y - 2)$  et  $\vec{CM}(x - 1; y)$ .

$M \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow \vec{AM} \cdot \vec{CM} = 0 \Leftrightarrow (x + 3)(x - 1) + (y - 2)y = 0$   
 $\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 + y^2 - 2y = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x - 2y - 3 = 0.$

**12 a.**  $x^2 + y^2 + 4x - 10y = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + y^2 - 10y = 0$   
 $\Leftrightarrow (x + 2)^2 - 4 + (y - 5)^2 - 25 = 0$   
 $\Leftrightarrow (x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 29.$

C'est l'équation du cercle de centre  $A(-2; 5)$  et de rayon  $\sqrt{29}$ .

**b.**  $x^2 + y^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x + y^2 = 1$   
 $\Leftrightarrow (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + y^2 = 1 \Leftrightarrow (x + \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{5}{4}.$

C'est l'équation du cercle de centre  $B(-\frac{1}{2}; 0)$  et de rayon  $\frac{\sqrt{5}}{2}$ .

**c.**  $x^2 + y^2 + 6x + 10 = 0 \Leftrightarrow (x + 3)^2 - 9 + y^2 + 10 = 0$   
 $\Leftrightarrow (x + 3)^2 + y^2 = -1.$

Ce n'est pas l'équation d'un cercle car  $-1 < 0$ .

## Exercices d'entraînement

**13 a.**  $A(0; 3), \vec{u}(1; -1)$ . **b.**  $A(1; -1), \vec{u}(1; 2)$ .

**14**  $A(2; 1), \vec{u}(5; 2)$ .

**15**  $A(2; 0), \vec{j}(0; 1)$ .

**16**  $y_A = y_B = 1$  donc une équation de  $(AB)$  est  $y = 1$ .  
 $x_A = x_C = 2$  donc une équation de  $(AC)$  est  $x = 2$ .

$\vec{OC}(2; -2)$  est un vecteur directeur de  $(OC)$  donc une équation cartésienne de  $(OC)$  est de la forme :  
 $-2x - 2y + c = 0.$

$O(0; 0) \in (OC)$  donc  $-2 \times 0 - 2 \times 0 + c = 0$ , c'est-à-dire  $c = 0$ . Une équation cartésienne de  $(OC)$  est  $-2x - 2y = 0$  et, en simplifiant,  $x + y = 0$ .

**17 a.**  $\vec{AB}(5; -2)$  est un vecteur directeur de  $(AB)$  donc une équation cartésienne de  $(AB)$  est de la forme  $2x + 5y + c = 0$ . Or  $2x_A + 5y_A + c = 0$  et  $c = 3$  donc une équation de  $(AB)$  est  $2x + 5y + 3 = 0$ .

Une équation de  $(BC)$  est  $x = 1$  car  $x_B = x_C = 1$ .

**b.**  $I(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}), \vec{BI}(-\frac{5}{2}; \frac{1}{2})$ . Une équation de  $(BI)$  est  $\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}y + 2 = 0$ .

**c.**  $\vec{AC}(5; -3)$  est un vecteur perpendiculaire à la hauteur  $(d)$  issue de  $B$  du triangle  $ABC$  donc  $\vec{u}(3; 5)$  est un vecteur directeur de  $(d)$  et une équation de  $(d)$  est  $5x - 3y - 8 = 0$ .

**d.** Les coordonnées du milieu,  $J$ , de  $[AB]$  sont  $(-\frac{3}{2}; 0)$ .  
 $\vec{AB}(5; -2)$  est un vecteur perpendiculaire à la médiatrice, une équation de  $(d')$  est  $5x - 2y + \frac{5}{2} = 0$ .

**18**  $-1, 2$  et  $\frac{1}{2}$  sont respectivement les coefficients directeurs de  $(d_1), (d_2)$  et  $(d_3)$  qui ont donc pour vecteurs directeurs respectifs  $\vec{u}_1(1; -1), \vec{u}_2(1; 2)$  et  $\vec{u}_3(1; \frac{1}{2})$ .

$2, -1$  et  $-2$  sont les ordonnées à l'origine respectives de  $(d_1), (d_2)$  et  $(d_3)$  qui ont donc pour équations réduites respectives  $y = -x + 2, y = 2x - 1$  et  $y = \frac{1}{2}x - 2$ .

**19 a.** Une équation de la droite passant par  $A$  et dirigée par  $\vec{u}$  peut être écrite sous la forme  $x + 2y + c = 0$ , or  $x_A + 2x_A + c = 0$  d'où  $-3 + 2 + c = 0$  et  $c = 1$ . Une équation de cette droite est  $x + 2y + 1 = 0$ .

**b.**  $\vec{BC}(1; -1)$  est un vecteur directeur de la droite  $(BC)$ . Une équation de  $(BC)$  peut être écrite sous la forme  $-x - y + c = 0$ , or  $-x_B - y_B + c = 0$  d'où  $c = 2$ .

Une équation de  $(BC)$  est  $-x - y + 2 = 0$ .

**c.** Une équation cartésienne de la droite passant par  $C(3; -1)$  et parallèle à l'axe des abscisses est  $y = -1$ .

**d.**  $x = 3$ .

**20 a.**  $\vec{BC}(2; 1)$  est un vecteur directeur de la droite  $(BC)$  donc  $\vec{BC}$  est un vecteur directeur de la droite passant par  $A$  et parallèle à  $(BC)$ , donc une équation de cette dernière est de la forme  $-x + 2y + c = 0$ . Or  $-x_A + 2y_A + c = 0$ , d'où  $c = 0$ .

Une équation de la droite passant par  $A$  et parallèle à  $(BC)$  est  $-x + 2y = 0$ .

**b.**  $\vec{BC}(2; 1)$  est un vecteur directeur de  $(BC)$ . Or le repère est orthonormé donc  $\vec{u}(-1; 2)$  est un vecteur

perpendiculaire à  $\vec{BC}(2; 1)$  donc  $\vec{u}(-1; 2)$  est un vecteur directeur de la médiatrice du segment  $[BC]$ .

Le milieu  $I$  de  $[BC]$  a pour coordonnées  $I\left(\frac{1+3}{2}; \frac{0-1}{2}\right)$ ,  $I\left(2; -\frac{1}{2}\right)$ .

Une équation de la médiatrice de  $[BC]$  est de la forme  $-2x - y + c = 0$ , or  $-2x_I - y_I + c = 0$ , d'où  $c = \frac{7}{2}$ .

Une équation de la médiatrice de  $[BC]$  est :

$$-2x - y + \frac{7}{2} = 0.$$

**21 a.**  $\vec{u}(-1; -1)$     **b.**  $\vec{i}(1; 0)$     **c.**  $\vec{j}(1; 0)$

**d.**  $\vec{j}(0; 1)$     **e.**  $\vec{u}(1; 1)$     **f.**  $\vec{u}(-3; 1)$ .

**22** Une équation de la droite passant par le point  $A$  et de coefficient directeur 3 est de la forme  $y = 3x + P$ . Or  $y_A = 3x_A + P$ ;  $y_A = 3x_A + P$  d'où  $2 = -15 + P$  et  $P = 17$ . Une équation de la droite passant par  $A$  et de coefficient directeur 3 est  $y = 3x + 17$ .

**23** Les coordonnées du point d'intersection de  $(d)$  avec l'axe des abscisses sont les solutions du système

$$\begin{cases} 2x - 5y + 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = 0 \end{cases}.$$

Les coordonnées du point d'intersection de  $(d)$  avec l'axe des ordonnées sont les solutions du système :

$$\begin{cases} x = 0 \\ 2x - 5y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{5} \end{cases}.$$

**24** L'équation réduite de  $(AB)$  est  $y = -2$  car  $y_A = y_B = -2$ .

$\vec{AD}(2; 3)$ . Une équation cartésienne de  $(AD)$  est de la forme  $3x - 2y + c = 0$  or  $3x_A - 2y_A + c = 0$ ,  $c = -1$  donc  $3x - 2y - 1 = 0$  est une équation cartésienne de  $(AD)$ .

De même on trouve  $2x - 5y + 3 = 0$  et  $5x + y - 33 = 0$  comme équations respectives de  $(DC)$  et  $(BC)$ .

**25 a.**  $y = -5x + 2$  et  $y = \frac{1}{4}x - 1$  sont respectivement les équations réduites de  $(d)$  et  $(d')$  qui s'écrivent aussi sous la forme  $5x + y - 2 = 0$  et  $-\frac{1}{4}x + y + 1 = 0$ .

**b.**  $5x_A + y_A - 2 = -20 + 5 - 2 = -17 \neq 0$  donc  $A \notin (d)$ .

$$-\frac{1}{4}x_A + y_A + 1 = 1 + 5 + 1 = 7 \neq 0 \text{ donc } A \notin (d').$$

$$5x_B + y_B - 2 = 1000 + 50 - 2 = 1048 \neq 0 \text{ donc } B \notin (d).$$

$$-\frac{1}{4}x_B + y_B + 1 = -50 + 50 + 1 = 1 \neq 0 \text{ donc } B \notin (d').$$

$$5x_C + y_C - 2 = -50 + 199 - 2 = 147 \neq 0 \text{ donc } C \notin (d).$$

$$-\frac{1}{4}x_C + y_C + 1 = \frac{10}{4} + 199 + 1 = 202,5 \neq 0 \text{ donc } C \notin (d').$$

$$5x_D + y_D - 2 = 150 - 10 - 2 = 138 \neq 0 \text{ donc } D \notin (d).$$

$$-\frac{1}{4}x_D + y_D + 1 = -\frac{15}{2} - 10 + 1 = -\frac{33}{2} \neq 0 \text{ donc } D \notin (d').$$

**26 a.**  $\vec{BC}(-6; 2)$ ,  $\vec{AC}(-6; -2)$ .

**b.**  $\vec{BC}(-6; 2)$  est un vecteur directeur de  $(BC)$  or le repère est orthonormé donc  $\vec{u}(-2; -6)$  est un vecteur perpendiculaire à  $\vec{BC}$  et  $\vec{u}$  est un vecteur directeur de la médiatrice de  $[BC]$ .

Le milieu  $I$  de  $[BC]$  a pour coordonnées  $I(0; 0)$ .

Une équation de la médiatrice de  $[BC]$  est de la forme  $6x - 2y + c = 0$  or  $6x_I - 2y_I + c = 0$  donc  $c = 0$ .

Une équation de la médiatrice de  $[BC]$  est  $6x - 2y = 0$  et, après simplification,  $3x - y = 0$ .

Une équation de la médiatrice de  $[AC]$  est  $2x - 6y + 12 = 0$  et, après simplification,  $x - 3y + 6 = 0$ .

Une équation de la médiatrice de  $[AB]$  est  $y = 1$ .

**c.**  $y_C = 1$  donc  $C$  appartient à la médiatrice de  $[AB]$  donc  $CA = CB$  et le triangle  $ABC$  est isocèle en  $C$ .

Le point  $A$  n'appartient pas à la médiatrice de  $[BC]$  car  $3x_A - y_A \neq 0$ , donc  $AB \neq AC$  et le triangle  $ABC$  n'est pas équilatéral.

**27 a.**  $\vec{AB}(2; -3)$  est un vecteur directeur de la droite  $(AB)$ . Une équation de  $(AB)$  est de la forme  $3x + 2y + c = 0$  or  $3x_B + 2y_B + c = 0$  donc  $c = -1$ .

Une équation de  $(AB)$  est  $3x + 2y - 1 = 0$ .

Les coordonnées de  $C$  sont les solutions du système :

$$\begin{cases} x = 0 \\ 3x + 2y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ d'où } C\left(0; \frac{1}{2}\right).$$

Les coordonnées de  $D$  sont les solutions du système :

$$\begin{cases} y = 0 \\ 3x + 2y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases} \text{ d'où } D\left(\frac{1}{3}; 0\right).$$

**b.** Les coordonnées du point  $H$  sont  $\left(-\frac{1}{3}; 1\right)$ .

**c.** La droite  $(\Delta)$  passant par  $E$  et perpendiculaire à  $(AB)$  a pour équation  $-2x + 3y + 1 = 0$ .

Les coordonnées du point  $G$  cherché sont donc solutions du système  $\begin{cases} 3x + 2y - 1 = 0 \\ -2x + 3y + 1 = 0. \end{cases}$

Après calculs, on trouve  $G\left(\frac{5}{13}; \frac{-1}{13}\right)$ .

**28 a.** Pour tout nombre réel  $k$  on a :

$$(3+k)x_A + 2ky_A + 6 = -2(3+k) + 2k + 6 \\ = -6 - 2k + 2k + 6 = 0 \text{ donc } A \in (D_k).$$

**b.**  $\vec{u}_k(-2k; 3+k)$  est un vecteur directeur de  $(D_k)$  et  $\vec{v}(1; -3)$  est un vecteur directeur de  $(d)$ .

$(D_k)$  et  $(d)$  sont parallèles si et seulement si  $\vec{u}_k$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires c'est-à-dire si et seulement si  $\det(\vec{u}_k; \vec{v}) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -2k & 1 \\ 3+k & -3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -3(-2k) - 1(3+k) = 0 \\ \Leftrightarrow 6k - 3 - k = 0 \Leftrightarrow 5k = 3 \\ \Leftrightarrow k = \frac{3}{5}.$$

**29 a.**  $\begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = 3 - 3t \end{cases}$  avec  $t \in \mathbb{R}$ .

**b.**  $\vec{AB}(7; -2)$  est un vecteur directeur de  $(AB)$ .

$(AB)$  :  $\begin{cases} x = -2 + 7t \\ y = 3 - 2t \end{cases}$  avec  $t \in \mathbb{R}$ .

**c.**  $\vec{i}(1; 0)$  est un vecteur directeur de la droite passant par  $A$  et parallèle à l'axe des abscisses, qui a donc comme représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 3 \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

**d.**  $\begin{cases} x = -2 \\ y = 3 + t \end{cases}$  avec  $t \in \mathbb{R}$ .

**30 a.**  $M(-3; 0) \in (d)$ .  $\vec{u}(5; 1)$  est un vecteur directeur de  $(d)$ .

**b.**  $\begin{cases} x = -3 + 5t \\ y = 2 + t \end{cases}$  avec  $t \in \mathbb{R}$ .

**31 a.**  $A(2; -1)$ ,  $B(-2; 2)$ ,  $C(6; -4)$  sont trois points de  $(d)$  obtenus respectivement pour  $t = 0$ ,  $t = 1$  et  $t = -1$ .

**b.**  $\vec{u}(-4; 3)$ ,  $\vec{v}(4; -3)$  et  $\vec{w}(-8; 6)$  sont trois vecteurs directeurs de  $(d)$ .

**32 a.**  $\vec{BC}(4; -3)$  est un vecteur directeur de  $(BC)$  et de  $(d)$ .

Une représentation paramétrique de  $(d)$  est :

$$\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = -1 - 3t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

**b.**  $D \in (d) \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 2 + 4t \\ y_D = -1 - 3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{4}{3} = 2 + 4t \\ \frac{7}{3} = -1 - 3t \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{10}{3} = 4t \\ \frac{10}{3} = -3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{10}{12} \\ t = -\frac{10}{9} \end{cases}$$

or  $-\frac{10}{12} \neq -\frac{10}{9}$  donc  $D \notin (d)$ .

**c.**  $E \in (d) \Leftrightarrow \begin{cases} 1u = 2 + 4t \\ -10 = -1 - 3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12 = 4t \\ -9 = -3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = 3 \end{cases} \\ \Leftrightarrow t = 3 \text{ donc } E \in (d).$

**33**  $A \in (d) \Leftrightarrow \begin{cases} -5 = 2 + t \\ 30 = -2 + 20t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -7 \\ t = \frac{8}{5} \end{cases}$

donc  $A \notin (d)$ .

$A \in (d') \Leftrightarrow \begin{cases} -5 = -10 + 4t' \\ 30 = 74 + t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = 5/4 \\ t' = -44 \end{cases}$

donc  $A \notin (d')$ .

$B \in (d) \Leftrightarrow \begin{cases} 6 = 2 + t \\ 78 = -2 + 20t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4 \\ t = 4 \end{cases} \\ \Leftrightarrow t = 4 \text{ donc } B \in (d).$

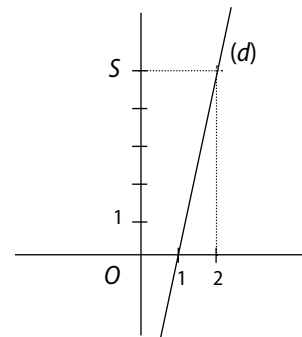
$B \in (d') \Leftrightarrow \begin{cases} 6 = -10 + 4t' \\ 78 = 74 + t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = 4 \\ t' = 4 \end{cases} \\ \Leftrightarrow t' = 4 \text{ donc } B \in (d').$

De même  $C(20; 79) \notin (d)$  et  $C(20; 79) \notin (d')$ .

**34 a.**  $C(1; 0) \in (d)$  et  $\vec{u}(1; 5)$  est un vecteur directeur de  $(d)$ .

**b.**  $A \in (d) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 1 + t \\ -5 = 5t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \text{ donc } A \in (d) \\ t = -1 \end{cases}$

$B \in (d) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 1 + t \\ 4 = 5t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \text{ donc } B \notin (d) \\ t = \frac{4}{5} \end{cases}$



**35**  $\vec{u}(1; 3)$  est un vecteur directeur de  $(d)$  donc une représentation paramétrique de  $(d)$  est

$$\begin{cases} x = -5 + t \\ y = 2 + 3t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

**36**  $\vec{j}(0; 1)$  est un vecteur directeur de  $(d)$  donc une représentation paramétrique de  $(d)$  est :

$$\begin{cases} x = -5 \\ y = t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

**37**  $\vec{u}(1; 3)$  est un vecteur directeur de  $(d)$  et  $A(0; -1) \in (d)$  donc une représentation paramétrique de  $(d)$  est :

$$\begin{cases} x = t \\ y = -1 + 3t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

De même  $(d') : \begin{cases} x = t \\ y = -2t + 5 \end{cases}$  avec  $t \in \mathbb{R}$ .

**38**  $A(0; 2) \in (d)$  et  $\vec{u}(2; 1)$  est un vecteur directeur de  $(d)$  donc une représentation paramétrique de  $(d)$  est :

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = -2 + t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

$A(0; 2) \in (d')$  et  $\vec{v}(-1; -3)$  est un vecteur directeur de  $(d')$  donc une représentation paramétrique de  $(d')$  est :

$$\begin{cases} x = -t \\ y = 2 - 3t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

**39 a.** Les coordonnées du point d'intersection de  $(d)$  avec l'axe des abscisses sont les solutions du système :

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = -2 + 3t \\ y = 5 - t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = -2 + 3t \\ t = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 13 \\ t = 5 \end{cases}$$

donc  $A(13; 0)$  est le point d'intersection de  $(d)$  avec l'axe des abscisses.

**b.** Les coordonnées de  $B$  sont les solutions du système :

$$\begin{cases} x = -1 \\ x = -2 + 3t \\ y = 5 - t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ t = \frac{1}{3} \\ y = 5 - \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ t = \frac{1}{3} \\ y = \frac{14}{3} \end{cases}$$

d'où  $B\left(1; \frac{14}{3}\right)$ .

**40 a.** Un vecteur directeur de  $(d)$  est  $\vec{v}\left(\cos \frac{\pi}{6}; \sin \frac{\pi}{6}\right)$ , c'est-à-dire  $\vec{v}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$  donc une représentation paramétrique de  $(d)$  est :

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2}t \\ y = \frac{1}{2}t \end{cases} \quad \text{ou, plus simplement, } \begin{cases} x = \sqrt{3}t \\ y = t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

**b.** Un vecteur directeur de  $(d)$  est  $\vec{v}\left(\cos \frac{2\pi}{3}; \sin \frac{2\pi}{3}\right)$  c'est-à-dire  $\vec{v}\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  donc une représentation paramétrique de  $(d)$  est :

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2}t \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases} \quad \text{ou, plus simplement, } \begin{cases} x = -t \\ y = \sqrt{3}t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

**41**  $\vec{u}(1; -3)$  est un vecteur directeur de la première droite.

$\bullet$   $A(-5; 2)$  est un point de la deuxième droite associé à  $t = 1$  et qui admet  $\vec{v}(-2; 6)$  pour vecteur directeur.

$\vec{v} = -2\vec{u}$  donc  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires et les deux droites sont parallèles.

Les deux droites sont parallèles et ont le point  $A$  en commun donc elles sont confondues.

**42**  $A(2; 5)$  est un point et  $\vec{u}(-1; 2)$  est un vecteur directeur de la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 5 + 2t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

$A(2; 5)$  est un point et  $\vec{v}(1; -2)$  est un vecteur directeur de la droite d'équation réduite  $y = -2x + 9$ .

$\vec{v} = -\vec{u}$  donc  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires et les deux droites sont parallèles.

Les deux droites sont parallèles et ont le point  $A$  en commun, donc elles sont confondues.

**43 a.**  $\vec{u}(1; 3)$  est un vecteur directeur de  $(d)$  et de  $(d')$  donc  $(d)$  et  $(d')$  sont parallèles.

**b.**  $\vec{u}(1; \frac{1}{4})$  est un vecteur directeur de  $(d)$  et  $\vec{u}'(1; -4)$  est un vecteur directeur de  $(d')$ .

Or  $\vec{u} \cdot \vec{u}' = 1 \times 1 + \frac{1}{4}(-4) = 1 - 1 = 0$  donc  $\vec{u}$  et  $\vec{u}'$  sont orthogonaux et les droites  $(d)$  et  $(d')$  sont perpendiculaires.

**c.**  $\vec{i}(1; 0)$  est un vecteur directeur de  $(d)$  et  $\vec{u}(1; 5)$  est un vecteur directeur de  $(d')$ .

$$\text{Or } \det(\vec{i}; \vec{u}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$$

$$\text{et } \vec{i} \cdot \vec{u} = 1 \times 1 + 0 \times 5 = 1 \neq 0$$

donc  $(d)$  et  $(d')$  ne sont ni parallèles ni perpendiculaires.

**d.**  $\vec{u}(-1; 2)$  et  $\vec{u}'(4; 2)$  sont respectivement des vecteurs directeurs de  $(d)$  et  $(d')$ .

Or  $\vec{u} \cdot \vec{u}' = -1 \times 4 + 2 \times 2 = -4 + 4 = 0$  donc  $\vec{u}$  et  $\vec{u}'$  sont orthogonaux et  $(d)$  et  $(d')$  sont perpendiculaires.

**44**  $\vec{u}(2; -3)$ ,  $\vec{u}'(-6; 9)$  et  $\vec{u}''(3; 2)$  sont respectivement des vecteurs directeurs de  $(d)$ ,  $(d')$  et  $(d'')$ .

$\vec{u}' = -3\vec{u}$  donc  $\vec{u}$  et  $\vec{u}'$  sont colinéaires et les droites  $(d)$  et  $(d')$  sont parallèles.

$\vec{u} \cdot \vec{u}'' = 2 \times 3 + (-3) \times 2 = 6 - 6 = 0$  donc  $\vec{u}$  et  $\vec{u}''$  sont orthogonaux et les droites  $(d)$  et  $(d'')$  sont perpendiculaires.

**45**  $\vec{u}(1; 2)$  et  $\vec{u}'(3; -2)$  sont respectivement des vecteurs directeurs de  $(d)$  et  $(d')$ ,

$$\text{or } \det(\vec{u}; \vec{u}') = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 1(-2) - 3 \times 2 = -2 - 6 = -8 \neq 0$$

donc  $\vec{u}$  et  $\vec{u}'$  ne sont pas colinéaires et les droites  $(d)$  et  $(d')$  sont sécantes. Les coordonnées du point d'intersection de  $(d)$  avec  $(d')$  sont les solutions du système :

$$\begin{cases} x = t \\ y = -1 + 2t \\ x = -2 + 3t' \\ y = 5 - 2t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -1 + 2t \\ t = -2 + 3t' \\ -1 + 2t = 5 - 2t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -1 + 2t \\ t = -2 + 3t' \\ t' = \frac{5}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{4} \\ y = \frac{5}{2} \\ t = \frac{7}{4} \\ t' = \frac{5}{4} \end{cases} \quad \text{donc le point d'intersection de } (d) \text{ et } (d') \text{ est } A\left(\frac{7}{4}; \frac{5}{2}\right).$$

**46 a.**  $\vec{u}(3; 1)$  et  $\vec{u}'(-5; -2)$  sont respectivement des vecteurs directeurs de  $(d)$  et  $(d')$ .

$$\text{Or } \det(\vec{u}; \vec{u}') = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \times (-2) - (-5) \times 1 = -6 + 5 = -1 \neq 0,$$

donc  $\vec{u}$  et  $\vec{u}'$  ne sont pas colinéaires et les droites  $(d)$  et  $(d')$  sont sécantes.

$$\text{b. } \begin{cases} x - 3y + 1 = 0 \\ -2x + 5y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y - 1 \\ -2(3y - 1) + 5y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y - 1 \\ -y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}$$

donc  $A(5; 2)$  est le point d'intersection de  $(d)$  et  $(d')$ .

**47**  $\vec{u}(3; 2)$  est un vecteur directeur de  $(d)$ .

**a.**  $\vec{u}_1(4; 1)$  est un vecteur directeur de la droite  $(d_1)$  d'équation  $x - 4y + 3 = 0$ .

Or  $\det(\vec{u}; \vec{u}_1) = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 8 = -5 \neq 0$  donc  $\vec{u}$  et  $\vec{u}_1$  ne sont pas colinéaires et les droites  $(d)$  et  $(d_1)$  sont sécantes.

**b.**  $\vec{u}_2(-9; -6)$  est un vecteur directeur de la droite  $(d_2)$  d'équation  $-6x + 9y = 0$  or  $\vec{u}_2 = -3\vec{u}$  donc  $\vec{u}$  et  $\vec{u}_2$  sont colinéaires et les droites  $(d)$  et  $(d_2)$  sont parallèles. De plus  $O(0; 0) \in (d_2)$  et  $O(0; 0) \notin (d)$  donc  $(d)$  et  $(d_2)$  sont strictement parallèles.

**c.**  $\vec{u}_3\left(-\frac{3}{5}; -\frac{2}{5}\right)$  est un vecteur directeur de la droite  $(d_3)$  d'équation  $-\frac{2}{5}x + \frac{3}{5}y - 1 = 0$ .

Or  $\det(\vec{u}; \vec{u}_3) = 3\left(-\frac{2}{5}\right) - 2\left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{6}{5} + \frac{6}{5} = 0$  donc  $\vec{u}$  et  $\vec{u}_3$  sont colinéaires et les droites  $(d)$  et  $(d_3)$  sont parallèles.

De plus le point  $A\left(0; \frac{5}{3}\right)$  appartient aux deux droites  $(d)$  et  $(d_3)$  donc  $(d)$  et  $(d_3)$  sont confondues.

**d.**  $\vec{u}_4\left(1; \frac{3}{2}\right)$  est un vecteur directeur de la droite  $(d_4)$  d'équation  $y = \frac{3}{2}x - 1$ .

Or  $\det(\vec{u}; \vec{u}_4) = 3 \times \frac{3}{2} - 2 \times 1 = \frac{9}{2} - 2 = \frac{5}{2} \neq 0$  donc  $\vec{u}$  et  $\vec{u}_4$  ne sont pas colinéaires et les droites  $(d)$  et  $(d_4)$  sont sécantes.

**e.**  $\vec{u}_5(4; -6)$  est un vecteur directeur de la droite  $(d_5)$  de représentation paramétrique  $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -6t \end{cases}$ .

Or  $\det(\vec{u}; \vec{u}_5) = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -18 - 8 = -26 \neq 0$  donc  $\vec{u}$  et  $\vec{u}_5$  ne sont pas colinéaires et les droites  $(d)$  et  $(d_5)$  sont sécantes.

**f.**  $\vec{u}_6(-4; 6)$  est un vecteur directeur de la droite  $(d_6)$  :  $\begin{cases} x = -1 - 4t \\ y = 1 + 6t \end{cases}$  avec  $t \in \mathbb{R}$ .

Or  $\det(\vec{u}; \vec{u}_6) \neq 0$  donc  $\vec{u}$  et  $\vec{u}_6$  ne sont pas colinéaires et les droites  $(d)$  et  $(d_6)$  sont sécantes.

**48 a.**  $\vec{u}(3; 2)$  et  $\vec{u}'(-6; -4)$  sont respectivement des vecteurs directeurs de  $(d)$  et  $(d')$ . Or  $\vec{u}' = -2\vec{u}$  donc  $\vec{u}$  et  $\vec{u}'$  sont colinéaires et les droites  $(d)$  et  $(d')$  sont parallèles.

**b.**  $A(1; 1)$  est un point de la droite  $(d')$  et  $2x_A - 3y_A + 1 = 2 - 3 + 1 = 0$  donc  $A(1; 1) \in (d)$ .  $(d)$  et  $(d')$  ont le point  $A(1; 1)$  en commun et elles sont parallèles (d'après **a**), donc elles sont confondues.

**49 a.** Pour  $t = 0$  on a  $\begin{cases} x = -1 + 3 \times 0 = -1 \\ y = 2 + k \times 0 = 2 \end{cases}$

donc le point  $A(-1; 2)$  est commun à toutes les droites  $(d_k)$ .

**b.**  $\vec{u}_k(3; k)$  est un vecteur directeur de  $(d_k)$  donc  $\vec{u}_1(3; 1)$  et  $\vec{u}_2(3; 2)$  sont respectivement des vecteurs directeurs de  $(d_1)$  et  $(d_2)$ .

Or  $\det(\vec{u}_1; \vec{u}_2) = 3 \times 2 - 3 \times 1 = 6 - 3 \neq 0$  donc  $(d_1)$  et  $(d_2)$  sont sécantes et d'après **a**, leur point d'intersection est  $A(-1; 2)$ .

**c.**  $\vec{u}_k$  et  $\vec{u}_{k'}$  sont respectivement des vecteurs directeurs de  $(d_k)$  et  $(d_{k'})$ .

Or  $\det(\vec{u}_k; \vec{u}_{k'}) = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ k & k' \end{vmatrix} = 3k' - 3k = 3(k' - k)$  donc, si  $k \neq k'$ , alors  $\det(\vec{u}_k; \vec{u}_{k'}) \neq 0$ ,  $\vec{u}_k$  et  $\vec{u}_{k'}$  ne sont pas colinéaires et les droites  $(d_k)$  et  $(d_{k'})$  sont sécantes.

**50**  $(x - (-1))^2 + (y - 2)^2 = 3^2$ ,  $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$   
et, après développement, on trouve :  
 $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$ .

**51**  $0^2 + 0^2 + 6 \times 0 - 0 = 0$  donc  $O \in (\mathcal{C})$ .  
 $(-1)^2 + (-2)^2 + 6(-1) - (-2) = 1 + 4 - 6 + 2 = 6 \neq 0$  donc  $A \notin (\mathcal{C})$ .

$0^2 + 1^2 + 6 \times 0 + (-1) = 1 - 1 = 0$  donc  $B \in (\mathcal{C})$ .

**52**  $(\mathcal{C})$  est le cercle de centre  $C(-3; 0)$  et de rayon  $\sqrt{5}$ .

**53 a.**  $x^2 + y^2 - 6x + 2y = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + y^2 + 2y = 0$   
 $\Leftrightarrow (x - 3)^2 - 9 + (y + 1)^2 - 1 = 0$   
 $\Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 10$ .

**b.**  $x^2 + y^2 - 6x + 2y = 0$  est une équation du cercle de centre  $C(3; -1)$  et de rayon  $\sqrt{10}$ .

**54**  $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + y^2 - 8y + 1 = 0$   
 $\Leftrightarrow (x + 2)^2 - 4 + (y - 4)^2 - 16 + 1 = 0$   
 $\Leftrightarrow (x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 19$ .

Donc  $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 1 = 0$  est une équation du cercle de centre  $C(-2; 4)$  et de rayon  $\sqrt{19}$ .

**55 a.**  $AB^2 = (1 - (-1))^2 + (-2 - 1)^2 = 2^2 + (-3)^2 = 4 + 9 = 13$ .  
Une équation du cercle de centre  $A$  et de rayon  $AB$  est  $(x - (-1))^2 + (y - 1)^2 = 13$ ,  $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 13$  et, après développement, on trouve :  
 $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 11 = 0$ .

**b.**  $M(x; y)$  est un point du cercle de diamètre  $[AB]$  si et seulement si  $\vec{AM} \cdot \vec{BM} = 0$ ,

$$\Leftrightarrow (x - (-1))(x - 1) + (y - 1)(y - (-2)) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)(x - 1) + (y - 1)(y + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1 + y^2 + 2y - y - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + y - 3 = 0.$$

**56 a.** L'ensemble des points  $M(x; y)$  vérifiant l'équation  $x^2 + y^2 = 3$  est le cercle de centre  $O(0; 0)$  et de rayon  $\sqrt{3}$ .

**b.**  $x^2 + y^2 - 2x + 6y = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 - 1 + (y + 3)^2 - 9 = 0$   
 $\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 10$ .

C'est une équation du cercle de centre  $C(1; -3)$  et de rayon  $\sqrt{10}$ .

**c.**  $x^2 + y^2 - 3x + y - 7 = 0$

$$\Leftrightarrow (x - \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4} + (y + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - \frac{3}{2})^2 + (y + \frac{1}{2})^2 - \frac{38}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - \frac{3}{2})^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = \frac{38}{4}.$$

C'est une équation du cercle de centre  $C(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2})$  et de rayon  $\sqrt{\frac{38}{4}} = \frac{\sqrt{38}}{2}$ .

**d.**  $(x + 3)^2 + y^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow (x + 3)^2 + y^2 = -3$ , or  $(x + 3)^2 + y^2 \geq 0$  et  $-3 < 0$  donc l'ensemble des points  $M(x; y)$  vérifiant  $(x + 3)^2 + y^2 = -3$  est vide.

**57 a.**  $(\mathcal{C})$  est le cercle de centre  $O(0; 0)$  et de rayon  $\sqrt{5}$ .

**b.**  $\vec{u}(-2; 1)$  est un vecteur directeur de  $(d)$ , or le repère est orthonormé donc  $\vec{v}(1; 2)$  est un vecteur normal de  $(d)$ .

La droite  $(d')$  passant par le centre  $O(0; 0)$  de  $(\mathcal{C})$  et perpendiculaire à  $(d)$  admet  $\vec{v}(1; 2)$  pour vecteur directeur.

Une équation de  $(d')$  est  $y = 2x$  car elle passe par l'origine du repère et admet 2 pour coefficient directeur.

• Les coordonnées du point d'intersection de  $(d)$  avec  $(d')$  sont les solutions du système

$$\begin{cases} y = 2x \\ x + 2y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x + 4x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

$(d)$  et  $(d')$  se coupent au point  $A(1; 2)$ .

•  $A \in (\mathcal{C})$  car  $x_A^2 + y_A^2 = 1^2 + 2^2 = 5$ .

•  $(d)$  est perpendiculaire à  $(OA)$  et passe par le point  $A$  appartenant à  $(\mathcal{C})$  donc  $(d)$  est tangente à  $(\mathcal{C})$  en  $A$ .

**c.** Le point  $B(-1; -2)$  est le point de  $(\mathcal{C})$  diamétralement opposé à  $A(1; 2)$ .

La tangente  $(T)$  à  $(\mathcal{C})$  parallèle (et non confondue) avec  $(d)$  est la droite passant par  $B(-1; -2)$  et parallèle à  $(d)$ . Donc une équation de  $(T)$  est de la forme

$-x - 2y + c = 0$ . Or  $-x_B - 2y_B + c = 0 \Leftrightarrow 5 + c = 0$   
 $\Leftrightarrow c = -5$ , donc une équation de (T) est  $-x - 2y - 5 = 0$   
 et, après simplification,  $x + 2y + 5 = 0$ .

**58**  $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 - 1 + (y + 2)^2 - 4 = 0$   
 $\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 5$  donc  $(\mathcal{C})$  est le cercle de centre  
 $B(1; -2)$  et de rayon  $\sqrt{5}$ .

•  $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y = 0$   
 $\Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y - 2)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$   
 donc  $(\mathcal{C})$  est le cercle de centre  $A(3; 2)$  et de rayon 2.

•  $AB = \sqrt{(-1 - 3)^2 + (-2 - 2)^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$  et la somme  
 des rayons de  $(\mathcal{C})$  et  $(\mathcal{C})$  est égale à  $2 + \sqrt{5} \neq 4\sqrt{2}$   
 donc  $(\mathcal{C})$  et  $(\mathcal{C})$  ne sont pas tangents.

**b.**  $y_A = 2$  donc la distance du point A à l'axe des  
 abscisses est 2 et égale au rayon du cercle  $(\mathcal{C})$ , donc  
 l'axe des abscisses est tangent à  $(\mathcal{C})$ .

**59 a.** Le triangle  $OAB$  est rectangle en  $O$  donc le  
 cercle circonscrit au triangle  $OAB$  est le cercle de  
 diamètre  $[AB]$ .

Les coordonnées du milieu,  $I$ , de  $[AB]$  sont :

$$\left(\frac{3+0}{2}; \frac{0+4}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}; 2\right).$$

$$AB = \sqrt{(0-3)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Le cercle circonscrit au triangle  $OAB$  est le cercle  
 de centre  $I\left(\frac{3}{2}; 2\right)$  et de rayon égal à  $\frac{AB}{2} = \frac{5}{2}$  qui a  
 pour équation  $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y - 2)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2$  et, après  
 développement,  $x^2 + y^2 - 3x - 4y = 0$ .

**b.** Le triangle  $OAB$  est rectangle en  $O$  donc sa médiane  
 issue de  $O$  a pour longueur  $\frac{AB}{2} = \frac{5}{2}$ . Donc une équation  
 du cercle de centre  $O$  et passant par le milieu de  $[AB]$   
 est  $(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \frac{25}{4}$ .

**60 a.**  $M(x; y) \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow AM = r \Leftrightarrow AM^2 = r^2$  (car  $AM$  et  $r$   
 sont positifs)  $\Leftrightarrow (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ .

**b.**  $M(x; y) \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$  (d'après a.)  
 $\Leftrightarrow x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2$   
 $\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$ .

**61**  $x^2 + y^2 - 6x + 3y + k = 0$   
 $\Leftrightarrow x^2 - 6x + y^2 + 3y + k = 0$   
 $\Leftrightarrow (x - 3)^2 - 9 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - k = 0$   
 $\Leftrightarrow (x - 3)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = 9 + \frac{9}{4} - k$   
 $\Leftrightarrow (x - 3)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{45}{4} - k$

donc  $x^2 + y^2 - 6x + 3y + k = 0$  est une équation  
 d'un cercle si et seulement si  $\frac{45}{4} - k \geq 0$  donc si et  
 seulement si  $k \leq \frac{45}{4}$ .

**62 a.**  $\vec{AC}(3; 1)$ ,  $\vec{CB}(2; 2)$ ,  $L\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$  est le milieu  
 de  $[AC]$  et  $J(2; 0)$  celui de  $[CB]$ . La médiatrice de  $[AC]$   
 est la droite passant par  $L\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$  et de vecteur  
 directeur  $\vec{u}(1; 3)$  (car  $\vec{u}$  est perpendiculaire à  $\vec{AC}$ ) donc  
 d'équation de la forme  $-3x + y + c = 0$ . Or  $-3x_L + y_L + c = 0$ ,  
 $c = -1$ , donc d'équation  $-3x + y - 1 = 0$ .

De même, une équation de la médiatrice de  $[CB]$  est  
 $2x + 2y - 4 = 0$  et, après simplification,  $x + y - 2 = 0$ .  
 Les coordonnées du point d'intersection,  $I$ , des  
 deux précédentes médiatrices sont les solutions du  
 système :

$$\begin{cases} -3x + y - 1 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x + 1 \\ x + 3x + 1 - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{7}{4} \\ x = \frac{1}{4} \end{cases}$$

donc  $I$  a pour coordonnées  $I\left(\frac{1}{4}; \frac{7}{4}\right)$ .

$$IA^2 = \left(-2 - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(0 - \frac{7}{4}\right)^2 = \left(-\frac{9}{4}\right)^2 + \left(-\frac{7}{4}\right)^2$$

$$= \frac{81}{16} + \frac{49}{16} = \frac{130}{16}.$$

Une équation du cercle circonscrit au triangle  $ABC$  qui  
 a pour centre  $I\left(\frac{1}{4}; \frac{7}{4}\right)$  et pour rayon  $IA$  est :

$$\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{4}\right)^2 = \frac{130}{16}, \text{ et après développement,}$$

$$x^2 + y^2 - \frac{1}{2}x - \frac{7}{2}y - 5 = 0.$$

**b.**  $x_D^2 + y_D^2 - \frac{1}{2}x_D - \frac{7}{2}y_D - 5 = 4 + 9 + 1 - \frac{21}{2} - 5$   
 $= -\frac{3}{2} \neq 0$  donc  $D$   
 n'appartient pas au cercle circonscrit au triangle  $ABC$   
 et les points  $A, B, C$  et  $D$  ne sont pas cocycliques.

## Faire le point

**63**  $2x - 3y - 6 = 0$  est une équation cartésienne de la droite  $(d_2)$ .

$y = 2x$  est l'équation réduite de la droite  $(d_1)$ .

$AB(3; 2)$  est un vecteur directeur de la droite  $(d_2)$ .

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = -2 + 2t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

est une représentation paramétrique de  $(d_2)$ .

$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$  est une équation cartésienne du cercle de centre  $C(-1; 2)$  et de rayon 2.

**64** L'équation  $0x + 0y + 1 = 0$  n'est pas celle d'une droite. En effet  $0x + 0y + 1 = 0 \Leftrightarrow 1 = 0$  qui n'admet pas de solution.

• L'équation  $x^2 + y^2 = -1$  n'est pas une équation d'un cercle. En effet  $x^2 + y^2 \geq 0$  et  $-1 < 0$  donc l'équation  $x^2 + y^2 = -1$  n'admet pas de solution.

Une équation de l'axe des ordonnées est  $x = 0$  qui ne s'écrit pas sous la forme  $y = mx + p$ .

**65** Les solutions du système  $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$

sont les coordonnées des points communs à  $(d)$  et  $(d')$ ; donc si  $(d)$  et  $(d')$  sont confondues, alors le

système  $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$

admet une infinité de solutions.

**66** La droite d'équation  $y = -3x - 10$  passe par  $A(4; 2)$  et a pour vecteur directeur  $\vec{u}(1; -3)$ , donc elle est associée à  $(d'')$ .

•  $-10x + 5y + 15 = 0 \Leftrightarrow 5y = 10x - 15 \Leftrightarrow y = 2x - 3$  donc l'équation  $-10x + 5y + 15 = 0$  est associée à  $(d)$ .

•  $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$

est une représentation paramétrique de la droite passant par  $B(1; -1)$ , qui appartient à  $(d)$ , et de vecteur directeur  $\vec{u}(1; 2)$  qui est aussi un vecteur directeur de  $(d)$ .

Donc  $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 2t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R},$  est associée à  $(d)$ .

•  $\begin{cases} x = -1 + t' \\ y = -1 - 2t' \end{cases} \quad \text{avec } t' \in \mathbb{R}$

est une représentation paramétrique de la droite passant par  $C(-1; -1)$ , qui appartient à  $(d')$  et de

vecteur directeur  $\vec{u}(1; -2)$  et qui est aussi un vecteur directeur de  $(d')$  car  $\vec{v}(-2; 4) = -2\vec{u}$  est un vecteur directeur de  $(d')$ . Donc le système est associé à  $(d')$ .

•  $4x + 2y + 6 = 0 \Leftrightarrow 2y = -4x - 6 \Leftrightarrow y = -2x - 3.$

Donc l'équation  $y = 2x - 3$  est associée à  $(d')$ .

•  $-6x - 2y - 20 = 0 \Leftrightarrow -2y = 6x + 20 \Leftrightarrow y = -3x - 10$  qui est associée à  $(d'')$ .

**67 a.** Les coordonnées du milieu,  $I$ , de  $[BC]$  sont  $I\left(2; \frac{5}{2}\right)$ .

Donc la médiane issue de  $A$  du triangle  $ABC$  est la droite passant par  $A(-3; 1)$  et qui a pour vecteur directeur  $\vec{AI}\left(5; \frac{3}{2}\right)$ , donc une représentation paramétrique de cette médiane est :

$$\begin{cases} x = -3 + 5t \\ y = 1 + \frac{3}{2}t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

**b.** Les coordonnées du milieu,  $J$ , de  $[AB]$  sont  $J\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ ,

•  $\vec{AB}(7; 1)$  donc  $\vec{u}(1; -7)$  est un vecteur directeur de la médiatrice de  $[AB]$ . Une équation de cette médiatrice est de la forme  $7x + y + c = 0$ .

Or  $7x_J + y_J + c = 0 \Rightarrow \frac{7}{2} + \frac{3}{2} + c = 0 \Leftrightarrow c = -5$ ; donc une équation de la médiatrice de  $[AB]$  est  $7x + y - 5 = 0$ .

**c.**  $\vec{AC}(3; 2)$  est un vecteur perpendiculaire à la hauteur issue de  $B$  du triangle  $ABC$  donc  $\vec{v}(2; -3)$  est un vecteur directeur de cette hauteur qui admet donc une équation de la forme  $3x + 2y + c = 0$ .

Or  $3x_B + 2y_B + c = 0 \Rightarrow 3 \times 4 + 2 \times 2 + c = 0 \Leftrightarrow c = -16$  donc une équation de la hauteur issue de  $B$  dans le triangle  $ABC$  est  $3x + 2y - 16 = 0$ .

**68**  $\vec{AB}(-4; 10)$  est un vecteur perpendiculaire à la droite  $(d)$  passant par  $C$  et perpendiculaire à  $(AB)$  donc  $-\frac{1}{2}\vec{AB}(2; -5)$  est aussi un vecteur normal à  $(d)$  et  $\vec{u}(5; 2)$  est un vecteur directeur de cette dernière.

• Équation de  $(d)$  en utilisant le produit scalaire :

$$M(x; y) \in (d) \Leftrightarrow \vec{CM} \perp \vec{v}(2; -5) \Leftrightarrow 2(x - 0) - 5(y - 3) = 0 \Leftrightarrow 2x - 5y + 15 = 0.$$

• Équation de  $(d)$  en utilisant le déterminant :

$$M(x; y) \in (d) \Leftrightarrow \det(\vec{CM}; \vec{u}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - 0 & 5 \\ y - 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2x - 5(y - 3) = 0 \Leftrightarrow 2x - 5y + 15 = 0.$$

• Recherche d'une équation de la forme  $ax + by + c = 0$  :  
 $\vec{u}(5 ; 2)$  est un vecteur directeur de  $(d)$ . Une équation de  $(d)$  est de la forme  $-2x + 5y + c = 0$ .  
 Or  $-2x_c + 5y_c + c = 0 \Leftrightarrow c = -15$  ; donc une équation de  $(d)$  est  $-2x + 5y - 15 = 0$ .

**69 1. a.** Une équation cartésienne du cercle de centre  $C(a ; b)$  et de rayon  $r$  est  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ .

**b.**  $A$  et  $B$  désignent deux points donnés du plan et  $(\mathcal{C})$  le cercle de diamètre  $[AB]$ . On se donne un point  $M(x ; y)$  quelconque du plan et on exprime les coordonnées de  $\vec{AM}$  et  $\vec{BM}$  en fonction de  $x$  et  $y$ , puis on écrit une

condition nécessaire et suffisante à l'appartenance de  $M$  à  $(\mathcal{C})$  :  $M(x ; y) \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow \vec{AM} \cdot \vec{BM} = 0$   
 $\Leftrightarrow (x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0$ .

**2. a.** Une équation de  $(\mathcal{C})$  est  $(x - x_A)^2 + (y - y_B)^2 = (\sqrt{5})^2$   
 $\Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$ .

**b.**  $M(x ; y)$  est un point quelconque du plan ;  
 $\vec{BM}(x + 1 ; y - 3)$  et  $\vec{CM}(x - 4 ; y - 2)$ ,  
 $M(x ; y) \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow \vec{BM} \cdot \vec{CM} = 0$   
 $\Leftrightarrow (x + 1)(x - 4) + (y - 3)(y - 2) = 0$   
 $\Leftrightarrow x^2 - 4x + x - 4 + y^2 - 2y - 3y + 6 = 0$   
 $\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 3x - 5y + 2 = 0$ .

## Se tester

**70 à 73** Voir Manuel de l'élève page 258.

## Exercices d'approfondissement

**74 a.**  $x^2 + y^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + y^2 = 0$   
 $\Leftrightarrow (x - 3)^2 - 9 + y^2 = 0$   
 $\Leftrightarrow (x - 3)^2 + y^2 = 9$  donc  $C(3 ; 0)$

est le centre de  $(\mathcal{C})$ .

**b.**  $B \in (\mathcal{C})$  donc  $x_B^2 + y_B^2 - 6x_B = 0$  ;  
 $1^2 + y_B^2 - 6 \times 1 = 0$  ;  $y_B^2 = 5$  ;  $y_B = -\sqrt{5}$ .

**c.**  $\vec{CB}(-3 ; -\sqrt{5})$  est un vecteur orthogonal à la tangente  $(T)$  à  $(\mathcal{C})$  en  $B$  donc  $\vec{u}(\sqrt{5} ; -3)$  est un vecteur directeur de  $(T)$ .

**d.** Une équation cartésienne de  $(T)$  est de la forme  $3x + \sqrt{5}y + c = 0$  ;  
 or  $3x_B + \sqrt{5}y_B + c = 0 \Leftrightarrow 3 + \sqrt{5}(-\sqrt{5}) + c = 0$   
 $\Leftrightarrow 3 - 5 + c = 0 \Leftrightarrow c = 2$  donc une équation de  $(T)$  est  $3x + \sqrt{5}y + 2 = 0$

**75**  $\vec{AB}(3 ; -1)$ . Une équation de  $(AB)$  est de la forme  $x + 3y + c = 0$  or  $x_A + 3y_A + c = 0 \Leftrightarrow -1 + 9 + c = 0 \Leftrightarrow c = -8$  donc une équation de  $(AB)$  est  $x + 3y - 8 = 0$ .

Les coordonnées du point d'intersection de  $(AB)$  avec  $(d)$  sont les solutions de :

$$\begin{cases} y = -2x + 3 \\ x + 3y - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x + 3 \\ x + 3(-2x + 3) - 8 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x + 3 \\ -5x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{13}{5} \\ x = \frac{1}{5} \end{cases}.$$

donc les coordonnées du point d'intersection des droites  $(d)$  et  $(AB)$  sont  $(\frac{1}{5} ; \frac{13}{5})$ .

**76 1.**  $(\mathcal{C}_0) : x^2 + y^2 + 2y = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y + 1)^2 - 1 = 0$   
 $\Leftrightarrow x^2 + (y + 1)^2 = 1$  donc  $(\mathcal{C}_0)$  est le cercle de centre  $A(0 ; -1)$  et de rayon 1.

$(\mathcal{C}_1) : x^2 + y^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 = 0$   
 $\Leftrightarrow (x - 1)^2 - 1 + y^2 = 0$   
 $\Leftrightarrow (x - 1)^2 + y^2 = 1$  donc  $(\mathcal{C}_1)$  est le cercle de centre  $B(1 ; 0)$  et de rayon 1.

**2. a.**  $x^2 + y^2 - 2mx - 2(m - 1)y + 2m^2 - 2m = 0$   
 $\Leftrightarrow x^2 - 2mx + y^2 - 2(m - 1)y + 2m^2 - 2m = 0$   
 $\Leftrightarrow (x - m)^2 - m^2 + (y - (m - 1))^2 - (m - 1)^2 + 2m^2 - 2m = 0$   
 $\Leftrightarrow (x - m)^2 + (y - (m - 1))^2 = (m - 1)^2 - m^2 + 2m$   
 $\Leftrightarrow (x - m)^2 + (y - (m - 1))^2 = m^2 - 2m + 1 - m^2 + 2m$   
 $\Leftrightarrow (x - m)^2 + (y - (m - 1))^2 = 1$  or  $1 \geq 0$  donc, pour tout nombre réel  $m$ ,  $(\mathcal{C}_m)$  est un cercle.

**b.** D'après **a.**  $C_m(m ; m - 1)$  et  $R_m = 1$ .

3. Les coordonnées  $(x; y)$  du centre  $C_m$  de  $(\mathcal{C}_m)$  sont telles que :

$$\begin{cases} x = m \\ y = m - 1 \end{cases} \quad \text{avec } m \in \mathbb{R}$$

qui est une représentation paramétrique de la droite passant par  $I(0; -1)$  et de vecteur directeur  $\vec{u}(1; 1)$ .

$$4. C_m = K \Leftrightarrow \begin{cases} m = -3 \\ m - 1 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -3 \\ m = -4 \end{cases}$$

donc il n'existe pas de valeur de  $m$  pour laquelle le centre de  $(\mathcal{C}_m)$  est  $K(-3; -5)$ .

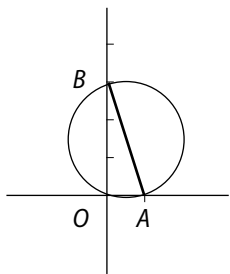
77 a.  $\vec{AB}(-5; 1), \vec{AM}(x-3; y+1)$ .

$$\begin{aligned} \vec{AM} \cdot \vec{AB} = m &\Leftrightarrow -5(x-3) + 1(y+1) = m \\ &\Leftrightarrow -5x + 15 + y + 1 = m \\ &\Leftrightarrow -5x + y + 16 - m = 0. \end{aligned}$$

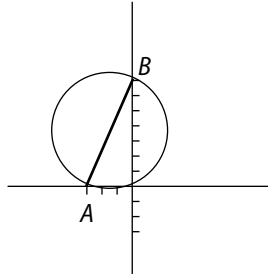
b. L'ensemble des points  $M(x; y)$  dont les coordonnées vérifient  $(E_\rho)$  est la droite passant par  $A$  et perpendiculaire à  $(AB)$ .

78 1.  $M(x; y) \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow \vec{AM} \cdot \vec{BM} = 0$   
 $\Leftrightarrow (x-a)(x-0) + (y-0)(y-b) = 0$   
 $\Leftrightarrow x^2 - ax + y^2 - by = 0$ .

2. a.



b.



3.  $0^2 - a \times 0 + 0^2 - b \times 0 = 0$  donc  $O$  appartient à  $(\mathcal{C})$  pour tous  $a$  et  $b$ .

Pour tous  $a$  et  $b$  tels que  $a + b = 4$ ,

$$\begin{aligned} 2^2 - a \times 2 + 2^2 - b \times 2 &= 4 - 2a + 4 - 2b \\ &= 8 - 2(a + b) = 8 - 2 \times 4 = 0 \end{aligned}$$

donc  $C(2; 2)$  appartient à  $(\mathcal{C})$  pour tous  $a$  et  $b$  tels que  $a + b = 4$ .

$$\begin{aligned} 4. x^2 - ax + y^2 - by = 0 &\Leftrightarrow \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{4} \end{aligned}$$

donc  $I\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}\right)$  est le centre de  $(\mathcal{C})$ .

Lorsque  $a$  et  $b$  varient tels que  $a + b = 4$  on a :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{a}{2} \\ y_1 = \frac{4-a}{2} \end{cases} \quad \text{avec } a \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}a \\ y_1 = 2 - \frac{1}{2}a \end{cases} \quad \text{avec } a \in \mathbb{R}$$

donc l'ensemble des centres des cercles  $(\mathcal{C})$  lorsque  $a$  et  $b$  varient est la droite passant par  $J(0; 2)$  et de vecteur directeur  $\vec{u}\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$  ou  $\vec{v}(1; -1)$ .

$$5. CA = \sqrt{(a-2)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{(a-2)^2 + 4}.$$

$$\begin{aligned} CB &= \sqrt{(0-2)^2 + (b-2)^2} = \sqrt{4 + (4-a-2)^2} \\ &= \sqrt{4 + (2-a)^2} = \sqrt{4 + (a-2)^2} = CA. \end{aligned}$$

Or  $C$  appartient au cercle de diamètre  $[AB]$  donc le triangle  $ABC$  est rectangle en  $C$  et son aire est égale à :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} CA \times CB &= \frac{1}{2} CA^2 = \frac{1}{2} [(a-2)^2 + 4] \\ &= \frac{1}{2} (a^2 - 4a + 4 + 4) = \frac{1}{2} a^2 - 2a + 4. \end{aligned}$$

L'aire du triangle rectangle  $OAB$  est égale à :

$$\frac{1}{2} OA \times OB = \frac{1}{2} ab.$$

$$\frac{1}{2} ab = \frac{1}{2} a(4-a) = -\frac{1}{2} a^2 + 2a.$$

L'aire du quadrilatère est égale à :

$$\frac{1}{2} a^2 - 2a + 4 - \frac{1}{2} a^2 + 2a = 4$$

79 L'expression de la fonction  $f$  convertissant les degrés Celsius en degrés Fahrenheit est de la forme  $f(x) = ax + b$ . On sait qu'elle vérifie :

$$\begin{aligned} \begin{cases} f(0) = 32 \\ f(100) = 212 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} b = 32 \\ 100a + b = 212 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b = 32 \\ 100a = 180 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 32 \\ a = \frac{180}{100} = \frac{9}{5} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{donc } f(x) = \frac{9}{5}x + 32.$$

Les deux thermomètres indiquent la même valeur pour une température  $x$  en degrés Celsius vérifiant

$$\begin{aligned} f(x) = x &\Leftrightarrow \frac{9}{5}x + 32 = x \Leftrightarrow \frac{9}{5}x - x = 32 \Leftrightarrow \frac{4}{5}x = 32 \\ &\Leftrightarrow x = 32 \times \frac{5}{4} \Leftrightarrow x = 40. \end{aligned}$$

80 a. Conjecture :  $(\mathcal{C})$  et  $(d)$  ont un seul point commun.

b.  $M(x; y)$  est un point d'intersection de  $(\mathcal{C})$  et  $(d)$  si et seulement si :

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -3,55 - 2t \\ x^2 + y^2 + 4x + 6y - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -3,55 - 2t \\ (3+t)^2 + (-3,55-2t)^2 + 4(3+t) + 6(-3,55-2t) - 5 = 0 \end{cases}$$

La dernière équation est équivalente à :  $t^2 + 6t + 9 + 12,6025 + 14,1t + 4t^2 + 12 + 4t - 21,3 - 12t - 5 = 0$   
 $\Leftrightarrow 5t^2 + 12,1t + 7,3025 = 0$ . En représentant graphiquement la fonction  $f \mapsto 5x^2 + 12,1x + 7,3025$ , on observe que sa courbe coupe l'axe des abscisses en deux points distincts.

Donc  $(\mathcal{C})$  et  $(d)$  ont deux points d'intersections et la conjecture est fautive.

**81 1. a.**  $OM = \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x} = \sqrt{1} = 1$  donc  $M$  appartient au cercle  $(\mathcal{C})$  de centre  $O$  et de rayon 1.

**b.** Si  $N \in (\mathcal{C})$  alors  $ON = 1$  et il existe  $t \in ]-\pi; \pi]$  tel que  $\text{mes}(\vec{i}, \vec{ON}) = t$  par conséquent on aurait :

$$\begin{cases} x_N = ON \cos t = \cos t \\ y_N = ON \sin t = \sin t \end{cases}$$

**2.** D'après **1. a.** et **1. b.**, l'ensemble des points  $M(x; y)$  vérifiant  $(E)$  est le cercle de centre  $O$  et de rayon 1.

**82 1. a.** Une équation de  $(\mathcal{C})$  est  $(x-2)^2 + (y-1)^2 = \sqrt{5}^2$   
 $\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = 5 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$ .

**b.**  $\vec{AB}(-10; -5)$  est un vecteur normal à  $(d_3)$  donc  $\vec{u}(5; -10)$  est un vecteur directeur à  $(d_3)$ , or  $\vec{v}(1; -2)$  est colinéaire à  $\vec{u}(5; -10)$ .

Une équation de  $(d_3)$  est de la forme  $2x + y + c = 0$  vérifiant  $2x_c + y_c + c = 0, 4 + 1 + c = 0, c = -5$  donc une équation cartésienne de  $(d_3)$  est  $2x + y - 5 = 0$ .

**c.** Une équation de  $(AB)$  est  $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ .

Les coordonnées du système :

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \\ 2x + y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \\ 2x + \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2}x - \frac{5}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{5}{2} \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = 1 \end{cases}$$

donc  $(AB)$  et  $(d_3)$  se coupent en  $K(1; 3)$ .

$K \in (\mathcal{C})$ . En effet  $x_K^2 + y_K^2 - 4x_K - 2y_K = 1 + 9 - 4 - 6 = 0$ .  
 $(AB)$  est perpendiculaire à  $(d_3)$  en un point  $K$  appartenant à  $(\mathcal{C})$  donc  $(AB)$  est tangente à  $(\mathcal{C})$  en  $K(1; 3)$ .

**2.**  $I(1; -1) \in (\mathcal{C})$ . En effet

$$x_I^2 + y_I^2 - 4x_I - 2y_I = 1 + 1 - 4 + 2 = 0.$$

La tangente  $(d_1)$  à  $(\mathcal{C})$  en  $I$  a pour vecteur normal  $\vec{CI}(-1; -2)$  donc a pour vecteur directeur  $\vec{u}(2; -1)$ . Une équation cartésienne de  $(d_1)$  est de la forme  $x + 2y + c = 0$  or  $x_I + 2y_I + c = 0, c = 1$  donc une équation de  $(d_1)$  est  $x + 2y + 1 = 0$ .

$B \in (d_1)$ . En effet  $x_B + 2y_B + 1 = -3 + 2 + 1 = 0$ .

**3.**  $D \in (\mathcal{C})$  et  $\vec{AD} \cdot \vec{CD} = -3 \times 2 + (-6)(-1) = -6 + 6 = 0$  donc  $(AB)$  est la tangente à  $(\mathcal{C})$  en  $D$ .

**4.**  $\vec{u}_1(-2; 1)$  et  $\vec{AD}(-3; -6)$  sont respectivement deux vecteurs directeurs de  $(d_1)$  et  $(d_2)$  et  $\vec{u}_1 \cdot \vec{AD} = -2(-3) + (-6) \times 1 = 6 - 6 = 0$ ; donc  $(d_1)$  et  $(d_2)$  sont perpendiculaires et, par conséquent, le triangle  $AJB$  est rectangle en  $J$ .

Une équation du cercle circonscrit au triangle rectangle  $AJB$  est celle du cercle  $(\mathcal{C})$  de diamètre  $[AB]$  :

$$\begin{aligned} M(x; y) \in (\mathcal{C}) &\Leftrightarrow \vec{AM} \cdot \vec{BM} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-7)(x+3) + (y-6)(y-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 3x - 7x - 21 + y^2 - y - 6y + 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x - 7y - 15 = 0. \end{aligned}$$

**83 1.**  $\vec{AM} = t \vec{v}_1 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 4t \\ y - 3 = 2t \end{cases}$  avec  $t \in \mathbb{R}$

donc le lieu de la particule  $P_1$  est la droite de représentation paramétrique  $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 3 + 2t \end{cases}$  avec  $t \in \mathbb{R}$ .

**2.** La position  $M$  de la particule  $P_2$  à l'instant  $t$  vérifie

$$\vec{BM} = t \vec{v}_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 = t \\ y - 1 = 2t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

donc  $(d_2)$  est la droite de représentation paramétrique  $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$  avec  $t \in \mathbb{R}$ .

**a.**  $\vec{v}_1(4; 2)$  et  $\vec{v}_2(1; 2)$  sont respectivement des vecteurs directeurs de  $(d_1)$  et  $(d_2)$ .

Or  $\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 \times 2 - 1 \times 2 = 8 - 2 = 6 \neq 0$  donc  $(d_1)$  et  $(d_2)$  sont sécantes.

$M(x; y)$  est le point d'intersection de  $(d_1)$  et  $(d_2)$  si et seulement si :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 1 + 4t = 3 + t' \\ 3 + 2t = 1 + 2t' \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -2 + 4t = t' \\ 2 + 2t - 2t' = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t' = -2 + 4t \\ 2 + 2t - 2(-2 + 4t) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = -2 + 4t \\ -6t + 6 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t' = -2 + 4 \times 1 \\ t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = 2 \\ t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 5 \end{cases} \end{aligned}$$

donc  $(d_1)$  et  $(d_2)$  se coupent en  $C(5; 5)$ .

**b.** Les particules  $P_1$  et  $P_2$  sont en  $C(5; 5)$  respectivement aux instants 1 et 2 donc il ne peut pas y avoir collision.

**3.**  $B'(a; b)$  est la position de  $P_2$  à l'instant  $t = 0$ . La position de  $P_2$  à l'instant  $t$  est  $\begin{cases} x = a + t \\ y = b + 2t \end{cases}$  avec  $t \in \mathbb{R}$ .

Il y a collision entre les particules  $P_1$  et  $P_2$  si et seulement si :

$$\begin{cases} a + t = 1 + 4t \\ b + 2t = 3 + 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 + 3t \\ b = 3 \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

donc il y a collision si à l'instant  $t = 0$  la particule  $P_2$  se trouve sur la droite de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 3 \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

**84 a.**  $M(m; m)$ ,  $I(0; m)$ ,  $J(1; m)$ ,  $K(m; 0)$ ,  $L(m; 1)$ .

**b.**  $\vec{IL}(m; 1 - m)$ ,  $\vec{JK}(m - 1; -m)$ .

$(IL)$  et  $(JK)$  sont parallèles si et seulement si  $\det(\vec{IL}; \vec{JK}) = 0$ ,

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} m & m-1 \\ 1-m & -m \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow m(-m) - (m-1)(1-m) = 0$$

$$\Leftrightarrow -m^2 + m^2 - 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow -2m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}.$$

**c.** Une représentation paramétrique :

• de  $(IL)$  est  $\begin{cases} x = mt \\ y = m + (1 - m)t \end{cases}$  avec  $t \in \mathbb{R}$ ;

• de  $(JK)$  est  $\begin{cases} x = m + (m - 1)t' \\ y = -mt' \end{cases}$  avec  $t' \in \mathbb{R}$ .

Pour  $m \neq \frac{1}{2}$ ,  $M(x; y)$  est le point d'intersection de  $(IL)$  et

$(JK)$  si et seulement si :  $\begin{cases} mt = m + (m - 1)t' \\ m + (1 - m)t = -mt' \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 + \frac{m-1}{m}t' \\ m + (1 - m)\left[1 + \frac{m-1}{m}t'\right] = -mt' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 + \frac{m-1}{m}t' \\ m + 1 - m + \frac{(1 - m)(m-1)}{m}t' = -mt' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 + \frac{m-1}{m}t' \\ 1 = -\frac{(1 - m)(m-1)}{m}t' - mt' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 + \frac{m-1}{m}t' \\ 1 = \frac{m^2 - 2m + 1}{m}t' - \frac{m^2}{m}t' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 + \frac{m-1}{m}t' \\ 1 = \frac{-2m+1}{m}t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 + \frac{m-1}{m}t' \\ t' = \frac{m}{-2m+1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = m + (m-1)\frac{m}{-2m+1} \\ y = -m\frac{m}{-2m+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-m^2}{-2m+1} \\ y = \frac{-m^2}{-2m+1} \end{cases}$$

L'équation réduite de la droite  $(AC)$  est  $y = x$  or les coordonnées du point,  $M$ , d'intersection de  $(IL)$  et  $(JK)$  vérifient  $y_M = x_M$ , donc  $M$  appartient à  $(AC)$ .

**85 1.**  $\begin{cases} x = -3 + 5t \\ y = 1 + 3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - (-3) = 5t \\ y - 1 = 3t \end{cases}$   
 $\Leftrightarrow \vec{AM} = t\vec{AB}$  avec  $M(x; y)$ .

**a.** Il s'agit de la demi-droite  $[AB)$ .

**b.** Il s'agit du segment  $[AB]$ .

**c.** Il s'agit de la demi-droite  $(AB]$ .

**2. a.**  $[AI) = [AB)$ . **b.**  $[BI) = [BA)$ .

**c.** Une représentation paramétrique de  $[AI)$  est :

$$\begin{cases} x = -3 + 5t \\ y = 1 + 3t \end{cases} \text{ avec } t \in \left[0; \frac{1}{2}\right).$$

**d.** Une représentation paramétrique de  $[BI)$  est :

$$\begin{cases} x = -3 + 5t \\ y = 1 + 3t \end{cases} \text{ avec } t \in \left[\frac{1}{2}; 1\right).$$

**86 a.**  $x^2 + y^2 - 2x - 2k = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 - 2k = 0$   
 $\Leftrightarrow (x - 1)^2 - 1 + y^2 - 2k = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + y^2 = 2k + 1$ .

Pour  $k > -\frac{1}{2}$  on a  $2k + 1 > 0$  donc  $(\mathcal{C}_k)$  est le cercle de centre  $C(1; 0)$  et de rayon  $\sqrt{2k + 1}$ .

Pour  $k = -\frac{1}{2}$  on a  $2k + 1 = 0$  donc  $(\mathcal{C}_k)$  est  $\{C(1; 0)\}$ .

Pour  $k < -\frac{1}{2}$  on a  $2k + 1 < 0$  donc  $(\mathcal{C}_k)$  est vide.

**b.** Si  $k \neq k'$  alors  $2k + 1 \neq 2k' + 1$  donc  $(\mathcal{C}_k)$  et  $(\mathcal{C}_{k'})$  sont deux cercles de même centre et de rayon différent, ils sont donc disjoints.

**87 1.** L'équation réduite de  $(d)$  est  $y = 2x$ .

Le rayon du cercle  $(\mathcal{C})$  de centre  $C(-3; 4)$  est :  $CO = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$  donc une équation cartésienne de  $(\mathcal{C})$  est  $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$

$$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = 25$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0.$$

$$\begin{cases} y = 2x \\ x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x^2 + (2x)^2 + 6x - 8 \times 2x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x^2 + 4x^2 - 10x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ 5x^2 - 10x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x(5x - 10) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x = 0 \text{ ou } x = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$  ou

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$$

donc  $(d)$  et  $(\mathcal{C})$  se coupent en  $O(0; 0)$  et en  $B(2; 4)$ .

2. Intersection de  $(\mathcal{C})$  avec l'axe des abscisses :

$$\begin{cases} y = 0 \\ x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 + 6x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x(x + 6) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \text{ ou } x = -6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$  ou

$$\begin{cases} x = -6 \\ y = 0 \end{cases}$$

donc les points d'intersection de  $(\mathcal{C})$  avec l'axe des abscisses sont  $O(0; 0)$  et  $D(-6; 0)$ .

Intersection de  $(\mathcal{C})$  avec l'axe des ordonnées :

$$\begin{cases} x = 0 \\ x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y^2 - 8y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y(y - 8) = 0 \end{cases}$$

et on trouve les points  $O(0; 0)$  et  $E(0; 8)$ .

3. a.  $x_A^2 + y_A^2 + 6x_A - 8y_A = (-6)^2 + 8^2 + 6(-6) - 8 \times 8 = 36 + 64 - 36 - 64 = 0$

donc  $A \in (\mathcal{C})$ .

b.  $\vec{CA}(-3; -4)$  est un vecteur orthogonal à la tangente  $(T)$  en  $A$  à  $(\mathcal{C})$  donc  $\vec{u}(4; -3)$  est un vecteur directeur de  $(T)$ .

Une équation cartésienne de  $(T)$  est de la forme  $3x + 4y + c = 0$ .

$$\text{Or } 3x_A + 4y_A + c = 0 \Leftrightarrow -18 + c = 0 \Leftrightarrow c = 18.$$

Donc une équation de  $(T)$  est  $3x + 4y + 18 = 0$ .

88 a.  $\vec{AB}(2; 0), \vec{AC}(1; \sqrt{3})$ .

$$\|\vec{AB}\| = \sqrt{2^2 + 0^2} = 2 \text{ et } \|\vec{AC}\| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2.$$

$\|\vec{AB}\| = \|\vec{AC}\|$  donc  $\vec{AB} + \vec{AC}(3; \sqrt{3})$  est un vecteur directeur de la bissectrice  $(d)$  de l'angle  $\widehat{BAC}$ .

Une représentation paramétrique de  $(d)$  est

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = \sqrt{3}t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

b. Le point,  $I$ , de  $(d)$  d'abscisse 5 a une ordonnée  $y$  vérifiant :

$$\begin{cases} 1 + 3t = 5 \\ y = \sqrt{3}t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{4}{3} \\ y = \frac{4}{3}\sqrt{3} \end{cases}$$

$I$  est un point de la bissectrice de l'angle  $\widehat{BAC}$  donc il est à égale distance de  $(AB)$  et  $(AC)$ , par conséquent le cercle de centre  $I(5; \frac{4}{3}\sqrt{3})$  et de rayon égal à la

distance de  $I$  à  $(AB)$ , égal à  $\frac{4}{3}\sqrt{3}$  est tangent à  $(AB)$  et à  $(AC)$ . Ce cercle admet pour équation :

$$(x - 5)^2 + \left(y - \frac{4}{3}\sqrt{3}\right)^2 = \left(\frac{4}{3}\sqrt{3}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 + y^2 - \frac{8}{3}\sqrt{3}y + \left(\frac{4}{3}\sqrt{3}\right)^2 = \left(\frac{4}{3}\sqrt{3}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 10x - \frac{8}{3}\sqrt{3}y + 25 = 0.$$

c. L'intersection de  $(\mathcal{C})$  avec  $(AB)$  est le point  $D(5; 0)$ .

Intersection de  $(\mathcal{C})$  avec  $(AC)$  :

Une représentation paramétrique de  $(AC)$  est :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = \sqrt{3}t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = \sqrt{3}t \\ x^2 + y^2 - 10x - \frac{8}{3}\sqrt{3}y + 25 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + t \\ y = \sqrt{3}t \\ (1 + t)^2 + (\sqrt{3}t)^2 - 10(1 + t) - \frac{8}{3}\sqrt{3} \times \sqrt{3}t + 25 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + t \\ y = \sqrt{3}t \\ 4t^2 - 16t + 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + t \\ y = \sqrt{3}t \\ t^2 - 4t + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + t \\ y = \sqrt{3}t \\ (t - 2)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2\sqrt{3} \\ t = 2 \end{cases}$$

Donc l'intersection de  $(\mathcal{C})$  avec  $(AC)$  est le point  $E(3; 2\sqrt{3})$ .

**89**  $\vec{BA}(3; 4), \vec{BC}(3; -4), \vec{CA}(0; 8)$ .

$BA = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5, BC = 5$  et  $CA = 8$  donc les vecteurs  $\frac{1}{5}\vec{BA}, \frac{1}{5}\vec{BC}$  et  $\frac{1}{8}\vec{CA}$  ont la même norme 1 ;

par conséquent les vecteurs  $\frac{1}{5}\vec{BA} + \frac{1}{5}\vec{BC} \left(\frac{6}{5}; 0\right)$  et  $\frac{1}{8}\vec{CA} + \frac{1}{5}\vec{CB} \left(\frac{-3}{5}; \frac{9}{5}\right)$  sont respectivement des vecteurs directeurs des bissectrices des angles  $\widehat{ABC}$  et  $\widehat{ACB}$  et sont colinéaires respectivement à  $\vec{u}(1; 0)$  et  $\vec{v}(1; -3)$ .

Une représentation paramétrique de la bissectrice de  $\widehat{ACB}$  est  $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -5 - 3t \end{cases}$  avec  $t \in \mathbb{R}$ .

L'équation réduite de la bissectrice de l'angle  $\widehat{ABC}$  est  $y = -1$ .

Les coordonnées du point,  $I$ , intersection de ces deux bissectrices sont les solutions de :

$$\begin{cases} y = -1 \\ x = 3 + t \\ y = -5 - 3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 3 + t \\ -1 = -5 - 3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = \frac{5}{3} \\ t = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

donc  $I\left(\frac{5}{3}; -1\right)$ .

La distance du point  $I\left(\frac{5}{3}; -1\right)$  à la droite  $(AC)$  est égale à  $3 - \frac{5}{3} = \frac{4}{3}$  (voir graphique).

Une équation du cercle inscrit dans le triangle  $ABC$  est

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + (y + 1)^2 &= \left(\frac{4}{3}\right)^2 \\ \Leftrightarrow x^2 - \frac{10}{3}x + \frac{25}{9} + y^2 + 2y + 1 &= \frac{16}{9} \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 - \frac{10}{3}x + 2y + 2 &= 0. \end{aligned}$$

**90** **1.**  $\vec{HM} \cdot \vec{n} = (x_0 - x_H) a + (y_0 - y_H) b$   
 $= ax_0 - ax_H + by_0 - by_H$   
 $= ax_0 + by_0 - (ax_H + by_H)$   
 $= ax_0 + by_0 - (-c)$  car  $ax_H + by_H + c = 0$

puisque  $H$  appartient à  $(d)$ .

Donc  $\vec{HM} \cdot \vec{n} = ax_0 + by_0 + c$ .

**2.**  $\vec{HM} \cdot \vec{n} = \|\vec{HM}\| \times \|\vec{n}\| \times \cos(\widehat{HM, \vec{n}})$  or  $\vec{HM}$  et  $\vec{n}$  sont colinéaires donc  $\cos(\widehat{HM, \vec{n}}) = 1$  ou  $\cos(\widehat{HM, \vec{n}}) = -1$  et  $|\cos(\widehat{HM, \vec{n}})| = 1$ . Par conséquent on a :

$$|\vec{HM} \cdot \vec{n}| = \|\vec{HM}\| \times \|\vec{n}\| \times \cos(\widehat{HM, \vec{n}}) = HM \cdot \|\vec{n}\|.$$

**3.** D'après **2.** on a  $HM = \frac{\vec{HM} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|}$  et, en utilisant le résultat du **1.**, on a  $HM = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ .

**4. a.** La distance de  $M(-3; 4)$  à la droite d'équation  $2x - 5y + 1 = 0$  est égale à :

$$\frac{|2x_M - 5y_M + 1|}{\sqrt{2^2 + (-5)^2}} = \frac{|-6 - 20 + 1|}{\sqrt{29}} = \frac{25}{\sqrt{29}} = \frac{25\sqrt{29}}{29}.$$

**b.**  $x^2 + y^2 + 4x - 21 = 0 \Leftrightarrow (x + 2)^2 - 4 + y^2 - 21 = 0$   
 $\Leftrightarrow (x + 2)^2 + y^2 = 25$

donc le cercle  $(\mathcal{C})$  est de centre  $C(-2; 0)$  et de rayon 5. La distance de  $C$  à la droite d'équation  $x + y - 4 = 0$  est égale à  $\frac{|x_C + y_C - 4|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|-6|}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} \neq 5$  donc le cercle  $(\mathcal{C})$  n'est pas tangent à la droite d'équation  $y = -x + 4$ .

**91 a.**  $\vec{AB}(-30; 20)$ . Une équation cartésienne de  $(AB)$  est de la forme  $20x + 30y + c = 0$  or  $20x_A + 30y_A + c = 0$  donne  $c = -600$  donc une équation de  $(AB)$  est :  $20x + 30y - 600 = 0$ .

La distance du centre  $C$  à la route est égale à :

$$\begin{aligned} \frac{|20 \times 11 + 30 \times 12 - 600|}{\sqrt{20^2 + 30^2}} &= \frac{|-20|}{\sqrt{1300}} = \frac{20}{10\sqrt{13}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}. \end{aligned}$$

Donc le rayon du stade doit être égal à :

$$\frac{2\sqrt{13}}{13} - 0,05 = \frac{2\sqrt{13} - 0,65}{13} \approx 0,505 \text{ km.}$$

**b.** La surface que le stade va occuper est égale à :

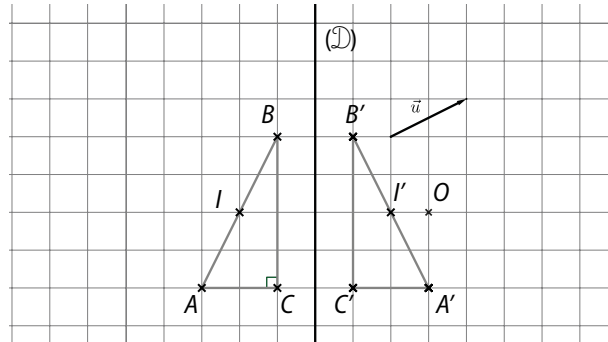
$$\pi \left( \frac{2\sqrt{13} - 0,65}{13} \right)^2 \text{ km}^2, \text{ soit environ } 0,8 \text{ km}^2.$$

# 6 Transformations du plan

## Activités d'introduction

### 1 Observer pour conjecturer

1. et 2. a.

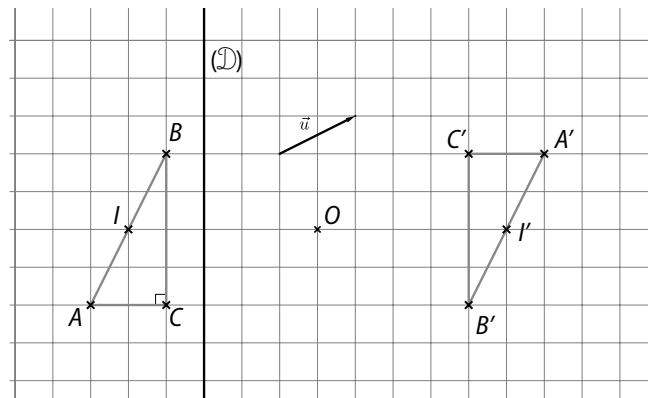


b. On conjecture que :

- les points  $A', B'$  et  $I'$  sont alignés et que  $I'$  est le milieu de  $[A'B']$  ;
- les segments et leurs symétriques ont même longueur ;
- si elle est perpendiculaire à  $(\mathcal{D})$ , alors une droite est sa propre symétrique, si elle est parallèle à  $(\mathcal{D})$ , alors une droite et sa droite symétrique sont parallèles, sinon, une droite et sa droite symétrique sont sécantes en un point de  $(\mathcal{D})$  ;
- $(A'B') \perp (B'C')$ .

c.  $\overrightarrow{A'B'}$  est le symétrique de  $\overrightarrow{AB}$  ;  $\overrightarrow{A'C'}$  est le symétrique de  $\overrightarrow{AC}$  ;  $(\widehat{A'B', A'C'})$  est le symétrique de l'angle orienté  $(\widehat{AB, AC})$ .  
Par une symétrie orthogonale, un angle orienté a pour symétrique un angle orienté de mesure opposée.

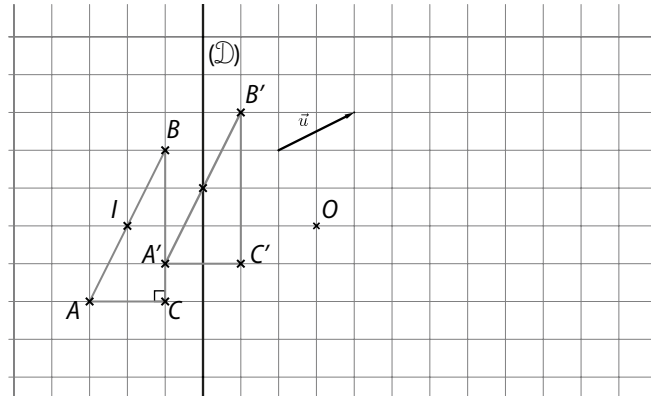
3.



On conjecture que :

- les points  $A', B', I'$  sont alignés et que  $I'$  est le milieu de  $[A'B']$  ;
- les segments et leurs symétriques ont même longueur ;
- les droites et leurs symétriques sont parallèles ;
- $(A'B') \perp (B'C')$  ;
- par une symétrie centrale, un angle orienté a pour symétrique un angle orienté de même mesure.

4.

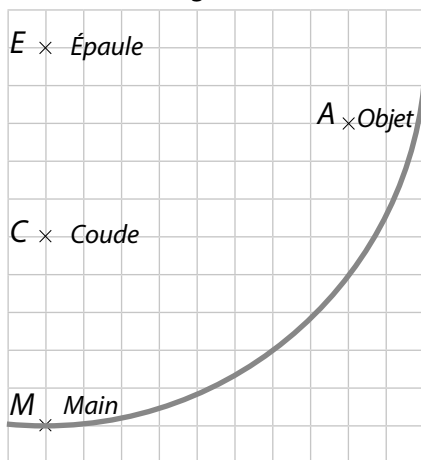


On conjecture que :

- les points  $A', B', I$  sont alignés et que  $I$  est le milieu de  $[A'B']$  ;
- les segments et leurs translatés ont même longueur ;
- les droites et leurs translatées sont parallèles ;
- $(A'B') \perp (B'C')$  ;
- par une translation, un angle orienté a pour translaté un angle orienté de même mesure.

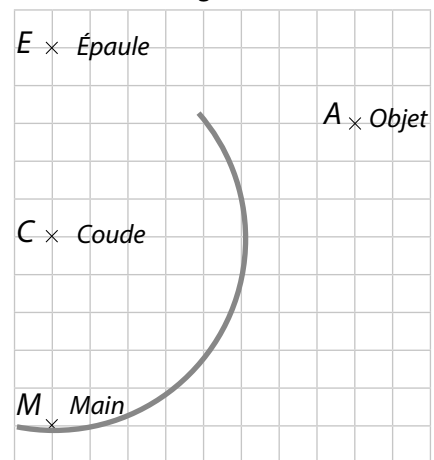
## 2 Le mouvement du robot

1. a. L'ensemble des lieux possibles pour la main du robot est l'arc de cercle gris.



b. Le robot ne peut saisir l'objet.

2. a. L'ensemble des lieux possibles pour la main du robot est l'arc de cercle gris.



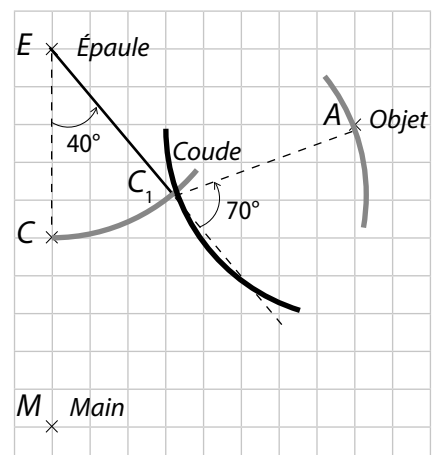
b. Le robot ne peut saisir l'objet.

3. a. À partir de l'objet, on trace un arc de cercle de rayon  $CM$  (en noir).

Puis, à partir de l'épaule, on trace un arc de cercle de rayon  $EC$ , il coupe l'arc bleu au point  $C_1$  (en gris).

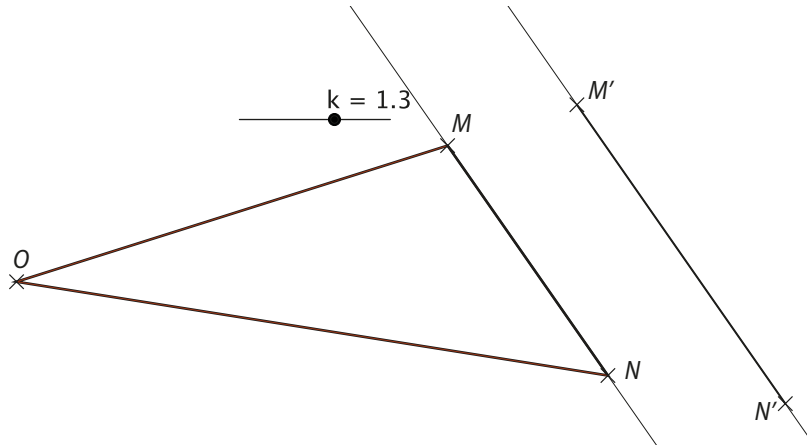
b. • La rotation autour de l'épaule a pour centre  $E$  et pour mesure d'angle  $+40^\circ$  environ ;

• La rotation autour du coude a pour centre  $C_1$  et pour mesure d'angle  $+110^\circ$  environ.



### 3 Observer à l'aide d'un logiciel

1. a à c.



d. On conjecture que  $(MN) \parallel (M'N')$ .

e. • Lorsque  $k = 0$ , les images de tous les points du plan sont égales à  $O$ .

• Lorsque  $k = 1$ , tous les points du plan sont leur propre image.

2. a.  $\vec{OM}' = k\vec{OM}$

b.  $\vec{OM}' = k\vec{OM}$  et  $\vec{ON}' = k\vec{ON}$ , donc  $\vec{M'N}' = \vec{M'O} + \vec{ON}' = k\vec{MO} + k\vec{ON} = k(\vec{MO} + \vec{ON}) = k\vec{MN}$

c. • Les vecteurs  $\vec{MN}$  et  $\vec{M'N}'$  sont colinéaires donc les droites  $(MN)$  et  $(M'N')$  sont parallèles.

•  $M'N' = |k| \times MN$  d'après la propriété de Thalès.

En effet,  $OM' = |k| \times OM$ ,  $ON' = |k| \times ON$  et  $(MN) \parallel (M'N')$ , donc  $|k| = \frac{OM'}{OM} = \frac{ON'}{ON} = \frac{M'N'}{MN}$ .

### 4 Caractérisation d'une homothétie

1. a. • Les droites  $(AB)$  et  $(A'B')$  sont parallèles, donc les vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{A'B}'$  sont colinéaires, ainsi il existe un nombre réel  $k$ , non nul, tel que  $\vec{A'B}' = k\vec{AB}$ .

• Si une telle homothétie existe, son rapport est  $k$ .

b. On note  $h$  l'homothétie du rapport  $k$  qui transforme  $A$  en  $A'$

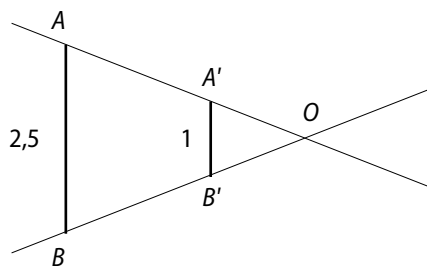
le point  $A'$  est unique et son centre noté  $O$ , est l'unique point tel que  $\vec{OA}' = k\vec{OA}$ .

le centre  $O$  et le rapport  $k$  sont uniques, donc  $h$  est unique.

c.  $\vec{A'B}' = k\vec{AB}$ .  $\vec{A'B}' = \vec{A'O} + \vec{OB}' = k\vec{AB} = k(\vec{AO} + \vec{OB}) = k\vec{AO} + k\vec{OB}$ .

Or  $\vec{OA}' = k\vec{OA}$ , donc  $\vec{OB}' = k\vec{OB}$ . Ainsi,  $B'$  est l'image de  $B$  par  $h$ .

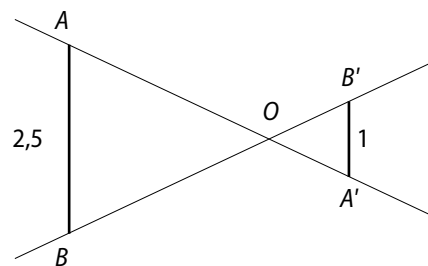
2. a.



$h$  homothétie de centre  $O$  et de rapport

$$k = \frac{1}{2,5} = 0,4.$$

b.

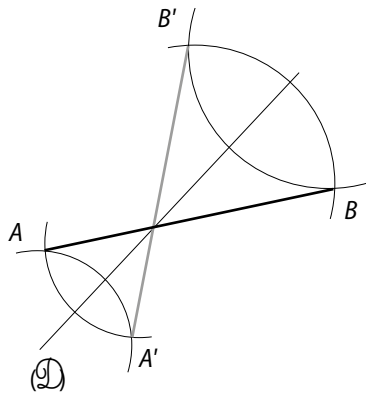


$h$  homothétie de centre  $O$  et de rapport

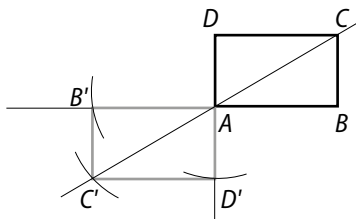
$$k = -\frac{1}{2,5} = -0,4.$$

## Savoir-faire

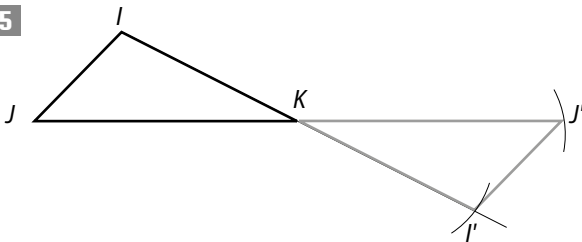
3



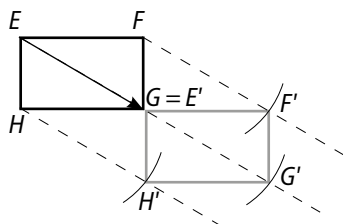
4



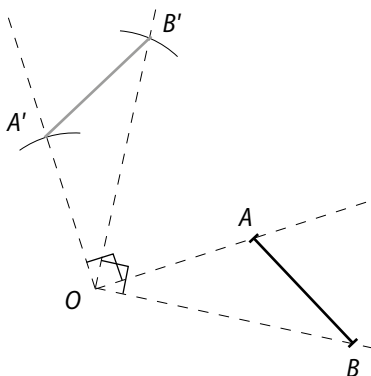
5



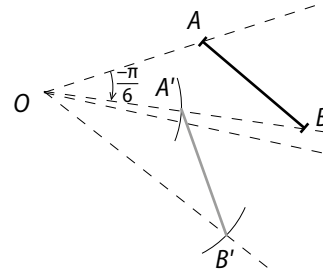
6



9 1. et 2.a.



1. et 2. b.



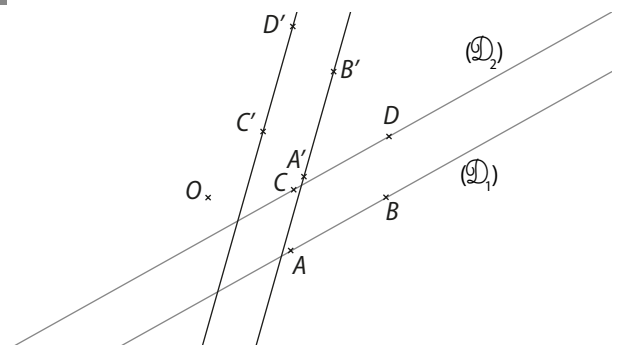
10 Une symétrie axiale (resp. une symétrie centrale ; resp. une translation) conserve l'alignement, or les points  $A, I, B$  sont alignés donc leurs images respectives  $A', I', B'$  sont alignées.

Une symétrie axiale (resp. une symétrie centrale ; resp. une translation) conserve les longueurs, donc  $IA = I'A, IB = I'B'$ .

Or,  $I$  est le milieu de  $[AB]$ , donc  $IA = IB$  d'où  $I'A = I'B'$ .

Ainsi, puisque  $I', A', B'$  sont alignés,  $I'$  est le milieu de  $[A'B']$ .

11



On sait que  $(\mathcal{D}_1) \parallel (\mathcal{D}_2)$ .

On place, comme sur le schéma quatre points  $A, B, C, D$  sur  $(\mathcal{D}_1)$  et  $(\mathcal{D}_2)$  de sorte que  $ABCD$  est un parallélogramme.

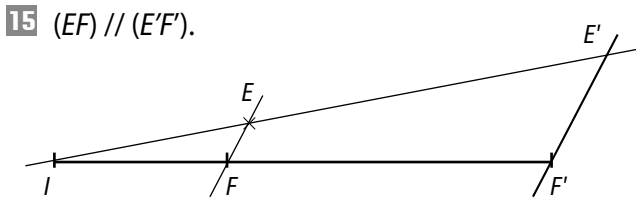
On note  $r$  la rotation et  $A' = r(A), B' = r(B), C' = r(C)$  et  $D' = r(D)$ .

Une rotation conserve les longueurs donc  $AB = A'B', BC = B'C', CD = C'D', DA = D'A'$ .

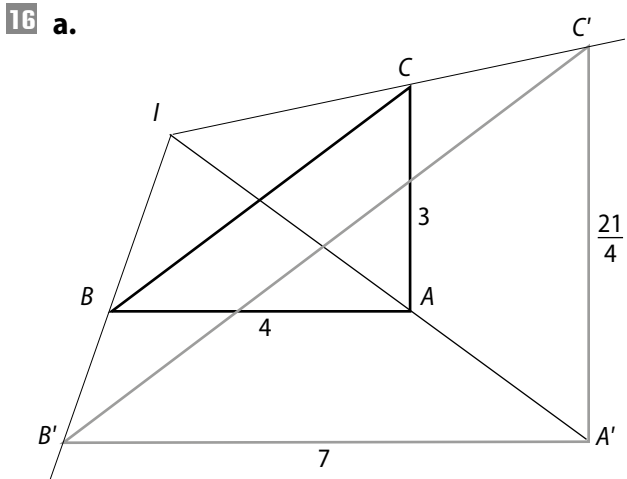
Or,  $ABCD$  est un parallélogramme donc  $AB = CD$  et  $BC = DA$ .

Ainsi,  $A'B' = C'D'$  et  $B'C' = D'A'$  donc  $A'B'C'D'$  est un parallélogramme.

Ainsi, les droites  $(A'B')$  et  $(C'D')$ , images des droites  $(\mathcal{D}_1)$  et  $(\mathcal{D}_2)$  par la rotation, sont parallèles.



$E'$  est l'image de  $E$  par cette homothétie



**b.** Une homothétie transforme un angle orienté en un angle orienté de même mesure, donc :

$$\text{mes}(\widehat{A'C', A'B'}) = \text{mes}(\widehat{AC, AB}) = \frac{\pi}{2}.$$

Donc le triangle  $A'B'C'$  est rectangle en  $A'$ .

**c.**  $\mathcal{A}_6(A'B'C') = \left(\frac{7}{4}\right)^2 \times \mathcal{A}_6(ABC)$

$$\mathcal{A}_6(A'B'C') = \frac{49}{16} \times \frac{3 \times 4}{2}$$

$$\mathcal{A}_6(A'B'C') = \frac{147}{8} \text{ cm}^2.$$

## Exercices d'entraînement

**17 a.**  $s_{(ES)}(I) = Q$ ;  $s_{(ES)}(P) = B$ ;

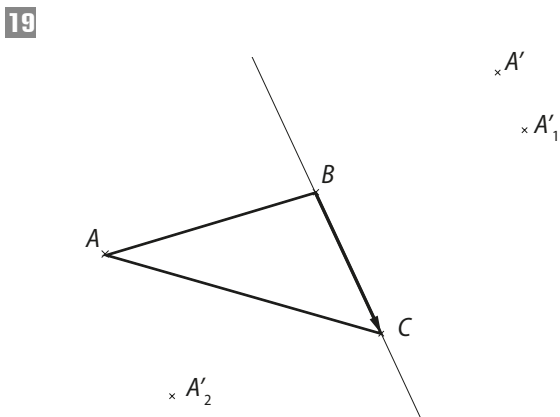
**b.**  $s_M(I) = Q$ ;  $s_M(P) = J$ ;

**c.**  $t_{\vec{FD}}(I) = A$ ;  $t_{\vec{FD}}(P) = L$ .

**18 a.** La symétrie orthogonale d'axe  $(SH)$ ;

**b.** la symétrie centrale de centre  $M$ ;

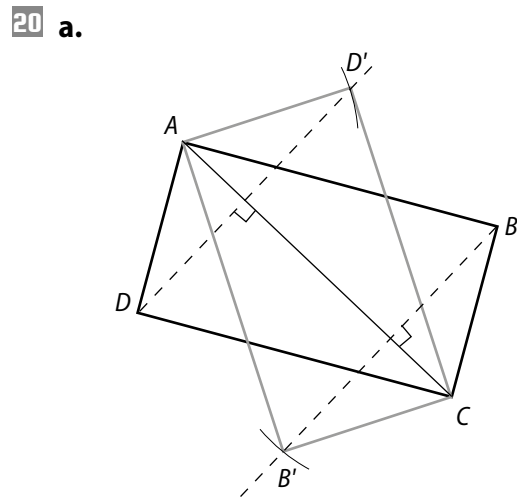
**c.** la translation de vecteur  $\vec{GN}$ .



$A'$  est l'image du point  $A$  par la symétrie orthogonale d'axe  $(BC)$ ;

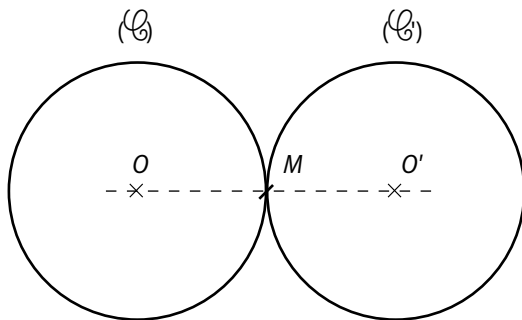
$A'_1$  est l'image du point  $A$  par la symétrie centrale de centre  $B$ ;

$A'_2$  est l'image du point  $A$  par la translation de vecteur  $\vec{CB}$ .

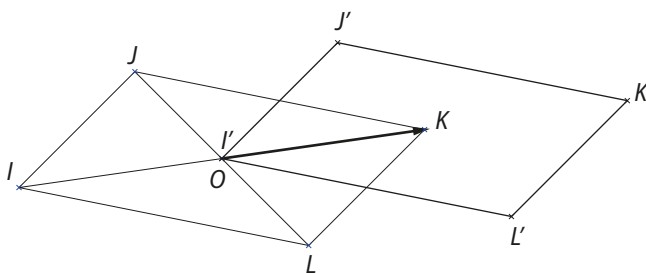


**b.** Si  $ABCD$  est un carré alors son image par la symétrie orthogonale d'axe  $(AC)$  est le carré  $ABCD$  lui-même.

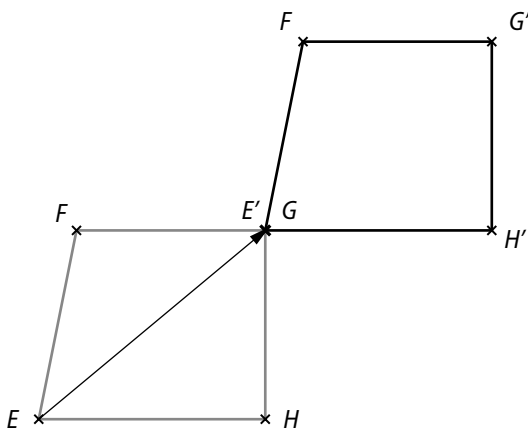
21



22



23



24 La symétrie orthogonale d'axe  $(AC)$  (ou  $(BD)$ ) laisse le carré  $ABCD$  invariant.

La symétrie centrale de centre le centre du carré  $ABCD$  laisse le carré  $ABCD$  invariant.

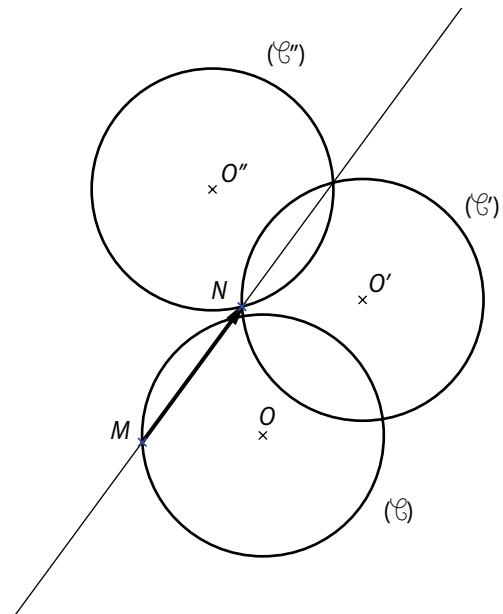
La symétrie orthogonale d'axe la médiatrice de  $[EP]$  (ou celle de  $[EH]$ ) laisse le rectangle  $EFGH$  invariant.

La symétrie centrale de centre le centre du rectangle  $EFGH$  laisse le rectangle  $EFGH$  invariant.

La symétrie orthogonale d'axe toute droite qui passe par  $I$  laisse le cercle invariant.

La symétrie centrale de centre  $I$  laisse le cercle invariant.

25



26  $A'(3; 1), B'(-1; 3), C'(2; 5), D'(4; 3)$ .

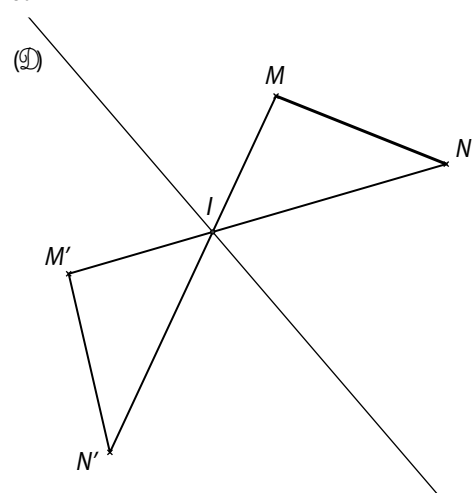
27  $A'(-1; 3), B'(3; 1), C'(0; -1), D'(-2; 1)$ .

28  $A'(-3, -3), B'(1; -1), C'(0; 7), D'(-4; -1)$ .

29  $A'(-1; 3), B'(3; 5), C'(0; 7), D'(-2; 5)$ .

30  $A' = D'(4; 1), B'(0; -1), C'(3; -3), D'(5; -1)$ .

31 1. a. b.



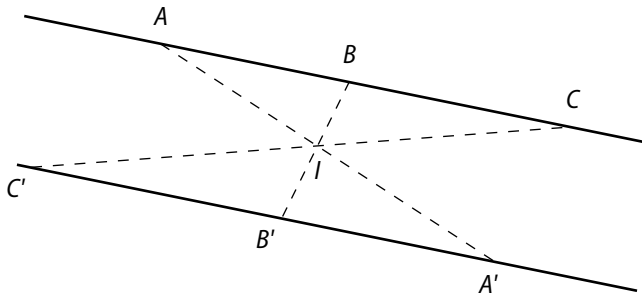
2. On note  $s_{(D)}$  la symétrie orthogonale d'axe  $(D)$ .

L'image de  $(MN')$  par  $s_{(D)}$  est  $(M'N)$  donc le point  $I$  d'intersection de ces deux droites vérifie  $s_{(D)}(I) = I$ , donc  $I \in (D)$ .

Or,  $(D)$  est la médiatrice de  $[MN']$  et de  $[NN']$ , donc  $IM = IM'$  et  $IN = IN'$ , de plus  $\widehat{MIN} = \widehat{M'IN'}$ .

Ainsi, les triangles  $IMN$  et  $IM'N'$  sont semblables et  $MN = M'N'$ .

32 a.



b.  $I$  est le milieu de  $[AA']$  et de  $[BB']$ , donc  $ACA'C'$  est un parallélogramme, donc  $A'C' \parallel (AC)$ .

$I$  est le milieu de  $[AA']$  et de  $[BB']$ , donc  $ABA'B'$  est un parallélogramme, donc  $(A'B') \parallel (AB)$ .

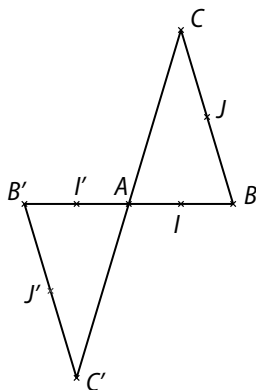
Or,  $(AB) = (AC)$  donc  $(A'B') \parallel (AC)$  et comme  $(A'B')$  et  $(A'C')$  ont le point  $A'$  en commun, on en déduit que  $(A'B') = (A'C')$  donc les points  $A', B', C'$  sont alignés.

33 L'aire du rectangle  $EFGH$  est  $EF \times EH$ . La translation conserve les longueurs et les angles, donc l'image  $E'F'G'H'$  du rectangle  $EFGH$  est un rectangle.

Comme  $E'F' = EF$  et que  $E'H' = EH$ , on en déduit que l'aire du rectangle  $E'F'G'H'$  est, elle aussi, égale à  $EF \times EH$ .

34 La symétrie centrale conserve les angles donc elle transforme deux droites (par exemple  $(AB)$  et  $(AC)$ ) perpendiculaires (c'est-à-dire telles que  $\widehat{BAC} = 90^\circ$ ) en deux droites  $(A'B')$  et  $(A'C')$  perpendiculaires (car  $\widehat{B'A'C'} = \widehat{BAC} = 90^\circ$ ).

35 a.



b. • Le triangle  $AB'C'$  est isocèle en  $C'$  et tel que  $AB' = AB = 2,5$  et  $AC' = AC = 4$  car la symétrie centrale conserve les distances.

• De plus,  $I'$  est le milieu de  $[A'B']$  car la symétrie centrale conserve les milieux.

• Dans le triangle  $I'B'C'$  rectangle en  $I'$  :

$$I'C'^2 = B'C'^2 - B'I'^2 = 4^2 - 1,25^2 = 2,4375$$

$$\text{d'où } I'C' = \sqrt{2,4375}.$$

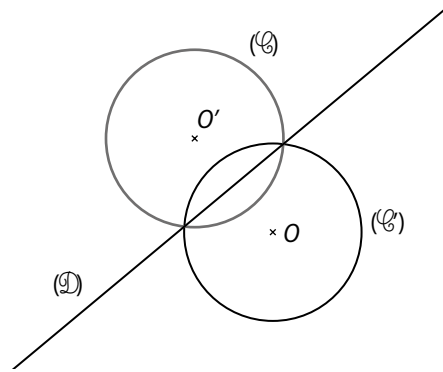
L'aire du triangle  $AB'C'$  est donc :

$$\frac{AB' \times I'C'}{2} = \frac{2,5 \times \sqrt{2,4375}}{2}.$$

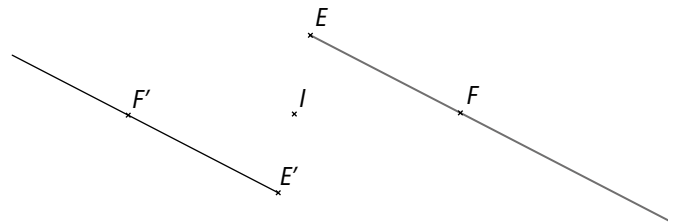
Le périmètre du triangle  $AB'C'$  est donc :

$$AB' + B'C' + C'A = 10,5.$$

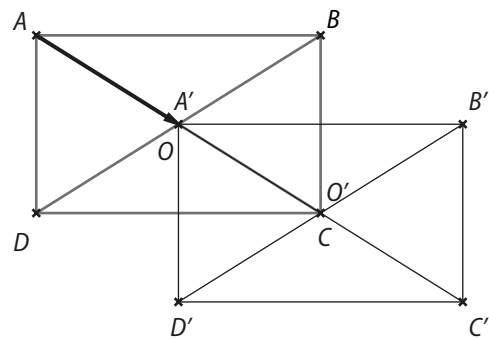
36  $(\mathcal{C}_1)$  est le cercle  $(\mathcal{C}_2)$ .



37  $(\mathcal{C}_1)$  est la demi-droite  $[E'F')$ .



38  $(\mathcal{C}_1)$  est le rectangle  $OB'C'D'$ .



39 a. L'image du point  $L$  est  $R$  ; l'image du point  $J$  est  $D$ .

b. L'image du point  $L$  est  $N$  ; l'image du point  $J$  est  $P$ .

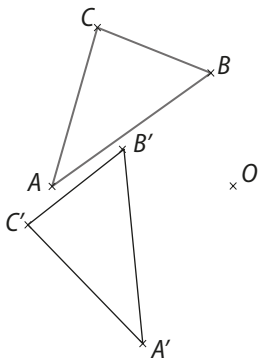
c. L'image du point  $L$  est  $H$  ; l'image du point  $J$  est  $X$ .

40 a. La rotation de centre  $Q$  et d'angle de mesure  $\frac{\pi}{2}$  rad.

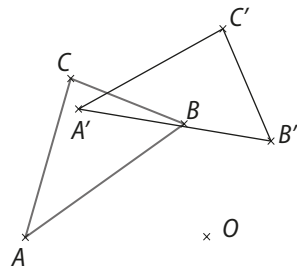
b. La rotation de centre  $S$  et d'angle de mesure  $\frac{\pi}{2}$  rad.

c. La rotation de centre  $I$  et d'angle de mesure  $\pi$  rad.

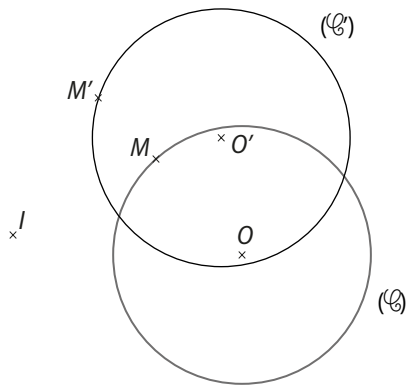
41 1. et 2. a.



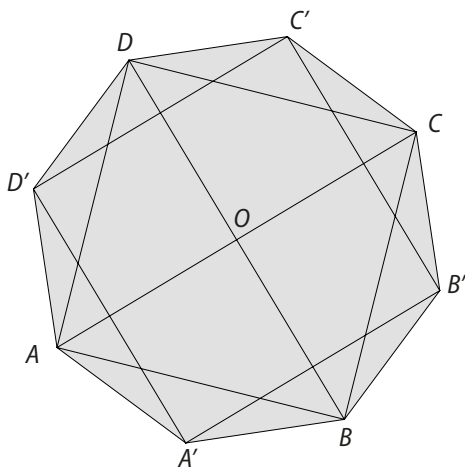
1. et 2. b.



42

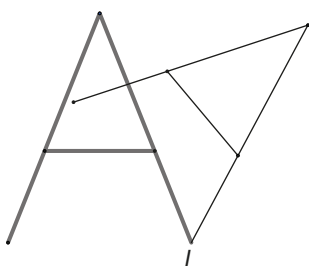


43 a.

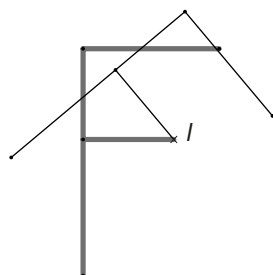


b. Ce polygone est un octogone régulier.

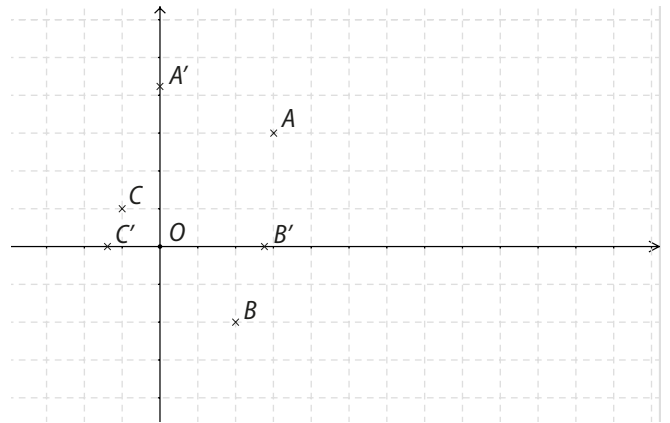
44 a.



b.

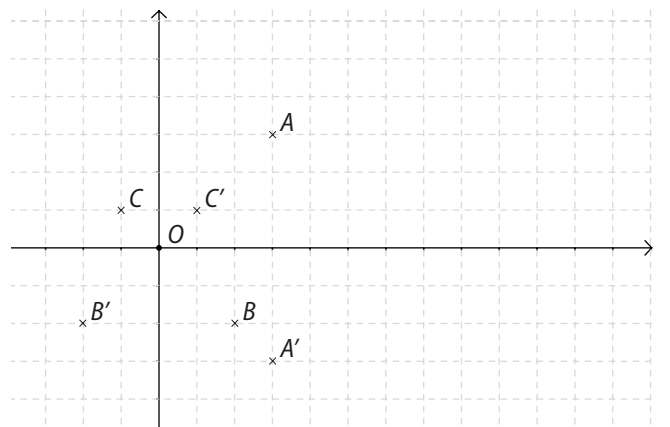


45 a.



$A'(0; 3\sqrt{2}), B'(2\sqrt{2}; 0), C'(-\sqrt{2}; 0).$

b.



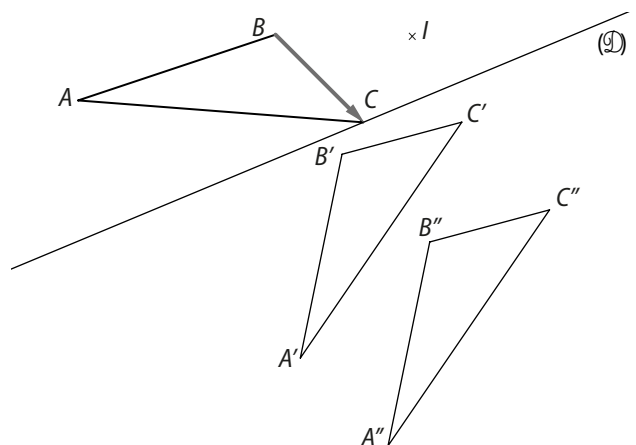
$A'(3; -3), B'(-2; -2), C'(1; 1).$

46 La rotation de centre  $O$ , le centre du carré  $ABCD$ , et d'angle de mesure  $\frac{\pi}{2}$  rad, laisse le carré  $ABCD$  invariant.

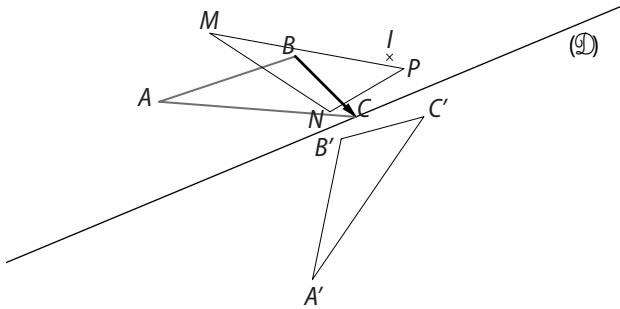
La rotation de centre  $O$ , le centre du cercle circonscrit au triangle  $EFG$ , et d'angle de mesure  $\frac{2\pi}{3}$  rad, laisse le triangle  $EFG$  invariant.

La rotation de centre  $I$  et d'angle de mesure quelconque, laisse le cercle invariant.

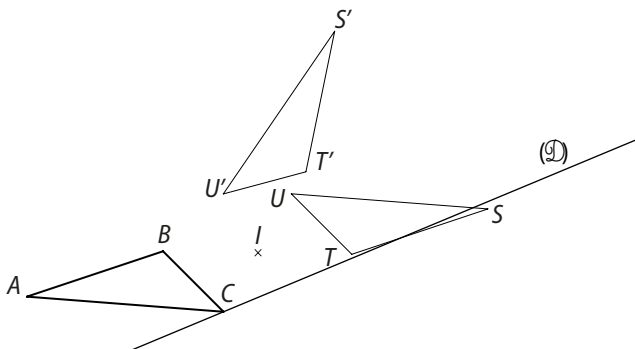
47



48



49



50 On note  $r$  une rotation.

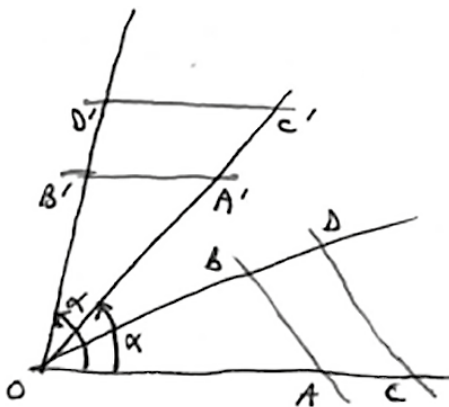
$A$  et  $B$  sont deux points de milieu  $I$ .

$A' = r(A)$ ,  $B' = r(B)$  et  $I' = r(I)$ .

Puisqu'une rotation transforme trois points (ici,  $A$ ,  $B$  et  $I$ ) alignés en trois points alignés, on en déduit que  $A'$ ,  $B'$  et  $I'$  sont alignés.

Comme, de plus, une rotation conserve les longueurs,  $A'I' = AI$  et  $I'B' = IB$ , or  $AI = IB$ , donc  $A'I' = I'B'$  donc  $I'$  est le milieu de  $[A'B']$ .

51 a. À main levée



b. Les triangles  $OAB$  et  $OCD$  sont en configuration de Thalès, donc  $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$ .

Or, une rotation conserve les longueurs, donc :

$$OA' = OA, OB' = OB, OC' = OC, OD' = OD.$$

Or, une rotation conserve les longueurs, donc :

$$OA' = OA, OB' = OB, OC' = OC, OD' = OD.$$

Ainsi,  $\frac{OA'}{OC'} = \frac{OB'}{OD'}$  donc, d'après la propriété réciproque de Thalès dans les triangles, les droites  $(A'B')$  et  $(C'D')$  sont parallèles.

Ainsi, par une rotation, les images de deux droites parallèles sont deux droites parallèles.

52 On note  $I$  le milieu de  $[NP]$ .

Dans le triangle  $MIP$  rectangle en  $I$ ,

$$\sin \widehat{IMP} = \frac{1,8}{6} = 0,3 \text{ donc } \widehat{IMP} \approx 17,45^\circ.$$

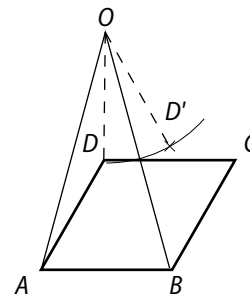
Ainsi, l'angle de cette rotation, qui est  $(\widehat{MN}, \widehat{MP})$ , a pour mesure environ  $2 \times 17,45^\circ$  c'est-à-dire  $35^\circ$ .

53 Un losange est un quadrilatère dont les diagonales se coupent perpendiculairement en leur milieu, or une rotation conserve les angles et les milieux, donc l'image d'un losange est un losange.

L'aire d'un losange  $ABCD$  de centre  $O$  est  $AC \times OB$ , or une rotation conserve les longueurs et les milieux, donc  $AC = A'C'$  et  $OB = O'B'$  (avec  $A', B', C', D'$  images des points  $A, B, C, D$  par la rotation), donc  $AC \times OB = A'C' \times O'B'$ .

Ainsi le losange  $ABCD$  et le losange image ont la même aire.

54 a.



b. On note  $r$  la rotation de centre  $O$  qui transforme  $A$  en  $B$ . Par hypothèse :  $r(A) = B$  et  $r(D) = D'$

Or,  $ABCD$  est un parallélogramme, donc  $AD = BC$ .

Une rotation conserve les longueurs donc  $AD = BD'$ . Ainsi,  $BC = BD'$ . Donc le triangle  $BCD'$  est isocèle en  $B$ .

55 a. On note  $O$  le centre du carré  $IJKL$ .

La rotation de centre  $O$  et d'angle de mesure  $\frac{\pi}{2}$  rad est notée  $r$ .

$r(J) = K$  car  $IJKL$  est un carré ;  $r(I) = J$  car  $IJKL$  est un carré donc  $r(IJ) = (JK)$  et l'image de  $M \in [IJ]$  et tel que  $IM = b$  par  $r$  est  $X \in [JK]$  et tel que  $JX = b$ , donc  $X = N$ .

On montre de la même façon que  $r(N) = P$ .

Ainsi, l'image par  $r$  du triangle  $MJN$  est le triangle  $NKP$ .

**b.** La rotation  $r$  transforme  $M$  en  $N$  et  $N$  en  $P$ , donc  $MN = NP$  et  $(MN) \perp (NP)$ . On montre de la même façon que  $PQ = QM$  et  $(PQ) \perp (QM)$ . Donc  $MN PQ$  est un carré.

**c.** Dans le triangle  $MJN$  rectangle en  $J$ .

$$MN^2 = MJ^2 + JN^2 = (a + b)^2 + b^2 \text{ donc}$$

$$MN = \sqrt{(a + b)^2 + b^2}.$$

Ainsi, l'aire du carré  $MN PQ$  est  $(a + b)^2 + b^2$ .

**56 a.**  $\vec{OA}' = 0,3 \vec{OA}$ ; **b.**  $\vec{IM}' = -\frac{1}{4} \vec{IM}$ .

**57 a.**  $M'$  est l'image de  $M$  par l'homothétie de centre  $O$  et de rapport 5 ;

**b.**  $A'$  est l'image de  $A$  par l'homothétie de centre  $I$  et de rapport  $\frac{1}{4}$  ;

**c.**  $C$  est l'image de  $D$  par l'homothétie de centre  $K$  et de rapport  $-\frac{1}{3}$  ;

**d.**  $F$  est l'image de  $G$  par l'homothétie de centre  $E$  et de rapport 0,2.

**58 a.**  $\vec{OM}' = -3 \vec{OM}$ ; **b.**  $\vec{OP}' = -3 \vec{OP}$ ; **c.**  $\vec{M'N}' = -3 \vec{MN}$ ; **d.**  $\vec{DN}' = -3 \vec{ON}$ .

**59 a.**  $\frac{2}{3}$ ; **b.** 2; **c.**  $-\frac{1}{4}$ .

**60 a.** • L'image du point  $K$  est  $O$  ;

• l'image du point  $W$  est  $C$ .

**b.** L'image du point  $K$  est  $H$  ;

• l'image du point  $W$  est  $N$ .

**61 a.**  $h(W; 3)$ ;  $h(M; -1)$ .

**b.**  $h(A; 4)$ ;  $h(M; -1/2)$ .

**62 a.**  $-\frac{1}{2}$ ; **b.** -2.

**63 a.**  $\vec{OM}' = -\vec{OM}$  donc  $k = -1$

**b.**  $\vec{OM}' = -\frac{2}{3} \vec{OM}$  donc  $k = -\frac{2}{3}$ .

**c.**  $\vec{MO} + \vec{OM}' + 3 \vec{OM} = \vec{0}$  donc  $\vec{OM}' = -2 \vec{OM}$  donc  $k = -2$ .

**d.**  $2(\vec{MO} + \vec{OM}') = \vec{0}$  donc  $\vec{OM}' = -\vec{OM}$  donc  $k = -1$ .

**64 a.**  $\vec{BC} = 3 \vec{BA}$  donc  $k = 3$ .

**b.**  $3 \vec{AB} + (\vec{BA} + \vec{AC}) = \vec{0}$  donc  $2 \vec{AB} + \vec{AC} = \vec{0}$

donc  $\vec{AB} = -\frac{1}{2} \vec{AC}$  donc  $k = -\frac{1}{2}$ .

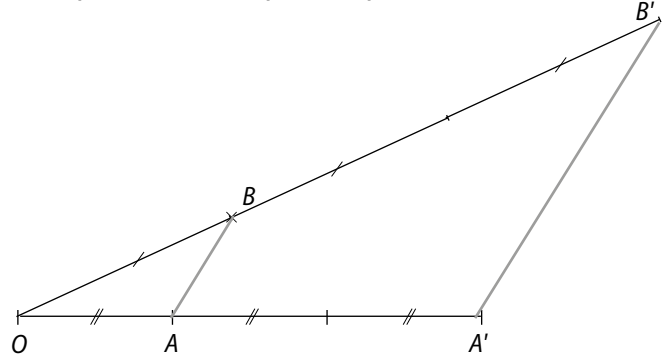
**c.**  $3(\vec{AC} + \vec{CB}) + \vec{BC} = \vec{0}$

$3 \vec{AC} + 2 \vec{CB} = \vec{0}$

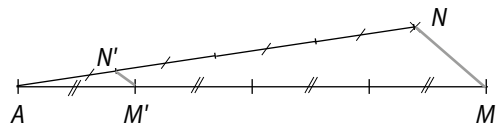
$\vec{CB} = \frac{3}{2} \vec{CA}$  donc  $k = \frac{3}{2}$ .

**65** On sait que les points  $O, B$  et  $B'$  sont alignés, de plus  $\vec{OB}' = 3 \vec{OB}$ , donc  $\frac{OB'}{OB} = \frac{OA'}{OA} = 3$ . Ainsi, d'après la propriété réciproque de Thalès,  $(AB) \parallel (A'B')$ .

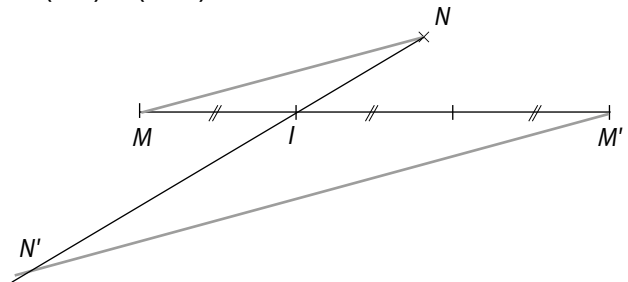
Le point  $B'$  est donc à l'intersection des droites  $(OB)$  et de la parallèle à  $(AB)$  passant par  $A'$ .



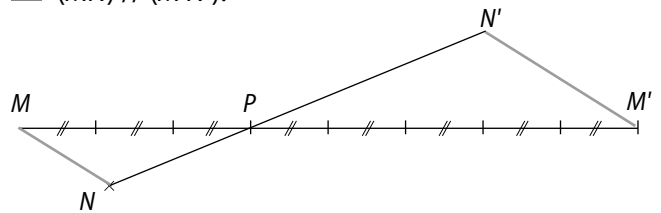
**66**



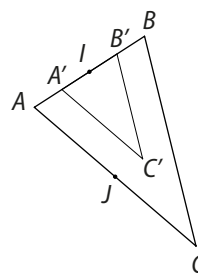
**67**  $(MN) \parallel (M'N')$ .



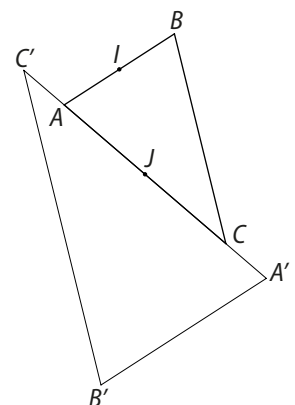
**68**  $(MN) \parallel (M'N')$ .



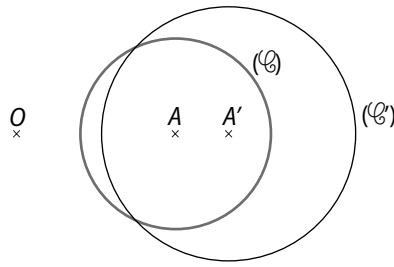
**69 a.**



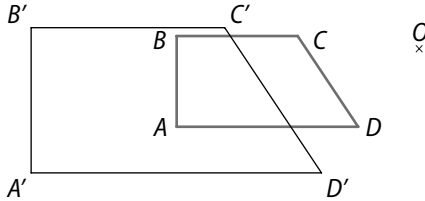
**b.**



70 a. et b.



71



72  $\vec{OM}' = k\vec{OM}$  or  $\vec{OM}'(x'; y')$  et  $\vec{OM}(x; y)$

donc  $\begin{cases} x' = kx; \\ y' = ky. \end{cases}$

a.  $\begin{cases} x' = 2x; \\ y' = 2y \end{cases}$     b.  $\begin{cases} x' = -\frac{1}{4}x; \\ y' = -\frac{1}{4}y \end{cases}$     c.  $\begin{cases} x' = \frac{5}{3}x; \\ y' = \frac{5}{3}y. \end{cases}$

73 a.  $\vec{IM}' = 2\vec{IM}$ .

$\begin{cases} x'-1 = 2(x-1) \\ y'+2 = 2(y+2) \end{cases}$  donc  $\begin{cases} x' = 2x - 1 \\ y' = 2y + 2. \end{cases}$

b.  $\vec{JM}' = 1/4\vec{JM}$

$\begin{cases} x'+1 = -\frac{1}{4}(x+1) \\ y'-3 = -\frac{1}{4}(y-3) \end{cases}$  donc  $\begin{cases} x' = -\frac{1}{4}x - \frac{5}{4} \\ y' = -\frac{1}{4}y + \frac{15}{4}. \end{cases}$

c.  $\vec{KM}' = -12\vec{KM}$

$\begin{cases} x' - \frac{1}{4} = -12(x - \frac{1}{4}) \\ y' - \frac{1}{3} = -12(y - \frac{1}{3}) \end{cases}$  donc  $\begin{cases} x' = -12x + \frac{13}{4} \\ y' = -12x + \frac{13}{3}. \end{cases}$

74 Dans les trois cas, on cherche un point  $A(a; b)$  tel

que  $\vec{AM}' = k\vec{AM}$ , donc tel que  $\begin{cases} x' - a = k(x - a) \\ y' - b = k(y - b). \end{cases}$

a.  $k = 3$  et  $\begin{cases} 3x - 6 - a = 3(x - a) \\ 3y + 4 - b = 3(y - b) \end{cases}$

$\begin{cases} -6 - a = -3a \\ 4 - b = -3b \end{cases}$  donc  $\begin{cases} a = 3 \\ b = -2 \end{cases}$ .

Ainsi  $h(A(3; -2); 3)$ .

b.  $k = -2$  et  $\begin{cases} -2x + 5 - a = -2(x - a) \\ -2y + 8 - b = -2(y - b) \end{cases}$

$\begin{cases} 5 - a = 2a \\ 8 - b = 2b \end{cases}$  donc  $\begin{cases} a = \frac{5}{3} \\ b = \frac{8}{3} \end{cases}$ .

Ainsi  $h(A(\frac{5}{3}; \frac{8}{3}); -2)$

c.  $k = \frac{1}{4}$  et  $\begin{cases} \frac{1}{4}x - a = \frac{1}{4}(x - c) \\ \frac{1}{4}y - 1 - b = \frac{1}{4}(y - b) \end{cases}$

$\begin{cases} -a = -\frac{1}{4}a \\ -1 - b = -\frac{1}{4}b \end{cases}$  donc  $\begin{cases} a = 0 \\ b = -\frac{4}{3} \end{cases}$ .

Ainsi  $h(A(0; -\frac{4}{3}); \frac{1}{4})$ .

75 On note  $A, B$  deux points distincts et  $A', B'$  leurs images par l'homothétie.

On a donc  $\vec{A'B'} = k\vec{AB}$ .

On note  $I$  le milieu de  $[AB]$ , donc  $\vec{IA} = \vec{BI}$  et  $I'$  l'image de  $I$  par l'homothétie.

$\vec{I'A'} = k\vec{IA} = k\vec{BI} = \vec{I'B'}$  et  $\vec{I'B'} = k\vec{BI}$

donc  $\vec{I'A'} = \vec{I'B'}$  donc  $I'$  est le milieu de  $[A'B']$

76  $(AB)$  et  $(CD)$  sont deux droites parallèles.

On note  $A', B', C', D'$  les images des points  $A, B, C, D$  par une homothétie de rapport  $k$ .

On a donc  $\vec{A'B'} = k\vec{AB}$  et  $\vec{C'D'} = k\vec{CD}$ .

Comme les droites  $(AB)$  et  $(CD)$  sont parallèles, les vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{CD}$  sont colinéaires, donc il existe un nombre réel  $\lambda$  non nul tel que  $\vec{AB} = \lambda\vec{CD}$ .

Ainsi,  $\vec{A'B'} = k\vec{AB} = k \times \lambda\vec{CD} = \lambda \times k\vec{CD} = \lambda\vec{C'D'}$ .

Donc les vecteurs  $\vec{A'B'}$  et  $\vec{C'D'}$  sont colinéaires et les droites  $(A'B')$  et  $(C'D')$  sont parallèles.

77 On note  $A', B', C', D'$  les images des images des points  $A, B, C, D$  par une homothétie de rapport  $k$ .

Une homothétie conserve les angles orientés, ainsi, de  $\text{mes } \widehat{ABC} = \frac{\pi}{2}$ , on déduit que  $\text{mes } \widehat{A'B'C'} = \frac{\pi}{2}$ .

Il en est de même pour les autres angles. Donc  $A'B'C'D'$  est un rectangle.

On sait que  $A'B' = |k| \times AB$  et  $A'D' = |k| \times AD$ .

Ainsi,  $\mathcal{A}(A'B'C'D') = A'B' \times A'D' = |k| \times AB \times |k| \times AD$   
 $= |k|^2 \times AB \times AD = k^2 \times \mathcal{A}(ABCD)$ .

**78** Les droites  $(AD)$  et  $(BC)$  sont parallèles, les droites  $(AD)$  et  $(B'C')$  sont parallèles donc les droites  $(BC)$  et  $(B'C')$  sont parallèles.

Ainsi, les triangles  $ABC$  et  $AB'C'$  sont en configuration de Thalès, d'où :  $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$ .

On note  $k$  le nombre  $\frac{AB'}{AB}$ . Ainsi,  $B'$  et  $C'$  sont les images de  $B$  et  $C$  par l'homothétie de centre  $A$  et de rapport  $k$ .

De plus,  $AD' = B'C'$  et  $AD = BC$ , donc  $\frac{AD'}{AD} = \frac{B'C'}{BC} = k$ .

Ainsi,  $D'$  est l'image de  $D$  par l'homothétie de centre  $A$  et de rapport  $k$ . D'où,  $B'D' = kBD$ .

Donc les vecteurs  $\vec{BD}$  et  $\vec{B'D'}$  sont colinéaires.

On en déduit que les droites  $(BD)$  et  $(B'D')$  sont parallèles.

**79**  $\vec{QP} = -\frac{1}{4}\vec{QR}$  et  $\vec{QM} = -\frac{1}{4}\vec{QT}$ , donc  $P$  et  $M$  sont les images des points  $R$  et  $T$  par l'homothétie  $h$  de centre  $Q$  et de rapport  $-\frac{1}{4}$ .

$$\begin{aligned}\vec{QN} &= \vec{QM} + \vec{MN} = \vec{QM} + \vec{QP} = -\frac{1}{4}\vec{QT} - \frac{1}{4}\vec{QR} \\ &= -\frac{1}{4}(\vec{QT} + \vec{QR}) = -\frac{1}{4}(\vec{QT} + \vec{TS}) = -\frac{1}{4}\vec{QS}\end{aligned}$$

donc  $N$  est l'image de  $S$  par  $h$ . Ainsi,  $MNPQ$  est l'image de  $TSRQ$  par  $h$ .

**b.**  $\mathcal{A}(MNPQ) = QM \times QP = 2 \times 1 = 2$

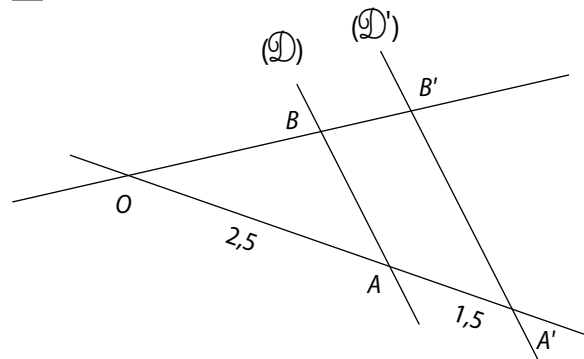
$$\mathcal{A}(MNPQ) = \left(-\frac{1}{4}\right)^2 \times \mathcal{A}(TSQR) = \frac{1}{16} \times 8 \times 4 = 2.$$

**80**

Homothétie	Rapport	Aire de $\mathcal{F}$	Aire de $\mathcal{F}'$
$h_1$	-3	10	90
$h_2$	-5 ou 5	1	25
$h_3$	-0,5	400	100
$h_4$	$-\frac{1}{\sqrt{5}}$ ou $\frac{1}{\sqrt{5}}$	15	3

Aire de  $\mathcal{F}' = k^2 \times$  Aire de  $\mathcal{F}$ .

**81**



Les triangles  $OAB$  et  $OA'B'$  sont en configuration de Thalès, donc  $A'$  (resp  $B'$ ) est l'image de  $A$  (resp de  $B$ ) par l'homothétie de centre  $O$  et de rapport  $\frac{OA'}{OA} = \frac{1,5}{2,5} = 0,6$ .

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(OA'B') &= 0,6^2 \times \mathcal{A}(OAB) \\ &= 0,36 \times 35 = 12,6.\end{aligned}$$

L'aire du domaine coloré en bleu est donc  $12,6 - 5 = 7,6$ .

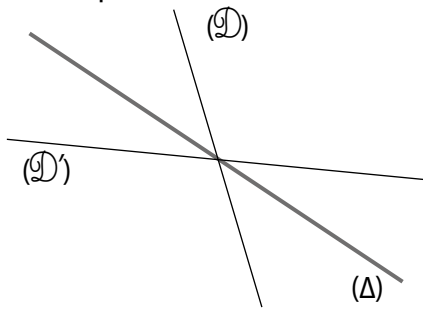
## faire le point

**82 a.**

Propriété	Symétrie orthogonale	Symétrie centrale	Translation	Rotation	Homothétie
Transforme un segment en un segment de même longueur	Oui	Oui	Oui	Oui	Non (1)
Transforme trois points alignés en trois points alignés	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui
Transforme une droite en une droite parallèle	Non (2)	Oui	Oui	Non (3)	Oui
Transforme un angle orienté en un angle orienté de même mesure	Non (4)	Oui	Oui	Oui	Oui
Transforme une figure en une figure de même aire	Oui	Oui	Oui	Oui	Non
Transforme deux droites parallèles en deux droites parallèles	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui
Transforme deux droites perpendiculaires en deux droites perpendiculaires	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui

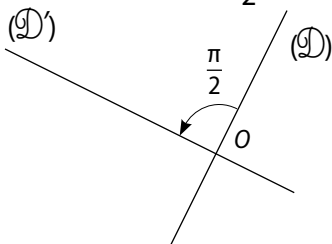
**b.** (1) Si  $A'$  et  $B'$  sont les images de  $A$  et  $B$  par une homothétie de rapport  $k$ , alors  $A'B' = |k| \times AB$ .

(2) Contre-exemple :



$S_{(O)}((D)) = (D')$  et  $(D)$  n'est pas parallèle à  $(D')$ .

(3) Contre-exemple :  $r = \text{rot}(O; \frac{\pi}{2})$ .



$r((D)) = (D')$  et  $(D)$  n'est pas parallèle à  $(D')$ .

(4) Si  $A', B', C'$  sont les images de  $A, B, C$  par une symétrie orthogonale, alors  $\text{mes}(\widehat{A'B', A'C'}) = -\text{mes}(\widehat{AB, AC})$ .

(5) Si  $\mathcal{F}'$  est l'image d'une figure  $\mathcal{F}$  par une homothétie de rapport  $k$ , alors  $\text{Aire de } \mathcal{F}' = k^2 \times \text{Aire de } \mathcal{F}$ .

**83** Elle n'a pas pris en compte le sens de l'angle orienté (sens trigonométrique).

## Se tester

**86** à **89** Voir Manuel de l'élève page 259.

**84**

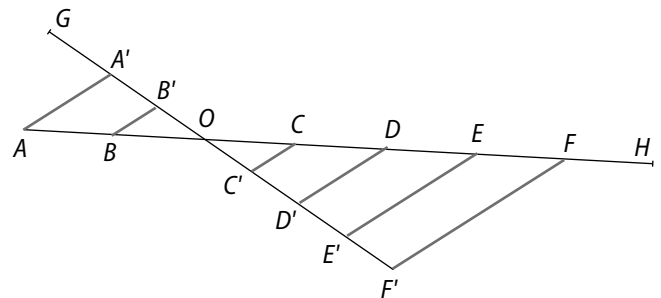
Objet	Image
A	B
C	D
B	C
E	F
[AB]	[BC]

Objet	Image
[CB]	[CD]
milieu de [AC]	milieu de [BD]
triangle ABC	triangle BCD
$(AC) \cap (BE)$	$(BD) \cap (CF)$

**85**

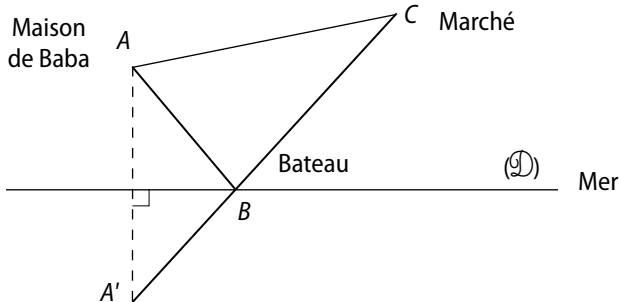
Homothétie	Transforme...	Centre	Rapport
$h_1$	D' en C'	O	$\frac{1}{2}$
$h_2$	C en B	O	-1
$h_3$	F en C et F' en C'	O	$\frac{1}{4}$
$h_4$	A' en C' et A en C	O	$-\frac{1}{2}$
$h_5$	[AA'] en [FF']	O	-2
$h_6$	[EE'] en [FF']	O	$\frac{4}{3}$

**2. a. et b.**



## Exercices d'approfondissement

**90** Le trajet Marché-Maison de Baba ne peut pas être modifié. Il faut donc minimiser le trajet : Maison de Baba – Bateau – Bateau – Marché.



On note  $A'$  le symétrique de  $A$  par la symétrie orthogonale d'axe  $(\mathcal{D})$ .

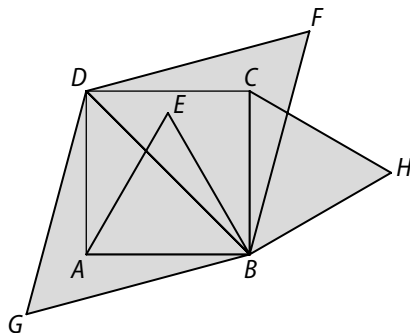
On sait que le trajet  $A'B + BC$  est minimal (car c'est une ligne droite) et que  $A'B = AB$ , donc le trajet  $AB + BC$  est minimal pour le point  $B$  ainsi placé.

**91** 1.  $GB = GD$ ;  $AB = AD$ ;  $CB = CD$  donc les points  $G, A$  et  $C$  appartiennent à la médiatrice de  $[BC]$ .

2. **a.**  $r = \text{rot}(B; \frac{\pi}{3})$ . **b.**  $r(G) = D$ ;  $r(A) = E$ ;  $r(C) = H$ .

**b.** Or, d'après le 1., les points  $G, A, C$  sont alignés, donc les points  $D, E, H$  sont alignés.

3. **a.**



**b.**  $(BD) \perp (GC)$ . Or,  $r(B) = B$ ,  $r(D) = F$ ,  $r(G) = D$ ,  $r(C) = H$ . Ainsi  $r((BD)) = (BF)$  et  $r((GC)) = (DH)$ .

Or, une rotation transforme deux droites perpendiculaires en deux droites perpendiculaires. Donc,  $(BF) \perp (DH)$ .

**92** **a.**  $\vec{AM}' = \frac{2}{3}\vec{AM} + \frac{1}{3}\vec{BC}$ .

Les points  $A, B, C$  sont fixés donc à chaque point  $M$  correspond un unique point  $M'$ .

Pour  $M = A$  :  $\vec{AA}' = \frac{1}{3}\vec{BC}$ .

Pour  $M = B$  :  $\vec{AB}' = \frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{BC}$ .

Pour  $M = C$  :  $\vec{AC}' = \frac{2}{3}\vec{AC} + \frac{1}{3}\vec{BC}$ .

**b.**  $M$  est un point invariant par  $f$  lorsque  $M' = M$ , c'est-à-dire :  $\vec{AM} = \frac{2}{3}\vec{AM} + \frac{1}{3}\vec{BC}$ ;  $\vec{AM} = \vec{BC}$ .

L'unique point invariant par  $f$  est le point  $D$  tel que  $ABCD$  est un parallélogramme.

**c.** On sait que le centre de cette homothétie est  $D$  (son unique point invariant) et que :

•  $\vec{AA}' = \frac{1}{3}\vec{BC}$ , c'est-à-dire  $\vec{AA}' = \frac{1}{3}\vec{AD}$ .

$\vec{AD} + \vec{DA}' = \frac{1}{3}\vec{AD}$  donc  $\vec{DA}' = \frac{2}{3}\vec{DA}$ .

•  $\vec{AB}' = \frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{BC}$

$\vec{AD} + \vec{DB}' = \frac{2}{3}\vec{AD} + \frac{1}{3}(\vec{BD} + \vec{DC})$

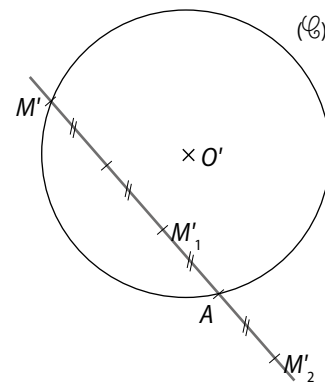
$\vec{AD} + \vec{DB}' = \frac{2}{3}\vec{AD} + \frac{2}{3}\vec{DB} + \frac{1}{3}\vec{BD} + \frac{1}{3}\vec{DC}$

$\vec{DB}' = \frac{1}{3}\vec{DA} + \frac{1}{3}\vec{DB} + \frac{1}{3}\vec{DC}$

$\vec{DB}' = \frac{1}{3}(\vec{DA} + \vec{DC}) + \frac{1}{3}\vec{DB} = \frac{1}{3}\vec{DB} + \frac{1}{3}\vec{DB} = \frac{2}{3}\vec{DB}$ .

$h$  est l'homothétie de centre  $D$  et de rapport  $\frac{2}{3}$ .

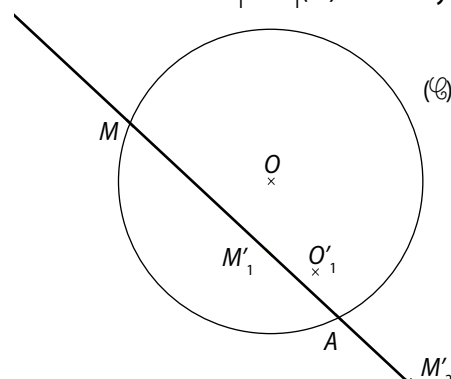
**93** 1. **a.**



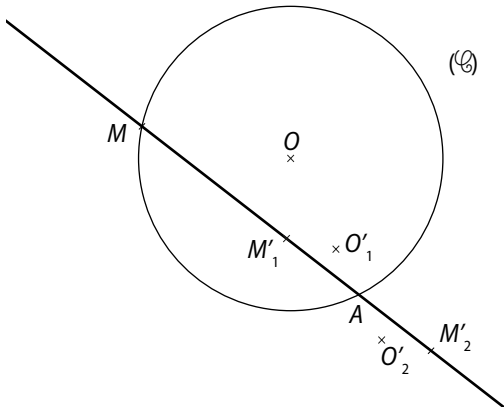
**b.**  $h_1$  est l'homothétie de centre  $A$  et de rapport  $\frac{1}{3}$ .

$h_2$  est l'homothétie de centre  $A$  et de rapport  $-\frac{1}{3}$ .

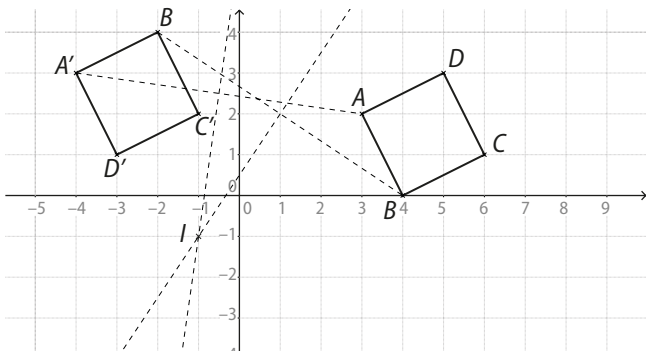
2. Lorsque  $M$  décrit  $(\mathcal{C})$ , l'ensemble  $(\mathcal{C}_1)$  des points  $M_1$  est le cercle de centre  $O_1 = h_1(O)$  et de rayon  $\frac{OA}{3}$ .



3. Lorsque  $M$  décrit  $(\mathcal{C})$ , l'ensemble  $(\mathcal{C}_2)$  des points  $M_2$  est le cercle de centre  $O_2 = h_2(O)$  et de rayon  $\frac{OA}{3}$ .



94 1. et 3. a.



2.  $\vec{AC}(3; -1)$ ,  $\vec{BD}(1; 3)$ , donc  $AC = BD = \sqrt{10}$   
 et  $\vec{AC} \cdot \vec{BD} = 3 \times 1 + (-1) \times 3 = 0$ . De plus, le milieu de  $[AC]$  a pour coordonnées  $(\frac{9}{2}; \frac{3}{2})$  et le milieu de  $[BD]$  a pour coordonnées  $(\frac{9}{2}; \frac{3}{2})$ . Ainsi, le quadrilatère  $ABCD$  possède des diagonales de même longueur qui se coupent perpendiculairement en leur milieu.

Donc  $ABCD$  est un carré.

On montre de même que  $A'B'C'D'$  est un carré.

Comme  $\vec{AB}(1; -2)$  et  $\vec{A'B'}(2; 1)$ , on en déduit que  $AB = A'B' = \sqrt{5}$ .

Donc ces carrés sont superposables.

3. a. Le point  $I$  est le point d'intersection des médiatrices de  $[AA']$  (puisque  $IA = IA'$ ) et de  $[BB']$  (car  $IB = IB'$ ). On lit (ou on démontre que)  $I(-1; 1)$ .

b. D'après la formule d'Al-Kashi :

$$AA'^2 = IA^2 + IA'^2 - 2IA \times IA' \times \cos(\widehat{IA, IA'})$$

$$\text{donc } \cos(\widehat{IA, IA'}) = \frac{IA^2 + IA'^2 - AA'^2}{2IA \times IA'}$$

Or,  $\vec{IA}(4; 3)$  donc  $IA = 5$ .

$\vec{IA}'(-3; 4)$  donc  $IA' = 5$ .

$\vec{AA}'(-7; 1)$  donc  $\vec{AA}' = 5\sqrt{2}$ .

$$\text{Donc } \cos(\widehat{IA, IA'}) = \frac{25 + 25 - 50}{2 \times 5 \times 5} = 0.$$

Ainsi,  $\text{mes}(\widehat{IA, IA'}) = 90^\circ$

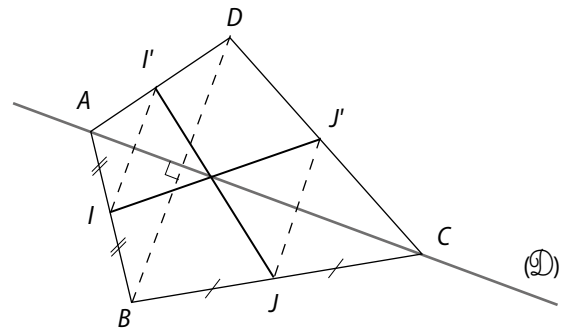
c.  $\vec{IC}(7; 2)$  donc  $IC = \sqrt{53}$ ;  $\vec{IC}'(0; 3)$  donc  $IC' = 3$ .

Ainsi,  $IC \neq IC'$  donc  $C'$  n'est pas l'image de  $C$  par  $r$ .

$\vec{ID}(6; 4)$  donc  $ID = \sqrt{52}$ ;  $\vec{ID}'(-2; 2)$  donc  $ID' = 2\sqrt{2}$ .

Ainsi,  $ID \neq ID'$  donc  $D'$  n'est pas l'image de  $D$  par  $r$ .

95 1. a. et b.



c.  $S_{\mathcal{D}}(I) = I'$ ;  $S_{\mathcal{D}}(J) = J'$ ;  $S_{\mathcal{D}}(I') = I$ ;  $S_{\mathcal{D}}(J') = J$ .

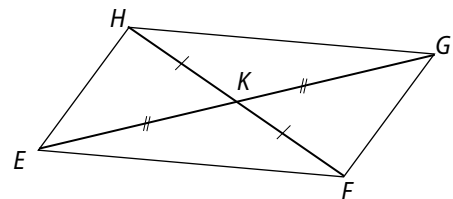
Donc  $S_{\mathcal{D}}((IJ')) = S_{\mathcal{D}}((I'J))$  et  $S_{\mathcal{D}}((I'J)) = (IJ)$ .

Ainsi,  $S_{\mathcal{D}}((IJ') \cap (I'J)) = (I'J) \cap (IJ)$

Or, comme  $(IJ') \cap (I'J) = (I'J) \cap (IJ)$ .

On en déduit que ce point d'intersection des deux droites reste invariant par  $S_{\mathcal{D}}$ , donc il appartient à  $(\mathcal{D})$ .

2. a.



b.  $[FG]$  et  $[EG]$  ont même milieu, donc  $EFGH$  est un parallélogramme.

96 1.  $x' = x + \alpha$ ,  $y' = y + \beta$ .

2.  $\frac{x+x'}{2} = a$  donc  $x' = 2a - x$ ;

$\frac{y+y'}{2} = b$  donc  $y' = 2b - y$ .

3. a.  $t$  est la translation de vecteur  $\vec{u}(-2; 3)$ .

•  $B'$  a pour coordonnées :  $x' = x_B + \alpha = 1 - 2 = -1$  et  $y' = y_B + \beta = -1 + 3 = 2$ . Donc  $B'(-1; 2)$

• De  $x' = x + \alpha$ , on déduit que  $x = x' - \alpha = x' + 2$ .

De  $y' = y + \beta$ , on déduit que  $y = y' - \beta = y' - 3$ .

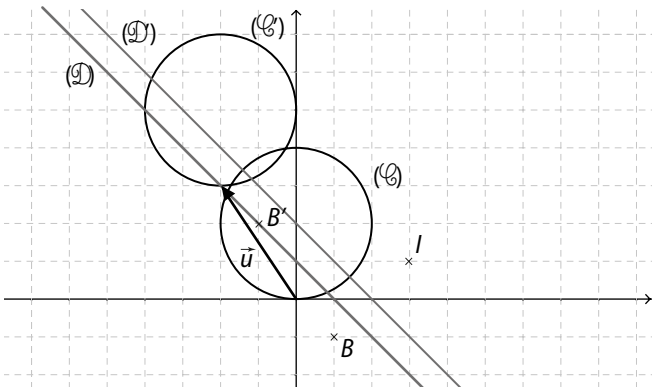
$$(\mathcal{D}) : x + y - 1 = 0$$

$$\text{donc } x' + 2 + y' - 3 - 1 = 0$$

$$\text{Ainsi, } (\mathcal{D}') : x' + y' - 2 = 0$$

$$\bullet (\mathcal{C}) : x^2 + (y - 2)^2 = 4 \text{ donc } (x' + 2)^2 + (y' - 3 - 2)^2 = 4.$$

$$\text{Ainsi, } (\mathcal{C}') : (x' + 2)^2 + (y' - 5)^2 = 4.$$



**b.**  $S$  est la symétrie centrale de centre  $I(3 ; 1)$ .

•  $B'$  a pour coordonnées :  $x' = 2a - x = 6 - 1 = 5$  et  $y' = 2b - y = 2 - (-1) = 3$ . Donc  $B'(5 ; 3)$ .

• De  $x' = 2a - x$ , on déduit que  $x = 2a - x' = 6 - x'$ .

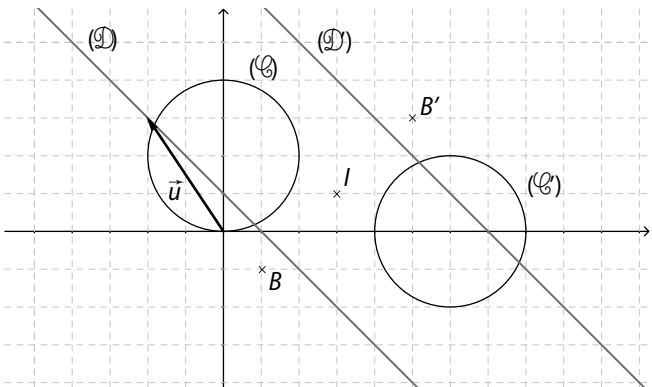
De  $y' = 2b - y$ , on déduit que  $y = 2b - y' = 2 - y'$ .

$$(\mathcal{D}) : x + y = 0 \text{ donc } 6 - x' + 2 - y' - 1 = 0.$$

$$\text{Ainsi, } (\mathcal{D}') : -x' - y' + 7 = 0$$

$$\bullet (\mathcal{C}) : x^2 + (y - 2)^2 = 4 \text{ donc } (6 - x')^2 + (2 - y' - 2)^2 = 4.$$

$$\bullet \text{Ainsi, } (\mathcal{C}') : (x' - 6)^2 + y'^2 = 4.$$



$$\mathbf{97} \quad \mathbf{1. a.} \quad \mathcal{A}_b(ABD) = \frac{5 \times 2}{2} = 5.$$

$$\mathbf{b.} \quad \vec{AB}(5 ; 0), \vec{AC}(4 ; 3), \text{ donc } \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 5 \times 4 + 0 + 3 = 20.$$

$$\text{De plus, } \vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{AB, AC})$$

$$\text{donc } 20 = 5 \times \sqrt{4^2 + 9^2} \times \cos(\widehat{AB, AC})$$

$$\text{ainsi, } \cos(\widehat{AB, AC}) = \frac{4}{5}.$$

À la calculatrice, on en déduit que :

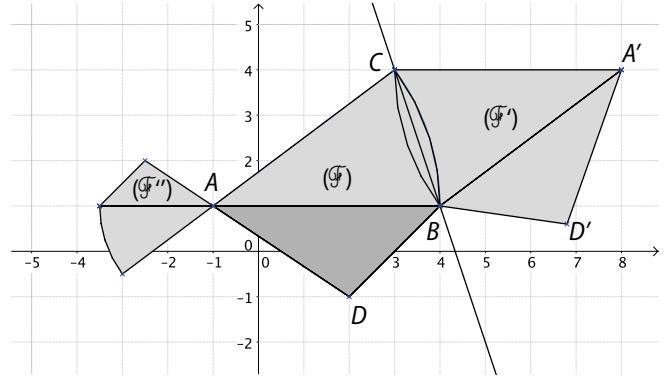
$$\text{mes}(\widehat{AB, AC}) \approx 0,64 \text{ rad.}$$

**c.** L'aire du secteur angulaire est :

$$\frac{\text{mes}(\widehat{AB, AC})}{2} \times R^2 \approx \frac{0,64}{2} \times AB^2 \approx 1,6.$$

L'aire de la figure  $(\mathcal{F})$  est donc : 6,6.

**2. a et b**

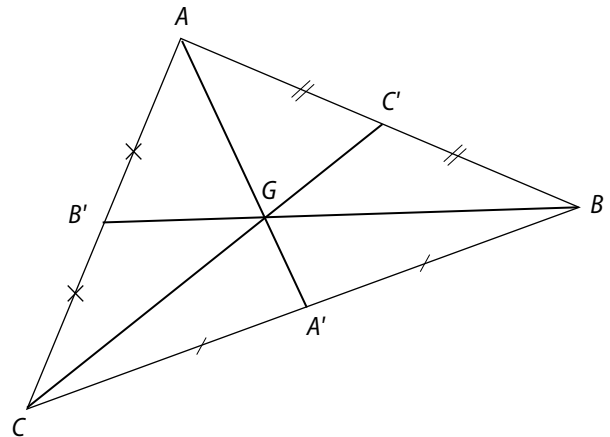


**c.** Aire  $(\mathcal{F}') = \text{Aire}(\mathcal{F}) \approx 6,6$

$$\text{Aire}(\mathcal{F}'') = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \times \text{Aire}(\mathcal{F}) \approx 1,65$$

$$\mathbf{98} \quad \mathbf{1.} \quad k = \frac{1}{2}.$$

**a.**



**b.** On sait que  $G$  vérifie  $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$ .

On a :

$$\vec{MM}' = \frac{1}{2} \vec{MA} + \frac{1}{2} \vec{MB} + \frac{1}{2} \vec{MC}$$

$$\vec{MG} + \vec{GM}' = \frac{1}{2} (\vec{MG} + \vec{GA}) + \frac{1}{2} (\vec{MG} + \vec{GB}) + \frac{1}{2} (\vec{MG} + \vec{GC})$$

$$\vec{GM}' = -\vec{MG} + \frac{3}{2} \vec{MG} + \frac{1}{2} (\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC})$$

$$\vec{GM}' = \frac{1}{2} \vec{GM} + \frac{1}{2} \times \vec{0}$$

$\vec{GM}' = -\frac{1}{2} \vec{GM}$ , donc  $f$  est l'homothétie de centre  $G$  et de rapport  $-\frac{1}{2}$ .

$$\mathbf{2.} \quad k = -1.$$

On a :  $\vec{MM}' = -\vec{MA} + \frac{1}{2}\vec{MB} + \frac{1}{2}\vec{MC}$ .

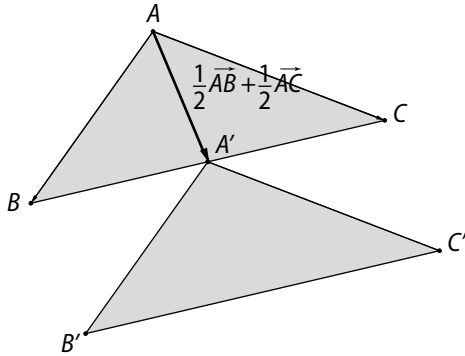
Donc  $\vec{MM}' = \vec{AM} + \frac{1}{2}\vec{MB} + \frac{1}{2}\vec{MC}$

$\vec{MM}' = \frac{1}{2}(\vec{AM} + \vec{MB}) + \frac{1}{2}(\vec{AM} + \vec{MC})$

$\vec{MM}' = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$ . Les points  $A, B, C$  sont fixés donc le vecteur  $\frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$  aussi.

Ainsi,  $f$  est la translation de vecteur  $\frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$ .

b.



3.  $k \neq -1$

On a :  $\vec{MM}' = k\vec{MA} + \frac{1}{2}\vec{MB} + \frac{1}{2}\vec{MC}$

$\vec{MK} + \vec{KM}' = k(\vec{MK} + \vec{KA}) + \frac{1}{2}(\vec{MK} + \vec{KB}) + \frac{1}{2}(\vec{MK} + \vec{KC})$

$\vec{KM}' = -\vec{MK} + (k + \frac{1}{2} + \frac{1}{2})\vec{MK} + k\vec{KA} + \frac{1}{2}\vec{KB} + \frac{1}{2}\vec{KC}$

$\vec{KM}' = k\vec{MK} + \vec{0}$

$\vec{KM}' = -k\vec{KM}$ , donc  $f$  est l'homothétie de centre  $K$  et de rapport  $-k$ .

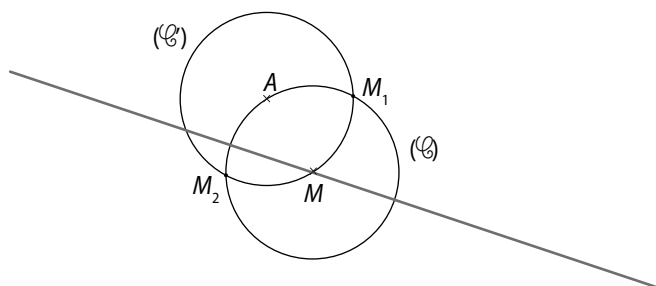
4. a. On note  $p'$  le périmètre de l'image de  $ABC$  par  $f$ .

$p' = |k| \times p$ .

b. On note  $\mathcal{A}'$  l'aire de l'image de  $ABC$  par  $f$ .

$\mathcal{A}' = k^2 \times \mathcal{A}$ .

99 1. a. et 2. b. & c.



b. Puisque  $M, M_1, M_2 \in (E)$ , on en déduit que  $AM = AM_1 = AM_2$ , donc que les triangles  $AMM_1$  et  $AMM_2$  sont isocèles en  $A$ .

2. a.  $f_1 = \text{rot}(A; \text{mes}(\widehat{AM, AM_1}))$

et  $f_2 = \text{rot}(A; \text{mes}(\widehat{AM, AM_2}))$ .

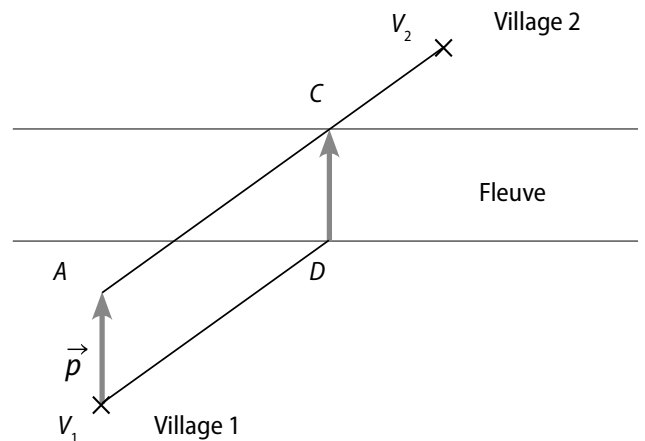
b. Voir figure précédente.

c. On note  $N'_1, P'_1$  (resp.  $N'_2, P'_2$ ) les images des points  $N, P$  par  $f_1$  (resp. par  $f_2$ ).

Le lieu des points  $M_1$  est la droite  $(N'_1P'_1)$

Le lieu des points  $M_2$  est la droite  $(N'_2P'_2)$ .

100 La direction et la longueur du pont sont invariables. On note  $\vec{p}$  le vecteur correspondant au pont.

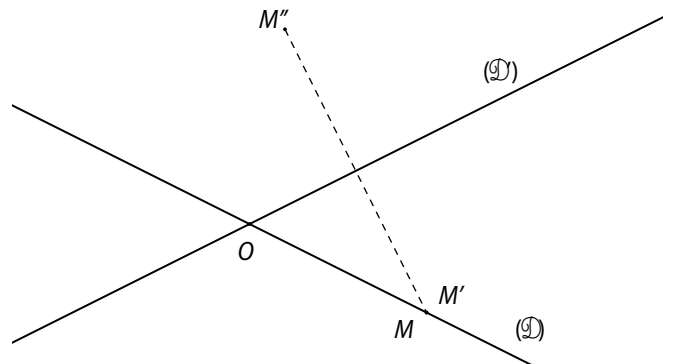


Les trajets  $V_1D + DC + CV_2$  et  $V_1A + AC + CV_2$  sont de même longueur (puisque  $V_1DCA$  est un parallélogramme).

Or le trajet  $AC + CV_2$  est minimal (ligne droite), donc le trajet  $V_1A + AC + CV_2$  également, ainsi que le trajet  $V_1D + DC + CV_2$ .

Il faut donc placer le pont au point  $D$ .

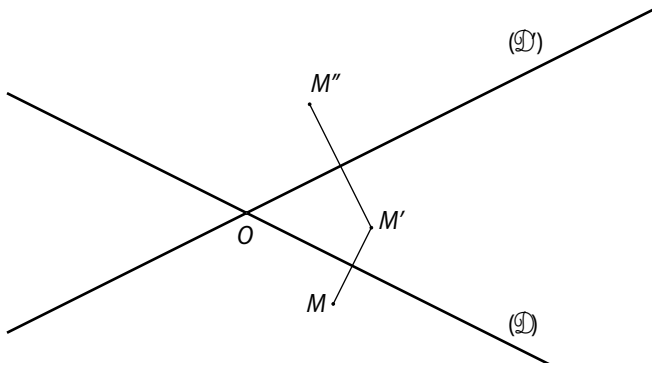
100 1. a.



b. Dans ce cas,  $M' = M$  donc  $\beta = 0$  et  $\alpha = \frac{\gamma}{2}$  car  $(D)$  est alors la bissectrice de l'angle  $(\widehat{OM, OM''})$ .

La rotation de centre  $O$  et d'angle de mesure  $2\alpha$  transforme  $M$  en  $M''$ .

2.



$(\mathcal{D})$  est la bissectrice de  $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})$  et  $(\mathcal{D}')$  est la bissectrice de  $(\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{OM''})$ .

On note  $I$  (resp.  $I'$ ) le milieu de  $[MM']$  (resp. de  $[M'M'']$ ).

$$\beta = \text{mes}(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})$$

$$= 2 \text{mes}(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM'})$$

$$\text{et } \gamma = \text{mes}(\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{OM''})$$

$$= 2 \text{mes}(\overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OM''}).$$

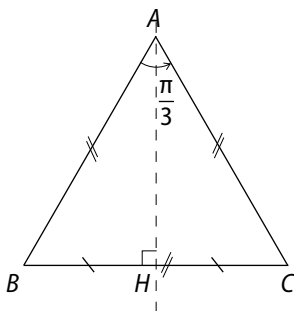
$$\text{Donc } \beta + \gamma = 2(\text{mes}(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM'}) + \text{mes}(\overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OM''}))$$

$$\beta + \gamma = 2\alpha.$$

La rotation de centre  $O$  et d'angle de mesure  $2\alpha$  transforme  $M$  en  $M'$ .

3. La succession de deux symétries orthogonales d'axes sécants peut être décrite comme une rotation dont l'angle a pour mesure le double de l'angle situé entre les axes.

4. a.



b. Cette mesure est  $\frac{\pi}{3}$  rad.

c. Les axes  $(\mathcal{D}) = (AB)$  et  $(\mathcal{D}') = (AH)$ , où  $H$  est le milieu de  $[BC]$ , conviennent.

**102 1.a.**  $h(A) = A'$ ,  $h(B) = B'$ ,  $h(M) = M'$ , donc  $(AM) \parallel (A'M')$  et  $(BM) \parallel (B'M')$ .

Ainsi, le point  $M'$  est le point d'intersection de la parallèle à  $(AM)$  passant par  $A'$  et de la parallèle à  $(BM)$  passant par  $B'$ .

b.

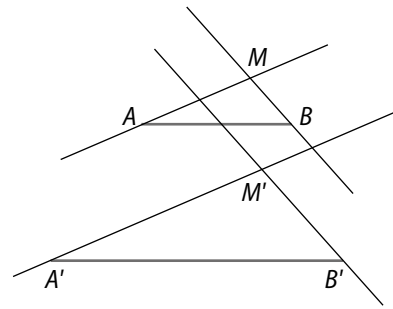


Figure 1

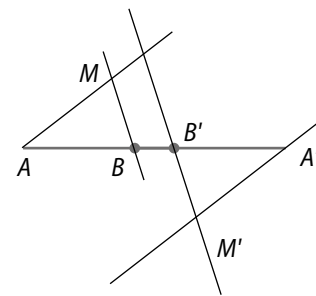


Figure 2

2. a. En procédant avec  $C \notin (AB)$ , on se retrouve dans le cas de la question 1. et on peut construire  $C'$ .

b. Dès lors  $M \notin (AC)$ , on se retrouve à nouveau dans le cas de la question 1. et on peut construire  $M'$  :

$M'$  est le point d'intersection de la parallèle à  $(AM)$  passant par  $A'$  et de la parallèle à  $(CM)$  passant par  $C'$ .

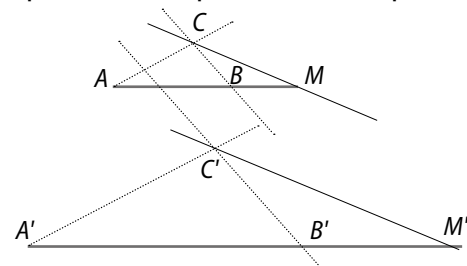


Figure 1

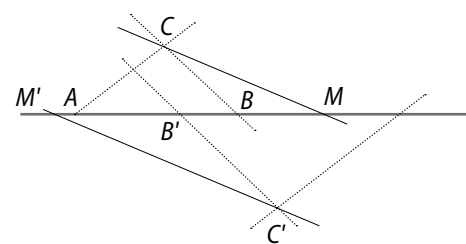


Figure 2

**103 1.a.** Les triangles  $IOM$  (resp.  $ION$ ) et  $IO'M'$  (resp.  $IO'N'$ ) sont isocèles, l'un en  $O$  et l'autre en  $O'$ .

Comme  $IO = IO'$  et que  $\widehat{OIM} = \widehat{O'IM'}$  (resp.  $\widehat{ION} = \widehat{IO'N'}$ ), on en déduit que ces triangles sont superposables et donc que  $IM = IM'$  (resp.  $IN = IN'$ ).

De plus, les points  $M, I, M'$  (resp.  $N, I, N'$ ) sont alignés, donc  $I$  est le milieu de  $[MM']$  (resp.  $I$  est le milieu de  $[NN']$ ). Donc,  $S_I(M) = M'$  et  $S_I(N) = N'$ .

**b.**  $I$  est le milieu des diagonales  $[MM']$  et  $[NN']$ , donc  $MNM'N'$  est un parallélogramme.

**2.** Oui, en prenant pour  $N$  le point diamétralement opposé à  $M$  sur le cercle  $(\mathcal{C})$ .

**3. a.**  $MNM'N'$  est un rectangle donc  $MN' = M'N = OO' = 6$ , et si on note  $H$  le pied de la hauteur issue de  $I$  dans le triangle  $INM'$ ,  $IH = ON = O'M' = 3$ .

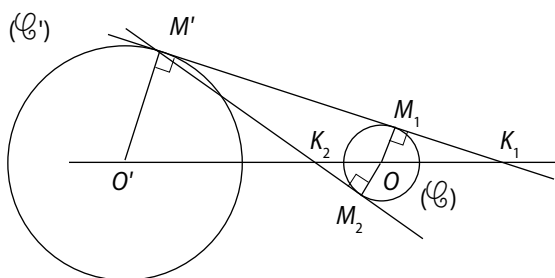
$$\text{Ainsi, } \mathcal{A}(INM') = \frac{M'N \times IH}{2} = 9$$

**b.** Le triangle  $IMN$  est rectangle donc les points  $N', O', I, O, N$  sont alignés.

$IN$  est une base du triangle  $INM'$  et  $IN = 6$  et la hauteur associée est  $O'M' = 3$ .

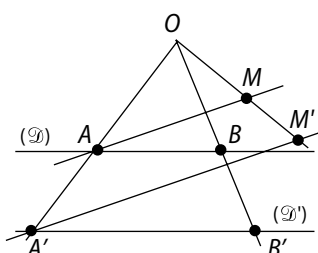
$$\text{Ainsi, } \mathcal{A}(INM') = \frac{IN \times O'M'}{2} = 9.$$

**104 a.**  $h_1(K_1; \frac{R'}{R})$  et  $h_2(K_2; -\frac{R'}{R})$ .



**b.** Lorsque  $O$  et  $O'$  sont confondus, il n'existe qu'une seule homothétie qui transforme  $(\mathcal{C})$  en  $(\mathcal{C}')$ , c'est :  $h(O; \frac{R'}{R})$ .

**105 1.** On suppose que toute droite  $(\mathcal{D})$  est sa propre image par  $f$ .



Soit  $M$  un point du plan,  $(\mathcal{D}_1)$  et  $(\mathcal{D}_2)$  deux droites sécantes en  $M$ . L'image de  $M$  par  $f$  appartient à l'intersection des images par  $f$  des droites  $(\mathcal{D}_1)$  et  $(\mathcal{D}_2)$ , qui sont invariantes. Donc  $M$  est invariant par  $f$ , qui est l'application identique.

On suppose dans la suite qu'il existe une droite  $(\mathcal{D})$  dont l'image  $(\mathcal{D}')$  lui est strictement parallèle (1).

**2.** Si  $A$  et  $B$  sont deux points de  $(\mathcal{D})$ , qui ont pour images par  $f$  deux points  $A'$  et  $B'$  distincts de  $(\mathcal{D}')$ , alors  $A$  et  $B$  sont eux-mêmes distincts.

**3.** On suppose que  $(AA')$  et  $(BB')$  sont sécantes en un point  $O$ .

**a.** On a  $f(A) = A'$ . L'image par  $f$  de la droite  $(AA')$  est la parallèle à  $(AA')$  passant par  $A'$ .

Donc  $f[(AA')] = (AA')$  et, de même,  $f[(BB')] = (BB')$ .

**b.**  $O \in (AA') \cap (BB') \Rightarrow f(O) \in f[(AA')] \cap f[(BB')]$ .

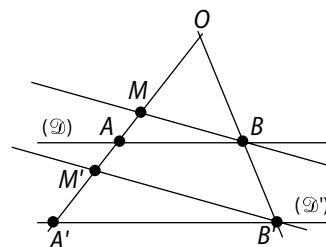
Or  $f[(AA')] = (AA')$ ,  $f[(BB')] = (BB')$  et  $(O) = (AA') \cap (BB')$ ; donc  $f(O) = O$  et  $O$  est invariant par  $f$ .

$O \in (\mathcal{D}) \Rightarrow f(O) \in f[(\mathcal{D})]$

$\Rightarrow O \in (\mathcal{D}')$  et  $(\mathcal{D}) = (\mathcal{D}')$ , en contradiction avec (1).

Donc  $O \notin (\mathcal{D})$  et  $O$  est distinct de  $A$  et  $B$ .

**c.** Soit  $M \notin (AA')$  et  $M' = f(M)$ .

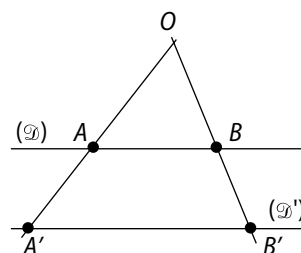


La droite  $(OM)$  a pour image par  $f$  la droite  $(OM')$ , qui lui est parallèle; donc  $M' \in (OM)$ .

La droite  $(AM)$  a pour image par  $f$  la droite  $(A'M')$ , qui lui est parallèle;  $M'$  est donc un point de la parallèle à  $(AM)$  passant par  $A'$ .

Donc  $(OM)$  et la parallèle à  $(AM)$  passant par  $A'$  sont sécantes en  $M'$ .

**d.** Soit  $M \in [AA'] \setminus \{O\}$  et  $M' = f(M)$ .



$M \notin (BB')$ ; par un raisonnement analogue à celui du **c.**, on démontre que  $(OM)$  et la parallèle à  $(BM)$  passant par  $B'$  sont sécantes en  $M'$ .

**e.** Soit  $h$  l'homothétie de centre  $O$  qui transforme  $A$  en  $A'$ .

On a :  $h(A) = A' = f(A)$  et  $h(O) = O = f(O)$ .

Par ailleurs,  $h(B)$  est le point d'intersection de  $(OB)$  avec la parallèle à  $(AB)$  issue de  $A'$ ; donc  $h(B) = B'$ .

Soit  $M$  un point du plan.

1<sup>er</sup> cas :  $M = O$ .  $h(O) = O = f(O)$  ; donc  $h(M) = f(M)$ .

2<sup>e</sup> cas :  $M \in (AA') \setminus \{O\}$ .  $h(M)$  est le point d'intersection de la droite  $(AA')$  avec la parallèle à  $(BM)$  issue de  $B'$ .

D'après **d.**, on a donc  $h(M) = f(M)$ .

3<sup>e</sup> cas :  $M \notin (AA')$ .  $h(M)$  est le point d'intersection de la droite  $(OM)$  avec la parallèle à  $(AM)$  issue de  $A'$ .

D'après **c.**, on a donc  $h(M) = f(M)$ .  $f$  est donc l'homothétie de centre  $O$  qui transforme  $A$  en  $A'$ .

**4.** On suppose que  $(AA')$  et  $(BB')$  sont parallèles.

**a.** Les côtés opposés du quadrilatère  $AA'B'B$  sont parallèles, donc  $\vec{AA'} = \vec{BB'}$ .

**b.** Soit  $M \notin (AB)$  et  $M' = f(M)$ . Désignons par  $t$  la translation de vecteur  $\vec{AA'}$ .

L'image par  $t$  de la droite  $(AM)$  est la parallèle à  $(AM)$  passant par  $A'$  ; donc :  $t((AM)) = (A'M')$ .

L'image par  $t$  de la droite  $(BM)$  est la parallèle à  $(BM)$  passant par  $B'$  ; donc :  $t((BM)) = (B'M')$ .

Les droites  $(AM)$  et  $(BM)$  sont sécantes en  $M$  ; on en déduit que :  $t(M) = M'$  et  $\vec{MM'} = \vec{AA'}$ .

**c.** Soit  $C \notin (AB)$  et  $C' = f(C)$ . D'après **b.**,  $C' = t(C)$  et  $\vec{CC'} = \vec{AA'}$ . Soit  $M \in (AB) \setminus \{A\}$ . On a :  $M \notin (AC)$ .

L'image par  $t$  de  $(AM)$  est la parallèle à  $(AM)$  passant par  $A'$  ; donc :  $t((AM)) = (A'M')$ .

L'image par  $t$  de  $(CM)$  est la parallèle à  $(CM)$  passant par  $C'$  ; donc :  $t((CM)) = (C'M')$ .

$\{M\} = (AM) \cap (BM)$  ; on en déduit que :  $t(M) = M'$  et  $\vec{MM'} = \vec{AA'}$ .

**d.**  $f$  est donc la translation de vecteur  $\vec{AA'}$ .

**5.** Les seules applications du plan dans lui-même, qui transforment une droite en une droite qui lui est parallèle, sont les homothéties et les translations.

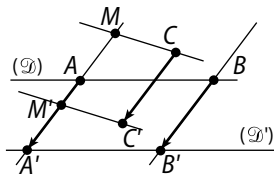
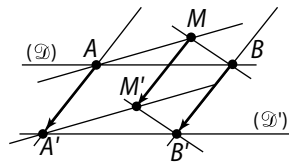
**106** 1.  $\vec{OM'} = k\vec{OM}$  donc

$$\begin{cases} x' - 0 = k(x - 0), \\ y' - 0 = k(y - 0) \end{cases} \text{ c'est-à-dire } \begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$$

**2. a.**  $\vec{AM'} = k\vec{AM}$

donc  $\vec{AO} + \vec{OM'} = k\vec{AM}$  d'où  $\vec{OM'} = k\vec{AM} + \vec{OA}$ .

$$\mathbf{b.} \begin{cases} x' = k(x - a) + a \\ y' = k(y - b) + b. \end{cases}$$



$$\mathbf{3. a.} \begin{cases} x' = 3(5 - 3) + 3 \\ y' = 3(4 - (-2)) + (-2) \end{cases}$$

Ainsi,  $B'$  a pour coordonnées  $(9 ; 16)$ .

**b.** De  $x' = k(x - a) + a$ , on déduit que  $x' - a = k(x - a)$  et  $x = \frac{x' - a}{k} + a$ .

De même,  $y = \frac{y' - b}{k} + b$ .

Or,  $(\mathcal{D}) : 3x - 2y + 1 = 0$ . Donc :

$$3 \left[ \left( \frac{x' - 3}{3} \right) + 3 \right] - 2 \left[ \left( \frac{y' - (-2)}{3} \right) + (-2) \right] + 1 = 0$$

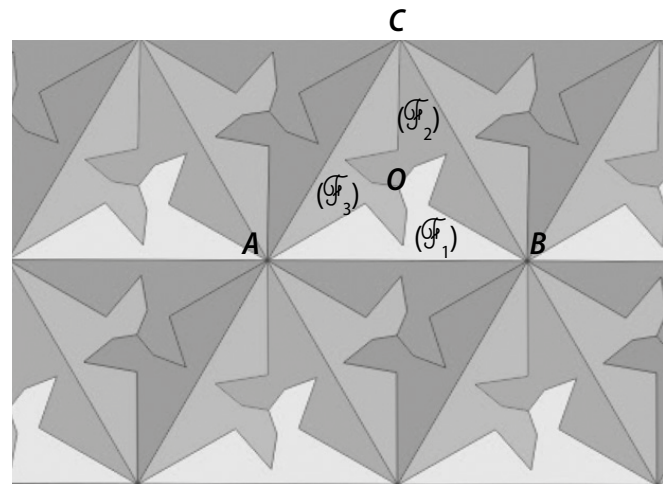
$$\text{donc } x' - 3 + 9 - \frac{2}{3}y' - \frac{4}{3} + 4 + 1 = 0.$$

$$\text{Ainsi, } (\mathcal{D}') : x' - \frac{2}{3}y' + \frac{29}{3} = 0.$$

**c.** Le cercle  $(\mathcal{C})$  a pour centre  $I(1 ; -2)$  et pour rayon  $\sqrt{5}$ , donc le cercle  $(\mathcal{C}')$  a pour centre  $I'$  (image de  $I$  par  $h$ ) et pour rayon  $|k| \times \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$ .

Or,  $x_{I'} = 3(1 - 3) + 3 = -3$  et  $y_{I'} = 3(-2 - (-2)) + (-2) = -2$ .  
Donc  $I'(-3 ; -2)$ .

**107 a.** À main levée.



**b.**  $\mathcal{F}_1$  est le pavé de base.

On obtient  $(\mathcal{F}_2)$  et  $(\mathcal{F}_3)$  à partir de  $(\mathcal{F}_1)$  par rotation de centre  $O$  et d'angle de mesure  $\pm \frac{2\pi}{3}$  rad ; puis le reste par des symétries orthogonales (par exemple d'axes  $(AB)$ ,  $(AC)$  et  $(BC)$ ).

$\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 + \mathcal{F}_3$  est le pavé de base.

On peut obtenir des pavés analogues par rotation de centre  $A$  (ou  $B$  ou  $C$ ) et d'angle de mesure  $\pm \frac{\pi}{3}$  rad.

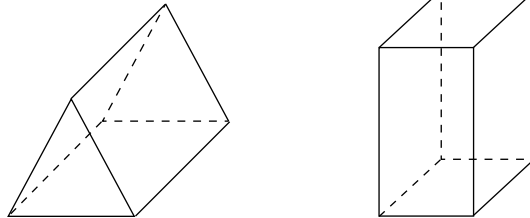
Également par des translations de vecteur  $\vec{AB}$  (ou  $\vec{BC}$  ou  $\vec{AC}$  ...).

# 7 Géométrie dans l'espace

## Activités d'introduction

### 1 Perspective en architecture

1 a. Un prisme droit à base triangulaire et un pavé droit.

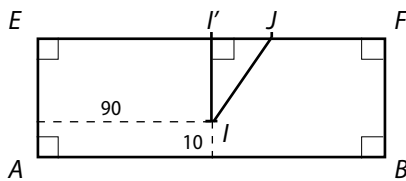


b. Le b. est juste. Dans la représentation a., les arêtes cachées ne sont pas représentées en perspective cavalière. Dans celle de c., la découpe du prisme pour emboîter le pavé droit n'est pas parallèle aux arêtes du prisme.

2 a. Dans le patron a., il manque le pavé droit. Dans le patron c., le pavé droit par du toit. Donc c'est le patron b.

### 2 Calcul de longueurs

1. a.



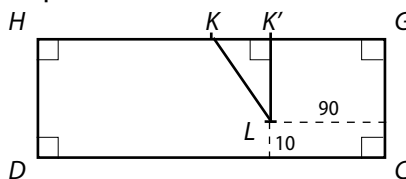
b.  $I'$  est le sommet de l'angle droit du triangle rectangle  $I'IJ$ .

$$I'I = 20 - 10 = 10. I'J = 100 - 90 = 10.$$

D'après le théorème de Pythagore,

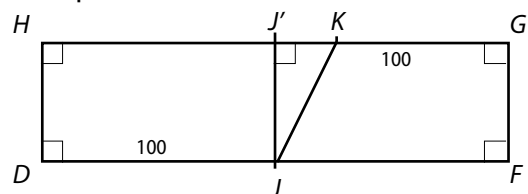
$$IJ = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}.$$

c. De même pour  $KL$  :



$$KL = 10\sqrt{2}.$$

De même pour  $JK$  :



$$J'K = 210 - 100 - 100 = 10; J'J = 20;$$

$$KJ = \sqrt{500} = 10\sqrt{5}.$$

$$\text{Distance parcourue} = 20\sqrt{2} + 10\sqrt{5}.$$

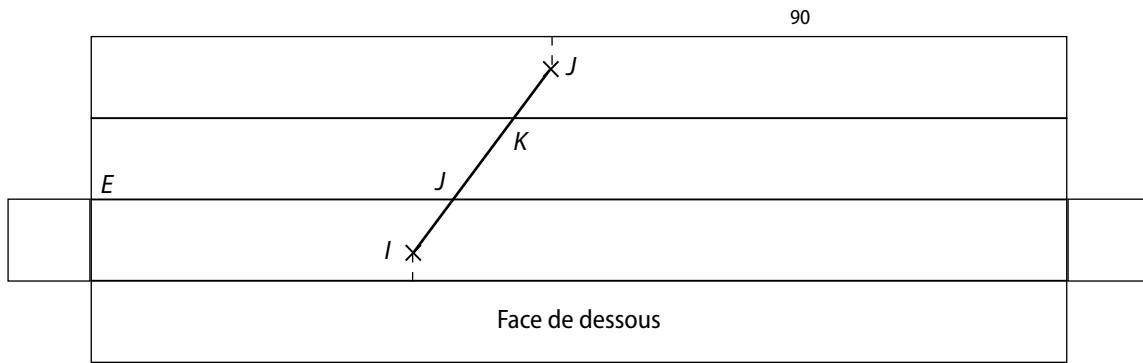
2. a. En procédant comme au 1.,  $IJ = \sqrt{100 + (a - 90)^2}$ ,  $JK = \sqrt{400 + (110 - a)^2}$ .

b.  $d = IJ + JK + KL = \sqrt{100 + (a - 90)^2} + \sqrt{400 + (110 - a)^2} + 10\sqrt{2}$ .

$a$	90	95	100	105	110	115	120
distance	52,4	50,3	50,6	52,7	56,5	61,7	68,1

c. Pour  $a = 95$ , la distance semble être minimale.

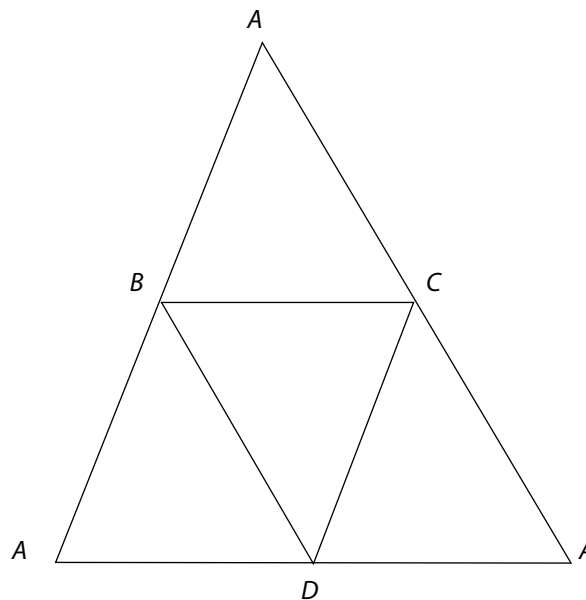
d.



$a = EJ \approx 4,75 \times 20 \approx 95.$

### 3 Plan et droite

1. a. b.



2. a. b. Oui si  $M$  n'est pas le milieu de  $[AB]$ . Non sinon.

c.  $(IM)$  est sécante au plan  $(BCD)$  ou  $(IM)$  est parallèle au plan  $(BCD)$ .

3. a. Oui, à la droite  $(BC)$ .

b. En se plaçant dans le plan  $(ABC)$ , on peut appliquer le théorème de la droite des milieux de côtés d'un triangle ou sa contraposée.

### 4 Des droites ni parallèles ni sécantes

1. a.  $(AH)$  et  $(BG)$  sont parallèles. b. Oui, dans le plan  $(ABG)$ . c.  $(HG)$  et  $(AB)$ .

2. a.  $(AG)$  et  $(BH)$  sont sécantes. b. Oui dans le plan  $(ABG)$ . c.  $(IJ)$ .

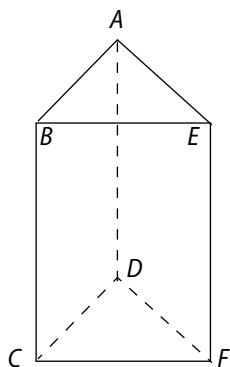
3. a.  $(AH)$  et  $(FC)$  ne sont ni parallèles, ni sécantes. b. Non. c.  $(HF)$  et  $(AC)$ .

## Savoir-faire

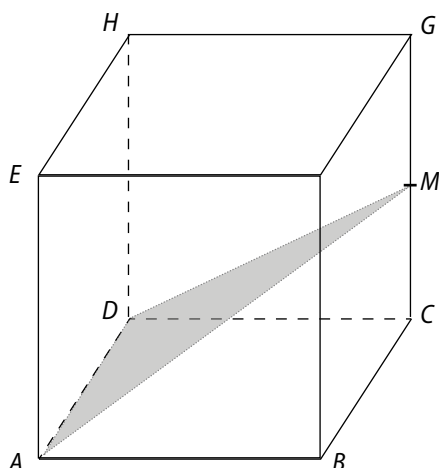
2 Recherche de la longueur  $BE$ .

Dans le triangle rectangle  $ABE$ , d'après la trigonométrie,  $\cos(\widehat{ABE}) = \frac{AB}{BE}$  donc  $BE = \frac{AB}{\cos(\widehat{ABE})}$  soit :

$$BE = \frac{6}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{12}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}.$$



## 3 a.

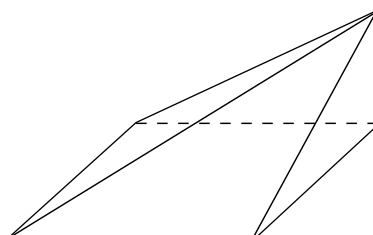


b. Dans le plan  $(AEB)$  :  $ABF$  triangle rectangle en  $B$ , d'après le théorème de Pythagore,  $DM^2 = DC^2 + CM^2$  donc  $DM^2 = 11,25$  donc  $DM = \sqrt{11,25}$ .

Dans le plan  $(ADM)$  :  $ADM$  triangle rectangle en  $D$ , d'après le théorème de Pythagore,  $AM^2 = AD^2 + DM^2$  donc :  $AM^2 = 9 + 11,25$  donc  $AM = \sqrt{20,25}$ .

Dans le plan  $(ADM)$  :  $ADM$  triangle rectangle en  $D$ , d'après la trigonométrie,  $\cos \widehat{ADM} = \frac{DM}{AM} = \frac{\sqrt{11,25}}{\sqrt{20,25}}$ .  
Ainsi,  $\text{mes} \widehat{ADM} \approx 41,18^\circ$ .

## 4



5 Pour les faces parallèles, par exemple de dessus et de dessous, l'angle de fuite est respecté mais les pointillés ne sont pas tracés.

8 D'après le codage, dans le plan  $(SBC)$  d'après la contraposée du théorème de la droite des milieux,  $(IJ)$  non parallèle à  $(BC)$  et, comme elles sont coplanaires,  $(IJ)$  et  $(BC)$  sont sécantes.

9 a.  $(HD) \parallel (IJ)$  donc  $D \in (IHJ)$ . Ainsi  $D$  est un point commun aux deux plans.

$I \in [AB]$  et  $(AB)$  est incluse dans  $(DCB)$ . Ainsi  $I$  est un point commun aux deux plans.  $(HIJ)$  et  $(DCB)$  sont donc sécants en  $(DI)$ .

b.  $F \in (EAB)$  donc  $F$  est un point commun aux deux plans et  $B \in (CGF)$  donc  $B$  est un point commun aux deux plans. Ainsi  $(CFG)$  et  $(EAB)$  sont sécants en  $(BF)$ .

12 Les points  $G, C$  et  $B$  définissent le plan  $(BFC)$  alors que  $A$  appartient au plan  $(EAD)$  parallèle à  $(BFC)$ .

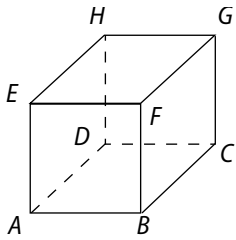
Donc les points  $G, C, B$  et  $A$  sont non coplanaires et donc les droites  $(CA)$  et  $(GB)$  sont non coplanaires.

13  $(DC)$  et  $(CJ)$  sont deux droites sécantes du plan  $(DCJ)$ , elles sont respectivement parallèles aux droites  $(EF)$  et  $(FI)$ . Or  $(EF)$  et  $(FI)$  sont deux droites sécantes du plan  $(EFI)$ . Donc les plans  $(DCJ)$  et  $(EFI)$  sont parallèles.

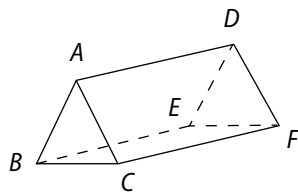
14 Les droites  $(FI)$  et  $(CG)$  sont parallèles, les droites  $(HD)$  et  $(CG)$  sont parallèles donc les droites  $(FI)$  et  $(HD)$  sont parallèles et sont donc coplanaires.

# Exercices d'entraînement

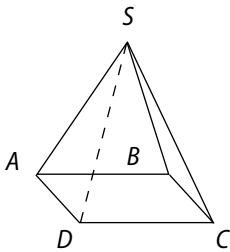
15 a.



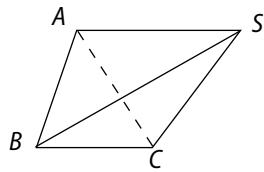
b.



c.



d.



16 a. Faux ; b. Faux ; c. Faux ; d. Faux.

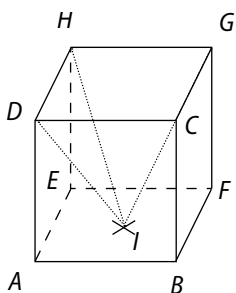
17 Pour que  $HMBN$  soit un parallélogramme, il faut et il suffit que  $(HM) \parallel (BN)$  et  $HM = BN$ .

Si  $N$  est tel que  $GN = \frac{2}{3}GC$  alors les deux conditions précédentes sont vérifiées.

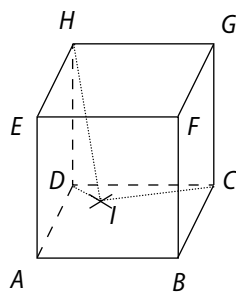
b. Il faut que  $HM = MB$  or dans le triangle rectangle  $EHM$ ,  $HM^2 = ME^2 = \frac{1}{9}a^2$  et dans le triangle rectangle  $MAB$ ,  $MB^2 = MA^2 + AB^2 = \frac{4}{9}a^2 + a^2 = \frac{13}{9}a^2$ .

Donc  $HM \neq MB$ , il n'y a pas de position de  $N$  pour que  $HMBN$  soit un losange.

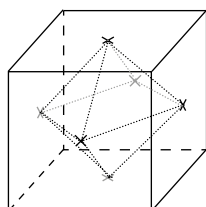
18 a.



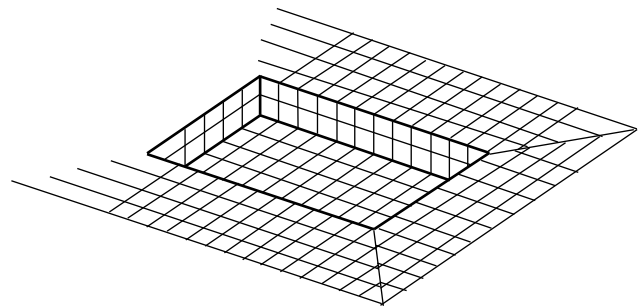
b.



19



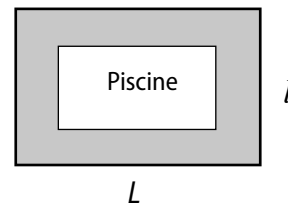
20 a.



b.  $\mathcal{V} = 50 \times 25 \times 3 = 3750$ .

Il faut évacuer  $3750 \text{ m}^3$ .

c. Vue de haut du bassin :



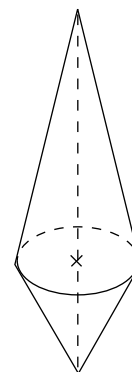
$$L = 50 + 2 \times (4 \times 0,3) = 52,4 \text{ m.}$$

$$l = 25 + 2 \times (4 \times 0,3) = 27,4 \text{ m.}$$

$$\mathcal{A}_{\text{Carrelée}} = (52,4 \times 27,4) - (50 \times 25) = 185,76 \text{ m}^2.$$

Il faut commander environ  $186 \text{ m}^2$  de carrelage.

21 a.



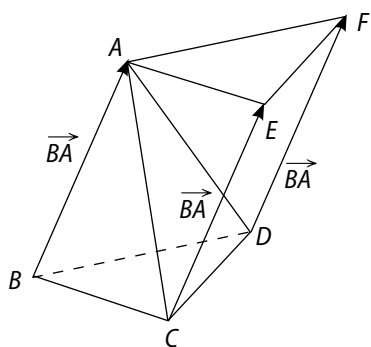
b. Si  $h = 12$  alors la partie supérieure est un cône de révolution de hauteur  $8 \text{ cm}$  et de rayon  $3 \text{ cm}$ . Ainsi

$$\mathcal{V}_{1/2} = \frac{1}{3}(\pi \times 3^2) \times 8 = 24\pi \text{ cm}^3.$$

$$\text{Pour la partie inférieure : } \mathcal{V}' = \frac{1}{3}(\pi \times 3^2) \times 4 = 12\pi \text{ cm}^3.$$

Le volume de son bouchon est  $36\pi \text{ cm}^3$ .

22 a. et b.



c. Les faces  $BCD$  et  $AEF$  sont parallèles et les faces latérales sont des parallélogrammes.  $AEFBCD$  est un prisme à base triangulaire.

23 a. Pour respecter cette condition dans le plan, il faut tracer un quadrilatère dont les côtés et les diagonales ont les mêmes longueurs. Ceci n'est pas possible puisque dans un losange, les diagonales sont de longueurs différentes et dans un carré, les diagonales sont égales mais plus grandes que le côté.

b. D' un tétraèdre régulier.

c. Ce sera le centre de ce tétraèdre.

24 a. Oui (droites parallèles).

b. Oui (3 points non alignés).

c. Oui.

d. Non (trois points alignés).

e. Non.

f. Oui (deux droites sécantes).

25 1. a.  $(ABC)$  ; b.  $H$  et  $(BC)$  ; c.  $(HG)$  et  $(AB)$ .

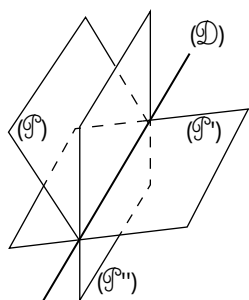
2. Pour a. :  $D$  ; pour b. :  $E$  et  $J$  ; pour c. :  $I, J$  et  $K$ .

26 a.  $ABCDEFGH$  parallélépipède rectangle.

b.  $(KLC)$  qui contient les crêtes  $(EA)$  et  $(GC)$ .

c.  $(KLB)$  qui contient le sommet  $B$ .

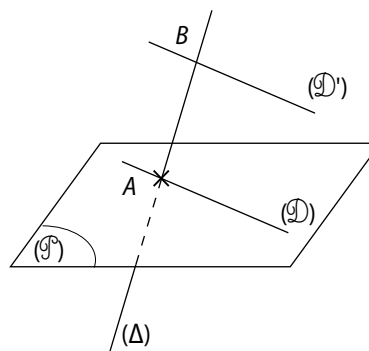
27



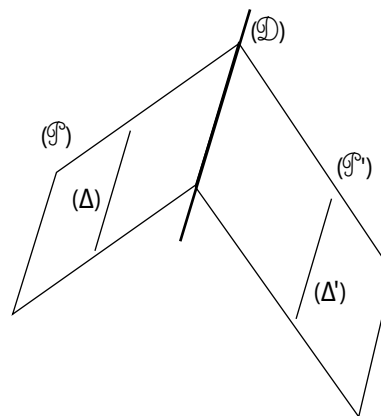
28 a. Tracer un plan  $(\mathcal{G})$  et placer un point  $A$  appartenant à ce plan  $(\mathcal{G})$ . Tracer une droite  $(D)$  incluse dans  $(\mathcal{G})$  passant par le point  $A$ .

Placer un point  $B$  n'appartenant pas à  $(\mathcal{G})$ . Tracer la droite  $(\Delta)$  passant par  $A$  et  $B$ .

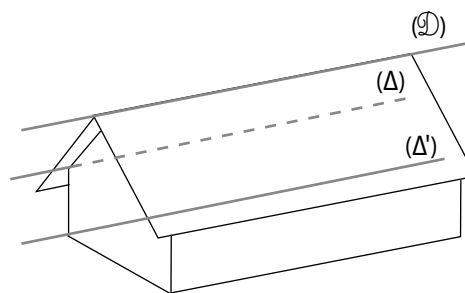
b.



29 a.



b.



Les droites  $(\Delta)$ ,  $(\Delta')$  et  $(D)$  sont parallèles d'après le théorème du toit.

30 a ; b ; d ; e.

31 a.  $DB^2 = DA^2 + AB^2 = 4^2 + 5^2 = 41$ .  $DB = \sqrt{41}$ .

b.  $DF^2 = DB^2 + BF^2 = 41 + 3^2 = 50$  /  $DF = \sqrt{50}$ .

c.  $AI^2 = AE^2 + EI^2 = 3^2 + 2,5^2 = 15,25$ .  $AI = \sqrt{15,25}$ .

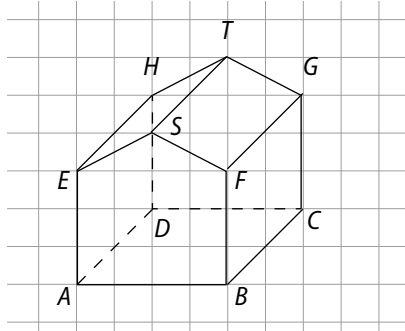
d.  $IJ^2 = IB^2 + BJ^2 = IA^2 + BJ^2 = 15,25 + 3^2 = 24,25$ .

$IJ = \sqrt{24,25}$ .

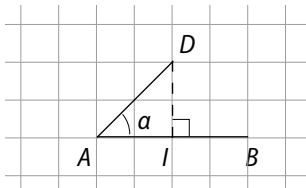
e.  $ID^2 = IA^2 + AD^2 = 15,25 + 4^2 = 31,25$ .  $ID = \sqrt{31,25}$ .

f.  $IC = ID = \sqrt{31,25}$ .

32 a.



b. À l'aide du quadrillage, on projette  $D$  orthogonalement sur  $(AB)$  :



Puis on utilise la trigonométrie

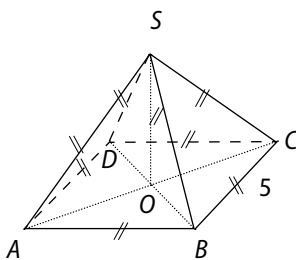
$$\tan \alpha = DI/AI = 2/2 = 1.$$

Ainsi  $\alpha = 45^\circ$

c. À l'aide du quadrillage :

$$BC^2 = 2^2 + 2^2 = 8 \text{ donc } BC = \sqrt{8}. \text{ Ainsi } k = \frac{\sqrt{8}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

33 a.



b. Pyramide régulière donc  $ODS$  triangle rectangle car  $SBD$  triangle isocèle en  $S$  et  $O$  milieu de  $[DB]$ .

$$\text{Ainsi } SO^2 + OB^2 = SB^2.$$

$$ABCD \text{ carré donc } DB^2 = DC^2 + CB^2 = 5^2 + 5^2 = 5\sqrt{5}.$$

$$\text{Ainsi } SO^2 = 5^2 - \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 25 - \frac{25}{2} = 12,5.$$

$$OS = \sqrt{12,5}.$$

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \frac{1}{3} \times OS \times \mathcal{A}_{ABCD} = \frac{1}{3} \times \sqrt{12,5} \times 5^2 \\ &= 25 \frac{\sqrt{12,5}}{3} \text{ cm}^3. \end{aligned}$$

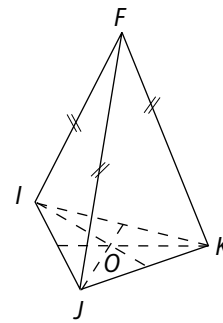
$$SO = \sqrt{12,5} \text{ cm}.$$

34 a. Dans le triangle  $EFG$ ,  $I$  et  $J$  milieu de  $[EF]$  et  $[FG]$  donc  $IJ = \frac{1}{2}EG$ . De même  $IK = \frac{1}{2}EB$  et  $JK = \frac{1}{2}GB$ .

De plus  $ABCDEFGH$  est un cube donc  $EG = EB = GB$  et donc  $IJ = JK = KI$ .

Le triangle  $IJK$  est équilatéral.

b.



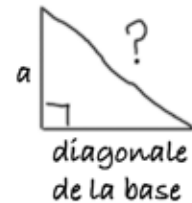
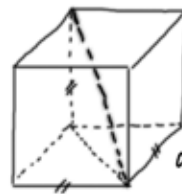
c. Calculons  $FJ$  puis  $IJ$ .

$$FJ = \frac{1}{2}FG = 2.$$

$$IJ = \frac{1}{2}EG = \frac{1}{2}(\sqrt{FE^2 + FG^2}) = \frac{1}{2}\sqrt{32} = 2\sqrt{2}.$$

Donc  $FIJK$  n'est pas un tétraèdre régulier.

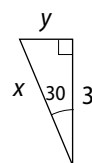
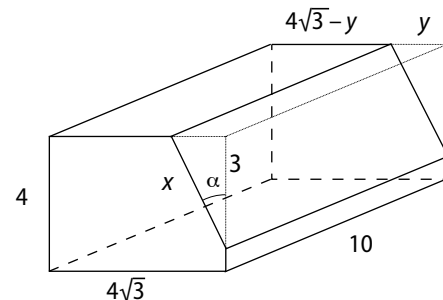
35 Dessins à main levée.



Diagonale du carré de côté  $a = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$ .

Diagonale du cube de côté  $a = \sqrt{a^2 + (a\sqrt{2})^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$ .

36 a.



$$\cos(30) = \frac{3}{x} \text{ donc } x = \frac{3}{\cos(30)} \approx 3,5 \text{ m}.$$

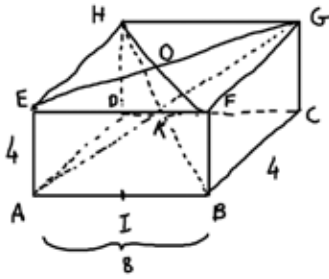
$$\tan(30) = \frac{y}{3} \text{ donc } y = 3 \tan(30) \approx 1,7 \text{ m}.$$

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{ob} &= \mathcal{V}_{pavé} - \mathcal{V}_{prisme} \\ &= (4 \times 4\sqrt{3} \times 10) - \left(\frac{3 \times y}{2} \times 10\right) \\ &= 160\sqrt{3} - 15 \times 3 \tan(30) = 160\sqrt{3} - \frac{45}{\sqrt{3}} \\ &= 145\sqrt{3}. \end{aligned}$$

c.  $\mathcal{V}_{ob} \approx 251 \text{ m}^3$ . Ainsi Masse  $\approx 15\,069 \text{ kg}$ .

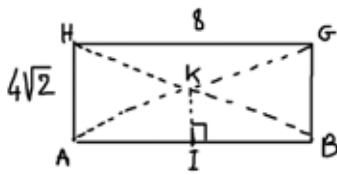
37 À main levée.

1. a.



$(HG) \parallel (AB)$  donc les quatre points sont coplanaires et  $HG = AB$  donc  $GHBA$  est un parallélogramme.

b.



Dans  $ADH$  rectangle en  $D$

$$AH^2 = AD^2 + DH^2 = 4^2 + 4^2 = 32.$$

$$AH = 4\sqrt{2}.$$

$AKB$  isocèle en  $K$  avec  $KI = 2\sqrt{2}$  et  $AI = 4$ .

$$\text{Ainsi } \tan \widehat{AKB} = \frac{KI}{AI} = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Donc  $\text{mes}(\widehat{KAI}) \approx 35^\circ$

et donc  $\text{mes}(\widehat{AKB}) = 180 - 2 \text{mes}(\widehat{KAI}) \approx 109^\circ$ .

2. Dans  $OEA$  rectangle en  $E$ ,

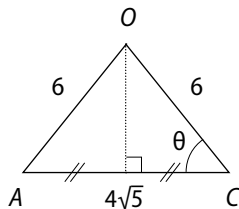
$$OA^2 = AE^2 + OE^2 = 4^2 + \left(\frac{1}{2}EG\right)^2.$$

Dans  $EHG$  rectangle en  $H$ :

$$EG^2 = EH^2 + HG^2 = 4^2 + 8^2 = 80.$$

Ainsi  $OA^2 = 16 + 20 = 36$ . Donc  $OA = 6$ .

De même  $OC = 6$ . Puis  $AC = EG = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$ .



$$\cos \theta = \frac{2\sqrt{5}}{6} = \frac{\sqrt{5}}{3}. \text{ Donc } \text{mes} \theta \approx 42^\circ.$$

Ainsi  $\text{mes}(\widehat{OCA}) = \text{mes}(\widehat{CAO}) \approx 42^\circ$  et  $\text{mes}(\widehat{OAC}) \approx 96^\circ$ .

38 a. Non coplanaires. b. Perpendiculaires en  $D$ .

c. Parallèles. d. Non coplanaires.

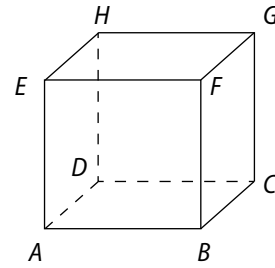
39 a. Sécantes en  $C$ . b. Parallèles. c. Parallèles.

d. Sécantes en  $E$ .

40 a. Parallèles. b. Sécants en  $(FG)$ . c. Confondus.

d. Sécants en  $(HD)$ .

41 a.

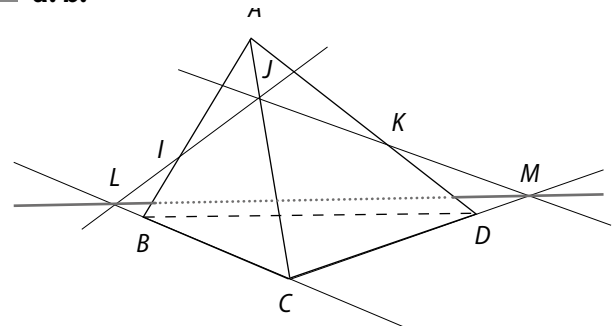


b.  $(EF) \parallel (AB)$   
 $(DC) \parallel (AB)$  } donc  $(EF) \parallel (DC)$ .

De plus  $EF = DC$  (arêtes du cube) donc  $EFCD$  est un parallélogramme, donc  $(ED) \parallel (FC)$ .

c.  $(FC)$  est parallèle à  $(ED)$  qui est une droite incluse dans le plan  $(EDG)$ , donc  $(FC)$  est parallèle à  $(EDG)$ .

42 a. b.



$(IJ)$  et  $(BC)$  sont coplanaires et sécantes en  $L$  et  $L$  est le point d'intersection de  $(IJ)$  et  $(BCD)$ .

De même  $M$  est l'intersection de  $(JK)$  et  $(BCD)$ .

c. Les plans  $(IJK)$  et  $(BCD)$  se coupent en la droite  $(LM)$ .

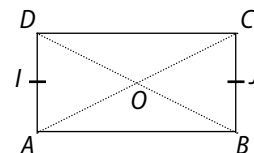
43 a.  $(AD) \parallel (FG)$  donc  $(AI) \parallel (KG)$ .

$I$  milieu de  $[AD]$  donc  $AI = \frac{1}{2}AD$ . De même  $GK = \frac{1}{2}FG$ .

$ABCDEFGH$  pavé droit donc  $AD = FG$ . Ainsi  $AI = GK$ .

Finalement,  $AIGK$  est un parallélogramme.

• Montrons que  $(IJ) \parallel (DC)$ .



Dans le rectangle  $ABCD$ , d'après la droite des milieux dans  $DBC$ ,  $(DC) \parallel (OJ)$ .

Dans le triangle  $DAC$ ,  $(JO)$  est la droite passant par un milieu de côté  $O$  et parallèle à un deuxième côté donc  $(JO)$  coupe  $[DA]$  en son milieu  $I$ . Ainsi  $(JO) = (OI) = (IJ)$ .

D'après ce qui précède  $(IJ) \parallel (DC)$ .

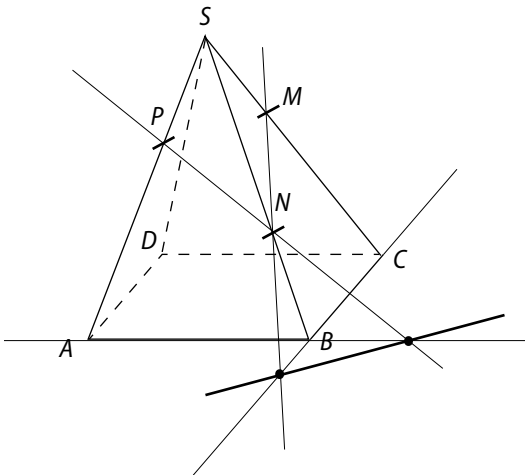
Comme  $(DC) \parallel (HG)$ ,  $(IJ) \parallel (HG)$ .

De plus,  $JO + OI = \frac{1}{2}DC + \frac{1}{2}DC = DC$ . Or  $DC = HG$ , donc  $IJ = HG$ .

$IJGH$  est bien un parallélogramme.

**b.**  $AIGH$  parallélogramme donc  $(AK) \parallel (IG)$ .  $(IG)$  est incluse dans  $(IJH)$  donc  $(AK)$  est parallèle à  $(IJH)$  car  $(IJH) = (IJG)$ .

44



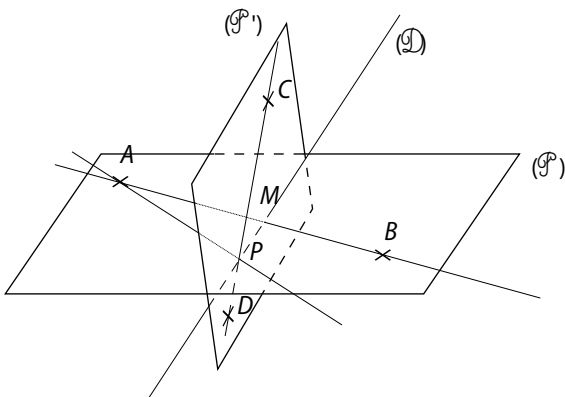
**1. a.**  $M, N, B$  et  $C$  sont coplanaires et dans le triangle  $SBC$ ,  $SM/SC \neq SN/SB$  donc  $(MN)$  est non parallèle à  $(BC)$ .

**b.** L'intersection de  $(MN)$  et  $(BC)$  est aussi celle de  $(MN)$  et  $(ADC)$ .

**2. a. b.** Voir **1. a.**

**3.** Les deux points d'intersection précédents appartiennent aux plans  $(PMN)$  et  $(ABC)$  donc appartiennent à la droite d'intersection de ces deux plans.

45 **1. a.**



$(AB)$  et  $(D)$  sont coplanaires et sécantes en  $M$ . Et ce point appartenant à  $(D)$  appartient aussi à  $(P)$  car  $(D)$  est incluse dans  $(P)$ .

**b.**  $C$  et  $M$  sont deux points du plan  $(P)$  et aussi du plan  $(ABC)$ . Ainsi  $(CM)$  est la droite d'intersection des plans  $(P)$  et  $(ABC)$ .

**2.** On procède de même avec  $N$  intersection de  $(CD)$  et  $(D)$  qui est aussi intersection de  $(ACD)$  et  $(P)$  et donc la droite  $(AN)$  est la droite d'intersection des plans  $(ACD)$  et  $(P)$ .

46  $(P)$  est le plan dont la section avec le tétraèdre est hachurée en orange.

$I, J$  et  $K$  sont les points d'intersection du plan  $(P)$  avec les arêtes de  $SABC$ .

Ainsi  $E \in (IJ)$ ,  $G \in (JK)$  et  $F \in (IK)$ . Dans ce cas, les points  $E, F$  et  $G$  sont les points d'intersection de ces droites et des droites  $(AC)$ ,  $(AB)$  et  $(CB)$ .

$E, F$  et  $G$  appartiennent au plan  $(P)$  et  $(ABC)$ . Or deux plans, s'ils sont sécants, se coupent en une droite. Donc  $E, F$  et  $G$  appartiennent à cette droite. Les trois points sont alignés.

47 **a.** Non coplanaires. **b.** Non coplanaires. **c.** Parallèles. **d.** Non coplanaires.

48 **a.** Parallèles. **b.** Sécants. **c.** Parallèles. **d.** Sécants.

49 **a.** Sécants en  $(GH)$ . **b.** Parallèles. **c.** Sécants. **d.** Parallèles.

50 **1.**  $AL = \frac{1}{2}AE = \frac{1}{2}GC = CI$  et  $(AL) \parallel (AE)$ ,  $(CI) \parallel (CG)$  donc  $(AL) \parallel (CI)$ .

$ALIC$  est un parallélogramme. Donc  $(AC) \parallel (LI)$ .

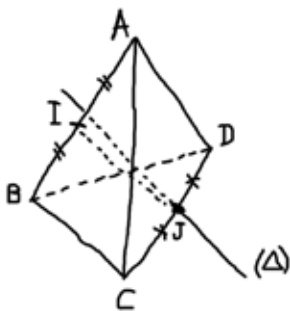
**2. a.** Dans le triangle  $ABC$ ,  $K$  et  $J$  sont les milieux de  $[AB]$  et  $[BC]$  donc  $(KJ) \parallel (AC)$ . Comme  $(LI) \parallel (AC)$ ,  $(KJ) \parallel (LI)$ .

**b.**  $(LI) \parallel (JK)$  donc  $L, I, J$  et  $K$  sont coplanaires donc  $LKJI$  est un quadrilatère. De plus  $(KJ) \parallel (LI)$  et  $KJ \neq LI$  donc  $LKJI$  est un trapèze et donc  $(LK)$  et  $(JI)$  sont sécantes.

**3. a.**  $L$  et  $K$  sont des points de  $(ABF)$  donc la droite  $(LK)$  est incluse dans  $(ABF)$  donc  $M$  appartient à  $(ABF)$ . De même  $M \in (CBF)$ .

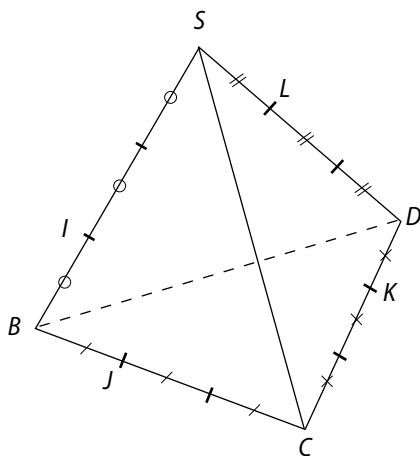
**b.**  $(ABF)$  et  $(CBF)$  sont deux plans sécants en  $(BF)$  donc  $M \in (BF)$ .

51 Figure à main levée.



- On trace la parallèle à  $(BC)$  passant par  $J$  que l'on nomme  $(\Delta)$ .
- Les droites  $(IJ)$  et  $(\Delta)$  sont sécantes donc elles sont coplanaires et forment donc un plan  $(Q)$ . Tout plan parallèle à  $(Q)$  sera solution.

52 a.



- b.**  $IJ = IB + BJ = \frac{1}{3}SB + \frac{1}{3}BC = \frac{1}{3}(SB + BC) = \frac{1}{3}SC$ .
- c.**  $\vec{IJ} = \frac{1}{3}\vec{SC}$  donc  $\vec{IJ}$  et  $\vec{SC}$  sont colinéaires donc  $(SC) // (IJ)$ .  
Or  $(IJ) \subset (IJK)$ , ainsi  $(SC) // (IJK)$ .
- d.** De même  $\vec{JK} = \frac{2}{3}\vec{BC} + \frac{2}{3}\vec{CD} = \frac{2}{3}\vec{BD}$  donc  $(JK) // (BD)$   
et comme  $(JK) \subset (IJK)$ ,  $(BD) // (IJK)$ .

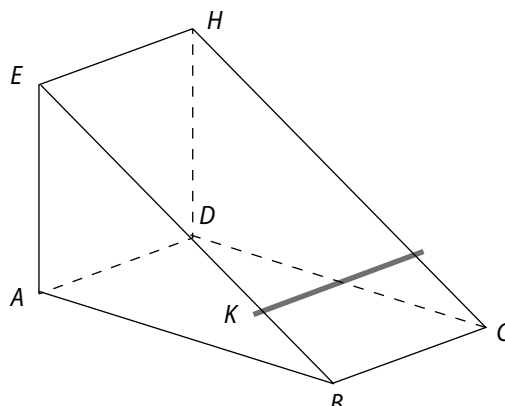
53 Dans  $ADM$ ,  $(AD) // (IH)$  donc, d'après le théorème de Thalès :  $\frac{MI}{MA} = \frac{MH}{MD} = \frac{HI}{DA}$ .

Or  $I$  milieu de  $[HF]$  et  $AD = HE$  donc  $\frac{HI}{DA} = \frac{1}{2}$ .

Ainsi  $\frac{MI}{MA} = \frac{1}{2}$  donc  $I$  milieu de  $[MA]$ . De même  $J$  milieu de  $[AN]$ .

Ainsi dans  $AMN$ ,  $I$  et  $J$  sont les milieux de  $[AM]$  et  $[AN]$  donc  $(IJ) // (MN)$ .

54



Justification :

$(AD) // (EH)$  et  $(AD)$  et  $(EH)$  sont incluses respectivement dans  $(DAK)$  et  $(EHC)$ . Ces deux plans sont sécants puisque  $K$  est un point appartenant à ces deux plans. Donc d'après la « propriété du toit »  $(AD)$ ,  $(EH)$  et la droite d'intersection des deux plans sont parallèles.

55 1.  $I$  milieu de  $[AB]$ ,  $K$  milieu de  $[HG]$  et  $ABCDEFGH$  est un cube donc  $BI = HK$  et  $(BI) // (HK)$ .  $BIHK$  est donc un parallélogramme. Ainsi  $(IH) // (HIJ)$ .

56 a. Le trapèze  $ABGH$ . b. Le triangle  $IJK$ .

c. Le trapèze  $ILMM'$  où  $M'$  est le milieu de  $[AD]$ .

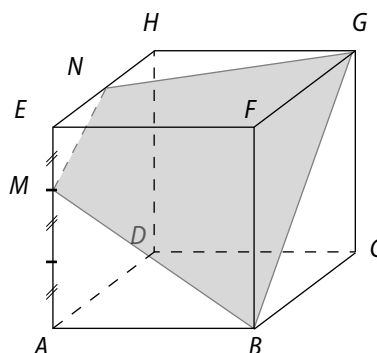
d. Le parallélogramme  $KNOO'$  où  $O'$  est le milieu de  $[ND]$ .

e. Le trapèze  $KNMO'$ .

f. Le trapèze  $ILCD$ .

57 a. Le segment  $[RS]$ . b. Le segment  $[RT]$  c. Oui,  $S$  appartient aux deux plans. d. Les droites  $(BD)$  et  $(RT)$ .

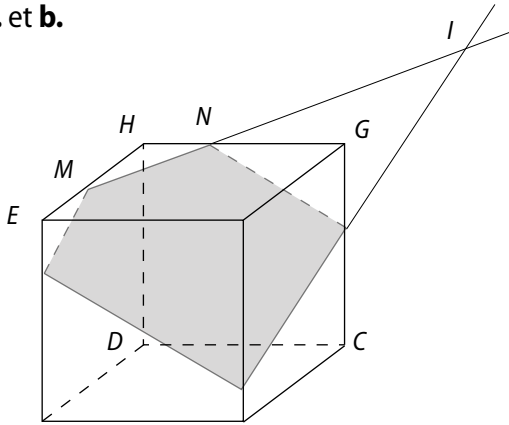
58 a. et d.



b.  $(FBC)$  et  $(EDA)$  sont des plans parallèles donc le plan  $(MGB)$  qui coupe l'un en  $[GB]$  et coupe l'autre en une droite parallèle à  $(GB)$ .

c.  $G$  appartient aux deux plans et  $N$  aussi donc  $[GN]$  est l'intersection du plan  $(MGB)$  et de la face  $EFGH$ .

59 a. et b.



3. a.  $M, N, F$  et  $G$  sont quatre points coplanaires.

b.  $I \in (MN)$  donc  $I \in (MNP)$ . De même  $I \in (FG)$  donc  $I \in (FGC)$ .

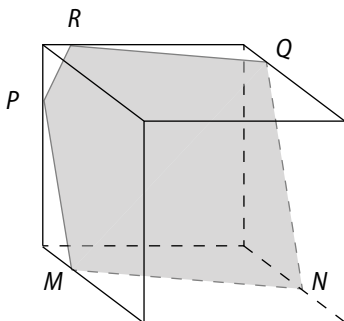
4. Dans ce cube,  $(ABF)$  et  $(DCG)$  sont parallèles donc si  $(MNP)$  coupe l'un, il coupe l'autre et les droites d'intersection sont parallèles.

## faire le point

60 • Inclusive ; • Parallèles ; • Coplanaires ; • Parallèles ou non coplanaires.

61 a. Safi : « Les droites d'intersection d'un plan avec deux plans parallèles sont parallèles entre elles. »

b. Non. Justifications :  $(MP) \parallel (NQ)$  et  $(MN) \parallel (RQ)$ .



62 1. Intersection des plans  $(SAB)$  et  $(SCD)$  : ces deux plans ne sont pas parallèles ( $S$  point commun) et sont non confondus donc ils sont sécants en une droite  $(\Delta)$  passant par  $S$ .

Puis  $(DC)$  et  $(AB)$  sont des droites parallèles dont l'une est incluse dans  $(SCD)$  et l'autre dans  $(SAB)$ . D'après le théorème du toit,  $(\Delta)$  est parallèle aussi à  $(AB)$  et  $(CD)$ .

2. Intersection de  $(FG)$  et  $(\Delta)$  :

$(FG)$  et  $(\Delta)$  sont incluses dans le plan  $(ABS)$ , on peut prolonger ces droites pour déterminer leur point d'intersection est  $H$ .

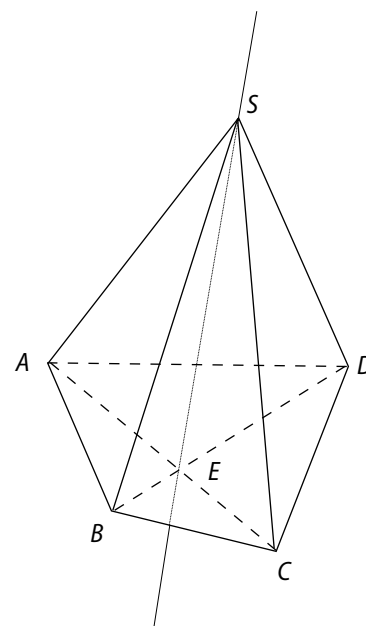
3. Point d'intersection du plan  $(EFG)$  et de la droite  $(SC)$  :  $(EF)$  et  $(SC)$  sont incluses dans le plan  $(SDC)$ , elles

sont sécantes en  $I$ .  $H \in (FG)$  donc  $H \in (EFG)$ . Ainsi  $(EH)$  est incluse dans  $(EFH)$  et donc  $I \in (EFH)$ . Finalement,  $I$  est l'intersection de  $(SC)$  et de  $(EFG)$ .

63 1. Le point  $S$  appartient aux deux plans.

2.  $(AC)$  et  $(BD)$  sont deux droites incluses dans  $(SAC)$  et  $(SBD)$  et ces deux droites sont sécantes. Leur point d'intersection  $(E)$  appartient à l'intersection.

3. La droite d'intersection est  $(SE)$ .



64 Remarque du professeur :

On ne peut pas utiliser la propriété du cours 4.b.1 puisque  $(SAD)$  et  $(SBC)$  sont des plans sécants.

## Se tester

65 à 68 Voir Manuel de l'élève page 259.

## Exercices d'approfondissement

69 a. Un cube de côté  $b$  ; un cube de côté  $a$ .

Trois pavés de dimensions  $a, a, b$ .

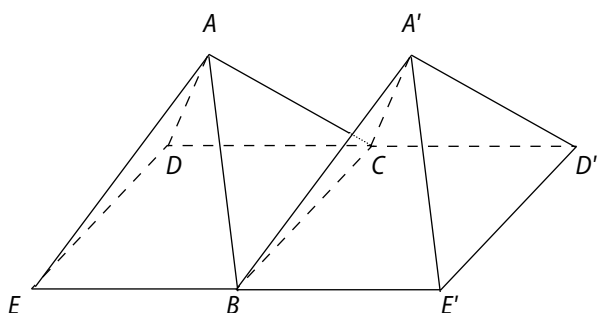
Trois pavés de dimensions  $b, b, a$ .

$$V_1 = b^3, V_2 = a^3, V_3 = a^2b \text{ et } V_4 = ab^2.$$

b. Volume du cube de base  $(a + b)^3$ .

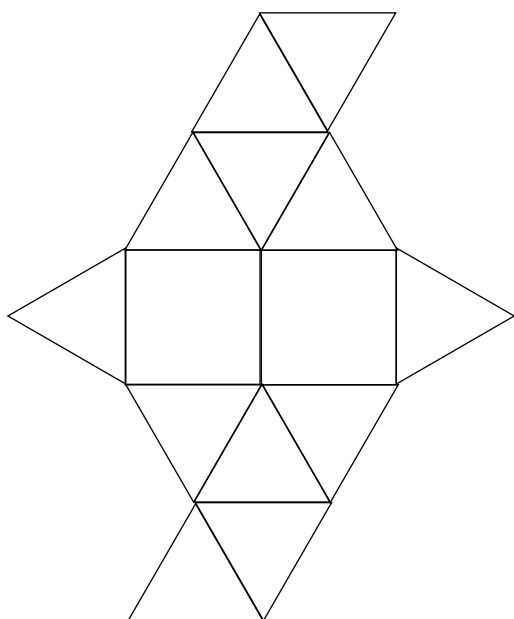
$$\text{Donc } (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3b^2a + b^3.$$

70 a.



b.  $AA'BC$  est un tétraèdre régulier d'arête 4 cm.

c.

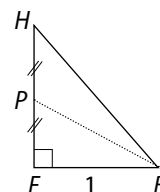


71 1. a.

$[HF]$  est la diagonale du carré  $EFGH$  de côté 1 cm donc mesure  $\sqrt{2}$  cm.

$$BP^2 = BF^2 + FP^2 = 1^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}.$$

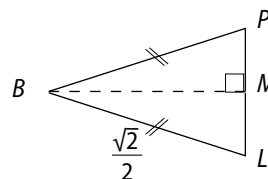
$$\text{Ainsi } BP = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$



1. b. De même dans  $HBC$ ,  $BL = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .  $BPL$  est donc un triangle isocèle.

2. Dans le triangle  $EDG$ ,  $P$  et  $L$  sont les milieux de  $[EG]$  et  $[GD]$  donc  $PL = \frac{1}{2}ED$ . Or  $ED = \sqrt{2}$  donc  $PL = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

3. a.



$$\sin(\widehat{LBM}) = \frac{LM}{LB} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

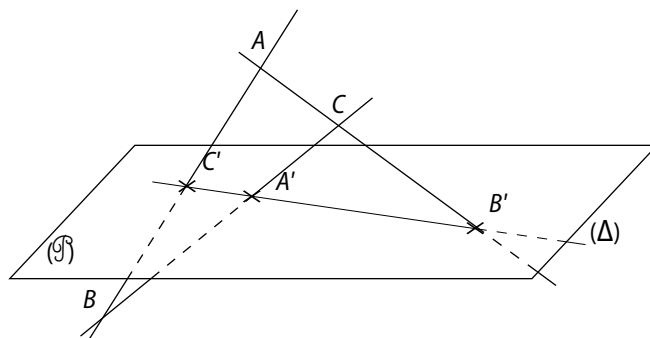
Donc  $\text{mes}(\widehat{LBM}) \approx 17^\circ$ .

$(BM)$  est aussi bissectrice de l'angle  $\widehat{PBL}$  donc :

$$\text{mes}(\widehat{PBL}) = 2 \times \text{mes}(\widehat{PBM}).$$

Ainsi  $\text{mes}(\widehat{PBL}) \approx 34^\circ$ .

72 a.



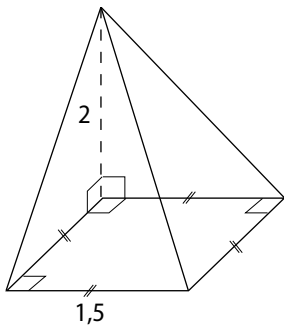
**b.** Les points  $A, B$  et  $C$  ne sont pas alignés donc ils forment un plan  $(ABC)$ .

$(\mathcal{P})$  et  $ABC$  sont sécants en une droite  $(\Delta)$ . De plus,  $(AB)$  est une droite incluse dans  $ABC$ , elle coupe  $(\mathcal{P})$  en  $A'$  qui est un point de  $(ABC)$  et de  $(\mathcal{P})$  donc  $A' \in (\Delta)$ .

De même  $B' \in (\Delta)$  et  $C' \in (\Delta)$ .

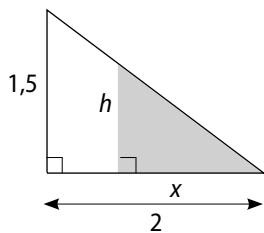
Finalement les points  $A', B'$  et  $C'$  sont alignés.

**73 1.**



$$2. \mathcal{V} = \frac{1}{3} \times 2 \times \text{Aire}_{\text{carré}} = \frac{1}{3} \times 2 \times (1,5)^2 = 1,5 \text{ m}^3.$$

$$3. \text{a. } \mathcal{V}_{\text{eau}} = \frac{1}{3} \times x \times \text{Aire}_{\text{carré eau}}$$



D'après Thalès  $\frac{x}{2} = \frac{h}{1,5}$  donc  $\frac{1,5x}{2} = h$ .

$$\begin{aligned} \text{Ainsi } \mathcal{V}_{\text{eau}} &= \frac{1}{3} \times x \times h^2 = \frac{1}{3} \times x \times \left(\frac{1,5x}{2}\right)^2 \\ &= \frac{2,25x^2 \times x}{3 \times 4} = \frac{2,25x^3}{12}. \end{aligned}$$

Les quotients  $\frac{3}{16}$  et  $\frac{2,25}{12}$  sont-ils égaux ?

$$3 \times 12 = 36 \text{ et } 16 \times 2,25 = 36 \text{ donc } \frac{3}{16} = \frac{2,25}{12}. \text{ Ainsi}$$

l'eau restante a un volume de  $\frac{3}{16}x^3 \text{ m}^3$ .

**3. b.** À moitié vide donc  $\mathcal{V}_{\text{eau}} = \frac{15}{2} \text{ m}^3$  soit  $0,75 \text{ m}^3$ .

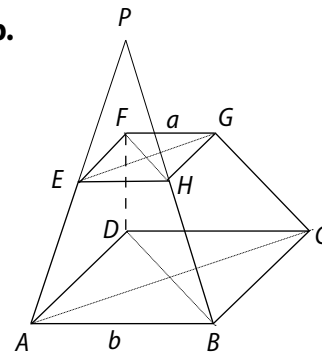
$$\text{Résolvons } \frac{3}{16}x^3 = 0,75 \Leftrightarrow x^3 = 16 \times \frac{0,75}{3} \Leftrightarrow x^3 = 4.$$

Avec le tableau de valeur de la fonction  $x \mapsto x^3$  sur  $[0; 2]$  :

$x$	1,4	1,5	1,6
$f(x) \approx$	2,75	3,375	4,096

on déduit qu'à partir de  $x \approx 1,5 \text{ m}$ , Aboubacar peut remplir son récipient.

**74 1. et 2. b.**



**2. a.** Les points  $A, E, B$  et  $H$  forment une face du solide donc sont coplanaires. Puis  $AB \neq EH$  donc  $(AE)$  et  $(BH)$  sont sécantes.

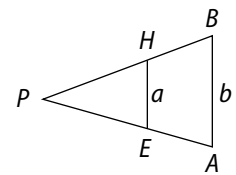
**3.** Dans  $PAB$ ,  $(AB) \parallel (EH)$

$$\text{et } EH = \frac{1}{2} AB.$$

D'après le théorème

$$\text{de Thalès, } \frac{PA}{PE} = \frac{AB}{HE} = \frac{b}{a} = 2.$$

Ainsi  $E$  milieu de  $[AP]$ .



**4.** De même  $(GC)$  et  $(HB)$  sont coplanaires et sécantes. Supposons que le point d'intersection soit différent de  $P$ , notons le  $P'$ . Comme en **3.**,  $H$  sera le milieu de  $[BP']$  or  $H$  est déjà le milieu de  $[BP]$  donc la supposition est absurde, le point d'intersection est  $P$ .

De même avec  $(AE)$  et  $(DF)$ . Finalement  $(AE), (BH), (CE)$  et  $(DF)$  sont concourantes en  $P$ .

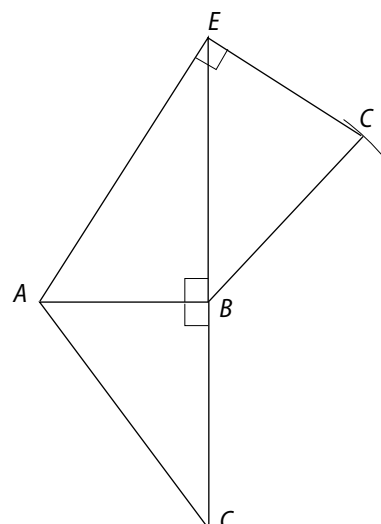
**5. a.**  $(AE)$  et  $(CG)$  sont sécantes en  $P$  donc coplanaires.

**b.** Les plans  $(DBP)$  et  $(APC)$  sont sécants en une droite qui passe par  $P$ . Si on note  $O$  le centre de  $ABCD$ ,  $O \in (DBP)$ . Ainsi  $O$  appartient à la droite d'intersection des plans  $(DBP)$  et  $(APC)$ .

De même avec  $O'$  centre de  $EHGF$ .

$P, O$  et  $O'$  appartiennent à une même droite, ils sont alignés.

**75 a.**  $EABC$  est un tétraèdre.



b.  $AB^2 + BC^2 = 56,25$  et  $AC^2 = 56,25$ .

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle  $ABC$  est rectangle en  $B$ .

Sami a raison

c.  $EB$  est la hauteur de ce tétraèdre donc :

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{AB \times BC}{2} \times EB.$$

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{4,5 \times 6}{2} \times 7 = 31,5 \text{ cm}^3.$$

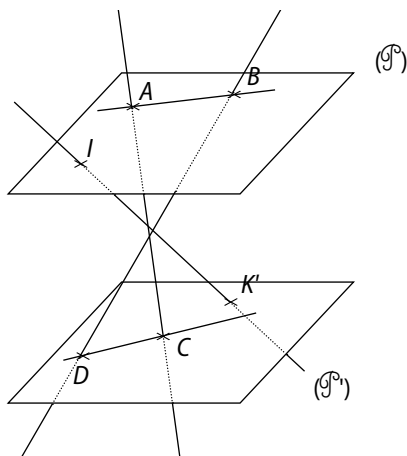
d. Dans le triangle  $EAC$ , d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{EM}{EC} = \frac{EN}{EA} = \frac{MN}{AC}.$$

Ainsi  $\frac{MN}{7,5} = \frac{4,2}{EC}$ . Or  $EC^2 = EB^2 + BC^2 = 85$ .

$$MN = \frac{4,2 \times 7,2}{\sqrt{85}} \approx 3,4 \text{ cm}.$$

76 1.



•  $A$  et  $B$  sont distincts et n'appartiennent pas à  $(P)$  donc  $(P)$  et  $(ABC)$  sont sécants.

•  $(ABC)$  est un plan qui coupe deux plans  $(P)$  et  $(P_1)$  parallèles dont les droites d'intersections sont parallèles.

Donc  $(\Delta) // (AB)$

2. Les droites parallèles à  $(P)$  passant par  $K$  sont incluses dans  $(P)$  or  $H \in (P)$  donc  $(KH)$  non parallèle à  $(P)$  donc  $(KH)$  coupe  $(P)$ .

• Si  $I \in (AB)$ , comme  $H \in (BC)$ , la droite  $(HI)$  est incluse dans le plan  $(ABC)$  et donc  $K$  qui est un point de  $(HI)$  et du plan  $(P)$  appartiendrait à  $(\Delta)$  or  $K \notin (\Delta)$ , donc la supposition  $I \in (AB)$  est absurde donc  $I \notin (AB)$ .

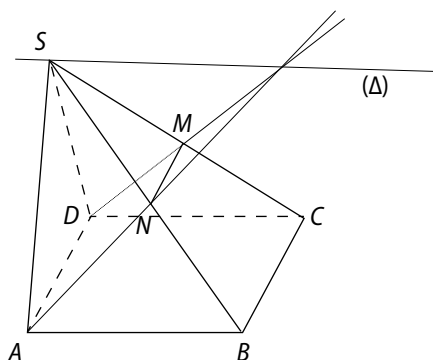
3.  $H \in (AC)$  et  $I \in (HK)$  donc les points  $I, A, H, K$  et  $C$  sont coplanaires. Le plan  $(AIC)$  coupe  $(P)$  et  $(P_1)$  en droites parallèles entre elles puisque  $(P) // (P_1)$ . Ainsi  $(AI) // (KC)$ .

De même  $(KD) // (BI)$ .

77 1.  $ABCD$  parallélogramme, donc  $(AD) // (BC)$ . De plus  $(BC) // (MN)$  donc  $(MN) // (AD)$ .

2. a. Les plans  $(SAB)$  et  $(SDC)$  sont sécants,  $(AN)$  et  $(DM)$  sont des droites incluses dans ces plans et elles ne sont pas parallèles car  $AD \neq MN$ , donc elles sont sécantes.

b.



Le point d'intersection de  $(AN)$  et  $(DM)$  est un point qui appartient aux deux plans  $(SAB)$  et  $(SDC)$  donc il appartient à leur intersection  $(\Delta)$ . ( $S$  aussi).

3.  $(AB)$  et  $(DC)$  sont deux droites incluses dans les plans  $(SAB)$  et  $(SDC)$  donc, d'après le théorème du toit,  $(AB)$  et  $(DC)$  sont parallèles à  $(\Delta)$  intersection des deux plans.

78 1. a.  $N$  milieu de  $[HF]$  et  $J$  milieu de  $[FC]$  donc  $(NJ) // (HC)$ .

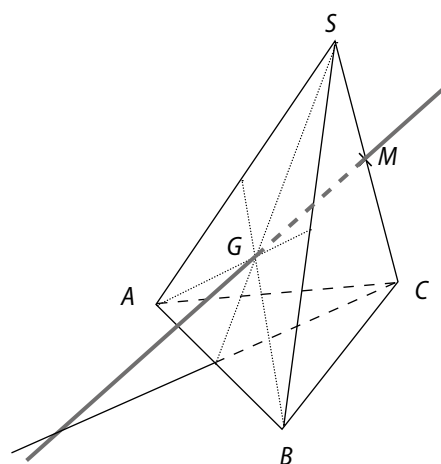
b.  $I$  milieu de  $[AC]$  et  $L$  milieu de  $[AH]$  donc  $(IL) // (CH)$ .

c.  $(NJ) // (HC) // (JL)$  donc  $(IL) // (JN)$ .

2.  $(MN) // (BG)$  et  $(IK) // (BG)$  (avec les triangles  $EBG$  et  $DBG$ ).

3.  $(JN)$  et  $(MN)$  sont deux droites sécantes du plan  $(JMN)$  et elles sont parallèles aux droites  $(IL)$  et  $(IK)$  sécantes du plan  $(JKL)$  donc les plans  $(JMN)$  et  $(IKL)$  sont parallèles.

79 a.

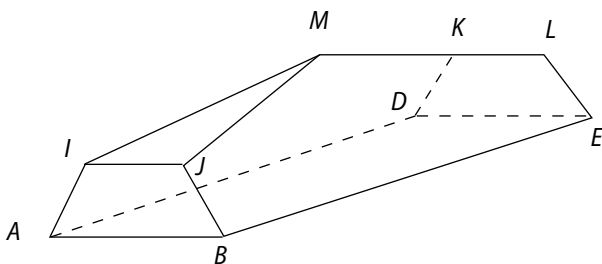


- b.**  $(MG)$  et  $(ABC)$  sont sécants.  $I$  est le milieu de  $[AB]$ .  
 $G$  et  $M$  sont des points du plan  $(SIC)$  et dans le triangle  $SIC$ ,  $SM = \frac{1}{2}SC$  et  $SG = \frac{2}{3}SI$ , donc d'après le théorème de Thalès,  $(MG)$  et  $(IC)$  sont sécantes.  
 Or  $(IC)$  est incluse dans  $(ABC)$  donc  $(MG)$  et  $(ABC)$  sont sécants.
- c.** L'intersection de  $(MG)$  et  $(ABC)$  est l'intersection de  $(MG)$  et  $(IC)$ .

- 80 a.** Dans le triangle  $ACB$ ,  $I$  et  $J$  sont les milieux de  $[AC]$  et  $[BC]$  donc  $(IJ) \parallel (AB)$ .  
 De même dans le triangle  $FED$ ,  $(KL) \parallel (DE)$ .  
 Or dans le prisme  $ABCDEF$ , les droites  $(AB)$  et  $(DE)$  sont parallèles.  
 Ainsi  $(IJ) \parallel (AB)$  et  $(DE) \parallel (KL)$  et donc  $I, J, K$  et  $L$  sont coplanaires.  
 Enfin le plan  $(IJK)$  coupe deux plans parallèles  $(ACB)$  et  $(DEF)$  donc les droites d'intersection de ces plans  $(IJ)$  et  $(KL)$  sont parallèles.

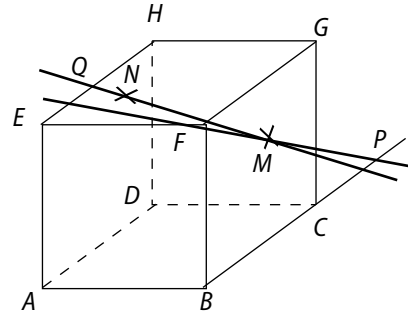
- b.** Les plans  $(IJM)$  et  $(KLM)$  sont sécants en une droite passant par  $M$ . De plus, d'après le théorème du toit, cette droite d'intersection est parallèle aux droites  $(IJ)$  et  $(KL)$  puisqu'elles sont incluses dans ces plans et elles sont parallèles entre elles (a.).  
 Ainsi la droite d'intersection de  $(IJM)$  et  $(KLM)$  est la droite parallèle à  $(IJ)$  passant par  $M$ .

**c.**



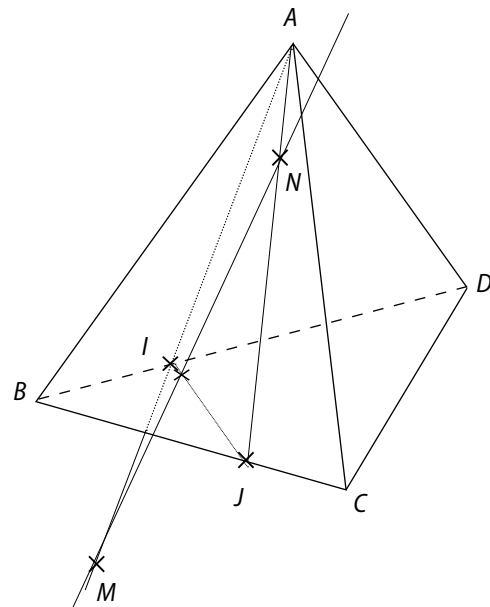
- 81 1. a.**  $M, F, B$  et  $C$  sont coplanaires et les droites  $(MF)$  et  $(BC)$  sont sécantes. Ce point d'intersection appartient à  $(BC)$  qui est, elle, incluse dans le plan  $(FHC)$  donc  $(MF)$  et  $(EHC)$  sont sécants.
- 1. b.** De même  $(NF)$  et  $(EH)$  sont sécantes et leur point d'intersection appartient à  $(EHC)$ . Donc  $(NF)$  et  $(EHC)$  sont sécants.

**2.**



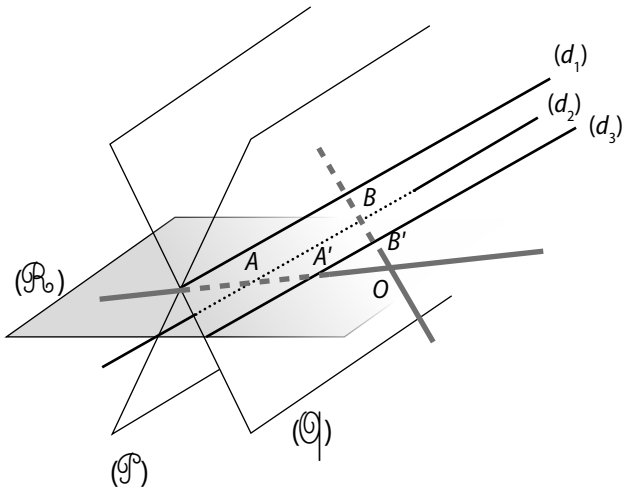
- 3.**  $(FMN)$  est un plan qui contient la droite  $(FM)$  et donc  $P$ .  
 De même  $Q \in (NF)$ ,  $(NF)$  est incluse dans  $(FMN)$  et donc  $Q \in (FMN)$ .  
 Ainsi  $P, Q, M$  et  $N$  appartiennent au plan  $(FMN)$ , ils sont donc coplanaires.
- 4.**  $(MN)$  est incluse dans le plan  $(FMN)$ . Ce plan coupe  $(EHC)$  en la droite  $(PQ)$ . L'intersection entre les droites  $(MN)$  et  $(PQ)$  est aussi l'intersection de  $(MN)$  et du plan  $(EHC)$ .

**82**

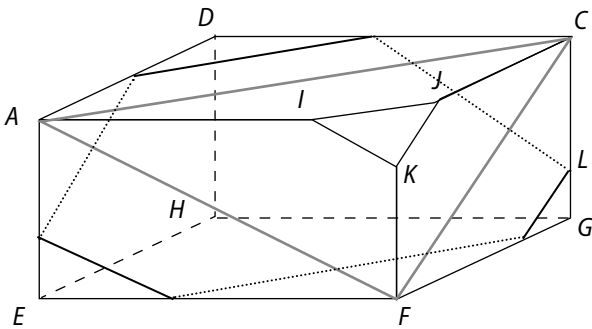


- a.**  $N \in (AJ)$  donc  $N \in (AIJ)$  et  $M \in [AI]$  donc  $M \in (AIJ)$ . Ainsi  $M$  et  $N$  appartiennent au plan  $(AIJ)$  donc  $M, N, I$  et  $J$  sont coplanaires.
- b.** Voir figure.  
 $(AIJ)$  et  $(BCD)$  sont deux plans sécants en  $(IJ)$  donc  $(MN)$ , droite incluse dans  $(AIJ)$ , coupe le plan  $(BCD)$  en le point d'intersection de  $(MN)$  et  $(IJ)$ .

83

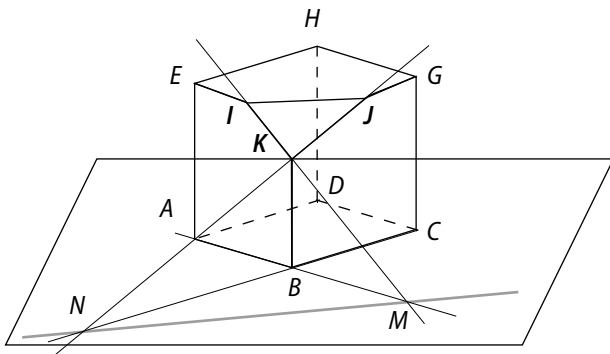


84



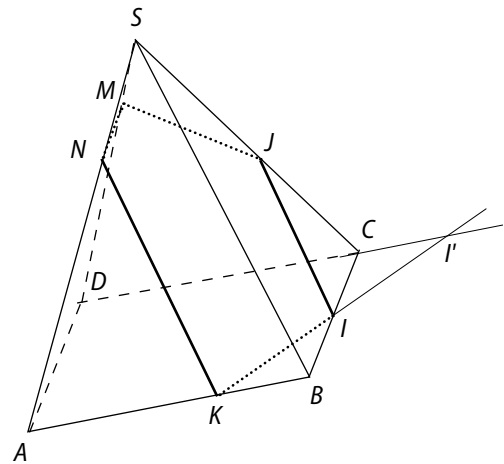
2. a. en noir ; b. en gris.

85

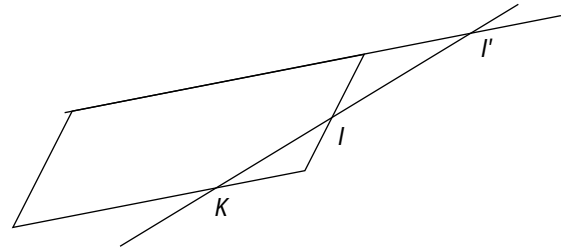


- On nomme  $IJK$  le triangle qui correspond à l'intersection de  $(\mathcal{Q})$  et du cube.
- On nomme  $ABCD$  la face du cube incluse dans  $(\mathcal{P})$ .
- $(IK)$  et  $(AB)$  sont sécantes en  $M$ .
- $(JK)$  et  $(BC)$  sont sécantes en  $N$ .
- $(\mathcal{P})$  et  $(\mathcal{Q})$  sont sécants en la droite  $(MN)$ .

86 a.



- 1) Tracer  $[IJ]$  et  $[JK]$  qui sont inclus dans des faces.
- 2) Dans le plan de base :



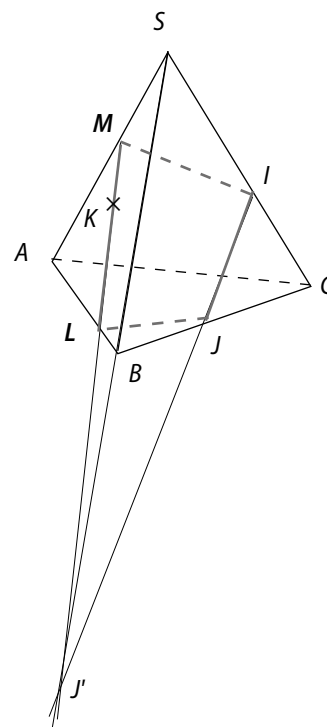
On peut tracer  $[JM]$ .

3)  $(IJ) \parallel (SB)$  donc, d'après le théorème du toit avec les plans  $(SBC)$  et  $(SBA)$ , on obtient  $[KN]$  :

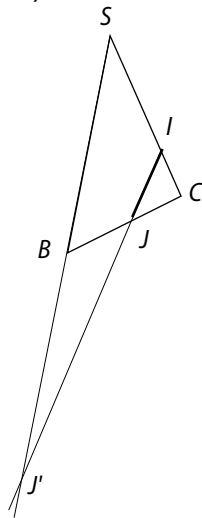
$(KN) \parallel (IJ)$  et  $(KN) \parallel (SB)$ .

4) On trace  $[NM]$ .

b.

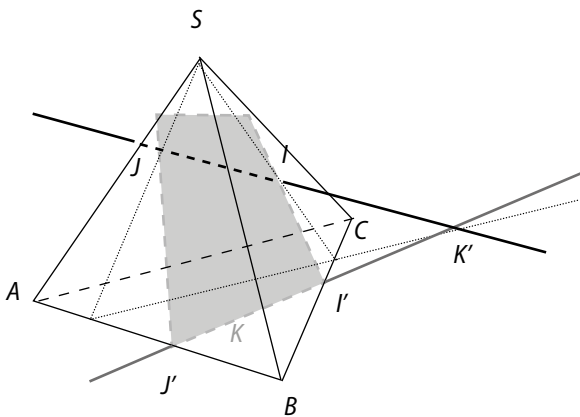


- 1) Tracer  $[IJ]$ .
- 2) Dans le plan  $(SBC)$  :



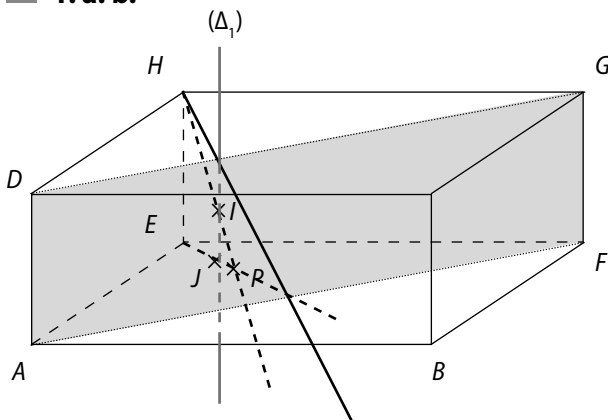
- 3) Dans  $(SAB)$  : on trace  $[LM]$  en utilisant la droite  $(J'K)$ .
- 4) On trace  $[IM]$ .

**c.**



- On suppose que  $(IJ)$  non parallèle à  $(ABC)$ . On trace l'intersection des plans  $(SIJ)$  et  $(ABC)$ , puis on trace l'intersection de  $(IJ)$  et de  $(ABC)$  :  $K'$ .
- On trace  $(KK')$  et on obtient la section du plan  $(IJK)$  et  $(ABC)$ .
- Puis on termine la section  $(J'J)$  et  $(I'I)$ .

**87 1. a. b.**



Pour  $I$  :

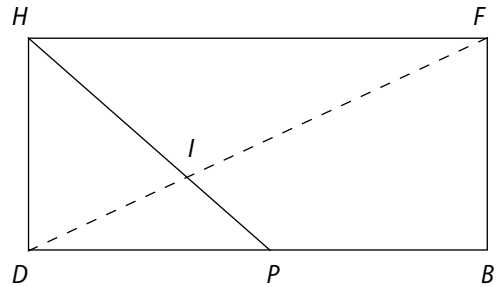
- On trace la droite d'intersection du plan  $(AFGD)$  et du plan  $(EHP)$ .

- La droite  $(\Delta_1)$  et la droite  $(HP)$  se coupent en  $I$ .

Pour  $J$  :

Les droites  $(\Delta_1)$  et  $(EP)$  se coupent en  $J$ .

**2. a.**



**b.** Dans le plan  $(DBF)$  et d'après le théorème de Thalès,

on a :  $\frac{ID}{IF} = \frac{AP}{GE} = \frac{1}{2}$ .

**88 1.**  $O \in (AB)$  donc  $O \in (MA)$  donc  $I \in (MAB)$ .

$J \in (MB)$  donc  $J \in (MAB)$ .

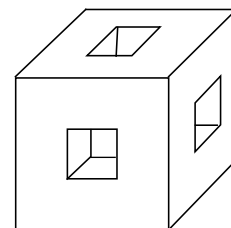
**2.** Le plan  $(\mathcal{P})$ .

**3. a.** Ils ont un point en commun :  $O$  et  $A \in (MAB)$  mais  $A \notin (\mathcal{P})$ .

**3. b.** Les plans  $(\mathcal{P})$  et  $(MAB)$  sont sécants en une droite et les points  $O, I$  et  $J$  appartiennent à ces deux plans.

Donc  $O, I$  et  $J$  appartiennent à la droite d'intersection de  $(\mathcal{P})$  et de  $(MAB)$  donc ils sont alignés.

**89 1.**

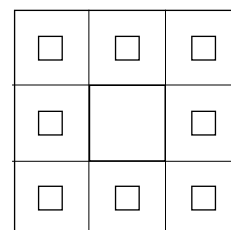


**2. a.**  $9 \times 3 = 27$  petits cubes.

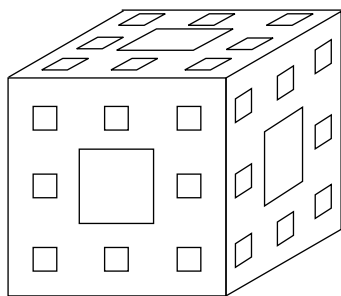
**b.**  $\frac{7}{27}$ .

**c.**  $\mathcal{V} = 1 - \frac{7}{27} = \frac{20}{27} u.v.$

**3. a.**



b.



c. Pour les 20 petits cubes restants, chacun va perdre 7 des 27 tout petits cubes.

Donc il reste  $\frac{20}{27} \times \frac{20}{27} = \left(\frac{20}{27}\right)^2$  du cube.

d. Un petit cube tracé à la 2<sup>e</sup> étape va perdre  $\frac{7}{27}$  de son volume. Or son volume de départ était de  $\frac{1}{27}$

donc ces cubes ont pour volume  $\frac{1}{27} \times \left(1 - \frac{1}{27}\right)$ , soit  $\frac{20}{27^2}$ . Et il y avait 20 de ces cubes après l'étape 1, donc

$$\mathcal{V}_2 = 20 \times \frac{20}{27^2} = \left(\frac{20}{27}\right)^2.$$

4. a. Avec le même raisonnement, il reste  $(20)^2$  cubes qui sont tracés à cette étape et donc qui perdent  $\frac{7}{27}$  de leur volume qui est de  $\frac{1}{27^2}$ .

$$\mathcal{V}_3 = (20)^2 \times \frac{1}{27^2} \left(1 - \frac{1}{27}\right) = \frac{20^3}{27^3} = \left(\frac{20}{27}\right)^3.$$

b.  $\mathcal{V}_m = \left(\frac{20}{27}\right)^m.$

90 a. SAO triangle rectangle en A donc  $SA^2 = SO^2 + AO^2$  soit  $36 = SO^2 + 4$ .

Ainsi  $SO = 4\sqrt{2}$  cm.

$$\mathcal{V}_{\text{cône}} = \frac{1}{3} \times \text{Aire du disque} \times \text{hauteur}.$$

$$\text{Ici } \mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \pi \times 2^2 \times 4\sqrt{2} = \frac{16\sqrt{2}}{3} \pi.$$

b. Ici, la génératrice de ce cône de révolution est 6 cm donc la face latérale est une partie d'un disque de rayon 6 cm.

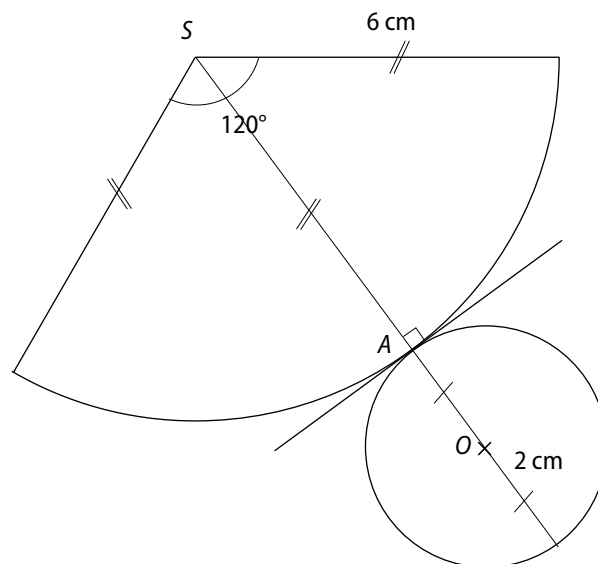
c. La longueur du disque de rayon 6 cm est de :

$$2 \times \pi \times 6 = 12\pi \text{ cm.}$$

La longueur du disque de la base du cône est de :

$$2 \times \pi \times 2 = 4\pi \text{ cm.}$$

Or  $\frac{4\pi}{12\pi} = \frac{1}{3}$ , donc il faut prendre le tiers de la longueur du disque de rayon 6 cm. Le tiers des  $360^\circ$  de ce disque, soit  $120^\circ$ .



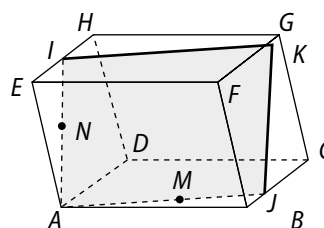
91 1. A, M et N ne sont pas alignés ; ces points définissent donc un plan, distinct de chacun des plans des faces du pavé. Les plans distincts (AMN) et (ABC) contiennent le point A ; ils sont donc sécants suivant une droite.

De plus  $(ABC) \parallel (EFG)$  ; donc (AMN) et (EFG) sont aussi sécants suivant une droite.

On démontre de même que (AMN) est sécant suivant une droite avec chacun des plans des autres faces du pavé.

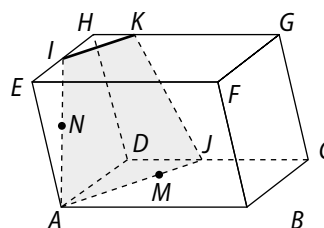
2. Les segments [AI] et [AJ] sont les intersections des faces ADHE et ABCD avec le plan (AMN) ; les intersections de (AMN) avec les faces BCGF et EFGH, lorsqu'elles existent, sont des segments respectivement parallèles à [AI] et [AJ].

a.



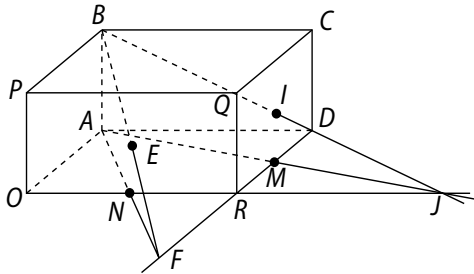
La section du pavé par le plan (AMN) est le parallélogramme AIKL tel que  $K \in [FG]$ ,  $(JK) \parallel (AI)$  et  $(IK) \parallel (AJ)$ .

b.



La section du pavé par le plan (AMN) est le trapèze AIKL tel que  $K \in [GH]$  et  $(IK) \parallel (AJ)$ .

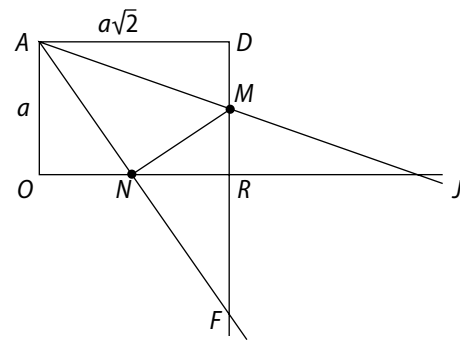
**92 1. a.** Dans le rectangle  $OPQR$ ,  $(NE) // (OP)$  ; donc,  $(NE) // (AB)$  et  $A, B, N, E$  sont dans un même plan  $(\mathcal{P})$ .  
 Dans  $(\mathcal{P})$ , les droites  $(BE)$  et  $(AN)$ , qui ne sont pas parallèles, sont sécantes en un point  $F$ .  
 Comme  $(AN) \subset (ADR)$ ,  $F$  est aussi le point d'intersection de la droite  $(BE)$  avec le plan  $(ADR)$ .



**b.** On démontre de même que le point d'intersection  $J$  de la droite  $(BI)$  avec le plan  $(ADR)$  est le point d'intersection des droites  $(BI)$  et  $(AM)$ .

**c.** Les points  $F, R$  et  $D$  appartiennent au plan  $(ADR)$ .  
 Le plan  $(BPR)$  contient les points  $R$  et  $D$ , car  $(RD) // (PB)$ .  
 Or la droite  $(BE)$ , qui contient le point  $F$ , est incluse dans le même plan, car  $E \in (PR)$  ; donc, les points  $F, R$  et  $D$  appartiennent au plan  $(BPR)$ .  
 On en déduit que  $F, R$  et  $D$  appartiennent à deux plans sécants ; ils sont donc alignés.

**2. a.** Face  $AORD$ , ainsi que les points  $M, N, F$  et  $J$  :



**b.**  $AN^2 = AO^2 + ON^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}$

$NM^2 = NR^2 + RM^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2}$

$AM^2 = AD^2 + DM^2 = 2a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{9a^2}{4}$

Or  $\frac{3a^2}{2} + \frac{3a^2}{4} = \frac{9a^2}{4}$  ; donc  $AMN$  est un triangle rectangle en  $N$ .

**3. a.**  $V = a \times a\sqrt{2} \times h = ha^2\sqrt{2}$  ;  $v = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$ ,  
 où  $\mathcal{B}$  est l'aire du triangle  $AFI$ , rectangle en  $F$  tel que ;  $AF = 2AN = a\sqrt{6}$  et  $FJ = 2NM = a\sqrt{3}$ .

Donc,  $v = \frac{1}{3} \times \frac{a\sqrt{6} \times a\sqrt{3}}{2} \times h = ha^2 \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**b.** On en déduit que :  $\frac{V}{v} = 2$ .

# 8 Statistiques

## Activités d'introduction

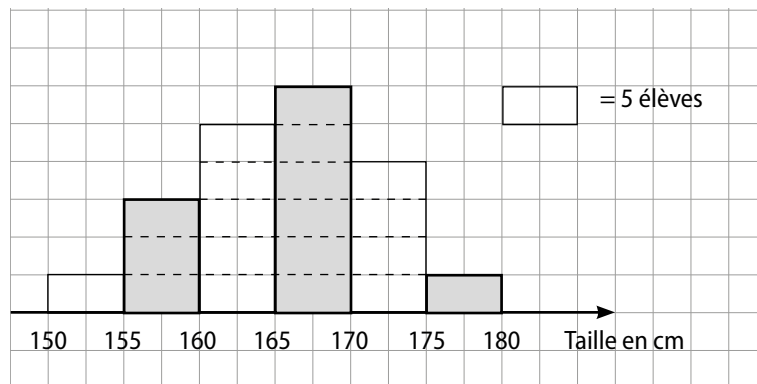
### 1 Moyenne et diagramme

1. a.

Centre des classes	152,5	157,5	162,5	167,5	172,5	177,5
Effectif	5	15	25	30	20	5

b. 
$$\frac{152,5 \times 5 + 157,5 \times 15 + \dots + 177,5 \times 5}{5 + 15 + \dots + 20 + 5} = \frac{16650}{100} = 165,5.$$

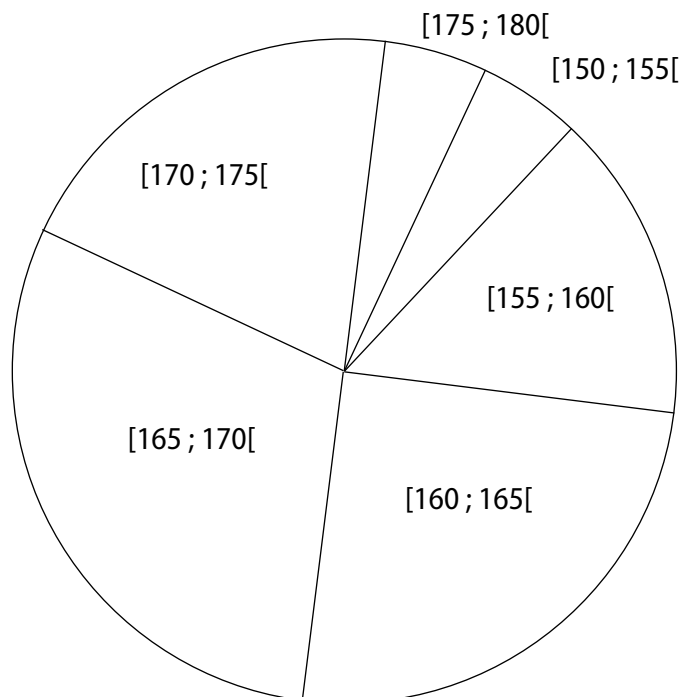
### 2. a. Histogramme



b.

Classe	[150 ; 155[	[155 ; 160[	[160 ; 165[	[165 ; 170[	[170 ; 175[	[175 ; 180[
Effectif	5	15	25	30	20	5
Mesure d'angle	18°	54°	90°	108°	72°	18°

Diagramme circulaire :



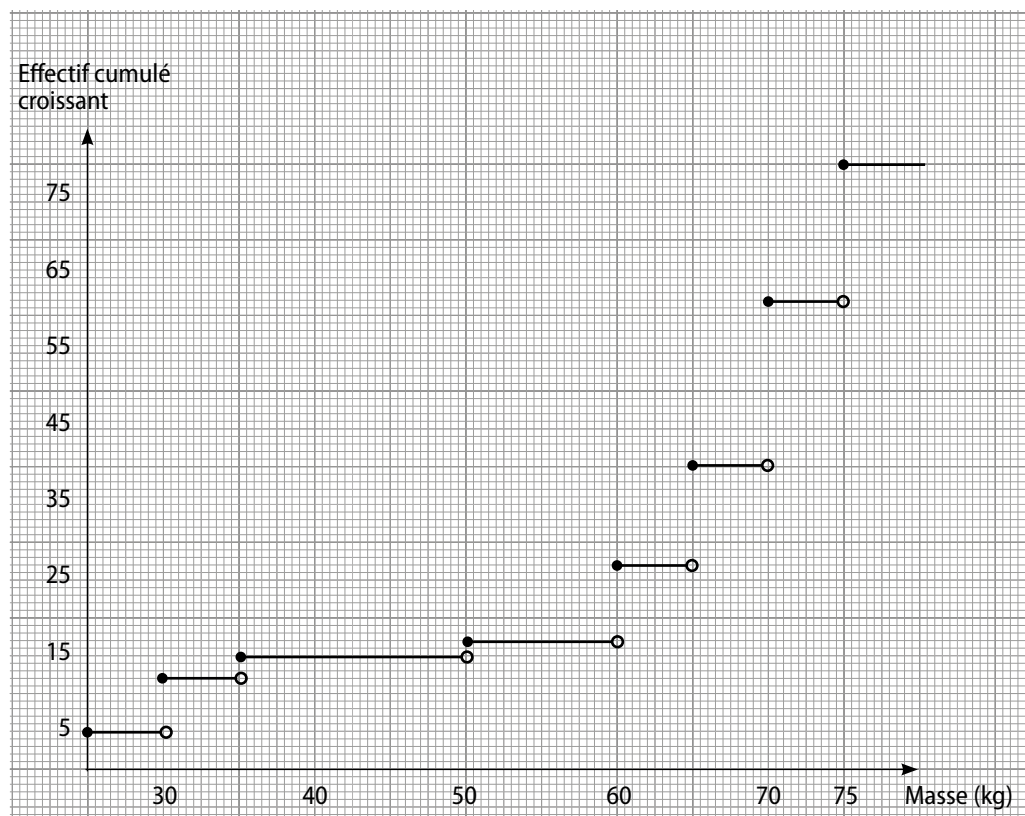
## 2 effectifs cumulés croissants, diagramme cumulatif

1. a. 12 impalas ont une masse inférieure ou égale à 30 kg ;  
 17 impalas ont une masse inférieure ou égale à 50 kg ;  
 27 impalas ont une masse inférieure ou égale à 60 kg ;  
 62 impalas ont une masse inférieure ou égale à 70 kg.

b.

Masse	25	30	35	50	60	65	70	75
Effectif cumulé	5	12	15	17	27	40	62	80

2.



## 3 Médiane

1. a. Non, puisque  $N = 13$ . Effectif impair.  
 b. On classe les masses :  $59 < 62 < 63 < 65 < 68 < 71 < 72 < 81 < 81 < 87 < 95 < 97 < 103$
- $\underbrace{\hspace{15em}}_6$ 
 $\underbrace{\hspace{15em}}_6$

Le lutteur de 72 kg peut être placé dans chaque catégorie.

2. a. Il y aura 6 lutteurs dans chaque poule. b. 71 kg pour les légers et 81 kg pour les lourds.

## 4 Homogène ou hétérogène

1. a.  $\frac{7 + 13 + 13 + 12 + 8 + 13 + 11}{7} = \frac{77}{7} = 11$  ;  $\frac{12 + 13 + 4 + 13 + 19 + 7 + 9}{7} = \frac{77}{7} = 11$ .  
 b. Non, car elles sont identiques.

2. a. Atem :

7	13	13	12	8	13	11
-4	2	2	1	-3	2	0

Douma :

12	13	4	13	19	7	9
1	2	-7	2	8	-4	-2

b.  $\frac{1 - 4 + 2 + 2 + 1 + (-3) + 2}{7} = \frac{14}{7} = 2$ ;  $\frac{1 + 2 + (-7) + 2 + 8 + (-4) + (-2)}{7} = \frac{26}{7} \approx 4$ .

Oui, celui d'Atem est inférieur à celui de Kouma.

c.

7	13	13	12	8	13	11
16	4	4	1	9	4	0

12	13	4	13	19	7	9
1	4	49	4	64	16	4

d.  $\frac{16 + 4 + 4 + 1 + 9 + 4}{7} = \frac{38}{7} \approx 5,4$ ;  $\frac{1 + 4 + 49 + 4 + 64 + 16 + 4}{7} = \frac{142}{7} \approx 20,3$ .

Oui, même conclusion qu'au 2. b.

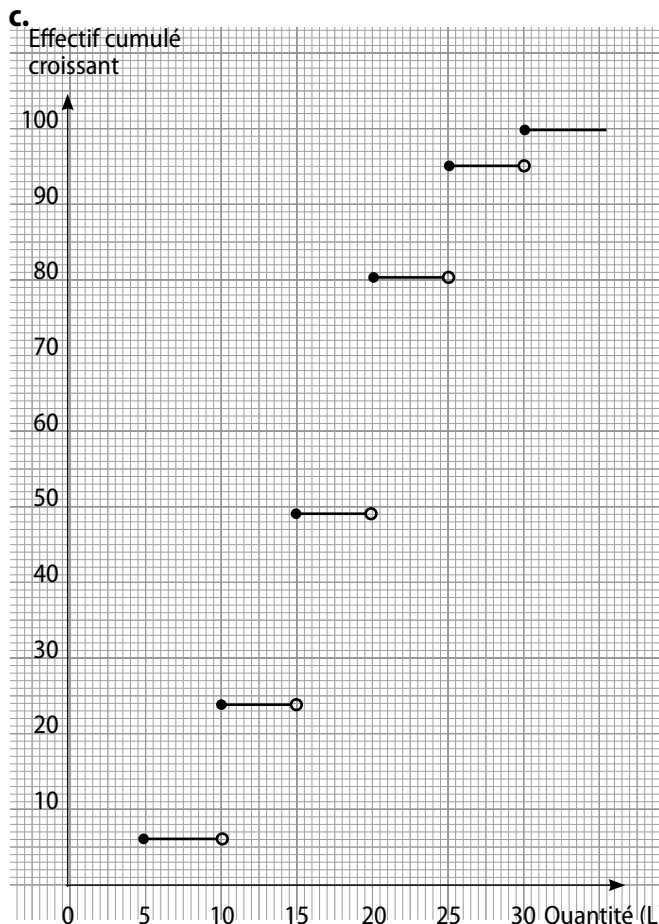
## Savoir-faire

2 a.

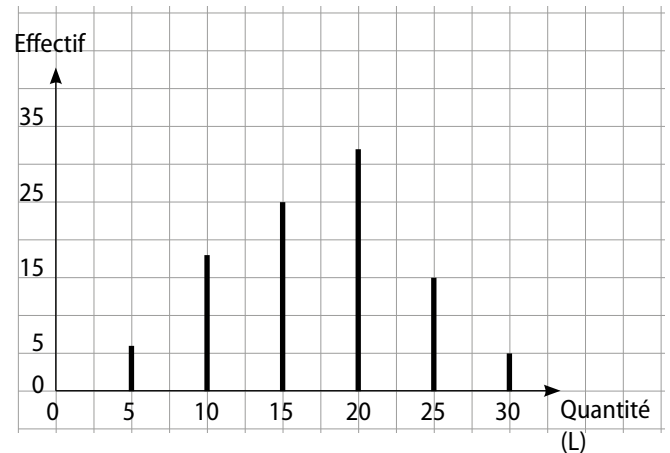
Quantité	5	10	15	20	25	30
Effectif	6	18	25	31	15	5
Effectif cumulé croissant	6	24	49	80	95	100

b. 15 est le nombre de fois qu'un client prend 25 L d'essence.

95 est le nombre de fois qu'un client prend au plus 25 L d'essence.



d. Diagramme en bâtons



e. 5 fois. f. 49 fois.

4 19 ou 20 peuvent être le mode.

$$\bar{x} = \frac{17,5 \times 1 + \dots + 22 \times 3}{1 + 4 + \dots + 3} = \frac{412}{21} \approx 19,62.$$

•  $N = 21$ , donc la médiane est la 11<sup>e</sup> modalité de la série ordonnée, c'est-à-dire 20.

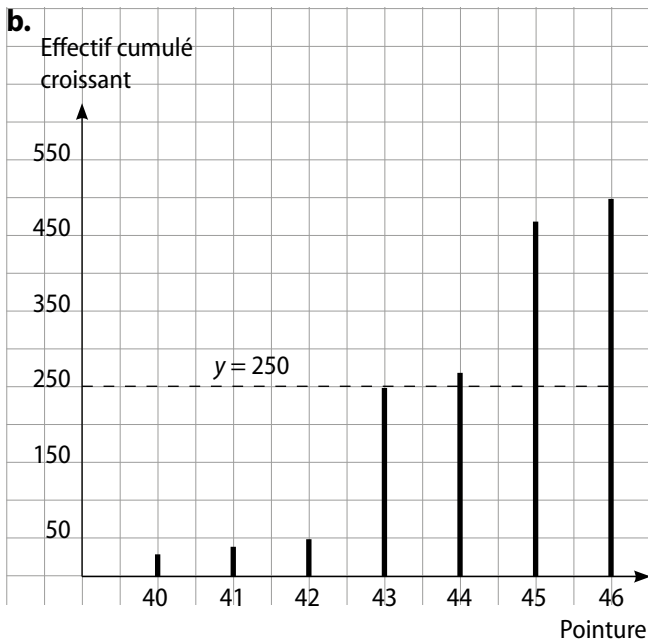
5 Mode : toute valeur de la série car elles ont toutes un effectif égal à 1.

$$\text{Moyenne : } \frac{53 + 112 + \dots + 90 + 101}{24} = \frac{2327}{24} \approx 96,96.$$

Médiane :  $N = 24$  donc une médiane est un nombre de l'intervalle [12<sup>e</sup> valeur ; 13<sup>e</sup> valeur] c'est-à-dire [97 ; 101].

6 a.

Pointure	40	41	42	43	44	45	46
Effectif cumulé croissant	30	40	50	250	270	470	500



**c.** Voir sur graphique :  $y = \frac{500}{2}$  soit  $y = 250$ .  
43 peut être une médiane.

**d.**  $N = 500$  donc une médiane est un nombre de l'intervalle  $[250^{\text{e}} \text{ valeur} ; 251^{\text{e}} \text{ valeur}]$ , c'est-à-dire  $[43 ; 44]$ .

**8 a.** Centre de classe : 2,5 ; 7,5 et 12,5.

**b.**  $\bar{x} \approx 8,6$  et  $\sigma \approx 3,1$ .

**9 a.**  $\bar{x} = 1,7$  et  $\sigma \approx 1,1$ .

**b.** 
$$\bar{x} = \frac{18 \times 0 + 72 \times 1 + 45 \times 2 + 36 \times 3 + 9 \times 4}{180}$$

$$= \frac{306}{180} = 1,7.$$

$$V = \frac{18 \times (-1,7)^2 + 72 \times (-0,7)^2 + 45 \times (0,3)^2 + 36 \times (1,3)^2 + 9 \times (2,3)^2}{180}$$

$$= \frac{199,8}{180} = 1,11.$$

$$\sigma = \sqrt{V} \approx 1,05.$$

## Exercices d'entraînement

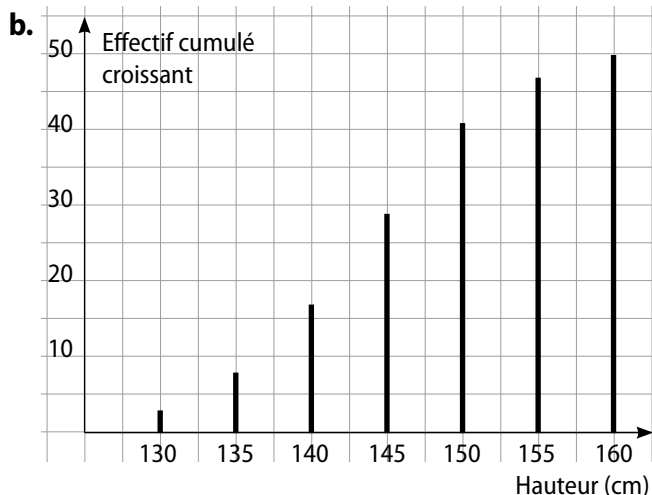
**10** La population est celle de 8 pays d'Afrique. Le caractère est l'âge médian. Les modalités : 20,8 ; 20,3 ; 18,3 ; 18,6 ; 17,7 ; 18,4 ; 16 et 19,6. L'effectif total est 8.

**11** La population: les paniers marqués par une joueuse de basket. Le caractère: le nombre de paniers marqués. Les modalités sont 5, 7, 8, 9 et 12. L'effectif total est 15.

**12** L'effectif total est 370. Les classes  $[150 ; 160[$ , ...,  $[190 ; 200[$ .  
La valeur minimale 150, la valeur maximale 200 et la classe modale  $[170 ; 180[$ .

**13 a.**

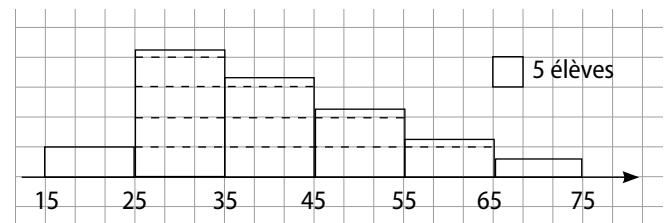
Hauteur	130	135	140	145	150	155	160
Effectif	3	5	9	12	12	6	3



**14 a.**

Tranche d'âge	[15 ; 25]	[25 ; 35]	[35 ; 45]	[45 ; 55]	[55 ; 65]	[65 ; 75]
Effectif	15	65	50	40	25	5

**b.**



**c.** Effectif dans  $[25 ; 45]$  : 115.  $f = \frac{115}{200} = 0,575$ .

**15 a.**

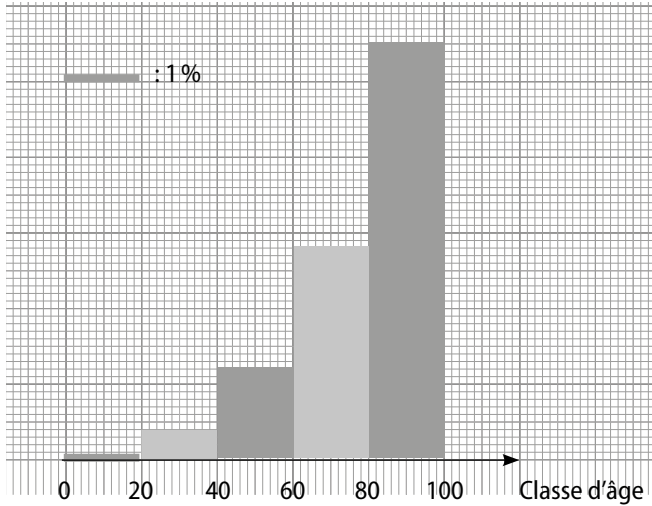
Classe d'âge	Mesure de l'angle	Fréquence (%)
$[0 ; 20[$	3	1
$[20 ; 40[$	15	4
$[40 ; 60[$	43	12
$[60 ; 80[$	102	28
$[80 ; 100[$	197	55
Total	360	100

Pour les fréquences :

a	f
360	100

est un tableau de proportionnalité.

**b.** Histogramme des fréquences en pourcentages :



**c.**

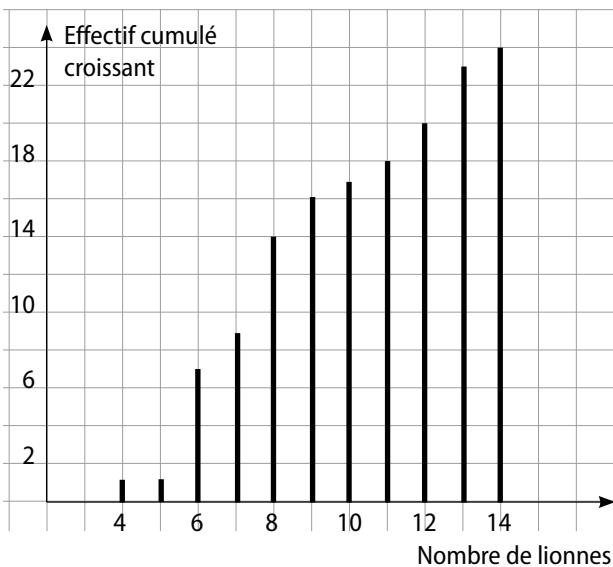
Classe d'âge	[0 ; 10[	[20 ; 40[	[40 ; 60[	[60 ; 80[	[80 ; 100[
Effectif	194 000	776 000	2,33 M*	5,43 M	10,67 M

\* M = millions.

**16 a.**  $1 + 6 + 2 + 5 + 2 + 1 + 1 + 2 + 3 + 1 = 24$ .

**b.**  $\frac{6 + 2 + 5 + 2 + 1}{24} \times 100 \approx 67 \%$ .

**c.** Diagramme en bâtons des effectifs cumulés croissants :



**17** Le mode est 6, la moyenne est 6 et la médiane est 6.

**18** Le mode est 13, la moyenne est 14,8 et une médiane est un nombre de l'intervalle [13 ; 15].

**19** La moyenne est 315,925 et l'effectif total est 40.

**20 a.**  $\frac{116 + 121 + 114 + \dots + 112}{20} = \frac{2340}{20} = 117$ .

**b.**

Taille (cm)	108	111	112	114	116	118
Effectif cumulé croissant	2	3	6	8	9	11
Effectif cumulé décroissant	20	18	17	14	12	11

Taille (cm)	119	120	121	122	125
Effectif cumulé croissant	13	14	16	18	19
Effectif cumulé décroissant	9	7	6	4	2

**c.**  $\frac{N}{2} = 10$ . Une médiane est un nombre de l'intervalle [118 ; 118] soit 118.

La seule modalité pour laquelle l'effectif cumulé croissant et l'effectif cumulé décroissant sont supérieurs à 10 est 118. La médiane est 118.

**21 a.**  $\frac{36,6 + 35,5 + \dots + 31,4}{8} = \frac{270,45}{8} \approx 33,8 \%$ .

**b.**  $29,25 \leq 31,4 \leq 31,7 \leq 35 \leq 35 \leq 35,5 \leq 36 \leq 36,6$ .

$\frac{N}{2} = 4$ , une médiane est un nombre de l'intervalle [35 ; 35] soit 35.

**c.** Effectif de ces pays :  $7 \cdot \frac{7}{8} \times 100 = 87,5 \%$ .

Il y a bien au moins 75 % de ces pays qui ont un taux de natalité inférieur ou égal à celui du Bénin.

**22** Effectué par les élèves en classe.

**23 a.**

Durée	[0 ; 2[	[2 ; 4[	[4 ; 6[	[6 ; 8[	[8 ; 10[
Effectif cumulé croissant	9	22	28	32	34

$N = 34$  donc  $\frac{N}{2} = 17$ . La classe qui contient la médiane est [2 ; 4[.

**b.**  $\frac{9 \times 1 + 13 \times 3 + 6 \times 5 + 4 \times 7 + 2 \times 9}{34} = \frac{124}{34} \approx 3,65$ .

**24 a.** [90 ; 120[ est la classe modale.

Salaire	[90 ; 120[	[120 ; 150[	[150 ; 180[	[180 ; 210[
Eff. cumulé croissant	60	105	126	140

Salaire	[210 ; 270[	[270 ; 360[	[360 ; 600[
Eff. cumulé croissant	150	158	163

**b.** La médiane est la 82<sup>e</sup> valeur qui se trouve dans la classe [120 ; 150[.

**c.** 
$$\frac{105 \times 60 + 135 \times 45 + \dots + 480 \times 5}{163} = \frac{25\,785}{163} \approx 158,2.$$

Le salaire moyen dans cette entreprise est de 158,2 milliers de FCFA.

**25**  $N = 322, \bar{x} \approx 11,17, \sigma \approx 5,16.$

**26 a.**  $\bar{x} = 11.$

**b.** Écart moyen :  $\frac{3 + 2 + 0 + 1 + 4}{5} = 2.$

Variance : 6. Écart-type  $\approx 2,5.$

**27**  $N = 10; \bar{x} = 8,5;$

$$\sigma = \sqrt{\frac{5 \times (3,5)^2 + 3 \times (1,5)^2 + 2 \times (6,5)^2}{10}} \approx 3,9.$$

**28 a.**  $\bar{x} \approx 14,3125; \sigma \approx 6,72.$

**b.**  $\bar{x} \approx 12,97; \sigma \approx 4,53.$

**c.**  $\bar{x} \approx 12; \sigma \approx 3,3.$

**29 a.**

$i$	1	2	3	4
$x_i$	2,5	3,5	5	6,5
$n_i$	3	2	4	7
$n_i \times x_i$	7,5	7	20	45,5
$n_i \times (x_i - 5)$	-7,5	-3	0	10,5
$n_i \times (x_i - 5)^2$	18,75	4,5	0	15,75

**b.**  $A = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^4 (n_i \times x_i) = 5.$  Cela correspond à la moyenne.

$B = 0.$  Cela correspond à l'écart moyen.

$C = 2,4375.$  Cela correspond à la variance.

$D \approx 1,56.$  Cela correspond à l'écart-type.

**30 a.** 
$$\bar{x} = \frac{2 \times 2 + 3 \times 3 + 4 \times 3 + \dots + 12 \times 3}{2 + 3 + 3 + \dots + 3 + 3} = \frac{438}{60} = 7,3.$$

Écart moyen :

$$\frac{2 \times (2 - \bar{x}) + 3 \times (3 - \bar{x}) + 3 \times (4 - \bar{x}) + \dots}{60} = \frac{0}{60} = 0$$

Variance :

$$\frac{2 \times (2 - \bar{x})^2 + 3 \times (3 - \bar{x})^2 + 3 \times (4 - \bar{x})^2 + \dots}{60} = \frac{356,6}{60} \approx 5,9.$$

Écart-type =  $\sqrt{\text{variance}} \approx 2,44.$

**b.**  $\bar{x} = 7,3; \sigma \approx 2,437895267.$

**31 a.**

$$\bar{x} = \frac{200 \times 10,5 + 238 \times 11,5 + 455 \times 12,5 + 312 \times 12,5}{200 + 238 + 455 + 312}$$

$$= \frac{14\,424,5}{1\,205} \approx 12.$$

**b.** Écart moyen :

$$\frac{200 \times (10,5 - 12) + 238 \times (11,5 - 12) + \dots}{1\,205} = \frac{120,5}{1\,205} = 0,1.$$

Variance :

$$\frac{200 \times (10,5 - 12)^2 + 238 \times (11,5 - 12)^2 + \dots}{1\,205} = \frac{935,25}{1\,205} \approx 0,78.$$

Écart-type  $\approx 0,025.$

**c.** Avec la calculatrice :  $\bar{x} \approx 12,1; \sigma \approx 0,87.$

**32 a.** 
$$\bar{x} = \frac{3 \times 0 + 2 \times 1 + \dots + 1 \times 7}{31} \approx 3,13.$$

Durant ce mois de 31 jours, elle a envoyé environ 3,13 SMS par jour. Elle n'a donc pas à changer de forfait.

**b.** 
$$V = \frac{3 \times (0 - \bar{x})^2 + 2 \times (1 - \bar{x})^2 + \dots + 1 \times (7 - \bar{x})^2}{31} \approx 3,08.$$

Donc  $s = \sqrt{V} \approx 1,755.$

**c.**  $\bar{x} + s \approx 4,885.$  Durant 7 jours de ce mois, le nombre de SMS envoyés a été supérieur à  $\bar{x} + s.$

$\bar{x} + 2s \approx 6,64.$  Durant 1 journée de ce mois, le nombre de SMS envoyés a été supérieur à  $\bar{x} + 2s.$

$\bar{x} + 3s \approx 8,395.$  Il n'y a eu aucun jour de ce mois durant lequel le nombre de SMS envoyés a été supérieur à  $\bar{x} + 3s.$

**33 a.** 
$$\bar{x} = \frac{3 \times 0 + 2 \times 1 + \dots + 1 \times 7}{31} \approx 3,13.$$

Durant ce mois de 31 jours, elle a envoyé, en moyenne, 3,13 SMS par jour. Il est inutile de changer de forfait.

**b.** 
$$V = \frac{3 \times (0 - \bar{x})^2 + 2 \times (1 - \bar{x})^2 + \dots + 1 \times (7 - \bar{x})^2}{31} \approx 3,08$$
 donc  $s = \sqrt{V} \approx 1,755.$

**c.**  $\bar{x} + s \approx 4,885.$  Durant 7 jours de ce mois, le nombre de SMS envoyés a été supérieur à  $\bar{x} + s.$

$\bar{x} + 2s \approx 6,64.$  Durant 1 journée de ce mois, le nombre de SMS envoyés a été supérieur à  $\bar{x} + 2s.$

$\bar{x} + 3s \approx 8,395.$  Il n'y a eu aucun jour de ce mois durant lequel le nombre de SMS envoyés a été supérieur à  $\bar{x} + 3s.$

**34 a.** En 2014 : 
$$\frac{0 \times 10 + 1 \times 43 + \dots + 5 \times 1}{100} = \frac{150}{100} = 1,5$$

En 2015 : 
$$\frac{0 \times 44 + 1 \times 18 + \dots + 5 \times 12}{100} = \frac{150}{100} = 1,5.$$

Il semble que les pièces défectueuses sont en moyenne en même nombre en 2014 et en 2015.

**b.** En 2014 : étendue =  $5 - 0 = 5.$

En 2015 : étendue =  $5 - 0 = 5.$

c. En 2014 :  $\frac{10 \times (0 - 1,5)^2 + 43 \times (1 - 1,5)^2 + \dots}{100} \approx 0,82$   
donc  $\sigma \approx 0,91$ .

En 2015 :  $\frac{44 \times (0 - 1,5)^2 + 18 \times (1 - 1,5)^2 + \dots}{100} \approx 3,1$   
donc  $\sigma \approx 1,75$ . En 2015, il y a plus de variation.

**35 a.**  $\frac{10 \times 4 + 12 \times 3 + 8 \times 2}{4 + 3 + 2} = \frac{92}{9} \approx 10,2$ .  
Cet étudiant est reçu.

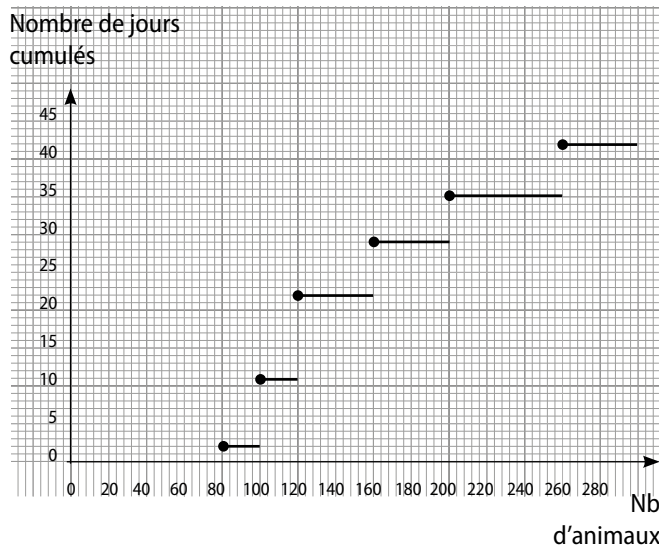
**b.** Soit  $x$  la note du deuxième étudiant en Physique.  
 $\frac{8 \times 4 + x \times 3 + 11 \times 2}{4 + 3 + 2} \geq 10 \Leftrightarrow \frac{3x + 54}{9} \geq 10$   
 $\Leftrightarrow 3x + 54 \geq 90 \Leftrightarrow x \geq \frac{36}{3} = 12$ .

Cet étudiant doit obtenir au moins 12 en Physique pour être reçu.

**c.** Soit  $x$  la note du troisième étudiant en Français.  
 $\frac{2x \times 4 + 10 \times 3 + x \times 2}{9} = 10 \Leftrightarrow \frac{10x + 30}{9} = 10$   
 $\Leftrightarrow 10x + 30 = 90$   
 $\Leftrightarrow x = 6$ .

Cet étudiant a eu 6 en Français et 12 en Mathématiques.

**36 a.**



## Faire le point

**38** L'effectif cumulé croissant de la modalité 2 100 est 15.

- 2 100 est la médiane de cette série.
- L'effectif total est 21 et la moyenne est 2 012.
- L'écart moyen est d'environ 473.

**39 a.** Djal n'a pas pris en compte les effectifs.

**b.**  $\frac{20 \times 5 + 30 \times 3 + 35 \times 7 + 40 \times 3 + 50 \times 7}{5 + 3 + 7 + 3 + 7} = \frac{905}{25} = 36,2$ .

**b.**  $\bar{x} = \frac{2 \times 80 + 9 \times 100 + \dots + 7 \times 250}{42} = \frac{6450}{42} \approx 153$ .

•  $N = 42$  donc une médiane est un nombre de l'intervalle  $[21^{\text{e}} \text{ valeur} ; 22^{\text{e}} \text{ valeur}] = [120 ; 120]$ , soit 120.

• Étendue =  $250 - 80 = 170$ .

•  $V = \frac{2 \times (80 - 153)^2 + 9 \times (100 - 153)^2 + \dots}{42} = \frac{1270}{42} \approx 30,25$  donc  $\sigma \approx 5,5$ .

**c.**

Nombre d'animaux	80	100	140	180	220
Nombre de jours	8	8	4	12	4

**d.**  $\bar{x} = 140$ .

•  $N = 36$  donc une médiane est un nombre de l'intervalle  $[18^{\text{e}} \text{ valeur} ; 19^{\text{e}} \text{ valeur}]$ , soit 140.

• Étendue = 120. •  $\sigma \approx 49$ .

**f.** En moyenne, il y a moins d'espèces animales qui migrent dans cette région.

**37 a.**  $m = \frac{0 \times 8 + 1 \times 19 + \dots + 5 \times 6}{8 + 19 + \dots + 6} = \frac{207}{90} = 2,3$ .

$V = \frac{(0 - 2,3)^2 \times 8 + (1 - 2,3)^2 \times 19 + \dots + (5 - 2,3)^2 \times 6}{8 + 19 + \dots + 6}$   
 $= \frac{641}{90} \approx 7,12$ .

$\sigma = \sqrt{V} \approx 1,35$ .

**b.** Sur les 90 derniers jours ouvrables, il y a en moyenne environ deux absents par jour.

**c.**  $[m - \sigma ; m + \sigma] = [2,3 - 1,35 ; 2,3 + 1,35]$   
 $= [0,95 ; 3,65]$ .

Il y en a  $19 + 25 + 20 = 64$  soit  $\frac{64}{90} \times 100 \approx 71 \%$ .

**41 a.** Dans le menu STAT dans L1 on saisit les modalités et dans L2 on saisit les effectifs. Puis on calcule les paramètres.

**b.**  $N = 181$ ;

$\bar{x} \approx 7,796$ ;

med. = 8;

$Q_1 = 7$ ;

écart-type  $\approx 1,425$ ;

$Q_3 = 9$ .

**42 a.** On trace la droite  $y = 0,5$ ; le point d'intersection de cette droite avec la courbe est (22,3 ; 0,5). On obtient la médiane 22,3.

Taille	21	22	23	24	25
Effectif cumulé croissant	6	9	24	27	30

$N = 30$ ;  $\frac{N}{2} = 15$ . Les 15<sup>e</sup> et 16<sup>e</sup> valeurs sont 23.

La médiane est 23.

Taille	21	22	23	24	25
Effectif	6	3	15	3	3

$N = 30$ ;  $\frac{N}{2} = 15$ . Une médiane est un nombre de l'intervalle [23 ; 23], soit 23.

**43 1. a.**  $\sum_{i=1}^5 n_i = 3 + 2 + 5 + 3 + 4 = 17$ . C'est  $N$ .

**b.**  $\frac{1}{N} \times \sum_{i=1}^5 (n_i x_i) = \frac{1}{17} (3 \times 8 + 2 \times 9 + 5 \times 7 + 3 \times 6 + 4 \times 2)$   
 $= \frac{101}{17} \approx 6$ . C'est la moyenne.

**c.**  $\frac{1}{N} \times \sum_{i=1}^5 (n_i (x_i - \bar{x})^2)$   
 $= \frac{1}{17} (3(8-8)^2 + 2(9-8)^2 + 5(7-8)^2 + 3(6-8)^2 + 4(2-8)^2)$   
 $= \frac{163}{17} \approx 9,5$ . C'est la variance.

**2. a.**  $S = \sum_{i=1}^5 (f_i \times x_i^2)$ . **b.**  $S' = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^3 (n_i x_i^2) - \bar{x}^2$ .

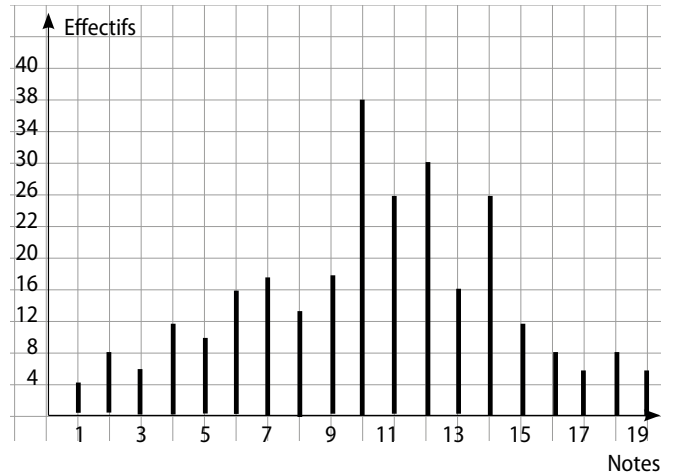
**44 1.** Voir ci-contre.

**2. a.**

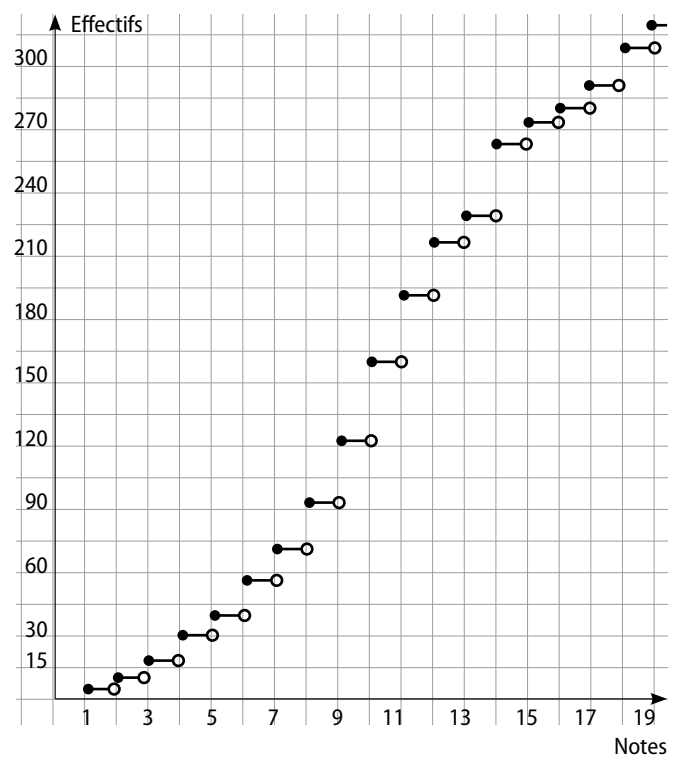
Note	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Effectif cumulé croissant	4	12	18	30	40	56	74	98	126	164

Note	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Effectif cumulé croissant	190	220	236	262	274	282	288	296	302

**(1.) Diagramme en bâtons :**



**2. b. Diagramme cumulatif :**



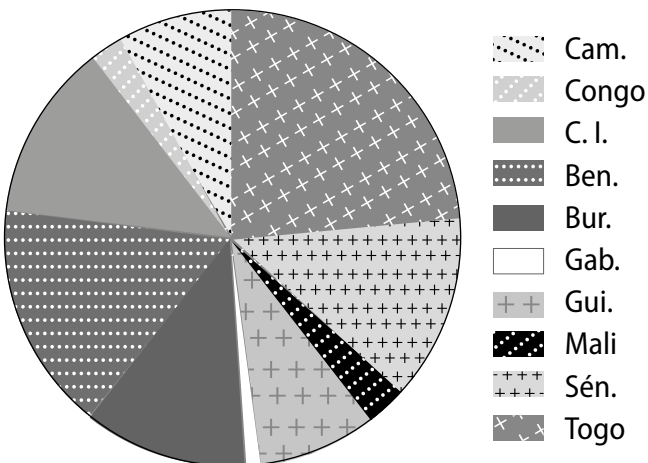
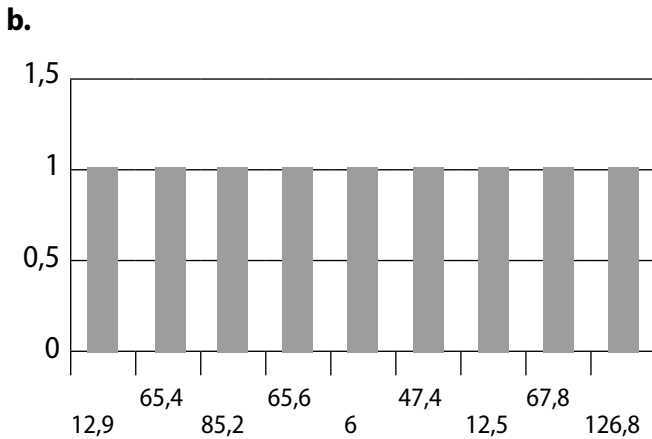
## Se tester

**45 à 48** Voir Manuel de l'élève page 259.

## Exercices d'approfondissement

**49 a.**

	Nb. d'habitants	Superficie	Densité
Cameroun	21,5	475 400	45,2
Congo	4,4	342 000	12,9
Côte d'Ivoire	21,1	322 460	65,4
Bénin	9,6	112 620	85,2
Burkina Faso	18	274 200	65,6
Gabon	1,6	267 670	6,0
Guinée	11,8	248 860	47,4
Mali	15,5	1 240 000	12,5
Sénégal	13,3	196 190	67,8
Togo	7,2	56 785	126,8
Total	124	3 536 185	35



**c.**

Pays	Cameroun	Congo	Côte d'Ivoire	Bénin	Burkina Faso
% en sup.	17,3	3,5	17,0	7,7	14,5
Angle	62	13	61	28	52

Pays	Gabon	Guinée	Mali	Sénégal	Togo
% en sup.	1,3	9,5	12,5	10,7	5,8
Angle	5	34	45	39	21

**d.** Densité de population des 10 pays : 35 hab/km<sup>2</sup>.  
Moyenne des densités :  
$$\frac{45,2 + 12,9 + \dots + 126,8}{10} = \frac{534,8}{10} \approx 53,5 \text{ hab/km}^2.$$

**50 1.**  $N = 22$  donc il faut tracer la droite horizontale d'équation  $y = 11$ . Une valeur de la médiane est 7.

**2. a.**  $A(6,5 ; 8)$  et  $B(7 ; 12)$  ;

$$\text{coefficient directeur} = \frac{12 - 8}{7 - 6,5} = \frac{4}{0,5} = 8.$$

$A(6,5 ; 8)$  est un point de la courbe représentant  $f$ , donc  $8 = 8 \times 6,5 + b$ . Ainsi,  $b = -44$ .

Finalement,  $f(x) = 8x - 44$ .

**b.** L'image de la médiane par  $f$  est  $\frac{N}{2}$ , soit 11.

**c.**  $11 = 8 \times x - 44$ . Ainsi,  $x = 6,875$ .

La médiane est 6,875.

**51 1.**  $\bar{x} = \frac{5 \times 1 + \dots + 4 \times 8}{5 + 7 + \dots + 4} = \frac{242}{54} \approx 4,5.$

**2. a.**

Nouvelle note	$a + b$	$2a + b$	$3a + b$	$4a + b$
Effectif	5	7	11	1

Nouvelle note	$5a + b$	$6a + b$	$7a + b$	$8a + b$
Effectif	8	12	6	4

**b.** 
$$\bar{X}_1 = \frac{5(a + b) + 7(2a + b) + \dots + 4(8a + b)}{5 + 7 + \dots + 4} = \frac{242a + 54b}{54}.$$

**c.**  $f(\bar{x}) = a\bar{x} + b = a \times \frac{242}{54} + b = \frac{242a + 54b}{54} = \bar{X}_1.$

**3. a.**

Nouvelle note	1	4	9	16	25	36	49	64
Effectif	5	7	11	1	8	12	6	4

b.  $\bar{X}_2 = \frac{5 \times 1 + 7 \times 4 + \dots + 4 \times 64}{5 + 7 + \dots + 4} = \frac{1330}{54} \approx 24,6.$

c.  $(\bar{x})^2 = \left(\frac{242}{54}\right)^2 = \frac{14641}{729} \approx 20.$

Donc  $\bar{X}_2 \neq (\bar{x})^2.$

4.  $\frac{242a + 54b}{54} = 10 \Leftrightarrow 242a + 54b = 540$   
 $\Leftrightarrow 121a + 27b = 270.$

Si a =	1	2	3
alors b =	≈ 5,51	≈ 1	≈ 3,4

Il peut choisir  $f(x) = 2x + 1.$

52 1. a.  $A = 7 \times 700 + \dots + 2 \times 900 = 32\,240$  F CFA.

$B = 9 \times 700 + \dots + 3 \times 900 = 32\,240$  F CFA.

b.  $A : \bar{x} \approx 767$  F CFA ;

médiane : un nombre de  $[750 ; 750] : 750$

$B : \bar{x} \approx 767$  F CFA ;

médiane : un nombre de  $[750 ; 750] : 750.$

c. Non, ils sont identiques.

2. a.  $A : \text{étendue} : 200$        $B : \text{étendue} : 200$

écart moyen :  $-315$       écart moyen :  $-55,1$

écart-type :  $62,8$       écart-type :  $60,7$

b. Les deux écarts.

3. a.  $A : \frac{32}{42} \times 100 \approx 76 \%$

$B : \frac{35}{42} \times 100 \approx 83 \%$ .

b.  $A : \frac{13}{42} \times 100 \approx 31 \%$

$B : \frac{13}{42} \times 100 \approx 31 \%$ .

53 Fait en classe par les élèves.

54 1.  $\bar{x} = \frac{66 + 69 + \dots + 74 + 75}{68} = \frac{4798}{68} \approx 70,55.$

$V = \frac{431}{68}. \sigma \approx 2,51.$

2.  $\bar{x} \in [69,3 ; 70,7], \sigma \in [2,4 ; 2,6].$

Il y a 54 modalités qui appartiennent à  $]68 ; 74[$  soit 78 %.

Il y a 68 modalités qui appartiennent à  $]65 ; 76[$  soit 100 %.

Oui, on peut exporter ces sacs de cacao.

55 a.  $d(x) = n_1(x_1 - x)^2 + n_2(x_2 - x)^2 + n_3(x_3 - x)^2$   
 $= n_1x_1^2 - 2n_1x_1x + n_1x^2 + n_2x_2^2 - 2n_2x_2x + n_2x^2$   
 $+ n_3x_3^2 - 2n_3x_3x + n_3x^2$   
 $= n_1x_1^2 + n_2x_2^2 + n_3x_3^2 - 2x(n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3)$   
 $+ x^2(n_1 + n_2 + n_3).$

$d(x) = (n_1 + n_2 + n_3)x^2 - 2(n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3)x$   
 $+ (n_1x_1^2 + n_2x_2^2 + n_3x_3^2)$

b.  $d$  est une fonction polynôme du second degré avec  $n_1 + n_2 + n_3$  qui est  $N$  donc positif donc  $d$  admet un minimum en :

$-\frac{b}{2a} = -\frac{-2(n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3)}{2 \times (n_1 + n_2 + n_3)} = \frac{(n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3)}{n_1 + n_2 + n_3}$   
 $= \bar{x}.$

56 1. a.  $\bar{x}_1 = \frac{6\,000}{300} = 20. \bar{x}_2 = \frac{10\,100}{500} = 20,2.$

b.  $\bar{x}'_1 = \frac{5\,050}{270} \approx 18,7. \bar{x}'_2 = \frac{7\,700}{420} \approx 18,3.$

c.  $\bar{x}''_1 = \frac{950}{30} \approx 31,7. \bar{x}''_2 = \frac{2\,400}{80} \approx 30.$

2.  $\bar{x}_1 = \frac{N'_1 \bar{x}'_1 + N''_1 \bar{x}''_1}{N_1}$  et  $\bar{x}_2 = \frac{N'_2 \bar{x}'_2 + N''_2 \bar{x}''_2}{N_2}.$

Les effectifs jouent un rôle dans les calculs : on parle d'effet de structure.

57 1. a.  $x_1 \leq x_i \leq x_k.$

b.  $\sum_{i=1}^k n_i x_i \leq \sum_{i=1}^k n_i x_i \leq \sum_{i=1}^k x_k n_i$

Soit  $x_1 \sum_{i=1}^k x_i \leq \sum_{i=1}^k n_i x_i \leq x_k \sum_{i=1}^k n_i$

soit  $\frac{x_1 \times N}{N} \leq \frac{\sum_{i=1}^k x_i n_i}{N} \leq \frac{x_k \times N}{N}.$

Ainsi  $x \in [x_1 ; x_k].$

2. a. Oui.

b. C'est la définition de la médiane.

58 Par exemple :

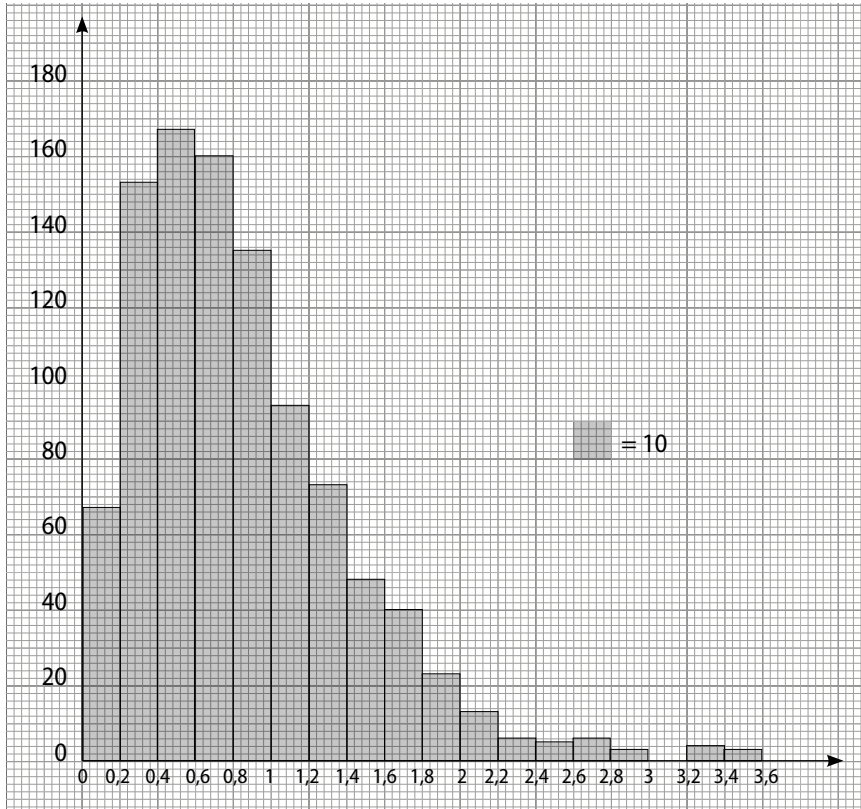
0	1	2	2	2,5	2,5	10	10	10	10
---	---	---	---	-----	-----	----	----	----	----

• 1<sup>re</sup> et dernière case : valeurs espacées de 10 (étendue) ;

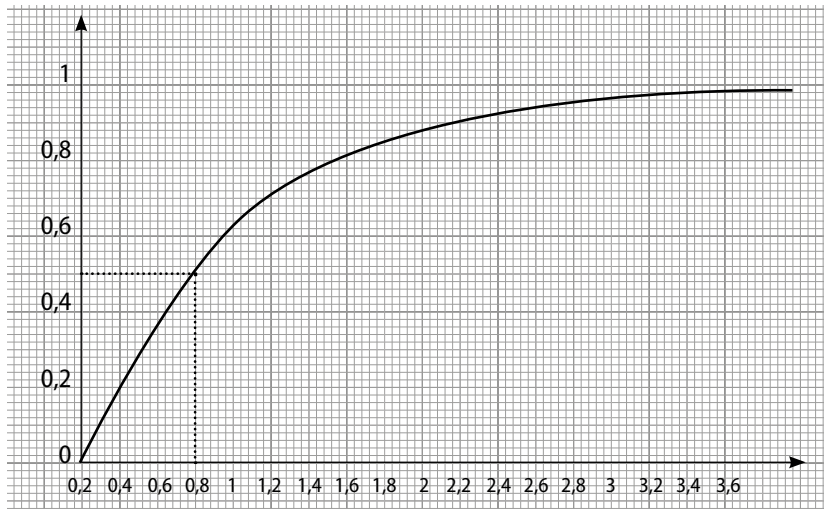
• La médiane se trouve entre la 5<sup>e</sup> et la 6<sup>e</sup> valeurs, il faut donc le même nombre dans ces cases : 2,5.

• On répartit des valeurs pour que la somme totale soit 50.

59 1.



2. a.



2. b. Médiane  $\approx 0,75$ .

3.

$V_1$	$V_2$	$V_3$	$V_4$	$V_5$	$V_6$	$V_7$	$V_8$	$V_9$	$V_{10}$	$V_{11}$	$V_{12}$	$V_{13}$	$V_{14}$	$V_{15}$	$V_{16}$	$V_{17}$	$V_{18}$	$V_{19}$
0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,58	0,6	0,7	0,75	0,8	0,9	1,1	1,15	1,2	1,3	1,4	1,75	2

4.  $\sqrt{V_{19}} \approx 1,41$ .

$N = 120$ .

$$d = \sqrt{120 \left[ \left( \frac{13}{120} - \frac{1}{6} \right)^2 + \left( \frac{18}{120} - \frac{1}{6} \right)^2 + \dots + \left( \frac{30}{120} - \frac{1}{6} \right)^2 \right]} \approx 2,367$$

Ainsi,  $d > \sqrt{V_{19}}$ , ce dé est donc irrégulier.

# 9 Calculs dans $\mathbb{R}$

## Activités d'introduction

### 1 Nombres rationnels et nombres irrationnels

**1. a.** On suppose que  $\sqrt{2}$  est un nombre rationnel, donc il existe deux nombres entiers naturels  $a$  et  $b$  tels que  $b \neq 0$  et  $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$  avec  $\frac{a}{b}$  irréductible.

**b.**  $a = b\sqrt{2}$  donc  $a^2 = 2b^2$ . Comme  $b^2 \in \mathbb{N}$ ,  $a^2$  est pair.

• Si le carré d'un nombre entier est pair, alors ce nombre est lui aussi pair, donc  $a$  est pair.

**c.**  $a$  est pair, donc il existe  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $a = 2p$ .

On a alors :  $a^2 = 4p^2$ , puis  $b^2 = \frac{a^2}{2} = \frac{4p^2}{2} = 2p^2$  donc  $b^2$  est pair et, par suite,  $b$  est pair.

**d.**  $a$  et  $b$  sont pairs donc  $a$  et  $b$  sont divisibles par 2, donc  $\frac{a}{b}$  n'est pas irréductible. Contradiction.  $\sqrt{2}$  est donc un nombre irrationnel.

**2. a.** Supposons que  $r + x \in \mathbb{Q}$ . Alors, il existe  $p \in \mathbb{Z}$  et  $q \in \mathbb{N}, q \neq 0$ , tels que  $r + x = \frac{p}{q}$ . Donc  $x = \frac{p}{q} - r$  car  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$  et  $r \in \mathbb{Q}$ ; donc  $x \in \mathbb{Q}$ . Contradiction. Donc  $r + x \notin \mathbb{Q}$ .

Supposons que  $rx \in \mathbb{Q}$ . Alors, il existe  $p \in \mathbb{Z}$  et  $q \in \mathbb{N}, q \neq 0$ , tels que  $rx = \frac{p}{q}$ . Donc  $rx = \frac{p}{q}$ .

Comme  $r \neq 0$ ,  $x = \frac{p}{q} \times \frac{1}{r} \in \mathbb{Q}$  car  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$  et  $\frac{1}{r} \in \mathbb{Q}$ , contradiction. Donc  $rx \notin \mathbb{Q}$ .

**b.**  $r' - r \in \mathbb{Q}$  car  $r \in \mathbb{Q}$  et  $r' \in \mathbb{Q}$ .

Comme  $\frac{\sqrt{2}}{2} \notin \mathbb{Q}$  et  $r' - r \in \mathbb{Q}$ , d'après la propriété 2,  $\frac{\sqrt{2}}{2}(r' - r) \notin \mathbb{Q}$ .

Comme  $\frac{\sqrt{2}}{2}(r' - r) \notin \mathbb{Q}$  et  $r \in \mathbb{Q}$ , d'après la propriété 1,

$$y = r + \frac{\sqrt{2}}{2}(r' - r) \notin \mathbb{Q}.$$

De plus :

$$\bullet r' > r, \text{ donc } y = r + \frac{\sqrt{2}}{2}(r' - r) > r;$$

$$\bullet r' - y = r' - r - \frac{\sqrt{2}}{2}(r' - r) = (r' - r)\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ donc } r' - y > 0.$$

On a donc montré que  $r < y < r'$ .

**c.**  $r$  et  $r'$  désignent deux nombres rationnels tels que  $r' > r$ . On pose  $y = r + \frac{\sqrt{2}}{2}(r' - r)$ .  
Alors :  $r < y < r'$  et  $y \notin \mathbb{Q}$ .

### 2 Minimum et minorant – Maximum et majorant

**1. a.** 0 est un minorant, mais pas le minimum de  $]0 ; 4[$  car  $0 \notin ]0 ; 4[$ .

**b.** 0 est un minorant et le minimum de  $[0 ; 4]$  car  $0 \in [0 ; 4]$ .

**c.** 0 est un minorant, mais pas le minimum de  $]0 ; 4[$  car  $0 \notin ]0 ; 4[$ .

**d.** 0 est un minorant et le minimum de  $[0 ; 10]$  car  $0 \in [0 ; 10]$ .

**2. a.** 4 est un majorant et le maximum de  $[0 ; 4]$  car  $4 \in [0 ; 4]$ .

**b.** 4 est un majorant et le maximum de  $]0 ; 4[$  car  $4 \in ]0 ; 4[$ .

**c.** 4 est un majorant, mais pas le maximum de  $[0 ; 4[$  car  $4 \notin [0 ; 4[$ .

**d.** 4 est un majorant, mais pas le maximum de  $]0 ; 4[$  car  $4 \notin ]0 ; 4[$ .

**3. a.**  $-1$  est un minorant et le minimum de  $[-1 ; 2,5]$ .  
 $2,5$  est un majorant et le maximum de  $[-1 ; 2,5]$ .

**b.**  $-3$  est un minorant et le minimum de  $[-3 ; -1[$ .  
 $-1$  est un majorant de  $[-3 ; -1[$ .

$[-3 ; -1[$  n'a pas de maximum.

**c.**  $]-\infty ; 1]$  n'est pas minoré et n'a pas de minimum.  
 $1$  est un majorant et le maximum de  $]-\infty ; 1]$ .

**d.**  $-5$  est un minorant de  $]-5 ; +\infty[$ .  
 $]-5 ; +\infty[$  n'a pas de minimum.

$]-5 ; +\infty[$  n'est pas majoré et n'a pas de maximum.

**4.** • Un nombre réel  $M$  est un majorant de  $I$ , si pour tout  $x$  de  $I$ ,  $x \leq M$ .

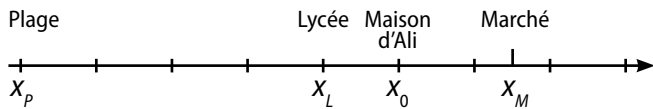
Si de plus,  $M \in I$ , on dit que  $M$  est le maximum de  $I$ .

• Un nombre réel  $m$  est un minorant de  $I$ , si pour tout  $x$  de  $I$ ,  $m \leq x$ .

Si de plus,  $m \in I$ , on dit que  $m$  est le minimum de  $I$ .

### 3 Distance entre deux nombres réels

a.



On note  $x_0$  l'abscisse de la maison d'Ali.

b.

Distance	Nombre de kilomètres	Expressions avec les lettres $x_A$ et $x_B$	Notation $d(x_A; x_B)$
maison - plage	5	$x_0 - x_p$	$d(x_0; x_p)$
maison - lycée	1	$x_0 - x_L$	$d(x_0; x_L)$
lycée - marché	2,5	$x_M - x_L$	$d(x_L; x_M)$
marché - plage	6,5	$x_M - x_p$	$d(x_M; x_p)$
marché - maison	1,5	$x_M - x_0$	$d(x_M; x_0)$

$$c. d(x_A; x_B) = \begin{cases} x_B - x_A & \text{si } x_B - x_A \geq 0 \\ x_A - x_B & \text{si } x_B - x_A \leq 0 \end{cases}$$

### 4 Approximation de $\pi$

1. b. Le périmètre de  $(\mathcal{C})$  est égal à  $\pi \times EG = \pi$ .

• Le périmètre du carré  $ABCD$  est égal à

$$4 \times AB = 4 \times 1 = 4.$$

• Le périmètre du carré de  $EFGH$  est égal à :

$$4 \times EF = 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}.$$

En effet : dans le triangle  $EFB$  rectangle isocèle en  $B$ , le théorème de Pythagore permet d'écrire que :

$$EF^2 = EB^2 + BF^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \times 2 = \frac{1}{2}.$$

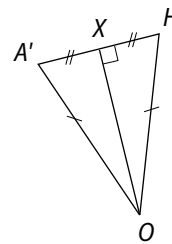
$$\text{donc } EF = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ (car } EF > 0).$$

c. Comme le périmètre de  $EFGH$  est inférieur au périmètre de  $(\mathcal{C})$  qui, lui, est inférieur à celui de  $ABCD$ , on a :  $2\sqrt{2} < \pi < 4$ .

d.  $\sqrt{2} \approx 1,414$  donc  $2,828 < \pi < 4$  et un arrondi à l'unité de  $\pi$  est 3.

2. b. L'octogone  $A'EB'FC'GD'H$  étant régulier,  $\mathcal{G}_1^{\mathcal{P}} = 8 \times A'H$ .

• Dans le triangle  $OA'H$  isocèle en  $O$ , on note  $X$  le milieu du segment  $[A'H]$ .



Le triangle  $A'XO$  est rectangle en  $X$ .

On sait de plus que :

$$\text{mes}(\widehat{A'OH}) = \frac{360}{28} = 45^\circ,$$

$$\text{donc } \text{mes}(\widehat{A'OX}) = \frac{45}{2} = 22,5^\circ.$$

Et ainsi :  $\sin(22,5^\circ) = \frac{A'X}{A'O}$  donc  $A'X = A'O \times \sin(22,5^\circ)$ .

$$\text{Par conséquent : } A'H = 2 \times A'X = 2 \times A'O \times \sin(22,5^\circ) = \sin(22,5^\circ)$$

$$\text{et } \mathcal{G}_1^{\mathcal{P}} = 8 \times \sin(22,5^\circ).$$

c. • L'octogone  $MUTSRQPN$  étant régulier,  $\mathcal{G}_2^{\mathcal{P}} = 8 \times UM$ .

Comme  $A'$  est le milieu du segment  $[UM]$  :

$$\mathcal{G}_2^{\mathcal{P}} = 2 \times 8 \times A'M = 16 A'M.$$

• Dans le triangle  $AOH$  rectangle en  $H$ , le théorème de Pythagore permet d'écrire que :

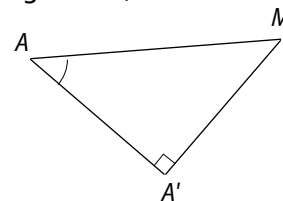
$$AO^2 = AH^2 + HO^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\text{donc } AO = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ (car } AO > 0).$$

$$\text{Ainsi, } AA' = AO - A'O = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}.$$

• Dans le triangle  $A'MA$  rectangle en  $A'$ ,

$$\tan(45^\circ) = \frac{A'M}{AA'} \text{ car } \text{mes}(\widehat{A'AM}) = 45^\circ.$$



$$\text{Donc } 1 = \frac{A'M}{AA'}, \text{ puis}$$

$$A'M = AA' = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}.$$

$$\text{On a alors } \mathcal{G}_2^{\mathcal{P}} = 16 \times A'M = 8(\sqrt{2} - 1).$$

d. Comme le périmètre de  $A'EB'FC'GD'H$  est inférieur au périmètre de  $(\mathcal{C})$  qui, lui, est inférieur à celui de  $MUTSRQPN$ , on a :  $8 \sin(22,5^\circ) < \pi < 8(\sqrt{2} - 1)$ .

e.  $\sin(22,5^\circ) \approx 0,383$  donc  $3,064 < \pi < 3,314$ .

## Savoir-faire

**3**  $A = \frac{50}{9} \times \frac{21}{2} + 3 = \frac{2 \times 25 \times 3 \times 7}{3 \times 3 \times 2} + 3$   
 $A = \frac{175}{3} + 3 = \frac{175}{3} + \frac{9}{3} = \frac{184}{3}$  donc  $A \in \mathbb{Q}$ .  
 $B = \frac{1,5 \times 10^3}{0,5} = \frac{3 \times 0,5 \times 10^3}{0,5} = 3\,000$  donc  $B \in \mathbb{N}$ .  
 $C = \frac{3 \times (10^2)^4 \times 10^{-5}}{6 \times 10^{14}} = \frac{3 \times 10^8 \times 10^{-5}}{3 \times 2 \times 10^{14}}$   
 $C = \frac{10^{8+(-5)+(-14)}}{2} = \frac{1}{2} \times 10^{-11}$   
 $C = 0,5 \times 10^{-11} = 5 \times 10^{-12}$  donc  $C \in \mathbb{D}$ .  
 $D = \frac{5}{3} \div \frac{-4}{9} = \frac{5}{3} \times \frac{9}{-4} = \frac{15}{-4} = -3,75$  donc  $D \in \mathbb{D}$ .  
 $E = \sqrt{100} - \sqrt{72} + 6\sqrt{2}$   
 $E = \sqrt{10^2} - \sqrt{36 \times 2} + 6\sqrt{2}$   
 $E = 10 - \sqrt{36} \times \sqrt{2} + 6\sqrt{2}$   
 $E = 10 - 6\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = 10$  donc  $E \in \mathbb{N}$ .  
 $F = (\sqrt{3} - 5)^2 + 9\sqrt{3}$   
 $F = (\sqrt{3})^2 - 2 \times 5 \times \sqrt{3} + 25 + 9\sqrt{3}$   
 $F = 9 + 25 - 10\sqrt{3} + 9\sqrt{3}$   
 $F = 34 - \sqrt{3}$  donc  $F \in \mathbb{R}$ .  
 $G = (2^3)^5 - 4^{-1} = 2^{15} - \frac{1}{4}$  donc  $G \in \mathbb{D}$ .  
 $H = (\sqrt{7} - \sqrt{3})(\sqrt{7} + \sqrt{3}) = (\sqrt{7})^2 - (\sqrt{3})^2 = 7 - 3 = 4$  donc  $H \in \mathbb{N}$ .

**4**  $A(x) = (7 + 3x)(x - 1) + (3 - x)^2$   
 $= 7x - 7 + 3x^2 - 3x + 9 - 6x + x^2$   
 $= 4x^2 - 2x + 2$ .  
 $B(x) = (7x - 1)(7x + 1) - 50x^2$   
 $= (7x)^2 - 1^2 - 50x^2$   
 $= 49x^2 - 1 - 50x^2$   
 $= -x^2 - 1$ .  
 $C(x) = (5x - 8)(x^2 + 1) - (x - 2)^2$   
 $= 5x^2 + 5x - 8x^2 - 8 - (x^2 - 4x + 4)$   
 $= 5x^2 + 5x - 8x^2 - 8 - x^2 + 4x - 4$   
 $= 5x^3 - 9x^2 + 9x - 12$ .  
 $D(x) = x(2 - x) + x^2(3 - x)$   
 $= 2x - x^2 + 3x^2 - x^3$   
 $= -x^3 + 2x^2 + 2x$ .

**5**  $A(x) = 3x(x - 1) - (5 + x)(x - 1)$   
 $= (x - 1)[3x - (5 + x)]$   
 $= (x - 1)[3x - 5 - x]$   
 $= (x - 1)(2x - 5)$

$$B(x) = (x - 3)^2 - (5 - x)^2$$

$$= [(x - 3) - (5 - x)][(x - 3) + (5 - x)]$$

$$= [x - 3 - 5 + x][x - 3 + 5 - x]$$

$$= (2x - 8) \times 2$$

$$= 4(x - 4).$$

$$C(x) = (2 - x)^2 - (2 - x)(3x + 1)$$

$$= (2 - x)(2 - x) - (2 - x)(3x + 1)$$

$$= (2 - x)[(2 - x) - (3x + 1)]$$

$$= (2 - x)(2 - x - 3x - 1)$$

$$= (2 - x)(-4x + 1).$$

$$D(x) = 4x^2 - 20x + 25$$

$$= (2x)^2 - 2 \times 2x \times 5 + 5^2$$

$$= (2x - 5)^2.$$

**8 a.**  $|4 - \sqrt{5}| + 2|-2 - 3| = 4 - \sqrt{5} + 2(2 + 3)$   
 $= 4 - \sqrt{5} + 10 = 14 - \sqrt{5}$

**b.**  $\left| \frac{\pi - 4}{-3} \right| = \frac{4 - \pi}{3}$ .

**c.**  $|\sqrt{2} - 11| - |10 - \sqrt{5}| = (11 - \sqrt{2}) - (10 - \sqrt{5})$   
 $= 11 - \sqrt{2} - 10 + \sqrt{5} = 1 - \sqrt{2} + \sqrt{5}$

**d.**  $|\pi^2 - 2\pi| + |\pi - \sqrt{7}| = \pi^2 - 2\pi + \pi - \sqrt{7} = \pi^2 - \pi - \sqrt{7}$ .

**9 a.**  $|x - 3| = 7 \Leftrightarrow x - 3 = 7$  ou  $x - 3 = -7$   
 $\Leftrightarrow x = 10$  ou  $x = -4$ .

**b.**  $|2x - 5| = 3 \Leftrightarrow 2x - 5 = 3$  ou  $2x - 5 = -3$   
 $\Leftrightarrow 2x = 8$  ou  $2x = 2$   
 $\Leftrightarrow x = 4$  ou  $x = 1$ .

**c.**  $|-x + 7| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -x + 7 = \frac{1}{2}$  ou  $-x + 7 = -\frac{1}{2}$   
 $\Leftrightarrow x = 7 - \frac{1}{2} = \frac{13}{2}$  ou  $x = 7 + \frac{1}{2} = \frac{15}{2}$ .

**10 a.**  $|x - 5| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x - 5 \leq 1$   
 $\Leftrightarrow 4 \leq x \leq 6 \Leftrightarrow x \in [4; 6]$ .

**b.**  $|x + 10| > 3 \Leftrightarrow x + 10 < -3$  ou  $x + 10 > 3$   
 $\Leftrightarrow x < -13$  ou  $x > -7$   
 $\Leftrightarrow x \in ]-\infty; -13[$  ou  $x \in ]-7; +\infty[$ .

**c.**  $|2x + 4| \leq 6 \Leftrightarrow -6 \leq 2x + 4 \leq 6$   
 $\Leftrightarrow -10 \leq 2x \leq 2$   
 $\Leftrightarrow -5 \leq x \leq 1$   
 $\Leftrightarrow x \in [-5; 1]$ .

**13**  $0,1 < x < 0,5$ ; donc  $0,01 < x^2 < 0,25$ ;  
 donc  $0,05 < 5x^2 < 1,25$ ; donc  $3,05 < 3 + 5x^2 < 4,25$ .

**14 a.**  $0\overline{3} = \frac{4}{3} \times \pi \times 15^3$ ;  $0\overline{7} = 4\,500\pi$ . L'arrondi d'ordre 0 est  $14\,137\text{ cm}^3$  et celui d'ordre 1 est  $14\,137,2\text{ cm}^3$ .

b.  $Q = \frac{1}{3} \times \pi \times 5^2 \times 3 = 25\pi$ .

L'arrondi d'ordre 0 est  $79 \text{ cm}^3$  et celui d'ordre 1 est  $78,5 \text{ cm}^3$ .

15 a.  $503,4 \times 10^{-3} = 5,034 \times 10^{-1}$  donc l'ordre de grandeur de  $503,4 \times 10^{-3}$  est 1.

b.  $1251 \times 10^7 = 1,251 \times 10^{10}$  donc l'ordre de grandeur de  $1251 \times 10^7$  est  $10^{10}$  (car  $0 < 1,251 < 5$ ).

c.  $83,01 \times 10^{11} = 8,301 \times 10^{12}$  donc l'ordre de grandeur de  $83,01 \times 10^{11}$  est  $10^{13}$  (car  $5 < 8,301 < 10$ ).

16 a.  $R_T = 65 \times 10^2 = 6,5 \times 10^3$  donc l'ordre de grandeur du rayon de la Terre est  $10^4 \text{ km}$  (car  $5 < 6,5 < 10$ ).

b.  $R_S = 1,7 \times 10^9$  donc l'ordre de grandeur du rayon du Soleil est  $10^9 \text{ km}$  (car  $0 < 1,7 < 5$ ).

c.  $R_J = 7 \times 10^5$  donc l'ordre de grandeur du rayon de Jupiter est  $10^6 \text{ km}$  (car  $5 < 7 < 10$ ).

## Exercices d'entraînement

17	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
3,14			X	X	X
$-\sqrt{16}$		X	X	X	X
$2,17 \times 10^4$	X	X	X	X	X
$5\pi$					X
$\frac{\sqrt{4}}{3}$				X	X
$\frac{112}{-4}$		X	X	X	X
$1 + \frac{1}{3}$				X	X

18 a.  $11 \in \mathbb{N}$  ; b.  $11 \in \mathbb{Z}$  ; c.  $0,33 \in \mathbb{D}$  ; d.  $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$  ;  
 e.  $\sqrt{7} \notin \mathbb{Q}$  ; f.  $\sqrt{9} \in \mathbb{Z}$  ; g.  $413 \times 10^{-2} \notin \mathbb{Z}$  ; h.  $\frac{5}{4} \times 10^2 \in \mathbb{Q}$  ;  
 i.  $0 \in \mathbb{Z}$  ; j.  $(\sqrt{3})^2 + 1 \in \mathbb{N}$  ; k.  $\frac{\pi}{3,14} \notin \mathbb{N}$  ; l.  $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \notin \mathbb{D}$ .

19 a.  $-4$  ; b.  $\frac{1}{3}$  ; c.  $\pi$  ; d.  $-0,34$ .

20 a.  $-18/6 \in \mathbb{Z}$  car  $-\frac{18}{6} = -3$ .

b.  $3\sqrt{2} \times \sqrt{2} \in \mathbb{N}$  car  $3 \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 3 \times \sqrt{4} = 6$ .

c.  $\frac{1,21}{1,1} \times 10^{-3} \in \mathbb{D}$  car  $\frac{1,21}{1,1} \times 10^{-3} = 1,1 \times 10^{-3}$ .

d.  $\frac{4}{3} + \frac{5}{2} + \frac{2}{3} \in \mathbb{D}$  car  $\frac{4}{3} + \frac{5}{2} + \frac{2}{3} = \frac{6}{3} + \frac{5}{2}$ .

e.  $\frac{\sqrt{25}}{3} \in \mathbb{Q}$  car  $\frac{\sqrt{25}}{3} = \frac{5}{3}$ . f.  $-4\pi \in \mathbb{R}$ .

g.  $\frac{5}{7} \times \frac{21}{4} \times \frac{25}{3} \in \mathbb{D}$  car :

$$\frac{5}{7} \times \frac{21}{4} \times \frac{25}{3} = \frac{5 \times 7 \times 3 \times 25}{7 \times 4 \times 3} = \frac{5 \times 25}{4} = \frac{125}{4}$$

h.  $\frac{9 \times (10^4)^3 \times 4^7}{10^7 \times 12 \times 10^5} \in \mathbb{N}$  car :

$$\frac{9 \times (10^4)^3 \times 4^7}{10^7 \times 12 \times 10^5} = \frac{3 \times 3 \times 10^{12} \times 4 \times 4^6}{10^{12} \times 3 \times 4} = 3 \times 4^6$$

i.  $(3 - \sqrt{2})^2 \in \mathbb{R}$  car  $(3 - \sqrt{2})^2 = 9 - 6\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = 11 - 6(\sqrt{2})$ .

21 a. Faux. Par exemple,  $3 \in \mathbb{Z}$  et son opposé est  $-3 \notin \mathbb{N}$ .

b. Faux. Par exemple,  $3 \in \mathbb{N}^*$  et son inverse  $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$ .

c. Faux. Par exemple,  $\sqrt{1,21} = \sqrt{1,1^2} = 1,1$  et  $1,1 \in \mathbb{D}$ .

d. Faux. Par exemple  $\sqrt{2}$  est un nombre irrationnel et  $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = \sqrt{4} = 2$  est un nombre entier naturel.

22 a.  $1 - \frac{1}{20} + \frac{2}{5} = \frac{20}{20} - \frac{1}{20} + \frac{8}{20} = \frac{20 - 1 + 8}{20} = \frac{27}{20}$ .

b.  $4 \times \frac{7}{25} \times \left(9 - \frac{2}{3}\right) = 4 \times \frac{7}{25} \times \left(\frac{27}{3} - \frac{2}{3}\right)$   
 $= 4 \times \frac{7}{25} \times \frac{25}{3} = 4 \times \frac{7}{3} = \frac{28}{3}$ .

c.  $1 - \frac{2}{3} = \frac{3}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$   
 $\frac{1}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{\frac{3}{3}}{\frac{3}{3} + \frac{2}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{1}{5}$ .

d.  $\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right) - 1 = 1^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 - 1 = -\frac{1}{16}$ .

23 a.  $\frac{10^2 \times 15 \times 2^3}{5 \times 4 \times 10} = \frac{10^2}{10} \times \frac{15}{5} \times \frac{2^3}{4}$   
 $= 10 \times 3 \times 2 = 60$ .

b.  $\frac{9 \times (10^3)^4 \times 7^2}{10^{12} \times 21} = \frac{3 \times 3 \times 7^2 \times 10^{12}}{3 \times 7 \times 10^{12}} = 3 \times 7 = 21$ .

c.  $2\sqrt{36} - 3\sqrt{25} + \sqrt{2} = 2 \times 6 - 3 \times 5 + \sqrt{2} = -3 + \sqrt{2}$ .

d.  $\sqrt{400} + \sqrt{16} - \sqrt{81} = 20 + 4 - 9 = 15$ .

24 a.  $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$  ;  $\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{81}} = \frac{4}{9}$  ;

$$\frac{1}{9} + \frac{2}{6} = \frac{2+6}{18} = \frac{8}{18} = \frac{4 \times 2}{9 \times 2} = \frac{4}{9}$$
 ;  
 $\frac{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}{9} = \frac{(\sqrt{5})^2 - (1)^2}{9} = \frac{5-1}{9} = \frac{4}{9}$

b.  $(-\sqrt{3})^2 = (\sqrt{3})^2 = 3$  ;  $\frac{21}{7} = 3$  ;

$$1 + 1 \div \frac{1}{2} = 1 + 1 \times \frac{2}{1} = 1 + 2 = 3$$
 ;

$$\frac{0,3 \times (10^4)^2}{10^7} = \frac{0,3 \times 10^8}{10^7} = 0,3 \times 10 = 3$$

$$\begin{aligned} \text{25 a. } & \frac{4}{7} \times \frac{7}{2} - \frac{2}{5} \left( \frac{1}{3} - 3 \times \frac{1}{2} \right) = \frac{4 \times 7}{7 \times 2} - \frac{2}{5} \left( \frac{1}{3} - \frac{3}{2} \right) \\ & = 2 - \frac{2}{5} \left( \frac{2-9}{6} \right) = 2 - \frac{2}{5} \times \left( \frac{-7}{2 \times 3} \right) = 2 - \frac{-7}{5 \times 3} \\ & = 2 + \frac{7}{15} = \frac{30+7}{15} = \frac{37}{15}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } & \frac{\frac{3}{4} - \frac{5}{7} \times \frac{14}{15}}{\frac{7}{6} + 1 \div \frac{12}{5}} = \frac{\frac{3}{4} - \frac{5 \times 7 \times 2}{7 \times 3 \times 5}}{\frac{7}{6} + 1 \times \frac{5}{12}} = \frac{\frac{3}{4} - \frac{2}{3}}{\frac{7}{6} + \frac{5}{12}} \\ & = \frac{\frac{9-8}{12}}{\frac{14+5}{12}} = \frac{1}{19} = \frac{1}{12} \times \frac{12}{19} = \frac{1}{19}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c. } & \frac{7}{16} \times \left( \frac{2}{7} \right)^2 - \frac{11}{7} \div \frac{44}{5} = \frac{7 \times 4}{4 \times 4 \times 7^2} - \frac{11}{7} \times \frac{5}{4 \times 11} \\ & = \frac{1}{28} - \frac{5}{28} = -\frac{4}{28} = \frac{-4 \times 1}{4 \times 7} = -\frac{1}{7}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d. } & \frac{\frac{3}{4} + \frac{2}{3} \div \frac{4}{5} - \frac{3}{4}}{\frac{3}{4} - \frac{2}{3} \div \frac{4}{5} + \frac{3}{4}} = \frac{\frac{9+8}{12} - \frac{16-15}{20}}{\frac{9-8}{12} + \frac{16+15}{20}} \\ & = \frac{\frac{17}{12} - \frac{1}{20}}{\frac{1}{12} + \frac{31}{20}} = \left( \frac{17}{12} \times \frac{12}{1} \right) \div \left( \frac{1}{20} \times \frac{20}{31} \right) \\ & = 17 \div \frac{1}{31} = 17 \times \frac{31}{1} = 17 \times 31 = 527. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{26 a. } & \frac{2^7 \times 3^7 \times 7 \times 25^3 \times 11}{3^{-4} \times 2^3 \times 9^2 \times 8} = \frac{2^7 \times (5^2)^3 \times 3^7 \times 7 \times 11}{2^3 \times 2^3 \times (3^2)^2 \times 3^{-4}} \\ & = \frac{2^7 \times 5^6 \times 3^7 \times 7 \times 11}{2^6 \times 3^4 \times 3^{-4}} = 2^{7-6} \times 5^6 \times 3^7 \times 7 \times 11 \\ & = 2 \times 3^7 \times 5^6 \times 7 \times 11. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } & \frac{12^3 \times 5 \times (-9)^4 \times 21}{10^3 \times (7 \times 5^3)^{-2}} \\ & = \frac{(4 \times 3)^3 \times 5 \times (3^2)^4 \times 3 \times 7 \times (7 \times 5^3)^2}{(5 \times 2)^3} \\ & = \frac{2^6 \times 3^3 \times 3^8 \times 3 \times 5 \times 7 \times 7^2 \times 5^6}{5^3 \times 2^3} \\ & = 2^{6-3} \times 3^{3+8+1} \times 5^{1+6-3} \times 7^{1+2} \\ & = 2^3 \times 3^{12} \times 5^4 \times 7^3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{27 a. } & 59\,000 \times 0,032 = 5,9 \times 10^4 \times 3,2 \times 10^{-2} \\ & = 5,9 \times 3,2 \times 10^2 = 18,88 \times 10^2 \\ & = 1,88 \times 10 \times 10^2 = 1,88 \times 10^3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } & 5 \times 10^7 \times 4,1 \times 10^{-4} = 20,5 \times 10^3 = 2,05 \times 10 \times 10^3 \\ & = 2,05 \times 10^4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c. } & \frac{36 \times 10^5 \times 0,4}{4^2 \times 3 \times 10^3} = 0,75 \times 10^2 \times 0,4 \\ & = 0,3 \times 10^2 = 3 \times 10^{-1} \times 10^2 = 3 \times 10. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d. } & \frac{15,5 \times (10^4)^2 \times 0,7}{(10^{-2})^3 \times 5} = \frac{15,5}{5} \times 0,7 \times \frac{10^8}{10^{-6}} \\ & = 3,1 \times 0,7 \times 10^{14} = 2,17 \times 10^{14}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{28 a. } & \sqrt{80} - 4\sqrt{125} + 3\sqrt{45} = \sqrt{16 \times 5} - 4\sqrt{5 \times 25} + 3\sqrt{9 \times 5} \\ & = \sqrt{16} \times \sqrt{5} - 4 \times \sqrt{25} \times \sqrt{5} + 3\sqrt{9} \times \sqrt{5} \\ & = 4\sqrt{5} - 4 \times 5\sqrt{5} + 3 \times 3\sqrt{5} \\ & = (4 - 20 + 9)\sqrt{5} = -7\sqrt{5}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } & (3 + \sqrt{5})^2 = 3^2 + 2 \times 3 \times \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 \\ & = 9 + 6\sqrt{5} + 5 = 14 + 6\sqrt{5}. \end{aligned}$$

$$\text{c. } (7 - \sqrt{5})(7 + \sqrt{5}) = 7^2 - (\sqrt{5})^2 = 49 - 5 = 44.$$

$$\begin{aligned} \text{d. } & \frac{(1 - \sqrt{5})^2 - 1}{(\sqrt{7} + \sqrt{6})(\sqrt{7} - \sqrt{6})} = \frac{1^2 - 2 \times 1 \times \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 - 1}{(\sqrt{7})^2 - (\sqrt{6})^2} \\ & = \frac{1 - 2\sqrt{5} + 5 - 1}{7 - 6} = 5 - 2\sqrt{5}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{29 a. } & 7\sqrt{50} - \sqrt{72} + \sqrt{200} \\ & = 7 \times \sqrt{25 \times 2} - \sqrt{36 \times 2} + \sqrt{100 \times 2} \\ & = 7 \times \sqrt{25} \times \sqrt{2} - \sqrt{36} \times \sqrt{2} + \sqrt{100} \times \sqrt{2} \\ & = 7 \times 5 \times \sqrt{2} - 6\sqrt{2} + 10\sqrt{2} \\ & = (35 - 6 + 10)\sqrt{2} = 39\sqrt{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } & (\sqrt{3} + 2)^2 - (\sqrt{3} - 2)^2 \\ & = [(\sqrt{3})^2 + 2 \times 2\sqrt{3} + 2^2] - [(\sqrt{3})^2 - 2 \times 2\sqrt{3} + 2^2] \\ & = (3 + 4\sqrt{3} + 4) - (3 - 4\sqrt{3} + 4) = 8\sqrt{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c. } & \frac{6}{\sqrt{3}} - 5\sqrt{48} = \frac{6 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} - 5 \times \sqrt{16 \times 3} \\ & = \frac{6\sqrt{3}}{3} - 5 \times \sqrt{16} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3} - 5 \times 4\sqrt{3} \\ & = (2 - 20)\sqrt{3} = -18\sqrt{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d. } & -\sqrt{28} + \sqrt{63} + 2\sqrt{700} \\ & = -\sqrt{4 \times 7} + \sqrt{9 \times 7} + 2\sqrt{100 \times 7} \\ & = -\sqrt{4} \times \sqrt{7} + \sqrt{9} \times \sqrt{7} + 2\sqrt{100} \times \sqrt{7} \\ & = -2\sqrt{7} + 3\sqrt{7} + 20\sqrt{7} \\ & = (-2 + 3 + 20)\sqrt{7} = 21\sqrt{7}. \end{aligned}$$

$$\text{30 a. Faux. En effet : } 1 + \frac{1}{\sqrt{13}} - 13 = -12 + \frac{\sqrt{13}}{13} \notin \mathbb{N}.$$

$$\begin{aligned} \text{b. Faux. En effet :} \\ & \sqrt{\sqrt{7}-1} \times \sqrt{\sqrt{7}+1} = \sqrt{(\sqrt{7}-1)(\sqrt{7}+1)} \\ & = \sqrt{(\sqrt{7})^2 - 1^2} = \sqrt{7-1} = \sqrt{6} \notin \mathbb{N}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c. Vrai. En effet :} \\ & \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}-1) + \sqrt{5}(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)} \\ & = \frac{5 - \sqrt{5} + 5 + \sqrt{5}}{5-1} = \frac{10}{4} = \frac{5 \times 2}{2 \times 2} = \frac{5}{2} = 2,5. \end{aligned}$$

d. Vrai. En effet :

$$\frac{1 - \frac{1}{\pi}}{1 + \frac{1}{\pi}} \div \frac{\pi^2 - \pi}{\pi^2 + \pi} = \frac{\frac{\pi - 1}{\pi}}{\frac{\pi + 1}{\pi}} \div \frac{\pi(\pi - 1)}{\pi(\pi + 1)}$$

$$= \frac{\pi - 1}{\pi} \times \frac{\pi}{\pi + 1} \times \frac{\pi + 1}{\pi - 1} = 1.$$

**31 a.**  $(\sqrt{5} + \frac{1}{\sqrt{5}})^2 = (\sqrt{5})^2 + 2 \times \sqrt{5} \times \frac{1}{\sqrt{5}} + (\frac{1}{\sqrt{5}})^2$   
 $= 5 + 2 + \frac{1}{5} = 7 + \frac{1}{5} = 7,2 \in \mathbb{D}.$

**2.**  $\frac{5\sqrt{7}}{\sqrt{7} - \sqrt{2}} - \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{7} + \sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{7}(\sqrt{7} + \sqrt{2}) - 5\sqrt{2}(\sqrt{7} - \sqrt{2})}{(\sqrt{7} - \sqrt{2})(\sqrt{7} + \sqrt{2})}$   
 $= \frac{5[(\sqrt{7})^2 + \sqrt{14} - \sqrt{14} - (\sqrt{2})^2]}{(\sqrt{7})^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{5(7 + 2)}{7 - 2}$   
 $= \frac{5 \times 9}{5} = 9 \in \mathbb{N}.$

**32 a.**  $2x - y = 2 \times 3 - (-1) = 6 + 1 = 7.$

**b.**  $x^2 - y^2 = 3^2 - (-1)^2 = 9 - 1 = 8.$

**c.**  $x^3 - 1/y = 3^3 - 1/-1 = 27 + 1 = 28.$

**33 a.**  $2x(x - 3) = 2x^2 - 6x.$

**b.**  $7(5 - 2x) = 35 - 14x = -14x + 35.$

**c.**  $x(7 - x) + 2x^2 = 7x - x^2 + 2x^2 = x^2 + 7x.$

**34 a.**  $4x - 8 = 4 \times x - 4 \times 2 = 4(x - 2).$

**b.**  $x^2 + 3x = x \times x + x \times 3 = x(x + 3)$

**c.**  $5x^2 + 25x - 10 = 5 \times x^2 + 5 \times 5x - 5 \times 2$   
 $= 5(x^2 + 5x - 2).$

**35 a.**  $4a - 14b = 4 \times \frac{5}{2} - 14 \times \frac{4}{7} = 2 \times 5 - 2 \times 4$   
 $= 10 - 8 = 2.$

**b.**  $\frac{1}{a}(7b - 5c) = \frac{2}{5} \times [7 \times \frac{4}{7} - 5 \times (-\frac{1}{5})]$   
 $= \frac{2}{5} \times (4 + 1) = \frac{2}{5} \times 5 = 2.$

**c.**  $\frac{a+c}{7b+5c} = \frac{\frac{5}{2} + (-\frac{1}{5})}{7 \times \frac{4}{7} + 5 \times (-\frac{1}{5})} = \frac{\frac{25-2}{10}}{4-1} = \frac{23}{10} \div \frac{10}{3}$   
 $= \frac{23}{10} \times \frac{3}{10} = \frac{23}{30}$

**36 a.**  $(a + b)^2 + (a - b)^2 = (a^2 + 2ab + b^2) + (a^2 - 2ab + b^2)$   
 $= 2(a^2 + b^2) = 2 \times 1 = 2.$

**b.**  $(a^2 + b^2)^2 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4$ , puis  
 $(a^2 + b^2)^3 = a^6 + b^6 + 3a^2b^2(a^2 + b^2).$

Comme  $a^2 + b^2 = 1$ , on a :

$1 = (a^2 + b^2)^3 = a^6 + b^6 + 3a^2b^2.$

**37 a.**  $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 = (\sqrt{x})^2 + 2\sqrt{x} \times \sqrt{y} + (\sqrt{y})^2$   
 $= x + 2\sqrt{xy} + y = 10 + 2\sqrt{4} = 10 + 4 = 14.$

**b.**  $5x(1 + y) + y(5 - 2x) = 5x + 5xy + 5y - 10xy$   
 $= 5(x + y) - 5xy = 5 \times 10 - 5 \times 4 = 50 - 20 = 30.$

**38 a.**  $x$  désigne un nombre réel tel que  $x \neq -2$ .

$$x + 1 - \frac{1}{x+2} = \frac{(x+1)(x+2) - 1}{x+2} = \frac{x^2 + 3x + 2 - 1}{x+2}$$

$$= \frac{x^2 + 3x + 1}{x+2}.$$

**b.**  $x$  désigne un nombre réel tel que  $x > 2$ .

Comme  $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2} \neq 0$ , on a :

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2} = \frac{(\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2})(\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2})}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}}$$

$$= \frac{(\sqrt{x+2})^2 - (\sqrt{x-2})^2}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}} = \frac{(x+2) - (x-2)}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}}.$$

**39 a.**  $(5x + 1)(x - 2) - 2x(x - 3)$   
 $= 5x^2 - 10x + x - 2 - 2x^2 + 6x = 3x^2 - 3x - 2.$

**b.**  $(5x - 1)^2 + (x - 1)(2 - x)$   
 $= (5x^2 - 2 \times 5x + 1^2) + 2x - x^2 - 2 + x = 4x^2 - 7x - 1.$

**c.**  $3x(x + 4) - (x - 1)^2 = 3x^2 + 12x - (x^2 - 2x + 1)$   
 $= 3x^2 + 12x - x^2 + 2x - 1 = 2x^2 + 14x - 1.$

**d.**  $(2x + 7)^2 + x^2(x - 3) = 4x^2 + 28x + 49 + x^3 - 3x^2$   
 $= x^3 + x^2 + 28x + 49.$

**40 a.**  $(3x - 1)(4x + 1) + (x - 5)(4x + 1)$   
 $= (4x + 1)[(3x - 1) + (x - 5)]$   
 $= (4x + 1)(4x - 6) = 2(4x + 1)(2x - 3).$

**b.**  $(4x - 3)^2 - x^2 = [(4x - 3) - x][(4x - 3) + x]$   
 $= (3x - 3)(5x - 3) = 3(x - 1)(5x - 3).$

**c.**  $(5 - 2x)^2 + 3x(5 - 2x)$   
 $= (5 - 2x) \times (5 - 2x) + 3x \times (5 - 2x)$   
 $= (5 - 2x) [(5 - 2x) + 3x] = (5 - 2x)(x + 5).$

**d.**  $x(3x + 4) - (3x + 4)^2 = x(3x + 4) - (3x + 4)(3x + 4)$   
 $= (3x + 4)[x - (3x + 4)] = (3x + 4)[x - 3x - 4]$   
 $= (3x + 4)(-2x - 4) = -2(3x + 4)(x + 2).$

**e.**  $(5 - 7x)^2 - (x - 1)^2$   
 $= [(5 - 7x) - (x - 1)][(5 - 7x) + (x - 1)]$   
 $= [5 - 7x - x + 1][5 - 7x + x - 1]$   
 $= [-8x + 6][-6x + 4] = 4(-4x + 3)(-3x + 2).$

**f.**  $9x^2 + 6x + 1 = (3x)^2 + 2 \times 3x \times 1 + 1^2 = (3x + 1)^2.$

**41 a.**  $A(x) = 3x^2 + 6x - [5x - 6x^2 + 10 - 12x]$   
 $= 3x^2 + 6x + 7x + 6x^2 - 10 = 9x^2 + 13x - 10.$

**b.**  $A(x) = (x + 2)[3x - (5 - 6x)] = (x + 2)[3x - 5 + 6x]$   
 $= (x + 2)(9x - 5).$

c.  $A(-2) = (-2 + 2)(9 \times (-2) - 5) = 0$ .

$$A\left(\frac{5}{9}\right) = \left(\frac{5}{9} + 2\right)\left(9 \times \frac{5}{9} - 5\right) = 0.$$

$$A(0) = 9 \times 0^2 + 13 \times 0 - 10 = -10.$$

**42** 1. a.  $(1 + 1)^2 = 2^2 = 4$  et  $4 - 1^2 = 4 - 1 = 3$ .

Le résultat est 3.

b.  $(-5 + 1)^2 = (-4)^2 = 16$  et  $16 - (-5)^2 = 16 - 25 = -9$ .

Le résultat est  $-9$ .

c.  $\left(\frac{1}{2} + 1\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$  et  $\frac{9}{4} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} - \frac{1}{4} = \frac{8}{4} = 2$ .

Le résultat est 2.

d.  $(\sqrt{2} + 1)^2 = (\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2} + 1^2 = 3 + 2\sqrt{2}$  et  
 $(3 + 2\sqrt{2}) - (\sqrt{2})^2 = 1 + 2\sqrt{2}$ .

Le résultat est  $1 + 2\sqrt{2}$ .

2. Il a raison. En effet :  $x$  désigne le nombre réel choisi.

On a successivement :

$$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1 ;$$

$$\text{puis } (x^2 + 2x + 1) - x^2 = 2x + 1.$$

**43** 1.  $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n+1}{n(n+1)} = \frac{1}{n}$

$$\text{et } \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{6n} = \frac{3+2+1}{6n} = \frac{6}{6n} = \frac{1}{n}.$$

2. a.  $1 = \frac{1}{1} = \frac{1}{1+1} + \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

$$\text{et } 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}.$$

b.  $\frac{1}{10} = \frac{1}{11} + \frac{1}{10 \times 11} = \frac{1}{11} + \frac{1}{110}$

$$\text{et } \frac{1}{10} = \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{60}.$$

c.  $\frac{1}{10000} = \frac{1}{10001} + \frac{1}{100010000}$   
 et  $\frac{1}{10000} = \frac{1}{20000} + \frac{1}{30000} + \frac{1}{60000}$

d.  $\frac{1}{7} = \frac{1}{8} + \frac{1}{7 \times 8} = \frac{1}{8} + \frac{1}{56}$

$$\text{et } \frac{1}{7} = \frac{1}{14} + \frac{1}{21} + \frac{1}{42}.$$

**44** a. On remarque que  $x + 1$  est la plus grande longueur car  $x > 0$ . On calcule :

$$\begin{cases} (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 \\ \left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{x}{2} + 1}\right)^2 = \frac{x}{2} + \frac{x}{2} + 1 = x + 1 \end{cases}$$

or  $x^2 + 2x + 1 \neq x + 1$  car  $x > 0$

$$\text{donc } (x+1)^2 \neq \left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{x}{2} + 1}\right)^2.$$

Donc le triangle n'est pas rectangle, l'égalité de Pythagore n'étant pas vérifiée.

b. Il est clair que  $x^2 + y^2 \geq x^2 - y^2$ .

De plus,  $x^2 + y^2 - 2xy = (x - y)^2 \geq 0$  donc  $x^2 + y^2 \geq 2xy$ .

• Ainsi,  $x^2 + y^2$  est la plus grande longueur. On calcule :

$$\begin{cases} (x^2 + y^2)^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 \\ (x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2 = x^4 - 2x^2y^2 + y^4 + 4x^2y^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 \end{cases}$$

L'égalité de Pythagore étant vérifiée, le triangle est rectangle et l'hypoténuse mesure  $x^2 + y^2$ .

**45** a. Comme  $(MQ)$  et  $(NP)$  sont parallèles, la hauteur issue de  $O$  du triangle  $NOP$  mesure  $10 - x$ .

• L'aire du triangle  $MOQ$  est égale à  $x \times \frac{10}{2} = 5x$ .

• L'aire du triangle  $NOP$  est égale à :

$$(10 - x) \times \frac{10}{2} = 5(10 - x).$$

• L'aire colorée est donc égale à  $5x + 5(10 - x) = 50$ .

b. L'aire du carré  $MNPQ$  est égale à  $10^2 = 100$ .

Donc l'aire colorée est égale à la moitié de celle du carré, quel que soit le point  $O$ .

**46** a. Faux. Par exemple, si le nombre choisi est 2. Alors :  $x + 2 = 4 > 0$  et  $x - 3 = -1 < 0$  donc le résultat est  $-4$  et  $-4 \notin \mathbb{N}$ .

b. Faux. Par exemple, si le nombre choisi est  $\sqrt{2} + \frac{1}{2}$ .

$$\text{Alors } \begin{cases} x + 2 = \sqrt{2} + \frac{5}{2} \\ x - 3 = \sqrt{2} - \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\text{et } (x + 2)(x - 3) = \left(\sqrt{2} + \frac{5}{2}\right)\left(\sqrt{2} - \frac{5}{2}\right) = (\sqrt{2})^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 2 - \frac{25}{4} = \frac{8}{4} - \frac{25}{4} = -\frac{17}{4} \in \mathbb{D}.$$

c. Vrai.  $x$  désigne le nombre réel choisi. Alors le résultat est  $(x - 3)(x + 2)$ . Donc le résultat est nul si et seulement si  $x = 3$  ou  $x = -2$ .

**47** a.  $\frac{7}{11} = \frac{21}{33}$  donc  $\frac{7}{11} > \frac{16}{33}$ .

b.  $\frac{5}{12} = \frac{15}{36}$  et  $\frac{7}{18} = \frac{14}{36}$  donc  $\frac{5}{12} > \frac{7}{18}$ .

c.  $\frac{13}{6} > \frac{13}{11}$  (car  $6 < 11$ ).

d.  $4^2 = (2^2)^2 = 2^4$  donc  $4^2 < 25$ .

e.  $(\sqrt{3})^8 = ((\sqrt{3})^2)^4 = 3^4$  donc  $(\sqrt{3})^8 < 3^5$ .

f.  $3,9 < 5$  donc  $\sqrt{3,9} < \sqrt{5}$ .

**48** a.  $\frac{7}{13} = \frac{14}{26}$  ;  $1 = \frac{26}{26}$  ;  $\frac{14}{13} = \frac{28}{26}$ .

Or  $1 < 14 < 25 < 26 < 28$ ,

$$\text{donc } \frac{1}{26} < \frac{7}{13} < \frac{25}{26} < 1 < \frac{14}{13}.$$

b.  $\frac{2}{5} = \frac{8}{20}; \frac{3}{4} = \frac{15}{20}; \frac{9}{10} = \frac{18}{20}; \frac{11}{5} = \frac{44}{20}; \frac{1}{2} = \frac{10}{20}$ .

Comme  $8 < 10 < 15 < 18 < 44$ ,

$$\frac{2}{5} < \frac{1}{2} < \frac{3}{4} < \frac{9}{10} < \frac{11}{5}$$

c.  $-1 = -\frac{9}{9}; \frac{7}{3} = \frac{21}{9}$ .

On a :  $-\frac{11}{9} < -1 < \frac{11}{-18} < \frac{11}{9} < \frac{7}{3}$ .

d.  $\sqrt{2}; \sqrt{7}; \sqrt{\frac{18}{6}} = \sqrt{3}; \frac{11}{5} = \sqrt{\frac{121}{25}}; \sqrt{16}$ .

Comme  $4 < \frac{121}{25} < 5, \sqrt{2} < \sqrt{\frac{18}{6}} < \frac{11}{5} < \sqrt{7} < \sqrt{16}$ .

49  $\frac{\sqrt{25}}{15} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$ .

•  $\frac{\sqrt{20}}{4\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{4 \times 5}}{4\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} = \frac{1}{2}$ .

•  $\frac{5 \times 10^3 \times 10^7}{(10^4)^2 \times 10} = \frac{5 \times 10^{10}}{10^{8+1}} = 5 \times 10 = 50$ .

•  $(\sqrt{5} - 1)^2 + 2\sqrt{5} = (\sqrt{5})^2 - 2\sqrt{5} + 1^2 + 2\sqrt{5} = 5 + 1 = 6$ .

Ainsi, on a :

$$\frac{\sqrt{25}}{15} < \frac{\sqrt{20}}{4\sqrt{5}} < (\sqrt{5} - 1)^2 + 2\sqrt{5} < \frac{5 \times 10^3 \times 10^7}{(10^4)^2 \times 10}$$

50 a.  $(7\sqrt{2})^2 = 49 \times 2 = 98$  et  $(2\sqrt{7})^2 = 4 \times 7 = 28$ .

Comme  $7\sqrt{2}$  et  $2\sqrt{7}$  sont des nombres réels positifs et comme  $(2\sqrt{7})^2 < (7\sqrt{2})^2, 2\sqrt{7} < 7\sqrt{2}$ .

b.  $(-10)^2 = 100$  et  $(-6\sqrt{10})^2 = 360$ .

Comme  $-10$  et  $6\sqrt{10}$  sont des nombres réels négatifs et comme  $(-10)^2 < (-6\sqrt{10})^2, -10 > -6\sqrt{10}$ .

c.  $(2 + \sqrt{3})^2 = 4 + 4\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = 7 + 4\sqrt{3}$   
 et  $(\sqrt{7} + 4\sqrt{3})^2 = 7 + 4\sqrt{3}$ .

Comme  $(2 + \sqrt{3})^2 = (\sqrt{7} + 4\sqrt{3})^2$ , et comme  $2 + \sqrt{3}$  et  $7 + 4\sqrt{3}$  sont des nombres réels positifs,  
 $2 + \sqrt{3} = \sqrt{7} + 4\sqrt{3}$ .

51 a. Comme  $0 < 5 - 2\sqrt{2} < 5 + 2\sqrt{2}$ ,  
 $\sqrt{5 - 2\sqrt{2}} < \sqrt{5 + 2\sqrt{2}}$ , donc  $X$  est négatif.

b.  $X^2 = (5 - 2\sqrt{2}) - 2\sqrt{5} - 2\sqrt{2} \sqrt{5} + 2\sqrt{2} + (5 + 2\sqrt{2})$   
 $= 10 - 2\sqrt{5}^2 - (2\sqrt{2})^2 = 10 - 2\sqrt{25} - 4 \times 2$   
 $= 10 - 2\sqrt{25} - 8 = 10 - 2\sqrt{17}$ .

• On a montré que  $X^2 = 10 - 2\sqrt{17}$  donc  $X = \sqrt{10 - 2\sqrt{17}}$  ou  $X = -\sqrt{10 - 2\sqrt{17}}$ .

Comme  $X < 0, X = -\sqrt{10 - 2\sqrt{17}}$ .

52 a.  $A = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{\frac{3}{2}} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$ .

Comme  $A > 1$ , on a :  $A < A^2 < A^3$ .

b.  $B^2 = \frac{9 - 6\sqrt{3} + 3}{3} = 4 - 2\sqrt{3} = 2(2 - \sqrt{3})$

et  $B^3 = B^2 \times \frac{3 - \sqrt{3}}{3} = \frac{2}{3} (2 - \sqrt{3})(3 - \sqrt{3})$   
 $= \frac{2}{3} (6 - 5\sqrt{3} + 3) = \frac{2}{3} (9 - 5\sqrt{3}) = 6 - \frac{10}{3}\sqrt{3}$ .

On compare :

$$B - B^2 = \frac{3 - \sqrt{3}}{3} - \frac{6(2 - \sqrt{3})}{3} = \frac{5\sqrt{3} - 9}{3} = \frac{5\sqrt{3}}{3} - 3$$

Donc  $B > B^2$ .

$$B^2 - B^3 = 4 - 2\sqrt{3} - 6 + \frac{10}{3}\sqrt{3} = \frac{4}{3}\sqrt{3} - 2 > 0 \text{ donc } B^2 > B^3.$$

On conclut :  $B > B^2 > B^3$ .

c.  $C^2 = 6 - 2\sqrt{5}$ ;

$$C^3 = (6 - 2\sqrt{5})(\sqrt{5} - 1) = 8\sqrt{5} - 6 - 10 = 8\sqrt{5} - 16.$$

On compare :

$$C^2 - C = 6 - 2\sqrt{5} - \sqrt{5} + 1 = 7 - 3\sqrt{5} > 0 \text{ donc } C^2 > C.$$

$$C^3 - C^2 = 8\sqrt{5} - 16 - 6 + 2\sqrt{5} = 10\sqrt{5} - 22 > 0 \text{ donc } C^3 > C^2.$$

On conclut :  $C < C^2 < C^3$ .

53 a. La calculatrice affiche 1,000 000 008 donc  $E > F$ .

b.  $E - F = 1 - \frac{1}{123\,456\,789} + \frac{1}{123\,456\,788}$   
 $= 1 + \frac{123\,456\,789 - 123\,456\,788}{123\,456\,789 \times 123\,456\,788}$   
 $= 1 + \frac{1}{123\,456\,789 \times 123\,456\,788} > 0 \text{ donc } E > F$ .

54 a.  $n$  désigne un nombre entier naturel.

$$\frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n+2} = \frac{n(n+2) - (n+1)^2}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{n^2 + 2n - (n^2 + 2n + 1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{-1}{(n+1)(n+2)}$$

donc  $\frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2}$ .

b. On applique ce qui précède à  $n = 49\,999$ .

Donc  $\frac{49\,999}{50\,000} < \frac{50\,000}{50\,001}$ .

55 a.  $\frac{a}{b} - \frac{a+c}{b+c} = \frac{a(b+c) - b(a+c)}{b(b+c)}$   
 $= \frac{ab - ac - ba - bc}{b(b+c)} = \frac{-(ac+bc)}{b(b+c)} < 0$

car  $a > 0, b > 0$  et  $c > 0$ . Donc  $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$ .

b. On choisit  $a = 5,5, b = 3,5$  et  $c = 2 + \sqrt{2}$  ( $a > 0, b > 0$  et  $c > 0$ ) donc  $\frac{5,5}{3,5} < \frac{\sqrt{2} + 7,5}{\sqrt{2} + 5,5}$ .

56 a.  $\frac{5x}{7} - \frac{3x}{4} = \frac{4 \times 5x - 7 \times 3x}{28} = -\frac{x}{28}$ .

Comme  $x < 0, \frac{5x}{7} - \frac{3x}{4} > 0$  donc  $\frac{5x}{7} > \frac{3x}{4}$ .

b.  $\frac{5}{7x} - \frac{3}{4x} = \frac{5 \times 4 - 3 \times 7}{28x} = -\frac{1}{28x}$ .

Comme  $x < 0$ ,  $\frac{5}{7x} - \frac{3}{4x} > 0$  donc  $\frac{5}{7x} > \frac{3}{4x}$ .

57  $(\sqrt{a+b})^2 = a+b$

$\cdot (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2 = a + b + 2\sqrt{ab}$ .

Donc  $(\sqrt{a+b})^2 \leq (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$ .

Comme les nombres réels  $\sqrt{a+b}$  et  $\sqrt{a} + \sqrt{b}$  sont positifs, on a :  $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ .

58 Périmètre<sub>rectangle</sub> =  $2(\sqrt{20} + 7\sqrt{5}) = 2(2\sqrt{5} + 7\sqrt{5})$   
 $= 2 \times 9\sqrt{5} = 18\sqrt{5}$ .

Aire<sub>rectangle</sub> =  $\sqrt{20} \times 7\sqrt{5} = 2\sqrt{5} \times 7\sqrt{5} = 2 \times 7(\sqrt{5})^2$   
 $= 14 \times 5 = 70$ .

Périmètre<sub>carré</sub> =  $4 \times 6\sqrt{5} = 24\sqrt{5}$ .

Aire<sub>carré</sub> =  $(6\sqrt{5})^2 = 6^2 \times (\sqrt{5})^2 = 36 \times 5 = 180$ .

Périmètre<sub>cercle</sub> =  $\pi \times \sqrt{180} = \sqrt{36} \times \sqrt{5} \times \pi = 6\pi\sqrt{5}$ .

Aire<sub>disque</sub> =  $\pi \times \left(\frac{\sqrt{180}}{2}\right)^2 = \pi \times \frac{180}{4} = 45\pi$ .

59 a. Majorant, maximum : 10.

Minorant, minimum : 0.

b. Majorant : 28, pas de maximum.

Minorant, minimum : -3.

c. Majorant : 4. Minorant : 1.

Pas de maximum, pas de minimum.

d. Majorant, maximum : 0.

Pas de minorant, pas de minimum.

e. Pas de majorant, pas de maximum.

Minorant, minimum : -5.

f. Pas de majorant, pas de maximum.

Minorant : -2, pas de minimum.

60 a.  $[-2 ; 3]$  ; b.  $[2 ; +\infty[$  ; c.  $[-5 ; 3[$  ; d.  $]-\infty ; 0[$ .

61  $x \in \mathcal{A} \Leftrightarrow (x \in \mathbb{R} \text{ et } 1 \leq 5x \leq 10) \Leftrightarrow (x \in \mathbb{R} \text{ et } \frac{1}{5} \leq x \leq 2)$ . Donc  $\frac{1}{5}$  est le minimum de  $\mathcal{A}$  et 2 est le maximum de  $\mathcal{A}$ .

$\cdot x \in \mathcal{B} \Leftrightarrow (x \geq 0 \text{ et } -5 \leq 3x + 2 < 17)$

$\Leftrightarrow (x \geq 0 \text{ et } -7 \leq 3x < 15)$

$\Leftrightarrow (x \geq 0 \text{ et } -\frac{7}{3} \leq x < \frac{15}{3})$

$\Leftrightarrow 0 \leq x < \frac{15}{3} \Leftrightarrow 0 \leq x < 5$ .

Donc 0 est le minimum de  $\mathcal{B}$ . Mais  $\mathcal{B}$  n'a pas de maximum.

62  $x \in \mathcal{A} \Leftrightarrow (x \in \mathbb{R} \text{ et } x^2 \leq 4) \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$ .

Donc -2 est le minimum de  $\mathcal{A}$  et 2 est le maximum de  $\mathcal{A}$ .

$\cdot x \in \mathcal{B} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \text{ et } x^2 > 100 \Leftrightarrow x < -10 \text{ ou } x > 10$ .

$\mathcal{B}$  n'a ni minimum, ni maximum.

63  $n \in \mathcal{A} \Leftrightarrow (n \in \mathbb{N} \text{ et } 8 \leq 2n \leq 19,5) \Leftrightarrow (n \in \mathbb{N} \text{ et } 4 \leq n \leq 9,75)$ . Donc 4 est le minimum de  $\mathcal{A}$  et 9 le maximum de  $\mathcal{A}$ .

$\cdot n \in \mathcal{B} \Leftrightarrow (n \in \mathbb{Z} \text{ et } -12 < n < 7)$ . Donc -11 est le minimum de  $\mathcal{B}$  et 6 est le maximum de  $\mathcal{B}$ .

64 a.  $|1 - \pi| = \pi - 1$  car  $1 - \pi < 0$ .

b.  $|-\sqrt{5} - 0,1| = \sqrt{5} + 0,1$  car  $-(\sqrt{5} + 0,1) < 0$ .

c.  $|-3,15 + 4,1| = 4,1 - 3,15$  car  $4,1 - 3,15 > 0$ .

65 a. Si  $|x| \leq 5$ , alors  $-5 \leq x \leq 5$ .

b. Si  $|x| > 3$ , alors  $x < -3$  ou  $x > 3$ .

66 a.  $|x| = 10 \Leftrightarrow x = -10$  ou  $x = 10$ .

b.  $|x - 3| = 5 \Leftrightarrow x - 3 = -5$  ou  $x - 3 = 5 \Leftrightarrow x = -2$  ou  $x = 8$ .

c.  $|x + 1| = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ .

67 1.  $|x - 5| = \begin{cases} x - 5 & \text{si } x \geq 5 \\ 5 - x & \text{si } x < 5 \end{cases}$ .

2. a.  $|x + 7| = \begin{cases} x + 7 & \text{si } x \geq -7 \\ -x - 7 & \text{si } x < -7 \end{cases}$ .

b.  $|4x - 1| = \begin{cases} 4x - 1 & \text{si } x \geq 1/4 \\ 1 - 4x & \text{si } x < 1/4 \end{cases}$

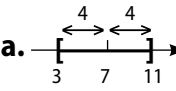
c.  $|x + 1| = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \geq -1 \\ -x - 1 & \text{si } x < -1 \end{cases}$

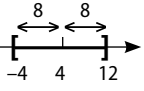
et  $|x - 2| = \begin{cases} x - 2 & \text{si } x \geq 2 \\ 2 - x & \text{si } x < 2 \end{cases}$

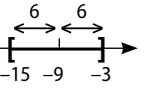
donc  $|x + 1||x - 2| = \begin{cases} (x + 1)(x - 2) & \text{si } x \geq 2 \\ (x + 1)(2 - x) & \text{si } -1 \leq x < 2 \\ (-x - 1)(2 - x) & \text{si } x < -1 \end{cases}$

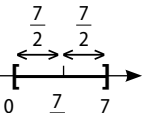
68

Intervalle	Encadrement	Valeur absolue	Schéma
$x \in [-1 ; 3]$	$-1 \leq x \leq 3$	$ x - 1  \leq 2$	
$x \in [1 ; 5]$	$1 \leq x \leq 5$	$ x - 3  \leq 2$	
$x \in [-1 ; 7]$	$-1 \leq x \leq 7$	$ x - 3  \leq 4$	
$x \in [-2 ; 2]$	$-2 \leq x \leq 2$	$ x  \leq 2$	

**69 a.**   $\left(\frac{3+11}{2} = 7\right)$   
 $|x-7| \leq 4.$

**b.**   $\left(\frac{(-4)+12}{2} = \frac{8}{2} = 4\right)$   
 $|x-4| < 8.$

**c.**   $\frac{(-15)+(-3)}{2} = \frac{18}{2} = -9$   
 $|x-(-9)| \geq 6 \Leftrightarrow |x+9| \geq 6.$

**d.**   $|x-\frac{7}{2}| > \frac{7}{2}.$

**70 1.** Lorsque  $x$  désigne un nombre réel tel que  $|x-4| \geq 5$ , alors  $x \leq -1$  ou  $x \geq 9$ .

**2. a.** Si  $|x+8| < 3$ , alors  $-3 < x+8 < 3$ ,  
 donc  $-11 < x < -5$ .

**b.** Si  $|2x-3| \leq 1$ , alors  $-1 \leq 2x-3 \leq 1$ , donc  $2 \leq 2x \leq 4$ ,  
 donc  $1 \leq x \leq 2$ .

**c.** Si  $|5-x| > 1$ , alors  $5-x < -1$  ou  $5-x > 1$ , donc  $x < 4$   
 ou  $x > 6$ .

**d.** Si  $|1-3x| \geq 4$ , alors  $1-3x \leq -4$  ou  $1-3x \geq 4$  donc  
 $3x \leq -3$  ou  $3x \geq 5$  donc  $x \leq -1$  ou  $x \geq \frac{5}{3}$ .

**71 a.**  $x \in \mathbb{N}$  et  $|x| < 10 \Leftrightarrow x \in \mathbb{N}$  et  $-10 < x < 10$   
 $\Leftrightarrow x \in \{0; 1; \dots; 8; 9\}.$

**b.**  $x \in \mathbb{Z}$  et  $|x| \leq 6 \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$  et  $-6 \leq x \leq 6$   
 $\Leftrightarrow x \in \{-6; -5; \dots; 5; 6\}.$

**c.**  $x \in \mathbb{N}$  et  $|7-x| < 4 \Leftrightarrow x \in \mathbb{N}$  et  $-4 < 7-x < 4$   
 $\Leftrightarrow x \in \mathbb{N}$  et  $-11 < -x < -3$   
 $\Leftrightarrow x \in \mathbb{N}$  et  $3 < x < 11$   
 $\Leftrightarrow x \in \{4; 5; \dots; 9; 10\}.$

**72 1. a.**  $1 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow 2 \leq 2x \leq 4 \Leftrightarrow 1 \leq 2x-1 \leq 3.$

**b.**  $0 < 1 \leq x \leq 2$  donc  $1 \leq x^2 \leq 4$  donc  $-4 \leq -x^2 \leq -1$   
 donc  $-3 \leq 1-x^2 \leq 0.$

**2. a.**  $-3 \leq y \leq -2 \Leftrightarrow -2 \times (-3) \leq -3y \leq -3 \times (-3)$   
 $\Leftrightarrow 6 \leq -3y \leq 9 \Leftrightarrow 8 \leq 2-3y \leq 11.$

**b.**  $-3 \leq y-2 < 0$  donc  $4 \leq y^2 \leq 9$  donc  $0 \leq y^2-4 \leq 5.$

**3. a.**  $\sqrt{2} \leq z \leq \sqrt{5}$  donc  $2 \leq z^2 \leq 5$  donc  $1 \leq z^2-1 \leq 4.$

**b.**  $0 < 2 \leq z^2 \leq 5$  donc  $\frac{1}{5} \leq \frac{1}{z^2} \leq \frac{1}{2}$  donc  $\frac{2}{5} \leq \frac{2}{z^2} \leq 1.$

**73 a.** Arrondi à l'ordre 3 : 79,773.

**b.** Arrondi à l'ordre 5 : 79,77254.

**74 a.**  $10^6$ . **b.**  $2 \times 10^{-5}$ . **c.**  $9 \times 10^6$ .

**75**

App. décimale d'ordre	0	1	2	3
Par défaut	1	1,2	1,28	1,285
Par excès	2	1,3	1,29	1,286
Arrondi	1	1,3	1,29	1,286

**76 a.**  $\begin{cases} 2 < x < 3 \\ 3 < y < 4 \end{cases}$  donc  $\begin{cases} 4 < x^2 < 9 \\ -4 < -y < -3. \end{cases}$

Ainsi :  $\begin{cases} 5 < x+y < 7 \\ -2 < x-y < 0 \end{cases}$  et  $\begin{cases} 12 < x^2y < 36 \\ \frac{1}{2} < \frac{x}{y} < 1. \end{cases}$

**b.**  $\begin{cases} -2 \leq x \leq -1 \\ 1 \leq y \leq 2 \end{cases}$  donc  $\begin{cases} 1 \leq x^2 \leq 4 \\ -2 \leq -y \leq -1. \end{cases}$

Ainsi :  $\begin{cases} -1 \leq x+y \leq 1 \\ -4 \leq x-y \leq -2 \end{cases}$  et  $\begin{cases} 1 \leq x^2y \leq 8 \\ -2 \leq \frac{x}{y} \leq -\frac{1}{2}. \end{cases}$

**77 a.**  $-1 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq 2x \leq 4 \Leftrightarrow 1 \leq 2x+3 \leq 7$   
 donc  $1 \leq (2x+3)^2 \leq 49.$

**b.**  $-1 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow -6 \leq -3x \leq 3 \Leftrightarrow 1 \leq 7-3x \leq 10$   
 donc  $\frac{1}{10} \leq \frac{1}{7-3x} \leq 1.$

**78**  $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$  donc  $0 < x^2 < \frac{1}{4}$  et  $1 < x^2+1 < \frac{5}{4}.$

Ainsi,  $1 < \sqrt{x^2+1} < \frac{\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{5}}{2} < -\sqrt{x^2+1} < -1.$

Or  $\frac{1}{2} < x+1 < \frac{3}{2}$  donc  $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} < x+1 - \sqrt{x^2+1} < \frac{1}{2}.$

**79 a.**  $x \geq 2 \Leftrightarrow x+1 \geq 3$  donc  $\frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{3} \leq 3.$

**b.**  $x \geq 2 \Leftrightarrow x+7 \geq 9$  donc  $\sqrt{x+7} \geq \sqrt{9}$  donc  $\frac{1}{\sqrt{x+7}} \leq \frac{1}{3}$   
 donc  $\frac{3}{\sqrt{x+7}} \leq 1.$

**80 a.**  $\begin{cases} 1,414 < \sqrt{2} < 1,415 \\ -1,733 < -\sqrt{3} < -1,732 \end{cases}$

donc  $2,509 < 3\sqrt{2} - \sqrt{3} < 2,513.$

**b.**  $3,146 < \sqrt{2} + \sqrt{3} < 3,148$  donc  $0,317 < \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} < 0,318.$

**81 a.**  $v = 20\sqrt{273+25} = 20 \times \sqrt{298} \approx 345$  m/s.

**b.**  $20\sqrt{273+T} \approx 320$  donc  $\sqrt{273+T} \approx 16$   
 donc  $273+T \approx 256$  donc  $T \approx -17^\circ\text{C}.$

## Faire le point

**82 a.**  $\frac{21 \times (10^{-3})^4}{3 \times 10^7} = 7 \times 10^{-12} \times 10^{-7} = 7 \times 10^{-19} \in \mathbb{D}$ .

**b.**  $\frac{7(\sqrt{3})^2}{6} \times \frac{3}{4} = \frac{7 \times 3 \times 3}{3 \times 2 \times 4} = \frac{21}{8} \in \mathbb{D}$ .

**c.**  $\sqrt{75} - 5\sqrt{3} - 10 = \sqrt{25 \times 3} - 5\sqrt{3} - 10$   
 $= \sqrt{25}\sqrt{3} - 5\sqrt{3} - 10 = -10 \in \mathbb{Z}$ .

**d.**  $(\pi + \frac{1}{\pi}) \div \pi = \frac{\pi^2 + 1}{\pi} \times \frac{1}{\pi} = \frac{\pi^2 + 1}{\pi^2} = 1 + \frac{1}{\pi^2} \in \mathbb{R}$ .

**e.**  $-\frac{\sqrt{100}}{5} + \frac{\sqrt{7} \times \sqrt{28}}{2} = -\frac{10}{5} + \frac{\sqrt{7} \times 2\sqrt{7}}{2} = -2 + (\sqrt{7})^2$   
 $= -2 + 7 = 5 \in \mathbb{N}$ .

**f.**  $\sqrt{\frac{64}{49}} \div \frac{4}{7} = \frac{8}{7} \times \frac{7}{4} = 2 \in \mathbb{N}$ .

**83** • Calcul de A – Erreurs de priorité :

$$\frac{4}{3} + \frac{5}{6} \times \left(1 - \frac{1}{10}\right) \neq \frac{13}{6} \left(1 - \frac{1}{10}\right)$$

$$\text{et } 1 - 4 \times \frac{7}{11} \neq -3 \times \frac{7}{11}.$$

• Calcul de B – Erreur :  $\sqrt{10} - \sqrt{3} \neq \sqrt{7}$ .

• Corrections :

$$A = \frac{\frac{4}{3} + \frac{5}{6} \times \left(1 - \frac{1}{10}\right)}{1 - 4 \times \frac{7}{11}} = \frac{\frac{4}{3} + \frac{5}{6} \times \frac{9}{10}}{1 - \frac{28}{11}} = \frac{\frac{4}{3} + \frac{3}{4}}{-\frac{17}{11}}$$

$$A = \frac{\frac{16+9}{12}}{-\frac{17}{11}} = \frac{25}{12} \times \frac{11}{-17} = -\frac{275}{204}.$$

$$B = \frac{\sqrt{40} - 7\sqrt{3} + 5\sqrt{3}}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{2\sqrt{10} - 2\sqrt{3}}{5-3} = \frac{2(\sqrt{10} - \sqrt{3})}{2}$$

$$B = \sqrt{10} - \sqrt{3}.$$

**84**  $A(x) = 4(2x+1)(2x+1) + (2x+1) \times 1$   
 $= 2x+1)[4(2x+1) + 1] = (2x+1)(8x+5).$

$$B(x) = (3-4x) \times (3-4x) + (3-4x) \times 1$$

$$= (3-4x)[(3-4x) + 1]$$

$$= (3-4x)(-4x+4) = 4(3-4x)(-x+1).$$

$$C(x) = (5x-2)(x+1) + (5x-2) \times (-1)$$

$$= (5x-2)[(x+1) - 1] = (5x-2) \times x.$$

$$D(x) = (1+x) \times 1 - (1+x) \times (1+x)$$

$$= (1+x)[1 - (1+x)] = (1+x)(1-1-x)$$

$$= -x \times (1+x).$$

**85 a.**  $|6x+3| < 18 \Leftrightarrow |6(x+3/6)| < 18$

$$\Leftrightarrow |x + \frac{1}{2}| < \frac{18}{6} \text{ (car } 6 > 0) \Leftrightarrow |x + \frac{1}{2}| < 3.$$

**b.**  $|x + \frac{1}{2}| < 3 \Leftrightarrow -3 < x + \frac{1}{2} < 3 \Leftrightarrow -\frac{7}{2} < x < \frac{5}{2}$ .

Les solutions de  $I$  sont les nombres  $x$  tels que :

$$x \in ]-\frac{7}{2}; \frac{5}{2}[.$$

**86 1.** Si  $a \leq b$  et  $c \leq d$  alors  $a + c \leq b + d$ .

• Si  $a \leq b$  et  $c \geq 0$  alors  $ac \leq bc$ .

• Si  $a \leq b$  et  $c \leq 0$  alors  $ac \geq bc$ .

• Si  $0 \leq a \leq b$  alors  $a^2 \leq b^2$  et  $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$ .

• Si  $a \leq b < 0$  alors  $a^2 \geq b^2$  et  $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$ .

• Si  $0 < a \leq b$  alors  $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$ .

**2. a.**  $\begin{cases} -3 < x < -2 \\ 0,1 < y < 0,2 \end{cases}$  donc  $\begin{cases} 4 < x^2 < 9 \\ 0,01 < y^2 < 0,04 \end{cases}$

donc  $4,01 < x^2 + y^2 < 9,04$ .

**b.**  $\begin{cases} 4 < x^2 < 9 \\ 0,1 < y < 0,2 \end{cases}$  donc  $0,4 < x^2 y < 1,8$ .

**c.**  $\begin{cases} 0,01 < y^2 < 0,04 \\ -\frac{1}{2} < \frac{1}{x} < -\frac{1}{3} \end{cases}$  donc  $-0,01 < \frac{y^2}{x} < -\frac{0,01}{3}$ .

**87** C'est Dahirou qui a raison :

$$(10^{15} - 1)(10^{15} + 1) = (10^{15})^2 - 1^2 = 10^{30} - 1.$$

• La calculatrice fait des erreurs d'arrondis.

**88 1.**  $\sqrt{7} \approx 2,646$  et  $\pi \approx 3,141$ .

**2.**  $2,646 \times 3,141 = 8,311\ 086$ .

**3. a.** L'arrondi de  $\pi \times \sqrt{7}$  par excès à l'ordre 3 est 8,312.

**b.** Le produit des arrondis à l'ordre 3 de deux nombres donnés n'est pas nécessairement égal à l'arrondi à l'ordre 3 des produits.

**89 1.** Vitesse  $\approx 3 \times 10^5$  km/s. Distance  $\approx 1,5 \times 10^8$  km.

**2.** Temps =  $\frac{\text{distance}}{\text{vitesse}}$  donc un ordre de grandeur du temps mis par la lumière pour aller du Soleil à la Terre est  $\frac{1,5 \times 10^8}{3 \times 10^5} = 0,5 \times 10^3 = 500$  s, soit environ 8 minutes.

## Se tester

**90** à **93** Voir Manuel de l'élève page 260.

## Exercices d'approfondissement

**94 1. a.**  $100^2 - 98^2 = (100 + 98)(100 - 98) = 198 \times 2 = 396.$

**b.**  $101^2 - 99^2 = (101 + 99) \times (101 - 99) = 200 \times 2 = 400.$

**c.**  $102^2 - 100^2 = (102 + 100) \times (102 - 100) = 202 \times 2 = 404.$

**2.**  $396 = 4 \times 99$ ;  $400 = 4 \times 100$  et  $404 = 4 \times 101$  donc 396, 400 et 404 sont divisibles par 4.

**3.**  $(n + 2)^2 - n^2 = (n + 2 + n)(n + 2 - n) = 2(2n + 2) = 2 \times 2(n + 1) = 4(n + 1).$

Comme  $n + 1$  est un nombre entier naturel,  $(n + 2)^2 - n^2$  est divisible par 4.

**95 1.**  $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

donc  $1^2 = x^2 + y^2 + 2xy \Leftrightarrow 1 = 2 + 2xy \Leftrightarrow xy = -\frac{1}{2}.$

**2. •**  $x + y = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} + \frac{1 + \sqrt{3}}{2} = \frac{2}{2} = 1.$

**•**  $x^2 + y^2 = \left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{(1 - \sqrt{3})^2 + (1 + \sqrt{3})^2}{4} = \frac{1^2 - 2\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 + 1^2 + 2\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2}{4} = \frac{8}{4} = 2$

donc  $x$  et  $y$  vérifient les deux conditions de l'énoncé.

**3. a.**  $x' = -0,36\ 603$  et  $y' = 1,36\ 603$

**b. •**  $x'^2 + y'^2 \approx 2,000\ 015\ 922.$  Son arrondi d'ordre 5 par excès est 2,00 002.

• L'arrondi de  $x^2 + y^2$  à l'ordre 5 est 2 car  $x^2 + y^2 = 2.$

• On voit que  $x^2 + y^2$  et  $x'^2 + y'^2$  n'ont pas le même arrondi d'ordre 5.

Cette différence est due aux erreurs d'arrondis.

**96 a.**  $n$  désigne un nombre entier naturel tel que  $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}.$  Il existe donc  $p \in \mathbb{N}$  et  $q \in \mathbb{N}^*$  tels que  $p$  et  $q$  soient premiers entre eux et  $\sqrt{n} = \frac{p}{q}.$

Ainsi  $n = (\sqrt{n})^2 = \frac{p^2}{q^2}.$  Comme  $n \in \mathbb{N}, \frac{p^2}{q^2} \in \mathbb{N}.$

**b.**  $a$  désigne un nombre entier naturel non égal à un carré parfait.

Supposons que  $\sqrt{a} \in \mathbb{Q}.$  Alors d'après la question **a.**,  $\sqrt{a} \in \mathbb{N}.$  Par conséquent, il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $\sqrt{a} = k,$  donc  $a = k^2.$  Contradiction.

Ainsi,  $\sqrt{a}$  est un nombre irrationnel.

**97** Pour tout  $x \in \mathbb{R}, -1 \leq \sin(x) \leq 1.$  Donc  $E$  est minoré par  $-1$  et majoré par 1.

**98 a.**  $p$  est un nombre premier supérieur ou égal à 3. Donc  $p$  est impair : il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $p = 2k + 1.$

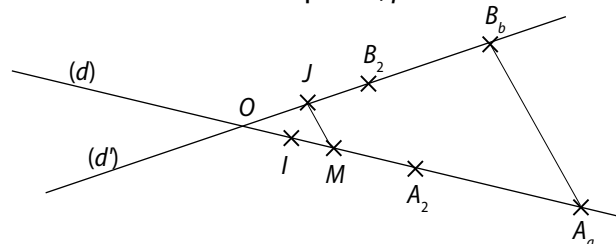
Ainsi  $\begin{cases} X = \frac{p+1}{2} = \frac{2k+1+1}{2} = k+1 \in \mathbb{N} \\ Y = \frac{p-1}{2} = \frac{2k+1-1}{2} = k \in \mathbb{N}. \end{cases}$

**b.**  $X^2 - Y^2 = \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 = \frac{(p+1)^2 - (p-1)^2}{4} = \frac{(p^2 + 2p + 1) - (p^2 - 2p + 1)}{4} = \frac{p^2 + 2p + 1 - p^2 + 2p - 1}{4} = \frac{4p}{4} = p.$

• Si  $p$  désigne un nombre premier tel que  $p \geq 3,$  alors  $p = \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$  avec  $\frac{p-1}{2}$  et  $\frac{p+1}{2}$  deux nombres entiers (d'après **a.**) consécutifs.

**99 1. a.** Si  $x \in \mathbb{Q},$  alors il existe  $x \in \mathbb{Z}$  et  $b \in \mathbb{N}, b \neq 0,$  tels que  $x = \frac{a}{b}.$

Comme  $x$  est strictement positif,  $p \in \mathbb{N}^*.$



Les droites  $(d)$  et  $(d')$  sont sécantes en  $O.$  Les droites  $(MJ)$  et  $(B_bA_a)$  sont parallèles.

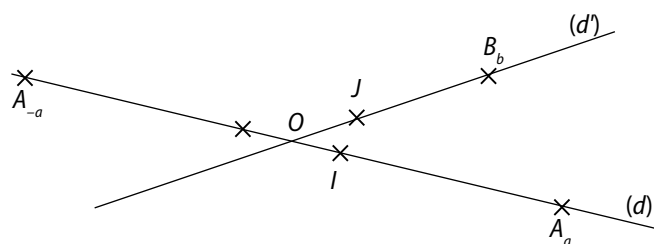
D'après le théorème de Thalès :

$\frac{OJ}{OB_b} = \frac{OM}{OA_a}$  donc  $\frac{1}{b} = \frac{OM}{a}$  donc  $OM = \frac{a}{b}.$

Ainsi,  $OM = x$ ;  $x$  est constructible.

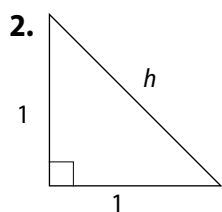
**b.**  $x$  désigne un nombre rationnel strictement négatif.

Il existe alors  $a \in \mathbb{N}^*$  et  $b \in \mathbb{N}^*$  tels que  $x = -\frac{a}{b}.$



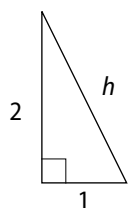
On construit le nombre  $-x,$  qui est un nombre rationnel positif (question précédente) : le point  $M$  est un point de  $(d)$  tel que  $OM = -x.$

Enfin, on construit le symétrique  $M'$  du point  $M$  par rapport à  $O.$  On a :  $OM' = -x.$



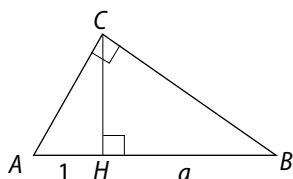
Le triangle étant rectangle, le théorème de Pythagore permet d'écrire que  $h^2 = 1 + 1 = 2$  donc  $h = \sqrt{2}$  ( $h > 0$ ). Ainsi  $\sqrt{2}$  est constructible.

(d) et (d') perpendiculaires.



Le triangle étant rectangle, le théorème de Pythagore permet d'écrire que  $h^2 = 2^2 + 1^2 = 4 + 1 = 5$  donc  $h = \sqrt{5}$  et  $\sqrt{5}$  est ( $h > 0$ ) constructible.

• Montrons que si  $a$  est un nombre réel,  $a \geq 0$ , constructible, alors  $\sqrt{a}$  est constructible.



$ABC$  est un triangle rectangle en  $C$  tel que  $AB = 1 + a$ . D'après le théorème de Pythagore, appliqué successivement dans les triangles  $ACH$ ,  $BCH$  et  $ABC$ , on a :

$$\begin{cases} AC^2 = CH^2 + 1 \\ BC^2 = CH^2 + a^2 \\ AC^2 + BC^2 = AB^2 = (1 + a)^2. \end{cases}$$

Ainsi :  $1 + a^2 + 2CH^2 = (1 + a)^2$

$\Leftrightarrow 2CH^2 = (1 + a)^2 - 1 - a^2 \Leftrightarrow 2CH^2 = 2a$

$\Leftrightarrow CH = \sqrt{a}$  car  $CH$  est une longueur et  $a \geq 0$ .

On en déduit donc que si  $a$  est constructible, alors  $\sqrt{a}$  est aussi constructible.

**100** D'une part :  $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$

$= a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2$

puis :  $(ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$

$= a^2c^2 + 2acbd + b^2d^2 + a^2d^2 - 2adbc + b^2c^2$

$= a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$ .

**101** Remarquons que  $\sqrt{a - b}$  est défini car  $a > b$  et que  $\sqrt{a} - \sqrt{b} \neq 0$  car  $a \neq b$ .

a. Comme  $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq 0$  :

$$\begin{aligned} \frac{a\sqrt{b} - b\sqrt{a}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} &= \frac{(a\sqrt{b} - b\sqrt{a})(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} \\ &= \frac{a\sqrt{b}\sqrt{a} + a(\sqrt{b})^2 - b(\sqrt{a})^2 - b\sqrt{a}\sqrt{b}}{(\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2} \\ &= \frac{(a - b)\sqrt{b}\sqrt{a} + ab - ba}{a - b} = \frac{(a - b)\sqrt{ab}}{a - b} = \sqrt{ab}. \end{aligned}$$

b. Comme  $a > b$ , on a :

$\sqrt{a - b} \times \sqrt{a - b} = (\sqrt{a - b})^2 = a - b$

et  $(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = a - b$

donc  $\sqrt{a - b} \times \sqrt{a - b} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})$ .

Ainsi, comme  $a \neq b$  :  $\frac{\sqrt{a - b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a - b}}$ .

**102** a. On remarque que  $a \geq b$  donc  $a^2 - b^2 \geq 0$  donc  $\sqrt{a^2 - b^2}$  est défini.

• D'une part :  $a + \sqrt{a^2 - b^2} \geq 0$  car  $a \geq 0$  et  $\sqrt{a^2 - b^2} \geq 0$ .

• D'autre part :  $a - \sqrt{a^2 - b^2} \geq 0$  car  $a \geq b \geq 0$ . En effet :  $a^2 \geq a^2 - b^2 \geq 0$  donc  $a = \sqrt{a^2} \geq \sqrt{a^2 - b^2}$ .

• Ainsi,  $A$  est bien défini.

b.  $A^2 = a + \sqrt{a^2 - b^2} + 2\sqrt{(a + \sqrt{a^2 - b^2})(a - \sqrt{a^2 - b^2})} + a - \sqrt{a^2 - b^2}$   
 $= 2a + 2\sqrt{a^2 - (\sqrt{a^2 - b^2})^2} = 2a + 2\sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)}$   
 $= 2a + 2\sqrt{b^2} = 2a + 2b$  car  $b \geq 0$   
 $= 2(a + b)$ .

c.  $A^2 = 2(a + b)$  or  $A \geq 0$  donc  $A = \sqrt{2(a + b)}$ .

**103** 1. a.  $(a - b)^3 = (a - b)(a - b)^2$   
 $= (a - b)(a^2 - 2ab + b^2)$   
 $= a^3 - 2a^2b + ab^2 - ba^2 + 2ab^2 - b^3$   
 $= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ .

b.  $(a + b)^3 = (a + b)(a + b)^2$   
 $= (a + b)(a^2 + 2ab + b^2)$   
 $= a^3 + 2a^2b + ab^2 + ba^2 + 2ab^2 + b^3$   
 $= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ .

c.  $(a - b)(a^2 + 2ab + b^2)$   
 $= a^3 + 2a^2b + ab^2 - ba^2 - 2ab^2 - b^3$   
 $= a^3 + a^2b - ab^2 - b^3$ .

d.  $(a + b)(a^2 - 2ab + b^2)$   
 $= a^3 - 2a^2b + ab^2 + ba^2 - 2ab^2 + b^3$   
 $= a^3 - a^2b - ab^2 + b^3$ .

2. a.  $101^3 = (100 + 1)^3$   
 $= 100^3 + 3 \times 1 + 100^2 + 3 \times 100 \times 1^2 + 1^3$   
 $= 1\,000\,000 + 30\,000 + 300 + 1$   
 $= 1\,030\,301$ .

b.  $70^3 + 30^3 = (100 - 30)^3 + 30^3$   
 $= 100^3 - 3 \times 100^2 \times 30 + 3 \times 100 \times 30^2 - 30^3 + 30^3$   
 $= 1\,000\,000 - 900\,000 + 270\,000$   
 $= 100\,000 + 270\,000 = 370\,000$ .

c.  $100^3 - 90^3 = 100^3 - (100 - 10)^3$   
 $= 100^3 - [100^3 - 3 \times 100^2 \times 10 + 3 \times 100 \times 10^2 - 10^3]$   
 $= 3 \times 100^2 \times 10 - 3 \times 100 \times 10^2 + 10^3 = 271\,000.$

d.  $99^3 = (100 - 1)^3$   
 $= 100^3 - 3 \times 100^2 \times 1 + 3 \times 100 \times 1^2 - 1^3$   
 $= 1\,000\,000 - 30\,000 + 300 - 1 = 970\,299.$

**104**  $x$  désigne la quantité, en L, de sang débitée au repos par le cœur en une minute. D'après l'énoncé, 68 % de  $x$  ( $100 - 13 - 19 = 68$ ) est égal à 3,5.

Donc  $\frac{68}{100}x = 3,5 \Leftrightarrow x = \frac{3,5 \times 100}{68} = \frac{87,5}{17}.$

Environ 5,15 L sont débités au repos en une minute par le cœur.

**105** 1. Pour tous nombres réels  $x$  et  $y$  :

$$\begin{cases} |x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y| \\ |y| = |y - x + x| \leq |y - x| + |x| \end{cases}$$

donc  $\begin{cases} |x| - |y| \leq |x - y| \text{ donc } ||x| - |y|| \leq |x - y|. \\ |y| - |x| \leq |x - y| \end{cases}$

2. a.  $|xy| = |x| \times |y| < 1$  car  $|x| < 1$  et  $|y| < 1$ .  
 Comme  $|xy| < 1$ ,  $-1 < xy < 1$  donc  $0 < 1 + xy$ .

b.  $(1 + x)(1 + y) = 1 + x + y + xy$   
 et  $(1 - x)(1 - y) = 1 - x - y + xy$ .

c.  $x + y = (1 + x)(1 + y) - (1 + xy)$ , or  $1 + xy \neq 0$ ,

donc  $\frac{x + y}{1 + xy} = \frac{(1 + x)(1 + y)}{1 + xy} - 1 \geq -1.$

$x + y = 1 + xy - (1 - x)(1 - y)$ , or  $1 + xy \neq 0$ ,

donc  $\frac{x + y}{1 + xy} = 1 - \frac{(1 - x)(1 - y)}{1 + xy} \leq 1.$

**106** a.  $\Phi^2 - \Phi - 1 = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 - \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - 1$   
 $= \frac{1 + 2\sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 - 2(1 + \sqrt{5}) - 4}{4}$   
 $= \frac{1 + 2\sqrt{5} + 5 - 2 - 2\sqrt{5} - 4}{4} = 0.$

b.  $\Phi - \frac{1}{\Phi} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \frac{2}{1 + \sqrt{5}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \frac{2(1 - \sqrt{5})}{(1 + \sqrt{5})(1 - \sqrt{5})}$   
 $= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \frac{2(1 - \sqrt{5})}{1 - 5}$   
 $= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = \frac{2}{2} = 1.$

c.  $\frac{1}{1 + \Phi} = \frac{1}{1 + \frac{1 + \sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{3 + \frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{3 + \sqrt{5}}.$

$\cdot 1 - \frac{1}{1 + \Phi} = 1 - \frac{2}{3 + \sqrt{5}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}}$

$$= \frac{(1 + \sqrt{5})(3 - \sqrt{5})}{(3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5})} = \frac{3 - \sqrt{5} + 3\sqrt{5} - 5}{9 - 5} = \frac{-2 + 2\sqrt{5}}{4}$$

$$= \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

$$\cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \Phi}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5} - 1}$$

$$= \frac{2(1 + \sqrt{5})}{(1 + \sqrt{5})(\sqrt{5} - 1)} = \frac{2(1 + \sqrt{5})}{5 - 1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi.$$

d.  $\Phi^2 - \Phi = 1$  d'après la question a. donc  $\Phi^3 - \Phi^2 = \Phi$   
 or d'après a.,  $\Phi^2 = \Phi + 1$  donc  $\Phi^3 - \Phi - 1 = \Phi$  donc  $\Phi^3 - 2\Phi = 1.$

**107** 1. a.  $1 + \frac{1}{x} = \frac{x + 1}{x} = \frac{x^2}{x} = x.$

b.  $11 + \frac{1}{x} = x$  donc  $\frac{1}{1 + \frac{1}{11}} = 1 + \frac{1}{x} = x.$

Puis  $\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + x}} = 1 + \frac{1}{x} = x.$

2.  $\frac{11}{13} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{13}{11}}}$  et  $\frac{13}{11} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{11}{13}}.$

3. L'exercice 106 montre que  $\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  vérifie  $\Phi^2 - \Phi = 1.$

Donc d'après la question 1, on a :  $\Phi = \frac{1}{1 + \frac{1}{\Phi}}.$

**108** 1.  $A_1 = 1 - x^2;$

$A_2 = (1 - x)(1 + x + x^2) = 1 + x + x^2 - x - x^2 - x^3 = 1 - x^3.$

$A_3 = (1 - x)(1 + x + x^2 + x^3)$   
 $= 1 + x + x^2 + x^3 - x - x^2 - x^3 - x^4 = 1 - x^4.$

$A_4 = (1 - x)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)$   
 $= 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 - x - x^2 - x^3 - x^4 - x^5 = 1 - x^5.$

a. Il semble que pour tout nombre entier naturel non nul  $n$  :  $A_n = 1 - x^{n+1}.$

b.  $n$  désigne un nombre entier naturel non nul.

$A_n = (1 - x)(1 + x + \dots + x^n)$   
 $= 1 + x + x^2 + \dots + x^n - x - x^2 - x^3 - \dots - x^n - x^{n+1}$   
 $= 1 - x^{n+1}.$

2. a.  $B = \frac{1 + x + x^2 + x^3}{1 - x^4} = \frac{1 + x + x^2 + x^3}{A_3} = \frac{1}{1 - x}.$

$C = \frac{1 + x + x^2 + x^3 + x^4}{1 - x^5} = \frac{1 + x + x^2 + x^3 + x^4}{A_4} = \frac{1}{1 - x}.$

b.  $\frac{1 + 3 + 9 + 27 + 81}{1 - 243} = \frac{1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4}{1 - 3^5}$   
 $= \frac{1}{1 - 3} = -\frac{1}{2}.$

$$\frac{1 + 0,2 + 0,04 + 0,008}{1 - 0,0016} = \frac{1 + 0,2 + 0,2^2 + 0,2^3}{1 - 0,2^4}$$

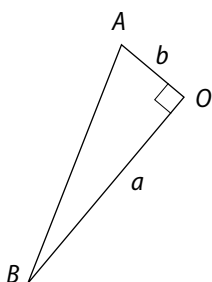
$$= \frac{1}{1 - 0,2} = 1,25.$$

**109** L'aire d'un triangle rectangle est égale à :

$$\frac{a \times b}{2} = \frac{ab}{2}.$$

Donc l'aire colorée est égale à :

$$AB^2 - 4 \times \frac{ab}{2} = AB^2 - 2ab.$$



• Calcul de  $AB^2$  :

Dans le triangle  $AOB$  rectangle en  $O$ , l'égalité de Pythagore permet d'écrire que :

$$AB^2 = AO^2 + OB^2 = a^2 + b^2.$$

• Ainsi, l'aire colorée est égale à :  
 $a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2$ .

**110** 1. a.  $x$  désigne un élément de  $E$ . Supposons que  $x$  admette deux symétriques  $x' \in E$  et  $x'' \in E$ .

$$\text{Par définition : } \begin{cases} x * x' = e = x' * x \\ x * x'' = e = x'' * x. \end{cases}$$

De  $x * x' = e$ , il suit que  $x'' * x * x' = x'' * e = x''$ .

Or  $x'' * x = e$  donc  $e * x' = x''$  donc  $x' = x''$ .

On en déduit que, lorsqu'il existe, le symétrique d'un élément  $x$  de  $E$  est unique.

b.  $a$  et  $b$  désignent deux éléments de  $E$ .

$a * x = b$  donc  $a' * a * x = a' * b$ , donc  $e * x = a' * b$ , donc  $x = a' * b$ . L'équation  $a * x = b$  admet une unique solution  $x = a' * b$ , où  $a'$  est le symétrique de  $a$ .

2. a. Montrons que  $(\mathbb{R}; +)$  est un groupe.

Pour tous  $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, x + y \in \mathbb{R}$ ,

pour tous  $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}$ ,

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$

« il existe »  $0 \in \mathbb{R}$  tel que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$x + 0 = 0 + x = x;$$

pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , il existe  $x' \in \mathbb{R}$  tel que :

$$x + x' = 0 = x' + x. \text{ En effet, } x' = -x \text{ convient.}$$

• Montrons que  $(\mathbb{R}^*; \times)$  est un groupe.

Pour tous  $x \in \mathbb{R}^*, y \in \mathbb{R}^*, x \times y \in \mathbb{R}^*$

pour tous  $x \in \mathbb{R}^*, y \in \mathbb{R}^*, z \in \mathbb{R}^*$

$$x \times (y \times z) = (x \times y) \times z$$

« il existe »  $1 \in \mathbb{R}^*$  tel que pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$  :

$$x \times 1 = 1 \times x = x;$$

pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ , il existe  $x' \in \mathbb{R}^*$  tel que :

$$x \times x' = 1 = x' \times x. \text{ En effet, } x' = \frac{1}{x} \text{ convient.}$$

b.  $(\mathbb{Z}; +)$  est un groupe. En effet :

pour tous  $x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}, y + x \in \mathbb{Z}$

pour tous  $x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}, z \in \mathbb{Z}$ ,

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$

« il existe »  $0 \in \mathbb{Z}$  tel que pour tout  $x \in \mathbb{Z}$ ,

$$x + 0 = 0 + x = x;$$

pour tout  $x \in \mathbb{Z}$ , il existe  $x' \in \mathbb{Z}$  tel que

$$x + x' = 0 = x' + x. \text{ En effet, } x' = -x \text{ convient.}$$

•  $(\mathbb{N}; \times)$  n'est pas un groupe car  $2 \in \mathbb{N}$  et  $2$  n'a pas de symétrique dans  $\mathbb{N}$  (si  $n \in \mathbb{N}$  alors  $-n \notin \mathbb{N}$ ).

c. • Pour tous  $x \in I, y \in I : -2 < x + y < 2$

$$\text{et } \begin{cases} -1 < xy < 1 \\ 0 < 1 + xy < 2 \end{cases} \text{ donc } -1 < \frac{x+y}{1+xy}.$$

De plus,  $x + y < 1 + xy$

car  $x + y < 1 + xy \Leftrightarrow 0 < (1 - y)(1 - x)$ .

Or  $1 + xy > 0$  donc  $\frac{x+y}{1+xy} < 1$ . Et par suite,  $x * y \in I$ .

• Pour tous  $x \in I, y \in I, z \in I$

$$x * (y * z) = \frac{x + y * z}{1 + x(y * z)} = \frac{x + \frac{y+z}{1+yz}}{1 + \frac{x(y+z)}{1+yz}}$$

$$= \frac{x + xyz + y + z}{1 + yz} = \frac{x + y + z + xyz}{1 + yz + x(y+z)}$$

$$\text{et } (x * y) * z = \frac{(x * y) + z}{1 + z(x * y)} = \frac{\frac{x+y}{1+xy} + z}{1 + \frac{z(x+y)}{1+xy}}$$

$$= \frac{x + y + z(1 + xy)}{1 + xy + z(x + y)} = \frac{x + y + z + zxy}{1 + xy + zx + zy}$$

donc  $x * (y * z) = (x * y) * z$ .

• Pour tout  $x \in I : x * 0 = x = 0 * x$ . Donc  $0$  est l'élément neutre de  $I$ .

• Pour tout  $x \in I : x * x' = 0 = x' * x$  avec  $x' = -x \in I$ .

**111** 1. a.  $1 = \frac{1}{1}$  donc  $1 \in E$ .

b.  $n$  désigne un nombre entier naturel non nul :

$$n \geq 1 > 0 \text{ donc } \frac{1}{n} \leq \frac{1}{1} \text{ donc } \frac{1}{n} \leq 1.$$

2. Pour tout élément  $x$  de  $E$ , il existe un nombre entier naturel  $n$  non nul tel que  $x = \frac{1}{n}$ .

D'après la question 1. b. :  $x \leq 1$ .

Donc  $E$  est majoré.

Comme  $1 \in E$ ,  $1$  est le maximum de  $E$ .

3. Pour tout élément  $x$  de  $E$ , il existe un nombre entier naturel  $n$  non nul tel que  $x = \frac{1}{n}$ . Donc  $x > 0$ .  
Ainsi,  $E$  est minoré par 0.

4.  $E$  ne possède pas de maximum car 0 est le grand minorant de  $E$  et 0 n'est pas l'inverse d'un nombre entier naturel non nul.

**112** 1. a.  $M$  est le maximum de  $]-\infty; a[$  donc  $M \in ]-\infty; a[$  donc  $M < a$ .

Ainsi :  $\frac{a+M}{2} < \frac{a+a}{2}$  donc  $\frac{a+M}{2} < a$

donc  $\frac{a+M}{2} \in ]-\infty; a[$ .

b. On vient de montrer que  $\frac{a+M}{2} \in ]-\infty; a[$ .

Comme  $M$  est le maximum de  $]-\infty; a[$  :  $a + \frac{M}{2} < M$   
donc  $a + M < 2M$  et  $a < M$ .

On obtient  $a < M$  et  $M < a$  (question 1. a.) donc contradiction.  $]-\infty; a[$  n'admet donc pas de maximum.

2. Pour tout nombre réel  $b$ ,  $]b; +\infty[$  n'admet pas de minimum.

Un raisonnement par l'absurde identique à celui de la question 1 le prouve.

3. Pour tout nombre réel  $a$  et  $b$  tels que  $a < b$  :

- $[a; b[$  admet  $a$  pour minimum car  $a \in [a; b[$  et pour tout  $x \in [a; b[$ ,  $x \geq a$ .

- $[a; b[$  n'admet pas de maximum (raisonnement par l'absurde identique à celui de la question 1).

**113** 1. Le résultat affiché est 0. Ce n'est pas correct car  $10^{26} + 4 - 10^{26} = 4$ .

La calculatrice commet une erreur d'arrondi en raison des deux « grands nombres »  $10^{26}$  et  $-10^{26}$ .

2. Le résultat affiché est 2 000 000 000. Ce n'est pas correct car :

$$\begin{aligned} &999\,999\,999^2 - 999\,999\,998^2 = \\ &(999\,999\,999 - 999\,999\,998)(999\,999\,999 + 999\,999\,998) \\ &= 1 \times 1\,999\,999\,997 = 999\,999\,997. \end{aligned}$$

La calculatrice commet là encore une erreur d'arrondi en raison des deux « grands nombres »  $999\,999\,999$  et  $999\,999\,998$ .

**114** 1. a.  $\bullet x = 0,01010101\dots$  donc

$$100x = 1,010101\dots = 1 + x.$$

Ainsi :  $100x - x = 1$  et  $99x = 1$ , donc  $x = \frac{1}{99}$  et  $x \in \mathbb{Q}$ .

b.  $y = 7,01010101\dots$  donc  $y = 7 + x = 7 + \frac{1}{99}$  et  $y \in \mathbb{Q}$ .

2. On pose  $x = 0,99999\dots$

$$\text{donc } 100x = 99,9999\dots = 99 + x.$$

Ainsi :  $100x - x = 99$  et  $99x = 99$ , donc  $x = 1$ .

3. On pose  $y = 1,19999\dots$  et  $x = 0,99999\dots$

$$\text{donc } 100y = 111,9999\dots = 111 + x = 111 + 1 = 112$$

$$\text{donc } y = \frac{112}{100} = 1,12.$$

**115** 1.  $S(n) - \frac{1}{2}S(n)$

$$\begin{aligned} &\underbrace{\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}\right)}_{n+1 \text{ termes}} - \underbrace{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}\right)}_{n+1 \text{ termes}} \\ &= 1 - \frac{1}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

2. On a alors :  $\frac{1}{2}S(n) = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$

$$\text{donc } S(n) = 2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) = 2 - \frac{1}{2^n}.$$

3. Pour tout nombre entier naturel  $n$ ,  $n \geq 2$  on a

$$0 \leq \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{4} \leq 1, \text{ donc } 0 \geq -\frac{1}{2^n} \geq -\frac{1}{4} \geq -1,$$

$$\text{d'où } 2 \geq 2 - \frac{1}{2^n} \geq 2 - \frac{1}{4} \geq 1 \text{ et } 1 \leq S(n) \leq 2 - \frac{1}{4} \leq 2.$$

**116**  $p = \frac{m}{V} = \frac{675}{V}$  où  $V$  est le volume de l'objet.

$$\text{Or } V = 10^2 \times 17,5 - 10^2 \times 15 = 10^2 \times 2,5 = 250$$

$$\text{donc } p = \frac{675}{250} = 2,7.$$

La masse volumique de l'objet est égale à  $2,7 \text{ g/cm}^3$ .

**117** 1. a.

État	0	1	2	3
Nombre de côtés	3	12	48	192

b. À l'état 5, le nombre de côtés est  $192 \times 4 \times 4 = 3\,072$ .

À l'état 10, le nombre de côtés est :

$$3\,072 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 3\,145\,728.$$

c.  $C(0) = 3$  ;  $C(1) = 12$  et  $C(2) = 48$ .

- Entre l'état  $n$  et l'état  $n + 1$ , chaque segment en « donne » quatre.

$$\text{Ainsi } C(n + 1) = 4 \times C(n).$$

Par conséquent, comme  $C(0) = 3$ ,  $C(1) = 4 \times 3$ ,  $C(2) = 4 \times 4 \times 3$ , ...,  $C(n) = 4^n \times 3$  pour tout entier  $n$  naturel.

d.  $2^{10} = 1\,024$  donc  $2^{10} \approx 10^3$ .

- $C(50) = 3 \times 4^{50} = 3 \times (2^2)^{50} = 3 \times 2^{100}$

$$\text{donc } C(50) \approx 3 \times (10^3)^{10} \text{ et } C(50) \approx 3 \times 10^{30}.$$

$$C(100) = 3 \times 4^{100} = 3 \times (2^2)^{100} = 3 \times 2^{200} = 3 \times (2^{10})^{20}$$

$$\text{donc } C(100) \approx 3 \times (10^3)^{20}$$

$$\text{et } C(100) \approx 3 \times 10^{60}.$$

**2. a.**

État	0	1	2	3	4
Longueur d'un côté	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{81}$

**b.** Entre l'état  $n$  et l'état  $n + 1$ , chaque segment de longueur  $a$  donné est divisé en trois segments de longueur identique  $\frac{a}{3}$ .

$$\text{Ainsi, } L(n+1) = \frac{L(n)}{3}.$$

• Comme  $L(0) = 1, L(1) = \frac{1}{3}, L(2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \dots$  et

$L(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n$  pour tout nombre entier  $n$  naturel.

**3. a.**  $P(n) = C(n) \times L(n)$

$$= 3 \times 4^n \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = 3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^n.$$

**b.**  $\left(\frac{4}{3}\right)^{10} \approx 18$  à l'aide de la calculatrice.

$$\text{Ainsi : } P(50) = 3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^{50} = 3 \times \left(\left(\frac{4}{3}\right)^{10}\right)^5 \approx 3 \times 18^5$$

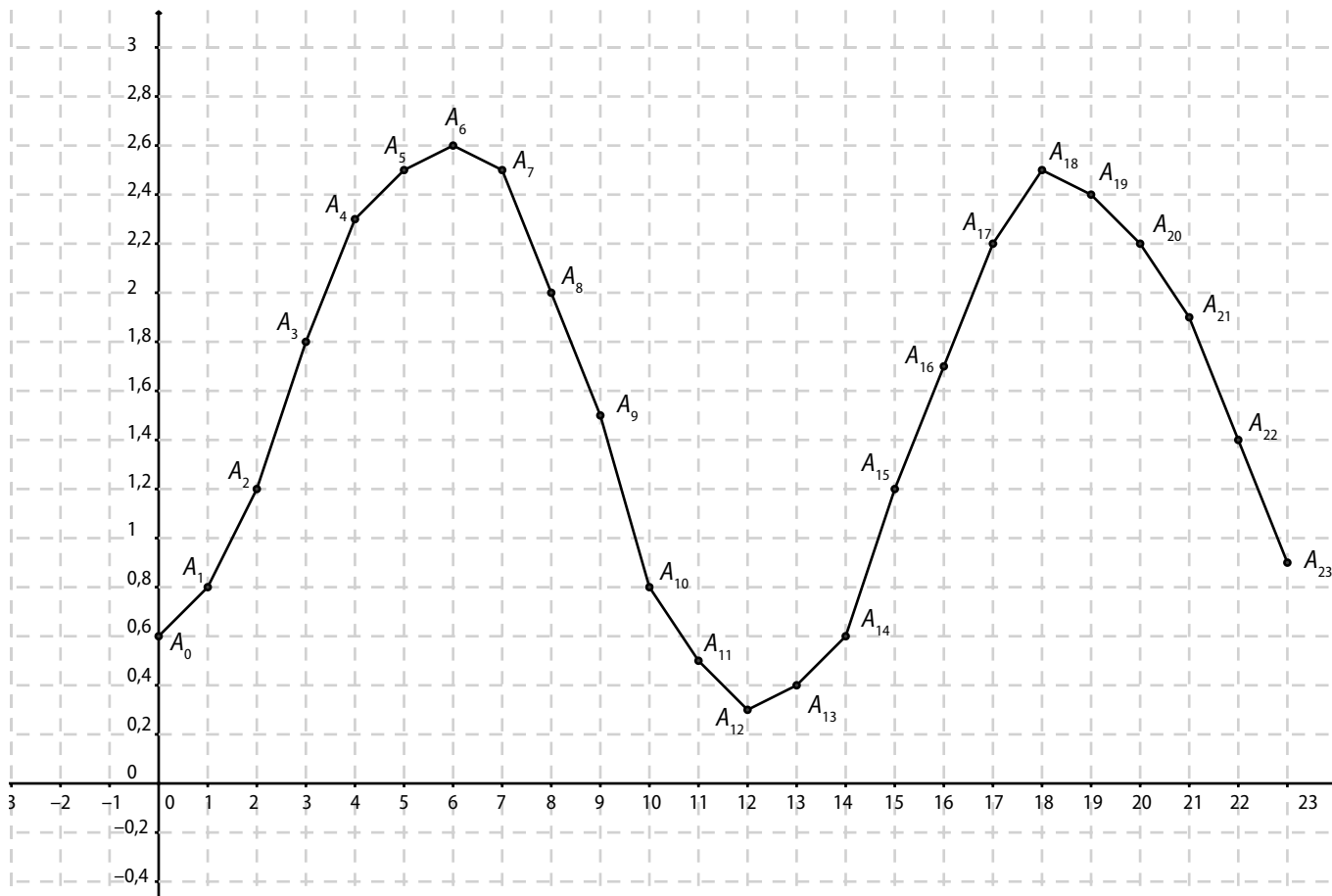
$$\text{et } P(100) = 3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^{100} = 3 \times \left(\left(\frac{4}{3}\right)^{10}\right)^{10} \approx 3 \times 18^{10}.$$

# 10 fonctions – Généralités

## Activités d'introduction

### 1 Marées

1. a. et b.



2. a. • Entre 0 h et 11 h / 0,5 m ; • entre 12 h et 23 h / 0,3 m ;  
• entre 0 h et 23 h / 0,3 m.

b. • entre 0 h et 11 h ? 2,6 ; • entre 12 h et 23 h ? 2,5 ;  
• entre 0 h et 23 h ? 2,6.

c. La marée est montante entre 0 h et 6 h ainsi qu'entre 12 h et 18 h.

La marée est descendante entre 6 h et 12 h ainsi qu'entre 18 h et 23 h.

### 2 Aire

1. b. L'aire estimée est de 17 carreaux donc de 17 cm<sup>2</sup>.

$$\text{Aire } LMPQ = \text{aire } ABCD - 4 \text{ aire } ALQ$$

$$= 5^2 - 4 \times \frac{1 \times 4}{2} = 25 - 8 = 17.$$

c. L'aire estimée est de 13 carreaux donc de 13 cm<sup>2</sup>.

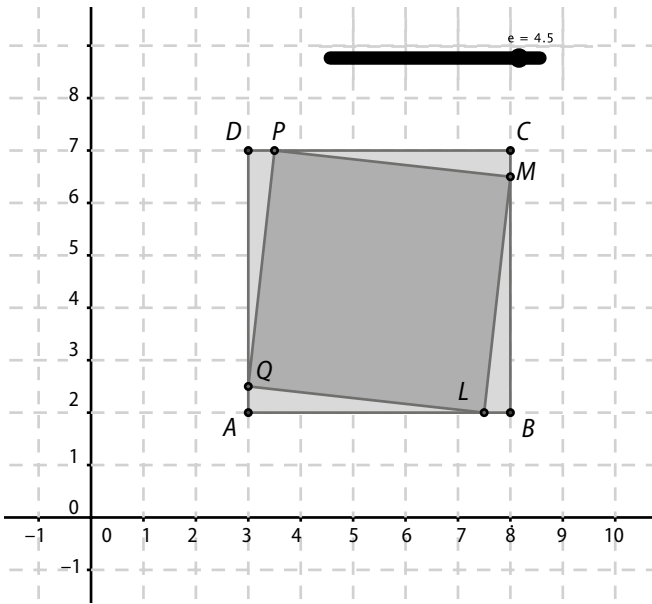
$$\text{Aire } LMPQ = \text{aire } ABCD - 4 \text{ aire } ALQ$$

$$= 5^2 - 4 \times \frac{3 \times 2}{2} = 25 - 12 = 13.$$

2. a.  $0 \leq x \leq 5$ .

$$\begin{aligned} \text{b. } f(x) &= 25 - 4 \times \frac{x(5-x)}{2} = 25 - 2(5x - x^2) \\ &= 2x^2 - 10x + 25. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c. } f(1) &= 2(1)^2 - 10(1) + 25 = 2 - 10 + 25 = 17 ; \\ f(3) &= 2(3)^2 - 10(3) + 25 = 18 - 30 + 25 = 13. \end{aligned}$$



3. Le fichier Geogebra permet de donner la réponse en utilisant le curseur. Il y a deux solutions : l'une dans  $[0,5 ; 0,6]$ , l'autre dans  $[4,4 ; 4,5]$ .

### 3 Distance d'arrêt

1. a. • 30 km/h : 15 m ; • 50 km/h : 30 m ; • 90 km/h : 80 m ; • 110 km/h : 110 m ; • 130 km/h : 150 m.

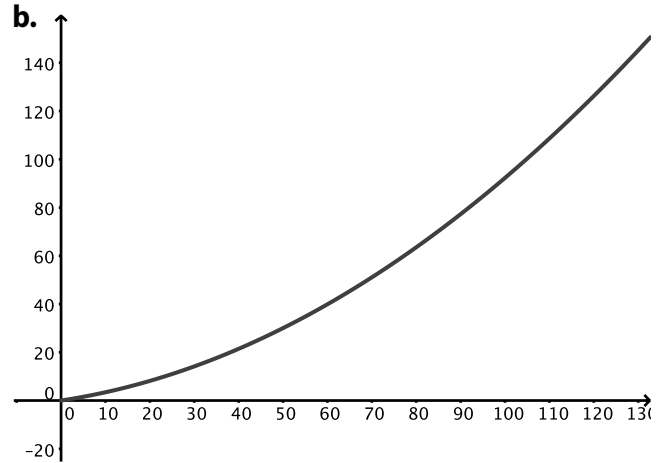
b. La fonction est croissante.

c. La vitesse était de 105 km/h.

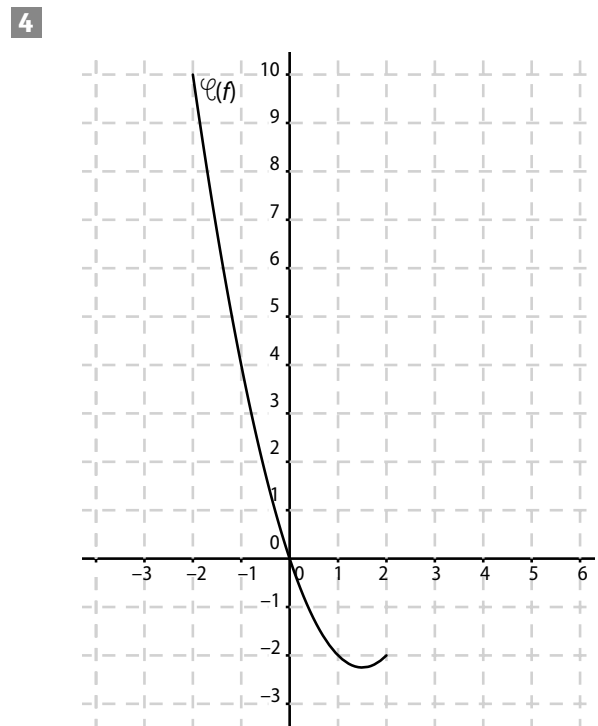
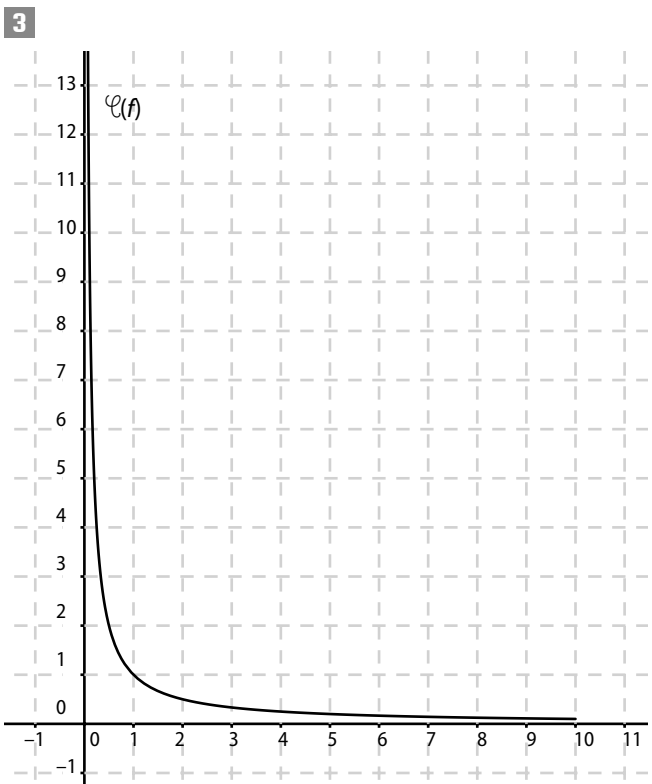
d. Il faut rouler à 60 m du véhicule précédent.

2. a.

Vitesse $v$	30	50	90	110	130
Distance d'arrêt $d$	14,14	30,02	77,26	108,62	145,14



## Savoir-faire



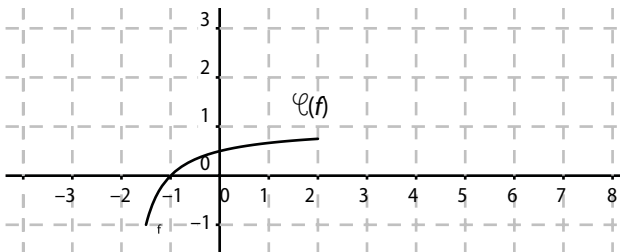
5



6 a.

$x$	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
$f(x)$	-1	0	0,33	0,5	0,6	0,67	0,71	0,75

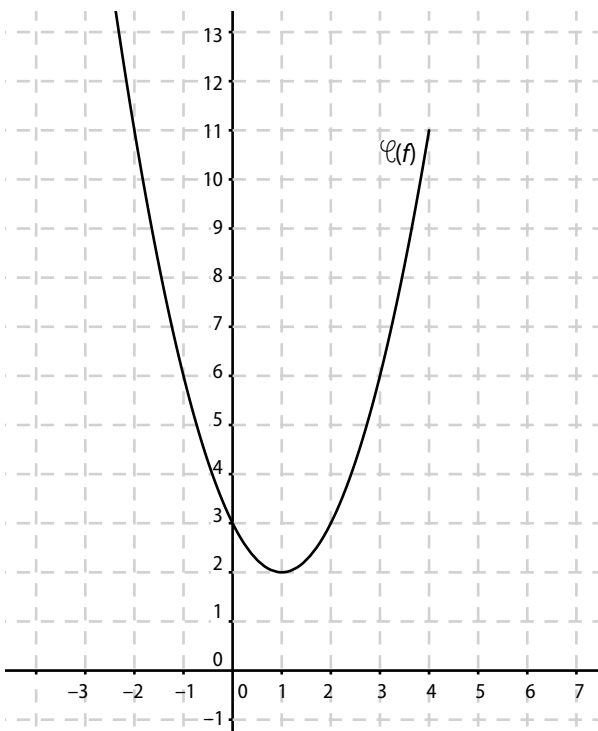
b.



9 a.  $f(-2) = 5$  ;  $f(-1) = 0$  ;  $f(0) = 2$  ;  $f(1) = 0$  ;  $f(2) = 5$ .

b. Pas d'antécédent pour  $-1$  ;  
 $-1,5$  ;  $-1$  ;  $1$  et  $1,5$  sont les antécédents de  $0$  ;  
 $-0,8$  ;  $0$  et  $0,8$  sont les antécédents de  $2$  ;  
 $-1,9$  et  $1,9$  sont les antécédents de  $4$ .

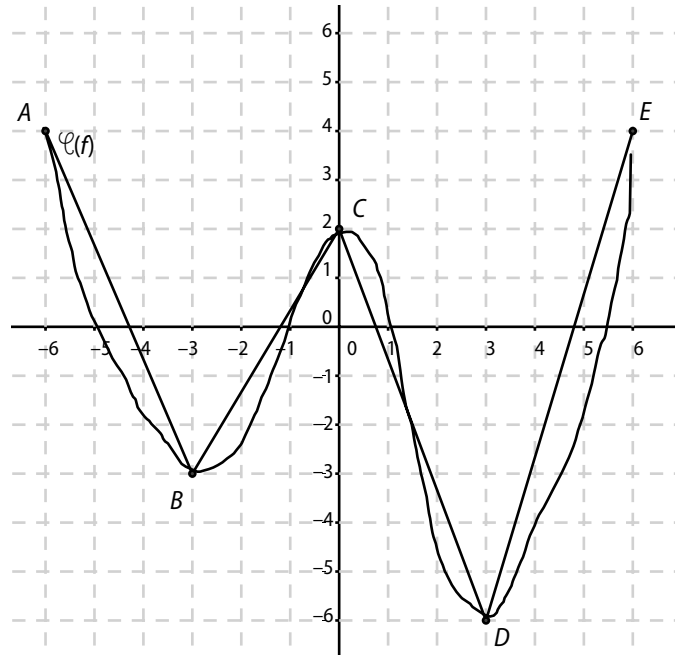
10 a.



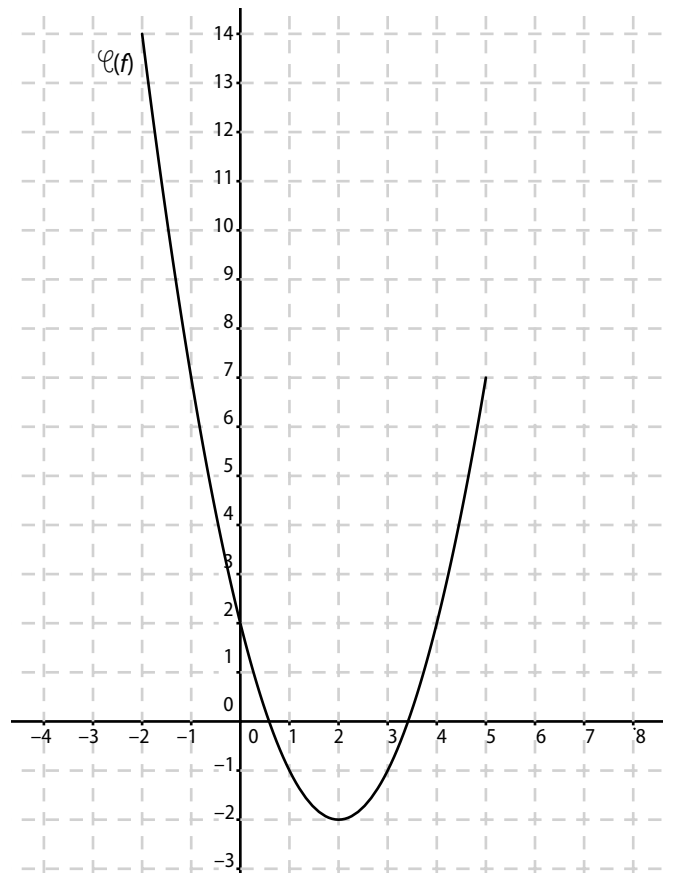
b.  $f(x) < 6 \Leftrightarrow x \in ]-1 ; 3[$  ;

$f(x) \geq 6 \Leftrightarrow x \in [-3 ; -1] \cup [3 ; 4]$ .

13



14 a.



b.

$x$	-2	2	5
$f(x)$	14	-2	7

## Exercices d'entraînement

**15** Les graphiques **a**, **c** et **d** sont des représentations de fonctions.

**16 a.**  $P(R) = \pi R^2$  ; **b.** non ; **c.**  $M = \mu V$  ( $\mu$  est la masse volumique)

**17 a.** non ; **b.** oui ; **c.** non

**18**  $f(x) = 3x^2$ .

- 19** • Je le double  $\rightarrow \bullet f_5$
- J'en prends la moitié  $\rightarrow \bullet f_3$
- Je le double puis j'ajoute 3  $\rightarrow \bullet f_1$
- J'ajoute 3 puis je double  $\rightarrow \bullet f_6$
- Je soustrais 4 puis je triple  $\rightarrow \bullet f_4$
- Je le triple puis je soustrais 4  $\rightarrow \bullet f_2$

**20**  $D_f = [3 ; +\infty[ ; D_g = ]-\infty ; 0,5]$  ;  $D_h = [-1 ; +\infty[ ; D_i = \mathbb{R} ; D_j = \mathbb{R} - \{1\} ; D_k = [-2 ; +\infty[$ .

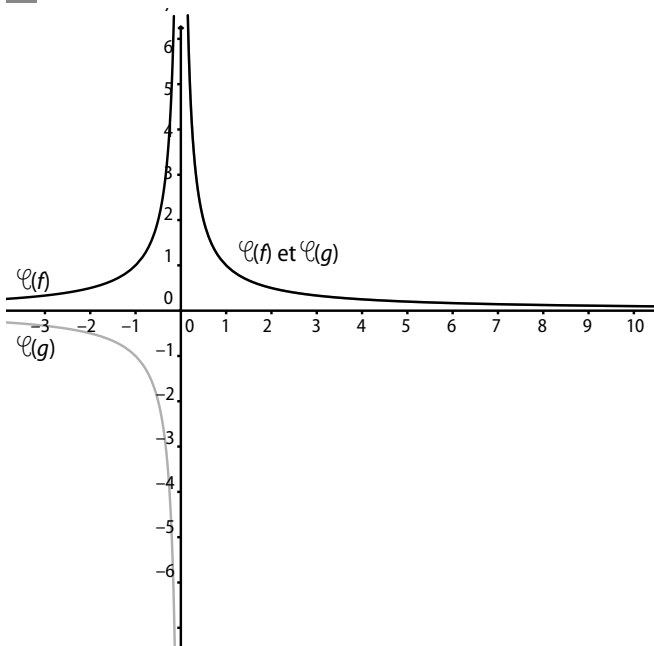
**21**  $D_f = \mathbb{R} - \{3\} ; D_g = \mathbb{R} ; D_h = ]1 ; +\infty[ ; D_i = \mathbb{R} - \{-3\}$ .

**22**  $D_f = \mathbb{R} ; D_g = \mathbb{R} ; D_h = ]1 ; +\infty[ ; D_i = \mathbb{R} - \{-1 ; 3\}$ .

**23** Les domaines de définition de  $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5$  et  $f_6$  ne sont pas égaux à  $\mathbb{R}$ . Elles ne coïncident pas avec  $f$ . On a seulement  $f_3 = f$ .

**24 a.**  $f = g$  sur  $\mathbb{R}$  ; **b.**  $f = g$  sur  $]1 ; +\infty[$  ; **c.**  $f = g$  sur  $] -\infty ; 0] \cup ]1 ; +\infty[$  ; **d.**  $f \neq g$ .

**25**



**26**  $f(2) = 2(2)^2 - 3(2) + 1 = 3$  ;  
 $f(-1) = 2(-1)^2 - 3(-1) + 1 = 6$ .

- 27 a.** 4 est l'image par  $f$  de 2 ;
- b.** 2 est un antécédent par  $f$  de 4 ;
- c.** 2 a pour image 4 par  $f$  ;
- d.** 4 a pour antécédent 2 par  $f$ .

**28** **1. a.** 2 ; **b.** -5 ; **c.** 1. **2. a.** 0 ; **b.** 2 ; **c.** -2 et 1.

**29** **1. a.** 8 ; **b.** 2 ; **c.** 4. **2. a.** 2 ; **b.** 1/3 ; **c.** 0.

**30**

$I$	0	$\frac{2}{3}$	4	10	12	$\frac{44}{3}$
$U$	0	10	60	150	180	220

**31** **1. a.** 0 ; **b.** -6 ; **c.** 0. **2. a.** 0 et -2 ; **b.** -3 et 1.

**32**  $f(10^{-2}) = 0,00980001 = g(10^2)$  ;  
 $f(10^{-1}) = 0,0801 = g(10)$  ;  
 $f(10) = 9810 = g(10^{-1})$  ;  
 $f(10^2) = 99980100 = g(10^{-2})$ .

**33 a.**  $f(-2) = -3 \Leftrightarrow -(-2)^2 + (-2) + k = -3$   
 $\Leftrightarrow -6 + k = -3$  d'où  $k = 3$ .

**b.**

$x$	-2	2	3	5
$f(x)$	-3	1	-3	-17

**c.**  $-x^2 + x + 3 = 3 \Leftrightarrow -x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x = 0$  ou  $x = 1$ .

**34 a.**  $f(0) = g(0) + k \Leftrightarrow -2 = -1 + k \Leftrightarrow k = -1$ .

**b.**

$x$	-5	5	10	15
$f(x)$	-127	123	998	3373

**35 a.**  $f(1) = 1 \Leftrightarrow 1^2 - k(1) + 1 = 1 \Leftrightarrow 2 - k = 1$  d'où  $k = 1$ .

**b.**

$x$	-5	-1	7	10
$f(x)$	31	3	43	91

**36 a.**  $f$  est définie pour  $x \geq -3$ , donc sur  $[0 ; 7]$ .

**b.**

$x$	0	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$	1,7	3	4,2	5,4	6,6	7,8	9	10,1

37 a. 4 ; b. 0.

38 a.  $[-2 ; 0]$  ; b.  $[0 ; 4]$ .

39 a. 4 ; b. -2,5 et 1,5 ; c.  $[-2 ; 4]$  ;

d.  $[-2,8 ; -2,5] \cup [1,5 ; 1,8]$ .

40 1. a.  $\{3\}$  ; b.  $[-2 ; 1] \cup [2 ; 5]$ .

2. a.  $[-4 ; -2]$  ; b.  $[-2 ; 1] \cup [-2,7 ; 4,2]$ .

3.  $[-2 ; 1] \cup \{3,4\}$ .

41 Si  $x \in [-4 ; -2]$ ,  $f(x) = x + 5$  ;

si  $x \in [-2 ; 6]$ ,  $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$  ;

si  $x \in [6 ; 7]$ ,  $f(x) = 3x - 17$ .

42

x	0	1	2	3	4	5
f(x)	-3	-1	-0,33	0	0,2	0,33

x	6	7	8	9	10
f(x)	0,43	0,5	0,55	0,6	0,64

43

x	0	1	2	3	4	5
f(x)	1,73	2,24	2,65	3	3,32	3,61

x	6	7	8	9	10
f(x)	3,87	4,12	4,36	4,58	4,80

44

x	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5
f(x)	-4	0,125	2	2,375	2	1,625

x	1	1,5	2
f(x)	2	3,875	8

45 ① représente h, ② représente f et ③ représente g.

46 a.  $f(-1) = 4$ ,  $f(0) = 2$  et  $f(1) = 0$  donc  $(C_f)$  contient A, B et C.

b.  $f(-1) \neq 4$ ,  $f(0) = 2$  et  $f(1) \neq 0$ , donc  $(C_f)$  contient B.

c.  $f(-1) \neq 4$ ,  $f(0) = 2$  et  $f(1) = 0$ , donc  $(C_f)$  contient B et C.

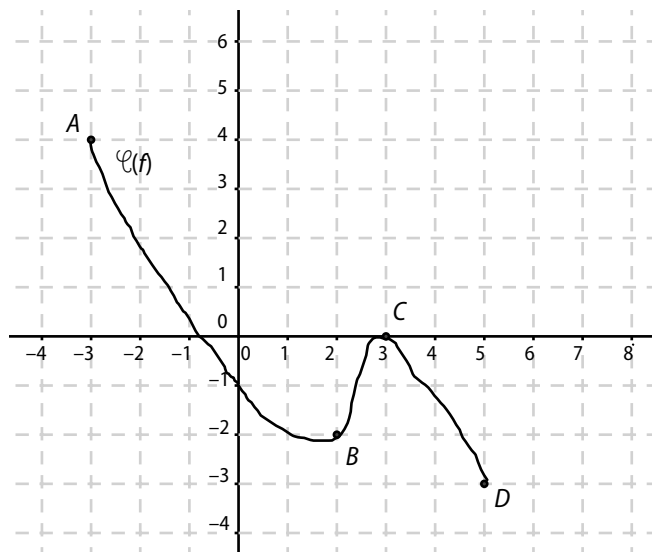
d.  $f(-1) = 4$ ,  $f(0) = 2$  et  $f(1) = 0$ , donc  $(C_f)$  contient A, B et C.

47  $f_1(x) = 2$  sur  $[3 ; 6]$  ;  $f_2(x) = 32x - 7$  sur  $[6 ; 8]$  ;

$f_3(x) = 0,6x + 0,2$  sur  $[3 ; 8]$ .

48 À gauche, f est croissante. À droite, f est croissante sur  $]-\infty ; 1]$  et décroissante sur  $[1 ; +\infty[$ .

49



50 ①

x	-2	0	4
f(x)	1	3	-5

②

x	-4	-2,5	-0,5	0,5	1
f(x)	-4,5	-1,9	-2,1	-1,2	

③

x	-3	-2	0	1
f(x)	-3	1	-3	1

51

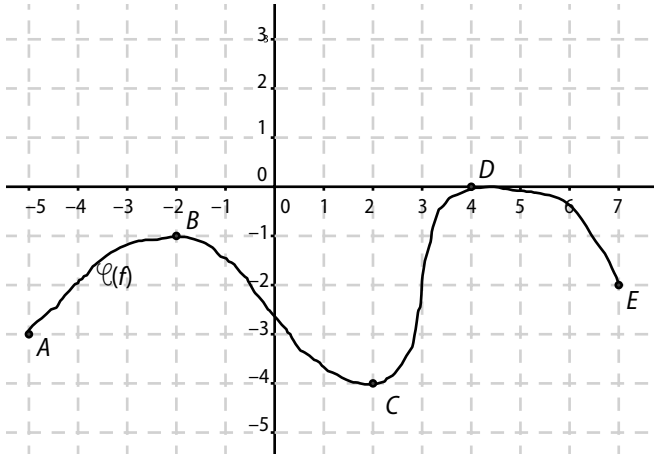
x	-2	-1	2
f(x)	-2	-3	6

x	-3	-2	0	1
f(x)	0	-5	-1	-6

52 a.  $D_f = [-5; 7]$ ;

b.  $A(-5; -3); B(-2; -1); C(2; -4); D(4; 0); E(7; -2)$ .

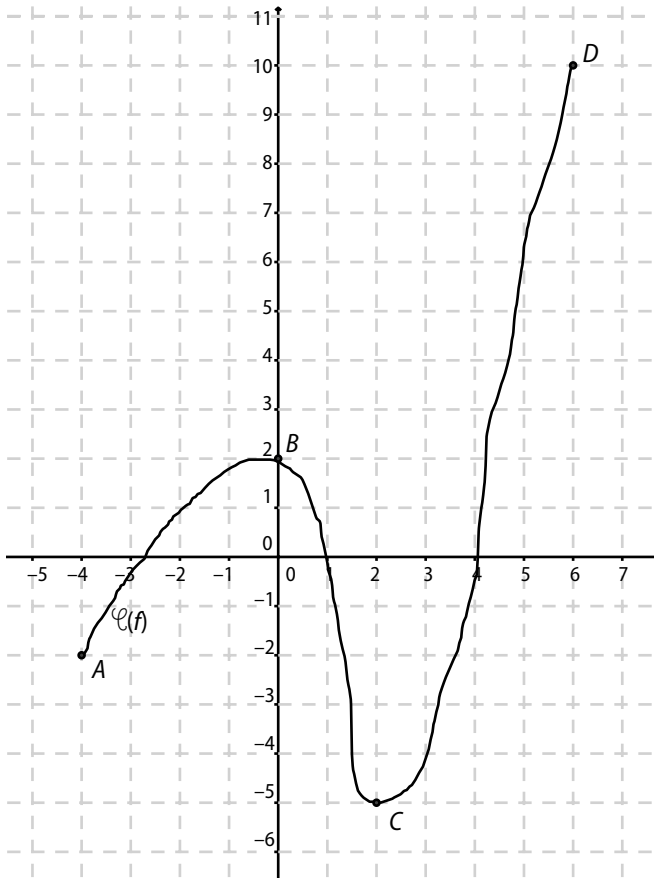
c.



53 a.

$x$	-4	0	2	6
$f(x)$	-2	2	-5	10

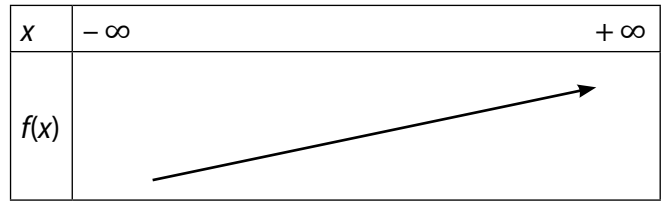
b.



54 1. a.  $a < b \Leftrightarrow 2a < 2b \Leftrightarrow 2a + 5 < 2b + 5 \Leftrightarrow f(a) < f(b)$ .

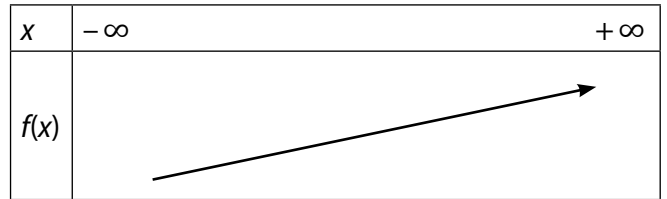
$f$  est donc croissante.

b.



2. a.  $a < b \Leftrightarrow 3a < 3b \Leftrightarrow 3a + 1 < 3b + 1 \Leftrightarrow f(a) < f(b)$ .  
 $f$  est donc croissante.

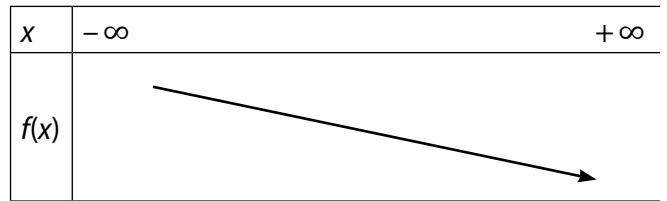
b.



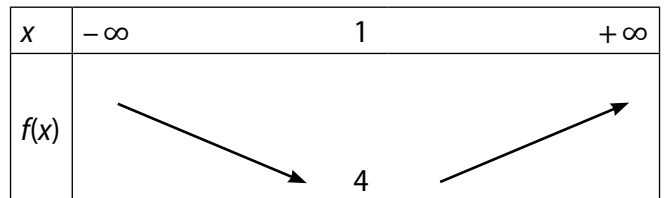
3. a.  $a < b \Leftrightarrow -2a > -2b \Leftrightarrow -2a + 3 > -2b + 3 \Leftrightarrow f(a) > f(b)$ .

$f$  est donc décroissante.

b.



55 a.



b.  $(x - 1)^2 + 4 = x^2 - 2x + 1 + 4 = x^2 - 2x + 5 = f(x)$ .

c.  $1 < a < b \Leftrightarrow 0 < a - 1 < b - 1 \Leftrightarrow (a - 1)^2 < (b - 1)^2 \Leftrightarrow (a - 1)^2 + 4 < (b - 1)^2 + 4 \Leftrightarrow f(a) < f(b)$ .

$f$  est donc croissante sur  $[1; +\infty[$ .

56 a.  $f$  est croissante sur  $[-4; 2]$  donc  $-3 < -1 \Rightarrow f(-3) < f(-1)$ .

b.  $f(-4) = 5; f(10) = -20$  donc  $f(-4) > f(10)$ .

c.  $f$  n'est pas monotone sur  $[0; 3]$ , on ne peut donc pas conclure.

d.  $f$  est décroissante sur  $[2; 10]$  donc  $3 < 4 \Rightarrow f(3) > f(4)$

57 1. a.  $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -4$  ou  $x = 3$ .

b.  $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in ]-6; -4[$ .

c.  $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in ]-4; 3[ \cup ]3; 5[$ .

2. Sur  $[-4 ; 5]$ ,  $f$  est située au dessus de l'axe des abscisses (les points de l'axe compris).

58 a.  $f(2) = -2 ; f([2 ; 5]) = [-3 ; 0]$ .

b.  $-1$  a trois antécédents par  $f$ .

59 a.  $a < b \Leftrightarrow 3a < 3b \Leftrightarrow 3a - 1 < 3b - 1 \Leftrightarrow f(a) < f(b)$ .

$f$  est donc croissante.

b.  $f(x) = 0 \Leftrightarrow 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$ ;

c. Si  $x < \frac{1}{3}$ , alors  $f(x) < 0$ ; si  $x > \frac{1}{3}$ , alors  $f(x) > 0$ .

	Min	atteint pour $x =$	Max	atteint pour $x =$
$[-4 ; 4]$	-4	-6	3	2
$[-6 ; 0]$	-4	-6	1	-3
$[-3 ; 1]$	-3	-2	1,5	1

61 a.  $(x - 2)^2 + 3 = x^2 - 4x + 4 + 3 = x^2 - 4x + 7 = f(x)$ .

b.  $(x - 2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + 3 \geq 3 \Leftrightarrow f(x) \geq 3$ .

c.  $x = 2$ .

62  $x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 \geq -1 \Leftrightarrow f(x) \geq -1$ ; de plus  $f(0) = -1$  donc  $f$  admet  $-1$  comme minimum atteint en 0.

63  $(x + 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow -(x + 1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow 1 - (x + 1)^2 \leq 1$ .  
Donc  $f(x) \leq 1$ ; de plus  $f(-1) = 1$  donc  $f$  admet 1 comme maximum atteint en  $-1$ .

64  $x \geq 0 \Rightarrow x^3 + x \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq 0$ ; de plus  $f(0) = 0$  donc  $f$  admet 0 comme minimum atteint en 0.

65 a.  $x \geq 2 \Leftrightarrow x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow f(x) = x - 2$ ;  $f$  est croissante car c'est une fonction affine de coefficient directeur (1) positif.

•  $x \leq 2 \Leftrightarrow x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow f(x) = -(x - 2)$ ;  $f$  est décroissante car c'est une fonction affine de coefficient directeur  $(-1)$  négatif.

b.

$x$	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$			

Il y a donc un minimum égal à 0 atteint en 2.

66 a.  $x \geq -\frac{2}{3} \Leftrightarrow |3x + 2| = 3x + 2 \Leftrightarrow f(x) = -x - 2$ ;

$f$  est décroissante car c'est une fonction affine de coefficient directeur  $(-1)$  négatif.

•  $x \leq -\frac{2}{3} \Leftrightarrow |3x + 2| = -(3x + 2) \Leftrightarrow f(x) = 5x + 2$ ;  $f$  est croissante car c'est une fonction affine de coefficient directeur (5) positif.

b.

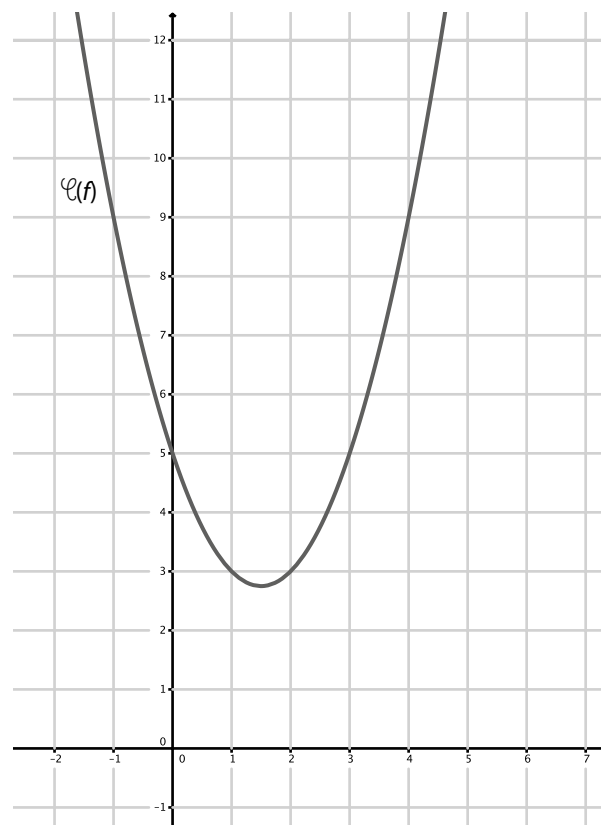
$x$	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	$+\infty$
$f(x)$			

67 a. Aire  $AMN = \frac{1}{2} AN \times MN = \frac{1}{2} (x + 6) \left(-\frac{2}{9}x^2 + 8\right)$ .

b. On conjecture que  $x = 2$ .

c.  $f(2) = \frac{256}{9}$ , donc  $M(2 ; \frac{256}{9})$ .

68 a.



Il y a un minimum égal à 2,75.

b. L'abscisse correspondant au minimum est comprise entre 1 et 2, puis entre 2,7 et 2,8.

c.  $(x - 1,5)^2 + 2,75 = x^2 - 3x + 2,25 + 2,75 = f(x)$ .

69 2.  $f(b) - f(a) = (b - 1)^2 - (a - 1)^2$   
 $= [(b - 1) - (a - 1)] \cdot [(b - 1) + (a - 1)]$   
 $= (b - a)(a + b - 2)$ .

## Faire le point

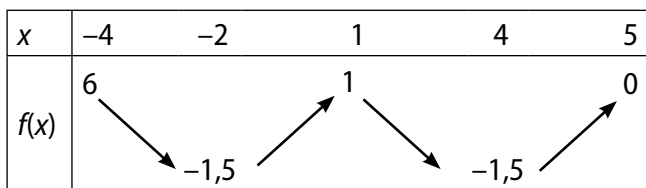
3.  $b - a > 0 ; a + b - 2 < 0 ; b - a > 0 \Leftrightarrow f(b) - f(a) < 0$   
donc  $f$  est décroissante sur  $]-\infty ; 1]$ .

4. Avec un raisonnement analogue, on démontre que  $f$  est croissante sur  $]1 ; +\infty[$ .

5.  $f$  admet donc un minimum égal à 0 atteint en 1.

70

$x$	-4	-2	1	4	5
$f(x)$	6	-1,5	1	-1,5	0



71 Dans la ligne des  $x$ ,  $-3,5$  doit être avant  $-3$  car il est plus petit.

La fonction ne peut décroître de 2 à  $\frac{7}{3}$  car  $2 < \frac{7}{3}$ .

72 a.  $f(0) = \frac{1}{2}$ .

b. Il manque les parenthèses dans la saisie :

$$Y_1 = (X + 1)/(X - 2).$$

73 On doit vérifier que  $f(3,5) = 4$ .

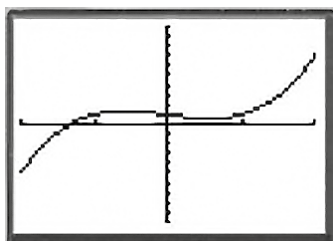
$f(3,5) = (3,5)^2 - 3(3,5) + 2 = 3,75 ; 3,75 \neq 4$  donc l'élève a tort.

74 a.  $f(5) = 6 ; f(7) = 22$  donc  $f(x) > 0$  sur  $[5 ; 7]$ .

b.  $f(2) = -3 ; f(7) = 22$  donc on ne peut répondre.

c.  $f(2) = -3 ; f(3) = -2$  donc  $f(x) < 0$  sur  $[2 ; 3]$ .

75 a.



$x$	-2	-0,6	0,6	2
$f(x)$	-5			7

b. Le minimum appartient à  $[0,6 ; 0,7]$

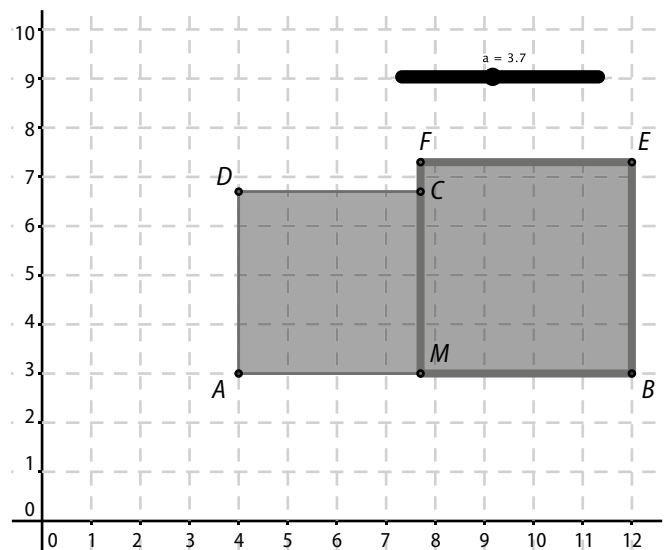
76 Le calcul de  $f(0,5) = 0,5^3 - 0,5 + 1 = 0,625$  suffit à prouver que la fonction n'est pas constante sur  $[-1 ; 1]$ .

77 Démarche 1

	AM	MB	Aire totale
1		7	50
2		6	40
3		5	34
4		4	32
5		3	34
6		2	40
7		1	50

Il semble y avoir un minimum pour  $AM = 4$ , mais il faudrait faire des calculs plus précis pour affiner le résultat, par exemple entre 3 et 5 avec un pas de 0,1.

Démarche 2



On peut obtenir une conjecture en prenant un pas assez petit pour le curseur, mais on n'a pas la valeur exacte, du moins on ne peut l'assurer.

Démarche 3 : mêmes remarques que pour la démarche 2.

Démarche 4 :  $f(x) = 2x^2 - 16x + 64 = 2(x - 4)^2 + 32$ .

Un carré étant toujours positif ou nul, la fonction est donc minimale lorsque ce carré est nul, c'est à dire lorsque  $x = 4$ .

## Se tester

78 à 81 Voir Manuel de l'élève page 260.

## Exercices d'approfondissement

**82**  $f(0) = -2 \Leftrightarrow \frac{b}{-1} = -2 \Leftrightarrow b = 2.$

$f(2) = 0 \Leftrightarrow \frac{2a+2}{2-1} = 0 \Leftrightarrow 2a+2=0 \Leftrightarrow a=-1.$

**83**  $g(0) = 0 \Leftrightarrow -4a+c=0; g(-2) = 3 \Leftrightarrow -2b+c=3;$   
 $g(2) = 1 \Leftrightarrow 2b+c=1.$

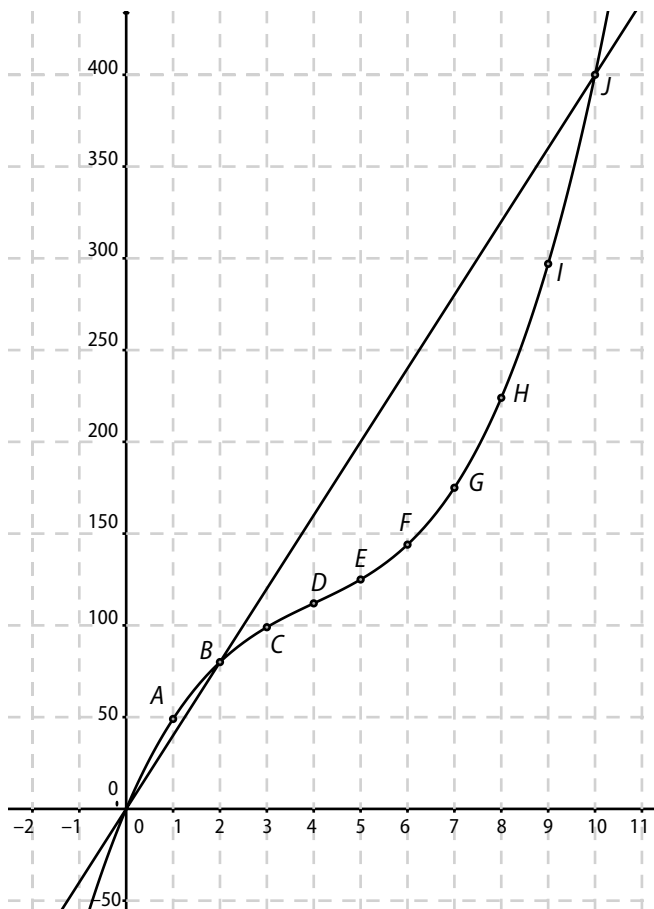
On obtient alors  $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}$  et  $c = 2.$

**84 a.**

$x$	0	1	2	3	4	5
$C(x)$	0	49	80	99	112	125

$x$	6	7	8	9	10
$C(x)$	144	175	224	297	400

**b. c. d.**



**e.**  $B(x) = R(x) - C(x) = -x^3 + 12x^2 - 20x.$

**f.** Il y a bénéfice si la courbe représentative de la recette est « au-dessus » de celle représentant le coût. Graphiquement, c'est le cas lorsque  $2 < x < 10.$

**85** Volume du verre :  $\frac{\pi \times 2^2 \times 6}{3} = 8\pi.$

Le théorème de Thalès donne :  $\frac{r}{x} = \frac{2}{6}$  ( $r$  étant le rayon du cône de hauteur  $x$ ). On a donc :  $r = \frac{1}{3}x.$

Volume du liquide :  $V(x) = \frac{\pi \times r^2 \times x}{3} = \frac{\pi \times x^3}{27}.$

Pour que le verre soit à moitié plein, il faut :

$V(x) = \frac{1}{2}V = 4\pi \Leftrightarrow \frac{\pi x^3}{27} = 4\pi \Leftrightarrow x^3 = 108.$

$x = \sqrt[3]{108}$  d'où  $x \approx 4,76.$

**86 a.**  $f(x) = 3x^2 - 2x + 4.$

**b.** Ajouter 1 à  $x$ . • Prendre la racine carrée du résultat. • Prendre l'inverse du résultat. • Soustraire le résultat à 1. • Ajouter le carré de  $x$  au résultat.

**87 a.**

$x$	$-\infty$	5	$+\infty$
$f(x)$	↗		↗

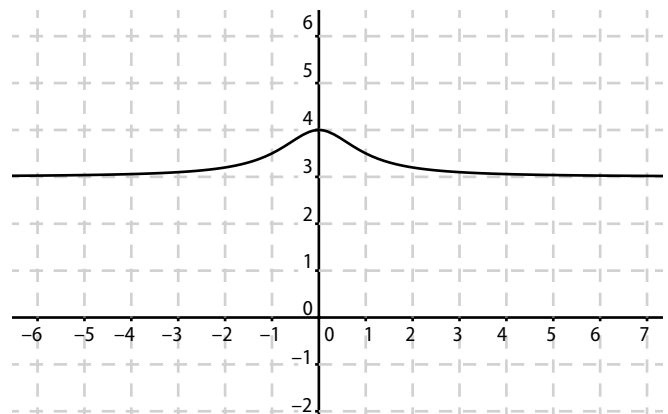
**b.**  $-2 + \frac{7}{-x+5} = \frac{-2(-x+5)+7}{-x+5} = \frac{2x-3}{-x+5} = f(x).$

**c.** Ajouter 5 à l'opposé de  $x$ . • Prendre l'inverse du résultat. • Multiplier le résultat par 7. • Soustraire 2 au résultat.

**d.**  $a < b \Rightarrow -a+5 > -b+5 \Rightarrow \frac{7}{-a+5} < \frac{7}{-b+5}$   
 $\Rightarrow -2 + \frac{7}{-a+5} < -2 + \frac{7}{-b+5}.$

Donc  $f$  est croissante sur  $]5; +\infty[.$

**88 a.**



On peut aussi utiliser la calculatrice.

On conjecture que la fonction  $f$  présente un maximum égal à 4 atteint en 0.

**b.** Pour tout nombre réel  $x$ ,

$$3 + \frac{1}{x^2 + 1} = \frac{3(x^2 + 1) + 1}{x^2 + 1} = \frac{3x^2 + 4}{x^2 + 1} = f(x).$$

**c.** Pour tout nombre réel  $x$ ,

$$\begin{aligned} x^2 \geq 0 &\Rightarrow x^2 + 1 \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{x^2 + 1} \leq 1 \\ &\Rightarrow 3 + \frac{1}{x^2 + 1} \leq 4 \\ &\Rightarrow f(x) \leq f(0). \end{aligned}$$

**89** On désigne par  $h_0$  la hauteur initiale des bougies et par  $t$  le temps, en heures.

Pour la première bougie, on a :  $h_1(t) = h_0 - \frac{h_0}{4} t$ .

Pour la deuxième bougie, on a :  $h_2(t) = h_0 - \frac{h_0}{5} t$ .

Pour que la deuxième bougie ait une hauteur double de la première, il faut que :

$$\begin{aligned} h_2(t) = 2h_1(t) &\Leftrightarrow h_0 - \frac{h_0}{5} t = 2\left(h_0 - \frac{h_0}{4} t\right) \\ &\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{5} t = 2 - \frac{1}{2} t \\ &\Leftrightarrow \frac{3}{10} t = 1 \\ &\Leftrightarrow t = \frac{10}{3}. \end{aligned}$$

On obtient donc un temps de 3 h 20 min.

**90 1. a.**  $f(a + 1) = 4(a + 1) + 3 = 4a + 7$ .

$4a + 7 > 4a + 3 \Leftrightarrow f(a + 1) > f(a)$ , donc  $f(a)$  n'est pas un maximum pour  $f$ .

**b.**  $f(a - 1) = 4(a - 1) + 3 = 4a - 1$ .

$4a - 1 < 4a + 3 \Leftrightarrow f(a - 1) < f(a)$ , donc  $f(a)$  n'est pas un minimum pour  $f$ .

**2. a.**  $g(a + 1) = (a + 1)^3$ .

$(a + 1)^3 > a^3 \Leftrightarrow g(a + 1) > g(a)$ , donc  $g(a)$  n'est pas un maximum pour  $g$ .

**b.**  $g(a - 1) = (a - 1)^3$ .

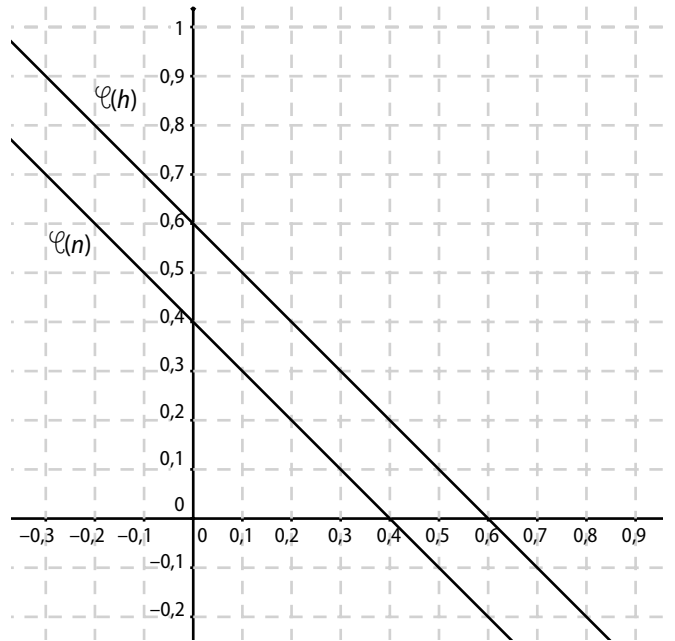
$(a - 1)^3 < a^3 \Leftrightarrow g(a - 1) < g(a)$ , donc  $g(a)$  n'est pas un minimum pour  $g$ .

**91 1.**  $D_n = [0 ; 4]$  ;  $D_h = [0 ; 0,6]$ .

**2.** Les deux fonctions sont affines de coefficients directeurs négatifs (-1), elles sont donc décroissantes.

Les quantités de matières de  $N_2$  et  $H_2$  diminuent.

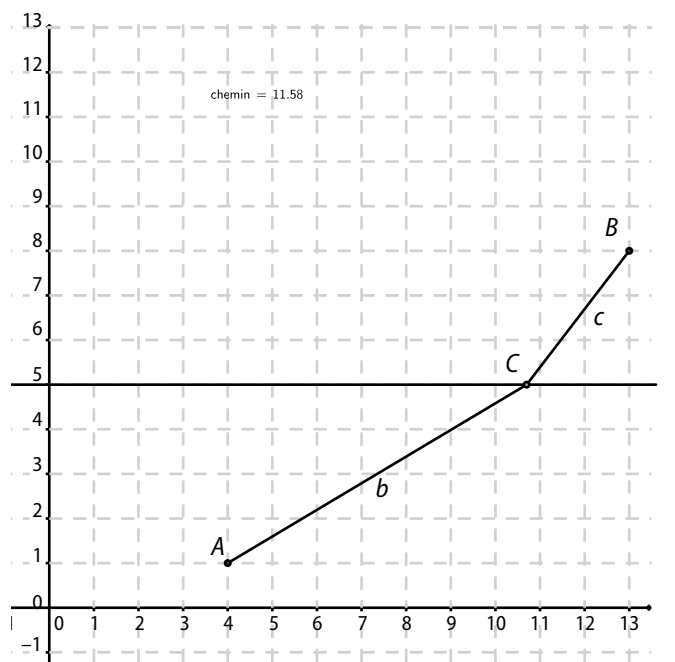
**3.**



**4. a.** C'est  $N_2$  dont la quantité s'annule en premier.  $n(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0,4$ .

**b.** Il reste  $H_2$  en quantité 0,2 et il se crée  $NH_3$  en quantité 0,4.

**92**



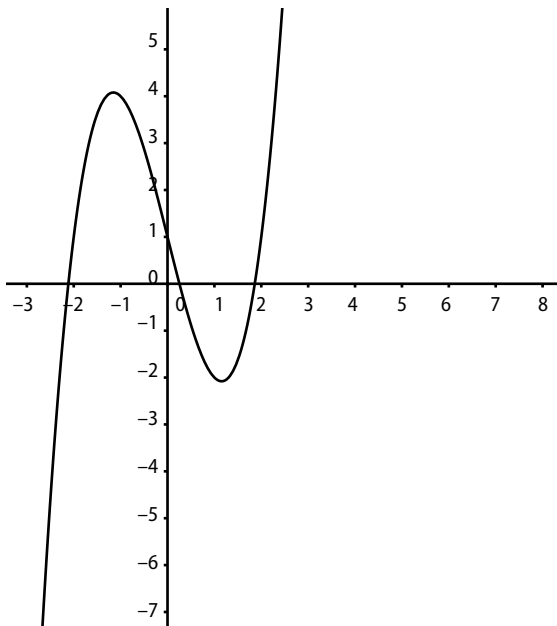
La distance de la rivière étant constante, le chemin le plus court correspond à l'alignement des points A, B et C.

Le théorème de Thalès donne :

$$\frac{x}{40} = \frac{100 - x}{30} \Leftrightarrow 30x = 4000 - 40x$$

On obtient donc  $70x = 4000 \Leftrightarrow x = \frac{400}{7} \approx 57,14$ .

93



- a. Faux  $f(0) = 1$  et  $f(1) = -2$ .
- b. Faux  $f(3) = 16$ .
- c. Faux.

**94 Démarche 1**

Avec la calculatrice ou Geogebra :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f(x)	↗		↗

**Démarche 2**

a. Pour tout x de  $]-1; +\infty[$ ,

$$1 - \frac{2}{x+1} = \frac{x+1-2}{x+1} = \frac{x-1}{x+1} = f(x).$$

b. Pour tout a, b de  $]-1; +\infty[$ ,

$$\begin{aligned} a < b &\Rightarrow a+1 < b+1 \Rightarrow \frac{-2}{a+1} < \frac{-2}{b+1} \\ &\Rightarrow 1 - \frac{2}{a+1} < 1 - \frac{2}{b+1} \Rightarrow f(a) < f(b). \end{aligned}$$

c. f est donc croissante sur  $]1; +\infty[$ .

**Démarche 3**

a. Pour tout a, b de  $]-1; +\infty[$ ,

$$\begin{aligned} f(a) - f(b) &= \left(1 - \frac{2}{a+1}\right) - \left(1 - \frac{2}{b+1}\right) \\ &= \frac{-2}{a+1} + \frac{-2}{b+1} = \frac{-2(b+1) + 2(a+1)}{(a+1)(b+1)} \\ &= \frac{2(a-b)}{(a+1)(b+1)}. \end{aligned}$$

b. Sur  $]-1; +\infty[$ ,  $a+1$  et  $b+1$  sont positifs,  $f(a) - f(b)$  est du même signe que  $a - b$ .  
f est donc croissante sur  $]-1; +\infty[$ .

**95 1. a.** Pour tout a, b de  $\mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} f(a) - f(b) &= a^3 - a^2 - a - b^3 + b^2 + b \\ &= (a-b)(a^2 + ab + b^2 - a - b - 1) \\ &= a^3 + a^2b + ab^2 - a^2 - ab - a - a^2b - ab^2 - b^3 + ab + b^2 + b \\ &= a^3 - a^2 - a - b^3 + b^2 + b = f(a) - f(b) \\ a^2 + ab + b^2 - a - b - 1 &= a(a-1) + b(b-1) + ab - 1. \end{aligned}$$

b. Sur  $]1; +\infty[$ ,  $a(a-1) > 0$ ,  $b(b-1) > 0$  et  $ab - 1 > 0$ .

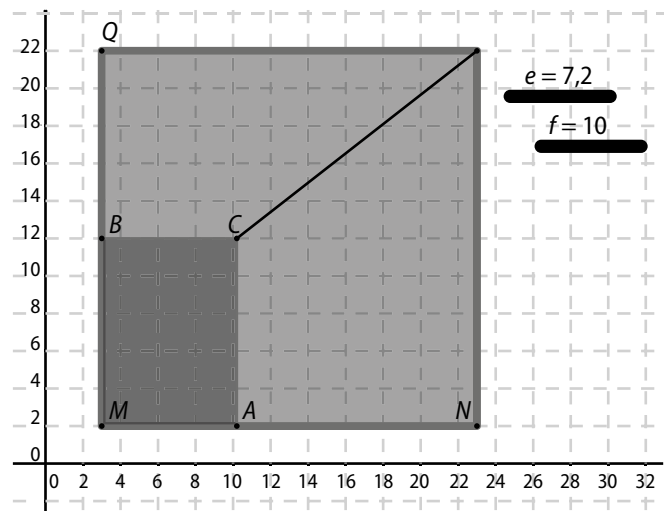
c. On en déduit que  $a(a-1) + b(b-1) + ab - 1 > 0$  et donc que  $f(a) - f(b)$  est du même signe que  $a - b$ .  
f est donc croissante sur  $]1; +\infty[$ .

2.  $a < -\frac{1}{3}$  et  $b < -\frac{1}{3}$ , donc  $a(a-1) > \frac{4}{9}$ ,  $b(b-1) > \frac{4}{9}$  et  $ab - 1 > -\frac{8}{9}$ .

On en déduit que  $a(a-1) + b(b-1) + ab - 1 > 0$  et donc que  $f(a) - f(b)$  est du même signe que  $a - b$ .

f est donc croissante sur  $]-\infty; -\frac{1}{3}[$ .

**96**



**97 a.** Pour tout a, b de  $\mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} a < b < 2 &\Leftrightarrow 3a - 6 < 3b - 6 < 0 \\ &\Rightarrow (3a - 6)^2 > (3b - 6)^2 \\ &\Rightarrow (3a - 6)^2 + 1 > (3b - 6)^2 + 1 \\ &\Rightarrow f(a) > f(b). \end{aligned}$$

f est donc décroissante sur  $]-\infty; 2[$ .

b. De même sur  $]2; +\infty[$ .

c. Un carré est toujours positif ou nul, donc  $f(x) \geq 1$ . Comme  $f(2) = 1$ , f admet un minimum égal à 1 et atteint pour  $x = 2$ .

**98 1.** Pour tout nombre réel  $t$ ,  
 $(-0,7t + 1,5)(7t + 1) = 0,49t^2 - 0,7t + 10,5t + 1,5$   
 $= h(t).$

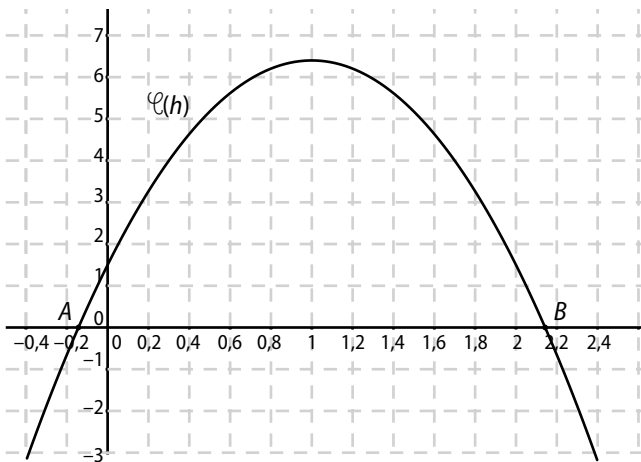
**2.**  $h(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{7}$  ou  $t = \frac{1,5}{0,7} = 2,14.$   
 $t > 0 \Rightarrow t = 2,14.$

**3. a.**

$x$	0	1	2,14
$f(x)$	1,5	6,4	0

**b.** Le maximum est de 6,4 atteint pour  $t = 1.$

**4.**



**99 1.**  $f(0) = -3 ; f(2) = 7.$

**2.**

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+

**3. a.** Pour tout  $a, b$  de  $\mathbb{R}, a < b \Rightarrow a^3 < b^3$  car la fonction cube est croissante.

$a < b \Rightarrow a - 3 < b - 3$  car fonction affine croissante.

Par somme, on a donc  $f(a) < f(b).$

**b.**  $f$  est donc croissante sur  $\mathbb{R}^+.$

**4.**  $f(1) < 0$  et  $f(2) > 0$ , donc  $1 < \alpha < 2.$

**5.**  $1,2 < \alpha < 1,3.$

**100** Posons  $BM = x, x \in [0 ; 9].$

L'angle  $\widehat{ABC}$  mesure  $45^\circ$ , donc  $\widehat{QBM}$  aussi.

Le triangle  $BMQ$  est donc rectangle isocèle, ainsi

$MQ = BM = x.$  Aire  $MNPQ = x(9 - 2x).$

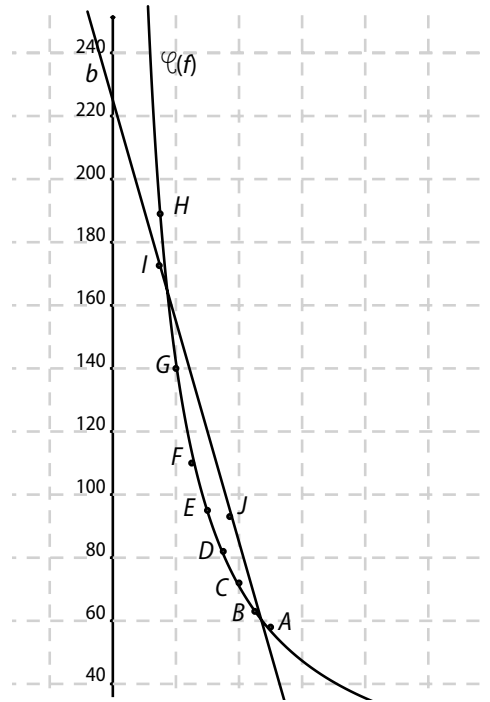
Cette aire est maximale pour  $x = 2,25.$

**101 a.**  $f(0) = g(0) = 1.$

**b.** Les deux fonctions semblent égales.

**c.**  $(x^2 + 2)(x + 1) = x^3 + x^2 + 2x + 2$  entraîne que  $f(x) = g(x).$

**102 1. a. b.**



**c.**  $P(V) = -3,5V + 225.$

**2. a.**

$x$	15	20	25	30	35	40	45	50
$f(x)$	189	142	114	95	81	71	63	57

**b.** Voir courbe ci-dessus.

**3.** La modélisation est meilleure.

**4.**  $P = \frac{2840}{V}.$

**103** On note  $T = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}.$

**a.** Pour tout  $a, b$  de  $\mathbb{R}$  tels que  $a < b,$

$T = \frac{(3a + 1) - (3b + 1)}{a - b} = \frac{3a - 3b}{a - b} = 3$  et  $3 > 0$ , donc  $f$  est croissante.

**b.** Pour tout  $a, b$  de  $[2 ; +\infty[$  tels que  $a < b,$

$T = \frac{(a^2 - 4a + 3) - (b^2 - 4b + 3)}{a - b} = \frac{a^2 - b^2 - 4a + 4b}{a - b}$   
 $= \frac{(a - b)(a + b) - 4(a + b)}{a - b} = a + b - 4.$

$a > 2$  et  $b > 2$  donc  $T > 0 ; f$  est croissante.

**c.** Pour tout  $a, b$  de  $]3 ; +\infty[$  tels que  $a < b,$

$T = \frac{\frac{a+1}{a-3} - \frac{b+1}{b-3}}{a-b} = \frac{(a+1)(b-3) - (b+1)(a-3)}{(a-3)(b-3)(a-b)}$   
 $= \frac{-4a + 4b}{(a-3)(b-3)(a-b)} = \frac{-4}{(a-3)(b-3)}.$

$a > 3$  et  $b > 2$  donc  $T > 0, f$  est décroissante.

d. Pour tout  $a, b$  de  $\left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$  tels que  $a < b$ ,

$$T = \frac{\sqrt{2a-1} - \sqrt{2b-1}}{a-b}$$

$$= \frac{(\sqrt{2a-1} - \sqrt{2b-1})(\sqrt{2a-1} + \sqrt{2b-1})}{(a-b)(\sqrt{2a-1} + \sqrt{2b-1})}$$

$$= \frac{2a-2b}{(a-b)(\sqrt{2a-1} + \sqrt{2b-1})} = \frac{2}{\sqrt{2a-1} + \sqrt{2b-1}}$$

$T > 0$ ,  $f$  est croissante.

104 a. Les solutions sont : 1, 2 et 3.

b. Pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$ , donc  $f(x) = 0$  lorsque  $x = 1$ ,  $x = 2$  ou  $x = 3$ .

105 1. a.  $\frac{m}{1,68^2} < 25 \Leftrightarrow m < 25 \times 1,68^2 \Leftrightarrow m < 70,56$ .

b.  $\frac{75}{T^2} < 25 \Leftrightarrow T^2 > \frac{75}{25} \Leftrightarrow T > \sqrt{3} \Leftrightarrow T > 1,73$ .

2. a.  $f(x) = \frac{m}{1,8^2} = \frac{m}{3,24}$ .

b.  $\frac{m}{3,24} = 25 \Leftrightarrow m = 3,24 \times 25 = 81$ .

Un homme mesurant 1,80 m ne doit pas peser plus de 81 kg pour ne pas être en surpoids.

106 La fonction semble constante sur l'écran.

Or,  $f(1,5) \approx 1,40$ ;  $f(2) \approx 1,38$ ;  $f(2,5) \approx 1,42$ .

Les valeurs sont trop proches pour que l'affichage puisse les différencier.

107 a. Pour tout  $x > 0$ , aire de la base :  $x \times 2x = 2x^2$ .

Hauteur :  $\frac{\text{Volume}}{\text{Aire de la base}} = \frac{5}{2x^2}$ .

Surface latérale = Hauteur  $\times$  Périmètre

$$= \frac{5}{2x^2} \times (x + 2x + x + 2x)$$

$$= \frac{5}{2x^2} \times 6x = \frac{15}{x}$$

b. Coût :  $500 \times 2x^2 + 400 \times \frac{15}{x} = 1\,000x^2 + \frac{6\,000}{x}$ .

À la calculatrice, on trouve un minimum pour  $x = 1,44$ .

108  $f(5) = 5 \Leftrightarrow 5a + b = 5$ .

$f(1) \leq f(2) \Leftrightarrow a + b \leq 2a + b \Leftrightarrow a \geq 0$ .

$f(3) \geq f(4) \Leftrightarrow 3a + b \geq 4a + b \Leftrightarrow a \leq 0$ .

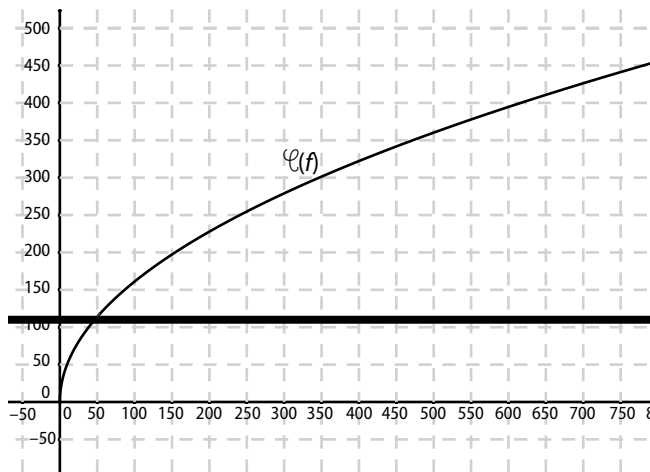
D'où  $a = 0$  et  $b = 5$ .

109 1. a.

$t$	10	15	20	25	30	35
$f(t)$	50,9	62,4	72,0	80,1	88,2	95,3

$t$	40	45	50	55	60
$f(t)$	101,9	108,1	113,9	119,5	124,8

b.



c. Graphiquement 46,6.

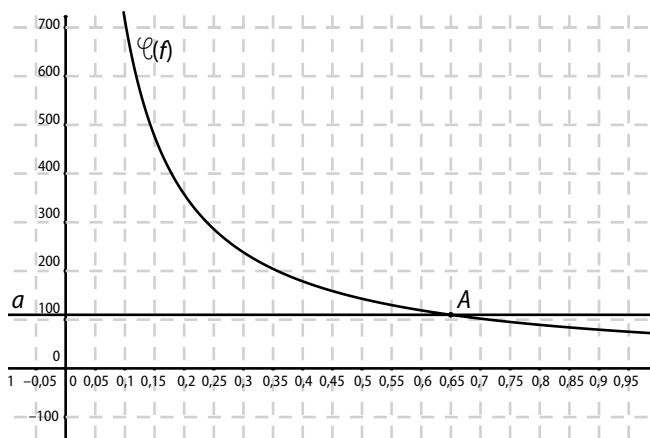
$$16,11\sqrt{t} = 110 \Leftrightarrow t = \left(\frac{110}{16,11}\right)^2 \approx 46,68$$

2.a.

$l$	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35
$f(l)$	714,8	476,5	357,4	285,9	238,3	204,2

$l$	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65
$f(l)$	178,7	158,8	143,0	130,0	119,1	110,0

b.



c. Graphiquement 0,65.

$$\frac{71,48}{l} = 110 \Leftrightarrow l = \frac{71,48}{110} = 0,65$$

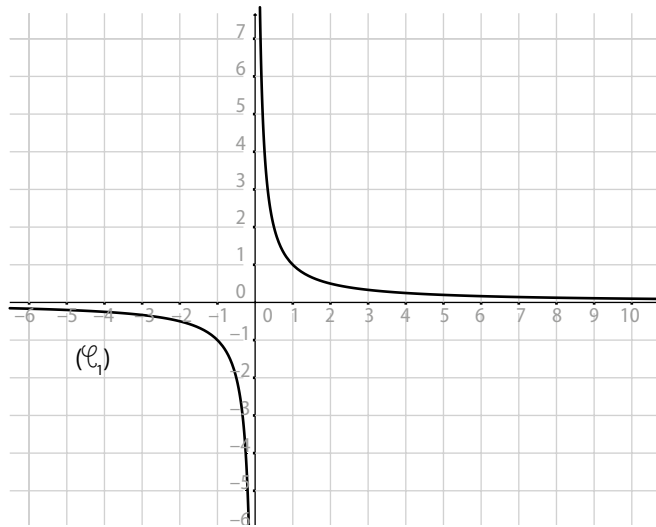
**110 a.** Aire  $ADM = \frac{lx}{2}$ ; Aire  $MBC = \frac{l(L-x)}{2}$ ;

Aire  $MDC = lL - \frac{lx}{2} - \frac{l(L-x)}{2}$

**c.** Aire  $MDC = \frac{2lL - lx - l(L-x)}{2} = \frac{lL}{2}$

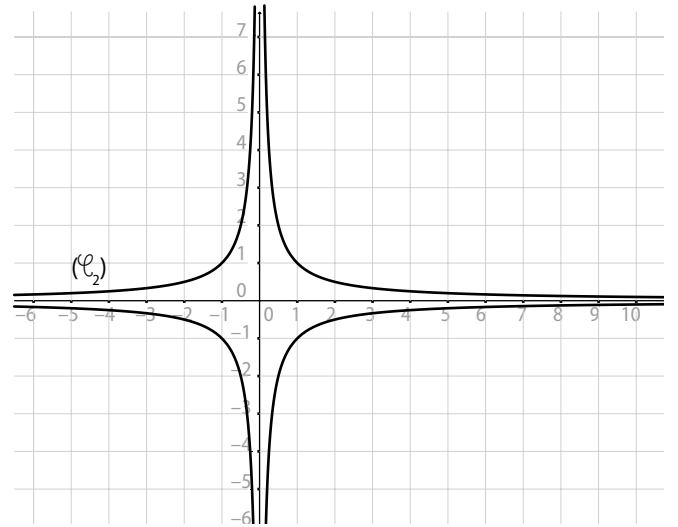
Le triangle  $MDC$  a donc une aire moitié de celle du rectangle  $ABCD$ .

**111 a.**  $xy = 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{x}$  avec  $x \neq 0$ .

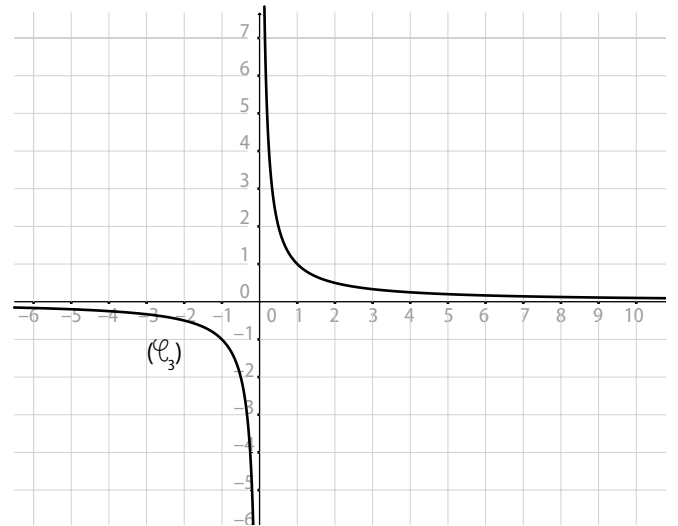


**b.**  $x^2y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{x}$  avec  $x \neq 0$ .

ou  $y = -\frac{1}{x}$  avec  $x \neq 0$ .



**c.**  $x^3y^3 = 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{x}$  avec  $x \neq 0$ .



# 11 fonctions usuelles

## Activités d'introduction

### 1 fonction affine par intervalles

1. a. D'après le coefficient directeur de chaque portion de droite, le premier déplacement se fait en vélo, puis en bus et enfin à pied.

b. Pour  $x = 1$ ,  $y \approx 140$ . Il a parcouru  $210 - 140 = 70$  km.

c. Environ 1 h 40 min.

d. De 40 min à 120 min, Fofona a parcouru 150 km, donc  $v = \frac{150}{\frac{4}{3}} = 150 \times \frac{3}{4} = 112,5 \text{ km.h}^{-1}$ .

Sur cet intervalle, la vitesse moyenne est constante donc, pendant la 2<sup>e</sup> heure, la vitesse moyenne est de  $112,5 \text{ km.h}^{-1}$ .

2. a. Cette droite passe par les points  $A(0 ; 210)$  et  $B\left(\frac{2}{3} ; 180\right)$  donc  $m = \frac{180 - 210}{\frac{2}{3} - 0} = -90$ .

Puis  $y_A = -90 \times x_A + p \Leftrightarrow p = 210$ . Ainsi  $f_1 : t \mapsto -90t + 210$ .

b. Pour  $f_2 : m_2 = \frac{30 - 180}{2 - \frac{2}{3}} = -112,5$ .

$30 = -112,5 \times 2 + p \Leftrightarrow p = 255$ .

$f_2 : t \mapsto -112,5t + 255$ .

Pour  $f_3 : m_3 = \frac{0 - 30}{\frac{11}{3} - \frac{6}{3}} = -18$ .

$0 = \frac{11}{3} \times (-18) + p \Leftrightarrow p = 66$ .

$f_3 : t \mapsto -18t + 66$ .

### 2 Une parabole

1. b.  $x^2 = y$ .

2. a. Tableau de signes de  $f$  sur  $[-3 ; 3]$  :

$x$	-3	0	3
$f(x)$		0	
	+		+

Tableau de variation de  $f$  sur  $[-3 ; 3]$  :

$x$	-3	0	3
$f(x)$	9	0	9

b. Oui, l'axe des ordonnées.

### 3 Figure de diffraction

1. a. Voir ci-contre.

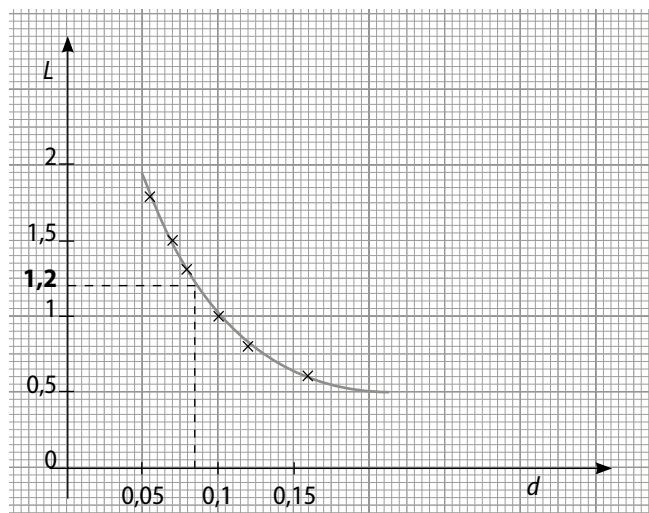
b. Ce n'est ni une fonction linéaire, ni une fonction affine puisque la courbe n'est pas une droite.

Ce n'est pas une fonction carré puisque la courbe n'est pas une parabole.

c. Si  $L = 1,2$  cm, alors  $d = 0,085$  (pointillés sur le 1. a.).

2. a.

$d$	0,08	0,056	0,072
$g(d)$	0,769	0,556	0,667
$d$	0,10	0,12	0,16
$g(d)$	1	1,25	1,667

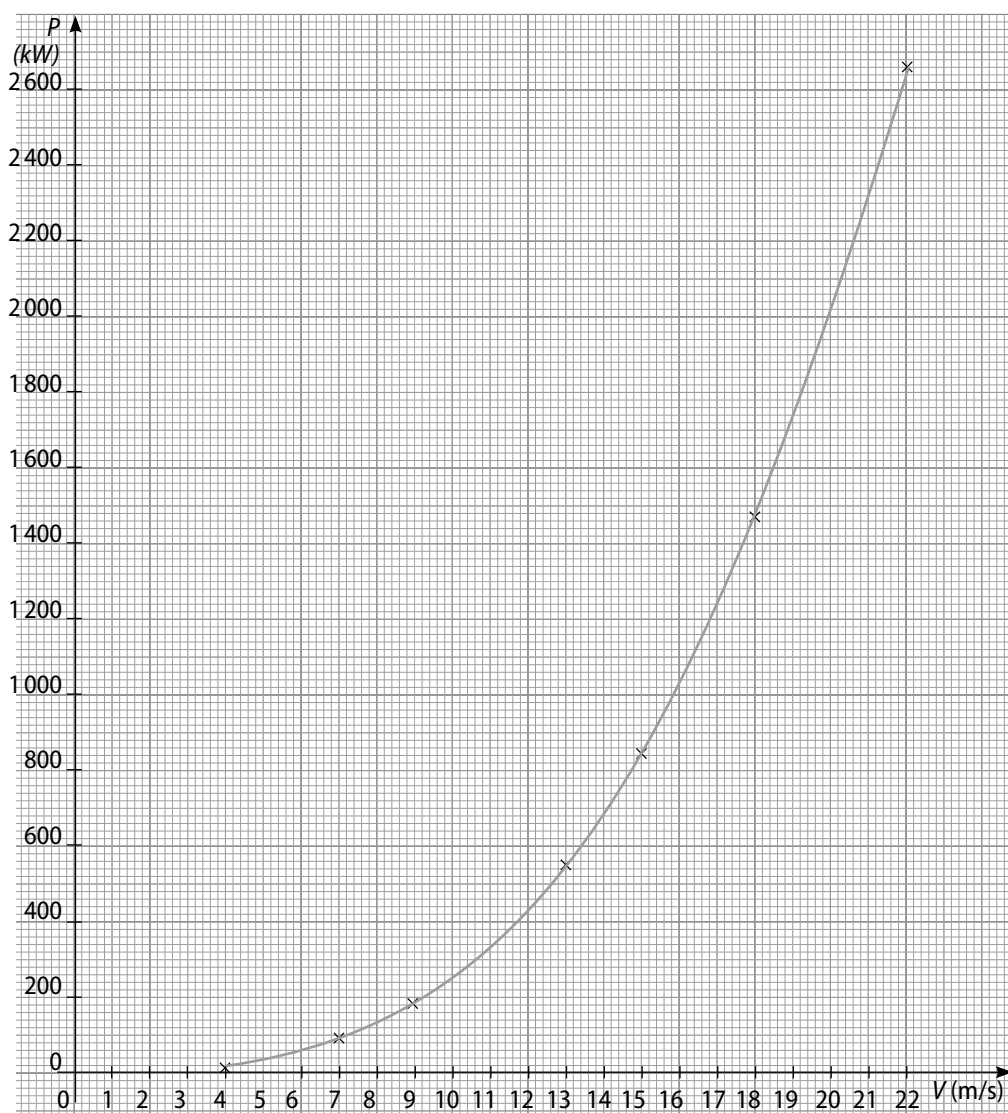


$$\frac{0,769}{0,12} \approx 10; \frac{0,556}{0,056} \approx 10; \frac{0,667}{0,072} \approx 10; \frac{1}{0,10} \approx 10; \frac{1,25}{0,12} \approx 10; \frac{1,667}{0,16} \approx 10. \quad g(d) = 10d \text{ pour } d \in [0,056; 0,16].$$

b. Pour  $d \in [0,056; 0,16]$ ,  $g(d) = \frac{1}{f(d)} \Leftrightarrow f(d) = \frac{1}{g(d)}$  et donc  $f(d) = \frac{1}{10d} = 0,1 \frac{1}{d}$ .

### 4 Puissance d'une éolienne

1. a.

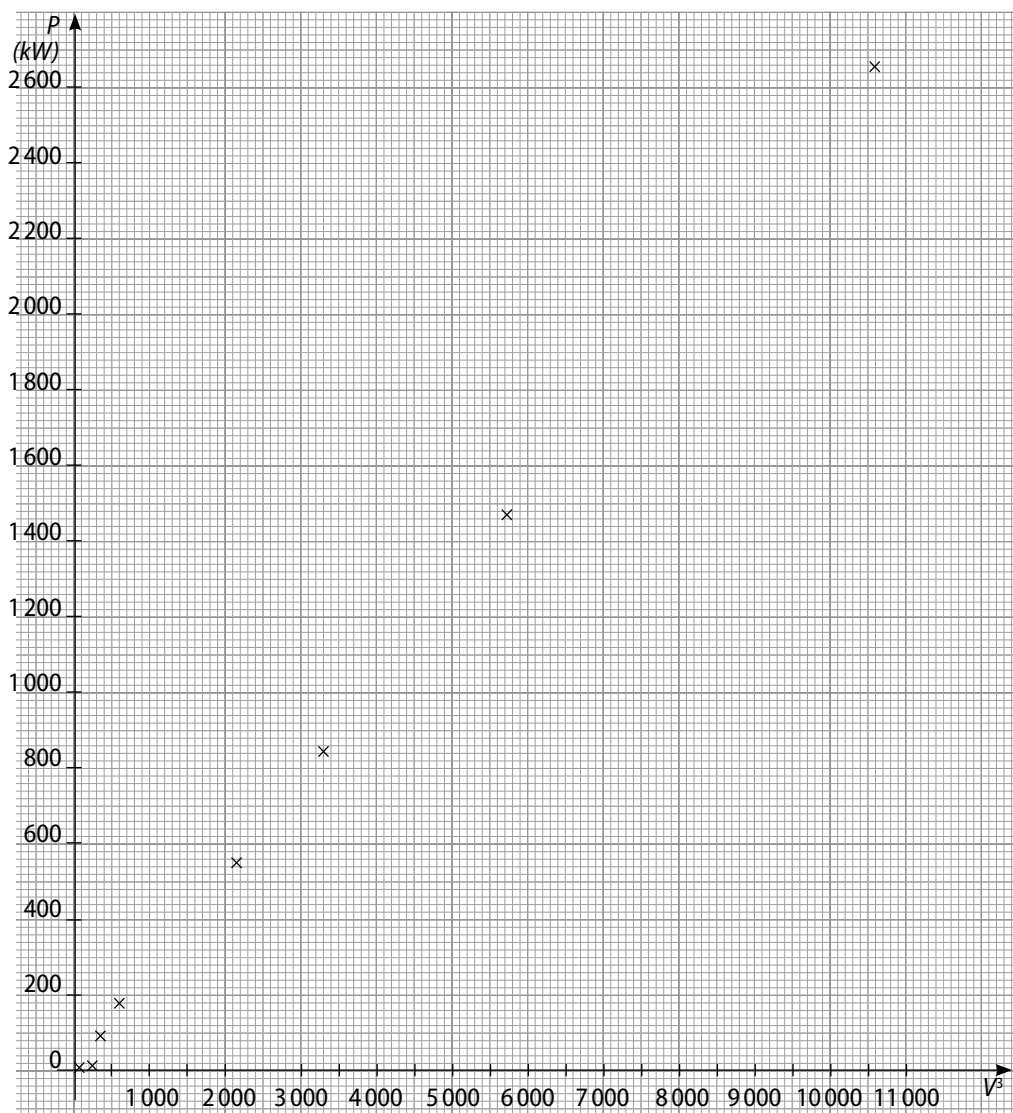


b. Non, puisqu'elle n'est ni une droite, ni une parabole, ni une hyperbole.

2. a.

$V^3$	27	64	343	729	2 197	3 375	5 832	10 648
$P$	7	16	85	182	550	844	1 458	2 662

b.



c. Cette fonction est affine.  $f: V^3 \mapsto 4P$  et donc  $P = \frac{1}{4}V^3$ .

## Savoir-faire

3  $f(-3) = 2(-3) + 1 = -5$ .

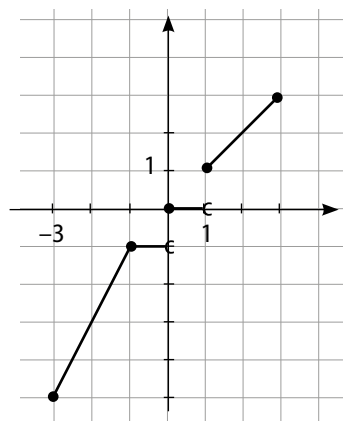
$f(-1) = 2(-1) + 1 = -1$ .

Si  $x \in [-1; 0[$ ,  $E(x) = -1$ .

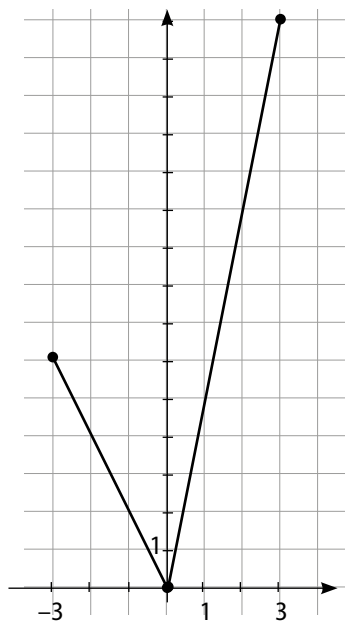
Si  $x \in [0; 1[$ ,  $E(x) = 0$ .

$f(1) = |1| = 1$ .

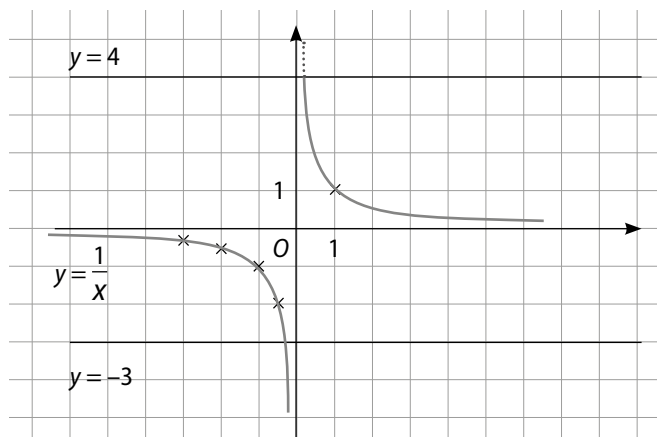
$f(3) = |3| = 3$ .



- 4  $f(-3) = 2|-3| = 6$ .  
 $f(0) = 2|0| = 0$ .  
 $f(3) = 5E(3) = 15$ .



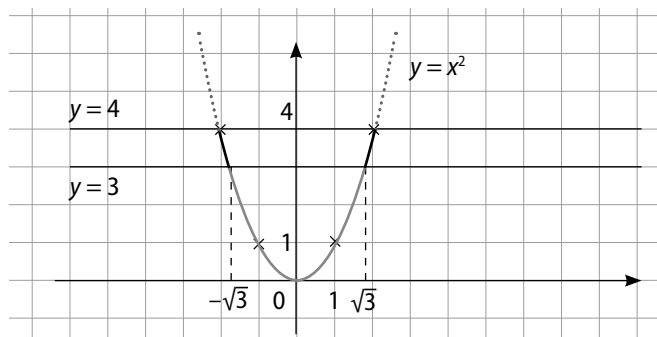
5 et 6



$\frac{1}{x} > 4$  pour  $0 < x < \frac{1}{4}$ .

$\frac{1}{x} + 3 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} \geq -3$  pour  $x \leq -\frac{1}{3}$  ou  $0 < x$ .

7 et 8



$x^2 \geq 4$  pour  $\begin{cases} x \leq -2 \\ \text{ou} \\ x \geq 2 \end{cases}$ , soit pour  $x \in ]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[$ .

$x^2 - 2 < 1 \Leftrightarrow x^2 < 3 \Leftrightarrow x \in ]-\sqrt{3}; \sqrt{3}[$ .

11 Avec le tableau de variation de la fonction cube sur  $[-3; 2]$ :

$x$	-3	2
$x^3$	-27	8

Pour  $a \in [-3; 2], -27 \leq a^3 \leq 8$ .

12 Avec le tableau de variation de la fonction inverse sur  $[1; 7]$ :

$x$	1	7
$\frac{1}{x}$	1	$\frac{1}{7}$

Pour  $a \in [1; 7], \frac{1}{7} \leq \frac{1}{a} \leq 1$ .

13 a. On utilise la fonction carré puis la fonction affine  $x \mapsto -x + 8$ .  $a$  et  $b$  désignent deux nombres réels de  $[-2; 2]$  tels que  $a \leq b$ . La fonction carré est décroissante sur  $[-2; 0]$  puis croissante sur  $[0; 2]$  donc, sur  $[-2; 0], a^2 \geq b^2$  puis, sur  $[0; 2], a^2 \leq b^2$ .

Ensuite, la fonction affine  $x \mapsto -x + 8$  est décroissante sur  $\mathbb{R}$ . Donc, sur  $[-2; 0], -a^2 + 8 \leq -b^2 + 8$ . Puis, sur  $[0; 2], -a^2 + 8 \geq -b^2 + 8$ .

Ainsi, sur  $[-2; 0], f(a) \leq f(b)$  et sur  $[0; 2], f(a) \geq f(b)$ .

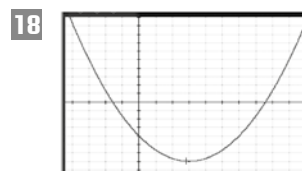
Finalement,  $f$  est croissante sur  $[-2; 0]$  puis décroissante sur  $[0; 2]$ .

b. Sur  $]0; +\infty[$ , la fonction inverse est décroissante donc, pour  $a$  et  $b$  de  $]0; +\infty[$  tels que  $a \leq b, \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$ .

Puis la fonction affine  $x \mapsto 3x - 7$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ , donc  $3 \times \frac{1}{a} - 7 \geq 3 \times \frac{1}{b} - 7$ , soit  $\frac{3}{a} - 7 \geq \frac{3}{b} - 7$  donc  $f(a) \geq f(b)$ .  $f$  est donc décroissante sur  $]0; +\infty[$ .

16  $x \xrightarrow{f} x^3 \xrightarrow{g} -2x^3. g \circ f(x) = -2x^3$ .

17  $x \xrightarrow{u} \frac{1}{x} \xrightarrow{v} \frac{8}{x}$ ; fonction inverse puis fonction linéaire  $x \mapsto 8x. f = v \circ u$  où  $u: x \mapsto \frac{1}{x}$  et  $v: x \mapsto 8x$ .



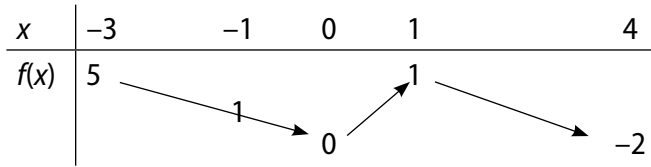
19 Tableau de valeurs de  $f$ :

$x$	-5	-4	-3	-2	-1
$f(x)$	0,9	1,2	1,8	3,3	10
$x$	1	2	3	4	5
$f(x)$	4	0,3	-0,2	-0,3	-0,3

## Exercices d'entraînement

**20**  $f(-3) = -2 \times (-3) - 1 = 5$ ;  $f(-2) = -2 \times (-2) - 1 = 3$ ;  
 $f(-1) = |-1| = 1$ ;  $f(0) = |0| = 0$ ;  $f(1) = |1| = 1$  ou  $-1 + 2$   
 donc  $f(1) = 1$ ;  $f(2) = -2 + 2 = 0$ ;  $f(4) = -4 + 2 = -2$ .

**21**

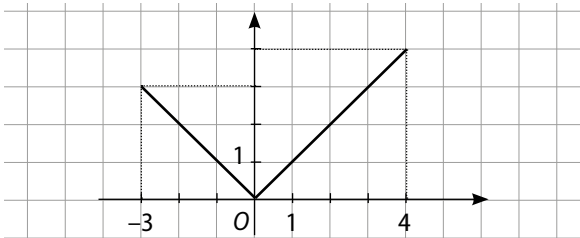


**22** Sur  $[-1; 0]$ ,  $|x| = 0,5 \Leftrightarrow x = -0,5$ . Sur  $[0; 1]$ ,  $|x| = 0,5 \Leftrightarrow x = 0,5$ . Sur  $[1; 4]$ ,  $-x + 2 = 0,5 \Leftrightarrow x = 1,5$ .  
 $-0,5, 0,5$  et  $1,5$  sont les antécédents de  $0,5$  par  $f$ .

**23** Sur  $[-3; 1]$ ,  $(\mathcal{L}_1)$  est une droite de coefficient directeur  $-\frac{1}{2}$  et passant par  $(1; 0)$ , donc  $f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ .  
 Sur  $[1; 3]$ ,  $(\mathcal{L}_2)$  est une droite de coefficient directeur  $\frac{1}{2}$  et passant par  $(3; 1)$ , donc  $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ .

$$\text{Ainsi } f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & \text{si } x \in [-3; 1]; \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} & \text{si } x \in [1; 3]. \end{cases}$$

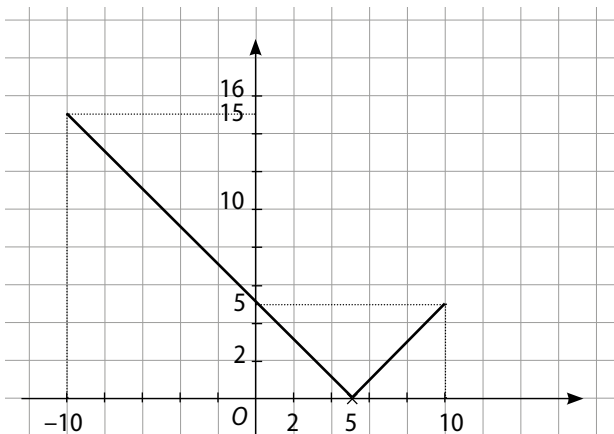
**24**



**25 a.**  $f(-10) = |-10 - 5| = |-15| = 15$ ;  $f(-5) = 10$ ;  $f(0) = 5$ ;  
 $f(5) = 0$  et  $f(10) = 5$ .

**b.**  $f(x) = \begin{cases} -x + 5 & \text{si } x < 5; \\ x - 5 & \text{si } x \geq 5. \end{cases}$

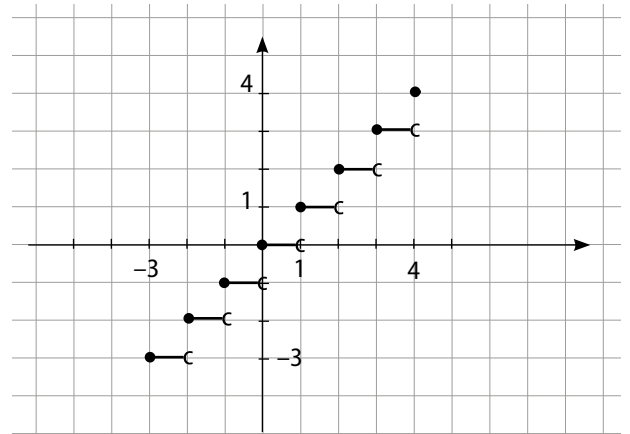
**c.**



**26**

$x$	-5	-1	5
signe de $x + 1$	-	0	+
$ x + 1  =$	$-x - 1$	0	$x + 1$
$f(x) =$	$4x - 3$	-7	$6x - 1$

**27**



**28 a.**  $E(-13) = -13$ ;  $E(-7) = -7$ ;  $E(-4, 2) = -5$ ;  
 $E(-0, 8) = -1$ ;  $E(3) = 3$  et  $E(7, 1) = 7$ .

**b.**  $E(x) = 3$  pour  $x \in [3; 4[$ ;  $E(x) = -2$  pour  $x \in [-2; -1[$ .

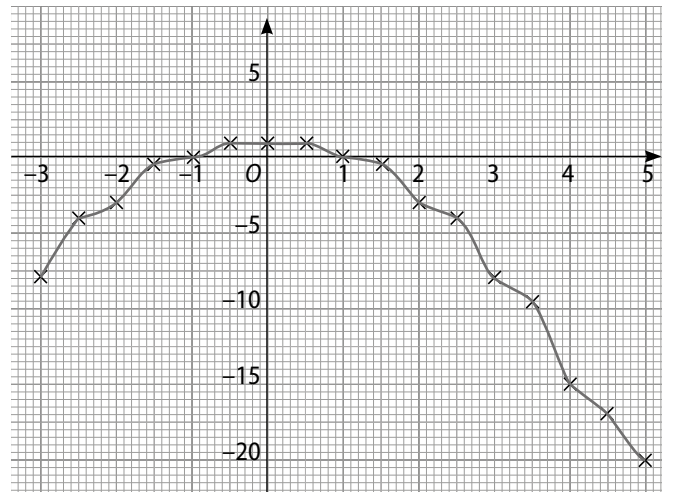
**29 a.**  $f(-2) = 1 - (-2) = 1 + 2 = 3$ ;  $E(-2) = 1 + 2 \times (-2) = -3$ .  
 $f(1) = 1 - 1 \times E(1) = 0$ .  $f(4) = 1 - 4 \times E(4) = -15$ .

**b.** Pour  $n \in \mathbb{N}$ , pour tout  $x \in [n; n + 1[$ ,  
 $f(n) = 1 - n \times n = 1 - n^2$ .

**c.**

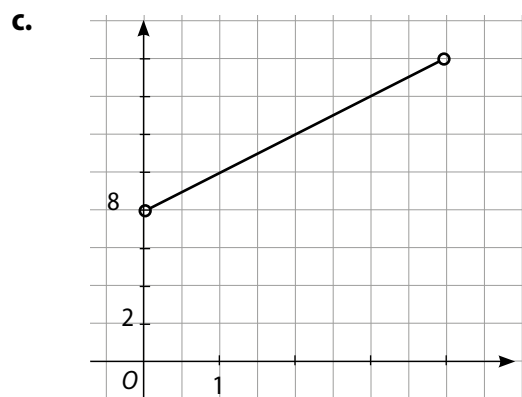
$x$	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	
$f(x)$	-8	-4	-3	-0,5	0	
$x$	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
$f(x)$	1	1	1	0	-0,5	-3
$x$	2,5	3	3,5	4	4,5	5
$f(x)$	-4	-8	-9,5	-15	-17	-20

**d.**



**30 a.**  $\mathcal{P}(x) = AC + CD + DE + EF + FB + AB$   
 $= AC + (CD + EF) + (DE + FB) + AB$   
 $= x + 4 + x + 4 = 2x + 8.$

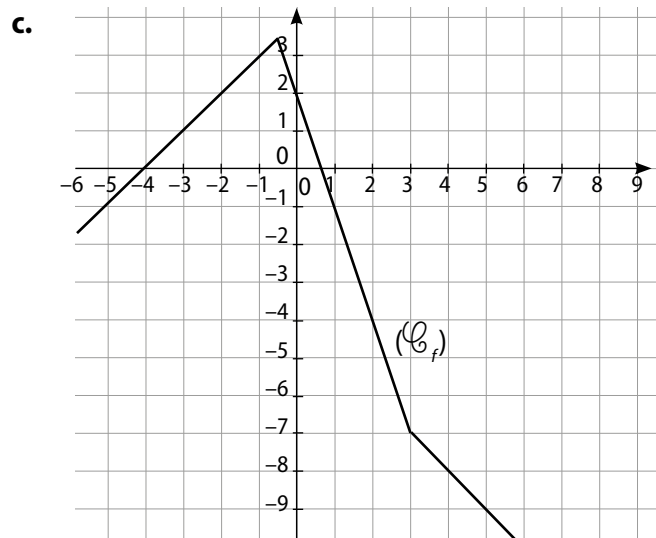
**b.**  $x \in ]0; 4[.$



**31 a.**

$x$	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$3$	$+\infty$
signe de $x - 3$	-		+ 0	+
$ x - 3  =$	$-x + 3$		$-x + 3$	$x - 3$
signe de $2x + 1$	-	0	+	+
$ 2x + 1  =$	$-2x - 1$		$2x + 1$	$2x + 1$
$ x - 3  -  2x + 1  =$	$x + 4$		$-3x + 2$	$-x - 4$

**b.**  $f(x) = \begin{cases} x + 4 & \text{si } x \in ]-\infty; -\frac{1}{2}[; \\ -3x + 2 & \text{si } x \in [-\frac{1}{2}; 3]; \\ -x - 4 & \text{si } x \in ]3; +\infty[. \end{cases}$



**32**

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$\frac{1}{x}$			

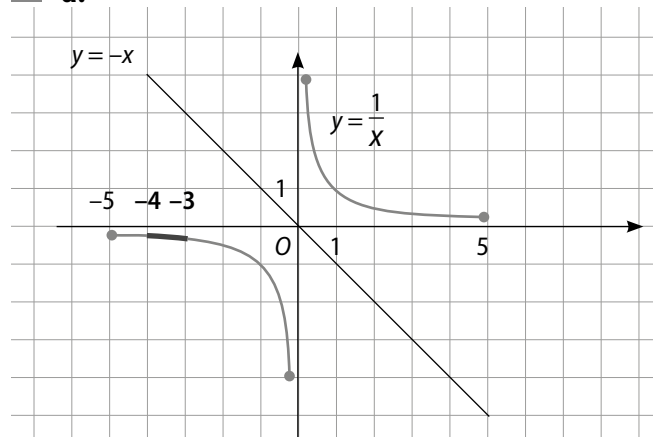
**33**  $\frac{1}{4}; \frac{1}{10}; 3; \frac{4}{3}.$

**34 a.** Décroissante;  $\frac{1}{\pi} < \frac{1}{3}.$

**b.** Inverse;  $]-\infty; 0[; -\frac{1}{\sqrt{2}} > -1.$

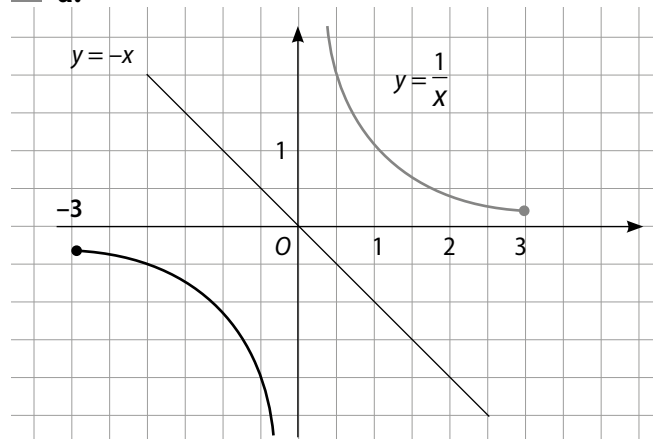
**35**  $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}; \frac{1}{-3} > \frac{1}{-2}; \frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{-2} < \frac{1}{0,5}.$

**36 a.**



**b.** Pour tout  $x \in [-4; -3], -\frac{1}{3} \leq \frac{1}{x} \leq -\frac{1}{4}.$

**37 a.**



**b.**  $\frac{1}{x} > -x$  pour  $x \in ]0; 3[.$

**c.** Non, pas sur  $\mathbb{R}$  puisque pour  $x \in [-3; 0[, \frac{1}{x} < -x.$

**38**  $-3 < \frac{1}{x} \leq -1 \Leftrightarrow -1 \leq x < -\frac{1}{3}. \mathcal{P} = [-1; -\frac{1}{3}[.$

$-2 < \frac{1}{x} \leq 1 \Leftrightarrow -2 < \frac{1}{x} < 0$  ou  $0 < \frac{1}{x} < 1$

$\Leftrightarrow x < -\frac{1}{2}$  ou  $1 < x.$

L'ensemble  $\mathcal{P}$  des solutions est :  $]-\infty; -\frac{1}{2}[ \cup ]1; +\infty[.$

**39 a.**  $x \rightarrow \frac{1}{x} \rightarrow -\frac{1}{x} \rightarrow -\frac{1}{x} + 2$

b.  $-5 \leq x \leq -1 \rightarrow -1 \leq \frac{1}{x} \leq -\frac{1}{5}$

la fonction inverse est décroissante sur  $] -\infty ; 0[$  ;

$\rightarrow \frac{1}{5} \leq -\frac{1}{x} \leq 1$

multiplier une inégalité par un nombre réel négatif change l'ordre ;

$\rightarrow \frac{1}{5} + 2 \leq -\frac{1}{x} + 2 \leq 1 + 2$

ajouter un nombre réel à chaque membre d'une inégalité ne change pas l'ordre.

Ainsi, si  $x \in [-5 ; -1]$ , alors  $f(x) \in [\frac{11}{5} ; 3]$ .

c. De même, si  $x \in [1 ; 3]$ , alors  $f(x) \in [1 ; \frac{5}{3}]$ .

40 a.  $f(x)$  n'a pas de sens logique lorsque  $x - 1 = 0$ , c'est-à-dire  $x = 1$ .

Donc  $D_f = ]-\infty ; 1[ \cup ]1 ; +\infty[$ .

b.

$x \xrightarrow[\text{1}]{\text{soustraire}} x-1 \xrightarrow[\text{l'inverse}]{\text{prendre}} \frac{1}{x-1} \xrightarrow[\text{3}]{\text{ajouter}} \frac{1}{x-1} + 3$

c.  $a \leq b < 1$  On ajoute  $-1$ .

$a - 1 \leq b - 1 < 0$  La fonction inverse est décroissante sur  $] -\infty ; 0[$ .

$\frac{1}{a-1} \geq \frac{1}{b-1}$  On ajoute 3.

$3 + \frac{1}{a-1} \geq 3 + \frac{1}{b-1}$ .

d. Pour deux nombres réels  $a$  et  $b$  de  $] -\infty ; 1[$  tels que  $a \leq b$ , on obtient  $f(a) \geq f(b)$ . Cela signifie que  $f$  est décroissante sur  $] -\infty ; 1[$ .

e. De même,  $1 < a \leq b \Leftrightarrow 0 < a - 1 \leq b - 1$   
 $\Leftrightarrow \frac{1}{a-1} \geq \frac{1}{b-1} \Leftrightarrow 3 + \frac{1}{a-1} \geq 3 + \frac{1}{b-1}$ . Cela signifie que  $f$  est décroissante sur  $]1 ; +\infty[$ .

41 a.  $f(x)$  n'a pas de sens logique lorsque  $x - 3 = 0$ , c'est-à-dire  $x = 3$ .

$D_f = ]-\infty ; 3[ \cup ]3 ; +\infty[$ .

b. Pour tout nombre réel  $x \in I$  :

$2 + \frac{7}{x-3} = \frac{2(x-3)}{x-3} + \frac{7}{x-3} = \frac{2x-6+7}{x-3} = f(x)$ .

L'égalité est montrée pour tout  $x \in I$ .

c.

$x \xrightarrow[\text{-3}]{\text{ajouter}} x-3 \xrightarrow[\text{l'inverse}]{\text{prendre}} \frac{1}{x-3} \xrightarrow[\text{par 7}]{\text{multiplier}} \frac{7}{x-3} \xrightarrow[\text{2}]{\text{ajouter}} \frac{7}{x-3} + 2$

d.  $3 < a \leq b \Leftrightarrow 0 < a - 3 \leq b - 3 \Leftrightarrow \frac{1}{a-3} \geq \frac{1}{b-3}$   
 $\Leftrightarrow \frac{7}{a-3} \geq \frac{7}{b-3} \Leftrightarrow 2 + \frac{7}{a-3} \geq 2 + \frac{7}{b-3}$   
 $\Leftrightarrow f(a) \geq f(b)$ .

Cela signifie que sur  $]3 ; +\infty[$ ,  $f$  est décroissante.

42 a. Pour tous nombres réels  $a$  et  $b$  non nuls :

$f(a) - f(b) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b \times 1}{b \times a} - \frac{a \times 1}{a \times b} = \frac{b}{ab} - \frac{a}{ab} = \frac{b-a}{ab}$ .

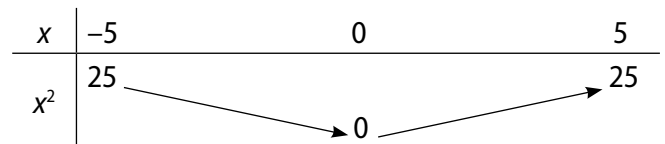
b. Pour  $0 < b < a$ ,  $b - a < 0$  et  $a \times b > 0$ , donc  $\frac{b-a}{ab} < 0$ , donc  $f(a) - f(b) < 0$ .

c.  $0 < b < a$ , donc  $f(a) < f(b)$  ; cela signifie que  $f$  est décroissante sur  $]0 ; +\infty[$ .

d. Pour  $b < a < 0$ ,  $b - a < 0$  et  $a \times b > 0$  donc  $\frac{b-a}{ab} < 0$ , donc  $f(a) - f(b) < 0$ , donc  $f(a) < f(b)$ .

Cela signifie que  $f$  est décroissante sur  $] -\infty ; 0[$ .

43



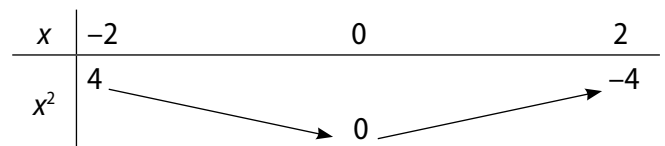
44 La fonction carré est décroissante sur  $] -\infty ; 0[$ .

Si  $x \leq -3$  alors  $x^2 \geq 9$ .

Si  $-2 \leq x \leq 2$  alors  $0 \leq x^2 \leq 4$ .

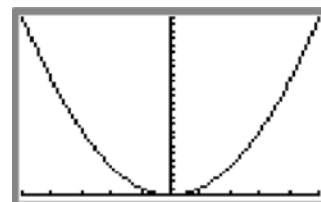
45 a.  $\leq$  ; b.  $\geq$  ; c.  $\leq$  ; d.  $\geq$ .

46 a.



b.  $x \in [-1 ; \sqrt{2}] \Leftrightarrow x^2 \in [0 ; 2]$ .

47 a.



b. Il y a deux points d'intersection entre  $(\mathcal{C}) : y = x^2$  et  $(\mathcal{D}) : y = 4$ , dont les abscisses  $-2$  et  $2$  sont les solutions de l'équation  $x^2 = 4$ .

• De même, les abscisses sont  $-\sqrt{12}$  et  $\sqrt{12}$ .

• Aucun point d'intersection, donc aucune solution.

c. Les solutions sont les abscisses des points de  $(\mathcal{C})$  situés en-dessous de  $(\mathcal{D}) : y = 16$ , soit  $[-4; 4]$ .

• De même, mais cette fois-ci au-dessus, soit :  $]-\infty; -3[ \cup ]3; +\infty[$ .

• De même,  $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$ .

48 a.  $x \longrightarrow x-1 \longrightarrow (x-1)^2$

b.  $-2 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq x-1 \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq (x-1)^2 \leq 9$ .

c.  $1 \leq x \leq 4 \Leftrightarrow 0 \leq x-1 \leq 3 \Leftrightarrow 0 \leq (x-1)^2 \leq 9$ .

Justifications :

① Soustraire un nombre réel aux termes d'une inégalité ne change pas l'ordre.

② La fonction carré est décroissante sur  $]-\infty; 0]$ .

③ La fonction carré est croissante sur  $[0; +\infty[$ .

d. Pour tous  $x \in [-2; 4]$ ,  $0 \leq (x-1)^2 \leq 9$ . Cela signifie que  $f$  admet un minimum, 0, sur  $[-2; 4]$ , qui est atteint en  $x = 1$ .

49 a.  $x \xrightarrow{\text{élever au carré}} x^2 \xrightarrow{\text{multiplier par 4}} 4x^2 \xrightarrow{\text{soustraire 5}} 4x^2 - 5$

b.  $a \leq b \leq 0 \xrightarrow{\text{la fonction carré est décroissante sur } ]-\infty; 0]} a^2 \geq b^2 \xrightarrow{\text{on multiplie par un nombre réel positif}} 4a^2 \geq 4b^2$

$4a^2 \geq 4b^2 \xrightarrow{\text{on soustrait 5}} 4a^2 - 5 \geq 4b^2 - 5$

c. Sur  $[-2; 0]$ , si  $a \leq b$ , alors  $f(a) \geq f(b)$ , cela signifie que  $f$  est décroissante sur  $[-2; 0]$ .

d. Sur  $[0; 3]$ ,  $0 \leq a \leq b$ , donc  $a^2 \leq b^2$ , donc  $4a^2 \leq 4b^2$  donc  $4a^2 - 5 \leq 4b^2 - 5$ . Ainsi, sur  $[0; 3]$ , si  $a \leq b$ , alors  $f(a) \leq f(b)$  donc  $f$  est croissante sur  $[0; 3]$ .

50 a.  $x \xrightarrow{\text{élever au carré}} x^2 \xrightarrow{\text{multiplier par -1}} -x^2 \xrightarrow{\text{ajouter 8}} -x^2 + 8$

$2 \leq x \leq 5 \Leftrightarrow 4 \leq x^2 \leq 25 \Leftrightarrow -25 \leq -x^2 \leq -4$   
 $\Leftrightarrow -17 \leq -x^2 + 8 \leq 4$  donc  $f(x) \in [-17; 4]$ .

b. Non, puisque sur l'intervalle  $[-2; 5]$ , la fonction carré change de variation.

51 a.  $f(a) - f(b) = a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ .

b. Sur  $]-\infty; 0]$ ,  $a \leq b$ , donc  $a-b \leq 0$  et  $a+b \leq 0$ . Ainsi, sur  $]-\infty; 0]$ , si  $a \leq b$ , alors  $(a-b)(a+b) \geq 0$ .

c. C'est-à-dire que  $f(a) - f(b) \geq 0$ , soit  $f(b) \leq f(a)$ . Cela signifie que  $f$  est décroissante sur  $]-\infty; 0]$ .

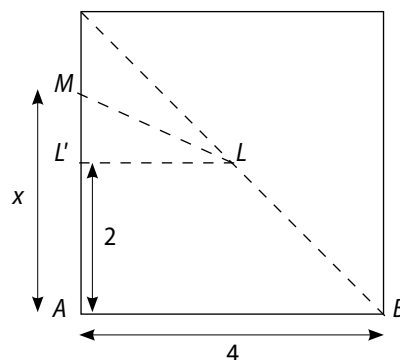
d. Sur  $[0; +\infty[$ , avec  $c \geq d$ ,  $c-d \geq 0$  et  $c+d \geq 0$ , donc  $f(c) - f(d) \geq 0$ , soit  $f(c) \leq f(d)$ . Cela signifie que  $f$  est croissante sur  $[0; +\infty[$ .

52 a.  $1 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq x^2 \leq 4$  (la fonction carré est croissante sur  $[1; 2]$ ).

b.  $-3 < x < -2 \Leftrightarrow 4 < x^2 < 9$  (la fonction carré est décroissante sur  $]-3; -2[$ ).

c.  $-3 < x < 3 \Leftrightarrow -3 < x \leq 0$  ou  $0 \leq x < 3$   
 $\Leftrightarrow 0 \leq x^2 < 9$ .

53 a.



Dans le triangle rectangle  $LL'M$ , on a :

$LM^2 = LL'^2 + L'M^2$   
 $= 2^2 + (x-2)^2 = (x-2)^2 + 4$ .

b. On conjecture d'après la calculatrice que  $f$  semble décroissante sur  $[0; 2]$ , puis croissante sur  $[2; 4]$ .

Pour  $0 \leq a < b \leq 2$   
 $-2 \leq a-2 < b-2 \leq 0$  ( $x \mapsto x^2$  décroissante sur  $]-\infty; 0]$ )  
 $(a-2)^2 > (b-2)^2$   
 $(a-2)^2 + 4 > (b-2)^2 + 4$   
 $f(a) > f(b)$ .

Pour  $2 \leq a < b \leq 4$   
 $0 \leq a-2 < b-2 \leq 0$  ( $x \mapsto x^2$  croissante sur  $]0; +\infty[$ )  
 $(a-2)^2 < (b-2)^2$   
 $(a-2)^2 + 4 < (b-2)^2 + 4$   
 $f(a) < f(b)$ .

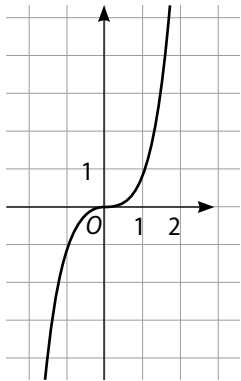
$f$  est décroissante sur  $[0; 2]$  et croissante sur  $[2; 4]$ .

c.  $M$  doit se trouver au milieu du mur ( $x = 2$ ).

54	$x$	$-2$	$2$
	$x^3$	$-8$	$8$

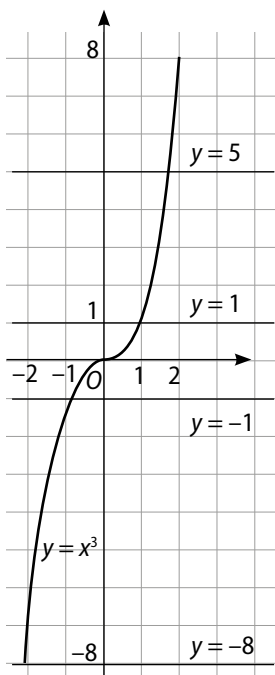
55 a.  $(1,5)^3 > (1,33)^3$ ; b.  $(\sqrt{2})^3 < (\sqrt{3})^3$ ; c.  $(-\pi)^3 < (-3,1)^3$ ;  
 d.  $(-\sqrt{2})^3 < (1)^3$ .

56 1.



- 2. a.  $x = 3$  ;
- b.  $x < 1$  ;
- c.  $x = 1$  ;
- d.  $x > 2$  ;
- e.  $x \leq 0$  ;
- f.  $x = 0$ .

57 a.



b. La solution de ces équations est l'abscisse du point d'intersection de la droite d'équation  $y = m$  et de la courbe représentant la fonction cube.

- $x = -2$  ; •  $x = 1$  ; •  $x = 0$  ;
- $x = \sqrt[3]{5}$ .

c. L'ensemble des solutions de ces inéquations est l'ensemble des abscisses des points de la courbe situés au-dessus ou en dessous de la droite d'équation  $y = m$ .

- $x \geq 2$  ; •  $x > 1$  ; •  $x < 0$  ;
- $x > -1$ .

58 a. Si  $f$  est représentée par la courbe bleue,  $f(x) = x^3$  et alors  $g(x) = 3x + 2$ .

b. Il semble qu'il y a une infinité de solutions.

c.  $x = 2$  ;  $x = -1$ . (On utilise, par exemple, la touche TRACE.)

$x$	-3	3
$x^3$	-27	27

b. Les extrema de la fonction cube sur  $[-3 ; 3]$  sont  $-27$  et  $27$ .

60 a.  $M(x ; x^3)$  et  $M'(-x ; -x^3)$ .

b.  $x_{\text{milieu}} = \frac{x + (-x)}{2} = 0$  et  $y_{\text{milieu}} = \frac{x^3 + (-x^3)}{2} = 0$ .

Pour tous points  $M(x ; x^3)$  et  $M'(-x ; -x^3)$ ,  $O$  est le milieu de  $[MM']$ , donc  $(\mathcal{C})$  est symétrique par rapport au centre du repère.

c.  $f(a) - f(b) = a^3 - b^3$ .

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 - ba^2 - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3.$$

Ainsi, pour tous réels  $a$  et  $b$ ,  $f(a) - f(b) = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ .

d. Si  $a \leq b$  alors  $a - b \leq 0$ . Puis  $a^2$  et  $b^2$  sont des carrés, donc positifs et  $a \times b$  est un produit de deux nombres positifs, donc  $ab \geq 0$ . Donc  $f(a) - f(b) \leq 0$  soit  $f(a) \leq f(b)$ . Ainsi, pour tous nombres réels positifs  $a$  et  $b$  tels que  $a \leq b$ , on a  $f(a) \leq f(b)$ . Cela signifie que  $f$  est croissante sur  $[0 ; +\infty[$ .

61 a.

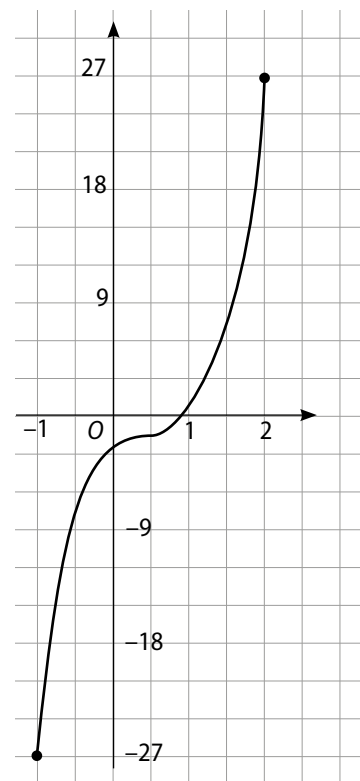


Tableau de variation de  $f$  sur  $[-1 ; 2]$  :

$x$	-1	2
$f(x)$	-27	27

b.  $a$  et  $b$  sont deux nombres réels de  $[-1 ; 2]$  tel que  $a \leq b \Leftrightarrow 2a \leq 2b \Leftrightarrow 2a - 1 \leq 2b - 1 \Leftrightarrow (2a - 1)^3 \leq (2b - 1)^3$ .

Ainsi, sur  $[-1 ; 2]$ , si  $a \leq b$  alors  $f(a) \leq f(b)$ . Cela signifie que  $f$  est croissante sur  $[-1 ; 2]$ .

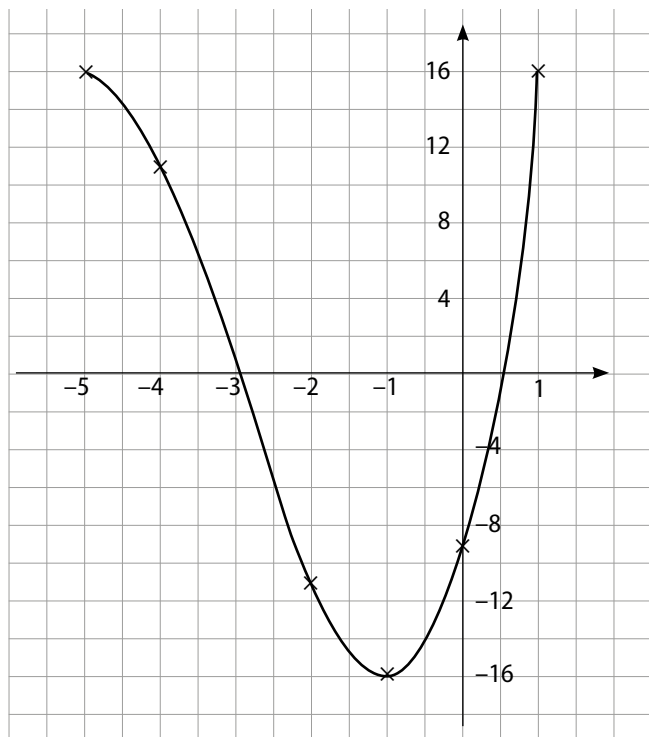
62 a.  $f(-5) = 16$  ;  $f(0) = -9$  ;  $f(-3) = 0$  ;  $f(1) = 16$ .

b. Si  $f$  est croissante sur  $[-5 ; 1]$ , comme  $-5 < -3$ , alors  $f(-5) < f(-3)$ , ce qui n'est pas vrai. Donc, par contraposée,  $f$  n'est pas croissante sur  $[-5 ; 1]$ .

De même,  $0 < 1$ , alors  $f(0) < f(1)$ , ce qui est faux, donc  $f$  n'est pas décroissante sur  $[-5; 1]$ .

c. D'après le a.,  $f(x) = 16$  admet au moins deux solutions,  $-5$  et  $1$ .

d.



e. Pour  $K \in ]-16; 16]$ ,  $f(x) = K$  admet deux solutions.

Pour  $K = -16$ ,  $f(x) = K$  admet une unique solution.

Pour  $K \in ]-\infty; -16[ \cup ]16; +\infty[$ ,  $f(x) = K$  n'admet aucune solution.

63 a.  $\sqrt{x} = 4 \Leftrightarrow x = 16$ ; b.  $\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ;

c.  $\sqrt{x} = \frac{5}{3} \Leftrightarrow x = \frac{25}{9}$ ; d.  $\sqrt{x} = -\frac{1}{4}$ , aucune solution.

64 a.  $\mathbb{R}^+$ ; b.  $\sqrt{x+3}$  a un sens  $\Leftrightarrow x+3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3$ .

$D_f = [-3; +\infty[$ .

c.  $\sqrt{2x+6}$  existe a un sens  $\Leftrightarrow 2x+6 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3$ .

$D_f = [-3; +\infty[$ .

d.  $\sqrt{x^2+1}$  a un sens  $\Leftrightarrow x^2+1 \geq 0$ , ce qui est toujours vrai sur  $\mathbb{R}$  donc  $D_f = \mathbb{R}$ .

65 a.  $f(-4)$  et  $f(-2)$  n'ont pas de sens.

$f(0) = 0$ ;  $f(12) = -\sqrt{12} = -2\sqrt{3}$ .

b.  $f(-4) = 2$ ,  $f(-2) = \sqrt{2}$ ,  $f(0) = 0$ ,  $f(12)$  n'a pas de sens.

c.  $f(-4)$  et  $f(-2)$  n'ont pas de sens.  $f(0) = 0$ ;

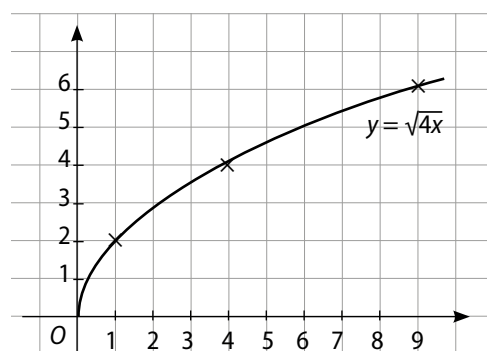
$f(12) = (\sqrt{12})^2 = 12$ .

d.  $f(-4) = 4$ ,  $f(-2) = 2$ ,  $f(0) = 0$  et  $f(12) = 12$ .

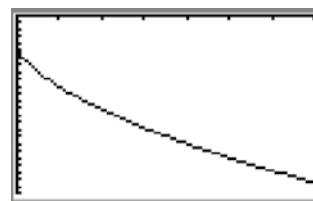
66 La fonction racine carrée est croissante sur  $[0; +\infty[$ , donc : a.  $1 \leq \sqrt{x} \leq 3$ ; b.  $\sqrt{3} \leq \sqrt{x} \leq 3$ ; c.  $\sqrt{x} > 4\sqrt{2}$ ; d.  $\sqrt{x} \in [10^3; 10^4]$ .

67 a.  $a$  et  $b$  deux nombres réels de  $[0; 9]$  tels que  $a \leq b$ ,  $0 \leq a \leq b \Leftrightarrow 0 \leq 4a \leq 4b \Leftrightarrow \sqrt{4a} \leq \sqrt{4b}$  (la fonction racine carrée est croissante sur  $[0; +\infty[$ ). Ainsi, sur  $[0; 9]$ , si  $a \leq b$ , alors  $f(a) \leq f(b)$ . Cela signifie que  $f$  est croissante sur  $[0; 9]$ .

b.



68 a.



$x$	0	7
$f(x)$	-5	$-5\sqrt{2}$

b. Pour tous nombres réels  $a$  et  $b$  de  $[0; 7]$  tels que  $a \leq b$ ,  $0 \leq a \leq b \Leftrightarrow 1 \leq 3a+1 \leq 3b+1$

$\Leftrightarrow 1 \leq \sqrt{3a+1} \leq \sqrt{3b+1}$  (la fonction racine carrée est croissante sur  $[1; +\infty[$ ).

$\Leftrightarrow -5 \geq -5\sqrt{3a+1} \geq -5\sqrt{3b+1}$  (multiplier par  $-5$  change le sens des inégalités).

Ainsi, sur  $[0; 7]$ , si  $a \leq b$  alors  $f(a) \geq f(b)$ . Cela signifie que  $f$  est décroissante sur  $[0; 7]$ .

69  $f$  est représentée par la courbe bleue;  $g$  est représentée par la courbe rouge;  $h$  est représentée par la courbe verte;  $i$  est représentée par la courbe orange.

70 a.  $g(f(x)) = \frac{1}{5x}$ ; b.  $g(f(x)) = (5x)^2$ ;

c.  $g(f(x)) = (5x)^3$ ; b.  $g(f(x)) = \sqrt{5x}$ .

71 a.  $g \circ f(0) = -2 \times (0)^3 = 0$ ;

$g \circ f(-1) = -2 \times (-1)^3 = 2$ ;  $g \circ f(2) = -2 \times (2)^3 = -16$ .

b.  $g \circ f(x) = -2 \times (x)^3 = -2x^3$ . c.  $g \circ f$  est définie sur  $\mathbb{R}$ .

72 a.  $u(x) = \frac{1}{7}x$ ;  $v(x) = \sqrt{x}$ .

b.  $u(x) = -3x$ ;  $v(x) = \frac{1}{x}$ .

c.  $u(x) = -x$ ;  $v(x) = x^2$ .

d.  $u(x) = \frac{1}{5}x$ ;  $v(x) = x^3$ .

73 Bleue :  $x \mapsto \frac{1}{x}$  et coefficient  $< 0$  ;

rouge :  $x \mapsto \sqrt{x}$  et coefficient  $> 0$  ;

verte :  $x \mapsto x^2$  et coefficient  $< 0$  ;

orange :  $x \mapsto |x|$  et coefficient  $< 0$ .

## faire le point

74  $\mathcal{A} : x \mapsto |x|$ ;  $\mathcal{B} : x \mapsto x^2$ ;  $\mathcal{C} : x \mapsto \frac{1}{x}$ ;  $\mathcal{D} : x \mapsto x^3$ .

75 a. Fua : « Non, il y a aussi  $x \mapsto 1 - x$  et  $x \mapsto 3x$ . »

b. Non.  $x \mapsto 1 - x$  est une fonction affine décroissante sur  $\mathbb{R}$ ;  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est la fonction inverse, décroissante sur  $]-\infty ; 0[ \cup ]0 ; +\infty[$ ;  $x \mapsto 3x$  est une fonction linéaire croissante sur  $\mathbb{R}$ .

Sur  $[1 ; +\infty[$ , si  $1 \leq a \leq b$  alors  $0 \geq 1 - a \geq 1 - b$ , donc  $\frac{1}{1-a} \leq \frac{1}{1-b}$  et  $\frac{3}{1-a} \leq \frac{3}{1-b}$ . Cela signifie que  $f$  est croissante sur  $[1 ; +\infty[$ .

76  $f$  est décroissante sur  $]-\infty ; 0[$  ou sur  $]0 ; +\infty[$ .

On peut utiliser la définition de la décroissance sur  $I$ , mais il faut comparer d'abord les antécédents.

$a > 1$  donc  $\sqrt{a}$  existe et  $1 \geq 0$  donc  $1 - \sqrt{a} \geq 0 - \sqrt{a}$  soit  $1 - \sqrt{a} \geq -\sqrt{a}$ .

Puis  $a > 1$  et  $x \mapsto \sqrt{x}$  croissante sur  $[0 ; +\infty[$  donc  $\sqrt{a} > 1$  donc  $1 - \sqrt{a} < 0$ .

On peut utiliser la fonction inverse sur  $]-\infty ; 0[$  où elle est décroissante

donc  $0 > 1 - \sqrt{a} \geq -\sqrt{a} \Rightarrow \frac{1}{1-\sqrt{a}} \leq -\frac{1}{\sqrt{a}}$ .

77 a.  $s_1 \in [-1 ; 0]$  et  $s_2 \in [0 ; 1]$ .

b. Oui, une autre,  $s_3 \in [-8 ; -7]$ .

c. Fenêtre pour  $s_1 \begin{cases} x_{\min} = -1 \\ x_{\max} = 0 \end{cases}$ ,  $s_2 \begin{cases} x_{\min} = 0 \\ x_{\max} = 1 \end{cases}$

et  $s_3 \begin{cases} x_{\min} = -8 \\ x_{\max} = -7 \end{cases}$ .

78 a.  $x \in [3 ; 7]$  :

$$3 \leq x \leq 7 \Leftrightarrow -3 \geq -x \geq -7 \Leftrightarrow -1 \geq 2 - x \geq -5 \\ \Rightarrow 1 \geq (2 - x)^2 \geq 25.$$

b.  $x \in [-1 ; 3]$  :

$$\boxed{x} \xrightarrow[\text{par } -1]{\text{multiplier}} \boxed{-x} \xrightarrow[2]{\text{ajouter}} \boxed{2 - x} \xrightarrow[\text{au carré}]{\text{élever}} \boxed{(2 - x)^2}$$

$$-1 \leq x \leq 3 \Leftrightarrow 1 \geq -x \geq -3 \Leftrightarrow 3 \geq 2 - x \geq -1 \\ \Rightarrow 9 \geq (2 - x)^2 \geq 0.$$

79 a.  $x^3 \leq x^2 \leq x \leq \sqrt{x}$ .

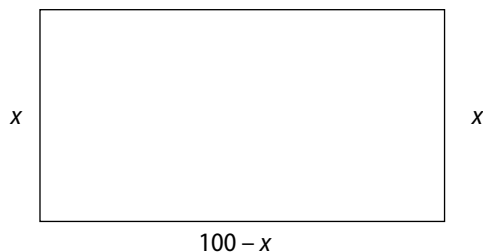
b.  $\sqrt{x} \leq x \leq x^2 \leq x^3$ .

c. Sur  $[-1 ; 0]$  :  $x \leq x^3 \leq x^2$  ; sur  $]-\infty ; -1]$  :  $x^3 \leq x \leq x^2$ .

## Se tester

80 à 83 Voir Manuel de l'élève page 260.

## Exercices d'approfondissement

 84 a.  $100 - x$ 

 b.  $f(x) = x(100 - x) = -x^2 + 100x$ .

$x$	0	50	100
$f(x)$	0	2500	0

C'est un carré de 50 m de côté.

 85 1. Pour tout  $x \in ]-1,5 ; 6]$  :

$$5 - \frac{7}{2x+3} = \frac{5(2x+3)}{2x+3} - \frac{7}{2x+3} = \frac{10x+15-7}{2x+3} = \frac{10x+8}{2x+3} = f(x).$$

 2. a. Sur  $]-1,5 ; 6]$ ,  $-1,5 < a \leq b \leq 6$  ;

$$0 < 2a+3 \leq 2b+3 \leq 15 \Leftrightarrow \frac{1}{2a+3} \geq \frac{1}{2b+3} \geq \frac{1}{15}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{7}{2a+3} \leq -\frac{7}{2b+3} \leq -\frac{7}{15}$$

$$\Leftrightarrow 5 - \frac{7}{2a+3} \leq 5 - \frac{7}{2b+3} \leq 5 - \frac{7}{15}.$$

 b. Ainsi, sur  $]-1,5 ; 6]$ , si  $a \leq b$ ,  $f(a) \leq f(b)$ . Cela signifie que  $f$  est croissante sur  $]-1,5 ; 6]$ .

$x$	-1,5	6
$f(x)$		$\frac{68}{15}$

 3. a. Sur  $]-1,5 ; 6]$ ,  $f(x) - 5 = -\frac{7}{2x+3}$ .

$x$	-1,5	6
$2x+3$	0	+
$-7$		-
$-\frac{7}{2x+3}$		-

 Ainsi,  $f(x) - 5 < 0$ .

 b.  $(\mathcal{H})$  est située en-dessous de  $(\mathcal{D})$ .

 86 1. a.  $D_f = \mathbb{R}$ . Pour tout réel  $x$ ,  $-(x-1)^2 \leq 0$ , donc  $-(x-1)^2 + 4 \leq 4$ . De plus,  $f(1) = -(1-1)^2 + 4 = 4$ .

 Donc 4 est le maximum de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ , il est atteint en  $x = 1$ .

 b.  $D_g = \mathbb{R}$ .

 Pour tout réel  $x$ ,  $x^2 + 3 \geq 3$  donc  $0 \leq \frac{1}{x^2+3} \leq \frac{1}{3}$ , donc  $0 \leq \frac{6}{x^2+3} \leq 2$ , soit  $0 \leq g(x) \leq 2$ .

 De plus,  $g(0) = \frac{6}{3} = 2$ . Donc 2 est le maximum de la fonction  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .

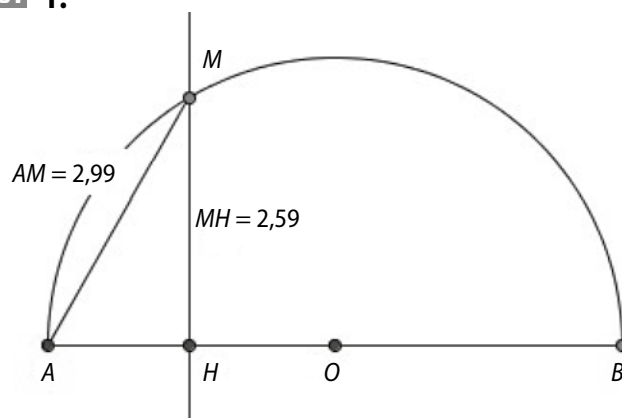
 2. a. Sur  $[1 ; +\infty[$ ,  $1 \leq a \leq b$  donc  $1 \leq a-1 \leq b-1$ , donc  $(a-1)^2 \leq (b-1)^2$ , donc  $-(a-1)^2 \geq -(b-1)^2$ , donc  $-(a-1)^2 + 4 \geq -(b-1)^2 + 4$ , soit  $f(a) \geq f(b)$ . Ainsi,  $f$  est décroissante sur  $[1 ; +\infty[$ .

 Sur  $]-\infty ; 1]$ ,  $a \leq b \leq 1$  donc  $a-1 \leq b-1 \leq 0$  donc  $(a-1)^2 \geq (b-1)^2$ , donc  $-(a-1)^2 \leq -(b-1)^2$ , donc  $-(a-1)^2 + 4 \leq -(b-1)^2 + 4$ , soit  $f(a) \leq f(b)$ . Ainsi,  $f$  est croissante sur  $]-\infty ; 1]$ .

 b. Sur  $]-\infty ; 0]$ ,  $a \leq b \leq 0$ ,  $a^2 \geq b^2 \geq 0$  ( $x \mapsto x^2$  décroissante sur  $]-\infty ; 0]$ ),  $a^2 + 3 \geq b^2 + 3 \geq 3$ ,  $\frac{1}{a^2+3} \leq \frac{1}{b^2+3} \leq \frac{1}{3}$  ( $x \mapsto \frac{1}{x}$  décroissante sur  $[3 ; +\infty[$ ), donc  $\frac{6}{a^2+3} \leq \frac{6}{b^2+3}$  soit  $g(a) \leq g(b)$ . Cela signifie que la fonction  $g$  est croissante sur  $]-\infty ; 0]$ .

 Sur  $[0 ; +\infty[$ ,  $0 \leq a \leq b$ ,  $0 \leq a^2 \leq b^2$  ( $x \mapsto x^2$  croissante sur  $[0 ; +\infty[$ ),  $3 \leq a^2+3 \leq b^2+3$ ,  $\frac{1}{3} \geq \frac{1}{a^2+3} \geq \frac{1}{b^2+3}$  donc  $\frac{6}{a^2+3} \geq \frac{6}{b^2+3}$  soit  $g(a) \geq g(b)$ . Cela signifie que la fonction  $g$  est décroissante sur  $[0 ; +\infty[$ .

87 1.

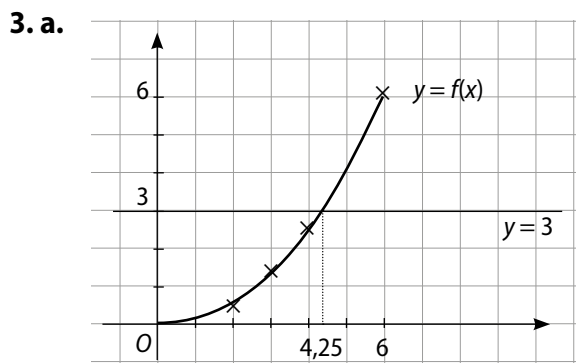

 2. a. Dans  $AHM$  rectangle en  $H$ ,  $AM^2 = AH^2 + HM^2$ .

 Dans  $BHM$  rectangle en  $H$ ,  $BM^2 = BH^2 + HM^2$ .

 Dans  $ABM$  rectangle en  $M$ ,  $AB^2 = AM^2 + MB^2$ .

b.  $AM = x$  et d'après le 2. a.,  $AH = \frac{AM^2}{AB} = \frac{x^2}{6} = \frac{1}{6} \times x^2$ .

c. Pour  $x \in [0; 6]$  :  $x \xrightarrow[\text{au carré}]{\text{élever}} x^2 \xrightarrow[\text{par } 1/6]{\text{multiplier}} \frac{1}{6} x^2$   
 $0 \leq a \leq b \leq 6 \Leftrightarrow 0 \leq a^2 \leq b^2 \leq 36$  (la fonction carré est croissante sur  $[0; 6]$ )  $\Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{6} a^2 \leq \frac{1}{6} b^2 \leq 6$  ( $\frac{1}{6} > 0$ )  
 donc la fonction linéaire est croissante sur  $[0; 6]$ .  
 Cela signifie que  $f$  est croissante sur  $[0; 6]$ .



$f(x) = 3$  pour  $x = 4,25$ .

b. Si  $AM = 3$ , comme  $AMB$  est un triangle rectangle en  $M$ ,  $MB^2 = 6^2 - 3^2 = 27$ , soit  $MB = 3\sqrt{3}$ .

88 a.  $\mathcal{A}$ :  $9 \times 9 = 81$ ;  $6 \times 13,5 = 81$ ;  $3 \times 27 = 81$ .

$\mathcal{P}$ :  $4 \times 9 = 36$ ;  $2(6 + 13,5) = 39$ ;  $2(3 + 27) = 60$ .

b. Si un côté de ce rectangle est  $x$ , l'autre est  $\frac{81}{x}$ .

Ainsi  $\mathcal{P} = 2(x + \frac{81}{x}) = 2(\frac{x^2 + 81}{x}) = \frac{2}{x}(x^2 + 81)$ .

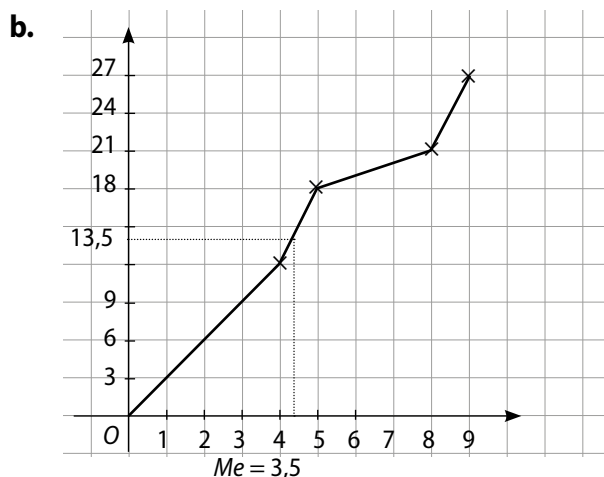
$x \in ]0; 8]$ ,  $f: x \mapsto \frac{2}{x}(x^2 + 81)$ . D'après le graphique de  $f$  obtenu sur la calculatrice,  $x \approx 8,8$ .

89 a.  $x \in [0; 3]$ :  $\mathcal{A}(x) = 4 \times x = 4x$ .

$x \in [3; 5]$ :  $\mathcal{A}(x) = 12 + 3 \times (x - 3) = 3x + 3$ .

$x \in [5; 8]$ :  $\mathcal{A}(x) = 12 + 6 + 1 \times (x - 5) = x + 13$ .

$x \in [8; 9]$ :  $\mathcal{A}(x) = 12 + 6 + 3 + 6 \times (x - 8) = 6x - 27$ .



c. On trace la droite d'équation  $y = \frac{27}{2}$  soit  $y = 13,5$  et l'abscisse du point d'intersection de cette droite avec la courbe est 3,5, valeur de la médiane.

90 1. a.  $0 \leq u \leq v \Rightarrow 0 \leq u^2 \leq v^2$  (fonction carré croissante sur  $[0; +\infty[$ )  $\Rightarrow 0 \leq 2u^2 \leq 2v^2$ .

b.  $0 \leq u \leq v \Rightarrow 1 \leq u+1 \leq v+1 \Rightarrow \frac{1}{u+1} \geq \frac{1}{v+1}$  (fonction inverse décroissante sur  $[0; +\infty[$ ).

c. D'après b.,  $-1 \leq -\frac{1}{u+1} \leq -\frac{1}{v+1}$  et  $0 \leq u^2 \leq v^2$ , donc  $u^2 - \frac{1}{u+1} \leq v^2 - \frac{1}{v+1}$  soit  $f(u) \leq f(v)$ .

Ainsi, sur  $[0; +\infty[$ , si  $u \leq v$  alors  $f(u) \leq f(v)$ . Cela signifie que  $f$  est croissante sur  $[0; +\infty[$ .

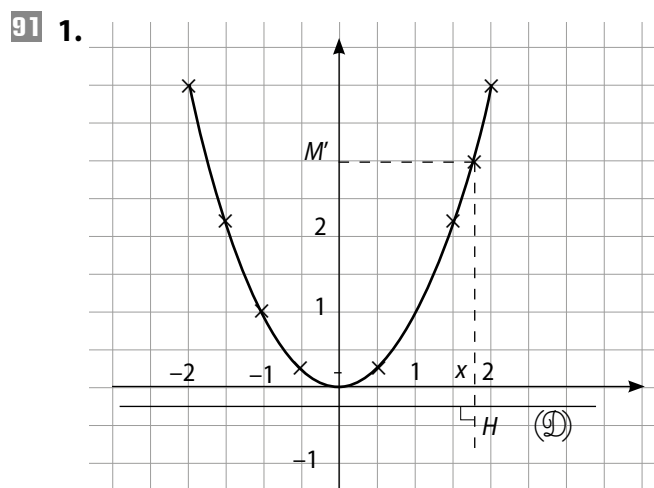
2. Sur  $]-\infty; 0]$ ,  $0 \geq a \geq b \Rightarrow 0 \leq a^2 \leq b^2$   
 $\Leftrightarrow 1 \leq 1 + a^2 \leq 1 + b^2 \Rightarrow \sqrt{1} \leq \sqrt{1 + a^2} \leq \sqrt{1 + b^2}$   
 $\Leftrightarrow 1 \geq \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{1 + b^2}}$ .

Ainsi, sur  $]-\infty; 0]$ , si  $a \geq b$  alors  $f(a) \geq f(b)$  et donc  $f$  est croissante et donc monotone.

De même, sur  $[0; +\infty[$ ,  $0 \leq a \leq b \Leftrightarrow 0 \leq a^2 \leq b^2 \Rightarrow$

$$1 \leq \sqrt{1 + a^2} \leq \sqrt{1 + b^2} \Leftrightarrow 1 \geq \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{1 + b^2}}$$

Cette fois-ci, sur  $[0; +\infty[$ ,  $f$  est décroissante et donc monotone.



2. a.  $HM^2 = (x^2 + \frac{1}{4})^2$ .

b.  $FM^2 = FM'^2 + M'M^2 = (x^2 + \frac{1}{4})^2 + x^2$ .

c.  $HM^2 = (x^2)^2 + 2 \times x^2 \times \frac{1}{4} + (\frac{1}{4})^2 + x^2 = x^4 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{16}$ .

$FM^2 = (x^2)^2 + 2 \times x^2 \times \frac{1}{4} + (\frac{1}{4})^2 + x^2 = x^4 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{16}$ .

Ainsi  $HM^2 = FM^2$  et comme  $HM$  et  $FM$  sont des nombres réels strictement positifs,  $HM = FM$ .

**92 1.**

$x \in$	$[0; \frac{1}{5}[$	$[\frac{1}{5}; \frac{2}{5}[$	$[\frac{2}{5}; \frac{3}{5}[$	$[\frac{3}{5}; \frac{4}{5}[$	$[\frac{4}{5}; 1[$
$E_1(x)$	0	$\frac{1}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{9}{25}$	$\frac{16}{25}$
$E_2(x)$	$\frac{1}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{9}{25}$	$\frac{16}{25}$	1

**2. a.** Sur  $[\frac{a}{5}; \frac{a+1}{5}[$ ,  $\varphi_a = \frac{1}{5} \times f(\frac{a}{5})$  et  $\eta_a = \frac{1}{5} \times f(\frac{a+1}{5})$ .

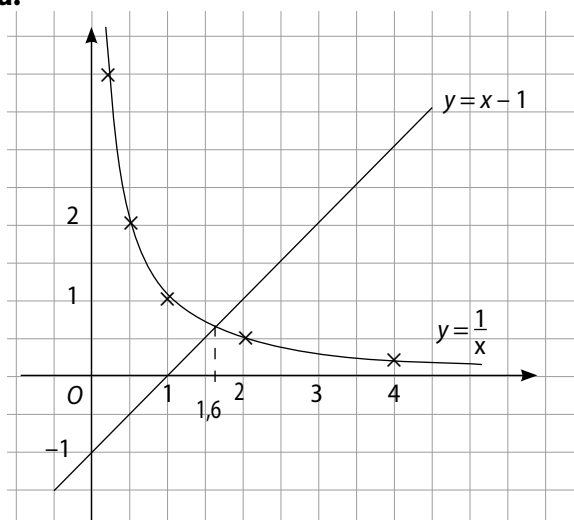
**b.** Sur  $[\frac{a}{5}; \frac{a+1}{5}[$ ,  $\varphi_a \leq \mathfrak{A} \leq \eta_a$ , c'est-à-dire :

$$\frac{1}{5} \times \frac{a^2}{5^2} \leq \mathfrak{A} \leq \frac{1}{5} \times \frac{(a+1)^2}{5^2} \text{ soit } \frac{a^2}{125} \leq \mathfrak{A} \leq \frac{(a+1)^2}{125}.$$

**93 1.** ABCD est un rectangle d'or lorsque  $\frac{AD}{AB} = \frac{FC}{EF}$ .

$$1 + \frac{1}{x} = 1 + \frac{AD}{AB} = 1 + \frac{FC}{EF} = \frac{EF - FC}{EF} = \frac{DF - FC}{EF}$$

$$= \frac{DC}{EF} = \frac{AB}{AD} = x.$$

**2. a.**


L'abscisse du point d'intersection de ces deux courbes est : 1,6.

$$\begin{aligned} \text{b. c. Pour } x > 0, x = 1 + \frac{1}{x} &\Leftrightarrow x^2 = x + 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} \Leftrightarrow x - \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{5}{4}} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

**94 1. a.**  $1 \leq x \leq 4$  donc  $1 \leq 3x - 2 \leq 10$ 

$$\text{et } 2 \leq x + 1 \leq 5 \Leftrightarrow \frac{1}{5} \leq \frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{2}.$$

$$\text{Ainsi } \frac{2}{5} \leq \frac{3x-2}{x+1} \leq \frac{5}{2}.$$

**b.**  $1 \leq x \leq 4$  donc  $f(1) \leq f(x) \leq f(4)$ 

$$\text{donc } \frac{1}{2} \leq \frac{3x-2}{x+1} \leq \frac{10}{5}.$$

**c.** La qualité du **b.** est meilleure.

**2. a.**  $-5 \leq x \leq -2$  donc  $-17 \leq 3x - 2 \leq -8$ 

$$\text{et } -4 \leq x + 1 \leq -1 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{1}{x+1} \leq -\frac{1}{4}.$$

 Ainsi, comme  $3x - 2$  et  $\frac{1}{x+1}$  sont négatifs,

$$2 \leq \frac{3x-2}{x+1} \leq 17.$$

**b.**  $-5 \leq x \leq -2$  donc  $f(-5) \leq f(x) \leq f(-2)$ 

$$\text{donc } \frac{-17}{-4} \leq f(x) \leq \frac{-8}{-3} \text{ soit } \frac{17}{4} \leq f(x) \leq \frac{8}{3}.$$

Le second encadrement est meilleur.

**95 a.**  $g(f(2)) = g(2^2) = g(4) = 4$ .

 Pour  $x \in [-2; 2]$ ,  $g(f(x)) = g(x^2) = 2x^2 - 4$ .

**b.**  $f(g(2)) = f(2 \times 2 - 4) = f(0) = 0$ .

 Pour  $x \in [-2; 2]$ ,  $f(g(x)) = f(2x - 4) = (2x - 4)^2$ .

**96 1.** Pour tout nombre réel  $x$ ,

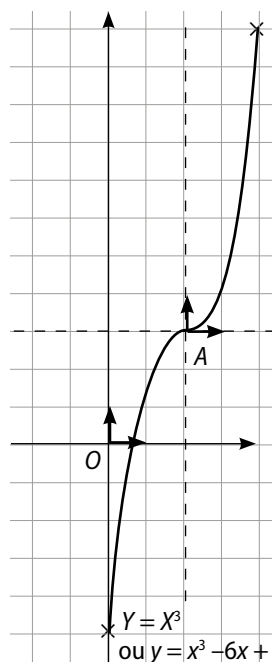
$$\begin{aligned} (x-2)^3 + 3 &= (x-2)^2(x-2) + 3 \\ &= (x^2 - 4x + 4)(x-2) + 3 \\ &= x^3 - 4x^2 + 4x - 2x^2 + 8x - 8 + 3 \\ &= x^3 - 6x^2 + 12x - 5 = f(x). \end{aligned}$$

**2. a.**  $\vec{AM}(x-2; y-3)$ .

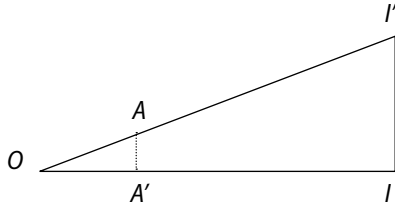
**b.** Dans le repère  $(A; \vec{i}, \vec{j})$ ,  $\vec{AM} = (x-2)\vec{i} + (y-3)\vec{j} = X\vec{i} + Y\vec{j}$ , donc  $M(X; Y)$  dans le repère  $(A; \vec{i}, \vec{j})$ .

**c.** Si  $M \in (\mathcal{C}_0)$  alors  $y = x^3 - 6x^2 + 12x - 5$ ;  $y = (x-2)^3 + 3$   
 $\Leftrightarrow y - 3 = (x-2)^3 \Leftrightarrow Y = X^3$ .

**d.** Si  $M(X; Y)$  est tel que  $Y = X^3$ , alors  $y - 3 = (x-2)^3$   
 $\Leftrightarrow y = (x-2)^3 + 3$ , alors  $y = f(x)$ , alors  $M \in (\mathcal{C}_0)$ .

**3. a.**

**b.** À partir de la courbe représentant la fonction cube et en la translatant par le vecteur  $\vec{OA}(2; 3)$ .

97 a.

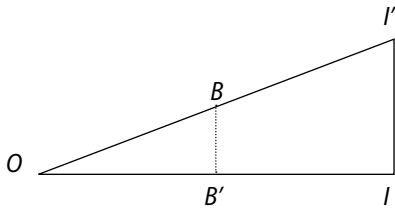


D'après le théorème de Thalès, comme  $(AA') \parallel (II')$ ,

$$\frac{II'}{AA'} = \frac{OI'}{OA'} = \frac{OI'}{OA} \text{ soit } \frac{1}{4} = \frac{1}{1} = \frac{OI'}{OA'}$$

Ainsi  $AA' = \left(\frac{1}{4}\right)^2$  soit  $AA' = OA'^2$ , donc  $A \in (\mathcal{C})$ .

b.



D'après le théorème Thalès, comme  $(BB') \parallel (II'')$ ,

$$\frac{II''}{BB'} = \frac{OI''}{OB'} \text{ soit } \frac{1}{2} = \frac{1}{1} \text{ donc } BB' = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Ainsi  $BB' = \left(\frac{1}{2}\right)^2$  soit  $BB' = OB'^2$ , donc  $B \in (\mathcal{C})$ .

On procède de même avec C et K.

98 1. Variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}$

Conjecture :  $f$  est croissante sur  $]-\infty ; 0]$ , puis décroissante sur  $[0 ; +\infty[$ .

2. a. Sur  $[0 ; +\infty[$ , si  $0 \leq a \leq b$  alors  $0 \leq a^2 \leq b^2$  alors  $4 \leq a^2 + 4 \leq b^2 + 4$  alors  $2 \leq \sqrt{a^2 + 4} \leq \sqrt{b^2 + 4}$  alors  $\frac{1}{2} \geq \frac{1}{\sqrt{a^2 + 4}} \geq \frac{1}{\sqrt{b^2 + 4}}$  alors  $\frac{3}{2} \geq f(a) \geq f(b)$ .

Cela signifie que  $f$  est décroissante sur  $[0 ; +\infty[$ .

b. Pour tout nombre réel  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(-x) = \frac{3}{\sqrt{(-x)^2 + 4}} = \frac{3}{\sqrt{x^2 + 4}} = f(x)$ . Ainsi, comme  $f$  est décroissante sur  $[0 ; +\infty[$ , alors  $f$  est croissante sur  $]-\infty ; 0]$ .

3. D'après les variations,  $f(0)$  est le maximum de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  et donc, pour tout nombre réel  $x$ ,  $f(x) \leq f(0)$ .

Or  $f(0) = \frac{3}{4}$  donc, pour tout nombre réel  $x$ ,  $f(x) \leq \frac{3}{4}$ .

99 1.  $f(x)$  est définie  $\Leftrightarrow x - 1 \neq 0$ , soit  $x \neq 1$ .

Donc  $I = ]-\infty ; 1[ \cup ]1 ; +\infty[$ .

2. Pour tout nombre réel  $x$  de  $I$  :

$$\begin{aligned} -2 + \frac{5}{x-1} &= \frac{-2(x-1)}{x-1} + \frac{5}{x-1} = \frac{-2x+2+5}{x-1} \\ &= \frac{-2x+7}{x-1} = f(x). \end{aligned}$$

3. Sur  $]-\infty ; 1[$ , si  $a \leq b < 1$  alors  $a - 1 \leq b - 1 < 0$  alors  $\frac{1}{a-1} \geq \frac{1}{b-1}$  (la fonction inverse est décroissante sur  $]-\infty ; 0[$ ) alors  $\frac{5}{a-1} \geq \frac{5}{b-1}$  alors  $-2 + \frac{5}{a-1} \geq -2 + \frac{5}{b-1}$ . Cela signifie que  $f$  est décroissante sur  $]-\infty ; 1[$ .

De même sur  $]1 ; +\infty[$ .

4. a.  $(\mathcal{H})$  coupe  $(\Delta) \Leftrightarrow -2 + \frac{5}{a-1} = -2 \Leftrightarrow \frac{5}{a-1} = 0$ .

Comme  $5 \neq 0$ , ce quotient n'est jamais nul.

Ainsi  $(\mathcal{H})$  et  $(\Delta)$  ne se coupent jamais.

b. Pour  $x \in ]1 ; +\infty[$ ,  $x > 1$  donc  $x - 1 > 0$

donc  $\frac{5}{x-1} > 0$  (quotient de deux nombres positifs non nuls) donc  $-2 + \frac{5}{x-1} > -2$ .

Ainsi,  $(\mathcal{H})$  est située au-dessus de  $(\Delta)$ .

Pour  $x \in ]-\infty ; 1[$ ,  $x < 1$  donc  $x - 1 < 0$  donc  $\frac{5}{x-1} < 0$

et donc  $(\mathcal{H})$  est située en dessous de  $(\Delta)$ .

5. a.  $MM' = \frac{5}{x-1} = d(x)$ .

b. Sur  $]1 ; +\infty[$ , si  $1 < a \leq b$  alors  $0 < a - 1 \leq b - 1$ .

Comme la fonction inverse est décroissante sur  $]0 ; +\infty[$ , alors  $\frac{1}{a-1} \geq \frac{1}{b-1}$  et  $\frac{5}{a-1} \geq \frac{5}{b-1}$ .

Cela signifie que  $d$  est décroissante sur  $]1 ; +\infty[$ .

c. L'écart, pour la même abscisse, d'un point  $M \in (\mathcal{C})$  et d'un point  $M' \in (\mathcal{H})$  se réduit plus  $x$  s'éloigne de 1.

d. Pour  $x > 1$ ,  $d(x) < 0,1 \Leftrightarrow 0 < \frac{5}{x-1} < 0,1 \Leftrightarrow \frac{x-1}{5} > \frac{1}{0,1} \Leftrightarrow x-1 > 50 \Leftrightarrow x > 51$ .

100 a.  $B(40) = 9000 \Leftrightarrow 9000 = -40^2 + 160 \times 40 + c$

$$\Leftrightarrow 9000 = 4800 + c \Leftrightarrow c = 4200.$$

$$\begin{aligned} \text{b. } B(x) &= -x^2 + 160x + 4200 \\ &= -(x-80)^2 + 6400 + 4200 \\ &= -(x-80)^2 + 10600. \end{aligned}$$

c. Sur  $[20 ; 90]$ , si  $20 \leq a \leq b \leq 90$ , donc

$$\begin{aligned} -60 &\leq a - 60 \leq b - 60 \leq 0 \\ \text{ou} \quad 0 &\leq a - 60 \leq b - 60 \leq 30 \end{aligned}$$

c'est-à-dire ou  $(a-60)^2 \geq (b-60)^2$   
ou  $(a-60)^2 \leq (b-60)^2$

$$\begin{aligned} \text{alors ou} \quad &-(a-60)^2 + 10600 \leq -(b-60)^2 + 10600 \\ &-(a-60)^2 + 10600 \geq -(b-60)^2 + 10600. \end{aligned}$$

Ainsi, sur  $[20 ; 60]$ ,  $B$  est croissante, puis décroissante sur  $[60 ; 90]$ .

d. Dans ce cas,  $B$  admet un maximum en  $x = 60$  ; il est de 10 600 F CFA.

**101** Pour un nombre entier naturel non nul  $n$  :

•  $B_n$  a pour abscisse la solution positive de l'équation

$$x^2 = \frac{n}{x}, \text{ c'est-à-dire } x^3 = n \text{ que l'on note } s.$$

• L'aire  $\mathcal{A}_{B_n}$  du triangle  $OA_M B_N$  est :  $\frac{s \times s^2}{2} = \frac{s^3}{2}$ .

D'après la 1<sup>re</sup> remarque,  $s^3 = n$  donc  $\mathcal{A}_{B_n} = \frac{n}{2}$ .

**102** 1. Dans un repère orthonormé :

$$AM^2 = (x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2. \text{ Ici, } AM^2 = (x - 6)^2 + (y - 2)^2.$$

De plus,  $M \in (\mathcal{D})$  donc  $y = 3x + 2$  et ainsi :

$$\begin{aligned} AM^2 &= (x - 6)^2 + (3x + 2 - 2)^2 = (x - 6)^2 + (3x)^2 \\ &= x^2 - 12x + 36 + 9x^2 \\ &= 10x^2 - 12x + 36. \end{aligned}$$

2. Pour tout nombre réel  $x$ ,

$$\begin{aligned} (x - 0,6)^2 + 3,24 &= x^2 - 1,2x + 0,36 + 3,24 \\ &= x^2 - 1,2x + 3,6. \end{aligned}$$

3. Pour tout nombre réel  $x$ ,

$$f(x) = 10(x^2 - 1,2x + 3,6) = 10[(x - 0,6)^2 + 3,24].$$

Sur  $\mathbb{R}$ , si  $a < b$ , alors  $a - 0,6 < b - 0,6$ .

Pour utiliser les variations de la fonction carré, il faut savoir si ces nombres réels sont positifs ou négatifs.

Ainsi, sur  $]-\infty ; 0,6]$ ,  $a - 0,6 < b - 0,6 \leq 0$ ,

$$\text{alors } (a - 0,6)^2 > (b - 0,6)^2 \geq 0$$

$$\text{et } 10[(a - 0,6)^2 + 3,24] > 10[(b - 0,6)^2 + 3,24] \geq 32,4.$$

Cela signifie que  $f$  est décroissante sur  $]-\infty ; 0,6]$ . De même, on montre que  $f$  est croissante sur  $[0,6 ; +\infty[$ .

4.  $f$  admet donc un minimum quand  $x = 0,6$  et il est de 32,4. Ainsi, pour  $x = 0,6$ ,  $AM^2$  est minimum, donc  $AM$  est minimum.

5. a. Pour le point  $M(0,6 ; \sqrt{f(0,6)})$  soit  $M(0,6 ; \sqrt{32,4})$ .

b.  $AM = \sqrt{32,4}$ .

**103** 1. a. Le graphique  $(\mathcal{C}_1)$  puisque pour l'autre, un antécédent a deux images. Ceci est impossible pour une fonction numérique (de Seconde).

b.  $D_f = [-3 ; 3]$ .

2.  $M(x ; y) \in (\mathcal{C}_1) \Leftrightarrow x \in [-3 ; 3], y > 0$  et  $OM = 3$ .

Or  $OM = 3 \Leftrightarrow OM^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 9$ .

Ainsi,  $M(x ; y) \in (\mathcal{C}_1) \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3, y \geq 0$  et  $x^2 + y^2 = 9$ .

3. Une équation de la courbe  $(\mathcal{C}_1)$  est  $y = \sqrt{9 - x^2}$  pour  $x \in [-3 ; 3]$ . Ainsi,  $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$  pour  $x \in [-3 ; 3]$ .

4. Sur  $[-3 ; 0]$ , si  $-3 \leq a \leq b \leq 0$  alors  $9 \geq a^2 \geq b^2 \geq 0$  alors  $-9 \leq -a^2 \leq -b^2 \leq 0$  alors  $0 \leq 9 - a^2 \leq 9 - b^2 \leq 9$  et  $\sqrt{9 - a^2} \leq \sqrt{9 - b^2}$ . Cela signifie que  $f$  est croissante sur  $[-3 ; 0]$ .

Sur  $[0 ; 3]$ , de même :

si  $0 \leq a \leq b \leq 3$  alors  $\sqrt{9 - a^2} \geq \sqrt{9 - b^2}$ . Cela signifie que  $f$  est décroissante sur  $[0 ; 3]$ .

5. Sur  $[-3 ; 3]$ ,  $f(-x) = \sqrt{9 - (-x)^2} = \sqrt{9 - x^2} = f(x)$ . L'axe  $(OJ)$  est un axe de symétrie puisque  $M(-x ; f(x)) \in (\mathcal{C}_1)$  et  $M'(x ; f(x)) \in (\mathcal{C}_1)$  et ces deux points sont symétriques par rapport à  $(OJ)$ .

6. Pour tout  $x \in [-3 ; 3]$ ,  $g(x) = -f(x) = -\sqrt{9 - x^2}$ .

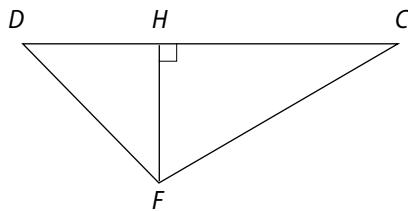
# 12 Polynômes et fractions rationnelles

## Activités d'introduction

### 1 Un problème d'aires

1. On conjecture que le point  $E$  est le milieu du segment  $[AB]$ .

2. a.  $AEFG$  est un carré de côté de longueur  $x$ . Ainsi l'aire de  $\mathcal{G}_A^P$  est égale à  $x^2$ .



$DCF$  est un triangle.

$$HF = 12 - x$$

( $HF$ ) est la hauteur du triangle  $DFC$  issue du sommet  $F$ .

$$\text{Aire de } \mathcal{G}_N^P = \frac{DC \times HF}{2} = \frac{12(12 - x)}{2} = 6(12 - x).$$

L'aire de  $\mathcal{G}_N^P$  est égale à  $72 - 6x$ .

b. On cherche  $x \in [0 ; 12]$  tel que  $72 - 6x = x^2$ , donc  $x^2 + 6x - 72 = 0$ .

c.  $(x - 6)(x + 12) = x^2 + 12x - 6x - 72 = x^2 + 6x - 72$  donc  $x^2 + 6x - 72 = 0 \Leftrightarrow (x - 6)(x + 12) = 0$ .

d. On résout : ( $x^2 + 6x - 72 = 0$  et  $x \in [0 ; 12]$ )

$$\Leftrightarrow ((x - 6)(x + 12) = 0 \text{ et } x \in [0 ; 12]) \Leftrightarrow ((x = 6 \text{ ou } x = -12) \text{ et } x \in [0 ; 12]) \Leftrightarrow x = 6.$$

Il faut donc placer le point  $E$  sur le segment  $[AB]$  de sorte que  $AE = 6$  dam, c'est-à-dire au milieu du segment  $[AB]$ .

### 2 Forme canonique

1. a.  $P(x) = 5 \left[ x^2 - \frac{2x}{5} - \frac{3}{5} \right] = 5 \left[ \left( x - \frac{1}{5} \right)^2 - \left( \frac{1}{5} \right)^2 - \frac{3}{5} \right] = 5 \left[ \left( x - \frac{1}{5} \right)^2 - \frac{16}{25} \right].$

b. •  $P(x) = 5 \left[ \left( x - \frac{1}{5} \right)^2 - \left( \frac{4}{5} \right)^2 \right] = 5 \left[ \left( x - \frac{1}{5} \right) - \left( \frac{4}{5} \right) \right] \left[ \left( x - \frac{1}{5} \right) + \left( \frac{4}{5} \right) \right] = 5 \left[ (x - 1) \left( x + \frac{3}{5} \right) \right].$

•  $P(x) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \text{ ou } x + \frac{3}{5} = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -\frac{3}{5}.$

2. a.  $Q(x) = 2 \left[ x^2 + 2x + \frac{3}{2} \right] = 2 \left[ (x + 1)^2 - 1 + \frac{3}{2} \right] = 2 \left[ (x + 1)^2 + \frac{1}{2} \right].$

b. • Pour tout nombre réel  $x$ ,  $(x + 1)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} > 0$  donc  $Q(x)$  ne peut être factorisé.

$Q$  ne possède aucune racine. En effet : pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ ,  $(x + 1)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} > 0$ .

### 3 Signe de polynômes – Quotient de polynômes

1. a.  $(x - 1)(3x - 1)(x + 2) = (3x^2 - 4x + 1)(x + 2) = 3x^3 + 6x^2 - 4x^2 - 8x + x + 2 = 3x^3 + 2x^2 - 7x + 2.$

b.  $P(x) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(3x - 1)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = \frac{1}{3} \text{ ou } x = -2.$

Les racines de  $P$  sont  $1$ ,  $\frac{1}{3}$  et  $-2$ .

c.

$x$	$-\infty$	$-2$	$\frac{1}{3}$	$1$	$+\infty$			
$x - 1$		-	-	-	0	+		
$3x - 1$		-	-	0	+	+		
$x + 2$		-	0	+	+	+		
$P(x)$		-	0	+	0	-	0	+

2. a.  $F(x)$  est défini si et seulement si  $P(x) \neq 0$  si et seulement si  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; \frac{1}{3}; 1\}$ . Ainsi  $\mathcal{D}_F = \mathbb{R} \setminus \{-2; \frac{1}{3}; 1\}$ .

b.  $Q(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{5}$ .

$x$	$-\infty$	$-2$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$1$	$+\infty$
$P(x)$		- 0 +	0 -		- 0 +	
$Q(x)$		+ +	+ 0 -		- -	
$F(x)$		- +	- 0 +		- -	

## Savoir-faire

3 a.  $P(1) = 7 \times 1^2 - 5 \times 1 - 2 = 7 - 7 = 0$

donc 1 est une racine de  $P$ .

La seconde racine  $\beta$  de  $P$  est telle que :

$$1 + \beta = -\frac{-5}{7} = \frac{5}{7} \text{ donc } \beta = \frac{5}{7} - 1 = -\frac{2}{7}.$$

b.  $P(5) = 5^2 - 4 \times 5 = 0$  donc 5 est une racine de  $P$ .

La seconde racine  $\beta$  de  $P$  est telle que  $5 \times \beta = \frac{-5}{1} = -5$  donc  $\beta = -1$ .

c.  $P(3) = 3^2 - 3 - 6 = 0$  donc 3 est une racine de  $P$ .

La seconde racine  $\beta$  de  $P$  est telle que  $3 \times \beta = \frac{-6}{1} = -6$  donc  $\beta = -2$ .

d.  $P(-1) = 2 \times (-1)^2 - 12 \times (-1) - 14 = 0$  donc  $-1$  est une racine de  $P$ .

La seconde racine  $\beta$  de  $P$  est telle que :

$$-1 \times \beta = -\frac{14}{2} = -7 \text{ donc } \beta = 7.$$

4  $P(x) = (x - 2)\left(x + \frac{1}{2}\right)$  et  $Q(x) = 3(x - 2)\left(x + \frac{1}{2}\right)$ .

5 a.  $P_1(x) = x^2 - 7x + 10 = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 + 10$

$$= \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} + \frac{40}{4}$$

$$= \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \text{ (forme canonique).}$$

Donc  $P_1(x) = \left[\left(x - \frac{7}{2}\right) - \frac{3}{2}\right]\left[\left(x - \frac{7}{2}\right) + \frac{3}{2}\right]$

$$= \left(x - \frac{10}{2}\right)\left(x - \frac{4}{2}\right)$$

$$= (x - 5)(x - 2) \text{ (forme factorisée).}$$

b.  $P_2(x) = 5x - 4x = 5\left(x^2 - \frac{4}{5}x\right) = 5\left[\left(x - \frac{2}{5}\right)^2 - \left(\frac{2}{5}\right)^2\right]$

$$= 5\left[\left(x - \frac{2}{5}\right)^2 - \frac{4}{25}\right] \text{ (forme canonique).}$$

$$P_2(x) = x(5x - 4) \text{ (forme factorisée).}$$

c.  $P_3(x) = 3x^2 + x + 1 = 3\left(x^2 + \frac{x}{3} + \frac{1}{3}\right)$

$$= 3\left[\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{3}\right]$$

$$= 3\left[\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{11}{36}\right] \text{ (forme canonique).}$$

$P_3$  n'a pas de forme factorisée.

d.  $P_4(x) = -2x^2 + x + 4 = -2\left(x^2 - \frac{x}{2} - 2\right)$

$$= -2\left[\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 - 2\right]$$

$$= -2\left[\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{33}{16}\right] \text{ (forme canonique)}$$

donc  $P_4(x) = -2\left[\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{33}}{4}\right)^2\right]$

$$= -2\left[\left(x - \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{33}}{4}\right)\left(x - \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{33}}{4}\right)\right]$$

$$= -2\left(x - \frac{1 + \sqrt{33}}{4}\right)\left(x - \frac{1 - \sqrt{33}}{4}\right)$$

(forme factorisée).

8 a. 5 est une racine de  $P_1$  et  $\deg(P_1) = 1$ .

b. 1 est une racine de  $P_2$  et  $\deg(P_2) = 2$ .

c. 2 est une racine de  $P_3$  et  $\deg(P_3) = 4$ .

d. 2 est une racine de  $P_4$  et  $\deg(P_4) = 3$ .

9 a.  $(x^2 - 1)(2x - 1) = 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = P(x)$

b.  $P(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0$  ou  $2x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1 \text{ ou } x = \frac{1}{2}.$$

Les racines de  $P$  sont 1 ; -1 et  $\frac{1}{2}$ .

10 a.  $P(-1) = 5 \times (-1)^2 + (-1) - 4 = 5 - 1 - 4 = 0$  donc -1 est une racine de  $P$ .

**b.**  $(x + 1)(ax + b) = ax^2 + (b + a)x + b$ . Donc par identification :

$$\begin{cases} a = 5 \\ b + a = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 5 \\ b = -4 \end{cases}$$

Ainsi  $P(x) = (x + 1)(5x - 4)$ .

**11**  $(x + 2)(x^2 + ax + b) = x^3 + ax^2 + bx + 2x^2 + 2ax + 2b$   
 $= x^3 + (a + 2)x^2 + (b + 2a)x + 2b$ .

Donc, par identification :

$$\begin{cases} a + 2 = -1 \\ b + 2a = -1 \\ 2b = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 5 \end{cases}$$

Ainsi,  $P(x) = (x + 2)(x^2 - 3x + 5)$ .

**14 a.**

$$\begin{array}{r|l} 2x^5 + x^4 + 1 & x^3 + 1 \\ -[2x^5 + 2x^2] & 2x^2 + x \\ \hline x^4 - 2x^2 + 1 & \\ -[x^4 + x] & \\ \hline -2x^2 - x + 1 & \end{array}$$

Donc  $2x^5 + x^4 + 1 = (x^3 + 1)(2x^2 + x) - 2x^2 - x + 1$   
 ( $\deg(-2x^2 - x + 1) < \deg(x^3 + 1)$ ).

**b.**

$$\begin{array}{r|l} 2x^2 + 3x + 9 & x + 3 \\ -[2x^2 + 6x] & 2x - 3 \\ \hline -3x + 9 & \\ -[-3x - 9] & \\ \hline 18 & \end{array}$$

Donc  $2x^2 + 3x + 9 = (x + 3)(2x - 3) + 18$ .

**15 a.**  $F(x) = \frac{x}{5 - x}$ .

L'ensemble de définition  $F$  est  $\mathbb{R} \setminus \{5\}$ .

$x$	$-\infty$	$0$	$5$	$+\infty$
$x$	-	0	+	+
$5 - x$	+	+	0	-
$F(x)$	-	0	+	-

**b.**  $F(x) = 3x(2x - 5)$ .

L'ensemble de définition de  $F$  est  $\mathbb{R}$ .

$x$	$-\infty$	$0$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$3x$	-	0	+	+
$2x - 5$	-	-	0	+
$F(x)$	+	0	-	+

**c.**  $F(x) = \frac{x + 1}{x(3 - x)}$ .

L'ensemble de définition  $F$  est  $\mathbb{R} \setminus \{0 ; 3\}$

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$3$	$+\infty$
$x$	-	-	0	+	+
$x + 1$	-	0	+	+	+
$3 - x$	+	+	+	0	-
$F(x)$	+	0	-	+	-

## Exercices d'entraînement

**16 1.** Un polynôme  $P$  du second degré est de la forme  $P(x) = ax^2 + bx + c$  où  $a, b, c$  désignent trois nombres réels tels que  $a \neq 0$ .

**2. b. ; c. ; d. ; e. ; f.**

**17 a.**  $9x^2 - 16 = (3x)^2 - 4^2 = (3x - 4)(3x + 4)$ .

**b.**  $x^2 + 10x + 25 = x^2 + 2 \times 5x + 5^2 = (x + 5)^2$ .

**c.**  $(5 + x)^2 - 1 = (5 + x - 1)(5 + x + 1) = (4 + x)(6 + x)$ .

**d.**  $(x - 1)^2 - 2x(x - 1) = (x - 1)[(x - 1) - 2x]$   
 $= (x - 1)(-x - 1)$ .

**e.**  $4x^2 + 4x + 1 = (2x)^2 + 2 \times 2x + 1 = (2x + 1)^2$ .

**f.**  $36 - 24x + 4x^2 = 6^2 - 2 \times 6 \times 2x + (2x)^2 = (6 - 2x)^2$ .

**18 a.** 1 car  $1^2 + 2 \times 1 - 3 = 0$ .

**b.**  $\frac{1}{2}$  car  $4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = 0$ .

**c.** -1 car  $3 \times (-1)^2 + 2 \times (-1) - 1 = 0$ .

**19 a.** Canonique. **b.** Factorisée. **c.** Développée.

**20 a.**  $x^2 + 5x + 2 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 2 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{17}{4}$ .

**b.**  $3x^2 - 2x + 1 = 3\left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}\right) = 3\left[\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9} + \frac{1}{3}\right]$   
 $= 3\left[\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{9}\right]$ .

**c.**  $5x^2 + 16x + 3 = 5\left(x^2 + \frac{16}{5}x + \frac{3}{5}\right)$   
 $= 5\left[\left(x + \frac{8}{5}\right)^2 - \frac{64}{25} + \frac{3}{5}\right]$   
 $= 5\left[\left(x + \frac{8}{5}\right)^2 - \frac{49}{25}\right]$ .

**d.**  $-4x^2 + 7x - 3 = -4\left(x^2 - \frac{7}{4}x + \frac{3}{4}\right)$   
 $= -4\left[\left(x + \frac{7}{8}\right)^2 - \frac{49}{64} + \frac{3}{4}\right]$   
 $= -4\left[\left(x + \frac{7}{8}\right)^2 - \frac{1}{64}\right]$ .

**21 a.**  $-x^2 + x + 2 = (x + 1)(-x + 2)$ .

$x$	$-\infty$	$-1$	$2$	$+\infty$
$x+1$		$-$	$0$	$+$
$-x+2$		$+$	$0$	$-$
$-x^2+x+2$		$-$	$0$	$-$

**b.**  $4x^2 - 3x - 1 = 4(x - 1)\left(x + \frac{1}{4}\right)$ .

$x$	$-\infty$	$-\frac{1}{4}$	$1$	$+\infty$
$x-1$		$-$	$0$	$+$
$x+\frac{1}{4}$		$-$	$0$	$+$
$4x^2-3x-1$		$+$	$0$	$+$

**c.**  $7x^2 - 5x = x(7x - 5)$ .

$x$	$-\infty$	$0$	$\frac{5}{7}$	$+\infty$
$x$		$-$	$0$	$+$
$7x-5$		$-$	$0$	$+$
$7x^2-5x$		$+$	$0$	$+$

**d.**  $x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$ .

$x$	$-\infty$	$-3$	$2$	$+\infty$
$x+3$		$-$	$0$	$+$
$x-2$		$-$	$0$	$+$
$x^2-x+6$		$+$	$0$	$+$

**22 1.**  $P(x) = 16 - (1 - 2x + x^2) = -x^2 + 2x + 15$  (forme développée).

•  $P(x) = 4^2 - (1 - x)^2 = [4 - (1 - x)][4 + (1 - x)] = (3 + x)(5 - x)$ .

**2. a.**  $P(x) = 16 \Leftrightarrow 16 - (1 - x)^2 = 16$

$\Leftrightarrow (1 - x)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ .

**b.**  $P(x) = 15 \Leftrightarrow -x^2 + 2x + 15 = 15$

$\Leftrightarrow -x^2 + 2x = 0$

$\Leftrightarrow x(-x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$  ou  $x = 2$ .

**c.**  $P(x) = 0 \Leftrightarrow (3 + x)(5 - x) = 0 \Leftrightarrow x = -3$  ou  $x = 5$ .

**23 a.**  $\frac{1}{2}x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x\left(\frac{1}{2}x - 3\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0$  ou  $x = 6$ .

**b.**  $x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ .

**c.**  $3x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{3}x)^2 - 2\sqrt{3}x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (\sqrt{3}x - 1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

**d.**  $-x^2 - 11 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -11$ .

Donc pas de solution.

**24 a.** Comme  $x_1$  et  $x_2$  sont racines de  $P$  :

$$\begin{cases} ax_1^2 + bx_1 + c = 0 (L_1) \\ ax_2^2 + bx_2 + c = 0 (L_2) \end{cases}$$

• En soustrayant  $(L_1)$  et  $(L_2)$ , on a :

$$a(x_1^2 - x_2^2) + b(x_1 - x_2) = 0 \Leftrightarrow [a(x_1 + x_2) + b](x_1 - x_2) = 0.$$

Comme  $x_1 \neq x_2$  et  $a \neq 0$ ,  $a(x_1 + x_2) = -b$

donc  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ .

• En multipliant  $(L_1)$  par  $x_2$  et  $(L_2)$  par  $x_1$ , puis en les additionnant, on a :

$$ax_1x_2(x_1 + x_2) + 2bx_1x_2 + c(x_1 + x_2) = 0$$

donc  $x_1x_2(-b + 2b) + c \times -\frac{b}{a} = 0$

(en utilisant  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ).

On en déduit alors que  $x_1x_2 = \frac{c}{a}$ .

**b.** On cherche  $x_1$  et  $x_2$  tels que  $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1x_2 = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = -2 \end{cases}$ .

Donc  $P$  a pour racines 6 et  $-2$ .

On cherche  $x_1$  et  $x_2$  tels que  $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{5}{2} \\ x_1x_2 = -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$

Donc  $Q$  a pour racines 3 et  $-\frac{1}{2}$ .

**25 a.**  $(x - 1)(x - 3) = x^2 - 4x + 3$ .

**b.**  $(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$ .

**c.**  $(x + 1)\left(x - \frac{1}{2}\right) = x^2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$ .

**d.**  $x(x - \sqrt{3}) = x^2 - \sqrt{3}x$ . **e.**  $x^2 + 1$ . **f.**  $x^2 - 7$ .

**26 a.** Il semble que les racines de  $P$  soient  $-4$  et  $3$ .

**b.**  $P(x) = a(x + 4)(x - 3)$  où  $a$  est un nombre réel.

Or  $P(0) = -6$  donc  $-6 = a \times 4 \times (-3)$  donc  $a = \frac{1}{2}$ .

Ainsi  $P(x) = \frac{1}{2}(x + 4)(x - 3)$ .

**27 a.** Il semble que les racines de  $P$  soient 7 et  $-\frac{3}{5}$ .

Il semble que les racines de  $Q$  soient 1 et  $-\frac{5}{4}$ .

**b.**  $P(x) = (x - 7)(5x + 3)$ .

$Q(x) = (x - 1)(4x + 5)$ .

**28 1. a.**  $C_M(x) = 0,02x^2 - 2x + 500$   
 $= 0,02[x^2 - 100x + 25\,000]$   
 $= 0,02[(x - 50)^2 - 2\,500 + 25\,000]$   
 $= 0,02[(x - 50)^2 + 22\,500]$

**b.** Comme  $(x^2 - 50) + 22\,500 \geq 22\,500$ , pour tout  $x \geq 0$ , le coût moyen annuel est minimum lorsque  $x = 50$  et vaut alors 22 500 F CFA.

2. a.  $B(x) = 650x - C(x)$  donc  $B(x) = 150x - 0,02x^3 + 2x^2$ .

b.  $B_M(x) = \frac{B(x)}{x} = 150 - 0,02x^2 + 2x$   
 $= 150 - 0,02[x^2 - 100x]$   
 $= 150 - 0,02[(x - 50)^2 - 2500]$   
 $= 200 - 0,02x(x - 50)^2$ .

29 1. a.  $a_n \neq 0$ . 2. b.  $P(\alpha) = 0$  et c.  $\alpha$  a pour image 0 par  $P$ . 3. b.  $\deg P + \deg Q$ .

30 a. Polynôme de degré 2.

b. Polynôme de degré 7.

d. Polynôme de degré 1.

f. Polynôme de degré 1.

g. Polynôme de degré 9.

i. Polynôme de degré 2.

31 a. Degré 5 et terme de degré 2 de coefficient 1.

b. Degré 11 et terme de degré 2 de coefficient 0.

c. Degré 3 et terme de degré 2 de coefficient 3.

d. Degré 4 et terme de degré 2 de coefficient 2.

e. Degré 3 et terme de degré 2 de coefficient -3.

f. Degré 4 et terme de degré 2 de coefficient  $\sqrt{3}$ .

32 a. 
$$\begin{array}{r|l} 5x^2 - 3x + 11 & x - 1 \\ -[5x^2 - 5x] & 5x + 2 \\ \hline 2x + 11 & \\ -[2x - 2] & \\ \hline 13 & \end{array}$$

Donc  $5x^2 - 3x + 11 = (x - 1)(5x + 2) + 13$ .

b. 
$$\begin{array}{r|l} -7x^2 + x & 3x - 1 \\ -[7x^2 + \frac{7}{3}x] & -\frac{7}{3}x - \frac{4}{9} \\ \hline -\frac{4}{3}x & \\ -[\frac{4}{3}x + \frac{4}{9}] & \\ \hline -\frac{4}{9} & \end{array}$$

Donc  $-7x^2 + x = (3x - 1)(-\frac{7}{3}x - \frac{4}{9}) - \frac{4}{9}$

33 a.  $(x - 5)^2 + (3x - 1)^2$   
 $= (x^2 - 10x + 25) + (9x^2 - 6x + 1)$   
 $= 10x^2 - 16x + 26$ .

b.  $\frac{9x - 18}{-3} = \frac{9x}{-3} - \frac{18}{-3} = -3x + 6$ .

c.  $(2x + 1)^3 = (2x + 1)^2(2x + 1)$   
 $= (4x^2 + 4x + 1)(2x + 1)$   
 $= 8x^3 + 8x^2 + 2x + 4x^2 + 4x + 1$   
 $= 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$ .

d.  $(7 - x)(x + 1) + 3x^2 = 7x + 7 - x^2 - x + 3x^2$   
 $= 2x^2 + 6x + 7$ .

e.  $(5x - 1)^2 - x(x + 1)^2 = 25x^2 - 10x + 1 - x(x^2 + 2x + 1)$   
 $= 25x^2 - 10x + 1 - x^3 - 2x^2 - x$   
 $= -x^3 + 23x^2 - 11x + 1$ .

f.  $(x - 1)^4 = (x - 1)^2 \times (x - 1)^2 = (x^2 - 2x + 1)(x^2 - 2x + 1)$   
 $= x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x^3 + 4x^2 - 2x + x^2 - 2x + 1$   
 $= x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$ .

34 a. 
$$\begin{array}{r|l} x^6 - 3x + 4 & x + 2 \\ -[x^6 + 2x^5] & \\ \hline -2x^5 - 3x + 4 & \\ -[-2x^5 - 4x^4] & \\ \hline 4x^4 - 3x + 4 & \\ -[4x^4 + 8x^3] & \\ \hline -8x^3 - 3x + 4 & \\ -[-8x^3 - 16x^2] & \\ \hline 16x^2 - 3x + 4 & \\ -[16x^2 + 32x] & \\ \hline -35x + 4 & \\ -[-35x - 70] & \\ \hline 74 & \end{array}$$

$x^6 - 3x + 4 = (x + 2)(x^5 - 2x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 16x - 35) + 74$ .

b. 
$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - x^2 + 5x + 1 & x^2 + 1 \\ -[2x^3 + 2x] & 2x - 1 \\ \hline -x^2 + 3x + 1 & \\ -[-x^2 - 1] & \\ \hline 3x + 2 & \end{array}$$

Donc  $2x^3 - x^2 + 5x + 1 = (x^2 + 1)(2x - 1) + 3x + 2$ .

c. 
$$\begin{array}{r|l} x^4 + 3 & x - 1 \\ -[x^4 - x^3] & x^3 + x^2 + x + 1 \\ \hline x^3 + 3 & \\ -[x^3 - x^2] & \\ \hline x^2 + 3 & \\ -[x^2 - x] & \\ \hline x + 3 & \\ -(x - 1) & \\ \hline 4 & \end{array}$$

Donc  $x^4 + 3 = (x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1) + 4$

d. 
$$\begin{array}{r|l} x^5 + x^3 + 1 & x^3 + x + 1 \\ -[x^5 + x^3 + x^2] & x^2 \\ \hline -x^2 + 1 & \end{array}$$

Donc  $x^5 + x^3 + 1 = x^2(x^3 + x + 1) - x^2 + 1$ .

35 a. 1 est une racine évidente donc il existe  $a$  et  $b$  deux nombres réels tels que :

$x^3 - x^2 + 2x - 2 = (x - 1)(x^2 + ax + b)$ .

On développe :

$$x^3 + ax^2 + bx - x^2 - ax - b = x^3 + (a-1)x^2 + (b-a)x - b.$$

On identifie et on trouve :  $\begin{cases} a-1 = -1 \\ b-a = 2 \\ -b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 2 \end{cases}.$

Donc  $x^3 - x^2 + 2x - 2 = (x-1)(x^2 + 2).$

**b.** 1 est racine évidente

et  $x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$

**c.** -1 est racine évidente  $3x^2 + 2x - 1 = (x+1)(ax + b)$  avec  $a$  et  $b$  deux nombres réels. On développe et on identifie. On trouve  $a = 3$  et  $b = -1$ .

Donc  $3x^2 + 2x - 1 = (x+1)(3x-1).$

**d.** 1 est racine évidente et  $x^4 - 3x^2 + 2 = (x-1)P(x).$

$x^4 - 3x^2 + 2$	$x-1$
$-[x^4 - x^3]$	$x^3 + x^2 - 2x - 2$
$x^3 - 3x^2 + 2$	
$-[x^3 - x^2]$	
$-2x^2 + 2$	
$-[-2x^2 + 2x]$	
$-2x + 2$	
$-[-2x + 2]$	
0	

Donc  $x^4 - 3x^2 + 2 = (x-1)(x^3 + x^2 - 2x - 2).$

**36 a.**  $P(2) = 2^3 + 6 \times 2^2 - 2 - 30 = 8 + 24 - 2 - 30 = 0.$

**b.**  $(x-2)(x^2 + ax + b) = P(x)$

$\Leftrightarrow x^3 + (a-2)x^2 + (b-2a) - 2b = P(x).$

Par identification :  $\begin{cases} a-2 = 6 \\ b-2a = -1 \\ -2b = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = 15 \end{cases}.$

Donc  $Q(x) = x^2 + 8x + 15.$

**c.**  $(x+3)(x+5) = x^2 + 8x + 15 = Q(x)$

**d.** On a alors :  $P(x) = (x-2)(x+3)(x+5)$  et les racines de  $P$  sont 2 ; -3 et -5.

**37 a.**  $P(-1) = 0$  donc  $P(x) = (x+1)(x+b)$  convient avec  $b$  un nombre réel.

Or  $P(3) = 1$  donc  $1 = 4 \times (1+b)$  donc  $b = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}.$

D'où  $P(x) = (x+1)(x - \frac{3}{4})$  convient.

**b.**  $P(0) = 0$  donc  $P(x) = x^3 + ax^2 + bx$  convient avec  $a$  et  $b$  deux nombres réels.

Or  $P(1) = 1$  et  $P(-1) = 2$ . Donc :

$\begin{cases} 1+a+b = 1 \\ -1+a-b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ a = b+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -\frac{3}{2} \\ a = \frac{3}{2} \end{cases}$

Ainsi,  $P(x) = x^3 + \frac{3x^2}{2} - \frac{3x}{2}$  convient.

**c.** Comme  $P(0) = P(1) = P(2) = 0,$

$P(x) = x(x-1)(x-2)(x+a)$  où  $a$  est un nombre réel convient. De plus  $P(3) = 1$  donc  $a = -\frac{17}{6}$  car  $3 \times 2 \times 1 \times (3+a) = 1.$

**38** On cherche  $a$  et  $b$  deux nombres réels tels que :

$q_1(x) = x^2 + ax + b$  avec  $q_1(0) = \frac{1}{2}$  et  $q_1(1) = \frac{1}{4}.$

On obtient le système :

$\begin{cases} b = \frac{1}{2} \\ 1+a+b = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{2} \\ a = \frac{1}{4} - 1 - \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{2} \\ a = -\frac{5}{4} \end{cases}$

donc  $q_1(x) = x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{1}{2}$  convient.

• On cherche  $a, b, c$  trois nombres réels tels que :

$q_2(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  avec  $q_2(0) = 1 ; q_2(1) = 3/2 ; q_2(2) = 4.$

On obtient le système :

$\begin{cases} c = 1 \\ 1+a+b+c = \frac{3}{2} \\ 8+4a+2b+c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ a+b = -\frac{1}{2} \\ 4a+2b = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ a = -2 \\ b = \frac{3}{2} \end{cases}$

donc  $q_2(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{3}{2}x + 1$  convient.

**39 a.**

$x$	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$3x-2$	-	0	+

**b.**

$x$	$-\infty$	$-\frac{5}{4}$	$+\infty$
$5-4x$	+	0	-

**c.**

$x$	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$x-1$	-	0	+	+
$2-x$	+	+	0	-
$3(x-1)(2-x)$	-	0	+	-

**d.**  $(x-1)^2$  est positif pour tout nombre réel  $x.$

$x$	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$(x-1)^2$	+	0	+	+
$x-2$	-	-	0	+
$(x-1)^2(x-2)$	-	0	-	+

**e.**  $(x-1)^3$  est du signe de  $(x-1)$  pour tout nombre réel  $x.$

$x$	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$
$(x-1)^3$	-	-	0	+
$x+2$	-	0	+	+
$(x-1)^3(x+2)$	+	0	-	+

**f.**

$x$	$-\infty$	$0$	$4$	$7$	$+\infty$
$x$	-	0	+	+	+
$x-4$	-	-	0	+	+
$7-x$	+	+	+	0	-
$x(x-4)(7-x)$	+	0	-	0	-

**40 a.**  $x^3 + 4x^2 = x^2(x + 4)$ .

$x$	$-\infty$	$-4$	$0$	$+\infty$
$x^2$	+	+	0	+
$x+4$	-	0	+	+
$x^3 + 4x^2$	-	0	+	+

**b.**  $P(x) = (x-3)^2 + (x-3)(5-2x)$   
 $= (x-3)[(x-3) + (5-2x)]$   
 $= (x-3)(-x+2)$ .

$x$	$-\infty$	$2$	$3$	$+\infty$
$x-3$	-	-	0	+
$-x+2$	+	0	-	-
$P(x)$	-	0	+	-

**c.**  $P(x) = 3x(x-5) - (x-5)$   
 $= (x-5)(3x-1)$ .

$x$	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$5$	$+\infty$
$x-5$	-	-	0	+
$3x-1$	-	0	+	+
$P(x)$	+	0	-	+

**d.**  $P(x) = 2(x+1)^3 - 4x(x+1)^2$   
 $= 2(x+1)^2[(x+1) - 2x]$   
 $= 2(x+1)^2(-x+1)$ .

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$
$2(x+1)^2$	+	0	+	+
$-x+1$	+	+	0	-
$P(x)$	+	0	+	-

**41 a.**  $P(-1) = (-1)^3 + 2 \times (-1)^2 - 5 \times (-1) - 6$   
 $= -1 + 2 + 5 - 6 = 0$ .

**b.** On développe :  
 $(x+1)(x^2 + ax + b) = x^3 + (a+1)x^2 + (b+a)x + b$ .

On identifie :  $\begin{cases} a+1=2 \\ b+a=-5 \\ b=-6 \end{cases}$  donc  $\begin{cases} a=1 \\ b=-6 \end{cases}$

et  $P(x) = (x+1)(x^2 + x - 6)$ .

**c.**  $Q(x) = x^2 + x - 6$ .  
 Comme  $Q(2) = 0$  et  $Q(-3) = 0$ ,  $Q(x) = (x-2)(x+3)$ .

**d.**  $P(x) = (x+1)(x-2)(x+3)$ .

$x$	$-\infty$	$-3$	$-1$	$2$	$+\infty$
$x+1$	-	-	0	+	+
$x-2$	-	-	-	0	+
$x+3$	-	0	+	+	+
$P(x)$	-	0	+	0	+

**42**  $P(-1) = 0$  donc il existe deux nombres réels  $a$  et  $b$  tels que  $P(x) = (x+1)(2x^2 + ax + b)$ .

On développe et on identifie :

$2x^3 + (2+a)x^2 + (a+b)x + b = P(x)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2+a=3 \\ a+b=0 \\ b=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}$

donc  $P(x) = (x+1)(2x^2 + x - 1)$ .

On pose  $Q(x) = 2x^2 + x - 1$ .

Comme  $Q(-1) = 0$ , il existe un réel  $c$  tel que :

$Q(x) = (x+1)(2x+c)$  et on trouve  $c = -1$ .

Donc  $Q(x) = (x+1)(2x-1)$ .

Ainsi,  $P(x) = (x+1)^2(2x-1)$ .

$x$	$-\infty$	$-1$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$(x+1)^2$	+	0	+	+
$2x-1$	-	-	0	+
$P(x)$	-	0	-	+

**43 a.** On pose  $Q(X) = X^2 - 1$  et on a  $P(x) = Q(x^2)$ .

**b.**  $Q(X) = (X-1)(X+1)$ .

**c.**  $P(x) = Q(x^2) = (x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x^2+1)$ .

**44 1. a.**  $Q(4) = 4^2 - 3 \times 4 - 4 = 16 - 12 - 4 = 0$

et  $Q(-1) = (-1)^2 - 3 \times (-1) - 4 = 1 + 3 - 4 = 0$

donc 4 et -1 sont les racines de  $Q$ .

**b.** On a alors  $Q(x) = (x+1)(x-4)$ .

**2.**  $P(x) = Q(x^2) = (x^2+1)(x^2-4) = (x^2+1)(x-2)(x+2)$ .

**3.**  $P(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$  ou  $x = -2$  car  $x^2 + 1$  est strictement positif pour tout nombre réel  $x$ .

**45 a.**  $\begin{cases} P(2) = 0 \\ P(-1) = 0 \end{cases}$  donc  $P(x) = (x-2)(x+1)$ .

**b.**  $x - \sqrt{x} - 2 = 0$  et  $x \geq 0 \Leftrightarrow X^2 - X - 2 = 0$  avec  $X = \sqrt{x}$   
 et  $x \geq 0 \Leftrightarrow X = 2$  ou  $X = -1$  avec  $X = \sqrt{x}$  et  $x \geq 0$   
 $\Leftrightarrow \sqrt{x} = 2$  et  $x \geq 0 \Leftrightarrow x = 4$ .

L'équation  $x - \sqrt{x} - 2 = 0$  a une unique solution :  $x = 4$ .

**46** Aire triangle =  $\frac{(x+1)(x^2+1)}{2} \left( \frac{\text{hauteur} \times \text{base}}{2} \right)$ .

$$\text{Aire trapèze} = \frac{(2+2x)(3x-4)}{2}$$

$$\left( \frac{\text{p}^{\text{te}} \text{ base} + \text{g}^{\text{de}} \text{ base}}{2} \times \text{hauteur} \right)$$

On cherche  $x \geq 2$  tel que  $\frac{(x+1)(x^2+1)}{2} = (1+x)(3x-4)$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x^2+1) = 2(x+1)(3x-4)$$

$$\Leftrightarrow (x+1)[x^2+1-2(3x-4)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x^2-6x+9) = 0$$

Comme  $x+1 \neq 0$  ( $x \geq 2$ ) on en déduit que :  
 $x^2-6x+9 = x^2-2 \times 3x+3^2 = (x-3)^2$ .

Ainsi, pour  $x=3$ , les deux aires sont égales, et c'est la seule valeur de  $x$  !

**47** Aire croix =  $3 \times (x+1) + x \times (6-(x+1))$   
 $= 3 \times (x+1) + x(-x+5) = -x^2 + 8x + 3$ .

On cherche  $x \in [0; 3]$  tel que  $-x^2 + 8x + 3 = \frac{6 \times 3}{2} = 9$   
 donc  $-x^2 + 8x - 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 6 = 0$ .

De plus,  $x^2 - 8x + 6 = (x-4)^2 - 4^2 + 6 = (x-4)^2 - 10$   
 $= (x-4-\sqrt{10})(x-4+\sqrt{10})$ .

Comme  $4 + \sqrt{10} > 3$  et  $0 < 4 - \sqrt{10} < 3$ , il existe une seule valeur  $x = 4 - \sqrt{10}$ .

**48 a.** On observe que  $P(-2) = P(2) = 0$ . Donc  $-2$  et  $2$  sont deux racines de  $P$ .

**b.** On peut donc écrire :  $P(x) = (x-2)(x+2)Q(x)$   
 $= (x^2-4)Q(x)$

où  $Q(x) = ax + b$  (avec  $a \neq 0$ ).

Or  $(x^2-4)(ax+b) = ax^3 + bx^2 - 4ax - 4b$  donc, par

identification :  $\begin{cases} a = 4 \\ b = 5 \\ -4a = -16 \\ -4b = -20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 5 \end{cases}$

Ainsi,  $P(x) = (x-2)(x+2)(4x+5)$ .

**49 a.**  $\deg(H_k) = k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

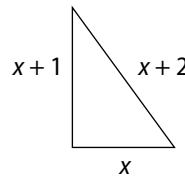
**b.** Pour  $k \neq 0$ ,  $H_0(0) = 1$ . Pour  $k \in \mathbb{N}$ , tel que  $k \neq 0$  :

$$H_k(k) = \frac{1}{k \times (k-1) \times \dots \times 2 \times 1} \times (k-0)(k-1) \times \dots \times 1 = 1$$

Ainsi,  $H_k(k) = 1$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

**c.** Les racines de  $H_k$  sont les nombres entiers naturels compris entre  $0$  et  $k-1$ .

**50 a.** Le triangle est rectangle si et seulement si l'égalité de Pythagore est vérifiée.



$$(x+2)^2 = x^2 + (x+1)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = x^2 + x^2 + 2x + 1$$

$$\Leftrightarrow 0 = x^2 - 2x - 3$$

On remarque que  $-1$  est une racine du polynôme  $x^2 - 2x - 3$ .

Puis que  $x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$ .

Ainsi :  $x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1$  ou  $x = 3$ .

On cherche une longueur, donc  $x \geq 0$ , donc il n'existe qu'une seule valeur pour laquelle le triangle est rectangle :  $x = 3$ .

**b.** D'après la question, le triangle dont les côtés mesurent  $3, 4$  et  $5$  est rectangle et  $3, 4, 5$  sont trois nombres entiers naturels consécutifs. Et c'est l'unique possibilité.

**51 a.**  $P(x) = (x^2-1)^2 + (2x)^2 = x^4 - 2x^2 + 1 + 4x^2$   
 $= x^4 + 2x^2 + 1$ .

**b.**  $P(x) = x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2)^2 + 2x^2 + 1 = (x^2+1)^2$ .

**c.** Les questions **a.** et **b.** montrent que pour tout nombre réel  $x$ ,  $(x^2+1)^2 = (x^2-1)^2 + (2x)^2$ .

Pour  $x = 10$ , on a :

$$101^2 = (10^2+1)^2 = (10^2-1)^2 + (2 \times 10)^2 = 99^2 + 20^2$$

Donc en posant  $p = 99$  et  $q = 20$ , on a  $101^2 = p^2 + q^2$ .

**52 a. b.** Il semble que  $x^4 - (x^2+1)(x^2-1) = 1$  pour tout nombre réel  $x$ .

**c.**  $x^4 - (x^2+1)(x^2-1) = x^4 - [(x^2)^2 - 1^2] = x^4 - (x^4 - 1)$   
 $= x^4 - x^4 + 1 = 1$ .

**53 a.**

$x^3 - x^2 + 2x$	$x$
$-[x^3]$	$x^2 - x + 2$
$-x^2 + 2x$	
$-[-x^2]$	
$2x$	
$-[2x]$	
$0$	

donc  $P(x) = x \times (x^2 - x + 2)$ .

**b.**  $Q(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2$   
 $= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \frac{8}{4}$   
 $= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$

**c.**  $Q(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0$  pour tout nombre réel  $x$   
 donc  $P(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .

$P$  a une unique racine ( $0$ ).

54 1. a. -3 et 5; b. 1 et -2.

2. a.  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ; b.  $x - \frac{x}{x+1}$ .

55 a.  $\mathbb{R} \setminus \{7; -4\}$ ; b.  $\mathbb{R}$ ; c.  $\mathbb{R} \setminus \{0; 3; -3\}$ .

56 a. 11; b. 0 et 1; c. 4 et -4.

57 a.  $F(x) = \frac{x(x-3)}{(x-7)(x+3)}$ .

b.  $G(x) = \frac{(x^2-4)(x-1)}{x^2+1}$ .

58 Les zéros de  $F$  sont 7, 2 et -3 et les pôles de  $F$  sont 3 et -1.

59 a.  $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

b.  $a + \frac{b}{x+1} = F(x)$  et  $x \in \mathcal{D}_f$

$$\Leftrightarrow \frac{ax+a+b}{x+1} = \frac{3x+2}{x+1} \text{ et } x \in \mathcal{D}_f$$

$$\Leftrightarrow ax+a+b=3x+2 \text{ et } x \in \mathcal{D}_f.$$

On a, par identification :

$$\begin{cases} a=3 \\ a+b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-1 \end{cases}$$

$$\text{Ainsi : } F(x) = 3 - \frac{1}{x+1}.$$

60 a. 
$$\begin{array}{r|l} x^2+x-3 & x-1 \\ -[x^2-x] & x+2 \\ \hline 2x-3 & \\ -[2x-2] & \\ \hline -1 & \end{array}$$

$$\text{Donc } x^2+x-3 = (x-1)(x+2) - 1$$

b. On a donc pour tout  $x$  de  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  :

$$F(x) = x+2 - \frac{1}{x-1} \quad (a=1, b=2 \text{ et } c=-1).$$

61 1.  $F(x)$  est défini si et seulement si  $x^4 - 81 \neq 0$ .

$$\text{Or } x^4 - 81 = (x^2)^2 - 9^2$$

$$\text{donc } x^4 - 81 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 9)(x^2 + 9) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 9 = 0 \quad (\text{car } x^2 + 9 \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \text{ ou } x = -3.$$

$$\text{Ainsi : } \mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$$

2. a.  $G(x) = a + b \frac{x-3}{x+3} + \frac{cx+d}{x^2+9} \times (x-3)$ .

$$\text{Donc } G(3) = a \text{ et } G(3) = \frac{1}{(3^2+9)(3+3)} \text{ donc } a = \frac{1}{108}.$$

b. On pose  $H(x) = (x+3)F(x)$

$$\text{On a : } H(-3) = b \text{ et } H(-3) = \frac{1}{(-3^2+9)(-3-3)}$$

$$\text{donc } b = -\frac{1}{108}.$$

$$\text{c. } F(0) = \frac{1}{-81} \text{ et } F(1) = \frac{1}{-80}$$

$$\text{donc } \begin{cases} -\frac{1}{81} = \frac{-1}{324} + \frac{-1}{324} + \frac{d}{9} \\ -\frac{1}{80} = \frac{-1}{216} + \frac{-1}{432} + \frac{c+d}{10} \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} d = \frac{1}{18} \\ c = 0. \end{cases}$$

62 a.  $2(x-7)(x-2)(x+1)(x+3)$

$$= 2[(x^2 - 9x + 14)(x^2 + 4x + 3)]$$

$$= 2[x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 9x^3 - 36x^2 - 27x + 14x^2 + 56x + 42]$$

$$= 2x^4 - 10x^3 - 38x^2 + 58x + 84$$

$$\text{donc } F(x) = \frac{2(x-7)(x-2)(x+1)(x+3)}{x-6}.$$

b.

$x$	$-\infty$	3	-1	2	6	7	$+\infty$
$x-7$	-	-	-	-	-	0	+
$x-2$	-	-	-	0	+	+	+
$x+1$	-	-	0	+	+	+	+
$x+3$	-	0	+	+	+	+	+
$x-6$	-	-	-	-	0	+	+
$F(x)$	-	0	+	0	-	0	+

63 1.  $F(x)$  existe  $\Leftrightarrow x(x^2+1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$  (car  $x^2+1 \neq 0$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ ). Ainsi,  $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

2. a.  $G(x) = a + \frac{x(bx+c)}{x^2+1} = \frac{1}{x^2+1}$

$$\text{donc } G(0) = a = \frac{1}{0^2+1} = 1.$$

$$\text{b. } F(1) = \frac{1}{2}, F(-1) = -\frac{1}{2} \text{ donc } \begin{cases} a + \frac{b+c}{2} = \frac{1}{2} \\ -a + \frac{-b+c}{2} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{b+c}{2} = -\frac{1}{2} \\ \frac{-b+c}{2} = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ b=-1. \end{cases}$$

$$\text{Ainsi : } F(x) = \frac{1}{x} + \frac{-x}{x^2+1} \text{ pour tout } x \text{ de } \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

64 1. Pour tout nombre réel  $x$ ,  $x^2 + 7 > 0$ . Donc  $F(x)$  existe pour tout nombre réel  $x$ .

2. a.  $Q(-1) = (-1)^2 + 2 \times (-1) + 3 = -1 - 2 + 3 = 0$  donc -1 est une racine de  $Q$ .

b.

$-x^2+2x+3$	$x+1$
$-[-x^2-x]$	$-x+3$
$3x+3$	
$-[3x+3]$	
0	

Donc  $-x^2+2x+3 = (x+1)(-x+3)$ .

3.

$x$	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$x+1$	-	0	+	+
$-x+3$	+	+	0	-
$x^2+7$	+	+	+	+
$F(x)$	-	0	+	-

## faire le point

**65 a.** Le degré de  $P$  est 2.

**b.** Le coefficient de degré 2 de  $Q$  est 2.

**c.** 2 est une racine de  $P$ .

**d.** 2 est un zéro de  $F$ .

**e.**  $-1$  est une racine de  $Q$  et un pôle de  $F$ .

**66** Sofi n'a trouvé qu'une seule solution. Il faut déterminer la seconde.

Atem conclut mal : comme  $P(-1) = 0$ , on peut factoriser  $P$  par  $x + 1$

Correction :

On effectue la division euclidienne de  $P$  par  $x + 1$  :

$$\begin{array}{r|l} x^2 + 8x + 7 & x + 1 \\ -[x^2 + x] & x + 7 \\ \hline 7x + 7 & \\ -[7x + 7] & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Donc  $x^2 + 8x + 7 = (x + 1)(x + 7)$ .

Ainsi :  $x^2 + 8x + 7 = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0$  ou  $x + 7 = 0$   
 $\Leftrightarrow x = -1$  ou  $x = -7$ .

Les solutions de  $x^2 + 8x + 7 = 0$  sont  $-1$  et  $-7$ .

**67 1. a.**  $P(-2) = 5 \times (-2)^2 + 11 \times (-2) + 2 = 0$  donc il existe un polynôme  $Q$  de degré égal à  $\deg P - 1$  tel que  $P(x) = (x + 2)Q(x)$ .

**b.**  $(x + 2)(ax + b) = ax^2 + bx + 2ax + 2b$   
 $= ax^2 + (b + 2a)x + 2b$ .

Par identification :  $\begin{cases} a = 5 \\ b + 2a = 11 \\ 2b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 1 \end{cases}$

(on vérifie que  $1 + 2 \times 5 = 11$ ).

Donc  $Q(x) = 5x + 1$ . Donc  $P(x) = (x + 2)(5x + 1)$ .

**c.**

$$\begin{array}{r|l} 5x^2 + 11x + 2 & x + 2 \\ -[5x^2 + 10x] & 5x + 2 \\ \hline x + 2 & \\ -[x + 2] & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Donc  $P(x) = (x + 2)(5x + 1)$ .

**2. a.**  $P(x) = 7x^2 - 6x - 1$ . Comme  $P(1) = 0$ , on factorise  $P$  par  $x - 1$ . On cherche  $a$  et  $b$  deux nombres réels tels que  $P(x) = (x - 1)(ax + b)$ .

On développe :  $(x - 1)(ax + b) = ax^2 + x(b - a) - b$ .

On identifie :  $\begin{cases} a = 7 \\ b - a = -6 \\ -b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 7 \\ b = 1 \end{cases}$

(on vérifie que  $1 - 7 = -6$ ).

On a donc :  $P(x) = (x - 1)(7x + 1)$ .

**b.**  $P(x) = x^3 + x^2 + x + 1$

$P(-1) = 0$ , on factorise  $P$  par  $x + 1$ . On effectue la division euclidienne de  $P$  par  $x + 1$  :

$$\begin{array}{r|l} x^3 + x^2 + x + 1 & x + 1 \\ -[x^3 + x^2] & x + 1 \\ \hline x + 1 & \\ -[x + 1] & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Ainsi,  $P(x) = (x + 1)(x^2 + 1)$ .

**c.**  $P(x) = 5x^4 + x^3 - 4$

$P(-1) = 0$ , on factorise  $P$  par  $x + 1$ . On effectue la division euclidienne de  $P$  par  $x + 1$  :

$$\begin{array}{r|l} 5x^4 + x^3 - 4 & x + 1 \\ -[5x^4 + 5x^3] & 5x^3 - 4x^2 + 4x - 4 \\ \hline -4x^3 - 4 & \\ -[-4x^3 - 4x^2] & 4x^2 - 4 \\ \hline 4x^2 - 4 & \\ -[4x^2 + 4x] & -4x - 4 \\ \hline -4x - 4 & \\ -[-4x - 4] & 0 \end{array}$$

Donc  $P(x) = (x + 1)(5x^3 - 4x^2 + 4x - 4)$ .

**68 a.**  $P(-2) = 2 \times (-2)^3 - 3 \times (-2)^2 - 11 \times (-2) + 6$   
 $= 2 \times (-8) - 3 \times 4 + 22 + 6 = 0$ .

$P(3) = 2 \times 3^3 - 3 \times 3^2 - 11 \times 3 + 6$   
 $= 54 - 27 - 33 + 6 = 0$ .

**b.**  $(x + 2)(x - 3) = x^2 - x - 6$ .

**c.** On effectue la division euclidienne de  $P$  par  $x^2 - x - 6$  :

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 & x^2 - x - 6 \\ -[2x^3 - 2x^2 - 12x] & 2x - 1 \\ \hline -x^2 + x + 6 & \\ -[-x^2 + x + 6] & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Ainsi :  $P(x) = (x^2 - x - 6)(2x - 1) = (x + 2)(x - 3)(2x - 1)$ .

La troisième racine de  $P$  est  $\frac{1}{2}$ .

**69 1.** • Le polynôme  $x + 3$  s'annule pour  $x = -3$ .

Le polynôme  $2 - x$  s'annule pour  $x = 2$ , il est positif pour  $x < 2$  et négatif pour  $x > 2$ .

**2. a**

$x$	$-\infty$	$-3$	$2$	$+\infty$
$x^2 + 1$	+	+	+	+
$x + 3$	-	0	+	+
$2 - x$	+	+	0	-
$P(x)$	-	0	+	-

L'inéquation  $P(x) \geq 0$  a pour solutions les nombres réels  $x$  tels que  $x \in [-3 ; 2]$ .

**b.** L'inéquation  $(x^2 + 1)(x + 3)/(2 - x) \leq 0$  est équivalente à  $(P(x) \leq 0 \text{ et } x \neq 2)$ .

Les solutions sont donc les nombres réels  $x$  tels que :  $x \in ]-\infty ; -3] \cup ]2 ; +\infty[$ .

**70 1.**  $\mathcal{D}_{F_1} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$  et  $\mathcal{D}_{F_2} = \mathbb{R} \setminus \{-2 ; 1\}$ .

**2. a.**

$$\begin{array}{r|l} x^3 + x + 1 & x - 2 \\ -[x^3 - 2x^2] & x^2 + 2x + 5 \\ \hline 2x^2 + x + 1 & \\ -[2x^2 - 4x] & \\ \hline 5x + 1 & \\ -[5x - 10] & \text{Donc :} \\ \hline 11 & P_1(x) = (x^2 + 2x + 5)Q_1(x) + 11. \end{array}$$

**b.**  $F_1(x) = x^2 + 2x + 5 + \frac{11}{x-2}$ .

**3.**  $F_2(x) = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{1-x}$   
 $\Leftrightarrow \frac{3}{(x+2)(1-x)} = \frac{a(1-x) + b(x+2)}{(x+2)(1-x)}$ .

Par identification, on en déduit que :

$$3 = (b - a)x + a + 2b.$$

Donc par identification :  $\begin{cases} b - a = 0 \\ a + 2b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a \\ a = 1 \end{cases}$

Donc  $F_2(x) = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{1-x}$ .

**71 1. a.**  $P_1(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ .

**b.** Comme  $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ ,  $P_1$  n'a pas de racine.

**2. a.**  $P_2(x) = 2\left(x^2 + \frac{x}{2} - 5\right) = 2\left[\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 - 5\right]$   
 $= 2\left[\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{81}{16}\right] = \left[\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{9}{4}\right)^2\right]$   
 $= 2\left(x + \frac{1}{4} - \frac{9}{4}\right)\left(x + \frac{1}{4} + \frac{9}{4}\right) = 2(x - 2)\left(x + \frac{5}{2}\right)$ .

## Se tester

**72 à 75** Voir Manuel de l'élève page 261.

## Exercices d'approfondissement

**76 1. a.** Comme  $a \neq 0$ , on peut écrire que :

$$P(x) = a\left(x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a}\right); p = -\frac{b}{a}; q = \frac{c}{a} \text{ et } r = \frac{d}{a}.$$

**b.**  $x$  racine de  $P \Leftrightarrow a(x^3 + px^2 + qx + r) = 0$   
 $\Leftrightarrow x^3 + px^2 + qx + r = 0 \text{ (} a \neq 0 \text{)}.$

Comme  $\alpha, \beta, \gamma$  sont trois racines de  $Q$ , on peut le factoriser par  $(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$ . Comme de plus, le coefficient de  $Q$  de degré 3 est 1, on en déduit que :

$$Q(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma).$$

• On développe :

$$\begin{aligned} (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) &= (x - \alpha)[x^2 - (\beta + \gamma)x + \beta\gamma] \\ &= x^3 - (\beta + \gamma)x^2 + \beta\gamma x - \alpha x^2 + (\beta + \gamma)x - \beta\gamma\alpha \\ &= x^3 - (\beta + \gamma + \alpha)x^2 + (\beta\gamma + \beta\alpha + \gamma\alpha)x - \beta\gamma\alpha. \end{aligned}$$

Par identification, on a alors :

$$\begin{cases} \alpha + \gamma + \beta = -p = -\frac{b}{a} \\ \beta\gamma + \beta\alpha + \gamma\alpha = q = \frac{c}{a} \\ \beta\gamma\alpha = -r = -\frac{d}{a} \end{cases}$$

**2. a.**  $P(-1) = 2 \times (-1) + 7 + 2 \times (-1) - 3$   
 $= -2 + 7 - 2 - 3 = 0.$

**b.** Notons  $\alpha$  et  $\beta$  les deux autres racines de  $P$ . On a alors :

$$\begin{cases} \alpha + \beta - 1 = -\frac{7}{2} \\ \alpha\beta \times (-1) = -\frac{3}{2} \\ \alpha\beta + \alpha(-1) + \beta(-1) = \frac{2}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{5}{2} \\ \alpha\beta = -\frac{3}{2} \\ \alpha\beta - \alpha - \beta = 1 \text{ (vérifiée !)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{5}{2} \\ \alpha\beta = -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -3 \\ \beta = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Les racines de  $P$  sont donc :  $-1$  ;  $\frac{1}{2}$  et  $-3$ .

**77**  $a, b, c$  sont solutions du système :

$$\begin{cases} a \times b \times c = 990 & \text{(volume)} \\ (ac + cb + ab) \times 2 = 882 & \text{(aires des faces)} \\ (a + b + c) \times 4 = 160 & \text{(longueur des arêtes)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} abc = 990 \\ ac + cb + ab = 441 \\ a + b + c = 40 \end{cases}$$

$(a, b, c)$  sont, d'après l'exercice **76**, les racines du polynôme :  $P(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$  avec  $-b = 40$  ;  $-d = 990$  ;  $c = 441$  en choisissant  $a = 1$ .

Le polynôme  $P$  s'écrit :  $P(x) = x^3 - 40x^2 + 441x - 990$ .

On remarque que  $P(3) = 0$ . On effectue la division euclidienne de  $P$  par  $(x - 3)$  :

$$P(x) = (x - 3)(x^2 - 37x + 330).$$

On écrit ensuite :

$$\begin{aligned} x^2 - 37x + 330 &= \left(x - \frac{37}{2}\right)^2 - \frac{1369}{4} + 330 \\ &= \left(x - \frac{37}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} = \left(x - \frac{37}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = (x - 15)(x - 22). \end{aligned}$$

Les dimensions du livre sont donc 3 cm, 15 cm et 22 cm.

**78**  $\alpha$  désigne une racine du polynôme  $P_\lambda(x) = x^3 - 7x + \lambda$ .

On suppose que  $2\alpha$  est aussi une racine de  $P_\lambda$ . Il existe donc un nombre réel de  $\beta$  tel que :

$$P_\lambda(x) = (x - \alpha)(x - 2\alpha)(x - \beta).$$

Développons :

$$\begin{aligned} P_\lambda(x) &= (x^2 - 3\alpha x + 2\alpha^2)(x - \beta) \\ &= x^3 - \beta x^2 - 3\alpha x^2 + 3\alpha\beta x + 2\alpha^2 x - 2\alpha^2\beta \\ &= x^3 + x^2(-\beta - 3\alpha) + x(3\alpha\beta + 2\alpha^2) - 2\alpha^2\beta. \end{aligned}$$

Par identification :

$$\begin{cases} -\beta - 3\alpha = 0 \\ 3\alpha\beta + 2\alpha^2 = -7 \\ -2\alpha^2\beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -3\alpha \\ -9\alpha^2 + 2\alpha^2 = -7 \\ \lambda = 6\alpha^3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -3\alpha \\ \alpha^2 = 1 \\ \lambda = 6\alpha^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -3 \text{ ou } \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 3 \end{cases} \\ \lambda = 6 \end{cases}$$

Il existe deux valeurs de  $\lambda$  pour lesquelles  $\alpha$  et  $2\alpha$  sont racines de  $P_\lambda$  :  $\lambda = 6$  ou  $\lambda = -6$ .

**79** Le polynôme  $(x^2 - 1)(x - 3)$  a pour racines  $-1, 1$  et  $3$ . Le polynôme  $P$  est factorisable par le polynôme  $(x^2 - 1)(x - 3)$  si et seulement si  $P(-1) = P(1) = P(3) = 0$ .

Ce qui est équivalent au système :

$$\begin{cases} -7 + a + b + c = 0 \\ 3 + a - b + c = 0 \\ -81 + 9a + 3b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -10 + 2b = 0 \\ 84 - 8a - 4b = 0 \\ c = b - a - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 5 \\ a = \frac{84 - 20}{8} = 8 \\ c = 5 - 8 - 3 = -6 \end{cases}$$

Le polynôme  $P$  est factorisable par  $(x^2 - 1)(x - 3)$  si et seulement si  $(a = 8, b = 5, c = -6)$ .

**80** 1.  $P$  désigne le polynôme  $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  avec  $a \neq 0$ .

$$P(0) = 0 \Leftrightarrow d = 0.$$

$$P(x + 1) - P(x) = x^2 \Leftrightarrow 3ax^2 + (3a + 2b)x + a + b + c = x^2$$

$$\text{(par identification)} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a = 1 \\ 3a + 2b = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases}$$

donc  $P(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x$  et il est unique.

**2. a.** On a :  $P(2) - P(1) = 1^2$   
 $P(3) - P(2) = 2^2$

...  
 $P(n + 1) - P(n) = n^2.$

En additionnant membre à membre ces inégalités, on obtient :  $P(n + 1) - P(1) = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2.$

**b.** Ainsi, comme  $P(1) = 0$ , d'après la question 1. :

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 &= P(n + 1) = P(n) + n^2 \\ &= \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n + n^2 \\ &= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{6} \\ &= \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}. \end{aligned}$$

**3. a.**  $0^2 + 1^2 + \dots + 99^2 = 1^2 + \dots + 99^2$   
 $= \frac{99 \times (99 + 1) \times (2 \times 99 + 1)}{6} = \frac{99 \times 100 \times (198 + 1)}{3 \times 2}$   
 $= 33 \times 50 \times 199 = 328\,350.$

**b.**  $1^2 + \dots + 200^2 = \frac{200 \times 201 \times 401}{6}$   
 $= 100 \times 67 \times 401 = 2\,686\,700.$

Ainsi :

$$\begin{aligned} S &= 100^2 + \dots + 200^2 \\ &= (1^2 + \dots + 200^2) - (1^2 + \dots + 99^2) \\ &= 2\,686\,700 - 328\,350 \\ &= 2\,358\,350. \end{aligned}$$

**81 1. a.** • En développant  $(x - \alpha) Q_{n-1}(x)$  on remarque que le terme de degré  $n$  est égal à  $b_{n-1}x^n$  donc, par identification :  $a_n = b_{n-1}$ . Et de la même façon,  $-\alpha b_0 = a_0$ .

• Soit  $k \in \{0, 1, \dots, n-2\}$ . De même, le terme de degré  $k+1$  est égal à  $b_k - \alpha b_{k+1}$ ; donc, par identification :  $a_{k+1} = b_k - \alpha b_{k+1}$ .

<b>b.</b>	$x^n$	$x^{n-1}$	$x^{n-2}$	$x^{n-3}$	...	$x^1$	$x^0$
$P_n$	$a_n$	$a_{n-1}$	$a_{n-2}$	$a_{n-3}$	...	$a_1$	$a_0$
$Q_n$		$a_n$	$a_{n-1} + \alpha a_n$	$a_{n-2} + \alpha b_{n-2}$	...	$a_1 + \alpha b_1$	$-\frac{a_0}{\alpha}$

**2. Application**

$P(5) = 2 \times 5^3 - 7 \times 5^2 - 17 \times 5 + 10 = 0$  donc  $(x - 5)(ax^2 + bx + c) = P(x)$  avec  $a, b, c$  trois nombres réels tels que  $a \neq 0$ .

	$x^3$	$x^2$	$x^1$	$x^0$
$P$	2	-7	-17	10
$Q$		2	$-7 + 5 \times 2 = 3$	-2

Donc  $P(x) = (x - 5)(2x^2 + 3x - 2)$ .

**82 1. a.** Comme  $n > m$ , il existe  $p \in \mathbb{N}^*$  tel que  $n = p + m$ . On a alors :

$$(P_n + Q_m)(m) = a_n x^n + \dots + a_{n-p+1} x^{n-p+1} + (a_m + b_m)x^m + \dots + (a_0 + b_0)x^0$$

avec  $a_n \neq 0$  donc  $\deg(P_n + Q_m) = n$ .

**b.** Si  $n < m$ , alors  $n$  et  $m$  jouant des rôles symétriques,  $\deg(P_n + Q_m) = m$ .

$$\begin{aligned} c. P_n Q_m(x) &= (a_n x^n + \dots + a_0)(b_m x^m + \dots + b_0) \\ &= a_n b_m x^{n+m} + (a_n b_{m-1} + a_{n-1} b_m) x^{m+n-1} + \dots + a_0 b_0 \end{aligned}$$

or  $a_n b_m \neq 0$  donc :

$$\deg(P_n Q_m) = n + m = \deg(P_n) + \deg(Q_m).$$

**2. a.** On suppose que  $a_n + b_n \neq 0$ .

$$\begin{aligned} (P_n + Q_m)(x) &= (P_n + Q_n)(x) \\ &= (a_n + b_n)x^n + (a_n + b_{n-1})x^{n-1} + \dots + (a_0 + b_0) \end{aligned}$$

or  $a_n + b_n \neq 0$  donc  $\deg(P_n + Q_n) = n$ .

**b.** On suppose que  $a_n + b_n = 0$ .

Alors :  $(P_n + Q_m)(x) = (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \dots + (a_0 + b_0)$  donc  $\deg(P_n + Q_m) = \max \{i \in \{0; \dots; n-1\} \text{ tel que } a_i + b_i \neq 0\}$ .

**83 a.** 
$$\begin{cases} L_1(1) = \frac{1-2}{1-2} \times \frac{1-3}{1-3} = 1 \\ L_1(2) = \frac{2-2}{1-2} \times \frac{2-3}{1-3} = 0 \\ L_1(3) = \frac{3-2}{1-2} \times \frac{3-3}{1-3} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} L_2(1) = \frac{1-1}{2-1} \times \frac{1-3}{2-3} = 0 \\ L_2(2) = \frac{2-1}{2-1} \times \frac{2-3}{2-3} = 1 \\ L_2(3) = \frac{3-1}{2-1} \times \frac{3-3}{2-3} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} L_3(1) = \frac{1-1}{3-1} \times \frac{1-2}{3-2} = 0 \\ L_3(2) = \frac{2-1}{3-1} \times \frac{2-2}{3-2} = 0 \\ L_3(3) = \frac{3-1}{3-1} \times \frac{3-2}{3-2} = 1 \end{cases}$$

**b.** On cherche  $P$  tel que  $\begin{cases} P(1) = f(1) \\ P(2) = f(2) \text{ et } \deg(P) = 2. \\ P(3) = f(3) \end{cases}$

$P$  défini par  $P(x) = f(1)L_1(x) + f(2)L_2(x) + f(3)L_3(x)$  convient.

**84 1.** Soit  $n \geq 1$ . Comme  $n + 2 \geq 2$ , le polynôme  $X^2 - 1$  divise le polynôme  $aX^{n+1} + bX^n + 1$  si et seulement si  $aX^{n+1} + bX^n + 1$  a pour racines 1 et -1, c'est-à-dire si et seulement si  $\begin{cases} a + b + 1 = 0 \\ a(-1)^{n+1} + b(-1)^n + 1 = 0. \end{cases}$

Deux cas sont à distinguer.

•  $n$  pair :

$$\begin{cases} a + b + 1 = 0 \\ -a + b + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 \\ a = 0 \end{cases}$$

donc  $aX^{n+1} - bX^n + 1 = -X^n + 1$

•  $n$  impair :

$$\begin{cases} a + b + 1 = 0 \\ a - b + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases}$$

donc  $aX^{n+1} + bX^n + 1 = -X^{n+1} + 1$ .

**2.** Deux cas sont à distinguer.

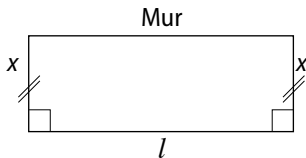
•  $n$  pair :  $n = 2p, p \in \mathbb{N}$  et  $p \neq 0$  ( $n \geq 1$ )

$$-X^{2p} + 1 = (X^2 - 1)(-X^{2p-2} - X^{2p-4} - \dots - 1)$$

•  $n$  impair :  $n = 2p + 1, p \in \mathbb{N}$  ( $n \geq 1$ )

$$-X^{2p+1} + 1 = (X^2 - 1)(-X^{2p-1} - X^{2p-3} - \dots - 1).$$

85 a.



$l$  désigne la seconde dimension. On a :

$$l = 160 - 2x \text{ donc } \mathcal{A}(x) = x(160 - 2x) = -2x^2 + 160x.$$

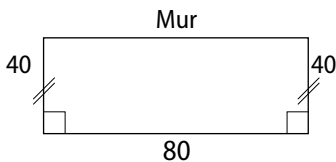
$$b. \begin{cases} l \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 160 \geq 2x \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 80.$$

c. L'aire semble être maximale lorsque  $x = 40$ .

$$d. \mathcal{A}(x) = -2x^2 + 160x = -2(x^2 - 80x) \\ = -2[(x - 40)^2 - 1600] = 2[1600 - (x - 40)^2].$$

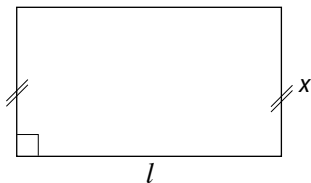
Comme pour tout nombre réel  $x$ ,  $-(x - 40)^2 \leq 0$ , l'aire  $\mathcal{A}(x)$  est maximale pour  $x = 40$ .

$$e. l = 160 - 2 \times 40 = 80.$$



Les poteaux doivent être distants de 80 m.

86 a. Notons  $l$  la seconde dimension de la feuille rectangulaire.



$$\text{Alors : } p = 2l + 2x \text{ donc } l = \frac{p - 2x}{2}.$$

Ainsi, l'aire est égale à :

$$\mathcal{A}(x) = x \times \frac{p - 2x}{2} = -x^2 + \frac{p}{2}x.$$

$$b. \mathcal{A}(x) = -\left(x^2 - \frac{p}{2}x\right) = -\left[\left(x - \frac{p}{4}\right)^2 - \frac{p^2}{16}\right] \\ = \frac{p^2}{16} - \left(x - \frac{p}{4}\right)^2.$$

$$\text{Ainsi, l'aire est maximale lorsque } x = \frac{p}{4}.$$

87 A. 1. a.  $P(0) = a \neq 0$  donc 0 n'est pas une racine de  $P$ .

b. Soit  $x$  un nombre réel non nul.

$$x \text{ racine de } P \Leftrightarrow ax^2 + bx + a = 0 \quad (x \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow x^2 \left[ a + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2} \right] = 0 \quad (x \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} \text{ racine de } P.$$

$$2. a. P_1(x) = x^2 - 3x + 1 \text{ avec } a = 1 \text{ et } b = -3.$$

$$P_2(x) = 2x^2 + 5x + 2 \text{ avec } a = 2 \text{ et } b = 5.$$

$P_1$  et  $P_2$  sont symétriques.

$$b. P_1\left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right) = \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)^2 - 3 \times \frac{3 - \sqrt{5}}{2} + 1 \\ = \frac{9 - 6\sqrt{5} + 5}{4} - \frac{9 - 3\sqrt{5}}{2} + 1 \\ = \frac{9 - 6\sqrt{5} + 5 - 18 + 6\sqrt{5} + 4}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

donc  $\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$  est une racine de  $P_1$ .

Ainsi  $P_1(x) = \left(x - \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{2}{3 - \sqrt{5}}\right)$  car  $P_1$  étant symétrique, d'après la question 1. b.,  $\frac{1}{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{3 - \sqrt{5}}$  est aussi une racine de  $P_1$ .

c.  $P_2(-2) = 2 \times 4 - 10 + 2 = 0$  donc  $-2$  est une racine de  $P_2$ . Et  $P_2$  étant symétrique,  $\frac{1}{-2}$  est l'autre racine de  $P_2$  (deg 2). Donc  $P_2(x) = 2\left(x + 2\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)$ .

B. 1. a.  $P(0) = a \neq 0$  donc 0 n'est pas une racine de  $P$ .

b. Soit  $x$  un nombre réel non nul.

$$x \text{ racine de } P \Leftrightarrow ax^3 + bx^2 + bx + c = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 \left( a + \frac{b}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3} \right) = 0 \quad (x \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow a + b \times \frac{1}{x} + b \times \left(\frac{1}{x}\right)^2 + c \times \left(\frac{1}{x}\right)^3 = 0 \quad (x \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} \text{ racine de } P.$$

$$c. P(-1) = a \times (-1) + b + b \times (-1) + a$$

$$= -a + b - b + a = 0 \text{ donc } -1 \text{ est une racine de } P.$$

Ainsi  $P(x) = a(x + 1)(x^2 + rx + p)$  où  $r$  et  $p$  sont deux nombres réels.

Développons  $a(x + 1)(x^2 + rx + p)$  :

$$(ax + a)(x^2 + rx + p) = ax^3 + arx^2 + apx + ax^2 + arx + ap \\ = ax^3 + x^2(ar + a) + x(ap + ar) + ap.$$

En identifiant :

$$\begin{cases} ar + a = b \\ ap + ar = b \\ ap = a \end{cases} \Leftrightarrow (a \neq 0) \begin{cases} r = \frac{b - a}{a} \\ p = 1 \end{cases}$$

$$\text{Donc } P(x) = a(x + 1)\left(x^2 + \frac{b - a}{a}x + 1\right) \\ = (x + 1)(ax^2 + (b - a)x + a).$$

$$2. a. P(x) = 3x^3 + 13x^2 + 13x + 3 \text{ avec } a = 3 \text{ et } b = 13.$$

$P$  est bien symétrique.

$$b. 3 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 10 \times \left(-\frac{1}{3}\right) + 3$$

$$= \frac{3}{9} - \frac{10}{3} + \frac{9}{3} = \frac{1 - 10 + 9}{3} = 0$$

donc  $-\frac{1}{3}$  est racine de  $Q(x) = 3x^2 + 10x + 3$ .

c. On remarque que  $Q(x) = 3x^2 + (13 - 3)x + 3$  et  $P(x) = (x + 1)Q(x)$

De plus,  $Q$  étant de degré 2 symétrique,  $-\frac{1}{3}$  racine de  $Q$  implique que  $-3$  est l'autre racine de  $Q$ .

Ainsi :  $P(x) = (x + 1) \times 3 \times \left(x + \frac{1}{3}\right)(x + 3)$ .

Les racines de  $P$  sont :  $-1 ; -3 ; -\frac{1}{3}$ .

**88 A. 1.** Dans ce cas :  $a = -8$  et  $b = 20$ .

**2. a.** L'aire de  $DCFEHG$  est égale à  $x^2 + 8x$ .

**b.** L'aire du carré  $BEIG$  est égale à 16 ou à  $(x + 4)^2 - 20$ .  $x$  est donc solution de l'équation  $(x + 4)^2 = 36$ .

**c.** La valeur trouvée par Al Khwarizmi est la valeur positive  $x : x = 6 - 4 = 2$ .

**3. a.**  $x^2 + 8x - 20 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 10) = 0$   
 $\Leftrightarrow x = 2$  ou  $x = -10$ .

**b.** Al Khwarizmi n'obtient pas la valeur négative  $-10$ .

**B. 1.**  $x^2 = -12x + 85$ .

De la même manière, l'aire de  $BEIG$  est égale à 36 et à  $(x + 6)^2 - 85$ . Donc  $(x + 6)^2 - 85 = 36 \Leftrightarrow (x + 6)^2 = 121$ .

Donc Al Khwarizmi trouvait  $x + 6 = \sqrt{121} = 11$  donc  $x = 5$ .

**2.**  $x^2 + 12x - 85 = 0 \Leftrightarrow (x - 5)(x + 17) = 0$   
 $\Leftrightarrow x = 5$  ou  $x = -17$ .

**89** On cherche  $n \in \mathbb{N}, n \neq 0$ , tel que :

$$\begin{aligned} (n + 3) &= n^3 + (n + 1)^3 + (n + 2)^3 \\ \Leftrightarrow (n + 3)(n^2 + 6 + 9) &= n^3 + (n + 1)(n^2 + 2n + 1) + (n + 2)(n^2 + 4n + 4) \\ \Leftrightarrow n^3 + 6n^2 + 9n + 3n^2 + 18n + 27 &= n^3 + n^3 + 2n^2 + n + n^2 + 2n + 1 + n^3 + 4n^2 + 4n + 2n^2 + 8n + 8 \\ \Leftrightarrow 2n^3 - 12n - 18 &= 0 \Leftrightarrow n^3 - 6n - 9 = 0. \end{aligned}$$

$n^3 - 6n - 9$  a pour racine évidente 3 et

$$n^3 - 6n - 9 = (n - 3)(n^2 + 3n + 3).$$

Pour  $n = 3$ , le contenu des trois premiers cubes remplit exactement celui du quatrième cube.

**90 1.**  $0^4 - 3 \times 0^3 + 4 \times 0^2 - 3 \times 0 + 1 = 1 \neq 0$  donc 0 n'est pas une solution de  $(E)$ .

**2.** Soit  $x$  un nombre réel non nul.

**a.**  $x$  solution de  $(E) \Leftrightarrow x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow x^4 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2} - \frac{3}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right) = 0 \quad (x \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow 1 - 3 \times \left(\frac{1}{x}\right) + 4 \times \left(\frac{1}{x}\right)^2 - 3 \times \left(\frac{1}{x}\right)^3 + \left(\frac{1}{x}\right)^4 = 0 \quad (x \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} \text{ solution de } (E).$$

**b.**  $x$  solution de  $(E) \Leftrightarrow x^2 \left(x^2 - 3x + 4 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = 0$

$$(x \neq 0) \Leftrightarrow x^2 - 3x + 4 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \quad (x \neq 0)$$

$\Leftrightarrow x$  solution de  $(E')$ .

**3. a.**  $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$ .

**b.** Posons  $X = x + \frac{1}{x}$ .

$$x \text{ solution de } (E') \Leftrightarrow x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} + 2 - 3x - \frac{3}{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow X^2 - 3X + 2 = 0.$$

**c.** Résolvons l'équation :  $X^2 - 3X + 2 = 0$ .

1 est un racine évidente ;  $(X - 1)(X - 2) = X^2 - 3X + 2$

donc 1 et 2 sont les deux solutions.

Or  $X = x + \frac{1}{x}$  donc :

$$x + \frac{1}{x} = 1 \quad \text{ou} \quad x + \frac{1}{x} = 2$$

$$\frac{x^2 - x + 1}{x} = 0 \quad x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$x^2 - x + 1 = 0 \quad x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = 0 \quad (x - 1)^2 = 0$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0 \quad x = 1$$

pas de solution.

• Par conséquent  $(E')$  a pour seule solution 1.

Et son inverse est elle-même donc 1 est racine double de  $(E)$ .

**91 1.**  $P(m) = 0 \Leftrightarrow (a_3 m^2 + a_2 m + a_1) m + a_0 = 0$

$$\Leftrightarrow a_0 = -(a_3 m^2 + a_2 m + a_1) m.$$

Comme  $a_3 m^2 + a_2 m + a_1 \in \mathbb{Z}$  et  $a_0 \in \mathbb{Z}$ ,  $m$  divise  $a_0$ .

**2. a.** Les racines éventuelles de  $Q$  entières sont des diviseurs de 5.

Or 5 n'admet aucun diviseur pair donc il n'existe aucun entier pair qui soit racine de  $Q$ .

**b.**  $Q$  est un polynôme à coefficients positifs, donc une éventuelle racine de  $Q$  ne peut qu'être négative. De plus, d'après la question 1., une éventuelle racine entière de  $Q$  est un diviseur de 5.

On en déduit qu'une éventuelle racine entière de  $Q$  est  $-1$  ou  $-5$ . Or  $Q(-1) = 4 \neq 0$  et  $Q(-5) = 0$ .

Et on montre que  $Q(x) = (x + 5)(x^2 + x + 5)$ .

**3. a.** Les éventuelles racines entières de  $h$  sont les diviseurs négatifs de 9, à savoir :  $-1, -3$  ou  $-9$ .

Or  $R(-3) = 0$ , donc  $R(x) = (x + 3)(x^2 + 3x + 3)$ .

**b.** Les éventuelles racines entières de  $S$  sont des diviseurs négatifs de 14, à savoir  $-1, -2, -7$  ou  $-14$ .

Or  $S(-7) = 0$ , donc  $S(x) = (x + 7)(x^2 + 2x + 2)$ .

**92 a.** Le périmètre du demi-cercle de diamètre  $[AM]$

est égal à  $\left(\pi \times \frac{x}{2}\right) \times \frac{1}{2}$ .

Le périmètre du demi-cercle de diamètre  $[MB]$  est égal à  $\left(\pi \times \frac{6-x}{2}\right) \times \frac{1}{2}$ .

Le périmètre du demi-cercle de diamètre  $[AB]$  est égal à  $\frac{\pi \times 3}{2}$ .

Donc le périmètre de l'arbelos est égal à :

$$\frac{\pi x}{4} + \frac{\pi(6-x)}{4} + \frac{3\pi}{2} = \frac{6\pi}{4} + \frac{6\pi}{4} = \frac{12\pi}{4} = 3\pi.$$

Il est donc constant.

**b.** L'aire de l'arbelos est égale à :

$$\begin{aligned} & \frac{\pi \times 3^2}{2} - \pi \times \left(\frac{x}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2} - \pi \times \left(\frac{6-x}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{9\pi}{2} - \frac{x^2\pi}{8} - \frac{(6-x)^2\pi}{8} = \frac{[36 - x^2 - (6-x)^2]\pi}{8} \\ &= \frac{36 - x^2 - 36 + 12x - x^2}{8} \pi = \frac{-2x^2 + 12x}{8} \pi \\ &= \frac{\pi}{4}(6x - x^2). \end{aligned}$$

**c.** Calcul de  $MN^2$

Les triangles  $AMN$  et  $NMB$  sont rectangles en  $M$ .

Le triangle  $ANB$  est rectangle en  $N$  car  $N$  est un point du cercle de diamètre  $[AB]$ .

Ainsi, l'égalité de Pythagore permet d'écrire que :

$$\begin{cases} AN^2 = AM^2 + NM^2 \\ BN^2 = BM^2 + NM^2 \\ AB^2 = AN^2 + BN^2. \end{cases}$$

Alors :  $2NM^2 = AB^2 - AM^2 - BM^2$

$$\begin{aligned} \text{donc } NM^2 &= \frac{1}{2} [36 - x^2 - (6-x)^2] \\ &= \frac{1}{2} (36 + 12x - 36 - 2x^2) = 6x - x^2. \end{aligned}$$

Détermination de l'aire du disque de diamètre  $[MN]$  :

$$\pi \times \left(\frac{NM}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4} \times NM^2 = \frac{\pi}{4} (6x - x^2).$$

**93 a.**  $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = 1 \times \frac{1}{2}$

$$2 - \frac{2}{3} = \frac{6}{3} - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} = 2 \times \frac{2}{3}$$

$$3 - \frac{3}{4} = \frac{12}{4} - \frac{3}{4} = \frac{9}{4} = 3 \times \frac{3}{4}$$

$$4 - \frac{4}{5} = \frac{20}{5} - \frac{4}{5} = \frac{16}{5} = 4 \times \frac{4}{5}.$$

**b.** Il semble que pour tout nombre entier naturel  $n$

non nul :  $n \times \frac{n}{n+1} = n - \frac{n}{n+1}$ .

**c.**  $n$  désigne un nombre entier naturel non nul.

$$n \times \frac{n}{n+1} = \frac{n^2}{n+1} \text{ et } n - \frac{n}{n+1} = \frac{n(n+1) - n}{n+1} = \frac{n^2}{n+1}$$

d'où l'égalité.

# 13 Équations et inéquations dans $\mathbb{R}$

## Activités d'introduction

### 1 Les dimensions d'un rectangle

1. a. Non. en effet, on obtient un rectangle si et seulement si  $2x - 3 > 0$  et  $\frac{1}{2}x + 4 > 0$ , c'est-à-dire  $x > \frac{3}{2}$  et  $x > -8$ , donc  $x > \frac{3}{2}$ .

2. a.  $x \approx 4,7$ .

b. Ce rectangle est un carré si et seulement si :

$$2x - 3 = \frac{1}{2}x + 4 \Leftrightarrow 2x - \frac{1}{2}x = 7 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x = 7$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{3} \times 7 \Leftrightarrow x = \frac{14}{3}.$$

$$3. 2x + 4 = \frac{1}{3}x - 7 \Leftrightarrow 2x - \frac{1}{3}x = -7 - 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{3}x = -11 \Leftrightarrow x = \frac{-33}{5}. \text{ (Pour } x = \frac{-33}{5}, \text{ on a } 2x + 4 < 0.)$$

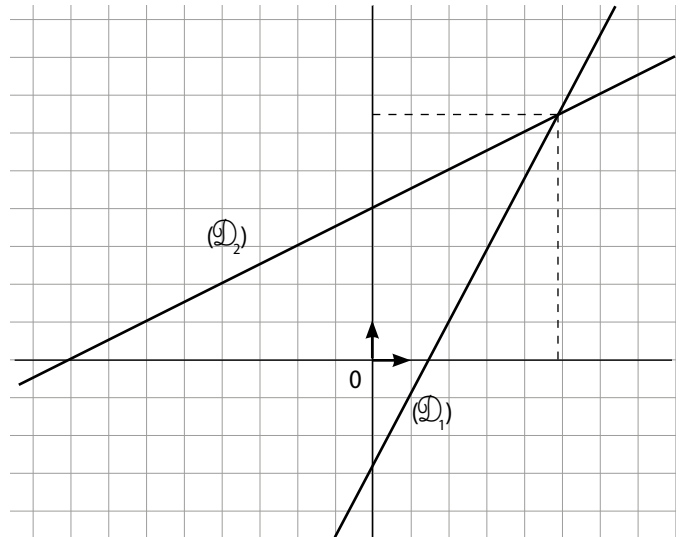
4. a.  $ax + b$  et  $cx + d$  désignent les dimensions d'un rectangle si et seulement si  $ax + b > 0$  et  $cx + d > 0$ .

b. Le rectangle est un carré si et seulement si  $ax + b = cx + d$ , c'est-à-dire  $(a - c)x = d - b$ .

• Si  $a \neq c$ ,  $x = \frac{d - b}{a - c}$  s'il vérifie a.

• Si  $a = c$  et  $d = b$ , tout nombre  $x$  vérifiant le a. est une solution.

• Si  $a = c$  et  $d \neq b$ , aucun nombre  $x$  n'est une solution.



### 2 Création d'un logo publicitaire

2. a. L'aire de la zone orange est égale à  $\frac{2a \times 10a}{2} = 10a^2$ .

Celle de la zone verte est égale à  $\frac{20 \times 12a}{2} - 10a^2 = 120a - 10a^2$ .

b.  $10a^2 = 120a - 10a^2 \Leftrightarrow 20a^2 - 120a = 0 \Leftrightarrow a(20a - 120) = 0 \Leftrightarrow 20a - 120 = 0$  (car  $a > 0$ )  $\Leftrightarrow a = 6$ .

3.  $120a - 10a^2 \geq 10a^2 \Leftrightarrow 120a - 20a^2 \geq 0 \Leftrightarrow a(120 - 20a) \geq 0 \Leftrightarrow 120 - 20a \geq 0$  (car  $a > 0$ )

$\Leftrightarrow 120 \geq 20a \Leftrightarrow 6 \geq a \Leftrightarrow a \in ]0 ; 6]$ .

### 3 Bénéfice d'une entreprise

1. a. Le bénéfice est nul pour une quantité de 10 kg ou 100 kg.

b. Le bénéfice est maximal pour une quantité de 40 kg.

c. 30 kg et 60 kg.

d. Le bénéfice ne peut pas être égal à 2 000 000 F CFA.

2. a. Le bénéfice est positif pour une quantité comprise entre 10 kg et 100 kg.

b. Pour une quantité comprise entre 30 kg et 60 kg.

#### 4 Inéquation produit, inéquation quotient

1. a.  $(3x + 4)(5 - x) = 0 \Leftrightarrow 3x + 4 = 0$  ou  $5 - x = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{4}{3}$  ou  $x = 5$ .

c.

$x$	$-\infty$	$-\frac{4}{3}$	$5$	$+\infty$
signe de $3x + 4$	-	0	+	+
signe de $5 - x$	+	+	0	-
signe de $(3x + 4)(5 - x)$	-	0	+	-

2. a.  $g(x)$  n'est pas définie lorsque  $5 - x = 0$ , c'est-à-dire  $x = 5$ .

b.

$x$	$-\infty$	$-\frac{4}{3}$	$5$	$+\infty$
signe de $3x + 4$	-	0	+	+
signe de $5 - x$	+	+	0	-
signe de $(3x + 4)(5 - x)$	-	0	+	-

### Savoir-faire

3 a.  $-5x + 8 = 0 \Leftrightarrow -5x = -8 \Leftrightarrow x = \frac{-8}{-5} \Leftrightarrow x = \frac{8}{5}$ .

b.  $x - 1 = 3(1 - 2x) \Leftrightarrow x - 1 = 3 - 6x$   
 $\Leftrightarrow 7x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{7}$ .

c.  $x(5x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$  ou  $5x - 1 = 0$   
 $\Leftrightarrow x = 0$  ou  $x = \frac{1}{5}$ .

d.  $x^2 - 10 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 10 \Leftrightarrow x = \sqrt{10}$  ou  $x = -\sqrt{10}$ .

e.  $\frac{x+3}{x} = -4 \Leftrightarrow \frac{x+3}{x} + 4 = 0 \Leftrightarrow \frac{x+3+4x}{x} = 0$   
 $\Leftrightarrow \frac{5x+3}{x} = 0$   
 $\Leftrightarrow 5x+3 = 0$  et  $x \neq 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{5}$ .

f.  $\frac{1}{x-3} = 5 \Leftrightarrow \frac{1}{x-3} - 5 = 0 \Leftrightarrow \frac{1-5(x-3)}{x-3} = 0$   
 $\Leftrightarrow \frac{16-5x}{x-3} = 0$   
 $\Leftrightarrow 16-5x = 0$  et  $x-3 \neq 0$   
 $\Leftrightarrow x = \frac{16}{5}$  et  $x \neq 3 \Leftrightarrow x = \frac{16}{5}$ .

4 a. Les solutions de l'équation sont  $-1$  et  $2$ .

b. Pour  $x = -1$ , on a  $x^2 - x - 2 = (-1)^2 - (-1) - 2$   
 $= 1 + 1 - 2 = 0$ .

Et pour  $x = 2$ , on a  $x^2 - x - 2 = (2)^2 - (2) - 2$   
 $= 4 - 2 - 2 = 0$ .

7 a.  $\frac{1}{3-x} \leq 0 \Leftrightarrow 3-x < 0$  (car  $1 > 0$ )  $\Leftrightarrow 3 < x$ .

b.  $\frac{-3}{2x+5} \geq 0 \Leftrightarrow 2x+5 < 0$  (car  $-3 < 0$ )  $\Leftrightarrow x < -\frac{5}{2}$ .

c.  $(2x+3)(2-x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{3}{2}; 2\right]$ , à l'aide d'un tableau des signes des facteurs  $(2x+3)$ ,  $(2-x)$  et leur produit.

d.  $(2x-1)^2 \geq 25 \Leftrightarrow (2x-1)^2 - 25 \geq 0$   
 $\Leftrightarrow (2x-1-5)(2x-1+5) \geq 0$   
 $\Leftrightarrow (2x-6)(2x+4) \geq 0$   
 $\Leftrightarrow (2x-1-5)(2x-1+5) \geq 0$   
 $\Leftrightarrow x \in [-\infty; -2] \cup [3; +\infty[$ ,

à l'aide d'un tableau de signes.

e.  $(2x-1)^2(x-5) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup [5; +\infty[$  à l'aide d'un tableau de signes.

f.  $\frac{x+3}{2-x} \leq 5 \Leftrightarrow \frac{x+3}{2-x} - 5 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x+3-5(2-x)}{2-x} \leq 0$   
 $\Leftrightarrow \frac{x+3-10+5x}{2-x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{6x-7}{2-x} \leq 0$   
 $\Leftrightarrow x \in ]-\infty; \frac{7}{6}] \cup ]2; +\infty[$ .

g.  $\frac{3x+2}{5x^2+2} \leq 0 \Leftrightarrow 3x+2 \leq 0$  (car  $5x^2+2 > 0$ )  
 $\Leftrightarrow x \leq -\frac{2}{3}$ .

h.  $\frac{2x-1}{x^2-9} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{(x-3)(x+3)} \leq 0$   
 $\Leftrightarrow x \in ]-\infty; -3[ \cup \left[\frac{1}{2}; 3\right[$ .

8 a.  $x^2 - x - 2 \leq 0$  pour  $x \in [-1; 2]$ .

b.  $x^2 - x - 2$  pour  $x \in ]-\infty; -1[ \cup ]2; +\infty[$ .

## Exercices d'entraînement

**9** Les solutions de l'équation  $f(x) = 0$  sont  $-1$  et  $4$ .  
Les solutions de l'équation  $f(x) = -1$  sont  $-3$  et  $5$ .  
L'équation  $f(x) = 3$  n'admet pas de solution.

**10 a.**  $3x + 2 = 0 \Leftrightarrow 3x = -2 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$ .

**b.**  $-x + 3 = 0 \Leftrightarrow 3 = x$ .

**c.**  $x^2 = 7 \Leftrightarrow x = \sqrt{7}$  ou  $x = -\sqrt{7}$ .

**d.**  $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .

**e.**  $x^2 = -5$  n'admet pas de solution car  $x^2 \geq 0$  et  $-5 < 0$ .

**f.**  $(x + 3)^2 = 0 \Leftrightarrow x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$ .

**11 a.**  $x - 3(2x + 1) = 2 + 3x \Leftrightarrow x - 6x - 3 = 2 + 3x$

$$\Leftrightarrow -5x - 3 = 2 + 3x \Leftrightarrow -5x - 3x = 2 + 3$$

$$\Leftrightarrow -8x = 5 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{8}$$

**b.**  $\frac{1}{3}x - 2 + \frac{3}{4}x + \frac{5}{6} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{3}x + \frac{3}{4}x = 1 + 2 - \frac{5}{6}$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{12}x + \frac{9}{12}x = 3 - \frac{5}{6} \Leftrightarrow \frac{13}{12}x = \frac{18 - 5}{6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{13}{12}x = \frac{13}{6} \Leftrightarrow x = \frac{13}{6} \times \frac{12}{13} \Leftrightarrow x = 2$$

**12 a.**  $(x - 3)(2x + 5) = 0 \Leftrightarrow x - 3 = 0$  ou  $2x + 5 = 0$

$$\Leftrightarrow x = 3$$
 ou  $x = -\frac{5}{2}$

**b.**  $x(1 - x)(3x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$  ou  $1 - x = 0$  ou  $3x - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow x = 0$$
 ou  $x = 1$  ou  $x = \frac{2}{3}$

**c.**  $(x - 3)^2 - 25 = 0 \Leftrightarrow (x - 3 - 5)(x - 3 + 5) = 0$

$$\Leftrightarrow (x - 8)(x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 8 = 0$$
 ou  $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 8$  ou  $x = -2$

**d.**  $x^2 - 9x = 0 \Leftrightarrow x(x - 9) = 0 \Leftrightarrow x = 0$  ou  $x - 9 = 0$

$$\Leftrightarrow x = 0$$
 ou  $x = 9$

**e.**  $x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x(x + 1)(x - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow x = 0$$
 ou  $x + 1 = 0$  ou  $x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow x = 0$$
 ou  $x = -1$  ou  $x = 1$

**13 a.**  $\frac{x + 3}{x - 1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3 = 0 \\ x - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = -3$ .

**b.**  $\frac{x(x - 2)}{1 + 2x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x(x - 2) = 0 \\ 1 + 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ou } x = 2 \\ x \neq -\frac{1}{2} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow x = 0$$
 ou  $x = 2$

**c.**  $\frac{2x^2 + 3x}{x + 2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x(2x + 3)}{x + 2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x(2x + 3) = 0 \\ x + 2 \neq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ou } 2x + 3 = 0 \\ x \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = -\frac{3}{2}$$

**d.**  $\frac{9x^2 - 1}{x(3x + 1)} = 0 \Leftrightarrow \frac{(3x + 1)(3x - 1)}{x(3x + 1)} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3x + 1)(3x - 1) = 0 \\ x(3x + 1) \neq 0 \end{cases}$$

or  $(3x + 1)(3x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$  ou  $x = \frac{1}{3}$

et  $x(3x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$  ou  $x = -\frac{1}{3}$  donc  $\frac{1}{3}$  est l'unique solution.

**14 a.**  $x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3$  ou  $x = -3$ .

**b.**  $4x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$  ou  $x = -\frac{1}{2}$ .

**c.**  $x^2 = -1$  n'admet pas de solution car  $x^2 \geq 0$  et  $-1 < 0$ .

**d.**  $x^2 + 25 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -25$  qui n'admet pas de solution.

**e.**  $(x + 3)^2 = 4 \Leftrightarrow x + 3 = 2$  ou  $x + 3 = -2$   
 $\Leftrightarrow x = -1$  ou  $x = -5$ .

**15 a.** Par lecture graphique les solutions de  $f(x) = 0$  sont  $0$  et  $2$ .

**b.**  $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x - 2) = 0$

$$\Leftrightarrow x = 0$$
 ou  $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$  ou  $x = 2$

**16**  $\frac{x^2 + x - 2}{3x^2 + 7x + 4} = 0 \Leftrightarrow \frac{(x - 1)(x + 2)}{(x + 1)(3x + 4)} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x - 1)(x + 2) = 0 \\ (x + 1)(3x + 4) \neq 0 \end{cases}$$

or  $(x - 1)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 1$  ou  $x = -2$

et  $(x + 1)(3x + 4) = 0 \Leftrightarrow x = -1$  ou  $x = -\frac{4}{3}$  donc les solutions de l'équation  $\frac{x^2 + x - 2}{3x^2 + 7x + 4} = 0$  sont  $1$  et  $-2$ .

**17 a.**  $f(x) = (3x - 1)^2 - 25(x - 1)^2$

$$= 9x^2 - 6x + 1 - 25(x^2 - 2x + 1)$$

$$= 9x^2 - 6x + 1 - 25x^2 + 50x - 25$$

$$= -16x^2 + 44x - 24$$

$g(x) = (4x - 3)^2 - (3x - 2)(4x - 3)$

$$= 16x^2 - 24x + 9 - (12x^2 - 9x - 8x + 6)$$

$$= 16x^2 - 24x + 9 - 12x^2 + 17x - 6 = 4x^2 - 7x + 3$$

**b.**  $f(x) = -24 \Leftrightarrow -16x^2 + 44x - 24 = -24$

$$\Leftrightarrow -16x^2 + 44x = 0 \Leftrightarrow x(-16x + 44) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$
 ou  $x = \frac{44}{16} \Leftrightarrow x = 0$  ou  $x = \frac{11}{4}$

$g(x) = 4x^2 \Leftrightarrow 4x^2 - 7x + 3 = 4x^2 \Leftrightarrow -7x + 3 = 0$

$$\Leftrightarrow -7x = -3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{7}$$

**18 a.**

$x$	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
Signe de $2x - 3$	-	0	+

**b.** Pour  $x \in ]-\infty; \frac{3}{2}[$  on a  $2x - 3 < 0$   
donc  $|2x - 3| = -2x + 3$  et l'équation  $|2x - 3| = 3$   
 $\Leftrightarrow -2x + 3 = 3 \Leftrightarrow -2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .

Pour  $x \in [\frac{3}{2}; +\infty[$  on a  $2x - 3 \geq 0$  donc  $|2x - 3| = 2x - 3$   
et l'équation  $|2x - 3| = 3 \Leftrightarrow 2x - 3 = 3$   
 $\Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = 3$ .

Les solutions de l'équation  $|2x - 3| = 3$  sont 0 et 3.

**19 a.**  $x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$ .

Tableau de signe de  $x^2 - 9$  :

$x$	$\infty$	$-3$	$3$	$+\infty$
Signe de $x + 3$	-	0	+	+
Signe de $x - 3$	-	-	0	+
Signe de $(x + 3)(x - 3)$	+	0	-	0

**b.** Pour  $x \in ]-\infty; -3] \cup [3; +\infty[$  on a  $x^2 - 9 \geq 0$   
donc l'équation  $|x^2 - 9| = 5 \Leftrightarrow x^2 = 14 \Leftrightarrow x = \sqrt{14}$  ou  
 $x = -\sqrt{14}$ , or  $-\sqrt{14} \in ]-\infty; -3]$  et  $\sqrt{14} \in [3; +\infty[$  donc  
les solutions de l'équation  $|x^2 - 9| = 5$   
sur  $]-\infty; -3] \cup [3; +\infty[$  sont  $-\sqrt{14}$  et  $\sqrt{14}$ .

Pour  $x \in ]-3; 3[$ , on a  $x^2 - 9 < 0$   
donc l'équation  $|x^2 - 9| = 5 \Leftrightarrow -x^2 + 9 = 5 \Leftrightarrow 4 = x^2$   
 $\Leftrightarrow x = 2$  ou  $x = -2$ ; or  $2 \in ]-3; 3[$  et  $-2 \in ]-3; 3[$   
donc les solutions de l'équation  $|x^2 - 9| = 5$  sur  $]-3; 3[$   
sont  $-2$  et  $2$ .

Les solutions de l'équation  $|x^2 - 9| = 5$  sur  $\mathbb{R}$  sont  
 $-\sqrt{14}; -2; 2$  et  $\sqrt{14}$ .

**20 a.**  $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 9x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 9) = 0$   
 $\Leftrightarrow x(x + 3)(x - 3) = 0$  donc les solutions  
de l'équation  $f(x) = 0$  sont 0,  $-3$  et  $3$ .

**21 a.** Par lecture graphique, les solutions de l'équation  
 $f(x) = 0$  sont  $-2$  et  $4$ .

**b.**  $f(x) = x^2 - 2x - 8 = (x - 1)^2 - 1 - 8$ .  
 $f(x) = (x - 1)^2 - 9 = (x - 1 - 3)(x - 1 + 3) = (x - 4)(x + 2)$ .  
 $f(x) = 0 \Leftrightarrow (x - 4)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 4$  ou  $x = -2$ .  
Les résultats sont cohérents avec ceux du **a.**

**22 a.** Contraintes :  $3x + 2 \neq 0$ , c'est-à-dire  $x \neq -\frac{2}{3}$ .  
 $f(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 25 = 0$  et  $x \neq -\frac{2}{3}$

$$4x^2 - 25 = 0 \Leftrightarrow (2x + 5)(2x - 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x + 5 = 0 \text{ ou } 2x - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{5}{2} \text{ ou } x = \frac{5}{2}.$$

• L'ensemble des solutions de  $f(x) = 0$  est  $\{-\frac{5}{2}; \frac{5}{2}\}$ .

**23 a.**  $-3x < 2 \Leftrightarrow x > -\frac{2}{3}$ .

**b.**  $x^2 \geq 0$  pour tout nombre réel  $x$ .

**c.**  $(x - 3)^2 > 0 \Leftrightarrow x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$ .

**d.**  $(x^2 + 3)(x - 1) > 0 \Leftrightarrow x - 1 > 0$  (car  $x^2 + 3 > 0$ )  $\Leftrightarrow x > 1$ .

**e.**  $(x - 5)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x - 5 = 0$  (car  $(x - 5)^2 \geq 0$ )  $\Leftrightarrow x = 5$

**f.**  $-\frac{3}{x+5} > 0 \Leftrightarrow x + 5 < 0$  (car  $-3 < 0$ )  $\Leftrightarrow x < -5$ .

**24** Par lecture graphique :

• l'ensemble des solutions de l'équation  $f(x) \leq 0$  est  
 $[-1; 0] \cup [1; 2]$ ;

• l'ensemble des solutions de  $g(x) > 0$  est  $[-1; 2[$ ;

• l'ensemble des solutions de  $f(x) \leq g(x)$  est  $[-1; 2]$ .

**25 a.**  $3x - 1 - (3 - x) > x + 3 \Leftrightarrow 3x - 1 - 3 + x > x + 3$   
 $\Leftrightarrow 3x > 7 \Leftrightarrow x > \frac{7}{3}$ .

**b.**  $\frac{1}{9}x - 3 < \frac{1}{6}x - \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{9}x - \frac{1}{6}x < -\frac{1}{3} + 3$   
 $\Leftrightarrow \frac{2}{18}x - \frac{3}{18}x < -\frac{1}{3} + \frac{9}{3} \Leftrightarrow -\frac{1}{18}x < \frac{8}{3}$   
 $\Leftrightarrow x > \frac{8}{3} \times (-18) \Leftrightarrow x > -48$ .

**26 a.**

$x$	$-\infty$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
Signe de $2x - 3$	-	-	0	+
Signe de $1 - 5x$	+	0	-	-
Signe de $(2x - 3)(1 - 5x)$	-	0	+	-

L'ensemble des solutions de  $(2x - 3)(1 - 5x) \geq 0$  est  
 $[\frac{1}{5}; \frac{3}{2}]$ .

**b.**  $x^2 - 5 < 0 \Leftrightarrow (x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5}) < 0$  et, à l'aide d'un  
tableau de signes, on obtient l'ensemble des solutions  
 $]-\sqrt{5}; \sqrt{5}[$ .

**c.**  $(2x - 1)^2 \leq 9x^2 \Leftrightarrow (2x - 1)^2 - 9x^2 \leq 0$   
 $\Leftrightarrow (2x - 1 + 3x)(2x - 1 - 3x) \leq 0$   
 $\Leftrightarrow (5x - 1)(-x - 1) \leq 0$

et, à l'aide d'un tableau de signes, on obtient  
l'ensemble de solutions :  $]-\infty; -1] \cup [\frac{1}{5}; +\infty[$ .

d.  $(x+3)^2 \leq -1$  n'admet pas de solution car  $(x+3)^2 \geq 0$  et  $-1 < 0$ .

27 a. Par lecture graphique, les solutions de l'inéquation  $f(x) \leq 0$  sont les nombres de l'intervalle  $[0; 2]$ .

b.  $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x \leq x(x-2) \leq 0$ .

x	$\infty$	0	2	$+\infty$
Signe de x	-	0	+	+
Signe de x-2	-	-	0	+
Signe de x(x-2)	+	0	-	+

L'ensemble des solutions de  $f(x) \leq 0$  est  $[0; 2]$ .

28 a.

x	$\infty$	-5	2	$+\infty$
Signe de x+5	-	0	+	+
Signe de 2-x	+	+	0	-
Signe de $\frac{x+5}{2-x}$	-	0	+	-

L'ensemble des solutions de  $\frac{x+5}{2-x} \geq 0$  est  $[-5; 2]$ .

b. À l'aide d'un tableau de signes, on obtient l'ensemble de solutions  $]0; \frac{1}{3}[$ .

c.  $\frac{5}{x+2} > 0 \Leftrightarrow x+2 > 0$  (car  $5 > 0$ )  $\Leftrightarrow x > -2$ .

d.  $\frac{x^2-25}{3-x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-5)(x+5)}{3-x} \geq 0$ .

x	$\infty$	-5	3	5	$+\infty$	
Signe de x-5	-	-	-	0	+	
Signe de x+5	-	0	+	+	+	
Signe de 3-x	+	+	0	-	-	
Signe de $\frac{(x-5)(x+5)}{3-x}$	+	0	-	+	0	-

L'ensemble des solutions de  $\frac{x^2-25}{3-x} \geq 0$  est :  $]-\infty; -5] \cup [3; 5]$ .

e.  $\frac{x+2}{3-x} > 5 \Leftrightarrow \frac{x+2}{3-x} - 5 > 0 \Leftrightarrow \frac{x+2}{3-x} - \frac{5(3-x)}{3-x} > 0$

$\Leftrightarrow \frac{x+2-15+5x}{3-x} > 0 \Leftrightarrow \frac{6x-13}{3-x} > 0$  et, à l'aide d'un tableau de signes, on obtient l'ensemble des solutions  $] \frac{13}{6}; 3[$ .

f.  $\frac{3x-2}{x^2-1} < \frac{3}{x+2} \Leftrightarrow \frac{3x-2}{x^2-1} - \frac{3}{x+2} < 0$   
 $\Leftrightarrow \frac{(3x-2)(x+2) - 3(x^2-1)}{(x^2-1)(x+2)} < 0$   
 $\Leftrightarrow \frac{3x^2+6x-2x-4-3x^2+3}{(x-1)(x+1)(x+2)} < 0$   
 $\Leftrightarrow \frac{4x-1}{(x-1)(x+1)(x+2)} < 0$

et, à l'aide d'un tableau de signes, on obtient l'ensemble des solutions  $] -2; -1[ \cup ] \frac{1}{4}; 1[$ .

g.  $\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+3} \leq \frac{2x-1}{x^2-9}$   
 $\Leftrightarrow \frac{x+3}{(x-3)(x+3)} - \frac{x-3}{(x-3)(x+3)} \leq \frac{2x-1}{(x-3)(x+3)}$   
 $\Leftrightarrow \frac{x+3-x+3-2x+1}{(x-3)(x+3)} \leq 0$   
 $\Leftrightarrow \frac{-2x+7}{(x-3)(x+3)} \leq 0$

et, à l'aide d'un tableau de signe, on obtient l'ensemble des solutions  $] -3; \frac{7}{2}[ \cup ] 3; +\infty[$ .

29 1. a. Par lecture graphique, l'ensemble des solutions de  $f(x) > 0$  est  $] -2; 0[ \cup ] 2; +\infty[$ .

b. Par lecture graphique, l'ensemble des solutions de  $f(x) > g(x)$  est  $] -2; 1[ \cup ] 1; +\infty[$ .

2.  $f(x) = x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x+2)(x-2)$ .

a.  $f(x) > 0 \Leftrightarrow x(x+2)(x-2) > 0$ ; à l'aide d'un tableau de signes, on obtient l'ensemble des solutions :  $] -2; 0[ \cup ] 2; +\infty[$ .

b.  $f(x) > g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) > 0$   
 $\Leftrightarrow x(x+2)(x-2) + x+2 > 0$   
 $\Leftrightarrow (x+2)[x(x-2) + 1] > 0$   
 $\Leftrightarrow (x+2)(x^2 - 2x + 1) > 0$   
 $\Leftrightarrow (x+2)(x-1)^2 > 0$  or 1 n'est pas une solution et pour  $x \neq 1$  on a  $(x-1)^2 > 0$  et l'inéquation  $f(x) > g(x) \Leftrightarrow x+2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$  donc l'ensemble des solutions est  $] -2; 1[ \cup ] 1; +\infty[$ .

Les résultats du 2. sont compatibles avec ceux de la question 1.

30 a.

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
Signe de 2x-3	-	0	+

b. Pour  $x \in ] -\infty; \frac{3}{2}[$  on a  $2x-3 < 0$  donc  $|2x-3| \leq 1 \Leftrightarrow -(2x-3) \leq 1 \Leftrightarrow -2x+3 \leq 1$   
 $\Leftrightarrow -2x \leq -2 \Leftrightarrow x \geq 1 \Leftrightarrow x \in [1; \frac{3}{2}[$ .

Pour  $x \in [\frac{3}{2}; +\infty[$  on a  $2x-3 \geq 0$  donc  $|2x-3| \leq 1 \Leftrightarrow 2x-3 \leq 1 \Leftrightarrow 2x \leq 4$   
 $\Leftrightarrow x \leq 2 \Leftrightarrow x \in [\frac{3}{2}; 2]$ .

c. L'ensemble des solutions de l'inéquation est  $[1; 2]$ .

31 a.	x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
	Signe de x	-	0	+	+	
	Signe de x-1	-	-	0	+	
	Signe de x(x-1)	+	0	-	0	
	$ x^2 - x  =$	$x^2 - x$	0	$-x^2 + x$	0	$x^2 - x$

**b.** Pour  $x \in ]-\infty; 0[ \cup ]1; +\infty[$  :

$|x^2 - x| \leq x \Leftrightarrow x^2 - x \leq x \Leftrightarrow x^2 - 2x \leq 0 \Leftrightarrow x(x - 2) \leq 0$   
 or l'ensemble des solutions de  $x(x - 2) \leq 0$  sur  $\mathbb{R}$ ,  
 à l'aide d'un tableau de signes, est  $[0; 2]$  ; donc  
 l'ensemble des solutions de  $|x^2 - x| \leq x$  sur  $]-\infty; 0[ \cup ]1; +\infty[$  est  $]1; 2]$ .

Pour  $x \in [0; 1]$ ,  $|x^2 - x| \leq x \Leftrightarrow -x^2 + x \leq x$   
 $\Leftrightarrow -x^2 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0; 1]$  car  $x^2 \geq 0$  sur  $\mathbb{R}$ .

Conclusion :  $|x^2 - x| \leq x \Leftrightarrow x \in [0; 1] \cup ]1; 2]$   
 $\Leftrightarrow x \in [0; 2]$ .

**32 a.**  $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ .

**b.**  $(x - 1)(x^2 + x + 1) = x^3 + x^2 + x - x^2 - x - 1 = x^3 - 1$ .

**c.** Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a :

$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$  donc  $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0$ .

Par conséquent  $x^2 + x + 1 > 0$ .

**d.**  $x^3 < 1 \Leftrightarrow x^3 - 1 < 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x + 1) < 0$   
 $\Leftrightarrow x - 1 < 0$  car  $x^2 + x + 1 > 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

Donc  $x^3 < 1 \Leftrightarrow x < 1$ .

**33 a.**  $-(x - 1)^2 - 1 = -(x^2 - 2x + 1) - 1 = -x^2 + 2x - 1 - 1$   
 $= -x^2 + 2x - 2$ .

**b.**  $(x + 2)(-x^2 + 2x - 2) = -x^3 + 2x^2 - 2x - 2x^2 + 4x - 4$   
 $= -x^3 + 2x - 4$ .

**c.** Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $(x - 1)^2 \geq 0$ ,  $-(x - 1)^2 \leq 0$ ,  
 $-(x - 1)^2 - 1 \leq -1 < 0$  donc  $-x^2 + 2x - 2 < 0$ .

**d.**  $-x^3 + 2x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow (x + 2)(-x^2 + 2x - 2) \geq 0$   
 $\Leftrightarrow x + 2 \leq 0$  car  $-x^2 + 2x - 2 < 0$   
 donc  $-x^3 + 2x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -2$ .

**34**  $(x - 3)^4 < 1 \Leftrightarrow (x - 3)^4 - 1 < 0$   
 $\Leftrightarrow [(x - 3)^2 + 1][(x - 3)^2 - 1] < 0$   
 $\Leftrightarrow [(x - 3)^2 + 1](x - 3 + 1)(x - 3 - 1) < 0$   
 $\Leftrightarrow [(x - 3)^2 + 1](x - 2)(x - 4) < 0$ .

Or pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $(x - 3)^2 \geq 0$ ,  
 donc  $(x - 3)^2 + 1 \geq 1 > 0$ .

Par conséquent,  $(x - 3)^4 < 1 \Leftrightarrow (x - 2)(x - 4) < 0$   
 $\Leftrightarrow x \in [2; 4]$  à l'aide d'un tableau de signes.

### 35 Par lecture graphique

**a.**  $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -3$  ou  $x = 3$ .

**b.**  $g(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ .

**c.**  $g(x) = f(x) \Leftrightarrow x = 3$ .

**d.**  $g(x) > f(x) \Leftrightarrow x \in ]-\infty; 3[$ .

### Résolutions algébriques

**a.**  $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow (x + 3)(x - 3) = 0$   
 $\Leftrightarrow x = -3$  ou  $x = 3$ .

**b.**  $g(x) \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 3)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ .

**c.**  $g(x) = f(x) \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = x^2 - 9 \Leftrightarrow -6x = -18$   
 $\Leftrightarrow x = 3$ .

**d.**  $g(x) > f(x) \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 > x^2 - 9 \Leftrightarrow -6x > -18$   
 $\Leftrightarrow x < 3$ .

**36 1.** Les abscisses des points d'intersection de  $(\mathcal{C}_g)$  et  $(d)$  sont les solutions de l'équation  $f(x) = 3$

$\Leftrightarrow 5(x - 3)^2 - 2 = 3 \Leftrightarrow 5(x - 3)^2 - 5 = 0$

$\Leftrightarrow 5[(x - 3)^2 - 1] = 0 \Leftrightarrow 5(x - 3 + 1)(x - 3 - 1) = 0$   
 $\Leftrightarrow 5(x - 2)(x - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 2$  ou  $x = 4$

donc les points d'intersection de  $(\mathcal{C}_g)$  et  $(d)$  sont  $A(2; 3)$   
 et  $B(4; 3)$ .

**2. a.**  $f(x) \leq 3 \Leftrightarrow 5(x - 2)(x - 4) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [2; 4]$  à l'aide  
 d'un tableau de signes.

**b.**  $(\mathcal{C}_g)$  est au dessous de  $(d)$  pour  $x \in [2; 4]$ .

**37 1. a.**  $f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow x \in ]-\infty; 0[ \cup \{1\}$ .

**b.**  $f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow \frac{1}{x} \leq -x + 2 \Leftrightarrow \frac{1}{x} + x - 2 \leq 0$   
 $\Leftrightarrow \frac{1 + x^2 - 2x}{x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x - 1)^2}{x} \leq 0$ .

Pour  $x > 0$ ,  $\frac{(x - 1)^2}{x} \leq 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0$  car  $(x - 1)^2 \geq 0$   
 or  $(x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$  donc 1 est l'unique  
 solution de  $f(x) \leq g(x)$  sur  $]0; +\infty[$ .

Pour  $x < 0$ ,  $\frac{(x - 1)^2}{x} \leq 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 \geq 0$  or  $(x - 1)^2 \geq 0$   
 pour tout  $x \in \mathbb{R}$  donc l'ensemble de solutions de  
 $f(x) \leq g(x)$  sur  $]-\infty; 0[$  est  $]-\infty; 0[$ .

Conclusion :  $f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow x \in ]-\infty; 0[ \cup \{1\}$ .

**2. a.**  $\frac{1}{x} > -3 \Leftrightarrow \frac{1}{x} + 3 > 0 \Leftrightarrow \frac{1 + 3x}{x} > 0$

$\Leftrightarrow x \in ]-\infty; -\frac{1}{3}[ \cup ]0; +\infty[$  à l'aide d'un tableau de  
 signes.

**b.**  $(\mathcal{C}_g)$  est strictement au-dessus de  $(\mathcal{C}_f)$

pour  $x \in ]-\infty; -\frac{1}{3}[ \cup ]0; +\infty[$ .

**38 a.**  $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = \sqrt{x} \Leftrightarrow x - \sqrt{x} = 0$   
 $\Leftrightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) = 0$   
 $\Leftrightarrow \sqrt{x} = 0$  ou  $\sqrt{x} = 1$   
 $\Leftrightarrow x = 0$  ou  $x = 1$

or  $f(0) = 0$  et  $f(1) = 1$  donc les points d'intersection de  $(\mathcal{C}_f)$  et  $(\mathcal{C}_g)$  sont  $O(0; 0)$  et  $A(1; 1)$ .

**b.**  $x \leq \sqrt{x} \Leftrightarrow x - \sqrt{x} \leq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) \leq 0$  or 0 est une solution et pour  $x > 0$ ,  $\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) \leq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \leq 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} \leq \sqrt{1} \Leftrightarrow x \leq 1$  donc l'ensemble des solutions de  $x \leq \sqrt{x}$  est  $[0; 1]$ .

**c.**  $f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow x \leq \sqrt{x}$  donc d'après **a.** et **b.** on a :

- $(\mathcal{C}_f)$  est située strictement au-dessous de  $(\mathcal{C}_g)$  pour  $x \in ]0; 1[$ .
- $(\mathcal{C}_f)$  et  $(\mathcal{C}_g)$  sont confondues pour  $x = 0$  et pour  $x = 1$ .
- $(\mathcal{C}_f)$  est située strictement au-dessus de  $(\mathcal{C}_g)$  pour  $x \in ]1; +\infty[$ .

**39 a.**  $(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1) = x\sqrt{x} + x + \sqrt{x} - x - \sqrt{x} - 1$   
 $= x\sqrt{x} - 1$ .

**b.**  $f(x) - g(x) = x^2 - \sqrt{x} = \sqrt{x}(x\sqrt{x} - 1)$   
 $= \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)$ .

**c.**  $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0$   
 $\Leftrightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1) = 0$

or 0 est une solution et pour  $x > 0$  on a  $\sqrt{x} > 0$  donc  $x + \sqrt{x} > 0$  et  $x + \sqrt{x} + 1 > 1 > 0$ .

Par conséquent,  $\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1) = 0$  équivaut à  $\sqrt{x} - 1 = 0$  pour  $x > 0$ .

**40 a.** Conjecture : la solution de l'équation  $f(x) = 2$  est comprise entre 1 et 2.

**b.**  $f(1) = 1^3 = 1$  et  $f(2) = 2^3 = 8$ ,  $f(1) < 2$  et  $f(2) > 2$  donc la solution de l'équation  $f(x) = 2$  est comprise entre 1 et 2, ce qui justifie la conjecture du **a.**

**c.**  $f(1,5) = 2,25 > 2$  et  $f(1) < 2$  donc la solution de l'équation  $f(x) = 2$  est entre 1 et 1,5.

**41 1.**  $f(x) = 3x + 2 \Leftrightarrow x^3 + 2 = 3x + 2 \Leftrightarrow x^3 - 3x = 0$   
 $\Leftrightarrow x(x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow x(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) = 0$   
 $\Leftrightarrow x = 0$  ou  $x = -\sqrt{3}$  ou  $x = \sqrt{3}$

donc les points d'intersection de  $(\mathcal{C}_f)$  et  $(d)$  sont  $A(0; 2)$ ,  $B(-\sqrt{3}; -3\sqrt{3} + 2)$  et  $C(\sqrt{3}; 3\sqrt{3} + 2)$ .

**2. a.**  $f(x) \leq 3x + 2 \Leftrightarrow x(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) \leq 0$   
 $\Leftrightarrow x \in ]-\infty; -\sqrt{3}] \cup [0; \sqrt{3}]$  à l'aide d'un tableau de signes.

**b.**  $\mathcal{C}_f$  est au-dessous de  $(d)$  pour  $x \in ]-\infty; \sqrt{3}] \cup [0; \sqrt{3}]$ .

**42 a.**  $(x - 1)(2x^2 + 1) = 2x^3 + x - 2x^2 - 1$   
 $= 2x^3 - 2x^2 + x - 1$ .

**b.**  $f(x) = 2x^2 - x + 1 \Leftrightarrow 2x^3 = 2x^2 - x + 1$   
 $\Leftrightarrow 2x^3 - 2x^2 + x - 1 = 0$   
 $\Leftrightarrow (x - 1)(2x^2 + 1) = 0$   
 $\Leftrightarrow x - 1 = 0$  car  $2x^2 + 1 > 0$  donc

$(\mathcal{C}_f)$  et  $(\mathcal{P})$  ont un seul point commun  $A(1; 2)$ .

**c.**  $f(x) - (2x^2 - x + 1) = 2x^3 - 2x^2 + x - 1$   
 $= (x - 1)(2x^2 + 1)$  or  $2x^2 + 1 > 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  donc  $f(x) - (2x^2 - x + 1)$  a le signe de  $x - 1$ .

•  $(\mathcal{C}_f)$  est située strictement au-dessous de  $(\mathcal{P})$  pour  $x < 1$ .

•  $(\mathcal{C}_f)$  coupe  $(\mathcal{P})$  en  $x = 1$ .

•  $(\mathcal{C}_f)$  est située strictement au-dessus de  $(\mathcal{P})$  pour  $x > 1$ .

**43**  $\sqrt{2x - 3} - 5 \leq 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x - 3} \leq 5$  or  $\sqrt{2x - 3}$  est définie et positive pour  $2x - 3 \geq 0$ , donc  $\sqrt{2x - 3} \leq 5 \Leftrightarrow 0 \leq 2x - 3 \leq 25$  car la fonction carré est strictement croissante sur  $[0; +\infty[$ .

$0 \leq 2x - 3 \leq 25 \Leftrightarrow 3 \leq 2x \leq 28 \Leftrightarrow \frac{3}{2} \leq x \leq \frac{28}{2}$   
 $\Leftrightarrow \frac{3}{2} \leq x \leq 14$ .

**44 b.**  $x = -1$  ou  $x = 1$ .

**c.**  $(\mathcal{C})$  est située au-dessous de  $(d)$  pour  $x \in [-1; 0[ \cup [1; +\infty[$ .

**2. a.**  $\frac{1}{x} = x \Leftrightarrow \frac{1}{x} - x = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - x^2}{x} = 0$   
 $\Leftrightarrow \frac{(1 - x)(1 + x)}{x} = 0$   
 $\Leftrightarrow \begin{cases} (1 + x)(1 - x) = 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ ou } x = -1 \\ x \neq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = 1$  ou  $x = -1$ .

**b.**  $\frac{1}{x} \geq x \Leftrightarrow \frac{(1 - x)(1 + x)}{x} \geq 0 \Leftrightarrow x \in ]-\infty; -1] \cup ]0; 1]$  à l'aide d'un tableau de signes.

**c.** Les ensembles de solutions sont en accord avec les conjectures émises.

**45 a.**  $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-1; 1]$ .

**b.**  $(x^2 - 1)(x^2 + 6) = x^4 + 6x^2 - x^2 - 6 = x^4 + 5x^2 - 6 = f(x)$ .

**c.**  $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)(x^2 + 6) \leq 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x - 1) \leq 0$  car  $x^2 + 6 > 0$

or  $(x+1)(x-1) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-1; 1]$  à l'aide d'un tableau de signes donc  $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-1; 1]$ .

**46 a.** Pour  $x \in ]0; 1[$  on a  $x^3 < x^2 < \sqrt{x} < \frac{1}{x}$ .

Pour  $x \in ]1; +\infty[$  on a  $\frac{1}{x} < \sqrt{x} < x^2 < x^3$ .

Pour  $x = 1$  il y a égalité des cinq expressions.

**b.** Comparaison de  $x$  et  $\sqrt{x}$ :

$$x - \sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x} + 1} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)}{\sqrt{x} + 1}.$$

Pour  $x > 0$   $\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)}{\sqrt{x} + 1}$  a le même signe que  $x - 1$ .

**47**  $f(x) = 2x^3 - 4x = 2x(x^2 - 2) = 2x(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$ .

•  $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow x = 0$  ou  $x = -\sqrt{2}$  ou  $x = \sqrt{2}$ .

•  $f(x) > 0 \Leftrightarrow x(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}) > 0$

$\Leftrightarrow x \in ]-\sqrt{2}; 0[ \cup ]\sqrt{2}; +\infty[$  à l'aide d'un tableau de signes.

Conclusion :

•  $(\mathcal{C}_f)$  est située strictement au-dessus de l'axe des abscisses pour  $x \in ]-\sqrt{2}; 0[ \cup ]\sqrt{2}; +\infty[$ .

•  $(\mathcal{C}_f)$  coupe l'axe des abscisses pour  $x \in \{-\sqrt{2}; 0; \sqrt{2}\}$ .

•  $(\mathcal{C}_f)$  est située strictement au-dessous de l'axe des abscisses pour  $x \in ]-\infty; -\sqrt{2}[ \cup ]0; \sqrt{2}[$ .

**48** Notons  $x$  le plus petit des trois nombres entiers recherchés.

$x + (x+1) + (x+2) = 504 \Leftrightarrow 3x + 3 = 504 \Leftrightarrow 3x = 501$   
 $\Leftrightarrow x = 167$  donc les trois nombres entiers consécutifs de somme 504 sont 167, 168 et 169.

**49** Notons  $x$  le plus petit des deux nombres entiers recherchés.  $5 < 7$  donc le problème se traduit par l'équation

$\frac{x}{x+1} = \frac{5}{7} \Leftrightarrow 7x = 5(x+1)$  car  $x+1 \neq 0$

$(x \geq 0 \Leftrightarrow x+1 \geq 1 > 0)$

$7x = 5(x+1) \Leftrightarrow 7x = 5x + 5 \Leftrightarrow 2x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$

or  $\frac{5}{2}$  n'est pas un nombre entier, donc le problème n'admet pas de solution.

**50** Notons  $x$  le côté d'un tel carré.

$x^2 \leq 625 \Leftrightarrow x^2 \leq 25^2 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 25$  car la fonction carré est strictement croissante sur  $[0; +\infty[$ .

**51** Notons  $x$  un tel nombre.

$x^3 < x \Leftrightarrow x^3 - x < 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) < 0 \Leftrightarrow x(x+1)(x-1) < 0$   
 $\Leftrightarrow x \in ]-\infty; -1[ \cup ]0; 1[$  à l'aide d'un tableau de signes.

**52** Notons  $x$  la note que doit obtenir Binto.

$$\frac{2 \times 14 + 3 \times x}{2 + 3} \geq 17 \Leftrightarrow \frac{28 + 3x}{5} \geq 17$$

$$\Leftrightarrow 28 + 3x \geq 85 \Leftrightarrow 3x \geq 57 \Leftrightarrow x \geq \frac{57}{3} \Leftrightarrow x \geq 19.$$

**53 a.** Notons  $y$  la longueur en m. de la maison. On a  $x \leq y$  et  $x > 0$  donc  $x^2 \leq xy$ .

Par conséquent  $x^2 \leq 32$  et  $x \leq \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ .

L'ensemble des valeurs possibles de  $x$  est  $]0; 4\sqrt{2}]$ .

**b.** L'aire de la partie du toit qui déborde est égale à  $32 \text{ m}^2$  si et seulement si :

$$2(y+2) \times 1 + 2x \times 1 = 32 \Leftrightarrow 2y + 4 + 2x = 32$$

$$\Leftrightarrow 2y + 2x = 28 \Leftrightarrow y + x = 14 \Leftrightarrow y + x - 14 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{32}{x} + x - 14 = 0 \Leftrightarrow \frac{32 + x^2 - 14x}{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 14x + 32 = 0 \text{ car } x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-7)^2 - 49 + 32 = 0 \Leftrightarrow (x-7)^2 - 17 = 0.$$

**c.**  $(x-7)^2 - 17 = 0 \Leftrightarrow (x-7 + \sqrt{17})(x-7 - \sqrt{17}) = 0$

$\Leftrightarrow x = 7 - \sqrt{17}$  ou  $x = 7 + \sqrt{17}$  or, seul  $7 - \sqrt{17}$  appartient à  $]0; 4\sqrt{2}]$  donc la valeur de  $x$  qui convient est  $7 - \sqrt{17}$ .

## Faire le point

**54 a.** 3 est solution de l'équation  $f(x) = 0$  signifie  $f(3) = 0$  et  $3 \in D$ .

**b.** 7 est solution de l'inéquation  $f(x) < 0$  signifie  $f(7) < 0$  et  $7 \in D$ .

**c.** Graphiquement, les solutions de l'équation  $f(x) = 2$  sont les abscisses des points de  $(\mathcal{C}_f)$  qui ont une ordonnée égale à 2.

**d.** Graphiquement, les solutions de l'inéquation  $f(x) \leq 0$  sont les abscisses des points de  $(\mathcal{C}_f)$  qui sont sous l'axe des abscisses.

**55** Si  $x^2 = 9$  alors  $x = 3$ . Si  $x^2 \geq 25$  alors  $x \geq 5$ .

L'erreur commise est de résoudre l'équation et l'inéquation dans  $[0; +\infty[$  et non dans  $\mathbb{R}$ .

• Si  $\frac{3}{x+1} > 2$  alors  $\frac{x+1}{3} < \frac{1}{2}$ . L'erreur commise est de ne pas tenir compte du signe de  $\frac{3}{x+1}$  et de la valeur de  $x$  qui annule  $x+1$ .

• Si  $\frac{a}{b} \leq 1$  alors  $a \leq b$ . L'erreur commise est de ne pas tenir compte du signe de  $b$  (et le cas où  $b = 0$ ). La proposition n'est vraie que pour  $b > 0$ .

•  $\sqrt{6-5x} = x \Leftrightarrow 6-5x = x^2$ . L'équivalence est fautive dans le cas où  $x < 0$  et où  $-6$  est une solution de l'équation  $6-5x = x^2$ .

### Réponses correctes :

•  $x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3$  ou  $x = -3$ .

•  $x^2 \geq 25 \Leftrightarrow x^2 - 25 \geq 0 \Leftrightarrow (x+5)(x-5) \geq 0$   
 $\Leftrightarrow x \in ]-\infty; -5] \cup [5; +\infty[$  à l'aide d'un tableau de signes.

•  $\frac{3}{x+1} > 2 \Leftrightarrow \frac{3}{x+1} - 2 > 0 \Leftrightarrow \frac{3-2(x+1)}{x+1} > 0$   
 $\Leftrightarrow \frac{1-2x}{x+1} > 0 \Leftrightarrow x \in ]-1; \frac{1}{2}[$

à l'aide d'un tableau de signes.

• Si  $\frac{a}{b} \leq 1$  et  $b > 0$  alors  $a \leq b$ .

Si  $\frac{a}{b} \leq 1$  et  $b < 0$  alors  $a \geq b$ .

•  $\sqrt{6-5x} = x$ .

Condition d'existence de  $\sqrt{6-5x}$  :

$6-5x \geq 0 \Leftrightarrow -5x \geq -6 \Leftrightarrow x \leq \frac{6}{5}$ .

Par ailleurs si  $x$  est solution de l'équation  $\sqrt{6-5x} = x$

alors  $x \geq 0$  car  $\sqrt{6-5x} \geq 0$  donc l'équation  $\sqrt{6-5x} = x$  est à résoudre dans l'intervalle  $[0; \frac{6}{5}]$ .

Pour  $x \in [0; \frac{6}{5}]$  on a  $x \geq 0$  donc :

$$\sqrt{6-5x} = x \Leftrightarrow 6-5x = x^2.$$

**56** Pour résoudre l'inéquation  $ax \geq 0$  on a besoin de connaître le signe de  $a$ .

Il y a trois cas possibles selon que  $a$  soit strictement positif, strictement négatif ou nul.

• Si  $a > 0$ , alors  $ax \geq 0$  équivaut à  $x \geq 0$ .

• Si  $a < 0$ , alors  $ax \geq 0$  équivaut à  $x \leq 0$ .

• Si  $a = 0$ , alors  $ax \geq 0$  équivaut à  $0x \leq 0$  qui est vérifiée pour tout nombre réel  $x$ .

**57 1.**

$x$	$-\infty$	$-1$	$2$	$+\infty$
$x+1$		$-$	$0$	$+$
$2-x$	$+$		$+$	$0$
$(x+1)(2-x)$	$-$	$0$	$+$	$0$

**2. a.**  $(x+1)(2-x) < 0 \Leftrightarrow x \in ]-\infty; -1[ \cup ]2; +\infty[$ .

**b.**  $\frac{x+1}{2-x} \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-1; 2[$ .

**c.**  $\frac{2-x}{x+1} \leq 0 \Leftrightarrow x \in ]-\infty; -1[ \cup [2; +\infty[$ .

**d.**  $\frac{x^2(2-x)}{x+1} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ \text{ou} \\ \frac{2-x}{x+1} \leq 0 \end{cases}$   
 $\Leftrightarrow x \in ]-\infty; -1[ \cup \{0\} \cup [2; +\infty[$ .

**e.**  $\frac{2-x}{x^2(x+1)} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ \frac{2-x}{x+1} \leq 0 \end{cases}$   
 $\Leftrightarrow x \in ]-\infty; -1[ \cup [2; +\infty[$ .

**f.**  $\frac{(2-x)(x^2+3)}{x+1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2-x}{x+1} \leq 0$  car  $x^2+3 > 0$   
 $\Leftrightarrow x \in ]-\infty; -1[ \cup [2; +\infty[$ .

**58 a.**  $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = -1$  ou  $x = 1$  par lecture graphique.

**b.**  $f(1) = 2 \times 1^2 + 1 + 1 = 4$  et

$$g(1) = 1^2 + \frac{11}{12} + \frac{23}{12} = 1 + \frac{34}{12} = 1 + \frac{17}{6} = \frac{23}{6}$$

donc  $f(1) \neq g(1)$  et la conjecture du **a.** est fautive.

On peut vérifier que  $f(-1) = g(-1)$ .

$$\begin{aligned} \text{c. } f(x) = g(x) &\Leftrightarrow 2x^2 + x + 1 = x^2 + \frac{11}{12}x + \frac{23}{12} \\ &\Leftrightarrow x^2 + x - \frac{11}{12}x + 1 - \frac{23}{12} = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{12}x - \frac{11}{12} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{24}\right)^2 - \left(\frac{1}{24}\right)^2 - \frac{11}{12} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{24}\right)^2 - \frac{529}{(24)^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{24}\right)^2 - \left(\frac{23}{24}\right)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{24} - \frac{23}{24}\right)\left(x + \frac{1}{24} + \frac{23}{24}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x - \frac{22}{24}\right)\left(x + \frac{24}{24}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x - \frac{11}{12}\right)(x + 1) = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d. } f(x) = g(x) &\Leftrightarrow x - \frac{11}{12} = 0 \text{ ou } x + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{11}{12} \text{ ou } x = -1. \end{aligned}$$

Commentaire :  $-1$  est une solution exacte tandis que  $1$  n'est qu'une valeur approchée de la solution exacte qui est  $11/12$ .

$$\begin{aligned} \text{59 } 3(x+1)^2 = 0 &\text{ pour } x = -1; 3(x+1)^2 > 0 \text{ pour } x \neq -1. \\ -4\sqrt{x^2+3} < 0 &\text{ pour tout } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 17|2-5x| = 0 &\text{ pour } x = \frac{2}{5}; 17|2-5x| > 0 \text{ pour } x \neq \frac{2}{5}. \\ 3+4x = 0 &\text{ pour } x = -\frac{3}{4}; 3+4x > 0 \text{ pour } x > -\frac{3}{4}, \\ 3+4x < 0 &\text{ pour } x < -\frac{3}{4}. \\ -2x+5 = 0 &\text{ pour } x = \frac{5}{2}, -2x+5 > 0 \text{ pour } x < \frac{5}{2}, \\ -2x+5 < 0 &\text{ pour } x > \frac{5}{2}. \\ \frac{3}{-x^2-2} < 0 &\text{ pour tout } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \frac{1}{x} > 0 &\text{ pour } x > 0; \frac{1}{x} < 0 \text{ pour } x < 0. \\ \bullet -\frac{1}{\sqrt{x^2+3+5}} < 0 &\text{ pour tout } x \in \mathbb{R}. \\ \bullet (x-1)^2(2-x)^6(2x^4+3) = 0 &\text{ pour } x = 1 \text{ et } x = 2. \\ (x-1)^2(2-x)^6(2x^4+3) > 0 &\text{ pour } x \neq 1 \text{ et } x \neq 2. \\ \bullet x^3(2x^2+3)(-x^2-2) = 0 &\text{ pour } x = 0 \\ x^3(2x^2+3)(-x^2-2) > 0 &\text{ pour } x < 0 \\ x^3(2x^2+3)(-x^2-2) < 0 &\text{ pour } x > 0. \end{aligned}$$

**60 1. ①** J'étudie le signe de  $ax + b$  suivant les valeurs de  $x$ .

② J'en déduis, suivant les valeurs de  $x$ , une expression de  $|ax + b|$ , sans valeur absolue.

③ Je résous chacune des équations suivant les valeurs de  $x$ .

**2. a.**

$x$	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$2x-3$	$-$	$0$	$+$
$ 2x-3  =$	$-2x+3$		$2x-3$

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Sur } ]-\infty; \frac{3}{2}[ , |2x-3| = 4 &\Leftrightarrow -2x+3 = 4 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \\ \bullet \text{ Sur } [\frac{3}{2}; +\infty[ , |2x-3| = 4 &\Leftrightarrow 2x-3 = 4 \Leftrightarrow x = \frac{7}{2} \\ \text{or } -\frac{1}{2} \in ]-\infty; \frac{3}{2}[ \text{ et } \frac{7}{2} \in [\frac{3}{2}; +\infty[ \\ \text{donc } |2x-3| = 4 &\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ ou } x = \frac{7}{2}. \end{aligned}$$

**b.**

$x$	$-\infty$	$1$	$+\infty$
$-x+1$	$+$	$0$	$-$
$ -x+1  =$	$-x+1$		$x-1$

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Sur } ]-\infty; 1[ , |-x+1| > 5 &\Leftrightarrow -x+1 > 5 \Leftrightarrow -4 > x. \\ \bullet \text{ Sur } [1; +\infty[ , |-x+1| > 5 &\Leftrightarrow x-1 > 5 \Leftrightarrow x > 6 \\ \text{donc } |-x+1| > 5 &\Leftrightarrow x \in ]-\infty; -4[ \cup ]6; +\infty[. \end{aligned}$$

## Se tester

**61 à 64** Voir Manuel de l'élève page 261.

## Exercices d'approfondissement

**65 a.** Par lecture graphique l'équation  $x^2 - 6x + \frac{181}{20} = 0$  admet une seule solution 3.

$$\begin{aligned} \text{b. } f(x) &= x^2 - 6x + \frac{181}{20} = (x-3)^2 - 9 + \frac{181}{20} \\ &= (x-3)^2 - \frac{180}{20} + \frac{181}{20} = (x-3)^2 + \frac{1}{20}. \end{aligned}$$

**c.** Pour tout nombre réel  $x$  on a  $(x-3)^2 \geq 0$

$$\text{donc } (x-3)^2 + \frac{1}{20} \geq \frac{1}{20} > 0.$$

Par conséquent, l'équation  $x^2 - 6x + 181/20 = 0$  n'admet pas de solution et la conjecture du **a.** est fausse.

**66 1.** Par lecture graphique :

•  $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -0,3$  ou  $x = 1$ .

•  $f(x) = -1 \Leftrightarrow x = 0$  ou  $x = 0,6$ .

•  $f(x) = -2$  n'admet pas de solution.

**2.**  $(x-1)(3x+1) = 3x^2 + x - 3x - 1 = 3x^2 - 2x - 1 = f(x)$ .

$$\begin{aligned} \cdot 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{4}{3} &= 3\left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}\right) - \frac{4}{3} = 3x^2 - 2x + \frac{3}{9} - \frac{4}{3} \\ &= 3x^2 - 2x - \frac{3}{9} \\ &= 3x^2 - 2x - 1 = f(x). \end{aligned}$$

**3.**  $f(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(3x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 1$  ou  $x = -\frac{1}{3}$ .

$$\begin{aligned} \cdot f(x) = -1 &\Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 1 = -1 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x = 0 \\ &\Leftrightarrow x(3x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot f(x) > 0 &\Leftrightarrow (x-1)(3x+1) > 0 \\ &\Leftrightarrow x \in ]-\infty; -1/3[ \cup ]1; +\infty[ \text{ à l'aide d'un} \\ &\text{tableau de signes.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot f(x) \geq -\frac{4}{3} &\Leftrightarrow 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{4}{3} \geq -\frac{4}{3} \Leftrightarrow 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

**4.**  $f(x) = k \Leftrightarrow 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{4}{3} = k \Leftrightarrow 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = k + \frac{4}{3}$   
donc :

**a.** pour  $k = -1,3$  l'équation  $f(x) = k$  admet une solution unique ;

pour  $k > -1,3$  l'équation  $f(x) = k$  admet deux solutions ;

pour  $k < -1,3$  l'équation  $f(x) = k$  n'admet pas de solution.

**b.**  $f(x) = k \Leftrightarrow 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{4}{3} = k \Leftrightarrow 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = k + \frac{4}{3}$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{k + \frac{4}{3}}{3}.$$

• Pour  $k = -\frac{4}{3}$ ,  $\frac{k + \frac{4}{3}}{3} = 0$  et  $f(x) = k$  admet une seule solution.

• Pour  $k > -4/3$ ,  $\frac{k + \frac{4}{3}}{3} > 0$  et  $f(x) = k$  admet deux solutions.

• Pour  $k < -4/3$ ,  $\frac{k + \frac{4}{3}}{3} < 0$  et  $f(x) = k$  n'admet pas de solution.

**67 a.**  $f(x) = 1 \Leftrightarrow (x-1)^4 = 1 \Leftrightarrow (x-1)^4 - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow [(x-1)^2 - 1][(x-1)^2 + 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow [(x-1) + 1][(x-1) - 1][(x-1)^2 + 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-2)[(x-1)^2 + 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x - 2 = 0 \text{ car } (x-1)^2 + 1 > 0$$

puisque  $(x-1)^2 \geq 0$ .

**b.**  $f(x) \geq 1 \Leftrightarrow x(x-2)[(x-1)^2 + 1] \geq 0 \Leftrightarrow x(x-2) \geq 0$   
car  $(x-1)^2 + 1 > 0$

$\Leftrightarrow x \in ]-\infty; 0] \cup [2; +\infty[$  à l'aide d'un tableau de signes.

• Pour tout nombre réel  $x$  on a  $(x-1)^2 \geq 0$  donc  $(x-1)^4 \geq 0$ . Par conséquent  $f(x) \geq 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

**68 a.** Pa lecture graphique, on a :

•  $(\mathcal{C}_f)$  est située strictement au-dessous de  $(\mathcal{C}_g)$  pour  $x < 0$ .

•  $(\mathcal{C}_f)$  et  $(\mathcal{C}_g)$  sont confondues pour  $x = 0$ .

•  $(\mathcal{C}_f)$  est située strictement au-dessus de  $(\mathcal{C}_g)$  pour  $x > 0$ .

**b.**  $f(0) = 0^3 + 0 = 0 = g(0)$ .

• Pour  $x > 0$   $f(x) - g(x) = x^3 + x - |x| = x^3 + x - x = x^3 > 0$ .

• Pour  $x < 0$   $f(x) - g(x) = x^3 + x - (-x) = x^3 + 2x$   
 $= x(x^2 + 2) < 0$  car  $x^2 + 2 > 0$  puisque  $x^2 \geq 0$ .

**69 a.** Conjecture graphique :  $(\mathcal{C}_f)$  est située au-dessous de  $(\mathcal{C}_g)$  pour  $x \in ]0; 1[ \cup [1,5; +\infty[$ .

**b.**  $f(x) - g(x) = \frac{x}{x-1} - 2x = \frac{x}{x-1} - \frac{2x(x-1)}{x-1}$

$$= \frac{x - 2x^2 + 2x}{x-1} = \frac{3x - 2x^2}{x-1} = \frac{x(3-2x)}{x-1}.$$

À l'aide d'un tableau de signes, on a :

$$\frac{x(3-2x)}{x-1} \leq 0 \Leftrightarrow x \in ]0; 1[ \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty[.$$

**70 a.**  $AE^2 = AF^2 = DF^2 + AD^2 = x^2 + 10^2 = x^2 + 100$ .  
 $EF^2 = CE^2 + CF^2 = (10 - x)^2 + (10 - x)^2 = 2(10 - x)^2$   
 $= 2(100 - 20x + x^2) = 200 - 40x + 2x^2$   
 $= 2x^2 - 40x + 200$ .

Le triangle  $AEF$  est équilatéral si et seulement si :

$$EF^2 = AE^2 = AF^2 \Leftrightarrow 2x^2 - 40x + 200 = x^2 + 100$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 40x + 100 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 20)^2 - 400 + 100 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 20)^2 - 300 = 0$$

**b.**  $(x - 20)^2 - 300 = 0 \Leftrightarrow (x - 20 + \sqrt{300})(x - 20 - \sqrt{300}) = 0$   
 $\Leftrightarrow x = 20 - \sqrt{300}$  ou  $x = 20 + \sqrt{300}$  or  $x \in [0; 10]$  donc  
l'unique solution est  $20 - \sqrt{300} = 20 - 10\sqrt{3}$ .

**71** Notons  $x$  la longueur en km du segment  $[CM]$ . On a  $IM = CM = x$  donc :

• Aire  $(IAB) = \frac{1}{2} AB \times MB = \frac{1}{2} \times 1 \times (1 - x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x$ .  
• Aire  $(IMCD) = CM \times \frac{CD + IM}{2} = x \frac{10 + x}{2} = x \left( 5 + \frac{x}{2} \right)$   
 $= 5x + \frac{1}{2}x^2$ .

Aire  $(IMCD) = \text{Aire } (IAB) \Leftrightarrow 5x + \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x$   
 $\Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 + 5x + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 10x + x - 1 = 0$   
 $\Leftrightarrow x^2 + 11x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left( x + \frac{11}{2} \right)^2 - \frac{121}{4} - 1 = 0$   
 $\Leftrightarrow \left( x + \frac{11}{2} \right)^2 - \frac{125}{4} = 0$   
 $\Leftrightarrow \left( x + \frac{11}{2} + \sqrt{\frac{125}{4}} \right) \left( x + \frac{11}{2} - \sqrt{\frac{125}{4}} \right) = 0$   
 $\Leftrightarrow \left( x + \frac{11}{2} + \frac{5\sqrt{5}}{2} \right) \left( x + \frac{11}{2} - \frac{5\sqrt{5}}{2} \right) = 0$   
 $\Leftrightarrow x = -\frac{11}{2} - \frac{5\sqrt{5}}{2}$  ou  $x = -\frac{11}{2} + \frac{5\sqrt{5}}{2}$  or  $x \in [0; 1]$   
donc  $-\frac{11}{2} + \frac{5\sqrt{5}}{2}$  est l'unique solution du problème.

**72** Pour tout nombre réel  $x$  on a  $x^2 \geq 0$ ,  $x^4 \geq 0$  et  $x^6 \geq 0$  donc  $x^6 + 3x^4 + x^2 + 2 \geq 2$  par conséquent l'équation  $x^6 + 3x^4 + x^2 + 2 = 0$  n'admet pas de solution.

**73 1.**  $(a + b)^3 = (a + b)(a + b)^2 = (a + b)(a^2 + 2ab + b^2)$   
 $= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3$   
 $= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ .

**2.**  $(a - 1)^3 = (x + (-1))^3 = x^3 + 3x^2(-1) + 3x(-1)^2 + (-1)^3$   
 $= x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ .

**3. a.**  $(l) \Leftrightarrow X^3 - 3X^2 + 3X - 1 \leq 0 \Leftrightarrow (X - 1)^3 \leq 0$ .

**b.**  $(l) \Leftrightarrow (X - 1)^3 \leq 0 \Leftrightarrow X - 1 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 \leq 0$   
 $\Leftrightarrow (x + 1)(x - 1) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-1; 1]$  à l'aide d'un tableau de signes.

**74 1.** Notons  $O$  le centre de la sphère,  $C$  le centre de la surface colorée et  $M$  un point de la périphérie de cette dernière. Le triangle  $OCM$  est rectangle en  $C$  et on a  $OC = |R - h|$ .

$$CM^2 = OM^2 - OC^2 = R^2 - |R - h|^2 = R^2 - (R - h)^2$$

$$= R^2 - (R^2 - 2Rh + h^2) = 2Rh - h^2$$

**2.** L'aire de la surface colorée est égale à :

$$\pi CM^2 = \pi (2Rh - h^2)$$

**a.** Elle est égale à  $\pi R^2$  si et seulement si :

$$\pi R^2 = \pi (2Rh - h^2) \Leftrightarrow R^2 = 2Rh - h^2 \Leftrightarrow R^2 - 2Rh + h^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (R - h)^2 = 0 \Leftrightarrow R - h = 0 \Leftrightarrow R = h$$

(Le résultat était prévisible).

**b.** Elle est égale à 0 si et seulement si  $\pi(2Rh - h^2) = 0$

$$\Leftrightarrow 2Rh - h^2 = 0 \Leftrightarrow h(2R - h) = 0 \Leftrightarrow h = 0 \text{ ou } h = 2R$$

Les résultats étaient prévisibles puisque pour  $h = 0$  et  $h = 2R$ , la surface colorée est réduite à un point.

**3.** Pour  $R = 1$ , l'aire de la surface colorée est égale à  $\pi(2h - h^2)$  donc elle est supérieure ou égale à 1 si et seulement si :

$$\pi(2h - h^2) \geq 1 \Leftrightarrow 2h - h^2 \geq \frac{1}{\pi} \Leftrightarrow 2h - h^2 - \frac{1}{\pi} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow h^2 - 2h + \frac{1}{\pi} \leq 0 \Leftrightarrow (h - 1)^2 - 1 + \frac{1}{\pi} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (h - 1)^2 - \frac{\pi - 1}{\pi} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \left( h - 1 + \sqrt{\frac{\pi - 1}{\pi}} \right) \left( h - 1 - \sqrt{\frac{\pi - 1}{\pi}} \right) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x \in \left[ 1 - \sqrt{\frac{\pi - 1}{\pi}}; 1 + \sqrt{\frac{\pi - 1}{\pi}} \right] \text{ à l'aide d'un tableau de signes.}$$

**75 a.** Par lecture graphique, 1 est solution de  $(E)$ .

**b.**  $1^3 - 2 \times 1^2 + \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1 - 2 + 1 = 0$ .

**c.**  $x^3 - 2x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{4} = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$

$$\Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{4} = ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{4} = ax^3 + (b - a)x^2 + (c - b)x - c$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b - a = -2 \\ c - b = \frac{3}{4} \\ -c = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

**d.**  $(E) \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - x - \frac{1}{4}) = 0$

$$\Leftrightarrow (x - 1) \left[ \left( x - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1) \left[ \left( x - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{2}{4} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(x-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x=1 \text{ ou } x=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } x=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

**76 a.**  $x^3 - 2x^2 = x^2(x-2)$ .

**b.**  $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2 = x^2(x-2) - (x-2)$   
 $= (x-2)(x^2-1) = (x-2)(x-1)(x+1)$ .

**d.**  $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-1)(x+1) \leq 0$   
 $\Leftrightarrow x \in ]-\infty; -1] \cup [1; 2]$  à l'aide d'un tableau de signes.

**77 a.**  $f(x) = x^2 - 6x + 10 = (x-3)^2 - 9 + 10 = (x-3)^2 + 1$ .

- b.**  $f(x) = k \Leftrightarrow (x-3)^2 + 1 = k \Leftrightarrow (x-3)^2 = k-1$  donc :
- pour  $k=1$ ,  $(\mathcal{C}_f)$  et  $(dk)$  ont un seul point d'intersection ;
  - pour  $k > 1$  on a  $k-1 > 0$  donc  $(\mathcal{C}_f)$  et  $(dk)$  ont deux points d'intersection ;
  - pour  $k < 1$  on a  $k-1 < 0$  donc  $(\mathcal{C}_f)$  et  $(dk)$  n'ont aucun point d'intersection.

**c.** Pour  $k > 1$  on a  $f(x) - k = (x-3)^2 - (k-1)$   
 $= (x-3)^2 - (\sqrt{k-1})^2 = (x-3-\sqrt{k-1})(x-3+\sqrt{k-1})$ .  
 À l'aide d'un tableau du signes, on obtient :  
 $f(x) - k < 0$  pour  $x \in ]3 - \sqrt{k-1}; 3 + \sqrt{k-1}[$  ;  
 $f(x) - k = 0$  pour  $x = 3 - \sqrt{k-1}$  et pour  $x = 3 + \sqrt{k-1}$  ;  
 $f(x) - k > 0$  pour  $x \in ]-\infty; 3 - \sqrt{k-1}[ \cup ]3 + \sqrt{k-1}; +\infty[$ .

**78** On suppose que les trajectoires du bus, du cycliste et du passager potentiel sont en ligne droite.

**1.** La vitesse du cycliste est 18 km/h, c'est-à-dire 5 m/s. Soit  $t$  le temps mis par le cycliste pour rattraper le bus. Pour  $0 \leq t \leq 30$ , les distances parcourues par le bus et le cycliste sont respectivement :  $\frac{t^2}{10}$  et  $5t$ .

**a.** Le cycliste rattrape le bus équivaut à :

$$\begin{cases} \frac{t^2}{10} + 22,5 = 5t \\ 0 \leq t \leq 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 - 50t + 225 = 0 \\ 0 \leq t \leq 30 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (t-45)(t-5) = 0 \\ 0 \leq t \leq 30 \end{cases} \text{ donc le cycliste rattrapera le bus}$$

au bout de 5 secondes, c'est-à-dire à  $\frac{5^2}{10} = 2,5$  mètres de l'arrêt de bus.

**b.** Le temps mis par le bus pour rattraper à son tour le cycliste, qui doit vérifier le même système, ne peut être que de 45 secondes. Avec les données de l'énoncé ( $0 \leq t \leq 30$ ) cela ne peut être assuré.

**2.** Pour  $0 \leq t \leq 30$ , les distances parcourues par le bus et le passager potentiel sont respectivement :  $\frac{t^2}{10}$  et  $vt$ .

Dire que le passager rattrape le bus équivaut à dire que le système (S)  $\begin{cases} \frac{t^2}{10} + 22,5 = 5t \\ 0 \leq t \leq 30 \end{cases}$

a au moins une solution.

**a.** Lorsque  $v = 9$  km/h ou  $v = 2,5$  m/s, on obtient :

$$\begin{cases} \frac{t^2}{10} + 22,5 = 2,5t \\ 0 \leq t \leq 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 - 25t + 225 = 0 \\ 0 \leq t \leq 30 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(t - \frac{25}{2}\right)^2 + \frac{275}{4} = 0 \\ 0 \leq t \leq 30 \end{cases}$$

ce système n'ayant pas de solution, le passager ne peut pas rattraper le bus.

**b.**  $\frac{t^2}{10} + 22,5 = vt \Leftrightarrow t^2 - 10vt + 225 = 0$

$$\Leftrightarrow (t - 5v)^2 - 25v^2 + 225 = 0 ;$$

cette équation a au moins une solution équivaut à :

$$-25v^2 + 225 \leq 0 \Leftrightarrow v^2 \geq \frac{225}{25} \Leftrightarrow v^2 \geq 9 \Leftrightarrow v \geq 3 ;$$

de plus, pour  $v = 3$  l'équation précédente, qui s'écrit «  $(t-15)^2 = 0$  », a pour solution 15 et  $0 \leq 15 \leq 30$  ; donc la valeur minimale de  $v$  pour que le passager puisse rattraper le bus est : 3 m/s ou 10,8 km/h.

**79 a.** Par lecture graphique  $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$  ou  $x = 3$ .  
 $f(x) = -(x+2)(x-3)$ .

**b.**  $\frac{x}{-x^2+x+6} = \frac{-1}{x+2} + \frac{2}{x-3}$   
 $\Leftrightarrow -\frac{x}{(x+2)(x-3)} = \frac{-x+3}{(x+2)(x-3)} + \frac{2(x+2)}{(x+2)(x-3)}$   
 $\Leftrightarrow \frac{2x+7}{(x+2)(x-3)} = 0$   
 $\Leftrightarrow 2x+7 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{7}{2}$ .

**80 1. a.**  $(E) \Leftrightarrow X^2 + 3X - 4 = 0$

**b.**  $X^2 + 3X - 4 = \left(X + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - 4 = \left(X + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$ .

$$X^2 + 3X - 4 = 0 \Leftrightarrow \left(X + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(X + \frac{3}{2} + \frac{5}{2}\right)\left(X + \frac{3}{2} - \frac{5}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (X+4)(X-1) = 0 \Leftrightarrow X = -4 \text{ ou } X = 1.$$

**c.**  $(E) \Leftrightarrow \begin{cases} X = -4 \\ \text{ou } X = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X^2 = -4 \\ \text{ou } X^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1$

puisque l'équation  $x^2 = -4$  n'admet pas de solution car  $x^2 \geq 0$  et  $-4 < 0$ .

**2. a.** On pose  $X = \sqrt{x}$ .

$$x + 3\sqrt{x} - 4 = 0 \Leftrightarrow X^2 + 3X - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = -4 \\ \text{ou } \sqrt{x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

**b.** On pose  $X = 2x - 1$ .

$$(2x - 1)^2 + 3(2x - 1) - 4 = 0 \Leftrightarrow X^2 + 3X - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = -4 \\ \text{ou } 2x - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} \text{ ou } x = 1.$$

**c.** On pose  $X = \frac{1}{x}$ .

$$\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x} - 4 = 0 \Leftrightarrow X^2 + 3X - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = -4 \\ \text{ou } \frac{1}{x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4} \text{ ou } x = 1.$$

$$\text{81} \quad 1 + \frac{1+x}{1+\frac{1}{x}} = 1 \Leftrightarrow 1 + \frac{1+x}{\frac{x+1}{x}} = 1$$

$$1 - \frac{1-x}{1-\frac{1}{x}} = 1 \Leftrightarrow 1 - \frac{1-x}{\frac{x-1}{x}} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 + \frac{(1+x)x}{1+x}}{1 - \frac{(1-x)x}{x-1}} = 1 \text{ et } x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+x}{1+x} = 1 \text{ et } x \neq 0, x \neq -1 \text{ et } x \neq 1.$$

Donc :  $S = \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$ .

**82** Soit  $x$  la somme d'argent qu'avait initialement le marchand.

$$\text{La 1}^{\text{e}} \text{ année, la somme est : } (x - 100) \times \frac{4}{3} = \frac{4(x-100)}{3}$$

$$\text{La 2}^{\text{e}} \text{ année, la somme est : } \left[ \frac{4(x-100)}{3} - 100 \right] \times \frac{4}{3}$$

La 3<sup>e</sup> année, la somme est :

$$\left[ \frac{16}{9}(x-100) - \frac{4}{3} \times 100 \right] \times \frac{4}{3};$$

$$\text{donc : } \frac{64}{27}x - \frac{11200}{27} = 2x \Leftrightarrow x = 560 \text{ F CFA.}$$

$$\text{83} \quad \text{(I)} \quad \frac{(2+x)^2 + (2-x)^2}{(2+x)^2 - (2-x)^2} < -\frac{3}{5}.$$

Contraintes sur l'inconnue :

$$(2+x)^2 - (2-x)^2 \neq 0 \Leftrightarrow [(2+x) + (2-x)][(2+x) - (2-x)] \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x \neq 0.$$

$$\text{(I)} \Leftrightarrow \frac{5[(2+x)^2 + (2-x)^2] + 3[(2+x)^2 - (2-x)^2]}{(2+x)^2 - (2-x)^2} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{8(2+x)^2 + 2(2-x)^2}{8x} < 0.$$

Donc l'ensemble des solutions de (I) est  $]-\infty; 0[$ .

$$\text{84} \quad \text{a. } x^3 - x^2 = x^2(x-1).$$

$$\text{b. } x^3 - x^2 + x - 1 = x^2(x-1) + x - 1 = (x-1)(x^2+1).$$

$$\text{c. } x^3 - x^2 + x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+1) \leq 0 \Leftrightarrow x-1 \leq 0$$

car  $x^2+1 > 0$  donc (I)  $\Leftrightarrow x \leq 1$ .

$$\text{85} \quad \frac{x-2}{x-1} \leq \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2}{x-1} - \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x-1} - \frac{1}{x-2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \frac{1}{x-2} \leq 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-3}{x-2} \leq 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in ]2; 3].$$

$$\bullet \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} \leq \frac{x-1}{x-2} \Leftrightarrow \frac{-x+2}{x-2} - \frac{1}{x-1} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -1 - \frac{1}{x-1} \leq 0 \text{ et } x \neq 2 \Leftrightarrow \frac{-x}{x-1} \leq 0 \text{ et } x \neq 2.$$

$$x \in ]-\infty; 0] \cup ]1; 2[ \cup ]2; +\infty[.$$

• L'ensemble des solutions est  $]2; 3]$ .

$$\text{86} \quad \text{a. } MA^2 = MB^2 + BA^2 = (10-x)^2 + 3^2$$

$$= 100 - 20x + x^2 + 9 = x^2 - 20x + 109.$$

$$MD^2 = MC^2 + CD^2 = x^2 + 4^2 = x^2 + 16.$$

$$MA = \frac{3}{4}MD \Leftrightarrow MA^2 = \frac{9}{16}MD^2 \text{ car } MA \geq 0 \text{ et } MD \geq 0.$$

$$\Leftrightarrow 16MA^2 = 9MD^2$$

$$\Leftrightarrow 16(x^2 - 20x + 109) = 9(x^2 + 16).$$

$$\Leftrightarrow 16x^2 - 320x + 1744 = 9x^2 + 144$$

$$\Leftrightarrow 7x^2 - 320x + 1600 = 0$$

$$\text{or } 1600 - 320x = (40 - 4x)^2 - 16x^2 \text{ donc :}$$

$$7x^2 - 320x + 1600 = 0 \Leftrightarrow 7x^2 + (40 - 4x)^2 - 16x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (40 - 4x)^2 - 9x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (40 - 4x + 3x)(40 - 4x - 3x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (40 - x)(40 - 7x) = 0$$

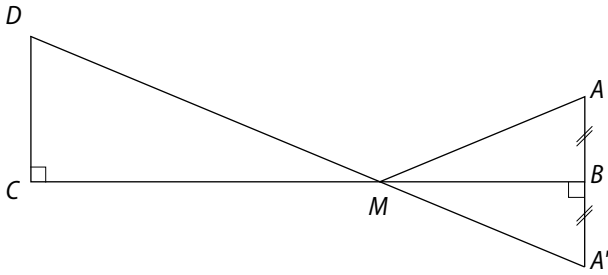
$$\Leftrightarrow x = 40 \text{ ou } x = \frac{40}{7} \Leftrightarrow x = \frac{40}{7} \text{ car } x \in [0; 10].$$

$$\text{b. } MA + MD = \sqrt{x^2 - 20x + 109} + \sqrt{x^2 + 16}.$$

Par lecture graphique de la courbe représentative de la fonction  $f$  définie sur  $[0; 10]$  par :

$f(x) = \sqrt{x^2 - 20x + 109} + \sqrt{x^2 + 16}$ , on trouve que  $f$  admet un minimum  $m \approx 12,2$  pour  $x \approx 5,2$ .

• Justification :



$MD + MA$  est minimum si et seulement si  $MD + MA'$  est minimum donc si et seulement si les points  $D, M$  et  $A'$  sont alignés. Or  $(A'B) \parallel (CD)$  donc  $MD + MA$  est minimum si et seulement si :

$$\frac{MB}{MC} = \frac{BA'}{CD} \Leftrightarrow 4MB = 3MC \Leftrightarrow 4(10 - x) = 3x$$

$$\Leftrightarrow 40 - 4x = 3x \Leftrightarrow 40 = 7x \Leftrightarrow x = \frac{40}{7}.$$

**87** 1.  $\frac{d}{v_1} + \frac{d}{v} = \frac{2d}{v_2} \Leftrightarrow \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v} = \frac{2}{v_2}$  car  $d \neq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{v} = \frac{2}{v_2} - \frac{1}{v_1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{v} = \frac{2v_1 - v_2}{v_1 v_2} \Leftrightarrow v = \frac{v_1 v_2}{2v_1 - v_2}$$

(car  $2v_1 - v_2 \neq 0$ ).

2. a. Pour  $v_1 = 18$  et  $v_2 = 15$  on a :

$$v = \frac{18 \times 15}{36 - 15} = \frac{18 \times 15}{21} = \frac{18 \times 5}{7} = \frac{90}{7}.$$

b. Pour  $v_1 = 2v_2$  on a  $v = \frac{2v_2^2}{3v_2} = \frac{2}{3}v_2$ .

c. Pour  $v_1 = v_2$  on a  $v = \frac{v_2^2}{v_2} = v_2$ .

# 14 Équations, inéquations dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

## Activités d'introduction

### 1 Masse d'une bille et d'un dé

1.  $5x + 3y = 30$  (1) et  $10x + 2y = 40$  (2).

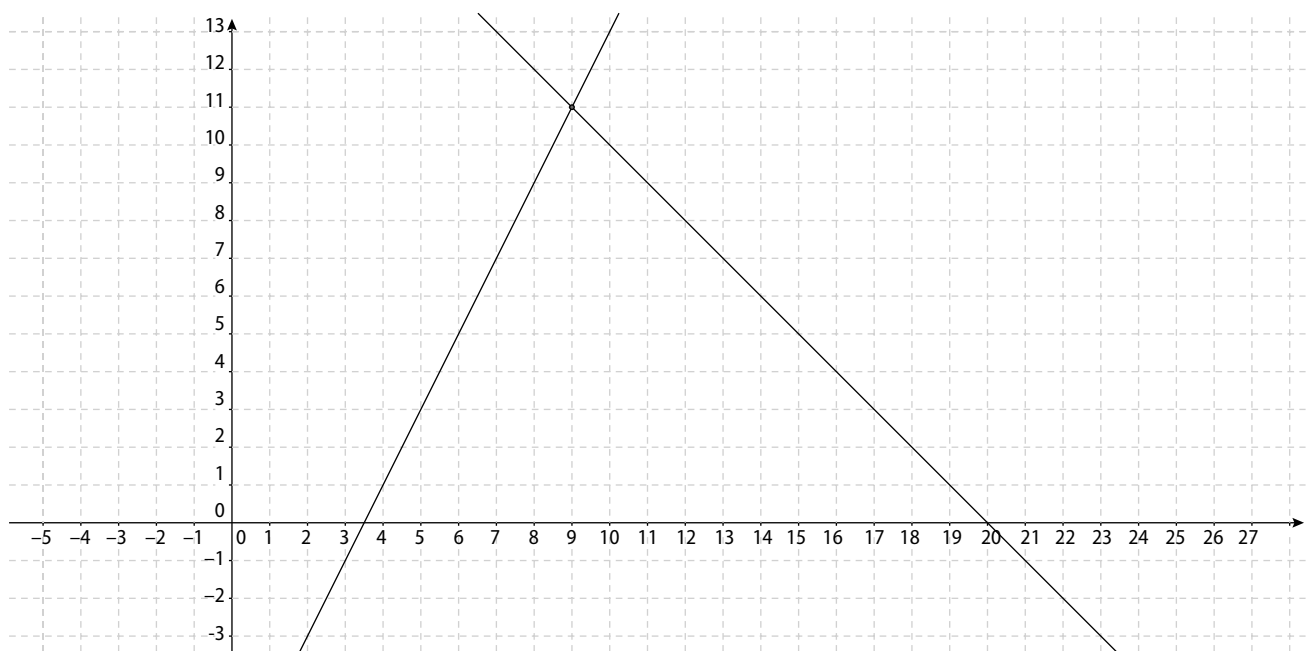
2. **a.** Il faut rajouter 3 dés. Le poids dans le plateau de droite est alors de 60kg. **b.**  $10x + 6y = 60$  (3).

**c.**  $(10x + 6y) - (10x + 2y) = 60 - 40$ . Ce qui donne  $4y = 20$  et donc  $y = 5$ .

**d.** On remplace  $y$  par 5 dans l'équation (2) :  $10x + 10 = 40$  qui donne  $x = 3$ .

### 2 Nombre de DVD

2. a.



**b.** Le point d'intersection a pour coordonnées (9 ; 11). **c.** Mambo a donc 9 DVD et Gana en a 11.

**3. a.**  $2x - 7 = -x + 20$ . **b.**  $3x = 27 \Leftrightarrow x = 9$ . Par conséquent,  $y = 2 \times 9 - 7 = 11$ . **c.** Les résultats obtenus par le calcul sont identiques à ceux obtenus par lecture graphique.

### 3 Une ou plusieurs solutions ?

1. Les deux affirmations sont valides.

2. **a.** Voir ci-contre.

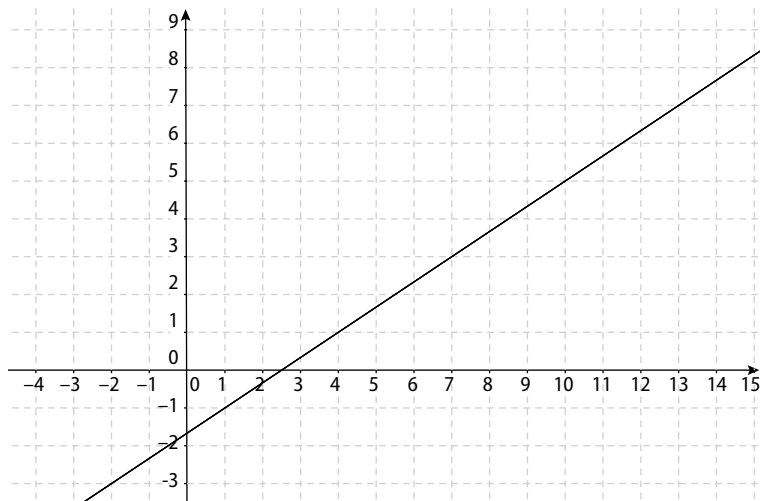
**b.** Les deux droites sont confondues.

On a une infinité de solutions.

3. **a.**  $y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$  et  $y = \frac{4}{6}x - \frac{10}{6}$ .

**b.** Après simplification par 2 des fractions, la deuxième équation est identique à la première.

**c.** On a bien  $y = \frac{2x - 5}{3}$ .



4. a. Graphiquement : voir ci-contre.

b. Les deux droites sont strictement parallèles.

On n'a pas de solution.

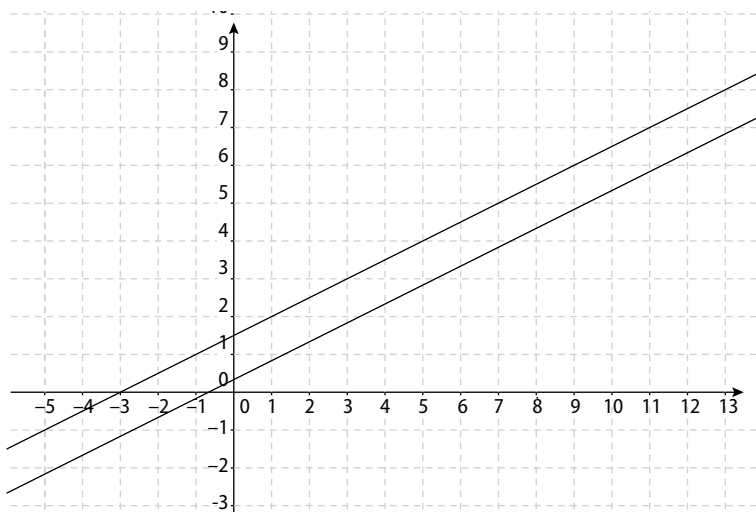
Par le calcul :

a.  $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$  et  $y = \frac{3}{6}x + \frac{2}{6}$ .

b. Après simplification des fractions, la deuxième équation devient  $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$ .

On en déduit que  $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$ .

Et donc que  $\frac{3}{2} = \frac{1}{3}$ , ce qui est impossible.



#### 4 Fabrication de jouets

1. a. Cette inéquation est la traduction de la contrainte sur le temps de travail journalier.

b. Contrainte sur le stock de bois :  $2x + y \leq 24$ .

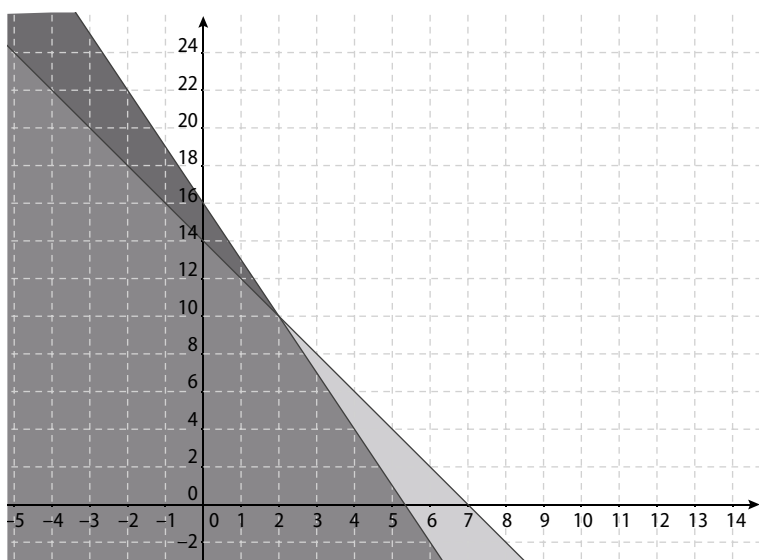
2. Voir ci-contre.

3. a. Les nombres de jouets fabriqués doivent être des nombres entiers naturels.

b. Oui. Le couple (4 ; 3) est solution.

Non. Le couple (5 ; 4) n'est pas solution.

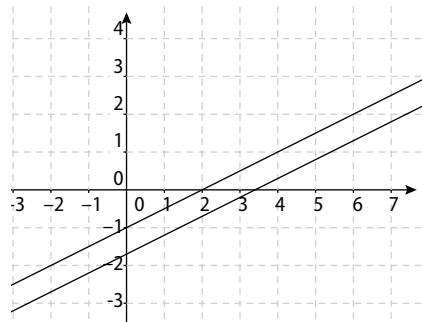
c. L'artisan peut fabriquer au maximum 5 marionnettes, ou 14 voitures.



### Savoir-faire

3 Les couples solutions sont : a. (3 ; -2) ; b. (2 ; 2) ; c. (3 ; 0) ; d. (-2 ; 3) ; e. (15 ; 4) ; f.  $(\frac{4}{3} ; 1)$ .

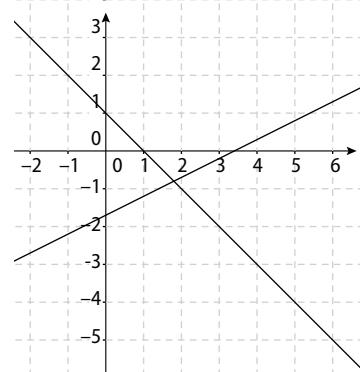
4 a.  $\text{dét} = 5 \times (-2) - 1 \times (-10) = 0$ .



Le système n'a donc pas une solution unique.

Les deux droites sont strictement parallèles, le système n'a donc pas de solution.

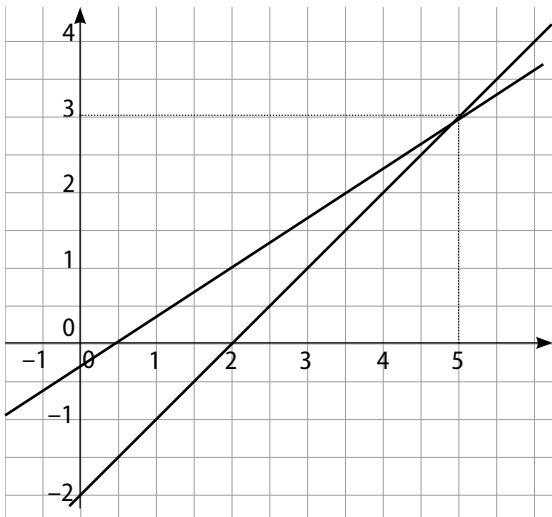
b.  $\text{dét} = 5 \times 2 - 2 \times (-1) = 12$ .  $12 \neq 0$  donc le système a une solution unique.



Graphiquement, le couple solution est (1,8 ; 0,8).

c.  $\text{dét} = 1 \times (-3) - 2 \times (-1) = -1$ .  $-1 \neq 0$  donc le système a une solution unique.

5 Graphiquement, le couple de solutions est (5 ; 3).

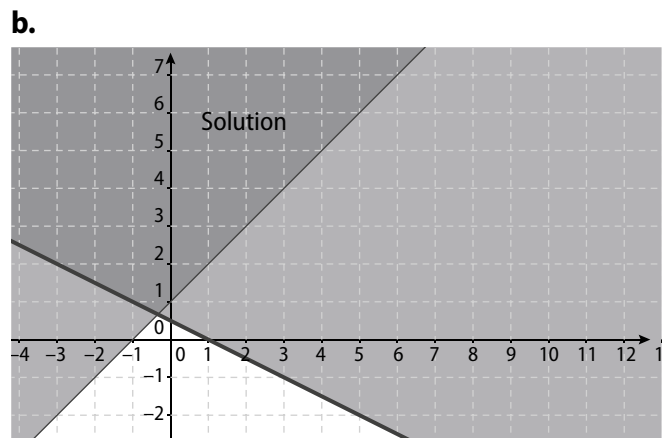
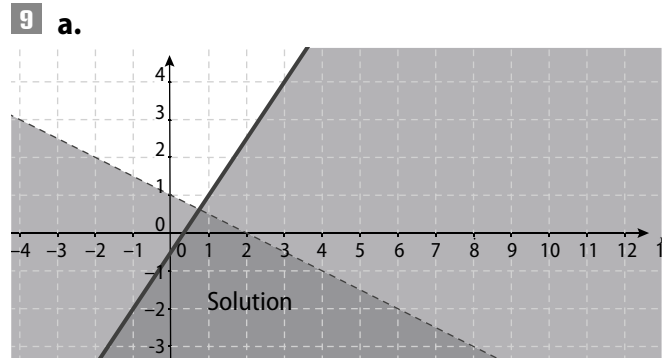
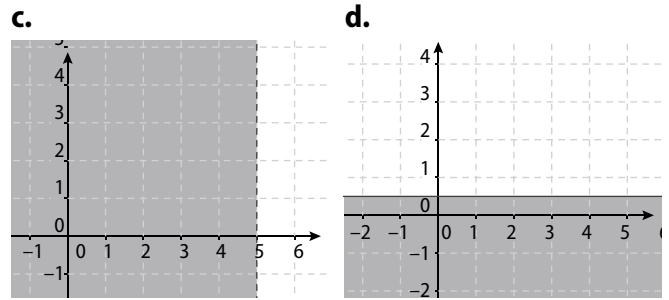
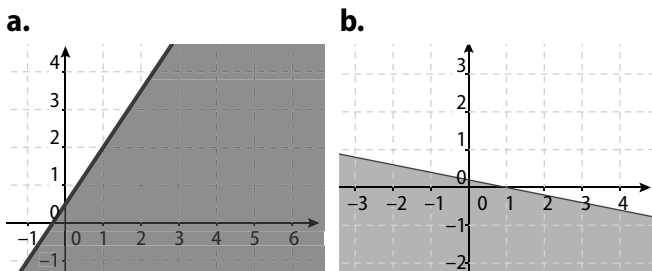


**6**  $\det = 3 \times 10 - 2 \times (15) = 0$ .

Graphiquement, on obtient deux droites strictement parallèles. Par combinaisons linéaires, on a :

(s)  $\Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 30y = 34 \\ 6x + 30y = 27 \end{cases}$  qui n'a pas de solution.

**8** Les solutions sont les demi-plans grisés frontières comprises pour **b.** et **d.**



**10**  $\begin{cases} y < 2x + 2 \\ y < -x + 3 \end{cases}$

## Exercices d'entraînement

**11** Le couple solution est (1 ; -1).

**12** (S)  $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 1 \\ x + y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 1 \\ 2y + 1 + y = 7 \end{cases}$

qui donne pour solution le couple (5 ; 2).

**13** Par addition des deux équations, on obtient :  $2x = 1$ . Le couple solution est :  $(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2})$ .

**14** (S<sub>1</sub>) a pour solution (-1 ; 3),

(S<sub>2</sub>) a pour solution (2 ; -2),

(S<sub>3</sub>) n'a pas de solution,

(S<sub>4</sub>) a pour solution (1 ; 2),

**15** Les couples solutions sont :

**a.** (-1 ; -3) ; **b.**  $(\frac{12}{13} ; -\frac{5}{13})$  ; **c.** (2,6 ; -3,4) ; **d.** (1 ; 1).

**16** Les couples solutions sont :

**a.** (2 ; -1) ; **b.** (2 ; 2) ; **c.** (4 ; -3) ; **d.** (0 ; 2).

**17** **a.**  $k = -4$  ; **b.**  $k = -1$ .

**18** L'écran donne la résolution du système :

$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ -3x + 2y = -4 \end{cases}$  qui a pour solution (2 ; 1).

**19** **a.**  $\begin{cases} 2x + 3y = 2475 \\ 3x + y = 1825 \end{cases}$  **b.**  $x = 450 ; y = 525$ .

**c.** Il a commandé deux sodas et deux jus de fruit.

**20** Les deux nombres entiers naturels  $x$  et  $y$  sont solution du système :  $\begin{cases} x + y = 32 \\ x - y = 10 \end{cases}$ .

Par addition, on trouve  $x = 21$  et  $y = 11$ .

**21** Les deux nombres entiers naturels  $x$  et  $y$  sont solution du système :  $\begin{cases} x + y = 27 \\ 2x - 3y = 14 \end{cases}$ .

Par substitution, on trouve  $x = 19$  et  $y = 8$ .

**22** Les deux nombres entiers naturels  $x$  et  $y$ , s'ils existent, sont solution du système :  $\begin{cases} x + 2y = 17 \\ 4x + 2y = 30 \end{cases}$ .

Ce système a pour solution  $(\frac{13}{3}; \frac{19}{3})$ .

**23** Les dimensions du rectangle,  $l$  et  $L$ , sont solution du système :  $\begin{cases} 2l + 2L = 50 \\ l = \frac{L}{3} \end{cases}$ .

Par substitution, on trouve  $l = 6,25$  et  $L = 18,75$ .

**24 a.**  $x$  désigne le nombre de victoires et  $y$  le nombre de matchs nuls. Le couple  $(x; y)$  est solution du système :  $\begin{cases} x + y = 18 \\ 3x + y = 40 \end{cases}$ .

Par addition, on trouve  $x = 11$  et  $y = 7$ .

**b.** On cherche, par exemple graphiquement, les couples de nombres entiers naturels solutions de l'inéquation  $3x + y \geq 30$  et de l'inéquation  $x + y \leq 36$ .

**25**  $\begin{cases} \frac{15x + 12y + 80}{x + y + 5} = 14,9 \\ \frac{13x + 10y + 85}{x + y + 5} = 14,4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 15x + 12y + 80 = (x + y + 5) \times 14,9 \\ 13x + 10y + 85 = (x + y + 5) \times 14,4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0,1x - 2,9y = -5,5 \\ -1,4x - 4,4y = -13 \end{cases}$

La solution est le couple  $(3; 2)$ .

**26**  $x$  désigne le nombre de places debout et  $y$  le nombre de places assises. Le couple  $(x; y)$  est solution du système :

$\begin{cases} x + y = 3\,550 \\ 950x + 1\,900y = 4\,664\,500 \end{cases}$

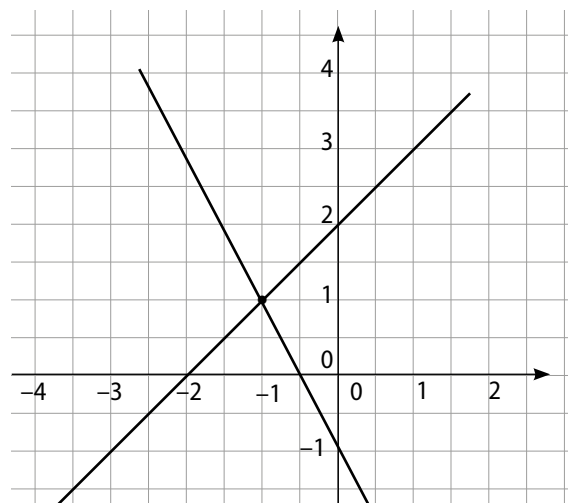
Par substitution, on trouve  $x = 2\,190$  et  $y = 1\,360$ .

**27 1. a.**  $(D_3)$ ; **b.**  $(D_1)$ ; **c.**  $(D_2)$ .

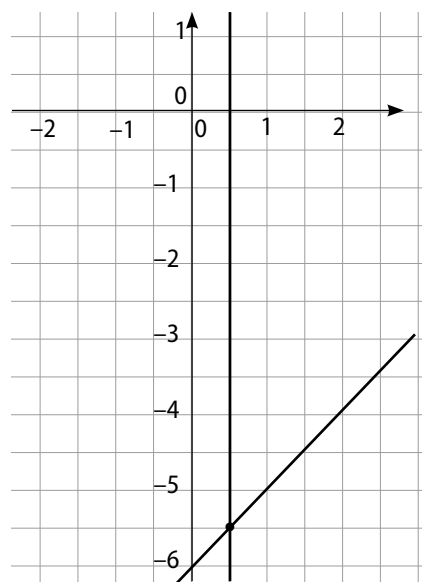
**2. a.**  $(1; 3)$ ; **b.** Pas de solution; **c.**  $(2,3; 1,7)$ .

**28**  $\begin{cases} y = 2x - 2 \\ y = -\frac{1}{2}x + 3 \end{cases}$  . Solution :  $(2; 2)$ .

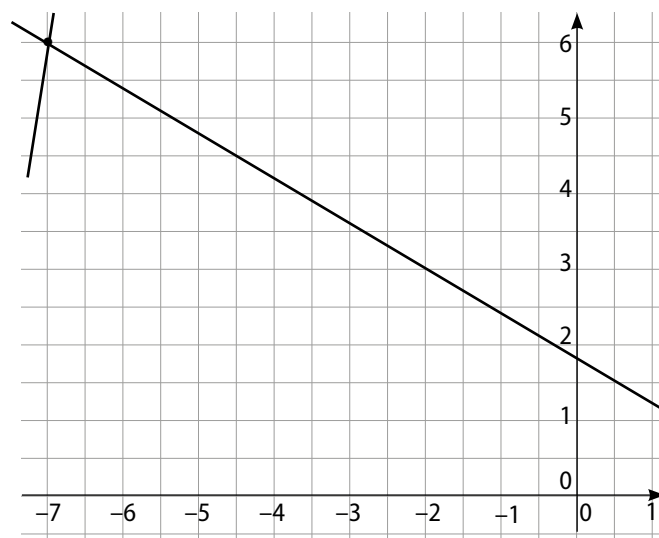
**29 a.** Solution :  $(-1; 1)$ .



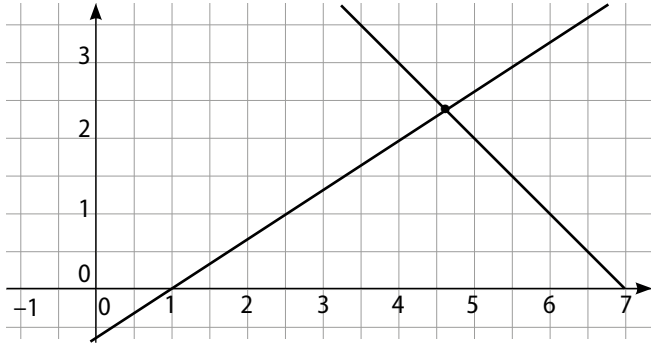
**b.** Solution :  $(0,5; -5,5)$ .



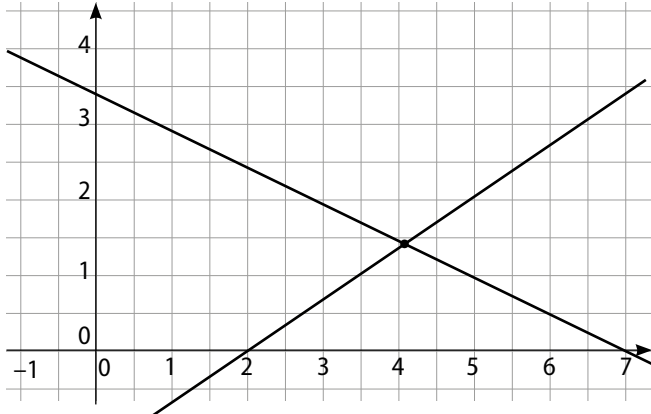
**c.** Solution :  $(-7; 6)$ .



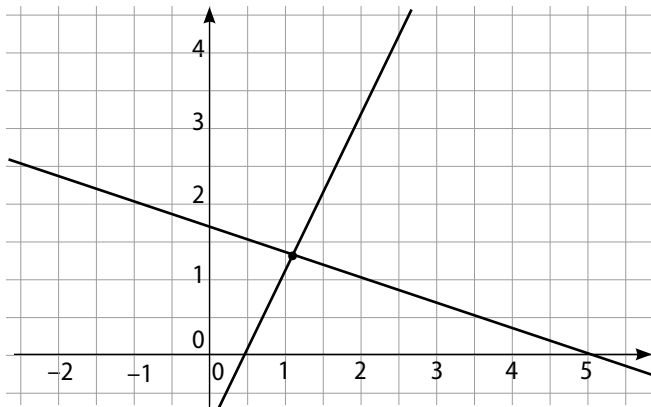
d. Solution : (4,6 ; 2,4).



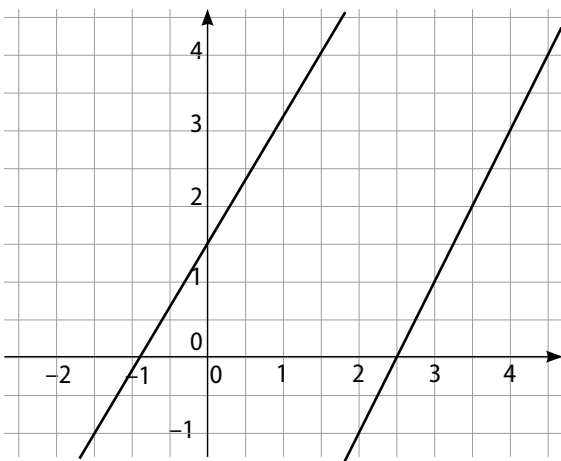
e. Solution : (4,1 ; 1,4).



f. Solution : (1,1 ; 1,3).



30 Les droites semblent sécantes.



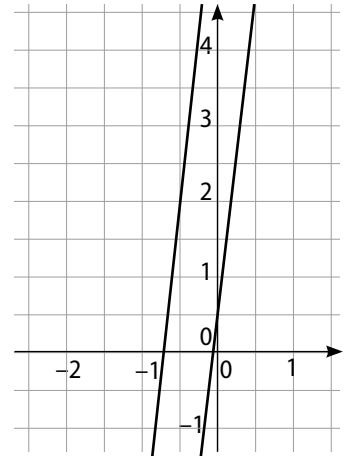
Par le calcul, le couple solution est : (32,5 ; 60).

31 Les droites semblent parallèles.

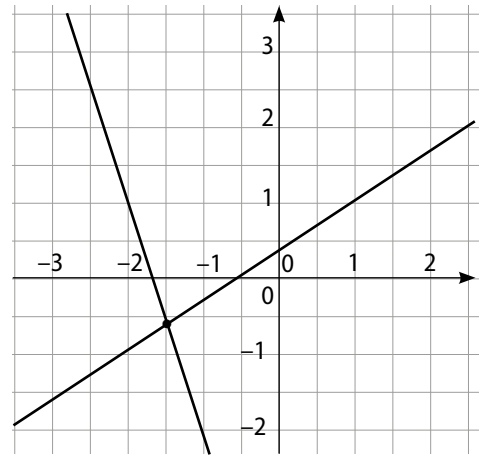
Par le calcul, le couple

solution est :  $(\frac{130}{3} ; 304)$ .

Donc ces deux droites ne sont pas parallèles.



32 Les droites sont sécantes.



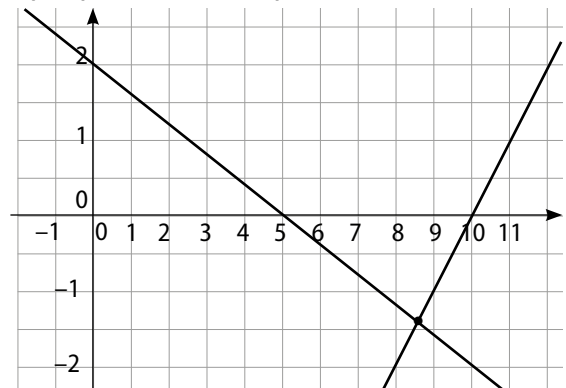
Par lecture graphique, le couple solution semble être : (-1,5 ; -0,6).

Par le calcul, le couple solution est :  $(-\frac{16}{11} ; -\frac{7}{11})$ .

33 a. Les deux droites ont des coefficients directeurs de signes opposés. Elles sont donc sécantes.

b.  $(D_1) : y = -\frac{2}{5}x + 2$  ;  $(D_2) : y = x - 10$ .

c. Graphiquement, le couple solution est : (8,6 ; -1,4).



d. Par le calcul,  $(\frac{60}{7} ; -\frac{10}{7})$ .

34 a. Graphiquement, le couple solution semble être : (1 ; 2).

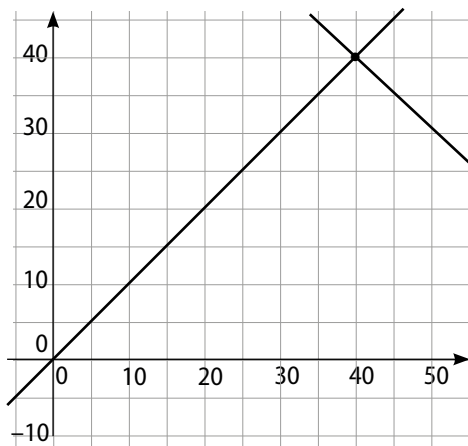
b. Par le calcul, on trouve (1 ; 1,9).

**35 a.** Graphiquement, le couple solution semble être :  $(0,7 ; 1,7)$ .

**b.** Par le calcul, on trouve  $\left(\frac{2}{3} ; \frac{5}{3}\right)$ .

**36 a.** Dans le repère choisi,  $A(0 ; 0)$ ,  $B(1 ; 0)$ ,  $I(10 ; 10)$  et  $J(70 ; 10)$ . Les droites  $(AI)$  et  $(BJ)$  ont pour équations respectives :  $y = x$  et  $y = -x + 80$ .

**b.** Le couple solution est :  $(40 ; 40)$ .

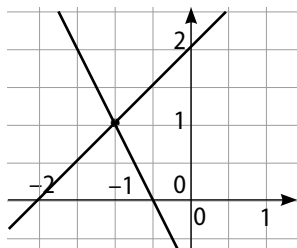


**37 a.**  $\vec{u}(1 ; 1)$  et  $\vec{v}(1 ; -2)$ .

**b.**  $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 1 \times (-2) - 1 \times 1 = -3$ .

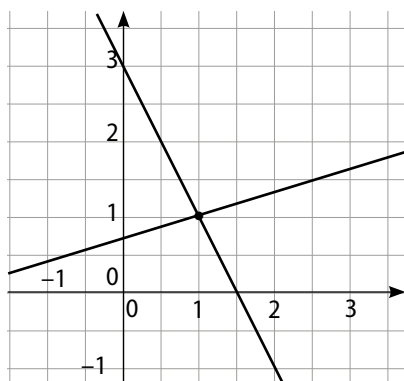
Le déterminant n'est pas nul, les vecteurs ne sont pas colinéaires et les deux droites sont sécantes.

**c.** Le couple solution est :  $(-1 ; 1)$ .

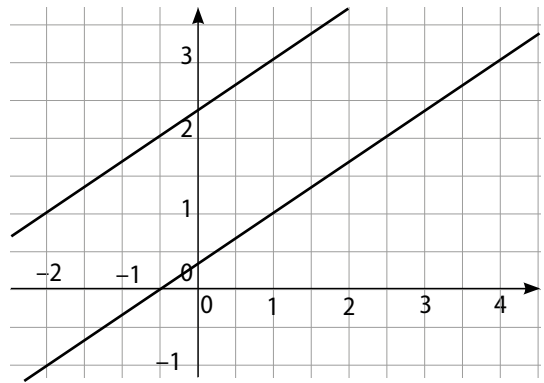


**38 a.**  $\det(S) = 7$  et  $7 \neq 0$ . Une solution unique.

Le couple solution est :  $(1 ; 1)$ .

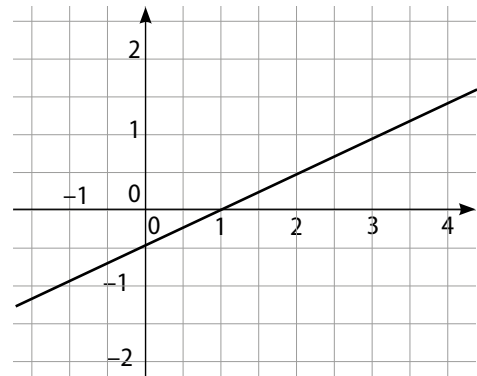


**b.**  $\det(S) = 0$ . Infinité ou pas de solution.



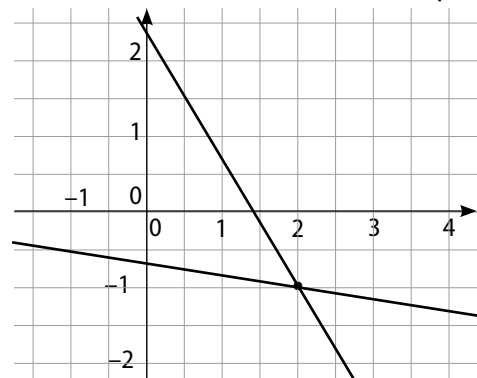
Pas de solution.

**c.**  $\det(S) = 0$ . Infinité ou pas de solution.



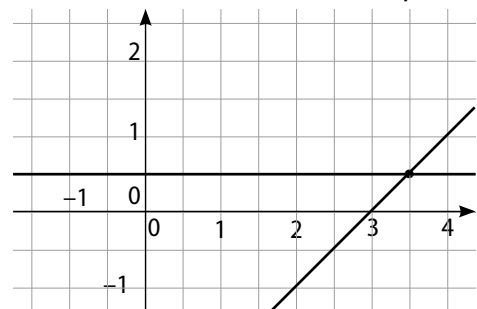
Infinité de solutions : tous les couples de la forme :  $(2y + 1 ; y)$ ,  $y$  étant un nombre réel.

**d.**  $\det(S) = -9$  et  $-9 \neq 0$ . Une solution unique.



Le couple solution est :  $(2 ; -1)$ .

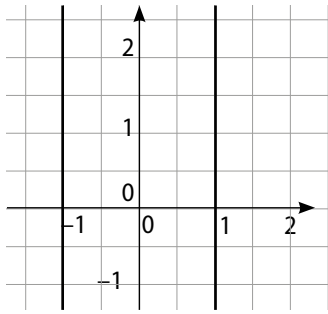
**e.**  $\det(S) = 2$  et  $2 \neq 0$ . Une solution unique.



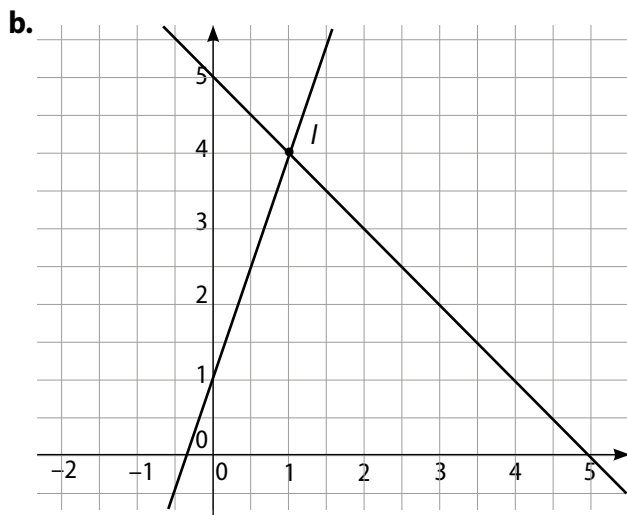
Le couple solution est :  $(3,5 ; 0,5)$ .

**f.**  $\det(S) = 0$ . Infinité ou pas de solution.

Pas de solution.



**39 a.** Les coefficients directeurs des deux droites sont différents, elles sont donc sécantes.

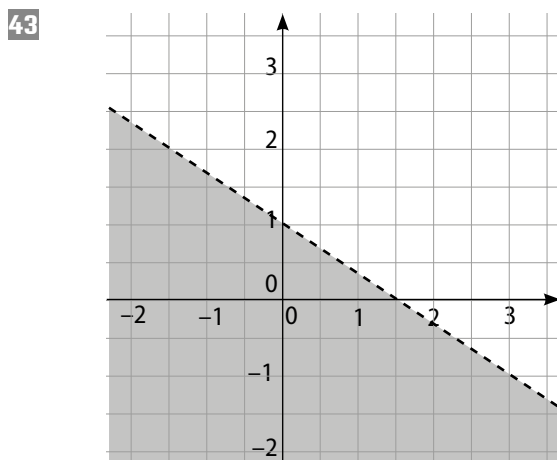


Le point d'intersection est le point  $I(1 ; 4)$ .

**40**  $A : x + 2y - 2 > 0$  ;  $B : x + 2y - 2 < 0$  ;  
 $C : x + 2y - 2 = 0$ .

**41**  $(P_1) : 3x + 2y \leq 5$  ;  $(P_2) : 3x + 2y \geq 5$ .

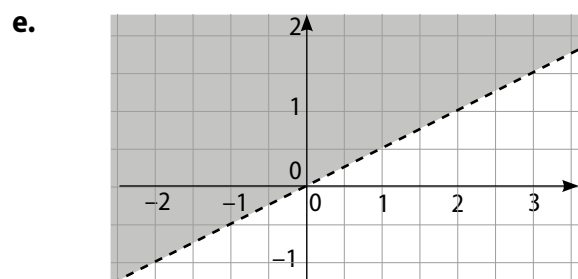
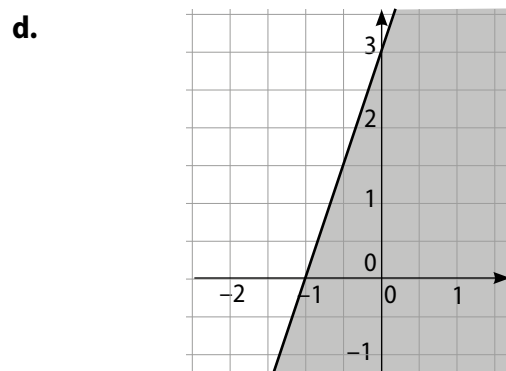
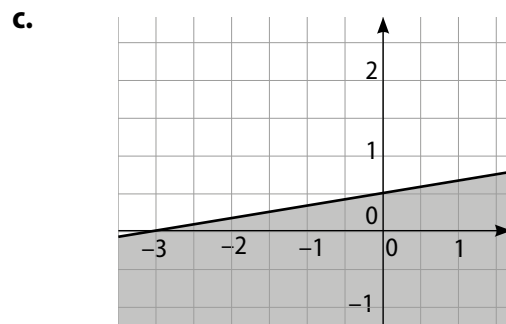
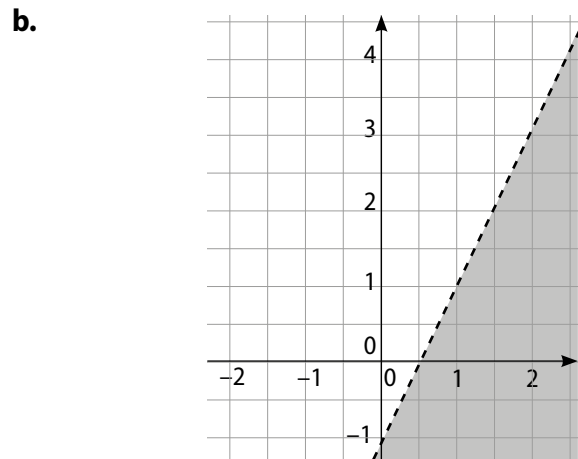
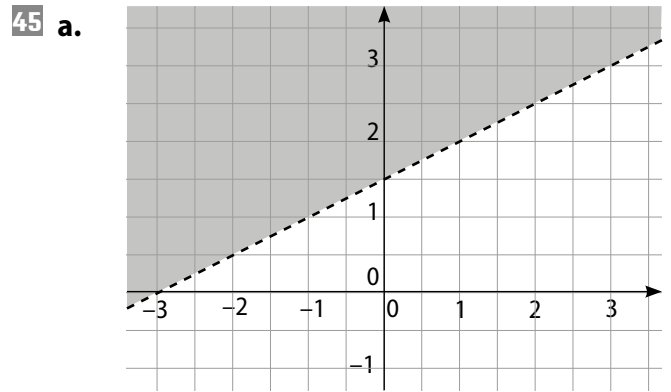
**42**  $y < -0,5x + 5$ .

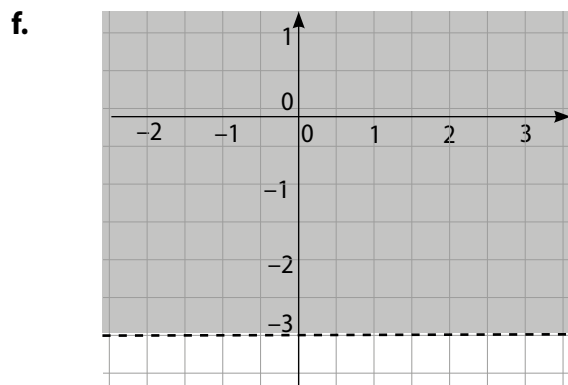


**44 1.**  $y \leq x + 3$ .

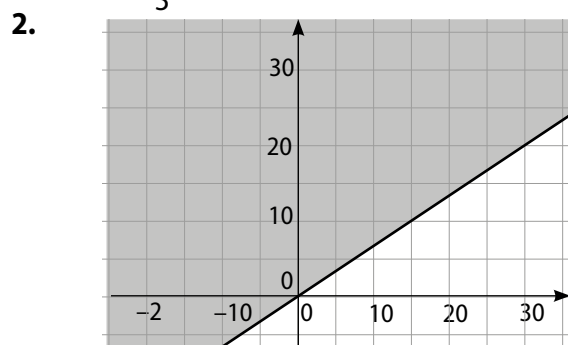
**2.**  $(-2 ; 1)$  et  $(4 ; 2)$  sont solutions.

**3.**  $(2 ; 2)$  et  $(1 ; 4)$ .





46 1.  $y \geq \frac{2}{3}x$ .

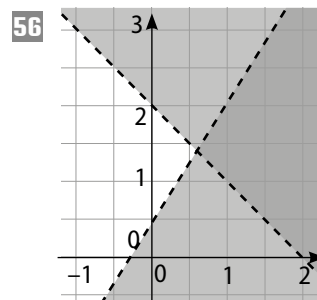
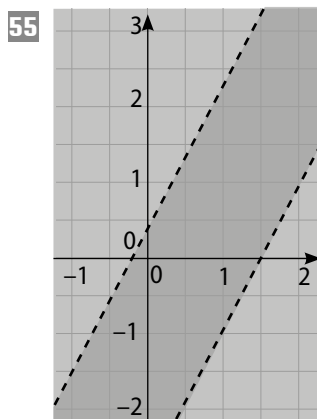
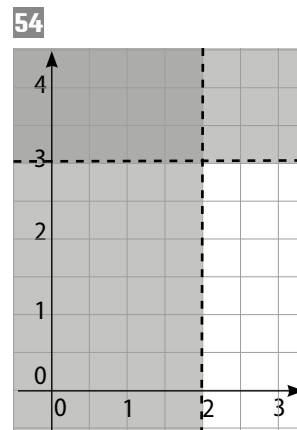
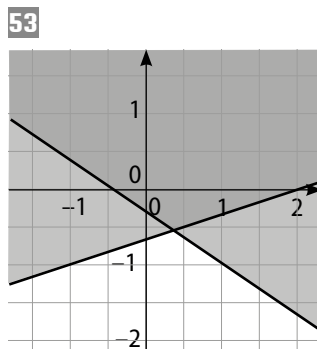
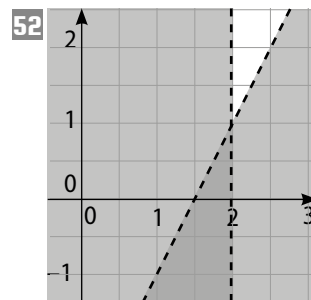
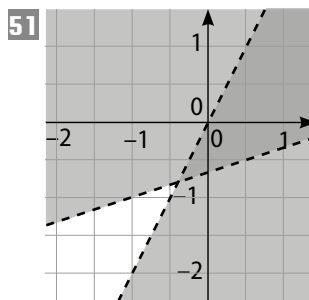
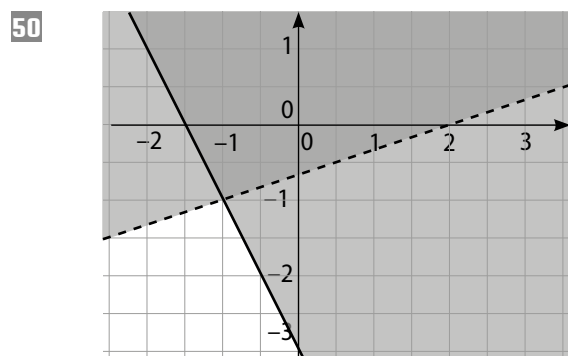
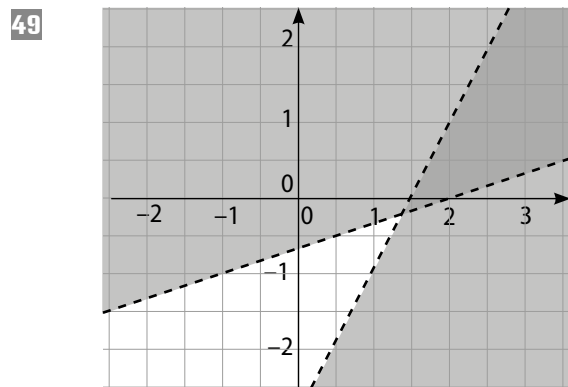


3. a. (10 ; 20), (30 ; 20), (20 ; 30). b. Oui.

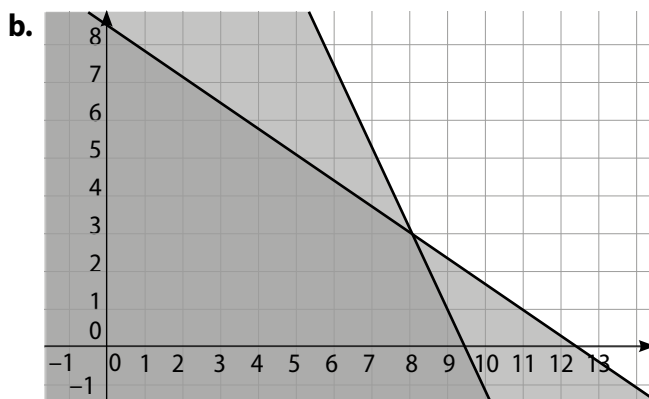
c. On doit avoir  $x + y = 50$  et donc  $50 \geq \frac{5}{3}x$ .  
Donc  $x \leq 30$ . Le nombre maximal d'informaticiens est donc de 30.

47  $\begin{cases} x \geq 2 \\ y \geq 3. \end{cases}$

48  $(S_2)$ .



57 a.  $\begin{cases} 0,2x + 0,3y \leq 2,5 \\ 45x + 20y \leq 420. \end{cases}$



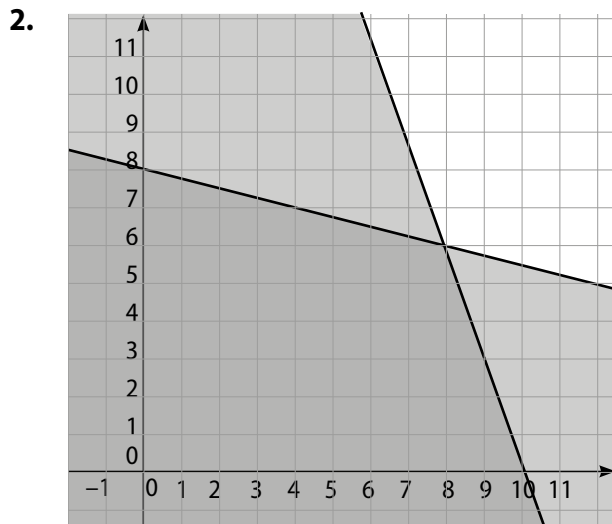
c. Il faut lire les coordonnées des points de la droite d'équation  $45x + 20y = 420$  qui sont des nombres entiers : (0 ; 21), (4 ; 12), etc.

d. (8 ; 3). Ce sont les quantités de gâteaux de chaque sorte lorsque l'on utilise tout le temps et toute la farine.

e. Il faut résoudre le système :  $\begin{cases} 0,2x + 0,3y = 2,5 \\ 45x + 20y = 420. \end{cases}$

58  $x$  désigne le nombre de petits jouets et  $y$  le nombre de grands jouets.

1.  $\begin{cases} x + 4y \leq 32 \\ 3x + y \leq 30. \end{cases}$



3. a. Oui ; b. Non ; c. Non.

59  $\begin{cases} -3x + y \leq -1 \\ -x + 4y \geq 7 \\ 2x + 3y \leq 19. \end{cases}$

60  $\begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq 8 \\ y \geq 3 \\ y \leq 6. \end{cases}$

61  $\begin{cases} x \geq -2 \\ x \leq 2 \\ y \geq -2 \\ y \leq 2. \end{cases}$

## Faire le point

62 ( $S_1$ ) Combinaison linéaire car les coefficients de  $x$  sont les mêmes ; ( $S_2$ ) Substitution car on peut isoler facilement  $x$  ou  $y$  ; ( $S_3$ ) Combinaison linéaire ou substitution ; ( $S_4$ ) Représentation graphique car les deux équations sont des équations réduites de droites.

63 a. Les coordonnées de  $A$  ne vérifient pas la deuxième inéquation.

Les coordonnées de  $D$  vérifient les deux inéquations. La solution est donc la zone qui le contient.

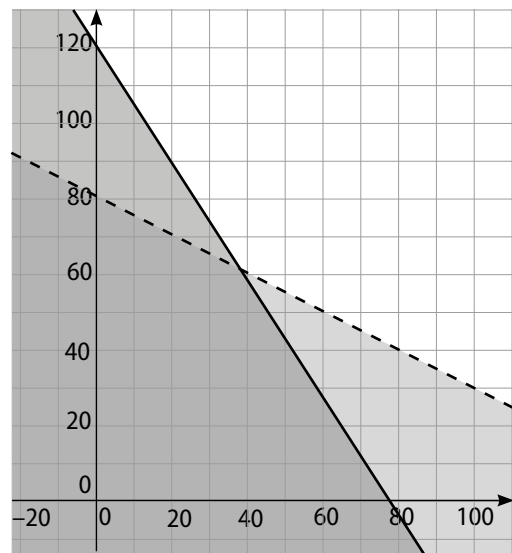
b.  $\begin{cases} y < 2x + 1 \\ y > -x + 3. \end{cases}$

64  $x$  désigne le nombre de paquets de type A et  $y$  le nombre de paquets de type B.

Les contraintes de l'énoncé se traduisent par le système :  $\begin{cases} 200x + 125y \leq 15000 \\ 50x + 125y \leq 10000 \end{cases}$

qui se simplifie en :  $\begin{cases} 8x + 5y \leq 600 \\ 2x + 5y \leq 400. \end{cases}$

Une résolution graphique donne l'ensemble des solutions dans la partie foncée. Tous les points à coordonnées entières de cette partie sont valables.



65 1.  $y = 2x + 4$  et  $y = 2x - 5$ .

2. On conjecture que les droites sont parallèles.

3. a. Les coefficients directeurs sont différents les droites sont donc sécantes.

b. Par substitution, on détermine les coordonnées du point d'intersection : (180 ; 355).

66 a.  $D_x = 5$ ,  $D_x = -2$  et  $D_y = 9$ . Le couple solution est :  $(-0,4 ; 1,8)$ .

**b.**  $D = -5$ ,  $D_x = 5$  et  $D_y = 10$ . Le couple solution est :  $(-1 ; -2)$ .

**c.**  $D = -2$ ,  $D_x = -6$  et  $D_y = -4$ . Le couple solution est :  $(3 ; 2)$ .

**d.**  $D = 7$ ,  $D_x = -4$  et  $D_y = -5$ . Le couple solution est :  $(-\frac{4}{7} ; -\frac{5}{7})$ .

**67 a.**  $\det(S) = 2 \times 6 - (-4) \times (-3) = 0$ .

**b.** Les deux équations de  $(S')$  sont vérifiées par le couple  $(\frac{1}{4} ; 0)$ .

**c.**  $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{6} \\ y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{6} \end{cases}$

## Se tester

**68** à **71** Voir Manuel de l'élève page 261.

## Exercices d'approfondissement

**72**  $x$  désigne le nombre de boules bleues et  $y$  le nombre de boules rouges.

**a.**  $\begin{cases} x + y = 10 \\ (x + 3) = 2(y + 2) \end{cases}$

**b.**  $x = 7$  et  $y = 3$ .

**73 a.**  $\begin{cases} x + y = 9 \\ \frac{x}{y} = \frac{x}{y} + 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 9 \\ 10y + x = 10x + y + 27 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 9 \\ -x + y = 3 \end{cases}$

**b.**  $x = 3$  et  $y = 6$ . Le nombre cherché est donc : 36.

**74**  $\begin{cases} x + y = 7 \\ \frac{x}{y} = \frac{x}{y} + 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 7 \\ 10y + x = 10x + y + 30 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 7 \\ -x + y = \frac{10}{3} \end{cases}$

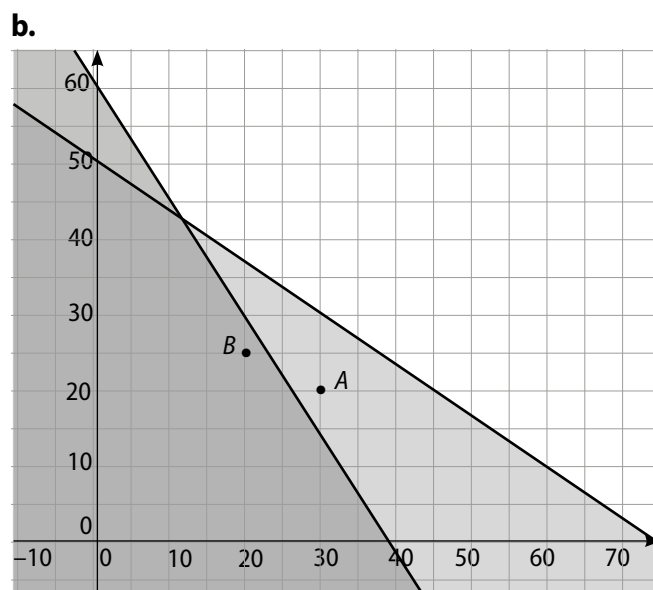
Ce système n'a pas de solution entière. Le nombre n'existe pas.

**75**  $\begin{cases} a + b = 21 \\ a^2 - b^2 = 105 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 21 \\ (a - b)(a + b) = 105 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 21 \\ a - b = 5 \end{cases}$

Les nombres cherchés sont donc  $a = 13$  et  $b = 8$ .

**76 a.** La première inéquation est la traduction de la contrainte horaire, la deuxième de la contrainte sur la quantité de panneaux.



**c.**  $A(30 ; 20)$  n'est pas solution.  $B(20 ; 25)$  est solution.

**77**  $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3}y \\ z = \frac{5}{3}y \\ \frac{2}{3}y + y + \frac{5}{3}y = 10000 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2000 \\ z = 5000 \\ y = 3000 \end{cases}$

**78 a.**  $(S') \begin{cases} 2x + Y = 1 \\ x + 3Y = 11 \end{cases}$

**b.** Le couple solution est :  $(-1,6 ; 4,2)$ .

c.  $Y = 4,2 \Leftrightarrow y = -\sqrt{4,2}$  ou  $y = \sqrt{4,2}$ .

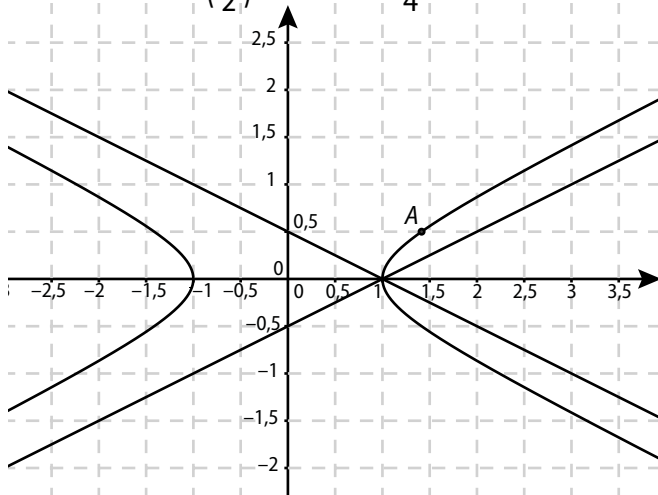
Les solutions de (S) sont donc :

$(-1,6; -\sqrt{4,2})$  et  $(-1,6; \sqrt{4,2})$ .

**79 1.** En multipliant membre à membre les deux équations on obtient :

$(x + 2y)(x - 2y) = 1 \times 1 \Leftrightarrow (E)$ .

2. On a  $(\sqrt{2})^2 - 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2 - 4 \times \frac{1}{4} = 1$ .



3. C'est Acha qui a raison.

4.  $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ x - 2y = \frac{1}{2} \end{cases}$  ,  $\begin{cases} x + 2y = -1 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$  , ...

**80 a.** Le couple solution est : (2 ; 1).

b. Le couple solution est :  $\left(\frac{1}{2} ; 1\right)$ .

c. On pose :  $X = x^2$  et  $Y = y^2$ . On obtient :

$(S'_1) \begin{cases} 2X - Y = -5 \\ X + Y = 17 \end{cases}$

qui a pour solution le couple : (4 ; 13).

Les solutions de  $(S_1)$  sont donc :

$(-2; -\sqrt{13})$ ,  $(-2; \sqrt{13})$ ,  $(2; -\sqrt{13})$  et  $(2; \sqrt{13})$ .

On pose :  $X = \sqrt{x}$  et  $Y = \sqrt{y}$ . On obtient :

$(S'_2) \begin{cases} 2X - Y = -5 \\ X + Y = 17. \end{cases}$

La solution de  $(S_2)$  est donc : (16 ; 169).

**81 a.**  $(S)$  a pour solution : (-1 ; 3).

b.  $(-1) + 3 = 2$  donc la troisième équation est vérifiée, par conséquent le couple (-1 ; 3) est la solution de (S).

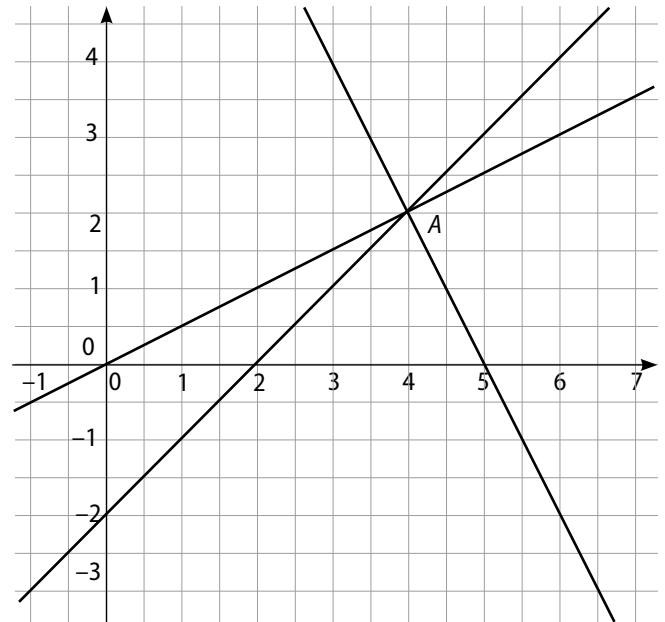
c.  $(S'_1) \begin{cases} x + y = 2 \\ -x + 3y = 10 \end{cases}$  a pour solution : (-1 ; 3).

$-2(-1) - 3 = -1$  donc la troisième équation est vérifiée, par conséquent le couple (-1 ; 3) est la solution de  $(S_1)$ .

$(S'_2) \begin{cases} 2x + y = 2 \\ x + y = 5 \end{cases}$  a pour solution : (-3 ; 8).

$-3 - 2 \times 8 \neq 6$  donc la troisième équation n'est pas vérifiée, par conséquent  $(S_2)$  n'a pas de solution.

**82 a.** Les trois droites sont concourantes au point  $A(4 ; 2)$ . Le couple solution de (S) est donc (4 ; 2).



b. On vérifie que  $x = 4$ ,  $y = 2$  est solution des trois équations.

**83**  $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y = 8 \\ 4x + 2y = -10 \end{cases}$  a pour solution : (-1 ; -3).

$2(-1) - 6(-3) + 4z = 24 \Leftrightarrow z = 2$ .

(S) a pour solution le triplet : (-1 ; -3 ; 2).

**84** Il est conseillé d'utiliser GeoGebra pour la figure.

a.  $\begin{cases} 3x + 5y = 8 \\ 4x - y = 9 \end{cases}$  solution :  $\left(\frac{53}{23} ; \frac{5}{23}\right)$ .

b.  $\begin{cases} 4x + 9y = 13 \\ -2x + y = -5 \end{cases}$  solution :  $\left(\frac{29}{11} ; \frac{3}{11}\right)$ .

$\begin{cases} 6x + 7y = 39 \\ -7x - y = -40 \end{cases}$  solution :  $\left(\frac{241}{43} ; \frac{33}{43}\right)$ .

c. Il suffit de vérifier que les vecteurs  $\vec{IJ}$  et  $\vec{JK}$  sont colinéaires.

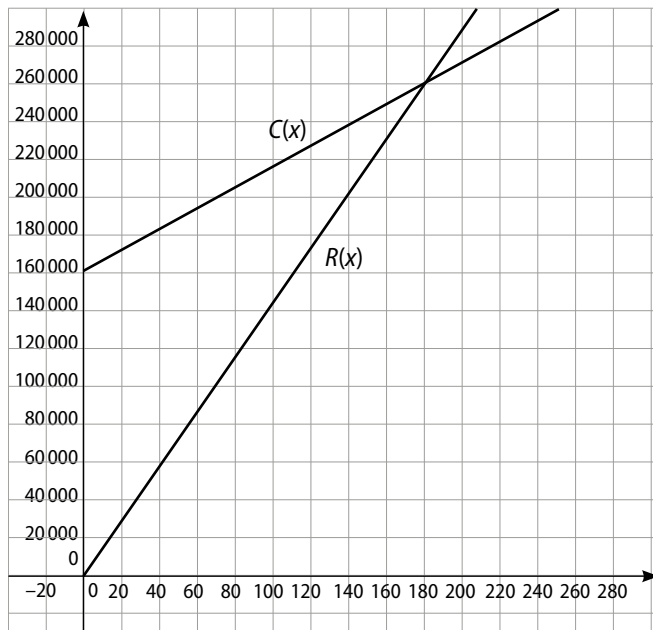
**85 a.** Il suffit de soustraire membre à membre les deux équations du système.

b. En remplaçant  $x$  par  $y$  dans la première équation, on obtient :  $y + 2y = 4 \Leftrightarrow y = \frac{4}{3}$ .

(S) a pour solution le couple :  $\left(\frac{4}{3} ; \frac{4}{3}\right)$ .

86 1.  $R(x) = 1\,300x$  et  $C(x) = 500x + 160\,000$ .

2. a.



b. Le nombre minimal est de 201 seaux (un de plus que la position d'équilibre).

c. Il faut résoudre l'inéquation :

$$R(x) > C(x) \Leftrightarrow 1\,300x > 500x + 160\,000 \Leftrightarrow x > 200.$$

87  $x$  désigne le nombre de bocaux de 250 mL et  $y$  le nombre de bocaux de 500 mL.

Les contraintes de l'énoncé se traduisent par le

$$\text{système : } (S) \begin{cases} x + y = 14 \\ 250x + 500y = 4\,500 \end{cases}$$

qui a pour solution  $(10 ; 4)$ .

88 a.  $y = \frac{2}{3}x$  et  $y = -\frac{1}{2}x + 10$ .

b. Point d'intersection :  $I(8,3 ; 5,7)$  par lecture.

Par le calcul :  $I\left(\frac{60}{7} ; \frac{40}{7}\right)$ .

c. Il y a équilibre entre offre et demande.

89 Les nombres  $a$  et  $b$  vérifient le système :

$$\begin{cases} a + b = 4\,933 \\ a = 6b + 19 \end{cases} \text{ qui a pour solution (par substitution) :}$$

$a = 4\,231$  et  $b = 702$ .

90 a.  $\begin{cases} l + 92 = h + L \\ L + 78 = h + l \end{cases}$

b. Par addition membre à membre, on obtient :

$$l + L + 170 = 2h + l + L \text{ qui donne } h = 85.$$

c. En remplaçant dans le système, on obtient :

$$\begin{cases} l + 92 = 85 + L \\ L + 78 = 85 + l \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} l + 7 = L \\ L = 7 + l \end{cases}$$

Ce système a une infinité de solutions : tous les couples  $(l ; l + 7)$  avec  $l$  nombre réel strictement positif.

91  $h$  désigne la hauteur et  $c$  le côté du carré de base.

Ces deux nombres vérifient le système :

$$\begin{cases} 2h + 6c + 30 = 320 \\ 4h + 4c + 30 = 390 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h + 3c = 145 \\ h + c = 90. \end{cases}$$

La solution est :  $c = 27,5$  et  $h = 62,5$ .

92 1. (S)  $\begin{cases} a + b = 30 \\ ab = 221. \end{cases}$

2. a. (S)  $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 30 - b \\ (30 - b)b = 221. \end{cases}$

La deuxième équation donne :  $b^2 - 30b + 221 = 0$ .

b.  $(b - 15)^2 - 4 = b^2 - 30b + 225 - 4 = b^2 - 30b + 221$

c.  $(b - 15)^2 - 4 = [(b - 15) - 2][(b - 15) + 2] = (b - 17)(b - 13)$ .

d.  $b = 13$  ou  $b = 17$ .

3. Les deux nombres recherchés sont donc 13 et 17.

93  $x$  et  $y$  désignent les côtés de l'angle droit et  $z$  l'hypoténuse.

$$\begin{aligned} \text{a. } \begin{cases} x + y + z = 24 \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 16 \\ x^2 + 64 = z^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 16 - z \\ (16 - z)^2 + 64 = z^2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 16 - z \\ -32z + 300 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Donc  $y = 8$ ,  $z = 9,375$  et  $x = 6,625$ .

b.  $\begin{cases} x + y + z = p \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = p - m \\ x^2 + m^2 = z^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = p - m - z \\ (p - m - z)^2 + m^2 = z^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = p - m - z \\ p^2 + m^2 + z^2 - 2pm - 2pz + 2mz + m^2 = z^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = p - m - z \\ (-2p + 2m)z + 2m^2 + p^2 = 0. \end{cases}$$

On obtient finalement :

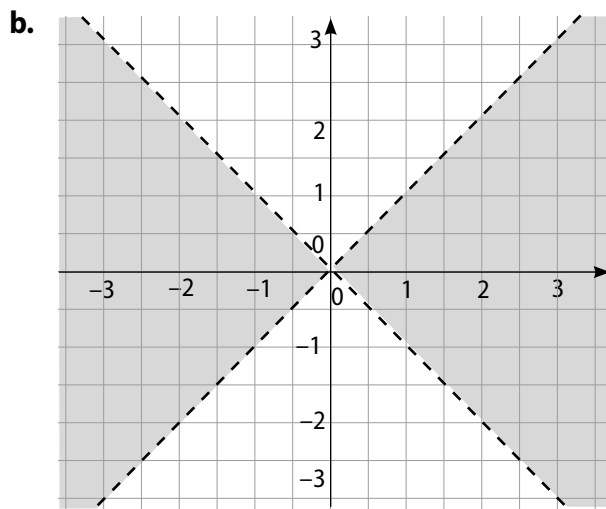
$$z = \frac{2m^2 + p^2}{2(p - m)} \text{ et } x = \frac{p^2 - 4pm}{2(p - m)}.$$

94 a.  $2 \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \neq 2$  donc l'équation ne convient pas.

b.  $2x - y = 0$ .

c. Graphiquement, ce sont toutes les droites passant par le point  $A\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$ .

95 a.  $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ .



96 1. a.  $60 \leq g + 2h \leq 64 \Leftrightarrow 60 \leq g + 34 \leq 64$   
 $\Leftrightarrow 26 \leq g \leq 30$ .

b.  $n$  désigne le nombre de marches. On a :  
 $n = \frac{300}{g}$  et  $26 \leq g \leq 30 \Leftrightarrow \frac{1}{30} \leq \frac{1}{g} \leq \frac{1}{26}$ .

Par conséquent,  $10 \leq n \leq \frac{150}{13}$ . Le nombre maximal de marches sera donc 11.

c.  $g = \frac{300}{11}$  donc  $g \approx 27,3$ .

$$60 \leq g + 2h \leq 64 \Leftrightarrow 60 \leq 27,3 + 2h \leq 64$$

$$\Leftrightarrow 16,35 \leq h \leq 17,35$$

d. Hauteur  $H$  atteinte :  $180 \leq H \leq 201$ .

2. a. Les deux premières équations du système sont les traductions des contraintes sur la hauteur et la profondeur de l'escalier.

$$\text{b. } (S) \Leftrightarrow \begin{cases} h = \frac{250}{n} \\ g = \frac{360}{n} \\ 60 \leq \frac{360}{n} + 2 \frac{250}{n} \leq 64 \end{cases}$$

c.  $60 \leq \frac{860}{n} \leq 64 \Leftrightarrow \frac{860}{64} \leq n \leq \frac{860}{60}$ .

Donc  $13,4 \leq n \leq 14,3$ . Comme  $n$  est un nombre entier naturel, on prendra  $n = 14$ .

Ainsi  $h = 17,9$  et  $g = 25,7$ .