Dans un référentiel donné, on choisit un repère d'espace $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ et une date origine.
Les coordonnées d'un point mobile M sont alors fournies par les équations horaires suivantes : $\begin{cases} x = r\cos\omega t \\ y = r\sin\omega t \\ z = 0 \end{cases}$ avec $r = 2m$; $\omega = \frac{\pi}{2} rad/s$

1°a. Déterminer l'équation de la trajectoire du mobile M.

b. Préciser la position du mobile M à la date origine.

2° Déterminer :

a. Les coordonnées et la mesure du vecteur vitesse $\vec{v}$.

b. Les coordonnées et la mesure du vecteur accélération $\vec{a}$.

c. La nature du mouvement du mobile M.

3° Montrer que le vecteur accélération $\vec{a}$ et le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ sont colinéaires.

4°a. Etablir l'équation horaire de l'abscisse curviligne s du mobile M.

b. Donner les coordonnées des vecteurs vitesse $\vec{v}$ et accélération $\vec{a}$ dans le repère locale de Frenet $(M, \overrightarrow{u_t}, \overrightarrow{u_n})$.

c. Calculer la période T et la fréquence N du mouvement du mobile M. Que représente la grandeur constante ω ?

CORRECTION DE L'EXERCICE

1°a. L'équation de la trajectoire du mobile M

On a :

$$\begin{cases} x = rcos\omega t \\ y = rsin\omega t \quad avec\, r = 2m\; et\; \omega = \dfrac{\pi}{2}\, rad/s \\ z = 0 \end{cases}$$

Conseil💡 : Lorsque vous avez des équations horaires qui contiennent la forme cosinus ou sinus, pensez à retrouver l'identité fondamentale de la trigonométrie après avoir élevé au carré.

Ainsi, $x^2 + y^2 = (rcos\omega t)^2 + (rsin\omega t)^2 = r^2cos^2\omega t + r^2sin^2\omega t$

Factorisons maintenant par r^2 *pour retrouver l'identité fondamentale.*

On a: $x^2 + y^2 = r^2\,(cos^2\omega t + sin^2\omega t)$

Or, d'après l'identité fondamentale de la trigonométrie, on a

$$cos^2\omega t + sin^2\omega t = 1$$

Donc, $x^2 + y^2 = r^2 = 2^2 = 4$

Finalement, l'équation de la trajectoire est: $\boxed{x^2 + y^2 = 4}$

1°b. La position de M à la date d'origine

La date d'origine est lorsque $t = 0$

À $t = 0$, on a: $\begin{cases} x_0 = rcos(\omega \times 0) \\ y_0 = rsin(\omega \times 0) \\ z_0 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_0 = r \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{cases}}$

2°a. Déterminons les coordonnées et la mesure de $\vec{v}$:

■ *Coordonnées de $\vec{v}$:*

On sait que: $\vec{v} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$

Comme $\overrightarrow{OM}\begin{cases} x = r\cos\omega t \\ y = r\sin\omega t \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\vec{v}\begin{cases} v_x = -r\omega\sin(\omega t) \\ v_y = r\omega\cos(\omega t) \\ v_z = 0 \end{cases}}$

■ *Mesure de $\vec{v}$:*

On a: $v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2} \Rightarrow v = \sqrt{[-r\omega\sin(\omega t)]^2 + [r\omega\cos(\omega t)]^2}$

$\Rightarrow v = r\omega\sqrt{cos^2(\omega t) + sin^2(\omega t)}$ Donc $\boxed{v = r\omega}$ Car $cos^2(\omega t) + sin^2(\omega t) = 1$

AN:

$$v = 2\times\frac{\pi}{2} = \pi\ m/s \qquad \boxed{v = \pi\ m/s}$$

NB: Dans d'autres exercices on peut vous poser la question à savoir: montrer que la vitesse du mobile est constante. Là vous allez juste montrer que $v = r\omega$ comme On vient de le faire.

2°b.Déterminons les coordonnées et la mesure de $\vec{a}$.

■ *Coordonnées de $\vec{a}$:*

Ici, vous avez deux méthodes pour trouver ses coordonnées

Appliquer la formule $\vec{a} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$ ou bien $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

Mais comme on a les coordonnées de $\vec{v}$, il est plus simple d'appliquer la formule $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ que $\vec{a} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\vec{a}\begin{cases} a_x = -r\omega^2\cos(\omega t) \\ a_y = -r\omega^2\sin(\omega t) \\ a_z = 0 \end{cases}}$$

■ *Mesure de $\vec{a}$:*

On a: $$a = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2} \Longrightarrow a = \sqrt{[-r\omega^2\sin(\omega t)]^2 + [-r\omega^2\cos(\omega t)]^2}$$

$$\Longrightarrow a = r\omega^2\sqrt{cos^2(\omega t) + sin^2(\omega t)}$$

D'où $a = r\omega^2$ AN: $a = 2\times\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{2}m/s^2$ $$\boxed{a = \frac{\pi^2}{2}m/s^2}$$

Pour avoir l'intégralité de la correction, veuillez cliquer sur ce lien 👇👇 pour avoir aussi des explications claires.

https://www.youtube.com/@THIAMSCIENCES?sub_confirmation=1