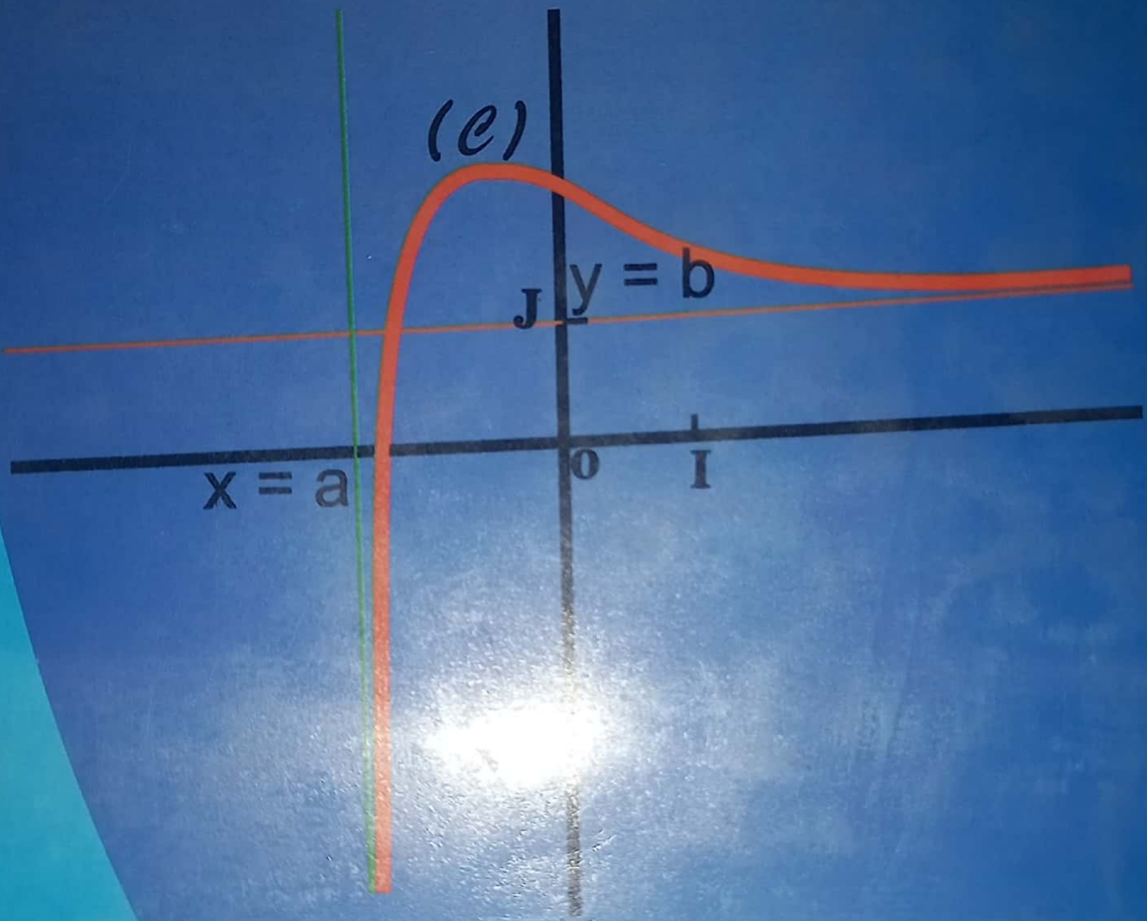
Le Facilitateur

Mathématique 1ère C & D

Recueil de plus de 200 exercices et corrigés



$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

$$P = x_1 . x_2 = \frac{c}{a}$$

2500 fcfa

Auteur : SAWADOGO D. Serge
Conseiller pédagogique de l'enseignement Secondaire
Tél.: +226 71 93 84 26 / 66 15 56 25 - E-mail : sergesawadogo226@gmail.com

Avant-Propos

Le facilitateur/ **mathématique première C et D** est un fascicule de mathématiques destiné aux élèves de la classe de **première C et D**. Son contenu est conforme au programme en vigueur dans les Lycées du Burkina Faso.

Ce manuel vise à mettre à la disposition des élèves de la classe de **première C et D** des exercices pour leur permettre de mieux s'entrainer afin d'affronter les évaluations avec une meilleure préparation.

Le facilitateur est un recueil de plus de **200 exercices** classés par chapitre et **corrigés**. Le but est de permettre à chaque élève au terme de chaque chapitre d'avoir suffisamment d'exercices pour se préparer pour l'évaluation.

J'espère de tout cœur au travers de ce manuel comme son nom l'indique faciliter l'apprentissage des mathématiques aux élèves concernés.

Comme toute œuvre humaine ; le facilitateur reste perfectible. J'accueillerai donc avec reconnaissance toutes remarques, suggestions et critiques susceptibles d'améliorer la qualité de l'ouvrage.

REMERCIEMENTS

Nos sincères remerciements vont à l'endroit de :

Monsieur KIENTEGA Moussa (Conseiller Pédagogiques)

Monsieur SOUGUE Okana Siaka (Professeur Certifié des Lycées et Collèges)

SOMMAIRE :

CHAPITRE 1 : PROBLEME ALGEBRIQUE ET NUMERIQUE

I. POLYNOMES ET FRACTIONS RATIONELLES

EXERCICE N°1

1- Résoudre dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ les systèmes :

$(S_1)\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ xy=6 \end{cases}$ $\quad S_2\begin{cases} x^4+y^4=17 \\ xy=2 \end{cases}$

2- Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $\mathbb{N}$: $\frac{1}{2}\leq\frac{(x-3)^2}{(x+1)^2}\leq 1$

3- La fonction $f : x \to \left(1+\sqrt{1+x^2}\right)^3-(1-\sqrt{1+x^2})^3$ est-elle une fonction polynôme ?

EXERCICE N°2

1- Soit le polynôme $p(x) = 9x^4-36x^3+29x^2+14x$

a) Démontrer qu'il existe deux nombreux réels à et b tels que pour tout nombre réel x,

$P(x)= a(x^2-2x)^2+b(x^2-2x)$.

b) En déduire une factorisation de p(x)

2- Soit la fonction rationnelle r définie par :

$$r(x)=\frac{-x^3+\frac{2}{3}x^2+\frac{7}{3}x+\frac{2}{3}}{p(x)}$$

a) Déterminer l'ensemble de définition Dr et r

b) Calculer $r\left(-\frac{1}{3}\right)$

c) Simplifier r (x) sur Dr.

d) Déduisez en la résolution dans Dr puis dans $\mathbb{Z}$ de l'inéquation : $r(x)\leq 0$

EXERCICE N°3

Parmi les fonctions numériques suivantes, reconnaître celles qui sont des fonctions polynômes et préciser leurs dégrées :

$f_1 : x\mapsto \frac{x^4-81}{x^2+9}$

$f_2 : x\mapsto \sqrt{x^4-5x^2+7}$

$f_3 : x\mapsto \frac{3x^5-5x^3+7x}{\sqrt{5}}$

$f_4 : t\mapsto \sqrt{t^4+2t^2+1}$

EXERCICE N°4

Soit le polynôme $p(x)= 6x^3+4x^2-2x-1$ a, b, c sont les racines de P (x). Sans les calculer, déterminer : $a + b + c$, abc, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ $a^2+b^2+c^2$, $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$.

EXERCICE N°5

Soit, f la fonction rationnelle f : $x\mapsto\frac{x^3-12x+16}{2x^2-7x+6}$

1- Déterminer l'ensemble de définition D de f sous forme de réunion d'intervalles.

2- Simplifier f(x) dans D et résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $\mathbb{N}$ l'inéquation $f(x)\leq 0$

EXERCICE N°6

Soit f la fonction rationnelle définie par : $f(x) = \frac{6x^3-x^2-32x+20}{9x^2-4}$

a) Déterminer D_f.

b) Calculer f(2). En déduire les antécédents de 0 par f.

c) Simplifier f (x) pour tout $x \in D_f$.

d) Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $\mathbb{N}$ l'inéquation $f(x) \geq -20$. On donne : $59^2= 3481$.

EXERCICE N°7

1.a) Démontrer que pour tout nombre réel x , $x^3= (\frac{x^2+x}{2})^2 - (\frac{x^2-x}{2})^2$

b) Soit f le polynôme défini par $f(x)= (\frac{x^2-x}{2})^2$. Démonter que : $f(x+1)- f(x)= x^3$

c) Etablir alors que $1^3+2^3+.....n^3+= \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

2- Soit l'équation (E): $-x^2+2x+4=0$

a) Montrer sans calculer le discriminant (Δ) et sans utiliser la forme canonique que (E) admet nécessairement deux racines distinctes x_1 et x_2 vérifiant $x_1 < 0 < x_2$

b) Sans calculer x_1 et x_2, trouver la valeur numérique du réel : $A= \frac{x_1-1}{x_1}+\frac{x_2-1}{x_2}$

EXERCICE N°8

Soit le polynôme $f(x)= 2x^4 +3x^3-2x^2-x-2$ soit a un nombre réel.

1) Calculer f(x)- f(a)
2) En utilisant les identités remarquables écrire f(x) –f(a) sous la forme (x-a) g (x) où g (x) est un polynôme du 3^e degré dont les coefficients ne dépendent que de a
3) Vérifier que f(1) = 0 et en déduire une factorisation de f(x).
4) On considère $g(x)= 2x^3+5x^2+3x+2$.
   a) Calculer g(-2)
   b) En déduire une factorisation de g(x) sous la forme g (x) = (x+2) h (x).
   c) Vérifier que h (x) n'admet pas de racine
5) Trouver enfin une factorisation complète de f (x)
6) Résoudre dans $\mathbb{R}$ f (x) = 0 et f(x) ≥0

EXERCICE N°9

P est un polynôme de degré 3 tel que P(0) = 0, $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x+1)- p(x) = x^2$

a) Montrer que p(1)=0
b) Quel est ce polynôme p(x) ?
c) Démontrer que $p(n+1) -p(1)= 1^2+2^2+......+n^2$
d) En déduire que $1^2+2^2+...+n^2= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

EXERCICE N°10

1. m est un nombre réel donné et $f(x) = -x^2+2x-m$

Déterminer m pour que f(x) soit négatif pour tout x.

2. $g(x) = x^2- (m+1) x+4$
   a) Pour quelles valeurs de m l'équation g(x)=0 admet- elle une seule solution ?
   b) Pour quelles valeurs de m l'équation g (x)= 0 n'a t- elle aucune solution ?

EXERCICE N°11

P est le polynôme défini par :

$P(x)= 2x^4 -5x^3-8x^2+17x-6$.

a) Vérifier que P (x) est factorisable par (x-1) (x+2). En déduire une factorisation de P (x)
b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ p (x) ≥0.

EXERCICE N°12

g est le polynôme défini par $g(x)= x^2-2(2m-3)x +m^2 -3m+3$ où m est un réel

1- Pour quelles valeurs de m, g (x) à t- il une racine double ?
2- Pour quelles valeurs de m g (x) a t- il deux racines distinctes x_1 et x_2. Sans calculer x_1 et x_2, donner l'expression $x^2_1+x^2_2$

EXERCICE N°13

Soit f la fonction rationnelle définie par :

$f(x)=\dfrac{6x^3-x^2-32x+20}{9x^2-4}$

a- Déterminer l'ensemble de définition D de f.

b- Calculer f (2). Quels sont les antécédents de 0 par f ?

c- Simplifier f (x) sur D

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $\mathbb{N}$ l'inéquation $f(x) \geq -20$.

EXERCICE N°14

Factoriser le trinôme x^2-x-12

1) Déterminer les réels a et b pour que le polynôme : $f(x)= 2x^4-4x^3-33x^2+ax+b$ soit divisible par le trinôme x^2-x-12

2) a et b étant les valeurs trouvées au 2) Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a) L'équation $f(x)= 0$

b) L'inéquation $f(x)= \geq 0$

EXERCICE N°15

Soit $f : x \rightarrow -2x^3+9x^2-9x+2$

$g : x \rightarrow -8x^5+38x^4-51x^3+44x^2-29x+6$

1- Trouver une racine entière de f

2- Calculer les racines de f

3- Vérifier que g est divisible par f

4- Trouver les racines de g et factoriser g.

EXERCICE N°16

1- Déterminer s'ils existent deux nombres de sommes S et de produit P dans les cas suivants :

S= 25 et P= 84, S= 2 et P= 3.

2- Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ système :

$$\begin{cases} x^2+y^2=20 \\ \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{5}{2} \end{cases}$$

EXERCICE N°17

1- Considérons l'équation (E) : $2x^4-9x^3+8x^2-9x+2=0$

a) Vérifier que o n'est pas solution de l'équation (E). En déduire que l'équation (E) est équivalent à l'équation (E) : $2x^2-9x+8\frac{9}{x}+\frac{2}{x^2}=0$

b) Démontrer que si x_0 est racine de (E), alors $\dfrac{1}{x_0}$ est aussi racine de (E)

2- a)Calculer $(x+\frac{1}{x})^2$

b) Montrer qu'en effectuant le changement de variable $y= x+\frac{1}{x}$ on peut ramener la résolution de l'équation(E) à celle d'une équation du second degré.

c) En déduire les racines de l'équation (E)

EXERCICE N°18

1. On considère les polynômes $p(x) = 6x^3+5x^2-4x$. et $q(x) = 3x^2+x-4$. Démontrer que p (x) et q (x) sont factorisable en produit de facteurs du premier degré.

2. Soit la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{8x^3-1}{p(x)} - \dfrac{x^2-x}{q(x)}$

a- Donner l'ensemble de définition D de f sous forme de réunion d'intervalles.

b- Montrer que f s'exprime sur D comme quotient de deux polynômes du second degré.

c- Déterminer les antécédents de 1 par f.

d- Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $\mathbb{N}$ l'inéquation $f(x) \le 0$.

EXERCICE N°19

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $\mathbb{Z}$ le système

a) $\begin{cases} \dfrac{(2x-3)^2 - x^2}{2-x} \le 0 \\ x(1-x^2) \ge 0 \end{cases}$ b) $\dfrac{x}{x^2-3x+2} \ge \dfrac{1}{x^2+2x-3}$

2. Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ les systèmes suivants :

$(S_1) : \begin{cases} xy = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{7}{3} \end{cases}$ $(S_2) \begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{20} \\ \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{41}{400} \end{cases}$

EXERCICE N°20

1.Sachant que 3 est une racine du polynôme $p(x) = x^5-3x^4+4x^3-12x^2-5x+15$ résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $\mathbb{N}$ l'inéquation $P(x) < 0$

2. On considère le polynôme $f(x)= 20x^3-5x^2-3x+2$.f(x) a trois racines α, β, γ.Sans les calculer déterminer la valeur exacte de $\alpha + \beta + \gamma$, $\alpha\beta\gamma$, $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}$ et $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$

EXERCICE N°21

Soit la fonction rationnelle P définie par : $f(x)=\dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}$

1. Déterminer trois réels a, b et c telles que pour tout réels x distinct de -2,-1 et 0

On ait : $f(x)=\dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1} + \dfrac{c}{x+2}$

2. En déduire la valeur exacte de la somme :

$S=\dfrac{1}{1\times2\times3} + \dfrac{1}{2\times3\times4} + \dfrac{1}{3\times4\times5} + \cdots + \dfrac{1}{46\times47\times48}$

EXERCICE N°22

On se propose de résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^4+10x^3+26x^2+10x+1=0$ (E)

1. Vérifier que 0 n'est pas solution de(E)
2. En déduire que (E) a les mêmes solutions que l'équation : $x^2+10x+26+\dfrac{10}{x}+\dfrac{1}{x^2}=0$

3. On pose : $X = x + \dfrac{1}{x}$. Exprimer $x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ en fonction de X^2

4. Monter que l'équation (E') est équivalente à un système $\begin{cases} x + \dfrac{1}{x} = X \\ P(X) = 0 \end{cases}$ Où p(x) est un polynôme à déterminer

5. Résoudre alors l'équation P (X)=0 puis résoudre l'équation (E).

EXERCICE N°23

On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$ $h(x) : x^4-x^3-3x^2+2x+2$

1. Monter que $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$ sont des racines de h.
2. En déduire une factorisation de h sous la forme d'un produit de deux polynômes du second degré (Poser la division Euclidienne).

On pose $(fx) = \dfrac{1}{h(x)} + \dfrac{3x}{x^4-4}$

3. Déterminer l'ensemble de définition de f(x).
4. Ecrire f (x) sous la forme d'une fraction rationnelle
5. Résoudre l'équation f(x)=0.

APPLICATIONS

EXERCICE N°1

Dans chacun des cas suivants, déterminer gof et fog, puis vérifier que fog ≠ gof.

1) $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 5x-4$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x-3$

2) $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$

EXERCICE N°2

On donne la fonction $f : \mathbb{R}-\{-3\} \to \mathbb{R}-\{2\}$, $x \mapsto \frac{2x+1}{x+3}$

1. Démontrer que f est une bijection
2. Déterminer sa bijection réciproque f^{-1}.
3. Calculer $(fof^{-1})(x)$ et $(f^{-1}of)(x)$

EXERCICE N°3

1. On donne l'application $f : [\frac{1}{2}, +\infty[\to \mathbb{R}^+$, $x \mapsto \sqrt{2x-1}$ Démontrer que f est une bijection. Déterminer f^{-1}
2. On donne l'application $g :]-\infty, \frac{1}{2}[\to]\frac{5}{2}, +\infty[$, $x \mapsto 2x^2-2x+3$ Démontrer que g est une bijection. Déterminer g^{-1}

EXERCICE N°4

On donne l'application $f : [2, +\infty[\to [-3 ; +\infty[$

$x \mapsto x^2-4x+1$

Démontrer que f est une bijection Déterminer f^{-1}. Représenter f et f^{-1} dans le même repère.

EXERCICE N°5

On donne $f :]2, +\infty[\to]1 ; +\infty[$

$x \mapsto \sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$

Démontrer que f est une bijection. Déterminer f^{-1}

EXERCICE N°6

1. Soit l'application $f : [2 ; +\infty[\to]\frac{\sqrt{2}}{2} ; \sqrt{3}]$

$x \mapsto \sqrt{\frac{x+1}{2x-3}}$

a. Démontrer que f définit une bijection de$]\frac{\sqrt{2}}{2} ; \sqrt{3}]$
b. Déterminer la bijection réciproque f^{-1} de f
c. Calculer $(fof^{-1})(x)$ et $(f^{-1}of)(x)$.

EXERCICE N°7

On considère les fonctions suivantes :

$f : [-\frac{1}{2} ; +\infty[\to \mathbb{R}^+$, $x \mapsto \sqrt{2x+1}$

$g : \mathbb{R}-\{3\} \to \mathbb{R}-\{2\}$, $x \mapsto \frac{2x-1}{x-3}$

1a) Démontrer que g est une application
b) Démontrer que g est injective
c) Démonter que g est surjective

LE FACILITATEUR

d) En déduire que g admet une application réciproque que l'on déterminera.

2 a) Démontrer que f est une application

b) Démonter que f admet une application réciproque que l'on déterminera.

c) Construire la courbe représentative de f^{-1} dans le plan muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

d) En déduire la représentation graphique de f dans le même repère.

EXERCICE N°8.

1. On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^2\sqrt{3} - x - 2\sqrt{3}$

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.

b) L'application f est-elle surjective ? Est-elle bijective ?

2. Soit l'application $g : [-1 ; 1] \to [-1,1]$
$x \mapsto \frac{2x}{x^2+1}$

a. Montrer que g est une application bijective

b. Expliciter sa bijection réciproque g^{-1}

EXERCICE N°9

f et g sont deux fonctions définies par $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ et $g(x) = \frac{x+1}{(x-1)\sqrt{x+1}}$

a) Déterminer D_g et D_f les domaines de définition respectifs des fonctions g et f puis déterminer le domaine de définition de gof.

b) Déterminer l'expression de (gof)(x).

EXERCICE n°10

Déterminer la qualité de chacune des applications f, g, h et i.

$f : [0, +\infty[\to]-\infty, +\infty[$
$x \mapsto x^2-1$

$g :]-\infty, +\infty[\to [-1 ; +\infty[$
$x \mapsto x^2-1$

$h : [0,+\infty[\to [-1,+\infty[$
$x \mapsto x^2-1$

$i :]-\infty ;+\infty[\to]-\infty,+\infty[$
$x \mapsto x^2-1$

EXERCICE 11

f est une application telle que $f : \mathbb{R} \to [-1,8]$
$x \mapsto x^2+4x+3$

1. Justifier que f n'est pas une application bijective
2. Trouver un ensemble I, $I \subset \mathbb{R}$ tel que f soit une bijection de I sur [-1 ; 8]

EXERCICE N°12

h est l'application définie de [-2 ; 3] dans [-3,4] par $h(x) = \begin{cases} \frac{5}{2}x + 2 \ \text{si} \ x \in [-2; 0] \\ \frac{2}{3}x + 2 \ \text{si} \ x \in [0; 3] \end{cases}$

Démontrer que h est bijective.

EXERCICE N°13

On considère l'application f définie par :

$h : [-2,2] \to [-2 ; 4]$

$x \mapsto \begin{cases} h(x) = x \ \text{si} \ x \in [-2; 1] \\ h(x) = 2x \ \text{si} \ x \in]1; 2] \end{cases}$ Monter que h est injective mais pas surjective de [-2,2] vers [-2 ; 4]

EXERCICE N°14

Soit $f : [1 ; +\infty[\to [2, +\infty[$
$x \mapsto f(x) = \frac{x^2+1}{x}$

et $g : [-2,1] \to [1 ; 10]$
$x \mapsto g(x) = x^2-2x+2$

a) Montrer que f et g sont des applications bijectives
b) Déterminer les applications réciproques de f et g.

EXERCICE 15

Soit $h : [-3, +\infty[\to \mathbb{R}^*$ et $g :]-\infty, 1] \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \sqrt{12 - x - x^2}$ $\quad x \mapsto -2x+1$

1- Déterminer le domaine de définition de h et hog
2- Calculer en fonction de x l'expression de hog.

EXERCICE N°16

Soit l'application $f : [0, +\infty[\to [-1, +\infty[$

$x \mapsto \sqrt{x} - 1$

1- Montrer que f est injective et surjective. En déduire que f est une bijection de $[0, +\infty[$ vers $[-1+\infty[$
2- Soit f^{-1} sa bijection réciproque. Sans chercher f^{-1} calculer $f^{-1}(1)$ et $f^{-1}(2)$.
3- Expliciter f^{-1}
4- Construire (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ dans un repère orthonormé.

EXERCICE N°17

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{-2x}{1+x^2}$ et soit (C_f) sa courbe représentative dans un RON $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer D_f puis construire (C_f).
2. Etudier la parité de f puis en déduire la conséquence graphique à cet effet.
3. a) Déterminer graphiquement F= imf= [c, d].
   b) Soit (D_m) la droite d'équation y= m, avec m élément de $\mathbb{R}$. Discuter suivant les valeurs de m le nombre de points d'intersection de (D_m) avec (C_f).
   c) f est-elle injective de $\mathbb{R}$ *sur* $\mathbb{R}$? Pourquoi ?
   d) Déterminer graphiquement le plus grand intervalle J sur l'axe des ordonnées de telle sorte que f soit surjective de $\mathbb{R}$ sur J.
   e) Déterminer graphiquement le plus grand intervalle I sur l'axe des abscisses de sorte que f soit bijective de I sur J.

III- EQUATIONS ET INEQUATIONS SYSTEMES

EXERCICE N°1

A) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations irrationnelles suivantes :

1) $\sqrt{x-1} = 13-x$
2) $\sqrt{2-x} = \sqrt{1-4x} - 1$
3) $3-2x+\sqrt{x^2-x+1} = 1-x$
4) $\sqrt{2x^2+x-6} \leq x+2$
5) $\sqrt{x^2-5x+4} > -2x+6$
6) $\sqrt{2x^2+x-6} \geq x+2$

B) Résoudre dans $\mathbb{R}$

a) $\sqrt{3x^2+2x-1} < \sqrt{2x^2+x-1}$
b) $\sqrt{2x-\sqrt{x^2+1}} = 2x-\sqrt{x^2+1}$
c) $X+\sqrt{2x^2-4x+1} \geq 3$
d) $\sqrt{-x^2+3x-2} > x-1$

C) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suviantes :

a) $3\sqrt{9-x^2}=x$

b) $x^2-\sqrt{4-x^2}+2=0$

c) $\sqrt{x+3}+1=\frac{2}{3}x$

d) $\sqrt{x^2-2x}=3+x$

D) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations

a) $\sqrt{-x^2+3x+4}\leq\frac{1}{2}x+2$

b) $\sqrt{5x+6}\geq x+2$

c) $\sqrt{x^2+3x-4}\geq x+2$

d) $\sqrt{-3x^2+2x-1}<\sqrt{2x^2+x+1}$

EXERCICE N°2

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sqrt{x+2}+\sqrt{3x+2}=4$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $\mathbb{Z}$ les inéquations suivantes.

* $x+1\leq\sqrt{x^2-3x-4}$

* $\sqrt{2x^2+x-6}<x+2$

EXERCICE N°3

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations irrationnelles

a) $\sqrt{3x^2+x-1}=\sqrt{2x^2+x+1}$

b) $\sqrt{x^2-2x+1}-x^2+1=0$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations irrationnelles suivantes :

a) $\sqrt{-4x^2+x+5}\leq 2x+2$

b) $2-\sqrt{2x^2-5x+2}\leq x$

c) $\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1}<1$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $\mathbb{N}$: $x+1\leq\sqrt{x^2-x-2}\leq 2x+1$

EXERCICE N°3

On considère les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} 2x+y=1 \\ 3x+7y=-2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x-18y=29 \\ -2x+9y=17 \end{cases}$ C) $\begin{cases} 3x-6y=12 \\ -11x+22y=-44 \end{cases}$

1- Calculer le déterminant de chacun des systèmes ci-dessus

2- Quel est le nombre de solutions de chacun des systèmes

3- Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ chacun des systèmes

EXERCICE N°4

1. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

$(S_1)\begin{cases} (\sqrt{2}-1)x-y=\sqrt{2}-1 \\ x+(\sqrt{2}+1)y=1 \end{cases}$ $(S_2)\begin{cases} \sqrt{2}x-3\sqrt{3}y=\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\sqrt{3}x+2\sqrt{2}\ y=\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$

2. On donne les systèmes suivants :

$(S_a)\begin{cases} x+xy+y=7 \\ x^2y+xy^2=6 \end{cases}$ $(Sb)\begin{cases} x^2+y^2-xy=28 \\ x+y=2 \end{cases}$ $(S_c)\begin{cases} \frac{x}{y}+\frac{y}{x}=2xy \\ x+y+xy=0 \end{cases}$

$(S_d)\begin{cases} 2x^2+x+y^2-2y=3 \\ (2x^2+x)(y^2-2y)=2 \end{cases}$ $(S_e)\begin{cases} x^2+2y^2-2x+8y+3=0 \\ 3x^2-y^2-6x-4y-12=0 \end{cases}$

EXERCICE N°5

1. Résoudre dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ les systèmes suivants :

$(S_1)\begin{cases} x+y=3 \\ \frac{x-3}{y}+\frac{y-3}{x}=-2 \end{cases}$ $(S_2)\begin{cases} x+y=15 \\ |x-y|=3 \end{cases}$ $(S_3)\begin{cases} 2|x|+|y|=8 \\ 3|x|-2|y|=5 \end{cases}$

P est la parabole d'équation $y=ax^2+bx+c$. Cette courbe passe par les points A $(1\,;-3)$; B $(2,-1)$ et C $(-1,5)$. Trouver a, b et c.

EXERCICE N°6

Soit (C) la courbe représentative de la fonction P l'équation $P(x)=ax^2+bx+c$.

1) Calculer les réels a, b et c sachant que (C) passe par les points A (1 ; 1) ; B (-2 ; 25), C (3 ; 5)
2) Ecrire P (x) sous la forme canonique
3) Soit f la fonction définie par :

$f :]-\infty, 2] \to [\frac{1}{2} ; +\infty[$

$x \longmapsto 2x^2-6x+5$

a) Montrer que f est une application bijective
b) Explicite f^{-1} la bijection réciproque de f
c) Dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$, construire la courbe (C) de p. Justifier la construction à l'aide de la fonction $h(x) = 2x^2$.
d) Construire en bleu dans le même repère la courbe (Γ) de f^{-1}.

EXERCICE N°7

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$

a) $3+\sqrt{2x+7}= 17-x$

b) $2(x+1) \leq \sqrt{x^2-4x+3}$

2) Soit $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$, montrer que quel que soit x appartenant à $\mathbb{R}$, $\frac{1}{3} \leq f(x) \leq 3$
3) Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système suivant en utilisant la méthode du Pivot de Gauss.

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 4x-2y+z=25 \\ 9x+3y+z=5 \end{cases}$$

EXERCICE N°8

A- Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ les systèmes proposés, d'inconnue (x, y, z) par la méthode de Gauss.

$$(S_1)\begin{cases} x-3y+2z=1 \\ 3x+2y+z=10 \\ 5x+y-z=4 \end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases} 3x+y+z=1 \\ 3x+2y+2z=1 \\ y+z=1 \end{cases}$$

$$(S3)\begin{cases} x+y-3z=1 \\ 2x+y-z=4 \\ 5x+4y-10z=7 \end{cases} \qquad (s4)\begin{cases} x-5y-7z = 3 \\ 5x+3y+z=3 \\ 3x+y-2z=-1 \end{cases}$$

B) Résoudre dans $\mathbb{R}^4$ le système suivant :

$$a)\begin{cases} x+y+z+t=-1 \\ 4x+3y+2z+t=-5 \\ 8x+4y+2z+t=-8 \\ 32x+12y+4z+t=-30 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+z+t=0 \\ 3x+2y+z=5 \\ -x+y-z+t=-6 \\ 8x+4y+2z+t=12 \end{cases}$$

EXERCICE N°9

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ par la méthode du pivot de Gauss des systèmes suivants :

$$1)\begin{cases} 2x+2y+2z=12 \\ 6x+12y+4z=41 \\ 6x+4y+12z=45 \end{cases} \qquad 2)\begin{cases} x+y+z=-7 \\ 4x+2y+z=-21 \\ x-y+z=-9 \end{cases}$$

3) On donne les systèmes suivants :

$$(E_1)\quad \begin{cases} x+y+z=2 \\ 4x+5y-20z=-2 \\ -3x+5y+5z=4 \end{cases} \qquad (E_2)\begin{cases} \dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{7}=\dfrac{z}{8} \\ x-y+z=12 \end{cases}$$

a) Résoudre (E_1) par la méthode du pivot de Gauss

b) Résoudre (E_2) par la méthode de votre choix

3) Déterminer une parabole (p) d'équation $y= ax^2+bx+c$. dans un repère orthonormé, sachant qu'elle passe par les points A (1,2), B (2,-3), C (3,-12).

EXERCICE N°10

1. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant :

$$\begin{cases} mx+y=2m \\ x+my=m+1 \end{cases}$$

2. Résoudre par la méthode de Gauss le système suivant : (s) $\begin{cases} 3x+y+2z-t=2 \\ 2x-3y-z+t=-2 \\ x+y+3z-2t=-2 \\ x-2y+z+3t=-1 \end{cases}$

CHAPITRE 2 : ANGLES ORIENTES ET TRIGONOMETRIE

EXERCICE N°1

Déterminer la mesure principale de l'angle dont une mesure est donnée ci-dessous, puis sur un cercle trigonométrique, placer les points associés à ces angles.

$-\frac{451\pi}{2}$; $\frac{509\pi}{6}$; $\frac{437\pi}{15}$; $-\frac{731\pi}{16}$; $\frac{-19021\pi}{4}$

EXERCICE N°2

Soit les points A, B, C, D, et E tels que

1. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})=\frac{5\pi}{6}$; $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE})=\frac{2\pi}{3}$; $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})=\frac{\pi}{3}$

Démontrer que le triangle ACD est un rectangle en A.

2. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE})=\frac{-2\pi}{3}$;$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})=\frac{3\pi}{4}$; $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC})=-\frac{5\pi}{12}$

Démontrer que les points A, C et E sont alignés.

EXERCICE N°3

A et B sont deux points distincts. Placez le point C tel que $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})=\frac{\pi}{6}$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})=-\frac{\pi}{3}$

Quelle est la nature du triangle BAC ?

EXERCICE N°4

Une mesure de l'angle Orienté $(\vec{u},\vec{v})$ est fixée. Donnez dans chaque cas une mesure de chacun des angles Orientés indiqués.

1. $(\vec{u}, \vec{v})=\frac{\pi}{2}$
   a) $(-\vec{u},-\vec{v})$
   b) $(-\vec{u},\vec{v})$
   c) $(2\vec{u}, 3\vec{v})$
   d) $(\vec{v},\vec{u})$

2. $(\vec{u}, \vec{v})=\alpha$
   a) $(3\vec{u},-2\vec{v})$
   b) $(-2\vec{v},\vec{u})$
   c) $(5\vec{v}, 4\vec{u})$
   d) $(-5\vec{u}, -6\vec{v})$

EXERCICE N°5

1. Construisez une ligne brisé ABCDE telle que : AB=4 ; BC=3 ; CD=2 ; DE=2 (en cm) ;

$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})=-\frac{5\pi}{6}$; $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD})=-\frac{\pi}{2}$; $(\overrightarrow{DC} ; \overrightarrow{DE})=\frac{\pi}{3}$

2. Calculer une mesure de $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DE})$
3. ABC est un triangle. Démontrer que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})+(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})=\pi$

EXERCICE N°6

$(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est un repère orthonormé direct.

A est le point de coordonnées (2 ; 1)

1. Placer le point B tel que AC= 2 et $(\vec{\imath},\overrightarrow{AB})=\frac{\pi}{6}$
2. Placer le point C tel que AC=2 et $(\vec{\imath},\overrightarrow{AC})=\frac{-\pi}{6}$
3. Calculer les coordonnées des points B et C
4. Trouver une mesure de $(\vec{\imath}$, BC)
5. Déterminer une mesure de $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$. Quelle est la nature du triangle ABC ?

EXERCICE N°7

1. Déterminer sin x et cos x sachant que : tan x=0,8 et $-\pi < x < -\frac{\pi}{2}$
2. Ecrire plus simplement les expressions suivantes :

$$A= \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \frac{1}{\tan\left(x+\frac{15\pi}{2}\right)} - \tan\left(\frac{7\pi}{2} + x\right) - \frac{1}{\tan\left(\frac{7\pi}{2}-x\right)}$$

$$B= \sin\left(\frac{17\pi}{2} + x\right) - 2\cos\left(\frac{21\pi}{2} - x\right) - 3\sin(x - 3\pi) + \sin\left(\frac{23\pi}{2} + x\right)$$

3. Calculer A et B

$A=\cos^2\left(\frac{703\pi}{4}\right)+\sin^2\left(\frac{551\pi}{6}\right)+\cos^2\left(\frac{447\pi}{3}\right)+\cos^2\left(\frac{95\pi}{3}\right)$

$B=\cos^4\left(\frac{\pi}{8}\right)+\cos^4\left(\frac{3\pi}{8}\right)+\cos^4\left(\frac{5\pi}{8}\right)+\cos^4\left(\frac{7\pi}{8}\right)$

4. Démontrer que :

a) $\forall x\neq k\pi,\ \frac{2+\sin 2x-2\cos 2x}{1+3\sin^2 x-\cos 2x}=\frac{2}{5}\left(2+\frac{1}{\tan x}\right)$

b) $\forall x\in\mathbb{R},\ (\sin x-\cos x)(1+\sin x\cos x)=\sin^3 x-\cos^3 x.$

c) Pour tout réel a et b tel que $a-b\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, a\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ et $b\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,$ $k\in\mathbb{Z}$: $\tan(a-b)=\frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\tan b}$

EXERCICE N°8

1.a) Sachant que $\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$, calculer $\sin\frac{2\pi}{5}$.

b) Déduisez-en les valeurs du cosinus et du sinus des réels suivants : $\frac{3\pi}{5};\frac{\pi}{10};\frac{9\pi}{10}$

2. Ecrire plus simplement les expressions suivantes :

$a=\tan\left(\frac{13\pi}{2}-x\right)+\frac{1}{\tan\left(x+\frac{19\pi}{2}\right)}-\tan\left(\frac{7\pi}{2}+x\right)-\frac{1}{\tan\left(\frac{95\pi}{2}-x\right)}$

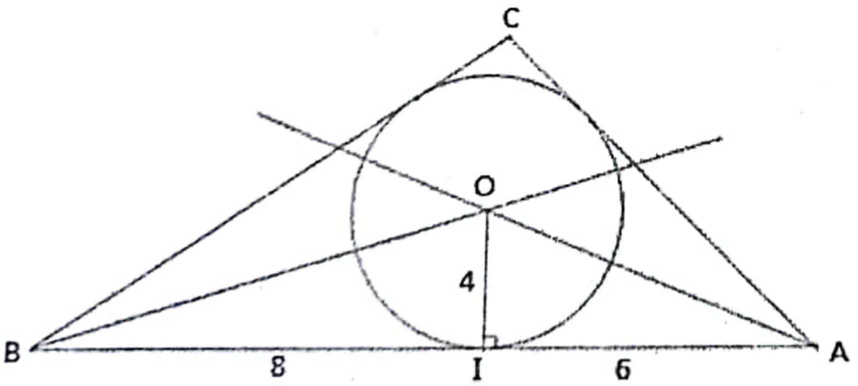
$b=\sin x\sin(y-z)+\sin y\sin(z-x)+\sin z\sin(x-y)$

4. On donne : $\cos a=\frac{2}{3}$ avec $0<a<\frac{\pi}{2}$ et $\sin b=\frac{1}{5}$ avec $\frac{\pi}{2}<b<\pi$

Calculer : $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$

EXERCICE N°9

Dans la figure suivante, on a AI=6, BI=8 et OI=4 ; Le point O, intersection des bissectrices est le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC ; OI est donc un rayon de ce cercle et l'angle $O\hat{I}B$ est droit.



1. Calculer OA et OB, puis $\sin(\frac{\hat{A}}{2})$, $\cos(\frac{\hat{A}}{2})$; $\sin(\frac{\hat{B}}{2})$ et $\cos(\frac{\hat{B}}{2})$
2. Calculer $\sin(\hat{A})$, $\cos(\hat{A})$, $\sin(\hat{B})$ et $\cos(\hat{B})$
3. Montrer que $\sin(\hat{C})=\sin(\hat{A}+\hat{B})$. Calculer $\sin(\hat{C})$.
4. Calculer les distances BC et AC.

EXERCICE N°10

ABC est un triangle tel que BC=a=4 ; AC=b=6 ; AB=c=5

1. a) Faire la figure

b) Rappeler les formules de duplication de cos2x et sin2x.

2. Calculer cos(A), puis cos(B). En déduire que cos(B)=cos (2A)
3. Calculer sin(B) en fonction de sin(A). En déduire que sin(B)=sin (2A).
4. Conclure sur les deux résultats précédents (2 et3)
5. Exprimer en fonction de la valeur de l'angle$\hat{A}$, la valeur de l'angle $\hat{C}$

6. Calculer l'aire du triangle ABC

EXRCICE N°11

I. Démontrer que $16\sin\frac{\pi}{24}.\sin\frac{5\pi}{24}.\sin\frac{7\pi}{24}\sin\frac{11\pi}{24}=1$

II. Soit a un nombre réel vérifiant $\sin a=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$, $0<a<\frac{\pi}{2}$

1. Calculer cos2a et cos4a.
2. Démontrer que le réel a est l'une des solutions de l'équation cos4x=sinx.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation cos4x=sinx ; en déduire le réel a

EXERCICE N°12

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a. $\cos7x\cos2x+\sin7x\sin2x=\cos\frac{5\pi}{12}$

b. $2\cos^2x+(1-\sqrt{2})\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}=0$

c. $\cos^2(2x)-\sin^2(2x)=\cos5x$

d. $\cos x=\frac{1}{2}$;

e. $\tan^2x+(1+\sqrt{3})\tan x+\sqrt{3}=0$

EXERCICE N°13

1. Résoudre dans$]-\pi,\pi]$ l'inéquation $2\cos^2x+(1-\sqrt{2})\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}>0$
2. a) Exprimer cos3x en fonction de cos x puis résoudre dans$]-\pi,\pi]$, l'équation $4\cos^3x-3\cos x-\frac{1}{2}<0$

EXERCICE N°14

I. a) Résoudre dans $[0, 2\pi]$, $\sin3x\leq\frac{1}{2}$

b) Résoudre dans$]-\pi,\pi]$, $\cos x\geq\sin2x$

II. 1. Résoudre l'équation : $2x^2+(1-\sqrt{2})x-\frac{\sqrt{2}}{2}=0$

2. Résoudre l'inéquation : $2x^2+(1-\sqrt{2})x-\frac{\sqrt{2}}{2}>0$
3. Déduire de la question 1) la résolution de l'équation : $2\cos^2x+(1-\sqrt{2})\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}=0$ (E)
Représenter sur le cercle trigonométrique les images des solutions de l'équation (E)
4. Déduire de la question 2) la résolution dans $[0,2\pi]$
De l'inéquation : $2\cos^2x+(1-\sqrt{2})\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}>0$ (I)

EXERCICE N°15

a) Démontrer que pour tout réel a, $\cos5a=16\cos^5a-20\cos^3a+5\cos a$

b) Vérifier que pour tout nombre réel x : $16x^5-20x^3+5x+1=(x+1)(4x^2-2x-1)^2$

c) On pose $t=\cos\frac{\pi}{5}$

Démontrer que le nombre réel t est solution de l'équation : $4x^2-2x-1=0$ puis que $t=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$

d) En déduire : $\sin\frac{\pi}{5}$, $\cos\frac{2\pi}{5}$; $\cos\frac{\pi}{10}$; $\sin\frac{\pi}{10}$

EXERCICE N°16

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $2\cos(4x+\frac{\pi}{3})=\sqrt{2}$

b) $\cos(3x)=\sin(\frac{\pi}{3}-2x)$

c) $2\sin(3x+\frac{\pi}{4})=1$

d) $2\cos^2x+\cos x-1=0$

2. Résoudre $\mathbb{R}$dans les inéquations suivantes :

5. a) $2\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)-1<0$ sur $[0,2\pi]$

c) $\begin{cases} 2\sin x \leq \sqrt{2} \\ 2\sin x + 1 \geq 0 \end{cases}$ sur $[0,2\pi]$

EXERCICE N°17

1. a) Vérifier que $\sqrt{3+2\sqrt{2}}=1+\sqrt{2}$

   b) Résoudre l'équation $2x^2+(1-\sqrt{2})x-\frac{\sqrt{2}}{2}=0$

2. a) Résoudre l'équation (E) : $2\cos^2x+(1-\sqrt{2})\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}=0$

   b) Représenter sur le cercle trigonométrique les images des solutions de l'équation précédente.

EXERCICE N°18

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

   A: $\sin x\cos x=\frac{\sqrt{3}}{4}$ B: $\tan x=\sqrt{3}$

   C: $\sin x[\sin x-\cos(2x+\frac{\pi}{3})] = 0$ D: $\cos(\frac{1}{2}x)=\cos 3x$

2. Résoudre les inéquations suivantes :

   E : $\sqrt{2}\cos 2x+1>0$; $x\in[0,\pi]$ F : $-\frac{\sqrt{3}}{2}\leq \sin x \leq -\frac{1}{2}$, sur $[0,2\pi]$

3. Démontrer les égalités suivantes :

   a- $\cos x+\sqrt{3}\sin x=2\cos(\frac{\pi}{3}-x)$

   b- $\sin^4x-\cos^4x=1-2\cos^2x$

EXERCICE N°19

1. Montrer que pour tout réel x, $\sin(3x) = -4\sin^3x + 3\sin x$
2. En déduire que : $\sin(3x)-\frac{\sqrt{2}}{2}=(\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2})(-4\sin^2(x)-2\sqrt{2}\sin x+1)$
3. Résoudre $\sin 3x-\frac{\sqrt{2}}{2}=0$ puis en déduire que $\sin(\frac{\pi}{12})$ et $\sin(\frac{17\pi}{12})$ solutions de l'équation : $-4x^2-2\sqrt{2}x+1=0$
4. En déduire les valeurs de $\sin(\frac{\pi}{12})$ et $\sin(\frac{17\pi}{12})$

EXERCICE N°20

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $16(\sin^2x-\sin^4x)=3$
2. $\cos(2x+\frac{\pi}{3})+\cos(\frac{\pi}{3}-2x)=\frac{1}{2}$
3. $2\sin^2x+\sqrt{3}\sin x-3=0$
4. $4\sin^2x+2(1-\sqrt{3})\cos x-4+\sqrt{3}=0$
5. a) Vérifier que pour tout réel x, $(\cos x-\sin x)^2=1-\sin 2x$,
6. b) En déduire la résolution dans $[-\pi,\pi]$ de l'équation : $(\cos x-\sin x)^2=\frac{1}{2}$

EXERCICE N°21

Résoudre les inéquations suivantes dans l'intervalle I donné

1. $4\sin^2x-1\leq 0$ I= $[0,2\pi]$
2. $|\sin x|<\frac{1}{2}$ a. I= $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ b) I= $[0,2\pi]$
3. $2\cos^2x-\cos x-1\leq 0$ I= $[0,\pi]$
4. $\sin 2x\geq \sin x$ I=$[-\pi,\pi]$,
5. $\sin(x-\frac{\pi}{3})<\frac{1}{2}$ I= $[-\frac{3\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$
6. $2\sin 2x-\sqrt{2}\leq 0$ I= $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

EXERCICE N°22

1. Sachant que $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, calculer $\sin\frac{\pi}{12}$ et $\tan\frac{\pi}{12}$. Déduisez-en le sinus et le cosinus de : $\frac{5\pi}{12}$; $\frac{17\pi}{12}$; $\frac{25\pi}{12}$; $\frac{195\pi}{12}$
2. Résoudre dans $[-\pi,\pi]$ l'équation $(2-\sqrt{3})\cos 2x+\sin 2x=\sqrt{3}-1$

EXERCICE N°23

1. Démontrer que pour tout réel a $\cos^3 a=\frac{1}{4}(\cos 3a+3\cos a)$ et $\sin^3 a==\frac{1}{4}(3\sin a-\sin 3a)$
2. Déduisez-en chacune des sommes suivantes :

$S_1=\cos^3\frac{\pi}{12}+\cos^3\frac{5\pi}{12}+\cos^3\frac{7\pi}{12}+\cos^3\frac{11\pi}{12}$

$S_2=\sin^3\frac{\pi}{12}+\sin^3\frac{5\pi}{12}+\sin^3\frac{7\pi}{12}+\sin^3\frac{11\pi}{12}$

EXERCICE N°24

A. 1 On donne $\sin(a)=\frac{1}{3}$; $0\leq a\leq\frac{\pi}{2}$. Calculer cos2a et sin2a

2. Calculer $\cos\frac{5\pi}{8}$

B. 1) En utilisant les formules de duplication, montrer que

a) $\forall x\in\mathbb{R}$, $1+\cos x+\sin x=2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{x}{2}\right)+\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right]$

b) $\forall x\in\mathbb{R}$, $1-\cos x+\sin x=2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\left[\sin\left(\frac{x}{2}\right)+\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right]$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a. $1+\cos x+\sin x=0$; b) $1-\cos x+\sin x=0$

3. Résoudre dans $[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]$ l'équation : $(\sqrt{2}\sin x+1)(4\cos^2 x-3)<0$

EXERCICE N°25

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ à l'aide d'un changement de variable.

(E_1): $-2\cos^2 x+\cos x+6=0$

(E_2): $\sin^2 2x-\sqrt{3}\sin 2x+\frac{3}{4}=0$

2. a) En remarquant que $\sin(5x)=\sin(x+4x)$ démontrer que $\sin 5x=16\sin^5 x-20\sin^3 x+5\sin x$

b) Résoudre $\sin 5x=0$ et vérifier que $\frac{\pi}{5}$ et $\frac{2\pi}{5}$ sont des solutions de cette équation.

c) Résoudre l'équation $16X^5-20X^3+5X=0$

d) En déduire des questions précédentes les valeurs exactes de $\sin\frac{\pi}{5}$ et $\sin\frac{2\pi}{5}$

EXERCICE N°26

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$
   a) $2\cos 2x+4\cos x-1=0$
   b) $3\cos x-\sqrt{3}\sin x+\sqrt{6}=0$
   c) $\cos 2x-\sin 2x=-1$
2. a) Résoudre dans $[0,2\pi]$ $\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)-1<0$

b) Résoudre dans $[0,2\pi[$ $\begin{cases} \sin x\leq\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2\sin x+1\geq 0\end{cases}$

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ $\cos x-\sin x<0$

3. a) Résoudre dans $]-\pi,\pi]$ $\frac{1-2\cos x}{2\sin x-\sqrt{2}}\geq 0$

b) x et y étant deux nombre réels de l'intervalle $[0,2\pi]$ on considère le système :

$$(S)\begin{cases} \cos x\cos y=\frac{\sqrt{3}+1}{4} \\ \sin x\sin y=\frac{\sqrt{3}-1}{4}\end{cases}$$

c) Démontrer que le système (S) est équivalent au système suivant :

$$(S')\begin{cases}\cos(x+y)=\frac{1}{2}\\ \cos(x-y)=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

EXERCICE N°27

1. Soit $\hat{A}$, $\hat{B}$, et $\hat{C}$ les mesures des angles d'un triangle. Démontrer que
   a. $\cos\left(\frac{\hat{A}+\hat{C}}{2}\right)=\sin\frac{\hat{B}}{2}$
   b. $\tan\left(\frac{\hat{B}+\hat{C}}{2}\right)=\frac{1}{\tan\frac{\hat{A}}{2}}$
2. On désigne par S l'aire du triangle ABC et on donne $\hat{A}=45°$; CA=3 et S=3
   a) Calculer AB et BC
   b) Déterminer $\sin\hat{B}$ et $\cos\hat{C}$
3. Calculer la longueur de la médiane relative au côté [AB]

EXERCICE N°28

Résoudre dans l'intervalle I donné les équations suivantes :

a) $|\cos x| = |\sin(x-\frac{\pi}{3})|$, I= $[0, 2\pi]$
b) $\cos 4x-\sqrt{2}\cos 2x=1$, I= $\mathbb{R}$
c) $\cos 2x+(2+\sqrt{3})\sin x-(1+\sqrt{3})=0$, I= $\mathbb{R}$
d) $\cos x+\cos 3x+\cos 5x=0$, I= $\mathbb{R}$

EXERCICE N°30

Soit deux (2) réels x et y appartenant à l'intervalle $[0 ; \frac{\pi}{2}[$ tels que $\sin x=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\cos y=\frac{\sqrt{3}}{2}$

1. a) Vérifier que $\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$
   c) Calculer siny. Quelle est la valeur de y.
2. a)Calculer cos(x+y) et sin(x+y)
   b) Calculer cos(x-y) et sin(x-y) et en déduire la valeur de x

EXERCICE N°31

1. On donne $\sin(x)=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ et $x\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$
   a) Calculer la valeur exacte de cosx
   b) Calculer cos2x et en déduire la valeur de x.
2. a) Vérifier que $\cos(\frac{\pi}{18})-\sqrt{3}.\sin(\frac{\pi}{18})=2[\frac{1}{2}\cos(\frac{\pi}{18})-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\frac{\pi}{18})$
   b) En déduire que $\cos(\frac{\pi}{18})-\sqrt{3}.\sin(\frac{\pi}{18})=2\cos(\frac{7\pi}{18})$
   c) On pose $K=-\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{18})}+\frac{\sqrt{3}}{\cos(\frac{\pi}{18})}$. Montrer que K =-4

EXERCICE N°32

ABC est un triangle tel que BC=8, AC=7, AB=5.

1. Faire une figure. On notera : $\hat{A}=B\hat{A}C$; $\hat{B}=A\hat{B}C$ et $\hat{C}=A\hat{C}B$ et a=BC ; b=AC ; c=AB
2. Calculer $\cos\hat{B}$ et en déduire la mesure en degré de $\hat{B}$.
3. Calculer de même $\cos\hat{A}$ et $\cos\hat{C}$. En déduire la mesure en degré de $\hat{A}$ et $\hat{C}$ sachant que $\cos 82°=\frac{1}{7}$
4. Soit H le pied de la hauteur de ABC issue de A
   a) Calculer h=AH
   b) Calculer l'aire du triangle ABC
5. Soit I le milieu de$[BC]$, calculer AI

EXERCICE N°33

1. a) Transformer en somme le produit $\cos 5x \cos 6x$
   b) Transformer en produit la somme $\sin x+\sin 3x+2\sin 2x$
2. Un triangle ABC a pour côté $BC=2\sqrt{3}$, $AC= 2\sqrt{2}$ et $AB= \sqrt{6}-\sqrt{2}$
   a) Calculer les angles $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$ donner les valeurs en radians. En déduire $\widehat{C}$ et $\cos\frac{\pi}{12}$
   b) Calculer la hauteur AH issue de A.

EXERCICE N°34

Le plan étant muni d'un repère orthonormé direct $(o,\vec{i},\vec{j})$, on considère le point A(2, 1)

1. Construire le point B tel que : $AB=2$ et $(\vec{i}, \overrightarrow{AB}) = -\frac{\pi}{6}$
   Construire le point C tel que : $CB=2$ et $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})= \frac{2\pi}{3}$
2. Calculer une mesure de l'angle orienté$(\vec{j}, \overrightarrow{BC})$

EXERCICE N°35

1. On considère un triangle ABC isocèle en A tel que BC=a et $A\widehat{B}C=\frac{2\pi}{5}$ rad. La bissectrice de l'angle $A\widehat{B}C$ coupe [AC] en D.
   a. Démontrer que les triangles ABD et BCD sont isocèles. En déduire que DA=DB=a.
   b. Démontrer que $AB=2a\cos\frac{\pi}{5}$ et $CD=2a\cos\frac{2\pi}{5}$, en déduire que $\cos\frac{\pi}{5} - \cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{2}$
   c. Démontrer que : $BC=BD\cos\frac{\pi}{5} +CD\cos\frac{2\pi}{5}$, en déduire que : $\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5} =\frac{1}{4}$
   d. On pose $x= \cos\frac{\pi}{5}$ et $y= \cos\frac{2\pi}{5}$. On sait que $x-y=\frac{1}{2}$ et $xy=\frac{1}{4}$. Calculer alors x et y
   e. Calculer $\sin\frac{\pi}{5}$ et $\tan\frac{\pi}{5}$.

CHAPITRE 3 : FONCTIONS NUMERIQUE : COMPORTEMENT GLOBAL

EXERCICE N°1

Dans chacun des cas, déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

1. $f : x \longmapsto \frac{2x+1}{\sqrt{2x-1}-3}$
2. $g : x \longmapsto \frac{x-1}{|x-1|-|3x-2|}$
3. $h : x \longmapsto \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}-1}$
4. $I : x \longmapsto \frac{\sqrt{x^2-3}}{\sqrt{x-1}}$
5. $J : x \longmapsto \sqrt{\frac{x^2}{x^2-1}}$
6. $k : x \longmapsto \sqrt{x^2-1}\sqrt{x^2-4}$
7. $l : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$

   $x \longmapsto \sqrt{\frac{\cos x}{1-2\cos x}}$
8. $M : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$

   $x \longmapsto \frac{\tan x}{1+\tan}$
9. $N : x \longmapsto \frac{\sin x}{\sqrt{2}\sin x+1}$

EXERCICE N°2

Etudier la parité des fonctions suivantes et interpréter graphiquement les résultats obtenus

1. $f : x \longmapsto x\sqrt{x^2-1}$
2. $g : x \longmapsto \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$
3. $h : x \longmapsto \frac{3x^2+2}{|x+1|}$

EXERCICE N°3

1. On considère les fonctions de $\mathbb{R}$ *vers* $\mathbb{R}$ ci-dessous :

$f(x)=\frac{7x+21}{\sqrt{x+3}-\sqrt{2x+6}}$; $G(x)= 4x^2-3$; $h(x)=\frac{5x}{\sqrt{x-4}}$; $I(x)=\frac{5x}{\sqrt{x-4}-2}$; $j(x)=\frac{1}{\sqrt{2x-1}+\sqrt{12-2x}}$; $k(x)=\frac{\sqrt{x}}{x^2-1}$; $l(x)=\sqrt{\frac{x-1}{2x-3}}$

   a) Déterminer le domaine de définition de chacune de ces fonctions.

   b) Déterminer l'ensemble de définition noté D de la fonction fog puis démontrer que $\forall x \epsilon D$; $fog(x)= -14(1+\sqrt{2})\ |x|$

2. Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

   a) $f : [-2,6 \to [1, 4]$

   $x \longmapsto |x-4|$

   b) $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^-$

   $x \longmapsto \sqrt{x+2}\ - x$

   c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$

   $x \longmapsto ||x-4|-3|$

   d) $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

   $x \longmapsto \sqrt{4x+2}$

   e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

   $x \longmapsto \sqrt{-|x+1|-2}$

3. Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions de $\mathbb{R}$ *vers* $\mathbb{R}$ ci-dessous :

   a) $f : x \longmapsto 5x\sqrt{3-2x}$

   b) $g : x \longmapsto \sqrt{x-3}+2\sqrt{3x-1}$

   c) $h : x \longmapsto \sqrt{|x^2-5x+6|}$

   d) $I : x \to \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+4}}$

   e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

   $X \longmapsto \frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x+2}$

   f) $g : [-5, +\infty[\to \mathbb{R}$

   $X \longmapsto \sqrt{\frac{x^2}{x-1}}$

   g) $h : [0 ; \pi] \to \mathbb{R}$

   $X \longmapsto \frac{\sqrt{\cos x}}{\tan 2x}$

   h) $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \longmapsto \dfrac{\sqrt{x}}{|2x-1|-|x-2|}$

EXERCICE N°4

On considère les fonctions suivantes :

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \longmapsto 5x^2-(a+1)x+3$

$g : [b\ ;\ 7] \to \mathbb{R}$
$x \longmapsto \dfrac{x3}{x^2-1}$

Déterminer les nombres réels a et b pour que f soit paire et g impaire.

EXERCICE N°5

f et g sont les fonctions définies par : $f(x)=\dfrac{x+3}{x+1}$ et $g(x)=\dfrac{x}{x+2}$; On pose h=gof

1. Trouver l'ensemble de définition de h et calculer explicitement h(x)
2. La fonction k est définie par $k(x)=\dfrac{x+3}{3x+5}$; Les fonctions h et k sont-elles égales ?

EXERCICE N°6

f et g sont deux fonctions périodique de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. f est de période 2 et g de période 3. Démontrer que la fonction h définie par : h(x)=f(x)+g(x) est périodique de période 6.

EXERCICE N°7

1. f est la fonction définie par $f(x)=\dfrac{-2x^2+3x+7}{x^2-2x-3}$ Démontrer que la représentation graphique de f admet le point Ω (1 ;-2) comme centre de symétrie.
2. g est la fonction définie par : $g(x)=\dfrac{x^2+6x+2}{2x^2+12x+9}$ Démontrer que la représentation graphique de f admet comme axe de symétrie la droite (D) d'équation x=-3

EXERCICE N°8

En écrivant f comme la composée de deux fonctions usuelles, déduisez les variations de f sur l'intervalle I donné.

1. $f(x)=\sqrt{2x+1}$, I= $[-\frac{1}{2}\ ;+\infty[$
2. $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$; I=$]-1;+\infty[$
3. $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$; I=$]-\infty\ ;0[$

EXERCICE N°9

f est une fonction définie sur [-1 ; 5] et g une fonction définie sur [2 ; +∞ [
Sur quel ensemble est définie fg ? Justifier.

EXERCICE N°10

Le tableau de variation suivant est celui d'une fonction f définie sur [-4 ; 4]

X	-4		-1		2		4
f(x)	3	↘	0	↗	2	↘	-1

Dressez le tableau de variations des cinq fonctions définies par :
g(x)=2f(x) ; h(x)=-f(x) ; l(x)=f(x)+3 ; j(x)=|f(x)| ; k(x)=f(|x|)

EXERCICE N°11

f est la fonction définie par $f(x)=\dfrac{1}{\sin x+2}$

1. Démontrer que pour tout réel x, $1 \leq \sin x + 2 \leq 3$ et déduisez-en que f est définie sur $\mathbb{R}$
2. On donne u la fonction sinus
   a. Définissez la fonction g telle que f=g0u

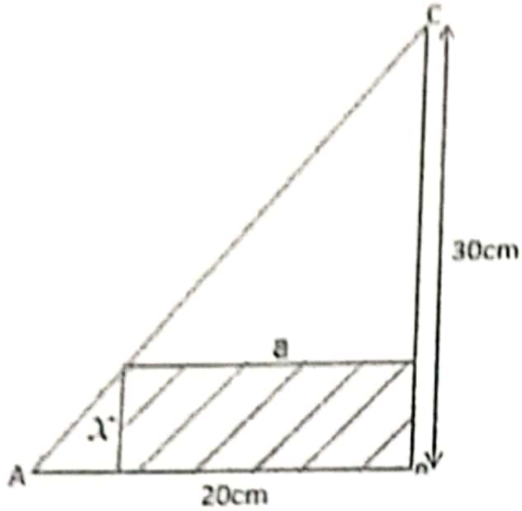
b. Rappelez la période de u.
Déduisez-en que f est périodique et donner une période de f.
c. U est impaire, f l'est-elle ? Justifier votre réponse.
3. Démontrer qu'il existe deux réels m et n tels que $\forall x \in \mathbb{R}$, $m \leq f(x) \leq M$

EXERCICE N°12

On souhaite construire une maison de forme rectangulaire dans l'angle droite d'un terrain triangulaire (voir figure)

1) Exprimer a en fonction de x
2) Exprimer l'aire A(x) de la maison en fonction de x.
3) Pour quelle valeur de x l'aire de la construction

Construction est-elle maximale ? Quel est ce maximum



EXERCICE N°13

On considère la fonction f définie par $f(x)=\frac{2x+1}{x+2}$

1. Déterminer les réels a et b tel que pour tout $x \neq -2$, $f(x)=a+\frac{b}{x+2}$
2. A l'aide d'un changement de repère, tracer la courbe $(\mathcal{C})$ de f
3. Soit g la fonction définie par $g(x)=|f(x)|$
   a. Exprimer g(x) sans le symbole de la valeur absolue.
   b. Déduisez-en une méthode de construction de la courbe $(\mathcal{C}')$ de g
   c. Tracer $(\mathcal{C}')$ dans le même repère que $(\mathcal{C})$
   d. Déterminer graphiquement le nombre de solution de l'équation g(x)=m, $m \in \mathbb{R}$

EXERCICE N°14

Un super marché dispose d'un stock important d'un certain article. Le prix de vente est de 30f pièce et 100 articles sont vendus par semaine.
Le gérant constate que s'il diminue le prix de vente de 1f, il vend 100 articles de plus par semaine.

1. Calculer le chiffre de vente par semaine pour cet article lorsque le prix est de 30f ; de 29f et de 28f.
2. Noter x la diminution du prix de vente de cet article. Exprimer le chiffre de vente en fonction de x.
3. A l'aide de la forme canonique, trouvez x pour que le chiffre d'affaire soit maximal.

EXERCICE N°15

On considère la fonction f définie par $f(x)=\frac{1+x}{2-x}$

1. Déterminer les réels a et b tel que $\forall x \neq 2$, $f(x)=a+\frac{b}{x-2}$

2. A l'aide du changement de repère construire la représentation graphique (C) de f dans repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$.
3. Soit g la fonction définie par g(x)=-f(x) et (Γ) sa représentation graphique dans $(o, \vec{i}, \vec{j})$.
   a. Comment obtient-on (Γ) à partir de (C)?
   b. Construire (Γ) dans $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

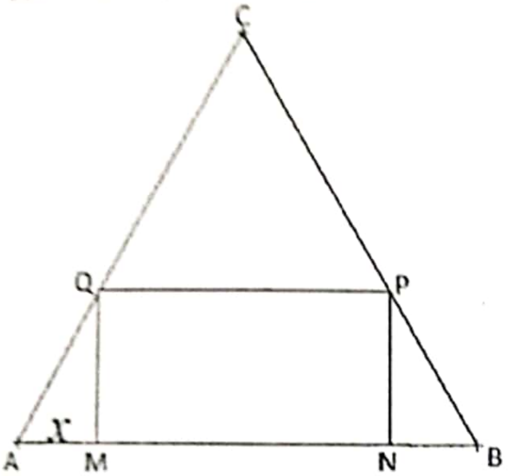
EXERCICE N°16

P est la parabole d'équation $y=9-x^2$. A et B sont les points de coordonnées respectives (-3 ; 0) et (3 ; 0) x est un réel de [0 ; 3], M et N sont les points de P d'abscisses respectives x et $-x$.

1. Faire une figure
2. Calculer l'axe S(x) du trapèze ABMN, et déterminer la valeur de x pour laquelle cette aire est maximale.

EXERCICE N°17

ABC est un triangle équilatéral de côté a. On inscrit dans ce triangle un rectangle MNPQ comme indiqué sur la figure suivante.



Posons AM=x. Déterminer x pour que l'aire du rectangle soit maximale.

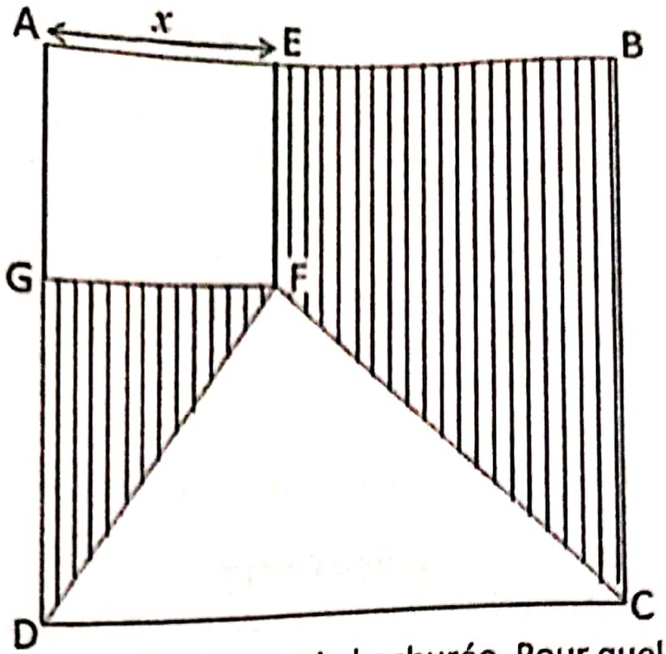
EXERCICE N°18

Soit f et g deux fonctions définies de $\mathbb{R}$ $vers\mathbb{R}$ par f(x)=$\sqrt{|x^2-1|}$ et g(x)=$\frac{x^2+1}{x^2-1}$

1. a. Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes : g_0f ; $f^2.g$
   b. Calculer leurs expressions explicites.
2. Ecrire sans le symbole de la valeur absolue les expressions suivantes :
   a. (g_0f) (x) pour $x\epsilon[-1;\ 0[\cup]0;1]$
   b. $(f^2.g)$ (x) pour $x\epsilon]-\infty$; $-\sqrt{2}[$

EXERCICE N°19

ABCD est un carré 10cm de côté. AEFG est un carré de côté x. $(0\leq x\leq 10)$



On désigne par A(x) l'aire en cm² de la partie hachurée. Pour quelle valeur de x la surface colorée a-t-elle la plus grande aire ? Indiquer l'aire correspondante.

EXERCICE N°20

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-x^2+4x-1$

1. A l'aide du changement de repère, tracer la courbe (C_f)
2. Soit g la fonction définie par $g(x)=|f(x)|$
   a) Exprimer g(x) en fonction de f(x).
   b) En déduire une méthode de construction de $(\mathcal{C}g)$.
   c) Tracer $(\mathcal{C}g)$.
3. Déterminer graphiquement le nombre de solution de l'équation g(x)=m ou m$\in \mathbb{R}$.

On donne $\sqrt{3} \approx 1.7$

CHAPITRE 4 : FONCTIONS NUMERIQUES LIMITES

EXERCICE N°1

1- Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1-3x^2}{x^2+3x}$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-2x^3+3x^2+1}{x^2-4}$ c) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-x-2}{x-2}$ d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

2- Calculer les limites des fonctions suivantes en -∞ et en +∞

a) $f(x)=\frac{2x^2-3x-1}{1-3x^2}$ b) $g(x) = \sqrt{x^2+1}+x$ c) $h(x)= \sqrt{3x^2-1}-3x+1$ d) $J(x)= \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x-2\sqrt{x^2-1}}$

3- Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes puis calculer les limites de chacune d'elles aux bornes de son ensemble de définition.

a) $K(x)=\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ b) $L(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}$ c)$=\frac{1}{x(x-1)}-\frac{1}{x}$ d) $N(x)=\frac{x\sqrt{x}-8}{4-x}$

EXERCICE N°2

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 1} 5x-3$; 2) $\lim\limits_{x\to -1} x^3+8x^2-2$; 3) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^3-7}{x-5}$; 4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{2}{\cos x}$; 5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \tan x$

6) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x}-3x$

EXERCICE N°3

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to\frac{4}{3}} \frac{(x-2)(3x-4)}{3x-4}$;2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3x^3-3x^2}{x}$; 3)$\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3+1}{x^3+x^2+4x+4}$; 4) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1-x^3}{x-1}$; 5) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$;

6) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{2x}$; 7) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{2-\sqrt{x+3}}$; 8) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-2x+1}{x^2-3x+2}$

EXERCICE N°4

Etudier la limite de la fonction f au point x_0 indiqué. Il peut être nécessaire d'étudier la limite à droite et la limite à gauche en x.

1) $f(x)=\frac{x^2+5}{x}$; $x_0=0$
2) $f(x)=\frac{3x+1}{x-2}$ $x_0= 2$
3) $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$; $x_0= 1$, $x_0= -1$
4) $f(x)=\frac{5|x|}{2-4x}$; $x_0=\frac{1}{2}$
5) $f(x) = \frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}$; $x_0= 0$
6) $f(x) =\frac{5-2x}{(2x-1)^2}$; $x_0=\frac{1}{2}$
7) $f(x)\frac{x^2-4}{x^3-8}$; $x_0= 2$
8) $f(x) = \frac{x^2-2x}{3x^2+x}$; $x_0=\frac{-1}{3}$, $x_0= 0$
9) $f(x)= \frac{-2}{(2+x)(3+x)}$; $x_0= 3$
10) $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x^2+3x-4}$; $x_0= 1$, $x_0= -4$

EXERCICE N°4

On donne : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}=1$

1-Démonter que :$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{1}{2}$

2-Déduisez en les limites en 0 de chacune des fonctions f, g et h définis par :

$F(x)=\frac{\sqrt{1+3x}-1}{x}$ $\quad g(x)=\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{2x^2}$ $\quad$ et $h(x)=\frac{\sqrt{1+\sin x}-1}{\sin 2x}$

EXERCICE N°5

Calculer les limites suivantes :

1.) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+3x}-1}{x}$; 2.) $\lim_{x\to 0}[\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{x^2-1}}{x})]$; 3.) $\lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{x-1}{x}}$; 4.) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$; 5.) $\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x+5}-2}{\sqrt{x+2}-1}$;

6.) $\lim_{x\to -\infty}\frac{x+2}{\sqrt{x^2-5}-3}$. On donne $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$ et $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

EXERCICE N°6

1- Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x\to +\infty}\frac{2\sqrt{x}-3x^2+1}{-4\sqrt{x}+3}$

b) $\lim_{x\to +\infty}\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}+\frac{3}{4}$

c) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x+1}{x^2-3x+2}$

d) $\lim_{x\to -1}(x+1)\tan(\frac{\pi}{2}x)$

e) $\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2+3x-1}{x\sqrt{x^2+4}-x^2+7}$

$x\to -\infty$

f) $\lim_{x\to -\infty}(1-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}).(4x+7)$

EXERCICE N°7

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x\to 4}\frac{x-2\sqrt{x}}{x-4}$; 2) $\lim_{x\to +\infty}\frac{x-2\sqrt{x}}{x-4}$; 3) $\lim_{x\to -3}\frac{2x^2+5x-3}{x^2+2x-3}$; 4) $\lim_{x\to 4}\frac{x-\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-2}$; 5) $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos x-\sin x}$

6) $\lim_{x\to +\infty}\frac{x}{\sqrt{4+x}-2}$; 7) $\lim_{x\to -2}\frac{5x-1}{-2x^2+x+10}$; 8) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2+2}{3-x}$; 9) $\lim_{x\to +\infty}(x-2\sqrt{x})$; 10) $\lim_{x\to +\infty}\frac{2x-1}{x^2+x+1}$

11) $\lim_{x\to 2}\frac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3}$

EXERCICE N°08

1. Soit f la fonction définie par $f(x)=\sqrt{x^2+2x}-x$
   a- Quel est l'ensemble de définition de f ?
   b- Etudier les limites de f aux bornes de D_f.

2. Exprimer en fonction de $\cos\frac{x}{2}$ et $\sin\frac{x}{2}$ les expressions : 1+cosx+sinx, 1-cosx+ sinx
3. Calculer : $\lim_{x\to \pi}\frac{1+\cos x+\sin x}{\cos\frac{x}{2}}$; $\quad\lim_{x\to 2\pi}\frac{1-\cos x+\sin x}{2\sin\frac{x}{2}}$

EXERCICE N°9

1. Soit g la fonction définie sur [0 ; +∞ [par $g(x)=\sqrt{x^2+2x}-x$
   a- Monter que : $|g(x)-1|\leq\frac{1}{2x}$ pour tout réel x >0
   b- En déduire $\lim_{x\to +\infty} g(x)$

2. Soit f la fonction définie sur [0, +∞ [par : $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$
   a- Monter que pour tout x >0, $0<f(x)\leq\frac{1}{2x}$
   b- En déduire $\lim_{x\to +\infty} f(x)$

NB : Les questions 1 et 2 sont indépendantes

EXERCICE N°10

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$-{0} par f (x) = $\frac{(x^2-1)\cos x+(x^2+1)\sin x}{x^3}$

1) a)Démonter que pour x >1 ; on a : $-\frac{2}{x} \leq f(x) \leq \frac{2}{x}$.

b) En déduire que pour x >1, $|f(x)| \leq \frac{2}{x}$ puis calculer la limite de f en$+\infty$

2) Soit g la fonction définie sur]1 ; 2 [U] 2, +∞ [par g (x) = $\frac{1-x\sqrt{x-1}}{1-\sqrt{x-1}}$

a)Calculer g (x) –x et donner son signe pour x∈]1 ; 2[U] 2 ; +∞ [.(on pourra se servir d'un tableau de signe établi sur]1 ; 2[U] 2 ; +∞[

b) Déduire de cette étude que : ∀ x ∈] 1 ; 2[U] 2 ; +∞ [g (x) > x.

c) Calculer la limite de g en +∞

EXERCICE N°11

1. Sachant que : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x-1}{x} = 0$,

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos -1}{x^2}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3\pi}{\pi x}$

2. Calculer : $\lim\limits_{x\to +\infty}(x - \sqrt{x^2+3x})$; $\lim\limits_{X\to 1} \frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}$; $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$; $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x+\cos x}$.

3. Soit f la fonction définie par : f(x)= $\frac{x^2+2x+5}{x+1}$

a) Trouver des réels a, b, c tel que pour tout x ∈ D_f : f (x)= ax + b+$\frac{c}{x+1}$

b) Calculer les limites de la fonction f aux bornes de son domaine de définition.

c)Déterminer l'équation de l'asymptote oblique et de l'asymptote verticale de la fonction f.

CHAPITRE 5 : FONCTIONS NUMERIQUES : DERIVATION

EXERCICE N°1

Calculer la dérivée de f sur D

1. $f(x) = \tan(3x)$, D= $[0 ; \frac{\pi}{6}]$
2. $f(x)= \sin(3x-\frac{\pi}{3})$, D= $\mathbb{R}$
3. $f(x)=\sqrt{\cos x}$, D= $[0 ; \frac{\pi}{2}]$
4. $f(x)= \frac{\tan x}{\tan^2 x-1}$, D= $[0 ; \frac{\pi}{4}[$
5. $f(x) = (\frac{x+1}{2x-3})^2$, D= $\mathbb{R} - (3/2)$
6. $f(x)= \frac{\cos x}{\sin x-1}$ D= $[0 ; \frac{\pi}{2}[$
7. $f(x) = \frac{x^2(x-1)^3}{2x+1}$ D= $\mathbb{R} - (-1/2)$
8. $f(x)=\frac{x^2-3x-5}{x^2-2x+3}$ D= $\mathbb{R}$
9. $f(x) = \sqrt{\frac{5x-1}{x-2}}$ D=$]2; +\infty[$
10. $f(x)= \frac{\cos x}{\sin x-2}$ D= $\mathbb{R}$

EXERCICE N°2

Dans chacun des cas suivants, f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par son expression explicite. Déterminer, l'ensemble de dérivabilité de f puis calculer f '(x).

a) $f(x)= \cos^3(4x+2)$

b) $f(x)= \sqrt{\frac{2x+1}{x+1}}$

c) $f(x)= \frac{\sqrt{2-3x}}{x^2-1}$

d) $f(x) = \frac{2+3x}{-x^2+3x-2}$

EXERCICE N°3

A- Déterminer la fonction dérivée des fonctions suivantes sur I :

1. $f(x) \longmapsto \frac{x-1}{x+1}\sqrt{x}$, I=$]0, +\infty[$
2. $g : x \longmapsto (x+1)\sqrt{x^2-3x-4}$, I=$]4 ; +\infty[$
3. $h : x \longmapsto \frac{(x^2-2)^3}{(2x+5)^2}$, I= $\mathbb{R}-\left\{-\frac{5}{2}\right\}$
4. $i : x \longmapsto \tan^4(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3})$, I = $[0,\frac{\pi}{2}]$

B) A l'aide du taux de variation de f en 1 étudier la dérivabilité de la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x^2+1}$ en 1.

EXERCICE N°4

f est la fonction de $\mathbb{R}$ définie par : $f(x)= \frac{2x^2-x+3}{3x-3}$

1°) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f puis calculer les limites de f aux bornes de D_f.

2°) Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.

EXERCICE N°5

1. Soit f la fonction définie par : $f(x) = ax + b + \frac{1}{3-x}$, a$\in \mathbb{R}$, b $\in \mathbb{R}$. Déterminer les réels a et b pour que la courbe (Cf) de f passe par le point A (2 ; 1) et admette en ce point une tangente horizontale.

2. (Cg) est la courbe représentative de la fonction g : x⟼ $\frac{x3}{(x-1)^2}$. Déterminer le point de (Cg) où la tangente est parallèle à la droite (D) d'équation −x+y-4=0.

EXERCICE N°6

1. Dans chacun des cas calculer la dérivée de la fonction sur l'ensemble I indiqué :

a) F : x⟼tan³ (4x), I= [0,π/8]

b) G : x⟼ $\sqrt{\frac{x}{x^2-3}}$; I=]-$\sqrt{3}$; 0[

c) H : X ⟼ cos⁴(3x-$\frac{\pi}{5}$), I= ℝ

d) I : x⟼ $\frac{(x-3)^2}{(3x+5)3}$, I= ℝ-$\left\{\frac{-5}{3}\right\}$

2. Trouvez l'ensemble des réels m pour lesquels la courbe représentative dans un repère orthonormée de la fonction f définie par f(x) = $\frac{mx-2}{(m+2)x+3}$ admet au point d'abscisse 1 une tangente perpendiculaire à la droite (D) d'équation y= $\frac{3}{2}$x+5

EXERCICE N°7

(C) est la courbe représentative de la fonction f définie par f(x) = $\frac{x}{x^2+2}$

a)Donner une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1

b) Existe – il des tangentes à (C) parallèle à la droite (D) : y = $-\frac{1}{4}$x ?

c)Existe- il des tangentes à (C) parallèles à la droite (D') : 4x-y=0 ?

EXERCICE N°8

Trouver les membres a, b, c tels que la parabole d'équation y= ax²+bx+c possède les propriétés suivantes :

Elle passe par le point A (3 ; 0) ;

La tangente en A est l'axe des abscisses ;

Elle passe par le point B (1 ; 2)

EXERCICE N°9

Calculer la dérivée de f sur l'ensemble D indiqué :

1. F (x) = tan (3x) ; D= [0 ; $\frac{\pi}{6}$[
2. F(x)= sin (3x-$\frac{\pi}{3}$) ; D= ℝ
3. F(x)= $\sqrt{cosx}$; D= [0 ; $\frac{\pi}{2}$ [
4. F(x)= $\frac{\cos x}{\sin x-1}$; D= [0 ; $\frac{\pi}{2}$[
5. F(x) = ($\frac{x+1}{x+2}$)³, D= ℝ-{−2}
6. F(x)= x$\sqrt{x^2+1}$; D= ℝ

EXERCICE N°10

Dans chacun des cas suivants, étudier la dérivabilité de la fonction f en x_0.

1) F : x ⟼ $\frac{1}{1-x}$, x_0= 0
2) F : x ⟼x³+1, x_0=a∈ ℝ
3) F : x ⟼x+$\sqrt{x-1}$, x_0= 1
4) F : x ⟼x+1+$\sqrt{x^2-4}$, x_0= -2

EXERCICE N°11

Démontrer que la fonction f de ℝ vers ℝ définie par : f(x)= x²$\sqrt{x}$ est dérivable en 0 et sur]0, +∞ [. Calculer pour tout x∈]0, + ∞ [, f'(x).

EXERCICE N°12

Après avoir déterminé l'ensemble de dérivabilité de la fonction f, calculer f'.

1) $F(x) = x - \sqrt{2x+3}$

2) $F(x) = \frac{3x^2-x+2}{3x-1}$

3) $F(x) = x^4(x^3+4x-3)^3$

4) $f(x) = \frac{x-1}{x+3}\sqrt{x}$

5) $f(x) = \frac{\sin^2 x}{\cos 5x}$

6) $f(x) = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

7) $f(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

8) $f(x) = (2x+1)\sqrt{2-3x}$

9) $f(x)\ \frac{1}{(3x+5)^7}$

10) $f(x) = \frac{\tan x}{1+\tan x}$

EXERCICE N°13

1°) f est la fonction rationnelle définie par : $f(x) = \frac{x-a}{x+a}$

Déterminer le nombre réel a pour que la fonction ait un nombre dérivé en a égal à $\frac{1}{2}$

2°) Déterminer le réel m pour que la courbe d'équation $y = (m-1)x^2+(3m+2)x+4$ admette au point d'abscisse -1 une tangente de coefficient directeur 6.

EXERCICE N°14

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$. La fonction f est définie par : $f(x)=x^3-3x^2+4$

1. Démontrer que la courbe(C_f) de f coupe l'axe $(0,\vec{i})$ en deux points A et B dont l'un a pour abscisse -1.
2. Déterminer les équations des tangentes en A et B

EXERCICE N°15

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$. f est la fonction définie par : $f(x)= x^3-2x^2+1$.

1) Déterminer les points de (C_f) où la tangente est parallèle à la droite (D), d'équation $y = 7x-9$

2) Déterminer les points de (C_f) où la tangente est perpendiculaire à la droite (Δ) d'équation $y = x+3$.

EXERCICE n°16

Déterminez les réels a et b de sorte que la courbe représentative de la fonction f définie sur ℝ par $f(x) = ax+b-\frac{6}{x}$ passe par le point A (2 ; 0) et admette en ce point la droite (Δ) d'équation $x-y-2=0$ pour tangente.

EXERCICE N°17

1- La fonction f définie par $f(x)= x\sqrt{x}$ est-elle dérivable en $x_0=0$?

2- La fonction f définie par $f(x)= \sqrt{x+1}$ est elle dérivable en $x_0=-1$?

3- Déterminer une équation de la tangente à la courbe de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^3+1}$ en $x_0=2$.

4- Calculer les dérivées des fonctions définies par :

$a(x)= \cos(3x+5)$

$b(x)= (x^3+x^2+3)^4$

$c(x)= \frac{2x+1}{x^2+x+1}$

$d(x)=2x\cos x + (x^2-2)\sin x$.

EXERCICE N°18

Etudier les variations de la fonction f puis dresser son tableau de variations :

1. $f(x)= 2x+1-\frac{2}{x-3}$

2. $f(x)=\frac{2x^2+12x}{x^2+4}$

3. $f(x)=x\sqrt{x+3}$

4. $f(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ sur $[0,\pi]$

EXERCICE N°19

Déterminer l'ensemble de dérivabilité puis la fonction dérivée de chacune des fonctions f, g et h (x) sous leur forme la plus simplifiée.

1) $f(x)=\sqrt{\frac{x-3}{x-1}}$
2) $f(x)=\frac{2x^2-3x+15}{2x^2-x-6}$;
3) $h(x)=\frac{\sin^2 x}{\cos x}$

EXERCICE N°20

a, b et c étant trois réels, on considère la fonction f définie par : $f(x) = ax^2+bx+c$.

1) Déterminer les valeurs a, b et c sachant que :
   - La courbe (C) de f dans un repère $(o,\vec{i},\vec{j})$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse $x=\frac{3}{2}$
   - Le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse 1 est -1.
   - La courbe (C) de f passe par le point A de coordonnées (1 ; -6).
2) Pour les valeurs de a , b et c trouvées, résoudre l'inéquation $f(x) \leq x-4$.

EXERCICE N°21

$(o,\vec{i},\vec{j})$ est un repère. Trouver toutes les hyperboles $\mathcal{H}$ qui possèdent les propriétés suivantes :

* Il passe par le point A (-1,6)
* La droite d'équation x= 1 est une asymptote verticale à $\mathcal{H}$.
*La droite d'équation y= 2 est une asymptote horizontale à $\mathcal{H}$.

NB : Il a pour équation $y=\frac{ax+b}{cx+d}$, $c\neq0$, $ad-bc\neq0$.

EXERCICE N°22

On considère la fonction rationnelle f définie par $f(x)=\frac{ax+b}{x^2-4}$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

1- Déterminer l'ensemble de définition de f.
2- Calculer la dérivée de f. A quelle condition portant sur a et b la fonction f est-elle strictement monotone sur chaque intervalle où elle est définie ?
3- Déterminer a et b pour que la courbe représentative (C_f) de f passe par le point A (0,-5/4) et admette en ce point une tangente de coefficient directeur $\frac{1}{2}$.
4- Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation
5- Tracer (C_f)

EXERCICE N°1

On considère la fonction numérique f définie par $f(x) = \frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+1$.

1. Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$
2. a)Calculer f'(x)

   b) Etudier le signe de f'(x)

   c)En déduire le sens de variation de f.

   d) Dresser le tableau de variation de f.
3. Ecrire une équation de la tangente (T) au point d'abscisse 0.

EXERCICE N°2

Soit la fonction f définie par $f(x)=\frac{x^2-5x-7}{x-2}$

1- Donner l'ensemble de définition D_f de la fonction f et calculer les limites de f aux bornes de D_f. Préciser les asymptotes éventuelles parallèles aux axes.

2- a)Déterminer trois membres réels a, b et c tels que $f(x) = ax+ b + \frac{c}{x-2}$

b) Montrer que la courbe (Cf) admet la droite (D) d'équation y= x-3 comme asymptote oblique en $-\infty$et en $+\infty$

3- a) Calculer f'(x) ; étudier son signe et en déduire le sens de variation de f. Dresser le tableau de variation de f.

4-Soit I le point d'intersection des asymptotes à (C_f)

a- Déterminer les coordonnées de I

b- Démontrer que I est centre de symétrie de (C_f).

EXERCICE N°3

On considère la fonction f définie par $f(x)=\frac{x^3+2x^2+4}{(x+1)^2}$. On appelle (C_f) la courbe de f dans un repère orthonormé $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ unité 2 cm .

1.a)Déterminer le domaine de définition D_f de f

b) Déterminer trois réels a, b et c tel que $f(x)= ax+ \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}$

2-Calculer les limites de f(x) aux bornes de D_f. (on pourra utiliser l'une ou l'autre des écritures de f(x)).

3-a)Montrer que $\forall\ x \in D_f$, $f'(x)= \frac{(x-1)(x^2+4x+8)}{(x+1)(x+1)^2}$

b) Monter que $\forall\, x\in D_f$, $x^2+4x+8 >0$

C) Déduire de ce qui précède le signe de f'(x) et le sens de variation de f.

4) Dresser le tableau de variation de f

5a) Montrer que la droite (D) : y=x est une asymptote oblique à la courbe (C_f).

b) Etudier la position relative de (C_f) et (D) puis préciser les coordonnées de leur point d'intersection.

6) Ecrire une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 0.

7) Construire (D), (T) et (C_f)

8) Résoudre graphiquement f(x)= m, $m \in \mathbb{R}$.

EXERCICE N°4

A. Soit le polynôme $p(x) =- x^3+6x^2-13x+8$

Sachant que 1 est une racine de p(x) étudier le signe de P (x)

B. f est la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = -x+1+\frac{x-1}{(x-2)^2}$. (C) sa courbe représentative dans repère orthonormé $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

1) a) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f

b) Démonter que pour tout $x \in Df$, $f'(x)=\frac{P(x)}{(x-2)^3}$

Etudier le signe de f'(x) et déduisez en le sens de variation de f.

a) Déterminer les limites de f aux bornes de D_f Dresser le tableau de variation de f.

2°) Soit (Δ) la droite d'équation y=-x+1

a) Déterminer les coordonnées du point A commun à (C_f) et à (Δ) :

b) Etudier la position de (C_f) par rapport à (Δ)

c)Démonter que (Δ) est une asymptote oblique à (Cf).

3) Ecrire une équation de la Tangente (T) à (Cf), au point d'abscisse 0.

4) Construire les asymptotes, (T) et (Cf).

EXERCICE N°5

On se propose d'étudier la fonction numérique f dont on connait le tableau de variation ci-dessous :

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	‖	-	-3	-	0	-	0	+	
f(x)	1	↗	3	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	3	↘	2	↘	-1	↗	0

1- Quel est l'ensemble de définition de la fonction f noté D ?

2- Quelles sont les limites aux bornes de D ? Donner les équations des asymptotes à la courbe (Cf)

3- Ecrire les équations des tangentes à la courbe (C_f) que le tableau de variation permet de connaître.

4- Tracer une esquisse de la représentation graphique (C_f).

EXERCICE N°6

f est la fonction définie par : $f(x)=\frac{x(2x-1)}{(x-1)^2}$.(C) est la représentation graphique de f dans un repère orthonormé (unité 2 cm)

1. Etudier la fonction f

2. Déterminer les coordonnées du point d'intersection A de (C) avec la droite (D) d'équation y= 2.

3.a)Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.

b) Déterminer le signe de f (x) +x. Déduisez en la position de (C) par rapport à (T).

4. Tracer (T), les asymptotes et (C).

EXERCICE N°7

1) f est la fonction définie par : $f(x)=\frac{-x^2+bx+3}{x-1}$

   Pour quelles valeurs de b, f admet- elle pas d'extrémum local ?

2) Le plan est muni d'un repère orthonormal $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et (C) est la courbe de la fonction f définie par : $f(x)=\frac{x^2+ax+b}{x^2+cx+d}$

   Déterminer les réels a, b, c, d pour que(C):

   - Coupe l'axe des abscisses au point A d'abscisse 2
   - admette en ce point une tangente de coefficient directeur 1,
   - admette pour axe de symétrie la droite d'équation 2x-1=0.

EXERCICE N°8

f est une fonction à variable définie par :
f est une fonction à variable définie par : et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$.

$f(x)=\frac{x^3+3x^2+10x+5}{(x+1)^2}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$.

1) Déterminer l'ensemble de définition Df de f.
2) a) Déterminer les réels a, b et c tel que pour tout x de D_f, on ait :
$f(x) = x + a + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}$
b) Pour les valeurs de a, b et c trouvées, montrer que la droite (D) d'équation $y= x+a$ est une asymptote oblique à (Cf).
c)Etudier la position de (C_f) par rapport à(D)
3) Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variations.
4) Tracer (D) et (C_f).
5) Déterminer graphiquement suivant les valeurs de m, le nombre et le signe des solutions de l'équation $x^3+(3-m)x^2+(10-2m)x + 5-m=0$.

EXERCICE N°9

On considère la courbe (C) d'équation $y= g(x)=\frac{x(ax+b)}{2(x-c)^2}$ où a, b, c sont des réels dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$ (d'unité 2 cm).

1- Déterminer les réels a, b et c pour que la courbe ait deux asymptotes d'équations respectives $x= 1$ et $y=\frac{3}{2}$ et que la tangente à(C) au point O ait pour équation $y= -2x$.
2- Soit f la fonction définie par $f(x)=\frac{3x^2-4x}{2(x-1)^2}$ et (Cf) sa courbe représentative dans le repère $(o,\vec{i},\vec{j})$.
   a) Etudier la fonction f
   b) Déterminer une équation de la tangente en O ainsi qu'au point d'abscisse $\frac{3}{2}$
   c) Etudier la positon de (C_f) par rapport à son asymptote horizontale.
   d) Tracer (Cf).
3- Soit (D_m) la droite d'équation $y= 4x+m$ où $m\in\mathbb{R}$. Déterminer graphiquement, suivant les valeurs de m, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 4x+m$.
4- Soit h la fonction définie par $h(x) = f(|x|)$
   a) Quelle est l'ensemble définition de h ?
   b) Etudier la parité de h. Que peut-on en déduire pour la Courbe (C_h) ?
   c)Comparer h (x) et f(x) pour tout $x \in [0,1[\cup]1, +\infty[$
   En déduire une explication de l'obtention de (C_h) à partir de (C_f) sans étudier h
   d) Tracer (C_h) dans le même repère que (C_f)
e) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $h(x) = \lambda$ où λ est un réel.

EXERCICE N°10

Soit la fonction f définie par $f(x)=\frac{2x^2+2x-1}{x^2+x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$.

1- Déterminer l'ensemble de définition D_f de f sous forme de réunion d'intervalles
2- Déterminer les réels a, b, c tels que : $\forall x \in Df$, $f(x)= a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x+1}$
3- Etudier la fonction f
4- Démontrer que la droite (D) d'équation $x= -\frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de la Courbe (C).
5- a)Tracer la courbe (C)
   b) Déterminer graphiquement le nombre et le signe des solutions de l'équation : $(2-m)x^2+(2-m)x-1=0$.

6- Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{2x^2+2x-1}{|x^2+x|}$

Donner une méthode de construction de (C') puis tracer (C') dans le même repère que (C).

7- On considère la suite (u_n) définie pour tout élément $n \in \mathbb{N}$ par : $u_n = 2 - f(n)$.

a)Calcule en fonction de n, la somme $S_n = U_1 + U_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + U_n$.

b) Etudier le sens de variations de la (S_n)

c)Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$

EXERCICE N°11

Soit f la fonction $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin^2 x + \cos x$

1°) a) Monter que f est périodique de période 2π

b) Etudier la parité de f

c) En déduire lorsqu'on peut choisir l'intervalle $I = [0,\pi]$ comme domaine d'étude.

2) Etudier les variations de f sur I puis dressez son tableau de variations.

EXERCICE N°12

Soit f la fonction définie par $f(x) = \cos 4x + 2\sin 2x$

1- Justifier le choix de l'intervalle $I = [0,\pi]$ comme intervalle d'étude.

2- Démontrer que pour tout nombre réel x : $f'(x) = 4\cos 2x\,(1 - 2\sin 2x)$.

3- A) Résoudre dans I, l'équation $f'(x) = 0$.

b) En déduire le sens de variation de f sur I.

d) Dresser le tableau de variation de f.

4. Démontrez que la droite (D) l'équation $x = \frac{\pi}{4}$ est un axe de symétrie de (C_f).

5. Tracer (C_f) dans le plan muni d'un repère orthogonal.

EXERCICE 13

Soit f la fonction définie sur $[-\pi,\pi]$ par : $f(x) = \cos x - \frac{1}{2}\sin 2x$.

1. Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.
2. Déterminer les points d'intersection de (C) avec les axes du repère.
3. Tracer (C_f).

EXERCICE N°14

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{\sin x}{\cos 2x}$

1. Déterminer D_f puis calculer $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}^-} f(x)$; $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}^+} f(x)$; $\lim\limits_{x \to \frac{3\pi}{4}^-} f(x)$; $\lim\limits_{x \to \frac{3\pi}{4}^+} f(x)$.
2. Montrer que f est périodique de période $T = 2\pi$.
3. Etudier la parité de f.
4. Déduire de 2) et 3) que l'on peut étudier f sur $D = [0,\pi] - \left\{\frac{\pi}{3} ; \frac{3\pi}{4}\right\}$.
5. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos x \cos 2x + 2\sin x \sin 2x = [1 + 2\sin^2 x]\cos x$.
6. Résoudre dans D_E, $[1 + 2\sin^2(x)]\cos x \geq 0$.
7. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation sur D_E.
8. Tracer sur D_E, (C_f).

EXERCICE N°15

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) : \frac{1}{3}\sin 3x - \sin x$.

1- Montrer que l'on peut restreindre l'étude de f à l'intervalle $[0,\pi]$.

2- Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) = -4\sin^2 x \cos x$

3- Déterminer le signe de f' (x) et dresser le tableau de variation de f sur $[0,\pi]$

4- Tracer la courbe (C) représentative de f sur $[-\pi, \pi]$

EXERCICE 16

Soif f la fonction définie par $f(x)=\frac{\sin x}{\cos x-\sin x}$

1- Déterminer l'ensemble de définition de f et montrer que f est π périodique.
2- Déterminer le sens de variation de f et les limites aux bornes de l'ensemble de définition.
3- Représenter la courbe (C) de la restriction de f à l'intervalle $[-\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}]$. On précisera la tangente à l'origine et au point d'abscisse π
4- Montrer que $f(x)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\tan(x+\frac{\pi}{4})$. En déduire un centre de symétrie pour courbe (C).

EXERCICE N°17

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sin x-\frac{2}{3}\sin 3x$.

1.a) Montrer que f est périodique de période 2π et étudier la parité de f.

b) Calculer $f(\pi-x)$. Que peut-on en déduire pour (C_f) ?

c) En déduire que l'on peut réduire le domaine d'étude de f à l'intervalle $I=[0,\frac{\pi}{2}]$

2. Montrer que : $f'(x)=\cos x\cos 2x$.

3- Etudier les variations de f sur I et dresser son tableau de variation.

4-Tracer la courbe (C_f) sur $[-\pi,\pi]$ dans un repère orthonormal $(o,\vec{i},\vec{j})$ l'unité graphique:2 cm)

EXERCICE N°18

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sin 3x$

a-Démonter que la fonction f est impaire et périodique de période $\frac{2\pi}{3}$. En déduire qu'il suffit d'étudier f sur $[0;\frac{\pi}{3}]$ pour connaitre les variations de f sur $\mathbb{R}$

b- Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0;\pi/3]$.

c- Tracer dans un repère orthonormal la représentation graphique de f pour $x\in\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

EXERCICE N°19

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{1}{2}\cos 2x+\cos x$

1- Démonter qu'il suffit d'étudier la fonction f sur $[0,\pi]$ pour connaître les variations de f sur $\mathbb{R}$
2- Calculer $f'(x)$ et résoudre $f'(x)=0$ sur $[0,\pi]$.
   Etudier le signe de $f'(x)$ sur $[0,\pi]$
3- Dresser le tableau de variations de f pour $x\in[0,\pi]$
4- Tracer la Représentation Graphique (C) de f dans un RON et pour $x\in[-\pi,2\pi]$
   Démontrer que toute droite D_k d'équation $x=k\pi$ est un axe de symétrie pour (C).

EXERCICE N°20

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\cos 2x-2\cos x+1$

1- Justifier pourquoi il est suffisant d'étudier f sur l'intervalle $I=[0,\pi]$
2- a) Calculer $f'(x)$
   b) Résoudre dans $[0,\pi]$ l'équation $f'(x)=0$ puis l'inéquation $f'(x)>0$
   c)Dresser le tableau de variation de f sur $[0,\pi]$. Préciser le minimum de f sur $[0,\pi]$;
   Quel est le tableau de variation de f sur $[-\pi,\pi]$?
3- On veut tracer la Représentation graphique (C) de f avec précision
   a-Résoudre l'équation $f(x)=0$ dans $[0,\pi]$
   Quels sont les points communs à la courbe (C) restreinte à $[-\pi,\pi]$ et à l'axe des abcisses ?
   Préciser les coefficients directeurs des tangentes à (C) en chacun de ces points
a) Tracer la courbe (C) restreintes à $[-\pi,\pi]$ compléter pour obtenir la courbe sur $[3\pi,3\pi]$
4- a) Résoudre l'inéquation $f(x)\leq 0$ dans $[-\pi,\pi]$

b) Quels sont les nombres x de $[-\pi,\pi]$ tes que $1< f(x)< 3$.

c)Retrouver les résultats en a) et b) à l'aide du graphique.

EXERCICE N°1

Dans chacun des cas suivants étudier la convergence de la suite (u_n) $n \in \mathbb{N}$ définie par :

a) $u_n = \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1}$

b) $u_n = \frac{\sqrt{4n^2+1}-n}{\sqrt{4n^2+1}+n}$

c) $u_n = 4^n+2^n$

d) $u_n = \frac{5^n-2^n}{5^n-3^n}$

e) $u_n = \left(\frac{4}{5}\right)^n - \left(\frac{5}{4}\right)^n$

f) $u_n = \frac{n\cos(1+\frac{1}{n})}{n^2+1}$

g) $u_n = 2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$

EXERCICE N°2

1- Soit u une suite arithmétique de raison r. Sachant que :

a) $u_0 = 2$ et r= 6. Calculer u_{29}.

b) $u_{94} = -181$ et $u_{10} = -1$. Calculer r.

2- Soit v une suite géométrique de raision q ; sachant que :

a) $v_1 = 2$ et q= 5. Calculer v_4.

b) $v_0 = 343$ et $v_3 = 1$ Calculer q.

3- u Est une suite arithmétique de raison r.

a) On sait que $u_0+u_1+u_2=333$. Calculer le terme u_1.

b) On sait que $u_0^2+u_1^2+u_2^2= 37205$. Calculer r.

EXERCICE N°3

1) Soit (u_n) la suite arithmétique telle que $u_2+u_3+u_4=15$ et $u_6=20$.

a) Calculer u_0 et la raison r.

b) Quel est le sens de variation de la suite (u_n) ?

c) Donner l'expression de u_n en fonction de n.

2) Soit (V_n) la suite géométrique de raison q >0. Telle que $V_4 = 10$ et $V_6 = 250$.

a. Calculer V_0 et la raison de q

b. Quel est le sens de variation de la suite (V_n)?

c. Donner l'expression de V_n en fonction de n.

EXERCICE N°4

1) (u_n) est une suite géométrique non constante. En outre $u_0 = 5$ et $2u_2 = 3u_1 - u_0$.
Déterminer la raison de (u_n).

2) Etudier la convergence de la suite (V_n) définie par $V_n = \frac{5^n-2^n}{5^n+3^n}$

EXERCICE N°5

1) a, b, c sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique telle que : $\begin{cases} a+b+c = 27 \\ a^2+b^2+c^2 = 275 \end{cases}$ Déterminer les valeurs de a, b et c

2) (u_n) est une suite arithmétique de raison r. On pose $S_n = U_0+U_1+U_2+\ldots\ldots\ldots+U_{n-1}$.
Sachant que : $u_{27}= 9{,}5$ et $S_{28}= 140$, Calculer u_0 et r.
En déduire S_n en fonction de n.

EXERCICE N°6

(u_n) est une suite croissante. (V_n) est la suite définie par : $V_n = \frac{1}{n}(U_1+U_2+...+U_n)$ pour tout $n \geq 1$ Démontrer que (V_n) est croissante.

EXERCICE N°7

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0=1$ et $u_{n+1}=\frac{u_n-1}{u_n+3}$.

1- Prouvez par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n>-1$.
2- Etudier le sens de variation de la suite (u_n).
3- Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $V_n=\frac{1}{u_n+1}$.
   a) Démontrez que (V_n) est une suite arithmétique que vous caractériserez.
   b) Exprimez V_n puis U_n en fonction de n.
   c) Exprimez la somme $S_n= V_0+ V_1+...+ V_{n-1}$ en fonction de n.

EXERCICE N°08

(U_n) est la suite définie par $U_0= 1$ et pour tout entier naturel n, $U_{n+1}=\frac{U_n}{2U_n+1}$.

1- Calculer U_1, U_2, U_3, U_4.
2- On pose pour tout n, $V_n=\frac{1}{U_n}$
   a) Montrer que (V_n) est une suite arithmétique que vous caractériserez.
   b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.
   c) Exprimer en fonction de n, $S_n= V_0+V_1+...V_{n-1}$.

Quelle est la limite de V_n quand n tend vers $+\infty$?
Déduisez en la limite de U_n quand n tend vers $+\infty$?

EXERCICE N°9

Déterminer la raison de la suite géométrique (U_n) définie par : $U_0=\frac{2}{3}$, $U_5=162$.
Calculer en fonction de n, la somme $S_n= U_0+U_1+...+U_n$.
Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

EXERCICE N°10

Soit (U_n) la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = -1 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 1 \end{cases}$

1) Calculer U_1, U_2 et U_3
2) Soit (V_n) la suite définie par : $V_n= U_n-2$
   a) Démontrer que (V_n) est une suite géométrique Caractérisez- là,
   b) Exprimer V_n en fonction de n, puis U_n en fonction de n.
   c) Exprimer en fonction de n les sommes ; $S_n = V_0+V_1+.....+ V_n$ et $S'_n= U_0 +U_1+.....+U_n$.
   d)

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n'$.

EXERCICE N°11

On définit la suite (U_n) par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{U_n+8}{2U_n+1}; n\in\mathbb{N} \end{cases}$

1) Calculer U_1, U_2 et U_3.
2) (V_n) est la suite définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par : $V_n = \frac{U_n-2}{U_n+2}$
   a) Calculer V_0, V_1.
   b) Monter que (V_n) est une suite géométrique que l'on caractérisera.
   c) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

d) Exprimer en fonction de n la somme
$S_n = V_0 + V_1 + ... + V_n$.

EXERCICE N°12

La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = \frac{2U_n - 16}{U_n - 6}$

1) Calculer U_1 et U_2. Vérifier que (U_n) n'est ni arithmétique ni géométrique
2) Montrer par récurrence que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $U_n < 4$.
3) Déduire que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $U_n < U_{n+1}$
   Quel est le sens de variation de la suite (U_n) ?
4) Soit (V_n) la suite définie par $V_n = \frac{1}{U_n - 4}$
   a)Montrer que (V_n) est une suite arithmétique
   b) Exprimez V_n puis U_n en fonction de n
   c)Calculer la somme $S_n = V_0 + V_1 + ... + V_n$.

EXERCICE N°13

On définit une suite (U_n) par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + n - 1 \end{cases}$

1) Calculer U_1, U_2 et U_3. La suite (U_n) est-elle arithmétique ? Est-elle géométrique ? On définit la suite (V_n) par $V_n = U_n - 2n + 6$. Calculer V_0, V_1, V_2 et V_3.
2) Montrer que la suite (V_n) est géométrique dont on précisera la raison et le premier terme. Etudier le sens de variation de la suite (V_n).
3) En déduire l'expression de V_n puis celle de U_n en fonction de n.
4) Calculer $S_n = V_0 + V_1 + ... + V_n$ et $S_n' = U_0 + U_1 + ... + U_n$.

EXERCICE N°14

Monsieur SAWADOGO désire acheter un vélo qui au 1er janvier 1998, coûtait 90 000F CFA. Ne pouvant disposer que de 77 000F CFA et ne voulant faire aucun emprunt, il décide de placer cette somme de 77 000FCFA.

Un établissement financier lui propose un placement à intérêt composé au taux annuel de 6%. On désigne par (U_n) le capital disponible au 1er Janvier de l'année (1998 +n).

1°) Calculer U_1, U_2, $U3$.

2°) Démontrer que (U_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison. Exprime U_n en fonction de n.

3°) A l'aide d'une calculatrice, déterminer à partir de quelle année Monsieur SAWADOGO Pourra acheter son vélo.

EXERCICE N°15

Le loyer mensuel d'une maison est de 50 000 F CFA

A) Le loyer augmente chaque année de 6% de l'année du contrat
   1- Quel sera le montant du loyer dans 8 ans ?
   2- Au bout de combien d'année le loyer aura t- il double ?
   3- Calculer le total des loyers payés pendant les 20 premières années.
B) Ce loyer augmente chaque année de 6%
   1- Quel sera le montant du loyer dans 8 ans ?
   2- Au bout de combien d'année le loyer aura t- il doublé ?
   3- Calculer le total des loyers payés pendant les 20 premières années

EXERCICE N°16

Une personne reçoit 20 000F en héritage le 1er Janvier 2008. Elle a placé cette somme à intérêts composés au taux de 7,5%.

1. Quelle somme disposera t- elle le 1er Janvier 2009 ?

2. On pose U_0= 20 000. On désigne par U_n la somme dont elle disposera le 1er janvier de l'année (2008+n) et par U_{n+1} celle dont elle disposera l'année suivante.
   a) Etablir une relation entre U_{n+1} et U_n. En déduire la nature de la suite (U_n).
   b) Exprimer pour tout entier $n \geq 0$, U_n en fonction de n.
   c) Calculer U_{12}.
3. Une publicité annonce : « gagner de l'argent avec le placement généreux qui rapporte 100% en 12 ans ».
a) Le placement est- il plus ou moins intéressant que le précédent ?
b) Déterminer son taux annuel sachant qu'il s'agit aussi d'un placement à intérêts composés
c) Calculer la limite de U_n.

EXERCICE N°17

Une entreprise estime le coût d'un forage ainsi :
- Le premier mètre creusé coûte 1 000F
- Puis chaque mètre creusé ensuite coûte 50F de plus que le mètre précédent

1) Evaluer le montant perçu pour le 50ème mètre creusé.
2) Quelle profondeur pourra atteindre le forage si l'on dispose d'un crédit de 519 750F ?.

EXERCICE N°18

Soit (U_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} U_1 = -1 \\ U_{n+1} = \frac{n}{2(n+1)}U_n + \frac{3(n+2)}{2(n+1)} ; \ \forall n \geq 1 \end{cases}$$

1- Démonter par récurrence que la suite (U_n) est majorée par 3.
2- Etudier le sens de variation de la suite (U_n).
3- On considère la suite (V_n) définie par. V_n= n $(3-U_n)$
a) Prouver que le suit (V_n) est géométrique. Préciser sa raison et calculer V_1.
b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.
c) Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} V_n$ et $\lim\limits_{n\to\infty} U_n$

EXERCICE N°19

(U_n) et (V_n) sont deux suites définies par :

$$\begin{cases} U_1 = 2 \\ \forall n \geq 1, \ U_{n+1} = \frac{2U_n+3V_n}{5} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} V_1 = 7 \\ \forall n \geq 1, V_{n+1} = \frac{U_n+4V_n}{5} \end{cases}$$

1. On pose $\forall n \geq 1$, $W_n = V_n - U_n$.
   a- Démontrer que (W_n) est géométrique
   b- Exprimer W_n en fonction de n. En déduire la limite de la suite (W_n).
2. A) Démontrer que la suite (U_n) est croissante et que la suite (V_n) est décroissante.
   b) Démontrer que la suite (U_n) est majorée et que la suite (V_n) est minorée
   c) En déduire la convergence des suites (U_n) et (V_n).

3. Soit (T_n) la suite telle que : $\forall n \geq 1$, $T_n = \frac{1}{3}U_n + V_n$
Démontrer que (T_n) est constante en déduire les limites des suites (U_n) et (V_n).

EXERCICE N°20

Soit (U_n) $n \geq 0$ la suite numérique définie par U_0= 1 et $U_{n+1}= \frac{1}{3}U_n + n - 1$ et soit (V_n) $n \geq 0$ la suite définie par $V_n=4U_n-6n+15$

1°) a) Calculer V_0.
   b) Démontrer que (V_n) $n \geq 0$ est géométrique et en déduire son expression explicite en fonction de n et V_0.

c) En-déduire que $U_n=\frac{19}{4}\times\frac{1}{3^n}+\frac{6n-15}{4}$

2) Démontrer que U_n peut s'écrire sous la forme $U_n = T_n+W_n$ ou (T_n) $n \geq 0$ est géométrique et (W_n) $n \geq 0$ est arithmétique $\forall n \in \mathbb{N}$.

3) Calculer $S_1= T_0+T_1+....+T_n$; $S_2= W_0+W_1+....+W_n$ et en déduire $S= U_0+U_1+......+U_n$.

EXERCICE N°21

On considère la suite (V_n) $n \in \mathbb{N}$ définie par la donnée de V_0 et de la condition :

$V_{n+1}=\frac{2V_n+1}{V_n+2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

1) a) Calculer $V_{n+1}-1$ puis $V_{n+1}+1$ en fonction de V_n.

b) En déduire une expression simple du quotient $\frac{V_{n+1}-1}{V_{n+1}+1}$ en fonction de V_n.

2) a) On pose $P_n=\frac{V_n-1}{V_n+1}$, en vous servant de la question précédente, montrer que P_n $n\in \mathbb{N}$ est une suite géométrique, préciser sa raison et son premier terme.

b) Exprimer P_n en fonction de n et de P_0.

c)Exprimer P_n en fonction de n et d V_0

d) Déterminer l'expression de V_n en fonction de n et de P_0.

EXERCICE N°22

Soit (V_n) la suite numérique définie sur $\mathbb{N}^*$ par $V_1= ½$ et $V_{n+1}=\frac{n+1}{2n}V_n$.

1- Calculer V_2, V_3 et V_4.

2- a) Démontrer que la suite $V_n >0$ pour $n>0$. (on pourra procéder par récurrence).

b) Démontrer que la suite (V_n) décroissante.

3- Soit (U_n) la suite numérique définie par $U_n=\frac{V_n}{n}$, $\forall n>0$.

a)Montrer que (U_n) est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.

b) Exprimer (U_n) puis (V_n) en fonction de n.

c)Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$. En déduire la convergence de (U_n).

EXERCICE N°23.

U et V sont les suites numériques définies par $U_0= 5/4$.

$U_{n+1}=\frac{1}{3}U_n-n-\frac{4}{3}$ ($n\in \mathbb{N}$) et $V_n= U_n + an +b$ où $a\in\mathbb{R}$ et $b \in\mathbb{R}$

1- Déterminer les réels a et b sachant que la suite (V_n) est une suite géométrique. Pour les valeurs de a et b déterminées au 1-)

2- Exprimer V_n puis U_n en fonction de n

3- On pose : $S_n= V_0+V_1+... +V_n$ et $T_n= U_0+ U_1+...+U_n$. Exprimer en fonction de n, S_n puis T_n.
Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$.

EXERCICE N°24.

Soit (U_n) la suite définie par : $U_0=1$ et $U_{n+1}=\frac{3U_n+4}{U_n+3}$ $\forall n\geq\mathbb{N}$.

1- Représenter graphiquement sur l'axe des abscisses $(o,\vec{\imath})$ les 5 premiers termes de la suite (U_n) et conjecturer la limite de (U_n).

2- a) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0\leq U_n \leq 2$.

b) Etudier le sens de variation de la suite (U_n).

3- Soit (V_n) la suite la suite définie par $V_n=\frac{U_n-2}{U_n+2}$ pour tout $n\in \mathbb{N}$

a) Démontrer que (V_n) est une suite géométrique que vous caractériserez.

b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

4- Calculer en fonction de n la somme $S_n = V_0+V_1+....V_{n-1}$ et étudier la convergence de la suite (S_n) $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE N°25

Soit a un réel et les suites (U_n) et (V_n) définies par : $U_0 = a$, $V_0 = -\frac{3}{4}$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = \frac{1}{5}(U_n + 4V_n)$ et $V_{n+1} = \frac{1}{5}(3U_n + 2V_n)$ et soit la suite (W_n) définie par $W_n = 3U_n + 4V_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1- Exprimer W_{n+1} en fonction de W_n. Que peut-on en déduire ?
2- Déduisez en V_n en fonction de U_n puis exprimer U_{n+1} en fonction de U_n seulement.
3- Exprimer U_n puis V_n en fonction de n .Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n$.
4- Exprimer en fonction de n la somme $S_n = V_0+V_1+...+V_n$ et Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

EXERCICE N°26

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{2}x+3$ et la suite U définie par $U_0 = -5$ $U_{n+1} = f(U_n)$.

1. Représenter graphiquement les premiers termes de la suite sur l'axe des abscisses d'un repère orthonormé.
2. Conjecturer le sens de variation et la limite de (U_n).
3. a. Déterminer le réel α tel que $f(\alpha) = \alpha$.
 b. Que représente α graphiquement

5- a) Démonter que (V_n) est une suite géométrique sachant que $V_n = U_n - \alpha$, $n \geq 0$
 b) En déduire V_n puis U_n en fonction n
 c)Démontrer les conjectures faites à la question 2

5- Exprimer en fonction de n, $S_n = U_0 + U_1 + ... + U_n$, et calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

EXERCICE N°27

On considère la suite (U_n) $n \in \mathbb{N}$ à terme positifs définie par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ \forall\, n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \frac{4U_n - 3}{U_n} \end{cases}$

1. La fonction f est dérivable sur$]0, +\infty[$et définie par : $f(x) = \frac{4x-3}{x}$. (C) désigne la courbe représentative de f dans le plan rapporté au repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$. L'unité graphique est 2 cm.
 a) Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.
 b) Tracer (C) et la droite (D) d'équation y= x
 c) Déduisez en la construction des termes U_0, U_1, U_2 et U_3 sur l'axe (OI).
2. a)Démonter que pour tout $x \in [2 ; 3]$, $f(x) \in [2 ; 3[$.
 b) En déduire que pour tout entier naturel n, $2 \leq U_n < 3$.
 c)Etudier les variations de la suite (U_n) $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 28

1. a)Montrer que pour tout réel α, on a : $2\cos^2 \alpha - 1 = \cos 2\alpha$
 b) Transformer cos a. cos b en somme
2. Soit la suite (U_n) définie par :
$$\begin{cases} U_0 = 1, U_1 = \cos 3 \\ U_{n+1} = 2\, U_1 . U_n - U_{n-1} \; [n \geq 1] \end{cases}$$
 a) Calculer U_2, U_3 et U_4. (on donnera le résultat sous la forme cosp, $p \in \mathbb{N}$)
 b) Faites une conjecture sur le terme général de (U_n) puis démontrez le par récurrence.

EXERCICE N°29

Scanné avec CamScanner

Soit les suites (V_n) et (W_n) définies par $\begin{cases} V_0 = 2 \\ V_{n+1} = \frac{9-11V_n}{4-6V_n} \end{cases}$ $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$W_n = \frac{2V_n - 3}{1 - V_n}$

1- Démontrer que la suite (W_n) est une suite géométrique à caractériser
2- Exprimer V_n en fonction de n. Etudier la convergence de (V_n)
3- Exprimer en fonction de n : $S_n = W_0 + W_1 + \dots + W_n$ et
$P_n = W_0 \times W_1 \times \dots \times W_n$

EXERCICE N°30

On considère la suite (U_n) définie par :

$$\begin{cases} U_0 \in [0,1] \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \sqrt{\frac{1+U_n}{2}} \end{cases}$$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq U_n \leq 1$
b) Montrer que (U_n) est croissante ; est-elle convergente ? Justifier
c) On pose $u_0 = \cos(\varphi)$ avec $\varphi \in \left[\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.
Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $U_n = \cos\left(\frac{\varphi}{2^n}\right)$
d) Etudier la limite de (U_n).

EXERCICE N°31

1) x, y et z sont dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite géométrique croissante. Calculer ces trois nombres, sachant que leur somme est 63 et la somme de leurs inverses est $\frac{7}{16}$
2) Soit (U_n) $n \in \mathbb{N}$ cette suite de premier terme x
a) Calculer S_n la somme des n premiers termes
b) Donner le sens de variation et la limite de (U_n).

EXERCICE 32

Soit (a_n) et (b_n) les suites réelles définies par : $a_0 = 2$, $b_0 = 4$ et pour tout entier naturel n :
$a_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + 3b_n)$.
$b_{n+1} = \frac{1}{4}(3a_n + b_n)$.

1) Calculer a_1, b_1, a_2 et b_2.

Sur une droite (D) graduée et rapportée au repère $(o, \vec{i})$ placer les points A_0, B_0, A_1, B_1, A_2 et B_2 d'abscisses respectives a_0, b_0, a_1, b_1, a_2 et b_2 sur la droite (D).

2) Soit (U_n) la suite définie par $U_n = a_n + b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que la suite (U_n) est constante. En déduire que pour tout entier naturel n les segments $[A_n, B_n]$ et $[A_{n+1}, B_{n+1}]$ ont le même milieu I dont on donnera l'abscisse.
3) Soit (V_n) la suite de terme général $V_n = a_n - b_n$
a) Monter que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison
b) Exprimer V_n en fonction de n et calculer $\lim_{n \to +\infty} V_n$. Que peut-on en déduire de la distance $A_n B_n$ lorsque n tend vers $+\infty$?

B- Exprimer a_n et b_n en fonction de n. En déduire $\lim_{n \to +\infty} a_n$; $\lim_{n \to +\infty} b_n$.

EXERCICE 33

Soit(U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, U_{n+1} = \frac{1+U_n^2}{2U_n} \end{cases}$

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \geq 1$.

2) a- Etudier le sens de variation de la suite (U_n).

b- En déduire que (U_n) converge.

3) a- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(U_n - 1)$.

b- En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

c- En déduire la limite de la suite (U_n).

4) soit (S_n) la suite definie sur $\mathbb{N}^*$ par : $S_n = \sum_{k=1}^{n} U_k = U_1 + U_2 + \ldots + U_n$.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \leq S_n \leq n + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

b) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{S_n}{n}$

EXERCICE N°1

Résoudre dans ℕ, les équations suivantes :

a) $A_n^2 + A_n^3 = 4n$

b) $C_n^5 = 17C_n^4$

c) $C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + C_{2n}^3 = 387n$

d) $A_n^3 = 90n$

EXERCICE N°2

A- Une enquête sur la lecture de trois revues x, y, z portant sur un échantillon de 1 000 personnes donne les résultats suivants :

* 60% lisent X, 50% lisent Y et 50% lisent Z
* 20% lisent Y et Z, 30% lisent X et Z et 30% lisent et X et Y
* 10% lisent les trois revues

Parmi ces 1 000 personnes :

1. Combien lisent deux de ses revues exactement ?
2. Combien ne lisent aucune de ces revues.

B) Démontrer que pour tous naturels n et p tel que :

a) n > p on a : $C_n^{p+1} = \frac{n-p}{p+1} C_n^p$.

b) $1 \leq p \leq n-1$ on a: $C_{n+1}^{P+1} = C_n^{p+1} + C_n^p$

EXERCICE N°3

Un sac contient 5 boules blanches, 2 boules rouges et 3 boules noires toutes indiscernables au toucher. Une main tire simultanément trois (3) boules du sac.

1) Combien y a t- il de tirages possibles ?
2) Combien y a t- il de tirages contenant :
   a) 3 boules de couleurs différentes
   b) 3 boules noires
   c) 2 boules rouges
   d) Aucune boule blanche

EXERCICE N° 4

Au cours de la Kermesse du lycée, une loterie est organisée. Sur 150 billets, 15 sont gagnants. Pour un tirage, Sosthène prend simultanément 5 billets. Déterminer :

1- Le nombre total de résultats de ce choix
2- Le nombre de résultats contenant :
   a) 0 billet gagnant,
   b) 2 billets gagnants ;
   c) Au plus 4 billets gagnants.

EXERCICE N°5

On pose que n et p sont des entiers naturels tels que 1 ≤ p ≤n.

1-a) Développer à l'aide de la formule du binôme de Newton $(x+1)^n$ puis en déduire :

$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n$

b) Vérifier que $pC_n^p = nC_{n-1}^{p-1}$.

2-En déduire $S_1 = \sum_{p=1}^{n} pC_n^p$

3- En remarquant que $p^2 = p(p-1)+p$, calculer $S_2 = \sum_{p=1}^{n} p^2 C_n^p$

EXERCICE N°6

Un sac contient 9 jetons numérotés 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9.

1- On tire 3 jetons successivement avec remise. On place les jetons côté à côte dans l'ordre du tirage. Combien peut-on former ainsi de nombres de trois chiffres ?
2- On procède au tirage de 3 jetons successivement mais sans remise. On place les jetons côte à côte dans l'ordre du tirage Combien peut-on former ainsi de nombres de 3 chiffres ?
3- On procède au tirage de 3 jetons simultanément. Combien peut-on obtenir de résultats différents ?

EXERCICE N°7

Une urne contient 4 boules vertes et 6 boules bleues. On extrait simultanément trois boules.

a) Combien y a t- il de tirages possibles ?
b) Combien y a t- il de tirages comportant exactement 2 boules vertes ?
c) Combien y a-t-il de tirages ne comportant aucune boule verte ?
d) Combien y a t- il de tirages comportant au moins une boule verte ?

EXERCICE N°8

On considère un sac contenant 5 boules vertes et 6 boules bleues. On effectue quatre fois le tirage d'une boule sans remise en notant à chaque fois la couleur de la boule tirée.

a) Combien y a t- il de tirages possibles ?
b) Combien y a t- il de tirages commençant par une boule verte
c) Combien y a t- il de tirages ne comportant que des boules vertes ?
d) Combien y a t- il de tirages contenant au moins une boule bleue ?

EXERCICE N°9

Le conseil d'administration d'une petite entreprise doit désigner son bureau comportant un président un trésorier et un secrétaire. Dix candidats se présentent.

1) De combien de façons peut-on constituer ce bureau sachant qu'une personne peut occuper plusieurs postes ?
2) De combien de façons peut-on constituer ce bureau sachant qu'une personne ne peut pas occuper plus d'un poste ?

EXERCICE N°10

Une urne contient 5 boules noires, 3 boules blanches et 4 boules rouges

1- On tire successivement avec remise 5 boules
a) Combien y a t- il de tirages possibles ?
b) Combien y a t- il de tirages possibles comportant 2 noires et 3 blanches ?
2- On tire successivement sans remise 5 boules. Répondre aux mêmes questions a) et b)
3- On tire simultanément 5 boules. Répondre aux mêmes questions a) et b)
c) Combien y a t- il de tirages possibles comportant 2 rouges, 1 noire et 3 blanches ?

EXERCICE N°11

Une urne contient 7 boules dont 4 noires. On tire successivement avec remise 5 boules. Combien y a t- il de tirages contenant au moins 2 boules noires ?

EXERCICE N°12

Une urne contient neuf boules numérotées de 1 à 9.

1°) De combien de façon différentes est – il possibles de tirer trois boules simultanément de l'urne ?

2-En déduire $S_1 = \sum_{p=1}^{n} pC_n^p$

3- En remarquant que $p^2 = p(p-1)+p$, calculer $S_2 = \sum_{p=1}^{n} p^2 C_n^p$

EXERCICE N°6

Un sac contient 9 jetons numérotés 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9.

1- On tire 3 jetons successivement avec remise. On place les jetons côté à côte dans l'ordre du tirage. Combien peut-on former ainsi de nombres de trois chiffres ?
2- On procède au tirage de 3 jetons successivement mais sans remise. On place les jetons côte à côte dans l'ordre du tirage
Combien peut-on former ainsi de nombres de 3 chiffres ?
3- On procède au tirage de 3 jetons simultanément. Combien peut-on obtenir de résultats différents ?

EXERCICE N°7

Une urne contient 4 boules vertes et 6 boules bleues. On extrait simultanément trois boules.

a) Combien y a t- il de tirages possibles ?
b) Combien y a t- il de tirages comportant exactement 2 boules vertes ?
c) Combien y a-t-il de tirages ne comportant aucune boule verte ?
d) Combien y a t- il de tirages comportant au moins une boule verte ?

EXERCICE N°8

On considère un sac contenant 5 boules vertes et 6 boules bleues. On effectue quatre fois le tirage d'une boule sans remise en notant à chaque fois la couleur de la boule tirée.

a) Combien y a t- il de tirages possibles ?
b) Combien y a t- il de tirages commençant par une boule verte
c) Combien y a t- il de tirages ne comportant que des boules vertes ?
d) Combien y a t- il de tirages contenant au moins une boule bleue ?

EXERCICE N°9

Le conseil d'administration d'une petite entreprise doit désigner son bureau comportant un président un trésorier et un secrétaire. Dix candidats se présentent.

1) De combien de façons peut-on constituer ce bureau sachant qu'une personne peut occuper plusieurs postes ?
2) De combien de façons peut-on constituer ce bureau sachant qu'une personne ne peut pas occuper plus d'un poste ?

EXERCICE N°10

Une urne contient 5 boules noires, 3 boules blanches et 4 boules rouges

1- On tire successivement avec remise 5 boules
a) Combien y a t- il de tirages possibles ?
b) Combien y a t- il de tirages possibles comportant 2 noires et 3 blanches ?
2- On tire successivement sans remise 5 boules. Répondre aux mêmes questions a) et b)
3- On tire simultanément 5 boules. Répondre aux mêmes questions a) et b)
c) Combien y a t- il de tirages possibles comportant 2 rouges, 1 noire et 3 blanches ?

EXERCICE N°11

Une urne contient 7 boules dont 4 noires. On tire successivement avec remise 5 boules. Combien y a t- il de tirages contenant au moins 2 boules noires ?

EXERCICE N°12

Une urne contient neuf boules numérotées de 1 à 9.
1°) De combien de façon différentes est – il possibles de tirer trois boules simultanément de l'urne ?

CHAPITRE 9 : STATISTIQUES

EXERCICE N°1

On Effectue des essais sur un échantillon de deux cent vingt lames électriques afin de tester leur durée de vie. Cette durée est exprimée en heures. Les résultats sont regroupés par classes dans le tableau suivant

Durée en heures	[1100,1200[	[1200,1300[	[1300,1400[	[1400,1500[	[1500,1600[	[1600,1700[	[1700,1800[	[1800,1900[
Effectif	6	14	25	75	80	10	8	2

1. Quelle est la population étudiée ? le caractère étudié ? la classe médiane ? la classe modale ?
2. a) Tracer la courbe des fréquences cumulées croissantes
   b) Utiliser cette courbe pour déterminer la médiane
3. Calculer la moyenne, la variance et l'écart type de cette série

4- Calculer le pourcentage des lampes dont la durée de vie est dans l'intervalle $[\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma]$

5-Un autre lot de lampes électriques de même puissance, provenant d'un autre fabriquant est également testé.

La moyenne de durée de vie de 1400h et l'écart type de 140h.

Quel est celui des deux lots qui vous semble être le meilleur ?

EXERCICE N°2

Une entreprise artisanale fabrique chaque jour 250 pièces de tissu. Leur longueur est inégale, suivant la qualité du tissu ou l'équipe chargée de la fabrication. La production d'une journée peut être résumée par le tableau statistique suivant :

Longueur (en m)	[20 ; 24[	[24 ; 28[	[28 ; 32[	[32 ; 36[	[36 ; 40[
Nombre de pièces	40	70	50	42	48

1) Quelle est la population étudiée ? Quel est le caractère étudié ? Calculer l'étendue de cette série.
2) Calculer la moyenne $\bar{x}$, la variance V et l'écart type σ de cette série.
3) a) Construire l'histogramme et la courbe des effectifs cumulés croissants.
   c) Utiliser cette courbe pour déterminer la médiane M_e de cette série.

EXERCICE N°3

Les masses de 70 élèves d'une classe de 1ère sont données ci-dessous (en kg) :

60	69	61	54	64	65	56	58	75	68
75	51	66	64	69	53	57	58	66	63
58	73	57	67	64	51	66	73	73	58
69	65	70	58	68	54	75	69	63	70
57	64	72	77	51	65	65	55	68	64
64	65	77	54	64	61	60	63	75	76
75	58	70	72	64	63	60	69	62	71

1- Regrouper ces données en classes d'amplitude 5 dont la première est [50,55[
2- Calculer la moyenne $\bar{x}$, la variance V et l'écart type σ de la nouvelle série statistique ainsi obtenue.
3- Déterminer le pourcentage des élèves ayant une masse comprise entre $\bar{X}-\sigma$ et $\bar{X}+\sigma$.

NB : Tous les résultats seront donnés à 10^{-2} près par défaut.

EXERCICE N°4

Lors D'une enquête portant sur 1300 personnes on a demandé le temps passé par jour devant le téléviseur. On a obtenu le tableau suivant :

Temps mis (en h)	[0,1[	[1,2[	[2,3[	[3,4[	[4,5[	[5,6[	[6,7[	[7,8[
Effectifs	170	309	432	221	103	41	10	14

1- Quel est l'étendue le caractère, la classe médiane de cette série ?
2- Calculer la moyenne$\bar{x}$, la variance V et l'écart typeσ.
3- Déterminer le pourcentage des personnes se trouvant dans l'intervalle $[\bar{x}-\sigma, \bar{x}+\sigma]$
4- Construire le diagramme en bâton les effectifs cumulés décroissants

NB : Tous les résultats seront donnés à 10^{-2} près par défaut

EXERCICE N°5

On veut étudier l'effet d'un produit P sur une tumeur cancéreuse chez le rat. On greffe cette tumeur à 120 rats, puis on forme deux groupes de 60 animaux, la répartition des rats étant aléatoire.

Le premier groupe noté A, reçoit le produit à l'aide d'une injection en solution dans du sérum physiologique, alors que le second groupe, noté B, reçoit le sérum uniquement.

On s'attache à la durée de survie de ces rats à partir de la greffe :

Durée de survie en mois	[0,1[	[1,2[	[2,3[	[3,4[	[4,5[	[5,6[	[6,7[
Effectifs groupe A	0	1	6	11	25	12	5
Effectif groupe B	2	3	9	19	16	08	3

1. Calculer la moyenne et l'écart type de la série A
2. Calculer la moyenne et l'écart type de la série B
3. Calculer pour chacune de ses séries les pourcentages d'effectifs se trouvant pas dans l'intervalle $[\bar{x}-2\sigma, \bar{x}+2\sigma]$. Le produit P est-il efficace ?

EXERCICE N°6

Pour étudier l'effet de la caféine sur la fréquence cardiaque, on réalise l'expérience suivante : Douze sujets prenant une tasse de café décaféiné puis, vingt-quatre heures plus tard, une tasse du même café avec caféine. Ils ignorent si le café contient de la caféine ou non. La fréquence cardiaque, en nombre de battements par minutes, est mesurée, à chaque fois, 2 heures après absorption du café.

Le tableau suivant indique les résultats obtenus

Sujet n°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Fréquence cardiaque café	82	96	88	62	66	74	64	76	80	72	91	68

décaféiné : xi												
Fréquence cardiaque que café normal : yi	80	90	92	64	72	76	74	84	90	92	89	84

On note x_i la fréquence cardiaque du sujet n° i) après absorption de café décaféine et y_i après absorption de café normal. On pose $Z_i = y_i - x_i$. Par exemple $Z_1 = 80-82=-2$.

1- Dresser le tableau statistique de la série $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{12}$.
2- Calculer la moyenne $\bar{Z}$ et l'écart type σ_z de la série statistique $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{12}$.
3- On pose $t=\frac{\bar{Z}\sqrt{n}}{\sigma_z}$, n désigne le nombre de sujets (n= 12). Lorsque t >2,2 les statistiques médicaux estiment que la caféine augmente de façon significative la fréquence cardiaque deux heures après son absorption. Calculer t et conclure

NB : Donner tous les résultats à 10^{-2} pris par défaut.

PROPOSITION DE CORRIGES

PARTIE 1 : POLYNÔMES ET FRACTION RATIONNELLE

Exercice 1

1. **Résoudre dans R.×R les systèmes suivants :**

$$(S_1)\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ xy=6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2+2xy=25 \\ xy=6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x+y)^2=25 \\ xy=6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A)\begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases} ou\ (B)\begin{cases} x+y=-5 \\ xy=6 \end{cases}$$

$(A): X^2-5X+6=0$

$(B): X^2+5X+6=0$

$\Delta=1$

$X_1=2$ et $X_2=3$

$\Delta=1$

$X_1=-2$ et $X_2=-3$

$S_{A_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}}=\{(2;3)(3;2)\}$

$S_{B_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}}=\{(-2;-3)(-3;-2)\}$

$S_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}=S_{A_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}}\cup S_{B_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}}$

$$\boxed{S_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}=\{(2;3)(3;2)(-2;-3)(-3;-2)\}}$$

$$(S_2)\begin{cases} x^4+y^4=17 \\ xy=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x^2)^2+(y^2)^2=17 \\ x^2y^2=4 \end{cases}$$

Posons $\Rightarrow X=x^2 et Y=y^2$

$$\Rightarrow \begin{cases} X^4+Y^4=17 \\ XY=4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X^2+2XY+Y^2=25 \\ XY=4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (X+Y)^2=25 \\ XY=4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (a)\begin{cases} X+Y=5 \\ XY=4 \end{cases} ou\ (b)\begin{cases} X+Y=-5 \\ XY=4 \end{cases}$$

$(a): a^2-5a+4=0$

$(b): b^2+5b+4=0$

$\Delta=9\Rightarrow\sqrt{\Delta}=3$

$\Delta=9\Rightarrow\sqrt{\Delta}=3$

$a_1=1$ et $a_2=4$

$b_1=-4$ et $b_2=-1$

$S_a=\{(1;4)(4;1)\}$

$S_b=\{(-4;-1)(-1;-4)\}$

$$\begin{cases} X=1 \\ Y=4 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=1 ou x=-1 \\ y=2 ou y=-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X=4 \\ Y=1 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=2 ou x=-2 \\ y=1 ou y=-1 \end{cases}$$

$\begin{cases} X=-1 \\ Y=-4 \end{cases}$ *alors x et y n'existent pas*

$\begin{cases} X=-4 \\ Y=-1 \end{cases}$ *alors x et y n'existent pas*

$$\boxed{S_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}=\{(1;2)(-1;-2)(2;1)(-2;-1)\}}$$

Resolvons dans $\mathbb{R}$ puis dans $\mathbb{N}$

$$\frac{1}{2}\le\frac{(x-3)^2}{(x+1)^2}\le 1$$

$$\Leftrightarrow\frac{(x+1)^2}{2}\le(x-3)^2\le(x+1)^2$$

$$\Leftrightarrow(x+1)^2\le 2(x-3)^2\le 2(x+1)^2$$

$$\Leftrightarrow(x^2+2x+1)\le 2(x^2-6x+9)\le 2(x^2+2x+1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-12x+18 \le 2x^2+4x+2 & \boxed{1} \\ 2x^2-12x+18 \ge x^2+2x+1 & \boxed{2} \end{cases}$$

$\boxed{1}$ $2x^2-12x+18 \le 2x^2+4x+2$

$$\Leftrightarrow -16x \le -16$$

$$\Leftrightarrow x \ge 1$$

$S_1 = [1\,;\,+\infty[$

$\boxed{2}$ $2x^2-12x+18 \ge x^2+2x+1$

$$\Leftrightarrow x^2-14x+17 \ge 0$$

$$\Delta = 128 = \left(8\sqrt{2}\right)^2$$

$$x_1 = \frac{14-8\sqrt{2}}{2} \; ; \; x_2 = \frac{14+8\sqrt{2}}{2}$$

$$x_1 = 7-4\sqrt{2} \; ; \; x_2 = 7+4\sqrt{2}$$

$$S_2 = \left]-\infty;7-4\sqrt{2}\right] \cup \left[7+4\sqrt{2};+\infty\right[$$

$$S_{\mathbb{R}} = S_1 \cap S_2$$

$$S_{\mathbb{R}} = \left[1;7-4\sqrt{2}\right] \cup \left[7+4\sqrt{2};+\infty\right[$$

$$S_{\mathbb{N}} = \mathbb{N} - \{0;2;3;4;5;6;7;8;9;10;11;12\}$$

$$f(x) = \left(1+\sqrt{1+x^2}\right)^3 - \left(1-\sqrt{1+x^2}\right)^3$$

est une fonction polynôme

$$Df = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 1+x^2 \ge 0\}$$

$1+x^2 \ge 0 \Leftrightarrow x^2 \ge -1$ (*Toujours vrai*) donc $Df = \mathbb{R}$

Soit $a = \sqrt{1+x^2}$

$$f(x) = (1+a)^3 - (1-a)^3$$

$$= (1+a)^2(1+a) - (1-a)^2(1-a)$$

$$= (1+2a+a^2)(1+a) - (1-2a+a^2)(1-a)$$

$$= (1+2a+a^2+a+2a^2+a^3) - (1-2a+a^2-a+2a^2-a^3)$$

$$= 1+3a+3a^2+a^3 - (1-3a+3a^2-a^3)$$

$$= 6a+2a^3$$

$$= a(6+2a^2)$$

$$= \sqrt{1+x^2}\left[6+2\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2\right]$$

$$= (8+2x^2)\sqrt{1+x^2}$$

$$\begin{cases} Df = \mathbb{R} \\ f(x) = (2x^2+8)\sqrt{1+x^2} \end{cases}$$

donc f n'est pas une fonction polynôme

Exercice n°2

$$P(x) = 9x^4 - 36x^3 + 29x^2 + 14x$$

1.

a) Démontrons qu'il existe deux réels a et b tel que :

$$p(x) = a(x^2-2x)^2 + b(x^2-2x)$$

$$p(x) = a(x^2-2x)^2 + b(x^2-2x)$$

$$= a(x^4-4x^3+4x^2) + bx^2 - 2bx$$

$$= ax^4 - 4ax^3 + 4ax^2 + bx^2 - 2bx$$

$$= ax^4 - 4ax^3 + (4a+b)x^2 - 2bx$$

Par identification des coefficients de monômes de même degré

$$\begin{cases} a = 9 \\ b = -7 \end{cases}$$

Par suite

$$p(x) = 9(x^2-2x)^2 - 7(x^2-2x)$$

b) Déduisons en une factorisation de p

$$p(x) = 9(x^2-2x)^2 - 7(x^2-2x)$$

$$p(x) = 9(x^2-2x)^2 - 7(x^2-2x)$$

$$= (x^2-2x)(9x^2-18x-7)$$

$$= x(x-2)(9x^2-18x-7)$$

$$9x^2-18x-7 = 9\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{7}{3}\right)$$

$$\boxed{p(x)=9x(x-2)\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{7}{3}\right)}$$

2. Soit $r(x)=\dfrac{-x^3+\frac{2}{3}x^2+\frac{7}{3}x+\frac{2}{3}}{p(x)}$

a)

$$D_r=\{x\in\mathbb{R} / p(x)\neq 0\}$$

$$D_r=\mathbb{R}\setminus\left\{0;2;-\frac{1}{3};\frac{7}{3}\right\}$$

b) $Calculons\ r\left(\dfrac{-1}{3}\right)$

$\left(\dfrac{-1}{3}\right)\notin D_r\ donc\ r\left(\dfrac{-1}{3}\right) n'existe\ pas$

c) Simplification de r(x) sur Dr

$$r(x)=\frac{-x^3+\frac{2}{3}x^2+\frac{7}{3}x+\frac{2}{3}}{p(x)}$$

$$posons\ u(x)=-x^3+\frac{2}{3}x^2+\frac{7}{3}x+\frac{2}{3}$$

$$u(-1)=-(-1)^3+\frac{2}{3}(-1)^2+\frac{7}{3}(-1)+\frac{2}{3}$$

$$u(-1)=\frac{7}{3}-\frac{7}{3}$$

$$u(-1)=0\ donc\ (-1)\ est\ racine\ de\ u$$

Par division euclidienne on obtient :

$$u(x)=\frac{1}{3}(x+1)\left(-3x^2+5x+2\right)$$

Par suite $r(x)=\dfrac{-(x+1)(x-2)\left(x+\frac{1}{3}\right)}{9x(x-2)\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{7}{3}\right)}$

$$\boxed{r(x)=\frac{-(x+1)}{9x\left(x-\frac{7}{3}\right)}}$$

d) $\text{Re}\,solvons\ dans\ \mathbb{R}\ puis\ dans\ \mathbb{Z}\ r(x)\leq 0$

x	$-\infty$		-1		$\frac{-1}{3}$		0		2		$\frac{7}{3}$		$+\infty$
$-(x+1)$		+	0	−		−		−		−		−	
$9x(x-7/3)$		+		+	0	−		−	0	+		+	
$r(x)$		+	0	−	‖	−	‖	+	‖	+	‖	−	

$$\boxed{S_{Dr}=\left[-1;-\frac{1}{3}\right[\cup\left]-\frac{1}{3};0\right]\cup\left]\frac{7}{3};+\infty\right[}$$

$$\boxed{S_{\mathbb{Z}}=\{-1\}\cup\mathbb{Z}^{+}\setminus\{0;1;2\}}$$

Exercice n ° 4

$$P(x)=6x^3+4x^2-2x-1$$

a, b et c des racines de P

$$P(x)=6(x-a)(x-b)(x-c)$$

$$P(x)=6x^3+6(a+b+c)x^2+6(ab+bc+ac)x-6abc$$

Par identification des monômes de même degré

$$\begin{cases}-6(a+b+c)=4\\ 6(ab+bc+ac)=-2\\ -6abc=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(a+b+c)=\dfrac{-2}{3}\\ (ab+bc+ac)=-\dfrac{1}{3}\\ abc=\dfrac{1}{6}\end{cases}$$

$$\boxed{a+b+c=-\frac{2}{3}}$$

$$\boxed{a\ b\ c\ =\ \frac{1}{6}}$$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{ab+bc+ac}{abc}=\frac{-1}{3}\times 6$$

$$\boxed{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=-2}$$

$$(a+b+c)^2=a^2+2a(b+c)+(b+c)^2$$

$$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ac)$$

$$a^2+b^2+c^2=\left(\frac{-2}{3}\right)^2-2\left(\frac{-1}{3}\right)=\frac{4}{9}+\frac{2}{3}$$

$$\boxed{a^2+b^2+c^2=\frac{10}{9}}$$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}\right)$$

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2-2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}\right)$$

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2-2\left(\frac{a+b+c}{abc}\right)$$

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=(-2)^2-2\left(\frac{\frac{-2}{3}}{\frac{1}{6}}\right)$$

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=4+\frac{4}{3}\times\frac{6}{1}=4+4\times 2$$

$$\boxed{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=12}$$

Exercice n°7

1.

a) *Démontrons que* $\forall x\in\mathbb{R}$

$$x^3=\left(\frac{x^2+x}{2}\right)^2-\left(\frac{x^2-x}{2}\right)^2$$

$$\left(\frac{x^2+x}{2}\right)^2-\left(\frac{x^2-x}{2}\right)^2=\left(\frac{x^2+x}{2}-\frac{x^2-x}{2}\right)\left(\frac{x^2+x}{2}+\frac{x^2-x}{2}\right)$$

$$\left(\frac{x^2+x}{2}\right)^2-\left(\frac{x^2-x}{2}\right)^2=\left(\frac{2x}{2}\right)\left(\frac{2x^2}{2}\right)=x^3$$

$$\boxed{donc\ x^3=\left(\frac{x^2+x}{2}\right)^2-\left(\frac{x^2-x}{2}\right)^2}$$

b) $f(x)=\left(\frac{x^2-x}{2}\right)^2$. *Démontrons que* $f(x+1)-f(x)=x^3$

$$f(x+1)-f(x)=\left(\frac{(x+1)^2-(x+1)}{2}\right)^2-\left(\frac{x^2-x}{2}\right)^2$$

$$f(x+1)-f(x)=\left(\frac{x^2+x}{2}\right)^2-\left(\frac{x^2-x}{2}\right)^2$$

$\boxed{f(x+1)-f(x)=x^3}$ D'après 1.a)

c) *Etablissons que* $1^3+2^3+...+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

$f(x+1)-f(x)=x^3$

$x=1; f(2)-f(1)=1^3$

$x=2; f(3)-f(2)=2^3$

$x=3; f(4)-f(3)=3^3$

. . .

. . .

. . .

$x=n; f(n+1)-f(n)=n^3$

Par addition membre à membre et après simplification, on a :

$$1^3+2^3+...+n^3=f(n+1)-f(1)$$

$$=\left(\frac{(n+1)^2-(n+1)}{2}\right)^2-\left(\frac{1-1}{2}\right)^2$$

$$=\left(\frac{(n+1)(n+1-1)}{2}\right)^2$$

$$\boxed{1^3+2^3+...+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}}$$

2. $(E): -x^2+2x+4=0$

a)

Posons $a=-1; b=2$ *et* $c=4$

$ac=-4$ *et* $-4\prec 0\Rightarrow ac\prec 0$

$\Rightarrow -4ac\succ 0$

$\Rightarrow b^2-4ac\succ b^2\succ 0$

$\Rightarrow \Delta\succ 0$

Donc (E) *admet deux racines* x_1 *et* x_2 *distinctes.*

De plus $x_1x_2=\frac{c}{a}=-4$

$x_1x_2\prec 0\Leftrightarrow x_1\prec 0\prec x_2$ *car* $x_1\prec x_2$

$\boxed{(E)\ \text{admet deux racines } x_1 \text{ et } x_2 \text{ tel que } x_1\prec 0\prec x_2}$

b)

Trouvons la valeur numérique du réel :

$$A=\frac{x_1-1}{x_1}+\frac{x_2-1}{x_2}.$$

$$A=\frac{x_1-1}{x_1}+\frac{x_2-1}{x_2}$$

$$A=\frac{x_1x_2-x_2{}^2+x_1x_2-x_1}{x_1x_2}$$

$$A=\frac{2x_1x_2-(x_1+x_2)}{x_1x_2}$$

$$A=2-\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}$$

$$A=2-\frac{2}{-4}$$

$$\boxed{A=\frac{5}{2}}$$

<u>Exercice n°8</u>

Soit $f(x)=2x^4+2x^3-2x^2-x-2$

1. <u>Calculons f(x)-f(a)</u>

$$f(x)-f(a)=2x^4+3x^3-2x^2-x-2-2a^4-3a^3+2a^2+a+2$$

$$f(x)-f(a)=2(x^4-a^4)+3(x^3-a^3)-2(x^2-a^2)-(x-a)$$

2. <u>Factorisons f(x)-f(a) par x-a</u>

$$f(x)-f(a)=2(x^4-a^4)+3(x^3-a^3)-2(x^2-a^2)-(x-a)$$

$$\boxed{f(x)-f(a)=(x-a)\left[2x^3+(2a+3)x^2+(2a^2+3a-2)x+(2a^3+3a^2-2a-1)\right]}$$

$$f(x)-f(a)=2x^4+3x^3-2x^2-x-2-2a^4-3a^3+2a^2+a+2$$

$$f(x)-f(a)=2(x^4-a^4)+3(x^3-a^3)-2(x^2-a^2)-(x-a)$$

$$f(x)-f(a)=2(x-a)(x^3+ax^2+a^2x+a^3)+3(x-a)(x^2+ax+a^2)$$
$$-2(x-a)(x+a)-(x-a)$$

$$f(x)-f(a)=(x-a)\left[2(x^3+ax^2+a^2x+a^3)+3(x^2+ax+a^2)-2(x+a)-1\right]$$

$$f(x)-f(a)=(x-a)(2x^3+2ax^2+2a^2x+2a^3+3x^2+3ax+3a^2-2x-2a-1)$$

Déterminons m pour que $\forall x\in\mathbb{R}\ f(x)\prec 0$

$f(x)\prec 0$ *si et seulement si* $\Delta\prec 0$

3. $\Delta=4-4m$

$$\Delta=4(1-m)\Leftrightarrow 4(1-m)\prec 0$$
$$1-m\prec 0$$
$$m\succ 1$$

Verifions que $f(1)=0$ *puis deduisons une factorisation de* $f(x)$

$$f(1)=2+3-2-1-2$$
$$f(1)=0$$
$$f(x)-f(1)=(x-1)(2x^3+5x^2+3x+2)$$
$$f(x)=(x-1)(2x^3+5x^2+3x+2)$$

4. $g(x)=(2x^3+5x^2+3x+2)$

a) Calculons g (-2)

$$g(-2)=\left[2(-2)^3+5(-2)^2+3(-2)+2\right]$$
$$g(-2)=-16+20-6+2$$
$$\boxed{g(-2)=0}$$

b) <u>*Deduisons une factorisation de* $g(x)$</u>

<u>$g(x)=(x+2)h(x)$</u>

$g(-2)=0$ *donc g est factorisable par* $x+2$. *Par suite*

$$g(x)=(x+2)h(x)\Leftrightarrow h(x)=\frac{g(x)}{(x+2)}$$

Par division euclidienne on obtient $h(x)=2x^2+x+1$

$$\boxed{g(x)=(x+2)(2x^2+x+1)}$$

c) *Verifions que* $h(x)$ *n'admet pas de racine*

$$h(x)=2x^2+x+1$$
$$\Delta=-7\prec 0$$

<u>*donc h n'a pas de racine*</u>

5.

<u>*Trouvons une factorisation complete de* $f(x)$.</u>

$$\boxed{f(x)=2(x-1)(x+2)(2x^2+x+1)}$$

6. *Résolvons dans* $\mathbb{R}$ $f(x)=0$ *et* $f(x)\geq 0$

$f(x)=0\Leftrightarrow x=1$ *et* $x=-2$ $\boxed{S_{\mathbb{R}}=\{-2;1\}}$

$$f(x)\geq 0\Leftrightarrow 2(x-1)(x+2)(2x^2+x+1)\geq 0$$
$$\Leftrightarrow 2(x-1)(x+2)\geq 0 \text{ car } (2x^2+x+1)\geq 0$$
$$\Leftrightarrow x\in\left]-\infty;-2\right]\cup\left[1;+\infty\right[$$

$$\boxed{S_{\mathbb{R}}=x\in\left]-\infty;-2\right]\cup\left[1;+\infty\right[}$$

<u>Exercice n°10</u>

1. $f(x)=-x^2+2x-m$

$\boxed{\forall m \in]1;+\infty[\quad \Delta \prec 0 \ et \ f(x) \prec 0}$

2. $g(x) = x^2 - (m+1)x + 4$

a)
Déterminons les valeurs pour lesquelles $g(x) = 0$ admet une seule solution.

$.g(x) = 0$ admet une solution pour $\Delta = 0$

$\Delta = (m+1) - 4 \times 4 = m^2 + 2m - 15$

$\Delta = 0 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 15 = 0$

$\Delta = 64$

$m_1 = -5 \qquad m_2 = 3$

$\boxed{S_{\mathbb{R}} = \{-5;3\}}$

$\boxed{\text{Pour } m_1 = -5 \text{ ou } m_2 = 3 \ g(x) = 0 \text{ admet une solution}}$

b) Déterminons les valeurs pour lesquelles g n'admet pas de solution.

$g(x) = 0$ n'admet pas de solution pour Δ

$\Delta \prec 0 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 15 \prec 0$

$\boxed{m \in]-5;3[}$

Exercice n°17

$(E): 2x^4 - 9x^3 + 8x^2 - 9x + 2 = 0$

1. Vérifions que 0 n'est pas solution de (E)

posons $f(x) = 2x^4 - 9x^3 + 8x^2 - 9x + 2$

$(E) \Leftrightarrow f(x) = o$

$f(0) = 2\times0 - 9\times0 + 8\times0 - 9\times0 + 2$

$f(0) = 2$ et $2 \neq 0$

donc 0 n'est pas solution de (E).

Deduisons en que $(E) \Leftrightarrow (E'): 2x^2 - 9x + 8 - \frac{9}{x} + \frac{2}{x^2} = 0$

$x \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 0$

$(E): 2x^4 - 9x^3 + 8x^2 - 9x + 2 = 0$

$x^2\left(2x^2 - 9x + 8 - \frac{9}{x} + \frac{2}{x^2}\right) = 0$

or $x^2 \neq 0$ donc

$(E) \Leftrightarrow 2x^2 - 9x + 8 - \frac{9}{x} + \frac{2}{x^2} = 0 : (E')$

$$\boxed{(E) \Leftrightarrow (E'): 2x^2 - 9x + 8 - \frac{9}{x} + \frac{2}{x^2} = 0}$$

2. Montrons que si x_0 est racine de (E) alors $\frac{1}{x_0}$ est aussi racine (E).

x_0 est racine de $(E) \Leftrightarrow f(x_0) = 0$

$f\left(\frac{1}{x_0}\right) = 2\left(\frac{1}{x_0}\right)^4 - 9\left(\frac{1}{x_0}\right)^3 + 8\left(\frac{1}{x_0}\right)^2 - 9\left(\frac{1}{x_0}\right) + 2$

$f\left(\frac{1}{x_0}\right) = 2\times\frac{1}{x_0^4} - 9\times\frac{1}{x_0^3} + 8\times\frac{1}{x_0^2} - 9\times\frac{1}{x_0} + 2$

$f\left(\frac{1}{x_0}\right) = \frac{2 - 9x_0 + 8x_0^2 - 9x_0^3 + 2x_0^4}{x_0^4}$

$f\left(\frac{1}{x_0}\right) = \frac{f(x_0)}{x_0^4}$ or $f(x_0) = 0$ donc $f\left(\frac{1}{x_0}\right) = 0$

d'où $\frac{1}{x_0}$ est racine de (E).

3.
a) Calculons

$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$

b)
Montrons qu'en effectuant le changement de variable $Y = x + \frac{1}{x}$

on peut ramener la resolution de (E) à celle d'une équation du second degré

$y = x + \frac{1}{x} \Rightarrow y^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$

$\Rightarrow y^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$

d'après 1°) $(E) \Leftrightarrow (E')$

$(E) \Leftrightarrow 2x^2 - 9x + 8 - \frac{9}{x} + \frac{2}{x^2} = 0$

$(E) \Leftrightarrow 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 9\left(x + \frac{1}{x}\right) + 8 = 0$

$(E) \Leftrightarrow 2(y^2 - 2) - 9y + 8 = 0$

$(E) \Leftrightarrow 2y^2 - 9y + 4 = 0$

$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + \frac{1}{x} \\ 2y^2 - 9y + 4 = 0 \end{cases}$

c) *Déduisons les racines de l'équation (E)*

$2y^2-9y+4=0$

$\Delta=49$

$y_1=\frac{1}{2}$ et $y_2=4$

$y_1=x+\frac{1}{x}\Leftrightarrow 2x^2-x+2=0$

$\Delta=-15$

$\Delta\prec 0$ donc $S_1=\{\ \}$

$y_2=x+\frac{1}{x}\Leftrightarrow x^2-4x+1=0$

$\Delta=12$

$x_1=\frac{4-2\sqrt{3}}{2};x_2=\frac{4+2\sqrt{3}}{2}$

$x_1=2-\sqrt{3};x_2=2+\sqrt{3}$

$S_2=\{2-\sqrt{3};2+\sqrt{3}\}$

Exercice 21

$f(x)=\frac{1}{x(x+1)(x+2)}$

1. *Déterminons les réels a, b et c tel que*

$$f(x)=\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x+2}$$

$$f(x)=\frac{a(x+1)(x+2)+bx(x+2)+cx(x+1)}{x(x+2)(x+1)}$$

$$f(x)=\frac{a(x^2+3x+2)+b(x^2+2x)+c(x^2+x)}{x(x+2)(x+1)}$$

$$f(x)=\frac{(a+b+c)x^2+(3a+2b+c)x+2a}{x(x+2)(x+1)}$$

Par identification

$$\begin{cases}a+b+c=0\\3a+2b+c=0\\2a=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{2}\\b+c=-\frac{1}{2}\\2b+c=-\frac{3}{2}\end{cases}$$

$$\boxed{a=\frac{1}{2}\ ;\ b=-1\ ;\ c=\frac{1}{2}}$$

$$f(x)=\frac{1}{2x}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2(x+2)}$$

2. *Déduisons en S.*

$$\frac{1}{1\times2\times3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{2\times3\times4}=\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+\frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{3\times4\times5}=\frac{1}{6}-\frac{1}{4}+\frac{1}{10}$$

$$\dots\ \dots$$

$$\frac{1}{46\times47\times48}=\frac{1}{92}-\frac{1}{47}+\frac{1}{96}$$

Par somme membre par membre et par simplification on a

$$S=\frac{1}{4}-\frac{1}{47}+\frac{1}{96}$$

$$S=\frac{47\times24-96\times47}{47\times96}$$

$$\boxed{S=\frac{1079}{4512}}$$

PARTIEII : Applications

Exercice n°2

Soit $f:\mathbb{R}-\{-3\}\to\mathbb{R}-\{2\}$

$$x\mapsto\frac{2x+1}{x+3}$$

1°) Démontrons que f est une bijection

Soit $m\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$ tel que $f(x)=m$

$$f(x)=m\Leftrightarrow\frac{2x+1}{x+3}=m$$

$$\Leftrightarrow 2x+1=mx+3m$$

$$\Leftrightarrow x(2-m)=3m-1$$

$m\neq2\Leftrightarrow -m\neq-2\Leftrightarrow 2-m\neq0$

$$f(x)=m \Leftrightarrow x=\frac{3m-1}{2-m}$$

$$x=-3-\frac{5}{m-2}$$

Vérifions si $\frac{3m-1}{2-m} \in \mathbb{R}\setminus\{-3\}$

$m \neq 2 \Leftrightarrow m-2 \neq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{-5}{m-2} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow -3-\frac{5}{m-2} \neq -3$$

Donc $\frac{3m-1}{2-m} \in \mathbb{R}\setminus\{-3\}$

D'où $S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{3m-1}{2-m}\right\}$

L'équation $f(x)=m$ admet une seule solution donc f est une application bijective de $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$ sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

2°) Déterminons sa bijection réciproque f^{-1}.

$f^{-1}:\mathbb{R}\setminus\{2\} \rightarrow \mathbb{R}\setminus\{-3\}$

$$x \mapsto \frac{3x-1}{2-x}$$

3°) Calculons $fof^{-1}(x)$

$$fof^{-1}(x)=\frac{2\left(\frac{-3x+1}{x-2}\right)+1}{\left(\frac{-3x+1}{x-2}\right)+3}$$

$$=\frac{-6x+2+x-2}{x-2}\times\frac{x-2}{3x-6-3x+1}$$

$$=\frac{-5x}{-5}=x$$

$$fof^{-1}(x)=x$$

$$f^{-1}\circ f(x)=\frac{3\left(\frac{2x+1}{x+3}\right)-1}{2-\left(\frac{2x+1}{x+3}\right)}$$

$$f^{-1}\circ f(x)=\frac{6x+3-x-3}{x+3}\times\frac{x+3}{2x+6-2x-1}$$

$$f^{-1}\circ f(x)=\frac{5x}{5}=x$$

$$f^{-1}\circ f(x)=x$$

Exercice n°6

$$f:[2;+\infty[\rightarrow \left]\frac{\sqrt{2}}{2};\sqrt{3}\right]$$

$$x \mapsto \sqrt{\frac{x+1}{2x-3}}$$

a°) Démontrons que f est une bijection.

$m \in \left]\frac{\sqrt{2}}{2};\sqrt{3}\right] / f(x)=m$

$$f(x)=m \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x+1}{2x-3}}=m$$

$$\frac{x+1}{2x-3}=m^2 \Leftrightarrow 2m^2x-3m^2=x+1$$

$$\Leftrightarrow 2m^2x-x=3m^2+1$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{3m^2+1}{2m^2-1}$$

Car $2m^2-1 \neq 0$ en effet

$$m \in \left]\frac{\sqrt{2}}{2};\sqrt{3}\right] \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \prec m \leq \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \prec m^2 \leq 3$$

$$\Leftrightarrow 1 \prec 2m^2 \leq 6$$

$$\Leftrightarrow 0 \prec 2m^2-1 \leq 5$$

Donc $2m^2-1 \neq 0$.

Vérifions si $\frac{3m^2+1}{2m^2-1} \in [2;+\infty[$

$$\frac{3m^2+1}{2m^2-1}=\frac{3}{2}+\frac{\frac{5}{2}}{2m^2-1}$$

$m \in \left]\frac{\sqrt{2}}{2};\sqrt{3}\right] \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \prec m \leq \sqrt{3}$

$\Leftrightarrow 0 \prec 2m^2 - 1 \leq 5$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2m^2-1} \geq \frac{1}{5}$

$\Leftrightarrow \frac{\frac{5}{2}}{2m^2-1} \geq \frac{1}{5} \times \frac{5}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{3}{2} + \frac{\frac{5}{2}}{2m^2-1} \geq \frac{3}{2} + \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{3m^2+1}{2m^2-1} \geq 2$

Donc $\frac{3m^2+1}{2m^2-1} \in [2;+\infty[$

$S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{3m^2+1}{2m^2-1}\right\}$

f est une bijection de $[2;+\infty[$ sur $\left]\frac{\sqrt{2}}{2};\sqrt{3}\right]$

b. <u>Déterminons f^{-1}</u>

$f^{-1} : \left]\frac{\sqrt{2}}{2};\sqrt{3}\right] \to [2;+\infty[$

$x \mapsto \frac{3x^2+1}{2x^2-1}$

c. <u>Calculons $fof^{-1}(x)$ et $f^{-1} o f(x)$</u>

$fof^{-1}(x) = f\left[f^{-1}(x)\right]$

$fof^{-1}(x) = \sqrt{\frac{f^{-1}(x)+1}{2f^{-1}(x)-3}}$

- $f^{-1}(x)+1 = \frac{3x^2+1}{2x^2-1} + 1$

$= \frac{3x^2+1+2x^2-1}{2x^2-1}$

$f^{-1}(x)+1 = \frac{5x^2}{2x^2-1}$

- $2f^{-1}(x) - 3 = 2\left(\frac{3x^2+1}{2x^2-1}\right) - 3$

$= \frac{6x^2+2-6x^2+3}{2x^2-1}$

$= \frac{5}{2x^2-1}$

Par suite

$fof^{-1}(x) = \sqrt{\frac{5x^2}{2x^2-1} \times \frac{2x^2-1}{5}} = \sqrt{x^2} = |x|$

Or $x \in [2;+\infty[\Rightarrow x \succ 0$ donc $|x| = x$

$fof^{-1}(x) = x$

$f^{-1} o f(x) = \frac{3[f(x)]^2+1}{2[f(x)]^2-1}$

$= \frac{3 \times \frac{x+1}{2x-3} + 1}{2 \times \frac{x+1}{2x-3} - 1}$

$= \frac{5x}{2x-3} \times \frac{2x-3}{5}$

$f^{-1} o f(x) = x$

<u>Exercice n°8</u>

1.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto x^2\sqrt{3} - x - 2\sqrt{3}$

a°) <u>Résolvons f(x)=0</u>

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2\sqrt{3} - x - 2\sqrt{3} = 0$

$\Delta = 1 + 24 = 25$

$x_1 = \frac{1-5}{2\sqrt{3}}$ $\qquad$ $x_2 = \frac{1+5}{2\sqrt{3}}$

$= \frac{-2}{\sqrt{3}}$ $\qquad$ $= \frac{3}{\sqrt{3}}$

$S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{-2\sqrt{3}}{3};\sqrt{3}\right\}$

b°) <u>Vérifions si f est surjective ou bijective.</u>

Soit $m \in \mathbb{R} / f(x) = m$

$f(x) = m \Leftrightarrow \sqrt{3}x^2 - x - 2\sqrt{3} = m$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}x^2 - x - 2\sqrt{3} - m = 0$

$\Delta = 1 + 4\sqrt{3}\left(2\sqrt{3} + m\right)$

$$\Delta = 4\sqrt{3}m + 25$$

- Pour $m \prec \dfrac{-25\sqrt{3}}{12}$, $\Delta \prec 0$

  l'équation f(x)=m n'admet pas de solution. Donc f n'est pas surjective et n'est donc pas bijective.

2°) Soit

$$g : [-1;1] \to [-1;1]$$
$$x \mapsto \frac{2x}{x^2+1}$$

a°) Montrons que g est une application bijective.

soit $m \in [-1;1] / g(x) = m$

$$g(x) = m \Leftrightarrow \frac{2x}{x^2+1} = m$$
$$\Leftrightarrow mx^2 + m = 2x$$
$$\Leftrightarrow mx^2 - 2x + m = 0$$

* Pour $m = 0; -2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ et $0 \in [-1;1]$

$S_{\mathbb{R}} = \{0\}$

* Pour $m \neq 0; \Delta = 4 - 4m^2$

- $m \in \{-1;1\}$; $\Delta = 0$; $x_0 = 1$ et $1 \in [-1;1]$

  $S_{\mathbb{R}} = \{1\}$

- Pour $m \in]-1;0[\cup]0;1[$ $\Delta \succ 0$

$$x_1 = \frac{2-2\sqrt{1-m^2}}{2m} \qquad x_2 = \frac{2+2\sqrt{1-m^2}}{2m}$$
$$x_1 = \frac{1-\sqrt{1-m^2}}{m} \qquad x_2 = \frac{1+\sqrt{1-m^2}}{m}$$

* Vérifions si $x_1 \in [-1;1]$

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{1-m^2}}{m} = \frac{m}{1+\sqrt{1-m^2}}$$

$m \in]-1;0[\cup]0;1[\Leftrightarrow -1 \prec m \prec 0$ ou $0 \prec m \prec 1$

$\Leftrightarrow 0 \prec m^2 \prec 1$ ou $0 \prec m^2 \prec 1$

$\Leftrightarrow -1 \prec -m^2 \prec 0$ ou $-1 \prec -m^2 \prec 0$

$\Leftrightarrow 0 \prec 1-m^2 \prec 1$ ou $0 \prec 1-m^2 \prec 1$

$\Leftrightarrow 0 \prec \sqrt{1-m^2} \prec 1$ ou $0 \prec \sqrt{1-m^2} \prec 1$

$\Leftrightarrow 1 \prec 1+\sqrt{1-m^2} \prec 2$ ou $1 \prec 1+\sqrt{1-m^2} \prec 2$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2} \prec \dfrac{1}{1+\sqrt{1-m^2}} \prec 1$ ou $\dfrac{1}{2} \prec \dfrac{1}{1+\sqrt{1-m^2}} \prec 1$

$$\begin{cases} x \in]-1;0[\cup]0;1[\\ \dfrac{1}{2} \prec \dfrac{1}{1+\sqrt{1-m^2}} \prec 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -1 \prec m \prec 0 \\ \dfrac{1}{2} \prec \dfrac{1}{1+\sqrt{1-m^2}} \prec 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 0 \prec m \prec 1 \\ \dfrac{1}{2} \prec \dfrac{1}{1+\sqrt{1-m^2}} \prec 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 \prec -m \prec 1 \\ \dfrac{1}{2} \prec \dfrac{1}{1+\sqrt{1-m^2}} \prec 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 0 \prec m \prec 1 \\ \dfrac{1}{2} \prec \dfrac{1}{1+\sqrt{1-m^2}} \prec 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 0 \prec \frac{-m}{1+\sqrt{1-m^2}} \prec 1 \text{ ou } 0 \prec \frac{m}{1+\sqrt{1-m^2}} \prec 1$$

$$\Rightarrow -1 \prec \frac{m}{1+\sqrt{1-m^2}} \prec 0 \text{ ou } 0 \prec \frac{m}{1+\sqrt{1-m^2}} \prec 1$$

$\Rightarrow -1 \prec x_1 \prec 0$ ou $0 \prec x_1 \prec 1$

$\Rightarrow x_1 \in]-1;0[\cup]0;1[\Rightarrow x_1 \in [-1;1]$

* Vérifions si $x_2 \in [-1;1]$

$$m \in]-1;0[\cup]0;1[\Rightarrow \begin{cases} 1+\sqrt{1-m^2} \succ 1 \\ -1 \prec m \prec 0 \text{ ou} \\ 0 \prec m \prec 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1+\sqrt{1-m^2} \succ 1 \\ -1 \prec m \prec 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 1+\sqrt{1-m^2} \succ 1 \\ 0 \prec m \prec 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1+\sqrt{1-m^2}}{m} \prec -1 \text{ ou } \frac{1+\sqrt{1-m^2}}{m} \succ 1$$

$$\Rightarrow \frac{1+\sqrt{1-m^2}}{m} \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$$

$$\Rightarrow \frac{1+\sqrt{1-m^2}}{m} \notin [-1;1]$$

$x_2 \notin [-1;1]$

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{1-\sqrt{1-m^2}}{m}\right\}$$

L'équation g(x)=m admet donc une seule solution d'où g est une application bijective.

b°) Explicitons sa bijection réciproque.

$$g^{-1}:[-1;1]\to[-1;1]$$
$$x\mapsto \frac{m}{1+\sqrt{1-m^2}}$$

Exercice n°10

Déterminons la qualité de chacune des applications suivantes :

$f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$

$x\mapsto x^2-1$

$m\in\mathbb{R}/f(x)=m$

$f(x)=m\Leftrightarrow x^2=m+1$

- Pour $m=-1;x^2=0\Leftrightarrow x=0$ et $0\in\mathbb{R}^+$ donc $S_{\mathbb{R}}=\{0\}$
- Pour $m\prec-1;m+1\prec0$ donc $x^2\neq m+1$; $S_{\mathbb{R}}=\{\ \}$
- Pour $m\succ-1;m+1\succ0$ $x^2=m+1\Leftrightarrow x=\sqrt{m+1}$ ou $x=-\sqrt{m+1}$ $\sqrt{m+1}\in\mathbb{R}^+$ et $-\sqrt{m+1}\notin\mathbb{R}^+$ $S_{\mathbb{R}}=\{\sqrt{m+1}\}$

f est donc une application injective

$g:\mathbb{R}\to[-1;+\infty[$

$x\mapsto x^2-1$

$m\in[-1;+\infty[/g(x)=m$

$g(x)=m\Leftrightarrow x^2=m+1$

- Pour $m=-1;x^2=0\Leftrightarrow x=0$ et $0\in\mathbb{R}$ donc $S_{\mathbb{R}}=\{0\}$
- Pour $m\succ-1;m+1\succ0$ $x^2=m+1\Leftrightarrow x=\sqrt{m+1}$ ou $x=-\sqrt{m+1}$
$$m\succ-1\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{m+1}\in\mathbb{R}\\-\sqrt{m+1}\in\mathbb{R}\end{cases}$$
$S_{\mathbb{R}}=\{-\sqrt{m+1};\sqrt{m+1}\}$

L'équation g(x)=m admet une ou deux solutions donc g est surjective.

$h:[0;+\infty[\to[-1;+\infty[$

$x\mapsto x^2-1$

$m\in[-1;+\infty[/f(x)=m$

$f(x)=m\Leftrightarrow x^2=m+1$

- Pour $m=-1;x^2=0\Leftrightarrow x=0$ $0\in[0;+\infty[$, $S_{\mathbb{R}}=\{0\}$
- Pour $m\succ-1$; $x_1=\sqrt{m+1}$ ou $x_2=-\sqrt{m+1}$ $\sqrt{m+1}\in[0;+\infty[;-\sqrt{m+1}\notin[0;+\infty[$ $S_{\mathbb{R}}=\{\sqrt{m+1}\}$

L'équation h(x)=m admet une seule solution d'où h est bijective.

$i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$x\to x^2-1$

$m\in\mathbb{R}/f(x)=m$

$f(x)=m\Leftrightarrow x^2=m+1$

- Pour $m\prec-1;m+1\prec0\Leftrightarrow x^2\neq m+1$ $S_{\mathbb{R}}=\{\ \}$
- Pour $m=-1;m+1=0;\ x^2=0\Leftrightarrow x=0$ et $0\in\mathbb{R}$, $S_{\mathbb{R}}=\{0\}$
- Pour $m\succ-1,m+1\succ0$ $x^2=m+1\Leftrightarrow x=\sqrt{m+1}\ \ x=-\sqrt{m+1}$
$$m\succ-1\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{m+1}\in\mathbb{R}\\-\sqrt{m+1}\in\mathbb{R}\end{cases}$$
$S_{\mathbb{R}}=\{-\sqrt{m+1};\sqrt{m+1}\}$

i n'est ni injective ni surjective.

Exercice n°12

$h:[-2;3]\to[-3;4]$
$$x\to\begin{cases}\frac{5}{2}x+2\ si\ x\in[-2;0]\\\frac{2}{3}x+2\ si\ x\in[0;3]\end{cases}$$

Démontrons que h est bijective

Posons

$h_1 : [-2;0] \to I_1$

$$x \to \frac{5}{2}x + 2$$

Soit $m \in I_1 / h_1(x) = m$

$$h_1(x) = m \Leftrightarrow \frac{5}{2}x + 2 = m$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2m-4}{5}$$

$$x \in [-2;0] \Leftrightarrow -2 \leq \frac{2m-4}{5} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -10 \leq 2m - 4 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -6 \leq 2m \leq 4$$

$$\Leftrightarrow -3 \leq m \leq 2$$

$$\Leftrightarrow m \in [-3;2]$$

h_1 est donc une bijection de [-2 ;0] sur I_1 = [-3 ;2]

Posons

$h_2 : [0;3] \to I_2$

$$x \to \frac{2}{3}x + 2$$

Soit $m \in I_2 / h_2(x) = m$

$$h_2(x) = m \Leftrightarrow \frac{2}{3}x + 2 = m$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3m-6}{2}$$

$$x \in [0;3] \Leftrightarrow 0 \leq \frac{3m-6}{2} \leq 3$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 3m - 6 \leq 6$$

$$\Leftrightarrow 6 \leq 3m \leq 12$$

$$\Leftrightarrow 2 \leq m \leq 4$$

$$\Leftrightarrow m \in [2;4]$$

h_2 est donc une bijection de [0 ;3] sur [2 ;4].

h_1 étant bijective de [-2 ;0] sur [-3 ;2] et h_2 bijective de [0 ;3] sur [2 ;4] de plus

$$\begin{cases} [-2;0] \cup [0;3] = [-2;3] \\ [-3;2] \cup [2;4] = [-3;4] \end{cases}$$

Donc h est bijective de [-2 :3] sur [-3 ;4].

Exercice n°16

$f : \mathbb{R}^+ \to [-1;+\infty[$

$$x \mapsto \sqrt{x} - 1$$

1°) Montrons que f est injective et surjective

Soit $m \in [-1;+\infty[\ / f(x) = m$

$f(x) = m \Leftrightarrow \sqrt{x} = m + 1$

$m \geq -1 \Leftrightarrow m + 1 \geq 0$

$f(x) = m \Leftrightarrow x = (m+1)^2$

$\forall m \in [-1;+\infty[\ (m+1)^2 \in \mathbb{R}^+$

$S_{\mathbb{R}} = \left\{(m+1)^2\right\}$

L'équation f(x)=m admet à la fois au moins et au plus une solution donc f est à la fois injective et surjective. Par conséquent f est bijective de $\mathbb{R}^+$ vers $[-1;+\infty[$

2°) Calculons $f^{-1}(1)$ et $f^{-1}(2)$

$f(x) = \sqrt{x} - 1$

- $f(4) = \sqrt{4} - 1 = 2 - 1 = 2$

  $f(4) = 1$ donc $f^{-1}(1) = 4$
- $f(9) = \sqrt{9} - 1 = 3 - 1 = 2$

  $f(9) = 2$ donc $f^{-1}(2) = 9$

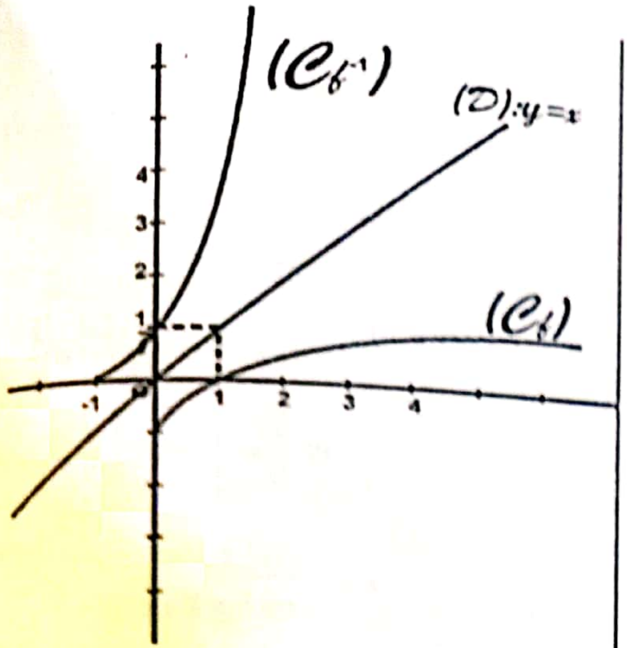
$f^{-1}(1) = 4$ et $f^{-1}(2) = 9$

3°) Explicitons f^{-1}

$f^{-1} : [-1;+\infty[\to \mathbb{R}^+$

$$x \to (x+1)^2$$

4°) Construisons (Cf) et (Cf^{-1})



Exercice n°17

$$f(x)=\frac{-2x}{1+x^2}$$

1.Déterminons Df et construisons (Cf).

$$Df=\{x\in\mathbb{R}/1+x^2\neq 0\}$$

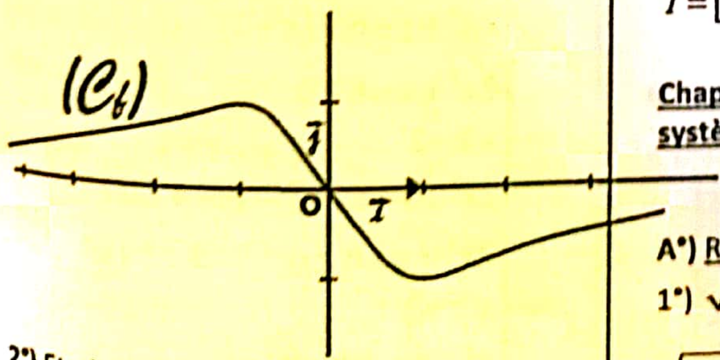
$x^2+1\neq 0 \Leftrightarrow x^2\neq -1$ (Toujours vraie)

$Df=\mathbb{R}$

Construction de (Cf)

Tableau de valeurs

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
f(x)	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	1	0	-1	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{8}{17}$



2°) Etudions la parité de f.

$x\in Df \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow -x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow -x\in Df$

$$f(-x)=\frac{-2(-x)}{(-x)^2+1}=\frac{2x}{1+x^2}=f(x)$$

$\begin{cases} x\in Df;-x\in Df \\ f(-x)=f(x)\end{cases}$ donc f est impaire.

D'où (C_f) admet l'origine du repère comme centre de symétrie.

3°) Déterminons graphiquement F

$F=\operatorname{im} f=[-1;1]$

b°) Nombre de points d'intersection de (Cf) avec (Dm) suivants les valeurs de m.

- Pour $m\in\,]-\infty;-1[\,\cup\,]1;+\infty[$ (Cf) et (Dm) n'ont pas de point d'intersection
- Pour $m\in\{-1;0;1\}$ (C_f) et (Dm) ont un seul point d'intersection.
- Pour $m\in\,]-1;0[\,\cup\,]0;1[$ (Cf) et (Dm) ont deux points d'intersection.

c°) f n'est pas injective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ car pour $m\in\,]-1;0[\,\cup\,]0;1[$ f(x)=m admet deux solutions.

f n'est pas surjective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ car pour $m\in\,]-\infty;-1[\,\cup\,]1;+\infty[$ f(x)=m admet aucune solution.

d°) Déterminons graphiquement le plus grand intervalle J tel que f soit surjective de $\mathbb{R}$ vers J

$J=[-1;1]$

e°) Déterminons I tel que f soit bijective de I sur J.

$I=[-1;1]$

Chapitre III : Equations et Inéquations systèmes

Exercice n°1

A°) Résolvons dans $\mathbb{R}$

1°) $\sqrt{x-1}=13-x$

$$\sqrt{x-1}=13-x \Leftrightarrow \begin{cases}13-x\geq 0\\ x-1=(13-x)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x\leq 13\\ x-1=169-26x+x^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x\in\,]-\infty;13]\\ x^2-27x+170=0\end{cases}$$

* $x^2-27x+170=0$

$\Delta=(-27)^2-4\times170$

$\Delta=49 \Leftrightarrow \sqrt{\Delta}=7$

$x_1=\dfrac{27-7}{2} \qquad x_2=\dfrac{27+7}{2}$

$x_1=10\in\left]-\infty;13\right];\ x_2=17\notin\left]-\infty;13\right]$

$S_{\mathbb{R}}=\{10\}$

2°) $\sqrt{2-x}=\sqrt{1-4x}-1$

$\Rightarrow\begin{cases}2-x\geq0\\1-4x\geq0\\2-x<1-4x\\\left(\sqrt{2-x}-\sqrt{1-4x}\right)^2=(-1)^2\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}x\leq2\\x\leq\dfrac{1}{4}\\x<-\dfrac{1}{3}\\2-x-2\sqrt{4x^2-9x+2}+1-4x=1\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}x\leq2;x\leq\dfrac{1}{4}\ et\ x\leq-\dfrac{1}{3}\\2\sqrt{4x^2-9x+2}=-5x+2\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}x\leq-\dfrac{1}{3}\\-5x+2\geq0\\4x^2-9x+2=\left(-\dfrac{5x}{2}+1\right)^2\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}x\leq-\dfrac{1}{3};x\leq\dfrac{2}{5}\\\dfrac{16x^2-36x+8}{4}=\dfrac{25x^2-20x+4}{4}\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\left]-\infty;-\dfrac{1}{3}\right]\\9x^2+16x-4=0\end{cases}$

$9x^2+16x-4=0$

$\Delta=16^2+4^2\times9=400=20^2$

$x_1=\dfrac{-16-20}{18}=-2;\ x_2=\dfrac{-16+20}{18}=\dfrac{2}{9}$

$-2\in\left]-\infty;-\dfrac{1}{3}\right]\ et\ \dfrac{2}{9}\notin\left]-\infty;-\dfrac{1}{3}\right]$

$S_{\mathbb{R}}=\{-2\}$

3°) $3-2x+\sqrt{x^2-x+1}=1-x$

$\Rightarrow\sqrt{x^2-x+1}=x-2$

$\Rightarrow\begin{cases}x-2\geq0\\x^2-x+1=x^2-4x+4\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}x\geq2\\3(x-1)=0\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}x\in[2;+\infty[\\x=1\end{cases}$

$S_{\mathbb{R}}=\varnothing$

4°) $\sqrt{2x^2+x-6}\leq x+2$

$\Rightarrow\begin{cases}2x^2+x-6\geq0\\x+2\geq0\\2x^2+x-6\leq(x+2)^2\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}2x^2+x-6\geq0\\x\geq-2\\2x^2+x-6-x^2-4x-4\leq0\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}2x^2+x-6\geq0\\x\geq-2\\x^2-3x-10\leq0\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}x\in\left]-\infty;-2\right]\cup\left[\dfrac{3}{2};+\infty\right[\\x\in[-2;+\infty[\\x\in[-2;5]\end{cases}$

$S_R=\{-2\}\cup\left[\frac{3}{2};5\right]$

5°) $\sqrt{2x^2-5x+4}\succ-2x+6$

$\Rightarrow(A)\begin{cases}x^2-5x+4\geq0\\-2x+6\prec0\end{cases}$ ou

$(B)\begin{cases}-2x+6\geq0\\x^2-5x+4\succ(-2x+6)^2\end{cases}$

$\Rightarrow(A)\begin{cases}x^2-5x+4\geq0 & (1)\\-2x+6\prec0 & (2)\end{cases}$

*(1) $x^2-5x+4\geq0$

$\Leftrightarrow x\in\left]-\infty;1\right]\cup\left[4;+\infty\right[$

*(2) $-2x+6\prec0$

$\Leftrightarrow x\in\left[3;+\infty\right[$

$S_A=\left[4;+\infty\right]$

$(B)\begin{cases}-2x+6\geq0\\x^2-5x+4\succ(-2x+6)^2\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}x\in\left]-\infty;3\right]\\3x^2-19x+32\prec0\end{cases}$

$3x^2-19x+32\prec0$

$\Delta=19^2-4\times32\times3=-23\prec0$

$S_B=\emptyset$

$S_R=S_A\cup S_B$

$S_R=\left[4;+\infty\right[$

6°) $\sqrt{2x^2-x+6}\geq x+2$

$\Rightarrow(A)\begin{cases}2x^2-x+6\geq0\\x+2\leq0\end{cases}$ ou

$(B)\begin{cases}x+2\geq0\\2x^2-x+6\geq(x+2)^2\end{cases}$

$\Rightarrow(A)\begin{cases}2x^2-x+6\geq0 & (1)\\x+2\leq0 & (2)\end{cases}$

(1) $2x^2-x+6\geq0$

$\Delta=1-48=-47\prec0$

$S_1=\mathbb{R}$

(2) $x+2\leq0\Leftrightarrow x\leq-2\Rightarrow x\in\left]-\infty;2\right]$

$S_2=\left]-\infty;-2\right]$

$S_A=S_1\cap S_2=\left]-\infty;-2\right]$

$(B)\begin{cases}x+2\geq0 & (1)\\2x^2-x+6\geq(x+2)^2 & (2)\end{cases}$

(1) $x+2\geq0\Leftrightarrow x\geq-2\Leftrightarrow x\in\left[-2;+\infty\right[$

$S_1=\left[-2;+\infty\right[$

(2) $2x^2-x+6\geq(x+2)^2$

$\Leftrightarrow 2x^2-x+6\geq x^2+4x+4$

$\Leftrightarrow x^2-5x+2\geq0$

$\Delta=25-8=17\quad\sqrt{\Delta}=\sqrt{17}$

$x_1=\frac{5-\sqrt{17}}{2};\ x_2=\frac{5+\sqrt{17}}{2}$

$S_2=\left]-\infty;\frac{5-\sqrt{17}}{2}\right]\cup\left[\frac{5+\sqrt{17}}{2};+\infty\right[$

$S_B=S_1\cap S_2$

$S_B=\left[-2;\frac{5-\sqrt{17}}{2}\right]\cup\left[\frac{5+\sqrt{17}}{2};+\infty\right[$

$S_R=S_A\cup S_B$

$S_R=\left]-\infty;\frac{5-\sqrt{17}}{2}\right]\cup\left[\frac{5+\sqrt{17}}{2};+\infty\right[$

B°) Résolvons dans $\mathbb{R}$:

a°) $\sqrt{3x^2+2x-1}\prec\sqrt{2x^2+x-1}$

$\Rightarrow\begin{cases}3x^2+2x-1\geq0\\2x^2+x-1\geq0\\3x^2+2x-1\prec2x^2+x-1\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}3x^2+2x-1\geq0 & 1\\2x^2+x-1\geq0 & 2\\x^2+x\prec0 & 3\end{cases}$

1 $\quad 3x^2+2x-1\geq 0$

$\Delta=16 \quad x_1=-1;\ x_2=\frac{2}{3}$

$S_1=\left]-\infty;-1\right]\cup\left[\frac{2}{3};+\infty\right[$

2 $\quad 2x^2+x-1\geq 0$

$\Delta=9 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=3$

$x_1=\frac{-1-3}{4}=-1;\ x_2=\frac{-1+3}{4}=\frac{1}{2}$

$S_2=\left]-\infty;-1\right]\cup\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$

3 $\quad x^2+x\prec 0 \Leftrightarrow x(x+1)\prec 0$

$S_3=\left]-1;\ 0\right[$

$S_{\mathbb{R}}=S_1\cap S_2\cap S_3=\varnothing$

$S_{\mathbb{R}}=\varnothing$

b°) $\sqrt{2x-\sqrt{x^2+1}}=2x-\sqrt{x^2+1}$

$\Rightarrow 2x-\sqrt{x^2+1}=\left(2x-\sqrt{x^2+1}\right)^2$

$\Rightarrow \left(2x-\sqrt{x^2+1}\right)^2-\left(2x-\sqrt{x^2+1}\right)=0$

$\Rightarrow \left(2x-\sqrt{x^2+1}\right)\left(2x-\sqrt{x^2+1}-1\right)=0$

$\Rightarrow \left(2x-\sqrt{x^2+1}\right)\left(2x-1-\sqrt{x^2+1}\right)=0$

$\Rightarrow \sqrt{x^2+1}=2x \ ou\ \sqrt{x^2+1}=2x-1$

1 $\quad \sqrt{x^2+1}=2x \qquad$ 2 $\quad \sqrt{x^2+1}=2x-1$

$\Rightarrow \begin{cases} x\in\mathbb{R}^+ \\ x^2+1=(2x)^2 \end{cases} \qquad \Rightarrow \begin{cases} 2x-1\geq 0 \\ x^2+1=(2x-1)^2 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x\in\mathbb{R}^+ \\ -3x^2+1=0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \begin{cases} x\geq\frac{1}{2} \\ 3x^2-4x=0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x\in\mathbb{R}^+ \\ x=\frac{\sqrt{3}}{3}\ ou\ x=-\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \qquad \Rightarrow \begin{cases} x\in\left[\frac{1}{2};+\infty\right[\\ x=0\ ou\ x=\frac{4}{3} \end{cases}$

$S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{\sqrt{3}}{3};\ \frac{4}{3}\right\}$

c°) $x+\sqrt{2x^2-4x+1}\geq 3$

$\Rightarrow \sqrt{2x^2-4x+1}\geq 3-x$

$\Rightarrow (A)\begin{cases} 2x^2-4x+1\geq 0 \\ 3-x\leq 0 \end{cases} \quad ou$

$(B)\begin{cases} 3-x\geq 0 \\ 2x^2-4x+1\geq(3-x)^2 \end{cases}$

$(A)\begin{cases} 2x^2-4x+1\geq 0 & (1) \\ 3-x\leq 0 & (2) \end{cases}$

(1) $2x^2-4x+1\geq 0$

$\Delta=16-8=8$

$x_1=\frac{4-2\sqrt{2}}{4} \qquad x_2=\frac{4+2\sqrt{2}}{4}$

$x_1=\frac{2-\sqrt{2}}{2} \qquad x_2=\frac{2+\sqrt{2}}{2}$

$S_1=\left]-\infty;\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right]\cup\left[\frac{2+\sqrt{2}}{2};+\infty\right[$

(2) $\quad 3-x\leq 0 \Leftrightarrow -x\leq -3 \Leftrightarrow x\geq 3$

$S_2=\left[3;+\infty\right[$

$S_A=S_1\cap S_2=\left[3;+\infty\right[$

$(B)\begin{cases} 3-x\geq 0 & (1) \\ 2x^2-4x+1\geq(3-x)^2 & (2) \end{cases}$

(1) $\quad 3-x\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 3 \Leftrightarrow x\in\left]-\infty;\ 3\right]$

$S_1=\left]-\infty;\ 3\right]$

(2) $\quad 2x^2-4x+1\geq(3-x)^2$

$\Leftrightarrow x^2+2x-8\geq 0$

$\Delta=36=6^2$

$x_1=\frac{-2-6}{2}=-4;\ x_2=\frac{-2+6}{2}=2$

$S_2=\left]-\infty;-4\right]\cup\left[2;+\infty\right[$

$S_B =]-\infty;-4] \cup [2;3]$

$S_{\mathbb{R}} = S_A \cup S_B$

$S_{\mathbb{R}} =]-\infty;-4] \cup [2;+\infty[$

d°) $\sqrt{-x^2+3x-2} \succ x-1$

$\Rightarrow (A)\begin{cases} -x^2+3x-2 \geq 0 \\ x-1 \prec 0 \end{cases}$ *ou*

$(B)\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ -x^2+3x-2 \succ (x-1)^2 \end{cases}$

$*(A)\begin{cases} -x^2+3x-2 \geq 0 & (1) \\ x-1 \prec 0 & (2) \end{cases}$

$(1) -x^2+3x-2 \geq 0$

$\Delta = 9-8=1$

$x_1 = \dfrac{-3-1}{-2} = 2;\ x_2 = \dfrac{-3+1}{-2} = 1$

$S_1 = [1;\ 2]$

$(2)\quad x-1 \prec 0 \Leftrightarrow x \prec 1$

$S_2 =]-\infty;\ 1[$

$S_A = S_1 \cap S_2 = \varnothing$

$S_A = \varnothing$

$*(B)\begin{cases} x-1 \geq 0 & (1) \\ -x^2+3x-2 \succ (x-1)^2 & (2) \end{cases}$

$(1)\qquad x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$

$S_1 = [1;+\infty[$

$(2)\quad -x^2+3x-2 \succ (x-1)^2$

$\Leftrightarrow -x^2+3x-2 \succ x^2-2x+1$

$\Leftrightarrow -2x^2+5x-3 \succ 0$

$\Delta = 25-24=1$

$x_1 = \dfrac{5-1}{4} = 1;\ x_2 = \dfrac{5+1}{4} = \dfrac{3}{2}$

$S_2 = \left]1;\ \dfrac{3}{2}\right[$

$S_B = S_1 \cap S_2 = \left]1;\ \dfrac{3}{2}\right[$

$S_B = \left]1;\ \dfrac{3}{2}\right[$

$S_{\mathbb{R}} = S_A \cap S_B = \left]1;\ \dfrac{3}{2}\right[$

$S_{\mathbb{R}} = \left]1;\ \dfrac{3}{2}\right[$

c°) Résolvons dans $\mathbb{R}$

a°) $3\sqrt{9-x^2} = x$

$\Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 9(9-x^2) = x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 81-9x^2-x^2=0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x \in [0;+\infty[\\ 10x^2-81=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in [0;+\infty[\\ x = \dfrac{9\sqrt{10}}{10}\ ou - \dfrac{9\sqrt{10}}{10} \end{cases}$

$S_{\mathbb{R}} = \left\{\dfrac{9\sqrt{10}}{10}\right\}$

b°) $x^2 - \sqrt{4-x^2} + 2 = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{4-x^2} = x^2+2$

$\Rightarrow \begin{cases} x^2+2 \geq 0 \\ 4-x^2 = (x^2+2)^2 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ 4-x^2 = x^4+4x^2+4 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x^4+5x^2=0 \end{cases}$

$x^4+5x^2=0 \Leftrightarrow x^2(x^2+5)=0$

$\Leftrightarrow x=0 \ car\ x^2 \neq -5$

$S_{\mathbb{R}} = \{0\}$

c°) $\sqrt{x+3}+1 = \dfrac{2}{3}x$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+3}=\frac{2}{3}x-1$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}x-1\geq 0 \\ x+3=\left(\frac{2}{3}x-1\right)^2 \end{cases}$$

$\Rightarrow x+3=\frac{4x^2-24x+9}{9}$

$\Rightarrow 9x+27=4x^2-24x+9$

$\Rightarrow 4x^2-33x-18=0$

$\Delta=33^2+4\times4\times18=1377$

$\Delta=\left(9\sqrt{17}\right)^2$

$x_1=\frac{33-9\sqrt{17}}{8};x_2=\frac{33+9\sqrt{17}}{8}$

$$\begin{cases} x\geq \frac{3}{2} \\ x=\frac{33-9\sqrt{17}}{8} \text{ ou } x=\frac{33+9\sqrt{17}}{8} \end{cases}$$

$S_{\mathbb{R}}=\frac{33+9\sqrt{17}}{8}$

d°) $\sqrt{x^2-2x}=3+x$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+3\geq 0 \\ x^2-2x=(3+x)^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x\geq -3 \\ x^2-2x=x^2+6x+9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x\in[-3;+\infty[\\ x=-\frac{9}{8} \end{cases}$$

$S_{\mathbb{R}}=\left\{-\frac{9}{8}\right\}$

D°) Résolvons dans $\mathbb{R}$

a°) $\sqrt{-x^2+3x+4}\leq\frac{1}{2}x+2$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x^2+3x+4\geq 0 \\ \frac{1}{2}x+2\geq 0 \\ -x^2+3x+4\leq\left(\frac{1}{2}x+2\right)^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x^2+3x+4\geq 0 \\ \frac{1}{2}x+2\geq 0 \\ -x^2+3x+4\leq\frac{1}{4}x^2+2x+4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x^2+3x+4\geq 0 & (1) \\ \frac{1}{2}x+2\geq 0 & (2) \\ -\frac{5}{4}x^2+x\leq 0 & (3) \end{cases}$$

(1) $\quad -x^2+3x+4\geq 0$

$\Delta=9+16=25 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=5$

$x_1=\frac{-3-5}{-2}=4;\ x_2=\frac{-3+5}{-2}=-1$

$S_1=[-1;4]$

(2) $\quad \frac{1}{2}x+2\geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x\geq -2 \Leftrightarrow x\geq -4$

$S_2=[-4;+\infty[$

(3) $\quad -\frac{5}{4}x^2+x\leq 0 \Leftrightarrow x\left(-\frac{5}{4}x+1\right)\leq 0$

$\Leftrightarrow -x\left(\frac{5}{4}x-1\right)\leq 0$

$S_3=]-\infty;0]\cup\left[\frac{4}{5};+\infty\right[$

$S_{\mathbb{R}}=S_1\cap S_2\cap S_3$

$S_{\mathbb{R}}=[-1;0]\cup\left[\frac{4}{5};4\right]$

b°) $\sqrt{5x+6}\geq x+2$

$$\Rightarrow (A)\begin{cases} 5x+6\geq 0 \\ x+2\leq 0 \end{cases} \text{ ou}$$

$$(B)\Rightarrow\begin{cases} x+2\geq 0 \\ 5x+6\geq (x+2)^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A)\begin{cases} 5x+6\geq 0 & (1) \\ x+2\leq 0 & (2) \end{cases}$$

(1) $5x+6\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -\frac{6}{5}$

$S_1=\left[-\frac{6}{5};+\infty\right[$

(2) $x+2\leq 0 \Leftrightarrow x\leq -2$

$S_2=]-\infty;-2]$

$S_A=S_1\cap S_2=\varnothing$

$$(B)\Rightarrow\begin{cases} x+2\geq 0 & (1) \\ 5x+6\geq (x+2)^2 & (2) \end{cases}$$

(1) $x+2\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -2$

$S_1=[-2;+\infty[$

(2) $5x+6\geq x^2+4x+4$

$\Rightarrow x^2-x-2\leq 0$

$x_1=-1;\ x_2=2;\ S_2=[-1;2]$

$S_B=S_1\cap S_2$

$S_B=[-1;2]$

$S_{\mathbb{R}}=S_A\cap S_B$

$S_{\mathbb{R}}=[-1;2]$

c°) $\sqrt{x^2+3x-4}\geq x+2$

$$\Rightarrow (A)\begin{cases} x^2+3x-4\geq 0 \\ x+2\leq 0 \end{cases} \text{ ou}$$

$$(B)\begin{cases} x+2\geq 0 \\ x^2+3x-4\geq x^2+4x+4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A)\begin{cases} x^2+3x-4\geq 0 & (1) \\ x+2\leq 0 & (2) \end{cases}$$

(1) $x^2+3x-4\geq 0$

$\Delta=9+16=25$

$x_1=\frac{-3-5}{2}=-4$

$x_2=\frac{-3+5}{2}=1$

$x\in]-\infty;-4]\cup[1;+\infty[$

(2) $x+2\leq 0 \Leftrightarrow x\leq -2$

$\Leftrightarrow x\in]-\infty;-2]$

$S_A=]-\infty;-4]$

$$(B)\begin{cases} x+2\geq 0 & (1) \\ x^2+3x-4\geq x^2+4x+4 & (2) \end{cases}$$

(1) $x+2\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -2 \Leftrightarrow x\in[-2;+\infty[$

(2) $x^2+3x-4\geq x^2+4x+4 \Leftrightarrow x+8\leq 0$

$\Leftrightarrow x\in]-\infty;-8]$

$S_B=\varnothing$

$S_{\mathbb{R}}=S_A\cup S_B$

$S_{\mathbb{R}}=]-\infty;-4]$

d°) $\sqrt{-3x^2+2x-1}\leq\sqrt{2x^2+x+1}$

$$\Rightarrow\begin{cases} -3x^2+2x-1\geq 0 & (1) \\ -3x^2+2x-1\leq 2x^2+x+1 & (2) \end{cases}$$

$S_{\mathbb{R}}=\varnothing$

(1) $-3x^2+2x-1\geq 0$

$\Delta=4-12=-8\prec 0$

$\forall x\in\mathbb{R},\ -3x^2+2x-1\prec 0$

$S_1=\varnothing$ donc

Exercice n°3

1. Calculons le déterminant D

a°) $\begin{cases}2x+y=1\\3x+7y=-2\end{cases}$ $D=\begin{vmatrix}2 & 1\\3 & 7\end{vmatrix}$

$D=2\times7-3\times1$

$D=14-3$

$D=11$

b°) $\begin{cases}4x-18y=29\\-2x+9y=17\end{cases}$ $D=\begin{vmatrix}4 & -18\\-2 & 9\end{vmatrix}$

D=36-36 D=0

$\begin{cases}3x-6y=12\\-11x+22y=-44\end{cases}$ $D=\begin{vmatrix}3 & -6\\-11 & 22\end{vmatrix}$

$D=3\times22-6\times11$

$D=0$

2°) Nombre de solution

a) D=11$\neq$0 donc le système admet un seul couple solution.

b) D=0 et $-\frac{18}{9}\neq\frac{29}{17}\Rightarrow\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$ donc le système n'admet aucune solution.

c) D=0 et $\frac{3}{-11}=\frac{-6}{22}=\frac{12}{-44}$

$\Rightarrow\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$

Donc le système admet une infinité de solutions.

3°) Résolvons dans $\mathbb{R}^2$

a) D=11

$D_x=\begin{vmatrix}1 & 1\\-2 & 7\end{vmatrix}$ $D_y=\begin{vmatrix}2 & 1\\3 & -2\end{vmatrix}$

$D_x=7+2=9$ $D_y=-4-3$

$x=\frac{D_x}{D}$ $y=\frac{D_y}{D}$

$x=\frac{9}{11}$ $y=\frac{-7}{11}$

$S_{\mathbb{R}^2}=\left\{\left(\frac{9}{11};\frac{-7}{11}\right)\right\}$

b) $D=0$ *et* $\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$

$S_{\mathbb{R}^2}=\varnothing$

c) $D=0$ *et* $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$

$3x-6y=12\Leftrightarrow x-2y=4$

$\Leftrightarrow x=4+2y$

$S_{\mathbb{R}^2}=\{(4+2y;y)\,y\in\mathbb{R}\}$

Ou encore

$3x-6y=12\Leftrightarrow x-2y=4$

$\Leftrightarrow y=\frac{x-4}{2}$

$\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x-2$

$S_{\mathbb{R}^2}=\left\{\left(x;\frac{1}{2}x-2\right)x\in\mathbb{R}\right\}$

Exercice n°4

1°) Résolvons dans $\mathbb{R}^2$

$S_1\begin{cases}(\sqrt{2}-1)x-y=\sqrt{2}-1\\x+(\sqrt{2}+1)y=1\end{cases}$

$D=\begin{vmatrix}\sqrt{2}-1 & -1\\1 & \sqrt{2}+1\end{vmatrix}$

$=(2-1)+1$

$D=2$

$D_x=\begin{vmatrix}\sqrt{2}-1 & -1\\1 & \sqrt{2}+1\end{vmatrix}$ *et* $D_y=\begin{vmatrix}\sqrt{2}-1 & \sqrt{2}-1\\1 & 1\end{vmatrix}$

$=(2-1)+1$ $=(\sqrt{2}-1)-(\sqrt{2}-1)$

$D_x=2$ $D_y=0$

$x=\frac{D_x}{D}$ $y=\frac{D_y}{D}$

$x=1$ $y=0$

$S_{\mathbb{R}\cdot\mathbb{R}}=\{(1;0)\}$

$S_2\begin{cases}\sqrt{2}x-3\sqrt{3}y=\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\sqrt{3}x+2\sqrt{2}y=\frac{1}{\sqrt{3}}\end{cases}$

$$D=\begin{vmatrix}\sqrt{2} & -3\sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & 2\sqrt{2}\end{vmatrix}$$
$$=4-9$$
$$D=-5$$
$$D_x=\begin{vmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -3\sqrt{3}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 2\sqrt{2}\end{vmatrix} \text{ et } D_y=\begin{vmatrix}\sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\sqrt{3} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{vmatrix}$$
$$=2+3 \qquad =\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$
$$D_x=5 \qquad D_y=\frac{5\sqrt{6}}{6}$$
$$x=\frac{D_x}{D} \qquad y=\frac{D_y}{D}$$
$$=\frac{5}{-5} \qquad =\frac{5\sqrt{6}}{6}\times\frac{-1}{5}$$
$$=-1 \qquad =-\frac{\sqrt{6}}{6}$$
$$S_{\mathbb{R}^2}=\left\{\left(-1;-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)\right\}$$

2°) Résolvons dans $\mathbb{R}$

$$S_a\begin{cases}x+xy+y=7\\ x^2y+xy^2=6\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x+y+xy=7\\ xy(x+y)=6\end{cases}$$

Posons a=x+y et b=xy
Le système devient :

$$\begin{cases}a+b=7\\ ab=6\end{cases}$$
$$X^2-7X+6=0$$
$$\Delta=49-24=25=5^2$$
$$X_1=\frac{7-5}{2} \qquad X_2=\frac{7+5}{2}$$
$$X_1=1 \qquad X_2=6$$
$$(1)\begin{cases}a=1\\ b=6\end{cases} \text{ ou } (2)\begin{cases}a=6\\ b=1\end{cases}$$
$$(1)\begin{cases}x+y=1\\ xy=6\end{cases} \quad (2)\begin{cases}x+y=6\\ xy=1\end{cases}$$
$$t^2-t+6=0 \qquad t^2-6t+1=0$$
$$\Delta=-23<0 \qquad \Delta=32=\left(4\sqrt{2}\right)^2$$
$$S_1=\varnothing \qquad t_1=3-2\sqrt{2};\ t_2=3+2\sqrt{2}$$
$$S_2=\{(t_1;t_2)(t_2;t_1)\}$$
$$S_{\mathbb{R}^2}=S_1\cup S_2$$
$$S_{\mathbb{R}^2}=\left\{\left(3-2\sqrt{2};3+2\sqrt{2}\right),\left(3+2\sqrt{2};3-2\sqrt{2}\right)\right\}$$
$$S_b\begin{cases}x^2+y^2-xy=28\\ x+y=2\end{cases}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}x^2+y^2-xy=28 & (1)\\ x^2+y^2+2xy=4 & (2)\end{cases}$$
$$(2)-(1): 3xy=-24 \Leftrightarrow xy=-8$$
$$\begin{cases}x+y=2\\ xy=-8\end{cases}$$
$$X^2-2X-8=0$$
$$\Delta=36$$
$$X_1=\frac{2-6}{2};\ X_2=\frac{2+6}{2}$$
$$X_1=-2 \qquad X_2=4$$
$$S_{\mathbb{R}^2}=\{(-2;4);(4;-2)\}$$
$$(S_c)\begin{cases}\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=2xy\\ x+y+xy=0\end{cases}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{x^2+y^2}{xy}=2xy\\ x+y=-xy\end{cases}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{(x+y)^2-2xy}{xy}=2xy\\ x+y=-xy\end{cases}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{(-xy)^2-2xy}{xy}=2xy\\ x+y=-xy\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} xy-2=2xy \\ x+y=-xy \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} xy=-2 \\ x+y=2 \end{cases}$$

$X^2-2X-2=0$

$\Delta=12=\left(2\sqrt{3}\right)^2$

$X_1=\dfrac{2-2\sqrt{3}}{2}$; $X_2=\dfrac{2+2\sqrt{3}}{2}$

$X_1=1-\sqrt{3}$ $\quad X_2=1+\sqrt{3}$

$S_{\mathbb{R}^2}=\left\{\left(1-\sqrt{3};1+\sqrt{3}\right);\left(1+\sqrt{3};1-\sqrt{3}\right)\right\}$

$$(S_d)\begin{cases} 2x^2+x+y^2-2y=3 \\ \left(2x^2+x\right)\left(y^2-2y\right)=2 \end{cases}$$

Posons $a=2x^2+x$ et $b=y^2-2y$

$$\begin{cases} a+b=3 \\ ab=2 \end{cases}$$

$X^2-3X+2=0$

$\Delta=9-8=1$

$X_1=\dfrac{3-1}{2}$ $\qquad X_2=\dfrac{3+1}{2}$

$X_1=1$ $\qquad X_2=2$

(1) : a=1 et b=2 ou (2) : a=2 et b=1

$$(1)\begin{cases} 2x^2+x=1 & (A) \\ y^2-2y=2 & (B) \end{cases} \quad ou$$

$$(2)\begin{cases} 2x^2+x=2 & (A') \\ y^2-2y=1 & (B') \end{cases}$$

- $2x^2+x=1 \Leftrightarrow x_1=-1$ *et* $x_2=\dfrac{1}{2}$

  $S_A=\left\{-1;\dfrac{1}{2}\right\}$

- $y^2-2y=2 \Leftrightarrow y_1=1-\sqrt{3}$ et $y_2=1+\sqrt{3}$

  $S_B=\left\{1-\sqrt{3};1+\sqrt{3}\right\}$

$$S_1=\left\{\begin{matrix}\left(-1;1-\sqrt{3}\right)\left(-1;1+\sqrt{3}\right)\left(\dfrac{1}{2};1-\sqrt{3}\right) \\ \left(\dfrac{1}{2};1+\sqrt{3}\right)\end{matrix}\right\}$$

- $2x^2+x=2 \Leftrightarrow x_1=\dfrac{-1-\sqrt{17}}{4}$

  $x_2=\dfrac{-1+\sqrt{17}}{4}$

- $y^2-2y-1=0 \Leftrightarrow y_1=1-\sqrt{2}$; $y_2=1+\sqrt{2}$

$$S_2=\left\{\begin{matrix}\left(\dfrac{-1-\sqrt{17}}{4};1-\sqrt{2}\right)\left(\dfrac{-1-\sqrt{17}}{4};1+\sqrt{2}\right) \\ \left(\dfrac{-1+\sqrt{17}}{4};1-\sqrt{2}\right)\left(\dfrac{-1+\sqrt{17}}{4};1+\sqrt{2}\right)\end{matrix}\right\}$$

$S_{\mathbb{R}}=S_1\bigcup S_2$

$$S_{\mathbb{R}}=\left\{\begin{matrix}\left(-1;1-\sqrt{3}\right);\left(-1;1+\sqrt{3}\right);\left(\dfrac{1}{2};1-\sqrt{3}\right) \\ \left(\dfrac{1}{2};1+\sqrt{3}\right)\left(\dfrac{-1-\sqrt{17}}{4};1-\sqrt{2}\right) \\ \left(\dfrac{-1-\sqrt{17}}{4};1+\sqrt{2}\right)\left(\dfrac{-1+\sqrt{17}}{4};1-\sqrt{2}\right) \\ \left(\dfrac{-1+\sqrt{17}}{4};1+\sqrt{2}\right)\end{matrix}\right\}$$

$$(S_e)\begin{cases} x^2+2y^2-2x+8y+3=0 \\ 3x^2-y^2-6x-4y-12=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(x^2-2x\right)+2\left(y^2+4y\right)+3=0 \\ 3\left(x^2-2x\right)-\left(y^2+4y\right)-12=0 \end{cases}$$

Posons $X=x^2-2x$ et $Y=y^2+4y$

$$\begin{cases} X+2Y=-3 \\ 3X-Y=12 \end{cases} \Rightarrow X=3\,et\,Y=-3$$

$$X=3 \Leftrightarrow x^2-2x=3 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=3 \end{cases}$$

$$Y=-3 \Leftrightarrow y^2+4y=-3 \Leftrightarrow \begin{cases} y_1=-3 \\ y_2=-1 \end{cases}$$

$S_{\mathbb{R}^2}=\{(-1;-3),(-1;-1),(3;-3),(3;-1)\}$

Exercice n°8

A°) Résolvons dans $\mathbb{R}^3$ par la méthode du pivot de Gauss

$$S_1\begin{cases}x-3y+2z=1\\3x+2y+z=10\\5x+y-z=4\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x-3y+2z=1\\11y-5z=7\\16y-11z=-1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x-3y+2z=1\\11y-5z=7\\41z=123\end{cases}$$

- z=3 ; y=2 ; x=1

$S_{\mathbb{R}^3}=\{(1;2;3)\}$

$$S_2\begin{cases}3x+y+z=1\\3x+2y+2z=1\\y+z=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x+y+z=1\\y+z=0\\y+z=1\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}3x+y+z=1\\y+z=0\quad absurde\\0z=-1\end{cases}$$

$S_{\mathbb{R}^3}=\{\ \}$

$$S_3\begin{cases}x+y-3z=1\\2x+y-z=4\\5x+4y-10z=7\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y-3z=1\\-y+5z=2\\-y+5z=2\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x+y-3z=1\\-y+5z=2\,(toujours\ vrai)\\0z=0\end{cases}$$

$y=5z-2$

$x=1+3z+y$

$=1+3z+5z-2$

$x=8z-1$

$S_{\mathbb{R}^3}=\{(8z-1;5z-2;z)\,z\in\mathbb{R}\}$

B°) Résolvons dans $\mathbb{R}^4$

$$\begin{cases}x+y+z+t=-1\\4x+3y+2z+t=-5\\8x+4y+2z+t=-8\\32x+12y+4z+t=-30\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x+y+z+t=-1\\-y-2z-3t=-1\\-4y-6z-7t=0\\-20y-28z-31t=2\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x+y+z+t=-1\\-y-2z-3t=-1\\2z+5t=4\\12z-29t=2\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x+y+z+t=-1\\-y-2z-3t=-1\\2z+5t=4\\-t=-2\end{cases}$$

t=2 ; z=-3 ; y=1 ; x=-1

$S_{\mathbb{R}^4}=\{(-1;1;-3;2)\}$

$$\begin{cases}x+y+z+t=0\\3x+2y+z=5\\-x+y-z+t=-6\\8x+4y+2z+t=12\end{cases}$$

$$\begin{cases}x+y+z+t=0\\-y-2z-3t=5\\2y+0z+2t=-6\\-4y-6z-7t=12\end{cases}$$

$$\begin{cases}x+y+z+t=0\\y+2z+3t=-5\\-z-t=1\\2z+5t=-8\end{cases}$$

$$\begin{cases}x+y+z+t=0\\y+2z+3t=-5\\z+t=-1\\t=-2\end{cases}$$

$S_{\mathbb{R}^4} = \{(2;-1;1;-2)\}$

Exercice n°10

1°) Résolvons dans $\mathbb{R}^2$

$\begin{cases} mx + y = 2m \\ x + my = m+1 \end{cases}$ $D = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix}$

* Pour $m \in \{-1;1\}$

 D=0

- Pour m=-1 le système devient

 $\begin{cases} -x + y = -2 \\ x - y = 0 \end{cases}$

 $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ donc $S_{\mathbb{R}^2} = \varnothing$

- Pour m=1

 $\begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = 2 \end{cases}$ $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

 Donc $S_{\mathbb{R}^2} = \{(x; 2-x) x \in \mathbb{R}\}$

* Pour $m \notin \{-1;1\}$ $D \neq 0$

$D_x = \begin{vmatrix} 2m & 1 \\ m+1 & m \end{vmatrix}$ $D_y = \begin{vmatrix} m & 2m \\ 1 & m+1 \end{vmatrix}$

$D_x = 2m^2 - m - 1$ $D_y = m^2 - m$

$x = \frac{2m^2 - m - 1}{m^2 - 1}$ $y = \frac{m^2 - m}{m^2 - 1}$

$x = \frac{2m+1}{m+1}$ $y = \frac{m}{m+1}$

$S_{\mathbb{R}^2} = \left\{\left(\frac{2m+1}{m+1}; \frac{m}{m+1}\right)\right\}$

2°) Résolvons par la méthode du pivot de Gauss

$\begin{cases} 3x + y + 2z - t = 2 \\ 2x - 3y - z + t = -2 \\ x + y + 3z - 2t = -2 \\ x - 2y + z + 3t = -1 \end{cases}$

$\begin{cases} 3x + y + 2z - t = 2 \\ 11y + 7z - 5t = 10 \\ -2y - 7z + 5t = 8 \\ 7y - z - 10t = 5 \end{cases}$

$\begin{cases} 3x + y + 2z - t = 2 \\ 11y + 7z - 5t = 10 \\ -63z + 45t = 108 \\ 60z + 75t = 15 \end{cases}$

$\begin{cases} 3x + y + 2z - t = 2 \\ 11y + 7z - 5t = 10 \\ -7z + 5t = 12 \\ 55t = 55 \end{cases}$

t=1 ; z=-1 ; y=2 ; x=1

$S_{\mathbb{R}^4} = \{(1;2;-1;1)\}$

Chapitre 2 : angles orientés et trigonométrie

Exercice 2

1°) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{5\pi}{6}$; $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}) = \frac{2\pi}{3}$

$(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}) = \frac{\pi}{3}$

Montrons que ACD est rectangle en A.

ACD est rectangle en A si $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \pm\frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) &= (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}) + (\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD}) \\ &= -(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}) - (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}) \\ &= -\frac{5\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{-5\pi + 4\pi - 2\pi}{6}\end{aligned}$$

$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow$ ACD est rectangle en A

2°) Démontrons que A,C et E sont alignés.

A, C et E sont alignés si $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}) = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}) &= (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}) \\ &= -(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}) - (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE})\end{aligned}$$

$$=\frac{5\pi}{12}-\frac{3\pi}{4}-\frac{2\pi}{3}$$

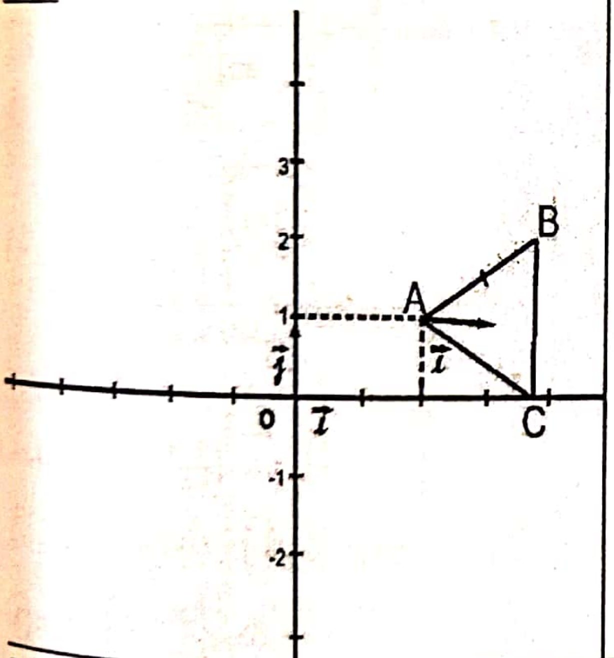
$$=\frac{5\pi-9\pi-8\pi}{12}$$

$$=-\frac{12\pi}{12}$$

$(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE})=-\pi \Rightarrow$ A,C et E sont alignés.

Exercice n°6

1°) Plaçons le point B tel que AB=2 et $(\vec{i},\overrightarrow{AB})=\frac{\pi}{6}$ et C tel que $(\vec{i},\overrightarrow{AC})=-\frac{\pi}{6}$ et AC=2



3°) Calculons les coordonnées de B et C

- $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}\|\overrightarrow{AB}\|\cos(\vec{i},\overrightarrow{AB})\\ \|\overrightarrow{AB}\|\sin(\vec{i},\overrightarrow{AB})\end{pmatrix}=\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\\ 2\times\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\ 1\end{pmatrix}$ or $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\ y_B-y_A\end{pmatrix}$

Par suite

$$\begin{cases}x_B-x_A=\sqrt{3}\\ y_B-y_A=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_B=\sqrt{3}+x_A\\ y_B=1+y_A\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_B=\sqrt{3}+2\\ y_B=1+1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_B=2+\sqrt{3}\\ y_B=2\end{cases}$$

$B(2+\sqrt{3};2)$

$$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}\|\overrightarrow{AC}\|\cos(\vec{i},\overrightarrow{AC})\\ \|\overrightarrow{AC}\|\sin(\vec{i},\overrightarrow{AC})\end{pmatrix}=\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\\ 2\times\left(-\frac{1}{2}\right)\end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\ -1\end{pmatrix}$ or

$$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}x_C-x_A\\ y_C-y_A\end{pmatrix}=\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}x_C-2\\ y_C-1\end{pmatrix}$$

Par suite

$$\begin{cases}x_C-2=\sqrt{3}\\ y_C-1=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_C=2+\sqrt{3}\\ y_C=0\end{cases}$$

$C(2+\sqrt{3};0)$

4°) Trouvons une mesure de l'angle $(\vec{i},\overrightarrow{BC})$.

$$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}x_C-x_B\\ y_C-y_B\end{pmatrix}=\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\ -2\end{pmatrix}$$

Or $\overrightarrow{BC}\begin{vmatrix}\|\overrightarrow{BC}\|\cos(\vec{i},\overrightarrow{BC})\\ \|\overrightarrow{BC}\|\sin(\vec{i},\overrightarrow{BC})\end{vmatrix}$

Par identification on a :

$$\begin{cases}\|\overrightarrow{BC}\|\cos(\vec{i},\overrightarrow{BC})=0\\ \|\overrightarrow{BC}\|\sin(\vec{i},\overrightarrow{BC})=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\cos(\vec{i},\overrightarrow{BC})=0\\ \sin(\vec{i},\overrightarrow{BC})=-1\end{cases}$$

Car $BC=2$. Finalement

$$(\vec{i},\overrightarrow{BC})=-\frac{\pi}{2}$$

5°) Déterminons une mesure de $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=(\overrightarrow{AB},\vec{i})+(\vec{i},\overrightarrow{AC})$$
$$=-(\vec{i},\overrightarrow{AB})+(\vec{i},\overrightarrow{AC})$$
$$=-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}$$
$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=-\frac{\pi}{3}$$

Nature du triangle ABC

$\begin{cases}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=-\frac{\pi}{3}\\ AB=AC=2\end{cases}$ Donc ABC est un triangle équilatéral.

Exercice n°7

1°) Déterminons $\sin x$ et $\cos x$ sachant que : $\tan x=0,8$ et $-\pi \prec x \prec -\frac{\pi}{2}$.

$$\tan x=0,8 \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x}=0,8$$
$$\Leftrightarrow \sin x=0,8\cos x$$
$$\Leftrightarrow 5\sin x=4\cos x$$
$$\Leftrightarrow \sin x=\frac{4}{5}\cos x$$

D'après la propriété fondamentale,

$\cos^2 x+\sin^2 x=1$

$$\cos^2 x+\left(\frac{4}{5}\cos x\right)^2=1$$
$$\Leftrightarrow \cos^2 x+\frac{16}{25}\cos^2 x=1$$
$$\Leftrightarrow \frac{41}{25}\cos^2 x=1$$
$$\Leftrightarrow \cos^2 x=\frac{25}{41}$$
$$\Leftrightarrow \cos x=\frac{5\sqrt{41}}{41} \text{ ou } \cos x=-\frac{5\sqrt{41}}{41}$$
$$x\in\left]-\pi;-\frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow \cos x \prec 0$$

Par suite

$$\cos x=-\frac{5\sqrt{41}}{41}$$

D'après $\sin x=\frac{4}{5}\cos x$

$$\Leftrightarrow \sin x=-\frac{4\sqrt{41}}{41}$$

2°) Ecrivons le plus simplement possible.

$$A=\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\frac{1}{\tan\left(x+\frac{15\pi}{2}\right)}-\tan\left(\frac{7\pi}{2}+x\right)-\frac{1}{\tan\left(\frac{7\pi}{2}-x\right)}$$
$$A=\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\frac{1}{\tan\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}-\tan\left(-\frac{\pi}{2}+x\right)-\frac{1}{\tan\left(-\frac{\pi}{2}-x\right)}$$
$$A=\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}+\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}$$
$$A=\frac{1}{\tan x}-\tan x+\frac{1}{\tan x}-\tan x$$
$$A=\frac{2}{\tan x}-2\tan x$$
$$B=\sin\left(\frac{17\pi}{2}+x\right)-2\cos\left(\frac{21\pi}{2}-x\right)-3\sin(x-3\pi)+\sin\left(\frac{23\pi}{2}+x\right)$$
$$B=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-2\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-3\sin(x-\pi)+\sin\left(-\frac{\pi}{2}+x\right)$$
$$B=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-2\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+3\sin(\pi-x)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$
$$B=\cos x-2\sin x+3\sin x-\cos x$$
$$B=\sin x$$

3°) Calculons A et B

$$A=\cos^2\left(\frac{703\pi}{4}\right)+\sin^2\left(\frac{511\pi}{6}\right)+\cos^2\left(\frac{447\pi}{3}\right)+\cos^2\left(\frac{95\pi}{3}\right)$$

$$A=\cos^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\sin^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\cos^2(\pi)+\cos^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$A=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+(-1)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$A=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+1+\frac{1}{4}=2$$

$$A=2$$

$$B=\cos^4\left(\frac{\pi}{8}\right)+\cos^4\left(\frac{3\pi}{8}\right)+\cos^4\left(\frac{5\pi}{8}\right)+\cos^4\left(\frac{7\pi}{8}\right)$$

$$B=\cos^4\left(\frac{\pi}{8}\right)+\cos^4\left(\frac{3\pi}{8}\right)+\cos^4\left(\pi-\frac{3\pi}{8}\right)+\cos^4\left(\pi-\frac{\pi}{8}\right)$$

$$B=\cos^4\left(\frac{\pi}{8}\right)+\cos^4\left(\frac{3\pi}{8}\right)+\left[-\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right]^4+\left[-\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right]^4$$

$$B=2\cos^4\left(\frac{\pi}{8}\right)+2\cos^4\left(\frac{3\pi}{8}\right)$$

Or $\cos^2 a=\dfrac{1+\cos 2a}{2}$ par suite

$$B=2\left(\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}\right)^2+2\left(\frac{1+\cos\frac{3\pi}{4}}{2}\right)^2$$

$$B=\frac{2\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{4}+\frac{2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{4}$$

$$B=\frac{1+\sqrt{2}+\frac{1}{2}}{2}+\frac{1-\sqrt{2}+\frac{1}{2}}{2}$$

$$B=\frac{3}{2}$$

4°) Démontrons que :

a°)

$$\forall x\neq k\pi,\ \frac{2+\sin 2x-2\cos 2x}{1+3\sin^2 x-\cos 2x}=\frac{2}{5}\left(2+\frac{1}{\tan x}\right)$$

$$\frac{2+\sin 2x-2\cos 2x}{1+3\sin^2 x-\cos 2x}=\frac{2+2\sin x\cos x-2\left(1-2\sin^2 x\right)}{1+3\sin^2 x-1+2\sin^2 x}$$

$$=\frac{2\left(\sin x\cos x+2\sin^2 x\right)}{5\sin^2 x}$$

$$=\frac{2}{5}\left(\frac{2\sin^2 x}{\sin^2 x}+\frac{\sin x\cos x}{\sin^2 x}\right)$$

$$\frac{2+\sin 2x-2\cos 2x}{1+3\sin^2 x-\cos 2x}=\frac{2}{5}\left(2+\frac{1}{\tan x}\right)$$

b°) $\forall x\in\mathbb{R},(\sin x-\cos x)(1+\sin x\cos x)=\sin^3 x-\cos^3 x$

$$(\sin x-\cos x)(1+\sin x\cos x)=\sin x+\sin^2 x\cos x-\cos x-\sin x\cos^2 x$$

$$=\sin x-\sin x\cos^2 x-\cos x+\sin^2 x\cos x$$

$$=\sin x\left(1-\cos^2 x\right)-\cos x\left(1-\sin^2 x\right)$$

$$=\sin x\left(\sin^2 x\right)-\cos x\left(\cos^2 x\right)$$

$$=\sin^3 x-\cos^3 x$$

Donc $(\sin x-\cos x)(1+\sin x\cos x)=\sin^3 x-\cos^3 x$

c°) $\tan(a-b)=\dfrac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\tan b}$

$$\tan(a-b)=\frac{\sin(a-b)}{\cos(a-b)}$$

$$=\frac{\sin a\cos b-\cos a\sin b}{\cos a\cos b+\sin a\sin b}$$

$$=\frac{\frac{\sin a\cos b}{\cos a\cos b}-\frac{\cos a\sin b}{\cos a\cos b}}{\frac{\cos a\cos b}{\cos a\cos b}+\frac{\sin a\sin b}{\cos a\cos b}}$$

$$=\frac{\frac{\sin a}{\cos a}-\frac{\sin b}{\cos b}}{1+\frac{\sin a}{\cos a}\times\frac{\sin b}{\cos b}}$$

$$\tan(a-b)=\frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a.\tan b}$$

Exercice n°11

I- Démontrons que :

$$16\sin\frac{\pi}{24}.\sin\left(\frac{5\pi}{24}\right).\sin\frac{7\pi}{24}.\sin\frac{11\pi}{24}=1$$

Pour a et b des réels

$$\sin a\sin b=\frac{1}{2}\left[\cos(a-b)-\cos(a+b)\right]$$

Par suite,

$$16\sin\frac{\pi}{24}.\sin\left(\frac{5\pi}{24}\right).\sin\frac{7\pi}{24}.\sin\frac{11\pi}{24}=$$

$$16\times\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{24}-\frac{5\pi}{24}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{24}+\frac{5\pi}{24}\right)\right]\times$$

$$\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{24}-\frac{11\pi}{24}\right)-\cos\left(\frac{7\pi}{24}+\frac{11\pi}{24}\right)\right]$$

$$=\frac{16}{4}\left(\cos\frac{4\pi}{24}-\cos\frac{6\pi}{24}\right)\left(\cos\frac{4\pi}{24}-\cos\frac{18\pi}{24}\right)$$

$$=4\left(\cos\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{4}\right)\left(\cos\frac{\pi}{6}-\cos\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$=4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$=4\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{4}\right)=4\times\frac{1}{4}=1$$

Donc

$$16\sin\frac{\pi}{24}.\sin\left(\frac{5\pi}{24}\right).\sin\frac{7\pi}{24}.\sin\frac{11\pi}{24}=1$$

II- $\sin a=\frac{\sqrt{5}-1}{4}, 0\prec a\prec\frac{\pi}{2}$

1°) Calculons $\cos 2a$ et $\cos 4a$.

* $\cos 2a=1-2\sin^2 a$

$$=1-2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2$$

$$=1-\frac{5-2\sqrt{5}+1}{8}$$

$$=1-\frac{3-\sqrt{5}}{4}$$

$$\cos 2a=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

* $\cos 4a=\cos 2(2a)$

$$=2\cos^2(2a)-1$$

$$=2\times\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2-1$$

$$=\frac{2\left(1+2\sqrt{5}+5\right)}{16}-1$$

$$\cos 4a=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

2°) Démontrons que le réel a est l'une des solutions de l'équation $\cos 4x=\sin x$

D'après l'énoncé et les résultats précédents :

$$\begin{cases}\sin a=\frac{\sqrt{5}-1}{4}\\ \cos 4a=\frac{\sqrt{5}-1}{4}\end{cases}\Rightarrow\cos 4a=\sin a$$

Par suite a est une des solutions de l'équation $\cos 4x=\sin x$.

3°) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos 4x=\sin x$

$$\cos 4x=\sin x\Leftrightarrow\cos 4x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}4x=\frac{\pi}{2}-x+2k\pi\\ ou\\ 4x=-\frac{\pi}{2}+x+2k\pi\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \\ ou \\ 3x = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{2}{5}k\pi \\ ou \\ x = -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2}{3}k\pi \end{cases}$$

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{ -\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi;\ \frac{\pi}{10} + \frac{2}{5}k\pi;\ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Pour k=0, $\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{10} \\ ou \\ x = -\dfrac{\pi}{6} \end{cases}$

Pour k=1, $\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} \\ ou \\ x = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

Or $0 \prec a \prec \dfrac{\pi}{2}$ donc

Exercice n°15

a°) Démontrons que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\cos 5a = 16\cos^5 a - 20\cos^3 a + 5\cos a$$

$$\cos 5a = \cos(4a + a)$$

$$= \cos 4a \cos a - \sin 4a \sin a$$

* $\cos 4a \cos a = \cos a\left[2\cos^2(2a) - 1\right]$

$$= \cos a\left[2\left(2\cos^2 a - 1\right)^2 - 1\right]$$

$$= \cos a\left(8\cos^4 a - 8\cos^2 a + 2 - 1\right)$$

$$= 8\cos^5 a - 8\cos^3 a + \cos a$$

* $\sin 4a \sin a = \sin a\left(2\sin 2a \cos 2a\right)$

$$= \sin a\, 2\left(2\sin a \cos a\right)\left(2\cos^2 a - 1\right)$$

$$= 4\sin^2 a \cos a\left(2\cos^2 a - 1\right)$$

$$= 4\cos a\left(1 - \cos^2 a\right)\left(2\cos^2 a - 1\right)$$

$$= \left(4\cos a - 4\cos^3 a\right)\left(2\cos^2 a - 1\right)$$

$$= 8\cos^3 a - 4\cos a - 8\cos^5 a + 4\cos^3 a$$

$$= 12\cos^3 a - 8\cos^5 a - 4\cos a$$

$$= -8\cos^5 a + 12\cos^3 a - 4\cos a$$

$$\cos 5a = 8\cos^5 a - 8\cos^3 a + \cos a + 8\cos^5 a$$
$$-12\cos^3 a + 4\cos a$$

$$\cos 5a = 16\cos^5 a - 20\cos^3 a + 5\cos a$$

b°) Vérifions que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$16x^5 - 20x^3 + 5x + 1 = (x+1)\left(4x^2 - 2x - 1\right)^2$$

$$(x+1)\left(4x^2 + 2x - 1\right)^2 = (x+1)\left[4x^2 - (2x+1)\right]^2$$

$$= (x+1)\left[16x^4 - 8x^2(2x+1) + (2x+1)^2\right]$$

$$= (x+1)\left(16x^4 - 16x^3 - 8x^2 + 4x^2 + 4x + 1\right)$$

$$= (x+1)\left(16x^4 - 16x^3 - 4x^2 + 4x + 1\right)$$

$$= 16x^5 - 16x^4 - 4x^3 + 4x^2 + x + 16x^4 - 16x^3$$
$$-4x^2 + 4x + 1$$

$$= 16x^5 - 20x^3 + 5x + 1$$

$$a = \frac{\pi}{10}$$

Donc

$$16x^5 - 20x^3 + 5x + 1 = (x+1)\left(4x^2 + 2x - 1\right)$$

c°) On pose $t = \cos\dfrac{\pi}{5}$

Démontrons que le réels t est solution de l'équation : $4x^2 - 2x - 1 = 0$ puis que

$$t = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

$$(t+1)\left(4t^2 - 2t - 1\right)^2 = 16t^5 - 20t^3 + 5t + 1$$

$$= 16\cos^5\left(\frac{\pi}{5}\right) - 20\cos^3\left(\frac{\pi}{5}\right) + 5\cos\frac{\pi}{5} + 1$$

$$=\cos 5\left(\frac{\pi}{5}\right)+1$$

$$=\cos\pi+1=-1+1=0$$

$(t+1)(4t^2-2t-1)=0$

$\Rightarrow t+1=0$ ou $4t^2-2t-1=0$

Or $t\neq -1$ car $0<\frac{\pi}{5}<\frac{\pi}{2}$

Donc $4t^2-2t-1=0$

Par suite t est solution de l'équation

$4x^2-2x-1=0$

<u>Déduisons que</u> $t=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$

$4x^2-2x-1=0$

$\Delta=20\Rightarrow\sqrt{\Delta}=2\sqrt{5}$

$x_1=\frac{1-\sqrt{5}}{4}$ $\qquad x_2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$x_1<0$ $\qquad x_2>0$

$t=\cos\frac{\pi}{5}$ et $0<\frac{\pi}{5}<\frac{\pi}{2}\Rightarrow\cos\frac{\pi}{5}>0$

Donc $t=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$

d°) <u>Déduisons en</u> $\sin\frac{\pi}{5};\cos\frac{2\pi}{5};\cos\frac{\pi}{10}$

$\sin\frac{\pi}{10}$

$\sin\frac{\pi}{5}=\sqrt{1-\cos^2\frac{\pi}{5}}$ car $0<\frac{\pi}{5}<\frac{\pi}{2}$

$$=\sqrt{1-\frac{6+2\sqrt{5}}{16}}$$

$$=\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{16}}$$

$$\sin\frac{\pi}{5}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

$$\cos 2\frac{\pi}{5}=2\cos^2\frac{\pi}{5}-1$$

$$=2\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2-1$$

$$=2\left(\frac{5+2\sqrt{5}+1}{16}\right)-1$$

$$\cos 2\frac{\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

$$\cos\frac{\pi}{10}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{5}\right)$$

$$=\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

$$\cos\frac{\pi}{10}=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

$$\sin\frac{\pi}{10}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{5}\right)$$

$$=\cos\frac{2\pi}{5}$$

$$\sin\frac{\pi}{10}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

Exercice 19

1°) <u>Montrons que pour tout réel x</u>

<u>$\sin 3x=-4\sin^3+3\sin x$</u>

$\sin 3x=\sin(x+2x)$

$$=\sin x\cos 2x+\cos x\sin 2x$$

$$=\sin x(1-2\sin^2 x)+\cos x(2\sin x\cos x)$$

$$=\sin x(1-2\sin^2 x+2\cos^2 x)$$

$$=\sin x(1-2\sin^2 x+2(1-\sin^2 x))$$

$$=\sin x(-4\sin^2 x+3)$$

$\sin 3x=-4\sin^3 x+3\sin x$

2°) <u>Déduisons en que :</u>

$\sin 3x-\frac{\sqrt{2}}{2}=\left(\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(-4\sin^2 x-2\sqrt{2}\sin x+1)$

$\left(\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(-4\sin^2 x-2\sqrt{2}\sin x+1)$

$= -4\sin^3 x - 2\sqrt{2}\sin^2 x + \sin x + 2\sqrt{2}\sin^2 x$
$+2\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}$

$= -4\sin^3 x + 3\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}$

$= \sin 3x - \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\left(\sin 3x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-4\sin^2 x - 2\sqrt{2}\sin x + 1\right)$$

3°) <u>Résolvons dans</u> $\mathbb{R}$

$$\sin 3x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Leftrightarrow \sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin 3x = \frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ ou \\ 3x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \\ ou \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}; \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}; k \in \mathbb{Z}\right\}$$

<u>Déduisons-en que</u> $\sin\frac{\pi}{12}$ **<u>et</u>** $\sin\frac{17\pi}{12}$ **<u>sont solutions de l'équation</u>** $-4x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$

De la solution dans $\mathbb{R}$ de l'équation précédente on déduit la solution $[0;2\pi]$ en faisant varier k.

$$S_{[0;2\pi]} = \left\{\frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{11\pi}{12}; \frac{17\pi}{12}; \frac{19\pi}{12}\right\}$$

On constate que $\frac{\pi}{12}$ et $\frac{17\pi}{12}$ sont solutions de l'équation $\sin 3x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$ et donc solutions de l'équation

$$\left(\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-4\sin^2 x - 2\sqrt{2}\sin x + 1\right) = 0$$

Or $\sin\frac{\pi}{12} \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\frac{17\pi}{12} \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\frac{\pi}{12}$ et $\frac{17\pi}{12}$ sont solution de l'équation

$-4\sin^2 x - 2\sqrt{2}\sin x + 1 = 0$

C'est-à-dire

$$\begin{cases} -4\sin^2\frac{\pi}{12} - 2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12} + 1 = 0 \\ -4\sin^2\frac{17\pi}{12} - 2\sqrt{2}\sin\frac{17\pi}{12} + 1 = 0 \end{cases}$$

Par conséquent $\sin\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{17\pi}{12}$ sont solution de l'équation

$-4x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$

4°) <u>Déduisons les valeurs de</u> $\sin\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{17\pi}{12}$

$\Delta = 24 \Rightarrow \Delta = 2\sqrt{6}$

$x_1 = \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} \prec 0 \quad x_2 = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \succ 0$

$0 \prec \frac{\pi}{12} \prec \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\frac{\pi}{12} \succ 0$

$\pi \prec \frac{17\pi}{12} \prec \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \sin\frac{17\pi}{12} \prec 0$

$\sin\frac{\pi}{12} = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}; \sin\frac{17\pi}{12} = \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$

Exercice n°21

<u>Résolvons les inéquations suivantes dans l'intervalle I</u>

1°) $4\sin^2 x - 1 \leq 0 \qquad I = [0; 2\pi]$

$(2\sin x-1)(2\sin x+1)\le 0$

$2\sin x-1=0$

$\sin x=\frac{1}{2}$

$S_{[0,2\pi]}=\left\{\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right\}$ $\quad S_{[0,2\pi]}=\left\{\frac{7\pi}{6};\frac{11\pi}{6}\right\}$

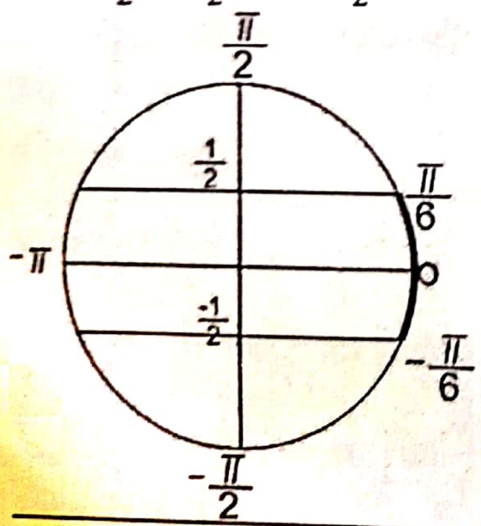
x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		$\frac{7\pi}{6}$		$\frac{11\pi}{6}$		2π
$2\sin x-1$		−	0	+	0	−		−		−	
$2\sin x+1$		+		+		+	0	−	0	+	
$4\sin^2 x-1$		−	0	+	0	−	0	+	0	−	

$S_{[0,2\pi]}=\left[0;\frac{\pi}{6}\right[\cup\left]\frac{5\pi}{6};\frac{7\pi}{6}\right[\cup\left]\frac{11\pi}{6};2\pi\right]$

2°) $|\sin x|\prec\frac{1}{2}$

a°) Dans $I=\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

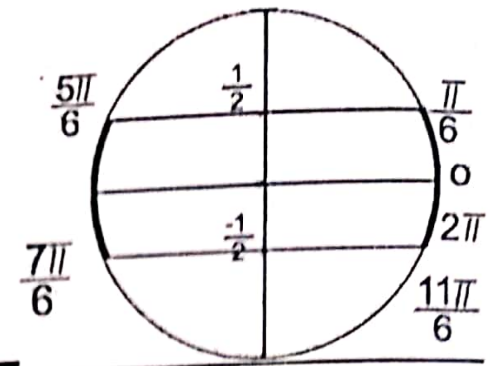
$|\sin x|\prec\frac{1}{2}\Leftrightarrow-\frac{1}{2}\prec\sin x\prec\frac{1}{2}$



$S_{\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]}=\left]-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right[$

b°) Dans $I=[0;2\pi]$

$|\sin x|\prec\frac{1}{2}\Leftrightarrow-\frac{1}{2}\prec\sin x\prec\frac{1}{2}$



$S_{[0,2\pi]}=\left[0;\frac{\pi}{6}\right[\cup\left]\frac{5\pi}{6};\frac{7\pi}{6}\right[\cup\left]\frac{11\pi}{6};2\pi\right]$

3°) $2\cos^2 x-\cos x-1\le 0 \qquad I=[0;\pi]$

Posons $X=\cos x$

L'inéquation devient

$2X^2-X-1\le 0$

$\Delta=9 \quad X_1=-\frac{1}{2}$ et $X_2=1$

$X\in\left[-\frac{1}{2};1\right]\Leftrightarrow-\frac{1}{2}\le\cos x\le 1$

$\Leftrightarrow x\in\left[-\frac{2\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right]$

$\begin{cases} x\in[0;\pi] \\ x\in\left[-\frac{2\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right]\end{cases}\Rightarrow x\in\left[0;\frac{2\pi}{3}\right]$

$S_{[0;\pi]}=\left[0;\frac{2\pi}{3}\right]$

4°) $\sin 2x\ge\sin x \qquad I=[-\pi;\pi]$

$\sin 2x\ge\sin x\Leftrightarrow 2\sin x\cos x-\sin x\ge 0$

$\Leftrightarrow\sin x(2\cos x-1)\ge 0$

$\sin x=0\Leftrightarrow x\in\{-\pi;0;\pi\}$

$2\cos x-1=0\Leftrightarrow x\in\left\{-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right\}$

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{3}$		0		$\frac{\pi}{3}$		π
$\sin x$	0	−		−	0	+		+	
$2\cos x+1$		−	0	+		+	0	−	
$\sin x(2\cos x-1)$	0	+	0	−	0	+	0	−	

$S_{[-\pi;\pi]}=\left[-\pi;-\frac{\pi}{3}\right]\cup\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$

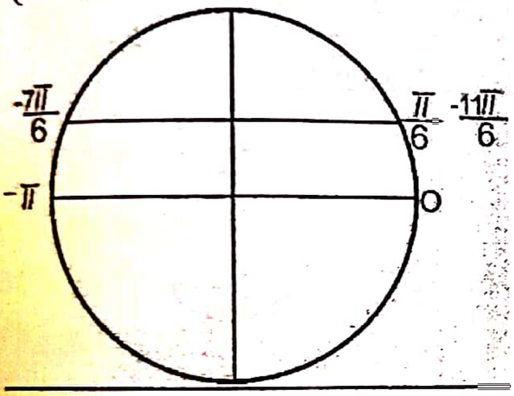
5°) $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right) \prec \frac{1}{2}$ $\qquad I=\left[-\frac{3\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

Posons $X = x-\frac{\pi}{3}$

$$x\in\left[-\frac{3\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow \left(x-\frac{\pi}{3}\right)\in\left[-\frac{11\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right]$$

$$\Leftrightarrow X\in\left[-\frac{11\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right]$$

$$\begin{cases} x\in\left[-\frac{3\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \\ \sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\prec\frac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X\in\left[-\frac{11\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right] \\ \sin X\prec\frac{1}{2}\end{cases}$$



$$X\in\left]-\frac{7\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right[\Leftrightarrow -\frac{7\pi}{6}\prec x-\frac{\pi}{3}\prec\frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{7\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\prec x\prec\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-5\pi}{6}\prec x\prec\frac{\pi}{2}$$

$$S_{\left[-\frac{3\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]}=\left]\frac{-5\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[$$

6°) $2\sin 2x-\sqrt{2}\le 0$ $\qquad I=\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

$$2\sin 2x-\sqrt{2}\le 0 \Leftrightarrow \sin 2x\le\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Posons $X=2x$ $\quad \sin 2x\le\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow$

$\sin X\le\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$x\in I\Leftrightarrow x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$$

$$\Leftrightarrow 2x\in[-\pi;\pi]$$

$$\Leftrightarrow X\in[-\pi;\pi]$$

$$\sin X\le\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow X\in\left[-\pi;\frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4};\pi\right]$$

$$\Leftrightarrow -\pi\le 2x\le\frac{\pi}{4}\ ou\ \frac{3\pi}{4}\le 2x\le\pi$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{8}\ ou\ \frac{3\pi}{8}\le x\le\frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{8}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{8};\frac{\pi}{2}\right]$$

$$S_{\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]}=\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{8}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{8};\frac{\pi}{2}\right]$$

Exercice n°30

1°) On donne

$$\sin x=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4};x\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$$

a°) Calculons la valeur exacte de cosx

D'après la propriété fondamentale

$$\cos^2 x+\sin^2 x=1\Leftrightarrow\cos^2 x=1-\sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x=1-\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x=\frac{2+2\sqrt{2}+6}{4^2}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x=\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)^2$$

$x\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow\cos x\succ 0$ donc

$$\cos x=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

b°) Calculons cos2x et en déduisons la valeur de x

on sait que $\cos 2x=2\cos^2 x-1$

par suite $\cos 2x=2\left(\frac{8+2\sqrt{12}}{16}\right)-1$

$$=\frac{16+4\sqrt{12}-16}{16}$$

$$=\frac{4\sqrt{12}}{16}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow \cos 2x=\cos\frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x=\frac{\pi}{6}+2k\pi\\2x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi\end{cases}k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{\pi}{12}+k\pi\\x=-\frac{\pi}{12}+k\pi\end{cases}k\in\mathbb{Z}$$

$$\text{Or}\begin{cases}\cos x=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\succ 0\\\sin x=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\prec 0\end{cases}\Rightarrow$$

$$x=-\frac{\pi}{12}$$

2°)a) Vérifions que :

$$\cos\left(\frac{\pi}{18}\right)-\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)=2\left[\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{18}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)\right]$$

$$2\left(\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{18}-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\pi}{18}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{18}\right)-\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)$$

b°) Vérifions que

$$\cos\left(\frac{\pi}{18}\right)-\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)=2\cos\left(\frac{7\pi}{18}\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{18}\right)-\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)=2\left(\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{18}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)\right)$$

$$=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{18}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)\right)$$

$$=2\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{18}\right)$$

$$=2\cos\left(\frac{7\pi}{18}\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{18}\right)-\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)=2\cos\frac{7\pi}{18}$$

c°) Montrons que k=-4

$$K=-\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)}+\frac{\sqrt{3}}{\cos\left(\frac{\pi}{18}\right)}$$

$$K=\frac{-\left[\cos\left(\frac{\pi}{18}\right)-\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)\right]}{\frac{1}{2}\sin 2\left(\frac{\pi}{18}\right)}$$

$$K=-\frac{-2\cos\left(\frac{7\pi}{18}\right)}{\frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{18}\right)}$$

$$K=-4\frac{\cos\left(\frac{9\pi}{18}-\frac{2\pi}{18}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)}=-4\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{9}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)}$$

$$K=-4\frac{\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)}=-4$$

$$K=-4$$

Exercice n°32

1°)a) Transformons en somme le produit suivant

$$\cos 5x\cos 6x=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\cos(5x+6x)+\\ \cos(5x-6x)\end{bmatrix}$$

$$\cos 5x\cos 6x=\frac{1}{2}\cos 11x+\frac{1}{2}\cos x$$

b°) <u>Transformons en produit la somme suivante :</u>

$\sin x+\sin 3x+2\sin 2x$

$$=2\sin\left(\frac{x+3x}{2}\right)\cos\left(\frac{x-3x}{2}\right)+2\sin 2x$$

$$=2\sin 2x\cos x+2\sin 2x$$

$$=2\sin 2x(\cos x+1)$$

$$=2\sin 2x(\cos x+\cos 0)$$

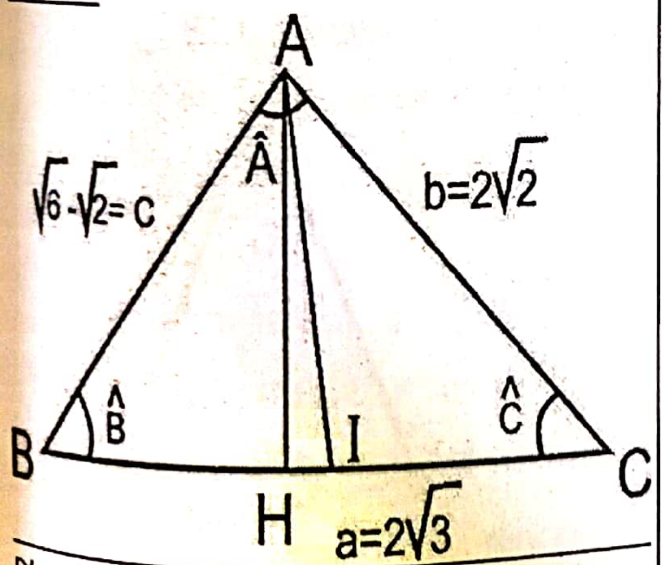
$$=2\sin 2x\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\sin x+\sin 3x+2\sin 2x=2\sin 2x\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

2°) Un triangle ABC à pour coté

$BC=2\sqrt{3};\ AC=2\sqrt{2}$ et $AB=\sqrt{6}-\sqrt{2}$

a°) <u>Calculons les angles $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$ en radians.</u>



D'après le théorème d'Al Kashi

- $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\widehat{A}$

$$\Leftrightarrow \cos\widehat{A}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$\Leftrightarrow \cos\widehat{A}=\frac{(2\sqrt{2})^2+(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2-(2\sqrt{3})^2}{2\times 2\sqrt{2}\times(\sqrt{6}-\sqrt{2})}$$

$$\Leftrightarrow \cos\widehat{A}=\frac{8+6-2\sqrt{12}+2-12}{4(2\sqrt{3}-2)}$$

$$\Leftrightarrow \cos\widehat{A}=\frac{4-4\sqrt{3}}{4(2\sqrt{3}-2)}=\frac{1-\sqrt{3}}{2(\sqrt{3}-1)}=-\frac{1}{2}$$

$$\cos\widehat{A}=-\frac{1}{2}\qquad \widehat{A}=\frac{2\pi}{3}rad$$

- $b^2=a^2+c^2-2ac\cos\widehat{B}$

$$\Leftrightarrow \cos\widehat{B}=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$

$$\Leftrightarrow \cos\widehat{B}=\frac{(2\sqrt{3})^2+(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2-(2\sqrt{2})^2}{2(2\sqrt{3})(\sqrt{6}-\sqrt{2})}$$

$$\Leftrightarrow \cos\widehat{B}=\frac{12+6-2\sqrt{12}+2-8}{4(3\sqrt{2}-\sqrt{6})}$$

$$\Leftrightarrow \cos\widehat{B}=\frac{12-4\sqrt{3}}{4(3\sqrt{2}-\sqrt{6})}=\frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{2}(3-\sqrt{3})}$$

$$\Leftrightarrow \cos\widehat{B}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\widehat{B}=\frac{\sqrt{2}}{2}\qquad \widehat{B}=\frac{\pi}{4}rad$$

<u>Déduisons-en $\widehat{C}$</u>

$$\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=\pi rad$$

$$\widehat{C}=\pi-(\widehat{A}+\widehat{B})$$

$$\widehat{C}=\pi-\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\widehat{C}=\frac{12\pi-8\pi+3\pi}{12}$$

$$\widehat{C}=\frac{\pi}{12}rad$$

<u>Calculons</u> $\cos\frac{\pi}{12}$

Toujours d'après le théorème d'Al Kashi.

$$C^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C}$$

$$\Leftrightarrow \cos\widehat{C} = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$$\Leftrightarrow \cos\widehat{C} = \frac{\left(2\sqrt{3}\right)^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2}{2\left(2\sqrt{3}\right)\left(2\sqrt{2}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \cos\widehat{C} = \frac{4\times3+4\times2-\left(6-2\sqrt{12}+2\right)}{8\sqrt{6}}$$

$$\Leftrightarrow \cos\widehat{C} = \frac{12+4\sqrt{3}}{8\sqrt{6}} = \frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}$$

$$\cos\widehat{C} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

Par suite $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

b°) Calculons la hauteur AH et la médiane AI issue de A.

Déterminons $\sin\widehat{B}$

D'après la propriété fondamentale nous savons que :

$$\cos^2\widehat{B} + \sin^2\widehat{B} = 1 \Leftrightarrow \sin^2\widehat{B} = 1 - \cos^2\widehat{B}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2\widehat{B} = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \sin^2\widehat{B} = \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sin\widehat{B} = \frac{\sqrt{3}}{2} \; ou \; \sin\widehat{B} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Or $\widehat{B}$ est un angle géométrique.

Par suite $\sin\widehat{B} \geq 0$ donc

$$\sin\widehat{B} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Considérons le triangle AHB rectangle en H. D'après les relations trigonométriques dans le triangle rectangle nous avons :

$$\sin\widehat{B} = \frac{AH}{AB} \Leftrightarrow AH = AB\sin\widehat{B}$$

$$\Leftrightarrow AH = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right) = \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$$

$$AH = \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$$

Déterminons la médiane AI issue de A

D'après le théorème de la médiane on a :

$$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$$

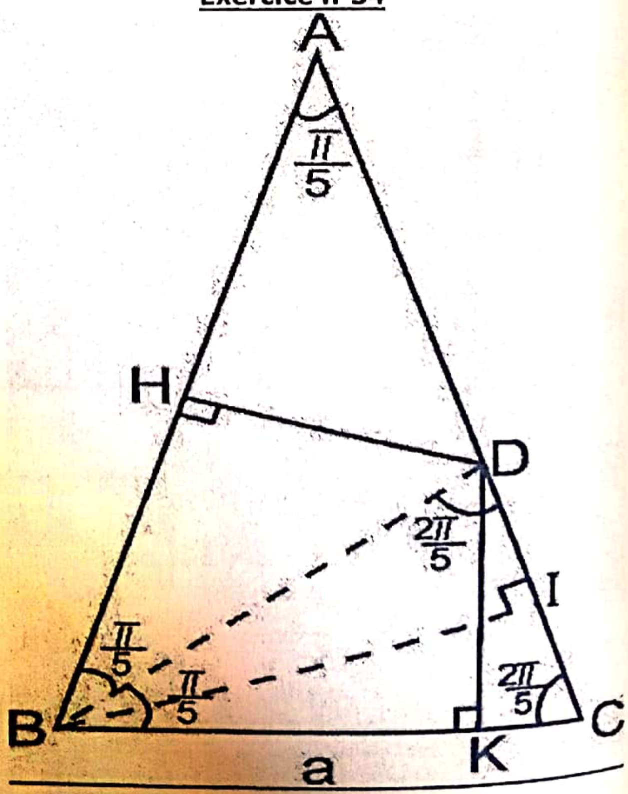
$$\Leftrightarrow AI^2 = \frac{AB^2 + AC^2 - \frac{BC^2}{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow AI = \sqrt{\frac{AB^2+AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4}}$$

$$\Leftrightarrow AI = \sqrt{\frac{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2}{2} - \frac{\left(2\sqrt{3}\right)^2}{4}}$$

$$AI = \sqrt{5-2\sqrt{3}}$$

Exercice n°34



a°) Démontrons que le triangle ABD est isocèle.

La bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ coupe [AC] en D donc (BD) est la bissectrice de $\widehat{ABC}$ d'où $\widehat{ABD}=\widehat{CBD}=\frac{\pi}{5}$. Or $B\widehat{A}D=\frac{\pi}{5}$ puisque $D\in[AC]$ et $B\widehat{A}C=\frac{\pi}{5}$ d'où $A\widehat{B}D=B\widehat{A}D=\frac{\pi}{5}$. Par suite ABD est un triangle isocèle en D.

- Démontrons que BCD est isocèle.

Dans le triangle BCD on a

$B\widehat{C}D+B\widehat{D}C+C\widehat{B}D=\pi$

$$CD=2a\cos\frac{2\pi}{5}$$

$$\Rightarrow B\widehat{D}C=\pi-\frac{2\pi}{5}-\frac{\pi}{5}=\frac{2\pi}{5}$$

Or $B\widehat{C}D=\frac{2\pi}{5}$ d'où $B\widehat{D}C=B\widehat{C}D=\frac{2\pi}{5}$ donc le triangle BCD est isocèle en B.

<u>Déduisons-en que DA=DB=a</u>

- ABD est isocèle en D donc DA=DB (1)
- BCD est isocèle en B donc BC=BD (2)

De (1) et (2) on déduit que DA=DB=BC or BC=a

Donc

DA=DB=a

b°) <u>Démontrons que :</u> $AB=2a\cos\frac{\pi}{5}$

ABD est isocèle en D. Soit H le projeté orthogonal de D sur (AB) alors (AH) est médiatrice de [AB] donc H est milieu de [AB] et (DH) $\perp$ (AB).

Dans le triangle rectangle ADH en H on a :

$\cos D\widehat{A}H=\frac{AH}{AD}\Rightarrow AH=AD\cos D\widehat{A}H$ Or

$D\widehat{A}H=D\widehat{A}B=\frac{\pi}{5}$ et

$AH=\frac{1}{2}AB\Rightarrow AB=2AH$ donc

$\frac{1}{2}AB=AD\cos\frac{\pi}{5}$.

$AB=2AD\cos\frac{\pi}{5}$, $AD=a$ donc

$$AB=2a\cos\frac{\pi}{5}$$

Démontrons que $CD=2a\cos\frac{2\pi}{5}$

BCD est isocèle en B. Soit I le projeté orthogonal de B sur (CD). (BI) est donc la médiatrice de [CD] d'où I milieu de [CD] et (BI) $\perp$ (CD).

Dans le triangle rectangle BID en I, on a :

$\cos B\widehat{D}I=\frac{DI}{BD}\Rightarrow DI=BD\cos B\widehat{D}I$

Or $B\widehat{D}I=\frac{2\pi}{5}$ et $BD=a$ et $DI=\frac{1}{2}CD$ car I milieu de [CD] donc on a :

$\frac{1}{2}CD=a\cos\frac{2\pi}{5}$

D'où

Déduisons-en que : $\cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{2}$

ABC est isocèle en A donc AB=AC

D$\in$ [AC] donc AC=AD+DC d'où AB=AC$\Leftrightarrow$ AB=AD+DC

$$\Leftrightarrow 2a\cos\frac{\pi}{5}=2a\cos\frac{2\pi}{5}+a$$

$$\Leftrightarrow 2a\left(\cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{2\pi}{5}\right)=a$$

$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{2}$ car $a\neq 0$ donc

$$\cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{2}$$

c°) <u>Démontrons que :</u>

$$BC=BD\cos\frac{\pi}{5}+CD\cos\frac{2\pi}{5}$$

soit K le projeté orthogonal le D sur [BC] alors les triangles BKD et DKC sont rectangles en K.

BC=BK+KC

- Dans le triangle rectangle BKD, on a :

$\cos\frac{\pi}{5}=\frac{BK}{BD}\Leftrightarrow BK=BD\cos\frac{\pi}{5}$ et dans le triangle DKC rectangle en K on a :

$$\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{CK}{CD}\Rightarrow CK=CD\cos\frac{\pi}{5} \text{ donc}$$

$$BC=BD\cos\frac{\pi}{5}+CD\cos\frac{2\pi}{5}$$

- **Déduisons-en que :**

$$\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{4}$$

$$BC=BD\cos\frac{\pi}{5}+CD\cos 2\frac{\pi}{5}$$

$$=BD\cos\frac{\pi}{5}+(AC-AD)\cos\frac{2\pi}{5}$$

$$=a\cos\frac{\pi}{5}+AC\cos\frac{2\pi}{5}-AD\cos\frac{2\pi}{5}$$

Or AC=AB car ABC est isocèle en A d'où :

$$BC=a\cos\frac{\pi}{5}+AB\cos\frac{2\pi}{5}-AD\cos\frac{2\pi}{5}$$

$$=a\cos\frac{\pi}{5}+2a\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}-a\cos\frac{2\pi}{5}$$

$$a=a\left(\cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{2\pi}{5}\right)+2a\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}$$

Or $\cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{2}$ donc

$$a=a\times\frac{1}{2}+2a\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}$$

$$2a\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}=a-\frac{1}{2}a$$

$$\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{2}a\right)=\frac{1}{4}$$

Car $a\neq 0$ donc

$$\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{4}$$

d°) $x=\cos\frac{\pi}{5}$ et $y=\cos\frac{2\pi}{5}$

$x-y=\frac{1}{2}$ et $xy=\frac{1}{4}$

Calculons x e y

$$\begin{cases} x-y=\frac{1}{2} \\ xy=\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2}+y \\ y\left(\frac{1}{2}+y\right)-\frac{1}{4}=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2}+y \\ 4y^2+2y-1=0 \end{cases}$$

$$4y^2+2y-1=0$$

$$\Delta=4+16=20=\left(2\sqrt{5}\right)^2$$

$$y_1=-\frac{\sqrt{5}+1}{4} \text{ et } y_2=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

$\frac{2\pi}{5}\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ donc $\cos\frac{2\pi}{5}\succ 0$ et

$-\frac{\sqrt{5}+1}{4}\prec 0$ et $\frac{\sqrt{5}-1}{4}\succ 0$

Donc $y=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

On en déduit que :

$$x=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}-1}{4}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

$$x=\frac{\sqrt{5}+1}{4} \text{ et } y=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

e°) Calcul de $\sin\frac{\pi}{5}$ et $\tan\frac{\pi}{5}$

$$\cos^2\frac{\pi}{5}+\sin^2\frac{\pi}{5}=1$$

$$\Rightarrow \sin^2\frac{\pi}{5}=1-\frac{6+2\sqrt{5}}{16}$$

$$\Rightarrow \sin^2\frac{\pi}{5}=\frac{10-2\sqrt{5}}{16}$$

Comme $\frac{\pi}{5}\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ alors $\sin\frac{\pi}{5}\succ 0$

Donc $\sin\frac{\pi}{5}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

$$\tan\frac{\pi}{5}=\frac{\sin\frac{\pi}{5}}{\cos\frac{\pi}{5}}$$

$$\tan\frac{\pi}{5}=\frac{\left(\sqrt{5}-1\right)\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

Chapitre 3 : Fonctions Numériques : comportement global.

Exercice n°1

Déterminons dans chacun des cas l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

1°) $f:x\mapsto \dfrac{2x+1}{\sqrt{2x-1}-3}$

$Df=\{x\in\mathbb{R}/2x-1\geq 0 \; et \; \sqrt{2x-1}-3\neq 0\}$

$\begin{cases}2x-1\geq 0\\ \sqrt{2x-1}-3\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geq\dfrac{1}{2}\\ 2x-1\neq 9\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}x\in\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right[\\ x\neq 5\end{cases}\Rightarrow x\in\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right[-\{5\}$

$Df=\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right[-\{5\}$

2°) $g:x\mapsto\dfrac{x-1}{|x-1|-|3x-2|}$

$Dg=\{x\in\mathbb{R}/|x-1|-|3x-2|\neq 0\}$

$|x-1|-|3x-2|\neq 0\Leftrightarrow|x-1|\neq|3x-2|$

$\Leftrightarrow x-1\neq 3x-2$ et $x-1\neq -3x+2$

$\Leftrightarrow 2x\neq 1$ et $4x\neq 3$

$\Leftrightarrow x\neq\dfrac{1}{2}$ et $x\neq\dfrac{3}{4}$

$Dg=\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{4}\right\}$

3°) $h:x\mapsto\dfrac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}-1}$

$Dh=\{x\in\mathbb{R}/x+3\geq 0; x\geq 0; \sqrt{x}-1\neq 0\}$

$\begin{cases}x+3\geq 0\\ x\geq 0\\ \sqrt{x}-1\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geq -3\\ x\geq 0\\ x\neq 1\end{cases}\Rightarrow x\in\mathbb{R}^{+}\backslash\{1\}$

$Dh=\mathbb{R}^{+}-\{1\}$ ou $Dh=[0;1[\cup]1;+\infty[$

4°) $i:x\mapsto\dfrac{\sqrt{x^2-3}}{\sqrt{x-1}}$

$Di=\{x\in\mathbb{R}/x^2-3\geq 0 \; et \; x-1\succ 0\}$

$\begin{cases}x^2-3\geq 0\\ x-1\succ 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})\geq 0\\ x\succ 1\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}x\in\left]-\infty;-\sqrt{3}\right]\cup\left[\sqrt{3};+\infty\right[\\ x\succ 1\end{cases}$

$Di=\left[\sqrt{3};+\infty\right[$

5°) $j:x\mapsto\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2-1}}$

$Dj=\left\{x\in\mathbb{R}/x^2-1\neq 0 \; et \; \dfrac{x^2}{x^2-1}\geq 0\right\}$

$x^2-1\neq 0\Leftrightarrow x\neq 1 \; et \; x\neq -1$

$\dfrac{x^2}{x^2-1}\geq 0\Leftrightarrow x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$

$Dj=]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$

6°) $k:x\mapsto\sqrt{x^2-1}.\sqrt{x^2-4}$

$Dk=\{x\in\mathbb{R}/x^2-1\geq 0 \, et \, x^2-4\geq 0\}$

$x^2-1\geq 0\Leftrightarrow x\in]-\infty;-1]\cup[1;+\infty[$

$x^2-4\geq 0\Leftrightarrow x\in]-\infty;-2]\cup[2;+\infty[$

$Dk=]-\infty;-2]\cup[2;+\infty[$

7°) $l:[0;2\pi]\to\mathbb{R}$

$x\mapsto\sqrt{\dfrac{\cos x}{1-2\cos x}}$

$Dl=\begin{cases}x\in[0;2\pi]/\dfrac{\cos x}{1-2\cos x}\geq 0 \, et\\ 1-2\cos x\neq 0\end{cases}$

$1-2\cos x\neq 0\Leftrightarrow\cos x\neq\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x\neq\dfrac{\pi}{3} \, et \, x\neq\dfrac{5\pi}{3}$

$\dfrac{\cos x}{1-2\cos x}\geq 0$

$\cos x=0\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2} \; ou \; x=\dfrac{3\pi}{2}$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{3}$		2π
$\cos x$		+		+	0	−	0	+		+	
$1-2\cos x$		−	0	+		+		+	0	−	
$\frac{\cos x}{1-2\cos x}$		−	||	+	0	−	0	+	||	−	

$$Dl=\left]\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{2};\frac{5\pi}{3}\right[$$

8°) $M:[-\pi;\pi]\to\mathbb{R}$

$$x\to\frac{\tan x}{1+\tan x}$$

$$D_M=\left\{\begin{array}{l}x\in[-\pi;\pi]/x\neq-\frac{\pi}{2};x\neq\frac{\pi}{2}\ et\\1+\tan x\neq0\end{array}\right\}$$

$1+\tan x\neq0\Leftrightarrow\tan x\neq1$

$$\Leftrightarrow x\neq-\frac{\pi}{4}\ et\ x\neq\frac{3\pi}{4}$$

$$D_M=[-\pi;\pi]-\left\{-\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{4}\right\}$$

9°) $N:x\mapsto\frac{\sin x}{\sqrt{2}\sin x+1}$

$$D_N=\left\{x\in\mathbb{R}/\sqrt{2}\sin x+1\neq0\right\}$$

$$\sin x\neq-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x\neq-\frac{\pi}{4}+2k\pi\\x\neq\frac{5\pi}{4}+2k\pi\end{cases}k\in\mathbb{Z}$$

$$D_N=\mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{\pi}{4}+2k\pi;\frac{5\pi}{4}+2k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$$

Exercice n°2

Etudions la parité des fonctions numériques suivantes puis interprétons graphiquement les résultats obtenus.

1°) $f:x\to x\sqrt{x^2-1}$

$Df=]-\infty;-1]\cup[1;+\infty[$

$x\in Df\Leftrightarrow x\geq1\ ou\ x\leq-1$

$\Leftrightarrow -x\leq-1\ ou -x\geq1$

$\Leftrightarrow -x\in]-\infty;-1]\cup[1;+\infty[$

$\Leftrightarrow -x\in Df$

$$f(-x)=-x\sqrt{(-x)^2-1}=-x\sqrt{x^2-1}$$

$f(-x)=-f(x)$

$\begin{cases}x\in Df;-x\in Df\\f(-x)=-f(x)\end{cases}$ donc f est une fonction impaire

Interprétation graphique

La courbe représentative de la fonction f admet l'origine du repère comme centre de symétrie.

2°) $g:x\to\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

$Dg=\mathbb{R}\backslash\{0\}$

$x\in Dg\Leftrightarrow x\neq0\Leftrightarrow -x\neq0$

$\Leftrightarrow -x\in Dg$

$$g(-x)=\frac{\sqrt{(-x)^2+1}}{(-x)}=-\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$$

$g(-x)=-g(x)$

$\begin{cases}x\in Dg;\ -x\in Dg\\g(-x)=-g(x)\end{cases}$ donc g est impaire

Interprétation graphique

La courbe représentation de la fonction g admet l'origine du repère comme centre de symétrie.

3°) $h:x\to\frac{3x^2+2}{|x+1|}$

$Dh=\mathbb{R}\backslash\{-1\}$

$1\in D_h$ or $-1\notin D_h$ donc D_h n'est pas centré d'où h n'est ni paire ni impaire.

Exercice n°5

$f(x)=\frac{x+3}{x+1}$ et $g(x)=\frac{x}{x+2}$

$h=gof$

1°) Trouvons l'ensemble de définition de h et explicitions h(x)

$Df = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ $\quad Dg = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

$Df = \{x \in Df \,/\, f(x) \in Dg\}$

$$\begin{cases} x \in Df \\ f(x) \in Dg \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ \dfrac{x+3}{x+1} \neq -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ 3+x \neq -2x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -\dfrac{5}{3} \end{cases}$$

$$D_h = \mathbb{R} \setminus \left\{-1; -\frac{5}{3}\right\}$$

Explicitons h(x)

$$h(x) = g[f(x)] = \frac{f(x)}{f(x)+2}$$

$$h(x) = \frac{x+3}{x+1} : \left(\frac{x+3}{x+1} + 2\right)$$

$$= \frac{x+3}{x+1} : \frac{3x+5}{x+1}$$

$$h(x) = \frac{x+3}{3x+5}$$

2°) Vérifions si h et k sont égales.

$$D_h = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{5}{3}; -1\right\}$$

$$D_k = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{5}{3}\right\}$$

$Dh \neq Dk$ donc $h \neq k$

Exercice

Démontrons que h(x)=f(x)+g(x) est 6-périodique.

D'après l'énoncé, f est 2-périodique donc 2×3=6 est aussi une période de f. g est 3 périodique donc 3×2=6 est aussi une période de g.

f et g étant périodique de période 6 alors la fonction h=f+g est périodique de période 6.

Exercice 7

$$f(x) = \frac{-2x^2+3x+7}{x^2-2x-3}$$

1°) Montrons que (C_f) admet Ω(1 ;-2) comme centre de symétrie.

$Df = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2-2x-3 \neq 0\}$

$x^2-2x-3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$ et $x \neq 3$

$Df = \mathbb{R} \setminus \{-1;3\}$

$x \in Df \Leftrightarrow x \neq -1$ et $x \neq 3$

$\Leftrightarrow -x \neq 1$ et $-x \neq -3$

$\Leftrightarrow 2-x \neq 3$ et $2-x \neq -1$

$\Leftrightarrow (2-x) \in Df$

$$f(2-x)+f(x) = \frac{-2(2-x)^2+3(2-x)+7}{(2-x)^2-2(2-x)-3} + \frac{-2x^2+3x+7}{x^2-2x-3}$$

$$= \frac{-8+8x-2x^2+6-3x+7}{4-4x+x^2-4+2x-3} + \frac{-2x^2+3x+7}{x^2-2x-3}$$

$$= \frac{-2x^2+5x+5}{x^2-2x-3} + \frac{-2x^2+3x+7}{x^2-2x-3}$$

$$= \frac{-4x^2+8x+12}{x^2-2x-3} = \frac{-4(x^2-2x-3)}{x^2-2x-3}$$

$$f(2-x)+f(x) = -4$$

$\begin{cases} x \in Df ; (2-x) \in Df \\ f(2-x)+f(x) = -2\times 2 \end{cases}$ donc Ω(1 ;-2) est un centre de symétrie de (Cf).

2°) $g(x) = \dfrac{x^2+6x+2}{2x^2+12x+9}$

Montrons que (Cg) admet (D) :x = -3 comme axe de symétrie.

$Dg = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 2x^2+6x+9 \neq 0\}$

$2x^2+6x+9 = 0$

$$\Delta = 144 - 72 = 72 = \left(6\sqrt{2}\right)^2$$

$$x_1 = \frac{-12-6\sqrt{2}}{4} \quad x_2 = \frac{-12+6\sqrt{2}}{4}$$

$$x \in Dg \Rightarrow x \neq \frac{-6-3\sqrt{2}}{2} \text{ et } x \neq \frac{-6+3\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow -x \neq \frac{6+3\sqrt{2}}{2} \text{ et } -x \neq \frac{6-3\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow -6-x \neq \frac{-6+3\sqrt{2}}{2} \text{ et } -6-x \neq \frac{-6-3\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow (-6-x) \in Dg$$

$$g(-6-x) = \frac{(-6-x)^2 - 6(6+x) + 2}{2(-6-x)^2 - 12(6+x) + 9}$$

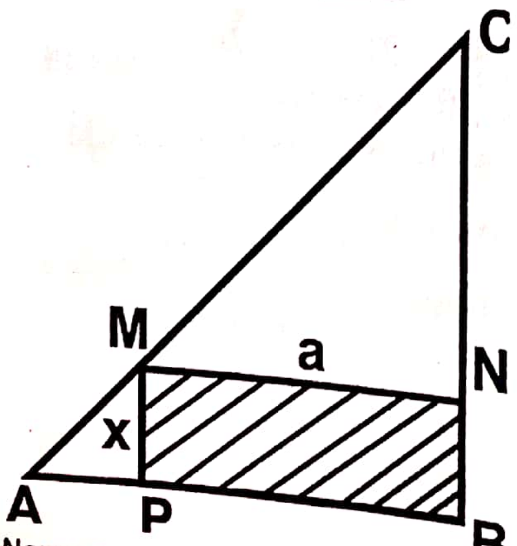
$$= \frac{x^2+12x+36-36-6x+2}{2x^2+24x+72-72-12x+9}$$

$$g(-6-x) = \frac{x^2+6x+2}{2x^2+12x+9} = g(x)$$

$$\begin{cases} x \in Dg;\ (-6-x) \in Dg \\ g(-6-x) = g(x) \end{cases}$$ donc (D) :x= -3 est un axe de symétrie de (Cg).

Exercice n°12

1. Exprimons a en fonction de x



Nommons le rectangle MNBP.
Considérons les triangles CMN et CAB, les droites (MN) et (AB) sont parallèles car MNBP est un rectangle donc CMN et CAB sont en configuration de Thales. D'après le théorème de Thales :

$$\frac{CM}{CA} = \frac{CN}{CB} = \frac{MN}{AB}$$

$$\frac{CN}{CB} = \frac{MN}{AB} \Leftrightarrow \frac{30-x}{30} = \frac{a}{20}$$

$$\Leftrightarrow 20(30-x) = 30a$$

$$\Leftrightarrow a = 20 - \frac{2}{3}x$$

$$\boxed{a = (20 - \frac{2}{3}x)cm}$$

2) Exprimons l'aire A(x) de la maison en fonction de x

$$A(x) = MN \times MP$$

$$= ax$$

$$= (20 - \frac{2}{3}x)x\ cm^2$$

$$\boxed{A(x) = (-\frac{2}{3}x^2 + 20x)\,cm^2}$$

3) Déterminons x pour que l'aire de la construction soit minimale.

$$A(x) = -\frac{2}{3}x^2 + 20x$$

$$= -\frac{2}{3}\left[(x-15)^2 - 15^2\right]$$

$$A(x) = -\frac{2}{3}\left[(x-15)^2 - 225\right]$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (x-15)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x-15)^2 - 225 \geq -225$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{3}\left[(x-15)^2 - 225\right] \leq -\frac{2}{3}(-225)$$

$$\Leftrightarrow A(x) \leq 150$$

$$A(x) = 150 \Leftrightarrow -\frac{2}{3}(x-15)^2 + 150 = 150$$

$$\Leftrightarrow x - 15 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 15$$

$$\boxed{\begin{cases} A(x) \leq 150 \\ A(15) = 150 \end{cases} \quad \text{donc l'aire } A(x) \text{ est maximale pour } x=15, \text{ce maximum est } 150}$$

Exercice n°13

$$f(x)=\frac{2x+1}{x+2}$$

1°) <u>Déterminons a et b tel que</u>

$$f(x)=a+\frac{b}{x+2}\quad \forall x\neq -2$$

$$f(x)=\frac{ax+2a+b}{x+2}=\frac{2x+1}{x+2}$$

$$\begin{cases}a=2\\2a+b=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\b=-3\end{cases}$$

$$f(x)=2+\frac{-3}{x+2}$$

2°) <u>A l'aide d'un changement de repère, traçons (C_f)</u>

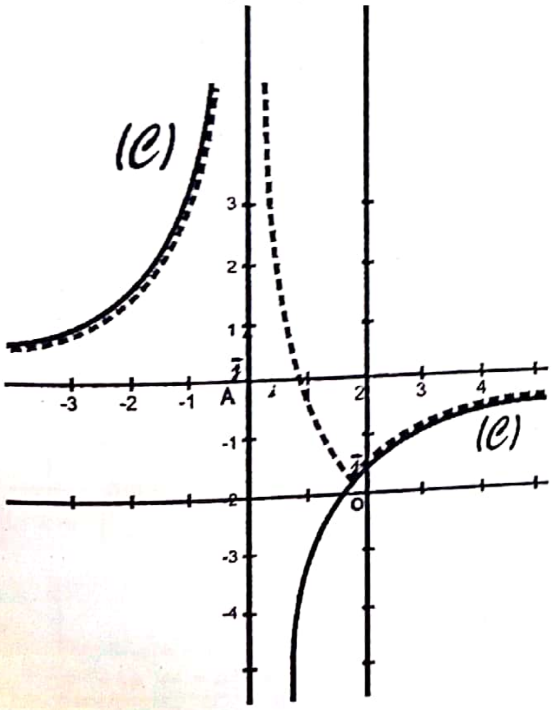
Posons $X=x+2\;\;et\;\;Y=y-2$

$$y=2-\frac{3}{x+2}\Rightarrow y-2=-\frac{3}{x+2}$$

$$\Rightarrow Y=\frac{-3}{X}$$

$Y=\frac{-3}{X}$ est l'équation de (C_f) dans $(\vec{A};\vec{i},\vec{j})$

avec A(-2 ;2)



3°) $g(x)=|f(x)|$

a°) <u>Exprimons g(x) sans le symbole de la valeur absolue.</u>

$$g(x)=\left|\frac{2x+1}{x+2}\right|=\frac{|2x+1|}{|x+2|}$$

x	$-\infty$		-2		$-1/2$		$+\infty$
$\lvert 2x+1\rvert$		$-2x-1$		$-2x-1$	0	$2x+1$	
$\lvert x+2\rvert$		$-x-2$	0	$x+2$		$x+2$	
$g(x)$		$\frac{2x+1}{x+2}$	‖	$-\frac{2x+1}{x+2}$		$\frac{2x+1}{x+2}$	

- Pour $x\in\left]-\infty;-2\right[\cup\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$

  $g(x)=f(x)=\frac{2x+1}{x+2}$

- Pour $x\in\left]-2;-\frac{1}{2}\right]$ $g(x)=-f(x)$

  $g(x)=-\frac{2x+1}{x+2}$

b°) <u>Méthode de construction de (C') de g</u>

- Sur $\left]-\infty;-2\right[\cup\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$ g(x)=f(x) donc (C) et (C') sont confondues
- Sur $\left]-2;-\frac{1}{2}\right]$ g(x)=-f(x) donc (C) et (C') sont symétrique par rapport à (O ; $\vec{i}$)

d°)<u>Détermination graphique du nombre de solutions de l'équation g(x)=m</u>

- Pour $m\in\left]-\infty;0\right[$ g(x)=m n'admet aucune solution.
- Pour $m\in\{0;2\}$ g(x)=m admet une seule solution.
- Pour $m\in\left]0;2\right[\cup\left]2;+\infty\right[$ g(x)=m admet deux solutions.

Exercice n°17

<u>Trouvons x pour que l'aire du rectangle soit maximale.</u>

Soit $\mathcal{A}$ l'aire du rectangle MNQP

$\mathcal{A}$=MN×QM

ABC étant un triangle équilatéral alors

$\widehat{A} = 60°$

$\tan\widehat{A} = \dfrac{QM}{AM} \Leftrightarrow \tan 60° = \dfrac{QM}{x}$

$\Leftrightarrow QM = x\sqrt{3}$

$QM = PN = x\sqrt{3}$ et $\widehat{B} = 60°$

$\tan\widehat{B} = \dfrac{PN}{NB} = \dfrac{\sqrt{3}x}{NB} = \sqrt{3}$

$\Rightarrow NB = x$

Par suite $MN = AB - 2x$

$MN = a - 2x$

$A = x\sqrt{3}(a-2x)$

$= -2\sqrt{3}x^2 + \sqrt{3}ax$

$= -2\sqrt{3}\left[\left(x - \frac{1}{4}a\right)^2 - \frac{a^2}{16}\right]$

$$A = -2\sqrt{3}\left(x - \frac{1}{4}a\right)^2 + \frac{\sqrt{3}a^2}{8}$$

$\forall x \in \mathbb{R}\ \left(x - \frac{1}{4}a\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow -2\sqrt{3}\left(x - \frac{a}{4}\right)^2 \leq 0$

$\Leftrightarrow -2\sqrt{3}\left(x - \frac{a}{4}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}a^2}{8} \leq \frac{\sqrt{3}a^2}{8}$

$\Leftrightarrow A(x) \leq \frac{\sqrt{3}a^2}{8}$

$A(x) = \frac{\sqrt{3}a^2}{8} \Leftrightarrow \left(x - \frac{a}{4}\right)^2 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{a}{4}$

L'aire du rectangle est maximale pour $x = \frac{a}{4}$ et la valeur du maximum vaut $\frac{\sqrt{3}a^2}{8}$.

Exercice n°19

Déterminons A(x) ainsi que la valeur de x pour laquelle l'aire est la plus grande puis indiquons sa valeur.

$A(x) = \dfrac{GF \times GB}{2} + \dfrac{(EF + BC) \times EB}{2}$

$= \dfrac{x(10-x) + (10+x)(10-x)}{2}$

$= \dfrac{10x - x^2 + 100 - x^2}{2}$

$A(x) = -x^2 + 5x + 50$

$= -\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{225}{4}$

$A(x)$ est maximale pour $x = \frac{5}{2}$ et

$A_{\max} = \frac{225}{4} cm^2$

Chapitre 4 : Limites

Exercice n°1

1. Calcul de limites

a. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1-3x^2}{x^2+3x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-3x^2}{x^2} = -3$ donc

$\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1-3x^2}{x^2+3x} = -3}$

b. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2x^3+3x^2+1}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} -2x$ donc

$\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2x^3+3x^2+1}{x^2-4} = +\infty}$

c. $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x^2-x-2}{x-2} = \lim\limits_{x\to2} \dfrac{(x-2)(x+1)}{x-2} = \lim\limits_{x\to2} x+1$ donc

$\boxed{\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x^2-x-2}{x-2} = 3}$

d. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{(1+x)-1}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{1}{\left(\sqrt{1+x}+1\right)}$ donc

$\boxed{\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \dfrac{1}{2}}$

2. calcul de limites en $-\infty$ et $+\infty$

a. $f(x) = \dfrac{2x^2-3x-1}{1-3x^2}$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) =$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-3x-1}{1-3x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{-3x^2}\ donc$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-3x-1}{1-3x^2}=-\frac{2}{3}}$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-3x-1}{1-3x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{-3x^2}\ donc$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-3x-1}{1-3x^2}=-\frac{2}{3}}$$

b. $g(x)=\sqrt{x^2+1}+x$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}=\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}\ donc$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} g(x)=0\ \ car\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}1=1\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+1}-x=+\infty\end{cases}}$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}=\sqrt{x^2+1}+x$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty\ \ car\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty\end{cases}}$$

c. $h(x)=\sqrt{3x^2-1}-3x+1$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} h(x)=\lim_{x\to+\infty}|x|\sqrt{3-\frac{1}{x^2}}-3x+1$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{3-\frac{1}{x^2}}-3+\frac{1}{x}\right)$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} h(x)=-\infty\ \ car\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{3-\frac{1}{x^2}}-3+\frac{1}{x}=\sqrt{3}-3\end{cases}}$$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)$

$$\lim_{x\to-\infty} h(x)=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{3x^2-1}-3x+1$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} h(x)=+\infty\ \ car\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{3x^2-1}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}-3x+1=+\infty\end{cases}}$$

d. $j(x)=\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{x-2\sqrt{x^2-1}}$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} j(x)$

$$\lim_{x\to-\infty} j(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+|x|\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}{x-2|x|\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}$$

$$\lim_{x\to-\infty} j(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-(x)\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}{x+2x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}$$

$$\lim_{x\to-\infty} j(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}{1+2\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} j(x)=0\ car\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}1-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}1+2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}=3\end{cases}}$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} j(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} j(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x-2\sqrt{x^2-1}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} j(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}{1-2\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} j(x)=-2\ car\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=2\\ \lim\limits_{x\to+\infty}1-2\times\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}=-1\end{cases}}$$

ABC étant un triangle équilatéral alors

$\widehat{A} = 60°$

$$\tan\widehat{A} = \frac{QM}{AM} \Leftrightarrow \tan 60° = \frac{QM}{x}$$

$$\Leftrightarrow QM = x\sqrt{3}$$

$QM = PN = x\sqrt{3}$ *et* $\widehat{B} = 60°$

$$\tan\widehat{B} = \frac{PN}{NB} = \frac{\sqrt{3}x}{NB} = \sqrt{3}$$

$\Rightarrow NB = x$

Par suite $MN = AB - 2x$

$MN = a - 2x$

$$A = x\sqrt{3}(a-2x)$$

$$= -2\sqrt{3}x^2 + \sqrt{3}ax$$

$$= -2\sqrt{3}\left[\left(x - \frac{1}{4}a\right)^2 - \frac{a^2}{16}\right]$$

$$A = -2\sqrt{3}\left(x - \frac{1}{4}a\right)^2 + \frac{\sqrt{3}a^2}{8}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \left(x - \frac{1}{4}a\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow -2\sqrt{3}\left(x - \frac{a}{4}\right)^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -2\sqrt{3}\left(x - \frac{a}{4}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}a^2}{8} \leq \frac{\sqrt{3}a^2}{8}$$

$$\Leftrightarrow A(x) \leq \frac{\sqrt{3}a^2}{8}$$

$$A(x) = \frac{\sqrt{3}a^2}{8} \Leftrightarrow \left(x - \frac{a}{4}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{a}{4}$$

L'aire du rectangle est maximale pour $x = \frac{a}{4}$ et la valeur du maximum vaut $\frac{\sqrt{3}a^2}{8}$.

Exercice n°19

Déterminons A(x) ainsi que la valeur de x pour laquelle l'aire est la plus grande puis indiquons sa valeur.

$$A(x) = \frac{GF \times GB}{2} + \frac{(EF + BC) \times EB}{2}$$

$$= \frac{x(10-x) + (10+x)(10-x)}{2}$$

$$= \frac{10x - x^2 + 100 - x^2}{2}$$

$$A(x) = -x^2 + 5x + 50$$

$$= -\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{225}{4}$$

$A(x)$ est maximale pour $x = \frac{5}{2}$ et

$$A_{\max} = \frac{225}{4} cm^2$$

Chapitre 4 : Limites

Exercice n°1

1. Calcul de limites

a. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1-3x^2}{x^2+3x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{-3x^2}{x^2} = -3$ *donc*

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{1-3x^2}{x^2+3x} = -3}$$

b. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-2x^3+3x^2+1}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-2x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} -2x$ *donc*

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} \frac{-2x^3+3x^2+1}{x^2-4} = +\infty}$$

c. $\lim\limits_{x\to2} \frac{x^2-x-2}{x-2} = \lim\limits_{x\to2} \frac{(x-2)(x+1)}{x-2} = \lim\limits_{x\to2} x+1$ *donc*

$$\boxed{\lim_{x\to2} \frac{x^2-x-2}{x-2} = 3}$$

d. $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim\limits_{x\to0} \frac{(1+x)-1}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)} = \lim\limits_{x\to0} \frac{1}{\left(\sqrt{1+x}+1\right)}$ *donc*

$$\boxed{\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{1}{2}}$$

2. *calcul de limites en* $-\infty$ *et* $+\infty$

a. $f(x) = \frac{2x^2-3x-1}{1-3x^2}$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) =$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-3x-1}{1-3x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{-3x^2}\ donc$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-3x-1}{1-3x^2}=-\frac{2}{3}}$$

- $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-3x-1}{1-3x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{-3x^2}\ donc$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-3x-1}{1-3x^2}=-\frac{2}{3}}$$

b. $g(x)=\sqrt{x^2+1}+x$

- $\lim_{x\to-\infty} g(x)$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}=\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}\ donc$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} g(x)=0\ car\begin{cases}\lim_{x\to-\infty}1=1\\ \lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+1}-x=+\infty\end{cases}}$$

- $\lim_{x\to+\infty} g(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}=\sqrt{x^2+1}+x$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty\ car\begin{cases}\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}=+\infty\\ \lim_{x\to+\infty}x=+\infty\end{cases}}$$

c. $h(x)=\sqrt{3x^2-1}-3x+1$

- $\lim_{x\to+\infty} h(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} h(x)=\lim_{x\to+\infty}|x|\sqrt{3-\frac{1}{x^2}}-3x+1$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{3-\frac{1}{x^2}}-3+\frac{1}{x}\right)$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} h(x)=-\infty\ car\begin{cases}\lim_{x\to+\infty}x=+\infty\\ \lim_{x\to+\infty}\sqrt{3-\frac{1}{x^2}}-3+\frac{1}{x}=\sqrt{3}-3\end{cases}}$$

- $\lim_{x\to-\infty} h(x)$

$$\lim_{x\to-\infty} h(x)=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{3x^2-1}-3x+1$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} h(x)=+\infty\ car\begin{cases}\lim_{x\to-\infty}\sqrt{3x^2-1}=+\infty\\ \lim_{x\to-\infty}-3x+1=+\infty\end{cases}}$$

d. $j(x)=\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{x-2\sqrt{x^2-1}}$

- $\lim_{x\to-\infty} j(x)$

$$\lim_{x\to-\infty} j(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+|x|\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}{x-2|x|\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}$$

$$\lim_{x\to-\infty} j(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-(x)\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}{x+2x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}$$

$$\lim_{x\to-\infty} j(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}{1+2\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} j(x)=0\ car\begin{cases}\lim_{x\to-\infty}1-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=0\\ \lim_{x\to-\infty}1+2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}=3\end{cases}}$$

- $\lim_{x\to+\infty} j(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} j(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x-2\sqrt{x^2-1}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} j(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}{1-2\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} j(x)=-2\ car\begin{cases}\lim_{x\to+\infty}1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=2\\ \lim_{x\to+\infty}1-2\times\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}=-1\end{cases}}$$

3. **Déterminons les domaines de définition et calculons les limites aux bornes**

a. $k(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$

$D_k=\{x\in\mathbb{R} / x^2-3x+2\neq 0\}$

$x^2-3x+2=0$

$\Delta=9-8=1$

$x_1=\dfrac{3-1}{2}=1$; $x_2=\dfrac{3+1}{2}=2$

$\boxed{D_k=\mathbb{R}\setminus\{1;2\} \text{ ou }]-\infty;1[\cup]1;2[\cup]2;+\infty[}$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} k(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} k(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=1$

$\lim\limits_{x\to1} k(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+1}{x-2}$

$\boxed{\lim\limits_{x\to1} k(x)=-2}$

- $\lim\limits_{x\to2^-} k(x)=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$

$\boxed{\lim\limits_{x\to2^-} k(x)=-\infty \quad car \begin{cases}\lim\limits_{x\to2^-} x^2-1=3\\ \lim\limits_{x\to2^-} x^2-3x+2=0^-\end{cases}}$

- $\lim\limits_{x\to2^+} k(x)=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$

$\boxed{\lim\limits_{x\to2^+} k(x)=+\infty \quad car \begin{cases}\lim\limits_{x\to2^+} x^2-1=3\\ \lim\limits_{x\to2^+} x^2-3x+2=0^+\end{cases}}$

b. $L(x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}$

$\boxed{D_L=[-1;1]\setminus\{0\}}$

- $\lim\limits_{x\to-1} L(x)$

$\lim\limits_{x\to-1} L(x)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}$

$\boxed{\lim\limits_{x\to-1} L(x)=1 \quad car \begin{cases}\lim\limits_{x\to-1}\sqrt{1-x^2}-1=-1\\ \lim\limits_{x\to-1} x=-1\end{cases}}$

- $\lim\limits_{x\to0^-} L(x)$

$\lim\limits_{x\to0^-} L(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}$

$\lim\limits_{x\to0^-} L(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1-x^2-1}{x\left(\sqrt{1-x^2}+1\right)}$

$\lim\limits_{x\to0^-} L(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}+1}$

$\boxed{\lim\limits_{x\to0^-} L(x)=0 \quad car \begin{cases}\lim\limits_{x\to0^-} -x=0\\ \lim\limits_{x\to0^-}\sqrt{1-x^2}+1=2\end{cases}}$

- $\lim\limits_{x\to0^+} L(x)$

$\lim\limits_{x\to0^+} L(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}$

$\lim\limits_{x\to0^+} L(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-x^2-1}{x\left(\sqrt{1-x^2}+1\right)}$

$\lim\limits_{x\to0^+} L(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}+1}$

$\boxed{\lim\limits_{x\to0^+} L(x)=0}$

- $\lim\limits_{x\to1} L(x)$

$\lim\limits_{x\to1} L(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}$

$\boxed{\lim\limits_{x\to1} L(x)=-1 \quad car \begin{cases}\lim\limits_{x\to1}\sqrt{1-x^2}-1=-1\\ \lim\limits_{x\to1} x=1\end{cases}}$

c. $M(x)=\dfrac{1}{x(x-1)}-\dfrac{1}{x}$

$\boxed{\begin{array}{l} D_M=\mathbb{R}\setminus\{0;1\}\\ D_M=]-\infty;0[\cup]0;1[\cup]1;+\infty[\end{array}}$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} M(x)$

$$\lim_{x\to-\infty} M(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x(x-1)}-\frac{1}{x}$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} M(x)=0 \;\; car \begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} x(x-1)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty\end{cases}}$$

- $\lim\limits_{x\to0^-} M(x)$

$$\lim_{x\to0^-} M(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{1}{x(x-1)}-\frac{1}{x}$$

$$\boxed{\lim_{x\to0^-} M(x)=+\infty \;\; car \begin{cases}\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{x(x-1)}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to0^-}-\frac{1}{x}=+\infty\end{cases}}$$

- $\lim\limits_{x\to0^+} M(x)$

$$\lim_{x\to0^+} M(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x(x-1)}-\frac{1}{x}$$

$$\boxed{\lim_{x\to0^-} M(x)=-\infty \;\; car \begin{cases}\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x(x-1)}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to0^+}-\frac{1}{x}=-\infty\end{cases}}$$

- $\lim\limits_{x\to1^-} M(x)$

$$\lim_{x\to1^-} M(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{1}{x(x-1)}-\frac{1}{x}$$

$$\boxed{\lim_{x\to1^-} M(x)=-\infty \;\; car \begin{cases}\lim\limits_{x\to1^-} x(x-1)=0^-\\ \lim\limits_{x\to1^-}-\frac{1}{x}=-1\end{cases}}$$

- $\lim\limits_{x\to1^+} M(x)$

$$\lim_{x\to1^+} M(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{1}{x(x-1)}-\frac{1}{x}$$

$$\boxed{\lim_{x\to1^+} M(x)=+\infty \;\; car \begin{cases}\lim\limits_{x\to1^+} x(x-1)=0^+\\ \lim\limits_{x\to1^+}-\frac{1}{x}=-1\end{cases}}$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} M(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} M(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x(x-1)}-\frac{1}{x}$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} M(x)=0 \;\; car \begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x(x-1)}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0\end{cases}}$$

d. $N(x)=\dfrac{x\sqrt{x}-8}{4-x}$

$$\boxed{D_N=[0;4[\cup]4;+\infty[}$$

- $\lim\limits_{x\to0} N(x)$

$$\lim_{x\to0} N(x)=\lim_{x\to0}\frac{x\sqrt{x}-8}{4-x}=-2$$

$$\boxed{\lim_{x\to0} N(x)=-2 \;\; car \begin{cases}\lim\limits_{x\to0} x\sqrt{x}-8=-8\\ \lim\limits_{x\to0} 4-x=4\end{cases}}$$

$\lim\limits_{x\to4} N(x)$

$$\lim_{x\to4} N(x)=\lim_{x\to4}\frac{x\sqrt{x}-8}{4-x}$$

$$\lim_{x\to4} N(x)=\lim_{x\to4}\frac{(x\sqrt{x}-8)(x\sqrt{x}+8)}{(4-x)(x\sqrt{x}+8)}$$

$$\lim_{x\to4} N(x)=\lim_{x\to4}\frac{x^3-64}{-(x-4)(x\sqrt{x}+8)}$$

$$\lim_{x\to4} N(x)=\lim_{x\to4}\frac{(x-4)(x^2+4x+16)}{-(x-4)(x\sqrt{x}+8)}$$

$$\lim_{x\to4} N(x)=\lim_{x\to4}\frac{-x^2-4x-16}{x\sqrt{x}+8}$$

$$\lim_{x\to4} N(x)=\frac{-48}{16}$$

$$\boxed{\lim_{x\to4} N(x)=-3}$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} N(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} N(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+\frac{8}{x}}{\frac{4}{x}-1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} N(x) = -\infty \quad car \begin{cases} \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty \\ \lim_{x\to+\infty} \frac{8}{x} = 0 \\ \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{x} = 0 \end{cases}$$

Exercice n°2

Calculons les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to1} 5x-3 = 2$
2. $\lim_{x\to-1} x^3+8x^2-2 = 5$
3. $\lim_{x\to3} \frac{x^3-7}{x-5} = -10$
4. $\lim_{x\to\frac{\Pi}{3}} \frac{2}{\cos x} = 4$
5. $\lim_{x\to\frac{\Pi}{3}} \tan x = \sqrt{3}$
6. $\lim_{x\to0} \sqrt{x}-3x = 0$

Exercice n°3

Calculons les limites suivantes :

1) $\lim_{x\to\frac{4}{3}} \frac{(x-2)(3x-4)}{3x-4} = \lim_{x\to\frac{4}{3}} x-2$

$$\boxed{\lim_{x\to\frac{4}{3}} \frac{(x-2)(3x-4)}{3x-4} = -\frac{2}{3}}$$

2) $\lim_{x\to0} \frac{3x^3-3x^2}{x} = \lim_{x\to0} 3x^2-3x$

$$\boxed{\lim_{x\to0} \frac{3x^3-3x^2}{x} = 0}$$

3) $$\boxed{\lim_{x\to1} \frac{x^3+1}{x^3+x^2+4x+4} = \frac{1}{5}}$$

4) $\lim_{x\to1} \frac{1-x^3}{x-1} = \lim_{x\to1} \frac{(1-x)(x^2+x+1)}{x-1}$

$\lim_{x\to1} \frac{1-x^3}{x-1} = \lim_{x\to1} -x^2-x-1$

$$\boxed{\lim_{x\to1} \frac{1-x^3}{x-1} = -3}$$

5) $\lim_{x\to4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \lim_{x\to4} \frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$

$\lim_{x\to4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \lim_{x\to4} \frac{1}{(\sqrt{x}+2)}$

$$\boxed{\lim_{x\to4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \frac{1}{4}}$$

6) $\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{2x} = \lim_{x\to0} \frac{x+1-1}{2x(\sqrt{1+x}+1)}$

$\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{2x} = \lim_{x\to0} \frac{x}{2x(\sqrt{1+x}+1)}$

$\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{2x} = \lim_{x\to0} \frac{1}{2(\sqrt{1+x}+1)}$

$$\boxed{\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{2x} = \frac{1}{4}}$$

7) $\lim_{x\to1} \frac{x-1}{2-\sqrt{x+3}} = \lim_{x\to1} \frac{(x-1)(2+\sqrt{x+3})}{2^2-x-3}$

$\lim_{x\to1} \frac{x-1}{2-\sqrt{x+3}} = \lim_{x\to1} \frac{(x-1)(2+\sqrt{x+3})}{-(x-1)}$

$\lim_{x\to1} \frac{x-1}{2-\sqrt{x+3}} = \lim_{x\to1} -(2+\sqrt{x+3})$

$$\boxed{\lim_{x\to1} \frac{x-1}{2-\sqrt{x+3}} = -4}$$

8) $\lim_{x\to1} \frac{x^3-2x+1}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to1} \frac{(x-1)(x^2+2x-1)}{(x-1)(x-2)}$

$\lim_{x\to1} \frac{x^3-2x+1}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to1} \frac{x^2+2x-1}{x-2}$

$$\boxed{\lim_{x\to1}\frac{x^3-2x+1}{x^2-3x+2}=-2}$$

Exercice n°5

Calculons les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+3x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1+3x-1}{x\left(\sqrt{1+3x}+1\right)}$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+3x}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{3}{\sqrt{1+3x}+1}$$

$$\boxed{\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+3x}-1}{x}=\frac{3}{2}}$$

2) $\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right]$

Posons $f(x)=\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$

$D_f=]-\infty;-1]\cup[1;+\infty[$

$0\notin D_f$ 0 *n'est pas une borne de* D_f

donc $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ *n'est pas définie.*

3) $\lim\limits_{x\to0}\sqrt{\frac{x-1}{x}}=\lim\limits_{x\to0^-}\sqrt{\frac{x-1}{x}}$

$$\boxed{\lim_{x\to0}\sqrt{\frac{x-1}{x}}=+\infty \quad car \begin{cases}\lim\limits_{x\to0}\frac{x-1}{x}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty\end{cases}}$$

4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\tan x\cos x}{x^3}$

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}\times\frac{1-\cos x}{x^2}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}\times\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}\times\frac{\sin^2 x}{x^2}\times\frac{1}{1+\cos x}$$

$$\boxed{\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{2}\ car\begin{cases}\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=1\\ \lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1\\ \lim\limits_{x\to0}\frac{1}{1+\cos x}=\frac{1}{2}\end{cases}}$$

5) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{\sqrt{x+5}-2}{\sqrt{x+2}-1}=\lim\limits_{x\to-1}\frac{(x+5-4)\left(\sqrt{x+2}+1\right)}{(x+2-1)\left(\sqrt{x+5}+2\right)}$

$$\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{x+5}-2}{\sqrt{x+2}-1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)\left(\sqrt{x+2}+1\right)}{(x+1)\left(\sqrt{x+5}+2\right)}$$

$$\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{x+5}-2}{\sqrt{x+2}-1}=\lim_{x\to-1}\frac{\left(\sqrt{x+2}+1\right)}{\left(\sqrt{x+5}+2\right)}$$

$$\boxed{\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{x+5}-2}{\sqrt{x+2}-1}=\frac{1}{2}}$$

6) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+2}{\sqrt{x^2-5}-3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}{|x|\sqrt{1-\frac{5}{x^2}}-3}$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x+2}{\sqrt{x^2-5}-3}=\lim_{x\to+\infty}-\frac{1+\frac{2}{x}}{\sqrt{1-\frac{5}{x^2}}+\frac{3}{x}}$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}\frac{x+2}{\sqrt{x^2-5}-3}=-1\ car\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}1+\frac{2}{x}=1\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1-\frac{5}{x^2}}+\frac{3}{x}=1\end{cases}}$$

Exercice n°7

Calculons les limites suivantes

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x}-3x^2+1}{-4\sqrt{x}+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\left(2-3x\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}\left(-4+\frac{3}{\sqrt{x}}\right)}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x}-3x^2+1}{-4\sqrt{x}+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-3x\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}}{-4+\frac{3}{\sqrt{x}}}$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x}-3x^2+1}{-4\sqrt{x}+3}=+\infty \quad car \quad \begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}2-3x\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}-4+\dfrac{3}{\sqrt{x}}=-4\end{cases}}$$

b) $$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}+\frac{3}{4}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{2+\frac{1}{x}}-\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)+\frac{3}{4}$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}+\frac{3}{4}=+\infty}$$

$$car\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2+\dfrac{1}{x}}-\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}=\sqrt{2}-1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{4}=+\infty\end{cases}$$

c) $$\lim_{x\to1}\frac{3x^2-2x+1}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+x-1)}{(x-1)(x-2)}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{3x^2-2x+1}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-1}{x-2}$$

$$\boxed{\lim_{x\to1}\frac{3x^2-2x+1}{x^2-3x+2}=-1}$$

d) $$\lim_{x\to-1}(x+1)\tan\left(\frac{\Pi}{2}x\right)$$

Posons $X=x+1$ *quand* $x\to-1,\ X\to0$

$$\lim_{x\to-1}(x+1)\tan\left(\frac{\Pi}{2}x\right)=\lim_{X\to0}X\tan\left[\frac{\Pi}{2}(X-1)\right]$$

$$\lim_{x\to-1}(x+1)\tan\left(\frac{\Pi}{2}x\right)=\lim_{X\to0}-X\tan\left[\frac{\Pi}{2}-\frac{\Pi}{2}X\right]$$

$$\lim_{x\to-1}(x+1)\tan\left(\frac{\Pi}{2}x\right)=\lim_{X\to0}\frac{-X}{\tan\left(\frac{\Pi}{2}X\right)}$$

$$\lim_{x\to-1}(x+1)\tan\left(\frac{\Pi}{2}x\right)=\lim_{X\to0}\frac{\frac{\Pi}{2}X}{\tan\frac{\Pi}{2}X}\left(-\frac{2}{\Pi}\right)$$

$$\boxed{\lim_{x\to-1}(x+1)\tan\left(\frac{\Pi}{2}x\right)=-\frac{2}{\Pi}\quad car\quad \lim_{u\to0}\frac{u}{\tan u}=1}$$

e) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3x-1}{x\sqrt{x^2+4}-x^2+7}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x|x|\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}-x^2+7}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3x-1}{x\sqrt{x^2+4}-x^2+7}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}-x^2+7}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3x-1}{x\sqrt{x^2+4}-x^2+7}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}-1+\frac{7}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3x-1}{x\sqrt{x^2+4}-x^2+7}=\frac{1}{0^+}$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3x-1}{x\sqrt{x^2+4}-x^2+7}=+\infty\quad car\quad\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}1+\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^2}=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\dfrac{4}{x^2}}-1+\dfrac{7}{x^2}=0^+\end{cases}}$$

f) $$\lim_{x\to-\infty}\left(1-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)\times(4x+7)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-1-\frac{1}{x^2}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\times(4x+7)$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)\times(4x+7)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{-4x+7}{x^2}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)\times(4x+7)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\frac{4}{x}-\frac{7}{x^2}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}\left(1-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)\times(4x+7)=0}$$

Exercice n°9

1. $g(x)=\sqrt{x^2+2x}-x$

a) *Montrons que* $|g(x)-1|\le\dfrac{1}{2x}$

$$|g(x)-1|=\left|\sqrt{x^2+2x}-(x+1)\right|$$

$$=\left|\frac{x^2+2x-(x^2+2x+1)}{\sqrt{x^2+2x}+(x+1)}\right|$$

$$=\left|\frac{-1}{\sqrt{x^2+2x}+(x+1)}\right|$$

$$|g(x)-1|=\frac{1}{\sqrt{x^2+2x}+(x+1)}$$

$$x \succ 0 \Rightarrow 2x \succ 0$$
$$\Rightarrow x^2 + 2x \succ x^2$$
$$\Rightarrow \sqrt{x^2+2x} \succ \sqrt{x^2}$$
$$\Rightarrow \sqrt{x^2+2x} \succ x$$
$$\Rightarrow \sqrt{x^2+2x} + x + 1 \succ 2x+1 \succ 2x$$
$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2+2x}+x+1} \prec \frac{1}{2x}$$
$$\boxed{\Rightarrow \left|g(x)-1\right| \leq \frac{1}{2x}}$$

b) *Deduisons en* $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

$$\begin{cases} \left|g(x)-1\right| \leq \dfrac{1}{2x} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{2x} = 0 \end{cases} \quad donc \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = 1$$

2. $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$

a)

Montrons que $\forall x \succ 0$

$$0 \prec f(x) \prec \frac{1}{2x}$$
$$f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$$
$$= \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$$
$$1 \succ 0 \Leftrightarrow x^2+1 \succ x^2$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} \succ \sqrt{x^2}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} \succ x$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} + x \succ 2x \succ 0$$
$$\Leftrightarrow 0 \prec \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} \prec \frac{1}{2x}$$
$$\boxed{donc \quad 0 \prec f(x) \prec \frac{1}{2x}}$$

b) *Deduisons* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$$\begin{cases} 0 \prec f(x) \prec \dfrac{1}{2x} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{2x} = 0 \end{cases} \quad donc \quad \boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$$

Chapitre 5 : DERIVATION

Exercice n°1

Calculons la dérivée de f sur D

1°) $f(x) = \tan(3x)$; $D = \left[0; \frac{\pi}{6}\right[$

$$f'(x) = \left(\tan(3x)\right)'$$
$$= (3x)' \times \tan'(3x)$$
$$= 3 \times \frac{1}{\cos^2 3x}$$
$$f'(x) = \frac{3}{\cos^2 3x}; \ \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{6}\right[$$

2°) $f(x) = \sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right), D = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \left(\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)\right)'$$
$$= 3\sin'\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)$$
$$f'(x) = 3\cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right); \ \forall x \in \mathbb{R}$$

3°) $f(x) = \sqrt{\cos x}$; $D = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

$$f'(x) = \left(\sqrt{\cos x}\right)'$$
$$= \frac{(\cos x)'}{2\sqrt{\cos x}}$$
$$f'(x) = \frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}; \ \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$$

4°) $f(x) = \dfrac{\tan x}{\tan^2 x - 1}$; $D = \left[0; \frac{\pi}{4}\right[$

$$f'(x) = \frac{(\tan x)'(\tan^2 x - 1) - (\tan^2 x - 1)'\tan x}{(\tan^2 x - 1)^2}$$
$$f'(x) = \frac{(\tan^2 x + 1)(\tan^2 x - 1) - 2(\tan^2 x + 1)\tan^2 x}{(\tan^2 x - 1)^2}$$
$$f'(x) = \frac{\tan^4 x - 1 - 2\tan^4 x - 2\tan^2 x}{(\tan^2 x - 1)^2}$$
$$f'(x) = \frac{-\tan^4 x - 2\tan^2 x - 1}{(\tan^2 x - 1)^2}; \ \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right[$$

$$f'(x)=\frac{-\left(\tan^2 x+1\right)^2}{\left(\tan^2 x-1\right)^2};\ \forall x\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right[$$

5°) $f(x)=\left(\frac{x+1}{2x-3}\right)^2$; $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{3}{2}\right\}$

$$f'(x)=2\left(\frac{x+1}{2x-3}\right)'\left(\frac{x+1}{2x-3}\right)$$

$$f'(x)=2\left(\frac{(x+1)'(2x-3)-(x+1)(2x-3)'}{(2x-3)^2}\right)\left(\frac{x+1}{2x-3}\right)$$

$$f'(x)=2\left(\frac{2x-3-2x-2}{(2x-3)^2}\right)\left(\frac{x+1}{2x-3}\right)$$

$$=\frac{-10}{(2x-3)^2}\times\frac{x+1}{2x-3}=\frac{-10x-10}{(2x-3)^3}$$

$$f'(x)=\frac{-10(x+1)}{(2x-3)^3}\quad\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{3}{2}\right\}$$

6°) $f(x)=\frac{\cos x}{\sin x-1}$ $D=\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$

$$f'(x)=\frac{(\cos x)'(\sin x-1)-\cos x(\sin x-1)'}{(\sin x-1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-\sin x(\sin x-1)-\cos^2 x}{(\sin x-1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-\sin^2 x+\sin x-1+\sin^2 x}{(\sin x-1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{\sin x-1}{(\sin x-1)^2}=\frac{1}{\sin x-1}$$

$$f'(x)=\frac{1}{\sin x-1}\quad\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$$

7°) $f(x)=\frac{x^2(x-1)^3}{2x+1}$

$$f'(x)=\frac{\left[x^2(x-1)^3\right]'(2x+1)-(2x+1)'\left[x^2(x-1)^3\right]}{(2x+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x(x-1)^3+x^2\left(3(x-1)^2\right)(2x+1)-2x^2(x-1)^3}{(2x+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{(x-1)^2\left[2x(x-1)+3x^2(2x+1)-2x^2(x-1)\right]}{(2x+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{(x-1)^2\left[2x^2-2x+6x^3+3x^2-2x^3+2x^2\right]}{(2x+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{(x-1)^2\left(4x^3+7x^2-2x\right)}{(2x+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{x(x-1)^2\left(4x^2+7x-2\right)}{(2x+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{x(x-1)^2(2x+1)(2x-2)}{(2x+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x(x-1)^3}{2x+1}\quad\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

8°) $f(x)=\frac{x^2-3x-5}{x^2-2x+3}$ $D=\mathbb{R}$

$$f'(x)=\frac{(x^2-3x-5)'(x^2-2x+3)-(x^2-2x+3)'(x^2-3x-5)}{(x^2-2x+3)^2}$$

$$f'(x)=\frac{(2x-3)(x^2-2x+3)-(2x-2)(x^2-3x-5)}{(x^2-2x+3)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x^3-4x^2+6x-3x^2+6x-9}{(x^2-2x+3)^2}-\frac{2x^3-6x^2-10x-2x^2+6x+10}{(x^2-2x+3)^2}$$

$$f'(x)=\frac{x^2+16x-19}{(x^2-2x+3)^2}\quad\forall x\in\mathbb{R}$$

9°) $f(x)=\sqrt{\frac{5x-1}{x-2}}$ $D=]2;+\infty[$

$$f'(x)=\left(\frac{5x-1}{x-2}\right)'\times\frac{1}{2\sqrt{\frac{5x-1}{x-2}}}$$

$$f'(x)=\frac{5(x-2)-(5x-1)}{(x-2)^2}\times\frac{1}{2\sqrt{\frac{5x-1}{x-2}}}$$

$$f'(x)=\frac{-9}{(x-2)^2}\times\frac{1}{2\sqrt{\frac{5x-1}{x-2}}}$$

$$f'(x)=\frac{-9}{2(x-2)^2\sqrt{\frac{5x-1}{x-2}}} \quad \forall x\in]2;+\infty[$$

10°) $f(x)=\frac{\cos x}{\sin x-2} \quad D=\mathbb{R}$

$$f'(x)=\frac{(\cos x)'(\sin x-2)-\cos x(\sin x-2)'}{(\sin x-2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-\sin x(\sin x-2)-\cos x(\cos x)}{(\sin x-2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-\sin^2 x+2\sin x-1+\sin^2 x}{(\sin x-2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2\sin x-1}{(\sin x-2)^2} \quad \forall x\in \mathbb{R}$$

Exercice n°4

$$f(x)=\frac{2x^2-x+3}{3x-3}$$

1°) Déterminons l'ensemble de définition Df puis calculons les limites de f aux bornes de Df.

$Df=\{x\in\mathbb{R} / 3x-3\neq 0\}$

$Df=\mathbb{R}\setminus\{1\} \quad]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-x+3}{3x-3}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{3x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{3}x$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-x+3}{3x-3}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{3x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{3}x$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{2x^2-x+3}{3x-3}=\frac{4}{0^-}$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{2x^2-x+3}{3x-3}=\frac{4}{0^+}$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x)=+\infty$$

2°) Etudions le sens de variation de f.

$$f'(x)=\frac{(4x-1)(3x-3)-3(2x^2-x+3)}{(3x-3)^2}$$

$$f'(x)=\frac{12x^2-12x-3x+3-6x^2+3x-9}{(3x-3)^2}$$

$$f'(x)=\frac{6x^2-12x-6}{(3x-3)^2} \quad \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$$

$(3x-3)^2 \succ 0 \Rightarrow f'(x)$ est du signe de $6x^2-12x-6$.

$6(x^2-2x-1)=0$

$\Delta=8$

$x_1=1+\sqrt{2};\ x_2=1-\sqrt{2}$

Pour $x\in\ ]-\infty;1-\sqrt{2}[\cup]1+\sqrt{2};+\infty[\ f'(x)\succ 0$

donc f est strictement croissante sur $]-\infty;1-\sqrt{2}]$ et sur $[1+\sqrt{2};+\infty[$.

Pour $x\in\ ]1-\sqrt{2};1+\sqrt{2}[\setminus\{1\}\ f'(x)\prec 0$

donc f est strictement décroissante sur $[1-\sqrt{2};1[$ et sur $]1;1+\sqrt{2}]$.

Tableau de variation

x	$+\infty$		$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$		
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↗	$8-3\sqrt{2}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$8+3\sqrt{2}$	↗	$+\infty$

Exercice n°5

1°) $f(x) = ax + b + \frac{1}{3-x}$

Trouvons a et b sachant que $A(2\,;1) \in (C_f)$ et (C_f) admet une tangente horizontale en A.

$$f(2)=1 \Leftrightarrow 2a+b+\frac{1}{3-2}=1$$

$$\Leftrightarrow 2a+b=0$$

$$\Leftrightarrow 2a=-b$$

$f'(2)=0 \qquad f'(x)=a+\frac{1}{(3-x)^2}$

$$f'(2)=0 \Leftrightarrow a+1=0$$

$$\Leftrightarrow a=-1$$

$$b=-2a$$

$$=-2(-1)$$

$$b=2$$

$$f(x)=-x+2+\frac{1}{3-x}$$

2°) $g(x)=\frac{x^3}{(x-1)^2}$

Déterminons le point de (Cg) ou la tangente est parallèle à la droite (D) d'équation
-x+y-4=0.

$(D): y = x+4$

$$g(x)=\frac{x^3}{(x-1)^2}$$

$$g'(x)=\frac{3x^2(x-1)^2-x^3(2x-2)}{(x-1)^4}$$

$$g'(x)=\frac{3x^2(x^2-2x+1)-2x^4+2x^3}{(x-1)^4}$$

$$g'(x)=\frac{3x^4-6x^3+3x^2-2x^4+2x^3}{(x-1)^4}$$

$$g'(x)=\frac{x^4-4x^3+3x^2}{(x-1)^4}$$

$$g'(x)=\frac{x^2(x-1)(x-3)}{(x-1)^4}$$

$$g'(x)=\frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$$

$$g'(x)=1 \Leftrightarrow \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}=1$$

$$\Leftrightarrow x^2(x-3)=(x-1)^3$$

$$\Leftrightarrow x^3-3x^2=x^3-3x^2+3x-1$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$$

(Cg) admet une tangente parallèle à (D) au point d'abscisse $-\frac{1}{3}$

Exercice n°21

Trouvons toutes les hyperboles qui possèdent les propriétés de l'énoncé.

$f(x)=y=\frac{ax+b}{cx+d};\ \ c\neq 0$ et $ad-bc\neq 0$

* $A(-1;6)\in H.$

$$f(-1)=6 \Leftrightarrow \frac{-a+b}{-c+a}=6$$

$$\Leftrightarrow b-a=6(d-c)\ \ (1)$$

* x=1 est une asymptote verticale à H

$$\lim_{x\to 1}\frac{ax+b}{cx+d}=\infty \Rightarrow \begin{cases} a+b\neq 0 \ et \\ c+d=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow d=-c\ \ (2)$$

* y =2 est asymptote horizontale à H

$$\lim_{x\to\infty} \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} = 2 \Leftrightarrow a = 2c$$

$a = 2c$ (3)

$$\begin{cases} b-a=6(d-c) \\ d=-c \\ a=2c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=-10c \\ d=-c \\ a=2c \end{cases}$$

Finalement $f(x) = y = \dfrac{2cx-10c}{cx-c}$

$$(H): y = \frac{2x-10}{x-1}$$

Exercice n°22

$$f(x) = \frac{ax+b}{x^2-4};\ (a;b) \in \mathbb{R}^2$$

1°) Déterminons l'ensemble de définition D_f

$Df = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2-4 \neq 0\}$ $\quad Df = \mathbb{R} \setminus \{-2;2\}$

2°) calculons f'(x)

$$f'(x) = \left(\frac{ax+b}{x^4-1}\right)' = -\frac{(ax^2+2bx+4a)}{(x^2-4)^2}$$

Déterminons la condition pour laquelle f est strictement monotone sur chaque intervalle ou elle est définie

Les intervalles de D_f sont

$]-\infty;-2[\cup]-2;2[\cup]2;+\infty[$

1er cas :

-2 et 2 sont racines de $ax^2+2bx+4a$ c'est-à-dire $a\left(x^2+\dfrac{2b}{a}x+4\right) = a(x^2-4)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{b}{a} = 0 \\ +4 = -4 \ (impossible) \end{cases}$$

Le premier cas est à rejeter.

2e cas :

$ax^2+2bx+4a$ est du signe de a c'est-à-dire

$$\Delta = 4b^2 - 16a^2 \prec 0 \Leftrightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^2 \prec 2^2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^2 - (2)^2 \prec 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{b}{a} \in]-2;2[$$

Conclusion : pour $\dfrac{b}{a} \in]-2;2[$ alors f est strictement monotone sur les intervalles de D_f.

3°) Déterminons a et b

$$A\left(0;-\frac{5}{4}\right) \in (Cf) \Rightarrow f(0) = -\frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{b}{-4} = -\frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow b = 5$$

$$f'(x) = \frac{-(ax^2+2bx+4a)}{(x^2-4)^2}$$

$$f'(0) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{-4a}{16} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = -2$$

$$f(x) = \frac{-2x+5}{x^2-4}$$

4°) Etudions les variations de f

$$f'(x) = \frac{-(-2x^2+10x-8)}{(x^2-4)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2-10x+8}{(x^2-4)^2} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2;2\}$$

Le signe de f'(x) est celui de $2x^2-10x+8$.

$x^2-5x+4=0$ $\Delta = 9$; $x_1 = 1$ et $x_2 = 4$

Tableau de signe

x	$-\infty$	-2	1	2	4	$+\infty$
$2x^2-10x+8$	+	+	0 −	−	0	+
$f'(x)$	+	‖ +	0 −	‖ −	0	+

- Pour $x \in]-\infty;-2[\cup]-2;1[\cup]4;+\infty[$

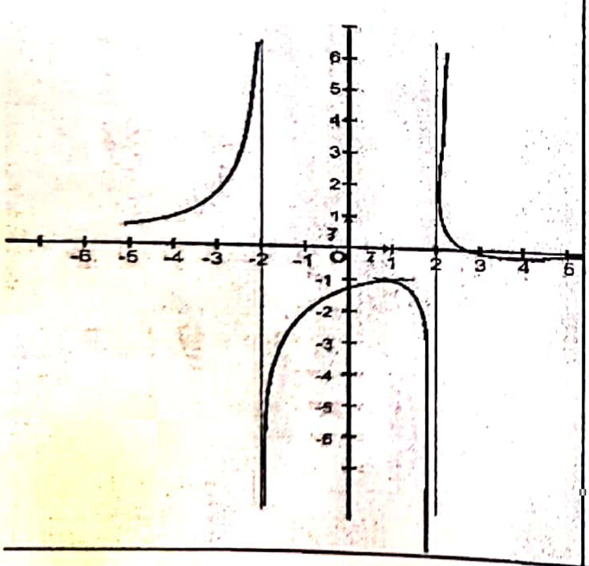
$f'(x) \succ 0$ donc f est strictement croissante sur $]-\infty;-2[$ sur $]-2;1]$ et sur $[4;+\infty[$.

- Pour $x \in]1;2[\cup]2;4[$ $f'(x) \prec 0$ donc f est strictement décroissante sur $[1;2[$ et sur $]2;4]$

Tableau de variation

x	$-\infty$		-2		1		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	0

5°) Construction de (Cf)



Chapitre 6 : Etude des fonctions

Exercice n°5

1°) Déterminons l'ensemble de définition de la fonction f noté D

$D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

2°) Déterminons les limites de f aux bornes de D.

- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$ $\quad \lim_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$ $\quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

Equation des asymptotes à Cf

$(D_1): x=-1$

$(D_2): y=1$

$(D_3): y=0$

3°) Equation des tangentes

- (T_1) : la tangente en x=-2

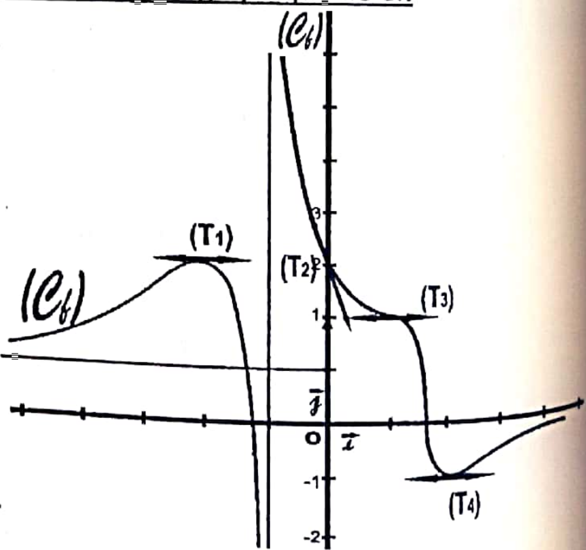
  (T_1) : y=3
- (T_2) :la tangente en x=0

  (T_2) : y= -3x+3
- (T_3) :la tangente en x=1

  (T_3) : y=2
- (T_4) : la tangente en x=2

  (T_4) : y=-1

4°) Traçons une esquisse de la représentation graphique de Cf.



Exercice n°9

$$g(x)=\frac{x(ax+b)}{2(x-c)^2}$$

1°) Déterminons a, b et c sachant que (D) : x=1 et (D') : y = $\frac{3}{2}$ sont des asymptotes à (Cg)

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=\dfrac{3}{2}\\ \lim\limits_{x\to 1} g(x)=\infty\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{a}{2}=\dfrac{3}{2}\\ 1-c=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=3\\ c=1\end{cases}$$

f(x) s'écrit : $\dfrac{x(3x+b)}{2(x-1)^2}$

(C) admet en O $(T): y=-2x$, $f'(0)=-2$

$$g(x)=\frac{x(3x+b)}{2(x-1)^2}$$

$$g'(x)=\frac{[x(3x+b)]'[2(x-1)^2]-4(x-1)[x(3x+b)]}{[2(x-1)^2]^2}$$

$$g'(x)=\frac{[(3x+b)+3x][2(x-1^2)]-4(x-1)(3x^2+bx)}{4(x-1)^4}$$

$$g'(0)=-2 \Leftrightarrow \frac{2b}{4}=-2 \Leftrightarrow \frac{b}{2}=-2$$

$$\Leftrightarrow b=-4$$

Finalement

$$g(x)=\frac{3x^2-4x}{2(x-1)^2}$$

2°)a) Etudions la fonction f

$$f(x)=\frac{3x^2-4x}{2(x-1)^2}$$

$$Df=\{x\in\mathbb{R} / x-1\neq 0\}$$

$$Df=\mathbb{R}\setminus\{1\}$$

Limites de f aux bornes de Df

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{3}{2}$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{3x^2-4x}{2(x-1)^2}=\frac{-1}{0^+}$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{3x^2-4x}{2(x-1)^2}=\frac{-1}{0^+}$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x)=-\infty$$

Variation de f .

$$f'(x)=\frac{[(3x-4)+3x][2(x-1^2)]-4(x-1)(3x^2-4x)}{4(x-1)^4}$$

$$f'(x)=\frac{(3x-2)(x-1)-(3x^2-4x)}{(x-1)^3}$$

$$f'(x)=\frac{3x^2-3x-2x+2-3x^2+4x}{(x-1)^3}$$

$$f'(x)=\frac{-x+2}{(x-1)^3}$$

Tableau de signe

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$-x+2$		+		+	0	−	
$(x-1)^3$		−	0	+		+	
$f'(x)$		−	‖	+	0	−	

- Pour $x\in]-\infty;1[\cup]2;+\infty[$ $f'(x)<0$ donc f est strictement décroissante sur $]-\infty;1[$ et sur $]2;+\infty[$.
- Pour $x\in]1;2[$ $f'(x)>0$ donc f est strictement croissante sur $]1;2]$.

Tableau de variation

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		−	‖	+	0	−	
$f(x)$	$\frac{3}{2}$	↘ $-\infty$	‖	$-\infty$ ↗	2	↘	$\frac{3}{2}$

b°) Déterminons une équation de la tangente en

0 $(T_1): y=f'(0)(x-0)+f(0)$

$(T_1): y=-2x$

En $\frac{3}{2}:(T_2): y=f'\left(\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)+f\left(\frac{3}{2}\right)$

$$y=4\left(x-\frac{3}{2}\right)+\frac{3}{2}$$

$(T_2): y=4x-\frac{9}{2}$

c°) <u>Etudions la position de (C) par rapport à (D')</u> $(D'): y=\frac{3}{2}$

$$f(x)-y=f(x)-\frac{3}{2}$$

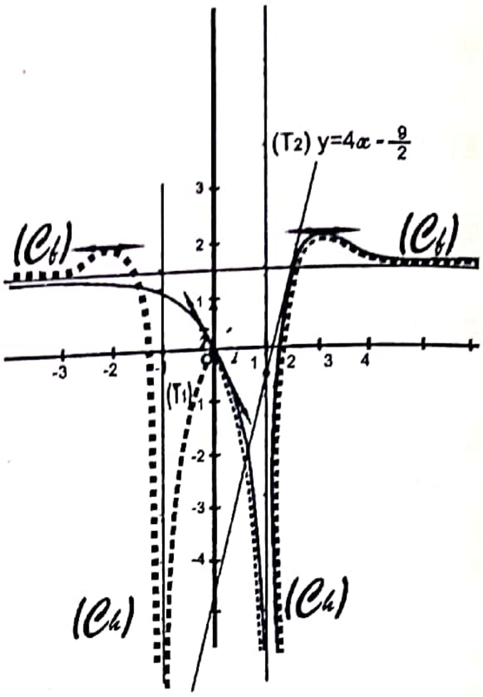
$$=\frac{3x^2-4x}{2(x-1)^2}-\frac{3}{2}$$

$$=\frac{3x^2-4x-3x^2+6x-3}{2(x-1)^2}$$

$$f(x)-y=\frac{2x-3}{2(x-1)^2}\quad \begin{cases}\forall x\in \mathbb{R}\setminus\{1\}\\ (x-1)^2\succ 0\end{cases}$$

- Pour $x\in\left]-\infty;\frac{3}{2}\right[\setminus\{1\}$, $f(x)-y\prec 0$ donc (Cf) est en dessous de (D') sur $\left]-\infty;\frac{3}{2}\right[\setminus\{1\}$.
- Pour $x\in\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$, $f(x)-y\succ 0$ (Cf) est au-dessus de (D') dans $\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$.

d°) <u>Construisons la courbe (Cf)</u>



3°) <u>Nombre de solution de l'équation $f(x)=4x+m,\ m\in\mathbb{R}$</u>

* Pour $m\in\left]-\infty;-\frac{9}{2}\right[$ $f(x)=4x+m$ admet trois solutions.
* Pour $m=-\frac{9}{2}$, $f(x)=4x+m$ admet deux solutions.
* Pour $m\in\left]-\frac{9}{2};+\infty\right[$ $f(x)=4x+m$ admet une solution.

4°) $h(x)=f(|x|)$

a°) <u>Déterminons l'ensemble de définition de h.</u>

$Dh=\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ car $h(x)=\frac{3|x|^2-4|x|}{2(|x|-1)^2}$

b°) <u>Etudions la parité de h.</u>

$x\in Dh \Leftrightarrow x\neq -1\ et\ x\neq 1$

$\Leftrightarrow -x\neq 1\ et\ -x\neq -1$

$\Leftrightarrow -x\in Dh$

$h(-x)=f(|-x|)=f(|x|)=h(x)$

Car $|-x|=|x|$

$\begin{cases}x\in Dh, -x\in Dh\\ h(-x)=h(x)\end{cases}$ donc h est paire

(Ch) admet l'axe $(o\vec{j})$ comme axe de symétrie.

c°) Comparons h(x) et f(x) pour $x \in [0;1[\cup]1;+\infty[$

$x \in [0;1[\cup]1;+\infty[\Rightarrow x \geq 0$

$h(x) = f(|x|) = f(x)$ car $|x| = x$

- h(x)=f(x) alors (C_h) et (C_f) sont confondues sur $[0;1[$ et sur $]1;+\infty[$.
- H étant une fonction paire alors on obtient la portion de (C_h) sur $]-\infty;-1[$ et sur $]-1;0]$ par symétrie par rapport à $(o,\vec{j})$.

d°) Traçons (C_h) dans le même repère que (C_f).

e°) Déterminons graphiquement le nombre de solutions de l'équation $h(x) = \lambda;\ \lambda \in \mathbb{R}$

- Pour $\lambda \in]-\infty;0[$ $h(x) = \lambda$ admet quatre solutions.
- Pour $\lambda = 0$, $h(x) = \lambda$ admet 3 solutions.
- Pour $\lambda \in \left]0;\frac{3}{2}\right]$ $h(x) = \lambda$ admet deux solutions.
- Pour $\lambda \in \left]\frac{3}{2};2\right]$ $h(x) = \lambda$ admet quatre solutions.
- Pour $\lambda = 2, h(x) = \lambda$ admet 2 solutions.

Exercice n°10

$$f(x) = \frac{2x^2+2x-1}{x^2+x}$$

1°) Déterminons l'ensemble de définition D_f

$Df = \{x \in \mathbb{R} / x^2+x \neq 0\}$

$x^2+x \neq 0 \Leftrightarrow x(x+1) \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq 0$ *et* $x \neq -1$

$Df =]-\infty;-1[\cup]-1;0[\cup]0;+\infty[$

2°) Déterminons a, b et c tel que $f(x) = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x+1}$

$$f(x) = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x+1}$$

$$= \frac{a(x^2+x)+b(x+1)+cx}{x^2+x}$$

$$= \frac{ax^2+(a+b+c)x+b}{x^2+x} = \frac{2x^2+2x-1}{x^2+x}$$

Par identification

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ c = 1 \end{cases}$$

$$f(x) = 2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$$

3°) Etudions la fonction f.

* $Df =]-\infty;-1[\cup]-1;0[\cup]0;+\infty[$

* Limites de f aux bornes de D_f

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$$

$$\lim_{x\to-1} f(x) = \lim_{x\to-1} \frac{2x^2+2x-1}{x^2+x} = \frac{-1}{0^+}$$

$$\lim_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = \lim_{x\to-1^+} \frac{2x^2+2x-1}{x^2+x} = \frac{-1}{0^-}$$

$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} \frac{2x^2+2x-1}{x^2+x} = \frac{-1}{0-}$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{2x^2+2x-1}{x^2+x} = \frac{-1}{0^+}$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = -\infty$$

Variation de f.

$$f'(x) = \frac{(4x+2)(x^2+x)-(2x+1)(2x^2+2x-1)}{(x^2+x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{4x^3+6x^2+2x-4x^3-6x^2+1}{\left(x^2+x\right)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x+1}{\left(x^2+x\right)^2}\quad \forall x\in \mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$$

$\forall x\in \mathbb{R}\setminus\{0;-1\}$, $\left(x^2+x\right)^2\succ 0$ le signe de f' est celui de 2x+1

- Pour $x\in \left]-\infty;-1\right[\cup\left]-1;-\frac{1}{2}\right[$ $f'(x)\prec 0$ donc f est strictement décroissante sur $\left]-\infty;-1\right[$ et sur $\left]-1;-\frac{1}{2}\right[$
- Pour $x\in\left]-\frac{1}{2};0\right[\cup\left]0;+\infty\right[$ $f'(x)\succ 0$ donc f est strictement croissante sur $\left[-\frac{1}{2};0\right[$ et sur $\left]0;+\infty\right[$.

Tableau de variation

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	0	$+$	||	$+$	
$f(x)$	2	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	6	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	2

4°) Démontrons que $(D): x=-\frac{1}{2}$ est un axe de symétrie pour (Cf).

$$x\in Df \Leftrightarrow x\neq 0 \text{ et } x\neq -1$$
$$\Leftrightarrow -x\neq 0 \text{ et } -x\neq 1$$
$$\Leftrightarrow -1-x\neq -1 \text{ et } -1-x\neq 0$$
$$\Leftrightarrow (-1-x)\in Df$$

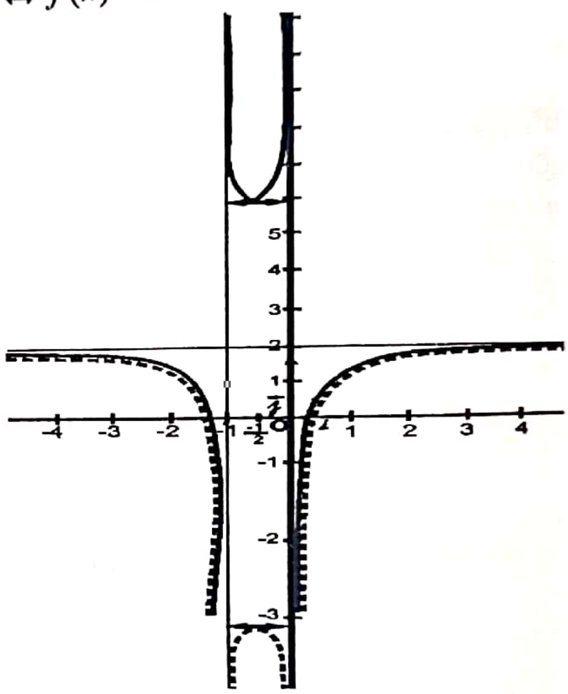
$$f(-1-x)=\frac{2(-1-x)^2+2(-1-x)-1}{(-1-x)^2+(-1-x)}$$
$$=\frac{2x^2+4x+2-2-2x-1}{x^2+2x+1-x-1}$$
$$=\frac{2x^2+2x-1}{x^2+x}$$
$$f(-1-x)=f(x)$$

$\begin{cases} x\in Df;\ (-1-x)\in Df \\ f(-1-x)=f(x)\end{cases}$ donc $(\Delta): x=-\frac{1}{2}$ est un axe de symétrie pour (C_f).

5°)a) Traçons (C_f) *(voir verseau)*

b°) Nombre de solutions de

$$(2-m)x^2+(2-m)x-1=0$$
$$\Leftrightarrow 2x^2-mx^2+2x-mx-1=0$$
$$\Leftrightarrow 2x^2+2x-1=mx^2+mx$$
$$\Leftrightarrow \frac{2x^2+2x-1}{x^2+x}=m \quad x\neq 0 \quad x\neq -1$$
$$\Leftrightarrow f(x)=m$$



* Pour $m\in\left]-\infty;2\right[$, $f(x)=m$ admet deux solutions opposées.
* Pour $m\in\left[2;6\right[$, $f(x)=m$ n'admet aucune solution.
* Pour $m=6$, $f(x)=m$ admet une solution négative.
* Pour $m\in\left]6;+\infty\right[$, $f(x)=m$ admet deux solutions négatives.

6°) $g(x)=\dfrac{2x^2+2x-1}{\left|x^2+x\right|}$

- Pour $x\in\left]-\infty;-1\right[\cup\left]0;+\infty\right[$, g(x)=f(x) donc (C) et (C') sont confondues.

- Pour $x \in]-1;0[$ g(x)=-f(x) donc (C') est le symétrique de (C) par rapport à $(o,\vec{i})$.

7°)a) Calculons Sn e fonction de $_n$

$$U_n = 2 - f(n) = 2 - 2 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$U_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$S_n = U_1 + U_2 + ... + U_n$$

$$U_1 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$$

$$U_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$U_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

. . .

. . .

. . .

$$U_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$S_n = U_1 + U_2 + ... + U_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$S_n = \frac{n}{n+1}$$

b°) Etudions le sens de variation de la suite (S_n)

$$S_{n+1} - S_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1}$$

$$= \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+2)(n+1)}$$

$$= \frac{n^2 + 2n + 1 - n^2 - 2n}{(n+2)(n+1)}$$

$$S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+2)(n+1)} \succ 0$$

$S_{n+1} - S_n \succ 0$ donc la suite (S_n) est strictement croissante.

c°) Déterminons $\lim\limits_{x \to +\infty} S_n$

$$\lim_{x \to +\infty} S_n = 1$$

Exercice n°12

$$f(x) = \cos 4x + 2\sin 2x$$

1°) Justifions le choix de $I = [0;\pi]$ comme intervalle d'étude.

$Df = \mathbb{R}$

$x \in Df \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow (x+\pi) \in \mathbb{R}$

$f(x+\pi) = \cos 4(x+\pi) + 2\sin 2(x+\pi)$

$f(x+\pi) = \cos(4x+4\pi) + 2\sin(2x+2\pi)$

$f(x+\pi) = \cos 4x + 2\sin 2x$ car $\cos(x+2k\pi) = \cos x$ et $\sin(x+2k\pi) = \sin x$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

$\begin{cases} x \in Df, (x+\pi) \in Df \\ f(x+\pi) = f(x) \end{cases}$ donc f est $_\pi$ périodique.

On peut réduire le domaine d'étude de f à un intervalle de longueur $_\pi$ soit $I = [0;\pi]$.

2°) Démontrons que

$f'(x) = 4\cos 2x(1 - 2\sin 2x)$

$f(x) = \cos 4x + 2\sin 2x$

$f'(x) = -4\sin 4x + 4\cos 2x$

$= -8\cos 2x \sin 2x + 4\cos 2x$

$f'(x) = 4\cos 2x(1 - 2\sin 2x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

b°) Sens de variation de f

$f'(x) = 4\cos 2x(1 - 2\sin 2x)$

$*\quad \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \cos\frac{\pi}{2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \; ou \\ 2x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} k \in \mathbb{Z}$$

$$S_{[0;\pi]} = \left\{\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right\}$$

$*\quad 1 - 2\sin 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = \sin\frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ ou \\ 2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ ou \\ x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \end{cases}$$

$$S_{[0;\pi]} = \left\{\frac{\pi}{12}; \frac{5\pi}{12}\right\}$$

x	0		$\frac{\pi}{12}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{12}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$4\cos 2x$		+		+	0	-		-	0	+	
$1-2\sin 2x$		+	0	-		-	0	+		+	
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	-	0	+	

$$x \in \left[0; \frac{\pi}{12}\right[\cup \left]\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{12}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{4}; \pi\right[\quad f'(x) \succ 0$$

$$x \in \left]\frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{12}; \frac{3\pi}{4}\right[\quad f'(x) \prec 0$$

<u>Variation</u>

f est strictement croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{12}\right]$ sur $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{12}\right]$ sur $\left[\frac{3\pi}{4}; \pi\right]$.

f est strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{4}\right]$ sur $\left[\frac{5\pi}{12}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

c°) <u>Dressons le tableau de variation</u>

x	0		$\frac{\pi}{12}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{12}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$f'(x)$		+	0	−	0	+	0	−	0	+	
$f(x)$	1	↗	$\frac{3}{2}$	↘	1	↗	$\frac{3}{2}$	↘	-3	↗	1

4°) <u>Démontrons que $(D): x = \frac{\pi}{4}$ est un axe de symétrie de (C_f).</u>

$x \in Df \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \in Df$$

$$f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos 4\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2\sin 2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

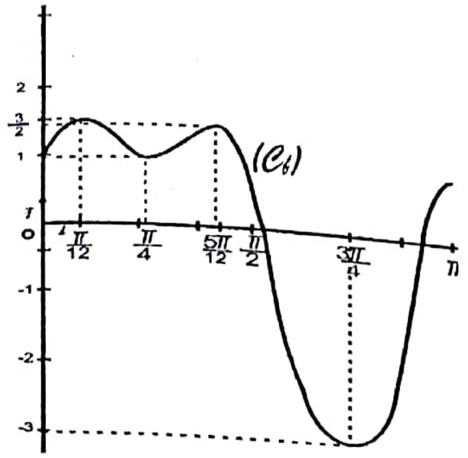
$$= \cos(2\pi - 4x) + 2\sin(\pi - 2x)$$

$$f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos 4x + 2\sin 2x = f(x)$$

$$\begin{cases} x \in Df, \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \in Df \\ f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = f(x) \end{cases} \text{donc}$$

$(D): x = \frac{\pi}{4}$ est un axe de symétrie de (C_f)

5°) <u>Traçons (C_f).</u>



Exercice n°14

$$f(x)=\frac{\sin x}{\cos 2x}$$

1°) Déterminons Df puis calculons

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^-} f(x);\ \lim_{x\to\frac{\pi}{4}^+} f(x);\ \lim_{x\to\frac{3\pi}{4}^-} f(x) \text{ et } \lim_{x\to\frac{3\pi}{4}^+} f(x)$$

$$Df:\{x\in\mathbb{R}/\cos 2x\neq 0\}$$

$$\cos 2x=0 \Leftrightarrow \cos 2x=\cos\frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+k\pi; k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}; k\in\mathbb{Z}$$

$$S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}; k\in\mathbb{Z}\right\}$$

$$Df=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}; k\in\mathbb{Z}\right\}$$

- $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^-} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^-}\frac{\sin x}{\cos 2x}=+\infty$ car

$$\begin{cases}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^-}\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \lim_{x\to\frac{\pi}{4}^-}\cos 2x=0^+\end{cases}$$

- $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^+} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^+}\frac{\sin x}{\cos 2x}=-\infty$ car

$$\begin{cases}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^+}\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \lim_{x\to\frac{\pi}{4}^+}\cos 2x=0^-\end{cases}$$

- $\lim_{x\to\frac{3\pi}{4}^-} f(x)=\lim_{x\to\frac{3\pi}{4}^-}\frac{\sin x}{\cos 2x}=-\infty$ car

$$\begin{cases}\lim_{x\to\frac{3\pi}{4}^-}\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \lim_{x\to\frac{3\pi}{4}^-}\cos 2x=0^-\end{cases}$$

- $\lim_{x\to\frac{3\pi}{4}^+} f(x)=\lim_{x\to\frac{3\pi}{4}^+}\frac{\sin x}{\cos 2x}=+\infty$ car

$$\begin{cases}\lim_{x\to\frac{3\pi}{4}^+}\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \lim_{x\to\frac{3\pi}{4}^+}\cos 2x=0^+\end{cases}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^-} f(x)=+\infty;\ \lim_{x\to\frac{\pi}{4}^+} f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to\frac{3\pi}{4}^-} f(x)=-\infty;\ \lim_{x\to\frac{3\pi}{4}^+} f(x)=+\infty$$

2°) Montrons que f est périodique de période $T=2\pi$

$$Df=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right\}$$

$$x\in Df \Leftrightarrow x\neq \frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$$
$$\Leftrightarrow x+2\pi \neq \frac{\pi}{4}+2\pi+\frac{k\pi}{2}$$
$$\Leftrightarrow x+2\pi \neq \frac{\pi}{4}+\frac{4\pi+k\pi}{2}$$
$$\Leftrightarrow x+2\pi \neq \frac{\pi}{4}+\frac{(k+4)\pi}{2}$$

Posons $k+4=k'$

$$x+2\pi \neq \frac{\pi}{4}+\frac{k'\pi}{2};\ k'\in \mathbb{Z}$$

$$\underline{x\in Df \Leftrightarrow x+2\pi\in Df}$$

$$f(x+2\pi)=\frac{\sin(x+2\pi)}{\cos 2(x+2\pi)}$$
$$f(x+2\pi)=\frac{\sin(x+2\pi)}{\cos(2x+4\pi)}$$
$$f(x+2\pi)=\frac{\sin x}{\cos 2x}$$

Car $\begin{cases}\sin(x+2k\pi)=\sin x\\ \cos(x+2k\pi)=\cos x\end{cases}$

$$f(x+2\pi)=f(x)$$

f est périodique de période 2π .

3°) <u>Etudions la parité de f.</u>

$$Df=\mathbb{R}\backslash\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right)$$

$$x\in Df \Leftrightarrow x\neq \frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$$
$$\Leftrightarrow -x\neq -\frac{\pi}{4}-\frac{k\pi}{2}$$
$$\Leftrightarrow -x\neq -\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}-\frac{k\pi}{2}$$
$$\Leftrightarrow -x\neq \frac{\pi}{4}-\frac{(1+k)\pi}{2}$$

Posons $k'=-(1+k)$; $-x\neq \frac{\pi}{4}+\frac{k'\pi}{2}$

$$\underline{x\in Df \Leftrightarrow -x\in Df}$$

$$f(-x)=\frac{\sin(-x)}{\cos(-2x)}=\frac{-\sin x}{\cos 2x}=-f(x)$$

$\begin{cases}x\in Df;\ -x\in Df\\ f(-x)=-f(x)\end{cases}$ donc f est impaire

4°) <u>Déduisons de **2°)** et **3°)** que l'on peut étudier f sur $D_E=[0;\pi]\backslash\left\{\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right\}$</u>

D'après **2°)** on sait que f est périodique de période 2π donc on peut réduire le domaine d'étude de f à un intervalle de longueur 2π .

On pourra retrouver le reste de la courbe par des translations successives de vecteur $k2\pi\vec{i}$ on peut choisir $[-\pi;\pi]\cap Df$ comme domaine d'étude.

De plus d'après **3°)** f est une fonction impaire on peut encore réduire le domaine d'étude à l'intervalle

$$[0;\pi]\cap Df=[0;\pi]\backslash\left\{\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right\}$$

Finalement le domaine d'étude

$$D_E=[0;\pi]\backslash\left\{\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right\}$$

5°) <u>Démontrons que</u> $\forall x\in\mathbb{R}$

$$\cos x\cos 2x+2\sin x\sin 2x=\left[1+2\sin^2 x\right]\cos x$$
$$\cos x\cos 2x+2\sin x+\sin 2x=$$
$$\cos x\cos 2x+4\sin^2 x\cos x=$$
$$\cos x\left(\cos 2x+4\sin^2 x\right)=$$
$$\cos x\left(\cos^2-\sin^2 x+4\sin^2 x\right)=$$
$$\cos x\left(1-\sin^2 x-\sin^2 x+4\sin^2 x\right)=$$
$$\cos x\left(1+2\sin^2 x\right)$$

Donc

$$\cos x+\cos 2x+2\sin x\sin 2x=\left[1+2\sin^2 x\right]\cos x$$

6°) <u>Résolvons dans D_E,</u>

$$\left(1+2\sin^2 x\right)\cos x\geq 0$$
$$1+2\sin^2 x\geq 0\ \ \forall x\in D_E$$

Le signe de $\left(1+2\sin^2 x\right)\cos x\geq 0$ est le même que celui de $\cos x$,

Pour $x\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right[\cup\left]\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$ $\cos x\geq 0$

$\Leftrightarrow \left(1+2\sin^2 x\right)\cos x \geq 0$

Pour $x \in \left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{4};\pi\right] \cos x \leq 0$

$\Leftrightarrow \left(1+2\sin^2 x\right)\cos x \leq 0$

$\left(1+2\sin^2 x\right)\cos x \geq 0 \Leftrightarrow$

$x \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$

$S_{DE} = \left[0;\frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$

7°) Etudions les variations de f et dressons son tableau de variation

$$f(x)=\frac{\sin x}{\cos 2x}$$

f est dérivable sur D_E en tant que quotient de fonctions dérivables sur D_E.

$$f'(x)=\frac{(\sin x)'\cos 2x-(\cos 2x)'\sin x}{(\cos 2x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{\cos x\cos 2x+2\sin 2x\sin x}{(\cos 2x)^2}$$

Or d'après **5°)**

$\cos x\cos 2x+2\sin 2x\sin x=\cos x\left(1+2\sin^2 x\right)$

Donc

$$f'(x)=\frac{\cos x\left(1+2\sin^2 x\right)}{(\cos 2x)^2} \quad \forall x\in D_E$$

$\forall x\in D_E \ (\cos 2x)^2 \succ 0$ et $1+2\sin^2 x \succ 0$ le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $\cos x$

* Pour $x \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$ $f'(x) \geq 0$

  donc f est croissante sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right[$ et sur $\left]\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$.

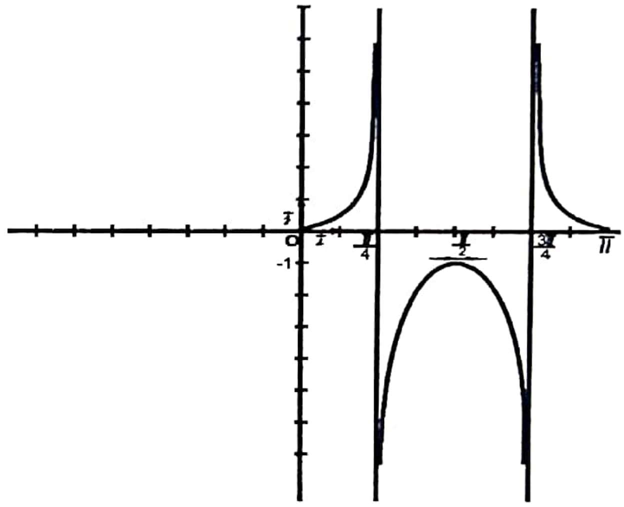
* Pour $x \in \left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{4};\pi\right]$ $f'(x) \leq 0$

  donc f est décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{4}\right[$ et sur $\left]\frac{3\pi}{4};\pi\right]$

Tableau de variation

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

8°) Traçons sur D_E ,(Cf).



Chapitre 7 : Suites Numériques

Exercice n°6

(U_n) est une suite croissante

$V_n=\frac{1}{n}(U_1+U_2+...+U_n) \ \forall n\geq 1$

Démontrons que (V_n) est croissante

$$V_{n+1}=\frac{1}{n+1}(U_1+U_2+...+U_n+U_{n+1})$$

$$V_{n+1}-V_n=\frac{1}{n+1}(U_1+U_2+...+U_{n+1})-\frac{1}{n}(U_1+U_2+...+U_n)$$

$$=\frac{1}{n+1}(U_1+U_2+...+U_n)+\frac{1}{n+1}(U_{n+1})-\frac{1}{n}(U_1+U_2+...+U_n)$$

$$=(U_1+U_2+...+U_n)\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n+1}(U_{n+1})$$

$$=(U_1+U_2+...+U_n)\left(-\frac{1}{n(n+1)}\right)+\frac{1}{n+1}U_{n+1}$$

$$=\frac{1}{n+1}\left[U_{n+1}-\frac{1}{n}(U_1+U_2+...+U_n)\right]$$

$$=\frac{1}{n(n+1)}\left[nU_{n+1}-(U_1+U_2+...+U_n)\right]$$

$$=\frac{1}{n(n+1)}\left[\begin{matrix}(U_{n+1}-U_1)+(U_{n+1}-U_2)+...+\\(U_{n+1}-U_n)\end{matrix}\right]$$

$n\succ 1\Rightarrow n(n+1)\succ 0$

(U_n) étant croissante donc

$U_{n+1}-U_1\geq 0;\ U_{n+1}-U_2\geq 0;...;$

$U_{n+1}-U_n\geq 0$

Par suite $V_{n+1}-V_n\geq 0$, la suite (V_n) est croissante.

Exercice n°7

$U_0=1$ et $U_{n+1}=\dfrac{U_n-1}{U_n+3}$

1°) Prouvons par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $U_n\succ -1$

Soit P_n la propriété définie pour $n\in\mathbb{N}$ pour : ≪$U_n\succ -1$≫.

Vérifions que P_0 est vraie

$U_0=1$ et $1\succ -1$ donc P_0 est vraie.

Supposons P_n vraie puis montrons que P_{n+1} est vraie.

$$U_{n+1}+1=\frac{U_n-1}{U_n+3}+1$$

$$=\frac{2U_n+2}{U_n+3}$$

$$U_{n+1}+1=\frac{2(U_n+1)}{U_n+3}$$

$$U_n\succ -1\Rightarrow\begin{cases}U_n+1\succ 0\\U_n+3\succ 2\end{cases}\Rightarrow\frac{U_n+1}{U_n+3}\succ 0$$

$$\Rightarrow 2\frac{U_n+1}{U_n+3}\succ 0\Rightarrow U_{n+1}+1\succ 0$$

$\Rightarrow U_{n+1}\succ -1$ donc P_{n+1} est vraie.

$\begin{cases}P_0\ est\ vraie\\P_n\ \ vraie\Rightarrow P_{n+1}\ \ vraie\end{cases}$ donc

$\forall n\in\mathbb{N},\ U_n\succ -1$

2°) Etudions le sens de variation de la suite (U_n)

$$U_{n+1}-U_n=\frac{U_n-1}{U_n+3}-U_n$$

$$=\frac{U_n-1-U_n^2-3U_n}{U_n+3}$$

$$U_{n+1}-U_n=\frac{-U_n^2-2U_n-1}{U_n+3}$$

$$=\frac{-(U_n+1)^2}{U_n+3}$$

$(U_n+1)^2 \succ 0;\ U_n \succ -1 \Rightarrow U_n+3 \succ 0$

$$\begin{cases}(U_n+1)^2 \succ 0 \\ U_n+3 \succ 0\end{cases} \Rightarrow \frac{(U_n+1)^2}{U_n+3} \succ 0$$

$$\Rightarrow -\frac{(U_n+1)^2}{U_n+3} \prec 0$$

$$\Rightarrow U_{n+1}-U_n \prec 0$$

Donc (U_n) est décroissante.

3°) $V_n = \frac{1}{U_n+1}$

a°) <u>Montrons que (V_n) est une suite arithmétique.</u>

$$V_{n+1} = \frac{1}{U_{n+1}+1} = \frac{1}{\frac{U_n-1}{U_n+3}+1}$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{\frac{2(U_n+1)}{U_n+3}} = \frac{U_n+3}{2(U_n+1)}$$

$$V_{n+1}-V_n = \frac{U_n+3}{2(U_n+1)} - \frac{1}{U_n+1}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{U_n+1}{U_n+1} = \frac{1}{2}$$

$V_{n+1}-V_n = \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$.

(V_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{2}$ et de 1^er^ terme $\frac{1}{2}$.

b°) <u>Exprimons V_n et U_n en fonction de n</u>

$$V_n = V_0 + nr \Leftrightarrow V_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}n$$

$$V_n = \frac{n+1}{2}$$

$$V_n = \frac{1}{U_n+1} \Leftrightarrow U_n+1 = \frac{1}{V_n}$$

$$\Leftrightarrow U_n = \frac{1}{V_n}-1$$

$$\Leftrightarrow U_n = \frac{2}{n+1}-1$$

$$\Leftrightarrow U_n = \frac{1-n}{n+1}$$

c°) <u>Exprimons S_n en fonction de n</u>

$$S_n = V_0+V_1+\ldots+V_{n-1}$$

$$= n\left(\frac{V_0+V_{n-1}}{2}\right)$$

$$= n\left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{n}{2}}{2}\right)$$

$$S_n = \frac{n(n+1)}{4}$$

Exercice n°14

1°) <u>calculons U_1, U_2, U_3</u>

$U_1 = 77000+0,06\times 77000$

$U_1 = 81620F$

$U_2 = 81620+0,06\times 81620$

$U_2 = 86517,2F$

$U_3 = 86517,2+0,06\times 86517,2$

$U_3 = 91708,23F$

2°) <u>Montrons que (U_n) est une suite géométrique.</u>

Posons $U_0 = 77000$

$U_1 = U_0 + 0,06U_0 = 1,06U_0$
$U_2 = U_1 + 0,06U_1 = 1,06U_1$
$U_3 = U_2 + 0,06U_2 = 1,06U_2$

.

.

.

$U_{n+1} = U_n + 0,06U_n = 1,06U_n$

$U_{n+1} = 1,06U_n$ donc (U_n) est suite géométrique de raison $q = 1,06$ et de 1er terme $U_0 = 77000$

Exprimons U_n en fonction de n

$U_n = 77000 \times (1,06)^n$

3°) Déterminons l'année d'achat du vélo

$U_n \geq 90000 \Leftrightarrow 77000 \times (1,06)^n \geq 90000$

$\Leftrightarrow (1,06)^n \geq \frac{90000}{77000}$

$\Leftrightarrow (1,06)^n \geq 1,1688$

$\Rightarrow n \geq 3$

Sawadogo achètera son vélo à partir de la 3éme année.

Exercice n°18

$$\begin{cases} U_1 = -1 \\ U_{n+1} = \frac{n}{2(n+1)}U_n + \frac{3(n+2)}{2(n+1)} \end{cases}$$

1°) Démontrons par récurrence que $U_n \prec 3$

Soit la propriété P_n : ≪$U_n \prec 3$≫

Vérifions que P_1 est vraie.

$U_1 = -1$ et $-1 \prec 3 \Leftrightarrow U_1 \prec 3$ donc P_1 est vraie.

Supposons que P_n est vraie puis montrons que P_{n+1} est vraie.

$$U_{n+1} - 3 = \frac{n}{2(n+1)}U_n + \frac{3(n+2)}{2(n+1)} - 3$$

$$U_{n+1} - 3 = \frac{nU_n + 3n + 6 - 6n - 6}{2(n+1)}$$

$$U_{n+1} - 3 = \frac{n(U_n - 3)}{2(n+1)}$$

* $n \geq 1 \Rightarrow 2(n+1) \geq 4$ et $4 \succ 0$

* $U_n \prec 3 \Rightarrow U_n - 3 \prec 0 \Rightarrow n(U_n - 3) \prec 0$

$$\begin{cases} 2(n+1) \succ 0 \\ n(U_n - 3) \prec 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{n(U_n - 3)}{2(n+1)} \prec 0$$

$\Rightarrow U_{n+1} - 3 \prec 0$

$U_{n+1} \prec 3$ donc $\forall n \geq 1, U_n \prec 3$ d'où (U_n) est majorée par 3.

2°) Etudions le sens de variation de (U_n).

$$U_{n+1} - U_n = \frac{n}{2(n+1)}U_n + \frac{3(n+2)}{2(n+1)} - U_n$$

$$= \frac{nU_n + 3n + 6 - 2nU_n - 2U_n}{2(n+1)}$$

$$= \frac{-nU_n + 3n - 2U_n + 6}{2(n+1)}$$

$$= \frac{-n(U_n - 3) - 2(U_n - 3)}{2(n+1)}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{-(n+2)(U_n - 3)}{2(n+1)}$$

* $n \geq 1 \Rightarrow n + 2 \succ 0$ et $n + 1 \succ 0$

* $U_n \prec 3 \Rightarrow U_n - 3 \prec 0$

Donc

$$\frac{-(n+2)(U_n - 3)}{2(n+1)} \succ 0 \Rightarrow U_{n+1} - U_n \succ 0$$

$\Rightarrow U_{n+1} \succ U_n$ d'où (U_n) est une suite croissante

3°) $V_n = n(3 - U_n)$

a°) Prouvons que (V_n) est géométrique.

$$V_{n+1} = (n+1)(3 - U_{n+1})$$
$$= (n+1)\left(3 - \frac{nU_n + 3n + 6}{2(n+1)}\right)$$
$$= 3n + 3 - \frac{nU_n + 3n + 6}{2}$$
$$= \frac{6n + 6 - nU_n - 3n + 6}{2}$$
$$= \frac{3n - nU_n}{2} = \frac{1}{2}n(3 - U_n)$$
$$V_{n+1} = \frac{1}{2}V_n$$

Donc $(V)_n$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de 1er terme 2.

b°) <u>Exprimons (V_n) en fonction de n</u>

$$V_n = V_1 q^{n-1} \Leftrightarrow V_n = 4 \times \frac{1}{2^n}$$
$$V_n = \frac{4}{2^n}$$
$$V_n = n(3 - U_n) \Leftrightarrow U_n = 3 - \frac{V_n}{n}$$
$$U_n = 3 - \frac{4}{n2^n}$$

c°) $\lim\limits_{x \to +\infty} V_n = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4}{2^n} = 0$

$$\lim_{x \to +\infty} V_n = 0$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} U_n = \lim\limits_{x \to +\infty} 3 - \frac{4}{n2^n} = 3$ car

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{4}{n2^n} = 0$$
$$\lim_{x \to +\infty} U_n = 3$$

Exercice n°19

1°)a) <u>Démontrons que W_n est une suite géométrique.</u>

$$W_n = V_n - U_n$$
$$W_{n+1} = V_{n+1} - U_{n+1}$$
$$= \frac{U_n + 4V_n - 2U_n - 3V_n}{5}$$
$$= \frac{V_n - U_n}{5} = \frac{1}{5}W_n$$

$W_{n+1} = \frac{1}{5}W_n$ donc W_n est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et de 1er terme 5.

b°) <u>Expression de W_n</u>

$$W_n = W_1 q^{n-1} \Leftrightarrow W_n = 5\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$
$$W_n = \frac{25}{5^n} \succ 0$$

2°) <u>Démontrons que U_n est croissante et V_n décroissante.</u>

$$U_{n+1} - U_n = \frac{2U_n + 3V_n}{5} - \frac{5U_n}{5}$$
$$= \frac{3(V_n - U_n)}{5}$$

$U_{n+1} - U_n = \frac{3}{5}W_n$ or $W_n = \frac{25}{5^n} \succ 0$

$$U_{n+1} - U_n \succ 0$$

$U_{n+1} \succ U_n$ donc (U_n) est une suite croissante

$$V_{n+1} - V_n = \frac{U_n + 4V_n}{5} - \frac{5}{5}V_n$$
$$V_{n+1} - V_n = \frac{-V_n + U_n}{5}$$
$$V_{n+1} - V_n = -\frac{1}{5}(V_n - U_n)$$

$V_{n+1} - V_n = -\frac{1}{5}W_n$ or $W_n \succ 0$

Donc $V_{n+1} - V_n \prec 0 \Leftrightarrow V_{n+1} \prec V_n$

Donc V_n est une suite décroissante

b°) Démontrons que U_n est majorée et V_n est minorée.

- $W_n \succ 0 \Leftrightarrow V_n - U_n \succ 0 \Leftrightarrow V_n \succ U_n$
- U_n est croissante $\Rightarrow U_n \geq U_1$
- V_n est décroissante $\Rightarrow V_n \leq V_1$

$$\begin{cases} V_n \succ U_n \\ U_n \geq 2 \\ V_n \leq 7 \end{cases} \Rightarrow 2 \leq U_n \prec V_n \leq 7$$

Conclusion :

La suite U_n est majorée par 7. La suite V_n est minorée par 2.

c°) Déduisions-en que les suites (V_n) et (U_n) convergent.

- U_n est croissante et majorée par 7 donc elle converge.
- V_n est décroissante et minorée par 2 donc elle converge.

3°) $T_n = \frac{1}{3}U_n + V_n$

Démontrons que T_n est constante puis déduisons-en les limites de U_n et V_n.

$$T_n = \frac{1}{3}U_n + V_n$$

$$T_{n+1} = \frac{1}{3}U_{n+1} + V_{n+1}$$

$$= \frac{2U_n + 3V_n}{3\times 5} + \frac{3U_n + 12V_n}{3\times 5}$$

$$T_{n+1} = \frac{5U_n + 15V_n}{5\times 3} = \frac{1}{3}U_n + V_n$$

$T_{n+1} = T_n$ donc T_n est une suite constante. $T_n = T_1 = \frac{23}{3}$

Déduisons $\lim\limits_{x\to+\infty} U_n$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} V_n$

$$\lim_{x\to+\infty} W_n = \lim_{x\to+\infty} \frac{25}{5^n} = 0$$

Donc

$$\lim_{x\to+\infty}(V_n - U_n) = \lim_{x\to+\infty} V_n - \lim_{x\to+\infty} U_n = 0$$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} V_n = \lim\limits_{x\to+\infty} U_n = l$

$$\lim_{x\to+\infty} T_n = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{3}U_n + V_n$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{3}U_n + \lim_{x\to+\infty} V_n$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{x\to+\infty} U_n + \lim_{x\to+\infty} V_n$$

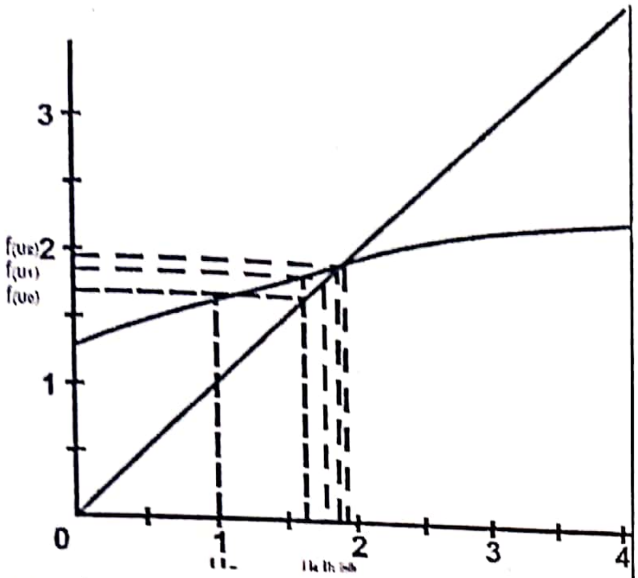
$$\lim_{x\to+\infty} T_n = \frac{1}{3}l + l = \frac{23}{3}$$

$$\frac{4}{3}l = \frac{23}{3} \Leftrightarrow l = \frac{23}{4}$$

$$\lim_{x\to+\infty} U_n = \lim_{x\to+\infty} V_n = \frac{23}{4}$$

Exercice n°24

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{3U_n + 4}{U_n + 3} \end{cases}$$



D'après le graphique on conjecture que la limite de U_n est 2.

2°)a) <u>Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$,</u> $0 \leq U_n \leq 2$

Soit P_n la propriété définie par : $\ll 0 \leq U_n \leq 2 \gg$. Vérifions que P_0 est vraie.

$U_0 = 1 \Rightarrow 0 \leq U_0 \leq 2$ donc P_0 est vraie.

Supposons P_n vraie : $0 \leq U_n \leq 2$ puis montrons que P_{n+1} est vraie.

$$U_{n+1} = \frac{3U_n + 4}{U_n + 3}$$

$$= \frac{3U_n + 9 - 5}{U_n + 3}$$

$$U_{n+1} = 3 - \frac{5}{U_n + 3}$$

$$0 \leq U_n \leq 2 \Leftrightarrow 3 \leq U_n + 3 \leq 5$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{5} \leq \frac{1}{U_n + 3} \leq \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq \frac{5}{U_n + 3} \leq \frac{5}{3}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{5}{3} \leq -\frac{5}{U_n + 3} \leq -1$$

$$\Leftrightarrow 3 - \frac{5}{3} \leq 3 - \frac{5}{U_n + 3} \leq 3 - 1$$

$$\Leftrightarrow 0 \prec \frac{4}{3} \leq U_{n+1} \leq 2$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq U_{n+1} \leq 2$$

Donc P_{n+1} est vérifiée.

$\begin{cases} P_0 \; est \; vraie \\ P_n \; vraie \Rightarrow P_{n+1} \; vraie \end{cases}$ donc

$\forall n \in \mathbb{N}, \; 0 \leq U_n \leq 2$.

b°) <u>Etudions le sens de variation de (U_n)</u>

$$U_{n+1} - U_n = \frac{3U_n + 4}{U_n + 3} - U_n$$

$$= \frac{3U_n + 4 - U_n^2 - 3U_n}{U_n + 3}$$

$$= \frac{-U_n^2 + 4}{U_n + 3}$$

$$= \frac{(-U_n + 2)(U_n + 2)}{U_n + 3}$$

$$0 \leq U_n \leq 2 \Rightarrow \begin{cases} U_n + 3 \succ 0 \\ U_n + 2 \succ 0 \\ -U_n + 2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{(-U_n + 2)(U_n + 2)}{U_n + 3} \geq 0 \Rightarrow U_{n+1} - U_n \geq 0 \Rightarrow$$

$U_{n+1} \geq U_n$ donc U_n est croissante

3°) $V_n = \dfrac{U_n - 2}{U_n + 2}$

a°) <u>Démontrons que V_n est une suite géométrique.</u>

$$V_{n+1}=\frac{U_{n+1}-2}{U_{n+1}+2}$$

* $$U_{n+1}-2=\frac{3U_n+4}{U_n+3}-2$$

$$=\frac{3U_n+4-2U_n-6}{U_n+3}$$

$$U_{n+1}-2=\frac{U_n-2}{U_n+3}$$

* $$U_{n+1}+2=\frac{3U_n+4}{U_n+3}+2$$

$$=\frac{3U_n+4+2U_n+6}{U_n+3}$$

$$U_{n+1}+2=\frac{5U_n+10}{U_n+3}$$

$$V_{n+1}=\frac{U_n-2}{U_n+3}\times\frac{U_n+3}{5(U_n+2)}=\frac{1}{5}\left(\frac{U_n-2}{U_n+2}\right)$$

$V_{n+1}=\frac{1}{5}V_n$ donc V_n est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et de 1er terme $V_0=-\frac{1}{3}$.

b°) Exprimons V_n puis U_n en fonction de n

$$V_n=V_0q^n \Leftrightarrow$$

$$V_n=-\frac{1}{3}\times\frac{1}{5^n}$$

$$V_n=\frac{U_n-2}{U_n+2}\Rightarrow V_n.U_n+2V_n=U_n-2$$

$$\Rightarrow V_n.U_n-U_n=-2V_n-2$$

$$\Rightarrow U_n(V_n-1)=-2V_n-2$$

$$\Rightarrow U_n=\frac{2V_n+2}{1-V_n}$$

$$U_n=\frac{2\left(-\frac{1}{3}\times\frac{1}{5^n}\right)+2}{1-\left(-\frac{1}{3}\times\frac{1}{5^n}\right)}$$

$$U_n=\frac{-2+6\times5^n}{3\times5^n}:\frac{3\times5^n+1}{3\times5^n}$$

$$U_n=\frac{6\times5^n-2}{3\times5^n+1}$$

c°) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} U_n$

$$\lim_{x\to+\infty} U_n=\lim_{x\to+\infty}\frac{6\times5^n-2}{3\times5^n+1}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{5^n\left(6-\frac{2}{5^n}\right)}{5^n\left(3+\frac{1}{5^n}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{6-\frac{2}{5^n}}{3+\frac{1}{5^n}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} U_n=2$$

Car $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{5^n}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{5^n}=0\end{cases}$

4°) Calculons S_n en fonction de n puis étudions la convergence de S_n.

$$S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_{n-1}$$

$$= V_0 \times \frac{1-q^n}{1-q}$$

$$= -\frac{1}{3} \times \frac{1-\frac{1}{5^n}}{1-\frac{1}{5}}$$

$$= -\frac{1}{3} \times \frac{5}{4}\left(1-\frac{1}{5^n}\right)$$

$$S_n = -\frac{5}{12}\left(1-\frac{1}{5^n}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} S_n = \lim_{x\to+\infty} -\frac{5}{12}\left(1-\frac{1}{5^n}\right) = -\frac{5}{12}$$

$$\lim_{x\to+\infty} S_n = -\frac{5}{12}$$

Exercice n°27

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \dfrac{4U_n - 3}{U_n} \end{cases}$$

1°) $x \in]0;+\infty[$ et $f(x) = \dfrac{4x-3}{x}$

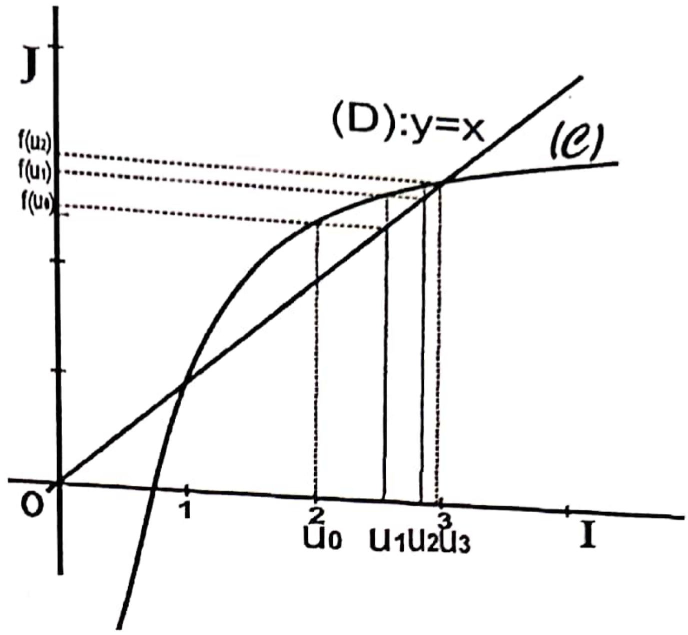
a°) Etudions les variations de f puis dressons son tableau de variation.

$f'(x) = \dfrac{3}{x^2}$ et $\dfrac{3}{x^2} \succ 0 \Rightarrow f'(x) \succ 0$

f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	4

b°) Traçons (C)



c°) Construisons les termes de suite (U_n).

2°)a) Démontrons que pour tout $x \in [2;3]$, $f(x) \in [2;3]$

D'après le tableau de variation de f, f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ et $[2;3[\subset]0;+\infty[$ donc $\forall x \in [2;3[$

$$f(2) \le f(x) \le f(3) \Leftrightarrow \frac{5}{2} \le f(x) \prec 3$$

$$\Rightarrow f(x) \in [2;3[$$

b°) Déduisons-en que $\forall n \in \mathbb{N}, 2 \le U_n \le 3$

Démontrons par récurrence.

Soit P_n la propriété définie par : $2 \le U_n \le 3$

.

Vérifions que P_0 est vraie.

$U_0 = 2$ et $2 \le 2 \prec 3 \Leftrightarrow 2 \le U_0 \prec 3$ donc P_0 est vraie.

Supposons P_n vraie puis montrons que P_{n+1} est vraie.

D'après **2°)a)** pour $x \in [2;3[$ alors $f(x) \in [2;3[$

Posons $x = U_n$

$$U_n \in [2;3[\Rightarrow f(U_n) \in [2;3[$$
$$\Rightarrow U_{n+1} \in [2;3[$$

Donc P_{n+1} est vraie.

$$\begin{cases} P_0 \text{ est vraie} \\ P_n \text{ vraie} \Rightarrow P_{n+1} \text{ vraie} \end{cases}$$

Par conséquent par $n \in \mathbb{N}, 2 \leq U_n \prec 3$.

c°) <u>Etudions les variations de</u> (U_n).

$$U_{n+1} - U_n = \frac{4U_n - 3}{U_n} - U_n$$
$$= -\frac{U_n^2 - 4U_n + 3}{U_n}$$
$$= -\frac{(U_n - 1)(U_n - 3)}{U_n}$$

- $U_n \prec 3 \Rightarrow U_n - 3 \prec 0$
- $U_n \geq 2 \Rightarrow U_n - 1 \geq 1 \succ 0 \Rightarrow U_n - 1 \succ 0$
- $U_n \geq 2 \Rightarrow U_n \succ 0$

$$\begin{cases} U_n - 3 \prec 0 \\ U_n - 1 \succ 0 \Rightarrow -\dfrac{(U_n - 1)(U_n - 3)}{U_n} \succ 0 \\ U_n \succ 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow U_{n+1} - U_n \succ 0 \Rightarrow U_{n+1} \succ U_n$ donc U_n est croissante.

<u>Exercice n°28</u>

1°)a) <u>Montrons que</u> $\forall \alpha$, <u>on a :</u>
$2\cos^2 \alpha - 1 = \cos 2\alpha$

$$2\cos^2 \alpha - 1 = 2 \times \frac{\cos 2\alpha + 1}{2} - 1$$
$$= \cos 2\alpha + 1 - 1$$
$$2\cos^2 \alpha - 1 = \cos 2\alpha$$

b°) <u>Transformons</u> $\cos a \cos b$ <u>en somme</u>

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) + \cos(a+b)\right]$$

2°) $\begin{cases} U_0 = 1; U_1 = \cos 3 \\ U_{n+1} = 2U_1.U_n - U_{n+1} \end{cases} [n \geq 1]$

a°) <u>Calculons</u> $U_2; U_3$ <u>et</u> U_4 :

$$U_2 = 2U_1^2 - U_0$$
$$= 2\cos^2 3 - 1$$
$$U_2 = \cos 6$$

$$U_3 = 2U_1.U_2 - U_1$$
$$= 2\cos 3 \cos 6 - \cos 3$$
$$= 2\left[\frac{1}{2}(\cos(3-6) + \cos(3+6))\right] - \cos 3$$
$$= \cos 3 + \cos 9 - \cos 3 = \cos 9$$
$$U_3 = \cos 9$$

$$U_4 = 2U_1.U_3 - U_2$$
$$= 2\cos 9 \cos 3 - \cos 6$$
$$U_4 = 2 \times \frac{1}{2}\left[\cos(3-9) + \cos(3+9)\right] - \cos 6$$
$$U_4 = \cos 6 + \cos 12 - \cos 6 = \cos 12$$
$$U_4 = \cos 12$$

b°) <u>Faisons une conjecture sur</u> U_n <u>puis démontrons la par récurrence.</u>

$$U_0 = 1 = \cos 0 = \cos(0 \times 3)$$
$$U_1 = \cos 3 = \cos(1 \times 3)$$
$$U_2 = \cos 6 = \cos(2 \times 3)$$
$$U_3 = \cos 9 = \cos(3 \times 3)$$
$$U_4 = \cos 12 = \cos(4 \times 3)$$

. . .

. . .

. . .

$$U_n = \cos 3n = \cos(n \times 3)$$
$$U_n = \cos 3n$$

<u>Démontrons par récurrence que</u> $U_n = \cos 3n$

Soit P_n la propriété définie par : $\ll U_n = \cos 3n \gg$. Vérifions que P_0 est vraie. $U_0=1=\cos 0=\cos 3\times 0$ donc P_0 est vraie.

Supposons P_n vraie et montrons que P_{n+1} est vraie.

D'après l'hypothèse de récurrence, $U_n=\cos 3n$

$U_{n+1}=2U_nU_1-U_{n-1}$

$=2\cos 3n\cos 3-\cos 3(n-1)$

$=2\times\frac{1}{2}[\cos(3n-3)+\cos(3n+3)-\cos(3n$

$=\cos(3n-3)+\cos(3n+3)-\cos(3n-3)$

$U_{n+1}=\cos 3(n+1)$

Donc P_{n+1} est vraie.

$\begin{cases} P_0 \text{ vraie} \\ P_n \text{ vraie} \Rightarrow P_{n+1} \text{ vraie} \end{cases}$ donc

$\forall n\in\mathbb{N}, \cos 3n=U_n$

Exercice 33

$$\begin{cases} U_0=2 \\ \forall n\in\mathbb{N}^*, U_{n+1}=\dfrac{1+U_n^2}{2U_n} \end{cases}$$

1°) Montrons que $\forall\in\mathbb{N}, U_n\geq 1$

Démontrons par récurrence. Soit P_n la propriété définie par : $\ll U_n\geq 1\gg$.

Vérifions que P_0 est vraie : $U_0=2$ et $2\succ 1$ donc $U_0\succ 1$ d'où P_0 est vraie.

Supposons P_n vraie puis montrons que P_{n+1} est vraie.

$$U_{n+1}-1=\frac{1+U_n^2}{2U_n}-1=\frac{(U_n-1)^2}{2U_n}$$

D'après l'hypothèse de récurrence.

$U_n\geq 1\Rightarrow U_n\succ 0\Leftrightarrow 2U_n\succ 0$

$$\begin{cases} (U_n-1)^2\geq 0 \\ 2U_n\succ 0 \end{cases}\Rightarrow\frac{(U_n-1)^2}{2U_n}\geq 0\Rightarrow U_{n+1}-1\succ 0$$

$\Rightarrow U_{n+1}\succ 1$ donc P_{n+1} est vraie.

$\begin{cases} P_0 \text{ vraie} \\ P_n \text{ vraie} \Rightarrow P_{n+1} \text{ vraie} \end{cases}$ donc

$\forall n\in\mathbb{N}, U_n\geq 1$

2°)a) Etudions le sens de variation de la suite (U_n).

$$U_{n+1}-U_n=\frac{1+U_n}{2U_n}-U_n=-\frac{2U_n^2-U_n-1}{2U_n}$$

$$=-\frac{(2U_n+1)(U_n-1)}{2U_n}$$

$$U_n\geq 1\Rightarrow\begin{cases} 2U_n+1\succ 0 \\ U_n-1\geq 0 \\ 2U_n\succ 0 \end{cases}\Rightarrow-\frac{(2U_n+1)(U_n-1)}{2U_n}\leq 0$$

$\Rightarrow U_{n+1}-U_n\leq 0\Rightarrow U_{n+1}\leq U_n$

Donc (U_n) est décroissante.

b°) Déduisons-en que la suite (U_n) converge.

$\begin{cases} U_n\geq 1 \\ (U_n) \end{cases}$ décroissante donc (U_n) est convergente.

3°) Montrons que $\forall n\in\mathbb{N}, U_{n+1}-1\leq\frac{1}{2}(U_n-1)$

$$(U_{n+1}-1)-\frac{1}{2}(U_n-1)=\frac{U_n^2+1}{2U_n}-1-\frac{1}{2}(U_n-1)$$

$$=\frac{U_n^2-2U_n+1-U_n^2+U_n}{2U_n}$$

$$=\frac{-U_n+1}{2U_n}$$

$$(U_{n+1}-1)-\frac{1}{2}(U_n-1)=\frac{-U_n+1}{2U_n}$$

$U_n \geq 1 \Leftrightarrow -U_n \leq -1$

$\Leftrightarrow -U_n + 1 \leq 0$

$U_n \geq 1 \Leftrightarrow 2U_n \geq 2 \succ 0$

$$\begin{cases} -U_n + 1 \leq 0 \\ 2U_n \succ 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{-U_n + 1}{2U_n} \leq 0$$

$$\Rightarrow (U_{n+1} - 1) - \frac{1}{2}(U_n - 1) \leq 0$$

$$\Rightarrow U_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(U_n - 1)$$

b°) Déduisons-en que

$n \in \mathbb{N}, U_n - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$U_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(U_n - 1)$

$n = 0;\ U_1 - 1 \leq \frac{1}{2}(U_0 - 1)$

$n = 1;\ U_2 - 1 \leq \frac{1}{2}(U_1 - 1)$

$n = 2;\ U_3 - 1 \leq \frac{1}{2}(U_2 - 1)$

. .

. .

. .

à $n-1$ $\quad U_n - 1 \leq \frac{1}{2}(U_{n-1} - 1)$

Tous les termes étant positifs, par multiplication membre à membre, on a :

$U_n - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (U_0 - 1)$

$U_n - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

car $U_0 - 1 = 1$

c°) Déduisons-en la limite de U_n

$U_n - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $U_n - 1 \geq 0$

$$\Rightarrow |U_n - 1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\begin{cases} |U_n - 1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} U_n = 1$$

4°) $S_n = \sum_{k=1}^{n} U_k = U_1 + U_2 + \ldots + U_n$

a°) Montrons que

$\forall n \in \mathbb{N}^*, n \leq S_n \leq n + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$

on sait que : $U_n - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $U_n \geq 1$

$\Rightarrow U_n \leq 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow 1 \leq U_n \leq 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$1 \leq U_n \leq 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Pour $n = 1;\ 1 \leq U_1 \leq 1 + \left(\frac{1}{2}\right)$

$n = 2;\ 1 \leq U_2 \leq 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$n = 3;\ 1 \leq U_3 \leq 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^3$

. . .

. . .

. . .

A l'orde n; $1 \leq U_n \leq 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Par somme membre à membre on a :

$$n \leq S_n \leq n + \frac{1}{2}\left[\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}\right]$$

$$\Leftrightarrow n \leq S_n \leq n+\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow n \leq S_n \leq n+1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

b°) Déterminons $\lim\limits_{x\to+\infty} S_n$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{S_n}{n}$

$$\begin{cases} n \leq S_n \leq n+1-\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ \lim\limits_{x\to+\infty} n = \lim\limits_{x\to+\infty} n+1-\left(\frac{1}{2}\right)^n = +\infty \end{cases}$$

Donc

$$\lim_{x\to+\infty} S_n = +\infty$$

$$n \leq S_n \leq n+1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\Rightarrow 1 \leq \frac{S_n}{n} \leq 1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n2^n}$$

$$\begin{cases} 1 \leq \frac{S_n}{n} \leq 1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n2^n} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1 = \lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n2^n} = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{S_n}{n} = 1$$

Chapitre 8 : Dénombrement

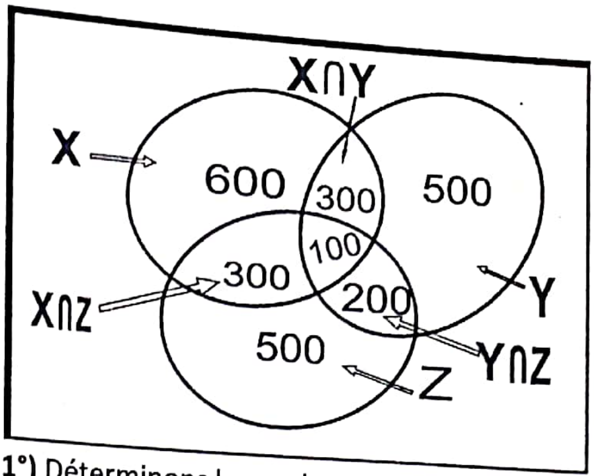
Exercice n°2

A. Soit : X « ceux qui lisent x »

Y : « ceux qui lisent y »

Z : « ceux qui lisent z »

Etablissons un diagramme



1°) Déterminons le nombre de ceux qui lisent deux revues exactement.

Soit M le nombre de ceux qui lisent deux revues exactement.

$$M = card(X\cap Y) - card(X\cap Y\cap Z)$$
$$+card(X\cap Z) - card(X\cap Y\cap Z)$$
$$+card(Y\cap Z) - card(X\cap Y\cap Z)$$

$$M = (300-100)+(300-100)+(200-100)$$

$$M = 200+200+100 = 500$$

Il y'a 500 personnes qui lisent deux revues exactement

2°) Déterminons le nombre de ceux qui ne lisent aucune de ces revues.

Le nombre de ceux qui ne lisent aucune est

$$card\left(\overline{X\cup Y\cup Z}\right) = 1000 - card(X\cup Y\cup Z)$$

$$card(X\cup Y\cup Z) = cardX + cardY + cardZ -$$
$$[card(X\cap Y) + card(X\cap Z) + card(Y\cap Z)] +$$
$$card(X\cap Y\cap Z)$$

$$card(X\cup Y\cup Z) = (600+500+500) -$$
$$(300+300+200)+100$$

$$card(X\cup Y\cup Z) = 900$$

Card($\overline{XUYUZ}$)=1000-900=100

Il y'a 100 personnes qui ne lisent aucune de ses revues.

B°) Démonstration

a°) Démontrons que : $C_n^{p+1} = \frac{n-p}{p+1} C_n^p$

$$C_n^{p+1}=\frac{n!}{(p+1)!(n-p+1)!}$$

$$C_n^{p+1}=\frac{n!(n-p)}{(p+1)!(n-p-1)!(n-p)}$$

$$C_n^{p+1}=\frac{n!(n-p)}{(p+1)!(n-p)!}=\frac{n-p}{(p+1)p!}\times\frac{n!}{(n-p)!}$$

$$C_n^{p+1}=\frac{n-p}{p+1}\times\frac{n!}{p!(n-p)!}=\frac{n-p}{p+1}C_n^p$$

Donc

$$\boxed{C_n^{p+1}=\frac{n-p}{p+1}C_n^p}$$

b°) Démontrons que pour tout n et p entiers naturels tel que $1\le p\le n-1$ on a

$$C_{n+1}^{p+1}=C_n^{p+1}+C_n^p$$

$$C_{n+1}^{p+1}=\frac{(n+1)!}{(p+1)!(n+1-p-1)!}$$

$$=\frac{(n+1)!}{(p+1)!(n-p)!}$$

$$=\frac{(n+1)n!}{(p+1)!(n-p)!}$$

$$C_{n+1}^{p+1}=\frac{(n+1+p-p)n!}{(p+1)!(n-p)!}$$

$$=\frac{n!(n-p)+n!(p+1)}{(p+1)!(n-p)!}$$

$$=\frac{n!(p+1)}{(n-p)!(p+1)!}+\frac{n!(n-p)}{(n-p)!(p+1)!}$$

$$=\frac{n!(p+1)}{(n-p)!(p+1)!}+\frac{n!(n-p)}{(n-p)(n-p-1)!(p+1)!}$$

$$=\frac{n!}{p!(n-p)!}+\frac{n!}{(p+1)![n-(p+1)]!}$$

$$C_{n+1}^{p+1}=C_n^p+C_n^{p+1}$$

Exercice n°5

1°) a) Développons à l'aide de la formule de binôme de Newton.

$$(x+1)^n=C_n^0x^n+C_n^1x^{n-1}+\ldots+C_n^{n-1}x+C_n^n$$

Déduisons-en que :

$$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\ldots+C_n^n=2^n$$

En posant x=1 dans la première égalité on a :

$$(1+1)^n=C_n^0(1)^n+C_n^1(1)^{n-1}+\ldots+C_n^{n-1}(1)+C_n^n$$

$$\boxed{C_n^0+C_n^1+C_n^2+\ldots+C_n^n=2^n}$$

$$2^n=C_n^0+C_n^1+C_n^2+\ldots+C_n^{n-1}+C_n^n=2^n$$

Donc

b°) Vérifions que $pC_n^p=nC_{n-1}^{n-1}$

$$pC_n^p=p\times\frac{n!}{p!(n-p)!}=p\times\frac{n(n-1)!}{p\times(p-1)!(n-p)!}$$

$$pC_n^p=n.\frac{(n-1)!}{(p-1)![(n-1)-(p-1)]}=nC_{n-1}^{p-1}$$

Donc

$$pC_n^p=nC_{n-1}^{p-1}$$

2°) Déduisons-en $S_1=\sum_{p=1}^{n}pC_n^p$

$$S_1=\sum_{p=1}^{n}pC_n^p=\sum_{p=1}^{n}nC_{n-1}^{p-1}$$

$$S_1=n\left(C_{n-1}^0+C_{n-1}^1+\ldots+C_{n-1}^{n-1}\right)$$

$$S_1=n\left(2^{n-1}\right)$$

3°) Calculons $S_2=\sum_{p=1}^{n}p^2C_n^p$

$$S_2=\sum_{p=1}^{n}p^2C_n^p=\sum_{p=1}^{n}[p(p-1)+p]C_n^p$$

$$S_2=\sum_{p=1}^{n}[p(p-1)+p]C_n^p+\sum_{p=1}^{n}pC_n^p$$

$$S_2=\sum_{p=1}^{n}n(p-1)C_{n-1}^{p-1}+S_1$$

Car $pC_n^p=nC_{n-1}^{p-1}$

$$S_2=n(1-1)C_{n-1}^{p-1}+\sum_{p=1}^{n}n(p-1)C_{n-1}^{p-1}+S_1$$

$$S_2 = 0 + n\sum_{p=2}^{n}(p-1)C_{n-1}^{p-1} + S_1$$

$$= n\sum_{p=2}^{n}(n-1)C_{n-2}^{p-2} + S_1$$

$$= n(n-1)\left(2^{n-2}\right) + S_1$$

$$= n(n-1)\,2^{n-2} + n2^{n-1}$$

$$= \left(n^2 - n + 2n\right)2^{n-2}$$

$$S_2 = \frac{n^2+n}{4} \times 2^n$$

Exercice n°12

1°) Déterminons le nombre de façon différentes de tirer trois boules simultanément de l'urne.

Soit N_1 ce nombre $N_1 = C_9^3 = \frac{9\times8\times7}{3\times2} = 84$

2°) Déterminons le nombre de tirages faisant apparaitre trois numéros pairs.

Soit $N_2 = C_4^3 = 4$

3°) Déterminons le nombre de tirages faisant apparaitre 2 numéros pairs et 1 impair

$$N_3 = C_4^2 \times C_5^1 = 6\times5 = 30$$

4°) Déterminons le nombre de tirages pour que la somme des numéros soit paire.

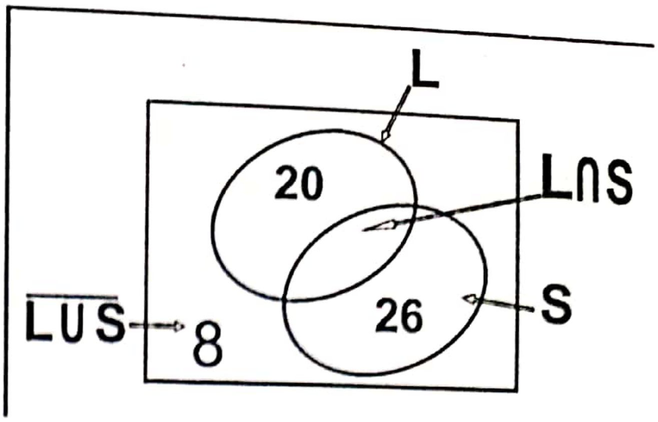
* Soit tous les numéros sont pairs
* Soit 2 sont impaires et 1 est pair

$$N_4 = C_4^3 + C_5^2 \times C_4^1 = 44$$

$$N_4 = 44$$

Exercice

Construisons un diagramme



L : « ceux qui aime la lecture »

S : « ceux qui aime le sport »

1°) Déterminons à la fois ceux qui aiment la lecture et le sport

$$card(L\cup S) = cardL + cardS - card(L\cap S)$$

$$\Leftrightarrow card(L\cap S) = cardL + cardS - card(L\cup S)$$

$$\Leftrightarrow card(L\cap S) = (20+26) - (40-8)$$

$$\Leftrightarrow card(L\cap S) = 46 - 32 = 14$$

14 personnes aiment la lecture et le sport

2°) Déterminons le nombre d'élèves qui n'aiment pas le sport.

$$card\overline{S} = 40 - cardS$$

$$= 40 - 26 = 14$$

14 personnes n'aiment pas le sport

Chapitre 9 : Statistiques

Exercice n°2

1°) La population étudiée est l'ensemble des pièces de tissus.

Le caractère étudié est la longueur des pièces de tissus

Calculons l'étendue de cette série.

e=40-20

e=20

2°) calculons la moyenne $\overline{X}$, la variance V et l'écart type σ de cette série

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{5} c_i n_i$$

$$\bar{x} = \frac{1}{250}\begin{pmatrix} 22\times40+26\times70+30\times50+ \\ 34\times42+38\times48 \end{pmatrix}$$

$$\bar{x} = \frac{7452}{250} = 29,80$$

$$\bar{x} = 29,80$$

$$V = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{5} n_i c_i^2 - \bar{x}^2$$

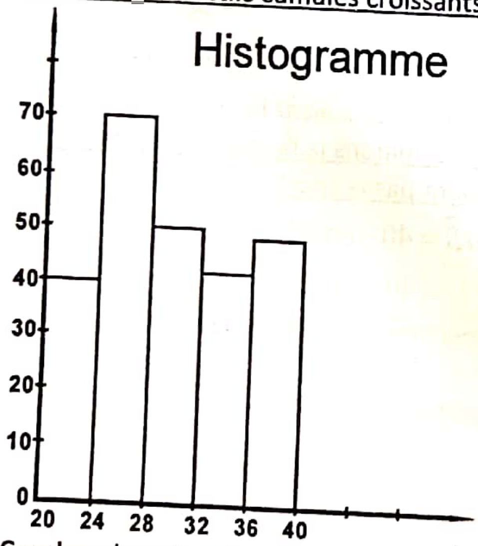
$$V = \frac{1}{250}\begin{pmatrix} 40\times22^2+70\times26^2+50\times \\ 30^2+42\times34^2+48\times38^2 \end{pmatrix} - (29,808)^2$$

$$V = 29,66$$

$$\sigma = \sqrt{V}$$

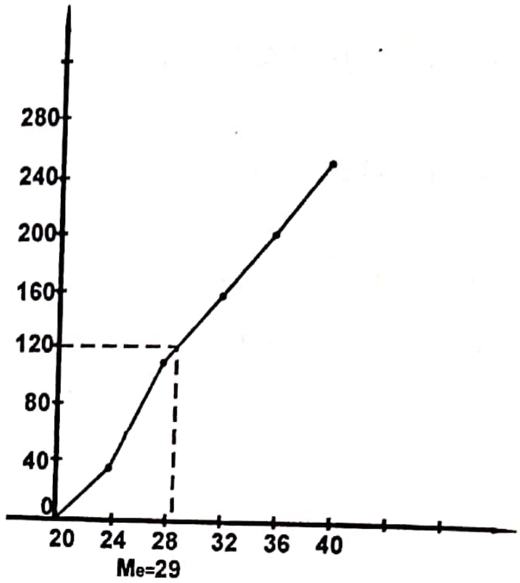
$$\sigma = 5,44$$

3°) a) <u>Construisons l'histogramme et la courbe des effectifs cumulés croissants.</u>



Courbes des effectifs cumulés croissants

Longueur en m	20	24	28	32	36	40
Nombre de pièces	0	40	110	160	202	250



b°) D'après la courbe des effectifs cumulés croissants la médiane est de 29.

Exercices n°13

1°) <u>Regroupons ces données en classes d'amplitude 5.</u>

Masse	[50;55[	[55;60[	[60;65[	[65;70[	[70;75[	[75;8
Eff	7	11	18	17	9	8

2°) <u>Calculons</u> $\bar{x}$, V et σ

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum n_i c_i$$

$$\bar{x} = \frac{7\times52,5+11\times57,5+18\times62,5+17\times67,5}{70} + \frac{9\times72,5+8\times77,5}{70} = \frac{4545}{70}$$

$$\bar{x} = 64,92$$

$$V = \frac{1}{N}\sum n_i c_i^2 - \bar{x}^2$$

$$V = \frac{7\times(52,5)^2+11\times(57,5)^2+18\times(62,5)^2}{70} + \frac{17\times(67,5)^2+9\times(72,5)^2+8\times(77,5)^2}{70} - (64,92)^2$$

$$V = 53,78$$

$$\sigma = \sqrt{V} = 7,33$$

3°) <u>Déterminons le pourcentage ayant une masse comprise entre</u> $\bar{x}-\sigma$ et $\bar{x}+\sigma$

Tableau des effectifs cumulés croissants (ECC)

Masse	50	55	60	65	70	75	80
ECC	0	7	18	36	53	62	70

$\bar{x}-\sigma = 64,92-7,33=57,59$

$\bar{x}+\sigma = 64,92+7,33=72,25$

Soit F la fonction de répartition

$$\frac{F(60)-F(55)}{60-55}=\frac{F\left(\bar{x}-\sigma\right)-F(55)}{\left(\bar{x}-\sigma\right)-55}$$

$$\Leftrightarrow \frac{18-7}{60-55}=\frac{F\left(\bar{x}-\sigma\right)-7}{57,59-55}$$

$$\Rightarrow F\left(\bar{x}-\sigma\right)=12,69$$

$$\frac{F(75)-F(70)}{75-70}=\frac{F\left(\bar{x}+\sigma\right)-F(70)}{\bar{x}+\sigma-70}$$

$$\Leftrightarrow \frac{62-53}{75-70}=\frac{F\left(\bar{x}+\sigma\right)-53}{\bar{x}+\sigma-70}$$

$$\Rightarrow F\left(\bar{x}+\sigma\right)=57,05$$

Soit P le pourcentage recherché

$$P=\frac{F(\bar{x}+\sigma)-F(\bar{x}-\sigma)}{70}\times 100=\frac{57,05-12,69}{70}\times 100$$

$$P=63,37\%$$

Exercice n°6

1°) Dressons le tableau statistique de la série $Z_1, Z_2, \dots, Z_{12}$

Zi	-2	-6	4	2	6	2	10
Ni	1	1	1	1	1	1	1

8	10	20	-2	16
1	1	1	1	1

2°) Calculons la moyenne $\bar{Z}$

$$\bar{Z}=\frac{-2-6+4+2+6+2+10+8+10}{12}+\frac{20-2+16}{12}$$

$$\bar{Z}=\frac{68}{12}=\frac{17}{3}=5,67$$

$$\bar{Z}=5,67$$

Calculons la variance puis l'écart type σ

$$V(Z)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} n_i z_i^2-\bar{Z}^2$$

$$V(Z)=\frac{(-2)^2+(-6)^2+(4)^2+(2)^2+(6)^2+(2)^2}{12}+\frac{10^2+8^2+10^2+20^2+(-2)^2+16^2}{12}-(5,67)^2$$

$$V(Z)=\frac{1024}{12}-\left(\frac{17}{3}\right)^2=53,29$$

$$V(Z)=53,29$$

$$\sigma(Z)=7,3$$

3°) Calculons t puis donnons une conclusion

$$t=2,69$$

$t=\frac{\bar{z}\sqrt{n}}{\sigma_{(z)}}\Leftrightarrow t=\frac{5,67\times\sqrt{12}}{7,3}$ La caféine augmente donc de façon significative la fréquence cardiaque deux heures après son absorption.

Le Facilitateur / Math 1ère C&D

ISBN 978-2-491006-50-1

9 782491 006501