MATHÉMATIQUES

PROGRAMME DE COTE D'IVOIRE
CLASSE DE TERMINALE D

ANAFORT

AVEC LA COLLECTION ANAFORT C'EST MON SUCCES AU BAC

Des Exercices, des Problèmes et des Sujets corrigés et détaillés avec un rappel de cours

$$U_{n+1} = \frac{2U_n + 4}{U_n + 5}$$

$$\lim_{x \to 0} \left(x + \frac{x + \ln|x|}{x^2}\right)$$

Auteur : M. KOUASSI THEODORE
Professeur Certifié au L .M. A. YAMOUSSOUKRO
Contact : 05 84 60 96 / 08 09 70 45

Participation : M. N'GUESSAN Y. N. RICHARD
05 15 32 50

$4^{ème}$ Edition

AVANT-PROPOS

Ce document de la collection ANAFORT a été revu et reformulé. Cette reformulation va dans le sens des préoccupations des élèves et des collègues.

Ce nouveau document comprend désormais :

- Des exercices d'application du cours,
- Des exercices et des problèmes de consolidation du cours,
- Des sujets d'examen,
- Un rappel de cours.

Tous ces exercices, ces problèmes et ces sujets sont entièrement corrigés et détaillés. Ils couvrent entièrement l'ensemble du programme de Mathématiques de la classe de Terminale D en vigueur en Côte d'Ivoire .

J'espère que la reformulation de ce document permettra aux élèves de bien préparer au cours de l'année, leurs devoirs de classe et leur Examen de Baccalauréat avec un type de rédaction claire , précise et concise .Quant aux collègues , ils y trouveront pour leurs séances et devoirs de classe des exercices, des problèmes et des sujets appropriès.

Je signale qu'une meilleure utilisation de ce document par les élèves consiste à faire un travail personnel avant de consulter les corrigés des exercices , problèmes et sujets .

Je remercie certains de mes collègues pour leurs critiques et suggestions qui ont contribué à l'amélioration de ce document .

Bonne utilisation à tous de ce document.

Merci

L'auteur

SOMMAIRE

Pages

AVANT- PROPOS 1

ENONCES

FONCTIONS NUMERIQUES

PARTIE I : Fonctions racines carrées , Fonctions valeurs absolues , Fonctions polynômes et Fonctions rationnelles .

EXERCICES : 3

PROBLEMES: 6

PARTIE II : Fonctions Logarithmes Népériens et Fonctions Exponentielles Népériennes .

EXERCICES : 11

PROBLEMES : 12

PRIMITIVES ET INTEGRATIONS

EXERCICES : 22

NOMBRES COMPLEXES

EXERCICES : 25

DENOMBREMENT ET PROBABILITES

EXERCICES : 28

SIMILITUDES DIRECTES

EXERCICES : 34

SUITES NUMERIQUES

EXERCICES : 36

STATISTIQUES

EXERCICES : 39

SUJETS 41

CORRIGES

FONCTIONS NUMERIQUES : 53

PRIMITIVES ET INTEGRALES : 71

NOMBRES COMPLEXES : 76

DENOMBREMENT ET PROBABILITES : 81

SIMILITUDES DIRECTES : 88

SUITES NUMERIQUES : 91

STATISTIQUES : 96

SUJETS : 98

RAPPEL DE COURS 117

SUJETS DE BACCALAUREAT DE CÔTE- D'IVOIRE ET CORRIGES:---------- 121

ENONCES

FONCTIONS NUMERIQUES

PARTIE I : Fonctions Racines Carrées, Fonctions Valeurs Absolues, Fonctions Polynômes, Fonctions Rationnelles.

EXERCICES

EXERCICE 1

1°) Soit $P(x) = 4x^2 - x - 5$. Factoriser $P(x)$

2°) Soit f la fonction définie sur IR par :

$$f(x)=\frac{2x+\sqrt{x+5}}{x^2-1}$$

a) Justifier que $Df = [-5 ; +\infty[\setminus \{1 ; -1\}$

b) Calculer la limite à gauche et la limite à droite de f en - 1 ?
f admet -elle une limite en -1? .

EXERCICE 2

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x)=\frac{x+1}{|x+1|}$

Peut – on prolonger par continuité f en -1 ?

EXERCICE 3

Soit la fonction f définie de IR vers IR par : $f(x) = \frac{2x-\sqrt{-x^2+2x+3}}{x-1}$

1°) a) Etudier le signe $P(x) = -x^2 + 2x + 3$

b) Justifier que $Df = [-1 ; 1[\cup]1 ; 3]$.

2°) a) Factoriser $Q(x) = 5x^2 - 2x - 3$.

b) calculer $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

c) En déduire que f admet en point 1 un prolongement par continuité g et le définir.

EXERCICE 4

Soit f la fonction de IR vers IR définie par $f(x)=\frac{1}{x}\left(\cos x-\frac{1}{\cos x}\right)$.

1°) Démontrer que f admet un prolongement par continuité en 0. On le notera g

2°) La fonction g est-elle dérivable en 0 ? Si oui préciser g'(0) .

EXERCICE 5

Soit f la fonction définie sur $]1 ;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{2x+\sin x}{x-1}$.

1°) Démontrer que pour tout x >1 $\dfrac{2x-1}{x-1} \leq f(x) \leq \dfrac{2x+1}{x-1}$

2°) En déduire la limite de f en $+\infty$

EXERCICE 6

Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x \to -2} \frac{\sqrt{x+4} - \sqrt{2}}{x^2 - 4} \;;\quad \lim_{x \to -\infty} x + \sqrt{x^2+1} \;;\quad \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \text{ et } \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{4x^2}$$

EXERCICE 7

$x\left(1 - \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right)$

Soit f la fonction défine sur IR par : $f(x) = \dfrac{|x+1|}{1 - |x-1|}$

1°) Justifier que $D_f = IR \setminus \{0\,;2\}$.

2°) a) Exprimer pour tout x de D_f , f (x) sans le symbole de la valeur absolue.

b) Calculer les limites de f en 0 ; 2 ; $+\infty$ et $-\infty$. Interpréter graphiquement les résultats.

3°)a) Etudier la continuité de f en – 1

b) Etudier la dérivabilité de f en –1.

EXERCICE 8

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = |x^2 - 2x|$

Etudier la dérivabilité de f en 0 et 2.

EXERCICE 9

Démontrer que l'équation $x^3 + x - 1 = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle] 0 ; 1 [. Déterminer par la méthode de balayage un encadrement de α à 10^{-2} près .

EXERCICE 10

Démontrer que l'équation (E) : cosx=x admet une seule solution dans [0 ;1] et vérifier que c'est la seule solution dans IR

EXERCICE11

On considère la fonction définie sur IR \ {2 } par : $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x-2}$ de courbe

(Cf) dans un repère orthonormé (O, I , J) . (unité : 1cm)

1°) a) Démontrer que $\forall x \in IR \setminus \{2\}$, $f(x) = x + 3 + \frac{4}{x-2}$.

b) Calculer les limites de f aux bornes de Df

2) a)Calculer f '(x) pour tout x de IR \ {2 }.

b) Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation .

3°) a) Démontrer que la droite (D) d'équation y = x + 3 est asymptote à (Cf) et préciser la position relative de (Cf) par rapport à (D)

b) Tracer (Cf) et (D)

EXERCICE 12

Soit f la fonction définie sur $[0 ; \pi]$ par : f (x) = sin x .

1°) a) Calculer f '(x) pour tout x de $[0 ; \pi]$.

b)En déduire le sens de variation de f sur $[0 ; \pi]$ et dresser son tableau de variation.

2°) Soit g la restriction de f à l'intervalle $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.

a)Démontrer que g est une bijection de $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ sur un intervalle K à préciser.

Soit g^{-1} la bijection réciproque de g .

b) Dresser le tableau de variation de g^{-1}.

c)Calculer $g\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

d)Démontrer que g^{-1} est dérivable en $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et calculer $(g^{-1})'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

e)Démontrer que $\forall x \in [0 ; 1]$, $(g^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ et retrouver la valeur de $(g^{-1})'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ calculée en d).

PROBLEMES

PROBLEME 1

On considère les fonctions f et g définies de IR vers IR par :

$f(x) = x+\sqrt{x^2+1}$ et $g(x) = x-\sqrt{x^2+1}$ de représentations graphiques (Cf) et (Cg) dans le plan muni d'un repère orthonormé (O,I, J) (unité : 1 cm)

1°) a) Déterminer Df et Dg .

b)Déterminer la limite de f en $+\infty$

c)Déterminer la limite de g en $-\infty$. En déduire celle de f en $-\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat

d)Démontrer que la droite d'équationy = 2x est une asymptote oblique à (Cf) en $+\infty$.

2°) a) Démontrer que $\forall x \in IR$, $g(x) = \dfrac{-1}{f(x)}$.

b) En déduire , en utilisant la question 1°) b) , la limite de g en $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat .

3°) a)Démontrer que

$$\forall x \in IR,\ f'(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}}.$$

b) Démontrer que $\forall x \in IR$, $f(x) > 0$. (Distinguer le cas $x < 0$ et le cas $x > 0$) .

c) En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau.

4°) a) Démontrer que f est une bijection de IR sur un intervalle K à préciser .Soit f^{-1} sa bijection réciproque .

b) Calculer f(0) et démontrer que f^{-1} est dérivable en 1 et calculer $(f^{-1})'(1)$.

c)Ecrire une équation de la tangente (T) à (Cf) au point d'abscisse 0 et celle de la tangente (T') à (Cf^{-1}) au point d'abscisse 1 .

d) Démontrer que (T) et (T ') sont parallèles .

.5°) a) Démontrer que $\forall x \in IR$, $g(x) = -f(-x)$. Interpréter graphiquement ce résultat.

b) Construire (Cf) avec ses asymptotes et sa tangente (T) , puis (Cf^{-1}) et (Cg) dans le même repère .

PROBLEME 2

Partie I

Soit g la fonction polynôme définie sur IR par : $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.

1°) Etudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation .

2°) a) Démontrer que l'équation g (x) = 0 admet une unique solution α comprise entre 1,6 et 1,7 .

b) Préciser le signe de g(x) suivant les valeurs de x dans IR .

Partie II

Soit f la fonction définie sur IR \ {–1 } : $f(x) = \frac{1-x}{x^3+1}$ de courbe (C) dans un repére orthonormé (O, I, J) (unité : 4 cm).

1°)a)Calculer les limtes de f aux bornes de IR \ {–1 } .

Interprèter graphiquement les résultats.

2°) a) Démonter que $\forall x \in$ IR \ {–1 } , $f'(x) = \frac{g(x)}{(x^3+1)^2}$

b) En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

3°) Ecrire l'équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0 .

4°) Constuire (C) avec ses asymptotes et sa tangente (T) .

PROBLEME 3

On désigne par f la fonction définie sur IR par : f(x)= 2x– sinx et on note (C) la courbe représentative dans le repère orthonormé (O, I, J) (unité graphique :1,5cm).

1°) Calculer la dérivée de f et en déduire le sens de variation de f sur IR .

2°) Démontrer que $\forall x \in$ IR , $2x-1 \leq f(x) \leq 2x+1$.

En déduire les limites en $+\infty$ et en$-\infty$

3°) On note (D) et (D') les droites d'équations respectives y =2x– 1 et y =2x+1 .

Déterminer les abscisses des points communs à (C) et (D) d'une part ,à (C) et (D') d'autre part . Préciser les tangentes à (C) en ces points .

4°) Etudier la parité de f. Interprèter graphiquement le resultat .

6°) Tracer avec précision la courbe (C)sur l'intervalle $[-3\pi ; 3\pi]$.Tracer les tangentes aux points 0 etπ . Tracer également (D) et (D') .

PROBLEME 4

Partie I

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$

1°) a) Déterminer l'ensemble de définition Df de f

b) Calculer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$. interpréter graphiquement les résultats.

2°) a) Démontrer que f admet un prolongement g par continuité en 0 . Préciser g

b) Vérifier que $\forall x \in IR,\ g(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}$

c) Démontrer que g est dérivable en 0 et préciser g' (0)

3°) a) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation

b)Construire (C) la représentation graphique de g et sa tangente (T) au point d'abscisse 0 dans un repère orthonormé (O,I,J) . (unité=2cm).

Partie II

1°)Démontrer que g est une bijection de IR sur un intervalle K à préciser

Soit g^{-1} sa bijection réciproque

2°) a)Calculer g $(\frac{4}{3})$ et démontrer que g^{-1} est dérivable en $\frac{1}{2}$ et préciser $(g^{-1})'(\frac{1}{2})$.

b) Construire (C'), la représentation graphique de g^{-1} dans le même repère que (C) (on expliquera la construction)

3°) a) Démontrer que $\forall x \in K\ ,(g^{-1})(x) = \dfrac{2x}{1-x^2}$

b)Calculer $\forall\ x \in K$ $(g^{-1})'(x)$ et retrouver la valeur de $(g^{-1})'(\frac{1}{2})$ calculée en 2°) a) .

PROBLEME 5

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = \dfrac{3x^2}{|3-x|+2x}$ de représentation graphique (C_f) dans un repère orthogonal (O, I , J) . (Unité : 1 cm pour 1 en abscisses et 1 cm pour 5 en ordonnées)

1°) Justifier que $\forall\ x \in]-\infty\ ;-3[\cup]-3\ ;3[,\ f(x) = \dfrac{3x^2}{x+3}$

$$\forall x \in [3\ ;+\infty[,\qquad f(x) = \frac{x^2}{x-1}$$

2°)a) Calculer les limites de f à gauche et à droite en – 3 . Interpréter graphiquement les résultats.

b) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

3°) Etudier la continuité de f en 3 .

4°) On admet que f n'est pas dérivable en 3 .

a) Calculer $f'(x)$ pour tout x de $]-\infty ;-3[\cup]-3 ; 3[$ et $]3 ; +\infty[$.

b) Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation .

5°) a) Démontrer que les droites $(D_1) : y = 3x - 9$ et $(D_2) : y = x + 1$ sont des asymptotes à (C_f) respectivement en $-\infty$ et $+\infty$.

b)Préciser la position relative de (C_f) par rapport à (D_1) et (D_2).

c) Construire (C_f) avec ses asymptotes .

PROBLEME NON CORRIGE

PROBLEME

Soit la fonction f définie sur IR par: $f(x) = \dfrac{x^3 - 4}{x^2 + 1}$ de représentation graphique (Cf) dans un repère orthonormé (O ,I , J) (unité :1cm) et la fonction h définie sur $[-1 ; +\infty[$ par : $h(x)= \dfrac{x^2\sqrt{x+1}}{|x|}$ si $x \neq 0$ et $h(0)=0$ de représentation graphique (Ch) dans un repère orthonormé (O' , I', J') . (unité :3cm)

Partie A :Etude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction u définie sur IR par $u(x)=x^3+3x+8$

1°)a)Calculer les limites de u en $-\infty$ et $+\infty$.

b)Calculer $u'(x)$ pour tout x de IR .Etudier le signe de $u'(x)$ et dresser le tableau de variation de u.

2°)a)Justifier que l'équation $u(x)=0$ admet une unique solution α dans IR et que $-1,6 < \alpha < -1,5$

b) Justifier que pour tout x élément de $[-\infty ; \alpha[$, $u(x) < 0$ et que pour tout x élément de $[\alpha ; +\infty[$, $u(x)>0$.

Partie B : Etude de la fonction f

1°)Calculer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

2°)a)Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel x, et justifier que $f'(x)= \dfrac{x\,u(x)}{(x^2+1)^2}$.

b) En utilisant les résultats de la question 2°) b) de la partie A , étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f.

3°) Démontrer que $f(\alpha)=\dfrac{3}{2}\alpha$

4°)a) Démontrer que la droite (D) d'équation $y=x$ est une asymptote oblique à (Cf) .

b) Etudier les position relatives de (Cf) et (D).

5°) Construire la droite (D) et la courbe (Cf) dans le même repère (O ,I,J) .

__Partie C__ : __Etude de la fonction h__

1°)a) Démontrer que pour tout nombre réel x de [–1 ;0 [, h(x)= $-x\sqrt{x+1}$ et pour tout réel x de]0 ; +∞ [, h(x)= $x\sqrt{x+1}$.

b) Etudier la continuité de h en 0 .

c) Etudier la dérivabilité de h à gauche de 0 et à droite de 0. h est –elle dérivable en 0 ?

d)Etudier la dérivabilité de h à droite de –1 et interpréter graphiquement le résultat.

2°)a)Calculer h'(x) pour tout nombre réel x de [–1 ;0 [et pour tout réel x de]0 ; +∞ [et étudier le signe h'(x).

b) Dresser le tableau de variation de h, on calculera la limite en +∞

3°) Calculer la limite de $\frac{h(x)}{x}$ en +∞ et interpréter graphiquement le résultat

4°)a) Soit g la restriction de h à [0;+∞ [, démontrer que g réalise une bijection de [0;+∞ [sur un intervalle J à préciser . On note g^{-1} sa bijection réciproque.

b)Calculer g(1) et justifier que g^{-1} est dérivable en $\sqrt{2}$, puis calculer(g^{-1})'($\sqrt{2}$)

c) Déterminer une équation de la tangente (T) à (Cg^{-1}) au point d'abscisse $\sqrt{2}$

5°) Construire (Ch) , (Cg^{-1}) et (T) dans le même repère(O',I',J')

PARTIE II : Fonctions Logarithmes Népériens
Fonctions Exponentielles Népériennes.

EXERCICES

EXERCICE 1

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

1°) $f : \mapsto \ln(1-x)$; 2°) $f : \mapsto \ln\left(\frac{1+3x}{x+2}\right)$

3°) $f : \mapsto \ln(x+4) + \ln(6-x)$; 4°) $f : \mapsto \ln|2x+5|$

5°) $f : \mapsto \ln(x-1)^2$; 6°) $f : \mapsto \dfrac{\ln(x+1)}{\ln(5-x)}$

EXERCICE 2

1°) Simplifier les expressions suivantes

$$A = \ln\left(1-\sqrt{2}\right)^{10} + \ln\left(1+\sqrt{2}\right)^{10} \quad \text{et } B = \ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right).$$

2°) Soit $K = -\ln 2 + \ln\left(2+\sqrt{2}\right) + \ln\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2}}\right) + \ln\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)$.

Démontrer que $K = 0$

EXERCICE 3

Résoudre dans IR les équations et inéquations suivantes :

1°) a) $\ln(3-x) = 0$; b) $\ln(x^2-9) = \ln(-4+4x)$; c) $\ln\left|\frac{1}{2}+x\right| = \ln|x|$

d) $\ln(x-1) + \ln(x+1) = \ln(2+x)$.

2°) a) $\ln(\ln x) > 0$; b) $\ln(x^2) \leq 1$; c) $(1-\ln x)(3+\ln x) \geq 0$

EXERCICE 4

Résoudre dans IR les équations et inéquations suivantes :

1°) a) $e^{2x+1} = 7$, b) $-6 + e^{-x-4} = 0$, c) $3e^{2x} + 5e^{x} - 2 = 0$.

2°) a) $e^{x-2} \geq 0$, b) $2e^{4x} - 5e^{2x} - 3 \leq 0$

EXERCICE 5

Soit $P(x) = 6x^3 - 5x^2 - 2x + 1$

1°) a) Vérifier que $P(1) = 0$.

b) Ecrire P(x) sous la forme d'un produit de trois facteurs de degré 1

c) En déduire les solutions des équations et inéquations suivantes :

- $P(x) = 0$
- $P(x) \leq 0$.

2°) En utilisant les résultats de la question 1°) , résoudre dans IR :

a) $6\ln^3(x) - 5\ln^2(x) - 2\ln(x) + 1 = 0$.

b) $6\ln^3(x) - 5\ln^2(x) - 2\ln(x) + 1 \leq 0$.

c) $\ln(6x-3) + \ln(x+1) \geq \ln(2x-2)$.

EXERCICE 6

Calculer les limites suivantes

1°) $\lim\limits_{x \to +\infty} -x + \ln x$; 2°) $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln\left(\dfrac{-x+5}{-x-2}\right)$; 3°) $\lim\limits_{x \to 0} x(\ln x)^2$

4°) $\lim\limits_{x \to e} \dfrac{\ln x - 1}{x - e}$; 5°) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x + 3}{\ln x + 1}$; 6°) $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x - x)$ 7°) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{e^x - x}$;

8°) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{e^x - e}{x - 1}$; 9°) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x^2+1)}{-x}$

PROBLEMES

PROBLEME 1

Partie A

Soit g la fonction définie sur] 0 ; + ∞ [par : $g(x) = x^2 + \ln x$

1°) Préciser les limites de g aux bornes de Dg

2°) Etudier le sens de variation de g. Dresser son tableau de variation

3°) Démontrer que l'équation g(x) = 0 admet une unique solution α tel que $0,65 < \alpha < 0,66$

4°) Préciser le signe de g (x) suivant les valeurs de x dans] 0 ; + ∞ [

Partie B

Soit la fonction définie sur] 0 ; + ∞[par: $f(x) = 1 - x + \dfrac{1 + \ln x}{x}$. On désigne par (C) la représentation graphique de f dans le repère orthonormé (O,I,J). (unité :4cm).

1°)a) Calculer les limites de f en +∞ et en 0.

b) Démontrer que la droite (D) d'équation y = – x + 1 est asymptote oblique à (C)
c) Etudier la position de(C) par rapport à la droite (D)

2°) a) Démontrer que $\forall x \in \left]0;+\infty\right[, f'(x) = \frac{-g(x)}{x^2}$.

b) Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

3°) α est le nombre réel définie en A)3°)

a) Démontrer que $\ln(\alpha) = -\alpha^2$. En déduire que $f(\alpha) = 1 - 2\alpha + \frac{1}{\alpha}$

b) Démontrer que la fonction h définie sur$]0 ; +\infty[$ par : $h(x) = 1 - 2x + \frac{1}{x}$

est décroissante

c) En déduire que $f(\alpha) < h(0{,}65)$
d) Démontrer que $f(\alpha) > f(0{,}65)$
e) Donner un encadrement de $f(\alpha)$
4°) Tracer (C) et (D) dans le repère (O,I,J)

PROBLEME 2

Partie A

Soit g la fonction définie sur IR par : $g(x) = (x-1)^2 - 1 + \ln|x-1|$

1°) Déterminer Dg .

2°) Etudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation .

3°) Calculer g(0) et g (2) et en déduire le signe de g (x) pour tout x de Dg .

PArtie B

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = x - \frac{\ln|x-1|}{x-1}$ de courbe (C) dans

un repère orthonormé (O, I, J) . (unité : 1,5 cm) .

1°) a) Déterminer Df et calculer les limites de f à gauche et à droite en 1.

Interpréter graphiquement les résultats.

b) Exprimer f (x) sans le symbole de la valeur absolue.

c) Déterminer les limites de f en $-\infty$. et en $+\infty$.

2°) a) Démontrer que $\forall x \in D_f$, $f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^2}$.

b) En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation .

3°) a) Justifier que la droite (D) d'équation y = x est asymptote à (C) .

b) Etudier la position relative de (C) par rapport à (D) .

c) Démontrer que le point A(1 ; 1) est un centre de symétrie de (C) .

4°) Construire (D) et (C).

PROBLEME 3

Partie A

Soit g la fonction définie sur par : $g(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+1} - \ln(x^2+1)$.

1°) a) Déterminer Dg .

b)Etudier la parité de g sur IR.

c)Calculer la limite de g en $+\infty$. En déduire celle en $-\infty$.

2°) Etude de g sur $[0 ; +\infty[$.

a) Démontrer que $\forall x \in [0 ; +\infty[$, $g'(x) = \dfrac{2x(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}$.

b) En déduire le sens de variation de g sur $[0 ; +\infty[$ et dresser son tableau de variation .

3°) a) Justifier qu l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[1 ; +\infty[$.

b)En completant le tableau suivant , donner un encadrementde α d'amplitude10^{-3}

x	1,980	1,981	1,982
g (x)	0,00014	-0,00034	– 0,00082

4°)a) Démontrer que : $\forall x \in]\alpha ; +\infty[$, $g(x) > 0$.

$\forall x \in]0 ; \alpha[$, $g(x) < 0$.

b) En déduire le signe g en utilisant le 1°) b) sur IR .

Partie B

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = \dfrac{\ln(x^2+1)}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$, de Courbe (C) dans un repère orthonormé (O , I , J) .(unité : 2 cm) .

1°) Démontrer que f est impaire .Interprèter graphiquement le résultat .

2°) a)Démontrer que f est dérivable en 0 et que $f'(0)=1$.

b) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0 .

3°) a) Démontrer que $\forall x \in IR^*$, $f(x) = \dfrac{2\ln|x|}{x} + \dfrac{1}{x}\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$.

b)En déduire les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ puis interprèter graphiquement les résultats.

4°) a) f est dérivable sur IR , démontrer que $\forall\, x \in IR^*$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

b) En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation .

5°) Démontrer que $f(\alpha) = \dfrac{2\alpha}{\alpha^2 + 1}$ puis en déduire l'expression de $f(-\alpha)$.

6°) Construire (T) et (C) . (*on prendra* $\alpha \approx 1,98$) .

PROBLEME 4

Partie A

Soit g la fonction définie sur IR par $g(x)=xe^x - e^x - 1$

1°)a) Calculer les limites de g en $+\infty$ et $-\infty$

b) Etudier le sens variation de g et dresser son tableau de variation

2°)a) Démontrer que l'équation g(x)=0 admet une unique solution $\alpha \in [1\,;2]$

b) Donner une valeur approchée à 10^{-1} près de α

3°) Donner le signe de g(x) suivant les valeurs de x

Partie B

Soit la fonction f définie sur IR par $f(x)= xe^x - 2e^x - x + 2$

On désigne par (C) la représentation graphique de f dans un repère orthonormé(O,I,J).

1°)a) Calculer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

b) Démontrer que $\forall\, x \in IR$, $f'(x)=g(x)$

c) En déduire le sens variation de f sur IR

2°) Calculer la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$ en $+\infty$ et interpréter le résultat obtenu

3°)a) Démontrer que la droite (D) d'équation $y=-x+2$ est asymptote à (C) en $-\infty$

b) Etudier la position de (C) par rapport à (D)

4°) Préciser l'équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0

5°)a) Démontrer que $\forall\, x \in IR$, $f(x)= (e^x - 1)(x - 2)$

b) En déduire les points d'intersection de(C) avec l'axe des abscisses.

6°)En utilisant A) 2°)a) démontrer que $f(\alpha) = -\dfrac{(\alpha - 2)^2}{\alpha - 1}$

7°) Construire (T), (D) et (C)

PROBLEME 5

On considère la fonction définie sur $[\,0\,;+\infty\,[$ par : $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x\,e^x + 1}$ de courbe (C) dans un repère orthonormé (O ,I ,J) . (unité : 4 cm).

Partie A

Soit g la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $g(x) = x + 2 - e^{x}$.

1°)Etudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation .(On calculera la limite de g en $+\infty$).

2°)a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans IR .

b)Justifier que $1{,}14 < \alpha < 1{,}15$.

3°) Justifier que pour tout $x < \alpha$, $g(x) > 0$ et pour tout $x > \alpha$, $g(x) < 0$.

Partie B

1°) a) Démontrer que pour tout $x \geq 0$, $f'(x) = \dfrac{e^{x} g(x)}{\left(x\, e^{x}+1\right)^{2}}$.

b)En déduire le sens de variation de f sur $[0\,;+\infty[$.

2°) a) Demontrer que pour tout $x \geq 0$, $f(x) = \dfrac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$.

b)En déduire la limite de f en $+\infty$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu

3°) a) Etablir que $f(\alpha) = \dfrac{1}{1+\alpha}$. (On utilisera la question A) 2°) .

b) En déduire un encadrement de $f(\alpha)$ à 10^{-2} près .

4°) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.

5°) Soit u la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $u(x) = e^{x} - x\,e^{x} - 1$.

a)Etudier le sens de variation de u sur $[0\,;+\infty[$, puis en déduire le signe de u

b)Démontrer que pour tout $x \geq 0$, $f(x) - x = \dfrac{(x+1)\,u(x)}{x\,e^{x}+1}$.

c) En déduire la position de (C) par rapport à (T) .

6°) Tracer (T) , puis (C) .

PROBLEME 6

Soit f la fonction de IR vers IR définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x e^{\frac{1}{x}} & \text{pour } x < 0 \\ f(x) = x\ln(x+1) & \text{pour } x \geq 0 \end{cases}$$

Soit (C) la courbe de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O,I,J) (unité : 2cm) et (Δ) la première bissectrice.

1°) Etudier la continuité et la dérivabilité de f au point 0.

2°)a) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

b) Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

3°)a)Calculer la limite de $\frac{f(x)}{x}$ en $+\infty$ et interpréter le résultat obtenu.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} x(e^{\frac{1}{x}}-1)$ (on pourra poser $X=\frac{1}{x}$).

c)Démontrer que la droite (D) d'équation y = x+1 est asymptote à la courbe (C) en$-\infty$

4°) Déterminer le ou les points d'intersection de (C) et (Δ).

5°) Démontrer que f admet une bijection réciproque sur IR+.

6°) Représenter (C) ,(Δ) , (D) et (C') la représentation graphique de f^{-1} .

PROBLEMES NON CORRIGES

PROBLEME 1

Soit la fonction f définie sur]0;+∞ [par : $f(x)=1-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}$ et (C) sa représentation graphique dans un repère orthonormé (O; I ;J) (unité=2cm)

1°) a) soit f' la derivée de f. Calculer f'(x) et montrer que f'(x) a le signe de lnx.

Etudier le sens de variation de f et en deduire le signe de f(x) pour x élément de]0;+∞ [.

b) Déterminer la limite de f en $+\infty$ .Interpréter graphiquement ce résultat.

c) Déterminer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.

2°) a)Résoudre l'équation f(x) =1

b) Résoudre l'inéquation f(x)>1. En deduire la position de (C) par rapport à la droite(Δ) d'équation y=1

3°)Soit A le point d'intersection de(C) et de(Δ).

Déterminer l'équation de la tangente (T) à (C) au point A.

4°)Construire (Δ) ,(T), puis (C).

5°)Démontrer que l'équation f(x) =2 admet une solution unique α appartenant à]0 ;1] .

Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

6°)a) Déterminer la fonction dérivée de u definie par: u(x)=1+lnx .

En déduire une primitive de g définie par : $g(x)=\frac{1}{x}(1+\ln x)$.

b) Calculer $I=\int_1^e \frac{1+\ln x}{x}dx$.

c) Calculer en cm^2,l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) ,l'axe des abscisses et droites d'équations x=1 et x=e .

Donner la valeur exacte puis une valeur approchée à10^{-2}près .

PROBLEME 2

Partie A

On considère la fonction f : IR→ IR

$$x \mapsto \frac{2e^{2x}}{e^{2x}-1}$$

On désigne par (C) sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé (O,I,J) .

1°)a)Déterminer Df .

b)Calculer les limites aux bornes de Df et interpréter les résultats obtenus.

c)On suppose que f est dérivable sur Df,calculer f'(x) et dresser son tableau de variation sur Df.

d)En déduire le signe de f suivant les valeur de x.

2°)a)Démontrer que le point J est un centre de symétrie à (C)

b) Préciser la tangente à (C) au point A de(C) d'ordonnée 4

3°)a)Démontrer que la restriction g de f à l'intervalle]0 ;+∞[est une bijection de]0 ;+∞[sur un ensemble que l'on précisera.

b) Trouver une expression explicite de sa bijection réciproque g^{-1}

c) On désigne par (C') la représentation graphique de g^{-1} dans le plan muni d'un repère orthonormé (O,I,J) .

Trouver le coefficient directeur de la tangente à (C') au point B de(C') d'abscisse 4.

4°) Construire (C) puis (C') dans le même repère.

Partie B

On considère la fonction h : IR→ IR

$$x \mapsto \ln(|e^{2x}-1|)$$

On désigne par (Γ) la représentation graphique de h dans le plan muni d'un repère orthonormé (O,I,J) .

1°)a)Déterminer Dh .

b) Calculer les limites aux bornes de Dh et interpréter les résultats obtenus.

c) Etudier le sens variation de h et dresser son tableau de variation

2°) Démontrer que la droite (D) d'équation : y=2x est une oblique à (Γ) en+∞ .

(Pour le calcul de la limite on écrira : $2x=\ln e^{2x}$).

3°)a)Préciser le point d'intersection de (Γ) avec (OI)

b) Construire (Γ) (réaliser des dessins différents pour chacune des parties A et B) .

PROBLEME 3

Partie A

Soit g la fonction définie par $g(x)=1-(2x+1)e^{-2x}$

1°) Justifier que g est strictement décroissante sur]–∞ ;0[et strictement croissante sur] 0 ;+∞ [.

2°) Calculer g(0) puis justifier que ∀ x≠0, g(x) >0.

3°) Déterminer la limite de g en-∞ .

4°) $\forall\, x \in IR^*$, on a : $\frac{g(x)}{x} = \frac{1}{x} - \frac{2x+1}{x} e^{-2x}$.

Justifier que la courbe (Cg) admet une branche parabolique de direction (OJ) en- ∞ .

5°) Déterminer la limite de g en +∞ et interpréter graphiquement le résultat. (On pourrait écrire $g(x)=1- 2xe^{-2x} - e^{-2x}$).

6°) Tracer (Cg) et les éventuelles asymptotes dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).(unité graphique :2cm)

Partie B

Soit f la fonction définie sur [0;+ ∞ [par: $\forall x > 0$, $f(x) = \frac{1}{x}(-2x - 1 + e^{-2x})$ et f(0)=- 4

1°) En remarquant que :$\forall$ x >0, $f(x)= \frac{e^{-2x} - 1}{x} - 2$, justifier que f est continue en 0.

(On pourrait poser X=-2x)

2°)a) Justifier que : $\forall$ x >0 , $f(x)= \frac{1}{xe^{2x}} - \frac{1}{x} - 2$.

b) En déduire la limite de f en +∞ et interpréter graphiquement le résultat.

3°) On admettra que f est dérivable en 0 et que f'(0)=2.

4°) Déterminer une équation de la tangente (T) à (Cf) au point d'abscisse 0.

5°)En se servant de la question 2°)de la partie A,établir le tableau de variation de f

6) Tracer sur le même graphique que (Cg) , (T) , la droite (Δ) d'équation y=x , (Cf) et les éventuelles asymptotes.

Partie C

Soit (Γ) le domaine du plan délimité par (Δ) ; (Δ') d'équation y=1 ; (Cg) et (D) la droite d'équation x=λ (où λ est un réel strictement supérieur à 2).

1°) A l'aide d'une intégration par partie ,

justifier que : $\int_0^{\lambda} (2x+1)e^{-2x}\,dx = 1-(1+\lambda)e^{-2\lambda}$

2°) Soit A(λ) l'aire en cm^2 du domaine (Γ).

Démontrer que $A(\lambda) = -2 + 4\int_0^{\lambda}(2x+1)e^{-2x}\,dx$.

3°) Déterminer la limite de A(λ) pourλ tendant vers +∞ .

PROBLEME 4

Partie A

Soit la fonction g de IR vers IR telle que $g(x) = \frac{(x+1)}{2x+1} - \ln x$.

1°)a) Déterminer l'ensemble de Définition Dg de g.

b) Calculer les limites de g en 0 et en +∞ .

2°) a) Calculer g'(x) pour tout x de Dg .

b) Déterminer le signe de g'(x) suivant les valeurs de x de Dg

c) Etudier les variations de g et dresser le tableau de variation de g.

3°) a) Calculer g(1) et g(2) . Démontrer que l'équation g(x) =0 admet une solution unique α dans [1 ;2].

b) Compléter le tableau suivant

x	1,7	1,8	1,9	2
g(x)				

c) Déduire un encadrement de α par deux décimaux consécutifs d'ordre 1

d) Déduire le signe de g sur $]0\,;+\infty[$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = \frac{2\ln x}{x^2 + x}$ et(Cf) sa courbe dans un repère orthogonal (O,I ,J) . (unité : OI =2cm ;OJ =4 cm)

1°) a) Déterminer l'ensemble de définition de f

b) Calculer les limites de f en 0 et $+\infty$

c) Interpréter graphiquement les résultats en b)

2°) a) Démontrer que $\forall x \in]0\,;+\infty[$, $f'(x) = \frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2}g(x)$

b) Déduire le signe de f'(x)

c) Déduire les variations de f

d) Démontrer que $f(\alpha) = \frac{2}{\alpha(2\alpha+1)}$

e) Donner le tableau de variation de f . On donnera une approchée de α à 10^{-1} près .

f) Construire (Cf)

Partie C

1°) Démontrer que $\forall\ x \geq 1$, $\frac{\ln x}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{\ln x}{x}$.

2°)a) Calculer $I = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{\ln x}{x}dx$.

b) En utilisant une intégration par parties, calculer $J = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{\ln x}{x^2}dx$.

c) Déduire un encadrement de $K = \int_1^{\frac{3}{2}} f(x)dx$

3°)Soit A l'aire en cm^2 de la portion du plan délimitée par (Cf), la droite (OI) et les droites d'équations respectives x=1 et $x=\frac{3}{2}$.

a) Exprimer A en fonction de K .

b) En déduire un encadrement de A en cm^2 .

PROBLEME 5

Le plan est muni du repère orthonormé (O,I,J) (l'unité graphique est 2 cm)

Partie A

On considère la fonction f définie sur IR par $f(x)=\frac{1}{1+e^{-x}}$ .On note (C) sa courbe représentative.

1°)On suppose que f est dérivable sur IR et on note f' sa dérivée

a)Calculer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$ et interprèter les résultats obtenus.

b)Calculer f'(x) pour tout réel x.

c)Déterminer le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation

2°)a)Démontrer que le point $K(0;\frac{1}{2})$ est un centre de symetrie de (C) .

b)On note (T) la tangente à (C) en K.

Démontrer que (T) à pour équation : $y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$

3°) Soit φ la fonction définie sur IR par : $\varphi(x)=4e^{-x}-(1-e^{-x})^2$

On suppose que φ est dérivable sur IR et on note φ' sa derivée.

a)Démontrer que $\forall\ x\in IR$, $\varphi'(x)=2(e^{-2x}-e^{-x})$.

c)Déterminer les variations de φ puis dresser son tableau de variation(on ne demande pas de calculer les limites de φ en $-\infty$ et $+\infty$) .

c)En déduire que $\forall\ x\in IR$, $\varphi(x)\leq 0$.

4°)On se propose d'étudier la position relative de (C) par rapport à (T) par:

$h(x)=f(x)-(\frac{1}{4}x+\frac{1}{2})$

a)Démontrer que $\forall\ x\in IR$, $h'(x)=\dfrac{\varphi(x)}{4(1+e^{-x})^2}$

b)Déterminer les variations de h .

c) Calculer h(0) puis dresser le tableau de variation de h .

d) Déterminer le signe de h(x) sur IR puis en déduire la position de (C) par rapport à (T) .

5°) Construire (T) puis tracer (C)

Partie B

Soit g la foncton définie sur IR par: $g(x)=\dfrac{1}{1+e^{x}}$ et (C') sa courbe représentative .

1°) Démontrerque (C') et (C) sont symétriques par rapport à (OJ) .

Tracer (C') dans le même repère que celui de (C) .

2°)a) Vérifier que $\forall\ x\in IR$, $g(x)=\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$

b) Déterminer la primitive G sur IR de g telle que :G(0)=0

PRIMITIVES ET INTEGRALES

EXERCICES

EXERCICE 1

Pour chacune des fonctions f suivantes, trouver une primitive F sur l'ensemble K

1°) $f(x)=x^2(x^3-1)^5$; K=IR

2°) $f(x)=\dfrac{2x}{(1-x^2)^2}$; K=]-∞;1[

3) $f(x)=\dfrac{1}{(4x^2-4x+1)^3}$; K=]$\dfrac{1}{2}$;+∞[

4°) $f(x)=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$; K=IR

5°) $f(x)=\cos^2 x-1$; K=IR

6°) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{9-x^2}}$; K=]-3;3[

7°) $f(x)=\dfrac{\sin x}{(1+\cos x)^3}$; K=]0; π [

8°) $f(x)=\sin x\cos^4 x$; K=IR

9°) $f(x)=(1+\tan^2 x)\tan x$; K=]0 ; $\dfrac{\pi}{2}$ [

10°) $f(x)=\sin^5 x$; K=IR

EXERCICE 2

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x)=\dfrac{3x^3-7x^2+5x+1}{(x-1)^2}$

1°) Déterminer Df .

2°)Trouver trois nombres réel a , b et c pour que $\forall x\in D_f,\ f(x)=ax+b+\dfrac{c}{(x-1)^2}$

3°) En déduire la primitive F sur] 1 ; +∞ [de f qui s'annule en 2 .

EXERCICE 3

Soit f et g deux fonctions définies sur $[0\,;\dfrac{\pi}{4}]$ **par :**

$$f(x)=\frac{\sin x}{(\cos x)^3}\quad \text{et}\quad g(x)=\frac{1}{(\cos x)^4}.$$

1°) Vérifier que $\forall x\in[0\,;\dfrac{\pi}{4}]$, $f'(x)=\dfrac{3}{(\cos x)^4}-2\dfrac{1}{(\cos x)^2}$.

2°)En déduire la primitive de g sur $[0\,;\dfrac{\pi}{4}]$ **qui s' annule en 0.**

EXERCICE 4

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = x\ln x$.

1°) Calculer $f'(x)$ pour tout x de $]0\,;+\infty[$.

2°) En déduire une primitive de ln sur $]0\,;+\infty[$.

EXERCICE 5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-\frac{1}{2}\}$ par : $f(x) = \dfrac{3x+1}{(2x+1)^2}$.

1°) Déterminer les deux réels a et b tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-\tfrac{1}{2}\}\ ,\ f(x) = \frac{a}{2x+1} + \frac{b}{(2x+1)^2}$$

2°) a) En déduire les primitives de f sur $]-\frac{1}{2}\,;+\infty[$.

b) Déterminer la primitive F de f sur $]-\frac{1}{2}\,;+\infty[$ telle que $F(0) = 1$.

EXERCICE 6

On propose de trouver une primitive de la fonction f définie sur IR par :

$f(x) = e^{2x}\cos x$.

1°) Calculer $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x)$ et $f''(x)$.

2°) Trouver les deux nombres réels a et b tels que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a f''(x) + b f'(x)$.

3°) En déduire une primitive de f sur IR.

EXERCICE7

1°)Calculer les intégrales suivantes

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\,dx$; b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x^3}\,dx$; c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln x}{x}\,dx$; d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx$; e) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\,dx$

f) $\displaystyle\int_0^6 2-|x-3|\,dx$; g) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (x^3-\tan x)\,dx$.

2°) A l'aide d'une intégration par parties , calculer les intégrales suivantes :

$I = \displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx$; $L = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$; $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2 x\,dx$; $K = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x}\,dx$.

EXERCICE 8

On considère les intégrales suivantes : $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x\,dx$, $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\,dx$

et $K = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^2 x\cos^2 x\,dx$.

1°) Calculer I – J et I + J + K .

2°) a) Exprimer cos4x en fonction de cosx et sinx .

b) En déduire la valeur de I + J – 3K , puis celle de I , J et K .

EXERCICE 9

Soit f la fonction définie sur [0 ; 1] par : $f(x) = \dfrac{x^2}{4 - x^2}$ et $g(x) = \ln(4 - x^2)$.

1°) Soit $I = \int_0^1 f(x)\,dx$.

a) Quel est le signe de I ?

b) Démontrer que pour tout x de [0 ; 1] , $f(x) = -1 + \dfrac{1}{2-x} + \dfrac{1}{2+x}$.

c) Calculer la valeur exacte de I .

2°) En utilisant une intégration par parties , démontrer que

$\int_0^1 g(x)\,dx = \ln 3 + 2I$, en déduire sa valeur exacte.

EXERCICE 10

On note $I = \int_0^{\pi} e^x \cos^2 x\,dx$, $J = \int_0^{\pi} e^x \sin^2 x\,dx$ et $K = \int_0^{\pi} e^x \cos(2x)\,dx$

1°) A l'aide de deux intégrations par parties , prouver que $K = \dfrac{e^{\pi} - 1}{5}$.

2°) a)Calculer I +J

b)Démontrer que I – J = K.

c)En déduire les valeurs de I et J .

NOMBRES COMPLEXES

EXERCICES

EXERCICE 1

Déterminer le module et un argument de chacun de nombres complexes suivants :

$z_1 = \sqrt{6} - i\sqrt{2}$; $z_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $z_3 = i(\sqrt{6} - i\sqrt{2})$; $z_4 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{1 + i}$; $z_5 = (-1 - i)^4$

EXERCICE 2

Démontrer que $\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i} + \frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i} - 1 = 0$

EXERCICE 3

On donne $z = (1+i)(1-i\sqrt{3})$.

1°) Ecrire sous la forme algébrique z .

2°) a) Ecrire sous forme trigonométrique z .

b)En déduire une forme trigonométrique de $\frac{1-i\sqrt{3}}{1-i}$.

EXERCICE 4

On pose $a = \sqrt{2}(1+i)$, $b = \sqrt{3} + i$ et $c = b\,a^3$.

1°) Déterminer le module et un argument de a et b .

2°)En déduire le module et un argument de c .

3°) En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$.

EXERCICE 5

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O , I ,J)

Pour tout nombre complexe z différent 1 , on pose $Z = \frac{z-2i}{z+1}$ .Soit les points A ,B M et M' d'affixes respectives – 1 , 2i , z et Z

1°)Calculer le module et un argument de Z_1 pour z = i

2°)a) Interpréter géométriquement | Z |.

b) Déterminer l'ensemble (E_1) des points M (z) tels que | Z |= 1.

3°) a)En posant z = x + i y et Z = X + i Y où x , y , X et y sont des nombres réels , exprimer X et Y en fonction de x et y .

b) En déduire les ensembles suivants :

(E_2) = { M(z) / Z $\in$ IR }

(E_3) = { M(z) / Z $\in$ i IR }.

4°)Calculer| Z– 1 | | z + 1 | et en déduire que l'ensemble des points M' d'affixe Z , lorsque le point M d'affixe z parcourt le cercle de centre A de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$ est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

EXERCICE 6

Déterminer les ensembles suivants :

$(E) = \{ M(z) \ / \ |z + 5 - 2i| = |z - 2 + i| \}$

$(C) = \{ M(z) \ / \ |z + 1 - i| = 4 \}$

$(F) = \{ M(z) \ / \ |\bar{z} + 2 + i| = 3 \}$

EXERCICE 7

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct (O ,I , J) (unité :1cm) ,on donne les points A(3 + i) , B(2i) et C(2 – 2 i)

1°) a) Placer les points A, B et C.

b) Démontrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle.

2°) a) Déterminer l'affixe du point D tel que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme.

b) Placer D .

3°) Déterminer l'affixe du point E , symétrique de A par rapport au milieu du segment[BC].

EXERCICE 8

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct (O ,I , J) (unité : 1 cm) , on donne les points $B\left(2+2i\sqrt{3}\right) et\, C\left(2-2i\sqrt{3}\right)$.

1°) a) Vérifier que les points B et C appartiennent au cercle de centre O et de rayon 4.

b)Construire avec précision les points B et C .

2°) On considère le point A d'affixe $z_A = \dfrac{z_C - z_B}{2}$.

a)Calculer z_A.

b) Déterminer la nature du triangle ABC .

EXERCICE 9

On considère dans $\mathbb{C}$,l' équation (E) : $z^3 - 4iz^2 - (6 + i)z - 1 + 3i = 0$

1°) Démontrer que (E) admet une solution imaginaire pure z_0.

2°)Soit $f(z) = z^3 - 4iz^2 - (6 + i)z - 1 + 3i$.

a)Mettre f (z) sous la forme $f(z) = (z - i)(z^2 + bz + c)$ où b et c sont des nombres complexes à préciser

b) Resoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation , $z^2 - 3iz - 3 - i = 0$.

c) En déduire la resolution de l'équation (E).

EXERCICE 10

1°) Donner sous forme trigonométrique les solutions de l'équation : $z^3 = 2 + 2i$.

2°) Calculer $(-1 + i)^3$ et en déduire que z est une solution de l'équation

$(E) : \left(\dfrac{z}{-1+i}\right)^3 = 1$.

3°) En utilisant les racines cubiques de l'unité et de la question 2°) , donner les solutions de (E) sous forme algébrique .

4°) Déduire des questions précédentes les valeurs exactes de $\cos(\frac{\pi}{12})$ et $\sin(\frac{\pi}{12})$

EXERCICE 11

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité :1cm)

A) Soit le polynôme $P(z) = z^3 - (5+i)z^2 + (10+6i)z - 8 - 16i$

1°) Démontrer que l'équation P(z) = 0 admet une solution imaginaire pure

2°)Déterminer le polynôme Q(z) tel que P(z) = (z–2i) Q(z) .

3°)En déduire la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation P(z) = 0 .

4°)Soit les points A ,B et C d'affixes respectives 3 +i ; 2i et 2 – 2i .

a) Placer les points A , B et C .

b) Démontrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle

c) Déterminer l'affixe du point D tel que ABCD soit un parallélogramme et placer D.

d) Déterminer l'affixe du point E , symétrique de A par rapport au milieu de [BC] et justifier que le quadrilatère ABEC est un carré.

e)Démontrer que les 4 points A , B , E et C appartiennent à un même cercle (Γ_1) et le construire .

f) Démontrer que les points E , C et D sont alignés.

B) 1°)Déterminer l'ensemble (Γ_2) des points M d'affixe z vérifiant $|z - 2 + 2i| = \sqrt{10}$.

2°) Les points E , D , A et B appartiennent – ils à cet ensemble ?

3°) Construire (Γ_2) dans le même repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

EXERCICE12

a est un nombre réel quelconque

On considère dans C l'équation (E) : $z^3 - (ia + 2\sqrt{3})z^2 + (2ia\sqrt{3} + 4)z - 4ai = 0$

1°) Déterminer le nombre réel a pour que : -2i soit une solution de(E)

2°) Déterminer le polynôme complexe q de degré deux ,tel que :

$\forall z \in C,\ z^3 + (2i - 2\sqrt{3})z^2 + (4 - 4i\sqrt{3}+)z - 8i = q(z)(z - \sqrt{3} - i)$.

3°) Résoudre dans C l'équation (E) pour a=–2

4°) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O,I,J),on donne les points M,N et Q d'affixes respectives : $\sqrt{3} + i$; $-2i$ et $\sqrt{3} - i$

a)Représenter dans le repère (O,I,J) les points M,N et Q.(on prendra 3cm par unité)

b) T désigne le symétrique de M par rapport à (OJ).
Démontrer que le triangle TMQ est rectangle en M.

c) Démontrer que les points M, Q , N et T sont cocycliques.

DENOMBREMENT ET PROBABILITES

EXERCICES

EXERCICE 1 -

On forme un jury de 5 personnes tirées au sort parmi un ensemble de 9 hommes et 6 femmes .

1°) Quel est le nombre de jurys possibles ?

2°)Déterminer le cardinal des évènements suivants :

A « Le jury comporte 2 hommes et 3 femmes »
B « Le jury ne comporte que des femmes »
C « Le jury ne comporte aucune femme »
D « Le jury comporte au moins une femme »
E « Le jury comporte au plus un homme »
F « Le jury comporte plus d'hommes que de femme »
G « Le jury satisfait l'exigence de Mr. X qui ne veut pas siéger avec Mme.Y ».

EXERCICE 2

Adou frappe successivement 3 touches parmi les 14 suivantes d'une Calculatrice : 0, 1 ,2 ,3 ,4 ,5 ,6 ,7 ,8 ,9 , + , - , : et ×.

1°) De combien de manières Adou peut-il ainsi frapper 3 touches ?

2°) Combien de manières où Adou

a) Frappe 3 chiffres distincts.
b) Frappe un produit de 2 nombres naturels .
c) Frappe un produit de 2 nombres naturels et le résultat est nul.
d) Frappe un quotient de 2 nombres naturels et le résultat est nul.
e) Frappe une somme ou une différence 2 nombres naturels distincts.

EXERCICE 3

Un candidat tire successivement devant un examinateur 3 questions sur 10
Parmi ces 10 questions , le candidat connaît 4 , 3 sont mal connues et 3 sont ignorées

.1°) combien ce candidat a – t –il de tirages possibles ?

2°)Combien y –a – il de tirages où ce candidat :

a) Connaît les 3 questions tirées ?
b) Connaît une seule question parmi les 3 tirées ?
c) Ne connaît aucune question parmi les 3 tirées ?
d)Connaît une question ,mal une question et ignore une question ?

EXERCICE 4

On considère un dé cubique dont 4 faces sont peintes en blanche et 2 faces en noire.

1°) On lance une fois ce dé et on observe la couleur de la face supérieure.

Calculer le nombre de possibilités d'obtenir :

a) Une face en blanche
b) Une face en noire

2°)On lance maintenant ce dé 4 fois de suite .

Calculer le nombre de possibilités d'obtenir :

a)Dans l'ordre une face en blanche , une face en noire, une face en blanche , une face en blanche .

b)Une seule face en noire au cours des 4 lancers .

c) Une face en noire au $4^{ème}$ lancer (une face en noire pouvant apparaître au cours des autres lancers) .

d) Au moins une face en noire au cours des 4 lancers .

e) Au plus une face en noire au cours des 4 lancers .

EXERCICE 5

Un sac contient 12 boules dont 2 rouges ,4 noires et 6 jaunes .

1°) On tire au hasard et simultanément 2 boules du sac . On considère les évènements suivants :

A = « Parmi les 2 boules , une seule est rouge »

B = « Parmi les 2 boules , une seule est noire »

a)Définir par une phrase les événements $A \cup B$ et $A \cap B$.

b)Calculer p (A) , p (B) , p($A \cap B$) et p($A \cup B$). A et B sont – ils indépendants ?

2°) On tire maintenant au hasard et simultanément 3 boules du sac.

Calculer la probabilité des évènements suivants:

C = « Les 3 boules tirées sont de même couleur »

D = « Les 3 boules tirées ne sont pas toutes de même couleur »

E = « Les 3 boules tirées sont de couleurs différentes » .

EXERCICE 6

Dans le tiercé du 31/ 12 / 2004, il y a 16 partants. On attribue à chacun des chevaux , les numéros de 1 à 16 .

Les chevaux n°11 ; 3 ; 7 ;1 et 13 sont considérés comme des outsiders tandis que les numéros 2 ;4 ;6 ;15 ; et 5 sont les favoris. On suppose qu'il n'y a pas d'ex aequo à l'arrivée.

1°) Quel est le nombre de tiercés :

a) Dans l'ordre ?

b) Dans le désordre ?

2°) On s'intéresse au tiercé dans le désordre .

a) Quelle est la probabilité pour qu'il ait un outsider ou un favoris parmi les gagnants.

b) Sachant que les gagnants portent des numéros pairs, quelle est la probabilité pour qu'ils ne soient ni des outsiders ni des favoris ?

EXERCICE 7

On considère un dé cubique dont les faces sont numérotées de1à 6.

1°)On lance une fois ce dé et on considère l'événement

A : « Obtenir un numéro pair »

Calculer p(A) et p($\overline{A}$) .

2°) On lance 6 fois de suite ce même dé . Les lancers sont indépendants.

a) Calculer la probabilité d'obtenir exactement 4 fois A.

b) Calculer la probabilité d'obtenir au moins une fois A.

3°)On lance maintenant n fois de suite ce même dé où n un entier naturel supérieur à 1 . Les lancers sont indépendants.

a)Calculer la probabilité p_n d'obtenir au moins fois A au cours de ces n lancers.

b)Déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle $p_n \geq 0,95$

EXERCICE 8

Mlle Jolie a dans son porte-monnaie 3 pièces de 250 Fet 5 pièces de 100 F.
Un matin, pour se rendre à son lieu de travail, elle emprunte un taxi- compteur et à sa destination, le compteur marque760 F.Pour payer le chauffeur , Jolie tire au hasard et simultanément 4 pièces dans son porte-monnaie.
On désigne par X la valeur des pièces tirées.

1°) Déterminer les valeurs prises par X .
2°) Etablir la loi de probabilité de X .
3°) Calculer E(X) , V(X) et σ(X)
4°)Calculer la probabilité pour que Jolie puisse payer le chauffeur de taxi.

EXERCICE 9

Un joueur mise une certaine somme S pour participer à un jeu qui consiste à lancer deux pièces de monnaie parfaitement équilibrées.

- Si le joueur amène 2 faces , alors il reçoit 3000 F.
- Si le joueur amène 1 face , alors il reçoit 500 F .
- Sinon il ne reçoit rien .

Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque partie le gain net , c'est-à-dire la différence entre la somme reçue et la mise S .

1°) Déterminer la loi de probabilité de X .
2°) Calculer E(X) en fonction de S .
3°) a) Quelle doit – être la mise S pour que le jeu soit équitable ?
b) Pour la valeur de S trouvée, déterminer la fonction de répartition de X et la représenter .

EXERCICE 10

Un sac contient 10 jetons indiscernables au toucher dont 6 jetons blancs , 3 jetons rouges et 1 jeton noir.
Un joueur participe à un jeu qui consiste à tirer au hasard et au maximum deux jetons du sac ,de manière successive avec remise

- Si le jeton tiré est noir , le joueur gagne 1500 F .
- Si le jeton tiré est rouge ,le joueur gagne 500F .
- Si le jeton tiré est blanc , le joueur perd 500 et la partie s'arrête.

1°) a) Déterminer la probabilité P_1 pour que la partie s'arrête après le premier tirage .
b) Déterminer la probabilité P_2 pour que le joueur effectue les deux tirages .
2°) X la variable aléatoire qui ,à chaque partie, associe la somme algébrique des gains du joueur.
a) Déterminer les valeurs prises par X .
b) Déterminer la loi de probabilité de X .
c) Calculer l'espérance mathématique E(X) . Le jeu est- il équitable ? (Justifier votre réponse .)

EXERCICE 11

Dans une urne se trouvent six médaillons identiques , indiscernables au toucher numérotés de 1 à 6 .
Un jeu consiste à tirer au hasard un médaillon de l'urne après avoir misé une certaine somme versée aux organisateurs du jeu et à recevoir un prix ou non selon le numéro inscrit sur le médaillon tiré

- ✓ Si le joueur tire le médaillon numéroté 4 , on lui remet ce qu'il a misé et il gagne 3000F
- ✓ S'il tire le médaillon numéroté 1,2 ou 6, il perd sa mise et ne gagne rien
- ✓ S'il tire le médaillon numéroté 3, il ne gagne rien mais récupère sa mise
- ✓ S'il tire le médaillon numéroté 5, il le remet dans l'urne et effectue un second tirage

Si le médaillon retiré :

- porte le même numéro (c'est- à dire N°5) le joueur gagne 2000F et perd sa mise
- si non , il perd sa mise et de plus il paie 1500F aux organisateurs

1°) Calculer la probabilité pour que ce joueur récupère sa mise.

2°)Calculer la probabilité pour qu'il perde 1500F et qu'il perde aussi sa mise.

3°) Le joueur a misé une somme S. On note X la variable aléatoire qui à chaque partie, associe le résultat financier de son jeu , c'est à dire la différence entre ce que le joueur possèdera à l'issue du jeu et ce qu'il possédait avant de jouer.

a)Compléter la tableau ci-dessous définissant la loi de la probabilité de la variable X

x_i (Valeurs de la variable)	$-S$	$-S-1500$	0	$-S+2000$	3000
$P(X=x_i)$					

b) Démontrer que l'espérance mathématique de x est $E(X)=-\frac{2}{3}S+\frac{3125}{9}$

c) Quelle somme le joueur doit-il miser pour que son résultat financier moyen soit nul ? (on donnera l'arrondi de cette somme à l'unité près).

EXERCICE 12

Une urne U_1 contient 3 boules noires et une boule blanche .

Une urne U_2 contient 2 boules et 3 boules blanches .(Toutes les boules sont indiscernables au toucher).

On tire une boule dans l'une des 2 urnes .De plus , on suppose que l'on a deux fois plus de chance de tirer la boule dans U_1 que dans U_2

1°) a)Démontrer que la probabilité de choisir l'urne U_1 et de tirer une boule blanche est : $\frac{1}{6}$.

b)Calculer la probabilité de choisir l'urne U_2 et de tirer une boule blanche .

c) En déduire que la probabilité de tire une boule blanche est $\frac{11}{30}$.

2°)Sachant que la boule est blanche , déterminer la probabilité :

a)Qu'elle provienne de l'urne U_1 .

b)Qu'elle provienne de l'urne U_2.

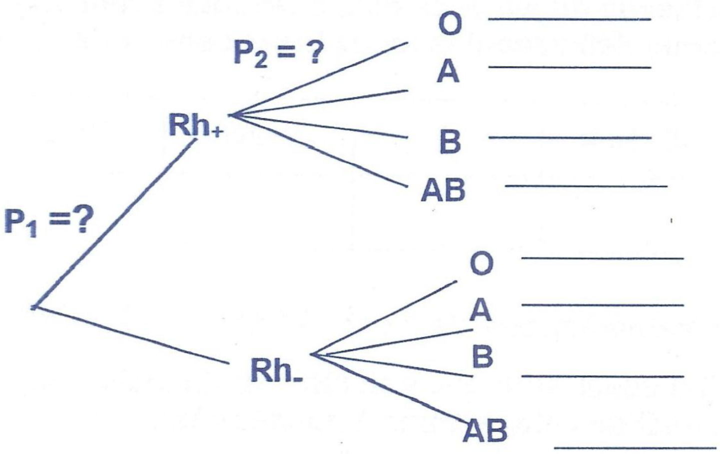
EXERCICE 13

Voici le tableau de répartition de principaux groupes sanguins des habitants d'une population .

Groupes	**O**	A	B	AB
Rhésus +	35 %	38 ,1 %	6,2 %	2,8 %
Rhésus --	9 %	7,2 %	1,2 %	0,5 %

Dans cet èxercice , les résultats numériques demandés seront , s'il y a lieu , arrondis à 3 décimales.

1°) L'objectif de cette question est de compléter à l'aide de données de ce tableau l'arbre suivant .



On choisit au hasard une personne dans la population donnée .

On note : Rh+ l'événement « la personne a le facteur Rh+ »

O l'événement « la personne appartient au groupe O ».

a)Déterminer la probabilité p(Rh+) notée P_1 .On détaillera le calcul effectué , puis on reportera ce résultat dans l'arbre) .

Déterminer de même la probabilité P_2 en détaillant les calculs.

b)Compléter le reste de l'arbre de probabilités.

2°) a) Comment peut- on , à partir de l'arbre complété , déterminer la probabilité de O? Vérifier ce résultat à partir du tableau .

b) Quelle est la probabilité pour qu'une personne appartenant au groupe O ait le facteur Rh+ ?

3°) a) On considère n personnes choisies au hasard dans la population donnée .

Calculer, en fonction de n , la probabilité P_n pour qu'il y ait , parmi elles ,au moins une personne du groupe O .

b) Calculer la plus petite valeur de n pour laquelle $P_n \geq 0,999$.

EXERCICE 14

Les résultats seront donnés à 10^{-3} près par excès.

Une entreprise en matériels informatiques fabrique des disquettes dont 4% sont défectueuses .

A l'issue de cette fabrication , les disquettes sont contrôlées et tirées en 3 lots :

- Disquettes marquées , celles-ci portent la marque de l'entreprise.
- Disquettes démarquées.
- Disquettes détruites.

On désignera par A l'événement : « La disquette est défectueuse » et par B : « La disquette est refusée » .

1°) Quelle est la probabilité pour qu'une disquette soit défectueuse ?

2°) L'unité de contrôle rejette 3 % des bonnes disques et 95 % des disquettes défectueuses.

a)Quelle est la probabilité P_1 pour qu'une disquette soit défectueuse et acceptée.

b)Quelle est la probabilité P_2 pour qu'une disquette soit bonne et refusée.

c) Quelle est la probabilité P_3 pour qu'il y ait une erreur de contrôle .

d) Démontrer que la probabilité P_4 pour qu'une disquette soit acceptée est 0,933.

3°) Le contrôle s'effectue par 5 tests successifs de façon indépendante.
Une disquette reçoit la marque l'entreprise si elle subit avec succès 5 contrôles successifs , détruite si elle est refusée au moins 2 fois et démarquée sinon.

a)Quelle est la probabilité P_5 pour qu'une disquette soit démarquée ?

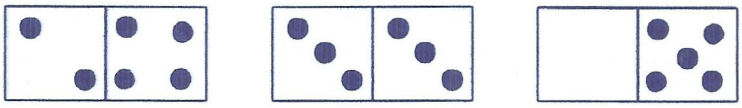
b)Quelle est la probabilité P_6 pour qu'une disquette reçoive la marque de l'entreprise ?

c)Quelle est la probabilité P_7 pour qu'une disquette soit détruite ?

EXERCICE 15

Toutes les probabilités seront données sous forme de fractions irréductibles.
Dans un jeu de domino, chaque domino est partagé en deux parties portant chacune un « numéro » de 0 à 6 représenté par des points , les deux parties pouvant ou non porter le même numéro . Tous les numéros sont différents.

Exemple



On appelle double un domino dont les deux parties portent le même numéro.

I) Montrer que le nombre de dominos du jeu est 28

II) Un joueur tire au hasard un domino du jeu.

1°) a) Calculer la probabilité qu'il y a d'obtenir un double.

b) Calculer la probabilité qu'il y a d'obtenir un domino dont la somme des deux numéros soit divisible par 3

2°)Soit X la variable aléatoire égale à –1 si le joueur obtient un domino non double et égal au numéro marqué si le joueur obtient un double (4 pour un double quatre par exemple).

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer l'espérance mathématique et l'écart de X.

III) un joueur effectue trois tirages consécutifs en remettant chaque fois le domino tiré avant d'effectuer le tirage suivant.
Calculer la probabilité d'obtenir une seule fois un double au cours des trois tirages . (on pourra étudier le cas où le double est obtenu au premier , au deuxième ou au troisième tirage)

SIMILTUDES DIRECTES

EXERCICES

EXERCICE 1

Dans chacun des cas , déterminer la transformation F du plan dont l'écriture complexe est :

1°) $z' = z + 3i$, 2°) $z' = -2z + i$, 3°) $z' = iz + 3i$

4°) $z' = e^{-i\frac{\pi}{3}} z + 1 + i\sqrt{3}$, 5°) $z' = \left(\frac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2}\right) z$.

EXERCICE 2

Quelle est la nature et les éléments caractéritisques de la transformation F dont l'écriture complexe est :

$z' = (\sqrt{3} - i)z + 1 + i(\sqrt{3} - 1)$.

EXERCICE 3

A,B,C et D sont 4 des points d'affixes respectives : $\sqrt{3} + 2i$, $\sqrt{3} + i$, $-2i$ et $1 - i$.

1°)Démontrer qu'il existe une similitude directe S telle que S(A) = C et S(B) = D .

2°)Déterminer l'écriture complexe de S .

EXERCICE 4

Soit S la similitude directe de rapport 2 , angle $\frac{-\pi}{2}$ et centre A (2 i).

1°) Déterminer l'écriture complexe de S .

2°) a) Déterminer les affixes des points C et D tels que S (A) = C et S (B) = D où A(i) et B (1 – i) .

b)Préciser la position des droites (AB) et (CD).

EXERCICE 5

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, I , J) .

Soit S la transformation du plan qui , à tout point M (x , y) associe le point M' (x' , y') tel que $x' = x - \sqrt{3}\, y + 2\sqrt{3}$ et $y' = \sqrt{3}\, x + y - \sqrt{3}$.

1°)Déterminer l'écriture complexe de S .

2°)Préciser la nature et les éléments caractéristiques de S et de S^{-1} sa réciproque.

3°)Soit le cercle (C) de centre O et rayon $\sqrt{2}$ et (Γ) son image par S .

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de (Γ).

EXERCICE 6

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, I , J) .

1°) a) Placer les points A (2+ 2 i) , B (– 4 + 2 i) et C(2 – i).

b)Démontrer que le triangle ABC est rectangle .

2°) S la similitude directe de centre A telle que S(B) = C .

a)Déterminer l'écriture complexe de S .

b)Déterminer l'affixe du point C' , image de C par S et placer le .

c)Donner les éléments caractéristiques de S .

d)Démontrer que les points A, B et C' sont alignés et que le triangle BCC' est rectangle.

4°) Soit (D) la droite d'équation y $= -\frac{1}{2}$ x et (D') son image par S.

a) Construire (D) et (D') .

b) Déterminer une équation de (D') .

EXERCICE 7

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ de nombres complexes , on considère l'équation (E) :

$z \in \mathbb{C},\ 2z^2 - 3(1+3i)z + 9(i-1) = 0$

1°) Résoudre l'équation (E) .

2°) Dans la plan complexe , on place le point A d'affixe 1+2i.

On considère la similitude S de centre A,de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle dont une mesure est π

. Soit M un point quelconque du plan d'affixe z, on désigne par M' le point d'affixe z' l'image du point M par la similitude S. Exprimer z' en fonction de z.

3°) a)Placer dans le plan complexe le point B d'affixe 3

b) Soit P l'image de B par S ; calculer l'affixe du point P

c) Soit Q l'image de P par S. Calculer l'affixe de Q

d) Vérifier que les affixes des points Pet Q sont des solutions de l'équation (E)

KG-EN

SUITES NUMERIQUES

EXERCICES

EXERCICE 1

Soit la suite (u_n) définie par :

$$u_1 = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = \frac{u_n + 3}{2}$$

1°) a) Calculer u_2 et u_3.

b) La suite (u_n) est – elle arithmétique ? géométrique ? (Justifier vos réponses)

2°)Pour tout $n \geq 1$, on pose $v_n = 3 - u_n$.

a)Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$

b) Exprimer v_n ,puis u_n en fonction de n

c) Calculer $\lim u_n$.

EXERCICE 2

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 2$ et pour tout n de IN $u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 1}{u_n + 3}$

1 °) Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n \neq 1$.

2°) a) On pose $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$. Démontrer que (v_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le 1^er^ terme v_0.

b) Exprimer v_n en fonction de n.

c) Exprimer u_n en fonction de v_n , puis en u_n en fonction de n .

d) Calculer la limite u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 3

Soit a un nombre réel strictement positif. On considère la suite géométrique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de raison q et 1^er^ terme u_0 non nul tel que $27u_8 = a^3 u_5$.

1°) Exprimer q en fonction a .

2°) Pour quelle valeur de a la suite (u_n) est- elle convergente ? Justifier.

3°) On pose pour tout entier naturel n : $S_n = u_0 + u_1 + \ldots\ldots + u_n$

Exprimer S_n en fonction de a, u_0 et n..

4°) Dans cette partie on prend a tel que : $0 < a < 3$.

a)Calculer la limite de la suite (u_n) .

b)Sachant que $u_0 = 81$ et $\lim s_n = 243$, calculer a , puis q .

c)Calculer l'arrondi d'ordre 2 de S_9 .

EXERCICE 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I , J) .

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel par: $3u_{n+1} = u_n + 12$ et $u_1 = 3$.

1°)Représenter graphiquement les cinq 1^ers^ termes de la suite sans les calculer sur la droite (OI).Conjecturer la variation et la limite de la suite.

2°)a)Démontrer par recurrence que la suite (u_n) est majorée par 6 .

b) Prouver que la suite (u_n) est croissante.

c)Donner une conclusion des résultats précédents .

3°)Soit (v_n) définie par $v_n = u_n - 6$ pour tout entier naturel $n > O$.

a)Démontrer que (v_n) est un suite géométrique .

b)Exprimer v_n , puis u_n en fonction de n .

c) Calculer la limite de v_n ,en déduire que (u_n) converge vers 6.

4°)a) Calculer $S_n = v_1 + v_2 + ... + v_n$ puis $T_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$.

b)Calculer lim S_n et lim T_n .

c) Donner une interprétation des résultats 4°) b)

__EXERCICE 5__

Soit a un nombre réel donné . On considère les suites (u) et (v) définies respectivement par :

$$u_0 = 3 \;,\; u_1 = 5 \text{ et } \forall\, n \in IN \;,\; u_{n+2} = \frac{1}{2}(a+1)^2 u_{n+1} + (a-2)u_n .$$

$$\forall\, n \in IN \;,\; v_n = u_{n+1} - u_n .$$

1°) On pose a = 1.

a) Démontrer que la suite (v) est constante et donner sa valeur .

b)En déduire que (u) est une suite arithmétique dont la raison est 2 .

c)On pose : $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$.

Exprimer un puis S_n en fonction de n .

2°) On pose a =– 5 .

a) Démontrer que (v) est une suite géométrique dont la raison est 7

b) Exprimer v_n en fonction de n

c)Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 , exprimer en fonction de n la somme T_n où $T_n = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1}$.

d) Exprimer un en fonction de T_n

e) En déduire que la suite (u) est divergente.

__EXERCICE 6__

Un client d'une banque dispose, au 1^er^Janvier 2004 , d'une somme de1.000.000 cfa qu'il dépose sur un compte. La banque rémunère à 5% d'intérêt annuel toutes les sommes déposées et verse ces intérêts sur le compte de son client tous les 31 Décembre de chaque année .

De plus, à cette date , ce client décide de rajouter 950.000 cfa . On désigne par u_n (n élément de IN),la somme disponible après n années écoulées depuis le 1^er^ Janvier 2004 , ainsi u_0 =1.000.000 cfa

1°) Calculer u_1, u_2 ,u_3 et u_4.

2°) Etablir pour tout entier naturel n ,la relation $u_{n+1} = 1,05\ u_n + 950.000$

3°) On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$v_n = u_n + 19.000.000$.

a)Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le 1er terme

b)En déduire l'expression de un ,puis celle de v_n , en fonction de n .

c)Ce client peut-il espérer avoir un jour 25.000.000 cfa d'économie en continuant de la sorte ? Si oui en quelle année ?

EXERCICE 7

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O , $\vec{u}$, $\vec{v}$)

(unité : 4cm) . A_0 est le point d'affixe $z_0 = 4$. Pour tout entier naturel n , si A_n est un point d'affixe z_n , on désigne par A'_n le point d'affixe iz_n et par A_{n+1} le milieu de $[A_n A'_n]$.

On note r_n et θ_n respectivement le module et un argument de z_n .

1°) Placer les points A_0 , A_1, A_2 , A_3 , A_4 et A_5 .

2°) a) Prouver que pour tout entier naturel n : $z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n$.

b)En déduire que la suite (r_n) est une suite géometrique et que la suite (θ_n) est une suite arithmétique . Préciser leur 1er terme et leur raison .

c) Calculer r_n et θ_n en fonction de n.

d) Quelle est la limite de la suite (r_n)? Interpréter géometriquement ce résultat. Pour quelles valeurs de n, les points O ; A_0 et A_n sont –ils alignés?

3°)a) Prouver que pour tout $n \geq 1$, $A_n A_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} A_{n-1} A_n$.

b)Exprimer en fonction de n , la longueur L_n de la ligne brisée $A_0A_1......A_n$, puis déterminer sa limite.

EXERCICE 8

On considère la suite $(u_n)_{n\in IN}$ définie par $u_0=e$ et,pour tout entier naturel n,$u_{n+1}=\sqrt{u_n}$.

On pose, pour tout entier n , $v_n=\ln u_n$.

1°)a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1}=\frac{1}{2} v_n$,en déduire que v_n est le terme général d'une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme .

b)Donner l'expression de v_n en fonction de n. En déduire celle de u_n en fonction de n.

2°) Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ et $P_n = u_0 \times u_1 \times ..... \times u_n$.

a)Démontrer que $P_n = e^{S_n}$.

b) Exprimer S_n en fonction de n ;

c)En déduire l'expression de P_n en fonction de n .

3°) Déterminer la limite de la suite$(S_n)_{n\in IN}$; en déduire celle de la suite($P_n)_{n\in IN}$.

STATISTIQUES

EXERCICES

EXERCICE 1

Le tableau suivant donne le pourcentage de la consommation médicale des ménages dans la consommation globale des ménages pour les années considérées.

Année		1990	1995	2000	2001	2002	2003
Rang de l'année	x	0	5	10	11	12	13
Pourcentage de la consommation médicale des ménages dans la consommtion globale des ménages	y (%)	9,4	10,9	11,8	12,1	12,3	12,5

1°) Dans un repère orthogonal, représenter à l'aide d'un nuage de points cette série . (unité : 1 cm en abscisses et 2 cm en ordonnées)

2°) Déterminer par la méthode des moindres carrés , l'équation de la droite de regression de y en x .

3°) En supposant que cet ajustement linéaire reste valable au cours des prochaines années

a)Quelle est le pourcentage de la consommation médicale en an 2010?

b)A partir de quelle année le pourcentage de la consommation médicale dépassera-il les 25 % ?

c) Cet ajustement linéaire peut- il rester valable 400 ans ? On fera les calculs avec 2 chiffres après la virgule.

EXERCICE 2

Diverses sociétés de gardiennage pour les immeubles résidentiels proposent différents salaires aux candidats demandant un emploi.
Le salaire proposé est x et le nombre de candidats est y . Les observations sont données par le tableau suivant :

Société	1	2	3	4	5	6
Salaire x (en cfa)	44.000	45.000	46.000	47.000	48.000	49.000
Nombres y de candidats	10	13	17	19	21	25

1°)Représenter le nuage de points associé à cette série statistique double. (x en abscisses et y en ordonnées) .

2°) a) Déterminer une équation de la droite de régression de y en fonction de x.

b) Représenter cette droite .

3°)On a appris qu'une 7ème société de gardiennage s'était ouverte sur la place et que 30 candidats s ' y étaient représentés .
A combien peut –on estimer le salaire que cette nouvelle société a – t –elle proposé aux candidats ?

EXERCICE 3

Le tableau suivant donne les résultats d'une enquête réalisée dans un magasin pour déterminer le nombre d'acheteurs potentiels d'un modèle de chaussures en fonction de son prix .

Prix x d'une paire (cfa)	35.000	40.000	45.000	50.000	55.000	60.000
Nombre y d'acheteurs potentiels	140	120	100	95	85	70

Le but cet exercice est de déterminer le prix de vente pour lequel la recette correspondant à la vente de ce modèle est maximale.

1°)a)Calculer le coefficient de corrélation linéaire de la série statistique définie par ce tableau ci- dessus .

b) En utilisant la méthode des moindres carrés , déterminer une équation de la droite de régression de y en fonction de x sous la forme $y = a x + b$ où a est donné à 10^{-4} près et b à 10^{-2} près.

2°)On désigne par r(x) la recette de la vente de y paires du modèle étudié au prix unitaire x .

a)En utilisant l'expression de y obtenue en1°) b) , exprimer r(x) en fonction de x.

b) Donner à la dizaine de francs près , le prix de vente pour lequel la recette est maximale et calculer cette recette.

N.B : On suppose qu'un acheteur paie une seule paire de chaussures.

SUJETS

SUJET 1

EXERCICE 1

Un nouvel établissement scolaire a deux classes de terminales D : TD_1 et TD_2 .
Ces deux classes contiennent respectivement 60 % et 44% de filles .
La terminale TD_1 contient deux fois plus d'élèves que la Terminale TD_2.
On choisit au hasard un élève de terminales D de cet établissement.
On désigne par D_1 , D_2 et F les évènements suivants :

D_1 : « l'élève choisi est en TD_1 »

D_2 : « l'élève choisi est en TD_2 »

F : « l'élève choisi est une fille ».

1°) a) Démontrer que la probabilité de D_1 est $\frac{2}{3}$.

b)Quelle est la probabilité de D_2 ?

2°) a)Expliciter l'événement $D_1 \cap F$ et démontrer que $p(D_1 \cap F) = \frac{60}{100} \times \frac{2}{3}$.
puis simplifier le résultat .

b)Démontrer que la probabilité de F est $\frac{41}{75}$.

3°)Sachant que l'élève choisi est une fille , quelle est la probabilité que cette fille soit en TD_1.

4°)On suppose que la terminale D_1 contient 30 filles .
Déterminer l'effectif de chacune des deux classes .

EXERCICE 2

On considère la fonction numérique définie sur IR par : $f(x) = \frac{1}{4}x + 3$.

Soit (u) la suite définie par : $u_0 = -4$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

1°) Calculer u_1 .

2°) Le plan est rapporté au repère orthonormé (O, I , J) (unité : 2 cm).

a)Tracer les droites (D) et (Δ) d'équations respectives $y = x$ et $y = \frac{1}{4}x + 3$.

b)Utiliser (D) et (Δ) pour placer u_0 ,u_1 , u_2 , u_3 , u_4 sur l'axe des abscisses.

c)Que peut– on conjecturer quant à la convergence de la suite (u) ?

3°) a) Démontrer par récurrence que : $\forall n \in IN$, $u_n < 4$.

b).Démontrer que la suite (u) est strictement croissante .
La suite (u) est – elle convergente ? Justifier .

4°) On pose : $\forall n \in IN$ $v_n = u_n - 4$

a)Démontrer que (v) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le 1[er] terme.

b)Démontrer que pour tout entier naturel n non nul , $v_n = \frac{-2}{4^{n-1}}$.

c)Déterminer la limite de la suite(v) puis en déduire la limite de (u).

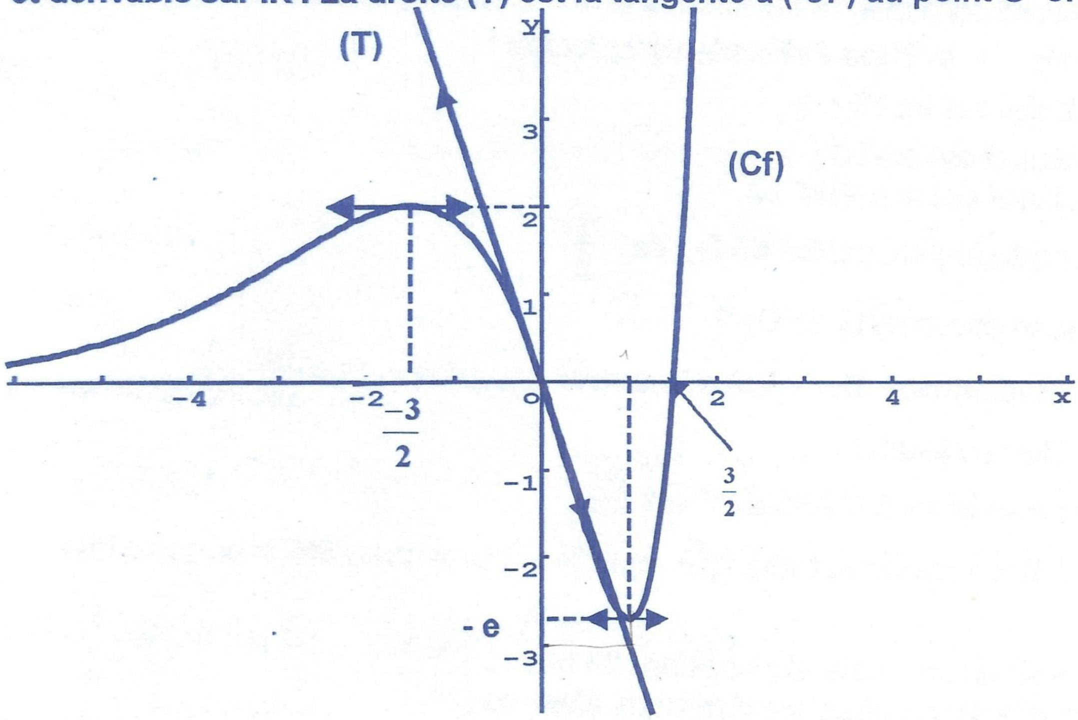
5°)a) Exprimer u_n en fonction de n .

b) Trouver une valeur de l'entier naturel k telle que $| u_k - 4 | < 10^{-10}$.

PROBLEME

Partie A (Lecture graphique)

La courbe (Cf) ci- dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur IR . La droite (T) est la tangente à (Cf) au point O origine du repère .



1°)a) Donner les solutions de l'équation $x \in IR$, f (x) = 0 .

b)Donner les valeurs numériques respectives de f (1) ; $f'(\frac{-3}{2})$; f ' (1) .

c)Déterminer une équation de (T) . En déduire f ' (0).

2°) On suppose que f est la fonction dérivée d'une fonction F sur IR.

a) Donner le signe f(x) suivant les valeurs de x .

b)Donner le sens de variation de F .

3°) On précise que f (x) est de la forme $f(x) = (a x^2 + b x) e^x$ où a et b sont deux nombres réels .

a) Calculer f ' (x) en fonction de a et b.

b) En déduire la valeur de b en utilisant les résultats de 1°) c) .

c)En utilisant les valeurs respectives de b et f ' (1) , calculer a et donner l'expression de f (x).

Partie B

Soit g la fonction définie sur IR par : $g (x) = (2 x^2 - 7x + 7) e^x$.

1°) a) Calculer la limite de g(x) en $+\infty$.

b) Vérifier que $\forall x \in IR^*$, $g(x) = \dfrac{1}{\dfrac{e^{-x}}{x^2}}\left(2 - \dfrac{7}{x} + \dfrac{7}{x^2}\right)$. En déduire

la limite de g (x) en $-\infty$ puis donner une interprétation géométrique du résultat.

2°) Calculer g ' (x) puis dresser le tableau de variation de g.

3°)Tracer (Cg) la courbe de g , dans le plan muni d'un repère orthonormé (O,I,J) (unité : 1 cm).

4°) a) A l'aide une intégration par parties calculer $\int_{-5}^{0} x\, e^x dx$ puis $\int_{-5}^{0} x^2 e^x\, dx$

b)Soit Δ le domaine du plan compris entre (Cg) ,l'axe des abscisses et les droites x =–5 et x = 0 .Hachurer ce domaine sur la figure et calculer son aire.

SUJET 2

EXRCICE1

Le tableau ci- dessous donne l'évolution de la dette des pays du tiers monde entre 1978 et 1992 (en milliards de dollars).

Année	1978	1982	1986	1990	1992
Rang de l'année (x)	0	4	8	12	14
Dette (y)	383	753	1089	1346	1510

Source : Banque Mondiale, FMI 1993.

1°)Le plan est rapporté à un repère orthogonal .

Unité graphique : 1 cm pour 2 ans en abscisses

1cm pour 100 milliards de dollars en ordonnées.

a)Calculer les moyennes $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ respectivement des variables x et y .

b) Représenter graphiquement le nuage de points de cette série statistique double ainsi que le point moyen G.

2°)a)Démontrer que la variance du caractère x est v (X) = 26,24 et que la variance du caractère y est v (Y) = 165624,56.

b) Démontrer que la covariance de x ,y est cov(x ,y) = 2080,08 .

c) En déduire le coefficient de corrélation linéaire r de cette série double (on donnera le résultat à 10^{-3} près)

d)Un ajustement linéaire peut-il être envisagé ? Pourquoi ?

3°)a) Ecrire l'équation de la droite de régression (D) de y en x par la méthode des moindres carrés (les coefficients de l'équation seront donnés sous forme décimale approchée à 10^{-1} par défaut).

b) Exprimer à un milliard de dollars près , le montant prévisible de la dette du tiers monde en 2005.

EXERCICE 2

On considère l'ensemble des nombres complexes, l'équation (E) suivante : $z^4 + (i - \sqrt{3})z^3 - iz + 1 + i\sqrt{3} = 0$

1°)a)Développer , réduire et ordonner le polynôme $(z - \sqrt{3} + i)(z^3 - i)$

b)Résoudre (E)

2°) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct (O,I J) (unité : 4cm).

On considère les points A d'affixe $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$,et B d'affixes $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$ et le point C d'affixe $-i$

a) Placer les points A, B et C

b) Justifier que le triangle ABC est équilatéral .

3°) soit Ω le milieu du segment [AC] et S la similitude directe de centre Ω qui transforme A en B.

a)Déterminer les éléments caractéristiques de S

b)Déterminer l'écriture complexe de S .

c) Démontrer que l'image du point O par S est le point C .

PROBLEME

Partie A

On considère g la fonction définie sur IR par : $g(x) = 1 + x(2\ln|x| + 1)$.

1°) a) Déterminer l'ensemble de définition Dg de g .

b) Déterminer les limites de g aux bornes de Dg .

2°) a) On suppose que g est dérivable en tout point de IR^*, calculer $g'(x)$ pour élément de IR^* .

b)Dresser le tableau de variation de g .

3°) a) Calculer $g(-1)$.

b) Déterminer $J = g(I)$ où $I =]-\infty ; -e^{-\frac{3}{2}}]$

c)Démonter que la restriction h de g à I est une bijection de I sur J.

d)En déduire l'ensemble de solutions de l'équation $x \in IR$, $g(x) = 0$.

4°) En déduire de tout ce précède que :

$\forall x \in]-\infty ; -1[$, $g(x) < 0$

$\forall x \in]-1 ; 0[\cup]0 ; +\infty[$, $g(x) > 0$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = x(1 + x\ln|x|)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ et (C) sa courbe représentative (unité : 1 cm)

1°) Démontrer que f est continue en 0 .

2°)a) Déterminer l'ensemble de définition Df de f et préciser ses limites aux bornes de Df.

b)Etudier la dérivabilité de f en 0 .

c)Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f .

3°) a) Trouver une équation de la tangente (T) à (C) au point O.

b)Démontrer que (T) coupe (C) en deux autres points E et F et préciser leurs coordonnées.

c)Etudier la position de (C) par rapport à (T)

4°) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique α comprise entre $-1{,}8$ et $-1{,}7$.

.5°) Tracer (C) avec précision .

6°) a) $\lambda \in]0\,;\,1[$, calculer $\int_{\lambda}^{1} x^2 \ln x \, dx$ à l'aide d'une intégration par parties.

b)Calculer l'aire $A(\lambda)$ de la partie limitée par (C), (T) et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = \lambda$.

c)Calculer la limite de $A(\lambda)$ quand λ tend vers 0 par valeurs supérieures .

SUJET 3

EXERCICE 1

Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct (O, I , J) . (unité : 2cm).

1°) On considère l'équation :

(E) : $z \in \mathbb{C}$, $z^3 - 2iz^2 + 4(1+i)z + 16 + 16i = 0$.

Vérifier que:

$z \in \mathbb{C}$, $z^3 - 2iz^2 + 4(1+i)z + 16 + 16i = (z+2)[z^2 - 2(1+i)z + 8(1+i)]$

2°)a) Déterminer les racines carrées $-8-6i$.

b)Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : (E_1) : $z \in \mathbb{C}$, $z^2 - 2(1+i)z + 8(1+i) = 0$.

c) En déduire les solutions de l'équation (E) .

3°) Soit A ,B et C les points d'affixes respectives -2 , $4i$ et $2-2i$.

a) Faire une figure.

b)K le milieu de [BC] . On considère la similitude directe S de centre A, qui transforme B en K .Déterminer et construire l'image (C') du cercle (C) de diamètre [AB] par la similitude S.

c) Déterminer l'écriture complexe de S .

d) Déterminer l'angle et le rapport de S.

EXERCICE 2

On considère la suite numérique (u) définie par : $u_0 = 1$ et pour tout n élément de IN , $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3}{u_n}$.

1°) Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{2x+3}{x}$ de courbe (C) dans un repère orthonormé (O,I,J) .

a)Etudier rapidement f et la représenter

b) Représenter sur l'axe des abscisses les termes u_0, u_1 ,u_2, u_3 ,et u_4 à l'aide de courbe (C) et de la droite (D) d'équation $y = x$.

c) Que peut –on conjecturer quant à la convergence de la suite (u) ?

2°) a) Démontrer que $f([1\,;\,5]) \subset [1\,;\,5]$.

b)En déduire au moyen d'un raisonnement par récurrence que : $\forall n \in IN$, $1 \leq u_n \leq 5$

3°) Soit (v) la suite numérique définie par : $\forall n \in IN$, $v_n = \dfrac{u_n - 3}{u_n + 1}$.

a)Démontrer que (v) est une suite géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$.

b)En déduire que $\forall n \in IN$, $v_n = (-1)^{n+1}\left(\dfrac{1}{3^n}\right)$.

4°) a) Exprimer u_n en fonction de v_n puis en fonction n .

b) En déduire la limite de la suite (u).

PROBLEME

Partie A

On donne la fonction P définie sur IR par : $P(x) = e^{2x} - 5e^{x} + 4$.

1°) Résoudre l'équation : $P(x) = 0$.

2°) Démontrer que :

$\forall x \in]-\infty ; 0[\cup]\ln 4 ; +\infty[$, $P(x) > 0$.

$\forall x \in]0 ; \ln 4[$, $P(x) < 0$.

Partie B

Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x) = x - 1 + \dfrac{1}{e^{x} - 2}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormé (O, I,J). (Unité : 2 cm).

1°) Déterminer l'ensemble de définition de f.

2°)Calculer les limites de f en $-\infty$, $+\infty$, à gauche et à droite en ln2.

3°) On admet que f est dérivable en tout point de son ensemble de définition et on note f' sa dérivée.

a) Vérifier que $\forall x \in]-\infty ; \ln 2[\cup]\ln 2 ; +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{P(x)}{(e^{x} - 2)^{2}}$.

b)Etudier le signe de f ' (x) suivant les valeurs de x.

c)Dresser le tableau de variation de f.

4°)Démontrer que le droite (D) d'équation $y = x - 1$ est une asymptote oblique à (C) en $+\infty$.

5°) Etudier la position relative de (C) par rapport à (D) sur l'intervalle $]\ln 2 ; +\infty[$.

6°) Démontrer que : $\forall x \in]-\infty ; \ln 2[\cup]\ln 2 ; +\infty[$, $f(x) = x - \dfrac{3}{2} + \dfrac{e^{x}}{2\ (e^{x} - 2)}$.

7°) Démontrer que la droite (Δ) : $y = x - \dfrac{3}{2}$ est une asymptote oblique à (C) en $-\infty$.

8°) Etudier la position relative de (C) par rapport à (D) sur l'intervalle $]-\infty ; \ln 2[$.

9°)Construire (C).

Partie C

Soit λ un nombre réel strictement positif.

1°)Exprimer en fonction de λ l'aire en cm^2 de la partie du plan comprise entre la courbe (C), la droite(D) ,la droite (Δ) et la droite d'équation $x = \lambda$.

SUJET 4

EXERCICE 1

1°)Un dé A, bien équilibré possède :

Une face numérotée 1 ;
Deux faces numérotées 2 ;
Une face numérotée 4 ;
Une face numérotée 5 ;
Une face numérotée 6.

a)On lance une fois le dé A et on lit le numéro inscrit sur la face supérieure.
Quelle est la probabilité d'obtenir le numéro 2 ?

b)On lance 3 fois de suite le dé et on note de la gauche vers la droite les chiffres obtenus successivement. On obtient ainsi un nombre de 3 chiffres.
Quelle est la probabilité d'obtenir le nombre 421 ?

2°)Un autre dé B, bien équilibré possède :

Une face numérotée 1 ;
Deux faces numérotées 2 ;
Deux faces numérotées 4 ;
Une face numérotée 6.

On lance 3 fois de suite le dé B comme à la question 1°)b).

Vérifier que la probabilité d'obtenir le nombre 421 est égale à $\frac{1}{54}$

.3°)Une urne contient 4 dés identiques au dé A et 6 dés identiques au dé B.
Eloi tire au hasard un dé de l'urne et le lance 3 fois de suite pour obtenir un nombre à 3 chiffres comme décrit précédemment.

a)Démontrer que la probabilité d'obtenir 421 est égale à $\frac{2}{135}$

b)Eloi a obtenu 421 , calculer la probabilité qu'il ait joué avec un dé de type A.

EXERCICE 2

Une entrperise fabrique un logiciel informatique . Une enquête ménée auprès de 100 sociétés intéressées par l'acquisition de ce logiciel donne les résultats suivants:

Logiciel n°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Prix x proposé pour le logiciel (en milliers CFA)	100	160	220	320	400	480	560	640	720	800
Nombre y de sociétés prêtes à acheter le logiciel	100	86	82	80	70	46	40	25	15	10

1°)Représenter le nuage de points associé à la série statstique double donnée par ce tableau .(Unité :1cm pour 100 en abscisses et 1 cm pour 10 en ordonnées)

2°) a) Déterminer par la méthode des moindres carrés , une équation de la droite de regression de y en fonction de x . (Les coeffients seront donnés à 10^{-2} près par defaut .)

b)Tracer cette droite .

3°) a) Le fabricant du logiciel engage deux sortes de frais :

- Les frais fixes s'élèvent à 8.000.000 CFA .
- Les frais de fabrication montent à 50.000 CFA par logiciel.

En utlisant l'équation du 2°) a) , donner une estimation du bénefice b (x) en fonction de x où x désigne le prix de vente d'un logiciel (en milliers CFA)

b) Prouver que la fonction b atteint son maximum en x_0 élément de l'intervalle [100 ; 800] qu' on précisera puis calculer b(x_0) .

PROBLEME

Partie A

On considère la fonction définie sur] 0 ; + ∞ [par : g (x) = x – 3 + ln x .

1°) Calculer les limites aux bornes de l'ensembles de définition de g .

2°)a) On admet que g est dérivable sur] 0 ; + ∞ [, calculer g'(x) .

b)Etudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation .

3°) a)Démontrer que l'équation g (x) = 0 admet une uniqe solution α telle que $2,20 < \alpha < 2,21$.

b)Démontrer que $\forall x \in]0 ; \alpha[$, $g(x) < 0$

$\forall x \in]\alpha ; +\infty[$, $g(x)) > 0$.

Partie B

Soit la fonction f définie sur] 0 ; + ∞ [par : $f(x) = \frac{2-2x}{x} + \frac{x-1}{x}\ln x$

de courbe (C) dans un repère orthonormé (O , I , J) . (unité=2cm)

1°) Calculer la limite de f en 0 . Interpréter graphiquement le résultat .

2°) Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le dernier résultat .

3°) On admet que f est dérivable sur] 0 ; + ∞ [.

a)Calculer f ' (x) et vérifier que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ pour tout x de] 0 ; + ∞ [.

b)En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

4°)En remarquant que $\forall x \in]0 ; +\infty[$, $f(x) = (1 - \frac{1}{x})(-2 + \ln x)$, déterminer les coordonnées des points d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses.

5°) Ecrire l'équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1 .

6°) Démontrer que $f(\alpha) = -\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$.

7°) Etudier le signe de f(x) suivant les valeurs de x .

8°)Construire (C) avec ses asymptotes et (T) .

Partie C

Soit F la primitive de f sur] 0 ; + ∞ [qui s'annule pour x=1 .

On appelle (Γ) la courbe représentative de F relativement au repère (O ,I ,J) .

1°)a) Sans calculer F(x), étudier les variations de F sur] 0 ; + ∞ [.

b) Que peut-on dire des tangentes à (Γ) en ses points d'abscisses 1 et e^2 .

2°)a) x étant un réel strictement positif , calculer l'intégrale $\int_1^x \ln t\,dt$ (on pourra utiliser une intégration par parties).

b) Démontrer que, pour tout x strictement positif $f(x) = \ln x - \frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x} - 2$.

c) En déduire l'expression de F(x) en fonction de x.

3°) a) Sachant que $\lim\limits_{x \to 0} (x \ln x) = 0$ déterminer la limite de F en 0 .

b)Démontrer que, pour tout x strictement supérieur à 1,

$F(x) = x \ln x \left(1 - \frac{1}{2}\frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x} - \frac{3}{\ln x}\right) + 3$ .En déduire la limite de F en+ ∞ .

c) Dresser le tableau de variation de F.

d) Tracer (Γ) sur le même graphique que (C).

4°) Calculer en cm^2 , l'aire du domaine limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives x=1 et x= e^2 .

SUJET 5

EXERCICE1

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J) .

1°)a)Vérifier que pour tous nombres complexes a et b , $a^4 - b^4 = (a - b)(a + b)(a^2+b^2)$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(z - 2)^4 = (z + 1 - i)^4$.

2°)On considère les points A(2) , B (– 1 + i) , C (– i) et D(1+2i).

a) Représenter ces points.

b) Démontrer que le quadrilatère ABCD est un carré.

3°)Pour tout nombre complexe z différent – i , on pose $Z = \frac{z - 1 - 2i}{z + i}$.

a)En posant z = x + i y et Z = X + i Y où x , y , X et Y sont des réels , démontrer

que $X = \frac{x^2 + y^2 - x - y}{x^2 + (y+1)^2}$ et $Y = \frac{-3x + y + 1}{x^2 + (y+1)^2}$.

b) Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M d'affixe z tel que Z soit un nombre réel .

c) Déterminer et construire l'ensemble (F) des points M d'affixe z tel que Z soit un nombre complexe imaginaire pur.

4°) a)Démontrer que $|Z| = \frac{BM}{CM}$.

b)En déduire l'ensemble (L) des points M d'affixe z tel que | Z | = 1 . Construire (L)

EXERCICE 2

On considère les deux (u) et (v) définies par :

- $u_1 = 12$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}$.
- $v_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{u_n + 3v_n}{4}$.

1°) On considère la suite (d) définie par : $\forall n \in IN^*$, $d_n = v_n - u_n$.

a) Démontrer que la suite (d) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le 1er terme .

b)Ecrire d_n en fonction de n .

c)La suite (d) est- elle convergente ? Si oui préciser sa limite .

2°)Démontrer que la suite (u) est décroissante et que la suite (v) est croissante.

3°) a)Démontrer que $\forall n \in IN^*$, $u_n \geq v_n$.

b)En déduire que $\forall n \in IN^*$ $u_1 \geq u_n \geq v_n \geq v_1$.

c)En déduire que les suites (u) et (v) convergent vers la même limite .

4°) On considère la suite (c) définie par : $\forall n \in IN^*$, $c_n = 3u_n + 8v_n$.

a)Démontrer que la suite (c) est stationnaire (constante) .

b)En déduire la limite commune des suites (u) et (v) .

PROBLEME

Partie A

Soit h la fonction dérivable et définie sur IR par : $h(x) = 3 + (x-1)e^{-x}$.

1°) Calculer les limites de h en $+\infty$ en $-\infty$.

2°) Démontrer que IR , $h'(x) = (2-x)e^{-x}$.

3°)Etudier le sens de variation de h et dresser son tableau de variation .

4°)a) Démontrer que sur l'intervalle $]-\infty ; 2]$ l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α .

b)Démontrer que $-1 < \alpha < 0$.

5°) En déduire que :

$$\forall x \in]-\infty ; \alpha[\text{ , } h(x) < 0.$$
$$\forall x \in]\alpha ; +\infty[\text{ , } h(x) > 0 .$$

Partie B

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = 3x + 1 - xe^{-x}$ de courbe (C) dans un Repère orthonormé (O, I ,J) . (unité : 2cm).

1°) Calculer les limites de f en $+\infty$ en $-\infty$.

2°)Démontrer que $\forall x \in IR$, $f'(x) = h(x)$.

3°) Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

4°)Démontrer que la droite (D) d'équation $y = 3x + 1$ est asymptote à (C) en $+\infty$.

5°)Etudier la position de (C) par rapport à (D) .

6°)Démontrer que (C) admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction (OJ).

7°)Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.

8°)Tracer (D) , (T) et (C) (On prendra : $\alpha \approx -0,6$ et $f(\alpha) \approx 0,3$.

9°)Soit $\lambda > 0$.

a)Utiliser une intégration par parties pour calculer l'intégrale $\int_0^{\lambda} x e^{-x} \, dx$.

b)Calculer l'aire $A(\lambda)$ de la partie du plan limitée par (C) , (D) et les droites d'équations respectives x 0 et $x = \lambda$.

c) Calculer $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} A(\lambda)$.

SUJET 6

EXERCICE 1

Le chargement d'un camion remorque est composé de 60 sacs identiques dont 10 contiennent un produit non déclaré aux services de la douane .
Le trajet à parcourir comporte trois barrages de douane.
A chacun de ces barrages , le contrôle obligatoire consiste à examiner le contenu de 5 sacs choisis au hasard (les contrôles effectués aux différents barrages sont indépendants) .

A) Le camionneur arrive à un barrage donné .
(On donnera l'arrondi d'ordre 1 de chacun des résultats obtenus).

1°) Calculer la probabilité pour que exactement 2 des 5 sacs contrôlés contiennent le produit non déclaré.

2°) Démontrer que la probabilité pour que l'un au moins des 5 sacs contiennent le produit déclaré est égale à 0,6.

B) Le camionneur sait que si l'un au moins des sacs du produit non déclaré est découvert à un barrage quelconque , il doit payer une forfaitaire de 10.000 (dix mille) francs à ce barrage pour être autorisé à continuer son chemin avec tout son chargement. Si le camionneur ne peut pas payer la taxe forfaitaire , alors tout son chargement est saisi.

1°) On suppose que le camionneur paie la taxe chaque fois le produit non déclaré est découvert . On note X la variable aléatoire égale à la somme totale que le camionneur peut ainsi dépenser sur l'ensemble de son trajet .

a) Déterminer la loi de probabilité de X .

b) Démontrer que l'espérance mathématique de X vaut 18.000 .

2°) On suppose qu le camionneur n'a pas d'argent pour payer une éventuelle taxe
Calculer la probabilité pour que son chargement soit saisi.

EXERCICE 2

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct (O, I ,J),(unité :1cm), on considère les points A, B et C d'affixes respectives Z_A , Z_B et Z_C telles que :

$Z_A = 4i$, $Z_B = 2\sqrt{3}+2i$ et $Z_C = -2\sqrt{3}+2i$.

1°) Déterminer le module l'argument principal de chacun de nombres complexes Z_A, Z_B et Z_C.

2°) Utiliser les résultats précédents pour placer les points A , B et C .

3°) Démontrer que le triangle OBA est équilatéral .

4°) Démontrer que le quadrilatère OBAC est un losange .

5°) On désigne par K le milieu de [OA] et par S la similitude directe de centre O qui transforme B en K .

a)Déterminer i'écriture complexe de S .

b)Calculer l'affixe de l'image par S du point L milieu de [AC] .

c)En déduire que l'image par S de la médiatrice de [AC] est la droite (OI) .

PROBLEME

Le but de ce problème est l'étude de la fonction f définie sur] – 2 ; + ∞ [par :

$f(x) = x\ln\left|\dfrac{x+2}{x}\right|$ si $x \in]-2 ; +\infty[\setminus \{0\}$ et $f(0) = 0$ et le tracé de sa courbe (C) dans un repère orthonormé (O, I , J) . (unité : 2 cm) .

Partie A : **Etude d'une fonction auxiliaire.**

Soit g la fonction définie sur $]-2\,;+\infty[\ \backslash\ \{0\}$ par : $g(x) = \ln\left|\dfrac{x+2}{x}\right| - \dfrac{2}{x+2}$

1°) Calculer les limites de g en 0 , en $+\infty$ et à droite en -2 .

2°) a)Calculer $g'(x)$ et justifier que $\forall x \in]-2\,;+\infty[\ \backslash\ \{0\}$, $g'(x) = \dfrac{-4}{x(x+2)^2}$.

b)Etudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation .

3°) a)Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]-2\,;0[$ et que $-0{,}44 < \alpha < -0{,}43$.

b)Démontrer que $\forall x \in]-2\,;\alpha[$, $g(x) < 0$

$\forall x \in]\alpha\,;0[\ \cup\ ]0\,;+\infty[$, $g(x) > 0$.

Partie B : **Etude de la fonction f** .

1°) a) Démontrer que $\forall x \in]-2\,;+\infty[\ \backslash\ \{0\}$, $f(x) = x\ln|x+2| - x\ln|x|$.
En déduire que f est continue en 0 .

b)Etudier la dérivabilité de f en 0 . Interpréter graphiquement le résultat .

2°) a) Calculer la limite de f à droite de -2 . Interpréter graphiquement le résultat .

b)Justifier que $\forall x \in]0\,;+\infty[$, $f(x) = x\ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right)$. En déduire la limite de f en $+\infty$ et interpréter graphiquement le résultat .

3°)a) Calculer $f'(x)$ et justifier que $\forall x \in]-2\,;+\infty[\ \backslash\ \{0\}$, $f'(x) = g(x)$.

b)En déduire en utilisant la question 3°) b) de la partie A , le sens de variation de f et dresser son tableau de variation .

c) Démontrer que $f(\alpha) = \dfrac{2\alpha}{\alpha+2}$.

4°)a)Soit A le point d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses (O I) dont l'abscisse est non nulle . Déterminer les coordonnées de A.

b)Ecrire une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse -1.

5°) Construire (C) avec ses asymptotes et sa tangente (T) .

CORRIGE

FONCTIONS NUMERIQUES
PARTIE I

EXERCICE 1

1°) $p(x)=0 \Leftrightarrow 4x^2-x-5=0$

$\Delta=(-1)^2-4(4)(-5)=81$

$\sqrt{\Delta}=9$, donc $x=\dfrac{1-9}{8}=-1$ ou $x=\dfrac{1+9}{8}=\dfrac{5}{4}$

$p(x)=4(x+1)(x-\dfrac{5}{4})=(x+1)(4x-5)$

2°)a) $x\in Df \Leftrightarrow x+5\geq 0$ et $x^2-1\neq 0$

$\Leftrightarrow x\geq -5$ 0 et $x\neq 1$ et $x\neq -1$

$Df=[-5;+\infty[\setminus\{-1;1\}$

b) $\forall x\in Df$, $f(x)=\dfrac{2x+\sqrt{x+5}}{x^2-1}$

$$f(x)=\frac{(2x+\sqrt{x+5})(2x-\sqrt{x+5})}{(x^2-1)(2x-\sqrt{x+5})}$$

$$=\frac{4x^2-x-5}{(x^2-1)(2x-\sqrt{x+5})}$$

$$=\frac{(x+1)(4x-5)}{(x+1)(x-1)(2x-\sqrt{x+5})}=\frac{(4x-5)}{(x-1)(2x-\sqrt{x+5})}$$

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{(4x-5)}{(x-1)(2x-\sqrt{x+5})}$$

$$=\frac{-9}{-2(-4)}=-\frac{9}{8}$$

donc $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=-\dfrac{9}{8}$

EXERCICE 2

$x\in Dg \Leftrightarrow x+1\neq 0$

$\Leftrightarrow x\neq -1$

donc $Df=IR\setminus\{-1\}$

$\forall x\in]-1;+\infty[$, $x+1>0$ donc $|x+1|=x+1$

$\forall x\in]-\infty;-1[$, $x+1<0$ donc $|x+1|=-(x+1)$

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ <}} f(x)=\lim_{\substack{x\to -1\\ <}}\frac{x+1}{-(x+1)}=\lim_{\substack{x\to -1\\ <}} -1=-1$$

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x)=\lim_{\substack{x\to -1\\ >}}\frac{x+1}{(x+1)}=\lim_{\substack{x\to -1\\ >}} 1=1$$

$\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ <}} f(x)\neq\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x)$, donc f n'admet pas un prolongement par continuité en -1.

EXERCICE 3

1°)a) $p(x)=0 \Leftrightarrow -x^2+2x+3=0$

$\Delta=4-4\times(-1)\times 3=16 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=4$

$x=\dfrac{-2+4}{-2}=-1$ ou $x=\dfrac{-2-4}{-2}=3$

$\forall x\in]-\infty;-1[\cup]3;+\infty[$, $p(x)<0$

$\forall x\in]-1;3[$, $p(x)>0$

b) $x\in Df \Leftrightarrow x-1\neq 0$ et $-x^2+2x+3\geq 0$

$\Leftrightarrow x\neq 1$ et $x\in[-1;3]$

donc $Df=[-1;1[\cup]1;3]$

2°)a) $5x^2-2x-3=0$

$\Delta=4-4\times(-3)\times 5=64 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=8$

$x=\dfrac{2+8}{10}=1$ ou $x=\dfrac{2-8}{10}=-\dfrac{3}{5}$

donc $5x^2-2x-3=5(x+\dfrac{3}{5})(x-1)$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{2x-\sqrt{-x^2+2x+3}}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(2x-\sqrt{-x^2+2x+3})(2x+\sqrt{-x^2+2x+3})}{(x-1)(2x+\sqrt{-x^2+2x+3})}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{5x^2-2x-3}{(x-1)(2x+\sqrt{-x^2+2x+3})}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(5x+3)}{(x-1)(2x+\sqrt{-x^2+2x+3})}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(5x+3)}{2x+\sqrt{-x^2+2x+3}}=\frac{8}{4}=2$$

donc $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$

c) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(5x+3)}{2x+\sqrt{-x^2+2x+3}}=2$

donc f admet un prolongement par continuité en 1.Soit h ce prolongement.

$\forall x\in Df$, $h(x)=f(x)$

et $h(1)=2$

avec $f(x)=\dfrac{(5x+3)}{2x+\sqrt{-x^2+2x+3}}$

EXERCICE 4

1°)$x\in Dg \Leftrightarrow x\neq 0$ et $\cos x\neq 0$

$\Leftrightarrow x\neq 0$ et $x\neq\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ et $x\neq -\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x\neq 0$ et $x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

donc $D_g = IR \setminus \{ 0 ; \frac{\pi}{2}+k\pi , k\in Z \}$

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}(\cos x - \frac{1}{\cos x})$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\frac{(\cos x)^2-1}{\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}(\frac{-(\sin x)^2}{\cos x})$$

$$= \lim_{x\to 0} -\frac{\sin x}{\cos x}(\frac{\sin x}{x}) = 0 \text{ car } \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\cos x} = 0$ donc g admet un prolongement par continuité en 0. Soit f ce prolongement

$\forall x \in D_g$, $f(x) = g(x) = -\frac{\sin x}{\cos x}(\frac{\sin x}{x})$

et $f(0)=0$

2°) $$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{\sin x}{\cos x}(\frac{\sin x}{x})}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} -\frac{1}{\cos x}\times\frac{\sin x}{x}\times\frac{\sin x}{x} = -1$$

donc f est dérivable en 0 et $f'(0)=-1$

EXERCICE 5

1°) $\forall x\in IR$, $-1 \le \sin x \le 1$

$$2x-1 \le 2x-\sin x \le 2x+1$$

$x-1>0$, donc $\frac{2x-1}{x-1} \le \frac{2x-\sin x}{x-1} \le \frac{2x+1}{x-1}$

ainsi $\forall x>1$, $\frac{2x-1}{x-1} \le f(x) \le \frac{2x+1}{x-1}$

2°) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x-1}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

donc d'après le théorème des Gendarmes $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$

EXERCICE 6

a) $$\lim_{x\to-2} \frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{2}}{x^2-4} = \lim_{x\to-2} \frac{1}{(x-2)(\sqrt{x+4}+\sqrt{2})}$$

$$= \frac{-\sqrt{2}}{16}.$$

b) $$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+1}+x = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x} = 0.$$

c) $$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1}-\sqrt{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = 0.$$

d)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{4x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1+x^2}+1)}{4x^2(\sqrt{1+x^2}+1)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1+x^2-1}{4x^2(\sqrt{1+x^2}+1)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{4(\sqrt{1+x^2}+1)} = \frac{1}{8}$$

donc $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{4x^2} = \frac{1}{8}$$

EXERCICE 7

1°) $x \in D_f \Leftrightarrow |x-1| \neq 1$

$\Leftrightarrow x-1 \neq 1$ et $x-1 \neq -1$

$\Leftrightarrow x \neq 2$ et $x \neq 0$.

Donc $D_f = IR \setminus \{ 0 ; 2 \}$.

2°) a)

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$\lvert x+1\rvert$	$-x-1$	0	$x+1$		$x+1$
$\lvert x-1\rvert$	$-x+1$		$-x+1$	0	$x-1$

Donc • $\forall x \in]-\infty;-1[$, $f(x) = \frac{-x-1}{x}$

• $\forall x \in]-1;1[\setminus \{0\}$, $f(x) = \frac{x+1}{x}$

• $\forall x \in]1;+\infty[\setminus \{2\}$, $f(x) = \frac{x+1}{2-x}$

• $f(-1)=0$ et $f(1)=2$

b) $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x-1}{x} = -1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{2-x} = -1.$$

Donc la droite d'équation $y=-1$ est asymptote horizontale à (C_f).

$\lim_{\substack{x\to 0\\<}} f(x) = -\infty$ et $\lim_{\substack{x\to 0\\>}} f(x) = +\infty$.

Donc la droite d'équation $x=0$ est asymptote verticale à (C_f).

$\lim_{\substack{x\to 2\\<}} f(x) = +\infty$ et $\lim_{\substack{x\to 2\\>}} f(x) = -\infty$.

Donc la droite d'équation $x=2$ est asymptote verticale à (C_f).

3°) a) Continuité de f en – 1 :

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{-x-1}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{x+1}{x} = 0$$

or f (–1) = 0 , d'où $\lim_{x\to -1} f(x) = 0 = f(-1)$

Donc f est continue en – 1 .

b) Dérivabilité de f en – 1 :

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{x\to -1^-} \frac{\frac{-(x+1)}{x}}{x+1}$$

$$= \lim_{x\to -1^-} \frac{-1}{x} = 1 = f'_g(-1)$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{x\to -1^+} \frac{\frac{x+1}{x}}{x+1}$$

$$= \lim_{x\to -1^+} \frac{1}{x} = -1 = f'_d(-1)$$

$f'_g(-1) \neq f'_d(-1)$, donc f n'est pas dérivable en – 1 .

EXERCICE 8

$$\begin{cases} f(x) = x^2 - 2x & \text{si } x \in]-\infty ; 0[\cup]2 ; +\infty[\\ f(x) = -x^2 + 2x & \text{si } x \in [0 ; 2]. \end{cases}$$

Dérivabilité de f en 0

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x(x-2)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} x-2 = -2$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x(-x+2)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} (-x+2) = 2$$

donc f n'est pas dérivable en 0 .

Dérivabilité de f en 2 :

De même on démontre que f n'est pas dérivable en 2 car $f'_g(2) = -2$ et $f'_d(2) = 2$.

EXERCICE 9

Etude du sens de variation de f

$\forall x \in [0 ; 1]$, $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$, donc f est strictement croissante sur [0 ; 1] ,de plus f est continue sur [0 ; 1] . Donc f est une bijection sur [0 ; 1] . Mais f(0) = –1 et f (1) = 1 , donc l'équation f(x) = 0 admet une unique solution α élément de [0 ; 1]

Encadrement de α en utilisant la méthode de balayage :

x	....	0,5	0,6	0,7	....
f (x)		- 0, 375	- 0,184	+0,043	

donc $0{,}6 < \alpha < 0{,}7$

x	....	0,68	0,69	0,70
f (x)		-0,0055	+0,0185	+0,043

donc $0{,}68 < \alpha < 0{,}69$

EXERCICE 10

Soit f(x) =cosx – x

Df =IR

$\forall x \in IR$, f'(x)= –sinx– 1 = – (1+sinx)

Or $\forall x \in IR$, 1+sinx > 0

donc $\forall x \in IR$, f'(x) < 0 , donc f est strictement décroissante sur IR .

f est continue et strictement décroissante et $f(0)\times f(1) < 0$ donc l'équation f(x)=0 c-à-d l'équation cosx =x admet une unique solution dans l'intervalle [0 ;1] .

f est continue et strictement décroissante sur IR et $[0 ;1] \subset IR$,donc l'équation cosx = x admet une unique solution dans IR .

EXERCICE 11

1°)a)Une division euclidienne donne

$\forall x \neq 2$, $f(x) = x + 3 + \frac{4}{x-2}$.

b) $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$,

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$

2°)a) $\forall x \neq 2$, $f'(x) = \frac{(2x+1)(x-2)-(x^2+x-2)}{(x-2)^2}$

$$= \frac{x^2-4x}{(x-2)^2} = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$$

b) $\forall x \neq 2$, $(x-2)^2 > 0$, donc le signe de f '(x) est celui de x (x – 4), donc

-- $\forall x \in]-\infty ; 0[\cup]4 ; +\infty[$, f ' (x) >0 , donc f est strictement croissante.

-- $\forall x \in]0;4[\setminus \{2\}$, $f'(x) < 0$, donc f est strictement décroissante.

-- $f'(0) = f'(4) = 0$.

d'où le tableau de variation

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
f'(x)		+	0	−	‖	−	0	+	
f(x)	$-\infty$	↗	1	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	9	↗	$+\infty$

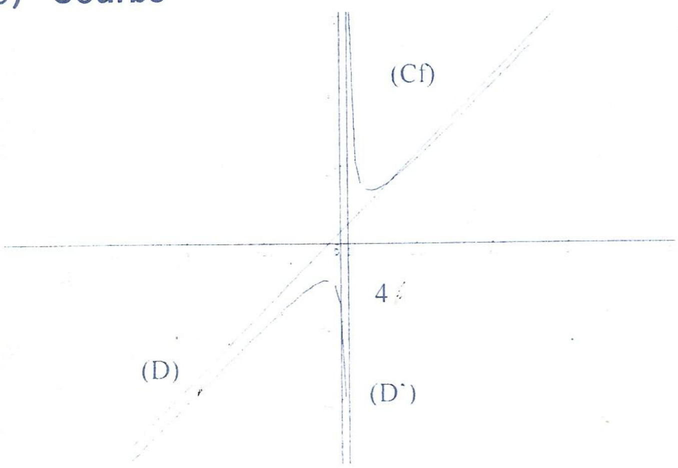
3°)a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)-(x+3) = 0$, donc la droite (D) d'équation $y = x + 3$ est asymptote oblique à(Cf) .

$\forall x \neq 2$, $f(x) - (x+3) = \dfrac{4}{x-2}$

$\forall x \in]-\infty;2[$, $x-2 < 0$, donc (Cf) est en-dessous de (D) .

$\forall x \in]2;+\infty[$, $x-2 > 0$, donc (Cf) est au-dessus de (D) .

b) Courbe



EXERCICE 12

1°) a) $\forall x \in [0;\pi]$, $f'(x) = \cos x$.

b) $\forall x \in [0;\frac{\pi}{2}[$, $f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante .

$\forall x \in]\frac{\pi}{2};\pi]$, $f'(x) < 0$, donc f est strictement décroissante .

d'où le tableau de variation

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
f'(x)		+		−	
f(x)	0	↗	1	↘	0

2°) a) f est continue et strictement croissante sur $[0;\frac{\pi}{2}[$, donc la restriction g de f à $[0;\frac{\pi}{2}]$ l'est . Donc g est une bijection de $[0;\frac{\pi}{2}]$ sur $[0;1]$.

b) $g(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

c) g et g^{-1} ont le même sens de variation d'où le le tableau de variation

x	0		1
$(g^{-1})(x)$	0	↗	$\frac{\pi}{2}$

$g(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et g est dérivable en $\frac{\pi}{4}$ et $g'(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, donc g^{-1} est dérivable en $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $(g^{-1})'(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \dfrac{1}{g'(\frac{\pi}{4})} = \sqrt{2}$

d) g^{-1} n'est pas dérivable en 1 car $g(\frac{\pi}{2}) = 1$ et $g'(\frac{\pi}{2}) = 0$

$\forall y \in [0;1[$, $g(x) = y \Leftrightarrow \sin x = y$
$\Leftrightarrow g^{-1}(y) = x$

$\forall y \in [0;1[$, $(g^{-1})'(y) = \dfrac{1}{g'(x)} = \dfrac{1}{\cos x}$

or $\forall x \in [0;\frac{\pi}{2}[$, $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$
$= \sqrt{1-y^2}$.

Donc $\forall x \in [0;1[$, $(g^{-1})'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Donc $(g^{-1})'(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}} = \sqrt{2}$.

PROBLEMES

PROBLEME 1

1°)a) $\forall x \in IR$, $x^2+1 > 0$, donc Df =Dg= IR

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x+\sqrt{x^2+1} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x-\sqrt{x^2+1} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-x^2-1}{x-\sqrt{x^2+1}}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-1}{g(x)} = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ donc la droite d'équation y=0 est une asymptote horizontale à (Cf) en $-\infty$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-2x = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}-x$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{x+\sqrt{x^2+1}}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+1-x^2}{x+\sqrt{x^2+1}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{f(x)} = 0$

donc la droite (D) d'équation y=2x est asymptote oblique à (Cf en $+\infty$.

3°)a) $\forall$ x $\in$IR ,$f'(x)=1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = 1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$= \dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}}$

b)• $\forall$ x $\in]0\ ;+\infty[$, x > 0 et $\sqrt{x^2+1} > 0$

donc $\forall$ x $\in]0\ ;+\infty[$, f(x) > 0 .

•$\forall$ x $\in]-\infty\ ;0\ [$,f(x)g(x)= −1

donc f(x) et g(x) sont de signe contraire

Or$\forall$ x $\in]-\infty\ ;0\ [$,x < 0 et $-\sqrt{x^2+1} < 0$

donc $g(x) = x-\sqrt{x^2+1} < 0$

donc $\forall$ x $\in]-\infty\ ;0\ [$, f(x) >0

Ainsi $\forall$ x $\in$IR , f(x) >0

c)$\forall$ x $\in$IR , f(x) >0 et $\sqrt{x^2+1}>0$, donc f '(x) >0 donc f est strictement croissante sur IR.

d'où le tableau de variation

x	$-\infty$	$+\infty$
f'(x)	+	
f(x)	0 ↗	$+\infty$

4°)a) f est continue et strictement croissante sur IR ,donc f réalise une bijection de IR vers $]0\ ;+\infty[$.

b) f(0) =1 et f'(0) =1, donc f^{-1} est dérivable en 1 et $(f^{-1})'(1) = \dfrac{1}{f'(0)} = 1$

c)Equations de (T) et (T')

(T) : y= x+1 et (T') : y =x -1

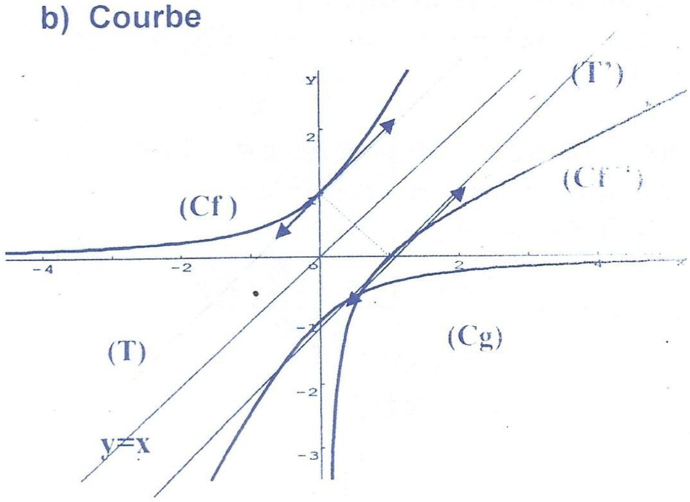
d) (T) et (T') ont le coefficient directeur 1 donc T) et (T') sont parallèles.

5°)a)

$\forall$ x $\in$IR, $g(x) = x-\sqrt{x^2+1} = -(-x+\sqrt{x^2+1})$
$= -\ f(-x)$

Donc (Cf) et (Cg) sont symétriques par rapport à O .

b) Courbe



PROBLEME 2

Partie I

1°) $\forall$ x $\in$ IR , g' (x) = 6 x (x − 1) .Donc $\forall$x$\in]-\infty\ ;\ 0\ [\cup]\ 1\ ;+\infty\ [$, g '(x) > 0, donc g est strictement croissante .

$\forall$ x $\in$] 0 ; 1 [, g ' (x) < 0 , donc g est strictement décroissante .

g ' (0) = g ' (1) = 0 .

d'où TV

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
g'(x)		0	0	
g(x)	$-\infty$ ↗	-1 ↘	-2 ↗	$+\infty$

2°) a)Sur] - ∞ ; 1] , g est admet un maximum strictement négatif , donc l'équation g(x) = 0 n'a pas de solution dans] − ∞ ; 1] .

Sur]1 ; +∞ [, g est continue et strictement croissante, donc g est une bijection de]1;+∞ [sur] −2 ; +∞ [.Or 0$\in$] − 2 ; +∞ [,donc l'équation g (x) = 0 admet une solution α dans] 1 ; +∞ [. De plus g (1 ,6)x g (1 ,7) < 0 donc 1,6 < α < 1,7 .

b) $\forall$ x $\in$] − ∞ ; 1] , g (x) < 0 , car g est admet un maximum strictement négatif .

Sur] 1 ;+∞ [,g est strictement croissante et

$g(\alpha) = 0$

Donc $\forall x \in]1 ; \alpha[, g(x) < 0$

$\forall x \in]\alpha ; +\infty[, g(x) > 0$.

Ainsi : $\forall x \in]-\infty ; \alpha[, g(x) < 0$

$\forall x \in]\alpha ; +\infty[, g(x) > 0$.

Partie 2

1°) a) $Df = IR \setminus \{-1\}$.

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$,

donc la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à (Cf)

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = -\infty$

donc la droite d'équation $x = -1$ est asymptote verticale à (Cf).

2°) a) $\forall x \in Df$,

$$f'(x) = \frac{-(1+x^3) - 3x^2(1-x)}{(1+x^3)^2}$$

$$= \frac{g(x)}{(1+x^3)^2}$$

b) D'après la partie I) 2°) b)

$\forall x \in]-\infty ; \alpha[, f'(x) < 0$, donc f est strictement décroissante

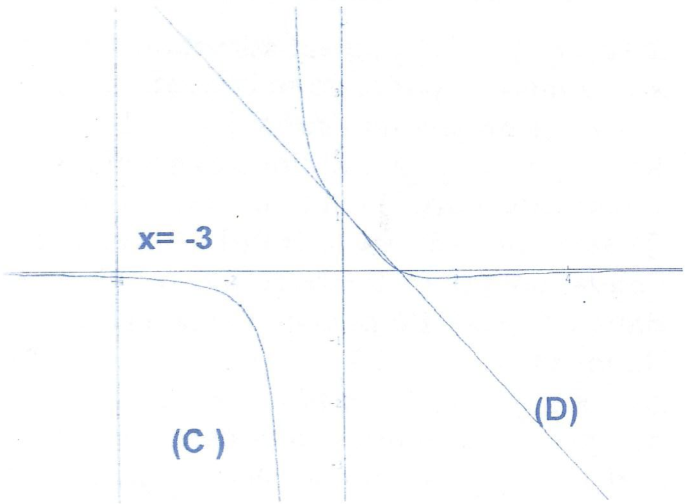
$\forall x \in]\alpha ; +\infty[, f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante .

D'où TV

x	$-\infty$	-1		α	$+\infty$
g'(x)	–		–	0	+
g(x)	0 ↘ $-\infty$		$+\infty$ ↘	$f(\alpha)$	↗ 0

3°) (T) : $y = f'(0)x + f(0)$

(T) : $y = -x + 1$.



PROBLEME3

1°) $\forall x \in IR$, $f'(x) = 2 - \cos x = 1 + (1 - \cos x)$

$\forall x \in IR$, $1 - \cos x \geq 0$ (car $\cos x \leq 1$)

donc $\forall x \in IR$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur IR .

2°) $\forall x \in IR$, $-1 \leq -\sin x \leq 1$

$\forall x \in IR$, $2x - 1 \leq 2x - \sin x \leq 2x + 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} 2x - 1 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x + 1 = +\infty$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ d'après le théorème des gendarmes.

$\lim\limits_{x \to -\infty} 2x - 1 = -\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} 2x + 1 = -\infty$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ d'après le théorème des gendarmes

3°)

$M(x ; y) \in (C) \cap (D) \Leftrightarrow f(x) = y \Leftrightarrow 2x - \sin x = 2x - 1$

$\Leftrightarrow \sin x = 1$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in Z$

$M(x ; y) \in (C) \cap (D') \Leftrightarrow f'(x) = y \Leftrightarrow 2x - \sin x = 2x + 1$

$\Leftrightarrow \sin x = -1$

$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in Z$

(T) : $y = f'(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)(x - \frac{\pi}{2} + 2k\pi) + f(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)$

$= 2(x - \frac{\pi}{2} + 2k\pi) + 2(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) - 1$

(T)=(D) : $y = 2x - 1$

(T') : $y = f'(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi)(x + \frac{\pi}{2} - 2k\pi) + f(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi)$

$= 2(x + \frac{\pi}{2} - 2k\pi) + 2(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi) + 1$

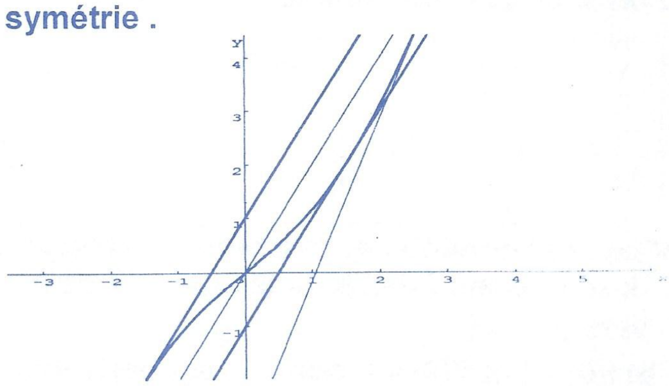
(T')=(D') : $y = 2x + 1$

4°) $\forall x \in IR$, $-x \in IR$

$f(-x) = -2x - sn(-x) = -2x - (-\sin x) = -(2x - \sin x)$

$f(-x) = -f(x)$ donc f est impaire

donc (C) admet le point O comme centre de symétrie .



PROBLEME 4

Partie I

1°) a) $x \in Df \Leftrightarrow x^2 + 1 \geq 0$ et $x \neq 0$

or $\forall\, x \in IR$, $x^2 + 1 > 0$, donc $Df = IR^*$

b) $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - 1}{x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} -\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - \frac{1}{x} = -1$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - \frac{1}{x} =$$

Donc (Cf) admet deux asymptotes horizontales d'équations respectives $y = -1$ en $-\infty$ et $y = 1$ en $+\infty$.

2°)a) $$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{x^2+1} - 1)(\sqrt{x^2+1} + 1)}{x\left(\sqrt{x^2+1} + 1\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{x^2+1} + 1} = 0$$

donc f admet un prolongement g par continuité en 0 défini par :
$\forall\, x \in Df$, $g(x) = f(x)$ et $g(0) = 0$.

b) $\forall x \in Df$, $$g(x) = \frac{(\sqrt{x^2+1} - 1)(\sqrt{x^2+1} + 1)}{x\left(\sqrt{x^2+1} + 1\right)}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+1} + 1}$$

et $g(0) = 0$

Donc $\forall\, x \in IR$ $g(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1} + 1}$.

c) $$\lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + 1} = \frac{1}{2}$$

donc g est dérivable en 0 et $g'(0) = \frac{1}{2}$.

3°)a) $\forall\, x \in IR$, $$g'(x = \frac{\sqrt{x^2+1} + 1 - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{(\sqrt{x^2+1} + 1)^2}$$

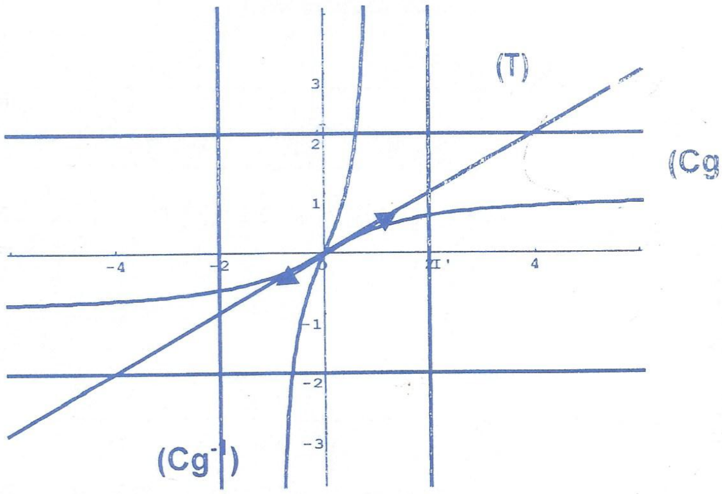
$$= \frac{1}{(\sqrt{x^2+1} + 1)\sqrt{x^2+1}}$$

donc g est strictement croissante.

D'où TV

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
g'(x)	+
g(x)	$-1 \nearrow 1$

b) (T) : $y = \frac{1}{2}x$



Partie II

1°) g est continue et strictement croissante sur IR . Donc g est une bijection de IR sur $]-1\,;\,1[$

2°)a) $g(\frac{4}{3}) = \frac{1}{2}$ et $g'(\frac{4}{3}) = \frac{9}{40}$, donc g^{-1} est dérivable en $\frac{1}{2}$ et $(g^{-1})'(\frac{1}{2}) = \dfrac{1}{g'(\frac{4}{3})} = \dfrac{40}{9}$.

b)Dans le repère orthonormé (O,I,J) ,(C) et (C') sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

3°)a) Soit y élément quelconque de $]-1\,;\,1[$ tel que $g(x) = y$ avec x élément de IR^*.

$$g(x) = y \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x^2+1} - 1}{x} = y$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} - 1 = yx$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} = 1 + xy$$

or $\forall\, x \in]-\infty\,;\,0[$, $y \in]-1\,;\,0[$, donc $xy > 0$.
$\forall\, x \in]0\,;\,+\infty[$, $y \in]0\,;\,1[$, donc $xy > 0$.

Donc $1 + xy > 0$.

Donc $g(x) = y \Leftrightarrow x^2 + 1 = (1 + xy)^2$

$\Leftrightarrow x[x(1 - y^2) - 2y] = 0$

$\Leftrightarrow x(1 - y^2) - 2y = 0$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{2y}{1 - y^2}$

donc g^{-1} : $]-1;1[\to IR$

$x \mapsto \dfrac{2x}{1 - x^2}$

b) $\forall x \in]-1;1[$, $(g^{-1})'(x) = \dfrac{2(x^2+1)}{(1-x^2)^2}$

$(g^{-1})'(\frac{1}{2}) = \frac{40}{9}$.

PROBLEME 5

1°) $Df = IR \setminus \{-3\}$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$\lvert 3 - x \rvert$	$3 - x$	0	$x - 3$

$\forall x \in]-\infty;-3[\cup]-3;3[$, $f(x)) = \dfrac{3x^2}{3 - x + 2x}$

$= \dfrac{3x^2}{x+3}$.

$\forall x \in [3;+\infty[$, $f(x) = \dfrac{3x^2}{x - 3 + 2x} = \dfrac{x^2}{x - 1}$.

2°) a) $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = +\infty$

donc la droite d'équation $x = -3$ est asymptote verticale à (Cf) .

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

3°) <u>continuité de f en 3</u>

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} \frac{3x^2}{x+3} = \frac{9}{2}$$

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} \frac{x^2}{x-1} = \frac{9}{2}$$

et $f(3) = \frac{9}{2}$

Ainsi $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = f(3)$, donc

f est continue en 3 .

4°) a) $\forall x \in]-\infty;-3[\cup]-3;3[$

$f'(x) = \dfrac{6x(x+3) - 3x^2}{(x+3)^2} = \dfrac{3x(x+6)}{(x+3)^2}$.

$\forall x \in]3;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$.

Donc $\forall x \in]-\infty;-6[\cup]0;+\infty[$, $f'(x) > 0$

Donc f est strictement croissante.

$\forall x \in]-6;-3[\cup]-3;0[$, $f'(x) < 0$

donc f est strictement décroissante ;

$f'(-6) = f'(0) = 0$

TV

x	$-\infty$	-6		-3		0	$+\infty$
f'(x)	+	0	−		−	0	+
f(x)	$-\infty \nearrow$	-36	$\searrow -\infty$		$+\infty \searrow$	0	$\nearrow +\infty$

5°)a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - (3x - 9) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{27}{x+3} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (x + 1) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x-1} = 0$

Donc les droites (D_1) : $y = 3x - 9$ et (D_2) : $y = x + 1$ sont des asymptotes à (C) respectivement en $-\infty$ et $+\infty$.

b) $\forall x \in]-\infty;3[\setminus \{-3\}$, $f(x) - (3x - 9) = \dfrac{27}{x+3}$.

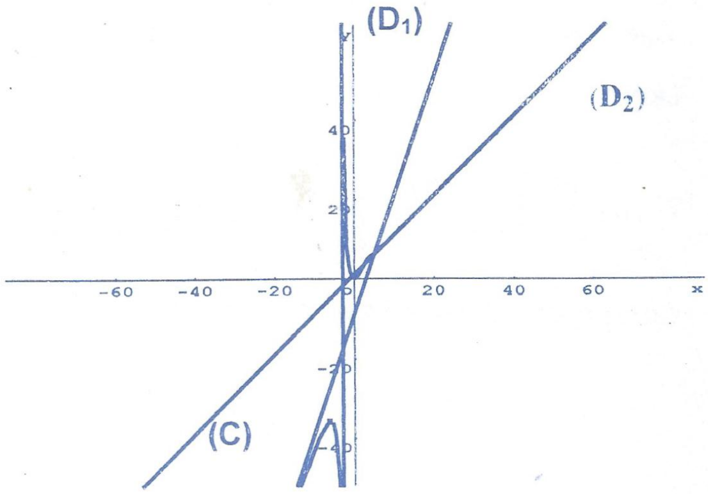
Or) $\forall x \in]-\infty;-3[$, $x + 3 < 0$, donc (C) est en dessous de (D_1)

$\forall x \in]-3;3[$, $x + 3 > 0$, donc (C) est au –dess de (D_1)

$\forall x \in]3;+\infty[$, $f(x) - (x + 1) = \dfrac{1}{x-1}$.

$\forall x \in]3;+\infty[$, $x - 1 > 0$, donc (C) est au dessus de (D_2) .

c) Courbe



PARTIE II

EXERCICE 1

1°) $x \in Df \Leftrightarrow 1 - x > 0 \Leftrightarrow x < 1$. $Df =]-\infty ; 1[$

2°) $x \in Df \Leftrightarrow x + 2 \neq 0$ et $\dfrac{1+3x}{x+2} > 0$; donc

$Df =]-\infty ; -2[\cup]-\dfrac{1}{3} ; +\infty[$.

3°) $x \in Df \Leftrightarrow x + 4 > 0$ et $6 - x > 0$

$\Leftrightarrow x > -4$ et $x < 6$. Donc $Df =]-4 ; 6[$

4°) $x \in Df \Leftrightarrow 2x + 5 \neq 0$. Donc $Df = IR \setminus \{\dfrac{-5}{2}\}$.

5°) $x \in Df \Leftrightarrow x - 1 \neq 0$. Donc $Df = IR \setminus \{1\}$.

6°)
$x \in Df \Leftrightarrow x + 1 > 0$ et $5 - x > 0$ et $\ln(5 - x) \neq 0$

$\Leftrightarrow x > -1$ et $x < 5$ et $5 - x \neq 1$.

Donc $Df =]-1 ; 5[\setminus \{4\}$.

EXERCICE 2

1°)

$A = \ln\left[\left(1-\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)\right]^{10} = \ln(1-2)^{10} = 0$

$B = \ln\left(\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}\right)\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right) = \ln\left(\dfrac{3-1}{4}\right) = -\ln 2$

$K = -\ln 2 + \ln(2+\sqrt{2}) + \ln(2+\sqrt{2+\sqrt{2}})(2-\sqrt{2+\sqrt{2}})$

$= -\ln 2 + \ln(2+\sqrt{2}) + \ln(4 - 2 - \sqrt{2})$

$= -\ln 2 + \ln(2+\sqrt{2}) + \ln(2 - \sqrt{2})$

$= -\ln 2 + \ln[(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})]$

$= -\ln 2 + \ln(4-2) = -\ln 2 + \ln 2 = 0$

EXERCICE 3

1°) a)

$x \in Dv \Leftrightarrow 3 - x > 0$. Donc $Dv =]-\infty ; 3[$.

$\ln(3 - x) = 0 \Leftrightarrow 3 - x = 1 \Leftrightarrow x = 2$.

or $2 \in Dv$, donc $S_{IR} = \{2\}$.

b) $x \in Dv \Leftrightarrow x^2 - 9 > 0$ et $-4 + 4x > 0$.

$\Leftrightarrow x \in]-\infty ; -3[\cup]3 ; +\infty[$ et $x \in]1 ; +\infty[$.

Donc $Dv =]1 ; +\infty[$.

$\ln(x^2 - 9) = \ln(-4 + 4x) \Leftrightarrow x^2 - 9 = -4 + 4x$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 = 0$.

Les solutions de $x^2 - 4x - 5 = 0$ sont -1 et 5.

Or $-1 \notin Dv$ et $5 \in Dv$, donc $S_{IR} = \{5\}$.

c) $x \in Dv \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} + x \neq 0$ et $x \neq 0$.

$Dv = IR \setminus \{-\dfrac{1}{2} ; 0\}$.

$\ln\left|\dfrac{1}{2} + x\right| = \ln|x| \Leftrightarrow \left|\dfrac{1}{2} + x\right| = |x|$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2} + x = x$ ou $\dfrac{1}{2} + x = -x$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2} = 0$ (impossible) ou $x = -\dfrac{1}{4}$.

Or $-\dfrac{1}{4} \in Dv$, donc $S_{IR} = \{-\dfrac{1}{4}\}$.

d) $x \in Dv \Leftrightarrow x - 1 > 0$ et $x + 1 > 0$ et $x + 2 > 0$

$\Leftrightarrow x > 1$ et $x > -1$ et $x > -2$.

Donc $Dv =]1 ; +\infty[$.

(1) : $\ln(x + 1) + \ln(x - 1) = \ln(x + 2)$

(1) $\Leftrightarrow \ln(x^2 - 1) = \ln(x + 2)$

$\Leftrightarrow x^2 - 1 = x + 2$

$\Leftrightarrow x^2 - x - 3 = 0$.

Les solutions de l'équation $x^2 - x - 3 = 0$

sont $\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$ et $\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$ or

$\dfrac{1-\sqrt{13}}{2} \notin Dv$ et $\dfrac{1+\sqrt{13}}{2} \in Dv$.

Donc $S_{IR} = \{\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}\}$.

2°) a) $x \in Dv \Leftrightarrow x > 0$ et $\ln x > 0$

$\Leftrightarrow x > 0$ et $x > 1$.

Donc $Dv =]1 ; +\infty[$.

$\ln(\ln x) > 0 \Leftrightarrow \ln x > 1 \Leftrightarrow x > e$.

Or $e > 1$, donc $S_{IR} =]e ; +\infty[$.

b) $x \in Dv \Leftrightarrow x \neq 0$, donc $Dv = IR^*$.

$\ln(x^2) \leq 1 \Leftrightarrow x^2 \leq e$

$\Leftrightarrow -\sqrt{e} \leq x \leq \sqrt{e}$

Donc $S_{IR} = [-\sqrt{e} ; \sqrt{e}] \setminus \{0\}$.

c) $x \in Dv \Leftrightarrow x > 0$, donc $Dv =]0 ; +\infty[$.

Soit $h(x) = (1 - \ln x)(3 + \ln x)$

Etudions le signe de $h(x)$

Les zéros de $h(x)$ sont e^{-3} et e

x	0	e^{-3}		e	$+\infty$
$3 + \ln x$	$-$	0	$+$		$+$
$1 - \ln x$	$+$		$+$	0	$-$
$h(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Or $[e^{-3} ; e] \subset Dv$, donc $S_{IR} = [e^{-3} ; e]$.

EXERCICE 4

1°) a) $e^{2x+1} = 7 \Leftrightarrow 2x+1 = \ln 7 \Leftrightarrow x = \dfrac{-1+\ln 7}{2}$

Donc $S_{IR} = \{ \dfrac{-1+\ln 7}{2} \}$.

b) $e^{-x-4} - 6 \quad 0 \Leftrightarrow -x-4 = \ln 6 \Leftrightarrow x = -4 - \ln 6$

Donc $S_{IR} = \{ -4 - \ln 6 \}$.

c) Posons $X = e^x$.

L'équation devient $3X^2 + 5X - 2 = 0 \quad (1)$

Les solutions de l'équation (1) sont : -2 et $\dfrac{1}{3}$

Or $\forall x \in IR$, $e^x > 0$ donc $e^x = \dfrac{1}{3}$ soit $x = -\ln 3$

Donc $S_{IR} = \{ -\ln 3 \}$.

2°)a) $e^{x-2} \geq 0 \Leftrightarrow x-2 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 3$

Donc $S_{IR} = [3 ; +\infty[$.

b) Posons $X = e^{2x}$

L'inéquation devient $2X^2 - 5X - 3 \leq 0$.

Or $2x^2 - 5X - 3 = 2(X + \dfrac{1}{2})(X-3)$ .Donc

$2e^{4x} - 5e^{2x} - 3 \leq 0 \Leftrightarrow 2(e^{2x} + \dfrac{1}{2})(e^{2x} - 3) \leq 0.$

$\Leftrightarrow e^{2x} - 3 \leq 0$, car $e^{2x} + \dfrac{1}{2} > 0$

$\Leftrightarrow 2x \leq \ln 3 \Leftrightarrow x \leq \dfrac{\ln 3}{2}$.

Donc $S_{IR} =]-\infty ; \dfrac{\ln 3}{2}]$

EXERCICE 5

1°)a) $P(1) = 6 - 5 - 2 + 1 = 0$

b) D'après 1°) a) $x-1$ est un facteur de $P(x)$ donc une division euclidienne donne

$P(x) = (x-1)(6x^2 + x - 1)$

Or $6x^2 + x - 1 = 6(x + \dfrac{1}{2})(x - \dfrac{1}{3})$

Donc $P(x) = 6(x-1)(x + \dfrac{1}{2})(x - \dfrac{1}{3})$.

c) $P(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -\dfrac{1}{2}$ ou $x = \dfrac{1}{3}$.

D'où $S_{IR} = \{ 1 ; -\dfrac{1}{2} ; \dfrac{1}{3} \}$.

Tableau de signe de P(x)

x	$-\infty$	$-\dfrac{1}{2}$		$\dfrac{1}{3}$		1	$+\infty$
$x-1$	−		−		−	0	+
$x+\dfrac{1}{2}$	−	0	+		+		+
$x-\dfrac{1}{3}$	−		−	0	+		+
$P(x)$	−	0	+	0	−	0	+

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation $P(x) \leq 0$ est

$S_{IR} =]-\infty ; -\dfrac{1}{2}] \cup [\dfrac{1}{3} ; 1]$.

2°)a) $D_v =]0 ; +\infty[$

Posons $X = \ln x$, donc l'équation devient

$6X^3 - 5X^2 - 2X + 1 = 0$

D'après 1°)c) $\ln x = 1$ ou $\ln x = -\dfrac{1}{2}$ ou $\ln x = \dfrac{1}{3}$

Donc $x = e$ ou $x = e^{\frac{-1}{2}}$ ou $x = e^{\frac{1}{3}}$.

Donc $S_{IR} = \{ e ; e^{\frac{-1}{2}} ; e^{\frac{1}{3}} \}$.

b) $D_v =]0 ; +\infty[$.

Posons $X = \ln x$, l'inéquation devient

$6X^3 - 5X^2 - 2X + 1 \leq 0$.

D'après 1°)c) $\ln x \leq -\dfrac{1}{2}$ ou $\dfrac{1}{3} \leq \ln x \leq 1$

Donc $x \leq e^{\frac{-1}{2}}$ ou $e^{\frac{1}{3}} \leq x \leq e$.

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation

$P(x) \leq 0$ est $S_{IR} =]0 ; e^{\frac{-1}{2}}] \cup [e^{\frac{1}{3}} ; e]$

c) $x \in D_v \Leftrightarrow 6x - 3 > 0$ et $x + 1 > 0$ et $2x - 2 > 0$

$\Leftrightarrow x > \dfrac{1}{2}$ et $x > -1$ et $x > 1$.

Donc $D_v =]1 ; +\infty[$.

Sur D_v l'inéquation devient successivement

$\ln(6x-3)(x+1) \geq \ln(2x-2)$

$(6x-3)(x+1) \geq 2x-2$

$6x^2 + x - 1 \geq 0$

$6(x + \dfrac{1}{2})(x - \dfrac{1}{3}) \geq 0$, $x \in]-\infty ; -\dfrac{1}{2}] \cup [\dfrac{1}{3} ; +\infty[$

Donc l'ensemble des solutions est

$S_{IR} =]1 ; +\infty[$.

EXERCICE 6

1°) $\lim\limits_{x\to+\infty} -x+\ln x = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(-1+\frac{\ln x}{x}\right) = -\infty$

car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

2°)

$$\lim_{x\to-\infty} \ln\left(\frac{-x+5}{-x-2}\right) = 0 \text{ car } \lim_{x\to-\infty} \frac{-x+5}{-x-2} = 1$$

3°) $\lim\limits_{x\to0} x(\ln x)^2 = \lim\limits_{x\to0} (\sqrt{x})^2(2\ln\sqrt{x})^2$

$$= 4\lim_{x\to0}\left(\sqrt{x}\,\ln\sqrt{x}\,\right)^2 = 0$$

car

$$\lim_{x\to0} \sqrt{x}\,\ln\sqrt{x} = \lim_{X\to0} X\ln X = 0 .$$

4°) $\lim\limits_{x\to e} \frac{\ln x - 1}{x-e} = \lim\limits_{x\to e} \frac{\ln x - \ln e}{x-e} = \ln'(e) = \frac{1}{e}$.

5°) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x+3}{\ln x+1} = \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{X+3}{X+1} = 1$,(lnx =X)

6°) $\lim\limits_{x\to+\infty} -x+e^x = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{e^x}{x}-1\right) = +\infty$.

7°) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{1-\frac{x}{e^x}} = 1$

8°) $\lim\limits_{x\to1} \frac{e^x-e}{x-1} = \lim\limits_{x\to1} \frac{e^x-e^1}{x-1} = \exp'(1) = e$.

9°) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\ln\left(1+x^2\right)}{-x} = \lim\limits_{x\to0} -x\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^2} = 0$

car

$$\lim_{x\to0} \frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^2} = \lim_{X\to0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$$

PROBLEMES

PROBLEME 1

Partie A

1°) Df =] 0 ; +∞ [

$\lim\limits_{x\to0} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

2°) ∀ x∈] 0 ; +∞ [, g '(x) $= 2x+\frac{1}{x} = \frac{2x^2+1}{x} > 0$.

Donc g est strictement croissante .

D'où TV

x	0	+∞
g'(x)	+	
g(x)	– ∞ ↗	+∞

3°) Sur] 0 ; +∞ [, g est continue et strictement croissante , donc g est une bijection de] 0;+∞ [sur IR .Or 0∈IR , donc l'équation g (x) = 0 admet une unique solution α dans] 0 ; +∞ [

. De plus g (0,65) x g(0, 66) < 0 , donc 0,65 < α < 0, 66.

4°)4°) Sur] 0 ; +∞ [g est continue et strictement croissante et g (α) = 0 .

Donc

∀ x∈] 0 ; α [, g (x) < 0

∀ x∈] α ; +∞ [, g (x) > 0 .

Partie B

1°) a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 1-x+\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to0} f(x) = \lim\limits_{x\to0} \left(x-x^2+1+\ln x\right)\frac{1}{x} = -\infty$

car $\lim\limits_{x\to0} (x-x^2+1+\ln x) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(1-x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x} = 0$

Donc la droite (D) d'équation y = –x +1 est asymptote à (C) .

c)∀ x∈] 0 ; +∞ [, f (x) – (– x + 1) = $\frac{1+\ln x}{x}$.

∀ x∈] 0 ; +∞ [,1 + lnx > 0 ⇔ lnx > ln e^{-1}

⇔ x > e^{-1}

Donc ∀ x∈] 0 ; e^{-1} [, f (x) < –x +1 , donc sur

$]0\,;e^{-1}[$ (C) est en dessous de (D).
$\forall\, x \in]e^{-1}\,;+\infty[$, $f(x) > -x+1$, donc sur $]e^{-1}\,;+\infty[$ (C) est au dessus de (D).

2°) a) $\forall\, x \in]0\,;+\infty[$

$$f'(x) = -1 + \frac{\frac{1}{x}x - (1+\ln x)}{x^2}$$

$$= \frac{-x^2 - \ln x}{x^2} = \frac{-g(x)}{x^2}$$

b)Le signe de $f'(x)$ est celui de $-g(x)$.
Ainsi d'après la partie A- 4°),
$\forall\, x \in]0\,;\alpha[$, $f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante.
$\forall\, x \in]\alpha\,;+\infty[$, $f'(x) < 0$, donc f est strictement décroissante.
$f'(\alpha) = 0$

D'où TV

x	0		α		$+\infty$
f'(x)		+	0	−	
f(x)	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	$-\infty$

3°) a) $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 + \ln\alpha = 0$
$\Leftrightarrow \ln\alpha = -\alpha^2$

$$f(\alpha) = 1 - \alpha + \frac{1+\ln\alpha}{\alpha} = 1 - \alpha + \frac{1-\alpha^2}{\alpha}$$

$$= 1 - 2\alpha + \frac{1}{\alpha}$$

b)$\forall\, x \in]0\,;+\infty[$, $h'(x) = -2 - \frac{1}{x^2} = -\frac{2x^2+1}{x^2}$

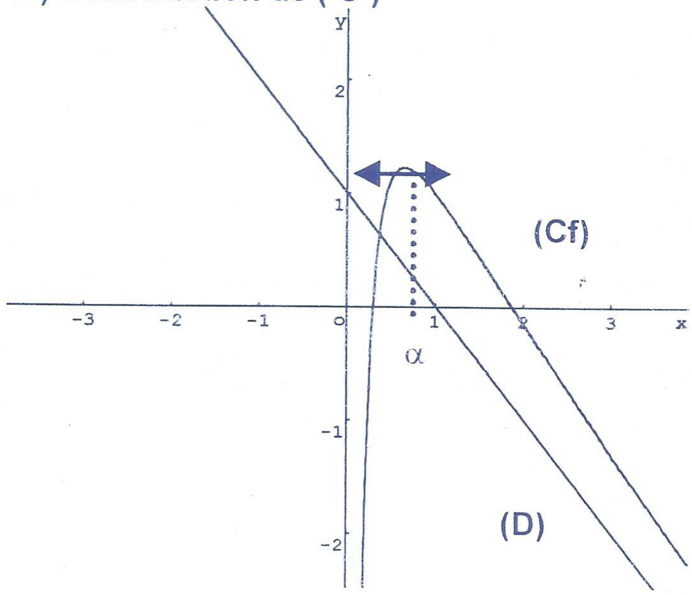
donc $\forall\, x \in]0\,;+\infty[$, $h'(x) < 0$
donc h est strictement décroissante.

c) On $0{,}65 < \alpha$, donc $h(\alpha) < h(0{,}65)$ car h est strictement décroissante, or $h(\alpha) = f(\alpha)$, donc $f(\alpha) < h(0{,}65)$.

d) $0{,}65 < \alpha$, donc $f(0{,}65) < f(\alpha)$ car f est strictement croissante sur $]0\,;\alpha[$.

e) On a $f(0{,}65) < f(\alpha)$ et $f(\alpha) < h(0{,}65)$, donc $f(0{,}65) < f(\alpha) < h(0{,}65)$.

4°) Construction de (C)



PROBLEME 2

Partie A

1°) $x \in D_g \Leftrightarrow x - 1 \neq 0$, donc $D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

2°)

$$\forall x \in D_g,\ g'(x) = 2(x-1) + \frac{1}{x-1} = \frac{2(x-1)^2+1}{x-1}$$

$\forall\, x \in D_g$, $2(x-1)^2 + 1) > 0$, donc le signe de $g'(x)$ est celui de $x - 1$.
$\forall\, x \in]-\infty\,;1[$, $g'(x) < 0$, donc g est strictement décroissante sur $]-\infty\,;1[$.
$\forall\, x \in]1\,;+\infty[$, $g'(x) > 0$, donc g est strictement croissante $]1\,;+\infty[$.

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} g(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x\to 1^-} g(x) = -\infty.$$

D'où TV

x	$-\infty$		1		$+\infty$
g'(x)		−	‖	+	
g(x)	$+\infty$	↘ $-\infty$	‖	$-\infty$ ↗	$+\infty$

3°)On a $g(0) = 0$ et $g(2) = 0$.
Sur $]-\infty\,;1[$ g est continue et strictement décroissante et g (0), donc $\forall x \in]-\infty\,;0[$, $g(x) > 0$ et $\forall x \in]0\,;1[$, $g(x) < 0$.
Sur$]1\,;+\infty[$ g est continue et strictement croissante et $g(2) = 0$, donc
$\forall x \in]1\,;2[$, $g(x) < 0$ et $\forall x \in]2\,;+\infty[$, $g(x)) > 0$

Donc $\forall x \in]-\infty\,;0[\cup]2\,;+\infty[$, $g(x) > 0$

$\forall x \in]0\,;1[\cup]1\,;2[$, $g(x) < 0$

$g(0) = g(2) = 0$

Partie B

1°)a) $D_f = IR \setminus \{1\}$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$ car

$\lim_{x \to 1^-} x-1 = 0^-$ et $\lim_{x \to 1^-} \ln|x-1| = -\infty$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$ car

$\lim_{x \to 1^+} x-1 = 0^+$ et $\lim_{x \to 1^+} \ln|x-1| = -\infty$

Donc (Cf) admet une asymptote verticale d'équation x = 1.

b) $\forall x \in]-\infty\,;1[$, $|x-1| = 1-x$, donc

$$f(x) = x - \frac{\ln(1-x)}{x-1}$$

$\forall x \in]1\,;+\infty[$, $|x-1| = x-1$, donc

$$f(x) = x - \frac{\ln(x-1)}{x-1}.$$

c) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x - \frac{\ln(x-1)}{x-1} = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x-1)}{x-1} = \lim_{X \to +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0 \quad (X = x-1)$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x + \frac{\ln(1-x)}{1-x} = -\infty$ car

$\lim_{x \to -\infty} \frac{\ln(1-x)}{1-x} = \lim_{X \to +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$, (X = 1–x)

2°) a) $\forall x \in IR \setminus \{1\}$,

$$f'(x) = 1 - \frac{\frac{1}{x-1}(x-1) - \ln|x-1|}{(x-1)^2}$$

$$= 1 - \frac{1 - \ln|x-1|}{(x-1)^2} = \frac{g(x)}{(x-1)^2}.$$

b) $\forall x \in IR \setminus \{1\}$, $(x-1)^2 > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$.

$\forall x \in]-\infty\,;0[\cup]2\,;+\infty[$, $f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur $]-\infty\,;0[$ et $]2\,;+\infty[$

$\forall x \in]0\,;1[\cup]1\,;2[$, $f'(x) < 0$

donc f est strictement décroissante, $]0\,;1[$ et $]1\,;2[$

$f'(0) = f'(2) = 0$.

D'où TV

x	$-\infty$	0		1		2	$+\infty$
f'(x)	+	0	–	‖	–	0	+
f(x)	$-\infty$ ↗	0	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	2	↗ $+\infty$

3°) a) $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - x = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\ln|x-1|}{x-1} = 0$

Donc la droite (D) d'équation y = x est asymptote oblique à (Cf).

b) $\forall x \in IR \setminus \{1\}$, $f(x) - x = \frac{\ln|x-1|}{x-1}$

$\ln|x-1| < 0 \Leftrightarrow |x-1| < 1$

$\Leftrightarrow -1 < x-1 < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 2$

$\ln|x-1| > 0 \Leftrightarrow |x-1| > 1$

$\Leftrightarrow x-1 > 1$ ou $x-1 < -1$

$\Leftrightarrow x > 2$ ou $x < 0$

D'où tableau de signe de $\frac{\ln|x-1|}{x-1}$

x	$-\infty$	0		1		2	$+\infty$
ln|x –1|	+	0	–		–	0	+
x –1	–		–	0	+		+
f (x) –x	–	0	+		–	0	+

Donc $\forall x \in]-\infty\,;0[\cup]1\,;2[$, $f(x) - x < 0$, donc (Cf) est en dessous de (D)sur $]-\infty\,;0[$ et $]1\,;2[$

$\forall x \in]0\,;1[\cup]2\,;+\infty[$, $f(x) - x > 0$, donc (Cf) est dessus de (D) sur $]0\,;1[$ et $]2\,;+\infty[$

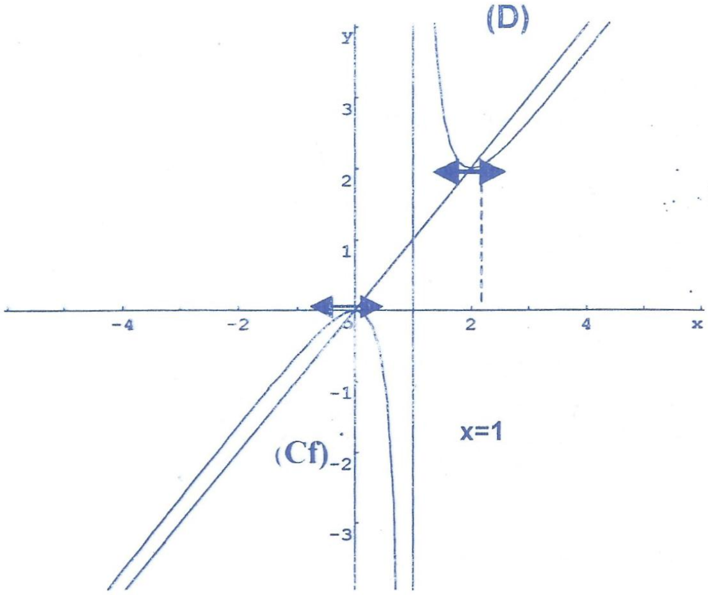
c) Soit le point A(1 ;1)

On démontre que :

$\forall x \neq 0$, $f(1+x) + f(1-x) = 2$

Donc A est un centre de symétrie de (Cf).

4°) Construction de (Cf) et (D)



PROBLEME 3

Partie A

1°)a) $x \in Dg \Leftrightarrow x^2 + 1 \geq 0$

Or $\forall x \in IR$, $x^2 + 1 > 0$, donc $Dg = IR$.

b) $\forall x \in IR$, $-x \in IR$ et $g(-x) = g(x)$, donc g est paire.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{x^2+1} - \ln(x^2+1) = -\infty$

Car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{x^2+1} = 2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x^2+1) = +\infty$

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} g(-x) = -\infty$ car g est paire.

2°)a) $\forall x \in [0 ; +\infty[$,

$$g'(x) = \frac{4x(x^2+1)-4x^3}{(x^2+1)^2} - \frac{2x}{x^2+1}$$

$$= \frac{4x-2x(x^2+1)}{(x^2+1)^2}$$

$$g'(x) = \frac{2x(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2} .$$

b) $\forall x \in]0 ; +\infty[$, $\frac{2x(1+x)}{(x^2+1)^2} > 0$ donc $g'(x)$ est celui de $1 - x$.

Or $\forall x \in]0 ; 1[$, $g'(x) > 0$, donc g est strictement croissante sur $]0 ; 1[$.

$\forall x \in]1 ; +\infty[$, $g'(x) < 0$, donc g est strictem décroissante sur1 ; $+\infty$ [.

D'où TV

x	0		1		$+\infty$
g'(x)		+	0	−	
g(x)	0	↗	M	↘	$-\infty$

Avec M =1– ln2

3°) a)Sur $[1 ; +\infty[$, g est continue et strictement décroissante, donc g est une bijection de $[1 ; +\infty[$ vers $]-\infty ; 1-\ln 2]$. Or $0 \in]-\infty ; 1-\ln 2]$ car $1 - \ln 2 > 0$, donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[1 ;+\infty[$.

b)

x	1,980	1,981	1,982
g(x)	0,00014	–0,00034	– 0,00082

Donc $1,980 < \alpha < 1,981$.

4°)a) Sur $]0 ; \alpha[$, g admet un maximum $1 - \ln 2$ strictement positif et $g(0) = g(\alpha) = 0$ .Donc $\forall x \in]0 ; \alpha[$, $g(x) > 0$.

Sur$]\alpha ; +\infty[$, g est strictement décroissante

Donc $\forall x > \alpha$, $g(x) < g(\alpha)$ c-à -d , $g(x) < 0$

Ainsi $\forall x \in]0 ; \alpha[$, $g(x) > 0$.

$\forall x \in]\alpha ; +\infty[$, $g(x) < 0$.

$g(0) = g(\alpha) = 0$.

b)Les intervalles $]-\infty ; -\alpha[$ et $]\alpha ; +\infty[$ (respectivement ($]-\alpha ;0[$ et $]0 ; \alpha[$) sont symétriques par rapport à 0 et g est paire , donc d'après 4°a)

$\forall x \in]-\infty ; -\alpha[\cup]\alpha ; +\infty[$, $g(x) < 0$.

$\forall x \in]-\alpha ;0[\cup]0 ; \alpha[$, $g(x) > 0$.

$g(\alpha) = g(-\alpha) = g(0) = 0$.

Partie B

1°) Df = IR

$\forall x \in Df$, $-x \in Df$ et $f(-x) = \frac{\ln[(-x)^2+1]}{-x} = -f(x)$

Donc f est impaire , donc (Cf) est symétrique par rapport à 0 .

2°)a) $\lim\limits_{x\to0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to0} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2}$

$= \lim\limits_{X\to0} \frac{\ln(X+1)}{X} = 1$; ($X = x^2$).

Donc f est dérivable en 0 et f '(0) = 1.

b) (T) : $y = f'(0)(x-0)+f(0)$

(T) : $y = x$.

3°) a) $\forall x \in IR^*$,

$$f(x) = \frac{\ln\left(x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right)}{x} = \frac{\ln x^2}{x} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x}$$

$$= \frac{2\ln|x|}{x} + \frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$, car $\ln x^2 = \ln|x|^2$

b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, donc

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = 0$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} 2\frac{\ln|x|}{x} = 0$.

Donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. Donc la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à (Cf).

4°)a)

$$\forall x \in IR^*,\ f'(x) = \frac{\frac{2x}{x^2+1}x - \ln(x^2+1)}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

b)Le signe de f' (x) est celui de g (x) , donc D'après A) 4°) b)

$\forall x \in]-\infty\ ;-\alpha[\ \cup\ ]\alpha\ ;+\infty[$, $f'(x) < 0$ .Donc f est strictement décroissante .

$\forall x \in]-\alpha\ ;0[\ \cup\ ]0\ ;\alpha[$, $f'(x) > 0$ .Donc f est strictement croissante .

$f'(-\alpha) = f'(\alpha) = 0$.

D'où TV

x	$-\infty$		$-\alpha$		0		α		$+\infty$
f'(x)		−	0	+	‖	+	0	−	
f(x)	0	↘	$f(-\alpha)$	↗	0 ‖ 0	↗	$f(\alpha)$	↘	0

$f(-\alpha) = -f(\alpha)$

5°) $f(\alpha) = \frac{\ln(\alpha^2+1)}{\alpha}$

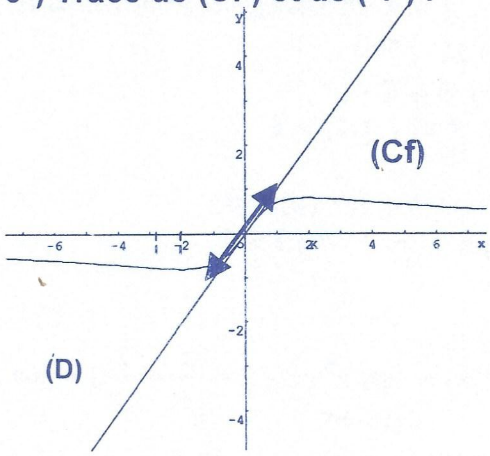
Or $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \frac{2\alpha^2}{\alpha^2+1} - \ln(\alpha^2+1) = 0$

$\Leftrightarrow \ln(\alpha^2+1) = \frac{2\alpha^2}{\alpha^2+1}$

Donc $f(\alpha) = \frac{2\alpha^2}{\alpha(\alpha^2+1)} = \frac{2\alpha}{\alpha^2+1}$.

$f(-\alpha) = -f(\alpha) = -\frac{2\alpha}{\alpha^2+1}$ car f est impaire .

6°) Tracé de (Cf) et de (T) .



PROBLEME 4

Partie A

1°)a) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x\left(x-1-\frac{1}{e^x}\right) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -1$

b) $\forall x \in IR$, $g'(x) = e^x + x e^x - e^x$
$= x e^x$

Ainsi $\forall x < 0$, $g'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur IR_-^* .

$\forall x > 0$, $g'(x) > 0$ donc g est strictement croissante sur IR_+^* .

$g'(0) = 0$

D'où TV

x	$-\infty$		0		$+\infty$
g'(x)			0		
g(x)	−1	↘	-2	↗	$+\infty$

2°)a)Sur [1 ; 2] g est continue et strictement croissante .,Donc g est une bijection de [1 ; 2] vers [f(1) ; f(2)] = [−1 ; e^2 − 1].

Or 0∈ [−1 ; e^2 −1] car $e^2 - 1 > 0$, donc l'équation g(x) = 0 admet une unique solution $\alpha \in [1\ ;2]$.

b)

x	1,2	1,3	1,4
g(x)	– 0,335	0,100	0,622

Donc $1{,}2 < \alpha < 1{,}3$

3°) D'après le tableau de variation de g
$g(]-\infty\,;0]) = [-2\,;-1[$, donc $\forall\, x \le 0$, $g(x) < 0$
.Sur $]0\,;+\infty[$, g est continue et strictement croissante et $g(\alpha) = 0$.
Donc $\forall\, x\in]0\,;\alpha[$, $g(x) < 0$
$\forall\, x\in]\alpha\,;+\infty[$, $g(x) > 0$.

Ainsi $\forall\, x\in]-\infty\,;\alpha[$, $g(x) < 0$
$\forall\, x\in]\alpha\,;+\infty[$, $g(x) > 0$.

Partie B

1°)a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x\left(x-2-\dfrac{x}{e^x}+\dfrac{2}{e^x}\right) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

b) $\forall\, x\in\mathbb{R}$, $f'(x) = e^x + x\,e^x - 2\,e^x - 1$
$= x\,e^x - e^x - 1 = g(x)$.
Donc le signe de f'(x) est celui de g(x) .
Donc d'après A) 3°) ,
$\forall\, x\in]-\infty\,;\alpha[$, $f'(x) < 0$ donc f strictement décroissante sur $]-\infty\,;\alpha[$
$\forall\, x\in]\alpha\,;+\infty[$, $f(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]\alpha\,;+\infty[$.
D' où TV

x	$-\infty$	α	$+\infty$
f'(x)	–	0	+
f(x)	$+\infty$ ↘	$f(\alpha)$	↗ $+\infty$

2°) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x - 2\dfrac{e^x}{x} - 1 + \dfrac{2}{x}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} e^x\left(1-\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{e^x}+\dfrac{2}{x\,e^x}\right)$

$= +\infty$

Donc (C) admet une branche parabolique de direction (OJ) .

3°)a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(-x+2) = \lim\limits_{x\to-\infty} x\,e^x - 2\,e^x = 0$

Donc la droite (D) : $y = -x+2$ est asymptote oblique à (C) en $-\infty$.

b) $\forall\, x\in]-\infty\,;0]$, $f(x)-(-x+2) = (x-2)e^x$
Donc $\forall\, x < 0$, $f(x)-(-x+2) < 0$, donc (C) est en dessous de (D) sur $]-\infty\,;0[$.

4°) (T) : $y = f'(0)(x-0) + f(0)$
(T) : $y = -2x$

5°) a) $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x) = e^x(x-2) - (x-2)$
$= (x-2)(e^x - 1)$

b) $M(x\,;y)\in(C)\cap(OI) \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases}$

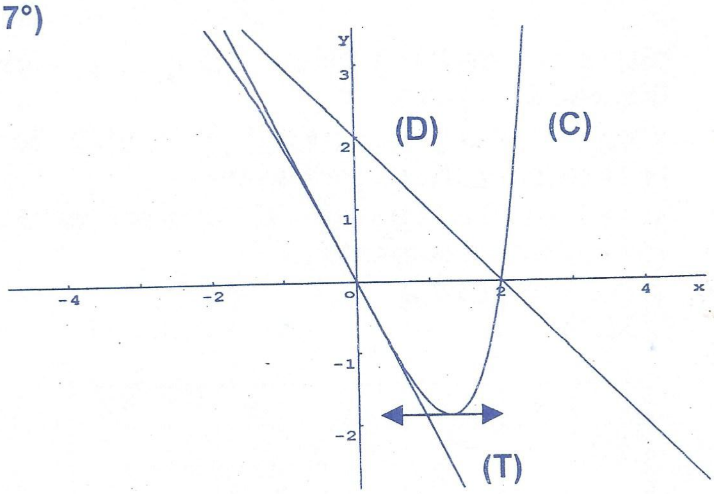
$f(x) = 0 \Leftrightarrow x-2 =$ ou $e^x - 1 = 0$
$\Leftrightarrow x = 2$ ou $x = 0$
Donc $C)\cap(OI) = \{A\,;O\}$ où A (2; 0) et O(0 ; 0).

6°) $f(\alpha) = (e^\alpha - 1)(\alpha-2)$
Or $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow e^\alpha(\alpha-1) - 1 = 0$
$\Leftrightarrow e^\alpha = \dfrac{1}{\alpha-1}$

$f(\alpha) = \left(\dfrac{1}{\alpha-1}-1\right)(\alpha-2) = \left(\dfrac{-\alpha+2}{\alpha-1}\right)(\alpha-2)$

Donc $f(\alpha) = -\dfrac{(\alpha-2)^2}{\alpha-1}$

7°)



PROBLEME 5

Partie A

1°) $\forall\, x > 0$, $g'(x) = 1 - e^x < 0$ donc g est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$.
$\lim\limits_{x\to0} g(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

d'où TV

x	0	$+\infty$
g'(x)	0 —	
g(x)	1 ↘	$-\infty$

2°) a) Sur $]0;+\infty[$, g est continue et strictement décroissante, donc g est une bijection de $]0;+\infty[$ sur $]-\infty;1[$.
Or $0 \in]-\infty;1[$, donc l'équation g(x) = 0 admet une unique solution α dans $]0;+\infty[$
b) g(1,14) x g(1,15) < 0 , donc $1,14 < \alpha < 1,15$
3°) Sur $]0;+\infty[$ g est continue et strictement décroissante et $g(\alpha) = 0$
donc $\forall x \in]0;\alpha[$, $g(x) > 0$.
$\forall x \in]\alpha;+\infty[$, $g(x) < 0$.

Partie B

1°) a)

$$\forall x \geq 0,\ f'(x) = \frac{e^x(xe^x+1)-(e^x-1)(e^x+xe^x)}{(xe^x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(xe^x+1)^2}$$

b°) $\forall x \geq 0$, $\dfrac{e^x}{(xe^x+1)^2} > 0$, donc le signe de f '(x) est celui de g(x), donc d'après A)3°)
$\forall x \in]0;\alpha[$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante
$\forall x \in]\alpha;+\infty[$ $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante
$f'(\alpha) = 0$
D'où TV

x	0	α	$+\infty$
f'(x)	+	0	−
f(x)	$-\infty$ ↗	(α)	↘ $-\infty$

2°)a) $\forall x \geq 0$

$$f(x) = \frac{e^{-x}(e^x+1)}{e^{-x}(xe^x+1)} = \frac{1-e^x}{(x+e^{-x})}$$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, donc la droite d'équation y = 0 est asymptote horizontale à (C)

3°)a) $f(\alpha) = \dfrac{e^\alpha - 1}{\alpha e^\alpha + 1}$ or $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow e^\alpha = \alpha + 2$

donc $f(\alpha) = \dfrac{\alpha+2-1}{\alpha(\alpha+2)+1} = \dfrac{\alpha+1}{(\alpha+1)^2} = \dfrac{1}{\alpha+1}$

b) $1,14 < \alpha < 1,15 \Rightarrow 2,14 < \alpha + 1 < 2,15$

$$\Rightarrow \frac{1}{2,15} < \frac{1}{\alpha+1} < \frac{1}{2,14}$$

$\Rightarrow 0,46 < f(\alpha) < 0,47$

4°) (T) : y = x
5°) a) $\forall x \geq 0$, $u'(x) = e^x - xe^x - e^x = -xe^x < 0$, donc u est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$. Or u (0) = 0 , donc $\forall x > 0$, $u(x) < 0$
b) $\forall x \in [0;+\infty[$

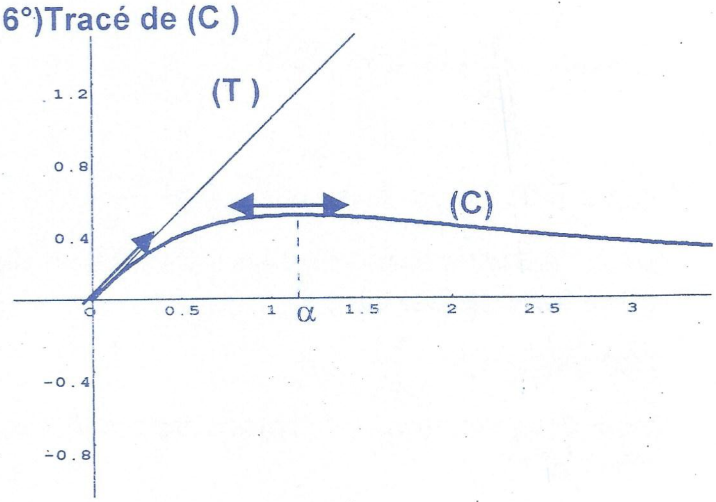
$$f(x) - x = \frac{e^x-1}{xe^x+1} - x = \frac{e^x - 1 - xe^x - x}{xe^x+1}$$

$$= \frac{e^x(1-x^2)-(1+x)}{xe^x+1}$$

$$= \frac{e^x(1+x)(1-x)-(1+x)}{xe^x+1} = \frac{(x+1)u(x)}{xe^x+1}$$

c) $\forall x \geq 0$ $\dfrac{x+1}{xe^x+1} > 0$, donc le signe de f(x)-x celui de u(x), donc $\forall x \geq 0$, $f(x) - x \leq 0$, ainsi (C) est en- dessous de (T)

6°)Tracé de (C)



PROBLEME 6

1°) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} xe^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{X\to -\infty} \dfrac{e^X}{X} = 0$

$(X = \dfrac{1}{x})$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x+1) = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 0$

Donc f est continue en 0

$\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{xe^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x\ln(x+1)}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x+1) = 0$

Donc f est dérivable en 0 et f' (0) = 0

2°)a) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} xe^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{X\to 0^-} \dfrac{e^X}{X} = -\infty$

$(X = \dfrac{1}{x})$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} x\ln(x+1) = +\infty$

b) $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$ pour $x<0$

$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} - \dfrac{1}{x^2}xe^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$

Pour $x < 0$, $f'(x) > 0$ car $e^{\frac{1}{x}} > 0$ et $\dfrac{x-1}{x} > 0$

donc f est strictement croissante sur]- ∞ ;0[

$f(x) = x\ln(x+1)$ pour $x \geq 0$

$f'(x) = \ln(x+1) + \dfrac{x}{x+1} > 0$

Donc f est strictement croissante sur]0;+ ∞ [d'où le TV

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'(x)	+	0	+
f(x)	$-\infty$ ↗	0	↗ $+\infty$

3°)a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x+1) = +\infty$

Donc (C) admet une branche parabolique de direction (OJ)

b) $\lim\limits_{x\to -\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) = \lim\limits_{X\to 0} \dfrac{e^X - 1}{X} = 1$

car $X = \dfrac{1}{x}$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} X = 0$

c) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) - (x+1) = \lim\limits_{x\to -\infty} (x(e^{\frac{1}{x}} - 1) - 1) = 0$

donc la droite (D) d'équation y=x+1 est asymptote oblique à(C) en $-\infty$

4°) M(x ; y) $\in$(C)$\cap$ (Δ) ⇔ y =x et y = f(x)

sur]- ∞ ;0[f(x)=x ⇔ $xe^{\frac{1}{x}} = x$

⇔ $x(e^{\frac{1}{x}} - 1) = 0$

⇔ x=0 car $e^{\frac{1}{x}} - 1 \neq 0$

sur]0;+ ∞ [f(x)=x ⇔x ln(x+1)=x

⇔ x(ln(x+1) – 1)=0

⇔ x=0 ou (ln(x+1)= 1

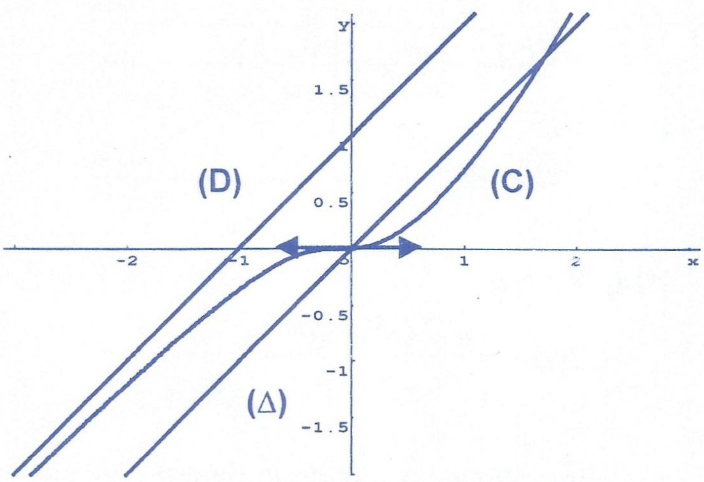
⇔ x=0 ou x+1=e

⇔ x=0 ou x=e–1

Donc les points d'intersection de (C)$\cap$ (Δ) sont O(0 ;0) et B(e –1 ; e –1)

5°) f est continue et strictement croissante de]0;+ ∞ [vers]0;+ ∞ [, donc f réalise une bijection .Soit f^{-1} sa bijection réciproque

6°) Représentation



PRIMITIVES ET INTEGRALES

EXERCICE 1

1°) Soit $\forall\ x\in K$, $f(x)=x^2(x^3-1)^5$

Posons $u(x)=(x^3-1)$, $u'(x)=3x^2$

$f(x)=\frac{1}{3}\ u'(x)\ u^5(x)$,donc $F(x)=\frac{1}{18}\ (x^3-1)^6$

2°) $\forall\ x\in K$, $f(x)=\frac{2x}{(1-x^2)^2}$,

Posons $u(x)=1-x^2$, $u'(x)=-2x$

$f(x)=\frac{-u'(x)}{u^2(x)}$, donc $F(x)=\frac{1}{1-x^2}$

3°) $\forall\ x\in K$, $f(x)=\frac{1}{(4x^2-4x+1)^3}=\frac{1}{(2x-1)^6}$

Posons $u(x)=2x-1$, $u'(x)=2$

$f(x)=\frac{1}{2}\frac{u'(x)}{u^6(x)}$, donc $F(x)=\frac{-1}{10(2x-1)^5}$

4°) $\forall\ x\in K$, $f(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{4})$

Posons $u(x)=(2x-\frac{\pi}{4})$, $u'(x)=2$

$f(x)=\frac{1}{2}u'(x)\sin(u(x))$

donc $F(x)=-\frac{1}{2}\cos(2x-\frac{\pi}{4})$

5°) $\forall\ x\in K$,

$f(x)=\cos^2x-1=-\sin^2x=\frac{-1+\cos 2x}{2}$

Posons $u(x)=2x$, $u'(x)=2$

$f(x)=\frac{1}{2}[-1+\frac{1}{2}u'(x)\cos(u(x))]$

donc $F(x)=\frac{1}{2}(-x+\frac{1}{2}\sin(2x))$

6°) $\forall\ x\in K$, $f(x)=\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}$

Posons $u(x)=9-x^2$, $u'(x)=-2x$

$f(x)=-\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$, donc $F(x)=-\sqrt{9-x^2}$

7°) $\forall\ x\in K$, $f(x)=\frac{\sin x}{(1+\cos x)^3}$

Posons $u(x)=1+\cos x$, $u'(x)=-\sin x$

$f(x)=\frac{-u'(x)}{u^3(x)}$ donc $F(x)=\frac{1}{2(1+\cos x)^2}$

8°) $\forall\ x\in K$, $f(x)=\sin x\cos^4 x$

Posons $u(x)=\cos x$, $u'(x)=-\sin x$

$f(x)=-u'(x)u^4(x)$, donc $F(x)=-\frac{1}{5}\cos^5(x)$

9°) $\forall\ x\in K$, $f(x)=(1+\tan^2 x)\tan x$

Posons $u(x)=\tan x$, $u'(x)=1+\tan^2 x$.

$f(x)=u'(x)\ u(x)$, donc $F(x)=\frac{1}{2}\tan^2 x$

10°) $\forall\ x\in K$, $f(x)=\sin^5 x=\sin x\sin^4(x)$

$=\sin x\,(1-\cos^2 x)^2$

$=\sin x-2\sin x\cos^2(x)+\sin x\cos^4(x)$

donc $F(x)=-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3(x)-\frac{1}{5}\cos^5(x)$

EXERCICE 2

1°) $D_f=\mathbb{R}/\{1\}$

2°) $\forall\ x\in D_f$,

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{(x-1)^2}=\frac{(ax+b)(x-1)^2+c}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{ax^3+(-2a+b)x^2+(a-2b)x+b+c}{(x-1)^2}$$

Par identification on a : $\begin{cases} a=3 \\ -2a+b=-7 \\ a-2b=5 \\ b+c=1 \end{cases}$

Donc a=3 b=–1 et c= 2

Ou par une division euclidienne on retrouve a=3 b=–1 et c= 2

donc $\forall\ x\in D_f$, $f(x)=3x-1+\frac{2}{(x-1)^2}$

3°) Soit F une primitive de f sur $]1;+\infty[$

Une primitive de $x\mapsto\frac{2}{(x-1)^2}$ est

la fonction : $x\mapsto\frac{-2}{x-1}$

donc $\forall\ x\in]1;+\infty[$, $F(x)=\frac{3}{2}x^2-x-\frac{2}{x-1}+k$

or $F(2)=0$,donc $k=-2$.

$\forall x\in 1;+\infty[$, $F(x)=\frac{3}{2}x^2-x-\frac{2}{x-1}-2$

EXERCICE 3

1°) $\forall\, x \in [0\,;\frac{\pi}{4}]$

$$f'(x) = \frac{\cos x \cos^3(x) + 3\sin x \cos^2(x)\sin x}{\cos^6 x}$$

$$= \frac{\cos^4 x + 3(1-\cos^2(x))\cos^2(x)}{\cos^6 x}$$

$$= \frac{3\cos^2(x) - 2\cos^4(x)}{\cos^6(x)}$$

$$f'(x) = \frac{3}{\cos^4(x)} - \frac{2}{\cos^2(x)}$$

2°) $\forall\, x \in [0\,;\frac{\pi}{4}]$, $\frac{3}{\cos^4 x} = f'(x) + \frac{2}{\cos^2 x}$

$$g(x) = \frac{1}{\cos^4 x} = \frac{1}{3}f'(x) + \frac{2}{3}\,\frac{1}{\cos^2 x}$$

Soit G une primitive de g sur $[0\,;\frac{\pi}{4}]$

On a $\forall\, x \in [0\,;\frac{\pi}{4}]$, $G(x) = \frac{1}{3}f(x) + \frac{2}{3}\tan x + k$

avec $k \in IR$.

Donc $\forall\, x \in [0\,;\frac{\pi}{4}]$,

$G(x) = \frac{1}{3}\,\frac{\sin x}{\cos^3 x} + \frac{2}{3}\tan x + k$ or $G(0)=0$

Ainsi k=0 , donc $G : x \to \frac{1}{3}\,\frac{\sin x}{\cos^3 x} + \frac{2}{3}\tan x$

EXERCICE 4

1°) $\forall\, x \in]\,0\,;+\infty\,[$

$f'(x) = \ln x + x\,\frac{1}{x} = \ln x + 1$

2°) $\forall\, x \in]\,0\,;+\infty\,[$, $\ln x = f'(x) - 1$
donc une primitive de ln sur $]\,0\,;+\infty\,[$
est la fonction $x \mapsto f(x) - x = x\ln x - x$

EXERCICE 5

1°)
$\forall\, x \in IR \setminus \{2\}$,

$$f(x) = \frac{a}{2x+1} + \frac{b}{(2x+1)^2} = \frac{2ax + a + b}{(2x+1)^2}$$

Donc par identification on a :

2a = 1 et a+b = 1 , donc $a = \frac{3}{2}$ et $b = \frac{-1}{2}$

Donc $\forall\, x \in IR \setminus \{2\}$, $f(x) = \frac{3}{2}\,\frac{1}{2x+1} - \frac{1}{2(2x+1)^2}$

2°)a) $\forall x \in]\,\frac{-1}{2}\,;+\infty\,[$,

$$f(x) = \frac{3}{4}\,\frac{(2x+1)'}{2x+1} - \frac{1}{4}\,\frac{(2x+1)'}{(2x+1)^2}$$

Donc sur $]\,\frac{-1}{2}\,;+\infty\,[$,les primitives de f sont

$F : x \mapsto \frac{3}{4}\ln(2x+1) + \frac{1}{4}\,\frac{1}{2x+1} + k$, où $k \in IR$.

b) F(0) =1

$F(0) = \frac{3}{4}\ln(1) + \frac{1}{4} + k$, donc $k = \frac{-1}{4}$

ainsi $\forall\, x \in]\,\frac{-1}{2}\,;+\infty\,[$

$$F(x) = \frac{3}{4}\ln(2x+1) + \frac{1}{4}\,\frac{1}{2x+1} - \frac{1}{4}$$

EXERCICE 6

1°) $\forall\, x \in IR$, $f'(x) = 2e^{2x}\cos x - e^{2x}\sin x$
$= e^{2x}(2\cos x - \sin x)$

$f''(x) = 4e^{2x}\cos x - 2e^{2x}\sin x - (e^{2x}\cos x + 2e^{2x}\sin x)$

$f''(x) = 3e^{2x}\cos x - 4e^{2x}\sin x$

2°) $f(x) = a f''(x) + b f'(x)$

$f(x) = 3a\,e^{2x}\cos x - 4a\,e^{2x}\sin x + 2b\,e^{2x}\cos x - b e^{2x}\sin x$

$= (3a+2b)\,e^{2x}\cos x + (-4a-b)\,e^{2x}\sin x$

$e^{2x}\cos x = (3a+2b)\,e^{2x}\cos x + (-4a-b)\,e^{2x}\sin x$

Par identification 3a+2b=1 et– 4a– b=0 , donc

$a = \frac{-1}{5}$ et $b = \frac{4}{5}$,

ainsi $\forall\, x \in IR$, $f(x) = \frac{-1}{5}f''(x) + \frac{4}{5}f'(x)$.

Soit F une primitive de f sur IR , on a

$\forall\, x \in IR$, $F(x) = \frac{-1}{5}f'(x) + \frac{4}{5}f(x)$, donc

$\forall\, x \in IR$, $F(x) = \frac{2}{5}e^{2x}\cos x + \frac{1}{5}e^{2x}\sin x$

EXERCICE 7

1°) a) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\,dx = \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos^3 x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} -\frac{(\cos x)'}{\cos^3 x}dx$

$= \left[-\frac{-1}{2\cos^2 x}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{3}{2}$

c)

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} -\frac{(\cos x)'}{\cos x}dx$

$= [-\ln(\cos x)]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\ln\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\ln 2}{2}$

d) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\tan^2 x) - 1\,dx$

$= [\tan x - x]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{\pi}{4}$

e) $\int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx = \int_1^2 \frac{1}{x}\ln x\,dx = \int_1^2 (\ln x)'\ln x\,dx$

$= \left[\frac{1}{2}\ln^2 x\right]_1^2 = \frac{1}{2}(\ln 2)^2$

f) $\forall\, x \in [0\,;3]$, $|x-3| = 3 - x$

$\forall\, x \in [3\,;6]$, $|x-3| = x-3$

$\int_0^6 2-|x-3|dx = \int_0^3 2-(3-x)dx + \int_3^6 2-(x-3)dx$

$= \int_0^3 x-1\,dx + \int_3^6 -x+5\,dx$

$= \left[\frac{1}{2}x^2 - x\right]_0^3 + \left[\frac{-1}{2}x^2 + 5x\right]_3^6$

$= \frac{9}{2} - 3 + (-18 + 30 + \frac{9}{2} - 15) = 3$

g) $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} x^3 - \tan x\,dx$

$\left[\frac{-\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right] \to \mathbb{R}$

$x \mapsto x^3 - \tan x$ est impaire

donc $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} x^3 - \tan x\,dx = 0$

2°) $I = \int_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx$

posons $u(x)=x \Rightarrow u'(x)=1$

$v'(x) = (1-x)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow v(x) = -\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}$

$I = [\frac{-2}{3}x(1-x)^{\frac{3}{2}}]_0^1 + \frac{2}{3}\int_0^1 (1-x)^{\frac{3}{2}}dx$

$I = [\frac{-2}{3}x(1-x)^{\frac{3}{2}}]_0^1 + \frac{2}{3}[\frac{-2}{5}(1-x)^{\frac{5}{2}}]_0^1$

donc $\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx = \frac{-4}{15}(-1) = \frac{4}{15}$

$L = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$

posons $u(x) = x \Rightarrow u'(x) = 1$

$v'(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}} = (1-x)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow v(x) = 2(1-x)^{\frac{1}{2}}$

$L = [2x(x+1)^{\frac{1}{2}}]_0^1 - 2\int_0^1 (x+1)^{\frac{1}{2}}dx$

$L = [2x(x+1)^{\frac{1}{2}}]_0^1 - 2[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}]_0^1$

$L = 2\sqrt{2} - 2(\frac{2}{3}(2)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}) = 2\sqrt{2} - \frac{8\sqrt{2}}{3} + \frac{4}{3}$

donc $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx = \frac{4-2\sqrt{2}}{3}$

$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2 x\,dx$

posons $u(x) = x \Rightarrow u'(x) = 1$

$v'(x) = \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \Rightarrow v(x) = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}$

$$J=\left[\frac{x^2}{2}+\frac{x\sin 2x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x+\sin 2x\,dx$$

$$J=\left[\frac{x^2}{2}+\frac{x\sin 2x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{4}\left[x^2-\frac{\cos 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2 x\,dx=\frac{\pi^2}{8}-\frac{1}{4}\left(\frac{\pi^2}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{4}$$

$$K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\cos^2 x}dx$$

posons $u(x)=x \Rightarrow u'(x)=1$

$$v'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}\Rightarrow v(x)=\tan x$$

$$K=[x\tan x]_0^{\frac{\pi}{3}}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan x\,dx$$

$$K=[x\tan x]_0^{\frac{\pi}{3}}-[-\ln(\cos x)]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{3}\pi}{3}-\ln 2$$

EXERCICE 8

1°) $I-J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x-\sin^4 x\,dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2 x-\sin^2 x)(\cos^2 x+\sin^2 x)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x\,dx=\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$I-J=0$

$$I+J+K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^4+2\sin^2 x\cos^2 x+\sin^4 x)dx$$

$$I+J+K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2 x+\sin^2 x)^2 dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=[x]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$$

2°)

$$I+J-3K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x+\sin^4 x-6(\cos x\sin x)^2\,dx$$

$$\cos^2 x=\frac{1+\text{co}2x}{2}$$

$$\cos^2(2x)=\frac{1+\cos 4x}{2}$$

Donc $\cos 4x=-1+2\cos^2 2x$

$\cos 4x=\cos^2 2x-\sin^2 2x$

$\cos 4x=2\cos^2 2x-(\cos^2 2x+\sin^2 2x)$

$\cos 4x=(\cos^2 x-\sin^2 x)^2-(2\sin x\cos x)^2$

$\cos 4x=\cos^4 x+\sin^4 x-6\sin^2 x\cos^2 x$

$$I+J-3K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 4x\,dx=\left[\frac{1}{4}\sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=0$$

On a $\begin{cases} I-J=0\\ I+J+K=\frac{\pi}{2}\\ I+J-3K=0\end{cases}$

donc $I=\frac{\pi}{16}$; $J=\frac{\pi}{16}$ et $K=\frac{\pi}{8}$

EXERCICE 9

1°) a) $\forall x\in]-2;2[,\ 4-x^2>0$

Or $[0;1]\subset]-2;2[$

Donc $\forall x\in[0;1],\ f(x)>0$

donc $I=\int_0^1 f(x)\,dx$ est positive.

b) $\forall x\in]-2;2[$,

$$-1+\frac{1}{2-x}+\frac{1}{2+x}=\frac{-(4-x^2)+2+x+2-x}{4-x^2}$$

$$=\frac{x^2}{4-x^2}$$

Or $\forall x\in]-2;2[$, $f(x)=\frac{x^2}{4-x^2}$, Donc $\forall$ x $\in]-2\ ;2[$, $f(x) = -1 + \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x}$

c) $I = \int_0^1 \frac{x^2}{4-x^2}dx = \int_0^1 -1 + \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x}dx$

$I = [-x - \ln(2-x) + \ln(2+x)]_0^1$

$I = -1 + \ln 3$

2°) $\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 \ln(4-x^2)dx$

Posons $u(x) = \ln(4-x^2) \Rightarrow u'(x) = \frac{-2x}{4-x^2}$

$v'(x) = 1 \Rightarrow v(x) = x$

$$\int_0^1 g(x)dx = \left[x\ln(4-x^2)\right]_0^1 + 2\int_0^1 \frac{x^2}{4-x^2}dx$$

Donc $\int_0^1 g(x)dx = \ln 3 + 2I = -2 + 3\ln 3$

EXERCICE 10

1°) $K = \int_0^\pi e^x \cos 2x\, dx$

posons $u(x) = \cos 2x \Rightarrow u'(x) = -2\sin 2x$

$v'(x) = e^x \Rightarrow v(x) = e^x$

$$K = \left[e^x \cos 2x\right]_0^\pi + 2\int_0^\pi e^x \sin 2x\, dx$$

Posons $u(x) = \sin 2x \Rightarrow u'(x) = 2\cos 2x$

$v'(x) = e^x \Rightarrow v(x) = e^x$

Donc

$$\int_0^\pi e^x \sin 2x\, dx = \left[e^x \sin 2x\right]_0^\pi - 2\int_0^\pi e^x \cos 2x\, dx$$

$$K = \left[e^x \cos 2x\right]_0^\pi + 2\left[e^x \sin 2x\right]_0^\pi - 4K$$

Donc $5K = e^\pi - 1$

Donc $K = \frac{e^\pi - 1}{5}$

2°) $I + J = \int_0^\pi e^x \cos^2 x + e^x \sin^2 x\, dx$

a) $I + J = \int_0^\pi e^x(\cos^2 x + \sin^2 x) = \int_0^\pi e^x\, dx$

$I + J = \left[e^x\right]_0^\pi$

donc $I + J = e^\pi - 1$

b) $I - J = \int_0^\pi e^x(\cos^2 x - \sin^2 x)dx$

$= \int_0^\pi e^x \cos 2x\, dx = K$

On a $\begin{cases} I + J = e^\pi - 1 \\ I - J = K \end{cases}$

donc $I = \frac{3e^\pi - 3}{5}$ et $J = \frac{2e^\pi - 2}{5}$

NOMBRES COMPLEXES

Dans tout ce qui suit k un entier relatif.

EXRECICE 1

$|z_1| = \sqrt{6+2} = 2\sqrt{2}$

$$\begin{cases} \cos\theta_1 = \dfrac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_1 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_1 = -\frac{\pi}{6}$$

Donc $\arg(z_1) = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$.

$|z_2| = 1$

$$\begin{cases} \cos\theta_2 = \dfrac{1}{2} \\ \sin\theta_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_2 = \frac{\pi}{3}$$

Donc $\arg(z_2) = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$.

$|z_3| = |i| \times |\sqrt{6} - i\sqrt{2}| = 2\sqrt{2}$

$\arg(z_3) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$.

On a : $-1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$ et

$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$, donc

$\arg(z_4)| = \dfrac{2\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi = \dfrac{5\pi}{12} + 2k\pi$.

On a : $|-1-i| = \sqrt{2}$ et $\arg(-1-i) = -\dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi$

.Donc $|z_5| = (\sqrt{2})^4 = 4$ et

$\arg(z_5) = 4 \times \left(-\dfrac{3\pi}{4}\right) + 2k\pi = \pi + 2k\pi$.

EXERCICE 2

1°) $z_1 = 1 + \sqrt{3} + i(1 - \sqrt{3})$.

2°) a) $1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$ et

$1 - i\sqrt{3} = 2\left(\cos\left(\dfrac{-\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{-\pi}{3}\right)\right)$

Donc $z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{3}\right)\right)$

$= 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{-\pi}{12}\right) + i\sin\left(\dfrac{-\pi}{12}\right)\right)$.

b) $\dfrac{1 - i\sqrt{3}}{1 - i} = \dfrac{1}{2}(1+i)(1 - i\sqrt{3})$

$= \sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{-\pi}{12}\right) + i\sin\left(\dfrac{-\pi}{12}\right)\right)$.

EXERCICE 3

1°) $|a| = 2$ et $\arg(a) = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$.

$|b| = 2$ et $\arg(b) = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$.

2°)a) $|c| = |a|^3 \times |b| = 16$.

$\arg(c) = 3\arg(a) + \arg(b) + 2k\pi$

$= \dfrac{11\pi}{12} + 2k\pi$.

b) Ecriture trigonométrique de c.

$c = 16\left(\cos\left(\dfrac{11\pi}{12}\right) + i\sin\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)\right)$

Ecriture algébrique de c.

$c = 2\sqrt{2}\,(1+i)^3(\sqrt{3} + i)$

$= 4\sqrt{2}(-\sqrt{3} - 1) + 4\sqrt{2}(-1 + \sqrt{3})i$.

Donc $\begin{cases} 16\cos\dfrac{11\pi}{12} = 4\sqrt{2}(-\sqrt{3} - 1) \\ 16\sin\dfrac{11\pi}{12} = 4\sqrt{2}(-1 + \sqrt{3}) \end{cases}$

Donc $\begin{cases} \cos\dfrac{11\pi}{12} = \dfrac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \\ \sin\dfrac{11\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{cases}$

EXERCICE 4

On a : $\overline{\left(\dfrac{\sqrt{3} - i}{\sqrt{3} + i}\right)} = \dfrac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} - i}$

Donc $\dfrac{\sqrt{3} - i}{\sqrt{3} + i} + \dfrac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} - i} = 2\,\mathrm{Re}\left(\dfrac{\sqrt{3} - i}{\sqrt{3} + i}\right)$

Or $\dfrac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ et Re ($\dfrac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}$) = $\dfrac{1}{2}$

Donc $\dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i} + \dfrac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i} - 1 = 0$.

EXERCICE 5

$M(z) \in (E) \Leftrightarrow |z-(-5+2i)| = |z-(2-i)|$

$\Leftrightarrow AM = BM$ où $A(-5+2i)$ et $B(2-i)$.

Donc (E) est la médiatrice de [AB] .

$M(z) \in (C) \Leftrightarrow |z-(-1+i)| = 2$

$\Leftrightarrow KM = 2$ où $K(-1+i)$

Donc (C) est le cercle de centre K et de rayon 2 .

$M(z) \in (F) \Leftrightarrow |\bar{z}-(-2-i)| = 3$

$\Leftrightarrow |\overline{\bar{z}-(-2-i)}| = 3$

$\Leftrightarrow |z-(-2+i)| = 3$ car $|\bar{z}| = |z|$

$\Leftrightarrow QM = 3$ où $Q(-2+i)$

Donc (F) est le cercle de centre Q et de rayon 3 .

EXERCICE 6

1°)Pour $z = i$, $Z_1 = \dfrac{i-2i}{i+1} = \dfrac{-i}{1+i} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$

Donc $|Z_1| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\arg(Z_1) = \dfrac{-3\pi}{4}$.

2°) $|Z| = \dfrac{BM}{AM}$

$M(z) \in (E_1) \Leftrightarrow |Z| = 1$

$\Leftrightarrow \dfrac{BM}{AM} = 1$

$\Leftrightarrow AM = BM$

Donc (E_1) est la médiatrice de [AB].

3°) a) On pose $z = x + iy$ et $Z = X + iY$.

$$Z = \frac{x+i(y-2)}{x+1+iy} = \frac{[x+i(y-2)][x+1-iy]}{(x+1)^2+y^2}$$

$$Z = \frac{x^2+y^2+x-2y}{(x+1)^2+y^2} + i\,\frac{-2x+y-2}{(x+1)^2+y^2}.$$

Donc $X = \dfrac{x^2+y^2+x-2y}{(x+1)^2+y^2}$ et $Y = \dfrac{-2x+y-2}{(x+1)^2+y^2}$

avec $(x+1)^2+y^2 \neq 0$ car $z \neq -1$.

b) $M(z) \in (E_2) \Leftrightarrow Z \in IR$

$\Leftrightarrow Y = 0$

$\Leftrightarrow -2x + y - 2 = 0$

Mais $-2(-1) - 2 = 0$ et $A(-1) \notin (E_2)$

Donc (E_2) est la droite (D) : $y = 2x + 2$ privée de A .

$M(z) \in (E_3) \Leftrightarrow Z \in iIR$

$\Leftrightarrow X = 0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+x-2y = 0$

$\Leftrightarrow (x+\frac{1}{2})^2+(y-1)^2 = \dfrac{5}{4}$

Mais $(-1)^2 + 0 - 1 - 2 \times 0 = 0$ et $A(-1) \notin (E_3)$

Donc (E_3) est le cercle de centre $Q(\dfrac{-1}{2} + i)$ et de rayon $\dfrac{5}{4}$ privé de A.

4°) $|Z-1| \times |z+1| = |(Z-1)(z+1)|$

$= \left|\dfrac{-2i-1}{z+1}(z+1)\right|$

$= |-2i-1| = \sqrt{5}$.

Soit(Γ) le cercle de centre A et de rayon $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

$M(z) \in (\Gamma) \Leftrightarrow AM = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

$\Leftrightarrow |z+1| = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

$\Leftrightarrow |Z-1|\,|z+1| = \dfrac{\sqrt{5}}{2}|Z-1|$

$M(z) \in (\Gamma) \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{5}}{2}|Z-1| = \sqrt{5}$

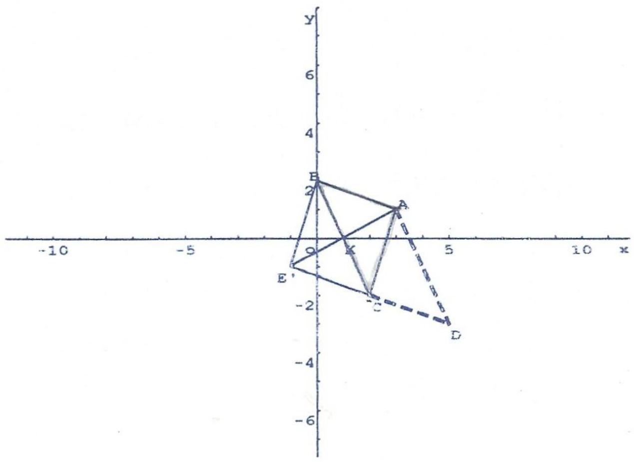
$\Leftrightarrow |Z-1| = 2$

$\Leftrightarrow KM' = 2$ où $K(1)$

Donc lorsque M parcourt (Γ) , M' parcourt le cercle de centre K et de rayon 2 .

EXERCICE 7

1°)a) Figure



b) On a $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = i$, donc le triangle ABC est rectangle et isocèle en A .

2°) a) ABCD est un parallélogramme ssi

$$\vec{AB} = \vec{DC}$$

Donc $z_D = z_C + z_A - z_B = 5 - 3i$.

b)Soit K = mil [BC]

$z_K = \frac{z_B + z_C}{2} = 1$

$S_K(A) = E \Leftrightarrow \vec{AK} = \vec{KE}$

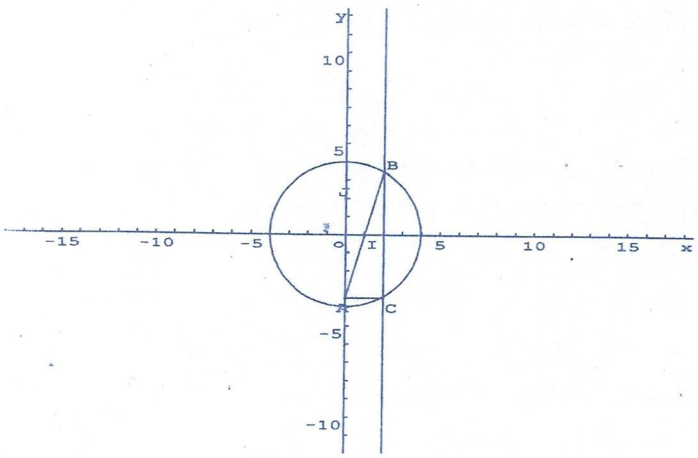
$\Leftrightarrow Z_E = 2Z_K - Z_A = -1 - i$

EXERCICE 8

1°) a) OB = $|z_B| = 4$ et OC = $|z_C| = 4$, donc les points B et C appartiennent au cercle (Γ) de centre O et de rayon 4 .

b)Re(z_B) = Re (z_C) = 2 , donc les points B et C appartiennent aussi à la droite (D) : y = 2.

Ainsi B et C appartiennent à (Γ) et (D) , d'où la construction de B et de C .



2°) a) $z_A = -2i\sqrt{3}$.

b) On a : $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = 2i\sqrt{3}$, donc le triangle ABC est rectangle en C .

EXERCICE 9

1°) Soit y un nombre réel

iy solution de(E)$\Leftrightarrow -iy^3 + 4i\,y^2 - 6iy + y - 1 + 3i = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y - 1 = 0 & (1) \\ -y^3 + 4y^2 - 6y + 3 = 0 & (2) \end{cases}$$

$(1) \Leftrightarrow y = 1$

Dans (2) on a : $-1 + 4 - 6 + 3 = 0$

Donc la solution imaginaire pure de (E) est i

.2°)a)Une division euclidienne donne

$f(z) = (z - i)(z^2 - 3iz - 3 - i)$.

b) $\Delta = -9 - 4(-3 - i) = 3 + 4i = (2 + i)^2$

Donc

les solutions de l'équation : $z^2 - 3iz - 3 - i = 0$

sont : $z_1 = -1 + i$ et $z_2 = 1 + 2i$.

c) D'après tout ce qui précède, les solutions de (E) sont : i , −1+i et 1+2i .

EXERCICE 10

1°) $z^3 = 2 + 2i$

Soit $z = r\,e^{i\theta}$ une racine cubique de 2+2i

$$2 + 2i = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}.e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$z^3 = 2 + 2i \Leftrightarrow r^3 e^{3\theta i} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r^3 = 2\sqrt{2} = \sqrt{8} \\ 3\theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad , k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow r = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad \theta = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}k\pi \quad , k \in \mathbb{Z}$$

Pour k=0, $\theta = \frac{\pi}{12}$, donc $z = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12})$

Pour k=1 , $\theta = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} = \frac{3\pi}{4}$

donc $z = \sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$

Pour k=2 , $\theta = \frac{\pi}{12} + \frac{4\pi}{3} = \frac{17\pi}{12}$,donc $\theta = 2\pi + \frac{-7\pi}{12}$

donc $z = \sqrt{2}(\cos(\frac{-7\pi}{12}) + i\sin(\frac{-7\pi}{12}))$

2°) $(-1+i)^3 = (-1+i)(-1+i)^2 = 2 + 2i$

$z^3 = 2 + 2i = (-1+i)^3 \Leftrightarrow \frac{z^3}{(-1+i)^3} = (\frac{z}{-1+i})^3 = 1$

3°) Posons $Z = \frac{z}{-1+i}$, donc (E) $\Leftrightarrow Z^3 = 1$

Donc Z est une racine cubique de 1.

Donc Z =1 ou $j = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ ou $\bar{j} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$

. $Z=1 \Leftrightarrow \dfrac{z}{-1+i}=1 \Leftrightarrow z=-1+i$

. $Z=\dfrac{-1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \dfrac{z}{-1+i}=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow \quad z=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}+i\left(\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)$

. $Z=\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \dfrac{z}{-1+i}=\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow z=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}+i\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)$

Les solutions sont : $-1+i$

$\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}+i\left(\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)$ et $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}+i\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)$

4°) $\cos\dfrac{\pi}{12}>0$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}>0$, car $\dfrac{\pi}{12}\in\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$

Donc $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}+i\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)$

$\sqrt{2}\cos\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$\sqrt{2}\sin\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2} \Leftrightarrow \sin\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

EXERCICE 11

A) 1°) $P(z)=z^3-(5+i)z^2+(10+6i)z-8-16i$

Soit $z_0=ib$ un racine de $P(z)$

$P(z_0)=(ib)^3-(5+i)(ib)^2+(10+6i)ib-8-16i=0$

$-ib^3+5b^2+ib^2+10ib-6b-8-16i=0$

$\begin{cases} 5b^2-6b-8=0 & (1) \\ -b^3+b^2+10b-16=0 & (2) \end{cases}$

(1) : $5b-6b-8=0$

$\Delta=36-4(5)(-8)=196 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=14$

Donc $b=\dfrac{4}{5}$ ou $b=2$

Vérification de $b=2$ dans (2)

$-(2)^3+(2)^2+10(2)-16=0$

donc la solution imaginaire pure est $z_0=2i$

2°) $P(z)=(z-2i)Q(z)$

A l'aide d'une division euclidienne on a

$P(z)=(z-2i)(z^2+(-5+i)z+8-4i)$

3°) $P(z)=0 \Leftrightarrow (z-2i)(z^2+(-5+i)z+8-4i)=0$

$\Leftrightarrow z-2i=0$ ou $z^2+(-5+i)z+8-4i=0$

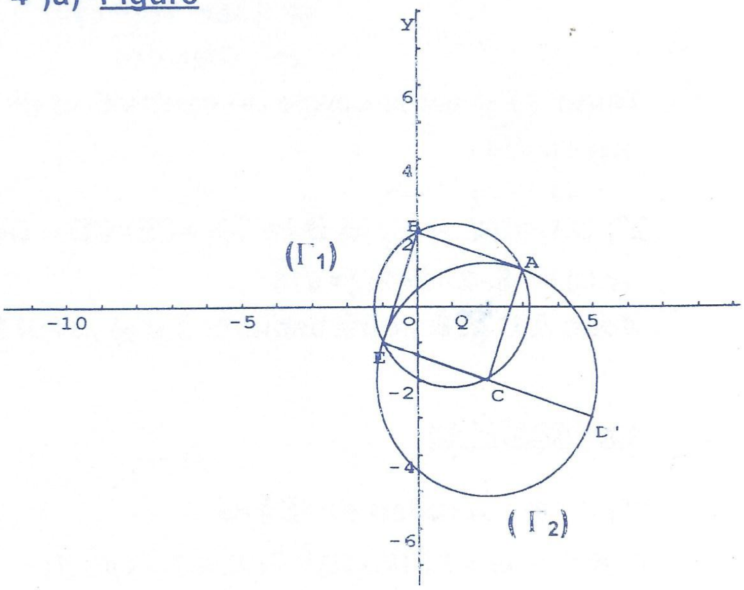
Résolvons l'équation: $z^2+(-5+i)z+8-4i=0$

$\Delta=(-5+i)^2-4(8-4i)=-8+6i=(1+3i)^2$

Donc les solutions sont $3+i$ et $2-2i$

Donc $P(z)=0 \Leftrightarrow z=2i$ ou $z=3+i$ ou $z=2-2i$

4°)a) Figure



b) $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\dfrac{2-2i-3-i}{2i-3-i}=\dfrac{-1-3i}{-3+i}=i$

donc ABC est un triangle rectangle isocèle en A.

c)ABCD est un parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$

$\Leftrightarrow z_A-z_B=z_D-z_C$

$\Leftrightarrow 3+i-2i=z_D-2-2i$

$\Leftrightarrow z_D=5-3i$

d) Soit I milieu [BC]

$z_I=\dfrac{z_B+z_C}{2}=\dfrac{2i+2-2i}{2}=1$

E symétrique de A par rapport à I

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IE} \Leftrightarrow z_I-z_A=z_E-z_I$

$\Leftrightarrow z_E=-1-i$

Soit I milieu [BC] et Soit I milieu [AE]

AB=AC et AB⊥AC , ABC triangle isocèle rectangle en A donc ABEC est un carré

e) IA=IE=IB=IC donc A, B ,E et C appartiennent au cercle(Γ_1) de centre I et rayon 1

f) $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{EC}$ (car ABEC est un carré)

et $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$ ainsi $\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{CD}$

donc E.C et D sont alignés

Autre méthode

$\frac{z_E - z_C}{z_D - z_C} = -1 \in \mathbb{R}$,donc E,C et D sont alignés.

B)1°) $M(z) \in (\Gamma_2) \Leftrightarrow |z-2+2i| = \sqrt{10}$

$\Leftrightarrow |z_M - z_C| = \sqrt{10}$

$\Leftrightarrow CM = \sqrt{10}$

Donc (Γ_2) est le cercle de centre C et de rayon $\sqrt{10}$

2°) $\vec{BA} = \vec{EC} = \vec{CD} \Rightarrow BA = CA = CE = CD \neq CB$

or $CD = |5-3i-2+2i| = \sqrt{10}$

donc A,D et E appartiennent à (Γ_2) , sauf B .

EXERCICE 12

1°) -2i est solution de (E) $\Leftrightarrow$

$(-2i)^3 - (ai + 2\sqrt{3})(-2i)^2 + (2ia\sqrt{3} + 4)(-2i) - 4ai = 0$ (1)

(1) $\Leftrightarrow 8i - (ai + 2\sqrt{3})(-4) + 4a\sqrt{3} - 8i - 4ai = 0$

$\Leftrightarrow 4ai + 8\sqrt{3} + 4a\sqrt{3} - 4ai = 0$

$\Leftrightarrow 8\sqrt{3} = -4a\sqrt{3}$ donc $a = -2$

2°) q(z) est de degré 2, donc $q(z) = z^2 + bz + c$

$q(z)(z - \sqrt{3} - i) = (z^2 + bz + c)(z - \sqrt{3} - i) =$

$z^3 + (b - \sqrt{3} - i)z^2 + (c - \sqrt{3}b - ib)z + c(-\sqrt{3} - i)$

Par identification $b - \sqrt{3} - i = 2i - 2\sqrt{3}$

$c - b\sqrt{3} - ib = 4 - 4i\sqrt{3}$

$c(-\sqrt{3} - i) = 8i$

Ainsi $b = 3i - \sqrt{3}$ et $c = -2 - 2\sqrt{3}i$

Donc $q(z) = z^2 + (3i - \sqrt{3})z - 2 - 2\sqrt{3}i$

3°) Pour a=-2

(E) $\Leftrightarrow$

$z^3 - (-2i + 2\sqrt{3})z^2 + (-4i\sqrt{3} + 4)z + 8i = 0$

$\Leftrightarrow z^3 + (2i - 2\sqrt{3})z^2 + (4 - 4i\sqrt{3})z + 8i = 0$

-2i , $\sqrt{3} + i$ et z_0 sont les solutions de (E)

(E) $\Leftrightarrow (z - z_0)(z - \sqrt{3} - i)(z + 2i) = 0$

Par identification $2i(-\sqrt{3} - i)z_0 = 8i$

donc $z_0 = \frac{8i}{2i(-\sqrt{3} - i)} = \sqrt{3} - i$

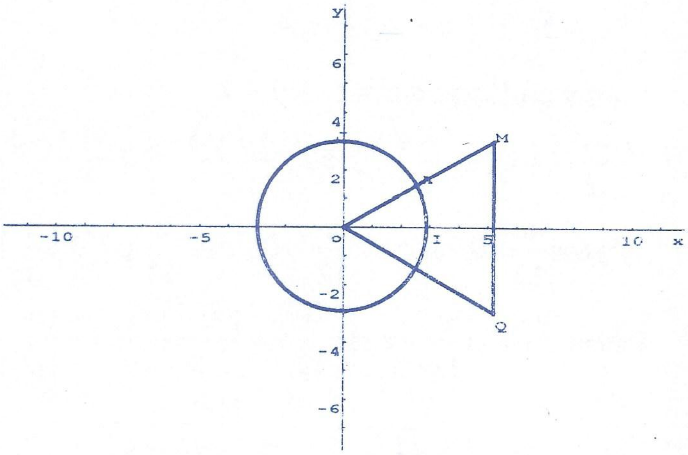
4°)a) $\sqrt{3} + i = 2(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}) = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$

On trace le cercle trigonométrique de rayon 3cm . On construit le point A tel que $mes(\vec{OI};\vec{OA}) = \frac{\pi}{6}$ et enfin

On construit le point M tel que $\vec{OM} = 2\,\vec{OA}$

On a $z_Q = \bar{z}_M$ donc $Q = S_{(OI)}(M)$

Construction



b)$T = S_{(OJ)}(M)$ donc $z_T = -\bar{z}_M = -\sqrt{3} + i$

$\frac{z_T - z_M}{z_Q - z_M} = \frac{-\sqrt{3} + i - \sqrt{3} - i}{\sqrt{3} - i - \sqrt{3} - i} = -i\sqrt{3} \in i\mathbb{R}$

Donc le triangle TMQ est rectangle en M

c) OM=OQ=ON=OT=2, donc M, Q, N et T appartiennent à un même cercle donc M, Q,N et T sont cocycliques .

DENOMBREMENT ET PROBABILITES

EXERCICE 1

1°)Tirer 5 personnes au sort parmi 15 pour former un jury , c'est faire des combinaisons de 5 éléments dans 15. Donc le nombre de possibilités est : $C_{15}^{5} = 3003$

2°) Obtenir A, c'est faire des combinaisons de 2 hommes parmi 9 et des combinaisons de3 femmes parmi 6, donc

Card A $= C_9^2 \times C_6^3 = 720$

Obtenir B , c'est faire des combinaisons de 5 femmes parmi 6 , donc Card B $C_6^5 = 6$.

D = $\overline{C}$ l'évènement contraire de C ,donc

Card D = C_{15}^5 - CardC = 2877.

Pour E, on a un jury ne comportant d'aucun homme ou un jury comptant un seul homme

Donc Card E $= C_9^0 \times C_6^5 + C_9^1 \times C_6^4 = 1260$

Obtenir G , c'est faire des combinaisons d'un élément parmi deux (M. X et Mme Y) et des combinaisons de 4 éléments parmi 13 (les autres personnes) .

Donc CardG = $C_2^1 \times C_{13}^4 = 1430$.

EXERCICE 2

1°) une frappe successive de 3 touches est assimilée à un tirage successif avec remise de 3 objets parmi 14 . Donc le nombre de possibilités est $14^3 = 2744$.

2°)Les 3 chiffres sont distincts

1^{er} chiffre	$2^{ème}$ chiffre	$3^{ème}$ chiffre
10	9	8

Donc on a : $A_{10}^3 = 720$ possibilités.

La frappe donne un produit de 2 entiers naturels .

chiffre	x	chiffre
10	1	10

Donc on a : 10 x 1 x10 = 100 possibilités.

La frappe donne un produit nul de 2 entiers naturels , donc l'un au moins est nul.

chiffre 0	x	1 chiffre
1	1	10

ou

1 chiffre	x	chiffre 0
10	1	1

Donc on a : 2 x 1 x 1 x 10 = 20 possibilités.

La frappe donne un quotient nul de 2 entiers naturels.

chiffre 0	:	1 chiffre ≠ 0
1	1	9

Donc on a : 1 x 1 x 9 = 9 possibilités.

La frappe donne une somme ou différence de 2 entiers naturels.

1 chiffre	+	1 chiffre
10	1	10

ou

1 chiffre	-	1 chiffre
10	1	10

Donc on a : 2 x 10 x 1 x 10 = 200 possibilités.

EXERCICE 3

1°) Les tirages sont successifs et sans remise Donc le nombre de tirages possibles est

$A_{10}^3 = 720$

2°) a) Les 3 tirages se font parmi les 4 questions connues, donc on a : $A_4^3 = 12$ possibilités

b) Une seule est connue, donc on a

$A_4^1 \times A_6^2 = 120$ Possibilités.

c) Les 3 tirages se font parmi les questions ignorées, donc on a : $A_3^3 = 6$ possibilités.

d) On a : $A_4^1 \times A_3^1 \times A_3^1 = 36$ possibilités.

EXERCICE 4

1°)a) Le nombre de possibilités d'obtenir une face blanche : il y a 4 faces blanches donc il y a 4 possibilités

b) Le nombre de possibilités d'obtenir une face noire : il y a 2 possibilités

2°)a) Le nombre de possibilités :

$C_4^1 \times C_2^1 \times C_4^1 \times C_4^1 = 128$

b) On peut obtenir la seule face blanche au 1^{er} ou 2^e ou 3^e ou 4^e lancer :

il y a $4\times C_4^1\times C_2^1\times C_4^1\times C_4^1$ possibilités

Donc il y a 512 possibilités

c) On obtient une face blanche au 4^e lancer

il y a $C_6^1\times C_6^1\times C_6^1\times C_2^1$ possibilités

Donc il y a 432 possibilités

d) On obtient au moins une face blanche

On lance ce dé 4 fois de suite

il y a $6^4=1296$ possibilités

Le nombre de possibilités d'obtenir aucune face noire : il y a $C_4^1\times C_4^1\times C_4^1\times C_4^1=256$

Donc il y a 1296-256=1040 possibilités d'obtenir au moins une face blanche

e) On obtient au plus une face blanche

(c- à – d On obtient 0 ou 1 face blanche)

Donc il y a $2^4+4\times C_2^1\times C_2^1\times C_2^1\times C_4^1=144$ possibilités .

EXERCICE 5

Tirage simultané de 2 boules parmi 12 dont 2 rouges ,4 noires et 6 jaunes.

1°) a) $A\cup B$ = « une seule rouge ou noire »

$A\cap B$ = « une seule rouge et une seule noire»

b) $p(A)=\dfrac{C_2^1\times C_{10}^1}{C_{12}^2}=\dfrac{10}{33}$

$p(B)=\dfrac{C_4^1\times C_8^1}{C_{12}^2}=\dfrac{16}{33}$.

$p(A\cap B)=\dfrac{C_2^1\times C_4^1}{C_{12}^2}=\dfrac{4}{33}$

$p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$

$=\dfrac{10}{33}+\dfrac{16}{33}-\dfrac{4}{33}=\dfrac{22}{33}=\dfrac{2}{3}$

c) $p(A)\times p(B)=\dfrac{10}{33}\times\dfrac{16}{33}=\dfrac{160}{1089}\neq p(A\cap B)$

Donc A et B ne sont pas indépendants.

2°)a)Tirage simultané de 3 boules.

$p(C)=\dfrac{C_4^3+C_6^3}{C_{12}^3}=\dfrac{6}{55}$

On a $D=\overline{C}$, donc $p(D)=1-p(C)=\dfrac{49}{55}$.

$p(H)=\dfrac{C_2^1\times C_4^1\times C_6^1}{C_{12}^3}=\dfrac{12}{55}$

EXERCICE 6

1°)a) Le nombre de tiercés dans l'ordre est de : $A_{16}^3=3360$

b) Le nombre de tiercés dans le désordre est de : $C_{16}^3=560$

2°)a) La probabilité d'obtenir un outsider ou un favoris parmi les gagnants

$P=\dfrac{C_5^1\times C_6^2+C_5^1\times C_6^2}{560}=\dfrac{150}{560}=\dfrac{15}{56}$

b) La probabilité d'obtenir des gagnants ni outsiders ni favoris portant des numéros pairs.

Les numéros pairs des gagnants ni outsiders ni favoris sont : 8 ;10 ;12 ;14 et 16

Donc $P=\dfrac{C_5^3}{560}=\dfrac{10}{560}=\dfrac{1}{56}$

EXERCICE 7

1°) On a 3 n° pair et 3 n° impair

$P(A)=\dfrac{C_3^1}{C_6^1}=\dfrac{1}{2}$ et $P(\overline{A})=1-P(A)=\ =\dfrac{1}{2}$

2°)Un lancer est une épreuve de Bernoulli donc les 6 lancers indépendants constituent un schéma de Bernoulli .

a) P(obtenir 4 fois A)= $C_6^4(\frac{1}{2})^4(\frac{1}{2})^2=0{,}234$

b) B=«obtenir au moins 1 fois A »

$\overline{B}$ =«obtenir aucune fois A »

donc $P(\overline{B})=\left(\dfrac{1}{2}\right)^6=0{,}156$

donc $P(B)=1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^6=0{,}844$

3°)a) Les n lancers constituent un schéma de Bernoulli .

C=«obtenir au moins 1 fois A »

$\overline{C}$ = « obtenir aucune fois A »

C=«obtenir au moins 1 fois A »

$\overline{C}$ = « obtenir aucune fois A »

$P(\overline{C})=\left(\frac{1}{2}\right)^n$ donc $P(C)=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n=P_n$

b) $P_n \geq 0{,}95 \Leftrightarrow 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n \geq 0{,}95$

$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 0{,}05$

$\Leftrightarrow -\ n \ln 2 \leq \ln(0{,}05)$

$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0{,}05)}{-\ln 2}$

$\Leftrightarrow n \geq 4{,}32$

Donc la petite valeur pour laquelle $P_n \geq 0{,}95$ est 5.

EXERCICE 8

8 pièces dont 3 pièces de 250 F et 5 pièces de 100 F .Tirage simultané de 4 pièces , ce qui est assimilé à une combinaison de 4 objets parmi 8 .

1°)Les valeurs prises par X .

Tirages de :

3pièces de 250 f et1 pièce de 100 f$\Rightarrow$ X=850 f

2pièces de 250 f et 2 pièces de100f$\Rightarrow$X=700 f

1pièces de 250 f et 3 pièces de100f$\Rightarrow$X=550f.

4 pièces de 100 f $\Rightarrow$ X = 400 f.

D'où $X(\Omega) = \{ 400 ; 550 ; 700 ; 850 \}$.

2°) a) Loi de probabilité de X :

p(X= 400) = p(4 pièces de 100 f)

$= \frac{C_5^4}{C_8^4} = \frac{1}{14}.$

p(X= 550) = p(1pièces de 250 f et 3 pièces de 100 f)

$= \frac{C_3^1 \times C_5^3}{C_8^4} = \frac{6}{14}.$

p(X =700) =p(2pièces de 250 f et 2 pièces de 100 f)

$= \frac{C_3^2 \times C_5^2}{C_8^4} = \frac{6}{14}$

p(X = 850) = p(3 pièces de 250 f et1 pièce de 100 f)

$= \frac{C_3^3 \times C_5^1}{C_8^4} = \frac{1}{14}$

D'où la loi de probabilite

x_i	400	550	700	850
p(X=xi)	$\frac{1}{14}$	$\frac{6}{14}$	$\frac{6}{14}$	$\frac{1}{14}$

<u>Remarque</u> : $\sum_{i=1}^{4} p(X=x_i)=1.$

b) $E(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i \ p(X=x_i)$

$= \frac{400}{14} + \frac{550\times 6}{14} + \frac{700\times 6}{14} + \frac{850}{14} = \frac{8750}{14} = 625$

3°)(Jolie paie le taxi) = (X ≥ 750) = (X =850)

p(Jolie paie le taxi) = p(X = 850) = $\frac{1}{14}$

<u>EXERCICE 9</u>

1°)Les valeurs prises par X

X={3000 –S ; 500– S ; – S }

$P(3000-S)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

$P(500-S)=2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$P(-S)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

x_i	3000- S	500- S	- S
$P=(X=x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

2°) $E(x)=\frac{1}{4}(3000-S)+\frac{1}{2}(500-S)+\frac{1}{4}(-S)$

E(x)=1000– S

3°)a) Le jeu est équitable ssi E(x)=0

ssi 1000– S=0

donc S=1000

b)

x_i	– 1000	– 500	2000
$P=(X=x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

La fonction de répartition F

$F : IR \to IR$

$x \mapsto P(X \leq x)$

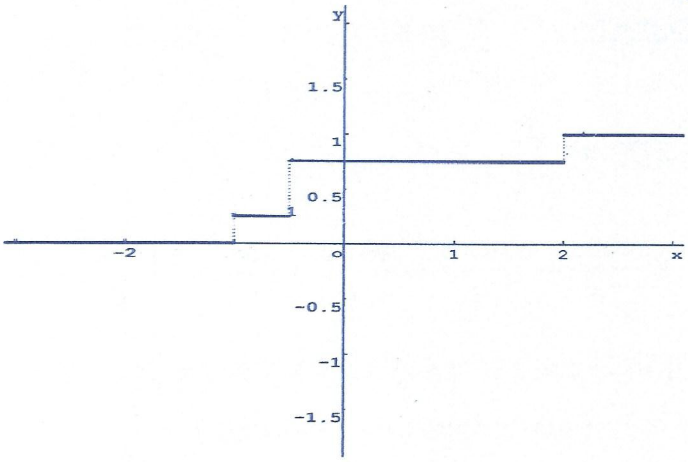
$\forall x \in]-\infty ; -1000[$, $F(x)=0$

$\forall x \in [-1000 ; -500[$, $F(x)= \frac{1}{4}$

$\forall x \in [-500 ; 2000[$, $F(x)= \frac{3}{4}$

$\forall x \in [2000 ; +\infty[$, $F(x)= 1$

d'où la représentation de F



Remarque : F est une fonction en escalier c-à-d une fonction constante par intervalles

EXERCICE 10

10 jetons dont 6 blancs , 3 rouges et 1 noir

1°) a)

p_1 = p(partie s'arrête après le 1er tirage)

= p(tirer un jeton blanc)

$= \frac{C_6^1}{C_{10}^1} = \frac{3}{5}$

b) A= « Le joueur effectue les 2 tirages »

$\overline{A}$ = « Le joueur effectue un seul tirage »

= « Tirer un jeton blanc »

D'après a) $p(\overline{A}) = \frac{3}{5}$,

donc $p(A) = 1 - p(\overline{A}) = \frac{2}{5}$.

2°)a) Les valeurs prises par X .

1er tirage	2ème tirage	X
Noir	Noir	3000
	Rouge	2000
	Blanc	1000
Rouge	Noir	2000
	Rouge	1000
	Blanc	0
Blanc		– 500

Donc $X(\Omega) = \{-500 ; 0 ; 1000 ; 2000 ; 3000\}$

b) La loi de probabilité de X

p(X=– 500) = p (blanc au 1er tirage)

$= \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

p(X = 0) = p (rouge au 1er tirage et blanc au 2ème tirage)

$= \frac{3}{10} \times \frac{6}{10} = \frac{18}{100}$

p(X = 1000) = p (noir au 1er tirage et blanc au 2ème tirage ou rouge aux 2 tirages)

$= \frac{1}{10} \times \frac{6}{10} + (\frac{3}{10})^2 = \frac{15}{100}$.

p(X= 2000) = p(noir au 1er tirage et rouge au 2ème tirage ou rouge au 1er tirage et noir au 2ème tirage)

$p(X = 2000) = \frac{1}{10} \times \frac{3}{10} + \frac{3}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{6}{100}$

p(X= 3000) = p (noir aux 2 tirages)

$= (\frac{1}{10})^2 = \frac{1}{100}$

<u>D'où la loi de probabilité</u>

x_i	– 500	0	1000	2000	3000
$p(X=x_i)$	$\frac{60}{100}$	$\frac{18}{100}$	$\frac{15}{100}$	$\frac{6}{100}$	$\frac{1}{100}$

Remarque : $\sum_{i=1}^{5} p(X=x_i)=1$

c) E(X) = $\sum_{i=1}^{5} x_i \; p(X=x_i)$

$= \frac{-500\times 60}{100} + \frac{1000\times 15}{100} + \frac{2000\times 6}{100} + \frac{3000\times 1}{100}$

= 0 .

Remarque : E(X) = 0 , donc le jeu est équitable.

EXERCICE 11

1°) P(tirer un médaillon) = $\frac{1}{6}$

A = « Joueur récupère sa mise »

P(A) = P(médaillon n°4 ou n°3) = $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

2°) le joueur perd 1500 et sa mise " si le joueur tire le médaillon n°5 au premier tirage et un autre médaillon de n° distinct de 5 au second tirage":

P (médaillon n°5) x P (médaillon n°1 ou n°2 ou n°3 ou n° 4 ou n° 6)

$= \frac{1}{6}\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right) = \frac{5}{36}.$

3°)X=– S si le médaillon tiré est de N°1 ou N°2 ou N°6.

X= -S-1500si le médaillon tiré est de N°5 au 1^er^ tirage et autre N° que 5 au second tirage.

X=0 si le médaillon est du N°3

X= -S+2000 si le médaillon est N°5 au 1^er^ tirage et N°5 au 2^e^ tirage.

X= 3000 si le médaillon tiré du N°4.

X(Ω) = {– S , – S– 1500, 0 , – S+2000, 3000 }

$P(X=-S) = \frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

P(X =– S – 1500) = $\frac{5}{36}$

$P(X=0) = \frac{1}{6}$; P(X= – S+2000) = $\frac{1}{6}\times\frac{1}{6} = \frac{1}{36}$;

$P(X=3.000) = \frac{1}{6}$

x	-S	-S-1500	0	-S+2000	3.000
$P(X=x_i)$	$\frac{3}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{6}$

On vérifie que : $\sum_{i=1}^{5} p(X=x_i)=1$

B°) E(X) = $\frac{-3S}{6} + \frac{5}{36}(-S-1.500) + 0\times\frac{1}{6}$

$+ \frac{1}{36}(-S+2.000) + 3.000\times\frac{1}{6}$

$= \frac{-3S}{6} - \frac{5S}{36} - \frac{5\times 1.500}{36} - \frac{S}{36} + \frac{2.000}{36} + \frac{3.000}{6}$

$E(X) = \frac{-4}{6}S + \frac{3.125}{9}$

c) Le résultat financier est nul si $E(X)=0$

donc $E(X)=0 \Leftrightarrow \frac{2}{3}S = \frac{3.125}{9} \Leftrightarrow S = \frac{3.125}{6}$

EXERCICE 12

Soit les évènements suivants :

U_1 : « Choisir l'urne U_1 ».

U_2 : « Choisir l'urne U_2 ».

B : « Tirer une boule blanche ».

On a $U_2 = \overline{U_1}$ et U_1 a 2 fois plus de chance d'être choisie que U_2 .Donc $p(U_1) = 2\, p(U_2)$

Donc $p(U_1) = \frac{2}{3}$ et $p(U_2) = \frac{1}{3}$.

1°)a) $U_1 \cap B$ = « Obtenir U_1 et B »

$p(U_1 \cap B) = p(B/U_1) \times p(U_1)$

Or $p(B/U_1) = \frac{C_1^1}{C_4^1} = \frac{1}{4}$

Donc $p(U_1 \cap B) = \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$.

b) $U_2 \cap B$ = « Obtenir U_2 et B »

$p(U_2 \cap B) = p(B/U_2) \times p(U_2)$

Or $p(B/U_2) = \frac{C_3^1}{C_5^1} = \frac{3}{5}$.

Donc $p(U_2 \cap B) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$.

c) On a :$B = (U_1 \cap B) \cup (U_2 \cap B)$ et $(U_1 \cap B) \cap U_2 \cap B) = \varnothing$

Donc $p(B) = p(U_1 \cap B) + p(U_2 \cap B)$

$= \frac{1}{6} + \frac{1}{5} = \frac{11}{30}$

2) a) $p(U/B) = \frac{p(U_1 \cap B)}{p(B)} = \frac{1}{6} \times \frac{30}{11} = \frac{5}{11}$

b) $p(U_2/B) = \dfrac{p(U_2 \cap B)}{p(B)} = \dfrac{1}{5} \times \dfrac{30}{11} = \dfrac{6}{11}$

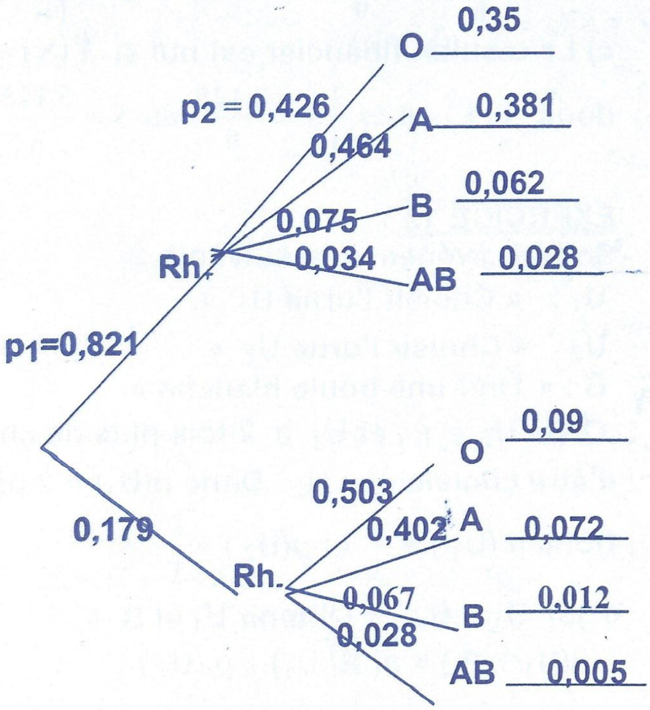
EXERCICE 13

1°)a) $p(Rh+) = (35 + 38 + 6{;}2 + 2{,}8)\% = 0{,}821$

$p(Rh_-) = 1 - p(Rh+) = 0{,}179$.

$p_2 = p(O \backslash Rh+) = \dfrac{p(O \cap Rh+)}{p(Rh+)} = \dfrac{0{,}35}{0{,}821} = 0{,}426$

b)Arbre de probabilités



2°) a) $p(O) = 0{,}35 + 0{,}09 = 0{,}44$

par le tableau on a :

$p(O) = 35\% + 9\% = 44\% = 0{,}44$.

b) $p(Rh+/O) = \dfrac{p(O \cap Rh_+)}{p(O)} = \dfrac{0{,}35}{0{,}44} = 0{,}795$

3°) a) Pour une personne choisie, on a

O : « la personne appartient au groupe O » et $\overline{O}$ l'évènement contraire. On a donc une épreuve de Bernoulli avec $p(O) = 0{,}44$ et

$p(\overline{O}) = 1 - p(O) = 0{,}56$.

Pour n personnes choisies, on a un schéma de Bernoulli .Soit

A=«Au moins une personne appartient à O »

$\overline{A}$ = « Aucune personne n'appartient à O »

= « Exactement n personnes appartiennent à $\overline{O}$ »

On a $p(\overline{A}) = (0{,}56)^n$

Donc $p_n = p(A) = 1 - p(\overline{A}) = 1 - (0{,}56)^n$.

b) $p_n \geq 0{,}999 \Leftrightarrow 1 - (0{,}56)^n \geq 0{,}999$

$\Leftrightarrow (0{,}56)^n \leq 10^{-3}$

$\Leftrightarrow \ln(0{,}56)^n \leq -3 \ln 10$

$\Leftrightarrow n \ln(0{,}56) \leq -3 \ln 10$

$\Leftrightarrow n \geq \dfrac{-3 \ln 10}{\ln(0{,}56)}$ car $\ln(0{,}56) < 0$

$\Leftrightarrow n \geq 11{,}913$

Donc la plus petite valeur de n pour laquelle $p_n \geq 0{,}999$ est 12.

EXERCICE 14

A = « Disquette défectueuse»

$\overline{A}$ = «Disquette bonne»

B = « Disquette refusée »

$\overline{B}$ =« Disquette acceptée»

1°) $p(A) = 4\% = 0{,}04$

2°)

a) $p_1 = p(A \cap \overline{B}) = p(A)\, p(\overline{B}/A) = 0{,}04 \times 0{,}05 = 0{,}002$

b) $p_2 = p(\overline{A} \cap B) = p(\overline{A}) \times p(B/\overline{A}) = 0{,}96 \times 0{,}03 = 0{,}029$

c) E = « Erreur de contrôle »

$= (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$

Or $(\overline{A} \cap B) \cap (A \cap \overline{B}) = \varnothing$, donc

$p_3 = p(E) = p(A \cap \overline{B}) + p(\overline{A} \cap B) = 0{,}002 + 0{,}029 = 0{,}031$.

d) $\overline{B}$ =« Disquette acceptée»

$= (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$

Or $(A \cap \overline{B}) \cap (\overline{A} \cap \overline{B}) = \varnothing$,donc

$p_4 = p(\overline{B}) = p(A \cap \overline{B}) + p(\overline{A} \cap \overline{B})$

Or $p(\overline{A} \cap \overline{B}) = p(\overline{A}) \times p(\overline{B}/\overline{A})$ avec

$p(\overline{B}/\overline{A}) = 1 - p(B/\overline{A}) = 0{,}97$

donc $p(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}96 \times 0{,}97 = 0{,}931$

donc $p_4 = 0{,}002 + 0{,}931 = 0{,}933$

3°)

Pour un test , soit $\overline{B}$ =« Disquette acceptée »

B = « Disquette refusée»

Donc on a une épreuve de Bernoulli

($\overline{B}$ = succès et B = échec)

$p(\overline{B}) = 0{,}933$ et $p(B) = 1 - 0{,}933 = 0{,}067$.

Un contrôle qui est constitué de 5 tests successifs indépendants est un schéma de Bernoulli .

- Disquette marquée si elle est refusée o fois ou si elle subit 5 succès.
- Disquette démarquée si elle est refusée 1 fois ou si elle subit 4 succès
- Disquette détruite si elle est refusée au moins 2 fois .

a) p_5= p (Disquette démarquée)

$= C_5^4(0{,}933)^4 \times 0{,}067 = 0{,}254$.

b) p_6 = p(Disquette marquée)

$= (0{,}933)^5 = 0{,}707$.

c) Le contraire de « Disquette détruite » est « Disquette démarquée» ou « Disquette marquée» , donc

$p_7 = 1 - (p_5 + p_6)$

$= 1 - (0{,}254 + 0{,}707)$

$= 0{,}039$

EXERCICE 15

I) Les dominos sont partagés en deux parties portant chacune un "n°" identique (les doubles) ou non, pris dans l'ensemble { 0 ;1 ;2 ;3 ;4 ;5 ;6 }

On a donc C_7^1 doubles et C_7^2 non doubles

ce qui donne $C_7^1 + C_7^2 = 28$ dominos

II) 1°) a) On a 7 doubles

donc P(obtenir double) = $\frac{7}{28} = \frac{1}{4}$

b) [0 | 0] [0 | 3] [0 | 6]

[1 | 2] [1 | 5] [2 | 4]

[3 | 3] [3 | 6] [6 | 6]

[4 | 5]

On a donc 10 dominos dont la somme des n° est divisible par 3

(somme des n° divisible par 3) $= \frac{10}{28} = \frac{5}{14}$

2°)a) Les valeurs prises par X sont –1 pour les non doubles et 0 ; 1; 2; 3; 4; 5 et 6 pour les doubles

$P(X=-1) = \frac{21}{28} = \frac{3}{4}$

$P(X=k) = \frac{1}{28}$ où k ∈{ 0 ;1 ;2 ;3 ;4 ;5 ;6 }

x_i	– 1	0	1	2	3	5	6
$P(X=x_i)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{28}$

b) $E(X) = -1 \times \frac{3}{4} + 0 \times \frac{1}{28} + \ldots\ldots + 6 \times \frac{1}{28} = 0$

$E\left(X^2\right) = \frac{3}{4} \times (-1)^2 + 0 \times \frac{1}{28} + \ldots\ldots + 6^2 \times \frac{1}{28} = 4$

$V(X) = E\left(X^2\right) - [E(X)]^2 = 4$ donc $\sigma(X) = 2$

III)

Pour un tirage soit D = "obtenir un double"

$P(D) = \frac{7}{28} = \frac{1}{4}$ et $P(\overline{D}) = \frac{3}{4}$

on a donc une épreuve de Bernoulli.

Les 3 Tirages consécutifs constituent un schéma de Bernoulli .

Soit A= « obtenir une seule fois double »

donc P (A) $= C_3^1 \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{27}{64}$.

Remarque

Pour le cas du double obtenu

1^{er} tirage ⟶ Probabilité $\frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4}$

2^{e} tirage ⟶ Probabilité $\frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4}$

3^{e} tirage ⟶ Probabilité $\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4}$

P (A) $= \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{27}{64}$

SIMILITUDES DIRECTES

EXERCICES

EXERCICE 1

L'écriture complexe de F est :

1°) $z' = z + 3i$, donc F est la translation de vecteur $\vec{u}\,(3i)$.

2°) $z' = -2z + i$, donc F est l'homothétie de rapport -2 et de centre Ω d'affixe ω et $\omega = \frac{i}{1-(-2)} = \frac{1}{3}i$.

3°) $z' = i z + 3i$ et $|i| = 1$, donc F est la rotation d'angle $ARG(i) = \frac{\pi}{2}$ et de centre Ω d'affixe ω avec $\omega = \frac{3i}{1-i} = \frac{-3}{2} + \frac{3}{2}i$.

4°) $z' = e^{-i\frac{\pi}{3}} z + 1 + i\sqrt{3}$ et $|e^{-i\frac{\pi}{3}}| = 1$, donc F est la rotation d'angle $ARG(e^{-i\frac{\pi}{3}}) = \frac{-\pi}{3}$ et de centre Ω d'affixe ω avec
$$\omega = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-e^{-i\frac{\pi}{3}}} = 2.$$

5°) $z' = (\frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2})\, z$ et $|\frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}| = 1$, donc F est la rotation d'angle $ARG(\frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}) = \frac{-\pi}{4}$ et de centre Ω d'affixe ω avec $\omega = 0$.

EXERCICE 2

L'écriture complexe de F est de la forme $z' = az+b$ avec $a = \sqrt{3} - i$ et $b = 1+i(\sqrt{3}-1)$ donc F est une similitude directe.

<u>Eléments caractéristiques de F</u>

- Le rapport k : $k = |\sqrt{3} - i| = 2$
- L'angle α : $\alpha = ARG(\sqrt{3} - i) = \frac{-\pi}{6}$
- Le centre Ω : Ω est d'affixe ω avec

$$\omega = \frac{1+i(\sqrt{3}-1)}{1-(\sqrt{3}-i)} = -i.$$

EXERCICE 3

1°) $AB = |z_B - z_A| = 1$ et $CD = |z_D - z_C| = \sqrt{2}$

$CD = \sqrt{2}\,AB$, donc il existe une unique similitude directe S telle que $S(A) = C$ et $S(B) = D$.

2°) Le rapport k : $k = \frac{CD}{AB} = \sqrt{2}$.

L'angle α :

$$\alpha = MES(\vec{AB}\,;\vec{CD}) = ARG(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A})$$
$$= ARG(-1+i) = \frac{3\pi}{4}.$$

3°) L'écriture complexe de S est $z' = az + b$ avec $|a| = \sqrt{2}$ et $ARG(a) = \frac{3\pi}{4}$

Donc $a = -1 + i$

$S(A) = C \Leftrightarrow z_C = (-1+i)\, z_A + b$

$\Leftrightarrow b = z_C - (-1+i)\, z_A$

$\Leftrightarrow b = 2 + \sqrt{3} - i\sqrt{3}$.

Donc $z' = (-1+i)\, z + 2 + \sqrt{3} - i\sqrt{3}$.

EXERCICE 4

S est la similitude de centre $\Omega(2i)$, de rapport 2 et d'angle $\frac{-\pi}{2}$.

1°) L'écriture complexe de S est

$z' = 2\, e^{-i\frac{\pi}{2}} z + b$ avec b nombre complexe donc $z' = -2iz + b$

$S(\Omega) = \Omega \Leftrightarrow z_\Omega = -2i\, z_\Omega + b$

$\Leftrightarrow b = (1+2i)\, z_\Omega$

$\Leftrightarrow b = -4 + 2i$

Donc $z' = -2iz - 4 + 2i$

2°) a) $S(A) = C \Leftrightarrow z_C = -2iz_A - 4 + 2i$

$\Leftrightarrow z_C = -2 + 2i$.

$S(B) = D \Leftrightarrow z_D = -2iz_B - 4 + 2i$

$\Leftrightarrow z_D = -6$

b) $S(A) = C$ et $S(B) = D$, donc $S(AB) = (CD)$

et MES $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \frac{-\pi}{2}$.

Donc $(AB) \perp (CD)$.

EXERCICE 5

Soit z l'affixe de M(x ; y) et z' celle de M' (x' ; y') .Donc z = x +i y et
$z' = x' + i y'$.

Donc $z' = x - \sqrt{3}\ y + 2\sqrt{3} + i(\sqrt{3}x + y - \sqrt{3})$

$= x + iy + i\sqrt{3}(x + iy) + 2\sqrt{3} - i\sqrt{3}$

$= (1 + i\sqrt{3})(x + iy) + 2\sqrt{3} - i\sqrt{3}$

$z' = (1 + i\sqrt{3})z + 2\sqrt{3} - i\sqrt{3}$

Donc l'écriture complexe de S est :

$z' = (1 + i\sqrt{3})z + 2\sqrt{3} - i\sqrt{3}$

2°) L'écriture complexe de s est :

$z' = (1 + i\sqrt{3})z + 2\sqrt{3} - i\sqrt{3}$

Donc S est une similitude directe .

Eléments caractéristiques.

- Le rapport k : $k = |1 + i\sqrt{3}| = 2$
- L'angle α : $\alpha = ARG(1 + i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$
- Le centre Ω : Ω est d'affixe ω avec

$$\omega = \frac{2\sqrt{3} - i\sqrt{3}}{1 - 1 - i\sqrt{3}} = 1 + 2i$$

donc $S = S(\Omega\ (1+2i)\ ;\ 2\ ;\ \frac{\pi}{3})$

d'où $S^{-1} = S(\Omega\ (1+2i)\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ -\frac{\pi}{3})$

3°) $M \in (C) \Leftrightarrow OM = \sqrt{2}$

Soit O' = S(O) . On a $z_{O'} = 2\sqrt{3} - i\sqrt{3}$

$S(M) = M' \Leftrightarrow O'M' = 2\ OM$

Donc $M \in (C) \Leftrightarrow O'M' = 2\sqrt{2}$

Donc l'image de (C) par S est le cercle(Γ)de centre O' et de rayon $2\sqrt{2}$

EXERCICE 6

1°) $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{-4 + 2i - 2 - 2i}{2 - i - 2 - 2i} = -2i$ donc

le triangle ABC est rectangle en A.

2°)a) Ecriture complexe de S

$z' = az + b$

$$\begin{cases} S(A) = A \\ S(B) = C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_A = az_A + b \\ z_C = az_B + b \end{cases} \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} z_A = az_A + b \\ z_A - z_C = a(z_A - z_B) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{z_A - z_C}{z_A - z_B} = \frac{i}{2} \\ b = (1 - a)\,z_A = 3 + i \end{cases}$$

Donc $z' = \frac{1}{2}iz + 3 + i$

$z'_C = \frac{1}{2}iz_C + 3 + i = \frac{7}{2} + 2i$, donc $C(\frac{7}{2} + 2i)$

c) Eléments caractéristiques de S

Le rapport $k = \frac{1}{2}$, l'angle $\alpha = \frac{\pi}{2}$ et le centre A

3°)a) Les points A ,B,C' ont la même ordonnée donc ils sont alignés.

S(B)=C et S(C)=C' , donc $MES(\overrightarrow{CB}\ ;\ \overrightarrow{C'C}) = \frac{\pi}{2}$

qui est l'angle de S . Donc le triangle BCC' est rectangle en C .

b) (D) : $y = \frac{1}{2}x$

Par vérification les points B et C appartiennent à (D).

Donc(D)=(BC) et les points C et C' appartiennent à (D'),

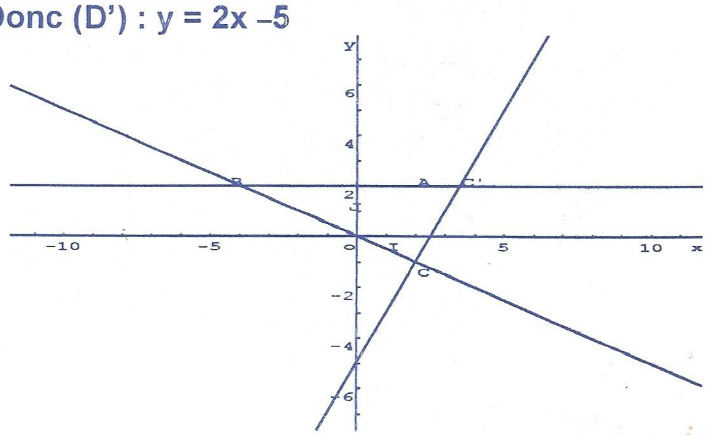
donc (D')=(CC')

c)Un vecteur directeur de (D)est $\overrightarrow{CC'}(\frac{3}{2};3)$

Soit $M(x\ ;\ y) \in (D') \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{CM}\ ;\ \overrightarrow{CC'}) = 0$

$\Leftrightarrow 2x - y - 5 = 0$

Donc (D') : $y = 2x - 5$



EXERCICE 7

1°) (E): $2z^2-3(1+3i)z+9(i-1)=0$

$\Delta=(-3(1+3i))^2-4(2)(9)(i-1)$

$\Delta=-18i$

Soit $\delta=x+iy$ une racine carrée de Δ

$\delta^2=x^2+2ixy-y^2=-18i$

$|\delta|^2=x^2+y^2=18$

d'où on a $\begin{cases} x^2+y^2=18 & (1) \\ x^2-y^2=0 & (2) \\ xy=-9 & (3) \end{cases}$

(1) +(2) $\Rightarrow 2x^2=18$ donc $x=3$ ou $x=-3$

D'après(3) pour $x=3$ $y=-3$ et pour $x=-3$ $y=3$

donc $\delta=3-3i$ ou $\delta=-3+3i$

$z=\dfrac{3(1+3i)+3-3i}{4}=\dfrac{3+3i}{2}$ ou $z=3i$

donc les solutions de (E) sont $3i$ et $\dfrac{3+3i}{2}$

2°) S est une similitude directe donc S est de la forme $z'=az+b$ avec $a=r(\cos\pi+i\sin\pi)$ et $b=\omega(1-a)$

$a=-\dfrac{1}{2}$ et $b=\dfrac{3}{2}+3i$ donc $z'=-\dfrac{1}{2}z+\dfrac{3}{2}+3i$

3°)a)

b) $z_P=-\dfrac{1}{2}z_B+\dfrac{3}{2}+3i=-\dfrac{1}{2}(3)+\dfrac{3}{2}+3i=3i$

donc $z_P=3i$

c) $z_Q=-\dfrac{1}{2}z_P+\dfrac{3}{2}+3i=-\dfrac{1}{2}(3i)+\dfrac{3}{2}+3i=\dfrac{3+3i}{2}$

donc $z_Q=\dfrac{3+3i}{2}$

d) z_P et z_Q vérifient les solutions de l'équation (E)

SUITES NUMERIQUES

EXERCICES

EXERCICE 1

1°)a) $u_2=\frac{9}{4}$ et $u_3=\frac{21}{8}$

b) $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n = \frac{u_n+3}{2}-u_n$

$=\frac{3-u_n}{2} \neq cte.$

Donc (u_n) n'est pas une suite arithmétique.

$\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{2}+\frac{3}{2}\neq q\,u_n.$

Donc (u_n) n'est pas une suite géométrique.

2°) a) $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $v_{n+1} = 3-u_{n+1}$

$=\frac{6-u_n-3}{2} = \frac{3-u_n}{2}$

Donc $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$, donc (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de 1^{er} terme $v_1=\frac{3}{2}$

.b) $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $v_n = (\frac{1}{2})^{n-1}v_1 = 3(\frac{1}{2})^n$.

c) $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $v_n = 3-u_n \Rightarrow u_n = 3-v_n$

$\lim v_n = 0$ car (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

donc $\lim u_n = 3$

EXERCICE 3

$U_0=2$; $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $U_{n+1}=\frac{5U_n-1}{U_n+3}$

1°) $U_0=2$, donc $U_0\neq 1$ est vraie

Supposons que $U_n\neq 1$ jusqu'au rang $n>0$

$U_{n+1}-1 = \frac{5U_n-1}{U_n+3}-1 = \frac{5U_n-1-U_n-3}{U_n+3}$

$=\frac{4(U_n-1)}{U_n+3}$

donc $U_n\neq 1 \Rightarrow U_{n+1}-1\neq 0$

d'où $U_{n+1}\neq 1$

donc $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $U_n\neq 1$

2°)a) On pose $V_n=\frac{1}{U_n-1}$

$V_{n+1} = \frac{1}{U_{n+1}-1} = \frac{1}{\frac{5U_n-1}{U_n+3}-1}$

$V_{n+1}=\frac{U_n+3}{4U_n-4} = \frac{U_n-1+4}{4(U_n-1)}$

$=\frac{U_n-1}{4(U_n-1)}+\frac{4}{4(U_n-1)}$

$V_{n+1}=\frac{1}{4}+\frac{1}{U_n-1}$

$V_{n+1}=V_n+\frac{1}{4}$ donc (V_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{4}$ et de 1^{er} terme

$V_0=\frac{1}{U_0-1}=\frac{1}{2-1}=1$

b) $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $V_n=\frac{1}{4}n+1$

c) $V_n=\frac{1}{U_n-1} \Rightarrow U_n-1=\frac{1}{V_n}$

$U_n = \frac{V_n+1}{V_n}$ donc $U_n = \frac{\frac{1}{4}n+2}{\frac{1}{4}n+1}$

$U_n=\frac{n+8}{n+4}$

d) $\lim U_n = \lim \frac{n+8}{n+4} = 1$

EXERCICE 2

1°) (u_n) une suite géométrique telle que $27u_8 = a^3 u_5$

Donc $u_8=\frac{a^3}{27}u_5 = q^3 u_5$

Donc $q^3 = \frac{a^3}{27}=\frac{a^3}{3^3}=\left(\frac{a}{3}\right)^3$

Donc $q=\frac{a}{3}$

Or $a>0$, donc $q>0$

(u_n) est convergente si $0<q<1$

Donc $0 < \frac{a}{3} < 1$, d'où $0 < a < 3$

3°) S_n est la somme des (n+1) 1^ers^ termes d'une suite géométrique de 1^er^ terme u_0 et raison $\frac{a}{3}$.

Donc $S_n = \dfrac{\left(\frac{a}{3}\right)^{n+1} - 1}{\frac{a}{3} - 1} \times u_0$

4°)a) Pour $0 < a < 3$, $\frac{a}{3} < 1$, donc $\lim u_n = 0$

b) $\lim \left(\frac{a}{3}\right)^{n+1} = 0$

$\lim Sn = \dfrac{-u_0}{\frac{a}{3} - 1} = \dfrac{3u_0}{3-a}$

Sachant que $u_0 = 81$ et $\lim S_n = 243$

Donc $\dfrac{3\times 81}{3-a} = 243$

Donc $3 - a = \dfrac{243}{243}$

Donc $3 - a = 1$, soit $a = 2$. Ainsi $q = \dfrac{2}{3}$

c) $S_9 = \dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^{10} - 1}{\frac{2}{3} - 1} \times 81 = 238{,}79$

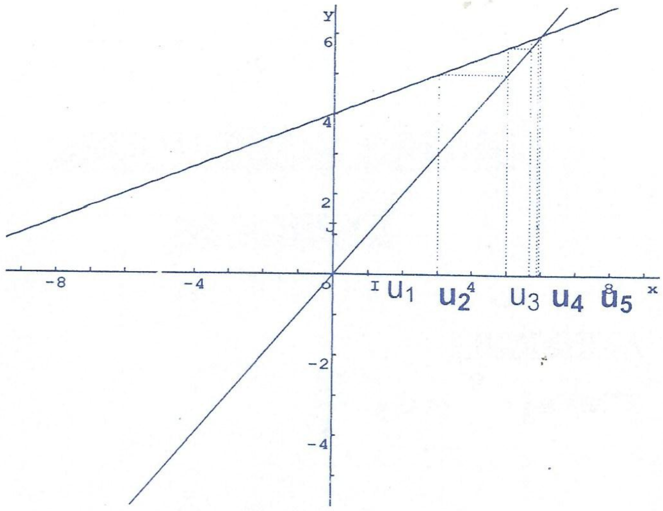
EXERCICE 4

$U_1 = 3$ et $\forall\, n > 0$, $3U_{n+1} = U_n + 12$

Donc $\forall\, n > 0$, $U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + 4$

1°) Soit $U_{n+1} = f(U_n)$ avec $f(x) = \frac{1}{3}x + 4$

f est une fonction affine croissante



(U_n) est croissante et (U_n) tend vers 6.

2°) $U_1 = 3$, donc $U_1 \le 6$.

Supposons que $U_n \le 6$ jusqu'au rang $n > 1$

$U_n \le 6 \;\Rightarrow \frac{1}{3}U_n \le 2$

$\Rightarrow \frac{1}{3}U_n + 4 \le 6$

$\Rightarrow U_{n+1} \le 6$

Donc $\forall\, n > 0$, $U_n \le 6$

3°) $\forall\, n > 0$, $U_{n+1} - U_n = \dfrac{U_n}{3} + 4 - U_n$

$= \dfrac{-2U_n}{3} + 4$

$= \dfrac{-2}{3}(U_n - 6)$

or $\forall\, n > 0$, $U_n \le 6$

Donc $\forall\, n > 0$, $U_{n+1} - U_n > 0$,

donc (U_n) est croissante .

(U_n) est croissante et majorée donc (U_n) est convergence

4°) $\forall\, n > 0$, $V_n = U_n - 6$

a) $\forall\, n > 0$, $V_{n+1} = U_{n+1} - 6$

$= \dfrac{U_n}{3} + 4 - 6$

$= \dfrac{U_n}{3} - 2 = \dfrac{1}{3}(U_n - 6)$

d'où $V_{n+1} = \frac{1}{3}V_n$, donc (V_n) est suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de1^er^ terme $V_1 = -3$

b) $\forall\, n > 0$, $V_n = -3\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$U_n = V_n + 6 = -3\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + 6$

c) $\lim V_n = 0$ car $\lim \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 0$

$\lim U_n = \lim V_n + 6 = 6$

Donc (U_n) converge vers 6.

5°)a) $S_n = V_1 + V_2 + V_3 + \ldots\ldots + V_n$

S_n est la somme des n 1ers termes d'une suite géométrique de 1er terme $V_1 = -3$ et de raison $\frac{1}{3}$

Donc $\forall\, n > 0$, $S_n = \dfrac{\left(\frac{1}{3}\right)^n - 1}{\frac{1}{3} - 1} \times (-3)$

$S_n = \left(\left(\frac{1}{3}\right)^n - 1\right) \times \frac{-3}{2} \times (-3)$

$S_n = \frac{9}{2}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^n - 1\right)$

$\forall\, n > 0$, $T_n = U_1 + U_1 + \ldots\ldots + U_n$

$T_n = V_1 + 6 + V_2 + 6 + \ldots\ldots + V_n + 6$

$T_n = S_n + 6n$

$T_n = \frac{9}{2}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^n - 1\right) + 6n$

b) $\lim S_n = \frac{-9}{2}$ car $\lim \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$

$\lim T_n = \lim S_n + 6n = +\infty$

c) (S_n) converge vers $\frac{-9}{2}$ et (T_n) diverge

EXERCICE 5

1°) a=1

$\forall\, n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1}$

$= \frac{1}{2}(2)^2 u_{n+1} - u_n - u_{n+1}$

$= 2u_{n+1} - u_n - u_{n+1}$

$v_{n+1} = u_{n+1} - u_n = v_n$

donc(v)est une suite constante et

$\forall\, n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 = u_1 - u_0 = 2$

b) $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 2$

donc $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 2$ .Donc (v) est une suite arithmétique de raison 2.

c) (v) est une suite arithmétique de raison 2 et de 1er terme u_0 ,donc $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2n+3$

S_n est la somme (n+1)1ers termes d'une suite arithmétique de 1er terme u_0 et de raison 2.

Donc $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $S_n = \left(\frac{n+1}{2}\right)(u_0 + u_n)$

$S_n = (n+1)(n+3)$

2°) a= – 5

a) $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{n+1} - u_n$

$u_{n+2} = \frac{1}{2}(-4)^2 u_{n+1} - 7u_n$

$u_{n+2} = 8u_{n+1} - 7u_n$

$u_{n+2} = u_{n+1} + 7u_{n+1} - 7u_n$

$u_{n+2} - u_{n+1} = 7u_{n+1} - 7u_n$

$v_{n+1} = 7v_n$ donc (v_n)est une suite géométrique de raison 7 et de 1er terme $v_0 = 2$

b) $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $v_n = 2 \times 7^n$

c) T_n est la somme n 1ers terme d'une suite géométrique de 1er terme v_0 et de raison 7

donc $T_n = 2 \times \frac{(1 - 7^n)}{1 - 7} = \frac{1}{3}(7^n - 1)$

d) $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $T_n = u_1 - u_0 + u_2 - u_1 + \ldots + u_n - u_{n-1}$

$T_n = u_n - u_0$

donc $u_n = T_n + u_0$

$\lim T_n = \frac{1}{3}(7^n - 1) = +\infty$

$\lim u_n = \lim T_n + u_0 = +\infty$

donc la suite (u) diverge vers $= +\infty$

EXERCICE 6

1°) calcul de u_1 , u_2 , u_3 et u_4

$u_0=1.000.000$

$u_1= u_0 + 5\%\ u_0 + 950.000$

$= 1.000.000 + \frac{1000000\times5}{100} + 950.000$

$u_1 = 2.000.000$

$u_2 = u_1 +5\%\ u_1 +950.000 = 3.050.000$

$u_3 = u_2+5\%\ u_2 +950.000 = 4.152.500$

$u_4 = u_3 +5\%\ u_3+950.000 = 5.310.125.$

2°) $\forall\ n\in IN$, $u_{n+1}= u_n+ 5\%\ u_n + 950.000$

$u_{n+1}= u_n + 0,05\ u_n+ 950.000$

$u_{n+1}= 1,05\ u_n+ 950.000$

3°)a) $\forall\ n\in IN$, $v_n= u_n+19.000.000$

$v_{n+1} = u_{n+1} +19.000.000$

$=1,05\%\ u_n+ 950.000 +19.000.000$

$=1,05\ (u_n+ \frac{19950000}{1,05})$

$v_{n+1}\ =1,05\ (u_n+ 19.000.000\ )$

$v_{n+1}=1,05\ v_n$ donc (v_n) est une suite géométrique de raison 1,05 et de 1^er^ terme $v_0= u_0+19.000.000= 20.000.000$

b) $\forall\ n\in IN$, $v_n=(1,05)^n \times 2.10^7$

$v_n= u_n+19.000.000$

$u_n= v_n - 19.000.000$

$u_n= 2.10^7\ (1,05)^n - 19.000.000$

c) $u_n=25.000.000$

$2.\ 10^7(1,05)^n\ - 19.000.000=25.000.000$

$1,05)^n =2,2$

$\ln(1,05)^n=\ln(\ 2,2)$

$n\ \ln(1,05)=\ln(\ 2,2)$

$n=\frac{\ln(2,2)}{\ln(1,05)} \approx 16,16$

donc n=17 ans

Oui,ce client peut avoir 25.000 .000 CFA d'économie à partir2021.

EXERÇIC E 7

1°) $\forall\ n\in IN$, A_{n+1}=milieu $[A_nA'_n]$

$z_0=4$ et $z'_0=4i$ donc $z_1 = \frac{z_0 + z'_0}{2} =2+2i$

donc $A_1(2+2i)$

$z'_1 =i(2+2i) =- 2+2i$,donc $z_2 = \frac{z_1 + z'_1}{2} =2i$

donc $A_2(2i)$

$z'_2 =i(2i)= - 2$, donc $z_3 = \frac{z_2 + z'_2}{2} = -1+i$

donc $A_3(- 1+i)$

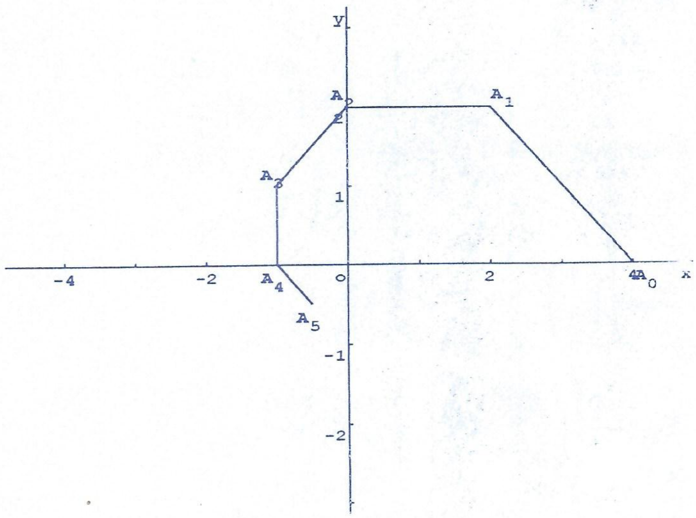
$z'_3 =(- 1+i)i = -1- i$,donc $z_4 = \frac{z_3 + z'_3}{2} = -1$

donc $A_4(- 1\ )$

$z'_4=(- 1\ )i=- i$, donc $z_5=\frac{z_4 + z'_4}{2} = -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$

donc $A_5(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\ )$

Représentation



2°) a) $\forall\ n \in IN\ z_{n+1}=\frac{z_n + z'_n}{2} = (\frac{1+i}{2})z_n$

b) Soit $r_n=|z_n|$ et $\theta_n=\arg(z_n)$

$\forall\ n \in IN$, $r_{n+1} =\left|\frac{1+i}{2}\right||z_n| = \frac{\sqrt{2}}{2}r_n$

donc(r_n) est une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et 1^er^ terme $r_0=4$

$\forall\ n \in IN$, $\theta_{n+1}= \arg(z_n)=\arg(1+i)+ \arg(z_n)$

$=\frac{\pi}{4}+ \arg(z_n)$

$\theta_{n+1} =\frac{\pi}{4} + \theta_n$

donc (θ_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{\pi}{4}$ et de1^er^ terme $\theta_0 =0$

c) (r_n) est une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et de 1^er^ terme $r_0=4$

donc $\forall\, n \in IN$, $r_n=4(\frac{\sqrt{2}}{2})^n$

(θ_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{\pi}{4}$

et de 1^{er} terme $\theta_0=0$

Donc $\forall\, n \in IN$, $\theta_n=\frac{n\pi}{4}+2k\pi$, $k\in Z$

d) (r_n) est une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$ avec $\frac{\sqrt{2}}{2}<1$,donc $\lim r_n=0$

or $r_n=|z_n|=|z_{A_n}|$ donc la suite des points A_n converge vers le point O.

e) $\forall\, n \in IN$ $\frac{z_{A_n}-z_O}{z_{A_0}-z_O}=\frac{iz_n}{4}$

Les points O, A_0 et A_n sont alignés ssi $iz_n \in IR$

ssi $z_n \in iIR$

ssi $\theta_n=\frac{\pi}{2}+k\pi$ avec $k\in Z$

ssi $\frac{n\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi$ avec $k\in Z$

ssi $n=2+4k$ avec $k\in Z$

Donc les points O, A_0 et A_n sont alignés ssi $n=2+4k$, $k\in IN$

3°)a) $\forall\, n\geq 1$, $A_nA_{n+1}=|z_{n+1}-z_n|$

$$=\left|\frac{1+i}{2}z_n-z_n\right|$$

$$A_nA_{n+1}=\left|\frac{-1+i}{2}z_n\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}|z_n|$$

$\forall\, n\geq 1$, $A_{n-1}A_n=|z_n-z_{n-1}|$

or $z_n=(\frac{1+i}{2})z_{n-1}$ donc

$z_{n-1}=(\frac{2}{1+i})z_n=(1-i)z_n$

donc $A_{n-1}A_n=|z_n-(1-i)z_n|=|iz_n|=|z_n|$

$\forall\, n\geq 1$, $A_nA_{n+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}A_{n-1}A_n$

b) $\forall\, n\geq 1$, $L_n=A_0A_1+A_1A_2+\dots\dots\dots+A_{n-1}A_n$

Soit la suite (u_n) définie par :

$\forall\, n\geq 1$, $u_n=A_{n-1}A_n$

D'après a) $\forall\, n\geq 1$, $u_{n+1}=A_nA_{n+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}u_n$

donc(u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et de 1^{er} terme $u_1=A_0A_1=2\sqrt{2}$

$\forall\, n\geq 1$, $L_n=A_0A_1+A_1A_2+\dots\dots\dots+A_{n-1}A_n$

$=u_1+u_2\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots+u_n$

donc L_n est la somme de n 1^{ers} termes de la suite géométrique (u_n) .

$$\text{Donc } L_n=u_1\frac{1-(\frac{\sqrt{2}}{2})^n}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=2\sqrt{2}\,\frac{1-(\frac{\sqrt{2}}{2})^n}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$\lim L_n=4+4\sqrt{2}$ car $\lim(\frac{\sqrt{2}}{2})^n=0$.

EXERCICE 8

1°)a) $v_{n+1}=\ln u_{n+1}=\ln\sqrt{u_n}=\ln(u_n)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\ln u_n$

donc $v_{n+1}=\frac{1}{2}v_n$

$v_{n+1}=\frac{1}{2}v_n$ donc(v_n)est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de 1^{er} terme $v_0=\ln e=1$.

(v_n)est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de 1^{er} terme $v_0=1$ donc $v_n=(\frac{1}{2})^n=\frac{1}{2^n}$

$v_n=\ln u_n \Rightarrow u_n=e^{v_n}$ donc $u_n=e^{\frac{1}{2^n}}$

2°)Soit $S_n=v_0+v_1+\dots.+v_n$ et $P_n=u_0\times u_1\times\dots.\times u_n$

a) $P_n=e^1\times e^{\frac{1}{2}}\times\dots..\times e^{\frac{1}{2^n}}=e^{1+\frac{1}{2}+\dots..+\frac{1}{2^n}}$

$=e^{v_0+v_1+\dots..+v_n}=e^{S_n}$ donc $P_n=e^{S_n}$

b)S_n est la somme de(n+1) premiers termes d'une suite géométrique(v_n)

$$\text{donc } S_n=\frac{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}=2(1-(\frac{1}{2})^{n+1})$$

c) $P_n=e^{S_n}$ donc $P_n=e^{2(1-(\frac{1}{2})^{n+1})}$

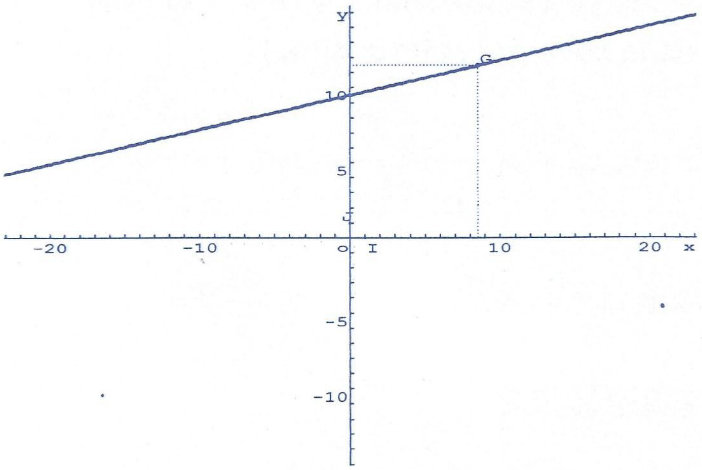
3°) $\lim S_n=2$ car $\lim(\frac{1}{2})^{n+1}=0$

donc $\lim P_n=e^2$

STATISTIQUES

EXERCICE 1

1°) représentation OI=1cm OJ=1cm



2°) Par la méthode des moindres carrés (D) est d'équation y=ax+b avec

$$a=\frac{Cov(x,y)}{V(x)} \quad \text{et} \quad b=\overline{Y}-a\overline{X}$$

$$\overline{X}=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}x_i=\frac{1}{6}(0+5+10+11+12+13)=8,5$$

$$\overline{Y}=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}y_i=11,5$$

$$V(x)=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}(x_i)^2-\overline{X}^2$$

$$=\frac{1}{6}(0^2+5^2+10^2+11^2+12^2+13^2)-8,5^2=20,92$$

$$Cov(x,y)=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}x_i\,y_i-\overline{X}\;\overline{Y}$$

$$=\frac{1}{6}(0\text{x}9,4+5\times10,9+10\times11,8+11\times12,1+12\times12,3+13\times12,5)-8,5\times11,5=4,87$$

donc $a=\dfrac{Cov(x,y)}{V(x)}=\dfrac{4,87}{20,92}=0,23$

$b=\overline{Y}-a\overline{X}$, donc b=11,5– 0,23 x 8,5=9,5

donc (D) :y=0,23x +9,5

3°)a) Le rang de l'anné 2010 est 20
donc y=0,23x20+9,5=14,1
donc le pourcentage de consommation médicale en 2010 est 14,1 %

b) $y \geq 25 \Leftrightarrow 0,23x+9,5 \geq 25$

$\Leftrightarrow x \geq 67,4$

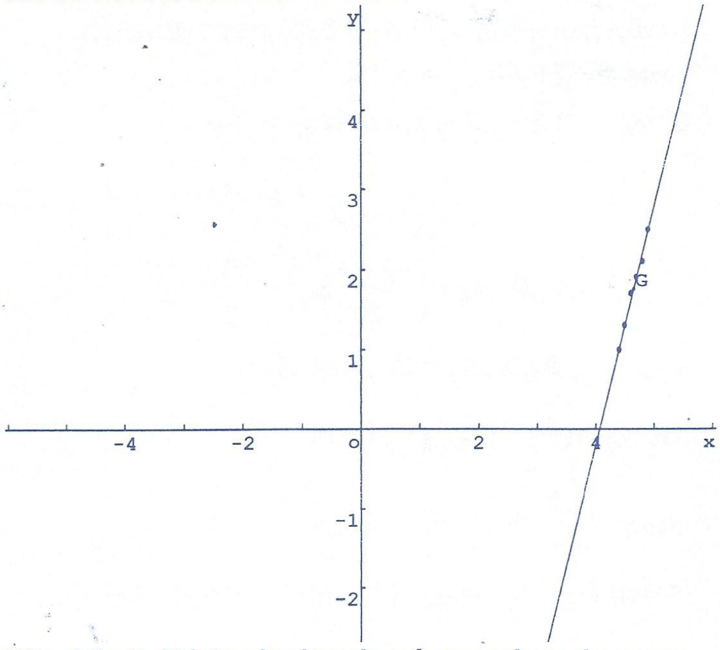
$\Leftrightarrow x > 68$

Donc à partir de l'année 1990+68=2058 le pourcentage dépassera 25 %

c) Soit x=400
donc y = 0,23x400+9,5 =101,5
On peut donc conclure que cet ajustement linéaire ne peut rester valable 400 ans ,sinon le pourcentage de consommation médicale dépassera la consommation globale qui est 100 %

EXERCICE 2

1°)
Représentation du nuage de points :
En abscisses : 10.000 $\rightarrow$ 1cm
En ordonnées : 10 $\rightarrow$ 1 cm



2°) a)Soit (D) la droite de régression de y en fonction de x .
Par la méthode des moindres carrés , (D) est d'équation y= ax + b où $a=\dfrac{cov(X,Y)}{V(X)}$

et $b=\overline{Y}-a\overline{X}$.

$$\overline{X} = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} x_i = 46500 \text{ et } \overline{Y} = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} y_i = 17,5$$

$$V(X) = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} x_i^2 - \overline{X}^2 = 2916666,67$$

$$Cov(X,Y) = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} x_i y_i - \overline{X}\,\overline{Y} = 8416,67$$

Donc $a = \dfrac{8416,67}{2916666,67} = 0,003$ et

$b = \overline{Y} - a\overline{X} = -122$.

Donc (D) : $y = 0,003\,x - 122$

3°) Pour $y = 30$, on a : $x = 50.666,67$.

Donc cette nouvelle société propose 50.666,67 aux 30 candidats

EXERCICE 3

1°)a) Le coefficient de corrélation linéaire est : $r = \dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}}$.

Calcul de V(X) , V(Y) et de Cov (X ,Y)

$$\overline{X} = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} x_i = 47500 \text{ et } \overline{Y} = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} y_i = 101,67 .$$

$$V(X) = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} x_i^2 - \overline{X}^2 = 729166667$$

$$V(Y) = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} y_i^2 - \overline{Y}^2 = 521,54$$

$$Cov(X,Y) = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} x_i y_i - \overline{X}\,\overline{Y} = -191825$$

Donc $r = \dfrac{-191825}{\sqrt{729166667}\;\sqrt{521,54}} = -0,31$

b)Par la méthode des moindres carrés l'équation de la droite (D) de régression de y en fonction de x est : $y = ax + b$ où

$a = \dfrac{cov(X,Y)}{V(X)}$ et $b = \overline{Y} - a\overline{X}$.

Donc $a = -0,0003$ et $b = 115,92$

Donc (D) : $y = -0,0003\,x + 115,92$

2°) a) r(x) est la recette de la vente de y paires de chaussures au prix unitaire x .

$r(x) = xy = -0,0003\,x^2 + 115,92\,x$.

b) r(x) est un polynôme de degré 2 dont le coefficient de x^2 est négatif, donc r(x) admet un maximum en $x_0 = \dfrac{-115,92}{2(-0,0003)} = 193200$

Donc $r(x_0) = -0,0003 \times 193200^2 + 115,92 \times 193200$

$= 1\ 1.197.872$ CFA

SUJETS

SUJET 1.

EXERCICE 1

Soit n le nombre d'élèves en TD_2, donc 2n est le nombre d'élèves en TD_1

1°)a) $P(D_1)=\dfrac{C_{2n}^1}{C_{3n}^1}=\dfrac{2n}{3n}=\dfrac{2}{3}$

b) $P(D_2)=\dfrac{C_n^1}{C_{3n}^1}=\dfrac{n}{3n}=\dfrac{1}{3}$

2°)a) $D_1 \cap F$ = « l'élève choisi est en TD_1 et est fille »

$P(F/D_1)=60\%=\dfrac{60}{100}$

$P(D_1)=\dfrac{2}{3}$

or $P(F/D_1)=\dfrac{P(D_1 \cap F)}{P(D_1)}$

donc $P(D_1 \cap F)=P(F/D_1)\times P(D_1)$

$=\dfrac{60}{100}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{5}$

b) $P(F/D_2)=44\%=\dfrac{44}{100}=\dfrac{11}{25}$

donc $P(D_2 \cap F)=P(F/D_2)\times P(D_2)$

$=\dfrac{11}{25}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{11}{75}$

- une fille choisie provient de TD_1 ou TD_2

donc on a $P(F)=P(D_1 \cap F)+P(D_2 \cap F)$

$=\dfrac{2}{5}+\dfrac{11}{75}=\dfrac{30+11}{75}$

$=\dfrac{41}{75}$

3°) $P(D_1/F)=\dfrac{P(F \cap D_1)}{P(F)}$

$=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{75}{41}=\dfrac{30}{41}$

4°) Card $D_1 \cap F$ = 30

$P(D_1 \cap F)=\dfrac{30}{3n}=\dfrac{10}{n}=\dfrac{2}{5}$

donc n= 25

donc la classe deTD_2 contient 25 élèves et la classe deTD_1 contient 50 élèves

Autre possibilité

2n étant le nombre d'élèves de TD_1 dont 60% de filles donc $\dfrac{60}{100}\times 2n=30$

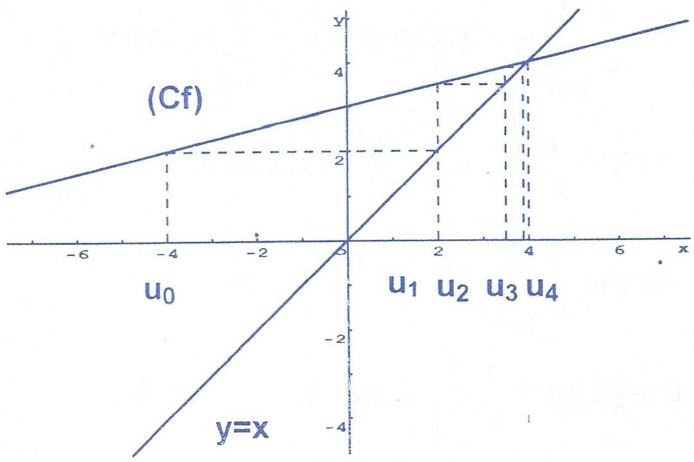
donc $2n=\dfrac{30\times 10}{6}=50$

d'où n=25

EXERCICE 2

1°) $u_1 = 2$

2°)a) et b)



c)
D'après le graphique (V_n) semble converger vers 4

3°)a) $u_0 = -4$, donc $u_0 < 4$

$u_1 = 2$, donc $u_1 < 4$

Supposons que $u_n < 4$ jusqu'au rang $n > 1$

$u_n < 4 \Rightarrow \frac{1}{4} u_n < 1$

$\Rightarrow \frac{1}{4} u_n + 3 < 4$

$\Rightarrow u_{n+1} < 4$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < 4$

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{4} u_n + 3 - u_n$

$= \frac{3}{4}(4 - u_n)$

Or a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < 4$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$, donc la suite (u) est strictement croissante

c) D'après a) et b) (u) est strictement croissante et majorée par 4, donc (u) est une suite convergente.

4°) a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 4$

b) $\forall n \in N$; $V_{n+1} = u_{n+1} - 4$

$= \frac{1}{4} u_n + 3 - 4$

$= \frac{1}{4}(u_n - 4)$

$= \frac{1}{4} v_n$

donc (V) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et de 1er terme $V_0 = -8$

b) (V) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et de premier terme $V_0 = -8$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n (-8) = \frac{-2}{4^{n-1}}$

c) (v) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$ qui est inférieur à 1, donc $\lim v_n = 0$

d) $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 4$

donc $\lim u_n = 4$ car $\lim v_n = 0$

5°)a) $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n = v_n + 4$

$= \frac{-2}{4^{n-1}} + 4$

b) $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n - 4 = \frac{-2}{4^{n-1}}$

donc $|u_k - 4| = \frac{-2}{4^{k-1}}$

Donc $|U_k - 4| < 10^{-10} \Rightarrow \frac{-2}{4^{k-1}} < 10^{-10}$

$\Rightarrow 2 \times 10^{-10} < 4^{k-1}$

$\Rightarrow \ln(2.10^{10}) < (k-1)\ln 4$

$\Rightarrow \frac{\ln(2.10^{10})}{\ln 4} + 1 < k$

$\Rightarrow 18{,}10 < k$

$\Rightarrow 19 \leq k$

PROBLEME

Partie A

1°)a) D'après le graphique, les solutions de l'équation $f(x)=0$ sont 0 et $\frac{3}{2}$

b) D'après le graphique (C_f), $f(1) = -e$

$f(-\frac{3}{2}) = 2$ et (Cf) admet des tangentes horizontales aux points d'abscisses 1 et $-\frac{3}{2}$

donc $f'(1) = 0 = f'(-\frac{3}{2})$

c) (T) passe par les points O et A(−1 ;3)

donc (T) : $y = ax$

$A(-1\,;3) \in (T) \Leftrightarrow 3 = -a$

$\Leftrightarrow a = -3$

Donc (T) : $y = -3x$

donc $f'(0) = -3$

2°)a) D'après le graphique sur $]-\infty\,;0[$ et $]\frac{3}{2};+\infty[$, (Cf) est au- dessus de (OI)

donc $\forall x \in]-\infty\,;0[\cup [\frac{3}{2};+\infty[$, $f(x) > 0$.

Sur $]0;\frac{3}{2}[$, (Cf) est en- dessous de (OI)

donc $\forall x \in]0\,;\frac{3}{2}[$, $f(x) < 0$

$f'(0) = 0 = f'(\frac{3}{2})$

b) D'après le graphique sur $]-\infty\,;\frac{-3}{2}[$ et $]1\,;+\infty[$ f est strictement croissante

et sur $]\frac{-3}{2};1[$ f est strictement décroissante

D'où TV

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$		1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0		0	$+$
$f(x)$	$0 \nearrow$	2	$\searrow$	$-e$	$\nearrow +\infty$

3°)on suppose que$\forall\ x \in R$;
$f(x) = (ax^2 + bx)\, e^x$

a) $\forall\ x \in R$; $f'(x) = (2ax + b + ax^2 + bx)\, e^x$
$= [ax^2 + (2a + b)x + b\,]\, e^x$

b) D'après 1°)c) , $f'(0) = -3$

donc $f'(0) = -3 \Leftrightarrow b = -3$

c) d'après $f'(1) = 0 \Leftrightarrow e\,(a + 2a - 3 - 3) = 0$
$\Leftrightarrow e\,(3a - 6) = 0$
$\Leftrightarrow a = 2$

Donc $\forall\ x \in R$, $f(x) = (2x^2 - 3x)\, e^x$

PARTIE B

1°)a) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} (2x^2 - 7x + 7) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \end{cases}$

b) $\forall\ x \in IR^+$, $g(x) = e^x \left(2 - \frac{7}{x} + \frac{7}{x^2}\right) x^2$

$$= \frac{2 - \frac{7}{x} + \frac{7}{x^2}}{\frac{1}{x^2 e^x}}$$

$$= \frac{1}{\frac{e^{-x}}{x^2}} \left(2 - \frac{7}{x} + \frac{7}{x^2}\right)$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} 2 - \frac{7}{x} + \frac{7}{x^2} = 2$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{x^2} = +\infty$

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$

Donc (Cg) admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $-\infty$

2°)a) $\forall\ x \in R$, $g'(x) = e^x (4x - 7 + 2x^2 - 7x + 7)$
$= (2x^2 - 3x)\, e^x = f(x)$

Donc le signe de $g'(x)$ est celui de $f(x)$
donc d'après A)2°) a) :

$\forall\ x \in \left]-\infty\,;0\right[\cup \left]\frac{3}{2};+\infty\right[$,

$g'(x) > 0$ donc g est strictement croissante su

$\left]-\infty\,;0\right[$ et $\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$.

$\forall\ x \in \left]0\,;\frac{3}{2}\right[$, $g'(x) < 0$; donc g est

strictement décroissante sur $\left]0\,;\frac{3}{2}\right[$

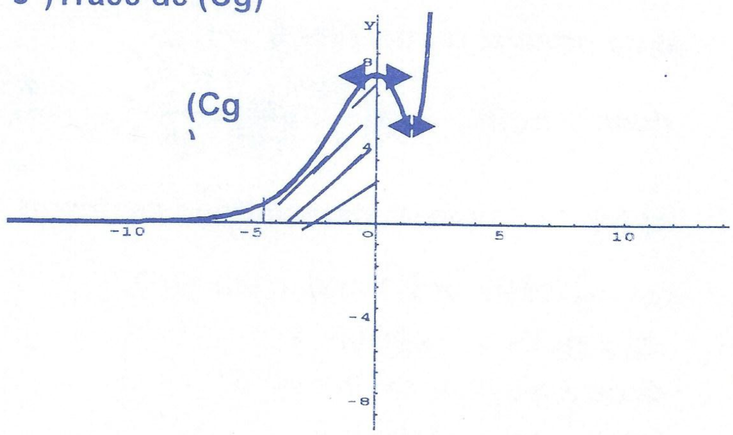
$g'(0) = g'\left(\frac{3}{2}\right) = 0$

D'où TV

x	$-\infty$	0		$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$0 \nearrow$	7	$\searrow$	M	$\nearrow +\infty$

$M = g\left(\frac{3}{2}\right) = e^{\frac{3}{2}}$

3°)Tracé de (Cg)



$g(0) = 7$ et $g\left(\frac{3}{2}\right) = 4{,}48$

4°)a)Posons $I = \int_{-5}^{0} x e^x dx$ et $J = \int_{-5}^{0} x^2 e^x dx$

__Calcul de I__

Posons $u(x) = x \Rightarrow u'(x) = 1$

$v'(x) = e^x \Rightarrow v(x) = e^x$

donc $I = \left[xe^x\right]_{-5}^{0} - \int_{-5}^{0} e^x dx$

$= \left[xe^x\right]_{-5}^{0} - \left[e^x\right]_{-5}^{0} = 6e^{-5} - 1$

Calcul de J

posons $t(x) = x^2 \Rightarrow t'(x) = 2x$

$k(x) = e^x \Rightarrow k(x) = e^x$

Donc $J = \left[x^2e^x\right]_{-5}^{0} - 2\int_{-5}^{0} xe^x dx$

$= -25e^{-5} - 2I = 2 - 37e^{-5}$

b) voir figure

$A(\Delta) = \int_{-5}^{0} g(x)dx \times u.a$

$\int_{-5}^{0} g(x)\, dx = \int_{-5}^{0} e^x\left(2x^2 - 7x + 7\right)dx$

$= 2J - 7I + 7\int_{-5}^{0} e^x dx$

$= 2\left(2 - 37e^{-5}\right) - 7\left(6e^{-5} - 1\right) + 7\left(1 - e^{-5}\right)$

$= 18 - 123e^{-5}$

donc $A(\Delta) = (18 - 123\, e^{-5})$ **u.a.**

__SUJET 2__

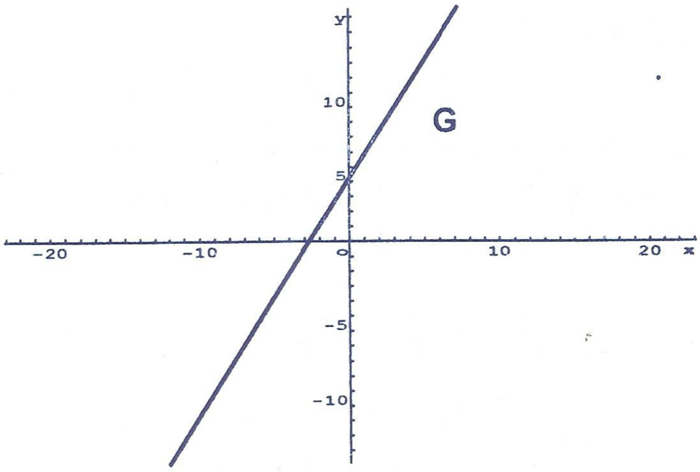
__EXERCICE 1__

$\overline{X} = \frac{1}{5}(0 + 4 + 8 + 12 + 14) = 7{,}6$

$\overline{Y} = \frac{1}{5}(383 + 753 + 1089 + 1346 + 1510) = 1016{,}2$

(en milliard de dollar)

b) Représentation du nuage de points



$V(X) = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} x_i^2 - \overline{X}^2$

$= \frac{1}{5}(4^2 + 8^2 + 12^2 + 14^2) - (7{,}6)^2 = 26{,}24$

$V(Y) = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} y_i^2 - \overline{Y}^2$

$= \frac{1}{5}(383^2 + 753^2 + 1089^2 + 1346^2 + 1510^2) - 1016.2$

$= 65624{,}56$

b) $Cov(X, Y) = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} x_i y_i - \overline{X}\,\overline{Y}$

$= 2080{,}08$

c) $r = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}} = \frac{2080{,}08}{\sqrt{26{,}24} \times \sqrt{165624{,}56}}$

$= 0{,}998$

d) r est très proche de 1 , donc un ajustement affine est envisagé

3°)a) Par la méthode de moindres carrés, (D) est d'équation y= ax +b

avec $a = \frac{cov(X,Y)}{V(X)}$ et $b = \overline{Y} - a\overline{X}$

on a : $a = \frac{2080{,}08}{26{,}24} = 79{,}2$ **et** $b = 414{,}2$

donc (D) : $y = 79{,}2\,x + 414{,}2$

b) Le rang de l'année 2005 est 27

Donc $y = 79{,}2 \times 27 + 414{,}2 = 2552{,}6$

Donc la dette du tiers monde en 2005 est estimée à 2.552,6 milliards de dollar

EXERCICE 2

1°) a)

$(z-\sqrt{3}+i)(z^3-i) = z^4+(i-\sqrt{3})z - iz + 1 + i\sqrt{3}$.

Donc (E) $\Leftrightarrow z-\sqrt{3}+i = 0$ ou $z^3 - i = 0$

$z^3 - i = 0 \Leftrightarrow z^3 = i = (-i)^3$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{z}{-i}\right)^3 = 1$$

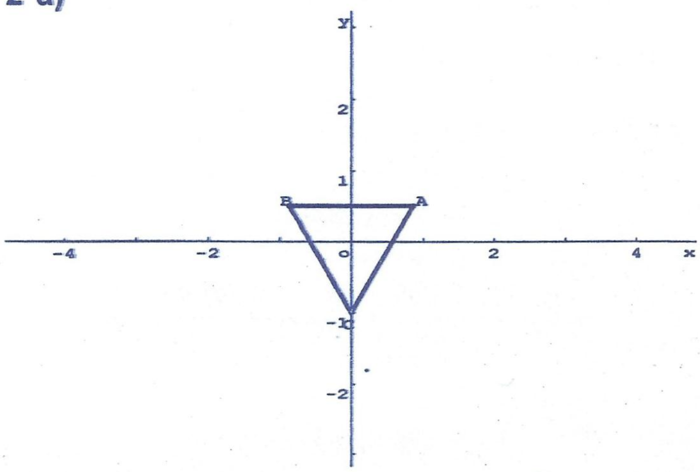
Donc $\frac{z}{-i}$ est une racine cubique de 1.

Or les racines cubiques 1 sont : 1 , $\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ et $\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Donc $z = -i$ ou $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ ou $-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

Donc les solutions de (E) sont : $\sqrt{3}-i$, $-i$, $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ et $-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

2°a)



b) On a AB= AC = BC , donc le triangle ABC est un triangle équilatéral .

3°)a) Ω = mil[AC] , donc $z_\Omega = \frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{4}i$

Les éléments caractéristiques de S

$S(\Omega) = \Omega$ et $S(A)=B$

- Le rapport k :

$$k = \frac{\Omega B}{\Omega A} = \frac{\left|-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{i}{4}\right|}{\left|\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{i}{4}\right|} = \sqrt{3}$$

- L'angle α :

$$\alpha = \text{MES}\,(\overrightarrow{\Omega A};\overrightarrow{\Omega B}) = \text{ARG}\left(\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{i}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{i}{4}}\right)$$

$$= \text{ARG}(i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{2}$$

- Le centre Ω (car $S(\Omega) = \Omega$)

Donc S est la similitude directe de centre Ω , rapport $\sqrt{3}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$

b) L'écriture complexe de S est : $z' = \sqrt{3}\,iz - i$

$\sqrt{3}\,i z_O - i = -i = z_C$ donc $S(O)=C$

PROBLEME

Partie A

1°)a) $x \in D_g \Leftrightarrow x \neq 0$, donc Dg R\ {0}

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1$ car $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} 1+2(x\ln x)+x = 1$

$\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} 1-2(-x\ln(-x))+x = 1$

en effet $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$

2°)a) $\forall x \in IR^*$, $g'(x) = 2\ln|x| + 1 + 2$

$= 2\ln|x| + 3$

b) $g'(x) < 0 \Leftrightarrow 2\ln|x| < -3$

$\Leftrightarrow \ln|x| < -\frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow |x| < e^{-\frac{3}{2}}$

$\Leftrightarrow -e^{\frac{-3}{2}} < x < e^{\frac{-3}{2}}$

et $g'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty ; -e^{\frac{-3}{2}}\right[\cup \left]e^{\frac{-3}{2}} ; +\infty\right[$

donc g est strictement décroissante sur

$\left]-e^{\frac{-3}{2}} ; e^{\frac{-3}{2}}\right[\setminus \{0\}$

g est strictement croissante sur

$]-\infty ; -e^{\frac{-3}{2}}[$ et $]e^{\frac{-3}{2}} ; +\infty[$

D'où TV

x	$-\infty$		$-e^{\frac{-3}{2}}$		0		$e^{\frac{-3}{2}}$		$+\infty$
g'(x)		+	0	−	‖	−	0	+	
g(x)	$-\infty$	↗	M	↘ 1	‖	1 ↘	m	↗	$+\infty$

$M = g(-e^{\frac{-3}{2}}) = 1+2e^{\frac{-3}{2}}$

$m = g(e^{\frac{-3}{2}}) = 1-2e^{\frac{-3}{2}}$.

3°)a) $g(-1) = 0$

b) $I =]-\infty ; -e^{\frac{-3}{2}}[$ et $g(I) =]-\infty ; 1+2e^{\frac{-3}{2}}] = J$

c) Sur I g est continue est strictement croissante , donc sa restriction h à I l'est aussi , donc h est une bijection de I sur $J = g(I)$

d) g est une bijection de I sur J et $g(-1) = 0$ donc -1 est l'unique solution de l'équation $g(x) = 0$ sur $]-\infty ; -e^{\frac{-3}{2}}[$.
D'après le tableau de variation, sur $]0;+\infty[$, g admet un minimum atteint en $e^{\frac{-3}{2}}$ qui est $1-2e^{\frac{-3}{2}}$. On a $1-2e^{\frac{-3}{2}} \approx 0{,}553$ donc $\forall \in]0;+\infty[$, $g(x) > 0$,ainsi l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solution dans $]0;+\infty[$

Sur $]-e^{\frac{-3}{2}} ; 0[$, g est continue est strictement décroissante et

$g(]-e^{\frac{-3}{2}} ; 0[) =]1 ; 1+2e^{\frac{-3}{2}}[$

Donc l'équation $g(x) = 0$ n'a pas de solution sur $]-e^{\frac{-3}{2}} ; 0[$.

Ainsi l'ensemble des solutions de l'équation $g(x) = 0$ sur IR est $\{-1\}$

4°) sur $]-\infty ; -e^{\frac{-3}{2}}[$, g est strictement croissante et $g(-1) = 0$

donc $\forall x \in]-\infty ; -1[$, $g(x) < 0$

$\forall x \in]-1 ; -e^{\frac{-3}{2}}[$, $g(x) > 0$.

$g(]-e^{\frac{-3}{2}} ; 0[) =]1 ; 1+2e^{\frac{-3}{2}}[$

donc $\forall x \in]-e^{\frac{-3}{2}} ; 0[$, $g(x) > 0$

Sur $]0 ; +\infty[$ g admet un minimum >0

donc $\forall x \in]0 ; +\infty[$, $g(x) > 0$

Ainsi $\forall x \in]-\infty ; -1[$, $g(x) < 0$

$\forall x \in]-1 ; 0[\cup]0 ; +\infty[$, $g(x) > 0$

PARTIE B

1°) $\lim\limits_{x\to 0^+} x(x\ln|x|+1) = \lim\limits_{x\to 0^+} x(x\ln x+1)$

$= 0$

$\lim\limits_{x\to 0^-} -x(x\ln|x|+1) = \lim\limits_{x\to 0^-} -x(-x\ln(-x)+1)$

$= 0$

car $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$

donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$

donc f est continue en 0

2°)a) $x \in Df \Leftrightarrow x \neq 0$

or $f(0) = 0$

Donc Df =IR

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$

car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to -\infty} x\ln|x| = -\infty \\ \lim\limits_{x\to -\infty} x = -\infty \end{cases}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x\ln|x|+1 = 1$

car $\lim_{x\to 0} x\ln|x| = 0$

donc f est dérivable en 0 et f'(0) = 1

c) $\forall x \in IR^*$, $f'(x) = x\ln|x| + 1 + x\ln|x| + 1$

$= x(\ln|x| + 1)$

$= 1+2x\ln|x| + x$

$= 1+ x (2\ln |x| + 1) = g(x)$

donc d'après partie A) 4°)

. $\forall x \in]-\infty ; -1[$, $f'(x) < 0$, donc f est strictement décroissante sur $]-\infty ; -1[$.

. $\forall x \in]-1 ; +\infty[$, $f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur $]-1 ; +\infty[$

D'où TV

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f '(x)	-	0	+
f(x)	$+\infty$ ↘	-1	↗ $+\infty$

3°)a) (D) : y =f'(0)x +f (0)

(D) : y = x

b) M (x , y) $\in$ (C) $\cap$ (D) $\Leftrightarrow$ f(x) = x

Résolvons l'équation f(x) = x

$f(x) = x \Leftrightarrow x(x\ln|x| + 1) = x$

$\Leftrightarrow x\ln|x| + 1 = 1$ car $x \neq 0$

$\Leftrightarrow x\ln|x| = 0$

$\Leftrightarrow \ln|x| = 0$

$\Leftrightarrow |x| = 1$

$\Leftrightarrow x = 1$ ou -1

Donc (C)$\cap$ (D) = {E ,F } ,E(–1 ; –1) et F(1; 1)

c) $\forall x \in IR^*$, $f(x) = - x = x^2\ln|x|$

Pour $x \in IR^*$, $\ln|x| < 0 \Leftrightarrow |x| < 1$

$\Leftrightarrow -1 < x < 1$ et $x \neq 0$

Donc

sur $]-1;1[\setminus \{0\}$ (C) est en- dessous de (D).

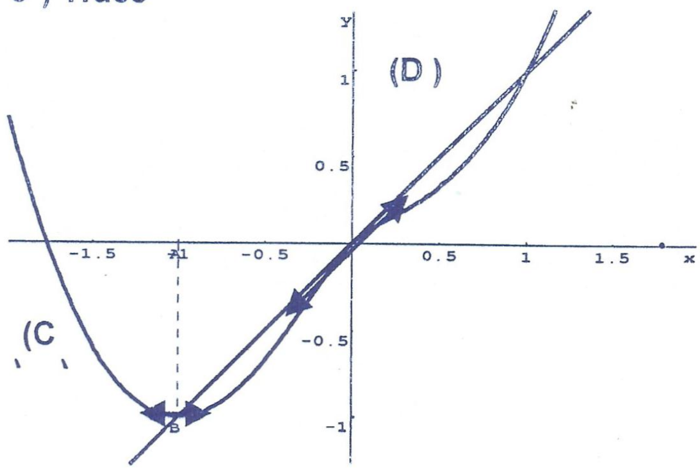
Sur $]-\infty;-1[$ et $]1 ; +\infty[$ (C) est au dessus de (D).

4°)Sur $]-1,8 ; -1,7[\subset]-\infty;-1[$, f est continue et strictement décroissante .

De plus f (– 1,8) $\times$ f (– 1,7) < 0 .

Donc l'équation f(x)= 0 admet une solution β dans] – 1,8 ; – 1,7[

5°) Tracé



Partie C

1°) $\alpha \in]0 ;1[$, $k = \int_\alpha^1 x^2 \ln x\, dx$

posons $u(x)=\ln x \Rightarrow u'(x)=\frac{1}{x}$

$v'(x)=x^2 \Rightarrow v(x)=\frac{1}{3}x^3$

donc $k = [\frac{1}{3}x^3 \ln x]_\alpha^1 - \frac{1}{3}\int_\alpha^1 x^2 dx$

$= -\frac{1}{3}\alpha^3 \ln\alpha - \frac{1}{9}[x^3]_\alpha^1$

$= -\frac{1}{3}\alpha^3 \ln\alpha - \frac{1}{9} + \frac{\alpha^3}{9}$

2°)a) Sur] 0 ;1 [(C) est en- dessous de (D)

donc $A(\alpha) = -\int_\alpha^1 [x - f(x)]dx\, u.a$

$\int_\alpha^1 x - f(x)dx = -\int_\alpha^1 x^2 \ln(x)dx$

$= k$

donc $A(\alpha) = \frac{1}{9} + \frac{1}{3}\alpha^3 \ln\alpha - \frac{\alpha^3}{9}$

b) $\lim_{\alpha\to 0} A(\alpha) = \frac{1}{9}$ car $\lim_{\alpha\to 0} \alpha^3\ln\alpha = 0$

SUJET 3

EXERCICE 1

Posons $f(z) = z^3 - 2i z^2 + 4(1+i)z + 16+i$

1°) on vérifie que – 2 est solution de (E) .
Donc une division euclidienne de $f(z)$ par $z+2$ donne $f(z) = (z+2)[z^2 - 2(1+i)z + 8(1+i)]$

2°) a) Soit $\delta = x+iy$

$$\delta^2 = -8-6i \Leftrightarrow \begin{cases} |\delta^2| = |-8-6i| \\ x^2 - y^2 = -8 \\ 2xy = -6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = 10 \\ x^2 - y^2 = -8 \\ xy < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 9 \\ xy < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm 3 \\ xy < 0 \end{cases}$$

Donc les racines carrées de $-8-6i$ sont : $\delta_1 = 1-3i$ et $\delta_2 = -1+3i$

b) $\Delta = [2(1+i)]^2 - 4 \times 8(1+i)$
$= -32 - 24i = 4(-8-6i)$

donc $\Delta = [2(1-3i)]^2$

Donc les solutions de (E_1) sont :

$$z_1 = \frac{2(1+i) - 2(1-3i)}{2} = 4i$$

$$z_2 = \frac{2(1+i) + 2(1-3i)}{2} = 2 - 2i$$

c) D'après 1 °)

(E) $\Leftrightarrow (z+2)(z^2 - 2(1+i)z + 8(1+i)) = 0$

Donc les solutions de (E) sont : -2 ; $4i$ et $2-2i$

3°) a)

b) K= mil [BC]

S	
A	A
B	K

(C) est un cercle de diamètre [AB] .Or une similitude directe transforme un cercle en un cercle , donc (C') est le cercle de diamètre [S(A S(B)] = [AK] .

c) L'affixe de K est $z_K = \frac{z_B + z_C}{2} = 1+i$

L'écriture complexe de S est $z' = az+b$

$$\begin{cases} S(A) = A \\ S(B) = K \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_A = a z_A + b \\ z_K = a z_B + b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{z_A - z_k}{z_A - z_B} \\ b = z_A - a z_A \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{2}(1-i) \\ b = -1-i \end{cases}$$

Donc $z' = \frac{1}{2}(1-i)z - 1 - i$

d) <u>Le rapport k de S</u>

$$k = \left|\frac{1}{2}(1-i)\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

<u>L'angle α de S</u>

$$\alpha = \text{ARG}\left(\frac{1}{2}(1-i)\right) = \frac{-\pi}{4}$$

EXERCICE 2

1°)a) Représentation

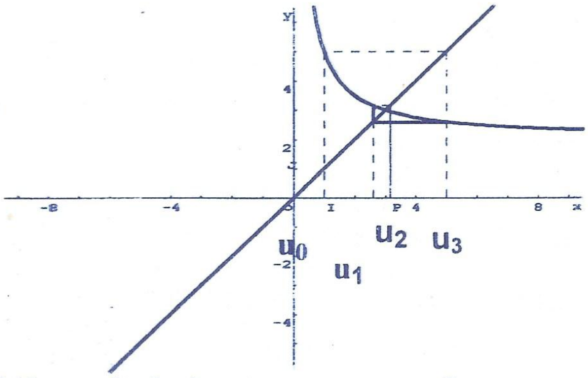
$$u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n} \text{ et } u_0 = 1$$

Soit $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = \frac{2x+3}{x}$

$D_f =]0\,;+\infty[$ et $f'(x) = \frac{-3}{x^2} < 0$

donc $\forall \in]0\,;+\infty[$, f est strictement décroissante et

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$



b)La suite(u) converge vers 3

2°)a) f([1 ;5])=[f(5) ; f(1)] car
f est strictement décroissante et

$f(5)=\frac{13}{5}>1$, $f(1)=5$ d'où $[\frac{13}{5}\ ;\ 5]\subset[1\ ;\ 5]$

donc $f([1\ ;\ 5])\subset[1\ ;\ 5]$

b) $u_0=1$, donc $1\le u_0\le 5$

• supposons que $1\le u_n\le 5$ jusqu'au rang n>0
donc d'après 2°)a) $f(5)\le f(u_n)\le f(1)$
Ainsi $1\le u_{n+1}\le 5$
donc $\forall\ n\in\mathbb{N},\ 1\le u_n\le 5$

3)a) $\forall n\in\mathbb{N}$, $v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-3}{u_{n+1}+1}=\frac{\frac{2u_n+3}{u_n}-3}{\frac{2u_n+3}{u_n}+1}$

$$=\frac{2u_n+3-3u_n}{2u_n+3+u_n}=\frac{-u_n+3}{3u_n+3}=\frac{-(u_n-3)}{3(u_n+1)}$$

$v_{n+1}=-\frac{1}{3}\ v_n$, donc (v)est une suite
• géométrique de raison $-\frac{1}{3}$ et 1^er terme $v_0=-1$

b)$\forall n\in\mathbb{N}$,

$$v_n=-1(-\frac{1}{3})^n=-1\times\frac{(-1)^n}{3^n}=-1\times(-1)^n(\frac{1}{3^n})$$

donc, $v_n=(-1)^{n+1}(\frac{1}{3^n})$

4°) a)

$\forall n\in\mathbb{N}$, $v_n=\frac{u_n-3}{u_n+1}\Rightarrow v_n u_n+v_n=u_n-3$
$\Rightarrow v_n u_n-u_n=-v_n-3$
$\Rightarrow u_n(v_n-1)=-v_n-3$

donc $u_n=\frac{-v_n-3}{v_n-1}$

$$u_n=\frac{-(-1)^{n+1}(\frac{1}{3^n})-3}{(-1)^{n+1}(\frac{1}{3^n})-1}$$

b) $\lim u_n=\lim\frac{-(-1)^{n+1}(\frac{1}{3^n})-3}{(-1)^{n+1}(\frac{1}{3^n})-1}=3$

car $\lim(\frac{1}{3^n})=0$

PROBLEME

Partie A

1°) posons $X=e^x$
Donc l' équation devient
$X^2-5X+4=0$
$\Delta=25-4\times4=9$
Donc $X_1=1$ et $X_2=4$
Donc $e^x=1$ ou $e^x=4$
Donc $x=0$ ou $x=\ln4$
Donc $S_{\mathbb{R}}=\{\ 0\ ;\ \ln4\ \}$

2°) $\forall\ x\in\mathbb{R}$, $P(x)=(e^x-1)(e^x-4)$

x	$-\infty$	0		ln4	$+\infty$
P(x)	+	0	-	0	+

Donc $\forall\ x\in\ ]-\infty\ ;0[\ \cup\ ]\ln4\ ;+\infty[$, $P(x)>0$
$\forall\ x\in\ ]0\ ;\ln4[$, $P(x)<0$

Partie B

1°) $x\in Df\Leftrightarrow e^x-2=0$
$\Leftrightarrow x=\ln 2$
Donc $Df=\mathbb{R}\setminus\{\ln 2\}$

2°) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x-2}=0$ car $\lim\limits_{x\to0}e^x=+\infty$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{e^x-2}=-\frac{1}{2}$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to(\ln2)^+}\frac{1}{e^x-2}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to(\ln2)^+}f(x)=+\infty$

$$\lim_{x\to(\ln 2)^-} \frac{1}{e^x-2} = 0^-$$

donc $\lim_{x\to(\ln 2)^-} f(x) = -\infty$

3°)a) $\forall x \in IR \setminus \{\ln 2\}$, $f'(x) = 1 - \dfrac{e^x}{(e^x-2)^2}$

$$f'(x) = \frac{e^{2x} - 4e^x + 4 - e^x}{(e^x-2)^2} = \frac{P(x)}{(e^x-2)^2}$$

b) $\forall x \in IR \setminus \{\ln 2\}$, $(e^x - 2)^2 > 0$, donc le signe de f '(x) est celui de P(x) donc d' après la Partie A) 2°) on a :

$\forall x \in]-\infty ; 0[\cup]\ln 4 ; +\infty[$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur$]-\infty ; 0[$ et $]\ln 4 ; +\infty[$

$\forall x \in]0 ; \ln 4[$, $f'(x) < 0$, donc f est strictement décroissante sur $]0 ; \ln 4[$

TV

x	$-\infty$	0		ln2		ln4	$+\infty$
f'(x)	+	0	-	‖	-	0	+
f(x)	$-\infty$ ↗	-2	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	m	↗ $+\infty$

$m = \ln 4 - \dfrac{1}{2}$

4°) $\forall x \in]\ln 2; +\infty[$, $f(x) - (x-1) = \dfrac{1}{e^x-2}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-(x-1) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x-2} = 0$$

Donc

(D): $y = x-1$ est asymptote oblique à (C) en $+\infty$

5°) $\forall x \in]\ln 2; +\infty[$, $f(x) - (x-1) = \dfrac{1}{e^x-2}$

$\forall x \in]\ln 2; +\infty[$, $e^x - 2 > 0$

donc $\forall x \in]\ln 2; +\infty[$, $f(x) - (x-1) > 0$

donc(C) est au-dessus de(D) sur$]\ln 2; +\infty[$

6°) $\forall x \in]-\infty ; \ln 2[\cup]\ln 2 ; +\infty[$

$$x - \frac{3}{2} + \frac{e^x}{2(e^x-2)} = x - 1 - \frac{1}{2} + \frac{e^x}{2(e^x-2)}$$

$$= x - 1 + \frac{-e^x + 2 + e^x}{2(e^x-2)}$$

$$= x - 1 + \frac{1}{(e^x-2)} = f(x)$$

7°) $\forall x \in]-\infty ; \ln 2[$, $f(x) - (x - \dfrac{3}{2}) = \dfrac{e^x}{2(e^x-2)}$

et $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ donc $\lim_{x\to-\infty} f(x) - (x - \dfrac{3}{2}) = 0$

Donc la droite(Δ) : $y = x - \dfrac{3}{2}$ est asymptote oblique à(C) en$-\infty$

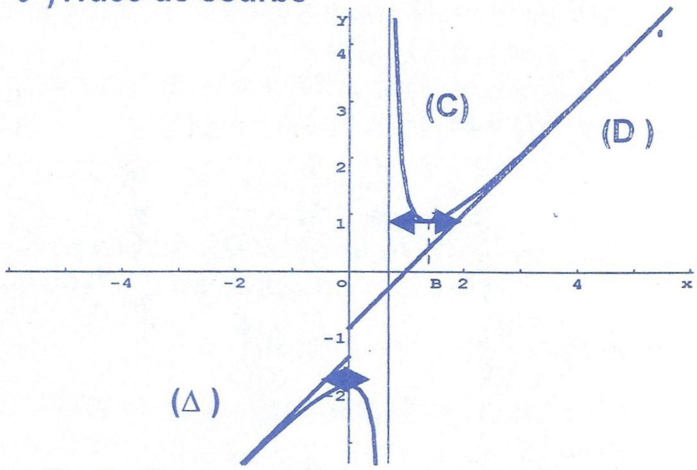
8°) $\forall x \in]-\infty ; \ln 2[$, $f(x) - (x - \dfrac{3}{2}) = \dfrac{e^x}{2(e^x-2)}$

$\forall x \in]-\infty ; \ln 2[$, $e^x > 0$ et $e^x - 2 < 0$

donc $f(x) - (x - \dfrac{3}{2}) < 0$

donc (C) en -dessous de (Δ) sur $]-\infty ; \ln 2[$

9°)Tracé de courbe



Partie C

1°) Soit $\lambda < 0$

$\forall x \in]-\infty ; \ln 2[$, $f(x) - (x - \dfrac{3}{2}) < 0$

$$\text{Donc } A(\lambda) = \int_\lambda^0 -\left[f(x) - (x - \frac{3}{2})\right] dx \,u.a$$

$$= -\frac{1}{2}\int_\lambda^0 \frac{e^x}{e^x-2}\, dx \times 4cm^2$$

$$= -\frac{1}{2}\Big[\ln\left|e^x - 2\right|\Big]_\lambda^0 \times 4cm^2$$

donc $A(\lambda) = 2 \ln(2 - e^\lambda)\ cm^2$

2°) a) $\lim_{\lambda\to-\infty} A(\lambda) = 2 \ln 2\ cm^2$

car $\lim_{\lambda\to-\infty} e^\lambda = 0$

SUJET 4

EXERCICE 1

1°)a) On lance une fois le dé A .
Le dé A a 2 faces n°2 , donc

$$P_A(2) = \frac{C_2^1}{C_6^1} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

b)On lance 3 fois de suite le dé A et les lancers sont indépendants , donc

$P_A(421)=P_A(4) \times P_A(2) \times P_A(1)$

$$= \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{108}$$

2°)Pour le dé B ,on a 1 face n°1 , 2 faces n°2 et 2 faces n°4

Les lancers sont indépendants ,donc

$P_B(421) = P_B(4) \times P_B(2) \times P_B(1)$

$$= \frac{2}{6} \times \frac{2}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{54}$$

3°)a) Une urne contient 4 dés identiques au dé A et 6 dés identiques au dé 6 ,donc

$$P(A) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \text{ et } P(B) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

On obtient 421 avec le dé A ou le dé B donc

$P(421) = P(A) \times P_A(421) + P(B) \times P_B(421)$

$$= \frac{2}{5} \times \frac{1}{108} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{54}$$

$$= \frac{1}{5\times 54} + \frac{3}{5\times 54} = \frac{4}{5\times 54} = \frac{2}{135}$$

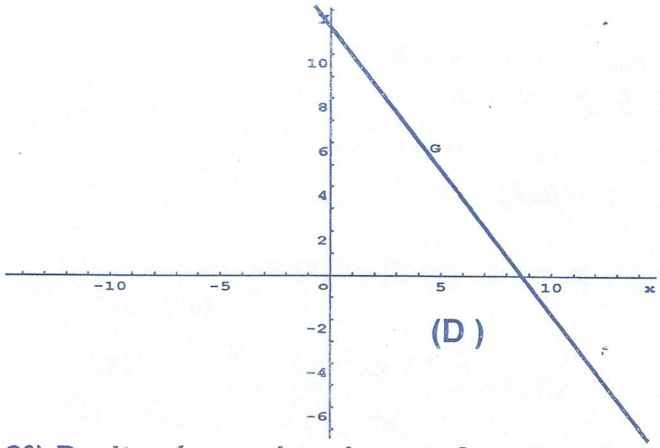
b) $P(A/421)$ $$\frac{P_A(421)}{P(421)} = \frac{1}{108} \times \frac{135}{2}$$

$$= \frac{5\times 27}{4\times 27\times 2} = \frac{5}{8}$$

donc $P(A/421) = \frac{5}{8}$

EXRCICE 2

1°) Représentation de nuage de points



2°) Droite régression de y en fonction de x

$$\overline{X} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i = 440 \quad \text{et } \overline{Y} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} y_i = 55,4$$

$$V(X) = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} (x_i)^2 - \overline{X}^2 = 52240$$

$$Cov(X,Y) = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i y_i - \overline{X}\,\overline{Y} = -6908$$

L' équation de la droite (D) de régression de y en fonction de x est : (D) y = ax+b avec

$$a = \frac{Cov(X;Y)}{V(X)} \quad \text{et } b = \overline{Y} - a\overline{X}$$

$$a = \frac{-6908}{52240}$$

Donc a = – 0,13 et b=112,6

Donc (D) : y = – 0,13x +112,6

3°)a) y est le nombre de sociétés achetant un logiciel au prix de vente x (en milliers de francs)

Soit P(x) =prix de vente de logiciels (en milliers de francs) .

$P(x) = xy = x(-0,13x + 112,6)$

donc $P(x) = -0,13x^2 + 112,6x$

Soit F(x) =frais de fabrication des logiciels (en milliers de francs)

$F(x) = 50y + 8000$

$= 50(-0,13x + 112,6) + 8000$

donc $F(x) = -6,5x + 13630$

b(x)= bénéfice (en milliers de francs)

$b(x) = P(x) - F(x) = -0,13x^2 + 119,1x - 13630$

b) b(x) est un polynôme de second degré dont le coefficient de x^2 est – 0,13 qui est négatif. Donc b(x) admet un maximum qui est atteint en

$$x_0 = \frac{-119,1}{2(-0,13)} = 458 \text{ et}$$

$b(x_0) = -0,13x(458)^2 + 119,1x(458) - 13630$

$= 13648,48$

donc $b(x_0)$= 13.648.480 CFA

PROBLRME

1°) Dg=] 0; + ∞ [

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to 0} g(x) = -\infty$

2°) ∀ x ∈] 0; + ∞ [, $g'(x)=1+\frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}$

∀ x ∈] 0; + ∞ [, g'(x) >0 ,donc g est strictement croissante sur] 0; + ∞ [
d'où TV

x	0	+∞
g'(x)		+
g(x)		-∞ ↗ +∞

3°)a) Sur] 0; + ∞ [,g est continue et strictement croissante,g est une bijection de] 0; + ∞ [sur] - ∞; + ∞ [.
Or 0∈] - ∞; + ∞ [, donc l'équation g(x)=0 admet une unique solution α ∈] 0; + ∞ [
g(2,20) x g(2,21) < 0 ,donc 2,20 < α < 2,21
b) Sur] 0; + ∞ [, g est continue et strictement croissante et g(α) = 0
donc ∀ x ∈] 0; α [g(x) <0
∀ x ∈] α ; + ∞ [g(x) >0

Partie B

1°) Df=] 0; + ∞ [

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{x-1}{x}\right)(-2+\ln x) = +\infty$$

car $\lim_{x\to 0^+} \frac{x-1}{x} = -\infty$ et $\lim_{x\to 0^+} -2+\ln x = -\infty$

donc (C)admet une asymptote verticale d'équation x =0

2°)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x-1}{x}\right)(-2+\ln x) = +\infty$$

car $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x-1}{x}\right) = 1$

et $\lim_{x\to+\infty} -2+\ln x = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x-1}{x}\right)\left(\frac{-2}{x}+\frac{\ln x}{x}\right) = 0$$

car $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{-2}{x}+\frac{\ln x}{x}\right) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x} = 1$.

Donc (C) admet une branche parabolique de direction (OI)

3°)a) ∀ x ∈] 0; + ∞ [,

$$f'(x) = \frac{-2x-(2-2x)}{x^2} + \frac{x-x+1}{x^2}\ln x + \frac{x-1}{x}\times\frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{x-3+\ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

b)Le signe de f '(x) est celui de g(x) donc
∀ x ∈] 0; α [, f '(x) < 0 donc f est strictement décroissante sur] 0; α[
∀x ∈] α ; + ∞ [, f '(x) >0 donc f est strictement croissante sur] α ; +∞ [
f '(α) =0
D'où TV

x	0		α	+∞
f'(x)		-	o	+
f(x)		+∞ ↘	f(α)	↗ +∞

4°)∀ x ∈] 0; + ∞ [,

$$f(x) = \frac{-2(x-1)}{x} + \frac{x-1}{x}\ln x$$

$$= \left(\frac{x-1}{x}\right)(-2+\ln x)$$

$$= \left(1-\frac{1}{x}\right)(-2+\ln x)$$

M(x ; y) ∈(C) ∩(OI) ⇔ f (x) =0

$\Leftrightarrow 1-\frac{1}{x} = 0$ ou $-2+\ln x = 0$

⇔ x =1 ou x= e^2

donc (C) coupe (OI) aux points d'abscisses 1 et e^2

5°) (T) : y =f '(1) (x-1)+f (1)
(T) : y = – 2 x+2

6°) $f(\alpha)=\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)(-2+\ln\alpha)$

or g (α)=0 ⇔ α – 3+ln α =0
⇔ ln α=3 –

donc $f(\alpha)=\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)(-2+3-\alpha)$

$$f(\alpha)= -\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$$

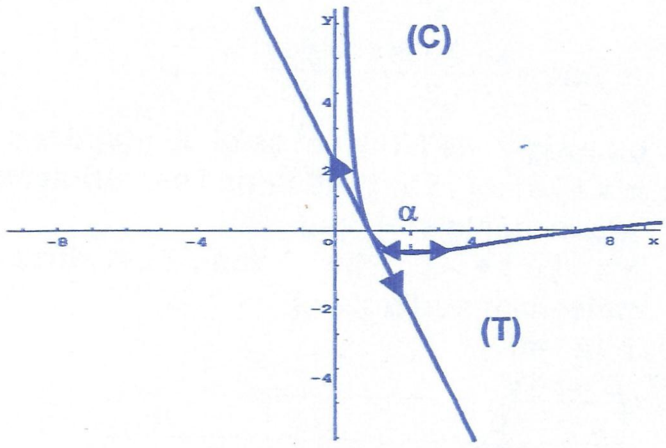
7°) f admet un minimum $f(\alpha) < 0$

et $f(1)=f(e^2)=0$ donc

$\forall x \in]0;1[\cup]e^2;+\infty[, f(x)>0$

$\forall x \in]1;e^2[, f(x)<0$

8°) Construction de (C)



Partie C

1°)a) F est une primitive de f , donc $\forall x\in]0;+\infty[$, $F'(x)=f(x)$

D'après B)7°) $\forall x\in]0;1[\cup]e^2;+\infty[, F'(x)>0$ donc

F est strictement croissante sur $]0;1[$ et $]e^2;+\infty[$

$\forall x\in]1;e^2[$, $F'(x)<0$ donc F est strictement décroissante sur $]1;e^2[$

Les tangentes aux points d'abscisses1 et e^2 sont des tangentes horizontales car $F'(1)=F'(e^2)=0$

2°)a) Calcul de $\int_1^x \ln t\,dt$ pour x >0

Posons $u(t)=\ln t \Rightarrow u'(t)=\frac{1}{t}$

$v'(t)=1 \Rightarrow v(t)=t$

$\int_1^x \ln t\,dt = [t\ln t]_1^x - \int_1^x 1\,dt$

donc $\int_1^x \ln t\,dt = x\ln x - x + 1$

b) $\forall x>0$

$f(x)=(1-\frac{1}{x})(\ln x-2)=\ln x-\frac{\ln x}{x}+\frac{2}{x}-2$

c) $\forall x>0$

$F(x)=x\ln x - x + 1 - \frac{(\ln x)^2}{2}+2\ln x-2x+k$

où $k\in IR$

$F(1)=0 \Rightarrow k=2$ donc $\forall x>0$

$F(x)=x\ln x - x - \frac{(\ln x)^2}{2}+2\ln x-2x+3$

$F(x)=-3x+3+x\ln x-\frac{(\ln x)^2}{2}+2\ln x$

3°)a $\lim\limits_{x\to0} F(x)=-\infty$

b) Pour x >1,

$F(x)=x\ln x-\frac{(\ln x)^2}{2}+2\ln x-3x+3$

donc $F(x)=x\ln x\left(1-\frac{1}{2}\frac{\ln x}{x}+\frac{2}{x}-\frac{3}{\ln x}\right)+3$

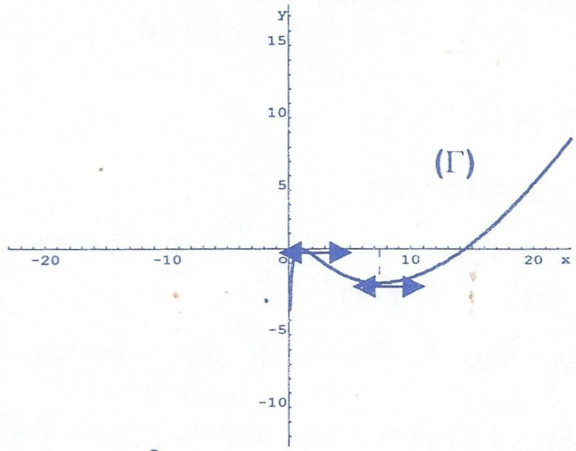
$\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=+\infty$

c) TV

X	0		1		e^2	$+\infty$
F'(x)	‖	+	0	-		+
F(x)	‖	$-\infty$ ↗		↘	m	↗ $+\infty$

$F(e^2)=5-e^2=m$

d) Tracé de (Γ)



Sur $[1;e^2]$,(C) est en-dessous de l' axe des abscisses

$A=-\int_1^{e^2} f(x)dt\times ua=(F(1)-F(e^2))ua$

$=0-(5-e^2)ua$, donc $A=4(e^2-5)\ cm^2$

SUJET 5

EXERCICE 1

1°)a) $\forall$ a ,b $\in \mathbb{C}$, $a^4 - b^4 = (a^2)^2 - (b^2)^2$

$= (a^2 - b^2)(a^2 + b^2)$

$= (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)$

b) (E) $\Leftrightarrow (z-2)^4 - (z+1-i)^4 = 0$

$\Leftrightarrow (z-2-z-1+i)(z-2+z+1-i)((z-2)^2+(z+1-i)^2)=0$

$\Leftrightarrow (-3+i)(2z-1-i)(z^2-(1+i)z+2-i)=0$

$\Leftrightarrow 2z-1-i=0$ ou $z^2-(1+i)z+2-i=0$

$\Leftrightarrow z=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ ou $z^2-(1+i)z+2-i=0$

Résolvons l' équation $z^2-(1+i)z+2-i=0$

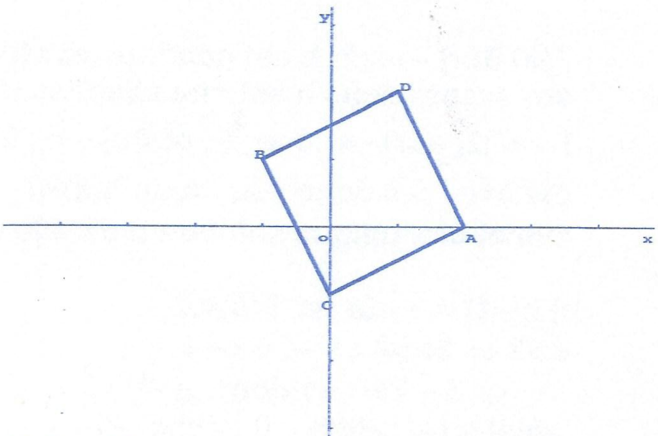
$\Delta=(1+i)^2-4(2-i)=-8+6i=(1+3i)^2$

$z=\frac{1+i-1-3i}{2}=-i$ ou $z=\frac{1+i+1+3i}{2}=1+2i$

donc les solutions de (E) sont $-i$, $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$

et $1+2i$

2°) a) Figure



b) On démontre que AD=AC=BD=BC et

$\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{AC}$.

Donc le quadrilatère ADCB est un carré

3°)a) $Z=\frac{(x-1)+i(y-2)}{x+i(y+1)}$

$=\frac{[(x-1)+i(y-2)][(x-1)-i(y-2)]}{x^2+(y+1)^2}$

$=\frac{x^2+y^2-x-y-2}{x^2+(y+1)^2}+i\frac{-3x+y+1}{x^2+(y+1)^2}$

donc $X=\frac{x^2+y^2-x-y-2}{x^2+(y+1)^2}$ et $Y=\frac{-3x+y+1}{x^2+(y+1)^2}$

b) $M(z)\in(E_1) \Leftrightarrow Z\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow Y=0$

$\Leftrightarrow \frac{-3x+y+1}{x^2+(y+1)^2}=0$

$\Leftrightarrow -3x+y+1=0$

Or $M\neq C$ et $C\in(D)$: $-3x+y+1=0$

donc $(E_1) = (D)/\{C\}$

c) $M(z)\in(E_2) \Leftrightarrow Z\in i\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow X=0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-x-y-2=0$

$\Leftrightarrow (x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2=\frac{5}{2}$

$\Leftrightarrow KM=\frac{\sqrt{10}}{2}$, avec $K(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i)$

or $M\neq C$ et $C\in(\Gamma)$ où (Γ) est le cercle de centre K et de rayon $\frac{\sqrt{10}}{2}$

donc $(E_2) = (\Gamma)/\{C\}$

d) $|Z|=\frac{|z-(1+2i)|}{|z-(-i)|}=\frac{DM}{CM}$

$M(z)\in(E_3) \Leftrightarrow |Z|=1$

$\Leftrightarrow DM=CM$

donc (E_3) est la médiatrice de [CD]

EXERCICE 2

1°)a) $\forall$ n $\in\mathbb{N}^*$

$d_{n+1}=v_{n+1}-u_{n+1}$

$=\frac{u_n+3v_n}{4}-\frac{u_n+2v_n}{3}$

$=\frac{3u_n-4u_n+9v_n-8v_n}{12}$

$=\frac{-u_n+v_n}{12}=\frac{1}{12}d_n$

donc(d_n) est une suite géométrique de raiso $\frac{1}{12}$ et de premier terme $d_1=-11$

b) $\forall$ n $\in\mathbb{N}^*$, $d_n=-11\times(\frac{1}{12})^{n-1}$

c) (dn) converge vers 0 car c'est une suite géométrique de raison $\frac{1}{12}$ inférieur à 1

2°) $\forall$ n $\in$IN*

$$u_{n+1}-u_n=\frac{u_n+2v_n}{3}-u_n$$
$$=\frac{2(v_n-u_n)}{3}=\frac{2}{3}d_n$$
$$v_{n+1}-v_n=\frac{u_n+3v_n}{4}-v_n$$
$$=\frac{-2(v_n-u_n)}{4}=-\frac{1}{2}d_n$$

or $\forall$ n $\in$IN* , $d_n<0$ donc

$\forall$ n $\in$IN* , $u_{n+1}-u_n<0$ et $v_{n+1}-v_n>0$

donc(u) est strictement décroissante et (v) est strictement croissante

3°)a) $\forall$ n$\in$IN* , $v_n-u_n=d_n$

or $d_n<0$, donc $\forall$ n $\in$IN* , $u_n>v_n$

b) (u_n) est strictement décroissante donc

$\forall$ n $\in$IN*, $u_n<u_1$.

(v_n) est strictement croissante donc

$\forall$ n$\in$IN* $v_n>v_1$

donc d'après a) on a $u_1>u_n>v_n>v_1$

4°) D'après tout ce que précède ,on peut dire que les suites (u) et (v) sont strictement monotones et bornées, donc elles convergent.

or $\forall$ n $\in$IN* , $v_n-u_n=d_n$ et (d_n) converge vers 0.

Donc les suites (u) et (v) convergent vers la même limite .

5°)a) $\forall$ n $\in$IN* , $t_{n+1}=3u_{n+1}+8v_{n+1}$

$=u_n+2v_n+2u_n+6v_n$

$=3u_n+8v_n=t_n$

donc (t_n) est une suite constante

Donc$\forall$ n $\in$IN* , $t_n=t_1=3u_1+8v_1=44$

b) Soit l la limite commune de(u_n) et (v_n)

or $\forall$ n $\in$IN* , $3u_n+8v_n=44$

Donc l vérifie 44=3l+8l

Donc l=4 ainsi $\lim u_n=\lim v_n=4$

PROBLEME

Partie A

1°) $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=3+\lim\limits_{x\to+\infty}(xe^{-x}-e^{-x})=3$

car $\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0$

$\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=3+\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)e^{-x}=-\infty$

2°) $\forall$ x $\in$ IR , $h'(x)=e^{-x}-(x-1)e^{-x}$

$=(2-x)e^{-x}$

3) $\forall$ x $\in$ IR , $e^{-x}>0$ donc le signe de h'(x) est celui 2 –x .

$\forall$ x >2 , h'(x) <0 , donc h est strictement décroissante sur] 2 ;+∞[

$\forall$ x < 2 , h'(x) > 0 donc h est strictement croissante sur] – ∞ ; 2[et h'(2) =0

D'où TV

x	– ∞	2	+∞
h'(x)	+		–
h(x)	– ∞ ↗	M	↘ 3

$M=h(2)=3+e^{-2}$

4°)a) Sur] – ∞ ;2[h est continue et strictement croissante donc h est une bijection de] – ∞ ;2[sur]– ∞ ;3+e^{-2}[, or 0$\in$]– ∞ ; 3+e^{-2} [car 3+e^{-2} > 0 donc l'équation h(x)=0 admet une unique solution α dans]– ∞ ; 2[

b) h(–1) = 3 –2e et h(0)=2

e >2 ⇔ 2e >4 ⇔ –2e <– 4

⇔ 3 – 2e < –1 donc g(–1) <0

ainsi h (–1) xh(0) < 0 , donc –1< α <0

5°) h(]α ; +∞ [ )=]0 ;3[,donc $\forall$ x > α , h(x) >0

Sur] – ∞ ; α[h est strictement croissante et h(α)=0

donc $\forall$ x< α , h(x) < 0 et $\forall$ x > α , h(x) >0

Partie B

1°) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{-x}=0$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x(3+\frac{1}{x}-e^{-x})=+\infty$

2°) $\forall$ x $\in$ IR ,

$f'(x)=3-e^{-x}+xe^{-x}=3+(x-1)e^{-x}$

donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x)= h(x)$

3°) d'après A)5°) $\forall$ $x > \alpha$,$f'(x) >0$ donc f est strictement croissante sur $]\alpha\ ;+\infty[$

$\forall$ $x< \alpha$, $f'(x) <0$ donc f est strictement décroissante sur $]-\infty\ ;\alpha[$

$f'(\alpha)=0$

D'où TV

X	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty \searrow$	m	$\nearrow +\infty$

avec $m= f(\alpha)$

4°)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-(3x+1)= \lim_{x\to+\infty} -xe^{-x}=0$$

donc

la droite (Δ) d' équation y=3x+1 est asymptote oblique à (C) en $+\infty$.

5°) $\forall$ $x\in\ ]0;+\infty[$ $=f(x) - (3x+1)= -xe^{-x}<0$

donc(C) est en -dessous de (Δ)sur$]\ 0;+\infty[$

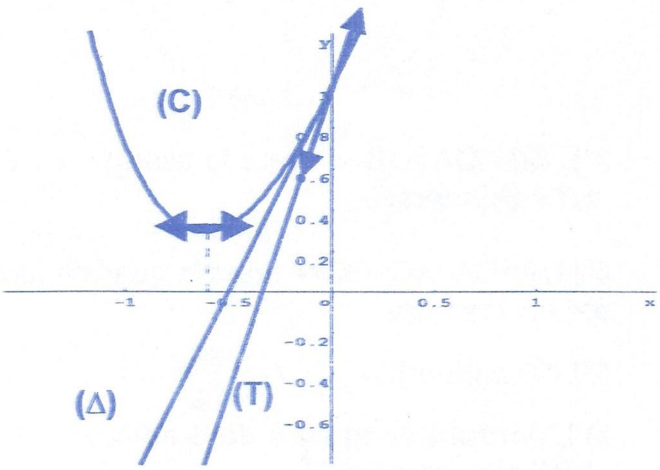
6°) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} 3+\frac{1}{x}-e^{-x}=-\infty$

donc (C) admet une branche parabolique de direction (OJ)

7°) (T) : $y=f'(0)(x-0)+f(0)$

(T) : $y=2x+1$

8°) Tracée de (Δ) , (T)et(C)



Avec $\alpha\approx$ - 0,6 et $f(\alpha)\approx$ 0,3

9°) $\lambda>0$

a) Soit $L=\int_0^{\lambda} xe^{-x}dx$

Posons $u(x)=x \Rightarrow u'(x)=1$

$v'(x)=e^{-x} \Rightarrow v(x)=-e^{-x}$

donc $L=\left[-xe^{-x}\right]_0^{\lambda}+\int_0^{\lambda} e^{-x}dx$

$$L=-\lambda e^{-\lambda}+\left[-e^{-x}\right]_0^{\lambda}=-\lambda e^{-\lambda}-e^{-\lambda}+1$$

b) $A(\lambda)=\int_0^{\lambda}|f(x)-(3x+1)|dx$ ua

$A(\lambda)=\int_0^{\lambda} xe^{-x}dx$ ua= $(-\lambda e^{-\lambda}-e^{-\lambda}+1)$ ua

c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} A(\lambda)=1\times ua=4cm^2$

SUJET 6

EXERCICE 1

1°)a) Soit A=«exactement 2 des 5 sacs contrôlés contiennent le produit non déclaré»

$$P(A)=\frac{C_{10}^{2}\times C_{50}^{3}}{C_{60}^{5}}=0{,}1614\approx 0{,}2$$

b) B=«L'un au moins des 5 sacs contrôlés contient le produit non déclaré»

$\overline{B}$ =«Aucun des 5 sacs contrôlés ne contient le produit non déclaré»

$$P(\overline{B})=\frac{C_{50}^{5}}{C_{60}^{5}}=0{,}3879\approx 0{,}4$$

donc $P(B) = 1- P(\overline{B}) = 1- 0{,}4 =0{,}6$

2°)i)a) X =Somme totale dépensée par le camionneur sur l'ensemble de son trajet.

Pour un contrôle à un barrage

Soit D=« le produit non déclaré est découvert»

On a D=B d'après 1°)b)

$\overline{D}$ =« le produit non déclaré n'est pas découvert »

donc $P(D)= 0{,}6$ et $P(\overline{D})=0{,}4$

Les valeurs prises par X :

X=0 F si D est obtenue aucun fois

X=10.000F si D est obtenu 1 fois

X=20.000F si D est obtenu 2 fois

X=30.000F si D est obtenu fois

donc $X(\Omega)=\{0\ ;10.000\ ;20.000\ ;\ 30.000\}$

La loi de probabilité

Pour un contrôle, on obtient D ou $\overline{D}$ donc un contrôle est une épreuve de Bernoulli.

Les 3 contrôles des barrages étant indépendants, ils constituent un schéma de Bernoulli.

Donc P(X=0)=P(obtenir aucune fois D)

$= (0,4)^3=0,064$

P(X=10000)=P(obtenir 1 fois D)

$=C_3^1 \times 0,6 \times (0,4)^2 =0,288$

P(X=20000)=P(obtenir 2 fois D)

$=C_3^2 \times (0,6)^2 \times (0,4) =0,432$

P(X=30000)=P(obtenir 3 fois D)

$= (0,6)^3 =0,216$

D'où la loi de probabilité de X

x_i	0	10.000	20.000	30000
$P(X=x_i)$	0,064	0,288	0,432	0,216

Remarque

i) $\sum_{i=1}^{4} P(X = x_i) = 1$

ii) C'est la variable $\frac{X}{10000}$ qui est associée à un schéma de Bernoulli et non X

b) E(x)= $\sum_{i=1}^{4} x_i P(X = x_i)$

$=10^3 \times 0,288+ 2 \times 10^3 \times 0,432+3 \times 10^3 \times 0,216$

donc E(X)=18000

ii) Le chargement est saisi si D est obtenu soit :

- au1^er^ barrage
- au 2^ième^ barrage
- au 3^ième^ barrage

Donc

P(chargement saisi)=

P(obtenu D au1^er^ barrage)

+ P(obtenu D au 2^ième^ barrage)

+ P(obtenu D au 3^ième^ barrage)

$=0,6+0,4\times0,6+(0,4)^2\times0,6=0,936$

EXERCICE 2

1°) $|z_A|=|z_B|=|z_C|=4$

$Arg(z_A) =Arg(4i)= \frac{\pi}{2}$

$\theta_B= Arg(z_B)= \frac{\pi}{6}$

car $\cos\theta_B = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta_B = \frac{1}{2}$

$\theta_C= Arg(z_C)= \frac{5\pi}{6}$

car $\cos\theta_C = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta_C = \frac{1}{2}$

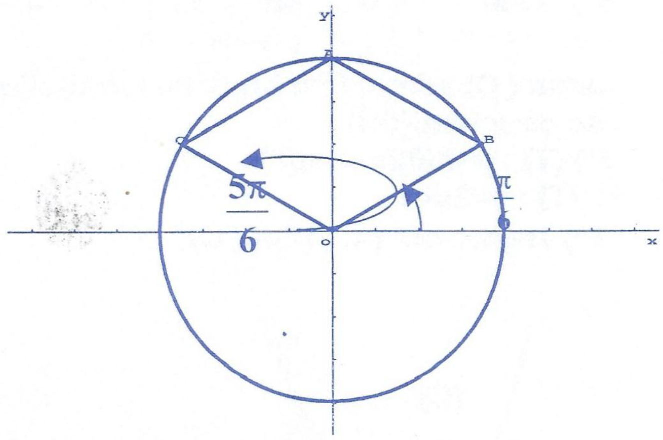
2°)OA=OB=OC=4 donc A,B et C appartiennent au cercle de centre O et de rayon 4

$Arg(z_A)= \frac{\pi}{2}$

$Arg(z_B)= \frac{\pi}{6} \Rightarrow MES(\vec{OI};\vec{OB}) = \frac{\pi}{6}$

$Arg(z_C)= \frac{5\pi}{6} \Rightarrow MES(\vec{OI};\vec{OC}) = \frac{5\pi}{6}$

d'où la construction de A,B et C



3°) AB =OA=OB=4 donc le triangle OAB est équilatéral .

4°) OA=BA=AC=OC=4 donc le quadrilatère OBAC est un losange

5°) K= milieu [OA] $\Rightarrow z_K= \frac{z_A}{2}=2i$

a) L'écriture complexe de S est z'=az+b

S(O)=O donc b=0

$S(B)=K \Leftrightarrow z_K =a\, z_B$

$\Leftrightarrow a= \frac{z_K}{z_B} = \frac{1+i\sqrt{3}}{4}$

donc $z' = \frac{1+i\sqrt{3}}{4} z = \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{3}} z$

b) L milieu [AK] $\Rightarrow z_L = \frac{z_A + z_K}{2} = 3i - \sqrt{3}$

S(L)=L' $\Rightarrow z_{L'} = \frac{1+i\sqrt{3}}{4} \times (3i - \sqrt{3}) = -\sqrt{3}$

c)L milieu [AC] et (OL) $\perp$ (AC)
donc médiatrice [AC]=(OL)
S(O)=O et S(L)=L'$\in$(OI) (d'après b)
donc S(OL)= (OI)

PROBLEME

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

1°) Dg=]– 2 ;+∞[/{0}

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \ln\left|\frac{x+2}{x}\right| - \frac{2}{x+2} = +\infty$$

car $\lim\limits_{x\to 0} \left|\frac{x+2}{x}\right| = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln\left|\frac{x+2}{x}\right| - \frac{2}{x+2} = 0$$

car $\lim\limits_{x\to+\infty} \left|\frac{x+2}{x}\right| = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x+2} = 0$

$$\lim_{x\to -2^+} g(x) = \lim_{x\to -2^+} \ln\left|\frac{x+2}{x}\right| - \frac{2}{x+2} = -\infty$$

car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to -2^+} \left|\frac{x+2}{x}\right| = 0^+ \text{ et } \lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to -2^+} \frac{2}{x+2} = +\infty \end{cases}$

2°)a) $\forall$ x $\in$]- 2 ;+∞[/{0 }

$$g'(x) = \frac{\frac{-2}{x^2}}{\frac{x+2}{x}} + \frac{2}{(x+2)^2} = \frac{-2}{x(x+2)} + \frac{2}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{-2(x+2)+2x}{x(x+2)^2} = \frac{-4}{x(x+2)^2}$$

$\forall$ x$\in$]– 2 ;+∞[/{0} , $(x+2)^2 > 0$ donc le signe de g'(x) est celui de $\frac{-4}{x}$.

$\forall$ x $\in$]– 2 ;0[, g'(x)>0 donc g est strictement croissante sur]– 2 ;0[
$\forall$ x $\in$] 0 ;+∞[, g'(x) < 0 donc g est strictement décroissante sur] 0 ;+∞[

c) D'où TV

x	-2		0	+∞
g'(x)	‖	+	‖	-
g(x)	‖	-∞ ↗ +∞	‖	+∞ ↘ 0

3°) sur] – 2 ; 0[, g est continue et strictement croissante , donc g réalise une bijection de] – 2 ;0[sur g(]– 2 ;0[)=IR ,or 0$\in$IR
donc l'équation g(x)=0 admet une unique solution $\alpha \in$]– 2 ;0[
mais g(– 0,44)xg(– 0,43) < 0
donc – 0,44 < α < – 0,43
b) D'après le tableau de variation
g(]0 ; +∞[) =]0 ; +∞ [
donc $\forall$ x $\in$] 0 ;+∞[, g(x) > 0
sur] –2 ;0[, g est strictement croissante et g(α) =0 .
Donc $\forall$ x $\in$] –2 ; α [, g(x) < 0
$\forall$ x $\in$] α ; +∞ [, g(x) > 0

Ainsi $\forall$ x $\in$] –2 ; α [, g(x) < 0
$\forall$ x $\in$] α ; 0 [$\cup$]0 ; +∞ [, g(x) > 0

Partie B : Etude de f

1°) Df=] –2 ; +∞[\ {0}
$\forall$ x $\in$Df, f(x) = x(ln|x+2|– ln|x|)
=xln|x+2|– xln|x|

on a $\lim\limits_{x\to 0} x\ln|x+2| = 0$ et

$$\lim_{x\to 0^-} x\ln|x| = \lim_{x\to 0^-} -x\ln(-x) = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln|x| = \lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$$

donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$

donc f est continue en 0

b) Dérivabilité de f en 0

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$$

$= \lim\limits_{x\to 0} \ln|x+2| - \ln|x| = +\infty$ car

$\lim\limits_{x\to 0} \ln|x+2| = \ln 2$ et $\lim\limits_{x\to 0} \ln|x| = -\infty$

donc f n'est pas dérivable en 0 mais (C) admet une tangente verticale d'équation x=0

2°)

$$\lim_{x\to -2^+} x\ln|x+2| = +\infty$$

et $\lim_{x\to -2^+} x\ln|x| = -2\ln 2$

donc $\lim_{x\to -2^+} f(x) = +\infty$

donc (C) admet une asymptote verticale d'équation x=–2

b) $\forall$ x $\in]0\ ;\ +\infty\ [$, $f(x)= x\ln(\frac{x+2}{x}) = x\ln(1+\frac{2}{x})$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} x\ln(1+\frac{2}{x})$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{2\ln(1+\frac{2}{x})}{\frac{2}{x}}$$

$$= 2\lim_{X\to 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 2 \quad , (X=\frac{2}{x})$$

donc (C) admet une asymptote horizontale d'équation y=2

3)a) $\forall$ x $\in]-2\ ;+\infty[/\{0\}$

$$f'(x) = \ln|x+2| - \ln|x| + x(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x})$$

$$= \ln\left|\frac{x+2}{x}\right| + \frac{x}{x+2} - 1$$

$$f'(x) = \ln\left|\frac{x+2}{x}\right| - \frac{2}{x+2} = g(x)$$

b)D'après ce qui précède ,le signe de f'(x) celui de g(x) , donc d'après A)3°)b) on a $\forall$ x $\in$] –2 ; α [, f'(x) < 0 , donc f est strictement décroissante sur] –2 ; α [
$\forall$ x $\in$] α ; 0 [$\cup$]0 ; +∞ [, f'(x) > 0 ,donc f est strictement croissante sur] α ; 0 [et]0 ; +∞ [

c) $f(\alpha)=\alpha\ln\left|\frac{\alpha+2}{\alpha}\right|$

or $g(\alpha)=0 \Leftrightarrow \ln\left|\frac{\alpha+2}{\alpha}\right| - \frac{2}{\alpha+2} = 0$

$$\Leftrightarrow \ln\left|\frac{\alpha+2}{\alpha}\right| = \frac{2}{\alpha+2}$$

donc $f(\alpha)= \frac{2\alpha}{\alpha+2}$

d) D'après tout ce qui précède on a TV

x	-2		α		0	+∞
f'(x)	‖	–	0	+	‖	+
f(x)	‖	+∞ ↘	$f(\alpha)$	↗	0	↗ 2

4°) A(x ; y) $\in$(C)$\cap$(OI)$\Leftrightarrow$ y=f(x) et y=0

$f(x)=0 \Leftrightarrow x\ln\left|\frac{x+2}{x}\right| = 0$

$$\Leftrightarrow \ln\left|\frac{x+2}{x}\right| = 0 \text{ car } x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+2}{x} = 1 \text{ ou } \frac{x+2}{x} = -1$$

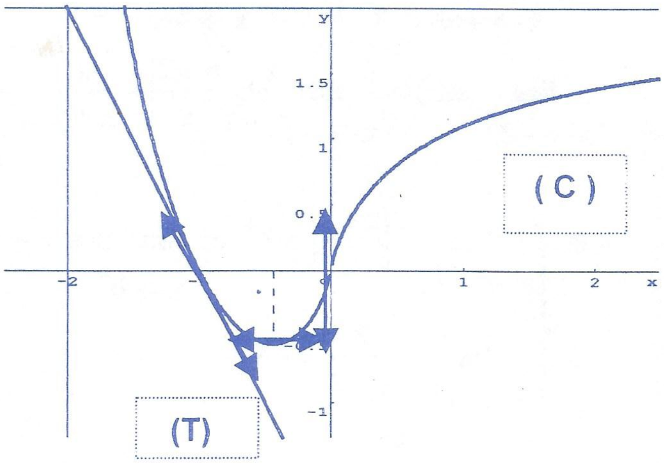
$\Leftrightarrow$ 2=0 (impossible) ou x=–1

donc A(–1 ;0)

b) (T) : y=f'(–1) (x+1)+f(–1)

(T) : y=– 2x –2

5°) Construction



RAPPEL DE COURS

NOMBRES COMPLEXES

i est le nombre complexe tel que $i^2 = -1$

Forme algébrique : $z = x+iy$ avec $x \in IR$ et $y \in IR$

$x = Re(z)$ la partie réelle et $y = Im(z)$ la partie imaginaire.

Le conjugué de $z = x+yi$ est $\bar{z} = x - yi$

Propriétés :

$$\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z'} \quad ; \quad \overline{\left(z^n\right)} = \left(\bar{z}\right)^n \qquad n \in IN$$

$$\overline{z\,z'} = \bar{z}\,\bar{z'} \; ; \quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}} \qquad z' \neq 0$$

$$x = \frac{1}{2}\left(z+\bar{z}\right) \quad \text{et} \quad y = \frac{1}{2i}\left(z-\bar{z}\right)$$

Affixe , Point – image

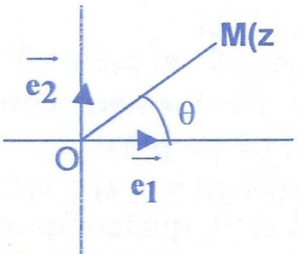
Le point $M(x,y)$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ est le point-image de $z = x+iy$ qui est l'affixe de ce point

Module et argument

Module $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ où $z = x + yi$

$|z| = OM$, $AB = |z_B - z_A|$

Argument :



$\theta = mes\,(\vec{e_1}; \vec{OM}) = \arg(z)$

Propriétés :

$k \in Z$

$\arg(z\,z') = \arg(z) + \arg(z') + 2k\pi$

$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') + 2k\pi$, $z' \neq 0$

$\arg(z^n) = n\arg(z) + 2k\pi$, $n \in IN$

Forme trigonométrique

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ où $\begin{cases} r = |z| \\ \theta = \arg(z) \end{cases}$

Pour $z = x + iy$

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{r} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{r} \end{cases}$$

valeurs remarquables de $\sin\theta$ et $\cos\theta$

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Forme exponentielle :

$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$

$r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$, $r > 0$

Formule de Moivre

$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

$(e^{i\theta})^n = e^{ni\theta}$

Formules de Euler

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Racines carrées d'un complexe

$$z^2 = u \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^2 = |u| \\ Re(z^2) = Re(u) \\ Im(z^2) = Im(u) \end{cases}$$

Racines n-ièmes de l'unité

$w_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$, où $k = 0 ; 1 ; \ldots ; n-1$ avec $n > 2$

Les solutions de l'équation $z^n = a$, $(a \in \mathbb{C})$

Sont $z_k = z_0\, w_k$ avec $z_0 = \sqrt[n]{|a|}\, e^{i\frac{\alpha}{n}}$ et

$\alpha = \arg(a)$ (a non nul)

Equation de degré 2 : $az^2 + bz + c = 0$

$a, b, c \in \mathbb{C}$.(a non nul). $\Delta = b^2 - 4ac$.

- $\Delta \geq 0$, 2 solutions $z_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
- $\Delta < 0$, 2 solutions $z_1 = \dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$
- $\Delta \notin IR$, soit δ une racine carrée de Δ, les solutions $z_1 = \dfrac{-b-\delta}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b+\delta}{2a}$

SIMILITUDES DIRECTES

Toute transformation dont l'écriture complexe est :

$z' = az+b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ est une similitude directe

Si $a = 1$, alors c'est une translation de vecteur $\vec{u}(b)$

Si $a \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$, alors c'est une homothétie $h(\Omega(\frac{b}{1-a}), k)$

Si $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et $|a| = 1$ alors c'est une rotation $r(\Omega(\frac{b}{1-a}), \alpha)$, $\alpha = \arg(a)$

Si $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et $|a| \neq 1$ alors c'est la composée de $h(\Omega, |a|)$ et $r(\Omega, \alpha)$

PROBABILITES

Dénombrement

- Les p- listes de n éléments : n^p.
- Arrangements de p éléments dans n:

$A_n^p = n(n-1)\ldots\ldots(n-p+1)$; $n \geq p$

Si $n = p$, on a des permutations :

$n! = n(n-1) \times \ldots\ldots \times 2 \times 1$ (factorielle n)

Remarque : $n \geq p$

$n! = n(n-1)! = n(n-1)(n-2)! = \ldots = (n-p)!\, A_n^p$

Donc $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$

Convention : $0! = 1$ et $1! = 1$

- Combinaisons de p éléments dans n éléments.

$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$, $p \leq n$

Triangle de Pascal

$C_n^p = C_n^{n-p}$; $C_{n+1}^{p+1} = C_n^p + C_n^{p-1}$

n \ p	0	1	2	3	4	
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1
	-	-	-	-	-	-

Remarque importante :

Tout problème de dénombrement est assimilé à problème de tirages de p boules d'une urne contenan boules

($p \leq n$). Le type et le nombre de ces tirages so consignés dans le tableau ci-dessous

Tirages	Successifs (l'ordre compte)	Simultanés
Avec remise	n^p	
Sans remise	A_n^p	C_n^p

Probabilités

Définition : Soit Ω l'univers d'une épreuve ε et $P(\Omega$ l'ensemble des évènements de ε.

L'application $p: P(\Omega) \longrightarrow [0,1]$

$A \mapsto p(A)$

telle que

1°) $p(\Omega) = 1$

2°) Pour tous les évènements A et B incompatible

$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

est appelée probabilité.

Remarque :

- A et B sont incompatibles si $A \cap B = \varnothing$
- p (A) est " le nombre de chance" de la réalisatio de l'événement A

Propriétés :

1°) $p(A) \geq 0$ et $p(\varnothing) = 0$

2°) $\bar{A}$ l'évènement contraire de A

$p(\bar{A}) = 1 - p(A)$

3°) $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

A et B quelconques

Cas d'équiprobabilité

Tous les résultats ont la même probabilité.

$\forall e \in \Omega \quad P(e) = \frac{1}{\mathrm{card}\,\Omega}$

$\forall A \in \Omega, P(A) = \frac{\mathrm{card}\,A}{\mathrm{card}\,\Omega} = \frac{\text{nbre de cas favorables}}{\text{nbre de cas possibles}}$

❖ Probabilité conditionnelle

$P(A/B) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$; $P(B) \neq 0$

A et B sont indépendants ssi

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Variable aléatoire X

C'est une application $X : \Omega \to IR$

$X(\Omega)=\{x_1 ....\ x_n\}$ ensemble des valeurs prises.

Loi de probabilité de X

x_i	x_1	....	x_n
$p(X=x_i)$	p_1	....	p_n

Remarque : $\sum_{i=1}^{n} P_i = 1$

Les caractéristiques de X

Espérance mathématique : $E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i P_i$

Variance : $V(X)=E(X^2)-E^2(X)$

Ecart type : $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

Fonction de répartition : $F : IR \longrightarrow IR$

$x \mapsto P(X \le x)$

❖ **Loi binomiale**

Une épreuve de Bernoulli a deux éventualités :L'une " S " = succès et l'autre " $\overline{S}$ " = échec avec P(S) = q et $P(\overline{S}) = 1-q$, $0 \le q \le 1$

Schéma de Bernoulli est une suite de n épreuves indépendantes de Bernoulli.

Une variable aléatoire X a une loi binomiale si elle est associée à un schéma de Bernoulli. Soit k le nombre de succès

$P(X=k)=C_n^k q^k (1-k)^{n-k}$, $k\in\{0 ;1 ; ....;n\}$

SUITES NUMERIQUES

- **Suites arithmétiques**

$\forall n\in IN , u_{n+1}-u_n=r$ et r est la raison

$\forall n\in IN , u_n=nr+u_0$,u_0 est le 1^er^ terme

$S_n= u_0+ u_1+.....+u_n=\frac{n+1}{2}(u_0+u_n)$

- **Suites géométriques**

$\forall n\in IN , u_{n+1}=qu_n$ et q est la raison

$\forall n\in IN , u_n=q^n u_0$, u_0 est le 1er terme

$$S_n=U_0+U_1+....+U_n=\begin{cases}\dfrac{U_0(1-q^{n+1})}{1-q} & \text{si } q\neq 1\\[2ex] (n+1)U_0 & \text{si } q=1\end{cases}$$

INTEGRALES

- **Primitives**

F est une primitive de f sur un intervalle K si F e dérivable sur K et F ' = f

Tableau de Primitives.

u dérivable,

f	F
$f = u'u^n$, $n\in IN$	$F = \frac{1}{n+1}u^{n+1}$
$f = \frac{u'}{u^n}$,$n \neq 1$	$F = -\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$
$f = \frac{u'}{u}$, $u \neq 0$	$F = \ln o \lvert u\rvert$
$f = u'u^\alpha$ $u > 0$, $\alpha\in Q\backslash\{-1\}$	$F = \frac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}$

- **Intégrales**

$\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b = F(b)-F(a)$

F étant une primitive de f continue .

Propriétés

$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$ (Chasles)

$\int_a^b f(t)+g(t)\,dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$ (Linéarité)

si $a \le b$ et $f \le g$ alors $\int_a^b f(t)dt \le \int_a^b g(t)dt$

(Croissance)

Intégration par parties.

$\int_a^b f(t)g'(t)dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\,dt$

STATISTIQUES

Tableau n≥1

x	x_1	......	......	......	x_n
y	y_1	......	......	......	y_n

Nuage de points

Ensemble des points $M_i\,(x_i ; y_i)$, $1 \le i \le n$

Moyennes $\overline{X}$ et $\overline{Y}$

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

$G\,(\overline{X};\overline{Y})$ Point moyen

Variances $V(X)$, $V(Y)$

$$V(X)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \overline{X}^2, \quad V(Y)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \overline{Y}^2$$

Covariance $Cov(X;Y)$

$$Cov(X;Y)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \overline{X}\,\overline{Y}$$

Droite de régression de y en fonction de x

(D) : $y=ax+b$ avec

$$a=\frac{Cov(X;Y)}{V(X)} \text{ et } b = \overline{Y} - a\overline{X}$$

Droite de régression de x en fonction de y

(D') : $x=a'y+b'$ avec

$$a'=\frac{Cov(X;Y)}{V(X)} \text{ et } b' = \overline{X} - a'\overline{Y}$$

Le coefficient de corrélation est

$$r = \frac{Cov(X;Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$$

La corrélation est forte si $0{,}87 \le r \le 1$

LOGARITHME NEPERIEN

La primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$ qui s'annule en 1 est appelée ln.

$\forall\, x \in\,]0\,;+\infty[$, $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$

$\ln 1 = 0$, $\ln e = 1$

Propriétés

$x > 0$, $y > 0$ $\ln(xy) = \ln x + \ln y$

$$\ln\frac{1}{y} = -\ln y$$

$$\ln\frac{x}{y} = \ln x - \ln y$$

$\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\ln(x^n) = n\ln x$

$x < y \Rightarrow \ln x < \ln y$

$0 < x < 1 \Rightarrow \ln x < 0$

$1 < x \Rightarrow 0 < \ln x$

Limites

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty \quad ; \quad \lim_{x\to 0} x\ln x = 0$$

$\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{x\to 0} x^n \ln x = 0$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

EXPONENTIELLE NEPERIENNE

La fonction exponentielle (notée exp) est la bijection réciproque de ln.

$\forall\, y \in \mathbb{R}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln x = y \Leftrightarrow \exp(y) = x$

$\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) = e^x$ (notation usuelle)

$e^{\ln(x)} = x$ pour $x > 0$

$\ln(e^x) = x$ pour $x \in \mathbb{R}$

donc $e^0 = 1$, $e^1 = e$, $e^{-1} = \frac{1}{e}$

Propriétés

$x, y \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{Q}^*$

$$e^{x+y} = e^x e^y$$

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

$$e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$$

$$(e^x)^r = e^{rx}$$

Limites

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^n e^{-x} = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0 \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

SUJETS DE BACCALAUREAT DE CÔTE D'IVOIRE

BACCALAUREAT 2005

EXERCICE 1

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. L'unité graphique est le centimètre. On donne le point A d'affixe i.

Soit (Γ) l'ensemble des points M du plan d'affixe z vérifiant $\left|(1-i\sqrt{3})z-\sqrt{3}-i\right| = 6$

1°) a) Démontrer q'un point M appartient à (Γ) si et seulement si son affixe z vérifie : $|z-i| = 3$

b) En déduire la nature de (Γ)

2°) On considère les points B et C d'affixes respectives $\sqrt{3}$ et $-4i$.
L'application S est la similitude directe qui applique A sur O et B sur C.
Soit M un point d'affixe z et M' d'affixe z' l'image de M par S.

a) Démontrer que : $z' = (1-i\sqrt{3})z-\sqrt{3}-i$.

b) Déterminer les éléments caractéristiques de S. On notera Ω son centre.

3°) On désigne par (C) l'image de (Γ) par S.

a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de (C).

b) Construire (C) et (Γ).

4°) Soit D le point tel que : $D \in [\Omega B]$ et $\Omega D = 2\Omega B$

a) Construire les points D et Ω dans le même repère.

b) Démontrer que le triangle ΩCD est équilatéral.

5°) Soit r la rotation de centre Ω qui transforme C en D.

a) Déterminer l'écriture complexe de r.

b) Calculer l'affixe de D.

EXERCICE 2

A) Soit la fonction définie de $[2 ; +\infty[$ vers IR par:

$$f(x) = \frac{6x^2+22x+20}{x^2+5x+6}.$$

1°) Calculer f(2) puis $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2°) Démontrer que: $\forall x \in [2 ; +\infty[$, $f(x) = 6 - \dfrac{8x+16}{x^2+5x+6}$

3°) a) Démontrer que: $\forall x \in [2 ; +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{8(x+2)^2}{(x^2+5x+6)^2}$

b) Dresser le tableau de variation f.

B) Une urne contient un jeton marqué 1, deux jetons marqués 2 et n jetons marqués 3, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On tire simultanement deux jetons de l'urne. On suppose que les tirages sont équiprobables.
On désigne par X la variable aléatoire égale à la somme des points marqués sur les deux jetons extraits de l'urne.

1°) a) Déterminer les valeurs prises par X.

b) Déterminer la loi de probabilité de X.

2°) Soit E(x) l'expérance mathématique de X.

a) Démontrer que: $E(X) = \dfrac{6n^2 + 22n + 20}{n^2 + 5n + 6}$

b) Déterminer n pour que E(X) soit égale à 5.

c) Déduire de la partie A que : $4,4 \leq E(X) < 6$. Donner un interprètation de cet Encadrement.

PROBLEME

PARTIE A

Soit g la fonction dérivable sur $]0; +\infty[$ et définie par: $g(x) = \dfrac{2}{3}x^3 - 1 + \dfrac{\ln x}{x^2}$

1°) a) Démontrer que : $\forall x \in]0; +\infty[$, $g'(x) = \dfrac{2(x-1)(x^2+x+1)}{x}$

b) Déterminer le signe de g'(x) suivant les valeurs de x.

c) En déduire les variations de g.

2°) a) Dresser le tableau de variation de g.

b) Démontrer que: $\forall x \in]0; +\infty[$, $g(x) > 0$.

PARTIE B

Soit f la fonction dérivable sur $]0; +\infty[$ et définie par : $F(x) = \dfrac{2}{3}x - 1 + \dfrac{\ln x}{x^2}$

On note (C) la représentation graphique de f dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique est 2 cm

1°) a) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

b) En déduire que (C) admet une asymptote verticale.

2°) a) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = \dfrac{2}{3}x - 1$ est une asymptote oblique à (C)

b) Etudier la position de (C) par rapport à (D).

3°) a) Démontrer que:

$$\forall x \in]0; +\infty[\quad , \quad f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$$

b) Déterminer les variations de f. (*On pourra utiliser la question A.2.°)b*)

c) Dresser le tableau de variation de f .

4°) a) Démontrer que l'équation : $x \in]0; +\infty[$, $f(x) = 0$ admet une solution unique α .

b) Démontrer que : $1,15 < \alpha < 1,3$.

c) Construire (C) et (D) dans le même repère. *(On prendra $\alpha = 1,2$).*

5°) λ est un nombre réel strictement supérieur à 1. $\mathcal{A}(\lambda)$ désigne l'aire de la partie du plan limitée par (D) , (C) et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = \lambda$

a) A l'aide d'une intégration par parties , calculer $\mathcal{A}(\lambda)$.

b) Déterminer la limite de $\mathcal{A}(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

BACCALAUREAT 2005

EXERCICE1

1°)a) $M(z)\in(\Gamma) \Leftrightarrow |(1-i\sqrt{3})(z-\frac{\sqrt{3}+i}{1-i\sqrt{3}}| = 6$

$\Leftrightarrow |1-i\sqrt{3}||z-i| = 6$

car $|z\times z'| = |z|\times|z'|$

$\Leftrightarrow 2|z-i| = 6$ car $|1-i\sqrt{3}| = 2$

$\Leftrightarrow |z-i| = 3$

b) $M(z)\in(\Gamma) \Leftrightarrow |z-i| = 3$

$M(z)\in(\Gamma) \Leftrightarrow AM=3$

Donc $(\Gamma) = \mathcal{C}(A\,;3)$

2°)a)L'écriture complexe de S est : $z' = az+b$ avec a et $b\in \mathbb{C}$

$$\begin{cases} S(A)=O \\ S(B)=C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_O = az_A + b \\ z_C = az_B + b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{z_C - z_O}{z_B - z_A} = 1-i\sqrt{3} \\ b = z_O - az_A = -\sqrt{3}-i \end{cases}$$

donc $z' = (1-i\sqrt{3})z - \sqrt{3} - i$.

b)Les éléments caractéristiques de S

Le rapport k : $k = |1-i\sqrt{3}| = 2$

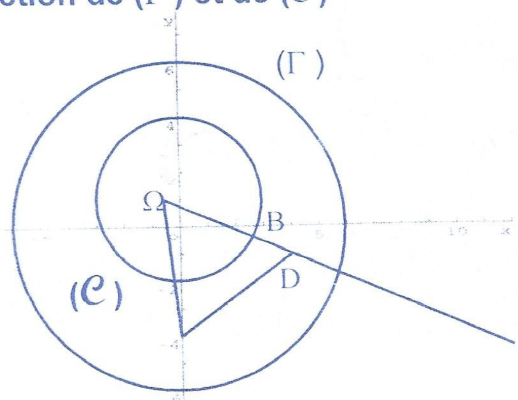
L'angle orienté α : $\alpha = \mathrm{Arg}(1-i\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$

Le centre Ω d'affixe $\omega = \dfrac{-\sqrt{3}-i}{1-1+i\sqrt{3}} = \dfrac{-\sqrt{3}+3i}{3}$

3°)a) $(\mathcal{C}) = S(\Gamma)$

(Γ) est un cercle et S transforme un cercle en un cercle ,donc $(\mathcal{C})$ est le cercle de centre
S(A)=O et de rayon $r' = 2\times 3 = 6$

b)Construction de (Γ) et de $(\mathcal{C})$



4°) $D\in[\Omega B)$ et $\mathcal{C}(\Omega\,;2\Omega B)$

a) Voir figure

b)

S	
A	O
B	C
Ω	Ω

$$S(B) = C \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega C = 2\Omega B \\ (\overrightarrow{\Omega B};\overrightarrow{\Omega C}) = -\frac{\pi}{3} \end{cases}$$

or $\Omega D = 2\Omega B$ donc $\Omega C = \Omega D$
donc le triangle ΩCD est isocèle en Ω

or $(\overrightarrow{\Omega B};\overrightarrow{\Omega C}) = -\frac{\pi}{3}$, donc le triangle ΩCD est équilatéral

5°)a)

r	
Ω	Ω
C	D

L'angle de r est $(\overrightarrow{\Omega C};\overrightarrow{\Omega D}) = \frac{\pi}{3}$

donc l'écriture complexe est $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z + b$, $b\in\mathbb{C}$

$r(\Omega) = \Omega \Leftrightarrow z'_\Omega = e^{i\frac{\pi}{3}} z_\Omega + b$

$\Leftrightarrow z'_\Omega = (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})z_\Omega + b$

$\Leftrightarrow b = (1 - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})z_\Omega$

$\Leftrightarrow b = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}+3i}{3}$

donc l'écriture complexe de r est :

$$z' = e^{i\frac{\pi}{3}} z + \frac{\sqrt{3}+3i}{3}$$

b) $r(C) = D \Leftrightarrow z_D = (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})z_C + \frac{\sqrt{3}+3i}{3}$

$\Leftrightarrow z_D = -4i(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) + \frac{\sqrt{3}+3i}{3}$

$\Leftrightarrow z_D = \dfrac{7\sqrt{3}-3i}{3} = \dfrac{7\sqrt{3}}{3} - i$

Autre méthode

$D\in[\Omega B)$ et $\Omega D=2\Omega B$ donc $\overrightarrow{\Omega D}$ et $\overrightarrow{\Omega B}$ sont de même sens et $\overrightarrow{\Omega D}=2\overrightarrow{\Omega B}$

donc $z_D=2z_B-z_\Omega$

EXERCICE 2

A)1°) $f(2)=\frac{88}{20}=\frac{22}{5}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x^2+22x+20}{x^2+5x+6}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x^2}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}6$$

donc $\lim_{x\to+\infty} f(x)=6$

2°) $\forall\, x\in[2\,;+\infty[$, $f(x)=6-\frac{8x+16}{x^2+5x+6}$ (à l'aide d'une division euclidienne)

ou $\forall\, x\in[2\,;+\infty[$

$$6-\frac{8x+16}{x^2+5x+6}=\frac{6(x^2+5x+6)-(8x+16)}{x^2+5x+6}$$

$$=\frac{6x^2+30x+36-8x-16}{x^2+5x+6}$$

$$=\frac{6x^2+22x+20}{x^2+5x+6}=f(x)$$

donc $f(x)=6-\frac{8x+16}{x^2+5x+6}$

3°)a) $\forall\, x\in[2\,;+\infty[$,

$$f'(x)=-\frac{8(x^2+5x+6)-(2x+5)(8x+16)}{(x^2+5x+6)^2}$$

$$=-\frac{8x^2+40x+48-16x^2-32x-40x-80}{(x^2+5x+6)^2}$$

$$=\frac{-8x^2-32x-32}{(x^2+5x+6)^2}=\frac{8(x^2+4x+4)}{(x^2+5x+6)^2}$$

$\forall\, x\in[2\,;+\infty[$, $f'(x)=\frac{8(x+2)^2}{(x^2+5x+6)^2}$

b) $\forall\, x\in[2\,;+\infty[$, $(x+2)^2>0$ et $(x^2+5x+6)^2>0$ ainsi $f'(x)>0$, donc f est strictement croissante sur $[2\,;+\infty[$

Tableau de variation de f

x	2	$+\infty$
f '(x)	0	+
f(x)	$\frac{22}{5}$ ↗	6

B) $n\geq 2$

1 jeton marqué 1

2 jetons marqués 2

n jetons marqués 3 ($n\geq 2$)

Tirage simultané de 2 jetons de l'urne

Nombre total de jetons dans l'urne : n+3

1°)a)Valeur prises par X

1 jeton marqué 1 et 1 jeton marqué 2 $\Rightarrow X=3$

1 jeton marqué 1 et 1 jeton marqué 3 $\Rightarrow X=4$

2 jetons marqués 2 $\Rightarrow X=4$

1 jeton marqué 2 et 1 jeton marqué 3 $\Rightarrow X=5$

2 jetons marqués 3 $\Rightarrow X=6$

donc $X(\Omega)=\{3\,;4\,;5\,;6\}$

b) Loi de probabilité de X

$$p(X=3)=\frac{C_1^1\times C_2^1}{C_{n+3}^2}=\frac{4}{n^2+5n+6}$$

$$p(X=4)=\frac{C_1^1\times C_n^1+C_2^2}{C_{n+3}^2}=\frac{2(n+1)}{n^2+5n+6}$$

$$p(X=5)=\frac{C_2^1\times C_n^1}{C_{n+3}^2}=\frac{4n}{n^2+5n+6}$$

$$p(X=6)=\frac{C_n^2}{C_{n+3}^2}=\frac{n^2-n}{n^2+5n+6}$$

d'où la loi de probabilité

x_i	3	4
$p(X=x_i)$	$\frac{4}{n^2+5n+6}$	$\frac{2(n+1)}{n^2+5n+6}$

x_i	5	6
$p(X=x_i)$	$\frac{4n}{n^2+5n+6}$	$\frac{n^2-n}{n^2+5n+6}$

2°)a) $E(X)= 3\times\frac{4}{n^2+5n+6}+4\times\frac{2(n+1)}{n^2+5n+6}+$

$5\times\frac{4n}{n^2+5n+6}+6\times\frac{n^2-n}{n^2+5n+6}$

$=\frac{12+8n+8+20n+6n^2-6n}{n^2+5n+6}$

$=\frac{6n^2+22n+20}{n^2+5n+6}$

b) $E(X)=5 \Leftrightarrow \frac{6n^2+22n+20}{n^2+5n+6}=5$

$\Leftrightarrow 6n^2+22n+20=5n^2+25n+30$

$\Leftrightarrow n^2-3n-10=0$

$\Delta=(-3)^2-4(-10)(1)=49 \quad \sqrt{\Delta}=7$

$n=\frac{3+7}{2}=5$ ou $n=\frac{3-7}{2}=-2$ impossible ($n\geq 2$)

donc n=5

c) $\forall\, n\geq 2$, $E(X)= f(n)$, donc d'après A) b) $4{,}4 \leq E(X) < 6$. Ainsi la somme des points marqués est, en moyenne comprise entre 4,4 et 6 quelque soit le nombre n de jetons marqués 3 .

PROBLEME

PARTIE A

1°)a) $\forall\, x>0$, $g'(x)= 2x^2-\frac{2}{x}=\frac{2x^3-2}{x}=\frac{2(x^3-1)}{x}$

$=\frac{2(x-1)(x^2+x+1)}{x}$

(en remarquant que $(x-1)(x^2+x+1)= x^3-1$)

donc $\forall\, x>0$, $g'(x)=\frac{2(x-1)(x^2+x+1)}{x}$

b) $\forall\, x>0$, $x^2+x+1>0$ car son discriminant est négatif et le coefficient de x^2 qui est 1>0 donc le signe de $g'(x)$ est celui de $x-1$

Ainsi $\forall\, x\in]0\,;1[$, $g'(x)<0$

et $\forall\, x\in]1\,;+\infty[$, $g'(x)>0$

c) $\forall\, x\in]0\,;1[$, $g'(x)<0$, donc g est strictement décroissante sur]0 ;1[

$\forall\, x\in]1\,;+\infty[$, $g'(x)>0$, donc g est strictement croissante sur]1 ;+∞[.

$g'(1)=0$

2°)a) Le tableau de variation

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖	↘	$g(1)$	↗	

$g(1)=\frac{5}{3}$

Sur]0 ;+∞[, g est admet un minimum $g(1)>0$, donc $\forall\, x>0$, $g(x)>0$.

PARTIE B

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{3}x-1+\frac{\ln x}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{2}{3}x^3-x^2+\ln x\right)=-\infty$

donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{3}x-1+\frac{\ln x}{x^2}=+\infty$

car $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}=0$

b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$ donc (C) admet une asymptote verticale d'équation x=0

2°)a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(\frac{2}{3}x-1\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}=0$

donc la droite (D) d'équation $y=\frac{2}{3}x-1$ est asymptote oblique à (C)

b) $\forall\, x>0$, $f(x)-\left(\frac{2}{3}x-1\right)=\frac{\ln x}{x^2}$

$\forall\, x>0$, $x^2>0$, donc le signe de $u(x)$ est celui de $\ln x$

x	0	1	$+\infty$
$f(x)-(\frac{2}{3}x-1)$	$-$	0	$+$
position de(C) par rapport (D)	(C) est en-dessous de (D)		(C) est au-dessus de (D)

°)a) $\forall\, x>0$, $f'(x)=\frac{2}{3}+\frac{\frac{1}{x}x^2-2x\ln x}{x^4}$

$$=\frac{2}{3}+\frac{1-2\ln x}{x^3}=\frac{\frac{2}{3}x^3+1-2\ln x}{x^3}$$

onc $\forall\, x>0$, $f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}$

b) $\forall\, x>0$, $x>0$, donc le signe de f'(x) est
elui de g(x) donc d'après A)2°)a)
x >0 f'(x) >0 , donc f est strictement
roissante sur]0 ;+∞[.

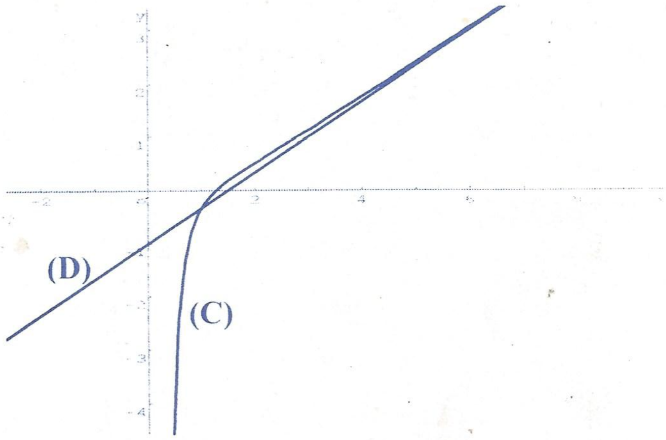
c) Tableau de variation

x	0	$+\infty$
f'(x)		$+$
f(x)		$-\infty \nearrow +\infty$

°)a) Sur]0 ;+∞[, f est continue et
trictement croissante .Donc f réalise une
jection de]0 ;+∞[sur IR (d'après tableau
e variation)
r $0\in$IR, donc l'équation f(x)=0 admet une
nique solution dans]0 ;+∞[.

b) $f(1,15)\times f(1,3)<0$ donc $1,15<\alpha<1,3$

c) Construction de (D) et de (C)



5°) $\lambda>1$

$A(\lambda)=\int_1^{\lambda}[f(x)-(\frac{2}{3}x-1)]\,dx\times ua$ (car sur]1 ;+∞[(C) est au - dessus de (D))

$A(\lambda)=\int_1^{\lambda}\frac{\ln x}{x^2}\,dx\times ua$

Calcul de $\int_1^{\lambda}\frac{\ln x}{x^2}dx$ par une intégration par parties

Posons $u(x)=\ln x \Rightarrow u'(x)=\frac{1}{x}$

$v'(x)=\frac{1}{x^2}\Rightarrow v(x)=-\frac{1}{x}$

$$\int_1^{\lambda}\frac{\ln x}{x^2}dx=\left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^{\lambda}+\int_1^{\lambda}\frac{1}{x^2}dx=\left[-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}\right]_1^{\lambda}$$

$$\int_1^{\lambda}\frac{\ln x}{x^2}dx=-\frac{\ln\lambda}{\lambda}-\frac{1}{\lambda}+1$$

donc $A(\lambda)=(-\frac{\ln\lambda}{\lambda}-\frac{1}{\lambda}+1)\times ua$ or $ua=4cm^2$

donc $A(\lambda)=4\,(-\frac{\ln\lambda}{\lambda}-\frac{1}{\lambda}+1)\ cm^2$

b) $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}A(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}4(-\frac{\ln\lambda}{\lambda}-\frac{1}{\lambda}+1)\ cm^2$

$= 4\ cm^2$

car $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\frac{\ln\lambda}{\lambda}=0$ et $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{\lambda}=0$