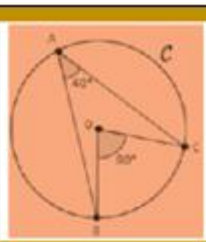
RÉPUBLIQUE DU SÉNÉGAL
Un Peuple – Un But – Une Foi

Ministère de l'Éducation nationale



$$\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$$

MON LIVRET DE MATHEMATIQUES

Classe de troisième

MON LIVRET DE MATHEMATIQUES

Classe de Troisième

AUTEURS

Mouhamadou KA, professeur, Institut islamique de Dakar

Issakha FAYE, Conseiller pédagogique national, DFC

Youga MBENGUE, Inspecteur de l'Enseignement moyen secondaire, IA Kaolack

Équipe de coordination et de supervision

Ce travail est réalisé sous la coordination de **Dr Oumar SAGNA**, Chef de la division Enseignements Apprentissages de la DEMSG et la supervision de **Papa KANDJI**, Directeur de l'Enseignement moyen secondaire général

DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT MOYEN SECONDAIRE GENERAL (DEMSG)

Préface

Le Ministère de l'Éducation nationale (MEN), conformément aux orientations du Programme d'Amélioration de la Qualité, de l'Équité et de la Transparence dans le secteur de l'Éducation et de la Formation (PAQUET-EF 2018-2030), s'est inscrit dans une dynamique d'amélioration continue des rendements scolaires pour contribuer efficacement au développement du capital humain, axe majeur du Plan Sénégal émergent (PSE).

Dans cette optique, une politique cohérente de promotion de l'équité et l'égalité de chances au bénéfice de l'ensemble des apprenants est enclenchée. Elle se déploie dans une Ecole au service de la réussite de toutes et de tous, reposant sur un environnement apaisé et des conditions d'apprentissage améliorées.

Il s'agit, dans ce contexte, de consolider la mise en œuvre de la politique du manuel scolaire qui vise la dotation des élèves et des professeurs en manuels scolaires et matériels didactiques conformes aux curricula en vigueur, afin d'améliorer la qualité des enseignements apprentissages.

C'est dans ce cadre que la Direction de l'Enseignement moyen secondaire général (DEMSG), avec l'appui du Programme d'Amélioration de la Qualité et de l'équité dans l'Education de Base (PAQEEB) à travers la Cellule Genre et équité (CGE) du ministère, a élaboré, en collaboration avec les acteurs du niveau déconcentré, notamment les Inspections d'Académie, le présent livret destiné aux élèves.

Ce livret, nous l'espérons, contribuera à améliorer grandement la qualité des enseignements apprentissages et les performances des élèves.

C'est l'occasion pour moi, d'adresser mes félicitations au Directeur de l'Enseignement moyen secondaire général et à l'équipe de rédaction du livret pour le travail de qualité accompli au bénéfice du système éducatif sénégalais.

Le Ministre de l'Education nationale

Mamadou TALLA

Avant-propos

Ce livret conforme au programme sénégalais est conçu pour toi, élève de la classe de Troisième. Son format obéit à l'esprit de la démarche qui sous-tend l'évaluation des enseignements apprentissages dans le cycle moyen.

Le livret traite de manière pratique et synthétique toutes les leçons du programme pour te permettre une meilleure assimilation du cours de ton professeur.

Ainsi le livret te propose pour chaque leçon :

- l'essentiel du cours qui fait la synthèse des notions clés, indispensables pour la résolution des exercices ;
- des exercices de contrôle de connaissances qui renseignent sur le niveau de connaissances des notions essentielles du cours ;
- des exercices d'application qui évaluent le degré de maîtrise des outils, des méthodes, des procédures ou des règles ;
- des problèmes complexes ou de vie pour t'entrainer à réinvestir tes acquis dans des situations nouvelles ou en rapport avec la vie.

Dans l'optique de te rendre autonome, le livret met à ta disposition, à la fin des leçons, quelques éléments de réponses pour les exercices en surbrillance jaune ; ce qui t'aidera à te situer dans l'acquisition des compétences exigibles du programme.

Ce livret ambitionne de t'accompagner dans l'apprentissage de ton cours, la préparation des devoirs surveillés, des compositions et de l'examen.
S'il est bien utilisé, le livret permettra de renforcer tes compétences et d'améliorer tes performances.
Merci d'avance, à tes professeurs, pour d'éventuelles observations ou suggestions.

Les auteurs

Sommaire

PARTIE I : ACTIVITES NUMERIQUES

Leçon 1 : Racine carrée

1.1. L'essentiel du cours

1.1.1. Définition et notation

Soit $\boldsymbol{a}$ un nombre rationnel positif ou nul. On appelle racine carrée de $\boldsymbol{a}$, le nombre positif ou nul dont le carré est égal á $\boldsymbol{a}$. On le note $\sqrt{\boldsymbol{a}}$ et on lit « racine carrée de $\boldsymbol{a}$».
Le symbole « $\sqrt{}$ » est appelé radical.

1.1.2. Conséquences

Soit $\boldsymbol{a}$ un nombre rationnel positif ou nul :

- $\sqrt{a} \geq 0$
- $(\sqrt{a})^2 = a$

1.1.3. Nombres irrationnels – ensemble $\mathbb{R}$

- Les nombres comme 5 ; -11 ; $6{,}4$; $\frac{-2}{3}$; $\sqrt{16}$ et $-\sqrt{9}$ sont des nombres rationnels car ils peuvent s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ où a et b sont deux entiers relatifs avec b non nul.
- Ce qui n'est pas le cas pour d'autres nombres comme $\sqrt{3}$, $-\sqrt{8}$, $\sqrt{15}$ et π. De tels nombres sont dits irrationnels.
- Les nombres rationnels et les nombres irrationnels forment l'ensemble des nombres réels.
- L'ensemble des nombres réels est noté $\mathbb{R}$
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset ID \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

1.1.4. Propriétés

- Pour tous nombres réels positifs a et b, on a : $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$
- Pour tous nombres réels positifs a et b, avec $b \neq 0$ on a : $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
- Pour tous nombres réels positifs a et b , on a $\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$

<u>Attention</u> : a et b étant deux réels strictement positifs :
$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ et si $a \geq b$, $\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$

1.1.4. Calculs sur les radicaux

❖ **<u>Distributivité</u>**

Pour tous réels a, b et c avec a positif :
b $\sqrt{a}$ +c $\sqrt{a}$ = (b + c)$\sqrt{a}$ et b$\sqrt{a}$ − c$\sqrt{a}$ = (b−c) $\sqrt{a}$

❖ **<u>Simplifications d'écriture</u>**

Pour simplifier une expression comportant des radicaux on peut procéder comme suit :

- transformer le nombre à l'intérieur du radical en un produit de facteurs où l'un des facteurs est un carré parfait (4 ; 9 ; 16 ; 25 ; 36 ; 49 ; 64 ; 81 ; 100 ; 121 ; 144, etc.)

- transformer si possible chaque terme en utilisant la propriété $\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}$, (où a et b sont des entiers positifs avec b le plus petit possible) ;
- utiliser la distributivité $b\sqrt{a} + c\sqrt{a} = (b + c)\sqrt{a}$ et $b\sqrt{a} - c\sqrt{a} = (b - c)\sqrt{a}$ pour réduire l'expression.

Exemple : simplifions l'expression suivante

$A = \sqrt{200} - \sqrt{50} + 6\sqrt{2}$

$A = \sqrt{100 \times 2} - \sqrt{25 \times 2} + 6\sqrt{2}$

$= \sqrt{10^2 \times 2} - \sqrt{5^2 \times 2} + 6\sqrt{2}$

$= 10\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 6\sqrt{2}$

$= (10 - 5 + 6)\sqrt{2}$

$= 11\sqrt{2}$

❖ **Expressions conjuguées**

Soit a, b des nombres réels positifs, c et d des nombres réels. Une expression conjuguée de :

- $\sqrt{a}$ est $\sqrt{a}$
- $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ est $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ et vice-versa
- $\sqrt{a} + c$ est $\sqrt{a} - c$ et vice-versa
- c$\sqrt{a} + d\sqrt{b}$ est $c\sqrt{a} - d\sqrt{b}$ et vice-versa

❖ **Rendre rationnel le dénominateur d'un quotient**

Pour rendre rationnel le dénominateur d'un quotient comportant un radical (ou des radicaux), on multiplie le numérateur et le dénominateur de ce quotient par une expression conjuguée du dénominateur.

Exemple : rendons rationnel le dénominateur de chacun des quotients :$-\frac{7}{\sqrt{3}}$; $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$; $\frac{3\sqrt{5}+5}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

1) $\frac{-7}{\sqrt{3}}$; $\frac{-7}{\sqrt{3}} = \frac{-7\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = \frac{-7\sqrt{3}}{3}$
2) $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$; $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \frac{3+2\sqrt{2}}{1} = 3 + 2\sqrt{2}$
3) $\frac{3\sqrt{5}+5}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$; $\frac{3\sqrt{5}+5}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{(3\sqrt{5}+5)(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})} = \frac{15-3\sqrt{15}+5\sqrt{5}-5\sqrt{3}}{2}$

1.1.5. Comparaison de nombres comportant des radicaux

Soit x et y deux nombres positifs :

- $x^2 > y^2$ si, et seulement si $x > y$
- $x^2 < y^2$ si, et seulement si $x < y$

Conséquence : pour comparer deux **nombres réels positifs** comportant des radicaux on peut comparer leurs carrés.

Exemple : soit à comparer les nombres 2 et $\sqrt{5}$.

On a $2^2 = 4$ et $\left(\sqrt{5}\right)^2 = 5$.

2 et $\sqrt{5}$ sont positifs et $2^2 < (\sqrt{5})^2$ donc $2 < \sqrt{5}$.

Remarque : on peut procéder de la même manière pour déterminer par exemple le signe de $3-\sqrt{7}$.

On a $3^2 = 9$ et $\left(\sqrt{7}\right)^2 = 7$.

3 et $\sqrt{7}$ sont positifs et $3^2 > (\sqrt{7})^2$ donc $3 > \sqrt{7}$, d'où $3-\sqrt{7} > 0$.

1.1.6. Valeur absolue d'un réel

❖ **Définition** : Soit a un réel, $|a| = \begin{cases} a \text{ si } a \text{ est positif ou nul} \\ -a \text{ si } a \text{ est négatif ou nul} \end{cases}$

Exemples :

- $|4| = 4$ car 4 est positif
- $|-13| = -(-13) = 13$ car -13 est négatif
- $|0| = 0$

❖ **Propriétés : pour tous nombres réel a et b**

- $|a| \geq 0$
- $|a \times b| = |a| \times |b|$
- $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ où $b \neq 0$

❖ **Racine carrée et valeur absolue**

Pour tout nombre réel a, $\sqrt{a^2} = |a|$

Exemple : $\sqrt{(-7)^2} = |-7| = 7$

Attention **:** cette égalité est vraie pour tout nombre réel a positif ou négatif ; il ne faut pas la confondre avec l'égalité $(\sqrt{a})^2 = a$ qui n'est vraie que lorsque a est positif.

1.1.7. Valeur exacte et valeur approchée

Soit l'expression $= \sqrt{7}$. En utilisant la calculatrice, on trouve que $A \cong 2{,}64575131$…..

- La valeur exacte de A est $\sqrt{7}$
- 2,64575131 est une valeur approchée de A
- 2 est la valeur approchée par défaut de A à l'unité près
- 3 est la valeur approchée par excès de A à l'unité près
- 2,6 est la valeur approchée par défaut de A à 0,1 près ou encore à 10^{-1} près
- 2,7 est la valeur approchée par excès de A à 0,1 près ou encore à 10^{-1} près
- 2, 64 est la valeur approchée par défaut de A à 0,01 près ou encore à 10^{-2} près
- 2,65 est la valeur approchée par excès de A à 0,01 près ou encore à 10^{-2} près

Remarques :

- La valeur par défaut d'un nombre réel est plus petite que le nombre et la valeur par excès plus grande.

- Ainsi, on peut encadrer un nombre réel par sa valeur approchée par défaut et sa valeur approchée par excès de même ordre. Par exemple $1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$ est l'encadrement de $\sqrt{2}$ à 10^{-3} près

1.1.8. Encadrement de $a\sqrt{b} + c$

L'encadrement de $\sqrt{b}$ étant donné, pour déterminer celui de $a\sqrt{b} + c$ on multiplie chaque membre par a puis on ajoute c à chacun des nouveaux membres obtenus.

❖ **Règle :**

- Si $\alpha \leq \sqrt{b} \leq \beta$ et si $a > 0$, alors $a\alpha \leq a\sqrt{b} \leq a\beta$
- Si $\alpha \leq \sqrt{b} \leq \beta$ et si $a < 0$, alors $a\alpha \geq a\sqrt{b} \geq a\beta$

Exemples : sachant que $2{,}236 < \sqrt{5} < 2{,}237$ et $2{,}2360 < \sqrt{5} < 2{,}2361$ déterminons un encadrement de :

1) $2\sqrt{5} - 3$ à 0,1 près

$2{,}236 < \sqrt{5} < 2{,}237$

$2 \times 2{,}236 < 2 \times \sqrt{5} < 2 \times 2{,}237$

$4{,}472 - 3 < 2\sqrt{5} - 3 < 4{,}474 - 3$

$1{,}472 < 2\sqrt{5} - 3 < 1{,}474$

$1{,}4 < 2\sqrt{5} - 3 < 1{,}5$

2) $-3\sqrt{5} + 1$ à 10^{-2} près

$2{,}2360 < \sqrt{5} < 2{,}2361$

$-3 \times 2{,}2360 > -3 \times \sqrt{5} > -3 \times 2{,}2361$

$-6{,}7080 + 1 > -3\sqrt{5} + 1 > -6{,}7083 + 1$

$-5{,}7080 > -3\sqrt{5} + 1 > -5{,}7083$

$-5{,}7083 < -3\sqrt{5} + 1 < -5{,}7080$

$-5{,}71 < -3\sqrt{5} + 1 < -5{,}70$

1.2. Restitution de connaissances

Exercice 1

Complète :

1. Soit a un nombre réel positif ou nul, on appelle racine carrée de a, le nombre ……. dont le …… est égal à …… ; on le note ………..

2. Soit a et b deux réels positifs. On a :

$\sqrt{a} \times \sqrt{b} =$ ……….. ; $\sqrt{a} \times \sqrt{a} =$ ……… ; $\left(\sqrt{a}\right)^2 =$……….. ;

$\sqrt{\frac{a}{b}} =$…; avec $b \neq 0$ $\sqrt{a^2 b} = \cdots\sqrt{b}$.

Exercice 2

On donne les expressions suivantes : $\sqrt{(-5)^2}$; $\sqrt{-5^2}$; $-\left(\sqrt{5}\right)^2$ et $\left(-\sqrt{5}\right)^2$.

1. Quelle est celle qui n'a pas de sens ?
2. Quelles sont celles qui sont égales ?
3. Quelles sont celles qui sont opposées ?

Exercice 3

Réponds par vrai ou faux :

1) $\sqrt{90} = 3\sqrt{10}$; 2) $\sqrt{14} = 7$; 3) $\sqrt{49 - 16} = 3$; 4) $\sqrt{(-7)^2} = -7$

Exercice 4

Pour chaque proposition, choisis la réponse qui la rend vraie

Propositions	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1. Si a est un réel positif alors $\sqrt{16a^2}$ est égale à …	$16a$	$4a$	$4a^2$
2. L'expression $\sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{16}}$ est égale à …	$\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$
3. $-5\sqrt{2} + \sqrt{8}$ est égale à …	$-3\sqrt{2}$	$-4{,}243$	$-5\sqrt{10}$
4. $a = 5 + 2\sqrt{6}$ $et -5 + 2\sqrt{6}$ sont …	inverses	opposées	conjuguées

.

1.3. Application de méthodes ou de règles

Exercice 5

Calcule :

1) $\sqrt{12-\sqrt{4+\sqrt{5^2}}}$; 2) $(5+\sqrt{3})^2$; 3) $(1-2\sqrt{7})^2$; 4) $(6+\sqrt{5})(6-\sqrt{5})$;

5) $(-2\sqrt{2}+1)(-2\sqrt{2}+1)$; 6) $\sqrt{\sqrt{6}+\sqrt{2}} \times \sqrt{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$.

Exercice 6

On considère les réels suivants :

$A = (2-\sqrt{5})\ (2+\sqrt{5})^2$; $B = 3\sqrt{12} - \frac{1}{2}\sqrt{108} - \sqrt{8} \times \sqrt{2}$;

$a = -3\sqrt{3}+4$; $b = -2-\sqrt{5}$; $c = 2+\sqrt{5}$; $d = 3\sqrt{3}-4$.

Parmi les réels $a, b, c, d,$ indique celui qui est égal à A et celui qui est égal à B.

Exercice 7

Rends rationnel le dénominateur des réels suivants :

1) $\frac{2}{\sqrt{5}}$; 2) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\sqrt{8}}$; 3) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$; 4) $\frac{2\sqrt{2}+1}{-2-3\sqrt{3}}$

Exercice 8

Ecris les réels suivants sous la forme de $a\sqrt{b}$ où a et b sont des entiers naturels, b étant le plus petit entier positif possible :

$A = \sqrt{32}$; $B = \sqrt{720}$; $C = \sqrt{8}+\sqrt{50}-\sqrt{18}$; $D = 3\sqrt{27} \times 2\sqrt{15}$;

$E = \sqrt{12} - 14\sqrt{75} - 6\sqrt{48}$.

Exercice 9

Sans utiliser la calculatrice compare :

1. $\sqrt{17}$ et $3\sqrt{2}$
2. 11 et $4\sqrt{6}$

Exercice 10

1. Sans utiliser la calculatrice, détermine le signe de chacun des nombres suivants :

a) $3-\sqrt{3}$; b) $\sqrt{2} - \sqrt{3}$ c) $\sqrt{6}-3\sqrt{3}$

2. Simplifie les expressions suivantes.

a) $\sqrt{(3-\sqrt{3})^2}$ b) $\sqrt{(\sqrt{6}-3\sqrt{3})^2}$ c) $\sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2} - \sqrt{(1-\sqrt{3})^2}$.

Exercice 11 **BFEM 2011**

On donne les réels $= 1-2\sqrt{3},\ p = \sqrt{13-4\sqrt{3}}$ et $q = \sqrt{13+4\sqrt{3}}$.

1. Montre que m est négatif.
2. Calcule m^2 puis déduis-en que p et m sont opposés.

3. Encadre m à 10^{-2} près sachant que $1,732 < \sqrt{3} < 1,733$.
4. Montre que : p × q = 11.

Exercice 12

Soit $A = -\sqrt{27} + 2\sqrt{12} - \sqrt{3} + 2$ et $= \frac{\sqrt{20}\times\sqrt{21}}{\sqrt{35}\times\sqrt{3}} - \sqrt{3}$.

1. Montre que $A = 2 + \sqrt{3}$ et $B = 2 - \sqrt{3}$.
2. Montre que l'inverse de A est B.
3. Calcule $A^2 + B^2$ *puis* $\frac{B}{A} + \frac{A}{B}$.
4. Calcule $A^{2021} \times B^{2022}$.

Exercice 13 : BFEM 2017

On donne trois réels , b et c tels que

$a = 7 - 5\sqrt{2}$; $b = -7 - 5\sqrt{2}$ *et* $c = -7 + 5\sqrt{2}$

1. Démontre que le réel a est l'inverse du réel b.
2. Justifie que a et c sont opposés.
3. Démontre que

$\frac{b}{a} - \frac{c}{b} = b^2 + c^2$.

4.Calcule a^2 puis déduis-en une écriture simplifiée du réel

$w = \sqrt{99 - 70\sqrt{2}}$

Exercice 14 **BFEM 2012**

1. Soit $t = \sqrt{45} + \sqrt{196} - \sqrt{180} - \sqrt{245}$. Ecris t sous la forme $a\sqrt{b} + c$ où a, b *et* c sont des entiers ; b étant le plus petit entier positif possible.
2. On donne les réels $x = \frac{4}{7+3\sqrt{5}}$ et $y = 3\sqrt{5} - 7$.

a. Écris x avec un dénominateur rationnel.
b. Justifie que y est négatif.
c. Justifie que : $x = -y$.
d. Encadre x à 10^{-2} près sachant que $2,236 < \sqrt{5} < 2,237$.
e. On pose $z = (x - y)^2$. Justifie que $\sqrt{z} = -2y$.

Exercice 15

Soit B un réel positif tel que $B^2 = 11$

1. Donne la valeur exacte de B.
2. Détermine la valeur approchée de B à deux unités près par défaut en utilisant la calculatrice.
3. Donne la valeur approchée de B à 0,01 près par excès.
4. Encadre B à 10^{-2} près.

Exercice 16 : **BFEM 2012**

1. On pose $m = 7 - 4\sqrt{3}$ et $n = 7 + 4\sqrt{3}$
   a. Calcule le produit $m \times n$.
   b. Que peux-tu dire de m et n ?
   c. Montre que $\frac{m}{n} + \frac{n}{m}$ est un entier naturel
2. On pose $A = \sqrt{m}$ et $B = \sqrt{n}$
   a. Calcule $A \times B$
   b. On pose $X = A + B$ et $Y = A - B$.
   c. Vérifie que $X > 0$ et $Y < 0$
   d. Calcule X^2 et Y^2
   e. Déduis-en les valeurs de X et Y.
   f. Déduis-en une écriture simplifiée de A et B

Exercice 17 : **BFEM 2021**

On donne : $x = \frac{-1}{3-2\sqrt{2}}$; $y = \sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{3}{2}}$; $z = \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}}$.

1. Montre que $x = -3 - 2\sqrt{2}$.

2. Donne un encadrement de x à 10^{-1} près sachant que $1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$.

3. Calcule y^2 et ^{2} .

4. Déduis de la question précédente que : $\sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{6}$

Exercice 18

On considère les nombres suivants : $A = 3\sqrt{5} - 7$ et $= \frac{1-\sqrt{5}}{7-3\sqrt{5}}$.

1.

a. Compare les nombres 7 et $3\sqrt{5}$.

b. Calcule A^2.

2. Déduis-en l'écriture sous la forme de $a + b\sqrt{5}$ du nombre $\sqrt{94 - 42\sqrt{5}}$.

3. Ecris B sans radical au dénominateur.

1.4. Problèmes de vie ou situations complexes

Exercice 19

ABCD est un carré de côté x. Le point O est le milieu de [CD]. Le cercle (C) de centre O et de rayon OA coupe la demi-droite [DC) au point E.

1. Calcule le quotient $\frac{DE}{DA}$.

2. On pose $= \frac{DE}{DA}$. Calcule $k^2 - k - 1$.

Exercice 20

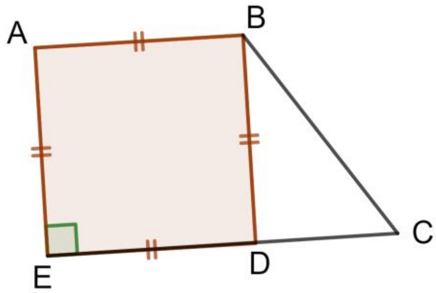
L'unité de longueur est le hm. Les dimensions d'un champ rectangulaire sont : $2\sqrt{3}+2$ et $2\sqrt{3}-2$. Calcule le périmètre, l'aire ensuite le diamètre du cercle circonscrit à ce champ rectangulaire.

Exercice 21

On considère la figure ci-contre où ABDE est un carré et BDC un triangle rectangle en D tels que $AE = 2\sqrt{3} - 1$ et $CD = 2 + \sqrt{3}$.

1. Calcule les valeurs exactes du périmètre P et de l'aire S du trapèze.

2. Déduis-en leurs valeurs approchées à l'unité près et à 10^{-3} près.



Exercice 22

Contexte : Monsieur Mbengue est un hôtelier qui dispose d'une table carrée de superficie $133 - 44\sqrt{3}$ cm^2 dans l'une des salles de conférence. Il demande au tisserand Youga de lui confectionner un tissu, de mêmes dimensions que la table, comportant un motif (voir figure ci-dessous) que monsieur Mbengue lui a représenté. Le motif a un diamètre de $4\sqrt{2}$ cm.

Pour réaliser la commande, Youga sollicite ton aide pour la détermination des dimensions de la table et la représentation du motif.

Consigne : aide le tisserand Youga en procédant comme suit :

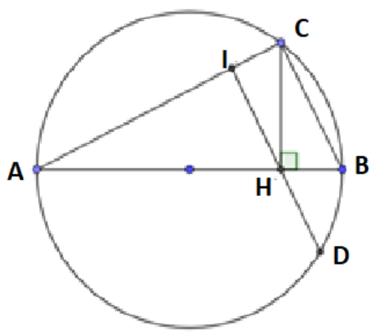
1.

a. Démontre que l'aire de la table carrée est

$(2\sqrt{3} - 11)\ cm^2$.

b. Justifie que $2\sqrt{3} - 11$ est un nombre réel négatif.

c. Déduis-en la longueur du côté de la table.



2.

a. Démontre que la longueur d de la diagonale de la table carrée est $d = 11\sqrt{2} - 2\sqrt{6}$ cm.

b. Donne un encadrement de d à 10^{-2} prés sachant que $1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415\ \ et\ \ 1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733$.

<u>Exercice 23</u> : Gestion d'un garage auto

Talla, un jeune mécanicien-automobile, dispose d'un domaine sur lequel il veut implanter un garage. Il compte ouvrir l'utilisation de son espace à un électricien, un peintre et un soudeur. Pour cela, il pense morceler son domaine en cinq parties : une pour lui-même, trois (03) à louer à ses associés et une pour un parc de stationnement, comme l'indique la figure codée ci-contre.

EFD est pour lui-même,

CEFB est pour le soudeur,

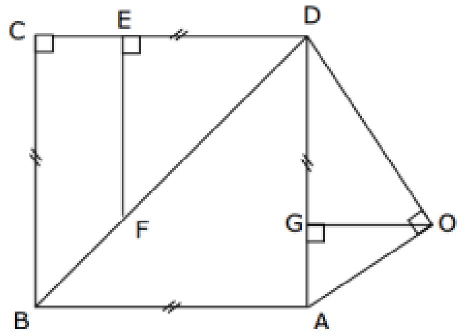
OGD est pour le peintre,

OGA est pour l'électricien,

BAD est pour le parc de stationnement.

AB = 40m ; AO = 20m et CE = GA.

Talla veut évaluer ce qu'il gagnerait si chacun de ses associés payait 1500 F par m^2 et par an.



1. Calcule l'aire de l'espace occupé par chaque associé de Talla.

2. Calcule l'aire totale occupée par les associés de Talla.

3.

a. Calcule la recette annuelle de Talla.

b. Donne un encadrement de la recette annuelle de Talla à 10^{-2} prés sachant que

$1,73205 < \sqrt{3} < 1,73206$.

Leçon 2 : Equations et inéquations à une inconnue

2.1. L'essentiel du cours

2.1.1. Equation a une inconnue

a) Rappels

- Un nombre a est solution d'une équation s'il vérifie l'équation.
- Résoudre une équation, c'est déterminer l'ensemble des solutions de cette équation.
- L'ensemble des solutions d'une équation est généralement noté S.
- **Equations se ramenant à la forme $\boldsymbol{a + x = b}$**
  $a + x = b$ ssi $x = b - a$ d'où $S = \{b - a\}$
- **Equations se ramenant à la forme $\boldsymbol{ax = b}$**
  - Si $a \neq 0$, $ax = b$ ssi $x = \frac{b}{a}$ d'où $S = \left\{\frac{b}{a}\right\}$
  - Si $a = 0$ et $b = 0$, l'équation $ax = b$ admet tout réel x comme solution, d'où $S = \mathbb{R}$
  - Si $a = 0$ et $b \neq 0$, l'équation $ax = b$ n'admet pas de solution, d'où $S = \emptyset$

- **Equations se ramenant à la forme $\boldsymbol{(ax + b)(cx + d) = 0}$**
  $(ax + b)(cx + d) = 0$ ssi $ax + b = 0$ ou $cx + d = 0$

b) Equations du type $|ax + b| = c$

- Si $c = 0$, $|ax + b| = 0 \ ssi \ ax + b = 0$
- Si $c > 0$ alors $|ax + b| = c \ ssi \ ax + b = c \ ou \ ax + b = -c$
- Si $c < 0$ alors l'équation $|ax + b| = c$ n'admet pas de solution ; $S = \emptyset$.

c) Equations du type $|ax + b| = |cx + d|$

- $|ax + b| = |cx + d| \ ssi \ ax + b = cx + d$ ou $ax + b = -(cx + d)$

d) Equation du type $ax^2 + b = 0, a \neq 0$

$ax^2 + b = 0 \ ssi \ ax^2 = -b \ ssi \ x^2 = \frac{-b}{a}$

- si $\frac{-b}{a} \geq 0$, alors $x = \sqrt{\frac{-b}{a}} \ ou \ x = -\sqrt{\frac{-b}{a}}$
- si $\frac{-b}{a} < 0$, alors l'équation n'admet pas de solution ; $S = \emptyset$.

2.1.2. Inéquations

a) Rappels

- Un nombre a est solution d'une inéquation s'il vérifie l' inéquation.
- Résoudre une inéquation, c'est déterminer l'ensemble des solutions de cette inéquation.
- L'ensemble des solutions d'une inéquation est généralement noté S.

- **Inéquations se ramenant à la forme $\boldsymbol{a + x \leq b}$**
  $a + x \leq b$ ssi $x \leq b - a$ d'où $S =]-\infty\,; b - a]$

- **Inéquations se ramenant à la forme $ax \leq b$**
  - Si $a > 0$, $ax \leq b$ ssi $x \leq \frac{b}{a}$, d'où $S =]-\infty\,;\, \frac{b}{a}]$
  - Si $\boldsymbol{a < 0}$, $ax \leq b$ ssi $\boldsymbol{x \geq \frac{b}{a}}$, d'où $S = [\frac{b}{a}\,;\, +\infty[$
  - Si $a = 0$ et $b \geq 0$, l'inéquation $ax \leq b$ est vraie pour tout réel x , d'où $S = \mathbb{R}$.
  - Si $a = 0$ et $b < 0$, l'inéquation $ax \leq b$ est fausse pour tout réel x , d'où $S = \emptyset$.

Remarques

- On résout de la même manière les inéquations $ax < b$; $ax \geq b$ et $ax > b$.
- En divisant les membres d'une inéquation par un nombre strictement négatif, l'inégalité change de sens.

b) Signe de $ax + b$

Pour déterminer le signe de $ax + b$, on peut chercher la valeur qui annule l'expression ($ax + b = 0$ ssi $= \frac{-b}{a}$) et dresser le tableau ci-contre, appelé tableau de signes de $ax + b$.

x	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	Signe de $-a$		Signe de a

c) Inéquation produit du type : $(ax + b)\,(cx + d) * 0$ avec $* \in \{<\,;\ >\,;\ \leq\,;\ \geq\}$ et a, b des réels non nuls

Pour résoudre ces types d'inéquations on peut étudier le signe de chaque facteur dans un même tableau puis en déduire le signe du produit et l'ensemble des solutions :

Valeur qui annule $ax + b$? Valeur qui annule $cx + d$?

$ax + b = 0$ $\qquad$ $cx + d = 0$

$ax = -b$ $\qquad$ $cx = -d$

$x = \frac{-b}{a}$ $\qquad$ $x = \frac{-d}{c}$

Tableau de signes : (on suppose que $\frac{-b}{a}$ est plus petit que $\frac{-d}{c}$)

x	$-\infty$		$\frac{-b}{a}$		$\frac{-d}{c}$		$+\infty$
$ax + b$		Signe de $-a$	0	Signe de a		Signe de a	
$cx + d$		Signe de $-c$		Signe de $-c$	0	Signe de c	
$(ax + b)(cx + d)$		Signe du Produit	0	Signe du Produit	0	Signe du Produit	o

En fonction de l'inégalité de l'inéquation, on donne l'ensemble des solutions constitué de l'intervalle ou de la réunion des intervalles où le produit $(ax + b)(cx + d)$ est positif ou négatif.

<u>Exemple</u> : résolvons l'inéquation $(2x + 1)(-x + 3) > 0$

$2x + 1 = 0$ $\qquad$ $-x + 3 = 0$

$x = \frac{-1}{2}$ $\qquad$ $x = 3$

Tableau de signes :

x	$-\infty$		$\frac{-1}{2}$		3		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$-x+3$		$+$		$+$	0	$-$	
$(2x+1)(-x+3)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Résoudre $(2x+1)(-x+3) > 0$ revient à déterminer les intervalles sur lesquels le produit est strictement positif ; d'où

$S =]\frac{-1}{2}\,; 3[$

c) Inéquation du type ax^2+ b ≤ 0

- Si les réels a et b sont de signes contraires alors on factorise l'expression $ax^2 + b$ et on peut ensuite résoudre l'inéquation à l'aide d'un tableau de signe.
- Si les réels a et b sont strictement positifs, alors l'expression $ax^2 + b$ est strictement positive pour tout nombre réel x. Alors l'inéquation $ax^2 + b \leq 0$ n'admet pas de solution ; d'où $S = \emptyset$.
- Si les réels a *et* b sont strictement négatifs, alors l'expression $ax^2 + b$ est strictement négative pour tout nombre réel x. Alors l'inéquation $ax^2 + b \leq 0$ admet comme solution l'ensemble des nombres réel $\mathbb{R}$; d'où $S = \mathbb{R}$.

d) Problèmes de mise en équation

Pour résoudre un problème de mise en équation on procède par étapes :

1. **Choix de l'inconnue :** consiste à désigner la valeur qu'on cherche (l'inconnue) par une lettre (on utilise souvent x).
2. **Mise en équation** : consiste à traduire par une égalité les données du problème qui font intervenir l'inconnue x.
3. **Résolution de l'équation** : consiste à résoudre l'équation pour trouver la solution.
4. **Conclusion** : consiste à répondre à la question posée.

2.2. Restitution de connaissances

Exercice 1

Indique le numéro de l'équation pour laquelle -2 est une solution.

1) $|2x+1| = 3$; 2) $|x+3| = |1-x|$; 3) $-3x^2+1 = 0$.

Exercice 2

Parmi les inéquations suivantes, laquelle admet le nombre réel 1,5 comme solution ?

1) $(-x+1)(x+2) \geq 0$; 2) $-2x+1 < 0$; 3) $3x^2+1 > 0$

Exercice 3

Recopie chacun des énoncés ci – dessous et réponds par Vrai ou faux.

1. L'équation $x^2 - 7 = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$.
2. L'équation $x^2 = 9$ a pour ensemble des solutions $S = \{3\}$
3. L'équation $2x^2 + 5 = 0$ admet une solution dans $\mathbb{R}$.
4. L'équation $|-x+1| = -3$ n'admet pas de solution.
5. L'équation $3x^2 + 2 = 0$ admet l'ensemble $\mathbb{R}$ comme solution.

Exercice 4

Recopie chacun des énoncés ci – dessous et réponds par Vrai ou faux.

1. L'inéquation $-3x \leq 0$ est équivalente à $x \leq 0$.
2. L'inéquation $(x+1)(1-x) > 0$ ssi $x+1 > 0$ ou $1-x > 0$.
3. L'inéquation $x^2 + 5 > 0$ admet l'ensemble $\mathbb{R}$ comme solution.

Exercice 5

Range dans l'ordre les différentes étapes de résolution d'un problème de mise en équation :
Résolution de l'équation – Mise en équation – Choix de l'inconnue - Conclusion

2.2. Application de méthodes ou de règles

Exercice 6

Résous dans $\mathbb{R}$, chacune des équations suivantes :

1) $\frac{x+3}{2} - \frac{4x-3}{3} = 1 - \frac{5x-12}{6}$; 2) $2x - 1 = \frac{6x-3}{3}$ 3) $\frac{-3x+5}{3} - \frac{2x-3}{2} = 0$;

4) $-3x\ (4x - 3) = 0$; 5) $2x(x-1)(\sqrt{2}x + 1) = 0$; 6) $(2x - 3)^2 - (1 - x)^2 = 0$;

7) $(t - 3)(2t - 1) = 4t^2 - 2t$; 8) $(x-3)(2x+1) = x^2 - 6x + 9$;

9) $9(x+2)^2 - (2x-2)^2 = 0$; 10) $(-2x+4)^2 + (-2x+4)(5x-25) = 0$.

Exercice 7

Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des équations :

1) $|3x - 4| = 2$; 2) $|-x + 7| = -3$; 3) $|2x - 3\sqrt{2}| = 2\sqrt{2}$;

4) $|3x - 4| = |x - 1|$; 5) $|x - 3| - |x + 2| = 0$; 6) $\sqrt{(x-3)^2} = \sqrt{(-3x+5)^2}$.

Exercice 8

Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des équations :

1) $25x^2 - 9 = 0$; 2) $4x^2 + 1 = 0$; 3) $(x+3)^2 - 7 = 0$;

4) $x^2 - 5 + (x + \sqrt{5})(-3x + 5\sqrt{5}) = 0$.

Exercice 9

Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations suivantes :

1) $2x - 1 \geq 5x + 2$; 2) $x + 1 < \frac{x+1}{2}$; 3) $1 + \frac{3x+1}{5} > \frac{1-2x}{2}$;

4) $x(x + 2) \geq 0$; 5) $x^2 + 5 < 0$; 6) $(2x + 1)(x - 3) > 0$;

7) $(3x - 1)(2 - x) \leq 0$; 8) $-9x^2 + 4 < 0$; 9) $x^2 + 16 \geq 0$.

Exercice 10

Si on augmente le côté d'un carré de 2cm, son aire devient égale à 9cm^2. Calcule la longueur initiale du côté de ce carré.

Exercice 11

On donne $A(x) = x^2 - 4 + (x+2)(-2x+3)$

1. Factorise $A(x)$.
2. Résous dans $\mathbb{R}$ l'équations $A(x) = 0$.
3. Déduis-en la résolution dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $A(x) < 0$.

Exercice 12 : BFEM 1996

On pose $A = 2x - 3$.

1. Calculer A^2.
2. En déduire une factorisation de $B(x) = 4x^2 - 12x + 8$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $B(x) = 0$ et $B(x) \leq 0$.

2.3. Problèmes de vie ou situations complexes

Exercice 13

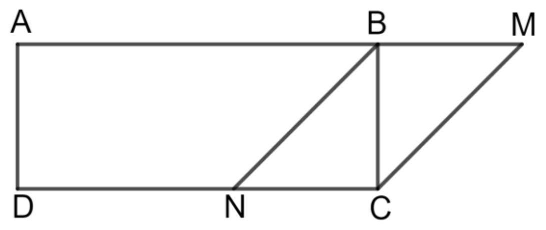
ABCD est un rectangle avec $AD = 5$; $AB = 8$; M et N sont tels que

$DN = BM = x \quad MB = DN = x$; avec N distinct de D et de C.

1. Exprime l'aire de BCM en fonction de x.
2. Exprime l'aire de BCN en fonction de x.
3. Exprime l'aire de ABND en fonction de x.
4. Trouve les valeurs de x telles que :

a. l'aire de BCN soit inférieure à celle de BCM.

b. la différence de ces deux aires soit inférieure à l'aire de ABND.



5. Trouve les valeurs de x pour lesquelles d'une part, l'aire de BCN est inférieure à celle BCM et d'autre part la différence d'aire calculée ci-dessus est inférieure à l'aire de ABND.

Exercice 14

Un âne porte 15 sacs de sel et 2 kg d'olives. Un mulet porte 2 sacs de sel et 41 kg d'olives. L'âne souffle fort ! « De quoi te plains-tu ? » dit le mulet, « nous portons la même charge » Quelle est la masse, en kilogrammes, d'un sac de sel ?

Exercice 15

Un élève a eu 12 au devoir de contrôle de mathématiques du troisième trimestre.

Sachant que le devoir de contrôle est de coefficient 1 et que le devoir de synthèse est de coefficient 2, quelle note devrait-il avoir au devoir de synthèse pour que sa moyenne trimestrielle en mathématiques soit supérieure ou égale à 13 ?

Exercice 16

Une ficelle de 81 cm est fixée à deux clous A et B distants de 45 cm. On tend la ficelle jusqu'à un point C tel que ABC est un triangle rectangle en A. Calculer alors les longueurs AC et BC.

Exercice 17

Peut-on trouver trois nombres entiers naturels consécutifs dont la somme vaut 2022 ?

Exercice 18

Un père à 27 ans de plus que son fils. Dans 6 ans, son âge sera le double de celui de son fils. Quels sont les âges du père et du fils ?

Exercice 19

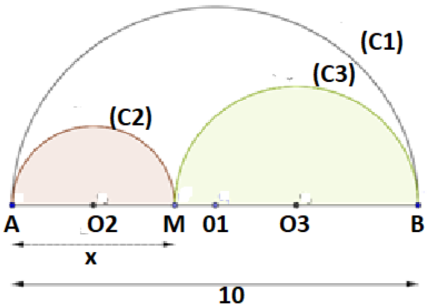
Une mère a 37 ans et ses enfants 8, 10 et 13 ans.

Dans combien d'années l'âge de la mère sera t-il égal à la somme des âges de ses enfants ?

Exercice 20

(C_1), (C_2) et (C_3) sont des demi-cercles de centres respectifs O_1, O_2 et O_3.

1. Calcule en fonction de x l'aire A de la zone non coloriée.
2. Détermine x pour que l'aire A soit égale au cinquième de l'aire du demi-disque de diamètre [AB].



Exercice 21

Les dimensions d'un rectangle sont 20cm et b cm où b est inférieur ou égal à 50.

1. Détermine b pour que le périmètre de ce rectangle soit supérieur ou égal à 1m.
2. Détermine b pour que l'aire de ce rectangle soit supérieure ou égale à 800cm2.
3. Détermine b pour que le périmètre de ce rectangle soit inférieur ou égal à $1m$ et que son aire soit supérieure ou égale à 400cm^2.

Leçon 3 : Equations et systèmes d’équations à deux inconnues

3.1. L’essentiel du cours

3.1.1. Equation à deux inconnues du type $ax + by + c = 0$

- **Couple solution**

Soit a , b deux réels non tous nuls et c un réel quelconque. Le couple de réel $(\alpha\ ;\ \beta)$ est solution de l’équation $ax + by + c = 0$ si en remplaçant x par α et y par β, l’égalité $a\alpha + b\beta + c = 0$ est vraie.

Exemple : les couples (2 ; 1) et (0 ; −3) sont-ils solutions de l’équation $2x - 3y - 1 = 0$?

- $2(2) - 3(1) - 1 = 4 - 3 - 1 = 0$; donc le couple (2 ; 1) est solution de l’équation
- $2(0) - 3(-3) - 1 = 0 + 9 - 1 \neq 0$; donc le couple $(0\ ;\ -3)$ n’est pas solution de l’équation

- **Résolution par la méthode graphique**

Pour résoudre graphiquement l'équation $ax + by + c = 0$, on peut procéder comme suit :

- Déterminer à l’aide d’un tableau de valeurs les coordonnées de deux points de la droite (Δ) d'équation : $ax + by + c = 0$;
- Placer dans un repère les deux points et tracer la droite (Δ) passant par ces deux points.

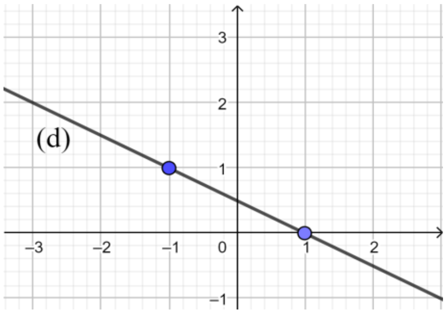
L’ensemble des solutions de l’équation $ax + by + c = 0$ est constitué des couples $(x\ ;\ y)$ coordonnées des points de la droite (Δ) : $ax + by + c = 0$.

Exemple : résoudre graphiquement $x + 2y - 1 = 0$?

- Tableau de valeurs
  - Pour $y = 0$, alors $x + 2(0) - 1 = 0$ ssi $x = 1$
  - Pour $x = -1$, alors $-1 + 2y - 1 = 0$ ssi $y = 1$

x	1	-1
y	0	1

- Représentation graphique



les couples $(x\ ;\ y)$, coordonnées des points de la droite (Δ) : $x + 2y - 1 = 0$, constituent l’ensemble des solutions de l’équation.

3.1.2. Système d’équations à deux inconnues du type $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$

Pour résoudre dans $\mathbb{R}^2$ ce système, on peut utiliser l’une des méthodes suivantes dans le cas où le système admet un unique couple solution :

a) Méthode de substitution

Etapes	**Exemple** : résolution de $\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$
1. on choisit l'une des deux équations et pour celle-ci on exprime une inconnue en fonction de l'autre	• $3x + y = 5$ ssi $y = 5 - 3x$
2. On remplace l'expression de l'inconnue choisie dans l'autre équation	• $2x - 3y = 7$; or $y = 5 - 3x$ donc $2x - 3(5 - 3x) = 7$
3. On résout l'équation à une inconnue obtenue pour déterminer la valeur de cette inconnue	• $2x - 3(5 - 3x) = 7$ ssi $11x = 22$ ssi $x = 2$
4. On remplace la valeur de l'inconnue trouvée dans l'une des équations pour trouver la valeur de l'autre inconnue	• $3x + y = 5$; or $x = 2$ donc $3(2) + y = 5$ d'où $y = -1$
5. On donne l'ensemble des solutions $S = \{(x_0 ; y_0)\}$ où x_0 est la valeur de x et y_0 la valeur de y trouvées.	$S = \{(2 ; -1)\}$

b) Méthode d'addition

Etapes	**Exemple** : résolution de $\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$
1. Si la situation l'exige, on multiplie les deux membres de l'une des deux équations par un nombre réel pour éliminer une inconnue en additionnant les deux équations	• On multiplie les deux membres de la 2e équation par 3 et on obtient $\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 9x + 3y = 15 \end{cases}$
2. On additionne membre à membre les deux équations pour éliminer l'une des inconnues	• $2x + 9x + 0 = 7 + 15$
3. On résout l'équation à une inconnue obtenue pour déterminer la valeur de cette inconnue	• $2x + 9x + 0 = 7 + 15$ ssi $11x = 22$ ssi $x = 2$
4. On remplace la valeur de l'inconnue trouvée dans l'une des équations pour trouver la valeur de l'autre inconnue	• $3x + y = 5$; or $x = 2$ donc $3(2) + y = 5$ d'où $y = -1$
5. On donne l'ensemble des solutions $S = \{(x_0 ; y_0)\}$ où x_0 est la valeur de x et y_0 la valeur de y trouvées.	$S = \{(2 ; -1)\}$

NB: on sera amené, pour certains cas, de multiplier chaque équation par un nombre.

c) Méthode par comparaison

Etapes	**Exemple** : résolution de $\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$
1. On choisit une inconnue et on l'exprime en fonction de l'autre dans chacune des équations	• $\begin{cases} y = \frac{2x-7}{3} & (1) \\ y = 5 - 3x & (2) \end{cases}$
2. L'inconnue choisie étant égale à une expression dans la première équation et à une autre dans la deuxième, on en déduit que les deux expressions sont égales ; ce qui donne une équation à une inconnue.	• D'après (1) et (2) on a $\frac{2x-7}{3} = 5 - 3x$
3. On résout l'équation à une inconnue obtenue pour déterminer la valeur de cette inconnue	• $\frac{2x-7}{3} = 5 - 3x$ • $ssi\ 2x - 7 = 15 - 9x\ ssi\ x = 2$
4. On remplace la valeur de l'inconnue trouvée dans l'une des équations pour trouver la valeur de l'autre inconnue	• $3x + y = 5$; or $x = 2$ donc $3(2) + y = 5$ d'où $y = -1$

5. On donne l'ensemble des solutions $S = \{(x_0\ ;\ y_0)\}$ où x_0 est la valeur de x et y_0 la valeur de y trouvées.	$S = \{(2\ ;\ -1)\}$

Remarque :
Il existe des cas où le système admet une infinité de couples solutions ou pas de solution

Exemple : Résoudre les systèmes suivants

1. $\begin{cases} x - \frac{1}{2}y = -1 \\ -4x + 2y = 4 \end{cases}$; 2. $\begin{cases} 3x - y = 7 \\ -6x + 2y = 3 \end{cases}$

d) Méthode graphique

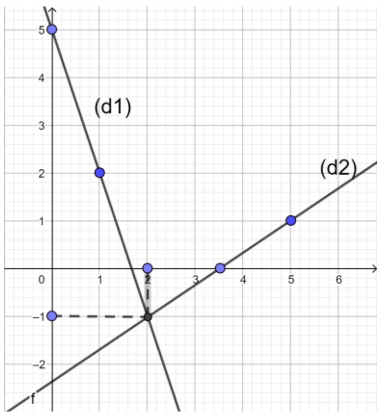
Pour cette méthode, on suit les étapes suivantes :

- On représente dans un repère la droite $d_1: ax + by + c = 0$
- On représente dans le même repère la droite $d_2: a'x + b'y + c' = 0$
- On donne l'ensemble des solutions constitué des coordonnées du point d'intersection s'il existe des droites d_1 et d_2

Remarques :

- Si les droites sont sécantes, il y une seule solution (coordonnées du point d'intersection).
- Si les droites sont strictement parallèles, il n'y a pas de solution (pas de point d'intersection).
- Si les droites sont confondues, il y a une infinité de solutions (l'ensemble des coordonnées des points d'une de ces droites.)

Exemple : Résoudre $\mathbb{R}^2$ le système $\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$



❖ Représentons $d_2: 2x - 3y = 7$?

- Pour $y = 0, on\ a\ 2x - 0 = 7\ ssi\ x = 3{,}5$
- Pour $y = 1, on\ a\ 2x - 3 = 7\ ssi\ x = 5$

x	3,5	5
y	0	1

❖ Représentons $d_1: 3x + y = 5$?

- Pour $x = 0, on\ a\ 3(0) + y = 5\ ssi\ y = 5$
- Pour $y = 2, on\ a\ 3x + 2 = 5\ ssi\ x = 1$

x	0	1
y	5	2

❖ Les coordonnées du point d'intersection des droites d_1 et d_2 est la solution du système
L'ensemble des solutions est $S = \{(2\,;-1)\}$

3.2. Restitution de connaissances

Exercice 1

1. Donne le nom d'une méthode de résolution d'une équation du type $ax + by + c = 0$.

2. Donne les noms de trois méthodes de résolution d'un système du type $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$.

Exercice 2

Complète :

Pour résoudre un système du type $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$

1. La méthode qui consiste à additionner les deux équations s'appelle méthode …
2. La méthode qui consiste à exprimer la même inconnue en fonction de l'autre pour chacune des équations s'appelle méthode ….
3. La méthode qui consiste à exprimer une inconnue en fonction de l'autre dans une équation et à remplacer l'expression de cette inconnue dans l'autre équation s'appelle méthode …

Exercice 3

Réponds par vrai ou faux.

1. Le couple $(0\ ;\ 0)$ est solution de l'équation $2x - 3y = 5$
2. Le couple $(1\ ; -1)$ est solution du système $\begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ -x - y + 1 = 0 \end{cases}$.

3 Le couple $(\sqrt{2}\ ;\ \sqrt{3})$ est solution de ce système $\begin{cases} x\sqrt{2} - y\sqrt{3} = -1 \\ x\sqrt{6} + 3y = 5\sqrt{3} \end{cases}$.

Exercice 4

Indique la bonne réponse.

Pour éliminer, par la méthode d'addition, l'inconnue x dans le système $\begin{cases} 4x - 5y = 2 & (1) \\ 3x + 2y = 1 & (2) \end{cases}$

1. on multiplie l'équation (1) par le nombre 3.
2. on multiplie l'équation (1) par le nombre 3 et l'équation (2) par le nombre -4.
3. on multiplie l'équation (2) par le nombre 4.

Exercice 5

Indique la bonne réponse.

Le système $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = -1 \end{cases}$ admet comme ensemble des solutions :

1. $S = \{1\ ; 2\}$
2. $S = \{(2\ ; 1)\}$
3. $S = \{(1\ ; 2)\}$
4. $S = (1\ ; 2)$

3.3. Application de méthodes ou de règles

Exercice 6

1. Soit les couples $(-2\,;\,1)$; $(0\,;\,2)$; $(2\,;\,1)$; $(-2\,;\,0)$ et $(4\,;\,6)$.
Lesquels sont solutions de l'équation $x - y + 2 = 0$?
2. On donne (E) : $2x - y + 2 = 0$ et (E') : $2x - 3y + 2 = 0$
a. Détermine deux couples de nombres réels, solution de (E) et deux couples de nombres réels, solution de (E').
b. Trouve un couple de réels, solution de (E) dont la première composante est 5.
c. Trouve un couple de réels, solution de (E') dont la deuxième composante est – 3.

Exercice 7

Résous graphiquement

a) $2x + y - 1 = 0$; b) $x - 3y = 5$; c) $3x = 2y$.

Exercice 8

Résous dans $\mathbb{R}^2$, les systèmes suivants par la méthode d'addition

a) $\begin{cases} 2x - y = -4 \\ -x + y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + \frac{1}{2}y = 1 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - \frac{3}{2}y = 2 \\ 2x - 3y = 4 \end{cases}$.

Exercice 9

Résous chacun des systèmes suivants par la méthode de substitution

a) $\begin{cases} x - y = \frac{3}{4} \\ 5x + 2y = 3 \end{cases}$; b $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x + y = -4 \end{cases}$; d) $\begin{cases} 3x - y + 2 = 0 \\ 3x - y - 1 = 0 \end{cases}$.

Exercice 10

Résous chacun des systèmes suivants par la méthode de comparaison

a) $\begin{cases} 2y + x = 5 \\ -y + 7 = x + 4 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x + y = 3 \\ -y + 4 = x - 2 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x - y = 5 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$.

Exercice 11

Résous graphiquement les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} x - 3y = 11 \\ 2x - y = 8 \end{cases}$; b) $\begin{cases} -4x + y = 2 \\ 3x - y = -4 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$; d) $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$.

Exercice 12

Résous les systèmes suivants par la méthode la plus indiquée.

a) $\begin{cases} 4x + y = 14 \\ 3x + y = 11 \end{cases}$; b) $\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 5x - 3y = 28 \\ 4x + y = 2 \end{cases}$.

Exercice 13 : BFEM 1993

Soient a et b deux réels et le système de deux équations à deux inconnues, suivant :

$$\begin{cases} 2ax - y + 5b = 0 \\ 2bx + y - 3a = 0 \end{cases}$$

1. Détermine les réels a et b pour que le couple $(2; -1)$ soit solution de ce système.
2. Remplace dans ce système a et b par les valeurs trouvées et résous dans $\mathbb{R}^2$ le système :

$$\begin{cases} -2ax - y - 5b = 0 \\ \sqrt{3}\,x + y = 3 \end{cases}$$

Exercice 14 : BFEM 1998

Assane et Ousseynou désirent acheter en commun un magnétophone qui coûte $20\ 000\ F$.

Les économies de Ousseynou représentent les $\frac{4}{5}$ de celles de Assane. S'ils réunissent leurs économies, il leur manque $2720\ F$ pour pouvoir effectuer leur achat.

Calcule le montant des économies de chacun.

Exercice 15 : BFEM 2004

Dans une librairie, un lot de 4 stylos à billes et 6 cahiers coûte $700\ F$ plus cher qu'un lot de 3 stylos à billes et 3 cahiers. Dans cette librairie 6 stylos à billes et 7 cahiers coûtent $2000\ F$.

1. Calcule le prix d'un stylo à bille et celui d'un cahier.
2. Un client qui n'a que $1700\ F$ désire acheter autant de stylos à billes que de cahiers. En supposant qu'un stylo à bille coûte $100\ F$ et un cahier $200\ F$, calcule le nombre maximal de stylos à bille et de cahiers qu'il aura.

Exercice 16

Dans une basse-cour, il y a des poules et des lapins. On compte au total 45 têtes et 140 pattes. Trouver le nombre de poules et le nombre de lapins.

Exercice 17

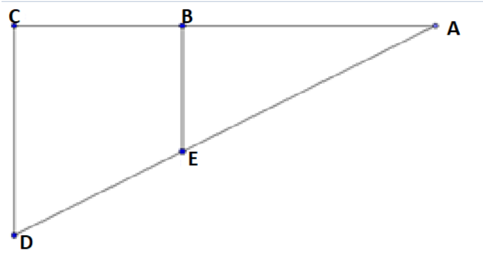
Dans une classe de cinquième, le nombre de filles dépasse de 18 le nombre de garçons. En fin d'année, on exclut 7 garçons et 5 filles. Le nombre de filles est alors le triple du nombre de garçons. Combien y avait-il de garçons et de filles dans cette classe ?

Exercice 18

Il y a 3 ans l'âge de Salimata était le triple de celui de Samba. Dans 9 ans, l'âge de Samba sera la moitié de l'âge de Salimata. Quels sont les âges de Salimata et de Samba ?

Exercice 19 : **BFEM 2021**

Dans la figure ci-dessous, ACD est un triangle rectangle en C et (BE) est parallèle à (CD).



On donne : BC = 4 ; CD = 5 ; BE = 3.

On pose AB = m et AC = n.

1. Montre que les réels m et n vérifient le système :

$$\begin{cases} n = m + 4 \\ 5m - 3n = 0 \end{cases}$$

2. Calcule m et n.

Exercice 20 : **BFEM 2010**

ABC est un triangle rectangle en A tel que :

$AB + AC + BC = 72\ cm$ et $4AB = 3AC$.

1. Sans calculer les longueurs des côtés du triangle ABC, montre que :

a) $7AB + 3BC = 216$ cm ;

b) $3BC - 5AB = 0$.

2. En utilisant les résultats de la question 1), calcule AB et BC ; déduis-en AC.

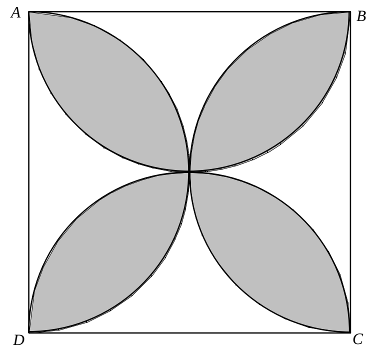
3.4. Problèmes de vie ou situations complexes

Exercice 21

Un marchand de vélomoteurs vient de vendre deux scooters d'occasion pour la somme totale de 210 000 F.

Il a réalisé 10% de bénéfice sur la vente du premier scooter mais il a perdu 10 % sur l'autre. Globalement, il a réalisé un bénéfice de 5 %. A combien avait-il acheté chacun des scooters ?

Exercice 22



Soit le carré ABCD de côté 2 à l'intérieur duquel on a tracé les demi-cercles de diamètres respectifs [AB], [BC], [CD] et [DA].

1. Résous le système suivant : $\begin{cases} 4x + 4y = 4 \\ 2x + y = \frac{\pi}{2} \end{cases}$.

2. Exprime le système précédent comme le calcul des aires de deux surfaces clairement exprimées de la figure.

3. Déduis-en l'aire exacte de la surface coloriée.

4. Dans le carré, quelle est la surface la plus grande : celle qui est coloriée ou celle qui ne l'est pas ?

Exercice 23

Si on augmente la vitesse d'un train de 10 km/h, on gagne 40 mn sur le trajet effectué par ce train. Si on diminue la vitesse de 10 km/h, on perd une heure sur le même trajet. Quelle est la longueur du trajet ?

Exercice 24

Contexte : Pour la construction de certaines infrastructures vitales dans la commune de Déni Malick, il a été prélevé une partie des parcelles de tous les propriétaires terriens. Demba un cultivateur de cette commune s'est retrouvé après le prélèvement avec un terrain rectangulaire dont il a des difficultés pour déterminer ses dimensions. Son terrain est tel que si on augmente la longueur et la largeur de 4 m, l'aire du terrain augmente de 156 m^2 tandis que si on diminue la longueur de 10 m et augmente la largeur de 2m, l'aire du terrain diminue de 130 m^2. Thioro, fille de Demba en classe de troisième s'est proposé d'aider son père à déterminer les dimensions de son terrain.

Consigne : Tu vas aider Thioro en répondant aux questions suivantes :

1. En considérant x la longueur et y la largeur de ce terrain, montre qu'elles vérifient le système suivant : (S) $\begin{cases} x + y = 35 \\ x - 5y = -55 \end{cases}$

2. Soit la droite (D) : $x + y = 35$; donne trois couples de coordonnées appartenant à (D).

3. Résous le système (S) par la méthode d'addition, puis de substitution.

4. Déduis-en les dimensions du terrain de DEMBA.

Leçon 4 : Inéquations et systèmes d'inéquations à deux inconnues

4.1. L'essentiel du cours

4.1.1. Inéquation à deux inconnues du type $ax + by + c * 0$, avec $*, \in \{<; >; \leq; \geq\}$,

❖ **Couple solution d'une inéquation**

Soit a , b deux réels non tous nuls et c un réel quelconque. Le couple de réel $(\alpha\,;\,\beta)$ est solution de l'inéquation $ax + by + c * 0$ si en remplaçant x par α et y par β, l'égalité $a\alpha + b\beta + c * 0$ est vraie.

<u>Exemple</u> : les couples (2 ; 3) et (0 ; -3) sont-ils solutions de l'inéquation $2x - 3y - 1 < 0$?

- $2(2) - 3(2) - 1 = 4 - 6 - 1 = -3$; donc $2(2) - 3(2) - 1 < 0$ d'où le couple (2 ; 3) est solution de l'inéquation.
- $2(0) - 3(-3) - 1 = 0 + 9 - 1 = 8$; 8 n'étant pas strictement inférieur à 0, donc le couple (0 ; -3) n'est pas solution de l'inéquation.

❖ **Demi-plan solution d'une inéquation**

- Une droite (D) d'équation $ax + by + c = 0$ partage le plan en deux demi-plans de frontière (D). L'un de ces demi-plans est solution de l'inéquation $ax + by + c * 0$
- Un demi-plan est solution de l'inéquation $ax + by + c * 0$ si le couple de coordonnées de tout point de ce demi-plan est solution de cette inéquation.
- Pour vérifier lequel des demi-plans est solution de l'inéquation $ax + by + c * 0$, il suffit de choisir un point A (par exemple) dans l'un des demi-plans et n'appartenant pas à la droite et de vérifier si ses coordonnées constituent une solution de l'inéquation :
  - si c'est le cas alors le demi-plan contenant A est solution de l'inéquation ;
  - sinon, c'est l'autre demi-plan, celui ne contenant pas A qui est solution.

❖ **Méthode de résolution graphique**

Pour résoudre graphiquement une inéquation du type $ax + by + c * 0$ où a, b *et* c sont des réels donnés avec a et b non tous nuls on peut procéder comme suit :

1. On trace dans un repère la droite d' équation $ax + by + c = 0$. Cette droite partage le plan en deux demi-plans.

2. On choisit un point n'appartenant pas à la droite dans l'un des demi-plans pour vérifier si ses coordonnées constituent une solution de l'inéquation :
- si c'est le cas, le demi-plan contenant le point choisi est solution et on hachure l'autre demi-plan
- si ce n'est pas le cas, l'autre demi-plan est solution et on hachure le demi-plan contenant le point choisi.

3. On donne l'ensemble des solutions qui est la partie non hachurée sans la frontière si l'inégalité est stricte et la partie non hachurée avec la droite frontière si l'inégalité est large.

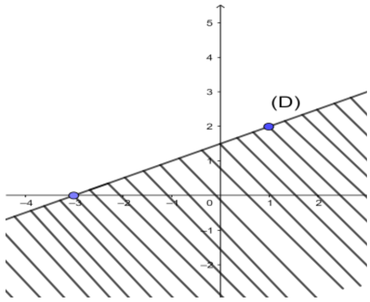
.

NB : si la droite d'équation $ax + by + c = 0$ ne passe par O(0 ; 0) l'origine du repère, on peut choisir ce point pour déterminer lequel des demi-plans est solution.

Exemple : résolvons graphiquement dans $\mathbb{R}^2$ l'inéquation $x - 2y + 3 \leq 0$

1. On trace la droite frontière (D) d'équation $x - 2y + 3 = 0$.

- Pour $y = 0, on\ a\ x - 2(0) + 3 = 0\ d'où\ \ x = -3\ \ et\ donc\ \ A(-3\ ;\ 0) \in (D)$
- Pour $y = 2, on\ a\ x - 2(2) + 3 = 0\ d'où\ \ x = 1$ $et\ donc\ \ B(1\ ;\ 2) \in (D)$
- Représentons les points A, B puis traçons la droite (D)



2. Le demi-plan contenant l'origine du repère est il solution de l'inéquation $x - 2y + 3 \leq 0$?

$0 - 2(0) + 3 \leq 0$?

$3 \leq 0$? faux ; donc c'est l'autre demi-plan qui est solution et l'ensemble des solutions S est la partie non hachurée avec la droite frontière (D) comprise.

4.1.2. Système d'inéquations à deux inconnues du type $\begin{cases} \boldsymbol{ax + by + c \ast 0} \\ \boldsymbol{a'x + b'y + c' \therefore 0} \end{cases}$, avec $\ast$ et $\therefore$ appartenant à $\{<; >; \leq; \geq\}$,

❖ **Couple solution d'un système**

Le couple de réel $(\alpha\ ;\ \beta)$ est solution est solution du système $\begin{cases} \boldsymbol{ax + by + c \ast 0} \\ \boldsymbol{a'x + b'y + c' \therefore 0} \end{cases}$ si, et seulement si, il vérifie chacune des inéquations du système.

❖ **Méthode de résolution**

Pour résoudre graphiquement ce système d'inéquations où on peut procéder comme suit :

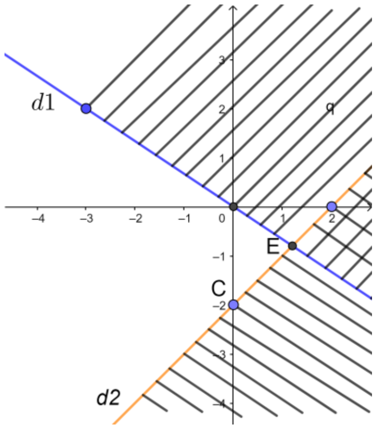
1. Dans le même repère, on représente les droites frontières $d_1: ax + by + c = 0$ et $d_2: a'x + b'y + c' = 0$.
2. On résout graphiquement les inéquations $ax + by + c \ast 0$ et $ax + by + c \therefore 0$ en hachurant pour chaque inéquation le demi-plan qui n'est pas solution.
3. On donne l'ensemble des solutions qui est la partie du plan non hachurée.

❖ **Exemple** : résolvons graphiquement le système $\begin{cases} 2x + 3y\ < \ 0 \\ -x + y\ \geq\ -2 \end{cases}$

1. Soit la droite frontière $d_1: 2x + 3y = \ 0$
   - Pour $x = 0$, on a $2(0) + 3y = 0$, d'où $y = 0$ et donc $A(0\,;0) \in d_1$.
   - Pour $y = 2$, on a $2x + 3(2) = 0$, d'où $x = -3$ et donc $B(-3\,;2) \in d_1$

   Soit la droite frontière $d_2: -x + y = \ -2$
   - Pour $x = 0$, on a $-(0) + y = -2$, d'où $y = -2$ et donc $C(0\,;-2) \in d_2$.
   - Pour $y = 0$, on a $-x + 0 = -2$, d'où $x = 2$ et donc $D(2\,;0) \in d_2$

2. Résolvons les deux inéquations :



- Le demi-plan contenant le point I(1 ; 1) est-il

  solution de l'inéquation $2x + 3y < 0$?

  $2(1) + 3(1) < 0$?

  $5 < 0$? faux ;

  donc ce demi-plan n'est pas solution.
- Le demi-plan contenant le point O(0 ; 0) est-il

  solution de l'inéquation $-x + y \geq -2$?

  $-(0) + (0) \geq -2$?

  $0 \geq -2$? vrai ;

  donc ce demi-plan est solution.

3. L'ensemble des solutions est la partie non hachurée, avec la demi-droite $[EC)$ comprise.

4.2. Restitution de connaissances

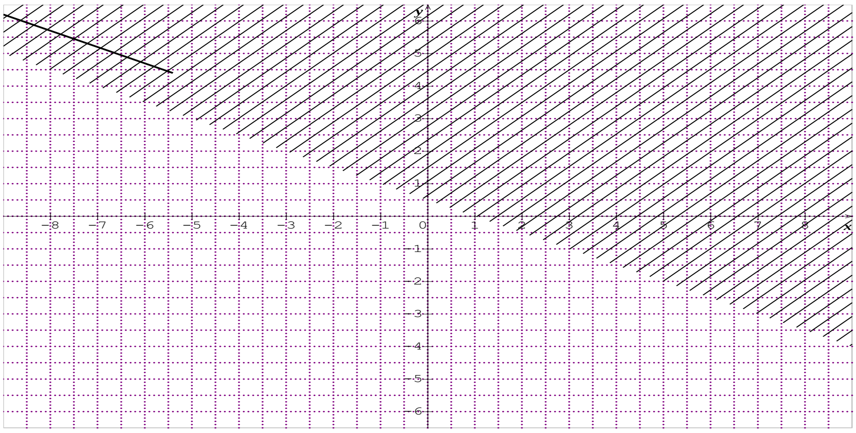
Exercice 1 Réponds par Oui ou Non

1. Le couple $(-1\,;2)$ est-il solution de l'inéquation $2x - y + 2 \geq 0$?

2. Le couple $(2\,;4)$ est-il solution du système $\begin{cases} x + y - 2 > 0 \\ 2x - y \leq 0 \end{cases}$?

3. Le couple $(0\,;\ 0)$ est-il solution du système $\begin{cases} x + 3 > 0 \\ 3y \leq 1 \end{cases}$?

Exercice 2



On considère l'inéquation dont l'ensemble de solutions correspond au demi-plan non hachuré.
Réponds par Vrai ou Faux.

1. Le couple $(0\,;0)$ est solution de l'inéquation
2. Le couple $(1\,;1)$ est solution de l'inéquation
3. Le couple $\left(\frac{-1}{2}\,;1\right)$ est solution de l'inéquation
4. Le couple $(0\,;-2)$ est solution de l'inéquation
5. Le couple $(-1\,;2)$ est solution de l'inéquation

Exercice 3

Complète les pointillés

1. La droite frontière de la solution de l'inéquation $2x - 3y < 5$ est la droite d'équation ……………..
2. La droite frontière de la solution de l'inéquation $x - y + 5 \geq 0$ ………….. solution de cette inéquation.

Exercice 4

Réponds par Vrai ou Faux.

1. Si l'origine du repère est solution de l'inéquation $3x + y \leq 0$, on peut en déduire le demi-plan solution.
2. Pour résoudre graphiquement une inéquation à deux inconnues du type

$ax + by + c > 0$, on peut choisir n'importe quel point pour vérifier si ses coordonnées sont solution de cette inéquation.

4.3. Application de méthodes et de règles

Exercice 5

Résous graphiquement les inéquations suivantes :

1) $x + y > 2$; 2) $-x + y + 3 \geq 0$; 3) $2x - y - 2 \leq 0$; 4) $-2x > 0$;
5) $x + 2y + 4 < 0$; 6) $x + 2y \leq 0$; **7)** $y \geq 2$.

Exercice 6

Résous graphiquement les systèmes d'inéquations suivantes :

1) $\begin{cases} x + y > 3 \\ x - y > 0 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x > 4 \\ x + y - 3 < 0 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} x - y + 3 \leq 0 \\ 2x + y - 1 \leq 0 \end{cases}$;

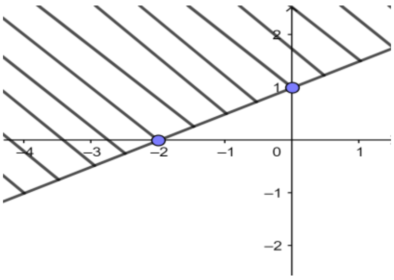
4) $\begin{cases} x - y < 0 \\ y > -1 \end{cases}$; 5) $\begin{cases} x > 1 \\ y < 0 \end{cases}$; 6) $\begin{cases} -y < -2x - 1 \\ x + 1 < 2y - 3 \end{cases}$

Exercice 7

Montre que les solutions du système $\begin{cases} x - y + 3 > 0 \\ x - 2 < 0 \\ y - 1 < 0 \end{cases}$ sont l'intérieur d'un triangle dont on déterminera les coordonnées des sommets A, B et C.

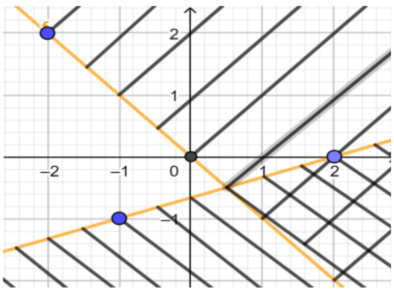
Exercice 8

Détermine une inéquation dont l'ensemble de solutions correspond au demi-plan non hachuré.



Exercice 9

Détermine un système d'inéquations dont l'ensemble de solutions correspond à la région non hachurée.



4.4. Problèmes de vie ou situations complexes

Exercice 10

Sofia a moins de 12 pièces ; les unes de 100 francs et les autres de 250 francs. Elle a au moins deux pièces de 100 francs de plus que celles de 250 francs ; le nombre de pièces de 100 francs inférieur au double de celles de 250 francs. Détermine le nombre de pièces de chaque espèce.

Exercice 11

Une entreprise fabrique des objets A et des objets B. La réalisation d'un objet A demande 30 000 F de matière première et 125 000 F de main-d'œuvre ; celle d'un objet B demande 70 000 F de matière première et 75 000 F de main-d'œuvre.

Pour une bonne gestion de l'entreprise, les dépenses journalières en matière première et en main-d'œuvre ne doivent pas dépasser respectivement 560 000 F et 1250 000 F.

On désigne par x le nombre d'objets A et par y le nombre d'objets B fabriqués par jour (en milliers de francs).

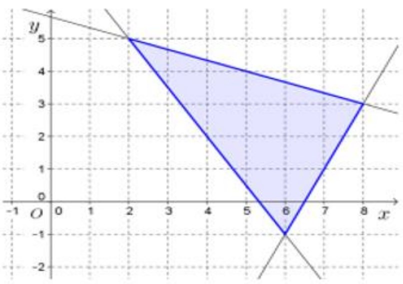
1. Calculer en fonction de x et de y la dépense journalière en matière première, et la dépense journalière en main-d'œuvre.

2. (x, y) étant le couple des coordonnées d'un point M dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, déterminer graphiquement l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan dont les coordonnées satisfont aux contraintes de l'entreprise.

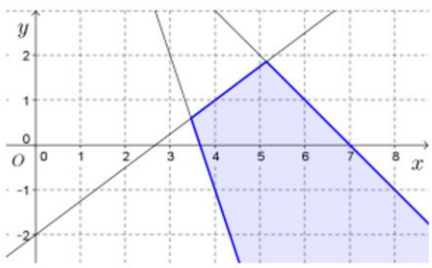
Exercice 12

Pour chacun des graphiques suivants trouvez un système d'inéquations dont la solution correspond à la partie coloriée:

1)



2)



Exercice 13

Disposant d'un crédit de 600 000 F pour enrichir la bibliothèque, le principal d'un collège désire acheter des manuels et des romans pour une valeur d'au moins 320 000 F.

Il veut se procurer des manuels qui valent 8 000 F pièce et des romans qui valent 4 000 F pièce. Par ailleurs, il tient à acheter plus de manuels que de romans. Enfin, il ne peut acheter les ouvrages que par lots de 10 et il désire au moins un lot de romans.

On note x le nombre de lots de manuels et y le nombre de lots de romans.

1.

a. Etablis le système (S) d'inéquations résultant des contraintes.

b. Le plan étant rapporté à un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, représenter l'ensemble des points $M(x ; y)$ vérifiant le système (S).

2. En effectuant une lecture graphique, répondre aux questions suivantes :
a. Quel est le nombre maximum de romans qu'il peut se procurer ? Dans ce cas, combien achète-t-il de manuels ? Quelle est alors la dépense ?
b. De combien de manières peut-il dépenser 40 000 F ?
c. Il veut acheter 70 livres. Donner toutes les répartitions possibles. Quelles sont alors la dépense minimum et la dépense maximum effectuées ?

Exercice 14

Un parc de loisir propose deux formules d'abonnement :
Formule A : La carte à l'année coûte 33000F et le prix d'une entrée est de 12000.
Formule B : La carte à l'année coûte 48000F et le prix d'une entrée est de 9000F.
On note y le nombre d'entrées.
1. Exprimer, en fonction de y, le coût à l'année avec la formule A.
2. Exprimer, en fonction de y, le coût à l'année avec la formule B.
3. A partir de combien d'entrées dans l'année, la formule B se révèle-t-elle la plus Intéressante ?

Leçon 5 : Applications affines

5.1. L'essentiel du cours

5.1.1. Définitions

❖ On appelle application affine f toute correspondance qui à chaque réel x associe le nombre réel $ax + b$ où a et b sont des nombres réels. On note $f : x \longmapsto ax + b$

- on dit que f est l'application affine définie par $f(x) = ax + b$.
- $f(x) = ax + b$ est appelée expression littérale de f.
- a est appelé **coefficient** de l'application affine f.

❖ Soit une application affine f définie par $f(x) = ax + b$.

- Si $b = 0$, alors $f(x) = ax$ et f est une **application linéaire**.
- Si $a = 0$, alors $f(x) = b$ et f est une **application constante**.

❖ Soit une application affine f définie par $f(x) = ax + b$ avec $a \neq 0$ et x_0 un nombre réel.

- L'**image** de x_0 par f est le réel $f(x_0)$.
- L'**antécédent** d'un réel y_0 par f est le nombre réel z_0 tel que $f(z_0) = y_0$.

Exemple

Soit les applications f, g et h définies par $f(x) = -2x + 3$, $g(x) = \frac{1}{4}x$ et $h(x) = \sqrt{5}$

- f, g et h sont des applications affines.
- De plus g est une application linéaire et h une application constante.
- Le coefficient de l'application affine f est -2.
- L'image de 5 par f est $f(5) = -2(5) + 3 = -7$.
- L'antécédent de 1 par g est le nombre x_0 tel que $g(x_0) = 1$;
  $g(x_0) = 1$ ssi $\frac{1}{4}x_0 = 1$ ssi $x_0 = 4$. Donc l'antécédent de 1 est 4.

5.1.2. Détermination d'une application affine

❖ **Connaissant les images de deux réels**

Exemple : déterminons l'application affine f telle que $f(1) = 3$ et $f(-2) = -9$?

Soit $f(x) = ax + b$ l'expression littérale de f ; déterminons a et b.

- $f(1) = 3$ ssi $a(1) + b = 3$ ssi $a + b = 3$ (1)
- $f(-2) = -9$ ssi $a(-2) + b = -9$ ssi $-2a + b = -9$ (2)

En résolvant $\begin{cases} a + b = 3 \\ -2a + b = -9 \end{cases}$ le système formé par les équations (1) et (2), on obtient $a = 4$ et $b = -1$ d'où $f(x) = 4x - 1$. Par conséquent l'application affine est $f : x \longmapsto 4x - 1$.

❖ **Connaissant le coefficient de l'application affine et l'image d'un réel**

Exemple : déterminons l'application affine g de coefficient -6 telle que $f(0) = 5$?

Soit $f(x) = ax + b$ l'expression littérale de g ; déterminons a et b.

- -6 est le coefficient de g, donc $a = -6$ et donc $g(x) = -6x + b$
- Or $g(0) = 5$ ssi $-6(0) + b = 5$ ssi $b = 5$

En remplaçant b par sa valeur on obtient $g(x) = -6x + 5$. Par conséquent l'application affine est
$g: x \longmapsto -6x + 5$.

5.1.2. Représentation graphique

La représentation graphique dans un repère orthonormal d'une application affine f définie par $f(x) = a\,x + b$ est la droite d'équation $(d): y = a\,x + b$.
a est appelé **coefficient directeur** de la droite d'équation (d).
b est appelé **l'ordonnée à l'origine**.

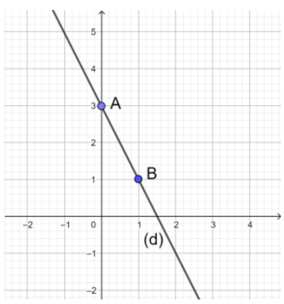
❖ **Méthode**

Représenter l'application affine f, définie par $f(x) = a\,x + b$, revient à tracer la droite $(d) : y = a\,x + b$ qui la représente. Pour cela :

- on détermine les coordonnées de 2 points de (d) ;
- on représente dans un repère orthonormal ces deux points ;
- On trace (d), qui est la droite passant par les deux points.

❖ **Exemple**

Représentons l'application affine f, définie par $f(x) = -2\,x + 3$? Traçons pour cela, la droite (d) d'équation $y = -2\,x + 3$ qui la représente.
- Si $x = 0$, alors $y = 3$ d'où $A(0\,;\,3) \in (d)$
- Si $x = 1$, alors $y = 1$ d'où $B(1\,;\,1) \in (d)$
Plaçons les points A, B et traçons la droite (d)



5.1.3. Application affine par intervalles

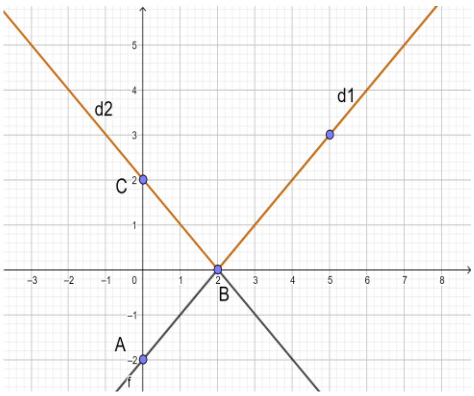
Soit l'application f définie par $f(x) = |x - 2|$.

En écrivant $f(x)$ sans les barres de valeur absolue on obtient $f(x) = \begin{cases} x - 2 \text{ si } x \geq 2 \\ -x + 2 \text{ si } x \leq 2 \end{cases}$

- Si $x \geq 2$, $f(x) = x - 2$; donc f est une fonction affine sur $[2\,;\,+\infty[$
- Si $x \leq 2$, $f(x) = -x + 2$; donc f est une fonction affine sur $]-\infty\,;\,2]$

On dit que f est une fonction affine par intervalle et pour la représenter on trace dans chaque intervalle la demi-droite représentant la fonction affine.

- **Représentation graphique**



- Sur $[2\ ;\ +\infty[$, $f(x) = x - 2$; sa représentation est la droite $d_1 : y = x - 2$ Représentons cette droite.

  - Si $x = 0$, alors $y = -2$ et donc $A(0\ ;\ -2) \in d_1$.

  - Si $x = 2$, alors $y = 0$ et donc $B(2\ ;\ 0) \in d_1$

- Sur $]-\infty\ ;\ 2]$, $f(x) = -x + 2$; sa représentation est la droite $d_2 : y = -x + 2$

  Représentons cette droite.

  - Si $x = 0$, alors $y = 2$ et donc $C(0\ ;\ 2) \in d_2$.

  - Si $x = 2$, alors $y = 0$ et donc $B(2\ ;\ 0) \in d_2$.

- Choisissons la demi-droite de (d_1) représentée sur $[2\ ;\ +\infty[$ et celle de d_2 représentée sur $]-\infty\ ;\ 2]$ en les traçant en couleur.

La représentation graphique de l'application affine par intervalle est la ligne brisée en couleur, constituée de ces deux demi-droites.

5.2. Restitution de connaissances

Exercice 1

Réponds par Vrai ou Faux.

1. L'application f définie par $f(x) = 2x^2 + 1$ est affine.
2. L'application g définie par $g(x) = x\sqrt{2}$ est affine.
3. L'application h définie par $h(x) = \frac{-1}{3}$ est affine.
4. L'application k définie par $k(x) = \frac{1}{2}(x - \frac{3}{4})$ est affine
5. L'application l définie par $l(x) = \frac{x+1}{x}$ est affine

Exercice 2

Soit l'application affine f définie par $(x) = x + 2$. Complète les pointillés :

1. Le coefficient de l'application affine f est ……
2. L'image de -5 par l'application affine f est ……
3. L'antécédent de -5 par l'application affine f est ……
4. La représentation graphique dans un repère orthonormal de l'application affine f est la droite d'équation ……

Exercice 3

Soit la droite (d) d'équation $y = \frac{3}{2}x - 1$. Complète les pointillés :

1. (d) est la représentation graphique de l'application affine f définie par ……
2. Le coefficient directeur de la droite (d) est ……
3. L'ordonnée à l'origine de la droite (d) est ……
4. La droite (d) passe par le point d'abscisse 0 et d'ordonnée ……
5. La droite (d) passe par le point d'ordonnée 0 et d'abscisse ……

Exercice 4

Soit l'application affine f définie par $f(x) = 2x - 1)$. Choisis la bonne réponse :

Nº	Questions	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1	$f(x) = 2x - 1$ est une …	application affine	expression littérale	application linéaire
2	Le réel 2 est …	le coefficient directeur de f	l'ordonnée à l'origine de f	le coefficient de f
3	$f(-1)$ est …	1	l'image de -1 par f	l'antécédent de -1 par f
4	L'antécédent de 0 par f est …	$\frac{1}{2}$	$f(0)$	-1

5.3. Application de méthodes ou de règles

Exercice 5

On considère l'application affine f définie par $f(x) = -2x + 5$

1. Calcule l'image par f de chacun des nombres suivants : 0 ; $\frac{1}{2}$; -2 ; 3.
2. Calcule l'antécédent par f de chacun des nombres suivants : 0 ; $\frac{1}{2}$; -1 ; $\sqrt{5}$.

Exercice 6

1. Détermine l'application affine f de coefficient 3 telle que $f(-2) = 5$
2. Détermine l'application affine g, telle que $g(3) = -1$ et $g(-1) = 3$.

Exercice 7

Soit les applications affines f, g, h définies par $f(x) = -2x + 5$, $g(x) = 3x$ et $h(x) = -1$.

1. Trace dans un même repère orthonormal d_1, d_2 et d_3 les représentations graphiques respectives des applications f, g, h.
2. Détermine graphiquement puis par calcul, les coordonnées des points d'intersection de d_1 et d_2 d'une part, et de d_1 et d_3 d'autre part.

Exercice 8

Soit A (1 ; 2), B(0 ; 1) des points du plan et la droite (d) : $y = -2x + 1$

Détermine l'application affine f, telle que sa représentation graphique :

1. admet -3 comme coefficient directeur et passe par le point A.
1. passe par les points A et B
2. passe par le point A et est parallèle à (d) .
3. passe par le point B et est perpendiculaire à (d) .

Exercice 9

Soit une application f telle que $f(x) = |-x + 3|$.

1. Ecris f sans les barres de la valeur absolue.
2. Calcule $f(0)$ et $f(5)$.
3. Représente graphiquement f dans un repère orthonormal.
4. Résoudre l'équation $f(x) = |2x + 1|$.

Exercice 10

Le prix à payer pour un trajet en taxi comprend une prise en charge et une somme proportionnelle au nombre de km parcourus. Ali a payé 500 F pour un trajet de 4 km ; Pape a payé 725 F pour un trajet de 8,5 km.

1. Détermine le prix du km et la prise en charge.
2. Détermine l'application qui définit la somme à payer en fonction du nombre de km parcourus.
3. Représente graphiquement une telle application.
4. Détermine graphiquement le prix à payer pour 10 km.

5.4. Problèmes de vie ou situations complexes

Exercice 11

Le prix à payer sur le réseau téléphonique "EXPRESSO" comprend une somme forfaitaire et un prix proportionnel au nombre de minutes de communication.

Alioune a payé 440 Fcfa pour une durée de 6 minutes et Fatou 540 Fcfa pour 8,5 minutes.

1. Détermine le prix d'une minute de communication et la somme forfaitaire sur le réseau "EXPRESSO".
2. Détermine l'application affine qui définit la somme à payer en fonction du nombre de minute de communication.
3. Représente graphiquement cette application dans un repère orthonormé.

On prendra en abscisse : 1cm pour 2 minutes abscisse et en ordonnée : 1cm pour 100Fcfa.

4. Détermine graphiquement la somme à payer pour 10 minutes de communication.

Exercice 12 **(BFEM 2004)**

Pour organiser une colonie de vacances pour les 50 enfants de ses employés, une société, établie à Dakar, lance un appel d'offre auquel trois agences ont soumissionné :

- L'agence A réclame pour chacun de ses cars un forfait de 30 000F et 500F pour chaque km parcouru.
- L'agence B réclame pour chacun de ses cars un forfait de 40 000F et 300F pour chaque km parcouru.
- L'agence C réclame 64 000F pour chacun de ses cars.

1. Etablis une relation exprimant la somme y à payer en fonction du nombre x de km parcourus pour chacune des trois agences.
2. Dans un repère orthogonal, représente graphiquement les trois relations obtenues.

$$\text{On prendra : } \begin{cases} 1 \text{ cm pour } 10 \text{ km sur l'axe des abscisses.} \\ 1 \text{ cm pour } 1000\text{F sur l'axe des ordonnées.} \end{cases}$$

3. Détermine graphiquement sur quelle longueur de trajet :
   - L'agence A réclame plus que l'agence B
   - L'agence A réclame la même somme que l'agence C
   - L'agence B réclame moins que l'agence C
4. Les enfants sont répartis en deux groupes :
   - Le groupe 1 va à Thiès, ville distante de 70 km de Dakar
   - Le groupe 2 va à Kaolack, ville distante de 192 km de Dakar.
     a. Indique sur chacun de ses deux trajets l'agence la moins chère qui sera retenue.
     b. Quelle est l'agence qui n'aura aucun part de ce marché ? pourquoi ?

Exercice 13

Un fournisseur d'accès à internet propose trois formules d'abonnement mensuel :

• Formule A : 2 euros par heure de connexion.
• Formule B : 20 euros d'abonnement et 0,50 euro par heure de connexion.
• Formule C : connexion illimitée pour 30 euros.

1. Exprimer chaque formule d'abonnement par une fonction affine qui au temps de connexion

x en heure dans un mois associe le prix à payer.
2. Représenter ces trois fonctions dans un repère bien choisi.
3. Expliquer en fonction du temps de connexion quelle est la formule la plus économique.

Exercice 14

Pour labourer son champ, on peut louer chez M. NDOYE :

- Un âne à 150 francs CFA par jour ;
- Un bœuf à 100 francs CFA par jour avec un versement d'une caution non remboursable de 500 francs CFA au premier jour de location ;
- Un cheval à 3000 francs pour une durée de trente jours de location au plus.

1. Recopie et complète le tableau ci-dessous :

Nombre de jour de location	9	17	30
Montant de la location avec un âne			
Montant de la location avec un bœuf			
Montant de la location avec un cheval			

2. Quel est le tarif le moins cher pour le laboureur, si sa location est de 9 jours, 17 jours, 30 jours ?
3. Soit x le nombre de jours de location ($x \leq 30$). On appelle Y_A, Y_B, Y_C les montants de la location pour une durée de x jours avec respectivement les tarifs de l'âne, du bœuf et du cheval. Exprime Y_A, Y_B en fonction de x. Que peut-on dire de Y_C ?
4. Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), trace les droites D_1 et D_2 d'équations respectives
$y = 150x$ et $y = 100x + 500$ en choisissant les unités de la manière suivante :
- sur l'axe des abscisses, 1 cm pour 2 unités,
- sur l'axe des ordonnées, 1 cm pour 500 unités.
5. Détermine par calcul et graphiquement x, le nombre de jours pour que chez M. Ndoye, un âne et un bœuf reviennent au même coût.

Exercice 15

Un fournisseur d'accès à Internet, qui propose à ses clients deux formules d'abonnement :
- une formule A comportant un abonnement fixe de 20000 Fcfa par mois auquel s'ajoute le prix des communications au tarif préférentiel de 200 de l'heure.
- une formule B offrant un libre accès à Internet mais pour laquelle le prix des communications est de 400 Fcfa pour une heure de connexion.

Dans les deux cas, les communications sont facturées proportionnellement au temps de connexion.

1. Pâthé se connecte 7 heures 30 minutes par mois et Anna 15 heures par mois.
a. Calcule le prix payé par chacune des deux personnes selon qu'elle choisit la formule A ou la formule B.
b. Conseille à chacune l'option qui est pour elle la plus avantageuse.
2. On note x le temps de connexion d'un client, exprimé en heures. On appelle P_A le prix à payer en Fcfa avec la formule A et P_B le prix à payer en Fcfa avec la formule B.
Exprime P_A et P_B en fonction de x.

3.Coumba, qui avait choisi la formule B, a payé 2600 Fcfa.
Combien de temps a-t-elle été connectée ?
4. Mouhamed se connecte 14 heures dans le mois. Combien va-t-il payer selon qu'il choisit la formule A ou la formule B ?
5. Résous l'inéquation : $400x \leq 200x + 20000$.
Que permet de déterminer la résolution de cette inéquation dans le contexte du problème ?

Leçon 6 : Statistique

6.1. L'essentiel du cours

6.1.1. Rappels et compléments

❖ **Population**

En statistique, l'ensemble sur lequel porte l'étude est appelé population.

❖ **Individu**

Tout élément de la population est appelé individu.

❖ **Echantillon**

Un échantillon est un sous-ensemble ou une partie de la population.

❖ **Caractère**

Un caractère est toute information qu'on peut étudier sur la population.

- Il est qualitatif lorsqu'il ne peut pas être exprimé par un nombre.
- Il est quantitatif lorsqu'il est mesurable ou peut être exprimé par un nombre.

❖ **Exemple :** considérons les élèves de la classe de Troisième A.

- L'ensemble des élèves de la classe est la population.
- Chaque élève de la classe est un individu
- Les garçons de la classe forme un échantillon.
- Sur cette population, on peut étudier l'âge, la taille, l'ethnie ou la nationalité des élèves.
  - l'âge, la taille, la nationalité sont des caractères.
  - l'ethnie et la nationalité sont des caractères qualitatifs.
  - l'âge et la taille sont des caractères quantitatifs.

❖ **Modalité ou valeur du caractère**

On appelle modalité d'un caractère toute valeur prise par le caractère.

❖ **Effectif**

- L'effectif total de la population est le nombre total d'individus de la population. Il est noté N en général.
- L'effectif n_i d'une modalité x_i est le nombre d'individus présentant cette modalité
  Remarque : l'effectif total est égal à la somme des effectifs des modalités.
  Autrement : si $n_1, n_2, \ldots, n_k$ sont les effectifs respectifs des modalités $x_1, x_2, \ldots, x_k$ de la série alors $N = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$.

❖ **Fréquence d'une modalité**

- C 'est le rapport de l'effectif d'une modalité par l'effectif total. On a :

$$F = \frac{effectif\ de\ la\ modalité}{effectif\ total}$$

- Elle peut également être exprimée en pourcentage. On a donc :
  $$F\ en\ \% = \frac{effectif\ de\ la\ modalité}{effectif\ total} \times 100$$

❖ **Caractère quantitatif discret – caractère quantitatif continue**

- Un caractère quantitatif est discret lorsqu'il prend des valeurs isolées.
  Par exemple les notes en maths, le nombre de points obtenus par les différentes équipes de basket-ball lors d'une compétition, etc.
- Un caractère quantitatif est continu lorsqu'il peut prendre n'importe quelle valeur dans un intervalle. Ce caractère résulte en général d'une mesure.
  Par exemple la taille, le poids, etc.

<u>**NB**</u> : Si les modalités d'un caractère sont présentées sous forme d'intervalles $[a\ ;\ b[$ alors le caractère est quantitatif continu et ces intervalles sont appelés classes.

❖ **Amplitude et centre d'une classe**

- L'amplitude d'une classe $[a\ ;\ b[$ est le nombre $b - a$.
- Le centre d'une classe $[a\ ;\ b[$ est le nombre $\frac{a+b}{2}$.

❖ **Mode d'une série statistique**

On appelle mode d'une série statistique, toute modalité ayant le plus grand effectif.
Remarques

- Une série statistique peut avoir un ou plusieurs modes.
- Une classe modale est une classe ayant le plus grand effectif.

❖ **Tableau des effectifs**

Si $n_1, n_2, \ldots, n_k$ sont les effectifs respectifs des modalités $x_1, x_2, \ldots, x_k$ alors le tableau suivant est appelé tableau des effectifs.

Modalités	x_1	x_2	$\ldots$	$\ldots$	x_k
Effectif	n_1	n_2	$\ldots$	$\ldots$	n_k

❖ **Moyenne**

Dans le cas d'un caractère quantitatif, si $n_1, n_2, \ldots, n_k$ sont les effectifs respectifs des modalités $x_1, x_2, \ldots, x_k$ alors la moyenne de la série statistique est $\bar{x} = \frac{n_1 \times x_1 + n_2 \times x_2 + \cdots + n_k \times x_k}{N}$,
où N est l'effectif total.

<u>Remarque</u> :
Dans le cas d'un caractère quantitatif continu, la modalité x_i est égale au centre de la classe $[a_i\ ;\ b_i[$.

❖ **Médiane**

Dans le cas d'un caractère quantitatif, la médiane est la valeur du caractère qui partage la série en deux groupes de même effectif. Pour déterminer la médiane on peut procéder comme suit :

- **Pour un caractère quantitatif discret**
  - On range dans l'ordre croissant les modalités en répétant chaque modalité un nombre de fois égal à son effectif :

- si l'effectif total N est impair, la médiane est égale à la valeur centrale ;
- si l'effectif total N est pair, alors la médiane est égale à la demi-somme des deux valeurs centrales.

- **Pour un caractère quantitatif continu**
  - On dresse le tableau des effectifs cumulés croissants ou décroissants.
  - On trace le polygone des effectifs cumulés croissants ou décroissants.
  - On détermine graphiquement la position de la médiane qui est l'abscisse du point du polygone des effectifs cumulés croissants ou décroissants qui a comme ordonnée la moitié de l'effectif total.
  - On utilise le théorème de Thalès pour déterminer la valeur de la médiane.

6.1.2. Etude d'un caractère qualitatif

L'étude de l'ethnie des employés du salon de coiffure de tata Mariétou a donné les résultats organisés dans le tableau suivant :

Ethnie	Diola	Sérère	Peul	Wolof
Effectif	2	5	1	2

- Population étudiée :
  La population étudiée est l'ensemble des employés du salon de coiffure de tata Mariétou.
- Caractère étudié et sa nature
  Le caractère étudié est l'ethnie des employés du salon. Ce caractère est qualitatif car on ne peut pas l'exprimer par un nombre.
- Modalités du caractère
  Les modalités du caractère sont les ethnies Diola, Sérère, Peul et Wolof.
- Mode de la série statistique
  Le mode de la série est l'ethnie Sérère car elle a le plus grand effectif
- Effectif total
  L'effectif total de la population est $N = 2 + 5 + 1 + 2 = 10$
- Le tableau des fréquences

Ethnie	Diola	Sérère	Peul	Wolof
Effectif	2	5	1	2
Fréquence	$\frac{2}{10} = 0,2$	0,5	0,1	0,2
Fréquence en %	$\frac{2}{10} \times 100 = 20$	50	10	20

On remarque que la somme des fréquences est égale à 1 et la somme des fréquences en pourcentage est égale à 100.

- Représentation graphique de la série ?
  - Diagramme à bandes
  On place dans un repère orthogonal, les ethnies en abscisses et les effectifs en ordonnées.

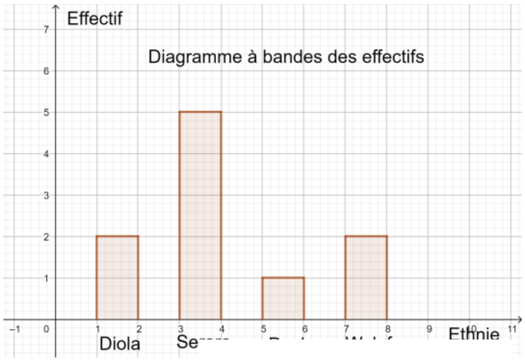


Diagramme circulaire

On utilise la règle de trois pour déterminer le secteur angulaire représentant chaque ethnie en fonction de son effectif.

$N \rightarrow \; 360^o$

$1 \; \rightarrow \frac{360^o}{N} \times 1 = \frac{360^o}{10} = 36^0$

$2 \; \rightarrow 36^o \times 2 = 72^o$

$5 \; \rightarrow 36^o \times 5 = 180^o$

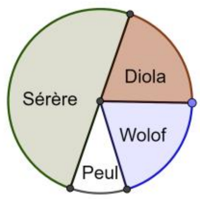


Diagramme circulaire des effectif

L'ethnie Peul est représentée par un secteur angulaire de 36°.
Les ethnies Diola et Wolof sont chacune représentée par un secteur angulaire de 72°
L'ethnie Sérère est représentée par un secteur angulaire de 180°

6.1.3. Etude d'un caractère quantitatif discret

Les élèves de la classe de troisième B sont interrogés sur leurs âges.
On obtenu les résultats dans le tableau ci-contre :

Âge	13	14	15	16	17
Effectif	6	3	4	4	3

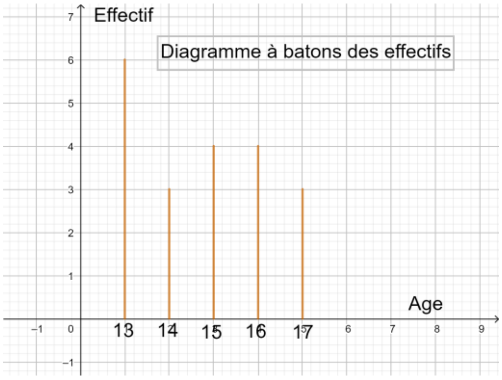
- Population étudiée
  La population étudiée est l'ensemble des élèves de la classe de troisième B
- Caractère étudié et sa nature
  Le caractère étudié est l'âge des élèves. Ce caractère est quantitatif car il est exprimé par des nombres réels.
- Modalités du caractère.
  Les modalités du caractère sont : 13 ; 14 ; 15 ; 16 et 17.
- Mode de la série statistique
  Le mode de la série est l'âge de 13 ans car il a le plus grand effectif
- Effectif total
  L'effectif total de la population est $N = 6 + 3 + 4 + 4 + 3 = 20$
- Calcul de l'âge moyen
  $Moyenne = \frac{n_1 \times x_1 + n_2 \times x_2 + \cdots + n_k \times x_k}{N}$

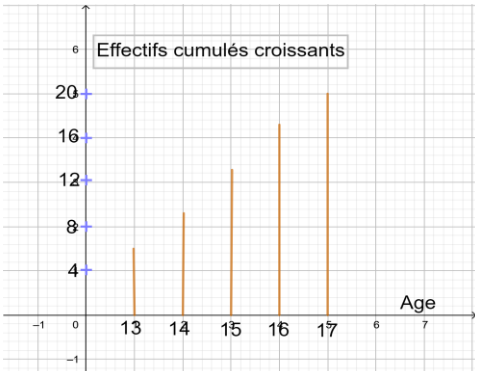
$$= \frac{6 \times 13 + 3 \times 14 + 4 \times 15 + 4 \times 16 + 3 \times 17}{20} = 14{,}75$$

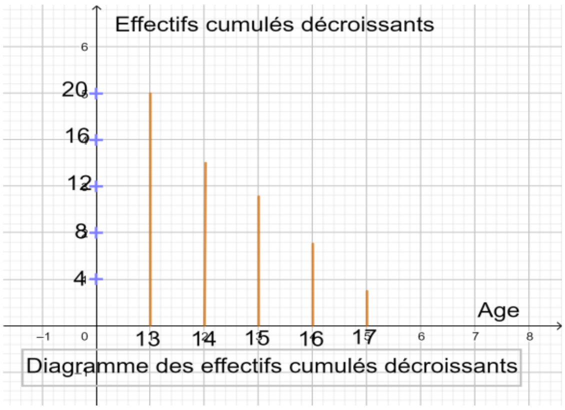
- Détermination de la médiane
  - Ordonnons les valeurs du caractère en répétant chaque valeur un nombre de fois égal à son effectif : 13-13-13-13-13-13-14-14-14-15-15-15-15-16-16-16-16-17-17-17
  - N étant pair, la médiane est égale à la demi-somme des deux valeurs centrales :
  Donc la médiane $M_e = \frac{15+15}{2} = 15$
- Tableau des effectifs cumulés croissants (ECC) et des effectifs cumulés décroissants (ECD)?

Âge	13	14	15	16	17
Effectif	6	3	4	4	3
ECC	6	9	13	17	20
ECD	20	14	11	7	3

- Représentations graphiques







6.1.3. Etude d'un caractère quantitatif continu

A l'occasion de la visite médicale d'aptitude des élèves de la classe de 3e C, aux épreuves physiques du BFEM, le médecin a relevé les tailles suivantes en centimètres :
168 ;184 ;165 ;174 ;169 ;183 ;170 ;170 ;171 ;178 ;172 ;173 ;160 ;173 ;174 ;171 ;175 ;176 ; 177 ;175 ;177 ;167 ;177 ; 178 ;170 ; 162.

- Population
  L'ensemble des élèves de 3e C
- Caractère
  Le caractère est la taille des élèves ;
- Regroupement des tailles en classe d'amplitude de 5cm ?
  On obtient les classes [160 ; 165[, [165 ; 170[, [170 ; 175[, [175 ; 180[, [180 ; 185[
- Tableau des effectifs,

Classe	[160 ; 165[	[165 ; 170[	[170 ; 175[	[175 ; 180[	[180 ; 185[
Effectif	2	4	10	8	2

- Classe modale
  C'est la classe [170 ; 175[qui a le plus grand effectif.
- L'effectif total N
  $N = 2 + 4 + 10 + 8 + 2 = 26$
- La moyenne
  Déterminons le centre des classes x_i

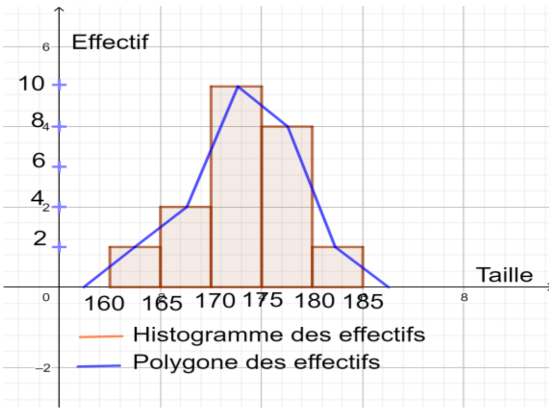
Classe	[160 ; 165[	[165 ; 170[	[170 ; 175[	[175 ; 180[	[180 ; 185[
Centre de la classe	162,5	167,5	172,5	177,5	182,5
Effectif	2	4	10	8	2

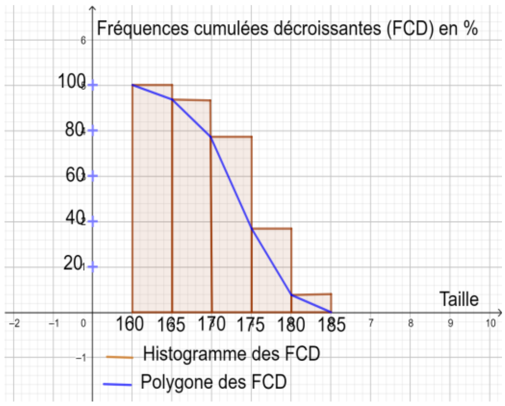
$$Moyenne = \frac{n_1 \times x_1 + n_2 \times x_2 + \cdots + n_k \times x_k}{N}$$
$$= \frac{2\times162{,}5+4\times167{,}5+10\times172{,}5+8\times177{,}5+2\times182{,}5}{26} = 173{,}26$$

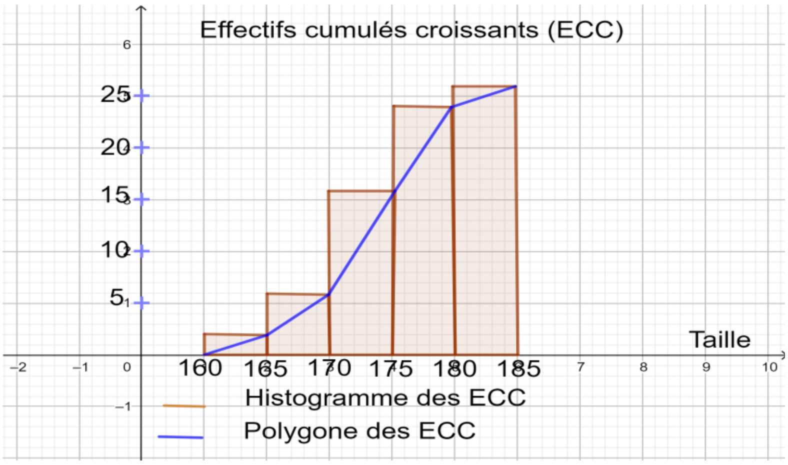
- Tableau récapitulatif

Classe	[160 ; 165[	[165 ; 170[	[170 ; 175[	[175 ; 180[	[180 ; 185[
Effectif	2	4	10	8	2
ECC	2	6	16	24	26
ECD	26	24	20	10	2
Fréquence en %	8	15	38	31	8
FCC en %	8	23	61	92	100
FCD en %	100	92	77	39	8

- Représentation graphique



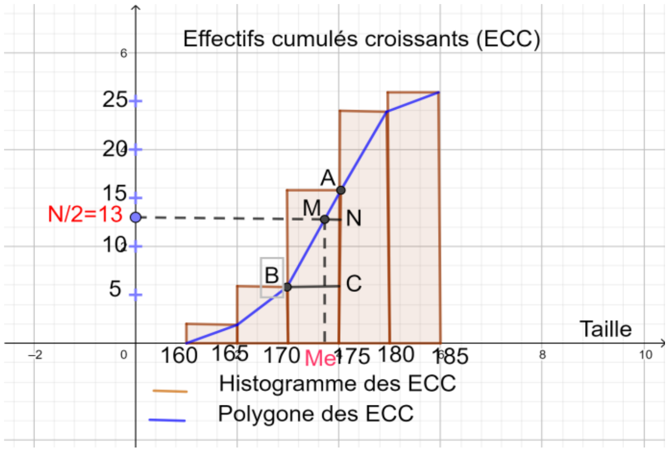




- Calcul de la médiane

La médiane étant l'abscisse du point du polygone des effectifs cumulés qui a comme ordonnée la moitié de l'effectif total $\frac{N}{2} = 13$, on peut procéder comme suit :

- On place $\frac{N}{2} = 13$ sur l'axe des ECC (l'axe (Oy) ;
- On détermine le point du polygone des ECC qui a pour ordonnée 13
- On détermine son abscisse qui est la médiane



Remarques

- On obtient ainsi la médiane M_e par la méthode graphique. La médiane se trouvant dans la classe [170 ; 175[, cette classe est appelée **classe médiane**.
  Avec cette méthode graphique, on obtient une valeur approchée de la médiane qui est ici égale à 173.

- Pour obtenir la valeur exacte de la médiane M_e , on utilise une méthode par le calcul par exemple celle utilisant le théorème de Thalès : on nomme les triangles ABC et AMN.

  Ces deux triangles étant en position de Thales, on a $\frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$; en calculant ces distances à partir des abscisses ou des ordonnées des points on obtient $\frac{16-13}{16-6} = \frac{175-M_e}{175-170}$

  d'où $M_e = 173{,}5$.

6.2. Restitution de connaissances

Exercice 1

Complète les pointillés :

1. En statistique, l'ensemble sur lequel porte l'étude est appelée ………………
2. Le mode d'une série statistique est la modalité qui a le …… effectif.
3. Un caractère est …… s'il peut être exprimé par des nombres.
4. Le nombre d'individus d'une population est appelé ……
5. La valeur qui partage la série en deux groupes de même effectif s'appelle ……

Exercice 2

Réponds par vrai ou faux :

1. La population est le nombre d'individus.
2. Toute propriété étudiée sur les individus d'une population est appelée caractère.
3. Le mode est le plus grand des effectifs des modalités.
4. Un échantillon est une partie de la population.
5. Le centre de la classe $[a\,;b[\ est\ \frac{b-a}{2}$.

Exercice 3

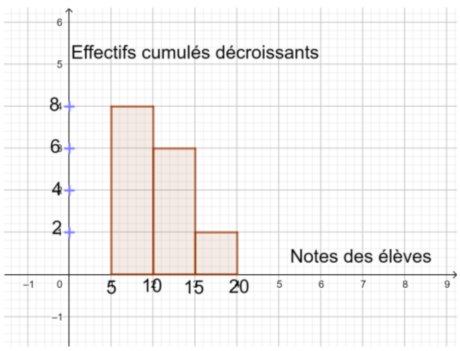
Une enquête portant sur les notes de Mathématiques de six élèves a révélé les résultats suivants : 13 – 19 – 13 – 15 – 07 – 17. Réponds aux questions posées sur cette série statistiques en choisissant l'une des réponses.

Nº	Questions	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1	La population est …	Les notes de maths	6	Les six élèves
2	Le caractère est …	Qualitatif	quantitatif continu	quantitatif discret
3	Le mode est …	13	19	07
4	La moyenne est …	09	13	14
5	La médiane est …	14	13,5	15

Exercice 4

Soit la représentation graphique d'une série statistique.

1. Quelle est la nature du caractère ?
2. Quel est le nom de la représentation graphique ?
3. Quel est l'effectif total ?
4. Quelle est la classe médiane ?
5. Quel est l'effectif de la classe [10 ; 15[?



6.3. Application de méthodes ou de règles

Exercice 5

Le tableau suivant donne le nombre de moutons vendus par un éleveur en fonction de la race dans l'année.

Race	Balibali	Peul-peul	Ladoum	Azawad	Toulaber
Effectif	15	60	50	15	10

1. Quelle est la population étudiée ?
2. Quel est le caractère étudié ? Quelle est sa nature ?
3. Donne le(s) mode(s) de la série.
4. Représente la série.

Exercice 6

Voici les notes obtenues par les élèves d'une classe de 3^{e} à un devoir de mathématiques :
10 ; 10 ; 14 ; 8 ; 9 ; 19 ; 17 ; 6 ; 14 ; 10 ; 8 ; 14 ; 17 ; 9 ; 10 ; 9 ; 8 ; 10 : 14 ; 6.

1. Complète le tableau statistique suivant :

Notes	6	8	9	10	14	17	19
Effectif							
E.C.C							
E.C.D							
Fréquences							

2. Quelle est la population étudiée ?
3. Quel est le caractère étudié ? Quelle est sa nature ?
4. Donne le(s) mode(s) de la série
5. Calcule la moyenne en mathématiques de cette classe pour ce devoir.
6. Calcule le pourcentage d'élèves qui ont une note supérieure à cette moyenne de la classe.
7. Détermine la médiane de cette série de notes.
8. Représente le diagramme en bâtons des effectifs et le polygone des effectifs cumulés croissants (E.C.C.).

Exercice 7

On considère les deux séries statistiques suivantes :

$12 - 13 - x - 14 - 12 - 10.$

$9 - 7 - 11 - x - 17 - 15 - 12.$

Détermine x pour que ces deux séries aient la même moyenne.

Exercice 8

La surveillante d'une classe de 3^{e} , a relevé les absences des élèves pendant le 1° semestre.
Les résultats sont consignés dans le tableau ci-dessous.

Absences	[0;4[	[4;8[	[8;12[	[12;16[	[16 ;20[
Nombre d'élèves	30	8	4	x	8

Sachant que la moyenne de la série est 7,2 ;

1. Montre que l'effectif manquant x est 10.
2. Représente le diagramme semi-circulaire de cette série.
3. Complète la série avec la ligne des effectifs cumulés croissants.
4. Calcule le pourcentage d'élèves qui ont comptabilisé au moins 12 absences.
5. Représente graphiquement le polygone des effectifs cumulés croissants.
6. Détermine la médiane en utilisant le théorème de Thalès.

Exercice 9

Soit le tableau statistique suivant :

Notes	[0 ;4[	[4 ;8[	[8 ; 12[	[12 ;16[	[16 ;20[
Effectifs	5	x	3	y	6
Centre					
E.C.C					
E.C.D					
Fréquences					

1. Sachant que l'effectif total est 20 et que la moyenne est 10, montre que $(x\,;\,y)$ est le couple solution du système : $\begin{cases} x + y = 6 \\ 3x + 4y = 26 \end{cases}$
2. Résous ce système
3. Complète le tableau avec les centres des classes, les effectifs cumulés croissants, les E.C.C et les fréquences.
4. Détermine la médiane en appliquant le théorème de Thalès.

Exercice 10

Les gendarmes ont effectué un contrôle de vitesse sur le bord d'une route nationale.

Vitesse	[50 ; 70[	[70 ; 90[	[90 ; 110[	[110 ; 130[
Effectif	15	90	35	5

Calcule la vitesse moyenne des automobilistes contrôlés.

Exercice 11

Dans une classe de 25 élèves, la moyenne d'EPS des filles, lors d'une évaluation de gymnastique est égale à 11 sur 20. La moyenne des garçons est égale à 9,5 sur 20. Sachant que la moyenne de la classe est égale à 10,4 sur 20, calcule le nombre de filles de la classe.

6.4. Problèmes de vie ou situations complexes

Exercice 12

Les élèves d'une classe de 3e ont mesuré, par groupe, le pH de l'eau. Voici les résultats obtenus : 6,99 ; 6,9 ; 7,02 ; 7,02 ; 6,99 ; 6,99 ; 7,2 ; 7,2 ; 7,08 ; 7,22 ; 6,99 ; 7,01 ; 7,02 ; 6,99.

1. Quelle est la population étudiée
2. Quel est le caractère étudié ? Quelle est sa nature ?
3. Quel est le mode de la série ?
4. Quel est l'effectif total de la série
5. Dresse le tableau des effectifs de la série
6. Calcule en moyenne le pH de l'eau
7. Calcul la médiane de la série
7. Etablis le tableau des fréquences cumulées croissantes
8. Représente les diagrammes en bâtons des effectifs et des fréquences cumulées croissantes.

Exercice 13

Lors de la journée nationale de solidarité aux enfants orphelins, on a relevé les contributions en francs CFA de trente élèves d'une classe de 3eme dans un collège de la commune de Fatick
100-50-150-200-20-25-175-125-100-50-200-50-250-75-100-100-120-75-125-200-100-50-30-200-100-50-50-10-25-100

On a regroupé les différentes contributions en intervalles (classes) d'amplitude 50.

Contributions	[0;50[	[50;100[	[100;150[	[150;200[	[200;250[	[250;300[
Effectifs						
ECC						

(ECC signifie effectifs cumulés croissants)

1. Complète le tableau ci-dessus
2. Quelle est la classe modale de cette série statistique
3. Calcule la contribution moyenne des élèves
4. Représente sur un même dessin l'histogramme et le polygone des effectifs cumulés croissants.
5. Calcule la médiane de la série

Exercice 14

Voici la répartition des 64 professeurs d'un collège suivant leur âge :

Age (ans)	[25 ; 35[	[35 ; 45[	[45 ; 55[	[55 ; 65[
Fréquence en %	37,5	43,75	12,5	6,25

1. Calculer les effectifs de chaque classe d'âge.
2. Déterminer à un an prés l'âge moyen des professeurs de collège.
3. Calculer les effectifs cumulés croissants de chaque classe.
4. Représenter graphiquement le diagramme des effectifs cumulés croissants
5. En utilisant le théorème de Thalès, calculer l'âge médian.

Exercice 15

Une association désirant faire une étude sur l'âge de ses trente adhérents, a relevé les âges suivants :

31	55	49	41	28	28	59	30	48	49	20	64	27	32	40
47	25	27	52	34	34	59	45	32	59	48	34	56	69	37

1. Définis la population étudiée et son caractère.
2. Classe les données dans un tableau, en calculant pour chaque valeur du caractère l'effectif correspondant.
3.

a. Regroupe ces données en classes d'amplitude 5 ans, de 20 ans jusqu'à 70 ans.

[20 ; 25[, [25 ; 30[, …… [65 ; 70[

b. Calcule la moyenne.

c. Représente par un histogramme, la répartition des membres de cette association, selon leur classe d'âge.

4. Calcule les fréquences de chaque classe d'âge.

Tu donneras les résultats sous forme de fractions irréductibles.

5.Détermine la classe modale.

Exercice 16

Pour la gestion d'un parc de stationnement, Talla, un jeune mécanicien-automobile, consulte un de ses anciens patrons qui lui propose de facturer chaque véhicule suivant la formule :

$f(x) = 100x^2 - 4 + (10x - 2)^2$

où x est le nombre de jours passés sur le parc et $f(x)$ le montant à payer.

Il lui remet aussi le relevé du nombre de jours passés par 50 véhicules sur un parc où il a appliqué cette formule :

10 14 10 5 5 6 12 8 5 3 9 3 5 6 1 4 11 20 18 6 11 17 5 6 2 7 4 1 12 3 10 21 22 4 1 23 4 7 8 5 3 1 15 25 2 3 2 7 6 3.

Toto se dit que cette formule pourrait éviter les trop longs stationnements.

1. Factorise $f(x)$.
2. Développe, réduis et ordonne $f(x)$ suivant les puissances croissantes de x.
3. Dresse le tableau des effectifs par classes d'amplitude 7 de cette série statistique ; la première classe étant $[1; 8[$.
4. Construis le diagramme circulaire puis détermine la classe modale de la série.
5. Quelle est la somme la plus élevée payée par un véhicule de la classe modale ?
6. Un automobiliste choisit de stationner 24 jours mais en trois (03) étapes de huit (08) jours. Calcule et compare la somme qu'il doit payer à ce qu'il devrait payer s'il faisait les 24 jours successifs.

PARTIE II : ACTIVITES GEOMETRIQUES

Leçon 1 : Théorème de Thalès

1.1. L'essentiel du cours

1.1.1. Cas du triangle

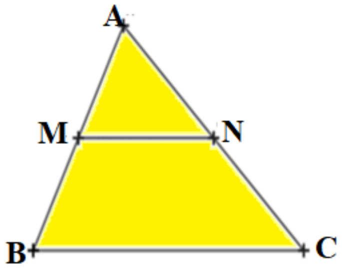
❖ **Théorème**

Soit ABC un triangle. M un point de (AB) et N un point de (AC).

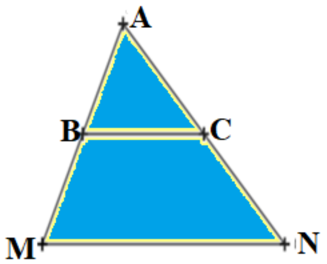
Si (MN) est parallèle à (BC) alors : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$.

- **NB :** ce résultat est en général utilisé pour calculer des longueurs.
- **Configuration :** on a (MN) est parallèle à (BC).

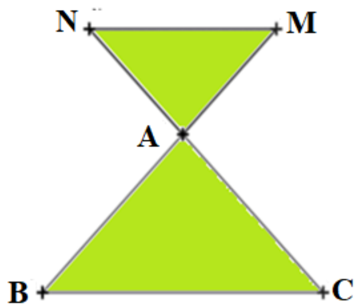
M étant un point de (AB), selon sa position sur cette droite, on a les trois cas de figures suivantes qui traduisent les hypothèses du théorème de Thalès.



1^er^ cas : M $\in [AB]$



2^e^ cas : M $\in [AB) - [AB]$



3^e^ cas : M $\in (AB) - [AB)$

Pour chacune de ces figures, on dit qu'on a une configuration de Thalès ou bien que les triangles ABC et AMN sont en position de Thalès.

❖ **Conséquence**

Si deux triangles ABC et AMN sont en position de Thalès alors $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

❖ **Remarque** : ce résultat montre que si deux triangle ABC et AMN sont en position de Thalès, alors leurs côtés correspondants sont proportionnels c'est-à-dire $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} = k$ ou $AM = kAB, AN = kAC \text{ et } MN = kBC.$

- Si $k < 1$, alors le triangle AMN est une réduction du triangle ABC.
- Si $k > 1$ alors le triangle AMN est un agrandissement du triangle ABC.

❖ **Réciproque**

Si les points A, M, B d'une part et les points A, N, C d'autre part, sont alignés dans le même ordre et si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$, alors les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

NB : ce résultat est en général utilisé pour justifier que deux droites sont parallèles.

1.1.2. Cas du trapèze

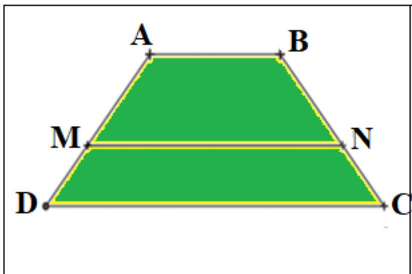
❖ **Théorème**

Soit ABCD un trapèze de bases $[AB]$ et $[CD]$, M un point de (AD) et N un point de (BC).
Si (MN) parallèle à (AB) alors les trois égalités suivantes sont vraies :

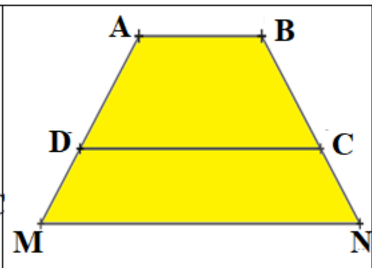
(1) $\frac{AM}{AD} = \frac{BN}{BC}$; (2) $\frac{MA}{MD} = \frac{NB}{NC}$; (3) $\frac{DM}{DA} = \frac{CN}{CB}$

❖ **Configuration**

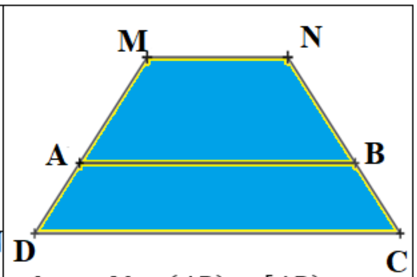
$M \in (AD)$ signifie que $M \in [AD]$ ou $M \in [AD)\setminus[AD]$ ou $M \in (AD) \setminus[AD)$; ce qui donne les trois cas de figures possibles suivantes. Pour chacun des cas, on dit que les trapèzes ABCD et ABNM sont en position de Thalès.



1er cas : M ∈ $[AB]$



2e cas : $M \in [AD) - [AD]$



3e cas : $M \in (AD) - [AD)$

❖ **Réciproque**

Soit ABCD un trapèze, M un point de (AD) et N un point de (BN). Si les points A, M, D d'une part et B, N, C d'autre part sont alignés dans le même ordre tel que $\frac{MA}{MD} = \frac{NB}{NC}$, alors les droites (MN) et (DC) sont parallèles.

1.1.3.Partage d'un segment dans un rapport donné

Pour partager un segment $[AB]$ en n petits segments de même longueur, où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2, on utilise le théorème de Thalès en procédant comme suit :

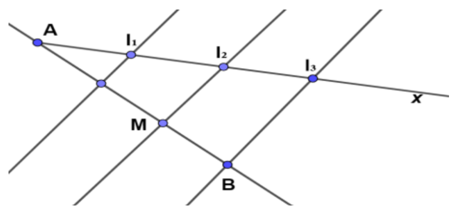
- on trace le segment $[AB]$;
- on trace une demi-droite [Ax) sécante à la droite (AB).
- sur cette demi-droite, on place n points $I_1, I_2, \ldots, I_{n-1}, I_n$ tels que

$AI_1 = I_1I_2 = \cdots = I_{n-1}I_n$ (on pourra utiliser le compas)

- On trace la droite (BI_n) et toutes les autres droites parallèles à (BI_n) et passant respectivement par les points $I_1, I_2, \ldots, I_{n-1}$.

Ces droites découpent $[AB]$ en n segments de même longueur.

Remarque : ce partage permet de placer sur une droite (AB) un point M tel que $AM = \frac{m}{n}AB$ où m est un entier naturel non nul et n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.



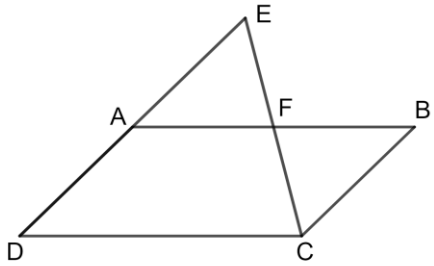
Exemple : soit (AB) une droite donnée. Place sur (AB) le point M tel que $AM = \frac{2}{3}AB$.
n étant égal à 3, on doit partager le segment [AB] en trois parties égales. Pour cela on applique la méthode précédente :

1.2. Restitution de connaissances

Exercice 1

Sur la figure ci-contre, ABCD est un parallélogramme.

Indique les couples de triangles qui sont en position de Thalès.

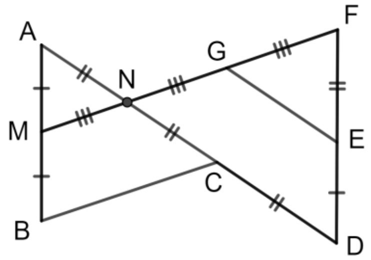


Exercice 2

Les droites suivantes de la figure ci-contre sont-elles parallèles ? Réponds par oui ou par non.

1) (MN) et (BC) ? 2) (GE) et (ND) ?

3) (AB) et (FD) ?



Exercice 3 Réponds par Vrai ou Faux

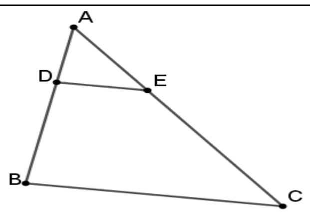
ABCD un trapèze de bases $[AB]$ et $[CD]$, M un point de (AD) et N un point de (BC).

1. Si (MN) parallèle à (AB) alors $\frac{MA}{MD} = \frac{NB}{NC}$;
2. Si (MN) parallèle à (AB) alors les trapèzes ABCD et ABNM sont en position de Thalès.
3. Si les points A, M, D d'une part et B, N, C d'autre part sont alignés tel que $\frac{AM}{BN} = \frac{MD}{NC}$, alors les droites (MN) et (DC) sont parallèles.

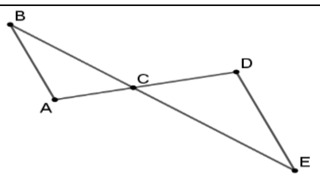
Exercice 4

Cocher toutes les bonnes réponses. On peut avoir plusieurs réponses justes.

1. (BC) *parallèle* à (DE)

	a)	b)	c)	d)
	$\frac{CE}{CA} = \frac{BD}{BA}$	$\frac{AD}{AB} = \frac{BC}{DE}$	$\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC}$	$\frac{EA}{EC} = \frac{DA}{DB}$

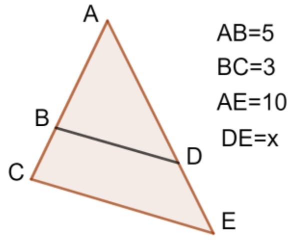
2. (BA) *parallèle* à (DE)

	a)	b)	c)	d)
	$\frac{CA}{CD} = \frac{CE}{CB} = \frac{AB}{DE}$	$\frac{CA}{CD} = \frac{CB}{CE} = \frac{AB}{DE}$	$\frac{BC}{BE} = \frac{CA}{AD} = \frac{AB}{DE}$	$\frac{CA}{CD} = \frac{CB}{CE} = \frac{BE}{AB}$

1.3. Application de méthodes ou de règles

Exercice 4

Dans chacune des figures suivantes, choisis la bonne réponse si elle existe en justifiant.

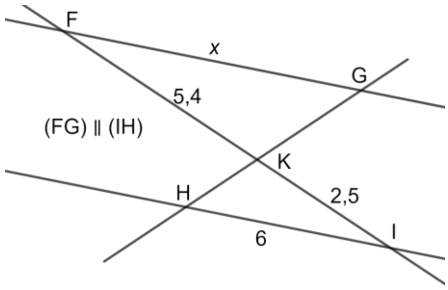


1. La valeur de x est :

a) $x = 3$; b) $x = \frac{11}{3}$; c) $x = \frac{15}{4}$

d) $x = 3{,}7$; e) $x = \frac{17}{3}$

2. La valeur de x est :



a) $x = \frac{384}{25}$; b) $x = \frac{15}{4}$;

c) $x = 14$; d) $x = \frac{115}{8}$

Exercice 6

Soit EFG un triangle tel que $EF = 5{,}4$;

$EG = 9$; $FG = 7{,}2$. I est un point de la droite (EG) n'appartenant pas au segment [EG] tel que GI = 3. La parallèle à (EF) passant par I coupe (FG) en J.

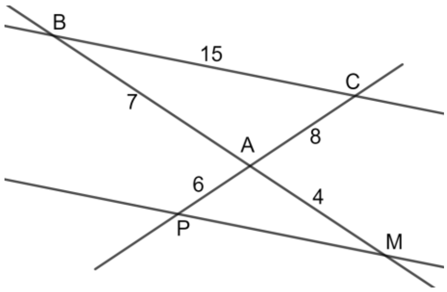
1. Fais la figure.
2. Calcule les valeurs exactes de FJ et IJ.

Exercice 7

Dans la figure ci-contre les (BM) et (PC) sont sécantes en A.

$AB = 7$ cm ; $AM = 4$ cm ; $AP = 6$ cm ;

$AC = 8$ cm. (BC) et (PM) sont-elles parallèles ?



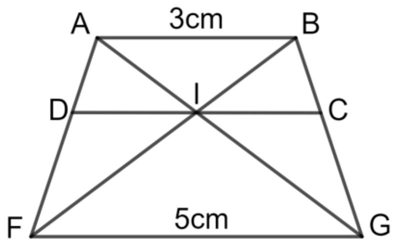
Exercice 8

Pour la figure ci-dessous on a $(AB)//(DC)//(FG)$.

On admet que $AB = 3cm$, $FG = 5cm$ et $DF = 4cm$

I le point d'intersection des droites $(AG), (BF)$ et (DC)

1. Utilise les triangles BIC et BFG en position de Thalès pour démontrer que $\frac{BI}{IF} = \frac{BC}{CG}$.
2. Détermine la mesure de AD.



Exercice 9

Soit [AB] un segment quelconque. En utilisant un segment auxiliaire, construire un point M sur la droite (AB) tel que :

1. $MA = \frac{2}{3}AB$ 2. $\frac{MB}{AB} = \frac{5}{4}$ (Faire deux figures).

Exercice 10

Soit (C) le cercle de centre O et de rayon $r = 5$cm, A et B deux points diamétralement opposés. La médiatrice de [AO] coupe le cercle en (C) en C et D. Soit E le symétrique de O par rapport à A et F le milieu de [AO]. La parallèle à (OC) passant par F coupe (EC) en G. la droite (OC) coupe (BD) en I.

1. Construis la figure
2. Quelle est la nature du triangle OCE ? En déduire EC.
3. Calcule FG et EG.
4. Démontre que $AD = CO$.
5. Calcule OI et BI.

Exercice 11

Soit (C) le cercle de centre I et de diamètre $AB = 5$cm et (C') le cercle de centre B et de rayon AB. Le point E ∈ (C') tel que $AE = 5$cm. La droite (AE) coupe le cercle (C) en F. La bissectrice de l'angle FÎB coupe (ED) en k. La parallèle à (IE) passant par k coupe (AD) en G. On donne $DK = 3{,}75\sqrt{3}$.

1. Quelle est la nature du triangle AED ? Déduis-en ED et EI.
2. Calcule DG puis KG.
3. Démontre (AE) // (KI).

Exercice 12

A, B et C sont trois points alignés tel que $AC = \frac{3}{2}AB$. Place un point E qui n'appartient pas à la droite (AB). Construis le point F tel que $AF = \frac{3}{2}AE$

La droite passant par B et parallèle à (CE) coupe la droite (AE) au point G.

1. Démontre que $AG = \frac{2}{3}AE$
2. La droite passant par F et parallèle à (CE) coupe la droite (AB) au point H. x est le nombre tel que $AH = x\,AB$. Calcule x.

Exercice 13

ABCD est un parallélogramme et $E \in [BD]$; (AE) coupe (DC) en G et (BC) en F.

1. Montre que $\frac{EB}{ED} = \frac{EA}{EG} = \frac{EF}{EA}$
2. Déduis-en que $EA^2 = EF \times EG$.

Exercice 14

On considère un rectangle ABCD tel que $AB = 8cm$ et $AD = 6cm$.

1. Calcule AC
2. Soit M ∈ (AB) ; on pose $AM = x$ (x est un réel en cm). La droite passant par M et parallèle à (AC) coupe [BC] en N. Calcule BM, BN et MN en fonction de x

Exercice 15

Le segment [AB] de longueur 10cm et sa médiatrice (D) se coupent en K. Sur la droite (D) place le point C tel que $BC = 10cm$. Le point $F \in [CB]$ tel que $CF = 4cm$.

1. Place le point P sur (D) tel que $PF = 2cm$. On donne $CP = 2\sqrt{3}cm$.
2. Fais la figure

3. Démontre que (PF) // (BK)

4. Q est un autre point de [BC] tel que $CQ = x$. La parallèle à (AB) passant par Q coupe (CK) en R. Calcule CR en fonction de x.

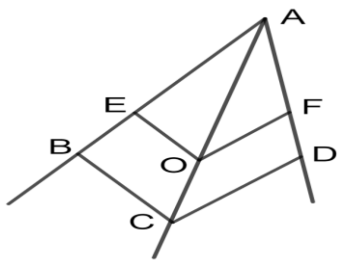
5. Calcule l'aire du triangle CQR en fonction de x.

Exercice 16

Sur la figure ci-contre, les droites (OE) et (CB) sont parallèles ainsi que les droites (OF) et (CD).

$AB = 2{,}4cm$; $AD = 3{,}6cm$;

$BD = 4cm$; $AO = 3cm$ et $OC = 1cm$



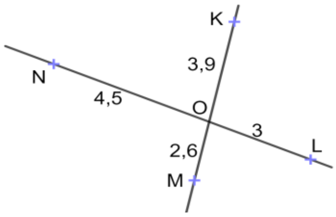
1. Calcule les distances AE et AF.
2. Démontre que les droites (BD) et (EF) sont parallèles.
3. Calcule EF.

Exercice 17

Sur la figure ci-contre on donne :

$LO = 3cm$; $OK = 3{,}9cm$; $ON = 4{,}5cm$ et $OM = 2{,}6cm$.

Les droites (LM) et (KN) sont-elles parallèles ?



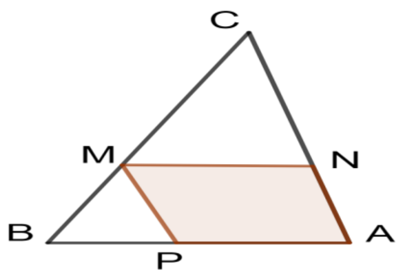
Exercice18

On donne le triangle ABC ci-contre tel que

$BC = 8\,cm$ $\quad AB = 5\,cm$ $\quad AC = 7cm$

1. Détermine la positon du point M sur le coté [BC] tel que le parallélogramme MNAP ait un périmètre de 12,5cm.
2. Fais une figure pour le point M trouvé.

(On posera $BM = x$ et on calculera MN et NA en fonction de x)

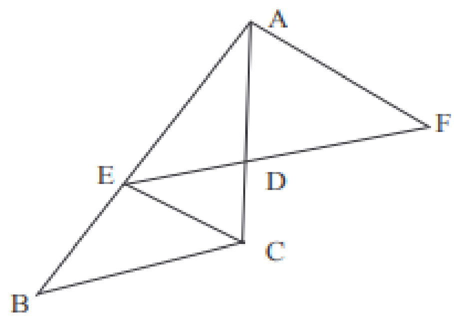


Exercice19

Soit ABC un triangle, E un point de [AB] et D un point de [AC] tel que la droite (ED) est parallèle à (BC).

On donne $AE = BC = 3$ et $EB = AD = 2$

1. Calcule AC, puis DC.
2. Calcule ED.
3. F est un point de (DE) tel que $DF = 2{,}7$. Les droites (EC) et (AF) sont-elles parallèles?



1.4. Problèmes de vie ou situations complexes

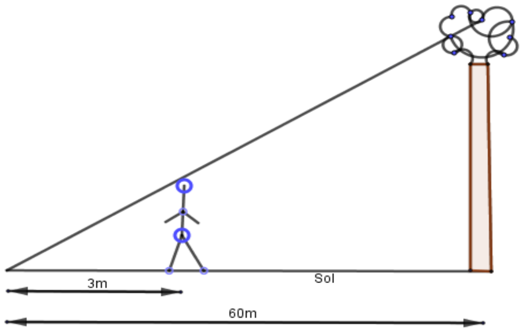
Exercice 20

Demba veut déterminer la hauteur de l'arbre sans monter au sommet.

Pour cela il dispose des informations suivantes :

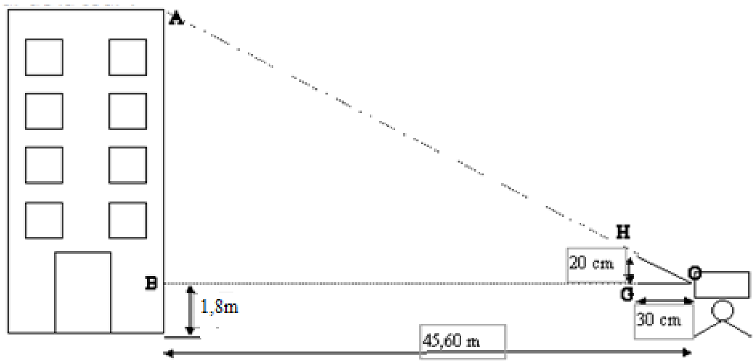
- L'ombre de l'arbre mesure 60m ;
- L'ombre de Demba mesure 3m ;
- La taille de Demba est de 1,62m.

Peut- il déterminer la hauteur de l'arbre avec ces informations ? Justifie ta réponse.



Exercice 21

Détermine la hauteur de cet immeuble en mobilisant tes connaissances sur Thalès et le dessin donné par l'ingénieur.

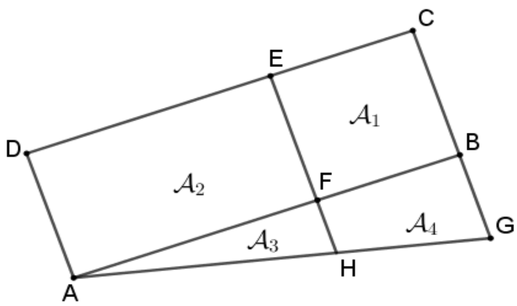


Exercice 22

Monsieur Sagna utilise respectivement les espaces $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2\ et\ \mathcal{A}_3$ pour la culture de salade, carrotes et gombo. L'espace $\mathcal{A}_4$ est utilisé pour la constructions d'infrastructures agricoles

BCEF est un carré d'aire $\left(8+2\sqrt{7}\right)\ dam^2$. Les points B, G et C sont alignés, les points E, F et H sont alignés, $BG = 3\ dam\ et\ AB = 11\ dam$

En mobilisant les outils mathématiques pertinents, détermine l'aire de chaque domaine.



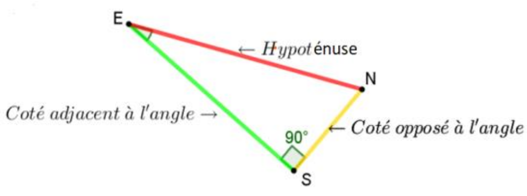
Leçon 2 : Relations trigonométriques dans un triangle rectangle

2.1. L'essentiel du cours

2.1.1. Triangle rectangle (rappels)

❖ Un triangle est rectangle s'il a un angle droit. Les deux autres angles sont aigus et complémentaires (c'est-à-dire que leur somme est égale à 90^o).

❖ <u>Exemple</u> : Soit SEN un triangle rectangle en S :
- [SN] et [SE] sont les côtés de l'angle droit ;
- [EN] est l'hypoténuse ;
- En considérant l'angle $\hat{E}$, [SN] est appelé côté opposé à l'angle $\hat{E}$ et [ES] le côté adjacent à l'angle $\hat{E}$.



❖ **Théorème de Pythagore**
Dans un triangle rectangle, la somme des carrés des côtés de l'angle droit est égale au carré de l'hypoténuse.
Exemple : SEN étant un triangle rectangle en S, on a $SE^2 + SN^2 = EN^2$.

❖ **Réciproque de Pythagore**
Si ABC est un triangle tel que $AB^2 + AC^2 = BC^2$ alors ABC est un triangle rectangle en A.

2.1.2. Cosinus, sinus et tangente d'un angle aigu

On considère un triangle rectangle et α un angle aigu de ce triangle :

- le cosinus de α est $\cos\alpha = \frac{Côté\ adjacent}{Hypoténuse}$
- le sinus de α est $\sin\alpha = \frac{Côté\ opposé}{Hypoténuse}$
- la tangente de α est $\tan\alpha = \frac{Côté\ opposé}{Côté\ adjacent}$

<u>Exemple</u> : en considérant le triangle rectangle SEN et l'angle aigu $\hat{E}$, on a :

$\cos\hat{E} = \frac{ES}{EN}$, $\sin\hat{E} = \frac{SN}{EN}$ et $\tan\hat{E} = \frac{SN}{SE}$

<u>Remarque</u> : $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

2.1.3. Sinus et cosinus d'angles complémentaires

Si deux angles sont complémentaires, alors le cosinus de l'un est égal au sinus de l'autre.
Autrement : si α et ß sont deux angles complémentaires alors : $\cos\alpha\ = \sin\beta\ \ et$ $sin\ \alpha\ = \ cos\beta$.

2.1.4. Relation entre le sinus et le cosinus d'un angle aigu

Pour tout angle aigu α, on a : $cos^2\alpha + sin^2\alpha = 1$.

2.1.5. Sinus, cosinus et tangente de 30°, 45° et 60°

$\boldsymbol{\alpha}$	**30°**	**45°**	**60°**
$sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$tan\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

2.2. Restitution de connaissances

Exercice 1

Recopie et complète les phrases suivantes :

1. Dans un triangle rectangle, le sinus d'un angle aigu est égal au rapport entre ……………………………...et ……………………

2. Si $\hat{x}$ et $\hat{y}$ sont deux angles complémentaires, alors cos $\hat{x}$ = ………………

Exercice 2

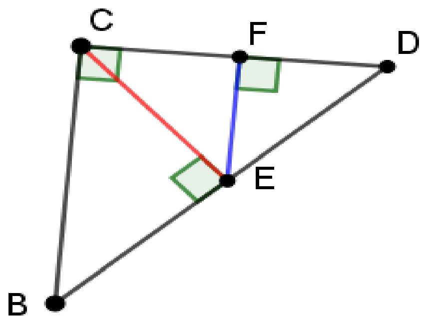
Soit PQR est un triangle. Donne la bonne réponse en indiquant le numéro de la question et la lettre de la bonne réponse.

N°	QUESTIONS	Réponse : A	Réponse : B	Réponse : C
1	Si PQR est rectangle en Q, alors …	$cos^2\hat{P} + cos^2\hat{Q} = 1$	$cos^2\hat{P} + cos^2\hat{R} = 1$	$cos^2\hat{Q} + sin^2\hat{R} = 1$
2	Si PQR est rectangle en Q et si $cos\hat{P} = \frac{1}{2}$ alors …	$sin\hat{P} = \frac{1}{2}$	$sin\hat{R} = \frac{1}{2}$	$sin\hat{Q} = \frac{1}{2}$
3	Si PQR est rectangle en Q, alors …	$tan\hat{R} = \frac{PQ}{QR}$	$sin\hat{R} = \frac{QR}{PR}$	$cos\hat{R} = \frac{PR}{PQ}$

Exercice 3

Observe la figure ci-contre puis complète

1. $cos\hat{B} = \cdots$
2. $sin\hat{B} = \cdots = \cdots$
3. $tan\hat{B} = \cdots = \cdots$
4. $cos\widehat{CEF} = \cdots$
5. $sin\widehat{DEF} = \cdots$
6. $tan\hat{D} = \cdots = \cdots = \cdots$



Exercice 4

MEN est un triangle rectangle en N, tel que $\widehat{MEN} = 30°$ $EM = 12cm$

Réponds par vrai ou faux :

1. $cos\hat{E} = \frac{1}{2}$ 2. $sin\hat{E} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 3. $cos\hat{E} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 4. $cos\hat{M} = \frac{1}{2}$

5. $tan\hat{E} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 6. $tan\hat{M} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 7. $MN = 6cm$ 8. $EN = 6cm$

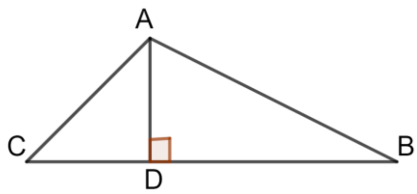
9. $MN = 6\sqrt{3}cm$ 10. $EN = 6\sqrt{3}cm.$

Exercice 5 : Choisis la bonne réponse :

Sur la figure ci-contre, on a $AC = 3$; $AB = 4$; $CB = 5$.

La valeur de CD est :

1) $\frac{17}{12}$; 2) $\frac{9}{5}$; 3) $\frac{12}{5}$; 4) $\frac{25}{12}$; 5) $\frac{29}{12}$



2.3. Application de méthodes ou de règles

Exercice 6

ABC est un triangle rectangle en C : BC = 3 cm et $\hat{B}$ = 60°. Construire le triangle ABC

1. Calculer AB puis AC.
2. Soit I un point de [AC] tel que AI = $\frac{2}{5}$ AC, placer I.
3. La parallèle à (BC) passant par I coupe (AB) en N. Calculer IN et AN.
4. Soit E le point de [BC] tel que BE = 8 cm, calculer AE.

5. Soit H et J les projetés orthogonaux respectifs de C et I sur (AE). Construire H et J. Montrer que $\frac{AJ}{AH} = \frac{2}{5}$. Montrer que (NJ) et (BH) sont parallèles.

Exercice 7

a, b et c désignent les mesures d'angles aigus. Sachant que :

1. $cosa =$ 0,6 calcule $sina$ et $tana$.
2. $sinb = \frac{8}{15}$, calcule $sinb$ et $tanb$.
3. $cosc = \frac{1}{3}$, calcule $tanc$.

Exercice 8

On considère un triangle isocèle MNP de sommet M tel que : $MN = 7cm \text{ et } NP = 4cm$

Soit I et J les milieux respectifs de ([NP] et [MP].

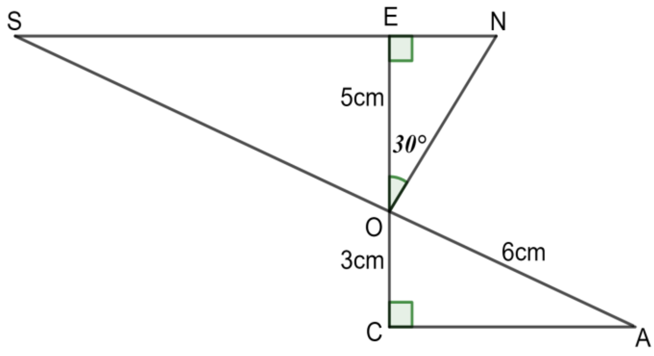
1. Construis le cercle circonscrit à MNP. Place son centre O.
2. Montre que $sinP\widehat{M}I = \frac{2}{7}$. En déduire $cosP\widehat{M}I = \frac{3\sqrt{5}}{7}$.
3. Calcule le rayon du cercle circonscrit au triangle MNP, puis en donner une valeur approchée.

Exercice 9 : BFEM 2005

1. Construis un cercle (C) de centre I et de rayon 4 cm. A et B sont deux points diamétralement opposés du cercle (C).
2. Place un point M sur (C) tel que : $AM = 4cm$.
3. Quelle est la nature du triangle AMI ? Déduis en la mesure de l'angle $\widehat{BIM}$.
4. K est le point d'intersection de la perpendiculaire à (AB) passant par I et la droite (AM).
   a. Justifie que AMB est un triangle rectangle.
   b. En remarquant que $cos\widehat{BAM} = cos\widehat{KAI}$, calcule AK et KI.
5. Le point H est le projeté orthogonal de M sur (AB).
   a. Calcule $\cos\widehat{B}$ de deux manières différentes.
   b. Exprime BH en fonction de $\cos\widehat{B}$ puis démontre que : $BH = \frac{BM^2}{AB}$.

6. Place le point E sur le segment [AM] tel que: $AE = 3cm$. La parallèle à (I M) passant par E coupe [AI] en F. Quelle est la nature du triangle AEF ?

Exercice 10 :



1. Montre que $AC = 3\sqrt{3}$.
2. Montre que les droites (NS) et (AC) sont parallèles.
3. Calcule les valeurs exactes de OS et de ES.
4. Calcule NE.
5. Calcule la mesure de l'angle $\widehat{COA}$.
6. Démontre que le triangle SON est rectangle.

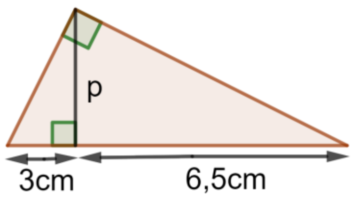
Exercice 11

On considère un cercle (C) de centre O et de rayon r. Soit [AB] un diamètre de ce cercle ; (Δ) la tangente en B à (C). Une droite (L) passant par A recoupe (C) en C et recoupe (Δ) en E. On désigne par α la mesure de $\widehat{BAC}$.

1. Exprime en fonction de r et α : AC; BC; AE ; BE.
2. Calcule : AC; BC; AE; BE pour r = 2cm et α =30°.

Exercice 12

Observe attentivement la configuration ci-contre et en mobilisant tes connaissances en trigonométrie, calcule p.



Exercice 13

Soit ABC un triangle rectangle en A et H le projeté orthogonal de A sur (BC).

1. Montre de deux façons différentes que $AB \times AC = AH \times BC$.
2. Exprime sin($\widehat{ABC}$) et sin($\widehat{ACB}$) en fonction de AH, AB et AC.
3. Déduis en que $\frac{AH^2}{AB^2} + \frac{AH^2}{AC^2} = 1$ et que $\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{AH^2}$.

Exercice 14

Soit ABC un triangle rectangle en A et H le pied de la hauteur issue de A.

1. Montre que $sin\widehat{B} \times AB = sin\hat{C} \times AC$.
2. Montre que $\frac{AB}{AC} = \frac{AH}{CH}$ puis $\frac{AC}{AB} = \frac{AH}{BH}$. Déduis en que $AB^2 \times CH = AC^2 \times BH$.

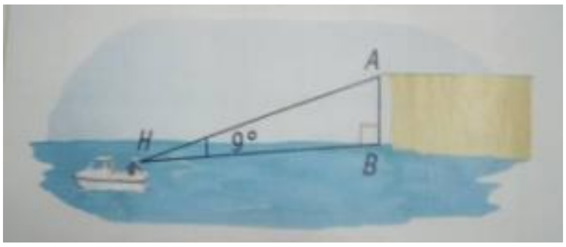
Exercice 15

Soit ABC un triangle isocèle en A tel que AC = 8 cm et BC = 6 cm. H est le pied de la hauteur issue de A et E un point de la droite (AC). La parallèle à (BC) passant par E coupe (AH) et (AB) respectivement en O et E'.

1. Fais la figure.
2. Calcule $mes\widehat{\mathrm{ACB}}$ puis déduis- en $mes\widehat{\mathrm{AE}E'}$.
3. On pose $AE = x$.
   Quelles sont les valeurs de x pour lesquelles le triangle AEE' est :
   - une réduction du triangle ABC ?
   - un agrandissement du triangle ABC ?
4. En utilisant les cosinus des angles montre que $OE = \frac{3}{8}x$.
5. En utilisant la tangente des angles montre que $OA = \frac{\sqrt{55}}{8}x$.

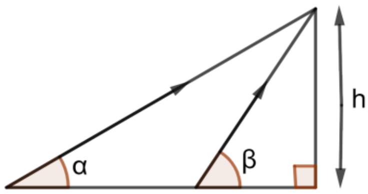
Exercice 16

Un homme sur un bateau à 500 m de la côte voit le point culminant d'une falaise de 9°. Calcule au mètre près la hauteur de cette falaise.



Exercice 17

Pour calculer la hauteur d'une tour, on utilise le procédé suivant : un appareil de hauteur négligeable est placé au sol à une certaine distance de la tour et émet un rayon en direction du sommet de la tour. L'angle lu entre le sol et le rayon est de $\alpha = 60^o$. On déplace l'appareil de 4m vers la tour. L'angle ainsi obtenu est de β, avec $\tan \beta = 3\sqrt{3}$. Calcule h la hauteur de la tour.



2.4. Problèmes de vie ou situations complexes

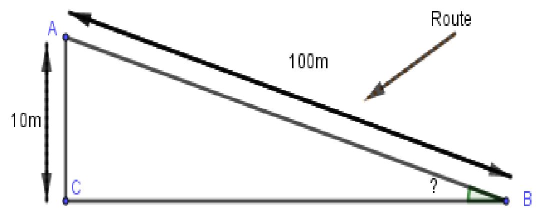
Exercice 18 : **Rampe d'escalier**

Astou ingénieure en génie civile veut construire une rampe d'escalier de 9,6m qui atteigne une hauteur de 2m par rapport au sol.

Calcule l'angle que doit faire la rampe avec l'horizontale.

Exercice 19 :

Sur le panneau de la circulation annonçant une descente dangereuse, l'indication "10%" signifie que lorsque l'on parcourt 100m, on s'abaisse de 10m par rapport à l'horizontale comme l'illustre le dessin ci-dessous:

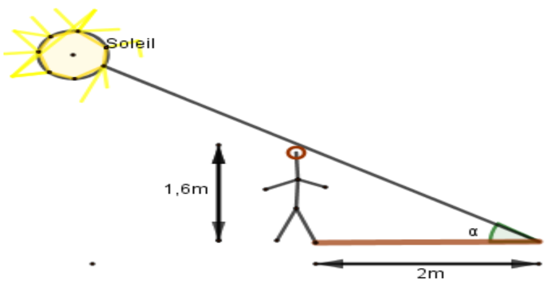


1. Dans un tel cas, quel est l'angle formé par la route avec l'horizontale?
2. Si l'angle formé par la route avec l'horizontale est de 8°, quel sera alors le pourcentage indiqué sur le panneau ?

Exercice 20 : angle d'élévation du soleil

Dans le schéma ci-contre, l'ombre et la taille de Moussa sont respectivement 2m et 1,6m.

En utilisant tes connaissances en Trigonométrie et la calculatrice, calcule une valeur approchée de l'angle d'élévation du soleil α

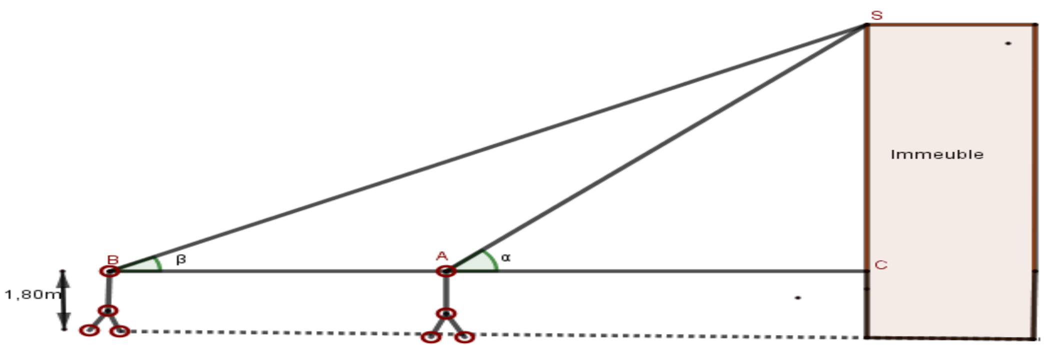


Exercice 21 : **Hauteur d'un immeuble**

Pour mesurer la hauteur d'un immeuble, Joseph procède selon le schéma ci-dessous, en mesurant l'angle de vision du sommet en deux endroits A et B tels que A, B et C soient alignés.

Sachant que $AB = 36\ m$ et la taille de Joseph est $1,8\ m$

1. Détermine la hauteur de l'immeuble en fonction de α et β.
2. Détermine la hauteur de l'immeuble si $\alpha = 60°$ et $\beta = 30°$



<u>Exercice 22</u> : Gestion d'un garage auto

Talla, un jeune mécanicien-automobile, dispose d'un domaine sur lequel il veut implanter un garage. Il compte ouvrir l'utilisation de son espace à un électricien, un peintre et un soudeur. Pour cela, il pense morceler son domaine en cinq parties : une pour lui-même, trois (03) à louer à ses associés et une pour un parc de stationnement, comme l'indique la figure codée ci-après.

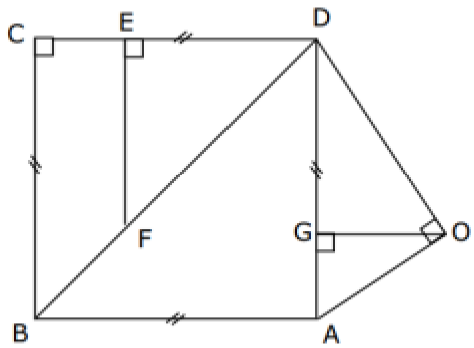
EFD est pour lui-même,

CEFB est pour le soudeur

OGD est pour le peintre

OGA est pour l'électricien

BAD est le parc de stationnement



$AB = 40m\ ;\ AO = 20m\ et\ CE = GA$

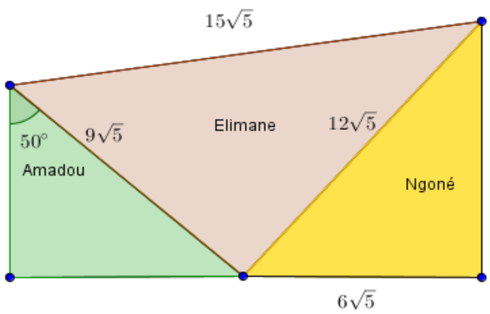
1. Donne la nature du triangle AOD et celle du quadrilatère ABCD.
2. Calcule chacune des longueurs OD, AG, OG, ED et EF.
3.

a. Calcule sin $\widehat{OAD}$et cos $\widehat{OAD}$.

b. Déduis-en la mesure de l'angle $\widehat{OAD}$.

Exercice 23

M. MBENGUE divise son terrain trapézoïdal ABCD en trois parcelles triangulaires ABE, AED et ECD. Il partage ces trois parcelles à ses enfants Amadou, Elimane et Ngoné respectivement.



Les dimensions de la parcelle Elimane sont AE := 9 $\sqrt{5}$, A : D = 15 $\sqrt{5}$ et DE := 12 $\sqrt{5}$ et La parcelle d'Amadou est un triangle rectangle en B et l'angle au sommet A mesure 50◦ . La parcelle de Ngoné, est un triangle rectangle en C et le côté EC mesure $6\sqrt{5}$ (voir figure ci-dessous). Le côté BC étant près de la route, les trois enfants ont payé un grillage de 25m de long pour le mettre le long de ce côté.

1. Elimane affirme que sa parcelle est un triangle rectangle en E. A-t-il raison ?
2. Ngoné affirme que l'angle au sommet E de sa parcelle mesure 30° . A-t-elle raison ?
3. Le grillage sera-t-il suffisant pour couvrir le côté BC du terrain ?

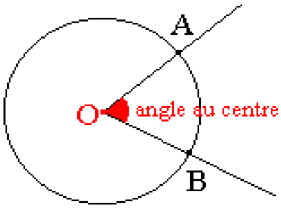
Leçon 3 : Angles inscrits angles au centre

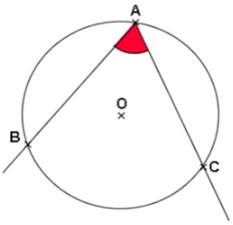
3.1. L'essentiel du cours

3.1.1. Angle inscrit et angle au centre associé

Soit un cercle de centre O et de rayon r.

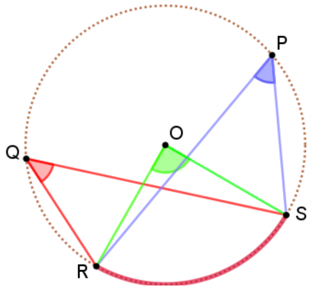
❖ On appelle **angle au centre** tout angle dont le sommet est le centre du cercle.





❖ On appelle **angle inscrit** tout angle dont le sommet est un point du cercle et dont les côtés sont sécants au cercle.

Exemple : dans la figure ci-contre



- $\widehat{RPS}$ est un angle inscrit qui intercepte l'arc $\widehat{RS}$
- $\widehat{RQS}$ est un angle inscrit qui intercepte l'arc $\widehat{RS}$
- $\widehat{ROS}$ est l'angle au centre qui intercepte l'arc $\widehat{RS}$

❖ **Remarque** :
Un angle inscrit et un angle au centre qui interceptent le même arc sont dits associés.

❖ **Propriétés**

- Dans un cercle, un angle au centre est le double de chaque angle inscrit associé.
- Dans un cercle, si deux angles inscrits interceptent le même arc, alors ils ont la même mesure.
  Par exemple : dans la figure précédente
  - $\widehat{ROS}$ étant l'angle au centre associé à l'angle inscrit $\widehat{RQS}$, $mes\widehat{ROS} = 2mes\widehat{RQS}$
  - $\widehat{RQS}$ et $\widehat{RPS}$ étant deux angles inscrits interceptant le même arc, on a $mes\widehat{RQS} = mes\widehat{RPS}$.

3.2. Restitution de connaissances

Exercice 1

Complète les phrases suivantes :

1. Deux angles inscrits qui interceptent le même arc ont …
2. La mesure d'un angle inscrit est égale … de la mesure de l'angle au centre associé.

Exercice 2

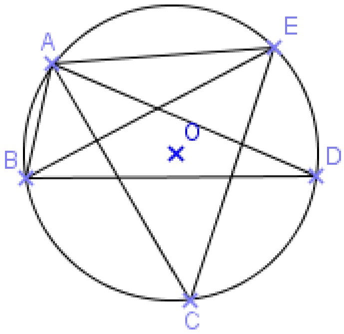
On considère deux angles inscrits α, β d'un cercle qui interceptent le même arc que l'angle au centre θ. Dans chaque cas, indique la bonne réponse :

1. Si l'angle inscrit α mesure 16°, alors l'angle au centre θ mesure :
   a) 8° b) 16° c) 32°
2. Si l'angle inscrit β mesure 20°, alors l'angle inscrit α mesure :
   a) 10° b) 20° c) 40°
3. Si l'angle au centre mesure 90°, alors l'angle inscrit β mesure :
   a) 45° b) 90° c) 180°

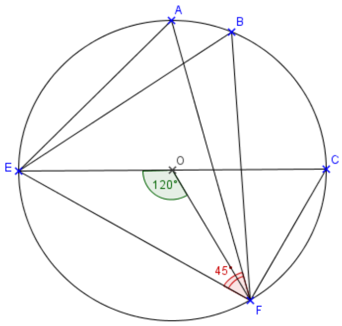
Exercice 3

On considère la figure suivante : réponds par Vrai ou Faux

1. $\widehat{BEC}$ et $\widehat{AEC}$ interceptent le même arc.
2. $\widehat{BDA}$ est l'angle au centre associé à $\widehat{BOA}$
3. $mes\widehat{AEB} = mes\widehat{ADB}$
4. $mes\widehat{EBD} = \frac{1}{2} mes\widehat{EOD}$
5. $mes\widehat{EAB} = mes\widehat{BCE}$



Exercice 4



Observe la figure ci-contre et coche les bonnes réponses.

A.

Angle au centre qui intercepte le même arc que $\widehat{EBF}$	$\widehat{EAF}$ ☐	$\widehat{EOF}$ ☐	$\widehat{BOF}$ ☐	$\widehat{ECF}$ ☐

B.

Angle inscrit qui intercepte le même arc que $\widehat{EAF}$	$\widehat{EBF}$ ☐	$\widehat{EOF}$ ☐	$\widehat{ECF}$ ☐	$\widehat{BEF}$ ☐

C.

Angles de 60°	$\widehat{ECF}$ ☐	$\widehat{EAF}$ ☐	$\widehat{COF}$ ☐	$\widehat{CFO}$ ☐

D.

$\widehat{EFC} =$	On ne sait pas ☐	60° ☐	90° ☐	120° ☐

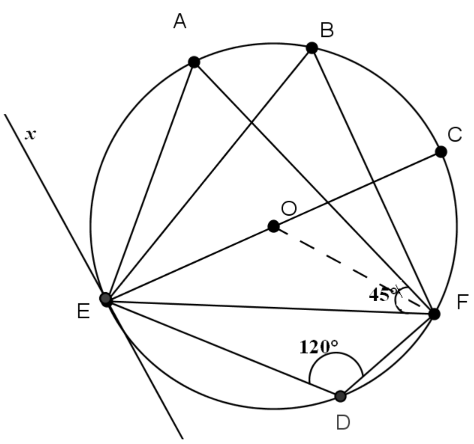
E.

Droites perpendiculaires	(EB) et (AF) ☐	(EF) et (CF) ☐	(OA) et (OE) ☐	(EC) et (BF) ☐

Exercice 5

Considérons la figure ci-contre :

1. Donne les angles inscrits de sommet F.
2. Donne les angles inscrits de sommet B qui interceptent le même arc qu'un angle inscrit de sommet F.
3. Quelles sont les mesures des angles $\widehat{AOE}$; $\widehat{AEx}$; $\widehat{EFC}$; $\widehat{EOF}$; $\widehat{EBF}$ et $\widehat{CEF}$.



3.3. Application de méthodes ou de règles

Exercice 6

1. Construis un cercle (C) de centre O et de rayon 3cm puis place trois points A, B et C dans cet ordre de telle façon que les angles au centre $\widehat{AOB}$ et $\widehat{BOC}$ mesurent respectivement 40° et 70°.
2. Calcule les mesures des angles du triangle ABC.
3. Calculer la longueur de l'arc $\widehat{AB}$.
4. Place le point M diamétralement opposé à B et calcule mes $\widehat{BMC}$; mes $\widehat{AMC}$ et mes $\widehat{AMB}$.

Exercice 7

On considère un quadrilatère convexe ABCD inscrit dans un cercle C(O,R) de rayon R tel que $\widehat{DCA} = 30^o \; et \; \widehat{CAB} = 45^o$

1. Détermine les angles $\widehat{DOA}$ et $\widehat{BOC}$.
2. Détermine les longueurs DA et CB.

Exercice 9

Construis un triangle ABC isocèle en A, le cercle circonscrit C(O,R) et les bissectrices des angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ qui coupent le cercle respectivement en M et N.
Établis l'égalité $\widehat{ANC} = \widehat{AMB}$.

Exercice 10

On considère un quadrilatère ABCD dont les sommets sont sur un même cercle C(O, R) et tels que $\widehat{DAB} = 105^o$ et $\widehat{ABC} = 85^o$. Détermine les mesures des autres angles de ce quadrilatère.

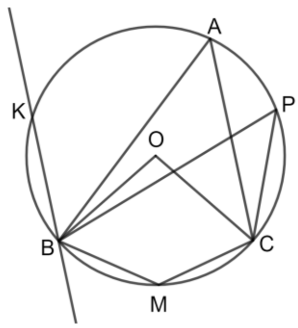
Exercice 11

ABCD est un parallélogramme tel que $\widehat{ADC} = 60^o$. O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

1. Fais une figure.
2. Compare les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ADC}$. Justifier.
3. Déduis-en que $\widehat{AOC} = 2\widehat{ADC}$. Calcule $\widehat{AOC}$.

Exercice 12

Dans la figure ci-contre ABC est un triangle isocèle en A, inscrit dans le cercle de centre O et de rayon = 3 cm. Sachant que $\widehat{BAC} = 25^o$ et (KB) // (AC), calcule $\widehat{BOC}$, $\widehat{BPC}$, $\widehat{ABC}$, $\widehat{BMC}$ et $\widehat{ABK}$.



Exercice 13

ABC est un triangle inscrit dans un cercle de centre O et de diamètre [AD] tel que B soit sur l'arc $\widehat{AD}$ ne contenant pas C. La parallèle à (BD) passant par C coupe (AB) en E.

1. Montre que (CE) est une hauteur du triangle ABC.
2. Calcule $\widehat{ACB}$, $\widehat{AOB}$ et $\widehat{OBA}$ si $\widehat{BDA} = 70^o$.

Exercice 14

ABC est un triangle inscrit dans un cercle $(\mathcal{C})$.

Le segment [AD] est un diamètre du cercle et le segment [AH], une hauteur du triangle ABC.

La bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ recoupe le cercle en E.

1. Compare les angles des triangles AHC et ABD.
2. Démontre que la droite (AE) est la bissectrice de l'angle $\widehat{DAH}$.

Exercice 15

1.

a. Construis un cercle (c) de centre I et de rayon $r = 4cm$. A et B sont deux points du cercle (C) diamétralement opposés. Placer un point M sur (C) tel que $AM = 4cm$.

b. Quelle est la nature du triangle AMI ?

c. Déduis en la mesure de $\widehat{BIM}$?

2. K est le point d'intersection de la perpendiculaire à (AB) passant par i et la droite (AM)

a. Justifie que AMB est un triangle rectangle

b. en remarquant que $\cos\widehat{BAM} = cos\widehat{KAM}$. Calcule AK et KI.

3. Le point H est le projeté orthographe de M sur (AB).

a. Calcule $cos\hat{B}$ de deux manières différentes.

b. Exprime BH en fonction de cos $\hat{B}$ puis démontre que BH $= \frac{BM^2}{AB}$

4. Place le point E sur [AM] tel que $AE = 3cm$. La parallèle à (IM) passant par E coupe [AI] en F. Quelle est la nature du triangle AEF ?

Exercice 16

1.

a. Construis un triangle ABC rectangle en C tel que $AC = 8cm\ et\ AB = 10\ cm$

b. Calcule BC.

2. Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB).

a. Calcule CH, AH, et BH.

b. Calcule cos $\widehat{ACH}$ et sin $\widehat{BCH}$. Pouvait-on prévoir ce résultat ?

3. La parallèle à (CH) passant par B coupe (AC) en E. Calcule CE et BE.

4. Soit le point J de [AB] tel que $BJ = \frac{3}{5}$ BA et K ∈ [AE] tel que $\frac{AK}{AE} = \frac{2}{5}$.

a. Détermine le réel b tel que $EK = b\ EA$.

b. Démontre que (JK) // (BE).

Exercice 17

Sur une droite (D), on marque les points B, O et C dans cet ordre tel que $BO = 5cm\ et\ OC = 3cm$. A est le point de contact d'une tangente issue de B au cercle (C) de rayon 3cm et de centre O.

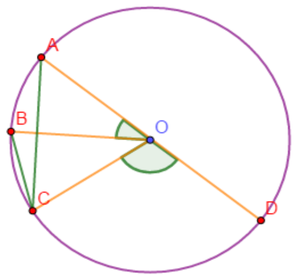
1. Fais la figure.

2. Calcule AB.

3. Soit H le projeté orthogonal de A sur (BC). Calcule BH, AH, OH, HC et AC.

Exercice 18

Soit la figure ci-contre :



1. Quel est l'angle inscrit qui intercepte le même arc de cercle que $\widehat{AOB}$

2. $\widehat{AOB} = 35^o$ et $\widehat{COD} = 110^o$. Calcule la mesure de $\widehat{ACB}$ puis la mesure de $\widehat{DAC}$. En déduire la mesure de $\widehat{AOC}$.

EXERCICE 19

On considère un triangle LMN rectangle en M tel que $LM = 6cm\ et\ \widehat{MLN} = 30°$

1. Montre que la valeur exacte de LN est $4\sqrt{3}$ cm.
2. Trace le cercle (C) de diamètre [LM] ; il recoupe le segment [LN] en P.
Quelle est la nature du triangle LMP ? Justifie.
3. Montre que la valeur exacte de MP est 3 cm.
4. Montre que la valeur exacte de LP est $3\sqrt{3}$ cm.
5. La perpendiculaire à (LN) passant par N coupe (LM) en R. Que peut-on déduire des droites (RN) et (MP) ? Justifie.
6. Montre que la valeur exacte de RN est 4 cm.
7. Calcule les aires des triangles MPL et RNL (valeur exacte).
8. Quelle est la nature du quadrilatère MPNR ? Calcule son aire.

3.4. Problèmes de vie ou situations complexes

Exercice 20

ABC est un triangle rectangle en B tel que $AB = 5\ cm$; $\widehat{BAC} = 30°$.

1. Construis ABC.
2. Construis le cercle circonscrit au triangle ABC. Son centre est O.
3. La hauteur (BI) de ABC coupe (AC) en I et le cercle en J. Détermine $\widehat{BJC}$.
4. Calcule les mesures des angles du triangle BOC.
5. Calcule les mesures des angles du triangle ABJ.

Exercice 21

Soit ABCD un trapèze rectangle en A et D tel que $AB = AD = 6cm\ et\ CD = 10cm$.

Soit M le point de [CD] tel que $CM = 2cm$.

La perpendiculaire à (CD) en M coupe (AC) en E.

1.

a. Fais une figure.

b. Montre que $ME = 1{,}2cm$.

2. La parallèle à (CD) passant par E coupe (AC) en N.

a. Montre que $\frac{CE}{CA} = \frac{CN}{CN}$ et en déduire que : $\frac{CM}{CD} = \frac{CN}{CB}$

b. Montre alors que (MN) // (BD).

3. Soit J le point de [AD] tel que $AJ = 2\sqrt{3}$

a. Calcule tan $\widehat{ABJ}$. Déduis en la mesure de l'angle $\widehat{ABJ}$ puis placer le point J.

b. Détermine la mesure de l'angle $\widehat{JBD}$.

4. Soit H le projeté orthogonal de J sur (BD).

Calcule les distances : BJ ; JD ; DH et BH.

Exercice 22

1. Trace un cercle (C) de centre I et de diamètre [AB] tel que $AB = 8\ cm$; marque un point E sur (C) tel que $AE = 4\ cm$.
2. Quelle est la nature de chacun des triangles ABE et AEI ? Justifie chacune des réponses.
3. Détermine la mesure de chacun des angles $\widehat{EAB}\ et\ \widehat{BIE}$.
4. Soit (d) la médiatrice du segment [AB ; la droite (AE) coupe (d) en K.

En posant $cos\widehat{BAE} = cos\widehat{KAI}$, calcule les distances AK et KI.

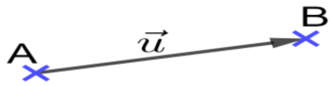
Leçon 4 : Vecteurs

4.1. L'essentiel du cours

4.1.1. Rappels

❖ **Vocabulaire**

- A et B étant deux points distincts, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par :
  - sa direction : la droite (AB)
  - son sens : celui de A vers B
  - sa longueur : la distance AB



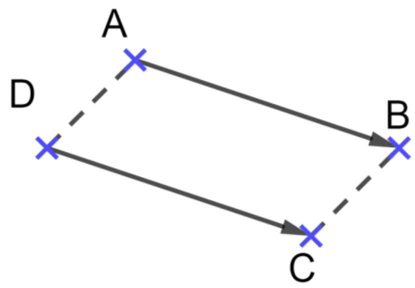
- le point A est l'origine du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et B son extrémité.
- Si les points A et B sont confondus, alors le vecteur $\overrightarrow{AA}$ ou $\overrightarrow{BB}$ est appelé vecteur nul et est noté $\vec{0}$.
- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ peut être noté $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, etc ; on écrit $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

❖ **Vecteurs opposés**

- Deux vecteurs sont opposés s'ils ont la même direction, la même longueur, mais des sens contraires.
- Un vecteur opposé de $\vec{u}$ est $-\vec{u}$
- Un vecteur opposé de $\overrightarrow{AB}$ est $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$?

❖ **Vecteurs égaux**

Deux vecteurs sont égaux s'ils ont la même direction, le même sens et la même longueur.



❖ **Vecteurs et configurations**

- Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, alors ABCD est un parallelogramme.
- Si ABCD est un parallélogramme, alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
- Si $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$, alors I est le milieu de [AB]
- Si I est le milieu de [AB], alors $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$

❖ **Vecteurs et transformations**

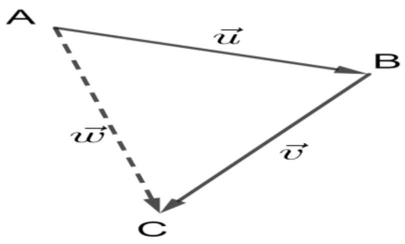
- M' est l'image de M par la translation de vecteurs $\vec{u}$ équivaut à $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$
- M' est l'image de M par la symétrie de centre O équivaut à $\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{OM'}$

❖ **Addition vectorielle**

- **Relation de Chasles** : pour tous A, B et C du plan, on a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
- **Méthode de construction de la somme de deux vecteurs**
  Pour construire la somme $\vec{u} + \vec{v}$, on peut procéder comme suit :

- on représente le vecteur $\vec{u}$;
- on représente un vecteur égal à $\vec{v}$ et ayant comme origine l'extrémité du représentant du vecteur $\vec{u}$ tracé (on dit qu'on met les deux vecteurs bout à bout)
- on trace le vecteur ayant comme origine celle de $\vec{u}$ et comme extrémité celle de $\vec{v}$.

On obtient ainsi le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$, appelé somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.



❖ **Propriétés**

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ du plan ; on a :

- $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$.
- $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$.
- $\vec{u}+\vec{o}=\vec{u}$.
- $\vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}$;

❖ **Multiplication d'un vecteur par un réel:**

- Le produit d'un vecteur non nul $\overrightarrow{AB}$ par un réel k non nul, est le vecteur $\overrightarrow{CD}$ tel que :
  - (AB) et (CD) sont parallèles
  - [AB) et [CD) ont le même sens si k > 0 et sont de sens contraires si k < 0
  - $CD=|k|AB$

  On note : $\overrightarrow{CD}$ = k $\overrightarrow{AB}$
- **Propriétés :** Soit a et b des $réels,$ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs
- $1.\vec{u}=\vec{u}$
- $a(\vec{u}+\vec{v})=a.\vec{u}+a.\vec{v}$
- $a(b.\vec{u})=(ab)\vec{u}$
- $(a+b).\vec{u}=a.\vec{u}+b\vec{u}$

❖ **Vecteurs colinéaires :**

- Deux vecteurs sont colinéaires s'ils ont la même direction ou si l'un d'eux est nul ;
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe un réel k tel que $\vec{u}=k\vec{v}$;
- Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires alors les droites (AB)et (CD) sont parallèles ;
- *Si les droites* (AB) *et* (CD) *sont parallèles alors les vecteurs* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{CD}$ *sont colinéaires*
- *Si* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{BC}$ *sont colinéaires alors les points* A, B *et* C *sont alignés.*
- *Si* A, B *et* C *sont alignés alors* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{BC}$ *sont colinéaires.*

4.2. Restitution de connaissances

Exercice 1

Réponds par vrai ou faux.

1. La direction du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le sens de A vers B.
2. Le vecteur opposé de $\overrightarrow{EA}\ est\ \overrightarrow{AE}$.
3. Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ alors ABCD est un parallélogramme.
4. Si O est le milieu du segment [PQ] alors $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ}$
5. Si A est l'image de B par la translation de vecteur $\vec{v}$ alors $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$.

Exercice 2

Complète les pointillés

1. Si $A = B, alors\ \ \overrightarrow{AB} = \cdots$
2. Si M' est l'image de M par la symétrie de centre I alors $\overrightarrow{IM'} = \cdots$
3. Pour tous points M, N et P du plan, $\overrightarrow{MN} + \cdots = \overrightarrow{MP}$
4. S'il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$, alors les vecteurs $\vec{u}\ et\ \vec{v}$ sont …
5. Les points A, B et C sont alignés, s'il existe un réel k tel que …

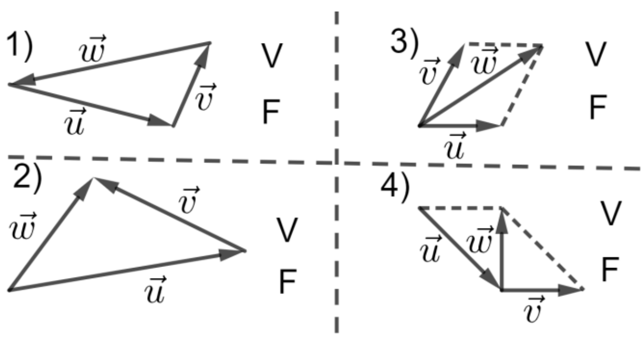
Exercice 3

Choisis la bonne réponse

N°	Questions	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1	2 vecteurs sont colinéaires si et seulement si …	ils ont la même direction	ils ont la même longueur	ils ont le même sens
2	Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si …	les points A, B, C et D sont alignés	les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux	$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$, $k \in \mathbb{R}$
3	Les points A, B et C sont alignés si et seulement si …	$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$, $k \in \mathbb{R}$	$\overrightarrow{BA}\ et\ \overrightarrow{BC}$ sont opposés
4	Pour tout point A, le vecteur $\overrightarrow{PQ}$ est égal à …	$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{QA}$	$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AQ}$	$\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{AP}$
5	Les vecteurs $\vec{u}$ et $-3\vec{u}$ sont …	opposés	colinéaires	de même sens

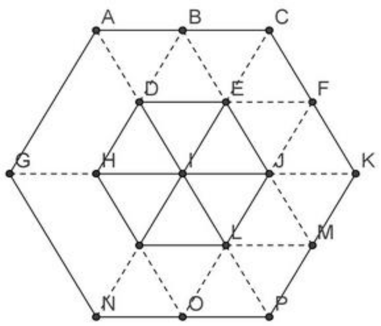
Exercice 4

Pour chacune des figures ci-contre $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$? Réponds par Vrai ou Faux en encerclant V pour vrai et F pour faux.



Exercice 5

Observe bien la figure ci-dessous et pour chaque énoncé, entoure la bonne réponse.



Enoncés	Réponses proposées
1/ $\overrightarrow{IE}$ et $\overrightarrow{EL}$ ont	**A** : même sens **B** : même direction **C** : aucune de ces réponses
2/ $\overrightarrow{GN}$ et $\overrightarrow{HO}$ sont	**A** : égaux **B** : opposés **C** : ni l'un, ni l'autre
3/ $\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{AI}=$	**A** : $\overrightarrow{AH}$ **B** : $\overrightarrow{AN}$ **C** : $\overrightarrow{GI}$
4/ $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{LP}=$	**A :** $\vec{0}$ **B:** $\overrightarrow{DP}$ **C :** $2\overrightarrow{LP}$
5/ $\overrightarrow{IH}+\overrightarrow{BJ}=$	**A :** $\overrightarrow{IJ}$ **B:** $\overrightarrow{HB}$ **C :** $\overrightarrow{BI}$
6/ $3\overrightarrow{BE}=$	**A :** $\overrightarrow{BJ}$ **B :** $\overrightarrow{BM}$ **C :** $\overrightarrow{BO}$
7/ $-2\overrightarrow{IL}=$	**A :** $\overrightarrow{IA}$ **B :** $\overrightarrow{ID}$ **C :** $\overrightarrow{IP}$
8/ $-\overrightarrow{LM}=$	**A :** $\overrightarrow{LO}$ **B :** $\overrightarrow{LJ}$ **C :** $\overrightarrow{IH}$

Exercice 6

Coche, pour chaque question, toutes les bonnes réponses.

1. Si I est le milieu du segment [AB], alors on a …:

a) $\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{IB}$ ☐; b) $IA = IB$ ☐ ; c) $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$ ☐ ; d) $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ ☐

2. Pour tout point A, B et C du plan, on a

a) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AC}$ ☐ ; b) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$ ☐; c) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CB}$ ☐; d) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BC}$ ☐

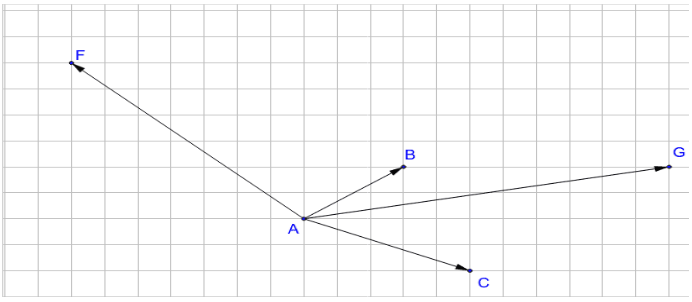
3. $\overrightarrow{AV}+\overrightarrow{SA}=$

a) $\overrightarrow{VS}$ ☐ ; b) $\overrightarrow{SV}$ ☐ ; c) $\vec{0}$ ☐ ; d) Aucune de ces 3 réponses ☐ .

Exercice 7

Observe la figure ci- contre et coche les réponses justes

1. $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$
2. $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$
3. $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$
4. $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$



Exercice 8

1. Construis un hexagone régulier ABCDEF de centre O.
2. Complète les égalités suivantes avec les noms de points présents sur la figure.

a) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \cdots$; b) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BO} = \cdots$; c) $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \cdots$; d) $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AB} = \cdots$

e) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OC} = \cdots$. ; f) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{DE} = \cdots$; g) $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BC} = \cdots$

4.3. Application de méthodes ou de règles

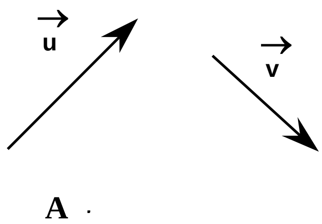
Exercice 9

Réduis les sommes vectorielles suivantes :

1. $\vec{U} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FI}$
2. $\vec{V} = \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{SH} + \overrightarrow{HE}$
3. $\vec{W} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{RA} + \overrightarrow{BD}$
4. $\vec{X} = \overrightarrow{EJ} + \overrightarrow{KT} + \overrightarrow{JK}$

Exercice 10 : ***construction de la somme de deux vecteurs***

On donne sur la figure ci-contre 2 vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et un point A. On se propose de construire la somme $\vec{u} + \vec{v}$.



1. Méthode de la construction bout à bout

a) Construis le point B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$. (on construit ainsi le représentant d'origine A du vecteur $\vec{u}$)

b) Construis le point C tel que $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$. (on construis ainsi le représentant du vecteur $\vec{v}$ qui a pour origine l'extrémité du vecteur $\vec{u}$: on dit qu'on met les vecteurs bout à bout)

c) Justifie que la somme vectorielle $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

2. Méthode du parallélogramme

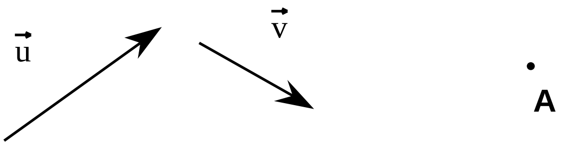
a) Reprends la figure initiale, puis construis les points I et J tels que $\overrightarrow{AI} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AJ} = \vec{v}$.

b) Construis le point C tel que AICJ soit un parallélogramme (d'où le nom de la méthode)

c) Justifie que la somme vectorielle $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

Exercice 11

Construis les vecteurs d'origine A et égaux aux vecteurs $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{v}$, $-\vec{u} + \vec{v}$ et $-\vec{u} - \vec{v}$



Exercice 12

Soit ABCD un parallélogramme et O son centre.

Calcule $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$.

Exercice 13

Exprime plus simplement en fonction de $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ chacun des vecteurs $\vec{w}_1$, $\vec{w}_2$, $\vec{w}_3$, $\vec{w}_4$ et $\vec{w}_5$ définis par :

$\vec{w}_1 = 2(\vec{u} + \vec{v}) - 2(\vec{u} - \vec{v})$; $\vec{w}_2 = \vec{u} + 2(\vec{v} - \vec{u}) - 3(\vec{u} - \vec{v})$; $\vec{w}_3 = 3(\vec{u} - \overrightarrow{2v}) + 5(\vec{v} - \vec{u})$

$\vec{w}_4 = 3(-\vec{u} + \vec{v}) - 2(2\vec{u} + \vec{v}) + 3\vec{u} + \vec{v}$; $\vec{w}_5 = \frac{1}{2}(4\vec{u} + 5\vec{v}) - 3\left(\frac{1}{3}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}\right) - \vec{u} + \vec{v}$.

Exercice 14

Soit ABCD un parallélogramme.

1. Construis les points E, F, G et H tels que :

$\overrightarrow{DE} = \frac{4}{3}\overrightarrow{DA}$; $\overrightarrow{AF} = \frac{5}{4}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BG} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CH} = \frac{5}{4}\overrightarrow{CL}$.

2. Quelle est la nature du quadrilatère EFGH ?

Exercice 15

1. On considère un segment [AB] de milieu I.

Démontre que pour tout point M du plan $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.

2. ABC est un triangle, on suppose qu'il existe un point H tel que $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \vec{0}$.

En utilisant le point I milieu de [AB], démontre que H est un point de [IC].

Exercice 16

Soit ABC un triangle quelconque.

1. Construis les points E et F tels que : $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AC}$.

2. Démontre que les droites (BC) et (EF) sont parallèles (sans utiliser la réciproque de Thalès).

Exercice 17

Soit ABC un triangle quelconque.

1. Construis les points M et N tels que : $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{AC}$.

2. Démontre que les droites (BN) et (MC) sont parallèles.

Exercice 18

Soit OAB un triangle.

1. Construis les points C et D définis par : $\overrightarrow{OC} = 4\overrightarrow{OA}$ *et* $\overrightarrow{CD} = 4\overrightarrow{AB}$.

2. Démontre que les points O, B et D sont alignés.

Exercice 19

ABCD est un parallélogramme et M est un point quelconque du plan.

Démontre que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$.

Exercice 20

On considère un triangle ABC. Soit I ; J et K les milieux respectifs des côtés $[AB]$; $[BC]$ *et* $[CA]$.

1. Construis le point D tel que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$. Démontre que les points A ; J et D sont alignés.

2. Soit E le point tel que $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BE}$. Démontre que C est le milieu de $[DE]$.

3. Soit F tel que $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CF}$.

Démontre que les triangles ABC et DEF ont le même centre de gravité.

4.4. Problèmes de vie ou situations complexes

Exercice 21

Le projet d'urbanisation de la commune de Déni Malick a été présenté aux conseillers communaux pour avis et amendements éventuels au cours d'une séance publique. Les techniciens chargés du projet en ont exposé chacun, un volet. Monsieur Mbengue, urbaniste, chargé de proposer les lieux d'implantation des infrastructures a informé l'assistance que toute la superficie de la commune et particulièrement son chef-lieu est quadrillé à l'aide des points tels que O, l, J, A, B, C, D..... il fournit également les informations suivantes :

$\overrightarrow{OA} = 4\overrightarrow{OI} + 5\overrightarrow{OJ}$; $\overrightarrow{OB} = 7\overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OJ}$; $\overrightarrow{AC} = -5\overrightarrow{OI} - 10\,\overrightarrow{OJ}$; $\overrightarrow{AF} = -\overrightarrow{OI} - 8\,\overrightarrow{OJ}$

D'autres techniciens ont présenté d'autres volets à savoir les infrastructures, les ouvrages d'assainissement et les coûts de réalisation des différents projets. Abdou est un agriculteur qui a assisté à la séance ; mais il avoue ne pas comprendre grand – chose des exposés purement scientifiques et techniques

Tâche : Tu es un élève de la classe de 3ème et tu vas aider Abdou à mieux comprendre le projet. Pour cela, tu es invité à répondre aux questions suivantes :

1.

a. Exprime chacun des vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OC}\ et\ \overrightarrow{OF}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{OI}\ et\ \overrightarrow{OJ}$.

b. Exprime les vecteurs $\overrightarrow{BC}\ et\ \overrightarrow{FC}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{OI}\ et\ \overrightarrow{OJ}$.

c. Déduis de la question b) la position du point F sur le segment [BC].

2. On donne le point G tel que $\overrightarrow{OG} = 5\overrightarrow{OI} - 2\overrightarrow{OJ}$.

a. Montre que $\overrightarrow{FG} = 2\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ}$.

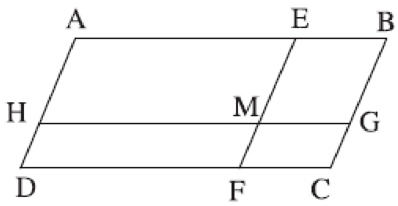
b. Justifie que $\overrightarrow{BC} = -4\overrightarrow{FG}$

Exercice 22

Dans la figure ci-contre, ABCD est un parallélogramme,

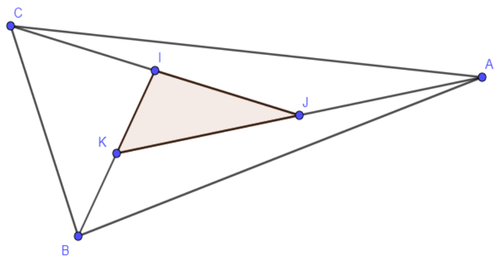
(EF) est parallèle a (AD) et (HG) est parallèle a (AB).

Montre que $\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{HF} = \overrightarrow{AC}$.



Exercice 23

IJK est un triangle. On note A le symétrique de K par rapport à J, B le symétrique de I par rapport à K, C le symétrique de J par rapport à I.



1. Exprime $\overrightarrow{AK}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AI}$, puis $\overrightarrow{AI}$ en fonction de $\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{AC}$ et enfin $\overrightarrow{AJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AK}$. Déduis-en que $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{7}(2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

2. Soit P le point défini par : $\overrightarrow{BP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

Exprime $\overrightarrow{AP}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

3. Déduis-en de 1. et 2. que A, K, P et J sont alignés.

On admettra que de manière analogue, les points B, K, I, Q d'une part et C, I, J, R sont alignés, Q et R étant définis par : : $\overrightarrow{CQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$ et : $\overrightarrow{AR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

4. Réciproquement, si le triangle ABC est donné, comment retrouver I, J et K de façon que I soit le milieu de [CJ], J celui de [AK] et K celui de [BI].

Exercice 24

Soit ABC un triangle non rectangle ; O le centre et r le rayon de son cercle circonscrit (C).

1. On considère le point H défini par : $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

a. Montre que : $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OA'}$; $\overrightarrow{BH} = 2\overrightarrow{OB'}$ et $\overrightarrow{CH} = 2\overrightarrow{OC'}$, avec A', B', C' milieux respectifs de [BC], [CA) et [AB].

b. Déduis en que : (AH) ⊥ (BC) et (BH) ⊥ (CA) . Que représente alors le point H ?

2. On désigne par I, J, K les milieux de [AH], [BH], [CH]. Montre que les segments [OH], [IA'], [JB'] , [KC '] ont le même milieu Ω .

3. Montre que : $\overrightarrow{\Omega I} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{\Omega J} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$, et $\overrightarrow{\Omega K} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$.

Déduis-en que les points I, J, K appartiennent au cercle (C') de centre Ω et de rayon $\frac{1}{2}r$.

4. Montre que : $\overrightarrow{\Omega A'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{\Omega B'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$, et $\overrightarrow{\Omega C'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$.

Déduis en que les points A' , B' , C' appartiennent au cercle (C').

5. On désigne par A_1 , B_1 , C_1 les pieds sur (BC), (CA), (AB) des hauteurs du triangle ABC .
Montre que les points A_1 , B_1 et C_1 sont éléments du cercle (C').

6. Soit G le centre de gravité du triangle ABC. Montre que les points O, G et H sont alignés.

7. Les résultats précédents sont-ils vérifiés lorsque le triangle ABC est rectangle ? Fais par exemple une figure avec le triangle ABC rectangle en A .

Que dis-tu des points O, G, H, Ω , lorsque le triangle ABC est équilatéral ?

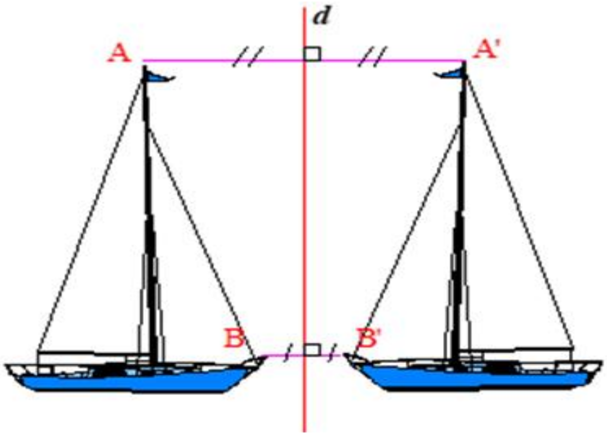
Notes :

- (C') est appelé cercle d'Euler du triangle ABC .
- Lorsque le triangle ABC n'est pas équilatéral, la droite (OH) est appelée droite d'Euler de ABC

Leçon 5 : Transformations du plan

5.1. L'essentiel du cours

5.1.1. Symétrie orthogonale par rapport à une droite



❖ **Définition**

Soit (d) une droite du plan.
Le symétrique d'un A par rapport à (d) est le point A' tel que (d) soit la médiatrice du segment [AA'].
On dit que les points A et A' sont symétriques par rapport à (d).
La droite (d) est appelée axe de la symétrie orthogonale.

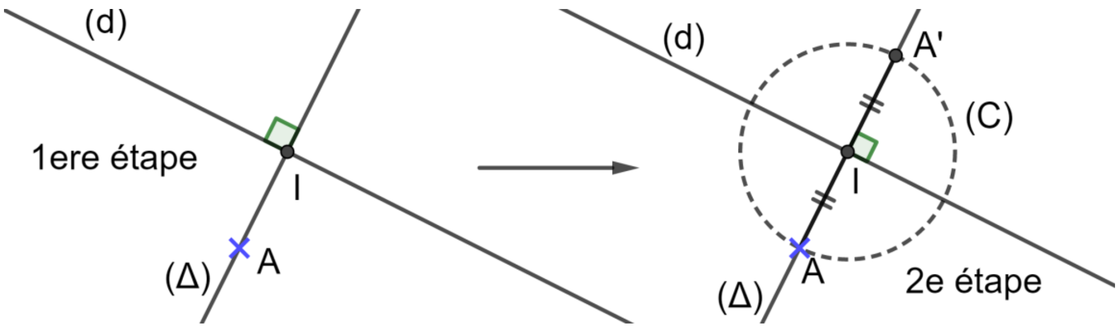
❖ **Remarques**

- Si A est un point de (d) alors le symétrique de A est A
- Si A' est le symétrique de A par rapport à (d), alors A est aussi le symétrique de A' par rapport à (d).

❖ **Méthode de construction**

Pour construire A' symétrique de A par rapport à (d), on peut procéder comme suit :

- On trace (Δ) la perpendiculaire à (d) passant par A ; soit I le point d'intersection de (Δ) avec (d).
- On trace (C) le cercle de centre I passant par A. l'autre point d'intersection de (C) avec (Δ) est A' le symétrique de A par rapport à (d).

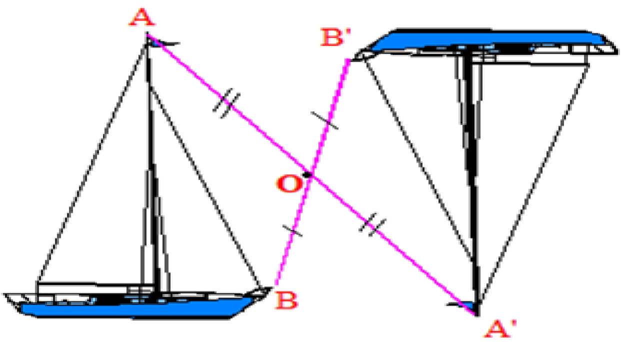


❖ **Images de figures simples**

Soit A, B, I trois points de symétriques respectifs A', B' I', par la symétrie orthogonale d'axe (d). L'image par la symétrie orthogonale d'axe (d) :

- de la droite (AB) est la droite (A'B')
- du segment [AB] est le segment [A'B'] de même longueur que [AB] ;
- du cercle de centre I et de rayon r est le cercle de centre I' et de rayon r

5.1.2. Symétrie centrale



❖ **Définition**

Soit I un point du plan.

Le symétrique d'un point A par rapport à I est le point A' tel que I milieu de [AA'].

On dit que les points A et A' sont symétriques par rapport à I.

Le point I est appelé centre de la symétrie centrale.

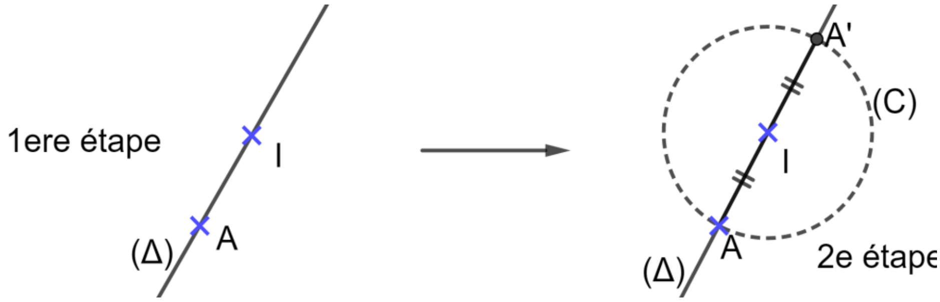
❖ **Remarques**

- Le symétrique du centre I de la symétrie centrale est I.
- Si A' est le symétrique de A par rapport à I, alors A est aussi le symétrique de A' par rapport à I.

❖ **Méthode de construction**

Pour construire A' le symétrique de A par rapport À I, on peut procéder comme suit :

- On trace (Δ) la droite passant par I et A.
- On trace (C) le cercle de centre I passant par A. l'autre point d'intersection de (C) avec (Δ) est A' le symétrique de A par rapport à I.

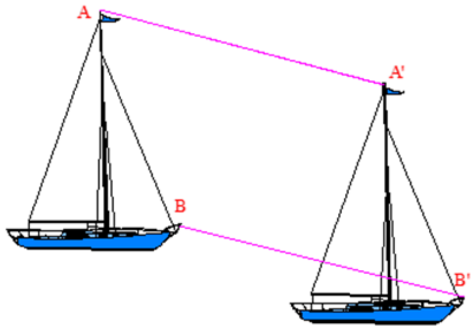


❖ **Images de figures simples**

Soit A, B, I trois points de symétriques respectifs A', B', I' par rapport à un point O. L'image par la symétrie centrale de centre O :

- de la droite (AB) est la droite (A'B') parallèle à (AB);
- du segment [AB] est le segment [A'B'] de même longueur que [AB] ;
- du cercle de centre I et de rayon r est le cercle de centre I' et de rayon r

5.1.3. Translation



❖ **Définition**

Soit $\vec{u}$ un vecteur.

L'image d'un point A par la translation de vecteur $\vec{u}$ est le point A' tel que $\overrightarrow{AA'} = \vec{u}$.

❖ **Remarques**

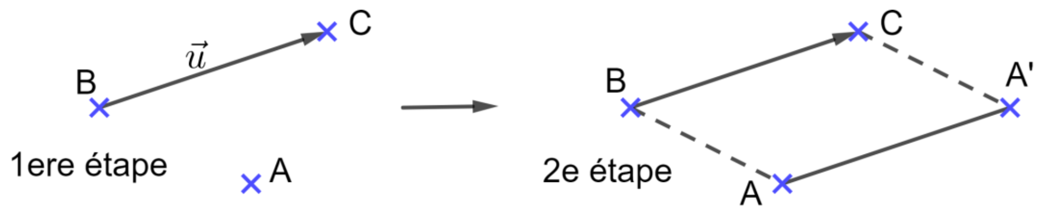
Si $\vec{u} = \overrightarrow{CD}$

- L'image de C par la translation de vecteur $\vec{u}$ est le point D.
- L'image d'un A par la translation de vecteur $\vec{u}$ est le point A' tel que $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{CD}$; Autrement c'est le point A' tel que CDA'A est un parallélogramme.

❖ **Méthode de construction**

Pour construire A' l'image de A par la translation de vecteur $\vec{u}$, on peut procéder comme suit :

- On place deux points B et C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{BC}$.
- On construit le point A' tel que BCA'A est un parallélogramme.



❖ **Images de figures simples**

Soit A, B et I trois points d'images respectives A', B' et I' par la translation de vecteur $\vec{u}$. L'image par la translation de vecteur $\vec{u}$:

- de la droite (AB) est la droite (A'B') parallèle à (AB);
- du segment [AB] est le segment [A'B'] de même longueur que [AB] ;
- du cercle de centre I et de rayon r est le cercle de centre I' et de rayon r

5.1.4. Rotation

❖ **Définition**

Soit O, A, A' trois points distincts du plan tels que $OA = OA'$..

L'image d'un point M distinct de O par la rotation de centre O qui transforme A en A' est le point M' tel que :

- $OM = OM'$;
- $\widehat{MOM'} = \widehat{AOA'}$;
- le sens de déplacement de M vers M' est celui de A vers A'.

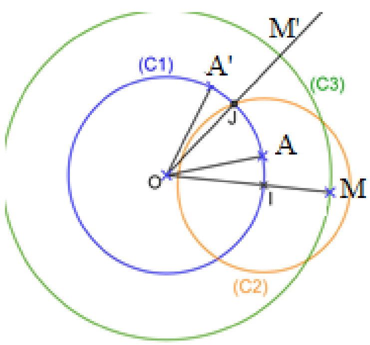
❖ **Remarques**

- L'image de O par la rotation de centre O qui transforme A en A' est le point O lui-même.
- La rotation de centre O qui transforme A en A' est aussi appelée rotation de centre O et d'angle $\widehat{AOA'}$.

❖ **Méthode de construction**

Pour construire l'image M'de M par la rotation de centre O qui transforme A en A', on peut procéder comme suit :

- On trace le segment [OM] et (C_1) le cercle de centre O qui passe par A. (C) coupe [OM] en un point I ;
- On trace (C_2) le cercle de centre I et de rayon AA'. (C_2) coupe (C_1) en un point J tel que le sens de déplacement de I vers J soit le même que celui de A vers A'.
- On trace la demi-droite [OJ] et le cercle (C_3) de centre O qui passe par M. Le point d'intersection de (C_3) et de la demi-droite [OJ] est le point M'



❖ **Images de figures simples**

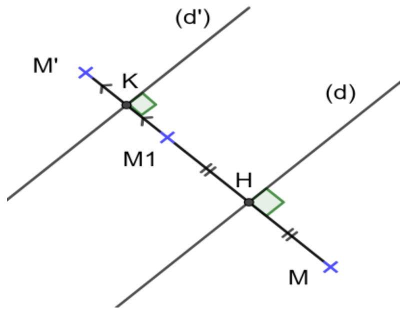
Soit A, B et I trois points d'images respectives A', B' et I' par une rotation r. L'image par la rotation r :

- de la droite (AB) est la droite (A'B') ;
- du segment [AB] est le segment [A'B'] de même longueur que [AB] ;
- du cercle de centre I et de rayon r est le cercle de centre I' et de rayon r.

5.1.5. Etude de deux symétries orthogonales successives

❖ **dont les axes sont parallèles**

(d) et (d') étant deux droites parallèles ; la symétrie orthogonale par rapport à (d) suivie de la symétrie orthogonale par rapport à (d') est la translation de vecteur $2\overrightarrow{HK}$, HK étant la distance des deux droites parallèles.



<u>Exemple</u> : Sur la figure ci-contre

Notons S_d (respectivement $S_{d'}$) la symétrie orthogonale par rapport à (d), (respectivement (d'))

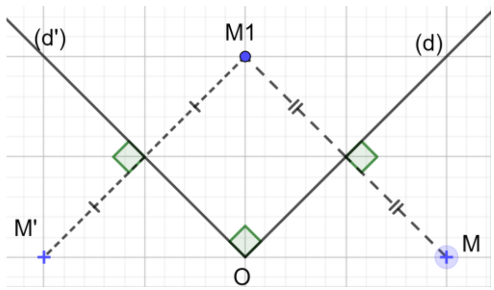
- l'image de M par S_d est M_1

- l'image de M_1 par $S_{d'}$ est M'

On en déduit que l'image de M par S_d suivie de $S_{d'}$ est M' qui est l'image de M par la translation de vecteur $2\overrightarrow{HK}$, HK étant la distance des deux droites parallèles.

❖ **dont les axes sont perpendiculaires**

(d) et (d') étant deux droites perpendiculaires en un point O ; la symétrie orthogonale par rapport à (d) suivie de la symétrie orthogonale par rapport à (d') est la symétrie centrale de centre O.



<u>Exemple</u> : Sur la figure ci-contre

Notons S_d (respectivement $S_{d'}$) la symétrie orthogonale par rapport à (d), (respectivement (d'))

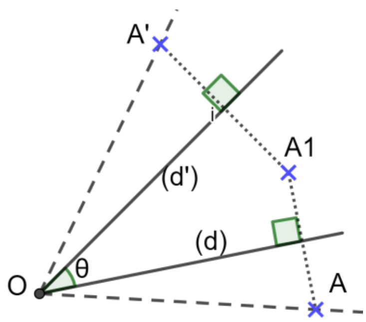
- l'image de M par S_d est M_1

- l'image de M_1 par $S_{d'}$ est M'

On en déduit que l'image de M par S_d suivie de $S_{d'}$ est M' qui est le symétrique de M par rapport à O, le point d'intersection de (d) et (d').

❖ **dont les axes sont sécants**

(d) et (d') étant deux droites sécantes en O et formant un angle de mesure θ, la symétrie orthogonale par rapport à (d) suivie de la symétrie orthogonale par rapport à (d') est la rotation de centre O et d'angle 2θ.



<u>Exemple</u> : Sur la figure ci-contre

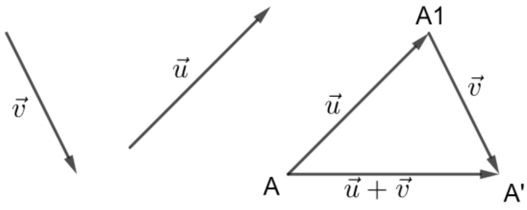
Notons S_d (respectivement $S_{d'}$) la symétrie orthogonale par rapport à (d), (respectivement (d'))

- l'image de A par S_d est A_1
- l'image de A_1 par $S_{d'}$ est A'

On en déduit que l'image de A par S_d suivie de $S_{d'}$ est A' qui est l'image de A par la rotation de centre O (le point d'intersection de (d) et (d')) et d'angle 2θ.

5.1.6. Etude de deux translations successives

La translation de vecteur $\vec{u}$ suivie de la translation de vecteur $\vec{v}$ est la translation de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.



5.2. Restitution de connaissances

Exercice 1

Réponds par vrai ou faux :

1. Par une symétrie de centre A, l'image du point A est le point A lui-même.
2. La translation de vecteur $2\vec{u}$ suivie de la translation de vecteur $-\vec{u}$ est la translation de vecteur $\vec{u}$.
3. Une rotation transforme un segment en un segment de même longueur.
4. La symétrie orthogonale par rapport à une droite (D) suivie de la symétrie orthogonale par rapport à une droite (D') est une translation.

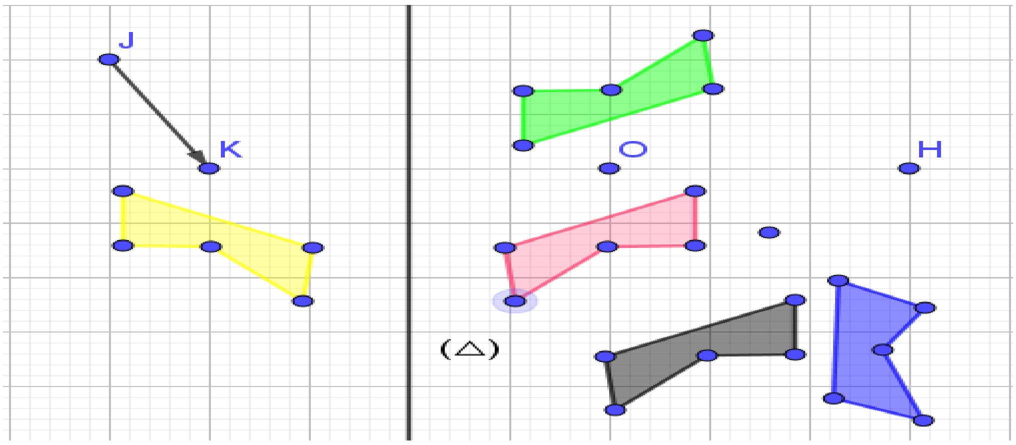
Exercice 2

Complète les pointillés :

1. Si les points M et M' sont symétriques par rapport à une droite (d) alors (d) est … de [MM']
2. Si ABCD est un parallélogramme de centre I alors le symétrique de A par rapport à I est …
3. Si M' est l'image de M par la translation de vecteur $\vec{u}$, alors M est l'image de M' par la translation de vecteur …
4. Si A' est l'image de A par la rotation de centre I, alors l'image de la droite (IA) par cette rotation est …
5. Si A_1 est l'image de A par la translation de vecteur $\vec{\imath}$ et A' l'image de A_1 par la translation de vecteur $-3\vec{\imath}$ alors A' l'image de A par la translation de vecteur …

Exercice 3

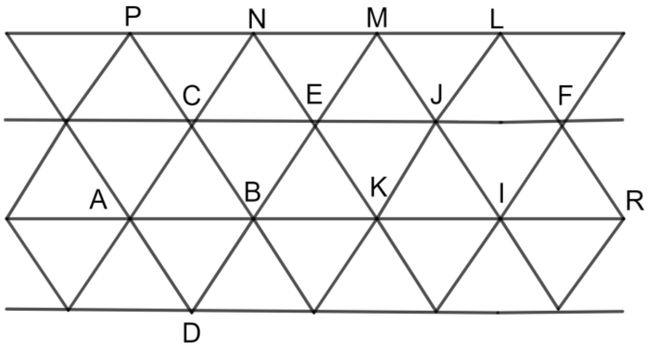
Observe la figure ci-dessous puis complète :



1. La figure jaune est l'image de la figure rouge par ………………………………………
2. La figure noire est l'image de la figure rouge par………………………………………
3. La figure verte est l'image de la figure rouge par………………………………………

Exercice 4

La figure ci-contre est composée de triangles équilatéraux.

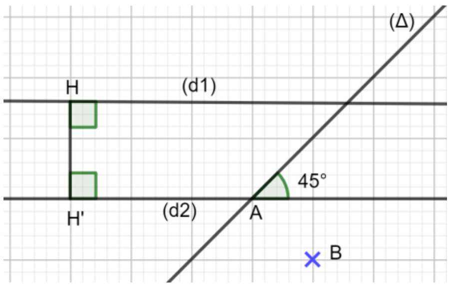


Quelle est l'image de :

1. B par la rotation de centre K et d'angle 60^o dans le sens horaire ?
2. D par la rotation de centre B et d'angle 120^o dans le sens horaire ?
3. I par la rotation de centre B et d'angle 60^o dans le sens antihoraire ?
4. L par la rotation de centre K et d'angle 60^o dans le sens horaire ?
5. J par la rotation de centre E et d'angle 120^o dans le sens antihoraire.
6. I par la rotation de centre J et d'angle 180^o dans le sens horaire.
7. E par la rotation de centre E et d'angle 240^o dans le sens horaire.
8. K par la rotation de centre J et d'angle 240^o dans le sens antihoraire.

Exercice 5

On considère la figure ci-contre.



1. Donne la nature des transformations suivantes :

a. La symétrie orthogonale d'axe (d1) suivie de la symétrie orthogonale d'axe (d2).

b. La symétrie orthogonale d'axe (d2) suivie de la symétrie orthogonale d'axe (Δ).

c. La translation de vecteur $\overrightarrow{AH'}$ suivie de la translation de vecteur $\overrightarrow{H'H}$.

2. Complète les pointillés :

a. L'image du point B par La symétrie orthogonale d'axe (d2) suivie de la symétrie orthogonale d'axe (d1) est le point B' tel que ……………………….

b. L'image du point B par La symétrie orthogonale d'axe (d2) suivie de la symétrie orthogonale d'axe (Δ) est le point B'' tel que : ……………………….

5.3. Application de méthodes ou de règles

Exercice 6

Soit ABC, MNP, RST et UVZ trois triangles quelconques.

1) Construis A', B', C' les images respectives de A, B, C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

2) Construis M', N', P' les images respectives des points M, N, P par la symétrie de centre M.

3) Construis R', S', T' les images respectives des points R, S, T par la symétrie d'axe (RS).

4) Construis U', V', Z' les images respectives de U, V, Z par la rotation de centre U et d'angle $\widehat{VUZ}$.

Exercice 7

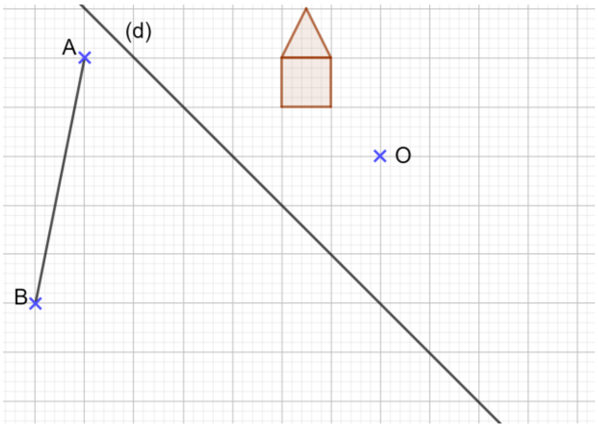
Construire l'image de la case orange :

a) par la symétrie de centre le point O.

b) par la symétrie d'axe (d).

c) par la translation qui transforme A en B.

d) par la rotation de centre O, d'angle 90 ° et de sens horaire.

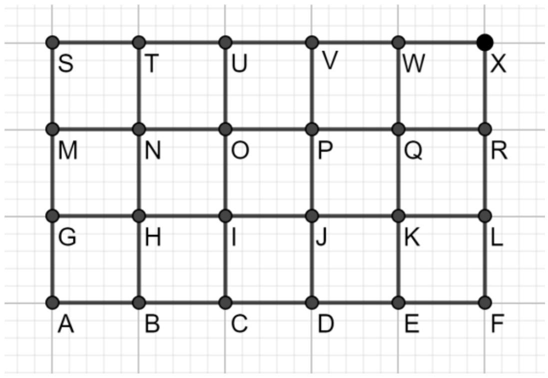


Exercice 8

Marque trois points A, B et C non alignés et construis deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires.
Construis les images des points A, B et C par la translation de vecteur $\vec{u}$ suivie de la translation de vecteur $\vec{v}$.

Exercice 9

La figure ci-contre est composée de 15 carrés. Partir d'un point H (par exemple) et se déplacer par une transformation donnée, signifie partir de H et arriver à H' l'image de H par la transformation.



Trois élèves effectuent les déplacements suivants :

1. Modou part de B, se déplace :
- par la symétrie de centre I ;
- puis par la symétrie orthogonale d'axe (EK).

Quel est son point d'arrivée ?

2. Rokhyatou part de E, se déplace :
- par la translation de vecteur $\overrightarrow{AH}$;
- par la symétrie orthogonale d'axe (CJ) ;
- par la rotation de centre O, d'angle 90°, dans le sens antihoraire.

Quel est son point d'arrivée ?
3. Oumy part du point X, se déplace par la symétrie orthogonale d'axe (WR) suivie de de la symétrie orthogonale d'axe (PK). Quel est son point d'arrivée ?

Exercice 10

1. Tracer un triangle équilatéral ABC de 4cm de côté.
2. Construire l'image du triangle ABC :

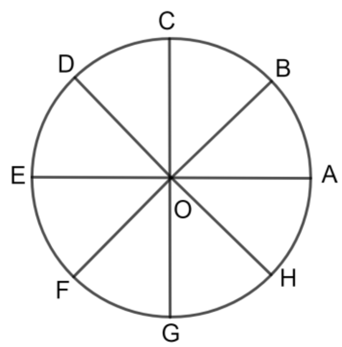
a. par la rotation de centre A, d'angle 60^o dans le sens antihoraire ;
b. par la rotation de centre B, d'angle 90^o dans le sens horaire ;
c. par la rotation de centre C, d'angle 120^o dans le sens antihoraire.

Exercice 11

1. Construis un triangle EFG rectangle en F tel que $EF = FG = 4cm$.
2. Place le point K image de E par la symétrie de centre F.
3. Place le point L, image de F par la symétrie orthogonale d'axe (EG).
4. Place le point J image de G par la translation qui transforme E en F.

Exercice 12

La roue de vélo sur la figure ci-contre a huit rayons régulièrement espacés.



1. Quel triangle obtient-on quand on transforme le triangle AOB par :

a. la rotation de centre O, d'angle 45^o, dans le sens des aiguilles d'une montre ;
b. par la symétrie de centre O ;
c. par la symétrie d'axe (DH) ;
d. par la rotation de centre O, d'angle 135o, dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.
e. par la symétrie d'axe (CG) suivie de la symétrie d'axe (DH).

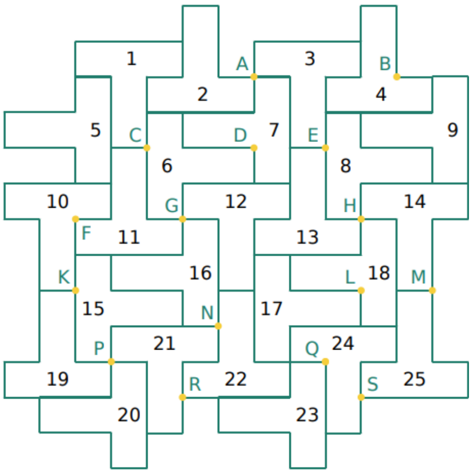
2. Par quelle transformation obtient-on le triangle ODC à partir su triangle AOB.

5.4. Problèmes de vie ou situations complexes

Exercice 13

1. Recopie puis complète le tableau en observant le pavage ci-contre.

La pièce n°		12	24	21
est l'image de la pièce n°	6		4	15
par la rotation de centre	G	N		
et d'angle en degré	90	90	180	



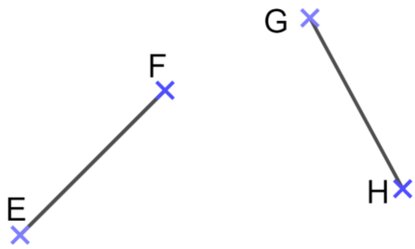
2. Par quelle transformation la pièce
a. n° 3 a pour image la pièce n° 25 ?
b. n° 13 a pour image la pièce n° 25 ?
c. n° 14 a pour image la pièce n° 25 ?

Exercice 14

1. Construis un segment [AB] de longueur 5cm.

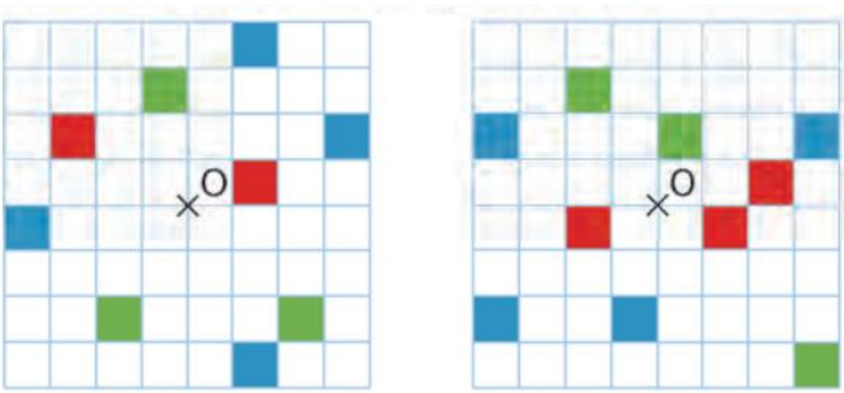
2. Sachant que A est l'image de B par une rotation, où se trouve nécessairement le centre de cette rotation ? Place plusieurs centres possibles.

3. Les segments [EF] et [GH] ci-contre sont de même longueur. On suppose que E et F sont les images respectives de G et H par une rotation.
Détermine, puis construis le centre de cette rotation.



Exercice 15

Reproduis puis colorie le minimum de cases pour que chacune des figures ci-contre admette le point O pour centre de symétrie.



Exercice 16

Rokhy a réalisé une superbe figure et son symétrique. Malheureusement elle a perdu sa feuille. Cependant elle avait pris la précaution de faire le tableau suivant sur son cahier.

Point	E	T	R	S	A	C
Symétrique	V	J	I	S	Z	D

1. Quel est le centre de la symétrie ?
2. Sachant que $ET = 3{,}4$cm et $ZD = 5{,}1$cm. Donne les longueurs AC et VJ. Justifie.
3. RAS est un triangle équilatéral de 3cm de côté. Quel autre triangle équilatéral est-t-on certain d'avoir sur la figure ? Justifie.
4. On sait que $VJ = JI$. Quelle est la nature du triangle ETR ? Pourquoi ?

Leçon 6 : Repérage dans le plan

6.1. L'essentiel du cours

❖ **Rappels**

- **Repère**

  Un repère du plan est formé par trois points non alignés O, I, J par exemple. Il est noté (O, I, J) ou $\left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$ *ou* $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ avec $\vec{\imath} = \overrightarrow{OI}$ *et* $\vec{\jmath} = \overrightarrow{OJ}$.

  - Si $(OI) \perp (OJ)$, alors le repère (O, I, J) est orthogonal

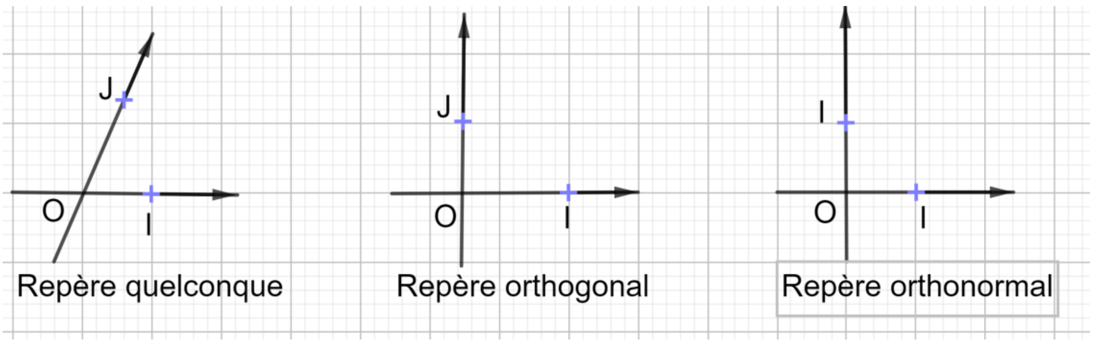
  - Si $(OI) \perp (OJ)$ et $OI = OJ$ alors le repère (O, I, J) est orthonormal

- **Origine et axes d'un repère**

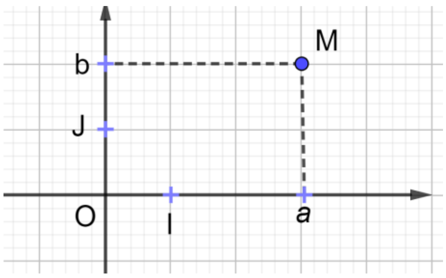
  Si (O, I, J) est un repère du plan, alors :

  - le point O est l'origine du repère ;
  - la droite (OI) est l'axe des abscisses ;
  - la droite (OJ) est l'axe des ordonnées.

- **Exemple**



- **Coordonnées d'un point**
  - Soit (O, I, J) un repère orthonormal du plan. Un point M a pour coordonnées $(a\,;\ b)$ dans ce repère ssi $\overrightarrow{OM} = a\overrightarrow{OI} + b\overrightarrow{OJ}$. On écrit $M(a\,;\ b)$ ou $M\binom{a}{b}$ et on lit M de coordonnées $(a\,;\ b)$.
  - Le réel a est l'abscisse du point M et le réel b son ordonnée.



- **Représentation graphique**
  - Pour représenter dans un repère orthonormal, un point $M(a\,;\ b)$:

- On place sur l'axe des abscisses (OI) le point P d'abscisse a et sur l'axe des ordonnées le point Q d'abscisse b :
- On trace la droite parallèle à l'axe des abscisses passant par Q et la droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par P.

Le point d'intersection de ces deux droites est le point M.

- Pour déterminer graphiquement les coordonnées d'un point M dans un repère orthonormal (O, I, J) :
- On projette orthogonalement le point M en P sur l'axe des abscisses et en Q sur l'axe des ordonnées ;
- L'abscisse a de P est l'abscisse de M et l'ordonnée b de Q est l'ordonnée de M. Le couple de réels $(a\,;\ b)$ constitue les coordonnées du point M.

❖ **Coordonnées d'un vecteur**

- **Définition**
  - Un vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées le couple de réels $(x\,;y)$ dans le repère (O, I, J) signifie que $\vec{u} = x\overrightarrow{OI} + y\overrightarrow{OJ}$. On écrit $\vec{u}(x\,;y)$ ou $\vec{u}\binom{a}{b}$
  - Si $A(x_A\,;\ y_A)$ et $B(x_B\,;\ y_B)$ sont deux points d'un repère (O, I, J) alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A\,;\ y_B - y_A)$. On écrit $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A\,;\ y_B - y_A)$.
- **Propriétés**

Soit deux vecteurs $\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{v}(x'\,;y')$ dans un repère orthonormal (O, I, J).

- **Vecteurs égaux**

  $\vec{u} = \vec{v}$ ssi $x = x'$ et $y = y'$
- **Somme de deux vecteurs**

  La somme $\vec{u} + \vec{v}$ est le vecteur de coordonnées $(x + x'\,;y + y')$. On écrit $\vec{u} + \vec{v}\ (x + x'\,;y + y')$.
- **Vecteur nul**

  Le vecteur nul noté $\vec{0}$ est le vecteur de coordonnées $(0\,;0)$. On écrit $\vec{0}(0\,;0)$.

  Remarque : $\vec{u}(x\,;y) = \vec{0}$ ssi $x = 0$ et $y = 0$.
- **Vecteur opposé**

  Le vecteur opposé de $\vec{u}(x\,;y)$ est le vecteur noté $-\vec{u}$ de coordonnées $(-x\,;-y)$. On écrit $-\vec{u}(-x\,;\ -y)$ et on dit que $\vec{u}$ et $-\vec{u}$ sont deux vecteurs opposés.
- **Produit d'un vecteur par un réel**

  Soit k un réel. Le produit du vecteur $\vec{u}(x\,;y)$ par k est le vecteur $k\vec{u}$ de coordonnées $(kx\,;ky)$. On écrit $k\vec{u}(kx\,;ky)$.
- **Vecteurs colinéaires**

  Deux vecteurs $\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{v}(x'\,;y')$ sont colinéaires ssi $xy' - x'y = 0$.
- **Vecteurs orthogonaux**

  Deux vecteurs $\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{v}(x'\,;y')$ sont orthogonaux ssi $xx' + yy' = 0$.

❖ **Distance de deux points**

Soit $A(x_A\,;\ y_A)$ et $B(x_B\,;\ y_B)$ deux points d'un repère orthonormal (O, I, J). La distance entre deux points A et B est : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

❖ **Milieu d'un segment**

Soit $A(x_A\,;\ y_A)$ et $B(x_B\,;\ y_B)$ deux points d'un repère orthonormal (O, I, J). Le milieu du segment $[AB]$ est le point de coordonnées $(\frac{x_A+x_B}{2}\ ;\ \frac{y_A+y_B}{2})$.

- **Equation d'une droite**
  - **Equation cartésienne d'une droite**

    Une équation cartésienne d'une droite (d) est de la forme $\boldsymbol{ax + by + c = 0}$ où a, b, c sont des réels tels que $(a\ ;\ b) \neq (0\ ;0)$
  - **Equation réduite d'une droite**

    Dans le cas où $b \neq 0$, en déterminant y en fonction de x, on obtient une égalité de la forme $\boldsymbol{y = mx + p}$, où $m\ et\ p$ sont des nombres réels.

    Cette égalité est appelée équation réduite de la droite (d) et le nombre réel m est appelée coefficient directeur de la droite (d).
  - **Equation d'une droite parallèle à l'axe des abscisses**

    Si m le coefficient directeur de la droite (d) est nul, alors l'équation réduite de la droite devient : $\boldsymbol{y = p,}$ où p est un nombre réel.

    Cette égalité est l'équation de la droite parallèle à l'axe des abscisses passant par tout point d'ordonnée p.
  - **Equation d'une droite parallèle à l'axe des ordonnées**

    Dans l'équation cartésienne de la droite (d), si $b = 0$ on obtient alors une égalité de la forme $\boldsymbol{x = q,}$ où q est un nombre réel.

    Cette égalité est l'équation de la droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par tout point d'abscisse q.

- **Vecteur directeur**
  - **Définition**

    Un vecteur directeur $\vec{u}$ d'une droite (d) est un vecteur qui a la même direction que (d).
  - **Remarques**
    - Si (d) est la droite (AB), alors un vecteur directeur de (d) est $\overrightarrow{AB}$
    - Si $\vec{u}$ est un vecteur d'une droite (d), alors $k\vec{u}$ est un vecteur directeur de (d), où k est un réel non nul.
  - **Coordonnées d'un vecteur directeur**
    - Si une droite (d) est donnée par son équation cartésienne $ax + by + c = 0$ alors $\vec{u}(-b\ ;a)$ est un vecteur directeur de (d).
    - Si une droite (d) est donnée par son équation réduite $y = mx + p$, alors $\vec{u}(1\ ;m)$ est un vecteur directeur de (d).

- **Détermination de l'équation d'une droite**
  - **Connaissant les coordonnées de deux de ses points**

    <u>Méthode</u>

    - on considère un point $M(x\ ;y)$ appartenant à (AB)

    - on traduit le fait que $M \in (AB)$ ssi $\overrightarrow{AM}\ et\ \overrightarrow{AB}$ sont colinéaires

    - on utilise le fait que deux vecteurs $\vec{u}(x\ ;y)\ et\ \vec{v}(x'\ ;y')$ sont colinéaires ssi $xy' - yx' = 0$ pour obtenir une équation de la droite (AB).

Exemple : soit $A(2\,;1)$ et $B(-3\,;5)$ deux points d'un repère orthonormal ; déterminons une équation de la droite (AB).

- Soit un point $M(x\,;y)$ un point de (AB)
- $M \in (AB)$ ssi $\overrightarrow{AM}(x-2\,;y-1)$ et $\overrightarrow{AB}(-3-2\,;5-1)$ sont colinéaires
- ssi $4(x-2)-(-5)(y-1)=0$

D'où (AB) a pour équation $4x+5y-13=0$

- **Connaissant les coordonnées d'un point et d'un vecteur directeur**

Méthode

- On choisit un point $M(x\,;y)$ appartenant à la droite (d) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.
- on traduit le fait que $M \in (d)$ ssi $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires
- on utilise le fait que deux vecteurs $\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{v}(x'\,;y')$ sont colinéaires

ssi $xy'-yx'=0$ pour obtenir une équation de la droite (d).

Exemple

Soit $A(-2\,;3)$ un point et $\vec{u}(2\,;3)$ un vecteur d'un repère orthonormal ; déterminons une équation de la droite (d) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

- Soit $M(x\,;y)$ un point de (d)
- $M \in (d)$ ssi $\overrightarrow{AM}(x+2\,;y-3)$ et $\vec{u}(2\,;3)$ sont colinéaires
- ssi $3(x+2)-(2)(y-3)=0$

D'où (d) a pour équation $3x-2y+12=0$

- **Connaissant les coordonnées d'un de ses points et son coefficient directeur**

Méthode

- On écrit l'équation réduite d'une équation qui est de la forme $y=mx+p$
- On remplace le coefficient directeur m par sa valeur dans l'équation réduite
- On utilise le fait que les coordonnées du point donnée vérifient l'équation réduite

Exemple

Soit $A(1\,;-2)$ un point d'un repère orthonormal ; déterminons l'équation de la droite (d) passant par A et de coefficient directeur -7.

Soit (d) d'équation $y=mx+p$

- $m=-7$ ssi $(d)\colon y=-7x+p$
- or $A(1\,;-2)\in(d)$ donc $-2=-7(1)+p$ d'où $p=5$

Par conséquent (d) a pour équation : $y=-7x+5$

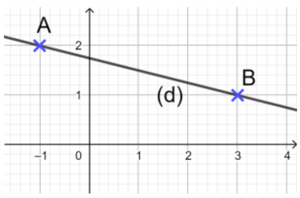
❖ **Représentation d'une droite (d) dans un repère orthonormal (O, I, J) à partir :**

- **de deux de ses points**

Connaissant les coordonnées de deux points de (d), on représente ces points dans le repère et on trace la droite passant par ces deux points. Cette droite est la représentation de (d).

Exemple

Soit $A(-1\,;2)$ et $B(3\,;1)$ deux points d'une droite (d), représentons (d).



- on représente dans le repère les points A et B

- on trace la droite passant par les points A et B ; c'est la représentation de (d).

- **d'un point et d'un vecteur directeur**

  Connaissant les coordonnées d'un vecteur directeur et d'un point de (d), on représente le point et le vecteur dans le repère et on trace la droite passant par ce point et de même direction que le vecteur directeur. Cette droite est la représentation de (d).

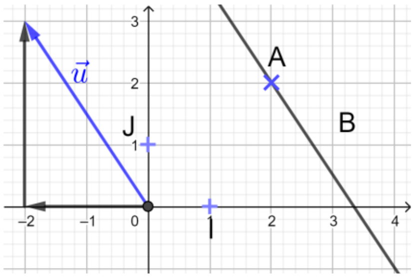
  <u>Exemple</u>

  Soit $\vec{u}(-2\,;3)$ un vecteur directeur de (d) et $A(2\,;2)$ un point d'une droite (d), représentons (d).

  - on représente dans le repère le point A et le vecteur $\vec{u} = -2\overrightarrow{OI} + 3\overrightarrow{OJ}$

  - on trace la droite passant par le point A et de même direction que $\vec{u}$.

  Cette droite est la représentation de (d).



- **d'un point et de son coefficient directeur**

  Connaissant le coefficient directeur m d'une droite (d), et les coordonnées d'un de ses points, on représente le point et $\vec{u}(1\,;m)$ un vecteur directeur de (d) dans le repère, puis on trace la droite passant par ce point et de même direction que le vecteur directeur. Cette droite est la représentation de (d).

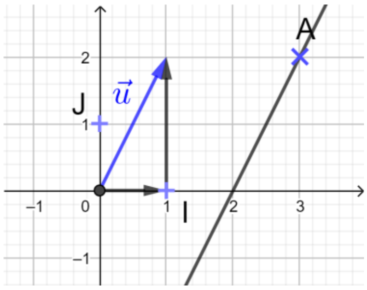
  <u>Exemple</u>

  Soit $A(3\,;2)$ un point d'une droite (d) de coefficient directeur 2 ; représentons (d).

  - on représente dans le repère le point A et le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{OI} + 2\overrightarrow{OJ}$

  - on trace la droite passant par le point A et de même direction que $\vec{u}$.

  Cette droite est la représentation de (d).



- **de son équation**

  On peut déterminer les coordonnées de deux points de (d), représenter ces deux points puis tracer la droite passant par les deux points.

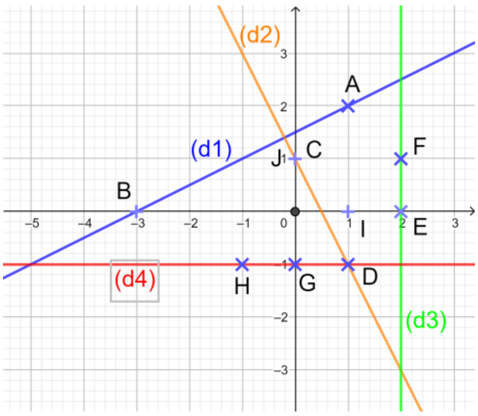
  <u>Exemple</u>

  Représentons dans un même repère les droites

  $(d_1): x - 2y + 3 = 0\,;\ \ (d_2): y = -2x + 1\,;\ \ (d_3): x = 2\ \ et\ (d_4): y = -1$

  - Pour $(d_1): x - 2y + 3 = 0$, on détermine deux de ses points en donnant une valeur quelconque à x (respectivement y) et en déterminant la valeur de y (respectivement de x) correspondante.

- Pour $x = 1$, on a $1 - 2y + 3 = 0$ ssi $y = 2$ d'où $A(1\,;2)$
- Pour $y = 0$, on a $x - 2(0) + 3 = 0$ ssi $x = -3$ d'où $B(-3\,;0)$



- Pour $(d_2): y = -2x + 1$, on détermine deux de ses points en donnant une valeur quelconque à x et en déterminant la valeur de y correspondante.
  - Pour $x = 0$, on a $y = -2(0) + 1$ ssi $y = 1$ d'où $C(0\,;1)$
  - Pour $x = 1$, on a $y = -2(1) + 1$ ssi $y = -1$ d'où $D(1\,;-1)$
- Pour $(d_3): x = 2$, tout point de cette droite a pour abscisse 2 et pour ordonnée un réel quelconque. On a ainsi les points $E(2\,;0)$ et $F(2\,;1)$
- Pour $(d_4): y = -1$, tout point de cette droite a pour ordonnée -1 et pour abscisse un réel quelconque. On a ainsi les points $G(0\,;-1)$ et $H(-1\,;-1)$.

❖ Droites parallèles

- **Définition**

  Deux droites sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires
- **Propriétés**
  - Si $(d): ax + by + c = 0 \;\; et \;(d'): a'x + b'y + c' = 0$, alors $(d) \parallel (d') \; ssi \; ab' - a'b = 0$
  - Si $(d): y = mx + p \;\; et \;(d'): y = m'x + p'$, alors $(d) \parallel (d') \; ssi \; m = m'$

❖ Droites perpendiculaires

- **Définition**

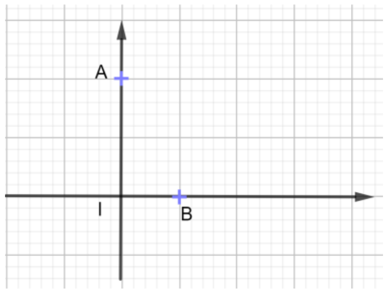
  Deux droites sont perpendiculaires si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux.
- **Propriétés**

  Dans un repère orthonormal :
  - si $(d): ax + by + c = 0 \;\; et \;(d'): a'x + b'y + c' = 0$, alors $(d) \perp (d') \; ssi \; aa' + bb' = 0$
  - si $(d): y = mx + p \;\; et \;(d'): y = m'x + p'$, alors $(d) \perp (d') \; ssi \; mm' = -1$.

6.2. Restitution de connaissances

Exercice 1

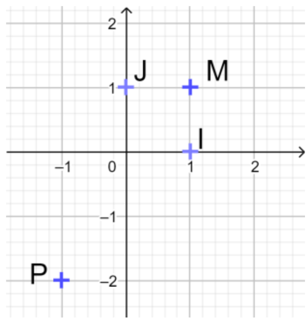
On considère le repère (I, B, A) ci-contre :



1. Le repère est-il quelconque, orthogonal ou orthonormal ?
2. Donne le nom de l'axe des abscisses.
3. Donne le nom de l'axe des ordonnées.
4. Donne le nom de l'origine du repère.

Exercice 2

Observe la figure ci-contre où $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ est un repère et complète les pointillés



1. Le point M a pour coordonnées …
2. le vecteur $\overrightarrow{MP}$ a pour ordonnée ...
3. Le vecteur $\overrightarrow{MO}$ a pour abscisse …
4. Le vecteur $\overrightarrow{PM}$ a pour coordonnées …
5. Le vecteur $\overrightarrow{OI}$ a pour coordonnées …

Exercice 3

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Réponds par Vrai ou Faux.

1. le point M défini par $\overrightarrow{OM} = 3\vec{\jmath} - 2\vec{\imath}$ a pour coordonnées $(3\,;\,-2)$.
2. Les vecteurs $\vec{u}(1\,;2)$ et $\vec{v}(2\,;1)$ sont opposés.
3. Les vecteurs $\vec{u}(1\,;2)$ et $\vec{v}(2\,;4)$ sont colinéaires
4. $\vec{u}\ (1\,;\,-2)$ est un vecteur directeur de la droite $(d)\colon -2x - y + 1 = 0$
5. Les droites $(d1)\colon y = 3x - 2$ $\ et\ $ $(d2)\colon y = -3x + 1$ sont parallèles.
6. Les droites $(d1)\colon y = -2$ $\ et\ $ $(d2)\colon x = 1$ sont perpendiculaires.

Exercice 4

Soit $\vec{u}(x\,;y)$, $\vec{v}(x'\,;y')$, $(d)\colon y = mx + p$, $(d')\colon y = m'x + p'$, $(d1)\colon x - 3 = 0$ et $A(a\,;b)$ dans un repère orthonormé d'origine 0 . Choisis la bonne réponse.

N°	Questions	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1	$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si …	$xx' - yy' = 0$	$xy' - x'y = 0$	$xy' + yx' = 0$
2	$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si …	$xx' + yy' = 0$	$xy' - x'y = 0$	$xx' - yy' = 0$
3	(d) et (d') perpendiculaires si …	$m + m' = -1$	$m = m'$	$mm' = -1$
4	La distance OA est égale à …	$\sqrt{a^2 + b^2}$	$a^2 + b^2$	$\sqrt{a^2 - b^2}$
5	La droite $(d1)$ a pour …	coefficient directeur 3	vecteur directeur $\vec{u}(0\,;1)$	équation réduite $x = 3$

6.3. Application de méthodes ou de règles

Exercice 5

1. Dans un repère orthonormal (O,I,J), place les points :
$A\,(2,1), B\,(1,-2), C\,(-3,3)\ et\ D\,(-1,-1)$.
2. On considère le vecteur $\vec{u}(2\,;\,-1)$. Calcule les coordonnées des points A', B', C' et D' tels que $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{DD'} = \vec{u}$. Place ces quatre points dans le repère orthonormal (O,I,J).

Exercice 6

Le plan est muni du repère orthonormal (O, I,J). On donne $A\,(3,5), B\,(-2,2)\ et\ C\,(-4,3)$.
Trouve le couple de coordonnées du point D pour que ABCD soit un parallélogramme.

Exercice 7

Le plan est muni du repère orthonormal (O,I,J). On donne les points :
$A\,(4,-6), B\,(10,8), C\,(0,-2)\ et\ D\,(3,5)$.
1. Démontre que $\overrightarrow{AB}\ \ et\ \ \overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.
2. Les vecteurs $\overrightarrow{BD}\ \ et\ \ \overrightarrow{CD}$ sont-ils colinéaires ?

Exercice 8

Le plan est muni du repère orthonormal (O,I,J). On donne les points $A\,(-3,-1)$, $B\,(2,1)\ et\ C\,(1,y)$. Calculer y pour que A, B et C soient alignés.

Exercice 9

Dans le plan muni du repère orthonormal (O, I,J), soit les points $A(-2,-2), B(-4,4)$, $C\,(2,6)\ et\ D\,(4,0)$.
1. Démontre que [AC] et [BD] ont même milieu.
2. Démontre que $AC = BD$.
3. Démontre que les vecteurs $\overrightarrow{AC}\ et\ \overrightarrow{BD}$ sont orthogonaux.
4. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

Exercice 10

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Soit les points $A(3\,;2)$; $B(1\,;2)$ et $C(9\,;1)$.
1. Place les points A, B et C.
2. Détermine les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}\ et\ \overrightarrow{BC}$ puis les longueurs AB, AC et BC. Déduis-en que ABC est un triangle rectangle en A.
3. Détermine les coordonnées du point I centre du cercle circonscrit au triangle ABC et son rayon R.
4. En posant $\widehat{ABC} = \alpha$, calcule sinα et tanα.

Exercice 11

Le plan est muni du repère orthonormal $(\mathrm{O,I,J})$.

Dans chacun des cas suivants, détermine une équation de la droite (d) :

1. passant par les points $A(2\,;\ -3)\ et\ B(5\,;\ 1)$.
2. passant par le point $C(-2\,;\ 1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(-2\,;\ -3)$.
3. passant par le point $D(4\,;\ 0)$ et de coefficient directeur -3.

Exercice 12

Le plan est muni du repère orthonormal $(\mathrm{O,I,J})$. Représente dans le même repère :

- la droite (d1) passant par les points $A(2\,;\ -3)\ et\ B(5\,;\ 1)$.
- la droite (d2) passant par le point $C(-2\,;\ 1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(-2\,;\ -3)$.
- la droite (d3) passant par le point $D(4\,;\ 0)$ et de coefficient directeur -3.

Exercice 13

Soit $A(1\,;1)$ et $B(-1\,;-3)$ deux point d'un repère orthonormal $(\mathrm{O,I,J})$.

1. Donne une équation générale de la droite (D) passant par A et B.
2. Déduis-en l'équation réduite de cette droite.
3. Calcule la distance AB.
4. Donne une équation générale de la droite (D') de vecteur directeur $\vec{u}(-2\,;1)$ et passant par C(2 ; 1).
5. Montre que les droites (D) et (D') sont perpendiculaires.
6. Représente les deux droites (D) et (D') dans le repère orthonormal $(\mathrm{O,I,J})$.

Exercice 14

Le plan muni d'un repère orthonormal $(\mathrm{O,I,J})$. Construis dans ce repère les droites :

$(d1): -3x+2y+5=0,\ \ (d2): y=x-3,\ \ (d3): x=-2\ \ et\ (d4): y=3.$

Exercice 15

Soit $A(1,2), B(4,-3)\ et\ C(-3,2)$ trois points d'un plan est muni du repère orthonormal $(\mathrm{O,I,J})$. Dans chacun des cas suivants, détermine une équation :

1. de la droite (d1) passant par le point A et parallèle à la droite (BC).
2. de la droite (d2) passant par le point B et perpendiculaire à (AC).
3. de la droite (d3) passant par le point C et parallèle à la droite $(d): y=2x-3$.
4. de la droite (d4) passant par le point A et perpendiculaire à la droite (d).

Exercice 16

Le plan est muni du repère orthonormal (O,I,J). $A(-1; 4), B(6\,;-1)\ et\ C(0\,;-3)$ sont trois points. Les points A' et B' sont les milieux respectifs de [BC] et [AC].

1. Détermine une équation de chacune des médianes (AA') et (BB')
2. Détermine le couple de coordonnées du point G, centre de gravité du triangle ABC.
3. Vérifie par un calcul que : $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}\ \ et\ \overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$.

6 .4. Problèmes de vie ou situations complexes

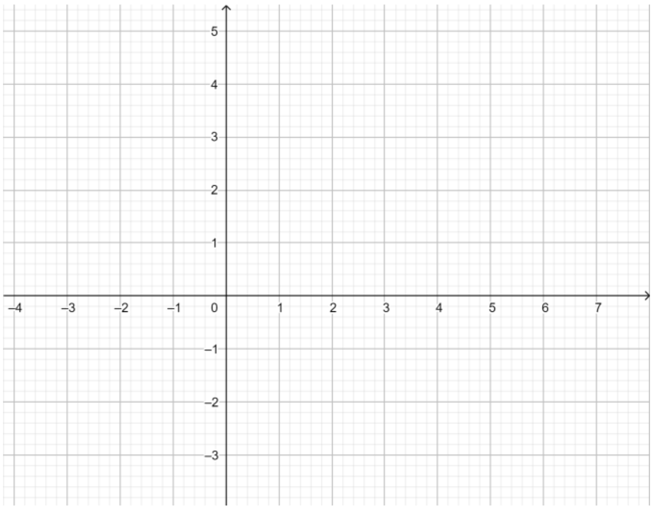
Exercice 17

Le plan d'un village a été muni d'un repère orthonormé (l'unité est le décamètre). La boucherie se trouve au point de coordonnées (6 ; 4) et la boulangerie au point de coordonnées (3 ; -3)

1. Place la boucherie et la boulangerie sur le plan.
2. Quelle est la distance entre la boucherie et la boulangerie ?
3. La maison de Aicha se situe au point de coordonnées (- 2 ; 2)

Sachant qu'il existe une route R en ligne droite passant par la boucherie et la boulangerie, à quelle distance se situe la maison d'Aicha par rapport à la route R.

4. L'atelier du menuisier Modou se situe au point de coordonnées (7 ; 5). Est-il sur la route R ? Justifie ta réponse.



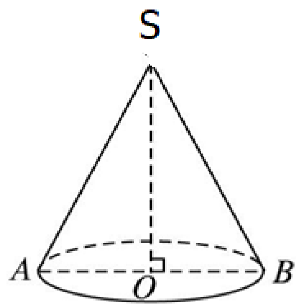
Leçon 7 : Géométrie dans l'espace

7.1. L'essentiel du cours

7.1.1. Cône de révolution

❖ **Présentation**

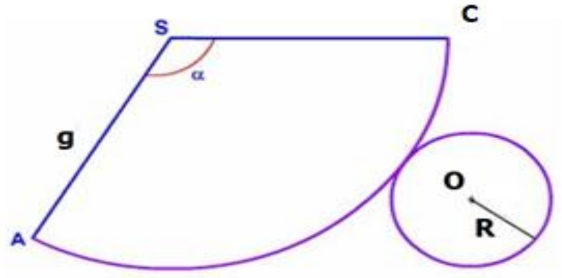
Un cône de révolution est un solide obtenu par la rotation d'un triangle rectangle autour d'un axe correspondant à l'un des côtés formant l'angle droit.
Il est constitué d'une base qui correspond à un disque et d'une surface latérale.



- Tout segment joignant le sommet et un point quelconque du cercle de base est appelé **génératrice** du cône.
  Exemple : [SA] et [SB] sont des génératrices du cône
- Le segment joignant le sommet et le centre du cercle de base est la **hauteur du** cône. Elle est perpendiculaire au plan de base.
  Exemple : S est le sommet du cône, O le centre du cercle de base et [SO] est la hauteur du cône.

❖ **Patron d'un cône de révolution**

Pour confectionner le cône précédent avec du carton, on coupe le carton selon la figure ci-contre appelée patron du cône.



- La longueur de l'arc $\widehat{AC}$ est égale à $2\pi R$ le périmètre du cercle de base de rayon R.
- α est l'angle au sommet du cône ; pour le déterminer on utilise l'égalité $\frac{\alpha}{2\pi R} = \frac{360^o}{2\pi g}$ d'où $\alpha = \frac{R \times 360^o}{g}$, R étant le rayon du cercle de base et g la longueur d'une génératrice.

❖ **Aire et volume d'un cône de révolution de rayon de base r, de génératrice g et de hauteur h**

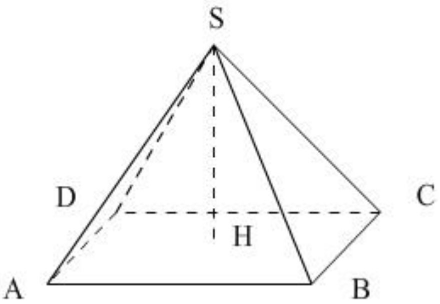
- Aire latérale : $A_L = \pi rg$
- Aire de base : $A_B = \pi r^2$
- Aire totale : $A_T = A_L + A_B = \pi rg + \pi r^2$
- Volume : $V = \frac{A_B \times h}{3} = \frac{\pi \times r^2 \times h}{3}$

7.1.2. Pyramides

❖ **Présentation**

Une pyramide est un solide qui a pour base un polygone (triangle, carré, pentagone, etc.) et pour faces latérales des triangles ayant tous un sommet commun appelé ***sommet de la pyramide.***

Le segment issu du sommet et perpendiculaire au plan de la base est la **hauteur** de la pyramide.



❖ **Exemple**

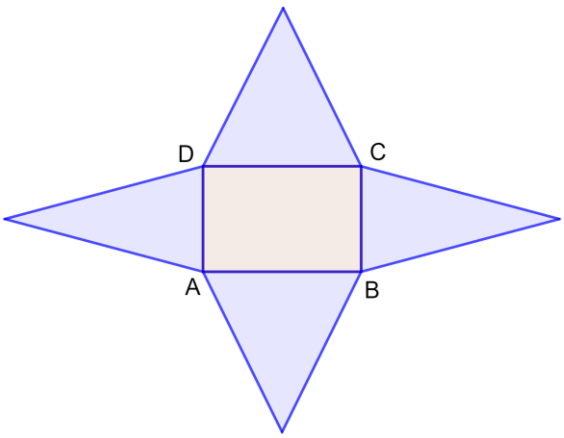
SABCD est une pyramide de base le rectangle ABCD et de sommet S.
Elle a 4 faces latérales que sont les triangles ABS, BCS, DCS et ADS.
Sa hauteur est le segment [SH].
Les côtés des triangles sont appelés arêtes.

❖ **Pyramide régulière**

- Une pyramide est régulière lorsque sa base est un polygone régulier (carré, triangle équilatéral, etc.) et que la hauteur passe par le centre de la base. Dans ce cas, les faces sont des triangles isocèles identiques.
- De plus, lorsque la base est un triangle, la pyramide est appelée tétraèdre. N'importe quel triangle peut alors être considéré comme la base.
  Un tétraèdre est régulier si ses 4 faces sont des triangles équilatéraux.
- *L'apothème d'une pyramide régulière* est la distance du sommet à une arête de sa base.

❖ **Patron d'une pyramide**

Pour confectionner la pyramide SABCD avec du carton, on coupe le carton selon la figure ci-contre.
Cette figure est appelée patron de la pyramide SABCD.



❖ **Aire et volume d'une pyramide**

- Aire latérale : A_L = somme des aires des faces latérales que sont les triangles ayant un sommet commun.
- Aire de base : A_B = aire du polygone de base de la pyramide
- Aire totale : $A_T = A_L + A_B$
- Volume : $V = \frac{A_B \times h}{3}$ où h est la hauteur de la pyramide.

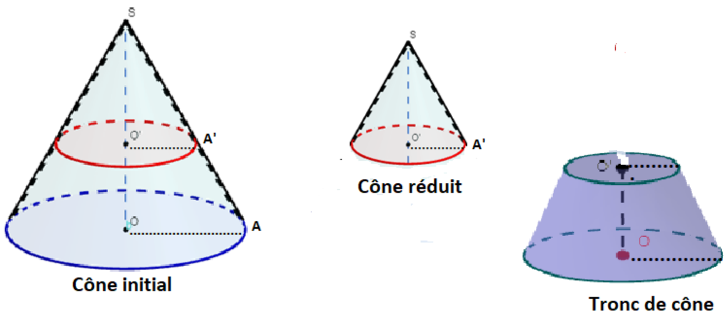
7.1.3. Section par un plan parallèle à la base

❖ **d'un cône**

- **Présentation**

  En procédant à la section d'un cône de révolution de hauteur [SO] et de rayon de base [OA] par un plan parallèle à sa base. On obtient deux solides :

  - le cône de hauteur [SO'] et de rayon de base [O'A'] appelé cône réduit ;
  - le tronc de cône de hauteur [OO']



- **Relation entre dimensions, aires et volumes du cône réduit et du cône initial**
  - Les triangles SOA et $SO'A'$ étant en position de Thalès, on en déduit que $\frac{SO'}{SO} = \frac{SA'}{SA} = \frac{O'A'}{OA} = k$; k est une constante appelée coefficient de réduction du cône. SO étant la hauteur h du cône initial, OA le rayon R de son cercle de base, SO' la hauteur h' du cône réduit et $O'A'$ le rayon R' de son cercle de base,
    on a aussi $\frac{h'}{h} = \frac{R'}{R} = k$.
  - Soit k le coefficient de réduction obtenu en sectionnant un cône par un plan parallèle à la base. Considérons d'une part $\boldsymbol{A_L}$ l'aire latérale, $\boldsymbol{A_B}$ l'aire de base, V le volume du cône initial et d'autre part $\boldsymbol{A'_L}$ l'aire latérale, $\boldsymbol{A'_B}$ l'aire de base, V' le volume du cône réduit on a :
    $\boldsymbol{A'_L = k^2 \times A_L}$; $\boldsymbol{A'_B = k^2 \times A_B}$; $\boldsymbol{V' = k^3 \times V}$ **.**
- **Volume du tronc de cône**

  Soit V_T le volume du tronc de cône, V_i celui du cône initial et V_r celui du cône réduit.

  $V_T = V_i - V_r = V_i - k^3 V_i$

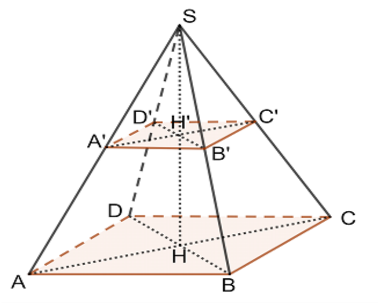
  $= (1 - k^3)V_i$.

❖ **d'une pyramide**

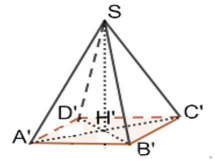
- **Présentation**

  En procédant à la section d'une pyramide de hauteur [SH] par un plan parallèle à sa base. On obtient deux solides :

  - la pyramide de hauteur [SH'] appelée pyramide réduite ;
  - le tronc de pyramide de hauteur [H'H].

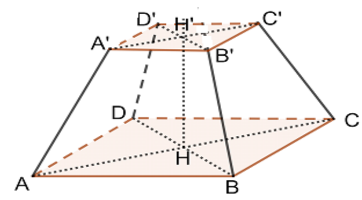


Pyramide initiale



Pyramide réduite

Tronc d'une pyramide



- **Relation entre dimensions, aires et volumes de la pyramide réduite et de la pyramide initiale**
    - Les triangles SHA et $SH'A'$ étant en position de Thalès, on en déduit que $\frac{SH'}{SH} = \frac{SA'}{SA} = \frac{H'A'}{HA} = k$; k est une constante appelée coefficient de réduction de la pyramide.
      SH étant la hauteur h de la pyramide initiale et SH' la hauteur h' de la pyramide réduite, on a aussi $\frac{h'}{h} = k$.
    - Soit k le coefficient de réduction obtenu en sectionnant une pyramide par un plan parallèle à la base. Considérons d'une part $\boldsymbol{A_L}$ l'aire latérale, $\boldsymbol{A_B}$ l'aire de base, V le volume de la pyramide initiale et d'autre part $\boldsymbol{A'_L}$ l'aire latérale, $\boldsymbol{A'_B}$ l'aire de base, V' le volume de la pyramide réduite on a :
      $\boldsymbol{A'_L = k^2 \times A_L}$; $\boldsymbol{A'_B = k^2 \times A_B}$; $\boldsymbol{V' = k^3 \times V}$ **.**
- **Volume du tronc de pyramide**
  Soit V_T le volume du tronc de pyramide, V_i celui de la pyramide initiale et V_r celui de la pyramide réduite.
  $V_T = V_i - V_r = V_i - k^3 V_i$
  $= (1 - k^3)V_i$.

7.2. Restitution de connaissances

Exercice 1

Recopie et complète les phrases suivantes :

1. Une pyramide est un solide qui a pour base un …
2. Un segment qui joint le sommet d'un cône et un point du cercle de base est une …
3. Une pyramide est régulière lorsque sa base est un …
4. La droite passant par le sommet d'un cône et perpendiculaire au cercle de base est appelée

Exercice 2

Réponds par Vrai ou Faux.

1. Les faces latérales d'une pyramide sont des triangles.
2. Un tétraèdre est une pyramide dont la base est un carré
3. L'aire latérale d'un cône de révolution de rayon de base r et de génératrice g est égale à πrg.
4. Le volume d'un cône de révolution de rayon de base r et de génératrice g est égale à $\frac{\pi \times r^2 \times g}{3}$

Exercice 3

Choisir la bonne réponse.

N°	Questions	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1	Si un cône et une pyramide ont une même hauteur et une base de même aire alors ils ont le (ou la) même …	volume	aire latérale	aire totale
2	Si je multiplie par 2 le rayon de base d'un cône de révolution, alors son volume est multiplié par …	2	4	8
3	Une pyramide dont toutes faces sont des triangles est …	un tétraèdre régulier	un tétraèdre	une pyramide régulière
4	Ce solide de l'espace, s'il a la même base et la même hauteur qu'un cône alors son volume est trois fois plus grand que celui du cône. Ce solide est …	un cube	une sphère	un cylindre

Exercice 4

Complète les égalités suivantes :

1. Soit un cône de rayon de base r, de génératrice g, d'angle au sommet α et d'aire totale A_T

a) $\alpha = \cdots$; b) $A_T = \cdots$

2. Soit k le coefficient de réduction obtenu en sectionnant une pyramide par un plan parallèle à la base. Si, d'une part, h est la hauteur, A_l l'aire latérale, V le volume de la pyramide initiale et d'autre part h' est la hauteur, A'_L l'aire latérale, V' le volume de la pyramide réduite alors :

a) $\frac{h}{h'} = \cdots$; b) $\frac{A'_L}{A_l} = \cdots$; c) $\frac{V}{V'} = \cdots$

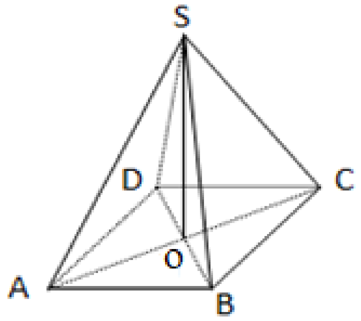
7.3. Application de méthodes ou de règles

Exercice 5

Le patron d'un cône de révolution a une surface latérale formant un angle $\alpha = 216°$ et son rayon de base $r = 12cm$.

1. Calcule son aire totale.
2. Calcule son volume.

Exercice 6



Une pyramide régulière à base carrée a pour hauteur 21 cm ; son volume est de 847 cm^3.

1. Calcule le côté du carré de sa base.
2. Détermine la longueur [AC].
3. Calcule la longueur des arêtes de la pyramide.
4. Calcule la longueur de l'apothème de la pyramide.

Exercice 7

Soit SABCD une pyramide régulière à base carrée de hauteur [SH]. L'aire de base est de 50 cm^2 et l'arête [SA] mesure 13 cm.

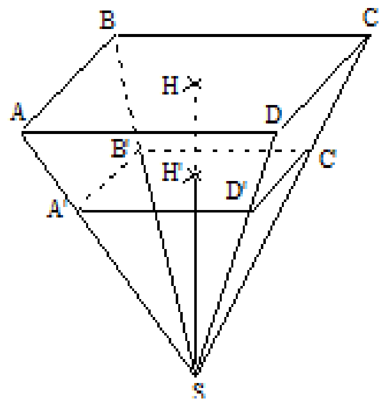
1. Fais une figure.
2. Calcule la valeur exacte de AB, pis démontrer que $AC = 10\ cm$.
3. Calcule [SH] et le volume de SABCD.

Exercice 8

Soit SABCD une pyramide régulière à base carrée. Sa hauteur mesure 6cm ; le coté de sa base mesure 4cm. O est le centre de la base.

1. Dessine la pyramide en perspective cavalière.
2. Calculer la longueur de ses arêtes latérales.
3. Dessine le patron de cette pyramide (échelle 1/2).
4. Calculer l'aire latérale et l'aire totale.
5. Calculer le volume de cette pyramide.

Exercice 9



Une boîte de chocolats a la forme d'un tronc de pyramide (figure ci-dessous). Le rectangle ABCD de centre H et le rectangle A′B′C′D′ de centre H′ sont des plans parallèles. On donne : $AB = 6cm$; $BC = 18cm$; $HH' = 8cm$; $SH = 24cm$.

1. Calcule le volume V_1 de la pyramide SABCD de hauteur SH.
2. Quel est le coefficient k de la réduction qui permet de passer de la pyramide SABCD à la pyramide SA′B′C′D′ de hauteur SH′ ?
3. Déduis en le volume V_2 de la pyramide SA′B′C′D′ puis le volume V_3 de la boîte de chocolats ?

Exercice 10

Calcule

1. La hauteur d'une pyramide régulière à base carrée de côté a et d'apothème $3a$.

2. Le volume d'un cône de révolution d'angle 120° et de génératrice 36 cm.

Exercice 11

SABCD est une pyramide régulière dont la base est un carré de 240cm de côté.

1. On coupe cette pyramide par un plan parallèle à sa base. Le tronc de pyramide obtenu (la partie différente de la réduction) est un récipient de 30cm de profondeur et dont l'ouverture est un carré de 80cm de côté.

a. Montre que la hauteur de la pyramide initiale SABCD est de 45cm et que celle de la pyramide réduite est 15cm.

b) Calcule le volume de ce récipient.

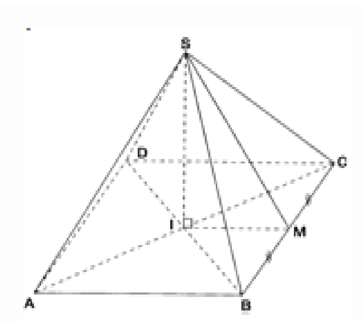
2. Les faces latérales de ce récipient sont des trapèzes de mêmes dimensions.

a. Montre que la hauteur de ces trapèzes est $10\sqrt{73}$ cm.

b. calcule l'aire latérale de ce récipient.

Exercice 12

SABCD est une pyramide régulière dont la base est le carré ABCD de côté 5cm et de centre I. La hauteur [SI] de la pyramide a pour longueur $SI = 3cm$.



1. Calcule le volume de la pyramide.

2. Soit M le milieu de l'arête [BC.

Démontre que la longueur $IM = 2.5cm$.

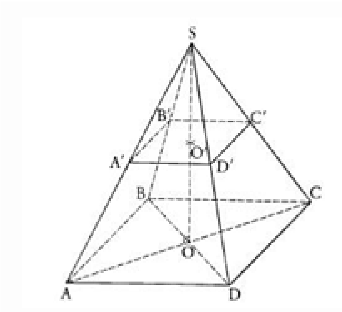
3. On admet que le triangle SIM est rectangle en I.

a. Calcule tan $\widehat{MSI}$.

b. Déduis en la mesure de l'angle $\widehat{MSI}$ à un degré prés.

Exercice 13

SABCD est une pyramide de hauteur [OS]. Son volume est de 240cm^3 et sa hauteur [OS] mesure 15cm ;



1. A partir de la formule donnant le volume de la pyramide, calcule l'aire de la base (ABCD).

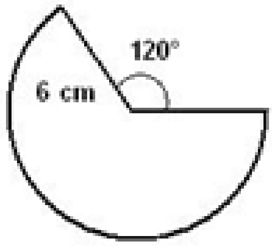
2. O′ est le point du segment [SO] tel que : $O'S = \frac{1}{2}\ OS$.

Le plan passant par O′ et parallèle à la base (ABCD) coupe les droites (SA) en A' et (SB) en B′, (SC) en C'
(SC) en C′ et (SD) en D′. Calcule le volume de la pyramide (SA′B′C′D′).

3. On donne $OA = 5cm$. Calcule au degré près la mesure de l'angle $\widehat{OSA}$.

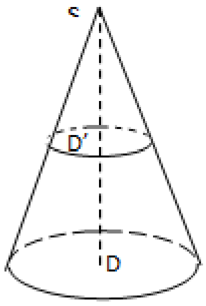
Exercice 14

La figure ci-dessous représente le patron de la partie latérale d'un cône de révolution.



1. Montre que le rayon de sa base est 4cm et que sa hauteur h mesure $2\sqrt{5}$ cm.
2. Calcule son volume.
3. On coupe ce cône par un plan parallèle à sa base à $\frac{2}{3}$ de la hauteur à partir de la base. Calcule le volume du tronc.

Exercice 15



(C) est un cône de sommet S et de base un disque D de rayon 5cm. Le volume de ce cône est de 80 cm^3. Le disque D′ de rayon 3cm est une section du cône (C) par un plan parallèle à la base. (C′) est le cône de sommet S et de base le disque D′. On se propose de calculer le volume de (C).

1. D′ est une réduction de D ; à l'aide des rayons de D et de D′, calcule l'échelle de cette réduction.
2. Quelle formule permet de calculer le volume de (C′) à partir du volume de (C) ? Calcule le volume de (C′).

Exercice 16

Une pyramide de sommet S a pour base un carré de coté $2\sqrt{5}cm$ et de hauteur $SM = 6cm$. On coupe la pyramide par un plan parallèle à la base en $M' \in [SM]$ $tel\ que\ SM' = 4cm$.

1. Fais une figure soignée puis calculer l'échelle de réduction k.
2.
a. Calcule l'aire latérale de la pyramide.
b. Déduis en l'aire latérale de la section.
3. Calcule le volume du tronc de pyramide.

Exercice 17

SABCD est une pyramide de sommet S, de hauteur $SO = 10cm$ et dont la base est un carré de coté 6cm.

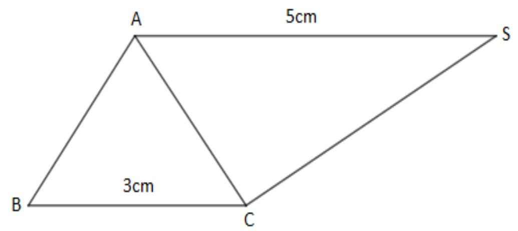
1. Fais une représentation de cette pyramide.
2. On effectue une $1^{ère}$ section de cette pyramide par un plan (P_1) parallèle à la base et qui coupe (SO) en E tel que $SE = 3cm$ et une $2^{ème}$ section de cette pyramide par un plan (P_2) parallèle à la base et qui coupe (SO) en E' tel que $SE' = 7cm$.

a. Fais une représentation de ces deux sections sur le dessin précédent.
b. Calcule le volume du tronc de pyramide compris entre les plans (P_1) et (P_2).

Exercice 18

La figure ci-dessous est une partie d'un patron de la pyramide régulière SABC.

1. Termine ce patron.
2. Calcule l'apothème de cette pyramide.
3. Calcule l'aire latérale et l'aire totale.
4. Calcule la hauteur et le volume.



Exercice 19

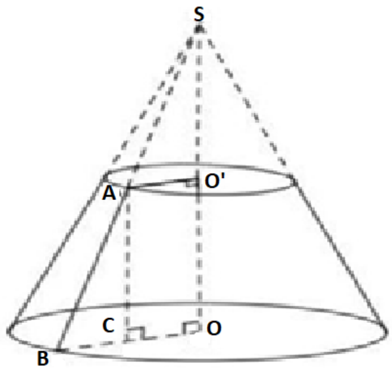
SAB est un cône de révolution de sommet S de centre O et du diamètre de base le segment [AB] tel que : $AB = 4cm \text{ et } SO = 8cm.$

1. Dessine ce cône en perspective cavalière.
2. Calcule la génératrice [SA].
3. Calcule le volume et l'aire totale du cône.
4. Calcule l'angle d'ouverture du développement de ce cône.
5. Représente le patron de ce cône.

Exercice 20

On considère le tronc de cône ci-dessous associé à un cône de révolution de sommet S et de rayon $OB = 6cm$.

1. Sachant que $OO' = 4cm$; $OB = 6cm$ et $O'A = 3cm$, montre que $AB = 5cm$.
2. Montre que la hauteur SO de ce cône est égale à 8cm.
3. La génératrice SB de ce cône est égale à 10cm ; calcule l'aire latérale du cône.
4. Ce cône de révolution est obtenu d'un secteur circulaire d'angle α. Calcule en degré la mesure de l'angle α du développement de ce cône.
5. Calcule le volume du cône initial.



7.4. Problèmes de vie ou situations complexes

Exercice 21

On se propose de calculer le volume d'un seau qui a la forme d'un tronc de cône de révolution (voir schéma)

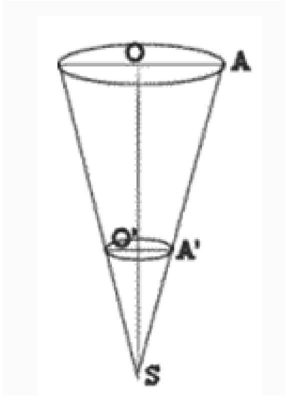
On donne OS = $2\sqrt{13}$; OA = $2a$ (a étant un nombre positif et un nombre positif et O' milieu de [OS].

1. Calcule $O'A'$ en fonction de a.

2. On prend $a = \sqrt{3}$ pour la suite et pour unité le décimètre.

a) Calcule le volume du cône initial.

b) Calcule le volume du cône réduit et en déduire celui du seau. On donne $\pi = 3{,}14$



Exercice 22

La figure ci-contre représente une bougie qui a la forme d'un cône de révolution de rayon de base OA = 22,5 cm et de génératrice AS = 37,5 cm.

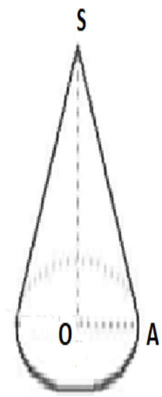
1. Montre que la hauteur OS de la bougie est de 30 cm.

2. Calcule le volume de cire nécessaire à sa confection.

3. Calcule l'aire de la surface minimale de papier nécessaire pour l'envelopper entièrement.

4. La bougie se consume en diminuant de 101,25 cm3 de son volume chaque minute. Au bout de combien de temps sera-t-elle entièrement consumée ?

5. Soit k le coefficient de réduction du cône réduit représentant la partie consumée de la bougie, V le volume du cône initial qui représente la bougie et V' le volume de la partie restante de la bougie de hauteur h cm.



5.1. Montre que $V' = (1 - k^3)V$

5.2. Montre que $k = \frac{30-h}{h}$

5.3. Calcule la hauteur de la partie restante de la bougie au bout d'une heure d'éclairage.

On donne $\pi \approx 3,14$; $\frac{9821,25}{15896} \approx 0,6$ et $(0,7)^3 \approx 0,4$.

Exercice 23 (BFEM 2003)

Un entrepreneur des travaux publics doit aménager le long des allées d'une avenue des bancs en béton. Il hésite entre deux modèles :

Le modèle (1) a la forme d'un tronc de cône de révolution dont les bases parallèles ont respectivement 20cm et 10cm de rayons.

Le modèle (2) a la forme d'un tronc de pyramide dont les bases parallèles sont des carrées de cotés respectifs 40cm et 20cm.

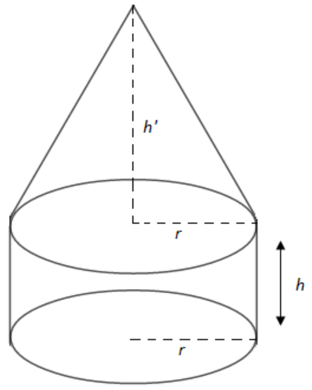
Les deux modèles ont une hauteur de 50cm.

1. Représente chaque modèle.

2. Sachant que le modèle le moins volumineux est le plus économique pour l'entrepreneur ; aide-le à faire le bon choix.

Exercice 24 (BFEM 2008)

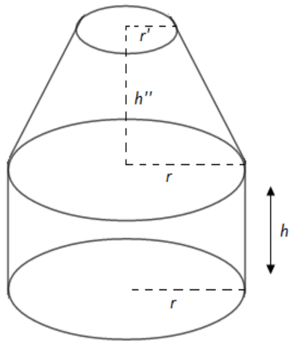
Un réservoir est constitué d'un cylindre de rayon de base r et de hauteur h et d'un cône de révolution de même rayon de base et de hauteur $h' = \frac{3h}{2}$. (Voir la figure ci-contre)



1. Montre que le volume de cylindre est le double de celui du cône.

2. Dans la suite on donne $r = 4cm$.

a. Calcule la hauteur h' du cône pour que le volume du réservoir soit de 528 cm^3.

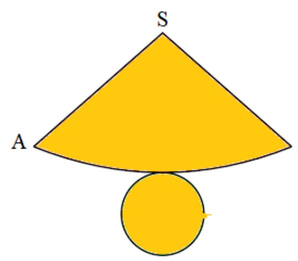


b. Pour créer une ouverture du réservoir on coupe le cône à mi-hauteur parallèlement au plan de sa base. On obtient un réservoir ayant la forme indiquée par la figure ci-dessous : Calcule le volume restant du réservoir. On donne $\pi \cong \frac{22}{7}$.

Exercice 25

Le figure ci-contre représente le patron d'un cône de révolution de sommet S, de rayon de base r.

La génératrice [SA] a pour longueur 36cm.



1. Justifie que la circonférence de sa base mesure $54\pi\ cm$.

2. Montre que son rayon de base r vaut 27cm.

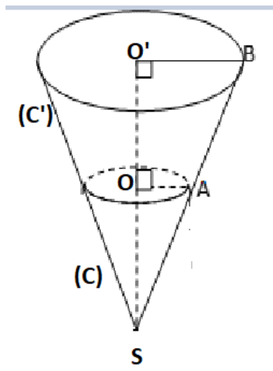
3. Justifie que la hauteur de ce cône est égale à $9\sqrt{7}$ cm.

4. Calcule l'aire de la surface totale de ce cône. On prendra $\pi = 3{,}14$.

5. On sectionne ce cône et le rayon du cône réduit est égal à 15cm. Détermine le coefficient de réduction ainsi que le volume du cône réduit

Exercice 26

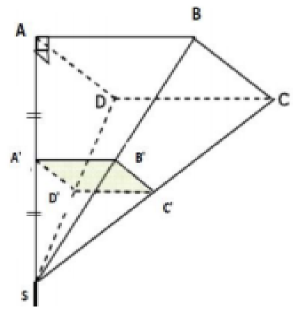
Un château d'eau a la forme d'un tronc de cône (voir dessin). On donne $OO' = OA = OS = 5\ cm$



1. Calcule la distance O'B.
2. Calcule le volume du cône C de sommet S et de base le disque de rayon [OA]
3. Soit (C') le cône de sommet S et de base le disque de rayon [O'B]. En constatant que le cône (C') est un agrandissement du cône (C), montre que le volume de (C') est huit fois plus grand que celui de (C).
4. Calcule alors le volume du cône (C) puis déduis-en celui du château d'eau.

Exercice 27

Une citerne d'eau transparente à la forme d'une pyramide à base rectangulaire SABCD de hauteur SA. On donne :
$AB = 40cm, AD = 30cm\ et\ SA = 70cm.$

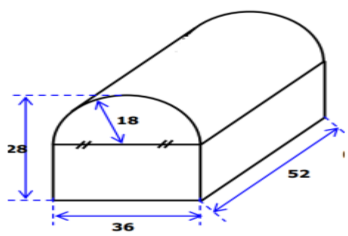


1.
a. Détermine le volume de la citerne (en m^3).
b. Déduis en le volume (en L). On admet dans la suite que la capacité de la citerne est de 28 litres.
2. On fixe sur la pyramide SABCD un robinet dont le débit est de 0, 15 litres par seconde et on note par $V(t)$ le volume d'eau en litres restant après une durée d'écoulement de t seconde.
a. Justifie que $V(t) = -0,15t + 28$. (une application affine décroissante.)
b. Détermine $V(45)\ et\ V(60)$
c . Au bout de combien de temps la citerne sera-t-elle vide de moitié ?

Exercice 28

Un coffre d'une machine à coudre est représenté par la figure ci-contre. Il est formé d'un pavé droit surmonté d'une section d'un cylindre. Les dimensions sont en centimètre.

1. Quelle est la hauteur du pavé droit ?
2. Quel est le volume de l'espace prévu pour la machine ?
3. Quelle est l'aire extérieure du coffre sachant : qu'il est ouvert en dessous ?



On veut mettre du vernis sur la surface extérieure du coffre. Le vernis utilisé s'applique à raison de 300 g par m^2 et coûte 3 000 F le kg.

4.
a. Détermine la quantité de vernis nécessaire pour couvrir le coffre.
b. A combien reviendra le vernis nécessaire pour faire ce travail ?

CORRECTION D'EXERCICES

ACTIVITÉS NUMERIQUES

Leçon 1

Exercice 1

1. Les mots à compléter w<dans l'ordre sont : positifs, carré, $a\ et\ \sqrt{a}$.

2. $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$; $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = \sqrt{a^2}\ ou\ (\sqrt{a})^2\ ou\ a$; $(\sqrt{a})^2 = a$; $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$; $\sqrt{a^2 b} = |a|\sqrt{b} = a\sqrt{b}$

Exercice 2

1. $\sqrt{-5^2}$ n'a pas de sens car -5^2 est un nombre négatif.

2. $\sqrt{(-5)^2} = (-\sqrt{5})^2 = 5$

3. $-(\sqrt{5})^2$ est opposé à $\sqrt{(-5)^2}\ et\ (-\sqrt{5})^2$.

Exercice 3

1-V ; 2-F ; 3-F ; 4-F.

Exercice 4

1-B ; 2-C ; 3-A ; 4-C.

Exercice 5

Calcule :

2) $\sqrt{12 - \sqrt{4 + \sqrt{5^2}}} = \sqrt{12 - \sqrt{9}} = \sqrt{9} = 3$

2) $\left(5 + \sqrt{3}\right)^2 = 25 + 10\sqrt{3} + 3 = 28 + 10\sqrt{3}$;

3) $\left(1 - 2\sqrt{7}\right)^2 = 1 - 4\sqrt{7} + 28 = 29 - 4\sqrt{7}$;

4) $\left(6 + \sqrt{5}\right)\left(6 - \sqrt{5}\right) = 36 - 5 = 31$;

5) $\left(-2\sqrt{2} + 1\right)\left(-2\sqrt{2} + 1\right) = 8 - 4\sqrt{2} + 1 = 9 - 4\sqrt{2}$;

6) $\sqrt{\sqrt{6} + \sqrt{2}} \times \sqrt{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = \sqrt{\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)}$

$= \sqrt{6 - 2} = 2.$

Exercice 14

1. Soit $t = \sqrt{45} + \sqrt{196} - \sqrt{180} - \sqrt{245}$. Pour Ecrire t sous la forme $a\sqrt{b} + c$, on décompose le nombre sous le radical pour faire apparaître les carrés.

$t = \sqrt{3 \times 3 \times 5} + \sqrt{2 \times 2 \times 7 \times 7} - \sqrt{2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5} - \sqrt{5 \times 7 \times 7}$

$= \sqrt{3^2 \times 5} + \sqrt{2^2 \times 7^2} - \sqrt{2^2 \times 3^2 \times 5} - \sqrt{5 \times 7^2}$

$= 3\sqrt{5} + 2 \times 7 - 2 \times 3\sqrt{5} - 7\sqrt{5} = 14 + (3 - 6 - 7)\sqrt{5}$

$= 14 - 10\sqrt{5}$

2. On donne les réels $x = \frac{4}{7+3\sqrt{5}}$ et $y = 3\sqrt{5} - 7$.

a. Ecrivons x avec un dénominateur rationnel.

$x = \frac{4\,(7-3\sqrt{5})}{(7+3\sqrt{5})(7-3\sqrt{5})} = \frac{4\,(7-3\sqrt{5})}{49-45}$

$= 7 - 3\sqrt{5}$

b. Justifions que $y = 3\sqrt{5} - 7$ est négatif.

$(3\sqrt{5})^2 = 45$ et $7^2 = 49$; donc $(3\sqrt{5})^2 < (7)^2$; $3\sqrt{5}\ et\ 7$ étant positifs donc $3\sqrt{5} < 7$ et par conséquent $3\sqrt{5} - 7 < 0$.

c. Justifions que : $x = -y$.

$-y = -(3\sqrt{5} - 7) = 7 - 3\sqrt{5}$

$= x$.

d. Encadrons x à 10^{-2} près sachant que 2, 236 < $\sqrt{5}$ < 2, 237.

2, 236 < $\sqrt{5}$ < 2, 237

$2{,}236 \times 3 < 3\sqrt{5} < 2{,}237 \times 3$

$6{,}708 < 3\sqrt{5} < 6{,}711$

$-6{,}711 < -3\sqrt{5} < -6{,}708$

$7 - 6{,}711 < 7 - 3\sqrt{5} < 7 - 6{,}708$

$0{,}289 < 7 - 3\sqrt{5} < 0{,}292$

D'où $0{,}28 < x < 0{,}29$ est un encadrement de x à 10^{-2} près.

e. On pose $z = (x - y)^2$. Justifions que $\sqrt{z} = -2y$.

$\sqrt{z} = \sqrt{(x - y)^2} = \sqrt{(-y - y)^2}$

$= \sqrt{(-2y)^2} = \sqrt{4y^2}$

$= 2\sqrt{y^2} = 2|y|$

$= -2y$.

Exercice 22

1) a) On calcule $\left(2\sqrt{3} - 11\right)^2 = 12 - 44\sqrt{3} + 121 = 133 - 44\sqrt{3}$.

Donc l'aire de la table est bien $\left(2\sqrt{3} - 11\right)^2$.

b) $2\sqrt{3} - 11$ car $\left(2\sqrt{3}\right)^2 = 12,\ 11^2 = 121$ et $11 < 121$.

c) La longueur du côté de la table est $c = 11 - 2\sqrt{3}$

2) a) La longueur d de la diagonale de la table carrée est $d = c\sqrt{2} = 11\sqrt{2} - 2\sqrt{6}$.

b) On a : $11 \times 1{,}1414 < 11\sqrt{2} < 11 \times 1{,}1415$ soit :

$12{,}5554 < 11\sqrt{2} < 12{,}5565$ (1)

Et : $1{,}1414 \times 1{,}732 < \sqrt{2} \times \sqrt{3} < 1{,}1415 \times 1{,}733$ soit :

$1{,}9769 < \sqrt{6} < 1{,}9782$

En multipliant par 2, on obtient : $3{,}9538 < 2\sqrt{6} < 3{,}9564$

Puis en multipliant par -1 : $-3{,}9564 < 2\sqrt{6} < -3{,}9538$ (2).

En ajoutant membre à membre (1) et (2), on a:

$12{,}5554 - 3{,}9564 < 11\sqrt{2} - 2\sqrt{6} < 12{,}5565 - 3{,}9564$

soit, finalement : $8{,}599 < 11\sqrt{2} - 2\sqrt{6} < 8{,}6001$.

A l'ordre 2, on a donc : $8{,}59 < 11\sqrt{2} - 2\sqrt{6} < 8{,}60$.

Leçon 2

Exercice 1

Il s'agit du numéro 1.

Exercice 2

Il s'agit de l'inéquation 3)

Exercice 3

1-V ; 2-F ; 3-F ; 4-V ; 5-F.

Exercice 4

1-F ; 2-F ; 3-V.

Exercice 5

Choix de l'inconnue-Mise en équation-Résolution de l'équation-Conclusion.

Exercice 6

Résolvons dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $\frac{x+3}{2} - \frac{4x-3}{3} = 1 - \frac{5x-12}{5}$

$\frac{3(x+3)-2(4x-3)}{6} = \frac{6\times1-(5x-12)}{6}$

$3x + 9 - 8x + 6 = 6 - 5x + 12$

$0 = 3$ impossible $S = \emptyset$.

2) $\frac{-3x+5}{3} - \frac{2x-3}{2} = 0$

$\frac{-3x+5}{3} = \frac{2x-3}{2}$

$2(-3x + 5) = 3(2x - 3)$

$-12x = -19$

$x = \frac{19}{12}$; $S = \left\{\frac{19}{12}\right\}$

6) $(2x - 3)^2 - (1 - x)^2 = 0$

$[(2x - 3) - (1 - x)][(2x - 3) + (1 - x) = 0$

$(3x - 4)(x - 2) = 0$

$3x - 4 = 0$ *ou* $x - 2 = 0$

$x = \frac{4}{3}$ *ou* $x = 2$; $S = \left\{\frac{4}{3} ; 2\right\}$

8) $(x - 3)\,(2x + 1) = x^2 - 6x + 9$

$(x - 3)\,(2x + 1) - (x - 3)^2 = 0$

$(x - 3)\,[(2x + 1) - (x - 3)] = 0$

$(x - 3)\,(x + 4) = 0$

$x = 3$ *ou* $x = -4$; $S = \{3 ; -4\}$

Exercice 7

Résolvons dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes:

1) $|3x - 4| = 2$;

$3x - 4 = 2$ *ou* $3x - 4 = -2$

$3x = 6$ *ou* $3x = 2$

$x = 2 \;\; ou \; x = \frac{2}{3}$; $S = \left\{2 \; ; \; \frac{2}{3}\right\}$

3) $|-x+7| = -3$; impossible (une valeur absolue n'est jamais négative) ; $S = \emptyset$.

6) $\sqrt{(x-3)^2} = \sqrt{(-3x+5)^2}$

$|x-3| = |-3x+5|$

$x - 3 = -3x + 5 \;\; ou \; x - 3 = -(-3x+5)$

$4x = 8 \;\; ou - 2x = -2$

$x = 2 \;\; ou \; x = -1$; $S = \{2 \; ; \; -1\}$

Exercice 9

Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations suivantes :

2) $2x - 1 \geq 5x + 2$

$-3x \geq 3$

$x \leq -1$; $S =]-\infty \; ; \; -1]$

3) $1 + \frac{3x+1}{5} > \frac{1-2x}{2}$;

$1 + \frac{3x+1}{5} - \frac{1-2x}{2} > 0$

$\frac{10 \times 1 + 2(3x+1) - 5(1-2x)}{6} > 0$

$10 + 6x + 2 - 5 + 10x > 0$

$16x + 7 > 0$

$x > \frac{-7}{16}$; $S =]\frac{-7}{16} \; ; \; +\infty[$

8) $-9x^2 + 4 < 0$

$4 - 9x^2 < 0$

$(2-3x)(2+3x) < 0$

Etudions le signe de $2 - 3x$ et celui de $2 + 3x$.

$2 - 3x = 0$ ssi $x = \frac{2}{3}$

$2 + 3x = 0$ ssi $x = \frac{-2}{3}$

$S =]-\infty \; ; \frac{-2}{3}[\cup]\frac{2}{3} ; \; +\infty[$

x	$-\infty$ $\qquad$ $\frac{-2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$2-3x$	$+$	$+$	$-$
$2+3x$	$-$	$+$	$+$
$(2-3x)(2+3x)$	$-$	$+$	$-$

9) $x^2 + 16 \geq 0$.

$x^2 \geq -16$; toujours vrai donc $S = \mathbb{R}$.

Exercice 12 **(BFEM 1996)**

$A = 2x - 3$.

1. Calcul de A^2 ?

$A^2 = (2x-3)^2 = 4x^2 - 12x + 9$

2. Factorisation de $B(x) = 4x^2 - 12x + 8$?

$B(x) = 4x^2 - 12x + 9 - 1 = (2x-3)^2 - 1 = (2x-4)(2x-2)$

3. Résolution dans $\mathbb{R}$: $B(x) = 0 \;\; et \; B(x) \leq 0$?

- $B(x) = 0$ ssi $(2x-4)(2x-2) = 0 \;\; ssi \; 2x - 4 = 0 \; ou \; 2x - 2 = 0 \; ssi \; x = 2 \; ou \; x = 1$
  D'où $S = \{2 \; ; 1\}$.

- $B(x) \leq 0$? On détermine les valeurs qui annulent B(x) pour dresser le tableau de signe de B(x).

x	-∞	1	2	+∞
$2x-4$	$-$	$-$	$+$	
$2x-2$	$-$	$+$	$+$	
$(2x-4)(2x-2)$	$+$	$-$	$+$	

S = [1; 2]

Exercice 13

1. aire de BCM en fonction de x ? A(BCM) = $\frac{\mathbf{5x}}{\mathbf{2}}$

2. aire de BCN en fonction de x ? A(BCN) = $\frac{\mathbf{5(8-x)}}{\mathbf{2}}$

aire de ABND en fonction de x ? A(ABND) = 8 ×5$-\frac{5(8-x)}{2}=\frac{\mathbf{5(8+x)}}{\mathbf{2}}$

3. Valeur de x telle que :

a) l'aire de BCN soit inférieure à celle de BCM ?

Cela revient à résoudre l'inéquation : $\frac{5(8-x)}{2}<\frac{5x}{2}$, soit après simplification : $8-x<x$, d'où $\boldsymbol{x>4}$

b) la différence de ces deux aires soit inférieure à celle de ABND

4. Valeurs de x pour lesquelles l'aire de BCN est inférieure à celle de BCM et et la différence d'aire calculée ci-dessus est inférieure à celle de ABND ?

Cela revient à résoudre le système d'inéquations :

$\begin{cases} x>4 \\ \frac{5x}{2}-\frac{5(8-x)}{2}<\frac{5(8+x)}{2} \end{cases}$, ce qui équivaut à : $(x>4)$ et $(2x-8<8+x)$.

Après résolution, on trouve : $4<x<16$.

Leçon 3

Exercice 1

1. Méthode graphique
2. Méthode de substitution-Méthode d'addition-Méthode graphique-Méthode d'identification

Exercice 2

Je complète :

1-d'addition ; 2-d'identification ; 3-substitution.

Exercice 3

1-F ; 2-F ; 3-V.

Exercice 4

La bonne réponse est la phrase 2.

Exercice 5

La bonne réponse est $S=\{(1\,;2)\}$.

Exercice 12

Résolvons les systèmes suivants par la méthode la plus indiquée.

1. $\begin{cases} 4x+y=14 \\ 3x+y=11 \end{cases}$

Utilisons la méthode par comparaison

$\begin{cases} y = 14 - 4x & (1) \\ y = 11 - 3x & (2) \end{cases}$; d'après (1) et (2) on a $14 - 4x = 11 - 3x$ ssi $-x = -3$ et donc $x = 3$.
En remplaçant x par sa valeur dans l'une des équations du système, (1) par exemple, on obtient $y = 14 - 4(3) = 2$; d'où $S = \{(3\,;2)\}$.

2. $\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} \frac{3x+2y}{6} = 1 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} 3x + 2y = 6 & (1) \\ x + 2y = 4 & (2) \end{cases}$
Utilisons la méthode d'addition en multipliant l'équation (2) par -1.
On obtient $\begin{cases} 3x + 2y = 6 \\ -x - 2y = -4 \end{cases}$ et en additionnant les deux équations, on obtient l'équation $2x = 2$ d'où $x = 1$.
En remplaçant x par sa valeur dans l'une des équations, par exemple (2), on obtient $1 + 2y = 4$ d'où $y = \frac{3}{2}$ et par conséquent $S = \left\{(1\,;\frac{3}{2})\right\}$.

3. $\begin{cases} 5x - 3y = 28 & (1) \\ 4x + y = 2 & (2) \end{cases}$
Utilisons la méthode de substitution
D'après (2), on a $y = 2 - 4x$. En remplaçant y par sa valeur dans (2) on obtient :
$5x - 3(2 - 4x) = 28$
$17x = 34$
$x = 2$. En remplaçant x par sa valeur dans l'équation $y = 2 - 4x$, on obtient
$y = 2 - 4(2) = -6$ d'où $S = \{(2\,;\,-6)\}$.

Exercice 17

Le nombre de garçons et le nombre de filles ?
En désignant par x le nombre de garçons et par y le nombre de filles, on obtient : $\begin{cases} y = x + 18 \\ y - 5 = 3(x - 7) \end{cases}$
La résolution donne $x = 35$ et $y = 17$.

Exercice 22

1. Résolution du système $\begin{cases} 4x + 4y = 4 \\ 2x + y = \frac{\pi}{2} \end{cases}$?
$\begin{cases} 4x + 4y = 4 \\ -4x - 2y = -\pi \end{cases}$; par addition on a $y = \frac{4-\pi}{2}$. En remplaçant y par sa valeur dans la première équation on obtient : $x = 1 - \frac{4-\pi}{2} = \frac{-2+\pi}{2}$. D'où $S = \{(\frac{-2+\pi}{2}\,;\,\frac{4-\pi}{2})\}$
2. Expression du système comme calcul des aires de deux surfaces de la figure, clairement exprimées ?
En considérant que chacun des quatre "pétales" coloriés a une aire de mesure *x* et que chaque partie disjointe non coloriée a une aire de mesure *y*, on peut écrire les deux informations suivantes :

- le carré constitué de quatre "pétales" et de quatre "zones" blanches a une aire égale à 4 : soit $\boldsymbol{4x + 4y = 4}$;
- le demi disque de diamètre [*CD*], constitué de deux "pétales" et d'une "zone" blanche a une aire égale à $\frac{\pi}{2}$ puisque son rayon vaut 1 : soit $\boldsymbol{2x + y = \frac{\pi}{2}}$.

3. Déduction de l'aire exacte de la surface coloriée ?
Ainsi $x = \dfrac{\pi - 2}{2}$ est bien l'aire d'un pétale sur cette figure et la surface coloriée a une aire de $4x = 2\pi - 4$
4. Comparaison entre la surface coloriée et celle qui ne l'est pas ?

L’aire de la surface coloriée est $4x = 2\pi - 4 \simeq 2 \times 3{,}14 - 4 \simeq 2{,}28$ alors que celle de la surface non coloriée est $4y = 8 - 2\pi \simeq 8 - 2 \times 3{,}14 \simeq 1{,}72$. C’est donc la surface coloriée qui a la plus grande surface dans le carré *ABCD*.

Leçon 4

Exercice 1

1-Non ; 2-Oui ; 3-Oui.

Exercice 2

1-V ; 2-F ; 3-F ; 4-V ; 5-F.

Exercice 3

Je complète :

1. $2x - 3y = 5$; 2. est.

Exercice 4

1-F ; 2-F.

Exercice 5

5. Résolvons graphiquement l’inéquation $x + 2y + 4 < 0$.

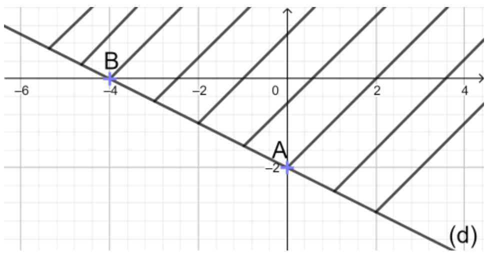
Pour cela représentons la droite (d) : $x + 2y + 4 = 0$ en déterminant deux points $A\ et\ B$ de (d).

Pour $x = 0$, $y = -2$ d’où $A(0\,;\,-2)$.

Pour $y = 0$, $x = -4$ d’où $B(-4\,;0)$

Représentons $(d) = (AB)$ et résolvons l’inéquation.

$x + 2y + 4 < 0$.



Le demi-plan contenant l’origine du repère est-il solution de l’inéquation $x + 2y + 4 < 0$?

$0 + 2(0) + 4 < 0$

$4 < 0$ faux ; donc il n’est pas solution et l’ensemble des solutions de l’inéquation est le demi-plan non hachurée contenant la droite (d).

Exercice 6

1. Résolvons graphiquement le système d’inéquations $\begin{cases} x + y > 3 \\ x - y > 0 \end{cases}$

Pour cela représentons la droite $d_1 : x + y = 3\ et\ d_2 : x - y = 0$ en déterminant deux points $A\ et\ B$ de (d_1) et deux points $C\ et\ D$ de (d_2).

❖ $d_1 : x + y = 3$

Pour $x = 0$, $y = 3$ d’où $A(0\,;\,3)$

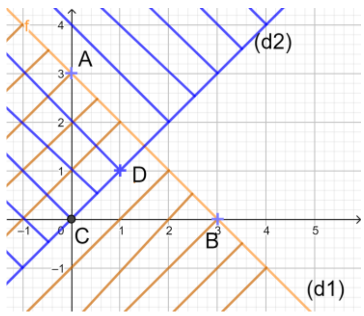
Pour $y = 0$, $x = 3$ d’où $B(3\,;0)$

❖ $d_2 : x - y = 0$

Pour $x = 0$, $y = 0$ d’où $C(0\,;\,0)$

Pour $y = 1$, $x = 1$ d’où $D(1\,;1)$

❖ Représentons $(d_1) = (AB)$ et résolvons l’inéquation $x + y > 3$.



Le demi-plan contenant l’origine du repère est-il solution de l’inéquation $x + y > 3$?

$0 + 0 > 3$

$0 > 3$ faux ; donc il n'est pas solution. On l'hachure .

❖ Représentons $(d_2) = (CD)$ et résolvons l'inéquation $x - y > 0$.

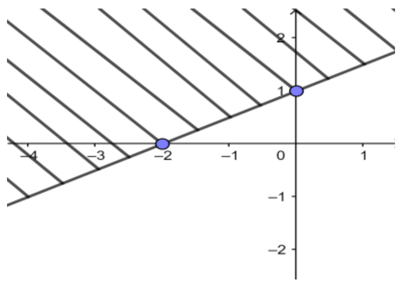
Le demi-plan contenant le point de coordonnées $(1 ; 0)$ est-il solution de l'inéquation $x - y > 0$?

$1 - 0 > 0$

$1 > 0$ vrai ; donc il est solution. On hachure l'autre demi-plan.

❖ L'ensemble des solutions est la partie non hachurée.

Exercice 8



Déterminons une inéquation dont l'ensemble de solutions correspond au demi-plan non hachuré.

Ce demi-plan a une droite frontière (d) qui passe par les points $A(-2 : 0)$ *et* $B(0 ; 1)$. Déterminons une équation de (d).

$M(x ; y) \in (d) ssi\ \overrightarrow{AM}(x + 2 ; y)$ *colinéaire* à $\overrightarrow{AB}(2 ; 1)$

ssi $(x + 2)(1) - 2y = 0, d'$où $(d): x - 2y + 2 = 0$

Ainsi l'inéquation ayant comme ensemble des solutions le demi-plan non hachuré est $x - 2y + 2 > 0$ ou $x - 2y + 2 < 0$.

L'origine du repère étant solution de l'inéquation, donc l'inéquation dont l'ensemble de solutions correspond au demi-plan non hachuré est $x - 2y + 2 > 0$ (car l'inégalité $0 - 2(0) + 2 > 0$ est vraie)

Exercice 11

1. Calcul en fonction de *x* et de *y* la dépense journalière en matière première, et celle en main-d'œuvre.

	Matière Première	Main d'œuvre	nombres
Objet A	30	125	x
Objet B	70	1250	y

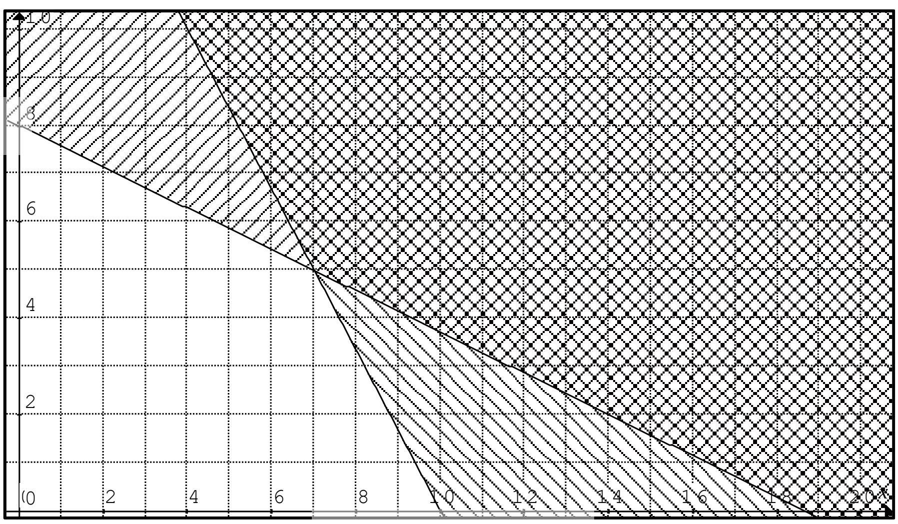
Dépense journalière en matière première : 30x + 70y

Dépense journalière en main d'œuvre : 125x + 75y

D'où le système d'inéquations : $\begin{cases} 30x + 70y \leq 560 \\ 125x + 75y \leq 1250 \end{cases}$ équivalent $\begin{cases} 30x + 70y - 560 \leq 0 \\ 125x + 75y - 1250 \leq 0 \end{cases}$

2. Détermination graphique de l'ensemble des points solutions

30*x*+70*y*−560=0



125*x*+75*y*−1250=0

Leçon 5

Exercice 1

1-F ; 2-V ; 3-V ; 4-V ; 5-F.

Exercice 2

Je complète :

1. « 1 » ; 2. « -3 » ; 3. « -7 » ; 4. « $y = x + 2$ »

Exercice 3

1) $f(x) = \frac{3}{2}x - 1$; 2. « $\frac{3}{2}$ » ; 3. « -1 » ; 4. « -1 » ; 5. « $\frac{2}{3}$ »

Exercice 4

1-B ; 2-C ; 3-B ; 4-A.

Exercice 6

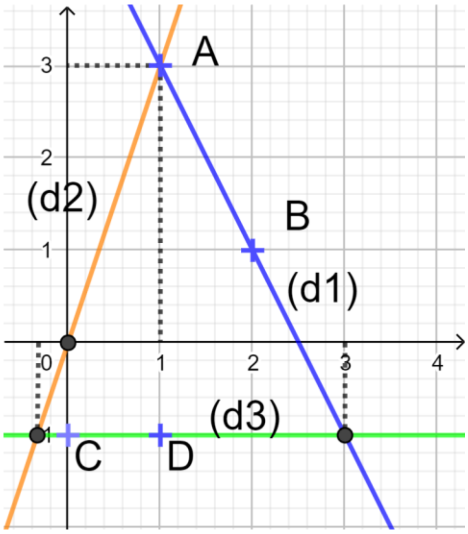
1. Déterminons l'application affine f de coefficient 3 telle que $f(-2) = 5$
Soit l'affine f définie par $f(x) = ax + b$.
Le coefficient de f étant 3, donc $a = 3$ d'où $f(x) = 3x + b$;
Or $f(-2) = 5$ donc $3(-2) + b = 5$, d'où $b = 11$ et par conséquent $f(x) = 3x + 11$.
2. Déterminons l'application affine g, telle que $g(3) = -1$ et $g(-1) = 3$.
Soit l'affine g définie par $g(x) = ax + b$.
$g(3) = -1$ et $g(-1) = 3$ ssi $\begin{cases} 3a + b = -1 \\ -a + b = 3 \end{cases}$. Par la méthode d'addition, on obtient $a = -1$ et $b = 2$.
D'où $g(x) = -x + 2$.

Exercice 7

Soit les applications affines f, g, h définies par $f(x) = -2x + 5$, $g(x) = 3x$ et $h(x) = -1$.
1. Traçons dans un même repère orthonormal d_1, d_2 et d_3 les représentations graphiques respectives des applications f, g, h.
Les droites d_1, d_2 et d_3 ayant pour équations respectives $y = -2x + 5$, $y = 3x$ et $y = -1$, pour les représenter, on détermine pour chacune de ces droites deux de leurs points.

- $d_1 : y = -2x + 5$
  Pour $x = 1$, $y = 3$; donc $A(1\,;3)$ est un point de d_1.
  Pour $x = 2$, $y = 1$; donc $B(2\,;1)$ est un point de d_1 d'où d_1 est la droite (AB).
- $d_2 : y = 3x$
  Pour $x = 0$, $y = 0$; donc $O(0\,;0)$ est un point de d_2.
  Pour $x = 1$, $y = 3$; donc $A(1\,;3)$ est un point de d_2 d'où d_2 est la droite $(0A)$.
- $d_3 : y = -1$
  Pour $x = 0$, $y = -1$; donc $C(0\,;-1)$ est un point de d_3.
  Pour $x = 1$, $y = -1$; donc $D(1\,;-1)$ est un point de d_3 d'où d_3 est la droite (CD).

2. Déterminons graphiquement puis par calcul, les coordonnées des points d'intersection de d_1 et d_2 d'une part, et de d_1 et d_3 d'autre part.



- En projetant orthogonalement ces points d'intersection sur les axes, on obtient les coordonnées $(1\,;3)$ pour le point d'intersection de d_1 et d_2 et $(3\,;-1)$ pour celui de d_1 et d_3.
- Par le calcul on obtient les coordonnées en résolvant :
  - pour d_1 et d_2 le système

    $\begin{cases} y = -2x + 5 \\ y = 3x \end{cases}$ formé par les équations de d_1 et d_2.

Par la méthode de comparaison on obtient $3x = -2x + 5$ d'où $x = 1$ et $y = 3$ et par conséquent les coordonnées sont $(1\,;3)$.

  - pour d_1 et d_3 le système

    $\begin{cases} y = -2x + 5 \\ y = -1 \end{cases}$ formé par les équations de d_1 et d_3

Par la méthode de comparaison on obtient $-1 = -2x + 5$ d'où $x = 3$ et $y = -1$ et par conséquent les coordonnées sont $(3\,;\,-1)$.

<u>Exercice 13</u>

• Formule A : 2 euros par heure de connexion.
• Formule B : 20 euros d'abonnement et 0,50 euro par heure de connexion.
• Formule C : connexion illimitée pour 30 euros.

1. Exprimons chaque formule d'abonnement par une fonction affine qui au temps de connexion $\boldsymbol{x}$ en heure dans un mois associe le prix à payer.

Soit f, g, h les fonctions affines associées respectivement aux formules A, B et C.

$f(x) = 2x\,;\quad g(x) = 0{,}5x + 20\quad et\; h(x) = 30$

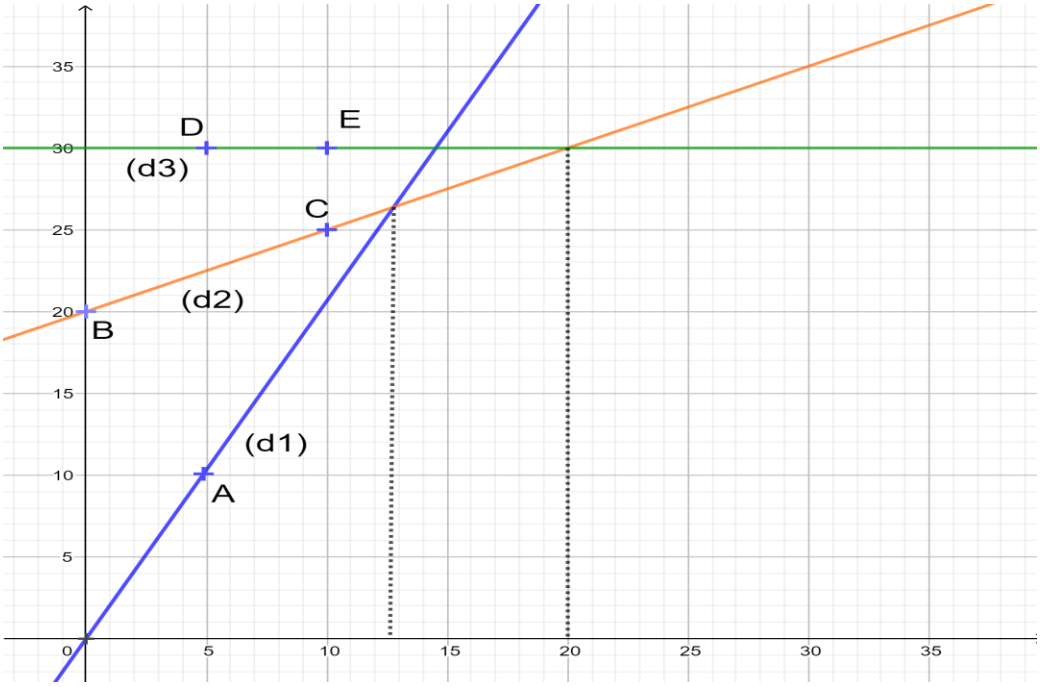
2. Représenter ces trois fonctions dans un repère bien choisi.

Traçons dans un même repère orthonormal $d_1,\; d_2\; et\; d_3$ les représentations graphiques respectives des applications f, g, h.

Les droites $d_1,\; d_2\; et\; d_3$ ayant pour équations respectives $y = 2x\;;\; y = \;0{,}5x + 20\; et\; y = 30$, pour les représenter, on détermine pour chacune de ces droites deux de ses points.

- $d_1 : y = 2x$
  Pour $x = 0$, $y = 0$; donc $0(0\,;0)$ est un point de d_1.
  Pour $x = 5$, $y = 10$; donc $A(5\,;10)$ est un point de d_1 d'où d_1 est la droite $(0A)$.
- $d_2 : y = 0{,}5x + 20$
  Pour $x = 0$, $y = 20$; donc $B(0\,;20)$ est un point de d_2.
  Pour $x = 10$, $y = 25$; donc $C(10\,;25)$ est un point de d_2 d'où d_2 est la droite (BC).
- $d_3 : y = 30$
  Pour $x = 5$, $y = 30$; donc $D(5\,;30)$ est un point de d_3.

Pour $x = 10$, $y = 30$; donc $E(10\,;30)$ est un point de d_3 d'où d_3 est la droite (DE).



3. Expliquons en fonction du temps de connexion quelle est la formule la plus économique.

- De 0 à 13 heures, la droite d_1 étant en dessous des deux autres, la formule A est la plus économique.
- De 13 à 20 heures la droite d_2 étant en dessous des deux autres, la formule B est la plus économique.
- A partir de 20 heures la droite d_3 étant en dessous des deux autres, la formule C est la plus économique

Leçon 6

Exercice 1

Je complète

1. l'ensemble ; 2. grand ; 3. quantitatif ; 4. effectif ; 5. médiane.

Exercice 2

1-F ; 2-V ; 3-F ; 4-V ; 5-F.

Exercice 3

1-C ; 2-C ; 3-B ; 4.C ; 5-A.

Exercice 4

1. Le caractère est quantitatif continu.
2. histogramme des effectifs cumulés décroissants
3. « 8 ».
4. la classe [10 ; 15[.
5. L'effectif de la classe [10 ; 15[est 4.

Exercice 6

1. Complétons le tableau statistique suivant :

Notes	6	8	9	10	14	17	19
Effectif	2	3	3	5	4	2	1
E.C.C	**2**	**5**	**8**	**13**	**17**	**19**	**20**
E.C.D	**20**	**18**	**15**	**12**	**7**	**3**	**1**
Fréquences	**0,10**	**0,15**	**0,15**	**0,25**	**0,20**	**0,10**	**0,05**

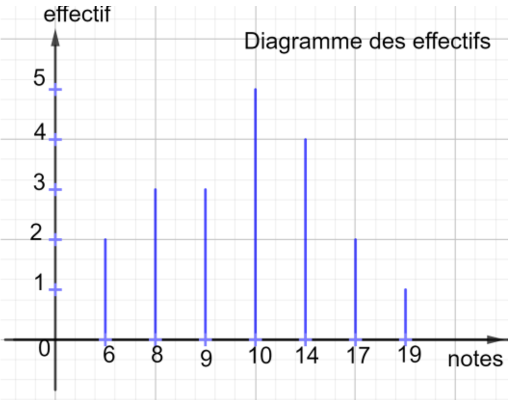
2. population étudiée ?
L'ensemble des élèves d'une classe de 3e
3. caractère étudié et sa nature ?
Les notes obtenues lors d'un devoir de mathématiques constituent le caractère ; il est quantitatif discret
4. mode de la série ?
Le mode de la série est la note 10.
5. moyenne en mathématiques de cette classe pour ce devoir.

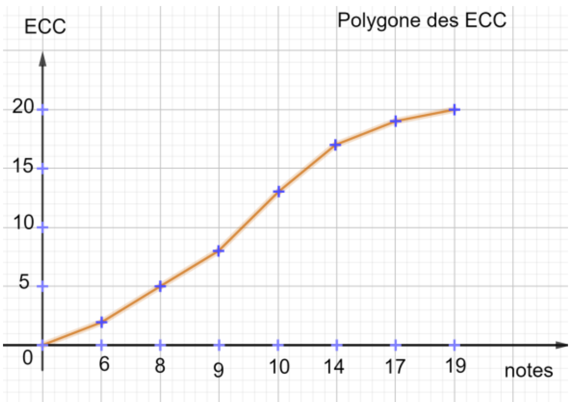
$$\bar{x} = \frac{2 \times 6 + 3 \times 8 + 3 \times 9 + 5 \times 10 + 4 \times 14 + 2 \times 17 + 1 \times 19}{20} = \frac{222}{20}$$

D'où $\bar{x} = 11{,}1$
6. Calculons le pourcentage d'élèves qui ont une note supérieure à cette moyenne de la classe.
7 élèves ont une note supérieure à la moyenne de classe, soit $\frac{7}{20} \times 100\% = 35\%$
7. Déterminons la médiane de cette série de notes.

6_6_8_8_8_9_9_9_10_10_10_10_10_14_14_14_14_17_17_19

La médiane $M_e = \frac{10+10}{2} = 10$
8. Représentons le diagramme en bâtons des effectifs et le polygone des effectifs cumulés croissants (E.C.C.).





Exercice 14

1.

Age (ans)	[25 ; 35[	[35 ; 45[	[45 ; 55[	[55 ; 65[
Fréquence en %	37,5	43,75	12,5	6,25
Effectifs	24	28	8	4

2. l'âge moyen des professeurs de collège.

$$\bar{x} = \frac{24 \times 30 + 28 \times 40 + 8 \times 50 + 4 \times 60}{64} = \frac{2480}{64} = 38{,}75 \; ans \; ou \; 38 \; ans \; et \; 9 \; mois$$

3. Effectifs cumulés croissants de chaque classe

Age (ans)	[25 ; 35[	[35 ; 45[	[45 ; 55[	[55 ; 65[
Fréquence en %	37,5	43,75	12,5	6,25
Effectifs	24	28	8	4
ECC	24	52	60	64

4.

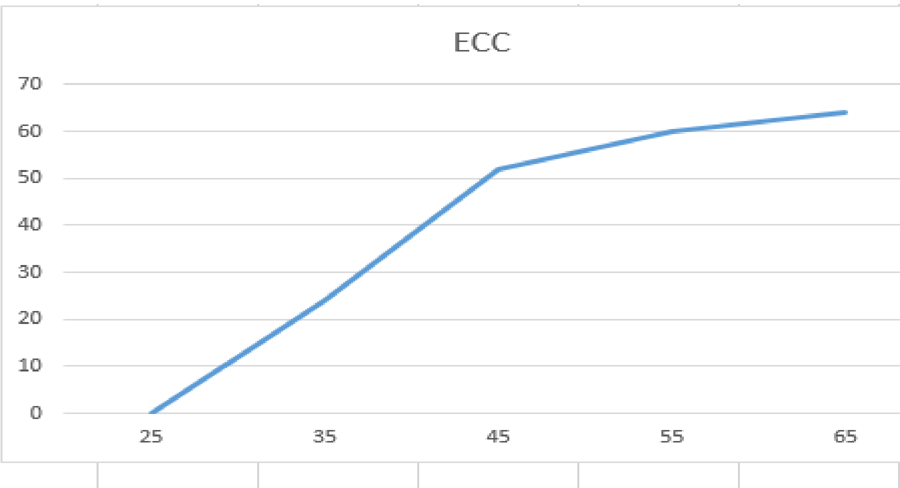
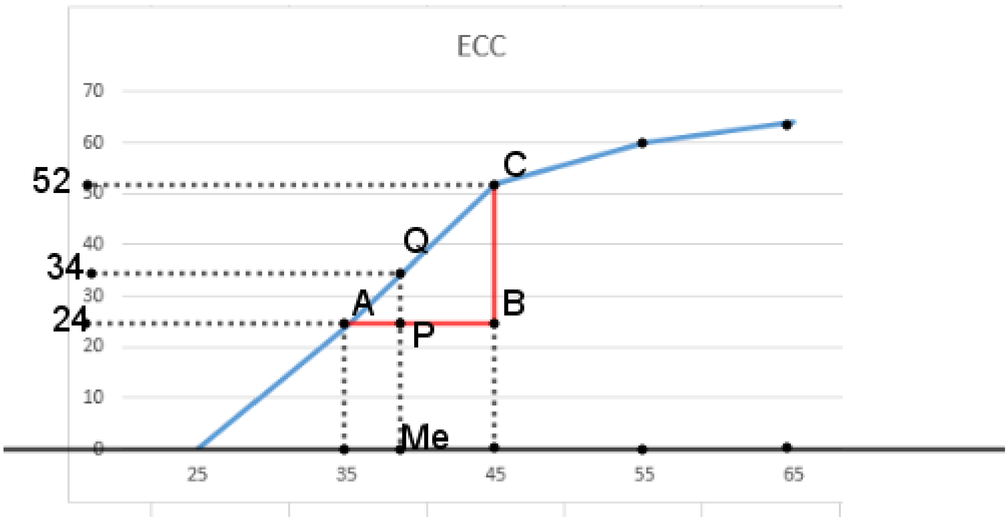


Diagramme des effectifs cumulés croissants

1. Age médian



D'après le théorème de Thalès on a :

$$\frac{AP}{AB} = \frac{PQ}{BC} \; donc \; \frac{Me - 35}{45 - 35} = \frac{34 - 24}{52 - 24} \Longrightarrow \frac{Me - 35}{10} = \frac{10}{28}$$

$$\Longrightarrow Me = \frac{100}{28} + 35 = \frac{270}{7} \; ans$$

Exercice 16

1.a) $f(x) = 100x^2 - 4 + (10x-2)^2 = (10x-2)(10x+2) + (10x-2)^2$

$$= (10x-2)[(10x+2) + 10x - 2] = 20x(10x-2)$$

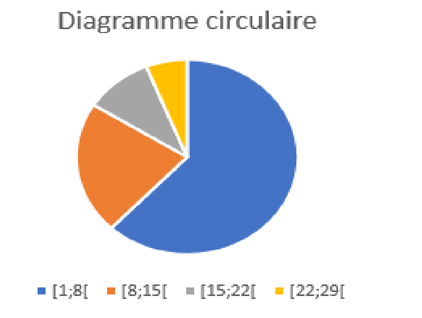
1.b) $f(x) = 20x(10x-2) = -40x + 200x^2$

2.a)

Classes	[1 ; 8[	[8 ; 15[	[15 ; 22[	[22 ; 29[
Effectifs	31	11	5	3

2.b Classe modale : [1 ; 8[

2.c) Le diagramme circulaire est indiqué ci-dessous. Pour calculer l'angle de chaque secteur, on applique la formule $\frac{Effectif\ partiel}{Effectif\ total} \times 360°$. Puis, on reporte cet angle sur un cercle à l'aide d'un rapporteur.



3 .a) On a $f(7) = -40 \times 7 + 200 \times 49 = 9520\ FCFA$

3.b) En trois étapes de 8 jours il paye $3f(8) = 3(-40 \times 8 + 200 \times 64) = 37440\ FCFA$.

La somme qu'il devrait payer s'il faisait les 24 jours successifs est

$f(24) = -40 \times 24 + 200 \times 576 = 114240\ FCFA$

On a alors $f(24) > 3f(8)$.

Donc (03) étapes de huit (08) jours plus avantageux pour l'automobiliste

ACTIVITÉS GEOMETRIQUES

Leçon 1

Exercice 1

- ❖ EAF et EDC sont en position de Thales
- ❖ FAE et FBC sont en position de Thales

Exercice 2

1-Oui ; 2-Non ; 3-Oui.

Exercice 3

1-Vrai ; 2-Vrai ; 3-Faux .

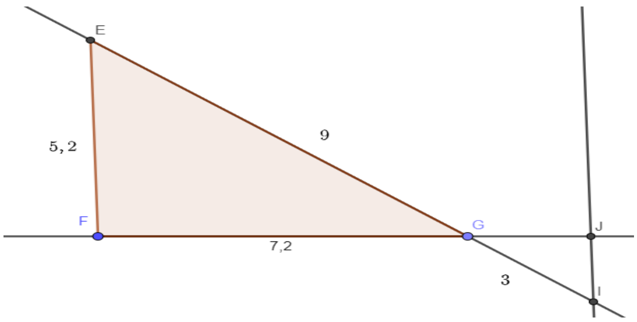
Exercice 4

1. a)-V ; b)-F ; c)-V ; d)-V

2. a)-F ; b)-V ; c)-V.

Exercice 6

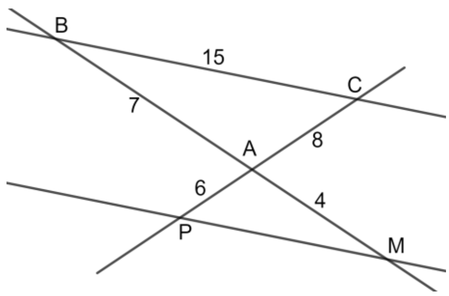
a) La figure



b) Valeurs exactes de FJ et IJ

$\frac{GJ}{GF} = \frac{GI}{GE}$ donc $\frac{3}{9} = \frac{GJ}{7,9}$ d'où $GJ = \frac{3\times7,2}{9} = 2,4$ et par conséquent $FJ = 7,2 + 2,4 = 9,6$

Exercice 7



$AB = 7$ cm, $AM = 4$ cm ; $AP = 6$ cm ;
$AC = 8$ cm. (BC) et (PM) parallèles ?
Les points A, M, B d'une part et A, P, C d'autre part sont alignés dans le même ordre. $\frac{AM}{AB} = \frac{4}{7}$ et $\frac{AP}{AC} = \frac{6}{8}$

$\frac{AM}{AB} \neq \frac{AP}{AC}$ donc les droites (BC) et (PM) ne sont pas parallèles.

Exercice 20

$\frac{3}{60} = \frac{1,62}{x}$ donc $x = \frac{60\times1,62}{3} = 32,4$m

Leçon 2 :

Exercice 1

Phrases à compléter ?

1. Dans un triangle rectangle, le sinus d'un angle aigu est égal au rapport entre le côté opposé et l'hypoténuse

2. Si $\hat{x}$ et $\hat{y}$ sont deux angles complémentaires, alors cos $\hat{x}$ = sin $\hat{y}$

Exercice 2

1-B ; 2-B ; 3-A

Exercice 3

1. $cos\hat{B} = \frac{BC}{BD}$; 2. $sin\hat{B} = \frac{CD}{BD} = \frac{CE}{BC}$; 3. $tan\hat{B} = \frac{CD}{BC} = \frac{CE}{BE}$; 4. $cos\widehat{CEF} = \frac{EF}{CE}$; 5. $sin\widehat{DEF} = \frac{DF}{DE}$;

6. $tan\hat{D} = \frac{EF}{DF} = \frac{BC}{CD} = \frac{CE}{DE}$

Exercice 4

1-F ; 2-F ; 3-V ; 4-V ; 5-V ; 6-F ; 7-V ; 8-F ; 9-F ; 10-V.

Exercice 5

La réponse 2 est la bonne.

Exercice 6

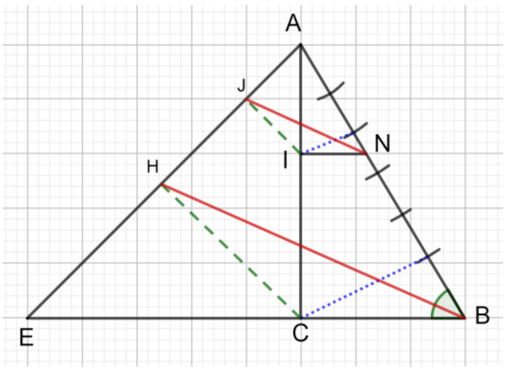
ABC triangle rectangle en C : BC = 3 cm et $\hat{B}$ = 60°.

1. Construction du triangle ABC

(voir figure)

2. Calcul de AB puis de AC.

- $cos\hat{B} = \frac{BC}{AB}$ d'où $AB = \frac{BC}{cos\hat{B}} = 6$ cm
- $tan\hat{B} = \frac{AC}{BC}$ d'où $AC = BCtan\hat{B} = 3\sqrt{3}$ cm



3. Soit I un point de [AC] tel que AI = $\frac{2}{5}$ AC, plaçons I. (voir figure)

3) La parallèle à (BC) passant par I coupe (AB) en N. Calcul de IN et de AN.

- Les triangles AIN et ACB étant en position de Thalès, on a $\frac{IN}{BC} = \frac{AI}{AC} = \frac{2}{5}$ d'où $IN = \frac{6}{5} = 1{,}2$ cm
- De même $\frac{AN}{AB} = \frac{AI}{AC} = \frac{2}{5}$ d'où $AN = \frac{12}{5} = 2{,}4$ cm

3) Soit E le point de [BC) tel que BE = 8 cm, calcul de AE.
   $EC = BE - BC = 5$; AEC étant rectangle en C, d'après Pythagore, $AE^2 = EC^2 + AC^2 = 52$
   D'où $AE = 2\sqrt{13}$ cm

4) Soit H et J les projetés orthogonaux respectifs de C et I sur (AE).
   - Construction de H et J. (voir figure)
   - Montrons que $\frac{AJ}{AH} = \frac{2}{5}$.

   Les droites (CH) et (IJ) étant perpendiculaires à (AE), elles sont parallèles et d'après Thalès $\frac{AJ}{AH} = \frac{AI}{AC} = \frac{2}{5}$ et par conséquent $\frac{AJ}{AH} = \frac{2}{5}$.

- (NJ) et (BH) parallèles ?

  Les triangles AIJ et AHC étant en position de Thalès, on a $\frac{AJ}{AH} = \frac{AI}{AC}$ (1)

  Les triangles AIN et ABC étant en position de Thalès, on a $\frac{AN}{AB} = \frac{AI}{AC}$ (2)

  D'après (1) et (2), on a $\frac{AJ}{AH} = \frac{AN}{AB}$; les points A, J, H d'une part et A, N, B d'autre part étant alignés dans le même ordre, on en déduit, d'après la réciproque de Thalès que les droites (NJ) et (BH) sont parallèles.

<u>Exercice 9</u> : BFEM 2005

1. Construction d'un cercle (C) de centre I et de rayon 4 cm. A et B sont deux points diamétralement opposés du cercle (C).
2. Place un point M sur (C) tel que : $AM = 4cm$.
3. Nature du triangle AMI ?

I étant le centre du cercle et A, M deux points de (C), on a $IA = IM = 4$; de plus $AM = 4$ donc AMI est un triangle équilatéral.

Mesure de l'angle $\widehat{BIM}$?

$\widehat{BIM} = \widehat{BIA} - \widehat{MIA}$; Or $\widehat{BIA} = 180^o$ et $\widehat{MIA} = 60^o$ (car AMI triangle équilatéral) donc

$\widehat{BIM} = 180^o - 60^o = 120^o$

4. K est le point d'intersection de la perpendiculaire à (AB) passant par I et la droite (AM).

  a. AMB triangle rectangle ?

  $[AB]$ étant un diamètre et M un point du cercle, AMB est un triangle rectangle.

  b. $cos\widehat{BAM} = cos\widehat{KAI}$?

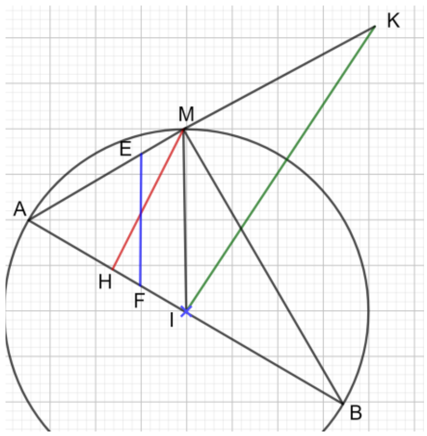
  $\widehat{MAI}, \widehat{BAM}$ et $\widehat{KAI}$ étant le même angle, $cos\widehat{BAM} = cos\widehat{KAI} = cos60^o$ car AMI est un triangle isocèle.

  - Calcul de AK ?

  $cos\widehat{KAI} = \frac{AI}{AK}$ d'où $AK = \frac{4}{cos60^o} = 8$

  - Calcul de KI ?

  $sin\widehat{KAI} = \frac{KI}{AK}$ d'où $KI = 8sin60^o = 4\sqrt{3}$



5. Le point H est le projeté orthogonal de M sur (AB).

  a. Calcul de deux manières différentes de $\cos\hat{B}$.

  $cos\hat{B} = \frac{BH}{BM} = \frac{BM}{AB}$

  b. Expression de BH en fonction de $\cos\hat{B}$

  $cos\hat{B} = \frac{BH}{BM}$ d'où $BH = BMcos\hat{B}$.

  - $BH = \frac{BM^2}{AB}$?

  $BH = BMcos\hat{B}$ or $cos\hat{B} = \frac{BM}{AB}$, donc $BH = \frac{BM^2}{AB}$.

6. Plaçons le point E sur le segment [AM] tel que $AE = 3cm$. (voir figure)

La parallèle à (IM) passant par E coupe [AI] en F. Nature du triangle AEF ?

Les droites (EF) et (MI) étant parallèles, les triangles AEF et AMI sont en position de Thalès. D'après le théorème de Thalès $\frac{AE}{AM} = \frac{AF}{AI} = \frac{EF}{MI}$. AMI étant un triangle équilatéral de côté 4, on a :

$AM = AI = MI = 4$; d'où $\frac{AE}{4} = \frac{AF}{4} = \frac{EF}{4}$ et par conséquent $AE = AF = EF$ et donc AEF est un triangle équilatéral.

Exercice 19

1. L'angle formé par la route avec l'horizontal ?

$Soit\ \ \hat{\alpha}\ l'angle$ à $déterminer\ sin\hat{\alpha} = \dfrac{10}{100} = 0{,}1\ donc\ \ \hat{\alpha} = 5{,}7°$

2. Pourcentage indiqué sur le panneau ?

$sin\hat{8} = 0{,}14 = \frac{14}{100} = 0{,}1\ donc\ \ \hat{\alpha} = 5{,}7°$. Le pourcentage indiqué sur le panneau est alors : 14% .

Leçon 3

Exercice 1

1. Deux angles inscrits qui interceptent le même arc ont la même mesure.
2. La mesure d'un angle inscrit est égale à la moitié de l'angle au centre associé.

Exercice 2

1-c ; 2-b ; 3-a

Exercice 3

1-F ; 2-F ; 3-V ; 4-V ; 5-F.

Exercice 4

A. La bonne réponse est $\widehat{EOF}$.

B. Les bonnes réponses sont : $\widehat{EBF}\ \ et\ \widehat{ECF}$.

C. Les bonnes réponses sont : $\widehat{EAF}\ \widehat{EBF}\ \ et\ \widehat{ECF}$.

D. $\widehat{EFC} = 90^o$

E. Les droites perpendiculaires sont : (EF) et (CF) ; (OA) et (OE).

Exercice 5

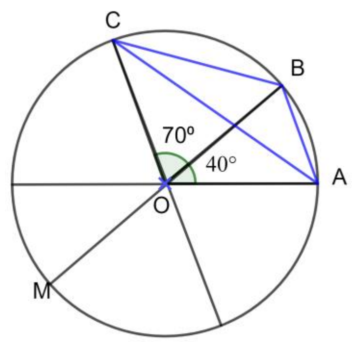
1. $\widehat{DFE}$; $\widehat{DFO}$; $\widehat{DFA}$; $\widehat{DFB}$; $\widehat{DFC}$; $\widehat{EFO}$; $\widehat{EFA}$; $\widehat{EFB}$; $\widehat{EFC}$; $\widehat{OFA}$; $\widehat{OFB}$; $\widehat{OFC}$; $\widehat{AFB}$; $\widehat{AFC}$; $\widehat{BFC}$
2. $\widehat{DBE}$; $\widehat{DBA}$; $\widehat{EBA}$.
3. $\widehat{AOE} = 90^o$; $\widehat{AEx} = 45^o$; $\widehat{EFC} = 90^o$; $\widehat{EOF} = 120^o$; $\widehat{EBC} = 60^o$; $\widehat{CEF} = 30^o$.

Exercice 6

1. Construction d'un cercle (C) de centre O et de rayon 3cm et des points A, B et C dans cet ordre de telle façon que les angles au centre $\widehat{AOB}$ et $\widehat{BOC}$ mesurent respectivement 40° et 70°. (voir figure)

2. Calcul des mesures des angles du triangle ABC.

- L'angle inscrit $\widehat{CAB}$ intercepte le même arc que l'angle au centre $\widehat{COB}$ d'où $mes\widehat{CAB} = \frac{mes\widehat{COB}}{2} = 35^o$
- L'angle inscrit $\widehat{ACB}$ intercepte le même arc que l'angle au centre $\widehat{AOB}$ d'où $mes\widehat{ACB} = \frac{mes\widehat{AOB}}{2} = 20^o$
- $\widehat{CAB} + \widehat{ACB} + \widehat{ABC} = 180^o$, d'où $\widehat{ABC} = 125^o$



3. Calcul de la longueur de l'arc $\widehat{AB}$.

360^o correspondent à $2\pi R = 6\pi$ cm la longueur du cercle

40^o correspondent à $\frac{6\pi\times40}{360} = \frac{2\pi}{3}$; d'où la longueur de l'arc $\widehat{AB}$ est égale à $\frac{2\pi}{3}$ cm.

4. Plaçons le point M diamétralement opposé à B (voir figure)

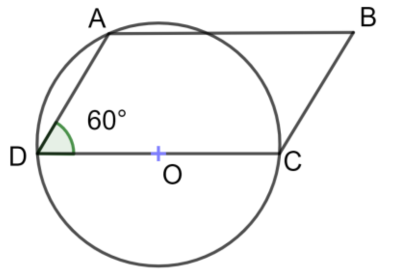
Calcul de mes $\widehat{BMC}$; mes $\widehat{AMC}$ et mes $\widehat{AMB}$.

- $\widehat{BMC}$ et $\widehat{CAB}$ étant deux angles inscrits qui interceptent le même arc,
  $mes\widehat{BMC} = mes\widehat{CAB} = 35^o$.
- $\widehat{AMC}$ étant un angle inscrit interceptant le même arc que l'angle au centre $\widehat{AOC}$
  $mes\widehat{AMC} = \frac{mes\widehat{AOC}}{2} = 55^o$.
- $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ACB}$ étant deux angles inscrits qui interceptent le même arc,
  $mes\widehat{AMB} = mes\widehat{ACB} = 20^o$.

Exercice 11

ABCD est un parallélogramme tel que $\widehat{ADC} = 60^o$. O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

1. Faisons une figure.



2. Comparons les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ADC}$.

$\widehat{ABC}$ et $\widehat{ADC}$ étant deux angles opposés d'un parallélogramme, donc ils ont la même mesure.

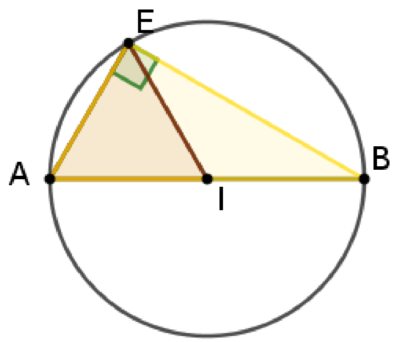
3. Déduis-en que $\widehat{AOC} = 2\widehat{ADC}$. Calcule $\widehat{AOC}$.

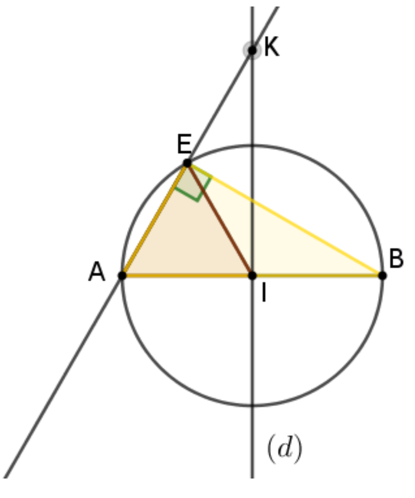
$\widehat{AOC}$ étant un angle au centre interceptant le même arc que l'angle inscrit $\widehat{ADC}$, on a
$mes\widehat{AOC} = 2mes\widehat{ADC}$.

- Calcul de $\widehat{AOC}$
  $mes\widehat{AOC} = 2mes\widehat{ADC} = 120^o$.

Exercice 22

1. Voir figure ci-contre.
2. $[AB]$ *est un diamètre du* cercle (C) et $E \in$ (C)
   donc le triangle ABE est rectangle en E
   Le rayon du cercle est 4 car son diamètre est 8
   A *et* E appartiennent à (C)*de centre* I donc
   $IA = IE = 4$ et par hypothèse
   $AE = 4$ donc $IA = IE = AE$ par conséquent le
   triangle AEI est équilatéral
3. $\widehat{EAB} = \widehat{EAI} = 60°$ *EAI équilatéral.*
   $\widehat{BIE}$ est un angle au centre qui intercepte le
   même arc que l'angle inscrit $\widehat{EAB} = 60°$ donc
   $\widehat{BIE} = 120°$
4. $cos\widehat{EAB} = cos\widehat{KAI} = cos60° = \frac{1}{2}$
   Mais le triangle KIA est rectangle en I car
   (d) médiatrice de [AB]
   $cos\widehat{KAI} = \frac{AI}{AK} = \frac{1}{2}$ *d'où*
   $AK = 2AI = 2 \times 4 = 8cm$
   KIA est rectangle en I
   Donc d'après le théorème de Pythagore
   $AK^2 = IK^2 + IA^2$
   d'où $IK^2 = AK^2 - IA^2 = 8^2 - 4^2 = 48$
   $IK = \sqrt{48} = \sqrt{3 \times 16} = 4\sqrt{3}cm.$





Leçon 4

Exercice 1

1-F ; 2-V ; 3-F ; 4-F ; 5-V

Exercice 2

Complétons les pointillés

1. Si $A = B, alors\ \overrightarrow{AB} = \vec{0}$
2. Si M' est l'image de M par la symétrie de centre I alors $\overrightarrow{IM'} = -\overrightarrow{IM}$
3. Pour tous points M, N et P du plan, $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$
4. S'il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$, alors les vecteurs $\vec{u}\ et\ \vec{v}$ sont colinéaires
5. Les points A, B et C sont alignés, s'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AB} = \text{k}\overrightarrow{AC}$

Exercice 3

1-A ; 2-C ; 3-B ; 4-B ; 5-B

Exercice 4

1-F ; 2-V ; 3-V ; 4-F.

Exercice 5

1-d ; 2-a ; 3-b ; 4-a ; 5-c ; 6-b ; 7-a ; 8-c.

Exercice 6

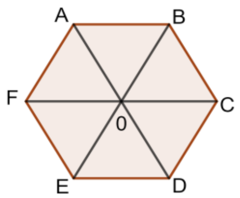
1) b, c et d ; 2) b et c ; 3) b.

Exercice 7

Les bonnes réponses sont 1) et 3)

Exercice 8

1. Construction de l'hexagone ABCDEF



2. a) $\overrightarrow{OB}$; b) $2\overrightarrow{OB}$; c) $\overrightarrow{OF}$; d) $\overrightarrow{EB}$;

e) $\vec{0}$; f) $\overrightarrow{OA}$; g) $\overrightarrow{OC}$.

Exercice 9

Réduis les sommes vectorielles suivantes :

1. $\vec{U} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FI} = \overrightarrow{EI}$
2. $\vec{V} = \left(\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{SH}\right) + \overrightarrow{HE} = \overrightarrow{RH} + \overrightarrow{HE} = \overrightarrow{RE}$
3. $\vec{W} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{RA} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{RA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{RB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{RD}$
4. $\vec{X} = \overrightarrow{EJ} + \overrightarrow{KT} + \overrightarrow{JK} = \left(\overrightarrow{EJ} + \overrightarrow{JK}\right) + \overrightarrow{KT} = \overrightarrow{EK} + \overrightarrow{KT} = \overrightarrow{ET}$

Exercice 17

ABC triangle quelconque.

1. Construction des points M et N tels que : $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\ \ et\ \overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{AC}$.

2. Démontrons que les droites (BN) et (MC) sont parallèles.

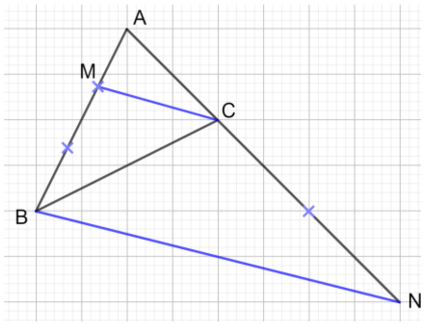
Montrons que $\overrightarrow{BN} = k\overrightarrow{MC}$?

Pour cela, on peut exprimer $\overrightarrow{BN}$ et $\overrightarrow{MC}$ en fonction de deux côtés du triangle ABC, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ par exemple.

- $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$ (1)
- $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

  ssi $3\overrightarrow{MC} = -\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$ (2)

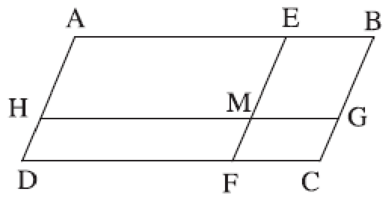
D'après (1) et (2), on a $\overrightarrow{BN} = 3\overrightarrow{MC}$, d'où (BN) et (MC) sont parallèles.



Exercice 22

Dans la figure ci-contre, ABCD est un parallélogramme, (EF) est parallèle a (AD) et (HG) est parallèle a (AB).

Montre que $\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{HF} = \overrightarrow{AC}$.



$\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{HF} = \overrightarrow{EM} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{HM} + \overrightarrow{MF} = \left(\overrightarrow{EM} + \overrightarrow{MF}\right) + \overrightarrow{HM} + \overrightarrow{MG}$

$= \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$

Leçon 5

Exercice 1

1-V ; 2-V ; 3-V ; 4-F.

Exercice 2

Je complète :

1. Si les points M et M' sont symétriques par rapport à une droite (d) alors (d) est la médiatrice de [MM']
2. Si ABCD est un parallélogramme de centre I alors le symétrique de A par rapport à I est C
3. Si M' est l'image de M par la translation de vecteur $\vec{u}$, alors M est l'image de M' par la translation de vecteur $-\vec{u}$.
4. Si A' est l'image de A par la rotation de centre I, alors l'image de la droite (IA) par cette rotation est (IA')
5. Si A_1 est l'image de A par la translation de vecteur $\vec{\imath}$ et A' l'image de A_1 par la translation de vecteur $-3\vec{\imath}$ alors A' l'image de A par la translation de vecteur $-2\vec{\imath}$.

Exercice 3

1. La figure jaune est l'image de la figure rouge par la symétrie orthogonale d'axe (Δ)
2. La figure noire est l'image de la figure rouge par la translation de vecteur $\overrightarrow{JK}$
3. La figure verte est l'image de la figure rouge par la symétrie de centre O.

Exercice 4

1-E ; 2-C ; 3-M ; 4-R ; 5-N ; 6-M ; 7-E ; 8-M.

Exercice 5

1. a) la translation de vecteur $2\overrightarrow{HH'}$; b) la rotation de centre A, d'angle 90^o dans le sens antihoraire.
2. a) $\overrightarrow{BB'} = 2\overrightarrow{H'H}$; $AB = AB''\ et\ \widehat{BAB''} = 90^o$ dans le sens antihoraire.

Exercice 7

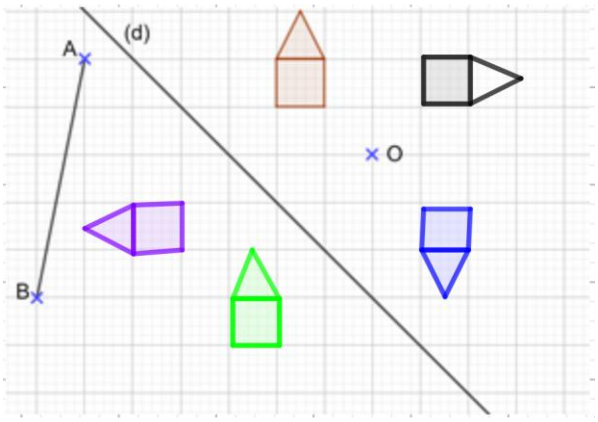
En construisant l'image de la case orange, on obtient :

a) par la symétrie de centre O, la case bleue.

b) par la symétrie d'axe (d), la case en violet.

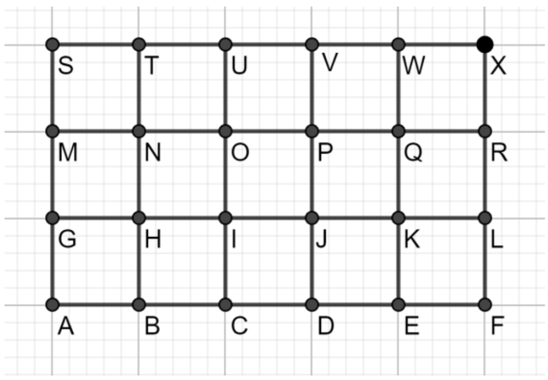
c) par la translation qui transforme A en B, la case verte.

d) par la rotation de centre O, d'angle 90 ° et de sens horaire, la case noire.



Exercice 9

1. A partir du point B, en se déplaçant par la symétrie de centre I, Modou arrive au point P.
A partir du point P, en se déplaçant par la symétrie d'axe (EK), Modou arrive à son point d'arrivée, le point R.
2. A partir du point E, en se déplaçant par la translation de vecteur $\overrightarrow{AH}$, Rokhyatou arrive au point L.
A partir du point L, en se déplaçant par la symétrie d'axe (CJ), Rokhyatou arrive au point V.
A partir du point V, en se déplaçant par la rotation de centre O, d'angle 90°, dans le sens antihoraire, Rokhyatou arrive à son point d'arrivée, le point T.

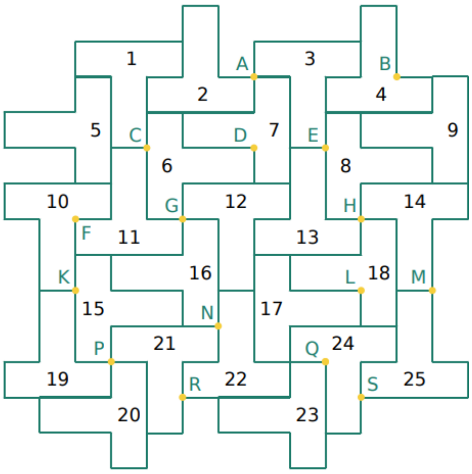


3. Les axes (WR) et (PQ) étant parallèles, l'image du point X, par la symétrie orthogonale d'axe (WR) suivie de de la symétrie orthogonale d'axe (PK) est la translation de vecteur $2\overrightarrow{RK} = \overrightarrow{RD}$. Par conséquent le point d'arrivée de Oumy est J ?

Exercice 13

1. Recopie puis complète le tableau en observant le pavage ci-contre.

La pièce n°	12	12	24	21
est l'image de la pièce n°	6	15	4	15
par la rotation de centre	G	N	H	P
et d'angle en degré dans le sens horaire	90	90	180	90



2. a) la pièce n° 3 a pour image la pièce n° 25 par la symétrie de centre H.
b) la pièce n° 13 a pour image la pièce n° 25 par la translation de vecteur $\overrightarrow{EM}$.
c) la pièce n° 14 a pour image la pièce n° 25 par la symétrie d'axe (LM).

Leçon 6

Exercice 1

1. Le repère est orthogonal.
2. L'axe des abscisses est la droite (IB).
3. L'axe des ordonnées est la droite (IA).
4. L'origine du repère est le point I.

Exercice 2

1. Le point M a pour coordonnées $(1; 1)$
2. le vecteur $\overrightarrow{MP}$ a pour ordonnée -3
3. Le vecteur $\overrightarrow{MO}$ a pour abscisse -1
4. Le vecteur $\overrightarrow{PM}$ a pour coordonnées $(2; 3)$
5. Le vecteur $\overrightarrow{OI}$ a pour coordonnées $(1; 0)$

Exercice 3

1-F ; 2-F ; 3-V ; 4-V ; 5-F ; 6-V.

Exercice 4

1-B ; 2-A ; 3-C ; 4-A ; 5-B.

Exercice 6

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J). On donne $A\,(3,5), B\,(-2,2)\ et\ C\,(-4,3)$.
Trouve le couple de coordonnées du point D pour que ABCD soit un parallélogramme.

$Soit\ D\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

si et seulement si $\begin{pmatrix} -2-3 \\ 2-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+4 \\ y-3 \end{pmatrix}$ si et seulement si $\begin{cases} x+4=-5 \\ y-3=-3 \end{cases}$

si et seulement si $\begin{cases} x=-5-4=-9 \\ y=-3+3=0 \end{cases}$. D'où $D\begin{pmatrix} -9 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 9

$(-2,-2), B(-4,4), C\ (2\ ,6\ )\ et\ D\ (\ 4\ ,0\ ).$

1. [AC] et [BD] même milieu ?

Montrons que ABCD est un parallélogramme ?

$\overrightarrow{AB}\ a\ pour\ coordonnées\ (-2\ ;6)$ et $\overrightarrow{DC}\ a\ pour\ coordonnées\ (-2\ ;6).$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ donc ABCD est un parallélogramme et par conséquent ses diagonales [AC] et [BD] ont même milieu

2. $AC\ =\ BD$?

$AC = \sqrt{(2+2)^2 + (6+2)^2} = 4\sqrt{5}\ ;\ BD = \sqrt{(4+4)^2 + (0-4)^2} = 4\sqrt{5}$

D'où $AC\ =\ BD.$

3. $\overrightarrow{AC}\ et\ \overrightarrow{BD}$ sont orthogonaux ?

$\overrightarrow{AC}\ a\ pour\ coordonnées\ (4\ ;8)$ et $\overrightarrow{BD}\ a\ pour\ coordonnées\ (8\ ;-4).$

$(4)(8) + (8)(-4) = 0$ d'où $\overrightarrow{AC}\ et\ \overrightarrow{BD}$ sont orthogonaux.

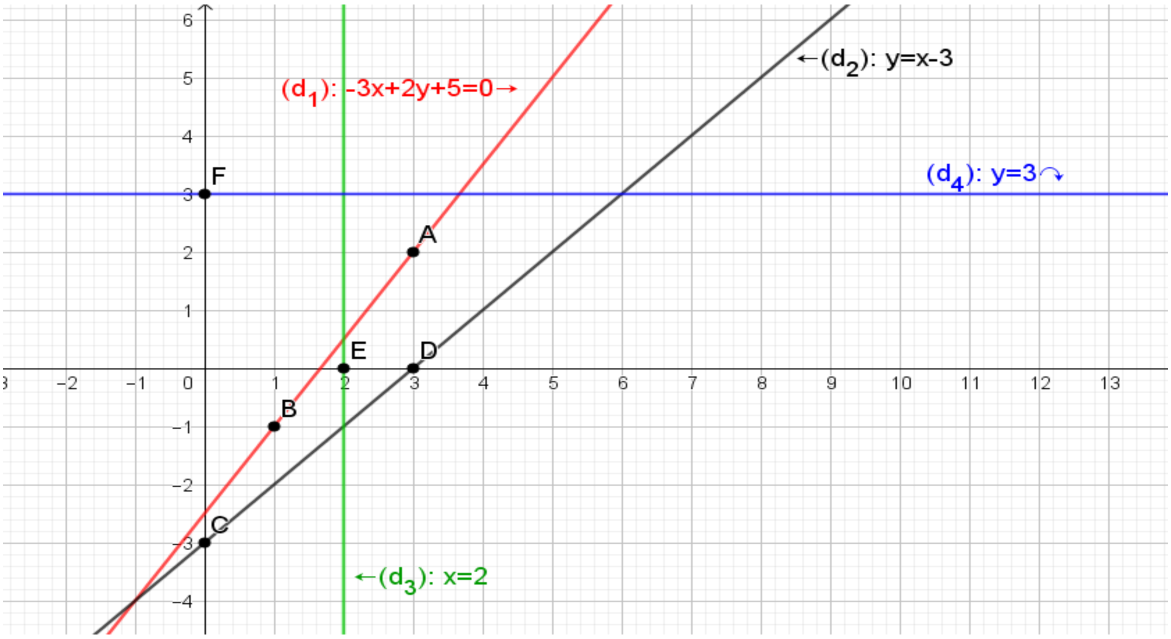
4. Nature du quadrilatère ABCD ?

ABCD est un parallélogramme dont les diagonales ont la même longueur, donc ABCD est un rectangle. De plus ses diagonales étant perpendiculaires, ABCD est un carré.

Exercice 14

Le plan muni d'un repère orthonormal (O , I , J). Construction dans ce repère des droites :

$(d1): -3x + 2y + 5 = 0,\ \ (d2): y = x - 3,\ \ (d3): x = -2\ \ et\ (d4): y = 3.$



Exercice 14

$A\ (\ 1\ ,2\ ), B\ (\ 4\ ,-3)\ et\ C\ (\ -3\ ,2)$, déterminons une équation :

1. de la droite (d1) passant par le point A et parallèle à la droite (BC).

$M(x\ ;y) \in (d_1)\ ssi\ \overrightarrow{AM}(x-1\ ;y-2)\ colinéaire$ à $\overrightarrow{BC}(-7\ ;5)$

ssi $5(x-1) - (-7)(y-2) = 0$ d'où $(d_1): 5x + 7y - 19 = 0$

2. de la droite (d2) passant par le point B et perpendiculaire à (AC).

$M(x\ ;y) \in (d_2)\ ssi\ \overrightarrow{BM}(x-4\ ;y+3)\ orthogonal$ à $\overrightarrow{AC}(-4\ ;0)$

ssi $-4(x-4) + (0)(y+3) = 0$ d'où $(d_2): x - 4 = 0$

3. de la droite (d3) passant par le point C et parallèle à la droite $(d): y = 2x - 3$.

Soit $(d_3): y = ax + b$

- $(d_3) \parallel (d)$ ssi $a = 2$ et donc $(d_3): y = 2x + b$
- Or $C \in (d_3)$ donc $2 = (2)(-3) + b$ d'où $b = 8$ et par conséquent $(d_3): y = 2x + 8$

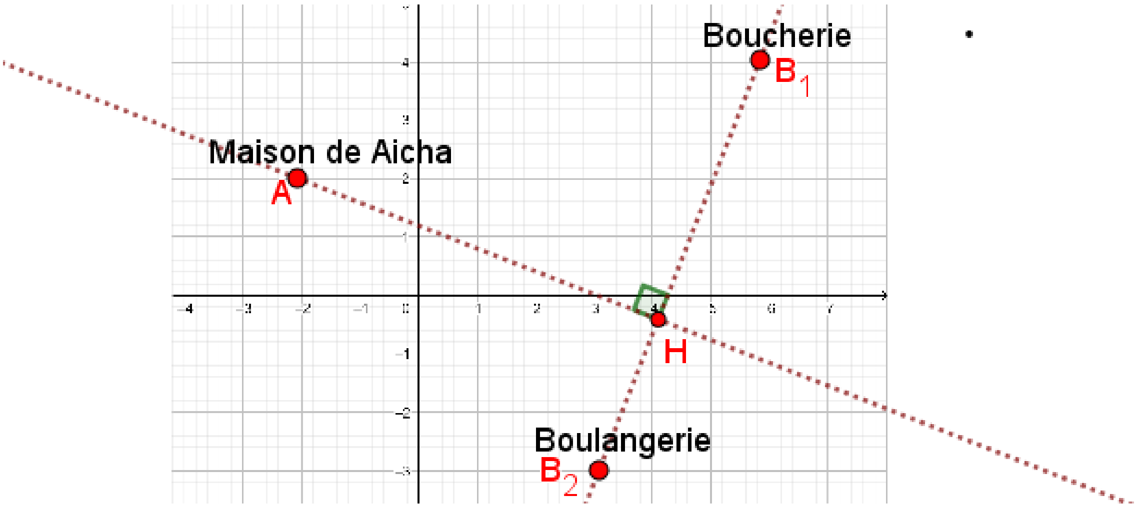
4. de la droite (d4) passant par le point A et perpendiculaire à la droite (d).

Soit $(d_4): y = ax + b$

- $(d_4) \perp (d)$ ssi $2a = -1$ et donc $(d_4): y = -\frac{1}{2}x + b$
- Or $A \in (d_4)$ donc $2 = \left(-\frac{1}{2}\right)(1) + b$ d'où $b = \frac{5}{2}$ et par conséquent $(d_3): y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

Exercice 16

1. Représentation boucherie et boulangerie



2. La distance entre la boucherie et la boulangerie est égale à

$B_2B_1 = \sqrt{(6-3)^2 + (4+3)^2} = \sqrt{(3)^2 + (7)^2} = \sqrt{58}$ dam

3. Distance de la maison d'Aicha à la route R. est égale à AH

Soit $H\binom{x}{y}$ $\overrightarrow{AH}\binom{x+2}{y-2}$ $\overrightarrow{B_1H}\binom{x-6}{y-4}$ $\overrightarrow{B_2B_1}\binom{6-3}{4+3} = \binom{3}{7}$

$\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{B_2B_1}$ $donc\ 3(x+2) + 7(y-2) = 0\ d'où\ 3x + 7y = 8$

$\overrightarrow{B_1H} \parallel \overrightarrow{B_2B_1}$ $donc\ 7(x-6) - 3(y-4) = 0\ \ d'où\ 7x - 3y = 30$

Pour trouver les coordonnées de H on résout le système

$$S: \begin{cases} 3x + 7y = 8 \\ 7x - 3y = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x + 21y = 24 \\ 49x - 21y = 210 \end{cases} \Longrightarrow 58x = 234\ donc\ x = \frac{234}{58} = \frac{117}{29}$$

$$or\ 3x + 7y =\ 8\ donc\ 3 \times \frac{117}{29} + 7y = 8\ d'où\ y = -\frac{17}{29}$$

$$D'où\ AH = \sqrt{\left(\frac{117}{29} + 2\right)^2 + \left(-\frac{17}{29} - 2\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{175}{29}\right)^2 + \left(-\frac{75}{29}\right)^2} = \frac{25\sqrt{58}}{29}$$

$$AH = \frac{25\sqrt{58}}{29} dam$$

4. L'atelier de Modou est-il sur la route ?

$La\ route\ R\ a\ pour\ équation\ 7x - 3y = 30\ .\ \ l'atelier\ de\ Modou\ est\ le\ point\ M\binom{7}{5}$

$7 \times 7 - 3 \times 5 = 49 - 15 = 34 \neq 30\ ;\ donc\ l'atelier\ de\ Modou\ ne\ se\ trouve\ pas\ sur\ la\ route\ R$

Leçon 7

Exercice 1

Je complète :

1. polygone ; 2. Génératrice ; 3. Polygone régulier ; 4. Hauteur

Exercice 2

1-V ; 2-F ; 3-V ; 4-F.

Exercice 3

1-A ; 2-B ; 3-B ; 4-C

Exercice 4

1. a) $\alpha = \frac{360^o \times r}{g}$; b) $A_T = \pi r^2 + \pi r g$

2. a) $\frac{h}{h'} = \frac{1}{k}$; b) $\frac{A'_L}{A_L} = k^2$; c) $\frac{V}{V'} = \frac{1}{k^3}$

Exercice 6

1. Côté du carré ?

$V = \frac{(aire\ de\ la\ base) \times hauteur}{3}$ donc $847 = \frac{(aire\ de\ la\ base) \times 21}{3}$ $donc\ aire\ de\ base = \frac{847}{7} = 121 = 11^2$

$la\ base$ étant un carré on en déduit que le côté du carré de sa base est $11cm$

2. Déterminons la longueur de [AC].

$ABC\ est\ rectangle\ en\ B\ \ donc\ AC^2 = BA^2 + BC^2 = 11^2 + 11^2\ \ donc\ AC = 11\sqrt{2}cm$

3. Calculons la longueur des arêtes de la pyramide.

La pyramide est régulière les arêtes $SA, SB, SC\ et\ SD$ ont même longueur. H est le centre du carré de la pyramide régulière de sommet S donc $[SH]$ est la hauteur SHA est rectangle en H donc

$$SA^2 = SH^2 + AH^2\ \ d'où\ \ SA^2 = SH^2 + \left(\frac{AC}{2}\right)^2\ \ et\ par\ conséquent\ \ SA^2 = 21^2 + \left(\frac{11\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

Il en résulte que $SA^2 = 21^2 + \frac{11^2}{2} = \frac{1003}{2}$ $et\ par\ suite\ SA = \sqrt{\frac{1003}{2}}cm.$

4. Calcule la longueur de l'apothème

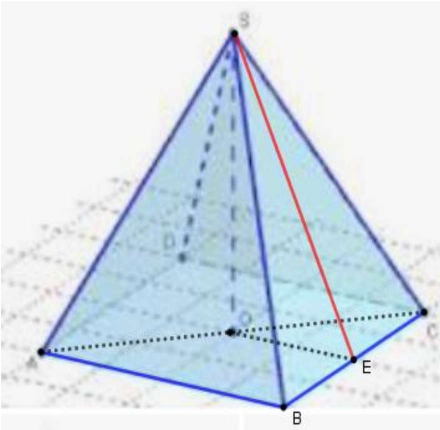
L'apothème de la pyramide régulière est la hauteur de chacun des 4 triangles isocèles.

Sur la figure SE est la longueur de l'apothème E est le milieu de$[BC]$

E est le milieu de$[BC]$ et O est le milieu de $[AC]$ donc $OE = \frac{AB}{2}$ et comme le triangle OES est rectangle en O on a d'après le théorème de Pythagore

$SE^2 = SO^2 + EO^2 = 21^2 + \frac{11^2}{4} = \frac{1885}{4}$

$d'où\ \ SE = \frac{\sqrt{1885}}{2}$ et donc la longueur de l'apothème est égale à $\frac{\sqrt{1885}}{2}cm$



Exercice 10

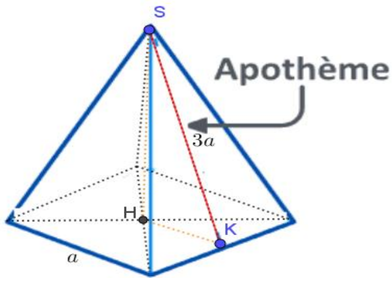
1. Calcul de la hauteur d'une pyramide régulière à base carrée

La hauteur est SH *or* SHK *est rectangle en* H

donc d'aprésle théorème de Pythagore

$SK^2 = SH^2 + HK^2$ *donc* $SH = \sqrt{SK^2 - HK^2}$

$= \sqrt{(3a)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{9a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{35a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{35}}{2}$



2. Calcul du volume d'un cône de révolution d'angle 120° et de génératrice 36 cm ?

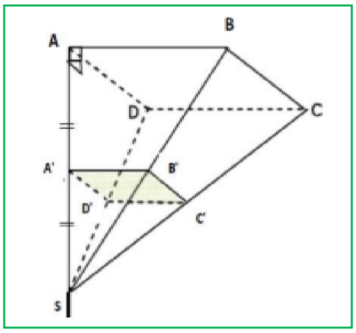
On a $\alpha = \frac{R\times360^o}{g}$ *où* α *est l'angle au sommet du cône de révolution donc*

$120° = \frac{R\times360^o}{36}$ d'où $10R = 120$ *par suite* $R = 12$.

de plus $h = \sqrt{g^2 - R^2} = \sqrt{36^2 - 12^2} = 12\sqrt{8} = 24\sqrt{2}$

Donc *le volume* $V = \frac{\pi R^2 h}{3} = \frac{\pi 12^2\times24\sqrt{2}}{3} = 1152\pi\sqrt{2}$

Exercice 26



1. a) Déterminons le volume de la citerne (en m^3).

$V = \frac{(AB\times AD)\times SH}{3} = \frac{(40\times30)\times70}{3} = 28000cm^3$

$V = 0{,}028m^3$

b) Déduisons en le volume (en L).

$V = 0{,}028m^3 = 0{,}028 \times 1000L = 28L$

2. a) justifions que $V(t) = -0,15t + 28$.

Soit t le temps en secondes. Après t seconde, il est sorti du réservoir un volume de $0,15t\ L$

Donc il reste dans le réservoir $(28 - 0,15t)L$ d'où $V(t) = -0,15t + 28$.

b) $V(45) = -0,15 \times 45 + 28 = 21{,}25L$; $V(60) = -0,15 \times 60 + 28 = 19L$

c) Au bout de combien de temps la citerne sera-t-elle vide de moitié ?

La citerne sera vide lorsque $V(t) = 0$ $c'est$ à $dire$ $-0,15t + 28 = 14$

d'où $t = \frac{14}{0{,}15} = 93{,}33$ *secondes*. la citerne sera vide de moitié au bout de 94 *secondes*