Année : 2022-2023

PHYSIQUE CHIMIE

Version harmonisée

Pour les ENSEIGNANTS

Séries Industrielles F_2 & F_3

1ères F_2 et F_3

- Un cours structuré
- Des méthodes expliquées
- Des exercices progressifs

SOMMAIRE

Première partie : STATIQUE

Chapitre 1 : Opération sur les vecteurs

Chapitre 2 : Corps solides et modélisation des actions mécaniques

Chapitre 3 : Équilibre d’un système matériel

Chapitre 4 : Équilibre d’un système matériel sous l’action des forces coplanaires

Chapitre 5 : Adhérence et frottement

Chapitre 6 : Centre de gravité d’un système matériel

CHAPITRE 1 : OPERATION SUR LES VECTEURS

Objectifs pédagogiques

A la fin de ce chapitre je dois être capable de :

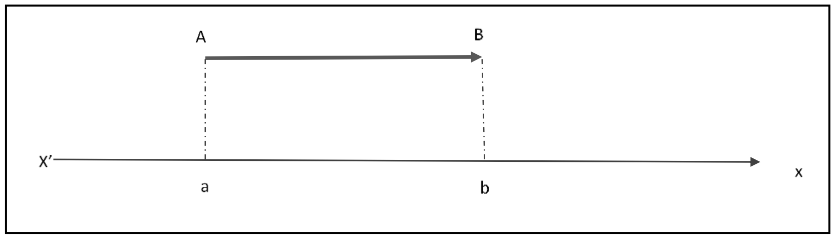
- ***Calculer le produit scalaire de deux vecteurs ;***
- ***Calculer le produit vectoriel de deux vecteurs ;***
- ***Déterminer les coordonnées d'un vecteur dans un repère.***

I. Définition :

Un vecteur est un segment de droite orienté.

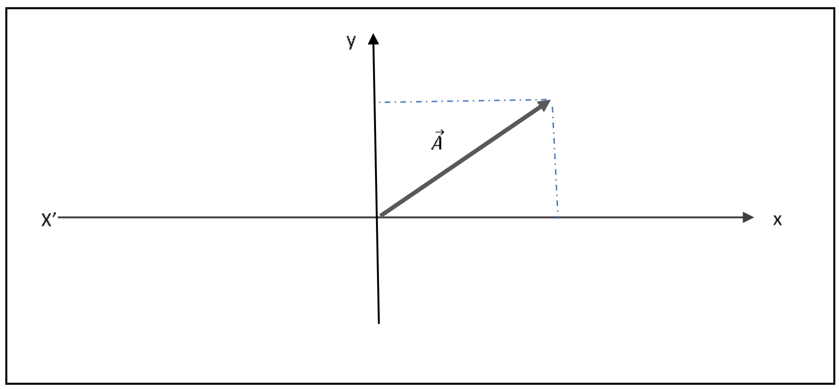
II. PROJECTION DES VECTEURS

1) Projection sur une droite orientée :



$\overline{ab}$ = Proj$_{xx'}\overrightarrow{AB}$

2) Projection d'un vecteur dans le plan



$$\vec{A}\begin{cases} Ax = A\cos\alpha \\ Ay = A\sin\alpha \end{cases}$$

III. LES DIFFERENTS TYPES DE VECTEURS

1. Le vecteur libre

C'est un vecteur qui peut subir une translation ; c'est-à-dire qu'il est défini seulement par sa direction son sens et son intensité. Son point application peut être quelconque.

Exemple : le vecteur de l'accélération de la pesanteur $\vec{g}$ *est un vecteur libre.*

C'est un vecteur qui peut subir une translation ; c'est-à-dire qu'il est défini seulement par la direction le sens et l'intensité. Son point application peut être quelconque.

2. Le vecteur glissant

C'est un vecteur qui ne peut se déplacer que sur sa droite d'action ; c'est-à-dire qu'il est défini par sa droite d'action, son sens et son intensité. Son point d'application, sans être fixe, ne peut être déplacé que sur sa droite d'action.

Exemple : Une force appliquée à un solide indéformable peut glisser sur sa droite d'action sans modifier l'effet qu'elle produit. On dira que la force est représentée par un vecteur glissant

3. *Le torseur*

C'est un ensemble de vecteurs glissants.

4. *Le vecteur lié*

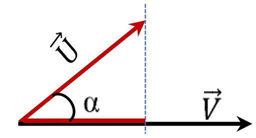
C'est un vecteur défini par ses quatre éléments : point d'application, direction, sens et intensité. Le vecteur lié ne peut pas se déplacer.

Exemple : Le poids d'un corps $\vec{P}$ est un vecteur lié. C'est un vecteur qui a un point d'application bien défini qui est le barycentre ou le centre de gravité du corps.

IV. LE PRODUIT SCALAIRE

1. Définition

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{U}$ *et* $\vec{V}$ (Voir Figure1-1) est défini par la relation :



(Figure 1-1)

$$\vec{U}.\vec{V} = \|\vec{U}\|.\|\vec{V}\|.\cos(\vec{U},\vec{V})$$

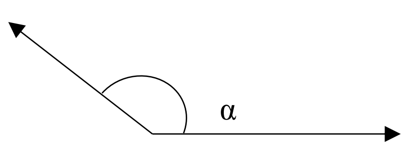
Posons $\alpha = (\vec{U},\vec{V})$

$$\vec{U}.\vec{V} = \|\vec{U}\|.\ \|\vec{V}\|.\ \cos\alpha$$

Le résultat ainsi obtenu est un réel qui est positif ou négatif selon les valeurs de α.

- Pour α aigu ou nul $(0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2})$, on a : $\cos\alpha > 0 \quad => \quad \vec{U}.\vec{V} > 0$

Pour α obtus ou plat $(\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi)$, on a : $\cos\alpha < 0 \quad => \quad \vec{U}.\vec{V} < 0$



- Pour α droit $(\alpha = \frac{\pi}{2})$, on a : $\cos\alpha = 0 \quad => \quad \vec{U}.\vec{V} = 0$

2. Les propriétés du produit scalaire

Le produit scalaire est :

- Commutatif : $\vec{U}.\vec{V} = \vec{V}.\vec{U}$
- Distributif par rapport à l'addition : $\vec{U}.(\vec{V_1} + \vec{V_2}) = \vec{U}.\vec{V_1} + \vec{U}.\vec{V_2})$
- Linéaire : $(\lambda \vec{U}).\vec{V} = \lambda(\vec{V}.\vec{U})$
- $\vec{U}.\vec{V} = 0 \Rightarrow \vec{U} = \vec{0}$ ou $\vec{V} = \vec{0}$ ou $\vec{U}$ *est perpendiculaire* à $\vec{V}$.

3. *Expression analytique du produit scalaire*

Soient les vecteurs $\vec{U}(x, y, z)$ *et* $\vec{V}$(x',y',z')

L'expression analytique du produit scalaire de $\vec{U}$ *et* $\vec{V}$ s'écrit :

$\vec{U}.\vec{V}$ = xx'+ yy'+ zz'

Déduisons la norme du vecteur $\vec{U}$:

D'après l'expression analytique, $\vec{U}.\vec{U}$ = xx + yy + zz $\Rightarrow$ $(\vec{U})^2 = x^2 + y^2 + z^2$

Or $(\vec{U})^2 = \|\vec{U}\|^2$; d'où $\|\vec{U}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

NB : - La projection d'un vecteur $\vec{U}$ sur l'axe (ox) est le produit scalaire $U_x = \vec{U}.\vec{i}$; c'est son abscisse.

- La projection d'un vecteur $\vec{U}$ sur l'axe (oy) est le produit scalaire $U_y = \vec{U}.\vec{j}$; c'est son ordonnée.
- La projection d'un vecteur $\vec{U}$ sur l'axe (oz) est le produit scalaire $U_z = \vec{U}.\vec{k}$; c'est sa côte.

Exercice1 : ***calculer le produit scalaire des vecteurs*** $\vec{A}(0, -1, 3)$ ***et*** $\vec{B}$***(-2, 1, 1)***

$\vec{A}.\vec{B} = 2$

Exercice 2 :

Le produit scalaire A des vecteurs $\vec{V}_1$ ***et*** $\vec{V}_2$ ***de normes respectives :*** $V_1 = 3$ ***et*** $V_2 = 5$ ***est, dans les cas suivants :***

1°)

a) : A=12,99 ;

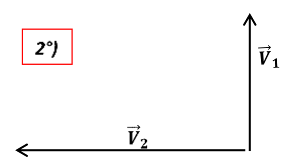
b) : A=7,5

c) : A=-12,99

d) : A=15

e): j'ai besoin d'aide

2°)



a) : A=15 ;

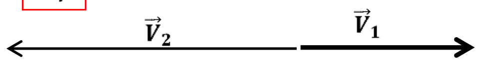
b) : A= 0

c) : A=-12,99

d) : A= -1

e): j'ai besoin d'aide

3°)



a) : A=15 ;

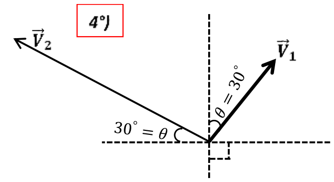
b) : A= 0

c) : A=-12,99

d) : A= -15

e): j'ai besoin d'aide

4°)



a) : A=15 ;

b) : A= 0

c) : A=-12,99

d) : A= -15

e): j'ai besoin d'aide

Exercice 3 :

Soit les vecteurs : $\vec{V}_1\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{V}_2\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$.

Calculer :

1°) les normes $\|\vec{V}_1\|$ et $\|\vec{V}_2\|$;

2°) le produit scalaire $a = \vec{V}_1.\vec{V}_2$;

3°) l'angle $\varphi = (\widehat{\vec{V}_1;\vec{V}_2})$.

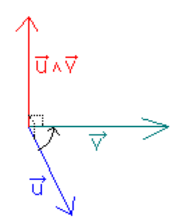
Rep: 1°) $\|\vec{V}_1\| = 3,61$; $\|\vec{V}_2\| = 6,4$
2°) $a = 7$
3°) $\varphi = 72,36°$

V. LE PRODUIT VECTORIEL

1. *Définition*

Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{U}$ *et* $\vec{V}$ est un troisième vecteur $\vec{W}$ noté :

$\vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V}$. (Voir figure 1-2)



La norme de $\vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V}$ est la surface du parallélogramme formé par $\vec{U}$ et $\vec{V}$ (Figure 1-2)

2. *Les caractéristiques de $\vec{W}$ (produit vectoriel de $\vec{U}$ et $\vec{V}$)*

- Direction : perpendiculaire au plan formé par $\vec{U}$ *et* $\vec{V}$
- Sens : tel qu'il forme avec $\vec{U}$ *et* $\vec{V}$ un trièdre direct $(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W})$

Norme : $\|\vec{W}\|$ = $\|\vec{U}\|.\|\vec{V}\|$./sin $(\vec{U}, \vec{V})$/

3. *Les propriétés du produit vectoriel*

- Le produit vectoriel est distributif par rapport à l'addition :
  $\vec{U}\wedge(\vec{V}_1 + \vec{V}_2) = \vec{U} \wedge \vec{V}_1 + \vec{U} \wedge \vec{V}_2$
- Le produit vectoriel n'est pas commutatif : $\vec{U} \wedge \vec{V} = -\vec{V} \wedge \vec{U}$

4. Expression analytique du produit vectoriel

Soient les vecteurs $\vec{U}(x, y, z)$ et $\vec{V}$(x', y',z') ;
L'expression analytique du produit vectoriel de $\vec{U}$ et $\vec{V}$ s'écrit :

$$\vec{U} \wedge \vec{V} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix} \vec{\imath} - \begin{vmatrix} x & z \\ x' & z' \end{vmatrix} \vec{\jmath} + \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$\boxed{\vec{U} \wedge \vec{V} = (yz'-y'z)\,\vec{\imath} - (xz' - x'z)\,\vec{\jmath} + (xy' - x'y)\,\vec{k}}$$

Exercice1 : Soient $\vec{A}(4, -1, 3)$ et $\vec{B}$(-2, 1, 2) deux vecteurs.

1-) Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B}$

2-) Calculer l'angle α = $\widehat{(\vec{A}\,;\vec{B})}$

Réponses : 1-) $\vec{C} = -5\,\vec{\imath} - 14\vec{\jmath} + 2\vec{k}$; 2-) $\alpha = 78{,}69°$

Exercice2 :

Soient : $\vec{F}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ deux vecteurs.

1°) Les composantes $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ du vecteur $\vec{W} = \overrightarrow{AB} \wedge \vec{F}$ (produit vectoriel de $\overrightarrow{AB}$ par $\vec{F}$) ont pour valeurs :

a) $\begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{-3} \\ \mathbf{22} \end{pmatrix}$ **; b)** $\begin{pmatrix} \mathbf{-2} \\ \mathbf{-\ 3} \\ \mathbf{-22} \end{pmatrix}$ **; c)** $\begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{24} \end{pmatrix}$ **; d)** $\begin{pmatrix} \mathbf{-3} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{22} \end{pmatrix}$ **; e) J'ai besoin d'aide**

2°) La norme de $\vec{W}$ est :

a) $\|\vec{W}\| = 22{,}34$; b) $\|\vec{W}\| = 22{,}37$; c) $\|\vec{W}\| = -22{,}34$; d) $\|\vec{W}\| = 21{,}88$; e) J'ai besoin d'aide.

3°) L'angle $\theta = \widehat{(\vec{W}; \overrightarrow{AB})}$ a pour valeur **:**

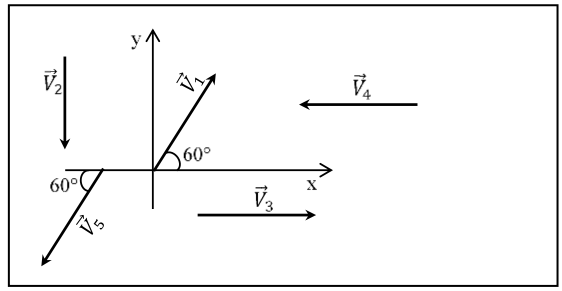
a) θ = 90° ; b) θ = 180° ; c) θ = 1,27 rad ; d) θ = $\pi\ rad$; e) J'ai besoin

4°) L'angle $\theta = \widehat{(\vec{F}; \overrightarrow{AB})}$ a pour valeur :

a) θ = 90° ; b) θ = 180° ; c) θ = 1,27 rad ; d) θ = $\pi\ rad$; e) J'ai besoin

Exercice 2 :

On donne les normes de cinq vecteurs : $\|\vec{V}_1\| = 5$; $\|\vec{V}_2\| = 4$; $\|\vec{V}_3\| = 5$; $\|\vec{V}_4\| = 3{,}5$; $\|\vec{V}_5\| = 3{,}8$



1°) Retrouver les composantes de chacun des vecteurs dans le repère (x ;y) donné.

2°) Calculer :

a- le vecteurs $\vec{a} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$;

b- Le scalaire $b = \vec{V}_1 . \vec{V}_2$;

c- La somme $\vec{c} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$;

d- La somme $\vec{d} = \vec{V}_4 - \vec{V}_1$;

CHAPITRE 2 :
CORPS SOLIDES, SYSTEME MATERIEL
MODELISATION DES ACTIONS EXTERIEURES

Objectifs pédagogiques

A la fin de ce chapitre je dois être capable de :

- ***Définir correctement les forces de contact et les forces à distance***
- ***Modéliser les actions intérieurs et extérieurs à un système mécanique***

I. CORPS SOLIDE

1. *Solide réel*

Le solide réel est un corps visible et touchable. C'est un corps qui possède une masse constante et un volume dont les limites varient sous l'action d'un système de force extérieures suivant une loi qui n'est pas connue à priori.

2. *Solide déformable suivant une loi connue*

C'est un solide qui possède une masse constante et un volume dont les limites varient de façons prévisible et quantifiable en fonction des charges appliquées.

Exemple : le ressort en compression et extension

3. *Solide indéformable*

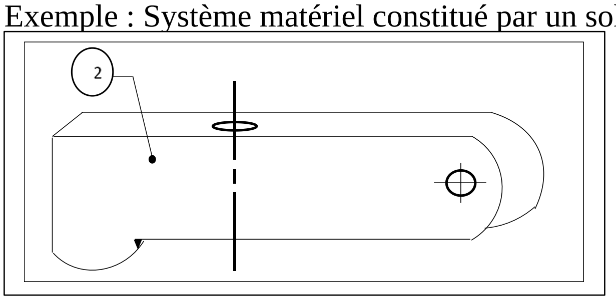
Il possède une masse constante et un volume dont les limites sont invariables quelles que soient les actions extérieures auxquelles il est soumis. La distance entre deux points d'un solide indéformable est invariable.

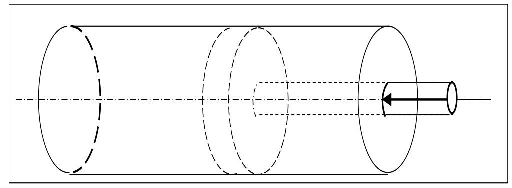
II. SYSTEME MATERIEL

1. *Définition*

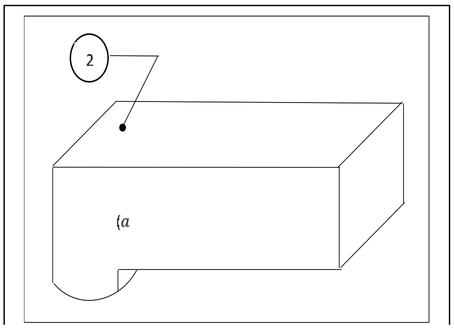
On appelle système matériel, une quantité de matière, homogène ou non, dont la masse reste constante pendant son étude.
NB : tout ce qui n'appartient pas au système matériel, appartient au milieu extérieur.

Exemple : Système matériel constitué par un solide

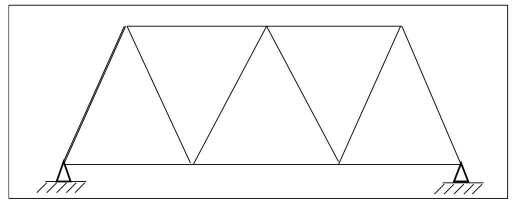




Système matériel constitué par une masse de gaz : Une masse de gaz enfermée dans un cylindre dont le volume varie grâce à un piston mobile constitue un système matériel.



Système matériel constitué par une portion de solide : la portion (2a) du solide (2)



Système matériel indéformable constitué par plusieurs solides : Le dessin ci-dessus est une charpente faîtière constituée à partir de barres assemblées, soudées ou rivetées. L'ensemble est supposé parfaitement rigide.

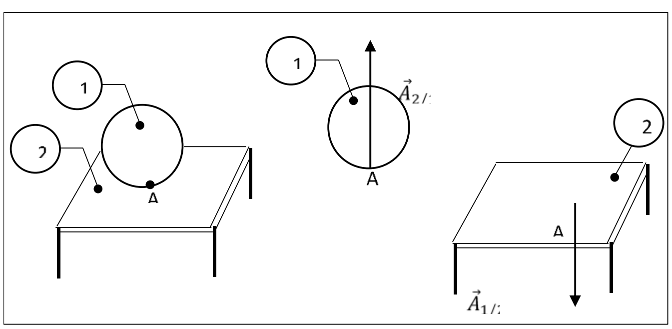
On dit qu'un système matériel est isolé, lorsque l'univers ne participe à aucune interaction avec lui.

Le système est pseudo-isolé si on peut annuler l'effet de l'extérieur pour qu'il devienne isolé.

2. *Principe des actions réciproques*

Si deux systèmes matériels S_1 et S_2 sont en interaction, S_1 exerce sur S_2 une force $\vec{F}(S_1 / S_2)$ et réciproquement, S_2 exerce sur S_1 une force $\vec{F}(S_2 / S_1)$ telle que $\vec{F}(S_1 / S_2) = -\vec{F}(S_2 / S_1)$. Ces deux forces sont diamétralement opposées.

Exemple :



III. PRINCIPE DE L'INERTIE

1. *Énoncé*

Il existe au moins un repère dans lequel, le centre d'inertie d'un système matériel quelconque :

- S'il est en mouvement, alors ce mouvement est rectiligne et uniforme :

- S'il est au repos, alors il reste au repos.

C'est le deuxième cas qui nous intéresse pour la suite de ce cours.

2. *Référentiel galiléen*

On appelle référentiel galiléen, les repères dans lesquels le principe de l'inertie est vérifié. Les repères dans lesquels ce principe n'est pas vérifié sont dits non-galiléens.

IV. FORCES EXTERIEURES, FORCES INTERIEURES

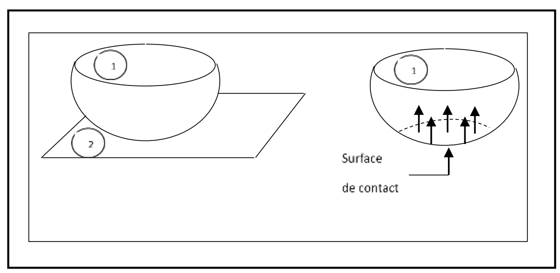
1. *Forces extérieures*

On appelle force extérieures, toutes actions exercées par le milieu extérieur sur un système matériel considéré. On peut les classer en deux catégories :

- Les forces à distances,
- Les forces de contact.

- Exemple de forces extérieures à distance
- Le poids
- Forces magnétiques,
- Forces électrostatiques
- Exemple de forces extérieures de contact

Tout contact du milieu extérieur sur un système donne naissance à des forces reparties sur toute la surface de contact.

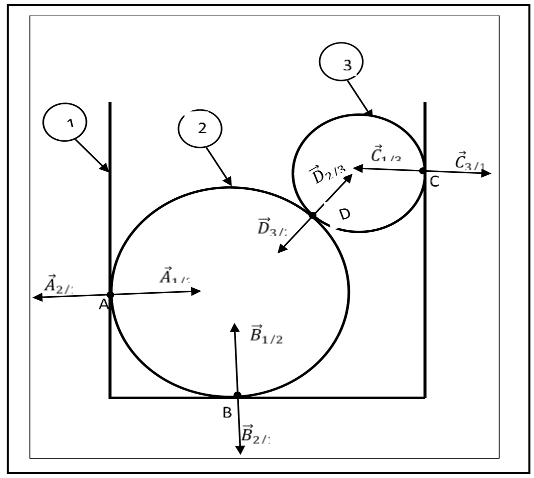


L'action mécanique de contact est fonction de :

- La géométrie des surfaces en contact,
- La nature des matériaux
- L'état des surfaces en contact (polissage, lubrification)
- La pression de contact et la déformation élastique qui en découle

2. *Forces intérieures*

On appelle force intérieure, toute force exercée par un élément du système matériel considéré sur un autre élément du même système.

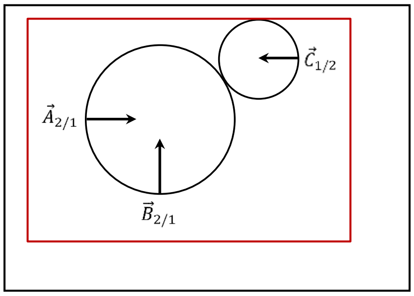


Exercice :

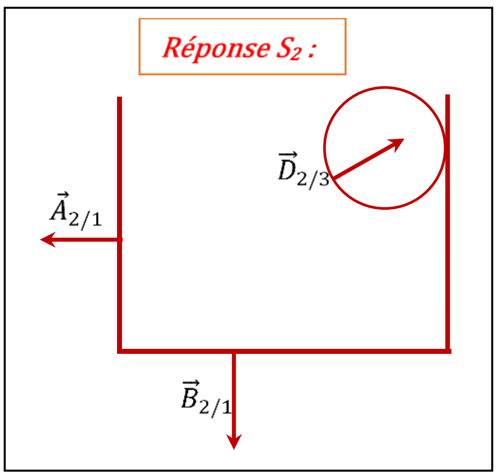
Dessiner les systèmes suivants, puis représenter les forces extérieures.

$S_1 = \{(2); (3)\}$

Rep de S_1 :



$S_2 = \{(1); (3)\}$



$S_3 = \{(1); (2)\}$

$S_4 = \{(2)\}$

V. MODELISATION DES ACTIONS MECANIQUES DE CONTACT

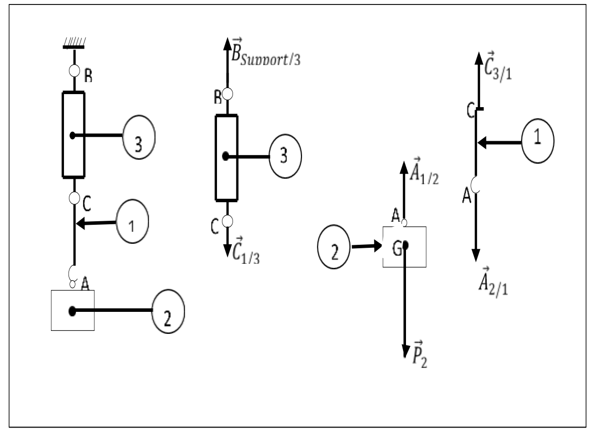
1. *Tension d'un fil*

La tension d'un fil se représente par un vecteur dont le point d'attache est son point d'application. Son sens est du point d'attache vers le milieu de la corde. Sa droite d'action est celui de la corde tendue.

Exemple : Sur la figure ci- contre, le dynamomètre (3) est tendu par une masse (2) par l'intermédiaire d'un fil (1). $\vec{A}_{1/2}$ est la tension exercée par la corde sur la masse.

***Remarques** : forces intérieures et forces extérieures à un système*.

- Considérons le système $\{(3)\}$; il a pour forces extérieures : $\vec{B}_{suport/3}$ et $\vec{C}_{1/3}$
- Considérons le système $\{(2)\}$; il a pour forces extérieures : $\vec{P}_2$ et $\vec{A}_{1/2}$
- Considérons le système $\{(1)\}$; il a pour forces extérieures : $\vec{A}_{2/1}$ et $\vec{C}_{3/1}$

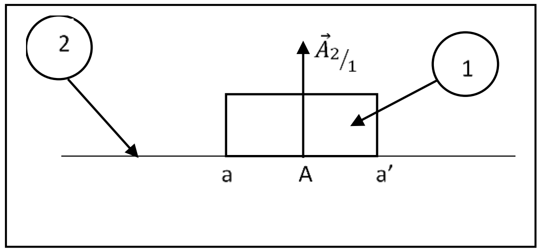


Toutes ces forces ont pour direction celle du fil tendu et pour intensité l'indication du dynamomètre.

2. Contact linéaire rectiligne sans adhérence

L'action mécanique de contact linéaire rectiligne sans adhérence (2) sur (1) est modélisable par un vecteur force $\vec{A}(2/1)$ tels que :

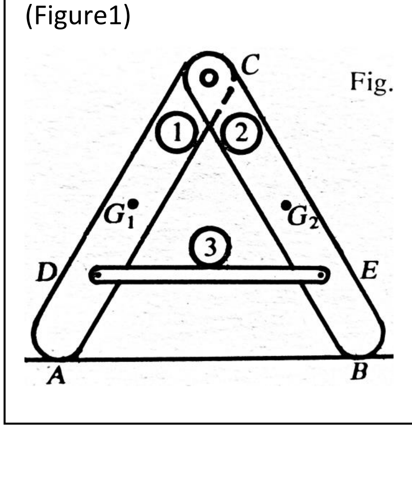
- Point d'application : milieu du segment $[a; a']$
- Direction ; la normale au plan tangent commun
- Sens : de (2) vers (1)
- Intensité : inconnue à déterminer.



EXERCICE1

On considère le système articulé défini par la figure ci-contre. Le poids de la travers (3) est négligeable. $\vec{P}_1$ *et* $\vec{P}_2$ sont les poids respectifs des solides (1) et (2).

(Figure1)



1°) Isoler successivement les systèmes matériels suivants :

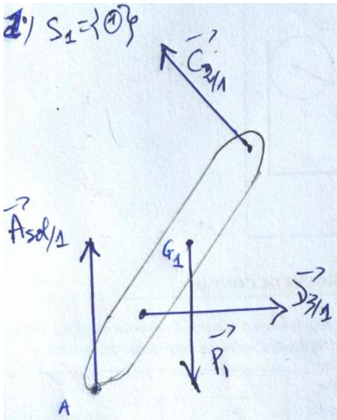
a - $S_1 = \{(1)\}$;

b- $S_2 = \{(1); (3)\}$;

c- $S_3 = \{(1); (2); (3)\}$.

2°) Mettez en place les forces extérieurs qui s'exercent sur chacun des systèmes représentés en 1°).

Rep de 2.a)



EXERCICE 2

Un câble (5) supporte les deux masses M_1 et M_2 et s'enroule sur une poulie (3) de masse M_3 articulée sans frottement en o sur un axe (4). Voir figure 1.35

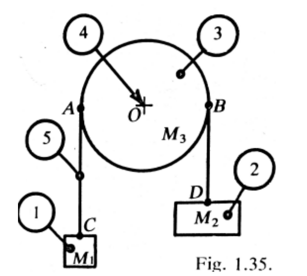


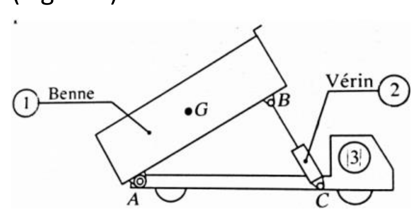
Fig. 1.35.

Isoler les systèmes matériels suivants puis représenter les forces extérieures qui s'exercent sur chacun d'eux : $S_1 = \{(1)\}$; $S_2 = \{(3)\}$; $S_3 = \{(5)\}$ et $S_4 = \{(4); (5)\}$.

EXERCICE 3

Une benne basculante (1) est articulée en A sur le châssis d'un camion (3). Elle est manœuvrée par un vérin (2) articulé en B et C. (Voir figure 3). La benne a un poids $\vec{P}$ qui s'applique en G.

(Figure3)



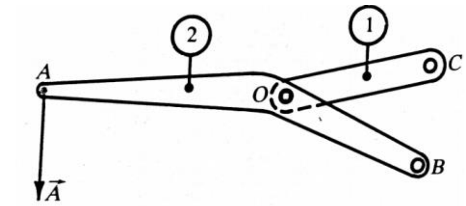
Considérez successivement les systèmes matériels suivants :
$S_1 = \{(2)\}$; $S_2 = \{(1)\}$; $S_3 = \{(1); (2)\}$;
$S_4 = \{(1); (2); (3)\}$.

Représentez ceux-ci et mettez en place les forces extérieurs qui s'exercent sur chacun d'eux.

EXERCICE 4

Une clé à ergots (Figure 4) est constituée de deux branches (1) et (2) articulée en O et possèdent un ergot aux extrémités B et C. Ces ergots viennent se loger dans des trous prévus sur un écrou cylindrique (3) (non représenté) et permet le serrage de celui-ci grâce à l'effort $\vec{A}$ appliqué en A.

(Figure 4)



Isoler les deux systèmes matériels suivants puis représenter les forces extérieures qui s'exercent sur chacun d'eux :

$S_1 = \{(2)\}$; $S_2 = \{(1); (2)\}$.

CHAPITRE 3 :
EQUILIBRE D'UN SYSTEME MATERIEL
PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA STATIQUE

Objectifs pédagogiques

A la fin de ce chapitre je dois être capable de :

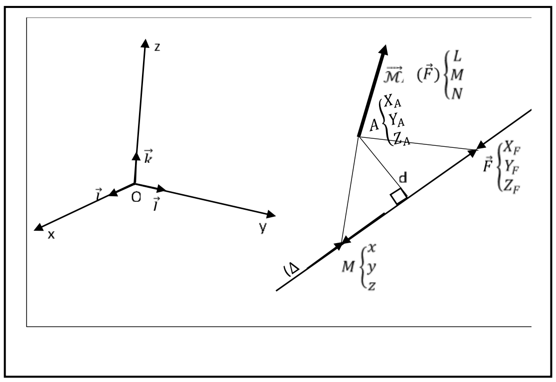
- ***Calculer correctement le moment d'une force par rapport à un point et à un axe ;***
- ***Définir l'équilibre d'un solide sous l'action des forces.***

I. MOMENT D'UNE FORCE

1. *Moment d'une force par rapport à un point*

a. *Définition*

Dans un repère orthonormé direct $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère une force $\vec{F}$(Fx, Fy, Fz) appliquée au point M(x, y, z) et un point quelconque A(x_A, y_A, z_A).



On appelle moment de la force $\vec{F}$ d'origine M par rapport au point A, le vecteur lié d'origine A, défini par la relation :

$\overrightarrow{\mathcal{M}_A}(\vec{F}) = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{F}$

b. *Propriétés*

- On démontre que $\overrightarrow{AM} \wedge \vec{F} = \overrightarrow{AP} \wedge \vec{F}$ quel que soit P ϵ (Δ) support de $\vec{F}$.
- Le vecteur $\overrightarrow{\mathcal{M}_A}(\vec{F})$ est perpendiculaire au plan défini par le support de $\vec{F}$ et le point A.
- Le sens du vecteur $\overrightarrow{\mathcal{M}_A}(\vec{F})$ est tel que le trièdre ($\overrightarrow{AM}$, $\vec{F}$, $\overrightarrow{\mathcal{M}_A}(\vec{F})$) soit direct.

- Norme :

$$\|\overrightarrow{\mathcal{M}_A}(\vec{F})\| = \|\vec{F}\|.\|\overrightarrow{AM}\|.|sin\,(\overrightarrow{AM},\vec{F})|$$

Soit d la distance séparant le point A et la droite (Δ).

$$\mathcal{M}_A(\vec{F}) = \text{F.d}$$

- L'unité du moment est le newton-mètre (N.m)
- Le moment d'une force $\vec{F}$ par rapport au point A est nul si le support de $\vec{F}$ passe par A (d = 0)

c. *Expression analytique*

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_A}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} (x-x_A) & (y-y_A) & (z-z_A) \\ Fx & Fy & Fz \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (y-y_A) & (z-z_A) \\ Fy & Fz \end{vmatrix} \vec{\imath} - \begin{vmatrix} (x-x_A) & (z-z_A) \\ Fx & Fz \end{vmatrix} \vec{\jmath} + \begin{vmatrix} (x-x_A) & (y-y_A) \\ Fx & Fy \end{vmatrix} \vec{k}$$

$\overrightarrow{\mathcal{M}_A}(\vec{F}) = (Fz(y-y_A) - Fy(z-z_A))\,\vec{\imath} - (Fz\,(x-x_A) - Fx\,(z-z_A))\,\vec{\jmath} +$ (Fy $(x-x_A) - Fx\,(y-y_A))\,\vec{k}$

Exercice d'application 1 :

Soit une force $\vec{F}\,(10;\ -15; 5)$ appliquée au point A (1, 3, -2).

Déterminer le moment de $\vec{F}$ par rapport aux points 0 (0 ; 0 ; 0) et I (2 ; 1 ; 0)

Réponse :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_o}(\vec{F}) = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F} = -15\,\vec{\imath} - 25\,\vec{\jmath} - 45\,\vec{k}$$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_I}(\vec{F}) = \overrightarrow{IA} \wedge \vec{F} = -20\,\vec{\imath} - 15\,\vec{\jmath} - 5\,\vec{k}$$

2. *Moment d'une force par rapport à un axe*

Soit le repère orthonormé direct (A, $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$) ; On considère le point B de l'axe (Az).

La relation fondamentale sur le moment d'une force par rapport à un point se traduit par :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_B}(\vec{F}) = \overrightarrow{\mathcal{M}_A}(\vec{F}) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{F}$$

Le produit vectoriel $\overrightarrow{BA} \wedge \vec{F}$ est un vecteur perpendiculaire à $\overrightarrow{AB}$, donc à l'axe (Az). Ainsi on obtient :

Proj/Az ($\overrightarrow{\mathcal{M}_B}(\vec{F})$) = Proj/Az ($\overrightarrow{\mathcal{M}_A}(\vec{F})$)

<u>Théorème</u> : la mesure algébrique de la projection sur un axe du moment d'une force par à un point de cet axe est indépendant de ce point.

<u>Définition</u> : le moment d'une force $\vec{F}$ par rapport à un axe (Az) est la mesure algébrique de la projection orthogonale sur (Az) du moment de $\vec{F}$ par rapport à un point quelconque de l'axe (Az).

$$\overline{\mathcal{M}_{Az}}(\vec{F}) = \text{Proj/Az}\,(\overrightarrow{\mathcal{M}_A}(\vec{F})) = \overrightarrow{\mathcal{M}_A}(\vec{F}).\,\vec{k}$$

Exercice d'application 2 :

2 : soit une force $\vec{F}\,(10;\ -15; 5)$ appliquée au point A (1, 3, -2).

1°) Déterminer le moment de $\vec{F}$ par rapport aux points 0 (0 ; 0 ; 0) et I (2 ; 1 ; 0)

1°) Déterminer : $\overline{\mathcal{M}_{Ix}}(\vec{F})$; $\overline{\mathcal{M}_{Iy}}(\vec{F})$; $\overline{\mathcal{M}_{Iz}}(\vec{F})$.

Réponse :

1°)

$\overrightarrow{\mathcal{M}_o}(\vec{F}) = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F} = -15\,\vec{\imath} - 25\,\vec{\jmath} - 45\,\vec{k}$

$\overrightarrow{\mathcal{M}_I}(\vec{F}) = \overrightarrow{IA} \wedge \vec{F} = -20\,\vec{\imath} - 15\,\vec{\jmath} - 5\,\vec{k}$

2°) $\overline{\mathcal{M}_{Ix}}(\vec{F}) = -20\ N.m$; $\overline{\mathcal{M}_{Iy}}(\vec{F}) = -15\ N.m$; $\overline{\mathcal{M}_{Iz}}(\vec{F}) = -5\ N.m$

<u>Cas de nullité</u>

Le moment d'une force $\vec{F}$ par rapport à un axe (Az) est nul lorsque le vecteur $\overrightarrow{\mathcal{M}_A}(\vec{F})$ est perpendiculaire à l'axe (Az) ; ce qui entraine que $\vec{F}$ et (Az) sont dans un même plan. Cela se traduit par :

- La $\vec{F}$ est parallèle à l'axe (Az), ou bien
- La force $\vec{F}$ est sécante à l'axe (Az).

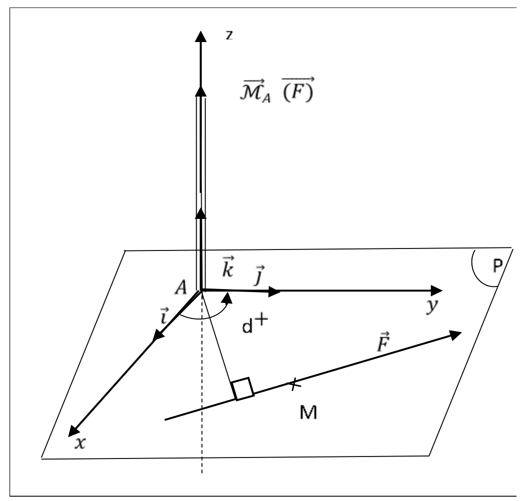
<u>Cas particulier important</u>

Si la force $\vec{F}$ se trouve dans le plan perpendiculaire à l'axe (Az), le vecteur $\overrightarrow{\mathcal{M}_A}(\vec{F})$ a pour support (Az) ; donc sa valeur algébrique $\overline{\mathcal{M}_{Az}}(\vec{F})$ est donnée par la relation :

$$\overline{\mathcal{M}_{Az}}(\vec{F}) = \overrightarrow{\mathcal{M}_A}(\vec{F}).\vec{k} = \pm\|\overrightarrow{\mathcal{M}_A}(\vec{F})\|$$

$$\overline{\mathcal{M}_{Az}}(\vec{F}) = \pm\|\vec{F}\|\mathrm{d}$$

- Le signe du moment est positif si la force fait tourner le solide dans le sens positif (anti-horaire ou trigonométrique en vue de dessus) autour de l'axe (Az).
- Le signe est négatif si la force fait tourner le solide dans le sens horaire ou négatif autour de l'axe (Az).



(Figure 3-2)

II. EQUILIBRE D'UN SYSTEME MATERIEL

1. Définition

Un système matériel est en équilibre, c'est-à-dire au repos par rapport au milieu extérieur qui l'entoure, si les coordonnées de ses différents points dans un repère lié au milieu extérieur sont constantes.

2. Principe fondamental de la statique

La condition nécessaire pour qu'un système matériel soit en équilibre dans un repère fixe lié au milieu extérieur est :

- La somme géométrique des forces extérieures qui lui sont appliquées est nulle
  $\sum \vec{F}\text{ext} = \vec{0}$;
- La somme géométrique des moments des forces extérieures, par rapport à un point quelconque A du repère est nulle
  $\sum \overrightarrow{\mathcal{M}_A}(\vec{F}) = \vec{0}$.

3. Équations algébriques d'équilibre

$$\sum \vec{F}\text{ext} = \vec{0} \quad => \quad \begin{cases} F_{1x} + F_{2x} + \cdots \ldots \ldots .. + F_{nx} = 0 \\ F_{1y} + F_{2y} + \cdots \ldots \ldots .. + F_{ny} = 0 \\ F_{1z} + F_{2z} + \cdots \ldots \ldots .. + F_{nz} = 0 \end{cases}$$

Soit L, M, N les composantes du moment $\overrightarrow{\mathcal{M}_A}(\vec{F})$ respectivement suivant (Ax), (Ay) et (Az).

$$\sum \overrightarrow{\mathcal{M}_A}(\vec{F}) = \vec{0} \quad => \quad \begin{cases} L_1 + L_2 + \cdots \ldots \ldots .. + L_n = 0 \\ M_1 + M_2 + \cdots \ldots \ldots .. + M_n = 0 \\ N_1 + N_2 + \cdots \ldots \ldots .. + N_n = 0 \end{cases}$$

EXERCICE 1 :

Le tirant de la figure 3-4 est soumis aux actions de quatre câbles.

1) Déterminer la résultante $\vec{T}$ des quatre tensions de câble $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$, $\vec{T}_3$, et $\vec{T}_4$ s'exerçant sur le tirant.

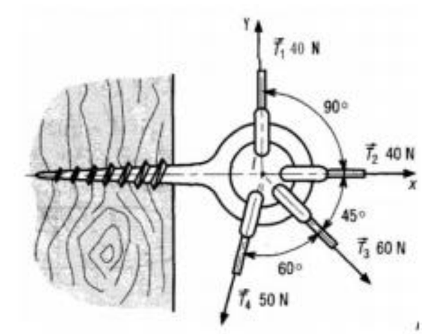
2) Le tirant est-il en équilibre sous l'action de ces quatre forces ?

3) Si non :

a- Représenter et déterminer la réaction $\vec{R}$ du bois sur ce dernier.

b- Quelle est la valeur de l'angle θ que fait la droite d'action de $\vec{R}$ avec l'axe horizontal (ox).

c- Le tirant subit- il une flexion, une traction, une torsion ou un cisaillement ?



(Figure 3-4)

Réponses exercice 1:

1) $\vec{T} \begin{cases} T_x = 69{,}49 \\ T_y = -50{,}73 \end{cases} \Rightarrow \|\vec{T}\| = 86\ N$ *et* $\beta = \tan^{-1}\left(\frac{T_y}{T_x}\right) = -36°$

2 Non

3a) $\theta = \beta = -36°$

EXERCICE 2 :

Dans un référentiel orthonormé direct on donne : les coordonnées de M point d'application de la force $\vec{F}$ et les composantes algébriques de celle-ci : $M(2, 6, -3)$ et $\vec{F}(0, 0, 120)$. *Unités : longueur en m ; force en N*

1) Calculer les composantes L, M, N du moment de la force $\vec{F}$ en O centre du référentiel.

2) Comment expliquez-vous le fait que *N= 0 ?*

Réponses exercice 2 :

1) L =720, M = -240, N =0 (unité : le N.m).
2) La force $\vec{F}$ est parallèle à l'axe (Oz) donc $\overrightarrow{\mathcal{M}_o}(\vec{F})$ est perpendiculaire à Oz.

EXERCICE 3 :

Dans un référentiel orthonormé direct on donne on donne deux points *M et P :*
M (2, -4, 0) et *P (0, 3, 0)*
Tels que : *M* est l'origine de la force $\vec{F}(-2, 7, 0)$ et *P* appartient à la droite (δ) support de $\vec{F}$. *Unités : longueur en m ; force en N.*
1) Calculer les composantes *L, M, N* du moment de la force $\vec{F}$ en O centre du référentiel.
2) Vérifier que les composantes du vecteur défini par $\overrightarrow{OP} \wedge \vec{F}$ sont identiques à *L, M, N* précédemment calculées.

Réponses exercice 3:

L = 0, M = 0, N = 6 (unité : le N.m).

EXERCICE 4 :

Dans un référentiel orthonormé direct on donne on donne : les coordonnées de M point d'application de la force $\vec{F}$ et les composantes algébriques de celles-ci : *M (1, 2, -2)* et $\vec{F}(-2, 3, 1)$. Les coordonnées de deux points distincts A et B : *A (0, -6, 2)* et *B (2, 3, -5) ; Unités : longueur en m ; force en N.*
1) Calculer les composantes $L_A,\ M_A,\ N_A$ du moment de $\vec{F}$ en A.
2) Calculer les composantes $L_B,\ M_B,\ N_B$ du moment de $\vec{F}$ en B.
3) Retrouver le résultat de la deuxième question en appliquant la relation : $\overrightarrow{\mathcal{M}_B}(\vec{F}) = \overrightarrow{\mathcal{M}_A}(\vec{F}) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{F}$.

4) Calculer $\|\vec{F}\|$ et $\|\overrightarrow{\mathcal{M}_A}\|$.

5) Quelle est la distance d du point A à la droite (δ) support de $\vec{F}$?

Réponses exercice 4 :

1) $L_A = 20,\ M_A = 7,\ N_A = 19$
2)et 3) $L_B = -10,\ M_B - 5,\ N_B = -5.$
4) $\|\vec{F}\| = \sqrt{14}$, $\|\overrightarrow{\mathcal{M}_A}\| = 9\sqrt{10}.$
5) $d = 9\sqrt{\frac{5}{7}}.$

EXERCICE 5 :

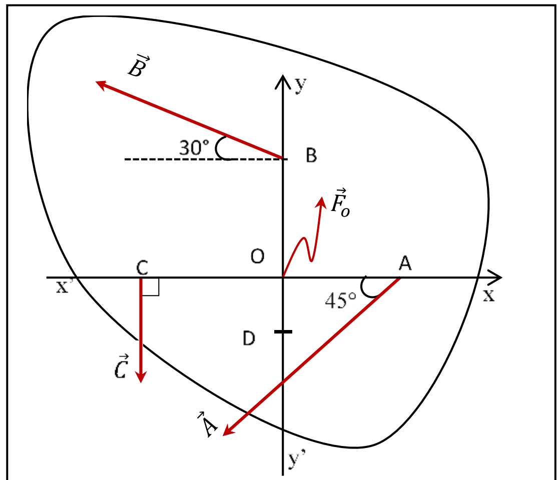
Une plaque d'épaisseur négligeable est libre de se déplacer dans le plan o, x, y autour du point fixe o. Voir figure 3-5

Cette plaque est soumise aux trois forces $\vec{A},\ \vec{B},\ \vec{C}$ et à la force $\vec{F}_O$ de l'axe fixe o.

On donne : $OA = a = 0{,}12\ m$; $OB = b = 0{,}15\ m$;

$OC = c = 0{,}2\ m$;

$\|\vec{A}\| = 80\ N$; $\|\vec{B}\| = 30\ N$; $\|\vec{C}\| = 50\ N$



(Figure 3-5)

1) Calculer le moment de chacune des quatre forces suivantes : $\vec{A}$, $\vec{B},\ \vec{C}$ et $\vec{F}_O$.

2) Cette plaque est-elle en équilibre ? Justifiez votre réponse.

3) Quelle force $\vec{D}$ parallèle à l'axe des abscisses $(x'x)$ faudrait-il appliquer à la plaque au point D tel que $OD = d = 0{,}1\ m$ pour que l'équilibre de celle-ci soit assuré ?

4) Dans l'hypothèse où la plaque est en équilibre sous l'action des cinq forces $\vec{A},\ \vec{B},\ \vec{C},\ \vec{D}\ et\ \vec{F}_O$ calculer F_{o_x} et F_{o_y} composantes algébriques de $\vec{F}_O$ dans le repère défini par la figure3-5.

Réponses exercice 5 :

1) $\overline{\mathcal{M}_o}(\vec{A}) = -6{,}78\ N.m$; $\overline{\mathcal{M}_o}(\vec{B}) = 3{,}89\ N.m$; $\overline{\mathcal{M}_o}(\vec{C}) = -10\ N.m$; $\overline{\mathcal{M}_o}(\vec{F}_O) = 0$

2) La plaque n'est pas en équilibre car la deuxième équation d'équilibre $\sum \overrightarrow{\mathcal{M}_o}(\vec{F}_{ext}) = \vec{0}$ n'est pas vérifiée. En effet $\overline{\mathcal{M}_o}(\vec{A}) + \overline{\mathcal{M}_o} + \overline{\mathcal{M}_o}(\vec{C}) + \overline{\mathcal{M}_o}(\vec{F}_O) = -12{,}89\ N.m \neq 0$

3) $\|\vec{D}\| \approx 128{,}9\ N$ *vers la droite car* $\vec{D} = 128{,}9\,\vec{\imath}$.

4) $F_{o_x} \approx 153{,}65\ N$ et $F_{o_y} \approx 91{,}57\ N$

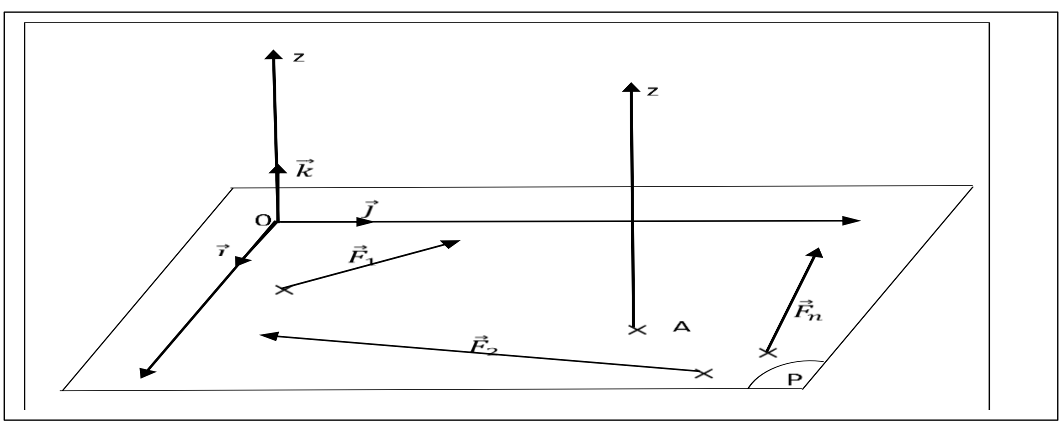
CHAPITRE 4 :

EQUILIBRE D'UN SYSTEME MATERIEL SOUS l'ACTION DE FORCES COPLANAIRES

I/ EQUILIBRE SOUS L'ACTION DE FORCES COPLANAIRES

1. Forces coplanaires

On dit des forces $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ qu'elles sont coplanaires lorsque ces forces sont située dans un même plan.



2. Expression du principe fondamental

Si un système matériel est en équilibre sous l'action d'un système de forces extérieures coplanaires :

- La somme géométrique des forces extérieures est nulle, $\Sigma\, \vec{F}_{ext} = \vec{0}$

- La somme algébrique des moments des forces extérieures par rapport à l'un des axes perpendiculaires au plan des forces est nulle. $\Sigma\, \overline{\mathcal{M}}_{Az}\, (\overrightarrow{F_{ext}}) = 0$ A est un point quelconque du plan des forces

3. Équation algébrique de résolution

$$\vec{F}_1 \begin{cases} \vec{F}_{x_1} \\ \vec{F}_{y_1} \\ \mathbf{0} \end{cases} \quad \vec{F}_2 \begin{cases} \vec{F}_{x_2} \\ \vec{F}_{y_2} \\ \mathbf{0} \end{cases} \quad \vec{F}_3 \begin{cases} \vec{F}_{x_3} \\ \vec{F}_{y_3} \\ \mathbf{0} \end{cases} \quad \vec{F}_n \begin{cases} \vec{F}_{x_n} \\ \vec{F}_{y_n} \\ \mathbf{0} \end{cases}$$

$$\boxed{\Sigma\, \vec{F}_{ext} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{F}_{1x} + \mathbf{F}_{2x} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \mathbf{F}_{nx} = 0 \\ \mathbf{F}_{1y} + \mathbf{F}_{2y} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.\ldots\ldots.\ldots + \mathbf{F}_{ny} = \mathbf{0} \end{cases}}$$

$$\overline{\mathcal{M}}_A(\vec{F}_1) \begin{cases} 0 \\ 0 \\ N_1 \end{cases} \quad \overline{\mathcal{M}}_A(\vec{F}_2) \begin{cases} 0 \\ 0 \\ N_2 \end{cases} \quad \overline{\mathcal{M}}_A(\vec{F}_n) \begin{cases} 0 \\ 0 \\ N_n \end{cases}$$

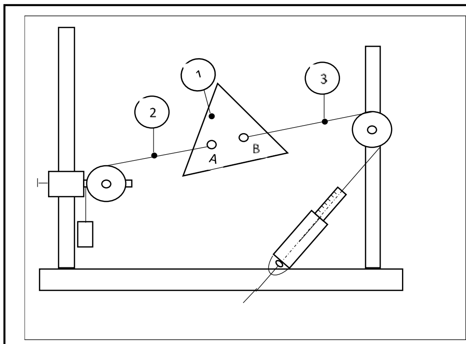
$$\boxed{\Sigma\, \overline{\mathcal{M}}_{Az\,(\overrightarrow{F_{ext}})} = 0 \quad \Rightarrow \quad \{N_1 + N_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + N_n = 0}$$

II / APPLICATIONS DU PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA STATIQUE

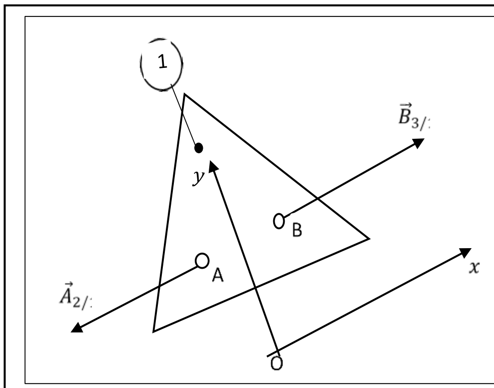
1 - Équilibre sous l'action de deux forces

- **Étude expérimentale**

Considérons le système expérimental défini par la figure 4a :



(Figure4a)



(Figure4b)

Isolons le solide (1) et représentons les actions extérieures exercées sur lui. (Figure 4b).

Le solide (1) est en équilibre si et seulement si :

$$\begin{cases} \Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{0} \text{ s'écrit : } \vec{A}_{2/1} + \vec{B}_{3/1} = \vec{0} & (1) \\ \Sigma \overline{\mathcal{M}}_{\mathcal{B}z}(\vec{F}_{ext}) = 0 \text{ s'écrit : } \overline{\mathcal{M}}_{\mathcal{B}z}(\vec{A}_{2/1}) + \overline{\mathcal{M}}_{\mathcal{B}z}(\vec{B}_{3/1}) = 0 & (2) \end{cases}$$

*L*e support de $\vec{B}_{3/1}$ passe par B donc : $\overline{\mathcal{M}}_{\mathcal{B}z}(\vec{B}_{3/1}) = 0$ (3)

(2) et (3) entrainent : $\overline{\mathcal{M}}_{\mathcal{B}z}(\vec{A}_{2/1}) = 0$ (4)

Puisque la force $\vec{A}_{2/1}$ n'est pas nulle (fil (2), $tendu$) la relation (4) implique que le support de la force $\vec{A}_{2/1}$ passe par B. Comme il passe aussi par A on en déduit que le support de $\vec{A}_{2/1}$ est la droite AB.
Ce dernier résultat et la relation (1) montrent que les forces $\vec{A}_{2/1}$ et $\vec{B}_{3/1}$ sont directement opposées, d'où :

THEOREME

Si un système matériel est en équilibre sous l'action de deux forces extérieures, ces deux forces sont diamétralement opposées.

2. Équilibre sous l'action de trois forces

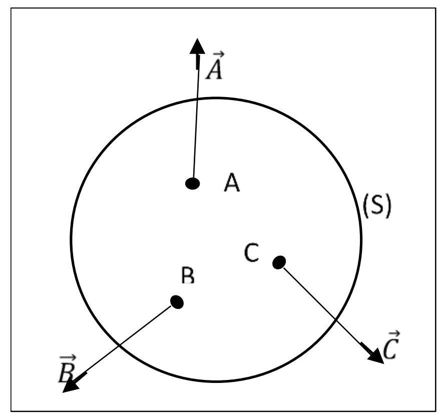
Soit un système matériel en équilibre sous l'action de trois forces extérieures, $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$. (Figure 2A)
Le principe fondamental de la statique permet d'écrire les relations :

$$\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = \vec{0} \qquad (1)$$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_A}(\vec{A}) + \overrightarrow{\mathcal{M}_A}(\vec{B}) + \overrightarrow{\mathcal{M}_A}(\vec{C}) = 0 \qquad (2)$$

LA définition du moment d'une force par rapport à un point montre que : $\overrightarrow{\mathcal{M}_A}(\vec{A}) = \vec{0}$

La relation (2) montre alors que les vecteurs liés : $\overrightarrow{\mathcal{M}_A}(\vec{B})$ et $\overrightarrow{\mathcal{M}_A}(\vec{C})$ sont diamétralement opposés (figure 3A). On en déduit que les points A, B, C et les vecteurs liés $\vec{B}$ et $\vec{C}$ sont dans un même plan.

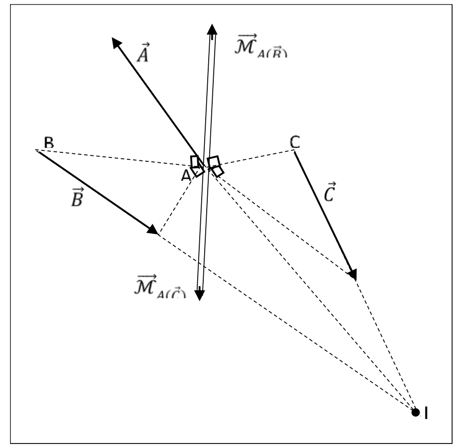


(Figure2A)

La relation (1) implique alors que $\vec{A}$ est aussi dans ce plan. Dès lors, deux cas sont possibles :

1^{er} cas : si deux des forces se coupent en I , l'équation des moments en I montre que le support de la troisième force passe par I.

2^{e} Cas : si deux des forces sont parallèles, la relation (1) montre que les trois forces sont parallèles. (Confer Exercice 6 B)



(Figure3 A)

THEOREME

Si un système matériel est en équilibre sous l'action de trois forces extérieures :

- Ces trois forces sont coplanaires ;
- Dans ce plan, elles sont soit concourantes, soit parallèles.

3 Algorithmes de résolution algébriques et graphiques

3.1 Équilibre sous l'action de trois forces non parallèles

➢ Pour déterminer **graphiquement** la résultante $\vec{R}_c$ de deux forces non parallèles $\vec{F}_A$ et $\vec{F}_B$, on construit le parallélogramme dont les côtés sont les normes des deux forces $\vec{F}_A$ et $\vec{F}_B$. La norme de la résultante $\vec{R}_c$ est obtenue en mesurant la distance de la diagonale convenable.

(Confer : Exercice 2 ; Exercice3 ; Exercice 4 et Exercice9.)

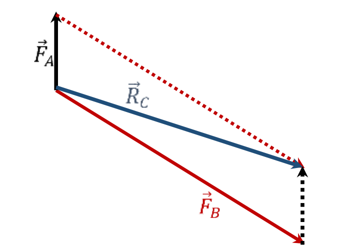
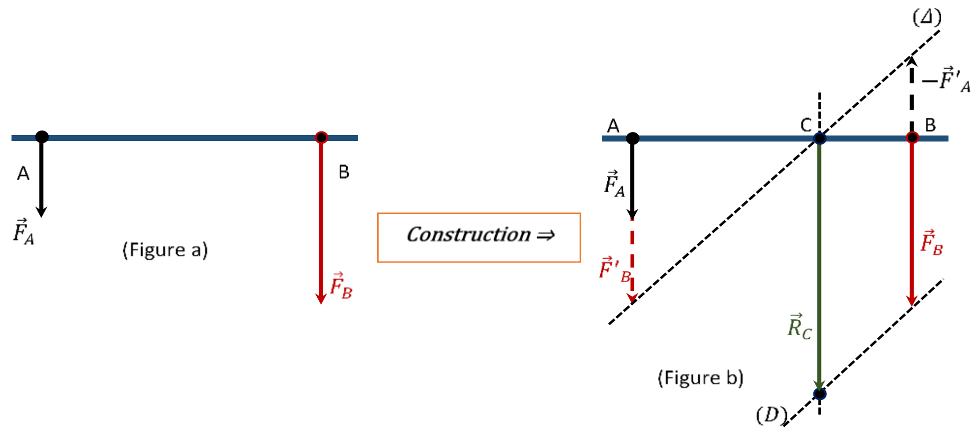


Figure 4-5

3.2 Équilibre sous l'action de trois forces parallèles ; Résultante de deux forces parallèles

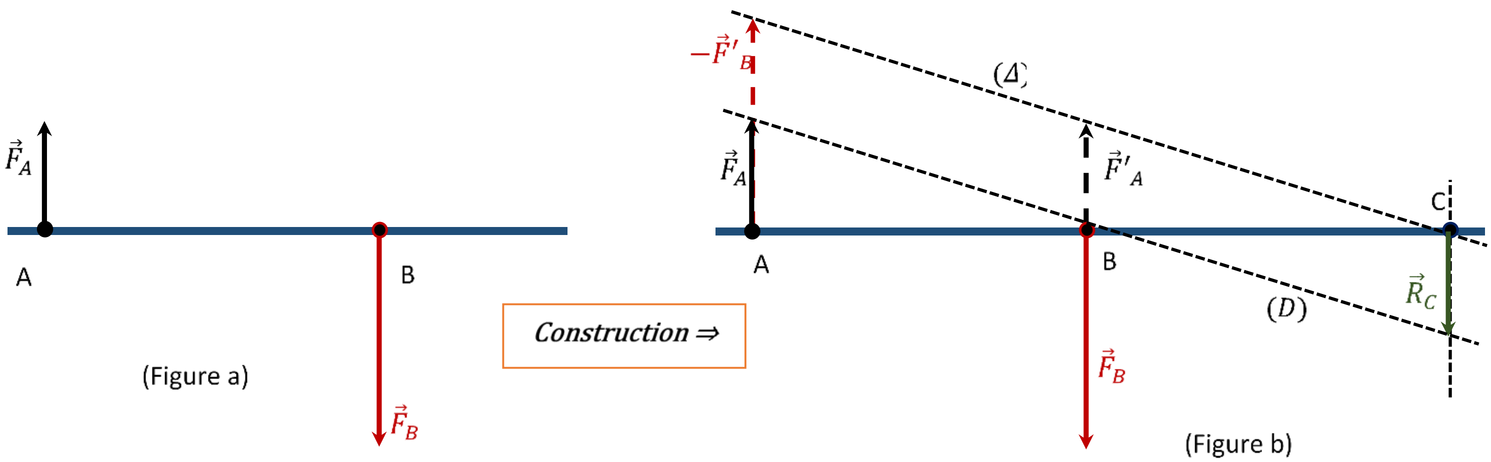
➢ Pour déterminer **graphiquement** la résultante $\vec{R}_c$ de deux forces parallèles $\vec{F}_A$ et $\vec{F}_B$, on procède comme suit :

- Permuter les points d'application des deux forces tout en changeant le sens de l'un des vecteurs déplacés. Soient -$\vec{F}'_A$ et $\vec{F}'_B$ (ou bien $\vec{F}'_A$ et $-\vec{F}'_B$) les vecteurs déplacés.
- La droite (Δ) qui relie les extrémités des vecteurs déplacés ($-\vec{F}'_A$ et $\vec{F}'_B$) coupe l'axe (A B) au point d'application C de la résultante $\vec{R}_c$.



(Figure 4c) Forces de même sens

- Tracer la parallèle à (Δ) passant par l'extrémité de $\vec{F}_B$ (Force dont le vecteur déplacé n'est pas inversée): Cette droite (D) coupe la parallèle aux forces passant par le point C en C'. La norme de $\vec{R}_c$ est donner par la distance (CC').
- Le sens de $\vec{R}_c$ est de C vers C'.



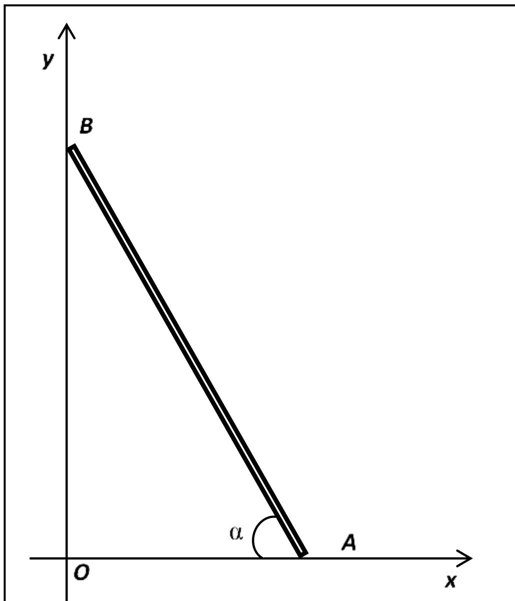
(Figure 4d) Forces de sens contraires

NB : Si le solide est soumis uniquement aux actions $-\vec{R}_c; \vec{F}_A \; et \; \vec{F}_B$ alors il sera en équilibre.
En effet : On a $\vec{R}_c = \vec{F}_A + \vec{F}_B \Rightarrow \vec{F}_A + \vec{F}_B - \vec{R}_c = \vec{0}$

- Pour déterminer **analytiquement** (par calculs), on résout les relations : $\sum \overline{M}_A\left(\vec{F}_{ext}\right) = 0$ (ou bien $\sum \overline{M}_B\left(\vec{F}_{ext}\right) = 0$) et $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$. Pour trouver la distance AC et le module $\left\|\vec{R}_c\right\|$.

(Confer : Exercice 2 ; Exercice3 ; Exercice 4 ; Exercice 8 et Exercice 11)

Exercice 1



(Figure 4-5)

Une échelle de longueur 20 m de poids $Q = 400\,N$ est appuyée contre un mur parfaitement lisse en un point B situé à 16 m du sol horizontal (voir figure 4-5). Son centre de gravité est situé à 1/3 de sa longueur à partir du bas. Un homme de poids $P = 700\,N$ grimpe jusqu' au milieu de l'échelle et s'arrête. On suppose que le sol est rugueux et que le système reste en équilibre statique.

1) Calculer en degré l'angle α que fait l'échelle avec le sol horizontal.
2) Représenter les forces extérieures appliquées à l'échelle.
3) Enoncer le principe fondamental de la statique.

Déterminer les réactions $\vec{R}_A$ et $\vec{R}_B$ aux points de contact de l'échelle avec le mur et le sol.

Réponses EXERCICE 1 :

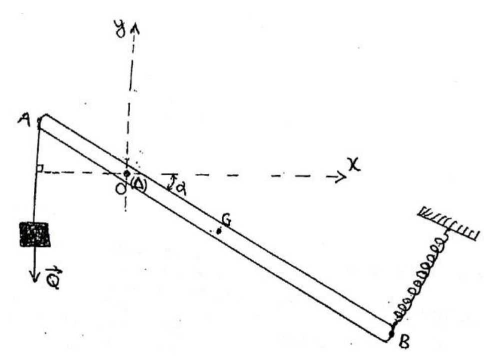
1) $\boldsymbol{\alpha = Sin^{-1}\left(\frac{OB}{AB}\right) = 53,13°}$ **;3)**

$\|\vec{R}_B\| = R_{Bx} = \frac{3P+2Q}{6.\tan\alpha} = 362,5\ N;$

$\vec{R}_A \begin{cases} R_{Ax} = -R_{Bx} = 362,5\ N \\ R_{Ay} = P + Q = 1100\ N \end{cases}$

$\Rightarrow \|\vec{R}_A\| = 1158,19\ N$

Exercice 2



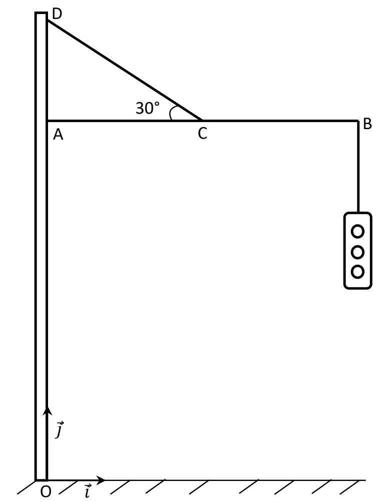
(Figure 4-6)

Une barre AB de masse m = 1 kg et de longueur AB = *l* = 60 cm et mobile autour d'un axe horizontal (Δ) passant par O tel que OA = 10 cm. Cette barre est maintenue en équilibre par un ressort tendu et un fil qui supporte une charge Q de masse m' = 4 kg. (Figure 4-6)

1. Isoler la barre et représenter les différentes actions mécaniques qui s'exercent sur elle.
2. Déterminer les coordonnées de toutes les actions extérieures qui s'exercent sur la barre dans le repère (Oxy).
3. Énoncer le principe fondamental de la statique.
4. En étudiant l'équilibre de la barre, déterminer la réaction R de l'axe (Δ) et la tension T du ressort sur la barre sachant que cette dernière est perpendiculaire à la barre.

Données : g = 10 N/kg ; α = 60°

Exercice 3



(Figure 4-7)

Une potence des feux tricolores est constituée d'une barre horizontale AB soudée au mat vertical en A. Le câble CD est accroché au mat en D et à la barre en C (voir figure 4-7). Les feux tricolores, de poids total $P = 30\ N$ sont suspendus en B. Le câble CD soutient la barre en son milieu C. Les poids de la barre et des câbles sont négligés.

1°) Isoler le câble CD et représenter les forces extérieures $\vec{C}$ et $\vec{D}$ S'exerçant sur lui.

2°) a- Isoler la barre AB puis faire le bilan (de préférence, sous forme de tableau) des actions extérieures s'exerçant sur elle.

b- Calculer la norme des forces $\vec{C}$ et $\vec{D}$.

C- En déduire les composantes x et y de la force $\vec{A}$ qu'exerce le mat sur la barre au point A.

d- Quelle est la norme de $\vec{A}$?

e- Déterminer l'angle α formé entre la droite d'action de $\vec{A}$ et la barre horizontale AB.

Exercice 4

Le balancier AC est une tige homogène de poids $G = 350\ daN$.Il est fixé au point A à l'aide d'une articulation et un vérin le manœuvre au point B. En C est accrochée une nacelle de poids $P = 200\ daN$. Dans la position d'équilibre de la figure 4e, l'axe du vérin fait un angle droit avec le balancier. On donne : $\Theta = 60°$; $AC = 7\ AB = 4{,}20\ m$.

A°) *Questions de cours :*

Choisir la bonne réponse parmi les listes (a, b et c).

1) *Un solide est en équilibre sous l'action de deux forces si :*
   - a- *Les deux forces sont concourantes ;*
   - b- *Les deux forces sont diamétralement opposées ;*
   - c- *Les deux forces sont coplanaires.*
2) *Un système est en équilibre sous l'action de plusieurs forces extérieures lorsque ces forces ont une somme :*
   - a- *Vectorielle nulle ;*
   - b- *Arithmétique nulle*
   - c- *Algébrique positive.*

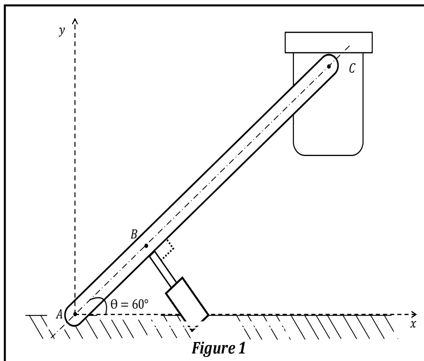


Figure 1

B°) Etude de l'équilibre du balancier :

1) Isoler le balancier AC et représenter les actions extérieures exercées sur lui.
2) Déterminer le module de la force $\vec{B}$ exercée par le vérin.
3) a- Calculer les composantes A_x et A_y de la réaction $\vec{A}$ de l'articulation.

   b- Calculer l'angle d'inclinaison β de la force $\vec{A}$ par rapport à l'horizontal.

Réponses Exercice 4 :

A°) 1b) ; A 2a) ; B 2): $\|\vec{B}\| = \frac{7}{2}(G + 2P).Cos\theta = 1312,5\ daN$;

B°) 3a): $\vec{A}\begin{cases} A_x = 1136,65\ daN \\ A_y = -106,25\ daN \end{cases}$; **3b):** $\beta = -5,34°$.

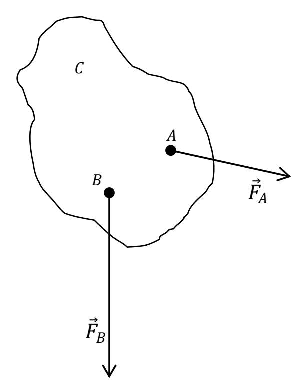
Exercice 5 :

Le godet d'un chargeur de poids $\boldsymbol{P} = 450\ daN$ (matériau y compris) est articulé en au point O. Il est manœuvré en A par un vérin de masse négligeable. Le godet est en équilibre dans la position de la figure1.On donne : $OG = 2250\ mm$; $OA = 1450\ mm$.
L'axe du vérin fait un angle $\alpha = 60°$ avec la verticale.

A°) *Questions de cours :*

1) *A quelles conditions un solide est-il en équilibre sous l'action de trois forces non parallèles ?*
2) *Répondre par vrai ou faux :*
   On appelle moment vectoriel d'une force $\vec{F}$, d'origine M par rapport à un point A, le vecteur défini par :
   a- $\vec{M}_A(\vec{F}) = \overrightarrow{MA} \wedge \vec{F}$;
   b- $\vec{M}_A(\vec{F}) = \vec{F} \wedge \overrightarrow{MA}$;
   c- $\vec{M}_A(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$;
   d- $\vec{M}_A(\vec{F}) = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{F}$;
   e- $\vec{M}_A(\vec{F}) = \overrightarrow{AM}.\vec{F}$;
   f- $\vec{M}_O(\vec{F}) = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{F}$.

(Figure 4f)



B°) Étude de l'équilibre du godet :

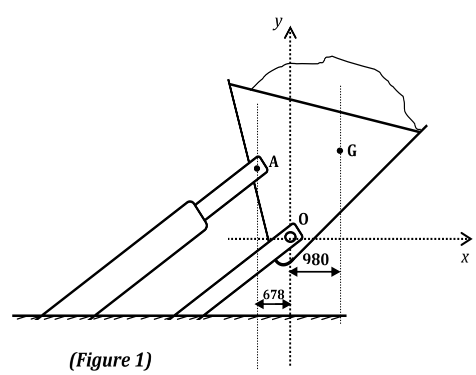
1) Isoler l'ensemble godet-chargement et représenter les actions extérieures exercées sur lui.

2) Calculer dans le repère orthonormé (O, x, y, z) les composantes x_A , y_A, x_G et y_G des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OG}$.

3) Déterminer le module de la force $\vec{A}$ exercée par le vérin.

4) En déduire les composantes R_x *et* R_y de la réaction $\vec{R}$ de l'articulation.

5) Calculer l'angle d'inclinaison θ de la force $\vec{R}$ par Rapport à l'horizontal (o, x).



(Figure 1)

Réponses : EXERCICE 5 :

2) $x_A = -678; y_A = \sqrt{OA^2 - X_A^2}$ =1281,72 ; $x_G = 980$;
$y_G = \sqrt{OG^2 - X_G{}^2} = 2025{,}36.$
3) $\|\vec{A}\| = \frac{X_G.P}{Y_A Sin\alpha - X_A Cos\alpha} = 3047{,}34\ daN$
4) $R_x = \|\vec{A}\|.Sin\alpha = 263{,}56\ daN$; $R_y = \|\vec{A}\|.Cos\alpha + P = 602{,}17\ daN$
5) $\theta = 66{,}32°$

Exercice 6

A°) Une plaque non pesante (s) est en équilibre sous l'action de trois force $\vec{F}_A$, $\vec{F}_B$ et $\vec{F}_C$ (Voir figure 4f).
On donne $\theta = (\vec{F}_A ; \vec{F}_B) = 60°$; $F_A = 80\ N$; $F_B = 100\ N$.
1°) Construire graphiquement la force $\vec{F}_C$.
(*Échelle* : 1 cm pour 10 N).
2°) a- Calculer le produit scalaire $\vec{F}_A.\vec{F}_B$
b- En déduire le module de la force $\vec{F}_C$.

B°) Une barre (FE) de masse négligeable est maintenu en équilibre horizontal par trois actions verticales $\vec{D}$, $\vec{E}$ *et* $\vec{F}$. (*Voir figure 2*)

1- Déterminer par une construction graphique, le point d'application et la norme de la force $\vec{F}$ appliquée à l'autre extrémité (*échelle* : 1 cm pour 100 N et 1Cm pour 0,5 m).
2- Quelle est la longueur $l = EF$ de la barre ?
On donne : $DE = 1{,}5\ m$; $\|\vec{D}\| = 500\ N$; $\|\vec{E}\| = 350\ N$.
3- En appliquant le principe fondamental de la statique au point F, retrouver les valeurs de l et $\|\vec{F}\|$.

Réponses : EXERCICE 6

A2a) :$\vec{F}_A.\vec{F}_B = 4000$; : A2b): $\|\vec{F}_C\| = 156{,}2\ N$; B 3):$FE = l = 5\ m$;
$\|\vec{F}\| = 150\ N$

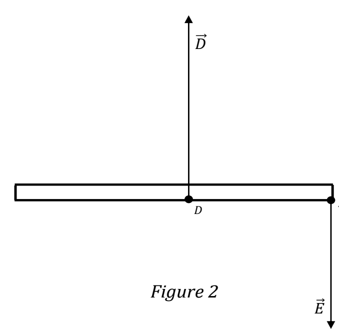
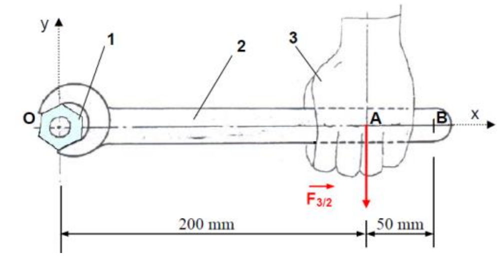


Figure 2

Exercice 7

Un opérateur (3) serre l'écrou (1) par l'intermédiaire d'une clé plate 2. Voir figue 4-8. Pour ce faire, il exerce un effort de 100 N au point A ; OA = 200 mm et AB = 50 mm

1. Déterminer le moment produit au point O (centre de l'écrou) par cet effort.
2. Déterminer ce moment si l'opérateur exerçait cet effort en B.



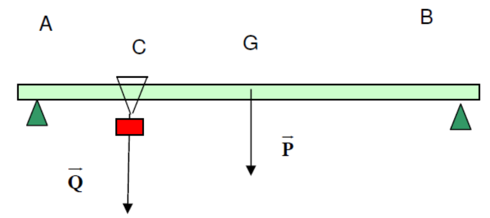
(Figure 4-8)

Réponses EXERCICE 7 :

1) $\mathcal{M} = -20\ N.m$; 2) $\mathcal{M} = -25\ N.m$

Exercice 8 :

Un rail homogène, de poids P = 1500 N, repose sur deux appuis simples A et B tels que AB= 8m. Un chariot supportant une charge peut se déplacer sur le rail. Lorsque le chariot est en C (AC=2m), une force Q verticale de valeur 5000 N s'exerce en C. Voir figure 4-9. Déterminer dans ces conditions, les valeurs des réactions des appuis en A et en B.



(Figure 4-9)

Réponses EXERCICE 8 :

$$\|\vec{B}\| = \frac{Q.AC}{AB} + \frac{P}{2} = 2000\ N\ ;$$

$$\|\vec{A}\| = Q + P - \|\vec{B}\| = 4500\ N$$

Exercice 9 :

Un remonte charge peut être schématisé par la figure 4-10 ci-contre :

- Une poutre homogène OA rigide de poids P = 1000N, mobile autour d'un axe horizontal passant par O ;
- Un câble BC horizontal soutenant la poutre
- En A est suspendue une charge Q = 1500 N.

1. Faire le bilan des actions extérieures sur la poutre.
2. Etudier l'équilibre de la poutre et déterminer la tension du câble BC et la réaction de l'axe en O.

Données : OA = 8 m ; OB = 5 m ; α = 30°

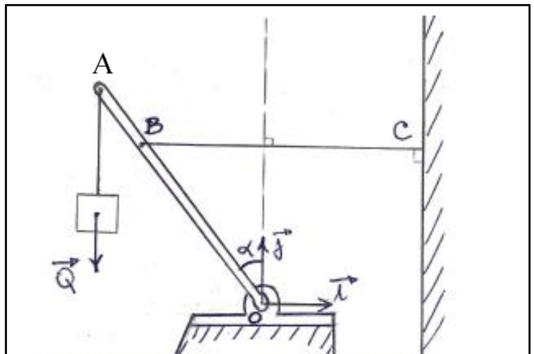


Figure 4-10

Réponses EXERCICE 9 :

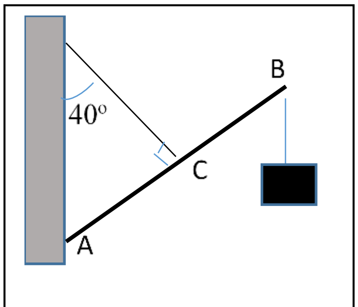
$$2°)\ \|\vec{F}\| = 1848\ N\ ;\ \ \vec{R}\begin{cases} R_x = -F = -1848\ N \\ R_y = P + Q = 2500\ N \end{cases} \Rightarrow \|\vec{R}\| = 3108{,}9\ N\ ;\ \ \vec{R}\ fait\ un\ angle$$

$$\theta = -36{,}47°\ par\ rapport\ \text{à}\ la\ verticale.$$

Exercice 10

Une tige de poids négligeable est encastrée dans un mur ; elle supporte en B une charge de poids de 2500 N. En un point C, milieu de AB, un fil maintient la tige en équilibre. (fig 4-9)

1. Isoler la tige puis représenter les forces qui lui sont appliquées.
2. Faire le bilan de ces forces.
3. Ecrire la condition d'équilibre de la tige.
4. Déterminer les composantes des forces appliquées.
5. Déterminer les expressions des moments par rapport un axe (Az) perpendiculaire au plan des forces.
6. Déterminer les actions $\vec{T}_C$ et$\vec{R}_A$, respectivement en C et A.
7. Trouver la direction de l'action $\vec{R}_A$ exercée en A.



(Figure 4-9)

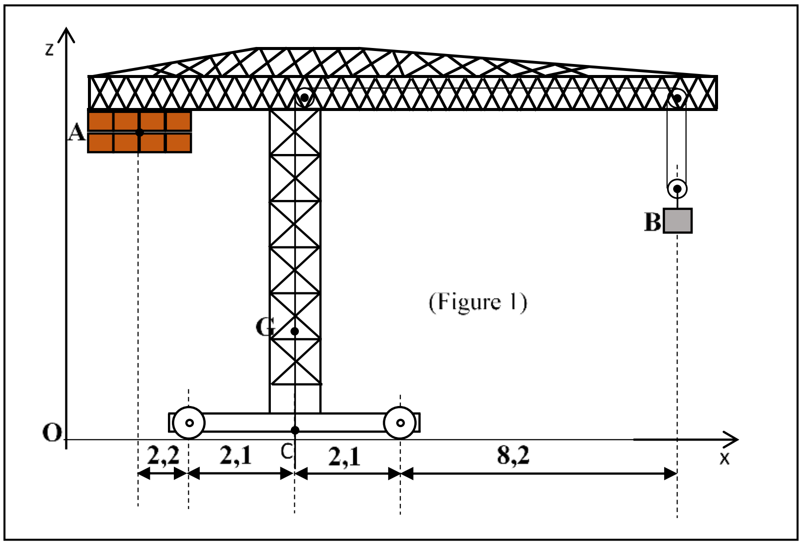
Réponses EXERCICE 10:

$$6.)\ T_c = 2.P.\sin\ 50° = 3830{,}20\ N;$$

$$\vec{R}_A\begin{cases} R_{Ax} = -T_c.sin40° = -2462{,}01\ N \\ R_{Ay} = -P + T_c.cos\ 40° = 434{,}11\ N \end{cases} \Rightarrow \|\vec{R}\| = 3108{,}9\ N\ ;$$

Exercice 11 :

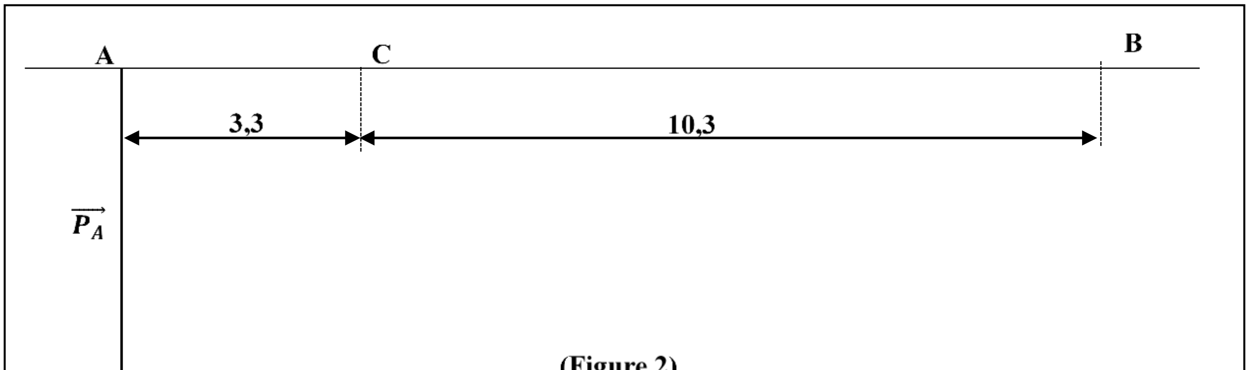
La *figure 1* représente une grue lestée par un bloc de béton A. Avant la pose de ce bloc, la verticale du centre d'inertie G de la grue, quand elle ne soulève aucune charge, passe à l'intérieur de l'intervalle entre les deux essieux des roues porteuses. Le sol (ox) est horizontal. La masse de la grue est $M_G = 12\ t\ (tonnes)$. On utilisera les données numériques indiquées sur la figure 1 , exprimées en mètres. La masse du bloc de béton A est $M_A = 9\ t$ et la charge de la grue est M_B . La grue étant en équilibre, le support de la résultante des réactions du sol sur les quatre roues est $\overrightarrow{R_c}$ (elle passe par le milieu C des essieux).



(Figure 1)

1- Détermination graphique :

a) Reproduire le graphique de la *figure 2* puis déterminer graphiquement (en le complétant) le poids $\overrightarrow{P_B}$ de la charge et la réaction $\overrightarrow{R_c}$ du sol sur l'ensemble du système.



(Figure 2)

$$Echelle \begin{cases} 1\ cm\ pour\ 1\ m \\ 1\ cm\ pour\ 20\ kN \end{cases}$$

NB : Toutes les forces sont parallèles entre elles. On désignera par $\overrightarrow{R_N}$ la résultante de $\overrightarrow{P_A}$ et $\overrightarrow{P_B}$.

b) Compléter le tableau ci-dessous après l'avoir reproduit sur votre feuille de devoir.

Forces	Point d'application	Direction	Sens	Norme
$\overrightarrow{P_A}$	A	Verticale		90 kN
$\overrightarrow{P_B}$	B			
$\overrightarrow{P_G}$	G		Vers le bas	
$\overrightarrow{R_c}$	C			

2- Détermination analytique :

a) Enoncer le principe fondamental de la statique.

b) Déterminer par calcul les modules des forces : $\overrightarrow{P_B}$ et $\overrightarrow{R_c}$.

Réponses EXERCICE 11 :

Forces	Point d'application	Direction	Sens	Norme
$\overrightarrow{P_A}$	A	Verticale	Vers le bas	90 kN
$\overrightarrow{P_B}$	B	Verticale	Vers le bas	28,83 kN
$\overrightarrow{P_G}$	G	Verticale	Vers le bas	120 kN
$\overrightarrow{R_c}$	C	Verticale	Vers le haut	238,83 kN

CHAPITRE 5 : ADHERENCE-FROTTEMENT

Objectifs : A la fin de ce cours je dois être capable de :

- *Modéliser le phénomène d'adhérence ;*
- *Déterminer les limites de l'adhérence ;*
- *Déterminer les actions de contact entre deux solides*

Généralités

La technologie peut vouloir :

☞ **REDUIRE les frottements** et donc permettre un meilleur rendement dans la transmission des efforts de la puissance.

Facteurs intervenants :
- État de surface (Rugosité)
- Matière (Coussinet : bronze / acier)
- Lubrification (Graissage périodique, barbotage)
- Roulement (Dents de pignons1types de roulements)
- Frottement fluide (Film fluide sous pression)

☞ **REALISER** la liaison encastrement entre 2 solides : Collage. (Adhérence à son extrême limite : pas de mouvement relatif autorisé).

☞ **FREINER** le mouvement de glissement.

État de surface ....Crampons des pneumatiques
Matière................................Pneu caoutchouc / asphalte de la route
Matériaux de friction ....Freins, embrayages

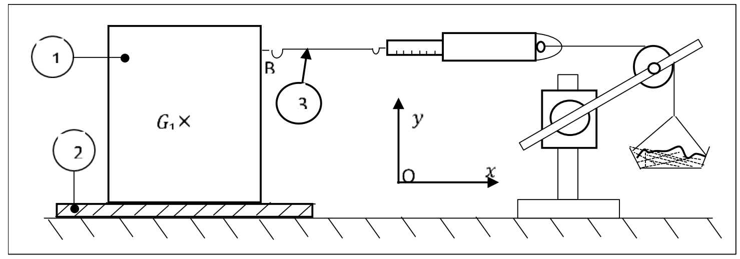
Définitions

Si les 2 surfaces en contact **tendent à glisser** l'une par rapport à l'autre (sans déplacement) alors on parle d'**ADHERENCE.**	Si les 2 surfaces en contact **glissent** l'une par rapport à l'autre alors on parle de **FROTTEMENT.**

I. ETUDE DE L'ADHERENCE

1. Mise en évidence du phénomène

La figure 5-1 suivante représente un solide (1) de poids $\overrightarrow{P_1}$ en équilibre sur un plan horizontal (2). En B un crochet permet d'exercer une force par l'intermédiaire d'un fil tendu.

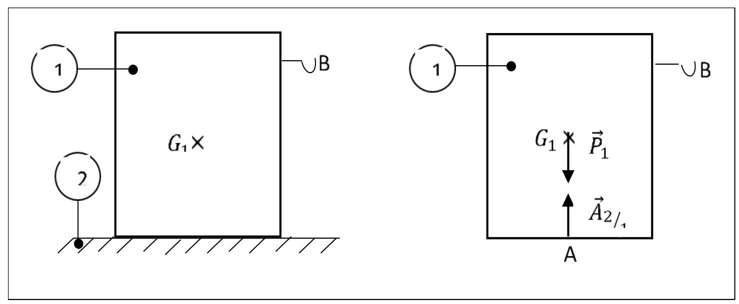


(Figure 5-1)

- Considérons le système matériel défini par {(1)} ; Figure 5-2

<u>Analyse des forces extérieures :</u>

- Action à distance $\overrightarrow{P_1}$: Elle est entièrement connue.
- Action de contact : $\vec{A}_{2/1}$ c'est la résultante des forces réparties : $\vec{A}_{2/1}$ est entièrement inconnue.



(Figure 5-2)

Condition d'équilibre :

Le système matériel {(1)} est en équilibre sous l'action de deux forces : $\overrightarrow{P_1}$ et $\vec{A}_{2/1}$. D'après le théorème énoncé au chapitre précédent, ces deux forces sont diamétralement opposées.

$\vec{A}_{2/1}$ étant diamétralement opposée à $\overrightarrow{P_1}$, elle est perpendiculaire au plan horizontal de contact.

- Considérons Le Système matériel défini par (1)

Analyse des forces extérieures

<u>Action à distance $\overrightarrow{P_1}$</u> : Elle est entièrement connue.

<u>Action de contact :</u>

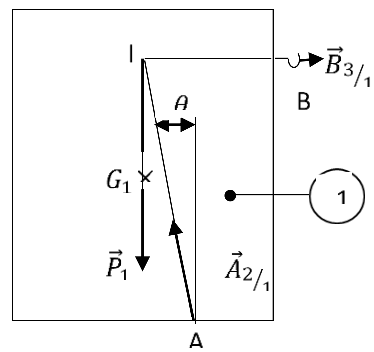


Figure 5-3

$\vec{B}_{3/1}$: C'est l'action du fil tendu (3) sur (1) :

- Point d'application : le point B
- Direction : support du fil tendu (3) (horizontal),
- Sens : vers la droite,
- Norme : indication du dynamomètre : $\|\vec{B}_{3/1}\|$ connue.

$\vec{A}_{2/1}$: C'est la résultante des forces reparties ;

Le système matériel {(1)} est en équilibre sous l'action de trois forces : $\overrightarrow{P_1}$, $\vec{B}_{3/1}$ et $\vec{A}_{2/1}$.

D'après le théorème énoncé au chapitre précédent, ces trois forces sont dans un même plan ; $\overrightarrow{P_1}$, et $\vec{B}_{3/1}$ sont sécantes en I . Donc le support de $\vec{A}_{2/1}$ passe par le point connu I .

Condition d'équilibre :

$\Sigma\, \vec{F}_{ext} = \vec{0}$ s'écrit : $\overrightarrow{P_1} + \vec{A}_{2/1} + \vec{B}_{3/1} = \vec{0}$ (1)

$\Sigma\, \overrightarrow{\mathcal{M}}_{Iz}(\vec{F}_{ext}) = 0$ (2)

Calculs algébriques :

Proj/Ox de (1) : $-\|\vec{A}_{2/1}\| \sin\theta + \|\vec{B}_{3/1}\| = 0$

$$\|\vec{A}_{2/1}\| \sin\theta = \|\vec{B}_{3/1}\|$$

Proj/Oy de (1) : $-\|\overrightarrow{P_1}\| + \|\vec{A}_{2/1}\|.\cos\theta = 0$

$$\|\vec{A}_{2/1}\|\cos\theta = P_1$$

De (3) et (4) on déduit :

$\operatorname{tg}\theta = \dfrac{\|\vec{B}_{3/1}\|}{\|\overrightarrow{P_1}\|}$ d'ou θ, et la direction de $\vec{A}_{2/1}$.

La norme de $\vec{A}_{2/1}$ est donnée par (3) ou (4)

$$\|\vec{A}_{2/1}\| = \frac{\|\vec{B}_{3/1}\|}{\sin\theta} .$$

L'action de contact $\vec{A}_{2/1}$ est donc totalement définie :

- son support passe par I connu et fait un angle θ avec la verticale :

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\|\vec{B}_{3/1}\|}{\|\overrightarrow{P_1}\|} .$$

- son sens est celui de (2) vers (1).
- sa norme : $\|\vec{A}_{2/1}\| = \sqrt{\|\vec{B}_{3/1}\|^2 + \|\overrightarrow{P_1}\|^2}$

Remarque

On verra au paragraphe 2 qu'il y a ≪ *basculement* ≫ lorsque le point d'application A passe à l'extérieur de la surface de sustentation.

- On augmente $\vec{B}_{3/1}$ jusqu'au moment où le solide (1) soit sur le point de glisser.

Lorsque le solide (1) se trouve à la limite de l'équilibre, on dit qu'il est en équilibre strict. **On désigne par $\boldsymbol{\varphi_0}$ la valeur limite de $\boldsymbol{\theta}$.**

2. Définitions

On appelle **angle d'adhérence**, l'angle φ_0 formé par la résultante $\vec{A}_{2/1}$ des actions de contact avec la normale au contact dans le cas limite de l'équilibre strict.

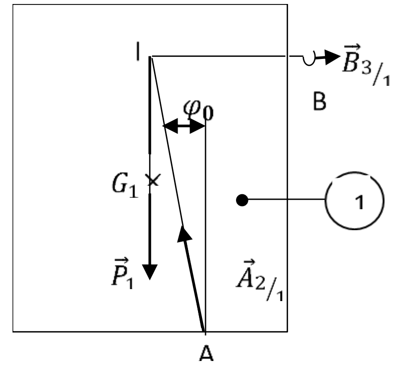


Figure 5-4

Le **cône d'adhérence** est **le** cône de demi-angle au sommet φ_0 ayant pour axe la perpendiculaire au plan tangent commun aux surfaces en contact.

Le **coefficient d'adhérence** $\boldsymbol{f_0}$ est défini par la relation : $\boldsymbol{f_0 = \mathrm{tg}\varphi_0}$ **.**

On confond quelque fois par abus de langage les dénominations *coefficient d'adhérent* et *coefficient de frottement*.
L'adhérence est un phénomène statique, tandis que le frottement est un phénomène dynamique.

Il se trouve cependant que dans la majorité des cas le coefficient de frottement que l'on étudiera en dynamique est très voisin de celui d'adhérence. Ceci peut expliquer l'usage incorrect que l'on en fait en statique.

3. Analyse du contact avec adhérence

- On se propose d'étudier le contact, ponctuel en A, avec **adhérence** de deux solides (1) et (2) et $\vec{n}$ la normale en A au plan P.
- Considérons le système matériel défini par {(2)}

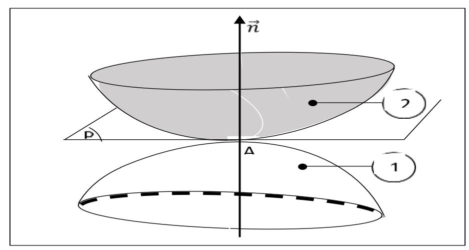


Figure 5-5

Propriétés :

L'action de contact $\vec{A}_{1/2}$ se trouve dans le plan formé par la normale $\vec{n}$ et la direction $\vec{t}$ ≪ $\mathit{tendance\ au\ mouvement}$ ≫ de (1) par rapport à (2).

L'action le contact $\vec{A}_{1/2}$ se situera toujours à l'intérieur du cône d'adhérence ou à la limite sur le cône d'adhérence (cas de l'équilibre strict).

L'action de contact $\vec{A}_{1/2}$ se trouve dans le plan formé par la normale au contact et la direction de la ≪ $\mathit{tendance\ au\ mouvement}$ ≫ et du côté opposé à la tendance au mouvement du système étudié (2) par rapport au système extérieur (1).

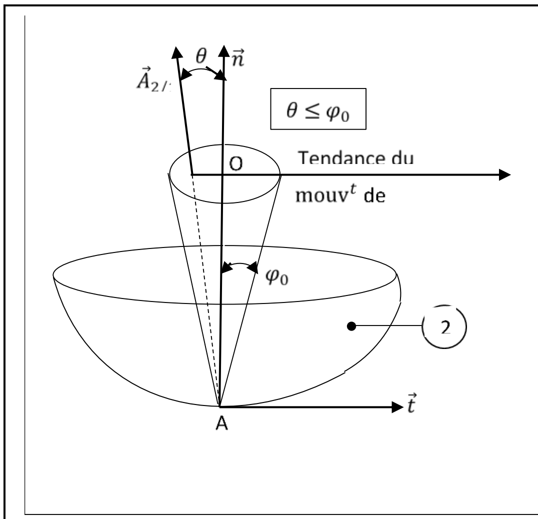


Figure 5-6

NB- Limites de l'adhérence:

Si, $A_{1/2}$ est à l'intérieur du cône $\theta < \varphi_0$ alors le solide **(2)** est en ***équilibre***.

Si, $A_{1/2}$ est sur le cône $\theta = \varphi_0$ alors le solide **(2)** est en ***équilibre strict***.

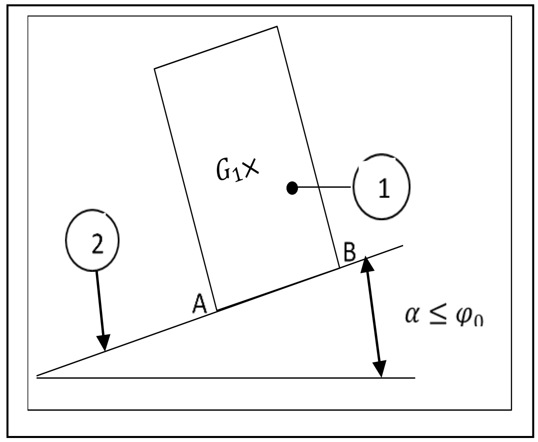
Si, $A_{1/2}$ est à l'extérieur du cône $\theta > \varphi_0$ (cas impossible) alors l'Équilibre est impossible ; il y a donc glissement.

II / EQUILIBRE D'UN SOLIDE REPOSANT SUR UN PLAN HORIZONTAL OU INCLINE

1. Surface de sustentation

On appelle surface de sustentation d'un solide sur un plan la surface délimitée par le lieu d'une droite du plan qui reste tangente au contour extérieur des zones (ou des points) de contact.

2. Équilibre d'un solide reposant sur un plan incliné

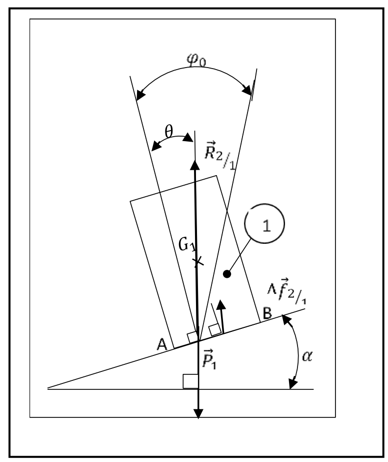


Étude de l'équilibre du solide (1) reposant avec adhérence sur le plan incliné (2). Considérons le système matériel {(1)}.

Inventaire des forces extérieures :

Action à distance : Poids $\overrightarrow{P_1}$ appliqué en G_1.

Actions de contact : Ensemble des forces $\Delta\vec{f}_{2/1}$ reparties sur la surface. Chaque force $\Delta\vec{f}_{2/1}$ est inclinée de l'angle θ par rapport à la normale au point de contact et on sait que $\theta \le \varphi_0$. Nous admettrons que l'ensemble des $\Delta\vec{f}_{2/1}$ est modélisable par une force unique $\vec{R}_{2/1}$ inclinée de l'angle θ par rapport à la normale au plan et telle que $\theta \le \varphi_0$.



(1) peut être considéré comme soumis à deux forces extérieures $\overrightarrow{P_1}$ et $\vec{R}_{2/1}$. La condition nécessaire pour que (1) soit en équilibre est que ces deux forces soient diamétralement opposées, d'où :

Les supports de $\overrightarrow{P_1}$ et $\vec{R}_{2/1}$ sont confondus.

$\alpha = 0$ c'est –à-dire que $\alpha \le \varphi_0$ D'où :

THEOREME

Pour qu'un solide reposant avec adhérence sur un plan incliné, et soumis seulement à son poids et à l'action de ce plan, soit en équilibre, il faut que :

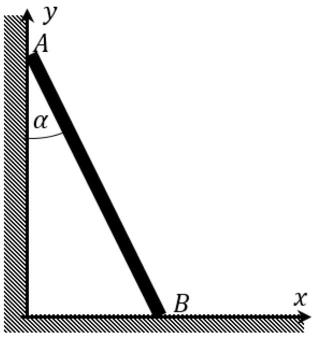
- Le support de son poids passe à l'intérieur de la surface de sustentation.
- L'angle α du plan incliné soit inférieur ou égal à l'angle d'adhérence φ_0 .

3. NOTION D'ARC- BOUTEMENT

- **Définition**

Il y a arc-boutement lorsque l'adhérence provoque une impossibilité de mouvement quelle que soit l'intensité de la force exercée pour produire ce mouvement.

Exercice d'application



Une échelle homogène de poids $P = 120\ N$ s'appuie contre deux parois :
Sa partie supérieure A, s'appuie sans adhérence sur la paroi verticale.
Et sa partie inférieure B, s'appuie sur la paroi horizontale avec adhérence.
L'échelle forme avec la verticale, un angle $\alpha = 20°$.

1. Isoler l'échelle et faire les bilans des forces.
2. Calculer le module R_A de la force exercée par la paroi sur l'échelle en A.
3. En déduire le coefficient d'adhérence f_0 pour que l'échelle soit en équilibre.
4. Le coefficient d'adhérence est maintenant $f = 0{,}4$. Un homme de poids $P' = 600\ N$ gravit l'échelle jusqu'au point A. Calculer les modules des réactions R'_A en A et R'_B en B à l'équilibre.
5. Le système serait-il en équilibre ? Justifier la réponse.

Réponses Exercice d'application :

2°) $\sum \bar{\mathcal{M}}_B = 0 \Rightarrow \frac{P.AB\ sin\alpha}{2} - R_A.cos\alpha = 0 \ \Rightarrow \ R_A = \frac{1}{2}P.tan\ \alpha = 21{,}83\ N$

3°) $\sum \vec{F}_{extérieurs} = \vec{0}$; les composantes des forces sont : $\vec{R}_A \begin{vmatrix} R_{Ax} = R_A \\ R_{Ay} = 0 \end{vmatrix}$; $\vec{P} \begin{vmatrix} P_x = 0 \\ P_y = -P \end{vmatrix}$;
$\vec{R}_B \begin{vmatrix} R_{Bx} = -R_B.\sin\varphi_0 \\ R_{By} = R_B.\cos\varphi_0 \end{vmatrix}$; d'où : $f_o = \frac{R_A}{P} = 0{,}18$;

4°) $\sum \bar{\mathcal{M}}_B = 0 \ \Rightarrow P.\left(\frac{AB}{2}\right).\sin\alpha + P'.AB.\sin\alpha - R'_A.AB.\cos\alpha = 0$

$\Rightarrow \ R'_A = \left(P' + \frac{P}{2}\right)\tan\alpha = 240{,}22\ N$

Calcul de R'_B :

$\sum \vec{F}_{extérieurs} = \vec{0} \ \Rightarrow \ R'_B = \sqrt{R'^2_A + (P + P')^2} = 759\ N$

5°) Oui, le système est en équilibre car le coefficient d'adhérence du nouveau système est :

$f' = \tan\varphi' = \frac{R'_A}{P+P'} = 0{,}33 \leq 0{,}40 = f$.

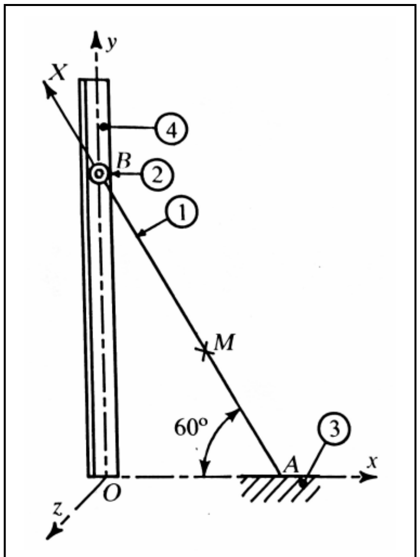
Exercice 1

Soit une échelle (1) non pesante AB de longueur $l = 4\,m$.(Figure 5-10). En A le contact (1)-(3) est un contact avec adhérence de coefficient $f_0 = \tan\varphi_0$. Un galet (2) articulé sans adhérence en B permet le guidage de l'échelle sur les rails (4). Un homme de poids $P = 800\,N$ gravit l'échelle de A vers B. Sa position est définie par : $x = AM$ avec $0 \leq x \leq 4$.

1) Après avoir considéré le galet (2), étudier l'équilibre strict de (1) et déterminer jusqu'à quelle valeur x_0 l'homme peut monter si $f_0 = 0{,}2$.

2) Quelle est la valeur minimale f_{0min} de f_0 pour que l'homme puisse atteindre le point B sans risque de chute.

3) On suppose que $f_0 = f_{0min}$; déterminer les actions de contact $\vec{A}_{3/1}$ et $\vec{B}_{2/1}$ lorsque $x = 2\,m$.



(Figure 5-10)

Réponses **Exercice 1** :

1) $\sum \overline{\mathcal{M}}_B = 0 \Rightarrow x_0.P.\cos\alpha - F_B.l.sin\alpha = 0 \Rightarrow F_B = \frac{x_0.P}{l.tan\alpha}$

$$\sum \vec{F}_{extérieurs} = \vec{0} \Rightarrow tan\varphi = \frac{F_B}{P} = \frac{x_0}{l.\tan\alpha} \quad (1)$$

A l'équilibre strict, on a $f_0 = tan\alpha \Rightarrow x_0 = f_0.l.\tan\alpha = 1{,}38\,m$

2) A $f_0 = f_{0min}$, $on\ a\ x_0 = l$; $donc\ (1) devient$: $f_{0min} = \frac{1}{\tan\alpha} = 0{,}578$;

3) $\|\vec{B}_{2/1}\| = \frac{x.P}{l.tan\alpha} = 230{,}94\ N;\ \|\vec{A}_{3/1}\| = \sqrt{B_{2/1}^2 + (P)^2} = 832{,}4\ N.$

Exercice 2

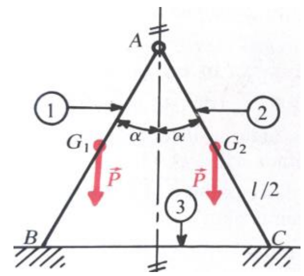
Le tréteau (Figure5-11) repose sur un plan horizontal (3) et est formé de deux parties AB et AC articulées en A et de poids $P = 30\ N$ appliqué au milieu

de $AB = AC = L$.

Le coefficient d'adhérence avec le plan (3) est égal à $f_0 = 0{,}3$.

1) L'ensemble étant symétrique : montrer que les actions de contact $\vec{A}_{1/2}$ et $\vec{A}_{2/1}$ sont horizontales.

2) On considère le système matériel $\{(1)\}$. Faire l'analyse des actions mécaniques extérieures et calculer la valeur maximale de l'angle α pour que l'équilibre soit possible.



(Figure 5-11)

Réponses EXERCICE 2:

1) $\begin{cases} A_{1/2x} = -A_{2/1x} \\ A_{1/2y} = A_{2/1y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{A}_{1/2}$ et $\vec{A}_{2/1}$ $sont\ horizontales;$ 2) $\alpha = -30{,}96°.$

CHAPITRE 6 :
RECHERCHE DU CENTRE DE GRAVITE D'UN SYSTEME MATERIEL

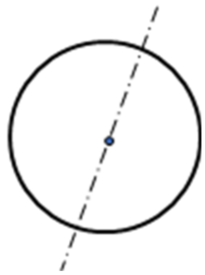
Objectifs *: A la fin de ce chapitre, je dois être capable de :*

- *Déterminer des centres de gravité des systèmes indéformables ;*
- *Déterminer des centres de gravité des plaques homogènes.*

1) Définition

Le centre de gravité d'un système matériel est l'unique point du système où son poids s'applique.
Mathématiquement c'est le barycentre des parties du système pondérées de leurs masses respectives.

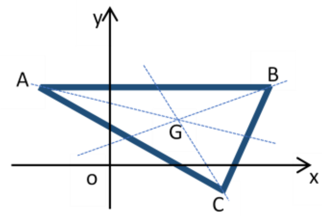
2) Centre de gravité de quelques solides homogènes de formes régulières



Sphère homogène : G est le Point de concours des diamètres

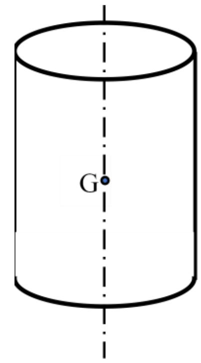
Tige rectiligne homogène : G est le milieu de la tige

(Figure 6-5)

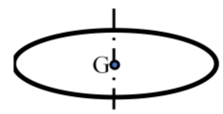


Plaque triangulaire : G est le Point de concours des médianes.

$$\overrightarrow{OG}\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases}$$



Cylindre : G est le centre du cylindre

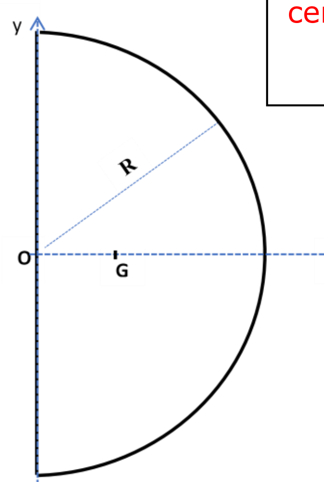


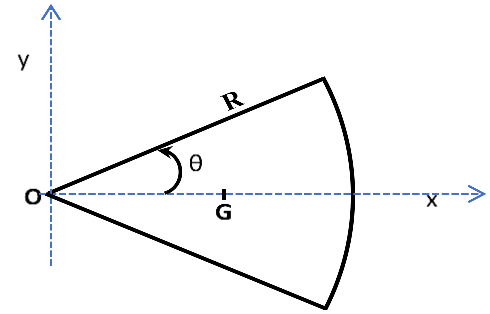
Disque ou anneau circulaire : G est le centre du disque

Demi-disque de rayon R : G est telque :

$$\overrightarrow{OG}\begin{cases} x_G = \frac{4R}{3\pi} \\ y_G = 0 \end{cases}$$

(Figure 6-7)





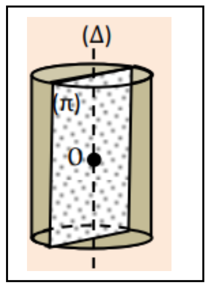
Secteur de rayon R et d'angle au sommet $\alpha = 2\,\theta$: G est telque :

$$\overrightarrow{OG}\begin{cases} x_G = \frac{2R\sin\theta}{3\theta} \\ y_G = 0 \end{cases}$$ avec θ en radian.

(Figure 6-6)

3) Détermination du centre de gravité d'un système matériel

3.1) Détermination graphique du centre d'inertie d'un solide



- Si le solide possède *un plan de symétrie* (π) alors G est dans le plan de symétrie.
- Si le solide possède *un axe de symétrie* (Δ) alors G est sur l'axe de symétrie.
- Si le solide possède *un point de symétrie O* alors G est confondu avec O.

3.2) Détermination du centre d'inertie d'un solide composite par calcul

- Le centre d'inertie G d'un système constitué de 2 solides est donné par : $m_1\overrightarrow{GG_1} + m_2\overrightarrow{GG_2} = \vec{0}$ (1)

Soit O le centre d'un repère ; on a alors : $\overrightarrow{OG} = \frac{m_1\overrightarrow{OG_1}+m_2\overrightarrow{OG_2}}{m_1+m_2}$ (2)

- En général, le centre d'inertie G d'un système constitué de n solides est donné par : $m_1\overrightarrow{GG_1} + m_2\overrightarrow{GG_2} + \cdots + m_n\overrightarrow{GG_n} = \vec{0}$; (3) avec $n \in \mathbb{N}$.

Soit $\overrightarrow{OG} = \frac{m_1\overrightarrow{OG_1}+m_2\overrightarrow{OG}_{2+\cdots+}m_n\overrightarrow{OG_n}}{m_1+m_{2+\cdots+}m_n}$ (4)

- La masse d'un *évidemment* ou d'un *trou* est affectée d'un signe négatif ($-m_i$ *pour* $1 \le i \le n$).

4) Cas particulier d'une plaque homogène d'épaisseur constante.

Pour déterminer le centre d'inertie G d'une plaque homogène quelconque d'épaisseur constante, on procède comme suit :

- Décomposer sa surface en des figures simples de surfaces : S_1, S_2 ... S_n. ($pour$ $1 \le i \le n$)
- Appliquer la relation : $\overrightarrow{OG} = \frac{S_1\overrightarrow{OG_1}+S_2\overrightarrow{OG}_{2+\cdots+}S_n\overrightarrow{OG_n}}{S_1+S_{2+\cdots+}S_n}$ (4 bis)

Remarque :En coordonnées cartésiennes la relation (4 bis) devient :

$$\overrightarrow{OG}\begin{cases} x_G = \dfrac{(\mp S_1)X_1+(\mp S_2)x_2+\cdots+(\mp S_n)x_n}{(\mp S_1)+(\mp S_2)+\cdots+(\mp S_n)} \\ y_G = \dfrac{(\mp S_1)y_1+(\mp S_2)y_2+\cdots+(\mp S_n)y_n}{(\mp S_1)+(\mp S_2)+\cdots+(\mp S_n)} \end{cases}$$

car la surface d'un *évidemment* ou d'un *trou* est affectée d'un signe négatif ($-S_i$).

Exercice d'application 1 :

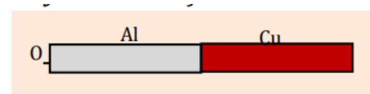


Figure 6-1

Une barre de longueur $L = 40\ cm$ est constituée pour moitié d'aluminium de masse volumique $\mu_1 = 2{,}7\ g.cm^{-3}$ et pour moitié de cuivre de masse volumique $\mu_2 = 8{,}9\ g.cm^{-3}$ (Voir figure 6-1).

1°) Calculer le rapport $\frac{m_1}{m_2}$ des masses d'aluminium et de cuivre.

2°) En déduire la distance OG entre l'extrémité O de la barre et son centre d'inertie G.

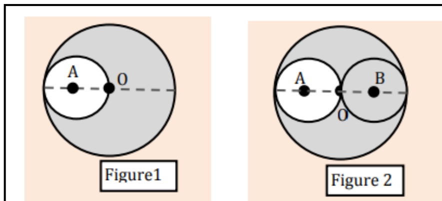
3°) Quelle devrait être la masse m d'une bille pratiquement ponctuelle qui faudrait coller en O pour que le nouveau centre d'inertie G' de l'ensemble soit au milieu de la barre ?

La section de la barre est S = 1cm².

Réponses Exercice d'application 1 :

1°) $\frac{m_1}{m_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} = 0{,}303$; 2°) $OG = \frac{m_1+3m_2}{m_1+m_2} = 25{,}3\ cm$; 3°) $m = 61{,}4\ g$

Exercice d'application 2 :



Dans un disque de carton homogène de masse volumique µ d'épaisseur e constante, de centre O et de rayon R, on découpe un disque de centre A et de rayon R_2. (Figure 1)

1°) Déterminer la position du centre d'inertie du croissant ainsi obtenu.

2°) On colle au croissant, le disque de rayon R_2 de telle sorte que son centre coïncide avec le point B diamétralement opposé à A. (Voir figure 2) Déterminer le centre d'inertie G' du système ainsi obtenu.

Réponses Exercice d'application 2:

1°) $\overrightarrow{OG} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{OO'}$; 2°)$\overrightarrow{OG'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$; 3°) $m = 61{,}4\ g$

Exercice d'application 3 :

Dans une plaque métallique homogène d'épaisseur constante, on découpe le trapèze schématisé ci-contre. Déterminer graphiquement, puis par calcul la position du centre d'inertie G de la plaque.

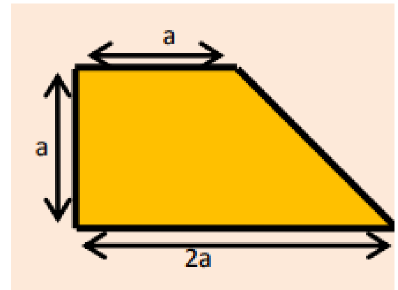
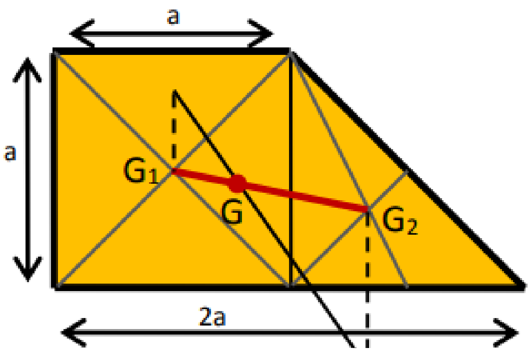


Figure 6-3

Réponse exercice d'application 3:

1°) Méthode graphique :



EXERCICE 1 **:**

Déterminer par calculs en utilisant le repère (o, x, y) le centre de gravité de la plaque $ABCD$ homogène et d'épaisseur constante ci-dessous (Figure 6-5).

Données : $BE = EC = R = 1{,}5$;

$$OA = OE = OD = 2R = 3 \; et \; EG_1 = \frac{4R}{3\pi}$$

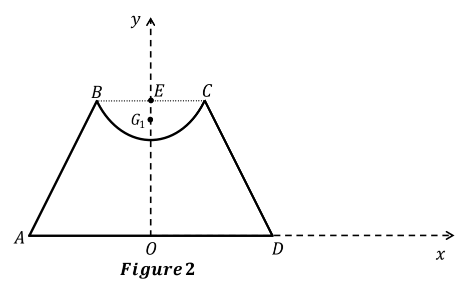


Figure 6-5

Réponse EXERCICE 1 :

$$\overrightarrow{OG}\begin{cases} x_G = 0 \\ y_G = 0{,}97 \end{cases}$$

EXERCICE 2 :

On considère la plaque surfacique homogène, d'épaisseur constante dont les mesures sont indiquées sur la figure 6-6. Elle est constituée d'un demi-cercle C de centre E et d'un rectangle ACDF percé par un triangle ABC.

1. Déterminer dans le repère (Oxy):

1.1. Les coordonnées du centre de gravité G_1 et la surface S_1 du demi-cercle C.
1.2. Les coordonnées du centre de gravité G_2 et la surface S_2 du rectangle ACDF.
1.3. Les coordonnées du centre de gravité G_3 et la surface S_3 du triangle ABC.

2. En déduire dans le même repère, les coordonnées du centre de gravité G de la plaque ABCDF.

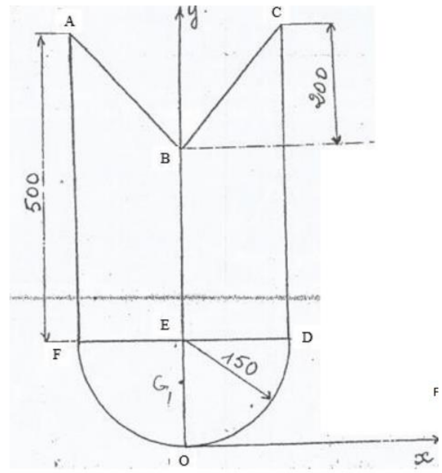


Figure 6-6

Réponse EXERCICE 2 :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{OG}_1}\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 86,34 \\ S_1 = 70650 \end{cases} ; \quad \overrightarrow{\boldsymbol{OG}_2}\begin{cases} x_2 = 0 \\ y_2 = 400 \\ S_2 = 150000 \end{cases} ; \quad \overrightarrow{\boldsymbol{OG}_3}\begin{cases} x_3 = 0 \\ y_3 = 583,33 \\ S_3 = 30000 \end{cases} ; \quad \overrightarrow{\boldsymbol{OG}}\begin{cases} x_G = 0 \\ y_G = 254,92 \end{cases}$$

EXERCICE 3 :

Dans une plaque $ABCDE$ homogène et d'épaisseur constante, on a découpé deux autres plaques : l'une de forme triangulaire IJN et l'autre de forme sectorielle O'KQ.

Déterminer par calculs en utilisant le repère (o, x, y) le centre de gravité de la plaque ainsi obtenue

(Voir Figure 6-7).

Données :$\alpha = (\widehat{KO'G_4}) = (\widehat{G_4O'Q}) = 30°$;

$$r = O'K = O'Q = 50 ; R = OD ; \; O'G_4 = \frac{2r.\sin(\alpha)}{3\alpha} \; et \; OG_2 = \frac{4R}{3\pi}$$

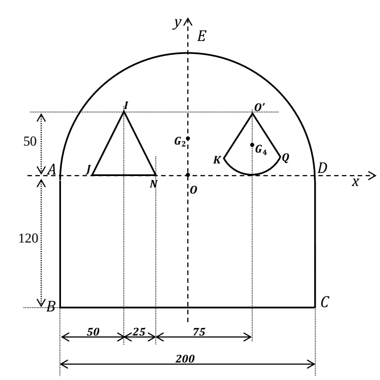


Figure 6-7

***EXERCICE 4* :**

Déterminer la position du centre de gravité de la plaque suivante dans le repère (O, x, y).

Voir la figure 6-8.

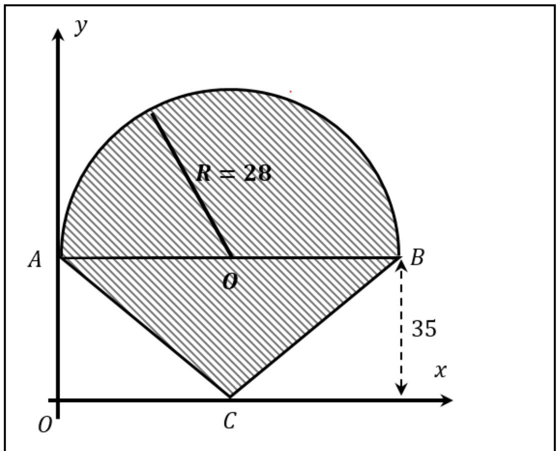


Figure 6-8

***EXERCICE 5* :**

Rechercher les coordonnées du centre de gravité G de la plaque rectangulaire chanfreinée et percée d'un trou circulaire de rayon r dont le centre I a pour coordonnées (a ; b).

Données : $a = 2b = 4r = 4$

$et\ c = 3$

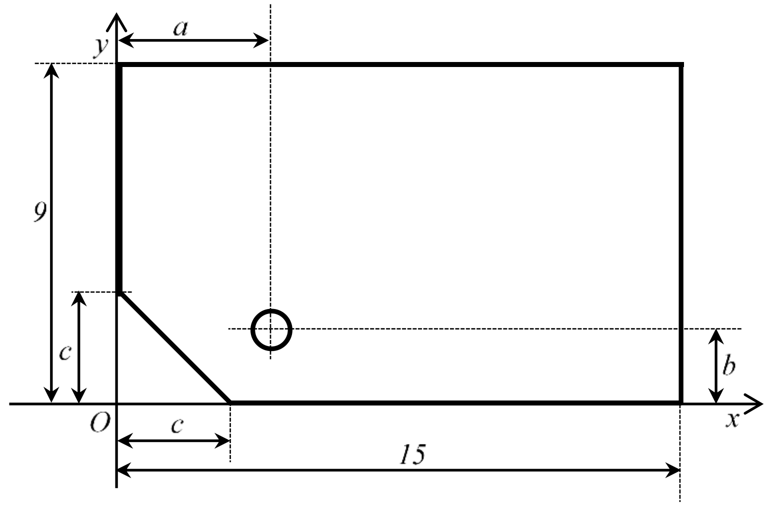


Figure 6-9

Réponses EXERCICE 5 :

$$\overrightarrow{OG}\begin{cases} x_G = \dfrac{S_1X_1 - S_2x_2 - S_3x_3}{S_1 - S_2 - S_3} \\ y_G = \dfrac{S_1y_1 - S_2y_2 - S_3y_3}{S_1 - S_2 - S_3} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{OG}\begin{cases} x_G = \dfrac{135 * 7{,}5 - 3{,}14 * 4 - 4{,}5 * 1}{135 - 3{,}14 - 4{,}5} \\ y_G = \dfrac{135 * 4{,}5 - 3{,}14 * 2 - 4{,}5 * 1}{135 - 3{,}14 - 4{,}5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OG}\begin{cases} x_G = 7{,}8 \\ y_G = 4{,}68 \end{cases}$$

Deuxième partie : ENERGIE MECANIQUE

CHAPITRE 7 :
MOUVEMENT DE TRANSLATION : Travail-Puissance-Energie cinétique

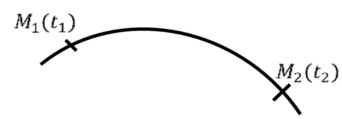
Objectifs *: A la fin de ce chapitre, je dois être capable de :*

- *Etudier le mouvement d'un solide ponctuel en chute libre ;*
- *Déterminer le travail d'une force constante ;*
- *Appliquer le théorème de l'énergie cinétique en translation.*

1) Cinématique- chute libre

1 .1) Vitesse moyenne

Pour un trajet donné, la vitesse moyenne est le quotient de la distance parcourue par la durée mise pour la parcourir. Figure 7-1.



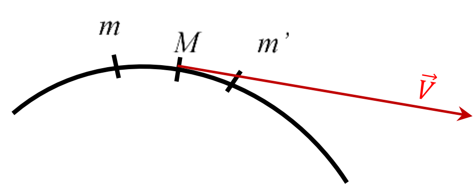
La vitesse moyenne a pour expression :

$$v_m = \frac{l}{\Delta t} \quad \begin{cases} \Delta t = t_2 - t_1 & \text{est la durée de parcours} \\ l = \widehat{M_1M_2} & \text{est la distance parcourue} \end{cases}$$

(Figure 7-1)

1 .2) Vitesse instantanée

La vitesse instantanée en un point M peut être assimilée à la vitesse moyenne sur très petit déplacement mm' autour de M. Figure 7-2



La vitesse instantanée a pour expression :

$$\vec{V} = \frac{\overrightarrow{\delta l}}{\delta t} \quad \begin{cases} \delta t & \text{est le temps de parcours} \\ \overrightarrow{\delta l} = \overrightarrow{mm'} & \text{est le vecteur déplacement} \end{cases}$$

(Figure 7-2)

Le vecteur vitesse instantanée est tangent à la trajectoire au point considéré(M).

Son sens est celui du mouvement et son module est sa valeur en ce point.

1 .3) Mouvement de translation

Un solide effectue un mouvement de translation quand tous ses points ont la même vitesse à chaque instant.

a) Mouvement de translation rectiligne

Le mouvement de translation est rectiligne si le vecteur vitesse $\vec{V}(t)$ garde le même support.

Le mouvement est accéléré si $\vec{V}(t)$ augmente, ralenti si $\vec{V}(t)$ diminue, uniforme si $\vec{V}(t)$ est constant.

b) Mouvement de translation circulaire

Un solide est en mouvement de translation circulaire si ses points décrivent des cercles de même centre.

1 .4) Chute libre d'un solide sans vitesse initiale

a) Définition de la chute libre

Un solide (S) est en chute libre si la seule force extérieure qui s'exerce sur lui est son poids $\vec{P}$.

b) Mouvement de chute dans l'air

En toute rigueur un solide ne peut être en chute libre que dans le vide. Dans l'air la chute est pratiquement libre si $\vec{\pi}$ et $\vec{R}$ sont négligeables devant $\vec{P}$. (Voir figure 7-3). Ce qui veut dire qu'il faut un solide de masse volumique très supérieure à celle de l'air et qui a une vitesse pas trop grande.

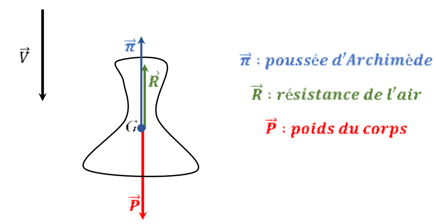


Figure 7-3

c) Etude de la chute libre sans vitesse initiale

c₁) Dispositif expérimental

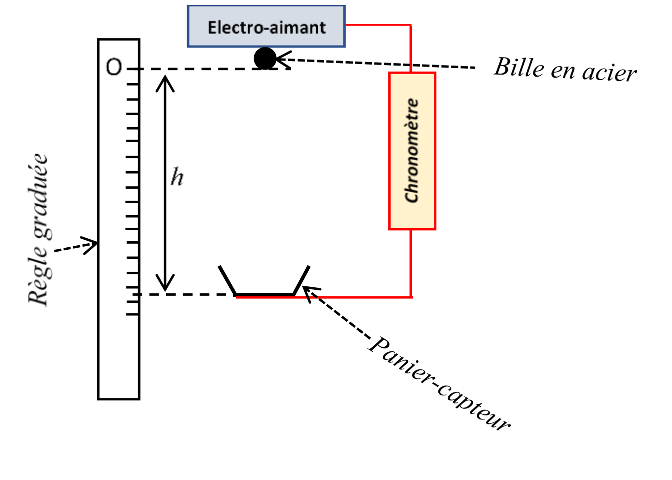


Figure 7-4

On règle la hauteur h de chute de la bille en déplaçant verticalement le panier capteur.

Lorsque la bille tombe dans le panier, le chronomètre affiche la durée t de la chute.

Pour chaque valeur de h , on note la durée correspondante. On obtient ainsi le tableau des mesures ci-dessous :

Calculons le rapport $\frac{h}{t^2}$ *pour chaque couples de valeurs.*

h (m)	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
t (s)	0,318	0,349	0,378	0,404	0,427	0,450
$\frac{h}{t^2}$	**4,94**	**4,93**	**4,90**	**4,90**	**4,94**	**4,94**

Conclusion : Le mouvement n'est pas uniforme ; h est proportionnelle à t^2.

$\Rightarrow h = 4{,}9t^2 \Rightarrow \boxed{h = \frac{1}{2}gt^2}$

C₂) Lois de chute libre sans vitesse initiale

Le mouvement de chute libre d'un solide sans vitesse initiale est :

- Indépendant de la masse de de l'objet ;
- Un mouvement de translation rectiligne verticale
- Uniformément accéléré d'accélération $\boldsymbol{g}$**.**

C₃) Relations de la chute L :

Le mouvement de chute libre sans vitesse initiale est régi par les relations suivantes :

- Vitesse de chute : $\boldsymbol{v = g \cdot t}$
- Hauteur de chute : $\boldsymbol{h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2}$
- Relation entre h, v et g : $\boldsymbol{v^2 = 2gh}$

2) Travail d'une force constante

Une force est constante quand elle garde la même direction, le même sens et la même intensité.

2.1) Travail d'une force constante sur un déplacement rectiligne

Le travail $W_{AB}(\vec{F})$ effectué par la force $\vec{F}$ pour un déplacement rectiligne AB de son point d'application est donné par :

$\boldsymbol{W_{AB}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB} = F \cdot AB \cdot \cos(\vec{F};\overrightarrow{AB})}$

Si $\boldsymbol{AB = l}$ **et** $\boldsymbol{(\vec{F};\overrightarrow{AB}) = \alpha}$ **alors** $\boldsymbol{W_{AB}(\vec{F}) = Fl\cos\alpha}$

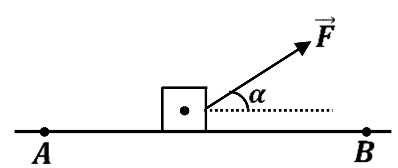


Figure 7-5

Conséquences :

- Si $0 \leq \alpha \leq 90°$, nous avons $\cos\alpha > 0$ et $W_{AB}(\vec{F}) > 0$:

Le travail est moteur et $\vec{F}$ **est une force motrice.**

- Si $\alpha = 90°$, nous avons $cos\alpha = 0$ et $W_{AB}(\vec{F}) = 0$: $\vec{F}$ **ne travaille pas.**

- Si $90° \leq \alpha \leq 180°$, nous avons $cos\alpha < 0$ et $W_{AB}(\vec{F}) < 0$: **Le travail est résistant et $\vec{F}$ est une force résistante.**

2.2) Travail d'une force constante lors d'un déplacement quelconque

a) Expression du travail

$$\boldsymbol{W_{AB}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}}$$

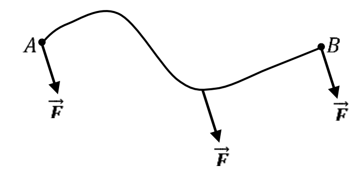


Figure 7-6

Le travail d'une force constante ne dépend pas du chemin suivi, mais uniquement des positions de départ et d'arrivée de son point d'application. (figure 7-6)

b) Travail du poids d'un corps

$$\boldsymbol{W_{AB}(\vec{P}) = \vec{P} \cdot \overrightarrow{AB} = P \cdot (z_A - z_B) = mg \cdot (z_A - z_B)}$$

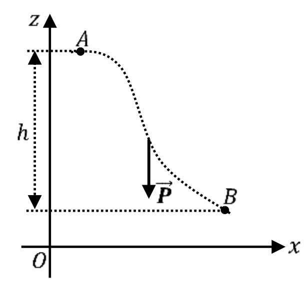


Figure 7-7

Le travail du poids d'un corps est indépendant du chemin suivi. Il ne dépend que de la différence d'altitude (dénivellation h) des positions de son centre d'inertie.(figure 7-7)

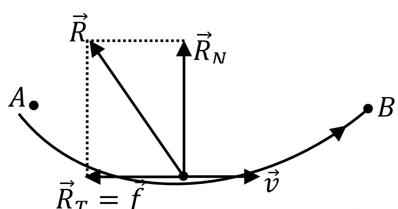
- Si le corps descend de A vers B (déplacement vers le bas) alors :

$$\boldsymbol{W_{AB}(\vec{P}) = P \cdot h = mgh}$$

- Si le corps monte de A vers B (déplacement vers le haut) alors :

$$\boldsymbol{W_{AB}(\vec{P}) = -P \cdot h = -mgh}$$

2.3) Travail effectué par les forces de frottements



$$\boldsymbol{\vec{R} = \vec{R}_N + \vec{f}}$$

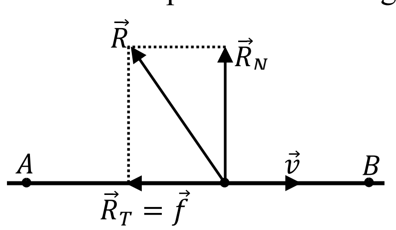
$\vec{R}$: Réaction du support
$\vec{R}_N$: Réaction normale du support
$\vec{f}$: Force de frottement

$$\boldsymbol{W_{AB}(\vec{R}) = W_{AB}(\overrightarrow{R_N}) + W_{AB}(\vec{f}) = W_{AB}(\vec{f}) < 0 \ \text{car} \ W_{AB}(\overrightarrow{R_N}) = 0}$$

Δ Par définition le travail effectué par la force sur un trajet quelconque AB de frottement se calcule par :

$$\boldsymbol{W_{AB}(\vec{f}) = -f \cdot \widehat{AB}}$$

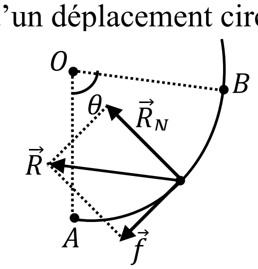
● Cas d'un déplacement rectiligne



$$\boldsymbol{\widehat{AB} = AB = l}$$

$$\boldsymbol{W_{AB}(\vec{f}) = -f \cdot AB = -f \cdot l}$$

● Cas d'un déplacement circulaire



$$\boldsymbol{\widehat{AB} = r\theta \quad avec \quad OA = OB = r}$$

$$\boldsymbol{W_{AB}(\vec{f}) = -fr\theta}$$

3) Puissance d'une force constante

3.1) Puissance moyenne

Une force $\vec{F}$ effectuant un travail $W_{AB}(\vec{F})$ sur un déplacement AB pendant une durée Δt, développe une puissance moyenne : $P_m = \frac{W_{AB}(\vec{F})}{\Delta t}$

3.2) Puissance instantanée

La puissance d'une force $\vec{F}$ à une date **t** donnée est : $P = \vec{F} \cdot \vec{v} = Fv\cos(\vec{v}, \vec{F})$

4) Energie cinétique de translation

4.1) Expression de l'énergie cinétique de translation

L'énergie cinétique d'un solide en mouvement de translation à la vitesse $\vec{v}$ est définie par :

$$E_C = \frac{1}{2}mv^2$$

3.2) Théorème de l'énergie cinétique

La variation de l'énergie cinétique d'un système entre deux instants est égale à la somme des travaux effectués entre ces deux instants par les forces extérieures qui s'exercent sur le système.

$$\Delta E_C = E_{Cf} - E_{Ci} = \sum W(\overrightarrow{F_{ext}})$$

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = \sum W(\overrightarrow{F_{ext}})$$

Exercice 1 *Chute libre*

I - Un solide en chute libre arrive sur le sol avec une vitesse verticale d'intensité $v = 15 m.s^{-1}$. De quelle hauteur h a-t-il été abandonné ?

II- Une bille d'acier est en chute libre verticale. Sa vitesse vaut $v = 2{,}8 m.s^{-1}$.

1°) De quelle hauteur a-t-elle été lâchée ?

2°) Quelle distance doit-elle encore parcourir pour que sa vitesse soit deux fois plus grande ?

III- Une tige verticale abandonnée sans vitesse initiale tombe en chute libre. Elle passe au cours de sa chute devant un repère. Sa longueur est $l = 90\ cm$. Quand son extrémité inférieure passe devant le repère, la vitesse de la tige est $v_1 = 6{,}0 m.s^{-1}$.

1°) Quelle est la vitesse v_2 quand son extrémité supérieure passe devant le repère.

2°) Quelle estla durée de passage de la tige devant le repère ? On donne g=9,8 $m.s^{-2}$

IV- On lâche une pierre sans vitesse initiale à 5m au dessus du sol à un instant initial (t = 0). 0,100 seconde plus tard, on lâche une sonde pierre dans les mêmes conditions.

On néglige la résistance de l'air (g = 9,8 $m.s^{-2}$).

1°) Déterminer la date à laquelle la première pierre touche le sol. A quelle distance du sol se trouve alors la seconde pierre ? Quelle est la vitesse des deux pierres à cette date ?

2°) Exprimer la distance d qui sépare les deux pierres en fonction de la date t lorsque celles-ci sont toutes deux en chute libre et représenter d = f(t). Que vaut d à l'instant de date t = 0,5s ?

REPONSES EXERCICE 1 :

I) $h = \frac{v^2}{2g} = 11,25\ m.$

II) 1) $h = \frac{v^2}{2g} = 0,392\ m.$

2) $h_0 = \frac{3v^2}{2g} = 156,42\ m$.

III) 1) $v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2gl} = 7,35\ m.s^{-1}$

2) $\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{v_2 - v_1}{g} = 0,14\ s$.

IV) 1) $t_1 = \sqrt{\frac{2h_1}{g}} = 0,32\ s$; $d = \frac{1}{2}g\left(t_1^2 - (t_1 - \Delta t)^2\right) = h_1 - \frac{1}{2}g(t_1 - \Delta t)^2 = 0,082\ m$;

$v_1 = g.t_1 = 3,19\ m.s^{-1}$; $v_2 = g(t_1 - \Delta t) = 1,96\ m.s^{-1}$

2) $d(t) = \frac{1}{2}g(t^2 - (t - \Delta t)^2) = 0,98.t - 0,441 \Rightarrow d(0,5) = 0,049\ m$

Exercice 2

Un solide de masse $m = 200kg$ est tiré sur un plan incliné d'un angle $\alpha = 15°$ par rapport à l'horizontal à l'aide d'un câble qui fait un angle $\theta = 8°$ avec la direction du plan incliné. (Voir Figure 7-6)

Le solide se déplace à vitesse constante $v = 0,15m/s$. La puissance P dépensée pour réaliser la montée est constante et égale à 250W. La montée s'effectue avec frottements.

1- Faire le bilan des forces appliquées au solide. Les représenter sur le schéma.

2- Calculer l'intensité de chacune des forces appliquées au solide.

3- Calculer le travail effectué par chacune de ces forces pour une montée de dénivellation $h = 15m$.

4- Calculer la puissance de chacune de ces forces.

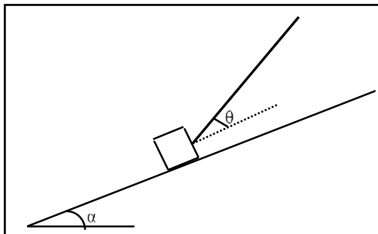


Figure 7-8

Exercice 3

Un solide de masse $m = 200g$ est lâché sans vitesse initiale d'un point A. Voir figure 7-7.

On donne :

$AB = l = 1m$; $\alpha = 60°$; $OB = OC = OD = r = 20cm$ et $g = 10N/kg$.

1- On suppose que les frottements sont négligeables. Calculer les vitesses v_B, v_C et v_D respectivement aux points B, C et D

2- En réalité la vitesse en D est la moitié de celle calculer dans la question précédente.

a) L'hypothèse de la question 1- sur les forces de frottement est-elle vérifiée ?

b) Calculer le travail effectué par les forces de frottement supposées constantes et s'exerçant sur tout le trajet.

c) En déduire l'intensité f de ces forces de frottement.

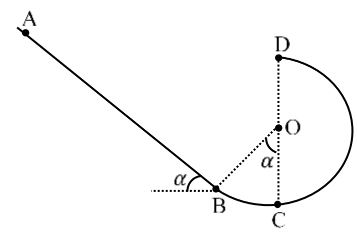


Figure 7-9

Exercice 4

Un solide (S) de masse m = 100g de dimension négligeable, peut glisser dans une gouttière ABD dont le plan de symétrie est vertical et qui est formée d'une partie inclinée AD et d'une partie circulaire DB de rayon r = 50 cm. Prendre g=9,8N.kg-1.

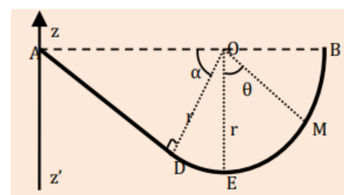


Figure 7-10

1°) Énoncer le théorème de l'énergie cinétique.

2°) Le solide (S) est abandonné en A sans vitesse initiale. Les frottements sont négligeables.

a.) Représenter les forces exercées sur (S) entre A et D.

b.) Déterminer la vitesse de (S) en D en fonction de g, r et α.

c. Pour quelle valeur de α cette vitesse est maximale.

d.) Calculer la valeur de cette vitesse maximale.

3°a.) Déterminer la vitesse de (S) en M, un point de EB, en fonction de g, r et θ.

b.) A quel niveau remonterait le solide (S) avant de redescendre ?

4°) En réalité, les forces de frottement existent et sont équivalentes à une force $\vec{f}$ de sens opposé au mouvement de (S) sur le trajet ABD. Le solide abandonné en A sans vitesse initiale remonte jusqu'en C tel que (COB) =β=30°.

a.) Représenter les forces exercées sur (S) en un point M' situé entre A et D.

b.) Calculer le travail des forces de frottement entre A et C. En déduire la valeur moyenne f de ces frottements en prenant (AOD) = α = 60°.

REPONSES EXERCICE 4 :

1°) $\Delta E_c = \sum W(\vec{F}_{ext})$; 2°b) $V_D = \sqrt{2g.r.\sin\alpha}$; ; 2°c) $\alpha = 90°$ $\Rightarrow V_{Dmax} = \sqrt{2g.r}$;
2°d) $V_{Dmax} = 31,13\ m.s^{-1}$; 3°a) $V_M = \sqrt{2g.r.\cos\theta}$; 3°b) En B ;
4°b) $W(\vec{f}) = -W_{A\to B}(\vec{P}) = -mgr\sin\alpha \Rightarrow f = \frac{m\,g\,r\sin\beta}{r\,(cotan\alpha-\beta-\alpha+\pi)}$

Exercice 5

1°) ***Questions de cours :***

a- Enoncer le théorème de l'énergie cinétique.

b- Choisir la bonne réponse parmi la liste :

L'énergie cinétique d'un solide ponctuel de masse $m = 50\ Kg$ se déplaçant à $20\ Km.h^{-1}$ est :

b1- $E_C = 771{,}6\ KJ$;

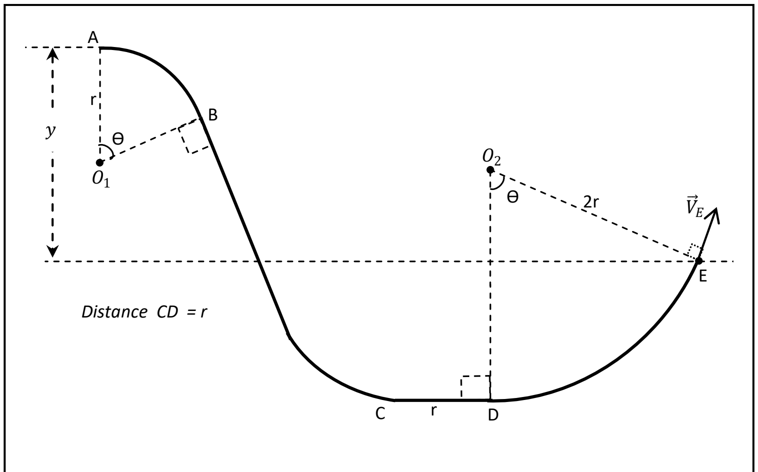
b2- E_C =771,6 mJ ;

b3- E_C =77,16 J ;

b4- E_C =771,6 J.

c- Répondre par vrai ou faux :

c1- Le travail d'un ensemble de forces réparties, de somme constante, agissant sur un solide en translation est égal au produit scalaire du vecteur somme des forces par le vecteur déplacement du solide.



(Figure 1)

c2- Le travail d'une force de moment par rapport à un axe fixe est égal au produit de ce moment par l'angle de rotation.

c3- L'énergie cinétique d'un rotor d'alternateur de moment d'inertie égal à 5735 kg.m², tournant à 3000tr.min⁻¹ est $E_C = 2{,}83.10^5\ J$

c4- Une pierre de masse 70 g est lancée vers le haut et atteint en un point M d'altitude 20 m. L'énergie potentielle de la pierre en M dans le champ de pesanteur $g = 10\ m.s^{-2}$ par rapport au sol est : $E_{P_M} = 14\ J$.

2°) Un chariot de masse m = 200 g de dimension négligeable est mobile sans frottement sur une piste située dans un plan vertical. La piste est formée de (voir figure1):

- Une partie circulaire AB de centre O_1, de rayon r = 0,8 m et d'angle $\theta = \left(\widehat{AO_1B}\right)$ = 60°;
- Une partie rectiligne horizontal CD se raccordant tangentiellement à DE ; distance CD = r = 0,8 m;
- Une partie circulaire DE, de centre O_2, de rayon R = 2r = 1,6 m et d'angle au sommet $\theta = 60°$. La position du mobile M sur la partie AB est repérée par l'angle $\alpha = \left(\widehat{AO_1M}\right)$ avec $0 \leq \alpha \leq \theta$. On donne g = 10 m.s⁻².

Le chariot est abandonné sans vitesse en A.

a- Déterminer en fonction de r, α et g la vitesse V_M du chariot en un point M de la portion AB.

b- Calculer numériquement la vitesse V_B.
c- Exprimer la vitesse V_E au point E en fonction de g et de la dénivellation y entre A et E.

3°) On fixe $y = 1{,}44\, m$.
a- Calculer les vitesses du chariot en E puis en D et C.
b- Le système de freinage du chariot ne peut fonctionner que sur la portion horizontale CD. Calculer le module de la force de freinage constante $\vec{f}$ qu'il faut appliquer entre C et D pour que le chariot s'immobilise en D.

REPONSES EXERCICE 5 :

2a°) $V_M = \sqrt{2g.r.(1-\cos\alpha)}$ **; 2b°)** $V_B = \sqrt{2g.r.(1-\cos\theta)} = 2{,}8\, m.s^{-1}$ **;**

$V_D = \sqrt{V_E^2 + 4g.r.(1-\cos\theta)} =: 111{,}9\, m.s^{-1}$ **; 3a°)** $V_C = V_D = 11{,}9\, m.s^{-1}$ **;**

3b°) $f = \frac{m\,V_C^2}{2\,r} = 1565{,}2\, N$

Exercice 6

Une piste située dans un plan vertical est formée de trois parties : AB inclinée d'un angle α = 60°, BC horizontale et CD inclinée d'un angle β = 30°. AB = 1,5 m ; BC = 2,5 m ; BE = 1,5 m et CD = 2m. Sur tout le long de cette piste, les forces de frottements sont équivalentes à une force unique constante f = 1N. Voir figure 7-13.

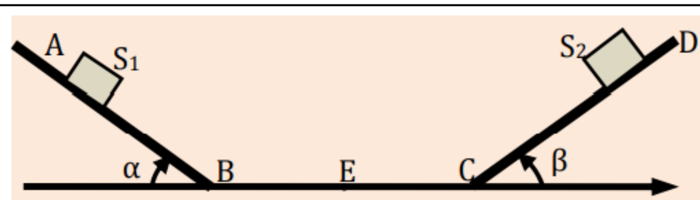


Figure 7-13

1°) Deux chariots S_1 et S_2 de masse m_1 = 200g et m_2 = 300 g sont lâchés simultanément sans vitesse initiale respective au point A et D.
a. Calculer les vitesses de S_1 au passage du point B et de S_2 au passage du point C.
b. Quelle distance S_1 et S_2 parcourent-ils sur la piste BC avant de s'arrêter ?
c. Montrer qu'il ne se produit pas de collision entre S_1 et S_2 sur la piste horizontale BC.
2°) Les chariots S_1 et S_2 sont maintenant lancés de leur position initiale avec des vitesses v_0 et v_0' de façon qu'ils se rencontrent sur la piste BC au point E où se produit un choc élastique « de plein fouet » (la piste BC est orientée de B vers C). Le chariot S_1 passe au point B avec une vitesse v_B = 5m/s. Le chariot S_2 passe au point C avec une vitesse v_C = 3,5m/s.
a. Calculer v_0 et v_0'.

b. Déterminer les vitesses de S_1 et S_2 au point E avant le choc. Soit $\bar{V}_1$ et $\bar{V}_2$ les vitesses algébriques respectives de S_1 et S_2 après le choc.
c. Ecrire les relations de conservation de quantité de mouvement et de l'énergie cinétique du système au cours du choc élastique.
d. En déduire $\bar{V}_1$ et $\bar{V}_2$.
3°) Quelle remarque pouvez-vous faire concernant le mouvement des deux chariots après le choc ? On donne : g =10N/kg.

CORRECTION EXERCICE 6 :

1°* *Vitesse de S_1 au passage du point B*

Appliquons TEC au solide S_1 entre les positions A et B

$\Delta E_C = \sum_{A\to B} W(F_{ext}) \quad \Rightarrow \quad E_{C_B} - E_{C_A} = W(\vec{P}) + W(\vec{R}) + W(\vec{f})$

$\frac{1}{2}m_1 v_B^2 - 0 = m_1 gh + 0 - fAB$ avec $h = AB\sin\alpha$

$\frac{1}{2}m_1 v_B^2 = m_1 gAB\sin\alpha - fAB \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v_B = \sqrt{2AB\left(g\sin\alpha - \frac{f}{m_1}\right)}}$ AN : $\mathbf{v_B = 3,31m.}$

**Vitesse de S_2 au passage du point C*

Appliquons TEC au solide S_2 entre les positions D et C

$\Delta E_C = \sum_{C\to D} W(F_{ext}) \quad \Rightarrow \quad E_{C_C} - E_{C_D} = W(\vec{P}) + W(\vec{R}) + W(\vec{f})$

$\frac{1}{2}m_2 v_C^2 - 0 = m_2 gh + 0 - fCD$ avec $h = CD\sin\beta$

$\frac{1}{2}m_2 v_C^2 = m_2 gCD\sin\beta - fCD \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v_C = \sqrt{2CD\left(g\sin\beta - \frac{f}{m_2}\right)}}$ AN : $\mathbf{v_C = 2,58m.}$

b. Distance parcouru par S_1 sur la piste BC*

Appliquons TEC au solide S_1 entre les positions B et X (X point d'arrêt sur BC)

$\Delta E_C = \sum_{B\to X} W(F_{ext}) \quad \Rightarrow \quad E_{C_X} - E_{C_B} = W(\vec{P}) + W(\vec{R}) + W(\vec{f})$

$0 - \frac{1}{2}m_1 v_B^2 = 0 + 0 - fBX \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{BX = \frac{m_1 v_B^2}{2f}}$ AN : $\mathbf{BX = 1,1m}$

* Distance parcouru par S_2 sur la piste BC

Appliquons TEC au solide S_2 entre les positions C et X' (point d'arrêt sur BC)

$\Delta E_C = \sum_{C\to X'} W(F_{ext}) \quad \Rightarrow \quad E_{C_{X'}} - E_{C_C} = W(\vec{P}) + W(\vec{R}) + W(\vec{f})$

$0 - \frac{1}{2}m_2 v_C^2 = 0 + 0 - fCX' \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{CX' = \frac{m_2 v_C^2}{2f}}$ AN : $\mathbf{CX' = 1m}$

c. Montrons qu'il ne se produit pas une collision

BX +CX' = 1,1 + 1 = 2,1m < BC = 2,5m $\Rightarrow$ Il n'y aura donc pas de collision

2°a. **Vitesse de lancement v_0 de S_1*

Appliquons TEC au solide S_1 entre les positions A et B

$\Delta E_C = \sum_{A\to B} W(F_{ext}) \quad \Rightarrow \quad E_{C_B} - E_{C_A} = W(\vec{P}) + W(\vec{R}) + W(\vec{f})$

$\frac{1}{2}m_1 v_B^2 - \frac{1}{2}m_1 v_0^2 = m_1 gh + 0 - fAB$ avec $h = AB\sin\alpha$

$\frac{1}{2}m_1 v_B^2 - \frac{1}{2}m_1 v_0^2 = m_1 gAB\sin\alpha - fAB \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v_0 = \sqrt{v_B^2 - 2AB\left(g\sin\alpha - \frac{f}{m_1}\right)}}$

AN : $\mathbf{v_0 = 3,74m.s^{-1}}$

**Vitesse de lancement v_0' de S_2*

Appliquons TEC au solide S_2 entre les positions DC et C

$\Delta E_C = \sum_{D\to C} W(F_{ext}) \quad \Rightarrow \quad E_{C_C} - E_{C_D} = W(\vec{P}) + W(\vec{R}) + W(\vec{f})$

$\frac{1}{2}m_2 v_C^2 - \frac{1}{2}m_2 v_0'^2 = m_2 gh + 0 - fDC$ avec $h = DC\sin\beta$

$\frac{1}{2}m_2 v_C^2 - \frac{1}{2}m_2 v_0'^2 = m_2 gDC\sin\beta - fDC \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v_0' = \sqrt{v_C^2 - 2DC\left(g\sin\beta - \frac{f}{m_2}\right)}}$

AN : $\mathbf{v_0' = 2,36m.s^{-1}}$

b.**Vitesse de s_1 au point E juste avant le choc*

Appliquons TEC au solide S_1 entre les positions B et E

$\Delta E_C = \sum_{B\to E} W(F_{ext}) \Rightarrow E_{C_E} - E_{C_B} = W(\vec{P}) + W(\vec{R}) + W(\vec{f})$

$\frac{1}{2}m_1 v_{1_E}{}^2 - \frac{1}{2}m_1 v_B{}^2 = 0 + 0 - fBE \Rightarrow \mathbf{v_{1_E}} = \sqrt{\mathbf{v_B}^2 - \frac{\mathbf{2fBE}}{\mathbf{m_1}}}$ AN: $\mathbf{v_{1_E} = 3,16 m.s^{-1}}$

**Vitesse de s_2 au point E juste avant le choc*

Appliquons TEC au solide S_2 entre les positions C et E

$\Delta E_C = \sum_{C\to E} W(F_{ext}) \Rightarrow E_{C_E} - E_{C_C} = W(\vec{P}) + W(\vec{R}) + W(\vec{f})$

$\frac{1}{2}m_2 v_{2_E}{}^2 - \frac{1}{2}m_2 v_C{}^2 = 0 + 0 - fCE \Rightarrow \mathbf{v_{2_E}} = \sqrt{\mathbf{v_C}^2 - \frac{\mathbf{2fCE}}{\mathbf{m_2}}}$ AN: $\mathbf{v_{2_E} = 2,36 m.s^{-1}}$

c.* *Relation de conservation de la quantité de mouvement*

$\vec{p}_{avant\ le\ choc} = m_1\vec{v}_{1\,E} + m_2\vec{v}_{2\,E}$; $\vec{p}_{apres\ le\ choc} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$

Système pseudo-isolé

$\vec{p}_{avant\ le\ choc} = \vec{p}_{apres\ le\ choc} \Rightarrow m_1\vec{v}_{1E} + m_2\vec{v}_{2E} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$

Apres projection sur BC, on obtient

$m_1v_{1E} - m_2v_{2E} = m_1v_1 + m_2v_2$

* *Relation de conservation de l'énergie cinétique*

$Ec_{avant\ le\ choc} = \frac{1}{2}m_1v_{1E}{}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2E}{}^2$ et $Ec_{apres\ le\ choc} = \frac{1}{2}m_1v_1{}^2 + \frac{1}{2}m_2v_2{}^2$

$Ec_{avant\ le\ choc} = Ec_{apres\ le\ choc} \Rightarrow \frac{1}{2}m_1v_{1E}{}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2E}{}^2 = \frac{1}{2}m_1v_1{}^2 + \frac{1}{2}m_2v_2{}^2$

$\Rightarrow m_1v_{1E}{}^2 + m_2v_{2E}{}^2 = m_1v_1{}^2 + m_2v_2{}^2$

d. *Valeur de v_1 et v_2*

$$\begin{cases} m_1v_{1E} - m_2v_{2E} = m_1v_1 + m_2v_2 \\ m_1v_{1E}{}^2 + m_2v_{2E}{}^2 = m_1v_1{}^2 + m_2v_2{}^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1(v_{1E} - v_1) = m_2(v_2 + v_{2E}) \\ m_1(v_{1E}{}^2 - v_1{}^2) = m_2(v_2{}^2 - v_{2E}{}^2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1v_{1E} - m_2v_{2E} = m_1v_1 + m_2v_2 \\ v_{1E} + v_1 = v_2 - v_{2E} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{v_1 = \frac{(m_1-m_2)v_{1E} - 2m_2v_{2E}}{m_1+m_2}} \\ \boldsymbol{v_2 = \frac{2m_1v_{1E} + (m_1-m_2)v_{2E}}{m_1+m_2}} \end{cases}$$

AN : $\begin{cases} \mathbf{v_1 = -3,46 m.s^{-1}} \\ \mathbf{v_2 = 2,06 m.s^{-1}} \end{cases}$

3° Remarque

Les deux particules repartent en sens inverse après le choc.

Chapitre 8 :

A/ OXYDATION – REDUCTION COUPLES OXYDANT/REDUCTEUR

- **Objectifs pédagogiques**

  A la fin de ce chapitre l'élève doit être capable de :

- Définir : un oxydant, un réducteur, une oxydation, une réduction et une réaction d'oxydoréduction.
- Ecrire une réaction d'oxydation, une réaction de réduction et une réaction d'oxydoréduction.
- Expliquer l'action de solution d'acide chlorhydrique et d'acide sulfurique sur certains métaux et pas sur d'autres.
- Prévoir la réaction entre un oxydant et un réducteur.

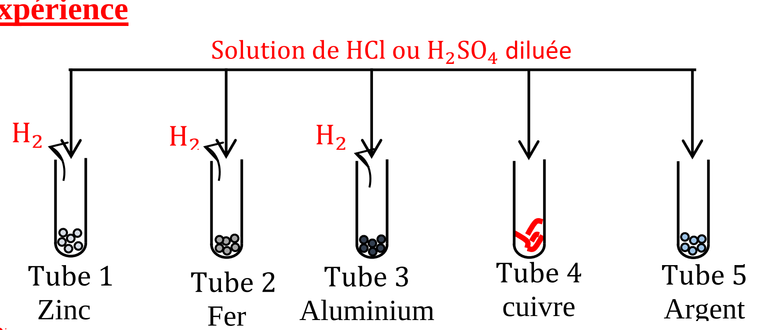
I- Exemples de réactions d'oxydoréduction

1- Quelques définitions

* Un oxydant est une espèce chimique qui gagne (capte) un ou plusieurs électrons.
* Un réducteur est une espèce chimique qui cède (perd) un ou plusieurs électrons.
* Une oxydation est une perte d'électrons par un réducteur.
* Une réduction est un gain d'électrons par un oxydant.
* Une réaction d'oxydoréduction est un transfert d'électrons entre un oxydant et un réducteur. Au cours de cette réaction, il y a simultanément oxydation et réduction.

2- Action d'une solution d'acide chlorhydrique et d'acide sulfurique sur certains métaux

a) Expérience



b) Observations

* Les solutions d'acide chlorhydrique (HCl) et d'acide sulfurique (H_2SO_4) diluées sont sans action sur le cuivre et l'argent.
* Par contre ces solution réagissent avec les métaux comme le zinc, le fer, l'aluminium… en produisant un dégagement de dihydrogène et une formation de cations métalliques Zn^{2+}, Fe^{2+}, Al^{3+}…

c) Interprétations

- Les métaux Zn, Fe et Al subissent chacun une oxydation et passent à l'état d'ions métalliques Zn^{2+}, Fe^{2+}et Al^{3+}. Les demi-équations électroniques sont :

$$Zn \rightarrow Zn^{2+} + 2e^-$$
$$Fe \rightarrow Fe^{2+} + 2e^-$$
$$Al \rightarrow Al^{3+} + 3e^-$$

- Les électrons cédés sont captés par les ions hydroniums H_3O^+ de la solution acide qui se réduisent en
dihydrogène selon les demi-équations électroniques :

$$2H_3O^+ + 2e^- \rightarrow H_2 + 2H_2O$$

- On en déduit donc les équations bilans des réactions observées dans les tubes :

* <u>Tube 1</u>

$$\begin{array}{c|l} 1 & Zn \rightarrow Zn^{2+} + 2e^- \\ 1 & 2H_3O^+ + 2e^- \rightarrow H_2 + 2H_2O \\ \hline & Zn + 2H_3O^+ \rightarrow Zn^{2+} + H_2 + 2H_2O \end{array}$$

*<u>Tube 2</u>

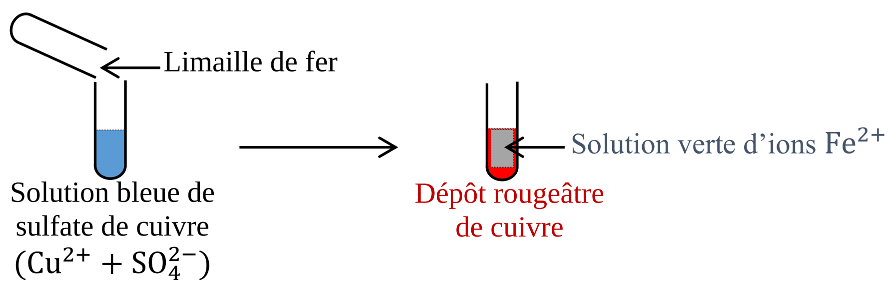
$$\begin{array}{c|l} 1 & Fe \rightarrow Fe^{2+} + 2e^- \\ 1 & 2H_3O^+ + 2e^- \rightarrow H_2 + 2H_2O \\ \hline & Fe + 2H_3O^+ \rightarrow Fe^{2+} + H_2 + 2H_2O \end{array}$$

* <u>Tube 3</u>

$$\begin{array}{c|l} 2 & Al \rightarrow Al^{3+} + 3e^- \\ 3 & 2H_3O^+ + 2e^- \rightarrow H_2 + 2H_2O \\ \hline & 2Al + 6H_3O^+ \rightarrow 2Al^{3+} + 3H_2 + 6H_2O \end{array}$$

3- <u>Réaction entre un ion métallique et un métal</u>

a) <u>Actions des ions cuivre II sur le métal fer</u>



- <u>Demi-équations électroniques</u>

$$Cu^{2+} + 2e^- \rightarrow Cu$$
$$Fe \rightarrow Fe^{2+} + 2e^-$$

- <u>Equation bilan de la réaction</u>

$$Cu^{2+} + Fe \rightarrow Cu + Fe^{2+}$$

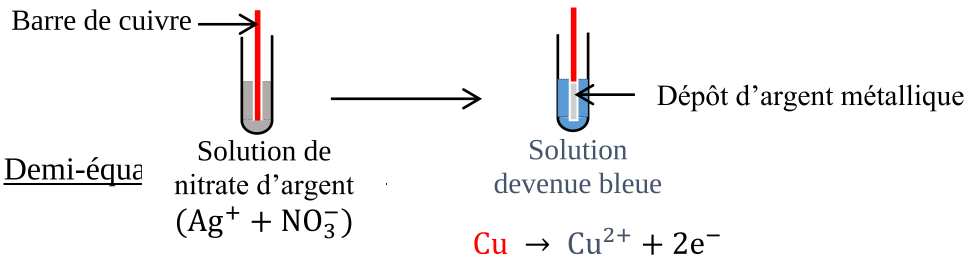
- On peut mettre en évidence la formation d'ions Fe^{2+} avec la soude par formation d'un précipité verdâtre d'hydroxyde de fer II de formule $Fe(OH)_2$.

$$Fe^{2+} + 2OH^- \rightarrow Fe(OH)_2$$

NB : La réaction entre les ions Fe^{2+}et le métal Cuest impossible.

$Fe^{2+} + Cu \rightarrow$impossible

b) **Action des ions Ag^+ sur le métal cuivre**



- Demi-équa

$$Cu \rightarrow Cu^{2+} + 2e^-$$
$$Ag^+ + 2e^- \rightarrow Ag$$

- Equation bilan de la réaction

$$\begin{array}{l|l} 1 & Cu \rightarrow Cu^{2+} + 2e^- \\ 2 & Ag^+ + e^- \rightarrow Ag \\ \hline & Cu + 2Ag^+ \rightarrow Cu^{2+} + 2Ag \end{array}$$

La couleur bleue de la solution témoigne de la présence des ions Cu^{2+} qui donnent un précipité bleu d'hydroxyde de cuivre avec la soude.

NB : Les ions Cu^{2+}sont sans action sur le métal argent.

$Cu^{2+} + Ag \rightarrow$ Impossible

4- Réaction d'oxydoréduction

Lors d'une réaction d'oxydoréduction il y a réduction de l'oxydant par le réducteur et oxydation du réducteur par l'oxydant.

Oxydation

$$2Ag^+ + Cu \longrightarrow 2Ag + Cu^{2+}$$

Réduction

II- Prévision des réactions d'oxydoréduction

1- Notion de couple oxydant/réducteur

- Dans certaines conditions les ions Cu^{2+} peuvent se transformer en cuivre métallique Cu.
- Dans d'autres conditions le métal cuivre peut s'oxyder en ion cuivre Cu^{2+}.

Les deux espèces Cu^{2+} et Cu forment un couple oxydant/réducteur ou couple redox noté Cu^{2+}/Cu ; la demi-équation associée s'écrit :

$$Cu^{2+} + 2e^- \rightleftharpoons Cu$$

Autres exemples de couples redox

$$\begin{array}{lcl}
Ag^+/Ag & \Rightarrow & Ag^+ + e^- \rightleftarrows Ag \\
Zn^{2+}/Zn & \Rightarrow & Zn^{2+} + 2e^- \rightleftarrows Zn \\
Fe^{2+}/Fe & \Rightarrow & Fe^{2+} + 2e^- \rightleftarrows Fe \\
Pb^{2+}/Pb & \Rightarrow & Pb^{2+} + 2e^- \rightleftarrows Pb \\
Al^{3+}/Al & \Rightarrow & Al^{3+} + 3e^- \rightleftarrows Al \\
H_3O^+/H_2 & \Rightarrow & 2H_3O^+ + 2e^- \rightleftarrows H_2 + 2H_2O \\
NO_3^-/NO & \Rightarrow & NO_3^- + 4H_3O^+ + 3e^- \rightleftarrows NO + 6H_2O
\end{array}$$

2- Classification qualitative des couples oxydant/réducteur

a) Classification des couples Cu^{2+}/Cu, Ag^+/Ag et Fe^{2+}/Fe

- **Classification des couples** Cu^{2+}/Cu et Fe^{2+}/Fe

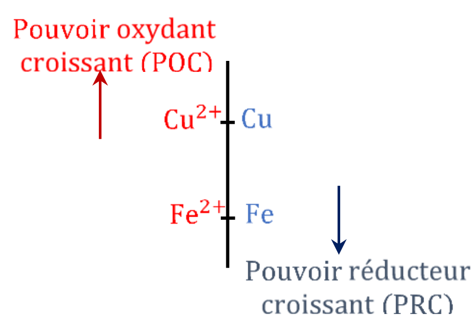
L'action des ions Cu^{2+} sur le fer se traduit par l'équation bilan :

$$Cu^{2+} + Fe \rightarrow Cu + Fe^{2+}$$

La réaction inverse étant impossible on en déduit que :

* Cu^{2+} est plus oxydant que Fe^{2+} ;
* Fe est plus réducteur que Cu ;

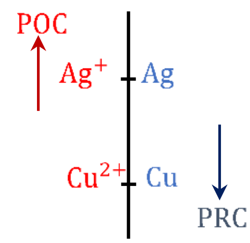
D'où la classification :



- **Classification des couples** Cu^{2+}/Cu et Ag^{+}/Ag

L'action d'une solution aqueuse de nitrate d'argent $(Ag^{+} + NO_3^{-})$ sur le métal cuivre se traduit par l'équation bilan :

$$Cu + 2Ag^{+} \rightarrow Cu^{2+} + 2Ag$$



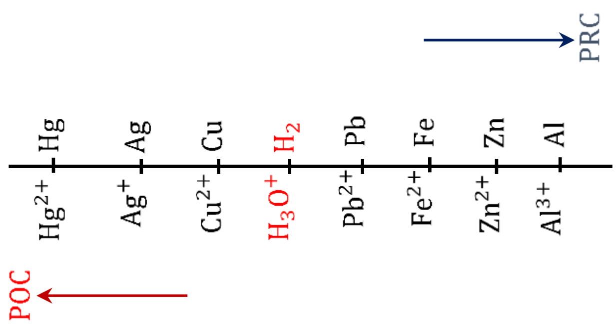
La réaction inverse étant impossible on en déduit que :

* Ag^{+} est plus oxydant que Cu^{2+} ;

* Cu est plus réducteur que Ag;

D'où la classification :

b) Généralisation

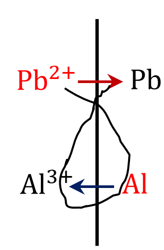


3- Prévision des réactions d'oxydoréduction

* Entre deux couples redox la réaction naturelle est celle de l'oxydant le plus fort sur le réducteur le plus fort : c'est la règle de gamma.

Exples : Couples Pb^{2+}/Pb et Al^{3+}/Al.

$$\begin{array}{c|c} 3 & Pb^{2+} + 2e^{-} \rightarrow Pb \\ 2 & Al \rightarrow Al^{3+} + 3e^{-} \\ \hline & 3Pb^{2+} + 2Al \rightarrow 3Pb + 2Al^{3+} \end{array}$$



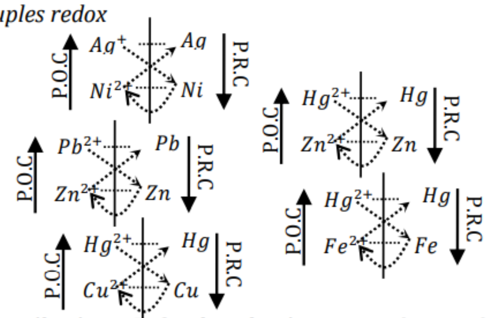
* Les métaux des couples situés au-dessous du couple H_3O^+/H_2 sont oxydés par l'ion hydronium H_3O^+ avec dégagement du dihydrogène H_2. Ces métaux peuvent donc réagir naturellement avec des solutions aqueuses d'acide chlorhydrique ou d'acide sulfurique.
Par contre les métaux des couples situés au-dessus du couple H_3O^+/H_2 sont inattaquables par l'acide chlorhydrique ou l'acide sulfurique.

Exercice 1

1°) En vous servant de la classification électrochimique, prévoir la réaction entre les couples redox suivants :
a.) Ag^+/Ag et Ni^{2+}/Ni ;
b.) Ag^+/Ag et Hg^{2+}/Hg ; c.) Pb^{2+}/Pb et Zn^{2+}/Zn ; d.) Hg^{2+}/Hg et Fe^{2+}/Fe ; e. Hg^{2+}/Hg et Cu^{2+}/Cu.
2°) Dites si les réactions suivantes sont possibles. Compléter la réaction dans le cas où elle est possible.
a.) $Zn^{2+} + Cu \rightarrow$
b.) $Al^{3+} + Mg \rightarrow$
c.) $Sn + Cu^{2+} \rightarrow$
d.) $Pb^{2+} + Au \rightarrow$

Réponses Exercice 1:

1° *Réaction naturelle entre ces couples redox*
a. Ag^+/Ag et Ni^{2+}/Ni
$2Ag^+ + Ni \longrightarrow 2Ag + Ni^{2+}$
b. Ag^+/Ag et Hg^{2+}/Hg
$Hg^{2+} + 2Ag \longrightarrow Hg + 2Ag^+$
c. Pb^{2+}/Pb et Zn^{2+}/Zn
$Pb^{2+} + Zn \longrightarrow Pb + Zn^{2+}$
d. Hg^{2+}/Hg et Fe^{2+}/Fe
$Hg^{2+} + Fe \longrightarrow Hg + Fe^{2+}$
e. Hg^{2+}/Hg et Cu^{2+}/Cu.
$Hg^{2+} + Cu \longrightarrow Hg + Cu^{2+}$



2° a. Cu^{2+} a un pouvoir oxydant plus élevé que Zn^{2+} ; donc la réaction est **impossible**.
b. Al^{3+} a un pouvoir oxydant plus élevé que Mg^{2+} ; donc la réaction est **possible**.
$2Al^{3+} + 3Mg \longrightarrow 2Al + 3Mg^{2+}$
c. Cu^{2+} a un pouvoir oxydant plus élevé que Sn^{2+} ; donc la réaction est **possible**.
$Sn + Cu^{2+} \longrightarrow Sn^{2+} + Cu$
d. Au^{3+} a un pouvoir oxydant plus élevé que Pb^{2+} ; donc la réaction est **impossible**.

Exercice 2

20 ml d'une solution d'acide chlorhydrique sont mis en présence de 0,1g de zinc. On recueille, en fin de réaction ; 11,4 cm^3 de dihydrogène gazeux, mesurés dans les conditions normales de température et de pression, puis on sépare le zinc restant de la solution.

1°) Ecrire l'équation-bilan de la réaction.

2°) Calculer la masse du zinc restant.

3°) Calculer la concentration des ions Zn^{2+} dans la solution.

4°) Quel volume de solution d'hydroxyde de sodium à 0,5 mol.l^{-1} serait nécessaire pour transformer tous les ions Zn^{2+} en précipité d'hydroxyde de zinc ?

5° Que se passerait-il si on ajoute encore de l'hydroxyde de sodium ?

Réponses Exercice 2 :

1° *Equation-bilan de la réaction*

$2H_3O^+ + Zn \longrightarrow Zn^{2+} + H_2 + 2H_2O$

2° *Masse m'$_{Zn}$ du zinc restant*

$m'_{Zn} = m_{0\,Zn} - m_{Zn}$ (m_{Zn} étant la masse de zinc qui a réagi)

$n_{Zn} = n_{H_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{m_{Zn}}{M_{Zn}} = \frac{V_{H_2}}{V_m} \quad \Rightarrow \quad m_{Zn} = \frac{V_{H_2} M_{Zn}}{V_m}$

On déduit : $\boldsymbol{m'_{Zn} = m_{0\,Zn} - \frac{V_{H_2} M_{Zn}}{V_m}}$ AN : $\boldsymbol{m'_{Zn} = 6{,}67.10^{-2}g}$

3° *Concentration des ions Zn^{2+} dans la solution*

$n_{Zn^{2+}} = n_{H_2} \Rightarrow [Zn^{2+}]V = \frac{V_{H_2}}{V_m}$ soit $\boldsymbol{[Zn^{2+}] = \frac{V_{H_2}}{VV_m}}$ AN : $\boldsymbol{[Zn^{2+}] = 2{,}5.10^{-2} mol.l^{-1}}$

4° *Volume de solution d'hydroxyde de sodium*

- équation de la réaction : $Zn^{2+} + 2OH^- \longrightarrow Zn(OH)_2$

$n_{Zn^{2+}} = \frac{n_{OH^-}}{2} \quad \Rightarrow \quad [Zn^{2+}]V = \frac{C_b V_b}{2} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{V_b = \frac{2[Zn^{2+}]V}{C_b}}$ AN : $\boldsymbol{V_b = 2ml}$

5° Un excès d'hydroxyde de sodium ferait disparaitre le précipité d'hydroxyde de zinc .

Exercice 3

10 g d'un mélange d'aluminium et de fer sont oxydés par une solution d'acide chlorhydrique de volume V=250ml.

1°) Ecrire les demi-équations électroniques et les équations-bilan des réactions.

2°) Sachant que les concentrations des ions Al^{3+} et Fe^{2+} en solution sont égales lorsque l'acide a totalement oxydé les deux métaux, calculer la masse de chaque métal dans l'échantillon. En déduire le volume de dihydrogène dégagé (conditions normales) et la quantité minimale d'acide chlorhydrique utilisé.

3°) Quelle est la concentration minimale de l'acide à utiliser ?

Réponses Exercice 3 :

1° *Demi-équations électroniques*

$H_3O^+ + e^- \longrightarrow \frac{1}{2}H_2 + H_2O$ (a)

$Al \longrightarrow Al^{3+} + 3e^-$ (b)

$Fe \longrightarrow Fe^{2+} + 2e^-$ (c)

Equations-bilan des réactions

3(a) + (b) donne $3H_3O^+ + Al \longrightarrow \frac{3}{2}H_2 + Al^{3+} + 3H_2O$ (1)

2(a) + (c) donne $2H_3O^+ + Fe \longrightarrow H_2 + Fe^{2+} + 2H_2O$ (2)

2° *Masse de chaque métal dans l'échantillon*

$m_{Al} + m_{Fe} = m$ *et* $[Al^{3+}] = [Fe^{2+}]$

Or $n_{Al^{3+}} = n_{Al} \Rightarrow [Al^{3+}]V = \frac{m_{Al}}{M_{Al}}$ et $n_{Fe^{2+}} = n_{Fe} \Rightarrow [Fe^{2+}]V = \frac{m_{Fe}}{M_{Fe}}$ d'où $\frac{m_{Al}}{27} = \frac{m_{Fe}}{56}$

$$\begin{cases} m_{Al} + m_{Fe} = m \\ 56m_{Al} - 27m_{Fe} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_{Al} = \frac{27}{83}m \\ m_{Fe} = \frac{56}{83}m \end{cases} \quad \text{AN : } \begin{cases} \boldsymbol{m_{Al} = 3,25g} \\ \boldsymbol{m_{Fe} = 6,75g} \end{cases}$$

Volume de dihydrogène dégagé

$V_{H_2} = V_{H_2(1)} + V_{H_2(2)}$ Or $V_{H_2(1)} = n_{H_2(1)}V_m = \frac{3}{2}n_{Al}V_m$ et $V_{H_2(2)} = n_{H_2(2)}V_m = n_{Fe}V_m$

d'où : $\boldsymbol{V_{H_2}} = \left(\frac{3}{2}\frac{m_{Al}}{M_{Al}} + \frac{m_{Fe}}{M_{Fe}}\right)\boldsymbol{V_m}$ soit $\boldsymbol{V_{H_2} = \frac{5m_{Al}V_m}{2M_{Al}}}$ AN : $\boldsymbol{V_{H_2} = 1,34l}$

Quantité minimale d'acide chlorhydrique utilisé

$n_{H_3O^+} = n_{H_3O^+(1)} + n_{H_3O^+(2)}$ Or $n_{H_3O^+(1)} = 3n_{Al}$ et $n_{H_3O^+(2)} = 2n_{Fe}$

d'où : $\boldsymbol{n_{H_3O^+} = 3\frac{m_{Al}}{M_{Al}} + 2\frac{m_{Fe}}{M_{Fe}}}$ soit $\boldsymbol{n_{H_3O^+} = \frac{5m_{Al}}{M_{Al}}}$ AN : $\boldsymbol{n_{H_3O^+} = 0,6mol}$

Concentration minimale de l'acide à utiliser

$\boldsymbol{[H_3O^+] = \frac{n_{H_3O^+}}{V}}$ **AN :** $\boldsymbol{[H_3O^+] = 2,4mol.l^{-1}}$

Exercice 4

On verse 1,4g de poudre de fer dans 100 ml d'une solution d'acide chlorhydrique de concentration 1mol.l^{-1} et on attend que la réaction soit complètement terminée.

1°) Ecrire l'équation-bilan de la réaction.

2°) Calculer le volume de gaz qui se dégagé.

3°) Faire l'inventaire de tous les ions présents en fin de réaction et calculer leurs concentrations en mol.l^{-1}.

4°) On prélève à l'aide d'une pipette, 20 ml de cette solution : on ajoute à ce prélèvement une solution d'hydroxyde de sodium titrée a 1mol.l^{-1} jusqu'à ce que le pH soit égal à 7. A ce stade de l'expérience, on n'observe aucun précipité. Quel volume V_1 de solution d'hydroxyde de sodium a-t-il fallu verser ?

5°) Quel nouveau volume V_2 de solution de d'hydroxyde de sodium faudrait-il ajouter pour précipiter sous forme d'hydroxyde, tous les ions Fe^{2+} présents dans la prise d'essai de 20 ml ? Quelle est la couleur de ce précipité ?

Réponses Exercice 4:

$2H_3O^+ + Fe \longrightarrow Fe^{2+} + H_2 + 2H_2O$

2° *Volume de gaz*

$n_{0\,Fe} = \frac{m_{Fe}}{M_{Fe}} = \frac{1,4}{56} = 2,5.10^{-2}$mol ; $n_{0\,H_3O^+} = CV = 1 \times 0,1 = 10^{-1}$mol

$\frac{n_{0\,H_3O^+}}{2} > n_{0\,Fe}$ ⇒ Fe est le réactif limitant

$n_{0Fe} = n_{H_2} \Rightarrow n_{0\,Fe} = \frac{V_{H_2}}{Vm} \Rightarrow \mathbf{V_{H_2} = n_{0Fe}Vm}$ AN : $\mathbf{V_{H_2} = 0,56\mathit{l}}$

3° *Ions présents en fin de réaction et concentrations*

En fin de réaction, on aura les ions H_3O^+ et Fe^{2+}

$[H_3O^+] = \frac{n_{H_3O^+}}{V} \Rightarrow [H_3O^+] = \frac{n_{0\,H_3O^+} - 2n_{0\,Fe}}{V}$ soit $\mathbf{[H_3O^+] = C - \frac{2n_{0Fe}}{V}}$

AN : $\mathbf{[H_3O^+] = 0,5mol.l^{-1}}$

$\mathbf{[Fe^{2+}] = \frac{n_{Fe}}{V}}$ AN : $\mathbf{[Fe^{2+}] = 0,25mol.l^{-1}}$

4° *Volume V_1 de solution d'hydroxyde de sodium*

A l'équivalence acide-base, $[H_3O^+]V = C_bV_1 \Rightarrow \mathbf{V_1 = \frac{[H_3O^+]V}{C_b}}$ AN : $\mathbf{V_1 = 0,01\mathit{l}}$

5° *Volume V_2 d'hydroxyde de sodium*

$Fe^{2+} + 2OH^- \longrightarrow Fe(OH)_2$

$n_{Fe^{2+}} = \frac{n_{OH^-}}{2} \Rightarrow n_{0\,Fe} = \frac{C_bV_2}{2} \Rightarrow V_2 = \frac{2n_{0Fe}}{C_b}$ AN : $\mathbf{V_2 = 50\mathit{ml}}$

Couleur du précipité : Vert

B/ PILES ET POTENTIELS

- **Objectifs pédagogiques**

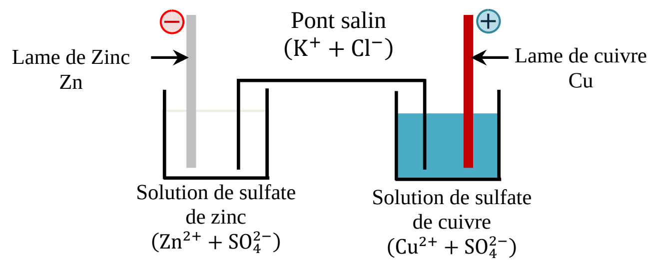
A la fin de ce chapitre l'élève doit être capable de :

- Décrire une pile électrochimique et expliquer son fonctionnement.
- Définir le potentiel d'oxydoréduction d'un couple oxydant/réducteur.
- Prévoir la réaction naturelle pouvant se produire entre deux couples oxydant/réducteur donnés à partir des potentiels standards.
- Déterminer la polarité et la force électromotrice d'une pile à partir des potentiels standards.

I- Réaction d'oxydoréduction au sein d'une pile

1- Etude de la pile Daniell ou pile Zinc/Cuivre

a) Schéma et description de la pile Daniell



La pile Daniell est constituée de deux parties :

* Un bécher contenant une solution aqueuse de sulfate de zinc $(Zn^{2+} + SO_4^{2-})$ dans laquelle plonge une lame de zinc. L'ensemble constitue **la demi-pile Zn^{2+}/Zn**.

* Un bécher contenant une solution aqueuse de sulfate de cuivre II $(Cu^{2+} + SO_4^{2-})$ dans laquelle plonge une lame de cuivre. L'ensemble constitue **la demi-pile Cu^{2+}/Cu**.

* Les deux lames métalliques constituent **les électrodes** de la pile. Les couples redox mis en jeu sont : Zn^{2+}/Zn et Cu^{2+}/Cu.

NB : Le pont salin contient une solution de chlorure de potassium $(K^+ + Cl^-)$. Il assure **le contact électrique** entre les deux solutions.

b) Caractéristiques de la pile

* Pôle positif : Electrode de cuivre.
* Pôle négatif : Electrode de zinc.
* Force électromotrice f.e.m. de la pile : $\mathbf{E = V_{Cu} - V_{Zn} \Rightarrow E = E_{Zn/cu} = 1,10V.}$

c) Fonctionnement de la pile Daniell

* Les réactions aux électrodes lorsque la pile fonctionne sont :

- Au pôle négatif, il y a oxydation du métal zinc en ions Zn^{2+}.

$$Zn \rightarrow Zn^{2+} + 2e^-$$

Il se produit donc une diminution de la masse de l'électrode de zinc alors que la concentration des ions Zn^{2+} augmente

- Au pôle positif, il y a réduction des ions Cu^{2+} en cuivre.

$$Cu^{2+} + 2e^- \rightarrow Cu$$

Il se produit une augmentation de la masse de l'électrode de cuivre alors que la concentration des ionsCu^{2+} diminue.

* Le bilan de fonctionnement de la pile Daniell se traduit par l'équation-bilan suivante :

$$Zn + Cu^{2+} \rightarrow Zn^{2+} + Cu$$

***** Par convention, on représente la pile Daniell de la façon suivante :

$$\ominus\ Zn \mid Zn^{2+} :: Cu^{2+} \mid Cu\ \oplus$$

NB : Le pont salin permet, grâce à un double courant ionique, d'assurer la neutralité électrique dans chaque demi-pile. Il envoie des cations dans le bécher du pôle positif et des anions dans le bécher du pôle négatif.

2- Généralisation

On peut faire fonctionner des piles de type Daniell avec d'autres couples oxydant/réducteur. Dans tous les cas :

- Le pôle positif de la pile est constitué du métal le moins réducteur.

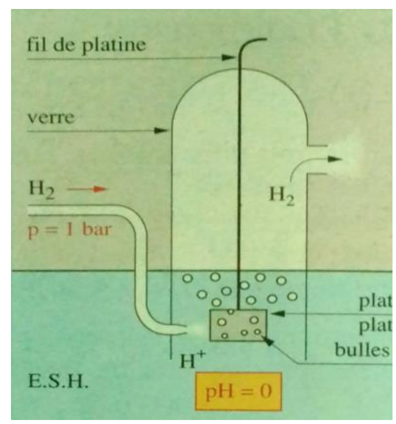
- Le pôle négatif de la pile est constitué du métal le plus réducteur.

- Lorsque la pile fonctionne en générateur, il se produit une réduction au pôle positif et une oxydation au pôle négatif.

- Lorsque la pile fonctionne en générateur, il se produit une augmentation de masse de l'électrode se trouvant au pôle positif et une diminution de masse de l'électrode se trouvant au pôle négatif.

II- Potentiel d'oxydoréduction

1- Potentiel normal d'oxydoréduction d'un couple M^{n+}/M : $E^0(M^{n+}/M)$



Ce potentiel correspond à la différence de potentiel mesurée aux bornes de la pile $Pt/H_2/H_3O^+ \because\because M^{n+}/M$

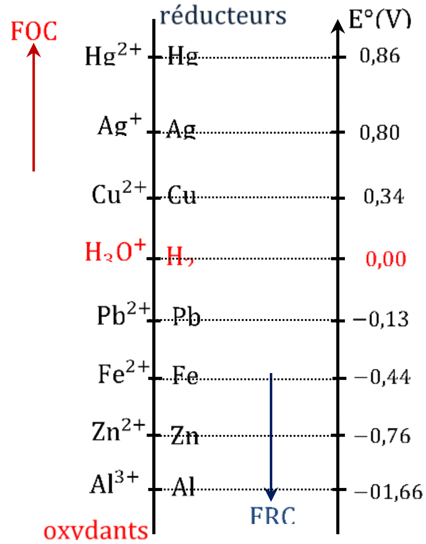
Le potentiel normal d'oxydoréduction du couple M^{n+}/M est le potentiel de l'électrode M utilisé dans les conditions standard ($[M^{n+}] = 1mol/l$; P_{gaz}=1bar) par rapport à l'ESH (Electrode Standard à Hydrogène) : $E^0(M^{n+}/M) = V_M - V_{ESH}$

2- Classification électrochimique quantitative

* Chaque couple oxydant/réducteur (Ox/red) donné est caractérisé par son potentiel noté $E^{\circ}_{ox/red}$ et qui s'exprime en volt (V).

* Plus un oxydant est fort plus le potentiel redox du couple auquel il appartient est élevé.

* Plus un réducteur est fort plus le potentiel redox du couple auquel il appartient est faible.



3-Prévision des réactions naturelles pouvant se produire entre deux couples oxydant/réducteur donnés

* **La seule réaction naturelle possible entre deux couples oxydant/réducteur est celle de l'oxydant appartenant au couple de potentiel le plus élevé et du réducteur appartenant au couple de potentiel le plus bas.**

* Une réaction d'oxydoréduction peut être considérée comme totale si la différence des potentiels d'oxydoréduction des deux couples intervenant dans la réaction est supérieure ou égale à 0,3V.

4- Détermination de la polarité et de la force électromotrice d'une pile

* **Le pôle positif de la pile est constitué par l'électrode du couple de plus haut potentiel et le pôle négatif par l'électrode du couple de plus bas potentiel.**

* La force électromotrice E de la pile est égale à la différence entre le potentiel d'oxydoréduction du couple intervenant au pôle positif et le potentiel d'oxydoréduction du couple intervenant au pôle négatif.

$$E = E^{\circ}_{(\text{couple borne }+)} - E^{\circ}_{(\text{couple borne}-)}$$

Exercice 1

1°Préciser la polarité des piles suivantes : Fe /Fe^{2+}//Ag^+/ Ag ; Zn/Zn^{2+}//Cu^{2+}/ Cu ; Cu/Cu^{2+}//Ag^+/ Ag ; Fe/Fe^{2+}//Pb^{2+}/Pb

2°a.) On considère une pile constituée par les couples redox Zn^{2+}/Zn et Ag^+/ Ag. Quel est le métal qui s'use au cours du fonctionnement de cette pile ? Pourquoi ?

b.) Soit m la masse du métal qui s'use ; exprimer la quantité Q d'électricité susceptible d'être fournie par cette pile au cours de son fonctionnement, en fonction de m.

On donne les potentiels normaux : E°(Cu^{2+}/Cu) = 0,34V; E°(Ag^+/Ag) = 0,80V;
E°(Zn^{2+}/Zn) = -0,76 V ; E°(Fe^{2+}/Fe) = -0,44V
E°(Pb^{2+}/Pb) = -0,13V

Réponses Exercice 1 :

1°*Polarité des piles*
* Pile Fe /Fe^{2+}//Ag^+/ Ag E°(Ag^+/Ag) > E°(Fe^{2+}/Fe) donc le métal Ag est la borne positive et le métal Fe la borne négative
* Pile Zn /Zn^{2+}//Cu^{2+}/ Cu E°(Cu^{2+}/Cu) > E°(Zn^{2+}/Zn) donc le métal Cu est la borne positive et le métal Zn la borne négative
* Pile Cu /Cu^{2+}//Ag^+/ Ag E°(Ag^+/Ag) > E°(Cu^{2+}/Cu) donc le métal Ag est la borne positive et le métal Cu la borne négative
* Pile Fe /Fe^{2+}//Pb^{2+}/ Pb E°(Pb^{2+}/Pb) > E°(Fe^{2+}/Fe) donc le métal Pb est la borne positive et le métal Fe la borne négative

2°a.*Métal qui s'use*
Le métal qui s'use est le métal Zn
Explication : Au cours du fonctionnement d'une pile, il y oxydation au pole négatif ; le métal se transforme en ion.

b. *Quantité Q d'électricité en fonction de m*

$Q = n_e.\mathfrak{F}$ Or $n_e = 2n_{Zn} = \frac{m}{M_{Zn}}$ et $\mathfrak{F} = N_A e$ d'où $\mathbf{Q = \frac{2mN_Ae}{M_{Zn}}}$ **AN: $Q = 2951m(C)$**

Exercice 2

1°) Un tortillon de cuivre est décapé puis pesé : sa masse est de 1,30g. Il est ensuite totalement immergé dans 100 cm^3 d'une solution de nitrate d'argent à 0,50 $mol.l^{-1}$. Ecrire les demi-équations électroniques associées aux deux couples ci-dessus et déduire l'équation bilan ?

2°a.) La réaction est-elle totale ? Justifier.

b.) Calculer les quantités (en mol) de réactifs mis en présence et la masse des solides présents lorsque la réaction est terminée.

c.) Calculer les quantités en (mol) des ions présents dans la solution finale et en déduire leur concentration molaire.

3°) On ajoute à cette solution finale de l'hydroxyde de sodium. Calculer la masse du précipité bleu qui se forme. *On donne en g.mol*$^{-1}$*: M_{Cu} = 63,5; M_{Ag} = 108; On donne les potentiels normaux:*
E°(Cu^{2+}/Cu) = 0,34 V; E° (Ag^+/Ag) = 0,80V

Réponses Exercice 2 :

1° * *Demi-équations électroniques*

$Ag^+ + e^- \longrightarrow Ag$ et $Cu \longrightarrow Cu^{2+} + 2e^-$

* *Equation bilan*

$2Ag^+ + Cu \longrightarrow 2Ag + Cu^{2+}$

2°a. La réaction esttotale.
Justification : ΔE = E°(Ag^+/Ag) – E°(Cu^{2+}/Cu) = 0,80−0,34 = 0,46V et ΔE >0,3V

b. * *Quantités (en mol) de réactifs mis en présence*

$n_{0\,Cu} = \frac{m_{Cu}}{M_{Cu}} = 0{,}0205mol$; $n_{0\,Ag^+} = CV = 0{,}05mol$

* *Masse des solides présents lorsque la réaction est terminée*

$\frac{n_{0\,Ag^+}}{2} > n_{0\,Cu}$ ⇒ le cuivre est le réactif limitant.

$n_{0\,Cu} = \frac{n_{Ag}}{2} \Rightarrow \frac{m_{Cu}}{M_{Cu}} = \frac{m_{Ag}}{2M_{Ag}} \Rightarrow \mathbf{m_{Ag} = \frac{2m_{Cu}M_{Ag}}{M_{Cu}}}$ AN : $\mathbf{m_{Ag} = 4{,}42g}$

c. *Quantités en (mol) des ions présents dans la solution finale*
La solution finale contient des ions Cu^{2+} provenant de l'oxydoréduction et des ions Ag^+ qui n'ont pas réagi.

$n_{0\,Cu} = n_{Cu^{2+}} \Rightarrow \boldsymbol{n_{Cu^{2+}} = \frac{m_{Cu}}{M_{Cu}}}$ AN : $\boldsymbol{n_{Cu^{2+}} = 0{,}0205mol}$

$n_{0\,Ag^+} = n_{Ag^+\,réagi} + n_{Ag^+}$ (n_{Ag^+} quantité de Ag^+ restant)

Or $n_{0\,Cu} = \frac{n_{Ag^+\,réagi}}{2}$ donc $\mathbf{n_{Ag^+} = n_{0Ag^+} - 2n_{0Cu}}$ AN : $\mathbf{n_{Ag^+} = 0{,}009mol}$

* *Concentrations molaires*

$[Cu^{2+}] = \frac{n_{Cu^{2+}}}{V}$ AN : $\boldsymbol{[Cu^{2+}] = 0{,}205mol.l^{-1}}$

$[Ag^+] = \frac{n_{Ag^+}}{V}$ AN : $\boldsymbol{[Ag^+] = 0{,}09mol.l^{-1}}$

3° *Masse du précipité bleu qui se forme*

$Cu^{2+} + 2OH^- \longrightarrow Cu(OH)_2$

$n_{Cu^{2+}} = n_{Cu(OH)_2} \Rightarrow n_{Cu^{2+}} = \frac{m_{Cu(OH)_2}}{M_{Cu(OH)_2}} \Rightarrow \boldsymbol{m_{Cu(OH)_2} = n_{Cu^{2+}}M_{Cu(OH)_2}}$

AN : $\boldsymbol{m_{Cu(OH)_2} = 2g}$

Exercice 3

On réalise une pile avec les couples oxydoréducteurs Fe^2+/Fe et Mg^{2+}/Mg. On donne $E°(Fe^{2+}/Fe) = 0{,}44V$; $E°(Mg^{2+}/Mg) = -2{,}34V$.

1°) Représenter par un schéma cette pile et préciser sa polarité.

2°a.) Écrire les demi-équations électroniques des couples mis en jeu.

b.) En déduire l'équation bilan de la réaction ayant lieu quand la pile débite.

3°) Calculer sa force électromotrice E_1 (la température est de 25°C, les concentrations molaires valent $1mol.l^{-1}$).

4°) Lorsque cette pile est insérée dans un circuit, elle débite un courant d'intensité constante I=50mA. La masse de l'une des électrodes diminue de Δm=50mg.

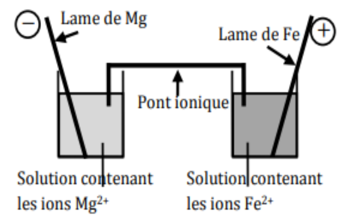
a.) De quelle électrode s'agit-il ?

b.) Calculer le temps nécessaire à cette diminution de masse. *Données : $NA=6{,}02.1023mol^{-1}$; $e=1{,}6.10^{-19}C$; $M(Mg)=24{,}3g.mol^{-1}$; $M(Fe)=56g.mol^{-1}$.*

Réponses Exo 3 :

Exercice 3

1° *Schéma* (voir figure ci-contre)



2°a. *Demi-équations électroniques*

$Fe^{2+} + 2e^- \longrightarrow Fe$

$Mg \longrightarrow Mg^{2+} + 2e^-$

b. *Equation-bilan*

$Fe^{2+} + Mg \longrightarrow Fe + Mg^{2+}$

3° La f.é.m E_1

$E_1 = E°(Fe^{2+}/Fe) - E°(Mg^{2+}/Mg)$ AN: $E_1 = 1{,}90V$

4°a. Il s'agit de l'électrode de magnésium

b. Temps

$Q = n_e.\mathcal{F}$ Or $n_e = 2n_{Mg} = \frac{2\Delta m_{Mg}}{M_{Mg}}$ d'où $t = \frac{2\Delta m_{Mg} N_A e}{I.M_{Mg}}$ AN: **t = 7942s soit 2h12min22s**

Exercice 4

Deux béchers contiennent l'une une solution de sulfate de nickel de concentration molaire 1mol.l-1, l'autre une solution de sulfate de cuivre de concentration molaire 1,02 mol.l^{-1}. On plonge dans le premier bécher une lame de nickel, dans le deuxième une lame de cuivre. On associe les deux demi-piles à l'aide d'un pont électrolytique. Les potentiels normaux des couples Ni^{2+}/Ni et Cu^{2+}/Cu sont respectivement -0,25V et 0,34V. Les volumes des deux solutions sont égaux à 50ml.

1°a.) Faire le schéma de cette pile en précisant les pôles.

b.) Déterminer la f.é.m. de la pile.

2°) La pile débite un courant d'intensité pratiquement constante I = 60mA.

a.) Au bout de quel temps la concentration molaire $[Cu^{2+}]$ sera-t-elle égale à 1mol.l^{-1}?

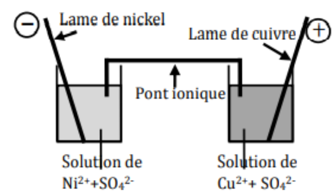
b.) Quelle sera alors la concentration molaire $[Ni^{2+}]$?

c.) Pendant cette durée t, la masse des électrodes augmente de Δm. De quelle électrode s'agit-il ? Calculer l'augmentation de masse Δm.

d.) Pendant cette durée, la f.é.m. reste pratiquement constante. Quelle est l'énergie chimique transformée en énergie électrique pendant cette durée ? *Données : $N_A.e$ = 96500C.mol^{-1}. ; en g.mol^{-1} M_H=1 ; M_O=16 ; M_S = 32; M_{Cu}=63,5 ; M_{Ni} = 58,7.*

Réponses Exercice 4 :

1°a. *Schéma de la pile et polarité* (voir figure)



b. *F.é.m. e de la pile*

$\boldsymbol{e = E°(Cu^{2+}/Cu) - E°(Ni^{2+}/Ni)}$ AN: **e = 0,59V**

2°a. *Temps*

Equation-bilan de la réaction

$Cu^{2+} + 2e^- \longrightarrow Cu$

$n_{Cu^{2+}}réagi = n_{0\,Cu^{2+}} - n_{Cu^{2+}}restant$

$n_{Cu^{2+}}réagi = C_0V - CV$ Or $n_{Cu^{2+}\,réagi} = \frac{ne^-}{2}$ donc $\frac{n_{e^-}}{2} = (C_0 - C)V$

$Q = n_e.\mathfrak{F}$ Or $n_e = 2(C_0 - C)V$ d'où $It = 2(C_0 - C)VN_Ae \Rightarrow \boldsymbol{t} = \frac{2(C_0 - C)VN_Ae}{I}$ AN: **t = 3217s**

b. *Concentration molaire de Ni^{2+}*

La concentration de Ni^{2+} augmente

$[Ni^{2+}] = [Ni^{2+}]_0 + \frac{n_{Cu^{2+}}}{V}$ Or $n_{Cu^{2+}} = C_0V - CV$ d'où $\boldsymbol{[Ni^{2+}] = [Ni^{2+}]_0 + C_0 - C}$

AN : $[Ni^{2+}] = \mathbf{1,02mol.l^{-1}}$

c. *Il s'agit de l'électrode de cuivre

*Augmentation de masse

$n_{Cu^{2+}}réagi = \Delta n_{Cu} \Rightarrow (C_0 - C)V = \frac{\Delta m}{M} \Rightarrow \boldsymbol{\Delta m = (C_0 - C)VM}$ AN : **m = 0,0635g**

d. *Energie chimique*

$\boldsymbol{W_{Ch} = EIt}$ AN: $\boldsymbol{W_{Ch} = 113{,}867J}$

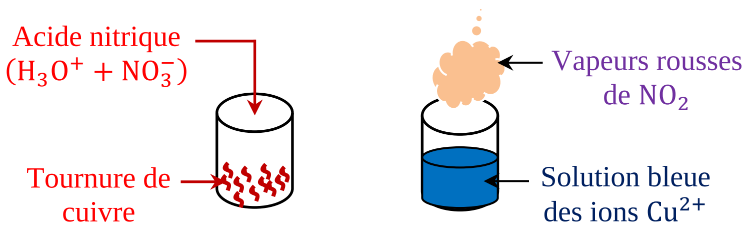
C/ DOSAGE D'OXYDOREDUCTION

● ***Objectifs pédagogiques :***

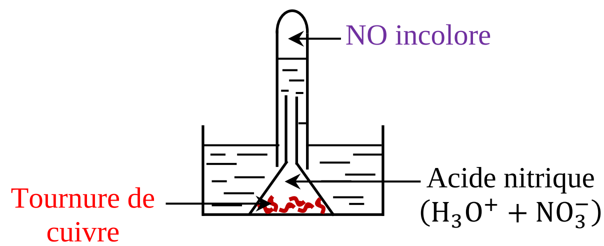
A la fin de ce chapitre je dois doit être capable de :

- *Ecrire la demi-équation électronique et l'équation-bilan de la réaction de l'acide nitrique sur le cuivre.*
- *Ecrire et exploiter l'équation-bilan de la réaction de dosage des ions Cu^{2+} par les ions permanganate MnO_4^- .*
- *Ecrire et exploiter l'équation-bilan de la réaction de dosage de l'éthanol par une solution acidifiée de dichromate de potassium* $(2K^+ + Cr_2O_7^{2-})$.
- *Ecrire et exploiter l'équation-bilan de la réaction de dosage d'une solution de diiode par une solution d'ions thiosulfate* $S_2O_3^{2-}$.

I- <u>Réaction de l'acide nitrique sur le cuivre</u>



<u>Oxydation du cuivre par l'acide nitrique à l'air</u>



<u>Oxydation du cuivre par l'acide nitrique à l'abri de l'air</u>

<u>NB</u> : L'expérience réalisée à l'abri de l'air montre que le gaz dégagé est le monoxyde d'azote NO qui, au contact du dioxygène de l'air, se transforme en NO_2.

● **<u>Demi-équations électroniques</u>**

* Oxydation du cuivre en ionsCu^{2+}.

$$Cu \rightarrow Cu^{2+} + 2e^-$$

* Réduction des ions nitrate NO_3^- en monoxyde d'azote NO.

$$NO_3^- + 4H_3O^+ + 3e^- \rightarrow NO + 6H_2O$$

● **<u>Equation-bilan de la réaction produite</u>**

$$\begin{array}{l|l} 3 & Cu \rightarrow Cu^{2+} + 2e^- \\ 2 & NO_3^- + 4H_3O^+ + 3e^- \rightarrow NO + 6H_2O \\ \hline \end{array}$$

$$3Cu + 2NO_3^- + 8H_3O^+ \rightarrow 3Cu^{2+} + 2NO + 12H_2O$$

Cette équation montre que les ions nitrate ne peuvent oxyder qu'en milieu acide. Ce sont pourtant les ions nitrate qui ont oxydé le cuivre.

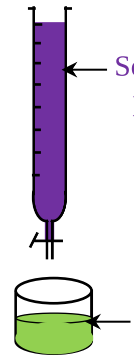
<u>NB</u> : Les couples redox mis en jeu dans cette réaction sont :

- Cu^{2+}/Cu : $E^\circ_{Cu^{2+}/Cu} = +0,34V$.

- NO_3^-/NO : $E^\circ_{NO_3^-/NO} = +0,96V$

II- Dosage des ions Cu^{2+} par les ions permanganate MnO_4^-

On introduit progressivement la solution de permanganate de potassium ($K^+ + MnO_4^-$) dans la solution verte de sulfate de fer II ($Fe^{2+} + SO_4^{2-}$). Le milieu réactionnel a une couleur jaune tant qu'il reste des ions Fe^{2+} pour consommer les ions permanganate MnO_4^-. Lorsque le mélange devient rose les ions MnO_4^- introduit en excès par rapport à l'équivalence ne sont plus consonnés : la réaction redox est donc achevée.



- **Equation bilan de la réaction de dosage**

Les couples redox mis en jeu dans cette réaction d'oxydoréduction sont :

Fe^{3+}/Fe^{2+} : $E^\circ_{Fe^{3+}/Fe^{2+}} = +0{,}77V$ et MnO_4^-/Mn^{2+} : $E^\circ_{MnO_4^-/Mn^{2+}} = +1{,}51V$.

$$\begin{array}{l|l} 5 & Fe^{2+} \rightarrow Fe^{3+} + e^- \\ 1 & MnO_4^- + 8H_3O^+ + 5e^- \rightarrow Mn^{2+} + 12H_2O \\ \hline & 5Fe^{2+} + MnO_4^- + 8H_3O^+ \end{array}$$

- **Exploitation des résultats**

* Calcul de la concentration c_r de la solution de sulfate de fer II.

A l'équivalence on a : $\frac{n_{Fe^{2+}}}{5} = \frac{n_{MnO_4^-}}{1} \Rightarrow n_{Fe^{2+}} = 5n_{MnO_4^-}$

Or, $n_{MnO_4^-} = c_0 \cdot v_0$ et $n_{Fe^{2+}} = c_r \cdot v_r \Leftrightarrow c_r \cdot v_r = 5 \cdot c_0 \cdot v_0$ d'où $\mathbf{c_r = 5c_0 \cdot \frac{v_0}{v_r}}$

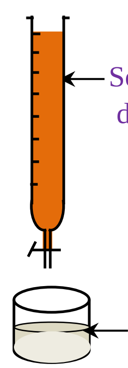
* Application numérique

A l'équivalence $v_0 = 10{,}5 ml$ on en déduit que : $\mathbf{c_r = 0{,}105 mol/l}$

NB : L'ion permanganate en milieu acide est très utilisé pour effectuer des dosages d'oxydoréduction : c'est la manganimétrie.

III- Dosage de l'éthanol par une solution acidifiée de dichromate de potassium $(2K^+ + Cr_2O_7^{2-})$

A l'équivalence la solution contenue dans le bécher prend une teinte verte caractéristique des ions Cr^{3+}.



- Les couples oxydant/réducteur mis en jeu dans cette réaction sont :
  - $Cr_2O_7^{2-}/Cr^{3+}$: $E^\circ_{Cr_2O_7^{2-}/Cr^{3+}} = +1{,}33V$;
  - CH_3COOH/CH_3CH_2OH : $E^\circ_{CH_2COOH/CH_3CH_2OH} = +0{,}03V$.
- Equation-bilan de la réaction de dosage

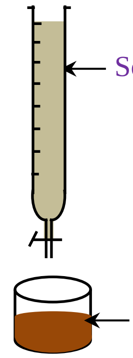
$$\begin{array}{l|l} 3 & CH_3CH_2OH + 5H_2O \rightarrow CH_3COOH + 4H_3O^+ + 4e^- \\ 2 & Cr_2O_7^{2-} + 14H_3O^+ + 6e^- \rightarrow 2Cr^{3+} + 12H_2O \\ \hline & 3CH_3CH_2OH + 2Cr_2O_7^{2-} + 16H_3O^+ \rightarrow 3CH_3COOH + 4Cr^{3+} + 27H_2O \end{array}$$

A l'équivalence on a : $\frac{\mathbf{n}_{Cr_2O_7^{2-}}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{n}_{CH_3CH_2OH}}{\mathbf{3}} \Rightarrow \mathbf{3n}_{Cr_2O_7^{2-}} = \mathbf{2n}_{CH_3CH_2OH}$

Or, $n_{Cr_2O_7^{2-}} = c_0 \cdot v_0$ et $n_{CH_3CH_2OH} = c_r \cdot v_r$ donc $\mathbf{3c_0 \cdot v_0 = 2c_r \cdot v_r}$ d'où $\mathbf{c_0 = \frac{2}{3} c_r \cdot \frac{v_r}{v_0}}$

AN : $v_0 = 10ml$ donc $c_0 = \frac{2}{3} \cdot 0{,}3 \cdot \frac{10}{10} \Rightarrow c_0 = 0{,}45mol/l$.

IV- Dosage d'une solution de diiodepar une solution d'ions thiosulfate $S_2O_3^{2-}$



● L'équivalence est obtenue (le diiode a été entièrement consommé) lorsque la solution contenue dans le bécher devient incolore.

● Les couples oxydant/réducteur mis en jeu dans cette réaction sont :

- I_2/I^- : $E^\circ_{I_2/I^-} = +0{,}54V$;
- $S_4O_6^{2-}/S_2O_3^{2-}$: $E^\circ_{S_4O_6^{2-}/S_2O_3^{2-}} = +0{,}08V$.

● Equation-bilan de la réaction de dosage

$$\begin{array}{l|l} 1 & 2S_2O_3^{2-} \rightarrow S_4O_6^{2-} + 2e^- \\ 1 & I_2 + 2e^- \rightarrow 2I^- \\ \hline & I_2 + 2S_2O_3^{2-} \rightarrow 2I^- + S_4O_6^{2-} \end{array}$$

● Calcul de la concentration c_0 de la solution de dichromate de potassium.

A l'équivalence on a : $\frac{\mathbf{n}_{I_2}}{\mathbf{1}} = \frac{\mathbf{n}_{S_2O_3^{2-}}}{\mathbf{2}} \Rightarrow \mathbf{2n}_{I_2} = \mathbf{n}_{S_2O_3^{2-}}$

Or, $n_{I_2} = c_0 \cdot v_0$ et $n_{S_2O_3^{2-}} = c_r \cdot v_r$ donc $\mathbf{2c_0 \cdot v_0 = c_r \cdot v_r}$ d'où $\mathbf{c_0 = \frac{1}{2} c_r \cdot \frac{v_r}{v_0}}$

AN : $v_r = 8ml$ donc $c_0 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}1 \cdot \frac{8}{20} \Rightarrow c_0 = 0{,}02mol/l$.

NB : Le diiode est très utilisé dans les dosages d'oxydoréduction : c'est l'iodométrie.

V- Généralisation

* **Doser une solution c'est déterminer sa concentration.**

Il nécessite l'observation de l'équivalence. On met alors à profit l'observation de l'équivalence.

* Il existe de nombreux dosages d'oxydoréduction. Pour déterminer la concentration de l'espèce cherchée, il suffit de :

- écrire l'équation-bilan de la réaction qui a lieu ;
- chercher la relation entre les quantités de matière des espèces ayant réagi ;
- exprimer ces quantités de matière en fonction des concentrations et des volumes des réactifs.

* **Conditions expérimentales**

- Opérer en milieu très acide car en milieu neutre ou peu acide, la réduction des ions $M_nO_4^-$ est complexe et donne un mélange d'oxydes de manganèse M_nO_2 , $M_{n_2}O_3$….
- Ne pas utiliser l'acide chlorhydrique pour acidifier le milieu car les ions Cl^- sont oxydés par $M_nO_4^-$
- Ne pas utiliser non plus l'acide nitrique pour acidifier le milieu réactionnel car NO_3^- peux oxyder les ions Fe^{2+} modifiant aussi la concentration en ion Fe^{2+} ; le dosage sera faussé.
- Utiliser l'acide sulfurique pour acidifier le milieu réactionnel.

Exercice 1

On donne : E°(Cl_2/Cl^-)=1,36V ; E°(Br_2/Br^-)=1,08V ; E°(I_2/I^-)=0,62 V.

1°) Que se passe-t-il si l'on mélange des solutions :

a.) d'iodure de potassium et de dichlore ?

b.) de bromure de potassium et de diiode ?

c.) d'iodure de potassium et de dibrome ?

2°) Ecrire, le cas échant, l'équation-bilan des réactions.

Exercice 2

1°) L'éthanol peut s'oxyder en éthanal et l'éthanal en acide éthanoïque

a.) Ecrivez les deux couples redox correspondants b.) Ecrivez les demi-équations relatives à ces deux couples.

c.) Ecrivez les réactions de l'ion MnO_4^-, en milieu acide sur l'éthanol, puis sur l'éthanal.

2° Situez les deux couples étudiés en a./ par rapport au couple lié à MnO_4^-.

Exercice 3

L'éthanol peut être oxydé en acide éthanoïque par une solution de dichromate de potassium suffisamment concentrée et acidifiée par l'acide sulfurique.

1°) Etablir la demi-équation électronique associée au couple CH_3COOH/CH_3CH_2OH

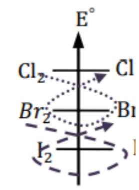
2°) Donner l'équation-bilan de la réaction.

3°) Quelle masse de dichromate de potassium faut-il utiliser pour oxyder totalement 0,2 mol d'éthanol en acide éthanoïque.

Réponses Exercice 1 :

Exercice 1

1°a. E°(Cl_2/Cl^-) > E°(I_2/I^-) Cl_2 est plus oxydant que I_2 donc I^- réduit le dichlore Cl_2. On observera une coloration brune de la solution, couleur du diiode en solution.



b. E°(Br_2/Br^-) > E°(I_2/I^-) I_2 est moins oxydant que Br_2 donc Br^- ne réduit pas le diiode I_2 . Il n'y a pas de réaction

c. E°(Br_2/Br^-) > E°(I_2/I^-) Br_2 est plus oxydant que I_2 donc I^- réduit le dibrome. On observera une coloration brune la solution.

2° *Equation-bilan des réactions :*

$$Cl_2 + 2I^- \longrightarrow I_2 + 2Cl^-$$

$$Br_2 + 2I^- \longrightarrow I_2 + 2Br^-$$

Réponses Exo 2 et 3 :

1° a. *Couples redox correspondants* : CH_3CHO/CH_3CH_2OH et CH_3COOH/CH_3CHO

b. *Demi-équations relatives à ces deux couples*

$$CH_3CHO + 2H_3O^+ + 2e^- \rightleftharpoons CH_3CH_2OH + 2H_2O$$

$$CH_3COOH + 2H_3O^+ + 2e^- \rightleftharpoons CH_3CHO + 3H_2O$$

c. *Equation-bilan de la réaction de l'ion MnO_4^- en milieu acide sur l'éthanol*

$$MnO_4^- + 8H_3O^+ + 5e^- \longrightarrow Mn^{2+} + 12H_2O \quad \times 2$$

$$CH_3CH_2OH + 2H_2O \longrightarrow CH_3CHO + 2H_3O^+ + 2e^- \quad \times 5$$

$$2MnO_4^- + 5CH_3CH_2OH + 6H_3O^+ \longrightarrow 2Mn^{2+} + 5CH_3CHO + 14H_2O$$

Equation-bilan de la réaction de l'ion MnO_4^- en milieu acide sur l'éthanal

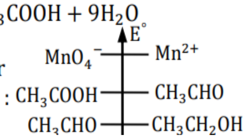
$$MnO_4^- + 8H_3O^+ + 5e^- \longrightarrow Mn^{2+} + 12H_2O \quad \times 2$$

$$CH_3CHO + 3H_2O \longrightarrow CH_3COOH + 2H_3O^+ + 2e^- \quad \times 5$$

$$2MnO_4^- + 5CH_3CHO + 6H_3O^+ \longrightarrow 2Mn^{2+} + 5CH_3COOH + 9H_2O$$

2° *Classification électrochimique*

MnO_4^- est plus oxydant que CH_3CHO qui est le réducteur conjugué de CH_3COOH. On a donc le classement suivant :



Exercice 3

1° *Demi-équation électronique associée au couple CH_3COOH/CH_3CH_2OH*

$$CH_3COOH + 4H_3O^+ + 4e^- \rightleftharpoons CH_3CH_2OH + 5H_2O$$

2° *Equation-bilan de la réaction*

$$\left.\begin{array}{l} Cr_2O_7^{2-} + 14H_3O^+ + 6e^- \longrightarrow 2Cr^{3+} + 21H_2O \\ CH_3CH_2OH + 5H_2O \longrightarrow CH_3COOH + 4H_3O^+ + 4e^- \end{array}\right\} \begin{array}{l} \times 2 \\ \times 3 \end{array}$$

$$2Cr_2O_7^{2-} + 3CH_3CH_2OH + 16H_3O^+ \longrightarrow 4Cr^{3+} + CH_3COOH + 27H_2O$$

3° *Masse de dichromate de potassium*

$$\frac{n_{Cr_2O_7^{2-}}}{2} = \frac{n_{CH_3CH_2OH}}{3} \Rightarrow \frac{m_{K_2Cr_2O_7}}{2M_{K_2Cr_2O_7}} = \frac{n_{CH_3CH_2OH}}{3} \Rightarrow \boldsymbol{m_{K_2Cr_2O_7} = \frac{2n_{CH_3CH_2OH} \times M_{K_2Cr_2O_7}}{3}}$$

AN : $\boldsymbol{m_{K_2Cr_2O_7} = 39,2g}$

CHAPITRE 9 :
MOUVEMENT DE ROTATION : Travail-Puissance-Energie cinétique

Objectifs *: A la fin de ce chapitre, je dois être capable de :*

- *Calculer le moment d'inertie d'un solide ;*
- *Déterminer le travail d'un couple de forces constantes ;*
- *Appliquer le théorème de l'énergie cinétique en rotation autour d'un axe.*
- *Etudier le mouvement d'un solide qui roule sans glisser.*

1) Rappels

1.1) Vitesse angulaire

Un point matériel est animé de *mouvement circulaire* si sa trajectoire est un cercle ou un arc de cercle.

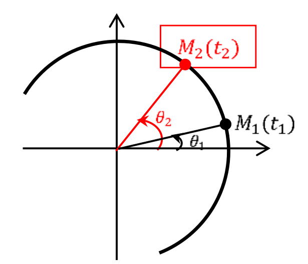


Figure 8-1

a- Vitesse angulaire moyenne.

La vitesse angulaire moyenne entre deux instants t_1 et t_2 a pour expression : $\boldsymbol{\omega} = \frac{\boldsymbol{\theta_2 - \theta_1}}{\boldsymbol{t_2 - t_1}}$ **(1)** (Figure 8-1)

b- Vitesse angulaire instantanée.

la vitesse angulaire instantanée est la vitesse angulaire entre deux dates voisines de la date considérée.(Figure 8-2) (C'est la dérivée de l'angle balayé par la durée du balayage).

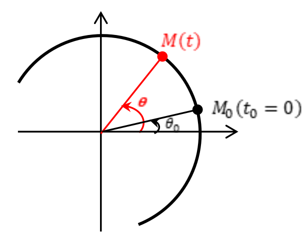


Figure 8-2

$\omega = \frac{\partial \theta}{\partial t} \begin{cases} \partial \theta = angle\ balayé\ pendant \\ l'intervalle de\ temps\ très\ petit\ \partial t \end{cases}.$

Un mouvement de rotation est uniforme lorsque la vitesse angulaire est constante.

La relation (1) devient pour $t_1 = 0\ et\ t_2 = t$: $\boldsymbol{\omega} = \frac{\boldsymbol{\theta - \theta_0}}{\boldsymbol{t - 0}} \Longrightarrow \boldsymbol{\theta = \omega t + \theta_0}$

c- Période et fréquence

Un mouvement est périodique s'il se reproduit identique à lui-même à intervalle de temps égaux.

Remarque : Pour un mouvement circulaire et uniforme, la durée d'un tour correspond à une période.

Dans ce cas on a :$2\pi = \omega . T \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$.

La fréquence est le nombre de tours effectué en une seconde : $N = \frac{1}{T}$

La vitesse linéaire est : $v = \frac{\widehat{MM\prime}}{\partial t} = R.\frac{\partial\theta}{\partial t} \Rightarrow v = R.\omega$

2) Travail et puissance d'une force

2.1) Travail d'une force appliquée à un solide en rotation

Soit $\vec{F}$ une force appliquée en M d'un solide en rotation. Supposons que le solide tourne d'un angle très petit $\partial\theta$ de sorte que l'arc de cercle $\widehat{MM'}$ soit confondu à un déplacement rectiligne $\overrightarrow{\partial l}$ de même direction que $\vec{F}$.

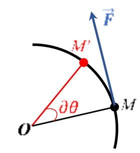


Figure 8-3

Le travail élémentaire s'exprime par : $\partial W = \vec{F}.\overrightarrow{\partial l} = F.\partial l$ or $\partial l = R.\partial\theta \Rightarrow$ $\partial W = F.R.\partial\theta$

Comme le moment de la force est : $\bar{\mathcal{M}}_o(\vec{F}) = F.R$ alors $\partial W = \overline{\mathcal{M}_o}(\vec{F}).\partial\theta$

Signe :

$\partial W > 0 \; si \; \bar{\mathcal{M}}_o(\vec{F}) \; et \; \partial\theta \; sont \; de \; même \; signe.$

$\partial W < 0 \; si \; \bar{\mathcal{M}}_o(\vec{F}) \; et \; \partial\theta \; sont \; de \; signes \; contraires.$

Théorème : *Le travail entre les instants t_1 et t_2 d'un système de forces extérieures agissant sur un solide en rotation autour d'un axe (oz) est égal au produit de la somme des moments de ces forces par rapport à l'axe (oz) par la différence des abscisses angulaires $(\theta_2 - \theta_1)$ du solide dans le repère fixe (o,x,y,z).*

$$W_{12} = [\bar{\mathcal{M}}_{oz}(\vec{F}_1) + \bar{\mathcal{M}}_{oz}(\vec{F}_2) + \cdots + \bar{\mathcal{M}}_{oz}(\vec{F}_n)](\theta_2 - \theta_1).$$

Remarque : Le travail W d'une force de moment constant $\bar{\mathcal{M}}$ lors d'une rotation finie d'angle θ a pour expression : $W = \bar{\mathcal{M}}.\theta \begin{cases} \bar{\mathcal{M}} \; en \; Newton.mètre \\ \theta \; en \; radian \\ W \; en \; joule \end{cases}$

2.2) Puissance d'une force appliquée à un solide en rotation

- La puissance moyenne développée par une force appliquée en M d'un solide en rotation est le rapport du travail W par la durée t mise pour effectuer W : $P_m = \frac{W}{t}$

- La puissance instantanée s'exprime par : $P = \frac{\partial W}{\partial t} = \bar{\mathcal{M}}_O . \frac{\partial \theta}{\partial t} = \bar{\mathcal{M}}_O . \omega$

3) Energie cinétique de rotation

Soit un solide (1) en mouvement de rotation autour de l'axe fixe (oz) du repère ($\mathscr{R}$) : (O, x, y, z) (Figure 8-4). Le vecteur rotation $\vec{\Omega}$ est tel que :

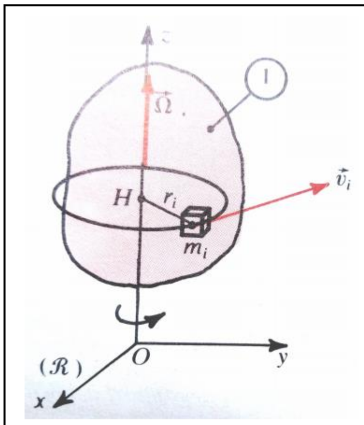


Figure 8-4

$\vec{\Omega} = \omega . \vec{k}$; Une particule élémentaire de masse m_i a pour vitesse instantanée v_i par rapport à ($\mathscr{R}$).

L'énergie cinétique du solide s'exprime par :$E_C = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2$

Désignons par r_i la distance de la particule élémentaire à l'axe de rotation. On sait que : $v_i = \omega . r_i$

D'où : $E_C = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$.

Par définition, la quantité $\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$ étendue à toutes les particules élémentaires du solide (donc au solide lui-même) est appelée moment d'inertie du solide par rapport à l'axe (Oz).

On note : $J_{Oz} = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$.

On a alors : $\boldsymbol{E_C = \frac{1}{2} J_{Oz} . \omega^2} \begin{cases} J_{Oz} & en\ Kg.m^2 \\ \omega & en\ radian \\ E_C & en\ Joule \end{cases}$

4) Moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe

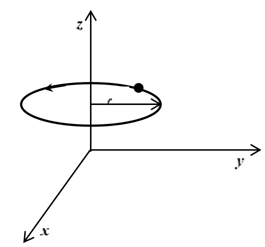


Figure8-5

- Point matériel en rotation autour de l'axe (Oz) (Figure 8-5) : $\boldsymbol{J_{Oz} = m . r^2}$
- Cylindre plein de révolution (Disque) de masse $\boldsymbol{M}$ et de rayon $\boldsymbol{R}$ (Figure 8-5) : $\boldsymbol{J_{Oz} = \frac{1}{2} . M . R^2}$

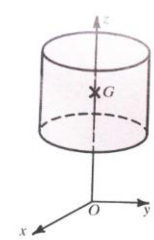


Figure8-6

- Cylindre creux d'épaisseur faible par rapport à son rayon (Anneau circulaire) (Figure 8-7) **:** $\boldsymbol{J_{Oz} = M . R^2}$

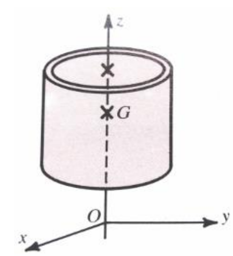


Figure8-7

- Barre rectiligne (poutre) (Figure 8-8) . Une barre homogène de section constante, de masse M, de centre de gravité G et de longueur l . Cette barre tourne autour d'un axe (Oz) passant par g et perpendiculaire au segment G_1G_2 lieu des centre de gravité des sections :

  $\boldsymbol{J_{Oz} = \frac{1}{12}.M.l^2}$

- **Sphère pleine et homogène (boule) :** $\boldsymbol{J_{Oz} = \frac{2}{5}.M.R^2}$

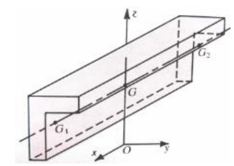


Figure8-7

- **Théorème de Huygens** (Figure8-9)

  Le moment d'inertie d'un solide, par rapport à un axe quelconque (Oz) est égal à la somme du moment d'inertie de ce solide par rapport à l'axe (Gz) parallèle au précédent et passant par le centre de gravité et du produit de la masse du solide par le carré de la distance des deux axes.

$$\boldsymbol{J_{Oz} = J_{Gz} + M}.d^2$$

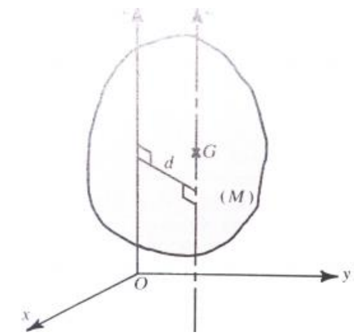


Figure8-9

5) Théorème de l'énergie cinétique généralisé :

La variation de l'énergie cinétique entre deux instants d'un solide en rotation autour d'un axe fixe est égale à la somme des travaux des forces et des couples de forces extérieures qui s'exercent sur le solide entre ces deux instants : $\Delta E_c = \sum W(\vec{F}_{ext})$

Remarque : Si le solide roule sans glisser alors son énergie cinétique est la somme de l'énergie cinétique de rotation et de l'énergie cinétique de translation de son centre de gravité G :

$$E_c = E_{C_{Rotation}} + E_{C_{Translation}} \left\{ \begin{array}{l} E_{C_{Rotation}} = \boldsymbol{\frac{1}{2} J_{Oz}.\omega^2} \\ E_{C_{Translation}} = \boldsymbol{\frac{1}{2} M.v_G^2} \end{array} \right.$$

Exercice 1 :

Un treuil est constitué de deux cylindres solidaires de rayons $R_1 = 10\ cm\ et\ R_2 = 20\ cm$ sur lesquels sont enroulées des cordes. Ce treuil permet de soulever une charge de masse $m = 40\ kg$. (Figure 8-10). La charge est soulevée à une vitesse constante de 10 $rad.s^{-1}$.

1) Calculer la norme de la force $\vec{F}$ qu'il faut exercer pour soulever la charge à vitesse constante.

2) Déterminer l'angle θ dont a tourné le treuil lorsque la charge est soulevée de 10 m et calculer le travail W de la force $\vec{F}$.

3) Calculer la puissance $\mathcal{P}$ de la force $\vec{F}$ et celle du poids.

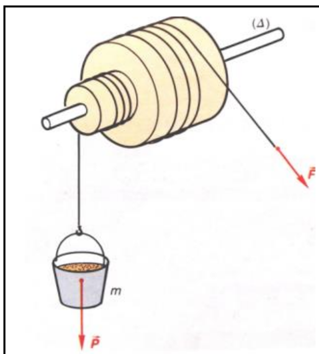


Figure 8-10

Réponses **Exercice 1 :**

1) F =200 N ; 2) $\theta \approx 100\ rad$ *;* $W = 4\ kJ$ *; 3)* $\mathcal{P} = 400$ w.

Exercice 2 :

On considère un volant cylindrique homogène et sa vis. La pièce formant écrou est prise comme repère. (Figure 8-11). Le pas de la vis est $a = 18\, mm/tour$. La vitesse angulaire du volant est $\omega = 6.28\, rad.s^{-1}$.
1) Calculer la vitesse v de translation du volant suivant l'axe (z',z).
2) Le rayon du volant est $R = 40\ cm$. En négligeant la masse de la vis devant celle du volant, calculer le rapport $\lambda = \frac{E_{c_{rotation}}}{E_{c_{translation}}}$ des énergies cinétiques de rotation et de translation du volant ; puis conclure.

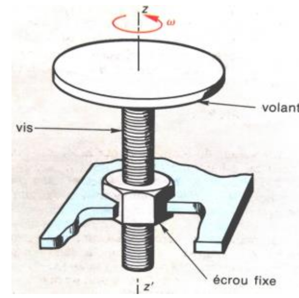


Figure 8-11

Réponses **Exercice 2 :**

1) $v = \frac{a.\omega}{2\pi}$ *; 2)* $\lambda = \frac{2R^2.\pi^2}{a^2} = 9{,}75.10^3$

Exercice 3 :
Un système d'engrenages est constitué par deux disques de rayons $R_1 = 10\ cm\ et\ R_2 = 20\ cm$. (Figure 8-12) La roue (1) est soumise au couple de moments $\mathcal{M}_1 = 10\ N.m$ et tourne à la fréquence de 20 tours/min.
1) Calculer Les vitesses angulaires $\omega_1\ et\ \omega_2$ en $rad.s^{-1}$.
2) Calculer la valeur du couple $\mathcal{M}_2$.
3) Comparer les puissances $\mathcal{P}_1\ et\ \mathcal{P}_2$ générées par les couples $\mathcal{M}_1\ et\ \mathcal{M}_2$.
4) a- Qu'Appelle-t-on « *rapport d'engrenage* » ?

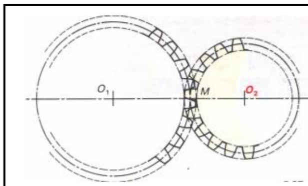


Figure 8-12

b- En utilisant les résultats des questions précédentes, expliquer la fonction « *levier de vitesses* » des véhicules automobiles.

Réponses :

Exercice 4 :

Un volant (1) de diamètre $D = 40\ cm$ repose par deux tourillons de diamètre $d = 10\ cm$ sur deux rails (2).(Figure 8-13). On fait rouler sans glisser le volant sur les rails. Soit $\|\vec{V}_{O1/2}\| = 0{,}1\ m/s$ la norme du vecteur vitesse du point O à l'instant t.

Déterminer à cet instant :

1) Le centre instantané de rotation du mouvement plan de (1) par rapport à (2) et la vitesse angulaire $\omega_{1/2}$.

2) Les vecteurs vitesse $\vec{V}_{A\,1/2}$, $\vec{V}_{B\,1/2}$, $\vec{V}_{C\,1/2}$, $\vec{V}_{D\,1/2}$ et $\vec{V}_{D\,1/2}$

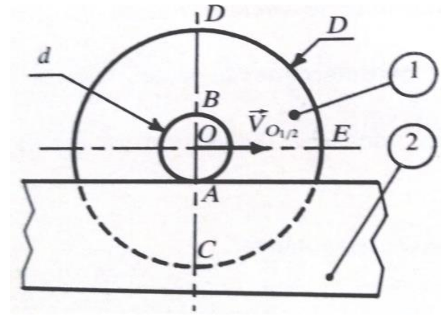


Figure 8-13

Réponses **Exercice 4 :**

1) Le $c.i.r.$ est le point A; $\omega_{1/2} = 2\ rad/s$;

2) $\|\vec{V}_{A\,1/2}\| = 0$; $\|\vec{V}_{B\,1/2}\| = 0{,}2\ m/s$;

$\|\vec{V}_{C\,1/2}\| = 0{,}3\ m/s$; $\|\vec{V}_{D\,1/2}\| = 0{,}5\ m/s$; $\|\vec{V}_{E\,1/2}\| = 0{,}41\ m/s$

Exercice 5 :

Un solide A de petites dimensions a une masse m =100 g. Il est soudé à une tige OA, de longueur l = 0,4 m de masse négligeable. Cette tige horizontale est entrainée par un arbre vertical tournant autour de son axe Δ. L'ensemble tourne à la vitesse constante de 2,0 $trs.\ s^{-1}$

1°) Quel est le moment d'inertie J_Δ de A par rapport à Δ ? Calculer l'énergie cinétique du système.

2°) Quelle est la vitesse linéaire de A ? Retrouver son énergie cinétique.

3°) On considère le mouvement de la bille A pendant 6,3 s. De quel angle θ tourne A ? Quelle est la distance S parcourue par A ?

Résolution **Exercice 5 :**

1° *Moment d'inertie J_Δ de A par rapport à Δ*

Solide ponctuel donc : $\mathbf{J_\Delta = ml^2}$ AN : $\mathbf{J_\Delta = 1,6.10^{-2}}\mathrm{kg.m^2}$

Energie cinétique

$E_C = \frac{1}{2}J_\Delta\omega^2$ Or $\omega = 2\pi N$ d'où $\boldsymbol{E_C = 2J_\Delta\pi^2N^2}$ AN : $\mathbf{E_C = 1,26J}$

2° *Vitesse linéaire de A*

$\boldsymbol{V_A = l\omega}$ Or $\omega = 2\pi N$ d'où $\boldsymbol{V_A = 2\pi Nl}$ AN : $\boldsymbol{V_A = 5,03m.s^{-1}}$

Energie cinétique

Point matériel donc : $\boldsymbol{E_C = \frac{1}{2}mv_A^2}$ AN : $\mathbf{E_C = 1,26J}$

3° *Angle θ*

$\boldsymbol{\theta = \omega t}$ Or $\omega = 2\pi N$ d'où $\boldsymbol{\theta = 2\pi Nt}$ AN : $\boldsymbol{\theta = 79,2rad}$

Distance S parcourue par A

$\boldsymbol{S = l\theta}$ AN : $\boldsymbol{S = 31,7m}$

Exercice 6 :

Une meule, de diamètre 10cm, est actionnée par un moteur électrique, elle affûte un outil. Voir figure 8-14.

1°) La vitesse de rotation est de 3000 trs.mn^{-1}. Quelle est la vitesse linéaire d'un point de la périphérie de la meule ?

2°) L'outil exerce sur la meule tournant toujours à la vitesse précédente une force résistante tangentielle $\vec{R}$ d'intensité constante 12 N

a. Quelle est la puissance de cette force ?

b. Quel travail effectue-t- elle pendant t = 20 s ?

3°) La meule est un cylindre homogène de masse 400 g. Evaluer son moment d'inertie par rapport à son axe de rotation.

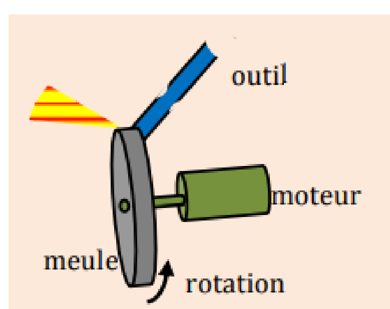


Figure 8-14

4°) Alors que la meule tournait à 3000 $tr.mn^{-1}$, on retire l'outil et on coupe l'alimentation du moteur. L'arbre du moteur exerce un couple de moment constant $\mathcal{M}_C$ qui freine la meule, celle –ci accomplit 500 tours avant de s'arrêter. Calculer le moment du couple $\mathcal{M}_C$. (on admettra que seul le couple de forces effectue le travail).

Résolution **Exercice 6 :**

1°*Vitesse linéaire*

$v = R\omega$ Or $\omega = 2\pi N$ et $R = \frac{D}{2}$ d'où $\mathbf{v = \pi ND}$ AN : $\mathbf{v = 15,7 m.s^{-1}}$

2° a. *Puissance de la force*

$\mathbf{\mathcal{P}_u = Rv}$ AN : $\mathbf{\mathcal{P}_u = 235,5W}$

b. *Travail*

$\mathcal{P} = \frac{W}{t}$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{W = \mathcal{P}t}$ AN : $\mathbf{W = 4710J}$

3° *Moment d'inertie par rapport à son axe de rotation*

$J = \frac{1}{2}MR^2$ Or $R = \frac{D}{2}$ d'où $\mathbf{J = \frac{1}{8}MD^2}$ AN : $\mathbf{J = 5.10^{-4} kg.m^2}$

4° *Moment $\mathcal{M}_c$ du couple moteur*

Appliquons TEC à la meule

$\Delta E_C = \sum W(F_{ext})$ $\Rightarrow$ $E_{C_f} - E_{C_i} = W(\vec{f})$ $\Rightarrow$ $0 - \frac{1}{2}J\omega^2 = \mathcal{M}_C\theta$

Or $\theta = 2\pi n$ et $\omega = 2\pi N$ d'où $-2\pi^2N^2J = 2\pi n\mathcal{M}_C$

D'où $\boldsymbol{\mathcal{M}_C = -\frac{\pi N^2 J}{n}}$ AN : $\boldsymbol{\mathcal{M}_C = -0,157 N.m}$

Exercice 7 :

Les frottements sont négligeables. On considère le dispositif schématisé par la figure ci-contre : S et S' sont deux solides de même masse M. La poulie de rayon r a une masse $M' = \frac{M}{2}$. On abandonne le système sans vitesse initiale. Les cordes sont inélastiques et de masse négligeable.

1°) Représenter les forces appliquées à S, S' et à la poulie.

2°) a. Etablir l'expression de la vitesse v de S lorsqu'il parcourt à partir de sa position initiale une distance h_1. On exprimera v en fonction de M, g, h_1, J, r et α, puis en fonction de g, h_1 et α. On rappelle que le moment d'inertie de la poulie par rapport à son axe de rotation est $J = \frac{M.r^2}{2}$.

b. Faire l'application numérique pour h_1=110 cm, g = 9,8 $m.s^{-2}$.

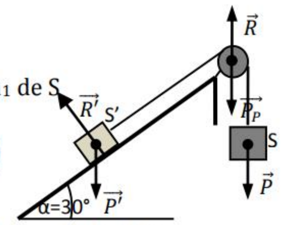
3°) Après avoir parcouru la distance h_1 précédente, le fil se casse. S se trouve à ce moment même à une hauteur h_2 de la surface libre d'une eau tranquille et profonde.

a. Déterminer h_2 sachant que S arrive à la surface de l'eau avec une vitesse v_o= 8$m.s^{-1}$.

b. Le solide S s'immerge ensuite totalement dans l'eau et atteint une profondeur h_3 = 2 m avant de remonter vers la surface du liquide. Quelle est la densité de S ?

Résolution **Exercice 7 :**

1°*Représentation des forces*
(Voir figure)



2°a.* *Expression de v en fonction de M, g, h₁, J, r et α*

Appliquons TEC a l'ensemble du dispositif pour un parcourt h_1 de S

$\Delta E_C = \sum W(F_{ext})$

$E_{C_f} - E_{C_i} = W(\vec{P}) + W(\vec{P_P}) + W(\vec{R}) + W(\vec{P'}) + W(\vec{R'})$

$\frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{1}{2}Mv^2 - 0 = Mgh_1 + 0 + 0 - Mgh + 0$

Or $h = h_1\sin\alpha$ et $v = r\omega$ donc $\frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}\frac{J}{r^2}v^2 + \frac{1}{2}Mv^2 = Mgh_1 - Mgh_1\sin\alpha$

$\left(M + \frac{J}{2r^2}\right)v^2 = Mgh_1(1 - \sin\alpha) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} = \sqrt{\frac{\mathbf{Mgh_1(1-\sin\alpha)}}{\mathbf{M+\frac{J}{2r^2}}}}$

**Expression de v en fonction de h₁, g et α*

$J = \frac{1}{2}M'r^2 = \frac{1}{4}Mr^2$ Donc $v = \sqrt{\frac{Mgh_1(1-\sin\alpha)}{M+\frac{\frac{1}{4}Mr^2}{2r^2}}}$ Soit $\mathbf{v = \frac{2}{3}\sqrt{2gh_1(1-\sin\alpha)}}$

b. *Application numérique*

$v = \frac{2}{3}\sqrt{2 \times 9{,}8 \times 1{,}10 \times (1 - \sin 30)} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v = 2{,}2 m.s^{-1}}$

3° *a.Valeur de h₂*

TEC : $\Delta E_C = \sum W(F_{ext}) \Rightarrow E_{C_f} - E_{C_i} = W(\vec{P}) \Rightarrow \frac{1}{2}Mv_0{}^2 - \frac{1}{2}Mv^2 = Mgh_2$

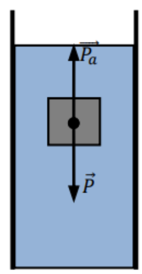
$\mathbf{h_2} = \frac{\mathbf{v_0{}^2 - v^2}}{\mathbf{2g}}$ AN : $\mathbf{h_2 = 3m}$

b. *Densité de l'eau*

Le solide S est soumis a deux forces: -son poids $\vec{P}$;

-la poussée d'Archimède $\vec{P_a}$

Appliquons TEC au solide S dans l'eau



$\Delta E_C = \sum W(F_{ext}) \quad \Rightarrow \quad 0 - \frac{1}{2}Mv_0{}^2 = Mgh_3 - P_a h_3$

Or $P_a = \mu_{eau}Vg$ et $M = \mu V$ donc $-\frac{1}{2}\mu V v_0{}^2 = \mu V g h_3 - \mu_{eau} V g h_3$

$-\frac{1}{2}\mu V v_0{}^2 - \mu V g h_3 = -\mu_{eau} V g h_3 \quad \Rightarrow \quad \left(gh_3 + \frac{1}{2}v_0{}^2\right)\mu = \mu_{eau} g h_3$

Soit $\boldsymbol{\mu} = \frac{\boldsymbol{\mu_{eau} g h_3}}{\mathbf{gh_3 + \frac{1}{2}v_0{}^2}}$ AN : $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{380 kg.m^{-3}}$

CHAPITRE 10 :
ENERGIE POTENTIELLE DE PESANTEUR ;
ENERGIE MECANIQUE

***Objectifs** : A la fin de ce chapitre, je dois être capable de :*

- *Définir et calculer l'énergie potentielle de pesanteur ;*
- *Définir et calculer l'énergie mécanique d'un système ;*
- *Appliquer le théorème de la conservation de l'énergie mécanique.*
- *Appliquer le théorème de la non conservation de l'énergie mécanique.*

1) Energie potentielle de pesanteur

1.1) Définition

L'énergie potentielle de pesanteur est l'énergie que possède un corps du fait de sa position par rapport (au sol) à la terre.

1.2) Energie potentielle de pesanteur et travail du poids

Considérons un bloc de pierre qui se détache d'une montagne au point A puis tombe jusqu'au point B. (Figure 9-1). Le travail de son poids se calcule par : $W_{\vec{P}} = m.g.h$. Or $h = Z_A - Z_B$.

$\Rightarrow W_{\vec{P}} = m.g.Z_A - m.g.Z_A$

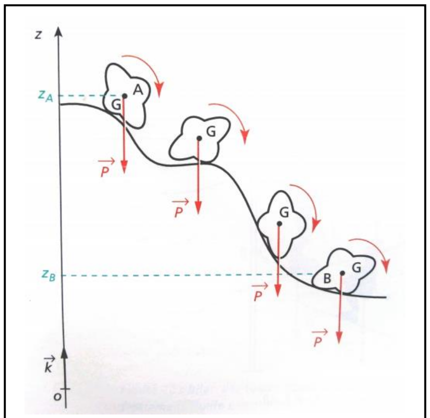


Figure 9-1

Donc Le travail du poids apparait comme la diminution d'une fonction appelée énergie potentielle de pesanteur $E_P(Z)$.

$E_P(Z) = mgZ$. Cette énergie rend compte de l'interaction de la terre avec le corps considéré. Elle est définie à une constante k près. Le choix de l'origine de l'énergie potentielle est arbitraire.

$W_{\vec{P}} = -\Delta E_P$

Remarque : Un corps abandonné à lui-même tend à se déplacer vers une position d'équilibre où son énergie potentielle est minimale.

2) Energie mécanique

Soit un corps (S) en chute libre se déplaçant du point A au point B. (Figure 9-2).

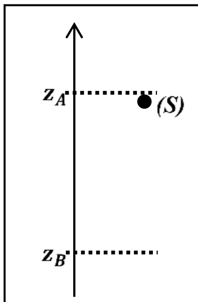


Figure 9-2

Le travail du poids s'écrit :

$W_{\vec{P}} = E_P(A)$ - $E_P(B)$; Or $W_{\vec{P}} = E_{C_B} - E_{C_A}$;

donc $E_P(A)$ - $E_P(B) = E_{C_B} - E_{C_A}$;

Soit $E_{C_B} + E_P(B) = E_{C_A} + E_P(A)$.

On constate que la somme $E_C + E_P$ reste constante au cours du mouvement.

Cette somme $E_m = E_C + E_P$ est appelée énergie mécanique du corps (S) dans le champ de pesanteur.

Cette définition est valable que le corps soit en rotation ou en translation.

3) Conservation de l'énergie mécanique

3.1) Définition

On dit qu'une grandeur se conserve lorsqu'elle demeure constante au cours du temps.

Exemple : Un corps en chute libre a une énergie mécanique qui se conserve.

3.2) Etude de quelques cas :

a- Chute sur un plan incliné.

Soit un solide ponctuel (S) en chute sur un plan incliné. (Figure 9-3).

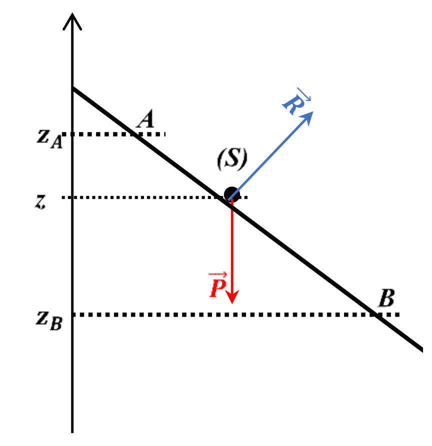


Figure 9-3

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique à (S) entre les positions A et B :

$E_{C_B} - E_{C_A} = W_{\vec{P}} + W_{\vec{R}}$. Or $W_{\vec{P}} = E_{p_A} - E_{p_B}$. De plus $W_{\vec{R}} = 0\ (car\ les\ frottements\ sont\ négligés)$.

On a donc : $E_{C_B} - E_{C_A} = E_{p_A} - E_{p_B}$.

Soit : $E_{C_B} + E_{p_B} = E_{C_A} + E_{p_A} \Leftrightarrow\ E_{m_B} = E_{m_A}$

Conclusion : Au cours de la chute sans frottements d'un solide sur un plan incliné, son énergie mécanique se conserve.

b- Pendule pesant.

Un pendule pesant est un solide de forme quelconque mobile autour d'un axe horizontal (Δ) ne passant pas par son centre de gravité.

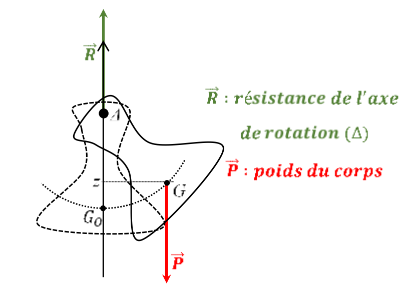


Figure 9-4

Appliquons TEC à l'instant t_0 où le solide en dans sa position d'équilibre stable et un instant t quelconque où sa côte est z. (Voir figure 9-4).

$E_C - E_{C_0} = W_{\vec{P}} + W_{\vec{R}}$

$Or\ W_{\vec{R}} = 0\ (car\ les\ frottements\ sont\ négligés)$, puis $W_{\vec{P}} = E_{p_0} - E_p$

D'où: $E_C + E_p = E_{C_0} + E_{C_0} = E_{m_0} = \frac{1}{2}J_{\Delta}.\omega^2 + mgz = E_m\ = Constante$

c- Généralisation

Lorsque toutes les forces appliquées à un solide à l'exception de son poids effectuent un travail nul, son énergie mécanique se conserve.

En définitive, en désignant par W le travail effectué par toutes les forces autre que le poids, on a :

$\Delta E_C = E_{C_2} - E_1 = W_{\vec{P}} + W_{\vec{R}}$

Or $W_{\vec{P}} = E_{p_1} - E_{p_2} \Rightarrow E_{C_2} - E_{C_1} = E_{p_1} - E_{p_2} + W \Leftrightarrow (E_{C_2} + E_{p_2}) - \left(E_{C_1} + E_{p_1}\right) = W$

$\Leftrightarrow E_{m_2} - E_{m_1} = W \Leftrightarrow \Delta E_m = W$

Remarques :

- Si W est le travail des forces de frottements alors $\Delta E_m < 0$; donc il y a diminution de l'énergie mécanique.
- Si W est le travail d'un moteur (moteur électrique ; moteur à explosion ; moteur hydraulique ; moteur pneumatique…) alors $\Delta E_m > 0$; donc il y a augmentation de l'énergie mécanique.

Théorème de la non conservation de l'énergie mécanique

La variation de l'énergie mécanique d'un solide entre deux instants t_1 et t_2 est égale à la somme des travaux de toutes les forces appliquées à l'exception de son poids.

EXERCICE 1 :

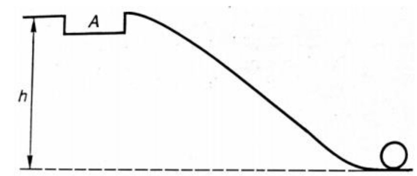


Figure 9-5

Dans un golf miniature, représenté par la figure 9- , on donne : $h = 50\ m$. La vitesse minimale v_m qu'il faut donner à la balle pour qu'elle vienne se loger dans le trou A si l'on néglige les frottements est :

a- $v_m = 0{,}031\ Km.s^{-1}$
b - $v_m = 31\ m.s^{-1}$
c - $v_m = 3{,}1\ mm.s^{-1}$
d - $v_m = 3{,}1\ m.s^{-1}$
e - $J'ai\ besoin\ d'aide$

EXERCICE 2 :

Un balancier d'horloge peut être schématisé par un disque D soudé à l'extrémité d'une tige OA. (Voir figure 9-6).

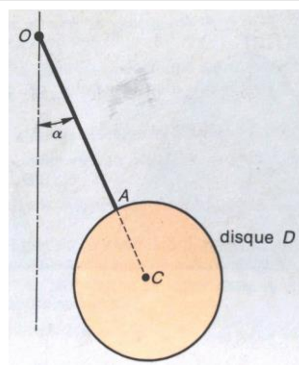


Figure 9-6

1) Déterminer la position du centre d'inertie G du pendule ainsi constitué.
2) Ce pendule peut osciller autour de l'axe horizontal passant par O. Quelle est sa position d'équilibre stable ?
3) Au cours d'une oscillation, le pendule passe par sa position d'équilibre avec une vitesse angulaire $\omega_0 = 2{,}14\ rad.s^{-1}$. On néglige les frottements.
a- Calculer alors son énergie cinétique. En précisant le niveau de référence de l'énergie potentielle, calculer l'énergie mécanique du pendule.
b- Calculer l'amplitude maximale atteinte α_M.
c- Lorsqu'il passe par une position telle que $\alpha = 20°$, calculer sa vitesse angulaire ω.

Données : $m(tige) = 0{,}5\ Kg, m(D) = 1\ Kg$; $OA = 1\ m$; $AC = 10\ cm$;
$moment\ d'inertiedu\ pendule\ par\ rapport\ à\ l'axehorizontal\ passant\ par\ O : J_o = 1{,}38\ Kg.m^2$.

Réponses Exercice 2 :

1) $OG = 0{,}9m$; 3a) $E_C = E_m = 3{,}16\ J$; 3b) $\alpha_M = 42°$; 3c) $\omega = 1{,}85\ rad.s^{-1}$

EXERCICE 3 :

Un pendule pesant est assujetti à tourner autour d'un axe horizontal passant par O (Voir figure 9-7). Sa masse est $m = 5\ Kg$, son centre d'inertie G est à la distance $a = OG = 0{,}6\ m$ de l'axe de suspension O ; le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe est $J = 0{,}5\ Kg.m^2$.On repère la position du solide par l'angle α, angle entre la verticale et OG. Dans tout l'exercice on néglige les frottements.

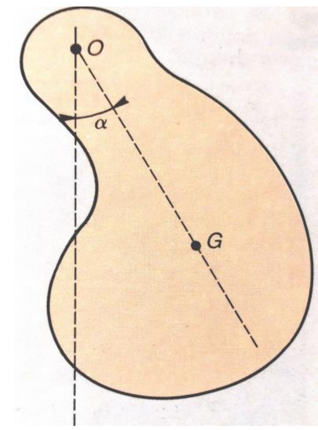


Figure 9-7

1) Tracer le graphique représentant l'énergie potentielle de pesanteur du système en fonction de α pour $-\pi < \alpha < \pi$. On prendra $E_p = 0$ pour $\alpha = 0$.
2) Pour $\alpha_0 = \pi$, le système est en équilibre instable. Un léger déséquilibre suffit à le faire basculer. Calculer alors sa vitesse angulaire ω_0 lorsqu'il passe par la position d'équilibre stable $\alpha = 0$.
3) Au cours d'une expérience, on lance le pendule avec une vitesse initiale $\omega_1 = \frac{\omega_0}{2}$ à de la position $\alpha = 0$. Va-t-il osciller ou bien effectuer des tours complets autour de l'axe ? Justifier.
4) Au cours d'une autre expérience, on le lance avec une vitesse initiale $\omega_2 = \omega_0$. Etudier le mouvement ultérieur.
5) Nous voulons maintenant que le pendule oscille entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$. Quelle doit être sa vitesse angulaire ω_3 en $\alpha = 0$? Prendre g = 10 m.s^{-2}.

Réponses Exercice 3 :

1) $E_p(\alpha) = E_p(\alpha) - E_p(0) = mg(z - z_0) = m.g.OG.(1 - cos\alpha) = 30(1 - cos\alpha)$;

α (rad)	$-\pi$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	π
$E_p(\alpha)$	60	15	8,78	4,01	0	4,01	8,78	15	60

2) $\omega_0 = \sqrt{\frac{2E_P(\pi)}{J}} = 15{,}49\ rad.s^{-1}$; 3) Il va osciller car $\omega_1 < \omega_0$; 4) Pour $\omega_2 = \omega_0$, il y a 3 :1er cas : le pendule s'immobilise, 2ème cas : le pendule rebourse chemin pour oscille, 3èm cas : il fait le tour complet.

5) $E_m\left(\frac{\pi}{2}\right) = E_m(0) = E_m\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, car il n'y a pas de frottements $\Rightarrow \omega_3 = \sqrt{\frac{2E_P(\frac{\pi}{2})}{J}} = 10{,}95\ rad.s^{-1}$

EXERCICE 4 :

Un cycliste descend une pente de longueur $l = 5\ Km$, de dénivellation $h = 300\ m$.Parti sans vitesse initiale, il arrive en bas de la pente avec une vitesse $v = 50Km.h^{-1}$; la masse totale du cycliste et de son vélo est $M = 80\ Kg$.

1) Calculer l'énergie mécanique « perdue » et le travail des différentes forces de frottement.

2) Les forces de frottement sont représentables par leur vecteur somme $\vec{f}$, de sens opposé au vecteur vitesse $\vec{v}$ du cycliste.

Calculer la norme $\|\vec{f}\|$, supposée constante (ce qui n'est pas conforme à la réalité, car celle-ci varie avec la vitesse).

Réponses EXERCICE 4 :

1) $W = \Delta E_p = 227\ KJ$; 2) $\|\vec{f}\| = 209\ N$

EXERCICE 5 :

Un solide S de masse m = 2 kg descend un plan incliné poli (frottements négligeables) d'une hauteur H =1 m en partant sans vitesse initiale. Arrivé au bas du plan incliné, il rencontre un plan rugueux horizontal BC où il est soumis à une force de frottement d'intensité constante f = 6 N. En C, il monte sur une surface courbe CD polie. La longueur du parcours BC est 2 m. On néglige les dimensions du solide (S). Le point B est choisi comme origine des altitudes et comme référence de l'énergie potentielle de pesanteur. Voir figure 9-8.

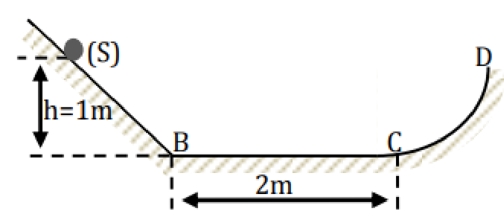


Figure 9-8

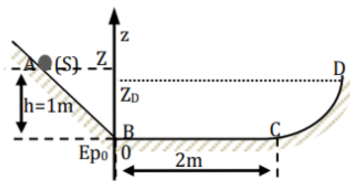
1°) Quelle est la vitesse de (S) en B ?

2°) Quelle est la vitesse de (S) en C ?

3°) A quelle hauteur (S) remonte-t-il sur la surface CD ?

4°) A quelle endroit (S) va-t-il finalement s'arrêter ?

Résolution **Exercice 5 :**



1° *Vitesse de (S) en B*

Conservation de l'énergie mécanique : $E_{m_A} = E_{m_B}$

$E_{C_A} + E_{P_A} = E_{C_B} + E_{P_B}$ Or $E_{C_A} = 0$ et $E_{P_B} = E_{P_0} = 0$

$E_{P_A} - E_{P_0} = mg(Z_A - Z_0)$ et $E_{C_B} = \frac{1}{2}mv_B^2$

On déduit : $\frac{1}{2}mv_B^2 = mgh$ soit $\boldsymbol{v_B = \sqrt{2gh}}$ AN : $\boldsymbol{v_B = 4,4m.s^{-1}}$

2° *Vitesse de (S) en C*

Appliquons la non-conservation de l'énergie mécanique entre B et C : $\Delta E_{m_{B-C}} = W(\vec{f})$

$E_{m_C} - E_{m_B} = W(\vec{f}) \quad \Rightarrow \quad E_{C_C} + E_{P_C} - (E_{C_B} + E_{P_B}) = -f.BC$

Or $E_{P_C} = E_{P_B} = 0$; $E_{C_C} = \frac{1}{2}mv_C^2$ et $E_{C_B} = \frac{1}{2}mv_B^2$ d'où $\frac{1}{2}m(v_C^2 - v_B^2) = -f.BC$

On déduit : $\boldsymbol{v_C = \sqrt{v_B^2 - \frac{2f.BC}{m}}}$ AN : $\boldsymbol{v_C = 2,8m.s^{-1}}$

3° *Hauteur h' ou remonte (S)*

Conservation de l'énergie mécanique : $E_{m_X} = E_{m_C}$ Or $E_{m_C} = E_{C_C}$ et $E_{m_X} = E_{P_X}$

$E_{P_X} - E_{P_0} = mg(Z_X - Z_0)$ avec $E_{P_0} = 0$; $Z_0 = 0$ et $Z_X = h'$. $E_{C_C} = \frac{1}{2}mv_C^2$

D'où $mgh' = \frac{1}{2}mv_C^2 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{h' = \frac{v_C^2}{2g}}$ AN : $\boldsymbol{h' = 0,4m}$

4° *Distance d' d'arrêt*

Appliquons la non-conservation de l'énergie mécanique : $\Delta E_{m_{C-Y}} = W(\vec{f})$

$E_{m_Y} - E_{m_C} = W(\vec{f}) \quad \Rightarrow \quad E_{C_Y} + E_{P_Y} - (E_{C_C} + E_{P_C}) = -f.CY$

Or $E_{P_C} = 0$; $E_{P_Y} = 0$; $E_{C_C} = \frac{1}{2}mv_C^2$ et $E_{C_Y} = 0$ d'où $-\frac{1}{2}mv_C^2 = -fd'$

On déduit : $\boldsymbol{d = \frac{mv_C^2}{2f}}$ AN : $\boldsymbol{d = 1,3m}$

EXERCICE 6 :

Une bille d'acier de masse m = 400 g est lâchée sans vitesse initiale d'une hauteur h_0 =100 m au-dessus d'un plan d'acier sur lequel elle rebondit. On prendra la position de référence : la bille sur le plan à l'altitude zéro.

1°) Calculer l'énergie mécanique totale E_0 de la bille avant le premier choc.

2°) Après le premier choc, l'énergie mécanique de la bille n'est plus que de 0,8 E_0.

a. Calculer E_1 et la variation de l'énergie mécanique lors du premier choc.

b. A quelle hauteur maximale h_1 la bille remonte-t-elle ?

c. Expliquer pourquoi l'énergie mécanique de la bille juste avant le deuxième choc est encore E_1.

3°) Après le deuxième choc, l'énergie mécanique est E_2= 0,8 E_1. A quelle hauteur maximale h_2 la bille remonte-t-elle ?

4°**)** Ainsi à chaque choc sur le plan, 20% de l'énergie mécanique est perdue.

a. Déterminer E_n (énergie mécanique de la bille après n choc), en fonction de E_0 et n.

b. Déterminer la hauteur h_n, la hauteur maximale de remontée après le n^e choc en fonction de h_0 et n.

c. Application numérique : n = 6. Evaluer E_6, h_6 et la vitesse de la balle juste avant le 7[e] choc.

Résolution **Exercice 6 :**

1° *Energie mécanique totale E_0 de la bille avant le premier choc*

$E_0 = E_C + E_P$ Or $E_P = mgh_0$ et $E_C = 0$ d'où $\mathbf{E_0 = mgh_0}$ AN : $\mathbf{E_m = 392J}$

2°a. *Valeur de E_1*

$\mathbf{E_1 = 0,80E_0}$ AN : $\mathbf{E_1 = 313,6J}$

Variation de l'énergie mécanique lors du premier choc

$\mathbf{\Delta E = E_1 - E_0}$ AN : $\mathbf{\Delta E = -78,4J}$

b. Hauteur maximale h_1

$E_1 = mgh_1 \Rightarrow \mathbf{h_1 = \frac{E_1}{mg}}$ AN : $\mathbf{h_1 = 80m}$

c. *Explication* : il n'y a pas de frottements dans l'air donc l'énergie mécanique est une constante

3°*Hauteur maximale h_2*

$E_2 = mgh_2$ Or $E_2 = 0,80E_1$ d'où $\mathbf{h_2 = \frac{0,8E_1}{mg}}$ AN : $\mathbf{h_2 = 64m}$

4°a. *Énergie mécanique E_n de la bille après le n[e] choc, en fonction de E_0 et n*

$E_1 = 0,80E_0; E_2 = 0,80E_1$ Or $E_1 = 0,80E_0$ donc $E_2 = (0,80)^2E_0$

On peut donc conjecturer : $\mathbf{E_n = (0,80)^nE_0}$

b. *Hauteur maximale h_n de remontée après le n[e] choc en fonction de h_0 et n*

$E_n = (0,80)^nE_0$ Or $E_0 = mgh_0$ et $E_n = mgh_n$ donc $\mathbf{h_n = (0,80)^nh_0}$

c. *Energie mécanique E_6*

$\mathbf{E_6 = (0,80)^6E_0}$ AN : $\mathbf{E_6 = 102,76J}$

Hauteur maximale h_6

$\mathbf{h_6 = (0,80)^6h_0}$ AN : $\mathbf{h_6 = 26,21m}$

Vitesse de la balle juste avant le 7[e] choc

$E_6 = \frac{1}{2}mv_6^2 \Rightarrow \mathbf{v_6 = \sqrt{\frac{2E_6}{m}}}$ AN : $\mathbf{v_6 = 22,7m.s^{-1}}$

Chapitre 11 :
LES PHENOMENES VIBRATOIRES

Objectifs pédagogiques

A la fin de ce chapitre, l'élève doit être capable de :

- *Définir : un mouvement périodique ; une onde mécanique*
- *Reconnaitre une onde transversale et une onde longitudinale,*
- *Connaitre et exploiter les propriétés générales des ondes*
- *Définir une onde progressive*

I. Mouvements périodiques

1. Définition

Un phénomène périodique est un phénomène qui se répète identique à lui-même à des intervalles de temps successifs et égaux.

On peut citer comme exemples, le jour et la nuit, les battements du cœur, la révolution et la rotation propre de la terre

- **La période T** d'un phénomène vibratoire est la plus petite durée au bout de laquelle le phénomène se produit identique à lui-même. C'est la durée d'une oscillation. Elle s'exprime en **seconde (s)**
- **La fréquence N** ou **f** du phénomène périodique est le nombre de fois que le phénomène se reproduit en une seconde. Elle s'exprime en **Hertz (Hz).**

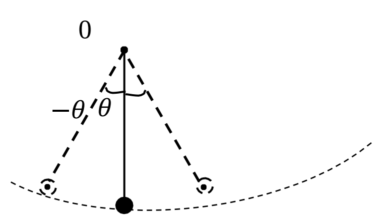
$$\boldsymbol{N = \frac{1}{T}}$$

2. Mouvements oscillatoires

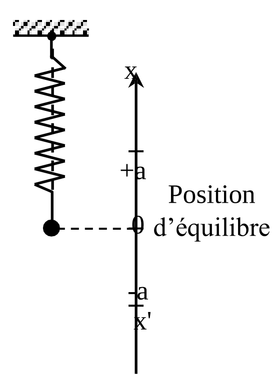
a. Définition

On appelle oscillation le mouvement de va et vient d'un objet de part et d'autre d'une position appelée position d'équilibre.

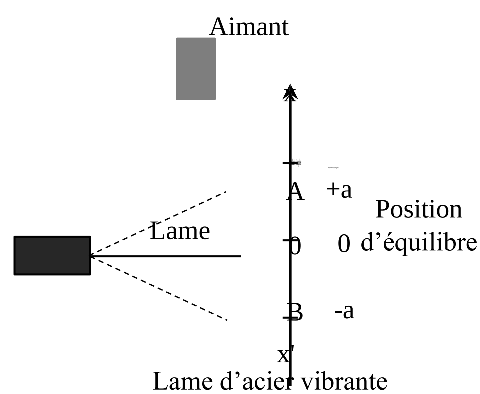
b. Exemples d'oscillations mécaniques



Pendule simple



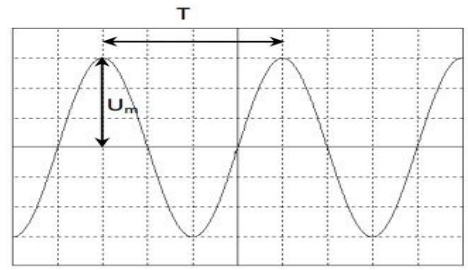
Pendule élastique



Lame d'acier vibrante

Dans les trois cas les oscillateurs effectuent des mouvements de part et d'autre de leur position d'équilibre. L'amplitude des oscillations diminue jusqu'à ce que l'oscillateur s'arrête dans sa position d'équilibre : on dit que l'oscillateur est amorti. Pour éviter les amortissements il faut fournir à l'oscillateur de l'énergie. On dit que le mouvement est entretenu.

c. Exemples d'oscillations électriques



Une tension alternative sinusoïdale peut reprendre les mêmes valeurs à intervalle de temps régulier : elle est alors périodique. Un motif de base se repère régulièrement sur un oscillogramme.
La tension oscille entre les valeurs $-U_{\max}$ et $U_{\max}$.
$U_{\max}$ est appelé amplitude de la tension sinusoïdale.

d. Exemples d'oscillations acoustiques

Un son résulte de la mise en vibration d'un corps ou d'un ensemble de corps. Le générateur de son ou source sonore est par exemple un corps tendu, une plaque métallique, une cloche, une membrane de haut-parleur… Les sons audibles à l'oreille humaine ont une fréquence située entre 20Hz et 20 000Hz. Les sons dont les fréquences sont voisines de 20 Hz s'appellent les **voix graves**. Ceux dont les fréquences sont voisines de 200 000 Hz sont les **voix aigües.**

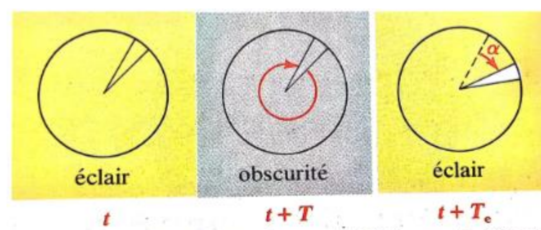
3. La stroboscopie

Un stroboscope est un appareil qui émet des éclairs très brefs à intervalles de temps réguliers. On utilise fréquemment le stroboscope à disque et le stroboscope électronique.

- Expérience de stroboscopie sur un disque à secteur noir portant un secteur blanc

Avec un stroboscope on envoi, à une fréquence N_e, des éclairs à intervalles de temps régulier sur un disque peint en noir. Le disque est en mouvement de rotation uniforme fréquence N. Il porte un secteur blanc qui n'est visible qu'a l'instant où l'éclair est émis.

- Lorsque N = Ne ou plus généralement lorsque $\boxed{N = k \cdot N_e}$; k entier naturel, on observe l'immobilité apparente du disque.
- Lorsque N > Ne avec N ≈ Ne, le mouvement du disque est apparent ralenti dans le sens réel.
- Lorsque N < Ne avec N ≈ Ne, le mouvement du disque est apparent ralenti dans le sens opposé du sens réel.
- Na = |N − Ne| : fréquence du mouvement apparent



13. *La fréquence N_e du stroboscope est légèrement inférieure à la fréquence N du disque ($T_e > T$). Entre deux éclairs, le disque tourne dans l'obscurité de ($2\pi + \alpha$) rad. Le disque semble donc avoir tourné d'un angle α entre les deux éclairs séparés d'une durée T_e. Plus précisément :*

$$\alpha = \omega \cdot (T_e - T) = \omega_a \cdot T_e ,$$

où ω est la vitesse réelle de rotation du disque et ω_a sa vitesse apparente.

II. Propagation d'un phénomène vibratoire

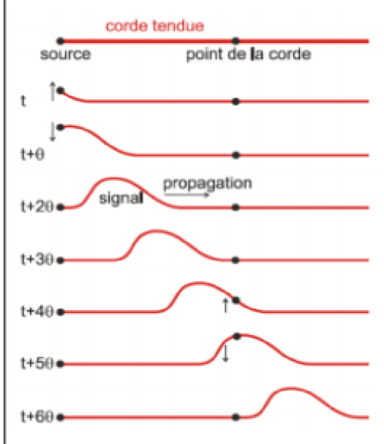
1. Les signaux ou perturbation d'un milieu au repos

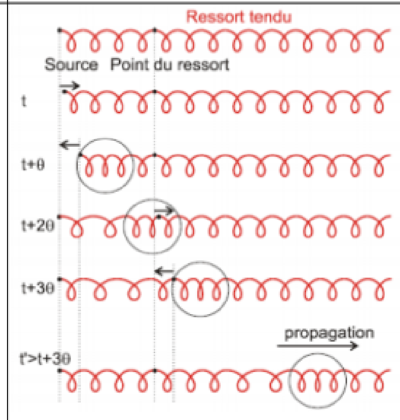
a. Observations

On appelle ***signal*** ou ***perturbation*** : toute modification temporelle et locale d'un milieu. Cette perturbation correspond à la variation d'une propriété mécanique (vitesse, position, énergie…) des points d'un milieu matériel.

Que se passe-t-il si on exerce une perturbation sur un milieu matériel ?

Expérience a: on fait tomber une goutte sur un plan d’eau au repos.	Expérience b : on déplace très rapidement et verticalement l’extrémité d’une corde posée sur un support horizontal.	Expérience c : on pince brièvement quelques spires d’un ressort posé horizontalement.





Dans ces trois expériences, qu’est-ce qu’on observe ?
On observe que :

- La déformation se propage (se déplace) tout au long du milieu matériel.
- La déformation est une perturbation, car le milieu matériel revient dans son état initial : le repos.
- Globalement la matière ne s’est pas déplacée.

b. <u>Définition</u>

- **Définition d’une onde mécanique**

On appelle onde mécanique le phénomène de propagation d’une perturbation dans un milieu matériel sans transport de matière.
Une onde mécanique peut-elle se propager dans le vide ? Pourquoi ?
Une onde mécanique ne peut pas se propagée dans le vide, puisque, par définition, elle se propage au sein de la matière.
Dans les trois expériences, on a donc affaire à une onde mécanique.
Quel est le milieu de propagation de l’onde dans les expériences a, b, et c ?

Le milieu de propagation de cette onde est :
- la surface de l'eau pour l'expérience a ;
- la corde pour l'expérience b ;
- le ressort pour l'expérience c.

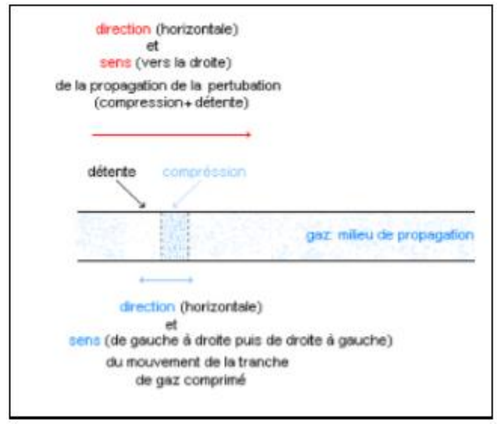
Définition d'une source de l'onde mécanique
On appelle source de l'onde l'endroit où naît la perturbation.
Dans les trois expériences, quelle est la source de l'onde ?
La source de l'onde est :
- le point d'impact de la goutte sur le plan d'eau pour l'expérience a ;
- l'extrémité de la corde pour l'expérience b ;
- les spires pincées pour l'expérience c.

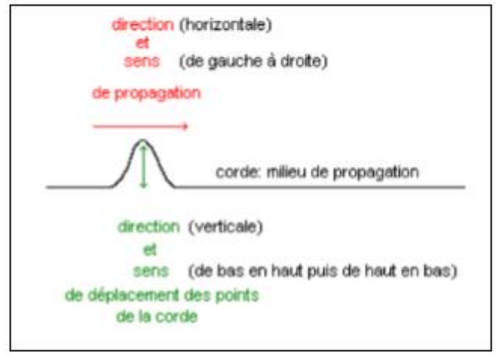
c. <u>Nature d'une onde mécanique</u>

➢ **Définition d'une onde progressive**

Une onde mécanique est dite ***progressive*** si la perturbation qu'elle provoque s'éloigne de plus en plus de la source de l'onde au fur et à mesure que le temps s'écoule.

Dans le cas où l'onde est périodique, elle présente une double périodicité spatiale et temporelle.





➢ **Onde mécanique progressive longitudinale**

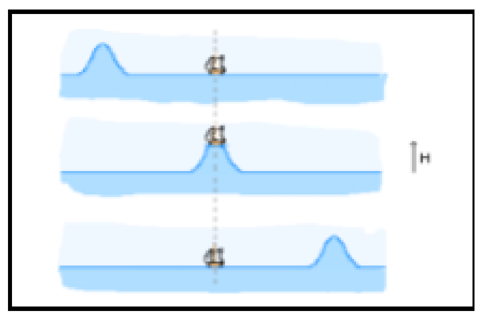
Une onde mécanique progressive est dite longitudinale si la matière affectée par la perturbation oscille parallèlement à la direction de propagation de l'onde.
Dans quelle expérience onde est-elle longitudinale ? Expliquer.
Dans l'expérience c, on a affaire à une onde longitudinale.

En effet, les spires du ressort oscillent horizontalement au passage de la perturbation et cette perturbation (zone de compression) se déplace dans la même direction.

➢ **Onde mécanique progressive transversale**

Une onde mécanique progressive est dite ***transversale*** si la matière affectée par la perturbation oscille dans une direction ***perpendiculaire*** à la direction de propagation de l'onde.
Dans les expériences a et b, on a affaire à une onde transversale. En effet, la corde ou la surface de l'eau oscille verticalement au passage de la perturbation, alors que cette perturbation (vague) se déplace horizontalement.

<u>*Remarque :*</u> *Si on avait placé un objet flottant sur le plan d'eau, cet objet, au passage de l'onde, oscille verticalement et ne se déplace pas horizontalement.*



2. Propriétés générales des ondes mécaniques progressives

a. Direction de propagation

Une onde se propage, à partir de la source, dans toutes les directions qui lui sont offertes. On distinguera ainsi les ondes à une dimension (corde), deux dimensions (vague sur l'eau) ou trois dimensions (onde lumineuse).

b. Célérité de l'onde

On appelle célérité **C** de l'onde la vitesse de propagation de l'onde. C'est le rapport de la distance d parcourue par l'onde par la durée Δt du parcours.

$$C = \mathbf{d}/\,\Delta\mathbf{t} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} d \text{ est exprimée en mètre } (m) \\ \Delta t \text{ est exprimée en seconde (s)} \\ \text{C en mètre par seconde (m/s)} \end{cases}$$

La célérité de l'onde est une propriété du milieu de propagation et ne dépend pas de la façon dont la source a engendré l'onde. Elle est donc constante dans un milieu donné dans des conditions données. (Elle ne dépend ni de la forme ni de l'amplitude de l'onde)

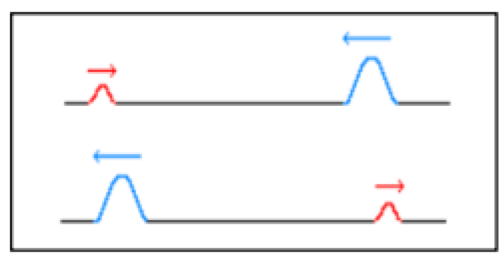
- ❖ Par exemple la célérité du son dans l'air dépend de sa température.

Signal	Milieu de propagation	Célérité en m/s
Son	air à 0°C	330,7
	air à 20°C	342,6
	air à 40°C	354,1
	eau de mer à 15°C	1500
	acier (onde transversales)	3240
	acier (onde longitudinales)	5880
	hydrogène 20°C	1300

- ❖ La célérité d'une onde se propageant sur une corde dépend de sa tension et de sa masse linéique (masse par unité de longueur)

$$C = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad \text{avec} \quad \mu = \frac{m}{L} \begin{cases} m \text{ en } kg \\ L \text{ en } m \\ \mu \text{ en } \frac{kg}{m} \end{cases}$$

c. Croisement de deux ondes

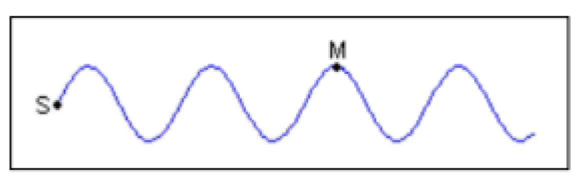


Deux ondes se propageant dans le même milieu peuvent se croiser sans se perturber mutuellement.

3. Onde progressive périodique à une dimension

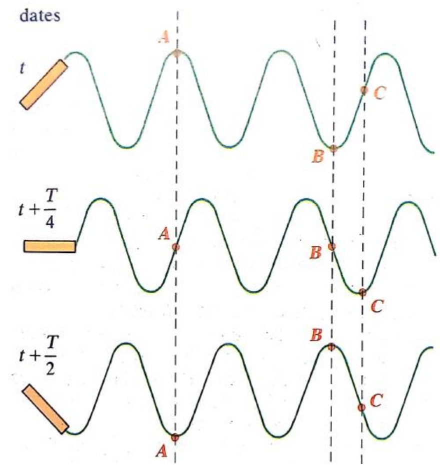
a. Etude expérimentale

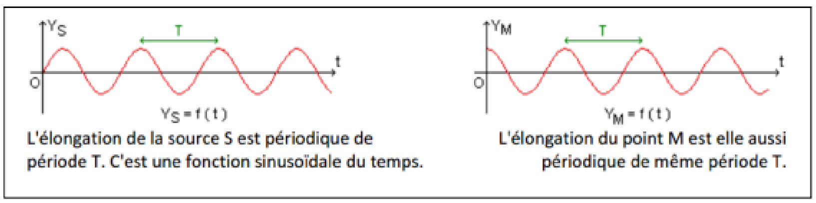
Considérons une source S possédant un mouvement périodique (de période T).
On constate que S engendre une onde progressive périodique se propage le long de la corde.



b. <u>Périodicité temporelle T</u>

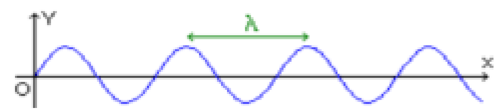
Ci-dessous l'aspect de la corde à un instant donné. L'élongation de la source et d'un point M quelconque est en général différente, mais on peut remarquer une périodicité dans le mouvement de chaque point de la corde.
La période du mouvement de chaque point de la corde est imposée par la source S.





c. <u>Périodicité spatiale λ</u>

L'aspect de la corde à un instant donné est une fonction sinusoïdale de l'abscisse x de chacun des points du milieu.



On appelle longueur d'onde (notée λ) la période spatiale de l'onde progressive périodique.

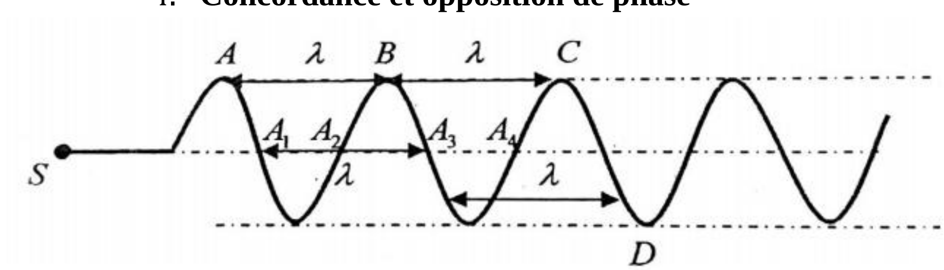
d. <u>Relation entre la périodicité T et la longueur d'ondeλ</u>

L'onde présente une double périodicité :

- Une périodicité temporelle de période **T** (exprimée en seconde) ;
- Une périodicité spatiale de période $\boldsymbol{\lambda}$ (exprimée en mètre).

$$\boldsymbol{\lambda = C.T = \frac{C}{N}} \text{ avec } \begin{cases} T \text{ exprimée en } (S) \\ \text{c exprimée en } (\frac{\text{m}}{\text{s}}) \\ \lambda \text{ exprimée en } (\text{m}) \\ \text{N exprimée en } (\text{Hz}) \end{cases}$$

4. **Concordance et opposition de phase**



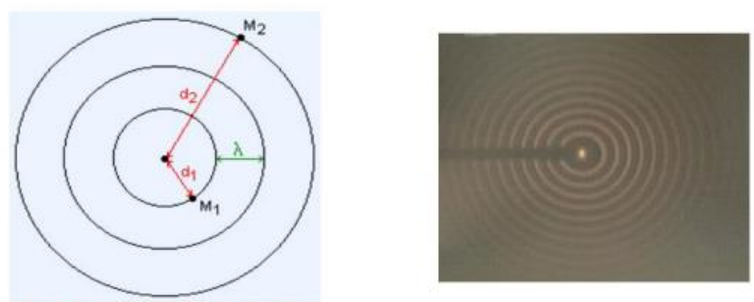
❖ Des points distants de d=kλ ,   avec k $\epsilon\mathbb{N}$ sont en concordance de phase ou en phase. C'est le cas des points A, B et C qui vibrent en phase ; il en est de même pour les A_1 et A_3 ; A_2 et A_4.

- Des points distants de $d=(2k+1)\lambda/2$, avec $k \in \mathbb{N}$ sont en opposition de phase. C'est le cas des points A et D , C et D ; il en est de même pour les A_1 et A_2 ; A_2 et A_3.

5. Ondes à deux ou à trois dimensions

a. Ondes à la surface de l'eau

- *Ondes circulaires*

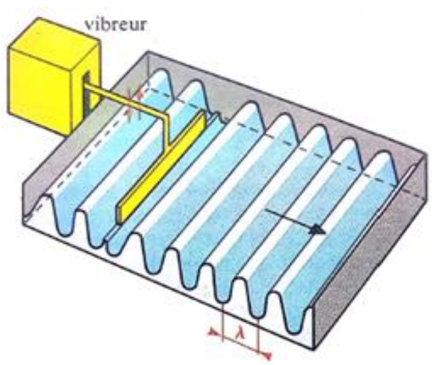


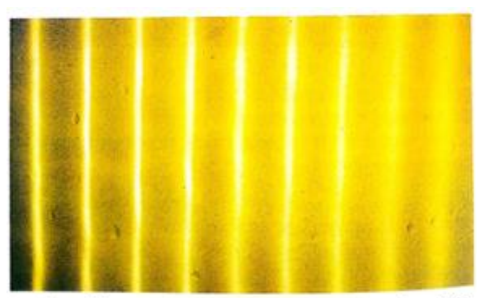
Les points M_1 et M_2 vibrent en phase si $|d_2-d_1| = k.\lambda$.

Les points M_1 et M_2 sont situés sur des crêtes. Les crêtes formées sont équidistantes de la longueur d'onde λ. L'ensemble des points vibrants en phase sont situés sur les crêtes ou sur les creux.

- *Ondes rectilignes*

On obtient des crêtes et des creux rectilignes et parallèles. Ils se propagent en s'éloignant de la règle qu'on laisse vibrer sur la surface libre de l'eau.





La réglette, animée par le vibreur, émet des ondes rectilignes parallèles qui se propagent à la surface de l'eau de la cuve à ondes.

b. Ondes sonores

Les ondes sonores sont des ondes mécaniques longitudinales de compression-dilatation. Le son se propage dans un milieu matériel élastique (gaz, liquide ou solide).

c. Ondes lumineuses

L'onde lumineuse peut se propager dans le vide.

L'ESSENTIEL

- On appelle onde, le phénomène résultant de la propagation d'une succession d'ébranlements dans un milieu donné.
- Une onde est dite transversale si la direction des déformations auxquelles elle est due est perpendiculaire à la direction de sa propagation.
- Une onde est dite longitudinale si la direction des déformations auxquelles elle est due est parallèle à la direction de sa propagation.
- La propagation d'une onde correspond à un transport d'énergie sans déplacement de matière.
- La célérité (ou vitesse de propagation) d'une onde dépend de la nature du milieu de propagation et de ses propriétés.
- Toute onde se propageant dans un milieu ouvert est progressive. Elle est caractérisée par une double périodicité spatiale et temporelle.
- La période temporelle T de l'onde est liée a la période spatiale λ par la relation : $\lambda = \mathbf{v.T}$, avec v la célérité de l'onde.

EXERCICES SUR LES PHENOMENES VIBRATOIRES

EXERCICE 1
Calculer la période et la fréquence des phénomènes périodiques suivants :
1) Rotation de la lune autour de la terre en 29 jours et demi.
2) Mouvement d'une masse accrochée à un ressort ; 10 allers et retours sont effectués en 12,0s.
3) Mouvement d'un point à la périphérie d'un disque tournant à raison de 45 tours par minute ;
4) Mouvement des branches d'un diapason effectuant Cinq cents vibrations par seconde.
5) Chute de gouttes d'eau d'un robinet à raison de 40 gouttes par minute.
6) Concentration cardiaque au rythme de 70 pulsations par minute.

EXERCIC E 2
Un robinet laisse tomber des gouttes d'eau à la cadence régulière de 80 gouttes à la minute.
1) Calculer la période et la fréquence de chute des gouttes.
2) On observe la chute des gouttes sous éclairage stroboscopique :
a) À quelles fréquences des éclairs observerait-on une immobilité apparente ? En déduire la valeur de la plus grande.
b) On diminue d'un dixième la fréquence des éclairs : quel mouvement apparent des gouttes observe-t-on et à quelle fréquence ?
c) Même question lorsqu'on augmente d'un dixième la fréquence initiale des éclairs ?
Indication : la diminution ou l'augmentation d'un dixième s'entend ici en valeur relative. Par exemple, diminuer la fréquence 50 Hz d'un dixième signifie que l'on passe à la nouvelle valeur :
$50 - (1 / 10) .50 = 45$Hz.

EXERCICE 3
Une lame métallique animée d'un mouvement vibratoire entretenu à la fréquence N = 100 Hz, est observé sous éclairage stroboscopique. La fréquence des éclairs N_e du stroboscope peut varier de 45 Hz à 250 Hz.
1) Calculer la période de ce mouvement vibratoire.
2) Pour quelles fréquences des éclairs observera-t-on une seule lame apparemment immobile ?

3) Pour quelle(s) fréquence(s) des éclairs observera-t-on deux lames apparemment immobiles ?
4) Qu'observe-t-on lorsque N_e = 99 Hz et lorsque N_e = 101 Hz ?

EXERCICE 4

Un stylet électriquement entretenu frappe périodiquement la surface de l'eau en un point O. Il se propage des rides circulaires concentriques. La distance qui sépare 5 crêtes consécutives est égale à 12 cm.
1) En déduire la longueur d'onde.
2) Avec quelle vitesse l'onde se propage à la surface de l'eau si la fréquence est de 40Hz ?
3) En déduire la période.

EXERCICE 5

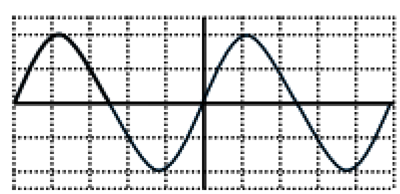
1) Définir : *phénomènes périodiques* ; *période* ; *fréquence* ; *longueur d'onde*.
2) Une lame vibrant produit des rides circulaires à la surface libre d'un liquide. La distance qui sépare 5 rides consécutives est l = 0,8 m. La célérité des ondes vaut 20m/s.
a) Calculer la longueur d'onde des rides.
b) En déduire les valeurs de la période T et de la fréquence N des rides.
3) On éclaire ces rides à l'aide d'un stroboscope.
a) Donner la condition sur la fréquence des éclairs pour qu'on observe l'immobilité apparente.
b) En déduire la valeur de la plus grande fréquence des éclairs pour laquelle on observe l'immobilité apparente.
4) Un disque blanc muni d'un secteur noir est mis en rotation autour d'un axe. Il effectue 10 tours en 2,1 secondes.
a) Calculer sa période et sa fréquence de rotation en hertz.
b) Le disque reçoit un éclairage stroboscopique de fréquence N_e = 4,76 Hz. Quel est l'effet produit ?

EXERCICE 6

Un vibreur est fixé à l'extrémité S d'une corde horizontale de longueur SA=L=4,8 m. Il est animé d'un mouvement sinusoïdal vertical de fréquence N = 100Hz. En un temps t = 0,60 s, le mouvement s'établit sur toute la longueur de la corde. On néglige l'amortissement et la réflexion en A.
1) Déterminer la période T.
2) Déterminer la célérité C de l'onde.
3) Calculer la longueur d'onde λ.

EXERCICE 7

L'oscillogramme de la figure suivante est celui d'un diapason (petit instrument d'acier formé d'une tige aux branches un U dont on se sert pour prendre le ton) en vibration.



1) Déterminer la période et la fréquence du son émis. La sensibilité horizontale est de 1 ms par division.
2) Le son émis par le diapason se propage dans l'air à la vitesse de 340m/s. Quelle est la longueur d'onde de l'onde sonore ?

EXERCICE 8

Une pointe frappe, en un point O, la surface de l'eau 20 fois par seconde.
1) Quelles sont la fréquence et la période du mouvement de O ?
2) Indiquer la nature de l'onde qui se propage sur l'eau.

3) Cinq crêtes successives, le long d'un rayon d'onde, sont distantes de 4,0 cm ; déterminer la célérité et la longueur d'onde de l'onde.
4) Comparer les mouvements des points :
a) O et M distants de 2,5 cm.
b) O et N distants de 5 cm.
c) N et Q distants de 4,25 cm.

CHAPITRE 12

PROPAGATION RECTILIGNE DE LA LUMIERE

Objectifs pédagogiques

A la fin de ce chapitre, l'élève doit être capable de :

- Expliquer comment un miroir plan donne d'un objet réel placé devant lui une image virtuelle
- Utiliser les lois de la réflexion pour tracer le rayon ou le faisceau réfléchi correspondant au rayon ou au faisceau lumineux incident sur un miroir plan
- Utiliser les lois de la réfraction pour tracer le rayon (ou le faisceau) réfracté correspondant à un rayon (ou à un faisceau) lumineux incident sur un *dioptre plan*

1-<u>Pourquoi un objet est-il visible ?</u>

L'optique constitue un domaine de la physique consacré à la lumière c'est-à-dire au rayonnement électromagnétique détectable par l'œil.

Il convient de comprendre d'abord ce que signifie « voir un objet ».

Dans l'Antiquité c'est l'œil qui projette un « feu subtil » vers l'objet. Démocrite propose une interprétation de la vision plus proche de la réalité : c'est l'objet qui envoie « quelque chose » de son enveloppe qui se propage vers l'œil qui est un récepteur. Cependant cette conception n'explique pas pourquoi l'objet est visible le jour et pas la nuit !

Une condition de visibilité d'un objet est l'existence d'une source de lumière et d'un objet diffusant la lumière vers l'œil.

L'objet lui-même peut être la source de lumière ; c'est le cas du Soleil ou d'une lampe de poche visible en l'absence de toute autre source. On parle alors de source primaire.

L'objet est le plus souvent éclairé par une autre source. Cet objet réfléchit la lumière dans toutes les directions et en particulier vers l'œil, on dit qu'il diffuse la lumière. L'objet est alors une source secondaire. C'est le cas de la Lune ou des nuages dans le ciel qui diffusent partout ; dans ce dernier as la source est très étendue.

Un objet transparent est invisible car il ne diffuse pas la lumière, il la transmet intégralement.

Un objet noir éclairé absorbe complètement la lumière, il n'est visible que par contraste avec les objets environnants diffusants. De même que les ondes radio ne sont révélées que par les antennes qui les détectent, la lumière n'est pas visible, c'est l'objet diffusant cette lumière qui révèle son existence.

Le faisceau de lumière d'un projecteur n'est perceptible qu'en présence de petites particules de poussière qui diffusent la lumière vers l'œil de l'observateur. (fig 1 ci-contre).

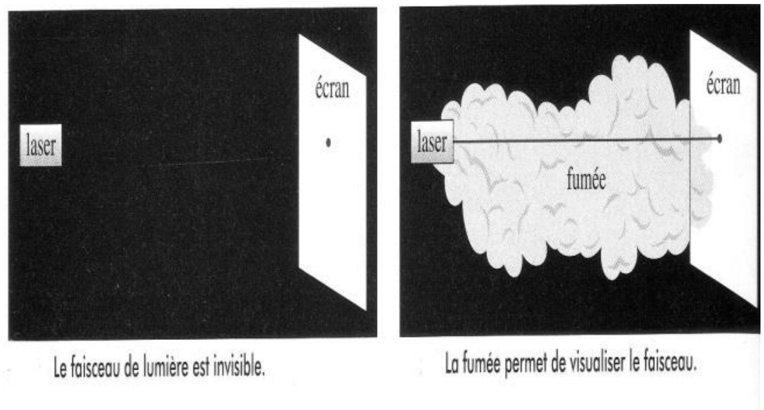


Fig 1

2-LE MODÈLE DU RAYON LUMINEUX :
Nous pouvons assimiler le faisceau d'un laser à un rayon lumineux.

Considérons un faisceau lumineux issu d'une source ponctuelle. Limitons l'étendue du faisceau à l'aide d'un diaphragme. Si l'ouverture du diaphragme est très petite, nous isolons un pinceau lumineux très fin ; il peut être assimilé à une courbe décrite par la lumière : le rayon lumineux. Le transport de l'énergie lumineuse est matérialisé par sa trace.

La notion de rayon lumineux est cependant abstraite. Expérimentalement, il est impossible d'obtenir un pinceau de lumière infiniment fin. Pour un diaphragme de quelques longueurs d'onde de diamètre, le faisceau s'élargit derrière le diaphragme : c'est le phénomène de diffraction. (fig2). Ce phénomène est considéré négligeable dans l'étude qui va suivre.

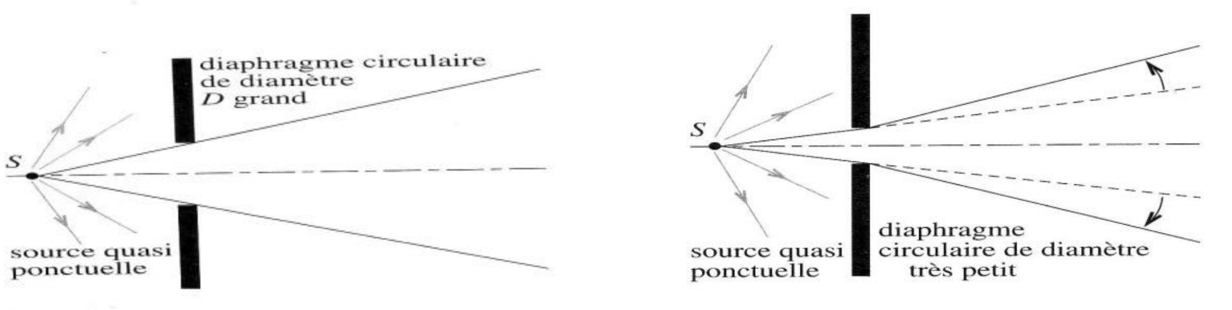


Fig 2

<u>3- PROPAGATION RECTILIGNE DANS UN MILIEU HOMOGÈNE :</u>
Réalisons l'expérience schématisée ci-dessous. Eclairons une forme opaque et observons la forme projetée sur l'écran. L'ombre portée sur l'écran est homothétique de l'objet dans un rapport égal au rapport des distances de la source lumineuse à l'écran et de la source lumineuse à l'objet. Cette observation est en accord avec le principe de propagation rectiligne de la lumière (fig3): **(Les bords**

de l’ombre ne sont pas parfaitement nets à cause de la diffraction sur les bords de l’obstacle, mais ce phénomène peut être négligé).

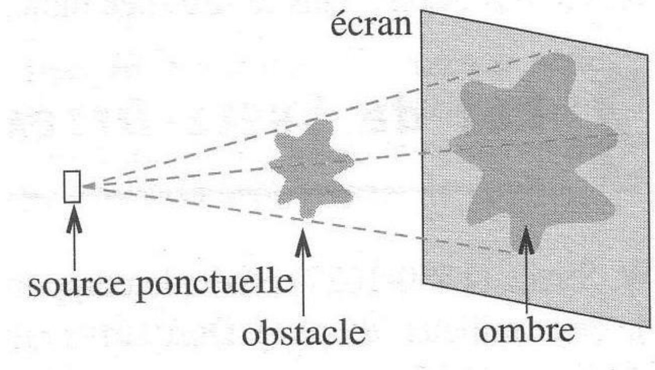


Fig 3

Dans un milieu homogène, la lumière se propage en ligne droite. Les rayons lumineux sont des droites.
Dans le cas d’une source étendue, le passage de la zone d’ombre à la zone éclairée n’est pas immédiat et correspond à une zone de pénombre. Un exemple de ce phénomène correspond aux éclipses observées lorsque le Soleil est occulté par la Lune.

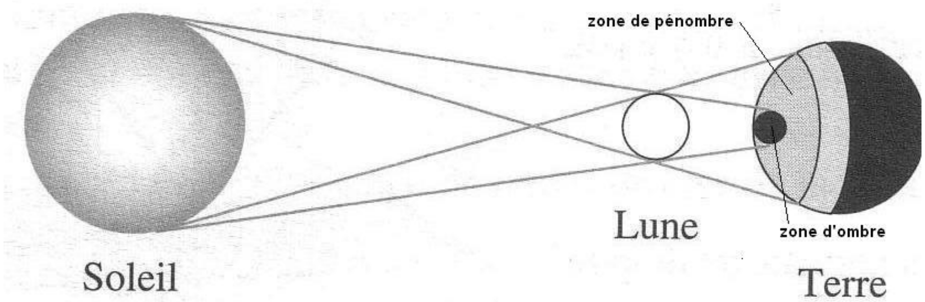


Fig 4

Ce principe explique pourquoi un objet placé derrière un objet opaque n’est pas visible car la lumière diffusée par l’objet ne contourne pas l’obstacle et ne parvient pas à atteindre l’œil.

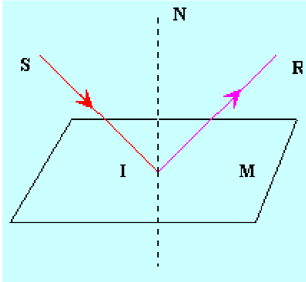
<u>4- Phénomène de réflexion</u>

<u>Définitions *:*</u>

Un miroir plan *est une surface plane, polie et réfléchissante.*

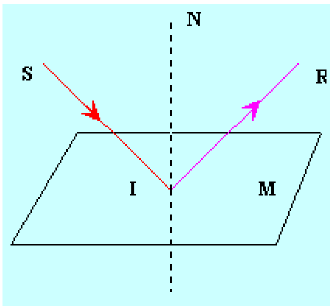
<u>Exemples</u> : eau au repos, verre (glace), lame métallique.

La réflexion *est le renvoi de la lumière par un miroir plan dans une direction pillerie.*



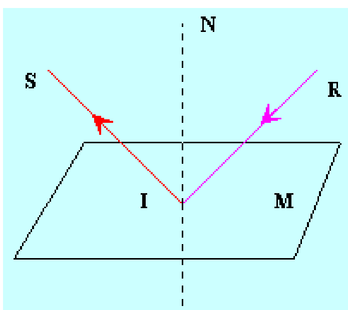
Soit SI un rayon arrivant sur un miroir M. Le point I où le rayon rencontre le miroir est le point d'incidence. Menons au point I la normale IN au miroir. Le plan SIN est le plan d'incidence. Au rayon incident SI correspond un rayon réfléchi IR. L'angle $\alpha_{SIN} = i$ est **l'angle d'incidence**; l'angle $\alpha_{NIR} = r$ est **l'angle de réflexion.**

a- Lois de la réflexion :lois de Descartes



1-Le rayon réfléchi est dans le plan d'incidence
2-L'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence
$\alpha_{SIN} = \alpha_{RIN}$
Ces deux lois sont équivalentes à:
Le rayon réfléchi et le rayon incident, orientés dans le sens de la lumière, sont symétriques par rapport au plan tangent au miroir au point d'incidence.
(valable quelle que soit la surface réfléchissante)

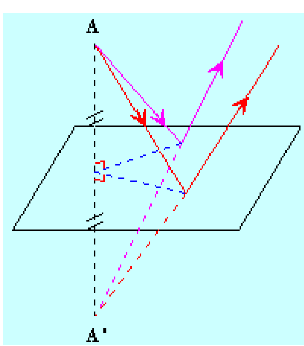
b- Principe du retour inverse



Si RI devient le rayon incident alors le rayon réfléchi est IS. La lumière suit le même trajet que précédemment mais en sens inverse. Le principe du retour inverse de la lumière s'énonce de la façon suivante :

Le trajet suivi par la lumière est indépendant du sens de propagation

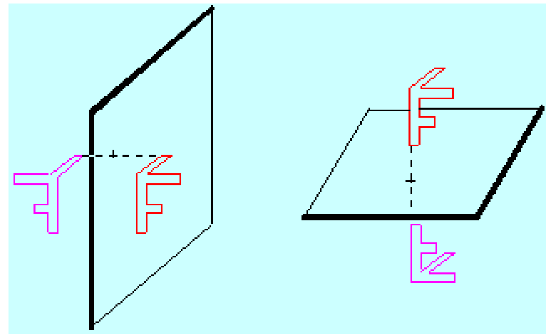
c-Image d'un point A à travers un miroir plan



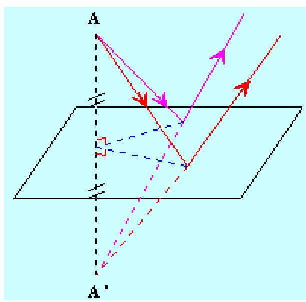
A tout rayon issu d'un point A, appelé point objet correspond un rayon réfléchi symétrique par rapport au miroir. Tous les rayons issus de A vont donc passer après réflexion, par le point A' symétrique de A par rapport au miroir.
Le point A' est l'image du point A.
Au point objet A correspond un seul point image A'
Pour cette raison le miroir est un dispositif dit **stigmatique**
Quand un miroir plan tourne d'un **angle α** autour d'un axe situe dans son plan l'image d'un point objet fixe tourne d'un **angle 2α**, autour du même axe et dans le même sens

d- L'image d'un objet étendu :

L'image d'un objet est l'ensemble des points images correspondant aux différents points de l'objet. **L'image est donc symétrique de l'objet par rapport au miroir** et par suite ne lui est donc pas superposable en général. Un trièdre objet à droite donne un trièdre image à gauche. L'image d'une main droite est une main gauche. Un texte, réfléchi par un miroir, est inversé



e-Objet réel. Objet virtuel. Image réelle. Image virtuelle.

	Le point objet A situé en avant de la surface réfléchissante est un objet réel. Le point image A' situé en arrière de la surface réfléchissante est une image virtuelle. La sensation éprouvée au niveau de l'oeil dépend uniquement de la direction des rayons qui parviennent à l'oeil: tout se passe, au point de vue de cette sensation, comme si le miroir n'existait pas, et comme s'il existait en A' un point lumineux. Mais il est impossible de recevoir l'image A' sur un écran.

5- Phénomène de réfraction

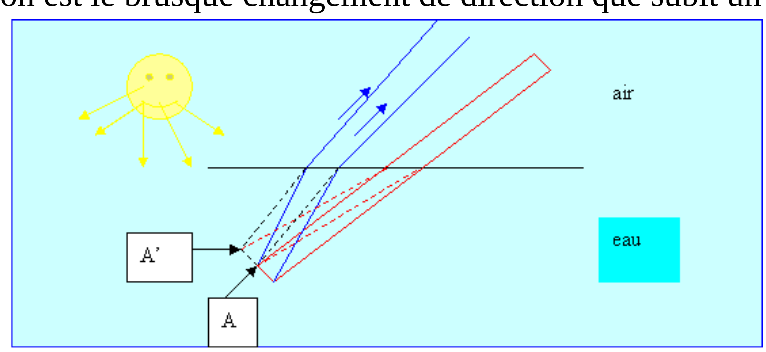
a-Observons :

Un crayon partiellement immergé dans l'eau semble se briser à son contact !

La lumière provenant de la partie immergée traverse l'eau puis l'air, elle change de direction en changeant de milieu, on dit que la lumière se réfracte.

Pour l'œil, l'extrémité A du crayon est en A' (image de A) En effet les rayons(en bleu) provenant de A et se dirigeant vers l'œil changent de direction .Pour l'œil, la direction de l'objet est celle des rayons lumineux qu'il capte. L'extrémité du crayon semble placée au-dessus de sa position réelle. (voir fig ci-contre)

Définition : la réfraction est le brusque changement de direction que subit un rayon lumineux à la traverse d'un dioptre



Dioptre plan Air-eau

b-**Définition de l’indice d’un milieu:**

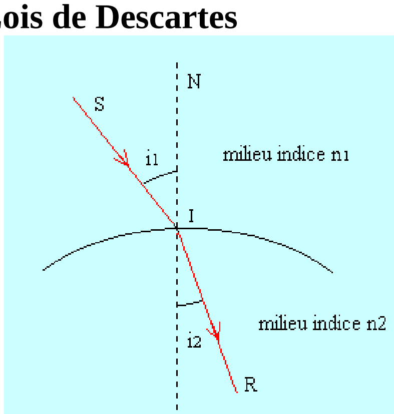
On appelle *dioptre* toute surface de séparation entre 2 milieux transparents
Un milieu transparent est caractérisé par son *indice de réfraction n ;* c’est le rapport de la célérité de la lumière dans le vide sur la célérité de la lumière dans le milieu.
n = c(vide) /c(milieu). $(C_{(vide)} = 3.10^8 m.s^{-1})$

Le rapport toujours supérieur à 1 est sans dimension !
Donner l’indice d’un milieu revient à donner la célérité (vitesse) de la radiation lumineuse dans ce milieu.
L’indice de l’eau est de 1,41 pour la lumière rouge. Cela signifie que la célérité de la lumière rouge dans l’eau est égale à celle dans le vide divisée par 1,41. Donc en changeant de milieu, la célérité de propagation de la lumière est modifiée.
Sachant que la célérité de la lumière est maximum dans le vide, l’indice d’un milieu matériel transparent est donc toujours supérieur à 1.
Un milieu (1) est plus réfringent qu’un milieu (2) si $n_1 > n_2$
Remarque : suivant la couleur de la radiation (et donc de sa fréquence), l’indice de l’eau n’est pas exactement le même, on dit que l’eau est un milieu dispersif pour la lumière. C’est pour cela que la lumière blanche en traversant l’eau ou le verre se décompose en une infinité de radiations colorées

c-**Lois de la réfraction**

<table>
<tr>
<td>

Lois de Descartes



</td>
<td>

1-**Le rayon réfracté IR appartient au plan d'incidence**
2-**Pour chaque rayon monochromatique, il existe un rapport constant positif, entre les sinus des angles d'incidence et de réfraction:**

$$\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = n_{2,1} = \frac{n_2}{n_1}$$

Le rapport constant $n_{2,1}$ est l'indice de réfraction du milieu 2 par rapport au milieu 1 pour la radiation monochromatique considérée.

</td>
</tr>
</table>

Considérons un rayon incident SI situé dans le plan d'incidence SIN. Soit i_1 l'angle d'incidence et i_2

L’angle de réfraction. Le rayon réfracté SR obéit alors aux deux lois :

Lorsque les angles sont petits, le rapport des sinus est voisin de celui des angles (exprimés en radians). La relation précédente s'écrit alors : **$i_1 = n_{1,2} \cdot i_2$**

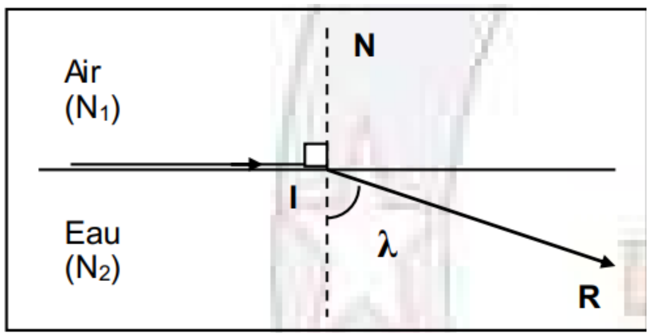
Lorsqu'un rayon de lumière incident est incliné par rapport à la normale, sa direction est modifiée au passage du changement de milieu. Le rayon réfracté correspondant :

- se rapproche de la normale IN si l'indice du milieu de réfraction est plus élevé que celui du milieu incident.

-S'éloigne de la normale IN si l'indice de réfraction du milieu réfracté est plus faible.

- Réfraction limite : La réfraction limite est observée lorsque la lumière transite d'un milieu moins réfringent a un milieu plus réfringent sous une incidence i=90. (Incidence rasante)

l'angle de réfraction prend sa plus grande valeur et est appelé angle de réfraction limite note λ

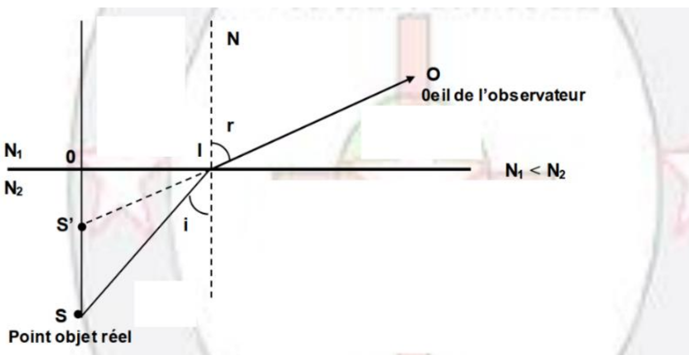


$$\begin{cases}\sin\lambda = \dfrac{n_1}{n_2} \end{cases}, n_1 < n_2$$

- **<u>Réflexion totale</u>** :

La réflexion totale est observée lorsque la lumière transite d'un milieu plus réfringent à un milieu moins réfringent sous une incidence $i > \lambda$

d. **<u>Image d'un objet à travers un dioptre plan</u>**



Rapprochement apparent

$$SS' = OS\left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right)$$

6. **<u>Lame à faces parallèles</u>**

Définition : une lame à face parallèle est un milieu transparent limite par deux surfaces planes et parallèles

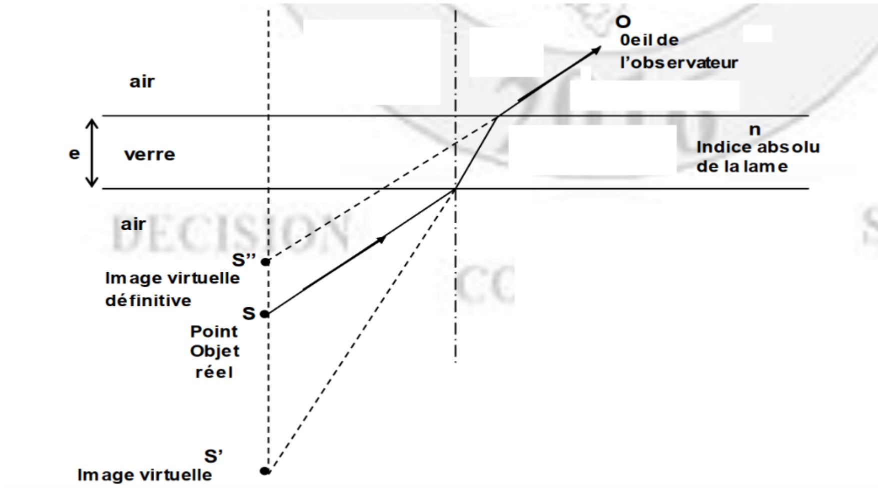
Exemple : une lame de verre dans l'air

Image d'un objet à travers une lame à faces parallèles :

Une lame à faces parallèles donne d'un objet réelle S une image définitive S'' virtuelle rapprochée ou éloignée.

Rapprochement apparent :

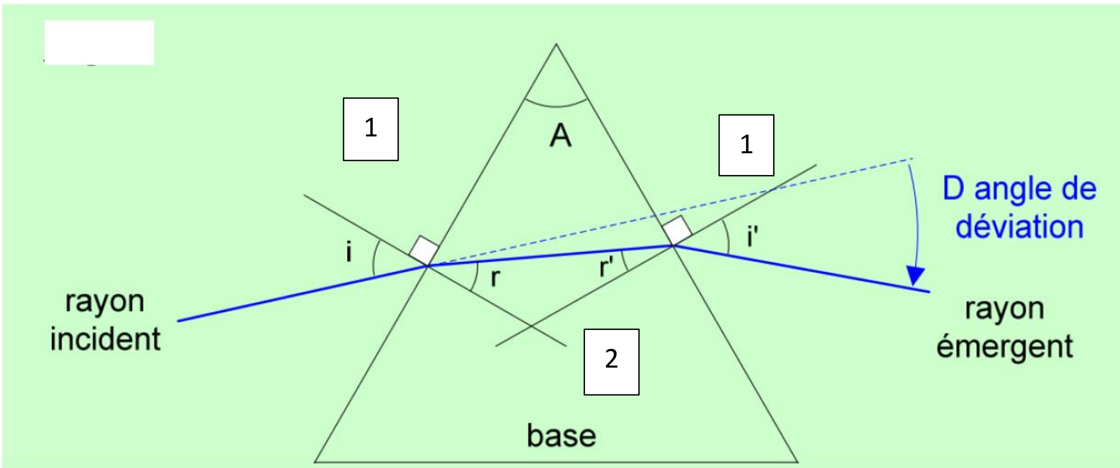
$$SS''=e\left(1-\frac{1}{n}\right)$$



7. Prisme

Définition : un prisme est un instrument d'optique en verre transparent limité par deux surfaces planes non parallèles.

La marche d'un rayon lumineux :



Formules de prisme :

Cas général :

$$n_1 \sin i = n_2 \sin r \quad ; \quad n_1 \sin i' = n_2 \sin r' \quad ; \quad A = r + r' \quad ; \quad D = i + i' - A$$

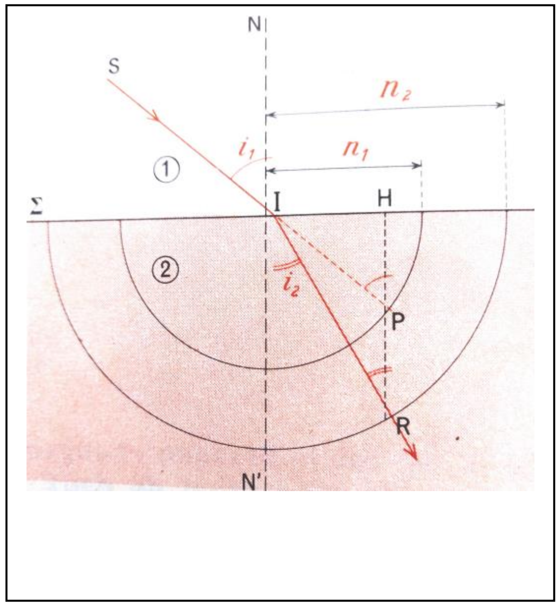
Cas de déviation minimal :

$$i = i' \Rightarrow D_m = 2i - A \; ; \quad r = r' \Rightarrow A = 2r \quad ; \quad n_2 = \frac{\sin\left(\frac{D_m + A}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}$$

Séries d'exercices :

Exercice 1 : ***Construction géométrique du rayon réfracté***

1°) Considérer le passage de la lumière d'un milieu ***1*** dans un milieu ***2*** plus réfringent ($n_2 > n_1$).



De I comme centre (voir figure ci-contre), tracer deux demi circonférences de rayons n_1 et n_2 ; prolonger le rayon incident SI jusqu'à son intersection P avec la première circonférence ; abaisser la perpendiculaire PH à la surface réfringente et la prolonger jusqu'à son intersection R avec la seconde circonférence ; établir que IR est le rayon réfracté correspondant au rayon incident SI en montrant que les angles i_1 et i_2 satisfont à la formule de Descartes :

$n_1 sini_1 = n_2 sini_2$.

2°) Que donne cette construction dans le cas de l'incidence rasante ($i_1 = 90°$) ?

3°) Montrer que cette même construction permet aussi de retrouver les résultats de la discussion de la formule de Descartes dans le cas du passage de la lumière du milieu ***2*** dans le milieu ***1***.

Exercice 2

1) Qu'est-ce que la réflexion ?
2) Qu'est-ce qu'une surface réfléchissante ? donner deux exemples de surfaces réfléchissantes.
3) Qu'est-ce qu'un dioptre ? donner deux exemples de dioptres
4) Qu'est-ce qu'un dioptre plan ? donner deux exemples de dioptres plans

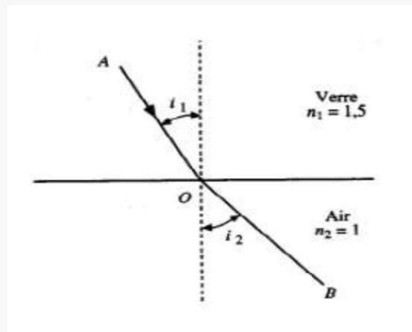
Exercice 3

Un personnage de 1,8m se regarde dans un miroir vertical situe à 2m. la distance Yeux-sol est de 1,6m

1) Faire un schéma des rayons issus de l'œil allant à ses pieds au sommet de sa tête.
2) En déduire la taille minimale du miroir permettant à l'homme de se voir intégralement
3) A quelle distance du sol le miroir doit—il être pour que la personne se voit entièrement
4) Si on s'éloigne que se passe-t-il

Exercice 4

1) Un rayon lumineux passe du verre dans l'air (figure ci-contre) Comment appelle-t-on ?
   a) Le rayon AO ;
   b) Le rayon OB ;
   c) L'angle i_1 ;
   d) L'angle i_2



2) L'indice de réfraction du verre est $n_1 = 1.5$ et celui de l'air est $n_2 = 1$.
   a) Quelle est la valeur maximale que peut prendre i_2 ?
   b)
   c) Dans ce cas, calculez la valeur correspondante de i_1 nous l'appellerons & λ
   d) Qu'observe-t-on si $i_1 > \lambda$?
   e) Citez au moins une application du phénomène observé en c).

Exercice 5

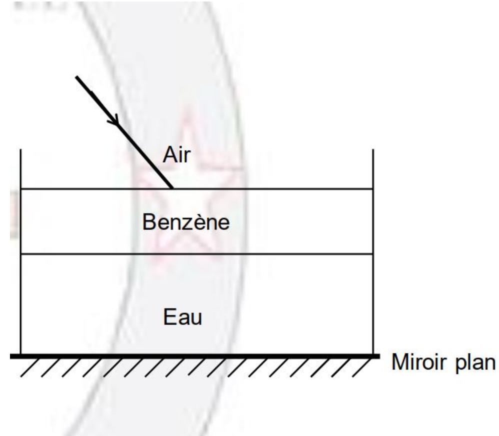
Un récipient contenant de l'eau et du benzène repose sur un miroir plan. Un rayon lumineux cheminant dans l'air tombe sur le benzène sous une incidence i=70.

On considère les deux situations suivantes :

<u>**Première situation**</u> :

On suppose que la lumière qui arrive au fond du récipient est totalement absorbée.

Calculer les angles correspondants et tracer d'une façon exacte la marche des différents rayons lumineux issus du rayon incident



Deuxième situation :

On suppose maintenant que la lumière qui arrive au fond du récipient est totalement réfléchie.

Calculer la déviation D entre le rayon incident et le rayon émergent.

Benzène : n_b=1,5

Eau : n_e=1,33

Chapitre 13 : chimie II

D/ GENERALISATION DE L'OXYDOREDUCTION

● ***Objectifs pédagogiques***

A la fin de ce chapitre l'élève doit être capable de :

- *Définir le nombre d'oxydation.*
- *Utiliser les nombres d'oxydation pour identifier une réaction d'oxydoréduction.*
- *Définir une réaction d'oxydoréduction par voie sèche.*

I- Exemple de réactions par voie sèche

1-Réaction du dichlore sur le sodium

$$Cl_2 + 2e^- \longrightarrow 2Cl^-$$

$$2Na \quad \longrightarrow 2Na^+ + 2e^-$$

Bilan : $$\boldsymbol{2Na \quad + Cl_2 \longrightarrow 2(Na^+ + Cl^-)}$$

Cette réaction s'accompagne d'un échange d'électrons entre le dichlore (Cl_2) et le sodium (Na). Il s'agit bien d'une réaction d'oxydoréduction par voie sèche. Elle est naturelle, spontanée et exothermique.

2-Réaction du dioxygène sur le magnésium

$$2(Mg \longrightarrow Mg^{2+} + 2e^-)$$

$$O_2 + 4e^- \longrightarrow 2O^{2-}$$

Bilan : $\boldsymbol{2Mg \ + O_2 \longrightarrow 2MgO}$

C'est une réaction qui libère de l'énergie sous forme thermique et lumineuse. Elle est aussi naturelle et spontanée.

3- Réaction d'oxydoréduction par voie sèche de $\boldsymbol{O_2}$ sur le carbone C

$$O_2 + 4e^- \longrightarrow 2O^{2-}$$
$$C \longrightarrow C^{4+} + 4e^-$$

Bilan : $\mathbf{C} + \boldsymbol{O_2} \longrightarrow \boldsymbol{CO_2}$

Elle est naturelle, exothermique mais pas spontanée.

II-Les nombres d'oxydation

1- La notion de nombre d'oxydation

Le nombre d'oxydation est un nombre, écrit en chiffre romain, qui caractérise le degré d'oxydation d'un élément dans une espèce chimique. Il est noté **n.o.**

*** Le nombre d'oxydation d'un élément à l'état atomique est nul.**

Par exemple, dans l'aluminium métal : $\mathbf{n.o.(Al) = 0}$.

*** Le nombre d'oxydation d'un élément dans un ion monoatomique est égal à la charge de l'ion exprimée en charge élémentaire e.**

Dans Al^{3+} : $\mathbf{n.o.(Al) = +III}$ et dans Cl^- : $\mathbf{n.o.(Cl) = -I}$.

*** Le nombre d'oxydation d'un élément dans un corps simple est nul.**

Dans O_2 : $\mathbf{n.o.(O) = 0}$.

*** Dans une molécule, la somme des nombres d'oxydation de tous les éléments est nulle.**

- dans HCl, $\mathbf{n.o.(Cl) + n.o.(H) = 0}$
- dans H_2O, $\mathbf{n.o.(O) + 2 \cdot n.o.(H) = 0}$

*** Dans la plupart des composés :**

- le nombre d'oxydation de l'élément hydrogène vaut +I ;

- Le nombre d'oxydation de l'élément oxygène vaut –II.

Exemple **:** Trouver le nombre d'oxydation de l'élément azote dans l'acide nitrique HNO_3.

$\mathrm{n.o.(H) + n.o.(N) + 3n.o.(O) = 0 \Rightarrow n.o.(N) = -n.o.(H) - 3n.o.(O)}$

$$\mathrm{n.o.(N) = -(+I) - 3(-II)}$$

$\mathrm{n.o.(N) = +V}$

*** Dans un ion polyatomique, la somme des nombres d'oxydation de tous les éléments est égale à la charge de l'ion.**

Exemple **:** Trouver le nombre d'oxydation de l'élément soufre dans l'ion sulfate SO_4^{2-}.

$\mathrm{n.o.(S) + 4n.o.(O) = -II \Rightarrow n.o.(S) = -II - 4n.o.(O)}$

$$\text{n.o.}(S) = -II - 4(-II)$$
$$\text{n.o.}(S) = +VI$$

2- L'identification d'une réaction d'oxydoréduction

*** Lorsqu'un élément est oxydé, son nombre d'oxydation augmente.**
*** Lorsqu'un élément est réduit, son nombre d'oxydation diminue.**
*** Un oxydant est une espèce chimique qui contient un élément dont le nombre d'oxydation diminue au cours d'une réaction d'oxydoréduction.**
*** Un réducteur est une espèce chimique qui contient un élément dont le nombre d'oxydation augmente au cours d'une réaction d'oxydoréduction.**

Exemples :
Les réactions suivantes sont-elles des réactions d'oxydoréduction ?
$CuO + H_2 \rightarrow Cu + H_2O$ (1)
$NH_3 + HCl \rightarrow NH_4Cl$ (2)
Déterminons les n.o. des différents éléments intervenant dans les réactifs et les produits :

Oxydation
augmentation

$$\underset{+II\ -II}{CuO} + \underset{0}{H_2} \longrightarrow \underset{0}{Cu} + \underset{+I-II}{H_2O}$$

diminution
Réduction

Diminution du n.o. du cuivre et augmentation du n.o. de l'hydrogène. La réaction (1) est donc une réaction d'oxydoréduction.
- CuO est l'oxydant ;
- H_2 est le réducteur.

$$\underset{-III\ +I}{NH_3} + \underset{+I\ -I}{HCl} \longrightarrow \underset{-III\ +I\ -I}{NH_4Cl}$$

Les n.o. des différents éléments n'ont pas varié. Cette réaction (2) n'est pas une réaction d'oxydoréduction.

II- Applications industrielles de l'oxydoréduction par voie sèche

1- La sidérurgie

* La sidérurgie est la métallurgie du fer. Elle consiste à produire du fer et des alliages de fer (fontes et aciers) à partir d'un minerai qui contient principalement de **l'oxyde de fer III**, **Fe_2O_3,** qu'il faut réduire. Le réducteur utilisé est le **monoxyde de carboneCO**.

* Le minerai est introduit dans un haut fourneau avec du coke (carbone presque pur).

- Formation du monoxyde de carbone CO par oxydation du carbone.

Réduction

$$2C + O_2 \longrightarrow 2CO$$

Oxydation

- Réduction du fer III par le monoxyde de carbone CO.

oxydation

$$Fe_2O_3 + 3CO \longrightarrow 2Fe + 3CO_2$$

réduction

* *Remarque*
La température étant très élevée, le carbone s'allie au fer et on obtient de la fonte.

2- <u>L'aluminothermie</u>

*** L'aluminothermie est la réduction par l'aluminium des oxydes de métaux moins réducteurs que l'aluminium.**

* L'aluminium réduit par exemple l'oxyde de fer III :

oxydation

$$Fe_2O_3 + 2Al \longrightarrow 2Fe + Al_2O_3$$

réduction

Cette réaction étant très exothermique, le fer obtenu est à l'état liquide. On utilise cette réaction pour souder, par exemple, les rails de chemin de fer.

3- <u>La préparation de l'acide nitrique</u>

* L'acide nitrique est préparé par oxydation de l'ammoniac. La préparation comporte trois étapes :

- Oxydation catalytique de l'ammoniac en monoxyde d'azote en présence du platine (Pt) :

réduction

$$4NH_3 + 5O_2 \longrightarrow 2NO + 6H_2O$$

oxydation

- Oxydation du monoxyde d'azote en dioxyde d'azote :

Réduction

$$2NO + O_2 \longrightarrow 2NO_2$$

Oxydation

- Oxydation et hydratation du dioxyde d'azote :

Réduction

$$4NO_2 + O_2 + 2H_2O \longrightarrow 4HNO_3$$

Oxydation

* L'acide nitrique est un important produit industriel. Il sert à la préparation d'engrais et d'explosifs.

4- <u>La préparation de l'acide sulfurique</u>

L'acide sulfurique est obtenu industriellement à partir du soufre.

- Combustion du soufre dans l'air :

$$S + O_2 \rightarrow SO_2$$

- Oxydation catalytique du dioxyde de soufre avec le $\mathbf{V_2O_5}$ comme catalyseur :

$$SO_2 + O_2 \rightarrow 2SO_3$$

- Hydratation du trioxyde de soufre

$$SO_3 + H_2O \rightarrow H_2SO_3$$

La dissolution du trioxyde de soufre dans l'eau est très exothermique. Au lieu de le dissoudre dans l'eau, on le dissout dans une solution concentrée d'acide sulfurique. On obtient alors des solutions de trioxyde de soufre dans l'acide sulfurique appelées **oléums**.

Exercice 1

Les ions Fe^{2+} sont oxydés en ions Fe^{3+} par les ions MnO_4^- suivant l'équation-bilan suivante :

$MnO_4^- + 8H_3O^+ + 5Fe^{2+} \rightarrow Mn^{2+} + 5Fe^{3+} + 12\ H_2O$

1°) Montrer, en utilisant les nombres d'oxydation, que l'hydrogène et l'oxygène ne participent pas à l'oxydoréduction.

2°) Calculer les nombres d'oxydation du manganèse et du fer. Quel est l'élément oxydé ? l'élément réduit ?

3°) Montrer que l'équation-bilan traduit qu'il y a compensation entre la variation du nombre d'oxydation de l'élément oxydé et la variation du nombre d'oxydation de l'élément réduit.

Réponse Exercice 1

1° *Montrons que l'hydrogène et l'oxygène ne participent pas à l'oxydoréduction*

* Hydrogène : n.o.(H)=+I dans H_3O^+ ; n.o.(H)=+I dans H_2O Il n'y a pas de variation

* Oxygène : n.o.(O)=-II dans H_3O^+ et MnO_4^-; n.o.(O)=-II dans H_2O Il n'y a pas de variation

2° **Nombres d'oxydation du manganèse et du fer*

- Manganèse

MnO_4^- : n.o.(Mn) +4n.o.(O)= -I donc n.o.(Mn)=+VII dans MnO_4^-

Mn^{2+}: n.o.(Mn) = +II dans Mn^{2+}

Le n.o. de Mn a diminué au cours de la transformation donc Mn est l'élément réduit.

- Fer Fe^{2+}: n.o.(Fe) = +II dans Fe^{2+} ; Fe^{3+}: n.o.(Fe) = +III dans Fe^{3+}

Le n.o. de Fe a augmenté au cours de la transformation donc Fe est l'élément oxydé.

3° *Montrons qu'il y a compensation entre la variation du nombre d'oxydation de l'élément oxydé et la variation du nombre d'oxydation de l'élément réduit*

Δn.o.(Mn) = +II –(+VII) = -V et Δn.o.(Fe) = +III –(+II) = +I

Il y a compensation puisque 5 moles de Fe^{2+} ont réagi avec 1 mole de MnO_4^-

Exercice 2

Un flacon de dioxyde de soufre SO_2 est retourné sur un flacon de sulfure d'hydrogène H_2S. Les deux gaz sont en contact ; ils réagissent : du soufre se dépose sur les parois et il se forme de l'eau. 1° Ecrire l'équation-bilan de la réaction.

2° Calculer les nombres d'oxydation des éléments dans les divers corps purs.

3° Montrer sous forme schématique qu'il s'agit d'une oxydoréduction.

Réponse Exercice 2

1° *Equation-bilan de la réaction*

$SO_2 + 2H_2S \longrightarrow 3S + 2H_2O$

2° *Nombre d'oxydation des éléments dans les divers corps purs*

* Hydrogène : n.o.(H)=+I dans H_2S et dans H_2O

* Oxygène : n.o.(O)=-II dans SO_2 et dans H_2O

* Soufre : SO_2 : n.o.(S) +2n.o.(O)= 0 donc n.o.(S)=+IV dans SO_2

H_2S : 2n.o.(H) +n.o.(S)= 0 donc n.o.(S)=-II dans H_2S

S : n.o.(S)= 0 dans S

3° *Montrons qu'il s'agit d'une oxydoréduction*

Δn.o. = 0-(+IV) = -IV

réduction

$\overset{+IV}{S}O_2 + 2H_2\overset{-II}{S} \longrightarrow 3\overset{0}{S} + 2H_2O$

oxydation

Exercice 3

On dissout une masse m_O = 3,2g de sulfate de cuivre anhydre dans un volume V=100 cm^3 d'eau pure. On répartie équitablement la solution dans deux tubes A et B.

a.) Quelle est la concentration molaire de la solution préparée ?

b.) Dans le tube A, on verse de la poudre de zinc et dans le tube B, une solution d'hydroxyde de sodium. Ecrire les équations des réactions qui se produisent. Ces réactions sont-elles des réactions d'oxydoréductions ? Justifier.

2°) La masse de poudre de zinc versée est m = 0,65 g. Recenser les ions présents dans la solution A puis calculer le nombre de moles de chaque ion. On donne en g.mol-1 : M_O =16 ; M_S = 32 ; M_{Cu} = 64 ; M_{Zn} = 65.

Réponse Exercice 3

1°a. *Concentration de la solution :* $C = \frac{n_{CuSO_4}}{V} = \frac{m_0}{VM_{CuSO_4}}$ AN: $\mathbf{C = 0{,}2mol.l^{-1}}$

b. *Equations*

Tube A : $Cu^{2+} + Zn \longrightarrow Cu + Zn^{2+}$ (1)

Tube B : $Cu^{2+} + 2OH^- \longrightarrow Cu(OH)_2$ (2)

Justification :

Tube A : n.o.(Cu) dans Cu^{2+} est +II et n.o.(Cu) dans Cu est 0

Le nombre d'oxydation varie donc c'est une réaction d'oxydoréduction

Tube B : n.o.(Cu) dans Cu^{2+} est +II et n.o.(Cu) dans $Cu(OH)_2$ est +II

Le nombre d'oxydation ne varie pas donc ce n'est pas une réaction d'oxydoréduction

2° *Nombre de moles de chaque ion.*

$n_{0\,Zn} = \frac{m_{Zn}}{M_{Zn}} \Rightarrow \mathbf{n_{0\,Zn} = 0{,}01mol}$; $n_{0\,Cu^{2+}} = CV \Rightarrow \mathbf{n_{0\,Cu^{2+}} = 0{,}01mol}$

Les deux réactifs sont dans les proportions stœchiométriques

Les ions présents : Zn^{2+} ; SO_4^{2-}

$n_{SO_4^{2-}} = CV \Rightarrow \mathbf{n_{SO_4^{2-}} = 0{,}01mol}$; $n_{Zn^{2+}} = \frac{m_{Zn}}{M_{Zn}} \Rightarrow \mathbf{n_{Zn^{2+}} = 0{,}01mol}$

E/ ELECTROLYSE EN SOLUTION AQUEUSE

Objectifs :

A la fin de ce chapitre je dois être capable de :

- Décrire quelques électrolyses simples.

- Prévoir les réactions aux électrodes avec les potentiels d'oxydoréduction.

I- Généralités

*** L'électrolyse est le phénomène de décomposition accompagnant le passage du courant électrique dans un liquide.**

***** Une électrolyse ne peut se produire que si on applique aux bornes de l'électrolyseur une **tension supérieure** à sa **force contre-électromotrice**.

* En règle générale, au cours d'une électrolyse se produisent :

- une oxydation à l'**anode** ;

- une réduction à la **cathode**.

* Les espèces pouvant participer aux réactions au cours d'une électrolyse sont :

- les ions et les molécules d'eau de l'électrolyte (la solution à électrolyser) ;
- le métal de l'anode.

Remarque :

- A l'**anode** c'est **le réducteur** le **plus fort qui s'oxyde** ;
- A la **cathode** c'est **l'oxydant** le **plus fort qui se réduit**.

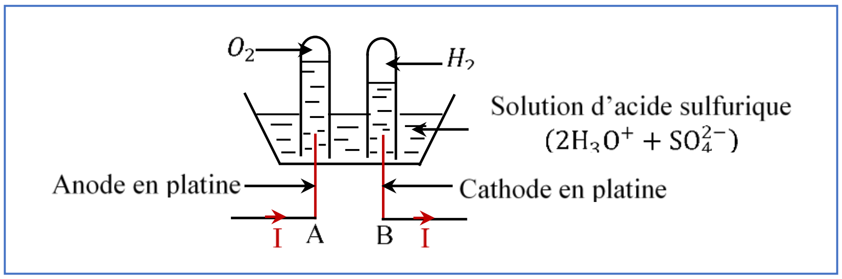
II- ETUDE DE QUELQUES ELECTROLYSES SIMPLES

1- Electrolyse de l'eau acidifiée à l'acide sulfurique

a) Etude expérimentale

* Observations

- Anode : dégagement de dioxygène ;
- Cathode : dégagement de dihydrogène.



b) Etude théorique de l'électrolyse

* Espèces chimiques présentes en solution :

- H_2O du couple O_2/H_2O : $E^\circ_{O_2/H_2O} = 1{,}23V$;
- H_3O^+ du couple H_3O^+/H_2 : $E^\circ_{H_3O^+/H_2} = 0{,}00V$;
- SO_4^{2-} du couple $S_2O_8^{2-}/SO_4^{2-}$: $E^\circ_{S_2O_8^{2-}/SO_4^{2-}} = 2{,}01V$.

* Réactions possibles aux électrodes

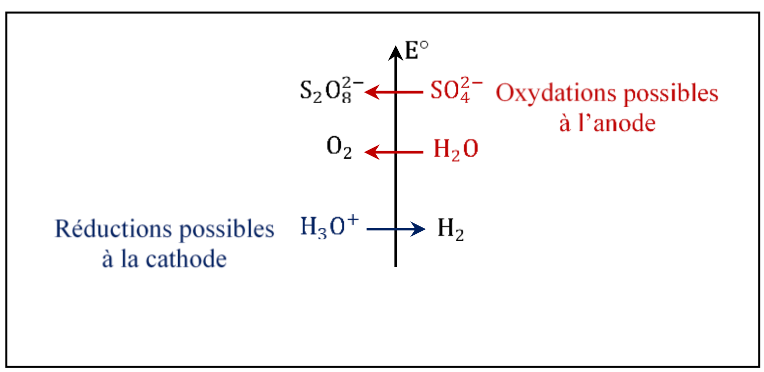
- Oxydations possibles à l'anode :

$$2SO_4^{2-} \rightarrow S_2O_8^{2-} + 2e^-$$

$$3H_2O \rightarrow \frac{1}{2}O_2 + 2H_3O^+ + 2e^-$$

- Réductions possibles à la cathode :

$$2H_3O^+ + 2e^- \rightarrow H_2 + 2H_2O$$



* Réactions attendues

- A l'anode : $3H_2O \rightarrow \frac{1}{2}O_2 + 2H_3O^+ + 2e^-$
- A la cathode : $2H_3O^+ + 2e^- \rightarrow H_2 + 2H_2O$

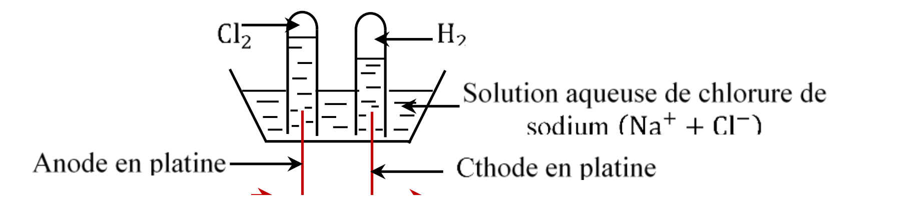
- Bilan de l'électrolyse : $H_2O \rightarrow \frac{1}{2}O_2 + H_2$

2- Electrolyse d'une solution aqueuse de chlorure de sodium

a) Etude expérimentale

* Observations

- Anode : dégagement de dichlore ;
- Cathode : dégagement de dihydrogène.



b) Etude théorique de l'électrolyse

* Espèces chimiques présentes en solution :

- H_2O du couple H_2O/H_2 : $E^\circ_{H_2O/H_2} = -0{,}42V$;
- H_2O du couple O_2/H_2O : $E^\circ_{O_2/H_2O} = 0{,}81V$;
- Cl^- du couple Cl_2/Cl^- : $E^\circ_{Cl_2/Cl^-} = 1{,}36V$;
- Na^+ du couple Na^+/Na : $E^\circ_{Na^+/Na} = -2{,}71V$.

* Réactions possibles aux électrodes :

- Oxydations possibles à l'anode :

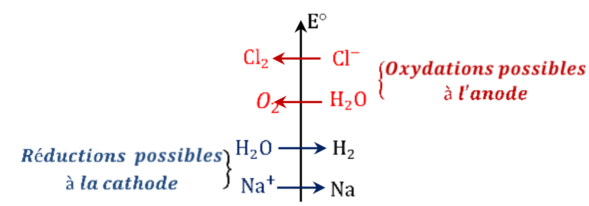
$$3H_2O \rightarrow \frac{1}{2}O_2 + 2H_3O^+ + 2e^-$$

$$2Cl^- \rightarrow Cl_2 + 2e^-$$

- Réductions possibles à la cathode :

$$2H_2O + 2e^- \rightarrow H_2 + 2OH^-$$

$$Na^+ + e^- \rightarrow Na$$



* Réactions attendues

- A l'anode : $3H_2O \rightarrow \frac{1}{2}O_2 + 2H_3O^+ + 2e^-$ (l'expérience ne le confirme pas)
- A la cathode : $2H_2O + 2e^- \rightarrow H_2 + 2OH^-$ (l'expérience le confirme)

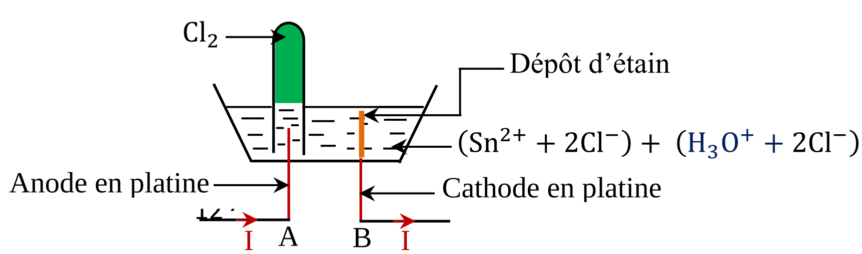
A l'anode l'oxydation des ions Cl^- est plus rapide et s'impose.

* Réactions produites

- A la cathode : $2H_2O + 2e^- \rightarrow H_2 + 2OH^-$
- A anode: $2Cl^- \rightarrow Cl_2 + 2e^-$
- Bilan de l'électrolyse : $2H_2O + 2Cl^- \rightarrow H_2 + Cl_2 + 2OH^-$

II- Electrolyse d'une solution aqueuse de chlorure d'étain II acidifiée par l'acide chlorhydrique.

1- Etude expérimentale



- Anode : dégagement de dichlore Cl_2 selon la demi-équation électronique :

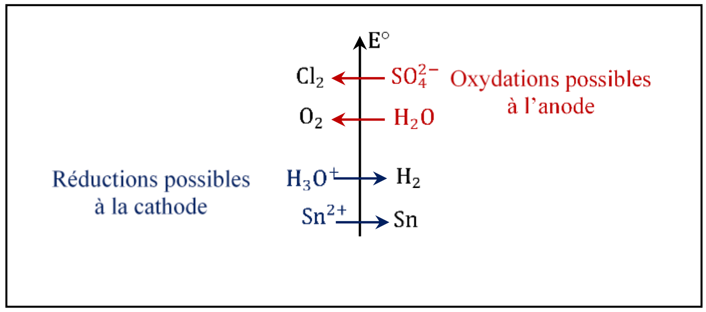
$$2Cl^- \rightarrow Cl_2 + 2e^-$$

- Cathode : dépôt d'étain métallique selon la demi-équation électronique :

$$Sn^{2+} + 2e^- \rightarrow Sn$$

- Bilan de l'électrolyse : $\mathbf{Sn^{2+} + 2Cl^- \rightarrow Sn + Cl_2}$.

2- <u>Prévision des réactions aux électrodes avec les potentiels d'oxydoréduction</u>



* <u>Espèces chimiques en solution</u> :

- Sn^{2+} du couple Sn^{2+}/Sn : $E^\circ_{Sn^{2+}/Sn} = -0{,}14V$;
- Cl^- du couple Cl_2/Cl^- : $E^\circ_{Cl_2/Cl^-} = 1{,}36V$;
- H_2O du couple O_2/H_2O : $E^\circ_{O_2/H_2O} = 1{,}23V$;
- H_3O^+ du couple H_3O^+/H_2 : $E^\circ_{H_3O^+/H_2} = 0{,}00V$.

* <u>Réactions possibles aux électrodes</u> :

- Oxydations possibles à l'anode :

$2Cl^- \rightarrow Cl_2 + 2e^-$

$3H_2O \rightarrow \frac{1}{2}O_2 + 2H_3O^+ + 2e^-$

- Réductions possibles à la cathode :

$2H_3O^+ + 2e^- \rightarrow H_2 + 2H_2O$

$Sn^{2+} + 2e^- \rightarrow Sn$

* <u>Réactions attendues</u>

- A l'anode : $3H_2O \rightarrow \frac{1}{2}O_2 + 2H_3O^+ + 2e^-$
- A la cathode : $2H_3O^+ + 2e^- \rightarrow H_2 + 2H_2O$
- Bilan de l'électrolyse : $H_2O \rightarrow \frac{1}{2}O_2 + H_2$

On devrait observer un dégagement de dioxygène à l'anode et un dégagement de dihydrogène à la cathode.

***** <u>Confrontation avec l'expérience</u>

Les réactions observées au cours de l'expérience sont en contradiction avec celle prévue par la théorie. En fait les réactions qui se produisent au cours de l'électrolyse (expérience) sont plus rapides, alors que celles prévues sont lentes.

Cette électrolyse est **complexe**. Si on augmente la tension entre les électrodes, il se dégage un mélange de dioxygène et de dichlore à l'anode et un dégagement de dihydrogène à la cathode en plus du dépôt d'étain : C'est le phénomène de surtension.

On précise que la tension minimale pour que l'électrolyse ait lieu se calcule comme suit :

$$\boldsymbol{U_{min} = E^0_{(couple\ \text{à}\ l'anode)} - E^0_{(couple\ \text{à}\ la\ cathode)}}$$

Exercice 1

On effectue l'électrolyse d'une solution de nitrate d'argent $AgNO_3$, acidifié avec l'acide nitrique HNO_3. Les électrodes sont inattaquables. On donne $E°(H_3O^+/H_2) = 0{,}00V$;

$E° (NO_3^-/NO) = 0{,}96$ V ; $E°(Ag^+/Ag) = 0{,}80$ V ; $E°(O2/H_2O) = 1{,}23V$.

1° Ecrire les équations-bilan des réactions possibles aux électrodes. Parmi celles-ci, lesquelles devraient se produire ?

2° On constate en fait qu'il se forme un dépôt d'argent. Sur quelle électrode ce métal se dépose-t-il ? 3° L'électrolyseur est placé en série avec un autre électrolyseur qui réalise l'électrolyse d'une solution aqueuse d'acide sulfurique H_2SO_4. Quel volume normal de chaque gaz obtient-on dans le deuxième électrolyseur si le dépôt d'argent dans le premier a une masse de 0,143g ?

Réponse Exercice 1

1° *Equations-bilan des réactions possibles aux électrodes*

- Demi-équations

Espèce oxydable : H_2O

Anode : $H_2O \longrightarrow \frac{1}{2}O_2 + 2H_3O^+ + 2e^-$

Espèces réductibles : H_3O^+ ; Ag^+ ; NO_3^-.

Cathode : $H_3O^+ + e^- \longrightarrow \frac{1}{2}H_2 + H_2O$

$Ag^+ + e^- \longrightarrow Ag$ (a)

$NO_3^- + 4H_3O^+ + 3e^- \longrightarrow NO + 6H_2O$

Equations des réactions qui devraient se produire

Anode : $H_2O \longrightarrow \frac{1}{2}O_2 + 2H_3O^+ + 2e^-$

Cathode : NO_3^-/NO est le couple dont le potentiel redox est le plus élevé donc on aura

$NO_3^- + 4H_3O^+ + 3e^- \longrightarrow NO + 6H_2O$

2° Le métal argent se dépose sur l'électrode cathode.

3° *Volume normal de chaque gaz*

Cathode : $H_3O^+ + e^- \longrightarrow \frac{1}{2}H_2 + H_2O$ (b)

Anode : $3H_2O \longrightarrow \frac{1}{2}O_2 + 2H_3O^+ + 2e^-$ (c)

En prenant (b), (c) et (a) on peut écrire : $n_{e^-} = 2n_{H_2} = 4n_{O_2} = n_{Ag}$

$2\frac{V_{H_2}}{V_m} = 4\frac{V_{O_2}}{V_m} = \frac{m_{Ag}}{M_{Ag}}$ d'où $\boldsymbol{V_{H_2} = \frac{m_{Ag}V_m}{2M_{Ag}}}$ AN : $\boldsymbol{V_{H_2} = 14{,}8ml}$

$\boldsymbol{V_{O_2} = \frac{m_{Ag}V_m}{4M_{Ag}}}$ AN : $\boldsymbol{V_{O_2} = 7{,}4ml}$

Exercice 2

On effectue l'électrolyse d'une solution de sulfate de cuivre II entre les électrodes de graphite. Le passage du courant dans la solution s'accompagne d'un dépôt métallique sur l'une des électrodes et d'un dégagement gazeux sur l'autre.

1°) Quelles sont les réactions pouvant se dérouler à chaque électrode ?

2°) Identifier les produits formés et établir l'équation-bilan de l'électrolyse.

-Déterminer la ddp théorique minimale à appliquer pour observer l'électrolyse.

3°) On effectue l'électrolyse pendant 60 min, l'intensité du courant étant fixée à 0,16A.

a.) Quelle est la masse du dépôt obtenu ?

b.) Quelle est la quantité d'eau obtenue ?

c.) Quel est le volume correspondant ?

4°) L'électrolyseur contenait initialement 100 ml d'une solution de concentration initiale égale à $C= 0{,}50 \ mol.l^{-1}$.

a.) Quelles sont après 60 min, d'électrolyse, les quantités de matière des espèces Cu^{2+} et $SO_4^{\ 2-}$ présentent en solution ?

b.) Calculer les concentrations correspondantes.

Données : $E° (S_2O_8^{\ 2-}/SO_4^{\ 2-}) = 2{,}1V$; $E°(O_2/H_2O) = -1{,}23V$; $E°(H_3O^+/H_2) = 0{,}00V$;

$E°(Cu^{2+}/Cu) = 0,34V$; Masse molaires en $g.mol^{-1}$ $M_H = 1$; $M_O = 16$; $M_S = 32,1$; $M_{Cu} = 63,5$; nombre d'Avogadro $6,02.10^{23} mol^{-1}$; charge élémentaire $e = 1,6.10^{-19}C$.

Réponse Exo 2 :

1° *Réactions pouvant se dérouler aux électrodes*

Espèces chimiques dans la solution : Cu^{2+} ; SO_4^{2-}, H_2O, H_3O^+

.à l'anode (il y a oxydation)

$3H_2O \longrightarrow \frac{1}{2}O_2 + 2H_3O^+ + 2e^-$

$2SO_4^{2-} \longrightarrow S_2O_8^{2-} + 2e^-$

.à la cathode (il y a réduction)

$Cu^{2+} + 2e^- \longrightarrow Cu$

$H_3O^+ + e^- \longrightarrow \frac{1}{2}H_2 + H_2O$

2° * *Identification des produits*

Le dépôt métallique sur la première électrode est Cu et le gaz sur l'autre électrode est le dioxygène

* *équation-bilan*

$3H_2O + Cu^{2+} \longrightarrow Cu + \frac{1}{2}O_2 + 2H_3O^+$ (1)

* *d.d.p. minimale à appliquée*

$\mathbf{U_0 = E°(O_2/H_2O) - E°(Cu^{2+}/Cu)}$ AN: $\mathbf{U_0 = 0,89V}$

3°a. *Masse de métal déposé*

$Q = n_e.\mathfrak{F}$ Or $n_e = 2n_{Cu}$ (équation à la cathode), $Q = It$ et $\mathfrak{F} = N_A e$

Donc $It = \frac{2\Delta m_{Cu} N_A e}{M_{Cu}}$ $\Rightarrow$ $\mathbf{\Delta m_{Cu} = \frac{M_{Cu} It}{2N_A e}}$ AN : $\mathbf{\Delta m_{Cu} = 190mg}$

b. **Quantité d'eau consommée*

Prenons (1) : $\frac{n_{H_2O}}{3} = n_{Cu}$ $\Rightarrow$ $\frac{m_{Cu}}{M_{Cu}} = \frac{n_{H_2O}}{3}$ $\Rightarrow$ $\mathbf{n_{H_2O} = \frac{3m_{Cu}}{M_{Cu}}}$

AN: $\mathbf{n_{H_2O} = 8.9610^{-3} mol}$

**Volume d'eau*

$n_{H_2O} = \frac{m_{H_2O}}{M_{H_2O}}$ $\Rightarrow$ $n_{H_2O} = \frac{\rho V_{H_2O}}{M_{H_2O}}$ $\Rightarrow$ $\mathbf{V_{H_2O} = \frac{n_{H_2O} M_{H_2O}}{\rho}}$ AN : $\mathbf{V_{H_2O} = 0,161cm^3}$

4°a.**Quantité de Cu^{2+} en solution*

$n_{Cu^{2+}} = n_{0\,Cu^{2+}} - n_{Cu^{2+}disp}$ $\Rightarrow$ $\mathbf{n_{Cu^{2+}} = CV - \frac{m_{Cu}}{M_{Cu}}}$ AN : $\mathbf{n_{Cu^{2+}} = 4,7.10^{-2} mol}$

**Quantité de SO_4^{2-}*

$\mathbf{n_{SO_4^{2-}} = n_{0SO_4^{2-}} = CV}$ AN : $\mathbf{n_{SO_4^{2-}} = 50.10^{-3} mol}$

b. *Concentrations correspondantes*

$\mathbf{[Cu^{2+}] = \frac{n_{Cu^{2+}}}{V - V_{H_2O}}}$ AN: $\mathbf{[Cu^{2+}] = 0,47 mol.l^{-1}}$

$\mathbf{[SO_4^{2-}] = \frac{n_{SO_4^{2-}}}{V - V_{H_2O}}}$ AN: $\mathbf{[SO_4^{2-}] = 0,5 mol.l^{-1}}$

Exercice 3 : Électrolyse *en solutions aqueuses*

On électrolyse une solution concentrée de sulfate de cadmium II et d'acide sulfurique, les ions sulfates ne participant pas aux réactions électrochimiques. On observe un dépôt métallique sur une électrode et un dégagement gazeux sur l'autre.

1°) Quelles sont les réactions aux électrodes ?

2°) Etablir l'équation-bilan de la réaction.

3°) Déterminer la d.d.p. théorique minimale à appliquer pour observer l'électrolyse.

4°) Dans les conditions industrielles, l'intensité est maintenue constante et égale à 25 kA.

a.) Quelle masse du métal obtient-on après 12 heures ?

b.) Quel volume du gaz recueille-t-on à l'autre électrode ?

5°) Dans la réalité, la masse de métal obtenue n'est que de 580 kg. Interprétez cette observation.

Données: Masse molaires atomiques en $g.mol^{-1}$ M_{Cd}=112,4 g.mol-1. $E°(O_2/H_2O)$=-1,23V ; $E°(H_3O^+/H_2)$= 0,00 V ; $E°(Cd^{2+}/Cd)$= 0,40 V.

Réponse Exercice 3 :

1° *Réactions aux électrodes*

Espèces chimiques dans la solution : Cd^{2+} ; SO_4^{2-}, H_2O, H_3O+

.à l'anode (il y a oxydation)

$3H_2O \longrightarrow \frac{1}{2}O_2 + 2H_3O^+ + 2e^-$

.à la cathode (il y a réduction)

$Cd^{2+} + 2e^- \longrightarrow Cd$

$H_3O^+ + e^- \longrightarrow \frac{1}{2}H_2 + H_2O$

2°*Equation-bilan*

Le dépôt métallique est Cd et le gaz sur l'autre électrode est le dioxygène

$3H_2O + Cd^{2+} \longrightarrow Cd + \frac{1}{2}O_2 + 2H_3O^+$

2° *La d.d.p. minimale à appliquer*

$\mathbf{U_0 = E°(O_2/H_2O) - E°(Cd^{2+}/Cd)}$ AN: $\mathbf{U_0 = 1{,}64V}$

4°a. *Masse de métal obtenue*

$Q=n_e.\mathfrak{F}$ Or $n_e = 2n_{Cd}$ (équation à la cathode)

$It = 2n_{Cd}\mathfrak{F} \Rightarrow It = 2\frac{\Delta m_{Cd}}{M_{Cd}}\mathfrak{F} \quad \Rightarrow \mathbf{\Delta m_{Cd} = \frac{M_{Cd}It}{2\mathfrak{F}}}$ AN: $\mathbf{\Delta m_{Cd} = 6{,}29.10^5 g}$ soit **629kg**

b. *Volume dégagé à l'anode*

$n_{Cd} = \frac{n_{O_2}}{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{m_{Cd}}{M_{Cd}} = \frac{2V_{O_2}}{V_m} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{V_{O_2} = \frac{m_{Cd}}{2M_{Cd}}V_m}$ AN: $\mathbf{V_{O_2} = 69948{,}2\mathit{l}}$

5° *Interprétation de l'observation* :

En réalité à la cathode il y a réduction des ions H_3O^+ en H_2 et Cd^{2+} en Cd car la tension U_0 suffit largement pour avoir le dégagement de dihydrogène.