<u>République du Niger</u>

Terminale C, E et D

REUSSIR SON BAC

3è EDITION 2019-2020

AN-NOUR SCIENCES PHYSIQUES

Ier trimestre

351 EXERCICES

Vos devoirs, examens et concours

<u>1er trimestre</u>
<u>1ère Partie PHYSIQUE</u>
<u>MECANIQUE (28h):</u>
<u>Cinématique</u>
<u>Mouvement du centre d'inertie d'un solide</u>
<u>Mouvement dans le champ de pesanteur uniforme</u>
<u>Mouvement de particules chargées dans un champ électrique uniforme</u>
<u>Oscillateurs mecaniques de translation</u>
<u>1ère Partie : CHIMIE GENERALE (16h)</u>
<u>Solutions aqueuses</u>
<u>Solutions aqueuses d'acide chlorhydrique et d'hydroxyde de sodium</u>
<u>Couples acide-base</u>
<u>Reaction acide-base</u>
<u>Solutions tampon</u>

Gloire et purete à mon Seigneur le très Grand, le Tres Haut, beni soit mes parents et mes enfants.

Tons les remerciements sont à mes frères et soeurs en islam, par Allah je vous aime.

1er trimestre (351 EXERCICES)

1ère Partie PHYSIQUE : MECANIQUE (28h)

- **Chapitre 1 :** Cinèmatique..
- **Chapitre 2 :** Mouvement du centre d'incrtie d'un solide....................................
- **Chapitre 3 :** Mouvement dans le champ de pesanteur uniforme..............................
- **Chapitre 4 :** Mouvement de particules chargèes dans un champ èlectrique uniforme...
- **Chapitre 5 :** Oscillateurs mècaniques de translation....................................

1ère Partie : CHIMIE GENERALE (16h)

- **Chapitre 1 :** Solutions aqueuses..
- **Chapitre 2 :** Solutions aqueuses d'acide chlorhydrique et d'hydroxyde de sodium...
- **Chapitre 3 :** Couples acide base..
- **Chapitre 4 :** Reaction acide-base..
- **Chapitre 5 :** Solutions tampon..

RECHERCHEZ LES AUTRES TRIMESTRES

2ème trimestre

2è Partie PHYSIQUE : VIBRATION ET PROPAGATION (23h)

2è Partie : CHIMIE ORGANIQUE (24h)

3ème trimestre

3è Partie PHYSIQUE : ELECTROMAGNETISME (25h)

4ère Partie PHYSIQUE : Oscillations ELECTRIQUES (9h)

5è Partie PHYSIQUE : RADIOACTIVITE (10h)

Exercice 1 : **Un point mobile M se déplace dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ avec un vecteur vitesse $\vec{v}_0 = 4\vec{\imath} + 8\vec{\jmath}$. A l'origine des dates, le vecteur position de M est $\overrightarrow{OM_0} = 4\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$.**

1) Déterminer les équations horaires du mouvement de M : $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$.
2) Exprimer le vecteur position $\overrightarrow{OM}$.
3) Déterminer l'équation de la trajectoire du mobile. En déduire la nature du mouvement de M dans le plan.
4) Montrer que le vecteur position de M est de la forme $\overrightarrow{OM} = t\vec{v}_0 + \overrightarrow{OM_0}$.
5) Calculer l'accélération du mobile.

Correction : M se déplace dans le repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ avec un vecteur vitesse $\vec{v}_0 = 4\vec{\imath} + 8\vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{OM_0} = 4\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$.

1) Equations horaires du mouvement de M : $\left|\begin{array}{l} x = 4t + 4 \\ y = 8t - 2 \end{array}\right.$

2) Vecteur position $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} = (4t+4)\vec{\imath} + (8t-2)\vec{\jmath}$.
3) Equation de la trajectoire du mobile : $y = 2x - 10$ alors la trajectoire de M est rectiligne.
4) Vecteur position de M est de la forme $\overrightarrow{OM} = t\vec{v}_0 + \overrightarrow{OM_0}$:
$\overrightarrow{OM} = 4t\vec{\imath} + 8t\vec{\jmath} + 4\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} = (4\vec{\imath} + 8\vec{\jmath})t + 4\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$, donc $\overrightarrow{OM} = t\vec{v}_0 + \overrightarrow{OM_0}$

5) Accélération du mobile est : $\overrightarrow{OM}\left|\begin{array}{l} x = 4t + 4 \\ y = 8t - 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\left|\begin{array}{l} \dot{x} = 4 \\ \dot{y} = 8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}\left|\begin{array}{l} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \end{array}\right.$ alors $a = 0\ m.s^{-2}$.

Exercice 2 : **Dans un repère$(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, la position du mobile est donnée à chaque instant par les équations horaires suivantes : M $\left\{\begin{array}{l} x = 2 + 3\cos\left(5\pi t - \frac{\pi}{3}\right) \\ y = -4 + 3\sin\left(5\pi t - \frac{\pi}{3}\right) \end{array}\right.$ avec x et y en m, t en s.**
1) Déterminer l'équation de la trajectoire du mobile M. Quelle est la nature du mouvement de M ?
2) Déduire la fréquence puis sa pulsation φ du mvt de M.
3) Donner les composantes et modules du :
a) Vecteur vitesse à un instant t quelconque.
b) Vecteur accélération à un instant t quelconque.

Correction : M $\left|\begin{array}{l} x = 2 + 3\cos\left(5\pi t - \frac{\pi}{3}\right) \\ y = -4 + 3\sin\left(5\pi t - \frac{\pi}{3}\right) \end{array}\right.$

1) Equation de la trajectoire du mobile M :
$\left|\begin{array}{l} x = 2 + 3\cos\left(5\pi t - \frac{\pi}{3}\right) \\ y = -4 + 3\sin\left(5\pi t - \frac{\pi}{3}\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x - 2 = 3\cos\left(5\pi t - \frac{\pi}{3}\right) \\ y + 4 = 3\sin\left(5\pi t - \frac{\pi}{3}\right) \end{array}\right.$

$\left|\begin{array}{l} (x-2)^2 = 3^2\cos^2\left(5\pi t - \frac{\pi}{3}\right) \\ (y+4)^2 = 3^2\sin^2\left(5\pi t - \frac{\pi}{3}\right) \end{array}\right.$ en faisant la somme membre à membre des équations on aura $(x-2)^2 + (y+4)^2 = 9$

avec $\cos^2\left(5\pi t - \frac{\pi}{3}\right) + \sin^2\left(5\pi t - \frac{\pi}{3}\right) = 1$. Alors M décrit un cercle de centre $I(2\ m; -4\ m)$ et de rayon $r = 3\ m$.
2) Vitesse angulaire : $5\pi = \omega$; or $\omega = 2\pi f$ alors on en déduit Fréquence : $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{5\pi}{2\pi} = 2,5\ H_z$. Pulsation $\varphi = -\frac{\pi}{3}\ rad$.
3) Donner les composantes et modules du :
a) Vecteur vitesse à un instant t quelconque : $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$

composants de $\vec{v}$ sont : $\overrightarrow{OM}\left|\begin{array}{l} x = 2 + 3\cos\left(5\pi t - \frac{\pi}{3}\right) \\ y = -4 + 3\sin\left(5\pi t - \frac{\pi}{3}\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\vec{v}\left|\begin{array}{l} \dot{x} = -3 \times 5\pi\sin\left(5\pi t - \frac{\pi}{3}\right) = -15\pi\sin\left(5\pi t - \frac{\pi}{3}\right) \\ \dot{y} = 3 \times 5\pi\cos\left(5\pi t - \frac{\pi}{3}\right) = 15\pi\cos\left(5\pi t - \frac{\pi}{3}\right) \end{array}\right.$

Module de $\vec{v}$ est $v = \|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 15\pi\ m/s$.
b) Vecteur accélération à un instant t : $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

composants de $\vec{a}$ sont : $\vec{v}\left|\begin{array}{l} v_x = -15\pi\sin\left(5\pi t - \frac{\pi}{3}\right) \\ v_y = 15\pi\cos\left(5\pi t - \frac{\pi}{3}\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\vec{a}\left|\begin{array}{l} a_x = -5 \times 15\pi\cos\left(5\pi t - \frac{\pi}{3}\right) = -75\pi\cos\left(5\pi t - \frac{\pi}{3}\right) \\ a_x = -5 \times 15\pi\sin\left(5\pi t - \frac{\pi}{3}\right) = -75\pi\sin\left(5\pi t - \frac{\pi}{3}\right) \end{array}\right.$

Module de $\vec{a}$ est $a = \|\vec{a}\| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = 75\pi\ m/s^2$.

NB : $\cos^2\left(5\pi t - \frac{\pi}{3}\right) + \sin^2\left(5\pi t - \frac{\pi}{3}\right) = 1$.

Exercice 3 : **La position d'un mobile M se déplaçant dans un plan muni d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est déterminé à chaque instant par les équations horaires suivantes :**
$\left\{\begin{array}{l} x = R\cos(\omega t + \varphi) \\ y = R\sin(\omega t + \varphi) \end{array}\right.$ **avec $R = 10\ cm$ et $\omega = 2\pi\ rad/s$.**

1) Déterminer φ sachant qu'à l'instant $t = 0$, le mobile M se trouve au point M_0 de coordonnées $\left|\begin{array}{l} x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}R \\ y_0 = \frac{1}{2}R \end{array}\right.$.
2) a) Montrer que la vitesse du mobile M est $v = R\omega$.
b) Montrer que l'accélération du mobile M est $a = R\omega^2$.
c) Déterminer l'équation de la trajectoire du mobile. En déduire la nature du mouvement.
3) a) Montrer que $\vec{a} = -\omega^2\overrightarrow{OM}$. Conclure.
b) Préciser la direction et le sens du vecteur accélération.
c) Montrer que le vecteur vitesse et vecteur accélération sont orthogonaux.
4) Le mobile part à partir du point M_0 (question calculée 1.), déduire les coordonnées des points de M_1, M_2, M_3 correspondant respectivement aux instants : $t_1 = 0,25\ s$, $t_2 = 0,5\ s$, $t_3 = \frac{2}{3}\ s$. **Donnée : $\pi^2 = 10$**

Correction : équations horaires M $\begin{cases} x = R\cos(\omega t + \varphi) \\ y = R\sin(\omega t + \varphi) \end{cases}$ avec $R = 10\ cm$ et $\omega = 2\pi\ rad/s$.

1) Déterminons φ où M se trouve au point $M_0 \begin{vmatrix} x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}R \\ y_0 = \frac{1}{2}R \end{vmatrix}$

A $t_0 = 0\ s$, on aura $M_0 \begin{vmatrix} x_0 = R\cos(\omega t_0 + \varphi) = -\frac{\sqrt{3}}{2}R \\ y_0 = R\sin(\omega t_0 + \varphi) = \frac{1}{2}R \end{vmatrix}$ ou bien $M_0 \begin{vmatrix} x_0 = R\cos(\varphi) = -\frac{\sqrt{3}}{2}R \\ y_0 = R\sin(\varphi) = \frac{1}{2}R \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \cos(\varphi) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\varphi) = \frac{1}{2} \end{vmatrix}$ alors on déduit que $\varphi = \frac{5\pi}{6}\ rad$.

2) a) Vitesse du mobile M est $v = R\omega = cste$

Les composants de $\vec{v}$ sont : $\overrightarrow{OM} \begin{vmatrix} x = R\cos(\omega t + \varphi) \\ y = R\sin(\omega t + \varphi) \end{vmatrix} \Leftrightarrow$

$\vec{v} \begin{vmatrix} \dot{x} = -\omega R\sin(\omega t + \varphi) = -R\omega\sin(\omega t + \varphi) \\ \dot{y} = \omega R\cos(\omega t + \varphi) = R\omega\cos(\omega t + \varphi) \end{vmatrix}$

Norme de $\vec{v}$ est $v = \|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = R\omega\ m/s$.

Ici $v = 10.10^{-2} \times 6{,}28 = 0{,}628\ m/s$.

b) Accélération du mobile M est $a = R\omega^2 = cste$

Les composants de $\vec{a}$ sont : $\vec{v} \begin{vmatrix} \dot{x} = -R\omega\sin(\omega t + \varphi) \\ \dot{y} = R\omega\cos(\omega t + \varphi) \end{vmatrix} \Leftrightarrow$

$\vec{a} \begin{vmatrix} \ddot{x} = -\omega^2 R\cos(\omega t + \varphi) = -R\omega^2\cos(\omega t + \varphi) \\ \ddot{y} = -\omega^2 R\sin(\omega t + \varphi) = -R\omega^2\sin(\omega t + \varphi) \end{vmatrix}$

Norme de $\vec{a}$ est $a = \|\vec{a}\| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = R\omega^2\ m/s^2$.

Ici $a = 10.10^{-2} \times 4 \times 10 = 4\ m/s$.

NB : $\cos^2(\omega t + \varphi) + \sin^2(\omega t + \varphi) = 1$.

c) Equation de la trajectoire du mobile M :

$\overrightarrow{OM} \begin{vmatrix} x = R\cos(\omega t + \varphi) \\ y = R\sin(\omega t + \varphi) \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x^2 = R^2\cos^2(\omega t + \varphi) \\ y^2 = R^2\sin^2(\omega t + \varphi) \end{vmatrix}$ en faisant la somme membre à membre des équations on aura $x^2 + y^2 = 9$ avec $\cos^2(\omega t + \varphi) + \sin^2(\omega t + \varphi) = 1$. Alors M décrit un cercle de centre $O(0;\ 0)$ et de rayon $R = 10\ cm$.

3) a) Montrer que $\vec{a} = -\omega^2\overrightarrow{OM}$.

$\vec{a} \begin{vmatrix} \ddot{x} = -\omega^2 R\cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x \\ \ddot{y} = -\omega^2 R\sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 y \end{vmatrix}$ ou bien $\vec{a} = -\omega^2 \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$

Alors $\vec{a} = -\omega^2\overrightarrow{OM}$, donc le vecteur accélération $\vec{a}$ et vecteur position $\overrightarrow{OM}$ sont colinéaires.

b) Le vecteur accélération $\vec{a}$ est centripète (vers le point O).

c) Montrer que $\vec{v} \perp \vec{a}$:

Si $\vec{v} \perp \vec{a} \Leftrightarrow \vec{v}.\vec{a} = v_x a_x + v_y a_y = 0$

$v_x a_x = +\omega R\sin(\omega t + \varphi)\, \omega^2 R\cos(\omega t + \varphi)$

$v_y a_y = \omega R\cos(\omega t + \varphi)\,(-\omega^2 R\sin(\omega t + \varphi))$

En ajoutant membre à membre on obtient :

$v_x a_x + v_y a_y = \omega^2 R^2(\cos B\sin B - \cos B\sin B) = 0$ avec $B = \omega t + \varphi = 2\pi t + \frac{5\pi}{6}$ donc le vecteur vitesse et vecteur accélération sont orthogonaux.

4) Coordonnées des points M_1, M_2, M_3

	$t_1 = \frac{1}{4}$	$t_2 = \frac{1}{2}$	$t_3 = \frac{2}{3}$
$B = 2\pi t + \frac{5\pi}{6}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$
$R\cos B$	$-\frac{1}{2}R$	$\frac{\sqrt{3}}{2}R$	$\frac{\sqrt{3}}{2}R$
$R\sin B$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}R$	$-\frac{1}{2}R$	$\frac{1}{2}R$

$M_1 \begin{vmatrix} x_1 = -\frac{1}{2}R \\ y_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}R \end{vmatrix}$; $M_2 \begin{vmatrix} x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}R \\ y_2 = -\frac{1}{2}R \end{vmatrix}$ et $M_3 \begin{vmatrix} x_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}R \\ y_3 = \frac{1}{2}R \end{vmatrix}$

Exercice 4 : 1) Un mobile se déplace suivant $(O;\vec{\imath})$. Son accélération est constante. A l'instant $t_1 = 2\ s$, il se trouve au point M_1 d'abscisse $x_1 = 5\ m$ avec $v_1 = 4\ m/s$. A l'instant $t_2 = 5\ s$, il se trouve au point M_2 d'abscisse $x_2 = 35\ m$ avec $v_2 = 16\ m/s$.

a) Ecrire la loi horaire de ce mouvement.

b) Calculer la longueur effectuée pendant fixé à 15 s.

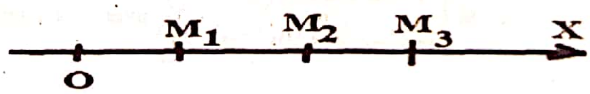
c) Préciser la nature du mouvement pour $t \in [0;2]$.

2) Un second mobile M' se déplace sur la même droite à vitesse constante. Aux instants $t'_1 = 2\ s$ et $t'_2 = 5\ s$, il se trouve aux abscisses $x'_1 = 71\ m$ et $x'_2 = 57{,}5\ m$.

a) Déterminer l'équation horaire de M'.

b) A quel instant les mobiles se croiseront ?

Correction :



1) a) Ecrire la loi horaire de ce mouvement.

$x_M = \frac{1}{2}a_M(t - t_{OM})^2 + v_{OM}(t - t_{OM}) + x_{OM}$ or $t_{OM} = 0\ s$;

Calculons l'accélération : $a_M = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2(x_2 - x_1)}$

$v_2^2 - v_1^2 = 2a_M(x_2 - x_1) \Leftrightarrow a_M = \frac{16^2 - 4^2}{2(35-5)} = 4\ m/s^2$ OU

BIEN $a_M = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{16-4}{5-2} = 4\ m/s^2$.

Calculons à t_{OM} la vitesse initiale : v_{OM}

$v_M = a_M t + v_{OM} \Leftrightarrow v_1 = a_M t_1 + v_{OM} \Leftrightarrow$

$v_{OM} = v_1 - a_M t_1 = 4 - 4 \times 2 = -4\ m/s$.

Calculons à t_{OM} l'abscisse initiale : x_{OM}

$x_M = \frac{1}{2}a_M t^2 + v_{OM}t + x_{OM} \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{2}a_M t_1^2 + v_{OM}t_1 + x_{OM}$

$\Leftrightarrow x_{OM} = x_1 - \frac{1}{2}a_M t_1^2 - v_{OM}t_1 = 5 - 8 + 8 = 5\ m$

DONC l'équation horaire du mobile $x_M = 2t^2 - 4t + 5$

b) Calculer la longueur effectuée pendant fixé à 15 s.

A $t = 15\ s$ alors $x_{15} = 2(15)^2 - 4(15) + 5 = 395\ m$.

La longueur est $\ell = x_{1S} - x_{0M} = 395 - 5 = 390\,m$.

c) Préciser la nature du mouvement pour $t \in [0; 2]$.

$$x_M = 2t^2 - 4t + 5 \Leftrightarrow v_M = 4t - 4$$

Pour étudier la nature d'un mouvement du mobile, on doit étudier le signe du produit scalaire de $\vec{a}$ et $\vec{v}$ est donnée par :

$\vec{a}.\vec{v} = a_x v_x + a_y v_y + a_z v_z$.

Si $\vec{a}.\vec{v} < 0$ alors le mouvement est retardé ou décéléré.

Si $\vec{a}.\vec{v} = 0$ alors le mouvement change de sens.

Si $\vec{a}.\vec{v} > 0$ alors le mouvement est accéléré.

$\overrightarrow{a_M}.\overrightarrow{v_M} = a_x v_x = 4(4t - 4)$

Posons $\overrightarrow{a_M}.\overrightarrow{v_M} = 0 \Leftrightarrow t = 1$

t	0	1	2
$\overrightarrow{a_M}.\overrightarrow{v_M}$	$-$	$+$	
Nature du mouvement	le mouvement est retardé	le mouvement est accéléré	

2) $x_{M'} = \frac{1}{2}a_{M'}(t - t_{0M'})^2 + v_{0M'}(t - t_{0M'}) + x_{0M'}$

Ou bien $x_{M'} = v_{0M'}t + x_{0M'}$

Calculons la vitesse initiale $v_{0M'}$ et l'abscisse initiale $x_{0M'}$

A l'instant $t'_1 = 2\,s$ alors $x'_1 = v_{0M'}t'_1 + x_{0M'}$ ou'encore

$$71 = 2v_{0M'} + x_{0M'}$$

A l'instant $t'_2 = 5\,s$ alors $x'_2 = v_{0M'}t'_1 + x_{0M'}$ ou encore

$$57{,}5 = 5v_{0M'} + x_{0M'}$$

Posons $v_{0M'} = x$ et $x_{0M'} = y$, donc on obtient un système

$$\begin{cases} 71 = 2v_{0M'} + x_{0M'} \\ 57{,}5 = 5v_{0M'} + x_{0M'} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 71 \\ 5x + y = 57{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4{,}5 \\ y = 80 \end{cases}$$

DONC l'équation horaire du M' : $x_{M'} = -4{,}5t + 80$

b) $x_M = x_{M'} \Leftrightarrow 2t^2 + 0{,}5t - 75 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (0{,}5)^2 - 4(2)(-75) = 600{,}25$.

$t_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-0{,}5-24{,}5}{4} < 0 \quad t_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-0{,}5+24{,}5}{4} = 6\,s$

Les mobiles se croiseront à l'instant $t = 6\,s$.

Exercice 5 : **Au cours d'une course de chevaux, 2 chevaux de couleur différentes (blanc et noir) se distingue des autres en prenant la tête de la course. Le cheval blanc prend le devant et se sépare de son second de 20 m. Le cheval noir de $v_{02} = 90\,km/h$ accélère pour une accélération $a_2 = 5{,}6\,m/s^2$ alors le cheval blanc effectue un mouvement rectiligne uniforme pour une vitesse $v_{01} = 126\,km/h$. On considère que les 2 chevaux sont des points ponctuels et on choisit comme origine des espaces, la position du cheval noir.**

1) les équations horaires du cheval blanc x_1 et noir x_2.

2) a) Montrer que le cheval noir rattrapera le blanc en 5 s.

b) Déterminer l'abscisse de dépassement.

3) La ligne d'arriver étant à 180 m du cheval blanc à l'instant $t_0 = 0\,s$, déterminer le cheval qui franchira cette ligne la première.

Correction : Avec le repère (noir) $t_0 = 0\,s$ et $x_{02} = 0\,m$

1) Equation horaire du cheval blanc x_1 :

$x_1 = \frac{1}{2}a_1(t - t_0)^2 + v_{01}(t - t_0) + x_{01}$ or $a_1 = 0$; $t_0 = 0\,s$; $x_{01} = 20\,m$ et $v_{01} = 35\,m/s$ donc $x_1 = 35t + 20$

Equation horaire du cheval noir x_2 :

$x_2 = \frac{1}{2}a_2(t - t_0)^2 + v_{02}(t - t_0) + x_{02}$ or $a_2 = 5{,}6\,m/s^2$ et $v_{02} = 25\,m/s$ donc $x_2 = 2{,}8t^2 + 25t$.

2) a) Montrer que le cheval noir rattrapera le blanc en 5 s.

$x_1 = x_2 \Leftrightarrow 2{,}8t^2 - 10t - 20 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4(2{,}8)(-20) = 324 = (18)^2$.

Alors il y aura la rencontre si $\Delta \geq 0$ et $t > 0$.

$t_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{10-18}{5{,}6} < 0$ et $t_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{10+18}{5{,}6} = 5\,s$ donc la date de dépassement est $t = 5\,s$.

b) Pour $t = 5\,s$, l'abscisse de dépassement est $x = 195\,m$.

3) La ligne d'arriver maintenant à $20 + 200 = 200\,m$ en considérant le rang du dernier cheval (ici noir).

$x_1 = 35t + 20 = 200 \Leftrightarrow t = \frac{200-20}{35} = 5{,}1428\,s$

$x_2 = 2{,}8t^2 + 25t = 200 \Leftrightarrow 2{,}8t^2 + 25t - 200 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (25)^2 - 4(2{,}8)(-200) = 2865$.

$t_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-25-53{,}52}{5{,}6} < 0 \quad t_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-25+53{,}52}{5{,}6} = 5{,}09\,s$

Donc le cheval noir franchit cette ligne la première.

Exercice 6 : **Un bus part d'une station A pour arriver à la station B situé à la distance D. Le trajet s'effectue en trois parties ayant les caractéristiques ci-dessous :**

	Accélération en m/s^2	Durée en s
1er partie	$a_1 = 1{,}2$	$t_1 = 13$
2e partie	$a_2 = 0$	$t_2 = 32$
3e partie	$a_3 = -2{,}3$	$t_3 = ?$

1) Calculer la vitesse maximale v_{max} du bus.

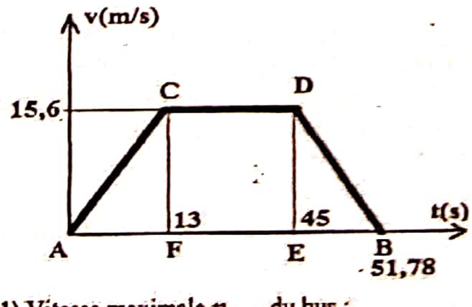
2) Déterminer les équations horaires de chaque phase.

3) Calculer la durée t_3.

4) Calculer la distance d_3 de freinage du bus.

5) Calculer la distance D entre les deux stations.

Correction : Vous pouvez utiliser aussi le diagramme des vitesses pour résoudre ce type d'exercice.



1) Vitesse maximale v_{max} du bus :

$v_{max} = a_1 t_1 + v_{01} = 1{,}2 \times 13 = 15{,}6\,m.s^{-1}$.

2) Déterminer les équations horaires de chaque phase.

Première méthode : En choisissant comme origine des dates et des espaces, la position du bus, la station A OU BIEN dire que les phases sont indépendantes **($t_0 = 0$ et $x_0 = 0$)**

$a_x = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i} = \frac{v_f^2 - v_i^2}{2(x_f - x_i)} = \frac{v_f^2 - v_i^2}{2d}$; $v_x = a_x t + v_{0x}$

Equation horaire : $x_x = \frac{1}{2}a_x t^2 + v_{0x}t + x_{0x} = \frac{1}{2}a_x t^2 + v_{0x}t$

1ère phase : $t \in [0; 13]$, mvt rectiligne uniformément varié $x_1 = \frac{1}{2}a_1 t^2 + v_{01}t + x_{01} = \frac{1}{2}a_1 t^2 = 0{,}6t^2$ puisque

$\begin{cases} x_{01} = x_A = 0 \\ v_{01} = v_A = 0 \end{cases} \Leftrightarrow v_1 = a_1 t + v_{01} = 1{,}2t$

2ème phase : $t \in [13; 45]$, mvt rectiligne uniforme $a_2 = 0$

$x_2 = \frac{1}{2}a_2 t^2 + v_{02}t + x_{02}$ or $v_{02} = v_C = 15{,}6\ m.s^{-1}$

Donc $x_2 = 15{,}6t \Leftrightarrow v_2 = a_2 t + v_{02} = 15{,}6\ m.s^{-1}$

3ème phase : $t \in [45; 45 + t_3[$, mvt rectiligne uniformément varié : $x_3 = \frac{1}{2}a_3 t^2 + v_{03}t + x_{03} = \frac{1}{2}a_3 t^2 + v_{03}t$

Or $v_{03} = v_D = v_2 = 15{,}6\ m.s^{-1}$ et $a_3 = -2{,}3\ m.s^{-2}$

$x_3 = -1{,}15t^2 + 15{,}6t \Leftrightarrow v_3 = a_3 t + v_{03} = -2{,}3t + 15{,}6$

Deuxième méthode : En changeant à chaque phase l'origine des dates et des espaces lorsque le bus commence une nouvelle phase. Il faut retenir :

t_{0x} : instant initial dans une phase et

$x_{0x} = x_{x-1}(t_{0x})$ l'abscisse initiale dans une phase à t_{0x}

$v_{0x} = v_{x-1}(t_{0x})$ la vitesse initiale dans une phase à t_{0x}

$a_x = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i} = \frac{v_f^2 - v_i^2}{2(x_f - x_i)}$; $v_x = a_x(t - t_{0x}) + v_{0x}$

Equation horaire : $x_x = \frac{1}{2}a_x(t - t_{0x})^2 + v_{0x}(t - t_{0x}) + x_{0x}$

1ère phase : $t \in [0; 13]$, mvt rectiligne uniformément varié

$x_1 = \frac{1}{2}a_1(t - t_{01})^2 + v_{01}(t - t_{01}) + x_{01}$ Or le bus démarre au point A, donc $t_{01} = t_A = 0$; $\begin{cases} v_{01} = v_A = 0 \\ x_{01} = x_A = 0 \end{cases}$

Donc $x_1 = \frac{1}{2}a_1 t^2 = 0{,}6t^2 \Leftrightarrow v_1 = 1{,}2t$

2ème phase : $t \in [13; 45]$, mvt rectiligne uniforme $a_2 = 0$

$x_2 = \frac{1}{2}a_2(t - t_{02})^2 + v_{02}(t - t_{02}) + x_{02}$ Or $t_{02} = t_1 = 13\ s$

$v_{02} = v_C = v_1(13) = 15{,}6\ m.s^{-1}$ et

$x_{02} = x_C = x_1(13) = 0{,}6(13)^2 = 101{,}4\ m$

Donc $x_2 = 15{,}6(t - 13) + 101{,}4 = 15{,}6t - 101{,}4$

$\Leftrightarrow v_2 = a_2(t - t_{02}) + v_{02} = v_{02} = 15{,}6\ m.s^{-1}$

3ème phase : $t \in [45; 45 + t_3]$, mvt rectiligne uniformément varié : $x_3 = \frac{1}{2}a_3(t - t_{03})^2 + v_{03}(t - t_{03}) + x_{03}$

Or $t_{03} = t_1 + t_2 = 45\ s$; $v_{03} = v_D = v_2(45) = 15{,}6\ m.s^{-1}$

et $x_{03} = x_D = x_2(45) = 15{,}6(45) - 101{,}4 = 600{,}6\ m$

Donc $x_3 = -1{,}15(t - 45)^2 + 15{,}6(t - 45) + 600{,}6$ ou bien

$$x_3 = -1{,}15t^2 + 119{,}1t - 2430{,}15$$

$\Leftrightarrow v_3 = a_3(t - t_{03}) + v_{03} = -2{,}3t + 119{,}1$.

3) Calculer la durée t_3. Or à cette date $v_3 = v_B = 0 \Leftrightarrow$

Première méthode : c'est-à-dire $t_{03} = t_D = 0$ où l'équation des vitesses est $v_3 = -2{,}3t + 15{,}6$:

$v_3 = -2{,}3t + 15{,}6 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{15{,}6}{2{,}3} = 6{,}78\ s.$

Donc $t_3 = t - t_{03} = 6{,}78 - 0 = 6{,}78\ s$

Deuxième méthode : c'est-à-dire $t_{03} = t_D = 45\ s$ où l'équation des vitesses est $v_3 = -2{,}3t + 119{,}1$:

$v_3 = -2{,}3t + 119{,}1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{119{,}1}{2{,}3} = 51{,}78\ s.$

Donc $t_3 = t - t_{03} = 51{,}78 - 45 = 6{,}78\ s$

4) Calculer la distance d_3 de freinage du bus.

Première méthode : $d_3 = \frac{v_B^2 - v_D^2}{2a_3} = \frac{-v_D^2}{2a_3} = 52{,}90\ m$

Or la durée de cette phase est $t_3 = 6{,}78\ s$

Deuxième méthode : c'est-à-dire $x_{03} = 0$ où l'équation horaire est $x_3 = -1{,}15t^2 + 15{,}6t$:

$x_3(t_3) = -1{,}15t_3^2 + 15{,}6t_3 = 52{,}90\ m.$

$$d_3 = x_3(t_3) - x_{03} = 52{,}90 - 0 = 52{,}90\ m$$

Troisième méthode : L'équation horaire est

$x_3 = -1{,}15t^2 + 119{,}1t - 2430{,}15 \Leftrightarrow v_3 = -2{,}3t + 119{,}1$

A l'instant $t = 45\ s$ alors $x_3(45) = 600{,}6\ m$

A l'instant $t = 51{,}78\ s$ alors $x_3(51{,}78) = 653{,}50\ m$

$d_3 = |x_3(51{,}78) - x_3(45)| = 653{,}5 - 600{,}6 = 52{,}90\ m$

5) Calculer la distance D entre les deux stations.

Première méthode : $x_0 = 0$

1ère phase : $t \in [0; 13]$, la durée est $t_1 = 13\ s$ et $x_1 = 0{,}6t^2$

$d_1 = x_1(t_1) - x_{01} = 0{,}6(13)^2 - 0 = 101{,}4\ m$ ou bien

A l'instant $t = 0\ s$ alors $x_1(0) = 0\ m$

A l'instant $t = 13\ s$ alors $x_1(13) = 101{,}4\ m$

$$d_1 = x_1(13) - x_{01} = 0{,}6(13)^2 - 0 = 101{,}4\ m$$

2ème phase : $t \in [13; 45]$, la durée est $t_2 = 32\ s$ et $x_2 = 15{,}6t$

$d_2 = x_2(t_2) - x_{02} = 15{,}6(32) - 0 = 499{,}2\ m$ ou bien

A l'instant $t = 13\ s$ alors $x_2(13) = 202{,}8\ m$

A l'instant $t = 45\ s$ alors $x_2(45) = 702\ m$

$d_2 = x_2(45) - x_2(13) = 499{,}2\ m$

3ème phase : $t \in [45; 51{,}78]$, la durée est $t_3 = 6{,}78\ s$ et

$x_3 = -1{,}15t^2 + 15{,}6t \Leftrightarrow v_3 = a_3 t + v_{03} = -2{,}3t + 15{,}6$

$d_3 = x_3(t_3) - x_{03} = 52{,}90 - 0 = 52{,}90\ m$ ou bien

$v_C^2 - v_B^2 = 2a_3 d_3 \Leftrightarrow d_3 = \frac{-v_B^2}{2a_3} = \frac{-(15{,}6)^2}{-2\times 2{,}3} = 52{,}90\ m.$

La distance totale est $D = d_1 + d_2 + d_3 = 653{,}5\ m$

Deuxième méthode : $x_0 \neq 0$

1ère phase : $t \in [0; 13]$, son équation $x_1 = 0{,}6t^2$

A l'instant $t = 0\ s$ alors $x_1(0) = 0\ m$

A l'instant $t = 13\ s$ alors $x_1(13) = 101{,}4\ m$

$$d_1 = x_1(13) - x_{01} = 0{,}6(13)^2 - 0 = 101{,}4\ m$$

2ème phase : $t \in [13; 45]$, son équation $x_2 = 15{,}6t - 101{,}4$

A l'instant $t = 13\ s$ alors $x_2(13) = 101{,}4\ m$

A l'instant $t = 45\ s$ alors $x_2(45) = 600{,}6\ m$

$d_2 = x_2(45) - x_2(13) = 600{,}6 - 101{,}4 = 499{,}2\ m$

3ème phase : $t \in [45; 51{,}78]$, son équation est

$x_3 = -1{,}15t^2 + 119{,}1t - 2430{,}15$

A l'instant $t = 45\ s$ alors $x_3(45) = 600{,}6\ m$

A l'instant $t = 51{,}78\ s$ alors $x_3(51{,}78) = 653{,}50\ m$

$d_3 = x_3(51{,}78) - x_3(45) = 653{,}5 - 600{,}6 = 52{,}90\ m$

La distance totale est $D = d_1 + d_2 + d_3 = 653{,}5\ m$

Troisième méthode : calcul d'aire des polygones

Triangle quelconque : $distance = \frac{base \times hauteur}{2}$

Rectangle : $distance = longueur \times largeur$

Le bus effectue le parcourt OABC qu'on illustre ici

ACF Triangle rectangle en F : $d_1 = \frac{13 \times 15{,}6}{2} = 101{,}4\ m$

FECD Rectangle : $d_2 = 32 \times 15{,}6 = 499{,}2\ m$

DEB Triangle rectangle en E : $d_3 = \frac{6,78\times 15,6}{2} = 52,884\ m$

La distance totale est $D = d_1 + d_2 + d_3 = 653,5\ m$.

Le Messager d'Allah (saw) a dit : « Quiconque dit : j'accepte Allah comme Seigneur, l'Islam comme religion et Muhammad comme prophète, le paradis lui sera obligatoirement attribué. » Rapporté par Aboû Dawoûd et authentifié par Albâny.

<u>Exercice 7 :</u> Sur une autoroute rectiligne, un automobiliste roule à 108 km.h⁻¹ en mouvement uniforme. Soudain, il aperçoit un panneau de limitation de vitesse (à 60 km/h) à 100 m devant lui et les policiers qui se trouvent à 20 m de ce panneau. Le conducteur actionne le frein et atteint le panneau avec la vitesse de 12 m/s.

1) Calculer la décélération a_a atteint par le conducteur.

2) Montrer qu'il lui a fallu 4,76 s pour y arriver.

3) On garde la même décélération a_a. Le conducteur ne réagit pas tout de suite et commence à freiner une seconde après l'apparition du panneau.

a) A quelle vitesse v_2 arrive-t-il au niveau du panneau. Est-il en infraction ?

b) Montrer qu'il a mis 3 s pour atteindre les policiers.

c) On suppose que l'automobiliste en infraction roule à la vitesse constance. Un motard de la police démarre avec une accélération constante de valeur absolue 4 m/s^2 à la distance d = 4 m devant la voiture. Au bout de combien de temps, à quelle distance d' et vitesse, le motard rattrapera-t-il le l'automobile ?

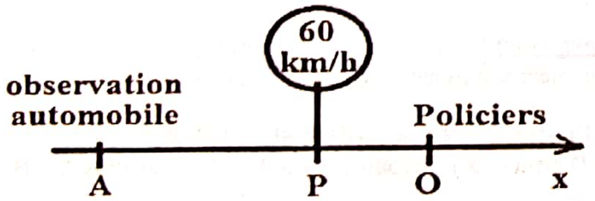
d) A une vitesse v_3, à l'écoute de la sirène, le conducteur se trouvant à 10 m du motard, accélère en 8 m/s^2.

d1) Quelles sont les valeurs de l'accélération a_m ?

d2) A quelle accélération a_2 aura effectué le motard pour qu'il ait une deuxième rencontre avec l'automobile en 2 s ?

<u>Correction :</u> $v_A = 108\ km/h = 30\ m/s$; $d = AP = 100\ m$

$v_L = 60\ km/h = 16,66\ m/s$ ET $v_P = 12\ m/s$



1) la décélération atteint par le conducteur.

$a_a = \frac{v_P^2 - v_A^2}{2(x_p - x_A)} = \frac{v_P^2 - v_A^2}{2AP} = \frac{(12)^2 - 30^2}{2\times 100} = -3,78\ m.s^{-2}$

2) Montrer qu'il a fallu à l'automobile 4 s pour y arriver.

$v_P = a_a t + v_A \Leftrightarrow t = \frac{v_P - v_A}{a_a} = \frac{12-30}{-3,78} = 4,76\ s.$

3) A l'instant $\theta = 1\ s$ on a :

a) Distance avant le freinage : $d_1 = 30 \times \theta = 30\ m$

Distance après le freinage pour d'atteindre le panneau :

$d_2 = d - d_1 = 100 - 30 = 70\ m.$

La vitesse arrivée au niveau du panneau avec 12 m/s est :

$v_2^2 - v_A^2 = 2a_a d_2 \Leftrightarrow v_2 = \sqrt{2a_a d_2 + v_A^2}$

$v_2 = \sqrt{2(-3,78)\times 70 + 30^2} = 19,25\ m/s$ alors l'automobile est en infraction car $v_2 > v_L$.

b) Pour atteindre les policiers, le conducteur a mis :

$20 = 12t \Leftrightarrow t = \frac{36}{12} = 3\ s.$

c) On choisit comme origine des dates et des espaces, l'instant et la position du motard :

Equation horaire de l'automobile : $a_a = 0$ car $v = cste$

$x_a = \frac{1}{2}a_a t^2 + v_{0a}t + x_{0a} = v_2 t + 20 = 19,25t + 20$

Equation horaire du motard : $a_m = 4\ m/s^2$

$x_m = \frac{1}{2}a_m t^2 + v_{0m}t + x_{0m} = \frac{1}{2}a_m t^2 = 2t^2$

RENCONTRE $x_m = x_a \Leftrightarrow 2t^2 - 19,25t - 20 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-19,25)^2 - 4(2)(-20) = (23,03)^2$ Alors il y aura la rencontre si $\Delta \geq 0$ et $t > 0$.

$t_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{19,25-23,03}{8} < 0$ C'est impossible

et $t_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{19,25+23,03}{8} = 5\ s$

La distance du rattrapage : $d' = 2(5)^2 = 25\ m$

La vitesse du rattrapage : $v = 4(5) = 20\ m/s$

d) On choisit comme origine des dates et des espaces, l'instant et la position du motard :

Equation horaire de l'automobile : $a_a = 8\ m/s^2$

$x_a = \frac{1}{2}a_a t^2 + v_{0a}t + x_{0a} = 4t^2 + v_3 t + 10$

Equation horaire du motard : $a_m > 0$

$x_m = \frac{1}{2}a_m t^2 + v_{0m}t + x_{0m} = \frac{1}{2}a_m t^2 + v_3 t$

RENCONTRE $x_m = x_a \Leftrightarrow \frac{1}{2}(a_m - 8)t^2 - 10 = 0$ ou encore $(a_m - 8)t^2 - 20 = 0$

d1) $\Delta = b^2 - 4ac = 0^2 - 4(a_m - 8)(-14) = 56(a_m - 8)$

$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow a_m \geq 8m/s^2$

d2) $(a_m - 8)t^2 - 20 = 0 \Leftrightarrow a_m = \frac{20}{t^2} + 8$

À $t = 2\ s$ alors $a_2 = \frac{20}{4} + 8 = 13\ m/s^2$.

<u>Exercice 8 :</u> Une automobile démarre avec une accélération $a_1 = 2,5\ m/s^2$ lorsque le feu tricolore passe au vert pendant une durée $\theta = 7\ s$; ensuite le conducteur maintient sa vitesse constante.

Lorsque le feu passe au vert, un camion repéré à une distance $d = 20\ m$ du feu, maintient sa vitesse constante $v = 45\ km/h$.

Dans un 1[er] temps le camion va doubler l'automobile puis dans une 2è phase, celle-ci va le dépasser.

En choisissant comme origine des dates, l'instant où le feu tricolore passe au vert, comme origine des espaces, la position du feu tricolore, déterminer

1) les équations horaires respectivement de l'automobile x_a et du camion x_c.

2) Les dates de dépassement

3) Les abscisses de dépassement

4) Les vitesses de l'automobile à ces instants.

<u>Correction :</u> Au feu tricolore $t_0 = 0\ s$ et $x_0 = 0\ m$

1) a) Equation horaire de l'automobile :

<u>1[ère] phase :</u> $t \in [0; 7]$, mvt rectiligne uniformément varié

$x_{a1} = \frac{1}{2}a_{a1}t^2 + v_{01a}t + x_{01a} = \frac{1}{2}a_{a1}t^2 = 1,25t^2$

$\Leftrightarrow v_{a1} = a_{a1}t^2 + v_{0a} = 2,5t$

2ème phase : $t \geq 7\ s$, mvt rectiligne uniforme $a_{a2} = 0$

$x_{a2} = \frac{1}{2}a_{a2}t^2 + v_{02a}t + x_{02a}$

Or $v_{02a} = v_{a1}(7) = 2{,}5 \times \theta = 2{,}5 \times 7 = 17{,}5\ m/s$

$x_{02a} = x_{a1}(7) = 1{,}25\theta^2 = 1{,}25(7)^2 = 61{,}25\ m$

Donc son équation est $x_{a2} = v_{1a}t + x_{02a} = 17{,}5t + 61{,}25$.

b) Equation horaire du camion : $v = 45\ km/h = 12{,}5\ m/s$

$x_c = \frac{1}{2}a_ct^2 + v_{0c}t + x_{0c}$ or mvt rectiligne uniforme, donc $x_c = v_{0c}t + x_{0c} = 12{,}5t - 20$ puisque $x_{0c} = -20\ m$ comme l'origine des espaces est la position du feu tricolore.

2) Les dates de dépassement

1er dépassement : $x_{1a} = x_c \Leftrightarrow 1{,}25t^2 - 12{,}5t + 20 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-12{,}5)^2 - 4(1{,}25)(20) = 56{,}25$. Alors il y aura la rencontre si $\Delta \geq 0$ et $t > 0$.

$t_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = 2\ s$ et $t_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = 7{,}8 = 8\ s$.

Or $t_2 \notin [0; 7]$ alors la 1ère date de dépassement est $\theta_1 = 2\ s$.

2è dépassement : $x_{2a} = x_c \Leftrightarrow$

$17{,}5t + 61{,}25 - 12{,}5t - 67{,}5 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{6}{5} = 1{,}2\ s$. Donc la date de dépassement est $\theta_2 = \theta + 1{,}2 = 7 + 1{,}2 = 8{,}2\ s$.

3) Les abscisses de dépassement

$x_1 = 12{,}5 \times \theta_1 - 20 = 5\ m$; $x_2 = 12{,}5\theta_2 - 20 = 82{,}5\ m$.

4) Les vitesses de l'automobile à ces instants.

1er dépassement : $v_1 = 2{,}5 \times \theta_1 = 2{,}5 \times 2 = 5\ m/s$

2è dépassement : $v_2 = 17{,}5\ m/s$.

Exercice 9 : Un automobiliste très pressé roule à la vitesse $v_a = 108\ km/h$ sur une route où la vitesse est limitée à 75 km/h. Une minute plus tard, le motard du gendarme le prend en poursuite et l'atteint à la vitesse $v_m = 144\ km/h$ au bout de 20 s. On choisit comme origine des dates, l'instant où l'automobiliste passe devant le gendarme, comme origine des espaces, la position du gendarme.

1) En justifiant votre réponse, préciser :
a) la nature du mouvement de l'automobile
b) le type de mouvement que possède le motard.
2) Montrer que l'équation horaire de l'automobiliste est donnée par $x_a = 30t$.
3) Montrer que l'équation horaire du motard est donnée par $x_m = t^2 - 120t + 3600$.
4) Y aura-t-il rencontre ? Si oui, déterminer la date et la distance parcourue pour lesquelles le gendarme aura rattrapé l'automobiliste.
5) En déduire alors la vitesse du gendarme à ce moment.

Correction : $v_a = 108\ km/h = 30\ m/s$; et $v_m = 40\ m/s$.

1) a) le mouvement de l'automobile est rectiligne uniforme puisque la vitesse $v_a = 30\ m/s$ est constante.

b) le mouvement du motard est rectiligne uniformément varié puisqu'il était au repos (v=0) avant de poursuivre l'automobile avec une vitesse $v_m = 40\ m/s$.

2) l'équation horaire de l'automobiliste est $x_a = 30t$.

$x_a = \frac{1}{2}a_a(t-t_0)^2 + v_a(t-t_0) + x_{0a}$ or $a_a = 0$; à $t_0 = 0\ s$ on a $x_{0a} = 0$; donc l'équation horaire devient $x_a = 30t$.

3) Montrer que l'équation horaire du motard est donnée par $x_m = t^2 - 120t + 3600$.

$x_m = \frac{1}{2}a_m(t-60)^2 + v_m(t-60) + x_{0m}$

or $a_m = \frac{40-0}{20} = 2\ m.s^{-2}$; à $t_0 = 0\ s$ on a $x_{0m} = 0$; donc l'équation horaire devient $x_m = t^2 - 120t + 3600$.

4) A la rencontre $x_a = x_m \Leftrightarrow t^2 - 150t + 3600 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-150)^2 - 4(1)(3600) = 8100 = 90^2$

Alors il y aura la rencontre si $\Delta \geq 0$ et $t > 0$.

$t_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{150-90}{2} = 30\ s$ et $t_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{150+90}{2} = 120\ s$.

Nous rappelons que le motard commence la poursuite après 1 min c'est-à-dire 60 s, donc $t_1 = 30\ s < 60\ s$ est impossible.

D'où la date à laquelle le gendarme aura rattrapé l'automobiliste est $120\ s = 2\ minutes$.

A $t = 120\ s$, la distance parcourue est $30 \times 120 = 3600\ m$.

5) la vitesse du gendarme à ce moment.

$x_m = t^2 - 120t + 3600 \Leftrightarrow v_m = 2t - 120$

A $t = 120\ s$, sa vitesse est $2(120) - 120 = 120\ m/s$.

Exercice 10 : Sur l'autoroute de l'aéroport de Diori Hamani, deux V8 distants de AB=40 m, roulent sur la même file avec une vitesse de 40 m/s. Soudain la 1ère V8 freine pour une décélération de 5 $m.s^{-2}$. La 2ème V8 ne freine qu'après 2 s.

1) Calculer la distance (d) parcourue par la 2ème V8 avant de commencer à freiner.
2) Calculer la distance (d') parcourue par la 1ère V8 pendant ce temps.
3) Calculer la distance (D) séparant A et B lorsque la 2ème V8 commence à freiner.
4) Quelle est la vitesse du 1ère V8 à ce moment ?
5) En prenant comme origine des dates l'instant où débute le freinage du second véhicule et comme origine des espaces la position où il se trouve alors, établir les équations horaires des mouvements de A et B.
6) A quelle date aura lieu le choc ?

Correction : 1) Distance (d) parcourue par la 2ème V8 avant de commencer à freiner. $x_2 = v_{02}t + x_{02} = 40t$

A l'instant $t = 2\ s$ on a (d) $= 40 \times 2 = 80\ m$.

2) Distance (d') parcourue par la 1ère V8 pendant ce temps

$x_1 = \frac{1}{2}a_1t^2 + v_{01}t + x_{01} = -2{,}5t^2 + 40t + 40$

A l'instant $t = 2\ s$ on a (d') $= 110\ m$.

3) Distance (D) séparant A et B lorsque la 2ème V8 commence à freiner. $(D) = (d') - (d) = 110 - 80 = 30\ m$.

4) Vitesse du 1ère V8 à ce moment

$x_1 = -2{,}5t^2 + 40t + 40 \Leftrightarrow v_1 = -5t + 40$

A l'instant $t = 2\ s$ on a $v_1 = -5 \times 2 + 40 = 30\ m/s$.

5) la 1ère V8 : $x_1 = \frac{1}{2}a_1t^2 + v_{01}t + x_{01} = -2{,}5t^2 + 40t$

La 2ème V8 : $x_2 = \frac{1}{2}a_2t^2 + v_{02}t + x_{02} = -2{,}5t^2 + 30t + 30$

6) Le choc a lieu ssi $x_1 = x_2$

$-2{,}5t^2 + 40t = -2{,}5t^2 + 30t + 30 \Leftrightarrow t = 3\ s$

Le choc a lieu à 3 s.

Exercice 11 : Un automobiliste roule sur une route rectiligne de Kouré (Dosso) à la vitesse de 130 km/h. Soudain, un groupe de girafes apparaît sur la voie à la distance D = 120 m. Le conducteur freine immédiatement et réduit sa vitesse à 105 km/h au bout d'une durée θ = 1s sur une distance d. On note D' la distance parcourue par l'automobile du freinage à l'arrêt. On note d' la distance de l'automobile arrêté à l'obstacle.

1) Calculer la valeur de la décélération de l'automobile.

2) Si l'on suppose que la décélération reste constante.

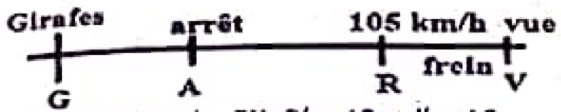
a) Calculer la distance parcourue jusqu'à l'arrêt de la voiture.

b) À quelle distante de l'obstacle s'arrêtera la voiture ?

3) On envisage maintenant cette éventualité : le conducteur ne réagit pas tout de suite et commence à freiner une seconde après l'apparition des girafes. Il impose alors à son véhicule la décélération calculée au 1. Calculer la distance que devrait parcourir l'automobile pour s'arrêter ? Conclure.

Correction : $v_V = 130$ km/h $= 36{,}11\ m/s$;

$v = 105$ km/h $= 29{,}16\ m/s$



D = GV = 120 m ; d = RV ; D' = AR et d' = AG.

1) décélération de l'automobile $a = \frac{v - v_V}{\theta} = -6{,}94\ m.s^{-2}$.

2) a) Distance parcourue jusqu'à l'arrêt de la voiture.

$v_A^2 - v_V^2 = 2aAV \Leftrightarrow AV = -\frac{v_V^2}{2a} = d + D' = 93{,}94$ m.

b) À quelle distante de l'obstacle s'arrêtera la voiture ?

$d' = AG = D - (d + D') = 120 - 93{,}94 = 26{,}06\ m$.

3) Distance que devrait parcourir l'automobile pour s'arrêter :

Distance parcourue avant le freinage $d = v_V\theta = 36{,}11\ m$.

Distance parcourue avant de s'arrêter s'il n'y avait pas les girafes : $D'' = \frac{v_A^2 - v_V^2}{2a} = 93{,}94$ m. La distance que devrait parcourir l'automobile pour s'arrêter est $d'' = AG =$

$$D - (d + D'') = 120 - 93{,}94 - 36{,}11 = -10{,}5\ m.$$

On constate qu'il y aura accident si le conducteur commence à freiner une seconde après l'apparition des girafes.

Exercice 12 : Un écolier loin de son établissement prend régulièrement le bus pour s'y rendre. En sortant de son domicile, il aperçoit sur une ligne droite le bus à l'arrêt et s'apprête à partir. Il court alors vers le bus avec une vitesse constante $v_e = 6\ m/s$. Quand il est à 25 m du bus, celui-ci démarre avec une accélération constante $a_b = 1\ m.s^{-2}$. On choisit comme origine des dates, l'instant où le bus démarre, comme origine des espaces, la position du bus. 1) Etablir les équations horaires des mouvements de l'écolier x_e et du bus x_b.

2) Tracer dans un même repère orthonormé les courbes représentant les deux mouvements.

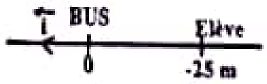
L'écolier rattrapera-t-il le bus ? Justifier graphiquement.

3) A quelle vitesse constante minimale devrait courir l'écolier s'il veut rattraper le bus ?

4) Après un déplacement de 100 m, le bus s'arrête. Déterminer

a) La durée de son déplacement ;

b) La durée de l'arrêt de bus pour que l'écolier le rattrape.



Correction : (bus) $t_0 = 0\ s$ et $x_{0b} = 0\ m$

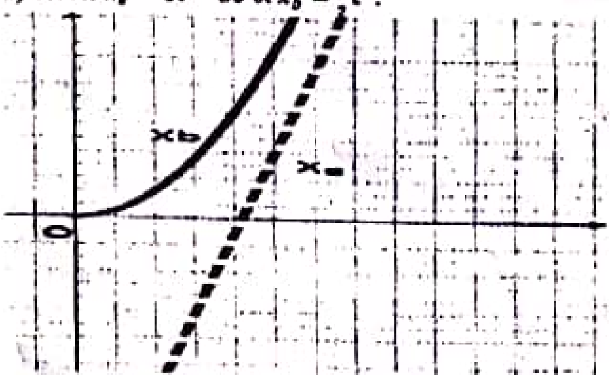
1) Equation horaire de l'écolier x_e :

$x_e = \frac{1}{2}a_e(t - t_0)^2 + v_e(t - t_0) + x_{0e}$ or $a_e = 0$; $t_0 = 0\ s$; $x_{0e} = -25\ m$ et $v_e = 6\ m/s$ donc $x_e = 6t - 25$.

Equation horaire du bus x_b :

$x_b = \frac{1}{2}a_b(t - t_0)^2 + v_b(t - t_0) + x_{0b}$ or $a_b = 1\ m.s^{-2}$; à $t_0 = 0\ s$ on a $x_{0b} = 0$ et $v_b = 0$ (arrêt) donc $x_b = \frac{1}{2}t^2$

2) Tracer $x_e = 6t - 25$ et $x_b = \frac{1}{2}t^2$.



Avec la vitesse $v_e = 6\ m/s$, l'écolier ne rattrapera pas le bus puisque les courbes représentant les deux mouvements ne coupent pas.

3) Soit v la vitesse constante minimale devrait courir l'écolier s'il veut rattraper le bus : l'équation devient $x_e = vt - 25$.

$x_e = x_b \Leftrightarrow t^2 - 2vt + 50 = 0$,

$\Delta = b^2 - 4ac = (-2v)^2 - 4(1)(50) = 4v^2 - 200$

Alors il y aura la rencontre si $\Delta \geq 0$ et $t > 0$.

$4v^2 - 200 \geq 0 \Leftrightarrow v^2 \geq 50 \Leftrightarrow v \geq \pm\sqrt{50} = \pm 7{,}07\ m/s$

4) Après un déplacement de 100 m, le bus s'arrête. Déterminer

a) La durée de déplacement du bus : à partir de $x_b = \frac{1}{2}t^2$

$100 = \frac{1}{2}t_b^2 \Leftrightarrow t_b = \sqrt{200} = 14{,}14\ s$.

b) Pour rattraper le bus, l'écolier doit parcourir 100 en t_e :

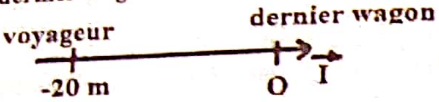
$100 = vt_e - 25 \Leftrightarrow t_e = \frac{125}{v} = \frac{125}{7{,}07} = 17{,}68\ s$.

La durée de l'arrêt de bus pour que l'écolier le rattrape est $\Delta t = t_e - t_b = 17{,}68 - 14{,}14 = 3{,}53\ s$.

Exercice 13 : Les mouvements du train et du voyageur considéré dans ce problème ont des trajectoires rectilignes parallèles. Un voyageur en retard court le long d'un quai à la vitesse constante v = 6 m.s^{-1} ; quand il est à 20 mètres du dernier wagon le train démarre avec une accélération constante de 1m/s^2. 1) Ecrire dans un même repère, les équations horaires du voyageur et du dernier wagon considérés comme des points matériels.

2) Montrer que le voyageur ne peut pas rattraper le train.
3) Quelle sera la distance minimale entre le voyageur et le dernier wagon ?

Correction :



1) Equation horaire du voyageur

$x_v = \frac{1}{2}a_v(t-t_0)^2 + v_{0v}(t-t_0) + x_{0v}$ or $a_v = 0$; $t_0 = 0\,s$;

$x_{0v} = -20\,m$ et $v_{0v} = 6\,m/s$ donc $x_v = 6t - 20$.

Equation horaire du dernier wagon

$x_t = \frac{1}{2}a_t(t-t_0)^2 + v_{0t}(t-t_0) + x_{0t}$ or $a_t = 1\,m/s$;

$t_0 = 0\,s$; $x_{0t} = 0$ et $v_{0t} = 6\,m/s$ donc $x_t = 0{,}5t^2$.

2) Montrer que le voyageur ne peut pas rattraper le train.

$$x_v = x_t \Leftrightarrow 0{,}5t^2 - 6t + 20 = 0$$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(0{,}5)(20) = -4$ alors le voyageur ne peut pas rattraper le train.

3) a) l'instant pour lequel la distance qui sépare le voyageur et le dernier wagon est minimale $\frac{dx}{dt} = \frac{d(0{,}5t^2-6t+20)}{dt} = t - 6$

$\frac{dx}{dt} = t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 6\,s$.

b) voyageur : $x_v = 6(6) - 20 = 16\,m$

train : $x_t = 0{,}5(6)^2 = 18\,m$ alors la distance minimale qui sépare le voyageur et le dernier wagon est

$d_{min} = |x_v - x_t| = |16 - 18| = 2\,m$.

Exercice 14 : Partie A : Une bille (b) est lancée verticalement vers le haut, à partir d'un point O du repère $(O;\vec{\imath})$avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = 15\vec{\imath}$ et son vecteur accélération $\vec{a} = -10\vec{\imath}$.

1) Ecrire la loi horaire du mouvement de (b).
2) Exprimer la vitesse v de (b) en fonction de t.
3) Quelle est l'abscisse du point culminant atteint par la bille ?
4) Quelle sont les abscisses x_1 et x_2 et leurs vitesses v_1 et v_2 aux instants $t_1 = 1\,s$ et $t_2 = 4\,s$? Préciser à chaque fois le sens d'évolution de la bille.
5) A quelle date et avec quelle vitesse algébrique (b) repasse-t-elle au point O ?
6) Combien de temps après son lancement touchera-t-elle le sol situé à 3 m en dessous du point O ?
7) Calculer la norme de la vitesse de la bille juste avant le choc sur le sol.

Partie B : Une seconde après le départ de la bille (b), sur le même axe on lance une autre bille (b') d'un point A situé à 3 m au-dessous du point O avec la même vitesse et accélération.

1) a) Ecrire la loi horaire du mouvement de (b').
b) Calculer la durée de rencontre et son altitude h.
c) Quelles sont les vitesses de (b) et (b') juste avant la rencontre ? Dans quel sens évolue chaque bille juste avant le choc ?
2) On laisse tomber la bille (b) en chute libre avec une vitesse initiale nulle sur profondeur h dans un puits de mine de Samira avec la même accélération.
a) La durée de la chute est de 10 s. Calculer la profondeur h' et la vitesse v avec laquelle la bille arrive au fond du puits.
b) On donne la vitesse de l'air $v_{air} = 340\,m/s$. Au bout de combien de temps θ après le lâcher perçoit on le bruit du choc au fond du puits ?

Correction :

Partie A : Une bille (b) : $\vec{v}_0 = 15\vec{\imath}$ et $\vec{a} = -10\vec{\imath}$.

1) Ecrire la loi horaire du mouvement de (b).

$x_b = \frac{1}{2}a_b(t-t_0)^2 + v_{0b}(t-t_0) + x_{0b}$ or $a_b = -10\,m.s^{-2}$,

à $t_0 = 0\,s$ on a $x_{0b} = 0$ et $v_b = 15\,m/s$ donc la loi horaire du mouvement de (b) est $x_b = -5t^2 + 15t$.

2) Vitesse v de (b) en fonction de t : $v_b = -10t + 15$

3) l'abscisse du point culminant atteint par (b) : $v_b = 0\,m/s$

1^ère^ méthode : $v_b = -10t_{max} + 15 = 0 \Leftrightarrow t_{max} = 1{,}5\,s$

Donc $x_{max} = -5t_{max}^2 + 15t_{max} = 11{,}25\,m$

2^ème^ méthode : $v_{max}^2 - v_0^2 = 2a_b(x_{max} - x_0) \Leftrightarrow$

$x_{max} = \frac{-v_0^2}{2a_b} = \frac{-(15)^2}{-2\times10} = 11{,}25\,m$.

4) A l'instant $t_1 = 1\,s$ alors $\begin{cases} x_1 = -5t_1^2 + 15t_1 = 10\,m \\ v_1 = -10t_1 + 15 = 5\,m/s \end{cases}$ alors la bille (b) se déplace dans le même sens que le vecteur $\vec{\imath}$.

A l'instant $t_2 = 4\,s$ alors $\begin{cases} x_2 = -5t_2^2 + 15t_2 = -20\,m \\ v_2 = -10t_2 + 15 = -25\,m/s \end{cases}$

alors la bille (b) se déplace dans le sens contraire que le vecteur $\vec{\imath}$. La bille (b) se dirige vers le point O.

5) $x_b = -5t^2 + 15t = 0 \Leftrightarrow t = 0$ ou $t = 3\,s$ alors la bille (b) repasse au point O à l'instant $t = 3\,s$ à la vitesse algébrique $v = -10(3) + 15 = -15\,m/s$

6) $-5t^2 + 15t = -3$ OU $-5t^2 + 15t + 3 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 15^2 - 4(-5)(3) = 285$

$t_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-15-16{,}88}{-10} = 3{,}188\,s$ et $t_2 = \frac{-15+16{,}88}{-10} < 0$ alors la bille (b) touchera le sol à l'instant $t = 3{,}188\,s$.

7) la vitesse de la bille juste avant le choc sur le sol est

$v' = -10(3{,}188) + 15 = -16{,}88\,m/s$.

Partie B :

1) a) Ecrire la loi horaire du mouvement de (b').

$x_{b'} = \frac{1}{2}a_{b'}(t-t_{0'})^2 + v_{0b'}(t-t_{0'}) + x_{0b'}$ or $a_{b'} = -10\,m.s^{-2}$; à $t_{0'} = 1\,s$ on a $x_{0b'} = 3\,m$ et $v_{b'} = 15\,m/s$

donc $x_{b'} = -5(t-1)^2 + 15(t-1) - 3$ ou bien

$x_{b'} = -5t^2 + 25t - 23$ on déduit que $v_{b'} = -10t + 25$

b) Calculer la durée de rencontre et son altitude.

$x_b = x_{b'} \Leftrightarrow -5t^2 + 15t = -5t^2 + 25t - 23 \Leftrightarrow t = 2{,}3\,s$

$$h = -5(2{,}3)^2 + 15(2{,}3) = 8{,}05\,m$$

c) les vitesses de (b) et (b') juste avant la rencontre

La bille (b) : $v = -10(2{,}3) + 15 = -8\,m/s$

La bille (b') : $v' = -10(2{,}3) + 25 = 2\,m/s$

2) a) Equation horaire : $x_b = 5t^2 \Leftrightarrow v_b = 10t$

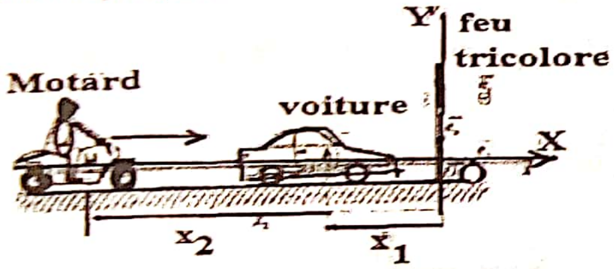
Profondeur $h' = 5(10)^2 = 500\,m/s$

Vitesse $v = 10(10) = 100\,m/s$.

b) Temps après le lâcher perçoit on le bruit du choc au fond du puits : $\theta = 10 + \frac{h'}{v_{air}} = 10 + \frac{500}{340} = 11{,}47\,s$.

<u>Exercice 15 :</u> Une voiture A est arrêtée sur une route horizontale rectiligne à une distance d_1=3 m d'un feu rouge. Lorsque le feu passe au vert, à l'instant t=0, la voiture démarre avec une accélération constante a_1=3 m /s². Au même moment un motard M roulant à une vitesse constante v_2=54 km/h se trouve à une distance d_2=24 m de la voiture. La voiture et le motard considérés comme des points matériels sont repérée à l'instant t à l'aide de leurs vecteurs positions respectifs $\overrightarrow{OA} = x_1\vec{\imath}$ et $\overrightarrow{OM} = x_2\vec{\imath}$. On choisira comme origine O des abscisses la position du feu tricolore.

1) Déterminer les équations horaires $x_1(t)$ et $x_2(t)$ de la voiture et du motard respectivement.
2) Déterminer les instants des dépassements ainsi que les positions de la voiture et du motard à ces instants.
3) Si le motard roulait à la vitesse v_2=36 km/h pourrait-il rattraper la voiture ?
4) a) Calculer, dans ce cas, l'instant pour lequel la distance qui sépare le motard de la voiture est minimale.



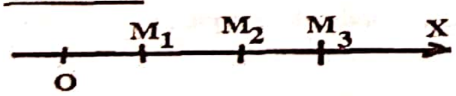
b) En déduire cette distance.
c) Quelle est la vitesse minimale v_{min} du motard à partir de laquelle il pourra rattraper la voiture ?

<u>Correction :</u> $v_2 = \frac{54}{3,6} = 15\,m/s$

1) Equation horaire $x_1(t)$ de la voiture
$x_1 = \frac{1}{2}a_1(t - t_{01})^2 + v_{01}(t - t_{01}) + x_{01}$ or $a_1 = 3\,m.s^{-2}$; à $t_{01} = 0\,s$ on a $x_{01} = -3\,m$ et $v_{01} = 0$ donc l'équation horaire $x_1(t)$ de la voiture est $x_1 = 1,5t^2 - 3$.
Equation horaires $x_2(t)$ du motard
$x_2 = \frac{1}{2}a_2(t - t_{02})^2 + v_{02}(t - t_{02}) + x_{02}$ or $a_2 = 0\,m.s^{-2}$; à $t_{02} = 0\,s$ on a $x_{02} = -27\,m$ et $v_{02} = v_2 = \frac{54}{3,6} = 15\,m/s$
donc l'équation horaire $x_2(t)$ du motard est $x_2 = 15t - 27$.
2) $x_1 = x_2 \Leftrightarrow 1,5t^2 - 15t + 24 = 0$
$\Delta = b^2 - 4ac = (-15)^2 - 4(1,5)(24) = 81 = 9^2$ Alors il y aura la rencontre si $\Delta \geq 0$ et $t > 0$.
Les instants des dépassements sont :
$t_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{15-9}{3} = 2\,s$ et $t_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{15+9}{3} = 8\,s$.
Les positions de la voiture et du motard à ces instants
$x_1 = 15 \times t_1 - 27 = 3\,m$ et $x_2 = 15 \times t_2 - 27 = 93\ m$.
3) $v_2 = \frac{36}{3,6} = 10\,m/s$ donc la nouvelle équation horaire $x_2(t)$ du motard est $x_2 = 10t - 27$.
$x_1 = x_2 \Leftrightarrow 1,5t^2 - 10t + 24 = 0$
$\Delta = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4(1,5)(24) = -44$ alors le motard ne pourrait pas rattraper la voiture avec la vitesse v_2=36 km/h.
4) a) $x = x_1 - x_2 = 1,5t^2 - 10t + 24$
La distance qui sépare le motard de la voiture est minimale ssi $\frac{dx}{dt} = \frac{d(1,5t^2-10t+24)}{dt} = 3t - 10$. Alors son instant est :
$\frac{dx}{dt} = 3t - 10 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{10}{3} = 3,34\,s$
b) $d_{1min} = 1,5(3,34)^2 - 10(3,34) + 24 = 7,34\,m$
c) $1,5t^2 - vt + 24 = 0$,
$\Delta = b^2 - 4ac = (-v)^2 - 4(1,5)(24) = v^2 - 144$
Alors il y aura la rencontre si $\Delta \geq 0$ et $t > 0$.
$v^2 - 144 \geq 0 \Leftrightarrow v^2 \geq 144 \Leftrightarrow v \geq \pm\sqrt{144} = \pm 12\,m/s$

<u>Exercice 16 :</u> **1) Sur un axe $(O;\vec{\imath})$ un véhicule d'accélération constance part à $t_0 = 0\,s$ du point M_0 pour M_1 ($t_1 = 3\,s$, $\overrightarrow{OM_1} = 59\vec{\imath}$ et $\overrightarrow{v_1} = 6\vec{\imath}$.) puis arrive ensuite au point M_2 ($x_2 = 150\,m$ et $\overrightarrow{v_2} = 20\vec{\imath}$.).**
a) Etablir l'équation horaire du mouvement du véhicule.
b) Calculer l'instant t_2 au point M_2.
c) A $20\,s$, calculer la longueur du trajet effectué par le véhicule pendant la phase accélération.
2) A la date $\Delta t = 1\,s$, une moto se déplaçant sur la même droite à la vitesse constante $\vec{v}' = 20\vec{\imath}$ passe par le point M' d'abscisse $\overrightarrow{OM'} = -5\vec{\imath}$. Pendant une durée fixée à 20 s, la moto va d'abord dépasser le véhicule, ensuite le véhicule va rattraper la moto. Déterminer :
a) L'équation horaire du mouvement de la moto.
b) Les dates de dépassement.
c) Les abscisses de dépassement.
d) La vitesse du véhicule au moment il rattrape la moto.
e) la distance d parcourue par la moto entre les dates Δt et la date où elle dépasse le véhicule.

<u>**Correction :**</u>



1) a) Etablir l'équation horaire du mouvement du véhicule.
$x_v = \frac{1}{2}a_v(t - t_0)^2 + v_{0v}(t - t_0) + x_{0v}$ or $t_0 = 0\,s$;
$v_2^2 - v_1^2 = 2a_v(x_2 - x_1) \Leftrightarrow a_v = \frac{20^2-6^2}{2(150-59)} = 2\,m/s^2$;
$v_v = a_v t + v_{0v} \Leftrightarrow v_1 = a_v t_1 + v_{0v} \Leftrightarrow v_{0v} = v_1 - a_v t_1 = 0$
$x_v = \frac{1}{2}a_v t^2 + x_{0v} \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{2}a_v t_1^2 + x_{0v} \Leftrightarrow x_{0v} = 50\,m$
DONC l'équation horaire du véhicule. $x_v = t^2 + 50$
b) Calculer l'instant t_2 au point M_2.
$$x_v = t_2^2 + 50 = 150 \Leftrightarrow t_2 = \sqrt{100} = 10\,s$$
c) A l'instant $t = 20\,s$ alors $x_{20} = (20)^2 + 50 = 450\,m$
La longueur du trajet effectué par le véhicule pendant la phase accélération est $\ell = x_{20} - x_{0v} = 450 - 50 = 400\,m$.
2) a) L'équation horaire du mouvement de la moto.
$x_m = \frac{1}{2}a_m(t - \Delta t)^2 + v_{0m}(t - \Delta t) + x_{0m}$ or $a_m = 0$;
$v_{0m} = v' = 20\,m/s$ et $x_{0m} = -5\,m$.
Donc l'équation horaire de la moto est $x_m = 20t - 25$.
b) $x_v = x_m \Leftrightarrow t^2 - 20t + 75 = 0$
$\Delta = b^2 - 4ac = (-20)^2 - 4(1)(75) = 100 = 10^2$
Les dates de dépassement sont :
$t_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{20-10}{2} = 5\,s$ et $t_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{20+10}{2} = 15\,s$.
Pendant une durée fixée à 20 s, la moto va d'abord dépasser le

véhicule à l'instant $t_1 = 5\ s$, ensuite le véhicule va rattraper la moto à l'instant $t_2 = 15\ s$.

c) Les abscisses de dépassement.

A l'instant $t = 5\ s$ alors $x_5 = (5)^2 + 50 = 75\ m$

A l'instant $t = 15\ s$ alors $x_{15} = (15)^2 + 50 = 275\ m$

d) La vitesse du véhicule au moment il rattrape la moto.

$$v_v = 2t \Leftrightarrow v_v(15) = 2 \times 15 = 30\ m/s$$

e) A l'instant $t = 5\ s$ alors $x_5 = 20(5) - 25 = 75\ m$

La distance parcourue par la moto entre les dates Δt et la date où elle dépasse le véhicule : $d = x_5 - x_{0m} = 75 + 5 = 80\ m$.

Exercice 17 : **Sur une autoroute d'axe (x'Ox) de repère$(O; \vec{i})$, une voiture en déplacement décrit une trajectoire rectiligne. Elle démarre à l'instant $t_0 = 0$ s et x_0 différent de 0 au point M_0, ensuite elle se trouve à l'instant $t_1 = 1\ s$ au point M_1 d'abscisse $x_1 = 2,5\ m$ avec $v_1 = 2\ m/s$ puis elle se trouve au point M_2 à l'instant $t_2 = 2,5$ s d'abscisse $x_2 = 10\ m$ avec $v_2 = 8\ m/s$.**

1) Sachant que la voiture a un mouvement rectiligne uniformément varié, calculer son accélération.
2) Déterminer la valeur de l'abscisse x_0 et la vitesse initiale du point M_0 de départ.
3) Montrer que la loi horaire est $x_v = 2t^2 - 2t + 2,5$.
4) Calculer l'abscisse x_3 de la voiture à l'instant t_3 où son mouvement change de sens.
5) A la date θ, une moto se déplace sur la même autoroute à la vitesse constante v'. La moto passe par le point M'_1 à la date t_1 d'abscisse $x'_1 = 35,5\ m$ puis au point M'_2 à la date t_2 d'abscisse $x'_2 = 28,75\ m$.
a) Déterminer l'équation horaire de la moto.
c) Montrer que l'abscisse du croisement est 23,125 m.

Correction : 1) l'accélération : $a_v = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2(x_2 - x_1)}$

$a_v = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{8-2}{2,5-1} = 4\ m/s^2$.

2) Calculons à t_0 la vitesse initiale : v_{0v}

$v_v = a_v t + v_{0v} \Leftrightarrow v_1 = a_v t_1 + v_{0v} \Leftrightarrow$

$v_{0v} = v_1 - a_v t_1 = 2 - 4 \times 1 = -2\ m/s$.

Calculons à t_0 l'abscisse initiale : x_{0v}

$x_v = \frac{1}{2} a_v t^2 + v_{0v} t + x_{0v} \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{2} a_v t_1^2 + v_{0v} t_1 + x_{0v}$

$\Leftrightarrow x_{0v} = x_1 - \frac{1}{2} a_v t_1^2 - v_{0v} t_1 = 2,5 - 2 + 2 = 2,5\ m$

3) Montrer que la loi horaire est $2t^2 - 2t + 2,5 = 0$.

$x_v = \frac{1}{2} a_v t^2 + v_{0v} t + x_{0v} = 2t^2 - 2t + 2,5$.

4) $x_v = 2t^2 - 2t + 2,5 \Leftrightarrow v_v = 4t - 2$ alors la voiture à change de sens si $v_v = 0 \Leftrightarrow 4t_3 - 2 = 0 \Leftrightarrow t_3 = 0,5\ s$.

L'abscisse est $x_3 = 2t_3^2 - 2t_3 + 2,5 = 2\ m$.

5) a) $x_M = \frac{1}{2} a_M (t - t_{0M})^2 + v_{0M}(t - t_{0M}) + x_{0M}$

Ou bien $x_M = v_{0M} t + x_{0M}$

Calculons la vitesse initiale v_{0M} et l'abscisse initiale x_{0M}

$v_{0M} = \frac{x'_2 - x'_1}{t_2 - t_1} = \frac{28,75 - 35,5}{2,5 - 1} = -4,5\ m/s$.

$x'_1 = 35,5 = v_{0M} t_1 + x_{0M} \Leftrightarrow x_{0M} = 35,5 - v_{0M} t_1 = 40\ m$

L'équation horaire de la moto est $x_M = -4,5t + 40$

b) $x_v = x_M \Leftrightarrow 2t^2 + 2,5t - 37,5 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (2,5)^2 - 4(2)(-37,5) = 306,25$.

$t_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2,5 - 17,5}{4} < 0 \quad t_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2,5 + 17,5}{4} = 3,75\ s$

L'abscisse du croisement est :

$x(3,75) = -4,5(3,75) + 40 = 23,125\ m$.

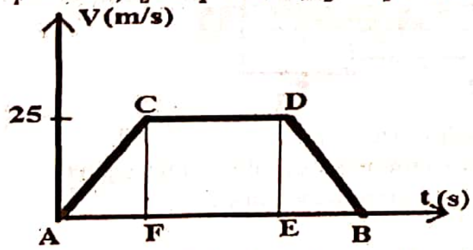
Exercice 18 : **Un bus de la compagnie Sonef quitte l'arrêt A pour un autre arrêt B. A la date $t_0 = 0\ s$, le bus quitte l'arrêt A sans vitesse initiale. Après un parcours de 150 m, sa vitesse atteint 90 km/h. Le conducteur garde cette vitesse jusqu'à la date $t_1 = 30\ s$. Après cet instant, le chauffeur entame un freinage jusqu'à l'arrêt complet du bus à l'arrêt B à l'instant 2, 38 s.**

1) Montrer que la durée de la première phase est 12 s.
2) Déterminer les autres accélérations de chaque phase.
3) Donner l'équation horaire de chaque phase.
4) Calculer la durée totale entre les points A et B.
5) Calculer la distance AB.

Correction : $v_{max} = 90\ km/h = 25\ m/s$

$v_A = 0$; $v_C = v_D = v_{max}$; $t_A = t_0 = 0\ s$

$t_F = 12\ s$; $t_E = t_1 = 30\ s$; $t_B = t_1 + 2,38 = 32,38\ s$



1) Montrer que la durée de la première phase est 12 s

1ère phase : le parcours AC, $t \in [0; 12]$

$a_1 = \frac{v_C^2 - v_A^2}{2(x_C - x_A)} = \frac{25^2}{2 \times 150} = 2,083\ m.s^{-2}$ on sait que $a_1 = \frac{v_C - v_A}{t_C - t_A}$

alors $t_C - t_A = \frac{v_C - v_A}{a_1} = \frac{v_C}{a_1} = t_C = \frac{25}{2,083} = 12\ s$

2) accélération de chaque phase : $a_v = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2(x_2 - x_1)}$

2ème phase : le parcours CD, $t \in [12 ; 30]$

$a_2 = \frac{v_D - v_C}{t_D - t_C} = \frac{25 - 25}{30 - 12} = 0\ m.s^{-2}$

3ème phase : le parcours DB, $t \in [30; 32,38]$

$a_3 = \frac{v_B - v_D}{t_B - t_D} = \frac{-v_D}{32,38 - 30} = \frac{-25}{2,38} = \frac{-25}{2,38} = -10,5\ m.s^{-2}$

3) Donner l'équation horaire de chaque phase.

1ère phase : le parcours AC, $t \in [0; 12]$ or $x_{01} = 0\ m$

$x_1 = \frac{1}{2} a_1 (t - t_A)^2 + v_{01}(t - t_A) + x_{01} = 1,0415t^2$

2ème phase : le parcours CD, $t \in [12; 30]$

$x_{02} = x_1(12) = 1,0415(12)^2 = 149,97 = 150\ m$

$v_{02} = v_C = v_{max} = 25\ m/s$ et $a_2 = 0$

$x_2 = \frac{1}{2} a_2 (t - t_C)^2 + v_{02}(t - t_C) + x_{02} = 25(t - 12) + 150$

$x_2 = 25t - 150$

<u>3ème phase :</u> le parcours DB, $t \in [30; 32{,}38]$

$x_{03} = x_2(30) = 25(30) - 150 = 600\ m$

$v_{03} = v_D = v_{max} = 25\ m/s$ et $a_2 = -10{,}5\ m.s^{-2}$

$x_3 = \frac{1}{2}a_3(t - t_D)^2 + v_{03}(t - t_D) + x_{03}$

$x_3 = -5{,}25(t - 30)^2 + 25(t - 30) + 600$

$x_3 = -5{,}25t^2 + 340t - 4875$

4) Calculer la durée totale entre les points A et B.

$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3 =$

$\Delta t = (12 - 0) + (30 - 12) + (32{,}38 - 30) = 32{,}38\ s$

5) Calculer la distance AB.

Le bus effectue le parcours ACDB qu'on illustre ici

ACF Triangle rectangle en F : $d_1 = \frac{12 \times 25}{2} = 150\ m$

CDEF Rectangle : $d_2 = 18 \times 25 = 450\ m$

DBE Triangle rectangle en E : $d_3 = \frac{2{,}38 \times 25}{2} = 59{,}5\ m$

La distance totale est $D = d_1 + d_2 + d_3 = 659{,}5\ m$

<u>Exercice 19 :</u> Un bus effectue une liaison entre deux stations A et B distant de $d = 900$ m. Le bus démarre de la station A avec une accélération constante $a_1 = 0{,}4\ m/s^2$. Au bout d'une durée t_1, jugent sa vitesse suffisante pour pouvoir atteindre la station B, il coupe définitivement le moteur, ce qui ralentit le mouvement avec une décélération constante de valeur $a_2 = -0{,}1\ m/s^2$.

1) Exprimer la durée t_1 en fonction de a_1, a_2 et t_2.

2) Exprimer la durée t_2 en fonction de a_1, a_2 et d.

3) Montrer que les durées $t_1 = 30\ s$ et $t_2 = 120\ s$ des deux phases du parcours.

4) Montrer que les distances $d_1 = 180\ m$ et $d_2 = 720\ m$ des deux phases du parcours.

5) Déterminer la vitesse maximale v_{max} et la vitesse moyenne v_{moy} entre les deux stations.

<u>Correction :</u> $d = 900$ m ; $a_1 = 0{,}4\ m/s^2$; $a_2 = 0{,}1\ m/s^2$

On suppose que $t_0 = 0$ et $x_0 = 0$.

<u>1ère phase :</u> $t \in [0; t_1]$

$x_1 = \frac{1}{2}a_1(t - t_{01})^2 + v_{01}(t - t_{01}) + x_{01} = \frac{1}{2}a_1 t^2$

$v_1 = a_1(t - t_{01}) + v_{01} = a_1 t$

$v_1^2 - v_{01}^2 = 2a_1(x_1 - x_{01})$ OU $v_1^2 = 2a_1 x_1 \Leftrightarrow v_1 = \sqrt{2a_1 x_1}$

Donc $v_1 = a_1 t = \sqrt{2a_1 x_1} = \sqrt{2a_1 d_1}$

A l'instant t_1 alors $x_1(t_1) = \frac{1}{2}a_1 t_1^2 \Leftrightarrow v_1(t_1) = a_1 t_1$

Donc $v_1(t_1) = a_1 t_1 = \sqrt{2a_1 x_1} = \sqrt{2a_1 d_1}$

<u>2ème phase :</u> $t \in [t_1 ; t_1 + t_2]$, Or au point B, $v_2 = 0$

$x_2 = \frac{1}{2}a_2(t - t_{02})^2 + v_{02}(t - t_{02}) + x_{02} = \frac{1}{2}a_2 t^2 + v_1 t$

$v_2 = a_2(t - t_{02}) + v_{02} = a_2 t + v_1 \Leftrightarrow v_1 = -a_2 t$

$v_2^2 - v_{02}^2 = 2a_2(x_2 - x_{02})$ ou bien

$-v_1^2 = 2a_2 d_2 \Leftrightarrow v_1 = \sqrt{-2a_2 d_2}$

Donc $v_1 = -a_2 t = \sqrt{-2a_2 d_2}$

A l'instant t_2 alors $x_2(t_2) = \frac{1}{2}a_1 t_2^2 + a_1 t_1 t_2 \Leftrightarrow$

$v_1 = -a_2 t_2 = \sqrt{-2a_2 d_2}$

1) Exprimer la durée t_1 en fonction de a_1, a_2 et t_2.

$v_1 = -a_2 t_2 = a_1 t_1 \Leftrightarrow t_1 = -\frac{a_2}{a_1}t_2$

2) Exprimer la durée t_2 en fonction de a_1, a_2 et d.

$v_1 = -a_2 t_2 = a_1 t_1 = \sqrt{2a_1 d_1} = \sqrt{-2a_2 d_2}$

$t_1 = -\frac{a_2}{a_1}t_2 \Leftrightarrow t_2 = -\frac{a_1}{a_2}t_1$

$a_1 t_1 = \sqrt{2a_1 d_1} \Leftrightarrow t_1 = \frac{\sqrt{2a_1 d_1}}{a_1} = \sqrt{\frac{2d_1}{a_1}} = \sqrt{\frac{2(d - d_2)}{a_1}}$

Donc $t_2 = -\frac{a_1}{a_2}t_1 = -\frac{a_1}{a_2}\sqrt{\frac{2(d - d_2)}{a_1}} = -\frac{1}{a_2}\sqrt{2a_1(d - d_2)}$

Or $v_1 = -a_2 t_2 = \sqrt{-2a_2 d_2} \Leftrightarrow d_2 = -\frac{1}{2}a_2 t_2^2$,

Donc $t_2 = -\frac{1}{a_2}\sqrt{2a_1\left(d + \frac{1}{2}a_2 t_2^2\right)}$

$\Leftrightarrow a_2^2 t_2^2 = 2a_1 d + a_1 a_2 t_2^2 \Leftrightarrow t_2 = \sqrt{-\frac{2a_1 d}{a_1 a_2 - a_2^2}}$

3) Montrer que les durées $t_1 = 30\ s$ et $t_2 = 120\ s$ des deux phases du parcours.

$t_2 = \sqrt{-\frac{2a_1 d}{a_1 a_2 - a_2^2}} = \sqrt{-\frac{2(0{,}4) \times 900}{0{,}4 \times (-0{,}1) - (-0{,}1)^2}} = \sqrt{\frac{720}{0{,}05}} = 120\ s$

$t_1 = -\frac{a_2}{a_1}t_2 = -\frac{-0{,}1}{0{,}4} \times 120 = 30\ s.$

4) Montrer que les distances $d_1 = 180\ m$ et $d_2 = 720\ m$ des deux phases du parcours.

$v_1 = -a_2 t_2 = a_1 t_1 = \sqrt{2a_1 d_1} = \sqrt{-2a_2 d_2}$ ou bien

$d_1 = \frac{1}{2}a_1 t_1^2 = \frac{1}{2}(0{,}4)(30)^2 = 180\ m$

$d_2 = -\frac{1}{2}a_2 t_2^2 = -\frac{1}{2}(-0{,}1)(120)^2 = 720\ m$

5) Déterminer la vitesse maximale v_{max} et la vitesse moyenne v_{moy} entre les deux stations.

$v_{max} = v_1 = -a_2 t_2 = -(-0{,}1)(120) = 12\ m/s$

$v_{moy} = \frac{d}{t_1 + t_2} = \frac{900}{150} = 6\ m/s.$

<u>Exercice 20 :</u> Sur une portion rectiligne ABCD de voie ferrée où s'effectuent des travaux. Un train arrivant en A avec une vitesse de module égal à 54 km/h à la marche suivante : De A à B tel que AB = 125 m, un mouvement uniformément retardé réduisant la vitesse en B à la valeur de 36 km/h; De B à C, pendant 1 minute, un mouvement uniforme ; De C à D, le mouvement uniformément accéléré tel que la vitesse reprenne la valeur de 54 km/h en 20 s. En prenant pour origine des abscisses le point A, pour sens positif, le sens de la marche et pour instant initial t = 0 l'instant du passage en A.

1) Calculer la vitesse maximale v_{max} du train. Déterminer l'accélération de chaque phase.

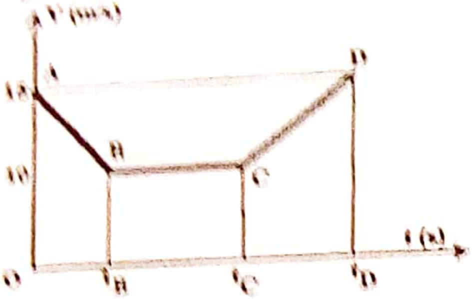
2) Calculer la durée totale de la monte $t = t_1 + t_2 + t_3$ où t_1, t_2 et t_3 sont les durées respectives des trois phases.

3) Etablir les équations horaires des mouvements, les vitesses et la nature du mouvement de chaque phase.

4) Calculer la longueur parcourue par le train.

<u>Correction :</u> $v_A = 54\ km/h = 15\ m/s$; $AB = 125\ m$;

$v_B = 36\ km/h = 10\ m/s$;



1) la vitesse maximale $v_{max} = v_A = 15\ m/s$.

L'accélération de chaque phase :

<u>1ère phase :</u> le parcours AB, $t \in [t_A ; t_B]$

$$a_1 = \frac{v_B^2 - v_A^2}{2(x_B - x_A)} = \frac{10^2 - 15^2}{2 \times 125} = -0{,}5\ m.s^{-2}$$

<u>2ème phase :</u> le parcours BC, $t \in [t_B ; t_C]$

$$a_2 = \frac{v_C - v_B}{t_C - t_B} = \frac{10 - 10}{60} = 0\ m.s^{-2}$$

<u>3ème phase :</u> le parcours CD, $t \in [t_C ; t_D]$

$$a_3 = \frac{v_D - v_C}{t_D - t_C} = \frac{15 - 10}{20} = 0{,}25\ m.s^{-2}$$

2) $v_B = a_1 t_{AB} + v_A \Leftrightarrow t_{AB} = t_1 = \frac{v_B - v_A}{a_1} = 10\ s$.

$t_2 = t_{BC} = 60\ s$ et $t_3 = t_{CD} = 20\ s$.

La durée totale de la monte $t = t_1 + t_2 + t_3 = 90\ s$.

3) L'équation horaire de chaque phase.

$x_i = \frac{1}{2} a_i (t - t_{0i})^2 + v_{0i}(t - t_{0i}) + x_{0i}$;

$v_i = a_i (t - t_{0i}) + v_{0i}$ et $v_{1i}^2 - v_{0i}^2 = 2a_i(x_{1i} - x_{0i})$

<u>1ère phase :</u> le parcours AB, $t \in [0; 10]$ Or $t_{01} = 0\ s$

$a_1 = -0{,}5\ m.s^{-2}$, $v_{01} = v_A = 15\ m/s$ et $x_{01} = x_A = 0\ m$

DONC $x_1 = -0{,}25(t-0)^2 + 15(t-0) + 0$

$x_1 = -0{,}25t^2 + 15t \Leftrightarrow v_1 = -0{,}5t + 15$

Nature du mouvement à $t \in [0; 10]$

Le produit scalaire est $\overrightarrow{a_1}.\overrightarrow{v_1} = a_1 v_1 = 0{,}25t - 7{,}5$

Posons $\overrightarrow{a_1}.\overrightarrow{v_1} = 0 \Leftrightarrow 0{,}25t - 7{,}5 = 0 \Leftrightarrow t = 30 \notin [0; 10]$

$\forall t \in [0; 10]$ alors $\overrightarrow{a_1}.\overrightarrow{v_1} < 0$, donc le train effectue un mouvement rectiligne retardé.

<u>2ème phase :</u> le parcours BC, $t \in [10 ; 70]$

$x_2 = \frac{1}{2} a_2 (t - t_{02})^2 + v_{02}(t - t_{02}) + x_{02}$ or $t_{02} = t_B = 10\ s$

$a_2 = 0$; $v_{02} = v_1(10) = 10\ m/s$ et $x_{02} = x_1(10) = 125\ m$

DONC $x_2 = 10(t - 10) + 125 = 10t - 25$

$v_2 = a_2(t - t_{02}) + v_{02} = v_1(10) = 10\ m/s$

Nature du mouvement à $t \in [10 ; 70]$

Le produit scalaire est $\overrightarrow{a_2}.\overrightarrow{v_2} = a_2 v_2 = 0(10) = 0$

$\forall t \in [10 ; 70]$ alors $\overrightarrow{a_1}.\overrightarrow{v_1} = 0$, donc le train effectue un mouvement rectiligne uniforme.

<u>3ème phase :</u> le parcours CD, $t \in [70; 90]$

$x_3 = \frac{1}{2} a_3 (t - t_{03})^2 + v_{03}(t - t_{03}) + x_{03}$ or $t_{03} = t_C = 90\ s$

$a_3 = 0{,}25\ m.s^{-2}$; $v_{03} = v_2(70) = 10\ m/s$ et

$x_{03} = x_2(70) = 675\ m$

DONC $x_3 = 0{,}125(t - 70)^2 + 10(t - 70) + 675$

$v_3 = a_3(t - t_{03}) + v_{03} = 0{,}25t - 7{,}5$

Nature du mouvement à $t \in [70; 90]$

Le produit scalaire est $\overrightarrow{a_3}.\overrightarrow{v_3} = a_3 v_3 = 0{,}0625t - 1{,}875$

Posons $\overrightarrow{a_1}.\overrightarrow{v_1} = 0 \Leftrightarrow 0{,}0625t - 1{,}875 = 0 \Leftrightarrow$

$t = 30 \notin [0; 10]$

$\forall t \in [70; 90]$ alors $\overrightarrow{a_1}.\overrightarrow{v_1} > 0$, donc le train effectue un mouvement rectiligne accéléré.

4) Calculer la longueur parcourue par le train.

$AD = x_3(90) = 0{,}125(90 - 70)^2 + 10(90 - 70) + 675$

$$AD = 925\ m$$

<u>Exercice 21 :</u> Les coordonnées du vecteur accélération d'un mobile sont $\vec{a}(0, -3, 0)$. A l'instant $t = 0$, le mobile est en M_0 (1, 2, 0) et son vecteur vitesse initiale est $\vec{v}_0$ (1, 1, 0).

1) Déterminer les équations horaires du mouvement et montrer qu'il est plan.

2) En déduire l'équation de la trajectoire.

<u>**Correction :**</u> $\vec{a}\left|\begin{array}{l} a_{0x} = 0 \\ a_{0y} = -3 \\ a_{0z} = 0 \end{array}\right.$, $M_0\left|\begin{array}{l} x_{M_0} = 1 \\ y_{M_0} = 2 \\ z_{M_0} = 0 \end{array}\right.$; $\vec{v}_0\left|\begin{array}{l} v_{0x} = 1 \\ v_{0y} = 1 \\ v_{0z} = 0 \end{array}\right.$

1) Les équations horaires du mouvement

A l'instant t, $\overrightarrow{OG}\left|\begin{array}{l} x = \frac{1}{2} a_x t^2 + v_{0x} t + x_{M_0} = t + 1 \\ y = \frac{1}{2} a_y t^2 + v_{0y} t + y_{M_0} = -1{,}5t^2 + t + 2 \\ z = \frac{1}{2} a_z t^2 + v_{0z} t + z_{M_0} = 0 \end{array}\right.$

$z = 0$, le mouvement est plan $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ contenant $\vec{v}_0$.

2) Equation de la trajectoire :

$x = t + 1 \Leftrightarrow t = x - 1$

$y = -1{,}5(x - 1)^2 + (x - 1) + 2 = -1{,}5x^2 + 3x - 0{,}5$.

D'après Abû Hamza Anas ibn Mâlik -qu'Allâh l'agrée-, le Prophète -sallâ l-Lahû 'aleyhi wa sallam- a dit : « Aucun de vous ne croira jusqu'à ce qu'il aime pour son frère ce qu'il aime pour lui-même ».

Ibn Mas„ud -qu'Allâh l'agrée- a dit : « L'Envoyé d'Allah -sallâ l-Lahû 'aleyhi wa sallam- a dit : « Le sang du musulman est interdit, sauf en trois cas : le marié qui commet l'adultère, l'auteur d'un homicide volontairement, et le renégat qui délaisse la communauté ». »

Exercice 21 : La position d'un mobile est donnée par $\overrightarrow{OM} = (3t^2 - 4)\vec{i} + (t^2 + 2)\vec{j}$ où $t \geq 0$. Déterminer :

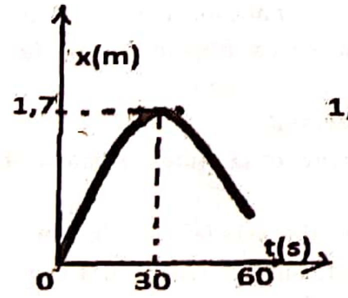
1) Les équations paramétriques du mouvement.
2) L'équation cartésienne de la trajectoire. En déduire la nature du mouvement.
3) Les intervalles de temps pendant lesquels le mouvement est retardé puis accéléré entre $t \in [0; 10]$.
4) Exprimer le vecteur vitesse $\vec{v}$ et le vecteur accélération $\vec{a}$ dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
5) Donner les caractéristiques (composantes et modules) des vecteurs vitesse et accélération du mobile M à l'instant t. Application numérique pour $t = 3\ s$.
6) Déterminer l'accélération du mobile aux points A et B d'abscisses respective $x_A = 2\ m$ et $x_B = 4\ m$.

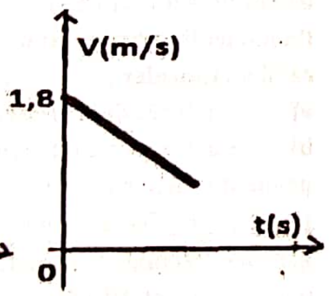
Exercice 22 : Un point matériel M est animé d'un mouvement circulaire uniforme. Sa vitesse angulaire est donnée par $\omega = 5\ rad/s$. Déterminer :

1) La période et la fréquence de son mouvement.
2) Son accélération si le rayon de sa trajectoire était $r = 2,5\ m$.

Exercice 23 : Les composantes du vecteur accélération d'un point mobile sont $\vec{a}(0, -3, 0)$. A l'instant $t = 0$, le mobile est en M_0 (1, 2, 0) et son vecteur initial est $\vec{v}_0(1, 1, 0)$.
1. Montrer que le mouvement est plan.
2. Donner les équations horaires du mouvement.
3. En déduire l'équation de la trajectoire.

Exercice 24 : On donne l'équation horaire d'un mobile M par rapport au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$: $x = 2 + A\cos\omega t$ et $y = 1 + A\sin\omega t$ avec A=10 cm et ω=10rad/s.





1) Montrer que la valeur de la vitesse du mobile est constante et la calculer.
2) Montrer que la valeur de son accélération est constante et la calculer. Quels sont la direction et le sens du vecteur accélération ?
3) Quelle est la trajectoire du mobile ? Que représente A ?

Exercice 25 : Les équations paramétriques du mouvement d'un point matériel M lancé dans l'espace sont :

$$M\begin{cases} x = 2t \\ y = 0 \\ z = -5t^2 + 4t \end{cases}$$

1) Donner l'équation cartésienne de la trajectoire. Quelle est sa nature ?

2) Déterminer les composantes du vecteur vitesse $\vec{v}$ ainsi que le vecteur accélération du mobile : $\vec{a}$

a) Lorsque ce point passe par le sommet de sa trajectoire
b) Lorsque ce point rencontre le plan z = 0
c) à la date t = 0s.

Exercice 26 : Un point M d'un solide est animé d'un mouvement circulaire uniforme : Il décrit une trajectoire circulaire de rayon $R = 20\ cm$ à raison de $2400\ tr/min$.

1) a) Exprimer en fonction de N, en unités S.I : la fréquence et la période du mouvement et la vitesse angulaire du point M.
b) Exprimer en fonction de N et de R la vitesse linéaire et l'accélération du point M.
2) Déterminer numériquement :
a) La fréquence et la période et la vitesse angulaire ;
b) La vitesse linéaire et l''accélération du point M.

Exercice 27 : Les équations paramétriques du mouvement d'un solide se déplaçant dans un plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ sont : $x=3t$ et $y=-4t^2+5t$. On utilise les unités internationales.
1) Rechercher l'équation cartésienne de la trajectoire.
2) a) Calculer l'abscisse du mobile lorsque celui-ci repasse par l'ordonnée y=0.
b) Calculer la vitesse en ce point.
3) Déterminer les coordonnées du mobile à l'instant t=4s. Quelle est alors sa vitesse ?
4) Déterminer l'accélération du mobile aux points O, A et B dont les abscisses sont : $x_O=0$; $x_A=2cm$; $x_B=4cm$.

Exercice 28 : Deux mobiles M_1 et M_2 parcourent une droite d'un mouvement uniforme, l'un avec une vitesse de $v_1 = 4\ m/s$, l'autre avec une vitesse de $v_2 = 3\ m/s$ mais en sens contraire du précédent.

1) A quel instant et où se rencontrent-ils, si à l'instant initial, M_1 est à l'abscisse $-12\ m$ et M_2 est à l'abscisse $15\ m$?
2) Evaluer la distance des deux mobiles et étudier la variation de cette distance au cours du temps.

Exercice 29 : La position d'un mobile M se déplaçant dans un plan muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ est déterminé à chaque instant par les équations horaires suivantes :

$$\overrightarrow{OM}\begin{cases} x = 2\cos(2\pi t + \varphi) \\ y = 2\sin(2\pi t + \varphi) \end{cases}$$

1) Déterminer φ sachant qu'à l'instant $t = 0$, le mobile M se trouve au point $M_0 \begin{vmatrix} x_0 = 0\ m \\ y_0 = 2\ m \end{vmatrix}$

2) a) Montrer que la valeur de vitesse du mobile M est constante.

b) Montrer que la valeur d'accélération du mobile M est constante.

c) Déterminer l'équation de la trajectoire du mobile. En déduire la nature du mouvement.

3) a) Montrer que le vecteur accélération et vecteur position sont colinéaires.

b) En déduire le sens du vecteur accélération.

c) Montrer que le vecteur vitesse et vecteur accélération sont orthogonaux.

4) a) Représenter la trajectoire du mobile dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ à l'échelle de votre choix.

b) Placer sur cette trajectoire les positions M_0, M_1, M_2, M_3 du mobile qui correspondent respectivement aux instants : $t_0 = 0\ s, t_1 = 0,25\ s, t_2 = 0,5\ s, t_3 = \frac{2}{3}\ s$.

Exercice 30 : Un mobile décrit une trajectoire circulaire de rayon $r = 2\ m$ à la vitesse angulaire $\dot{\theta} = 2\ rad/s$.
A la date $t = 1\ s$, il est au point A d'abscisse angulaire $\theta = \frac{\pi}{6}\ rad$.

1) Quelle est la relation qui lie l'abscisse angulaire et la date ?
2) Quelle est la vitesse linéaire du mobile ?
3) Quel temps met-il pour effectuer un tour ?

Exercice 31 : Un rotor est animé d'un mouvement circulaire uniformément varié. On donne à la date t, l'accélération angulaire $\ddot{\alpha} = 40\ rad/s^2$ et la vitesse angulaire $\dot{\alpha} = 30\ rad/s$. Déterminer les normes des vecteurs vitesses $\vec{v}$ et accélération $\vec{a}$ d'un point M situé à $10\ cm$ de l'axe du rotor.

Exercice 32 : Un mobile ponctuel se déplace dans un plan P. Son vecteur accélération $\vec{a}$ est constamment perpendiculairement à son vecteur vitesse $\vec{V}$ et le module de $\vec{a}$ reste égal à $32\ m/s^2$.

a) Montrer que le mouvement du mobile est uniforme.
b) Montrer que le mouvement du mobile est circulaire.

c) Sachant que la loi horaire du mouvement, en coordonnée angulaire, est $\theta = 4t + \frac{\pi}{2}$ (t en s ; θ en rad).
Quel est le rayon de la trajectoire du mobile ?
c) Quelle est la période du mouvement ?

Exercice 33 : **Partie A :** Un mobile M décrit une droite O_x d'un mouvement uniforme. A l'instant $t_1 = 2\ s$, il est au point M_1 d'abscisse $-5\ m$, à l'instant $t_2 = 3\ s$, il est au point M_2 d'abscisse $2,5\ m$.

Déterminer l'équation horaire du mobile M.

Partie B : Un mobile M animé d'un mouvement rectiligne uniforme a pour abscisse $+3\ m$ au temps $2\ s$ et $-7,5\ m$ au temps $5\ s$. Déterminer la vitesse du mobile M et l'équation horaire du mobile M.

Exercice 34 : Deux mobiles M_1 et M_2 font la navette entre deux points A et B distants de $120\ m$, l'un avec une vitesse de $v_1 = 6\ m/s$, l'autre avec une vitesse de $v_2 = 4\ m/s$, parcourent une droite d'un mouvement uniforme. En supposant qu'ils partent ensemble.

1) En choisissant l'origine des dates et l'origine des espaces, déterminer les équations horaires des deux mobiles M_1 et M_2 respectives $x_1(t)$ et $x_2(t)$.
2) Déterminer les dates et les abscisses de leurs rencontres.

Exercice 35 : Une automobile de longueur $\ell_1 = 5\ m$, roulant à la vitesse $v_A = 90\ km/s$ arrive derrière un camion de longueur $\ell_2 = 10\ m$, roulant à la vitesse $v_A = 72\ km/s$. Les deux (2) véhicules conservent des vitesses constantes. L'automobile va donc doubler le camion. En admettant que le dépassement commence quand l'avant de l'automobile est à la distance $d_1 = 20\ m$ de l'arrière du camion et se termine quand l'arrière de l'automobile est à la distance $d_2 = 30\ m$ de l'avant du camion. Calculer :

a) La durée du dépassement.
b) La distance parcourue sur la route par l'automobile pendant le dépassement.

Exercice 36 : On lance une bille vers le haut dans une gouttière rectiligne inclinée. Dans un repère $(O;\vec{i})$, le mouvement est défini par : $\vec{a} = 2\vec{i}$; $\vec{v} = -6\vec{i}$; $x_0 = 5\ m$, $t \geq 0s$. L'axe $(x'x, \vec{i})$, parallèle à la gouttière, est orienté vers le bas.

1) Déterminer l'expression de la vitesse algébrique et l'équation horaire du mouvement.
2) En exploitant le diagramme des vitesses :
a) Etudier le mouvement de la bille le long de la gouttière.
b) Calculer la distance parcourue entre 0 s et 5 s.

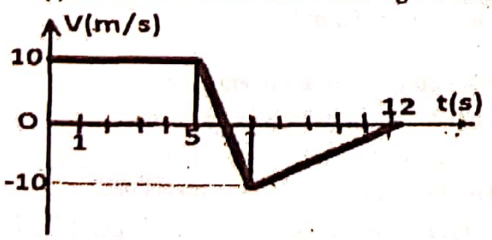
Exercice 37 : Les équations horaires d'un cycliste (A) et d'une automobile (B) sont les suivantes :
$x_A = 5t + 450$ et $x_B = -20t + 150$.
a) Quelle est la position initiale de chacun ?
b) Quelle sont les vitesses et le sens de déplacement ?
c) Y aura-t-il rencontre ? Si oui, déterminer où et quand elle aura lieu.
d) Vérifier graphiquement les résultats.

Exercice 38 : Sur une autoroute rectiligne, un automobiliste roule à 180 km.h^{-1} en mouvement uniforme. Un motard averti par radio démarre à la distance d = 400 m devant la voiture. Les deux mobiles roulent dans le même sens. Son mouvement est uniformément varié et il atteint la vitesse de 100 km.h^{-1} après une durée de 10 s.
1) Déterminer l'accélération du motard.
2) Montrer qu'il existe deux instants pour lesquels les deux véhicules sont côte à côte. Expliquer.

Exercice 39 : Un véhicule A roule à la vitesse constante $v_A = 36\ km/h$ sur une route rectiligne. Un motard B en arrive en sens inverse avec une vitesse $v_B = 72\ km/h$. Le véhicule B constante que A est en infraction. Il freine aussitôt avec une accélération constante de valeur absolue $4\ m/s^2$ puis fait demi-tour pour rattraper A avec la même accélération. On choisit pour origines des espaces et des dates le début du freinage de B.

1) Ecrire l'équation horaire x_A du véhicule A.
2) Le mouvement de B s'effectue en deux phases.
a) Quelle est la valeur de l'accélération dans chaque phase.
b) Ecrire les équations horaires x_{B1} pour la phase 1 et x_{B2} pour la phase 2 du mouvement de B.
3) Calculer la date à laquelle B rattrape A.
4) Calculer l'abscisse de rencontre de A et de B.
5) Calculer la vitesse de B en cet instant.

Exercice 40 : La représentation graphique de la vitesse v = f (t) d'un mobile est donnée à la figure ci-dessous.



1) Calculer les accélérations du mobile au cours des trois phases du mouvement.
2) Tracer la représentation graphique a = g(t) de l'accélération a en fonction du temps, avec $t \in [0; 12]$ en secondes.
3) Calculer l'espace parcouru par le mobile.

Exercice 41 : Au moment où une automobile A (arrêtée) démarre avec une accélération de 2 m/s², une automobile B la dépasse à la vitesse constante de 30 m/s.
a) Où et quand la voiture A dépassera-t-elle la voiture B ?
b) Que vaudra la vitesse de la voiture A à cet instant ?
c) Vérifier graphiquement les résultats obtenus sous a).

Exercice 42 : Une automobile A se déplace à la vitesse constante $v_0 = 72\ km/h$ sur une route rectiligne. Une deuxième automobile B, initialement immobile démarre et se déplace dans le sens de A, d'un mouvement rectiligne uniformément accéléré d'accélération $1\ m/s^2$. Au moment du démarrage l'automobile A se trouve à la distance $d = 150\ m$ derrière B.

1) On choisit l'origine des dates, l'instant où B démarre et l'origine des espaces la position de B à cet instant. Déterminer les équations horaires $x_A(t)$ et $x_B(t)$.
2) Déterminer :
a) Les dates et les abscisses de dépassement.
b) Les vitesses du B à ces instants.

Exercice 43 : Un camion démarre d'un point A et se dirige vers le point B. Il accélère uniformément, a = 0,15 m/s², jusqu'à ce que sa vitesse atteigne 54 km/h. Il conserve alors cette vitesse. En passant devant le point B, le chauffeur constate qu'il s'est écoulé 3 min depuis son départ du point A.
a) Calculer la distance AB.
b) Faire le graphique de sa vitesse en fonction du temps. Echelles imposées : 1 carreau → 10 s ; 1 carreau → 1 m/s.
c) Calculer, en choisissant l'origine au point A, la position du camion toutes les 20 s jusqu'à ce qu'il arrive en B (présenter les résultats des calculs sous forme d'un tableau).

Exercice 44 : Une bille (b) est lancée verticalement vers le haut, à partir d'un point O du repère $(O; \vec{i})$ avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = 20\vec{i}$ et son vecteur accélération $\vec{a} = -10\vec{i}$. Le point O est situé à $2\ m$ du sol.

1) Ecrire la loi horaire du mouvement de (b).
2) Exprimer la vitesse v_x de (b) en fonction de t.
3) Déterminer l'abscisse x_m du point culminant atteint par la bille (b).
4) Déterminer les abscisses x_1 et x_2 des positions de la bille aux instants $t_1 = 1\ s$ et $t_2 = 2\ s$ et leurs vitesses v_{1x} et v_{2x}. Préciser le sens du mouvement de la bille dans les cas.
5) A quelle date et avec quelle vitesse algébrique (b) repasse-t-elle au point O ?

a) Montrer qu''à l'instant $t = 0\ s$, la moto se trouvait au point M d'abscisse $x = -10\ m$.
b) Déduire l'équation horaire de son mouvement dans le repère $(O;\vec{i})$.
c) Déterminer les dates de dépassement puis calculer l'abscisse du 2ème dépassement.

Exercice 51 : Sur une portion rectiligne ABCD de voie ferrée où s'effectuent des travaux, un train arrivant en A avec une vitesse de module égal à 54km/h a la marche suivante :

- De A à B, tel que AB = 125 m, un mouvement uniformément retardé réduisant la vitesse en B à la valeur de 36 km/h
- De B en C, pendant 1 mn un mouvement uniforme
- De C en D, un mouvement uniformément accéléré tel que la vitesse reprenne la valeur de 54 km/h en 20s ;

En prenant pour origine des abscisses le point A, pour sens positif le sens de la marche et pour instant du passage en A.
1) Déterminer les équations horaires des trois phrases et calculer l'espace parcouru de A à D.
2) Tracer les diagrammes de l'espace $x = f(t)$, de la vitesse $v = f'(t)$ et de l'accélération $\delta = f''(t)$ pour l'ensemble des trois phrases.

Exercice 52 : 1) Dans un mouvement rectiligne effectue par le mobile M, les espaces parcourus pendant des intervalles de temps successifs égaux à $0,5\ s$ augmentent chaque fois de $1\ m$.

a) Quelle est l'accélération du mouvement ?
b) Donner l'équation horaire de M sachant qu'au temps $t = 0$ la vitesse est nulle et l'élongation égale à $12\ m$.
c) Exprimer le vecteur position $\overrightarrow{OM}$, le vecteur vitesse $\vec{v}$ et le vecteur accélération $\vec{a}$, dans le repère orthonormé $(O;\vec{i})$.
2) Un second mobile M' se déplace sur la même droite d'un mouvement décéléré dans le sens négatif. Son accélération est $a' = 4\ m/s^2$, sa vitesse s'annule au point d'abscisse $8\ m$ à l'instant $2\ s$.
a) Donner l'équation horaire de M'.
b) A quel instant les mobiles se croiseront-ils ?

Exercice 53 : Deux trains de même longueur L= $150\ m$ roulent sur deux voies parallèles dans un mouvement rectiligne uniforme, l'un à la vitesse de $60\ km/h$ et l'autre à celle de $90\ km/h$.
1) Les trains roulent en sens contraires. Quelle est la durée du croissement ? quelle est alors la distance parcourue par chaque train ?

2) Même questions lorsque les trains roulent dans le même sens.

Exercice 54 : Un point M décrit un cercle de rayon r = 5cm, est repéré par $(\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{OM}) = 0$ (en rad).
Sachant que $\theta = 5t + \frac{\pi}{8}$.

1) En déduire la vitesse angulaire, la fréquence et la période du mouvement.
2) Quel est le mouvement de m, projection de M sur 0x ?
3) Quel est le mouvement de m', projection de M sur (0y) ?
4) Donner l'équation de la trajectoire de M.
5) Quel est le module de la vitesse ? Montrer que $\vec{v}$ et $\overrightarrow{OM}$ sont perpendiculaires. Quelle est la nature du mouvement de M ? 6) Déterminer le vecteur accélération. Quelle est sa direction ?

Exercice 55 : Deux bus se suivent à $28\ m$ l'une de l'autre à la vitesse constante de $86,4\ km/h$. Le premier bus freine avec une décélération de $7,7\ m/s^2$, le second, manquant d'adhérence, avec une décélération de $4,2\ m/s^2$. On suppose que les conducteurs commencent à freiner simultanément.

1) Montrer que les deux bus se heurtent.
2) Déterminer leur vitesse relative au moment du choc.
3) Quelle aurait dû être la décélération minimale du second bus pour éviter le choc ?

Exercice 56 : Deux billes A et B assimilables à des points matériels sont disposées sur une même verticale à $0,4\ m$ l'une de l'autre, A au dessus de B. A l'instant initial $t = 0$, on lâche A sans vitesse initiale. Quand A a parcouru $0,2\ m$, on lâche B sans vitesse initiale.

1) Ecrire les équations horaires des mouvements de A et B en prenant pour origine des espaces et des dates, le point de départ de A.
2) A quel instant le choc entre A et B aura-t-il lieu ?

Exercice 57 : On relève le mouvement d'un mobile M en translation rectiligne d'un repère$(O;\vec{i})$ en phase dont la 1ère dure 30 s.

$t(s)$	0	10	20	30	40	50	100	150
$v(m/s)$	0	4	8	12	11	10	5	0

1) Tracer le graphique $v = f(t)$; échelle $1\ cm$ pour $4\ m/s$ et $1\ cm$ pour $10\ s$. Préciser la nature de chaque phase et leurs équations horaires.
2) Calculer la longueur parcourue par le mobile.
3) Montrer que cette distance est représentée par l'aire de la figure donnée.
4) Quelle est la distance parcourue par le mobile à $t = 60\ s$? Quelle est alors sa vitesse ?

Exercice 58 : Le mouvement rectiligne d'une voiture au démarrage (départ arrêté) peut se décomposer en trois (3) mouvement rectiligne uniformément variés successifs :

- La voiture atteint vitesse de 100 km/h en 10,6 s
- les 400 premiers mètres sont parcourus en 17,3 s ;
- les 1000 premiers mètres sont parcourus en 32,1 s.

Tracer le diagramme du mouvement.

Exercice 59 : Un point M animé d'un mouvement rectiligne part sans vitesse. Le démarrage fait avec une accélération égale à 0,8m/s². Puis le point M, dès qu'il atteint la vitesse 8m/s, parcourt 24m à cette vitesse. Enfin au cours du freinage, M, d'un mouvement uniformément retardé, parcourt 8m jusqu'à l'arrêt.

1) Quelle est la durée du mouvement ?
2) Quelle est la distance parcourue ?
3) Représenter les diagrammes des accélérations, vitesses et espaces.

Exercice 60 : Un train part du repos et se déplace avec une accélération 4 m/s^2 pendant 4 s. Durant les 10 s suivantes, il se déplace d'un mouvement rectiligne uniforme, puis il ralentit avec une décélération de 8 m/s^2 jusqu'à arrêt.

1. Représenter v en fonction du temps t.
2. Calculer la distance parcourue par le train.
3. Montrer que l'aire de la surface délimitée par la courbe et l'axe des temps est la distance totale parcourue.

Exercice 61 : Un train part du repos et se déplace avec une accélération 1 m/s^2 pendant 10 s. On arrête le moteur et, pendant 20 s, on le laisse ralentir en raison de frottements avec une décélération de $5.10^{-2}\ m/s^2$, puis on freine. Le train, animé d'un mouvement uniformément varié, s'arrête au bout de 5 s supplémentaires.

1. Donner les caractéristiques de chaque phase du mouvement du train.
2. Calculer la distance parcourue par le train.
3. Représenter x, v et a en fonction du temps.

Exercice 62 : Deux automobiles se suivent à 28m l'un de l'autre à la vitesse constante de 86,4 km/h. La première voiture freine avec une décélération de 7,7m/s² la seconde, manquant d'adhérence, avec une décélération de 4,2m/s². On suppose que les 2 conducteurs commencent à freiner simultanément.

1) Montrer que les véhicules se heurtent
2) Déterminer leur vitesse relative au moment du choc
3) Quelle aurait dû être, la décélération minimale du second véhicule pour éviter le choc ?

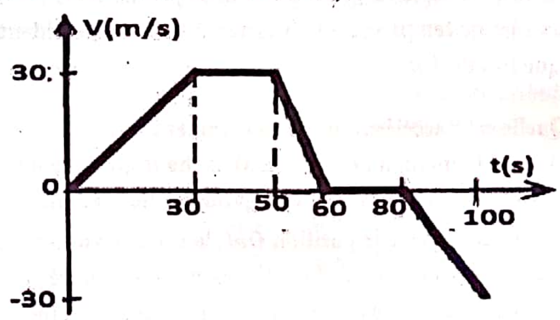
Exercice 63 : Une automobile est en mouvement rectiligne horizontal. Pendant les 25 premières secondes, la vitesse de l'automobile croît de 0 à 20 m.s⁻¹. L'automobile a ensuite un mouvement uniforme puis jusqu'à l'arrêt un mouvement uniformément retardé d'accélération 0,5 ms⁻². La distance totale parcourue par l'automobile est 10 km. Déduire de ces données :

1) Le temps pendant lequel le mouvement est freiné.
2) La distance parcourue à vitesse constante
3) la durée totale du trajet

Exercice 64 : Un bus se déplace sur une droite et part d'un point de A vers un point B, distant de $AB = 0,1\ Km$. Il démarre de la station A avec une accélération constante $a_1 = 2\ m/s^2$. Au bout d'une durée t_1, jugeant sa vitesse suffisante pour atteindre la station B, il coupe le moteur et obtient une décélération constante de valeur absolue $a_2 = 1,5\ m/s^2$.

1) Calculer les durées t_1 et t_2 et les distances d_1 et d_2 deux phases du parcours.
2) Calculer la vitesse maximale v_{max} du bus et sa vitesse moyenne entre les deux stations.

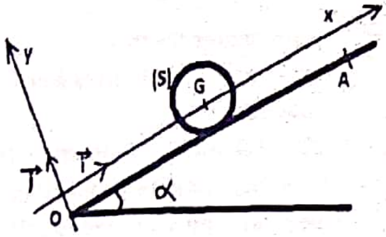
Exercice 65 : I. Sur un axe, un point mobile M est repéré par son abscisse $x = -4t^2 + 6,4t$



A) 1) Quelles sont les coordonnées du vecteur vitesse et du vecteur accélération ?
2) Quelle est la vitesse initiale ?
3) Déterminer les intervalles de temps durant lesquels le mouvement est accéléré ou retardé.
4) Déterminer la position du point de rebroussement.

B) Un véhicule se déplace sur un trajet rectiligne. Sa vitesse est caractérisée par le diagramme ci-contre.
Indiquer sur les 5 intervalles de temps :
1) la valeur algébrique de l'accélération a.
2) l'expression V= f(t).
3) la nature du mouvement.

Exercice 66 : Un solide (S) assimilé à un point matériel, de masse $m = 100\ g$ est lancé à $t = 0$ d'un point O origine du repère $(O;\ \vec{i};\ \vec{j})$, avec une vitesse $\vec{V}_0$ de valeur 8 m/s vers un point A plan incliné faisant un angle $\alpha = 30°$ avec l'horizontale.

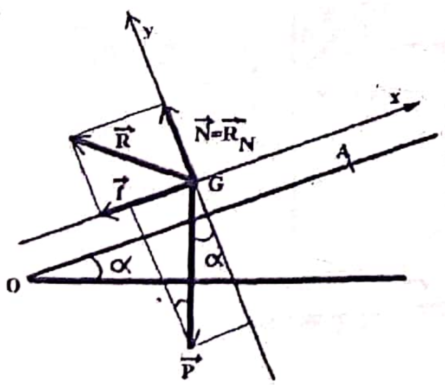


Au cours de sa montée le mobile est soumis à une force de frottement $\vec{f}$ constante et opposée au vecteur vitesse.

1) Représenter sur un schéma clair, les forces appliquées au solide (S).
2) a) En appliquant le théorème du centre d'inertie, exprimer l'accélération a du mouvement.
b) En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, exprimer l'accélération a du mouvement.
c) Donner l'équation horaire du mouvement de (S).
d) En déduire la nature du mouvement du solide (S).
3) La vitesse de (S) s'annule lorsqu'il atteint le point A situé à la distance $d = OA = 10\ m$.
a) Calculer l'accélération a.
b) Déduire l'intensité de la force de frottement $\vec{f}$.
c) Déterminer la durée pour atteindre le point A.

Correction : Un solide (S) de $m = 100\ g$, $\vec{V}_0 = 8\ m/s$

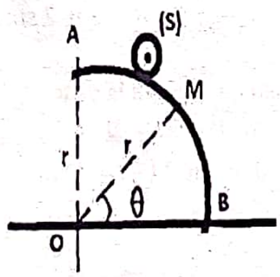
1) Représenter des forces appliquées au solide (S),



Dans le repère $(O;\ \vec{i};\ \vec{j})$, on a $\vec{a}\begin{vmatrix} a_x = a \\ a_y = 0 \end{vmatrix}$; $\vec{R} = \vec{N} + \vec{f}$ $\vec{R}\begin{vmatrix} R_x = -f \\ R_y = N \end{vmatrix}$ et $\vec{P}\begin{vmatrix} P_x = -P\sin\alpha \\ P_y = -P\cos\alpha \end{vmatrix}$

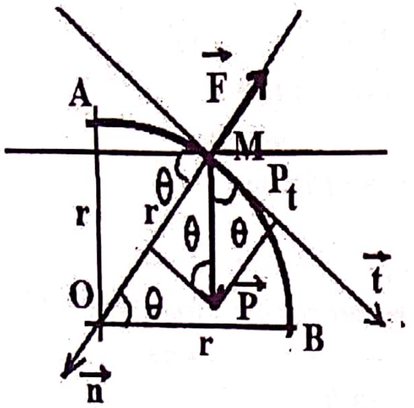
2) a) En appliquant TCI, exprimer a du mouvement :
$\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a} \Leftrightarrow P_x + R_x = ma_x$
Donc $-P\sin\alpha - f = ma \Leftrightarrow a = -g\sin\alpha - \frac{f}{m}$
Ou encore $a = -5 - 10f = -5(1 + 2f)$
b) En appliquant TEC, exprimer a du mouvement :
$E_{cA} - E_{cO} = W(\vec{P}) + W(\vec{R})$
or $W(\vec{R}) = W(\vec{N}) + W(\vec{f}) = -fOA = -fd$;
$W(\vec{P}) = -Ph = -mgOA\sin\alpha = -mgd\sin\alpha$;
$E_{cA} - E_{cO} = \frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m(v_A^2 - v_0^2)$
$E_{cA} - E_{cO} = \frac{1}{2}m(v_A^2 - v_0^2) = -fd - mgd\sin\alpha$
Or $v_A^2 - v_0^2 = 2a(x_A - x_0) = 2aOA = 2ad$
Donc $E_{cA} - E_{cO} = mad = -fd - mgd\sin\alpha \Leftrightarrow$
$ma = -f - mg\sin\alpha \Leftrightarrow a = -g\sin\alpha - \frac{f}{m}$.
Ou encore $a = -5 - 10f = -5(1 + 2f)$
c) Donner l'équation horaire du mouvement de (S).
$x = \frac{1}{2}a(t - t_0)^2 + v_0(t - t_0) + x_0$ or $t_0 = 0\ s$
$a = -5(1 + 2f)$; $v_0 = 8$ m/s et $x_0 = 0$ m
DONC $x = -2{,}5(1 + 2f)t^2 + 8t \Leftrightarrow v = -5(1 + 2f)t + 8$
d) $a = -5(1 + 2f) < 0$, donc Le solide (S) effectue un mouvement rectiligne accéléré.
3) $v_A = 0$ a) Calculer l'accélération a
$v_A^2 - v_0^2 = 2ad \Leftrightarrow a = \frac{-v_0^2}{2d} = -\frac{64}{20} = -3{,}2\ m.s^{-2}$
b) Déduire l'intensité de la force de frottement $\vec{f}$.
$a = -5(1 + 2f) \Leftrightarrow 1 + 2f = 0{,}64 \Leftrightarrow f = \frac{0{,}64 - 1}{2} = -0{,}18$
Alors l'intensité de la force de frottement $\vec{f}$ est 0,18 N.
c) Déterminer la durée pour atteindre le point A.
$v = at + v_0 = -3{,}2t + 8 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-8}{-3{,}2} = 2{,}5\ s$

Exercice 67 : Un solide (S) de masse $m = 200\ g$ glisse sans vitesse initiale de A vers B sans frottement sur une piste circulaire de centre O et de rayon $r = 2\ m$. L'arc $\widehat{AB}$ fait un angle droit. Entre les points A et B, le solide passe d'abord par le point M puis celui de B tel qu'on a l'angle $\theta = \widehat{BOM} = 50°$.



1) Faire un schéma et représenter les forces extérieures appliquées à ce solide (S).
2) Dans le repère de Frenet de basse $(\vec{n}, \vec{t})$, déterminer l'expression la force $\vec{F}$, réaction de la demi-sphère en fonction de r, m, g, v_M et θ.
3) Déterminer l'expression de la dénivellation h entre le point A et M en fonction de r et θ.
4) A partir du théorème de l'énergie cinétique, déterminer la vitesse v_M en fonction de g, r et θ.
5) Montrer que la force $F = mg(3\sin\theta - 2)$.
6) Déterminer la position du solide au moment où il quitte la piste circulaire. Quelle est alors sa vitesse ?

Correction : Un solide (S) de $m = 200\ g$ glisse sans v_A
1) Faire un schéma et représenter les forces extérieures appliquées à ce solide (S). $r = 2\ m$; $\theta = \widehat{BOM} = 50°$



Dans le repère de Frenet de basse $(\vec{n}, \vec{t})$,

$$\vec{a}\begin{vmatrix} a_t = \frac{dv}{dt} \\ a_n = \frac{v_M^2}{r} \end{vmatrix} ;$$

$$\vec{R} = \vec{F}\begin{vmatrix} F_t = 0 \\ F_n = -F \end{vmatrix} \text{ et}$$

$$\vec{P}\begin{vmatrix} P_t = P\cos\theta \\ P_n = P\sin\theta \end{vmatrix}$$

2) Dans $(\vec{n}, \vec{t})$, déterminer la force $\vec{F} = f(r, m, g, v_M \text{ et } \theta)$.

TCI : $\vec{F} + \vec{P} = m\vec{a} \Leftrightarrow F_n + P_n = ma_n$

Donc $-F + P\sin\theta = m\frac{v_M^2}{r} \Leftrightarrow -F = m\frac{v_M^2}{r} - P\sin\theta \Leftrightarrow$

$F = -m\frac{v_M^2}{r} + mg\sin\theta = m\left(g\sin\theta - \frac{v_M^2}{r}\right)$.

3) la dénivellation $h = f(r \text{ et } \theta)$ est $h = r(1 - \sin\theta)$

4) A partir du TEC, déterminer la vitesse $v_M = f(g, r \text{ et } \theta)$

$E_{cM} - E_{cA} = W(\vec{P}) + W(\vec{F})$ ou $\frac{1}{2}mv_M^2 = W(\vec{P})$ car $v_A = 0$,

$\vec{F} \perp \vec{t} \Leftrightarrow W(\vec{F}) = 0$ et $W(\vec{P}) = Ph = mgr(1 - \sin\theta)$

Donc $\frac{1}{2}mv_M^2 = mgr(1 - \sin\theta) \Leftrightarrow v_M^2 = 2gr(1 - \sin\theta)$

5) Montrer que la force $F = mg(3\sin\theta - 2)$.

On sait que $v_M^2 = 2gr(1 - \sin\theta)$ alors

$F = m\left(g\sin\theta - \frac{v_M^2}{r}\right) = m\left(g\sin\theta - \frac{2gr(1-\sin\theta)}{r}\right)$ ou bien

$F = m(g\sin\theta - 2g(1 - \sin\theta)) = mg(\sin\theta - 2 + 2\sin\theta)$

Donc $F = mg(3\sin\theta - 2)$

6) La position du solide au moment où il quitte la piste circulaire : Alors $F = 0 \Leftrightarrow mg(3\sin\theta - 2) = 0$

$3\sin\theta - 2 = 0 \Leftrightarrow \sin\theta = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \theta = \sin^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) = 41{,}8°$.

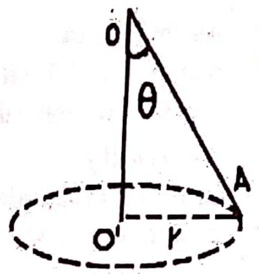
Quelle est alors sa vitesse ? on sait que $\sin\theta = \frac{2}{3}$

$v^2 = 2gr(1 - \sin\theta) = 2gr\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}gr \Leftrightarrow$

$v = \sqrt{\frac{2}{3}gr} = \sqrt{\frac{2}{3} \times 10 \times 2} = 3{,}65\ m/s.$

Anas -qu'Allâh l'agrée- rapporte avoir entendu l'Envoyé d'Allah -sallâ l-Lahû 'aleyhi wa sallam- dire : « Allah Le Très-haut dit : « Ô fils d'Adam ! Tant que tu m'invoques et tu espères en Moi, Je t'absoudrai malgré ce qui est, s'est produit de toi et Je ne M'en soucierai pas.

Exercice 68 : **On considère un pendule formé d'un solide (S) de masse $m = 20\ g$, de centre d'inertie G et d'un fil de longueur $\ell = OA = OG = 10$ cm de masse négligeable. Ce pendule est mis en mouvement de rotation uniforme autour d'un axe vertical Δ, formant un angle θ avec le fil, de manière à former un cône (d'où son nom pendule conique). Le solide (S) décrit un mouvement circulaire uniforme de centre O' et de rayon $r = O'A$. On néglige les frottements. Soit ω la vitesse angulaire du mouvement.**



1) Faire un schéma et représenter les forces extérieures appliquées à ce solide.

2) Déterminer l'expression de l'accélération a_G en fonction de ω et r puis en fonction de ω, ℓ et θ.

3) Montrer que la tension du fil est $T = m\omega^2\ell$.

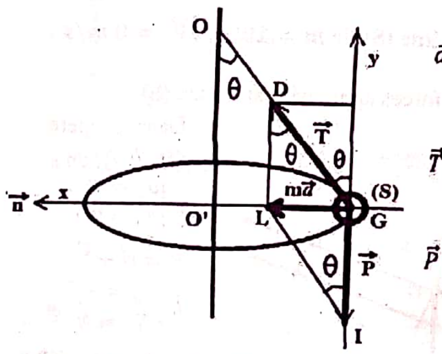
4) Déterminer graphiquement, l'expression de la tension du fil T en fonction de m, a_G et θ puis en fonction de ω, ℓ et m. **5) Calculer $\cos\theta$.**

6) Montrer qu'un tel mouvement n'est possible que si la vitesse angulaire ω est supérieure à une valeur ω_0 que l'on calculera.

7) Déterminer alors la valeur de l'angle d'inclinaison θ que prend le fil par rapport à l'axe Δ.

Correction :

1) Faire un schéma et représenter les forces extérieures appliquées à ce solide. Dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on a



$$\vec{a}\begin{vmatrix} a_x = \frac{v^2}{r} = r\omega^2 \\ a_y = 0 \end{vmatrix} ;$$

$$\vec{T}\begin{vmatrix} T_x = T\sin\theta \\ T_y = T\cos\theta \end{vmatrix} \text{ et}$$

$$\vec{P}\begin{vmatrix} P_x = 0 \\ P_y = -P \end{vmatrix}$$

2) $a_G = f(\omega \text{ et } r) = f(\omega, \ell \text{ et } \theta)$

$a_G = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = r\omega^2$ or $r = \ell\sin\theta$

Donc $a_G = \omega^2\ell\sin\theta$.

3) Montrer que la tension du fil est $T = m\omega^2\ell$.

En appliquant TCI, $\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a_G} \Leftrightarrow P_x + T_x = ma_{xG}$

Donc $0 + T\sin\theta = ma_G$ Or $a_G = \omega^2\ell\sin\theta$

$T\sin\theta = m\omega^2\ell\sin\theta \Leftrightarrow T = m\omega^2\ell$.

4) Déterminer graphiquement, l'expression de la tension du fil $T = f(m, a_G \text{ et } \theta) = f(\omega, \ell \text{ et } m)$:

Dans le parallélogramme DGIL (figure ci-dessus)

$\tan\theta = \frac{\text{coté opposé}}{\text{coté adjacent}} = \frac{ma_G}{T_x} = \frac{m\omega^2\ell\sin\theta}{T\cos\theta} = \frac{m\omega^2\ell}{T}\tan\theta \Leftrightarrow$

$\tan\theta = \frac{m\omega^2\ell}{T}\tan\theta \Leftrightarrow 1 = \frac{m\omega^2\ell}{T} \Leftrightarrow T = m\omega^2\ell$

5) Calculer $\cos\theta$. 1ère méthode graphique :

Dans le parallélogramme DGIL (figure ci-dessus)

$\tan\theta = \frac{\text{coté opposé}}{\text{coté adjacent}} = \frac{ma_G}{P} = \frac{m\omega^2\ell\sin\theta}{mg} = \frac{\omega^2\ell\sin\theta}{g} \Leftrightarrow$

$\tan\theta = \frac{\omega^2\ell\sin\theta}{g} \Leftrightarrow \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\omega^2\ell\sin\theta}{g} \Leftrightarrow \frac{1}{\cos\theta} = \frac{\omega^2\ell}{g}$

Finalement $\cos\theta = \frac{g}{\omega^2\ell}$

2ème méthode analytique : TCI

$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a_G} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} P_x + T_x = ma_{xG} \\ P_y + T_y = ma_{yG} \end{vmatrix}$ ou bien

$\begin{vmatrix} T\sin\theta = m\omega^2\ell\sin\theta \\ T\cos\theta - P = 0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} T = m\omega^2\ell \\ T\cos\theta = mg \end{vmatrix}$ en divisant membre à membre, on obtient $\frac{T}{T\cos\theta} = \frac{m\omega^2\ell}{mg} \Leftrightarrow \frac{1}{\cos\theta} = \frac{\omega^2\ell}{g}$

Finalement $\cos\theta = \frac{g}{\omega^2\ell}$.

6) Montrer qu'un tel mouvement n'est possible que si la vitesse angulaire ω est supérieure à une valeur ω_0 que l'on calculera. $\cos\theta = \frac{g}{\omega^2\ell} < 1 \Leftrightarrow \omega^2 > \frac{g}{\ell} \Leftrightarrow \omega > \sqrt{\frac{g}{\ell}}$

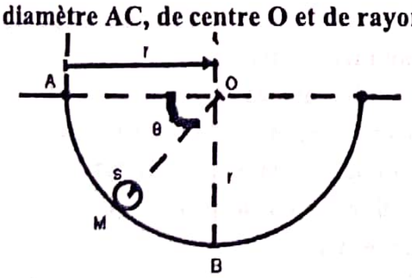
Donc $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}} = \sqrt{\frac{10}{0,1}} = \sqrt{100} = 10\ rad/s$.

7) Déterminer alors la valeur de l'angle d'inclinaison θ que prend le fil par rapport à l'axe Δ.

SI $\omega > \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ ALORS le fil prend une inclinaison θ donnée par $\cos\theta = \frac{g}{\omega^2\ell} \Leftrightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{g}{\omega^2\ell}\right)$.

SI $\cos\theta = \frac{g}{\omega^2\ell} \geq 1 \Leftrightarrow \omega^2 \leq \frac{g}{\ell} \Leftrightarrow \omega \leq \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ ALORS le fil reste vertical, donc $\theta = 0$.

__Exercice 69 :__ Un solide (S) de masse $m = 10\ g$ peut glisser sans frottement à l'intérieur d'une demi-sphère de diamètre AC, de centre O et de rayon $r = OA = 1,25\ m$.



On le lâche du point A, sans vitesse initiale. Sa position à l'intérieur de la demi-sphère est repérée par l'angle $\theta = \widehat{AOM}$.

__Partie A)__ Le solide parcours sans force de frottement.

1) Faire un schéma et représenter les forces extérieures appliquées à ce solide.

2) Déterminer l'expression de la vitesse v_M au point M en fonction de r, g et θ. Calculer sa valeur numérique au point B.

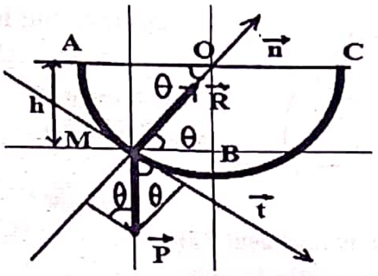
3) Déterminer l'expression de réaction R au point M en fonction de m, r, g, v_M et θ puis en fonction de m, r, g et θ. Calculer sa valeur numérique au point B.

__Partie B)__ En réalité, le solide (s) arrive en B avec une vitesse de $4,5\ m/s$. Il est donc soumis à une force de frottement $\vec{f}$ constante opposée au mouvement. En appliquant TEC, calculer l'intensité de cette force $\vec{f}$.

__Correction :__ $m = 10\ g$, $r = OA = 1,25\ m$. $\theta = \widehat{AOM}$.

__Partie A)__ Le solide parcours sans force de frottement.

1) Faire un schéma et représenter les forces extérieures appliquées à ce solide. $h = r\sin\theta$



$\vec{a}\begin{vmatrix} a_t = \frac{dv}{dt} \\ a_n = \frac{v_M^2}{r} \end{vmatrix}$; $\vec{R}\begin{vmatrix} R_t = 0 \\ R_n = R \end{vmatrix}$ et $\vec{P}\begin{vmatrix} P_t = P\cos\theta \\ P_n = -P\sin\theta \end{vmatrix}$

2) Déterminer l'expression de la vitesse $v_M = f(r, g \text{ et } \theta)$

A partir du TEC, $E_{cM} - E_{cA} = W(\vec{P}) + W(\vec{R})$ Or $v_A = 0$,

$\vec{R} \perp \vec{t} \Leftrightarrow W(\vec{R}) = 0$ et $W(\vec{P}) = Ph = mgr\sin\theta$

Donc $\frac{1}{2}mv_M^2 = mgr\sin\theta \Leftrightarrow v_M^2 = 2gr\sin\theta$

Calculer sa valeur numérique au point B.

Au point B, $\theta = 90° \Leftrightarrow v_B = \sqrt{2gr\sin\theta} = \sqrt{25} = 5\ m/s$

3) Déterminer R au point M

TCI : $\vec{R} + \vec{P} = m\vec{a} \Leftrightarrow R_n + P_n = ma_n$

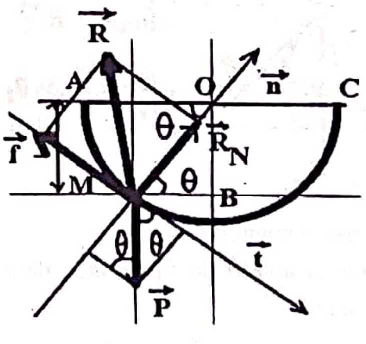
Donc $R - P\sin\theta = m\frac{v_M^2}{r} \Leftrightarrow R = m\frac{v_M^2}{r} + mg\sin\theta \Leftrightarrow$

$R = 2mg\sin\theta + mg\sin\theta = 3mg\sin\theta$

Calculer sa valeur numérique au point B.

Au point B, $\theta = 90° \Leftrightarrow R_B = 3mg\sin\theta = 0,3\ N$

__Partie B)__ Le solide parcours avec force de frottement



$v_B = 4,5\ m/s$

$h = r\sin\theta$;

$\vec{a}\begin{vmatrix} a_t = \frac{dv}{dt} \\ a_n = \frac{v_M^2}{r} \end{vmatrix}$; $\vec{R}\begin{vmatrix} R_t = -f \\ R_n = R_N \end{vmatrix}$ et $\vec{P}\begin{vmatrix} P_t = P\cos\theta \\ P_n = -P\sin\theta \end{vmatrix}$

En appliquant TEC, calculer l'intensité de cette force $\vec{f}$.

$E_{cB} - E_{cA} = W(\vec{P}) + W(\vec{R})$ Or $v_A = 0$, $\vec{R} \perp \vec{t} \Leftrightarrow W(\vec{R}) = 0$

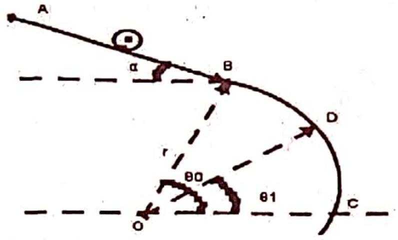
$W(\vec{R}) = W(\vec{R_N}) + W(\vec{f}) = -f\widehat{AB} = -fr\frac{\pi}{2}$ et

$W(\vec{P}) = Pr = mgr$

Donc $\frac{1}{2}mv_B^2 = mgr - fr\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow f = \frac{mgr - \frac{1}{2}mv_B^2}{r\frac{\pi}{2}} = \frac{m(2gr - v_B^2)}{r\pi}$

$f = \frac{m(2gr - v_B^2)}{r\pi} = \frac{0,01(2\times10\times1,25-(4,5)^2)}{1,25\times3,14} = 1,21.10^{-2}\ N$

Exercice 70 : Une glissière est constituée d'une partie rectiligne $AB = \ell = 1\ m$ qui est un plan incliné faisant un angle de $\alpha = 30°$ avec l'horizontale et d'un arc de cercle BC qui est un demi-cercle de centre O et de rayon $r = 2\ m$. Un solide (S) ponctuel de masse $m = 100\ g$ est lâché du point A sans vitesse initiale. $\theta_0 = (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}) = 60°$



Les frottements sont négligeables. Sur la piste circulaire BC, on suppose que $\theta_1 = (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD})$.

1) **Sur le parcours AB**

a) Quelle est la nature du mouvement ? Déduire l'accélération du centre d'inertie du solide (S).

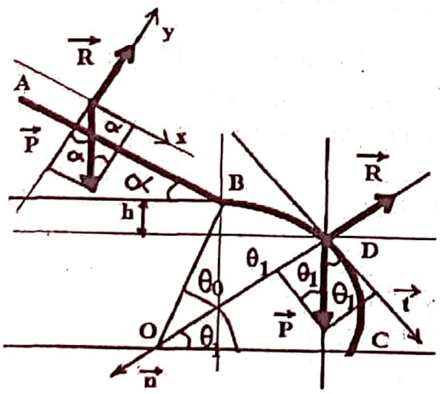
b) Quelle est la vitesse v_B du solide en B ?

2) **Sur le parcours BC**

a) Exprimer en fonction de v_B, r, g et θ_1, la vitesse v_D du solide en D.

b) Montrer que le solide (S) quitte la piste en un point D. Calculer $\theta_1 = (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD})$.

Correction : Parcours AB $\vec{a} \begin{vmatrix} a_x = a \\ a_y = 0 \end{vmatrix}$; $\vec{R} \begin{vmatrix} R_x = 0 \\ R_y = R \end{vmatrix}$ et $\vec{P} \begin{vmatrix} P_x = P\sin\alpha \\ P_y = -P\cos\alpha \end{vmatrix}$



Parcours BC

$\vec{a} \begin{vmatrix} a_t = \frac{dv}{dt} \\ a_n = \frac{v_D^2}{r} \end{vmatrix}$; $\vec{R} \begin{vmatrix} R_t = 0 \\ R_n = -R \end{vmatrix}$ et $\vec{P} \begin{vmatrix} P_t = P\cos\theta_1 \\ P_n = P\sin\theta_1 \end{vmatrix}$

1) **Sur le parcours AB**

a) Le solide (S) effectue un mouvement rectiligne uniformément varié car sa vitesse a varié de 0 vers une valeur supérieure, d'où son arrivé au point B.

En appliquant TCI, exprimer a du mouvement :

$\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a} \Leftrightarrow P_x + R_x = ma_x$

Donc $mg\sin\alpha = ma \Leftrightarrow a = g\sin\alpha$

b) b) vitesse v_B du solide en B En appliquant TEC

$\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}m(v_B^2 - v_A^2) = W(\vec{P}) + W(\vec{R})$

or $\vec{R} \perp \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow W(\vec{R}) = 0$; $W(\vec{P}) = mg\ell\sin\alpha$

et $v_A = 0$ donc $\frac{1}{2}mv_B^2 = mg\ell\sin\alpha \Leftrightarrow v_B^2 = 2g\ell\sin\alpha$

$\Leftrightarrow v_B = \sqrt{2g\ell\sin\alpha} = \sqrt{2 \times 10 \times \sin 30} = 3{,}16\ m/s$

2) **Sur le parcours BC**

a) Exprimer $v_D = f(v_B, r, g$ et $\theta_1)$

TEC : $\frac{1}{2}m(v_D^2 - v_B^2) = W(\vec{P}) + W(\vec{R})$

Or $h = r\sin\theta_0 - r\sin\theta_1 = r(\sin\theta_0 - \sin\theta_1)$;

$\vec{R} \perp \vec{t} \Leftrightarrow W(\vec{R}) = 0$ et $W(\vec{P}) = Ph = mgr(\sin\theta_0 - \sin\theta_1)$

Donc $\frac{1}{2}m(v_D^2 - v_B^2) = mgr(\sin\theta_0 - \sin\theta_1) \Leftrightarrow$

$v_D^2 = 2gr(\sin\theta_0 - \sin\theta_1) + v_B^2$ OU BIEN

$v_D = \sqrt{2gr(\sin\theta_0 - \sin\theta_1) + v_B^2}$

b) Déterminer la réaction du support $\vec{R}$ au point D

TCI : $\vec{R} + \vec{P} = m\vec{a} \Leftrightarrow R_n + P_n = ma_n$

Donc $P\sin\theta_1 - R = m\frac{v_D^2}{r} \Leftrightarrow R = mg\sin\theta_1 - m\frac{v_D^2}{r}$

Or $v_D^2 = 2gr(\sin\theta_0 - \sin\theta_1) + v_B^2$ et $v_B^2 = 2g\ell\sin\alpha$ donc

$R = mg\sin\theta_1 - 2mg(\sin\theta_0 - \sin\theta_1) - m\frac{v_B^2}{r}$

OU BIEN $R = mg(3\sin\theta_1 - 2\sin\theta_0) - 2mg\frac{\ell}{r}\sin\alpha$

SI le solide (S) quitte la piste en un point D ALORS $R \geq 0$

$mg(3\sin\theta_1 - 2\sin\theta_0) = 2mg\frac{\ell}{r}\sin\alpha \Leftrightarrow$

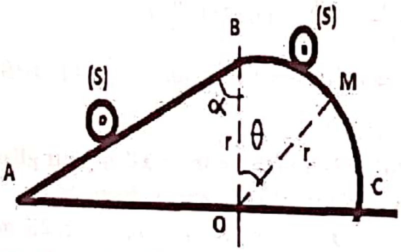
$3\sin\theta_1 - 2\sin\theta_0 = g\frac{\ell}{r}\sin\alpha \Leftrightarrow$

$\sin\theta_1 = \frac{2}{3}\sin\theta_0 + g\frac{\ell}{3r}\sin\alpha \Leftrightarrow$

$\theta_1 = (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}) = \sin^{-1}\left(\frac{2}{3}\sin\theta_0 + g\frac{\ell}{3r}\sin\alpha\right) = 48°$.

Exercice 71 : Données : $\alpha = 60°$; $r = 50\ cm$;

1) Un tonneau (S) de masse $m = 1000\ kg$ est tirée par une corde métallique placée au point B. La corde métallique fait la même direction que la distance AB sur la ligne de plus



grande pente d'un plan incliné où durant $2,5\ s$, le mouvement de (S) est uniformément accéléré. Les $6\ s$ suivantes, le mouvement de (S) est uniforme sur une distance de $42\ m$. Enfin, le mouvement de (S) est uniformément retardé durant $4\ s$ jusqu'à l'arrêt.

a) Déterminer la distance AB.

b) Calculer l'intensité de la force exercée par le câble sur (S) au cours de chacune des phases du mouvement de (S).

3) Le tonneau (S) arrive sur demi-sphère d'arc $\widehat{BC}$ avec la vitesse $v_B = 0$ où les frottements étaient négligeables et sa position est repérée par l'angle $\theta = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OM})$.

a) Etablir en fonction de r, g et θ, l'expression de la vitesse v_M du solide en M.

b) Etablir en fonction de m, g et θ, l'expression de la réaction R de la piste.

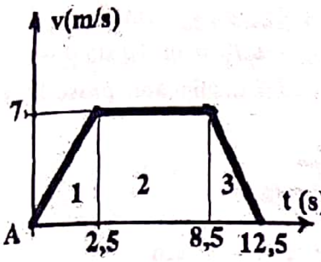
c) Montrer que le solide quitte la piste en un point I.

Calculer $\theta_0 = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OI})$.

Correction : $\alpha = 60°$; $r = 50\ cm$; $m = 10^3\ kg$

1) $\Delta t_1 = 2{,}5\ s$; $\Delta t_2 = 6\ s$; $\Delta t_3 = 4\ s$ et $d_2 = 42\ m$.

La vitesse maximale est $v_{max} = \frac{d_2}{\Delta t_2} = \frac{42}{6} = 7\ m/s$



$d_1 = \frac{v_{max}\Delta t_1}{2} = 8{,}75\ m$;

$d_2 = 42\ m$;

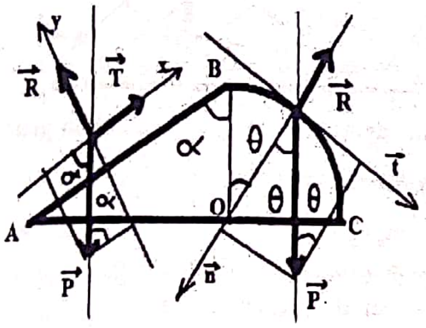
$d_3 = \frac{v_{max}\Delta t_3}{2} = 14\ m$.

a) La distance AB est :

$d = AB = d_1 + d_2 + d_3$

$d = AB = 64{,}75\ m$.

b) En appliquant TCI, l'intensité de la force exercée par le câble sur (S) :



Parcours AB

$\vec{a}\begin{vmatrix} a_x = a \\ a_y = 0 \end{vmatrix}$; $\vec{R}\begin{vmatrix} R_x = 0 \\ R_y = R \end{vmatrix}$; $\vec{T}\begin{vmatrix} T_x = T \\ T_y = 0 \end{vmatrix}$ et $\vec{P}\begin{vmatrix} P_x = -P\cos\alpha \\ P_y = -P\sin\alpha \end{vmatrix}$

$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m\vec{a} \Leftrightarrow P_x + R_x + T_x = ma_x$

Donc $T - mg\cos\alpha = ma \Leftrightarrow T = m(a + g\cos\alpha)$

1ère phase : $v_{max}^2 - v_A^2 = 2a_1d_1 \Leftrightarrow a_1 = 2{,}8\ m.s^{-2}$

$T_1 = m(a_1 + g\cos\alpha) = 7\,800\ N$

2ème phase : $a_2 = 0$, donc $T_2 = mg\cos\alpha = 5\,000\ N$

3ème phase : $v_B^2 - v_{max}^2 = 2a_3d_3 \Leftrightarrow a_3 = -1{,}75\ m.s^{-2}$

$T_3 = m(a_3 + g\cos\alpha) = 3\,250\ N$

3) **Parcours BC :**

$\vec{a}\begin{vmatrix} a_t = \frac{dv}{dt} \\ a_n = \frac{v_M^2}{r} \end{vmatrix}$; $\vec{R}\begin{vmatrix} R_t = 0 \\ R_n = -R \end{vmatrix}$ et $\vec{P}\begin{vmatrix} P_t = P\sin\theta \\ P_n = P\cos\theta \end{vmatrix}$

a) Expression de $v_M = f(r, g \text{ et } \theta)$ du solide en M

TEC : $\frac{1}{2}m(v_M^2 - v_B^2) = W(\vec{P}) + W(\vec{R})$

Or $h = r - r\cos\theta = r(1 - \cos\theta)$ et $v_B = 0$

$\vec{R} \perp \vec{t} \Leftrightarrow W(\vec{R}) = 0$ et $W(\vec{P}) = Ph = mgr(1 - \cos\theta)$

Donc $\frac{1}{2}mv_M^2 = mgr(1 - \cos\theta) \Leftrightarrow v_M^2 = 2gr(1 - \cos\theta)$

OU BIEN $v_M = \sqrt{2gr(1 - \cos\theta)}$

b) Expression de la réaction $R = f(m, g \text{ et } \theta)$ de la piste.

TCI : $\vec{R} + \vec{P} = m\vec{a} \Leftrightarrow R_n + P_n = ma_n$

Donc $P\cos\theta - R = m\frac{v_M^2}{r} \Leftrightarrow R = mg\cos\theta - m\frac{v_M^2}{r}$

Or $v_M^2 = 2gr(1 - \cos\theta)$ donc

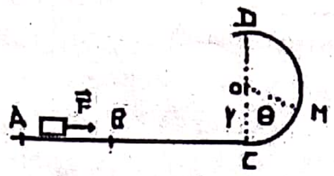
$R = mg\cos\theta - 2mg(1 - \cos\theta) = mg(3\cos\theta - 2)$

c) SI le solide (S) quitte la piste en un point I ALORS $R \geq 0$

$mg(3\cos\theta - 2) \geq 0 \Leftrightarrow \cos\theta \geq \frac{2}{3}$ (Vraie).

$\cos\theta_0 = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \theta_0 = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) = 48°$.

Exercice 72 : Un solide (s) de masse m est initialement au repos au point A. On le lance sur la piste ACD en faisant agir sur lui, le long de la partie AB de sa trajectoire, une force $\vec{F}$ horizontale et d'intensité F constante. On pose $AB = \ell$. La portion AC de la trajectoire est horizontale et la portion CD est un demi-cercle de centre O et de rayon r. Ces deux portions sont dans un même plan vertical. On suppose que la piste ACD est parfaitement lisse et que la résistance de l'air est négligeable.



1) Déterminer en fonction de F, ℓ et m la valeur de v_B de la vitesse du solide au point B.

2) Etablir en fonction de g, m, r F, l et θ, l'expression de :

a) la vitesse v_M du solide au point M.

b) la réaction R de la piste.

3) De l'expression R, déduire en fonction de g, m, r et ℓ, la valeur minimale F_0 de F pour que le solide (s) atteigne le point D.

3) Calculer F_0 sachant que $m = 0{,}5\ kg$; $r = 1\ m$; $\ell = 1{,}5\ m$ et $g = 9{,}8\ m.s^{-2}$.

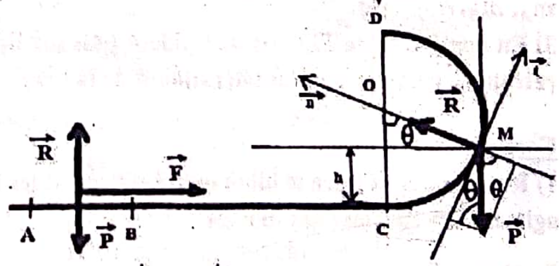
Correction : $m = 0{,}5\ kg$; $r = 1\ m$; $\ell = 1{,}5\ m$

1) Vitesse du solide au point B : $v_B = f(F, \ell \text{ et } m)$:

TEC : $\frac{1}{2}m(v_B^2 - v_A^2) = W(\vec{P}) + W(\vec{F}) + W(\vec{R})$

Or $\begin{vmatrix} \vec{P} \perp (AB) \\ \vec{R} \perp (AB) \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} W(\vec{P}) = 0 \\ W(\vec{R}) = 0 \end{vmatrix}$; $v_A = 0$ et $W(\vec{F}) = F\ell$.

Donc $\frac{1}{2}mv_B^2 = F\ell \Leftrightarrow v_B^2 = \frac{2F\ell}{m} \Leftrightarrow v_B = \sqrt{\frac{2F\ell}{m}}$.



Parcours CM : $\vec{a}\begin{vmatrix} a_t = \frac{dv}{dt} \\ a_n = \frac{v_M^2}{r} \end{vmatrix}$; $\vec{R}\begin{vmatrix} R_t = 0 \\ R_n = R \end{vmatrix}$ et $\vec{P}\begin{vmatrix} P_t = -P\sin\theta \\ P_n = -P\cos\theta \end{vmatrix}$

2) Vitesse du solide au point M ; $v_M = f(g, m, r\ F, l \text{ et } \theta)$:

TEC : $\frac{1}{2}m(v_M^2 - v_B^2) = W(\vec{P}) + W(\vec{R})$

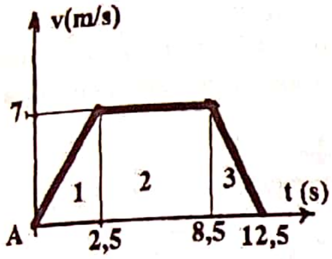
Or $h = r - r\cos\theta = r(1 - \cos\theta)$; $\vec{R} \perp \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow W(\vec{P}) = 0$;

c) Montrer que le solide quitte la piste en un point I. Calculer $\theta_0 = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OI})$.

Correction : $\alpha = 60°$; $r = 50\ cm$; $m = 10^3\ kg$

1) $\Delta t_1 = 2{,}5\ s$; $\Delta t_2 = 6\ s$; $\Delta t_3 = 4\ s$ et $d_2 = 42\ m$.

La vitesse maximale est $v_{max} = \frac{d_2}{\Delta t_2} = \frac{42}{6} = 7\ m/s$



$d_1 = \frac{v_{max}\Delta t_1}{2} = 8{,}75\ m$;

$d_2 = 42\ m$;

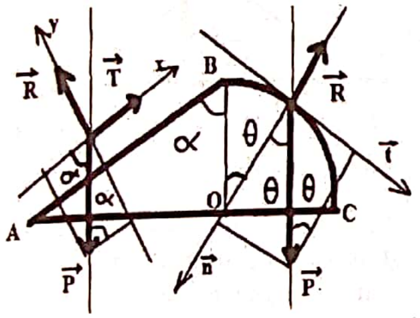
$d_3 = \frac{v_{max}\Delta t_3}{2} = 14\ m$.

a) La distance AB est :

$d = AB = d_1 + d_2 + d_3$

$d = AB = 64{,}75\ m$.

b) En appliquant TCI, l'intensité de la force exercée par le câble sur (S) :



Parcours AB

$\vec{a}\begin{vmatrix} a_x = a \\ a_y = 0 \end{vmatrix}$; $\vec{R}\begin{vmatrix} R_x = 0 \\ R_y = R \end{vmatrix}$; $\vec{T}\begin{vmatrix} T_x = T \\ T_y = 0 \end{vmatrix}$ et $\vec{P}\begin{vmatrix} P_x = -P\cos\alpha \\ P_y = -P\sin\alpha \end{vmatrix}$

$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m\vec{a} \Leftrightarrow P_x + R_x + T_x = ma_x$

Donc $T - mg\cos\alpha = ma \Leftrightarrow T = m(a + g\cos\alpha)$

1ère phase : $v_{max}^2 - v_A^2 = 2a_1 d_1 \Leftrightarrow a_1 = 2{,}8\ m.s^{-2}$

$T_1 = m(a_1 + g\cos\alpha) = 7\,800\ N$

2ème phase : $a_2 = 0$, donc $T_2 = mg\cos\alpha = 5\,000\ N$

3ème phase : $v_B^2 - v_{max}^2 = 2a_3 d_3 \Leftrightarrow a_3 = -1{,}75\ m.s^{-2}$

$T_3 = m(a_3 + g\cos\alpha) = 3\,250\ N$

3) Parcours BC :

$\vec{a}\begin{vmatrix} a_t = \frac{dv}{dt} \\ a_n = \frac{v_M^2}{r} \end{vmatrix}$; $\vec{R}\begin{vmatrix} R_t = 0 \\ R_n = -R \end{vmatrix}$ et $\vec{P}\begin{vmatrix} P_t = P\sin\theta \\ P_n = P\cos\theta \end{vmatrix}$

a) Expression de $v_M = f(r, g \text{ et } \theta)$ du solide en M

TEC : $\frac{1}{2}m(v_M^2 - v_B^2) = W(\vec{P}) + W(\vec{R})$

Or $h = r - r\cos\theta = r(1 - \cos\theta)$ et $v_B = 0$

$\vec{R} \perp \vec{t} \Leftrightarrow W(\vec{R}) = 0$ et $W(\vec{P}) = Ph = mgr(1 - \cos\theta)$

Donc $\frac{1}{2}mv_M^2 = mgr(1 - \cos\theta) \Leftrightarrow v_M^2 = 2gr(1 - \cos\theta)$

OU BIEN $v_M = \sqrt{2gr(1 - \cos\theta)}$

b) Expression de la réaction $R = f(m, g \text{ et } \theta)$ de la piste.

TCI : $\vec{R} + \vec{P} = m\vec{a} \Leftrightarrow R_n + P_n = ma_n$

Donc $P\cos\theta - R = m\frac{v_M^2}{r} \Leftrightarrow R = mg\cos\theta - m\frac{v_M^2}{r}$

Or $v_M^2 = 2gr(1 - \cos\theta)$ donc

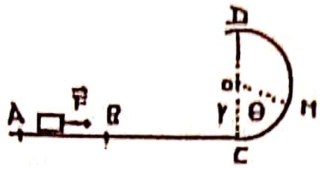
$R = mg\cos\theta - 2mg(1 - \cos\theta) = mg(3\cos\theta - 2)$

c) SI le solide (S) quitte la piste en un point I ALORS $R \geq 0$

$mg(3\cos\theta - 2) \geq 0 \Leftrightarrow \cos\theta \geq \frac{2}{3}$ (Vrai).

$\cos\theta_0 = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \theta_0 = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) = 48°$.

Exercice 72 : Un solide (s) de masse m est initialement au repos au point A. On le lance sur la piste ACD en faisant agir sur lui, le long de la partie AB de sa trajectoire, une force $\vec{F}$ horizontale et d'intensité F constante. On pose $AB = \ell$. La portion AC de la trajectoire est horizontale et la portion CD est un demi-cercle de centre O et de rayon r. Ces deux portions sont dans un même plan vertical. On suppose que la piste ACD est parfaitement lisse et que la résistance de l'air est négligeable.



1) Déterminer en fonction de F, ℓ et m la valeur de v_B de la vitesse du solide au point B.

2) Etablir en fonction de g, m, r F, l et θ, l'expression de :

a) la vitesse v_M du solide au point M.

b) la réaction R de la piste.

3) De l'expression R, déduire en fonction de g, m, r et ℓ, la valeur minimale F_0 de F pour que le solide (s) atteigne le point D.

3) Calculer F_0 sachant que $m = 0{,}5\ kg$; $r = 1\ m$; $\ell = 1{,}5\ m$ et $g = 9{,}8\ m.s^{-2}$.

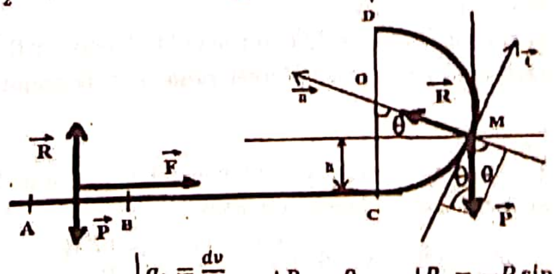
Correction : $m = 0{,}5\ kg$; $r = 1\ m$; $\ell = 1{,}5\ m$

1) Vitesse du solide au point B : $v_B = f(F, \ell \text{ et } m)$:

TEC : $\frac{1}{2}m(v_B^2 - v_A^2) = W(\vec{P}) + W(\vec{F}) + W(\vec{R})$

Or $\begin{vmatrix} \vec{P} \perp (AB) \\ \vec{R} \perp (AB) \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} W(\vec{P}) = 0 \\ W(\vec{R}) = 0 \end{vmatrix}$; $v_A = 0$ et $W(\vec{F}) = F\ell$.

Donc $\frac{1}{2}mv_B^2 = F\ell \Leftrightarrow v_B^2 = \frac{2F\ell}{m} \Leftrightarrow v_B = \sqrt{\frac{2F\ell}{m}}$.



Parcours CM : $\vec{a}\begin{vmatrix} a_t = \frac{dv}{dt} \\ a_n = \frac{v_M^2}{r} \end{vmatrix}$; $\vec{R}\begin{vmatrix} R_t = 0 \\ R_n = R \end{vmatrix}$ et $\vec{P}\begin{vmatrix} P_t = -P\sin\theta \\ P_n = -P\cos\theta \end{vmatrix}$

2) Vitesse du solide au point M ; $v_M = f(g, m, r$ F$, l$ et $\theta)$:

TEC : $\frac{1}{2}m(v_M^2 - v_B^2) = W(\vec{P}) + W(\vec{R})$

Or $h = r - r\cos\theta = r(1 - \cos\theta)$; $\vec{R} \perp \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow W(\vec{P}) = 0$;

$\vec{R} \perp \overrightarrow{BC}$ et $\vec{R} \perp \overset{\frown}{CM} \Leftrightarrow W(\vec{R}) = 0$; $v_B = \sqrt{\frac{2F\ell}{m}}$; sur l'arc BM

on a $W(\vec{P}) = -Ph = -mgr(1-\cos\theta)$.

Donc $v_M^2 - v_B^2 = -2gr(1-\cos\theta) \Leftrightarrow$

$v_M^2 = v_B^2 - 2gr(1-\cos\theta) \Leftrightarrow v_M = \sqrt{v_B^2 - 2gr(1-\cos\theta)}$.

$v_M = \sqrt{\frac{2F\ell}{m} - 2gr(1-\cos\theta)}$.

b) la réaction R de la piste.

TCI : $\vec{R} + \vec{P} = m\vec{a} \Leftrightarrow R_n + P_n = ma_n$

Donc $-P\cos\theta + R = m\frac{v_M^2}{r} \Leftrightarrow R = mg\cos\theta + m\frac{v_M^2}{r}$

Or $v_M^2 = \frac{2F\ell}{m} - 2gr(1-\cos\theta)$ donc

$R = mg\cos\theta + \frac{2F\ell}{r} - 2mg(1-\cos\theta)$ ou encore

$R = mg(3\cos\theta - 2) + \frac{2F\ell}{r}$.

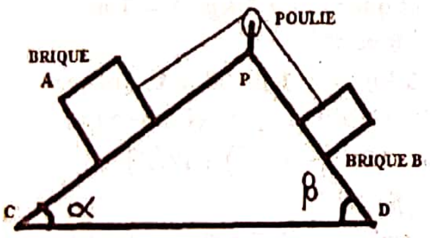
3) Au point D, $\theta = \pi = 180°$ alors $\cos\theta = \cos\pi = -1$.

Donc $R_D = -5mg + \frac{2F_0\ell}{r} \geq 0$

3) $-5mg + \frac{2F_0\ell}{r} = 0 \Leftrightarrow F_0 = \frac{5mgr}{2\ell}$

$F_0 = \frac{5mgr}{2\ell} = \frac{5\times0{,}5\times9{,}8\times1}{2\times1{,}5} = 8{,}16\,N$.

__Exercice 73 :__ Un fil inextensible de masse négligeable passe dans la gorge d'une poulie de masse négligeable. On accroche aux extrémités du fil deux briques de masses m_A et m_B assimilées à des points matériels, glissant sur des plans inclinés d'angles α et β. On donne $m_B = 1\,kg$, $m_A < m_B$, $\alpha = 30°$, $\beta = 45°$.



1) Représenter et faire le bilan qualitativement les forces agissant sur chacune des masses.

2) En appliquant le TCI sur le solide A puis sur B, trouver l'expression de l'accélération a de la brique en fonction de m_A, m_B, α, β et g.

3) En appliquant le TEC sur le solide A puis sur B, retrouver l'expression l'accélération a de la brique.

__Correction :__

1) Représenter et faire le bilan qualitativement les forces agissant sur chacune des masses

__Système solide A :__ $\vec{a}_A \begin{vmatrix} a_{Ax} = a_A \\ a_{Ay} = 0 \end{vmatrix}$; $\overrightarrow{R_A} \begin{vmatrix} R_{Ax} = 0 \\ R_{Ay} = R_A \end{vmatrix}$;

$\vec{T}_A \begin{vmatrix} T_{Ax} = T_A \\ T_{Ay} = 0 \end{vmatrix}$ et $\vec{P}_A \begin{vmatrix} P_{Ax} = -P_A\sin\alpha = -m_Ag\sin\alpha \\ P_{Ay} = -P_A\cos\alpha = -m_Ag\cos\alpha \end{vmatrix}$

__Système solide B :__ $\vec{a}_B \begin{vmatrix} a_{Bx} = a_B \\ a_{By} = 0 \end{vmatrix}$; $\overrightarrow{R_B} \begin{vmatrix} R_{Bx} = 0 \\ R_{By} = R_B \end{vmatrix}$;

$\vec{T}_B \begin{vmatrix} T_{Bx} = -T_B \\ T_{By} = 0 \end{vmatrix}$ et $\vec{P}_B \begin{vmatrix} P_{Bx} = P_B\sin\beta = m_Bg\sin\beta \\ P_{By} = -P_B\cos\beta = -m_Bg\cos\beta \end{vmatrix}$

2) En appliquant le TCI l'accélération a

__**Système solide A :**__

$\vec{P}_A + \vec{R}_A + \vec{T}_A = m\vec{a}_A \Leftrightarrow P_{Ax} + R_{Ax} + T_{Ax} = ma_{Ax}$

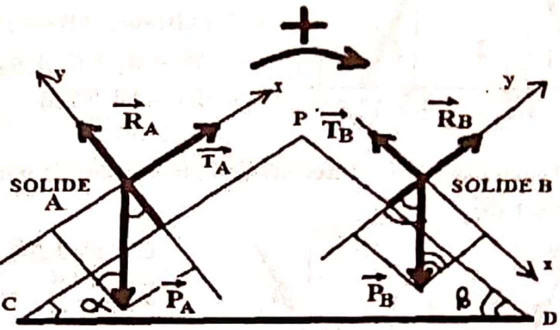
Donc $T_A - m_Ag\sin\alpha = m_Aa_A \Leftrightarrow T_A = m_A(a_A + g\sin\alpha)$

__**Système solide B :**__

$\vec{P}_B + \vec{R}_B + \vec{T}_B = m\vec{a}_B \Leftrightarrow P_{Bx} + R_{Bx} + T_{Bx} = ma_{Bx}$

Donc $-T_B + m_Bg\sin\beta = m_Ba_A \Leftrightarrow T_B = m_B(g\sin\beta - a_B)$

Comme le fil inextensible de masse négligeable passe dans



la gorge d'une poulie de masse négligeable alors on peut établir les relations suivantes : $\begin{vmatrix} T_A = T_B = T \\ a_A = a_B = a \end{vmatrix}$

$m_A(a_A + g\sin\alpha) = m_B(g\sin\beta - a_B)$ OU ENCORE

$m_A(a + g\sin\alpha) = m_B(g\sin\beta - a)$

$a(m_A + m_B) = g(m_B\sin\beta - m_A\sin\alpha) \Leftrightarrow$

$a = \frac{m_B\sin\beta - m_A\sin\alpha}{m_A + m_B}g$.

3) En appliquant le TEC l'accélération a

Soit x le déplacement effectué par la brique A ou la brique B.

On déduit que $W(\vec{T}_A) = T_Ax$ et $W(\vec{T}_B) = -T_Bx$.

__**Système solide A :**__

Le solide A est sur une hauteur $h_A = x\sin\alpha$.

TEC : $\frac{1}{2}m_A(v_{A2}^2 - v_{A1}^2) = W(\vec{P}_A) + W(\vec{R}_A) + W(\vec{T}_A)$

Or $\vec{R}_A \perp \overrightarrow{CP} \Leftrightarrow W(\vec{R}_A) = 0$; $v_{A2}^2 - v_{A1}^2 = 2a_Ax$;

$W(\vec{P}_A) = -P_Ah_A = -m_Agx\sin\alpha$ et $W(\vec{T}_A) = T_Ax$.

Donc $\frac{1}{2}m_A2a_Ax = T_Ax - m_Agx\sin\alpha$ ou encore

$m_Aa_Ax = T_Ax - m_Agx\sin\alpha \Leftrightarrow T_A = m_A(a_A + g\sin\alpha)$

__**Système solide B :**__

Le solide B est sur une hauteur $h_B = x\sin\beta$.

TEC : $\frac{1}{2}m_B(v_{B2}^2 - v_{B1}^2) = W(\vec{P}_B) + W(\vec{R}_B) + W(\vec{T}_B)$

Or $\vec{R}_B \perp \overrightarrow{PD} \Leftrightarrow W(\vec{R}_B) = 0$; $v_{B2}^2 - v_{B1}^2 = 2a_I\,x$;

$W(\vec{P}_B) = P_Bh_B = m_Bgx\sin\beta$ et $W(\vec{T}_B) = -T_Bx$.

Donc $\frac{1}{2}m_B2a_Bx = m_Bgx\sin\alpha - T_Bx$ ou encore

$m_Ba_Bx = m_Bgx\sin\beta - T_Bx \Leftrightarrow T_B = m_B(g\sin\beta - a_B)$

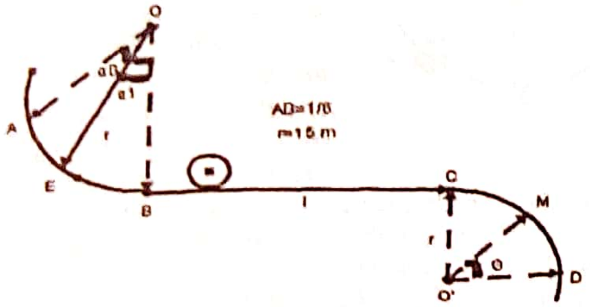
On en déduit que $a_A = a_B = a$ et $T_A = T_B = T$.

$m_A(a_A + g\sin\alpha) = m_B(g\sin\beta - a_B)$ OU ENCORE

$a(m_A + m_B) = g(m_B\sin\beta - m_A\sin\alpha) \Leftrightarrow$

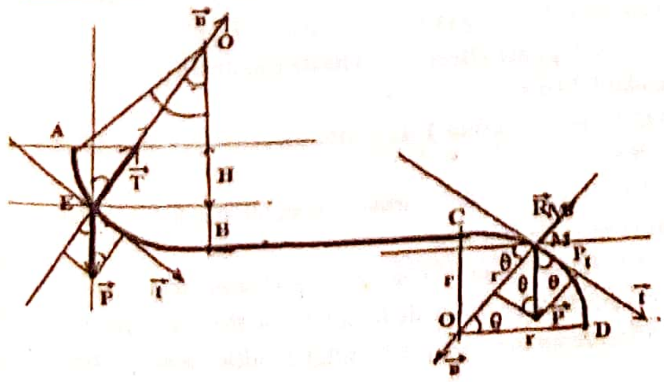
$a = \frac{m_B\sin\beta - m_A\sin\alpha}{m_A + m_B}g$.

Exercice 74 : Un mobile M de masse $m = 1\ kg$ assimilable à un point matériel glisse sur une piste ABCD en quittant le point A. On donne : $AB = \frac{1}{6}$ de la circonférence de centre O et de rayon $r = 15\ m$; $BC = \ell = 15\ m$; $\alpha_0 = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$; $\alpha_1 = (\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{6}$; $v_A = 6\ m/s$.
CD est un quart de cercle de centre O' et de rayon $r = 15\ m$ et $v_C = 2,5\ m/s$ et $\theta = (\overrightarrow{O'D}, \overrightarrow{O'M}) = 60°$.



1) On néglige les forces de frottements.
a) Exprimer la vitesse v_E en E en fonction de v_A, α_0, α_1, g, r. Calculer α_0 ; puis la vitesse v_E.
b) Montrer que la réaction sur cette piste est donnée par $R_E = m\left[g(3\cos\alpha_1 - 2\cos\alpha_0) + \frac{v_A^2}{r}\right]$. Calculer R_E.
2) En fait sur la piste ABC existe des forces de frottements d'intensité constante f.
Le mobile arrive au point C. Calculer f.
3) Le mobile aborde la portion circulaire CD avec la vitesse v_C en glissant sans frottement.
a) A partir du TEC, déterminer la vitesse v_M en fonction de g, r, v_C et θ. Calculer v_M.
b) Montrer que $R_M = m\left[g(3\sin\theta - 2) - \frac{v_C^2}{r}\right]$.
c) Déterminer la position du solide au moment où il quitte la piste circulaire. Calculer θ_0. Quelle est alors sa vitesse ?
4) En réalité sur la piste CD, il existe des forces de frottements d'intensité constante f'.
Soit au point M, la vitesse $v'_M = 6\ m/s$.
a) Calculer f'.. b) Calculer $\frac{dv_M}{dt}$ et l'accélération a'.

Correction : 1) On néglige les forces de frottements.



Le repère de Frenet $\vec{R}_E \begin{vmatrix} R_{Et} = 0 \\ R_{En} = R_E \end{vmatrix}$ et $\vec{P} \begin{vmatrix} P_t = P\sin\alpha_1 \\ P_n = -P\cos\alpha_1 \end{vmatrix}$

a) Exprimer la vitesse $v_E = f(v_A, \alpha_0, \alpha_1, g, r)$:
A partir du TEC, $E_{cE} - E_{cA} = W(\vec{P}) + W(\vec{R}_E)$
Or $\vec{R}_E \perp \vec{t} \Leftrightarrow W(\vec{R}_E) = 0$ et $W(\vec{P}) = PH = mgH$
Calculons H : $H = r\cos\alpha_1 - r\cos\alpha_0 = r(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_0)$
Donc $\frac{1}{2}m(v_E^2 - v_A^2) = mgr(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_0)$
ou $v_E^2 = 2gr(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_0) + v_A^2$
Donc $v_E = \sqrt{2gr(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_0) + v_A^2}$
Calculer α_0 : la circonférence est donnée par $2\pi r$
$\widehat{AB} = \frac{1}{6} \times 2\pi r = \frac{\pi}{3} r = r\alpha_0 \Leftrightarrow \alpha_0 = \frac{\pi}{3}\ rad$
La vitesse v_E : $\alpha_0 = \frac{\pi}{3}\ rad = 60°$; $\alpha_1 = \frac{\pi}{6} = 30°$
$v_E = \sqrt{300(\cos 30 - \cos 60) + 36} = \sqrt{145,8} = 12,07\ m/s$
b) la réaction est $R_E = m\left[g(3\cos\alpha_1 - 2\cos\alpha_0) + \frac{v_A^2}{r}\right]$.
Dans $(\vec{n}, \vec{t})$, TCI : $\vec{R}_E + \vec{P} = m\vec{a} \Leftrightarrow R_{En} + P_n = ma_n$
Donc $R_E - P\cos\alpha_1 = m\frac{v_E^2}{r} \Leftrightarrow R_E = m\frac{v_E^2}{r} + mg\cos\alpha_1 \Leftrightarrow$
$R_E = 2mg(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_0) + m\frac{v_A^2}{r} + mg\cos\alpha_1$
Finalement $R_E = m\left[g(3\cos\alpha_1 - 2\cos\alpha_0) + \frac{v_A^2}{r}\right]$
Calculer R_E.
$R_E = 1 \times \left[10(3\cos 30 - 2\cos 60) + \frac{36}{15}\right] = 18,38\ N$
2) Calculer f : A partir du TEC, $E_{cC} - E_{cA} = W(\vec{P}) + W(\vec{R})$
Or $W(\vec{R}) = -f(\widehat{AB} + BC)$ et $W(\vec{P}) = PH = mgH$
Calculons H : $H = r\cos\alpha_1 - r\cos\alpha_0 = r(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_0)$
Donc $\frac{1}{2}m(v_C^2 - v_A^2) = mgr(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_0) - f(\widehat{AB} + BC)$
$f = \frac{\frac{1}{2}m(v_C^2 - v_A^2) - mgr(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_0)}{\widehat{AB} + BC} = \frac{v_C^2 - v_A^2 - 2gr(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_0)}{2\left(\frac{\pi}{3}r + BC\right)} m$
$f = \frac{(2,5)^2 - (6)^2 - 300(\cos 30 - \cos 60)}{2\left(\frac{3,14}{3} \times 15 + 15\right)} \times 1 = -2,272\ N$
3) Le mobile aborde CD avec v_C en glissant sans frottement.
Dans le repère de Frenet de basse $(\vec{n}, \vec{t})$,
$\vec{a} \begin{vmatrix} a_t = \frac{dv}{dt} \\ a_n = \frac{v_M^2}{r} \end{vmatrix}$; $\vec{R}_M \begin{vmatrix} R_{Mt} = 0 \\ R_{Mn} = -R_M \end{vmatrix}$ et $\vec{P} \begin{vmatrix} P_t = P\cos\theta \\ P_n = P\sin\theta \end{vmatrix}$
a) la vitesse $v_M = f(g, r, v_C$ et $\theta)$:
$E_{cM} - E_{cC} = W(\vec{P}) + W(\vec{R}_M)$
Or $\vec{R}_M \perp \vec{t} \Leftrightarrow W(\vec{R}_M) = 0$ et $W(\vec{P}) = Ph = mgh$
Calculons h : $h = r - r\sin\theta = r(1 - \sin\theta)$
$W(\vec{P}) = Ph = mgr(1 - \sin\theta)$
Donc $\frac{1}{2}m(v_M^2 - v_C^2) = mgr(1 - \sin\theta) \Leftrightarrow$
$v_M^2 = 2gr(1 - \sin\theta) + v_C^2 \Leftrightarrow v_M = \sqrt{2gr(1 - \sin\theta) + v_C^2}$
Calculer v_M
$v_M = \sqrt{300(1 - \sin 60) + (2,5)^2} = \sqrt{42,692} = 6,54\ m/s$

b) Montrer que $R_M = m\left[g(3\sin\theta - 2) - \frac{v_C^2}{r}\right]$.

TCI : $\vec{P} + \vec{R}_M = m\vec{a} \Leftrightarrow R_{Mn} + P_n = ma_n$

Donc $-R_M + P\sin\theta = m\frac{v_M^2}{r} \Leftrightarrow R_M = -m\frac{v_M^2}{r} + P\sin\theta \Leftrightarrow$

$R_M = m\left(g\sin\theta - \frac{v_M^2}{r}\right) = m\left(g\sin\theta - \frac{2gr(1-\sin\theta)+v_C^2}{r}\right)$

$R_M = m\left(g\sin\theta - 2g(1-\sin\theta) - \frac{v_C^2}{r}\right) =$

$R_M = m\left[g(3\sin\theta - 2) - \frac{v_C^2}{r}\right]$

c) la position du solide au moment où il quitte la piste circulaire si $R_M = m\left[g(3\sin\theta - 2) - \frac{v_C^2}{r}\right] = 0 \Leftrightarrow$

Calculer θ_0

$g(3\sin\theta_0 - 2) - \frac{v_C^2}{r} = 0 \Leftrightarrow g(3\sin\theta_0 - 2) = \frac{v_C^2}{r} \Leftrightarrow$

$3\sin\theta_0 - 2 = \frac{v_C^2}{gr} \Leftrightarrow 3\sin\theta_0 = \frac{v_C^2}{gr} + 2 \Leftrightarrow$

$\sin\theta_0 = \frac{2}{3} + \frac{v_C^2}{3gr} \Leftrightarrow \theta_0 = \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} + \frac{v_C^2}{3gr}\right)$

$\theta_0 = \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} + \frac{(2,5)^2}{300}\right) = \sin^{-1}(0,6875) = 43,43°$

Quelle est alors sa vitesse ? on sait que $\sin\theta = \frac{2}{3} + \frac{v_C^2}{3gr}$

$v = \sqrt{2gr(1-\sin\theta) + v_C^2} = \sqrt{2gr\left(1 - \frac{2}{3} - \frac{v_C^2}{3gr}\right) + v_C^2}$

$v = \sqrt{\frac{2}{3}gr - \frac{2}{3}v_C^2 + v_C^2} = \sqrt{\frac{2}{3}gr + \frac{1}{3}v_C^2} = \sqrt{\frac{1}{3}(2gr + v_C^2)}$

$v = \sqrt{\frac{1}{3} \times (300 + (2,5)^2)} = \sqrt{102,08} = 10,10\ m/s.$

4) Sur la piste CD, il existe des forces de frottements

$\vec{a}\left|\begin{array}{l} a_t = \frac{dv}{dt} \\ a_n = \frac{v_M^2}{r} \end{array}\right.$; $\vec{R}_M\left|\begin{array}{l} R_{Mt} = -f' \\ R_{Mn} = -N_M \end{array}\right.$ et $\vec{P}\left|\begin{array}{l} P_t = P\cos\theta \\ P_n = P\sin\theta \end{array}\right.$

a) Calculer f' : $E_{cM} - E_{cC} = W(\vec{P}) + W(\vec{R}_M)$

Or $W(\vec{R}_M) = -f'\widehat{CM} = -f'r\theta = -f'r\frac{\pi}{3}$ et

$W(\vec{P}) = Ph = mgr(1-\sin\theta)$ car $h = r(1-\sin\theta)$

Donc $\frac{1}{2}m(v'^2_M - v_C^2) = mgr(1-\sin\theta) - f'r\theta \Leftrightarrow$

$f' = \frac{\frac{1}{2}m(v'^2_M - v_C^2) - mgr(1-\sin\theta)}{r\frac{\pi}{3}} = \frac{v'^2_M - v_C^2 - 2gr(1-\sin\theta)}{2r\frac{\pi}{3}}m$

$f' = \frac{(6)^2 - (2,5)^2 - 300(1-\sin 60)}{2 \times \frac{3,14}{3} \times 15} \times 1 = -0,332\ N$

b) Calculer $\frac{dv_M}{dt}$: TCI : $\vec{P} + \vec{R}_M = m\vec{a} \Leftrightarrow R_{Mt} + P_t = ma_t$

Donc $-f' + P\cos\theta = m\frac{dv_M}{dt} \Leftrightarrow \frac{dv_M}{dt} = -\frac{f'}{m} + g\cos\theta$

$\frac{dv_M}{dt} = -\frac{f'}{m} + g\cos\theta = \frac{0,332}{1} + 10\cos 60 = 5,332\ m/s^2$

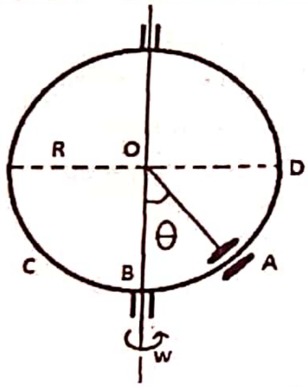
L'accélération est donnée par $a' = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$:

Or $a_t = \frac{dv_M}{dt} = 5,332\ m/s^2$ et $a_n = \frac{v'^2_M}{r} = \frac{(6)^2}{15} = 2,4\ m/s^2$

$a' = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{(5,332)^2 + (2,4)^2} = \sqrt{34,2} =$

$a' = 5,84\ m/s^2$.

Exercice 75 : Un anneau A peut glisser sans frottement le long d'un contour circulaire C vertical, de centre O et de rayon $R = 0,4$ m. La masse de l'anneau vaut $M = 20$ g et celui-ci est supposé indéformable.



On fait tourner C autour d'un axe vertical Δ à raison de 2 tr.s^{-1} (tours par seconde) ; l'anneau s'écarte alors de l'axe Δ et « s'immobilise » en A, tel que $\widehat{AOB} = \theta$.

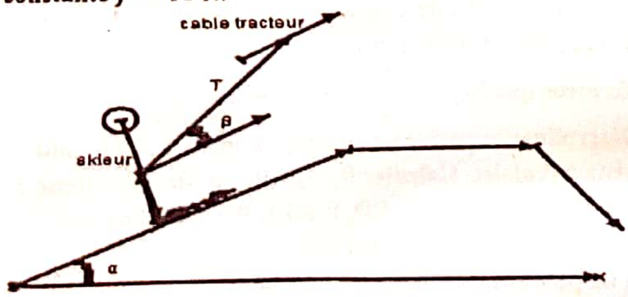
a) Calculer la valeur de θ ?

b) A quelle vitesse minimale, exprimée en tr.s^{-1}, le cercle C doit-il tourner pour que l'anneau A puisse s'éloigner du point B ?

c) Est-il possible que l'anneau se positionne en D, sur l'horizontale de O ?

<u>Réponse :</u> a) $\theta = 81°$ b) $N_{min} = 0,79$ tr.s^{-1} c) non.

Exercice 76 : Un skieur de masse $m = 80\ kg$ (équipement compris), tiré par un remonte pente, gravit une piste rectiligne incliné d'un angle $\alpha = 20°$ par rapport à l'horizontal. Le skieur est relié au câble tracteur par une tige métallique T qui fait un angle constant $\beta = 30°$ avec la ligne de plus grande pente. La piste est recouverte de neige fraîche créant une force de frottement. Pendant tout le mouvement, l'ensemble des forces de frottements agissant sur le skieur est équivalent ç une force unique de même direction que sa vitesse, de sens opposé et d'intensité constante $f = 40$ N.



1) Le mouvement du skieur pendant la montée sur le plan incliné comprend deux (2) phases :

- 1ère phase uniformément accélération de durée 8 s au cours de laquelle sa vitesse passe de 0 à 2 m/s.
- 2ème phase effectuée à vitesse constante de 2 m/s pendant 246 s.

a) Calculer la tension T de la tige au cours des deux phases du mouvement.

b) Calculer la distance totale parcourue par le skieur au cours de cette montée.

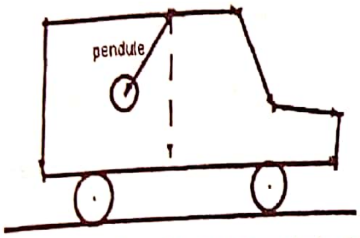
2) A la fin de la montée, le skieur arrive sur une piste horizontale et se libère de la tige qui le tire. Sur cette piste, il effectue un mouvement rectiligne uniformément retardé

de vitesse initiale $v = 2\ m/s$. Calculer la distance parcourue jusqu'à l'arrêt sur la piste horizontale.

3) Le skieur descend sans vitesse initiale une piste rectiligne de longueur $150\ m$ et dont la pente est estimée à 10%. a) Calculer l'accélération du skieur dans la descente et la vitesse atteinte après un parcours de $20\ m$.

b) Au bout de combien de temps arrive-t-il au bas de la pente ?

Exercice 77 : Au plafond d'un véhicule situé sur une route rectiligne et horizontale, on accroche un pendule constitué d'une petite sphère assimilable à un point matériel de masse $m = 10\ g$, suspendue à un fil inextensible de longueur $l = 50\ cm$ et de masse négligeable.



1) La vitesse du véhicule passe de $v_1 = 60\ km/h$ à $v_2 = 70\ km/h$ et le pendule fait un angle $\alpha_1 = 30°$ avec la verticale.

a) Faire un schéma représentant les forces appliquées au pendule et indiquer le sens du mouvement du véhicule.

b) Déterminer l'expression de l'accélération a du véhicule en fonction de α_1 et g. Calculer a.

c) Déterminer la durée de la variation de la vitesse du véhicule. d) Déterminer l'expression de la tension T du fil en fonction de m, α_1 et g. Calculer T.

2) Roulant sur une vitesse de $v' = 72\ km/h$, le chauffeur freine et s'arrête en $10\ s$.

a) Quel est le sens de déviation du fil par rapport à la verticale ?

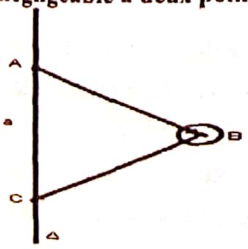
b) Calculer l'angle α' que fait le fil avec la verticale.

3) Le véhicule est l'arrêt.

a) Quelle est la position du pendule ?

b) On communique au pendule une énergie de $3,0.10^{-2}\ J$. Il passe à une position P_2, faisant un angle α_2 avec la verticale. L'intensité de la vitesse v_0 en ce point vaut $2\ m/s$. Calculer l'angle α_2

Exercice 78 : Une bille assimilable a un point matériel B, de masse $m = 0,6\ kg$, est reliée par deux fils de masse négligeable à deux points A et C d'un axe Δ.



On note $AB = BC = \ell = 0,7\ m$ et $AC = a = 1\ m$.

1) La bille tourne à une vitesse angulaire ω constante autour de l'axe Δ. Les fils restent constamment tendus. Déterminer l'expression de la tension des fils en fonction de ω.

2) Montrer que le fil BC n'est tendu qu'à partir d'une certaine valeur ω_0 de la vitesse angulaire.

3) Calculer ω_0, les tensions T_1 et T_2 pour $\omega_1 = 8\ rad/s$ et $\omega_2 = 4\ rad/s$.

Réponse : 1) $T_1 = \frac{m\ell}{2}\left(\frac{2g}{a} + \omega^2\right)$; $T_2 = \frac{m\ell}{2}\left(\omega^2 - \frac{2g}{a}\right)$

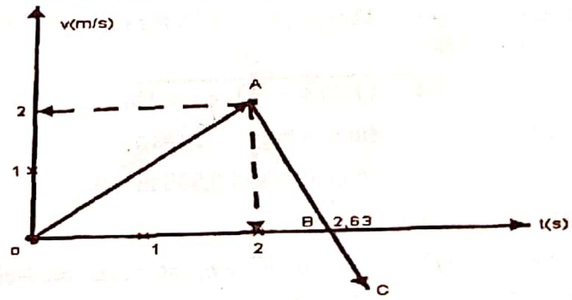
2) $T_2 > 0$; $\omega > \omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{a}}$;

3) $\omega_0 = 4,4\ rad/s$; $T_1 = 17,6\ N$; $T_2 = 9,3\ N$

$\omega_2 < \omega_0$: $T_2 = 0$; $T_1 = 6,7\ N$.

Exercice 79 : Un mobile M de masse $m = 0,5\ kg$ peut glisser sans frottement le long de plus grande pente Ox d'un plan incliné faisant un angle $\alpha = 16°$ par rapport au plan horizontal. Il est attaché à un fil inextensible tendu parallèle à Ox. A l'instant $t_0 = 0$, le mobile M est au repos au point O, l'origine de l'axe ; on applique au fil une traction qui fait graviter à M le plan incliné. On étudie le mouvement de M. on en déduit la mesure v de la vitesse de M à chaque instant ; on trace le graphique de la fonction $t \rightarrow v(t)$ qui est le segment de la droite [O, A]. Au temps $t_1 = 2,0\ s$ le fil de traction casse.

En présentant maintenant la vitesse v du mobile en fonction du temps, on obtient une demi-droite AC qui coupe l'axe des temps au point B d'abscisse $t_2 = 2,63\ s$.

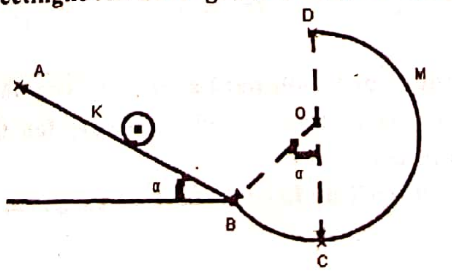


1) Déduire du graphique, sans calcul, la nature du mouvement de M et le sens de déplacement entre les dates t_0 et t_1 ; t_1 et t_2 ; et $t > t_2$. On précisera sur un croquis les sens des vecteurs vitesse et accélération.

2) Entre t_0 et t_1, calculer la valeur de l'accélération de M, la distance parcourue et la valeur de la force de traction exercée par le fil. On prendra $g = 9,8\ m.s^{-2}$

Réponse : 2) $a = 1\ m.s^{-2}$; $\ell = 2\ m$; $T = 1,85\ N$

Exercice 80 : Une piste verticale est constituée d'une partie rectiligne AB de longueur $\ell = AB = 1\ m$, incliné d'un angle $\alpha = 60°$ sur l'horizontale et d'une partie circulaire BCD raccordée tangentielle en B à la partie AB.



Le rayon de la partie circulaire est $r = 20\ cm$. Un solide ponctuel de masse $m = 200\ g$, de dimensions négligeables, est abandonné en A sans vitesse initiale.

1) Sur la piste ABCD, on néglige les frottements. Calculer la vitesse du solide lors de son passage en B, C, D.

2) Le solide est lâché d'un point K situé entre A et B à une distance AK $= x$.

a) Exprimer la vitesse v_D du solide en D en fonction de r, α, x, ℓ et g.

b) Donner l'expression de la réaction R_D exercée par la piste sur le solide au point D en fonction r, α, x, ℓ, m et g.

c) Quelles valeurs faut-il donner à x pour que le solide puisse atteindre le sommet D de la trajectoire circulaire ?

3) En fait sur la partie rectiligne AB existent des forces de frottement assimilables à une force $\vec{f}$ constante.

Le solide lâché du point A sans vitesse initiale arrive au point B avec une vitesse $v_B = 2\ m/s$ et s'engage dans la partie circulaire.

a) Calculer l'intensité f de la force de frottement.

b) Le solide décolle de la partie circulaire en un point M situé au-dessus du plan horizontal passant par O et repéré par l'angle $\theta = (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OM})$. Déterminer la valeur de l'angle θ lorsque le solide quitte la sphère.

Réponse : 1) $v_B = 4{,}16\ m/s$; $v_C = 4{,}39\ m/s$; $v_D = 3{,}36\ m/s$.

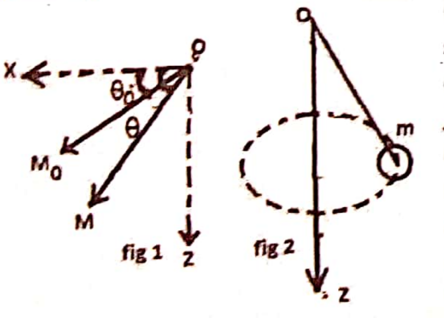
2) a) $v_D = \sqrt{2g(\ell - x)\sin\alpha - r(1+\cos\alpha)}$;

b) $R_D = \frac{2mg}{r}(\ell - x)\sin\alpha - mg(3 + 2\cos\alpha)$

c) $R_D \geq 0$ et $v_D \geq 0$ d'où $0 \leq x \leq 0{,}538$ m

3) a) $f = mg\sin\alpha - \frac{mv_1^2}{2AB} = 1{,}33\ N$

Exercice 81 : 1) Une bille de masse m est suspendue à un point O par un fil inextensible de longueur l. (fig1).



On écarte le fil de sa position d'équilibre jusqu'à la position définie par l'angle $\theta_0 = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM})$ et on lance la bille dans le plan Ox, Oz avec un vecteur vitesse $\vec{v}_0$ tangent au cercle de rayon l et dirigé vers le bas.

On repère la position de la bille par l'angle $\theta = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM})$.

a) Exprimer la norme de la vitesse $\vec{v}$ de la bille, en fonction des données, à l'instant t.

b) Exprimer la tension T du fil en fonction de v_0, g, θ_0, θ, ℓ et m.

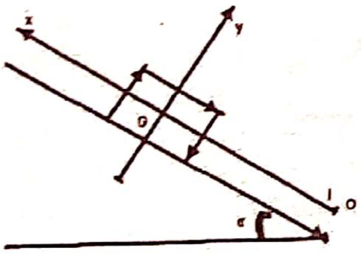
c) Exprimer la valeur minimale de la norme de $\vec{v}_0$ pour que la bille effectue un tour complet.

2) Le système est mis en mouvement de rotation uniforme autour de l'axe Oz avec une vitesse angulaire $\omega = 5\ rad/s$. (Figure 2) On donne $m = 50\ g$, $\ell = 50\ cm$ et $g = 9{,}8\ m.s^{-2}$.

a) Calculer l'angle α dont le fil s'écarte de l'axe Oz.

b) Calculer la tension du fil.

Exercice 82 : On considère un plan incliné d'angle α par rapport à l'horizontale. Soit un solide S, de masse m et de centre d'inertie G. Ce solide est lancé avec une vitesse initiale v_0 vers la partie supérieure du plan incliné suivant l'axe $(O; \vec{\imath})$. Les frottements sont considérés comme négligeables. A la date $t_0 = 0$, le centre d'inertie se trouve en O, son vecteur vitesse est alors égale à : $\vec{v}_0 = v_0\vec{\imath}$.



On étudie le mouvement de G pour $t \geq 0$ dans un référentiel galiléen.

1) a) Faire l'inventaire des forces appliquées à ce solide, puis, représenter sur un schéma bien soigné les forces appliquées à ce solide.

b) En appliquant TCI, déterminer l'expression de l'accélération a de G suivant (O,x) en fonction de l'intensité de la pesanteur g et de l'angle α.

c) Quelle est la nature du mouvement de G ?

d) Calculer la valeur de l'accélération a pour $\alpha = 30°$.

2) a) Donner l'expression de la vitesse v en fonction de t.

b) Donner de même l'expression de la coordonnée x de G fonction du temps t.

3) a) Quelle est, en fonction de v_0, g et α, l'expression de la date t_M à laquelle G atteint son point le plus haut ?

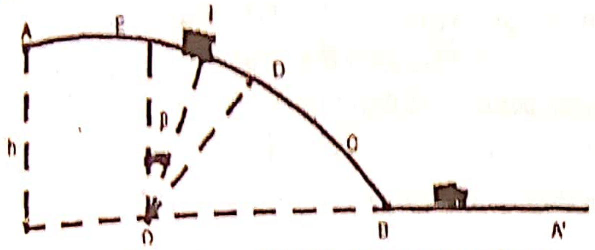
b) En déduire l'expression de x_M de ce point en fonction de v_0, g et α.

4) Toujours avec l'angle $\alpha = 30°$, on souhaite atteindre un point distant de $1{,}6\ m$ de O.

Quelle valeur minimale faut-il donner à v_0 ?

D'après Abû Hurayra (ra) un homme dit au Prophète (saw) Fais-moi une recommandation », « Ne te mets pas en colère, répondit le Prophète (saw) L'homme répéta plusieurs fois la même demande et à chaque fois il lui disait : « Ne te mets pas en colère ».

Exercice 83 : Dans les fêtes foraines, il y a parfois des stands où il est possible de montrer ses qualités athlétiques.



Dans l'un d'entre eux, il s'agit de propulser à une certaines hauteur h un petit chariot de masse $m = 10\ kg$ qui peut se déplacer sur deux rails parallèles. Le schéma ci-dessous en donne le profil dans un plan vertical. Les rails comportent quatre parties.

- Une portion horizontale $AB = \frac{1}{2}h$;
- Un premier arc de cercle BC ;
- Une partie rectiligne CD ;
- Un dernier arc de cercle DE de rayon r, de centre O

situé sur l'horizontale $\overline{AB}$. E est alors sur la verticale passant par O à une hauteur $h = r = 2\ m$ au-dessus de O. le chariot considéré comme ponctuel.

1) On lance le chariot en exerçant, entre A et B, une force constante $\vec{F}$ de même sans que $\overrightarrow{AB}$,

Entre A et E, le chariot glisse le long du guide : il est soumis à des forces de frottement équivalentes à une force constante $\vec{f}$, opposée au vecteur vitesse.

a) En appliquant le TEC, calculer la vitesse du chariot au passage en B pour qu'il arrive en E avec une vitesse nulle. La distante parcourue entre B et E est $\ell = 2\ h$.

b) Le chariot étant au repos en A, déterminer en fonction de f, m et g l'intensité de la force $\vec{F}$ qu'il est nécessaire d'exercice entre A et B pour que le chariot arrive en E avec une vitesse nulle.

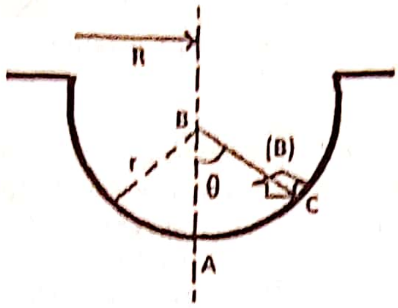
2) Repartant de E avec une vitesse nulle, le chariot revient vers son point de départ.

a) Donner l'expression de la vitesse v du chariot en un point I quelconque de l'arc $\widehat{ED}$, en fonction de l'angle $\beta = (\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OI}) = 40°$.

b) Calculer en fonction de l'angle β et des autres données, la composante normale de la réaction que les rails exercent sur le chariot en ce point I.

c) La vitesse du chariot à son passage en B est de $7{,}5\ m/s$; $4{,}9\ m/s$; $12{,}4\ m/s$. Choisir et justifier.

Exercice 84 : Un bobsleigh (B) glisse sure piste de descente et passe dans un virage horizontal ; le rayon du virage est $R = 9\ m$ par rapport à l'axe de celui-ci.

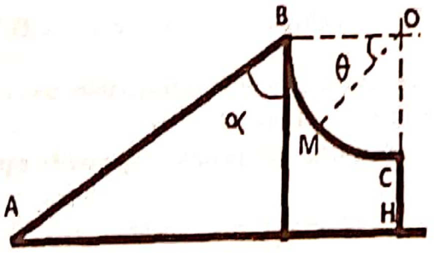


Le rayon de la section circulaire de la piste vaut $r = 1{,}8\ m$ et la distance du centre d'inertie G du bobsleigh et de passagers à la piste $GC = a = 0{,}5\ m$. La photographie montre que la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$ est $\theta = 84°$. Sur la piste glacée, le mouvement du bobsleigh s'effectue sans frottement.

a) Calculer la vitesse de passage du centre d'inertie de l'engin à cet endroit.

b) Calculer la valeur de la réaction de la piste sur le bobsleigh (B) sachant que l'engin, avec les passagers, à pour masse $M = 200\ Kg$.

×**Exercice 85 :** Un corps assimilable à un point de mase $m = 250\ g$, se déplace sans frottement sur une piste ABC situé dans un plan vertical. La piste comporte un tronçon rectiligne AB qui fait avec la verticale de B un angle $\alpha = 60°$ et un tronçon circulaire BC de centre O qui se termine par une partie verticale CH.



1) Le corps est lancé de A vers B. Exprimer l'accélération et en déduire la nature du mouvement.

2) Calculer la vitesse minimale avec laquelle il faut lancer le corps du point A pour qu'il arrive en B avec une vitesse nulle.

3) Le corps quitte B avec une vitesse nulle. A l'instant quelconque, sa position M est repérée par son abscisse angulaire $\theta = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OM})$.

a) Etablir l'expression de la vitesse du corps en M en fonction de r, g et θ.

b) En déduire la vitesse pour $\theta = 30°$.

c) Etablir l'expression de l'intensité de la réaction R de la piste sur le corps en fonction de m, g et θ.

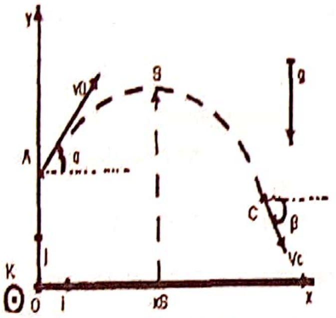
d) Calculer R pour $\theta = 30°$.

e) Donner les caractéristiques de la vitesse du corps en C.

Données : $BO = CO = r = 2{,}5\ m$ et $CH = 0{,}7\ m$.

Le Messager d'Allah (saw) a dit : « La foi est de croire en Allah, ses anges, ses livres, ses messagers, au jour dernier et au destin qu'il soit en ta faveur ou non. » Rapporté par Mouslim.

Exercice 86 : Une bille M considérée comme ponctuelle est lancée, dans le champ de pesanteur, d'un point A (figure) avec une vitesse $\vec{v}_0 = \vec{v}_A$ faisant un angle α avec l'horizontale. L'origine des dates coïncide avec le lancer de la bille, et le mouvement du centre d'inertie de la bille est étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen auquel est lié le repère indiqué sur le schéma.



1) On donne $v_0 = 50\ m/s$, $\alpha = 60°$, $OA = y_A = 10\ m$.

a) Exprimer les vecteurs vitesse $\vec{v}$ et position $\overrightarrow{OM}$ en fonction du temps t, des vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\vec{v}_0$ et $\vec{g}$. Calculer v.

b) Montrer que la trajectoire est située dans le plan vertical contenant $\vec{v}_0$. c) Exprimer les vecteurs vitesse $\vec{v}$ et position $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\vec{i};\vec{j})$. En déduire les équations horaires du mouvement $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$.

d) Etablir l'équation cartésienne de la trajectoire : $x \mapsto y(t)$. En déduire sa nature.

e) En quel point et à quelle date la bille coupe-t-elle le plan horizontal $(O,\vec{i};\vec{j})$?

2) a) A l'aide du théorème de l'énergie mécanique, déterminer la vitesse v_C en fonction de g, $v_0 = v_A$, y_A et y_C

b) Montrer que les coordonnées v_{Cx} et v_{Ax} des vecteurs $\vec{v}_C$ et $\vec{v}_A$ sont égales. En déduire que $v_{Cy} = \vec{v}_C \cdot \vec{j}$.

3) Déterminer l'angle $\beta = (\vec{i}, \vec{v}_C)$. On exprimera $\tan\beta$ en fonction de $\dot{x}_C$ et de $\dot{y}_C$.

4) Exprimer le vecteur vitesse $\vec{v}_S$ de G au sommet S de la trajectoire. Déterminer l'altitude maximale y_S atteinte par G en fonction de g, v_A, α et y_A.

5) Déterminer les angles de tir qui permettent d'atteindre la cible qui est au point B de coordonnées $B\begin{vmatrix} x_B = 30\ m \\ y_B = 20\ m' \end{vmatrix}$

Correction : TCI : $\vec{P} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{g} = \vec{a}\begin{vmatrix} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{vmatrix}$

1) a) vecteur vitesse $\vec{v} = \vec{g}t + \vec{v}_0 \Leftrightarrow v = -10t + 50$.

Vecteur position $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}t^2\vec{g} + t\vec{v}_0 + \overrightarrow{OA}$

b) $a_z = \frac{dv_z}{dt} = 0 \Leftrightarrow v_z = \frac{dz}{dt} = 0 \Leftrightarrow z = 0$ alors la trajectoire est située dans le plan $(O,\vec{i};\vec{j})$ contenant $\vec{v}_0$.

c) vecteur vitesse $\vec{v}$ dans la base $(\vec{i};\vec{j})$

$$\vec{v} = \vec{g}t + \vec{v}_0 = t\begin{vmatrix} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{vmatrix} + \vec{v}_0\begin{vmatrix} v_{0x} = v_0\cos\alpha \\ v_{0y} = v_0\sin\alpha \end{vmatrix}$$

$$\vec{v}\begin{vmatrix} v_x = v_0\cos\alpha \\ v_y = -gt + v_0\sin\alpha \end{vmatrix} \Leftrightarrow \vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$$

$$\vec{v} = (v_0\cos\alpha)\vec{i} + (-gt + v_0\sin\alpha)\vec{j}$$

Vecteur position $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\vec{i};\vec{j})$:

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} = (v_0 t\cos\alpha)\vec{i} + \left(-\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t\sin\alpha + y_A\right)\vec{j}$$

Les équations horaires du mouvement

$$\overrightarrow{OG}\begin{vmatrix} x = v_0 t\cos\alpha = 25t \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t\sin\alpha + y_A = -5t^2 + 4{,}33t + 10 \end{vmatrix}$$

d) l'équation cartésienne de la trajectoire

$$y = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0\cos\alpha}\right)^2 + v_0\frac{x}{v_0\cos\alpha}\sin\alpha + 6$$

$y = \frac{-g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha + y_A$ alors la bille effectue un mouvement parabolique. AN : $y = -0{,}008x^2 + 1{,}73x + 10$

e) Au point S, on a $v_{yS} = 0$:

$$y = -5t^2 + 4{,}33t + 10 \Leftrightarrow v = -10t + 4{,}33$$

$$v_{yS} = -10t_S + 4{,}33 = 0 \Leftrightarrow t_S = \frac{4{,}33}{10} = 0{,}433\ s.$$

2) a) la vitesse v_C en fonction de g, v_A, y_A et y_C :

$$E_A = \frac{1}{2}mv_A^2 + mgy_A = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgy_A$$

$E_C = \frac{1}{2}mv_C^2 + mgy_C$ or l'énergie mécanique se conserve

Donc $E_A = E_C \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 + mgy_A = \frac{1}{2}mv_C^2 + mgy_C$

$$\frac{1}{2}m(v_C^2 - v_0^2) = mg(y_A - y_C) \Leftrightarrow v_C^2 = 2g(y_A - y_C) + v_0^2$$

$$v_C^2 = 2g(y_A - y_C) + v_0^2 \Leftrightarrow v_C = \sqrt{2g(y_A - y_C) + v_0^2}.$$

b) $\vec{v}_C\begin{vmatrix} v_{Cx} = v_0\cos\alpha = v_{Ax} \\ v_{Cy} = -gt_C + v_0\sin\alpha \end{vmatrix} \Leftrightarrow$

$$v_{Cy} = \sqrt{2g(y_A - y_C) + v_0^2\sin^2\alpha}$$

3) $\tan\beta = \frac{\dot{y}_C}{\dot{x}_C} = \frac{\sqrt{2g(y_A - y_C) + v_0^2\sin^2\alpha}}{v_0\cos\alpha}$

4) Le vecteur vitesse $\vec{v}_S\begin{vmatrix} v_{Sx} = v_0\cos\alpha \\ v_{Sy} = -gt_S + v_0\sin\alpha = 0 \end{vmatrix}$

L'altitude maximale y_S atteinte par G : $y_S = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g} + y_A$

5) angles de tir pour atteindre $B\begin{vmatrix} x_B = 30\ m \\ y_B = 20\ m' \end{vmatrix}$

$y = \frac{-g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha + y_A$ or $1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

Donc $y = \frac{-g}{2v_0^2}(1 + \tan^2\alpha)x^2 + x\tan\alpha + y_A$

Au point B de coordonnées $B\begin{vmatrix} x_B = 30\ m \\ y_B = 20\ m \end{vmatrix}$

$$y_B = \frac{-g}{2v_0^2}(1 + \tan^2\alpha)x_B^2 + x_B\tan\alpha + y_A$$

$$20 = \frac{-10}{2(50)^2}(1 + \tan^2\alpha)(30)^2 + 30\tan\alpha + 10$$

$$1{,}8\tan^2\alpha - 30\tan\alpha + 11{,}8 = 0$$

Posons $\tan\alpha = x \Leftrightarrow 1{,}8x^2 - 30x + 11{,}8 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-30)^2 - 4(1{,}8)(11{,}8) = 815{,}04$

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} =$ [illegible] $= 0,403 \Leftrightarrow$

$\tan\alpha = 0,403 \Leftrightarrow \alpha = \tan^{-1}(0,403) = 22°$

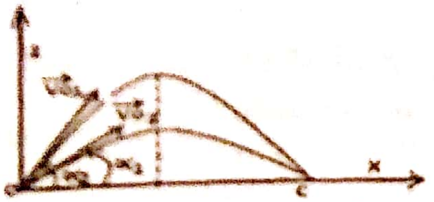
$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} =$ [illegible] $= 16,26 \Leftrightarrow$

$\tan\alpha = 16,26 \Leftrightarrow \alpha = \tan^{-1}(16,26) = 86,48°$

L'angle de tir tendu est $\alpha = 22°$

L'angle de tir en cloche est $\alpha = 68°$.

Exercice 87 : Un canon tire sur une cible éloignée de $d = 6$ km et située dans le même plan horizontal.



La vitesse initiale de l'obus est de $v_0 = 300$ m/s.

1) On rappelle que la trajectoire de l'obus est définie par $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}t^2\vec{g} + t\vec{v}_0$. Calculer les coordonnées du vecteur vitesse et celles du vecteur position dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Ecrire l'équation cartésienne de la trajectoire.

2) Déterminer littéralement puis numériquement les deux angles de tir α_1 (tir tendu) et α_2 (tir en cloche).

3) En envisageant les deux cas précédents, déterminer :

a) la hauteur maximale atteinte ;

b) le temps mis pour attendre le point C.

4) a) A quelle vitesse l'obus arrive-il en C ?

b) Avec la vitesse v_0 et les angles de tir calculés ci-dessus, l'obus pourrait-il réellement atteindre la cible ? Pourquoi ?

Correction : 1) l'équation cartésienne de la trajectoire

$$\overrightarrow{OM}\begin{cases} x = \frac{1}{2}a_x t^2 + v_{0x}t + x_0 = v_0 t\sin\alpha \\ z = \frac{1}{2}a_z t^2 + v_{0z}t + z_0 = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t\cos\alpha \end{cases}$$

$z = \frac{-g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha \qquad$ or $1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

Donc $z = \frac{-g}{2v_0^2}(1 + \tan^2\alpha)x^2 + x\tan\alpha$

2) Les deux angles de tir : $C\begin{vmatrix} x_C = d = 6000\ m \\ y_C = 0\ m \end{vmatrix}$

$y_C = \frac{-g}{2v_0^2}(1 + \tan^2\alpha)x_C^2 + x_C\tan\alpha$

$0 = \frac{-10}{2(300)^2}(1 + \tan^2\alpha)(6000)^2 + 6000\tan\alpha$

$$2000\tan^2\alpha - 6000\tan\alpha + 2000 = 0 \Leftrightarrow$$

$\tan^2\alpha - 3\tan\alpha + 1 = 0 \qquad$ Posons $\tan\alpha = x \Leftrightarrow$

$$x^2 - 3x + 1 = 0$$

$\Delta = b^2 - 4ac = (3)^2 - 4(1)(1) = 5$

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3-\sqrt{5}}{2(1)} = 0,382 \Leftrightarrow$

$\tan\alpha = 0,403 \Leftrightarrow \alpha = \tan^{-1}(0,382) = 21°$

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3+\sqrt{5}}{2(1)} = 2,62 \Leftrightarrow \alpha = \tan^{-1}(2,62) = 69°$

L'angle de tir tendu est $\alpha_1 = 21°$

L'angle de tir en cloche est $\alpha_2 = 69°$.

3) a) Calculer la flèche $y_M = h_{max} = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}$

➢ Tir tendu : $h_{max} = \frac{v_0^2\sin^2\alpha_1}{2g} = 560\ m$

➢ Tir en cloche : $h_{max} = \frac{v_0^2\sin^2\alpha_2}{2g} = 4033\ m$

c) Le projectile heurte le sol en C ssi $y = 0$

$-\frac{1}{2}gt_C^2 + v_0 t_C\sin\alpha = 0 \Leftrightarrow t_C = \frac{2v_0\sin\alpha}{g}$

➢ Tir tendu : $t_1 = \frac{2v_0\sin\alpha_1}{g} = 21,3\ s$

➢ Tir en cloche : $t_2 = \frac{2v_0\sin\alpha_2}{g} = 57,4\ s$

d) Calculer la vitesse lors de l'impact au point C.

$\vec{v}\begin{vmatrix} v_x = v_0\cos\alpha \\ v_y = -gt + v_0\sin\alpha \end{vmatrix}$ C'est-à-dire

$\vec{v}_C\begin{vmatrix} v_{Cx} = v_0\cos\alpha \\ v_{Cy} = -gt_C + v_0\sin\alpha \end{vmatrix}$ or $t_C = \frac{2v_0\sin\alpha}{g}$

Donc $\vec{v}_C\begin{vmatrix} v_{Cx} = v_0\cos\alpha \\ v_{Cy} = -g\frac{2v_0\sin\alpha}{g} + v_0\sin\alpha = -v_0\sin\alpha \end{vmatrix}$

$\|\vec{v}_C\| = v_C = \sqrt{v_{Cx}^2 + v_{Cx}^2} = \sqrt{(v_0\cos\alpha)^2 + (v_0\sin\alpha)^2}$

$v_C = \sqrt{v_0^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)} = v_0 = 300$ m/s.

Exercice 88 : Un projectile de masse m est lancé le champ de pesanteur terrestre. La vitesse de lancement $\vec{v}_0$ fait un angle de tir α avec le plan horizontal. La résistance de l'air est négligée. L'origine des dates coïncide avec le lancer du projectile, et le mouvement du centre d'inertie du projectile est étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen auquel est lié le repère.

1) Établir les équations horaires du mouvement du projectile dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. En déduire l'équation cartésienne de sa trajectoire.

2) Montrer que la flèche est l'altitude maximale h_{max} atteinte par le projectile qui peut s'exprimer par $y_M = h_{max} = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}$. (Proposer 2 méthodes pour la déterminer). Quelle est son angle de tir ?

3) a) Déterminer l'expression de la portée horizontale $d = x_C$ (où le point C est la cible) en fonction de v_0, α et g.

b) Déterminer la portée horizontale maximale. $x_{max} = d_{max}$. Que peut-on en conclure de $x_C < x_{max}$?

4) On donne $d = x_C = 2\ 500$ m et $v_0 = 200$ m/s. Le point d'impact sur le sol est le point C.

a) Calculer les deux angles de tir (tir tendu et tir en cloche) pour atteindre le point C. b) Calculer la flèche (tir tendu et tir en cloche) pour atteindre le point C.

c) Calculer la durée du tir pour atteindre le point C.

d) Calculer la vitesse lors de l'impact au point C.

Correction : 1) Équations horaires du projectile

TCI : $\vec{P} = m\vec{a} \Leftrightarrow m\vec{g} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{g} = \vec{a} \left| \begin{array}{l} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{array} \right.$

A l'instant $t = 0\ s$, $\vec{v}_0 \left| \begin{array}{l} v_{0x} = v_0 \cos\alpha \\ v_{0y} = v_0 \sin\alpha \end{array} \right.$ et $O \left| \begin{array}{l} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{array} \right.$

A l'instant t, $\vec{v} \left| \begin{array}{l} v_x = a_x t + v_{0x} = v_0 \cos\alpha \\ v_y = a_y t + v_{0y} = -gt + v_0 \sin\alpha \end{array} \right.$ et

$\overrightarrow{OG} \left| \begin{array}{l} x = \frac{1}{2}a_x t^2 + v_{0x}t + x_0 = v_0 t\cos\alpha \\ y = \frac{1}{2}a_y t^2 + v_{0y}t + y_0 = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t\sin\alpha \end{array} \right.$

L'équation de la trajectoire du projectile.

$x = v_0 t\cos\alpha \Leftrightarrow t = \frac{x}{v_0\cos\alpha}$ OR $y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t\sin\alpha$

DONC $y = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0\cos\alpha}\right)^2 + v_0\frac{x}{v_0\cos\alpha}\sin\alpha$

$y = \frac{-g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha = \frac{-g}{2v_0^2}(1 + \tan^2\alpha)x^2 + x\tan\alpha$

Alors le projectile effectue un mouvement parabolique.

2) la flèche est l'altitude maximale $y_M = h_{max} = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}$

1ère méthode : $y = \frac{-g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha$

$\frac{dy}{dt} = \frac{-g}{v_0^2\cos^2\alpha}x_M + \tan\alpha = 0 \Leftrightarrow x_M = \frac{v_0^2\cos^2\alpha\tan\alpha}{g}$

$x_M = \frac{v_0^2\cos^2\alpha\tan\alpha}{g} = \frac{v_0^2\cos^2\alpha \times \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{g} = \frac{v_0^2\cos\alpha\sin\alpha}{g} = \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{2g}$

$y_M = \frac{-g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x_M^2 + x_M\tan\alpha =$

$y_M = \frac{-g}{2v_0^2\cos^2\alpha}\left(\frac{v_0^2\cos\alpha\sin\alpha}{g}\right)^2 + \left(\frac{v_0^2\cos\alpha\sin\alpha}{g}\right)\tan\alpha$

$y_M = \frac{-g}{2v_0^2\cos^2\alpha}\left(\frac{v_0^2\cos\alpha\sin\alpha}{g}\right)^2 + \left(\frac{v_0^2\cos\alpha\sin\alpha}{g}\right) \times \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$y_M = \frac{-gv_0^2\sin^2\alpha}{2g} + \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{g} = \frac{-gv_0^2\sin^2\alpha}{2g} + \frac{2v_0^2\sin^2\alpha}{2g} = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}$.

2ème méthode : $\vec{v} \left| \begin{array}{l} v_x = v_0\cos\alpha \\ v_y = -gt + v_0\sin\alpha \end{array} \right.$

$\vec{v}_M \left| \begin{array}{l} v_{Mx} = v_0\cos\alpha \\ v_{My} = -gt_M + v_0\sin\alpha = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow t_M = \frac{v_0\sin\alpha}{g}$

$y_M = -\frac{1}{2}gt_M^2 + v_0 t_M\sin\alpha =$

$y_M = -\frac{1}{2}g\left(\frac{v_0\sin\alpha}{g}\right)^2 + v_0\left(\frac{v_0\sin\alpha}{g}\right)\sin\alpha$

$y_M = \frac{-gv_0^2\sin^2\alpha}{2g} + \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{g} = \frac{-gv_0^2\sin^2\alpha}{2g} + \frac{2v_0^2\sin^2\alpha}{2g} = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}$

Quelle est son angle de tir ? $y_M = h_{max} = \frac{v_0^2}{2g}$

La flèche est maximale si $\sin^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$ c'est aussi le tir vertical.

3) a) la portée horizontale $d = x_C$ **en fonction de** v_0, α **et** g.

$y = \frac{-g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha$

$y = \frac{-g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x_C^2 + x_C\tan\alpha = 0 \Leftrightarrow \frac{-g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x_C + \tan\alpha = 0$

$x_C = \frac{2v_0^2\cos^2\alpha\tan\alpha}{g} = \frac{v_0^2 2\cos\alpha\sin\alpha}{2g} = \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g} = 2x_M = d$

b) La portée horizontale x_C **est maximale ssi** $\sin 2\alpha = 1 \Leftrightarrow$ $\alpha = \frac{\pi}{4}$. La portée horizontale maximale est $x_{max} = d_{max} = \frac{v_0^2}{g}$

Que peut-on en conclure de $x_C < x_{max}$ **?**

Si $x_C < x_{max}$ alors on obtient deux angles de tirs possibles.

$x_C = \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g} \Leftrightarrow \sin 2\alpha = \frac{gx_C}{v_0^2} \Leftrightarrow 2\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{gx_C}{v_0^2}\right)$

$\alpha = \frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{gx_C}{v_0^2}\right) \Leftrightarrow \alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha_1$

4) On donne $d = x_C = 2\ 500$ **m et** $v_0 = 200$ **m/s.**

a) les deux angles de tir (tir tendu et tir en cloche) :

$x_C = \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g} \Leftrightarrow \sin 2\alpha = \frac{gx_C}{v_0^2}$

$\sin 2\alpha = \frac{gx_C}{v_0^2} = \frac{10 \times 2\ 500}{(200)^2} = 0{,}6125 \Leftrightarrow$

$2\alpha_1 = 37{,}8° \Leftrightarrow \alpha_1 = 18{,}9°$ (tir tendu)

$\alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha_1 = 90° - 18{,}9° = 71{,}1°$ (tir en cloche)

b) Calculer la flèche $y_M = h_{max} = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}$

- Tir tendu : $h_{max} = \frac{v_0^2\sin^2\alpha_1}{2g} = 214\ m$
- Tir en cloche : $h_{max} = \frac{v_0^2\sin^2\alpha_2}{2g} = 1\ 825\ m$

c) Calculer la durée du tir pour atteindre le point C.

$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t\sin\alpha$

Le projectile heurte le sol en C ssi $y = 0$

$-\frac{1}{2}gt_C^2 + v_0 t_C\sin\alpha = 0 \Leftrightarrow t_C = \frac{2v_0\sin\alpha}{g}$

- Tir tendu : $t_1 = \frac{2v_0\sin\alpha_1}{g} = 13{,}2\ s$
- Tir en cloche : $t_2 = \frac{2v_0\sin\alpha_2}{g} = 38{,}6\ s$

d) Calculer la vitesse lors de l'impact au point C.

$\vec{v} \left| \begin{array}{l} v_x = v_0\cos\alpha \\ v_y = -gt + v_0\sin\alpha \end{array} \right.$ C'est-à-dire

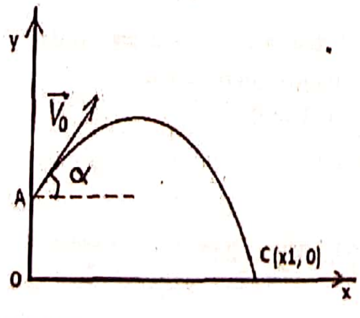
$\vec{v}_C \left| \begin{array}{l} v_{Cx} = v_0\cos\alpha \\ v_{Cy} = -gt_C + v_0\sin\alpha \end{array} \right.$ or $t_C = \frac{2v_0\sin\alpha}{g}$

Donc $\vec{v}_C \left| \begin{array}{l} v_{Cx} = v_0\cos\alpha \\ v_{Cy} = -g\frac{2v_0\sin\alpha}{g} + v_0\sin\alpha = -v_0\sin\alpha \end{array} \right.$

$\|\vec{v}_C\| = v_C = \sqrt{v_{Cx}^2 + v_{Cx}^2} = \sqrt{(v_0\cos\alpha)^2 + (v_0\sin\alpha)^2}$

$v_C = \sqrt{v_0^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)} = v_0 = 200$ m/s.

Exercice 89 : Au cours d'un championnat, un athlète remporte l'épreuve du lancement du poids avec le jet $x_1 = 19{,}43$ **m. Le « poids » a une masse de 7,35 kg. La trajectoire part de A à une hauteur** $h = 1{,}8$ **m au-dessus du sol. Le vecteur vitesse** $\vec{v}_0$ **fait un angle un angle** $\alpha = 45°$ **avec l'horizontal. On assimile le projectile à un solide ponctuel.**



1) Etablir l'équation cartésienne de la trajectoire en fonction de h, tan α et g. 2) Déterminer la norme de la vitesse initiale en fonction de h, α, g et x_1. Calculer v_0. 3) Calculer la hauteur maximale h_{max} atteinte par le projectile et les coordonnées du vecteur vitesse au sommet de la trajectoire. 4) Déterminer la nature et la direction du vecteur vitesse au point C avec l'angle $\beta = (\vec{i}, \vec{v}_C)$.

Correction :

1) Les équations horaires de l'athlète

$$TCI : \vec{P} = m\vec{a} \Leftrightarrow m\vec{g} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{g} = \vec{a} \begin{vmatrix} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{vmatrix}$$

A l'instant $t = 0\ s$, $\vec{v}_0 \begin{vmatrix} v_{0x} = v_0 \cos\alpha \\ v_{0y} = v_0 \sin\alpha \end{vmatrix}$ et $A \begin{vmatrix} x_A = 0 \\ y_A = h \end{vmatrix}$

A l'instant t, $\vec{v} \begin{vmatrix} v_x = a_x t + v_{0x} = v_0 \cos\alpha \\ v_y = a_y t + v_{0y} = -gt + v_0 \sin\alpha \end{vmatrix}$ et

$$\overrightarrow{OG} \begin{vmatrix} x = \frac{1}{2}a_x t^2 + v_{0x}t + x_A = v_0 t\cos\alpha \\ y = \frac{1}{2}a_y t^2 + v_{0y}t + y_A = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t\sin\alpha + h \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{OG} \begin{vmatrix} x = v_0 t\cos\alpha \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t\sin\alpha + h \end{vmatrix}$$

L'équation de la trajectoire de l'athlète

$x = v_0 t\cos\alpha \Leftrightarrow t = \frac{x}{v_0\cos\alpha}$ or $y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t\sin\alpha + h$

DONC $y = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0\cos\alpha}\right)^2 + v_0\frac{x}{v_0\cos\alpha}\sin\alpha + h$

$y = \frac{-g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha + h$ alors l'athlète effectue un mouvement parabolique.

2) la norme de la vitesse initiale $v_0 = f(h, \alpha, g \text{ et } x_1)$:

Le point C a pour coordonnée $C \begin{vmatrix} x_C = x_1 \\ y_C = 0 \end{vmatrix}$

$y = \frac{-g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha + h \Leftrightarrow$

$y_C = \frac{-g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x_C^2 + x_C\tan\alpha + h \Leftrightarrow$

$0 = \frac{-g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x_1^2 + x_1\tan\alpha + h \Leftrightarrow \frac{gx_1^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} = x_1\tan\alpha + h$

$2v_0^2\cos^2\alpha = \frac{gx_1^2}{x_1\tan\alpha + h} \Leftrightarrow v_0 = \sqrt{\frac{gx_1^2}{2(x_1\tan\alpha + h)\cos^2\alpha}}$

$v_0 = \sqrt{\frac{10\times(19{,}43)^2}{2(19{,}43\tan 45 + 1{,}8)\cos^2 45}} = \sqrt{177{,}82} = 13{,}33\ m/s.$

3) la hauteur maximale h_{max} atteinte par le projectile

1ère méthode : $y = \frac{-g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha + h$

$\frac{dy}{dt} = \frac{-g}{v_0^2\cos^2\alpha}x_M + \tan\alpha = 0 \Leftrightarrow x_M = \frac{v_0^2\cos^2\alpha\tan\alpha}{g}$

$x_M = \frac{v_0^2\cos^2\alpha\tan\alpha}{g} = \frac{v_0^2\cos^2\alpha\times\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{g} = \frac{v_0^2\cos\alpha\sin\alpha}{g} = \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{2g}$

$h_{max} = y_M = \frac{-g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x_M^2 + x_M\tan\alpha + h =$

$y_M = \frac{-g}{2v_0^2\cos^2\alpha}\left(\frac{v_0^2\cos\alpha\sin\alpha}{g}\right)^2 + \left(\frac{v_0^2\cos\alpha\sin\alpha}{g}\right)\tan\alpha + h$

$y_M = \frac{-g}{2v_0^2\cos^2\alpha}\left(\frac{v_0^2\cos\alpha\sin\alpha}{g}\right)^2 + \left(\frac{v_0^2\cos\alpha\sin\alpha}{g}\right)\times\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + h$

$y_M = \frac{-gv_0^2\sin^2\alpha}{2g} + \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{g} + h = \frac{-gv_0^2\sin^2\alpha}{2g} + \frac{2v_0^2\sin^2\alpha}{2g} + h$

$h_{max} = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g} + h$

2ème méthode : $\vec{v} \begin{vmatrix} v_x = v_0\cos\alpha \\ v_y = -gt + v_0\sin\alpha \end{vmatrix}$

$\vec{v}_M \begin{vmatrix} v_{Mx} = v_0\cos\alpha \\ v_{My} = -gt_M + v_0\sin\alpha = 0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow t_M = \frac{v_0\sin\alpha}{g}$

$y_M = -\frac{1}{2}gt_M^2 + v_0 t_M\sin\alpha + h$

$y_M = -\frac{1}{2}g\left(\frac{v_0\sin\alpha}{g}\right)^2 + v_0\left(\frac{v_0\sin\alpha}{g}\right)\sin\alpha + h$

$y_M = \frac{-gv_0^2\sin^2\alpha}{2g} + \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{g} + h = \frac{-gv_0^2\sin^2\alpha}{2g} + \frac{2v_0^2\sin^2\alpha}{2g} + h$

$h_{max} = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g} + h$

$h_{max} = \frac{(13{,}33)^2\sin^2 45}{2\times 10} + 1{,}8 = 6{,}24\ m$

$\vec{v} \begin{vmatrix} v_x = v_0\cos\alpha \\ v_y = -gt + v_0\sin\alpha \end{vmatrix}$ Les coordonnées du vecteur vitesse au sommet de la trajectoire sont $\vec{v}_M \begin{vmatrix} v_{Mx} = v_0\cos\alpha \\ v_{My} = -gt_M + v_0\sin\alpha = 0 \end{vmatrix}$

4) la nature et la direction du vecteur vitesse au point C

$\overrightarrow{OG} \begin{vmatrix} x = v_0 t\cos\alpha \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t\sin\alpha + h \end{vmatrix}$ or $C \begin{vmatrix} x_C = x_1 \\ y_C = 0 \end{vmatrix}$

Donc $\overrightarrow{OC} \begin{vmatrix} x_1 = v_0 t_C\cos\alpha \Leftrightarrow t_C = \frac{x_1}{v_0\cos\alpha} \\ y_C = -\frac{1}{2}gt_C^2 + v_0 t_C\sin\alpha + h = 0 \end{vmatrix}$

$\vec{v}_C \begin{vmatrix} v_{Cx} = v_0\cos\alpha \\ v_{Cy} = -gt_C + v_0\sin\alpha \end{vmatrix} \Leftrightarrow v_C = \sqrt{v_{Cx}^2 + v_{Cy}^2}$

$v_{Cx} = v_0\cos\alpha = 13{,}33\times\cos 45 = 9{,}42\ m/s$

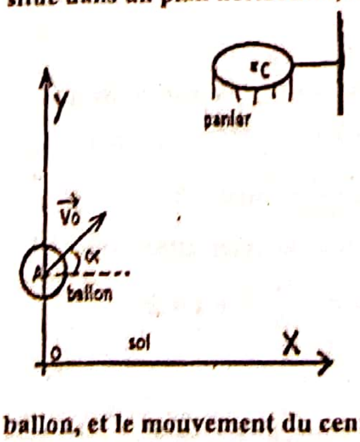
$v_{Cy} = -gt_C + v_0\sin\alpha = -\frac{gx_1}{v_0\cos\alpha} + v_0\sin\alpha$

$v_{Cy} = -\frac{10\times 19{,}43}{13{,}33\cos 45} + 13{,}33\sin 45 = -11{,}28\ m/s$

$v_C = \sqrt{v_{Cx}^2 + v_{Cy}^2} = \sqrt{(9{,}42)^2 + (-11{,}28)^2} = 14{,}7\ m/s$

$\tan\beta = \frac{v_{Cy}}{v_{Cx}} = -1{,}19 \Leftrightarrow \beta = \tan^{-1}(-1{,}19) = -50{,}13°$

Exercice 90 : Lors d'un match de basket, pour marquer un panier, il faut que le ballon passe dans un cercle métallique situé dans un plan horizontal, à 3,05 m du sol horizontal.



Pour simplifier, on remplace le ballon par un point matériel devant passer exactement au centre C du cercle métallique. xOy est le plan du sol supposé horizontal. On néglige l'action de l'air. L'origine des dates coïncide avec le lancer du ballon, et le mouvement du centre d'inertie du ballon est

étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen auquel est lié le repère indiqué sur le schéma suivant :

1) D'un point A de Oy situé à 2,0 m du sol, un basketteur, sans adversaire, lance le ballon, avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$, faisant un angle $\alpha = 45°$ avec le sol horizontal.

a) Montrer que la trajectoire du ballon est plane.
b) Etablir, en fonction de g, v_0 et α, l'équation de la trajectoire du centre d'inertie du ballon. En déduire la nature du mouvement du ballon.
c) Quelle doit-être la valeur de v_0 pour que le panier soit réussi, sachant que les verticales de A et de C sont distantes de 7,1 m ?
d) Quelle est la durée du trajet effectuée par le ballon du point A au point C ?
2) Voulant arrêter le ballon, un adversaire situé à 0,90 m du tireur, saute verticalement en levant les bras. La hauteur atteinte alors par ses mains est de 2,7 m au-dessus du sol. α et v_0 ayant les mêmes valeurs que précédemment, le panier sera-t-il marqué ?

Correction : **1) a) la trajectoire du ballon est plane.**

TCI : $\vec{P} = m\vec{a} \Leftrightarrow m\vec{g} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{g} = \vec{a} \left| \begin{array}{l} a_x = 0 \\ a_y = -g \\ a_z = 0 \end{array} \right.$

A l'instant $t = 0\,s$, $\vec{v}_0 \left| \begin{array}{l} v_{0x} = v_0 \cos\alpha \\ v_{0y} = v_0 \sin\alpha \\ v_{0z} = 0 \end{array} \right.$ et A $\left| \begin{array}{l} x_A = 0 \\ y_A = 2 \\ z_A = 0 \end{array} \right.$

A l'instant t, $\vec{V} \left| \begin{array}{l} v_x = a_x t + v_{0x} = v_0 \cos\alpha \\ v_y = a_y t + v_{0y} = -gt + v_0 \sin\alpha \\ v_z = a_z t + v_{0z} = 0 \end{array} \right.$ et

$$\overrightarrow{OG} \left| \begin{array}{l} x = \frac{1}{2}a_x t^2 + v_{0x}t + x_A = v_0 t\cos\alpha \\ y = \frac{1}{2}a_y t^2 + v_{0y}t + y_A = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t\sin\alpha + 2 \\ z = \frac{1}{2}a_z t^2 + v_{0z}t + z_A = 0 \end{array} \right.$$

Alors comme $z = 0$, le mouvement du ballon s'effectue dans le plan $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ contenant la vitesse $\vec{v}_0$.

b) Les équations horaires du ballon :

$$\overrightarrow{OG} \left| \begin{array}{l} x = v_0 t\cos\alpha \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t\sin\alpha + 2 \end{array} \right.$$

L'équation de la trajectoire du centre d'inertie du ballon.

$x = v_0 t \cos\alpha \Leftrightarrow t = \frac{x}{v_0\cos\alpha}$ or $y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t\sin\alpha + 2$

Donc $y = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0\cos\alpha}\right)^2 + v_0\frac{x}{v_0\cos\alpha}\sin\alpha + 2$

$y = \frac{-g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha + 2$ alors le ballon effectue un mouvement parabolique. $y = -\frac{10}{v_0^2}x^2 + x + 2$

c) le panier soit réussi $C \left| \begin{array}{l} x_C = 7{,}1\ m \\ y_C = 3{,}05\ m \end{array} \right.$

$3{,}05 = -\frac{10}{v_0^2}(7{,}1)^2 + 7{,}1 + 2 \Leftrightarrow -\frac{504{,}1}{v_0^2} = -6{,}05$

$v_0 = \sqrt{\frac{504{,}1}{6{,}05}} = 9{,}13\ m/s.$

L'équation de la trajectoire devient $y = -0{,}12x^2 + x + 2$

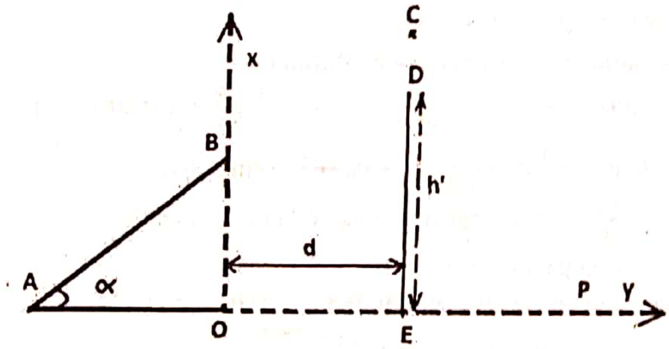
d) la durée du trajet effectuée par le ballon du point A au point C est $t_C = \frac{x_C}{v_0\cos\alpha} = \frac{7{,}1}{9{,}13\times\cos 45} = \frac{7{,}1}{6{,}456} = 1{,}1\ s.$

2) L'adversaire a pour coordonnée $\left| \begin{array}{l} x_{ad} = 0{,}90\ \text{m} \\ y_{ad} = 2{,}7\ \text{m} \end{array} \right.$

Le ballon a pour trajectoire $y = -0{,}12x^2 + x + 2$. Si l'adversaire y_{ad} arrête le ballon de trajectoire y alors $y_{ad} \geq y$.

$y = -0{,}12x_{ad}^2 + x_{ad} + 2 = 2{,}8\ \text{m} > y_{ad}$ alors le panier sera marqué.

Exercice 91 : **Un petit jouet assimilable à un point matériel de masse m = 500 g, est lancé à la vitesse initiale $\vec{v}_0$ à partir d'un point A le long de la ligne de plus grande pente de longueur ℓ = AB = 15 m d'un plan incliné. Ce plan fait avec l'horizontale Ox un angle α = 30° comme l'indique la figure ci-contre. Les frottements développent une force d'intensité 10 N en sens contraire du vecteur vitesse.**



1) Calculer la vitesse initiale de lancement v_0 au point A, nécessaire pour que le palet parvienne en B à la vitesse v_1 = 10 m.s^{-1}.
2) Établir les équations horaires du mouvement du projectile dans le repère (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$). On prendra l'origine des temps à l'instant où le jouet passe en B avec la vitesse v_1.
3) Établir l'équation cartésienne de la trajectoire du projectile. Quelle est sa nature ?
4) Un mur de hauteur h' = 5 m est disposé à la distance d = 3,5 m du point origine O. Soit C le point de passage du projectile au-dessus du mur. Calculer la distance CD séparant le sommet D du mur au point C.
5) Calculer l'abscisse du point d'impact P du jouet sur le sol.

Correction : **1) la vitesse v_0 au point A :**

TEC $\quad E_{cB} - E_{cA} = W(\vec{P}) + W(\vec{N}) + W(\vec{f})$

$\frac{1}{2}m(v_1^2 - v_0^2) = mg(z_A - z_B) - f\ell = -mg\ell\sin\alpha - f\ell$

$v_1 = \sqrt{2g\ell\sin\alpha + \frac{2f\ell}{m} + v_0^2} = 29\ m/s$

2) les équations horaires du mouvement du projectile

TCI : $\vec{P} = m\vec{a} \Leftrightarrow m\vec{g} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{g} = \vec{a} \begin{vmatrix} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{vmatrix}$

A l'instant $t = 0\ s$, $\vec{v}_1 \begin{vmatrix} v_{1x} = v_1 \cos\alpha \\ v_{1y} = v_1 \sin\alpha \end{vmatrix}$ et $B \begin{vmatrix} x_B = 0 \\ y_B = \ell \sin\alpha \end{vmatrix}$

A l'instant t, $\vec{v} \begin{vmatrix} v_x = a_x t + v_{1x} = v_1 \cos\alpha \\ v_y = a_y t + v_{1y} = -gt + v_1 \sin\alpha \end{vmatrix}$ et

$\overrightarrow{BG} \begin{vmatrix} x = \frac{1}{2}a_x t^2 + v_{1x}t + x_B = v_1 t \cos\alpha \\ y = \frac{1}{2}a_y t^2 + v_{1y}t + y_B = -\frac{1}{2}gt^2 + v_1 t \sin\alpha + \ell \sin\alpha \end{vmatrix}$

3) équation cartésienne de la trajectoire du projectile

$x = v_1 t \cos\alpha \Leftrightarrow t = \frac{x}{v_1 \cos\alpha}$

$y = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_1 \cos\alpha}\right)^2 + v_1 \frac{x}{v_1 \cos\alpha}\sin\alpha + \ell \sin\alpha$

$y = \frac{-g}{2v_1^2 \cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha + \ell \sin\alpha$ alors le petit jouet effectue un mouvement parabolique d'équation :

$y = -0{,}067x^2 + 0{,}58x + 7{,}5$

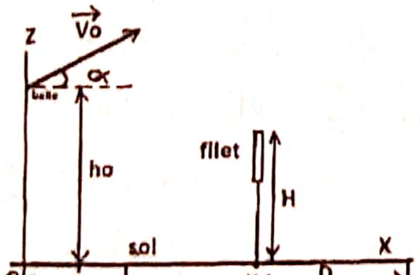
4) $y_C = -0{,}067x_C^2 + 0{,}58x_C + 7{,}5 = 8{,}71\ m \quad (x_C = d)$

$CD = y_C - h' = 8{,}71 - 5 = 3{,}71\ m$

5) $y_P = 0 \Leftrightarrow -0{,}067x^2 + 0{,}58x + 7{,}5 = 0$ alors l'abscisse du point d'impact P du jouet sur le sol est 15,8 m.

Louange à Allah, Seigneur des Univers. Je témoigne que nul n'est en droit d'être adoré qu'Allah, l'Unique, le Dominateur suprême, le Généreux, l'Indulgent, et je témoigne que Muhammad est Son serviteur et Son Envoyé.

Exercice 92 : Le joueur effectuant le service au volley-ball frappe la balle, qui se trouve à une hauteur h_0 au-dessus du sol et à une distance L du filet.



La hauteur du sommet du filet est $H = 2{,}43$ m et la ligne de fond du terrain est à $D = 9$ m du filet. Le service est bon lorsque le ballon (qu'on supposera être en translation) passe au-dessus du filet sans le toucher et tombe à l'intérieur du terrain. On néglige le diamètre du ballon que l'on assimilera à un point matériel confondu avec son centre de gravité. On considéra que la trajectoire est dans un plan vertical perpendiculaire à celui du filet (plan de figure). Données $h_0 = 3\ m$; $L = 12\ m$; $v_0 = 18\ m/s$; $\alpha = 10°$.

1) Etablir les équations horaires du mouvement de la balle après la frappe.

2) a) A quelle hauteur la balle passe-t-elle au-dessus du filet ? b) A quel instant ?

3) la balle n'est pas interceptée :

a) A quel instant touche –t-elle le sol ?

b) Le service est-il bon ?

Correction :

1) a) les équations horaires du mouvement de la balle

TCI : $\vec{P} = m\vec{a} \Leftrightarrow m\vec{g} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{g} = \vec{a} \begin{vmatrix} a_x = 0 \\ a_z = -g \end{vmatrix}$

A l'instant $t = 0\ s$, $\vec{v}_0 \begin{vmatrix} v_{0x} = v_0 \cos\alpha \\ v_{0z} = v_0 \sin\alpha \end{vmatrix}$ et $A \begin{vmatrix} x_A = 0 \\ z_A = h_0 \end{vmatrix}$

A l'instant t, $\vec{v} \begin{vmatrix} v_x = a_x t + v_{0x} = v_0 \cos\alpha \\ v_z = a_z t + v_{0z} = -gt + v_0 \sin\alpha \end{vmatrix}$ et

$\overrightarrow{OG} \begin{vmatrix} x = \frac{1}{2}a_x t^2 + v_{0x}t + x_A = v_0 t \cos\alpha \\ z = \frac{1}{2}a_z t^2 + v_{0z}t + z_A = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin\alpha + h_0 \end{vmatrix}$

AN : $\overrightarrow{OG} \begin{vmatrix} x = 17{,}726t \\ z = -5t^2 + 3{,}125t + 3 \end{vmatrix}$

2) L'équation de la trajectoire de la balle.

$x = v_0 t \cos\alpha \Leftrightarrow t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$ or $z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin\alpha + h_0$

$z = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)^2 + v_0 \frac{x}{v_0 \cos\alpha}\sin\alpha + h_0$

$z = \frac{-g}{2v_0^2 \cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha + h_0$

AN : $z = -0{,}016x^2 + 0{,}176x + 3$

a) La hauteur du sommet du filet est $H = 2{,}43$ m.

$z = -0{,}016L^2 + 0{,}176L + 3 = 2{,}85\ m > H = 2{,}43$ m. Donc la balle passe au-dessus du filet à la hauteur $2{,}85\ m$.

b) A quel instant ? $\overrightarrow{OG} \begin{vmatrix} x = 17{,}726t \\ z = -5t^2 + 3{,}125t + 3 \end{vmatrix}$

Soit $L = 17{,}726t \Leftrightarrow t = \frac{L}{17{,}726} = \frac{12}{17{,}726} = 0{,}677\ s$.

3) la balle n'est pas interceptée :

$\overrightarrow{OG} \begin{vmatrix} x = 17{,}726t \\ z = -5t^2 + 3{,}125t + 3 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \vec{v} \begin{vmatrix} v_x = 17{,}726\ m/s \\ v_z = -10t + 3{,}125 \end{vmatrix}$

a) Si la balle touche le sol alors $v_z = 0$

L'instant est $-10t + 3{,}125 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3{,}125}{10} = 0{,}3125\ s$

b) Le service est bon si $L < x \le L + D = 21$ m

$z = -0{,}016x^2 + 0{,}176x + 3$

Soit $-0{,}016x^2 + 0{,}176x + 3 = 0$

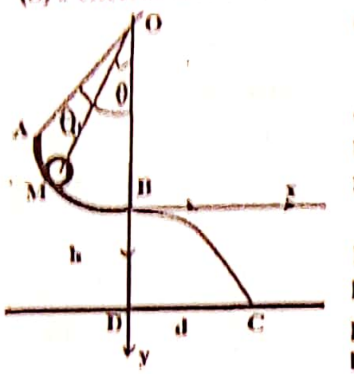
$\Delta = b^2 - 4ac = (0{,}176)^2 - 4(-0{,}016)(3) = 0{,}223$

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-0{,}176-0{,}47}{2(-0{,}016)} = \frac{0{,}646}{0{,}032} = 20{,}18\ m < L + D$ alors le service est bon.

$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-0{,}176+0{,}47}{2(-0{,}016)} < 0$ (Impossible).

Le Messager d'Allah (saw) a dit : « Le musulman est celui qui ne porte pas atteinte aux musulmans avec sa langue et sa main. Le croyant est celui auquel les gens font confiance à l'égard de leurs personnes et leurs biens. » Rapporté par Boukhâry et Mouslim.

Exercice 23 : Un solide (S) de masse $m = 20\ g$ est accroché à un point fixe O par un fil inextensible de masse négligeable. On écarte (S) de sa position d'équilibre en le lâchant sans vitesse initiale au point A. Le mouvement de (S) s'effectue sans frottement jusqu'au point C.



On donne : $\theta = (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OB})$; $\theta_0 = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) = 50°$; l'arc AB de centre O et de rayon $r = OA = OM = OB = r = 0,2\ m$; $DC = d$; $h = BD = 2\ m$.

1) On écarte le solide (S) de la position d'équilibre au point B pour le point A et on le lâche sans vitesse initiale.

a) Exprimer la vitesse v_M en M en fonction de, θ_0, θ, g, r.

b) Montrer que la tension du fil au point M est donnée par $T_M = mg(3\cos\theta - 2\cos\theta_0)$.

c) Calculer au passage de (S) par le point B, v_B et T_B.

2) Brusquement, on coupe le fil u passage du solide au point B avec une vitesse $v_B = 2\ m/s$.

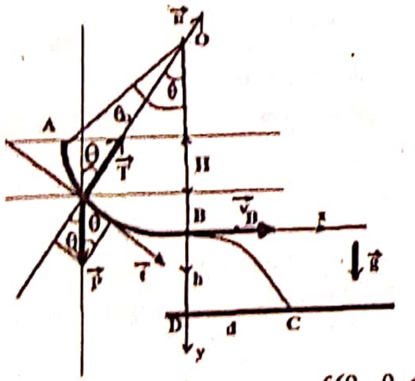
a) Etablir les équations horaires du mouvement de (S) dans le repère $(B;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Quelle est la nature du mouvement ultérieur du solide (S) au-delà du point B ?

b) Montrer que la trajectoire du solide (S) est une parabole d'équation à déterminer.

c) Déterminer la distance d. Calculer v_C.

d) Quelle est la durée du trajet DC effectuée par le solide (S) pour atteindre le sol ?

correction : $m = 20g$; $\theta_0 = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$; $\theta = (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OB})$



$r = 0,2\ m$; $DC = d$; $h = BD = 2\ m$. Le repère de Frenet

$\vec{a}\begin{vmatrix} a_t = \frac{dv}{dt} \\ a_n = \frac{v_M^2}{r} \end{vmatrix}$; $\vec{T}\begin{vmatrix} T_t = 0 \\ T_n = T \end{vmatrix}$ et $\vec{P}\begin{vmatrix} P_t = P\sin\theta \\ P_n = -P\cos\theta \end{vmatrix}$

1) $v_A = 0$

a) Exprimer la vitesse $v_M = f(\theta_0, \theta, g, r)$:

A partir du TEC, $E_{cM} - E_{cA} = W(\vec{P}) + W(\vec{T})$

or $v_A = 0 \Leftrightarrow E_{cA} = 0$; $\vec{T} \perp \vec{l} \Leftrightarrow W(\vec{T}) = 0$ et $W(\vec{P}) = PH$

Donc $\frac{1}{2}mv_M^2 = PH$ ou $v_M^2 = 2gH \Leftrightarrow v_M = \sqrt{2gH}$

Calculons H : $H = r\cos\theta - r\cos\theta_0 = r(\cos\theta - \cos\theta_0)$

Donc $v_M = \sqrt{2gH} = \sqrt{2gr(\cos\theta - \cos\theta_0)}$

b) Montrer que $T_M = mg(3\cos\theta - 2\cos\theta_0)$. Dans $(\vec{n}, \vec{t})$,

TCI : $\overrightarrow{T_M} + \vec{P} = m\vec{a} \Leftrightarrow T_{Mn} + P_n = ma_n$

Donc $T_M - P\cos\theta = m\frac{v_M^2}{r} \Leftrightarrow T_M = m\frac{v_M^2}{r} + mg\cos\theta \Leftrightarrow$

$T_M = m\frac{2gH}{r} + mg\cos\theta = 2mg(\cos\theta - \cos\theta_0) + mg\cos\theta$

$T_M = mg(2\cos\theta - 2\cos\theta_0 + \cos\theta)$.

Finalement $T_M = mg(3\cos\theta - 2\cos\theta_0)$

c) Calculer au passage de (S) par le point B, on a $\theta = 0 \Leftrightarrow \cos\theta = 1$

$v_B = \sqrt{2gr(1-\cos\theta_0)} = \sqrt{2 \times 10 \times 0,2(1 - \cos 50)}$

$v_B = \sqrt{1,43} = 1,2\ m/s$ et $T_B = mg(3 - 2\cos\theta_0) =$

$T_B = 20.10^{-3} \times 10(3 - 2\cos 50) = 3,43.10^{-2}\ N$.

2) $v_B = 2\ m/s$.

a) Etablir l'équation horaires de (S) dans $(B;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

TCI : $\vec{P} = m\vec{a} \Leftrightarrow m\vec{g} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{g} = \vec{a}\begin{vmatrix} a_x = 0 \\ a_y = g \end{vmatrix}$

A $t = 0\ s$, $\vec{v}_B\begin{vmatrix} v_{Bx} = v_B \\ v_{By} = 0 \end{vmatrix}$ et sa position initiale $B\begin{vmatrix} x_B = 0 \\ y_B = 0 \end{vmatrix}$

Le solide (S) décrit $\overrightarrow{BG}\begin{vmatrix} x = \frac{1}{2}a_xt^2 + v_{Bx}t + x_B \\ y = \frac{1}{2}a_yt^2 + v_{By}t + y_B \end{vmatrix}$

Les équations horaires de (S) : $\overrightarrow{BG}\begin{vmatrix} x = v_Bt \\ y = \frac{1}{2}gt^2 \end{vmatrix}$

b) L'équation de la trajectoire de (S) dans le repère $(B;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$:

$x = v_Bt \Leftrightarrow t = \frac{x}{v_B}$;

$y = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_B}\right)^2 = \frac{g}{2v_B^2}x^2 = 1,25x^2$

La nature du mouvement ultérieur de (S) au-delà du point B est un mouvement parabolique.

c) Au le point d'impact C de (S) sur le plan horizontal, on a

$y_C = 1,25x_C^2 \Leftrightarrow x_C = \sqrt{\frac{y_C}{1,25}} = \sqrt{\frac{h}{1,25}} = \sqrt{\frac{2}{1,25}} = 1,26\ m = d$

Calculer v_C : $\overrightarrow{BG}\begin{vmatrix} x = v_Bt \\ y = \frac{1}{2}gt^2 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \vec{v}\begin{vmatrix} v_x = v_B \\ v_y = gt \end{vmatrix}$ donc

$\vec{v}_C\begin{vmatrix} v_{xC} = v_B \\ v_{yC} = gt_C \end{vmatrix}$ Or au point C, $x_C = v_Bt_C \Leftrightarrow t_C = \frac{x_C}{v_B} = \frac{d}{v_B}$

$\vec{v}_C\begin{vmatrix} v_{xC} = v_B \\ v_{yC} = gt_C = \frac{gd}{v_B} \end{vmatrix}$ ainsi $v_C = \|\vec{v}_C\| = \sqrt{v_{xC}^2 + v_{yC}^2}$

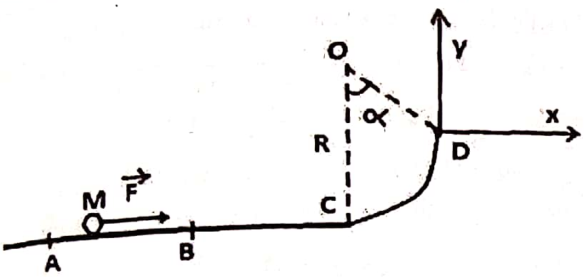
$v_C = \sqrt{v_B^2 + \left(\frac{gd}{v_B}\right)^2} = \sqrt{v_B^2\left(1 + \left(\frac{gd}{v_B^2}\right)^2\right)} = v_B\sqrt{1 + \left(\frac{gd}{v_B^2}\right)^2}$

$v_C = 6,6\ m/s$.

d) Au point C, $x_C = v_Bt_C \Leftrightarrow t_C = \frac{x_C}{v_B} = \frac{d}{v_B} = \frac{1,26}{2} = 0,63\ s$

« Ne méprise aucune bonne action si petite soit-elle, comme le fait d'accueillir ton frère avec un visage souriant ».

Exercice 94 : On néglige tous les frottements et on prendra $g = 10\ m/s^2$. La piste de lancement d'un projection M est située dans un plan vertical ; elle comprend une partie rectiligne horizontale ABC et une portion circule CD, centrée en O, de rayon $r = 1\ m$, d'angle au centre $\alpha = 60°$. Le projectile M, assimilable à un point matériel de masse $m = 0,5\ Kg$, est lancé sans vitesse initiale, suivant AB, avec une force constante $\vec{F}$, horizontale, s'exerçant entre A et B sur la distance $AB = \ell = 1\ m$.



1) Quelle intensité minimum F_0 faut-il donner à $\vec{F}$ pour que le projectile quitte la piste en D ?

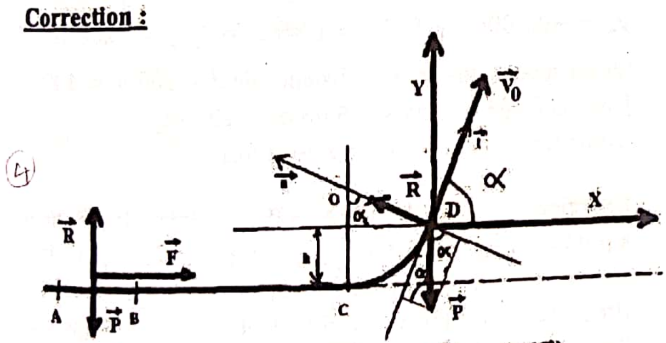
2) a) Avec quelle vitesse $\vec{v}_D$ le projectile quitte-t-il la piste en D quand $F = 150\ N$?

b) Donner l'équation de la trajectoire dans un repère orthonormé d'origine D $(D;\ \vec{i};\ \vec{j})$, $\overrightarrow{Dx}$ parallèle à ABC.

c) En déduire la hauteur maximum atteinte au-dessus de l'horizontale ABC ?

d) Quelle est l'intensité de la force exercée par le projectile sur la piste lorsqu'il la quitte, en D, avec la vitesse $\vec{v}_D$ précédente ?

Correction :



1) TEC : $\frac{1}{2}m(v_D^2 - v_A^2) = W(\vec{P}) + W(\vec{F}) + W(\vec{R})$

Or $\left|\begin{array}{l}\vec{P}\perp(ABC)\\ \vec{R}\perp(ABCD)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}W(\vec{P})=0\\ W(\vec{R})=0\end{array}\right.$; $v_A = 0$ et $W(\vec{F}) = F\ell$.

Sur l'arc CD on a $W(\vec{P}) = -Ph = -mgr(1-\cos\alpha)$

Donc $\frac{1}{2}mv_D^2 = F\ell - mgr(1-\cos\alpha) \Leftrightarrow$

$v_D^2 = \frac{2F\ell}{m} - 2gr(1-\cos\alpha) \Leftrightarrow v_D = \sqrt{\frac{2F\ell}{m} - 2gr(1-\cos\alpha)}$

Pour que v_D existe il faut que $\frac{2F\ell}{m} - 2gr(1-\cos\alpha) \geq 0$

$\frac{2F_0\ell}{m} - 2gr(1-\cos\alpha) = 0 \Leftrightarrow F_0 = \frac{2mgr(1-\cos\alpha)}{2\ell}$

$F_0 = \frac{mgr(1-\cos\alpha)}{\ell} = \frac{0,5\times10\times1\times(1-\cos 60)}{1} = 2,5\ N$

2) a) le projectile quitte la piste en D quand $F = 150\ N$

$v_D = \sqrt{\frac{2F\ell}{m} - 2gr(1-\cos\alpha)} = \sqrt{\frac{300}{0,5} - 10(1-\cos 60)}$

$v_D = 24,4\ m/s$

b) Equations horaires dans un repère $(D;\ \vec{i};\ \vec{j})$:

TCI : $\vec{P} = m\vec{a} \Leftrightarrow m\vec{g} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{g} = \vec{a}\left|\begin{array}{l}a_x = 0\\ a_y = -g\end{array}\right.$

A l'instant $t = 0\ s$, $\vec{v}_D\left|\begin{array}{l}v_{Dx} = v_D\cos\alpha\\ v_{Dy} = v_D\sin\alpha\end{array}\right.$ et $D\left|\begin{array}{l}x_D = 0\\ y_D = 0\end{array}\right.$

A l'instant t, $\vec{v}\left|\begin{array}{l}v_x = a_xt + v_{Dx} = v_D\cos\alpha\\ v_y = a_yt + v_{Dy} = -gt + v_D\sin\alpha\end{array}\right.$ et

$\overrightarrow{DG}\left|\begin{array}{l}x = \frac{1}{2}a_xt^2 + v_{Dx}t + x_D = v_Dt\cos\alpha\\ y = \frac{1}{2}a_yt^2 + v_{Dy}t + y_D = -\frac{1}{2}gt^2 + v_Dt\sin\alpha\end{array}\right.$

AN : $\overrightarrow{DG}\left|\begin{array}{l}x = 12,2t\\ y = -5t^2 + 21,13t\end{array}\right.$

L'équation de la trajectoire de la balle :

$x = v_Dt\cos\alpha \Leftrightarrow t = \frac{x}{v_D\cos\alpha}$ OR $y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_Dt\sin\alpha$

DONC $y = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_D\cos\alpha}\right)^2 + v_D\frac{x}{v_D\cos\alpha}\sin\alpha$

$y = \frac{-g}{2v_D^2\cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha$ alors la balle effectue un mouvement parabolique. **AN :** $y = -0,0336x^2 + 1,73x + 3$

c) la hauteur maximum est atteinte au-dessus de l'horizontale ABC si $v_y = 0$.

$\overrightarrow{DG}\left|\begin{array}{l}x = 12,2t\\ y = -5t^2 + 21,13t\end{array}\right. \Leftrightarrow \vec{v}\left|\begin{array}{l}v_x = 12,2\ m/s\\ v_y = -10t + 21,13\end{array}\right.$

$-10t + 21,13 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{21,13}{10} = 2,113\ s$

$y_{max} = -5(2,113)^2 + 21,13(2,113) = 22,32\ m$

La hauteur maximum atteinte au-dessus de l'horizontale ABC est $h + y_{max} = r(1-\cos\alpha) + 22,32 = 22,82\ m$.

d) **CD :** $\vec{a}\left|\begin{array}{l}a_t = \frac{dv}{dt}\\ a_n = \frac{v_D^2}{r}\end{array}\right.$; $\vec{R}\left|\begin{array}{l}R_t = 0\\ R_n = R\end{array}\right.$ et $\vec{P}\left|\begin{array}{l}P_t = -P\sin\alpha\\ P_n = -P\cos\alpha\end{array}\right.$

TCI : $\vec{R} + \vec{P} = m\vec{a} \Leftrightarrow R_n + P_n = ma_n$

Donc $-P\cos\alpha + R = m\frac{v_D^2}{r} \Leftrightarrow R = mg\cos\alpha + m\frac{v_D^2}{r}$

Or $v_D^2 = \frac{2F\ell}{m} - 2gr(1-\cos\alpha)$ donc

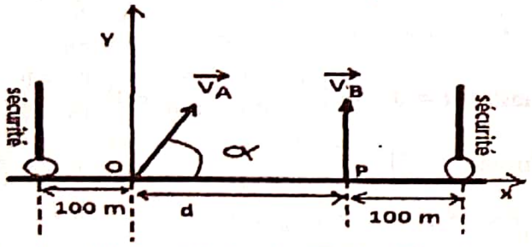
$R = mg\cos\alpha + \frac{2F\ell}{r} - 2mg(1-\cos\alpha)$ ou encore

$R = mg(3\cos\alpha - 2) + \frac{2F\ell}{r}$.

$R = 5(3\cos 60 - 2) + \frac{300}{1} = 297,5\ N$.

« Prémunis-toi envers Dieu où que tu sois. Fais suivre la mauvaise action d'une bonne action, celle-ci l'effacera. Comporte-toi avec les gens en faisant preuve d'une haute moralité »

Exercice 95 : **Deux fusées A et B doivent tirer simultanément à partir de deux points O et P situés au sol et distants de $d = 30\ m$. Les fusées vont exploser à la date $t_e = 4\ s$ après leur lancement. L'une, B, est tirée de P avec une vitesse $\vec{v}_B$ verticale, l'autre, A, est tirée de O avec une vitesse $\vec{v}_A$ inclinée de α par rapport à l'horizontale et située dans un plan vertical passant par P.**



Données : $\|\vec{v}_A\| = 51,4\ m/s$; $\|\vec{v}_B\| = 50\ m/s$.

1) Dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, établir, sous forme littérale uniquement, les équations horaires des mouvements de chaque fusée après leur lancement, instant qui sera choisi comme instant initial. Préciser la nature de leurs trajectoires et en déduire donner l'allure.

2) Déterminer l'inclinaison α de la vitesse initiale $\vec{v}_A$ de A pour que l'explosion ait lieu à la verticale de P.
3) Quelle est la distance d' qui sépare les deux fusées au moment de l'explosion ?
4) Les barrières de sécurités pour les spectateurs sont installées de façon à respecter la distance de 100 m des points de lancement O et P. Ces spectateurs sont-ils en sécurité lors de la retombée des fusées en cas de non-explosion en altitude ? On néglige les frottements de l'air.

Correction : $d = 30\ m$
1) Equations horaires des mouvements de chaque fusée

TCI : $\vec{P} = m\vec{a} \Leftrightarrow m\vec{g} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{g} = \vec{a}\left|\begin{array}{l} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{array}\right.$

Fusée A

A l'instant $t = 0\ s$, $\vec{v}_A\left|\begin{array}{l} v_{Ax} = v_A \cos\alpha \\ v_{Ay} = v_A \sin\alpha \end{array}\right.$ et $A\left|\begin{array}{l} x_A = 0 \\ y_A = 0 \end{array}\right.$

A l'instant t, $\vec{v}\left|\begin{array}{l} v_x = a_x t + v_{Ax} = v_A \cos\alpha \\ v_y = a_y t + v_{Ay} = -gt + v_A \sin\alpha \end{array}\right.$ et

$\overrightarrow{OG_A}\left|\begin{array}{l} x = \frac{1}{2}a_x t^2 + v_{Ax}t + x_A = v_A t\cos\alpha \\ y = \frac{1}{2}a_y t^2 + v_{Ay}t + y_A = -\frac{1}{2}gt^2 + v_A t\sin\alpha \end{array}\right.$

AN : $\overrightarrow{OG_A}\left|\begin{array}{l} x_A = 51,4\,t\cos\alpha \\ y_A = -5t^2 + 51,4t\sin\alpha \end{array}\right.$

L'équation de la trajectoire de la fusée A.

$x = v_A t\cos\alpha \Leftrightarrow t = \frac{x}{v_A\cos\alpha}$ or $y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_A t\sin\alpha$

DONC $y_A = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_A\cos\alpha}\right)^2 + v_A\frac{x}{v_A\cos\alpha}\sin\alpha$

$y_A = \frac{-g}{2v_A^2\cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha$

AN : $y_A = -\frac{1,9\times10^{-3}}{\cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha$

Fusée B $\overrightarrow{OG_B}\left|\begin{array}{l} x = \frac{1}{2}a_x t^2 + v_{Bx}t + x_P = d \\ y = \frac{1}{2}a_y t^2 + v_{By}t + y_P = -\frac{1}{2}gt^2 + v_B t \end{array}\right.$

AN : $\overrightarrow{OG_B}\left|\begin{array}{l} x_B = d = 30\ m \\ y_B = -5t^2 + 50t \end{array}\right.$

Les deux fusées après leur lancement effectuent un mouvement parabolique.

2) l'inclinaison α de la vitesse initiale $\vec{v}_A$ de A pour que l'explosion ait lieu à la verticale de P.

1ère méthode : Les deux fusées explosent si $x_A = x_B$

$x_A = v_A t_e\cos\alpha \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{x_A}{v_A t_e} = \frac{x_B}{v_A t_e} = \frac{d}{v_A t_e}$

$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{d}{v_A t_e}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{30}{51,4\times4}\right) = 81,6°$

2ème méthode : Les deux fusées explosent si $y_A = y_B$

$-\frac{1}{2}gt_e^2 + v_A t_e\sin\alpha = -\frac{1}{2}gt_e^2 + v_B t_e \Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{v_B}{v_A}$

$x_A = v_A t_e\cos\alpha \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{x_A}{v_A t_e} = \frac{d}{v_A t_e}$

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{v_B}{v_A}}{\frac{d}{v_A t_e}} \Leftrightarrow \tan\alpha = \frac{v_B}{v_A}\times\frac{v_A t_e}{d} = \frac{v_B t_e}{d} \Leftrightarrow \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{v_B t_e}{d}\right)$

$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{v_B t_e}{d}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{50\times4}{30}\right) = \tan^{-1}(6,67) = 81,6°$

$y_A = -\frac{1,9\times10^{-3}}{\cos^2 81,6}x^2 + x\tan 81,6 = -0,089x^2 + 6,77x$

3) la distance d' qui sépare les deux fusées au moment de l'explosion est donnée par $d' = |y_A - y_B|$

$y_A = -5t_e^2 + 51,4t_e\sin 81,6 = 123,4\ m$

$y_B = -5t_e^2 + 50t_e = -5\times16 + 50\times4 = 120\ m$

$d' = |y_A - y_B| = |123,4 - 120| = 3,4\ m$

4) Si les fusées atteignent les spectateurs alors $y = 0$

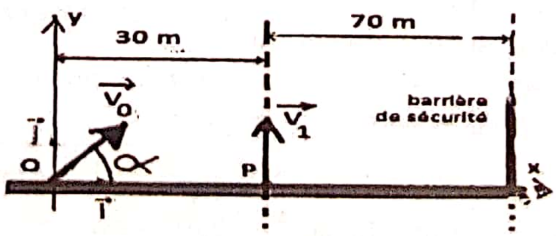
$y_A = -0,089x^2 + 6,77x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{6,77}{0,089} = 76,06\ m$

Or les spectateurs sont à l distance de $d + 100\ m = 130\ m$

Donc la fusée A explose $76,06\ m < 130\ m$.

Alors les spectateurs sont en sécurités.

Exercice 96 : **Deux fusées A et B sont tirées simultanément à partir du sol. La fusée A part du point O, origine du repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ à l'instant t = 0, avec la vitesse initiale $\vec{v}_0$ située dans un plan vertical Oxy et faisant un angle α avec l'axe horizontal. La fusée B est tirée du point P avec une vitesse verticale v_1. On donne : $v_0 = 40$ m/s ; $v_1 = 42$ m/s.**



1) Etablir les équations horaires de chacune des deux fusées dans le repère $(O;\ \vec{i};\ \vec{j})$.

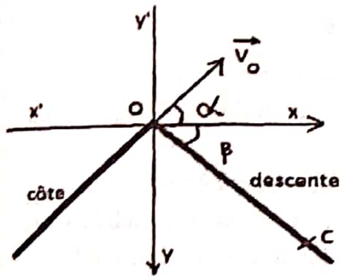
2) Les deux fusées explosent au bout de 5 s. Déterminer α pour que l'explosion de la fusée A ait lieu à la verticale du point P.

3) Déterminer la distance d' qui sépare les deux fusées au moment de l'explosion.

4) Si la fusée A n'explose pas, à quelle distance du point 0 retombe-t-elle ? La barrière de sécurité étant disposée comme sur la figure, les spectateurs sont-ils en sécurité ?

Réponse : 2) $\alpha = 81{,}4°$; 3) d' = 12,3 m ; 4) x = 48,2 m.

Exercice 97 : Un skieur parcourt une côte inclinée d'un angle $\alpha = 40°$ sur l'horizontale. Au sommet O de cette côte, sa vitesse a pour valeur $v_0 = 12\ m/s$. On néglige les frottements.



Après le point O se présente une descente inclinée d'un angle $\beta = 45°$ sur l'horizontal. Le skieur accomplit un saut et reprend contact avec la piste en un point C.

Déterminer :

a) la nature de la trajectoire correspond au saut du skieur.

b) les coordonnées du point C dans le repère orthonormé $(O;\ \vec{i};\ \vec{j})$ indiqué sur la figure.

c) la longueur OC d) la durée du saut.

Correction : a) Equations horaires du skieur

TCI : $\vec{P} = m\vec{a} \Leftrightarrow m\vec{g} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{g} = \vec{a} \begin{vmatrix} a_x = 0 \\ a_y = g \end{vmatrix}$

A l'instant $t = 0\ s$, $\vec{v}_0 \begin{vmatrix} v_{0x} = -v_0 \cos\alpha \\ v_{0y} = v_0 \sin\alpha \end{vmatrix}$ et O $\begin{vmatrix} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{vmatrix}$

A l'instant t, $\vec{v} \begin{vmatrix} v_x = a_x t + v_{0x} = -v_0 \cos\alpha \\ v_y = a_y t + v_{0y} = gt + v_0 \sin\alpha \end{vmatrix}$ et

$\overrightarrow{OG} \begin{vmatrix} x = \frac{1}{2}a_x t^2 + v_{0x}t + x_0 = -v_0 t\cos\alpha \\ y = \frac{1}{2}a_y t^2 + v_{0y}t + y_0 = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin\alpha \end{vmatrix}$

AN : $\overrightarrow{OG} \begin{vmatrix} x = -9{,}19\ t \\ y = 5t^2 + 7{,}71t \end{vmatrix}$

L'équation de la trajectoire correspond au saut du skieur.

$x = -v_0 t\cos\alpha \Leftrightarrow t = -\frac{x}{v_0 \cos\alpha}$ or $y = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin\alpha$

DONC $y = -\frac{1}{2}g\left(\frac{-x}{v_0\cos\alpha}\right)^2 + v_0 \frac{-x}{v_0 \cos\alpha}\sin\alpha$

$y = \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2 - x\tan\alpha$ AN : $y = 0{,}06x^2 - 0{,}84x$

b) $\tan\beta = \frac{y_C}{x_C} \Leftrightarrow y_C = x_C \tan\beta = x_C \tan 45 = x_C$

Or $y_C = 0{,}06x_C^2 - 0{,}84x_C = x_C \Leftrightarrow 0{,}06x_C - 0{,}84 = 1$

$\Leftrightarrow x_C = \frac{1+0{,}84}{0{,}06} = 30{,}66\ m = y_C$

Les coordonnées du point C sont C $\begin{vmatrix} x_C = 30{,}66\ m \\ y_C = 30{,}66\ m \end{vmatrix}$

c) la longueur OC

$OC = \sqrt{x_C^2 + y_C^2} = \sqrt{(30{,}66)^2 + (30{,}66)^2} = 43{,}36\ m$

d) la durée du saut. $\overrightarrow{OG} \begin{vmatrix} x = -9{,}19\ t \\ y = 5t^2 + 7{,}71t \end{vmatrix}$

$x_C = -9{,}19\ t_C \Leftrightarrow t_C = \left|\frac{x_C}{-9{,}19}\right| = \frac{x_C}{9{,}19} = \frac{30{,}66}{9{,}19} = 3{,}33\ s$

Exercice 98 : Un athlète a lancé le poids à une distance d = 21,09 m. A l'instant t = 0, correspondant à l'instant du lancer, le poids se trouve à une hauteur h de 2 m au-dessus du sol et part avec une vitesse initiale V_0 faisant un angle α de 45° avec l'axe horizontal. Le poids est assimilé à un objet ponctuel. Dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{i};\ \vec{j})$:

1) Etablir les équations horaires et l'équation cartésienne de la trajectoire en fonction de h, α, g et v_0.

2) Déterminer la valeur de la vitesse initiale en fonction de h, α, g et d. La calculer numériquement.

3) Combien de temps le poids reste-t-il dans les airs ?

4) Déterminer la hauteur maximale atteinte par le poids au cours de sa trajectoire.

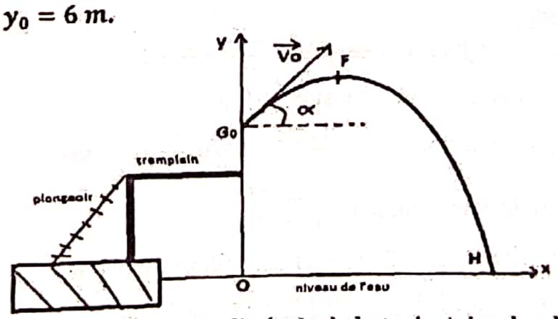
5) Le point d'impact sur le sol est-il le plus loin possible compte tenu de la vitesse initiale ? Motiver.

Réponse : 2) v_0 = 13,7 m/s ; 3) t = 2,17 s ; 4) y_{max} = 6,82 m ;

5) Indication : calculer la nouvelle distance d' pour un angle de 43°. (d' = 21,16 m pour 43°)

Exercice 99 : On se propose d'étudier le mouvement du centre d'inertie d'un plongeur au cours d'un saut.

On néglige dans tout l'exercice le mouvement de rotation du plongeur autour de son centre d'inertie ainsi que les frottements avec l'air. Après s'être lancé, le plongeur quitte le tremplin à la date $t = 0$ avec un vecteur vitesse $\vec{v}_0$ incliné de $\alpha = 40°$ par rapport à l'horizontale. Son centre d'inertie est alors au point G_0 de coordonnées $x_0 = 0$ et $y_0 = 6\ m$.



1) Etablir l'équation littérale de la trajectoire du plongeur en fonction des données.

2) Le sommet de la trajectoire étant atteint au point F d'abscisse $x_F = 1\ m$, en déduire la valeur de la vitesse initiale v_0.

3) Le plongeur pénètre dans l'eau en H. Quelle est la valeur de sa vitesse en H ?

4) Repondre la même question 1) si $\alpha = (\vec{v}_0, Oy)$.

Correction : $\alpha = 40°$; $G_0 \left| \begin{array}{l} x_0 = 0 \\ y_0 = 6\,m \end{array} \right.$

1) Etablir l'équation littérale de la trajectoire du plongeur

TCI : $\vec{P} = m\vec{a} \Leftrightarrow m\vec{g} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{g} = \vec{a} \left| \begin{array}{l} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{array} \right.$

A l'instant $t = 0\,s$, $\vec{v}_0 \left| \begin{array}{l} v_{0x} = v_0 \cos\alpha \\ v_{0y} = v_0 \sin\alpha \end{array} \right.$ et $G_0 \left| \begin{array}{l} x_0 = 0 \\ y_0 = 6\,m \end{array} \right.$

A l'instant t, $\vec{v} \left| \begin{array}{l} v_x = a_x t + v_{0x} = v_0 \cos\alpha \\ v_y = a_y t + v_{0y} = -gt + v_0 \sin\alpha \end{array} \right.$ et

$\overrightarrow{G_0G} \left| \begin{array}{l} x = \frac{1}{2}a_x t^2 + v_{0x}t + x_0 = v_0 t \cos\alpha \\ y = \frac{1}{2}a_y t^2 + v_{0y}t + y_0 = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin\alpha + y_0 \end{array} \right.$

AN : $\overrightarrow{G_0G} \left| \begin{array}{l} x = 0{,}766 v_0 t \\ y = -5t^2 + 0{,}642 v_0 t + 6 \end{array} \right.$

L'équation de la trajectoire du plongeur

$x = v_0 t \cos\alpha \Leftrightarrow t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$ or $y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin\alpha + 6$

DONC $y = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)^2 + v_0 \frac{x}{v_0 \cos\alpha}\sin\alpha + 6$

$y = \frac{-g}{2v_0^2 \cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha + 6$ alors le plongeur effectue un mouvement parabolique. AN : $y = -\frac{8{,}525}{v_0^2}x^2 + 0{,}84x + 6$

2) Le sommet de la trajectoire $F \left| \begin{array}{l} x_F = 1\,m \\ y_F = ? \end{array} \right.$

$\overrightarrow{G_0G} \left| \begin{array}{l} x = 0{,}766 v_0 t \\ y = -5t^2 + 0{,}642 v_0 t + 6 \end{array} \right. \Leftrightarrow \vec{v} \left| \begin{array}{l} v_x = 0{,}766 v_0 \\ v_y = 0{,}642 v_0 - 10t \end{array} \right.$

$x_F = 0{,}766 v_0 t_F \Leftrightarrow t_F = \frac{x_F}{0{,}766 v_0} = \frac{1}{0{,}766 v_0} = \frac{1{,}30}{v_0}$

La valeur de la vitesse initiale v_0 :

1ère méthode : Le plongeur atteint le sommet F si $v_y = 0$:

$v_y = 0{,}642 v_0 - 10t_F = 0$

$0{,}642 v_0 - 10 \times \frac{1{,}30}{v_0} = 0 \Leftrightarrow 0{,}642 v_0^2 - 13 = 0 \Leftrightarrow$

$v_0 = \sqrt{\frac{13}{0{,}642}} = \sqrt{20{,}25} = 4{,}5\,m/s.$

2ème méthode :

$y = -\frac{8{,}525}{v_0^2}x^2 + 0{,}84x + 6 \Leftrightarrow \dot{y} = -\frac{17{,}05}{v_0^2}x + 0{,}84$

Le plongeur atteint le sommet F si $v_y = 0$ ou $\dot{y} = 0$:

$-\frac{17{,}05}{v_0^2}x_F + 0{,}84 = 0 \Leftrightarrow v_0 = \sqrt{\frac{17{,}05}{0{,}84}} = \sqrt{20{,}25} = 4{,}5\,m/s$

3) au point H de coordonnées $H \left| \begin{array}{l} x_H = ? \\ y_H = 0\,m \end{array} \right.$

$-\frac{8{,}525}{v_0^2}x^2 + 0{,}84x + 6 = 0$ ou $-0{,}42x^2 + 0{,}84x + 6 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (0{,}84)^2 - 4(-0{,}42)(6) = 10{,}78$

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-0{,}84-3{,}28}{2(-0{,}42)} = \frac{4{,}12}{0{,}84} = 4{,}9\,m$

$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-0{,}84+3{,}28}{2(-0{,}42)} = -2{,}9\,m.$

Pour $x = 4{,}9\,m$

$x = 0{,}766 v_0 t = 3{,}45t \Leftrightarrow t = \frac{x}{3{,}45} = \frac{4{,}9}{3{,}45} = 1{,}42\,s$

$\vec{v} \left| \begin{array}{l} v_x = 0{,}766 v_0 \\ v_y = -10t + 0{,}642 v_0 \end{array} \right.$ ou $\vec{v} \left| \begin{array}{l} v_x = 3{,}48\,m/s \\ v_y = -10t + 3 \end{array} \right.$

$v_H = \sqrt{(3{,}48)^2 + (-10 \times 1{,}42 + 3)^2} = 12\,m/s.$

4) Repondre la même question 1) si $\alpha = (\vec{v}_0, Oy)$.

L'équation littérale de la trajectoire du plongeur

TCI : $\vec{P} = m\vec{a} \Leftrightarrow m\vec{g} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{g} = \vec{a} \left| \begin{array}{l} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{array} \right.$

A l'instant $t = 0\,s$, $\vec{v}_0 \left| \begin{array}{l} v_{0x} = v_0 \sin\alpha \\ v_{0y} = v_0 \cos\alpha \end{array} \right.$ et $G_0 \left| \begin{array}{l} x_0 = 0 \\ y_0 = 6\,m \end{array} \right.$

A l'instant t, $\vec{v} \left| \begin{array}{l} v_x = a_x t + v_{0x} = v_0 \sin\alpha \\ v_y = a_y t + v_{0y} = -gt + v_0 \cos\alpha \end{array} \right.$ et

$\overrightarrow{G_0G} \left| \begin{array}{l} x = \frac{1}{2}a_x t^2 + v_{0x}t + x_0 = v_0 t \sin\alpha \\ y = \frac{1}{2}a_y t^2 + v_{0y}t + y_0 = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \cos\alpha + y_0 \end{array} \right.$

L'équation de la trajectoire de la balle.

$x = v_0 t \sin\alpha \Leftrightarrow t = \frac{x}{v_0 \sin\alpha}$ or $y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin\alpha + 6$

DONC $y = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0 \sin\alpha}\right)^2 + v_0 \frac{x}{v_0 \sin\alpha}\cos\alpha + 6$

$y = \frac{-g}{2v_0^2 \sin^2\alpha}x^2 + x\,\text{cotan}\,\alpha + 6$

Exercice 100 : **On dispose d'un ressort R à spires non jointives, de masse négligeable, de raideur k et de longueur à vide $\ell_0 = 18\,cm$.**

1) A une extrémité du ressort R, vertical dont l'autre extrémité est fixée en un point, on accroche un solide s_1 de masse $m_1 = 320\,g$. La longueur du ressort à l'équilibre est $\ell_1 = 23\,cm$. Calculer k.

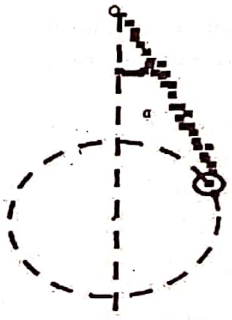


figure 1

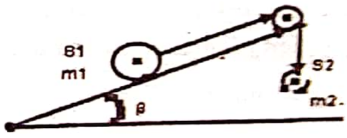


figure 2

2) Le solide s_1 reste suspendu à l'extrémité inférieure du ressort. On réalise un pendule conique en fixant l'autre extrémité à un axe vertical animé d'un mouvement de rotation uniforme. L'axe du ressort décrit un cône dont le demi-angle au sommet est $\alpha = 60°$ (figure 1).

a) Déterminer la longueur ℓ_2 du ressort.

b) Calculer la fréquence de rotation du système.

3) Le solide s_1 (figure 2) peut glisser sans frottement sur un plan incliné faisant un angle $\beta = 30°$ avec le plan horizontal. Le solide s_2 de masse $m_2 = 400\,g$ est relié à s_1 par un fil inextensible. Le fil passe par la gorge d'une poulie tournant sans frottement autour d'un axe horizontal (Δ) passant par son centre on néglige les masses du fil et de la poulie. On abandonne le système sans vitesse

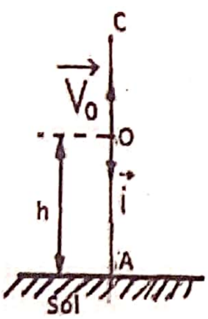
initiale. a) En appliquant TEC, donner l'expression de l'accélération du mouvement des solides.
b) Vérifier la réponse en utilisant le TCI.
c) Calculer la vitesse acquise au bout du temps $t = 0,1\ s$.

Réponse : 1) $k = \frac{m_1}{\ell_1-\ell_0} = 64\ N/m$

2) a) $\ell_2 = \frac{m_1 g}{k\cos\alpha} + \ell_0 = 0,28\ m$; b) $N = 1,34\ H_Z$

3) a) $a = 3,33\ m/s^2$; c) $v = 0,333\ m/s$

Exercice 101 : Dans cet exercice, le mouvement de la bille (B) est supposé rectiligne uniformément varié



d'accélération $\vec{a} = \vec{g}$. On prendra comme repère d'espace, le repère $(O;\ \vec{i})$ vertical dirigé vers le bas et comme origine des temps la date du départ de la bille(B) du point O. D'un point O situé à une hauteur h au-dessus du sol, on lance la bille (B) vers le haut telle que $v_0 = 10\ m/s$. La bille (B) arrive au sol à la date $t = 5\ s$ où A un point du sol.

1) a) Donner la loi horaire du mouvement de la bille (B).
b) Endulre la hauteur h.
2) a) Déterminer l'abscisse du point le plus haut C atteint par la bille (B). b) Calculer la date t correspondante.
3) Calculer la distance d, parcourue par la bille (B) entre les dates $t_1 = 0\ s$ et $t_2 = 2\ s$.
4) Avec quelle vitesse $\vec{v}_D$, la bille (B) passe par le point D d'altitude $h' = \frac{4}{5}h$?

Correction : 1) a) la loi horaire du mouvement de la bille (B) est donnée par $x = \frac{1}{2}a_x t^2 + v_{0x}t + x_0 = \frac{1}{2}gt^2 - v_0 t$ ou encore $x = \frac{1}{2}gt^2 - v_0 t = 5t^2 - 10t$

b) la hauteur $h = \frac{1}{2}gt^2 - v_0 t = 5\times5^2 - 10\times5 = 75\ m$.

2) a) l'abscisse du point le plus haut C atteint par la bille (B)

1ère méthode : $v_C^2 - v_0^2 = 2g(x_C - x_0)$

Or $v_C = 0 \Leftrightarrow -v_0^2 = 2gx_C \Leftrightarrow x_C = \frac{-v_0^2}{2g} = -5\ m$

2ème méthode : $x = 5t^2 - 10t \Leftrightarrow v = 10t - 10$

$v_C = 0 \Leftrightarrow 10t_C - 10 = 0 \Leftrightarrow t_C = \frac{10}{10} = 1\ s$

$x_C = 5t_C^2 - 10t_C = -5\ m$

b) $v_C = 0 \Leftrightarrow 10t_C - 10 = 0 \Leftrightarrow t_C = \frac{10}{10} = 1\ s$

3) la distance d, parcourue par la bille (B)

A l'instant $t_1 = 0\ s$, $x_1 = 5(0)^2 - 10(0) = 0\ m$

A l'instant $t_2 = 2\ s$, $x_2 = 5(2)^2 - 10(2) = 0\ m$

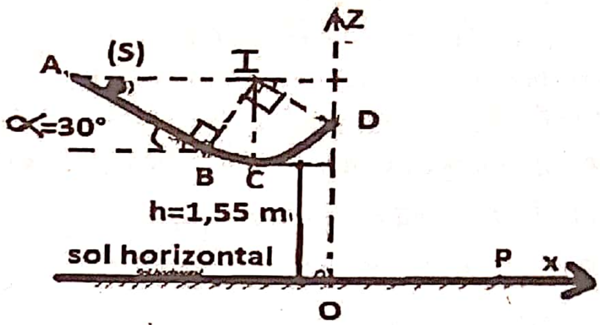
$$d = x_2 - x_1 = 0\ m$$

4) vitesse $\vec{v}_D$, la bille (B) passe par le point D :

$v_D^2 - v_0^2 = 2g(x_D - x_0) = 2gh' = \frac{8}{5}gh = 16h = 1200 \Leftrightarrow$

$v_D^2 = 1200 + v_0^2 \Leftrightarrow v_D = \sqrt{16h + v_0^2} = 36,05\ m/s$

Exercice 102 : Une glissière est constituée d'une partie rectiligne $AB = \ell = 1,6\ m$ qui est un plan incliné faisant un angle de $\alpha = 30°$ avec l'horizontale et d'un quart du cercle BCD qui est un demi-cercle de centre I et de rayon $r = 0,9\ m$.



Un solide (S) ponctuel de masse $m = 50\ g$ est lâché du point A sans vitesse initiale et parcourt la piste ABCD où les frottements sont négligeables.

1) a) Quelle est la nature du mouvement sur la piste AB ?
b) Déduire l'accélération du centre d'inertie du solide (S).
b) Calculer la vitesse du solide en B, en C et en D ?
2) a) Calculer l'intensité de la force $\vec{R}$ exercée par la piste sur (S) en C et en D. b) Donner les caractéristiques du vecteur vitesse $\vec{v}_D$ de (S) au point D.
3) A partie du point D, le solide (S) tombe dans le vide avec la vitesse $\vec{v}_D$ précédente. Le point C est situé à la hauteur $h = 1,55\ m$ du sol horizontal.
a) Etablir l'équation de la trajectoire de (S) à partir du point D dans le repère $(O;\ \vec{i};\ \vec{k})$.
b) Jusqu'à quelle hauteur H au-dessus du sol horizontal monte le solide (S) ? c) Calculer la distance OP où P est le point d'impact de (S) sur le sol horizontal.
d) Déterminer les caractéristiques du vecteur vitesse $\vec{v}_P$ de (S) au point P.
4) En réalité, le sol n'est pas horizontal mais incliné vers le haut, autour de O, d'un angle $\beta = 15°$. Déterminer les coordonnées du point d'impact P' de (S) sur le sol incliné.

Correction : 1) a) Sur la piste AB, on a $v_A = 0$ et $v_B > 0$ alors (S) effectue un mouvement rectiligne uniformément accéléré.

b) l'accélération du centre d'inertie du solide (S)

TCI $\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a} \Leftrightarrow P_x + R_x = ma_x$

Donc $mg\sin\alpha = ma \Leftrightarrow a = g\sin\alpha$

b) Calculer la vitesse du solide en B, en C et en D ?

TEC $E_{cB} - E_{cA} = W(\vec{P}) + W(\vec{R}) \Leftrightarrow E_{cB} = mgAB\sin\alpha$

$\frac{1}{2}mv_B^2 = mg\ell\sin\alpha \Leftrightarrow v_B = \sqrt{2g\ell\sin\alpha} = 4\ m/s$.

TEC $E_{cC} - E_{cB} = W(\vec{P}) + W(\vec{R})$

$\frac{1}{2}m(v_C^2 - v_B^2) = mgr(1-\cos\alpha) \Leftrightarrow$

$v_C^2 - v_B^2 = 2gr(1-\cos\alpha) \Leftrightarrow v_C = \sqrt{2gr(1-\cos\alpha) + v_B^2}$

$v_C = 4{,}29\ m/s.$

TEC $\quad E_{cD} - E_{cC} = W(\vec{P}) + W(\vec{R})$

$\frac{1}{2}m(v_D^2 - v_C^2) = -mgr[1-\cos(90-\alpha)] \Leftrightarrow$

$v_D^2 - v_C^2 = -2gr(1-\cos 60) \Leftrightarrow$

$v_D = \sqrt{-2gr(1-\cos 60) + v_C^2} = 3{,}07\ m/s.$

2) a) l'intensité de la force $\vec{R}$ exercée en C et en D

TCI : $\vec{P} + \vec{R}_C = m\vec{a} \Leftrightarrow P_n + R_{Cn} = ma_n$

$-P + R_C = m\frac{v_C^2}{r} \Leftrightarrow R_C = m\frac{v_C^2}{r} + P = m\left(\frac{v_C^2}{r} + g\right) = 1{,}52\ N$

TCI : $\vec{P} + \vec{R}_D = m\vec{a} \Leftrightarrow P_n + R_{Dn} = ma_n$

$-mg\sin\alpha + R_D = m\frac{v_D^2}{r} \Leftrightarrow R_D = m\frac{v_D^2}{r} + mg\sin\alpha$

$R_D = m\left(\frac{v_D^2}{r} + g\sin\alpha\right) = 0{,}77\ N$

b) Les caractéristiques du vecteur vitesse $\vec{v}_D$ de (S) au point D sont : le point d'application D, la direction où l'angle $(\vec{v}_D; Ox) = 90 - \alpha = 60°$, son sens est vers le haut et l'intensité $v_D = 3{,}07\ m/s.$

3) a l'équation de la trajectoire de (S) à partir du point D

Les équations horaires du mouvement de (S)

$\overrightarrow{OG}\begin{cases} x = \frac{1}{2}a_x t^2 + v_{Dx}t + x_D = v_D t\cos 60 \\ z = \frac{1}{2}a_z t^2 + v_{Dz}t + z_D = -\frac{1}{2}gt^2 + v_D t\sin 60 + h' \end{cases}$

Or $h' = h + r(1-\cos 60)$

DONC $\overrightarrow{OG}\begin{cases} x = v_D t\cos 60 \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_D t\sin 60 + h + r(1-\cos 60) \end{cases}$

L'équation de la trajectoire du solide (S)

$x = v_D t\cos 60 \Leftrightarrow t = \frac{x}{v_D\cos 60}$

or $z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_D t\sin 60 + h + r(1-\cos 60)$, donc

$z = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_D\cos 60}\right)^2 + v_D\frac{x}{v_D\cos 60}\sin 60 + h'$

$z = \frac{-g}{2v_D^2\cos^2 60}x^2 + x\tan 60 + h + r(1-\cos 60)$ alors le solide effectue un mouvement parabolique.

$$z = -2{,}122x^2 + 1{,}732x + 2$$

b) hauteur H au-dessus du sol horizontal monte (S)

$z = -2{,}122x^2 + 1{,}732x + 2 \Leftrightarrow \frac{dz}{dt} = -4{,}244x + 1{,}732$

Au sommet de la courbe $\frac{dz}{dt} = 0 \Leftrightarrow x = 0{,}408\ m$

$H = -2{,}122(0{,}408) + 1{,}732(0{,}408) + 2 = 2{,}35\ m$

c) distance OP où P est le point d'impact de (S) sur le sol

$z = 0 \Leftrightarrow -2{,}122x^2 + 1{,}732x + 2 = 0 \Leftrightarrow OP = 1{,}46\ m$

d) caractéristiques du vecteur vitesse $\vec{v}_P$ de (S) au point P.

$\overrightarrow{OG}\begin{cases} x = v_D t\cos 60 \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_D t\sin 60 + h + r(1-\cos 60) \end{cases}$

or $P\begin{cases} x_P = OP = 1{,}46\ m \\ y_P = 0 \end{cases}$ donc $x_P = v_D t_P\cos 60 \Leftrightarrow$

$t_P = \frac{x_P}{v_D\cos 60} = 0{,}951\ s$

$\overrightarrow{OG}\begin{cases} x = v_D t\cos 60 \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_D t\sin 60 + h + r(1-\cos 60) \end{cases} \Leftrightarrow$

$\vec{v}\begin{cases} v_x = v_D t\cos 60 \\ v_z = -gt + v_D t\sin 60 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\vec{v}_P\begin{cases} v_{Px} = v_D\cos 60 = 1{,}535\ m/s \\ v_y = -gt_P + v_D\sin 60 = -6{,}85\ m/s \end{cases} \Leftrightarrow$

$v_P = \sqrt{v_{Px}^2 + v_{Py}^2} = \sqrt{(1{,}535)^2 + (-6{,}85)^2} = 7{,}02\ m/s$

$\tan\beta = \frac{v_{Py}}{v_{Px}} = -4{,}47 \Leftrightarrow \beta = \tan^{-1}(-4{,}47) = -77{,}4°$

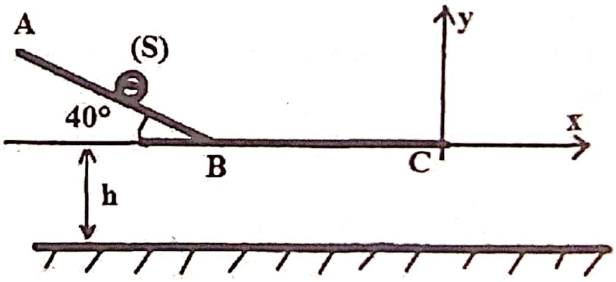
4) $\begin{cases} z = x\tan\beta = x\tan 15 = 0{,}268x \\ z = -2{,}122x^2 + 1{,}732x + 2 \end{cases}$

$-2{,}122x^2 + 1{,}732x + 2 = 0{,}268x \Leftrightarrow$

$$-2{,}122x^2 + 1{,}464x + 2 = 0$$

Les coordonnées du point d'impact P' de (S) sur le sol incliné sont $P'\begin{cases} x_{P'} = 1{,}37\ m \\ y_{P'} = 0{,}38\ m \end{cases}$

Exercice 103 : bac D (2019) Une piste ABC est formée de deux parties AB et BC situées dans un même plan vertical. La portion AB est un plan incliné d'un angle de 40° par rapport à l'horizontale et la portion BC est un plan horizontal. Un solide (S) de masse 200 g, assimilé à un point matériel se déplace le long de la piste ABC. Sa vitesse initiale en A est 0,5 m/s. il n'existe pas de frottement sur la portion AB. On prend : $AB = 2\ m$, $BC = 3\ m$, $h = 1{,}8\ m$.



1) Montrer que le mouvement du solide sur le plan AB est uniformément accéléré.

2) Déterminer la vitesse avec laquelle le solide arrive au point B.

3) Le solide arrive en C avec une vitesse de 3 m/s. Calculer la valeur de la résultante horizontale des forces de frottement appliquées sur ce solide.

4) Le solide quitte la piste en C la vitesse de 3 m/s et tombe sur le sol.

a) Etablir les équations horaires mouvement du solide (S) à partir du point C dans le repère $(C; \vec{i}; \vec{j})$.

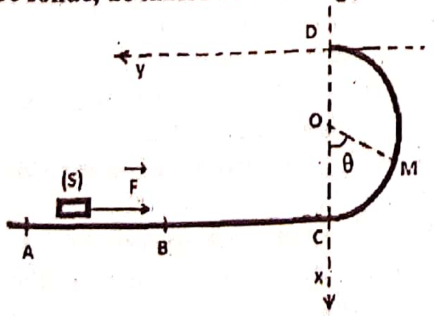
b) Calculer le temps mis par le solide pour arriver au sol.

c) A quelle distance du plan vertical passant par C, le solide tombe-t-il ?

Correction : 1) TCI : $\vec{P}+\vec{R}=m\vec{a} \Leftrightarrow P_x+R_x=ma_x$
Donc $mg\sin 40 = ma \Leftrightarrow a = g\sin 40$ alors le mouvement du solide (S) sur le plan AB est uniformément accéléré.
2) TEC : $\frac{1}{2}mv_B^2-\frac{1}{2}mv_A^2=\frac{1}{2}m(v_B^2-v_A^2)=W(\vec{P})+W(\vec{R})$
or $\vec{R}\perp\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow W(\vec{R})=0$; $W(\vec{P})=mgAB\sin 40$
Donc $\frac{1}{2}m(v_B^2-v_A^2)=mgAB\sin 40 \Leftrightarrow$
$v_B^2=2gAB\sin 40+v_A^2 \Leftrightarrow v_B=\sqrt{2gAB\sin 40+v_A^2}$
$v_B=\sqrt{2\times 10\times 2\sin 40+(0,5)^2}=5,1\ m/s$
3) TEC : $\frac{1}{2}m(v_C^2-v_B^2)=W(\vec{P})+W(\vec{N})+W(\vec{f})$
$\vec{R}\perp\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow W(\vec{N})=0,\qquad W(\vec{f})=f\,BC$ et
$\vec{P}\perp\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow W(\vec{P})=0$

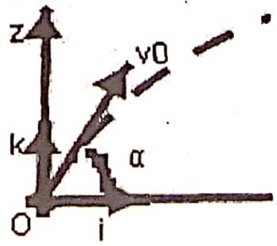
Donc $\frac{1}{2}m(v_C^2-v_B^2)=fBC \Leftrightarrow f=\frac{\frac{1}{2}m(v_C^2-v_B^2)}{BC}$
$f=\frac{0,5\times 0,2[(5,1)^2-3^2]}{3}=1,16\ N.$
4) a) les équations horaires de (S) dans le repère $(C;\ \vec{i};\ \vec{j})$
TCI : $\vec{P}=m\vec{a} \Leftrightarrow m\vec{g}=m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{g}=\vec{a}\left|\begin{array}{l}a_x=0\\a_y=-g\end{array}\right.$
A l'instant $t=0\ s$, $\vec{v}_C\left|\begin{array}{l}v_{Cx}=v_C\\v_{Cy}=0\end{array}\right.$ et $C\left|\begin{array}{l}x_C=0\\y_C=0\end{array}\right.$
A l'instant t, $\vec{v}\left|\begin{array}{l}v_x=a_xt+v_{Cx}=v_C\\v_y=a_yt+v_{Cy}=-gt\end{array}\right.$ et
$\overrightarrow{CG}\left|\begin{array}{l}x=\frac{1}{2}a_xt^2+v_{Cx}t+x_C=v_Ct\\y=\frac{1}{2}a_yt^2+v_{Cy}t+y_C=-\frac{1}{2}gt^2\end{array}\right.$
AN : $\overrightarrow{CG}\left|\begin{array}{l}x=3t\\y=-5t^2\end{array}\right.$
L'équation de la trajectoire du solide (S)
$x=v_Ct \Leftrightarrow t=\frac{x}{v_C}$ or $y=-\frac{1}{2}gt^2$ DONC $y=-\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_C}\right)^2$
$y=-\frac{g}{2v_C^2}x^2$ alors le solide (S) effectue un mouvement parabolique. AN : $y=-0,56x^2$
b) $y=-5t^2=h=-1,8 \Leftrightarrow 5t^2=1,8 \Leftrightarrow t=\sqrt{\frac{1,8}{5}}=0,6\ s$
c) $x=3t=3\times 0,6=1,8\ m$

Exercice 104 : On étudie le mouvement d'un wagonnet (S) dans le référentiel terrestre supposé galiléen.
Ce solide, de masse $m=50\ Kg$, est initialement au repos en A. on le lance sur la piste ACD représentée sur la figure, en faisant agir sur lui, le long de la partie AB de sa trajectoire, une force $\vec{F}$ horizontale et de valeur F constante. On pose $AB=\ell=4\ m$.



La portion AC de la trajectoire est horizontale et la portion CD est un cercle de centre O et de rayon $r=3\ m$; ces deux portions sont dans un même plan vertical. On suppose que la piste ACD est parfaitement lisse et que la résistance de l'air est négligeable.
1) On étudie le mouvement du solide entre A et B.
a) Déterminer l'accélération a du solide puis donner l'expression de sa vitesse v en fonction de F, m et de la distance parcourue.
b) Donner l'expression de v_B en fonction de F, ℓ et m.
2) Avec quelle vitesse aborde-t-il la piste en C ?
3) On étudie le mouvement du solide entre C et D.
a) Faire l'inventaire des forces extérieures qui s'exercent sur le solide.
b) A l'aide du repère de Frenet, donner les expressions de $\frac{dv}{dt}$ et $\frac{v^2}{r}$ en fonction de m, g, N (valeur de la réaction de la piste) et de l'angle $\theta=(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OM})$.
c) On admet que $v=r\frac{d\theta}{dt}$. Montrer que l'expression $v^2-v_B^2=2gr(\cos\theta-1)$ est en accord avec l'expression de $\frac{dv}{dt}$ donnée au 3) b).
d) En déduire une expression de la valeur de N de la réaction de la piste.
4) a) De l'expression de N, déduire en fonction de m, g, R et ℓ, la valeur minimale F_0 de F pour que le wagonnet (S) atteigne D. b) Calculer F_0.
5) Le wagonnet (S), assimilable à un point matériel est frappé en A pour atteinte le point D d'une vitesse horizontale (on supprime sur la piste ABCD la force $\vec{F}$ sans frottements).
a) Etablir en fonction de m, r, θ et g l'expression de la valeur v_M de la vitesse de S puis l'intensité N de la réaction $\vec{N}$ de la piste sur (S) entre C et D si le wagonnet part sans vitesse initiale.
b) En déduire la vitesse au point C et au point D.
c) Etablir l'équation de la trajectoire du point matériel (S) dans le repère $(D;\ \vec{i};\ \vec{j})$ après le passage en D avec la vitesse initiale $\vec{v}_C$. d) On donne $AC=1,9\ m$. Donner l'expression littérale de la valeur v_C.

Exercice 105 : Lors d'un match de football, Chikoto frappe un ballon posé sur le sol. Le centre d'inertie du ballon part avec une vitesse $\vec{V}_0$, faisant un angle α avec le sol horizontal. L'accélération de la pesanteur est $g=10\ m/s^2$. On néglige l'action de l'air. L'origine des dates coïncide avec le lancer du



ballon, et le mouvement du centre d'inertie du ballon est étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen auquel est lié le repère indiqué sur le schéma suivant :

1) On donne $v_0 = 20\ m/s$, $\alpha = 30°$.

a) Etablir les équations paramétriques du ballon.

b) Etablir, en fonction de g, v_0 et α, l'équation de la trajectoire du centre d'inertie du ballon. En déduire la nature du mouvement du ballon.

c) En quel point le ballon coupe-t-elle l'axe des abscisses. A quelle hauteur maximale le ballon monte-t-elle au-dessus de l'axe des abscisses ?

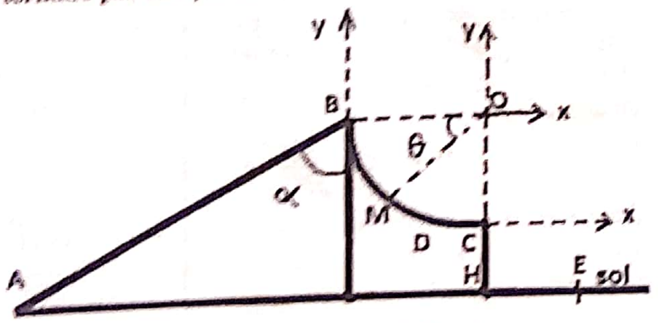
d) Un joueur de l'équipe adverse tente d'intercepter le ballon qui arrive au sol. A quelle distance d du point O doit-il se trouver pour réussir ?

2) Au tir de cornel, il désire atteindre avec le ballon le saut de la tête de Maa zou placé en face du gardien adverse, à une distance $z_1 = 50\ m$ du point O, et pour un saut de $z_1 = 2,4\ m$.

a) Calculer la vitesse initiale v_0 du ballon pour que celui-ci atteigne exactement Maa zou par sa tête.

b) Quelle doit être la valeur de l'angle d'inclinaison de la flèche au départ, par rapport au plan horizontal, lorsque la valeur $v_0 = 20\ m/s$? Les deux solutions obtenues sont-elles utilisables pratiquement ?

Exercice 106 : Un skieur assimilable à un point de mase $m = 250\ g$, se déplace sans frottement sur une piste ABC situé dans un plan vertical. La piste comporte un tronçon rectiligne AB qui fait avec la verticale de B un angle $\alpha = 60°$ et un tronçon circulaire BC de centre O qui se termine par une partie verticale CH.



1) a) Le skieur est lancé de A vers B. Exprimer l'accélération et en déduire la nature du mouvement.

b) Calculer la vitesse minimale avec laquelle il faut lancer le skieur du point A pour qu'il arrive en B avec une vitesse nulle.

3) Le skieur quitte B avec une vitesse $\vec{V}_B$.

a) Déterminer dans le repère $(\overrightarrow{Bx};\ \overrightarrow{By})$, les coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ du centre d'inertie G du skieur. Déduire l'équation cartésienne de la trajectoire de G en fonction de α, V_B et g. Faire Application numérique.

b) Déterminer les coordonnées du point D compris entre l'arc $\widehat{BC}$. c) Déterminer le temps mis par le skieur pour atteindre le point D.

4) A l'instant quelconque, sa position M est repérée par son abscisse angulaire $\theta = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OM})$.

a) Etablir l'expression de la vitesse du skieur en M en fonction de r, g et θ.

b) En déduire la vitesse pour $\theta = 30°$.

c) Etablir l'expression de l'intensité de la réaction R de la piste sur le skieur en fonction de m, g et θ.

d) Calculer R pour $\theta = 30°$.

3) Le skieur quitte C avec une vitesse $\vec{V}_C$.

a) Donner les caractéristiques de la vitesse du skieur en C.

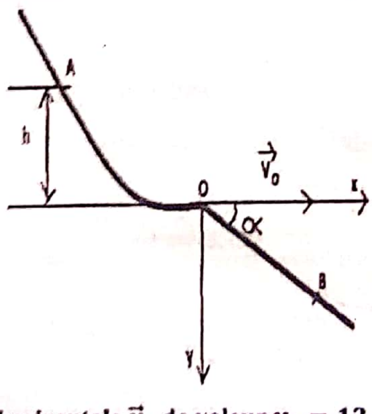
b) Déterminer dans le repère $(\overrightarrow{Cx};\ \overrightarrow{Cy})$, l'équation cartésienne de la trajectoire du skieur.

c) Déterminer le point d'impact E skieur sur le plan horizontal $CH = 2\ m$. Calculer v_E.

d) Quelle est la durée du trajet HE effectuée par le skieur pour atteindre le sol ?

__Données :__ $BO = CO = r = 2,5\ m$ et $CH = 0,7\ m$.

Exercice 107 : On imagine un tremplin-école d'inclination au saut à skis comprenant une piste d'élan de profil curviligne prolongée par une piste de réception plane et inclinée sur l'horizontale d'un angle α que l'on prendra égal à 30°.



Les performances étant modestes, on néglige les frottements. On cherchera le mouvement du centre d'inertie G du skieur. Il part sans vitesse initiale du point A. Il quitte sa trajectoire curviligne au point O avec la vitesse horizontale $\vec{v}_0$ de valeur $v_0 = 12,5\ m/s$. La trajectoire est continue dans le plan vertical.

1) Calculer l'altitude h de A par rapport au point O, après avoir énoncé correctement le théorème utilisé.

2) Dans le repère $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$, établir l'équation littérale de la trajectoire aérienne de G.

3) En fonction de α, g et v_0, établir les expressions littérales des coordonnées x_B et y_B du point B où le skieur reprend contact avec la piste de réception.

Calculer numériquement ses coordonnées et en déduire la longueur $\ell = OB$ du saut ainsi que la durée t.

Exercice 108 : Jean étudie la chute de deux pierres : il laisse tomber la première du haut d'un immeuble de hauteur h égale à 20 m sans vitesse initiale et mesure la durée de la chute. Il lance ensuite la deuxième pierre avec une vitesse initiale horizontale $\vec{v}_0$.

1) Envisager deux repères : origine au pied de l'immeuble et origine au point de lancement des pierres. Établir les équations horaires de chacune des deux pierres dans chacun des deux repères!

2) Déterminer la durée de chute de chacune des pierres. Dépend-elle du repère ?

3) Aurait-on obtenu la même durée de chute si la vitesse initiale $\vec{v}_0$ n'avait pas été horizontale ? Motiver !

Réponse : 2) $\Delta t = 2,02$ s

Exercice 109 : Dans tout le problème on négligera la résistance de l'air et on prendra g = 9,8 m/s.

Un avion humanitaire vole horizontalement à une altitude h = 6000 m à la vitesse v_0=750 km/h par rapport au référentiel terrestre. Il laisse tomber un colis de nourriture et de médicaments, de masse m, en passant par la verticale d'un point A. Pour simplifier, on suppose que le colis est ponctuel et que sa vitesse initiale par rapport au référentiel terrestre est celle de l'avion. Le mouvement est étudié dans le repère (OX, OY) du référentiel terrestre supposé galiléen. L'axe OX est horizontal. L'axe OY est vertical et orienté vers le bas. Les origines des temps et de l'espace seront prises à l'instant où le colis est lâché.

1) a) Etudier le mouvement du colis (on donnera les caractéristiques cinématiques : accélération, vitesse et position en fonction du temps). b) Etablir l'équation de la trajectoire du colis et ébaucher cette trajectoire.

2) Déterminer le temps nécessaire pour que le colis atteigne le sol. 3) Quelle distance aura parcourue l'avion lorsque le colis atteindra le sol ?

4) A quelle distance du point A se trouve le colis lorsqu'il arrive au sol ?

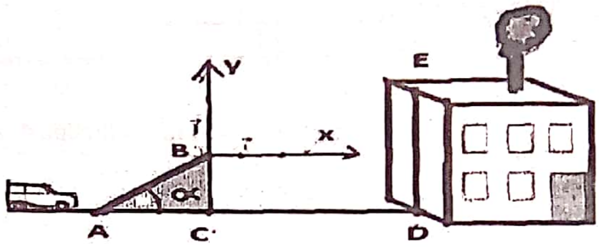
5) On suppose maintenant qu'au point O, origine des espaces située sur la verticale de A, l'avion volant toujours horizontalement à une altitude h = 6000 m, a une vitesse initiale qui fait un angle $\beta = 10^0$ avec la verticale. Quelle est la durée t' de chute du colis ? En déduire à quelle distance du point A atterrit le colis. L'origine O est située sur la verticale de A.

6) Toujours dans les conditions 5), de quelle hauteur h' aurait – on dû lâcher le colis pour qu'il tombe à une distance de moins de 100 m de A ?

Exercice 110 : Un jouet permet de catapulter des pierres. Les pierres sont éjectées d'un point O avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$ faisant un angle α avec le plan horizontal. Elles retombent 2 m plus loin au bout de 1 s sur le même plan horizontal passant par O.

Déterminez la valeur de l'angle α. Réponse : α =67,8°

Exercice 111 : Un cascadeur doit sauter avec sa voiture (assimilée à une masse ponctuelle) sur le toit en terrasse d'un immeuble. Pour cela, il utilise un tremplin ABC formant un angle α avec le sol horizontal et placé à la distance CD de l'immeuble. A l'instant initial le centre d'inertie M de la voiture quitte le point B (origine du repère) et il est confondu avec le point E à l'arrivée sur le toit. On néglige les frottements.



1) Etablir, dans le repère $(B; \vec{i}; \vec{j})$ du schéma, les équations du centre d'inertie M du système.
Établir l'équation cartésienne de la trajectoire de M entre B et E.

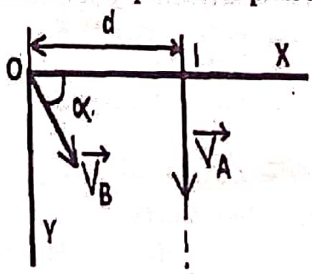
2) Le centre d'inertie de la voiture doit atterrir sur le toit en E avec une vitesse horizontale. Etablir les expressions littérales de t_E x_E et y_E en fonction de v_0 et de α. Montrer que $\frac{y_E}{x_E} = \frac{1}{2}\tan\alpha$ et en déduire la valeur de α.

3) Calculer en km/h la valeur de la vitesse v_B au sommet du tremplin pour réussir la cascade.

Données : CD = 15 m, BC = 8 m; DE = 10 m.

Réponse : 2) $\alpha = 14,9°$; 3) $v_B = 24,4$ m/s.

Exercice 112 : On raisonnera dans une région $(O, \vec{i}, \vec{j})$ liée à la terre. On choisira comme origine des dates l'instant où les mobiles quittent le plan horizontal contenant les points O et I.



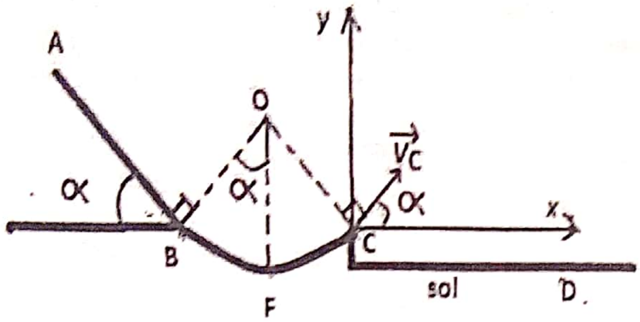
1) Une bille A passe en I à l'instant t = 0 avec une vitesse verticale, vers le bas, de valeur $v_A = 7$ m.s^{-1}. Etablir l'équation horaire du mouvement de la bille A.

2) A l'instant t = 0 on lance d'un point O une seconde bille B dans les conditions précisées sur la figure : $\alpha = 30°$; OI = d = 3 m. Etablir les équations horaires du mouvement de la bille B.

3) Calculer la valeur V_B de la vitesse initiale pour que le choc entre les deux billes se produise.

4) Déterminer l'instant et l'endroit du choc.

Exercice 113 : On étudie le mouvement d'un solide (S) de masse $m = 250\ g$ assimilable à un point matériel qui glisse sur une piste ABC. La piste est composée de deux parties :



- La partie AB de longueur $\ell = 3\ m$ est incliné d'un angle $\alpha = 45°$ par rapport au plan horizontal ;
- La partie BC est un arc de cercle de rayon $r = 1,5\ m$ et de centre O.

Les deux parties sont raccordées tangentiellement au point B et les frottements sont négligés.

1) Etude du mouvement de (S) sur AB

Le solide (S) abandonné sans vitesse initiale au point A arrive en avec un vecteur vitesse $\vec{v}_B$.

a) Faire l'inventaire des forces extérieures appliquées au solide (S).

b) Déterminer la valeur de l'accélération a du solide (S).

c) Exprimer la vitesse v_B du solide en B en fonction de ℓ, α et g. Calculer v_B.

2) Etude du mouvement de (S) sur BC

Dans la suite de l'exercice, on prendra $v_B = 5,3\ m/s$.

a) Déterminer la vitesse du solide (S) au point F.

b) Montrer que la vitesse du solide en C est la même qu'en B.

c) Exprimer l'intensité R de la réaction de la piste sur le solide (S) au point B en fonction de m, α, r, v_B et g en utilisant le théorème du centre d'inertie. Calculer R.

3) Etude du mouvement de (S) sur CD

Le solide (S) quitte la piste et retombe sur le sol en un point D.

a) Déterminer dans le repère $(\overrightarrow{Cx}; \overrightarrow{Cy})$, les coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ du centre d'inertie G du solide (S).

b) Déduire l'équation cartésienne de la trajectoire de G en fonction de α, V_C et g. Faire AN.

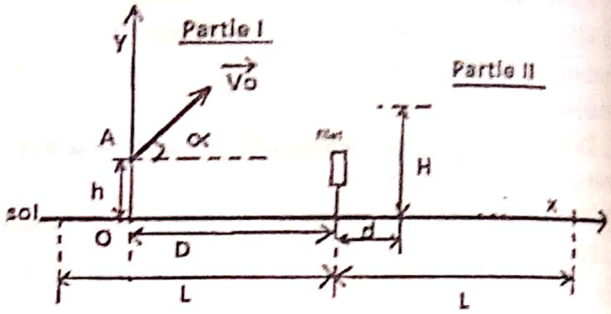
c) Déterminer les coordonnées du point D.

d) Déterminer le temps mis par (S) pour atteindre le point D.

Le Prophète de l'islâm (s a w) a dit :

« Comporte-toi avec les gens en faisant preuve d'une haute moralité »

Exercice 114 : Dans tout l'exercice la balle est assimilable à un point matériel. On néglige la résistance de l'air sur la balle et l'on supposera la surface de jeu parfaitement horizontale. Un joueur de tennis, situé dans la partie I du court, tente de lober son adversaire (faire passer la balle au-dessus de ce dernier).



Celui-ci est situé à une distance $d = 2\ m$ derrière le filet, dans la partie II du court, juste en face du joueur. Le joueur frappe la balle alors que celle-ci est en A, à la distance $D = 9\ m$ du filet et à la hauteur $h = 0,50\ m$ au-dessus du sol. La balle part avec une vitesse $\vec{V}_0$ de valeur $V_0 = 12\ m/s$, inclinée d'un angle $\alpha = 60°$ par rapport au sol, dans le plan perpendiculaire au filet.

1) a) Etablir, dans le repère $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$, l'équation littérale de la trajectoire de la balle, après le choc sur la raquette.

b) En utilisant les valeurs numériques du textes, écrire l'équation $y(x)$. Elle sera utilisée pour résoudre la suite de l'exercice.

2) L'adversaire tient sa raquette à bout de bras et, en sautant, elle atteint au maximum la hauteur $H = 2,5\ m$ par rapport au sol. Peut-il intercepter la balle ? Quelle distance sépare alors la balle de l'extrémité supérieure de la raquette ?

3) La ligne de fond étant à la distance $L = 12\ m$ du filet, la balle peut-elle retomber dans la surface de jeu ? Autrement dit le bob est-il réussi ?

Exercice 115 : 1) Une petite sphère solide (S), de rayon négligeable et de masse $m = 150\ g$ est accrochée à un ressort à spires non jointives, de masse négligeable, de constante de raideur $K = 35\ N/m$ et de longueur à vide $\ell_0 = 20\ cm$.

L'autre extrémité du fil est attachée en un point O (figure 1). On prendra $g = 9,8\ m.s^2$. On fait tourner maintenant l'ensemble à la vitesse angulaire uniforme ω autour d'un axe vertical Δ. L'axe de rotation fait alors un angle $\alpha = 30°$ avec la verticale.

a) Calculer la tension du fil.

b) Calculer la vitesse angulaire de rotation de l'ensemble et la vitesse linéaire du solide (S).

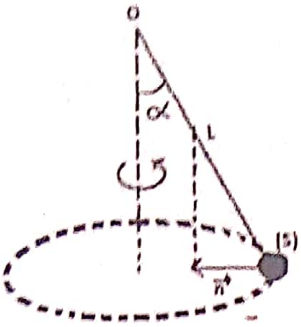


figure 1

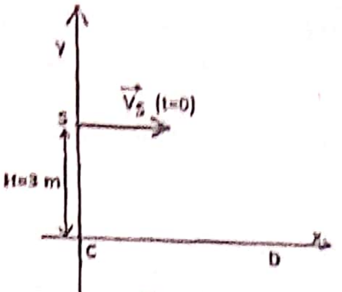


figure 2

2) Le solide (S) se décroche brusquement quand il passe par un point S situé à une altitude $h = 3\ m$ du sol sur la verticale du point C (figure 2) avec une vitesse initiale $V_S = 0,84\ m/s$.

a) Etablir les équations horaires du mouvement de la sphère dans le repère (C, x, y).

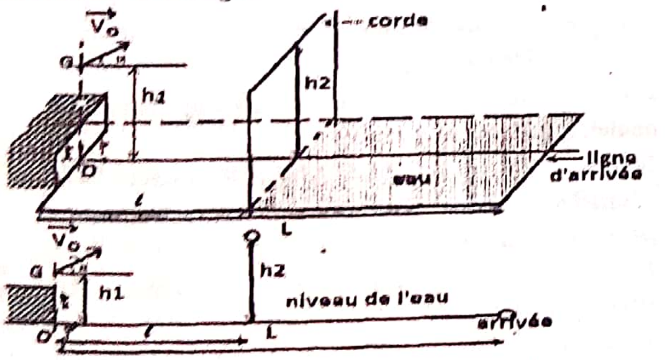
b) En déduire l'équation cartésienne de sa trajectoire.

c) A quelle distance du point C, le solide (S) tombe-t-il ?

d) Déterminer au point de chute D, les composantes du vecteur vitesse.

e) Calculer la valeur de cette vitesse.

<u>Exercice 116 :</u> Des élèves se fixent comme objectif d'appliquer leurs connaissances en mécanique au « jeu de plongeon ». Ce jeu, réalisé à la piscine, consiste à passer au-dessus d'une corde puis atteindre la surface de l'eau en un point le plus éloigné possible du point de départ avant de commencer la nage.



Le bassin d'eau a pour longueur L = 20 m et est suffisamment profond. Le plongeur doit quitter un tremplin ; à ce moment son centre d'inertie G est à une hauteur $h_1 = 1,5$ m au-dessus de la surface de l'eau. La corde, tendue horizontalement, est attachée à une distance $\ell = 1,6$ m du tremplin. Elle est à une hauteur $h_2 = 2$ m du niveau de l'eau (voir figure ci-contre).

Au cours d'une simulation, les élèves font plusieurs essais en lançant, avec un dispositif approprié, un solide ponctuel à partir du point G. Les essais diffèrent par la valeur du vecteur-vitesse initial du solide ou par l'angle du dit vecteur avec l'horizontale. Le mouvement du solide est étudié dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Le point O est le point d'intersection entre la verticale passant par la position initiale de G et la surface de l'eau. La direction de l'axe $\vec{i}$ est perpendiculaire au plan vertical contenant la corde, comme indiqué sur la figure. On néglige les frottements et on prendra $g = 10\ m.s^{-2}$.

1) Lors d'un premier essai, le solide est lancé du point G, à la date t = 0, avec une vitesse $\vec{v}_0$ faisant un angle $\alpha = 45°$ avec l'horizontale, de valeur $v_0 = 8\ m.s^{-1}$ et appartenant au plan vertical défini par $(\vec{i}, \vec{k})$.

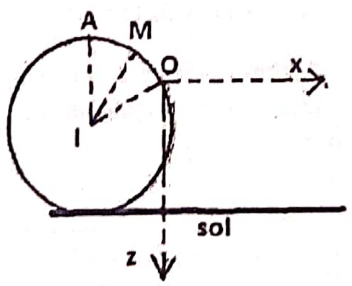
a) Etablir les équations paramétriques du mouvement du solide. En déduire l'équation cartésienne de sa trajectoire.

b) Le solide passe-t-il au-dessus de la corde ? Justifier la réponse.

c) Au cas où le solide passe au-dessus de la corde, quelle distance le sépare-t-il de la ligne d'arrivée lorsqu'il touche l'eau ? d) Calculer la norme du vecteur vitesse et l'angle que ce vecteur forme avec la verticale descendante lorsque le solide touche l'eau.

2) Dans un second essai, les élèves voudraient que le solide touche l'eau en un point distant de 8 m de la ligne d'arrivée. Quelle doit être alors la valeur de la vitesse initiale pour $\alpha = 45°$?

<u>Exercice 117 :</u> Un point matériel (S) de masse $m = 10\ g$ lâché en A sans vitesse initiale glisse sans frottement sur gouttière sphérique de rayon R et de centre I. Sa position le long de la gouttière est repérée par l'angle $\theta = (\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IM})$.



1) a) Exprimer la vitesse du point en M en fonction de g, r et θ.

b) Etablir l'expression de la réaction de la gouttière sur le point matériel en M.

c) Pour quelle valeur de θ la réaction est-elle maximale ?

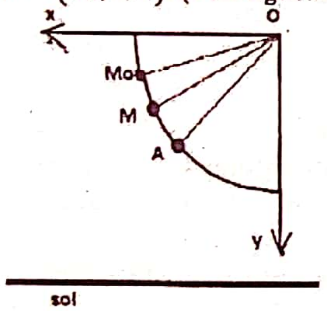
2) Le point matériel quitte la gouttière en O.

a) Déterminer l'angle pour que lequel le contact est rompu.

b) Donner sur le schéma les caractéristiques du vecteur vitesse de (S) en O.

3) a) Quelle est la nature du mouvement ultérieur de S au-delà du point O ? b) Etablir l'équation de la trajectoire de (S) dans le repère (Ox, Oz). c) Déterminer l'abscisse du point d'impact de (S) au sol.

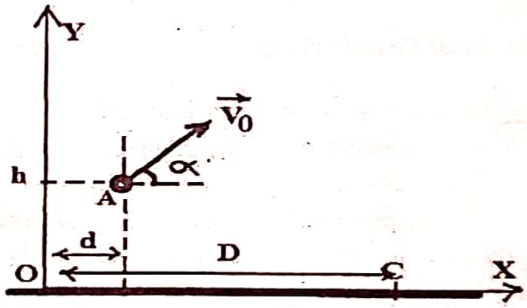
Exercice 178 : Une bille de masse m = 50 g est suspendue en un point O par un fil inextensible de longueur $\ell = 50$ cm. On écarte le fil de sa position d'équilibre jusqu'à la position définie par l'angle $\theta_0 = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM_0}) = 15°$ et on lance la bille dans le plan Ox, Oz avec un vecteur vitesse $\vec{V}_0$ tangent au cercle de rayon l et dirigé vers le bas. On repère la position de la bille en M par l'angle $\theta = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM})$. (Voir figure ci-contre).



1) Exprimer la valeur de la vitesse $\vec{v}$ de la bille en M, en fonction des données, à l'instant t.
2) Exprimer la tension T du fil en M en fonction de v_0, ℓ, θ_0, θ, g et m.
3) Exprimer la valeur minimale de $\vec{v}_0$ pour que la bille effectue un tour complet. Le fil reste tendu. Calculer V_0. On donne : $g = 9{,}8\ m.s^{-2}$.
4) Le pendule, lancé avec la vitesse $v_0 = 4{,}15\ m.s^{-1}$, tourne dans un plan vertical. Quand la bille passe au point A repérée par l'angle $\alpha = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OA}) = 45°$, elle se détache et est libérée.
a) Déterminer les caractéristiques du vecteur vitesse de la bille au point A.
b) Déterminer, dans le repère orthonormé $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})$, les équations horaires du mouvement de la bille après sa libération.
c) En posant $u = \ell \cos\alpha - x$, montrer que, dans le repère orthonormé $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})$, l'équation de la trajectoire de la bille après sa libération s'écrit :
$$y = \frac{g}{2V_A^2 \sin^2\alpha} u^2 + \frac{u}{\tan\alpha} + \ell \sin\alpha.$$
5) Déterminer l'abscisse du d'impact I de la bille sur le sol horizontal qui se trouve à une distance h = 1,5 m au-dessous du point O.

Exercice 179 : Une balle de tennis de masse m est lancée d'un point O avec une vitesse initiale $\vec{V}_0$ faisant un angle a avec l'horizontale. On considère que la balle est en chute libre. Données : $v_0 = 12$ m / s ; $\alpha = 60°$ et m = 50 g. On choisit comme repère : y'Oy axe vertical orienté vers le haut et x'Ox axe horizontal orienté de gauche à droite. Le plan (x'x, y'y) contient le vecteur vitesse . z'Oz est orthogonal au plan (x'x, y'y). On choisit comme origine des espaces le point O et l'origine des dates l'instant ou la balle occupe la position O.
1) Donner les équations horaires du mouvement. Que peut-on dire du mouvement de G suivant l'axe x'Ox, suivant l'axe y'Oy.
2) Dans quel plan s'effectue le mouvement de G ?
3) Déterminer l'équation de la trajectoire du point G. Conclusion.
4) Déterminer la portée horizontale (distance OC : les points O et C sont situés sur la même horizontale).
5) Donner l'expression littérale puis la valeur numérique.
6) a) Quelle doit être la valeur de l'angle α pour que la portée horizontale soit maximale ?
b) Déterminer la flèche c'est-à-dire l'altitude maximale atteinte par le projectile.
c) Donner l'expression littérale puis la valeur numérique.
d) Recommencer les calculs pour α = 30° et tirer les conclusions.

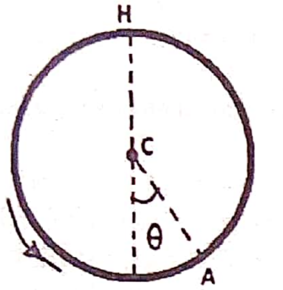
Exercice 180 : Le lancer du poids dont un de ces pieds est au point O et sa hauteur du lancement $h = 2{,}62\ m$ est le point $A\begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$, a réussi un jet de $D = 21{,}69\ m$ avec vitesse v_0 faisant un angle $\alpha = 45°$ avec l'axe $\overrightarrow{Ox}$. Soit $d = 0{,}9\ m$.



1) Établir les équations horaires du mouvement du boulet dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
2) Établir l'équation cartésienne de la trajectoire du boulet. Quelle est sa nature ?
2) Établir en fonction de D, h, α, g et d, la valeur de la vitesse initiale à communiquer au boulet pour réussir le jet. Faire l'application numérique.
4) Calculer la hauteur (par rapport au sol) maximale atteinte par le boulet.
5) Le boulet arrive au point C avec une vitesse $\vec{v}_C$.
a) Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{v}_C$.
b) En déduire la norme et la direction de $\vec{v}_C$.

Selon Abou Hourayra (ra), le Messager de Dieu (saw) a dit : « Toute ma communauté entre au Paradis sauf celui qui s'y refuse ». On dit : « Et qui s'y refuse ô Messager de Dieu ? ». Il dit : « Celui qui m'a obéi entre au Paradis et celui qui m'a désobéi s'y est refusé ». (Rapporté par Al Boukhari)

Exercice 181 : Une bille (B) est utilisée comme projectile d'une fronde. Elle est accrochée à l'extrémité d'un fil inextensible, de masse négligeable, de longueur $\ell = 40\ m$.



On fait tourner l'ensemble dans un plan vertical. La bille effectue un mouvement circulaire de centre C. Elle passe au point H le plus élevé de sa trajectoire avec une vitesse $V_H = 15\ m/s$. On néglige les frottements de l'air.

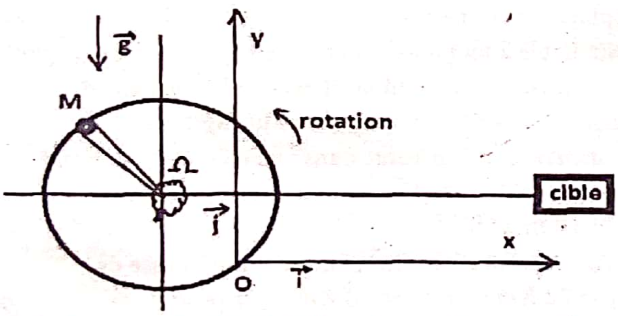
1) Déterminer la tension T du fil quand la bille passe au point H.

2) La bille est lâchée en A tel que le rayon CA fasse avec la verticale du centre C un angle de mesure $\theta = 30°$.

a) LE centre C étant à une altitude de 1,40 m au-dessus du sol, à quelle altitude maximale la bille monte-t-elle ?

b) Quelle est la durée du « vol » de la bille ?

Exercice 182 : Une fronde est constituée de deux cordelettes inextensibles retenant un projectile de masse $M = 100\ g$, supposé ponctuel. Elle est maniée par le lanceur de façon à lui faire décrire un cercle vertical de centre Ω et de rayon R = 0,8 m, à la vitesse angulaire constante.



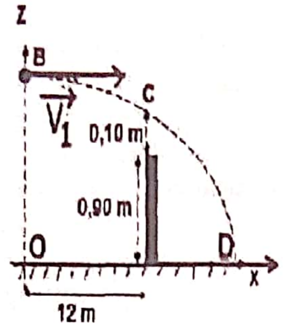
1) Sachant que la fronde tourne à une vitesse constante $N = 100$ tours par minute, la valeur de la tension exercée par l'ensemble des deux cordelettes aux points A et B précisés sur le schéma.

2) Le lanceur lâche brusquement le projectile en libérant une cordelette au moment où celui-ci passe par le point O. les cordelettes font alors un angle de 45° par rapport à la verticale.

a) Etablir l'équation de la trajectoire du projectile dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

b) En déduire la distance à laquelle doit se trouver une cible ponctuelle, située dans le même horizontal que le point Ω, pour être atteinte. Plusieurs solutions sont possibles ? Expliquer.

Exercice 183 : 1) Pour effectuer un service, un joueur de tennis commence par lancer la balle verticalement vers le haut à partir d'un point A situé à 1,60 m au-dessus du sol.



La balle s'élève et atteint son altitude maximale en B à 0,40 m du point de lancement A. la balle est repérée par rapport à un axe vertical dirigé vers le haut dont l'origine O est au niveau du sol.

a) Etablir les équations horaires du mouvement de la balle entre A et B.

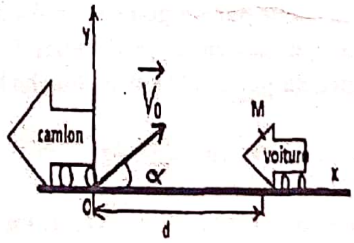
b) Quelle est la valeur V_A de la vitesse avec laquelle le joueur a lancé la balle ?

2) Le joueur frappe la balle avec sa raquette quand elle atteint son altitude maximale. Celle-ci part alors avec une vitesse $\vec{V}_1$ horizontale. Le joueur souhaite que la balle passe 10 cm au-dessus du filet situé à 12 m du point de service et dont la hauteur est de 0,90 m.

a) Etudier le mouvement de la balle dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ lié à la surface terrestre. Quelle est la nature de la trajectoire ?

b) Quelle doit être la valeur $\vec{V}_1$ de la vitesse initiale pour que le service soit réussi comme le souhaite le joueur ? Calculer V_1 en m/s et en Km/ h.

Exercice 184 : Un gravier assimilé à un point G est projeté par le pneu d'un camion, vers l'arrière dans le plan vertical repéré par $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})$. Le gravier, en O à l'instant $t = 0$, a un vecteur vitesse $\vec{V}_0$ de valeur 12 m/s qui fait un angle $\alpha = 37°$ par rapport à l'axe horizontal $\overrightarrow{Ox}$. Les frottements sont négligés et on donne l'accélération de la pesanteur $g = 9,8\ m.s^{-2}$.



1) Etablir les équations horaires $x_G(t)$ et $y_G(t)$ du mouvement du gravier et l'équation cartésienne de sa trajectoire dans le repère $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})$.

2) Donner l'allure de la trajectoire du gravier (échelle : 1 cm pour 1 m).

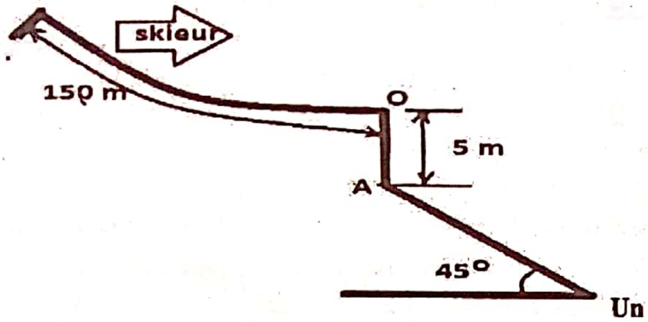
3) Le gravier vient frapper une voiture en un point M de son pare-brise. A l'instant initial où le gravier est projeté, le point M est à la distance $d = 44\ m$ de l'axe $\overrightarrow{Oy}$. La voiture suit le camion selon la direction $\overrightarrow{Ox}$ avec une

vitesse constante $v = 90\ km/h$. Etablir les équations horaires du mouvement du point M dans $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})$.

4) a) Déterminer la date t_1 à laquelle se produit l'impact du gravier sur le pare-brise.

b) En déduire la hauteur h au-dessus du sol du point d'impact M.

Exercice 185 : Dans toute cette étude d'un saut à ski, on néglige le frottement de l'air sur le skieur bien qu'en réalité ce dernier utilise manifestement la résistance de l'air lors de la phase aérienne.



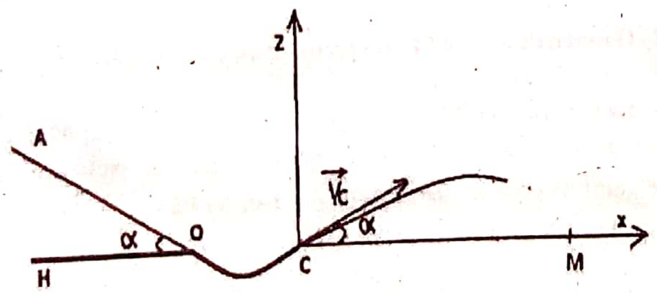
Un saut à ski, de masse $M = 75\ kg$ s'élance sur un tremplin dont la piste, de longueur 150 m, est située entre l'altitude 1 540 m et l'altitude 1 440 m. ce tremplin se termine par une partie horizontale.

a) Quelle est la valeur du sauteur quand il quitte le tremplin en O, sachant que les frottements de la neige sur les skis sont équivalents à une force de valeur constante et égale à 400 N ?

b) La piste d'atterrissage est plane et inclinée à 45° par rapport à l'horizontale. Elle passe par un point A situé sur la verticale du point O, à 5 m en dessous de ce dernier. Déterminer à quelle distance du point A le skieur touche le sol.

Exercice 186 : Tous les frottements sont négligés.

Du point A d'un plan incliné de l'angle α sur le plan horizontal HOCM. On abandonne sans vitesse initiale un corps assimilable à un point matériel B de masse m. Il glisse selon la ligne de plus grande pente AO du plan et arrive en O avec une vitesse $\vec{V}_O$. Le plan incliné se raccorde tangentiellement en O avec une piste une piste circulaire de rayon R. au-delà du point C, le mobile quitte la piste et retombe en M sur le plan horizontal. Le vecteur



vitesse du mobile en C $(\vec{V}_C)$ fait, avec le plan horizontal, le même angle α que AO.

1) a) Etablir l'équation horaire du mouvement du mobile sur le plan incliné : $AB = f(t)$. b) Exprimer sa vitesse v_0 en O en fonction de α, g et de la distance $AO = \ell$.

c) Pourquoi la mesure de la vitesse du mobile en C est-elle la même qu'en O ?

2) a) Etablir en fonction de α, V_0 et g, l'équation de la trajectoire du mobile entre C et M dans le repère $\overrightarrow{Cx}$, $\overrightarrow{Cz}$.

b) Donner l'expression de la portée CM en fonction de V_0, α et g puis de ℓ et α. c) Pour $\alpha = \frac{\pi}{4} rad$ et $\ell = 1,6\ m$, calculer V_O et la portée CM.

3) Pour faire varier la portée, on réalise un système mécanique déformable permettant de modifier l'angle α. Le mobile étant toujours lâché du point A situé à la distance ℓ de O sur le plan incliné de l'angle α avec l'horizontale. Il quitte la piste en C avec un vecteur vitesse faisant l'angle α avec le plan horizontal. Pour quelle valeur de α cette portée CM est-elle maximale ?

Réponse 3) $\alpha = 55°$.

Exercice 187 : On accroche au plafond d'une voiture se déplaçant sur une route rectiligne et horizontale, une bille assimilable à un point matériel de masse $m = 20\ g$, par l'intermédiaire d'un fil inextensible de longueur de longueur $\ell = 40\ cm$ et de masse négligeable.

Le mouvement s'effectue dans un référentiel terrestre supposé galiléen où l'accélération de la pesanteur $g = 10\ m.s^{-2}$.

1) Au moment où la vitesse de la voiture passe de $v_1 = 72\ Km/h$ à $v_2 = 90\ Km/h$, le pendule fait un angle $\theta_1 = 30°$ avec la verticale.

a) Représenter sur un schéma soigné, les forces appliquées au pendule et indiquer le sens du mouvement de la voiture.

b) Déterminer en fonction de g et θ_1, l'expression de la composante a_x du vecteur accélération du pendule.

c) Calculer la durée Δt de la variation de la vitesse.

2) Quelle est la position du pendule quand la voiture est à l'arrêt ?

3) A partir de cette position, on communique au pendule une énergie $W_0 = 0,06\ J$. Il passe à une position M_2, faisant un angle θ_2 avec la verticale. L'intensité de la vitesse en ce point M_2 vaut $v_{M_2} = 2\ m/s$.

Calculer l'angle θ_2.

4) Au passage par la position M_2, le fil se casse.

a) Etablir alors l'équation de la trajectoire de la bille.

b) Calculer l'abscisse du point d'impact I de la bille au sol, sachant que le point M_2 est à 30 cm au-dessus du sol.

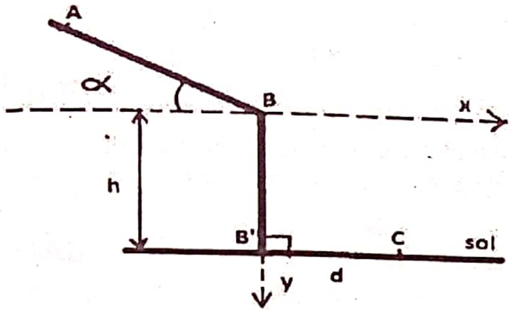
Exercice 188 : 1) Une luge glisse sans frottement le long d'un plan incliné, du sommet duquel elle part sans vitesse.

a) En appliquant le TEC à la luge, trouver la relation entre sa vitesse V la distance parcourue x, l'intensité g de la pesanteur et l'inclinaison α du plan.

b) En déduire l'expression littérale de l'accélération a du mouvement.

c) La pente α pour longueur $\ell = 10\ cm$; la luge atteint le bas à la vitesse $V = 99\ m/s$.
En déduire la valeur de l'inclinaison α de la piste.

2) La luge quitte la piste en B avec la vitesse $\vec{V}_B$ et tombe en chute libre sur le sol horizontal.



a) Déterminer dans le repère $(\overrightarrow{Bx}; \overrightarrow{By})$, les coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ du centre d'inertie G de la luge.

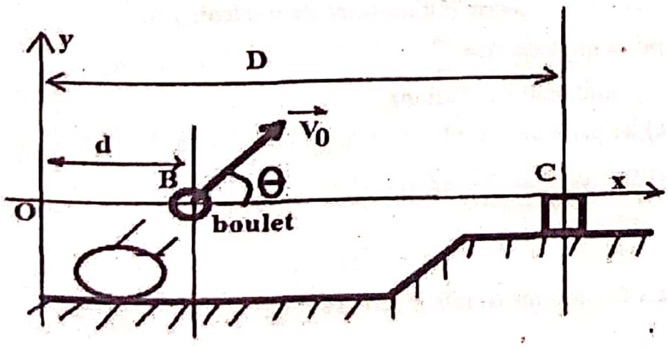
b) Déduire l'équation cartésienne de la trajectoire de G en fonction de α, V_B et g. Faire AN.

c) Déterminer le temps mis par la luge pour atteindre le point C.

d) On donne $h = 1,2\ m$. Calculer la longueur ℓ que la luge a parcourue sur le plan incliné, sachant qu'il touche le sol en un point C tel que $B'C = 1\ m$.

3) A partir du point B, un projectile est lancé avec une vitesse $v_0 = 200\ m/s$. Déterminer, pour une portée horizontale $d = 2500\ m$ les angles de tir possibles et la flèche.

Exercice 189 : Dans cet exercice, on négligera toutes les forces dues à l'air. Soit un boulet de masse $m = 7,2\ Kg$ lancé en B à la date $t_0 = 0\ s$ avec une vitesse initiale v_0 faisant un angle $\theta = 40°$ avec l'horizontale. Le boulet est supposé ponctuel et sa position à une date t est celle de son centre de gravité G.



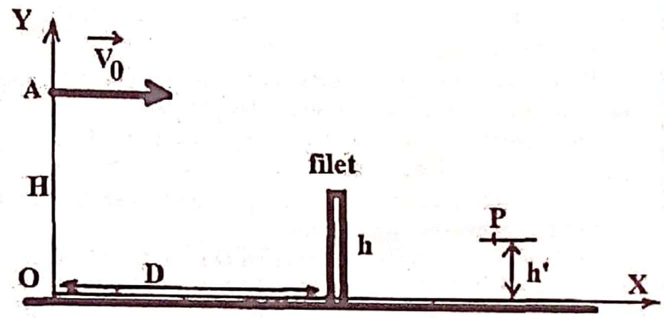
1) Donner l'expression des équations horaires du mouvement.

2) En déduire l'équation de la trajectoire du boulet.

3) Calculer la vitesse v_0 pour que le boulet atteint la cible au point C. On donne $d = 20\ m$ et $D = 200\ m$.

4) En prenant $v_0 = 50\ m/s$, déterminer la date t_S à laquelle l'obus atteint le sommet S de sa trajectoire ainsi que les caractéristiques de sa vitesse $\vec{v}_S$.

Exercice 190 : Au service, un joueur de tennis frappe une balle verticalement avec s raquette à partir du point A. Il lui communique une vitesse horizontale $v_0 = 22\ m/s$. On donne $H = OA = 2,5\ m$; $D = 12\ m$; $h = 90\ cm$ et $h' = 20\ cm$.



1) Montrer l'équation cartésienne de la trajectoire de la balle est donnée par : $y = \frac{-g}{2v_0^2}D^2 + H = -0,01x^2 + 2,5$.

2) Déterminer les caractéristiques du vecteur vitesse $\vec{v}_P$ de la balle au point P.

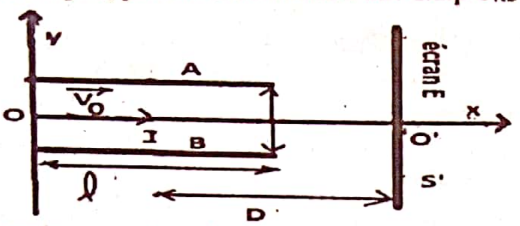
3) Montrer que les coordonnées du point $P \left| \begin{array}{l} x_P = 15\ m \\ y_P = 0,2\ m \end{array} \right.$

Abou Moussa Al Ach'ari (RA) rapporte que le Messager de Dieu (saw) a dit : « Celui qui a fait la prière des deux pleines lunes entre au Paradis ». Les deux pleines désignent ici la prière du Fajr (l'aube) et celle du 'Asr (après-midi). (Unanimement reconnu authentique)

Selon JAber (RA) ,le Messager de Dieu (saw) a dit : « Mon image et la vôtre est celle de quelqu'un qui a allumé un feu (le soir). Les criquets et les papillons se mirent à y tomber cependant qu'il cherchait à les en écarter. C'est ainsi que moi-même je vous retiens par le fond de votre culotte pour vous éviter de tomber dans le feu, tandis que vous échappez de ma main. » (Rapporté par Mouslim)

1

Exercice 191 : Des particules de charge q et de masse m sont envoyées avec une vitesse $\vec{v}_0$ entre deux plaques métalliques, parallèles soumises à une d.d.p $U_{AB} = U > 0$.



Les plaques ont une longueur ℓ et sont distantes de d.
Ces particules sont recueillies sur un écran E où se forme un spot S. Le centre des plaques est noté I et la distance du centre des plaques à l'écran est noté D ; (D = 1 m ; ℓ = 0,2 m ; d = 10 cm ; U = 2.10^4 V, e = $1{,}6.10^{-19}$ C.).

1) a) Donner l'orientation et l'intensité du vecteur champ électrostatique $\vec{E}$.

b) Etablir en fonction des divers paramètres l'équation de la trajectoire des particules entre les plaques.

2) En déduire en fonction des divers paramètres la déviation angulaire à la sortie des plaques.

3) Calculer en fonction des divers paramètres la déviation linéaire y_0 observée sur l'écran.

4) En fait les particules envoyées en O sont de natures différentes :

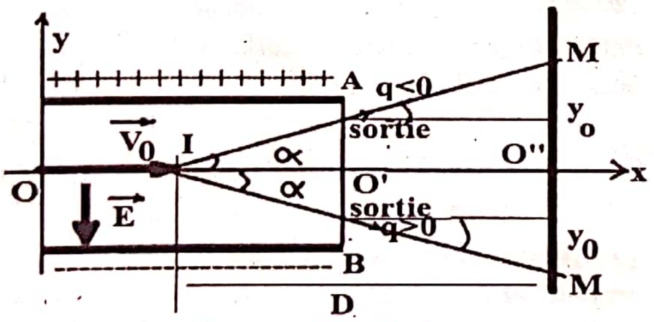
- les unes sont des électrons de $v_0 = 2,5.10^8\ m/s$,
- les autres sont des ions X^{2+}, de masse m' et de vitesse $v'_0 = 10^7\ m/s$.

a) Calculer la déviation Y_0 des électrons sur l'écran.

b) Sachant que les ions X^{2+} forment un spot en S' et que O'S' = 1,9 mm, calculer la masse m' de ces ions. En déduire son nombre de masse (ou nombre de nucléons) A. On donne : masse d'un nucléon : $1{,}67.10^{-27}$ kg ; masse d'un électron : $9{,}1.10^{-31}$ kg.

c) Quelle est la condition pour que les particules de charge q sortent du champ $\vec{E}$? Exprimer la tension maximale à cette sortie en fonction de m, d, q, ℓ et v_0.

Correction : $q = ne = nombre\ de\ charge \times 1,6 \times 10^{-19}$



1) a) $U_{AB} = V_A - V_B > 0 \Leftrightarrow V_A > V_B$ alors le vecteur champ électrostatique $\vec{E}$ est orienté de la plaque A vers la plaque B.

$U_{AB} = Ed \Leftrightarrow E = \frac{U_{AB}}{d} = \frac{2\times10^4}{10\times10^{-2}} = 2\times10^5\ V/m$

b) TCI : $\vec{F}_e = m\vec{a} \Leftrightarrow q\vec{E} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E}$ ou $\vec{a}\begin{cases} a_x = \frac{q}{m}E_x \\ a_y = \frac{q}{m}E_y \end{cases}$

Or $\vec{E}\begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = -E \end{cases}$ donc $\vec{a}\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -\frac{q}{m}E \end{cases}$; $\vec{v}_0\begin{cases} v_{0x} = v_0 \\ v_{0y} = 0 \end{cases}$

$\vec{v}\begin{cases} v_x = a_x t + v_{0x} = v_0 \\ v_y = a_y t + v_{0y} = -\frac{q}{m}Et \end{cases} \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{OG}\begin{cases} x = \frac{1}{2}a_x t^2 + v_{0x}t + x_0 = v_0 t \Leftrightarrow t = \frac{x}{v_0} \\ y = \frac{1}{2}a_y t^2 + v_{0y}t + y_0 = -\frac{q}{2m}Et^2 = -\frac{qU_{AB}}{2md}t^2 \end{cases}$

L'équation de la trajectoire est $y = -\frac{qE}{2mv_0^2}x^2 = -\frac{qU_{AB}}{2mdv_0^2}x^2$

alors les particules effectuent un mouvement parabolique.

2) à la sortie des plaques au point S les coordonnées sont

$S\begin{cases} x_S = \ell \\ y_S = ? \end{cases}$ si $q < 0$ et $S\begin{cases} x_S = -\ell \\ y_S = ? \end{cases}$ si $q > 0$.

On considère IO'S le triangle rectangle en O'.

$O'S = y_S = -\frac{qE}{2mv_0^2}x_S^2 = -\frac{qE\ell^2}{2mv_0^2}$ Soit l'angle $\alpha = \left(\overrightarrow{IO'};\overrightarrow{IS}\right)$

La déviation angulaire à la sortie des plaques est

1ère méthode : IO'S le triangle rectangle en O'

$\tan\alpha = \frac{y_S}{\frac{x_S}{2}} = \frac{2y_S}{x_S} = \frac{-2\frac{qE\ell^2}{2mv_0^2}}{\ell} = -\frac{qE\ell}{mv_0^2} \Leftrightarrow \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{-qE\ell}{mv_0^2}\right)$

2ème méthode : $\overrightarrow{OG}\begin{cases} x = v_0 t \Leftrightarrow t = \frac{x}{v_0} \\ y = -\frac{q}{2m}Et^2 \end{cases} \Leftrightarrow \vec{v}\begin{cases} v_x = v_0 \\ v_y = -\frac{q}{m}Et \end{cases}$

$\vec{v}_S\begin{cases} v_{Sx} = v_0 \\ v_{Sy} = -\frac{q}{m}Et_S \end{cases}$ ou encore $\vec{v}_S\begin{cases} v_{Sx} = v_0 \\ v_{Sy} = -\frac{q}{m}E \times \frac{x_S}{v_0} = -\frac{qE\ell}{mv_0} \end{cases}$

$\tan\alpha = \frac{v_{Sy}}{v_{Sx}} = \frac{\frac{qE\ell}{mv_0}}{v_0} = -\frac{qE\ell}{mv_0^2} \Leftrightarrow \alpha = \tan^{-1}\left(-\frac{qE\ell}{mv_0^2}\right)$

Or $E = \frac{U_{AB}}{d}$ alors $\alpha = \tan^{-1}\left(-\frac{qE\ell}{mv_0^2}\right) = \tan^{-1}\left(-\frac{qU_{AB}\ell}{mdv_0^2}\right)$

3) On considère IO''M le triangle rectangle en O''.

La déviation angulaire sur l'écran est donnée par $\tan\alpha = \frac{y_0}{D}$

La déviation linéaire y_0 observée sur l'écran

$\tan\alpha = \frac{y_0}{D} \Leftrightarrow y_0 = D\tan\alpha = D\left(-\frac{qE\ell}{mv_0^2}\right) = -\frac{qE\ell D}{mv_0^2}$

4) a) la déviation Y_0 des électrons sur l'écran $(q = -e)$

$y_0 = \frac{eE\ell D}{m_e v_0^2} = \frac{1{,}6\times10^{-19}\times2\times10^5\times0{,}2\times1}{9{,}31\times10^{-31}\times(2{,}5.10^8)^2} = 0{,}11\ m$

b) les ions X^{2+} $\Leftrightarrow q = 2e$

$y = -\frac{2eE}{2m'v_0^2}x^2 = -\frac{eE}{m'v_0^2}x^2 = -\frac{eU_{AB}}{m'dv_0^2}x^2$

$O'S = y_S = -\frac{eE}{m'v_0^2}x_S^2 = -\frac{eE\ell^2}{m'v_0^2} \Leftrightarrow m' = -\frac{eE\ell^2}{y_S v_0^2}$

$m' = \frac{1{,}6\times10^{-19}\times2\times10^5\times(0{,}2)^2}{1{,}9\times10^{-3}\times(10^7)^2} = 0{,}06737\times10^{-25}\ Kg$

Nombre de masse (ou nombre de nucléons) A.

$m' = m_n A \Leftrightarrow A = \frac{m'}{m_n} = \frac{0{,}06737\times10^{-25}}{1{,}67\times10^{-27}} = 4$

Ces ions sont des hélions.

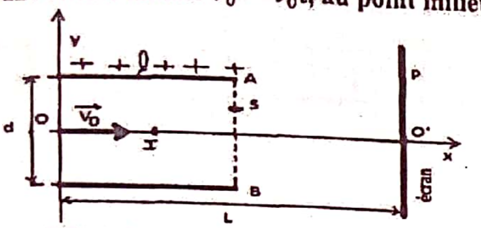
c) les particules de charge q sortent du champ $\vec{E}$ si $y_S < \frac{d}{2}$.

$O'S = y_S = -\frac{qE}{2mv_0^2}x_S^2 = -\frac{qE\ell^2}{2mv_0^2} = -\frac{qU_{AB}\ell^2}{2mdv_0^2}$

$-\frac{qU_{AB}\ell^2}{2mdv_0^2} < \frac{d}{2} \Leftrightarrow U_{AB} > -\frac{md^2v_0^2}{q\ell^2}$

La tension maximale à cette sortie $U_{max} = \left|-\frac{md^2v_0^2}{q\ell^2}\right|$

Exercice 192 : On maintient entre les plaques A et B une différence de potentielle U. La longueur de ces plaques est ℓ et leur distance est d. Un électron est injecté dans une direction perpendiculaire au champ électrostatique $\vec{E}$ avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0\vec{\imath}$, au point milieu des plaques.



Données : $\ell = 2\ cm$; $d = 1\ cm$; $L = 52\ cm$; $U = 100\ V$; $v_0 = 10^7\ m/s$; $m_e = 9,1.10^{-31}\ kg$; $e = 1,6.10^{-19}\ C$.

1) a) Préciser et justifier le signe de la tension U_{AB}.

b) Représenter et calculer le champ électrique (supposé uniforme) entre les deux plaques.

2) a) Etablir les équations horaires de la position de la particule dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ indiqué sur le schéma.

b) Etablir l'équation de la trajectoire.

c) En déduire la nature de la trajectoire de la particule

2) L'électron sort de la région où règne le champ électrique en point S.

a) Donner la nature du mouvement de l'électron entre l'extrémité des plaques et l'écran.

b) Calculer les coordonnées du point S et celle du vecteur vitesse $\vec{v}_S$ en ce point. En déduire la vitesse v_S.

c) Calculer la déviation électrique α (par deux méthodes).

3) On place un écran à la distance D de l'extrémité des plaques. a) Quelle est la position du point d'impact de l'électron (la déflexion électrique O''P) ?

b) Déterminer l'expression de la charge massique $\frac{q}{m}$.

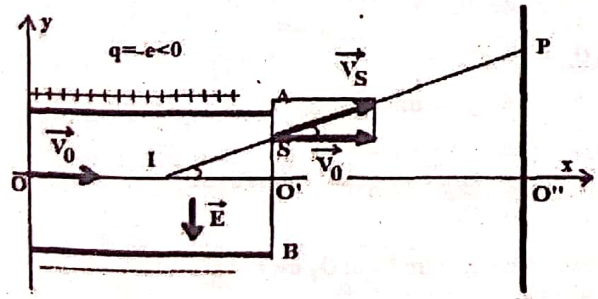
c) Quelle est la condition pour que l'électron sorte du champ $\vec{E}$? Exprimer la tension maximale à cette sortie en fonction de m, d, e, ℓ et v_0.

Correction : 1) a) $V_A > V_B \Leftrightarrow V_A - V_B > 0$

$U_{AB} = V_A - V_B > 0$ alors le vecteur champ électrostatique $\vec{E}$ est orienté de la plaque A vers la plaque B

b) $U = Ed \Leftrightarrow E = \frac{U}{d} = \frac{100}{10^{-2}} = 10^4\ V/m.$

2) a) les équations horaires



TCI : $\vec{F}_e = m\vec{a} \Leftrightarrow q\vec{E} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E}$ ou $\vec{a}\begin{vmatrix} a_x = \frac{q}{m}E_x \\ a_y = \frac{q}{m}E_y \end{vmatrix}$

Or $\vec{E}\begin{vmatrix} E_x = 0 \\ E_y = -E \end{vmatrix}$ donc $\vec{a}\begin{vmatrix} a_x = 0 \\ a_y = -\frac{q}{m}E \end{vmatrix}$; $\vec{v}_0\begin{vmatrix} v_{0x} = v_0 \\ v_{0y} = 0 \end{vmatrix}$

$\vec{v}\begin{vmatrix} v_x = a_xt + v_{0x} = v_0 \\ v_y = a_yt + v_{0y} = -\frac{q}{m}Et \end{vmatrix} \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{OG}\begin{vmatrix} x = \frac{1}{2}a_xt^2 + v_{0x}t + x_0 = v_0t \\ y = \frac{1}{2}a_yt^2 + v_{0y}t + y_0 = -\frac{q}{2m}Et^2 = \frac{eU}{2md}t^2 \end{vmatrix}$

$\overrightarrow{OG}\begin{vmatrix} x = v_0t = 10^7t \\ y = \frac{eU}{2md}t^2 = 8{,}8 \times 10^{14}t^2 \end{vmatrix}$

b) l'équation de la trajectoire

$x = v_0t \Leftrightarrow t = \frac{x}{v_0}$ or $y = \frac{e}{2m}Et^2 = \frac{eU}{2md}t^2$

L'équation de la trajectoire est $y = \frac{eE}{2mv_0^2}x^2 = \frac{eU}{2mdv_0^2}x^2$

c) $y = \frac{eE}{2mv_0^2}x^2 = \frac{1,6.10^{-19} \times 10^4}{2 \times 9,1.10^{-31} \times (10^7)^2}x^2 = 8{,}8x^2$ alors la particule effectue un mouvement parabolique.

2) a) $\vec{F}_e = m\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$ alors l'électron effectue entre l'extrémité des plaques et l'écran un mouvement rectiligne uniforme.

b) $\overrightarrow{OG}\begin{vmatrix} x = v_0t \\ y = \frac{eU}{2md}t^2 \end{vmatrix} \Leftrightarrow S\begin{vmatrix} x_S = v_0t_S \\ y_S = \frac{eU}{2md}t_S^2 \end{vmatrix}$

À la sortie des plaques au point S les coordonnées sont

$S\begin{vmatrix} x_S = \ell \\ y_S = \frac{eU}{2mdv_0^2}\ell^2 \end{vmatrix}$ avec $x_S = v_0t_S = \ell \Leftrightarrow t_S = \frac{\ell}{v_0}$

$\vec{v}\begin{vmatrix} v_x = v_0 \\ v_y = \frac{e}{m}Et \end{vmatrix} \Leftrightarrow \vec{v}_S\begin{vmatrix} v_{Sx} = v_0 \\ v_{Sy} = \frac{e}{m}Et_S = \frac{eE\ell}{mv_0} = \frac{eU\ell}{mdv_0} \end{vmatrix}$

$v_S = \sqrt{v_{Sx}^2 + v_{Sy}^2} = \sqrt{(v_0)^2 + \left(\frac{eU\ell}{mdv_0}\right)^2} =$

c) la déviation électrique α (par deux méthodes)

1ère méthode : IO'S le triangle rectangle en O'

$\tan\alpha = \frac{y_S}{\frac{x_S}{2}} = \frac{2y_S}{x_S} = \frac{2\frac{eE\ell^2}{2mv_0^2}}{\ell} = \frac{eE\ell}{mv_0^2} \Leftrightarrow \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{eE\ell}{mv_0^2}\right)$

2ème méthode : $\vec{v}\begin{vmatrix} v_x = v_0 \\ v_y = \frac{e}{m}Et \end{vmatrix}$ et $t = \frac{x}{v_0}$

$\vec{v}_S\begin{vmatrix} v_{Sx} = v_0 \\ v_{Sy} = \frac{e}{m}Et_S \end{vmatrix}$ ou encore $\vec{v}_S\begin{vmatrix} v_{Sx} = v_0 \\ v_{Sy} = \frac{e}{m}E \times \frac{x_S}{v_0} = \frac{eE\ell}{mv_0} \end{vmatrix}$

$\tan\alpha = \frac{v_{Sy}}{v_{Sx}} = \frac{\frac{eE\ell}{mv_0}}{v_0} = \frac{eE\ell}{mv_0^2} \Leftrightarrow \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{eE\ell}{mv_0^2}\right)$

Or $E = \frac{U}{d}$ alors $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{eE\ell}{mv_0^2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{eU\ell}{mdv_0^2}\right)$

3) a) la position du point d'impact de l'électron (la déflexion électrique O'P)

$\tan\alpha = \frac{O''P}{D + \frac{\ell}{2}} = \frac{O''P}{L - \frac{\ell}{2}} = \frac{eE\ell}{mv_0^2} \Leftrightarrow$

$O''P = \left(D + \frac{\ell}{2}\right)\tan\alpha = \left(L - \frac{\ell}{2}\right)\tan\alpha = \left(L - \frac{\ell}{2}\right)\frac{eE\ell}{mv_0^2}$

b) $O''P = \left(L - \frac{\ell}{2}\right)\frac{eE\ell}{mv_0^2} \Leftrightarrow \frac{e}{m} = \frac{v_0^2 O''P}{\left(L-\frac{\ell}{2}\right)E\ell} = \frac{v_0^2 O''Pd}{\left(L-\frac{\ell}{2}\right)U\ell}$

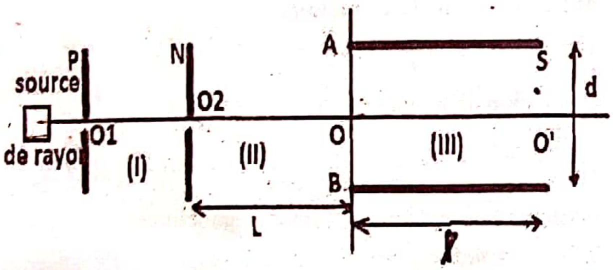
c) les particules de charge q sortent du champ $\vec{E}$ si $y_S < \frac{d}{2}$.

$y_S = \frac{eU}{2mdv_0^2}\ell^2$

$\frac{eU}{2mdv_0^2}\ell^2 < \frac{d}{2} \Leftrightarrow U < \frac{md^2v_0^2}{e\ell^2}$

La tension maximale à cette sortie $U_{max} = \frac{md^2v_0^2}{e\ell^2}$.

Exercice 193 : Des hélions, particules α, ${}^4_2H_e^{2+}$ de masse m, sont émis avec une vitesse négligeable à travers l'ouverture O_1 d'une plaque métallique P. Ils traversent successivement trois régions (I), (II) et (III) d'une enceinte où on a fait le vide. On négligera l'action de leurs poids sur le mouvement.



La région (I) est limitée par les plaques P et N planes, parallèles, perpendiculairement au plan du schéma et présentant entre elles une tension $U_0 = U_{NP}$. On veut qu'en O_2 les hélions aient une vitesse $\vec{v}_0$ ayant la direction de la droite (O_1O_2). On donne $e = 1,6.10^{-19}\ C$; $m = 6,68.10^{-27}\ kg$ et $|U_0| = 2\,000\ V$.

1) Préciser et justifier le signe de la tension U_0.

2) Déterminer l'expression littérale de v_0 en fonction de e, m, et U_0. Calculer sa valeur numérique.

3) Après avoir la région (II), de longueur $L = 50\ cm$, où le champ électrique est nul, les hélions pénètrent en O dans la région (III). Entre les armatures A et B de longueur $\ell = 20\ cm$ distantes de $d = 5\ cm$, existe une tension U_{AB}. On veut les particules sortent de cette région au point S tel que $O'S = 5\ mm$.

a) Déterminer le sens du vecteur champ électrique $\vec{E}$ entre A et B. En déduire le signe de la tension U_{AB}.

b) Etablir l'équation de la trajectoire des particules dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ que l'on précisera. On fera apparaitre dans cette équation U_0 et U_{AB}.

c) Quelle doit être la valeur de U_{AB} pour que les hélions soient au point S ?

d) Exprimer la durée du trajet entre O_1 et O_2 en fonction E_0, m, e et U_0.

e) Quelle est la durée du trajet entre O_2 et S ?

4) Ce dispositif permet-il de séparer les isotopes de l'hélium ?

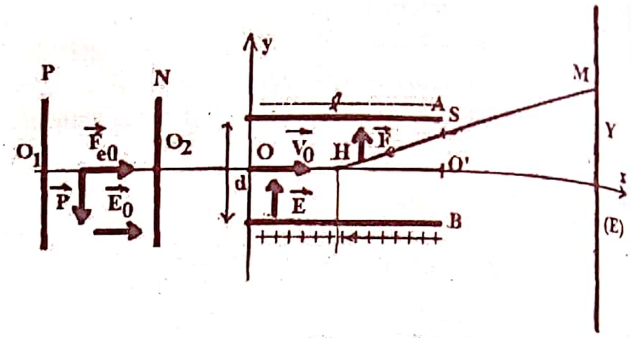
Correction : 1) Préciser et justifier le signe de U_0 :

$q = 2e > 0$ alors $\vec{F}_{e0}$ et $\vec{E}_0$ ont même sens,

$\vec{E}_0$ se dirige de la plaque P vers la plaque N, on déduit :

$V_P > V_N \Leftrightarrow V_P - V_N > 0 \Leftrightarrow U_{PN} > 0 \Leftrightarrow -U_{NP} > 0$

$-U_{NP} > 0 \Leftrightarrow U_{NP} < 0$ donc $U_0 = U_{NP} < 0$.



2) TEC $E_{cO_2} - E_{cO_1} = W(\vec{P}) + W(\vec{F}_{e0})$

$\frac{1}{2}mv_{O_2}^2 = \vec{F}_{e0}.\overrightarrow{O_1O_2} = q\vec{E}_0.\overrightarrow{O_1O_2} = qU_{PN} = 2e|U_0|$

$\frac{1}{2}mv_{O_2}^2 = 2e|U_0| \Leftrightarrow v_{O_2}^2 = \frac{4e|U_0|}{m}$

$\Leftrightarrow v_0 = \sqrt{\frac{4e|U_0|}{m}} = 2\sqrt{\frac{e|U_0|}{m}} = 43,77 \times 10^4\ m/s$

3) a) $q = 2e > 0$ alors $\vec{F}_e$ et $\vec{E}$ ont même sens.

$\vec{E}$ se dirige de la plaque B vers la plaque A, on déduit :

$V_B > V_A \Leftrightarrow V_B - V_A > 0 \Leftrightarrow U_{BA} > 0 \Leftrightarrow -U_{AB} > 0$

$-U_{AB} > 0 \Leftrightarrow U_{AB} < 0$

b) les équations horaires

TCI : $\vec{F}_e = m\vec{a} \Leftrightarrow q\vec{E} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E}$ ou $\vec{a}\begin{vmatrix} a_x = \frac{q}{m}E_x \\ a_y = \frac{q}{m}E_y \end{vmatrix}$

Or $\vec{E}\begin{vmatrix} E_x = 0 \\ E_y = E \end{vmatrix}$ donc $\vec{a}\begin{vmatrix} a_x = 0 \\ a_y = \frac{q}{m}E \end{vmatrix}$; $\vec{v}_0\begin{vmatrix} v_{0x} = v_0 \\ v_{0y} = 0 \end{vmatrix}$

$\vec{v}\begin{vmatrix} v_x = a_xt + v_{0x} = v_0 \\ v_y = a_yt + v_{0y} = \frac{q}{m}Et = \frac{qE}{m}t \end{vmatrix} \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{OG}\begin{vmatrix} x = \frac{1}{2}a_xt^2 + v_{0x}t + x_0 = v_0t \\ y = \frac{1}{2}a_yt^2 + v_{0y}t + y_0 = \frac{qE}{2m}t^2 = \frac{2eE}{2m}t^2 = \frac{eU_{AB}}{md}t^2 \end{vmatrix}$

Avec $U_{AB} = Ed \Leftrightarrow E = \frac{U_{AB}}{d}$

L'équation de la trajectoire

$x = v_0t \Leftrightarrow t = \frac{x}{v_0}$ or $y = \frac{eU_{AB}}{md}t^2$ et $v_0^2 = \frac{4e|U_0|}{m}$

Donc $y = \frac{eU_{AB}}{mdv_0^2}x^2 = \frac{eU_{AB}}{md\left(\frac{4e|U_0|}{m}\right)}x^2 = \frac{U_{AB}}{4d|U_0|}x^2 = \frac{U_{AB}}{400}x^2$

c) au point S les coordonnées sont S $\begin{vmatrix} x_S = \ell = 20.10^{-2}m \\ y_S = \frac{U_{AB}}{400}\ell^2 = 5.10^{-3}m \end{vmatrix}$

$y_S = \frac{U_{AB}}{400}\ell^2 \Leftrightarrow U_{AB} = \frac{400y_S}{\ell^2} = \frac{400\times5.10^{-3}}{(20.10^{-2})^2} = 50\ V$

d) $O_1O_2 = \frac{1}{2}a_0t^2 \Leftrightarrow v_0 = a_0t \Leftrightarrow t = \frac{v_0}{a_0}$

TCI : $\vec{F}_{e0} = m\vec{a}_0 \Leftrightarrow q\vec{E}_0 = m\vec{a}_0 \Leftrightarrow \vec{a}_0 = \frac{q}{m}\vec{E}_0$ ou

$\vec{a}_0\begin{vmatrix} a_{0x} = \frac{q}{m}E_{0x} = \frac{q}{m}E_0 = \frac{2e}{m}E_0 \\ a_{0y} = \frac{q}{m}E_{0y} = 0 \end{vmatrix}$ ET $v_0 = \sqrt{\frac{4e|U_0|}{m}}$

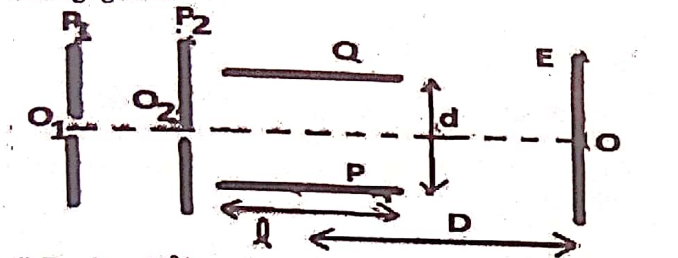
La durée du trajet entre O_1 et O_2 est $t = \frac{v_0}{a_0} = \frac{\sqrt{\frac{4e|U_0|}{m}}}{\frac{2e}{m}E_0}$

$t = \sqrt{\frac{4e|U_0|}{m}} \times \frac{m}{2eE_0} = \sqrt{\frac{4e|U_0|m^2}{m2^2e^2E_0^2}} = \sqrt{\frac{|U_0|m}{eE_0^2}} = \frac{1}{E_0}\sqrt{\frac{m}{e}|U_0|}$

e) $O_2O + y_S = L + \ell = v_0\Delta t + v_0\Delta t' = v_0(\Delta t + \Delta t') \Leftrightarrow L + \ell = v_0(\Delta t + \Delta t') \Leftrightarrow \Delta t + \Delta t' = \frac{L+\ell}{v_0}$. La durée du trajet entre O_2 et S est $\Delta t + \Delta t' = \frac{0,5+0,2}{43,77\times10^4} = 1,6\times10^{-6}\ s$

4) Ce dispositif ne permet pas séparer les isotopes de l'hélium. Mais il permet d'accélérer les isotopes de l'hélium.

Exercice 194 : Dans tout le problème, on supposera que le mouvement des ions a lieu dans le vide et que leur poids est négligeable.



1) Des ions M_g^{2+}, sortant d'une chambre d'ionisation pénètrent, avec une vitesse négligeable, par un trou O_1, dans l'espace compris entre les deux plaques verticales P_1 et P_2. Lorsqu'on applique entre ces deux plaques verticales une tension U_0, les ions atteignent le trou O_2 avec la vitesse v_0.

a) Quelle plaque (P_1 ou P_2) doit-on porter au potentiel le plus élevé ? Pourquoi ?

b) Donner la valeur de v_0 en fonction de la charge q, de la masse m = Au d'un ion et de U_0.

c) Calculer la valeur de $\vec{v}_0$ pour les ions M_g^{2+} dans le cas où la tension $U_0 = 4000$ V.

2) A la sortie de O_2, les ions ayant cette vitesse v_0 horizontale pénètrent entre les armatures P et Q d'un condensateur de distance d. On applique entre ces armatures une différence de potentiel U_{PQ} que l'on notera U, créant entre elles un champ électrique uniforme.

a) Préciser les caractéristiques de la force électrique à laquelle chaque ion est soumis, on exprimera son intensité en fonction de q, U et de d entre les plaques P et Q. Préciser et justifier le signe de la tension U.

b) Déterminer la nature de la trajectoire d'un ion à l'intérieur de ce condensateur lorsque U garde une valeur constante.

<u>Données :</u> $m(M_g^{2+}) = 24$ u; u = $1,67.10^{-27}$ kg; e = $1,6.10^{-19}$ C.

3) On dispose d'un écran vertical E à la distance D du centre des plaques de longueur ℓ. Trouver en fonction de q, m, U, v_0, ℓ, D et d l'expression de la distance Y = O''M, M étant le point d'impact d'un ion sur l'écran.

a) La distance Y dépendra-t-elle des caractéristiques des ions positifs utilisés ? (On admet que la tangente à la trajectoire au point de sortie S du condensateur passe par le milieu de celui-ci).

b) Calculer la durée de la traversée du condensateur dans le cas où $\ell = 10$ cm et $D = 40\ cm$ au point M.

<u>correction :</u> 1) a) $q = 2e > 0$ alors $\vec{F}_{e0}$ et $\vec{E}_0$ ont même sens.

$\vec{E}_0$ se dirige de la plaque P_1 vers la plaque P_2, on déduit :

$V_{P_1} > V_{P_2} \Leftrightarrow$ la plaque P_1 porte le potentiel le plus élevé.

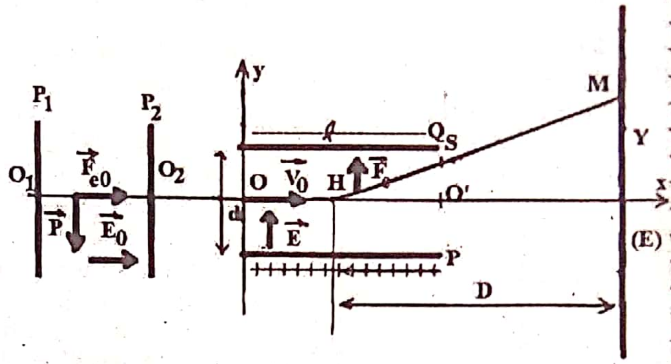
b) TEC $\quad E_{cO_2} - E_{cO_1} = W(\vec{P}) + W(\vec{F}_{e0})$

$\frac{1}{2}mv_{O_2}^2 = \vec{F}_{e0}.\overrightarrow{O_1O_2} = q\vec{E}_0.\overrightarrow{O_1O_2} = qU_{P_1P_2} = qU_0$

$\frac{1}{2}mv_{O_2}^2 = qU_0 \Leftrightarrow v_{O_2}^2 = \frac{2qU_0}{m} \Leftrightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2qU_0}{m}} = \sqrt{\frac{2qU_0}{Au}}$

c) $v_0 = \sqrt{\frac{4eU_0}{Au}} = \sqrt{\frac{4\times1,6\times10^{-19}\times4000}{24\times1,67\times10^{-27}}} = 25,27\times10^4\ m/s$

2)



a) $q = 2e > 0$ alors $\vec{F}_e$ et $\vec{E}$ ont même sens,

Le vecteur champ électrostatique $\vec{E}$ est orienté perpendiculairement de la plaque P vers la plaque Q et a pour $U_{PQ} = Ed \Leftrightarrow E = \frac{U_{PQ}}{d} = \frac{U}{d}$.

Préciser et justifier le signe de la tension U

$\vec{E}$ se dirige de la plaque P vers la plaque Q, on déduit :

$V_P > V_Q \Leftrightarrow V_P - V_Q > 0 \Leftrightarrow U_{PQ} > 0$ donc $U_{PQ} = U > 0$.

b) les équations horaires

TCI : $\vec{F}_e = m\vec{a} \Leftrightarrow q\vec{E} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E}$ ou $\vec{a}\left|\begin{array}{l} a_x = \frac{q}{m}E_x \\ a_y = \frac{q}{m}E_y \end{array}\right.$

Or $\vec{E}\left|\begin{array}{l} E_x = 0 \\ E_y = E \end{array}\right.$ donc $\vec{a}\left|\begin{array}{l} a_x = 0 \\ a_y = \frac{q}{m}E \end{array}\right.$; $\vec{v}_0\left|\begin{array}{l} v_{0x} = v_0 \\ v_{0y} = 0 \end{array}\right.$

$\vec{v}\left|\begin{array}{l} v_x = a_xt + v_{0x} = v_0 \\ v_y = a_yt + v_{0y} = \frac{q}{m}Et \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{OG}\left|\begin{array}{l} x = \frac{1}{2}a_xt^2 + v_{0x}t + x_0 = v_0t \\ y = \frac{1}{2}a_yt^2 + v_{0y}t + y_0 = \frac{q}{2m}Et^2 = \frac{qU}{2md}t^2 \end{array}\right.$

$\overrightarrow{OG}\left|\begin{array}{l} x = v_0t \\ y = \frac{qU}{2md}t^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \vec{v}\left|\begin{array}{l} v_x = v_0 \\ v_y = \frac{qU}{md}t \end{array}\right.$

L'équation de la trajectoire

$x = v_0t \Leftrightarrow t = \frac{x}{v_0}$ or $y = \frac{qU}{2md}t^2$ et $v_0^2 = \frac{2qU_0}{m}$

Donc $y = \frac{qU}{2mdv_0^2}x^2 = \frac{qU}{2md\left(\frac{2qU_0}{m}\right)}x^2 = \frac{U}{4dU_0}x^2$ À l'intérieur de ce condensateur, la trajectoire d'un ion est parabolique.

3) a) $\tan\alpha = \frac{y_S}{\frac{x_S}{2}} = \frac{2y_S}{x_S} = \frac{Y}{D} = \frac{v_{Sy}}{v_{Sx}} = \frac{eE\ell}{mv_0^2} = \frac{\frac{U}{4dU_0}\ell^2}{\ell} = \frac{U\ell}{4dU_0}$,

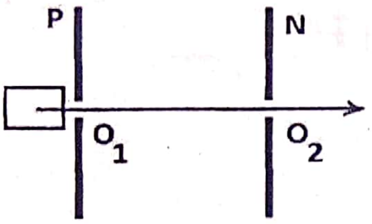
$\frac{Y}{D} = \frac{U\ell}{4dU_0} \Leftrightarrow Y = \frac{U\ell D}{4dU_0}$ alors la distance Y ne dépendra pas des caractéristiques des ions positifs utilisés.

b) $\overrightarrow{OG}\begin{vmatrix} x = v_0 t \\ y = \frac{qU}{2md}t^2 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \vec{v}\begin{vmatrix} v_x = v_0 \\ v_y = \frac{qU}{md}t \end{vmatrix}$; La traversée du condensateur dans le cas où $\ell = 10$ cm au point M a pour distance $\ell + \left(D - \frac{\ell}{2}\right) = D + \frac{\ell}{2}$.

La durée de traversée du condensateur au point M est

$\Delta t = \frac{D+\frac{\ell}{2}}{v_0} = \frac{0{,}4+\frac{0{,}1}{2}}{25{,}27\times10^4} = \frac{0{,}45}{25{,}27\times10^4} = 1{,}78\times10^{-6}\ s$

Exercice 195 : **Des isotopes $^{20}_{10}N_e^+$ et $^{22}_{10}N_e^+$ de masses respectives m_1 et m_2 pénètrent avec une vitesse initiale en O_1 puis ils sortent en O_2 avec les vitesses v_1 et v_2. On négligera l'action de leurs poids sur le mouvement.**



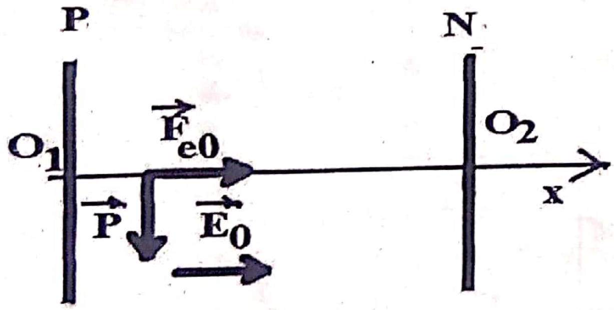
a) Représenter sur un schéma le vecteur champ $\vec{E}_0$ et déterminer le signe de la tension U_{PN}.

b) Exprimer v_1, vitesse de l'isotope N_e^+ en O_2 en fonction de U_0, e et m_1. Calculer v_1 pour l'isotope $^{20}_{10}N_e^+$ sachant que $U_0 = |U_{PN}| = 2\times10^4\ V$, $\mathcal{N}_A = 6{,}02\times10^{23}\ moL^{-1}$, $\mu_1 = 20\times10^{-3}\ kg/moL$ et $\mu_2 = 22\times10^{-3}\ Kg/moL$.

c) Montrer qu'en O_2, on a $\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}}$ (il s'agit de comparer les énergies cinétiques des isotopes).

d) En déduire la valeur de la vitesse v_2.

Correction : **a) Représenter le vecteur champ $\vec{E}_0$**



Le signe de la tension U_{PN}

$q = e > 0$ alors $\vec{F}_{e0}$ et $\vec{E}_0$ ont même sens.

$\vec{E}_0$ se dirige de la plaque P vers la plaque N, on déduit :

$$V_P > V_N \Leftrightarrow V_P - V_N > 0 \Leftrightarrow U_{PN} > 0$$

b) TEC $\quad E_{cO_2} - E_{cO_1} = W(\vec{P}) + W(\vec{F}_{e0})$

$\frac{1}{2}mv_{O_2}^2 = \vec{F}_{e0}.\overrightarrow{O_1O_2} = q\vec{E}_0.\overrightarrow{O_1O_2} = qU_{PN} = eU_{PN}$

$\frac{1}{2}mv_{O_2}^2 = eU_{PN} \Leftrightarrow v_{O_2}^2 = \frac{2eU_{PN}}{m} \Leftrightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2eU_{PN}}{m}}$

Or $m = \frac{\mu}{\mathcal{N}_A} = \frac{\mu}{6{,}02\times10^{23}}$ donc $v_0 = \sqrt{\frac{2eU_{PN}\mathcal{N}_A}{\mu}}$

Pour l'isotope $^{20}_{10}N_e^+$, $v_1 = \sqrt{\frac{2eU_{PN}\mathcal{N}_A}{\mu_1}} = 4{,}4\times10^5\ m/s$

c) TEC $\quad E_{cO_2} - E_{cO_1} = W(\vec{P}) + W(\vec{F}_{e0})$

$E_{cO_2} = eU_{PN}$, cette énergie est indépendante des masses des isotopes, donc $E_{cO_2}(^{20}_{10}N_e^+) = E_{cO_2}(^{22}_{10}N_e^+) = eU_{PN}$

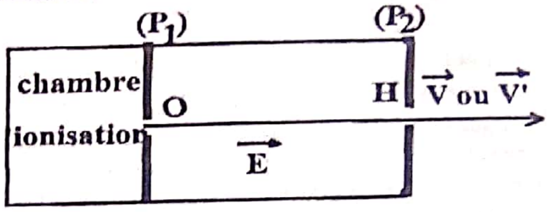
$\frac{1}{2}m_1v_1^2 = \frac{1}{2}m_2v_2^2 \Leftrightarrow m_1v_1^2 = m_2v_2^2 \Leftrightarrow \frac{v_1^2}{v_2^2} = \frac{m_2}{m_1}$.

$\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 = \frac{m_2}{m_1} \Leftrightarrow \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} = \sqrt{\frac{\frac{\mu_2}{\mathcal{N}_A}}{\frac{\mu_1}{\mathcal{N}_A}}} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mathcal{N}_A}\times\frac{\mathcal{N}_A}{\mu_1}} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}}$

d) $\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}} \Leftrightarrow \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}} \Leftrightarrow v_2 = v_1\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}$

$v_2 = 4{,}4\times10^5\times\sqrt{\frac{20\times10^{-3}}{22\times10^{-3}}} = 4{,}2\times10^5\ m/s$

Exercice 196 : **Des isotopes $^6_3Li^+$ et $^7_3Li^+$ de masses différentes m et m', sont produits dans une chambre d'ionisation. Ils pénètrent en O dans un champ électrique uniforme.**



1) Quelle est la direction du vecteur champ $\vec{E}$? Déterminer le signe de la tension $U = V_{P1} - V_{P2}$ que l'on établit entre les plaques P_1 et P_2.

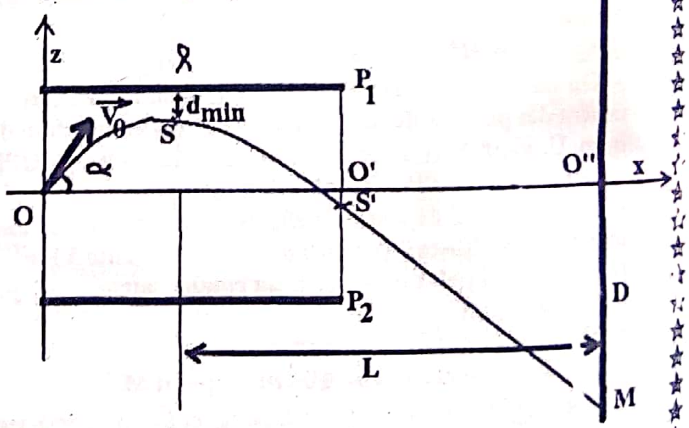
2) Comparer les énergies cinétiques des deux sortes d'ions en H. Etablir la relation : $\frac{v}{v'} = \sqrt{\frac{m'}{m}}$.

3) On donne $|U| = 10^4\ V$, $e = 1{,}6\times10^{-19}\ C$, $m = 10\times10^{-3}\ kg$ et $m' = 11{,}7\times10^{-3}\ Kg$.

a) Montrer que l'énergie cinétique des ions en H est donnée par $10^4\ eV$.

b) Montrer que $v = 567{,}7\ Km/s$ et $v' = 523\ Km/s$.

Exercice 197 : **Un faisceau de particules identiques, de masse m, de charge q, pénètre en O à une vitesse initiale $\vec{v}_0$ faisant un angle $\alpha = 50°$ avec le plan horizontal (x'x) où règne un champ électrostatique uniforme $\vec{E}$. On maintient entre les plaques A et B une différence de potentielle U. La longueur de ces plaques est ℓ et leur distance est d.**



1) a) Pourquoi le poids $\vec{P}$ n'intervient-il pas dans le bilan des forces ? Justifier la réponse à l'aide des ordres de

grandeur. Etablir les équations paramétriques du mouvement faisceau de particules entre les plaques.
b) Etablir, en fonction de q, E, v_0 et α, l'équation de la trajectoire du faisceau de particules entre les plaques. En déduire la nature du mouvement des particules.
c) Soit $q > 0$. Quelle est la direction du champ $\vec{E}$?
3) a) Exprimer la hauteur maximale Z_{max} atteinte par les particules en fonction de q, m, E, v_0 et α.
b) Les quantités v_0 et α étant données, déterminer la distance minimale d_{min} pour que la particule ne heurte pas la plaque P_1.
c) Exprimer la distance O'S'.

<u>Données :</u> $\ell = 2\ cm$; $d = 10\ cm$; $L = 51\ cm$;
$U = 100\ V, m = 1{,}66 \times 10^{-27}\ Kg.$

1) a) L'intensité du poids $\vec{P}$ n'intervient pas dans le bilan des forces et est négligeable devant la force électrostatique $\vec{F}_e$ si et seulement $\frac{P}{F_e} < 10^{-10}$.

Les équations paramétriques du faisceau de particules

TCI : $\vec{F}_e = m\vec{a} \Leftrightarrow q\vec{E} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E}$ ou $\vec{a}\left|\begin{array}{l} a_x = \frac{q}{m}E_x \\ a_z = \frac{q}{m}E_y \end{array}\right.$

Or $\vec{E}\left|\begin{array}{l} E_x = 0 \\ E_z = -E \end{array}\right.$ donc $\vec{a}\left|\begin{array}{l} a_x = 0 \\ a_z = -\frac{q}{m}E \end{array}\right.$; $\vec{v}_0\left|\begin{array}{l} v_{0x} = v_0\cos\alpha \\ v_{0z} = v_0\sin\alpha \end{array}\right.$

$$\vec{v}\left|\begin{array}{l} v_x = a_x t + v_{0x} = v_0\cos\alpha \\ v_z = a_z t + v_{0z} = -\frac{qE}{m}t + v_0\sin\alpha \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{OG}\left|\begin{array}{l} x = \frac{1}{2}a_x t^2 + v_{0x}t + x_0 = v_0 t\cos\alpha \\ z = \frac{1}{2}a_z t^2 + v_{0z}t + z_0 = -\frac{qE}{2m}t^2 + v_0 t\sin\alpha \end{array}\right.$$

L'équation de la trajectoire du faisceau de particules

$x = v_0 t\cos\alpha \Leftrightarrow t = \frac{x}{v_0\cos\alpha}$

$$z = -\frac{qE}{2m}\left(\frac{x}{v_0\cos\alpha}\right)^2 + v_0\frac{x}{v_0\cos\alpha}\sin\alpha$$

$$z = -\frac{qE}{2mv_0^2\cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha$$

$$z = -\frac{qE}{2mv_0^2}(\tan^2\alpha + 1)x^2 + x\tan\alpha$$

c) $q > 0$ alors $\vec{F}_e$ et $\vec{E}$ ont même sens,
Le vecteur champ électrostatique $\vec{E}$ est orienté perpendiculairement de la plaque P_1 vers la plaque P_2.
Préciser et justifier le signe de la tension U_{P1P2}, on déduit :
$V_{P1} > V_{P2} \Leftrightarrow V_{P1} - V_{P2} > 0 \Leftrightarrow U_{P1P2} > 0.$

3) a) $\overrightarrow{OG}\left|\begin{array}{l} x = v_0 t \\ z = \frac{-qE}{2m}t^2 + v_0 t\sin\alpha \end{array}\right. \Leftrightarrow \vec{v}\left|\begin{array}{l} v_x = v_0\cos\alpha \\ v_z = \frac{-qE}{m}t + v_0\sin\alpha \end{array}\right.$

$$\vec{v}_S\left|\begin{array}{l} v_{Sx} = v_0\cos\alpha \\ v_{Sz} = -\frac{qE}{m}t_S + v_0\sin\alpha = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow t_S = \frac{mv_0\sin\alpha}{qE}$$

$$z_S = Z_{max} = -\frac{qE}{2m}t_S^2 + v_0 t_S\sin\alpha$$

$$Z_{max} = -\frac{qE}{2m}\left(\frac{mv_0\sin\alpha}{qE}\right)^2 + v_0\left(\frac{mv_0\sin\alpha}{qE}\right)\sin\alpha$$

$$Z_{max} = -\frac{mv_0^2\sin^2\alpha}{2qE} + \frac{mv_0^2\sin^2\alpha}{qE} = \frac{mv_0^2\sin^2\alpha}{2qE}$$

b) $d = Z_{max} + d_{min} \Leftrightarrow d_{min} = d - Z_{max} = d - \frac{mv_0^2\sin^2\alpha}{2qE}$

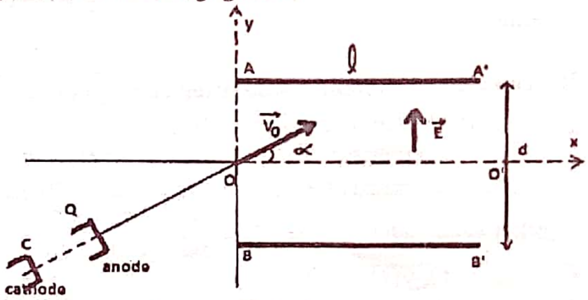
c) $O'S' = \sqrt{(x_{S'} - x_{O'})^2 + (z_{S'} - z_{O'})^2}$

$$O'\left|\begin{array}{l} x_{O'} = \ell \\ z_{O'} = 0 \end{array}\right. ; S'\left|\begin{array}{l} x_{S'} = \ell \\ z_{S'} = -\frac{qE}{2mv_0^2\cos^2\alpha}\ell^2 + \ell\tan\alpha \end{array}\right.$$

$$O'S' = \sqrt{\left(-\frac{qE}{2mv_0^2\cos^2\alpha}\ell^2 + \ell\tan\alpha\right)^2}$$

$$O'S' = \left|-\frac{qE}{2mv_0^2\cos^2\alpha}\ell^2 + \ell\tan\alpha\right|$$

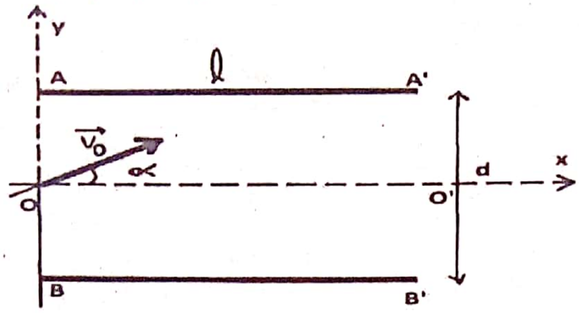
<u>**Exercice 198 :**</u> **Des électrons sont émis à la cathode C avec une vitesse initiale négligeable. Ils sont alors accélérés par une tension $U_{QC} = U_0 = 500\ V$ et arrivent en Q avec une vitesse $\vec{V}_0$ faisant un angle $\alpha = 30°$ avec l'axe (O,x). Le poids a un effet négligeable.**



<u>**Données**</u> $e = 1{,}6.10^{-19}\ C$; $d = 7\ cm$;
$m_e = 9{,}1.10^{-31}\ kg$; $\ell = 20\ cm.$
1) Enoncer le théorème de l'énergie cinétique et l'utiliser pour calculer v_0.
2) Les électrons venant de Q arrivent en O avec la vitesse $\vec{v}_0$. Ils pénètrent à l'intérieur du condensateur plan constitué par les plaques AA' et BB'. Le champ électrique $\vec{E}$ est uniforme et la tension $U_{BA} = U$ est positive.
a) Dans le repère $(O;\ \vec{i};\ \vec{j})$, exprimer en fonction de v_0, e, d, α, et U les composantes des vecteurs accélérations, vitesse et position à l'intérieur des plaques.
b) En déduire l'équation de la trajectoire en fonction de U_0, U, d et α.
c) Exprimer en fonction de U_0, U, d et α, les coordonnées du point M où le vecteur vitesse est parallèle à l'axe (O,x). En déduire la relation liant U_0, U et α pour que l'électron ne touche pas la plaque supérieur AA'.
d) On veut que l'électron sorte du champ en O'.
d1) Déterminer en fonction de U_0, ℓ, d et α, la tension U appliquée entre les plaques. Donner sa valeur.
d2) Montrer alors que le vecteur vitesse en O' a la même valeur qu'en O.

D'après Abû Hurayra - رضي الله عنه -, l'Envoyé d'Allah - صلى الله عليه وسلم - a dit :
« Celui qui croit en Allah et au Jour Dernier qu'il dise une bonne chose ou qu'il se taise.
Celui qui croit en Allah et au Jour Dernier qu'il fasse du bien à son voisin.
Celui qui croit en Allah et au Jour Dernier qu'il soit hospitalier à l'égard de son hôte ».

Exercice 199 : Entre les plaques (AA') et (BB') d'un condensateur, espacées de d, pénètre en O, à égale distance des plaques, une particule de masse m et de charge q.



1) La tension U_{AB} est positive. Tracer le vecteur champ électrique.

2) Représenter un vecteur accélération en un point de la trajectoire, dans chacun des cas $q > 0$ et $q < 0$.

3) Les équations horaires de la trajectoire sont définies par la relation vectorielle : $\overrightarrow{OM} = t\vec{v}_0 + \frac{qt^2}{2m}\vec{E}$.

a) Calculer $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$.

b) Exprimer l'équation de la trajectoire en fonction de q, $E = \|\vec{E}\|$ et $\tan\alpha$.

4) Représenter approximativement la trajectoire pour $q > 0$ et $q < 0$.

5) On suppose $q > 0$ (protons), $\alpha = 30°$, $d = 7\ cm$ et $v_0 = 2,5.10^6\ m/s$.

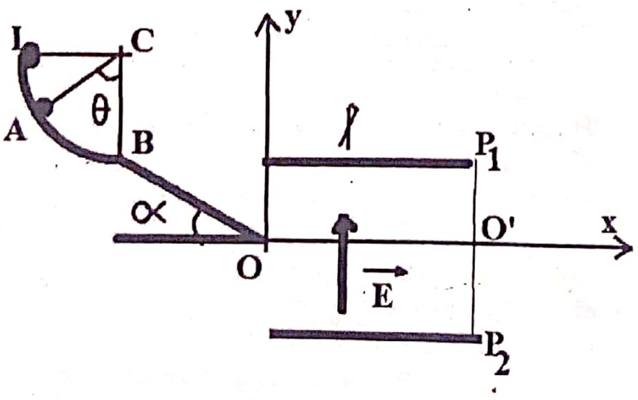
a) Caractériser le vecteur vitesse des protons à la sortie du condensateur. Calculer la valeur de U_{AB}.

b) Quelles doit être la longueur ℓ des plaques pour que la particule ressorte en O' ?

c) Quelles doit être la distance minimale d pour que la particule ressorte en O' ?

d) Déterminer l'expression de la hauteur maximale en fonction de v_0, m, d, U_{AB}, α et e.

Exercice 200 : Une petite sphère chargée de masse $m = 10\ g$ et de charge q positive est abandonnée sans vitesse initiale en un point I d'un circuit IABO.



Données : tous les frottements sont négligeables, $\theta = 60°$, $\alpha = 30°$, $v_B = 3\ m/s$ et $r = CI = CA = CB = 0,5\ m$.

1) a) Calculer la vitesse v_A de la sphère au passage en A.

b) Déterminer l'expression de la réaction de la piste en A sur la sphère. Calculer sa valeur.

2) a) Calculer l'accélération sur le circuit BO.

b) En déduire la vitesse de passage en O, sachant que la durée du mouvement de B à O est 1,5 s.

3) La petite sphère quitte la piste BO en O avec une vitesse $v_0 = 10\ m/s$ et pénètre dans un champ électrique $\vec{E}$ uniforme créé par deux plaques P_1 et P_2, parallèles distantes de $d = 4\ cm$, de longueur ℓ et $E = 10^5 V/m$.

a) Etablir les équations horaires du mouvement de la sphère dans le repère (O, x, y).

b) Exprimer q en fonction de m, E, v_0, α et ℓ en O'.

c) En déduire l'équation cartésienne de sa trajectoire.

d) Quelle tension $U_0 = V_{P_2} - V_{P_1}$ faut-il appliquer aux plaques pour que la sphère ait un mouvement rectiligne uniforme selon OO' si $q_0 = 5 \times 10^{-7}\ C$?

Correction : 1) a) TEC : $E_{cA} - E_{cI} = W(\vec{P}) + W(\vec{R})$

Or $v_I = 0$, $\vec{R} \perp \vec{t} \Leftrightarrow W(\vec{R}) = 0$ et $W(\vec{P}) = Ph = mgr\cos\theta$

Donc $\frac{1}{2}mv_A^2 = mgr\cos\theta \Leftrightarrow v_A = \sqrt{2gr\cos\theta} = 2,24\ m/s$

b) Sur l'arc $\widehat{IB}$: TCI : $\vec{R} + \vec{P} = m\vec{a} \Leftrightarrow R_n + P_n = ma_n$

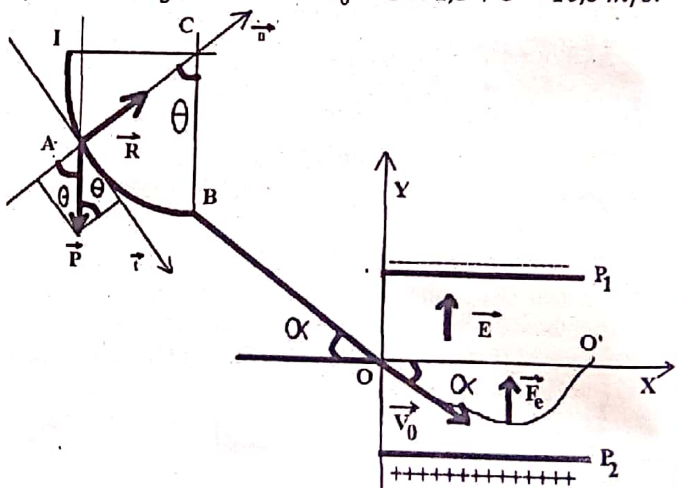
Donc $R - P\cos\theta = m\frac{v_A^2}{r} \Leftrightarrow R = m\frac{v_A^2}{r} + mg\cos\theta \Leftrightarrow$

$R = 2mg\cos\theta + mg\cos\theta = 3mg\cos\theta = 0,15\ N$

2) a) Sur BO : TCI : $\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a} \Leftrightarrow P_x + R_x = ma_x$

Donc $P\sin\alpha = ma \Leftrightarrow a = g\sin\alpha = 5\ m/s^2$.

b) $v = at + v_B = 5t + 3 \Leftrightarrow v_0 = 5 \times 1,5 + 3 = 10,5\ m/s$.



3) $d = 4\ cm$, de longueur ℓ et $E = 10^5 V/m$.

a) équations horaires du mouvement de la sphère

TCI : $\vec{F}_e = m\vec{a} \Leftrightarrow q\vec{E} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E}$ ou $\vec{a}\begin{vmatrix} a_x = \frac{q}{m}E_x \\ a_y = \frac{q}{m}E_y \end{vmatrix}$

Or $\vec{E}\begin{vmatrix} E_x = 0 \\ E_y = E \end{vmatrix}$ donc $\vec{a}\begin{vmatrix} a_x = 0 \\ a_y = \frac{q}{m}E \end{vmatrix}$; $\vec{v}_0\begin{vmatrix} v_{0x} = v_0\cos\alpha \\ v_{0y} = -v_0\sin\alpha \end{vmatrix}$

$$\vec{v}\begin{cases} v_x = a_x t + v_{0x} = v_0\cos\alpha \\ v_y = a_y t + v_{0y} = \frac{qE}{m}t - v_0\sin\alpha \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{OG}\begin{cases} x = \frac{1}{2}a_x t^2 + v_{0x}t + x_0 = v_0 t\cos\alpha \\ y = \frac{1}{2}a_y t^2 + v_{0y}t + y_0 = \frac{qE}{2m}t^2 - v_0 t\sin\alpha \end{cases}$$

$$\overrightarrow{OG}\begin{cases} x = v_0 t\cos\alpha \\ y = \frac{qE}{2m}t^2 - v_0 t\sin\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \vec{v}\begin{cases} v_x = v_0\cos\alpha \\ v_y = \frac{qE}{m}t - v_0\sin\alpha \end{cases}$$

b) l'équation cartésienne de sa trajectoire.

$x = v_0 t\cos\alpha \Leftrightarrow t = \frac{x}{v_0\cos\alpha}$

$y = \frac{qE}{2m}\left(\frac{x}{v_0\cos\alpha}\right)^2 - v_0\frac{x}{v_0\cos\alpha}\sin\alpha = \frac{qE}{2mv_0^2\cos^2\alpha}x^2 - x\tan\alpha$

$y = \frac{qE}{2mv_0^2}(\tan^2\alpha + 1)x^2 - x\tan\alpha$

c) au point O', on a $O'\begin{cases} x_{0'} = \ell \\ y_0 = 0 \end{cases}$

$0 = \frac{qE}{2mv_0^2\cos^2\alpha}\ell^2 - \ell\tan\alpha \Leftrightarrow \frac{qE}{2mv_0^2\cos^2\alpha}\ell - \tan\alpha = 0$

$\frac{qE}{2mv_0^2\cos^2\alpha}\ell = \tan\alpha \Leftrightarrow q = \frac{2mv_0^2\cos^2\alpha\tan\alpha}{E\ell} = \frac{2mv_0^2\cos\alpha\sin\alpha}{E\ell}$

Or $2\cos\alpha\sin\alpha = \sin 2\alpha$

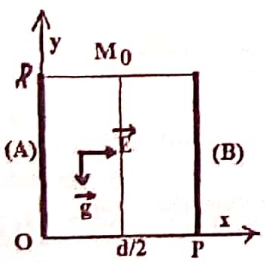
Donc $q = \frac{2mv_0^2\sin 2\alpha}{E\ell} = 1{,}73\times10^{-4}\ C$

d) un mouvement rectiligne uniforme $\Leftrightarrow \vec{F}_e + \vec{P} = \vec{0}$

$q_0E_0 - mg = 0 \Leftrightarrow E_0 = \frac{mg}{q_0} = \frac{0{,}01\times10}{5\times10^{-7}} = 2\times10^5\ V/m$

$U_0 = E_0 d = 2\times10^5 \times 4\times10^{-2} = 8\,000\ V$

<u>Exercice 201 :</u> Deux plaques métalliques verticales (A) et (B) sont placées dans le vide à une distance $d = 4\ cm$ l'une de l'autre et sont soumises à une tension $U_{AB} > 0$. Entre les plaques superposent deux champs : le champ de pesanteur supposé uniforme, caractérisé par $\vec{g}$ et un champ électrique uniforme, caractérisé par $\vec{E}$. Une petite sphère de masse m et de charge q positive est abandonnée sans vitesse initiale en un point $M_0\begin{cases} x_0 = \frac{d}{2} \\ y_0 = \ell = 1\ m \end{cases}$. On ne peut pas négliger l'action de la pesanteur.



1) Montrer que les deux forces qui agissent sur la sphère restent dans le plan xOy. On donne $\frac{q}{m} = 10^{-6}\ C/Kg$.

2) Établir les équations horaires de son mouvement dans le repère $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$.

Etablir l'équation de la trajectoire la sphère. En déduire la nature du mouvement de la petite sphère.

3) Calculer la date d'arriver de la charge dans le plan horizontal passant par O.

4) Quelle valeur de U_{AB} doit-on donner à pour que la trajectoire passe par le point P de coordonnées (d ; 0) ?

<u>Correction :</u> 1) TCI : $\vec{F}_e + \vec{P} = m\vec{a} \Leftrightarrow q\vec{E} + m\vec{g} = m\vec{a}$

$q\vec{E} + m\vec{g} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E} + \vec{g}$

Or $\vec{E}\begin{cases} E_x = E \\ E_y = 0 \end{cases}$ et $\vec{g}\begin{cases} g_x = 0 \\ g_y = -g \end{cases} \Leftrightarrow \vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E} + \vec{g}$

Donc $\vec{a}\begin{cases} a_x = \frac{q}{m}E_x + g_x = \frac{q}{m}E \\ a_y = \frac{q}{m}E_y + g_y = -g \end{cases}$

2) les équations horaires de son mouvement dans $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$.

$$\vec{v}_0\begin{cases} v_{0x} = 0 \\ v_{0y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \vec{v}\begin{cases} v_x = a_x t + v_{0x} = \frac{q}{m}Et \\ v_y = a_y t + v_{0y} = -gt \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{OG}\begin{cases} x = \frac{1}{2}a_x t^2 + v_{0x}t + x_0 = \frac{q}{2m}Et^2 + \frac{d}{2} \\ y = \frac{1}{2}a_y t^2 + v_{0y}t + y_0 = -\frac{1}{2}gt^2 + \ell \end{cases}$$

$$\overrightarrow{OG}\begin{cases} x = \frac{q}{2m}Et^2 + \frac{d}{2} \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + \ell \end{cases}$$

b) l'équation cartésienne de sa trajectoire.

$x = \frac{q}{2m}Et^2 + \frac{d}{2} \Leftrightarrow t^2 = \frac{2m\left(x - \frac{d}{2}\right)}{qE}$

$y = -\frac{1}{2}g\left(\frac{2m\left(x-\frac{d}{2}\right)}{qE}\right) + \ell = -\frac{mg}{qE}x + \frac{mgd}{2qE} + \ell$ alors la petite sphère effectue un mouvement rectiligne.

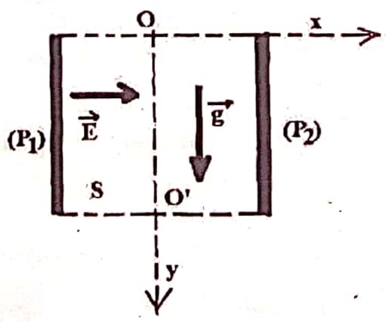
3) $y = -\frac{1}{2}gt^2 + \ell = 0 \Leftrightarrow t^2 = \sqrt{\frac{2\ell}{g}} = 0{,}44\ s$

4) $y = -\frac{mg}{qE}x + \frac{mgd}{2qE} + \ell$

$0 = -\frac{mg}{qE}d + \frac{mgd}{2qE} + \ell \Leftrightarrow -2mgd + mgd + 2qE\ell = 0$

$2qE\ell = mgd \Leftrightarrow E = \frac{mgd}{2q\ell} \Leftrightarrow U_{AB} = Ed = \frac{mgd^2}{2q\ell} = 8\,000\ V$

<u>Exercice 202 :</u> Une petite sphère de masse $m = 2\ g$ considérée comme ponctuelle, pénètre avec vitesse initiale nulle au point O, milieu de l'entré des armatures (P_1) et (P_2) d'un condensateur. La petite sphère porte une charge de valeur absolue $|q| = 400\ nC$. Les armatures ont une longueur $L = 20\ cm$ et sont distantes de $d = 10\ cm$.

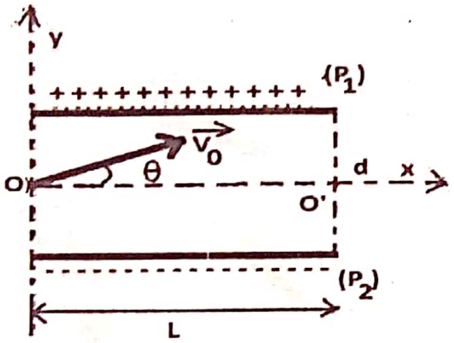


La tension entre les armatures du condensateur est $U = 1000\ V$. Il règne concomitamment à l'intérieur des armatures le champ de pesanteur supposé uniforme, caractérisé par $\vec{g}$ et un champ électrique uniforme, caractérisé par $\vec{E}$.

1) Quelle doit être le signe de la charge portée par la sphère pour que celle-ci sorte des armatures au point S ?

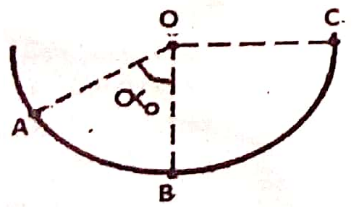
2) Montrer que le mouvement de la sphère entre les armatures est uniformément accéléré. Calculer la valeur de son accélération.
3) Etablir en fonction de $|q|$, m, U, x et g l'équation de la trajectoire la sphère entre les armatures dans le repère $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$. Faire l'application numérique.
4) Déterminer les coordonnées du point S.

Exercice 203 : Charge élémentaire : $e = 1{,}6.10^{-19}$ C ; Masse de la particule : $m = 6{,}64.10^{-27}$ kg. Un faisceau de particules (ions H_e^{2+}) pénètre entre les plaques horizontales P_1 et P_2 d'un condensateur à la vitesse de valeur $V_0 = 448$ km.s^{-1} dont la direction fait un angle $\alpha = 45°$ avec l'horizontale. La largeur de la plaque est L = 10 cm ; La distance entre les armatures est d = 8 cm ; La tension entre les armatures est U > 0.



1) Etablir les équations horaires du mouvement, d'une particule entre les armatures du condensateur, en fonction des paramètres du problème.
2) Etablir l'équation de la trajectoire d'une particule entre les armatures du condensateur.
3) Déterminer la valeur de U pour que le faisceau sorte des armatures au point O'.
4) Déterminer les caractéristiques du vecteur vitesse $\vec{V'_0}$ des particules à leur sortie au point O'.

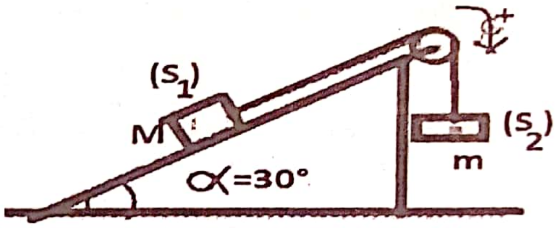
Exercice 204 : Un solide (S) de petites dimensions comme un point matériel de masse $m = 20\ g$ glisse sans frottement dans un bol dont l'intérieur est une demi-sphère de centre O et de rayon $r = 8\ cm$.



Au cours de son mouvement le solide est repéré par l'angle α que fait la verticale passant par O avec OA.

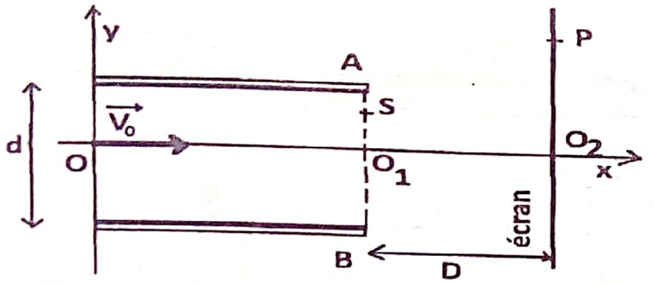
1) Du point A caractérisé par l'angle α_0, le solide est lâché sans vitesse initiale. a) Sur un schéma clair, représenter les forces qui s'exercent sur le solide en A.
b) Donner les caractéristiques du vecteur vitesse $\vec{V}_B$ quand le solide se trouve au fond du bol au point B.
c) Exprimer pour cette position l'intensité de la réaction $\vec{R}$ du bol en fonction de m, g et α_0. Calculer R.
d) Donner les caractéristiques du vecteur accélération $\vec{a}$ du solide en B. Préciser le composantes normale et tangentielle.
2) On veut que le solide atteigne le point C dans le plan horizontal passant par le point O.
a) Avec quelle vitesse minimale doit-on lancer depuis le point A pour qu'il atteigne le point C ?
b) On le lance maintenant depuis le point A avec la vitesse $v_A = 1{,}5\ m/s$. Que se passe-t-il ?
c) Etablir l'équation horaire du mouvement du solide au-delà du point C.
d) De combien s'élèvera-t-il au-dessus du point B ? (on négligera la résistance de l'air).

Exercice 205 : Considérons le système suivant constitué d'un treuil de masse négligeable, d'un solide (S_1) de masse M, d'un solide (S_2) de masse m et d'un câble inextensible et de masse négligeable entouré autour du treuil et portant à ses extrémités les solides (S_1) et (S_2).



On abandonne à l'instant initial le système sans vitesse initiale. Le solide (S_1) se déplace alors sans frottement le long de la ligne de plus grande pente du plan incliné qui fait un angle $\alpha = 30°$ avec l'horizontale. On donne : M = 3 kg, m = 2 kg et g = 10 m.s^{-2}.
1) Montrer que le système se déplace dans le sens indiqué sur le schéma.
2) Exprimer l'énergie cinétique du système constitué par les solides (S_1), (S_2), le treuil et le câble en fonction de la vitesse linéaire V des solides (S_1) et (S_2).
3) a) En appliquant le théorème de l'énergie cinétique que l'on énoncera, donner l'expression de la vitesse V en fonction de g, des différentes masses, de l'angle α et de h, hauteur de chute de (S_2).
b) En déduire, en fonction de g et des différentes masses, l'accélération a du système. Calculer sa valeur.
4) Calculer le temps mis par (S_1) pour parcourir OS=2m. Calculer la vitesse en S.

Exercice 206 : On maintient entre les plaques A et B une différence de potentielle $U = |V_A - V_B| = 400\ V$. La longueur de des plaques est $\ell = 10\ cm$ et leur distance est d. Une particule de charge $q > 0$ est injecté dans une direction perpendiculaire au champ électrostatique $\vec{E}$ avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0\vec{\imath} = 2,5 \times 10^7\vec{\imath}\ m/s$, au point milieu des plaques pour en sortie en S.



1) a) Quelles sont les caractéristiques du vecteur champ électrique $\vec{E}$ entre les 2 plaques A et B ?

b) En déduire le signe de la tension $U_0 = V_A - V_B$.

2) Etablir les équations horaires $x(t)$ et $y(t)$ de la position de la particule dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

b) Exprimer l'équation de la trajectoire.

c) En déduire la nature de la trajectoire de la particule.

2) L'électron sort de la région où règne le champ électrique en point S.

a) Donner la nature du mouvement de l'électron entre l'extrémité des plaques et l'écran.

b) Calculer les coordonnées du point S et celle du vecteur vitesse $\vec{v}_S$ en ce point. En déduire la vitesse v_S.

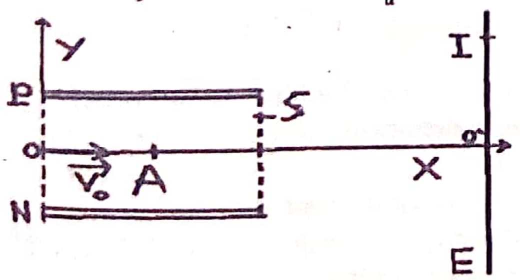
c) Calculer la déviation électrique α (par deux méthodes).

3) On place un écran à la distance D de l'extrémité des plaques.

a) Quelle est la position du point d'impact de l'électron (la déflexion électrique O'P) ?

b) Déterminer l'expression de la charge massique $\frac{q}{m}$.

Exercice 207 : Un faisceau de particules de charge $q(O^{2-})$, de masse m, arrive dans le vide, à l'instant t = 0 au point origine O d'un référentiel galiléen (voir schéma ci-dessous). Sa vitesse est : $\vec{V}_0 = V_0\vec{\imath}$ ($V_0 > 0$). Cet faisceau de particules est alors soumis à l'action d'un champ électrostatique uniforme : $\vec{E} = -\frac{U}{d}\vec{\jmath}$ avec $U = U_P - U_N > 0$.



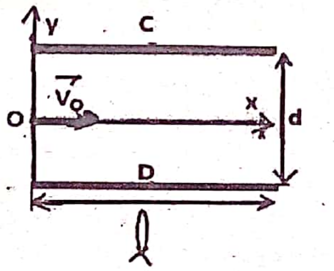
Ce champ électrostatique uniforme est créé entre deux plaques P et N dans la région d'espace définie par : $0 < x < L$ et $-d/2 < y < d/2$ (voir schéma).

1) Montrer qu'entre les plaques la trajectoire du faisceau de particules est parabolique.

2) Donner la condition sur la tension U pour que les particules sortent du champ sans heurter les plaques au point S.

3) Cette condition réalisée, la particule frappe un écran situé dans un plan $x = D > L$. Exprimer la déviation 0'I du point d'impact et montrer qu'elle est fonction linéaire de la tension $U = U_P - U_N$ appliquée entre les plaques P et N.

Exercice 208 : Une particule α (noyau d'hélium : ${}^4_2H_e$) arrive au point O dans un condensateur plan avec une vitesse $\vec{V}_0$ de direction parallèle aux armatures C et D du condensateur.



Une tension constante U est appliquée entre ces deux armatures longues de $\ell = 5$ cm et distantes de $d = 4,00$ cm. On négligera le poids de la particule α devant la force électrostatique.

1) Quelle est la charge q de la particule α ?

2) Indiquer la polarité des plaques pour que la particule soit déviée vers le haut.

3) Recopier la figure en indiquant le champ électrostatique existant entre C et D, ainsi que la force électrostatique que subit la particule α en O.

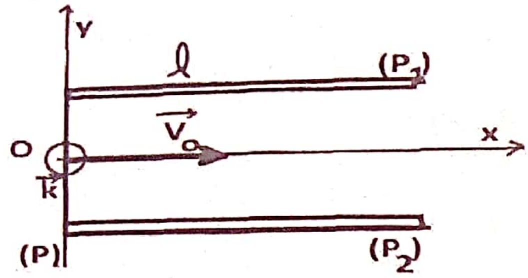
4) Établir les équations horaires et l'équation de la trajectoire de la particule. On choisira le repère indiqué sur le schéma. Le référentiel associé est supposé galiléen.

5) a) Exprimer, à l'aide de l'équation de la trajectoire, la tension U en fonction des grandeurs m, e, v_0, ℓ, d et y.

b) Calculer sa valeur pour que la particule sorte au point S d'ordonnée $y_S = 1,00$ cm. On rappelle que pour un condensateur plan : $E = U / d$.

Données : $V_0 = 5,00 \times 10^5\ m.s^{-1}$; $e = 1,60 \times 10^{-19}$ C; $m_\alpha = 6,64 \times 10^{-27}$ kg.

Exercice 209 : Un pinceau de particules chargées pénètre dans une chambre à vide par un petit trou O d'une plaque verticale (P). Ces particules ont toutes même masse m, même charge $q > 0$ et possèdent en O même vitesse horizontale $\vec{v}_0$. Leur mouvement est étudié dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$ galiléen tel que $\vec{\imath}$ et $\vec{v}_0$ aient même direction et même sens. On considère la région de l'espace limité par la plaque (P) et deux autres plaques (P_1) et (P_2), horizontales, de longueur ℓ, situées de part et d'autre de O. Un dispositif approprié permet de créer dans cette région un champ uniforme électrostatique.

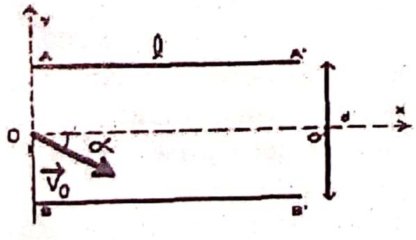


On donne $E = 10^4\ V.m^{-1}$ et $\ell = 2\ cm$.

1) a) Exprimer le vecteur champ électrostatique uniforme dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.
b) Montrer que le mouvement de chaque particule s'effectue dans un plan ; préciser ce plan. Représenter l'allure de la trajectoire d'une particule dans le champ.
2) On considère que les particules sortent du condensateur au point S. a) Exprimer les coordonnées du point S.
b) Exprimer les composantes $\vec{v}_S$ du vecteur vitesse au point S. c) Exprimer $\tan\alpha$ en fonction de v_{S_x} et v_{S_y} puis en fonction de q, E, ℓ, m et v_0.
3) On donne les particules H^+, H_e^{2+} et Z_n^{2+}. Pour chaque particule, déterminer

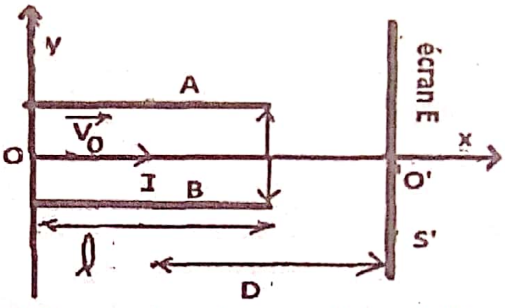
a) la déviation angulaire α à la traversée de du champ.
b) la déflexion électrique si les particules heurtent un écran E, placé à une distance $L = 30\ cm$ de la verticale du point S.
4) Donner la nature du mouvement à la sortie S du condensateur.

Exercice 210 : Entre les plaques d'un condensateur, espacées de d, pénètre en O, à égale distance des plaques, une particule de masse m et de charge q. La vitesse initiale $\vec{V}_0$, dans le plan $(O; \vec{i}; \vec{j})$, fait un angle α avec le vecteur unitaire $\vec{i}$.



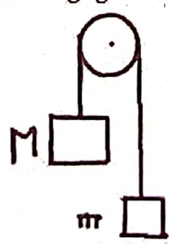
1) La tension U_{AB} est positive. Tracer le vecteur champ électrique. 2) On néglige le poids de la particule devant la force électrostatique. Représenter un vecteur accélération en un point de la trajectoire, dans chacun des cas $q > 0$ et $q < 0$.
3) a) Exprimer l'équation de la trajectoire en fonction de q, E et $\tan\alpha$. 4) On suppose $q > 0$. Quelles doivent être la longueur ℓ des plaques et la distance minimale d pour que la particule ressorte en O', $\alpha = 25°$ et $V_0 = 5{,}03.10^7\ m/s$ étant données ?

Exercice 211: Des particules de charge q<0 et de masse m sont envoyées avec une vitesse $\vec{v}_0$ entre deux plaques métalliques, parallèles soumises à une d.d.p $U_{AB} = U$.



Les plaques ont une longueur ℓ et sont distantes de d. Ces particules sont recueillies sur un écran E où se forme un spot S. Le centre des plaques est noté I et la distance du centre des plaques à l'écran est noté D ; (D = 1 m ; ℓ = 0,2 m ; d = 10 cm ; U = 2.10⁴ V).
1) Etablir en fonction des divers paramètres l'équation de la trajectoire des particules entre les plaques.
2) En déduire en fonction des divers paramètres la déviation angulaire à la sortie des plaques.
3) Calculer en fonction des divers paramètres la déviation linéaire y_0 observée sur l'écran.
4) Calculer la déviation Y_0 des électrons sur l'écran.

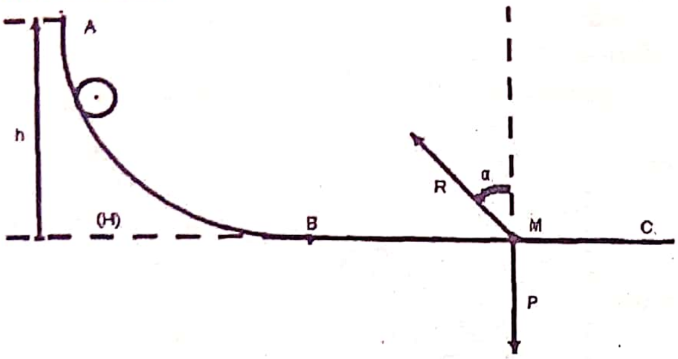
Exercice 212 : Une poulie de masse négligeable relie deux solides 1 et 2 de masses respectives M et m par l'intermédiaire d'un fil inextensible de masse négligeable. On néglige les frottements.



1) Représenter et faire le bilan qualitativement les forces agissant sur chacune des masses.
2) En appliquant le TCI puis TEC, l'exprimer l'accélération a en fonction de M, m, et g.
4) Déterminer la tension T du fil et a pour $M = 3$ Kg et $m = 5$ Kg.
5) On coupe le fil à la date $t = 2\ s$, le solide 1 est alors située à 15 m au-dessous du sol et le solide 2 à 6 m au-dessous du sol.
a) Déterminer la loi horaire pour chaque solide
b) Au bout de combien de temps le solide 1 touchera-t-il le sol ? Quelle est alors sa vitesse ?

c) A quelle date les niveaux des solides se croisent ? Quelle est sa hauteur ?

Exercice 213: Une bille de masse $m = 0,1\ kg$, parcours une piste ABC. Elle part sans vitesse initiale d'un point A situé à l'altitude $h = 1,2\ m$, au dessus du plan horizontal (H).



1) Calculer la vitesse v_B du solide lors de son passage au point B.

2) Entre B et C le solide (s) est soumis à une force de frottement dont l'action $\vec{R}$ incline d'un angle $\alpha = 10°$ sur la verticale.

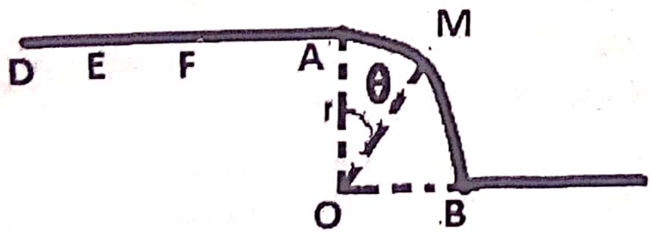
a) Calculer l'intensité de la réaction R.

b) Calculer l'accélération du mouvement du solide (s).

c) En précisant l'origine des dates et l'origine des espaces, donner l'équation du mouvement du solide.

d) A quel instant et distance de B s'arrêtera-t-elle ?

Exercice 214 : Un sportif dans son véhicule démarre sans vitesse, en D, un mouvement sur une route rectiligne et horizontale. La masse totale (sportif et véhicule) est de 90 kg.



1) La phase de démarrage, considérée comme une translation rectiligne, a lieu sur un parcours DE d'une longueur de 50 m. Au point E, la vitesse atteint la valeur de 5 m.s^{-1}. Pendant cette phase, la vitesse est proportionnelle au temps compté à partir de l'instant de démarrage.

a) Quelle est la nature du mouvement sur le parcours DE ? Justifier la réponse. Vérifier que l'accélération du mouvement sur ce parcours a pour valeur 0,25 m.s^{-2}

b) Etablir l'équation horaire du mouvement sur ce parcours. c) Calculer la durée de la phase de démarrage.

d) En admettant que le mouvement est dû à la résultante d'une force motrice constante parallèle au mouvement et d'une force de frottement constante, de norme égale au quart de la force motrice, de sens contraire au mouvement, calculer l'intensité de la force de frottement.

2) A partir du point E, le véhicule parcourt la distance EF = 1100 m à la vitesse constante de 5 m/s. A partir du point F, le sportif supprime la force motrice : le véhicule roule alors en roue libre et les frottements ont une valeur constante et égale à 7,5 N sur le parcours FA. Le véhicule parcourt la distance FA et arrive au point A avec une vitesse nulle. a) Déterminer la distance FA.

b) Calculer la durée totale du parcours du point D au point A.

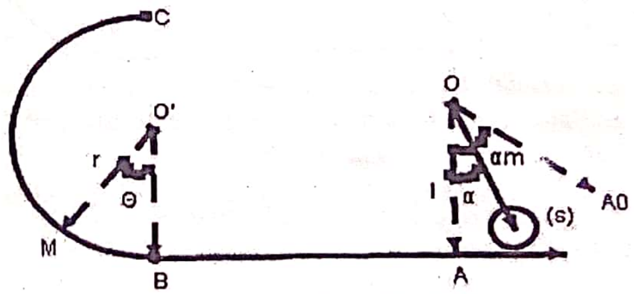
c) Le véhicule aborde en A, sans vitesse initiale, une piste AB, parfaitement polie, de forme circulaire et de plan vertical. Sa position M est repérée par l'angle θ.

c1) Exprimer en fonction de θ, r et g la vitesse du véhicule en M et exprimer l'intensité de la réaction du plan en ce point en fonction de m, g et θ.

c2) Déterminer la valeur de l'angle θ_1 qui repère M, quand le véhicule quitte la piste.

c3) Montrer que le véhicule quitte la piste quand son accélération est égale à l'accélération de la pesanteur g.

Exercice 215 : 1) Une petite sphère (s) de masse $m = 0,2\ kg$, assimilable à un point matériel, est attachée à l'extrémité d'un fil de masse négligeable, inextensible et de longueur $\ell = 1\ m$. L'autre extrémité du fil est attachée à un point fixe O. On écarte (s) de sa position d'équation en A, le fil tendu faisant un angle $\alpha_m = 60°$ avec la verticale de O, puis on la lâche sans vitesse.



a) Quelle sera la trajectoire du solide (s) ?

b) Déterminer la vitesse de la sphère (s) en fonction de l'angle α à un instant t quelconque après qu'elle soit lâchée. c) Calculer cette vitesse au passage à la position d'équilibre. Préciser sa direction.

2) La première fois où la sphère (s) passe par sa position d'équilibre le fil se détache d'elle. La sphère (s) continue alors son mouvement, sans frottement, sur une piste constituée d'une partie horizontale AB et d'une partie

circulaire BC de rayon $r = 1\ m$ et de centre O′ situé au-dessus de B sur la verticale.

a) Déterminer la vitesse v_B de (s) au point B.

b) En repérant la position de (s) sur la partie circulaire BC, par l'angle $\theta = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OM})$. Déterminer la position où la vitesse sera nulle. Que se passera-t-il après ?

3) En réalité sur la piste BC, il existe des forces de frottements d'intensité constante f'. Calculer f'.

Exercice 216 : Un objet de masse m=20 kg glisse le long d'une ligne de plus grande pente d'un plan incliné à un angle $\alpha = 30°$ avec l'horizontale. La somme $\vec{R}$ supposée constante, des forces de contact reparties en surface exercée par le plan sur l'objet fait un angle B avec la normale au plan.

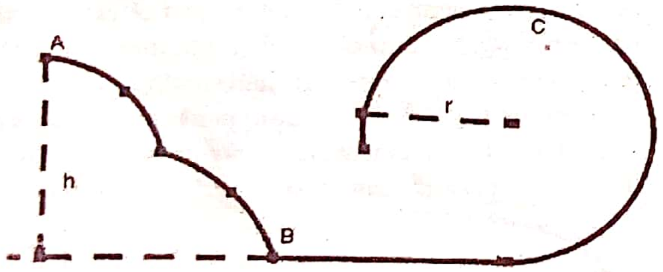
a) Faire un schéma et représenter les forces extérieures appliquées au solide.

b) Exprimer le vecteur accélération du mobile en fonction de a, B, m, R et G.

c) Lâcher sans vitesse initiale, le mobile parcourt une distance l = 5 m en une durée t = 1,7s.
Calculer l'accélération (g=10m s^{-2}).

d) Calculer l'angle B et la norme du vecteur accélération.

Exercice 217 : Un wagonnet se déplace sur la piste d'une montagne, sous l'action de son poids.



On l'assimile à un point matériel de masse m glissant sans frottement sur son support. On néglige la résistance de l'air. On donne h = 8 m ; $r = 3\ m$.

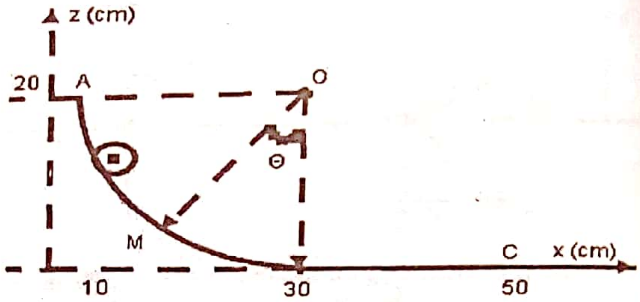
1) Le wagonnet possède en A une vitesse $v_A = 1\ m/s$.
Calculer sa vitesse v_B en B.

2) Il effectue ensuite une portion de boucle circulaire contenue dans un plan vertical. Quelle vitesse minimale v_m doit-il avoir en C pour rester en contact avec la piste ?

3) En utilisant les données numériques initiales, calculer la vitesse v_C du mobile en C.
Montrer qu'elle est suffisante pour que le wagonnet reste en contact avec la piste.

4) A la sortie de la boucle le wagonnet aborde un virage situé dans un plan horizontal (non représenté sur le schéma), de rayon $r' = 4\ m$, à la vitesse $v = 10\ m/s$.
De quel angle, de mesure α, doit être relevé le virage pour que le wagonnet ne quitte pas la piste ?

Exercice 218 : A) Un solide (s) de masse $m = 500\ g$ glisse sur une piste ABC située dans un plan vertical. La partie AB est un quart de cercle de centre O et de rayon $r = 20\ cm$ où les frottements sont négligés. La partie BC = 20 cm est rectiligne. Le solide part du point A sans vitesse initiale, il descend pour s'immobiliser au point C.



1) Enoncer le TEC et calculer la vitesse du solide (s) en B.

2) Exprimer la vitesse du solide (s) au point M en fonction de g, OA et θ.

3) Après avoir énoncé le TCI d'un solide, calculer l'intensité de la réaction de la piste en M pour θ = 20°.

4) Calculer l'intensité de la force de frottement supposée constante sur la partie BC.

B) En réalité sur la piste ABC, il existe des forces de frottements d'intensité constante f'. Calculer f' en tenant compte de mêmes données.

Selon Abou Hourayrah (das), le Messager de Dieu (saw) a dit :

« Jamais aumône n'a rien diminué d'une richesse. Quand l'homme pardonne, Dieu ne lui ajoute à cause de cela que considération et puissance. Chaque fois que quelqu'un se montre modeste par amour pour Dieu (non par crainte ou veulerie), Dieu ne fait que l'élever davantage ».

(Rapporté par Mouslim)

Exercice 219 : Un satellite gravite à vitesse constante v sur une orbite circulaire dans le plan équatorial de la Terre à l'altitude $h = 600\ km$. Sa période de révolution est T et sa masse est m.

La Terre est assimilée à une sphère homogène centre O, de masse $M = 6.10^{24}\ kg$ et de rayon $R = 6,4.10^3\ km$.

1) Etablir l'expression de la valeur F de la force $\vec{F}$ exercée par la Terre sur le satellite en fonction de m, M, R, G et h.

2) a) Déduire de ce qui précède, l'accélération g de la pesanteur à partir de la loi d'attraction gravitationnelle en fonction de M, R, G et h.

b) Exprimer g en fonction de g_0, R et h (g_0 est la valeur de g au sol et G la constance de gravitation universelle).

3) Le poids du satellite au sol est P_0. Exprimer son poids P en altitude en fonction de P_0, R et h.

4) Le satellite en mouvement circulaire et uniforme a pour période de révolution T.

a) Démontrer que sa vitesse linéaire est $v = R\sqrt{\frac{g_0}{R+h}}$.

b) Exprimer la période de révolution T.

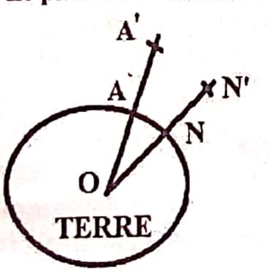
c) Etablir la relation $\frac{T^2}{(R+h)^3}$ (3e loi de Kepler).

c) Déduire, l'expression de T_0 en fonction de R et g_0. (T_0 est la période d'un satellite fictif qui graviterait à l'altitude $h = 0$).

d) Calculer les valeurs de g_0, m et g pour $T_0 = 5\,066\ s$.

e) Exprimer T en fonction de T_0, R et h. Calculer T.

5) Le plan de l'orbite de satellite passe par Agadez (A) et Niamey (N). Ces villes situées sur l'équateur sont distantes de $\widehat{AN} = 851,5\ Km$. Le satellite passe par les points A' et N'. On néglige la rotation de la Terre.



a) Déterminer la distance $\widehat{A'N'}$ parcourue par le satellite en passant au-dessus des deux villes.

b) Soit $v = 7562,3\ m/s$ la vitesse du satellite entre les points A' et N'. Calculer la durée t du survol du stellite.

Correction : Un satellite gravite à l'altitude $h = 600\ km$.

1) Expression de la force $F = f(m, M, R, G \text{ et } h)$:

$\vec{F}_{S/T} = -\vec{F}_{T/S} = -G\frac{mM}{(R+h)^2}.\vec{u}$ où leur intensité est commune

$F_{S/T} = F_{T/S} = F = G\frac{mM}{(R+h)^2}$ avec la constante de gravitation universelle est donnée par $G = K = 6,67.10^{-11}$ U.S.I.

2) a) l'accélération $g = f(M, R, G \text{ et } h)$ de la pesanteur

Expression de l'accélération du satellite.

$\vec{F}$ est unique et confondue à $\vec{P}$

TCI $\quad \vec{F} = m\vec{a}$ et $\vec{F} = m\vec{g}$ alors $\quad \vec{a} = \vec{g}\,\Big|_{a_t=0}^{a_n=g}$

L'intensité du champ de gravitation à l'altitude h.

Selon la Loi de Newton $F = G\frac{Mm}{(R+h)^2}$ or $F = mg$

$G\frac{Mm}{(R+h)^2} = mg \Leftrightarrow g = G\frac{M}{(R+h)^2}$ avec g est en N/kg ou m/s^2.

b) Exprimer $g_0 = f(R \text{ et } h)$

L'intensité du champ de gravitation à h est $g = G\frac{M}{(R+h)^2}$.

Au sol $h = 0 \Leftrightarrow g_0 = G\frac{M}{R^2}$

Exprimer $g = f(g_0, R \text{ et } h)$

$g_0 = G\frac{M}{R^2} \Leftrightarrow GM = g_0R^2$ D'où $g = G\frac{M}{(R+h)^2} = g_0\frac{R^2}{(R+h)^2}$

3) Exprimer le poids $P = f(P_0, R \text{ et } h)$

A altitude h, son poids est $P = mg = mg_0\frac{R^2}{(R+h)^2}$

Au sol (h = 0), son poids est $P_0 = mg_0$

$$\frac{P}{P_0} = \frac{mg_0\frac{R^2}{(R+h)^2}}{mg_0} \Leftrightarrow P = P_0\frac{R^2}{(R+h)^2}.$$

4) a) Démontrer que sa vitesse linéaire est $v = R\sqrt{\frac{g_0}{R+h}}$.

Expression de la vitesse linéaire V du satellite.

TCI $\quad \vec{F} = m_S\vec{a}$ or $\vec{F} = m_S\vec{g}$ alors $\quad \vec{a} = \vec{g}\,\Big|_{a_t=0}^{a_n=g}$

Or $a_n = \frac{V^2}{R+h} = G\frac{M}{(R+h)^2} \Leftrightarrow V = \sqrt{G\frac{M}{R+h}}$

OR $GM = g_0R^2$ DONC $V = \sqrt{\frac{g_0R^2}{R+h}} = R\sqrt{\frac{g_0}{R+h}}$.

Un satellite en orbite circulaire a un mouvement uniforme dont la vitesse est indépendante de sa masse.

b) Exprimer la période de révolution T

En un tour $d = VT = 2\pi(R+h) \Leftrightarrow$

$$T = \frac{2\pi(R+h)}{V} = \frac{2\pi(R+h)}{\sqrt{G\frac{M}{R+h}}} = \frac{2\pi(R+h)\sqrt{R+h}}{\sqrt{GM}} = 2\pi\sqrt{\frac{(R+h)^3}{GM}} \text{ ou}$$

$$T = \frac{2\pi(R+h)}{V} = \frac{2\pi(R+h)}{R\sqrt{\frac{g_0}{R+h}}} = \frac{2\pi(R+h)\sqrt{R+h}}{R\sqrt{g_0}} = \frac{2\pi}{R}\sqrt{\frac{(R+h)^3}{g_0}}$$

Tous les satellites évoluant sur une orbite déterminée ont la même période de révolution T.

c) Etablir la relation $\frac{T^2}{(R+h)^3}$ (3e loi de Kepler).

Troisième loi de Kepler : Cette loi permet de calculer *la masse* M de l'*astre* attracteur (Terre, Soleil, Saturne, Jupiter, Mercure, Mars, Venus, …) connaissant la constante de gravitation K et les caractéristiques de (T et r) du mouvement de l'astre qui tourne autour de lui. Elle est définie par :

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{T^2}{(R+h)^3} = \frac{\frac{4\pi^2}{R^2}\times\frac{(R+h)^3}{g_0}}{(R+h)^3} = \frac{4\pi^2}{g_0R^2} = \frac{4\pi^2}{GM} = C^{te}.$$

c) $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{g_0R^2} \Leftrightarrow T_0^2 = \frac{4\pi^2}{g_0R^2}\times r^3 \Leftrightarrow T_0 = \sqrt{\frac{4\pi^2}{g_0R^2}\times r^3}$

$T_0 = \frac{2\pi}{R}\sqrt{\frac{r^3}{g_0}}$ OR $r = R$ au sol $(h = 0)$

Donc $T_0 = \frac{2\pi}{R}\sqrt{\frac{R^3}{g_0}} = \frac{2\pi}{R}\times R\sqrt{\frac{R}{g_0}} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g_0}}$.

d) Calculer les valeurs de g_0, m et g pour $T_0 = 5\,066\ s$.

$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g_0}} \Leftrightarrow g_0 = \frac{4\pi^2R}{T_0^2}$

$g_0 = \frac{4\pi^2R}{T_0^2} = \frac{4\times10\times6{,}4.10^3\times10^3}{5\,066} = 9{,}81\ m/s^2$.

e) Exprimer T en fonction de T_0, R et h.

A partir de la troisième loi de Kepler : $\frac{T^2}{(R+h)^3} = \frac{4\pi^2}{g_0R^2} = \frac{4\pi^2}{GM}$.

<u>A altitude h, sa période T est :</u>

$\frac{T^2}{(R+h)^3} = \frac{4\pi^2}{g_0R^2} \Leftrightarrow T = \frac{2\pi}{R}\sqrt{\frac{(R+h)^3}{g_0}} = \frac{2\pi(R+h)}{R}\sqrt{\frac{R+h}{g_0}}$

<u>Au sol (h = 0), sa période T_0 est :</u> $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g_0}}$

$\frac{T}{T_0} = \frac{\frac{2\pi(R+h)}{R}\sqrt{\frac{R+h}{g_0}}}{2\pi\sqrt{\frac{R}{g_0}}} \Leftrightarrow T = T_0\frac{R+h}{R}\sqrt{\frac{R+h}{R}} = T_0\left(\frac{R+h}{R}\right)^{\frac{3}{2}}$.

5) $\widehat{AN} = 851{,}5\ Km$.

a) Déterminer la distance $\widehat{A'N'}$ parcourue par le satellite.

L'abscisse angulaire $s = Rayon \times \theta$ vec θ en rad

<u>En altitude h</u>, son abscisse est $\widehat{A'N'} = (R+h)\theta$

<u>Au sol (h = 0)</u>, son abscisse est $\widehat{AN} = R\theta$

$\frac{\widehat{A'N'}}{\widehat{AN}} = \frac{(R+h)\theta}{R\theta} \Leftrightarrow \widehat{A'N'} = \frac{R+h}{R}\widehat{AN}$

$\widehat{A'N'} = \frac{R+h}{R}\widehat{AN} = \frac{6{,}4.10^3\times10^3+6.10^2\times10^3}{6{,}4.10^3\times10^3}\times 851{,}5\times10^3$

$\widehat{A'N'} = 932\times10^3\ m = 932\ Km$.

Vous pouvez aussi appliquer le théorème de Thalès.

b) Soit $v = 7562{,}3\ m/s$ la vitesse du satellite entre les points A' et N'. Calculer la durée t du survol du stellite.

$\widehat{A'N'} = vt \Leftrightarrow t = \frac{\widehat{A'N'}}{v} = \frac{932\times10^3}{7562{,}3} = 123\ s$

<u>Exercice 220 :</u>

1) Rappeler la Loi de la gravitation universelle.

2) On considère la Terre comme une sphère homogène, de masse M, de centre O et de rayon R animée d'un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe des pôles. A l'aide d'une fusée, on satellise autour de la Terre un satellite de masse m sur une orbite circulaire à l'altitude $h = 400\ km$. L'orbite est dans le plan de l'équateur.

<u>Déterminer l'expression :</u>

a) La force d'interaction gravitationnelle entre la Terre et le satellite en fonction de G, M, m, R et h ; puis en fonction de g_0, m, R et h.

b) Le champ de gravitation terrestre à l'altitude h en fonction de G, M, R et h puis en fonction g_0, R et h.

c) La vitesse linéaire V du satellite en fonction de M, G, R et h puis en fonction de g_0, R et h.

d) La vitesse angulaire ω du satellite en fonction de M, G, R et h puis en fonction de g_0, R et h.

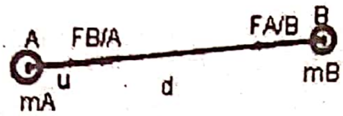
e) La période de révolution du satellite T en fonction de M, G, R et h puis en fonction de g_0, R et h.

f) La masse M de la Terre en fonction de T, R, h et G.

3) Exprimer la variation relative du champ de gravitation g en fonction de R et h.

<u>Correction :</u> 1) Loi de la gravitation universelle

Deux corps (ou sphères) ponctuels de masses m_A et m_B placés à une distance $d = AB$ l'un de l'autre exercent des forces d'attraction $\vec{F}_{B/A}$ et $\vec{F}_{A/B}$ (ou forces d'interaction dites *forces gravitationnelles*) comme en montre ce schéma ci-dessous :



- La force $\vec{F}_{B/A}$ est la force exercée par le solide B sur celui de A.
- La force $\vec{F}_{A/B}$ est la force exercée par le solide A sur celui de B.
- $\vec{F}_{B/A} = -\vec{F}_{A/B} = -k\frac{m_A.m_B}{d^2}.\vec{u}$ où leur intensité est commune $F_{B/A} = F_{A/B} = k\frac{m_A.m_B}{d^2}$ avec la constante de gravitation universelle est donnée $k = G = 6{,}67.10^{-11}$ U.S.I.

2) un satellite de masse m sur une orbite circulaire à l'altitude $h = 400\ km$. L'orbite est dans le plan de l'équateur. <u>Déterminer l'expression :</u> $r = R + h$

a) La force d'interaction gravitationnelle entre la Terre et le satellite est $F = G\frac{mM}{(R+h)^2}$.

b) Le champ de gravitation terrestre à l'altitude h en fonction de G, M, R et h puis en fonction g_0, R et h.

$F = mg = G\frac{mM}{(R+h)^2} \Leftrightarrow g = G\frac{M}{(R+h)^2}$

Au sol $h = 0 \Leftrightarrow g_0 = G\frac{M}{R^2} \Leftrightarrow g_0R^2 = GM$

D'où $g = G\frac{M}{(R+h)^2} = g_0\frac{R^2}{(R+h)^2}$

c) La vitesse linéaire V du satellite en fonction de M, G, R et h puis en fonction de g_0, R et h.

$a_n = g \Leftrightarrow \frac{V^2}{R+h} = G\frac{M}{(R+h)^2} \Leftrightarrow V = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{G\frac{M}{R+h}}$

OR $GM = g_0R^2$ DONC $V = \sqrt{\frac{g_0R^2}{R+h}} = R\sqrt{\frac{g_0}{R+h}}$

d) La vitesse angulaire ω du satellite en fonction de M, G, R et h puis en fonction de g_0, R et h.

$V = r\omega \Leftrightarrow \omega = \frac{V}{r} = \frac{V}{R+h} = \frac{1}{R+h}\sqrt{G\frac{M}{R+h}} = \frac{R}{R+h}\sqrt{\frac{g_0}{R+h}}$

e) Circonférence $= 2\pi r = VT \Leftrightarrow T = \frac{2\pi r}{V} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{N}$

$T = \frac{2\pi r}{V} = \frac{2\pi(R+h)}{\sqrt{\frac{GM}{r}}} = \frac{2\pi}{R}\sqrt{\frac{(R+h)^3}{g_0}} = \frac{2\pi(R+h)}{R}\sqrt{\frac{R+h}{g_0}}$

f) La masse M de la Terre en fonction de T, R, h et G.

La troisième loi de Kepler est donnée : $\frac{T^2}{(R+h)^3} = \frac{4\pi^2}{g_0R^2} = \frac{4\pi^2}{GM}$

- $\frac{T^2}{(R+h)^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \Leftrightarrow M = \frac{4\pi^2(R+h)^3}{T^2G}$
- $\frac{4\pi^2}{g_0R^2} = \frac{4\pi^2}{GM} \Leftrightarrow M = \frac{4\pi^2 g_0R^2}{4\pi^2G} = \frac{g_0R^2}{G}$

3) Variation relative du champ de gravitation g.

$\frac{\Delta g}{g_0} = \frac{g_0 - g_h}{g_0} = 1 - \frac{g_h}{g_0} = 1 - \frac{k}{g_0} \times \frac{M_T}{(R+h)^2} = 1 - \frac{R^2}{(R+h)^2}$

Exercice 221 : Un satellite dans le repère géocentrique, assimilé à une masse ponctuelle $m_S = 1020$ kg décrit une orbite circulaire dans le plan équatorial de la Terre de masse M à l'altitude h = 400 km.

1) a) Montrer que la vitesse V du satellite est constante. En déduire la nature du mouvement du satellite.

b) Exprimer la vitesse V puis la période T du satellite en fonction de h, R et g_0. 2) Exprimer l'énergie cinétique E_c du satellite en fonction de m_S, h, R et g_0.

3) L'énergie potentielle du satellite dans le champ de pesanteur à l'altitude h est donnée par la relation :

$E_p = -G\frac{m_SM}{R+h}$, en convenant que $E_p = 0$ pour $h = \infty$.

a) Justifier le signe négatif de E_p.

b) Exprimer l'énergie potentielle E_p en fonction de m_S, h, R et g_0.

c) Exprimer de l'énergie mécanique E du satellite puis comparer E_p à E_c et E à E_c.

d) Calculer T ; V ; E_c ; E_p et E avec $g_0 = 9,81\ m/s^2$.

4) On fournit au satellite, un supplément d'énergie $\Delta E = 5.10^8$ J, il prend alors une nouvelle orbite circulaire. En utilisant les résultats de la question 3), déterminé :

a) La nouvelle énergie cinétique et sa vitesse

b) La nouvelle énergie potentielle et son altitude.

5) En réalité le satellite est géostationnaire. Expliquer l'expression « satellite géostationnaire ». A quelle altitude est placé ce satellite ? Calculer T ; V ; E_c ; E_p et E.

Correction : Un satellite, $m_S = 1020$ kg à h = 400 km.

1) a) TCI $\quad \vec{F} = m_S\vec{a}$ or $\vec{F} = m_S\vec{g}$ alors $\vec{a} = \vec{g}\left|\begin{matrix} a_n = g \\ a_t = 0\end{matrix}\right.$

Comme $a_t = 0 \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = 0 \Leftrightarrow v =$ constante alors la vitesse V du satellite est constante.

Le mouvement du satellite est circulaire uniforme.

b) la vitesse V puis la période T du satellite

$a_n = g \Leftrightarrow \frac{V^2}{r} = G\frac{M}{r^2} \Leftrightarrow V = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{G\frac{M}{R+h}} = R\sqrt{\frac{g_0}{R+h}}$

$T = \frac{2\pi r}{V} = \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{GM}{r}}} = 2\pi r\sqrt{\frac{r}{GM}} = \frac{2\pi(R+h)}{R}\sqrt{\frac{R+h}{g_0}}$

2) l'énergie cinétique E_c du satellite

$E_c = \frac{1}{2}m_SV^2 = \frac{1}{2}m_S\frac{GM}{r} = \frac{m_SGM}{2r} = \frac{m_SGM}{2(R+h)} = \frac{m_Sg_0R^2}{2(R+h)}$

3) a) Justifier le signe négatif de E_p.

Considérons que le satellite dans les deux états suivants :

- Etat (1) : il est à l'altitude h
- Etat (2) : il est à l'infini

$W(\vec{F}) = -\Delta E_p$ Ou encore $E_{1p} - E_{2p} = W(\vec{F})$

Or $E_{2p} = 0$ pour $h = \infty$ et $W(\vec{F}) < 0$ (travail résistant)

Donc $E_{1p} = E_p = W(\vec{F}) < 0 \qquad$ Or $G\frac{m_SM}{R+h} > 0$

Il faut mettre le signe (−) pour que $E_p = -G\frac{m_S.M}{R+h}$ soit négatif.

b) l'énergie potentielle E_p en fonction de m_S, h, R et G_0.

$E_p = -G\frac{m_SM}{R+h} = -\frac{m_SGM}{R+h} = -\frac{m_Sg_0R^2}{R+h}$

c) Exprimer de l'énergie mécanique E du satellite

$E = E_c + E_p = \frac{m_SGM}{2(R+h)} - \frac{m_SGM}{R+h} = \frac{m_SGM}{2(R+h)} - \frac{2m_SGM}{2(R+h)}$

$E = -\frac{m_SGM}{2(R+h)} = \frac{1}{2}\left(-\frac{m_SGM}{R+h}\right) = \frac{1}{2}E_p$ ou $E_p = 2E$

$E_c = \frac{m_SGM}{2(R+h)} = -\frac{1}{2}\left(-G\frac{m_S.M}{R+h}\right) = -\frac{1}{2}E_p$ ou $E_p = -2E_c$

$E = E_c + E_p = E_c - 2E_c = -E_c$

d) Calculer T ; V ; E_c ; E_p et E

$V = R\sqrt{\frac{g_0}{R+h}} = 6,4.10^6\sqrt{\frac{9,81}{6,4.10^6 + 6.10^2 \times 10^3}} = 7,69.10^3\ m/s$

$T = \frac{2\pi(R+h)}{R}\sqrt{\frac{R+h}{g_0}} = 5558\ s$ soit 1h 32 min 38 s.

$E_c = 3,01.10^{10}$ J ; $E = -3,01.10^{10}$ J et $E_p = -6,02.10^{10}$ J.

4) On fournit au satellite, un supplément $\Delta E = 5.10^8$ J :

L'énergie mécanique devient maintenant $E' = E + \Delta E$

$$E' = -3,01.10^{10} + 5.10^8 = -2,96.10^{10}\ J$$

a) La nouvelle énergie cinétique et sa vitesse

$E = -E_c \Leftrightarrow E' = -E'_c \Leftrightarrow E'_c = -E' = 2,96.10^{10}$ J

$E'_c = \frac{1}{2}m_Sv^2 \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{2E'_c}{m_S}} = \sqrt{\frac{2\times 2,96.10^{10}}{1020\times 10^3}} = 7,62 \times 10^3\ m/s.$

b) La nouvelle énergie potentielle et son altitude

$E_p = 2E \Leftrightarrow E'_p = 2E' = -5,92.10^{10}$ J

$E'_p = -G\frac{m_SM}{R+h'} \Leftrightarrow R + h' = -\frac{Gm_SM}{E'_p} \Leftrightarrow h' = -\frac{Gm_SM}{E'_p} - R$

$h' = -\frac{m_Sg_0R^2}{E'_p} - R = -R\left(\frac{m_Sg_0R}{E'_p} + 1\right) = 5,23 \times 10^5\ m$

5) Un satellite géostationnaire reste sur une verticale d'un point de la surface de la Terre. Sa trajectoire est un cercle situé dans le plan de l'équateur et qui est immobile par rapport à la Terre. Il tourne donc dans le même sens et à la même vitesse angulaire que la Terre autour de l'axe des pôles.

On place ce satellite environ à l'altitude z = 36 000 Km.

Calculer T ; V ; E_c ; E_p et E.

La période : $T = 24\ h = 24 \times 3\ 600\ s = 86\ 400\ s.$

$E_c = \frac{m_SGM}{2(R+z)} = \frac{m_Sg_0R^2}{2(R+z)} = 4,83 \times 10^9$ J

$E_p = -2E_c = 9,66 \times 10^9$ J

$E = -E_c = -4,83 \times 10^9$ J

Exercice 222 : Un satellite décrit, dans le référentiel géocentrique, une orbite circulaire, de centre O, centre de la Terre, et de rayon $r = 20\,000\ km$. Sa période de révolution est T = 7h 49 min.

1) Etablir l'expression de T en fonction de r, G et M_T.

2) Quelle serait sa période de révolution, T', s'il gravitait à la distance $r' = 10\,000\ km$ du centre de la Terre ?

Donnée $M_T = 6,0 \times 10^{24} kg$.

3) Dans le repère de Copernic, la planète Neptune décrit une orbite assimilable à un cercle de rayon r_N dont le centre est celui du Soleil de masse $M_S = 2,0 \times 10^{30} kg$. Sa période de révolution a pour valeur $T_N = 60\,200$ jours terrestres. a) Donner la relation entre T_N et r_N.

b) Calculer la valeur r_N du rayon orbital de Neptune.

Donnée : la durée du jour terrestre est 24 h.

Correction : 1) $T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{GM_T}{r}}} = 2\pi r\sqrt{\frac{r}{GM_T}} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM_T}}$

2) A altitude r, sa période est $T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM_T}}$

A altitude r', sa période est $T' = 2\pi\sqrt{\frac{r'^3}{GM_T}}$

$$\frac{T'}{T} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{r'^3}{GM_T}}}{2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM_T}}} = \sqrt{\frac{r'^3}{GM_T}} \times \sqrt{\frac{GM_T}{r^3}} = \sqrt{\frac{r'^3}{r^3}}$$

Sa période de révolution est $T' = T\sqrt{\frac{r'^3}{r^3}} = T\sqrt{\left(\frac{r'}{r}\right)^3}$

$T = 7h\ 49\ min = 7 \times 3600 + 49 \times 60 = 28\,140\ s$

$T' = T\sqrt{\left(\frac{r'}{r}\right)^3} = 28\,140\sqrt{\left(\frac{10\,000}{20\,000}\right)^3} = 9\,949\ s$

$T' = 2h\ 45\ min\ 49\ s$.

3) a) Donner la relation entre T_N et r_N.

La troisième loi de Kepler est donnée : $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{g_0R^2} = \frac{4\pi^2}{GM}$

Entre la Terre et le satellite : $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T} \Leftrightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM_T}$

Entre le soleil et la planète Neptune : $\frac{T_N^2}{r_N^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S} \Leftrightarrow T_N^2 = \frac{4\pi^2 r_N^3}{GM_S}$

$$\frac{T_N^2}{T^2} = \frac{\frac{4\pi^2 r_N^3}{GM_S}}{\frac{4\pi^2 r^3}{GM_T}} = \frac{4\pi^2 r_N^3}{GM_S} \times \frac{GM_T}{4\pi^2 r^3} = \frac{r_N^3 M_T}{M_S r^3}$$

$$\frac{T_N^2}{T^2} = \frac{r_N^3 M_T}{M_S r^3} \Leftrightarrow \left(\frac{T_N}{T}\right)^2 = \frac{M_T}{M_S}\left(\frac{r_N}{r}\right)^3 \Leftrightarrow \left(\frac{r_N}{r}\right)^3 = \frac{M_S}{M_T}\left(\frac{T_N}{T}\right)^2$$

b) Calculer la valeur r_N du rayon orbital de Neptune

$$\left(\frac{r_N}{r}\right)^3 = \frac{M_S}{M_T}\left(\frac{T_N}{T}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{r_N}{r} = \sqrt[3]{\frac{M_S}{M_T}\left(\frac{T_N}{T}\right)^2} \Leftrightarrow r_N = r\sqrt[3]{\frac{M_S}{M_T}\left(\frac{T_N}{T}\right)^2}$$

$T_N = 60\,200$ jours $= 60\,200 \times 24\ h = 1\,444\,800\ h$

$T = 7h\ 49\ min = 7h + \frac{49}{60}h = 7,82\ h$

$$r_N = 20\,000 \times \sqrt[3]{\frac{2,0\times10^{30}}{6,0\times10^{24}} \times \left(\frac{1\,444\,800}{7,82}\right)^2} = 4,5 \times 10^9\ km$$

Exercice 223 : On donne la période de révolution et le rayon r de l'orbite des 5 satellites d'Uranus découverts depuis la Terre. Dix autres ont été découverts par la sonde interplanétaire VOYAGEUR 2 en 1986.

Satellite	T (jours)	r (Km)
Miranda	1,4135	130 000
Ariel	2,520	192 000
Umbiel	4,144	267 000
Titania	8,706	438 000
Obéron	13,46	586 000

1) Pour chaque satellite, calculer T^2 et r^3.

2) Sur un système d'axes orthogonaux, porter en abscisses r^3 et en ordonnées T^2, et ceci, pour chaque satellite.

3) Montrer que $\frac{T^2}{r^3} = C^{te}$ (troisième loi de Kepler)

4) Soit $G = 6,67.10^{-11}$ SI. Calculer la masse d'Uranus

a) en utilisant la troisième loi de Kepler.

b) en utilisant la droite tracée.

Correction : 1 jour = 24 h = 86 400 s ; 1 Km = $10^3\ m$

1) Pour chaque satellite, calculer T^2 et r^3

Satellite	T (s)	T^2	r (m)	r^3
Miranda	$1,22.10^5$	$1,5.10^{10}$	130.10^6	$2,2.10^{24}$
Ariel	$2,17.10^5$	$4,75.10^{10}$	192.10^6	$7,1.10^{24}$
Umbiel	$3,58.10^5$	$12,82.10^{10}$	267.10^6	19.10^{24}
Titania	$7,52.10^5$	$56,6.10^{10}$	438.10^6	84.10^{24}
Obéron	$11,63.10^5$	$1,36.10^{12}$	586.10^6	2.10^{26}

Satellite	T^2	r^3	$\frac{T^2}{r^3}$
Miranda	$1,5.10^{10}$	$2,2.10^{24}$	$0,68.10^{-14}$
Ariel	$4,75.10^{10}$	$7,1.10^{24}$	$0,67.10^{-14}$
Umbiel	$12,82.10^{10}$	19.10^{24}	$0,67.10^{-14}$
Titania	$56,6.10^{10}$	84.10^{24}	$0,67.10^{-14}$
Obéron	$1,36.10^{12}$	2.10^{26}	$0,68.10^{-14}$

$\frac{T^2}{r^3} = 0,68.10^{-14} =$ constante $\Leftrightarrow M = 8,82.10^{25}\ Kg$.

Exercice 224 : Un satellite de télécommunications est stationnaire (satellite dont la trajectoire est dans le plan de l'équateur et qui est immobile par rapport à la Terre). Il tourne à une altitude constante de $3,6.10^4\ km$. L'étude de ce satellite se fait dans le référentiel géocentrique et on le considèrera comme un objet ponctuel.

1) Que peut-on dire de la vitesse du satellite ?
2) Calculer la valeur de la vitesse de ce satellite en $m.s^{-1}$ et en $km.h^{-1}$.
3) Calculer sa vitesse angulaire puis la période T de révolution du satellite.
4) Déterminer les composantes de son accélération dans la base de Frenet. En déduire les caractéristiques du vecteur accélération.

Données : Rayon de la Terre $6,4.10^3\ km$; Période de rotation de la Terre : 24 h.

Exercice 225 : La Terre est supposée sphérique de centre O de rayon R, de masse M. la répartition des masses est à symétrie sphérique. Le tableau ci-dessous rassemble les valeurs numériques des périodes de révolution T et des altitudes h des orbites des deux satellites artificiels de la Terre.

Satellite	Intelsat-V	Cosmos-70
T	23h 56 mn	11h 14mn
h (km)	$3,58.10^4$	$1,91.10^4$

a) Vérifier à partir des valeurs numériques du tableau, que le rapport $\frac{T^2}{r^3}$ est constant.
b) En déduire une valeur numérique de la masse M de la Terre.

Exercice 226 : Le satellite de Saturne, appelé Titan, de masse m, est étudié dans un référentiel considéré comme galiléen, ayant son origine au centre de Saturne et ses trois axes dirigés vers trois étoiles fixes. On suppose que Sature et Titan ont une répartition de masse à symétrie sphérique. Titan se déplace sur une orbite circulaire à la distance r du centre de Saturne.

1) Faire le schéma de l'orbite de Titan et représenter la force gravitationnelle exercée par Saturne sur Titan.
2) Montrer que le mouvement de Titan (satellite de Saturne) est uniforme.
3) Etablir l'expression littérale de sa vitesse v et de sa période T en fonction de G, r et de la masse M_S de Saturne. En déduire la valeur de M_S.

Données :

- Constante de gravitation universelle : $G = 6,67.10^{-11}$ SI ;
- Rayon de l'orbite de Titan $r = 1,22.10^6\ km$;
- Période de rotation de Titan autour de Saturne : $T = 1,38.10^6\ s$.

Exercice 227 : La constante de gravitation universelle est $G = 6,67.10^{-11}$ S.I. On considère une planète P de masse M. Le mouvement de l'un de ses satellites S, assimilé à un point matériel de masse m, est étudié dans un référentiel considéré comme galiléen, muni d'un repère dont l'origine coïncide avec le centre O de la planète P et les trois axes dirigés vers trois étoiles fixes. On admet que la planète a une distribution de masse à symétrie sphérique et que l'orbite de son satellite est un cercle de centre O et de rayon r.

1) Donner les caractéristiques de la force de gravitation exercée par la planète P sur le satellite S. Faire un schéma.
2) Donner l'expression du vecteur champ de gravitation créé par la planète P au point où se trouve le satellite S. Représenter ce vecteur champ sur le schéma précédent.
3) Déterminer la nature du mouvement du satellite S dans le référentiel d'étude précisé.
4) Exprimer le module de la vitesse linéaire v et la période de révolution T du satellite S en fonction de la constante de gravitation G, du rayon r de la trajectoire du satellite et de la masse M de la planète P.
Montrer que le rapport $\frac{T^2}{r^3}$ est une constante.
5) Sachant que l'orbite du satellite S a un rayon r = 185 500 km et que sa période de révolution vaut T = 22,6 heures, déterminer la masse M de la planète P.
6) Un autre satellite S' de la planète P a une période de révolution T' = 108,4 heures. Déterminer le rayon r' de son orbite.

Exercice 228 : Un satellite se trouve sur une orbite circulaire dans le plan de l'équateur, à une altitude de 500 km. Calculer la durée entre deux passages successifs de ce satellite à la verticale d'un point donné de l'équateur, a. lorsque le satellite se déplace dans le même sens que la Terre b. lorsque le satellite se déplace dans le sens opposé à celui de la Terre.

Réponse a : "t=1h40min 51s b : "t=5306 s

Exercice 229 : On veut placer un satellite « marsostationnaire » autour de Mars, pour préparer une éventuelle mission sur cette planète. Calculer l'altitude du satellite, sachant que : masse de Mars = $6,42.10^{23}$ kg ; rayon équatorial : R = 3398 km ; période de rotation sidérale : 24, 62 h (Réponse 17027 km)

Exercice 230 : 1) Exprimer le champ de gravitation dû au Soleil au centre d'inertie de Mars. Préciser l'hypothèse envisagée pour exprimer ce champ de gravitation.
2) Dans le référentiel héliocentrique, exprimer l'accélération du centre d'inertie de Mars en fonction de r, M_S et G.
3) En déduire la période de révolution de Mars. Calculer numériquement cette période.
Données : le rayon de la trajectoire $r = 227{,}94.10^6$ km, la masse du Soleil $M_S = 1{,}98 . 10^{30}$ kg.

Exercice 231 : Un satellite supposé ponctuel, de masse m, décrit une orbite circulaire d'altitude h autour de la Terre assimilée à une sphère de rayon R_T. On fera l'étude dans un référentiel géocentrique considéré comme galiléen.
1) Etablir l'expression de la valeur g du vecteur champ de gravitation à l'altitude h en fonction de sa valeur g0 au niveau du sol, de R_T et de h.
2) Déterminer l'expression de la vitesse v_S du satellite, celle de sa période et celle de son énergie cinétique.
AN. : $m_S = 1020$ kg, $R_T = 6400$ km, h = 400 km.
3) L'énergie potentielle du satellite dans le champ de pesanteur à l'altitude h est donnée par la relation : $E_p = -G\frac{m_S.M_T}{R_T+h}$ avec G constante de gravitation et M_T masse de la Terre et en convenant que $E_p = 0$ pour $h = \infty$. Justifier le signe négatif et exprimer Ep en fonction de de m_S, h, R et g_0.
Déterminer l'expression de l'énergie mécanique E du satellite puis comparer E_p à E_c et E à E_c.
4) On fournit au satellite un supplément d'énergie : $\Delta E = 5.10^8$ J. Il prend alors une nouvelle orbite circulaire. En utilisant les résultats du 3), déterminé :
a) sa nouvelle énergie cinétique et sa vitesse,
b) sa nouvelle énergie potentielle et son altitude.

Exercice 232 : On donne la période de révolution et le rayon r de l'orbite des cinq satellites d'Uranus découverts depuis la Terre. Dix autres ont été découverts par la sonde interplanétaire VOYAGEUR 2 en 1986.

	T (jour)	*r (km)*
Miranda	*1,4135*	*130 000*
Ariel	*2,520*	*192 000*
Umbiel	*4,144*	*267 000*
Titania	*8,706*	*438 000*
Obéron	*13,46*	*586 000*

1) a) Pour chaque satellite, calculer T^2 et r^3.
b) Sur un système d'axes orthogonaux, porter en abscisses r^3 et en ordonnées T^2, et ce, pour chaque satellite. Montrer que $\frac{T^2}{r^3} = cste$ (troisième loi de Kepler).
2) Calculer la masse d'Uranus en utilisant la droite tracée.

Exercice 233 : Satellite à trajectoire circulaire. La Terre est supposée sphérique, de rayon R_T et de masse M_T. La répartition des masses est de symétrie sphérique. Le champ gravitationnel terrestre, à l'altitude h a pour expression $g = G\frac{M_T}{(R_T+h)^2}$, où G est la constante de gravitation universelle. Donnée: $M_T = 5{,}98.10^{24}$ kg.

1) Établir l'expression de la valeur du champ gravitationnel g à l'altitude h en fonction de h, R_T et go.
2) On considère un satellite artificiel de la Terre décrivant une trajectoire circulaire de centre 0, à l'altitude $h = 350\ km$. a) Nommer le référentiel d'étude du mouvement du satellite.
b) Donner l'expression du vecteur accélération du satellite
c) Justifier le fait que le mouvement est uniforme.
d) Calculer la vitesse du satellite et calculer sa période.

Exercice 234 : 1) On suppose que la Terre a une distribution de masse à symétrie sphérique de centre O.
a) Donner l'expression de l'intensité du champ gravitationnel g créé par la Terre à une altitude h en de G, R_T, h et M_T (masse de la Terre).
b) En déduire l'expression littérale de M_T de go, G et R_T. Calculer numériquement M_T. (Historiquement, c'est ainsi, à partir de G, que M_T a été déterminée.)
Données : constante gravitationnelle : $G = 6{,}67.10^{-11}$ S.I., rayon de la Terre : $R_T = 6\,400$ km et intensité du champ gravitationnel au niveau du sol : $go = 9{,}8\ m.s^{-2}$.

Exercice 235 : Dans le référentiel héliocentrique, la planète Mars décrit une orbite quasi circulaire autour du centre d'inertie du Soleil de rayon r. M_T est la masse de la Terre et R_T le rayon de la Terre sphérique et homogène.
1) Définir le référentiel héliocentrique.
2) Déterminer l'expression de g en fonction de R_T, h et go (valeur du champ gravitationnel au sol).
3) Un satellite artificiel de masse m décrit autour de la Terre une orbite circulaire de rayon $r = R_T + h$, où h représente l'altitude du satellite par rapport à la Terre.

a) Montrer que le mouvement circulaire du satellite est uniforme

b) Déterminer l'expression de la vitesse v du satellite sur son orbite en fonction de g_o, R_T et h. Calculer sa valeur pour le satellite SPOT (satellite spécialisé dans l'observation de la terre et dans la télédétection).

c) Définir la période de révolution T du satellite. Déterminer son expression en fonction de g_o, R_T et h.

d) Calculer la valeur en seconde, puis en heure et minute.

Données : $g_o=9{,}80 m.s^{-2}$ et $R_T=6{,}38.10^3 km$.

__Exercice 236 :__ Le tableau ci-dessous rassemble les valeurs numériques des périodes de révolution *T* et des altitudes *h des* orbites de quelques satellites artificiels de la Terre.

base de lancement	Kourou	Baïkonour	Chine	États-Unis
satellite	INTELSAT-V	COSMOS-1970	FEN-YUNI	U.S.A.-35
T	23 h 56 min	11 h 14 min	102,8 min	12h
h(km)	$3{,}58.10^4$	$1{,}91.10^4$	$9{,}00.10^2$	$2{,}02.10^4$

a) Montrer que les valeurs données dans le tableau permettent de vérifier la troisième loi de Kepler.

b) En déduire une valeur numérique de la masse MT de la Terre.

__Exercice 237 :__ La navette spatiale Colombia a été placée sur une orbite circulaire à une altitude z=250 km. a. Calculer sa vitesse et sa période de révolution T b. Le plan de l'orbite de Columbia passait le 28 novembre 1983 par Cherbourg et Nice. Ces deux villes sont distantes de 940 km. En négligeant la rotation de la Terre, quel intervalle de temps séparait le passage de Columbia au-dessus de ces deux villes ? Rép. : b) 121 s

__Exercice 238 :__ Il n'y a pas d'atmosphère sur la Lune ; aussi, pour se déplacer sur de grandes distances, est-il impossible de prendre l'avion ! On envisage donc de satelliser un véhicule sur une orbite circulaire très basse à une altitude de z = 2,5 km (la trajectoire prévue ne rencontre pas de montagne). Sachant que le rayon lunaire vaut 1737 km et que la masse de la Lune vaut 1/81ème de la masse de la Terre, déterminer a) la valeur du champ gravitationnel à la surface de la Lune, b) la vitesse que doit avoir le véhicule sur son orbite très basse par rapport à un repère « lunocentrique », c) la période de révolution du véhicule. __Réponse__ 1,62 N/kg ; 1,68 km/s ; 1h49min

__Exercice 239 :__ Le repère de Copernic est défini de la façon suivante : l'origine correspond au centre d'inertie S du Soleil et trois axes sont dirigés vers trois étoiles fixes (donc très éloignées). Dans ce repère, la Terre est assimilable à un point, décrivant (en première approximation) une orbite circulaire, de centre S, de rayon $r = 1{,}498.10^{11}$ m et de période de révolution de 365,25 d.

1. Donner l'expression de la force d'interaction gravitationnelle exercée par le Soleil sur la Terre.
2. Exprimer la vitesse v et la période T de révolution de la Terre en fonction de r, de la constante de gravitation universelle K et de la masse Ms du Soleil.
3. En déduire la masse MS du Soleil. (__Réponse__ 2.10^{30} kg)

__Exercice 240 :__ On considère un satellite de masse m, en rotation sur une orbite circulaire autour de la Terre. L'altitude du satellite est h = 3 200 km.

1) Calculer la vitesse de ce satellite.

2) Calculer le temps nécessaire pour faire un tour de la Terre. On donne $G_0 = 9{,}81\ m/s^2$.

3) Quelle devrait être l'altitude h' du satellite pour qu'il paraisse immobile à un observateur terrestre (chez M. Diallo) ? Le plan de l'orbite est celui de l'équateur terrestre.

4) Donner, en fonction de m, G_0, R et h l'expression de l'énergie mécanique E du système.

5) Quelle énergie faut-il fournir au satellite, de masse 1 tonne, pour le faire passer de l'orbite d'altitude h à l'orbite d'altitude h' ?

__Exercice 241 :__ La Terre est supposée sphérique de rayon R, de masse M. la répartition des masses est à symétrie sphérique.

1) a) Montrer que le champ de gravitation terrestre à l'altitude h a pour expression $G_h = k\frac{M_T}{(R+h)^2}$ avec K constante de gravitation universelle. b) Etablir l'expression de G a l'altitude de h en fonction de h, r et G_0.

2) Soit un satellite de masse m, assimilable à un point matériel ayant une orbite circulaire dont le centre est confondu avec le centre de la Terre. Il évolue à une altitude h.

a) Montrer que le mouvement du satellite en orbite circulaire est uniforme.

b) Exprimer la vitesse V puis la période T du satellite en fonction de h, R et G_0.

c) Calculer T en heures, minutes et secondes.

3) Télécom est un satellite de communication du géostationnaire.

a) Définir le terme géostationnaire ; préciser le plan de l'orbite. b) A quelle altitude est placé ce satellite ?

Exercice 242 : La Lune et la Terre sont considérées comme des solides répartitions sphériques de masse, respectivement de centre C et O. Le centre de la Lune décrit une trajectoire quasi circulaire de rayon r dans le référentiel géocentrique. Données : g_0=9,8 m. s^{-2} et R_T=6380km.

1) Exprimer la valeur du champ gravitationnel terrestre au centre de la Lune, en fonction de g_0, R_T et r = OC.

2) Appliquer le théorème du centre d'inertie à la Lune, dans le référentiel géocentrique, pour exprimer l'accélération du centre d'inertie de la Lune.

3) Déterminer, en fonction de go, R_T et r, la vitesse et période de révolution.

4) La période de révolution de la Lune dans le référentiel géocentrique est 27 j 7 h 44 min.
Calculer la distance Terre- Lune.

Exercice 243 : La fusée ARIANE V au moment du décollage a une masse de 7,50 t. La poussée de ses moteurs est 900. 10^4 N.

1) Calculer l'accélération de la fusée lorsqu'elle le sol, sachant que les moteurs exercent cette force.

2) Avant d'être lancé en orbite géostationnaire, le satellite est placé sur une orbite équatoriale circulaire basse à 200 km d'altitude. Il tourne d'Ouest en Est, c'est-à-dire dans le sens de rotation propre de la Terre.
Déterminer, pour un observateur terrestre, L'intervalle de temps qui sépare deux passages successifs du satellite à la verticale d'un point de l'équateur.

3) Ce satellite est placé sur orbite géostationnaire. Calculer sa vitesse angulaire dans le repère géocentrique. Données : go = 9,8 m. s^{-2} et rayon terrestre : R_T = 6 380 km.

Exercice 244 : Le télescope spatial HUBBLE a été mis sur une orbite circulaire autour du centre *T* de la Terre. Il évolue à une altitude h = 600 km .
Ce télescope, considéré comme un objet ponctuel, est noté H et a une masse $m = 12.10^3$ kg. Les images qu'il fournit sont converties en signaux électriques et acheminées vers la Terre par l'intermédiaire de satellites en orbite circulaire à une altitude égale à h_G = 35 800 km.

1) a) Appliquer la loi de l'attraction universelle de Newton au télescope situé à l'altitude h.

b) Donner, en fonction de m, go, R et h, l'expression littérale de la valeur de la force de gravitation qu'il subit.

c) Calculer la valeur de cette force pour $h = h_H$= 600 km.

2) Le mouvement du télescope est étudié dans le repère géocentrique dont l'origine est T.

a) Montrer que son mouvement circulaire est uniforme.

b) Exprimer littéralement sa vitesse v sur son orbite en fonction de R , go et h , puis la calculer en m.s^{-1}et en km.h^{-1}quand h = h_H = 600 km.

c) Déterminer sa période de révolution T_H.

Exercice 245 : On suppose que la Terre, de masse M_T, de rayon R_T et de centre O, est une sphère et qu'elle présente une répartition de masse à symétrie sphérique et que le satellite peut être assimilé à un point matériel. Le satellite artificiel S, de masse ms, décrit une orbite circulaire de rayon r autour de la Terre. On suppose que le satellite est soumis uniquement à la force gravitationnelle exercée par la Terre. On notera K, la constante de gravitation universelle.

1) Exprimer l'intensité du champ de gravitation terrestre G(h) en fonction de M_T, R_T, h et K puis en fonction de R_T, h et G_0 (G_0 étant l'intensité du champ de gravitation terrestre au sol).

2) Montrer que le mouvement du satellite dans le référentiel géocentrique est uniforme.

3) En déduire l'expression de la vitesse vs du satellite en fonction de G_0, R_T et h puis celle de sa période de révolution Ts.

4) Calculer vs et Ts sachant que G_0 = 9,8 m.s^{-2} ; h = 200 km et R_T = 6 400 km.

5) METEOSAT 8 : un satellite géostationnaire.
Les satellites météorologiques comme Météosat sont des appareils d'observation géostationnaires.
Ce satellite a été lancé par ARIANE 5 le 28 août 2002. Il est opérationnel depuis le 28 janvier 2004.
Il fournit de façon continue des informations couvrant une zone circulaire représentant environ 42% de la surface de la Terre.

5.1. Préciser les conditions à remplir par METEOSAT 8 pour qu'il soit géostationnaire.

5.2. En déduire, pour METEOSAT 8, la valeur du rayon R_T + h de son orbite puis celle de son altitude h.

Données : G_0 = 9,8 m.s-2 ; R_T = 6370 km ; K = 6,67.10^{-11} S.I. ; M_T = 5,98.10^{24} kg.

Exercice 246 : Données : Constante de gravitation
G = 6,6710^{-11} S.I, masse de la Terre M = 6.10^{24} kg,
Rayon de la terre R = 6400 km,
Distance Terre-Soleil d = 1,5.108 km.

1) Deux corps ponctuels A et B, de masses respectives m et m', séparés par une distance d, s'attirent selon la loi de la gravitation universelle. Rappeler l'expression de l'intensité des forces d'interaction gravitationnelle, s'exerçan entre les corps A et B.

2) Dans l'espace, le soleil, la Terre et autres astres, peuvent être considérés comme des corps ponctuels. Le Soleil exerce sur la Terre une force de gravitation d'intensité

$F = 3,5.10^{22}$ N. Déterminer la valeur de la masse du Soleil.

3) Dans le champ de gravitation, un satellite de la Terre, en mouvement dans le plan de l'équateur, y effectue un mouvement circulaire uniforme à l'altitude h1 = 400 km.

a) Préciser le référentiel d'étude du mouvement de ce satellite.

b) Exprimer la vitesse linéaire V de ce satellite, puis calculer sa valeur.

c) Etablir les expressions littérales de la période T et de la vitesse angulaire ω du satellite dans ce même repère. Faire l'application numérique.

4) Entre autres conditions, un satellite de la Terre est géostationnaire si la période de son mouvement vaut 86 400 s. Justifier cette valeur de la période.

5) Exprimer puis calculer l'altitude h d'un satellite géostationnaire.

Exercice 247 : Un satellite, placé sur une orbite circulaire dans le plan équatorial de la Terre, a une période de 7,82 h par rapport au référentiel géocentrique.

1) Calculer l'altitude de ce satellite.

2) Déterminer la masse de la Terre.

Exercice 248 : MÉTÉOSAT est un satellite météorologique géostationnaire.

1) a) Définir le terme « géostationnaire ».

b) Préciser le plan de l'orbite.

2) Quelle est la période de révolution de ce satellite par rapport au référentiel géocentrique ? Donnée : période de rotation propre de la Terre : T=86164s.

3) À quelle altitude MÉTÉOSAT est-il placé ?

Exercice 249 : Lorsqu'un satellite est animé d'un mouvement circulaire autour d'une planète, le rayon r de son orbite et la période T de son mouvement vérifient la loi de Kepler : $\frac{r^3}{T^2} = G\frac{M}{4\pi^2} = Cte$.

1) Les satellites géostationnaires de la Terre ont une orbite circulaire de rayon G = 42 164 km et une période T_G = 86 164 s. Calculer la masse M_T de la Terre.

2) Mars a deux satellites naturels, Phobos et Deimos. Phobos gravite à 9380 km du centre de Mars avec une période de 7 h 39 min. Deimos a une trajectoire quasi circulaire de rayon r_D = 23 460 km et une période de révolution TD = 30 h 18 min .

a) Calculer la masse de la planète Mars à partir des caractéristiques du mouvement de Phobos, puis de Deimos.

b) Comparer les valeurs obtenues.

3) Au cours de la mission APOLLO XVII en 1972, le module de commande en orbite circulaire autour de la Lune, à une distance de 2 040 km du centre de celle-ci, avait une période de 8 240 s dans le repère sélénocentrique. Calculer la masse de la Lune.

Exercice 250 : 1) Montrer que le mouvement du satellite « Télécom » en orbite circulaire est uniforme.

2) La valeur de la vitesse est donnée par l'expression : $v^2 = G\frac{M_T}{R_T+h}$: retrouver cette expression ; en déduire l'expression de la période de révolution du satellite.

3) Quel est l'ordre de grandeur de la vitesse de ce satellite : $3\ 10^2\ m.s^{-1}$; $3\ 10^3\ m.s^{-1}$;$3\ 10^4\ m.s^{-1}$;

4) Quelle est la relation entre la période de révolution du satellite et la période de rotation de la Terre.

Cette relation est-elle suffisante pour affirmer que le satellite est géostationnaire ?

5) Dans quel plan se trouve l'orbite d'un satellite géostationnaire ? Pourquoi ?

Tous les satellites géostationnaires doivent-ils avoir la même masse ? Justifier la réponse.

Exercice 251 : Un satellite de masse M décrit autour de la Terre d'un mouvement uniforme, une orbite circulaire à une altitude h. Le rayon de la Terre est $R = 6,4.10^6$ m.

1) Exprimer l'accélération g de la pesanteur à l'altitude h en fonction de g_0, R et h. 2) Calculer l'accélération g_0 de la pesanteur à l'altitude $h = 0$.

3) On suppose h = 300 km. a) Montrer que la vitesse du satellite sur son orbite est $v = 7740\ m.s^{-1}$.

b) Calculer la période de révolution.

4) a) Quelle devrait être l'altitude h du satellite pour qu'il soit géostationnaire, c'est-à-dire qu'il apparaisse immobile à un observateur terrestre. b) Calculer alors sa vitesse.

Exercice 252 : Uranus est la 7ème planète du système solaire. Elle a été découverte en 1781 par William Herechelle. Elle fût mieux connue par l'homme grâce à son survol, en 1986, par la sonde Voyager II. Uranus met 84 ans pour faire un tour complet autour du soleil. Les cinq plus gros satellites de la planète Uranus ont été découverts grâce aux observations depuis la Terre entre 1787 et 1948. Il s'agit de : Miranda, Ariel, Umbriel, Titania et Obéron. Le tableau qui suit précise le rayon de la trajectoire décrite par chaque satellite autour d'Uranus et la période de révolution (durée d'un tour autour d'Uranus):

Satellite	Rayon de l'orbite r (106 m)	Période de révolution T(Jour)
MIRANDA	129,8	1,4
ARIEL	191,2	2,52
UMBRIEL	266,0	4,14
TITANIA	435,8	8,71
OBERON	582,6	13,5

Dans tout le problème, on suppose que la répartition de masse des astres est à symétrie sphérique.

Les mouvements des différents satellites d'Uranus sont étudiés dans le référentiel "Uranocentrique" supposé galiléen. On donne : $G = 6{,}67.10^{-11}$ SI, 1 jour = 86 400 s.

1) On se propose de déterminer la vitesse d'un satellite d'Uranus. On admet que le centre d'inertie du Satellite effectue un mouvement circulaire dans le référentiel "Uranocentrique".

a) Rappeler la définition d'un référentiel géocentrique. Définir, par analogie, le référentiel Uranocentrique".

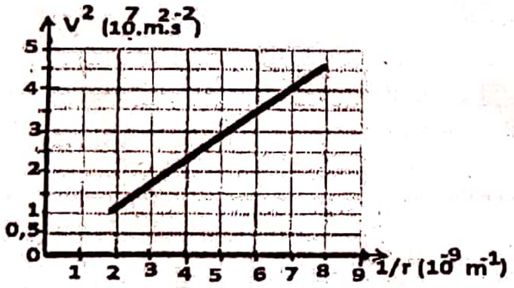
b) Montrer que le mouvement du satellite est uniforme.

c) Etablir l'expression de la vitesse V du centre d'inertie du satellite en fonction du rayon r de sa trajectoire et de sa période T de révolution.

d) Faire l'application numérique pour le satellite Umbriel.

2) Dans la suite, on cherche à déterminer la masse M d'Uranus par deux méthodes.

2) Méthode graphique.



La courbe de la fonction $v^2 = f\left(\frac{1}{r}\right)$ où V est la vitesse du satellite dans le référentiel "Uranocentrique" et r le rayon de l'orbite autour d'Uranus est représenté ci-dessous. a) Établir l'expression de la vitesse V en fonction de G, M et r

b) En vous aidant de la courbe, déterminer la masse d'Uranus (il n'est pas demandé de rendre la courbe avec la copie ; on expliquera seulement le mode d'exploitation).

3) Utilisation de la troisième loi de Kepler

a) Établir la troisième loi de Kepler $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G.M}$.

b) En utilisant les informations données sur les satellites, montré, aux erreurs d'expériences près, que le rapport $\frac{T^2}{r^3}$ est une constante dont on donnera la valeur numérique.

c) En déduire la masse d'Uranus et comparer le résultat avec celui obtenu par la méthode graphique.

Exercice 253 : La planète Saturne est entourée de nombreux anneaux et satellites. Voici quelques données relatives à cette planète et à ses satellites :

Satellites	Période de révolution	Rayon de l'orbite (milliers de km)
Janus	16 h 40 min	151,5
Mimas	22 h 37 min	185,8
Encelade	1 d 8 h 53 min	238,3
Téthys	1 d 21 h 18 min	294,9
Dioné	2 d 17 h 41 min	377,9

Les anneaux sont formés de divers éléments (cailloux, poussières et blocs de glace) non regroupés entre eux et tournant autour de Saturne. On considère que les astres sont ponctuels, que les trajectoires sont circulaires et que le mouvement est uniforme.

1) Pour étudier le mouvement des satellites de Saturne, il convient de se placer dans un référentiel particulier que l'on peut appeler « saturnocentrique » par analogie à « géocentrique ». Comment définir le référentiel « saturnocentrique » ?

2) À partir du bilan des forces exercées sur un satellite par Saturne (on néglige l'action des autres astres), établir la relation qui relie la vitesse v du satellite, le rayon r de son orbite, la masse Ms de Saturne et la constante K de gravitation universelle.

3) Énoncer la troisième loi de Kepler. Déterminer à partir de celle-ci la masse de Saturne en utilisant les données relatives à l'un des satellites. (Pour Dioné : $5{,}71.10^{26}$ kg)

4) On néglige l'action des éléments les uns sur les autres devant l'action de l'astre sur chacun des éléments. A et B étant deux éléments de deux anneaux différents initialement alignés avec le centre de Saturne, cet alignement sera-t-il conservé ? Justifier la réponse.

Selon 'Abdullâh Ibn Mas'ûd (das), le Prophète (saw) a dit : « N'entrera pas au Paradis celui qui a dans son cœur le poids d'un atome d'orgueil ». Quelqu'un dit : « On aime pourtant avoir un bel habit et de belles chaussures ». Il dit : « Dieu est beau et Il aime la beauté. L'orgueil c'est le fait de ne pas accepter une vérité venant des autres et de les mépriser ». (Rapporté par Mouslim)

Exercice 254 : On réalise un pendule élastique horizontale de ressort horizontal à spires non jointives de raideur $K = 10\ N.m^{-1}$ et d'une masse $m = 100\ g$. Le solide, écarté de sa position d'équilibre puis lâché, oscille horizontalement, sans frottement.

1) Etablir l'équation différentielle du mouvement du solide. Déduire les valeurs de la pulsation propre ω_0 et de la période propre T_0 de l'oscillateur.

2) A l'instant $t = 0\ s$, choisi comme origine des dates, l'abscisse initiale du solide étant $x_0 = +2\ cm$, on lui communique une vitesse initiale $|v_0| = 0,2\ m/s$ dirigée vers la position d'équilibre.

a) Donner l'équation horaire du mouvement du solide.

b) Calculer la valeur de la vitesse du solide lorsque celui-ci s'est déplacé, par rapport à sa position d'équilibre, d'une longueur $b = 1,4\ cm$.

3) Le solide est au point C à la date $t = 0,3\ s$.

a) Calculer l'élongation du mouvement.

b) Calculer sa vitesse à cette date.

4) Calculer la valeur de la vitesse du centre d'inertie G du solide lorsqu'il repasse par sa position d'équilibre.

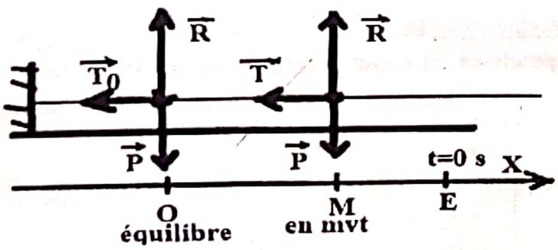
5) Déterminer les énergies cinétique, potentielle et du système de l'oscillateur lorsque :

a) le solide est à sa position d'équilibre.

b) le solide est en mouvement (à l'instant t).

c) le solide est à l'instant $t = 0$.

Correction : un pendule élastique horizontale de $K = 10\ N.m^{-1}$ et d'une masse $m = 100\ g$.



1) Equation différentielle du mouvement du solide.

Le solide est en équilibre : (au point O)

$\vec{P} + \vec{T_0} = \vec{0} \Leftrightarrow P_x + T_{0x} = 0$ ou $-K\Delta\ell_0 = 0 \Leftrightarrow \Delta\ell_0 = 0$

Le solide est en mouvement : (au point M)

$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a} \Leftrightarrow P_x + T_x = ma_x$

$-K(x + \Delta\ell_0) = m\ddot{x}$ ou $m\ddot{x} + Kx = 0$

Equation différentielle est $\ddot{x} + \frac{K}{m}x = 0$.

La pulsation propre ω_0 de l'oscillateur est

$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{10}{0,1}} = 10\ rad/s$

La période propre T_0 de l'oscillateur.

$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} = \frac{2\times 3,14}{10} = 0,628\ s$

2) a) Donner l'équation horaire du mouvement du solide.

$x = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi) \Leftrightarrow v = -\omega_0 X_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$

A $t = 0\ s$ on a $\left| \begin{array}{l} OE = X_m\cos\varphi = x_0 \\ v_E = -\omega_0 X_m \sin\varphi = v_0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \cos\varphi = \frac{x_0}{X_m} \\ \sin\varphi = \frac{-v_0}{\omega_0 X_m} \end{array} \right.$

Première méthode :

Calculons la phase φ : $\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \tan\varphi = \frac{\frac{-v_0}{\omega_0 X_m}}{\frac{x_0}{X_m}} = \frac{-v_0}{\omega_0 X_m} \times \frac{X_m}{x_0}$

$\tan\varphi = \frac{-v_0}{\omega_0 x_0} \Leftrightarrow \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{-v_0}{\omega_0 x_0}\right)$

$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{-0,2}{10\times 2\times 10^{-2}}\right) = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$.

Calculons l'amplitude X_m

$\cos\varphi = \frac{x_0}{X_m} \Leftrightarrow X_m = \frac{x_0}{\cos\varphi} = \frac{2\times 10^{-2}}{\cos\frac{\pi}{4}} = 2,8 \times 10^{-2}\ m$.

L'équation horaire est $x = 2,8 \times 10^{-2} \cos\left(10t + \frac{\pi}{4}\right)$.

Deuxième méthode :

Calculons l'amplitude X_m

$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$ ou ENCORE $\left(\frac{x_0}{X_m}\right)^2 + \left(\frac{-v_0}{\omega_0 X_m}\right)^2 = 1$

$x_0^2\omega_0^2 + v_0^2 = X_m^2\omega_0^2 \Leftrightarrow X_m^2 = x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}$

$X_m = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}} = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2}$

$X_m = \sqrt{(2\times 10^{-2})^2 + \frac{0,04}{100}} = 2,8 \times 10^{-2}\ m$.

Calculons la phase φ

$\cos\varphi = \frac{x_0}{X_m} \Leftrightarrow \varphi = \cos^{-1}\left(\frac{x_0}{X_m}\right)$

$\varphi = \cos^{-1}\left(\frac{2\times 10^{-2}}{2,8\times 10^{-2}}\right) = \cos^{-1}(0,71) = \frac{\pi}{4}$

L'équation horaire est $x = 2,8 \times 10^{-2} \cos\left(10t + \frac{\pi}{4}\right)$.

b) vitesse du solide à la longueur $b = 1,4 \times 10^{-2}\ m$.

Or l'équation horaire $x = 2,8 \times 10^{-2} \cos\left(10t + \frac{\pi}{4}\right)$

$1,4 = 2,8\cos\left(10t + \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \cos\left(10t + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$ OU BIEN

$\cos\left(10t + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 10t + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + 2\pi K \\ 10t + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{3} + 2\pi K \end{array} \right.$

$\left| \begin{array}{l} 10t = \frac{\pi}{12} + 2\pi K \\ 10t = -\frac{7\pi}{12} + 2\pi K \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} t = \frac{\pi}{120} + \frac{\pi}{5}K \\ t = -\frac{7\pi}{120} + \frac{\pi}{5}K \end{array} \right.$ avec $K \in \mathbb{Z}$.

$x = 2,8 \times 10^{-2} \cos\left(10t + \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow v = -0,28\sin\left(10t + \frac{\pi}{4}\right)$

$\omega_0 t + \varphi = 10t + \frac{\pi}{4}$

Pour $t = \frac{\pi}{120} + \frac{\pi}{5}K$ alors $10t + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12} + 2\pi K \equiv \frac{\pi}{12}$

Donc $v = -0,28\sin\frac{\pi}{12} = -0,0725\ m/s$.

Pour $t = -\frac{7\pi}{120} + \frac{\pi}{5}K$ alors $10t + \frac{\pi}{4} = -\frac{7\pi}{12} + 2\pi K \equiv -\frac{7\pi}{12}$

Donc $v = -0,28\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right) = 0,27\ m/s$.

3) Le solide est au point C à la date $t = 0,3\ s$.

a) Calculer son élongation du mouvement.

$x = 2{,}8 \times 10^{-2} \cos\left(10t + \frac{\pi}{4}\right)$

A $t = 0{,}3\, s = \frac{3}{10}\, s$ alors $x = 2{,}8 \times 10^{-2} \cos 48 = 1{,}87\, m$

b) Calculer sa vitesse à cette date.

$v = -0{,}28 \sin\left(10t + \frac{\pi}{4}\right)$

A $t = 0{,}3\, s = \frac{3}{10}\, s$ alors $v = -0{,}28 \sin 48 = -0{,}208\, m/s$.

4) Le point O est à la position d'équilibre. Le système est conservatif, c'est-à-dire les énergies mécaniques se conservent en tout point : $E_{mO} = E_{mM} = E_{mE}$.

$E_{mO} = E_{cO} + E_{peO} + E_{ppO} = \frac{1}{2} m v_O^2$

$E_{mE} = E_{cE} + E_{peE} + E_{ppE} = \frac{1}{2} K OE^2 = \frac{1}{2} K x_O^2$

$\frac{1}{2} m v_O^2 = \frac{1}{2} K x_O^2 \Leftrightarrow v_O = x_0 \sqrt{\frac{K}{m}}$

La valeur de la vitesse du centre d'inertie G du solide lorsqu'il repasse par sa position d'équilibre est

$v_O = x_0 \sqrt{\frac{K}{m}} = 2 \times 10^{-2} \sqrt{\frac{10}{0{,}1}} = 0{,}2\, m/s$.

5) énergies cinétique, potentielle et du système

Le système est conservatif

a) le solide est à la position d'équilibre (le point O) :

Energie cinétique : $E_{cO} = \frac{1}{2} m v_O^2 = 0\, J$ car $v_O = 0\, m/s$

Energie potentielle : $E_{pO} = E_{peO} + E_{ppO} = 0\, J$ puisque $E_{peO} = \frac{1}{2} K \Delta l_O^2 = 0\, J$ $(\Delta \ell_0 = 0)$ et $E_{ppO} = 0\, J$ (niveau O)

Energie du système : $E_{mO} = E_{cO} + E_{peO} + E_{ppO} = 0\, J$

b) le solide est en mouvement (à l'instant t) (le point M)

$x = 2{,}8.10^{-2} \cos\left(10t + \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow v = -0{,}28 \sin\left(10t + \frac{\pi}{4}\right)$

$x_M = 2{,}8.10^{-2} \cos\left(10t + \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow v_M = -0{,}28 \sin\left(10t + \frac{\pi}{4}\right)$

Energie cinétique : $E_{cM} = \frac{1}{2} m v_M^2$

$E_{cM} = \frac{1}{2} \times 0{,}1 \times (0{,}28)^2 \sin^2\left(10t + \frac{\pi}{4}\right)$

$E_{cM} = 0{,}00392 \sin^2\left(10t + \frac{\pi}{4}\right) J$

Energie potentielle : $E_{pM} = E_{peM} + E_{ppM}$

$E_{peM} = \frac{1}{2} K (\Delta \ell_0 + OM)^2 = \frac{1}{2} K OM^2 = \frac{1}{2} K x_M^2$

$E_{peM} = \frac{1}{2} \times 10 \times (2{,}8.10^{-2})^2 \cos^2\left(10t + \frac{\pi}{4}\right)$

$E_{peM} = 0{,}00392 \cos^2\left(10t + \frac{\pi}{4}\right) J$

$E_{ppM} = mgOM = 0\, J$ puisque le niveau du point O $(E_{ppO} = 0)$ est confondu à celui du point M.

D'où $E_{pM} = 0{,}00392 \cos^2\left(10t + \frac{\pi}{4}\right)$ J.

Energie du système : $E_{mM} = E_{cM} + E_{peM} + E_{ppM}$

$E_{mM} = 0{,}00392 \sin^2\left(10t + \frac{\pi}{4}\right) + 0{,}00392 \cos^2\left(10t + \frac{\pi}{4}\right)$

Ou encore $E_{mM} = 0{,}00392$ J.

c) le solide est à l'instant $t = 0\, s$ (le point E) :

On lui communique une vitesse initiale $|v_0| = 0{,}2\, m/s$ dirigée vers la position d'équilibre.

Energie cinétique : $E_{cE} = \frac{1}{2} m v_E^2$ or $v_E = v_0$

$E_{cE} = \frac{1}{2} \times 0{,}1 \times (0{,}2)^2 = 0{,}002$ J

Energie potentielle : $E_{pE} = E_{peE} + E_{ppE}$

$E_{peE} = \frac{1}{2} K (\Delta \ell_0 + OE)^2 = \frac{1}{2} K OE^2 = \frac{1}{2} K x_E^2$

Or $x_E = x_0 = +2\, cm = 2 \times 10^{-2}\, m$

Donc $E_{peE} = \frac{1}{2} \times 10 \times (2 \times 10^{-2})^2 = 0{,}002$ J

$E_{ppM} = mgOE = 0\, J$ puisque le niveau du point O $(E_{ppO} = 0)$ est confondu à celui du point E.

D'où $E_{pM} = 0{,}002$ J.

Energie du système : $E_{mE} = E_{cE} + E_{peE} + E_{ppE}$

$E_{mE} = 0{,}002 + 0{,}002 = 0{,}004$ J.

COURS :

PENDULE ELASTIQUE HORIZONTAL :

Equation différentielle : $\ddot{x} + \frac{K}{m} x = 0$

Equation horaire : $x = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$

Le système est conservatif : $E_{mM} = E_{mE}$ avec

$E_{mM} = E_{mE} = \frac{1}{2} m v_{max}^2 = \frac{1}{2} K X_m^2$ où

$v_{max} = |-\omega_0 X_m| = \omega_0 X_m$ et $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$.

$E = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} K x^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} K x^2 \Leftrightarrow$

$\frac{dE}{dx} = \frac{1}{2} m (2\dot{x}\ddot{x}) + \frac{1}{2} K (2x\dot{x}) = m\dot{x}\ddot{x} + Kx\dot{x} = \dot{x}(m\ddot{x} + Kx)$

Or l'énergie mécanique se conserve $\Leftrightarrow \frac{dE}{dx} = 0$, donc

$m\ddot{x} + Kx = 0 \Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{K}{m} x = 0$.

Exercice 255 : Un solide (s) de masse $m = 450\, g$ est suspendue à un ressort vertical dont l'autre extrémité est fixe. La constante de raideur du ressort vaut $K = 28\, N.m^{-1}$.

1) Etablir l'équation différentielle caractérisant le mouvement.

2) A partir de la position d'équilibre du solide, on le tire verticalement vers le bas d'une longueur $a = 8\, cm$. On le lâche sans vitesse initiale.

a) Calculer la pulsation propre de l'oscillateur.

b) Donner l'équation horaire du mouvement du solide, en précisant bien les origines spatiale et temporelle utilisées.

3) a) Calculer la vitesse maximale du solide.

b) Calculer la valeur de la vitesse du solide lorsque celui-ci s'est déplacé, par rapport à sa position d'équilibre, d'une longueur $b = 5\, cm$.

4) a) Calculer l'accélération maximale du solide.

b) Calculer la valeur de l'accélération du solide lorsque celui-ci s'est déplacé d'une longueur $c = 4\ cm$, par rapport à sa position d'équilibre.

5) Calculer la vitesse maximale du solide lorsque l'allongement initial du ressort vaut $x_0 = 15,5\ cm$.

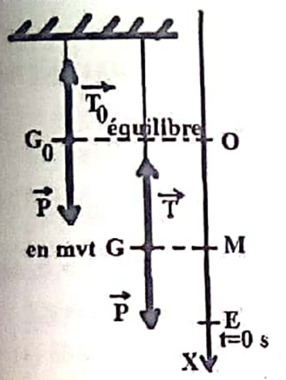
6) Déterminer les énergies cinétique, potentielle et du système de l'oscillateur lorsque :

a) le solide est à sa position d'équilibre.

b) le solide est en mouvement (à l'instant t).

c) le solide est à l'instant $t = 0$.

<u>Correction :</u> pendule élastique vertical



1) Equation différentielle caractérisant le mouvement

<u>Le solide est en équilibre :</u>

$\vec{P} + \vec{T_0} = \vec{0} \Leftrightarrow P_x + T_{0x} = 0$

$mg - K\Delta\ell_0 = 0 \Leftrightarrow mg = K\Delta\ell_0$

<u>Le solide est en mouvement :</u>

$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a} \Leftrightarrow P_x + T_x = ma_x$

$mg - K(x + \Delta\ell_0) = m\ddot{x}$ ou

$m\ddot{x} - mg + K(x + \Delta\ell_0) = 0$

$m\ddot{x} - mg + Kx + K\Delta\ell_0 = 0$

Or $mg = K\Delta\ell_0$

Donc $m\ddot{x} - K\Delta\ell_0 + Kx + K\Delta\ell_0 = 0$ ou $m\ddot{x} + Kx = 0$

Equation différentielle est $\ddot{x} + \frac{K}{m}x = 0$.

2) $a = 8\ cm = OE$; sans vitesse initiale ($v_E = 0$)

a) Calculer la pulsation propre de l'oscillateur

$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{28}{0,45}} = 7,88\ \text{rad/s}$

b) Donner l'équation horaire du mouvement du solide

$x = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi) \Leftrightarrow v = -\omega_0 X_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$

A $t = 0\ s$ on a $\begin{cases} OE = X_m \cos\varphi = a = 8.10^{-2}\ m \\ v_E = -\omega_0 X_m \sin\varphi = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\varphi = \frac{a}{X_m} \\ \sin\varphi = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \varphi = 0$ si $\frac{a}{X_m} = 1 \Leftrightarrow X_m = a = 8.10^{-2}\ m$

<u>**Remarque :**</u>

- L'amplitude doit être considérée toujours $X_m > 0$
- Si $\sin\varphi = 0$ et $\begin{cases} \frac{a}{X_m} < 0 \text{ alors } \varphi = \pi \\ \frac{a}{X_m} > 0 \text{ alors } \varphi = 0 \end{cases} \Leftrightarrow X_m = |a|$

L'équation horaire du mouvement est $x = 8,10^{-2}\cos(7,88\ t)$

3) a) la vitesse maximale du solide.

$x = X_m\cos(\omega_0 t + \varphi) \Leftrightarrow v = -\omega_0 X_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$

$v_{max} = |-\omega_0 X_m| = \omega_0 X_m = 8.10^{-2} \times 7,88 = 0,63\ m/s$

b) $x = 8,10^{-2}\cos(7,88\ t) = b = 5.10^{-2} m$

$\cos(7,88\ t) = \frac{5}{8} = 0,625 \Leftrightarrow t = \frac{\cos^{-1}(0,625)}{7,88} = 6,51\ s$

$x = 8.10^{-2}\cos(7,88\ t) \Leftrightarrow v = -0,63\sin(7,88\ t)$

4) a) Calculer l'accélération maximale du solide.

$v = -\omega_0 X_m \sin(\omega_0 t + \varphi) \Leftrightarrow a = -\omega_0^2 X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$

$a_{max} = |-\omega_0^2 X_m| = \omega_0^2 X_m = (7,88)^2 \times 8.10^{-2}$

$a_{max} = 4,96\ m/s^2$.

b) $x = 8,10^{-2}\cos(7,88\ t) = c = 4 \times 10^{-2}\ m$

$\cos(7,88\ t) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = \cos 60 = \cos\frac{\pi}{3}$

$\cos(7,88\ t) = \cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} 7,88\ t = \frac{\pi}{3} + 2\pi K \\ 7,88\ t = -\frac{\pi}{3} + 2\pi K \end{cases}$

$\begin{cases} t = \frac{\pi}{23,64} + 0,253\pi K \\ t = -\frac{\pi}{23,64} + 0,253\pi K \end{cases}$ or $x = 8,10^{-2}\cos(7,88\ t)$

$v = -0,63\sin(7,88\ t) \Leftrightarrow a = -5\cos(7,88\ t)$

$\omega_0 t + \varphi = 7,88\ t \Leftrightarrow \begin{cases} 7,88\ t = \frac{\pi}{3} + 2\pi K \\ 7,88\ t = -\frac{\pi}{3} + 2\pi K \end{cases}$

Pour $t = \frac{\pi}{23,64} + 0,253\pi K$ alors

$a = -5\cos(7,88\ t) = -5\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2,5\ m/s^2$.

Pour $t = -\frac{\pi}{23,64} + 0,253\pi K$ alors

$a = -5\cos(7,88\ t) = -5\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -2,5\ m/s^2$.

5) $x = X_m\cos(\omega_0 t + \varphi) \Leftrightarrow v = -\omega_0 X_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$

Or $X_m = x_0$, donc la vitesse maximale du solide lorsque l'allongement initial du ressort vaut $x_0 = 15,5\ cm$.

$v_{max} = \omega_0 x_0 = 15,5 \times 10^{-2} \times 7,88 = 1,22\ m/s$

6) les énergies cinétique, potentielle et du système

a) le solide est à la position d'équilibre (le point O) :

<u>Energie cinétique :</u> $E_{cO} = \frac{1}{2}mv_O^2 = 0\ J$ car $v_O = 0\ m/s$

<u>Energie potentielle :</u> $E_{pO} = E_{peO} + E_{ppO}$

$E_{peO} = \frac{1}{2}K\Delta l_0^2$ OR $mg - K\Delta\ell_0 = 0 \Leftrightarrow \Delta\ell_0 = \frac{mg}{K} = 0,16\ m$

DONC $E_{peO} = \frac{1}{2} \times 28 \times (0,16)^2 = 0,3616\ J$

et $E_{ppO} = 0\ J$ (niveau O (c'est convention))

$E_{pO} = 0,3616\ J$

<u>Energie du système :</u> $E_{mO} = E_{cO} + E_{peO} + E_{ppO} = 0,3616\ J$

b) le solide est en mouvement (à l'instant t) (le point M)

$x = 8.10^{-2}\cos(7,88\ t) \Leftrightarrow v = -0,63\sin(7,88\ t)$

<u>Energie cinétique :</u> $E_{cM} = \frac{1}{2}mv_M^2$

$E_{cM} = \frac{1}{2} \times 0,45 \times (0,63)^2\sin^2(7,88\ t)$

$E_{cM} = 0,089\sin^2(7,88\ t)\ J$

<u>Energie potentielle :</u> $E_{pM} = E_{peM} + E_{ppM}$

$E_{peM} = \frac{1}{2}K(\Delta\ell_0 + OM)^2 = \frac{1}{2}K(\Delta\ell_0 + x)^2$

$E_{peM} = \frac{1}{2}K(\Delta l_0^2 + 2\Delta\ell_0 x + x^2) = \frac{1}{2}K\Delta l_0^2 + K\Delta\ell_0 x + \frac{1}{2}Kx^2$

OR $mg - K\Delta\ell_0 = 0 \Leftrightarrow mg = K\Delta\ell_0$

DONC $E_{peM} = \frac{1}{2}K\Delta l_0^2 + \frac{1}{2}Kx^2 + mgx$

$E_{peM} = 0,3584 + 0,089\cos^2(7,88\ t) + 0,36\cos(7,88\ t)$

$E_{ppM} = mgOM = mgx = 0,36\cos(7,88\ t)$

$E_{pM} = 0{,}3584 + 0{,}089\cos^2(7{,}88\,t) + 0{,}72\cos(7{,}88\,t)$.

Energie du système : $E_{mM} = E_{cM} + E_{peM} + E_{ppM}$

$E_{mM} = 0{,}089\sin^2(7{,}88\,t) + 0{,}089\cos^2(7{,}88\,t) + 0{,}3584 + 0{,}72\cos(7{,}88\,t)$

Ou encore $E_{mM} = 0{,}4474 + 0{,}72\cos(7{,}88\,t)$

c) le solide est à l'instant $t = 0\ s$ (le point E) :

Energie cinétique : $E_{cE} = \frac{1}{2}mv_E^2$ or $v_E = v_0 = 0$

$E_{cE} = \frac{1}{2}\times 0{,}45\times 0^2 = 0$ J

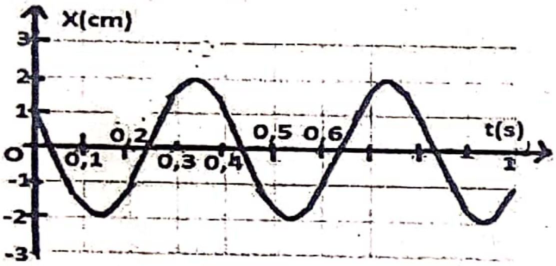
Energie potentielle : $E_{pE} = E_{peE} + E_{ppE}$

$E_{peE} = \frac{1}{2}K(\Delta\ell_0 + OE)^2 = \frac{1}{2}K(\Delta\ell_0 + a)^2 = \frac{1}{2}K(0{,}24)^2$

$E_{peE} = \frac{1}{2}\times 28\times(0{,}24)^2 = 0{,}8064$ J

Energie du système : $E_{mE} = E_{cE} + E_{peE} + E_{ppE} = 0{,}8064$ J

Exercice 256 : Un solide (s) de masse m est accroché à un ressort à spires non jointives de constante de raideur K. Le centre d'inertie G du solide (s) peut glisser sans frottement sur un plan horizontal est repéré par sa position x sur l'axe (Ox) dont l'origine correspond à la position de repos de (s).



La courbe donnant la variation de l'abscisse x de (s) en fonction du temps t est donnée ci-dessus. 1) Déterminer :

a) l'amplitude X_m du mouvement de (s).

b) la période propre et pulsation propre de ce mouvement.

c) l'abscisse de (s) à $t = 0\ s$ puis à $t = 0{,}2\ s$.

2) Déduire des réponses précédentes, l'équation horaire du mouvement de solide (s).

3) Cette oscillation est-elle amortie ? Pourquoi ?

4) a) Déterminer la date à laquelle le mobile passe pour la 2ème fois par la position d'abscisse $x_1 = -1\ cm$.

b) Déterminer la date à laquelle le mobile passe par la position d'abscisse $x_2 = 1\ cm$ pour la 2ème fois en allant dans le sens négatif des élongations. Préciser la nature de mouvement à cette date.

5) a) Etablir en fonction du temps, la vitesse V du mobile puis montrer que la vitesse est en quadrature avance sur l'élongation x. b) Etablir la relation $v^2 = \omega^2(X_m^2 - x^2)$.

c) Déterminer la position du mobile pour laquelle sa vitesse prend la valeur maximale V_m.

d) Calculer la valeur de la vitesse du mobile quand son élongation vaut $0{,}5\ cm$.

Correction :

1) a) l'amplitude du mouvement de (s) est $X_m = 2\times 10^{-2}$ m

b) la période propre de ce mouvement est $T_0 = 0{,}4\ s$.

Pulsation propre de ce mouvement est $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 5\pi$ rad/s

c) l'abscisse de (s) à $t = 0\ s$ est $x(t = 0\ s) = 1$ cm.

L'abscisse de (s) à $t = 0{,}2\ s$ est $x(t = 0{,}2\ s) = -1{,}5$ cm.

2) $x = X_m\cos(\omega_0 t + \varphi) \Leftrightarrow v = -\omega_0 X_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$

A $t = 0\ s$ on a $\left|\begin{array}{l} x(t=0\ s) = X_m\cos\varphi = 10^{-2} \\ v(t=0\ s) = -\omega_0 X_m\sin\varphi = v_0 < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\left|\begin{array}{l} \cos\varphi = \frac{x_0}{X_m} = \frac{10^{-2}}{2\times 10^{-2}} = \frac{1}{2} \\ \sin\varphi = \frac{-v_0}{\omega_0 X_m} \end{array}\right.$

$\cos\varphi = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} \varphi = \frac{\pi}{3} + 2\pi K \\ \varphi = -\frac{\pi}{3} + 2\pi K \end{array}\right.$ Le choix de φ dépend de $v(t = 0\ s) = -\omega_0 X_m\sin\varphi = v_0 < 0$ ou encore

$v(t = 0\ s) = -10\pi\times 10^{-2}\sin\varphi < 0$.

Si $\varphi = \frac{\pi}{3}$ alors $v(t = 0\ s) = -10\pi\times 10^{-2}\sin\frac{\pi}{3} < 0$

Si $\varphi = \frac{\pi}{3}$ alors $v(t = 0\ s) = -10\pi\times 10^{-2}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) > 0$, ce qui est faux car la courbe commence à décroître à $t = 0\ s$.

D'où $\varphi = \frac{\pi}{3}$. L'équation horaire du mouvement de solide (s) est donnée par : $x = 2\times 10^{-2}\cos\left(5\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$.

3) Cette oscillation n'est pas amortie parce que l'amplitude de l'élongation est constante ($X_m = 2\times 10^{-2}\ m$).

4) a) La date à laquelle le mobile passe pour la 2ème fois par la position d'abscisse $x_1 = -1\ cm$ est 0,2 s.

b) $x = 2\times 10^{-2}\cos\left(5\pi t + \frac{\pi}{3}\right) = x_2 = 1\ cm = 10^{-2}\ m$

$\cos\left(5\pi t + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 5\pi t + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2\pi k \\ 5\pi t + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k \end{array}\right.$

$\left|\begin{array}{l} 5t + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + 2k \\ 5t + \frac{1}{3} = -\frac{1}{3} + 2k \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} t = \frac{2}{5}k \\ t = -\frac{2}{15} + \frac{2}{5}k \end{array}\right.$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$x = 2.10^{-2}\cos\left(5\pi t + \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow v = -10\pi.10^{-2}\sin\left(5\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$

Pour $t = \frac{2}{5}k \Leftrightarrow v = -10\pi.10^{-2}\sin\left(5\pi\times\frac{2}{5}k + \frac{\pi}{3}\right)$

$v = -10\pi.10^{-2}\sin\left(2\pi k + \frac{\pi}{3}\right) = -10\pi.10^{-2}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) < 0$

Pour $t = -\frac{2}{15} + \frac{2}{5}k \Leftrightarrow v = -10\pi.10^{-2}\sin\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi k\right)$

$v = -10\pi.10^{-2}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = +10\pi.10^{-2}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) > 0$

D'où $t = \frac{2}{5}k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

La nature de mouvement à cette date

$v = -10\pi.10^{-2}\sin\left(5\pi t + \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow v\left(\frac{2}{5}k\right) < 0$

$a = -50\pi^2\times 10^{-2}\cos\left(5\pi t + \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow a\left(\frac{2}{5}k\right) < 0$

$a.v > 0$ alors le mouvement est accéléré.

5) a) $\cos\left(X + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin X$

$x = 2.10^{-2}\cos\left(5\pi t + \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow v = -10\pi.10^{-2}\sin\left(5\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$

$v = 10\pi.10^{-2}\cos\left(5\pi t + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = 10\pi.10^{-2}\cos\left(5\pi t + \frac{5\pi}{6}\right)$

$\Delta\varphi = \varphi_v - \varphi_x = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$ alors la vitesse est en quadrature avance sur l'élongation x.

b) Etablir la relation $v^2 = \omega^2(X_m^2 - x^2)$

$x = X_m\cos(\omega t + \varphi) \Leftrightarrow v = -\omega X_m\sin(\omega t + \varphi)$

$\omega^2(X_m^2 - x^2) = \omega^2X_m^2 - \omega^2x^2 =$

$\omega^2X_m^2 - \omega^2X_m^2\cos^2(\omega t + \varphi) = \omega^2X_m^2[1 - \cos^2(\omega t + \varphi)]$

Or $\sin^2(\omega t + \varphi) + \cos^2(\omega t + \varphi) = 1 \Leftrightarrow$

$$1 - \cos^2(\omega t + \varphi) = \sin^2(\omega t + \varphi)$$

$$\omega^2(X_m^2 - x^2) = \omega^2X_m^2\sin^2(\omega t + \varphi) = v^2$$

c) $V_m = \omega X_m$

$(\omega X_m)^2 = \omega^2(X_m^2 - x^2) \Leftrightarrow X_m^2 = X_m^2 - x^2 \Leftrightarrow x^2 = 0$

La position du mobile pour laquelle sa vitesse prend la valeur maximale V_m est nulle.

d) $x = 0{,}5\ cm = 0{,}5 \times 10^{-2}\ m$

$v^2 = \omega^2(X_m^2 - x^2) = (5\pi)^2[(2 \times 10^{-2})^2 - (0{,}5 \times 10^{-2})^2]$

$$v^2 = 0{,}09375 \Leftrightarrow v = \sqrt{0{,}09375} = 0{,}306\ m/s$$

Exercice 257 : **Un solide (s) de masse $m = 120\ g$ est suspendue deux ressorts R_1 et R_2 dont l'autre extrémité est fixe. Les constantes de raideur des ressorts R_1 et R_2 valent respectivement K_1 et K_2.**

Le solide, écarté de sa position d'équilibre vers le bas d'une longueur d puis lâché, oscille sans frottement.

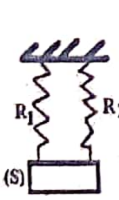


figure 1

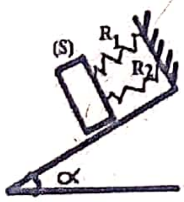


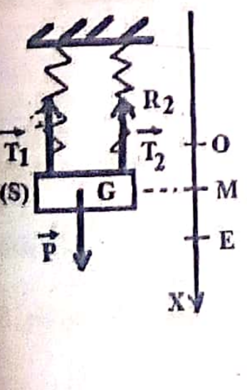
figure 2

a) Etablir l'équation différentielle du mouvement du solide

b) Déduire les valeurs de la pulsation propre ω_0 et de la période propre T_0 de l'oscillateur.

c) On considère que les deux ressorts sont identiques de $K = K_1 = K_2 = 13{,}2\ N.m^{-1}$. Soit $d = 2\ cm$ et on le lâche à la vitesse initiale $v_0 = -0{,}5\ m.s^{-1}$. Donner l'équation horaire du mouvement du solide, en précisant bien les origines spatiale et temporelle utilisées.

Correction : $m = 120\ g$ **Etude sur la figure 1 :**



a) Etablir l'équation différentielle du mouvement du solide

Le solide est en équilibre :

$\vec{P} + \vec{T}_{01} + \vec{T}_{02} = \vec{0} \Leftrightarrow$

$P_x + T_{01x} + T_{02x} = 0$

$mg - K_1\Delta\ell_{01} - K_2\Delta\ell_{02} = 0 \Leftrightarrow$

$mg = K_1\Delta\ell_{01} + K_2\Delta\ell_{02}$

Le solide est en mouvement :

$\vec{P} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = m\vec{a} \Leftrightarrow$

$P_x + T_{1x} + T_{2x} = ma_x$

$mg - K_1(x + \Delta\ell_{01}) - K_2(x + \Delta\ell_{02}) = m\ddot{x}$

Or $mg = K_1\Delta\ell_{01} + K_2\Delta\ell_{02}$

$K_1\Delta\ell_{01} + K_2\Delta\ell_{02} - K_1x - K_1\Delta\ell_{01} - K_2x - K_2\Delta\ell_{02} = m\ddot{x}$

$-K_1x - K_2x = m\ddot{x} \Leftrightarrow m\ddot{x} + K_1x + K_2x = 0$ OU ENCORE

$m\ddot{x} + (K_1 + K_2)x = 0$

Equation différentielle est $\ddot{x} + \frac{K_1+K_2}{m}x = 0$.

b) La pulsation propre ω_0 de l'oscillateur est $\omega_0 = \sqrt{\frac{K_1+K_2}{m}}$

La période propre T_0 de l'oscillateur est $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{K_1+K_2}{m}}$

c) Calculons la pulsation propre ω_0 :

$\omega_0 = \sqrt{\frac{K_1+K_2}{m}} = \sqrt{\frac{2K}{m}} = \sqrt{\frac{2\times13{,}2}{0{,}12}} = \sqrt{220} = 14{,}83\ rad/s$

Calculons l'amplitude X_m :

$X_m = \sqrt{d^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}} = \sqrt{d^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2}$

$X_m = \sqrt{(2 \times 10^{-2})^2 + 0{,}001136} = 4 \times 10^{-2}\ m.$

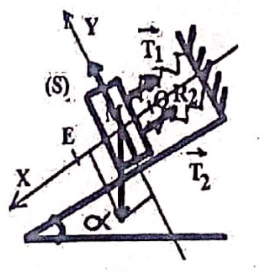
Calculons la phase φ

$\cos\varphi = \frac{x_0}{X_m} \Leftrightarrow \varphi = \cos^{-1}\left(\frac{x_0}{X_m}\right)$

$\varphi = \cos^{-1}\left(\frac{2\times10^{-2}}{4\times10^{-2}}\right) = \cos^{-1}(0{,}5) = \frac{\pi}{3}$

L'équation horaire est $x = 4 \times 10^{-2}\cos\left(14{,}83t + \frac{\pi}{3}\right)$.

Etude sur la figure 2 :



a) Etablir l'équation différentielle du mouvement du solide

Le solide est en équilibre :

$\vec{P} + \vec{T}_{01} + \vec{T}_{02} = \vec{0} \Leftrightarrow$

$P_x + T_{01x} + T_{02x} = 0$

$mg\sin\alpha - K_1\Delta\ell_{01} - K_2\Delta\ell_{02} = 0$

$\Leftrightarrow mg\sin\alpha = K_1\Delta\ell_{01} + K_2\Delta\ell_{02}$

Le solide est en mouvement :

$\vec{P} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = m\vec{a} \Leftrightarrow P_x + T_{1x} + T_{2x} = ma_x$

$mg\sin\alpha - K_1(x + \Delta\ell_{01}) - K_2(x + \Delta\ell_{02}) = m\ddot{x}$

Or $mg\sin\alpha = K_1\Delta\ell_{01} + K_2\Delta\ell_{02}$

$K_1\Delta\ell_{01} + K_2\Delta\ell_{02} - K_1x - K_1\Delta\ell_{01} - K_2x - K_2\Delta\ell_{02} = m\ddot{x}$

$-K_1x - K_2x = m\ddot{x} \Leftrightarrow m\ddot{x} + K_1x + K_2x = 0$ OU ENCORE

$m\ddot{x} + (K_1 + K_2)x = 0$

Equation différentielle est $\ddot{x} + \frac{K_1+K_2}{m}x = 0$.

b) La pulsation propre ω_0 de l'oscillateur est $\omega_0 = \sqrt{\frac{K_1+K_2}{m}}$

La période propre T_0 de l'oscillateur est $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{K_1+K_2}{m}}$

c) Calculons la pulsation propre ω_0 :

$\omega_0 = \sqrt{\frac{K_1+K_2}{m}} = \sqrt{\frac{2K}{m}} = \sqrt{\frac{2\times13{,}2}{0{,}12}} = \sqrt{220} = 14{,}83\ rad/s$

Calculons l'amplitude X_m :

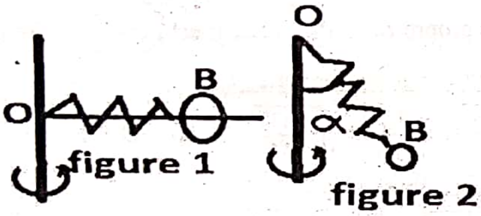
$X_m = \sqrt{d^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}} = \sqrt{d^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2} = 4 \times 10^{-2}\ m$

Calculons la phase φ : $\cos\varphi = \frac{x_0}{X_m} \Leftrightarrow \varphi = \cos^{-1}\left(\frac{x_0}{X_m}\right)$

$\varphi = \cos^{-1}\left(\frac{2\times10^{-2}}{4\times10^{-2}}\right) = \cos^{-1}(0{,}5) = \frac{\pi}{3}$

L'équation horaire est $x = 4\times10^{-2}\cos\left(14{,}83t + \frac{\pi}{3}\right)$.

Exercice 258 : On considère un ressort de masse négligeable, à spires non jointives, enfilé sur une tige OA.



La tige est soudée en O à un axe de rotation verticale (Δ). L'une des extrémités du ressort est fixée en O tandis qu'à l'autre extrémité on accroche une bille B de masse $m = 200\ g$ coulissant sans frottement sur la tige (voir figure 1). La longueur à vide du ressort est $\ell_0 = 20\ cm$ et sa raideur est $K = 50\ N/m$. La limite d'élasticité du ressort est atteinte lorsque la tension T prend la valeur limite $T_{max} = 5\ N$.

1) Etude sur la figure 1 : La tige OA tourne autour du point O à la vitesse angulaire $\omega = 6\ rad/s$.
a) Exprimer la longueur ℓ_1 du ressort en fonction de m, K, ω et ℓ_0. Calculer ℓ_1.
b) Quelle doit être la vitesse angulaire de rotation maximale ω_{max} pour ne pas détériore le ressort ?
2) Etude sur la figure 2 : La tige OA est supprimée. Le système ressort-bille est maintenant fixé en O à l'axe de rotation vertical qui tourne à la vitesse angulaire constante ω_1. À cette vitesse l'axe du système ressort-bille décrit un cône de demi-angle au sommet $\alpha = \frac{\pi}{3}$.
a) Exprimer la vitesse angulaire ω_1 en fonction de m, K, α et ℓ_0. Calculer ω_1.
b) La limite d'élasticité du ressort a-t-elle été atteinte ? Sinon calculer la valeur maximale α_{max} de l'angle α et la vitesse angulaire maximale ω'_{max} à ne pas dépasser.

Correction : 1) **Etude sur la figure 1 :**

a) TCI : $\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a} \Leftrightarrow T_x + P_x = ma_x$

$K(\ell_1 - \ell_0) = m\frac{v^2}{\ell_1} = m\ell_1\omega^2 \Leftrightarrow \ell_1 = \frac{K\ell_0}{K - m\omega^2} = 0{,}233\ m$

b) TCI : $\vec{P} + \vec{T}_{max} = m\vec{a}_{max} \Leftrightarrow T_{maxx} + P_x = ma_{maxx}$

$K(\ell_{max} - \ell_0) = m\frac{v^2}{\ell_{max}} = m\ell_{max}\omega^2_{max} \Leftrightarrow$

$\omega^2_{max} = \frac{K(\ell_{max} - \ell_0)}{m\ell_{max}}$, calculons ℓ_{max} :

$T_{max} = K(\ell_{max} - \ell_0) \Leftrightarrow \ell_{max} = \frac{T_{max}}{K} + \ell_0$

$\omega^2_{max} = \frac{K(\ell_{max} - \ell_0)}{m\ell_{max}} = \frac{T_{max}}{m\left(\frac{T_{max}}{K} + \ell_0\right)} \Leftrightarrow \omega_{max} = \sqrt{\frac{T_{max}}{m\left(\frac{T_{max}}{K} + \ell_0\right)}}$

$\omega_{max} = \sqrt{\frac{5}{0{,}2\left(\frac{5}{50} + 0{,}2\right)}} = \sqrt{83{,}34} = 9{,}12\ rad/s$

2) Etude sur la figure 2 :

a) TCI : $\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a_G} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} P_x + T_x = ma_{xG} \\ P_y + T_y = ma_{yG} \end{vmatrix}$

Sur l'axe (Ox) : $0 + T\sin\alpha = ma_G$ Or $a_G = \omega_1^2\ell\sin\alpha$

$T\sin\alpha = m\omega_1^2\ell\sin\alpha \Leftrightarrow T = K(\ell - \ell_0) = m\omega_1^2\ell$,

$K\ell - K\ell_0 = m\omega_1^2\ell \Leftrightarrow K\ell - m\omega_1^2\ell = K\ell_0 \Leftrightarrow \ell = \frac{K\ell_0}{K - m\omega_1^2}$

Sur l'axe (Oy) : $-P + T\cos\alpha = 0 \Leftrightarrow T = \frac{P}{\cos\alpha} = \frac{mg}{\cos\alpha}$

$K(\ell - \ell_0) = \frac{mg}{\cos\alpha} \Leftrightarrow \ell - \ell_0 = \frac{mg}{K\cos\alpha} \Leftrightarrow \ell = \frac{mg}{K\cos\alpha} + \ell_0$.

$\frac{K\ell_0}{K - m\omega_1^2} = \frac{mg}{K\cos\alpha} + \ell_0 \Leftrightarrow K - m\omega_1^2 = \frac{K\ell_0}{\frac{mg}{K\cos\alpha} + \ell_0} = \frac{K^2\ell_0\cos\alpha}{mg + \ell_0K\cos\alpha}$

$\omega_1^2 = \frac{K}{m} - \frac{K^2\ell_0\cos\alpha}{m(mg + \ell_0K\cos\alpha)} \Leftrightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{K}{m} - \frac{K^2\ell_0\cos\alpha}{m(mg + \ell_0K\cos\alpha)}}$

$\omega_1 = \sqrt{\frac{50}{0{,}2} - \frac{(50)^2\times0{,}2\cos60}{0{,}2(2 + 0{,}2\times50\cos60)}} = \sqrt{71{,}42} = 8{,}45\ rad/s$

b) $T = \frac{mg}{\cos\alpha} = \frac{0{,}2\times10}{\cos60} = 4\ N < T_{max}$ alors la limite d'élasticité du ressort n'est pas atteinte.

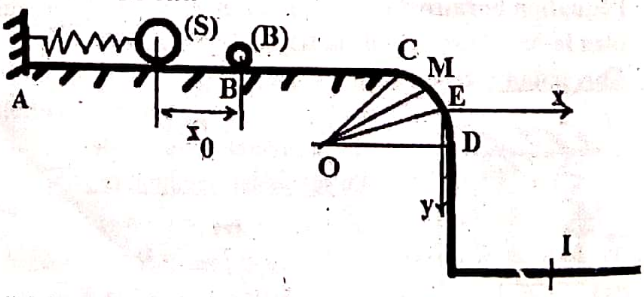
$T_{max} = \frac{mg}{\cos\alpha_{max}} \Leftrightarrow \cos\alpha_{max} = \frac{mg}{T_{max}}$

$\alpha_{max} = \cos^{-1}\left(\frac{mg}{T_{max}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{0{,}2\times10}{5}\right) = 66{,}42°$

$\omega'_{max} = \sqrt{\frac{K}{m} - \frac{K^2\ell_0\cos\alpha_{max}}{m(mg + \ell_0K\cos\alpha_{max})}}$

$\omega_1 = \sqrt{\frac{50}{0{,}2} - \frac{(50)^2\times0{,}2\cos66{,}42}{0{,}2(2 + 0{,}2\times50\cos66{,}42)}} = \sqrt{83{,}34} = 9{,}13\ rad/s$

Exercice 259 : On comprime à l'ide d'un solide (S) de masse $m_S = 30\ g$, un ressort de raideur $K = 300\ N/m$ d'une longueur $x_0 = 5\ cm$ et à l'instant $t = 0\ s$, on le libère sans vitesse initiale. Le solide (S) percute une bille (B) de masse $m_b = 10\ g$ placée en B. Les forces de frottements ne sont négligeables sur la piste $BC = L = 50\ cm$.



1) Mouvement du solide sur la piste ABC
a) Calculer l'énergie mécanique E_0 du solide (S) à l'instant $t = 0\ s$. **b) En utilisant la loi de la conversation l'énergie mécanique, déterminer la vitesse v_S du solide (S) au point B juste avant le choc.**

c) Après le choc, la bille (B) borde le plan horizontal BC de $v_B = 7,5\ m/s$ pour arriver au point C avec une vitesse nulle. Déterminer l'intensité f de la force de frottement.

2) La partie CD est un arc de cercle de centre O et de rayon $r = 6\ m$. La bille (B) est repérée par l'angle $\theta = \widehat{MOD}$. On donne $\theta_0 = \widehat{COD} = 60°$.

a) Vérifier que la vitesse $v_M = \sqrt{2gr(\sin\theta_0 - \sin\theta)}$.

b) Donner l'expression de la réaction R_M de la piste sur la bille en fonction de m_b, θ_0, θ et g.

c) Déterminer l'angle θ_1 au point E où la bille quitte le plan CD. Calculer la vitesse v_E.

3) On donne $v_E = 5,9\ m/s$ et $\theta_1 = (\vec{v_E}, Ox) = 35,3°$.

a) Etablir l'équation de la trajectoire de (B) à partir du point D dans le repère $(E; \vec{i}; \vec{j})$.

b) Déterminer les coordonnées du point d'impact I de (B) sur le sol sachant que E est à une hauteur $h = 5\ m$ du sol.

c) Calculer la vitesse de (B) lorsqu'elle arrive au point I.

Correction :

1) a) $E_0 = E_{c0} + E_{Pe0} + E_{PP0} = \frac{1}{2}Kx_0^2 = 0,375\ J$

b) $E_S = E_{cS} + E_{PeS} + E_{PPS} = E_0 \Leftrightarrow v_S = \sqrt{\frac{2E_0}{m_S}} = 5\ m/s$

c) TEC $\quad E_{cC} - E_{cB} = W(\vec{P}) + W(\vec{R})$

$\frac{1}{2}m_b(v_C^2 - v_B^2) = -fL \Leftrightarrow f = \frac{m_b v_B^2}{2L} = 0,56\ N$

2) a) Vérifier que la vitesse $v_M = \sqrt{2gr(\sin\theta_0 - \sin\theta)}$.

TEC $\quad E_{cM} - E_{cC} = W(\vec{P}) + W(\vec{R})$

$\frac{1}{2}m_b(v_M^2 - v_C^2) = m_b g(z_C - z_M) = m_b g(r\sin\theta_0 - r\sin\theta)$

$v_M^2 = 2gr(\sin\theta_0 - \sin\theta) \Leftrightarrow v_M = \sqrt{2gr(\sin\theta_0 - \sin\theta)}$

b) TCI : $\vec{R} + \vec{P} = m_b\vec{a} \Leftrightarrow R_n + P_n = m_b a_n$

Donc $P\sin\theta - R_M = m_b\frac{v_M^2}{r} \Leftrightarrow R_M = m_b g\sin\theta - m_b\frac{v_M^2}{r}$

$R_M = m_b g(3\sin\theta_0 - 2\sin\theta)$

c) $R_E = 0 \Leftrightarrow 3\sin\theta_0 - 2\sin\theta_1 = 0 \Leftrightarrow \sin\theta_1 = \frac{3}{2}\sin\theta_0$

$\sin\theta_1 = \frac{3}{2}\sin\theta_0 \Leftrightarrow \sin\theta_1 = \frac{2}{3}\sin\theta_0 \Leftrightarrow \theta_1 = 35,26°$

$v_E = \sqrt{2gr(\sin\theta_0 - \sin\theta_1)} = 5,88\ m/s.$

3) On donne $v_E = 5,9\ m/s$ et $\theta_1 = (\vec{v_E}, Ox) = 35,3°$.

a) Equation de la trajectoire dans un repère $(E; \vec{i}; \vec{j})$

TCI : $\vec{P} = m_b\vec{a} \Leftrightarrow m_b\vec{g} = m_b\vec{a} \Leftrightarrow \vec{g} = \vec{a}\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = g \end{cases}$

A l'instant $t = 0\ s$, $\vec{v}_E\begin{cases} v_{Ex} = v_E\cos\theta_1 \\ v_{Ey} = v_E\sin\theta_1 \end{cases}$ et $E\begin{cases} x_E = 0 \\ y_E = 0 \end{cases}$

A l'instant t, $\vec{v}\begin{cases} v_x = a_x t + v_{Ex} = v_E\cos\theta_1 \\ v_y = a_y t + v_{Ey} = gt + v_E\sin\theta_1 \end{cases}$ et

$\overrightarrow{EG}\begin{cases} x = \frac{1}{2}a_x t^2 + v_{Ex}t + x_E = v_E t\cos\theta_1 \\ y = \frac{1}{2}a_y t^2 + v_{Ey}t + y_E = \frac{1}{2}gt^2 + v_E t\sin\theta_1 \end{cases}$

$x = v_E t\cos\theta_1 \Leftrightarrow t = \frac{x}{v_E\cos\theta_1}$ OR $y = \frac{1}{2}gt^2 + v_E t\sin\theta_1$

DONC $y = \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_E\cos\theta_1}\right)^2 + v_E\frac{x}{v_E\cos\theta_1}\sin\alpha$

$y = \frac{g}{2v_E^2\cos^2\theta_1}x^2 + x\tan\theta_1$ alors la bille effectue un mouvement parabolique. AN : $y = 0,251x^2 + 0,708x$

b) Point d'impact $I\begin{cases} x_I = ? \\ y_I = h = 5\ m \end{cases}$

$0,251x^2 + 0,708x = 5 \Leftrightarrow x_I = 6,74\ m$

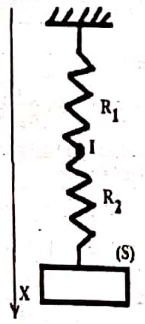
c) la vitesse de (B) lorsqu'elle arrive au point I.

TEC $\quad E_{cI} - E_{cE} = W(\vec{P}) + W(\vec{R})$

$\frac{1}{2}m_b(v_I^2 - v_E^2) = m_b g(z_E - z_I) = m_b gh$

$v_I^2 = 2gh + v_E^2 \Leftrightarrow v_I = \sqrt{2gh + v_E^2} = 11,61\ m/s$

Exercice 260 : On place bout à bout deux ressorts R_1 et R_2 de masses négligeables, d'axe vertical commun. Les raideurs respectives de R_1 et R_2 sont k_1 et k_2. Une masse ponctuelle $m = 0,36\ kg$ est accrochée à l'extrémité inférieure de l'ensemble.



1) Le système est d'abord supposé en équilibre. L'intensité de la pesanteur étant g, montrer que les 2 ressorts ont la même tension, puis déterminer leurs allongements respectifs $\Delta\ell_{01}$ et $\Delta\ell_{02}$ en fonction de m, g, k_1 et k_2.

2) On écarte ensuite verticalement la masse m de sa position d'équilibre et on l'abandonne sans vitesse initiale à elle –même. Elle prend un mouvement oscillatoire. A l'instant t son abscisse est $\overline{OA} = x$, O désignant la position d'équilibre. Les allongements des ressorts à cet instant sont respectivement $\Delta\ell_1 = \Delta\ell_{01} + x_1$ et $\Delta\ell_2 = \Delta\ell_{02} + x_2$.

a) Exprimer x_1 et x_2 en fonction de x, k_1 et k_2.

b) Etablir l'équation différentielle du mouvement. En déduire la nature du mouvement et l'expression de la période T_0.

c) Calculer la période T_0 pour $k_1 = k_2 = 49\ N/m$;

Correction :

1) Le système est d'abord supposé en équilibre

Système I : en équilibre : $\vec{T}_{01} + \vec{T}_{02} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow T_{01x} + T_{02x} = 0 \Leftrightarrow -T_{01} + T_{02} = 0 \Leftrightarrow T_{01} = T_{02}$

Système (S) : en équilibre : $\vec{P} + \vec{T}_{02} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow P_x + T_{02x} = 0 \Leftrightarrow P - T_{02} = 0 \Leftrightarrow P = T_{02}$

RFD : $T_{01} = T_{02} = P = mg$

Les allongements en fonction de m, g, k_1 et k_2

$T_{01} = T_{02} = P = mg = K_1\Delta\ell_{01} = K_2\Delta\ell_{02}$

$K_1\Delta\ell_{01} = mg \Leftrightarrow \Delta\ell_{01} = \frac{mg}{K_1}$ et $K_2\Delta\ell_{02} = mg \Leftrightarrow \Delta\ell_{02} = \frac{mg}{K_2}$

2) Le système est d'abord supposé en mouvement

a) Exprimer x_1 et x_2 en fonction de x, k_1 et k_2.

Système I : en mouvement : $\vec{T}_1 + \vec{T}_2 = m_{ressort}\vec{a} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow T_{1x} + T_{2x} = 0 \Leftrightarrow -T_1 + T_{02} = 0 \Leftrightarrow T_1 = T_2$

$K_1\Delta\ell_1 = K_2\Delta\ell_2 \Leftrightarrow K_1(x_1 + \Delta\ell_{01}) = K_2(x_2 + \Delta\ell_{02})$

$K_1x_1 + K_1\Delta\ell_{01} = K_2x_2 + K_2\Delta\ell_{02} \Leftrightarrow K_1x_1 = K_2x_2$

Or l'ensemble des allongements est $\overline{OA} = x = x_1 + x_2$

Donc $\begin{cases} K_1x_1 = K_2x_2 \\ x = x_1 + x_2 \Leftrightarrow x_2 = x - x_1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$K_1x_1 = K_2(x - x_1) = K_2x - K_2x_1 \Leftrightarrow K_1x_1 + K_2x_1 = K_2x$

$x_1(K_1 + K_2) = K_2x \Leftrightarrow x_1 = \frac{K_2x}{K_1+K_2} = \frac{K_2}{K_1+K_2}x$

$x_2 = x - x_1 = x - \frac{K_2x}{K_1+K_2} = \frac{x(K_1+K_2)-K_2x}{K_1+K_2} = \frac{K_1x}{K_1+K_2} = \frac{K_1}{K_1+K_2}x$

b) L'équation différentielle du mouvement

Système (S) : en mouvement : $\vec{P} + \vec{T}_2 = m\vec{a}$

$\Leftrightarrow P_x + T_{2x} = ma_x \Leftrightarrow P - T_2 = m\ddot{x} \Leftrightarrow m\ddot{x} + T_2 - mg = 0$

$m\ddot{x} + K_2(x_2 + \Delta\ell_{02}) - mg = 0$

$m\ddot{x} + K_2x_2 + K_2\Delta\ell_{02} - mg = 0$

Or $T_{01} = T_{02} = P = mg = K_1\Delta\ell_{01} = K_2\Delta\ell_{02}$ et $x_2 = \frac{K_1}{K_1+K_2}x$

Donc $m\ddot{x} + K_2\frac{K_1}{K_1+K_2}x = 0$ ou encore $\ddot{x} + \frac{K_1K_2}{m(K_1+K_2)}x = 0$

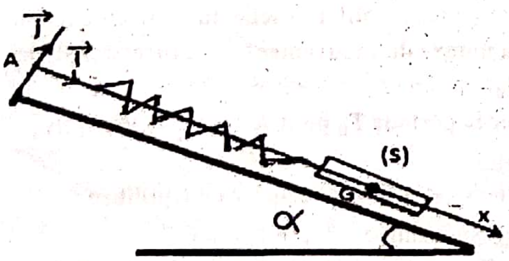
C'est un mouvement rectiligne sinusoïdal.

$\omega_0 = \sqrt{\frac{K_1K_2}{m(K_1+K_2)}} \Leftrightarrow T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m(K_1+K_2)}{K_1K_2}}$

c) Calculer la période T pour $k_1 = k_2 = 49\ N/m$

$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{2mK_1}{K_1K_1}} = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{K_1}} = 2 \times 3{,}14\sqrt{\frac{2\times0{,}36}{49}} = 0{,}76\ s$

Exercice 261 : Un solide (S), de masse $m = 200\ g$ et de centre d'inertie G, peut se déplacer d'un mouvement de translation rectiligne, sans frottement, le long d'un banc à cousin d'air. Celui-ci fait un angle $\alpha = 10°$ avec l'horizontale. Le ressort dont l'axe est parallèle à la direction du banc, a subi un allongement $\Delta\ell_0 = 6\ cm$.



Le solide est attaché à l'extrémité inférieure d'un ressort de masse négligeable, à spires non jointives et à réponse linéaire ; l'autre extrémité du ressort est fixée en A.

1) Le solide (S) étant en équilibre, son centre d'inertie est en G_0. a) Représenter les forces qui s'exercent sur le solide (S). b) Exprimer le coefficient de raideur K du ressort en fonction des données. Calculer sa valeur.

2) On écarte le solide de sa position d'équilibre vers le bas. Son centre d'inertie est alors en G_1. La distance G_0G_1 mesurée le long du banc vaut $d = 5\ cm$. On abandonne le solide (S) sans vitesse à une date que l'on prendra comme origine des temps. La position G_0 sera prise comme origine des abscisses.

a) Etablir l'équation différentielle du mouvement.

b) Déterminer l'équation horaire du mouvement.

3) On écarte maintenant le solide (S) de sa position d'équilibre de $x_0 = 8\ cm$. Puis on le libère en le lançant vers le haut avec une vitesse $v = 0{,}3\ m/s$. Des oscillations prennent alors naissance. Déterminer l'énergie mécanique totale du système (ressort-solide-Terre) à un instant t pendant les oscillations. On prendra l'énergie potentielle de pesanteur nulle au point G_0 (position d'équilibre).

Correction : 1) b) Le solide est en équilibre :

$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T}_0 = \vec{0} \Leftrightarrow R_x + P_x + T_{0x} = 0$

$mg\sin\alpha - K\Delta\ell_0 = 0 \Leftrightarrow K = \frac{mg\sin\alpha}{\Delta\ell_0}$

Le coefficient de raideur $K = \frac{0{,}2\times10\sin10}{0{,}06} = 5{,}78\ N/m$

2) a) Etablir l'équation différentielle du mouvement

Le solide est en mouvement :

$\vec{R} + \vec{P} + \vec{T} = m\vec{a} \Leftrightarrow R_x + P_x + T_x = ma_x$

$mg\sin\alpha - K(x + \Delta\ell_0) = m\ddot{x}$ ou

$m\ddot{x} - mg\sin\alpha + K(x + \Delta\ell_0) = 0$

$m\ddot{x} - mg\sin\alpha + Kx + K\Delta\ell_0 = 0$ Or $mg\sin\alpha = K\Delta\ell_0$

Donc $m\ddot{x} - K\Delta\ell_0 + Kx + K\Delta\ell_0 = 0$ ou $\ddot{x} + \frac{K}{m}x = 0$

b) Déterminer l'équation horaire du mouvement.

Calculons la pulsation propre ω_0 :

$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{5{,}78}{0{,}2}} = \sqrt{28{,}94} = 5{,}38\ rad/s$

Calculons l'amplitude X_m : on sait que $v_0 = 0$

$X_m = \sqrt{d^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}} = \sqrt{d^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2} = \sqrt{d^2} = d = 5 \times 10^{-2}\ m$

Calculons la phase φ

$\cos\varphi = \frac{d}{X_m} \Leftrightarrow \varphi = \cos^{-1}\left(\frac{d}{X_m}\right)$

$\varphi = \cos^{-1}\left(\frac{5\times10^{-2}}{5\times10^{-2}}\right) = \cos^{-1}(1) = 0$

$x = 5 \times 10^{-2}\cos(\omega_0 t) = 5 \times 10^{-2}\cos(5{,}38t)$.

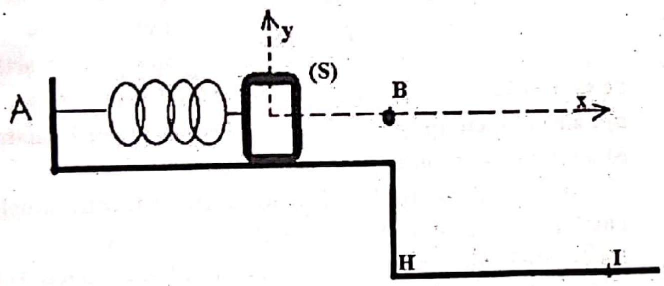
3) l'énergie mécanique totale du système

$E = E_c + E_{pe} + E_{pp} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}K(x_0 + \Delta\ell_0)^2 + mgz$

Or $z = x_0\sin\alpha$, $x_0 = 8\ cm$, $v = 0{,}3\ m/s$ et $\Delta\ell_0 = 6\ cm$.

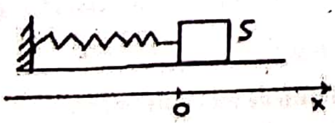
Donc $E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}K(x_0 + \Delta\ell_0)^2 + mgx_0\sin10 = 0{,}09\ J$

Exercice 202 : Un ressort de masse négligeable à spires non jointives de constante de raideur $K = 20\ N.m^{-1}$ est fixé par l'une ses extrémités en A et on accroche à l'autre extrémité un solide (S) de masse $m = 0,2\ Kg$ qui peut se déplacer le long d'une table horizontale.
Le solide (S) est comprimé de sa position d'équilibre en O puis lâché sans vitesse initiale, oscille horizontalement, sans frottement. Le solide passe par le point O avec une vitesse $v_0 = 0,8\ m.s^{-1}$. On donne $BH = h = 1,25\ m$.



1) a) Calculer la compression x_0 du ressort.
b) Déterminer l'énergie mécanique de (S) au point O.
2) Au moment où le solide passe par sa position d'équilibre dans le sens négatif il détache du ressort et poursuit son mouvement suivant OB.
a) Déterminer la valeur de l'accélération du solide (S) sur le trajet $OB = d = 10\ cm$ sachant qu'il arrive en B avec une vitesse $v_B = 0,4\ m.s^{-1}$.
b) Trouver l'intensité de la réaction de la table sur (S).
c) Quelle est la durée du trajet OB ?
3) Le solide (S) quitte la table au point B et tombe en chute libre sur le sol au point I.
a) Établir les équations horaires du mouvement du solide (S) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
b) Établir l'équation cartésienne de la trajectoire du solide (S) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Quelle est sa nature ?
c) Trouver l'abscisse du point I dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
d) Quelle est la durée de la chute ?
e) Déterminer les caractéristiques du vecteur $\vec{v}_I$.

Exercice 203 : Un oscillateur élastique est constitué d'un ressort de constante de raideur $K = 75\ N.m^{-1}$ associé à un solide de masse $m = 450\ g$.

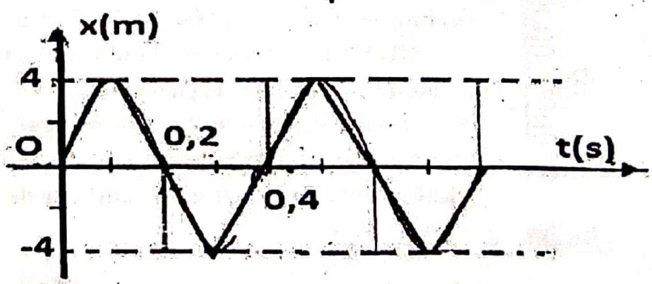


Le solide (S) est comprimé de sa position d'équilibre, d'une distance $a = 7\ cm$ à partir, puis il est abandonné à une vitesse v_0.

1) Montrer que le mouvement du centre d'inertie G du solide (s) obéit, en l'absence de frottements, l'équation différentielle à déterminer.
2) Montrer que l'amplitude est donnée par $X_m = \sqrt{a^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2}$ en utilisant la formule $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$.
3) En déduire l'équation horaire du mouvement du solide pour $v_0 = 0$; $v_0 = -0,7\ m/s$ puis $v_0 = 0,7\ m/s$.
4) Déterminer l'expression de la vitesse maximale, l'accélération maximale et la tension maximale du ressort pour un pendule élastique horizontale.
5) a) Calculer l'énergie mécanique au début de mouvement en associant la question 3).
b) En déduire la vitesse au passage à la position d'équilibre.

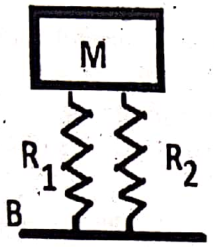
Exercice 264 : Pour le même oscillateur du pendule élastique horizontal, on comprime le ressort-solide (S) de sa position d'équilibre. Soit $m = 200\ g$, $a = 11,2\ cm$ et $v_0 = 0$. 1) Calculer la vitesse maximale du solide. Calculer la valeur de la vitesse du solide lorsque celui-ci s'est déplacé, par rapport à sa position d'équilibre, d'une longueur $b = 5\ cm$.
2) Calculer l'accélération maximale du solide. Calculer la valeur de l'accélération du solide lorsque celui-ci s'est déplacé d'une longueur $c = 7\ cm$, par rapport à sa position d'équilibre.
3) Représenter graphiquement $v = f(t)$ puis $a = f(t)$.

Exercice 265 : L'équation horaire du mouvement sinusoïdal d'un point mobile est représentée selon la figure.
1) Déterminer la pulsation et l'amplitude X_m du mouvement de (s).
2) Etablir l'équation horaire du mouvement du mobile en vrai grandeur.
3) a) Déterminer par le calcul, la position, la vitesse et l'accélération à l'instant $t = \frac{1}{4}T$.



b) Retrouver graphiquement la valeur de la position et indiquer le sens du mouvement.
4) Déterminer la deuxième date de passage à $x = 0$ après le départ en allant dans le sens négatif.

Exercice 266 : La remorque d'un véhicule au repos peut être assimilée au dispositif suivant : un solide de masse $M = 500\ kg$ reposant par l'intermédiaire de deux ressorts identiques de raideur K sur une barre B représentant l'axe des roues de la remorque.



1) En admettant que, sous l'action du solide de masse M, les deux ressorts verticaux sont comprimés de $\Delta\ell = 15\ cm$, quelle est la raideur K du ressort.

2) Lorsque l'on charge la remorque, cela revient à augmenter M de $m = 50\ kg$. Chaque ressort est alors comprimé d'une même quantité supplémentaire x_0. a) Calculer x_0.

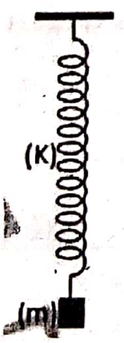
b) A l'instant $t = 0$, la charge m est enlevée. Etablir l'équation différentielle du mouvement de translation de la masse M en prenant un axe x'x orienté vers le bas. Calculer la période propre T_0 des oscillations. L'origine O sur x'x sera prise à la position d'équilibre correspondant à la question 1.

Exercice 267 : En travaux pratiques un groupe d'élèves utilisent deux méthodes différentes pour déterminer la constante de raideur K d'un ressort à spires non jointives.

1. La méthode statique :

L'extrémité supérieure du ressort est fixée. A son extrémité libre, sont suspendues successivement des masses de différentes valeurs (figure a). Pour chaque masse m l'allongement Δl du ressort est mesuré à l'aide d'une règle (non représentée sur la figure). Le tableau de valeurs suivant est obtenu :

m (kg)	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
Δl (cm)	2,5	5,0	7,5	10	12,4	15,1	17,5	19,8



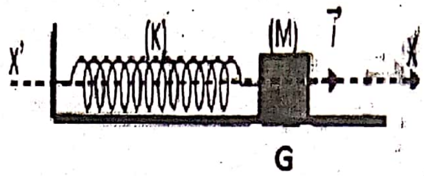
a) Tracer le graphe de l'allongement Δl en fonction de la masse m. En déduire la relation numérique entre Δl et m.

b) Sur un schéma, représenter les forces s'exerçant sur la masse m. Traduire alors la condition d'équilibre et en déduire l'expression de K en fonction de m, Δl et l'intensité de la pesanteur g.

c) En déduire la valeur de la constante de raideur K.

2. La méthode dynamique : Dans cette partie le ressort précédent est utilisé pour réaliser un oscillateur horizontal. Le solide de masse M, de valeur inconnue, solidairement lié au ressort, se déplace sur un support horizontal (figure b).

Tous les frottements sont négligés. On utilise un axe X'X horizontal orienté par le vecteur unitaire $\vec{i}$ et on repère la position du centre d'inertie G du solide par son abscisse X sur cet axe. A l'équilibre le ressort n'est ni comprimé, ni allongé et l'abscisse X est nulle (le point G est confondu avec l'origine de l'axe X'X). A un instant choisi comme origine des temps, la masse est écartée de sa position d'équilibre, et lâchée sans vitesse initiale.



a) Faire l'inventaire des forces qui s'exercent sur la masse M à un instant t donné et les représenter.

b) Par application du théorème du centre d'inertie appelé aussi deuxième loi de Newton, établir l'équation différentielle du mouvement. En déduire l'expression de la période T0 des oscillations en fonction de la constante de raideur K et de M.

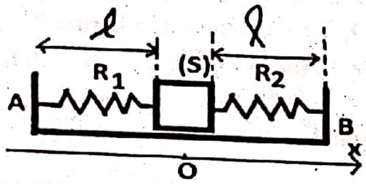
c) La mesure de 10 oscillations donne 10,6 s. Calculer T_0.

d) L'objet précédent de masse M est surchargé d'une masse $m_1 = 20$ g fixée sur lui. Le système est à nouveau mis en oscillation comme précédemment. Cette fois la durée de 10 oscillations donne 10,7 s. Exprimer la nouvelle période T en fonction de K, m1 et M.

e) En déduire l'expression de K en fonction de T_0, T et m1.

f) Calculer K. Comparer avec le résultat obtenu par la méthode statique. Expliquer

Exercice 268 : Deux ressorts identiques, de masse négligeable, sont accrochés à un solide autoporteur S qui repose sur une table parfaitement plane et horizontale. Les deux ressorts sont fixés en A et B aux extrémités de la table. On tire le solide S suivant la droite AB, d'une distance $d = 12,5\ cm$ et on le lâche sans vitesse. On donne masse du solide autoporteur $M = 560\ g$; longueur à vide des ressorts $\ell_0 = 15\ cm$; longueur des ressorts lorsqu'ils sont accrochés à S $\ell = 30cm$ et raideur d'un ressort $K = 7,2\ N/m$.



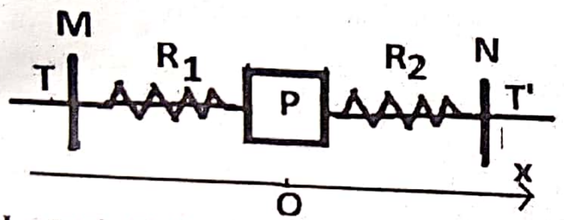
1) Etablir l'équation différentielle du mouvement.

2) Calculer la période des oscillations du solide S.

3) Calculer sa vitesse maximale.

4) Calculer l'énergie mécanique de l'oscillateur.

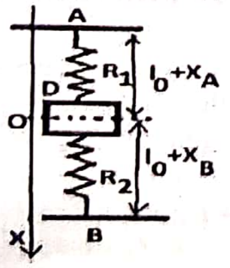
Exercice 269 : Un palet (P) à cousin d'air assimilé à un point matériel de masse m = 500 g, est percé d'un trou à travers lequel passe une tige horizontale TT'. Le palet est accroché à deux ressorts identiques R_1 et R_2 de masse négligeable, enfilés autour de la tige TT' et tendus entre deux points M et N. Les deux ressorts ont même constante de raideur $k_1 = k_2 = k = 10\ N.m^{-1}$ et même longueur à vide $\ell_0 = 18$ cm.



Les extrémités M et N des deux ressorts sont fixés. Les ressorts ont alors pour longueur $\ell_1 = \ell_2 = 25\ cm$ lorsque le palet est en équilibre. On écarte alors le palet P de sa position d'équilibre dans la direction MN de $x_0 = +2\ cm$, puis on l'abandonne à l'instant t = 0 avec une vitesse de valeur algébrique $v_0 = -0{,}2\ m/s$. On rapporte le mouvement du palet au repère OX, l'origine O du repère, correspond à la position du palet lorsque le système est en équilibre. Les frottements sont supposés négligeables.

1) Donner, à une date t quelconque, l'expression de l'allongement de chacun des ressorts en fonction de l'abscisse x de P à cette date.
2) Montrer que l'équation différentielle du mouvement de P s'écrit $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2K}{m}x = 0$.
3) Etablir l'équation horaire du mouvement de P. Calculer la période T_0 du mouvement.

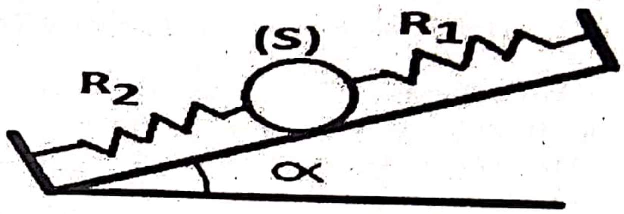
Exercice 270 : L'origine des énergies potentielles de pesanteur sera prise à la position du disque à l'équilibre.



Deux ressorts identiques de longueur à vide $\ell_0 = 15\ cm$, de raideur $K = 20\ N/m$, sont tendus entre deux points A et B distants de L. Un disque D, de masse $m = 0{,}1\ kg$ et d'épaisseur négligeable, est fixé entre ces ressorts.

1) Déterminer les longueurs des deux ressorts d'équilibre.
2) Le disque D est écarté de sa position d'équilibre verticalement, vers le bas, de longueur $d = 3\ cm$.
a) Par une étude dynamique, donner l'équation différentielle du mouvement (on choisira l'axe x'x comme sur la figure, son origine O avec la position d'équilibre.)
b) En déduire l'équation horaire du mouvement de D.
c) Retrouver l'équation horaire par une étude énergétique.

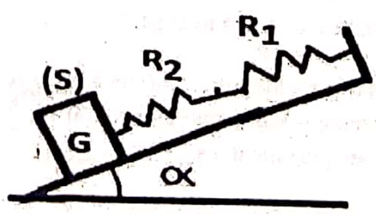
Exercice 271 : Un solide (S) accroché à 2 ressorts R_1 et R_2 de masses négligeables, d'axe vertical commun, est astreint à un mouvement de translation sur la ligne de plus grande pente d'un plan, incliné de l'angle $\alpha = 30°$ sur l'horizontale. Les frottements sont négligeables. La longueur à vide des ressorts R_1 et R_2 est respectivement ℓ_{01} et ℓ_{02} et la longueur des 2 ressort-solide à l'équilibre est respectivement ℓ_1 et ℓ_2.



1) Le solide (S) étant en équilibre, son centre d'inertie est en G_0. Le système est d'abord supposé en équilibre et soit les allongements respectifs de R_1 et R_2 sont x_{01} et x_{02}. Trouver une relation entre x_{01}, x_{02}, m, g, k_1 et k_2 puis entre ℓ_{01}, ℓ_1, ℓ_{02}, ℓ_2, m, g, k_1 et k_2.

2) les deux ressorts sont identiques. On écarte le solide de sa position d'équilibre vers le bas. Son centre d'inertie est alors en G_1. La distance G_0G_1 mesurée le long du banc vaut $d = 8\ cm$. On abandonne le solide à une vitesse $V = 0{,}3\ m/s$, à une date que l'on prendra comme origine des temps. La position G_0 sera prise comme origine des abscisses.
a) Etablir l'équation différentielle du mouvement. On donne $m = 500\ g$ et $k_1 = 50\ N/m$.
b) Déterminer l'équation horaire du mouvement.
3) a) Déterminer l'énergie mécanique totale du système (ressort-solide-Terre) à un instant t pendant les oscillations. On prendra l'énergie potentielle de pesanteur nulle au point G_0.
b) En déduire l'équation différentielle du mouvement et écrire l'équation horaire du mouvement du centre d'inertie G de (S) ; dans le repère $(O, \vec{i})$, l'instant du début des oscillations étant pris comme origine des temps.

Exercice 272 : On place bout à bout deux ressorts R_1 et R_2 de masses négligeables, d'axe vertical commun, est astreint à un mouvement de translation sur la ligne de plus grande pente d'un plan, incliné de l'angle $\alpha = 25°$ sur l'horizontale.



Les frottements sont négligeables et on donne : $g = 10\ m.s^{-2}$. La longueur à vide des ressorts R_1 et

R_2 est respectivement ℓ_{01} et ℓ_{02}. A partir de la position d'équilibre du système ressort-solide, on déplace le solide (S) de masse $m = 10\ g$ vers le bas de longueur $d = 5\ cm$ et on le lâche sans vitesse initiale. Elle prend un mouvement oscillatoire.

1) A l'instant t son abscisse est $\overline{OM} = X$, O désignant la position d'équilibre. Donner l'expression des allongements des ressorts R_1 et R_2 à cet instant sont respectivement X_1 et X_2 en fonction de K_1 et K_2 et du déplacement X de (S).

2) Etablir l'équation différentielle qui régit le mouvement de (S). Quelle est la nature de son mouvement ?

3) Le solide effectue 5 oscillations en 1,49 secondes.

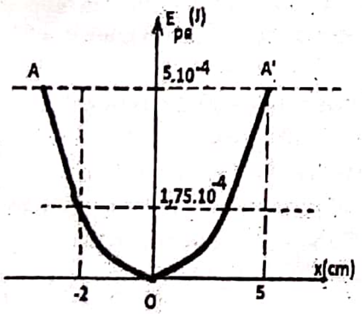
a) Déterminer l'équation horaire du mouvement.

b) Donner la représentation graphique $X = f(t)$ sur 2 périodes.

4) La raideur du ressort R_2 est $K_2 = 50\ N/m$. Calculer la raideur K_1 du ressort R_1.

5) Calculer l'énergie mécanique d'oscillation, du système ressort-solide sachant que l'allongement total des ressorts à l'équilibre est $X_0 = \frac{1}{2}d$.

Exercice 273 : On constitue un pendule élastique horizontale à partir d'un pistolet à flèches. il est constitué d'un ressort de masse négligeable, de longueur naturelle $\ell_0 = 6\ cm$ et de raideur K.



1) La figure donne les énergies potentielle et cinétique d'un pistolet à flèches en fonction de l'écart x par rapport à sa position d'équilibre.

a) Montrer que le système effectue des oscillations.

b) En déduire l'amplitude du mouvement.

c) Déterminer la raideur du ressort.

d) Donner la valeur de l'énergie cinétique pour $x = 5\ cm$ et $x = -2\ cm$.

2) Calculer la vitesse avec laquelle la flèche sort du canon de l' « arme » sachant que sa masse vaut $M = 15\ g$ et qu'on suppose tous les frottements négligeables.

Exercice 274 : Une masse de 500 g suspendue à un ressort est animée d'un mouvement vibratoire sinusoïdal d'amplitude 10 cm et de période 0,5 s.

1) Calculez sa vitesse :

a) lorsqu'elle passe par la position d'équilibre prise comme origine des élongations (sens positif);

b) lorsqu'elle se trouve à l'une des extrémités de la trajectoire (y=A);

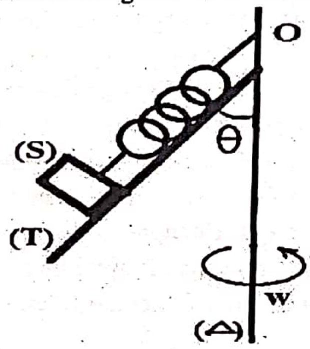
c) lorsqu'elle se trouve à 2 cm de l'origine en se mouvant dans le sens négatif.

2) Calculez l'accélération aux trois positions précédentes.

3) Calculez la tension aux mêmes positions.

4) Calculez l'énergie cinétique maximale de cette masse et son énergie potentielle aux trois positions citées.

Exercice 275 : Le système suivant est constitué d'une glissière T soudée à un bâti mobile autour d'un axe vertical (Δ). Un solide (S) de masse $m = 200\ g$ peut glisser sur la glissière sans frottement à l'aide d'un ressort dont sa longueur à vide est $\ell_0 = 20\ cm$.



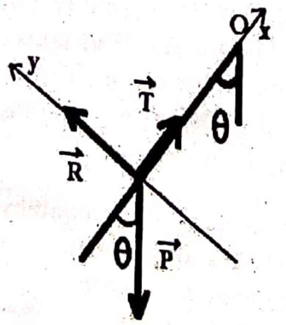
1) Le système est immobile. L'allongement du ressort est de 10 cm pour un angle $\theta = 60°$. Calculer la raideur K et la réaction $\vec{R}_1$ de la glissière sur le solide (S).

2) Le système tourne autour de l'axe (Δ) à la vitesse angulaire $\omega = 4\ rad/s$.

a) Déterminer la longueur ℓ_2 du ressort et la réaction $\vec{R}_2$ de la glissière sur le solide (S) lorsque celui-ci a atteint sa position d'équilibre.

b) Montrer que le solide (S) décolle de la glissière lorsque ω est supérieure à une valeur ω_0 que l'on calculera.

Correction :



1) la raideur K et la réaction $\vec{R}_1$ de la glissière sur (S)

Le solide est en équilibre :

$\vec{P} + \vec{R}_1 + \vec{T}_1 = \vec{0} \Leftrightarrow$

$R_{1x} + P_x + T_{1x} = 0$

$-mg\cos\theta + K\Delta\ell_0 = 0 \Leftrightarrow$

$K = \frac{mg\cos\theta}{\Delta\ell_0} = 10\ N/m$

$R_1 - mg\sin\theta = 0 \Leftrightarrow$

$R_1 = mg\sin\theta = 1{,}73\ N$

2) vitesse angulaire $\omega = 4\ rad/s$.

a) la longueur ℓ_2 du ressort

Le système est en rotation :

$\vec{p} + \vec{R}_2 + \vec{T}_2 = m\vec{a} \Leftrightarrow R_{2x} + P_x + T_{2x} = ma_x$

$K(\ell_2 - \ell_0) - mg\cos\theta = m\ell_2 \sin^2\theta \Leftrightarrow$

$\ell_2 = \frac{mg\cos\theta + K\ell_0}{K - m\omega^2 \sin^2\theta} = 39{,}5\ cm$

La réaction $\vec{R}_2$ de la glissière sur le solide (S)

$R_2 = mg\sin\theta - m\omega^2\ell_2 \sin\theta\cos\theta = 1{,}18\ N$

b) Montrer que le solide (S) décolle de la glissière lorsque ω est supérieure à une valeur ω_0 que l'on calculera.

$R_2 > 0 \Leftrightarrow mg\sin\theta - m\omega_0^2\ell_2 \sin\theta\cos\theta = 0 \Leftrightarrow$

$m\sin\theta\,(g - \omega_0^2\ell_2\cos\theta) = 0 \Leftrightarrow \omega_0^2\ell_2\cos\theta = g$

Or $\ell_2 = \frac{mg\cos\theta + K\ell_0}{K - m\omega_0^2\sin^2\theta} \Leftrightarrow \omega_0^2\,\frac{mg\cos\theta + K\ell_0}{K - m\omega_0^2\sin^2\theta}\cos\theta = g$

$\omega_0^2(mg\cos\theta + K\ell_0)\cos\theta = g(K - m\omega_0^2\sin^2\theta) \Leftrightarrow$

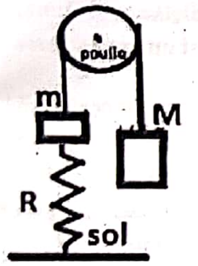
$\omega_0^2(mg\cos\theta + K\ell_0)\cos\theta + gm\omega_0^2\sin^2\theta = gK \Leftrightarrow$

$\omega_0^2 = \frac{gK}{(mg\cos\theta + K\ell_0)\cos\theta + gm\sin^2\theta} = \frac{gK}{K\ell_0\cos\theta + mg} \Leftrightarrow$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{gK}{K\ell_0\cos\theta + mg}} = 5{,}8\ rad/s.$

Pour $\omega > \omega_0$, le solide (S) décolle de la glissière.

Exercice 276 : 1) Lorsque le système solide (S_1) –ressort R, est à l'équilibre chez un pendule élastique horizontal, le ressort R a un allongement $\Delta\ell = 5\ cm$. Calculer la constante de raideur K pour $m = 100\ g$.



2) Les solides (S_1) et (S_2) de masses respectives m et $M = 2m$ sont reliées un fil inextensible et de masse négligeable. On néglige également la masse de la poulie et les frottements. Le même ressort R, à spires non jointives, parfaitement élastique, de constante de raideur K, de masse négligeable est relié au solide (S_1) par l'une ses extrémités. L'autre extrémité est fixée à un support immobile. A partir de la position d'équilibre, on déplace le solide (S_2) de 2 cm vers le bas et on l'abandonne sans vitesse initiale à un instant qui sera considéré comme origine des temps.

a) Représenter les forces qui s'exercent sur les solides (S_1) et (S_2). b) Etablir l'équation différentielle du mouvement des deux solides (S_1) et (S_2). Préciser la période des oscillations. c) Déduire l'équation horaire du mouvement des deux solides (S_1) et (S_2).

Exercice 277 : Une petite masse de 100 g est animée d'un mouvement de translation rectiligne sinusoïdal autour d'un point fixe O. Quand la masse se trouve à 1 cm de O, la tension a une intensité de 36 10^{-3} N.

1) Déterminez la période du mouvement ainsi produit. On prendra comme point origine le point O et comme instant initial celui où le mobile est en O, animé d'une vitesse de 30 cm/s dans le sens adopté comme positif sur la trajectoire.

2) Ecrivez les équations générales donnant la position du mobile, sa vitesse, son accélération. 3) Déterminez :

a) l'instant où le mobile passe pour la première fois au point d'abscisse -3 cm, en se mouvant dans le sens négatif;

b) l'énergie cinétique et l'énergie potentielle que possède le mobile à cet instant.

Réponse : 1,047 s ; y=0,05 sin 6t ; v=0,3 cos 6t ; a=-1,8 sin 6t ; f=-0,18 sin 6t ; t=0,63 s ; Ec=288 10^{-5} J ; Ep=162 10^{-5} J

Exercice 278 : On se propose de déterminer expérimentalement la raideur d'un ressort à spires non jointives de masse négligeable du pendule élastique vertical à l'aide d'un chronomètre et d'une série de masse marquées. Pour chaque masse suspendue à l'extrémité libre du ressort, on mesure la duré t de 10 oscillations. On a préalablement vérifié que la période T(s) est indépendante de l'amplitude des oscillations. Les résultats obtenus sont donnés dans le tableau suivant :

Masse (g)	50	75	100	125	150	200
$t = 10T$	5,2	6,7	7,5	8,3	9,2	10,7
$T^2(s^2)$						
$T^2/M(S.I)$						

1) Compléter le tableau ci-dessus et faire la représentation graphique de la fonction $T^2 = f(M)$.

2) La masse étant déplacée de sa position d'équilibre.

a) Appliquer la relation fondamentale de la dynamique du système et établir l'expression de la période T en fonction de M et de raideur K du ressort.

b) Le graphe obtenu à la question 1), est-il en accord avec cette expression de T.

3) Déterminer graphiquement la raideur K du ressort.

4) Le même ressort est aussi utilisé pour une autre expérience. Un solide (S) de masse m accroché à un ressort où il est astreint à un mouvement de translation sur la ligne de plus grande pente d'un plan, incliné de l'angle $\alpha = 28°$ sur l'horizontale. A partir de la position d'équilibre, on déplace le solide vers le bas de 0,5 cm et on le lâche sans vitesse initiale. Le ressort a une longueur à vide $\ell_0 = 16\ cm$ et à l'équilibre ressort-solide la longueur est $\ell = 29{,}6\ cm$. Les frottements sont négligeables.

a) Calculer la masse du solide (S).

b) On comprime le solide (S) à partir de sa position d'équilibre, d'une longueur $a = 7\ cm$ et on le lâche sans vitesse. Donner l'équation horaire du mouvement du solide (S), en précisant bien les origines spatiale et temporelle utilisées. Calculer la pulsation propre puis la fréquence propre de l'oscillateur

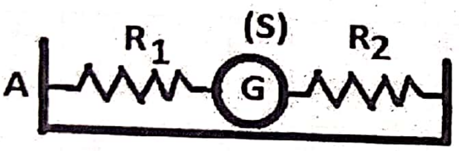
c) Déterminer les énergies cinétique et potentielle de l'oscillateur à l'instant $t = 0$ puis à l'instant t.

d) En déduire l'énergie du système à l'instant $t = 0$ puis à l'instant t. Conclure.

e) Montrer que l'énergie mécanique est constante. Calculer sa valeur numérique.

f) A partir de l'expression de l'énergie totale à l'instant t, montrer que le mouvement du centre d'inertie G du solide (S) obéit, en l'absence de frottements, l'équation différentielle à déterminer.

Exercice 279 : Une sphère (S) de masse $m = 700\ g$ et de rayon $r = 5\ cm$ placé sur une table horizontale à cousin d'air est relié deux ressorts R_1 et R_2 comme l'indique la figure. Ces ressorts ont une longueur à vide $\ell_0 = 20\ cm$ et s'allonge de 4 cm sous l'action d'une force de 1 N. La distance est $D = AB = 70\ cm$.



1) Préciser quelle est, à l'équilibre, la position de G, centre d'inertie du mobile. Calculer la valeur $\Delta\ell$ de l'allongement de chaque ressort à l'équilibre.

2) On écarte la sphère (S) de sa position d'équilibre de $d = 5\ cm$ vers A, dans la direction AB et l'on abandonne sans vitesse initiale. Il prend un mouvement oscillatoire. Exprimer et calculer la pulsation et la période du mouvement.

3) Sachant qu'à $t = 0$, G est à 2 cm de sa position d'équilibre vers B et se déplace vers A, donner l'expression qui permet de situer G à chaque date.

4) Le système (sphère, R_1 et R_2) est conservatif. Exprimer son énergie mécanique à une date t quelconque et retrouver l'équation différentielle de la question 2).

Exercice 280 : On considère un pendule élastique, de masse m et de raideur K, mobile sans frottement sur un axe horizontal $(A, \vec{i})$. La figure donne l'énergie mécanique E_m et l'énergie potentielle E_p du système en fonction de l'abscisse x.

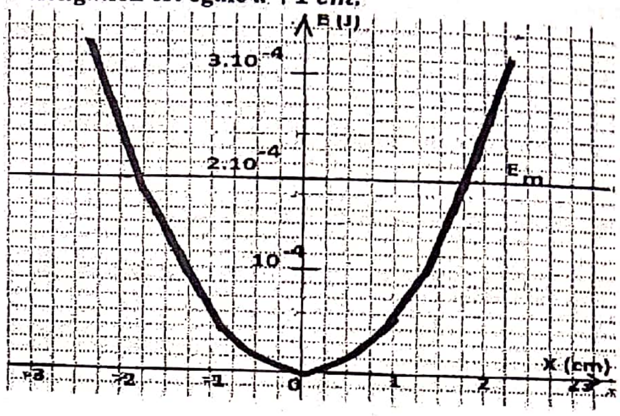
1) Montrer que le système effectue des oscillations.

2) En déduire l'amplitude du mouvement.

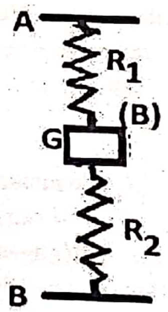
3) Déterminer la raideur du ressort.

4) Donner la valeur de l'énergie cinétique pour $x = 0$ et $x = -2\ cm$.

5) La période des oscillations est égale à $0,628\ s$. Déterminer la vitesse de l'extrémité du ressort lorsque l'élongation est égale à $+1\ cm$.



Exercice 281 : Une barre (B) de masse $m = 320\ g$ est accrochée à 2 ressorts R_1 et R_2 de masses négligeables, d'axe vertical commun et de constante de raideur $k = 64\ N/m$. Les frottements sont négligeables. La distance est $D = AB = 50\ cm$.



1) Déterminer la distance AG lorsque la barre est au repos

2) On exercice sur une barra (B) une forcer verticale, dirigée vers le bas qui l'écarte de sa position d'équilibre d'une longueur $a = 1\ cm$. A cet instant, pris comme origine des temps, on abandonne la barre (B) à une vitesse $v_0 = 1 m/s$.

a) Déterminer la période de cet oscillateur et montrer que ce système est équivalent à un ressort unique de constante de raideur K que l'on calculera.

b) Donner l'équation horaire du mouvement de (B).

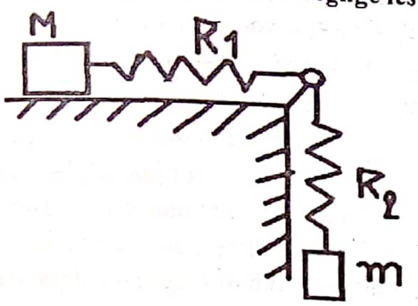
c) Déterminer les énergies cinétique et potentielle de l'oscillateur à l'instant $t = 0$ puis à l'instant t.

d) En déduire l'énergie du système à l'instant $t = 0$ puis à l'instant t. Conclure.

e) Montrer que l'énergie mécanique est constante. Calculer sa valeur numérique.

f) A partir de l'expression de l'énergie totale à l'instant t, montrer que le mouvement du centre d'inertie G de la barre (B) obéit, en l'absence de frottements, l'équation différentielle à déterminer.

Exercice 282 : une brique 1 de masse $M = 5\ kg$, posée sur une table horizontale est entrainée par l'intermédiaire d'un ressort R_1 de masse négligeable par une charge 2 de masse $m = 2\ kg$ d'un ressort R_2 de masse négligeable, abandonnée sans vitesse. On néglige les frottements.



1) Faire le bilan de toutes les forces qui s'exercent : sur la brique 1 et sur la charge 2.

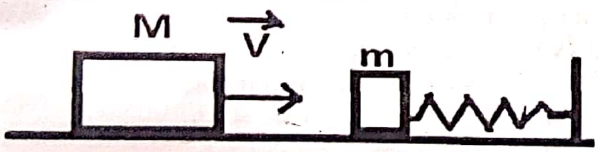
2) En appliquant le TCI sur le solide 1 puis sur 2, trouver l'exprimer l'accélération a de la brique en fonction de M, m, et g.

3) En appliquant le TEC sur le solide 1 puis sur 2, trouver l'exprimer l'accélération a de la brique en fonction de M, m, et g. Calculer a.

4) Exprimer la tension T du fil de la brique en fonction de M, m et g. Calculer T.

5) A la date $t = 0$, la charge 2 est située à 1 m au-dessous du sol et sa vitesse v_0 est nulle. Au bout de combien de temps la charge 2 touche-t-elle le sol ? Quelle est alors sa vitesse ?

Exercice 283 : Une masse M vient frapper, avec une vitesse $\vec{v}$, un butoir constitué par un bloc métallique de masse m auquel est fixée une des extrémités d'un ressort élastique, horizontal, de coefficient de raideur k, dont les spires restent constamment non jointives. L'autre extrémité du ressort est attachée au bâti fixe de l'appareil. Le bloc métallique qui forme le butoir est guidé par des rails sur lesquels il glisse sans frottement.



1) Quelles sont, immédiatement après le choc, les vitesses du chariot et du bloc métallique constituant le butoir ? On néglige la masse du ressort et on admet que le choc étant parfaitement élastique, il se fait avec conservation de l'énergie cinétique. A.N. : v = 5 m.s^{-1} ; M = 10 kg ; m = 5 kg.

2) Si aucun autre choc ne se produisait, quelle serait la nature du mouvement pris par le butoir après ce premier choc ? Etablir son équation horaire.

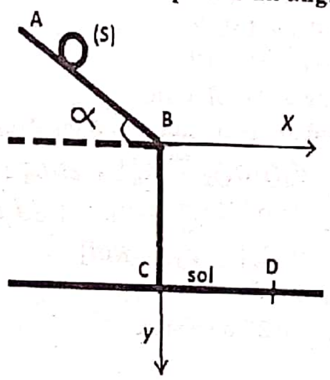
3) Déterminer la période et l'amplitude correspondante.
A.N. : k = 40.10^3 N.m^{-1}

Exercice 284 : Un objet de masse m = 100g est suspendu à un ressort de longueur à ordre l_0 = 20cm et de raideur k = 20 N.m^{-1} ; lui-même placé horizontalement dans un véhicule.

1) Le véhicule roulant à la vitesse v = 72km h^{-1} ralenti et s'immobilise sur une distance x = 100m. Déterminer
a) l'accélération du mouvement
b) la tension et la longueur du ressort
c) l'intensité de la force de freinage

2) Le véhicule aborde une côte à 30%. Calculer l'allongement du ressort si le véhicule accéléré dans la montée ; l'accélération étant de 2m.s^{-2} et g = 10m.s^{-2}. Masse du véhicule M = 10^{3}kg

Exercice 285 : Une bille (S) de masse $m = 200\ g$, de dimensions négligeables, est abandonné en A sans vitesse initiale sur un plan d'un angle $\alpha = 20°$ sur l'horizontale.



Sur la piste AB, la bille (S) est soumise à une force de frottement $\vec{f}$ constante et opposée au vecteur vitesse. Le solide (S) quitte la piste AB au point B avec la vitesse $\vec{v}_B$ de valeur 3,5 m/s.

1) a) En appliquant TEC, déterminer l'expression de l'accélération a en fonction de l'intensité de la pesanteur g, de f et de l'angle α.
b) A l'aide du théorème de l'énergie cinétique, calculer la valeur de f puis l'accélération a.
c) Calculer la date t_B à laquelle la bille (S) passe par B.

2) La bille (S) quitte le plan incliné au point B pour se mettre en chute libre sans frottement.
a) Etablir l'équation de la trajectoire du centre d'inertie de (S) dans le repère $(B;\ \vec{i}, \vec{j})$. b) Montrer que la trajectoire est une parabole d'équation à déterminer.
c) Déterminer le point d'impact D bille (S) sur le plan horizontal $BC = 2\ m$. Calculer v_D.
d) Quelle est la durée du trajet BD effectuée par la bille pour atteindre le sol ?

D'après Ibn Mas'ud (RA), le Prophète (SAW) disait :

« Seigneur Dieu ! Je te demande la bonne direction, Ta crainte, la pureté de l'âme et la richesse (du cœur) ».

(Rapporté par Mouslim)

Exercice 286 : On dispose d'une solution de nitrate de potassium (KNO_3) à 0,5 mol/L ; d'une solution de nitrate de calcium $C_a(NO_3)_2$ à 0,8 mol/L ; d'une solution de chlorure de potassium (KCl) à 1 mol/L et du chlorure de magnésium cristallisé de formule $M_gCl_2, 6H_2O$. On souhaite préparer 1 litre de solution contenant les ions $M_g^{2+}, C_a^{2+}, K^+, NO_3^-$ et Cl^- tels que :

$[M_g^{2+}] = 0,2\ mol/L$; $[C_a^{2+}] = 0,1\ mol/L$;
$[K^+] = 0,25\ mol/L$ et $[NO_3^-] = 0,25\ mol/L$.

1) Ecrivez les équations bilans de dissolution de KNO_3, $C_a(NO_3)_2$, KCl, $M_gCl_2, 6H_2O$ dans l'eau.
2) Déterminer v_1, v_2, v_3 les volumes respectifs des solutions de KNO_3, $C_a(NO_3)_2$, KCl et la masse m de $M_gCl_2, 6H_2O$ à mélanger pour préparer cette solution que l'on complète à 1L avec de l'eau distillée.
3) Calculer la concentration des ions Cl^-.
4) Vérifier l'électroneutralité de la solution.

Correction : 1) Equations bilans de dissolution dans l'eau :

$KNO_3 \xrightarrow{eau} K^+ + NO_3^-$; $C_a(NO_3)_2 \xrightarrow{eau} C_a^{2+} + 2NO_3^-$;
$KCl \xrightarrow{eau} K^+ + Cl^-$; $M_gCl_2, 6H_2O \xrightarrow{eau} M_g^{2+} + 2Cl^- + 6H_2O$.

2) $c_1 = [KNO_3]$, $c_2 = [C_a(NO_3)_2]$, $c_3 = [KCl]$

$v = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_e = 1\ L$

$[K^+] = \frac{n_1+n_3}{v} = c_1v_1 + c_3v_3 = 0,25$ ou encore

$0,5v_1 + v_3 = 0,25$

$[NO_3^-] = \frac{n_1+2n_2}{v} = c_1v_1 + 2c_2v_2 = 0,25$ ou encore

$0,5v_1 + 1,6v_2 = 0,25$

$[C_a^{2+}] = \frac{n_2}{v} = c_2v_2 = 0,1 \Leftrightarrow v_2 = \frac{0,1}{c_2} = \frac{0,1}{0,8} = 0,125\ L$

$0,5v_1 + 1,6v_2 = 0,25 \Leftrightarrow v_1 = \frac{0,05}{0,5} = 0,1\ L$

$0,5v_1 + v_3 = 0,25 \Leftrightarrow v_3 = 0,25 - 0,5 \times 0,1 = 0,2\ L$

Masse m de $M_gCl_2, 6H_2O$ à mélanger

$M_gCl_2, 6H_2O \xrightarrow{eau} M_g^{2+} + 2Cl^- + 6H_2O$

$M(M_gCl_2, 6H_2O) = 24,3 + 71 + 6 \times 18 = 203,3\ g/mol$

Bilan molaire : $n(M_g^{2+}) = n(M_gCl_2, 6H_2O) = 0,2v = \frac{m}{203,3}$

$m(M_gCl_2, 6H_2O) = 203,3 \times 0,2 = 40,66\ g.$

3) Calculer la concentration des ions Cl^-.

$[Cl^-] = \frac{n_3+2n_4}{v} = c_3v_3 + 2c_4v_4 = 0,6\ mol/L$

4) Vérifier l'électroneutralité de la solution

$[Cl^-] + [NO_3^-] = 0,85\ mol/L$

$[K^+] + 2[C_a^{2+}] + 2[M_g^{2+}] = 0,85\ mol/L$

Alors $[Cl^-] + [NO_3^-] = [K^+] + 2[C_a^{2+}] + 2[M_g^{2+}]$.

Exercice 287 : La température est 25° C. Diallo mélange les solutions ioniques suivantes :

- Solution S_1 de sulfate de potassium K_2SO_4 de concentration $c_1 = 0,15\ mol/l$ et volume $v_1 = 400\ ml$;
- Solution S_2 de nitrate de potassium KNO_3 de concentration $c_2 = 0,2\ mol/l$ et volume $v_2 = 100\ ml$;
- Solution S_3 de carbonate de potassium K_2CO_3 de concentration $c_3 = 0,2\ mol/l$ et volume $v_3 = 200\ ml$;
- Solution S_4 de sulfate d'aluminium $Al_2(SO_4)_3$ de concentration $c_4 = 0,02\ mol/l$ et volume $v_4 = 300\ ml$.

1) Ecrire l'équation-bilan de dissolution de chaque composé ionique. Faire le bilan des espèces chimiques présentes en solution.
2) Calculer la quantité de chaque ion dans la solution obtenue.
3) Calculer la concentration molaire de chaque ion dans la solution obtenue.
4) Vérifier que cette solution est électriquement neutre. En déduire le pH du mélange.

Correction :

1) Equation-bilan de dissolution de chaque composé

$K_2SO_4 \xrightarrow{eau} 2K^+ + SO_4^{2-}$ $c_1 = [K_2SO_4]$

$KNO_3 \xrightarrow{eau} K^+ + NO_3^-$ $c_2 = [KNO_3]$

$K_2CO_3 \xrightarrow{eau} 2K^+ + CO_3^{2-}$ $c_3 = [K_2CO_3]$

$Al_2(SO_4)_3 \xrightarrow{eau} 2Al^{3+} + 3SO_4^{2-}$ $c_4 = [Al_2(SO_4)_3]$.

Le bilan des espèces chimiques présentes en solution est $K^+, SO_4^{2-}, NO_3^-, CO_3^{2-}$ et Al^{3+}.

2) La quantité de chaque ion dans la solution obtenue.

$n(K_2SO_4) = n_1 = c_1v_1 = 0,15 \times 0,4 = 0,06\ mol/L$

$n(KNO_3) = n_2 = c_2v_2 = 0,2 \times 0,1 = 0,02\ mol/L$

$n(K_2CO_3) = n_3 = c_3v_3 = 0,2 \times 0,2 = 0,04\ mol/L$

$n(Al_2(SO_4)_3) = n_4 = c_4v_4 = 0,02 \times 0,3 = 0,006\ mol/L$

3) Concentration molaire de chaque ion

$v = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 1000\ mL = 1\ L$

$[K^+] = \frac{2n_1+n_2+2n_3}{v} = \frac{0,22}{1} = 0,22\ mol/L$

$[SO_4^{2-}] = \frac{n_1+3n_4}{v} = \frac{0,078}{1} = 0,078\ mol/L$

$[NO_3^-] = \frac{n_2}{v} = \frac{0,02}{1} = 0,02\ mol/L$

$[CO_3^{2-}] = \frac{n_3}{v} = \frac{0,04}{1} = 0,04\ mol/L$

$[Al^{3+}] = \frac{2n_4}{v} = \frac{0,012}{1} = 0,012\ mol/L.$

4) Vérifier que cette solution est électriquement neutre.

$[K^+] + 3[Al^{3+}] = 0,256\ mol/L$

$2[SO_4^{2-}] + [NO_3^-] + 2[CO_3^{2-}] = 0,256\ mol/L$

Alors $[K^+] + 3[Al^{3+}] = 2[SO_4^{2-}] + [NO_3^-] + 2[CO_3^{2-}]$.

Le pH du mélange est 7.

Exercice 288 : A 80°C, on donne $K_e = 2,5 \cdot 10^{-13}$.

1) Une solution aqueuse a cette température un pH égal à 6,5. Est-elle acide, neutre ou basique ?

2) 200 mL d'une solution aqueuse contient 10^{-4} mol d'ions hydroxyde. Quel est son pH à 80°C ?

3) Le pH d'une solution aqueuse est 4,7 à 80°C. En déduire la concentration des ions hydroxydes.

Correction : A 80°C, on donne $K_e = 2,5 \cdot 10^{-13}$.

1) $pK_e = -\log K_e = -\log(2,5 \cdot 10^{-13}) = 12,60$ donc cette solution est basique à 80°C.

2) $[OH^-] = \frac{10^{-4}}{200 \times 10^{-3}} = 5 \cdot 10^{-5}\ mol/L$ à 80°C, on a

$pH = pK_e + \log[OH^-] = 12,60 + \log(5 \cdot 10^{-5}) = 9,3$

3) $pH = pK_e + \log[OH^-] \Leftrightarrow [OH^-] = 10^{-pK_e + pH}$

$[OH^-] = 10^{-12,60+4,7} = 10^{-7,9} = 1,26 \cdot 10^{-8}\ mol/L$

Exercice 289 : Une bouteille d'acide chlorhydrique portant une étiquette sur laquelle est écrit :

- Acide chlorhydrique commercial
- masse volumique : $\rho = 1190\ Kg.m^{-3}$
- pourcentage en masse d'acide pur : 37 %
- masse molaire moléculaire du chlorure d'hydrogène $M(HCl) = 36,5\ g.mol^{-1}$

1) A partir de ces données, calculer la concentration molaire C_0 de la solution commerciale S_0.

2) On prélève 10 mL de cette solution S_0 et on complète à 500 mL avec de l'eau distillée pour obtenir une autre solution S_1.

a) Ecrire l'équation-bilan de S_0 dans l'eau.

b) Calculer la concentration molaire C_1 de S_1.

c) En déduire le pH_1 de la solution S_1.

3) On dilue la solution S_1 de volume v_1, 100 fois pour obtenir une autre solution S_2.

a) Calculer la concentration molaire C_2 de S_2.

b) En déduire le pH_2 de la solution S_2.

c) Calculer les concentrations molaires des espèces chimiques présentes dans la solution S_2.

4) On mélange la solution S_1 avec la solution S_2 pour obtenir une solution S_3 de pH_3 inconnu.

a) Calculer le pH_3 de la solution S_3.

b) Calculer la concentration molaire des ions Cl^- contenus dans la solution S_3.

Correction : $P = 37\ \% = 0,37$; $\rho = 1190\ Kg.m^{-3}$

1) la concentration C_0 de la solution commerciale.

1ère méthode : $C_0 = \frac{n}{V} = \frac{m}{MV} = \frac{Pm}{MV} = \frac{P\rho_S V}{MV} = P\frac{\rho_S}{M}$

Or $\rho_S = 1190\ Kg.m^{-3} = 1190\ g.dm^{-3} = 1190\ g.L^{-1}$

Donc $C_0 = \frac{P\rho_S}{M} = \frac{0,37 \times 1190}{36,5} = 12,06\ mol/L$.

Remarque : $\rho_S = \rho_e d = 1000d$ et $C_0 = 1000P\frac{d}{M}$

d = densité et $\rho_e = 1000\ g/L$ = masse volumique d'eau

2ème méthode : Dans 1 L de solution commerciale, il y a donc une masse : $m_0 = P\rho = 37 \times \frac{1190}{100} = 440,3\ g$ HCL.

La quantité de matière est $n_0 = \frac{m_0}{M(HCl)} = \frac{440,3}{36,5} = 12,06\ mol$

La concentration molaire C_0 de S_0 :

$C_0 = \frac{n_0}{V} = \frac{12,1}{1} = 12,1\ mol/L$.

2) $S_0 \left| \begin{array}{l} v_0 = 10\ mL \\ C_0 = 12,1\ mol/L \end{array} \right. + v_{eau} = S_1 \left| \begin{array}{l} v_1 = 500\ mL \\ C_1 = ? \end{array} \right.$

a) Ecrire l'équation-bilan de S_0 dans l'eau.

$$HCl + H_2O \longrightarrow H_3O^+ + Cl^-$$

b) concentration molaire C_1 de S_1. Principe de dilution

$C_1 = \frac{C_0 v_0}{v_1} = \frac{12,06\ mol/L \times 10\ mL}{500\ mL} = 0,2412\ mol/L$

c) En déduire le pH_1 de la solution S_1.

$pH_1 = -\log[H_3O^+] = -\log C_1$ car l'acide chlorhydrique est un monoacide fort.

Donc $pH_1 = -\log(0,2412) = 0,617 = 0,62$.

3) Principe de dilution : $n_i = n_f$ ou $C_i v_i = C_f v_f$

a) Calculer la concentration molaire C_2 de S_2.

Quand on dilue une solution n fois, on a son volume $v_f = n v_i$ et s concentration $C_i v_i = C_f v_f \Leftrightarrow C_f = \frac{C_i v_i}{v_f} = \frac{C_i v_i}{n v_i} = \frac{C_i}{n}$.

Donc $C_2 = \frac{C_1 v_1}{n v_1} = \frac{C_1}{n} = \frac{0,2412\ mol/L}{100} = 2,412 \cdot 10^{-3}\ mol/L$

b) $pH_2 = -\log C_2 = -\log(2,412 \cdot 10^{-3}) = 2,62$

c) concentrations molaires des espèces présentes dans S_2.

$HCl + H_2O \longrightarrow H_3O^+ + Cl^-$

$2H_2O \rightleftharpoons H_3O^+ + OH^-$

Ions : H_3O^+, OH^- et Cl^-

Molécules : H_2O

$[H_3O^+] = 10^{-pH_2} = 10^{-2,62} = 2,4 \cdot 10^{-3}\ mol/L$

$[OH^-] = 10^{-14+pH_2} = 10^{-11,38} = 4,16 \cdot 10^{-12}\ mol/L$

EN : $[Cl^-] + [OH^-] = [H_3O^+]$ or $[OH^-] \ll [H_3O^+]$

Donc $[Cl^-] = [H_3O^+] = 2,4 \cdot 10^{-3}\ mol/L = C_2$.

4) $S_1 \left| \begin{array}{l} v_1 = 500\ mL \\ C_1 = 0,2412\ mol/L \\ pH_1 = 0,62 \end{array} \right. + S_2 \left| \begin{array}{l} v_2 = 5 \cdot 10^4\ mL \\ C_2 = 2,412 \cdot 10^{-3} mol/L \\ pH_2 = 2,62 \end{array} \right. =$

$S_3 \left| \begin{array}{l} v_3 = v_1 + v_2 = 50500\ mL = 50,5L \\ C_3 = ? \\ pH_3 = ? \end{array} \right.$

a) $[H_3O^+] = \frac{n_1 + n_2}{v_3} = \frac{C_1 v_1 + C_i v_i}{v_1 + v_2}$

$[H_3O^+] = \frac{0,2412 \times 500 + 2,412 \cdot 10^{-3} \times 5 \cdot 10^4}{50500} = 4,76 \cdot 10^{-3} mol/L$

$pH_3 = -\log[H_3O^+] = -\log(4,76 \cdot 10^{-3}) = 2,32$

b) concentration molaire des ions Cl^- contenus dans S_3.

$[Cl^-] = [H_3O^+] = C_3 = 4,76 \cdot 10^{-3} mol/L$.

Exercice 290 : 1) On prépare une solution d'acide chlorhydrique en faisant dissoudre $v_0 = 5,6$ L de chlorure d'hydrogène dans $v = 500\ cm^3$ d'eau distillée. Calculer la concentration molaire C_1 de la solution ainsi préparée.

2) Quelle masse m de dichlorure de calcium faut-il dissoudre dans $v = 500\ cm^3$ d'eau distillée pour obtenir une solution de concentration molaire $C_1 = 0,1\ mol/l$?
3) On prélève $v_1 = 20\ cm^3$ de la solution de dichlorure de calcium (obtenue à la question précédente) et on complète par de l'eau distillée de façon à obtenir $v_2 = 100\ cm^3$ d'une nouvelle solution.
a) Décrire le mode opératoire permettant de diluer la solution de dichlorure de calcium en utilisant une pipette jaugée et une fiole jaugée. Faire le schéma de la pipette et de la fiole.
b) Calculer la concentration molaire de cette nouvelle solution en ions calcium et ions chlorure.

Exercice 291 : Donner le pH des solutions aqueuses S_i ($i \in [1;6]$) suivantes et classer les solutions acides et les solutions basiques par ordre croissant d'acidité et de basicité. (La température est 25°C)

S_1 : $[H_3O^+] = 10^{-4,12}\ mol.L^{-1}$
S_2 : $[OH^-] = 6,3.10^{-12}\ mol.L^{-1}$
S_3 : $[H_3O^+] = 2.10^{-5,4}\ mol.L^{-1}$
S_4 : $[H_3O^+] = 5.10^{-3}\ mol.L^{-1}$
S_5 : $[OH^-] = 7,2.10^{-6}\ mol.L^{-1}$
S_6 : $[OH^-] = 3,7.10^{-2,3}\ mol.L^{-1}$

Exercice 292 : On considère un monoacide fort de masse molaire M. On en verse différentes masses m dans un volume noté v d'un 1L d'eau et on mesure à chaque fois le pH. Les résultats obtenus sont :

m'	0,032	0,13	0,5	1,6
$\log(m)$				
pH	3,3	2,7	2,1	1,6

1) Etablir la relation entre m, M et pH.
2) a) Compléter le tableau et tracer le graphe $pH = f(\log(m))$. b) Montrer que le pH peut s'écrire : $pH = a + b\log(m)$ puis calculer les valeurs de a et b.
3) En déduire la masse molaire M et identifier l'acide parmi la liste des acides forts suivants : HCl, HI, HF, $HClO_3$, HNO_3, H_2SO_4.

4) La solution d'acide présente de $pH = 2,1$ et de volume $v_1 = 20\ ml$ est mélangée à un volume v_2 d'une solution aqueuse d'acide sulfurique de $pH = 3$.
a) Calculer v_2 si le pH du mélange est $2,5$.
b) Un volume v_a du mélange précédent ($pH = 2,5$) est dosé par une solution aqueuse d'hydroxyde de sodium de concentration $C_b = 5.10^{-2}\ mol/l$. Donner l'allure de la courbe $pH = f(v_b)$ où v_b est le volume de soude versé.

Exercice 293 : Dans une fiole jaugée de $500\ ml$, on met :

- $5\ g$ de chlorure de calcium ($CaCl_2$) ;
- $3\ g$ de chlorure de sodium (NaCl) ;
- $50\ ml$ de solution de bromure de calcium ($CaBr_2$) à $0,5\ mol/l$;
- $125\ ml$ de bromure de sodium (NaBr) à $0,8\ mol/l$.

On complète à $500\ ml$ avec de l'eau distillée.
1) Ecrire l'équation-bilan de dissolution de chaque composé ionique. 2) Faire le bilan des espèces chimiques présentes en solution.
3) Calculer la quantité et la concentration molaire de chaque ion dans la solution obtenue.
4) Vérifier que cette solution est électriquement neutre.
5) Déterminer le pH du mélange.

Exercice 294 : 1) Une solution d'hydroxyde de sodium à un $pH = 11,8$.

a) Ecrire l'équation-bilan de sa dissolution avec l'eau.
b) Calculer les concentrations molaires des espèces chimiques présentes dans cette solution.
2) Une solution d'hydroxyde de calcium a une concentration en ion hydroxyde égale $2,5.10^{-3}\ mol/l$.
a) Ecrire l'équation-bilan de sa dissolution avec l'eau.
b) Calculer les concentrations molaires des espèces chimiques présentes dans cette solution.
c) En déduire son pH.

Exercice 295 : On dissout 0,74 g d'hydroxyde de calcium A dans $50\ cm^3$ puis on complète à l'eau distillée jusqu'à $800\ cm^3$.

1. Calculer les concentrations molaires des ions présentes dans la solution A.
2. Calculer le pH_A de la solution. En déduire la masse m_A.
3. Quel serait le pH_B de la solution B si on avait complété jusqu'à $900\ ml$? En déduire la masse m_B.

Exercice 296 : On dissout 5 g une solution aqueuse A d'hydroxyde de baryum dans 500 cm^3 d'eau distillée.
1) Ecrire l'équation-bilan de la dissolution dans l'eau avec la solution A.
2) Calculer les concentrations molaires des ions présents dans la solution A. En déduire son pH.
3) Dans la solution A, on ajoute 2 g d'hydroxyde de sodium et on obtient 1 L de solution A'. Calculer $pH_{A'}$.

Exercice 297 : On dispose 50 ml de solution A di hydroxyde de calcium $C_a(OH)_2$ à $0,05\ mol/l$ qu'on dilue de façon à obtenir une solution B à $C_B = 10^{-3}\ mol/l$.
Déterminer :
a) Le volume v_B après la dilution ;
b) Le volume d'eau v_e ajoutée ;
c) Déterminer le pH avant et après la dilution.
d) En déduire qu'après n fois la dilution, on peut trouver $pH_B = pH_A - \log n$.

Exercice 298 : 1) On mélange 200 ml de la solution S_1 d'acide chlorhydrique de $pH = 2,5$ avec 300 ml de la solution S_2 d'acide chlorhydrique de pH inconnu. Le mélange S obtenu a un pH égal à 2,8 ; en déduire le pH inconnu. 2) On mélange 300 ml de la solution S_1' d'acide iodhydrique de $pH' = 3$ avec 700 ml de la solution S_2' d'acide iodhydrique de $pH' = 4$. Déterminer le pH' du mélange S' obtenue.

Exercice 299 : 1) Quelle masse d'acide nitrique HNO_3 faut-il mélange à l'eau pure obtenir un litre de solution S_1 à $10^{-2}\ mol/l$?
2) On obtient un litre d'une solution S_2 par dissolution de 960 ml de chlorure d'hydrogène dans de l'eau pure. Ecrire l'équation bilan de la réaction. Calculer pH_2.
3) On prépare 100 ml d'une solution S_3 en mélangeant 40 ml de S_1 et 60 ml de S_2. Calculer pH_3.
4) On ajoute à 10 ml de la solution S_3, un volume v_b de soude à $2.10^{-2}\ mol/l$. Déterminer les volumes v_{b1} et v_{b2} pour obtenir respectivement : a) Un mélange de $pH = 7$; b) Un mélange de $pH = 10$.

Exercice 300 : Une solution aqueuse A d'acide chlorhydrique a un $pH_A = 2,3$. 1) Ecrire l'équation-bilan de la dissolution dans l'eau avec la solution A.
2) Calculer les concentrations molaires des ions hydroniums et hydroxyde. Justifier la concentration molaire d'acide chlorhydrique.
3) On souhaite préparer une solution B de $pH_B = 3$. Comment procéder ? On précisera, notamment, la verrerie nécessaire pour cette préparation.
4) Quel volume de gaz d'HCl faut-il dissoudre dans 2 L d'eau pure pour obtenir la même solution dans les CNTP ?
5) On obtient un volume $v_C = 100\ cm^3$ d'une solution S_C d'acide chlorhydrique de concentration $C_C = 10^{-3}\ mol/l$ par l'ajout d'eau pure du volume v_A de solution d'acide chlorhydrique. a) Déterminer v_A. Calculer sa masse m_A.
b) Indiquer brièvement le mode opératoire.
c) En déduire que après n fois la dilution, on peut trouver $pH_C = pH_A + \log n$. Que peut-on conclure ?
6) On mélange les solutions S_A, S_C et S_B à $v_B = 10\ cm^3$. Déterminer son pH.

Exercice 301 : On dispose d'une solution d'acide chlorhydrique et d'une solution de soude de même concentration $C_l = 1\ mol/l$. On dispose également d'une pipette graduée de 10 ml graduée en dixième de millilitres et de fioles jaugées : des fioles de 50 ml, de 100 ml, de 250 ml, et de 1000 ml. Comment préparer :
1) Un volume $v_1 = 500\ cm^3$, d'une solution d'acide chlorhydrique de $pH_1 = 2,5$?
2) Un volume $v_2 = 200\ ml$, d'une solution d'acide chlorhydrique de concentration $C_2 = 0,12\ mol/l$?
3) Un volume $v_3 = 50\ cm^3$, d'une solution de soude de $pH_1 = 11,7$?

Exercice 302 : 1) Quel volume d'une solution de sulfate de sodium $N_{a_2}SO_4$ de concentration molaire $C = 0,15\ mol/l$ faut-il verser dans 200 ml d'une solution de nitrate de sodium N_aNO_3 de concentration molaire $C' = 0,12\ mol/l$ pour que la concentration des ions N_a^+ dans le mélange soit de $0,18\ mol/l$? 2) Quels, sont, au terme du mélange, les concentrations des différents ions présents ?

Exercice 303 : Le dihydroxyde de calcium et l'hydroxyde de sodium sont tous les bases fortes. On prépare deux solutions :
- Solution S_1 obtenue par dissolution de $0,37\ g$ de dihydroxyde de calcium dans 500 ml d'eau ;
- Solution S_2 obtenue par dissolution de 800 mg de hydroxyde de sodium dans 1 l d'eau.

1) Définir une base et quand dit-on qu'une base est forte ?
2) Ecrire les équations de dissolution dans l'eau de ces deux bases. 3) Calculer les concentrations molaires C_1 et C_2 des solutions respectives S_1 et S_2.
4) Calculer le pH de chacune des solutions.
5) Dans une fiole jaugée de 1 litre, on mélange un volume $v_1 = 400\ ml$ de S_1 et un volume $v_2 = 100\ ml$ de S_2 puis on complète avec de l'eau distillée jusqu'au trait de jauge.
a) Calculer les concentrations molaires des espèces chimiques présentes dans le mélange.
b) Calculer le pH du mélange.

Exercice 304 : Dans un bêcher, on mélange les solutions aqueuses suivantes :

- $v_1 = 50\ ml$ d'acide chlorhydrique de $C_1 = 10^{-3}\ mol/l$
- $v_2 = 75\ ml$ d'acide nitrique de $C_2 = 10^{-4}\ mol/l$;
- $v_3 = 75\ ml$ d'acide bromhydrique de concentration $C_3 = 10^{-1}\ mol/l$;
- $v_4 = 300\ ml$ d'eau distillée.

1) Les trois acides sont forts. Ecrire les équations bilan de leur ionisation dans l'eau.

2) a) Calculer les concentrations molaires des espèces chimiques présentes dans le mélange.

b) Vérifier l'électroneutralité du mélange.

c) Quel est le pH du mélange ? 4) a) En versant dans $300\ ml$ d'une solution d'acide chlorhydrique de concentration $C = 10^{-5}\ mol/l$, une solution de nitrate d'argent en excès, qu'observe-t-on ?

b) Ecrire l'équation bilan de la réaction et déterminer la masse théorique de sel formé.

Exercice 305 : On considère les trois solutions suivantes :

- S_1 d'hydroxyde de sodium de $C_1 = 8.10^{-3}\ mol/l$;
- S_2 d'hydroxyde de calcium de $C_2 = 2.10^{-3}\ mol/l$;
- S_3 de chlorure de sodium de $C_3 = 10^{-3}\ mol/l$.

1) En justifier votre réponse, calculer le pH de chacune des solutions S_1, S_2 et S_3.

2) Décrivant deux expériences prouvant que la solution d'hydroxyde de sodium contient des ions OH^- et N_a^+.

3) On obtient une solution A en mélangeant un volume $v_1 = 50\ cm^3$ de S_1, un volume $v_2 = 100\ cm^3$ de S_2 et un volume $v_e = 100\ cm^3$ d'eau distillée.

a) Calculer la quantité et la concentration molaire de chaque ion contenu dans la solution A.

b) En déduire le pH_A de la solution A.

c) Dans la solution A, on ajoute $0,2\ g$ d'hydroxyde de sodium en pastilles et on obtient une solution A'. Calculer la nouvelle concentration des ions N_a^+ contenue dans A'.

4) On obtient une solution B en mélangeant un volume $v_1 = 50\ cm^3$ de S_1, un volume $v_2 = 100\ cm^3$ de S_2 et un volume $v_3 = 100\ cm^3$ de S_3.

a) Calculer la quantité et la concentration molaire de chaque ion contenu dans la solution B.

b) En déduire le pH_B de la solution B.

Exercice 306 : Une solution S_1 d'acide éthanoïque de concentration $C_1 = 10^{-2}\ mol/l$, a un $pH_1 = 3,4$.

1) a) Montrer avec un minimum de calculs que l'acide éthanoïque est un acide faible.

b) Calculer la concentration molaire de toutes les espèces chimiques précédentes en solution.

c) Déterminer le coefficient de dissociation α_1 de cet acide.

d) Exprimer k_a en fonction de α et C_a.

Calculer le pk_a du couple acide-base de S_1.

2) On dilue 10 fois la solution S_1 pour obtenir une solution S_2 de pH_2 égal à 3,9.

a) Ecrire l'équation-bilan des couples mis en jeu.
Calculer le coefficient de dissociation α_2 de S_2 diluée.

b) Comparer α_1 et α_2. Quel est l'effet de la dilution sur la dissociation de l'acide éthanoïque ?

c) Calculer le pk_a du couple acide-base de S_2.

d) Sachant que la constante d'acidité Ka du couple (NH_4^+/NH_3) vaut $K_a = 6.10^{-10}$, comparer d'une part les forces des acides CH_3COOH et NH_4^+ et d'autre part celles des bases NH_3 et la base conjuguée de l'acide éthanoïque.

Correction : S_1 de $C_1 = 10^{-2}\ mol/l$, a un $pH_1 = 3,4$.

1) a) $pH_1 = -\log C_1 = -\log(10^{-2}) = 2 \neq pH_1 = 3,4$ alors l'acide éthanoïque est un acide faible.

b) $CH_3COOH + H_2O \rightleftarrows CH_3COO^- + H_3O^+$

$2H_2O \rightleftarrows H_3O^+ + OH^-$

Ions : H_3O^+, OH^- et CH_3COO^-

Molécules : H_2O et CH_3COOH

$[H_3O^+] = 10^{-pH_1} = 10^{-3,4} = 4.10^{-4}\ mol/L$

$[OH^-] = 10^{-14+pH_1} = 10^{-10,6} = 2,51.10^{-11}\ mol/L$

EN : $[CH_3COO^-] + [OH^-] = [H_3O^+]$ or $[OH^-] \ll [H_3O^+]$

Donc $[CH_3COO^-] = [H_3O^+] = 4.10^{-4}\ mol/L$.

CQM : $C_1 = [CH_3COOH] + [CH_3COO^-] \Leftrightarrow$

$[CH_3COOH] = C_1 - [CH_3COO^-] = 9,6.10^{-3}\ mol/L$

c) le coefficient de dissociation $\alpha = \frac{\text{espèce ionisée}}{\text{espèce introduite}}$

$\alpha_1 = \frac{[CH_3COO^-]}{C_1} = \frac{4.10^{-4}}{10^{-2}} = 4.10^{-2} = 4\ \%$.

d) $\alpha = \frac{[A^-]}{C_a} \Leftrightarrow [A^-] = \alpha C_a$; $[A^-] = [H_3O^+] = \alpha C_a$

$C_a = [A^-] + [AH] \Leftrightarrow [AH] = C_a - [A^-]$

$[AH] = C_a - [A^-] = C_a - \alpha C_a = (1-\alpha)C_a$

$K_a = \frac{[H_3O^+][A^-]}{[AH]} = \frac{\alpha C_a \alpha C_a}{(1-\alpha)C_a} = \frac{\alpha^2}{1-\alpha}C_a$

Calculer le pk_a du couple acide-base de S_1.

$K_a = \frac{[H_3O^+][CH_3COO^-]}{[CH_3COOH]} = \frac{(4.10^{-4})^2}{9,6.10^{-3}} = 1,67.10^{-5}$

$pK_a = -\log K_a = -\log(1,67.10^{-5}) = 4,78$

2) a) $CH_3COOH + H_2O \rightleftarrows CH_3COO^- + H_3O^+$

Les couples mis en jeu sont :

CH_3COOH/CH_3COO^- ET H_3O^+/H_2O

Le coefficient de dissociation α_2 de S_2 diluée.

Concentration molaire de la solution S_2 :

$C_2 = \frac{C_1 v_1}{v_2} = \frac{C_1 v_1}{n v_1} = \frac{C_1}{n} = \frac{10^{-2}\ mol/L}{10} = 10^{-3}\ mol/L$

Concentration molaire de l'espèce ionisée dans S_2 :

$[CH_3COO^-] = [H_3O^+] = 10^{-pH_2} = 10^{-3,9} =$

$[CH_3COO^-] = 1,26.10^{-4}\ mol/L$

Donc $\alpha_2 = \frac{[CH_3COO^-]_2}{C_2} = \frac{1,26.10^{-4}}{10^{-3}} = 1,26.10^{-1} = 12,6\ \%$

b) Comme $\alpha_1 < \alpha_2$ lors la dilution de l'acide éthanoïque favorise son ionisation.

c) Calculer le pk_a du couple acide-base de S_2.

1ère méthode : $pK_a = pH_2 - \log\left(\frac{[CH_3COO^-]}{[CH_3COOH]}\right) = -\log K_a$

$[CH_3COOH] = C_2 - [CH_3COO^-] = 10^{-3} - 1{,}26.10^{-4}$

$[CH_3COOH] = C_2 - [CH_3COO^-] = 8{,}74.10^{-4}\ mol/L$

$pK_a(CH_3COOH/CH_3COO^-) = pH_2 - \log\left(\frac{[CH_3COO^-]}{[CH_3COOH]}\right) =$

$pK_a = 3{,}9 - \log\left(\frac{1{,}26.10^{-4}}{8{,}74.10^{-4}}\right) = 3{,}9 - \log(0{,}144) = 4{,}74$

2ème méthode : à partir de α_2 et $K_a = \frac{\alpha_2^2}{1-\alpha_2}C_2$

$K_a = \frac{\alpha_2^2}{1-\alpha_2}C_2 = \frac{(0{,}126)^2}{1-0{,}126} \times 10^{-3} = 1{,}81.10^{-5}$

$pK_a = -\log K_a = -\log(1{,}81.10^{-5}) = 4{,}74$

d) $K_a(NH_4^+/NH_3) = 6.10^{-10}$

$K_a(CH_3COOH/CH_3COO^-) = 1{,}81.10^{-5}$

$K_a(CH_3COOH/CH_3COO^-) > K_a(NH_4^+/NH_3)$ alors

La base NH_3 est plus forte que CH_3COO^- ;

L'acide CH_3COOH est plus fort que NH_4^+.

<u>Exercice 307 :</u> On dissout $0{,}82\ g$ d'éthanoate de sodium CH_3COON_a dans l'eau pure que l'on complète pour avoir un litre de solution S_1. La mesure du pH donne 8, 4.

1) a) Calculer la concentration molaire C_b de S_1.

b) Montrer avec un minimum de calculs que l'éthanoate de sodium est une base faible.

2) a) Ecrire les équations des réactions chimiques ayant lieu en solution.

b) Faire l'inventaire de toutes les espèces chimiques en solution. Calculer leurs concentrations molaires.

c) Calculer le pk_a du couple mis en jeu.

d) Calculer le coefficient d'ionisation α_1 des ions éthanoïques CH_3COO^-.

3) La solution précédente est diluée 20 fois. Son pH devient 10, 0. Calculer le coefficient d'ionisation α_2 de S_2.

4) Tracer les zones de prédominances relatives au couple acide éthanoïque/ion éthanoate.

<u>Correction :</u> $M(CH_3COON_a) = 82\ g/mol$

1) a) Calculer la concentration molaire C_b de S_1.

$C_b = \frac{n}{V} = \frac{m}{MV} = \frac{0{,}82}{82\times 1} = 10^{-2}\ mol/L.$

b) $pH_1 = 14 + \log C_b = 14 + \log(10^{-2}) = 12 \neq pH_1 = 8{,}4$ alors l'éthanoate de sodium est une base faible.

2) a) équations des réactions chimiques ayant lieu en solution.

$CH_3COON_a \longrightarrow CH_3COO^- + N_a^+$

$CH_3COO^- + H_2O \rightleftarrows CH_3COOH + OH^-$

b) Faire l'inventaire de toutes les espèces chimiques en S_1.

<u>Ions :</u> H_3O^+, OH^-, N_a^+ et CH_3COO^-

<u>Molécules :</u> H_2O et CH_3COOH

Calculer leurs concentrations molaires.

$[H_3O^+] = 10^{-pH_1} = 10^{-8{,}4} = 4.10^{-9}\ mol/L$

$[OH^-] = 10^{-14+pH_1} = 10^{-5{,}6} = 2{,}5.10^{-6}\ mol/L$

$[N_a^+] = C_b = 10^{-2}\ mol/L$

EN : $[CH_3COO^-] + [OH^-] = [H_3O^+] + [N_a^+]$

or $[OH^-] \gg [H_3O^+]$ donc $[CH_3COO^-] = [N_a^+] - [OH^-]$

ET on peut accepter que $[CH_3COO^-] = [N_a^+] = 10^{-2}\ mol/L.$

CQM : $C_b = [CH_3COOH] + [CH_3COO^-]$ donc

$[CH_3COOH] = C_b - [CH_3COO^-]$ or on doit faire attention de ne pas avoir $[CH_3COOH] = 0$, ainsi

$[CH_3COO^-] = [N_a^+] - [OH^-] = 10^{-2} - 2{,}5.10^{-6} =$

$[CH_3COO^-] = 9{,}99.10^{-3}\ mol/L$

$[CH_3COOH] = 10^{-2} - 9{,}99.10^{-3} = 2{,}5.10^{-6}\ mol/L$

$[CH_3COOH] = [OH^-] = 2{,}5.10^{-6}\ mol/L$

c) Calculer le pk_a du couple mis en jeu.

$pK_a(CH_3COOH/CH_3COO^-) = pH_1 - \log\left(\frac{[CH_3COO^-]}{[CH_3COOH]}\right)$

$pK_a(CH_3COOH/CH_3COO^-) = 8{,}4 - \log(3996) = 4{,}79$

d) Coefficient d'ionisation α_1 des ions éthanoïques CH_3COO^-

$\alpha_1 = \frac{[CH_3COOH]}{C_b} = \frac{2{,}5.10^{-6}}{10^{-2}} = 2{,}5.10^{-4} = 0{,}025\ \%$

3) S_1 est diluée 100 fois. Son pH devient $pH_2 = 10{,}0$.

Le coefficient de dissociation α_2 de S_2 diluée.

Concentration molaire de la solution S_2 :

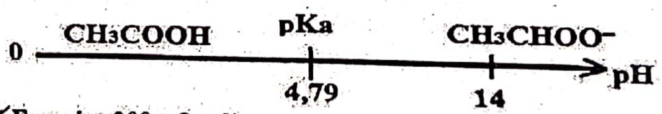
$C_2 = \frac{C_b}{100} = \frac{10^{-2}\ mol/L}{20} = 5.10^{-4}\ mol/L$

Concentration molaire de l'espèce formée dans S_2 :

$[CH_3COOH] = [OH^-] = 10^{-14+pH_2} = 10^{-4}\ mol/L$

Donc $\alpha_2 = \frac{[CH_3COOH]}{C_2} = \frac{10^{-4}}{5.10^{-4}} = 0{,}2 = 20\ \%$

4) Tracer les zones de prédominances relatives au couple acide éthanoïque/ion éthanoate.



<u>Exercice 308 :</u> On dispose d'un volume $V_0 = 100\ mL$ d'une solution queuse S_0 d concentration $C_0 = 3.10^{-3}\ mol/L$ en chlorure d'ammonium.

1) a) Déterminer la masse m de chlorure d'ammonium solide qu'il faut utiliser pour préparer S_0.

b) Décrire de manière concise la préparation de cette solution. Comment se nomme une telle préparation ?

c) Ecrire l'équation détaillée de la réaction de l'ion ammonium sur l'eau.

2) Le pH de cette solution S_0 est 6,16.

a) L'ion ammonium étant un acide, montrer que cet acide est faible.

b) Recenser les espèces chimiques présentes dans S_0 et calculer leur concentration.

c) Déterminer le coefficient de dissociation α_0 de S_0.

d) Exprimer $k_a(NH_4^+/NH_3)$ en fonction de α et C_0. Calculer le $pk_a(NH_4^+/NH_3)$ du couple acide-base de S_1.

Correction : $V_0 = 100\ mL$; $C_0 = 3.10^{-3}\ mol/L$.

1) a) $C_0V_0 = \frac{m}{M(NH_4Cl)} \Leftrightarrow m = C_0V_0M(NH_4Cl)$

$m = 3.10^{-3} \times 1 \times (14 + 4 + 35{,}5) = 0{,}1605\ g$

b) Il s'agit d'une dilution de chlorure d'ammonium par l'eau distillée. On dissout $m = 0{,}1605\ g$ de chlorure d'ammonium dans l'eau distillée pour obtenir une solution aqueuse à laquelle on prélève V de cette solution à l'aide d'une pipette graduée qu'on introduit dans une fiole jugée de 500 mL puis on complète avec l'eau distillée jusqu'au trait de juge. La solution ainsi préparée va nous permettre à l'aide d'une pipette graduée de prélève $V_0 = 100\ mL$.

c) l'équation de la réaction de l'ion ammonium sur l'eau.

$NH_4Cl \longrightarrow NH_4^+ + Cl^-$

$NH_4^+ + H_2O \rightleftarrows NH_3 + OH^-$

2) Le pH de S_0 est $pH_0 = 6{,}16$.

a) $pH = -\log[H_3O^+] = -\log[C_0] = 2{,}52 \neq pH_0$ alors l'ion ammonium étant un acide est faible.

b) Faire l'inventaire de toutes les espèces chimiques en S_0.

Ions : H_3O^+, OH^-, Cl^- et NH_4^+

Molécules : H_2O et NH_3

Calculer leurs concentrations molaires.

$[H_3O^+] = 10^{-pH_0} = 10^{-6{,}16} = 7.10^{-7}\ mol/L$

$[OH^-] = 10^{-14+pH_0} = 10^{-7{,}84} = 1{,}44.10^{-8}\ mol/L$

$[Cl^-] = C_0 = 3.10^{-3}\ mol/L$

EN : $[Cl^-] + [OH^-] = [H_3O^+] + [NH_4^+] \Leftrightarrow$

$[NH_4^+] = [Cl^-] + [OH^-] - [H_3O^+] = [Cl^-] = 3.10^{-3}\ mol/L$

CQM : $C_0 = [NH_3] + [NH_4^+] \Leftrightarrow [NH_3] = C_0 - [NH_4^+]$

Or $[NH_4^+] = [Cl^-] + [OH^-] - [H_3O^+]$

Donc $[NH_3] = C_0 - [NH_4^+] = C_0 - [Cl^-] - [OH^-] + [H_3O^+]$

$[NH_3] = [H_3O^+] = 7.10^{-7}\ mol/L$

c) le coefficient de dissociation α_0 de S_0

$\alpha_0 = \frac{[NH_4^+]}{C_0} = \frac{3.10^{-3}}{3.10^{-3}} = 1 = 100\ \%$

d) $\alpha_0 = \frac{[NH_4^+]}{C_0} \Leftrightarrow [NH_4^+] = \alpha_0 C_0$

$[NH_3] = C_0 - [NH_4^+] = C_0 - \alpha_0 C_0 = (1-\alpha_0)C_0 = [H_3O^+]$

$k_a(NH_4^+/NH_3) = \frac{[H_3O^+][NH_3]}{[NH_4^+]} = \frac{(1-\alpha_0)^2C_0^2}{\alpha_0 C_0} = \frac{(1-\alpha_0)^2 C_0}{\alpha_0}$

Calculer le $pk_a(NH_4^+/NH_3)$ du couple acide-base de S_0.

$pK_a(NH_4^+/NH_3) = pH_0 - \log\left(\frac{[NH_3]}{[NH_4^+]}\right) = 9{,}79$

Exercice 309 : L'étiquette d'un flacon contenant une solution S_0 d'acide méthanoïque de commerce porte les indications suivantes :

- **Masse d'acide pur P = 80%**
- **Densité de la solution d = 1,18**
- **Masse molaire moléculaire 46 g/mol.**

1) Calculer la molaire C_0 de la solution S_0.

2) On prélève un volume $v = 5\ cm^3$ de S_0 que l'on complète à l'eau distillée pour obtenir 1 litre de solution S ; donner la molarité C de la solution S.

3) On mesure le pH de la solution S et on trouve 2,4. Calculer les concentrations molaires volumiques des différentes espèces chimiques de la solution S.

4) En déduire le pk_a du couple acide méthanoïque/ ion méthanoate.

5) On verse dans la solution S quelques gouttes d'indicateur coloré HI_n. Le couple HI_n/I_n^- a un pk_a égal à 5,1. La forme acide HI_n de cet indicateur est rouge, la forme basique I_n^- est jaune. Une solution contenant quelques gouttes de cet indicateur coloré apparait rouge si $[HI_n] > 10[I_n^-]$ et jaune si $[I_n^-] > 10[HI_n]$.

a) Quelles sont les valeurs du pH délimitant la zone de virage de cet indicateur ?

b) Quelle couleur prend alors la solution S ?

Correction : S_0 d'acide méthanoïque

1) Calculer la molaire C_0 de la solution S_0.

$C_0 = P\frac{\rho s}{M} = 1000P\frac{d}{M} = 1000 \times 80\% \times \frac{1{,}18}{46} =$

$C_0 = 1000 \times 0{,}8 \times \frac{1{,}18}{46} = 20{,}52\ mol/L$

2) $Cv = C_0v_0 \Leftrightarrow$

$C = \frac{C_0v_0}{v} = \frac{20{,}52\times5.10^{-3}}{1} = 10{,}26.10^{-2}\ mol/L$

3) concentration molaire de toutes les espèces de S :

$HCOOH + H_2O \rightleftarrows HCOO^- + H_3O^+$

$2H_2O \rightleftharpoons H_3O^+ + OH^-$

Ions : H_3O^+, OH^- et $HCOO^-$

Molécules : H_2O et $HCOOH$

$[H_3O^+] = 10^{-pH} = 10^{-2{,}4} = 4.10^{-3}\ mol/L$

$[OH^-] = 10^{-14+pH} = 10^{-11{,}6} = 2{,}51.10^{-12}\ mol/L$

EN : $[HCOO^-] + [OH^-] = [H_3O^+]$ or $[OH^-] \ll [H_3O^+]$

Donc $[HCOO^-] = [H_3O^+] = 4.10^{-3}\ mol/L$.

CQM : $C = [HCOOH] + [HCOO^-] \Leftrightarrow$

$[HCOOH] = C - [HCOO^-] = 10{,}26.10^{-2} - 4.10^{-3}$

$[HCOOH] = 9{,}86.10^{-2}\ mol/L$.

4) $pK_a(HCOOH/HCOO^-) = pH - \log\left(\frac{[HCOO^-]}{[HCOOH]}\right) =$

$pK_a = 2{,}4 - \log\left(\frac{4.10^{-3}}{9{,}86.10^{-2}}\right) = 2{,}4 - \log(0{,}405) = 3{,}79$

Exercice 310 : On mesure le pH de 100 ml d'acide méthanoïque à $10^{-2}\ mol/l$; on trouve pH = 2, 9. On ajoute alors 900 ml d'eau distillée à la solution précédente, on homogénéise et on mesure à nouveau le pH : on trouve pH = 3, 4.

1) Ecrire l'équation d'ionisation de l'acide méthanoïque. L'ionisation est-elle totale ou partielle ? Justifier.

2) Calculer, dans les deux cas, les concentrations des espèces présentes. 3) Quelle est, dans les deux cas, la

quantité d'acide ionisé ? En déduire l'effet de la dilution sur l'équilibre d'ionisation de l'acide méthanoïque.

Exercice 311 : 1) Quelle masse d'acide benzoïque doit-on dissoudre dans l'eau distillée pour obtenir $200\ cm^3$ d'une solution de concentration égale à $0,1\ mol/l$?

2) Le pH de cette solution est $2,6$. Calculer les concentrations des différentes espèces présentes dans la solution. L'acide benzoïque est-il un acide fort ? Justifier. Pouvait-on prévoir la réponse à partir de la seule donnée du pH ?

3) On prélève $10\ cm^3$ de cette solution et on lui ajoute $5\ cm^3$ d'une solution d'hydroxyde de sodium à $0,1\ mol/l$. Le pH est alors égal à $4,2$. Calculer les concentrations des différentes espèces présentes dans la solution. 4) Dans les deux cas, déterminer le pk_a.

Exercice 312 : On prépare deux solutions à $10^{-2}\ mol/l$, l'une d'un acide A_1H, l'autre d'un acide A_2H. Les pH des solutions de A_1H et de A_2H valent respectivement $4,7$ et $3,9$.

1. Quel est l'acide le plus fort ?
2. Quelles sont les concentrations de chacune des espèces en solution dans les deux solutions ?
3. En déduire les K_a et pK_a pour ces deux acides.

Exercice 313 : On prépare deux solutions à $5.10^{-2}\ mol/l$, l'une d'un base B_1, l'autre d'un base B_2. Les pH des solutions de B_1 et de B_2 valent respectivement $9,8$ et $11,2$.

1. Quel est la base la plus forte ?
2. Quelles sont les concentrations de chacune des espèces en solution dans les deux solutions ?
3. En déduire les K_a et pK_a pour ces deux bases.

« La prudence provient d'Allah et la précipitation provient du diable. »

Exercice 314 : On prépare deux solutions à $0,1\ mol/l$, l'une d'un monoacide AH, l'autre d'un monobase B^-. Les pH respectifs $3,1$ et $10,0$.

1. Calculer les pk_a du couple AH/A^- et BH/B^-.
2. Quel est, de AH ou de BH, l'acide le plus fort ?
3. Quelle est, de A^- ou de B^-, la base la plus forte ?

Exercice 315 : Mélange acide et base conjuguée. Le pk_a de l'acide éthanoïque a pour valeur 4,75.

1. On prépare une solution en mélangeant $20\ cm^3$ d'acide éthanoïque à $0,5\ mol/l$ avec $25\ cm^3$ d'une solution aqueuse d'éthanoate de sodium à $0,4\ mol/l$. Calculer le concentrations en molécules CH_3COOH et en ions CH_3COO^- dans le mélange. En déduire le pH de la solution obtenue.
2. Au mélange obtenue en a)., on ajoute $125\ cm^3$ d'eau. Que devient le pH ?
3. Au mélange obtenue en b)., on ajoute $2\ cm^3$ d'une solution d'hydroxyde de sodium à $0,6\ mol/l$.
   a) Ecrire l'équation de la réaction qui se produit.
   b) En déduire le pH de la solution obtenue.

Conclusion ? dans cette question, on néglige la variation de volume.

Exercice 316 : Une solution aqueuse d'acide 2-bromo-propanoïque noté AH_1 de concentration molaire $C_1 = 6.10^{-1}\ mol/l$ a un $pH_1 = 1,6$. Une solution aqueuse d'acide 3-bromo-propanoïque noté AH_2 de concentration molaire $C_2 = 10^{-3}\ mol/l$ a un $pH_1 = 3,6$.

1) a) Ecrire l'équation bilan de la réaction d'un acide faible de type AH avec l'eau.
b) Recenser les espèces chimiques présentes dans chaque solution et calculer leur concentration.

2) a) Pour une solution aqueuse d'acide faible AH de concentration C on définit le coefficient d'ionisation par $\alpha = \frac{[A^-]}{C}$. Calculer les coefficients d'ionisation α_1 et α_2 des acides AH_1 et AH_2 des solutions étudiées.
b) La comparaison des valeurs de α_1 et α_2 suffit –elle pour classer les acides AH_1 et AH_2 selon leur force ? Justifier la réponse.

3) Calculer Ka et pk_a de chaque couple AH/A^- étudié.

4) On donne le tableau suivant :

AH	Acide propanoïque	Acide 2,2-bromo-propanoïque	Acide 2,3-bromo-propanoïque
pk_a	4,9	1,5	2,2

a) Calculer par force croissante les 5 acides citées ci-dessus. classer b) Dégager sur les exemples de ces 5 acides l'influence sur la force de l'acide :

- Du nombre d'atomes de brome dans la molécule
- De la position des atomes de brome dans la molécule.

Exercice 317 : L'acide benzoïque de formule C_6H_5COOH est un acide faible dont le pk_a vaut $4,2$.

1) Après avoir défini un acide, rappeler la différence entre un acide fort et un acide faible.

2) Ecrire l'équation traduisant l'action de cet acide sur l'eau. 3) Une solution aqueuse d'acide benzoïque de concentration C inconnue a un pH = $3,1$.

a) Mis à part l'eau, quelles sont des espèces chimiques en solution ? b) Calculer les concentrations molaires de ces espèces chimiques.

c) Quelle masse d'acide benzoïque faut-il utiliser pour préparer un litre de la solution ?

Exercice 318 : Une solution aqueuse d'acide benzoïque C_6H_5COOH a concentration molaire $10^{-2}\ mol/l$.

1) Ecrire l'équation-bilan de la dissolution dans l'eau de l'acide benzoïque. Quelle est le nom de sa base conjuguée ?

2) Sachant que le pH de la solution d'acide benzoïque vaut 3,1, après donner le couple mis en jeu, calculer sa constance d'acidité.

3) A $20\ cm^3$ de la solution d'acide benzoïque précédente, on ajoute un volume v d'une solution aqueuse d'hydroxyde de sodium de concentration molaire $10^{-1}\ mol/l$. Le pH du mélange obtenu vaut alors 5. Ecrire l'équation-bilan de la réaction chimique ; calculer v.

4) Calculer le volume v' de la solution d'hydroxyde de sodium de concentration molaire $10^{-1}\ mol/l$ qu'il aurait fallu verser dans les $20\ cm^3$ de la solution d'acide benzoïque pour obtenir l'équivalence.

Exercice 319 : On dissout $0,82\ g$ d'éthanoate de sodium CH_3COONa dans l'eau pure que l'on complète pour avoir un litre de solution. La mesure du pH à 25°C donne 8,4.

1) a) Calculer la concentration molaire C de cette solution.
b) La solution obtenue est-elle une solution de base forte ou faible ? Justifier celle-ci. 2) Ecrire les équations des réactions chimiques ayant lieu en solution.

3) Faire l'inventaire de toutes les espèces chimiques en solution. Calculer leurs concentrations molaires.

4) Calculer le pk_a du couple mis en jeu, puis le coefficient d'ionisation α.

5) Tracer les zones de prédominances relatives au couple acide éthanoïque/ion éthanoate.

Exercice 320 : Deux solutions S_1 et S_2, l'une d'acide chlorhydrique et l'autre d'acide monochloro-éthanoïque sont contenues dans les flacons dépourvus d'étiquette. Pour les identifier, on réalise diverses expériences :

- On mesure leur pH : pour S_1 $pH_1 = 2,15$, pour S_2 $pH_2 = 2,7$;
- On dilue dix fois chacune des solutions et on mesure leur pH : S'_1 $pH'_1 = 2,7$ et S'_2 $pH'_2 = 3,7$.

1) Identifier les différentes solutions. Justifier ces réponses.

2) Calculer la concentration molaire de la solution initiale d'acide chlorhydrique.

3) a) Calculer la concentration molaire de chaque espèce chimique présente dans S_1. La concentration molaire de monochloroéthanoïque est $C_0 = 5.10^{-2}\ mol/l$. En déduire le pk_a du couple acide/base auquel appartient cet acide. b) Calculer la concentration molaire de chaque espèce chimique présente dans S'_1.
c) Calculer avant et après dilution le coefficient de dissociation de l'acide monochloroéthanoïque.

4) Quelle est l'influence de la dilution sur la dissociation de l'acide monochloroéthanoïque ?

5) On considère le couple CH_3COOH/CH_3COO^- de $pk_a = 4,8$. Qui de l'acide monochloroéthanoïque et de l'acide éthanoïque est plus fort ?

Exercice 321 : On dispose deux solutions

- Une solution aqueuse S_1 d'ammoniac de $C_1 = 10^{-2}\ mol/l$; $pH_1 = 10,6$ et $K_{a_1} = 5.10^{-10}$.
- Une solution aqueuse S_2 di éthylamine de $C_2 = 10^{-2}\ mol/l$; $pH_2 = 11,2$ et $K_{a_2} = 3,2.10^{-11}$

1) Ecrire les réactions d'ionisations de l'ammoniac et de la di éthylamine avec l'eau.

2) Après avoir calculé pk_{a_1} et pk_{a_2}, compare la basicité de l'ammoniac à celle de la di éthylamine.

3) Calculer les coefficients d'ionisation α_1 et α_2 respectives de la solution S_1 et S_2.

4) On mélange $50\ cm^3$ de S_1 et $50\ cm^3$ de S_2 pour obtenir $100\ cm^3$ d'une solution S dont le pH est égal à 11. Donner les nouvelles valeurs des coefficients d'ionisation α'_1 et α'_2 respectives de l'ammoniac et de la di éthylamine dans le mélange.

Exercice 322 : On considère les solutions S_1 et S_2 de deux monoacides. La mesure du pH de ces solutions donne la même valeur 2,4.

1) De chaque solution, on prélève 10 ml que l'on dilue avec l'eau distillée jusqu'à 50 ml. Le pH de la solution diluée de S_1 est 3,1 ; celui de la solution diluée de S_2 est 2,65.
a) Montrer que l'une des solutions S_1, S_2 est une solution d'acide faible et l'autre une solution d'acide fort.
b) Calculer la concentration molaire de la solution initiale de l'acide fort.

2) On dose par pH-mètre des volumes égaux des solutions S_1 et S_2 à l'aide d'une même solution d'hydroxyde de sodium. La solution S_2 nécessite un volume d'hydroxyde de sodium 25 fois plus grand que celui nécessité par la solution S_1. a) Calculer la concentration molaire de l'acide faible dans la solution initiale.
b) A $pH = 2,4$, calculer la concentration molaire de toutes les espèces chimiques présentes dans la solution d'acide faible. c) Calculer le pk_a de l'acide faible.

Exercice 323 : 1) Soit une solution S_1 d'acide éthanoïque de concentration $C_1 = 0,1$ mol/L de $pH_1 = 2,8$.
a) Montrer que l'acide éthanoïque est un acide faible.
b) Ecrire l'équation bilan de la réaction avec l'eau distillée.
c) Calculer les concentrations molaires des espèces chimiques contenues dans cette solution S_1.
d) En déduire le coefficient de dissociation α_1 de l'acide éthanoïque dans cette solution.

Exercice 324 : 1) Soit une solution S_1 méthylamine de concentration $C_1 = 0,09$ mol/L de $pH_1 = 12$.

a) Montrer que méthylamine est une base faible.

b) Ecrire l'équation bilan de la réaction avec l'eau distillée. c) Calculer les concentrations molaires des espèces chimiques contenues dans cette solution S_1.

d) En déduire le coefficient de dissociation α_1 du méthylamine dans cette solution.

2) On prépare deux solutions méthylamine S_2 et S_3 de pH respectifs 13,0 et 13,8 :

- S_2 est un mélange de 10 mL de la solution S_1 avec 90 mL d'eau pure
- S_3 est un mélange de 10 mL de la solution S_2 avec 990 mL d'eau pure

a) Calculer la concentration molaire de toutes les espèces chimiques présentes dans la solution S_2.

b) En déduire le coefficient de dissociation α_2 du méthylamine dans la solution S_2.

c) Calculer la concentration molaire de toutes les espèces chimiques présentes dans la solution S_3.

d) En déduire le coefficient de dissociation α_3 du méthylamine dans la solution S_3.

e) Comparer α_1, α_2 et α_3. En déduire l'influence de la dilution sur la dissociation du méthylamine.

Exercice 325 : On dispose d'une solution de méthanoate de sodium de $C = 0,1$ mol/L de $pH = 8,4$.

a) Ecrire l'équation bilan de la réaction avec l'eau distillée. L'eau joue-t-elle le rôle d'un acide ou d'une base lors de cette opération.

b). Calculer les concentrations molaires des espèces chimiques contenues dans cette solution. d) En déduire le coefficient de dissociation α dans cette solution.

d) En déduire le pKa correspondant au couple.

Exercice 326 : Dans un bécher, on introduit $V_b = 20\ mL$ d'une solution aqueuse d'ammoniac, de concentration C_b inconnue. On ajoute, à l'ide d'une burette, un volume V_a (en mL), d'une solution acide chlorhydrique à concentration $C_a = 0,14\ mol/L$. On obtient le tableau de mesure suivant :

V_a	0	6	10	12	14	14,2	14,4	14,5
pH	11,1	9,5	9	8,6	7,7	7	6,5	6

V_a	14,8	15	15,2	15,6	16	18	20	30
pH	5	4	3,5	2,8	2,6	2,2	2	1,6

1) a) Faire le schéma annoté du dispositif expérimental du dosage de cette base.

b) Représenter graphiquement la courbe $pH = f(V_a)$.
Echelles : 1 cm pour 1 unité de pH et 0,5 cm pour 1 cm^3.

2) a) Ecrire l'équation bilan de la réaction acido-basique.

b) Déterminer les coordonnées du point d'équivalence et du point de la demi-équivalence.

c) En déduire la concentration C_b de l'ammoniac et le pKa du couple auquel appartient l'ammoniac.

3) a) Calculer les concentrations molaires des espèces chimiques présentes au point de la demi-équivalence.

b) En déduire le pKa du couple auquel appartient l'ammoniac.

4) En utilisant la valeur du pH de la solution initiale et sa concentration molaire, retrouver la valeur du pKa correspondant du couple ammoniac.

<u>Correction :</u>

2) a) Ecrire l'équation bilan de la réaction acido-basique.
$H_3O^+ + NH_3 \longrightarrow NH_4^+ + H_2O$ alors cette réaction est pratiquement totale.

b) Coordonnées du point d'équivalence E $\left|\begin{array}{l} V_{aE} = 14,6\ mL \\ pH_E = 5,5 \end{array}\right.$

Coordonnées du point de la demi-équivalence sont

$E_{\frac{1}{2}} \left|\begin{array}{l} V_{a\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} V_{aE} = 7,3\ mL \\ pH_{E\frac{1}{2}} = pKa = 9,3 \end{array}\right.$

c) la concentration C_b de l'ammoniac et
A l'équivalence $n(NH_3) = n(H_3O^+) \Leftrightarrow C_bV_b = C_aV_{aE}$
$C_b = \frac{C_aV_{aE}}{V_b} = \frac{0,14 \times 14,6}{20} = 0,1\ mol/L.$

$pK_a(NH_4^+/NH_3) = pH - \log\left(\frac{[NH_3]}{[NH_4^+]}\right) = pH_{E\frac{1}{2}} = 9,3$

3) a) Concentrations molaires des espèces chimiques présentes au point de la demi-équivalence, $E_{\frac{1}{2}} \left|\begin{array}{l} V_{a\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} V_{aE} = 7,3\ mL \\ pH_{E\frac{1}{2}} = pKa = 9,3 \end{array}\right.$

<u>Ions :</u> H_3O^+, OH^-, Cl^- et NH_4^+
<u>Molécules :</u> H_2O et NH_3
Calculer leurs concentrations molaires.
$[H_3O^+] = 10^{-9,3} = 5.10^{-10}\ mol/L$
$[OH^-] = 10^{-14+9,3} = 10^{-4,7} = 2.10^{-5}\ mol/L$
$[Cl^-] = \frac{n_a}{V_a+V_b} = \frac{C_aV_a}{V_a+V_b} = \frac{0,14 \times 7,3}{7,3+20} = 3,74.10^{-2}\ mol/L$
EN : $[NH_4^+] + [H_3O^+] = [OH^-] + [Cl^-]$
or $[OH^-] \gg [H_3O^+]$ donc $[NH_4^+] = [OH^-] + [Cl^-]$
ET on peut accepter que $[NH_4^+] = [Cl^-] = 3,74.10^{-2}\ mol/L.$
Calculons la concentration du mélange :
$C_b = \frac{n_b}{V_a+V_b} = \frac{C_bV_b}{V_a+V_b} = \frac{0,1 \times 20}{7,3+20} = 7,32.10^{-2}\ mol/L$
CQM : $C_b = [NH_3] + [NH_4^+] \Leftrightarrow [NH_3] = C_b - [NH_4^+]$
$[NH_3] = 7,32.10^{-2} - 3,74.10^{-2} = 3,6.10^{-2}\ mol/L$

b) En déduire le pKa du couple auquel appartient l'ammoniac.
Or $\frac{[NH_3]}{[NH_4^+]} = \frac{3,6.10^{-2}}{3,74.10^{-2}} = 1 \Leftrightarrow \log\left(\frac{[NH_3]}{[NH_4^+]}\right) = \log 1 = 0$

Donc $pK_a(NH_4^+/NH_3) = 9,3 - \log\left(\frac{[NH_3]}{[NH_4^+]}\right) = 9,3$.

4) la valeur du pH de la solution initiale et sa concentration molaire, retrouver la valeur du pKa correspondant du couple ammoniac : $V_a = 0$; pH = 11,1 et $C_b = 0,1\ mol/L$:

Ions : H_3O^+, OH^- et NH_4^+

Molécules : H_2O et NH_3

Calculer leurs concentrations molaires.

$[H_3O^+] = 10^{-11,1} = 8.10^{-12}\ mol/L$

$[OH^-] = 10^{-14+11,1} = 10^{-2,9} = 1,26.10^{-3}\ mol/L$

EN : $[NH_4^+] + [H_3O^+] = [OH^-]$ or $[OH^-] \gg [H_3O^+]$ donc $[NH_4^+] = [OH^-] = 1,26.10^{-3}\ mol/L$

CQM : $C_b = [NH_3] + [NH_4^+] \Leftrightarrow [NH_3] = C_b - [NH_4^+]$

$[NH_3] = 0,1 - 1,26.10^{-3} = 9,87.10^{-2}\ mol/L$

Le pKa du couple auquel appartient l'ammoniac.

Donc $pK_a(NH_4^+/NH_3) = 11,1 - \log\left(\frac{[NH_3]}{[NH_4^+]}\right)$.

Donc $pK_a(NH_4^+/NH_3) = 11,1 - \log\left(\frac{9,87.10^{-2}}{1,26.10^{-3}}\right) = 9,2$.

Indicateurs colorés	Zone de virage
Rouge de méthyle	$4,2 \leq pH \leq 6,2$
Rouge de crésol	$7,2 \leq pH \leq 8,6$
Bleu de bromothymol	$6,2 \leq pH \leq 7,6$
Hélianthine	$3,1 \leq pH \leq 4,4$
Phénolphtaléine	$8,0 \leq pH \leq 9,9$

Exercice 327 : On lit sur l'étiquette d'une bouteille contenant une solution commerciale d'hydroxyde de sodium S_0 les indications : contient 20,83 % en masse d'hydroxyde de sodium, densité d= 1,2, masse molaire, M(NaOH) = 40 g/mol.

1) Calculer la concentration molaire C_0 de cette solution commerciale S_0.

2) On préparer une solution S_b en prélevant $V_0 = 2\ mL$ de S_0 qu'on introduit dans une fiole jugée de 500 mL et on complète avec l'eau distillée jusqu'au trait de juge.

On dispose de la verrerie suivante :

- **Béchers : 50 mL, 100 mL, 250 mL ;**
- **Erlenmeyers : 125 mL, 250 mL, 1L ;**
- **Fioles jaugées : 100 mL, 250 mL, 500 mL, 1 L ;**
- **Pipettes jaugées : 1 mL, 5 mL, 10 mL, 25 mL ;**
- **Éprouvettes : 10 mL, 25 mL, 50 mL.**

a) Précisez la liste de matériels utilisée pour préparer S_b donnez le mode opératoire complet de la dilution.

b) Calculer la concentration C_b de la solution S_b préparée.

3) Afin de vérifier C_b calculée précédemment, on dose la solution S_b de volume $V_b = 20\ mL$ par la solution S_a d'acide nitrique de concentration $C_a = 5.10^{-2}\ mol/L$.

On verse progressivement la solution S_a et on mesure après chaque ajout le pH de la solution. Les résultats suivants sont obtenus :

V_a	0	2	3	4	5	5,5	6,5	7,5
pH	12,4	12,3	12,2	12,1	12	11,9	11,8	11,7

V_a	8	8,5	9	9,5	10	10,5	11	11,5
pH	11,6	11,4	11,2	10,9	7	3,1	2,8	2,6

V_a	12	12,5	14	15	18	20
pH	2,5	2,4	2,2	2,1	2,0	1,9

a) Faire le schéma annoté du montage de faire ce dosage. Ecrire l'équation bilan de la réaction du dosage.

b) Représenter le graphe pH = f(V_A).

Échelle : 1 cm ↔ 1 mL ; 1 cm ↔ 1 unité de pH.

c) Déterminer les coordonnées du point d'équivalence E.

d) Définir l'équivalence acido-basique.

e) En déduire la concentration C_b de la solution S_b dosée. Comparer avec le résultat trouvé en 1) b).

4) a) Parmi les indicateurs colorés, choisir le plus approprié à ce dosage. Justifier le choix.

b) Quels inconvénients y aurait-il à utiliser les autres indicateurs colorés ?

Correction :

1) la concentration molaire $C_0 = \frac{Pd\rho_{eau}}{M} = 6,25\ mol/L$.

2) a) Il faut une fiole jugée de 500 mL et une pipette de 2 mL.

Mode opératoire complet de la dilution

A l'aide d'une pipette, on prélève 2 mL de la solution commerciale S_0 qu'on introduit dans la fiole jugée de 500 mL contenant un peu d'eau distillée puis on complète avec l'eau distillée jusqu'au trait de juge.

b) la concentration $C_b = \frac{C_0V_0}{V_b} = 2,5 \times 10^{-2}\ mol/L$.

3) a) Ecrire l'équation bilan de la réaction du dosage

$$H_3O^+ + OH^- \longrightarrow 2H_2O$$

c) point d'équivalence $E \left| \begin{array}{l} V_{aE} = 10\ mL \\ pH_E = 7 \end{array} \right.$

d) L'équivalence acido-basique c'est lorsque la quantité de matières apportées par la solution acide est égale à celle de la solution initialement présente soit $n(H_3O^+) = n(OH^-)$.

e) $C_aV_{aE} = C_bV_b \Leftrightarrow C_b = \frac{C_aV_{aE}}{V_b} = 2,5 \times 10^{-2}\ mol/L$.

Exercice 328 : On réalise le titrage d'un volume $V_a = 40\ mL$ d'une solution aqueuse d'acide benzoïque, par une solution aqueuse de soude de concentration molaire $C_b = 5.10^{-2}\ mol/L$. On relève le pH en fonction du volume V(mL) et de soude versée à 25°C.

V_b	0	2	4	6	8	10	11	11,5
pH	2,9	3,5	3,9	4,2	4,5	4,9	5,25	5,6

V_b	12	12,5	13	14	15	16	18	20
pH	8,2	10,9	11,2	11,5	11,6	11,7	11,8	11,9

1) a) Faire le schéma annoté du dispositif expérimental.
b) Ecrire l'équation bilan de la réaction entrer les solutions d'acide benzoïque et d'hydroxyde de sodium.
2) Tracer la courbe de variation de pH de la solution en fonction du volume V_b versé.
Échelles : en abscisses 1 cm pour 1 cm^3,
en ordonnées 1 cm pour une unité de pH.
3) Déduire de cette courbe :
a) les coordonnées du point d'équivalence par la méthode des tangentes et du point à demi-équivalence.
b) la concentration C_a de la solution d'acide benzoïque.
c) Parmi les indicateurs colorés, choisir le plus approprié à ce dosage. Justifier le choix. Quels inconvénients y aurait-il à utiliser les autres indicateurs colorés ?
4) Expliquer pourquoi la solution est basique à l'équivalence.
5) a) Calculer les concentrations molaires des espèces chimiques présentes au point de la demi-équivalence.
b) En déduire le pKa du couple auquel appartient l'acide benzoïque.
6) a) Calculer les concentrations molaires des espèces chimiques présentes au début du dosage.
b) En déduire le pKa du couple auquel appartient l'acide benzoïque. Comparer tous les résultats de ces pKa.
7) a) On désire préparer une solution S de $pK_a = 4,2$ et le volume $V = 60\ mL$. En plus de la solution d'acide benzoïque, on dispose des solutions suivantes : solution A d'acide chlorhydrique, solution B d'hydroxyde de sodium et solution C de benzoate de sodium.
Toutes les solutions ont une même concentration molaire C_0, et sont prises à 25°C.
a) Comment doit-on procéder ? On choisira une seule méthode de préparation.
b) Donner les caractéristiques de la solution S obtenue.

Réponse :

1) b) $C_6H_5 - COOH + OH^- \longrightarrow C_6H_5 - COO^- + H_2O$

3) a) point d'équivalence $E\left|\begin{array}{l} V_{bE} = 12\ mL \\ pH_E = 8,2 \end{array}\right.$

Point à la demi équivalence $E_{\frac{1}{2}}\left|\begin{array}{l} V_{bE\frac{1}{2}} = 6\ mL \\ pH_{E\frac{1}{2}} = \text{pKa} = 4,2 \end{array}\right.$

b) $C_aV_a = C_bV_{bE} \Leftrightarrow C_a = \frac{C_bV_{bE}}{V_a} = 1,5 \times 10^{-2}\ mol/L.$

4) à l'équivalence, on a une solution de benzoate de sodium ($C_6H_5 - COO^-$) qui est une base faible.
Donc la solution est basique.

Exercice 329 : 1) La diéthylamine $(C_2H_5)_2NH$ est une base faible. Quel est son conjugué ?
2) La solution S_1 de diéthylamine a un $pH_1 = 10,8$.
Sachant que le pKa du couple correspondant vaut 11,1 calculer la concentration molaire initiale C_1 de la solution S_1 de diéthylamine.
3) On utilise une solution de chlorure d'hydrogène de concentration $C_a = 0,1$ mol/L pour doser, à l'aide d'un pH-mètre, 20 mL d'une solution de diéthylamine contenue dans un bécher. On note la variation du pH lors de l'addition de $V_a(mL)$ de la solution de chlorure d'hydrogène à la solution de diéthylamine. Les résultats sont consignés dans le tableau ci-dessous :

V_a	0	1	3	5	7	9	11	13
pH	11,9	11,7	11,5	11,3	11,1	10,9	10,7	10,4

V_a	15	16	16,5	17	18	18,5
pH	10,1	9,7	9,4	8,8	2,8	2,6

V_a	19	20	22	25
pH	2,4	2,2	2	1,8

a) Faire le schéma annoté du dispositif expérimental du dosage de la solution de diéthylamine.
b) Représenter graphiquement la courbe $pH = f(V_a)$.
Echelles : 1 cm pour 1 unité de pH et 1 cm pour 2 cm^3
c) Ecrire l'équation bilan de la réaction du dosage.
d) Déterminer les coordonnées du point d'équivalence E et du point $E_{\frac{1}{2}}$ à la demi-équivalence.
e) En déduire la concentration C_b et le pKa du couple auquel appartient la diéthylamine.
4) a) Calculer les concentrations molaires des espèces chimiques présentes au point de la demi-équivalence.
b) En déduire le pKa du couple auquel appartient diéthylamine.
5) a) Parmi les indicateurs colorés, choisir le plus approprié à ce dosage. Justifier le choix.
b) Quels inconvénients y aurait-il à utiliser les autres indicateurs colorés ?
6) a) Calculer les concentrations molaires des espèces chimiques présentes au début du dosage de diéthylamine.
b) En déduire le pKa du couple auquel appartient diéthylamine. Comparer tous les résultats de ces pKa.

Réponse :

3) c) $C_2H_5 - NH - C_2H_5 + H_3O^+ \longrightarrow (C_2H_5)_2NH_2^+ + H_2O$

d) point d'équivalence $E\left|\begin{array}{l} V_{aE} = 17,2\ mL \\ pH_E = 6,4 \end{array}\right.$

Point à la demi équivalence $E_{\frac{1}{2}} \left| \begin{array}{l} V_{aE\frac{1}{2}} = 8{,}6\ mL \\ pH_{E\frac{1}{2}} = pKa = 11{,}0 \end{array} \right.$

b) $C_aV_{aE} = C_bV_b \Leftrightarrow C_b = \frac{C_aV_{aE}}{V_b} = 8{,}6 \times 10^{-2}\ mol/L$

Exercice 330 : **Cinq béchers contiennent chacun 50 mL d'une solution différente. Les cinq solutions, chacune de concentration molaire $0,01\ mol/L$, sont les suivantes : solution de chlorure de sodium A, solution d'hydroxyde de sodium B, solution de chlorure d'hydrogène ou acide chlorhydrique C, solution d'acide éthanoïque D et solution d'éthanoate de sodium E. L'étiquette posée sur chaque bécher n'est plus lisible. Pour identifier les solutions, on mesure le pH de chacune d'entre elles.**

1) Compléter le tableau suivant avec les lettres A, B, C, D et E. Justifier votre choix.

Numéro du bécher	1	2	3	4	5
pH	12	8,4	2	3,4	7
Solution					

2) Faire le bilan des concentrations molaires des espèces chimiques présentes dans le bécher numéro 4.

3) On verse progressivement, dans 20 mL de la solution du bécher 4, la solution du bécher numéro 1.

a) Calculer le volume de la solution du bécher numéro 1 versée à l'équivalence.

b) Ecrire l'équation bilan de la réaction.

c) Le pH à l'équivalence est-il supérieur ou inférieur à 7 ? Justifier la réponse.

Exercice 331 : **1) Le pH d'une solution ammoniac de concentration 0,1 mol/L est de 11,1.**

a) Montrer que l'ammoniac est une base faible.

b) Ecrire l'équation –bilan de sa réaction sur l'eau. Calculer les concentrations molaires des espèces chimiques présentes dans la solution.

c) Préciser, dans un tableau, les espèces chimiques majoritaires, minoritaires et ultra-minoritaires. Déterminer le pk_a du couple ion ammonium/ ammoniac.

2) a) Pour préparer 1 litre de solution tampon de pH = 9, 5, on dissout 5 g de chlorure d'ammoniac dans l'eau. Quel volume de solution d'ammoniac du commerce à 15 mol/L faut-il introduire avant de compléter à 1 litre ?

b) Quel prix de revient de ce litre de solution sachant qu'un litre d'ammoniac du commerce vaut 39,9 F et qu'un kilogramme de chlorure d'ammoniac vaut 41,1 F ?

Exercice 332 : **On dose 10 cm^3 d'une solution A aqueuse d'acide carboxylique RCOOH, de concentration molaire C_a, par une solution B d'hydroxyde de sodium de concentration $C_b = 0,1\ mol/L$. On note au fur et à mesure en fonction du volume $V_b(mL)$ de solution B versé, le pH de la solution obtenue. On obtient des valeurs suivantes :**

V_b	0	1	3	5	6	8	9	9,5
pH	2,6	3,3	3,9	4,2	4,4	4,8	5,2	5,5

V_b	9,8	9,9	10	10,1	11	12
pH	5,9	6,2	8,5	10,7	11,7	11,8

1) Faire le schéma annoté du montage de faire ce dosage.

2) a) Tracer la courbe de $pH = f(V_b)$. Echelles : 1 cm pour 1 unité de pH et 1 cm pour 1 mL.

b) Ecrire l'équation bilan de la réaction du dosage.

c) Montrer comment on peut déterminer avec une bonne précision, les coordonnées du point d'équivalence et du point de la demi-équivalence. Donner ces valeurs.

d) En déduire la concentration C_a de cet acide.

3) a) L'allure de la courbe indique-t-elle la présence d'un acide fort ou d'un acide faible ? Justifier la réponse.

b) Voici les constantes d'acidité de quelques acides : acide méthanoïque ($K_a = 1,6.10^{-4}$); acide éthanoïque ($K_a = 1,8.10^{-5}$); acide propanoïque ($K_a = 1,4.10^{-5}$) et acide benzoïque ($K_a = 6,3.10^{-5}$). Identifier l'acide dosé. Retrouver l'équation bilan de la réaction du dosage.

c) Parmi les indicateurs colorés ci-dessus, choisir le plus approprié à ce dosage. Justifier le choix.

d) Quels inconvénients y aurait-il à utiliser les autres indicateurs colorés ?

4) Calculer les concentrations des espèces présentes dans la solution lorsqu'on a versé 10 mL de soude.

5) a) Calculer les concentrations molaires des espèces chimiques présentes au point de la demi-équivalence.

b) En déduire le pKa du couple auquel appartient l'acide éthanoïque.

6) En utilisant la valeur du pH de la solution acid : initiale et sa concentration molaire, retrouver la valeur du pKa correspondant du couple.

Exercice 333 : On prépare 2 solutions basiques : une solution A d'hydroxyde de sodium de concentration 10^{-3} mol/L et une solution B d'alanine (ou phénylamine) $C_6H_5-NH_2$ de même concentration.

1) Les pH de ces solutions valent respectivement 11 et 7,8. Que conclure d'une telle différence ?

2) Soient V et V' les volumes d'une même solution C d'acide chlorhydrique qu'il faut verser respectivement dans 10 mL de A et dans 10 mL de B pour obtenir l'équivalence. a) Que signifie le mot : équivalence ?

b) Les valeurs V et V' sont-elles égales ? Justifier la réponse.

c) On verse à présent V mL de la solution acide C dans 20 mL de A et V' mL de C dans 20 mL de B. Soient A' et B' les deux solutions obtenues. Si on ajoute quelques mL supplémentaires de C dans A' et B' (la concentration de la solution C étant voisine de celles de A et de B), les pH des deux solutions évoluent-ils de la même façon ? Justifier la réponse.

Exercice 334 : On prélève un volume $V_1 = 20\ cm^3$ d'une solution d'acide chlorhydrique de concentration $C_1 = 10^{-2}\ mol/L$ et on y ajoute à l'aide d'une burette un volume V_2 d'une solution d'hydroxyde de sodium de concentration $C_2 = 0,8.10^{-2}\ mol/L$ jusqu'à l'équivalence acido-basique.

1) Ecrire l'équation bilan de la réaction.

2) Répondre aux questions suivantes en les justifiant :

a) Quelle est la valeur du pH de la solution acide de départ ?

b) Quel est le volume V_2 de solution d'hydroxyde de sodium versé ?

c) Quelle est la valeur du pH à l'équivalence ?

Exercice 335 : Dans un bécher contenant un volume $V_A = 100\ mL$ d'acide chlorhydrique, on verse, à l'aide d'une burette graduée, une solution d'éthanolate de sodium de concentration $C_B = 0,1\ mol/L$. Le tableau ci-dessous indique pour différentes valeurs du volume V_B en mL de la solution de base versée, les valeurs correspondantes du pH.

V_B	0	1,5	3	5	7	7,5	8	8,5
pH	2,1	2,2	2,3	2,4	2,7	2,8	3	3,4

V_b	8,7	9	9,3	9,5	10	10,5	11	13
pH	3,7	7	10	10,4	10,8	11	11,2	11,4

1) a) Faire le schéma du dispositif utilisé pour ce dosage.

b) Ecrire l'équation-bilan de la réaction entre l'acide chlorhydrique et l'éthanolate de sodium.

2) Construire le graphique $pH = f(V_B)$ sur papier millimétré : 1 cm pour 1 unité de pH et 1 cm pour 1 mL.

3) Déterminer graphiquement les coordonnées du point d'équivalence.

4) Déterminer la concentration C_A de la solution d'acide chlorhydrique utilisée.

5) On donne les deux indicateurs colorés suivants :

Indicateur coloré	Zone de virage	Changement de teinte
Rouge de phénol	$6,8 \le pH \le 8,4$	Jaune vers rouge
Phtaléine	$8,2 \le pH \le 10$	Incolore vers pourpre
Jaune d'alizarine	$10,1 \le pH \le 12,1$	Jaune vers lilas
Bleu de bromothymol	$6,2 \le pH \le 7,6$	Jaune, vert et vers bleu
Hélianthine	$3,1 \le pH \le 4,4$	Rouge, orange vers jaune

a) Représenter sur le graphe $pH = f(V_B)$ la zone de virage de chacun de ces indicateurs colorés.

b) Lequel de ces indicateurs colorés est le plus approprié pour ce dosage ? Comment serait repéré le volume équivalent ? 6) Calculer les concentrations molaires des espèces chimiques présentes dans le mélange quand on a versé 8 mL de soude.

Exercice 336 : On désire fabriquer une solution tampon à partir d'une solution d'acide méthanoïque, de concentration $2.10^{-2}\ mol/l$ et d'une solution de méthanoate de sodium de même concentration. $pK_a(HCOOH/HCOO^-) = 3,8$.

a) Comment doit-on procéder ?

b) Quel est le pH de la solution tampon ?

c) Quelles sont ses propriétés ?

Exercice 337 : Au cours d'une séance de travaux pratiques, une élève doit préparer une solution tampon à partir d'une solution de chlorure d'ammonium, de concentration $5.10^{-2}\ mol/l$ et d'une solution d'hydroxyde de sodium de même concentration.

a) Expliquez-lui comment elle doit s'y prendre.

b) Quel sera alors le pH de la solution ?

Exercice 338 : On dispose de cinq flacons contenant des solutions aqueuses différentes, mais de même concentration $C = 10^{-2}\ mol/L$: acide éthanoïque ; l'acide chlorhydrique ; le chlorure de potassium ; l'hydroxyde de potassium et l'ammoniac. Les étiquettes A, B, C, D et E de ces flacons ont été mélangées lors d'un rangement. Les pH sont mesurés à 25°C.

1) Identification des solutions :

Le pH de la solution B est égal à 12. Le dosage de B par C donne un pH égal à 7 à l'équivalence. a) Identifier B et C.

b) Au cours du dosage de D par B, le pH à l'équivalence est égal à 8,2. Identifier D.

c) Le pH de la solution est égal à 7. Identifier A.

d) Déduire des questions précédentes la nature de la solution E.

2) Détermination du pKa du couple ion ammonium /ammoniac : On désire déterminer le pKa du couple ion ammonium/ammoniac. Le pH de la solution d'ammoniac est égal 10,6. a) Ecrire l'équation bilan de la réaction de l'ammoniac avec l'eau.

b) Calculer les concentrations molaires des espèces chimiques présentes en solution.

c) Calculer le pKa du couple ion ammonium/ammoniac.

3) Préparation d'une solution tampon :

On veut préparer une solution tampon à partir de la solution d'ammoniac et de l'acide chlorhydrique.

a) Calculer le volume de V_a d'acide chlorhydrique à ajouter à V_b égal à 25 mL de la solution d'ammoniac pour obtenir la solution tampon.

b) Citer les propriétés du mélange obtenu.

Exercice 339 : 1) On mesure le pH d'une solution aqueuse S_1 d'acide perchlorique $HClO_4$ de concentration molaire $C_1 = 2,5.10^{-3}\ mol/L$ et on trouve 2,6.

a) Montrer que l'acide perchlorique est un acide fort. Ecrire son équation bilan avec l'eau distillée

b) Déterminer les concentrations molaires des espèces chimiques présentes dans cette solution S_1.

2) On mesure le pH d'une solution aqueuse S_2 d'acide benzoïque C_6H_5COOH de concentration molaire $C_2 = 2,5.10^{-3}\ mol/L$ et on trouve 3,4.

a) Montrer que l'acide benzoïque est un acide faible. Ecrire son équation bilan avec l'eau distillée

b) Déterminer les concentrations molaires des espèces chimiques présentes dans cette solution S_2.

3) On dose un volume $V_a = 20\ mL$ de chacune de ces solutions par une solution d'hydroxyde de potassium de concentration $C_b = 0,10\ mol/L$.

a) Comparer les volumes respectifs V_{bE1} et V_{bE2} de base versée à l'équivalence de chacun de ces dosages ainsi que les valeurs respectives pH_1 et pH_2.

b) Recenser toutes les différentes entre les allures des deux courbes de dosage.

Exercice 340 : On dispose d'une solution aqueuse S_1 d'acide acétique de concentration $C_1 = 2.10^{-2}\ mol/l$ et d'une solution aqueuse S_2 d'acide acétique de sodium de concentration $C_2 = 4.10^{-2}\ mol/l$.

1) Ecrire la réaction d'acide acétique avec l'eau. Quels sont les couples acide/base en présence dans S_1 ?

2) Ecrire la réaction d'acide acétique de sodium avec l'eau. Quels sont les couples en présence dans S_2 ?

3) On mélange les deux solutions S_1 et S_2. On donne $pKa(CH_3COOH/\ CH_3COO^-) = 4,8$.

Calculer le pH du mélange de la solution S.

Exercice 341 : 1) a) Définir un acide fort au sens de Brönsted. b) Ecrire l'équation de la réaction entre un monoacide fort AH et l'eau.

c) Le pH d'une solution aqueuse S d'un monoacide fort AH est égal à 2,7. Calculer sa concentration molaire.

2) a) On dispose d'une solution S_1 d'un monoacide A_1H de concentration C1 et de pH_1= 2,4. A partir de S_1 on prépare une solution aqueuse S'_1 de concentration $C'_1 = \frac{C_1}{10}$. Le pH de S'_1 a pour valeur 2,9. En déduire si A_1H est un acide fort ou faible. Justifier.

b) Ecrire l'équation de la réaction entre A1H et l'eau.

3) a) Définir la constante d'acidité d'un couple acido basique AH/A^-.

b) Calculer la constante d'acidité Ka du couple A_1H/A_1^- sachant que la solution S_1 de pH =2,4 a une concentration C_1 = 0,10 mol/L. Vérifier que le pKa de ce couple vaut 3,8.

4) a) A un volume V_1 = 50 mL de solution S1, on ajoute un volume d'une solution aqueuse S_2 d'hydroxyde de sodium de concentration C_2 = 0,10 mol/L. Quel volume V_2 de la solution S_2 faut-il ajouter pour obtenir l'équivalence acido basique. Justifier la valeur du pH à l'équivalence. b) Quel volume V'_2 de la solution S_2 faut-il ajouter pour obtenir un mélange de pH = 3,8 ? Comment s'appelle une telle solution ?

Exercice 342 : Dans une fiole jaugée de 250 mL, on verse 10 mL d'une solution A_0 d'acide chlorhydrique de concentration molaire C_0 inconnue et on complète avec de l'eau distillée jusqu'au trait de jauge. On obtient : insi une solution A_1 d'acide chlorhydrique de concentration molaire C_1. Dans un bécher contenant 20 mL de la solution d'acide chlorhydrique A_1, on ajoute progressivement à l'aide d'une burette graduée, une solution d'hydroxyde de sodium de concentration molai e $C_b = 0,01\ mol/L$. On mesure le pH en fonction du volume V_b en mL de la solution d'hydroxyde de sodium versé à

travers le dispositif expérimental du dosage de cet acide.
Puis on obtient :

V_b	0	2	4	6	8	10	12	14	16
pH	2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,9

V_b	18	19	19,5	20	20,5	21	22	24	26
pH	3,3	3,6	4,2	7	9,4	10,1	10,5	10,9	11

1) Faire le schéma annoté du dispositif expérimental du dosage de cet acide.

2) a) Tracer la courbe de $pH = f(V_b)$. Echelles : 1 cm pour 1 unité de pH et 2 cm pour 1 mL.

b) Ecrire l'équation bilan de la réaction du dosage.

c) Déterminer les coordonnées du point d'équivalence et la concentration C_a de l'acide chlorhydrique.

3) Calculer les concentrations des espèces présentes dans la solution lorsqu'on a versé $4\ mL$ de soude.

4) Donner en concentration molaire la composition de la solution acide au début du dosage.

Exercice 343 : On dispose d'une solution aqueuse S_1 d'ammoniac de concentration $C_1 = 2.10^{-2}\ mol/l$ de volume $V_1 = 200\ mL$ et d'une solution aqueuse S_2 de chlorure d'ammonium de volume $V_2 = 400\ mL$ de concentration $C_2 = 15.10^{-3}\ mol/l$.

1) Ecrire la réaction d'ammoniac avec l'eau. Quels sont les couples acide/base en présence dans S_1 ?

2) Ecrire la réaction de chlorure d'ammonium avec l'eau. Quels sont les couples en présence dans S_2 ?

3) On mélange les deux solutions S_1 et S_2. On donne $pKa(NH_4^+/NH_3) = 9,2$.

Calculer le pH du mélange de la solution S.

Exercice 344 : 1) On fabrique 100 mL d'une solution d'acide chlorhydrique 0,05 mol/L par dilution d'un volume v_1 de solution chlorhydrique de concentration molaire 1 mol/.L. Déterminer le volume v_1, et expliquer brièvement comment on réalise pratiquement cette opération.

2) La solution d'acide chlorhydrique 0,05 mol.L^{-1} est ajoutée progressivement à 20 mL d'une solution aqueuse de éthylamine dans le but de doser celle-ci. Un pH-mètre permet de suivre l'évolution du pH du mélange au cours de cette manipulation. Les résultats obtenus sont consignés dans le tableau ci-après où Va(mL) représente le volume d'acide versé :

Va	0	5	10	15	20	25	30	35
pH	11,8	11,4	11,1	10,9	10,7	10,5	10,2	9,8

Va	36	38	40	43	45	50
pH	9,7	9,3	6,1	2,7	2,4	2,1

a) Ecrire l'équation de la réaction de dosage.

b) Tracer la courbe pH = f(Va). On prendra comme échelles : en abscisses 1cm pour 4 mL, en ordonnées 1 cm pour une unité de pH. c) Déterminer les coordonnées du point équivalent par une méthode que l'on précisera.

d) En déduire :

La concentration molaire Cb de la solution d'éthylamine.

Le pKa du couple associé à l'éthhylamine.

3) Calculer les concentrations molaires volumiques des espèces présentes dans le mélange lorsque le volume d'acide versé est de 30 mL. Retrouver la valeur du pKa à l'aide des valeurs trouvées.

4) On désire préparer une solution tampon.

a) Qu'est-ce qu'une solution tampon ? Quelles sont ses propriétés caractéristiques ?

b) Préciser la manière d'obtenir 100 mL d'une solution tampon à partir de la solution d'éthylamine précédente et de la solution d'acide chlorhydrique 0,05 mol/L.

Exercice 345 : On dispose d'une série de solutions aqueuses de même concentration molaire $C = 10^{-2}\ mol/l$.

A : solution d'acide méthanoïque ;

B : solution de méthanoate de sodium ;

C : solution hydroxyde de sodium ;

D : solution de chlorure de sodium ;

E : solution d'acide chlorhydrique.

Les pH mesurés à 25 °C sont, dans l'ordre croissant :
$2,0$; $2,9$; $7,0$; $7,9$; $12,0$.

1) Attribuer, en justifiant brièvement votre choix, à chacune des solutions A, B, C, D, E, la valeur du pH qui lui correspond.

2) Calculer les concentrations molaires des espèces chimiques présentes dans la solution A et en déduire le coefficient d'ionisation α de l'acide méthanoique dans cette solution ainsi que le pk_a de son couple.

3) On mélange 20 cm^3 de la solution A et 20 cm^3 de la solution B. le pH du mélange obtenu F est de 3,75.

a) Calculer les concentrations molaires des espèces chimiques présentes dans la solution F

b) Quelles sont les caractéristiques de la solution F ? Comment varie le pH de cette solution F lorsqu'on ajoute un peu de la solution D.

4) On fait tomber progressivement la solution C dans 20 cm^3 de la solution A.

a) Quelle est la réaction chimique qui se produit ?

travers le dispositif expérimental du dosage de cet acide.
Puis on obtient :

V_b	0	2	4	6	8	10	12	14	16
pH	2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,9

V_b	18	19	19,5	20	20,5	21	22	24	26
pH	3,3	3,6	4,2	7	9,4	10,1	10,5	10,9	11

1) Faire le schéma annoté du dispositif expérimental du dosage de cet acide.

2) a) Tracer la courbe de $pH = f(V_b)$. Echelles : 1 cm pour 1 unité de pH et 2 cm pour 1 mL.

b) Ecrire l'équation bilan de la réaction du dosage.

c) Déterminer les coordonnées du point d'équivalence et la concentration C_a de l'acide chlorhydrique.

3) Calculer les concentrations des espèces présentes dans la solution lorsqu'on a versé 4 mL de soude.

4) Donner en concentration molaire la composition de la solution acide au début du dosage.

Exercice 343 : On dispose d'une solution aqueuse S_1 d'ammoniac de concentration $C_1 = 2.10^{-2}\ mol/l$ de volume $V_1 = 200\ mL$ et d'une solution aqueuse S_2 de chlorure d'ammonium de volume $V_2 = 400\ mL$ de concentration $C_2 = 15.10^{-3}\ mol/l$.

1) Ecrire la réaction d'ammoniac avec l'eau. Quels sont les couples acide/base en présence dans S_1 ?

2) Ecrire la réaction de chlorure d'ammonium avec l'eau. Quels sont les couples en présence dans S_2 ?

3) On mélange les deux solutions S_1 et S_2. On donne $pKa(NH_4^+/NH_3) = 9,2$.

Calculer le pH du mélange de la solution S.

Exercice 344 : 1) On fabrique 100 mL d'une solution d'acide chlorhydrique 0,05 mol/L par dilution d'un volume v_1 de solution chlorhydrique de concentration molaire 1 mol/L. Déterminer le volume v_1, et expliquer brièvement comment on réalise pratiquement cette opération.

2) La solution d'acide chlorhydrique 0,05 mol.L^{-1} est ajoutée progressivement à 20 mL d'une solution aqueuse de éthylamine dans le but de doser celle-ci. Un pH-mètre permet de suivre l'évolution du pH du mélange au cours de cette manipulation. Les résultats obtenus sont consignés dans le tableau ci-après où Va(mL) représente le volume d'acide versé :

Va	0	5	10	15	20	25	30	35
pH	11,8	11,4	11,1	10,9	10,7	10,5	10,2	9,8

Va	36	38	40	43	45	50
pH	9,7	9,3	6,1	2,7	2,4	2,1

a) Ecrire l'équation de la réaction de dosage.

b) Tracer la courbe pH = f(Va). On prendra comme échelles : en abscisses 1cm pour 4 mL, en ordonnées 1 cm pour une unité de pH. c) Déterminer les coordonnées du point équivalent par une méthode que l'on précisera.

d) En déduire :

La concentration molaire Cb de la solution d'éthylamine.

Le pKa du couple associé à l'éthhylamine.

3) Calculer les concentrations molaires volumiques des espèces présentes dans le mélange lorsque le volume d'acide versé est de 30 mL. Retrouver la valeur du pKa à l'aide des valeurs trouvées.

4) On désire préparer une solution tampon.

a) Qu'est-ce qu'une solution tampon ? Quelles sont ses propriétés caractéristiques ?

b) Préciser la manière d'obtenir 100 mL d'une solution tampon à partir de la solution d'éthylamine précédente et de la solution d'acide chlorhydrique 0,05 mol/L.

Exercice 345 : On dispose d'une série de solutions aqueuses de même concentration molaire $C = 10^{-2}\ mol/l$.

A : solution d'acide méthanoïque ;

B : solution de méthanoate de sodium ;

C : solution hydroxyde de sodium ;

D : solution de chlorure de sodium ;

E : solution d'acide chlorhydrique.

Les pH mesurés à 25 °C sont, dans l'ordre croissant : 2,0 ; 2,9 ; 7,0 ; 7,9 ; 12,0.

1) Attribuer, en justifiant brièvement votre choix, à chacune des solutions A, B, C, D, E, la valeur du pH qui lui correspond.

2) Calculer les concentrations molaires des espèces chimiques présentes dans la solution A et en déduire le coefficient d'ionisation α de l'acide méthanoique dans cette solution ainsi que le pk_a de son couple.

3) On mélange 20 cm^3 de la solution A et 20 cm^3 de la solution B. le pH du mélange obtenu F est de 3,75.

a) Calculer les concentrations molaires des espèces chimiques présentes dans la solùtion F

b) Quelles sont les caractéristiques de la solution F ? Comment varie le pH de cette solution F lorsqu'on ajoute un peu de la solution D.

4) On fait tomber progressivement la solution C dans 20 cm^3 de la solution A.

a) Quelle est la réaction chimique qui se produit ?

b) Quel volume de la solution C faut-il verser pour obtenir un mélange ayant même pH que la solution F, soit 3,75 ?

c) Donner l'allure, en précisant les points importants du graphique $pH = f(v_C)$, v_C étant le volume de solution C ajouté.

Exercice 346 : Données pKa du couple NH_4^+/NH_3 9,2 ; Masse molaire du chlorure d'ammonium, NH_4Cl : M = 53,5 g.mol^{-1} Produit ionique de l'eau : Ke= $1{,}0 10^{-14}$

1) Indiquer les propriétés d'une solution tampon.

2) Écrire les équations des réactions de l'ammoniac et de l'ion ammonium avec l'eau.

3) Calculer la valeur du rapport des concentrations $\frac{[NH_3]}{[NH_4^+]}$ dans le mélange tampon lorsque le $pH = 10$.

4) Déterminer la masse de chlorure d'ammonium NH_4Cl à dissoudre, sans variation notable de volume, dans un litre de solution d'ammoniac à 2,00 mol.L^{-1} pour réaliser une solution tampon de pH = 10,0. Justifier les éventuelles approximations.

5) La solution tampon ainsi préparée est utilisée pour réaliser un dosage à un pH voisin de 10. Le bécher de dosage contient initialement 80,0 mL de la solution tampon précédente et la prise d'essai à doser à l'équivalence du dosage, le volume dans le bécher est de 100 mL. La réaction de dosage a alors libéré 2×10^{-3} mole d'ions H_3O^+. a) Écrire l'équation de la réaction des ions H_3O^+ avec la solution tampon.

b) Montrer qu'elle est pratiquement totale.

c) Déterminer alors les concentrations en NH_3 et en NH_4^+ à l'équivalence du dosage.

d) Calculer, à l'équivalence du dosage, la nouvelle valeur du pH. Commenter le résultat en faisant apparaître le rôle de la solution tampon.

Exercice 347 : On dispose de 100 mL d'acide éthanoïque de concentration molaire $C_A = 0,1$ mol/L. on veut réaliser trois solutions tampon de pH égal à : a) 3,6 ; b) 3,8 ; c) 4,0.

1) Définir une solution tampon.

2) Quel volume d'éthanoate de sodium de concentration molaire 0,2 mol/L faut-il ajouter aux 100 mL de solution acide pour obtenir chacune des solutions tampons ?

Exercice 348 : On lit sur l'étiquette d'une bouteille contenant une solution commerciale d'ammoniac S_0 les indications : contient 20% en masse d'ammoniac, densité d= 0,92, masse molaire, M(NH_3) = 17 g/mol.

1) a) Calculer la concentration molaire C_0 en ammoniac de cette solution commerciale S_0.

b) On se propose de déterminer par titrage acido-basique la concentration molaire de la solution commerciale. Celle-ci étant très concentrée, on en dilue une partie pour obtenir une solution S.

2) On dispose de la verrerie suivante :

- béchers : 50 mL, 100 mL, 250 mL ; - erlenmeyers : 125 mL, 250 mL, 1L ;
- fioles jaugées : 100 mL, 250 mL, 500 mL, 1 L ; - pipettes jaugées : 1 mL, 5 mL, 10 mL, 25 mL ;
- éprouvettes : 10 mL, 25 mL, 50 mL. Justifiez le choix du matériel pour diluer 1000 fois la solution commerciale et donnez le mode opératoire complet de la dilution.

3) La solution diluée S est titrée par une solution A d'acide chlorhydrique de concentration C= 0,015 mol/L. Dans 20,0 mL de solution diluée S, on verse progressivement la solution A et on mesure après chaque ajout le pH de la solution. Les résultats suivants sont obtenus :

V_A	0	1	2	3	5	7	9	11
pH	10	10,3	10	9,8	9,5	9,2	9	8,7

V_A	13	14	14,5	15	16	17	18	20
pH	8,2	7,3	4,4	3,6	3,2	3	2,8	2,7

a) Faire le schéma du dispositif expérimental permettant de réaliser ce dosage.

b) Représenter le graphe pH = f(V_A). Ecrire l'équation bilan de la réaction du dosage

c) Déterminer le point d'équivalence et celui de la demi-équivalence. En déduire le Ka du couple.

d) Déterminer la concentration C_0 de la solution commerciale. Comparer avec le résultat trouvé en 1) a).

e) Calculer les concentrations molaires des espèces chimiques présentes au point de la demi-équivalence.

f) Calculer les concentrations molaires des espèces chimiques présentes au $pH = 7,3$.

Exercice 349 : Dans un volume Va= 50,0 mL d'une solution A d'acide propanoïque de concentration molaire Ca= 0,20 mol.L^{-1}, on ajoute progressivement une solution B d'hydroxyde de sodium de concentration Cb= 0,10 mol.L^{-1}. 1) Étude de la solution A

a) Écrire l'équation de la réaction de l'acide propanoïque avec l'eau. b) Calculer le pH de la solution d'acide propanoïque. Toutes les relations utilisées seront justifiées.

2) Étude de la solution à l'équivalence du dosage.

a) Écrire l'équation de la réaction de dosage.

b) Indiquer si la solution obtenue à l'équivalence est acide, basique ou neutre. La réponse est à justifier sans calcul.

c) Calculer le volume Ve de solution B d'hydroxyde de sodium versé pour atteindre l'équivalence.

3) Étude de la solution S obtenue à la demi-équivalence du dosage.

a) Faire l'inventaire des espèces chimiques majoritaires présentes dans la solution S.

b) Écrire la relation entre $[C_2H_5COO^-]$ et $[C_2H_5COOH]$, dans la solution S, sans tenir compte de la réaction de ces espèces avec l'eau ; en déduire le pH de la solution S.
c) Préciser le nom et les propriétés de cette solution.
d) Il est possible de réaliser une solution de même pH que la solution S en mélangeant deux solutions parmi celles proposées dans le tableau ci-dessous, en utilisant les concentrations et les volumes indiqués.
Solution 1 Propanoate de sodium Concentration molaire $C1= 0,05$ mol/L, Volume $V1= 1,00$ L
Solution 2 Hydroxyde de sodium Concentration molaire $C2= 0,05$ mol/L Volume $V2= 0,50$ L
Solution 3 Acide chlorhydrique Concentration molaire $C3= 0,05$ mol/L Volume $V3= 1,00$ L
Solution 4 Acide chlorhydrique Concentration molaire $C4= 0,05$ mol/L Volume $V4= 0,50$ L
Indiquer le mélange à effectuer, en justifiant la réponse par un calcul de quantité de matière.
Constante d'acidité du couple $C_2H_5COOH/C_2H_5COO^-$
pKa= 4,9

Exercice 350 : Montrer qu'en mélangeant 100 mL d'acide acétique à 0,10 mol/L et 100 mL de soude à 0,040 mol.L^{-1}, on obtient une solution tampon. Calculer son pH.

Exercice 351 : 1) A 100 mL d'une solution (S) contenant 0,1 mol/L d'acide acétique et 0,1 mol.L^{-1} d'acétate de sodium, on ajoute 10 mL d'une solution d'acide chlorhydrique à 0,1 mol.L^{-1}.
a) Calculer la variation de pH de (S).
b) Comparer à ce que serait la variation de pH si on ajoutait la même quantité d'acide fort dans 100 mL d'eau pure. 2) Quelle est la variation du pH si on dilue la solution au dixième ?

Le Messager d'Allah (saw) a dit :
« J'ai été envoyé pour parachever les bons comportements. »

Authentifié par Albâny dans Assilsila assahiha.

Gloire et purete à mon Seigneur le très Grand, le Tres Haut, beni soit mes parents et mes enfants.

Tons les remerciements sont à mes frères et soeurs en islam, par Allah je vous aime.

1er trimestre (351 EXERCICES)

1ère Partie PHYSIQUE : MECANIQUE (28h)

- Chapitre 1 : Cinèmatique..
- Chapitre 2 : Mouvement du centre d'incrtie d'un solide..
- Chapitre 3 : Mouvement dans le champ de pesanteur uniforme..
- Chapitre 4 : Mouvement de particules chargèes dans un champ èlectrique uniforme...
- Chapitre 5 : Oscillateurs mècaniques de translation..

1ère Partie : CHIMIE GENERALE (16h)

- Chapitre 1 : Solutions aqueuses..
- Chapitre 2 : Solutions aqueuses d'acide chlorhydrique et d'hydroxyde de sodium...
- Chapitre 3 : Couples acide base..
- Chapitre 4 : Reaction acide-base..
- Chapitre 5 : Solutions tampon..

RECHERCHEZ LES AUTRES TRIMESTRES

2ème trimestre

2^{e} Partie PHYSIQUE : VIBRATION ET PROPAGATION (23h)
2^{e} Partie : CHIMIE ORGANIQUE (24h)

3ème trimestre

3^{e} Partie PHYSIQUE : ELECTROMAGNETISME (25h)
4ème Partie PHYSIQUE : Oscillations ELECTRIQUES (9h)
5^{e} Partie PHYSIQUE : RADIOACTIVITE (10h)