Collection "DOB-19"

Mathématiques $1^{\text{ère}}D$

- Cours de première D
- Activités de découverte
- Applications

Auteur :
Benjamin DOSSOU
Professeur Adjoint

Tél : (+229) 96006244 / 95792867
E-mail : `benjamindossou@yahoo.com`
messenger : DOSSOU BD Benjamin

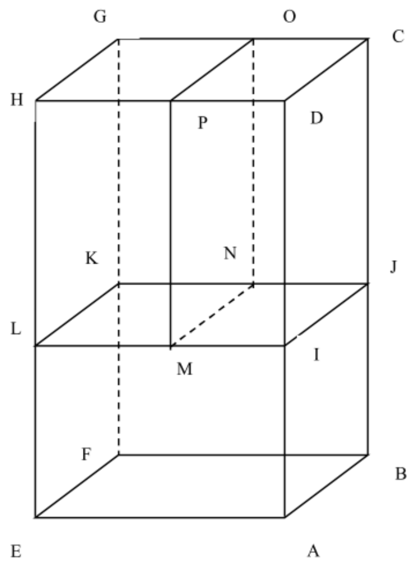
3ème Édition

Table des matières

CONFIGURATIONS DE L'ESPACE

Situation de départ :

Dans une société privée de gardiennage, il est organisé une compétition pour accroître la performance des agents sur les champs de tir. Chaque agent est soumis à un test avec un dispositif spécial : à partir d'un carré de $8dm$ de côté, le dispositif permet de construire ultérieurement et de façon successive, plusieurs carrés concentriques tels que les sommets d'un carré à construire soient sur les côtés du carré précédemment construit et à une distance x de ses sommets. A l'agent tireur, on construit selon sa taille et son poids un nombre N donné de carrés et on lui demande d'en choisir un nombre $N(N \in \mathbb{N})$ qu'il doit atteindre au tir. Melon n'est ni gros ni grand mais trapu, il veut se qualifier meilleur agent tireur de la société; il se propose d'étudier les principes mathématiques de ce test. Pour cela, il enquête sur les poids et les tailles de ses coéquipiers. Il dresse le tableau suivant :



Tâche 1.1

Tu vas te construire des connaissances nouvelles en mathématique. Pour cela tu auras à :

Activité.0

1. Exprimer ta perception de chacun des problèmes posés.
2. Analyser chacun des problèmes.
3. Opérer sur l'objet mathématique que tu as identifié pour chaque problème
4. Améliorer au besoin ta production

1.1 Droites orthogonales

Activité 1.1

Certains camarades de Coffi ont reconnu, en examinant le dessin, deux droites $(\mathscr{D}_1)$ et $(\mathscr{D}_2)$ telles que $(\mathscr{D}_1) \parallel (AB), (\mathscr{D}_2) \parallel (EH)$ et $(\mathscr{D}_1) \perp (\mathscr{D}_2)$

Consigne 1.1

Présente les droites $(\mathscr{D}_1)$ et $(\mathscr{D}_2)$ qui conviennent.

Stratégie : TI :... min TG :...min TC : ... min

Résolution 1.1

$ABCDEFGH$ est un pavé droit· Prenons $(\mathscr{D}_1) = (DC)$; $(\mathscr{D}_2) = (AD)$

En considérant la face $ABCD$, on a : $(AB) \parallel (DC)$①

En considérant la face $AEHD$, on a : $(AD) \parallel (EH)$②

En considérant le rectangle $ABCD$, on a : $(AB) \perp (AD)$③

De ①;②;③$(\mathscr{D}_1) \parallel (AB)$; $(\mathscr{D}_2) \parallel (EH)$; $(\mathscr{D}_1) \perp (\mathscr{D}_2)$

Retenons 1.1

Comme $(\mathscr{D}_1) \parallel (AB)$; $\mathscr{D}_2 \parallel (EH)$, $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont perpendiculaire alors (AB) est dit orthogonal à (EH).

Note 1.1

Si $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont deux droites orthogonales de l'espace, ont note $(\mathscr{D}) \perp (\mathscr{D}')$

Définition 1.1

Deux droites de l'espace sont orthogonales lorsque les parallèles à ces droites passant par un point donné sont perpendiculaires dans le plan qu'elles définissent. On note $(AB) \perp (EH)$ et on lit (AB) orthogonal à (EH)

Consigne 1.2

1. Démontre que deux droites perpendiculaires sont orthogonales
2. Donne deux exemples de droites orthogonales et non perpendiculaire, en utilisant le dessin

Stratégie : TI :... min TG :...min TC : ... min

Résolution 1.2

1. Soit $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ deux droites perpendiculaire de l'espace et $C = (\mathscr{D}) \cap (\mathscr{D}')$·
   La parallèle à $(\mathscr{D})$ passant par C est $(\mathscr{D})$
   La parallèle à $(\mathscr{D}')$ passant par C est $(\mathscr{D}')$
   Par hypothèse La parallèle à $(\mathscr{D})$ perpendiculaire à $(\mathscr{D}')$·
   Donc $(\mathscr{D}) \perp (\mathscr{D}')$

2. (AB) et (EH); (EH) et (BF)

Note 1.2

Si $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont deux droites orthogonales de l'espace, ont note $(\mathscr{D}) \perp (\mathscr{D}')$

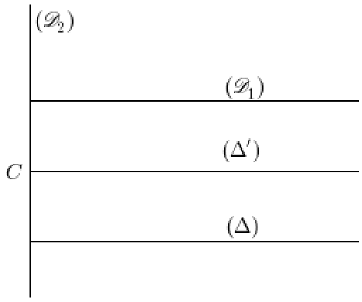
Remarque 1.1

1. Deux droites perpendiculaires sont orthogonales;
2. Deux droites orthogonales ne sont pas nécessairement perpendiculaire;
3. Deux droites orthogonales et sécantes sont perpendiculaires;

Consigne 1.3

$(\mathscr{D}_1)$ et $(\mathscr{D}_2)$ sont deux droites orthogonales, (Δ) une droite parallèle à $(\mathscr{D}_1)\cdot$
Démontre que (Δ) est orthogonale à $(\mathscr{D}_2)$
Stratégie : TI :... min TG :...min TC : ... min

Résolution 1.3



Par hypothèse $(\mathscr{D}_1) \parallel (\Delta)$; $(\mathscr{D}_2) \perp (\mathscr{D}_1)$
Soit $C \in (\mathscr{D}_2)$; la parallèle à $(\mathscr{D}_2)$ passant par C est $(\mathscr{D}_2)$
Soit (Δ') la parallèle à (Δ) passant par C
Par hypothèse on a $(\mathscr{D}_1) \perp (\mathscr{D}_2)$
$(\mathscr{D}_1) \parallel (\Delta')\cdot$ Donc $(\mathscr{D}_2)$ perpendiculaire à $(\Delta')\cdot$ Par suite $(\mathscr{D}_2) \perp (\Delta)$

Propriété 1.1

Si deux droites de l'espace sont orthogonales alors toute droite parallèle à l'une est orthogonale à l'autre.

Propriété 1.2

Si deux droites de l'espace sont parallèles alors toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.

Application 1.1

Soit $ABCDEFGH$ un cube, I et J milieux respectifs des segments $[BC]$ et $[CG]$.

1. Démontre que $(AC) \perp (FH)$
2. Démontre que $(IJ) \perp (DE)$

Stratégie : TI :... min TG :...min TC : ... min

Éléments de réponses 1.1

1.2 Droites et plans orthogonaux

Activité 1.2

Un camarade de classe de Coffi sait depuis la classe de 4è que :" une droite est perpendiculaire à un plan lorsqu'elle est perpendiculaire à deux droites sécantes de ce plan". Ce résultats lui a été enseigné sous forme de définition. Il se demande si une droite est perpendiculaire à un plan lorsqu'elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

Consigne 1.4

Soit $\mathscr{P}$ un plan, $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ deux droites sécantes du plan $\mathscr{P}$, Δ une droite orthogonale à $\mathscr{D}$ et à $\mathscr{D}'$.
Démontre que :

1. Δ est sécante à $\mathscr{P}$ en un point M. (On pourra raisonner par absurde)
2. Δ est perpendiculaire à $\mathscr{P}$.

Stratégie : TI :... min TG :...min TC : ... min

Résolution 1.4

1. Supposons que $(\Delta) \parallel (\mathscr{P})$.
   Soit (Δ') une droite contenue dans le plan $(\mathscr{P})$ telle que $(\Delta) \parallel (\Delta')$.

   $$\begin{cases}(\mathscr{D}) & \perp (\Delta)\\ (\Delta) & \parallel (\Delta')\end{cases} \Rightarrow (\mathscr{D}) \perp (\Delta') ①$$

   $$\begin{cases}(\mathscr{D}') & \perp (\Delta)\\ (\Delta) & \parallel (\Delta')\end{cases} \Rightarrow (\mathscr{D}') \perp (\Delta') ②$$

   De ① et ② , $(\mathscr{D}) \parallel (\mathscr{D}')$ ce qui est absurde car $(\mathscr{D}) \parallel (\mathscr{D}')$ sont sécantes. On conclut donc que (Δ) est sécante à $(\mathscr{P})$ en un point M.
2. Soit $(\mathscr{D}_1)$ et $(\mathscr{D}_2)$ deux droites de $(\mathscr{P})$ sécantes en M telles que $(\mathscr{D}_1) \parallel (\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}_2) \parallel (\mathscr{D}')$, on a :

   $$\begin{cases}(\mathscr{D}_1) & \parallel (\mathscr{D})\\ (\Delta) & \perp (\mathscr{D})\end{cases} \Rightarrow (\Delta) \perp (\mathscr{D}_1) ①$$

   $$\begin{cases}(\mathscr{D}_2) & \parallel (\mathscr{D}')\\ (\Delta) & \perp (\mathscr{D}')\end{cases} \Rightarrow (\Delta) \perp (\mathscr{D}_2) ②$$

   de ① et ② on a :

   $$\begin{cases}(\Delta) & \perp (\mathscr{D}_1)\\ (\Delta) & \perp (\mathscr{D}_2)\\ (\mathscr{D}_1) & \subset (\mathscr{P})\text{et}(\mathscr{D}_2) \subset (\mathscr{P})\\ (\mathscr{D}_1) \cap (\mathscr{D}_2) & = \{M\}\end{cases} \text{ d'où le résultat.}$$

Définition 1.2

Une droite et un plan sont orthogonaux ou perpendiculaires lorsque la droite est orthogonale à deux droites sécantes du plan.
Soit $(\mathscr{D}_1)$ et $(\mathscr{D}_2)$ deux droites du plan $(\mathscr{Q})$.
Si $(\mathscr{D}) \perp (\mathscr{D}_1)$; $(\mathscr{D}) \perp (\mathscr{D}_2)$ et $(\mathscr{D}_1) \cap (\mathscr{D}_2) = \{A\}$ alors $(\mathscr{D}) \perp (\mathscr{Q})$

Propriété 1.3

1. Par un point A de l'espace, il passe une droite unique de l'espace perpendiculaire à un plan donné de l'espace.
2. Par un point de l'espace il passe un plan unique orthogonal à une droite donnée de l'espace.
3. Si une droite est orthogonale à un plan alors elle est orthogonale à toute droite de ce plan.
4. Si deux droites sont parallèles alors tout plan orthogonal à l'une est orthogonal à l'autre

Propriété 1.4

Si deux plans sont parallèles alors toutes droite orthogonale à l'un est orthogonale à l'autre·

Consigne 1.5

$(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ sont deux plans et $(\mathscr{D})$ une droite telle que $(\mathscr{D}) \perp (\mathscr{P})$ et $(\mathscr{D}) \perp (\mathscr{P}')$·
Démontre que $(\mathscr{P}) \parallel (\mathscr{P}')$

Stratégie : TI :... min TG :...min TC : ... min

Résolution 1.5

Propriété 1.5

1. Si deux plans sont perpendiculaires à une même droite alors ces deux plans sont parallèles.
2. Si deux droites sont parallèles alors tout plan orthogonal à l'une est orthogonal à l'autre.
3. Si deux droites sont orthogonales à un même plan alors elles sont parallèles

Application 1.2

Soit $ABCDEFGH$ un cube·I le centre du carré $BCGF$ et J milieu segment $[GH]$

1. (a) Démontre que $(FC) \perp (ABG)$
   (b) En déduire que $(BH) \perp (FC)$
2. (a) Démontre que $(AC) \perp (DBH)$
   (b) Déduis-en que $(BH) \perp (AC)$
3. (a) Démontre que $(BH) \perp (ACF)$
   (b) Déduis-en que (BH) et (AI) sont perpendiculaires
4. Démontre que le triangle AIJ est rectangle en I

Stratégie : TI :... min TG :...min TC : ... min

Éléments de réponses 1.2

1. (a) Considérons le carré $BFGC$
   $(FC) \perp (BG)$① (support des diagonales de $BFGC$)
   (AB) perpendiculaire (FB) (*) (Car ABFE est un carré)
   (AB) perpendiculaire à (BC)(**)(Car ABCD est un carré)
   $(FC) \cap (BC) = B$(***)
   De (*); (**) et (***) $(AB) \perp (BCF)$ or $(FC) \subset (BCF)$ donc $(AB) \perp (FC)$②
   $(BC) \cap (BG) = B$③
   De ①; ② et ③, $(FC) \perp (ABG)$
   (b) d'après la question 1 a), $(FC) \perp (ABG)$ or $H \in (ABG)$ donc $(BH) \subset (ABG)$· Par suite $(FC) \perp (BH)$

1.2.1 Distance d'un point à un plan-distance d'un point à une droite

Consigne 1.6

On considère le pavé droit ci-dessous tels que M, N, O, P sont les milieux respectifs des segments $[LI]; [KJ]; [GC]; [HD]$.

1. Justifie que $(ON) \perp (ABE)$ et $(BF) \perp (ONP)$.
2. Construis le point d'intersection Q de la droite (ON) avec le plan (ABE).
3. Calcule la distance NQ sachant que $HL = \frac{2}{5}HE$ et $HE = 1,6m$.
4. Détermine $(ONP) \cap (BF)$. Quelles valeurs peux-tu donner à la distance du point N au plan (ABE) et à la distance (BF) ?

Stratégie : TI :... min TG :...min TC : ... min

Résolution 1.6

Définition 1.3

1. $(\mathscr{D})$ est une droite et A un point de l'espace. On appelle distance du point A à la droite $(\mathscr{D})$, noté $d(A;(\mathscr{D}))$, la distance AH où H est le point d'intersection de $(\mathscr{D})$ avec le plan passant par A et perpendiculaire à $(\mathscr{D})$
2. $(\mathscr{P})$ est un plan et A un point de l'espace. On appelle distance du point A au plan $(\mathscr{P})$, noté $d(A;(\mathscr{P}))$, la distance AH où H est le projeté orthogonal du point A sur le plan $(\mathscr{P})$.

1.3 Plans perpendiculaire

Activité 1.3

En examinant le dessin de l'armoire, Natacha une fille de la 1ère D reconnaît deux plans perpendiculaires. Sa camarade Linda déclare en avoir oublié la définition.

Consigne 1.7

1. Démontre que $(PM) \perp (ABE)$
2. Les plans (ABE) et (HLM) sont-ils perpendiculaires?

Stratégie : TI :... min TG :...min TC : ... min

Résolution 1.7

1. Considérons les rectangles $ADHE$ et $ABCD$. On a $\begin{cases}(AD) & \perp (AE)\\ (AD) & \perp (AE) \Rightarrow (AD) \perp (ABE)①\\ (AE)\cap(AB) & = A\end{cases}$
   De plus $(MP) \parallel (DI)$ car $PMID$ est un rectangle. Or (AI) et (DI) sont confondus alors $(MP) \parallel (AD)$①. De ① et ② on a : $(MP) \perp (ABE)$.
2. Oui les plans (ABE) et (HLM) sont perpendiculaires.

Retenons 1.2

$\begin{cases}(MP) & \subset (HLM)\\ (MP) & \perp (ABE)\end{cases}$ On conclut donc que $(ABE) \perp (HLM)$.

Définition 1.4

Deux plans sont perpendiculaires lorsque l'un contient une droite orthogonale à l'autre.

Consigne 1.8

$(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ sont deux plans et $(\mathscr{D})$ une droite telle que $(\mathscr{D}) \parallel (\mathscr{P})$ et $(\mathscr{D}) \perp (\mathscr{P}')$
Démontre que $(\mathscr{P}) \perp (\mathscr{P}')$
Stratégie : TI :... min TG :...min TC : ... min

Résolution 1.8

$(\mathscr{D}) \parallel (\mathscr{P}) \Rightarrow \exists (\mathscr{D}') \subset (\mathscr{P}) \setminus (\mathscr{D}') \parallel (\mathscr{D})et(\mathscr{D}) \perp (\mathscr{P}')$ donc $(\mathscr{D}') \perp (\mathscr{P}')$ d'où $(\mathscr{P}) \perp (\mathscr{P}')$

Propriété 1.6

1. Si une droite est parallèle à un plan et perpendiculaire à un second plan, alors ces deux plans sont perpendiculaires.
$\begin{cases} (\mathscr{D}) & \parallel (\mathscr{P}) \\ (\mathscr{D}) & \perp (\mathscr{Q}) \end{cases} \Rightarrow (\mathscr{P}) \perp (\mathscr{Q})$
2. Si une droite $(\mathscr{D})$ et un plan $(\mathscr{P})$ sont perpendiculaires à un plan $(\mathscr{P}')$ alors $(\mathscr{D})$ est parallèle à $(\mathscr{P})$.
$\begin{cases} (\mathscr{D}) & \perp (\mathscr{P}') \\ (\mathscr{P}) & \perp (\mathscr{P}') \end{cases} \Rightarrow (\mathscr{D}) \parallel (\mathscr{P})$
3. Si deux plans sont perpendiculaire, tout plan parallèle à l'un est perpendiculaire à l'autre.
4. Un plan est perpendiculaire à deux plans sécants si et seulement si il est perpendiculaire à leur droite d'intersection.

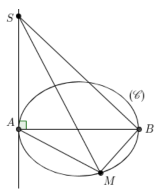
Application 1.3

Soit $(\mathscr{C})$ un cercle de diamètre $[AB]$, S un point de l'espace tel que (AS) soit perpendiculaire au plan du cercle. M un point du cercle $(\mathscr{C})$ différent de A et B·
Démontre que $(SAM) \perp (SBM)$
Stratégie : TI :... min TG :...min TC : ... min

Éléments de réponses 1.3

ABM est un triangle inscrit dans le cercle $(\mathscr{C})$ de diamètre $[AB]$ donc ABM est un triangle rectangle en M. On déduit donc que $(BM) \perp (AM)$.

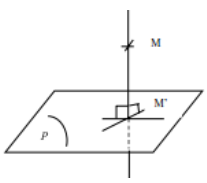
Par ailleurs (SA) orthogonale au plan du cercle et (BM) est contenue dans ce plan. Donc $(BM) \perp (SA)$ or (SA) et (AM) sont deux droites sécantes du plan (SAM). Par suite $(BM) \perp (SAM)$ or $(BM) \subset (SBM)$ alors $(SAM) \perp (SBM)$.



1.3.1 Projection orthogonale sur un plan

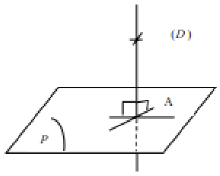
Définition 1.5

La projection orthogonale sur un plan $(\mathscr{P})$ est l'application qui à tout point M de l'espace associe un point M' de l'espace où M', intersection de $(\mathscr{P})$ avec la droite passant par M et orthogonale à $(\mathscr{P})$

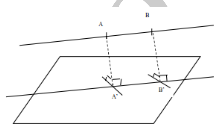


Propriété 1.7

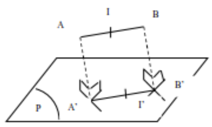
1. L'ensemble des points invariants par une projection orthogonale sur un plan est ce plan lui même.
2. Soit p la projection orthogonale sur un plan $(\mathscr{P})$. L'image d'une droite $(\mathscr{D})$ par p est :
   (a) Une droite si $(\mathscr{D})$ n'est pas orthogonale à $(\mathscr{P})$.
   (b) Un singleton si $(\mathscr{D})$ est perpendiculaire à $(\mathscr{P})$



3. Si A et B sont deux points d'images respectives A' et B' par p, le segment $[AB]$ a pour image par p :
   (a) $[A'B']$ si (AB) n'est pas orthogonale à $(\mathscr{P})$;
   (b) A si (AB) est perpendiculaire à $(\mathscr{P})$



4. L'image, par une projection orthogonale p, du milieu d'un segment dont le support est non orthogonal à $(\mathscr{P})$ est le milieu du segment image.
5. L'image par une projection orthogonale p, du milieu d'un segment dont le support est non orthogonal à $(\mathscr{P})$, est le milieu du segment image.



1.3.2 Projection orthogonale sur une droite

Définition 1.6

On appelle projection orthogonale sur une droite $(\mathscr{D})$, l'application qui à tout point $M' \in \mathscr{E}$ associe le point d'intersection M de $(\mathscr{D})$ et du plan orthogonal à $(\mathscr{D})$ passant par M.

Propriété 1.8

Soit p la projection orthogonale sur une droite $(\mathscr{D})$

1. L'ensemble des points invariants par p est la droite $(\mathscr{D})$
2. L'image par p d'une droite orthogonale à $(\mathscr{D})$ est un singleton
3. L'image d'une droite non orthogonale à $(\mathscr{D})$ est la droite $(\mathscr{D})$

Application 1.4

On considère le dessin de l'armoire.

1. Soit p la projection orthogonale sur le plan (ELK). Détermine les images par p de D; (AM); $[BO]$; $[DC]$; (DJ)
2. Soit q le projeté orthogonale sur la droite (DC). Détermine les images par q de D; (AM); $[BD]$; $[LC]$; (DJ).

Stratégie : TI :... min TG :...min TC : ... min

Éléments de réponses 1.4

1.4 Vecteurs de l'espace

Activité 1.4

Halim, un élève de la classe se souvient de la notion de vecteur et affirme : "Le vecteur $\overrightarrow{LN}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$et de $\overrightarrow{AE}$ tandis que $\overrightarrow{AL}$ n'est pas une combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AE}$". Certains de ses camarades s'interrogent sur la notion de combinaison linéaire et affirme n'avoir compris sa déclaration.

Consigne 1.9

Un vecteur de l'espace se définit de la même manière qu'un vecteur du plan. On note $\overrightarrow{W}$ l'ensemble des vecteurs de l'espace. Détermine :

1. les caractéristiques du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
2. les caractéristiques d'un vecteur quelconque de l'espace.

Stratégie : TI :... min TG :...min TC : ... min

Résolution 1.9

Définition 1.7

Comme dans le plan; deux points A et B de l'espace définissent un vecteur noté $\overrightarrow{AB}$

1. Si A et B sont distincts alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par :
   (a) sa direction qui est celle de la droite (AB)
   (b) son sens qui est celui de A vers B sur la droite (AB).
   (c) sa norme noté $\|AB\|$ est égale à la longueur AB.
2. Si $A = B$ alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est nul. Il n'a ni direction, ni sens mais sa norme est nul. Dans ce cas on $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{O}$

Propriété 1.9

Pour tout point O et pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de l'espace, il existe un point M unique tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{u}$

Consigne 1.10

On définit la somme de deux vecteurs de $\mathscr{W}$ ainsi que le produit d'un vecteur par un nombre réel de la même manière que dans le plan. Reprends le dessin de l'armoire et construis le point Q tel que $\overrightarrow{AQ} = \sqrt{2}\overrightarrow{EH} + 2\overrightarrow{OC}$.

Stratégie : TI :... min TG :...min TC : ... min

Résolution 1.10

Propriété 1.10

1. Pour tout points $A; B$ et C de l'espace on a : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ (C'est la relation de Chasles)
2. Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de l'espace et pour tout réels α et β on a :
   (a) $\alpha\overrightarrow{u} = \overrightarrow{O} \Leftrightarrow \alpha = 0$ ou $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{O}$
   (b) $\alpha(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \alpha\overrightarrow{u} + \alpha\overrightarrow{v}$
   (c) $1\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$
   (d) $(\alpha+\beta)\overrightarrow{u} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{u}$

Définition 1.8

1. Soit $\overrightarrow{u}_1; \overrightarrow{u}_2; \cdots; \overrightarrow{u}_n$, n vecteurs de l'espace; $\alpha_1; \cdots; \alpha_n$, n réels. On appelle combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{u}_1; \overrightarrow{u}_2; \cdots; \overrightarrow{u}_n$; tout vecteur $\overrightarrow{v}$ définit par $\overrightarrow{v} = \alpha_1\overrightarrow{u}_1 + \alpha_2\overrightarrow{u}_2 + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{u}_n$
2. Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires lorsque l'un deux est le vecteur nul ou bien les deux ont la même direction.
3. Soit $\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}; \overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{W} = \overrightarrow{AD}$. Les vecteurs $\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}; \overrightarrow{w}$ sont colinéaires si et seulement si les points $A; B; C; D$ sont coplanaires. [1].

Note 1.3

1. Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement s'ils existent deux réels α et β non tous nuls tels que $\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} = \overrightarrow{O}$.
2. Si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur non nul alors $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe un réel α tel que $\overrightarrow{v} = \alpha\overrightarrow{u}$

Propriété 1.11

Soit $\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}; \overrightarrow{w}$ trois vecteurs de $\mathscr{W}$

1. $\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}; \overrightarrow{w}$ sont coplanaires si et seulement si l'un au moins de ces vecteurs s'écrit comme combinaison linéaire des deux autres.
2. $\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}; \overrightarrow{w}$ sont coplanaires si et seulement si il existe au moins un triplet $(\alpha; \beta; \gamma)$ non nul de nombres réels tels que $\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} + \gamma\overrightarrow{w} = \overrightarrow{O}$*

Application 1.5

En utilisant le dessin de l'armoire,

1. (a) Écris le vecteur $\overrightarrow{AG}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE}$.
   (b) Conclus.
2. Justifie que les vecteurs $\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas coplanaires.

Stratégie : TI :... min TG :...min TC : ... min

Éléments de réponses 1.5

Consigne 1.11

A et B sont deux points distincts de l'espace $(\mathscr{E})$; M un point quelconque de $(\mathscr{E})$. Justifie que $M \in (AB) \Leftrightarrow \exists\alpha \in \mathbb{R} \setminus \overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB}$

Stratégie : TI :... min TG :...min TC : ... min

Résolution 1.11

Propriété 1.12

1. Première C

A et B sont deux points distincts de l'espace $(\mathscr{E})$; M un point quelconque de $(\mathscr{E})$. On a :

$$M \in (AB) \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R} \setminus \overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{AB} \tag{1.1}$$

La relation $\overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{AB}; \alpha \in \mathbb{R}$ est la caractérisation vectorielle de la droite (AB).

Consigne 1.12

$A; B; C$ sont trois points non alignés de l'espace $(\mathscr{E})$; M un point de $(\mathscr{E})$. Démontre que $M \in (ABC) \Leftrightarrow \exists(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$.

Stratégie : TI :... min TG :...min TC : ... min

Résolution 1.12

1.4.1 Base de l'ensemble $\mathscr{W}$ des vecteurs de l'espace

Définition 1.9

1. Une base de l'espace est tout triplet $(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w})$ de vecteurs non coplanaires de l'espace.
2. On appelle repère de l'espace tout quadruplet $(O; I; J; K)$ de points non coplanaires (repère affine) ou bien un quadruplet $(O; \vec{u}; \vec{v}; \vec{w})$ où$(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w})$ est une base de l'espace (repère cartésien).

1.4.2 Coordonnées d'un vecteur

Consigne 1.13

Soit $\overrightarrow{OI} = \vec{i}; \overrightarrow{OJ} = \vec{j}; \overrightarrow{OK} = \vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires de l'espace avec $O; I; J; K$ des points de l'espace; $\vec{u}$ un vecteur quelconque de l'espace; M un point de l'espace tel que : $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.

1. Soit P le plan définit par les points $O; I; J$, (Δ) la droite passant par M et parallèle à (OK) tel que (Δ) coupe le plan (P) en un point S. Justifie que les vecteurs $\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OJ}; \overrightarrow{OS}$ sont coplanaires.
2. Justifie qu'il existe $z \in \mathbb{R} \setminus \overrightarrow{SM} = z\overrightarrow{OK}$
3. Démontre qu'il existe un seul triplet $(x; y; z)$ de réels tels que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ (Tu pourras remarquer que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SM}$)
4. Justifie l'unicité de ce triplet.

Stratégie : TI :... min TG :...min TC : ... min

Résolution 1.13

Propriété 1.13

1. $(O; I; J; K)$ étant un repère, pour tout point M de l'espace, il existe un triplet $(x; y; z)$ unique de nombres réels tel que : $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OI} + y\overrightarrow{OJ} + z\overrightarrow{OK}$
2. $x; y; z$est appelé triplet de coordonnées du point M dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ ou triplet de coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. On note $M(x; y; z)$.
x est appelé abscisse; y est appelé l'ordonnée; z est appelé côte du point M dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.
De même $(O; \vec{i})$ est appelé axe des abscisses; $(O; \vec{j})$ est appelé axe des ordonnées; $(O; \vec{k})$ est appelé axe des côtes et O est appelé l'origine du repère.

Application 1.6

On considère le dessin de l'armoire tel que $\overrightarrow{HL} = \frac{3}{5}\overrightarrow{HE}$.

1. Justifie que le s vecteurs $\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{HP}$ et $\overrightarrow{EH}$ ne sont pas coplanaires.
2. Détermine les triplets $(x; y; z)$ de nombre réels tels que $\overrightarrow{HN} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{HP} + z\overrightarrow{EH}$

Stratégie : TI :... min TG :...min TC : ... min

Éléments de réponses 1.6

Propriété 1.14

Soit $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ un repère de l'espace, $\vec{u}(x, y, z)$; $\vec{v}(x'; y'; z')$ deux vecteurs de l'espace et α un réel. On a :

1. $\vec{u} + \vec{v}(x + x'; y + y'; z + z')$
2. $\alpha\vec{u}(\alpha x; \alpha y; \alpha z)$
3. Si $A(a; y; z); B(x'; y'; z')$ alors $\overrightarrow{AB}(x' - x; y - y'; z - z')$.

1.4.3 Systèmes d'équation linéaires à trois inconnues

Activité 1.5

Pour résoudre un des problème liées à son service, Melon amené à résoudre le système d'équation linéaires
$$(S)\begin{cases} x + y + z & = 7 \\ 2x + y + 2z & = 12 \\ 3x + y - z & = 6 \end{cases}$$

Consigne 1.14

1. Transforme (S) en un système de forme triangulaire
2. Résous le nouveau système obtenu

Stratégie : TI :... min TG :...min TC : ... min

Résolution 1.14

Définition 1.10

Tout système du type $(S)\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y - c''z = d'' \end{cases}$ où x, y, y sont les inconnues est appelés système linéaire de trois équations à trois inconnues· Résoudre le système (S) revient à déterminer tous les triplets (x, y, z) qui vérifient à la fois les trois équations

Propriété 1.15

L'ensemble des solutions d'un système d'équation linéaire reste le même lorsqu'on :

1. On permute deux équations du système
2. multiplie une équation par un réel non nul
3. ajoute à une équation un multiple d'une autre équation

Systèmes équivalents

Deux systèmes (S_1) et (S_2) sont équivalente si et seulement si ils ont même ensemble de validité et le même ensemble de solutions.

Notation des équations

Dans un système d'équation linéaires, chacune des équations est désigné par ligne et on note "L" Si le système comporte n équations $(n \leq 2)$, on désigne par :

L_1 la première ligne
L_2 la deuxième ligne
$\vdots$
L_n la n-ième ligne

Exemple 1.1 $(S)\begin{cases} x+y+z=7(L_1) \\ 2x+y+2z=12(L_2) \\ 3x+y-z=6(L_3) \end{cases}$

1.4.4 Codages de résolution (opération élémentaires)

Dans le cadre de la résolution d'un système d'équation linéaire, on utilise les codes ci-après :

1. $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$ pour exprimer que la nouvelle ligne L_i a été remplacer par $L_i + \alpha L_j(\alpha \in \mathbb{R}$
2. $L_i \leftarrow \alpha L_i$ pour exprimer que la nouvelle ligne L_i a été remplacer par l'ancienne $\alpha L_i(\alpha \in \mathbb{R}$
3. $L_i \leftarrow L_j$ pour exprimer que les anciennes lignes L_i et L_j sont permutées.

1.4.5 Méthode de Pivot de Gauss

Pour résoudre un système linéaire par la méthode de Pivot de Gauss, on procède comme suit :

1. On vérifie que dans la ligne L_1, le coefficient de la première inconnue est non nul Si non on change L_1 avec une ligne dont le coefficient de la première inconnue est non nul
2. A l'aide des opérations élémentaires , $(L_i \leftarrow \beta L_i + \alpha L_j)$, on annule tous les coefficient de la première inconnue dans les autres lignes
3. On recommence le même processus pour la deuxième inconnue, pour la troisième inconnue $\cdots$ jusqu'à l'obtention d'un système triangulaire

Exemple 1.2

$(S)\begin{cases} ax+by+cz & = d \\ k'y+h'z & = d' \\ q''z & = d'' \end{cases}$

(S) est triangulaire

Application 1.7

Exercice 18 page 39 CIAM 1ère SE.

Stratégie : TI :... min TG :...min TC : ... min

Éléments de réponses 1.7

ORGANISATIONS DES DONNÉES

Situation de départ :

Dans une société privée de gardiennage, il est organisé une compétition pour accroître la performance des agents sur les champs de tir. Chaque agent est soumis à un test avec un dispositif spécial : à partir d'un carré de $8dm$ de côté, le dispositif permet de construire ultérieurement et de façon successive, plusieurs carrés concentriques tels que les sommets d'un carré à construire soient sur les côtés du carré précédemment construit et à une distance x de ses sommets. A l'agent tireur, on construit selon sa taille et son poids un nombre N donné de carrés et on lui demande d'en choisir un nombre $N(N < N)$ qu'il doit atteindre au tir. Melon n'est ni gros ni grand mais trapu, il veut se qualifier meilleur agent tireur de la société; il se propose d'étudier les principes mathématiques de ce test. Pour cela, il enquête sur les poids et les tailles de ses coéquipiers. Il dresse le tableau suivant :

Poids en kg (x)	65	68	62,5	62	68	68	59	71	74	68	68	74	71	65	65	62	65	68
Taille en cm (y)	165	177	174	168	165	171	165	177	174	171	165	174	174	174	174	174	174	168
Poids en kg (x)	71	65	74	74	71	65	77	74	62	77	68	71						
Taille en cm (y)	171	174	168	177	174	165	180	177	168	180	171	174						

Tâche 2.1

Tu vas te construire des connaissances nouvelles en mathématique. Pour cela tu auras à :

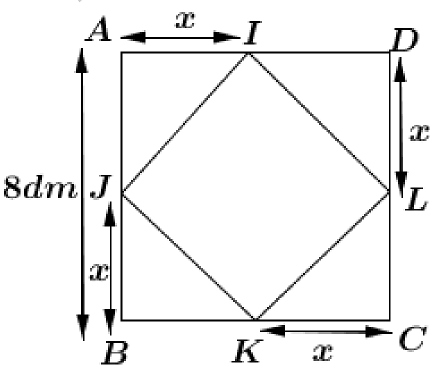
Activité.0

Exprimer ta perception de chacun des problèmes posés;
Analyser chaque problème posé;
Mathématiser chacun des problèmes posés;
Opérer sur l'objet mathématique que tu as identifié pour chacun des problèmes;
Améliorer au besoin ta production.

2.1 Équations et Inéquations dans $\mathbb{R}$, systèmes linéaires

Activité 2.1

Les agents de cette société de surveillance voudraient choisir x pour que l'aire du second carré (Voir figure) soit égale à $33dm^2$



Consigne 2.1

1. Exprime en fonction de x l'aire $p(x)$du carré $IJKL$.
2. On pose $q(x) = p(x) - 33$
   (a) Écris $q(x)$ sous forme canonique
   (b) Détermine les valeurs de x pour que l'aire du carré $IJKL$ soit égale à $33dm^2$

Stratégie : TI :... min TG :...min TC : ... min

Résolution 2.1

Consigne 2.2

On considère le polynôme du second degré $P(x) = ax^2 + bx + c$ et pose $\Delta = b^2 - 4ac$

1. Démontre que $P(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$
2. Propose si possible une écriture de P sous la forme du produit de facteurs du premier degré (On pourra envisager les cas $\Delta = 0; \Delta > 0; \Delta < 0$)
3. Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$(On pourra raisonner suivant les cas $\Delta = 0; \Delta > 0; \Delta < 0$)
4. Déduis en le signe de P suivant les valeurs du réels x.

Stratégie : TI :... min TG :...min TC : ... min

Résolution 2.2

Définition 2.1

- On appelle équation du second degré dans $\mathbb{R}$ toute équation pouvant se mettre sous la forme $ax^2+bx+c = 0$ où $a \in \mathbb{R}^*; b \in \mathbb{R}; c \in \mathbb{R}$
- Si $ax^2+bx+c = 0$ est une équation du second degré dans $\mathbb{R}$ alors le réel $\Delta = b^2 - 4ac$ est appelé le discriminant de cette équation

Propriété 2.1

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$, $a \in \mathbb{R}^*; b \in \mathbb{R}; c \in \mathbb{R}$ un polynôme du second degré et $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

1. La forme canonique de P est donnée par :

$$P(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \quad (2.1)$$

2. Si $\Delta > 0$, alors l'équation $P(x) = 0$ admet deux solutions distinctes x_1 et x_2 dans $\mathbb{R}$;

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{et} x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad (2.2)$$

Dans ce cas la forme factorisée de P est donnée par

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \quad (2.3)$$

3. Si $\Delta = 0$, alors l'équation $P(x) = 0$ admet une solution double x_0 dans $\mathbb{R}$
$$x_0 = -\frac{b}{2a} \tag{2.4}$$
Dans ce cas la forme factorisée de P est donnée par
$$P(x) = a(x - x_0)^2 \tag{2.5}$$
4. Si $\Delta < 0$, alors l'équation $P(x) = 0$ n'admet pas de solution
Dans $\mathbb{R}$; Pn'est donc pas factorisable dans $\mathbb{R}$

2.1.1 Signe d'un polynôme du second degré et d'un binôme

Activité 2.2

On se propose d'étudier le signe des polynômes $f(x) = x^2 - 2x+1; g(x) = x^2+x-6; h(x) = 4x^2+4x+16$ et $k(x) = x^4+x^2-6$.

1. Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré ($a; b; c$ des réels avec $a \neq 0$), $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant et $P(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$ sa forme canonique.
   (a) Si $\Delta < 0$, pour tout réel x, $P(x)$ est du signe de a
   (b) Si $\Delta = 0$, $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $P(x)$ est du signe de a.
   (c) Si $\Delta > 0$, $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}; x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, $P(x)$ est du signe de $(-a)$ à l'intérieur des racines et du signe de (a) à l'extérieur des racines.
2. Soit $ax + b$ ($a \neq 0$) un binôme $ax+b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$. Ainsi $ax + b$ est du signe de $(-a)$ à gauche de la racine et du signe de (a) à droite de la racine.

Application 2.1

1. Résous dans $\mathbb{R}$ les équations $f(x) = 0; g(x) = 0; h(x) = 0; k(x) = 0$
2. Factorise si possible les polynômes $f; g; h$
3. Étudie le signe de $f; g; h$

Stratégie : TI :... min TG :...min TC : ... min

Éléments de réponses 2.1

Consigne 2.3

On considère le polynôme du second degré
$P(x) = ax^2 + bx + c$, on suppose que l'équation
$P(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ deux solutions distinctes $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

1. Exprime $x_1 + x_2$ et $x_1 \times x_2$ en fonction de a, b et c
2. Soit u et v deux réels On pose $S = u + v$; $p = u \times v$
Démontre que u et v sont des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $x^2 - Sx + p = 0$

Stratégie : TI :... min TG :...min TC : ... min

Résolution 2.3

Propriété 2.2

1. Si l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ a pour solution x_1 et x_2 alors
$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{et} x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} \tag{2.6}$$
2. Deux nombres réels ont pour somme S et pour produit $p$si et seulement si ils sont les solutions de l'équation $x^2 - Sx + p = 0$

Application 2.2

1. Détermine deux nombres réels a et b sachant que $\begin{cases} a \times b = 1 \\ a + b = 3 \end{cases}$
2. Détermine les dimensions d'un terrain rectangulaire de périmètre $32m$ et dont l'aire de la surface est $16m^2$

Stratégie : TI :... min TG :...min TC : ... min

Éléments de réponses 2.2

Application 2.3

1. Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation du second degré (E_m) : $x^2 - (m-3)x + 1 = 0; m \in \mathbb{R}$.
2. Résous l'équation (E_n) : $(n+2)x^2 + 2nx + n - 3 = 0; n \in \mathbb{R}$.

Stratégie : TI :... min TG :...min TC : ... min

Éléments de réponses 2.3

2.1.2 Signe des racines d'un polynôme du second degré

Consigne 2.4

On considère le polynôme du second degré $K(x) = ax^2 + bx + c$ et pose $\Delta = b^2 - 4ac > 0; P = \frac{c}{a}$ le produit et $S = -\frac{b}{a}$ la somme.
Donne le signe des solutions éventuelles de l'équation $K(x) = 0$ dans chacun des cas suivants :

1. $P < 0$
2. $\begin{cases} P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$
3. $\begin{cases} P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$
4. $\begin{cases} P = 0 \\ S < 0 \end{cases}$
5. $\begin{cases} P = 0 \\ S > 0 \end{cases}$
6. $\Delta = 0$

Stratégie : TI :... min TG :...min TC : ... min

Résolution 2.4

Retenons 2.1

Application 2.4

1. (a) Démontre que pour tout réel m, l'équation

$$(E_m) : x^2 + 2(m+1)x + 2m = 0 \tag{2.7}$$

admet deux solutions distinctes

   (b) Étudie suivant les valeurs du nombres réels m le signe de ces solutions

2. Résous dans ℝ les équations :

$$(-x^2 + x)^2 + 5(-x^2 + x) - 36 = 0 \tag{2.8}$$

3. On considère l'équation suivantes :

$$(E_m) : (m+2)x^2 - 2mx + 1 = 0; m \in \mathbb{R} - \{-2\} \tag{2.9}$$

Pour quelles valeurs de m cette équation admet deux solutions réelles distinctes négatives?

Stratégie : TI :... min TG :...min TC : ... min

Éléments de réponses 2.4

2.1.3 Résolution d'une inéquation du second degré

Consigne 2.5

1. Donne le tableau de signe des polynômes $f; g; h$ de l'application de la section 2.1.1.
2. Résous dans ℝ les inéquations $f(x) \leq 0; g(x) \leq 0; h(x) \leq 0; f(x) \geq 0; f(x) > 0; h(x) < 0$
3. Détermine x pour que l'aire du carré $IJKL$ soit inférieur à $33dm^2$

Stratégie : TI :... min TG :...min TC : ... min

Résolution 2.5

Note 2.1

Pour résoudre une inéquation du second degré, il faut étudier le signe du polynôme puis à partir du tableau de signe trouver la solution de l'inéquation

2.1.4 Résolution des inéquations du type $\sqrt{P(x)} \leq Q(x); \sqrt{P(x)} \geq Q(x); \sqrt{P(x)} \leq \sqrt{Q(x)}; \sqrt{P(x)} = \sqrt{Q(x)}; \sqrt{P(x)} = Q(x)$

1. $\sqrt{P(x)} \leq Q(x) \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) \geq 0 \\ Q(x) \geq 0 \\ P(x) \leq [Q(x)]^2 \end{cases}$

2. $\sqrt{P(x)} \geq Q(x) \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) \geq 0 \\ Q(x) \leq 0 \end{cases}$ ou$(inclusif)$ $\begin{cases} P(x) \geq 0 \\ Q(x) \geq 0 \\ P(x) \geq [Q(x)]^2 \end{cases}$

3. $\sqrt{P(x)} \leq \sqrt{Q(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) \geq 0 \\ Q(x) \geq 0 \\ P(x) \leq Q(x) \end{cases}$

4. $\sqrt{P(x)} = \sqrt{Q(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) \geq 0 \\ P(x) = Q(x) \end{cases}$

5. $\sqrt{P(x)} = Q(x) \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) \geq 0 \\ Q(x) \geq 0 \\ P(x) = [Q(x)]^2 \end{cases}$ ou (exclusif)

$\begin{cases} Q(x) & \geq 0 \\ P(x) & = [Q(x)]^2 \end{cases}$

Application 2.5

Résous dans ℝ chacune des équations suivantes :

$$x + \sqrt{x-1} \geq 3 \tag{2.10}$$

$$\sqrt{x^2 + x + 1} = 3x - 1 \tag{2.11}$$

Stratégie : TI :... min TG :...min TC : ... min

Éléments de réponses 2.5

Consigne 2.6 *(Position d'un réel α par rapport aux racines d'un polynôme du second degré)*

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ un polynôme du second degré
Soit α un réel
Détermine la position de α par rapport aux racines de l'équation $P(x) = 0$ dans chacun des cas suivants :

1^{er} Cas : $\Delta < 0$
$P(x) = 0$ n'admet pas de solution dans ℝ donc pas de comparaison

$2^{è}$ Cas : $\Delta = 0$
$P(x) = 0$ admet une solution double x_0 dans ℝ La position de α par rapport à cette racine s'étudie aisément

$3^{è}$ Cas : $\Delta > 0$
$P(x) = 0$ admet deux solutions distinctsx_1 et x_2 dans ℝ
Supposons que $x_1 < x_2$, on calcul $aP(\alpha)$ et on étudie son signe

(a) Si $aP(\alpha) < 0$ alors α est entre les deux racines $x_1 < \alpha < x_2$

(b) Si $aP(\alpha) = 0$ alors α est l'une des racines et la comparaison se fait aisément

(c) Si $aP(\alpha) > 0$ alors α est à l'extérieur des deux racines
On calcul dans ce cas $\frac{S}{2} - \alpha$ et on étudie son signe

   i. Si $\frac{S}{2} - \alpha < 0$ alors α est supérieur aux deux racines $x_1 < x_2 < \alpha$

   ii. Si $\frac{S}{2} - \alpha > 0$ alors α est inférieur aux deux racines $\alpha < x_1 < x_2$

Stratégie : TI :... min TG :...min TC : ... min

Résolution 2.6

Application 2.6

$$p(x) = (m+2)x^2 - 2mx + 1 (m \in \mathbb{R}) \tag{2.12}$$

Étudie la position de 1 par rapport aux racines de p suivant les valeurs de m

Stratégie : TI :... min TG :...min TC : ... min

Éléments de réponses 2.6

2.1.5 Programmation linéaire sur deux variables

Un problème de programmation linéaire consiste à déterminer les coordonnées $(x; y)$ d'un ou plusieurs points du plan défini par un système d'inéquation traduisant un ensemble de contraintes étant réalisé; parmi les points ceux dont les coordonnées rendent maximale une expression de la forme $ax + by$.

Application 2.7

Deux artisans A et B décident de s'associer en travaillant chacun aux maximum de 40 heures par semaine pour fabriquer des couteaux et des pairs de ciseaux. Un couteau rapporte un bénéfice de $300F$, une paire de ciseau un bénéfice de $300F$. La fabrication d'une pair de ciseau nécessite 2 heures de l'artisan A et 3 heures de l'artisan B. La fabrication d'un couteau nécessite 2 heures de travail de l'artisan A et 1 heure de travail de l'artisan B.

1. Combien faut il fabriquer de couteau et de ciseau par semaine pour réaliser un bénéfice maximal?
2. Quelle est la valeur de ce bénéfice hebdomadaire?

Stratégie : TI :... min TG :...min TC : ... min

Éléments de réponses 2.7

2.2 Statistique

2.2.1 Série statistique à une variable

Étudier une série statistique consiste à étudier un aspect particulier des éléments d'un ensemble donné. Cet ensemble est appelé population.

1. Une partie de la population s'appelle **échantillon**
2. Un élément de la population s'appelle **individu** ou **unité statistique**
3. l'aspect étudier s'appelle la **variable** ou le **caractère**. On distingue :
   (a) les caractères **quantitatifs** qui prennent des valeurs numériques.
   Exemple 2.1 *taille; âges; nombres d'enfants...*
   (b) les caractères qualitatifs qui prennent des valeurs non numériques
   Exemple 2.2 *sexe; profession; nationalité...*
4. Les valeurs prises par un caractère d'une population sont appelés **modalités**
5. Si le caractère étudié (ou la variable) peut prendre toutes les valeurs d'un intervalle fixé, il est dit **continu** ou (à modalités regroupées en classe) . S'il ne peut prendre qu'un certains nombres de valeurs isolées, il est dit **discret**.
6. Le nombre d'individu pour lesquels la variable prend une valeur donnée s'appelle **l'effectif** de cette valeur .
7. Lorsqu'on associe les modalités ou classes à leurs effectifs, on obtient une série statistique
8. Dans un ensemble à p éléments, on convient de noter x_i la modalité et $n_i$son effectif avec $1 \leq i \leq p$. L'ensemble des couples $(x_i; n_i)$est une **série statistique**.

2.2.2 Quelques caractérisations

Soit une série statistique de modalité $(x_i)_{1\leq i\leq p}$ d'effectifs $(n_i)_{1\leq i\leq p}$ et d'effectif total $N = \sum_{i=1}^{p} n_i$.

1. On appelle mode d'une série statistique toute modalité qui a le plus grand effectif.
2. On appelle **moyenne** d'une série statistique le nombre réel
$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i \tag{2.13}$$
3. On appelle **fréquence** d'une série statistique le nombre réel
$$f = \frac{n_i \times 100}{N} \text{en } \% \tag{2.14}$$
4. On appelle variance d'une série statistique le nombre réel défini par :
$$V(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i(x_i - \overline{x})^2 = \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i {x_i}^2\right) - \overline{x}^2 \tag{2.15}$$
5. On appelle écart-type d'une série statistique le nombre réel défini par :
$$\sigma(x) = \sqrt{V(x)} \tag{2.16}$$

2.2.3 Effectifs cumulés- fréquences cumulés

On considère une série statistique ,à modalités regroupées en classes.

1. (a) **Effectifs cumulés croissants**
$$N_{i\uparrow} = n_1 + \cdots + n_i = \sum_{k=1}^{i} n_k \tag{2.17}$$
   (b) **Effectifs cumulés décroissants**
$$N_{i\downarrow} = N - (n_1 + \cdots + n_{i-1}) = N - \sum_{k=1}^{i-1} n_k \tag{2.18}$$
2. **Fréquence cumulées croissante**
$$F_{i\uparrow} = f_1 + \cdots + f_i = \sum_{k=1}^{i} f_k \tag{2.19}$$
3. **Fréquence cumulée décroissante**
$$F_{i\downarrow} = 1 - (f_1 + \cdots + f_{i-1}) = 1 - \sum_{k=1}^{i-1} f_k \tag{2.20}$$

2.2.4 Méthode pour déterminer une médiane

1. Pour déterminer la médiane M_e d'une série statistique à caractère quantitatif discret d'effectif total N, on peut :
   (a) construire le tableau des effectifs cumulés croissants et décroissants;
   (b) déterminer la modalité x_1 correspondant au premier effectif cumulé croissant supérieur ou égal à $\frac{N}{2}$

(c) déterminer la modalité x_2 correspondant au premier effectif cumulé décroissant supérieur ou égal à $\dfrac{N}{2}$

(d) calculer $M_e = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$

2. Pour déterminer la médiane M_e d'une série statistique à caractère quantitatif continu on peut utiliser l'une des méthodes suivantes :

   (a) Construire le polygone des effectifs cumulés croissants et décroissants. La médiane est l'abscisse du point d'intersection de ces deux polygones.

   (b) Construire le polygone des fréquences cumulées croissantes et décroissants. La médiane est l'abscisse du point d'intersection de ces deux polygones.

   (c)

Application 2.8

Les résultats au dernier devoir de mathématiques des élèves d'une classe sont présentés dans le tableau ci-après

Notes (x_i)	3	4	5	6	7	9	10	11	12
Effectifs (n_i)	3	1	4	2	1	3	1	2	3

1. Précise la population et le caractère étudié
2. Quelle est la fréquence de la modalité 5 ?
3. Calcule la moyenne , la variance ; et l'écart-type de cette série.
4. Dresse le tableau des effectifs cumulés croissant et décroissant
5. Construis le polygone des effectifs cumulés croissant et décroissant.
6. Détermine le mode et la médiane de cette série statistique.

Stratégie : TI :... min TG :...min TC : ... min

Éléments de réponses 2.8

2.2.5 Séries statistiques des centres

Soit une série statistique de modalité $(x_i)_{1\le i\le p}$ d'effectifs $(n_i)_{1\le i\le p}$ et d'effectif total $N = \sum_{i=1}^{p} n_i$.

1. Par convention, une classe est un intervalle fermé à gauche et ouvert à droite, du type $[b_i; b_{i+1}[$.
2. L'effectif n_i de la classe $[b_i; b_{i+1}[$ est le nombre d'individus dont le caractère prend une valeur supérieur ou égale à b_i et strictement inférieur à b_{i+1}.
3. Le centre d'une classe bornée $[b_i; b_{i+1}[$ est $c_i = \dfrac{b_i + b_{i+1}}{2}$
4. L'amplitude d'une classe bornée $[b_i; b_{i+1}[$ est $a_i = b_{i+1} - b_i$.
5. La densité d'une classe bornée $[b_i; b_{i+1}[$ est $d_i = \dfrac{n_i}{a_i}$.(On calcule la densité lorsque les classes sont d'amplitudes inégales (mais finies))
6. On appelle **classe modale** d'une série statistique à modalités regroupées en classes toutes classes dont l'effectif est le plus grand.
7. Pour une série statistique groupées en classes $[b_i; b_{i+1}[; i \in \{1; ...; k\}$,

   (a) On appelle moyenne arithmétique d'une série statistique le réel

   $$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i c_i \tag{2.21}$$

   Pour chaque i, c_i représente le centre de la classe $[b_i; b_{i+1}[$ et n_i l'effectif de cette classe.

   (b) On appelle **fréquence** réel

   $$f = \frac{n_i \times 100}{N} \text{en } \% \tag{2.22}$$

   (c) On appelle variance d'une série statistique le nombre réel défini par :

   $$V(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i (c_i - \overline{x})^2 = \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i {c_i}^2\right) - \overline{x}^2 \tag{2.23}$$

   (d) On appelle écart-type d'une série statistique le nombre réel défini par :

   $$\sigma(x) = \sqrt{V(x)} \tag{2.24}$$

Application 2.9

On considère le tableau ci-dessous représentant les notes d'une classe de première lors d'un devoir.

8	10	9	10	9	9	9	11	8	9
12	11	8	10	12	11	9	10	9	11
12	9	10	11	8	10	8	8	10	12

1. Regroupe ces notes dans des classes d'amplitude égale sachant que la première classe est $[7; 9[$.
2. Dresse le tableau des effectifs cumulés croissants et décroissants puis celui des fréquences cumulés croissantes et décroissantes.
3. Représente
   (a) l'histogramme et le polygones des effectifs de cette série statistique.
   (b) le polygone des effectifs cumulés croissant et décroissants de cette série statistique.
4. Calcule la moyenne de cette série statistique.
5. Calcule la densité de chaque classe.
6. Calcule la variance et l'écart-type.

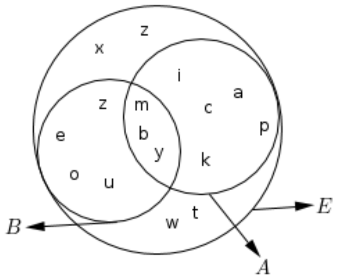
Stratégie : TI :... min TG :...min TC : ... min

Éléments de réponses 2.9

2.3 Dénombrement

2.3.1 Notion d'ensemble

Activité 2.3



Consigne 2.7

1. Dresse les éléments de chacun des ensembles $A; B$ et E
2. Donne le nombre d'éléments que comporte $A; B$ et E

Stratégie : TI :... min TG :...min TC : ... min

Résolution 2.7

Retenons 2.2

On note Card(B) = 7 ; Card(A) = 8 et Card(E) = 16

Définition 2.2

1. Soit E un ensemble non vide de $\mathbb{R}$, le nombre d'éléments de E est appelé "cardinal de E". Si n est le nombres d'éléments de E on note $Card(E) = n, n \in \mathbb{N}^*$
2. Un ensemble est dit fini s'il est vide ou si on peut compter tous ces éléments.

2.3.2 Partition d'un ensemble

[1] Une famille $(A_i)_{i\in I}$ de parties d'un ensemble E est une partition de E lorsque :

1. $\forall i \in I, A_i \neq \emptyset$
2. $\forall (i, j) \in I^2, A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$
3. $\cup_{i\in I} A_i = E$

Consigne 2.8

En considérant la représentation ci-dessus

1. Quels sont les éléments de E appartenant à la fois à A et à B
2. Quels sont les éléments de E appartenant à l'un au moins des ensemble A et B
3. Détermine Card(A) ; Card(B) ; Card($A \cap B$) ; Card($A \cup B$)
4. Trouve une relation entre Card(A) ; Card(B) ; Card($A \cap B$) ; Card($A \cup B$)

Stratégie : TI :... min TG :...min TC : ... min

Résolution 2.8

Propriété 2.3 *Uniquement pour la première C*

Soit E un ensemble fini et E_i des ensemble formant une partition de E On a : $Card(E) = Card\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{p} Card(E_i)$

Conséquence 2.1

1. Pour toute partie A d'un ensemble fini E, on a : $Card(A) + Card(E \setminus A) = Card(E)$
2. Pour toutes parties A et B d'un ensemble finie E, on a : $Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B)$

1. uniquement pour la 1ère C

2.3.3 Produit cartésien

Définition 2.3

Soit A et B deux ensembles, on appel produit cartésien de A par B, l'ensemble des couples (a, b) tels que $a \in A$; $b \in B\cdot$ Cet ensemble est noté $A \times B = \{(a; b); a \in A, b \in B\}$; on lit "A croix B"

Application 2.10

Une femme a dans sa garde-robe 4 jupes, 5 chemisiers et 3 vestes. Elle choisit au hasard une jupe, un chemisier et une veste. De combien de façons différentes peut-elle s'habiller ?

Stratégie : TI :... min TG :...min TC : ... min

Éléments de réponses 2.10

Cette femme peut s'habiller de $4 \times 5 \times 3 = 60$ façons

Définition 2.4

Soit E un ensemble à n éléments et p un entier naturel non nul On appelle p-uplet de E tout élément de l'ensemble E^p

Propriété 2.4

1. Dans un ensemble fini ayant n éléments, le nombres N de listes de p éléments est : $N = n^p$
2. Le nombre d'applications d'un ensemble à p éléments vers un ensemble à n éléments est n^p

Propriété 2.5

Soit $E_1; E_2; \cdots; E_p$ des ensembles finis,

$$card(E_1 \times \cdots \times E_p) = (cardE_1) \times \cdots \times card(E_p) \qquad (2.25)$$

2.3.4 Factorielle d'un entier naturel

Définition 2.5

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2\cdot$ Le nombre factorielle n est le produit de tous les entiers naturels de 1 à $n\cdot$ On le note $n!$
Ainsi $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 1$

Exemple 2.3 $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$
Conventionnellement $0! = 1$ *et* $1! = 1$

Remarque 2.1

$\forall n \in \mathbb{N} - \{0; 1\}$, $n! = n \times (n-1)!$ et $(n+1)! = (n+1)n!$

2.3.5 Permutations

Consigne 2.9

Soit x, y, z trois nombres réels donnés On pose $A = \{x, y, z\}$

1. Dénombre le nombre Nde triplets de réels que l'on peut former à partir de A
2. Précise $n = Card(A)$ puis compare $n!$ et N

Stratégie : TI :... min TG :...min TC : ... min

Résolution 2.9

Retenons 2.3

N est le nombre de permutations sur les éléments de A

Définition 2.6

Soit E un ensemble fini ayant n éléments. Il y a $n!$ permutations possibles de ses n éléments

Application 2.11

Le groupe des élèves de Terminale doit s'inscrire au concours par Minitel. Il faut établir une liste de passage. Combien y a-t-il de manières de constituer cette liste? (il y a 24 élèves dans la classe)

Stratégie : TI :... min TG :...min TC : ... min

Éléments de réponses 2.11

Une liste de passage des 24 élèves est une permutation des 24 éléments de l'ensemble classe. Il y a donc $24! \times 6,2 \times 10^{23}$ listes possibles.

2.3.6 Arrangement

Consigne 2.10

Dans un collège 5 élèves Anne, Ben, Carl, Din et Élise ont 8 drapeaux différents; ils désirent en accrocher un à chacun de leur sac à dos.

Détermine le nombre de possibilité différents d'accrocher les drapeaux aux sacs à dos.

Stratégie : TI :... min TG :...min TC : ... min

Résolution 2.10

Retenons 2.4

On parle d'arrangement pour une telle suite composé de 5 éléments distincts prient parmi huit éléments.

Définition 2.7

1. Soit n un entier naturel non nul et p un entier tel que $1 \leq p \leq n$. On appelle arrangement constitués par p éléments d'un ensemble à n éléments le nombre entier naturel noté $A_n^p = \underbrace{n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times \left[n-(p-1)\right]}$
$A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$
2. Un arrangement constitués par n éléments d'un ensemble à n éléments est appelé permutation.

Remarque 2.2

Une permutation est un arrangement de n éléments dans un ensemble fini contenant n éléments.

Propriété 2.6

Soit A et B deux ensembles non vides tels que $Card(A) = p$ et $Card(B) = n$ avec $1 \leq p \leq n; n, p \in \mathbb{N}$.

1. Le nombre d'application injective de A vers B est A_n^p.
2. Le nombre d'applications bijectives de A vers B (lorsque $n = p$) est $n!$.

Application 2.12

A l'occasion d'une compétition sportive groupant 18 athlètes, on attribue une médaille d'or, une d'argent, une de bronze. Combien y-a-t-il de distributions possibles (avant la compétition, bien sûr...)?

Éléments de réponses 2.12

Un tel podium est un arrangement de 3 athlètes choisis parmi l'ensemble des 18 athlètes (l'ordre compte et il ne peut y avoir de répétition, un athlète ne pouvant remporter deux médailles simultanément). Il existe donc $A_{18}^3 = 4896$ podiums différents.

Théorème 2.1 *(Arrangement)*

Soit E un ensemble fini de cardinal n et p un entier naturel tel que $0 \geq p \geq n$.

1. Le nombre d'arrangement de p éléments de E est $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$.
2. Le nombre de permutation de E est $A_n^n = n!$.

2.3.7 Combinaison

Définition 2.8

Soit E un ensemble à n éléments et p un nombre entier naturel tels que $p \leq n$. On appelle combinaison de p éléments de E tout sous-ensemble de E ayant p éléments.

Propriété 2.7

1. Le nombre de combinaison de p éléments d'un ensemble à n, noté C_n^p est tel que :
$C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$
2. Soit $n; p$ deux nombres entiers naturels tels que $p \leq n$; a et b deux nombres réels et n un nombre entier naturel non nul on a :
$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p} b^p. \tag{2.26}$$
C'est la formule de Binôme de Newton.

Consigne 2.11

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{N}^*$ tels que $0 \leq p \leq n$.

1. Démontre que $C_n^{n-p} = C_n^p$.
2. Démontre que $C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}$.
3. Démontre que $C_n^p = \dfrac{n}{p} C_{n-1}^{p-1}$.

Stratégie : TI :... min TG :...min TC : ... min

Résolution 2.11

Propriété 2.8

1. Si $0 \leq p \leq n$ alors $C_n^{n-p} = C_n^p$
2. Si $0 \leq p \leq n-1$ alors $C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}$
3. Si $0 < p \leq n$ alors $C_n^p = \dfrac{n}{p} C_{n-1}^{p-1}$

Application 2.13

De combien de façons peut-on choisir 3 femmes et 2 hommes parmi 10 femmes et 5 hommes ?

Stratégie : TI :... min TG :...min TC : ... min

Éléments de réponses 2.13

$C_3^{10} \times C_2^5 = 1200$

2.3.8 Complémentaire d'un ensemble

Soit E un ensemble non vide, on désigne par A un sous ensemble de E On appel complémentaire de A dans E, l'ensemble noté $\overline{A}$ ou A^c ou C_E^A Il est défini par :
$\overline{A} = A^c = C_E^A = \{x \in E, x \notin A\}$; $C_E^A = E \setminus A$ si E est fini alors $Card(\overline{A}) = Card(E) - Card(A)$.

2.3.9 Notion d'anagramme

L'anagramme d'un mot indique le nombre de mots, (existants ou non), qu'on peut former avec les lettres de ce mot ; ou encore c'est le nombre de permutations distinctes qu'on peut faire avec les lettres de ce mot. Pour trouver l'anagramme d'un mot, on compte le nombre de lettres que comporte ce mot puis le nombre de fois qu'une lettre se répète et on fait le rapport du factoriel du nombre total de lettres et du factoriel du nombre de répétition de chaque lettre.

Exemple 2.4 *L'anagramme du BABARRA s'écrit :* $\dfrac{7!}{2!3!2!} = 210$

2.3.10 L'addition et la multiplication en analyse combinatoire

En dénombrement ou en analyse combinatoire, en termes de calculs, l'appellation "et" se traduit par l'opération "×" et les termes "ou ; ou bien" se traduisent par l'opération "+"

2.3.11 Problème de dénombrement

Dans les problèmes de dénombrement on a utilisé trois outils fondamentaux : p-uplet, arrangement, combinaison. Il est donc nécessaire de connaître les caractéristiques de ces notions et de préciser leurs domaine d'utilisation. Comme on le verra dans ce qui suit, chacune de ces notions peut être modélisée par une situation rencontrée fréquemment dans les problèmes de dénombrement : les tirages de p boules dans une urne qui en contient n. On peut récapituler ces différents tirages de boules et leur dénombrement par le tableau suivant

Mode tirage	*Les p éléments sont ordonnés*	*Les p éléments sont distincts*	*Outil*	*Nombre de tirages*
Tirages successifs avec remise	***Oui***	***Non***	***p-uplet***	n^p
Tirages successifs sans remise	***Oui***	***Oui***	***Arrangement***	A_n^p
Tirages simultanés	***Non***	***Oui***	***Combinaison***	C_n^p

2.4 Fonctions-Applications

Activité 2.4

Melon au cours de son entraînement s ?est intéressé aux trajectoires des balles après deux tirs successifs. Un dispositif placé dans les environs lui signale que ces trajectoires sont les représentations graphiques de certaines fonctions Melon se propose d'étudier certaines propriétés de ces fonctions.

2.4.1 Domaine de définition

(Rappels)

Définition 2.9

1. Une fonction f d'un ensemble A vers un ensemble B est toute correspondance qui à chaque élément de A associe 0 ou 1 élément de B.
2. Une application est une fonction de A vers B qui à chaque élément de A associe un et un seul élément de B
   ou bien
   Une application est une fonction dont son ensemble de départ est égale à son ensemble de définition
3. Soient A et B deux sous-ensemble de $\mathbb{R}$, f une fonction de A vers B. L'ensemble de définition de f est le sous ensemble D de A défini par

$$D = \left\{x \in A, f(x) \in B\right\} \tag{2.27}$$

Consigne 2.12

$$f : \left]-\infty; \frac{3}{2}\right] \longrightarrow \left[-\frac{5}{4}; +\infty\right[\qquad x \longmapsto x^2 - 3x + 1$$

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad x \longmapsto \sqrt{x-1} + 2x - 1$$

$$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad x \longmapsto \sqrt{2x^2 + 3x - 2}$$

$$i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad x \longmapsto \frac{6}{E(x) + 1}$$

$$k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{2x+3}{\sqrt{x^2-5x+6}}$$

$$l : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{2x+3}{\sqrt{x^2-5x+6}+2x+1}$$

$$m :]-\infty;0[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{x^2+3x+1}{x^2-5x+6}$$

$$n : [0;+\infty[\longrightarrow]-\infty;1]$$
$$x \longmapsto x^2-x-1$$

$$p(x) = \begin{cases} \frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}.$$

Détermine le domaine de définition de chacune des fonctions ci-dessous.
Stratégie : TI :... min TG :...min TC : ... min

Résolution 2.12

2.4.2 Restriction d'une fonction

Consigne 2.13

Soit f et g deux applications définie par :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \sqrt{|x|-2}$$

$$g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \sqrt{x-2}$$

1. Détermine D_f et D_g.
2. Sachant que $D_g \subset D_f$, justifie que pour tout $x \in D_g$, on a $g(x) = f(x)$

Stratégie : TI :... min TG :...min TC : ... min

Résolution 2.13

Retenons 2.5

On dit que g est la restriction de f à $\mathbb{R}_+$. On dit aussi que f est un prolongement de g à $\mathbb{R}$.

Définition 2.10

Soit f une fonction de E vers F et E' une partie de E.

- On appelle restriction de f à E' la fonction $g : E' \to F$, $a \mapsto f(a)$
- f est alors appelé prolongement de g à E.

Application 2.14

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto |x^2-5x+6|$
Détermine un polynôme du second degré P ayant même restriction que f à l'intervalle $[2;3]$.
Stratégie : TI :... min TG :...min TC : ... min

Éléments de réponses 2.14

2.4.3 Comparaison de deux fonctions sur un ensemble donné

Consigne 2.14

On considère les fonctions f et g définie par :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto 3x^2-1$$

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{3x^3+2}{x-1}$$

1. Détermine D_f et D_g
2. On pose $I = D_f \cap D_g$;
   (a) Étudie le signe de $f(x)-g(x)$ sur I
   (b) Compare $f(x)$ et $g(x)$ pour $x \in I$

Stratégie : TI :... min TG :...min TC : ... min

Résolution 2.14

Retenons 2.6

Soient f et g deux fonctions de la variable réelle définie sur I. Pour comparer f et g sur I, on étudie le signe de $f(x)-g(x)$

1. Si $f(x)-g(x) < 0$ sur I alors $f < g$ sur I
2. Si $f(x)-g(x) > 0$ sur I alors $f > g$ sur I
3. Si $f(x)-g(x) = 0$ sur I alors $f = g$ sur I

2.4.4 Minorant , majorant d'une fonction

1. Une fonction est minorée sur un ensemble A si et seulement si
$$\forall x \in A, \exists m \in \mathbb{R}; m \leq f(x) \tag{2.28}$$
2. Une fonction est majorée sur un ensemble A si et seulement si
$$\forall x \in A, \exists M \in \mathbb{R}; f(x) \leq M \tag{2.29}$$
.
Dans ce cas le réel M est appelé un majorant de f sur A
3. Une fonction est dite bornée si et seulement si elle est à la fois majoré et minoré
4. On dit que M est un maximum de la fonction f sur un intervalle I si et seulement si
$$\forall x \in I; f(x) \leq M \quad \text{et} \quad \exists x_0 \in I; f(x_0) = M \tag{2.30}$$

5. Une fonction est majorée sur un ensemble A si et seulement si
$$\forall x \in A, \exists M \in \mathbb{R}; f(x) \leq M \tag{2.31}$$
. Dans ce cas le réel M est appelé un majorant de f sur A
6. Une fonction est dite bornée si et seulement si elle est à la fois majoré et minoré
7. On dit que M est un maximum de la fonction f sur un intervalle I si et seulement si
$$\forall x \in I; f(x) \leq M \quad \text{et} \quad \exists x_0 \in I; f(x_0) = M \tag{2.32}$$
8. On dit que M est un minorant de la fonction f sur un intervalle I si et seulement si
$$\forall x \in I; f(x) \geq m \quad \text{et} \quad \exists x_0 \in I; f(x_0) = m \tag{2.33}$$

Application 2.15

Démontre que 3 est un maximum sur $\mathbb{R}$ de la fonction

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{6}{x^2+2} \end{aligned}.$$

Stratégie : TI :... min TG :...min TC : ... min

Éléments de réponses 2.15

Propriété 2.9

Toute application est une fonction (à prouver)

2.4.5 Composée de deux applications

Consigne 2.15

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 3x^2 - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g : \quad \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sqrt{2x-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h : \quad \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sqrt{6x^2-3} \end{aligned}$$

1. Détermine l'ensemble de définition des fonctions $f; g$ et h
2. Compare $h(x)$ et $g[f(x)]$

Stratégie : TI :... min TG :...min TC : ... min

Résolution 2.15

Définition 2.11

Soit $E; F; G$ trois ensemble non vide; $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$. On appelle composée de f par g la fonction de $E \longrightarrow G$ notée $g \circ f$ et définie pour tout élément $x \in E$ tel que $x \in D_f$ et $f(x) \in D_g$ par $g \circ f(x) = g[f(x)]$

Remarque 2.3

$$\begin{aligned} g \circ f : E &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto g(f(x)) \end{aligned}$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f; f(x) \in D_g\}; D_{f \circ g} = \{x \in D_g; g(x) \in D_f\}$$

Application 2.16

On donne les fonctions f et g définies par

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 - 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{2x+1}{x} \end{aligned}$$

1. Détermine l'ensemble de définition de $g \circ f$.
2. Définis $g \circ f$.

Stratégie : TI :... min TG :...min TC : ... min

Éléments de réponses 2.16

Propriété 2.10

La composée des applications est associative.

Définition 2.12

Soit f une application de E vers F

1. On dit que f est une injection (ou f est injective) si tout élément de F a au plus un antécédent par f
2. On dit que f est surjection (ou f es surjective) si tout élément de F a au moins un antécédent par f
3. On dit que f est une bijection (ou f est bijective si et seulement si elle est injective et surjective)

Propriété 2.11

Soit f une application définie de $E \longrightarrow F$

1. On dit que f est injective si et seulement si pour tout $x, x' \in E$ on a :
$f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$
Cette propriété peut s'énoncer de la façon suivante : " f est injective si et seulement si pour tout $x; x' \in E$ on a :
$x \neq x' \Longrightarrow f(x) \neq f(x')$
2. f est une bijection si et seulement si pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ admet une solution unique dans E
3. La composée de deux applications
   (a) injective est injective
   (b) surjective est surjective
   (c) bijective est bijective
4. Si f et g sont deux applications bijective alors $g \circ f$ est bijective De plus $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Application 2.17

Soit $f; g; h$ et i des fonctions définie par :

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x+3}{x} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} g:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2x+1}{x-1} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} h:]1;+\infty[& \longrightarrow &]2;+\infty[\\ x & \longmapsto & x^2-2x+3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} i:]2;+\infty[& \longrightarrow &]3;+\infty[\\ x & \longmapsto & \sqrt{x-1}+2 \end{array}$$

1. Définie $f\circ g$ et $g\circ f$
2. Démontre que h et i sont bijectives
3. Définie la bijection réciproque de h et de i
4. Sans déterminer $h\circ i$, démontre que $h\circ i(x)=7$ admet dans $]2;+\infty[$ une solution unique x_0 que l'on déterminera

Stratégie : TI :... min TG :...min TC : ... min

Éléments de réponses 2.17

1. $D_f=\mathbb{R}^*$
   $D_g=\mathbb{R}-\{1\}$;

   $$\begin{aligned} D_{f\circ g} &= \left\{x\in D_g; g(x)\in D_f\right\} \\ &= \left\{x\in\mathbb{R}-\{1\}; g(x)\in\mathbb{R}^*\right\} \\ &= \left\{x\in\mathbb{R}-\{1\}; g(x)\neq 0\right\} \end{aligned}$$

   Posons $g(x)=0$
   $g(x)=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$
   Par suite $D_{f\circ g}=\mathbb{R}-\left\{1;-\dfrac{1}{2}\right\}$

   $$\begin{array}{rcl} f\circ g:\mathbb{R}-\left\{1;-\dfrac{1}{2}\right\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{5x-2}{2x+1} \end{array}$$

   Par analogie $\begin{array}{rcl} g\circ f:\mathbb{R}-\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+2 \end{array}$

2. Soit $y\in]2;+\infty$ et $x x\in]1;+\infty[; h(x)=y$
   $h(x)=y\Leftrightarrow x=\sqrt{y-2}+1>0$
   Ainsi $\forall y\in]2;+\infty[;\exists! x\in]1;+\infty[; h(x)=y$ par conséquent h est une bijection

   Soit $y\in]3;+\infty$ et $x\in]2;+\infty[; i(x)=y$

   $$\begin{aligned} i(x)=y &\Leftrightarrow \begin{cases} y-2\geq 0 \\ x-1=(y-2)^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x-1=(y-2)^2 (car\, y-2)\geq 0 \\ &\Leftrightarrow x=(y-1)^2+1 \end{aligned}$$

   $$\begin{aligned} y\in]3;+\infty[&\Leftrightarrow y>3 \\ &\Leftrightarrow y>2+1 \\ &\Leftrightarrow y-2>1 \\ &\Leftrightarrow (y-2)^2>1 \\ &\Leftrightarrow (y-2)^2+1=x> \end{aligned}$$

   $Donc \forall y\in]3;+\infty[,\exists! x\in]2;+\infty[; i(x)=y$
   d'où i est bijective

3. $$\begin{array}{rcl} h^{-1}:]2;+\infty[& \longrightarrow &]1;+\infty \\ x & \longmapsto & \sqrt{x-2}+1 \end{array}$$

   $$\begin{array}{rcl} i^{-1}:]3;+\infty[& \longrightarrow &]2;+\infty \\ x & \longmapsto & (x-2)^2+1 \end{array}$$

4. $g\circ f$ est la composée de deux applications bijective donc $g\circ f$ est une bijection de $]1;+\infty[$ vers $]3;+\infty[$; $7\in]3;+\infty[$ donc l'équation $g\circ f(x)=7$ admet une solution unique x_0 dans $]1;+\infty[$

   $$\begin{aligned} (g\circ f)(x_0)=7 &\Leftrightarrow x_0=(g\circ f)^{-1}(7) \\ &\Leftrightarrow x_0=f^{-1}\circ g^{-1}(7) \\ &\Leftrightarrow x_0=f^{-1}[g^{-1}(7)]=2\sqrt{6}+1 \end{aligned}$$

Remarque 2.4

1. Si $f:E\to F; g:F\to G; h:G\to H$ des fonctions on a : $(h\circ g)\circ f=h\circ(g\circ f)$
2. Si f est une bijection de A vers B alors $f(x)=y\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$

Consigne 2.16

Soit f une application bijective de A vers B et f^{-1} sa bijection réciproque

1. Démontre que $\forall x\in A; f\circ f^{-1}(x)=x$
2. Démontre que $\forall y\in B; f\circ f^{-1}(y)=y$

Stratégie : TI :... min TG :...min TC : ... min

Résolution 2.16

1. Posons $f(x)=a$
   $f^{-1}\circ f(x)=f^{-1}[f(x)]=f^{-1}(a)=x$
2. Posons $f(y)=b$
   $f^{-1}\circ f(y)=f^{-1}[f(y)]=f^{-1}(b)=y$

Définition 2.13

E étant un ensemble non vide, on appel application identique de E, l'application notée Id_E et définie

par $\begin{array}{rcl} Id_E:E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & Id_{E(x)}=x \end{array}$

Propriété 2.12

Soit f une application bijective définit de E vers F; f^{-1} sa bijection. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ sont symétrique par rapport à la droite d'équation $y=x$.

2.4.6 Image directe-Image réciproque d'un ensemble par une fonction

Définition 2.14

Soit f une application de E vers F; A et B deux ensemble tels que $A \subset E$ et $B \subset F$

1. On appelle image directe de A par f le sous-ensemble de F définie par

$$f(A) = \{f(x) \in F; x \in A\} \tag{2.34}$$

2. On appelle image réciproque de B par f le sous-ensemble de E définie par

$$f^{-1}(B) = \{x \in E; f(x) \in B\} \tag{2.35}$$

Dans la définition d'image réciproque, l'application f n'a pas besoin d'être nécessairement bijective

Application 2.18

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto |x-1| \end{aligned}$$

Détermine $f([-2;4])$; $f^{-1}([0;2])$

Stratégie : TI :... min TG :...min TC : ... min

Éléments de réponses 2.18

2.5 Limites et continuité

Activité 2.5

Luc un élève de la classe de 1ère voulait tracer la courbe qui permettra de voir l'évolution de la longueur des carrés successifs construits Pour celà il se rend il se rend compte qu'il a besoin des notions de limite, de continuité et de dérivation afin de bien construire cette courbe

2.5.1 Limites

Consigne 2.17

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 5x+3 \end{aligned}$$

1. Complète le tableau suivant :

x	1,99	1,999	1,9999	2,001	2,00001
$f(x)$					

2. Pour x prenant des valeurs voisines de 2 , $f(x)$ est proche de quelle valeurs

Stratégie : TI :... min TG :...min TC : ... min

Résolution 2.17

Retenons 2.7

On dit que $f(x)$ tend vers 13 quand x tend vers 2 et on note : $\lim_{2} f = 13$ ou $\lim_{x\to 2} f(x) = 13$

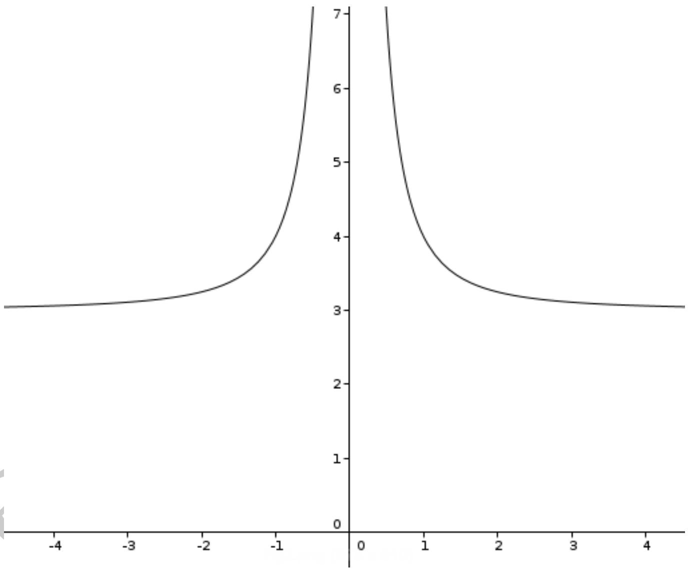
Définition 2.15

Soit f une fonction numérique définie ou non en un point x_0 de $\mathbb{R}$ et l un nombre réel. On dit que $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers x_0 ou que l est la limite de f au point x_0 ou $f(x)$ s'approche de l lorsque x prend des valeurs de plus en plus proche de x_0. On note$\lim_{x_0} f = l$ ou $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$

Propriété 2.13

Lorsqu'une fonction f est définie en x_0 et admet une limite en x_0 alors cette limite est égale à $f(x_0)$; c'est à dire $\lim_{x_0} f = f(x_0)$.

Consigne 2.18 *(Limite fine (en l'infini))*



Observe la représentation graphique de la fonction g définie par : $g(x) = \dfrac{3x^2+1}{x^2}$

1. Quelle est le comportement de $g(x)$ lorsque x prend des valeurs "de plus en plus grande"
2. Peut-on rendre $g(x)$ "aussi proche de 3 que l'on veut" en choisissant "x suffisamment grand"

Stratégie : TI :... min TG :...min TC : ... min

Résolution 2.18

Consigne 2.19 *(Limite finie à l'infini)*

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$

1. Détermine D_f
2. Complète le tableau suivant :

x	10	100	10^5	10^7
$f(x)$				

3. Quel est le comportement de f lorsque f prend des valeurs de plus en plus grand

Stratégie : TI :... min TG :...min TC : ... min

Résolution 2.19

Retenons 2.8

On dit que $f(x)$ tend vers 0lorsque x tend vers $+\infty$ et on écrit : $\lim\limits_{+\infty} f = 0$ ou $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Consigne 2.20 *(Limite en l'infini des fonctions élémentaires)*

Propriété 2.14

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} k = k$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} k = k$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$
6. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$
7. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$
8. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$
9. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$
10. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$
11. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$
12. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$
13. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$
14. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = \begin{cases} +\infty \text{ si n est pair} \\ +\infty \text{si n est impair} \end{cases}$
15. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty \text{ si n est pair} \\ -\infty \text{si n est impair} \end{cases}$

Stratégie : TI :... min TG :...min TC : ... min

Résolution 2.20

Consigne 2.21 *(Limite infini en x_0)*

On considère la fonction h définie par :
$h(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$

1. Précise le domaine de définition de h
2. Complète le tableau ci-après

x	0,9	0,99	1	$\cdots$	1,001	1,01
$f(x)$				$\cdots$		

3. Dis ce que tu constates du comportement de $f(x)$ lorsque x prend des valeurs " de plus en plus proche de 1"

Stratégie : TI :... min TG :...min TC : ... min

Résolution 2.21

Consigne 2.22 *(Limite finie (en x_0))*

On considère la fonction g définie par :
$g(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

1. g est-il définie en 0
2. Complète le tableau ci-après :

x	- 0,01	- 0,001	0,001	0,01
$g(x)$				

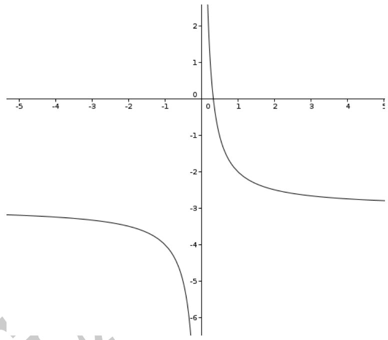
3. Que peux-tu dis de la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers 0
4. Calcule $f(0)$ puis dis ce que tu remarques

Stratégie : TI :... min TG :...min TC : ... min

Résolution 2.22

Consigne 2.23 *(Limite à gauche, limite à droite)*

Observe la représentation graphique suivante de la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{-3x+1}{x}$



1. Quelle est la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs inférieures
2. Quelle est la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeur supérieures

Stratégie : TI :... min TG :...min TC : ... min

Résolution 2.23

Consigne 2.24 *(Limite des fonctions élémentaires)*

$\lim\limits_{0^-} \dfrac{1}{x^n} = \begin{cases} \cdots \textbf{si n est pair} \\ \cdots \textbf{si n est impair} \end{cases}$

$\lim\limits_{0^+} \dfrac{1}{x^n} = \begin{cases} \cdots \textbf{si n est pair} \\ \cdots \textbf{si n est impair} \end{cases}$

Stratégie : TI :... min TG :...min TC : ... min

Résolution 2.24

Définition 2.16

Soit x_0; l deux nombres réels et f une fonction d'ensemble de définition D_f

1. On dit que f admet une limite à gauche en x_0 égale à l lorsque la restriction de g de f à $D_f \cap]-\infty; x_0[$ admet en x_0 une limite égale à l
   On note $\lim\limits_{x \longrightarrow x_{0<}} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l$ ou $\lim\limits_{x_0^-} f(x) = l$ On dit que l est la limite à gauche en x_0 de f ou bien $f(x)$ tend vers l par valeurs inférieur à x_0
2. On dit que f admet une limite à droite en x_0 égale à l lorsque la restriction de h de f à $D_f \cap]x_0; +\infty[$ admet en x_0 une limite égale à l
   On note $\lim\limits_{x \longrightarrow x_{0>}} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l$ ou $\lim\limits_{x_0^+} f = l$ On dit que l est la limite à droite en x_0 de f ou bien $f(x)$ tend vers l par valeurs supérieur à x_0

Exemple 2.5 *Considérons la fonction numérique d'une variable réels définie par :*

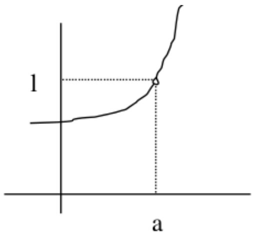
$f(x)=\begin{cases} x+3 si x>1 \\ 2x+3 si x\leq 1\end{cases}$

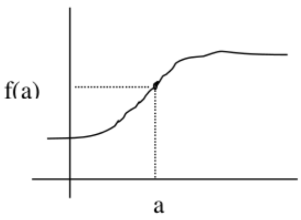
On a : $\lim\limits_{1^+} f(x)=4$ *et* $\lim\limits_{1^-} f(x)=5$

Propriété 2.15

Soit $x_0; l$ deux nombres réels et f une fonction définie sur un intervalle ouvert centré en x_0 sauf éventuellement en x_0

1. Dans le cas où f n'est pas défini en x_0, f admet une limite l en x_0 si et seulement si f admet en x_0 une limite à gauche et une limite à droite égale à l
   $\lim\limits_{x_0} f(x)=l \Leftrightarrow \lim\limits_{x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x_0^-} f(x)=l$
2. Dans le cas où f est défini en x_0 alors f admet une limite en x_0 si et seulement si f admet en x_0 une limite à gauche et une limite à droite égale à $f(x_0)$
   $\lim\limits_{x_0} f=f(x_0) \Leftrightarrow \lim\limits_{x_0^+} f=\lim\limits_{x_0^-} f=f(x_0)$





Théorème 2.2 *(Théorème des Gendarmes)*

Soit f une fonction S'il existe deux fonctions f et g telles que $g\leq f\leq h$ sur un intervalle ouvert $]a;+\infty[$ et $\lim\limits_{+\infty} g(x)=\lim\limits_{+\infty} h(x)=l$, alors on a : $\lim\limits_{+\infty} f(x)=l$

Exemple 2.6 *Calcule* $\lim\limits_{0} x^2 cos\frac{1}{x}$

Propriété 2.16

1. La limite en l'infini d'une fonction polynôme est égale à la limite en l'infini de son monôme du plus haut degré

   Exemple 2.7 *Calcule* $\lim\limits_{0} -3x^3+3x^2+2$

2. La limite en l'infini d'une fonction rationnelle est égale à la limite en l'infini du quotient des monômes du plus haut degré du numérateur et du dénominateur

   Exemple 2.8 *Calcule* $\lim\limits_{0} \frac{-3x^3+3x^2+2}{2x^4+3x^2-1}$

Propriété 2.17 *(Limites et inégalités)*

Soient f et h deux fonctions numériques de variable réelle définies dans un voisinage V de a

1. On suppose que $\forall x\in V; f(x)\leq h(x)$; sur l'intervalle $]a;+\infty[$ si $\lim\limits_{a} f(x)=l$ et $\lim\limits_{a} h(x)=l'$ alors $l\leq l'$
2. On suppose que $\forall x\in V; h(x)\leq f(x)\leq g(x)$ sur l'intervalle $]a;+\infty[$; si $\lim\limits_{a} h(x)=+\infty$ alors $\lim\limits_{a} f(x)=+\infty$
3. On suppose que $\forall x\in V; h(x)\leq f(x)$; si $\lim\limits_{a} f(x)=-\infty$ alors $\lim\limits_{a} h(x)=-\infty$

Propriété 2.18 *(Limite des fonctions trigonométriques)*

$\lim\limits_{0}\frac{sinx}{x}=1$

$\lim\limits_{0}\frac{1-cosx}{x}=0$

$\lim\limits_{0}\frac{1-cosx}{x^2}=\frac{1}{2}$

$\lim\limits_{0}\frac{tanx}{x}=1$

Application 2.19

1. Calcule $\lim\limits_{0}\frac{sin2x}{x}; \lim\limits_{0}\frac{tan2x}{sin3x}$
2. Soit f la fonction numérique définie par

   $$f(x)=\begin{cases} 2x^2-x+5 & \text{si} \quad x>2 \\ 3x+1 & \text{si} \quad x<2\end{cases}$$

   (a) Détermine D_f
   (b) Calcule la limite de f à, gauche et à droite de 2
   (c) La fonction admet-elle une limite en 2
3. On rappelle que $-1\leq cosx\leq 1$ et $-1\leq sinx\leq 1$
   (a) i. Démontre que $\forall x\in\mathbb{R}, \frac{x^2-1}{x^2+1}\leq\frac{x^2+sinx}{x^2+1}\leq 1$
   ii. Calcule $\lim\limits_{+\infty}\frac{x^2+sinx}{x^2+1}$
   (b) i. Démontre que $\forall x\in\mathbb{R}, x-1\leq x+sinx$
   ii. Calcule $\lim\limits_{+\infty}(x+sinx)$

Stratégie : TI :... min TG :...min TC : ... min

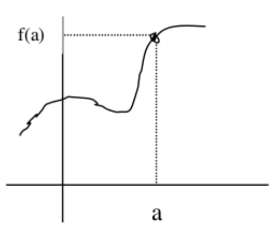
Éléments de réponses 2.19

2.5.2 Continuités

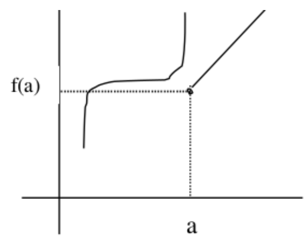
Définition 2.17 *(de la continuité en un point)*

Une fonction dite est continue en a lorsqu'elle est définie en a et admet une limite en a.

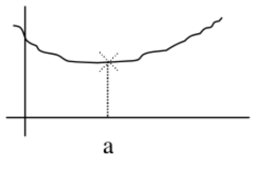
Consigne 2.25 *(Reconnaissance graphique de fonction continue en un point)*



f est continue en a



f est définie en a mais f est non continue en a



f est non continue en a parce que non définie en a.

Stratégie : TI :... min TG :...min TC : ... min

Résolution 2.25

Propriété 2.19

Nous démontrons et nous admettons que :

1. Les fonctions élémentaires : $x \longmapsto c; x \longmapsto ax(a \in \mathbb{R}); x \longmapsto x^2; x \longmapsto x^3; x \longmapsto \sqrt{x}; x \longmapsto \frac{1}{x}; x \longmapsto cosx; x \longmapsto sinx$ sont continues sur leur ensemble de définition
2. La somme, le produit ou le quotient de deux quelconques des fonctions élémentaires définies ci-dessus est continue en tout point de son ensemble de définition
3. Soit a un nombre réel, K un intervalle ouvert contenant a, f une fonction définie sur $K - a$ et non définie en a. Si g est une fonction continue en a qui coïncide avec f sur $K - \{a\}$, alors f admet une limite en a égale à $g(a)$

Propriété 2.20

Soit f, g des fonctions; a, l, l' des nombres réels; si $\lim_a f(x) = l; \lim_a g(x) = l'$ alors $\lim_a (f+g) = l + l'; \lim_a (f \cdot g) = l \cdot l'$; si de plus $l' \neq 0$ alors $\lim_a \frac{f}{g} = \frac{l}{l'}$

Propriété 2.21

Nous démontrons que

1. La somme de deux fonctions continues en a est une fonction continue en a;
2. Le produit de deux fonctions continues en a est une fonction continue en a;
3. Le quotient d'une fonction f continue en a par une fonction g continue en a telle que $g(a)$ soit différent de zéro, est une fonction continue en a;

Définition 2.18 *(continuité à droite et à gauche)*

Soit f une fonction numérique de la variable réelle définie sur un intervalle I contenant a

1. f est dite continue à gauche en a si et seulement si $\lim_{a^-} f(x) = f(a)$
2. f est dite continue à droite en a si et seulement si $\lim_{a^+} f(x) = f(a)$
3. f est dite continue en a si et seulement si $\lim_{a^-} f(x) = \lim_{a^+} f(x) = f(a)$

Consigne 2.26 *(Continuité de la fonction valeur absolue)*

Étudier la continuité de la fonction $x \longmapsto |x|$ (TU distingueras les cas$x = 0; x > 0; x < 0$)
Stratégie : TI :... min TG :...min TC : ... min

Résolution 2.26

Application 2.20

1. Étudier la continuité de f au point 4 et 8

$$f(x) = \begin{cases} 2x+5 & \text{si} \quad x \in]-\infty; 4] \\ x^2 - 4 & \text{si} \quad x \in]4; 8] \\ x - 5 & \text{si} \quad x \in]8; +\infty[\end{cases}$$

2. Détermine les réels a et b pour que la fonction g soit continue en $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$

$$g(x) = \begin{cases} -2sinx & \text{si} x \leq -\frac{\pi}{2} \\ asinx + b & \text{si} x \in -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ cosx & \text{si} x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Stratégie : TI :... min TG :...min TC : ... min

Éléments de réponses 2.20

Propriété 2.22

La fonction valeur absolue est continue en tout point de $\mathbb{R}$

Définition 2.19 *(Continuité sur un intervalle)*

1. On dit que f est continue sur un intervalle ouvert $]a; b[$ si elle est continue en tout point de cet intervalle
2. Un e fonction f est continue sur un intervalle $[a; b]$ si elle est continue sur l'intervalle ouvert $]a; b[$; continue à droite en a et à gauche en b
3. Une fonction f est continue sur intervalle $[a; b[$ si elle est continue sur l'intervalle ouvert $]a; b[$ et continue à droite au point a
4. Une fonction f est continue sur l'intervalle $]a; b]$ elle est continue sur l'intervalle ouvert $]a; b[$ et continue à gauche au point b

2.5.3 Extension de la notion de limite

Consigne 2.27 *(Limite infini en un point)*

Soit $f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$ une fonction de variable réelle

1. Donne le domaine de définition de f
2. Quelle est le comportement de $f(x)$ lorsque x prend des valeurs de plus en plus proche de 3

Stratégie : TI :... min TG :...min TC : ... min

Résolution 2.27

1. $D_f = \mathbb{R} - \{3\}$
2. f prend des valeur de plus en plus grand

Retenons 2.9

On dit que f tend vers plus infini lorsque x tend vers 3 et on note $\lim_3 f(x) = +\infty$

Propriété 2.23

Soit x_0 un nombre réel et n un entier naturel non nul

1. $\lim\limits_{x_0^+} \dfrac{1}{(x-x_0)^n} = +\infty$

2. $\lim\limits_{x_0^-} \dfrac{1}{(x-x_0)^n} = \begin{cases} +\infty & \text{si n est pair} \\ -\infty & \text{si n est impair} \end{cases}$

Propriété 2.24

Soit x_0 et l des nombres réels; f et g des fonctions telles que $\lim\limits_{x_0} g(x) = l (l \neq 0)$

1. Si $\lim\limits_{x_0} f(x) = +\infty$ et $l > 0$ alors $\lim\limits_{x_0} f(x) \times g(x) = +\infty$
2. Si $\lim\limits_{x_0} f(x) = +\infty$ et $l < 0$ alors $\lim\limits_{x_0} f(x) \times g(x) = -\infty$
3. Si $\lim\limits_{x_0} f(x) = -\infty$ et $l > 0$ alors $\lim\limits_{x_0} f(x) \times g(x) = -\infty$
4. Si $\lim\limits_{x_0} f(x) = -\infty$ et $l < 0$ alors $\lim\limits_{x_0} f(x) \times g(x) = +\infty$

Application 2.21

Calcule la limite de f et g à droite et à gauche en x_0

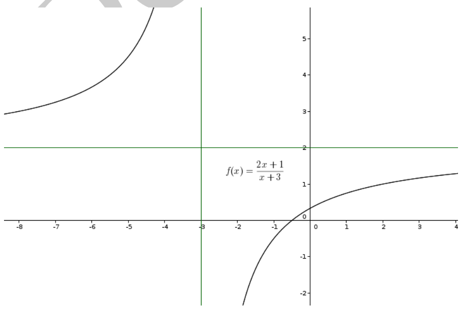
1. $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+5}$; $x_0 = -5$
2. $g(x) = \dfrac{x^2-5x+6}{x^2+3x-4}$; $x_0 = 1$

Stratégie : TI :... min TG :...min TC : ... min

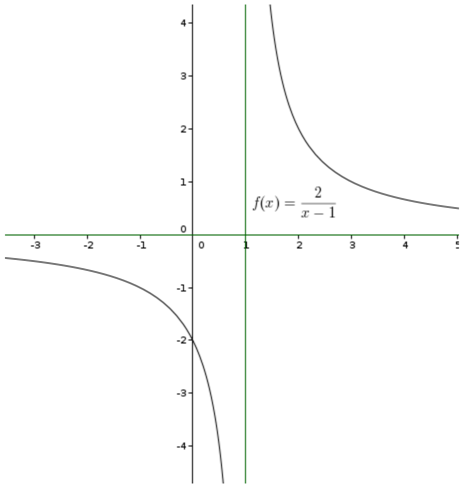
Éléments de réponses 2.21

2.5.4 Interprétation graphique des limites

1. Soit b un nombre réel et f une fonction numérique; si $\lim\limits_{+\infty} f(x) = b$ (respectivement $\lim\limits_{-\infty} f(x) = b$) alors la droite d'équation $y = b$ est une asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction f au voisinage de $+\infty$ (respectivement au voisinage de $-\infty$)



2. Soit a un nombre réel et f une fonction numérique; si $\lim\limits_{a} f(x) = +\infty$ (respectivement $\lim\limits_{a} f(x) = -\infty$) alors la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction f



3. Soit $a; b \in \mathbb{R}$; si $\lim\limits_{\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$ alors la droite d'équation $y = ax+b$ est asymptote oblique à $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de ∞

4. Si $\begin{cases} \lim\limits_{\infty} f(x) = \infty \\ \lim\limits_{\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \end{cases}$
Alors $(\mathscr{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des abscisses au voisinage de ∞

5. Si $\begin{cases} \lim\limits_{\infty} f(x) = \infty \\ \lim\limits_{\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty \end{cases}$
Alors $(\mathscr{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées au voisinage de ∞

6. Si $\begin{cases} \lim\limits_{x\to\infty} f(x) & = \infty \\ \lim\limits_{\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} & = a \\ \lim\limits_{\to\infty} (f(x) - ax) & = b \end{cases}$
Alors la droite d'équation $y = ax+b$ est une asymptote oblique à $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de ∞

2.6 Dérivation

Activité 2.6

Codjo un élève de la classe après le cour sur les limites se propose de calculer $\lim\limits_{a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ où f est la fonction définie

par $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2 - 3x + 2$ et a un réel

Consigne 2.28

Calcule $\lim\limits_{a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

Stratégie : TI :... min TG :...min TC : ... min

Résolution 2.28

$$\lim\limits_{a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = 2a-3$$

Définition 2.20

Soit f une fonction d'ensemble de définition D_f. On appelle fonction taux de variation de f en a , la fonction notée T_a et définie sur $D_f - \{a\}$ par : $T_a = \dfrac{f(x) - f(a)}{x-a}$

Définition 2.21

Soit f une fonction numérique de la variable réelle définie sur un intervalle ouvert I contenant a

1. On dit que la fonction f est dérivable en a lorsque le taux de variation de f en a admet une limite en a C'est à dire $\lim_{a} T_a(x) = l ; l \in \mathbb{R}$. Cette limite est appelé le nombre dérivé de f en a On le note $f'(a)$
2. La fonction f est dite dérivable à gauche en a si et seulement si $\lim_{a^-} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est un réel Dans ce cas le réel $\lim_{a^-} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ noté $f'_g(a)$est appelé le nombre dérivé de f à gauche en a
3. La fonction f est dite dérivable à droite en a si et seulement si $\lim_{a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est un réel Dans ce cas le réel $\lim_{a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ noté $f'_d(a)$ est appelé le nombre dérivé de f à droite en a

Application 2.22

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - x + 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \\ 2x^2 + 1 & \text{si} \quad x < 1 \end{cases}$$

1. Étudie la dérivabilité de f en 1
2. Précise le nombre dérivée de f à gauche et à droite en 1.

Stratégie : TI :... min TG :...min TC : ... min

Éléments de réponses 2.22

Définition 2.22

1. Une fonction f est dérivable sur un intervalle ouvert I si et seulement si elle est dérivable en tout point de I Dans ce cas la fonction dérivée de f sur I notée f' est définie par $\begin{array}{rl} f' : I & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto f'(x) \end{array}$ où $f'(x)$ est la dérivée de la fonction f en x
2. Dérivée de quelques fonctions usuelles

f	f'	D'
$x \mapsto k, (k \in \mathbb{R})$	$x \mapsto 0$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x$	$x \mapsto 1$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}^*$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^*{}_+$
$x \mapsto sinx$	$x \mapsto cosx$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto cosx$	$x \mapsto -sinx$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto tanx$	$x \mapsto 1 + tan^2 x$	E

Avec D' le domaine de dérivabilité et $E = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

2.6.1 Opérations sur les fonctions dérivables

1. Soit f et g deux fonctions numériques de variable réelles définies sur un intervalle ouvert contenant a
2. Si f et g sont dérivables en a alors $f + g$; $f \times g$ et $\alpha f (\alpha \in \mathbb{R})$ sont dérivable en a alors on a :
3. $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
4. $(f \times g)'(a) = f'(a) \times g(a) + g'(a) f(a)$
5. $(\alpha f)'(a) = \alpha f'(a)$
6. Si f et g sont dérivable en a et $g'(a) \neq 0$ alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en a et on a : $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - g'(a)f(a)}{[g(a)]^2}$
7. Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I alors pour tout entier naturel n, $(n \geq 2)$; u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$
8. Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I alors $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
9. Soit α et β deux réels avec $\alpha \neq 0$ Si u est une fonction dérivable en $\alpha a + \beta$alors la fonction $f : x \longmapsto u(\alpha x + \beta)$ est dérivable en a et $f'(a) = \alpha u'(\alpha a + \beta)$

Fonction	Dérivée
f	f'
$u + v$	$u' + v'$
$ku, k \in \mathbb{R}$	$u' + v'$
uv	$u'v + v'u$
$\dfrac{1}{v}$	$-\dfrac{v'}{v^2}$
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v - v'u}{v^2}$
$u^n, n > 1$	$nu'u^{n-1}$
$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
$x \mapsto u(ax+b)$	$x \mapsto au'(ax+b)$

Application 2.23

On considère les fonctions suivantes

1. $\begin{array}{rl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto 3x^2 - 2x - 5 \end{array}$
2. $\begin{array}{rl} g : \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \sqrt{3x^2 - 1} \end{array}$
3. $\begin{array}{rl} h : \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \dfrac{x+1}{x-2} \end{array}$

Détermine $f'(x)$; $g'(x)$ et $h'(x)$

Stratégie : TI :... min TG :...min TC : ... min

Éléments de réponses 2.23

2.6.2 Application de la dérivation

Sens de variation d'une fonction

Théorème 2.3

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I

1. Si la fonction dérivée f' de f est nulle sur I ($\forall x \in I; f'(x) = 0$) alors la fonction f est constant sur I
2. Si la fonction dérivée f' de f est strictement positive sur I sauf en un nombre fini de point où elle s'annule ($\forall x \in I, f'(x) \geq 0$) alors f est strictement croissante sur I
3. Si la fonction dérivée f' de f est strictement négative sur I sauf en un nombre fini de point où elle s'annule ($\forall x \in I, f'(x) \leq 0$)alors f est strictement décroissante sur I

Remarque 2.5

1. Pour étudier le sens de variation d'une fonction, il suffit d'étudier le signe de sa dérivée
2. Une fonction est dite monotone sur un intervalle I si elle est soit strictement croissante ou strictement décroissante

2.6.3 Interprétation géométrique du nombre dérivée

Soit f une fonction numérique de la variable réelle x, définie sur un intervalle ouvert I contenant a On désigne par $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(O; I; J)$

1. Si f est dérivable en a alors $(\mathscr{C}_f)$ admet au point d'abscisse a une tangente (T) de coefficient directeur $f'(a)$ on a :
   $(T): f'(a)(x-a) + f(a)$
2. Si f est dérivable à gauche en a sans être dérivable en a alors $(\mathscr{C}_f)$ admet à gauche au point $M(a; f(a))$ une demi-tangente (T_g) définie par les relations
   $\begin{cases} y & = f'_g(a)(x-a) + f(a) \\ x & \leq a \end{cases}$
3. Si f est dérivable à droite en a (respectivement à gauche en a) alors $(\mathscr{C}_f)$ admet à droite au point $M(a; f(a))$ une demi-tangente (T_d) définie par les relations
   $\begin{cases} y & = f'_d(a)(x-a) + f(a) \\ x & \geq a \end{cases}$
   respectivement
   $\begin{cases} y & = f'_g(a)(x-a) + f(a) \\ x & \leq a \end{cases}$

Remarque 2.6

1. Lorsque f n'est pas dérivable en a mais admet au point $A(a; f(a))$ deux demi-tangente non parallèles, on dit que A est un point anguleux de la courbe $\mathscr{C}$
2. **Illustrations des demi-tangente verticale**
   - $\lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty \quad ; \quad (T_g)\begin{cases} x & = a \\ y & \geq f(a) \end{cases}$
   - $\lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty \quad ; \quad (T_g)\begin{cases} x & = a \\ y & \leq f(a) \end{cases}$
   - $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty \quad ; \quad (T_d)\begin{cases} x & = a \\ y & \leq f(a) \end{cases}$
   - $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty \quad ; \quad (T_d)\begin{cases} x & = a \\ y & \geq f(a) \end{cases}$
   - $\lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty \quad ; \quad \lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$
     $\mathscr{C}$ admet en A une demi-tangente vertical d'équation $x = a$
   - $\lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$
     $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$
     $\mathscr{C}$ admet en A une demi-tangente vertical définie par : $\begin{cases} x & = a \\ y & \leq f(a) \end{cases}$ On dit que A est un point de rebroussement de $(\mathscr{C})$

2.6.4 Extremum relatifs d'une fonction

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et x_0 un élément de I
$f(x_0)$ est un extremum relatif (ou extremum local) de la fonction f si et seulement si f' s'annule en x_0 en changent de signe Dans un tel cas l'équation de la tangente à la courbe de f au point $M_0(x_0; f(x_0))$ est parallèle à l'axe des abscisses : c'est u,ne tangente horizontale Un extremum relatif est soit un maximum ou un minimum

Tableau de variation d'une fonction

C'est un tableau qui comporte les informations suivantes :

1. Domaine de définition
2. Signe de la dérivée
3. Les limites aux bornes du domaine de définition
4. Les extremum relatifs

Application 2.24

Soit la fonction $f(x) = x^3 - 3x + 1$

1. (a) Étudie le sens de variation de f
   (b) Dresse le tableau de variation de f
   (c) Précise s'il y a lieu les extremum relatifs de f
2. Même question pour la fonction définie par $g(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$

Stratégie : TI :... min TG :...min TC : ... min

Éléments de réponses 2.24

2.6.5 Quelques notions essentielles pour l'étude d'une fonction numérique

Soit f une fonction définie sur son ensemble de définition D_f et $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

Fonctions paires

1. f est une fonction pair si et seulement si $\forall x \in D_f, (-x) \in D_f$ et $f(x) = -f(x)$
2. Dans un repère orthonormé la courbe représentative d'une fonction pair a un axe de symétrie qui est l'axe des ordonnées

Fonctions impaires

1. f est une fonction impair si et seulement si $\forall x \in D_f, (-x) \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$
2. L'origine du repère est un centre de symétrie de la courbe représentative de la fonction impair

Application 2.25

Étudie la parité des fonctions ci-dessous
$f(x) = x^2 - 1; g(x) = \dfrac{1}{x}$
Stratégie : TI :... min TG :...min TC : ... min

Éléments de réponses 2.25

Remarque 2.7

Si une fonction est paire ou impaire, on peut l'étudier sur $D_f \cap [0;+\infty[; D_f \cap]-\infty;0]$

2.6.6 Axe de symétrie, centre de symétrie d'une courbe $(\mathscr{C}_f)$

Axe de symétrie

On dit que la droite d'équation $x = a$ est un axe de symétrie à $(\mathscr{C}_f)$ si et seulement si $\forall x \in \mathscr{D}_f; (2a - x) \in \mathscr{D}_f$ et $f(2a - x) = f(x)$

Centre de symétrie

On dit que le point $\Omega(a;b)$ est un centre de symétrie pour $(\mathscr{C}_f)$ si et seulement si $\forall x \in \mathscr{D}_f; (2a - x) \in \mathscr{D}_f$ et $f(2a - x) + f(x) = 2b$

Application 2.26

Démontre que :

1. la droite d'équation $x = -3$ est un axe de symétrie pour $(\mathscr{C}_f)$
2. le point $A(1;2)$ est un centre de symétrie pour $(\mathscr{C}_f)$

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 + 6x + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{2x+3}{x-1} \end{aligned}$$

Stratégie : TI :... min TG :...min TC : ... min

Éléments de réponses 2.26

Périodicité

Soit T un nombre réel On dit que f est périodique de période T si et seulement si $\forall x \in \mathscr{D}_f; (x + T) \in \mathscr{D}_f$ et $f(x + T) = f(x)$

Remarque 2.8

1. Si T est une période de f, tout autre période est de la forme $kT, (k \in \mathbb{Z})$
2. La période d'une fonction est le pus petit strictement positif de toutes les périodes
3. Si une fonction est périodique de période T, on peut l'étudier sur $\mathscr{D}_f \cap [0;T]$ ou $\mathscr{D}_f \cap [-T;0]$ ou $\mathscr{D}_f \cap \left[-\dfrac{T}{2}; \dfrac{T}{2}\right]$
4. Les fonctions $x \longmapsto cos(ax+b)$ et $x \longmapsto sin(ax+b) (a \neq 0)$ sont périodiques de périodes $T = \dfrac{2\pi}{|a|}$
5. La fonction $x \longmapsto tan(ax + b)(a \neq 0)$ est périodique de période $T = \dfrac{\pi}{|a|}$

Application 2.27

Soit $f(x) = cos(2x + 3)\cdot$ Démontre que f est périodique de période $T = \pi$.
Stratégie : TI :... min TG :...min TC : ... min

Éléments de réponses 2.27

2.7 Suites numériques

2.7.1 Généralités sur les suites

Définition 2.23 *(notation et représentation d'une suite)*

On appelle suite numérique, toute fonction définie de $\mathbb{N}$ (ou d'une partie de $\mathbb{N}$) vers $\mathbb{R}$.

Exemple 2.9 $f : x \in \mathbb{N} \mapsto 2x^2 - 1; g : x \in \mathbb{N} \mapsto \dfrac{2x+1}{x+2}$

au lieu de x, la variable est souvent notée n. Ainsi, nous poserons u_n au lieu de $f(x)$. Plus simplement, une suite numérique est souvent notée $(u_n)_n; (v_n)_n$ ou $(w_n)_n$. $(u_n)_n$ est appelé terme d'indice n de la suite $(u_n)_n$. Pour n quelconque, u_n est le terme générale de la suite $(u_n)_n$.

Exemple 2.10 *Soit $(w_n)_n$ la suite définie par $w_n = 2n^2 - 1$.*

1. *Calcule les 3 premiers termes de la suite de terme général $(w_n)_n$.*
2. *Représente sur un axe les premiers termes de la suite $(w_n)_n$*

Une suite numérique peut être définie, soit par une formule explicite, soit par une formule de récurrence. Pour une suite définie par une formule de récurrence, le calcul du terme u_{n+1} dépend du terme u_n.

Exemple 2.11 *Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_n = \dfrac{2n+1}{n+2}$ et $(v_n)_n$ la suite définie par* $\begin{cases} v_0 & = 2 \\ v_{n+1} & = \dfrac{1}{2}v_n + 4 \end{cases}$.

1. *Calcule les 4 premiers termes de la suite de terme général $(v_n)_n$.*
2. *Représente dans un plan les premiers termes de la suite $(v_n)_n$.*

2.7.2 Suite majorées, suites minorées, suites bornées

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{E}}$ une suite numérique.

1. (u_n) est majorée s'il existe un nombre réel M tel que
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M \tag{2.36}$$
2. (u_n) est minorée s'il existe un nombre réel m tel que
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq m \tag{2.37}$$
3. (u_n) est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

Application 2.28

1. Démontre que la suite (u_n) est majorée par 6.
$(u_n)\begin{cases} u_0 & = -1 \\ U_{n+1} & = \dfrac{1}{2}u_n + 3; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$
2. En utilisant le raisonnement par récurrence, démontre que pour tout entier naturel n non nul, on a
   (a) $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$
   (b) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
   (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(n-k) = \dfrac{n(n-1)(n+1)}{6}$

Stratégie : TI :... min TG :...min TC : ... min

Éléments de réponses 2.28

2.7.3 Sens de variation d'une suite numérique

Pour étudier le sens de variation d'une suite définie par une formule explicite, on peut utiliser l'une des méthodes suivantes :

1. Méthode algébrique : étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$
   (a) Si $u_{n+1} - u_n \geq 0$ alors la suite (u_n) est croissante.
   (b) Si $u_{n+1} - u_n \leq 0$ alors la suite (u_n) est décroissante.
2. Méthode fonctionnelle
Lorsque la fonction $u_n = f(n)$. Étudier le sens de variation de la fonction f.
   (a) Si f est croissante sur $[n_0; +\infty[$ alors la suite (u_n) est croissante à partir du rang n_0.
   (b) Si f est décroissante sur $[n_0; +\infty[$ alors la suite (u_n) est décroissante à partir du rang n_0.

Application 2.29

Soit les suites $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $U_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ et $\begin{cases} V_0 & = -1 \\ V_{n+1} & = V_n{}^2 + v_n + 1; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$. Étudie le sens de variation de chacune des suites (U_n) et (V_n).

Stratégie : TI :... min TG :...min TC : ... min

Éléments de réponses 2.29

2.7.4 Suites arithmétiques

Définition 2.24

Soit $(u_n)_{n\in E}$ une suite numérique
(u_n) est une suite arithmétique s'il existe un nombre réel r tel que, pour tout n élément de E, on a : $u_{n+1} = u_n + r\cdot$ Le nombre r est appelé raison de la suite (u_n)

Exemple 2.12 $\begin{cases} u_0 & = 2 \\ u_{n+1} & = u_n - 3 \end{cases}$
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi définie est une suite arithmétique de raison -3 et de premier terme 2

Propriété 2.25

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de premier terme u_0 et raison $r\cdot$ Pour tout entier naturel n, on a : $u_n = u_0 + nr$
2. Soit u_n une suite arithmétique de premier terme u_0 on a pour tous nombres entier naturels n et k, $u_n = u_k + (n-k)r$
3. La somme S de n termes consécutifs d'une suite arithmétique (u_n) est égale au produit par n de la demi-somme des termes extrêmes
$$\begin{aligned} S &= u_a + u_{a+1} + u_{a+2} + \cdots + u_n \\ &= \frac{[(n-a)+1] \times [u_n + u_a]}{2} \end{aligned}$$

2.7.5 Suites géométriques

Définition 2.25

Soit $(u_n)_{n\in E}$ une suite numérique $(u_n)_{n\in E}$ est une suite géométrique s'il existe un nombre réels q tel que, pour tout n élément de E , on a : $u_{n+1} = qu_n$ Le nombre q est appelé raison de la suite (u_n)

Exemple 2.13 $\begin{cases} v_0 & = \dfrac{5}{4} \\ \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} & = -2v_n \end{cases}$
La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi définie est une suite géométrique de raison -2 et de premier terme $\dfrac{5}{4}$

Propriété 2.26

1. Soit (v_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison $q\cdot$ Pour tout nombre entier naturel n, on a : $u_n = u_0 q^n$
2. Soit (v_n) une suite géométrique de raison q on a : pour tous nombres entier naturel n et k; $v_n = v_k \times q^{n-k}$
3. Soit S la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de premier terme a et de raison$q$

(a) Si $q \neq 1$ alors $S = a\dfrac{(1-q^n)}{1-q}$

(b) Si $q = 1$ alors $S = n \times a$

Propriété 2.27 *(caractéristique)*

1. a; b et c sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique si et seulement si $b = \dfrac{a+c}{2}$
2. a; b et c sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique si et seulement si $b^2 = a \times c$.

Application 2.30

On considère les suites $v_n = 2n-1; n \in \mathbb{N}^*$ et $w_n = 3 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n; n \in \mathbb{N}$.

1. Démontre que v_n est une suite numérique et que w_n est une suite géométrique (tu préciseras la raison et le premier terme).
2. Calcule la somme des 20 premiers termes de chacune des suites.

Stratégie : TI :... min TG :...min TC : ... min

Éléments de réponses 2.30

Propriété 2.28

1. Sens de variation d'une suite arithmétique
   Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
   (a) Si $r > 0$ alors la suite (u_n) est croissante.
   (b) Si $r < 0$ alors la suite (u_n) est décroissante.
2. Sens de variation d'une suite géométrique.
   Soit (v_n) une suite géométrique de raison q.
   (a) Si $q > 1$ alors la suite (v_n) est croissante.
   (b) Si $q < 1$ alors la suite (v_n) est décroissante.

2.7.6 Raisonnement par récurrence

Le raisonnement par récurrence est un procédé qui permet de démontrer qu'une proposition $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à un entier naturel n_0 donné. Il se fait en deux étapes :

1. On démontre que la proposition $P(n)$ est vraie pour le premier rang n_0 de n.
2. On suppose que pour tout entier naturel $k \geq n_0$, $P(k)$ est vraie et on démontre que $P(k+1)$ est vraie puis on conclure.

2.7.7 Convergence et divergence d'une suite numérique

Définition 2.26

1. Une suite (u_n) est convergente si elle a une limite finie. (c'est à dire $\lim\limits_{+\infty} u_n = l \in \mathbb{R}$)
2. Une suite est divergente si elle n'est pas convergente.

Propriété 2.29

Soit l un nombre réel, f une fonction numérique , (u_n) la suite définie par $(u_n) = f(n)$.

1. Si $\lim\limits_{+\infty} f = l$ alors (u_n) converge vers l.
2. Si $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ alors (u_n) converge vers.

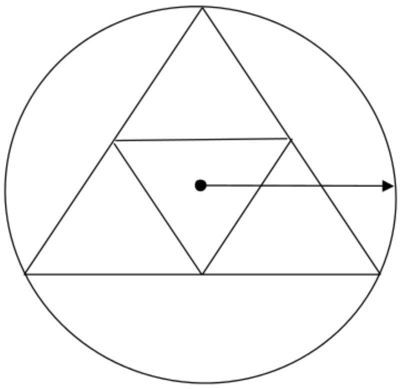
Théorème 2.4 *(Limite de la suite géométrique (q^n) ; $q \in \mathbb{R}^*$)*

Soit $q$un nombre réel strictement positif.

1. Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$
2. Si $q = 1$ alors q^n est constante et $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$
3. Si $-1 \leq q \leq 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$
4. Si $q \leq -1$ alors (q^n) n'a pas de limite.

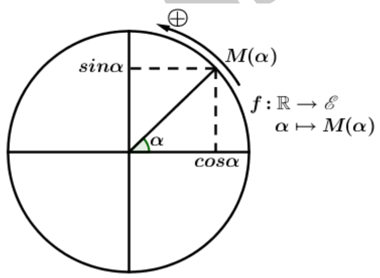
LIEUX GÉOMÉTRIQUES DANS LE PLAN

Situation de départ : Texte :La sirène du lycée
C'est la rentrée. Les murs de façade du lycée ont été repeints. Des objets d?embellissement qui suscitent la curiosité des élèves ont été placés à divers endroits de l?établissement. L?un de ces objets a retenu l?attention de Zoé, élève en classe de 1 ère . Cet objet est un disque sur lequel est fixée une plaque transparente ayant la forme d?un triangle équilatéral, inscrit dans sa bordure. Au centre du disque est fixé une aiguille de longueur égale au rayon du disque. Cette aiguille est accolée à une autre plaque triangulaire de même nature dont les sommets coïncident avec les milieux des cotés de la première plaque. Un bouton électrique fait tourner l?aiguille dans le plan du disque. Celle-ci entraîne dans sa course la petite plaque triangulaire et déclenche aussitôt la sirène du lycée. Voici une représentation de la position de repos de l?aiguille :



3.1 Angles orientés et Trigonométrie

3.1.1 Congruence modulo $2pi$ dans $\mathbb{R}$



A tout nombre réel α correspond sur le cercle trigonométrie un point $M(cos\alpha; sin\alpha)$ bien déterminé. On définit ainsi une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathscr{E}$. Mais à un point $M(x; y)$ donné sur le cercle trigonométrie $(\mathscr{C})$, il existe une infinité de réel α tel que $x = cos\alpha$ et $y = sin\alpha$. L'application f est donc une surjection de $\mathbb{R}$ sur le cercle trigonométrique. Elle est appelé surjection canonique. Si α_0 est l'un des réels α, on a une infinité d'arc déterminé en M qui diffère de α_0 d'un nombre exact de tour (1 tour = $2\pi rad$. Ces arcs sont données par la formule générale $\alpha = \alpha_0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. On dit que α et α_0 sont congrus de module 2π et on écrit $\alpha \equiv \alpha_0[2\pi]$.

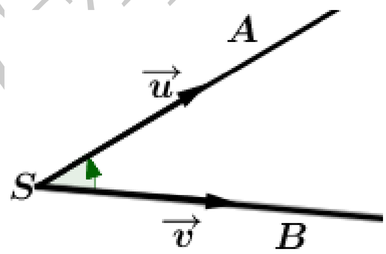
Définition 3.1

Deux nombres réels x et y sont congrus de module 2π s'il diffère d'un multiple entier de 2π.

$$x \equiv y[2\pi] \Leftrightarrow x = y + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \tag{3.1}$$

3.1.2 Représentation d'un angle orienté

$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs non nuls. S; A; B trois points tels que $\overrightarrow{SA} = \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{SB} = \overrightarrow{v}$. Le couple de demi-droites $[SA)$; $[SB)$ de même origine S est un représentant de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}})$. S est le sommet, $[SA)$ le côté origine et $[SB)$le côté extrémité de ce représentant.



3.1.3 Mesure principale d'un angle orienté

Définition 3.2

On appelle mesure principale d'un angle orienté α, la mesure $\alpha_0 \in]-\pi; \pi]$ tel que $\alpha = \alpha_0 + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$.

Application 3.1

Détermine la mesure principale de chacun des angles orientés suivants :

1. $\alpha = \dfrac{31}{3}\pi$
2. $\beta = -\dfrac{23}{6}\pi$

Stratégie : TI :... min TG :...min TC : ... min

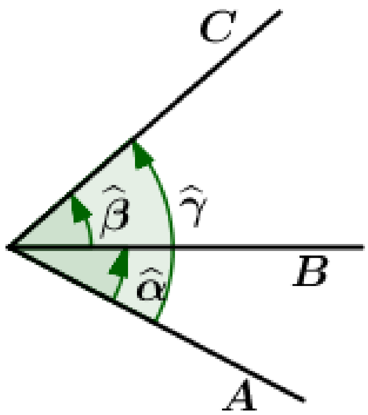
Éléments de réponses 3.1

3.1.4 Mesure d'un angle orienté

Soit $\widehat{\alpha}$ un angle orienté de mesure principale α. Tout nombre réel de la forme $\alpha + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$ est appelé mesure de l'angle orienté $\widehat{\alpha}$.

3.1.5 Somme de deux angles orientés

Soit $\widehat{\alpha}$ et $\widehat{\beta}$ deux angles orientés, $[OA);[OB)$ un représentant de $\widehat{\alpha}$; $[OB);[OC)$ un représentant de $\widehat{\beta}$. On appelle somme des angles orientés $\widehat{\alpha}$ et $\widehat{\beta}$ l'angle orienté $\widehat{\gamma}$ tel que $\widehat{\gamma} = (\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC}})$. On note $\widehat{\alpha}+\widehat{\beta}=\widehat{\gamma}$.



3.1.6 Différence de deux angles orientés

On appelle différence des angles orientés $\widehat{\alpha}$ et $\widehat{\beta}$ l'angle $\widehat{\alpha}+(-\widehat{\beta})$ où $(-\widehat{\beta})$ est l'opposé de l'angle orienté $\widehat{\beta}$.

Propriété 3.1

1. Pour tout nombre réel $x;y;z$ on a : $x \equiv y[2\pi] \Leftrightarrow x+z \equiv y+z[2\pi]$.
2. Pour tous vecteurs non nuls $\overrightarrow{u};\overrightarrow{v};\overrightarrow{w}$, on a

$$(\widehat{\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}}+\widehat{\overrightarrow{v};\overrightarrow{w}}) = (\widehat{\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}}) \quad \text{c'est la relation de Chasles} \tag{3.2}$$

3. Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls et k un nombre réel non nul. On a :
   (a) $(\widehat{\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}}) = -(\widehat{\overrightarrow{v};\overrightarrow{u}})$.
   (b) Si $k>0$ alors $(\widehat{k\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}}) = (\widehat{\overrightarrow{u};k\overrightarrow{v}}) = (\widehat{\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}})$
   (c) Si $k<0$ alors $(\widehat{k\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}}) = (\widehat{\overrightarrow{u};k\overrightarrow{v}}) = (\widehat{\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}})+\widehat{\pi}$
   (d) $(\widehat{k\overrightarrow{u};k\overrightarrow{v}}) = (\widehat{\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}})$
4. Soit $\overrightarrow{u};\overrightarrow{v};\overrightarrow{u}';\overrightarrow{v}'$ quatre vecteurs non nuls.
   $(\widehat{\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}}) = (\widehat{\overrightarrow{u}';\overrightarrow{v}'}) \Leftrightarrow (\widehat{\overrightarrow{u};\overrightarrow{u}'}) = (\widehat{\overrightarrow{v}';\overrightarrow{v}'})$

3.1.7 Fonction cosinus, sinus , tangente

Définition 3.3

Soit $(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j})$ un repère du plan. Soit $(\mathscr{C})$ le cercle trigonométrique de centre O et α un nombre réel quelconque. Si M est le point de $(\mathscr{C})$tel que α soit une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{i};\overrightarrow{OM}})$ alors :

1. l'abscisse de M est $cos\alpha$;
2. l'ordonnée de M est $sin\alpha$;
3. le réel $\dfrac{sin\alpha}{cos\alpha}(cos\alpha \neq 0)$ est appelé tangente de α et est notée $tan\alpha$.

Remarque 3.1

1. L'axe des abscisses des appelé axe des cosinus.
2. L'axe des ordonnées est appelé axes des sinus.

Propriété 3.2

1. Pour tout nombre réel x et pour tout entier relatif k on a :
   (a) $cos^2x+sin^2x=1$
   (b) $|cosx| \leq 1$ et $|sinx| \leq 1$
   (c) $cos(x+2k\pi)=cosx$ et $sin(x+2k\pi)=sinx$.

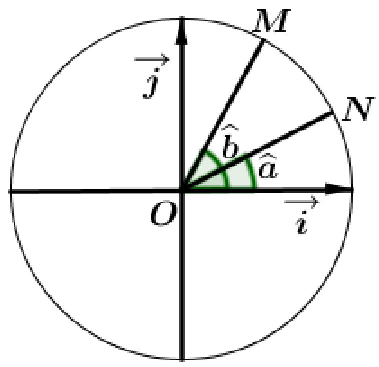
   On dit que les fonctions sinus et cosinus sont périodique de période 2π.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, cosx \neq 0$ et $\forall k \in \mathbb{Z}$ on a :
   (a) $tanx = \dfrac{sinx}{cosx} \quad et \quad \dfrac{1}{cos^2x} = 1+tan^2x$
   (b) $tan(x+k\pi) = tanx$

   On dit que la fonction tangente est périodique de période π.

3.1.8 Formule trigonométrique

Formule d'addition

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j})$. On considère le cercle trigonométrique $(\mathscr{C})$ de centre O. Soit M et N deux points de $(\mathscr{C})$ tels que $mes(\widehat{\overrightarrow{i};\overrightarrow{ON}}) = \widehat{b}$ et $mes(\widehat{\overrightarrow{i};\overrightarrow{OM}}) = \widehat{a}$



$$\begin{aligned} mes(\overrightarrow{ON};\overrightarrow{OM}) &= mes(\overrightarrow{ON};\overrightarrow{i}) + mes(\overrightarrow{i};\overrightarrow{OM}) \\ &= -mes(\overrightarrow{i};\overrightarrow{ON}) + mes(\overrightarrow{i};\overrightarrow{OM}) \\ &= -b+a \\ &= a-b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{ON}.\overrightarrow{OM} &= \|\overrightarrow{ON}\|.\|\overrightarrow{OM}\|cos(\overrightarrow{ON};\overrightarrow{OM}) \\ &= \|\overrightarrow{ON}\|.\|\overrightarrow{OM}\|cos(a-b)\text{or}\|\overrightarrow{OM}\| = \|\overrightarrow{ON}\| = 1 \\ &= cos(a-b)① \end{aligned}$$

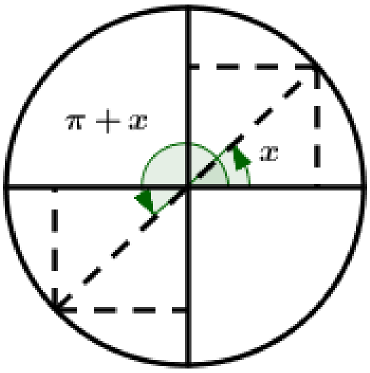
Les coordonnées du point M et N dans le repère $(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j})$ sont respectivement $M(cosa;sina)$ et $N(cosb;sinb)$ alors $\overrightarrow{ON}.\overrightarrow{OM} = cosacosb+sinasinb②$

De ① et ② on a :

$$cos(a-b) = cosacosb+sinasinb \tag{3.3}$$

Propriété 3.3

1. $\forall x \in \mathbb{R}, cos(-x) = cosx$: on dit que la fonction cosinus est paire.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, sin(-x) = -sinx$: on dit que la fonction sinus est impaire.
3. $\forall x \in \mathbb{R} - \{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\}; k \in \mathbb{Z}, tan(-x) = \frac{sin(-x)}{cos(-x)} = \frac{-sinx}{cosx} = -tanx$ ainsi $tan(-x) = -tan(x)$: on dit que la fonction tangente est impaire.



$$\forall x \in \mathbb{R}, cos(\pi + x) = -cosx \quad et \quad sin(\pi + x) = -sinx \tag{3.4}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -sinx \quad et \quad sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = cosx \tag{3.5}$$

En remplaçant dans 3.3 , x par $-x$ on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, cos(\pi - x) = -cosx \quad et \quad sin(\pi - x) = sinx \tag{3.6}$$

En remplaçant dans 3.4 , x par $-x$ on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = sinx \quad et \quad sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = cosx \tag{3.7}$$

Application 3.2

Calcule

1. $cos\left(-\frac{\pi}{4}\right); sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$
2. $cos\left(\frac{5\pi}{6}\right); sin\left(5\frac{\pi}{6}\right)$
3. $cos\left(\frac{11\pi}{6}\right); sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)$
4. $cos\left(\frac{301\pi}{3}\right); sin\left(\frac{301\pi}{3}\right)$

Stratégie : TI :... min TG :...min TC : ... min

Éléments de réponses 3.2

Propriété 3.4

1. En remplaçant b par $-b$ dans 3.5 on a :

$$cos(a + b) = cosacosb - sinasinb \tag{3.8}$$

2. En remplaçant dans 3.5 , a par $\frac{\pi}{2} - a$ on a :

$$sin(a + b) = sinacosb + cosasinb \tag{3.9}$$

3. En remplaçant dans 3.6 b par $-b$ on a :

$$sin(a - b) = sinacosb - cosasinb \tag{3.10}$$

3.1.9 Formule de duplication

1. En remplaçant dans 3.5b par a on a :

$$cos2a = cos^2 a - sin^2 a \tag{3.11}$$

$$cos2a = 2cos^2 a - 1 \quad et \quad cos2a = 1 - 2sin^2 a \tag{3.12}$$

2. En remplaçant dans 3.6b par a on a :

$$sin2a = 2sinacosa \tag{3.13}$$

3.1.10 Formule de linéarisation

De le relation $cos2a = 2cos^2 a - 1$ on a

$$cos^2 a = \frac{1 + cos2a}{2} \quad et \quad sin2a = \frac{1 - cos2a}{2} \tag{3.14}$$

3.1.11 Transformation du produit en somme

D'après les formules précédente on a :

$cos(a + b) \quad = cosacosb - sinasinb$①
$cos(a - b) \quad = cosacosb + sinasinb$②

① + ② donne

$$sinasinb = -\frac{1}{2}\left[cos(a + b) - cos(a - b)\right] \tag{3.15}$$

$sin(a + b) \quad = sinacosb + cosasinb$③
$sin(a - b) \quad = sinacosb - cosasinb$④

③ + ④ donne

$$cosaCcosb = \frac{1}{2}\left[cos(a + b) + cos(a - b)\right] \tag{3.16}$$

$$sinacosb = \frac{1}{2}\left[sin(a + b) + sin(a - b)\right] \tag{3.17}$$

$$cosasinb = \frac{1}{2}\left[sin(a + b) - sin(a - b)\right] \tag{3.18}$$

Application 3.3

Transforme en une somme $sin3xsin2x$.

Stratégie : TI :... min TG :...min TC : ... min

Éléments de réponses 3.3

3.1.12 Transformation de somme en produit

Posons $a = \dfrac{p+q}{2}$ et $b = \dfrac{p-q}{2}$. En remplaçant a et b respectivement par $\dfrac{p+q}{2}$ et $\dfrac{p-q}{2}$ dans 3.7 on a :

$$cosp + cosq = 2cos\left(\frac{p+q}{2}\right)cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \quad (3.19)$$

$$cosp - cosq = -2sin\left(\frac{p+q}{2}\right)sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \quad (3.20)$$

$$sinp + sinq = 2sin\left(\frac{p+q}{2}\right)cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \quad (3.21)$$

$$sinp - sinq = 2sin\left(\frac{p-q}{2}\right)cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \quad (3.22)$$

Propriété 3.5

1. $\forall t \in [-1;1], \exists \alpha \in]-\pi;\pi] \setminus sin\alpha = t$
2. $\forall t \in [-1;1], \exists \alpha \in]-\pi;\pi] \setminus cos\alpha = t$
3. $\forall t \in [-1;1], \exists \alpha \in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[\setminus tan\alpha = t$

3.1.13 Équation trigonométrique

Soit $a;b;c$des réels et x l'inconnue réelle.

• **Type** $cosx = a$

1^{er} **Cas** Si $|a| > 1$ alors l'équation $cosx = a$ est impossible donc l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ est

$$S_{\mathbb{R}} = \emptyset \quad (3.23)$$

2è Cas Si $a = 1$ alors $cosx = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ donc

$$S_{\mathbb{R}} = \{2k\pi; k \in \mathbb{Z}\} \quad (3.24)$$

3è Cas Si $a = -1$ alors $cosx = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ donc

$$S_{\mathbb{R}} = \{\pi + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\} \quad (3.25)$$

4è Cas Si $|a| < 1$ alors $\exists \alpha \in]-\pi;\pi] \setminus cos\alpha = a$ donc on a :

$$\begin{aligned} cosx = a \quad &\Leftrightarrow cosx = cos\alpha \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x &= \alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ ou & \\ x &= -\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{aligned}$$

$$S_{\mathbb{R}} = \{\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \quad (3.26)$$

En particulier si $a = 0$ alors on a : $cosx = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$. Donc on

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\} \quad (3.27)$$

Application 3.4

Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $cosx = \dfrac{1}{2}$.

Stratégie : TI :... min TG :...min TC : ... min

Éléments de réponses 3.4

• **Type** $sinx = b$

1^{er} **Cas** Si $|b| > 1$ alors l'équation $sinx = b$ est impossible donc l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ est

$$S_{\mathbb{R}} = \emptyset \quad (3.28)$$

2è Cas Si $b = 1$ alors $sinx = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ donc

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\} \quad (3.29)$$

3è Cas Si $b = -1$ alors $sinx = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ donc

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\} \quad (3.30)$$

4è Cas Si $|b| < 1$ alors $\exists \alpha \in]-\pi;\pi] \setminus sin\alpha = b$ donc on a :

$$\begin{aligned} sinx = b \quad &\Leftrightarrow sinx = sin\alpha \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x &= \alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ ou & \\ x &= \pi - \alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{aligned}$$

$$S_{\mathbb{R}} = \{\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \quad (3.31)$$

En particulier si $b = 0$ alors on a : $sinx = 0 \Leftrightarrow x = k\pi; k \in \mathbb{Z}$. Donc on

$$S_{\mathbb{R}} = \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\} \quad (3.32)$$

Application 3.5

Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $sinx = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Stratégie : TI :... min TG :...min TC : ... min

Éléments de réponses 3.5

• **Type** $tanx = c$

Soit $\mathscr{D}$ le domaine de définition de la fonction $x \mapsto tanx$.

$$\begin{aligned} \mathscr{D} &= \{x \in \mathbb{R}; cosx \neq 0\} \\ &= \mathbb{R} - \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$\forall c \in \mathbb{R}, \exists \alpha \in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[; tanx = c$ alors

$$\begin{aligned} tanx = c \quad &\Leftrightarrow tanx = tan\alpha \\ &\Leftrightarrow x = \alpha + k\pi; k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$S_{\mathbb{R}} = \{\alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \quad (3.33)$$

Application 3.6

Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $tanx = 1$.

Stratégie : TI :... min TG :...min TC : ... min

Éléments de réponses 3.6

• **Type** $acosx + bsinx = c$

1er Cas : Si $ab = 0$ et $(a; b) \neq (0; 0)$ alors on retrouves l'un des types 1 et 2.

2è Cas Si $ab \neq 0$ alors il faut transformer $acosx + bsinx$ donc on a

$acosx+bsinx = \sqrt{a^2+b^2}\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}cosx + \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}sinx\right)$

Puis que $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \in [-1; 1]$ et $\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \in [-1; 1]$ il existe $\alpha \in]-\pi; \pi]$ tel que $cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ou $sin\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $cos\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Ainsi on a :

$$\begin{aligned} acosx + bsinx &= \sqrt{a^2+b^2}(cos\alpha cosx + sin\alpha sinx) \\ &= \sqrt{a^2+b^2}cos(\alpha - x) \\ &= \sqrt{a^2+b^2}cos[-(x-\alpha)] \\ &= \sqrt{a^2+b^2}cos(x-\alpha) \end{aligned}$$

donc on a :

$$\begin{aligned} acosx + bsinx = c &\Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2}cos(x-\alpha) = c \\ &\Leftrightarrow cos(x-\alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{aligned}$$

- Si $|c| > \sqrt{a^2+b^2}$ alors l'équation n'admet pas de solution.
- Si $|c| \leq \sqrt{a^2+b^2}$ alors l'équation est équivalent à l'équation du type 1. ($cosx = a$)

Application 3.7

Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $3cosx - \sqrt{3}sinx = -\sqrt{6}$.

Stratégie : TI :... min TG :...min TC : ... min

Éléments de réponses 3.7

3.1.14 Inéquation trigonométrie

• **Type** $cosx \leq a$

1er cas : Si $a \geq 1$ alors l'ensemble des solutions de l'inéquation $cosx \leq a$ est

$$\mathbb{R} \tag{3.34}$$

2è Cas : Si $a < -1$ alors

$$\emptyset \tag{3.35}$$

3è Cas : Si $-1 \leq x \leq 1$.

Exemple 3.1

Résous l'inéquation (E) : $cosx \leq \dfrac{1}{2}$ sur les intervalles ci-dessous :

(a) $]-\pi; \pi]$

(b) $[0; 2\pi[$

(c) $\mathbb{R}$

•$sinx \leq b$

1er cas : Si $b \geq 1$ alors l'ensemble des solutions de l'inéquation $cosx \leq a$ est

$$\mathbb{R} \tag{3.36}$$

2è Cas : Si $ba < -1$ alors

$$\emptyset \tag{3.37}$$

3è Cas : Si $-1 \leq x \leq 1$.

Exemple 3.2

Résous l'inéquation (E') : $sinx \leq \dfrac{1}{2}$ sur les intervalles ci-dessous :

(a) $]-\pi; \pi]$

(b) $[0; 2\pi[$

(c) $\mathbb{R}$

•$tanx \leq c$

Soit $\mathscr{D}$ le domaine de définition de l'inéquation $tanx \leq c$. $\mathscr{D} = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Application 3.8

Résous l'inéquation (E'') : $tanx \leq \sqrt{3}$ sur les intervalles ci-dessous :

1. $]-\pi; \pi]$
2. $[0; 2\pi[$
3. $\mathbb{R}$

Stratégie : TI :... min TG :...min TC : ... min

Éléments de réponses 3.8

• **Autres méthodes de résolution des inéquations trigonométriques**

Les expressions de la forme $acosx + b; asinx + b(a \in \mathbb{R}; b \in \mathbb{R})$ garde un signe constant sur tout intervalle sur lequel, elle ne s'annule pas et change de signe chaque fois qu'elles s'annulent.

Exemple 3.3 *Résous dans* $[0; 2\pi[$ *l'inéquation* $2cosx - \sqrt{3}$.

• **Quelques formules sur la tangente**

$\forall x \in \mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$.

$$tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\frac{1}{tanx}$$

$$tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{tanx}$$

$$tan(\pi + x) = tanx$$

$$tan(\pi - x) = -tanx$$

• **Formules d'addition**

$$tan(x+y) = \frac{tanx + tany}{1 - tanxtany}$$

$$tan(x-y) = \frac{tanx - tany}{1 + tanxtany}$$

Conséquence

En posant $x = y$ dans le point 1 de la formule d'addition on a : $tan2x = \dfrac{2tanx}{1 - tan^2x}$

Autres formules

$$cos2x = \frac{1-tan^2x}{1+tan^2x}$$
$$sin2x = \frac{2tanx}{1+tan^2x}$$
$$tan2x = \frac{2tanx}{1-tan^2x}$$

• **Type** $acosx + bsinx \leq c$

Application 3.9

Résous dans $[0;2\pi[;]-\pi;\pi[$ et dans $\mathbb{R}$ l'inéquation .

1. $cos2x - \sqrt{3}sin2x \leq \sqrt{2}$.
2. $sinx > -\frac{1}{2}$.

Stratégie : TI :... min TG :...min TC : ... min

Éléments de réponses 3.9

3.2 Barycentre

3.2.1 Barycentre de deux

Définition 3.4

Soit A et B deux points du plan , α et β des nombres réels. Si $\alpha+\beta \neq 0$ alors il existe un points unique G du plan appelé barycentre du système des points pondérés $(A;\alpha);(B;\beta)$ tel que $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{O}$. On note $G = \{(A;\alpha);(B;\beta)\}$.

Remarque 3.2

On appelle points pondérés, tous couples $(M;\alpha)$ où M est un point du plan et α un nombre réel.

Exemple 3.4

Vérifie si les points $(A;-2);(B;\frac{7}{3});(C;8)$ sont des points pondérés.

Application 3.10

Soit $A;B;C$ trois points du plan tel que $\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{AC}$. Exprime le point C comme barycentre de deux points pondérés à préciser.

Stratégie : TI :... min TG :...min TC : ... min

Éléments de réponses 3.10

Propriété 3.6

Les trois propriétés suivantes sont équivalentes à :

1. $G = \{(A;\alpha);(B;\beta)\}$.
2. Pour tout point M du plan on a $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$
3. $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$

Propriété 3.7

Soit G le barycentre des points pondérés $(A;\alpha);(B;\beta)$ on a :

1. le point G appartient à la droite (AB).
2. si k est un nombre réel non nul alors G est aussi le barycentre des points pondérés $(A;k\alpha);(B;k\beta)$

Remarque 3.3

A et B étant deux points du plan l'ensemble des barycentres des points A et B est la droite (AB)

3.2.2 Construction du barycentre de deux points pondérés

Soit A et B deux points distincts de $11cm$.

1. Prouve qu'il existe un point G barycentre des points pondérés $(A;7)$ et $(B;4)$ d'une part et H un point barycentre des points pondérés $(A;7)$ et $(B;4)$
2. Construis les points G et H.
3. Justifie que G et H ont même milieu I.

3.2.3 Isobarycentre de deux points pondérés

On appelle isobarycentre de deux points A et B, le barycentre des points pondérés $(A;\alpha);(B;\alpha)$ avec $\alpha \neq 0$. C'est aussi le barycentre des points pondérés $(A;1);(B;1)$ ou tout simplement le milieu du segment $[AB]$.

3.2.4 Coordonnées du barycentre de deux points pondérés

Le plan étant muni du repère $(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j})$ et G désigne le barycentre de deux points pondérés $(A;\alpha)$ et $(B;\beta)$ et O un point du plan donc on a : $\alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} = (\alpha+\beta)\overrightarrow{OG} \Leftrightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OA} + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OB}$ d'où $G\left(\frac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha+\beta};\frac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha+\beta}\right)$.

3.2.5 Barycentre de trois ou quatre points pondérés

1. On appelle barycentre de trois points pondérés $(A;\alpha);(B;\alpha);(C;\gamma)$ avec $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$, l'unique point du plan qui est tel que $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{O}$. Lorsque $\alpha = \beta = \gamma \neq 0$ on dit dans ce cas que G est le l'isobarycentre des points pondérés $A;B;C$.
2. On appelle barycentre de quatre points pondérés $(A;\alpha);(B;\alpha);(C;\gamma);(D;\lambda)$ avec $\alpha+\beta+\gamma+\lambda \neq 0$, l'unique point du plan qui est tel que $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} + \lambda\overrightarrow{GD} = \overrightarrow{O}$. Lorsque $\alpha = \beta = \gamma = \lambda \neq 0$ on dit dans ce cas que G est le l'isobarycentre des points pondérés $A;B;C;D$.

Remarque 3.4

L'isobarycentre de trois points non alignés $A;B;C$ est le centre de gravité du triangle ABC.

Propriété 3.8 *(caractéristique)*

Si G est barycentre des points pondérés $(A;\alpha);(B;\alpha);(C;\gamma)$ alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{O}$
2. Pour tout point M du plan $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$.
3. $\overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB}+\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$

3.2.6 Coordonnées du barycentre de deux points pondérés

Le plan étant muni du repère $(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j})$ et G désigne le barycentre de deux points pondérés $(A;\alpha);(B;\beta);(C;\gamma)$; $G\left(\dfrac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma};\dfrac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma}\right)$.

3.2.7 Homogénéité du barycentre

Le barycentre d'un système de points pondérés ne change pas lorsqu'on multiplie tous les coefficients par un même nombre réel non nul. $G=bar\left\{(A;\alpha);(B;\beta);(C;\gamma)\right\}$ et si k est un réel différent de zero alors on a$G=bar\left\{(A;k\alpha);(B;k\beta);(C;k\gamma)\right\}$