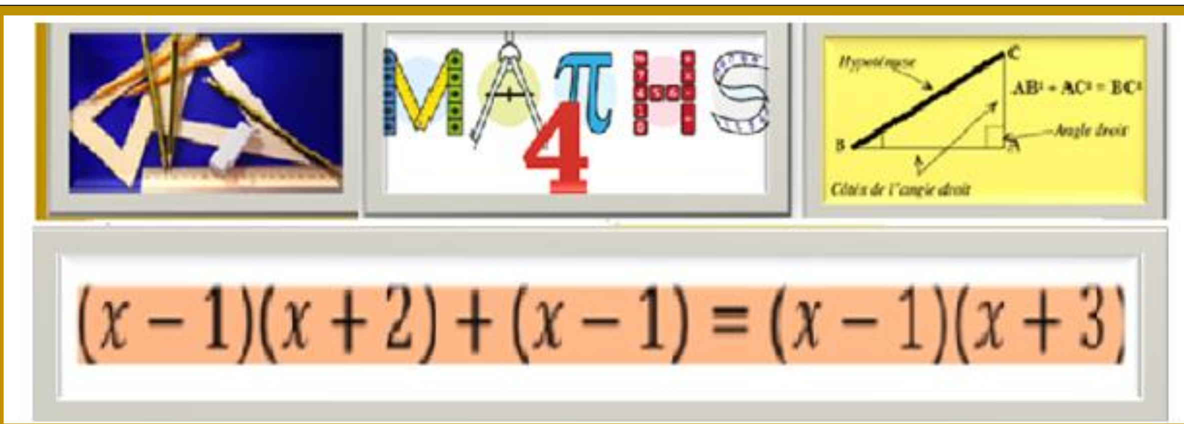
RÉPUBLIQUE DU SÉNÉGAL

Un Peuple – Un But – Une Foi

Ministère de
l'Éducation nationale



MON LIVRET DE MATHEMATIQUES

Classe de quatrième

DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT MOYEN SECONDAIRE GENERAL (DEMSG)

MON LIVRET DE MATHEMATIQUES

Classe de Quatrième

AUTEURS

Issakha FAYE, Conseiller pédagogique national, DFC

Lathirole FAYE, Formateur, CRFPE, Thiès

Moussa FAYE, Formateur, CRFPE, Fatick

Seybatou GUEYE, Inspecteur de l'Enseignement moyen secondaire, IA Dakar

Youga MBENGUE, Inspecteur de l'Enseignement moyen secondaire, IA Kaolack

Équipe de coordination et de supervision

Ce travail est réalisé sous la coordination de **Dr Oumar SAGNA**, Chef de la division Enseignements Apprentissages de la DEMSG et la supervision de **Papa KANDJI**, Directeur de l'Enseignement moyen secondaire général

DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT MOYEN SECONDAIRE GENERAL (DEMSG)

Préface

Le Ministère de l'Éducation nationale (MEN), conformément aux orientations du Programme d'Amélioration de la Qualité, de l'Équité et de la Transparence dans le secteur de l'Éducation et de la Formation (PAQUET-EF 2018-2030), s'est inscrit dans une dynamique d'amélioration continue des rendements scolaires pour contribuer efficacement au développement du capital humain, axe majeur du Plan Sénégal émergent (PSE).

Dans cette optique, une politique cohérente de promotion de l'équité et l'égalité de chances au bénéfice de l'ensemble des apprenants est enclenchée. Elle se déploie dans une Ecole au service de la réussite de toutes et de tous, reposant sur un environnement apaisé et des conditions d'apprentissage améliorées.

Il s'agit, dans ce contexte, de consolider la mise en œuvre de la politique du manuel scolaire qui vise la dotation des élèves et des professeurs en manuels scolaires et matériels didactiques conformes aux curricula en vigueur, afin d'améliorer la qualité des enseignements apprentissages.

C'est dans ce cadre que la Direction de l'Enseignement moyen secondaire général (DEMSG), avec l'appui du Programme d'Amélioration de la Qualité et de l'Equité dans l'Education de Base (PAQEEB) à travers la Cellule Genre et Equité (CGE) du ministère, a élaboré, en collaboration avec les acteurs du niveau déconcentré, notamment les Inspections d'Académie, le présent livret destiné aux élèves.

Ce livret, nous l'espérons, contribuera à améliorer grandement la qualité des enseignements apprentissages et les performances des élèves.

C'est l'occasion pour moi, d'adresser mes félicitations au Directeur de l'Enseignement moyen secondaire général et à l'équipe de rédaction du livret pour le travail de qualité accompli au bénéfice du système éducatif sénégalais.

Le Ministre de l'Education nationale
Mamadou TALLA

Avant-propos

Ce livret conforme au programme sénégalais est conçu pour toi, élève de la classe de Quatrième. Son format obéit à l'esprit de la démarche qui sous-tend l'évaluation des enseignements apprentissages dans le cycle moyen.

Le livret traite de manière pratique et synthétique toutes les leçons du programme pour te permettre une meilleure assimilation du cours de ton professeur.

Ainsi le livret te propose pour chaque leçon :

- l'essentiel du cours qui fait la synthèse des notions clés, indispensables pour la résolution des exercices ;
- des exercices de contrôle de connaissances qui renseignent sur le niveau de connaissances des notions essentielles du cours ;
- des exercices d'application qui évaluent le degré de maîtrise des outils, des méthodes, des procédures ou des règles ;
- des problèmes complexes ou de vie pour t'entrainer à réinvestir tes acquis dans des situations nouvelles ou en rapport avec la vie.

Dans l'optique de te rendre autonome, le livret met à ta disposition, à la fin des leçons, quelques éléments de réponses pour les exercices en surbrillance jaune ; ce qui t'aidera à te situer dans l'acquisition des compétences exigibles du programme.

Ce livret ambitionne de t'accompagner dans l'apprentissage de ton cours, la préparation des devoirs surveillés et compositions.

S'il est bien utilisé, le livret permettra de renforcer tes compétences et d'améliorer tes performances.

Merci d'avance, à tes professeurs, pour d'éventuelles observations ou suggestions.

Les auteurs

Sommaire

PARTIE I :

ACTIVITES NUMERIQUES

Leçon 1: Nombres rationnels

1.1. L'essentiel du cours

1.1.1. Définition

Un nombre rationnel est un nombre qui peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$.

a et b sont les termes du nombre rationnel : a est le numérateur et b le dénominateur.

L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$.

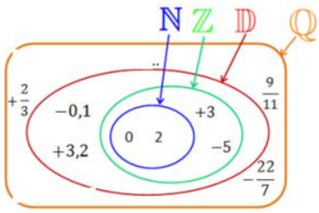
Exemples :

$\frac{1}{2}$; $\frac{-7}{5}$; $\frac{2}{3}$; 2; -5 ; $0{,}75$ sont des nombres rationnels.

Notons bien que $2 = \frac{2}{1}$; $-5 = \frac{-5}{1}$ et $0{,}75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$

Remarque :

On a : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$



1.1.2. Multiplication des termes d'un nombre rationnel par un entier relatif non nul

Propriété

On ne change pas la valeur d'un nombre rationnel en multipliant ou en divisant ses termes par un même nombre non nul.

Autrement dit, $\frac{a}{b} = \frac{ka}{kb}$ où a est un entier relatif, b et k sont des entiers relatifs non nuls.

Exemples.

$\frac{3}{4} = \frac{3\times25}{4\times25} = \frac{75}{100}$, $\qquad \frac{3}{4} = \frac{-7\times3}{-7\times4} = \frac{-21}{-28}$

Cas particuliers

Pour tous nombres entiers relatifs a et b $(b \neq 0)$, on a :

$\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$ et $\frac{a}{-b} = \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$.

Exemple :

$\frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$ et $\frac{2}{-3} = \frac{-2}{3} = -\frac{2}{3}$

1.1.3. Simplification d'un nombre rationnel

Pour simplifier un nombre rationnel $\frac{a}{b}$ où a et b sont des entiers relatifs avec b non nul, on divise son numérateur et son dénominateur par un de leurs diviseurs communs,

Autrement dit :

$\frac{a}{b} = \frac{a\div k}{b\div k}$ où a, b et k sont des entiers relatifs avec b et k non nuls.

Exemple.

$\frac{14}{38} = \frac{14 \div 2}{38 \div 2} = \frac{7}{19}$

Remarque

Pour simplifier un nombre rationnel $\frac{a}{b}$, on peut aussi décomposer le numérateur et le dénominateur en produit de facteurs et ensuite simplifier les facteurs communs.

Exemple :

$\frac{14}{38} = \frac{2 \times 7}{2 \times 19} = \frac{7}{19}$

1.1.4. Opérations dans l'ensemble $\mathbb{Q}$

❖ **Addition- Soustraction**

- **Réduction au même dénominateur**

Pour réduire au même dénominateur deux nombres rationnels $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ on peut multiplier les termes de chaque nombre par le dénominateur de l'autre.

Exemples : Réduire au même dénominateur les nombres :

- $\frac{1}{3}$ et $\frac{5}{2}$

On a $\frac{1}{3} = \frac{1 \times 2}{3 \times 2} = \frac{2}{6}$ et $\frac{5}{2} = \frac{5 \times 3}{2 \times 3} = \frac{15}{6}$

- $\frac{5}{4}$ et $\frac{3}{8}$

On a $\frac{5}{4} = \frac{5 \times 8}{4 \times 8} = \frac{40}{32}$ et $\frac{3}{8} = \frac{3 \times 4}{8 \times 4} = \frac{12}{32}$.

Remarques :

- Dans le deuxième exemple comme 8 est un multiple de 4, on peut tout simplement multiplier les termes du rationnel $\frac{5}{4}$ par 2. Ce qui donne $\frac{5}{4} = \frac{5 \times 2}{4 \times 2} = \frac{10}{8}$
- Pour trouver un dénominateur commun de deux nombres rationnels $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ on peut chercher le $PPCM(b, d)$ qui est le plus petit des dénominateurs communs.

- **Opposé d'un nombre rationnel**

L'opposé d'un nombre rationnel $\frac{a}{b}$ $(b \neq 0)$ est le nombre $-\frac{a}{b}$

Exemples :

L'opposé de $\frac{3}{4}$ est $-\frac{3}{4}$, l'opposé de $-\frac{7}{8}$ est $\frac{7}{8}$.

- **Somme et différence de deux rationnels**

Pour additionner ou soustraire deux nombres rationnels, deux cas se présentent :

- Si les deux rationnels ont le même dénominateur alors on additionne ou on soustrait les numérateurs tout en conservant le dénominateur commun. Autrement dit :

$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$ et $\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$ où a, b et c sont des entiers relatifs avec b non nul.

Exemples.

$\frac{-2}{7} + \frac{19}{7} = \frac{-2+19}{7} = \frac{17}{7}$; $\frac{15}{17} - \frac{-9}{17} = \frac{15-(-9)}{17} = \frac{15+9}{17} = \frac{24}{17}$.

- Si les deux rationnels ont des dénominateurs différents alors on les réduit au même dénominateur et on additionne ou on soustrait les numérateurs tout en conservant le dénominateur commun.

Autrement dit, $\boxed{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}}$, $\boxed{\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}}$ où a, b, c, d sont des entiers relatifs avec b et d non nuls.

Exemples

1. $\frac{7}{9}+\frac{2}{5}=\frac{7\times5+2\times9}{5\times9}=\frac{35+18}{45}=\frac{53}{45}$; 2. $\frac{5}{6}-\frac{4}{3}=\frac{5\times3-4\times6}{6\times3}=\frac{15-24}{18}=\frac{-9}{18}=\frac{-9:9}{18:9}=\frac{-1}{2}$; ou bien comme 6 est un multiple on a : $\frac{5}{6}-\frac{4}{3}=\frac{5}{6}-\frac{4\times2}{3\times2}=\frac{5}{6}-\frac{8}{6}=\frac{5-8}{6}=\frac{-3}{6}=\frac{-3:3}{6:3}=\frac{-1}{2}$.

3. $5+\frac{1}{4}=\frac{5\times4+1\times1}{1\times4}=\frac{20+1}{4}+\frac{21}{4}$.

❖ Produit de deux nombres rationnels

Pour effectuer le produit de deux nombres rationnels, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

Autrement dit : $\boxed{\boldsymbol{\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}}}$ et par conséquent $\boxed{a\times\frac{b}{c}=\frac{ab}{c}}$

Exemples

1. $\frac{3}{4}\times\frac{7}{5}=\frac{3\times7}{4\times5}=\frac{21}{20}$; 2. $-\frac{2}{7}\times9=-\frac{2}{7}\times\frac{9}{1}=\frac{-2\times9}{7\times1}=\frac{-18}{7}$.

❖ Inverse d'un nombre rationnel

L'inverse d'un nombre rationnel non nul $\frac{a}{b}$ est $\frac{b}{a}$ $(a\in\mathbb{Z}, b\in\mathbb{Z}, a\neq0 \; et \; b\neq0)$.

Exemples :

1. l'inverse de $\frac{2}{3}$ est $\frac{3}{2}$; 2. l'inverse de $\frac{-5}{4}$ est $\frac{-4}{5}$;

- l'inverse 5 est $\frac{1}{5}$; 4. L'inverse de $\frac{1}{3}$ est 3.

Remarques

- Si $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont deux nombres rationnels inverses alors $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=1$
- le nombre 0 n'admet pas d'inverse.

❖ Division d'un nombre rationnel par un nombre rationnel non nul

Pour effectuer la division de deux nombres rationnels, on multiplie le rationnel du numérateur par l'inverse du rationnel du dénominateur.

Autrement, si $a, b, c \; et \; d$ sont des entiers relatifs tels que : $b\neq0$, $d\neq0$, $c\neq0$ alors on a :

$\boxed{\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}}$. Ici le rationnel du numérateur est $\frac{a}{b}$ et le rationnel du dénominateur est $\frac{c}{d}$.

Exemple

$\frac{\frac{2}{5}}{\frac{4}{3}}=\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$.

Cas particuliers

$\frac{\frac{a}{b}}{c}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{1}}=\frac{a}{b}\times\frac{1}{c}=\frac{a}{bc}$ et $\frac{a}{\frac{c}{d}}=\frac{\frac{a}{1}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{1}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{c}$ avec $b\neq0$, $d\neq0$, $c\neq0$.

Exemples :

1. $\frac{\frac{-7}{2}}{5}=-\frac{7}{2}\times\frac{1}{5}=-\frac{7}{10}$; 2. $\frac{3}{\frac{13}{4}}=3\times\frac{4}{13}=\frac{12}{13}$.

- **Puissance d'un nombre rationnel**
  - **Définition**

Soit a un nombre rationnel et n un entier strictement supérieur à 1, on a :

- $a^n = a \times a \times \ldots \times a$ (n facteurs),
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ si $a \neq 0$
- $a^0 = 1$ si $a \neq 0$

Exemples.

1\. $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3\times3}{2\times2} = \frac{9}{4}$; 2. $\left(\frac{-1}{4}\right)^3 = \frac{(-1)\times(-1)\times(-1)}{4\times4\times4} = -\frac{1}{4}$. 3. $\left(\frac{4}{5}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{1}{\frac{16}{25}} = \frac{25}{16}$.

Remarque

Pour tout nombre rationnel a, on a $a^1 = a$

- **Propriétés**

Soient a et b deux nombres rationnels non nuls, n et p des entiers relatifs, On a :

$(a \times b)^n = a^n \times b^n$; $a^n \times a^p = a^{n+p}$;

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$; $\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$; $(a^n)^p = a^{n\times p}$.

Exemples

1\. $\left(\frac{3}{2}\right)^2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^5 = \left(\frac{3}{2}\right)^{2+5} = (\frac{3}{2})^7$; 2. $((\frac{4}{9})^2)^3 = (\frac{4}{9})^{2\times3} .= (\frac{4}{9})^6$; 3. $\frac{(\frac{3}{10})^4}{(\frac{3}{10})^7} = (\frac{3}{10})^{4-7} = (\frac{3}{10})^{-3}$.

1.1.5. Valeur absolue d'un nombre rationnel

- **Définition**

La valeur absolue d'un nombre rationnel a , noté $|a|$, est le nombre rationnel positif ou nul égal à a si a est positif ou nul et à $-a$ si a est négatif ou nul.

Autrement $|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a \leq 0 \end{cases}$

Exemples :

$\left|\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3}$ et $\left|-\frac{1}{2}\right| = -\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

Remarque

Deux nombres rationnels opposés ont la même valeur absolue.

- **Propriétés**

Soit a et b deux nombres rationnels.

- Si $a = 0$, alors $|a| = 0$.
- Si $|a| = 0$, alors $a = 0$.
- Si $a = b$ ou $a = -b$ alors $|a| = |b|$.
- Si $|a| = |b|$ alors $a = b$ ou $a = -b$

1.1.6. Comparaison de deux nombres rationnels

- **Condition d'égalité de deux nombres rationnels**

Soit $a,\ b,\ c$ et d des entiers relatifs tels que $b \neq 0$ et $d \neq 0$.

- Si $ad = bc$ alors $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$
- Réciproquement : si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ alors $ad = bc$.

<u>Exemples</u>

1. $\frac{2}{5} = \frac{18}{45}$ car $2\times 45 = 90 = 18 \times 5$; 2. $\frac{21}{17} \neq \frac{2}{3}$ car $21 \times 3 \neq 17 \times 2$.

❖ **Opérations et inégalités**.

Soit a , b et c des nombres rationnels.

- Si $a > b$ alors $a - b > 0$;
- Si $a - b > 0$ alors $a > b$;
- Si $a > b$ et $c > 0$ alors $ca > cb$
- Si $a > b$ et $c < 0$ alors $ca < cb$

<u>Exemples</u>

1. $\frac{7}{8} - \frac{4}{7} > 0$ donc $\frac{7}{8} > \frac{4}{7}$; 2. $\frac{-4}{3} - \frac{-7}{9} < 0$ donc $\frac{-4}{3} < \frac{-7}{9}$

1.1.7. Valeur exacte, valeur approchée

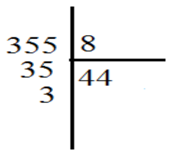
❖ **Valeur exacte**

Si la division du numérateur par le dénominateur d'un rationnel donne :

- un reste nul, alors le quotient trouvé est la valeur exacte de ce rationnel ;
- un reste non nul, alors le quotient trouvé est une valeur approchée de ce rationnel.

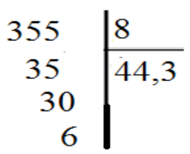
<u>Exemple</u>

Considérons le nombre rationnel $\frac{355}{8}$. En divisant 355 par 8 on obtient :



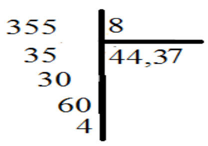
44 est la valeur approchée par défaut à l'unité près de $\frac{355}{8}$

45 est la valeur approchée par excès à l'unité près de $\frac{355}{8}$



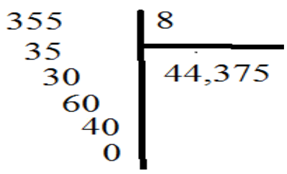
44,3 est la valeur approchée par défaut au dixième près de $\frac{355}{8}$

44,4 est la valeur approchée par excès au dixième près de $\frac{355}{8}$



44,37 est la valeur approchée par défaut au centième près de $\frac{355}{8}$

44,38 est la valeur approchée par excès au centième près de $\frac{355}{8}$



44,375 est la valeur exacte de $\frac{355}{8}$.

1.2. Restitution de connaissances

Exercice 1

Recopie et complète la phrase suivante en écrivant sur les pointillés le terme qui convient :

Un nombre rationnel $\frac{a}{b}$ ne change pas lorsqu'on multiplie son numérateur et son dénominateur par un..

Exercice 2

Soient a et b deux nombres rationnels.

Recopie et complète la phrase suivante en écrivant sur les pointillés l'expression qui convient :

Si $|a| = |b|$ alors ....ou.............................

Exercice 3

Recopie et compète :

1. Diviser par un nombre rationnel non nul, c'est multiplier par son........................
2. Soustraire un nombre rationnel, c'est ajouter son...

Exercice 4

Soit a, b et c trois nombres rationnels.

Recopie et complète la phrase suivante en écrivant sur les pointillés le symbole qui convient :

Si $a > b$ alors on a $a - b \ldots .0$.

Si $a > b$ et $c < 0$ alors on a $c \times a \ldots\ldots c \times b$.

Exercice 5

Recopie en mettant V (vrai) sur les pointillés à côté d'un énoncé s'il est vrai, F (faux) s'il est faux :

Réponses	Enoncés
…………	$2 \times \frac{3}{5} = \frac{6}{5}$
…………	$\frac{4}{7}$ et $-\frac{7}{4}$ sont inverses.
…………	$(-\frac{2}{3})^3 = -\frac{8}{27}$
…………	$\frac{2}{\frac{3}{5}} = \frac{2}{15}$
…………	$\frac{\pi}{2}$ est un nombre rationnel.

Exercice 6

Recopie et complète les énoncés suivants en écrivant sur les pointillés le symbole « $<$ » ; « $>$ » ou « $=$ » qui convient :

$\frac{-2}{5}$ ….. $\frac{-4}{5}$.

$\frac{5}{4}$ ….. $\frac{3}{2}$.

$|-0,5|$……$\frac{1}{2}$.

Exercice7

Recopie et complète le tableau suivant en remplaçant les pointillés par l'une des réponses A, B, C ou D qui convient.

	A	B	C	D
$\frac{1}{3}$ est …	un nombre décimal.	égal à 0 ,333333.	égal à $\frac{1+2}{3+2}$	égal à $\frac{-2}{-6}$
$-\frac{2}{5}$ est …	un nombre décimal.	un nombre entier	égal à $\frac{5}{2}$	égal à $\frac{-2}{-5}$
3 est …	égal à $\frac{1}{3}$	l'inverse de $\frac{1}{3}$	un entier négatif	égal à π

1.3. Application de règles ou de méthodes

Exercice 8

Range dans l'ordre croissant les nombres suivants : $\frac{5}{4}$; $\frac{-2}{5}$; $\frac{3}{2}$; $-\frac{3}{7}$.

Exercice 9

Calcule les sommes suivantes :

1) $\frac{2}{3}+\frac{5}{3}$; 2) $\frac{-31}{23}+\frac{15}{23}$; 3) $\frac{7}{5}+\frac{3}{4}$; 4) $\frac{-4}{7}+\frac{-5}{2}$; 5) $11+\frac{-29}{4}$

Exercice 10

Calcule les différences suivantes :

1) $\frac{12}{11}-\frac{25}{11}$; 2) $\frac{42}{37}-\frac{19}{37}$; 3) $\frac{10}{3}-\frac{-9}{8}$; 4) $\frac{-17}{10}-\frac{8}{5}$; 5) $\frac{14}{25}-1$

Exercice 11

Calcule les produits suivants :

1) $\frac{9}{5}\times\frac{4}{5}$; 2) $\frac{-3}{7}\times\frac{2}{7}$; 3) $\frac{10}{13}\times\frac{-12}{5}$; 4) $\frac{-1}{8}\times\frac{-16}{3}$; 5) $-6\times\frac{8}{5}$

Exercice 12

Calcule les quotients :

1) $\frac{\frac{6}{13}}{\frac{3}{5}}$; 2) $\frac{\frac{-1}{7}}{\frac{-1}{3}}$; 3) $\frac{\frac{-3}{22}}{\frac{15}{22}}$; 4) $\frac{\frac{12}{11}}{9}$ 5) $\frac{-14}{\frac{7}{2}}$

Exercice 13

On donne A = $\left(\frac{5}{2}+\frac{3}{4}\right)\times\left(-\frac{3}{10}+\frac{4}{25}\right)$ et B = $(\frac{1}{9}-\frac{5}{6}).\left(-3-\frac{3}{8}\right)\times\left(\frac{1}{9}-\frac{5}{6}\right)$

Calcule A et B de deux manières différentes.

Exercice 14

Simplifie les nombres rationnels suivants : $\frac{30}{62}$, $\frac{12}{45}$, $\frac{42}{3920}$, $\frac{66}{17640}$.

Exercice 15

Calcule :

A = $3\times10^{5}\times2\times10^{-3}$; B = $\frac{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}{\frac{-2}{3}+\frac{1}{3}}$ et C = $\frac{5}{6}+\frac{4}{5}+\frac{2}{3}$

1.4. Problèmes de vie ou situations complexes

Exercice 16

Ton oncle Birama tient une quincaillerie, il vend du ciment et dispose de 28,5 tonnes.
Mardi il a vendu le tiers. Mercredi il a vendu la moitié du reste.
Consigne.
Aide ton oncle à déterminer le nombre de tonnes de ciment qui lui reste.

Exercice 17

Samedi, c'est la fête au village SOS de DAKAR.

Le stand de tir permet de se mesurer au tir à l'arc pour 1000F CFA la flèche.

Six élèves de votre établissement n'hésitent pas et se lancent le défi du meilleur tireur.

Tous les joueurs qui ont participé dans la demi-journée sont invités à revenir le soir pour la grande finale. Les six élèves ne manquent pas le rendez-vous. Voici leurs résultats :

	Nombre de cibles touchées	Nombre de flèches tirées
Mamadou :	7	8
Sébastien :	6	16
Pauline :	35	64
Fatou :	5	8
Moussa :	17	32
Sophie :	12	32

Le responsable du stand de tir est très ennuyé car il n'arrive pas à classer les joueurs.

Consigne.

Aide-le à faire le classement des six élèves.

Exercice 18

Dans une classe de $4^{ème}$, $\frac{1}{6}$ des élèves désirent poursuivre leurs études en seconde littéraire ; $\frac{2}{3}$ veulent aller en seconde scientifique et les 5 élèves qui restent veulent faire un baccalauréat technique.
Consigne.
Aide l'administration de cette école à déterminer l'effectif total de cette classe $4^{ème}$.

Leçon 2 : Calcul algébrique

2.1. L'essentiel du cours

2.1.1. Développement et réduction d'expressions littérales

❖ **Définition et exemples :**

Une expression qui contient des nombres et des lettres est appelée expression littérale.

Exemples

$A = -3x + 5$, $B = 2x^2 - 3m + 5$, $C = x + 2y$ sont des expressions littérales.

❖ **Réduction d'expression littérales**

Réduire une expression littérale c'est faire la somme des termes semblables.

Exemples : Réduisons les expressions littérales suivantes

$A = 5x - 3 - 2x + 1 = 5x - 2x - 3 + 1 = 3x - 2$

$B = 2a + 4 + 7b - 5a + 3b - 1 = 2a - 5a + 7b + 3b + 4 - 1 = -3a + 10b + 3$

$C = 8x + 2x - 3x^2 - 5 + 2x^2 = -x^2 + 10x - 5$; $4x^2 - 2x^2 = 2x^2$

❖ **Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition et à la soustraction**

Pour tous nombres rationnels a, b, c et d, on a :

- $a(b + c) = ab + ac$;
- $a(b - c) = ab - ac$
- $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$

Exemples

$A = 3x(x + 4) = 3x^2 + 12x$; $B = (-9t + 3)5t = -45t^2 + 15t$

❖ **Egalités usuelles**

Pour tous nombres rationnels a et b, on a :

- $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

❖ **Développement d'expressions littérales**

Développer une expression littérale c'est la transformer de produit de facteurs en somme de termes.

<u>Exemples</u> : Développons les expressions suivantes :

$A = (x + 1)(2x + 3)$

$A = x \times (2x) + x \times 3 + 1 \times (2x) + 1 \times 3$

$A = 2x^2 + 5x + 3$

$B = (-5x + 1)(2x - 3)$

$B = (-5x) \times (2x) + (-5x) \times (-3) + 1 \times (2x) + 1 \times (-3)$

$B = -10x^2 + 17x - 3$

$D = (2x - 1)^2$
$D = (2x)^2 - 2(2x)(1) + (1)^2$
$D = 4x^2 - 4x + 1.$

$E = (4x + 3)^2$
$E = (4x)^2 + 2(4x)(3) + (3)^2$
$E = 16x^2 + 24x + 9.$

$F = (5x - 7)(5x + 7)$
$F = (5x)^2 - 7^2$
$F = 25x^2 - 49$

2.1.2. Factorisation

❖ **Définition**

Factoriser une expression littérale, c'est la transformer d'une somme de termes en un produit de facteurs.

❖ **Mise en évidence d'un facteur commun**

- **Le facteur commun est apparent.**

On peut utiliser la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition et à la soustraction.

Exemple

Factorisons les expressions A, B suivantes.

$A = 2x + 2y$
$A = 2(x + y)$

$B = (x - 3)(2x + 5) - (2x + 5)(2x + 1)$
$B = (2x + 5)[(x - 3) - (2x + 1)]$
$B = (2x + 5)(x + 3 - 2x - 1)$; $B = (2x + 5)(-x + 2)$

- **Le facteur commun n'est pas apparent**

On fait apparaître le facteur commun.

Exemples

$A = 18x - 3$
$A = 3 \times 6x - 3$
$A = 3(6x - 1)$

$B = (x - 3)(6x + 12) - (9x - 1)(2x + 4)$
$B = (x - 3)[6(x + 2)] - (9x - 1)[2(x + 2)]$
$B = (x + 2)[6(x - 3) - 2(9x - 1)]$
$B = (x + 2)(6x - 18 - 18x + 2)$
$B = (x + 2)(-12x - 16)$

- **Utilisation des égalités usuelles**

Exemples

$A = 36x^2 + 48x + 16$
$A = (6x)^2 + 2(6x)(4) + (4)^2$
$A = (6x + 4)^2$

$B = 49x^2 - 25$
$B = (7x)^2 - (5)^2$
$B = (7x - 5)(7x + 5)$

$C = 81x^2 - 36x + 4$
$C = (9x)^2 - 2(9x)(2) + (2)^2$
$C = (9x - 2)^2$

- **Combinaison des deux méthodes : mise en évidence d'un facteur commun et égalités usuelles**

Dans certains cas, la factorisation d'une expression nécessite l'utilisation des deux méthodes précédentes.

Exemples.

On se propose de factoriser l'expression : $A = 15x + 150 + 9x^2 - 100$.

$A = 15x + 150 + 9x^2 - 100$.

$A = 15x + 50 + (3x)^2 - (10)^2$

$A = 5(3x + 10) + (3x + 10)(3x - 10)$

$A = (3x + 10)[5 + (3x - 10)]$

$A = (3x + 10)(3x - 5)$.

2.1.3. Calcul de la valeur numérique d'une expression littérale connaissant la valeur numérique de chaque lettre

Pour calculer la valeur numérique d'une expression littérale, on remplace chaque lettre par sa valeur.

Exemple 1.

Soit à calculer A= $36x^2 + 48x + 16$ pour $x = -2$. On a :

$A = 36(-2)^2 + 48(-2) + 16$

$A = 36 \times 4 - 96 + 16$

$A = 144 - 96 + 16$

$A = 64$

Exemple 2

On donne $C = x + 2y - m$

Pour $x = 1$, $y = -3$ et $m = -1$

On a $C = 1 + 2 \times (-3) - (-1) = 1 - 6 + 1 = -4$

2.2. Restitution de connaissances

Exercice 1

Si a, b, c et d sont quatre nombres.

Recopie et complète les énoncés suivants en écrivant sur les pointillés l'expression qui convient.

1. $ab + ac \ = \cdots (\cdots + \cdots)$;
2. $ab - ac = \cdots (\cdots - \cdots)$
3. $(a + b)(c + d) = \cdots + \cdots + \cdots + \cdots$

Exercice 2

Soit a et b deux nombres.

Recopie et complète les énoncés suivants en écrivant sur les pointillés l'expression qui convient.

1. $a^2 + 2ab + b^2 = (\cdots + \cdots)^2$
2. $a^2 - 2ab + b^2 = \ (\cdots - \cdots)^2$
3. $a^2 - b^2 = (\cdots + \cdots)(\cdots - \cdots)$

Exercice 3

Pour factoriser les expressions de A à D, relie par une flèche chaque expression à la formule utilisable

$A = 36x^2 - 48x + 16$
B =$436x^2 + 48x$
$C = 36x^2 + 48x + 16$
$D = 25 - 4x^2$

$ab + ac = a(b + c)$
$a^2 + 2ab + b^2$
$a^2 - b^2$
$a^2 - 2ab + b^2$

Exercice 4

Recopie et complète chacune des phrases suivantes en écrivant sur les pointillés l'expression qui convient.

Factoriser une expression littérale, c'est……………………………………………

Développer une expression littérale, c'est ……………………………………………

Exercice 5

Réponds par Vrai ou Faux.

1. $2a + 7a = 18a$ où a est un nombre.
2. On ne peut pas réduire $x^2 + 5$.
3. $(x + 1)(-2 + x) + 1$ est une expression factorisée.
4. $(b + c)\ d = \ bd + cd$.

Exercice 6

Parmi les expressions suivantes, laquelle est égale à : $x(2x+1)-2(2x+1)$?

$A=(2x+1)(2-x)$;

$B=(2x+1)(-2x)$;

$C=(2x+1)(x-2)$.

Exercice 7

Complète pour que les égalités ci-dessous soient vraies.

1. $5ax+10ay=5a(\cdots+\cdots)$
2. $4a^2+12a+9=(\cdots+\cdots)^2$
3. $25-10b+b^2=(\cdots-\cdots)^2$
4. $49x^2-\frac{9}{4}=(\cdots+\cdots)(\cdots-\cdots)$.

2.3. Application de règles ou de méthodes

Exercice 8

La formule suivante permet de calculer le poids théorique d'un homme :

$P = 100 - \frac{x-50}{4}$, où P est le poids en kg et x la taille en cm.

Calcule le poids d'un homme qui mesure 180 cm.

Exercice 9

Détermine l'expression développée de :

$-[y^2 + 5y - 9 + (-y + 3)(-4 + 5y)]$

Exercice 10

Développe les expressions ci-dessous :

A = $4a\,(3 + 2a)$; B = $4b\,(3 - 2b)$; C = $-4i\,(3 + 2i)$;

D = $-4j\,(3 - 2j)$; E = $-4k\,(-3 + 2k)$; F = $-4c\,(-3 - 2c)$.

Exercice 11

Réduis chacune des expressions ci-dessous :

$A = 7a^4 - 5a^4 + 11a^4$; $B = -5b^3 - (4b^3 + 5\,b^3) + (3b^2 - 2b^3)$;

$C = 3y^4 + (2y^2)^2 + 5(2y^4 - 4y \times y^3)$;

$D = \frac{4}{7}d^5 + \frac{3}{2}d^3 - \frac{5}{21}d^5 + \frac{5}{6}d^3$; E = $\frac{3e^2+2e-2}{4} - \frac{4e^2-2e+3}{4}$.

Exercice 12

Factorise chacune des expressions ci-dessous :

1. $A = 49 - 7a$; $B = 60b + 6$; $C = 36x - 12$; $D = 6a - 12d + 18c$
2. $E = 6{,}2\,x + 12{,}4e - 37{,}2$; $F = \frac{5}{4}e + \frac{35}{4}y - 2{,}5$.

Exercice 13

Factorise chacune des expressions ci-dessous :

$A = 3x - 2xy$; $B = y^2 - 7y$; $C = 6a^2 + 6a^3$; $D = d^4 + d^2$;

$E = z^7 - 2z^6$; $F = 16c^3 + 32c$

Exercice 14

Factorise chacune des expressions ci-dessous :

1. $A = x\,(3y - 4) + 4(3y - 4)$; $B = x\,(2a + 3) - 7(2a + 3)$
2. $C = 5z\,(3a + 5) + 15(3a + 5)$; $D = 7d\,(2 - 5x) - 21d\,(2 - 5x)$.

Exercice 15

Factorise chacune des expressions ci-dessous :

$A = (x + 3)(3x - 2) + (x + 3)(2x - 3)$;

$B = (2y-3)(4x-1) - 2x(2y-3)$;
$C = (3a-1)(4x+7) + (4x+7)(5a-2)$;
$D = (11x+3)(2x-1) - (11x+3)$.

Exercice 16

Factorise chacune des expressions données ci-dessous :

1. $x^2 + 10x + 25$; $9y^2 + 24y + 16$; $z^2 + \frac{2}{3}z + \frac{1}{9}$; $9u^2 + \frac{6}{5}u + \frac{1}{25}$.
2. $x^2 - 6x + 9$; $25a^2 - 10a + 1$; $b^2 - \frac{2}{3}b + \frac{1}{9}$; $16v^2 - v + \frac{1}{64}$.
3. $x^2 - y^2$; $y^2 - 100$; $a^2 - 9b^2$; $16c^2 - 25d^2$; $\frac{u^2}{9} - \frac{4}{25}$.

Exercice 17

Factorise chacune des expressions ci-dessous :

$A = (x+1)^2 - 9$; $B = 16 - (2y+7)^2$; $C = 9z^2 - (z+4)^2$;
$D = (4d+7)^2 - (3d-1)^2$; $E = 36(a - \frac{1}{2})^2 - 49(2a - \frac{3}{7})^2$;
$F = 64(\frac{3}{8} - g)^2 - 81(\frac{2}{3} - \frac{g}{9})^2$; $G = -(4x-1)^2 + 16(x+3)^2$.

Exercice 18

Factorise chacune des expressions ci-dessous :

$A = a^2(a-1) - 9(a-1)$; $B = b^2(b-7) - 16(b-7)^3$.
$C = x^2 - 10x + 25 - 16y^2$; $D = -(z-5)^2 + 4z^2 + 12z + 9$
$E = (m^2 + \frac{2}{3}m + \frac{1}{9}) - (9n^2 - 30n + 25)$; $F = (25x^2 + 30x + 9) - 16(x+1)^2$.

Exercice 19

Factorise, en faisant apparaître une identité remarquable, chacune des expressions ci-dessous :

$A = -x^2 - 8x - 16$; $B = -9 + 12y - 4y^2$; $C = 2x^2 + 12x + 18$;
$D = d^3 - 8d^2 + 16d$; $E = 5x^2 - 125$; $F = t^3 - 16t$; $G = 27g - 3g^3$;
$H = \frac{u^2}{2} - 8$.

Exercice 20

1. Factorise chacune des expressions ci-dessous :
 $A = ab^2 + a^2b - a^2b^2$; $B = 6ab^2 - 4a^2b^3 + 20ab^3$;
 $C = 50x^3y^2 - 150x^4y^3 + 100x^2y^2$.
2. Calcule A et B pour $a = -1$ et $b = 2$.
3. Calcule C pour $x = 1$ et $y = -1$.

Exercice 21

Sachant que $a(a+b) = 8$, détermine l'expression numérique de $(a+b)^2 + (a+b)(a-b)$.

2.4. Problèmes de vie ou situations complexes

Exercice 22

Maman Khoudia, une gestionnaire de tontine a placé à la banque un capital C à un taux d'intérêts de i % par an, mais elle ignore le capital dont elle disposera au bout de 3 années.

Consigne.

Aide la maman à déterminer le capital au bout de 3ans.

Détermine le capital dont elle disposera si $C = 1\ 200\ 000$ et $i = 5$

Détermine le capital dont elle disposera si $C = 500\ 000$ et $i = 4$

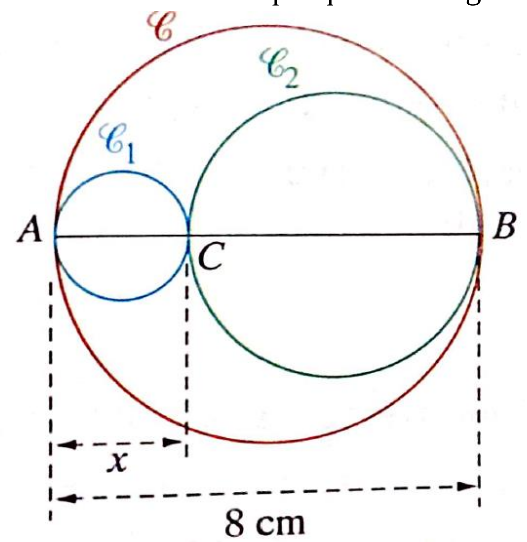
Exercice 23

Démontre que la somme de 5 nombres entiers consécutifs est un nombre multiple de 5.

Exercice 24

Le chef de notre village a fait la commande de pièces circulaires, vérifiant la condition suivante : le périmètre du grand cercle est égal à la somme des périmètres de deux petits cercles.

Le menuisier métallique qui est chargé de réaliser ces pièces lui a présenté la figure suivante. :



Consigne

Le Chef de village, n'ayant pas de personnel qualifié te demande de lui vérifier cette égalité.

Leçon 3 : Equations à une inconnue

3.1. L'essentiel du cours

Rappels

- Un nombre rationnel est solution d'une équation d'inconnue x si en remplaçant x par ce nombre l'égalité reste vraie.

Exemple :

Soit l'équation $-3x + 12 = 0$.

En remplaçant x par 0, on obtient $-3 \times 0 + 12 = 0$ c'est-à-dire $12 = 0$ impossible donc 0 n'est pas solution

En remplaçant x par 4, on obtient $-3 \times 4 + 12 = 0$ c'est-à-dire $0 = 0$ vraie donc 4 est solution.

- Résoudre une équation c'est déterminer l'ensemble des solutions de cette équation.

3.1.1. Equations se ramenant à la forme : $ax + b = 0$

Soit l'équation $\boldsymbol{ax + b = 0}$ où a *et* b sont des réels donnés, x est l'inconnue.

- 1er cas : $a \neq 0$, alors l'équation admet une solution unique $x = -\frac{b}{a}$.
- 2ème cas : si $a = 0$,
  - si $b = 0$, l'égalité est toujours vraie, alors l'ensemble des solutions est $\mathbb{Q}$.
  - Si $b \neq 0$, l'égalité est impossible, alors il n'y a pas de solution, $S = \phi$

Exemples

L'équation $2x + 5 = 0$ admet comme solution $x = -\frac{5}{2}$

L'équation $2x + 3 = 2(x + \frac{3}{2})$ admet tout rationnel comme solution. Donc $S = \mathbb{Q}$

L'équation $-3x + 1 = -(5 + 3x)$ n'a pas de solution donc $S = \phi$

3.1.2. Equations de la forme $(ax + b)\,(cx + d) = 0$ et équations s'y ramenant.

Pour résoudre les équations de cette forme, on utilise la règle :

$\mathrm{ab} = 0$ si et seulement si $\mathrm{a} = 0$ ou $\mathrm{b} = 0$

- **Méthode de résolution**

$(ax + b)(cx + d) = 0$ ssi $ax + b = 0$ ou $cx + d = 0$

Exemple : Résolvons dans $\mathbb{Q}$ l'équation suivante : $(-3x + 4)(x - 1) = 0$.

$(-3x + 4)(x - 1) = 0$

ssi $-3x + 4 = 0$ *ou* $x - 1 = 0$

ssi $x = \frac{4}{3}$ ou $x = 1$

donc $S=\left\{\frac{4}{3}, 1\right\}$

3.1.3. Equations du type $\frac{a}{x} = b$, $\frac{a}{x} = \frac{b}{c}$ avec $c \neq 0$ $et\ x \neq 0$

- **Méthode de résolution**

Pour résoudre les équations de ce type on utilise la condition d'égalité de deux nombres rationnels : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ signifie que $ad = bc$ (où $c\ et\ d\ sont\ non\ nuls$).

Exemples : résolvons dans $\mathbb{Q}$ les équations suivantes :

1) $\frac{3}{x} = 7$,

$\frac{3}{x} = 7$

$7x = 3$

$x = \frac{3}{7}$; $S = \left\{\frac{3}{7}\right\}$.

2) $\frac{3}{x} = \frac{-4}{9}$

$\frac{3}{x} = \frac{-4}{9}$

$-4x = 27$

$x = \frac{-27}{4}$; $S = \left\{-\frac{27}{4}\right\}$

3.2. Restitution de connaissances

Exercice 1

Recopie et mets V (Vrai) si l'affirmation est vraie, F (faux) si elle est fausse :

Soit l'équation $\boldsymbol{ax+b=0}$ où $a\ et\ b$ sont des rationnels, x est l'inconnue.

1. Si $a \neq 0$, alors l'équation n'admet pas de solution.
2. Si $a = 0$ et $b = 0$, alors l'ensemble des solutions est $\mathbb{Q}$.
3. Si $a = 0$ et $b \neq 0$, alors il n'y a pas de solution.

Exercice 2

Recopie et complète la phrase suivante en écrivant sur les pointillés les expressions qui conviennent.

Soit $a, b, c\ et\ d$ des nombres rationnels, $(ax+b)(cx+d) = 0$ si et seulement si :

……. … …. .. … … … ….

Exercice 3

Réponds par Vrai ou Faux.

Soit l'équation $\boldsymbol{ax+b=0}$ où $a\ et\ b$ sont des réels donnés, x est l'inconnue.

1. Si $a = 0$ et si $b \neq 0$, alors il y a une solution.
2. Si $a = 0$ et si $b = 0$, alors l'ensemble des solutions est $\mathbb{Q}$

Exercice 4

Recopie et complète la phrase suivante en écrivant sur les pointillés les expressions qui conviennent.

Quels que soient les nombres a, b, c et d où b et d sont non nuls:

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ssi … … …

3.3. Application de règles ou de méthodes

Exercice 5

Soit l'équation $72{,}5 = x - 100 - \frac{x-150}{4}$

1. Vérifie que 180 est solution de cette équation.
2. 0 est-il solution de l'équation ?

Exercice 6

Résous dans $\mathbb{Q}$ les équations suivantes.

1. $-3x + 2 = 0$
2. $5(x - 2) = 2x + (x + 6)$
3. $12 - (5x - 9) = 4x + 3$
4. $5 + 3(2x + 2) = 6 - 4(x + 1)$
5. $-2(x - 5) + 5x = 3x + 1$
6. $4x - 5(x + 2) = -x - 10$

Exercice 7

Résous dans $\mathbb{Q}$ les équations suivantes :

1. $3x(2x + 6) = 0$.
2. $(3x - 4)(3x + 4) = 0$
3. $4x^2 - 25 = 0$.

Exercice 8

Résous dans $\mathbb{Q}$ les équations suivantes :

1. $(2x - 1)(3x + 2) = (3x + 2)(-5x + 4)$
2. $(-2x + 1) + (2x - 1)^2 = 0$
3. $(5x + 1)(x - 5) - 25 + x^2 = 0$
4. $(4x + 3)^2 = (x - 2)^2$

Exercice 9

Résous dans $\mathbb{Q}$ les équations suivantes :

a) $\frac{5}{x} = 2$;

b) $\frac{-3}{x} = \frac{5}{7}$

Exercice 10

Résous dans $\mathbb{Q}$ les équations suivantes.

a) $\frac{x-3}{4} - \frac{5-2x}{6} = \frac{x}{2} - \frac{5}{12}$;

b) $-x - 6 = \frac{x-2}{3}$

3.4. Problèmes de vie ou situations complexes

Exercice 11

Doudou a dépensé les cinq huitièmes de ses économies pour acheter une place pour le prochain match de son équipe préférée. Cette place lui a coûté 10 000F CFA.
Consigne.
Aide Doudou à donner le montant de ses économies.

Exercice 12

Mamadou a 30 ans, son fils a 10 ans.
Consigne : Dans combien d’années l’âge de Mamadou sera-t-il le double de celui de son fils ?

Exercice 13

Bineta et Moussa vendent les mêmes articles le même jour et comptent l’argent qu’ils ont gagné. Bineta a gagné 1500F en pièces et le reste uniquement en billets de 1000F. Moussa, lui, a gagné 7500F en pièces et le reste en billets de 500F. Ils ont gagné la même somme et chacun a le même nombre de billets.
Consigne : Combien Bineta a-t-elle de billets de 1000F ?

Exercice 14

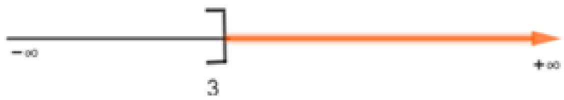
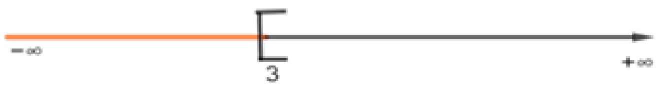
Un professeur d’éducation physique partage sa classe de 24 élèves en deux groupes. Les élèves du 1er groupe jouent au football et ceux du 2ème groupe pratiquent le saut en hauteur. Après 15 minutes, il demande à quatre élèves de rejoindre les élèves du premier groupe. A ce moment, il y a trois fois plus d’élèves dans le 1er groupe que dans le 2ème.
Consigne : combien d’élèves étaient au début, dans le 1er groupe ?

Exercice 15

Douze nombres entiers sont écrits en ligne. Le quatrième est 4 et le douzième est 12.
Dans cette liste, toute somme de trois nombres placés côte à côte est égale à 2 000.
Quel est le huitième nombre de cette liste ?

Leçon 4 : Inéquations et systèmes d'inéquations à une inconnue

4.1. L'essentiel du cours

Ensemble des nombres rationnels x tels que :	sont les rationnels qui appartiennent à l'intervalle…	Représentation graphique de cet ensemble L'ensemble est représenté par les rationnels qui sont dans la partie coloriée)
$-2 \leq x \leq 3$	$[-2; 3]$	 (Les deux crochets sont dirigés du côté de −2 et 3 font partie de l'ensemble)
$-2 < x < 3$	$]-2; 3[$	 (Les deux crochets ne sont pas dirigés du côté de l'ensemble car -2 et 3 ne font pas partie de l'ensemble)
$-2 \leq x < 3$	$[-2; 3[$	 (Le crochet en -2 est dirigé du côté de l'ensemble et celui en 3 ne l'est pas car -2 fait partie de l'ensemble mais 3 n'en fait pas partie)
$-2 < x \leq 3$	$]-2; 3]$	 (-2 ne fait pas partie mais 3 fait partie de l'ensemble)
$x \geq 3$	$[3; +\infty[$	 (Le crochet est dirigé du côté de l'ensemble car 3 fait partie de l'ensemble)
$x > 3$	$]3; +\infty[$	 (3 ne fait pas partie de l'ensemble)
$x \leq 3$	$]-\infty; 3]$	 (3 fait partie de l'ensemble)
$x < 3$	$]-\infty; 3[$	 (3 ne fait pas partie de l'ensemble)

4.1.2. Inéquations à une inconnue de se ramenant à la forme $\boldsymbol{ax+b*0}$; où * représente $<, >, \leq$ ou $\geq$

- **Solution d'une inéquation**

Un nombre rationnel est solution d'une inéquation d'inconnue x lorsque, en remplaçant x par ce nombre on obtient une inégalité vraie.

Exemple : $2\,x-5\leq 0$

1 est une solution de l'inéquation car $2\times 1-5\leq 0$ est une inégalité vraie

En effet, $2\times 1-5=-3$ et l'inégalité $-3\leq 0$ est vraie

- **Résolution d'une inéquation**

Résoudre une inéquation dans $\mathbb{Q}$, c'est déterminer l'ensemble de tous les nombres rationnels qui sont solutions de cette inéquation.

Méthodes de résolution d'une inéquation de types : $\boldsymbol{ax+b*0}$; $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ étant des nombres rationnels donnés, avec $\boldsymbol{a\neq 0}$ et $*$ pouvant désigner l'inégalité $>, <, \leq$ ou $\geq$

$ax+b\leq 0$

$ax+b+(-b)\leq 0+(-b)$ (On a ajouté l'opposé de b aux deux membres de l'inéquation)

$ax+0\leq(-b)$;

$ax\quad\leq -b$

On multiplie par l'inverse de a

1er cas : si $\boldsymbol{a>0}$

L'inégalité ne change pas de sens et on a

$\frac{1}{a}(ax)\leq\frac{1}{a}(-b)$ ce qui donne $x\quad\leq\frac{-b}{a}$

2eme cas : si $\boldsymbol{a<0}$

L'inégalité change de sens et on a :

$\frac{1}{a}(ax)\geq\frac{1}{a}(-b)$ ce qui donne $x\quad\geq\frac{-b}{a}$

Exemple 1

Résolvons dans $\mathbb{Q}$, l'inéquation d'inconnue x : $3x+5\leq 0$.

$3x+5\leq 0$

$3x+5+(-5)\leq 0+(-5)$; (on ajoute (-5) à chaque membre de l'inéquation)

$3x+0\leq(-5)$; (car $5+(-5)=0$)

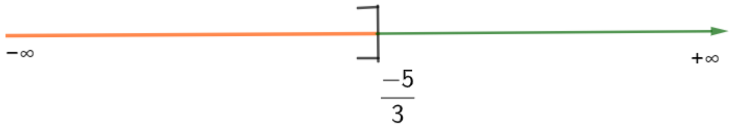
$3x\leq(-5)$

$\frac{1}{3}\times 3x\leq\frac{1}{3}\times(-5)$; (On multiplie chaque membre de l'inéquation par $\frac{1}{3}$ qui est strictement positif).

$x\leq\frac{-5}{3}$;

Les solutions de l'inéquation sont les nombres rationnels inférieurs ou égaux à $\frac{-5}{3}$.

L'ensemble des solutions est représenté par les rationnels qui sont dans la partie coloriée en rouge de l'axe ci-dessous.



L'ensemble des solutions est constitué par les rationnels qui sont dans l'intervalle $\left]-\infty; \frac{-5}{3}\right]$.

<u>Exemple 2</u>

Résolvons dans $\mathbb{Q}$, l'inéquation : $-2x + 4 < 0$

$-2x + 4 < 0$

$-2x + 4 + (-4) < 0 + (-4)$; (on ajoute (-4) à chaque membre de l'inégalité).

$-2x + 0 < -4$ (car $4 + (-4) = 0$)

$-2x < -4$

$-\frac{1}{2} \times (-2x) > -\frac{1}{2} \times (-4)$

$x > 2$

Les solutions de l'inéquation sont les nombres rationnels strictement supérieurs à 2.

L'ensemble des solutions est représenté par les rationnels qui sont dans la partie coloriée en rouge de l'axe ci-dessous.

L'ensemble des solutions est constitué par les rationnels qui sont dans l'intervalle $]2\ ;\ +\infty[$.

<u>Exemple 3</u>

Résolvons dans $\mathbb{Q}$; l'inéquation d'inconnue x : $5x + 4 \geq 3x + 2$

$5x + 4 \geq 3x + 2$

$5x + 4 + (-3x) \geq 3x + 2 + (-3x)$; (on ajoute $(-3x)$ à chaque membre de l'inéquation)

$2x + 4 \geq 2$; (car $5x + (-3x) = 2x$ et $3x + (-3x) = 0$).

$2x + 4 + (-4) \geq 2 + (-4)$; ((on ajoute (-4) à chaque membre de l'inégalité)

$2x \geq -2$; (car $4 + (-4)$= 0 et $2 + (-4) = -2$).

$\frac{1}{2} \times 2x \geq \frac{1}{2} \times (-2)$;

$x \geq -1$;

Les solutions de l'inéquation sont les nombres rationnels supérieurs ou égaux à -1.

Remarques

- L'inéquation $2x - 1 \leq -2(-3 - x)$ est vérifiée par tout nombre rationnel.
  Donc l'ensemble des solutions est $\mathbb{Q}$.
- L'inéquation $-x - 1 \leq -3 - x$ n'est vérifiée par aucun nombre rationnel.
  Donc l'ensemble des solutions est l'ensemble vide.

4.1.3. Système de deux inéquations à une inconnue

Un nombre rationnel est solution d'un système de deux inéquations, lorsqu'il est solution de chacune d'elles.

Exemple : -1 est solution du système $\begin{cases} x-5 \leq 0 \\ -2x+2>0 \end{cases}$

car $\begin{cases} -1-5 \leq 0 \\ -2(-1)+2>0 \end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases} -6 \leq 0 \quad vrai \\ 4>0 \quad vrai \end{cases}$

Méthode de résolution d'un système de deux inéquations

Pour résoudre un système de deux inéquations à une inconnue, on peut procéder de la façon suivante :

- résoudre la première inéquation en notant par exemple, son ensemble solution S_1
- résoudre la deuxième inéquation en notant par exemple son ensemble solution S_2;

L'ensemble des solutions du système est alors $S = S_1 \cap S_2$, c'est-à-dire l'ensemble des nombres

rationnels qui sont à la fois solutions des deux inéquations, on peut le déterminer à l'aide d'un graphique.

Exemple

Résolvons dans $\mathbb{Q}$ le système $\begin{cases} 4x-5 \leq 0 \\ -3x+2>0 \end{cases}$

1^{ere} étape

Résolvons l'inéquation : $4x-5 \leq 0$

$4x-5 \leq 0$

$4x-5+5 \leq 0+5$

$4x \leq 5$

$\frac{1}{4} \times 4x \leq \frac{1}{4} \times 5$

$x \leq \frac{5}{4}$

Les solutions de cette inéquation sont les rationnels qui sont dans l'intervalle $S_1 = \left]-\infty; \frac{5}{4}\right]$.

2eme étape

Résolvons l'inéquation $-3x+2<0$.

$-3x+2<0$

$-3x+2+(-2)<0+(-2)$

$-3x<(-2)$

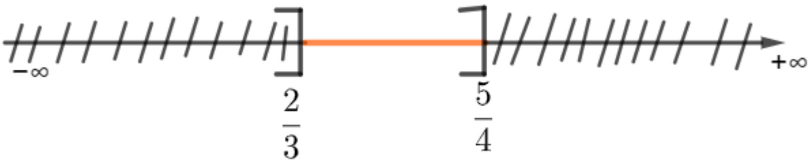
$\frac{-1}{3} \times (-3x) > -\frac{1}{3} \times (-2)$

$x > \frac{2}{3}$

Les solutions de cette inéquation sont les rationnels qui sont dans l'intervalle $S_2 = \left]\frac{2}{3}; +\infty\right[$.

L'ensemble des solutions du système est $S = S_1 \cap S_2$. Déterminons-le en utilisant un graphique.

Traçons un axe et hachurons la partie de l'axe qui n'est pas dans S_1 et celle qui n'est pas dans S_2.



La partie non hachurée représente alors l'ensemble des solutions du système.

Donc les solutions du système sont les rationnels qui sont dans l'intervalle $\left]\frac{2}{3} ; \frac{5}{4}\right]$.

$$S = \left]\frac{2}{3} ; \frac{5}{4}\right]$$

4.2. Restitution de connaissances

Exercice 1

Recopie et complète chacun des énoncés ci-dessous.

1. Un nombre rationnel est solution d'une inéquation d'inconnue t, lorsque en remplaçant l'inconnue t par ce nombre rationnel l'inégalité obtenue………
2. Un nombre rationnel est solution d'un système de deux inéquations à une inconnue, lorsqu'il est …….
3. Si on multiplie un nombre rationnel non nul par son inverse alors on trouve …..
4. Dans une inéquation, on peut ajouter un même nombre aux deux membres de l'inéquation …….
5. Dans une inéquation, si on multiplie les deux membres par un même nombre rationnel strictement négatif alors on doit …..

Exercice 2

Réponds par Vrai ou Faux.

1. Pour trouver l'ensemble des solutions d'un système de deux inéquations à une inconnue, on détermine l'ensemble des solutions de chacune des inéquations puis on fait la réunion de ces deux ensembles de solutions.
2. l'intervalle $[-5; -1[$ dans $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres rationnels x tels que : $-5 < x \leq -1$:
3. La partie coloriée en vert de la droite ci-dessous représente l'ensemble des nombres rationnels supérieurs ou égaux à -4.

Exercice 3

Dans chaque ligne du tableau ci-dessous, remplis la 3ème colonne en y effectuant l'action demandée à la deuxième colonne.

Equation dans $\mathbb{Q}$	Action que je dois effectuer	Résultat obtenu
$-2x - 1 > 0$	J'ajoute 1 aux deux membres	…………
$-3x > 4$	Je multiplie les deux membres par $(-\frac{1}{3})$	……………
$x < -\frac{5}{2}$	J'écris l'ensemble des nombres rationnels qui vérifient cette inégalité sous forme d'intervalle	……………
$y \geq 3$	Je représente graphiquement l'ensemble des nombres rationnels qui vérifient cette inégalité.	

Exercice 4

Complète les énoncés suivants :

1. $[-2; 3]$ est l'ensemble des nombres rationnels x tels que ….
2. $[2; +\infty[$ est l'ensemble des nombres rationnels x tels que……
3. L'ensemble des nombres rationnels x tels que $x < -1$ sont les rationnels qui sont dans l'intervalle …….

Exercice 5

Pour chacun des énoncés suivants, trois réponses sont proposées dont une seule est juste. Note le numéro de l'énoncé et de la réponse que tu as choisie.

1. Dans un système de deux inéquations à une inconnue :

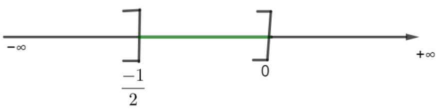
 a. Toute solution d'une des deux inéquations est solution du système ;
 b. Toute solution commune aux deux inéquations est solution du système ;
 c. La solution du système est la réunion des solutions des deux inéquations

2. L 'inégalité « $a - 3 < 0$ » est vraie pour :

 a. $a = 1$;
 b. $a = 3$;
 c. $a = 5$

Exercice 6

On considère les représentations graphiques ci-dessous ; donne dans chaque cas sous forme de phrase, l'ensemble des nombres rationnels représentés par la partie coloriée en vert.



Exercice 7

Relie chaque ensemble de nombres rationnels à l'intervalle correspondant.

L'ensemble des nombres rationnels x tels que : $-5 \leq x < -1$ ×	× $[-5; -1]$
	× $[-5; -1[$
L'ensemble des nombres rationnels x tels que : $-5 < x < -1$ ×	× $]-5; -1]$
L'ensemble des nombres rationnels x tels que : $x \geq -1$ ×	× $]-5; -1[$
	× $[-1; +\infty[$
L'ensemble des nombres rationnels x tels que : $x > -1$ ×	× $]-1; +\infty[$
	× $]-\infty; -1]$
L'ensemble des nombres rationnels x tels que : $x \leq -1$ ×	× $]-\infty; -1[$

Exercice 8

Complète la résolution suivante :

$3x - 4 > 5$

$3x - 4 + \cdots > 5 \ldots$

$3\,x > \cdots$

$x > \cdots$

Exercice 9

Précise pour chaque ligne du tableau avec une croix, les inéquations qui ont les mêmes solutions que l'inéquation de la première colonne.

	A	B	C
(1) $2x < -3$	$x < \frac{-3}{-2}$	$x < \frac{-3}{2}$	$x > \frac{-3}{2}$
(2) $-5x \geq 6$	$x \geq \frac{6}{-5}$	$x \leq \frac{6}{-5}$	$-x \geq \frac{6}{5}$
(3) $-6x \leq -3$	$x \leq \frac{-3}{6}$	$x \leq \frac{-3}{-6}$	$x \geq \frac{3}{6}$
(4) $-3 + x > 5$	$x < 5 + 3$	$x > 5 - 3$	$x > 5 + 3$

Exercice 10

Complète la résolution de l'inéquation et représente l'ensemble des solutions

Sur une droite graduée.

$-3(7\,x + 4) > 9 - 8\,x$

$\ldots\ \ldots\ldots > 9 - 8\,x + 8\,x$

$-13\,x \ldots\ldots > 9 + 12$

$\ldots\ldots\ldots > 21$

$x \ldots\ -\frac{21}{13}$

4.3. Application de règles ou de méthodes

Exercice 11

Parmi les nombres rationnels ; -3 ; 1; $\frac{5}{2}$; donne ceux qui sont solutions de l'inéquation (1) et ceux qui sont solutions de l'inéquation (2).

(1) $-2x + 1 > 0$; (2) $3x - 4 \leq 0$.

Exercice 12

Les lettres x, y et t désignent ici des nombres rationnels inconnus.

Pour chacun des cas suivants, énonce la propriété ou la règle utilisée pour passer de l'inégalité (1) à l'inégalité (2) puis de l'inégalité (2) à l'inégalité (3).

1. (1) $2x + 3 \leq 0$; (2) $2x \leq -3$; (3) $x \leq \frac{-3}{2}$;
2. (1) $4x - 1 < 0$; (2) $4x < 1$; (3) $x < \frac{1}{4}$;
3. (1) $-3y + 4 \geq 0$; (2) $-3y \geq -4$; (3) $y \leq \frac{4}{3}$;
4. (1) $-5t + 2 > 0$; (2) $-5t > -2$; (3) $t < \frac{2}{5}$.

Exercice 13

Traduis chacun des énoncés ci-dessous par une inéquation d'inconnue y.

1. La somme d'un nombre rationnel inconnu et de 5 est strictement supérieur à -1.
2. La moitié d'un nombre rationnel inconnu diminué de (-2) est supérieur ou égal à 3
3. Le double d'un nombre rationnel inconnu augmenté de 5 est inférieur ou égal à 0.
4. Le produit d'un nombre rationnel inconnu par $\frac{4}{3}$ est strictement inférieur à $\frac{-3}{2}$

Exercice 14

Résous dans $\mathbb{Q}$ chacune des inéquations suivantes et donne l'ensemble des solutions sous forme de phrase, d'intervalle et représente-le graphiquement.

1. $5x + 2 > 7x - 3$;
2. $-3x + 4 \geq 2x - 1$;
3. $\frac{2y-1}{4} < \frac{3y+2}{2}$;
4. $\frac{2+t}{4} \leq 2t - 1$
5. $2(x + 1) - 5x \geq 5 - (x - 2)$;
6. $\frac{3}{2}z - 5 > -2z + 1$;
7. $2x + 1 \geq 2(x - 1)$;
8. $3x - 5 > -3(1 - x)$.

Exercice 15

On donne le système de deux inéquations d'inconnue x suivant :

$$\begin{cases} 2x + 5 > 0 \\ x - 3 \leq 0 \end{cases}$$

Donne parmi les nombres rationnels -3 ; 0 ; 2 ; 5 ; ceux qui sont solutions de ce système.

Exercice 16

Résous dans $\mathbb{Q}$ le système ci- dessous.

$$\begin{cases} 3x - 2 \geq 4x + 3 \\ 2x + 1 < -3 \end{cases}$$

Exercice 17

Résous dans $\mathbb{Q}$ chacun des systèmes suivants.

1. $\begin{cases} 6 - 2x > 3x + 1 \\ 4x - 3 \leq 3x + 2 \end{cases}$
2. $\begin{cases} -7y + 5 < 3 - 5y \\ \frac{1}{2}y + 3 \leq 2y - 5 \end{cases}$
3. $\begin{cases} -2x \geq x - 3 \\ 2x + 1 < 3 \end{cases}$
4. $\begin{cases} 3y - 1 \geq y - 3 \\ 2y + 1 < 3 \end{cases}$
5. $\begin{cases} -2y + 1 \geq 2(y - 2) \\ 2y + 1 < 3 \end{cases}$

4.4. Problèmes de vie ou situations complexes

Exercice 19

Pour financer la visite d'un musée, le foyer du collège dispose de 56000 frs.

Il prévoit 750 frs par élève ainsi qu'une somme fixe de 3560 frs.

Détermine le nombre maximum d'élèves qui peuvent visiter le musée dans ces conditions.

Exercice 20

Abdou a acheté un terrain de forme rectangulaire de 80 m de longueur.

Il compte aménager une partie de forme rectangulaire du terrain pour en faire un jardin.

Le verger doit avoir la même longueur que le terrain mais il doit décider de sa largeur.

Il souhaite que le périmètre du verger soit strictement supérieur à 200 m et que son aire soit supérieure ou égale à 3000 m^2.

Aide-le à trouver la largeur la plus petite possible qui satisfait à ses conditions.

Exercice 21

Deux agences de location de voitures proposent pour des véhicules identiques les tarifs journaliers suivants :

Agence A : forfait 30000 frs et 340 frs par kilomètre.

Agence B : forfait 29000 frs et 345 frs par kilomètre.

Pour quels kilométrages l'agence A est plus avantageuse que l'agence B.

Exercice 22 :

Un club de gymnastique propose deux formules de prix à ses adhérents :

La formule A : la séance coute 800 frs ;

La formule B : une carte d'abonnement qui coute 4500 frs l'année et le prix de la séance est 500 frs.

Détermine le nombre minimum de séances nécessaires pour que la formule B soit plus avantageuse pour une période d'une année

Leçon 5 : Applications linéaires

5.1. L'essentiel du cours à retenir

5.1.1. Définition et notation

Etant donné un nombre rationnel a non nul, le procédé qui à tout nombre rationnel x, fait correspondre le nombre rationnel ax est appelé une application linéaire.
Si p désigne ce procédé, il est noté $p : x \mapsto ax$ et pour tout rationnel x, $p(x) = ax$
On dit que :

- a est le coefficient (ou coefficient de linéarité) de l'application linéaire.
- $p(x) = ax$ est appelé expression littérale de cette application linéaire.

Exemple 1

On donne $f(x) = -2x$.
f est une application linéaire.
-2 est le coefficient de l'application linéaire.
$f(x) = -2x$ est l'expression littérale de cette application linéaire.

Remarque

$f(-3) = -2 \times (-3) = 6$. Ainsi 6 est l'image de -3 par f et -3 est l'antécédent de 6 par f.

Exemple 2

On donne $g(t) = \frac{4}{5}t$.
g est une application linéaire.
$\frac{4}{5}$ est le coefficient de l'application linéaire.
$g(t) = \frac{4}{5}t$ est l'expression littérale de cette application linéaire.
On a $g(1) = \frac{4}{5} \times 1 = \frac{4}{5}$
Donc $\frac{4}{5}$ est l'image de 1 par g et 1 est l'antécédent de $\frac{4}{5}$ par g.

5.1.2. Propriétés

- Toute situation de proportionnalité correspond à une application linéaire.
- Toute application linéaire correspond à une situation de proportionnalité.

Exemples

- Soit le tableau de proportionnalité suivant :

1	**2**	**5**	**7**
2	**4**	**10**	**14**

Le coefficient de proportionnalité qui permet de passer de la première à la deuxième ligne est 2 et l'application linéaire qui lui correspond f est définie par $f(x) = 2x$.

- Soit l'application linéaire h définie par $h(s) = \frac{-2}{3} s$, on a :

-1	6	1	$-\frac{3}{2}$
$\frac{2}{3}$	-4	$-\frac{2}{3}$	1

$$\frac{\frac{2}{3}}{-1} = -\frac{2}{3}; \quad -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}; \quad \frac{-\frac{2}{3}}{1} = -\frac{2}{3}; \quad \frac{1}{-\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}$$

On a un tableau de proportionnalité.
Cette application linéaire correspond à une situation de proportionnalité

Propriétés de la linéarité.

Soit p est une application linéaire. Pour tous rationnels a, b et k, on a :

$p(a + b) = p(a) + p(b)$

$p(ka) = k\,p(a)$

<u>Exemples</u>

Soit l'application linéaire f définie par $f(x) = 3x$

$f(2+5) = f(7) = 3 \times 7 = 21$ et $f(2) + f(5) = 3 \times 2 + 3 \times 5 = 21$;

$f(2 \times 5) = f(10) = 3 \times 10 = 30$ et $2 \times f(5) = 2 \times (3 \times 5) = 30$.

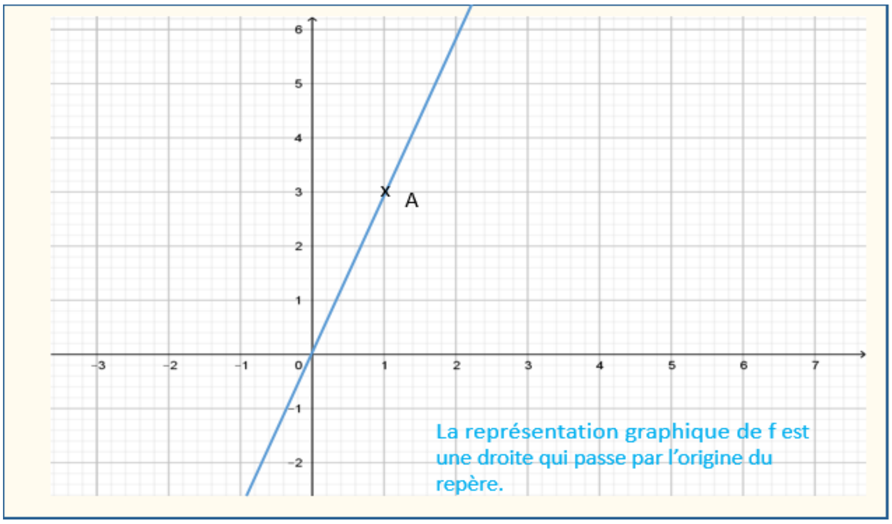
5.1.3. Représentation graphique

La représentation graphique d'une application linéaire est une droite qui passe par l'origine du repère.

<u>Exemple</u> :

$f(x) = 3\,x$, f est une application linéaire.

Traçons la droite représentative de f dans un repère orthonormal.



5.2. Restitution de connaissances

Exercice 1

Rappelle la définition d'une application linéaire.

Exercice 2

Recopie et complète les phrases suivantes en écrivant sur les pointillés les expressions qui conviennent :

Le procédé qui à tout nombre rationnel x, fait correspondre le nombre rationnel $5x$ est ………………………… . On note ce procédé :………………..

Par ce procédé, à 2 on fait correspondre 10. On dit que 10 est………. .de 2 et 2 est ……….. de 10

5 est le ……………………………… de l'application linéaire.

Exercice 3

On propose les expressions littérales ci-dessous. Quelles sont celles qui correspondent à une application linéaire ? (On donnera dans ce cas le coefficient).

1) $y = \frac{x}{5}$ 2) $y = -4x + 5$ 3) $y = 4x$. 4) $f(x) = x^2$

Exercice 4

Complète la phrase suivante :

Si p est une application linéaire, pour tous rationnels a, b et , alors on a :

$p(a + b) =$…… et $p(ka) =$……

Exercice 5

Complète la phrase suivante :

La représentation graphique d'une application linéaire est une droite ………. ……………...

Exercice 6

On donne le tableau suivant où f est une application linéaire.

x	3	8	-7	0	$\frac{1}{2}$	-6
$f(x)$	-6	-16	14	0	-1	12

Recopie et complète

1. l'antécédent de -1 est …. ; 2. l'image de 0 est …… ; 3. l'antécédent de 12 est …..
4. l'antécédent de -3 est ….. ; 5. l'image de $\frac{2}{3}$ est ……

Exercice 7

Pour tracer la représentation graphique d'une application linéaire f définie par $f(x) = ax$, dans un repère, je place le point A(1, a), puis je trace …………

5.3. Application de règles ou de méthodes

Exercice 8

Soit l'application linéaire f définie par $f(x) = 6x$.

1. Calcule les images par f des nombres -12 ; $\frac{1}{2}$; 0 ; 1 ; $\frac{4}{3}$.

   Note les résultats dans un tableau.
2. Le tableau obtenu est-il un tableau de proportionnalité ? Justifie ta réponse.

Exercice 9

On donne une application linéaire

$f : x \mapsto ax$

Détermine a dans chacun des cas suivants :

1. $x = 8$ et $y = -64$.
2. $f(7) = 4{,}9$.
3. $x = 9$ et $y = 6$.
4. $f\left(\frac{1}{5}\right) = 3$.

Exercice 10

Détermine l'application linéaire g pour laquelle – 18 est l'image de 3.

Exercice 11

Soit l'application linéaire g telle que g(4) = 20 et g(5) = 25.

Sans utiliser l'expression littérale de g, calcule g(9) et g(8).

Exercice 12

On donne les applications linéaires f et g définies respectivement par $f(x) = 4x$ et $g(x) = -2x$

Trace la représentation graphique de chacune de ces applications linéaires.

Exercice 13

Un commerçant vend une variété de ruban à 100F le mètre.

1. Détermine le prix à payer pour un client qui en achète 4m ; 6m ; 10m.
2. Quelle longueur de ce ruban peux-tu acheter avec une somme de 1350F ?
3. Mets les résultats sous forme de tableau et montre que tu as un tableau de proportionnalité.
4. Représente graphiquement le prix à payer en fonction de la longueur de ruban à acheter.
5. Utilise le graphique pour déterminer le prix de 12 m.

5.4. Problèmes de vie ou situation complexes

Exercice 14

Une bibliothèque de prêt demande à ses clients 300F par livre emprunté.

Moussa le principal d'un CEM veut emprunter des livres pour ses élèves et débloque une somme de 10 700F.

Consigne

Aide Moussa à déterminer le nombre maximal de livres qu'il pourra emprunter.

Exercice 15

Le gestionnaire d'une borne fontaine qui dispose d'une citerne a reçu l'information que son robinet débite 20 litres par minute et que la capacité de sa citerne est de 260 litres. Le gestionnaire voudrait savoir le temps qu'il faut pour remplir la citerne, mais ne dispose de spécialistes pouvant lui résoudre ce problème.

Consigne

Aide-le à déterminer le temps t en minutes qu'il faut pour remplir la citerne avec ce robinet.

Exercice 16

Adama s'est rendu chez ses grands-parents en voiture. Sur la première moitié du trajet, le trafic était important : sa vitesse moyenne n'a été que de 80 km/h.

Les conditions de circulation s'améliorant ensuite, il a pu parcourir le reste du trajet à la vitesse moyenne de 100 km/h.

Sachant que la durée totale du trajet est de 1h30mn, détermine sa vitesse moyenne sur l'ensemble du trajet.

Leçon 6 : Statistique

6.1. L'essentiel du cours

6.1.1. Exemples et Vocabulaire

❖ **Population**

L'ensemble sur lequel porte l'étude est appelé population.

Exemple **:**

Nous voulons faire une étude qui concerne l'ensemble des élèves d'une classe de $4^{ème}$.

L'ensemble des élèves de cette classe est la population.

❖ **Individu**

Les éléments de la population sont appelés des individus.

Exemple :

Chaque élève de la classe de $4^{ème}$ dans laquelle on veut faire l'étude est appelé individu.

❖ **Echantillon**

Toute partie non vide (ou sous-ensemble) de la population est appelée échantillon.

Exemple :

L'ensemble des élèves d'une rangée de cette classe constitue un échantillon.

❖ **Effectif total**

On appelle effectif total, le nombre d'individus de la population étudiée.

Exemple :

Le nombre d'élèves de cette classe est l'effectif total de la population.

❖ **Caractère** :

Toute propriété étudiée sur la population est appelée caractère.

On distingue deux types de caractère :

Les caractères quantitatifs et les caractères qualitatifs.

- Un caractère est dit **qualitatif**, lorsqu'il ne peut pas être exprimé par un nombre.
- Un caractère est dit **quantitatif** lorsqu'il peut être exprimé par un nombre.

Exemples

Dans cette classe, on peut étudier par exemple les caractères suivants :

- âge : qui est un caractère quantitatif ;
- note au dernier devoir de mathématique : qui est un caractère quantitatif ;
- ethnie : qui est un caractère qualitatif.
- Sexe : qui est un caractère qualitatif.

❖ **Modalité du caractère**

On appelle modalité du caractère toute valeur prise par le caractère.

Exemple

On étudie le caractère « âge » dans une classe de $4^{ème}$. On obtient les résultats suivants :

Modalités	13	14	15	16
Nombre d’élèves	3	12	4	1

13, 14, 15 et 16 sont les modalités du caractère « âge »

Si on étudie le caractère « sexe » alors « homme » est une modalité et « femme » est aussi une modalité.

- **Effectif d’une modalité**

L’effectif d’une modalité est le nombre d’individus de la population qui possèdent cette modalité.

Dans le tableau précédent 4 est l’effectif de la modalité 15,

3 est l’effectif de la modalité 13

6.1.2. Classement des données statistiques

- **Série statistique brute**

On appelle série statistique brute, l’ensemble des résultats collectés lors d’une enquête**.**

Exemple

Les notes données ci-dessous sont les moyennes en mathématiques de 16 filles de $4^{ème}$ d’un CEM qui doivent être présentées au concours Miss-Mathématiques :

15 ; 18 ; 16 ; 15 ; 14 ; 14 ; 15. 17 ; 15 ; 16 ; 17. 14 ; 14 ; 18 ; 15 ; 16.

- **Série statistique ordonnée**

Ordonner une série statistique à caractère quantitatif c’est classer ses valeurs dans l’ordre croissant.

Exemple :

Ordonnons la série des moyennes des 15 filles donnée dans l’exemple précédent.

14 ; 14 ; 14 ; 14 ; 15 ; 15 ; 15 ; 15 ; 15 ; 16 ; 16 ; 16 ; 17 ; 17 ; 18 ; 18

On peut présenter cette série sous forme de tableau :

Modalités (Moyennes en maths)	14	15	16	17	18
effectif	4	5	3	2	2

- **Mode**

Le mode d’une série statistique est la modalité qui a le plus grand effectif.

Remarque :

S’il y a plusieurs modalités qui satisfont à la définition du mode, alors chacune d’elle est un mode. On dit que la série est plurimodale.

Exemple :

Si, nous considérons la série des 16 filles candidates au concours Miss- Mathématiques alors le mode est la modalité 15.

- **Fréquence**

On appelle fréquence d’une modalité, le rapport de l’effectif de cette modalité par l’effectif totale.

$$\text{fréquence d'une modalité} = \frac{\text{effectif de la modalité}}{\text{effectif total}}$$

❖ **Fréquence en pourcentage d'une modalité**

$$\text{Fréquence en pourcentage d'une modalité} = 100 \times \frac{\text{effectif de la modalité}}{\text{effectif total}}$$

Remarques :

- La somme des fréquences des différentes modalités d'une série statistique est égale à 1.

- La somme des fréquences en pourcentage des différentes modalités d'une série statistique est égale à 100%.

Exemple

Modalités (Moyennes en maths)	14	15	16	17	18
Effectif	4	5	3	2	2

Calculons les fréquences en pourcentageb des différentes modalités de cette série.

Fréquence de la modalité 17 est $\frac{2}{16}$ et son pourcentage est $100\times\frac{2}{16} = 12{,}50\ \%$

Fréquence de la modalité 14 est $\frac{4}{16}$ et son pourcentage est $100\times\frac{4}{16} = 25\ \%$

Fréquence de la modalité 15 est $\frac{5}{16}$ et son pourcentage est $100\times\frac{5}{16} = 31{,}25\ \%$

Fréquence de la modalité 16 est $\frac{3}{16}$ et son pourcentage est $100\times\frac{3}{16} = 18{,}75\ \%$

Fréquence de la modalité 18 est $\frac{2}{16}$ et son pourcentage est $100\times\frac{2}{16} = 12{,}50\ \%$

Dans le tableau ci-dessus, nous pouvons ajouter une ligne des fréquences et une des pourcentages

Modalités (Moyennes en maths)	14	15	16	17	18
Effectif	4	5	3	2	2
Fréquence	$\frac{4}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$
Fréquence en pourcentage	25%	31,25%	18,75%	12,5%	12,5%

❖ **Moyenne**.

Calcul de la moyenne

Pour obtenir la moyenne d'une série statistique à caractère quantitatif, on peut procéder de la façon suivante :

(1) on multiplie chaque modalité par son effectif ;

(2) on additionne tous les produits obtenus au (1) ;

(3) on divise la somme obtenue au (2) par l'effectif total.

Notation

Si une variable statistique est appelée x, alors sa moyenne est notée $\bar{x}$.

Exemples

Notons x; la série statistique définie par le tableau ci-dessous.

Modalités (Moyennes en maths)	14	15	16	17	18
Effectif	4	5	3	2	2

La moyenne de cette série est :

$$\bar{x} = \frac{(4\times14)+(5\times15)+(3\times16)+(2\times17)+(2\times18)}{16} = 15,5625$$

6.1.3. Représentations

❖ **Diagramme en bâtons**

Pour obtenir un diagramme en bâtons des effectifs d'une série, on procède de la façon suivante :

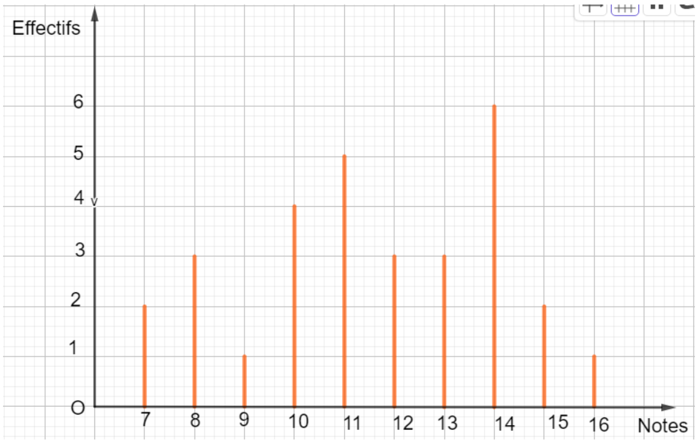
- on trace un repère orthogonal
- on place sur l'axe des abscisses les modalités ;
- on place sur l'axe des ordonnées les effectifs des modalités ;
- pour chaque modalité, on trace un segment de longueur proportionnelle à son effectif.

<u>Exemple</u> :

Le professeur de mathématiques a relevé les notes de ses élèves au dernier contrôle.

Note	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Effectif	2	3	1	4	5	3	3	6	2	1

Représentons les données de cette série statistique avec un diagramme en bâtons :



❖ **Diagramme à bandes**

Pour représenter un diagramme à bandes des effectifs d'une série statistique, on procède de la façon suivante :

- On trace un repère orthogonal
- On place sur l'axe des abscisses les modalités et sur l'axe des ordonnées les effectifs ;
- On trace pour chaque modalité, un rectangle dont la longueur est proportionnelle à l'effectif de la modalité et dont la largeur est la même pour tous les rectangles.

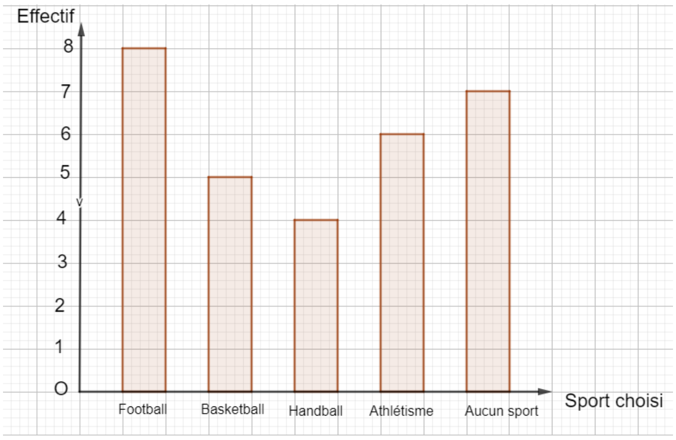
Exemple

Un professeur d'un CEM demande à 30 élèves de 4ème d'un CEM, de remplir des formulaires pour choisir éventuellement le sport qu'ils souhaiteraient pratiquer dans le cadre des activités de l'UASSU.

Il a noté les informations reçues dans le tableau ci-dessous.

Sport	Football	Basketball	Handball	Athlétisme	Aucun sport
Effectif	8	5	4	6	7

Traçons le diagramme à bandes de la série définie par ce tableau.



❖ Diagramme circulaire

Pour représenter un diagramme circulaire d'une série statistique, on peut procéder de la façon suivante :

- tracer un cercle de centre O ;

- représenter, chaque modalité de la série par un secteur angulaire dont l'aire est proportionnelle à l'effectif de la modalité.

Pour trouver la mesure d'un angle au centre d'un secteur angulaire associé à une modalité on utilise la formule :

$$\text{Mesure de l'angle au centre associé à une modalité} = \frac{360° \times \text{effectif de la modalité}}{\text{efffectif total}}$$
$$= 360° \times \text{fréquence de la modalité}.$$

Exemple

Voici la répartition des 100 élèves de 4ème d'un collège selon leur seconde langue vivante.

Modalité (Langue)	Allemand	Espagnol	Italien	Anglais	Total
Effectif	15	50	10	25	100
Angle au centre (en °)	54	180	36	90	360

Représentons le diagramme circulaire de cette série statistique

Diagramme semi-circulaire

Pour représenter un diagramme semi-circulaire, des effectifs d'une série statistique, on procède de la façon suivante :

- On trace un demi-cercle de centre O ;
- on représente, chaque modalité de la série par un secteur angulaire dont l'aire est proportionnelle à l'effectif de la modalité ;
- la mesure d'un angle au centre associé à une modalité est donnée par la formule :

$$\text{Mesure d'un angle au centre associé à une modalité } = \frac{180° \times \text{effectif de la modalité}}{\text{efffectif total}}$$

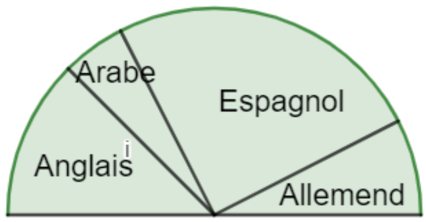
$$= 180° \times \textit{fréquence de la modalité}$$

<u>Exemple</u>

Voici la répartition des 100 élèves de $4^{\text{ème}}$ d'un collège selon leur seconde langue vivante.

Modalité (Langue)	Allemand	Espagnol	Arabe	Anglais	Total
Effectif	15	50	10	25	100
Angle au centre (en °)	27	90	18	45	180

Représentons le diagramme semi-circulaire de cette série statistique



6.2. Restitution de connaissances

Exercice 1

Complète les énoncés suivants en remplaçant les pointillés par le mot qui convient.

1. En statistique, l'ensemble sur lequel porte l'étude est appelé …………
2. En statistique, tout élément de la population est appelé ……….
3. ………….. est une valeur possible d'un caractère étudié.
4. ……….. est le rapport de l'effectif de la modalité par l'effectif total.

Exercice 2

Pour chaque énoncé, quatre réponses sont proposées dont une seule est juste.

Recopie le numéro de chaque question suivie de la lettre correspondant à la réponse choisie.

1. La fréquence d'une modalité est :
   a. le produit de l'effectif de la modalité par l'effectif total divisé par100.
   b. le rapport de l'effectif de la modalité par 100 ;
   c. le nombre de fois que la modalité est observée ;
   d. le rapport de l'effectif de la modalité par l'effectif total.
2. Dans un diagramme circulaire des effectifs :
   a. la somme des angles au centre associés aux différentes modalités est 180°.
   b. la mesure d'un angle au centre associé à une modalité est proportionnelle à l'effectif de la modalité.
   c. la mesure d'un angle au centre associé à une modalité est donnée par la formule :
   $$\frac{\text{efffectif total} \times \text{effectif de la modalité}}{360°}$$
   d. chaque angle au centre associé à une modalité a une mesure comprise entre 0 et 180°.

Exercice 3

Recopie puis complète les énoncés suivants :

1. Dans un diagramme en bâtons, la longueur de chaque bâton représentant une modalité est …….
2. Dans un diagramme à bandes, la longueur de chaque rectangle représentant une modalité est…….
3. Dans un diagramme circulaire, l'effectif d'une modalité représentée par un angle au centre de mesure α est donné par la formule……..
4. Dans un diagramme semi-circulaire, l'effectif d'une modalité représentée par un angle au centre de mesure α est donné par la formule…….

Exercice 4 :

Pour chacune des affirmations suivantes, répond par Vrai ou Faux.

1. Un caractère qualitatif est discret ou continu.

2. Le pourcentage d'une modalité est égal au produit de sa fréquence par 100.

3. La moyenne d'une série statistique est égale au rapport de la somme des produits des modalités et de leurs effectifs respectifs par l'effectif total de la population.

4. Le mode d'une série statistique est la modalité qui a la plus grande fréquence.

Exercice 5

Lors d'une enquête, on a demandé aux élèves d'une classe de $4^{\text{ème}}$ de répondre à la question :

« Quel est le nombre d'enfants dans votre famille ? »

Les résultats sont regroupés dans le tableau ci-dessous :

Nombre d'enfants par famille	1	2	3	4
Effectif	7	13	5	2

1. Quelle est la population étudiée ?
2. Quels sont les individus de cette population ?
3. Quel est le caractère étudié ?
4. Quelle est la nature de ce caractère ?
5. Quel est le mode de cette série ?

6.3. Application de règles ou de méthodes

Exercice 6

Une enquête réalisée auprès des employés d'une entreprise d'une société sur le moyen de transport utilisé pour se rendre au travail a donné les résultats :

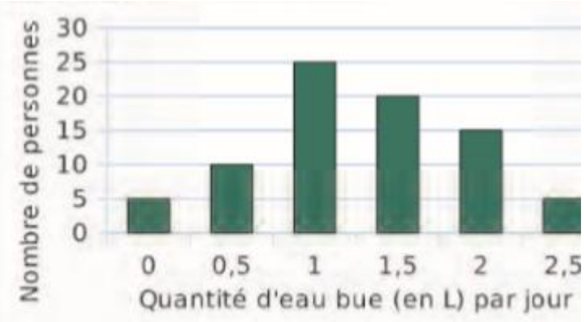
Moyen de transport	Véhicule personnel	Car de la société	Transport en commun	Moto
Effectif	15	30	25	10

1. Quelle est la population étudiée ?
2. Quel est l'effectif de cette population ?
3. Quel est le caractère étudié ? Est-il quantitatif ? Est-il qualitatif ?
4. Quel le mode de cette série ?
5. Calcule la fréquence de chaque modalité.

Exercice 7

On a demandé aux élèves d'une classe de troisième la quantité d'eau bue (en L) durant la journée de l'épreuve d'EPS du BFEM.

Les résultats de cette enquête sont donnés par le diagramme à bandes ci-dessous.



1. Donne la population étudiée.
2. Donne le caractère étudié sur cette population.
3. Donne le mode de la série statistique.
4. Donne dans un tableau, les modalités et leurs effectifs respectifs.
5. Donne le nombre de personnes qui consomment moins de 1,5 litre d'eau par jour.

Exercice 8

On donne les notes obtenues par deux groupes d'élèves lors d'un même devoir de mathématiques :

Groupe A : 2 – 5 – 7 – 10 – 10 – 10 – 13 – 15 – 18

Groupe B : 2 – 7 – 7 – 9 – 10 – 11 – 11 – 15 – 18

Donne le mode puis calcule la moyenne de chaque groupe.

Exercice 9 :

On a relevé les tailles en cm de 40 élèves d'une classe de 4^e :

161 – 152 - 159 -168 - 164 - 168 - 153 -146 - 155 - 155 – 163 - 160 - 155 - 160 -160 - 170 - 160 - 180 - 146 - 155 - 159 - 172 - 164 - 160 - 155 - 159 - 159 - 158 161 - 164 – 152 - 176 - 163 - 159 - 155 - 149 - 182 - 155 – 165 -   152.

1. Quelle est la population étudiée ?
2. Quels sont les individus de cette population ?
3. Donne l'effectif de la modalité 155.
4. Donne l'effectif de l'échantillon des tailles plus petites que160 cm.
5. Ordonne la série et présente dans un tableau, les modalités, les effectifs et les fréquences de ces modalités.

Exercice 10

Voici la répartition des groupes ethniques à l'intérieur d'une ville.

Groupes ethniques	Sarakolé	Sérère	Mandingue	Peulh	Wolof
Effectifs	130	370	160	600	900
Degrés	………	………	………	………	………

1. Représente cette série statistique par un diagramme en bandes
2. Complète le tableau puis représente cette série par un diagramme circulaire.

Exercice 11

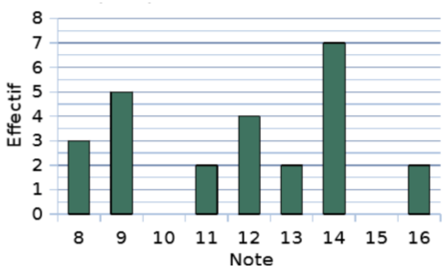
Doudou a obtenu aux cinq premiers contrôles de mathématiques les notes suivantes :

8,5 ; 10,5 ; 6 ; 12 ; 5,5.

1. Il calcule sa moyenne et trouve 8,5. Son calcul est-il juste ?
2. Avec le prochain contrôle, il voudrait avoir 10 de moyenne.
   Quelle note doit-il obtenir au $6^{ème}$ contrôle. (On pourra désigner cette note par x).

Exercice 12

Voici le diagramme à bâtons représentant la répartition des notes obtenues à un devoir de mathématiques, par une classe de $4^{ème}$.



a. En utilisant le diagramme à bâtons, remplis le tableau ci-dessus

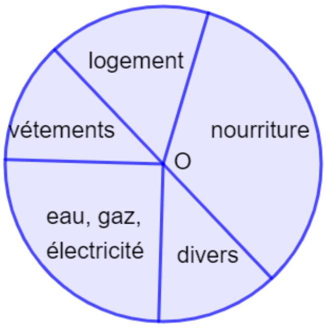
Note							
Effectif							
Fréquence							
Pourcentage							

b. Donne le nombre d'élèves qui ont obtenu la moyenne.

c. Calcule la moyenne de la classe pour ce contrôle.

Exercice 13

Le diagramme ci-dessous indique la répartition des dépenses de Monsieur DIOP.



1. Traduis en pourcentage cette répartition.
2. Sachant que Mr DIOP gagne 900.000 frs par mois, Calcule la somme consacrée à chaque part.
3. Doudou gagne 900.000 frs par mois, Il consacre 400.000frs à la nourriture, 180.000 frs au logement, 100. 000 frs aux vêtements, 120.000 frs au « gaz-électricité- eau » et le reste en frais divers.
   Traduis ces données par un diagramme semi- circulaire.

Exercice 14

Le tableau suivant donne la répartition des manuels dans un Collège.

Manuels	Maths	SVT	Français	H-G
Nombres	800	200	600	400

1. Représente le diagramme en bandes de cette série.
2. Calcule le nombre moyen de livres pour chacune de ces quatre disciplines.

6.4. Problèmes de vie ou situations complexes

Exercice 15

Nombre de frères et sœurs	0	1	2	3	4	total
Effectif						

Retrouve la répartition des élèves d'une classe de 4ème selon le nombre de frères et sœurs en observant attentivement le calcul (juste) effectué par Aïcha puis en remplissant le tableau ci-dessus.

Calcul de Aïcha : La moyenne des frères et sœurs est : $\frac{9+(5\times2)+(3\times3)+(2\times4)}{30}$

Exercice 16

Voici le relevé des ventes journalières d'un magasin durant une semaine avec quelques données manquantes.

Semaine	Montant des ventes en Frs	Angles en degrés en °	% du montant total des ventes
Lundi	90000	……….	………
Mardi	180000	36	…….
Mercredi	300 000	……..	……..
Jeudi	270000	……..	……….
Vendredi	……..	………	20
Samedi	600000	……….	…….....
Total		360	100

Aide la gérante du magasin à élaborer le tableau complet des ventes.

Exercice 17

Lors d'un test, noté de 0 à 4, passé dans les classes de 4ème d'un collège comptant 375 élèves. Le principal avait relevé tous les résultats dans un tableau mais un de ses enfants à effacé une partie du tableau. On donne ci-dessous le tableau avec les parties manquantes.

Aide le Principal à retrouver la valeur moyenne au test des classes de 4ème.

Note obtenue au test	0	1	2	3	4
Effectif	30	15			
Fréquence			28	20	

Exercice 18

Les deux tableaux ci-dessous indiquent la répartition des salaires dans deux entreprises.

Entreprise A

Salaire	210 000 Frs	330 000 Frs	54O.000 Frs
Effectif	32 (ouvriers)	10 (ouvriers) 4 (cadres)	4 (cadres)

Entreprise B

Salaire	210 000 Frs	330 000 Frs	54O.000Frs
Effectif	30 (ouvriers)	17 (ouvriers) 1 (cadre)	2 (cadres)

Deux de tes amis, Abdou et Moussa veulent être recrutés dans l'une des deux entreprises, l'un comme ouvrier et l'autre comme cadre.

Aide-chacun d'eux à faire le bon choix.

PARTIE II : ACTIVITES GEOMETRIQUES

Leçon 1 : Distance

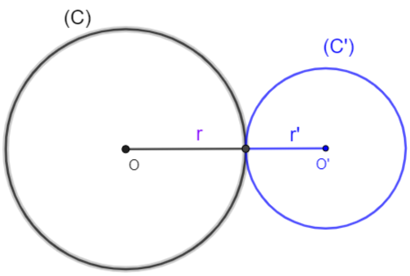
1.1. L'essentiel du cours

1.1.1. Positions relatives de deux cercles

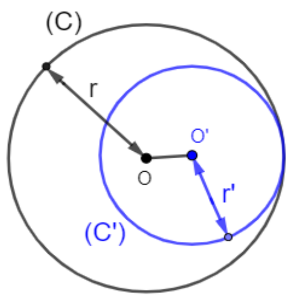
Propriétés

Soit (C) un cercle centre O de rayon r et (C') un cercle de centre O' de rayon r' tels que $r' < r$

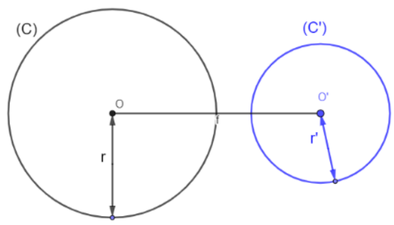
- Si $OO' = r + r'$, alors les deux cercles sont tangents extérieurement.



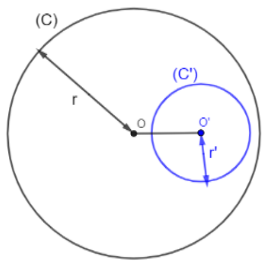
- Si $OO' = r - r'$, alors les deux cercles sont tangents intérieurement.



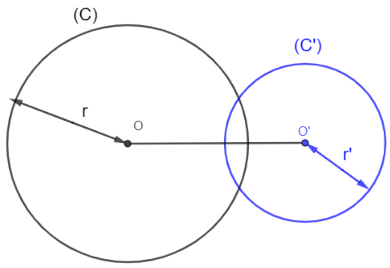
- Si $OO' > r + r'$, alors les cercles sont disjoints extérieurement.



- Si $OO' < r - r'$, alors les cercles sont disjoints intérieurement.



- Si $r - r' <$ OO'$< r + r'$ alors les deux cercles sont sécants.



1.1.2. Critères d'existence d'un triangle

❖ **Propriété 1**

Dans un triangle, la longueur d'un côté est strictement inférieure à la somme des longueurs des deux autres côtés.

Si ABC est un triangle alors, on a : $\begin{cases} AB < AC + BC \\ AC < AB + BC \\ BC < BA + AC \end{cases}$

❖ **Propriété 2**

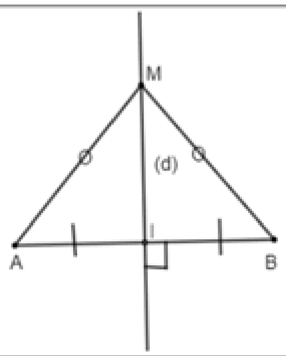
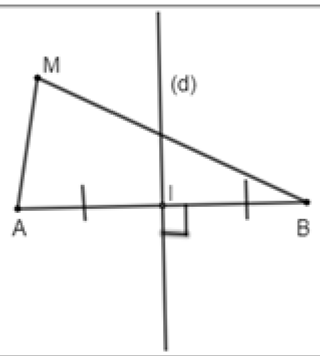
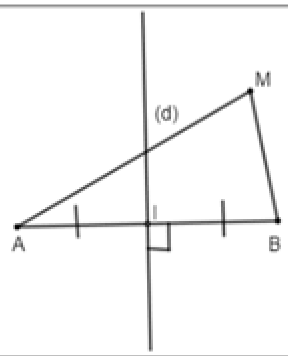
Soit a, b et c trois nombres strictement positifs.

Si $\begin{cases} \mathrm{a} < \mathrm{b} + \mathrm{c} \\ \mathrm{b} < \mathrm{a} + \mathrm{c} \\ \mathrm{c} < \mathrm{a} + \mathrm{b} \end{cases}$ alors on peut construire un triangle dont les côtés ont pour longueurs a, b et c.

1.1.3. Régionnement du plan

❖ **Propriétés**

Soit (d) la médiatrice d'un segment $[AB]$ et M un point du plan.

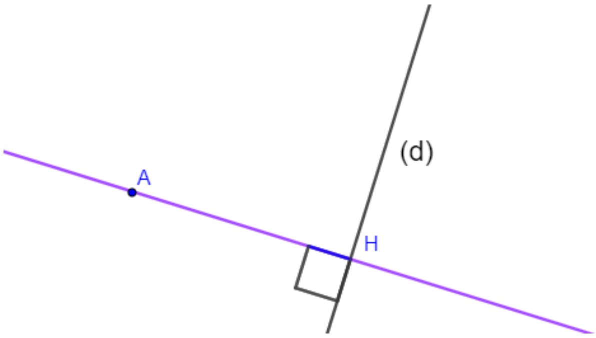
- Si M $\in (d)$ alors $MA = MB$. -Réciproquement, si $MA = MB$ alors M $\in (d)$	-Si M est du même côté que A par rapport à (d) alors MA < MB. -Réciproquement, si MA < MB alors M est du même côté que A par rapport (d).	-Si M est du même côté que B par rapport à (d) alors MA > MB. Réciproquement, si MA > MB alors M est du même côté que B par rapport (d).
		

1.1.4. Distance d’un point à une droite

❖ **Définition**

Soit une droite (d), A un point du plan et H le pied de la perpendiculaire à (d) qui passe par A.

- H est le point de la droite (d) le plus proche de A.
- On dit que AH est la distance du point A à la droite (d).



Remarque :

Si un point M appartient à une droite (d) alors la distance de M à (d) est égale à 0.

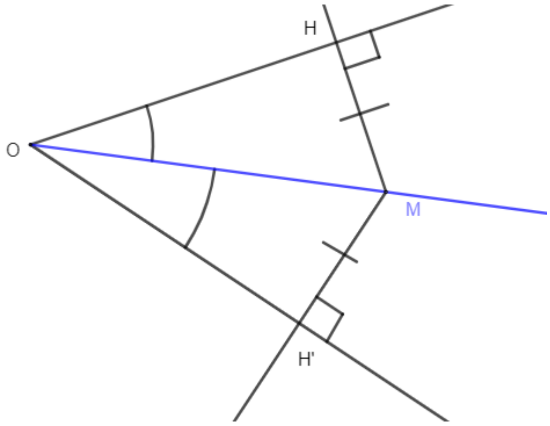
1.1.5. Propriété de la bissectrice d’un angle

Rappel

La bissectrice d’un angle est la demi-droite issue du sommet de l’angle et qui partage cet angle en deux angles de même mesure.

❖ **Propriété**

- Si un point est situé sur la bissectrice d’un angle alors il est à égale distance des côtés de cet angle.
- Si un point est équidistant des côtés d’un angle alors il est situé sur la bissectrice de l’angle.

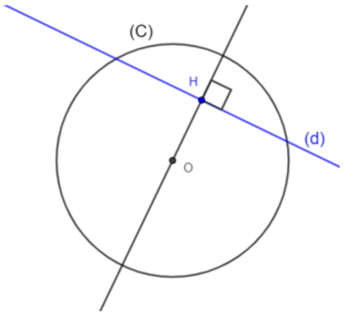
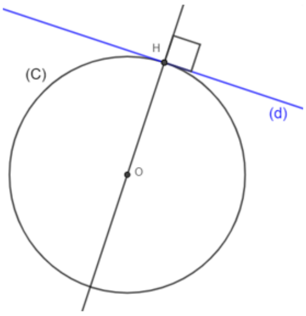
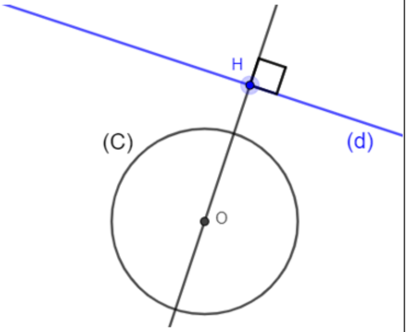


1.1.6. Positions relatives d’une droite et d’un cercle

❖ **Propriété**

Soit (C) un cercle de centre O et de rayon r, (d) une droite du plan et H le pied de la perpendiculaire à (d) passant par O (la distance de O à (d) est alors égale à OH).

- Si $OH > r$, alors (d) et (C) n'ont pas de point commun. On dit qu'ils sont disjoints.
- Si $OH = r$, alors (d) et (C) ont un seul point commun qui est le point H. On dit qu'ils sont tangents.
- Si $OH < r$, alors (d) et (C) ont deux points communs. On dit qu'ils sont sécants.

$OH < r$; (d) et (C) sont sécants	$OH = r$; (d) et (C) sont tangents	$OH > r$; (d) et (C) sont disjoints
		

1.2. Restitution de connaissances

Exercice 1 :

On considère un cercle (C) de centre O et de rayon r et un cercle (C') de centre O' et de rayon r'.

Recopie et complète chacun des énoncés suivants :

a. Si $OO' = 6$; $r = 4$ et $r' = 2$ alors ces deux cercles sont………

b. Si $OO' = 5$; $r = 3$ et $r' = 1$ alors ces deux cercles sont ………

c. Si $OO' = 4$; $r = 5$ et $r' = 3$ alors ces deux cercles sont ……..

d. Si $OO' = 3$; $r = 5$ et $r' = 2$ alors ces deux cercles sont ……..

e. Si $OO' = 5$; $r = 5$ et $r' = 2$ alors ces deux cercles sont …….

Exercice 2

Pour chacune des questions suivantes trois réponses sont proposées dont une seule est juste.

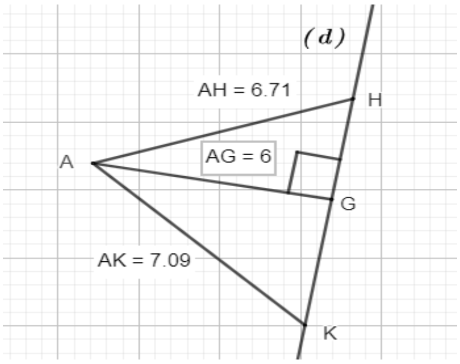
Recopie le numéro de chaque question suivi de la lettre correspondante à la réponse choisie.

1. Si un triangle a deux côtés de longueurs 6 cm et 4 cm alors la longueur du troisième côté peut être :

   a. 10 cm ; b. 12 cm ; c. 8 cm.

2. Dans la figure ci-dessous la distance du point A à la droite (d) est :

   a. AH; b. AK ; c. AG



Exercice 3

Recopie les réponses et encadre le numéro qui correspond à la bonne réponse

Si A, B et C sont trois points non alignés du plan, alors on a :

a) $AB + BC = AC$

b) $AB + BC < AC$

c) $AB + BC > AC$

Exercice 4

Pour chacun des énoncés ci-dessous, trois réponses sont données dont une seule est juste.

Ecris le numéro de l'énoncé suivi de la lettre correspondant à la réponse choisie.

1. Si (C) est un cercle de centre O et de rayon 5 cm et (d) une droite telle que la distance de O

à (d) est de 6 cm ; alors :

a. (d) et (C) sont sécants ; b. (d) et (C) sont disjoints ; c. (d) et (C) sont tangents.

2. Si (C_1) un cercle de centre A et de rayon 6 cm et (d_1) une droite telle que la distance de A à (d_1) est 4 cm ; alors :

a. (d_1) et (C_1) sont sécants ; b. (d_1) et (C_1) sont disjoints ; c. (d_1) et (C_1) sont tangents.

3. Si (C_2) est un cercle de centre I et de rayon 7 cm et (d) une droite telle que la distance de I à (d_1) est 7 cm alors :

a. Si (d_2) et (C_2) sont sécants ; b. (d_2) et (C_2) sont disjoints ; c. (d_2) et (C_2) sont tangents.

Exercice 5

Recopie et complète les phrases suivantes.

1. Si une demi- droite partage un angle en …… , alors elle est la bissectrice de cet angle.
2. Une demi-droite qui a pour origine le sommet d'un angle et qui contient un point…….des deux côtés de l'angle est la bissectrice de cet angle.
3. Tout point situé sur la bissectrice d'un angle est à ……….

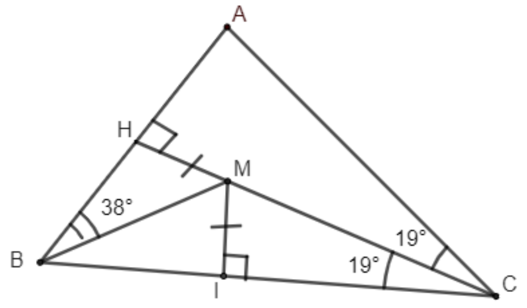
1.3. Application de règles ou de méthodes

Exercice 6

En utilisant les données de la figure à main levée ci-dessous, détermine :

a. la mesure de l'angle $\widehat{MBC}$;

b. la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$.



Exercice 7

Trace deux droites sécantes (d) et (d'). Construis tous les points du plan qui sont à 3 cm de la droite (d) et à 4 cm de la droite (d').

Exercice 8

On considère un cercle (C) de centre O, de rayon 3 cm et un point A de (C).

1. Construis le cercle (C') de centre O', de rayon 2 cm, tangent extérieurement à (C) en A.
2. Démontre que la droite perpendiculaire à (OO') en A est tangente aux deux cercles (C) et (C').

Exercice 9

1. Trace un cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et de rayon 3 cm contenant deux points A et B qui ne sont pas diamétralement opposés.

   Trace la droite (d) perpendiculaire à (AB) et passant par O. Elle coupe $(\mathcal{C})$ en L et K

2. a. Montre que (d) est la médiatrice de [AB].

   b. Déduis-en que LA = LB.

Exercice 10

On donne un carré ABCD de centre O et le point E milieu du coté [BC].

Trace le cercle (C) de centre O passant par E.

Donne la position relative de chacune des droites (AB), (BC), (CD) et (AD) par rapport au cercle (C) en justifiant tes réponses.

Exercice 11

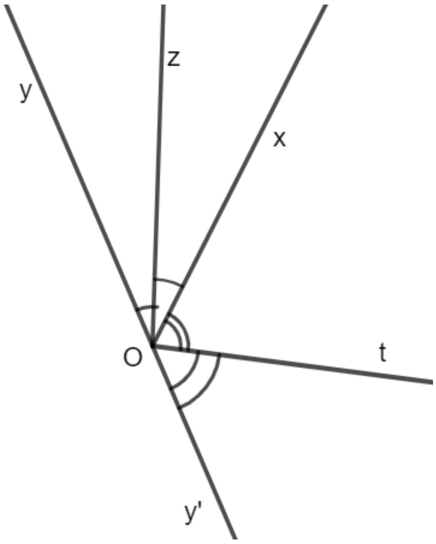
Soit un cercle (C) de centre O qui passe un point A. On considère deux points B et C de la tangente à (C) en A tels que : AB= AC.

1. Fais la figure.
2. Démontre que OB = OC.

Exercice 12

La demi- droite $[Oz)$ est bissectrice de $\widehat{xOy}$ et la demi-droite $[Ot)$ est bissectrice de $\widehat{y'Ox}$.

On donne $\widehat{xOy}$ = 44°. Donne les mesures des angles $\widehat{xOz}$ $\widehat{y'Ox}$ $\widehat{y'Ot}$ et $\widehat{tOz}$.



Exercice 13

Soit ABC un triangle d'aire 7,5 cm^2 tel que BC= 5cm.

1. Quelle est la distance de A à la droite (BC) ?
2. Construis le triangle ABC.

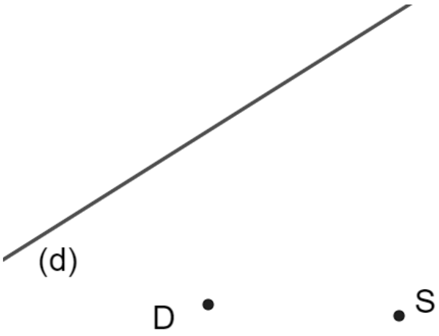
1.4. Problèmes de vie ou situations complexes

Exercice 14

Dans le dessin ci-dessous, deux villages, Doudame et Senghor sont représentés respectivement par les points D et S ; une route qui passe à côté de ces villages est représentée par la droite (d).

On veut construire un poste de santé à 100 mètres de la route et équidistant des deux villages.

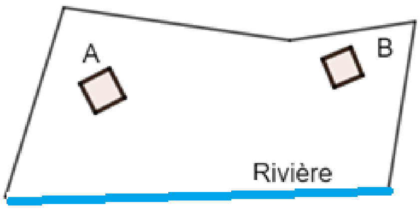
Détermine les différentes positions que peut occuper ce poste de santé.



Exercice 15

On veut installer une pompe sur le bord de la rivière pour fournir de l'eau aux villages A et à B.

Détermine le point E où on doit placer la pompe pour avoir un minimum de canalisation à faire.

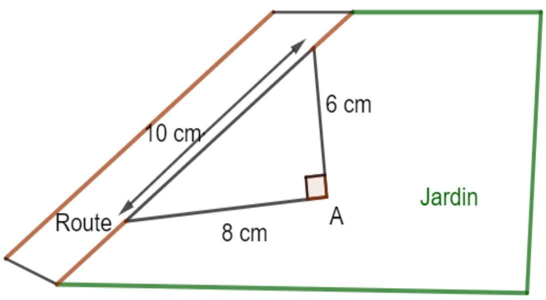


Exercice 16

Un jardinier a placé un tourniquet en A afin d'arroser son jardin. Il doit régler le rayon d'arrosage du tourniquet (5 m au maximum) tout en veillant à ne pas asperger les promeneurs circulant sur la route.

Détermine la plus grande partie de la parcelle de terrain pouvant étre arrosée sans que la route ne soit aspergée.

Figure faite avec une échelle de 1/100.



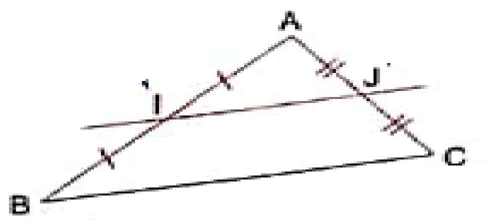
Leçon 2 : Droites des milieux

2.1. L'essentiel du cours

❖ **Propriété.**

Dans un triangle, toute droite qui passe par les milieux de deux côtés est parallèle au support du troisième côté. Cette droite est appelée droite des milieux.

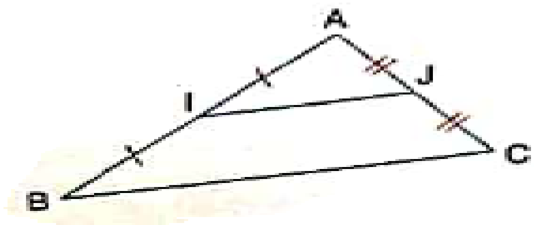
Si I milieu de [AB] et J milieu de [AC] alors les droites (IJ) et (BC) sont parallèles.



❖ **Propriété.**

Dans un triangle, la longueur du segment qui joint les milieux de deux côtés est égale à la moitié de la longueur du troisième côté.

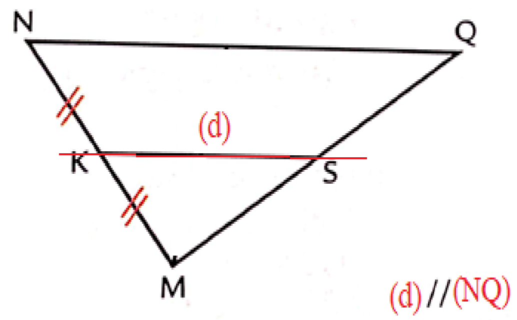
Si I milieu de [AB] et J milieu de [AC] alors $IJ = \frac{BC}{2}$.



❖ **Propriété.**

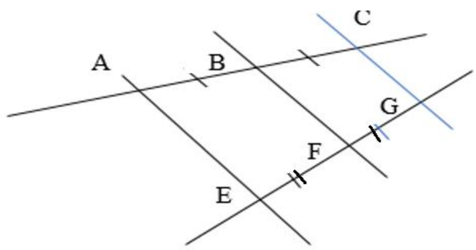
Dans un triangle, la droite qui passe par le milieu d'un côté et qui est parallèle au support d'un autre côté, coupe le troisième côté en son milieu.

Dans le triangle MNQ, K est le milieu de [MN] et la parallèle (d) à (NQ) passant par K coupe le segment [QM] en S. Donc S est le milieu de [QM] .



❖ **Propriété.**

Si trois droites parallèles découpent sur une sécante deux segments consécutifs de même longueur, alors elles découpent sur toute autre sécante deux segments consécutifs de même longueur (parallèles équidistantes).



1.2. Restitution de connaissances

Exercice 1

Rappelle la propriété relative à la droite qui passe par les milieux de deux côtés d'un triangle.

Exercice 2

Rappelle la propriété relative au segment qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle.

Exercice 3

Recopie et complète la phrase suivante en mettant le mot ou le groupe de mots qui convient sur les pointillés.

Si une droite est parallèle au support d'un côté d'un triangle et passe par le milieu d'un autre côté alors……………

Exercice 4

Recopie et complète la phrase suivante en mettant le mot ou le groupe de mots qui convient sur les pointillés.

Si trois droites parallèles découpent sur une sécante deux segments consécutifs de même longueur, alors...

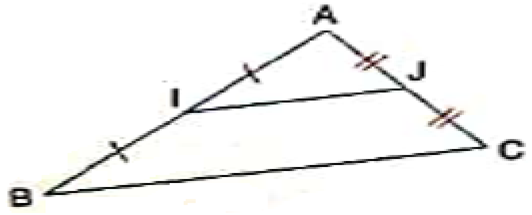
2.3. Application de règles ou de méthodes

Exercice 6

ABC un triangle, I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [AC]. Montrer que les droites (IJ) et (BC) sont parallèles.

Exercice 7

ABC un triangle, I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [AC]. Montrer que IJ = $\frac{1}{2}$ BC.



Exercice 8

On considère le triangle ABC tel que AB $= 6\ cm$; AC $= 5$ cm et BC $= 4\ cm$.

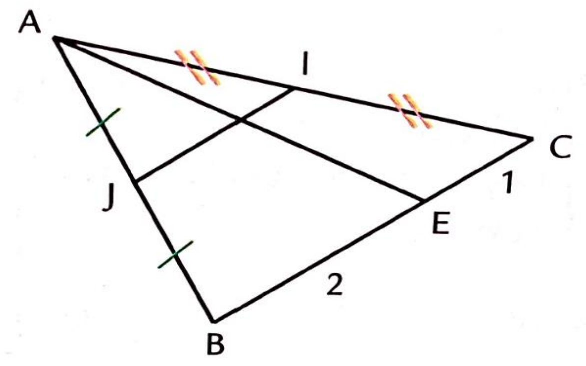
1. Fais la figure que tu compléteras au fur et à mesure.
2. Soit D le milieu de [BC] . La parallèle à la droite (AB) passant par D coupe (AC) en E Montre que le point E est le milieu de [AC].
3. Montre que DE = 3cm
4. Les droites (AD) et (BE) se coupent en G et la droite (CG) coupe le segment [AB] en F. Montre que F est le milieu de [AB].

Exercice 9

MNQ un triangle. K le milieu du segment [MN]. La droite passant par K et parallèle à la droite (NQ) coupe la droite (MQ) en S. Montre que S est le milieu du segment [MQ].

Exercice 10

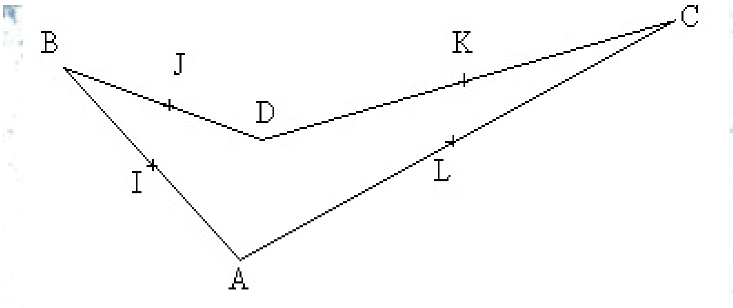
En utilisant les informations portées sur la figure suivante, calcule IJ. Les mesures sont en centimètre.



2.4. Problèmes de vie ou situations complexes

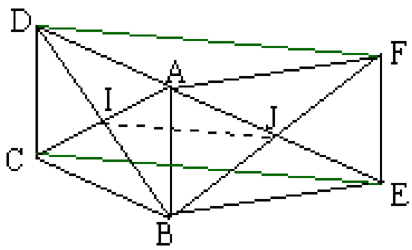
Exercice 11

Sur la figure ci-contre les points I, J, K et L sont les milieux respectifs des segments [AB], [BD], [DC] et [AC] . Compare les longueurs des segments [IL] et [JK] en justifiant ta réponse.



Exercice 12

Dans la figure ci-contre, ABCD et ABEF sont deux parallélogrammes de centres respectifs I et J.
Donne la nature du quadrilatère DFEC en justifiant ta réponse.

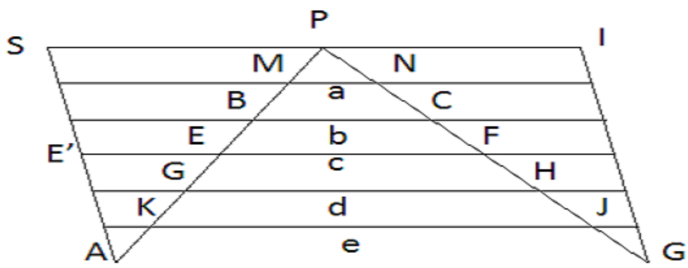


Exercice 13

Mamadou a acheté un terrain ayant la forme d'un quadrilatère, les bornes sont nommées A, B, C et D. Il sait aussi que les points M,N ,P et R sont les milieux respectifs de $[AB]$; $[BC]$; $[CD]$ et $[DA]$.
Il voudrait un peu plus de précision sur la nature de ce quadrilatère $MNPR$.
Consigne.
Propose-lui une solution à son problème.

Exercice 14

Dans la figure ci-contre, SIGA est un parallélogramme et les droites qui coupent [SA] sont parallèles et découpent sur la sécante (PA) des segments consécutifs de même longueur.
On pose:
$MN = a,\ BC = b,\ EF = c,\ GH = d, KJ = e,\ AG = f.$
Démontre que $a = \frac{f}{2^3}$ où $f = AG$.



Leçon 3 : Droites remarquables dans un triangle

3.1. L'essentiel du cours

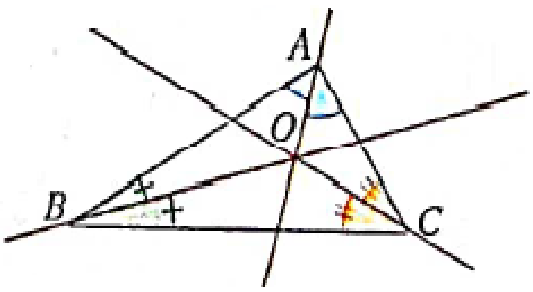
3.1.1. Bissectrices

❖ **Définition**

La bissectrice d'un angle d'un triangle est la demi-droite qui passe par le sommet de cet angle et qui partage l'angle en deux angles de même mesure.

❖ **Propriété**

Les bissectrices des angles d'un triangle sont concourantes.
Leur point d'intersection est le centre du cercle tangent aux trois côtés du triangle, ce cercle est appelé cercle inscrit dans le triangle.



2.1.2. Médianes

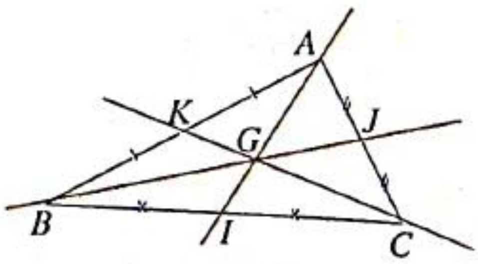
❖ **Définition**

La médiane relative à un côté d'un triangle est la droite qui passe par le milieu de ce côté et par le sommet opposé à ce côté.

❖ **Propriété**

Les médianes d'un triangle sont concourantes en un point appelé le centre de gravité de ce triangle.
Le centre de gravité est situé aux deux tiers de chaque médiane à partir du sommet.

$AG = \frac{2}{3} AI, \ BG = \frac{2}{3} BJ$ et $CG = \frac{2}{3} CK.$



3.1.3. Reconnaissance d'un triangle isocèle

- Si dans un triangle une hauteur est en même temps bissectrice alors ce triangle est isocèle.
- Si dans un triangle une médiatrice est en même temps bissectrice alors ce triangle est isocèle.
- Si dans un triangle une médiane est en même temps bissectrice alors ce triangle est isocèle.

3.2. Restitution de connaissances

Exercice 1

Recopie et complète la phrase suivante en mettant le mot ou le groupe de mots qui convient sur les pointillés : Les trois bissectrices des angles d'un triangle sont....................................

Exercice 2

Rappelle la propriété relative aux trois médianes d'un triangle.

Exercice 3

Soit $\widehat{xOy}$ un angle et M un point du plan. Complète la phrase suivante en écrivant sur les pointillés le terme qui convient :

Si M est équidistant des côtés de l'angle alors M appartient à ....de $\widehat{xOy}$.

Exercice 4

Réponds par Vrai ou Faux

1. La médiatrice d'un segment est une droite dont chaque point est équidistant des extrémités du segment.
2. Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes en un point appelé orthocentre.
3. L'orthocentre est le centre du cercle circonscrit au triangle.
4. Le point d'intersection des bissectrices est le centre du cercle inscrit au triangle.

Exercice 5

Complète la phrase suivante en écrivant sur les pointillés le terme qui convient :

Le centre de gravité d'un triangle est situé aux.......................de chaque médiane à partir du sommet.

Exercice 6

Réponds par Vrai ou Faux

1. Si je connais une médiane alors je peux placer le centre de gravité.
2. Si je connais une bissectrice, alors je peux construire le cercle inscrit.
3. Si je connais deux bissectrices alors je connais la troisième.

Exercice 7

Complète la phrase suivante en écrivant sur les pointillés le terme qui convient :

On sait que [MI) et [NI) sont deux bissectrices du triangle MNP, avec I leur point d'intersection, donc [PI) est une ....

Exercice 8

(C) est un cercle de centre O et de rayon 3. I et J sont deux points du cercle tels que O, I et J soient non alignés. Parmi les points suivants, indique par quel point passe la droite (D) médiatrice de [IJ]. Recopie et mets une croix sur les pointillés à côté de la réponse juste :

.............I

.............J

............O.

3.3. Application de règles ou de méthodes

Exercice 9

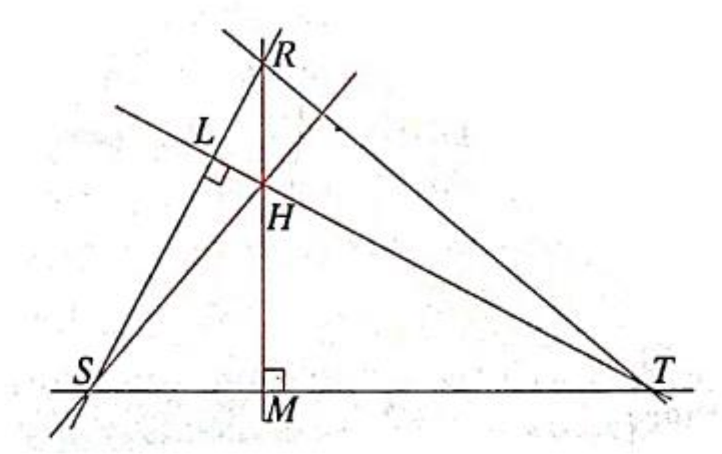
Trace un triangle ABC tel que $AB = 6cm, AC = 5cm$ et $CB = 4cm$.
Trace le cercle inscrit dans ce triangle.

Exercice 10

M, N et G sont trois points non alignés. Construis le point P tel que G soit le centre de gravité du triangle MNP.

Exercice 11

Sur la figure suivante, explique pourquoi les droites (SH) et (RT) sont perpendiculaires.



Exercice 12

Trace le triangle ABC tel que AB = 10 cm, AC = 8 cm et $\widehat{A} = 120°$.
Construis le cercle circonscrit au triangle ABC.

Exercice 13

1. Construis un triangle ABC tel que AB = 14cm, AC = 10 cm et BC = 12 cm.
2. Construis ses médiatrices en rouge, ses médianes en vert, ses hauteurs en bleu et ses bissectrices en noir.
3. Place le point G centre de gravité du triangle, le point O centre du cercle circonscrit, le point I centre du cercle inscrit et le point H orthocentre du triangle.
4. Pour ce triangle ABC, construis les cercles circonscrit et inscrit.
5. Trace la droite qui passe par O et G. Vérifie qu'elle passe par H.

3.4. Problèmes de vie ou situations complexes

Exercice 14

Soit EFG un triangle rectangle en F, K le milieu du segment [EG]. La droite passant par K et perpendiculaire à (EF) coupe [EF] en L. Les droites (FK) et (GL) se coupent en M.
Démontre que la droite (EM) coupe le segment [FG] en son milieu.

Exercice 15

MIL est un triangle de centre de gravité G. Soit A, B et C les milieux respectifs des cotés [MI], [IL] et [ML]. Les droites (AC) et (MB) se coupent en J.
Démontre que G est aussi le centre de gravité du triangle ABC.

Exercice 16

Un rectangle ABCD est tel que $\mathrm{AB} = 7cm$ et $\widehat{\mathrm{BAC}} = 45^{\circ}$.
Donne la longueur du côté [BC] en justifiant ta réponse.

Leçon 4 : Triangle rectangle

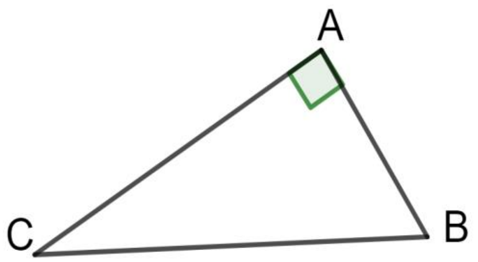
4.1. L'essentiel du cours

4.1.1 Propriétés

❖ **Théorème de Pythagore**

Dans un triangle rectangle la somme des carrés des longueurs des côtés de l'angle droit est égale au carré de la longueur de l'hypoténuse.

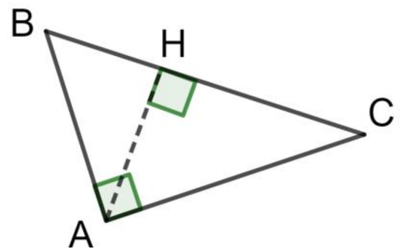
En d'autres termes, si ABC est un triangle rectangle en A alors : $AB^2 + AC^2 = BC^2$.



❖ **Propriété**

Soit ABC un triangle rectangle en A et H le pied de sa hauteur issue de A (comme indiqué sur la figure ci-contre)

On a $AB \times AC = AH \times BC$



4.1.2. Reconnaissances

❖ **Réciproque du théorème de Pythagore**

Si dans un triangle la somme des carrés des longueurs de deux côtés est égale au carré de la longueur du troisième côté alors ce triangle est rectangle

En d'autres termes ; si ABC est un triangle tel que $AB^2 + AC^2 = BC^2$ alors le triangle ABC est rectangle en A.

❖ **Reconnaissance**

Soit un triangle ABC et H le pied de la hauteur issue de A. Si $AB\times AC = AH\times BC$ alors le triangle ABC est rectangle en A.

4.2. Restitution de connaissances

Exercice 1

Réponds à chacun des énoncés suivants par Vrai ou Faux.

a. Si un triangle MNP est rectangle en M alors son côté le plus long est [NP].

b. Si MNP est un triangle rectangle d'hypoténuse [MN] alors les côtés de l'angle droit sont [MP] et [NM].

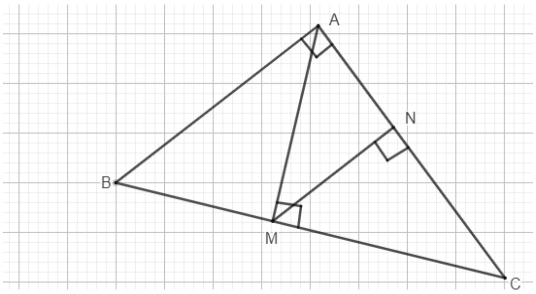
c. Soit MNP un triangle et Q le pied de sa hauteur issue de M.
Si MQ× NP = MN× MP alors ce triangle est rectangle en N.

d. Si un triangle a pour dimensions 10 cm, 9 cm et 8 cm, alors son hypoténuse est le côté de longueur 10 cm.

e. Soit EFG un triangle ; si $EF^2 \neq EG^2 + GF^2$, alors le triangle EFG ne peut pas être un triangle rectangle en G.

Exercice 2

Nomme tous les triangles rectangles dans la figure ci-contre puis donne pour chacun d'eux son hypoténuse.



Exercice 3

Recopie et complète les égalités suivantes.

1. Si ARS est un triangle rectangle en A alors :
   a. $RS^2 = \cdots$; b. $AS^2 = \cdots$; c. $AR^2 = \cdots$
2. Si EFG est un triangle rectangle en G et H le pied de sa hauteur issue de G, alors
   GH ×….= EG× ....

Exercice 4

Relie chaque égalité au triangle rectangle correspondant :

$JK^2 = IJ^2 + IK^2$ ×	× le triangle IJK est rectangle en I
$IJ^2 + JK^2 = IK^2$ ×	× le triangle IJK est rectangle en J
$IJ^2 = IK^2 + JK^2$ ×	× le triangle IJK est rectangle en K

Exercice 5

Recopie et complète chacun des énoncés suivants.

1. Dans un triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à ……..
2. Si le carré de la longueur d'un côté d'un triangle est égal ………. alors ce triangle est rectangle.
3. Dans un triangle rectangle, le produit des longueurs des côtés de l'angle droit est égal au produit de la longueur de la hauteur issue de l'angle droit et de ………………………….

4.3. Applications de règles ou de méthodes

Exercice 6

Le tableau ci-dessous concerne des triangles LM N, rectangles en N. Dans chaque cas, calculer la dimension manquante.

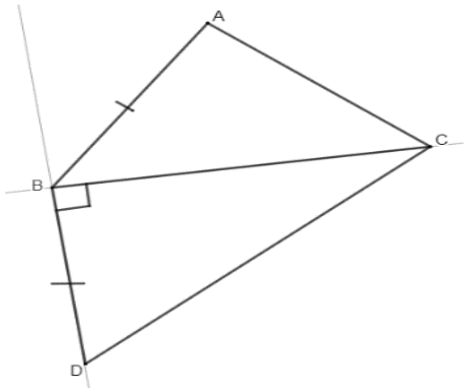
LN	5 cm	7 cm	…m	4,3dm
MN	6 cm	….cm	4m	…dm
LM	…cm	9cm	10m	4,5dm

Exercice 7

Sur la figure ci-contre, ABC est un triangle particulier dont les côtés vérifient l'égalité : $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

a. Montre que DC=AC

b. Que peut-on dire des triangles ABC et BDC ?



Exercice 8

Soit ABC est un triangle rectangle en B tel que : AB = 6 cm, BC = 8 cm et AC =10 cm.

Calcule la mesure de la hauteur du triangle issue de B.

Exercice 9

ABC est un triangle rectangle en B. Le segment $[BH]$ est une hauteur de ce triangle.

Démontre que : $AH^2 + HC^2 + 2BH^2 = AC^2$.

Exercice 10

1. a. Construis un rectangle ABCD tel que : AB= 7,5 cm et AC= 8,5 cm.

   b. Calcule BC et l'aire du triangle ABC.

2. En utilisant l'aire du triangle ABC, calcule la distance du point B à la droite (AC).

Exercice 11

L'unité de longueur est le cm.

1. Construis :

   a. un triangle ABC rectangle en B tel que : AB=8 et BC= 6.

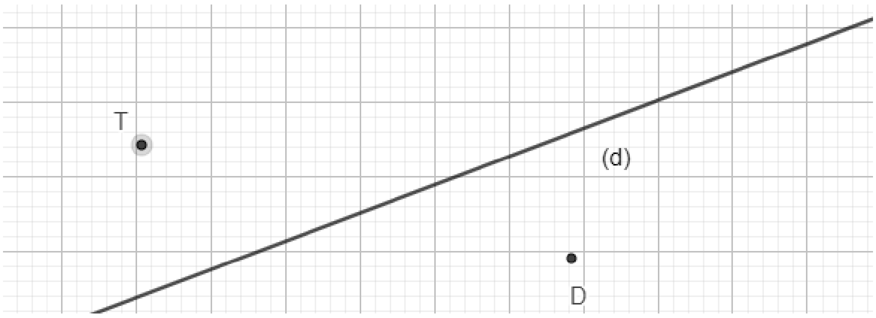
   b. le cercle de centre A et de rayon AB ; il coupe la droite (AC) au point M ;

   c. le cercle de centre C et de rayon CB ; il coupe la droite (AC) en N.

2. Calcule MN.

<u>Exercice 12</u> :

Reproduis la figure ci-dessous, puis sans utiliser l'équerre, construis le point S sur la droite (d) tel que le triangle DST soit rectangle en S.



4.4. Problèmes de vie ou situations complexes

Exercice 13

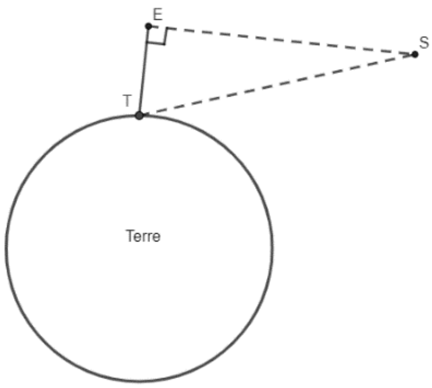
Une échelle de 3,5m glisse jusqu'au sol ; le point A se déplace sur le mur vertical.
Sur quelle ligne se déplace le milieu M de l'échelle.

Exercice 14

Amadou veut franchir, avec une échelle, un mur de 3,50 m de haut devant lequel se trouve un fossé rempli d'eau, d'une largeur de 1,15 m. Il doit poser l'échelle sur le sommet du mur.
Détermine la longueur minimale de cette échelle en cm.

Exercice 15

Quelle distance (à 1 km prés) séparent les deux satellites E et S, sachant que l'angle $\widehat{TES}$ est droit et qu'un signal radio met $\frac{1}{60}$ seconde de T à S et $\frac{1}{100}$ seconde de E à T.
(Vitesse du signal radio : 300.000km/s).

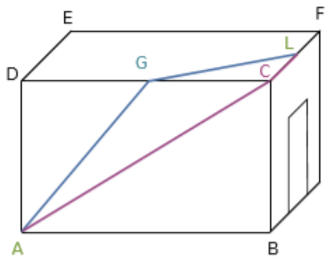


Exercice 16

Le bâton de Abdou le berger a une longueur de 1,40 m. Il l'enfonce verticalement dans le sol à une profondeur de 0,15 m. Le bâton fait alors une ombre de direction horizontale de 0,90 m de long.
Détermine la distance entre l'extrémité supérieure du bâton et l'extrémité de l'ombre.

Exercice 17

La pièce d'une maison a la forme d'un pavé droit dont les dimensions sont :
AB = 5 m ; BC = 2,5 m et DE = 4 m. Abdou doit étaler un câble du point A au point L, milieu de [CF]. Il hésite entre les deux possibilités représentées ci-dessous, où G est le milieu de [DC].



En bleu, de A vers G puis de G vers L ; en violet, de A vers C puis de C vers L.

Aide Abdou à choisir le chemin qui nécessite moins de câble.

Exercice 18

Un massif de fleurs a la forme d'un triangle rectangle et le jardinier veut l'entourer d'une clôture. Au moment d'acheter la grille, il s'aperçoit qu'il a oublié de mesurer un des côtés de l'angle droit. Les deux seules mesures dont il dispose sont, en mètres : 6,75 et 10,59.

Aide le jardinier à calculer la longueur de la grille qu'il doit acheter.

Leçon 5 : Translations et vecteurs

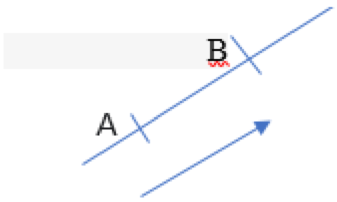
5.1. L'essentiel du cours

5.1.1. Droites de même direction. Sens sur une direction

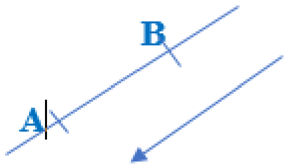
❖ **Sens** et **direction**.

En mathématiques, on distingue sens et direction. Une droite définit une direction.
Si (d) est une droite, toute autre droite qui lui est parallèle a même direction que (d).
Autrement dit des droites ont même direction si elles sont parallèles.
Il y a deux sens de parcours sur une droite
Par exemple pour la droite (AB) il y a le sens de A vers B et celui de B vers A

Sens de A vers B

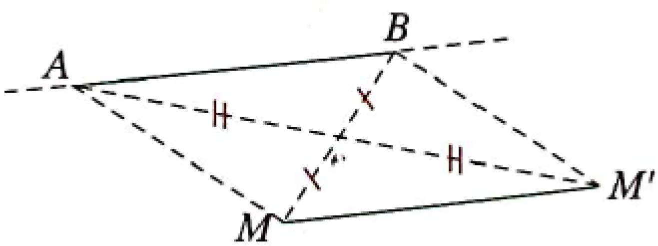


Sens de B vers A



5.1.2. Définition et construction

Soit A et B deux points distincts du plan.
Dire que le point M'est l'image du point M par la translation qui transforme A en B signifie que le quadrilatère ABM'M est un parallélogramme.



5.1.3. Propriétés

- Dans une translation, l'image d'un segment est un segment qui lui est parallèle et de même longueur ;
- Dans une translation, l'image d'une droite est une droite qui lui est parallèle
- Dans une translation, l'image d'une demi-droite est une demi-droite de même sens et les supports des demi- droites parallèles ;
- Dans une translation, l'image d'un cercle est un cercle de même rayon ;
- Une translation conserve l'alignement, les longueurs, les angles, les aires, le parallélisme et l'orthogonalité.

5.1.4. Définition d’un vecteur et vecteurs égaux

❖ **Définition et notation.**

Soit A et B deux points du plan, le vecteur d’origine A et d’extrémité B noté $\overrightarrow{AB}$ est déterminé par :

- sa direction : celle de la droite (AB) ;
- son sens : le sens de A vers B.
- sa longueur : la longueur du segment [AB].

❖ **Vecteurs égaux :**

Deux vecteurs sont dits égaux s’ils ont la même direction, le même sens et la même longueur.

- Etant donnés un vecteur $\vec{u}$ et un point A du plan, il existe un unique point B tel que : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$
- Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et A, B, C, D non alignés, alors ABCD est un parallélogramme.
- Si un point I est le milieu d'un segment [AB], alors $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$
- Si des points I, A et B sont tels que $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ alors I est le milieu du segment [AB].

5.2. Restitution de connaissances

Exercice 1

Rappelle la condition d'égalité de deux vecteurs.

Exercice 2

Répondre par Vrai ou Faux.

1. Dans une translation l'image d'un segment est un segment qui lui est parallèle et de longueur différente.
2. Dans une translation l'image d'une droite est une droite qui lui est parallèle.
3. Une translation ne conserve pas l'alignement.

Exercice 3

Recopie et complète la phrase suivante en écrivant sur les pointillés les termes qui conviennent :

Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et les points A, B, C et D non………… alors $ABCD$ est un……….....................

Exercice 4

Pour chaque énoncé, trois réponses A, B et C sont proposées dont une seule est exacte.
Pour répondre tu écris le numéro de l'énoncé suivi de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

N°	Enoncés	Réponses	
1	GFRT est un parallélogramme. Indique laquelle de ces trois affirmations est exacte	A	G est l'image de T par la translation qui transforme R en F.
		B	C'est la même translation qui transforme F en G et T en R.
		C	R a pour image T par la translation qui transforme G en F.
2	Le point A a pour image le point B par la translation qui transforme B en C. Indique laquelle de ces trois affirmations est exacte	A	C est le milieu du segment [AB]
		B	B est le milieu du segment [AC]
		C	A est le milieu du segment [BC]
3	Une translation transforme : le point A en B et le point C en D. Indique laquelle de ces trois affirmations est exacte.	A	ABCD est un parallélogramme.
		B	ACBD est un parallélogramme.
		C	ABDC est un parallélogramme.

Exercice 5

Recopie et complète la phrase suivante en écrivant sur les pointillés les termes qui conviennent :

Si des points A, B et I sont tels que : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ alors I est le………… du segment $[AB]$.

5.3. Application de règles ou de méthodes

Exercice 6

Construire un triangle DEF rectangle en F. Construire le point E’ image de E par la translation qui transforme D en F.

Exercice 7

Un triangle a un côté de 7,4 cm. La hauteur correspondante mesure 1,4cm. On trace l’image du triangle par une translation.

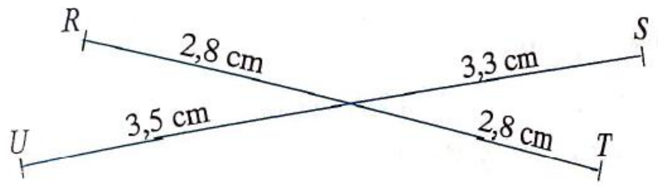
Quelle sera l’aire du triangle obtenu. Explique la réponse.

Exercice 8

1. Construis un triangle ABC.
2. Construire :
    a. le point D image de C par la translation qui transforme A en B ;
    b. le point E image de de B par la translation qui transforme D en A.
2. Démontre que A est le milieu du segment [CE].

Exercice 9

1. Reproduis la figure suivante.



2. Le point T est-il l’image du point U par la translation qui transforme R en S ?
   Justifie ta réponse.

Exercice 10

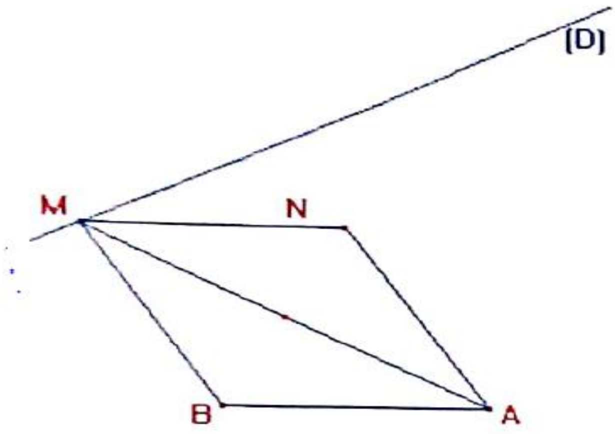
Dans un triangle ABC, I, J et K sont les milieux respectifs des côtés [BC], [AC] et [AB]. Démontre que K est l’image de B par la translation qui transforme I en J.

5.4. Problèmes de vie ou situations complexes

Exercice 11

On donne la figure ci-contre, les points A et B sont fixes, ainsi que la droite (D). Les points M et N se déplacent de façon que M soit sur (D) et que ABMN soit toujours un parallélogramme.

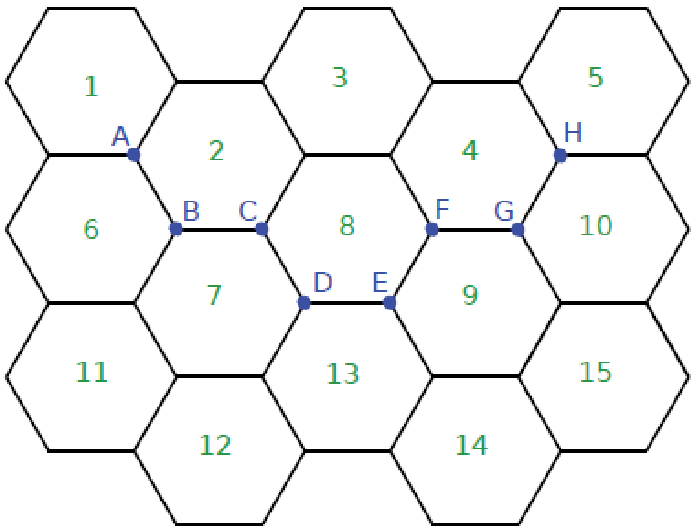
Détermine l'ensemble de points que décrit N.



Exercice 12

La figure ci-contre donne un pavage dont le motif de base est un hexagone régulier.

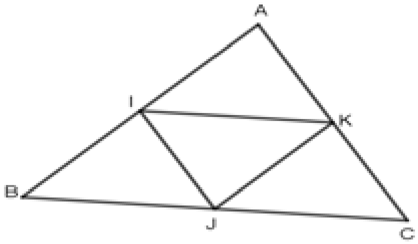
Détermine les images respectives des pièces 8 et 2 par la translation qui transforme E en C.



Exercice 13

Dans la figure ci-contre ABC est un triangle et I, J et K les milieux respectifs des segments [AB], [BC] et [CA].

Ecris tous les vecteurs qui sont égaux au vecteur $\overrightarrow{AI}$



Leçon 6 : Rotations et polygones réguliers

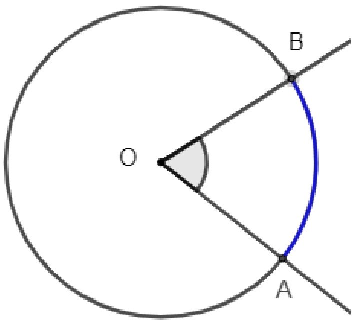
6.1. L'essentiel du cours

6.1.1. Angle au centre –Arc intercepté

❖ **Définitions**

- On appelle angle au centre d'un cercle, tout angle qui a pour sommet le centre de ce cercle.
- Soit $\widehat{AOB}$ un angle au centre d'un cercle (C), A et B étant les points d'intersection des côtés de l'angle avec le cercle.

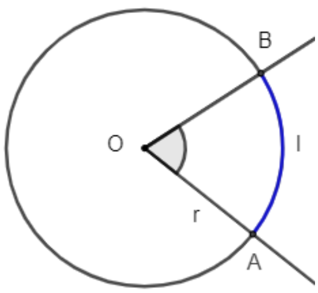
On dit que l'angle $\widehat{AOB}$ intercepte l'arc $\widehat{AB}$.

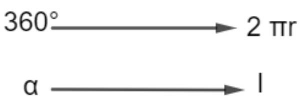


❖ **Longueur d'un arc de cercle.**

La longueur d'un arc de cercle est proportionnelle à la mesure de l'angle au centre qui l'intercepte.

En d'autres termes, si l'angle au centre $\widehat{AOB}$ de mesure $\alpha(en\ degrés)$ d'un cercle de rayon r intercepte l'arc $\widehat{AB}$ alors on détermine la longueur l de l'arc $\widehat{AB}$ à partir d'une règle de trois.





Donc $l = \frac{2\pi r\times\alpha}{360°} = \frac{\pi r\alpha}{180°}$

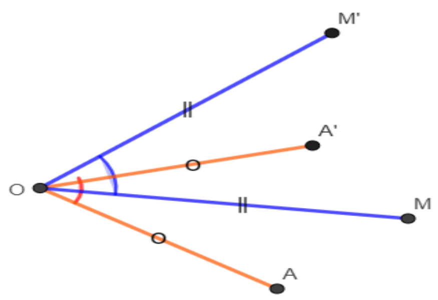
6.1.2. Rotations

❖ **Définition**

Soit O, A et A' trois points distincts du plan tels que $\mathrm{OA} = \mathrm{OA'}$.

Un point M différent de O a pour image M' par la rotation de centre O qui transforme A en A' lorsqu'on a :

- $\mathrm{OM'} = \mathrm{OM}$;
- $\widehat{\mathrm{MOM'}} = \widehat{\mathrm{AOA'}}$;
- Le sens de déplacement de M vers M' étant celui de A vers A'.



Remarque

Dans une rotation de centre O, l'image du point O est le point O lui-même.

❖ **Construction de l'image d'un point**

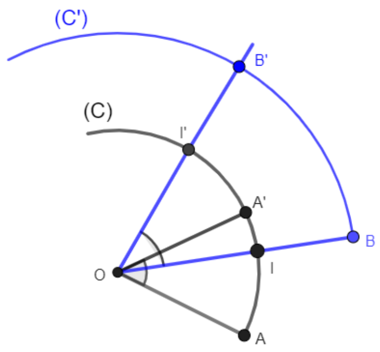
Soit O, A et A' trois points distincts tels que OA'= OA.

Pour construire l'image B' d'un point B par la rotation de centre O qui transforme A en A',

On peut procéder comme suit :

- tracer un arc de cercle (C) de centre O et de rayon OA ; il passe par A'.
- tracer un arc de cercle (C') de centre O et de rayon OB ;
- l'arc de cercle (C) coupe $[OB)$ en I ;
- construire le cercle de centre I et de rayon AA'. Ce cercle coupe (C) en deux points. Soit I' celui de ces deux points tel que le sens de déplacement de I vers I' soit celui de A vers A'
- tracer la demi-droite $[\mathrm{OI'})$, elle coupe le cercle (C') en B' ;

-.



- ❖ **Propriétés**

a. Les images de trois points alignés par une rotation sont trois points alignés.
On dit alors qu'une rotation conserve l'alignement.

b. Par une rotation :

- l'image d'une droite est une droite ;
- l'image d'une demi-droite est une demi-droite ;
- l'image d'un segment est un segment de même longueur ;
- l'image d'un cercle est un cercle de même rayon ;
- l'image d'un angle est un angle de même mesure ;
- les images de deux droites parallèles sont deux droites parallèles, on dit qu'une rotation conserve le parallélisme.
- les images de deux droites perpendiculaires sont deux droites perpendiculaires, On dit qu'une rotation conserve l'orthogonalité.

l'image d'une figure (F) est une figure (F') de même aire que (F).On dit qu'une rotation conserve les aires.

- ❖ **Remarque**

Si I' désigne l'image du point I par une rotation alors l'image du cercle de centre I et de rayon R est le cercle de centre I' image de I et de même rayon R,

6.1.3. Polygones réguliers

- ❖ **Définition**

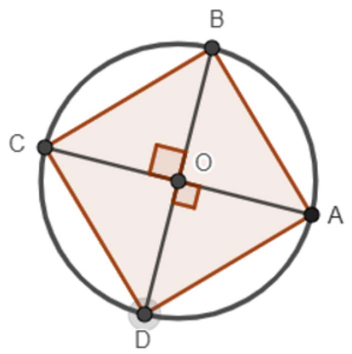
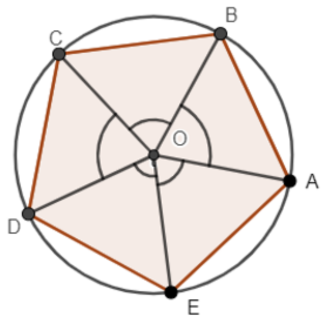
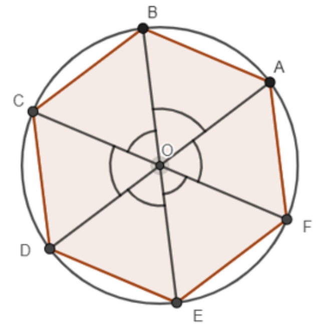
Un polygone est dit régulier s'il a tous ses côtés égaux et tous ses angles de même mesure.

Exemples :

Le triangle équilatéral, le carré, le pentagone régulier, l'hexagone régulier et l'octogone régulier sont des polygones réguliers.

- ❖ **Propriétés**

- Tout polygone régulier admet un cercle circonscrit. Le centre de ce cercle est appelé le centre du polygone et son rayon est la distance du centre à un sommet du polygone.
- Tout polygone régulier admet un cercle inscrit. Le centre de ce cercle est le centre du polygone et son rayon est la distance de son centre à un côté du polygone.
- Chaque médiatrice d'un côté d'un polygone régulier est un axe de symétrie de ce polygone.
- Un polygone régulier de centre O à n cotés ($n \geq 3$) est invariant par une rotation de centre O et d'angle $\frac{360°}{n}$.

Carré inscrit dans un cercle de centre O	Pentagone régulier inscrit dans un cercle de centre O	Hexagone régulier inscrit dans un cercle de centre O
 Deux sommets consécutifs du carré sont l'image l'un de l'autre par une rotation de centre O et d'angle $\frac{360°}{4} = 90°$	 Deux sommets consécutifs du pentagone régulier sont l'image l'un de l'autre par une rotation de centre O et d'angle $\frac{360°}{5}$ =72°	 Deux sommets consécutifs de l'hexagone régulier sont l'image l'un de l'autre par une rotation de centre O et d'angle $\frac{360°}{6} = 60°$

❖ **Exemple de construction d'un polygone régulier en utilisant une rotation**

Construisons par exemple un octogone régulier ABCDEFGH (8 côtés de même longueur).

Considérons un cercle de centre O qui passe par un point A.

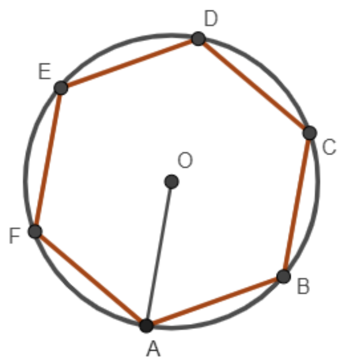
- On construit l'image B de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{360°}{8} = 45°$ de sens contraire à celui des aiguilles d'une montre (par exemple) ;
- On construit l'image C de B par la même rotation ;
- On construit l'image D de C par la même rotation ;
- De même, on construit successivement l'mage E de D ; l'image F de E, l'image G de F et l'image H de G par cette rotation.

❖ **Autres méthodes de construction de l'hexagone régulier et du triangle équilatéral inscrit dans un cercle.**

- Hexagone

Pour construire un hexagone régulier ABCDEFG inscrit dans un cercle, on peut procéder de la façon suivante :

- construire un cercle de rayon R ;
- choisir un point A sur ce cercle ;
- choisir un écartement du compas qui est égal au rayon R du cercle ;
- reporter successivement cet écartement cinq fois sur le cercle à partir du point A ;
- on obtient ainsi les autres sommets B, C, D, E et F de l'hexagone régulier.



- Triangle équilatéral

Pour construire un triangle équilatéral ABC inscrit dans un cercle de rayon R, on peut procéder de la même façon que dans la construction de l'hexagone.

- on choisit le point A sur un cercle de centre O et de rayon R, puis on reporte successivement cinq fois le rayon du cercle sur celui-ci à partir du point A.
- on obtient ainsi six points sur le cercle
- on relie le premier point A au troisième point noté B, le troisième au cinquième point noté C puis le cinquième au premier. On obtient ainsi un triangle équilatéral ABC inscrit dans ce cercle.

6.2. Restitution de connaissances

Exercice 1

Recopie et complète chacun des énoncés suivants.

1. L'image d'un point M par la rotation de centre O qui transforme A en A' est le point M' tel que : OM' =...... ; ... = $\widehat{AOA'}$ et le sens du déplacement de M vers M' étant celui de A vers A'.
2. Si A' est l'image de A par une rotation alors l'image du cercle de centre A et de rayon R est le cercle.....
3. Si (d_1) et (d_2) sont deux droites parallèles alors leurs images respectives (d'_1) et (d'_2) par une rotation sont deux droites ....
4. Toute ...... d'un côté du polygone régulier est un axe de symétrie de ce polygone.

Exercice 2

Recopie chacune des affirmations suivantes et répond par Vrai ou Faux

1. Dans un hexagone régulier de centre O, deux sommets consécutifs de l'hexagone sont images l'un de l'autre par une rotation de centre O et d'angle 60°.
2. Dans un polygone régulier, le rayon du cercle inscrit est la distance de son centre à un sommet de l'hexagone.
3. Si A et B ont pour images respectives A' et B' par une rotation alors les droites (AB) et (A'B') sont parallèles.
4. Si l'image d'un cercle (C) de centre O et de rayon r par une rotation est le cercle (C') de centre O' et de rayon r' alors r = r' et O' est l'image O par cette rotation.

Exercice 3

Pour chacune des affirmations suivantes, trois réponses sont proposées, recopie le numéro de l'affirmation et de la réponse juste que tu as choisie.

1. Dire qu'une rotation conserve l'orthogonalité signifie que ;
   a. l'image d'une droite (d) par une rotation est une droite perpendiculaire à (d).
   b. les images de deux droites perpendiculaires sont deux droites perpendiculaires.
   c. Les images de deux droites sécantes par une rotation sont deux droites perpendiculaires.
2. Si une rotation de centre A, d'angle α , de sens donné, transforme un point M distinct de A en un point M' alors :

a. AM' = AM ; $\widehat{MAM'} = \alpha$; le sens de déplacement de M vers M'est celui choisi pour la rotation.

b. AM' = AM et $\widehat{AMM'} = \alpha$;le sens de déplacement de M vers M'est celui choisi pour la rotation.

c. AM' = AM ; $\widehat{MAM'} = \alpha$; le sens de déplacement de M vers M'est celui de M vers A.

Exercice 4

Recopie et complète les énoncés suivants.

a. Si dans une rotation de centre O, deux points distincts A et B ont pour images respectives A’ et B’ alors : OA’= ….. et OB = ….

b. Si trois points distincts A, B et C ont pour images respectives A', B' et C' par une rotation alors $\widehat{B'A'C'}$ = …….

c. La longueur d’un côté d’un hexagone régulier inscrit dans un cercle est égale……………...

d. Si un triangle équilatéral est inscrit dans un cercle de centre O, alors il est invariant par une rotation de centre O et d’angle ……..

e. Si un carré est inscrit dans un cercle de centre O, alors il est invariant par une rotation de centre O et d’angle ……..

Exercice 5

On considère différents polygones réguliers inscrits dans des cercles.

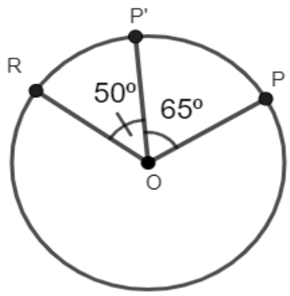
A chaque polygone, associe la mesure d’un angle au centre du cercle circonscrit qui passe par deux sommets consécutifs du polygone.

Carré ×	× 45°
Pentagone régulier ×	× 90°
Hexagone régulier ×	× 60°
Triangle équilatéral ×	× 72°
Octogone régulier ×	× **30°**
	× 120°
	× 75°

Exercice 6

R, B et P sont trois points d’un cercle de centre O.

Propose deux phrases qui utilisent le mot rotation.



Exercice 7

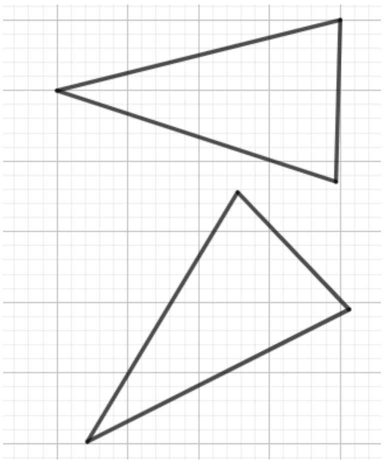
Complète le tableau suivant. On prendra comme unité le centimètre et $\pi \approx 3{,}14$.

Rayon du cercle	12	6, 5	……..
Mesure de l’angle au centre	60°	………	45°
Longueur de l’arc intercepté	……	38, 2	32

6.3. Application de règles ou de méthodes

Exercice 8

La deuxième figure est l'image de la première figure par une rotation. Trouve le centre de cette rotation.

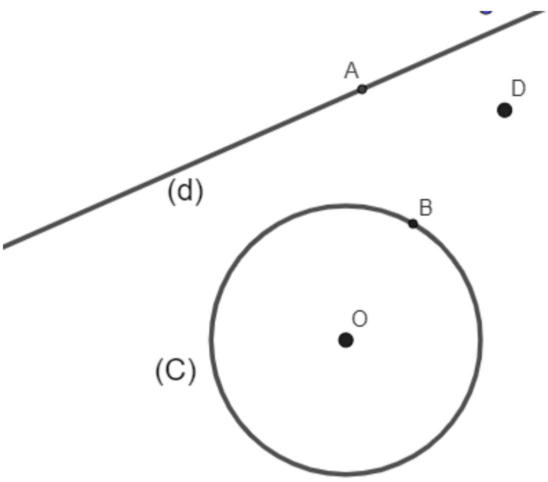


Exercice 9

On considère la figure ci-contre.

a. Trace l'image de la droite (d) par la rotation de centre A qui transforme B en D.

b. Trace l'image du cercle (C) par la rotation de centre A qui transforme B en D.



Exercice 10

On donne un cercle de centre O qui passe par un point A.

a. Trace la tangente (d) au cercle en A.

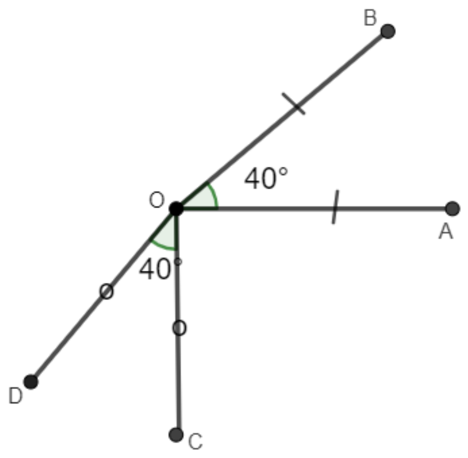
b. On note B l'image de A par la rotation de centre O et d'angle 90° dont le sens est celui de déplacement des aiguilles d'une montre.

Construis la droite (d') image de (d) par cette rotation.

c. Soit C le point d'intersection des droites (d) et (d'). Montre que OACB est un carré.

Exercice 11

Sur la figure ci-dessous, on a : $OC = OD$
et $OA = OB$
Montre en utilisant une rotation que :
AD = BC



Exercice 12.

Soit ABCD un carré de centre I, M et N les milieux respectifs de [AB] et [AD].

1. Fais une figure.
2. Soit r la rotation de centre I qui transforme A en B. Justifie que M est l'image de N par r.
3. Justifie que le triangle INM est un triangle isocèle.
4. Donne les images les images des points B ; C et D par r.
5. Quelle est l'image de la droite (AI) par r. Justifie ta réponse.
6. Compare en justifiant :
   a. CN et DM.
   b. $\widehat{AIN}$ et $\widehat{BIM}$.
   c. Les aires des triangles BDM et ACN.
   d. Les aires des triangles AIN et BIM.

Exercice 13

Soit A et A' deux points données ci-contre.
On sait que A' est l'image de A par la rotation de centre O et d'angle 60° de sens contraire à celui des aiguilles d'une montre.
Construis le point O et justifie la construction.

Exercice 14

Trace un segment $[AB]$, et construis un hexagone régulier dont le segment $[AB]$ est un côté.

Exercice 15

1. Trace un cercle de centre O de rayon R et construis l'hexagone régulier inscrit dans ce cercle. Note ABCDEF cet hexagone.
2. a. Trouve les rotations de centre O tels que l'image du triangle ACE par ces rotations est le

triangle BDF. Précise dans chaque cas l'angle et le sens de la rotation.

b. Détermine les images possibles pour A.

Exercice 16

1. Trace un cercle de centre O et de rayon 4 cm. Place sur ce cercle les points A, B, C, D et E tels que : $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{AOB} = \widehat{COD} = 72°$.
2. Vérifie que les côtés du polygone obtenu ont la même mesure. Précise ses axes de symétrie.
3. Quelle est l'image de ce polygone par la rotation de centre O et d'angle 72° ?
   Existe-t-il d'autres rotations qui laissent invariant ce pentagone ?

Exercice 17

a. Construis un segment [AB] de longueur 5 cm. Sachant que A est l'image de B par une rota tion, détermine les positions possibles du centre de cette rotation.

b. Les segments [EF] et [GH] ci-dessous, sont deux segments de même longueur.
On suppose que E et F sont les images respectives de G et H par une rotation.
Détermine le centre de cette rotation.

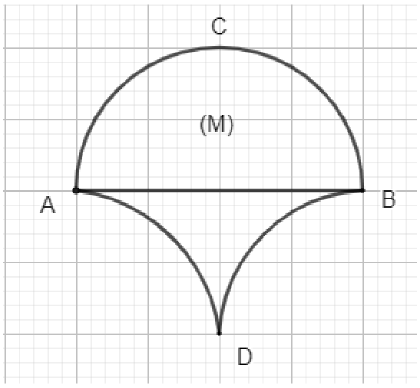
6.4. Problèmes de vie ou situations complexes

Exercice 18

Une entreprise de fabrication de tissus, demande à un de ses techniciens de produire un motif pour un nouveau modèle de tissu. Ce dernier essaie de partir du motif (M) qu'il avait déjà proposé dans un autre modèle de tissu.

Son idée est d'avoir un motif (M'') en déterminant l'image (M') de (M) puis l'image (M'') de (M') par la rotation de centre D et d'angle droit suivant le sens contraire à celui des aiguilles d'une montre.

Sur un papier millimétré, trace le nouveau motif (M'').



Exercice 19

Moussa est un élève de 4ème ; il a fabriqué un jouet avec une plaque en bois homogène en forme de triangle équilatéral. Il fait tourner la plaque à l'aide d'une pointe fixée au niveau de son centre de gravité G.

Ce jeu lui rappelle la leçon sur les rotations qu'il vient de faire avec son professeur ; il a compris qu'en tournant la plaque, il fait subir à ses sommets des rotations de centre G.

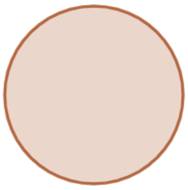
Cependant, il a des difficultés pour trouver les angles de ces rotations.

Aide-le à déterminer l'angle de la rotation de centre qui échange deux sommets consécutifs quel que soit le sens choisi pour cette rotation.

Exercice 20

Votre maman a préparé une tarte et vous demande de la partager en six parts égaux.

Aide ta maman à faire ce partage.



Leçon 7 : Projection orthogonale dans le plan

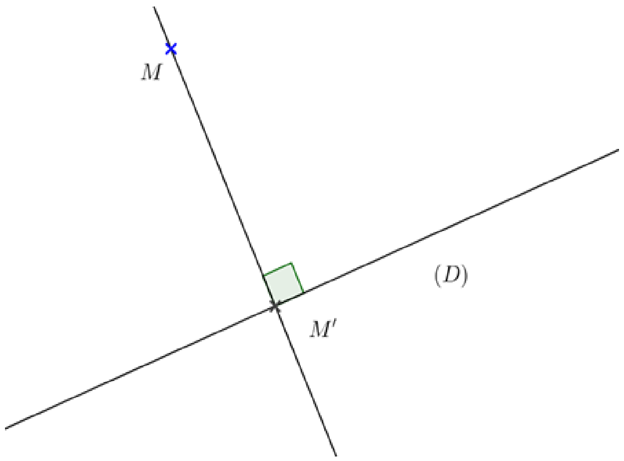
7.1. L'essentiel du cours

7.1.1. Définition

Soit (D) une droite du plan et M un point du plan n'appartenant pas à (D) . Le projeté orthogonal de M sur (D) est le point M' de (D) tel que les droites (MM') et (D) sont perpendiculaires.

Si M appartient à (D), alors il est confondu avec son projeté.

MM' est la distance de M à (D) .



7.1.2. Propriétés

a. Le projeté orthogonal M' du point M sur (D) est le point de (D) le plus proche de M.

b. Le projeté d'un segment est un segment qui peut être réduit à un point.

c. Le milieu d'un segment se projette au milieu du segment image.

7.1.3. Repérage dans le plan

❖ **Coordonnées du milieu d'un segment**

Soit (O,I,J) un repère orthonormal du plan, on considère les points $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$
Si S est le milieu de $[AB]$ alors ses coordonnées sont :

$$x_S = \frac{x_A + x_B}{2} \quad , \quad y_S = \frac{y_A + y_B}{2}$$

❖ **Carré de la distance de deux points.**

Soit (O,I,J) un repère orthonormal du plan, on considère les points $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$,
on a : $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$.

7.2. Restitution de connaissances

Exercice 1

Complète :

Dans un repère orthonormal du plan, les coordonnées du point S milieu de $[AB]$, où $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$, sont données par : $x_S = \frac{\dots\dots\dots}{2}$, $y_S = \frac{\dots\dots\dots}{2}$

Exercice 2

Rappelle la formule donnant le carré de la distance de deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ dans un repère orthonormal.

Exercice 3

Recopie et complète :

Le milieu d'un segment se projette au……………

Exercice 4

Réponds par Vrai ou Faux

1. Le projeté du milieu d'un segment appartient au segment image.
2. Le projeté d'un segment est un segment de même longueur.
3. Le projeté d'un segment peut être réduit à un point.

Exercice 5

Recopie et complète :

Soit (D) une droite du plan et M un point du plan. La perpendiculaire à (D) passant par M coupe (D) en un point. Ce point est appelé ....de M sur (D).

7.3. Application de règles ou de méthodes

Exercice 6

1. Trace un triangle ABC rectangle en A.
2. Quel est le projeté orthogonal de B sur (BC) ?
3. Quel est le projeté orthogonal de C sur (AB) ?
4. Quel est le projeté orthogonal de [BC] sur (AC) ?

Exercice 7

1. Trace un triangle MNP, placer le point A milieu de [MN], puis le point C, pied de la hauteur issue de N.
2. Construis-le projeté orthogonal B de A sur (MP).
3. Démontre que B est le milieu de [MC].

Exercice 8

Dans un repère orthogonal, on donne les points $A(-5\,;3)\ et\ B(1\,;-4)$

Détermine les coordonnées du milieu I de $[AB]$.

Exercice 9

1. Trace un triangle ABC rectangle en A.
2. Marque le point H, projeté orthogonal de A sur (BC) ?
3. Que représente [AH] pour le triangle ABC ?

Exercice 10

Dans un repère orthogonal, on donne les points $A(2\,;3)\ et\ B(5\,;-2)$.

Calcule AB^2.

7.4. Problèmes de vie ou situations complexes

Exercice 11

Soit ENS un triangle isocèle en E ; I est le milieu du segment $[EN]$ et J le projeté orthogonal de I sur la droite (NS).

Démontrer que $NJ = \frac{1}{4} NS$.

Exercice 12

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\ I;\ J)$.

On donne les points $A(0;\ -1)$; $B\ (3;\ 1)$; $C\ (1;\ 4)$ et $M\ (2;\ 52)$.

Détermine les coordonnées du point I centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

Exercice 13

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O,\ I,\ J)$.

On donne les points $V(-3;\ 3)$, $A(3;\ 5)$ et $S(5;\ -1)$. B est le milieu de $[VS]$ et E le symétrique de A par rapport à B.

Démontre que le quadrilatère $VASE$ est un carré.

Leçon 8 : Géométrie dans l’espace

8.1. L’Essentiel du cours

8.1.1. Positions relatives de deux droites dans l’espace.

❖ **Droites coplanaires, droites non coplanaires**

Définitions

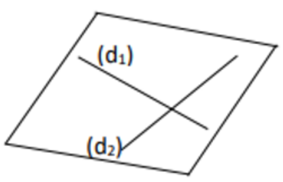
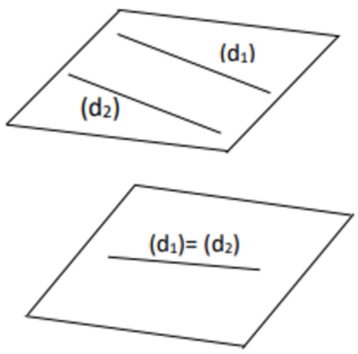
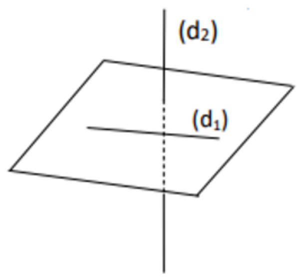
- Deux droites sont dites coplanaires lorsqu’il existe un plan qui les contient.
- Deux droites sont dites non coplanaires lorsqu’il n’existe aucun plan pouvant les contenir.

Remarques

- Dans l’espace trois points non alignés définissent un plan.
- Un plan est représenté en général par un parallélogramme**.**

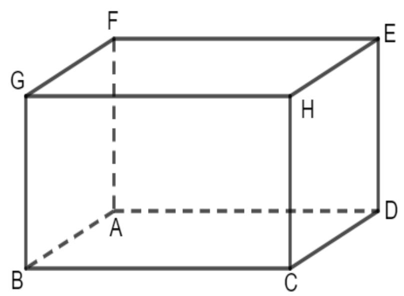
Propriétés

- Deux droites sécantes sont coplanaires.
- Deux droites parallèles sont coplanaires.
- Deux droites non coplanaires ne sont ni parallèles ni sécantes.

<table>
<tr><th colspan="2">(d_1) et (d_2) sont coplanaires</th><th>(d_1) et (d_2) sont non coplanaires</th></tr>
<tr><td>(d_1) et (d_2) sont sécantes</td><td>(d_1) et (d_2) sont parallèles</td><td>(d_1) et (d_2) ne sont ni parallèles, ni sécantes</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

<u>Exemple</u>

Dans le parallélépipède rectangle ABCDEFGH ci-contre :



- Les droites (GF) et (FE) sont coplanaires
- Les droites (GF) et (EH) sont coplanaires.
- Les droites (AB) et (BD) sont coplanaires.
- Les droites (FA) et (DE) sont coplanaires.
- Les droites (AF) et (CD) sont non coplanaires
- Les droites (BC) et (EH) sont non coplanaires

Les droites (FC) et (BE) sont coplanaires

8.1.2. Droites orthogonales

❖ **Définitions**

Dans l'espace, deux droites (d_1) et (d_2) sont dites :

- perpendiculaires lorsqu'elles se coupent en formant un angle droit ;
- orthogonales lorsque leurs parallèles respectives passant par un point donné sont perpendiculaires**.**

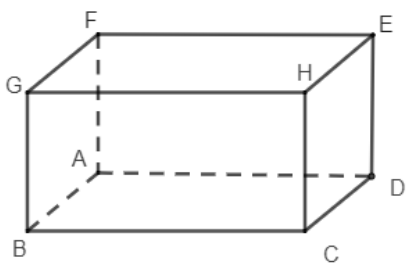
Remarque

Dans l'espace deux droites dites orthogonales peuvent être sécantes ou non sécantes, alors que deux droites dites perpendiculaires sont sécantes.

Exemple

Dans le parallélépipède rectangle ABCDEFGH ci-contre.

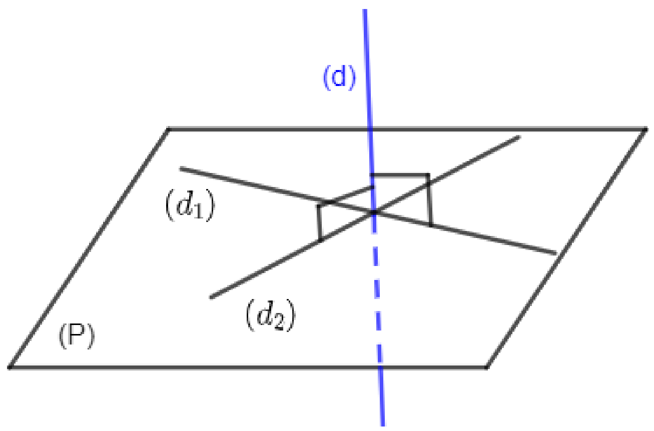
- Les droites (BC) et (DE) sont orthogonales car leurs parallèles respectives passant par H, (GH) et (CH) sont perpendiculaires.
- Les droites (GF) et (AD) sont rthogonales car leurs parallèles respectives passant par C, (CD) et (BC) sont perpendiculaires.



8.1.3. Positions relatives d'une droite et d'un plan : droite et plan perpendiculaires

❖ **Définition**

Une droite est dite perpendiculaire à un plan lorsqu'elle est perpendiculaire à deux droites sécantes de ce plan.

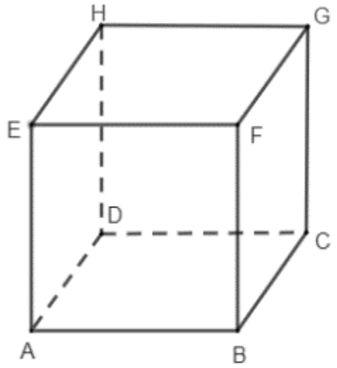


La droite (d) est perpendiculaire au plan (P).

Exemple :

Dans le cube ABCDEFGH ci-contre :

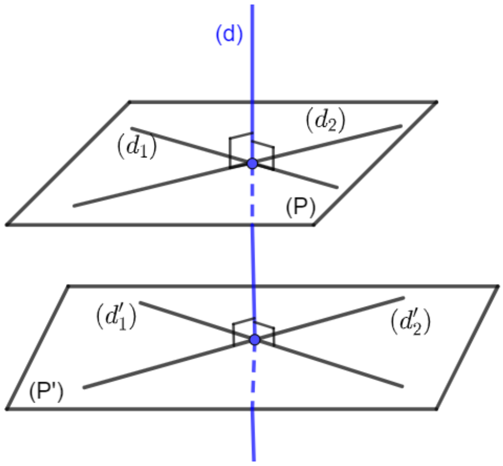
La droite (DH) est perpendiculaire à (CD) et à (AD) donc la droite (DH) est perpendiculaire au plan (ABC) qui contient ces deux droites.



8.1.4. Positions relatives de plans dans l'espace : plans parallèles

❖ **Définition**

Deux plans sont dits parallèles lorsqu'ils sont perpendiculaires à une même droite.

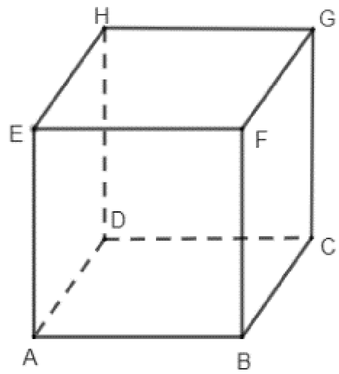


La droite (d) est perpendiculaire aux plans (P) et (P') donc ces deux plans sont parallèles.

Exemple 1

On considère le cube ci-contre.

- La droite (BF) est perpendiculaire aux plans (ABC) et (EFG), donc les plans (ABC) et (EFG) sont parallèles.
- La droite (AB) est perpendiculaire aux plans (BCG) et (ADH) donc les plans (BCG) et (ADH) sont parallèles.

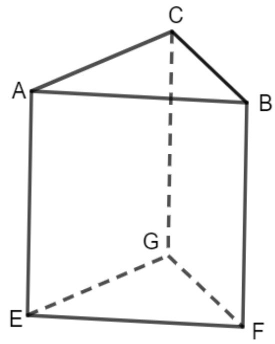


Exemple 2

Dans le prisme droit ci-contre, la droite (CG) est perpendiculaire aux deux droites sécantes (AC) et (BC) du plan (ABC), donc elle est perpendiculaire au plan (ABC).

La droite (CG) est aussi perpendiculaire aux deux droites sécantes (EG) et (FG) du plan (EFG), donc elle est perpendiculaire au plan (EFG).

La droite (CG) est perpendiculaire aux plans (ABC) et (EFG), en conséquence ces deux plans sont parallèles.



8.1.5. Section d'une sphère par un plan

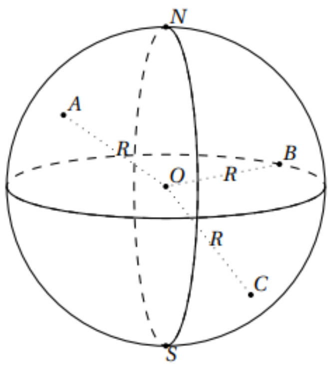
❖ **Définition**

La sphère de centre O et de rayon R est l'ensemble des points M de l'espace tels que $OM = R$.

Dans la figure ci-contre, A, B, C sont des points de la sphère, et O est le centre de cette sphère, qui a pour rayon :

$R = OA = OB = OC = ON = OS$

Comme $O \in [NS]$, le segment [NS] est un diamètre de la sphère.



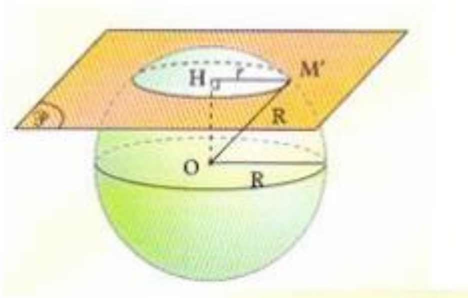
❖ **Propriétés**

La section d'une sphère par un plan est un cercle.

- **Section d'une sphère par un plan qui ne passe pas par son centre**

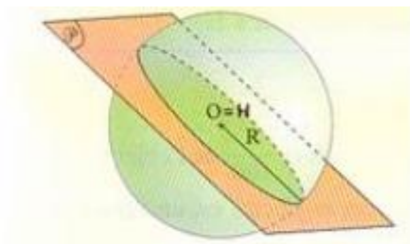
Si on désigne par H le pied de la droite passant par O centre de la sphère et perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$, alors la section de la sphère par ce plan, est le cercle de centre H et de rayon r tel que : $r = \sqrt{R^2 - OH^2}$

(le triangle OHM est rectangle en H)



- **Section d'une sphère par un plan qui passe par son centre**

La section d'une sphère de centre O et de rayon R par un plan qui passe par son centre est un cercle de centre O et de rayon R. Un tel cercle est appelé : grand cercle de la sphère.



8.2. Restitution de connaissances

Exercice 1

Pour chaque question, une seule des réponses proposées est juste ; recopie le numéro de la question et de la réponse juste que tu as choisie.

1. Dans l'espace, une droite est dite perpendiculaire à un plan, lorsqu'elle est :
   a. perpendiculaire à une droite de ce plan ;
   b. perpendiculaire à deux droites sécantes du plan ;
   c. perpendiculaire à deux droites non sécantes de ce plan.
2. Deux plans sont dits parallèles lorsque :
   a. il existe une droite parallèle à l'un et à l'autre ;
   b. toute droite de l'un est parallèle à toute droite de l'autre ;
   c. il existe une droite perpendiculaire à l'un et perpendiculaire à l'autre.

Exercice 2

Recopie chacune des affirmations suivantes et réponds par Vrai ou Faux.

a. Si un plan coupe une sphère alors leur intersection est un segment.

b. Si un plan coupe une sphère et passe par le centre de la sphère, alors leur intersection est un cercle de même rayon que la sphère mais de centre différent à celui de la sphère.

c. Si un plan coupe une sphère de centre O et de rayon R et si H est le pied de la perpendiculaire au plan passant par O, alors l'intersection de la sphère et du plan est un cercle de centre H et de rayon $\sqrt{OH^2 - R^2}$.

Exercice 3

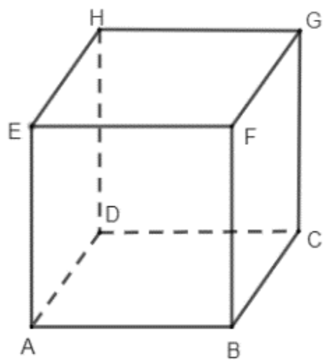
Recopie et complète les énoncés suivants.

1. Une droite est perpendiculaire à un plan lorsqu'elle est…….
2. Deux droites non coplanaires sont ni ………
3 Dans l'espace, deux droites orthogonales ne sont pas toujours ……….
4. Dans l'espace, deux perpendiculaires sont toujours……

Exercice 4

On considère le cube ci-contre.

Recopie chacune des affirmations ci-dessous et répond à chacune d'elles par Vrai ou Faux.



1. Les droites (DC) et (EH) sont coplanaires.
2. Les plans (BCG) et (ADH) sont parallèles.
3. La droite (DH) est perpendiculaire au plan (ABC).
4. Les droites (AD) et (HG) sont orthogonales.
5. les droites (HF) et (DC) sont non coplanaires.

Exercice 5

Recopie et complète chacun des énoncés suivants :

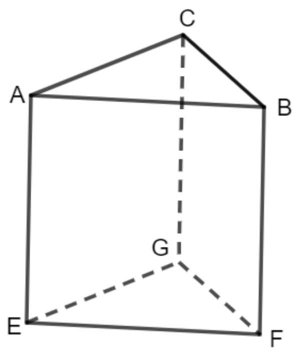
1. deux droites sont dites coplanaire lorsque……
2. Si une droite est perpendiculaire à deux plans alors ……
3. Une droite perpendiculaire à deux droites sécantes contenues dans un plan est….

8.3. Application de règles ou de méthodes

Exercice 6

ABCDEF est un prisme droit à base triangulaire ci-contre.

1. Code tous les angles droits.
2. Nomme :
   a. deux droites coplanaires ;
   b. deux droites non coplanaires ;
   c. une droite et un plan perpendiculaires.



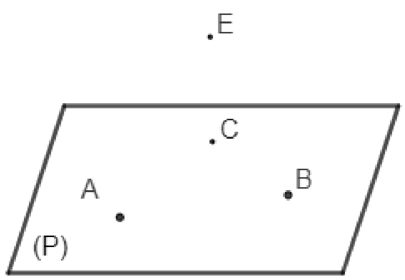
Exercice 7

Dans la figure ci-contre, nomme :

a. les points appartenant au plan (P)

b. trois droites coplanaires ;

c. deux droites non coplanaires ;

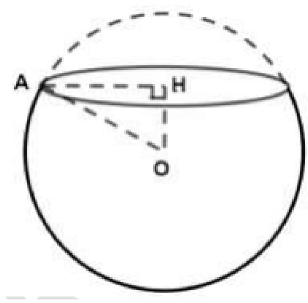


Exercice 8

Une sphère de centre O et de rayon 5 cm est coupé par un plan dont la distance à O est 2 cm. Détermine la section de la sphère par ce plan.

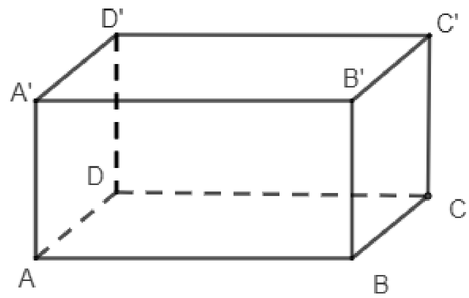
Exercice 9

La figure ci-contre désigne une cuve dont la forme est une calotte sphérique de centre O. On donne OA = 15 m et OH = 12m. Calcule AH.



Exercice 10

On donne le parallélépipède $ABCDA'B'C'D'$ ci-contre.



1. Justifie que les plans contenant les faces BB'C'C et ADD'A' sont parallèles.

2. a. Les droites (AB) et (BD) sont-elles incluses dans le plan (ABC) ?

   b. Les droites (AB) et (AC') sont-elles incluses dans le plan (BCC') ?

3. Justifie que la droite (DD') est perpendiculaire au plan (ABC).

4. Justifie que les droites (AD) et (CC') sont orthogonales.

8.4. Problèmes de vie ou situations complexes

Exercice 11

Une balise de plongée sphérique a pour diamètre 45 cm. Lorsqu'elle s'enfonce de 5 cm,

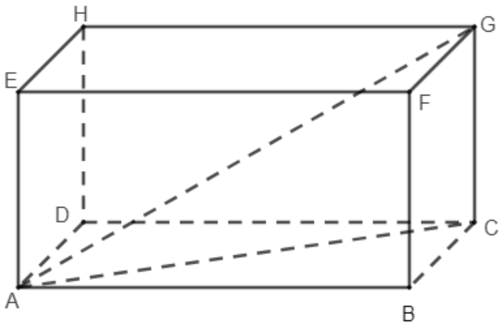
Détermine le diamètre du rond qu'elle dessine à la surface de l'eau.

Exercice 12

Ton oncle est un maçon. Il doit construire un immeuble qui a la forme d'un parallélépipède rectangle ABCDEFGH de longueur 12 m, de largeur 10 m et de hauteur 8 m.

Il a besoin de connaitre la mesure d'une des diagonales de l'immeuble mais il ne retrouve pas cette mesure dans le plan qu'on lui a remis.

Aide- le à retrouver la longueur de la diagonale $[AG]$.



CORRECTION D’EXERCICES

ACTIVITÉS NUMERIQUES

Leçon 1 : nombres rationnels

Exercice 2

$Si\ |a| = |b|\ alors\ on\ a :\ a = b\ ou\ a = -b.$

Exercice 5

Réponses	Enoncés
V	$2 \times \frac{3}{5} = \frac{6}{5}$
F	$\frac{4}{7}$ et $-\frac{7}{4}$ sont inverses.
V	$(-\frac{2}{3})^3 = -\frac{8}{27}$
F	$\frac{\frac{2}{3}}{5} = \frac{2}{15}$
F	$\frac{\pi}{2}$ est un nombre rationnel.

Exercice 8

On a : $-\frac{3}{7} < -\frac{2}{5} < \frac{5}{4} < \frac{3}{2}$, donc rangement dans l'ordre croissant : $-\frac{3}{7}; -\frac{2}{5}; \frac{5}{4}; \frac{3}{2}$

Exercice 15

$A = 6 \times 10^2$; $B = -\frac{7}{2}$; $C = \frac{23}{10}$.

Exercice 16

Le mardi, il lui reste après -vente : $28{,}5 - \frac{28{,}5}{3} = 28{,}5 - 9{,}5 = 19$ tonnes.

Le mercredi, il lui reste après-vente : $19 - \frac{19}{2} = 19 - 9{,}5 = 9{,}5$ tonnes

Il lui restera 9,5 tonnes.

Leçon 2 : Calcul Algébrique.

Exercice 2

$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$,

$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

Exercice 7.

Dans les expressions suivantes, j'écris sur les pointillés les expressions justes

$5ax + 10ay = 5a(x + 2y)$

$4a^2 + 12a + 9 = (2a + 3)^2$

$25 - 10b + b^2 = (5 - b)^2$

$49x^2 - \frac{9}{4} = (7x + \frac{3}{2})(7x - \frac{3}{2}.).$

Exercice 10

On trouve $A = 12a + 8a^2$; $B = 12b - 8b^2$; $C = -12i - 8i^2$; $D = -12j + 8j^2$;
$E = 12k - 8k^2$; $F = 12c + 8c^2$.

Exercice 18

$A = a^2(a-1) - 9(a-1) = (a-1)(a^2-9) = (a-1)(a-3)(a+3)$

$B = b^2(b-7) - 16(b-7)^3 = (b-7)(b^2-(4(b-7))^2$

$B = (b-7)(b-4b+28)(b+4b-28) = (b-7)(-3b+28)(5b-28)$

$C = x^2 - 10x + 25 - 16y^2 = (x-5)^2 - (4y)^2$

$C = (x-5-4y)(x-5+4y)$

$D = -(z-5)^2 + 4z^2 + 12z + 9 = (2z+3)^2 - (z-5)^2$

$D = (2z+3-z+5)(2z+3+z-5) = (z+8)(3z-2)$

$E = (m^2 + \frac{2}{3}m + \frac{1}{9}) - (9m^2 - 30m + 25)$

$E = (m+\frac{1}{3})^2 - (3m-5)^2$

$E = \left(m + \frac{1}{3} - 3m + 5\right)\left(m + \frac{1}{3} + 3m - 5\right) = (-2m + \frac{16}{3})(4m - \frac{14}{3})$

$F = (25x^2 + 30x + 9) - 16(x+1)^2 = (5x+3)^2 - (4(x+1))^2$

$F = (5x+3-4x-4)[(5x+3)+(4x+4)] = (x-1)(9x+7)$

Exercice 23

5 entiers consécutifs peuvent s'écrire sous la forme : $(n-2); (n-1); n; (n+1)$ et $(n+2)$
Leur somme $S = n - 2 + n - 1 + n + n + 1 + n + 2 = 5n$
S est bien un multiple de 5

Leçon 3 : Equations à une inconnue.

Exercice 1

$\boldsymbol{ax + b = 0}$, où a et b sont des rationnels, x est l'inconnue.

1. F
2. V
3. V

Exercice 4

a, b, c et d où b et d sont non nuls:

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ssi $ad = bc$.

Exercice 7

1. $3x(2x+6) = 0$ ssi $3x = 0$ ou $2x + 6 = 0$ ssi $x = 0$ ou $x = -\frac{6}{2} = -3$; $S = \{0; -3\}$
2. $S = \left\{\frac{4}{3}; -\frac{4}{3}\right\}$
3. $S = \left\{\frac{5}{2}; -\frac{5}{2}\right\}$

Exercice 9

1. $\frac{5}{x} = 2$ ssi $2x = 5$ ssi $x = \frac{5}{2}$, S=$\{\frac{5}{2}\}$.
2. $\frac{-3}{x} = \frac{5}{7}$ ssi $5x = -21$ ssi $x = -\frac{21}{5}$, S=$\left\{-\frac{21}{5}\right\}$

Exercice 15

Notons les nombres N_1, N_2, N_3, 4, N_5, N_6 N_7, N_8, N_9 N_{10}, N_{11}, 12.

$N_2 + N_3 + 4 = N_1 + N_2 + N_3$. On en tire : $N_1 = 4$; puis, $N_1 = 4 = N_7 = N_{10}$,

Par le même procédé, on montre que $N_3 = N_6 = N_9 = 12$;

Or $N_1 + N_2 + N_3 = 2000$. Donc $N_2 = 2000 - (4 + 12) = 1984$.

Puis on montre que $N_2 = N_5 = N_8$;

D'où $N_8 = 1984$

Leçon 4 : Inéquations et Systèmes de deux inéquations à une inconnue

Exercice 5

1. b
2. a

Exercice 7

Relions chaque ensemble de nombres rationnels à l'intervalle correspondant.

L'ensemble des nombres rationnels x tels que : $-5 \leq x < -1$ ×	× $[-5; -1]$
	× $[-5; -1[$
L'ensemble des nombres rationnels x tels que : $-5 < x < -1$ ×	× $]-5; -1]$
	× $]-5; -1[$
L'ensemble des nombres rationnels x tels que : $x \geq -1$ ×	× $[-1; +\infty[$
	× $]-1; +\infty[$
L'ensemble des nombres rationnels x tels que : $x > -1$ ×	× $]-\infty; -1]$
L'ensemble des nombres rationnels x tels que : $x \leq -1$ ×	× $]-\infty; -1[$

Exercice 13

1. $x + 5 > -1$
2. $\frac{x}{2} + 2 \geq 3$
3. $2x + 5 \leq 0$
4. $\frac{4}{3}x < -\frac{3}{2}$

Exercice 16

Résous dans $\mathbb{Q}$ le système ci- dessous.

$$\begin{cases} 3x - 2 \geq 4x + 3 \\ 2x + 1 < -3 \end{cases}$$

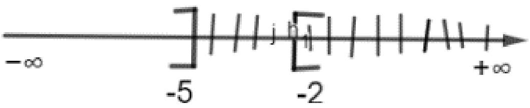
Résolvons l'inéquation : $3x - 2 \geq 4x + 3$

$x - 2 \geq 4x + 3$

$3x - 2 + (-4x) \geq 4x + 3 + (-4x)$

$-x - 2 \geq 3$

$x \leq -5$;
Les solutions de l'inéquation sont les rationnels qui sont dans l'intervalle $]-\infty; -5]$
Résolvons l'inéquation $2x + 1 < -3$
$2x + 1 < -3$
$2x + 1 + (-1) < -3 + (-1)$
$2x < -4$
$x < -2$;
Les solutions de l'inéquation sont les rationnels qui sont dans l'intervalle $]-\infty; -2[$
Les solutions du système sont les rationnels x tels que $x \leq -5$ et $x < -2$



Donc les solutions du système sont les nombres rationnels qui sont dans l'intervalle $]-\infty; -5]$.

Exercice 20
Notons x la largeur du terrain en mètre.
On alors le système
$$\begin{cases} 2(80 + x) > 200 \\ 80x \geq 3000 \end{cases}$$
Résolvons chacune de ses inéquations.

$2(80 + x) > 200$
160 +2 $x > 200$
160 +2 $x + (-160) > 200 + (-160)$
$2\,x > 40$
$x > 20$

$80x \geq 3000$
$\frac{1}{80} \times 80x \geq 3000 \times \frac{1}{80}$
$x \geq 37{,}5$

Donc on doit avoir $x > 20$ et $x \geq 37{,}5$. Pour cela, il suffit que : $x \geq 37{,}5$
La plus petite largeur possible est alors : 37,5 m

Leçon 5 : Applications linéaires

Exercice 1
Etant donné un réel a, le procédé qui à tout nombre rationnel x, fait correspondre le nombre rationnel y qui est égal à ax ($y = ax$) est appelé une application linéaire.

Exercice 3
Celles qui correspondent à une application linéaire.
1. $y = \frac{x}{5}$, le coefficient est $\frac{1}{5}$
3. $y = 4x$, le coefficient est 4.

Exercice 10
Soit a , le coefficient de cette application : on a $g(x) = ax$
$g(3) = 3a = -18$; donc $a = -6$
$g(x) = -6x$

Exercice 11
$g(4) = 20$ et $g(5) = 25$

$g(9) = g(4+5) = g(4) + g(5) = 20 + 25 = 45$
$g(8) = g(2 \times 4) = 2g(4) = 2 \times 20 = 40$

Exercice 15

Soit x le temps nécessaire pour remplir la citerne avec ce robinet, on a :

$x = \frac{260}{20}$ $\quad x = 13min$

Leçon 6 : Statistique

Exercice 1

Remplaçons les pointillés par le mot qui convient.

1. En statistique, l'ensemble sur lequel porte l'étude est appelé population.
2. En statistique, tout élément de la population est appelé individu.
3. Une modalité est une valeur possible d'un caractère étudié.
4. La fréquence est le rapport de l'effectif de la modalité par l'effectif total.

Exercice 5

1. La population étudiée est l'ensemble des élèves d'une classe de $4^{ème}$.
2. Les individus de cette population sont les élèves de cette classe.
3. Le caractère étudié est le nombre d'enfants de la famille de chaque élève.
4. Ce caractère est quantitatif.
5. Le mode de cette série est 2.

Exercice 7

1. La population étudiée est l'ensemble des élèves d'une classe de troisième
2. Le caractère étudié est la quantité d'eau bue (durant la journée de l'épreuve d'EPS)
3. Le mode est : 1 L.
4.

Quantité d'eau bue (en L)	0	0,5	1	1,5	2	2,5
Nombre d'élèves	5	10	25	20	15	5

5. Nombre d'élèves qui ont bu moins de 1,5 L : $5 + 10 + 25 = 40$
   40 élèves ont bu moins de 1,5L par jour.

Exercice 10

Groupes ethniques	Effectifs	Angle en degrés
Sarakolé	130	21
Sérère	370	62
Socé	160	27
Toucouleur	600	100
Wolof	900	150
Total	2160	360

Diagramme en bandes

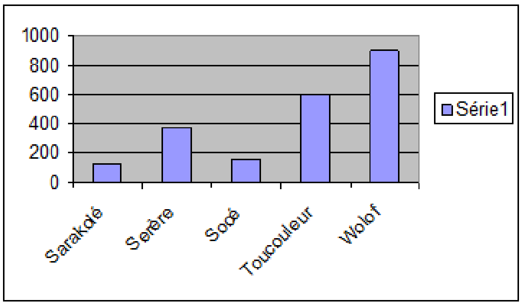
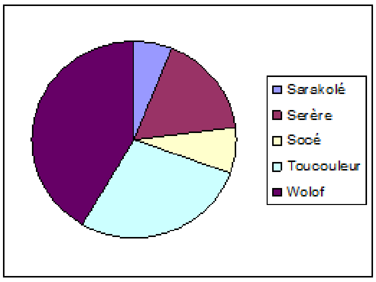


Diagramme circulaire



Exercice 18

Entreprise A

Le salaire moyen d'un cadre est égal à :

$$\frac{330\,000\times 4+540\,000\times 4}{8} = 435\,000 \text{ Frs}$$

Le salaire moyen d'un ouvrier est égal à :

$$\frac{210\,000\times 32+330\,000\times 10}{42} = 200.400\ Frs$$

Entreprise B

Le salaire moyen est égal à

Le salaire moyen d'un cadre est égal à :

$$\frac{330\,000\times 1+540\,000\times 2}{3} = 470\,000 \text{ Frs}$$

Le salaire moyen d'un ouvrier est égal à :

$$\frac{210\,000\times 30+330\,000\times 17}{47} = 253\,404 \text{ Frs.}$$

Dans l'entreprise B, les ouvriers et les cadres sont les mieux payés et il y'a moins de cadres dans l'entreprise B que dans l'entreprise A.

Il serait préférable pour Moussa et Abdou de choisir l'entreprise B.

ACTIVITÉS GEOMETRIQUES

Leçon 1 : Distance

Exercice 5

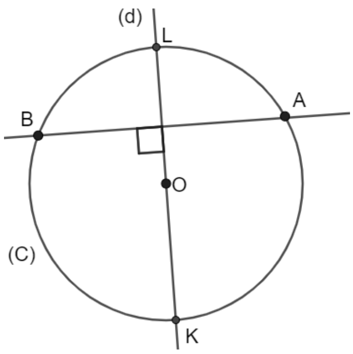
Je recopie et je complète les phrases.

1. Si une demi-droite partage un angle en deux angles de même mesure alors, elle est la bissectrice de cet angle.
2. Une demi-droite qui a pour origine un sommet d'un angle et qui contient un point équidistant des côtés de l'angle est la bissectrice de cet angle.
3. Une demi-droite qui contient deux points équidistants des côtés d'un angle est la bissectrice de cet angle.

4 .Tout point situé sur la bissectrice d'un angle est à égale distance des côtés de cet angle.

Exercice 9

1.

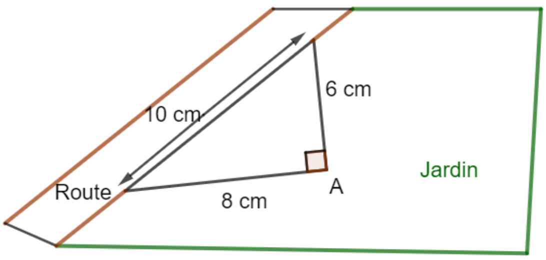


2. a. On sait que OA= OB ce qui signifie que O est sur la médiatrice de [AB].

Donc la médiatrice de [AB] est la droite qui passe par O et qui est perpendiculaire à (AB), donc cette médiatrice est la droite (d).

b. L appartient à la médiatrice de [AB]. En conséquence, on a ; LA=LB

Exercice 16



Déterminons l'aire du triangle rectangle dont les cotés mesurent 8 m ; 6 m et 10 m de deux manières.

L'aire de ce triangle est : $\frac{8\times6}{2}$ cm^2 = 24 cm^2 (1)

D'autre part, si on désigne par H le pied de la hauteur issue de A à ce triangle, alors l'aire du triangle est aussi égale à : $\frac{AH\times d}{2}$ cm^2 avec d= 10 cm

$\frac{AH\times d}{2} = \frac{AH\times 10}{2} = 5AH$. (2)

D'après (1) et (2), on a : 5AH=24 ; d'où AH= $\frac{24}{5}$ est la distance du point A à la route

La plus grande partie du jardin pouvant étre arrosée sans que la route ne soit aspergée est l'intersection de la surface du jardin et du cercle de centre A et de rayon AH= $\frac{24}{5}$ $cm.$

Sur le terrain, la plus grande partie est l'intersection du cercle de centre A et de rayon $\frac{24}{5}$ m et de la surface du jardin.

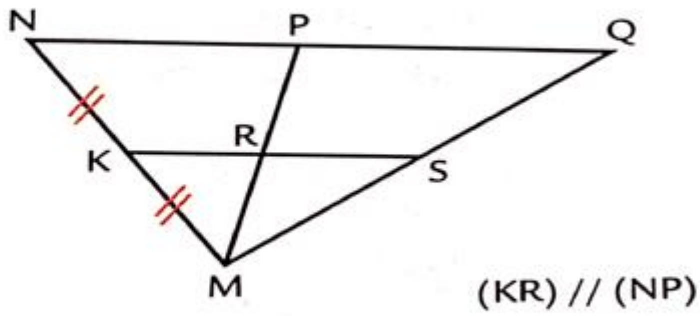
Leçon 2 : Droites des milieux

Exercice 1

Dans un triangle, la droite qui passe par les milieux de deux côtés est parallèle au support du troisième côté. Cette droite est appelée droite des milieux.

Exercice 9

Je sais que MNQ est un triangle, K le milieu du segment [MN] et la droite (KR) parallèle à (NP) coupe (MQ) en S. Or dans un triangle, la droite qui passe par le milieu d'un côté et qui est parallèle au support d'un second côté, coupe le troisième côté en son milieu. donc S est le milieu du segment [MQ].



Exercice 13

ABCD est un quadrilatère quelconque.

-Je sais que ABD est un triangle, M et R sont les milieux respectifs de [AB] et [AD] or dans un triangle la droite qui passe par les milieux de deux côtés est parallèle au support du troisième donc (MR) // (BD) . De la même façon, on démontre que (NP) // (BD) d'où (MR) // (NP), on en déduit que (NP) // (BD).

Un procédé identique au précédent nous montre que $\begin{cases} (MN) \,//\, (AC) \\ (AC) \,//\, (RP) \end{cases}$ donc (MN)//(RP).

Donc on a ; (MN)//(RP). Et (MR) // (NP), donc le quadrilatère MNPR est un parallélogramme.

Leçon 3 : Droites remarquables dans un triangle.

Exercice 1

Les bissectrices des angles d'un triangle sont concourantes.

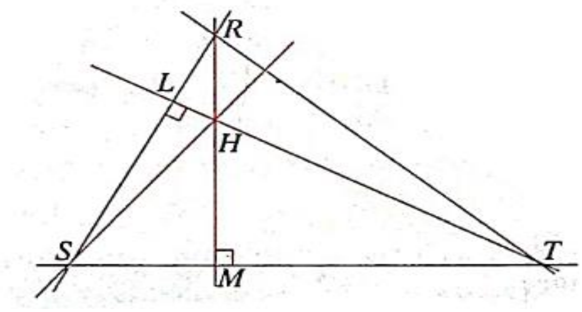
Exercice 4

Je réponds par Vrai ou Faux

1. La médiatrice d'un segment est une droite dont chaque point est équidistant des extrémités du segment. **Vrai**
2. Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes en un point appelé orthocentre. **Vrai**
3. L'orthocentre est le centre du cercle circonscrit au triangle. **Faux**
4. Le point d'intersection des bissectrices est le centre du cercle inscrit au triangle. **Vrai**

Exercice 11

(RM) est une hauteur du triangle : elle passe par le sommet R et est perpendiculaire à (ST), (LT) est la hauteur passant par T et est perpendiculaire à (SR) , or les hauteurs d'un triangle sont concourantes en un point appelé orthocentre, (SH) passe par le sommet S et par H orthocentre donc (SH) est une hauteur du triangle et par conséquent les droites (SH) et (RT) sont perpendiculaires.



.

Leçon 4 : Triangle rectangle

Exercice 3

Complétons

1. Si ARS est un triangle rectangle en, A alors :
   a. $RS^2 = AS^2 + AR^2$; b. $AS^2 = RS^2 - AR^2$; c. $AR^2 = RS^2 - AS^2$
2. Si EFG est un triangle rectangle en G et H le pied de sa hauteur issue de G, alors GH × EF= EG× FG

Exercice 11

1. Voir figure
2. Calculons MN.

MN= AC-MC-AN

MC= AC-AM=AC-AB

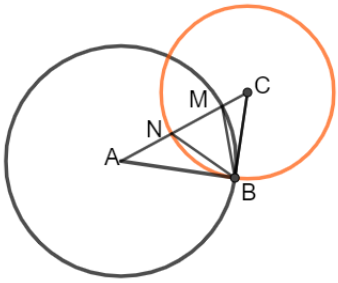
AN = AC- CN= AC-CB

Donc MN=AC- (AC-AB) - (AC-CB)

MN= AB-AC+CB

$\mathrm{AC}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 = 100$

MN= 4



Exercice 15

Quelle distance (à 1 km prés) séparent les deux satellites E et S, sachant que l'angle $\widehat{TES}$ est droit et qu'un signal radio met $\frac{1}{60}$ seconde de T à S et $\frac{1}{100}$ seconde de E à T.
(vitesse du signal radio : 300.000 km/s).

La distance de T à S est : 300.000× $\frac{1}{60} = 5000$ km

La distance de E à T est : 300.000× $\frac{1}{100} = 3000$ km

La distance qui sépare les stations E et S :

$$ES^2 = TS^2 - ET^2 = 16000000$$

S= 4000 km

Leçon 5 : Translations et Vecteurs.

Exercice 2

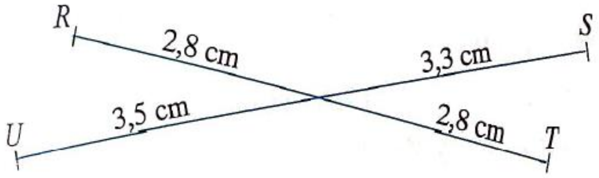
……**F**……Dans une translation l'image d'un segment est un segment qui lui est parallèle et de longueur différente.

……**V**…. Dans une translation l'image d'une droite est une droite qui lui est parallèle.

……**F**….Une translation ne conserve pas l'alignement

<u>Exercice 9</u>

1. Reproduis la figure suivante.



2. Le point T n'est pas l'image du point U par la translation qui transforme R en S.

Les diagonales de ce quadrilatère ne se coupent en leur milieu autrement dit RSTU n'est pas un parallélogramme, par conséquent T n'est pas l'image du point U par la translation qui transforme R en S.

<u>Exercice 11</u>

ABMN étant un parallélogramme, N est l'image de M par la translation qui transforme B en A. L'ensemble des points N quand M se déplace sur (D) est l'image (D') de la droite (D) par cette translation. La droite (D') est la droite parallèle à (D) passant par N.

Leçon 6 : Rotations et polygones réguliers

<u>Exercice 4</u>

Recopions et complétons les énoncés suivants

a. Si dans une rotation de centre O, deux points distincts A et B ont pour images respectives A' et B' alors : OA= OA' et OB' = OB

b. Si trois points distincts A, B et C ont pour images respectives A', B' et C' par une rotation alors $\widehat{B'A'C'} = \widehat{BAC}$

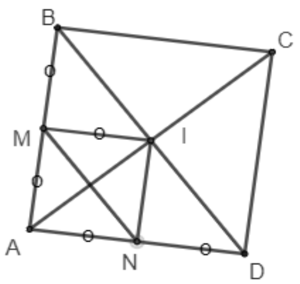
c. La longueur d'un côté d'un hexagone régulier inscrit dans un cercle est égale au rayon du cercle.

d. Si un octogone régulier est inscrit dans un cercle de centre O, alors il est invariant par une rotation de centre O et d'angle 45°.

e. Si un carré est inscrit dans un cercle de centre O, alors il est invariant par une rotation de centre O et d'angle 90°.

<u>Exercice 12.</u>

1.



2. M est le milieu de [AB], N est le milieu de [AD]. I est le milieu de [BD].

Montrons que r(N)=M.

IM= IN et (IM) est perpendiculaire à (IN).

On a :

- IM=IN ;
- $\widehat{NIM} = \widehat{AIB}$
- Le sens du déplacement de M vers N est le même que celui de A vers B

Ce qui signifie que : r(N)=M

3. r(B) = C ; r(C)= D ; r(D) = A.

4. r(I) = I et r(A) = B ; donc l'image de la droite (AI) est la droite (BI).
5. a. On a : r(C) = D et r(N)=M ; donc l'image du segment [CN] est le segment [DM].
Une rotation conserve la distance donc CN = DM.
b. On sait que : r(A) = B ; r(I) = I et r(N) = M or une rotation conserve les angles.
Donc $\widehat{AIN} = \widehat{BIM}$.
c. On sait que : r(A)= B ; r(C)= D, r(N)= M ; donc l'image su triangle ACN est le triangle BDM. Une rotation conserve les aires, en conséquence les triangles CAN et BDM ont la même aire.
d. On sait que : r(A) =B, r(I) = I , r(N) =M ; donc l'image du triangle AIN est le triangle BIM.
En conséquence les triangles AIN et BIM ont la même aire.

Exercice 20

Méthode pour subdiviser la tarte en six parts égaux.
- Déterminons le centre de la tarte en traçant deux cordes de supports non parallèles.
Le centre de la tarte est alors le point d'intersection des médiatrices des deux cordes.
- Choisissons un point sur le pourtour de la tarte.
- A partir de ce point, reportons successivement cinq fois le rayon sur le pourtour de la tarte avec un compas, on obtient alors les six sommets du polygone régulier inscrit dans le cercle.
- Coupons alors la tarte en six parts égaux en suivant les segments qui relient le centre de la tarte aux six sommets de l'hexagone

Leçon 7 : Projection orthogonale dans le plan

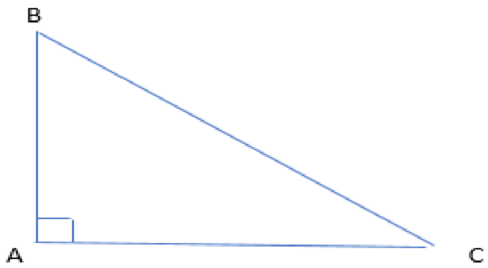
Exercice 1

Dans le repère orthonormal (O, I, J), les coordonnées du point S milieu [AB] où $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ sont :

$$x_S = \frac{x_A + x_B}{2} \quad , \; y_S = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Exercice 6

1. Voir figure ci-contre.
2. Le projeté orthogonal de B sur (BC) est B.
3. Le projeté orthogonal de C sur (AB) est A.
4. Le projeté orthogonal de [BC] sur (AC) est [AC].



Exercice 11

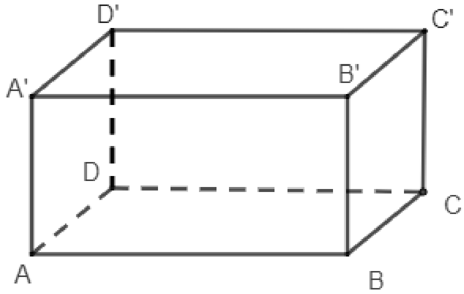
ENS est un triangle isocèle en E donc la médiane, la hauteur, la médiatrice et la bissectrice qui passent par E sont confondues. I est le milieu du segment $[EN]$ et J le projeté orthogonal de I sur la droite (NS), or le milieu d'un segment se projette au milieu du segment image
Par conséquent $NJ = \frac{1}{4}\, NS$

Leçon 8 : Géométrie dans l'espace

Exercice 4

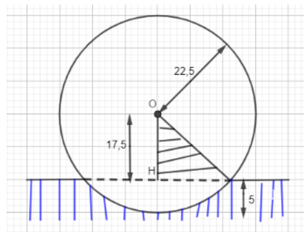
Répondons par Vrai ou Faux.
1. Les droites (DC) et (EH) sont coplanaires. Faux
2. Les plans (BCG) et(ADH) sont parallèles. Vrai
3. La droite (DH) est perpendiculaire au plan (ABC). Vrai
4. Les droites (AD) et (HG) sont orthogonales. Vrai
5. les droites (HF) et (DC) sont non coplanaires. Vrai

Exercice 10



1. Les plans contenant les faces BB'C'C et ADD'A' sont parallèles car ces deux plans sont perpendiculaires à la droite (AB).
2. a. Les droites (AB) et (BD) sont incluses dans le plan (ABC).
b. Les droites (AB) et (AC') ne sont pas incluses dans le plan (BCC').
3. La droite (DD') est perpendiculaire aux deux droites sécantes (AD) et (DC) du plan (ABC). Donc la droite (DD') est perpendiculaire au plan (ABC).
4. Les droites (AD) et (CC') sont orthogonales car leurs parallèles respectives passant par D' ; à savoir (A'D') et (D'D) sont perpendiculaires.

Exercice 11



La surface de l'eau est assimilable à une surface plane ; elle matérialise un plan.
Le « rond » dessiné par la bouée à la surface de l'eau matérialise le cercle d'intersection de la sphère de centre O, de rayon 22,5 cm par le plan tel que OH= 17, 5cm.
Dans le triangle rectangle en H, OHM, on a :
$HM^2 = OM^2 - OH^2 = (22{,}5)^2 - (17{,}5)^2$
$HM^2 \ = 200$
D'où HM≈ 14 cm.
Le diamètre du rond qu'elle dessine à la surface de l'eau est égale à : 28 cm.