N°D

MESSRS/ DIFPE / PAESG

TERMINALE A

ELEMENTS DE COURS

Edition Novembre 1997

α

TABLE DES MATIERES

CLASSE DE TERMINALE A

(Horaire : 3 heures par semaine)

Le programme de mathématiques de la classe terminale série A est bâti sur les intentions suivantes :
- entraîner les élèves à la pratique d'une démarche scientifique et promouvoir l'acquisition de méthodes ;
- développer les capacités d'organisation et de communication ;
- fournir des outils nécessaires à la poursuite d'études dans les domaines littéraires et des sciences humaines.

L' étude de situations occupe une part importante du temps de travail : elle permet la mise en place de notions et méthodes nouvelles. Une synthèse brève reprend l'essentiel de ce qu'il faut retenir. Des travaux dirigés et des exercices viennent consolider ou compléter les compétences acquises.
L' enseignement des mathématiques dans cette série gagnerait à s' inscrire autant que possible dans une perspective historique et culturelle.

Le texte est présenté de la façon suivante :
- en caractères gras, l'intitulé des contenus ;
- en caractères standard, les objectifs à atteindre ;
- en caractères italiques, un commentaire qui précise le sens ou les limites à donner à certains points du programme.

FONCTIONS NUMERIQUES

1. Limites

1.1 Rappel sur les notions de limite

1.2 Limites des fonctions irrationnelles : $x \mapsto \sqrt{ax+b}$ et $x \mapsto a\sqrt{x} + b$ au voisinage de l'infini.

1.3 Limite de la composée d'une fonction affine et d'une fonction simple (*) au voisinage de l'infini.

Les élèves doivent savoir calculer la limite au voisinage de l'infini de la composée d'une fonction affine et d'une fonction simple.

L'ensemble des notions concernant les fonctions étudiées en seconde et en première doivent être revues avant l'étude des limites.
Les énoncés des limites figurant au programe ont pour but de faciliter l'étude du comportement d'une fonction aux bornes des intervalles constituant l'ensemble de définition et notamment du comportement asymptotique au voisinage de l'infini.

2. Dérivation

2.1 Rappel des règles relatives à la dérivée d'une somme, d'un produit ou d'un quotient de deux fonctions, du lien entre le signe de la dérivée sur un intervalle et le sens de variation de la fonction sur cet intervalle.

2.2 Dérivée de la composée d'une fonction affine et d'une fonction simple.

Les élèves doivent savoir :
- calculer la dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient de deux fonctions.
- calculer la dérivée de la composée d'une fonction affine et d'une fonction simple.
- utiliser le signe de la dérivée dans l'étude du sens de variation d'une fonction.

Il s'agit de consolider et de compléter les acquis de la classe de première A.
Les formules vues en première A seront rappelées sans démonstration et à l'occasion d'exercices.
La formule de la dérivée d'une fonction composée sera admise (fonction affine et fonction simple).

3. Travaux Pratiques

3.1 Etude et représentation graphique:

- des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à 4.

- des fonctions rationnelles du type $x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$ où P et Q sont des fonctions polynômes telles que : $1 \leq d° Q \leq d° P \leq 2$.

3.2 Résolution graphique d'équations du type $f(x) = \lambda$ et d'inéquations du type $f(x) \leq \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

3.3 **Asymptotes. Position de la courbe par rapport à une asymptote.**

Les élèves doivent savoir :
- étudier et représenter graphiquement les fonctions définies précédemment.
- utiliser une représentation graphique pour résoudre $f(x) = \lambda$ ou $f(x) \leq \lambda$ ($\lambda \in \mathbb{R}$).
- reconnaître, vérifier ou prouver qu'une droite est asymptote à une courbe.

Un plan d'étude d'une fonction sera imposé aux élèves.
Pour la détermination des asymptotes obliques, toutes les indications nécessaires devront être données. On se gardera de toute technicité.

SUITES NUMERIQUES

1. Rappel sur les suites arithmétiques et géométriques.

2. Limites des suites arithmétiques, géométriques, de la somme des n premiers termes d'une suite géométrique.

Les élèves doivent savoir :
- reconnaître à partir de la raison d'une suite arithmétique ou géométrique, si celle-ci est convergente ou non.
- trouver la limite d'une suite arithmétique ou géométrique ainsi que celle de la somme de ses termes (si cette limite existe).

FONCTION LOGARITHME NEPERIEN
FONCTION EXPONENTIELLE DE BASE e

1. Fonction Logarithme Népérien: Définition, propriétés, étude et représentation graphique .

2. Fonction Exponentielle de base e : Définition , propriétés, étude et représentation graphique.

3. Etude de fonctions simples faisant intervenir les fonctions Logarithme Népérien et Exponentielle de base e .

Les élèves doivent :
- connaître les propriétés des fonctions ln et $x \longmapsto e^x$, et savoir les appliquer.
- savoir utiliser la bijectivité et la croissance de ces fonctions pour résoudre des problèmes .

Par définition: la fonction ln est une fonction de la variable réelle définie sur $\mathbb{R}_+^*$ *et vérifiant pour* $(a,b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$: $\ln ab = \ln a + \ln b$ *et dont la dérivée est* $x \longmapsto \frac{1}{x}$ *sur son ensemble de définition* $\mathbb{R}_+^*$.
Les résultats concernant les limites en zéro et en $+\infty$ *seront admis.*
On admettra enfin que ln est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ *sur* $\mathbb{R}$ *et le nombre e sera défini comme unique antécédent de 1.*
On admettra que l'aplication de $\mathbb{Z}$ *dans* $\mathbb{R}^+$ $n \longmapsto e^n$ *se prolonge de manière unique en une application dérivable de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}^+$ *notée* $x \longmapsto e^x$ *et vérifiant pour tout* $(a,b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$: $e^{a+b} = e^a.e^b$.
Cette application est appelée fonction exponentielle.

On admettra qu'elle coïncide avec sa dérivée sur $\mathbb{R}$.
Le comportement de la suite e^n quand n tend vers l'infini permet d'admettre les résultats sur les limites de cette fonction au voisinage de l'infini.

EQUATIONS , INEQUATIONS ET SYSTEMES

1. Exemples de situations conduisant à la résolution d' une équation ou inéquationde degré inférieur ou égal à 2;
Exemples de situations conduisant à la résolution d' un système d' équations ou d' inéquations du premier degré à deux inconnues à coefficients numériques.

2. Equations, Inéquations et Systèmes faisant intervenir les Fonctions Logarithme et Exponentielle.

Ce chapitre sera traité uniquement à l' aide d' exemples .

DENOMBREMENT ET PROBABILITES

1. Dénombrement (rappels de première A)

2. Probabilités:

- **Espace probabilisé fini (Ω , $\mathcal{P}(\Omega)$, P) ; exemples (dés , cartes , urnes, etc...)**
- **Variables aléatoires numériques; fonction de répartition; espérance mathématique, variance et écart-type.**

Les élèves doivent savoir:
- calculer les probabilités dans des cas simples d'équiprobabilité.
- calculer l'espérance mathématique, l'écart-type et représenter la fonction de répartition

Le vocabulaire et les notions relatifs aux probabilités seront introduits à l'aide d'exemples ou d'exercices.
On se limitera à l'hypothèse d'équiprobabilité.

STATISTIQUES

Révision du programme de première A

(*) On entend par fonction simple :

$x \longmapsto x^2$ $\quad x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ $\quad x \longmapsto \sqrt{x}$ $\quad x \longmapsto \ln x$ $\quad x \longmapsto e^x$

LIMITES DE FONCTIONS NUMERIQUES

I) Rappel sur les notions de limite

1) Limites des fonctions de référence

Activité 1 (Δ signifie $+\infty$ ou $-\infty$ ou a ou a^+ ou a^-)

Compléter : $\lim\limits_{x \to \Delta} c = \ldots$ (c réel) ; $\lim\limits_{x \to +\infty} x = \ldots$; $\lim\limits_{x \to -\infty} x = \ldots$;

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = \ldots$; $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = \ldots$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \ldots$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = \ldots$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = \ldots$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = \ldots$;

$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = \ldots$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = \ldots$;

$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \ldots$; $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = \ldots$; $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \ldots$; $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} = \ldots$; $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = \ldots$

$\lim\limits_{x \to a^+} \frac{1}{x-a} = \ldots$; $\lim\limits_{x \to a^-} \frac{1}{x-a} = \ldots$; ($a \in \mathbb{R}$)

2) Opérations sur les limites

Activité 2 Calculer :

$\lim\limits_{x \to +\infty}(x^2 + 3x - 1)$; $\lim\limits_{x \to -\infty} (- x^2 + 2x - 4)$; $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \sqrt{x} \right)$.

a) Rappel des résultats sur la somme :

$\lim\limits_{x \to \Delta} f(x)$	$\lim\limits_{x \to \Delta} g(x)$	$\lim\limits_{x \to \Delta} (f+g)(x)$
l	l'	l+l'
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	?
$+\infty$	l	$+\infty$
$-\infty$	l	$-\infty$

Δ signifie $+\infty$ ou $-\infty$ ou a ou a^+ ou a^-

α

? signifie que l'on ne peut pas donner à priori la limite de f+g . On dit qu'il y a indétermination. Il faut dans ce cas procéder d'abord à des transformations (régulières) de l'expression algébrique avant de pouvoir déterminer la limite. On dit qu'on lève l'indétermination.

Exemples d'indétermination :

$\lim\limits_{x \to +\infty}(x^2 - 3x - 1)$; $\lim\limits_{x \to -\infty}(x^2 + 4x + 3)$; $\lim\limits_{x \to +\infty}(x - \sqrt{x})$.

Activité 3 Calculer :

$\lim\limits_{x \to +\infty}(x+2)(x+3)$; $\lim\limits_{x \to +\infty}(x^2+1)(-x+2)$; $\lim\limits_{x \to -\infty}(1-\frac{1}{x})(2-\frac{2}{x})$; $\lim\limits_{x \to -\infty} x(1-\frac{1}{x})$

b) Rappel des résultats sur le produit :

$\lim\limits_{x \to \Delta} f(x)$	$\lim\limits_{x \to \Delta} g(x)$	$\lim\limits_{x \to \Delta} (fxg)(x)$
l	l'	ll'
$+\infty$	l'	$+\infty$ si l' >0 $-\infty$ si l' < 0
$-\infty$	l'	$-\infty$ si l' >0 $+\infty$ si l' < 0
∞	0	?
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$

Il y a indétermination lorsque la limite de l'un des facteurs est infinie et celle de l'autre est o; c'est le cas par exemple pour:

$\lim\limits_{x \to +\infty}(x^2 + 1)\frac{1}{x}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty}\frac{-1}{x}(1+\sqrt{x})$

Exercice : Lever les indéterminations des exemples des activités 2 et 3 ci- dessus présentés.

Acivité 4 Calculer

a) $\lim\limits_{x \to +\infty}(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1})$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty}\frac{1}{x^2}$

c) Rappel des résultats sur l'inverse d'une fonction :

$\lim\limits_{x \to \Delta} f(x)$	$\lim\limits_{x \to \Delta} \frac{1}{f(x)}$
$l \neq 0$	$\frac{1}{l}$
$+\infty$	0
$-\infty$	0
0^+	$+\infty$
0^-	$-\infty$

conséquences :

$\lim\limits_{x \to \Delta} f(x)$	$\lim\limits_{x \to \Delta} g(x)$	$\lim\limits_{x \to \Delta} (\frac{f}{g})(x)$
l	$l' \neq 0$	$\frac{l}{l'}$
l	$+\infty$	0
l	$-\infty$	0
$+\infty$	$l' \neq 0$	$+\infty$ si $l' > 0$ $-\infty$ si $l' < 0$
$-\infty$	$l' \neq 0$	$-\infty$ si $l' > 0$ $+\infty$ si $l' < 0$
$+\infty$	0^+	$+\infty$
$+\infty$	0^-	$-\infty$
$-\infty$	0^+	$-\infty$
$-\infty$	0^-	$+\infty$
$l \neq 0$	0^+	$+\infty$ si $l > 0$ $-\infty$ si $l < 0$
$l \neq 0$	0^-	$-\infty$ si $l > 0$ $+\infty$ si $l < 0$

Lorsqu'on ne peut pas appliquer l'un de ces théorèmes à un quotient, on parle encore d'indétermination. C'est le cas de :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x-1} \ ; \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \ ; \qquad \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$$

<u>Exercice</u>: Dans chacun de ces trois cas, lever l'indétermination.

3) Limite des fonctions polynômes et rationnelles

P1* La limite en l'infini d'une fonction polynôme est égale à celle de son terme de plus haut degré.

Exemple:

$$\lim_{x \to +\infty}(x^2-3x) = \lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \to -\infty}(-x^3+2x^2+3x+1) = \lim_{x \to -\infty}(-x^3) = +\infty$$

Attention : cette règle ne s'applique que lorsqu'on calcule la limite en l'infini d'une fonction polynôme .

P2* La limite en l'infini d'une fonction rationnelle écrite sous la forme d'un quotient de deux fonctions polynômes est égale à la limite en l'infini du quotient des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

Exemples :

$$\lim_{x \to +\infty}\frac{x-1}{x^2+1} = \lim_{x \to +\infty}\frac{x}{x^2} = \lim_{x \to +\infty}\frac{1}{x} = 0 \quad ; \quad \lim_{x \to -\infty}\frac{2x^3+1}{-x^2+4} = \lim_{x \to -\infty}\frac{2x^3}{-x^2} = \lim_{x \to -\infty}(-2x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty}\frac{x^2+2}{3x^2-1} = \lim_{x \to -\infty}\frac{x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}$$

4) Autres propriétés

Activité 5

Calculer :

$$\lim_{x \to +\infty}(2\sqrt{x}-3) \quad ; \quad \lim_{x \to +\infty}(-3\sqrt{x}-2)$$

Dans chacun des cas suivants, calculer:

$\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x+b)$ puis $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to -\infty} f(x+b)$

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1} \text{ et } b = 2 \quad ; \quad f(x) = x - \frac{1}{x} \text{ et } b = -1$$

$$f(x) = x^2 - 3x \text{ et } b = 5 \quad ; \quad f(x) = \frac{x^2}{x+1} \text{ et } b = -1$$

Dans chacun des cas suivants, calculer $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to \pm\infty} f(-x)$:

$$f(x) = 3x \quad ; \quad f(x) = 1-x^2 \quad ; \quad f(x) = \frac{x+1}{x-1} \quad ; \quad f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$$

__Propriétés__

Pour tous réels a et b, $\lim\limits_{x \to +\infty}(a\sqrt{x+b}) = \begin{cases} +\infty \text{ si } a > 0 \\ -\infty \text{ si } a < 0 \end{cases}$

Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = A$ alors pour tout réel b $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x+b) = A$

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$ alors $\lim\limits_{x \to -\infty} f(-x) = A$ et
si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(-x) = A$

__Aplication__ : $\lim\limits_{x \to -\infty}\sqrt{-x+2} =$; $\lim\limits_{x \to -\infty}\sqrt{-2x+1} =$.

II Asymptote à une courbe

1) Rappels : Asymptotes parallèles aux axes de coordonnées

__Activité 6__

On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$. On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f .
Caluler $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$. Interpréter graphiquement ces résultats.
Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement ces résultats.

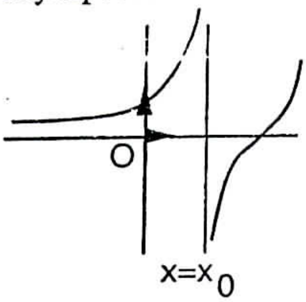
__Définition__

a) Soit x_0 un réel et f une fonction numérique définie sur un intervalle du type $]a ; x_0[$ ou du type $]x_0 ; a[$ (a réel ou infini), non définie en x_0 .

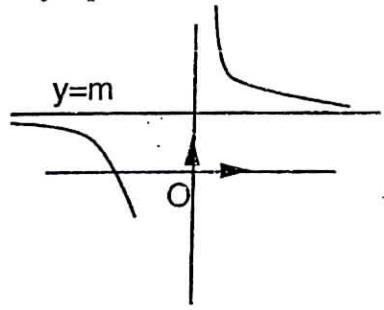
Si $\lim\limits_{x \to x_0}|f(x)| = +\infty$ on dit que la droite d'équation $x = x_0$ est asymptote (verticale) à la courbe de f.

b) Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle du type $]-\infty\,; a[$ ou du type $]a\,; +\infty[$ (a réel ou infini).
S'il existe un réel m tel que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = m$ ou $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = m$, on dit que la droite d'équation $y=m$ est asymptote (horizontale) à la courbe de f.

asymptote verticale



asymptote horizontale



2) Asymptote non parallèle aux axes

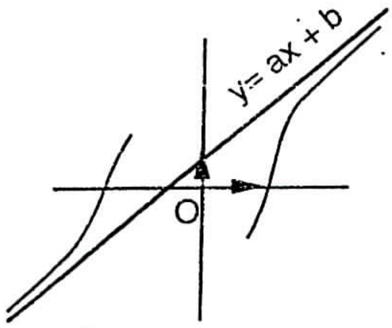
Activité 7

On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2-x+3}{x}$. On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f .
Déterminer l'ensemble de définition de f .
Vérifier que pour tout réel x distinct de 0 , $f(x) = x-1 + \dfrac{3}{x}$.
Soit (D) la droite d'équation $y = x - 1$.
M est un point de $(\mathscr{C})$ d'abscisse t, N le point de (D) de même abscisse t que M.
Quelle est l'expression de l'ordonnée de M en fonction de t et celle de l'ordonnée de N en fonction de t ?
Interpréter graphiquement le réel $|f(t) - (t - 1)|$.
Calculer la limite de $|f(t) - (t - 1)|$ quand t tend vers $-\infty$ puis lorsque t tend vers $+\infty$.
Comment peut-on interpréter graphiquement ces résultats ?

Définition

Soit f une fonction numérique, ($\mathscr{C}$) sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$). S'il existe deux réels a et b avec a non nul tels que $\lim\limits_{x \to +\infty}[f(x)-(ax + b)] = 0$ ou $\lim\limits_{x \to -\infty}[f(x)-(ax + b)] = 0$

on dit que la droite d'équation y = ax + b est asymptote (oblique) à la courbe ($\mathscr{C}$)



Théorème (admis)

Soit f une fonction numérique et ($\mathscr{C}$) sa représentation graphique dans un repère (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$)

S'il existe deux réels a et b et une fonction g telle que

$f(x) = ax + b + g(x)$ avec $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$ ou $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0$

alors la droite d'équation y = ax+b est asymptote à la courbe ($\mathscr{C}$).

Exemple

Soit f la fonction numérique à variable réelle x définie par $f(x) = \dfrac{2x^2+x-4}{x}$.

Pour tout réel non nul x on a $f(x) = 2x + 1 - \dfrac{4}{x}$ avec $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4}{x} = 0$.

Donc la droite d' équation y = 2x + 1 est asymptote à la courbe de f.

Exercice

Déterminer les réels a, b et c pour que pour tout réel x différent de - 2, $\dfrac{x^2-5x+4}{x+2} = ax + b + \dfrac{c}{x+2}$ et en déduire que la courbe représentative de la fonction f telle que $f(x) = \dfrac{x^2-5x+4}{x+2}$ admet une asymptote oblique dont on donnera une équation.

EXERCICES :

Exercice 1 Calculer :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x-1}$; b) $\lim\limits_{x \to +\infty} |x+2|$; c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x-3 + \dfrac{1}{x-3} \right)$; d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{3x-4}$

Exercice 2

Etudier les limites de chacune des fonctions numériques suivantes aux bornes de son ensemble de définition :

a) $f : x \longmapsto \dfrac{2x-1}{x+2}$; b) $f : x \longmapsto \dfrac{x^2-1}{-x^2+2}$; c) $f : x \longmapsto \dfrac{(x-1)^2}{x^2-2}$

d) $f : x \longmapsto x-1 - \dfrac{2}{\sqrt{x+1}}$ e) $f : x \longmapsto \sqrt{-3x+4}$

Exercice 3

Dans chacun des cas suivants le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction f. Calculer les limites de f aux bornes des intervalles de son ensemble de définition et en déduire les asymptotes à $(\mathscr{C})$.

a) $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x-1}$ b) $f : x \longmapsto 8 - \dfrac{6}{x} + \dfrac{1}{x^2}$ c) $f : x \longmapsto \dfrac{4x+9}{(2x+3)^2}$ d) $f : x \longmapsto \dfrac{4x^2-8x}{x^2-2x-3}$

Exercice 4

Dans chacun des cas suivants le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction f. Calculer les limites de f aux bornes des intervalles de son ensemble de définition. On pourra éventuellement déterminer les réels a , b et c tels que f(x) s'écrive sous la forme proposée entre parenthèses et en déduire les asymptotes à $(\mathscr{C})$.

$f : x \longmapsto \dfrac{-x+8}{3(x-2)}$ $\left(f(x) = a + \dfrac{b}{3(x-2)}\right)$

$f : x \longmapsto \dfrac{2x^2+2x-1}{x^2+x}$ $\left(f(x) = a + \dfrac{b}{x^2+x}\right)$

$f : x \longmapsto \dfrac{x^3-3x^2+3x-3}{(x-2)^2}$ $\left(f(x) = x + a + \dfrac{b}{x-2} + \dfrac{c}{(x-2)^2}\right)$

$f : x \longmapsto \dfrac{-x^2+5x+2}{2(x+1)}$ $\left(f(x) = ax + b + \dfrac{c}{2(x+1)}\right)$

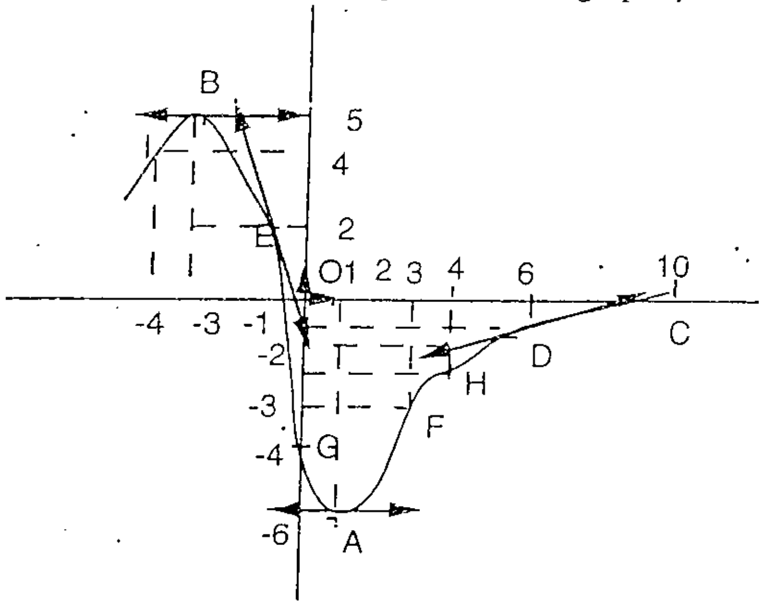
$f : x \longmapsto x-1 - \dfrac{2}{\sqrt{x}}$

DERIVATION DES FONCTIONS NUMERIQUES

I. Nombre dérivé, fonction dérivée.

Activité 1

Soit f la fonction dont la représentation graphique est donnée ci-dessous :



1) Quel est l'ensemble de définition de f ?

2) Les tangentes à la courbe ($\mathscr{C}$) de f aux points A, B, D et E ont été tracées.
Lire graphiquement le coefficient directeur de la tangente à ($\mathscr{C}$) en chacun de ces points. Que représente chacun de ces coefficients directeurs pour f ?

3) a) Tracer approximativement la tangente à la courbe ($\mathscr{C}$) au point G d'abscisse 0. Quel est le signe de son coefficient directeur ?

b) Tracer approximativement la tangente à la courbe ($\mathscr{C}$) au point H d'abscisse 4. Quel est le signe de son coefficient directeur ?

4) On désigne par f' la fonction dérivée de f
On admet que f'(3) = 1,5. Tracer alors avec précision la tangente à ($\mathscr{C}$) au point F d'abscisse 3. Donner l'équation réduite de cette tangente.

Activité 2

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$
Soit f la fonction qui à tout réel x associe $f(x) = x^2$
1) Placer les points A(-3;f(-3)) ; B(-2;f(-2)) ; C(-1;f(-1)) ; D(1;f(1)) ; E(2;f(2)) et F(3;f(3))
Tracer point par point la courbe représentative de f.

2) Tracer, dans le même repère, les droites D_1, D_2, D_3, D_4 et D_5 d'équations respectives $y = 2x - 1$; $y = 4x - 4$; $y = -2x - 1$; $y = 0$ et $y = -4x - 1$

Que représentent ces droites pour la courbe de f ?

En déduire f'(-2), f'(-1), f'(0), f'(1), f'(2), (f' désigne la fonction dérivée de f).

1. Définitions

Soit f une fonction numérique et ($\mathcal{C}f$) sa courbe représentative. Soit x_0 un élément de l'ensemble de définition de f, A le point de ($\mathcal{C}f$) d'abscisse x_0.

a) Si on peut tracer la tangente à ($\mathcal{C}f$) au point A, le coefficient directeur de cette tangente s'appelle le nombre dérivé de f en x_0 et se note $f'(x_0)$. On dit alors que f est dérivable en x_0.

b) Soit I un intervalle de l'ensemble de définition de f. Si f est dérivable en tout élément de I, on dit que f est dérivable sur I.

La fonction définie alors de I vers $\mathbb{R}$ qui à tout élément x de I associe le nombre dérivé de f en x s'appelle la fonction dérivée de f sur I ; on la note f'.

$$f' : I \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f'(x)$$

2. Équation de la tangente à une courbe en un point

Soit f une fonction numérique dérivable sur un intervalle I.
Soit ($\mathcal{C}f$) la courbe représentative de f, x_0 un élément de I et A le point de ($\mathcal{C}f$) d'abscisse x_0.
La tangente en A à ($\mathcal{C}f$) a pour équation $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

3. Fonctions dérivées de fonctions usuelles

Si f est la fonction telle que	Son ensemble de définition est	Sa fonction dérivée f' est telle que	L'ensemble de définition de f' est
$f(x) = a$, a réel	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax+b$, a et b réels	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$

$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^*_+$

II. Dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient .

1. Exercice

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes.
Préciser à l'occasion, l'ensemble de définition de chaque fonction et celui de sa dérivée.

a) $f: x \mapsto x^2 + 2x - 3$ b) $f: x \mapsto 5x^2 + \frac{1}{x}$ c) $f: x \mapsto \frac{4}{3}x^3 - \frac{x}{2} + 1$

d) $f: x \mapsto (x+3)(x-1)$ e) $f: x \mapsto \frac{2x}{x-1}$ f) $f: x \mapsto (2x+3)^4$

2. Rappel

Soient u et v deux fonctions numériques définies et dérivables sur un même intervalle I.

a) La fonction (u+v) est dérivable sur I et pour tout élément x de I, $(u+v)'(x) = u'(x) + v'(x)$

b) Si a est un réel quelconque, la fonction (au) est dérivable sur I et pour tout élément x de I, $(au)'(x) = au'(x)$

c) La fonction (uv) est dérivable sur I et pour tout élément x de I, $(uv)'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$.

d) Si n est un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 1, la fonction (u^n) définie par $(u^n)(x) = [u(x)]^n$ est dérivable sur I et pour tout élément x de I, $(u^n)'(x) = nu'(x)u^{(n-1)}(x)$

e) S'il existe un intervalle J de I sur lequel v ne s'annule pas alors les fonctions $\frac{1}{v}$ et $\frac{u}{v}$ sont dérivables sur J et pour tout élément x de J, $\left(\frac{1}{v}\right)'(x) = \frac{-v'(x)}{v^2(x)}$ et $\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v^2(x)}$

Cas particuliers

Pour tout entier naturel supérieur à 1, $(x^n)' = n\,x^{n-1}$
Si a et b sont deux réels avec a non nul, alors pour tout réel x différent de $-\frac{b}{a}$, $\left(\frac{1}{ax+b}\right)' = \frac{-a}{(ax+b)^2}$

Conséquences

Toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$

Toute fonction rationnelle est dérivable sur tout intervalle de son ensemble de définition.

III. Théorème (admis)

Soit f une fonction numérique définie et dérivable sur un intervalle I .
Soit a et b deux réels
Pour tout réel x tel que ax + b est un élément de I, on a :
$(f(ax + b))' = af'(ax+b)$.

Cas particulier

Si a et b sont deux réels alors la fonction $x \longmapsto \sqrt{ax+b}$ est dérivable sur tout intervalle de $\mathbb{R}$ sur lequel $ax+b > 0$ et $(\sqrt{ax+b})' = \dfrac{a}{2\sqrt{ax+b}}$

Exemple : La fonction $x \longmapsto \sqrt{2x+4}$ est dérivable sur $]-2 ; +\infty[$ et pour tout réel x de cet intervalle, $f'(x) = \dfrac{2}{2\sqrt{2x+4}} = \dfrac{1}{\sqrt{2x+4}}$.

IV. Signe de la dérivée et sens de variation d'une fonction

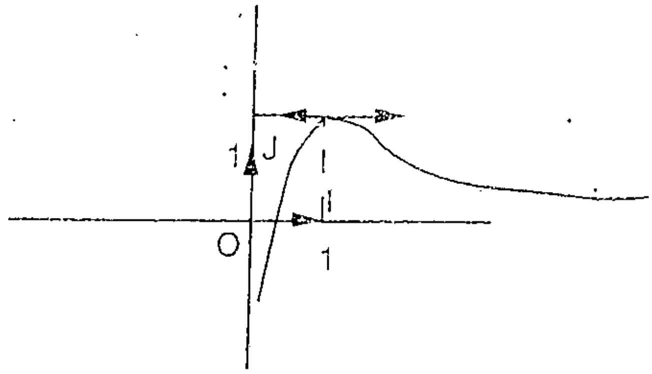
Activité 3

On considère la courbe représentative de la fonction f de l'activité 1.
a) En se référant au graphique, donner le sens de variation de f sur:
$]-5; -3[$; $]-3 ; 1[$; $]1; 10[$

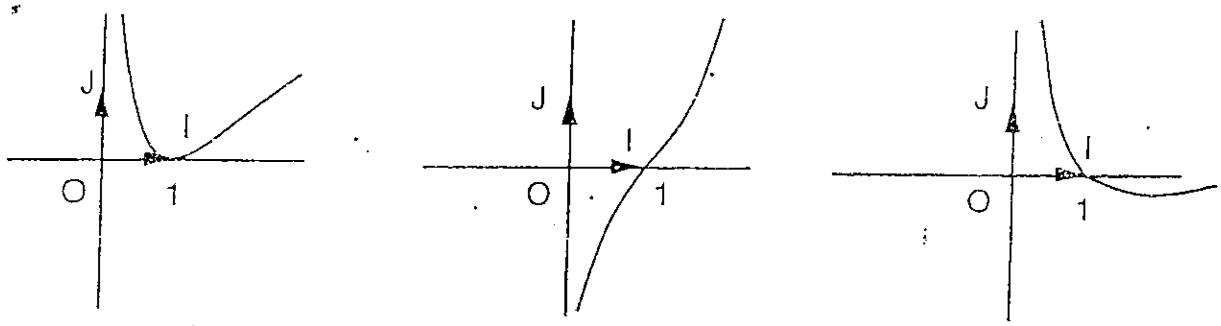
b) Tracer approximativement les tangentes à la courbe aux points I d'abscisse -4 ; G d'abscisse 0 et H d'abscisse 4. Donner, d'après le tracé, le signe du coefficient directeur de chacune de ces droites.
En déduire le signe de f'(-4), f'(0) et f'(4).
Donner f'(-3), f'(1).

Activité 4

On considère la fonction f dont la représentation graphique dans un repère est donnée ci-dessous.



Parmi les trois représentations graphiques ci-après quelle est celle qui est susceptible de représenter la fonction dérivée de f ? Justifier.



1 2 3

Rappels

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

a) Si f est croissante sur I alors $f'(x) \geq 0$ pour tout élément x de I.
b) Si f est décroissante sur I alors $f'(x) \leq 0$ pour tout élément x de I.
c) Si $f'(x) \geq 0$ pour tout élément x de I alors f est croissante sur I.
d) Si $f'(x) \leq 0$ pour tout élément x de I alors f est décroissante sur I.

Exercice d'application

Etudier, dans chacun des cas suivants, le sens de variation de f sur son ensemble de définition.

a) $f : x \longmapsto 3x^2 - x + 1$; b) $f : x \longmapsto \frac{-1}{2} x^2 + x - 3$; c) $f : x \longmapsto \frac{4}{3} x^3 - 4x + 1$;

d) $f : x \longmapsto \frac{x+2}{2x+1}$.

V Extremum d'une fonction

Activité 5

Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x$

1) Calculer f(-1) et f(2).
2) Etudier le sens de variation de f sur [-2;1] puis sur [1;3] .

3) Comparer f(x) et f(-1) pour tout x élément de [-2;1] ; que représente f(-1) pour f sur [-2;1] ?
4) Comparer f(x) et f(2) pour tout x élément de [1;3] ; que représente f(2) pour f sur [1;3] ?
5) Construire le tableau de variation de f sur [-1;3].

Définition

Soit f une fonction numérique et I un intervalle de son ensemble de définition. Soit x_0 un élément de I .

On dit que f présente en x_0 un minimum relatif lorsque pour tout réel x de I, on a $f(x) \geq f(x_0)$. On dit alors que $f(x_0)$ est le minimum de f sur I .

On dit que f présente en x_0 un maximum relatif lorsque pour tout réel x de I, on a $f(x) \leq f(x_0)$. On dit alors que $f(x_0)$ est le maximum de f sur I .

Le maximum ou le minimum d'une fonction sur un intervalle s'appelle son extremum.

Théorème (admis)

Soit f une fonction numérique dérivable sur un intervalle ouvert I de son ensemble de définition. Soit x_0 un élément de I.

Si f admet un extremum en x_0 alors $f'(x_0) = 0$

Si f' s'annule en x_0 en changeant de signe alors f admet en x_0 un extremum.

Exercice

Déterminer les intervalles sur lesquels la fonction f définie par $f(x) = x^3+x^2-5x-5$ présente un extremum. Préciser la nature de celui-ci.

EXERCICES

Exercice 1

Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes en précisant l'ensemble de définition de la fonction et celui de la dérivée.

a) $f: x \longmapsto -5x^3 + 3x^2 + x - 4$; b) $f: x \longmapsto (2x^2+5x+1)^2$; c) $f: x \longmapsto (x-4)^5$

d) $f: x \longmapsto 2x(x-1)^2$; e) $f: x \longmapsto \dfrac{1}{x} + 3$; f) $f: x \longmapsto 3x - \dfrac{1}{x^3}$

g) $f: x \longmapsto \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+4}\right)$; h) $f: x \longmapsto \dfrac{x+2}{3x}$ i) $f: x \longmapsto \dfrac{1}{(2x-1)^2}$

j) $f: x \longmapsto \dfrac{2}{(x+1)(x+3)}$; k) $f: x \longmapsto 2x + 1 + \dfrac{2}{x-1}$;

l) $f: x \longmapsto \dfrac{3}{1-x} - \dfrac{3}{(1-x)2}$; m) $f: x \longmapsto \sqrt{4-x}$; n) $f: x \longmapsto \sqrt{2x-4}$

o) $f: x \longmapsto x\sqrt{x+1}$; p) $f: x \longmapsto \dfrac{2x-1}{\sqrt{x}}$.

Exercice 2

Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de chacune des fonctions ci-après au point d'abscisse x_0 indiqué.

a) $f: x \longmapsto 2x^2+1$; $x_0 = -1$; b) $f: x \longmapsto \dfrac{x^2+1}{3}$; $x_0 = 0$; c) $f\ x \longmapsto \dfrac{1}{x-1}$; $x_0 = \dfrac{1}{2}$;

d) $f: x \longmapsto \dfrac{x^2+x-6}{x-1}$; $x_0 = 2$; e) $f: x \longmapsto x - 1 + \dfrac{3}{x}$; $x_0 = 1$; f) $f: x \longmapsto r(x-3)$; $x_0 = 4$.

Exercice 3

Déterminer les réels a et b pour que la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = ax^2 + bx - 1$ passe par le point A(1;4) et admette un extremum en ce point.

Exercice 4 Etudier le sens de variation de chacune des fonctions suivantes sur son ensemble de définition.

a) $f: x \longmapsto 2x^2 - 4$; b) $f: x \longmapsto x^3 + x^2 - 5x - 5$; c) $f: x \longmapsto (2x+1)2(x-1)$;

d) $f: x \longmapsto \dfrac{6x+1}{x+3}$; e) $f: x \longmapsto 10x + 3 + \dfrac{5}{2x-3}$; f) $f: x \longmapsto 2x - 1 - \dfrac{3}{x+1}$;

g) $f: x \longmapsto x\sqrt{x+1}$; h) $f: x \longmapsto (x-3)\sqrt{x}$

Exercice 5

Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2$.

1) Etudier le sens de variation de f.

2) Sans aucun calcul comparer, en justifiant, les deux nombres a et b ci-dessous

$a = \frac{1}{3}(1,000\ 000\ 002)^3 - \frac{3}{2}(1,\ 000\ 000\ 002)^2 + 2$ et

$b = \frac{1}{3}(1,000\ 000\ 00201)^3 - \frac{3}{2}(1,\ 000\ 000\ 00201)^2 + 2$

Exercice 6

Une entreprise de travaux publics ravitaille en gravier un chantier en empruntant toujours le même trajet qui mesure aller - retour 150 kilomètres. Le prix d'un litre de carburant est 350 francs. Le chauffeur du camion est payé 1050 francs de l'heure.

La consommation c du véhicule, exprimée en litres de carburant par heure, est une fonction de la vitesse moyenne v du camion donnée par $c(v) = 6 + \frac{v^2}{100}$, (v étant exprimée en km/h).

1) Si la vitesse moyenne v du camion est 50 km/h, calculer le coût de revient d'un trajet.

2) Montrer que , plus généralement , le coût de revient d'un trajet est

$K(v) = 525v + \frac{472\ 500}{v}$.

3) Étudier le sens de variation de la fonction f définie par :

$f(x) = 525x + \frac{472500}{x}$.

En déduire le coût minimum d'un trajet et la vitesse moyenne correspondante.

ETUDE DE FONCTIONS NUMERIQUES

Ce chapitre sera traité sous forme de travaux pratiques
Sauf précision contraire le plan sera supposé muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

I. Fonctions polynômes de degré 2.

TP1 :

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$f(x) = \frac{-1}{2} x^2 + x + \frac{3}{2}$

1. Quelle est la nature de cette fonction ? Quel est son ensemble de définition ?

2. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. a) Déterminer la fonction dérivée f' de f
   b) Etudier le sens de variation de f sur son ensemble de définition puis dresser son tableau de variation. Que représente l'ordonnée du point d'abscisse 1 pour f ?

4. Déterminer une équation de la tangente (Δ) à la courbe $(\mathcal{C})$ de f au point d'abscisse 3.

5. Tracer $(\mathcal{C})$ et (Δ) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$

6. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < 0$ puis les équations $f(x) = -6$; $f(x) = 2$ et $f(x) = \frac{5}{2}$

7. a) Tracer la droite (D) d'équation $y = -x - 6$
   b) Résoudre graphiquement $f(x) = -x - 6$ et $f(x) > -x - 6$
   c) Vérifier algébriquement les résultats précédents.

TP2 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 4x - 5$

1. Etudier la parité de f

2. Calculer les limites de f(x) lorsque x tend vers $-\infty$ puis lorsque x tend vers $+\infty$

3. Déterminer la fonction dérivée f' de f. En déduire le sens de variation de f.
   Dresser le tableau de variation de f.
   Quel est le maximum de f sur l'intervalle $[-6, -3]$ et sur l'intervalle $[-1, 2]$?

4. Construire la courbe $(\mathscr{C})$ de f dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$

5. On considère le point S de $(\mathscr{C})$ d'abscisse - 2
   a) Que représente S pour la courbe ?
   b) On considère le repère $(S; \vec{i}, \vec{j})$
   M étant un point du plan, on appelle (x,y) le couple de coordonnées de M dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et (X,Y) le couple de coordonnées de M dans le repère $(S; \vec{i}, \vec{j})$
   Montrer que $X = x + 2$ et $Y = y + 9$. Exprimer alors Y en fonction de X.
   Soit F la fonction telle que $Y = F(X)$
   Montrer que F est paire. Que peut - on en déduire pour la courbe $(\mathscr{C})$?

II. Fonctions polynômes de degré 3.

TP3

On désigne par f la fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 3x$
soit $(\mathscr{C})$ la courbe de f dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1) Montrer que f est impaire. Quelle conséquence géométrique peut-on en déduire pour la courbe de f ?

2) Déterminer la fonction dérivée f' de f et en déduire le sens de variation de f.

3) Calculer les limites de f(x) lorsque x tend vers $-\infty$ puis lorsque x tend vers $+\infty$

4) Donner l'équation de la tangente à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse nulle.

5) Construire soigneusement la courbe $(\mathscr{C})$ et la tangente au point d'abscisse nulle.

TP4

On considère la fonction numérique f définie par $f(x) = x^3 - 3x + 2$

1) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2) Déterminer la fonction dérivée f' de f puis étudier le signe de f'(x) suivant les valeurs de x. En déduire le sens de variation de f.

3) Dresser le tableau de variation de f.
4) Calculer f(-2) et en déduire les coordonnées des points d'intersection de la courbe $(\mathscr{C})$ de f avec l'axe des abscisses.

5) Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathscr{C})$ au point A d'abscisse 0.
   Etudier la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à (T).
6) Tracer dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ la courbe $(\mathscr{C})$ et la tangente (T).
7) On considère le repère $(A; \vec{i}, \vec{j})$
   M étant un point du plan, on désigne par (x,y) ses coordonnées dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et par (X,Y) ses coordonnées dans le repère $(A; \vec{i}, \vec{j})$
   a) Montrer que $x = X$ et $y = Y + 2$

b) Donner l'équation de $(\mathcal{C})$ dans le repère $(A; \vec{i}, \vec{j})$ et en déduire que A est un centre de symétrie de $(\mathcal{C})$

TP5:

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$.

$(\mathcal{C})$ est la courbe représentant f dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1) Etudier les variations de f et les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$ (on remar-quera que $f'(1) = 0$)

2) Déterminer le point d'intersection de $(\mathcal{C})$ avec l'axe des ordonnées.

3)Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout réel x :

$2x^3 - 9x^2 + 12x - 5 = (2x - 5)(ax^2 + bx + c)$

En déduire les points d'intersection de $(\mathcal{C})$ avec l'axe des abscisses.

4) Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point Ω d'abscisse $\frac{3}{2}$

5) On note g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - (\frac{-3}{2}x + \frac{7}{4})$

a) Exprimer g(x) en fonction de x. Vérifier que $\frac{3}{2}$ est une racine de g(x) .

b) Etudier le signe de g(x) et en déduire la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à (T)

6) Tracer la droite (T) et la courbe $(\mathcal{C})$

7) Montrer que le point Ω est centre de symétrie de de la courbe $(\mathcal{C})$

Rappels : Eléments de symétrie d' une courbe

Dans un repère orthonormé la courbe représentative d'une fonction paire admet l' axe des ordonnées comme axe de symétrie.

Dans un repère orthogonal la courbe représentative d'une fonction impaire admet l' origine du repère comme centre de symétrie.

Remarques:

La courbe représentative d' une fonction f qui n' est ni paire ni impaire peut admettre un axe ou un centre de symétrie. Pour déterminer l' un ou l' autre des éléments de symétrie il est parfois nécessaire d' effectuer un changement de repère de sorte que l'équation de la courbe de f dans ce nouveau repère soit de la forme $y = g(x)$ où g est une fonction paire ou impaire.

Cas particuliers:

Dans un repère orthonormé la courbe représentative d'une fonction *polynôme f de degré 2 admet la droite d' équation $y = x_0$ où x_0 est le réel tel que $f'(x_0) = 0$ comme axe de symétrie .*

Dans un repère orthonormé la courbe représentative d'une fonction *polynôme f de degré 3 admet le point d' abscisse* x_0 *telle que* $f(x) + f(2x_0 - x) = 0$ *comme centre de symétrie .*

III. Fonction polynôme de degré 4

TP6

Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = x^4 + 4x^2 - 5$
On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$
1) Montrer que la fonction est paire. Que peut-on en déduire pour $(\mathscr{C})$?
2) Vérifier que $f(1) = 0$; en déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une deuxième solution.
Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $(\mathscr{C})$ avec l'axe.(x'x)
3) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
4. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ dans le $(O; \vec{i}, \vec{j})$

TP7

Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 2x^2 - 1$
Soit $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un plan rapporté à un repère orthonormé . $(O; \vec{i}, \vec{j})$
1)Etudier la parité de f. En déduire que la courbe admet un axe de symétrie que l'on précisera
2) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
3) Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
4) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x) = \lambda$ où λ est un réel.

IV. Fonctions rationnelles

TP8

Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x + 1}$
On désigne par $(\mathscr{C})$ la représentation graphique de f dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$
1. Déterminer l'ensemble de définition E de f (on écrira E sous forme d'une réunion de deux intervalles).

2. a) Montrer que pour tout élément x de E, $f(x) = 2 - \dfrac{3}{x + 1}$

b) Calculer les limites de f aux bornes des intervalles de E. En déduire que $(\mathscr{C})$ admet deux asymptotes dont on précisera la nature et l'équation. Quel est le point d'intersection 0' de ces asymptotes ?
3. Déterminer la fonction dérivée f' de f.
En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
4. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $(\mathscr{C})$ avec les axes de coordonnées.

5. a) Donner une équation de la tangente (Δ) à $(\mathscr{C})$ au point A d'abscisse $\frac{1}{2}$

b) Montrer qu'il existe un autre point de $(\mathscr{C})$ où la tangente (Δ') à $(\mathscr{C})$ est parallèle à (Δ). Donner l'équation de cette tangente.

6. Construire soigneusement la courbe $(\mathscr{C})$, les deux asymptotes ainsi que les tangentes (Δ) et (Δ')

7. On considère le repère $(O'; \vec{i}, \vec{j})$. M étant un point du plan, on désigne par (x,y) ses coordonnées dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et par (X,Y) ses coordonnées dans le repère $(O' ; \vec{i}, \vec{j})$

a) Montrer que $x = X - 1$ et $y = Y + 2$

Pour quelles valeurs de X M est-il un point de $(\mathscr{C})$?

Exprimer dans ce cas Y en fonction de X.

b) Soit g la fonction telle que $g(X) = Y$.

Déterminer l'ensemble de définition E' de g.

Etudier la parité de g et en déduire que O' est un centre de symétrie de $(\mathscr{C})$.

TP9

Soit f la fonction numérique de variable réelle définie par $f(x) = x - 1 - \frac{1}{x-2}$

On appelle $(\mathscr{C})$ la courbe de f dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.

2. Etudier les limites de f aux bornes des intervalles de son ensemble de définition

En déduire que $(\mathscr{C})$ admet une asymptote verticale dont on donnera l'équation.

3. Déterminer la dérivée de f et en déduire le sens de variation de f.

Dresser le tableau de variation de f.

4. Soit (D) la droite d'équation $y = x - 1$

Montrer que (D) est une asymptote oblique de $(\mathscr{C})$

c) Etudier le signe de $f(x) - (x - 1)$ suivant les valeurs de x.

Comment peut-on interpréter ces résultats ?

5. Tracer dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ l'asymptote verticale, la droite (D) et la courbe $(\mathscr{C})$

6. Soit Ω le point de coordonnées $(2;1)$

a) Donner l'équation de $(\mathscr{C})$ dans le repère $(\Omega ; \vec{i}, \vec{j})$

b) Montrer que Ω est un centre de symétrie de $(\mathscr{C})$.

TP10

1. On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$

a) Déterminer l'ensemble de définition D de f

b) Montrer que . pour tout x élément de D, on a : $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x+1}$

c) Etudier les variations de f

d) On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$

Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est asymptote à $(\mathscr{C})$

e) Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$

2. On définit la fonction numérique g par $g(x) = |x| - 1 + \frac{1}{|x|+1}$.

Soit ($\mathscr{C}$') la courbe représentative de g dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$

a) Déterminer l'ensemble de définition D' de g

b) Etudier la parité de la fonction g : que peut-on en déduire concernant la courbe ($\mathscr{C}$') ?

c) Comparer g(x) et f(x) pour x positif

d) Sans étudier g, construire ($\mathscr{C}$') sur une autre figure.

TP11

f est la fonction numérique de la variable réelle x définie par:

$$f(x) = \frac{-2x^2 + 8}{x^2 + 4}$$

On désigne par ($\mathscr{C}$) la courbe représentative de f dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1) Quel est l'ensemble de définition de f ?

2) Quelle relation existe-t-il entre f(-x) et f(x) ? Quelle est la conséquence géométrique pour ($\mathscr{C}$) ?

3) Déterminer les réels a et b tels que pour tout réel x, $f(x) = a + \frac{b}{x^2 + 4}$.

4) Etudier les variations de f. (on précisera les équations des asymptotes)

5) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de ($\mathscr{C}$) avec les axes de coordonnées

6) Donner une équation de la tangente (T) à ($\mathscr{C}$) au point d'abscisse 2

7) Construire (T) et ($\mathscr{C}$) dans le repère.

PLAN D'ETUDE D'UNE FONCTION

L'étude d'une fonction s'effectue suivant le plan ci-dessous :

1) On détermine, lorsqu'il n'est pas explicitement donné, l'ensemble de définition de la fonction.

2) On étudie éventuellement la parité de la fonction et on en déduit les éléments de symétrie de la courbe (centre de symétrie, axe de symétrie).

3) On calcule les limites de la fonction aux bornes des intervalles de son ensemble de définition.

4) On détermine la fonction dérivée de la fonction ; on étudie le signe de cette fonction dérivée et on en déduit le sens de variation de la fonction.

5) On dresse le tableau de variation de la fonction.

6) On précise les asymptotes éventuelles de la courbe.

7) On construit soigneusement la courbe représentative de la fonction. A ce effet on place si possible quelques points particuliers (extremums, intersections avec les axes de coordonnées etc), et on trace les asymptotes et les tangentes horizontales éventuelles.

SUITES GEOMETRIQUES ; SUITES ARITHMETIQUES : CONVERGENCE

I. Rappels

Activité1

Parmi les suites suivantes, reconnaître celles qui sont géométriques, celles qui sont arithmétiques. Donner dans chaque cas, la raison de la suite :

* suite u définie par $u_n = 2n - 5$ pour tout naturel n.
* suite v définie par $v_n = 2(n - 1)^2 + 5$ pour tout naturel n.
* suite w définie par $w_n = 4(\frac{1}{2})^n$ pour tout naturel n.
* suite t définie par $t_n = -\frac{2}{3}n + \frac{1}{3}$ pour tout naturel n.
* suite s définie par $s_n = 3^n$ pour tout naturel n.
* suite r définie par $r_n = n^2$ pour tout naturel n.

Activité2

On considère la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$$ pour tout entier naturel n.

a) Calculer les trois premiers termes de cette suite.
b) Calculer le terme d'indice 6 de u.
c) Calculer le $6^{\text{ème}}$ terme de u.
d) Donner l'expression de u_n en fonction de n.
e) Etudier la variation de cette suite.
f) Calculer la somme des 20 premiers termes.

Activité 3

Reprendre les questions a), b), c), d), e) et f) de l'activité 2 dans le cas où la suite u est définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 3u_n \end{cases}$$ pour tout entier naturel n.

1. Suite géométrique

a) Définition

Soit q un nombre réel non nul.

"Une suite u est une suite géométrique de raison q" signifie que tout terme de la suite (sauf le premier) est égal au produit de q et du terme qui le précède. On a donc:

$U_{n+1} = q \times u_n$ quel que soit l'entier naturel n.

b) Propriétés

Si u est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 alors :

* Pour tout entier naturel n, $u_n = q^n \times u_0$.
* La somme $u_0 + u_1 + ... + u_{n-1}$ des n premiers termes est :
  * nu_0 si $q = 1$
  * $\dfrac{1 - q^n}{1 - q} \times u_0$ si $q \neq 1$.

Remarque :

L'étude de la monotonie est un peu complexe.

Une suite géométrique n'est monotone que si sa raison est positive. Il suffit alors dans ce cas d'étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ pour en déduire le sens de variation de la suite u.

Exercice : Enoncer les propriétés ci-dessus lorsque le premier terme est u_1.

2. Suite arithmétique

a) Définition

Soit r un nombre réel.

"Une suite u est une suite arithmétique de raison r" signifie que tout terme de la suite (sauf le premier) est égal à la somme du terme qui le précède et de r. On a donc:

$u_{n+1} = u_n + r$ quel que soit l'entier naturel n.

b) Propriétés

Si u est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r alors :

* Pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 + nr$.
* Pour tout entier naturel n, la somme $u_0 + u_1 + ... + u_{n-1}$ des n

premiers termes de la suite est $\frac{n(u_0 + u_{n-1})}{2}$.

* u est strictement croissante si $r > 0$.
* u est strictement décroissante si $r < 0$.
* u est constante si $r=0$.

Exercices:

1) Enoncer les propriétés ci-dessus lorsque le premier terme est u_1.

2) Etudier le sens de variation de la suite géométrique v de raison q dans chacun des cas suivants :

a) $v_0 = \frac{1}{3}$ $\quad q = 2$

b) $v_0 = -5$ $\quad q = \frac{1}{4}$

c) $v_0 = -\frac{1}{2}$ $\quad q = -3$

d) $v_0 = -5$ $\quad q = 3$

3) On considère la suite u définie pour tout entier naturel n par :

$u_n = \frac{1}{3^n}$

a) Montrer que u est une suite géométrique, préciser le premier terme et la raison.

b) Calculer la somme des 10 premiers termes de cette suite.

On donne $3^{-10} = 2 \cdot 10^{-5}$

4) u est la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $r = 5$.

a) Exprimer u_n en fonction de n pour tout naturel n.

b) Calculer la somme S_{10} des 10 premiers termes.

c) Calculer la somme S'_{10} des termes $u_2, u_3, \ldots, u_{11}$.

II. Convergence des suites géométriques et arithmétiques

1) Suites géométriques

Activité 4

1) On considère la suite géométrique u de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $u_0 = 4$.

a) A l'aide de la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x$ et de la droite d'équation $y = x$, placer les six premiers termes de la suite u dans un plan muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité 2 cm). Que constate - t- on ?

b) Compléter le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
u_n													

Que peut-on en déduire pour la suite u?

2) On considère la suite v définie pour tout entier naturel n par $v_n = 2^n$.

a) Montrer que v est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison.

b) A l'aide de la droite d'équation $y = 2x$ et de la droite d'équation $y = x$, placer les cinq premiers termes de cette suite dans un plan muni d'un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unités : 1 cm pour unité en abscisses et 0,5 cm pour unité en ordonnées).

c) Compléter le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
v_n											

Que constate-t-on ? Que peut-on en déduire pour la suite v ?

3) Soit la suite $(w_n)_{n\geq 0}$ définie par $w_n = 4(-\frac{1}{2})^n$

a) Pour tout entier naturel n, comparer w_n et u_n.

b) Placer dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité 2 cm) les six premiers termes de la suite w_n. Peut-on placer les dix premiers termes ? Pourquoi ?

c) Que peut-on dire de w_n lorsque n augmente indéfiniment ?

Propriété et définition

Soit une suite géométrique de raison q et de premier terme a, non nul.

* si $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{x\to +\infty} u_n = 0$: On dit que u est convergente et converge vers 0.

* si $q > 1$ alors $\lim\limits_{x\to +\infty} |u_n| = +\infty$: On dit que u est divergente.

* si $q \leq -1$ alors u n' a pas de limite : u est encore divergente.

* si $q = 1$ alors $u_n = a$ pour tout naturel n: u est constante et converge vers a

2) Suites arithmétiques

Activité 5

1) Soit u la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison 3.

a) Calculer les 5 premiers termes de la suite u.

b) Exprimer u_n en fonction de n.

c) Quelle est la plus petite valeur de n pour laquelle :

* $u_n > 58$?
* $u_n > 182$?
* $u_n > 12094$?

d) A étant un réel positif quelconque, existe-t-il une valeur de n pour laquelle on a $u_n > A$? Que peut-on en déduire pour la suite u ?

e) On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par $f(x) = 3x + 5$.

* n étant un entier naturel, comparer f(n) et u_n.
* Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ Que peut-on en déduire pour u_n lorsque n tend vers $+\infty$?

2) On considère la suite numérique v définie pour tout entier naturel n par $v_n = \dfrac{6 - n}{2}$

a) Montrer que v est une suite arithmétique.
Quel est son premier terme ? Quelle est sa raison ?

b) Soit g la fonction numérique de la variable réelle x telle que $g(x) = -\dfrac{x}{2} + 3$

Comparer g(x) et v_n pour tout entier naturel n.
Etudier la limite de g(x) lorsque x tend vers $+\infty$.
Que peut-on en déduire pour v_n lorsque n tend vers $+\infty$?

Propriété

Soit u une suite arithmétique de raison r.

Si $r \neq 0$ alors la suite u est divergente et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \begin{cases} +\infty & \text{si } r > 0 \\ -\infty & \text{si } r < 0 \end{cases}$

Exercice Soit u la suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $q = \dfrac{1}{2}$

a) Calculer la somme $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{n-1}$ en fonction de n.

b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} S_n$

EXERCICES

Exercice 1.

Soit u une suite arithmétique de raison $r = 2$ et de premier terme u_1.

Sachant que $u_{30} = 62$ calculer u_1 et la somme S_{30} des 30 premiers termes de cette suite.

Exercice 2.

Le premier terme u_1 d'une suite arithmétique est égal à 3. Déterminer la raison r de cette suite et l'indice n pour lequel $u_n = -15$ et la somme S_n des n premiers termes de la suite est $- 60$.

Exercice 3.

Calculer le $10^{\text{ème}}$ terme et la somme des 10 premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 5 et de raison $\frac{1}{2}$:

Exercice 4.

Le premier terme u_0 et le $5^{\text{ème}}$ terme u_4 d'une suite géométrique de raison q valent respectivement 3 et 48.

Déterminer q et la somme des $S15 = u_0 + u_1 + ...+ u_{14}$.

Exercice 5

u est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ telle que : $u_0 + u_1 + ...+ u_9 = \frac{3069}{1024}$

a) Calculer u_0 et u_{16}.

b) Exprimer u_2 en fonction de n.

c) Exprimer $S_n = u_0 + u_1 +... + u_{n-1}$ en fonction de n puis calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$

Exercice 6.

On considère la suite (u_n) définie, pour tout n entier naturel, par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_n = \frac{1}{3} u_{n-1} + 2 \end{cases}$$

On définit la suite (v_n) telle que : pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 3$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Donner l'expression de v_n en fonction de n.
En déduire celle de u_n en fonction de n.

c) La suite (v_n) est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?
En déduire si (u_n) est convergente et donner dans ce cas sa limite.

d) Pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$$S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n \text{ et } \Sigma_n = v_0 + v_1 + ... + v_n.$$

Donner l'expression de Σ_n en fonction de n.
En déduire celle de S_n en fonction de n.
Calculer la limite de Σ_n et en déduire celle de S_n.

Exercice 7.

Soit une suite (u_n) définie par :
$u_1 = 2$ et pour tout entier $n \geq 1$: $2nu_{n+1} = (n+1)u_n$.

1) Calculer u_2, u_3.

2) On définit la suite (v_n) pour tout entier n non nul par $v_n = \dfrac{u_n}{n}$.

a) Calculer v_1, v_2, v_3

b) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

c) Ecrire l' expression de v_n et de u_n en fonction de n.
Etudier la croissance et la convergence des suites (v_n) et (u_n).

(D'après Bac A, session 1990 de Juin, 1er groupe, Université de Ouagadougou)

Exercice 8.

Soit la suite (U_n) $n \geqslant 0$ définie par

$$\begin{cases} U_0 = 0, \quad U_1 = 1 \\ \text{pour tout entier naturel } n \quad U_{n+2} = 10\, U_{n+1} - 9U_n \end{cases}$$

1) Calculer ,U_2, U_3 ,U_4 .

2) On définit la suite (V_n) $n \geq 0$ de la façon suivante:
Pour tout entier naturel n $V_n = U_{n+1} - U_n$

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Exprimer V_n en fonction de V_0 et de n.

c) Calculer la limite de la suite (V_n)

(D'après Bac A, année 1992, session normale, 1er groupe, Université de Ouagadougou)

Exercice 9

Soit la suite (V_n) définie par $V_0 = 0$ et $V_{n+1} = \frac{1}{2} V_n + 3$.

1) Calculer $V_1 . V_2 . V_3$.

2) Soit la suite numérique : (U_n) définie par : $U_n = 6 - V_n$

a) Calculer U_0, U_1, U_2, U_3.

b) Exprimer U_{n+1} en fonction de U_n. En déduire que (U_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

c) Exprimer U_n en fonction de n . En déduire V_n en fonction de n.

d) Calculer la limite de U_n quand n tend vers $+\infty$ et la limite de V_n quand n tend vers $+\infty$.

(D'après Bac A , année 1993,session normale, 1er groupe, Université de Ouagadougou)

Exercice 10.

La production d'une entreprise E est en "progression arithmétique" et atteint 12000 exemplaires la sixième année. La production totale au cours de ces six années aura été de 58500 exemplaires.

a) Calculer la production de la première année et la raison r de la "progression".

b) Au bout de combien d'années, si la politique de cette entreprise ne change pas, la production aura-t-elle dépassé le double de sa production initiale ?

Exercice 11.

Une voiture achetée neuve 5 000 000 de francs (CFA) en 1980 a perdu chaque année 20% de sa valeur.

On désigne par u_n la valeur de cette voiture en 1980 +n. (ainsi u_0 = 5 000 000)

1) Exprimer u_{n+1} en fonction de n. En déduire que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,8.

2) Ecrire u_n en fonction de n.

3) Combien cette voiture valait-elle en 1990 ? en 1993 ? en 1995 ?

On donne le tableau suivant :

n	10	11	12	13	14	15
$(0,8)^n$	0,11	0,09	0,07	0,05	0,04	0,03

Exercice 12

A la suite de la création d' un atelier de tissage de Faso Danfani à Bobo Dioulasso , on estime qu' en 1989 le bénéfice a été de 200 000 francs et qu'il s'accroit régulièrement de 10% par an. On appelle b_0 le bénéfice pour l' année 1989 et b_n le bénéfice pour l'année 1989 + n.

1) Calculer le bénéfice b_1 que réalisa cet atelier en 1990.

Exprimer b_{n+1} en fonction de bn ; en déduire b_n en fonction de n.

2) En admettant que le rythme d'accroissement se maintienne aussi longtemps que possible:

a) En quelle année le bénéfice annuel sera au moins le double de celui de 1989?

b) Calculer b_7 , b_8 et b_{10}.

3) On appelle S le montant des bénéfices réalisés pendant les 10 premières années
($S = b_0 + b_1 + b_2 + ... + b_9$).
Calculer $(1,1)S - S$ et en déduire la valeur de S.

(D'après Bac A, année 1990, session normale, 2ème groupe, Université de Ouagadougou)

Exercice 13

On prévoit que le loyer mensuel d' un appartement augmente régulièrement de 5% chaque année. On désigne par u_0 le loyer mensuel payé en 1990, u_1 le loyer mensuel payé en 1991, u_n le loyer mensuel payable en 1990 +n (n entier naturel).

On suppose que $u_0 = 20\ 000$ F.

1) Calculer u_1 et u_2

2) Calculer u_n en fonction de u_{n-1}. En déduire que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et lè 1er terme. Exprimer u_n en fonction de n.

3) En admettant que le taux d'augmentation du loyer se maintienne aussi longtemps que possible :l'an 2000 ?

b) En quelle année le loyer mensuel payable aura - t- il doublé ?

c) On désigne par S la recette totale de 1990 inclus à l'an 2000 inclus. Montrer que : $S = 12s$ où s sera à préciser.

Calculer $(1,05)s - s$ et en déduire la valeur de s puis celle de S .

Données:

0,7 est une valeur approchée de ln2

0,05 est une valeur approchée de ln1,05

0,62 est une valeur approchée de $(1,05)^{10}$

(ln désigne le logarithme népérien)

(D'après Bac A , année 1991, session normale, 1er groupe, Université de Ouagadougou)

FONCTION LOGARITHME NEPERIEN

Quelques prérequis

- Savoir utiliser une calculatrice scientifique (éventuellement)
- Savoir lire le coefficient directeur d'une droite tracée dans un plan muni d' un repère orthonormé, (suivant la manipulation).
- Savoir tracer une droite de coefficient directeur donné et passant par un point donné.
- Savoir résoudre graphiquement une équation du type: $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = m$, f étant une fonction, m un réel donné.
- Savoir arrondir un nombre à l'ordre 2 ou 3 .
- Connaitre la définition d'une bijection .

Quelques commentaires

Ce chapitre se prête fort bien à la manipulation. On pourrait proposer les définitions de la fonction logarithme népérien, faire admettre les principales propriétés et se contenter de les faire fonctionner.

Pour ceux qui disposent de calculatrices on propose ici quelques manipulations (activités 1 et 2) qui permettront sans doute une meilleure compréhension et une meilleure utilisation des définitions et propriétés.

Il n'est pas possible de tout introduire par des manipulations (question de temps). Il faudra faire un tri et un choix des activités proposées.

Activité1
Utilisation d' une calculatrice pour Construire la courbe de ln

1). Calculer lnx pour x élément de
{ 0,1; 0,2 ; 0,3 ; 0,4 ; 0,5 ; 0,6 ; 0,7 ; 0,8 ; 0,9 ;1 ; 1,5 ;2 ; 2,5 ;3 ;4 ;5 ;6 ;7 ;8 ;9 ;10 }

Pour cela, on peut :
- Utiliser une calculatrice scientifique ordinaire comportant une touche ln.
- Utiliser la Casio Fx-3900 P distribuée par le P.F.M; aux établissements secondaires publics.

On rappelle le programme d'obtention des valeurs du ln
? → A : ? →B : ?→ C : A →D: Lbl 1 : ln D ◢ D ≥B ⇒Goto 2 : D + C → D : Goto 1 :Lbl2
A représente la borne inférieure, B la borne supérieure et C le pas par exemple en affichant A = 0,1 B = 1 C = 0,1 on obtient les dix premiers résultats demandés puis en affichant A =1; B =10 ; C = 0.5 on obtient les ln de 1;1.5 ; 2; 2,5 ; ....9,5 ; 10 .
Des logarithmes on ne retiendra que les arrondis d'ordre 2 (suffisants pour une bonne courbe)
2) Avant de construire la courbe, on précise que pour toutes les machines, la

recherche du ln d'un nombre négatif ou nul amène la réponse "syntax error". Conclure sur l'ensemble de définition du ln.

3) Construire la courbe de ln dans la fenêtre $0,1 \leq x \leq 10$. Tracé sûr et précis.

Activité 2 : Conjecturer $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

On peut envisager trois manipulations classées par ordre de difficulté.

1ère manipulation :

1) Placer au point $M_0 (x_0, \ln x_0)$ la droite de coefficient directeur $\frac{1}{x_0}$ pour les valeurs x_0 du tableau ayant permis la construction de la courbe du ln.

2) Faire constater qu'il s'agit des tangentes en ces points à la courbe.

3) Conclure.

2è manipulation :

1) Choisir un point M d'abscisse x de la courbe ($\mathcal{C}$) de ln

2) Projeter M en m orthogonalement sur (Oy)

3) Placer $N = t_{\vec{j}}$ (m)

4) Tracer (NM)

Questions : a) Que constate-t- on? (c'est la tangente en M à ($\mathcal{C}$))
b) Déterminer le coefficient directeur de (NM)
c) conclure

3è manipulation : Elle nécessite une courbe très précise de ln et des tracés sûrs des tangentes, mais elle a l'intérêt de s'appuyer directement sur la définition de la dérivée d'une fonction en un point.

1) Tracer aux points de la courbe d'abscisses 2 ; 0,5 ; 0,6 ; 1,5 ; 2,5 ; 3 ; 5 les tangentes à la courbe ($\mathcal{C}$); ou alors admettre que la tangente en x_0 est pratiquement parallèle à la sécante passant par deux points de la courbe d'abscisses $x_0 - \alpha$ et $x_0 + \alpha$ très proches de x_0.

2) Mesurer puis calculer dans chaque cas, le coefficient directeur de la droite tracée ; d'où la détermination d'une valeur approchée de $(\ln x)'$.

3) Comparer $(\ln x)'$ avec $\frac{1}{x}$.

4) Conclure

I) Théorème et définition

On admet qu'il existe une fonction numérique, notée ln, appelée fonction logarithme népérien, définie et dérivable sur $I =]0,+\infty[$ telle que $f(1) = 0$ et pour tout $x \in I$, $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

II Premières Propriétés :

1) La fonction ln est strictement croissante sur I et son tableau de variation est le suivant :

x	0 $\qquad$ $+\infty$
$\ln x$	$\nearrow$

On le complètera ultérieurement.

Conséquences

La croissance stricte de ln se traduit par :

Pour tout $x \in]0, +\infty[$ et Pour tout $y \in]0, +\infty[$:

$(x < y) \Leftrightarrow (\ln x < \ln y)$ et $(x = y) \Leftrightarrow (\ln x = \ln y)$

Exercices :

1) Résoudre $x \in \mathbb{R}$, $\ln x = \ln(5-x)$
2) Résoudre $x \in \mathbb{R}$, $\ln(2x+1) = \ln(-x)$

Activité 3

1) Lire la solution de : $x \in \mathbb{R}$, $\ln x = 0$
2) Vérifier que l'équation : $x \in \mathbb{R}$, $\ln x = 1$ a une seule solution notée e..
une valeur approchée de cette solution est 2,71828

2) La fonction ln possède la propriété suivante :
tout réel y admet un et un seul antécédent dans $]0, +\infty[$ par la fonction ln.

. ln est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$

. e est le réel vérifiant $\ln e = 1$; une valeur approchée est 2,718

. Conséquences :

$\ln 1 = 0$; $\ln e = 1$

pour tout $x \in]0, +\infty[$: $\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$ et $\ln x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$

Exercices :

1) Déterminer l' équation de la tangente au point e à la courbe de ln et vérifier que cette tangente passe par O (0,0) .

2) Résoudre les équations ou inéquations :

a) $x \in \mathbb{R}$, $\ln(2x+3) = 0$

b) $x \in \mathbb{R}$, $\ln(-3x+2) \leq 1$

Activité 4

A l'aide du tableau donné en annexe:

1) a) Compléter le tableau suivant:

a	b	a b	lna	lnb	lna+lnb	lnab
0,1	6					
0,2	4					
0,2	5					
0,3	3					
0,3	10					
0,6	5					
0,9	10					
2	3					
2	4					
3	3					

b) Quelle propriété ce tableau laisse-t-il supposer ?

2) a) Compléter le tableau suivant :

x	0,1	0,2	0,5	1	2	2,5	5	10
arrondi d'ordre 2 de ln x								
arrondi d'ordre 2 de $\ln(\frac{1}{x})$								

b) Quel résultat ce tableau suggère-t-il ?

3) En admettant que pour tout couple (x,y) de réels strictement positifs $\ln xy = \ln x + \ln y$ et $\ln\frac{1}{x} = -\ln x$, démontrer que pour tout couple (x,y) de réels strictement positifs:

a) $\ln(x^2) = 2\ln x$; b) $\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\ln x$; c) $\ln(\frac{x}{y}) = \ln x - \ln y$

i) Pour tous réels x et y strictement positifs, on a : $\ln xy = \ln x + \ln y$

our tout $x \in]0,+\infty[$, $\ln(x^2) = 2\ln x$; $\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\ln x$; $\ln\frac{1}{x} = -\ln x$

our tout $(x,y) \in]0,+\infty[\times]0,+\infty[$, $\ln(\frac{x}{y}) = \ln x - \ln y$

4) Conséquences

pour tout $x \in \left]0, +\infty\right[$ et pour tout entier n , $\ln x^n = n\ln x$

pour tout réel non nul x et pour tout entier paire n , $\ln x^n = n\ln|x|$

Exercices :

Résoudre

a) $x \in \mathbb{R}$, $\ln(x+3) + \ln(x+7) = \ln 21$

b) $x \in \mathbb{R}$, $2\ln(x+1) = 1$

c) $x \in \mathbb{R}$, $(\ln x)^2 - \ln x - 2 = 0$

d) $x \in \mathbb{R}$, $\ln(3-x) + 1 > 0$

III Limites et représentation graphique

Activité 5

On donne $\ln 10 = 2{,}30$

1) Compléter les tableaux suivants :

x	10^0	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5	10^{10}	10^{50}	10^{3600}
ordre de gran- deur de $\ln x$									

x	10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-10}	10^{-50}	10^{-3600}
ordre de gran- deur de $\ln x$									

Remarque: on n'a pas besoin de calculer dans le 2è tableau.

2) Quels résultats peut-on conjecturer quant à $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x$?

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$$

On peut alors compléter le tableau de variation comme suit:

x	0		$+\infty$
$\ln x$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Remarque : La droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à la courbe

Autres résultats (admis)

a) $\lim\limits_{x \mapsto 0^+} x \ln x = 0$ $\qquad \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

b)Si u est une fonction numérique définie , ne s'annulant pas sur un intervalle I et dérivable sur I alors la fonction définie par : $x \mapsto \ln|u(x)|$ est définie et dérivable sur I et sa fonction dérivée sur I est la fonction définie par $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$

<u>Activité 6</u>

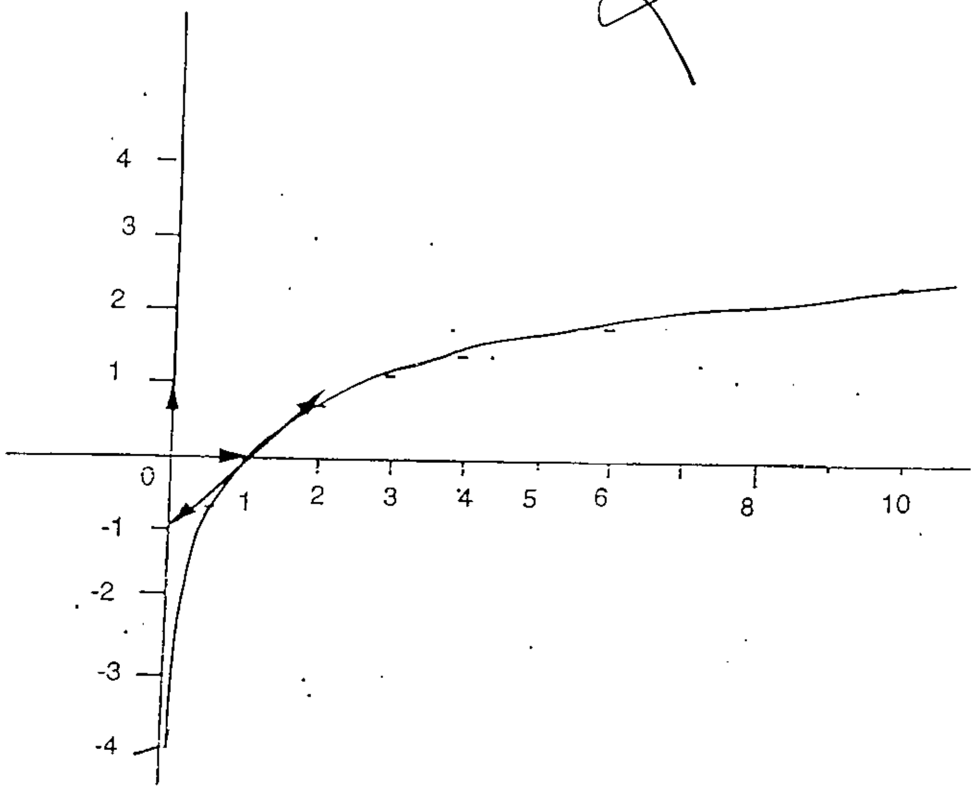
On donne $\ln 2 = 0{,}69$; $\ln 3 = 1{,}09$ $\ln 5 = 1{,}61$

1) A l' aide de ces données compléter le tableau suivant

x	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	5	8
$\ln x$							

2) Ecrire l'équation de la tangente à la courbe de la fonction ln au point d' abscisse 1

3) Construire la courbe et la tangente ci - dessus dans un plan muni d' un repère orthonormé



La droite d' équation $x = 0$ est asymptote verticale à la courbe.

EXERCICES

Exercice1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes:

1) $\ln x + \ln(x-1) - \ln 6 = 0$
2) $\ln(x-2) + \ln(x-3) = \ln(4x+12) - \ln 2$
3) $\ln(-2x^2 + 8) + \ln(-x+3) = \ln 2 + \ln(x^3 + x)$
4) $\ln(2x-1) + \ln(x-5) + \ln\frac{1}{2} = 2\ln 3$
5) $\ln\frac{2x}{x+1} = 2\ln x - \ln(x+1)$
6) $2\ln x - \ln(x-5) = \ln 3$

Exercice2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes:

1) a) $x^2 - 2x - 8 = 0$ b) $(\ln x)^2 - 2\ln x - 8 = 0$

2) a) $x^3 - 5x^2 - 24x = 0$ b) $(\ln x)^3 - 5(\ln x)^2 - 24\ln x = 0$

Exercice3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes:

1) $\ln x^2 = 1$; 2) $2\ln x = 1$; 3) $\ln(x+2) - \ln(x-1) = 2$

Exercice4

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ $\ln(3x^2 - x) \leq \operatorname{Ln} x + \operatorname{Ln} 2$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ $\begin{cases} x + y = 3 \\ \ln x + \ln y = \ln 2 \end{cases}$

Exercice5

1) Comparer les fonctions : $f : x \longmapsto \ln(x-1) + \ln(x+1)$ et $g : x \longmapsto \ln(x^2 - 1)$

2) Déterminer l'ensemble de dérivabilité et la dérivée de:

a) $f : x \longmapsto \ln(2x-5)$ b) $g : x \longmapsto \ln(-3x+2)$

Exercice6

Etudier les fonctions :

a) $f: x \longmapsto \ln(x-3)$ b) $g: x \longmapsto \ln(2-x)$

c) $h: x \longmapsto 2\ln|x|$ d) $k: x \longmapsto \ln x + \ln(2-x)$

Exercice7

On place 100.000 F dans une caisse d'épargne au taux d' intérêts composés de 8% l' an (chaque année les intérets produits s' ajoutent au capital qui les a produits pour produire de nouveaux intérêts au taux de 8%)

a) On pose c_0 le capital initial et c_n le capital disponible au début de la $(n+1)$ ème année de placement .

a) Calculer c_1; c_2; c_3.

Calculer c_n en fonction de n.

b) Au bout de combien de temps, le capital initial C_0 sera-t-il doublé ?

On donne : $\ln 2 = 0{,}693$ (arrondi d'ordre 3)

$\ln 1{,}08 \doteq 0{,}077$ (arrondi d'ordre 3)

Exercice8

Soit f la fonction définie par $f(x) = x(2 - \ln x)$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$.

1) Trouver les limites de f(x) lorsque x tend vers $+\infty$ et lorsque x tend vers 0 par valeurs positives sachant que $\lim\limits_{x \to 0} (x \ln x) = 0$

2) Calculer $f'(x)$ et determiner son signe suivant les valeurs de x; en déduire le sens de variation de f

3) Construire la courbe représentative $(\mathscr{C})$ de f dans un repère orthonormé. On admettra que $(\mathscr{C})$ est tangente à l' axe des ordonnées en O.

Exercice9

On considère la fonction numérique f définie par $f(x) = 8\ln x - 4x + 4$.

1) En utilisant les valeurs approchées ci - dessous, calculer $f(\frac{1}{4})$; $f(\frac{1}{2})$; $f(1)$; $f(2)$; $f(3)$; $f(4)$; $f(5)$

2) Etudier les variations de f.

3) Donner une équation de la tangente(Δ) à la courbe $(\mathcal{C})$ de f.

4) Construire la courbe représentative $(\mathcal{C})$ de f ainsi que la tangente (Δ) dans un repère orthonormé. On donne $\ln 2 = 0{,}69$; $\ln 3 = 1{,}09$; $\ln 5 = 1{,}61$.

Exercice10

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par $f(x) = \frac{1+2\ln x}{x}$.

On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1) Déterminer l' ensemble de définition de f puis calculer les limites de f(x) aux bornes de cet ensemble. (on admettra que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+$)

2) Déterminer f'(x) , étudier son signe et en déduire le sens de variation de f. Dresser le tableau de variation de f.

3) Trouver une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C})$ de f au point A d' abscisse 1.

4) Déterminer les coordonnées du point B, intersection de $(\mathcal{C})$ et de l' axe des abscisses.

5) Construire la courbe $(\mathcal{C})$ et la tangente (T).

Exercice11

1) On définit la fonction numérique g sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x^2 + 3 - 2\ln x$.

Etudier le sens de variation de g et en déduire le signe de g sur $]0; +\infty[$.

2) Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln x}{x} + \frac{x^2 - 1}{2x}$.

Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé .

Etudier les variations de f. Démontrer l' existence d' une asymptote verticale d' équation x =0 et d' une asymptote oblique d' équation $y = \frac{1}{2}x$.

3) Construire la courbe $(\mathcal{C})$.

On placera notamment les points d' abscisses 0,5; 1; $\sqrt{e}$; e ; 5

On donne $\ln 2 = 0{,}69$; $\ln 3 = 1{,}09$; $\ln 5 = 1{,}61$; $e = 2{,}72$ $\sqrt{e} = 1{,}65$

Exercice12

Soit f et g les fonctions numériques de la variable réelle x définies par :

$f(x) = (1 + \ln x)^2 - 2x$ et $g(x) = \ln x - x + 1$

1) Déterminer la fonction dérivée g' de g puis dresser le tableau de variation de g. En déduire le signe de g(x) lorsque x décrit l'intervalle $]0; +\infty[$

2) Déterminer la fonction dérivée f' de f et montrer que f'(x) a le même signe que g(x) pour tout x strictement positif.

3) Déterminer la limite de f en 0. Montrer que, pour tout réel x strictement positif, on peut écrire $f(x) = x[\frac{1}{x} + 2\frac{\ln x}{x} + (\frac{\ln x}{\sqrt{x}})^2 - 2]$. En déduire la limite de f en $+\infty$.

Dresser le tableau de variation de f.

4) Soit $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé. Déterminer une équation de la tangente à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 1. Construire $(\mathscr{C})$ et la tangente précédente.

On donne $\ln 2 = 0{,}69$; $\ln 3 \doteq 1{,}09$; $\ln 5 = 1{,}61$

Exercice13

On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1) Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \ln x$

Ecrire une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathscr{C})$ de f au point d'abscisse 1.

2) On considère la fonction g définie par $g(x) = 1 - x + \ln x$.

a) Etudier les variations de g sur son ensemble de définition et dresser son tableau de variation. (on admettra que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+$)

b) En utilisant la question a) étudier le signe de g(x). En déduire la position de la coubre $(\mathscr{C})$ par rapport à sa tangente (T).

3) Montrer que pour tout réel x supérieur ou égal à 1, $x - 1 > \ln x$.

4) On pose P_x la formule $x - 1 > \ln x$.

a) Exprimer P_x pour $x = 1{,}01$

b) Déduire de 4a) que $100\ln(1{,}01) < 1$

c) Ecrire $\ln(100^{100}) - \ln(101^{99}) - \ln(101)$ en fonction de $\ln(1{,}01)$

d) Démontrer que $\ln(100^{100}) - \ln(101^{99}) > \ln(101) - 1$

e) comparer 100^{100} et 101^{99}

Exercice14

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = \ln x + \frac{1}{\ln x}$

1) Résoudre dans IR : $x^2 - 1 \geq 0$

2) a) Etudier et représenter graphiquement f dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On appelera (C) sa courbe représentative.

b) Donner une équation de la tangente à (C) au point d'abscisse e^2.

3) On définit la fonction g de la variable réelle x par : $g(x) = f(\Omega x \Omega)$. Sans étudier la fonction g, montrer que l'on peut obtenir sa courbe représentative (C') dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ à partir de (C). Construire alors (C').

($e = 2{,}7$; $e^2 = 7{,}3$; $\ln 2 = 0{,}7$; $e^{-1} = 0{,}4$)

(D'après BAC A ,session de remplacement 1984 ,université de Ouagadougou)

Exercice15

1) Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \ln\frac{2x-3}{x+2}$$

a) Résoudre dans IR : $\frac{2x-3}{x+2} > 0$

b) En déduire l'ensemble de définition de f.

2) Etudier les variations de f et déterminer une équation des asymptotes à la courbe représentative (C) de f.

3) Calculer les coordonnées des points d'intersection de (C) avec les axes.

4) Ecrire une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 5.

5) Tracer (C) et (T) dans un repère orthonormé.

6) En utilisant (C) déterminer le nombre de racines de l'équation f(x) = m suivant les valeurs du réel m

(D'après BAC A ,session de remplacement 1985 ,université de Ouagadougou)

Exercice16

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}$$

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité: 2 cm).

1) a) Quel est l'ensemble de définition D de f?

b) Vérifier que pour tout x de D, $f(x) = \frac{1}{x}(1 + \ln x)$ puis en déduire $\lim_{x \to 0^+} f(x)$

c) En admettant que : $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ préciser $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

d) En déduire les asymptotes à (C).

2) a) Calculer f'(x), étudier son signe.

b) Dresser le tableau de variation de f.

3) a)Déterminer l'abscisse du point A, intersection de (C) avec l'axe des abscisses.

b) Ecrire l'équation de la tangente (T) à (C) en A.

4) Tracer (C) et (T).

5) Soit g la fonction de IR vers IR telle que : $gx) = \frac{1}{x} + \frac{\ln x^2}{2x}$

a) Déterminer l'ensemble de définition de g.

b) Etudier la parité de g. Que peut-on déduire pour la courbe représentative (C') de g?

c) Comparer g(x) et f(x) pour tout réel x strictement positif. En déduire une explication de l'obtention de (C') à partir de (C) sans étudier g.

d) Tracer (C') dans le même repère que (C).

e) Dététerminer graphiquement, suivant les valeurs du réel λ, le nombre de solutions de l'équation $g(x) = \lambda$

On donne : $e = 2,7$; $e^{-1} = 0,4$; $\ln 2 = 0,7$; $\ln 3 = 1,1$; $\ln 5 = 1,6$

(D'après BAC A ,session normale 1994 ,université de Ouagadougou)

Exercice17

Soit f , g , h les fonctions numériques de la variable réelle x définies par :

$f(x) = x - \frac{\ln x}{x}$, $g(x) = \ln x$, $h(x) = x^2 - 1$

I) 1) Etudier les signes de g(x) et de h(x) pour tout x élément de $\mathbb{R}^*_+$.

2) En déduire le signe de g(x) + h(x).

II) On se propose d' étudier la fonction f.

1) Quel est l' ensemble de définition de la fonction f?

2) a) Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$

En déduire que l' axe des ordonnées est une asymptote pour la courbe de f.

b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

3) a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x)-x]$ En déduire que la droite (Δ) d'équation y=x est une asymptote pour la courbe de f.

b) Préciser la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à (Δ) pour x >1.

4) a) Calculer f'(x) pour x élément de l' ensemble de définition de f.

b) Montrer que $f'(x) = \frac{(g+h)(x)}{x^2}$ et déduire de la question 2) de I) le sens de variation de f.

5) Construire la droite (Δ) et la courbe $(\mathscr{C})$ de f, dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité; 2 cm).

(D'après BAC A ,session normale 1996 ,université de Ouagadougou)

ANNEXE Logarithme népérien de quelques réels

x	lnx
0,1	-2,3
0,2	-1,61
0,3	-1,20
0,4	-0,92
0,5	-0,65
0,6	-0,51
0,7	-0,36
0,8	-0,22
0,9	-0,11
1	0
1,5	0,41
2	0,69
2,5	0,92
3	1,1
3,5	1,25
4	1,1,39
4,5	1,50
5	1,61
6	1,79
7	1,95
8	2,08
9	2,20
10	2,30

FONCTION EXPONENTIELLE DE BASE e

I Définition et notation

Activité 1 Construction de la courbe de la fonction $x \mapsto e^x$

Trois possibilités sont offertes pour obtenir les valeurs de l'exponentielle :

- donner les résultats contenu dans le tableau en annexe
- utiliser une calculatrice scientifique ordinaire : dans ce cas donner la première ligne du tableau et demander de remplir la deuxième ligne .
- utiliser la casio Fx-3900P avec le programme suivant:

? → A : ?→B : ?→ C : A →D: Lbl 1 : e^D ◢ D ≥B ⇒Goto 2 : D + C → D : Go to 1 : Lbl2:

dans lequel A représente la borne inférieure, B la borne supérieure et C le pas . On prendra dans un premier temps A = -5; B = 0; C = 0,5 puis ensuite A = 0; B = 2; C= 0,2

Construire la courbe de l'exponentielle dans la fenêtre $-5 \leq x \leq 2$

On rappelle que si vous voulez établir graphiquement que $e^{\ln x} = x$ pour tout réel positif non nul x et $\ln e^x = x$ pour tout réel x, il est indispensable d'utiliser la même unité pour l'exponentielle que celle utilisée pour le logarithme .

Activité 2 Conjecturer sur la dérivée de $x \mapsto e^x$

Plusieurs manipulations possibles :

1) Manipulation du même type que pour le logarithme népérien.
Tracer la tangente au point d'abscisse -1,5 ; lire le coefficient directeur de la tangente en ce point.
Procéder de même pour les points d'abscisse -1; -0,5; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1; 1,2; 1,4.
Comparer chacun de ces coefficients directeurs avec chaque valeur correspondante de e^x.

2) Proposer l'algorithme suivant

1. choisir un point de la courbe M(x, f(x))
2. projeter sur (0x) : m(x,0)
3. considérer N(x-1 ;0)
4. tracer (NM)

En faisant agir cet algorithme pour plusieurs points, on laisse entrevoir que ces droites (MN) sont les tangentes aux points M. Il reste alors à évaluer le coefficient directeur de la tangente : $\dfrac{y_N - y_M}{x_N - x_M} = \dfrac{e^x - 0}{x-(x-1)} = e^x$

Théorème et définition

On admet qu'il existe une fonction numérique appelée fonction exponentielle de base e, notée $x \mapsto e^x$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que: $e^0 = 1$ et pour tout réel x : $(e^x)' = e^x$.

II) Premières Propriétés :

1) La fonction exponentielle de base e est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et son tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
e^x		$\nearrow$	

On le complétera ultérieurement

Quels que soient les réels x et y: $x \geq y \Leftrightarrow e^x \geq e^y$ et $x = y \Leftrightarrow e^x = e^y$

Exercice : Résoudre dans $\mathbb{R}$

1) $x \in \mathbb{R}$, $e^{2x} = e^{-x^2-3}$
2) $x \in \mathbb{R}$, $e^{2x-1} > e^{-x}$

Activité 3

1) Lire sur la représentation graphique la solution de $e^x = 1$
2) Lire sur la représentation une valeur approchée de e^1
3) Soit A un nombre réel
   a) A admet-il toujours un antécédent ?
   b) Si $A \in \mathbb{R}^*$ A admet-il un antécédent ? Combien d'antécédents ?

2) La fonction $x \mapsto e^x$ vérifie la propriété suivante :
. C'est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^*_+$
. $e^0 = 1$ et $e^1 = e$

. Conséquences pour tout réel x :
$x > 0 \Leftrightarrow e^x > 1$
$x < 0 \Leftrightarrow 0 < e^x < 1$

Exercice :

1) Quelle est la tangente à la courbe de $x \mapsto e^x$ au point d'abscisse 1 ?
2) Résoudre dans $\mathbb{R}$: a) $e^{2x-3} = 1$ b) $e^{-x+2} \geq e$

Activité 4

1) A l'aide du tableau donné en annexe compléter le tableau ci - dessous

a	b	a+b	e^a	e^b	e^{a+b}	$e^a.e^b$
- 3	- 2					
- 1	-0,5					
- 2	1					
- 2	2					
0,4	0,4					
0,6	0,8					
- 4	2					

2) Quelle propriété ce tableau suggère-t-il ?

3) On admet que:

Pour tous réels x et y, on a $e^{x+y} = e^x.e^y$

Conséquences:

Pour tous réels x et y, $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$; $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$; $(e^x)^2 = e^{2x}$

Remarque : e^n (n entier naturel) représente la puissance n-ième de e

Exercice : Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a) $e^{3x-1} = e.e^{x+1}$; b) $e^{4x} > e^{x+1}$

III) Limites et représentation graphique

Activité 5

1) Compléter les tableaux suivants : On donnera l'arrondi d'ordre 2 ou un ordre de grandeur du résultat

x	1	2	4	8	10	20	40	80	100	200
e^x										

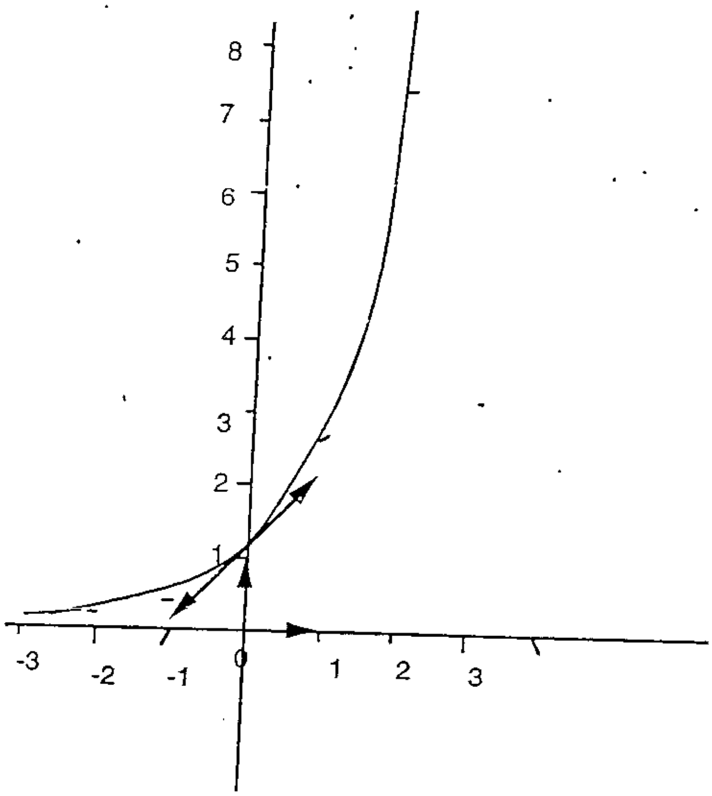
x	- 1	- 2	- 4	- 8	- 10	- 20	- 40	- 80	- 100
e^x									

2) Quels résultats peut-on espérer quant au calcul de $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x$ et de $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x$?

On admet les résultats suivants : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

On peut alors compléter le tableau de variation .

x	$-\infty$	$+\infty$
e^x	0 ↗	$+\infty$



Remarque

La droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à la courbe.

IV Autres propriétés (admises):

$\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

Si u est une fonction numérique définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ alors la fonction définie par $x \longmapsto e^{u(x)}$ est définie et dérivable sur I et pour tout x élément de I, $(e^{u(x)})' = u'(x)e^{u(x)}$

Exercice :

Déterminer l'ensemble de dérivabilité et la fonction dérivée de

a) $f : x \longmapsto 3e^x - xe^3$ b) $g : x \longmapsto e^{3x-4}$

V Lien entre $x \mapsto \ln x$ et $x \mapsto e^x$

Activité 6

1) a) Construire dans un même repère orthonormé $(O;\vec{i}, \vec{j})$ les courbes des fonctions $x \mapsto \ln x$ et $x \mapsto e^x$.

b) Tracer la droite (Δ) d'équation $y = x$, plier la feuille suivant cette droite .

2) Vérifier que les deux courbes sont symétriques par rapport à (Δ).

3) Soit $x = 1,8$; placer à l'aide de (Δ) et de la courbe de $x \mapsto \ln x$, le réel $\ln 1,8$ sur l'axe des abscisses.

Placer alors sur l'axe des ordonnées le réel $e^{\ln x}$

Comparer $e^{\ln x}$ et x

Refaire l'expérience avec un autre réel positif .

Conclure après vérification.

Propriété

Pour $x > 0$, on a $e^{\ln x} = x$;

Pour tout réel x $\ln e^x = x$;

Pour tout réel strictement positif x et pour tout réel y , $y = \ln x \Leftrightarrow x = e^y$.

Exercice

Résoudre dans $\mathbb{R}$ a) $e^{(3x-5)} = 2$ b) $e^{(1 + \ln x)} < 2$

EXERCICES

Exercice1 Résoudre dans $\mathbb{R}$

1) $e^{2x} - 2e^x + 1 = 0$ 2) $e^{4x} + e^{2x} = 2$ 3) $e^{2x} + 5e^x - 6 = 0$

4) $e^{2x} + e^{x+1} - 1 = 0$ 5) $\dfrac{4e^x - 1}{e^x - e^{-x}} = e^x$

Exercice2 Résoudre dans $\mathbb{R}$

1) $e^{3x} - 2e^{2x} - 8e^x > 0$ 2) $e^x - 6e^{-x} - 1 \geq 0$

Exercice 3 : Résoudre dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

a) $\begin{cases} x+y=\ln 3 \\ e^x+e^y=4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5e^{-x}-3e^{-y}=3 \\ 7e^{-x}+6e^{-y}=11 \end{cases}$ c) $\begin{cases} e^x.e^{2y-1}=1 \\ e^{x+1}.e^y=e \end{cases}$

Exercice 4

1) Développer, réduire et ordonner les produits $(2x-1)(x-2)(x+1)$ et $(12x-1)(x-12)$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a) $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0$

b) $2e^{3x} - 3e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$

c) $e^x - \frac{1}{12} = 12 - e^{-x}$

Exercice 5

On définit la fonction h par $h(x) = e^{2x} - e^{x+3} - e^{x+1} + e^4$

1) Montrer que pour tout réel x , $h(x) = (e^3 - e^x)(e - e^x)$

2) Résoudre l'équation , $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = 0$

3) Etudier le signe de h(x) suivant les valeurs de x.

Exercice 6

On considère les trois fonctions ci-dessous définies:

$f : x \mapsto e^{-x}$, $g : x \mapsto e^{x-1}$ et $h : x \mapsto e^{x+2}$

1) Etudier les variations de chacune de ces fonctions.

2) Déterminer les coordonnées des points d'intersection des trois courbes.

3) Déterminer l'équation de la tangente à chaque courbe en chacun des points d'intersection.

4) Représenter graphiquement les trois courbes dans un même repère.

Exercice 7

On considère la fonction g définie par $g(x) = (1-x)e^x$.

1) Déterminer l'ensemble de définition Dg de g.

2) Calculer les limites de g aux bornes de Dg . (On rappelle que $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$)

3) Etudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.

4) Représenter graphiquement g dans un plan muni d'un repère orthonormé.

Exercice 8

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{2e^x} + x - 1$.

On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1) Montrer que la droite (D) d' équation $y = x-1$ est asymptote à $(\mathscr{C})$ en $+\infty$.

2) Etudier les variations de f sur son ensemble de définition et dresser son tableau de variation.

3) Donner une équation de la tangente (Δ) à $(\mathscr{C})$ au point d' abscisse 0 et préciser la nature de la tangente (Δ') à $(\mathscr{C})$ au point d' abscisse $\ln(\frac{1}{2})$.

4) Tracer la courbe $(\mathscr{C})$, son asymptote et les deux tangentes précédentes.

Exercice 9

Soit la fonction f définie par $f(x) = ax + b + ce^x$ où a, b et c sont trois réels.

On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) Déterminer les réels a , b et c de façon que $(\mathscr{C})$ soit tangente en O à l'axe des abscisses et que la tangente à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse $x = 1$ coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 1.

2) a) Etudier les variations de la fonction g définie par $g(x) = x + 1 - e^x$.

Soit (Γ) la courbe représentative de g dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

b) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x + 1$ est asymptote à (Γ) en $-\infty$.

c) Tracer (D) et (Γ) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 10

On considère le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{e^x}{e - e^x}$

On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.

2) Montrer que pour tout réel x en lequel f est définie , on a $f(x) = -1 + \frac{e}{e-e^x}$.

3) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

4) Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

5) Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{e^x+1}{1-e^x}$.

a) Montrer que g est impaire.

b) Soit $A(1; \frac{-1}{2})$ Montrer que $(\mathscr{C})$ admet A pour centre de symétrie.

On donne $e = 2,7$.

Annexe Exponentielle de quelques réels

x	exp(x)
-5	0,01
-4,5	0,01
-4	0,02
-3,5	0,03
-3	0,05
-2,5	0,08
-2	0,14
-1,5	0,22
-1	0,37
-0,5	0,61
0	1,00
0,2	1,22
0,4	1,49
0,5	1,65
0.6	1,82
0,8	2,23
1	2,72
1,2	3,32
1,4	4,06
1,6	4,95
1,8	6,05
2	7,39

ÉQUATIONS - INÉQUATIONS -SYSTEMES

Ce chapitre est exclusivement constitué d'exercices

Le professeur rappelera la démarche à suivre pour résoudre une équation ou une inéquation lorsque l'inconnue est au dénominateur ou sous un radical

I Résolution d'équations à 1 inconnue

Exercice 1 Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a) $3x - 1 = -2x + 3$; b) $\frac{1}{x} = \frac{1}{2x-1}$; c) $x^2 + x - 4 = 0$;

d) $\frac{x}{x+1} = \frac{x+1}{x}$; e) $2x^3 + x^2 = 5x - 2$; f) $\sqrt{x-2} = x$

Exercice 2

Une ménagère achète 12 assiettes ; si elle en avait acheté 17 elle aurait payé 2500F de plus.
Quel est le prix d'une assiette?

Exercice 3 Monsieur Traoré a un jardin carré. Il achète un jardin rectangulaire ayant la longueur commune avec le sien et une largeur de 8 mètres.
Sachant que son nouveau terrain a une superficie de 560 m^2, quelle était la mesure du côté du jardin de M. Traoré avant agrandissement?

Exercice 4 On dit qu'une boisson alcoolisée pèse n degrés lorsque son volume contient n% d'alcool. Quelle quantité de vin à 8 degrés faut-il ajouter à 30 litres de vin à 12° pour obtenir un mélange à 9,5°?
(On supposera que le mélange a lieu sans contraction).

II Résolution d'inéquations à une inconnue

Exercice 5 Résoudre dans $\mathbb{R}$ et représenter sur un axe :

a) $2x - 1 < 3x + 2$; b) $\frac{1}{x-1} > \frac{1}{x+2}$; c) $x^2 - 3x + 2 < 0$;

d) $x^2 - x > x - 4$; e) $\frac{x-1}{x+1} < \frac{1}{x+2}$; f) $\sqrt{x-1} > x$;

g) $\sqrt{x+1} < x-1$; h) $(0,2)\,[(0,4)\,x + 15] - (0,8)\,x \leq 0,12$.

Exercice 6

Une société veut imprimer des livres. La location de la machine revient à 100.000 F par jour. Les frais de papiers s'élèvent à 350 francs par livre. Combien faut-il imprimer de livres par jour pour que le prix de revient d'un livre soit inférieur ou égal à 750 F ?

III Résolution de systèmes

Exercice 7 Résoudre dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$:

a) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x^2 - y = 1 \\ x^2 + y = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ x + 3y = 8 \end{cases}$

Exercice 8 Afin d'encourager son fils à étudier l'arithmétique, un père accepte de donner 8 sous à son garçon pour chaque problème correctement résolu. Mais il lui prend 5 sous dans le cas contraire. Après 26 problèmes, chacun a donné autant qu'il a reçu.
Combien l'enfant a-t-il résolu de problèmes ?

Exercice 9 Si je donnais 7 sous à chaque mendiant devant ma porte, il me resterait 24 sous. Il me manque 32 sous pour pouvoir en donner 9 à chacun. Combien y a-t-il de mendiants devant ma porte? Combien ai-je d'argent ?

Exercice 10 Quatre jeunes garçons désirent connaître leur poids à l'aide d'une vieille bascule dont l'aiguille ne descend plus en dessous de 50 kg. Ils montent donc deux par deux sur le plateau et notent :

- Alain et Bernard : 63 kg
- Bernard et Cyril : 62 kg
- Cyril et Daniel : 67 kg
- Daniel et Alain : 68 kg

Cela suffit-il pour les renseigner ? Sinon, comment auraient-ils pu s'y prendre ?

IV ÉQUATION ET INÉQUATIONS FAISANT INTERVENIR LES FONCTIONS LOGARITHME ET EXPONENTIELLE

1). Équations ou inéquations abstraites

Exercice 11 Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a) $\ln(x+3) + \ln(x+2) \leq \ln(x+11)$; b) $(\ln x)^2 - 7\ln x + 6 = 0$; c) $\ln \frac{5-x}{5+x} \geq 1$.
d) $e^{3x} - 6e^{6x} + 8e^{x} \geq 0$; e) $2e^{-t} + 1 - 6e^{t} = 0$.

Exercice 12 Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ les systèmes :

a) $\begin{cases} e^x - 4e^y = -3 \\ 3e^x + 5e^y = 49 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -x + y = 1 \\ e^x + e^y = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y = 55 \\ \ln x + \ln y = \ln 700 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 130 \\ \ln(-x) + \ln(-y) = \ln 63 \end{cases}$ e) $\begin{cases} \ln(x-2) + \ln(y-1)^3 = 9 \\ \ln(x-2)^2 - \ln(y-1) = 4 \end{cases}$

2) Application dans divers domaines

a) En BIOLOGIE : surface de la peau.

Exercice 13 On se propose d'évaluer, chez le cobaye, la surface A (en cm^2) de la peau connaissant le poids P (en grammes) de l'animal par :

$$\ln A = \ln 9{,}85 + 0{,}64 \ln P \text{ ou bien } A = 9{,}85 . e^{0{,}64 \ln P}$$

Quelle est la surface de la peau d'un animal pesant 780 g ?

b) En PHYSIQUE : désintégration

Exercice 14

No est le nombre de noyaux radioactifs présents dans un échantillon à la date $t = 0$.
Le nombre de noyaux présents dans cet échantillon à la date t est : $N = N_0 e^{-\lambda t}$
où λ est la constante radioactive, positive, caractéristique du nucléide correspondant et de la désintégration considérée.
La période radioactive T est le temps nécessaire à la désintégration de la moitié des noyaux présents initialement dans l'échantillon.

1). Montrer que $T = \frac{\ln 2}{\lambda}$

2). Calculer N pour $t = T$, $t = 2T$, $t = 3T$.

3). Représenter la fonction $t \longmapsto N(t)$ dans le cas du polonium 210, dont la période est 138 jours, en supposant que $N_0 = 1250 \times 10^{16}$.

c) EN ÉCONOMIE : fonction de demande

Exercice 15 En étudiant le marché d'un produit, on est amené à introduire sa fonction de demande qui exprime la liaison entre la quantité totale demandée Q et le prix unitaire p appliqué sur un marché donné.
Par exemple, la fonction de demande du coton aux États-Unis pour la période 1915-1929 est donnée, selon Henry Schultz, par :
$\ln Q + 0{,}49 \ln P = 0{,}59$ ou bien $Q = 1{,}8 \times e^{-0{,}49 \ln P}$

1) Trouver la demande si le prix est 20, 40 , 62,5 .
2). Quel est le prix si la demande est 0,15 ? 0,4 ?

On donne $\ln 5 = 1{,}61$; $\ln 2 = 0{,}69$

d) EN MÉDECINE : temps d'effet d'un médicament

Exercice 16
On admet que lorsqu'on injecte, dans le sang, une dose A d'un médicament, il reste au bout d'un temps t (en heures), du fait de l'élimination naturelle, la dose $Ae^{(-t/24)}$

1) Quelle dose à 10^{-3} près reste-t-il dans le sang, après 8 heures ?
2) Pour diverses raisons on ne peut injecter qu'une dose A toutes les 8 heures.
Représenter graphiquement la dose de médicament contenue dans le sang pendant les 72 premières heures d'un traitement nécessitant une injection de dose A toutes les 8 heures.
3) Le médicament ne déclenche son effet que lorsque le sang véhicule en permanence une dose au moins égale à 2,2A. Quand cet état est-il atteint ?
4) A la dose 3,65 A le médicament devient dangereux.
Y aurait-il danger à poursuivre le traitement selon le rythme précédent ?

PROBABILITES

I. RAPPEL DE DÉNOMBREMENTS

1°) Cardinal d'un ensemble

Le nombre d'éléments d'un ensemble fini E est appelé cardinal de E :

Si $E = \{ e_1, e_2, \ldots\ldots e_n\}$ alors card E = n

Activité 1 :

Des objets sont fabriqués avec du fer et du bois.
Dans un sac, on place 30 de ces objets et on compte 16 objets contenant du bois et 25 contenant du fer .
Combien d'objets ne sont fabriqués qu'avec du fer ? qu'avec du bois ?

a) Soient A et B deux parties d'un ensemble E, on a :
Card (AUB) = card A + card B - card $A \cap B$

Remarque 1 : si $A \cap B = \varnothing$ alors card (AUB)= cardA + cardB

Remarque 2 : Notons $\overline{A}$ le complémentaire dans E du sous-ensemble A.
On a : $A \cap \overline{A} = \varnothing$ et $A \cup \overline{A} = E$ et donc $\text{card}\overline{A} = \text{card } E - \text{card}A$.

Activité 2

a) Combien peut-on former de nombres de 2 chiffres choisis dans l'ensemble {1,2,3,4,5 } ?
b) Combien peut-on former de nombres de 3 chiffres choisis dans le même ensemble?
c) Même question pour des nombres de 6 chiffres.

b) Soit E un ensemble de n éléments et p un entier naturel, il y a n^p p-uplets d'éléments de E.

Exemple :
E = {a,b,c} Les couples d'éléments de E sont (a,a) ; (a,b) ; (a,c) ; (b,a) ; (b,b) ; (b,c) ; (c,a) ; (c,b) ; (c,c) soit exactement 3^2 couples (oh! 9 couples)

Exercice : Combien de mots de 3 lettres peut-on former avec les lettres du mot "carte"? (peu importe si le mot formé a un sens ou non).

Remarque : plus généralement :
$\text{card } (E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n) = (\text{card } E_1) \times (\text{card} E_2) \times \ldots \times (\text{card} E_n)$

Activité 3 :

On note les numéros 1;2;3;4 et 5 sur cinq morceaux de carton.
a) On tire au hasard un carton, on le pose sur la table ; on tire un second carton et

on le place à droite du précédent.
Peut-on former ainsi tous les nombres de la question a) de l' activité 2? Pourquoi?
Combien peut-on en former ?
b) On procède de même qu'au a) et en plus on tire un troisième carton qu'on place à droite du second.
Combien peut-on former de nombres de 3 chiffres de cette manière ?
c) Peut-on former des nombres de 6 chiffres de cette manière ?

c) Soit E un ensemble de n éléments et p un entier naturel non nul, inférieur ou égal à n.

1°) On appelle arrangement de p éléments de E, tout p-uplet d'éléments de E deux à deux distincts .

2°) Le nombre d'arrangements de p éléments de E est A_n^p $=n(n-1)......(n-p+1)$

3°) Si p= n, un tel arrangement est appelé permutation de E; le nombre A_n^n est noté n! de sorte que :
$A_n^n = n! = n(n-1)\ (n-2)\ ....\times 2\times 1$ est le produit des n premiers nombres entiers naturels non nuls.

Remarques : **1) On peut écrire $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ pour 1<p<n**

2) Par convention, on note $0! = 1$ de sorte que la formule est valable pour $1 \leq p \leq n$.

Calculer A_5^1 ; A_5^2 ;A_5^3 ;A_5^4 ; A_5^5.

Exercice 1 Vingt chevaux numérotés de 1 à 20 prennent le départ d'une course. Les parieurs essaient de deviner le tiercé gagnant dans l'ordre.
Combien ont-ils de choix possibles, en supposant qu'il n'y ait pas d'ex-aequo ?

Exercice 2 Une revue propose à ses lecteurs une liste de 4 chanteurs et leur demande un classement par ordre de préférence.
Combien y a-t-il de classements possibles ?

Activité 4

Reprenons l'exercice 1 ci-dessus.
Un parieur plus modeste ne s'intéresse qu'aux trois premiers arrivants pour pouvoir toucher le tiercé dans l'ordre ou le désordre.
a) Combien, pour un tiercé dans l'ordre, y a-t-il de tiercés dans le désordre.
b) Trouver les trois premiers avec ou sans ordre revient donc à choisir, parmi les 20 chevaux, trois chevaux qui occuperont les 3 premières places.
Combien y a-t-il de choix ?

d) Soit E un ensemble à n éléments.
Une combinaison de p éléments de E est une partie de E à p éléments $(o \leq p \leq n)$

Le nombre de combinaisons de p éléments de E est noté C_n^p ; on a : $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

Remarques :

Si $1 \leq p \leq n$, on a $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}$

Pour étendre la formule, on pose $A_n^0 = 1$ de sorte que $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}$ est valable pour tout entier naturel n.

Exercice

Dans un jeu de 32 cartes, combien y a-t-il de façons de choisir 3 cartes qui sont :

a) quelconques?
b) des as ?
c) des figures (Roi, Dame ou Valet) ?

Résumé

Tirer p éléments de E , d'un ensemble à n éléments

Tirages	successifs(avec ordre)	simultanés (sans ordre)
avec remise	n^p	
sans remise	A_n^p	C_n^p

Exercice

Un sac contient 9 jetons numérotés 1, 2, 3, 4, 5, 6,7, 8 et 9.

1°) On tire 3 jetons successivement, en remettant à chaque fois le jeton tiré dans le sac avant de tirer le suivant. On écrit côte à côte chacun des 3 chiffres tirés, dans l'ordre du tirage, formant ainsi un nombre de 3 chiffres. Combien peut-on obtenir de résultats différents ?

2°) On procède au tirage de 3 jetons successivement, mais sans remise. On place les jetons côte à côte, dans l'ordre du tirage.
Combien peut-on former ainsi de nombres de 3 chiffres ?

3°) On procède au tirage de 3 jetons simultanément. Combien peut-on obtenir de résultats différents?

II PROBABILITÉS

1) Vocabulaire des probabilités

Exemple : On lance un dé bien équilibré et on s'intéresse au numéro porté, après arrêt, par la face supérieure du dé.
On peut obtenir 1;2;3;4;5 ou 6 ; ce sont les 6 éventualités (ou cas possibles).
Leur ensemble $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$ est l'ensemble ou univers des possibles.

α

Chaque numéro a une chance sur 6 de sortir, on dit que la probabilité « d'obtenir 2 » par exemple est $\frac{1}{6}$.

Une partie de Ω est appelé un évènement ; par exemple «obtenir un nombre pair» correspond à la partie $\{2;4;6\}$.

Un singleton de Ω est appelé un évènement élémentaire. Ici les évènements élémentaires sont les singletons : $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{6\}$. Chacun a une probabilité égale à $\frac{1}{6}$.

Ω est appelé l'événement certain ; sa probabilité est toujours égale à 1.

L' ensemble vide $\varnothing$ est appelé l'événement impossible ; sa probabilité est toujours égale à 0.

Deux événements A et B sont dits incompatibles si $A \cap B = \varnothing$

a) Définition

Soit Ω un ensemble fini. Si à chaque élément x_i de Ω on sait associer un nombre p_i de l'intervalle $[0,1]$ tel que la somme de tous les p_i est égale à 1, on dit qu'on a défini une probabilité sur Ω : p_i désigne la probabilité de l'événement élémentaire $\{x_i\}$: $p_i = p(\{x_i\})$

Si A est un événement, la probabilité de A est la somme des probabilités des événements élémentaires dont il est la réunion.

Remarque

Si tous les événements élémentaires ont la même probabilité, on dit que l'hypothèse d'équiprobabilité est satisfaite. Alors :

Soit $A = \{a_1,\dots,a_k\}$ un événement ; par définition:

$$p(A) = p_1+p_2+\dots+p_k = \frac{1}{card(\Omega)} + \frac{1}{card(\Omega)} + \dots + \frac{1}{card(\Omega)} \quad (\text{ k fois})$$

$$= \frac{k}{card(\Omega)} = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$$

$card(A)$ désigne le nombre de cas favorables à la réalisation de A, $Card(\Omega)$ désigne le nombre de cas possibles, par suite :

$$p(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Exemple: Dans le lancer du dé, p(« obtenir un nombre pair») = $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Remarque Sauf précision contraire on supposera dans toute la suite qu' il y a équiprobabilité.

Activités 5 :

On lance 3 fois de suite une pièce de monnaie bien équilibrée.

1) Quel est l'univers des possibles ?
2) Quelle est la probabilité de l'événement : "obtenir exactement 2 fois "face"?
3) Quelle est la possibilité de :"obtenir au moins une fois "pile"?

Activité 6 :

Dans un jeu de 32 cartes, on tire simultanément 3 cartes au hasard.

1) Quelle est la probabilité de tirer un roi ? Une dame ? Un valet ?

2) Quelle est la probabilité de tirer une figure (roi ou dame ou valet)?

b) Propriétés

Si A et B sont incompatibles alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

En effet $P(A \cup B) = \dfrac{Card(AB)}{Card\Omega} = \dfrac{CardA+CardB}{Card\Omega} = \dfrac{CardA}{Card\Omega} + \dfrac{CardB}{Card\Omega}$

De même : si A; B et C sont 2 à 2 incompatibles

$p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C)$

Plus généralement soient A et B deux éléments, on a :

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (voir la formule sur les cardinaux)

Notons $\overline{A}$ l'événement contraire de A (complémentaire de A dans Ω), on a : $P(\overline{A}) = 1 - p(A)$

Exercice : Une urne contient 3 boules noires et 4 boules blanches indiscernables au toucher. On tire simultanément 2 boules.

1) Quelle est la probabilité que les 2 boules soient blanches ?

2) Quelle est la probabilité que les 2 boules soient noires ?

3) Quelle est la probabilité que les 2 boules soient de couleurs différentes ?

2) Variable aléatoire

Activité 7 : On poursuit l'exercice précédent. On gagne 100 F par boule noire tirée. Combien peut-on gagner ? Avec quelles probabilités ?

Réponse: On peut tirer 0, 1 ou 2 boules noires, donc gagner 0 F;100 F ou 200 F. Notons X la somme gagnée :

[X = 0] désigne "0 boule noire a été tirée", sa probabilité est $p[X=0] = \dfrac{2}{7}$

[X = 100] désigne "1 boule noire a été tirée", sa probabilité est $p[X=100] = \dfrac{4}{7}$

[X = 200] désigne "2 boules noires ont été tirées", sa probabilité est $p[X=200] = \dfrac{1}{7}$

On dit que X est une variable aléatoire: 0, 100 et 200 sont les valeurs prises par X .

Les résultats précédents sont généralement mis dans un tableau du type

x	0	100	200
p[X=x]	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$

Ce tableau définit la loi de probabilité de X.

Remarque : La somme des probabilités de la 2è ligne est égale à 1. C'est souvent un moyen de vérifier les calculs.

a) Définition Soit P une probabilité sur un univers Ω.
Une variable aléatoire sur Ω est une application X de Ω vers $\mathbb{R}$.
Soit $U = \{x_1, x_2 ....., x_n\}$ l'ensemble des valeurs de X. La loi de probabilité de X est l'application p' qui à x, élément de U, associe le réel $p'(x) = P[X = x]$ désignant la probabilité de l'événement $[X = x]$, c'est-à-dire l'ensemble des éléments de Ω dont l'image par X est x.

On représente la loi de probabilité de X par le tableau

x	x_1	x_2	x_3.........	x_n
$P(X=x)$	p_1	p_2	p_3.........	p_n

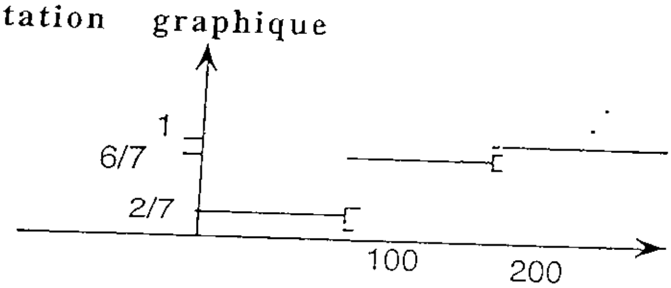
Remarque : $p_1+p_2+..........p_n = 1$
On rencontre aussi l'événement $[X\leq x]$ où $x\in\mathbb{R}$. Il désigne l'ensemble des éléments (éventualités) de Ω dont l'image par X est inférieure ou égale à x.
Dans l'exemple précédent :
$[X\leq 100]$ désigne l'événement" 0 ou 1 boule noire".

b) Fonction de répartition d'une variable aléatoire
C'est la fonction numérique F de la variable réelle X qui à $x \in\mathbb{R}$ associe le réel $P[X\leq x]$.

Dans l'exemple précédent :

Si x vérifie	l'événement $[X\leq x]$ est	$F(x) = P[X \leq x]$
$x< 0$	$\varnothing$	0
$0 \leq x <100$	$[X = 0]$	$\frac{2}{7}$
$100 \leq x <200$	$[X = 0] \cup [X = 100]$	$\frac{6}{7}$
$200\leq x$	Ω	1

Représentation graphique



Remarques : 1) La fonction prend ses valeurs dans [0,1]
2) C'est une fonction en escalier, sa courbe est formée de segments fermés à gauche et ouverts à droite et de deux demi-droites ; tous les supports étant horizontaux.
3) F est une fonction croissante.

c) Espérance mathématique d' une variable aléatoire

Activité 8 9 boules numérotées de 1 à 9, indiscernables au toucher, sont placées dans une urne. On tire au hasard 2 boules avec remise et on fait la somme des numéros obtenus ; soit x cette somme.

Si $x < 5$ on perd 200 F
Si $5 \leq x < 8$ on perd 100 F
Si $8 \leq x < 12$ on ne gagne ni ne perd rien
Si $12 \leq x < 15$ on gagne 100 F
Si $x \geq 15$ on gagne 200 F

1°) Déterminer la loi de probabilité de X "somme d'argent gagnée ou perdue".
2°) Combien peut-on espérer gagner (ou perdre) après 81 parties ?
Quel est le gain moyen par partie ?

Remarque : $P[X = 200] = P[x \geq 15]$; $P[X = 100] = P(15 > x \geq 12]$;.
$P[X = 0] = P[12 > x \geq 8]$; $P[X = -100] = P[8 > x \geq 5]$; $P[X = -200] = P[5 > x]$.
Puisque tirer les deux boules revient à former un couple de chiffres compris entre 1 et 9, on peut envisager le tableau suivant pour obtenir la loi de probabilité..

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	-200	-200	-200	-100	-100	-100	0	0	0
2	-200	-200	-100	-100	-100	0	0	0	0
3	-200	-100	-100	-100	0	0	0	0	100
4	-100	-100	-100	0	0	0	0	100	100
5	-100	-100	0	0	0	0	100	100	100
6	-100	0	0	0	0	100	100	100	200
7	0	0	0	0	100	100	100	200	200
8	0	0	0	100	100	100	200	200	200
9	0	0	100	100	100	200	200	200	200

Au cours de la tentative on peut espérer gagner 10 fois 200 francs ; 18 fois 100 francs ; 32 fois 0 franc ou perdre 15 fois100 francs ; 6 fois 200 francs .

Le gain espéré est de $200 \times 10 + 100 \times 18 = 0 \times 32 - 100 \times 15 - 200 \times 6 = 1100$F

Le gain moyen par partie est de $G = \frac{1100}{81} = 13{,}58$ francs environ.

Remarque: $G = 200 \cdot \frac{10}{81} + 100 \cdot \frac{18}{81} + 0 \cdot \frac{32}{81} + (-100) \cdot \frac{15}{81} + (-200) \cdot \frac{6}{81}$.

Ce gain moyen est l'espérance mathématique de X.

Définition

Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est p'.
L'espérance mathématique de X est le réel
$E(X) = x_1 p'(x_1) + x_2 P'(x_2) \ldots\ldots + x_n P'(x_n)$

d) Variance, écart-type d'une variable aléatoire.

Deux variables X et Y ont les lois de probabilité suivantes :

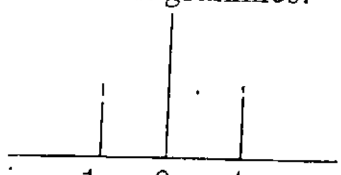
x	- 1	0	1
P[X=x]	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

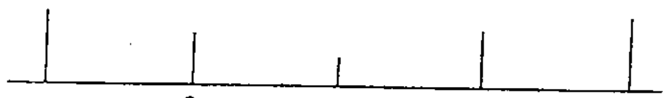
y	- 4	- 2	0	2	4
p[Y=y]	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$

E(X) = 0

E(Y) =0

Cependant ces deux variables semblent fort différentes : il suffit de comparer leurs diagrammes.





Pour mesurer la façon dont la variable s'écarte de son espérance, on utilise la variance ou l'écart-type.

* Définition Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

x	x_1	x_2	....	x_n
p[X=x]	p_1	p_2	....	p_n

et soit E(X) son espérance mathématique

On appelle variance de X, le réel
$V(X) = p'(x_1 - E(X))^2 + p'(x_2 - E(X))^2 + ...P'(x_n - E(X))^2$
On appelle écart type de X, le réel $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Exercice :Calculer la variance et l'écart-type de X et Y.

**Propriété :

Soit X la variable aléatoire de la définition précédente, on a

$$V(X) = P'(x_1{}^2) + P'(x_2{}^2) + ...P'(x_n{}^2) - [E(X)]^2$$

Exercice : Appliquer cette formule dans le calcul de la variance et de l'écart-type pour l'activité qui a permis d'introduire l'espérance mathématique

EXERCICES

Exercice 1

Ω est un univers fini d'éventualités muni d'une probabilité p.
A et B sont deux évènements tels que $p(A) = 0{,}3$ et $p(B) = 0{,}4$
Calculer $p(A \cup B)$ lorsque:

a) A et B sont incompatibles

b) $p(A \cap B) = 0{,}12$.

Exercice 2

Une urne contient cinquante jetons de forme et de couleurs différentes. Vingt sont ronds . Trente sont verts . Douze sont à la fois ronds et verts. On tire un jeton de l'urne . Quelle est la probabilité que ce jeton soit rond ou vert?

Exercice 3

Une urne contient quatre jetons verts , trois jetons blancs et un jeton rouge. On tire simultanément trois jetons de l'urne.

1) Quel est le nombre de tirages possibles?

2) Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants et donner le résultat sous forme de fraction irréductible.

A " Tirer exactement deux jetons verts"

B " Tirer au moins un jeton blanc."

C "Tirer un jeton de chaque couleur "

Exercice 4

Un jury est composé de 4 membres tirés au sort parmi 9 hommes et 6 femmes.

Calculer la probabilité pour que:

1) le jury comprenne 2 hommes et 2 femmes.

2) le jury ne comprenne aucune femme.

3) le jury comprenne au moins une femme.

Exercice 5

Dans la vitrine d' un bijoutier sont exposés trois bracelets, trois bagues , sept colliers et sept montres . Au cours de la nuit , un voleur a cassé la vitrine, mais, surpris par le gardien, s' est enfui en emportant seulement quatre bijoux attrapés au hasard. On suppose que chaque bijou a la même probabilité d' être pris par le voleur.

Quelle est la probablité des évènements suivants?

A: «Le voleur a emporté un bijou de chaque sorte ».

B: « Le voleur a emporté quatre bijoux de même nature ».

C: « Le voleur a emporté les trois bagues ».

D: « Le voleur a emporté au moins un collier ».

Exercice 6

Une classe de 36 élèves âgés de 16 à 18 ans comprend 22 garçons dont 18 âgés de 17 ans et 3 âgés de 18 ans.On dénombre d'autre part 6 filles âgées de 18 ans et 1 seule âgée de 16 ans.

1) Donner le nombre d'élèves par âge et par sexe.

2) A chaque cours , un élève choisi au hasard est interrogé . Calculer la probabilité pour que:

a) l'élève interrogé ait 16 ans.
b) l'élève interrogé ait au moins17 ans.
c) l'élève interrogé soit une fille.

3) A chaque cours le professeur désigne simultanément trois élèves pour effacer le tableau. Calculer la probabilité pour que:

a) un seul des élèves interrogés ait 16 ans.
b) deux au moins des élèves interrogés aient 17 ans.
c) les élèves interrogés aient des âges différents de16 ans.
d) un seul des élèves interrogés soit un garçon de 18 ans.

Exercice 7

Un sac contient 6 boules rouges et 3 boules vertes indiscernables au toucher. On extrait simultanément 4 boules du sac en remettant chaque fois la boule tirée dans le sac avant d'en tirer une autre.
On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges tirées.
Trouver la loi de probabilité de X puis calculer l' espérance mathématique et la variance de X .

Exercice 8

Une urne contient cinq boules rouges portant les numéros 1,1,3,3,5, trois boules vertes portant les numéros 1,2,4, et deux boules jaunes portant chacune le numéro 0.

1) On tire simultanément 3 boules de l' urne; calculer la probabilité des événements suivants :

a) A « les 3 boules tirées sont de même couleur »
b) B « les 3 boules tirées sont de couleurs différentes »

2) On tire simultanément 4 boules de l'urne. Chaque boule tirée portant le numéro 0 ne rapporte rien, chaque boule tirée portant un numéro pair non nul rapporte 100 francs tandis que chaque boule tirée portant un numéro impair rapporte 50 francs.
Soit X la variable aléatoire égale au montant rapporté par les 4 boules tirées.

a) Quelles sont les valeurs prises par X?
b) Déterminer la loi de probabilité de X puis calculer l'espérance mathématique de X.

Exercice 9

On prélève cinq œufs dans un lot de dix œufs dont quatre proviennent d'une poule et d'un coq de race F et six d'un coq et d'une poule de race G. Les œufs d'une race sont indiscernables des œufs de l'autre race.

1) Trouver le nombre de façons possibles de prélever cinq œufs pris parmi les dix œufs.

2) Calculer la probabilité des évènements suivants;

A " Il y a un seul œuf de race F parmi les cinq œufs prélevés".

B " Le prélèvement contient exactement trois œufs de race F".

3) Les cinq œufs prélevés sont mis à couver.

En supposant que chaque œuf doit éclore, le nombre de poussins de race F obtenus dans la couvée définit une variable X.

a) Quelles sont les valeurs possibles de X?

b) Déterminer la loi de probabilité de X ?

c) Calculer l' espérance mathématique de X.

(D' après Bac A session normale 1996, Université de Ouagadougou.)

Exercice 10

Un sac contient 2 boules rouges numérotées 1 et 2 et 5 boules jaunes numérotées de 1 à 5.

On tire simultanément et au hasard 3 boules du sac .

On admettra l'équiprobabilité des tirages.

1) Calculer la probabilité des évènements suivants.

A " Les 3 boules tirées sont jaunes".

B " 2 des 3 boules tirées sont jaunes".

C " 2 des 3 boules tirées sont rouges".

2) Soit X la variable aléatoire égale à la somme des nombres portés par les 3 boules tirées .

a) Quelles sont les valeurs prises par X ?

b) Déterminer la loi de probabilité de X.

c) Déterminer puis représenter graphiquement la fonction de répartition de X.

(On tracera le graphique sur une feuille séparée et on prendra sur l'axe horizontal 1cm pour une unité et sur l'axe vertical 17,5 cm pour une unité).

STATISTIQUE : RAPPELS

I. Vocabulaire

Exercice

On a relevé dans un groupe de jeunes la pointure des chaussures portées ; on a pu dresser alors le tableau suivant :

Pointure	36	37	38	39	40	41	42	43	44
Nombre de jeunes	1	3	4	7	10	16	22	12	5

1) Définir pour cette étude, la population statistique concernée et le caractère étudié.

2) Quel est l'effectif de la population ?

3) Dresser la série statistique des effectifs cumulés croissants.

4) Calculer la fréquence de chaque valeur du caractère.

5) Construire le diagramme en bâtons des effectifs de cette série.

6) Regrouper les valeurs en classes d'amplitude 3, la première étant [36 ;39 [et dresser le tableau des effectifs correspondants.
Construire l'histogramme des effectifs.

Définitions

Dans une étude statistique,

a) on appelle population statistique, l'ensemble sur lequel porte l'étude.
Tout élément de cette population s'appelle un individu.

b) on appelle échantillon toute partie de la population.

c) on appelle caractère statistique, la propriété que l'on étudie.
- Un caractère peut être quantitatif ou qualitatif ; il est quantitatif lorsque ses valeurs sont mesurables..
- Un caractère quantitatif peut être discret ou continu.

d) on appelle effectif d'une valeur x du caractère le nombre d'individus dont la valeur du carctère est x.
e) on appelle fréquence d'une valeur le quotient de l'effectif de cette valeur par l'effectif de la population.

N.B.:
Dans le cas où les valeurs sont regroupées en classes, on définit l'effectif et la fréquence des classes.
Effectifs et fréquences peuvent être représentés par divers diagrammes (diagramme en bâtons, diagramme cirulaire, histogramme).

II. Caractéristiques de position

Exercice

On considère la série statistique de l'exercice précédent :

1) Déterminer le mode et la médiane de cette série.

2) Calculer la moyenne de la série.

3) Après avoir regroupé les valeurs en classes d'amplitudes 3, la première étant [36 ; 39[, déterminer la classe modale de cette série.

4) On remplace chaque classe par son centre (demi-somme des extrémités de la classe). Calculer la moyenne correspondante. Comparer avec le résultat trouvé à la question 2).

Définitions

Etant donné une série statistique à caractère quantitatif :
a) on appelle mode, toute valeur dont l'effectif est le plus élevé.
Dans le cas d'un regroupement en classes, toute classe dont l'effectif est le plus élevé s'appelle une classe modale.

b) on appelle médiane tout nombre M pour lequel il y a autant d'individus dont la valeur du caractère est inférieure à M que d'individus dont la valeur du caractère est supérieure à M.

c) on appelle moyenne de la série, la moyenne arithmétique des valeurs de cette série.
Dans le cas d'un regroupement en classes la moyenne s'obtient en remplaçant chaque classe par son centre.

III. Caractéristiques de dispersion

Exercice

Un test oppose deux groupes A et B. Il consiste à répondre à une question notée de 0 à 20.
Les éléments des deux groupes répondent individuellement à la question. Les réponses notées des éléments de chaque groupe sont alors regroupées.
Voici la liste des notes obtenues par groupe.

Groupe A 8 ; 12 ; 7 ; 11 ; 11 ; 9 ; 9 ; 7 ; 6 ; 13 ; 12 ; 11 ; 8 ; 12 ; 10 ; 14 ; 8 ; 12 ; 11 ; 9 ; 7 ; 6 ; 9 ; 10 ; 11 ; 8 ; 12 ; 11 ; 10 ; 13 ; 12 ; 11

Groupe B 6 ; 11 ; 13 ; 9 ; 16 ; 8 ; 5 ; 5 ; 6 ; 11 ; 11 ; 7 ; 9 ; 12 ; 15 ; 7 ; 11 ; 13 ; 8 ; 7 ;12 ; 9 ; 14 ; 11 ; 10 ; 7 ; 11 ; 16

Un jury doit proposer un critère permettant de déclarer vainqueur un des deux groupes. Ce critère devant tenir compte de toutes les notes dans chaque groupe.

1) Calculer l'effectif de chaque groupe.
2) a) Calculer la moyenne de la série de notes obtenues dans chaque groupe.
b) Peut-on retenir la moyenne comme critère pour départager les deux groupes ?
c) Peut-on retenir le mode comme critère ?
3) a) Calculer la variance et l'écart-type de cette série.
b) Quelle interprétation peut-on faire de ces résultats ? Ces résultats peuvent-ils constituer des critères pour départager les deux groupes ?

Définitions

Soit une série statistique à caractère quantitatif discret, dont les valeurs sont : x_1, x_2, ... x_p avec pour effectifs respectifs n_1, n_2, ... n_p.
Soit $n = n_1 + n_2 ... + n_p$; m la moyenne de la série.

a) on appelle écart-moyen de la série le réel $e = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=p} n_i \, | x_i - m |$

b) on appelle variance de la série, le nombre

$$V = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=p} n_i (x_i - m)^2$$

c) on appelle écart-type le nombre $\sqrt{V}$

Remarque **On montre que** $V = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=p} n_i x_i^2 - m^2$

EXERCICES

Exercice1

1) En ajoutant 5 à chacun des nombres de la série 3 ; 6 ; 2 ; 1 ; 7 ; 5 , on obtient la série 8 ; 11 ; 7 ; 6 ; 12 ; 10.
Montrer que les deux séries ont des moyennes différentes mais ont le même écart-type.
Quelle est la relation entre les deux moyennes ?

2) En multipliant chacun des nombres de la série 3 ; 6 ; 2 ; 1 ; 7 ; 5 par 2 et en ajoutant 5, on obtient la série 11 ; 17 ; 9 ; 7 ; 19 ; 15.
Ces deux séries ont-elles même moyenne ? Même écart-type ? Quelle relation y -a-t-il entre les moyennes des deux séries? Entre les écarts-types des deux séries?

Exercice 2

Voici les notes de français des élèves d'une classe.

3 ; 10 ; 5 ; 9 ; 8 ; 11 ; 9 ; 8 ; 13 ; 7 ; 4 ; 7 ; 9 ; 13 ; 8 ;
11 ; 11 ; 6 ; 5 ; 9 ; 8 ; 7 ; 11 ; 6 ; 12 ; 7 ; 12 ; 11 ; 5 ; 10 ;
12 ; 14 ; 10 ; 15 ; 8 ; 14 ; 9 ; 8 ; 10 ; 7 ; 10 ; 6 ; 9 ; 10 ;
6 ; 8 ; 8 ; 9 ; 10 ; 12.

1) Représenter la série des notes dans un tableau à deux lignes (valeurs du caractère et effectifs).

2) Déterminer le mode et la moyenne m de cette série.

3) Calculer la variance V et l'écart-type ∂ de cette série.

4) Quel est le pourcentage d'élèves dont la note appartient à l'intervalle $[m-\delta; m+\delta]$? à l'intervalle $[m-2\delta; m+2\delta]$?

5) Les notes de mathématiques de cette classe forment une série de moyenne 10 et d'écart type 2.

Les élèves suivants sont-ils mieux classés en français ou en mathématiques ?

Abdoulaye : 12 en français, 13 en mathématiques

Boniface : 7 en français , 8 en mathématiques.

Exercice 3

L'observation des prix d'un objet en 400 points de vente donne le résultat suivant:

Classes de prix en francs	[355 ; 365[	[365 ; 375[	[375 ; 385[	[385 ;395 [	[395 ; 405[
Nombre de points de vente	2	4	10	30	95

Classes de prix en francs	[405 ; 415[	[415 ; 425[	[425 ; 435[	[435 ; 445[	[445 ; 455	[455 ; 465[
Nombre de points de vente	121	72	28	25	10	3

1) Déterminer les centres des classes, les fréquences correspondant à chaque classe, les effectifs cumulés croissants et les fréquences cumulées croissantes.
2) Tracer l'histogramme des effectifs.
3) Déterminer la classe modale.
4) Déterminer la moyenne arithmétique, la variance et l'écart-type.

Exercice 4

Une machine remplit automatiquement des paquets de farine (marqués 1 kg). Un échantillon de 100 paquets fournit les renseignements suivants (en kg).

Intervalle auquel appartient la masse en g du paquet	[0,992 ; 996]	[0,996 ; 1,000[	[1,000 ; 1,004[
Nombre de paquets	3	5	24

Intervalle auquel appartient la masse en g du paquet	[1,004 ; 1,008[	[1,008 ; 1,012[	[1,012 ;1,016[
Nombre de paquets	35	21	12

1) Calculer la moyenne et l'écart-type de cette série.
2) On admet que la machine est bien réglée lorsque la moyenne des masses des paquets est comprise entre 1,004 et 1,012 et l'écart-type inférieur à 0,002 (kg). La machine est-elle bien réglée ?