GROUPE DE REPETITION

"Le Meilleur du Génie" MG

“ Le Meilleur du Génie ”

SUCCES AUX EXAMENS OFFICIELS

Année scolaire 2018/2019

"Le Meilleur du Génie" MG

FICHE DE TD N°4 : TRIGONOMÉTRIE PC

Proposé par : cherifain toko

<u>Exercice0</u>

I. **1.** Soit a un réel différent de $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k\epsilon\mathbb{Z}$

Démontrer que $cos2a = \frac{1-tan^2a}{1+tan^2a}$; $et\ sin2a = \frac{2tana}{1+tan^2a}$

2. on pose : $a = \frac{x}{2}$ $et\ tan\frac{x}{2} = t$

Démontrer que $cosx = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $sinx = \frac{2t}{1+t^2}$ $et\ tanx = \frac{2t}{1-t^2}$

II. 1. Démontrer que $cos^4x + sin^4x = 1 - \frac{1}{2}sin^2 2x$

2. démontrer que $cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1+cosx}{2}$ $et\ sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1-cosx}{2}$

3. Démontrer que $cos^3x = \frac{1}{4}cos3x + \frac{3}{4}cosx$ et $sin^3x = -\frac{1}{4}sin3x + \frac{3}{4}sinx$

4. $cos^4x = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}cos2x + \frac{1}{8}cos4x$ et $sin^4x = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}cos2x + \frac{1}{8}cos4x$

5. démontrer : $\left(1 + tanx + \frac{1}{cosx}\right)\left(1 + tanx - \frac{1}{cosx}\right) = 2tanx.$ $(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi)$

6. démontrer que : $\cos(a+b)\sin(a-b) = \frac{1}{2}(sin2a - cos2b)$

7. démontrer que : $\frac{cosa+sina}{cosa-sina} = \frac{cos2a}{1-sin2a}$ $pour\ a \neq \frac{\pi}{4} + 2k\pi\ et\ \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$ $k\epsilon\mathbb{Z}$ en déduire que : $\frac{1+tana}{1-tana} = \frac{cos2a}{1-sin2a}$. $montrer\ que : tan\frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$ $et\ que\ tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$

<u>Exercice1</u>

I)

1) Ecrire $(1+\sqrt{3})^2$ sous la forme $a+b\sqrt{3}$ **0,5pt**

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $(E'): x^2+(1-\sqrt{3})x-\sqrt{3}<0$ **1pt**

3) Déduire dans $]-\pi\,;\,\pi[$ l'ensemble des solutions de l'inéquation $\tan^2 x+(1-\sqrt{3})\tan x-\sqrt{3}<0$. **1,5pt**

II) **1)** Déterminer les valeurs exactes du cosinus et du sinus de $\frac{11\pi}{6}$ **0,5pt x 2 = 1pt**

2) En déduire que $\cos^2\frac{11\pi}{12}=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$ et $\sin^2\frac{11\pi}{12}=\frac{2-\sqrt{3}}{4}$ **0,5pt x 2 = 1pt**

3) Déterminer les valeurs exactes de $\cos\frac{11\pi}{12}$ et $\sin\frac{11\pi}{12}$ en justifiant vos réponses. **1pt**

4) Résoudre dans l'intervalle $[0\,;2\pi]$ l'équation : $\sqrt{2-\sqrt{3}}\sin x-\sqrt{2+\sqrt{3}}\cos x=-\sqrt{2}$ **1pt**

Exercice2

On donne $C\text{os}\frac{3\pi}{5}=\frac{1-\sqrt{5}}{4}$ et l'équation (E) : $\frac{2}{1+\tan^2 x}+(1-\sqrt{2})C\text{os}\,x-\frac{\sqrt{2}}{2}=0$

1- Sachant que $2\times\frac{3\pi}{10}=\frac{3\pi}{5}$ Calculer les valeurs exactes de $\cos\frac{3\pi}{10}$ *et* $\sin\frac{3\pi}{10}$ **1,5pt**

2- Démontrer les égalités suivantes : $(1+\sqrt{2})^2=3+2\sqrt{2}$; $\frac{1}{1+\tan^2 x}=C\text{os}^2 x$ **1pt**

3- Montrer que (E) est équivalente à : $2Cos^2x+(1-\sqrt{2})C\text{os}\,x-\frac{\sqrt{2}}{2}=0$ **0,5pt**

4- Résoudre (E) et placer les solutions sur le cercle trigonométrique **1,5pt**

5- Résoudre dans $[0\,;2\pi]$ l'inéquation : $2Cos^2x+(1-\sqrt{2})C\text{os}\,x-\frac{\sqrt{2}}{2}\geq 0$ **1pt**

Exercice3

1. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système d'équations : $\begin{cases} a\sqrt{3}-b=2 \\ a+b\sqrt{3}=0 \end{cases}$ 1pt

2. En déduire l'ensemble solution dans $[0;2\pi]\text{x}[0;2\pi]$ du système : 1,5pt

$$\begin{cases} \sqrt{3}cosx-siny=2 \\ cosx+\sqrt{3}siny=0 \end{cases}$$

1) Sachant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ calculer les valeurs exactes de $cos\frac{\pi}{12}$ et $sin\frac{\pi}{12}$

2) Sachant que $\frac{\pi}{4} = 2 \times \frac{\pi}{8}$ calculer les valeurs exactes de $cos\frac{\pi}{8}$ et $sin\frac{\pi}{8}$

3) On considère $A(x) = cosx + \sqrt{3}sinx$

a) Montrer que $A(x) = \alpha\cos(x+\beta)$ α et β étant des réels à déterminer.

b) Résoudre dans $[0,2\pi]$ l'équation $A(x) = \sqrt{2}$

4) Soit le polynôme $p(x) = 4\sin^2 2x - 4(1+\sqrt{3})\sin x.\cos x + \sqrt{3}$

a) Calculer $(1-\sqrt{3})^2$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $4x^2 - 2(1+\sqrt{3})x + \sqrt{3} = 0$

c) Montrer que $p(x) = 4\sin^2 2x - 2(1+\sqrt{3})\sin 2x + \sqrt{3}$

d) En déduire dans $[-\pi,\pi]$ les solutions de l'équation trigonométrique $p(x) = 0$

e) Déduire de tout ce qui précède la résolution de l'inéquation $p(x) \leq 0$ dans $[-\pi,\pi]$.

Exercice4

1. Montrer que $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2 = 5 - 2\sqrt{6}$ 0.25pt
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $2a^2 - (\sqrt{3}+\sqrt{2})a + \frac{\sqrt{6}}{2} = 0$ 0.75pt
3. Déduire l'ensemble solution de l'inéquation : $2a^2 - (\sqrt{3}+\sqrt{2})a + \frac{\sqrt{6}}{2} \leq 0$ 0.5pt
4. Soit l'équation (E) : $-2(\cos x)^2 - (\sqrt{3}+\sqrt{2})\sin x + \frac{\sqrt{6}}{2} + 2 = 0$
5. a. Montrer que l'équation(E) est équivalente à (E') : $2\sin^2 x - (\sqrt{3}+\sqrt{2})\sin x + \frac{\sqrt{6}}{2} = 0$ 0,5 pt

   b. Résoudre dans $]-\pi,\pi]$ l'équation (E') puis placer les images de ses solutions sur le cercle trigonométrique. 1pt

   c. En déduire dans $]-\pi,\pi]$ la résolution de l'inéquation : $2\sin^2 x - (\sqrt{3}+\sqrt{2})\sin x + \frac{\sqrt{6}}{2} \leq 0$ 0,5pt

Exercice5

1. Vérifier que : $(\sqrt{3} - 1)^2 = 4 - 2\sqrt{3}$
2. Résoudre dans $[-\pi, \pi[$ l'équation : $\tan^2 x + (1+\sqrt{3})\tan x + \sqrt{3} = 0$

1. Sachant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, déterminer les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.
2. Vérifier que pour tout réel x, on a :

   $(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cos 2x + (\sqrt{6}-\sqrt{2})\sin 2x = 2$ équivaut à $\cos\left(2x - \frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2}$.

   Résoudre alors dans $\mathbb{R}$ l'équation : $(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cos 2x + (\sqrt{6}-\sqrt{2})\sin 2x = 2$.

   et placer les images des solutions sur le cercle trigonométrique.

Exercice6

1) Soit α un nombre réel de l'intervalle $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $cos \propto = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

a- Vérifier que $\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$. En déduire la valeur de $\sin \propto$.

b- Calculer $\cos 2 \propto$ et en déduire la valeur de $\propto$.

2) Soit (E) l'équation $x \in \boldsymbol{R}, \left[\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\cos 2x + \left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\sin 2x\right]^2 = 4$

a- Démontrer que l'équation (E) est équivalente à $cos^2\left(2x - \frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{4}$

b- Résolvez alors l'équation et placer les points images des solutions sur le cercle trigonométrique.

3) Résolvez dans $]-\pi; \pi]$ l'inéquation $\left[\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\cos 2x + \left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\sin 2x\right]^2 \geq 4$

Exercice7

1) a) Démontrer que $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a . \tan b}$ ***1 pt***

b) En déduire $\boldsymbol{\tan 2a}$ en fonction de $\boldsymbol{\tan a}$ ***0,5 pt***

c) Soit $\boldsymbol{a}$ un nombre réel appartenant à l'intervalle $\left]0 ; \frac{\pi}{2}\right[$ et $\boldsymbol{\tan a = \sqrt{2} - 1}$.

Calculer $\boldsymbol{\tan 2a}$ et en déduire la valeur du réel $\boldsymbol{a}$. ***1,25 pt***

2) a) Ecrire $\left(1+\sqrt{3}\right)^2$ sous la forme $a + b\sqrt{3}$ où a *et* b sont des entiers ***0,25 pt***

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E): x^2 + \left(1-\sqrt{3}\right)x - \sqrt{3} = 0$ ***0,75 pt***

b) En-déduire dans $\mathbb{R}$ la résolution de l'inéquation $(I'): x^2 + \left(1-\sqrt{3}\right)x - \sqrt{3} < 0$ ***0,5 pt***

3) Résoudre dans $]-\pi ; \pi[$ l'équation $(E'): \tan^2\alpha + \left(1-\sqrt{3}\right)\tan\alpha - \sqrt{3} = 0$ ***1 pt***

c) Déduire dans $]-\pi ; \pi[$ l'ensemble solution de l'inéquation trigonométrique $(I'): \tan^2\alpha + \left(1-\sqrt{3}\right)\tan\alpha - \sqrt{3} < 0$. ***0,75 pt***

Exercice8

B) Sachant que x est un réel, et que $3x = 2x + x$:

1. Montrer que $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$. **0,5pt**
2. Résoudre alors dans $]-\pi;\pi]$ les équations suivantes :
   $(E_1): 4\cos^3 x - 3\cos x - 1 = 0$; $(E_2): 4\cos^3 x = 3\cos x$ **1,5pt**
3. Dresser le tableau de signe de $\cos 3x$ sur $]-\pi;\pi]$. **0,5pt**
4. En déduire l'ensemble solution dans $]-\pi;\pi]$ de l'inéquation $\cos^3 x \geq 0,75\cos x$. **0,5pt**

I. 1. Vérifier que pour tout x de $\mathbb{R}$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = cosx$ et en déduire que pour tout x de $\mathbb{R}$, $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{4}-x\right)$. 0,5pt

2. Résoudre dans $]0;\pi[$ l'équation $\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$. 0.75pt

3. On rappelle que $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}$.

a) vérifier que $\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ et que $\sin\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$. 0,5pt+0,5pt

b) Déduire de la question a) que $(\sqrt{2}-\sqrt{6})cosx + (\sqrt{2}+\sqrt{6})sinx = 4\cos\left(x-\frac{7\pi}{12}\right)$. 0.5pt

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $(\sqrt{2}-\sqrt{6})cosx + (\sqrt{2}+\sqrt{6})sinx = 2\sqrt{2}$. 0.5pt

d) Résoudre dans $]-\pi;\pi]$, l'inéquation : $(\sqrt{2}-\sqrt{6})cosx + (\sqrt{2}+\sqrt{6})sinx \geq 2\sqrt{2}$. 0.75pt

Exercice9

1) Démontrer que :

   a) $\frac{2tanx}{1-tan^2x} = tan2x$ 0,75pt

   b) $cos^4(3x) - sin^4(3x) = \cos 6x$ 0,5pt

2) Résoudre dans IR :

   a) $sin\ 2x = \frac{1}{2}$ 0,5pt

   b) $\sin 2x \geq \frac{1}{2}$ (On Représentera l'ensemble des solutions appartenant à $]-\pi,\ \pi]$ sur un cercle) 1pt

3) En écrivant $\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$ sous la forme $\frac{\pi}{a}$ calculer le cosinus et le sinus des nombres suivants : $\frac{\pi}{12}$; $\frac{11\pi}{12}$; $\frac{13\pi}{12}$. 1,5 pt

4) On se propose de résoudre dans $]-\pi,\ \pi]$ l'équation $(E) : cos^2x - (1-\sqrt{3})cos\ x - \sqrt{3} = 0$

   a) Démontrer que $\sqrt{4+2\sqrt{3}} = 1+\sqrt{3}$ 0,25pt

   b) Résoudre dans IR l'équation (E'): $x^2 - (1-\sqrt{3})x - \sqrt{3} = 0$ 0,5pt

   c) Déduire dans $]-\pi,\ \pi]$ l'ensemble des solutions de l'équation (E) 1,25pt

   d) Représenter les solutions de l'équation (E) sur un cercle trigonom

Exercice10

On considère l'expression $A(x) = \frac{\sin 5x}{\sin x} - \frac{\cos 5x}{\cos x}$, où x est un nombre réel tel que $x \neq k\frac{\pi}{2}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Considérons l'équation $(E_m) : A(x) = m$, où m est un paramètre réel.

1) Montrer $A(x) = 4\cos 2x$. (0,75 pt)

2) a) Déterminer l'ensemble M des valeurs de m pour lesquelles (E_m) admet des solutions. (0,75 pt)

   b) Résoudre (E_2) dans $\mathbb{R}$ et placer les solutions sur le cercle trigonométrique. (2 pts)

3) a) Montrer que pour $\cos x = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, on a $m = 2\sqrt{3}$. (0,75 pt)

   b) Résoudre alors, dans $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, l'équation $\cos x = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. (1 pt)

   (on note x_0 la solution trouvée)

4) Montrer $\tan x_0 = 2-\sqrt{3}$. (0,75 pt)

Execice11

1. (a) Donner l'expression de $\cos 2x$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$. **0,5 pt**

   (b) Déterminer $\cos x$ et $\sin x$ lorsque $\cos 2x = -\dfrac{1}{3}$ et $x \in [0, \dfrac{\pi}{2}]$ **1 pt**

   (c) Soit $x \in [0, \dfrac{\pi}{2}]$ tels que $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$. Déterminer $\cos 2x$ puis en déduire la valeur de x. **1 pt**

2. Le plan est muni du repère orthonormé (O,I,J).

   Placer sur le cercle trigonométrique les points M et N images respectives des nombres $\frac{371\pi}{6}$ et $-\frac{209\pi}{4}$. **1 pt**

   (b) Déterminer la mesure principale de chacun des angles $(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OM}})$. **1 pt**

3. Démontrer les égalités suivantes : **1 pt**

   (a) $\cos(x+3\pi) + \sin(\pi - x) - \sin(x+100\pi) + \cos(x - 18\pi) = 0$

   (b) $\sin^4 x - \cos^4 x = 2\cos^2 x$

4. Monter que pour tous nombre réel x on a $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ **0,5 pt**

Exercice12

1) Calculer $(1+\sqrt{2})^2$. 0,5pt

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2x^2 + (1-\sqrt{2})x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$. 1pt

3) En déduire les résolutions dans $[0;\ 2\pi]$ de l'équation et l'inéquation suivantes :

$(E): 2sin^2x + (1-\sqrt{2})sinx - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$ 1,5pt

$(I): 2sin^2x + (1-\sqrt{2})sinx - \frac{\sqrt{2}}{2} \geq 0$ 1pt

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $4X^2 - 2X - 1 = 0$. **[0,5 point]**

Dans la suite de l'exercice, on pose $X = cos\frac{\pi}{5}$ et $Y = sin\frac{\pi}{5}$.

2. Exprimer $sin\frac{2\pi}{5}$ en fonction de X et Y. **[0,5 point]**

3. a) Justifier que $cos\frac{2\pi}{5} = 1 - 2Y^2 = 2X^2 - 1$. **[0,75 point]**

b) En déduire que $sin\frac{3\pi}{5} = Y(4X^2 - 1)$. **[0,75 point]**

4.a) Justifier que $sin\frac{2\pi}{5} = sin\frac{3\pi}{5}$. **[0,5 point]**

b) En déduire que $4X^2 - 2X - 1 = 0$. **[0,5 point]**

c) Déduire alors que $cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ et $sin\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$. **[1 point]**

d) Déterminer la mesure principale de $\frac{359\pi}{5}$. **[0,5 point]**

Exercice13

1. Déterminer la mesure principale d'un angle orienté dont une mesure est $-\frac{303\pi}{8}$. [0.5pt]
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, démontrer que $cos^3x = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x)$. [0.5pt]
3. a. Déterminer les valeurs exactes de $cos\frac{7\pi}{12}$ et $sin\frac{7\pi}{12}$ en remarquant que $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}$. [0.5pt]

   b. En déduire $cos^2\left(\frac{7\pi}{24}\right) = \frac{4+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{8}$ et $Sin^2\left(\frac{7\pi}{24}\right) = \frac{4-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{8}$. [0.75pt]

   c. Déterminer en justifiant, les valeurs exactes de $cos\left(\frac{7\pi}{24}\right)$ et $sin\left(\frac{7\pi}{24}\right)$. [0.5pt]

   d. Résoudre dans $[0,\ 2\pi[$ l'équation $\sqrt{\frac{4+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{8}}\cos x + \sqrt{\frac{4-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{8}}\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et placer les points images des solutions sur le cercle trigonométrique. [1pt]
4. Résoudre dans $]-\pi,\ \pi] \times]-\pi,\ \pi]$ le système $\begin{cases} 2\cos x + 2\sin y = 1+\sqrt{2} \\ \cos x - \sin y = \frac{1-\sqrt{2}}{2} \end{cases}$. [1pt]
5. On considère le triangle ABC isocèle en A tel que $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) = -\frac{2\pi}{5}$ radians. I et J milieux respectifs des segments $[BC]$ et $[AB]$.

   a. Faire la figure. [0.25pt]

   b. Déterminer les mesures principales des angles orientés suivants :

   $mes(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BC}})$; $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{IA}})$; $mes(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AI}})$; $mes\left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{IJ}}\right)$ et $mes(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{IJ}})$ [1pt]

Exercice14

Soit x un nombre réel, on suppose que $tanx, tan2x, et\ 1-tan^2x$ sont bien définies.

1a). Démontrer que $tan2x = \frac{2tanx}{1-tan^2 x}$ 1pt

b.) En déduire la valeur exacte de $tan\frac{\pi}{8}$ 1pt

2a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^2 + x\sqrt{2} - 1 + \sqrt{2} = 0$ 1pt

b. Déterminer les solutions dans l'intervalle $]-\pi,\pi]$ de l'équation :

$\frac{1}{cos^2x} + \sqrt{2}tanx - 2 + \sqrt{2} = 0$ 1pt

On considère dans $[0;2\pi]$ les équations :

(E) : $\sin x \cos x + \cos^2 x = \cos 2x$

(E') : $\sin^2 x + \sin x \cos x = 0$

1 a. Montrer que les équations (E) et (E') sont équivalentes dans $[0;2\pi]$ 1pt

b. Résoudre dans $[0;2\pi]$ l'équation (E). 1pt

2 Placer sur le cercle trigonométrique les points images des solutions de cette équation. On prendra 3 cm comme unité de longueur. 1pt

A- Soit α un nombre réel.

1. Déterminer la mesure principale de $\frac{11\pi}{3}$. 0,25pt
2. a) Démontrer que $2\sin a \cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b)$. 0,5pt

   b) En déduire que $2\sin\frac{\pi}{7}\left(\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}\right)=\sin\frac{6\pi}{7}$. 0,5pt

B- Soit x et y différents de $\frac{\pi}{2}+k\pi$, k étant un entier

1. Montrer que pour, on a : $\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1-\tan x \tan y}$. 0,5pt
2. En déduire une expression de $\tan 2x$ en fonction de $\tan x$. 0,25pt
3. On donne $\tan x = \sqrt{2}-1$. Calculer $\tan 2x$ et trouver la valeur de x, sachant que $x \in [0;\frac{\pi}{2}[$.

C- On considère l'inéquation suivante : $(I)\colon -2\cos^2 x + (\sqrt{2}-1)\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \leq 0$.

1. Vérifier que $\sqrt{3+2\sqrt{2}} = 1+\sqrt{2}$. 0,25pt
2. Résoudre dans $[0;2\pi]$, l'équation $-2\cos^2 x + (\sqrt{2}-1)\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$ et placer les images des solutions sur le cercle trigonométrique. 1,5pt
3. En déduire dans $[0;2\pi]$, l'inéquation (I). 0,75pt

Exercice15

1. Déterminer la mesure principale de l'angle de mesure $\alpha\frac{337\pi}{12}$
2. Soit θ un nombre réel de l'intervalle $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\cos\theta = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

   a) Calculer $\cos 2\theta$

   b) en déduire la valeur de θ
3. On rappelle que $\tan 2\theta = \frac{2\tan}{1-\tan^2\theta}$

   a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{2}x^2 + 6x - \sqrt{3} = 0$

   b) En déduire la valeur exact de $\frac{\pi}{12}$

1) a) Donner la mesure principale de l' angles orientés X suivant : $X = \frac{1001}{3}\pi$ 0.5pt

2) ABC est un triangle équilatéral de sens direct ; déterminer les mesures des angles orientés suivants : $(\widehat{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AB}})$; $(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}})$. 1pt

3) Résoudre dans IR les équations suivantes:

a) $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = cosx.$ b) $-cosx + \sqrt{3}sinx = 2.$ 1.5pt

4) a) Vérifier que : $\sqrt{6 - 4\sqrt{2}} = 2 - \sqrt{2}.$ 0.25pt

b) Résoudre dans IR l'équation : $2x^2 - (2 + \sqrt{2})x + \sqrt{2} = 0.$ 0.5pt

5) a) En déduire sur $]-\pi;\pi]$ les solutions de l'équation

$(E) : 2sin^2x - (2 + \sqrt{2})sinx + \sqrt{2} = 0.$ 1pt

b) Placer les points images des solutions de (E) sur un cercle trigonométrique. 1pt

c) A partir des points images des solutions, on obtient une figure géométrique (Γ); donner la nature de (Γ) et calculer son aire. (0.25 + 0.5) pt

6) Déduire de 5) les solutions de l'inéquation (I) $2sin^2x - (2 + \sqrt{2})sinx + \sqrt{2} < 0$ sur $]-\pi;\pi]$. 0.5pt

Exercice16

I 1. Calculer $(1 + \sqrt{2})^2$. (0,25pt)

2. (a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E) : 4t^2 - 2(1 - \sqrt{2})t - \sqrt{2} = 0$. (0,75pt)

(b) En déduire les solutions dans $]-\pi, 0]$ de l'équation

$(E') : -4\sin^2 x - 2(1 - \sqrt{2})\cos x + 4 - \sqrt{2} = 0$ (1pt)

II On pose $A(x) = \dfrac{\cos x + \sin x}{\sqrt{3} - 2\sin x}$; pour tout x dans $]0;\pi]$.

1. Donner la condition d'existence de la fraction $A(x)$. (0,5pt)

2. Déterminer les réels a et b tels que $\cos x + \sin x = a\cos(x + b)$ (0,5pt)

3. Résoudre dans $]0;\pi]$ l'équation $\cos(x - \frac{\pi}{4}) = 0$; puis en déduire la résolution de l'inéquation $(I) : A(x) \leq 0$ dans $]0;\pi]$. (2pts)

Exercice17

On considère l'équation $8x^4 - 8x^2 - m + 1 = 0$,(E_m) où m est un paramètre.

1. Résoudre (E_m). On discutera suivant les valeurs de m.
2. Donner les solutions de (E_m) pour $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$
3. Démontrer que $\cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$
4. Déduire l'expression exacte de $\cos\frac{\pi}{16}$ et $\sin\frac{\pi}{16}$

Exercice18

Partie A / 4,75pts

Le plan est muni du repère orthonormé $(O,\ I,\ J)$.

1. a) Placer sur le cercle trigonométrique les points $A(0)$, $B\left(\frac{2\pi}{5}\right)$,$C\left(\frac{4\pi}{5}\right)$, $D\left(-\frac{4\pi}{5}\right)$ *et* $E\left(-\frac{2\pi}{5}\right)$. **0, 5pt**

b) Quelle est la nature du polygone $ABCDE$. Justifier votre réponse. **0,75pt**

2) Soit G le centre de gravité du polygone $ABCDE$.

a) Déterminer les coordonnées du point G. **0,5pt**

b) En remarquant que G est confondu au centre O du cercle, établir que $\cos\frac{4\pi}{5} + \cos\frac{2\pi}{5} = -\frac{1}{2}$. **0,5pt**

3. a) Exprimer $\cos\frac{4\pi}{5}$ en fonction de $\cos\frac{2\pi}{5}$. **0,25pt**

b) En déduire que $\cos\frac{4\pi}{5}$ est solution de l'équation $4x^2 + 2x - 1 = 0$. **0,25pt**

4) Résoudre (E) et en déduire la valeur exacte de $\cos\frac{2\pi}{5}$ et de $\sin\frac{2\pi}{5}$. **1pt**

5) Résoudre dans $[0,\ 2\pi[$ l'équation $\left(\sqrt{5}-1\right)\cos x + \sqrt{10+2\sqrt{5}}\sin x - 2 = 0$. **1pt**

Exercice19

II- (a) Résoudre dans $\mathbb{R}_+$ l'équation $x^2 - x\sqrt{3} + \frac{3}{4} = 0$. [0.5pt]

(b) En déduire la résolution de l'équation $\cos^2(2x) - \sqrt{3}\cos(2x) + \frac{3}{4} = 0$ dans l'intervalle $[0;\pi[$ et représenter les images de leurs solutions sur le cercle trigonométrique. [1.5pts]

(c) En déduire la résolution de l'inéquation $\cos^2(2x) - \sqrt{3}\cos(2x) + \frac{3}{4} \geq 0$ dans l'intervalle $[0;\pi[$. [0.5pt]

(d) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $3tan^2 x - 1 = 0$. [0.5pt]

Exercice20

I. 1. Montrer que pour tout réel x, $cosxsinxcos2xcos4xcos8x = \frac{1}{16}sin16x$

2. En déduire que $cos\frac{\pi}{32}sin\frac{\pi}{32}cos\frac{\pi}{16}cos\frac{\pi}{8}cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{16}$

3. On considéré la fonction polynôme p définie pout tout réel par $p(x) = 2x^3 + 5x^2 + x - 2$

a. calculer p(-1) et en déduire que $p(x) = (x + 1)(ax^2 + bx + c)$ ou a, b, c sont des réels .

b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $2sin^3 2x + 5sin^2 2x + sin2x - 2 = 0$.

II.

1. **Soit θ un nombre réel**
   a. **Développer $(cos^2\theta - sin^2\theta)^2$**
   b. **En déduire que $cos^4\theta + sin^4\theta = \frac{1}{2}(1 + cos^2 2\theta)$**
   c. **Résoudre dans $]\pi, \pi[$ l'équation $cos^4\theta + sin^4\theta = \frac{5}{8}$**

Exercice21

1. Exprimer en fonction de $\cos x$ et $\sin x$: $A = 2\sin(4\pi - x) - \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
2. Exprimer en fonction de $\sin\frac{11\pi}{6}$ en fonction de $\sin\frac{\pi}{6}$
3. Sachant que $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, déterminer $\sin\frac{\pi}{8}$, puis $\sin\frac{7\pi}{8}$ et $\sin\frac{7\pi}{8}$
4. Démontrer que $\frac{\sin 3x}{\sin x} + \frac{\cos 3x}{\cos x} = 4\cos 2x$
5. Calculer $\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{2\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{2\pi}{3}$
6. Montrer que pour tout réel x, $\cos^4 x + \sin^4 x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x$
7. Montrer que pour tout réel x, $\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$
8. Montrer que pour tout réel a, $\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$
9. Montrer que pour tout réel a, $\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$
10. Résoudre dans les équations suivantes. $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice22

1) On se propose de résoudre dans $[0; 2\pi[$ l'équation (E) définie par

(E) :$(2\cos^2 2x - 3\cos 2x + 1)\left(\sqrt{3}\cos x + \sin x - \sqrt{2}\right) = 0$

- **a)** Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $2t^2 - 3t + 1 = 0$. **0,5pt**
- **b)** Résoudre dans $[0; 2\pi[$, l'équation $2\cos^2 2x - 3\cos 2x + 1 = 0$.
  (On pourra poser $t = \cos 2x$). **1pt**
- **c)** Trouver deux réels a et θ tels que $\sqrt{3}\cos x + \sin x = a\cos(x - \theta)$. **0,5pt**
- **d)** Résoudre dans $[0; 2\pi[$, l'équation (E), Puis représenter les images de ces solutions sur le cercle trigonométrique. **1,5pt**

2) On se propose maintenant de résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation (E'): $|\cos x| = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.

- **a)** Exprimer $\cos 2x$ en fonction de $\cos x$ et en déduire que :
- **b)** $(E') \Leftrightarrow \left(\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. **1pt**
- **c)** En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation (E'). **0,5pt**

Exercice23

I. 1) Montrer que $\forall x \in IR$; $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$ **0,5pt**

2) En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{8}$; $\sin\frac{\pi}{8}$ et $\tan\frac{\pi}{8}$. **1pt**

3) Simplifier l'expression : $A = \cos(3\pi - x) + \sin\left(\frac{5\pi}{2} + x\right) + \sin(x - \pi) + \cos\left(x - \frac{7\pi}{2}\right)$. **1pt**

II. 1) Résoudre dans IR l'équation $4x^2 - 2(\sqrt{3} - 1)x - \sqrt{3} = 0$. **0,75pt**

NB : On remarquera que $(1 + \sqrt{3})^2 = 4 + 2\sqrt{3}$.

2) Résoudre dans $]-\pi\,;\pi]$ l'équation $4\sin^2 x - 2(\sqrt{3} - 1)\sin x = \sqrt{3}$. **1,5pt**

3. a) Résoudre dans $]-\pi\,;\pi]$ l'inéquation $4\sin^2 x - 2(\sqrt{3} - 1)\sin x < \sqrt{3}$. **1pt**

b) Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique. **0,75pt**

Exercice24

I. 1) Déterminer les valeurs exactes du cosinus et du sinus de $\frac{11\pi}{6}$. **0,5pt**

2) En déduire que $\cos^2\frac{11\pi}{12} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$ et $\sin^2\frac{11\pi}{12} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$. **1pt**

(On rappelle que $\forall x \in IR$; $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$)

3) Déterminer (en justifiant votre réponse) les valeurs exactes de $\cos\frac{11\pi}{12}$ et $\sin\frac{11\pi}{12}$. **0,5pt**

II. 1) Vérifier que $(1 + \sqrt{3})^2 = 4 + 2\sqrt{3}$. **0,25pt**

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $4x^2 - 2(\sqrt{3} - 1)x - \sqrt{3} = 0$. **0,75pt**

3) Résoudre dans $]-\pi\,;\pi]$ l'équation $4\sin^2 x - 2(\sqrt{3} - 1)\sin x = \sqrt{3}$. **1,5pt**

4) Résoudre dans $]-\pi\,;\pi]$ l'inéquation (I): $4\sin^2 x - 2(\sqrt{3} - 1)\sin x < \sqrt{3}$. **1pt**

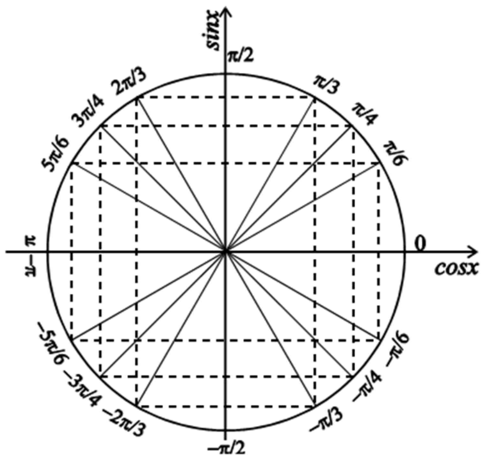
5) Représenter les solutions de (I) sur le cercle trigonométrique. **0,75pt**

Résoudre dans $[0; 2\pi[$ l'équation $\sqrt{2 - \sqrt{3}}\sin x - \sqrt{2 + \sqrt{3}}\cos x = -\sqrt{2}$. **1,5pt**

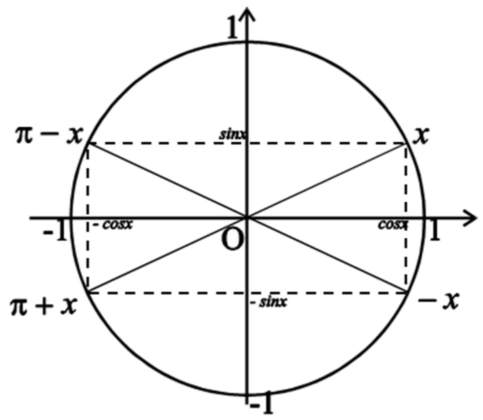
5) Représenter sur le cercle trigonométrique les solutions de cette équation. **0,75pt**

« La vie n'est bonne qu'a deux choses : enseigner les mathématiques et découvrir les mathématiques » Simon dénis poisson

TRIGONOMETRIE



Mesures principales des angles remarquables



Angles associés

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sinx	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cosx	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tanx	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\boxtimes$

$$\cos(-x) = \cos x \qquad \sin(-x) = -\sin x$$
$$\cos(\pi - x) = -\cos x \qquad \sin(\pi - x) = \sin x$$
$$\cos(\pi + x) = -\cos x \qquad \sin(\pi + x) = -\sin x$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$
$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$
$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$
$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$
$$= 2\cos^2 x - 1$$
$$= 1 - 2\sin^2 x$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$\cos x = \cos a$ équivaut à $\begin{cases} x = a + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou } x = -a + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$\sin x = \sin a$ équivaut à $\begin{cases} x = a + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou } x = \pi - a + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$\tan x = \tan a$ équivaut à $x = a + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$(\cos x)' = -\sin x \qquad (\sin x)' = \cos x \qquad (\tan x)' = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$
$$(\cos u)' = -u' \sin u \qquad (\sin u)' = u' \cos u \qquad (\tan u)' = u'(1 + \tan^2 u) = \frac{u'}{\cos^2 u}$$