MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE
ENSEIGNEMENT GENERAL DU SECOND DEGRÉ
ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHEMATIQUES D'AFRIQUE FRANCOPHONE
A.P.M.A.F

REUSSIR SON EPREUVE DE MATHEMATIQUE AU BAC

EPREUVES DE MATHEMATIQUES AUX BACCALAUREATS D'AFRIQUE FRANCOPHONE

SERIES C & E

TOME 2

OUVRAGE COLLECTIF AUX EDITIONS A.P.M.A.F 2020
ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHEMATIQUES D'AFRIQUE FRANCOPHONE

SUPERVISEUR DES TRAVAUX

Alphonse NDONG MBA
Prof. de Maths au Gabon
+241 65 62 55 82

COLLABORATEURS

Patrick Noël KAM TSEMO
Prof. de Maths au Cameroun
+237 96 44 59 86

Ali SANI
Prof. de Maths au Niger
+227 96 09 05 00

PARTICIPANTS

- François HOUNNOU — Prof. de Maths au Benin — +229 67 13 97 02
- Sylvestre POLLA — Prof. de Maths au Cameroun — +237 91 31 43 84
- Junior YAO YAO — Prof. de Maths en Cote d'Ivoire — +225 09 31 01 01
- Traoré ALMAME — Prof. de Maths au Mali — +223 63 49 22 88
- Robert ALLOH YAOVI — Prof. de Maths au Togo — +228 92 60 69 **35**
- Lamine Mamadou GASSAMA — Prof. de Maths eu Sénégal — +221 77 628 19 30
- Kossi BADJALAWA BAKPEMA — Prof.de Maths au Togo — +228 70 56 87 68
- Moussa DIAW — Prof. de Maths au Senegal — +221 77 478 12 61
- Bernard Jean TCHATCHABLOUKOU — Prof. de Maths au Benin — +229 97 71 55 01
- Amour NGUEFO — Prof. de Maths au Cameroun — +237 67 99 85 838
- Aboubacar CHABI COBI — Inspecteur de Maths au Benin — +229 97 48 56 15
- Med MOCTAR — Prof. de Maths en Mauritanie — +222 27 09 03 60
- Medoune WADE — Prof. de Maths au Sénégal — +221 77 233 05 06
- Benmbarek — Prof. de Maths en Tunisie — +216 29 527 383
- Victor OUOBA — Prof. de Maths au Burkina — +226 76 11 57 40
- Lucien NGUEGUIM POUOKAM — Prof. de Maths au Cameroun — +237 96 09 02 36
- Ousmane BALD — Prof. de Maths en Guinée Conakry — +224 628 82 96 65
- Céleste IBARA — Prof. de Maths en R. du Congo — +242 06 616 86 66
- Abdoul Ahad FALL — Prof. de Maths au Sénégal — +221 77 665 27 69
- Guy Merlin CHEMEGNI — Prof.de Maths au Cameroun — +237 67 41 98 173

PAYS PARTICIPANTS

NOMS PAYS PARTICIPANTS	DRAPEAUX
BÉNIN	
BURKINA FASO	
CAMEROUN	
COTE D'IVOIRE	
GABON	
GUINEE CONAKRY	
MALI	
MAURITANIE	

NIGER	
REPUBLIQUE DU CONGO	
SENEGAL	
TUNISIE	
TOGO	

AVANT PROPOS

L'émergence de l'Afrique sur la scène scientifique mondiale passant indubitablement par l'accès à la culture scientifique, qui n'a pas nécessairement pour but de former de futurs scientifiques, mais d'aider le plus grand nombre à comprendre le monde et permettre à tous de porter un regard critique sur les enjeux des avancées des sciences (risques, utilisation), c'est dans cette optique que nous jeunes Africains avons jugé utile de mettre sur pied cet ouvrage. Ce document est conçu pour aider les élèves à se préparer à l'épreuve de mathématiques aux Baccalauréats. Par une sélection de sujets, les auteurs ont voulu atteindre certains objectifs entre autre : offrir aux élèves curieux, comme à ceux qui sont sensibles au plaisir des Mathématiques et il en existe plusieurs, le bonheur de tutoyer et de s'entraîner à des sujets de mathématiques aux baccalauréats d'autres pays d'Afrique francophone que les leurs, de permettre également aux enseignants de mathématiques de découvrir et d'avoir une idée via les sujets présentés, des approches pédagogiques en vigueur dans les lycées et collèges de certains États francophones de notre chère et beau continent qu'est l'Afrique. La publication du présent document répond à des impératifs liés à la formation et à l'encadrement des futures générations et aux besoins observés en matière d'édition des annales de mathématiques depuis des décennies et faisant office d'innovation en la matière. Force étant de constater que ce manuel ne saurait se substituer aux professeurs dans leurs travaux, ce livre se veut le catalyseur qui permettra le bon déroulement de l'enseignement, de la recherche et qui offre à ses usagers de plus grande chance de réussite au baccalauréat, aux concours à l'échelle nationale en particulier et à l'échelle internationale en général. Il ne s'agit pas d'un traité aux prétentions encyclopédiques mais, plus modestement, d'un outil de travail qui veut éviter à l'élève, comme c'est le cas actuellement, de devoir consulter une demi-douzaine d'ouvrages de pays africains pour découvrir les sujets qui y sont proposés. Vous trouverez ainsi dans ce document des :

- Sujets de mathématiques au Baccalauréat entre 2010 et 2019 de plusieurs pays d'Afrique francophone ;
- Corrigés parfois détaillés pour des éditions ultérieures. Comme sus-cité aux deuxièmes items ci-dessus, il va sans dire que, nous sommes dans l'expectative de la sollicitude de nos frères et collègues Africains et de ce fait, nous tendons les bras grands ouverts à toute personne qui voudrait bien se joindre à nous pour les éditions avenir. Nous sommes convaincus que les efforts qui seront fournis en harmonie et en complémentarité entre les différents acteurs concernés par l'utilisation de ces annales vont contribuer à la réussite et à l'atteinte des objectifs attendus, en particulier la vulgarisation des expériences et la diffusion du savoir et du savoir-faire aux Baccalauréat d'Afrique francophone. La perfection n'étant pas de ce monde, toutes remarques et suggestions pouvant contribuer à son amélioration seront accueillies avec une grande reconnaissance. A cet égard, veuillez bien accepter d'avance, nos plus sincères remerciements.

LES AUTEURS

Sommaire

FRATERNITÉ – JUSTICE – TRAVAIL

SUJETS DES BACCALAUREATS DU BENIN

BACCALAURÉAT SESSION 2019

Contexte : Aménagement du lieu de réception des invités à un mariage

A l'occasion du mariage de sa sœur, Sovi élève en classe de terminale, s'est rapproché de Bio un membre du comité d'organisation de la réception des invités.

Il traduit en langage codé les informations reçues de Bio comme suit : « le comité a prévu l'utilisation de n figure géométriques ($n \in \mathbb{N}$) pour l'embellissement du cadre physique. Le nombre de sièges pour les invités s'écrit $\overline{nnn}$ dans le système de numérotation de base 7 (sept) et $PGCD(n^3 + 5n^2 + n + 5; 3) = 3$ ». L'une de ces figure est un tétraèdre régulier $ABCD$ de l'espace orienté $\mathcal{E}$ et une deuxième figure est l'image de ce tétraèdre par une transformation de $\mathcal{E}$.

Sovi veut déterminer le nombre de sièges, évaluer l'aire de l'un des solides à matérialiser et construire quelques-unes des figures géométriques considérées.

***Tache :* Tu es invité(e) à apporter des réponses adéquates aux préoccupations de Sovi en résolvant les trois problèmes suivants.**

Problème 1 :

1.

a) Justifie que les entiers naturels $(n^2 + 1)$ et 3 sont premiers entre eux. Tu pourras utiliser la congruences de n modulo3.

b) Justifie que $PGCD(n^3 + 5n^2 + n + 5) = PGCD(n + 5\,; 3)$.

c) Déterminer l'ensemble des valeurs de n pour lesquelles $PGCD\ (n^3 + 5n^2 + n + 5) = 3$

2.

a) Justifie que le comité d'organisation a prévu 4 figures géométriques.

b) Ecris dans le système décimal le nombre de sièges réservés aux invités.

Problème2 :

Le tétraèdre ABCD a pour aire en unité d'aire $S = \left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} 64 \sin^3 x \cos(2x)\, dx\right]$

La transformation dont il s'agit est $h_2 o h_1$ où h_1 est l'homothétie de centre A et de rapport 3 et h_2 l'homothétie de centre C et de rapport (-2) l'objet matérialisant l'image par cette transformation du solide sera recouvert peint synthétique.

3. Détermine la nature et les éléments caractéristiques de l'application h_2oh_1.

4.

a) Justifie qu'on a, pour tout nombre réel x,

$\sin^3 x \cos(2x) = -2\cos^4 x \sin x + 3\cos^2 x \sin x - \sin x$.

b) Calcule l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 x \cos(2x)\, dx$.

c) Calcule l'aire de la surface de l'image par h_2oh_1 du tétraèdre ABCD

Problème3 :

Le plan P étant muni d' repère orthonormé directe$(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, une autre figure est une position de la courbe représentative(Γ_1) de la fonction f du vers $[0; +\infty[$ définit par :

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x} + \ln x$$

La quatrième figure géométrique est une portion de l'ensemble(Γ_2) des point N du plan tel que OMN est un triangle rectangle en O et isocèle, M est un point de(Γ_1) et l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}}\right)$ de sens direct.

5.

a) Etude de dérivabilité de f à droite en 1.

b) Achève l'étude des variations de $f$sur $]1; +\infty[$

c) Justifie que f est une bijection.

6.

a) Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2 - x} - x\right)$.

b) Etudie la branche infinie de (Γ_1).

7.

a) Justifie que pour tout x élément de$]1; +\infty[$ l'équation $f'(x)$ =1 est équivalente à l'équation$\sqrt{x^2 - x} = \frac{2x^2 - x}{2(x-1)}$.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{x^2 - x} = \frac{2x^2 - x}{2(x-1)}$.

c) Déduis-en que l'équation $f(x) = x$ admet dans $]1; +\infty[$ une solution unique a et que $1 < a < 2$.

8.

a) **Etudie la position relative de(Γ_1) et de la droite (Δ) d'équation $y = x$.**

b) **Trace la courbe(Γ_1).**

9.

a) **Justifie que (Γ_2) est l'image de(Γ_1) par une rotation r que tu caractériseras.**

b) **Justifie que(Γ_2) est l'ensemble des points de coordonnés (x, y) telle que**

$\sqrt{y^2 - y} + \ln y + x = 0$.

c) **Démontre que (Γ_2) est l'image de la courbe de la bijection réciproque f^{-1} de f par une symétrie orthogonale dont tu préciseras l'axe.**

d) **Construis (Γ_2).**

BACCALAURÉAT SESSION 2018

<u>Contexte</u> : Premiers pas d'un jeune diplômé sur le marché du travail.

A peine sorti de l'école nationale de génie civil, Codjo vient de décrocher un premier contrat de prestation de service : réfectionner la salle de spectacle de l'arrondissement de Valo. Le dossier technique mentionne, entre autres, la décoration de la salle et le renouvellement des sièges. Il y a été utilisé par endroits un langage mathématique auquel Codjo est habitué depuis sa formation : « Chaque siège aura la forme d'un tronc de pyramide. Les sommets de la base de cette pyramide, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, sont des points images des solutions non imaginaire de l'équation (E): $(z-3i)5-\bar{z}-3i\ =\ 0$, d'inconnue z, nombre complexe dont le conjugué est noté $\bar{z}$. »

Cossi, un jeune frère de Codjo élève en classe terminal scientifique, est intéressé par l'étude des diverses configurations que présente le projet, ainsi que les calculs y afférents.

<u>Tâche</u> : Tu es invité(é) à trouver des réponses aux préoccupations de Cossi en résolvant les trois problèmes ci-après.

Problème 1

1.

- **a) Vérifie que $3i$ est solution de l'équation (E).**
- **b) Démontre que si z est solution de (E), distinctes de $3i$ alors $|z - 3i| = 1$.**
- **c) Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation (E).**

2.

- **a) Justifie que les points images des solutions de l'équation (E), distincts du point A d'affixe $3i$ sont les sommets d'un polygone régulier.**
- **b) Déduis-en la nature d'une base du tronc de pyramide représentant le siège.**

Problème 2

En vue de la décoration de la salle de spectacles, il doit être matérialisé sur l'un des murs, un domaine (D) déterminé par la courbe (Γ_1), représentative de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \ln\left(2x + \sqrt{4x^2+1}\right)$ et par le symétrique (Γ_2) de (Γ_1) par rapport à la droite d'équation $y = x$.

3.

- **a) Justifie que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.**

b) Démontre que l'origine du repère est centre de symétrie de (Γ_1).

c) Calcule la limite de f en $+\infty$. Déduis-en la limite de f en $-\infty$.

d) Justifie que f est croissante sur $\mathbb{R}$.

4.

a) Calcule $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$. Déduis-en $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$.

b) Etudie les branches infinies de la courbe (Γ_1).

5.

a) Etudie les variations de la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par :

$u(x) = x - \ln(2x + \sqrt{4x^2 + 1}$.

b) Justifie que l'équation $u(x) = 0$ admet trois solutions dont l'une est 0 et les deux autres sont opposées. On note α la solution strictement positive de l'équation $u(x) = 0$.

c) Vérifie que : $2,1 < \alpha < 2,2$.

d) Étudie la position relative de (Γ_1) par rapport à la droite d'équation $y = x$.

6. Trace les courbes $(\Gamma_1), (\Gamma_2)$ et la droite d'équation $y = x$ dans un même repère.

7.

a) Justifie que f est bijective.

b) Démontre que (Γ_2) est la courbe de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par

$h(x) = \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})$.

8. Le domaine (D) est délimité par les courbes $(\Gamma_1), (\Gamma_2)$ et les droites d'équations $x = -\alpha$ et $x = \alpha$.

a) Justifie que l'aire de (D) vaut 4 fois celle du domaine (D_1) délimité par (Γ_2) et les droites d'équations $y = x$, $x = 0$ et $x = \alpha$.

b) Calcule l'aire de (D_1) en fonction de α.

c) Déduis-en une valeur approchée de l'aire du domaine (D).

Problème 3

La décoration de la salle sera réalisé par les matériaux locaux de deux types m_1 et m_2. Un matériau de type m_1 coûte 100 francs, un matériau de type m_2 coûte 120 francs et le prix d'achat de ces matériaux s'élève à 11.040 francs. Par ailleurs le nombre de matériaux de type m_1 divise le nombre de matériaux de type m_2. Trois barres lumineuses forment un triangle équilatéral BCD de côté 1. Les matériaux serviront à

concrétiser deux ensembles (Γ_3) et (Γ_4) de points de l'espace orienté (E). (Γ_3) est l'ensemble des points M de $(\mathcal{E})$ tels que :

$MB^2 + MC^2 + 2MD^2 = 2$ et (Γ_4) est l'image de (Γ_3) par l'application g de $(\mathcal{E})$ dans $(\mathcal{E})$ qui à tout point M associe le point M' tel que :

$$\left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}\right) \wedge \overrightarrow{CD} + 2\,\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M'C} + \overrightarrow{MD} = \vec{0}\ .$$

9. Détermine le nombre de matériaux de chaque type.

10. Justifie que :

a) Pour tout point M de $(\mathcal{E})$ on a :

$$\left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}\right) \wedge \overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{CD}\ .$$

b) Pour tout point M et M' de $(\mathcal{E})$ on a :

$$g(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{CD}\ .$$

c) g admet un seul point invariant I.

11. Démontre que g est une homothétie dont tu préciseras les caractéristiques.

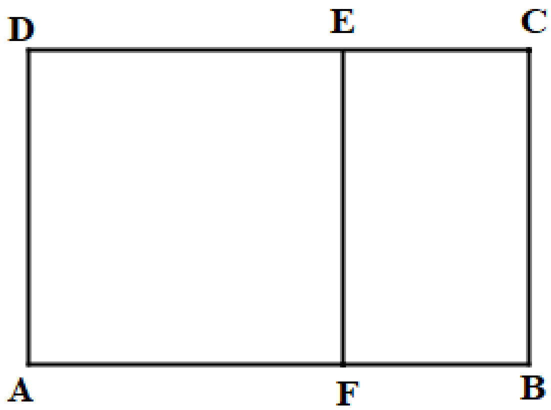
12.

a) Démontre que (Γ_4) est une sphère.

b) Justifie que l'aire totale des surfaces de (Γ_3) et (Γ_4) vaut 10 fois celle de (Γ_3).

Contexte : *Etude du projet de construction d'une maison.*

Sur un domaine $ABCD$ de forme rectangulaire, Arouna, le propriétaire décide d'ériger une maison. Dans le dossier technique, l'architecte en charge du projet propose un aménagement comme l'indique la figure ci-après :



La partie représentée par le carré $AFED$ est destinée au bâtiment et l'autre partie au jardin et autres ouvrages.

L'architecte affirme que pour réaliser le découpage du domaine, il a utilisé une similitude direct γ qui transforme les points A, B, C et D respectivement en B, C, E et F.

N'étant pas outillé pour comprendre le dossier, Arouna sollicite son fils Ousmane, élève en terminale C, pour mieux apprécier certaines informations qui y sont contenues. Afin de vérifier l'existence de la similitude γ, Ousmane suppose que $AD = 1$ et $AB = l\ (l > 1)$, puis il munit le plan du repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AD})$. Il s'intéresse par ailleurs à la quantité de carreaux à utiliser pour le revêtement du plancher dans les pièces du bâtiment et aussi à la configuration du jardin.

Tâche : Tu es invité(e) à aider Ousmane à répondre à ses différentes préoccupations en résolvant les problèmes ci-après.

Problème 1

1. **Ousmane suppose que la similitude γ existe.**
   a) **Démontre que l'on a : $\frac{1}{l} = l - 1$.**
   b) **Déduis-en que : $l = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.**

c) Détermine le rapport et l'angle de la similitude γ.

2.

a) Justifie l'existence d'une similitude directe γ' qui transforme A en B et B en C.

b) Démontre que dans le repère $(A; \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AD})$, la similitude γ' a pour écriture complexe : $z' = \frac{\sqrt{5}-1}{2} iz + \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

c) Détermine les images des points C et D par γ'.

d) Justifie que l'architecte a raison au sujet du procédé de découpage du domaine.

Problème 2

Il est prévu que le plancher des pièces du bâtiment seront carrelés.

3. Le plancher de la salle à manger a la forme d'un rectangle dont les dimensions sont : $4,54m$ et $3,75m$. On veut carreler cette pièce avec des carreaux carrés de $33cm$ de côté. On commence la pose à partir d'un coin de la pièce.

a) Justifie que qu'il n'est pas possible de couvrir le plancher de cette pièce avec uniquement des carreaux entiers (sans découpe).

b) Effectue la division euclidienne de 454 par 33. Déduis-en le nombre de carreaux non découpés qui sont posés dans le sens de la longueur.

c) Détermine le nombre de carreaux non découpés qui seront posés dans cette pièce.

4. Le plancher de la cuisine a la forme d'un rectangle de dimension $4,55m$ et $3,85m$. On veut utiliser deux types de carreaux pour son revêtement : des pièces carrées de type T_1 de $15cm$ de côté et des pièces carrées de type T_2 de $35cm$ de côté; on doit utiliser plus de pièces de type T_2 que de pièces de type T_1.

a) Justifie que le nombre a de carreaux du type T_1 et le nombre b de carreaux du type T_2 sont tels que : $9a + 49b = 7007$.

b) Résous dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $9a + 49b = 7007$.

c) Détermine le nombre de pièces de chaque type que l'on peut poser dans la cuisine.

Problème 3

Pour rendre attrayante la cour de la maison, l'architecte a prévu un parterre de fleurs suivant des configurations bien précises. L'une des configurations est modélisée par une

portion (Γ) de l'ensemble des points M dont les coordonnées $(x;y)$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ Vérifient :$\frac{3\ln y}{\sqrt{y}}+y-1-|x|=0$.

5. **On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=2x\sqrt{x}-3\ln x+6$.**
   a) **Étudie le sens de variation de g.**
   b) **Justifie que g admet un minimum que tu préciseras.**
   c) **Détermine le signe de $g(x)$ pour tout x élément de l'intervalle $]0;+\infty[$.**
6. **On considère la fonction f de $]0;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x)=\frac{3\ln x}{\sqrt{5}}+x-1$.**
   a) **Démontre que f est une application.**
   b) **Étudie les limites de f à droite en 0 et en $+\infty$.**
   c) **Étudie le sens de variation de f.**
   d) **Dresser le tableau de variation de f.**
   e) **Déduis-en le signe de $f(x)$ pour tout x élément de $]0;+\infty[$.**
7. **On note (C) la courbe de f dans le plan muni du repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.**
   a) **Démontre que la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est asymptote à (C).**
   b) **Étudie la position relative de (C) et (D).**
   c) **Trace la courbe (C).**
8.
   a) **Démontre que f est une bijection. On note (C') la courbe représentative de sa bijection réciproque.**
   b) **Soit $M(x;y)$ un point de (Γ). En remarquant que $f(y) = |x|$, démontre que $y \geq 1$.**
   c) **Démontre que (Γ) est la réunion d'une portion (Γ_1) de (C') et son symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.**
   d) **Trace (Γ) dans le même repère que (C).**

__Contexte__ : Planification de la phase opérationnelle d'un projet agricole

Pour accéder au crédit mis en place pour l'entrepreneuriat des jeunes, Soton un jeune diplômé sans emploi a décidé de monter un projet de culture du jasmin, un arbuste à fleurs dont la senteur très appréciée est recherchée dans la fabrication des produits cosmétiques. Il prévoit dans son projet, la confection de plaques métalliques pour clôturer le lieu d'implantation de la culture. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(\Omega; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, le sol est représenté par le plan (Q) passant par le point $O(0;4;0)$ et de vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\-3\end{pmatrix}$. Les plaques sont assimilables aux plans $(\mathcal{P})$ et $\mathcal{P}')$ tels que $(\mathcal{P})$ a pour équation : $x - y + z - 3 = 0$ et $S_{(\mathcal{P})} \circ S_{(\mathcal{P}')} = t_{\vec{u}}$; avec $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\+2\\-2\end{pmatrix}$, $S_{(\mathcal{P})}$ et $S_{(\mathcal{P}')}$les réflexions de plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ respectivement et $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$.

En vue de l'arrosage, un accord est placé dans le plan de repère $(O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ tels que : $\overrightarrow{e_1} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\vec{\imath} + 2\vec{\jmath})$ et $\overrightarrow{e_2} = \frac{1}{\sqrt{70}}(6\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + 5\vec{k})$ et suivant un itinéraire qui coïncide avec une portion de la courbe (C) représentative des variations d'une fonction numérique f de variable réelle x. Le traitement des jeunes plants de jasmin consiste en une pulvérisation avec un produit chimique contenu dans un autre accord muni de robinet qui sera placé suivant un itinéraire qui coïncide dans le plan (Q) avec une portion d'une courbe (Γ).

Sovissi, élève en classe de terminale scientifique, a pris connaissance du projet de son frère aîné Soton et s'interroge sur certains aspects techniques notamment e système d'irrigation et de traitement phytosanitaire des plants.

__Tâche__ : Tu es invité(e) à répondre aux préoccupations de Sovissi en résolvant les trois problèmes suivants :

Problème 1

1.

a) Détermine une équation cartésienne de (Q).

b) Prouve que les plans (Q) et (P) sont perpendiculaires suivant une droite (Δ) dont tu détermineras un système d'équation cartésienne.

2. Détermine une représentation paramétrique de $(\mathcal{P}')$.

3.

a) Démontre que $(O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est un repère orthonormé du plan (Q).

b) Détermine dans le repère $(O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ l'expression analytique de la restriction h au plan (Q) de la réflexion $S_{(\mathcal{P})}$.

Problème 2

En réalité f est la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{x}{2^{|x|}+1}$. La courbe (Γ) est l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan (Q) vérifiant l'égalité :

$$1 + x - y + (3 + x) \times 2^{|y+2|} = 0$$

obtenue à l'aide de la transformation du plan $\varphi = S \circ t$; S est la symétrie orthogonale d'axe (Δ') : $y = x$ et t la translation de vecteur non nul.

4.

a) Détermine l'ensemble de définition de f.

b) Prouve qu'il suffit d'étudier f sur $]-\infty; 0]$ pour tracer la courbe (C).

5. g est la fonction définie sur $]-\infty; 0]$ par : $g(x) = 1 + 2^x + x\ln 2$.

a) Étudie les variation de la fonction g.

b) Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $]-\infty; 0]$, une unique solution α telle que : $-1{,}9 < \alpha < -1{,}8$.

c) Déduis-en le signe de $g(x)$ sur $]-\infty; 0]$.

6.

a) Calcule la limite de f en $-\infty$.

b) Étudie la dérivabilité de f à gauche en 0 et donne une interprétation géométrique du résultat.

c) Étudie les variations de la fonction f sur $]-\infty; 0]$.

d) Construis la courbe (C) dans le repère $(O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

7.

a) Détermine une équation de l'image (C') de (C) par la translation t de vecteur $\vec{v}\binom{-2}{-3}$.

b) Déduis-en que $(\Gamma) = \varphi[(C)]$.

c) Démontre que φ est une symétrie glissée dont tu préciseras les éléments caractéristiques.

8. Construis (Γ) dans le repère $(O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

Problème 3

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x+x^2}\,dx$.

On estime que le produit chimique destiné au traitement des jeunes plants de jasmin éliminera à la n^{ieme} semaine de traitement u_n kilogrammes d'insectes et de parasites.

La pulvérisation et le traitement des plants se font à des intervalles de temps régulier, soit toutes les T_1 heures pour la pulvérisation et toutes les T_2 pour l'arrosage. On suppose que $T_2 < T_1 < 48$ et que dans $\mathbb{Z}/_{101\mathbb{Z}}$ les classes $\overline{T_1}$ et $\overline{T_2}$ sont les solutions de l'équation (E): $x^2 + \overline{23}x + \overline{98} = \overline{0}$.

9.

a) **Justifie que $\left(\mathbb{Z}/_{101\mathbb{Z}}, +, \times\right)$ est un corps.**

b) **Développe et réduis $(x - \overline{36})(x - \overline{42})$ dans $\mathbb{Z}/_{101\mathbb{Z}}$.**

c) **Résous dans $\mathbb{Z}/_{101\mathbb{Z}}$, l'équation (E).**

d) **Déduis-en la prochaine date à laquelle les plants ont été simultanément arrosés et pulvérisés, les robinets ayant été mis en marche le 14 Juin 2015 à 6 heures.**

10.

a) **Justifie que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de termes positifs.**

b) **Etudie le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.**

c) **Déduis-en que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente .**

d) **Démontre que pour tout x élément de $[0; 1]$, $\frac{x^n}{3} \leq \frac{x^n}{1+x+x^2} \leq x^n$.**

e) **Déduis-en la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.**

BACCALAURÉAT SESSION 2015

<u>Contexte</u> : *Souvenir d'argent en GRVC*

Assiba, étudiante en agronomie, a effectué un stage dans un *Groupement Régional à Vocation Coopérative* qui produit des huiles végétales. Plusieurs équipes de femme participe aux activités dont le stockage des huiles dans les cuves. si les N femme de ce GRVC se constituent en équipe de 6 pour remplir les cuves, il en reste 4 pour s'occuper des divers activités d'entretien. Mais pour qu'elles forment des équipes de 11 en nombre suffisant, elles ont recours aux services de 9 stagiaires. Cette intégration des stagiaires aux équipes offre à Assiba l'occasion d'étudier l'évolution du bénéfice de la coopérative.

Pour élaborer son rapport de stage, Assiba se fait aider de son jeune frère Gawé, élève en classe de terminale C, à qui elle confie la détermination de l'entier naturel N $(120 < N < 240)$, l'étude des caractéristiques des cuves, ainsi que l'évolution des bénéfices engrangées par le GRVC.

***<u>Tâche</u>* : Tu es invité(e) à trouver une réponse aux préoccupations de Assiba en aidant Gawé à résoudre les trois problèmes suivant.**

Problème 1

1.

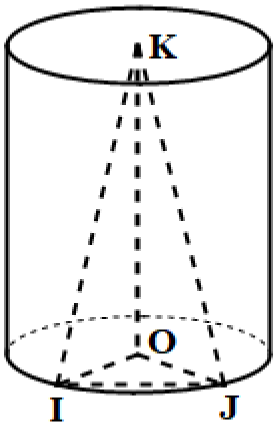
- ***a)*** ***Justifie que*** N ***vérifie le système*** $\begin{cases} \mathrm{N} \equiv 4[6] \\ \mathrm{N} \equiv 2[11] \end{cases}$.
- ***b)*** ***Déduis-en l'existence de deux entiers naturels*** p ***et*** q ***tels que :*** $\mathrm{N} = 6\mathrm{p} + 4$ ***et*** $11\mathrm{p} - 6\mathrm{q} = 2$ **.**

2.

- ***a)*** ***Résous dans*** $\mathbb{Z}^2$ ***l'équation*** $11\mathrm{x} - 6\mathrm{y} = 2$ **.**
- ***b)*** ***Déduis-en la valeur de*** N**.**
- ***c)*** ***Vérifie que*** N ***s'écrit*** $\overline{262}$ ***en base*** 8**.**

Problème 2

L'une des cuves servants à conserver l'huile a la forme d'un cylindre ayant à l'intérieur une partie tétraédrique $KOIJ$, une ouverture et deux robinets R_1 et R_2. Le point O est le centre du disque de base sur lequel repose le cylindre; le triangle OIJ est isocèle et rectangle en O ; le segment $[OK]$ est la hauteur du cylindre; $OI = 1m$ et $OK = 2m$:



Le robinet R_1 est placé au point A tel que : $\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OI} + \frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{OJ} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OK}$.

L'ouverture sur la base supérieure est délimitée par l'ensemble (Γ) des points M du plan rapporté au repère $(K; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ tels que : $2ME^2 - 4MF^2 + 2MG^2 - 4MH^2 = -5$ avec $EFGH$ un carré de centre K et $KG = 1$. Gawé munit l'espace du repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tel que $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$, $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$ et $\vec{k} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OK}$.

3. Détermine les coordonnées du point A.
4. Le robinet R_2 est placé au point B, image du point A par l'application $s_1 \circ s_2$ où s_1 est la réflexion du plan (KOI) et s_2 est la réflexion du plan (KOJ).
   a) Justifie que $s_1 \circ s_2$ est un demi-tour dont tu préciseras l'axe (Δ).
   b) Détermine les coordonnées du point B.
5. La partie tétraédrique contient un liquide de refroidissement et l'huile est stockée dans la partie restante du cylindre.

   Calcule le volume d'huile qu'on peut stocker dans la cuve.
6.
   a) Justifie que K est le barycentre des points pondérées $(E, 2)$; $(F, -4)$; $(G, 2)$ et $(H, -4)$.
   b) Détermine l'ensemble (Γ).

Problème 3

Une étude a permis de savoir qu'en fonction du nombre d'années x d'existence de ce GRVC, le bénéfice réalisé en millions de franc CFA est donné par : $f(x) = e^{\frac{2x-1}{x}} - x$ avec $x > 0$.

7. Démontre que f admet un prolongement par continuité en 0.

On note g ce prolongement par continuité, et on note (C) la courbe représentative de g dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

8.

a) Démontre que g est continue sur $[0; +\infty[$.

b) Étudie la dérivabilité de g à droite en 0 et donne une interprétation du résultat.

c) Calcule $g'(x)$ et $g''(x)$ pour x élément de $]0; +\infty[$.

9.

a) Étudie le sens de variation de g' sur $]0; +\infty[$.

b) Démontre que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} g'(x) = -1$.

c) Dresse le tableau de variation de g'.

d) Démontre que l'équation $g'(x) = 0$ admet deux solutions α et β tels que : $0{,}1 < \alpha < 0{,}2$ et $2{,}1 < \beta < 2{,}2$.

e) Détermine le signe de $g'(x)$ pour tout x élément de $]0; +\infty[$.

10.

a) Étudie les variations de g.

b) Démontre que $f(\alpha) = \alpha^2 - \alpha$ et $f(\beta) = \beta^2 - \beta$.

Déduis-en un encadrement de chacun des nombres $f(\alpha)$ et $f(\beta)$.

c) Trace la courbe (C) sur l'intervalle $[0; 7]$.

11. Précise l'année au cour de laquelle la coopérative réalise son bénéfice maximum, ainsi que ce bénéfice.

BACCALAURÉAT SESSION 2014

Contexte : Confection d'une tenue royale

Après son admission à la retraite, monsieur KOTO, précédemment professeur de mathématiques, a été désigné pour être le nouveau chef de sa collectivité. Comme il est de coutume, le nouveau chef doit se faire confectionner une tenue spéciale pour l'intronisation. C'est ainsi que Koto a décidé de se confectionner une tenue qui reflète sa profession.

Afin de garder secrète les spécificités de la tenue, Koto confie à son fils Koffi, élève en terminale C, des informations codées à décrypter au couturier chargé de la confection de la tenue. C'est ainsi qu'il a été retenu que le couturier devra disposer de deux types T_1 et T_2 de perles. Les perles du type T_1 seront réparties sur la trace d'une ligne courbe (Γ) et celles du type T_2 sur une autre ligne courbe (Γ'). Le nombre a de perle du type T_1 et le nombre b de perle du type T_2 vérifient la relation : $b = 6a^4 + 3a^2 + 4a + 1$ avec $a \geq 2$.

Pour coder cette relation, Koto recommande à Koffi de mémoriser suivant les valeurs de l'entier a, l'écriture de b dans base a.

Enfin, Koffi a été informé que a est aussi la plus petite valeur de l'entier n tel que le nombre complexe $\left(1 + e^{i\frac{\pi}{5}}\right)^n$ soit imaginaire pur. Une fois chez le couturier, Koffi veut lui expliquer le travail à faire.

Tâche : Tu es invité(e) à aider Koffi dans sa mission en résolvant les trois problèmes.

Problème 1

1. **Précise les différentes expressions de b que Koffi a utilisée pour mémoriser la relation considérée (*Tu donneras suivant les valeurs de a, l'écriture de b dans la base a.*).**
2.
   a) **Justifie que : $1 + e^{i\frac{\pi}{5}} = (2\cos\frac{\pi}{10})e^{i\frac{\pi}{10}}$**

   b) **Déduis-en le module et un argument de $1 + e^{i\frac{\pi}{10}}$.**

   c) **Justifie que le nombre de perles du type T_1 est 5.**
3. **Calcule le nombre de perles du type T_2.**

Problème 2

La ligne (Γ) est obtenue à partir d'un carré $ABCD$ du plan (P) orienté tel que $\frac{\pi}{2}$ est une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}})$ et $AB = 1$; s_1 étant la réflexion d'axe (AB), r_1 la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$, (Γ) est l'image par $r_1 \circ s_1$ de l'ensemble (Γ_1) des points M du plan (P) tels que : $MA^2 + 4MB^2 - MC^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}MN^2$ où N est l'image de M par l'affinité orthogonale d'axe la droite (AB) et de rapport 3.

4.

a) Construis le barycentre E des points pondérés $(A ; 1)$, $(B ; 4)$ et $(C ; -1)$.

b) Justifie que $EA^2 + 4EB^2 - EC^2 = \frac{1}{4}$.

c) Justifie qu'un point M appartient à (Γ_1) si et seulement si $\frac{ME}{MN} = \frac{1}{4}$.

d) Déduis-en la nature de (Γ_1).

5. Soit s la réflexion d'axe (CD).

a) Détermine la droite (Δ) telle que : $r_1 = s_2 \circ s$ où s_2 est la réflexion d'axe (Δ).

b) Justifie que : $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\,\overrightarrow{AD}$.

c) Déduis-en la nature et les éléments caractéristiques de $r_1 \circ s_1$.

6.

a) Justifie que (Γ) est une ellipse.

b) Précise les sommets de (Γ).

c) Construis (Γ).

Problème 3

La ligne (Γ') est obtenue à l'aide de la courbe (Γ_2) dans le plan (P) muni du repère orthonormé $(O ; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$; la courbe (Γ_2) est la représentation graphique de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{x}{x+e^x}$.

7.

a) Étudie les variations de la fonction u de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par

$$u(x) = e^x + x.$$

b) Justifie que l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique α.

c) Justifie que $-1 < \alpha < \frac{1}{2}$

d) Étudie le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x.

8.

a) Étudie les variations de $\boldsymbol{f}$.

b) Construis la courbe (Γ') représentant la fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\boldsymbol{g(x) + f(|x|) = 0.}$$

<u>Contexte</u> : Premier pas d'un jeune bachelier en Architecture

Jean est un lauréat du baccalauréat série C, il se propose d'utiliser ses connaissances pour l'élaboration du plan et de la décoration de la nouvelle maison que son père projette de construire. Dans ses préoccupations, il suggère la construction d'une paillote dont le plancher aura la forme de l'ensemble (Σ) des points M du plan tels que : $MF + MF' \leq 5$ où F et F' sont deux points distincts données du plan, matérialisé par le plancher (unité de longueur $1\ m$). La toiture de cette paillote aura la forme d'une pyramide de sommet S. Jean se propose également de dessiner le motif décoratif du mur de la clôture de la maison. Son père veut en savoir un peu plus sur ses intentions.

Pour satisfaire la curiosité de son père, Jean a choisi dans le plan du sol un point O, puis il a défini un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace tel que le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ soit un repère du plan du plancher.

Dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, Jean a choisi $F\left(\frac{3}{2}\,;0\right)$ et $F'\left(\frac{-3}{2};\ 0\right)$ et a tracé l'ensemble (Γ) des points M tels que $MF + MF' = 5$. Jean explique que dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, les coordonnées du point S seront des entiers naturels.

<u>Tâche</u> : Tu es invité (e) à résoudre les problèmes suivants en vue de te faire une idée plus précise du projet de Jean.

Problème 1

1.
   a) Justifie que (Γ) est une ellipse.
   b) Précise le centre et l'excentricité de (Γ).
   c) Détermine une équation de (Γ) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

2.
   a) Précise les coordonnées des sommets de (Γ).
   b) Trace (Γ).
   c) Explique comment Jean a pu tracer (Γ) sur le plancher.

Problème 2

Jean a expliqué que deux faces de la pyramide représentant la toiture de la paillote sont contenues dans les plans (P_1) et (P_2) d'équations respectives : $x + 2y + 2z - 16 = 0$ et

$11x + 9y - 2z - 19 = 0$ dans le repère $(O\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})$.

3.

a) Démontre que (P_1) et (P_2) sont sécants suivant une droite (Δ).

b) Démontre que si $M\ (x;\ y;\ z)$ est un point de (Δ) alors : $12x + 11y = 35$.

c) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $12x + 11y = 35$ d'inconnus $(x\,;y)$.

d) Détermine les points de (Δ) dont toutes les trois coordonnées sont entiers relatifs.

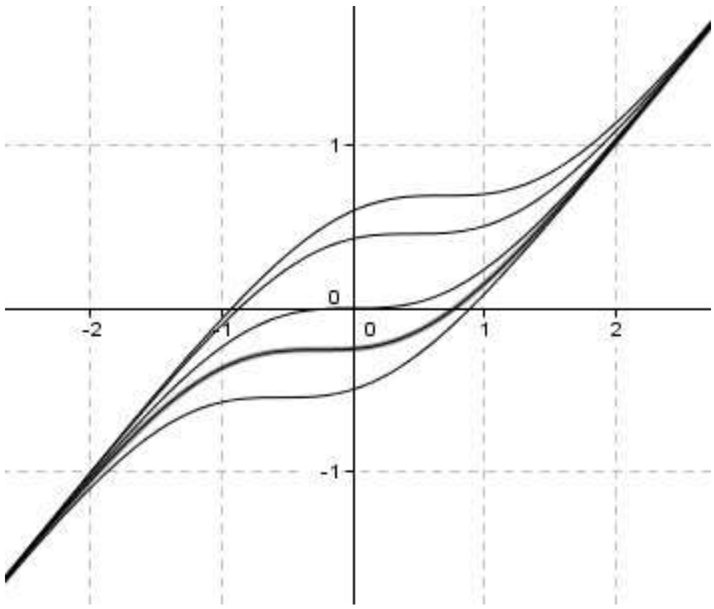
4.

a) Détermine les coordonnées du point S.

b) Calcule du point S au plan du plancher.

Problème 3

La figure ci-après représente une partie du motif de la décoration que propose Jean pour le mur de la clôture.



Il l'a obtenu en représentant dans un repère orthonormé (Unité 2 cm) quelques courbes de la famille de courbes (C_k) représentatives des fonctions :

$$f_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x + \frac{1 - ke^{2x}}{1 + ke^{2x}}$$

5.

a) Justifie que l'ensemble de définition de f_k est $\mathbb{R}$.

b) Détermine les limites de f_k aux voisinages de $-\infty$ et $+\infty$.

6.

a) Justifie que les fonctions f_k sont solutions de l'équation différentielle :
$y' = (y - x)^2$.

b) Justifie que les fonctions dérivées f'_k des fonctions f_k s'annulent pour un seul nombre x_k que tu préciseras.

c) Détermine le sens de variation de f_k.

d) Dresse le tableau de variation de f_k.

7. Soit A_k le point de (C_k) d'abscisse x_k.

a) Précise les coordonnées de A_k.

b) Justifie que tous les points A_k appartiennent tous à une même droite.

8.

a) Démontre que pour tout nombre réel x :

i. $f_k(x) = x - 1 + \frac{2}{1+ke^{2x}}$

ii. $f_k(x) = x + 1 - \frac{2ke^{2x}}{1+ke^{2x}}$

b) Démontre que les droites (Δ_1) et (Δ_2) d'équations respectives $y = x + 1$ et $y = x - 1$ sont des asymptotes aux (C_k).

c) Étudie la position relative des (C_k) par rapport aux droites (Δ_1) et (Δ_2).

9.

a) Détermine la valeur de k pour laquelle (C_k) passe par l'origine du repère.

b) Trace les courbes $\left(C_{\frac{1}{4}}\right)$, (C_1) et (C_3) dans le même repère.

10. Jean propose de compléter son motif en traçant les courbes (Γ_k) d'équations :
$x = f_k(y - 1)$.

a) Justifie que les fonctions f_k sont des bijections.

b) Soit $f_k{}^{-1}$ les bijections réciproques des f_k. Étudie la dérivabilité de $f_k{}^{-1}$.

c) Démontre que les courbes (Γ_k) sont les images des courbes (C_k) par une isométrie plane s.

d) Caractérise s.

BACCALAURÉAT SESSION 2012

<u>Contexte</u> : Conception d'un centre de loisirs

Ali a hérité d'un domaine sur lequel il veut construire un centre de loisirs. Son fils Bio, titulaire d'un baccalauréat scientifique s'intéresse au volet esthétique du centre. Pour cela, il construis la famille de courbes (C_m) d'équation : $(m-2)x^2 + y^2 - 2y - 5 + m = 0$ dans le plan complexe , muni du repère orthonormé direct $(O;\ \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, m étant un paramètre réel. Il utilise l'image (Γ) d'une courbe par une transformation du plan.

<u>Tâche</u> : Tu es invité(e) à répondre au préoccupations de Bio en résolvant les trois problèmes suivant :

Problème 1

1. **Soit $M(x;\ y)$ un point du plan (P).**

   Justifie que : $M(x;\ y) \in (C_m) \Leftrightarrow \left((m-2)x^2 + (y-1)^2 = (6-m)\right)$.

2.
   a) **Etudie le signe de $\frac{6-m}{m-2}$ suivant les valeurs de m, où m différent de 2.**

   b) **Précise la nature de (C_1).**

   c) **Étudie suivant les valeurs de m, la nature de (C_m).**

Problème 2

Bio choisit la courbe (Γ) représentative de la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + ln(x)$, la transformation φ telle que : $\varphi = t\, o\gamma$ où t est la translation de vecteur $\vec{e}_1 - \vec{e}_2$ et γ est la réflexion d'axe (Δ) d'équation $y = x$. Il s'agit de rechercher un point I de (Γ), un point J de (C_4) tels que : $\varphi(I) = J$ et de matérialiser ces points à l'aide d'indication à présenter aux ouvriers sur le chantier de construction du centre de loisirs.

3. **Étudie :**

   b) **les variations de f.**

   c) **les variations de la fonction v de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :**

   $v(x) = x^2 - x + ln(x)$.

   d) **le signe de $v(x)$ pour tout nombre réel strictement positif x.**

   e) **la position relative de (Γ) par rapport à la droite (Δ).**

4.

a) Démontre que l'équation $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = 0$ admet dans $\mathbb{R}_+^*$ une solution unique $\boldsymbol{\alpha}$.

b) Justifie que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

5.

a) Détermine l'écriture complexe de $\boldsymbol{\varphi}$.

b) Précise la nature et les éléments caractéristiques de $\boldsymbol{\varphi}$.

c) Représente (Γ') l'image de (Γ) par $\boldsymbol{\varphi}$.

6. (Γ') coupe (C_4) en deux points $\boldsymbol{J_1}$ et $\boldsymbol{J_2}$. Donne une méthode de construction d'un point $\boldsymbol{I}$ de (Γ) tel que : $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{I}) = \boldsymbol{J}$ où $\boldsymbol{J}$ est un élément de $\{\boldsymbol{J}_1; \boldsymbol{J}_2\}$.

Problème 3

Compte tenu de la superficie, Bio veut qu'on installe un nombre $\boldsymbol{a}$ de chaises et un nombre $\boldsymbol{b}$ de tables pour les grandes économies.

D'après ses calculs, il se rend compte que : $\begin{cases} 3a + 7b = 1020 \\ PGCD(a; b) = 20 \end{cases}$

7. **Détermine le nombre de chaises et le nombre de tables à installer.**

BACCALAURÉAT SESSION 2011

Contexte

Pour susciter l'inscription des élèves en série C, la commune de DUNYA a organisé un championnat doté de prix pour les élèves de terminale C. la cérémonie de remise des récompenses a été organisée au CEG EFI. Les élèves de la classe de terminale C ont été chargés de la préparation de la salle des fêtes.

Deux cents (200) chaises ont été déplacées des salles de classe vers la salle des fêtes par un groupe d'élèves constitués de garçons et filles. Les garçons ont chacun pris 8 chaises et les filles ont pris chacune 5 chaises. Il y a plus de garçons que de filles dans le groupe.

Patrick qui est un élève doué en informatique, a décidé de projeter sur l'un des murs de la salle des fêtes des décorations lumineuses obtenues en traçant sur un ordinateur des configurations planes.

Bio, un élève de terminale C d'un établissement voisin, qui a pris part à la cérémonie, est impressionné par le travail accompli par ses camarades. Le responsable de la terminale C du CEG EFI, demande à Bio de déterminer le nombre u de garçons et celui v de filles ayant procédé au ramassage de chaises.

Tâche : Tu vas résoudre les trois problèmes ci-après afin, de mieux appréhender le travail abattu par les élèves.

Problème 1

1. **Justifie que $8u + 5v = 200$.**
2. **Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $8u + 5v = 200$.**
3. **Déduis-en les valeurs de u et v**

Problème 2

Le premier prix décerné pour ce championnat est un objet en verre en forme de cube $ABCDEFGH$ comportant la configuration (Γ) de l'espace définie par l'ensemble des points M de l'espace tels que : $\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right).\left(\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{MH}\right)=0$ et l'image (Γ') de (Γ) par la réflexion de plan (EFG). On muni l'espace du repère orthonormé $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.

On désigne par O le centre du carré $ABCD$ et O' le centre du carré $EFGH$.

4. **Démontre que (Γ) est une sphère dont tu préciseras le centre Ω et le rayon**

5. Soit s la réflexion du plan (EFG)
   a) Détermine une équation cartésienne du plan (EFG).
   b) Détermine l'expression analytique de s.
6. Détermine la nature et les éléments caractéristiques de (Γ').

Problème 3

Les décorations lumineuses projetées ont été obtenues en représentant les courbes (C_m) d'équations : $y_2 = mx^2 - (m-1)x - 3(2m+1)$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{e}_1 \vec{e}_2)$, m étant un paramètre réel.

Partie A

7. Justifie que toutes les courbes passent par $A(3;\ 0)$.
8. Précise la nature et les éléments caractéristiques de (C_0).
9. On suppose que $m \neq 0$.
   Détermine suivant la valeur du paramètre m, la nature de (C_m).
10. Trace sur la même figure les courbes (C_0), (C_{-1}) et (C_1) pour te faire une idée de quelques images de la décoration lumineuse.

Partie B

Pour rendre plus attractif son décor, Patrick a représenté sur le graphique précédent la droite (D) d'équation $y = 5x - 21$ et a hachuré la surface S limitée par la courbe (C_1) et le segment $[UV]$, U et V sont les points communs de (C_1) et (D); U étant le point d'ordonnée positif. Bio est intéressé par l'aire de la surface S.

11. Détermine les coordonnées des points U et V, et hachure sur ta figure la surface S.
12. Soit T la similitude directe plane, qui transforme $A(3;\ 0)$ en $A'(3;\ -3)$ et $B(-3;\ 0)$ en $B'(-3;\ 3)$.
   a) Détermine l'écriture complexe de T.
   b) Détermine l'équation cartésienne de l'image (C_1') de (C_1) par T et celle de l'image (D') de (D) par T.
   c) Détermine les coordonnées des points U' et V' images respectives de U et V par T.
13. Soit S' l'image de S par T.
   a) Justifie que l'aire $A(S')$ de la surface S' est donnée en unités d'aire par

$$A(S') = \int_{\frac{3}{2}}^{3} \left[-\frac{9}{x} - \left(\frac{2}{3}x - \left(\frac{2}{3}x - 7\right)\right)\right] \mathrm{d}x.$$

   a) Calcule l'aire $A(S')$.
   b) Déduis-en l'aire de S.

BACCALAURÉAT SESSION 2010

<u>Contexte</u> : Un championnat de mathématiques

Un championnat de mathématiques organisé à l'endroit des élèves de niveau terminale C a porté sur les notion d'arithmétique, de similitude et de calcul d'aire.

L'un des supports de l'épreuve soumis aux élèves est la droite (D) d'équation $8x + 15y - 6 = 0$ et le point A$(1;\ 1)$ dans le repère orthonormé direct $(O;\vec{e}_1;\vec{e}_2)$ du plan complexe P. Il s'agit entre autres, de déterminer l'ensemble S des points $M\ (x\ ;y)$ de la droite (D) tels que les nombres x, y et $\frac{x}{y}$ soient des entiers relatifs.

Le trophée à gagner est un tableau de dessin d'art. Il est exposé aux candidats et des questions relatives à l'épreuve y sont rattachées.

Coffi, un candidat à ce championnat, rêve de remplacer ce tableau qui l'a émerveillé.

<u>Tâche</u> : Tu es invité à trouver des solutions à la préoccupation de Coffi en résolvant les problèmes suivant :

Problème 1

1. **Détermine l'ensemble des points $M\ (x;\ y)$ de la droite (D) tels que : $x \in \mathbb{Z}$ et $y \in \mathbb{Z}$.**
2. **Soit $(x;\ y)$ le couple de coordonnées d'un point de la droite (D) tel que $x \in \mathbb{Z}$ et $y \in \mathbb{Z}$.**
   a) **Justifie que tout diviseur commun à x et à y est un diviseur de 6.**
   b) **Déduis-en les valeurs possibles de PGCD $(x\ ;\ y)$.**
3. **Détermine l'ensemble S.**

Problème 2

Une autre question du championnat a consisté à déterminer l'ensemble (Δ) des points N tels que pour tout point M de (D), on ait :

$$\begin{cases} AN = 2AM \\ mes\left(\widehat{\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AN}}\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

4. **a) Justifier que N est l'image de M par une similitude directe plane $\int$ dont tu préciseras le centre, le rapport et l'angle.**
   b) Déterminer l'écriture complexe de $\int$.
   c) Justifier que (Δ) est une droite.
   d) Construis la droite (Δ).

e) Détermine une équation cartésienne de la droite (Δ).

UNITÉ – PROGRÈS – JUSTICE

SUJETS DES BACCALAURÉATS DU BURKINA FASO

BACCALAUREAT SESSION 2019

Exercice 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. M(t) est un point mobile de coordonnées

$x(t)$; $y(t)$ définies par : $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}\cos(2t) - cost \\ y(t) = sint \end{cases}$ **; (t∈ ℝ)**

(C) est la courbe décrite par la trajectoire de M(t).

1)a)Montrer que les fonctions $x: t \longmapsto x(t)$ et $y: t \longmapsto y(t)$ sont périodiques de période T que l'on précisera.

b) Que peut dire positions des points M(t) et M(t+T) ?

c)Calculer $x(-t)$ et $y(-t)$ et en déduire les positions des points M(-t) et M(t).

d) Justifier que l'on peut réduire le domaine d'étude de $[0; \pi]$.

2) Soit la courbe (C') définit par : $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}\cos(2t) - cost \\ y(t) = sint \end{cases}$ **; t∈ $[0; \pi]$**

a)Comment obtient-on (C) à partir de (C') ?

b) Calculer $x'(t)$ et $y'(t)$ et dresser le tableau de variation de x et y

c)Déterminer les coordonnées des points en lesquels la tangente est verticale

d) Déterminer les coordonnées des points en lesquels la tangente est horizontale

e) Tracer avec soin la courbe (C')

3) Tracer la courbe(C).

On donne : $\sqrt{3}$=1,7

Exercice 2

Soit $\theta \in [0; \frac{\pi}{2}[$

1)a)Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2+(2\sin\theta)z+1=0$ (e_0).

b) Déterminer le module et un argument de chacune des solutions de (e_0)

2) On considère l'équation différentielle : $y''+(2sin\theta)y'+y=0$ (e_1)

a)On pose $y_0(x = ax+b$ avec a et b des nombres réels.

Déterminer les nombres réels a et b tels que y_0 soit solution de (e_1).

b) Montrer qu$'une$ fonction y est solution de (e_1) si et seulement si $y-y_0$ d'une équation différentielle homogène du second ordre que l'on résoudra

3) Déterminer toutes les solutions de (e_1)

Problème

PARTIE I

A tout naturel n non nul, on associe la fonction f_n définie sur $]-\frac{1}{2};+\infty[$ par $f_n(x) = \left(x-\frac{1}{2}\right)^n \ln(x+\frac{1}{2})$

On désigne par $(\mathcal{C}_n)$ la courbe représentative de f_n dans le repère orthonormal $(o,\vec{i},\vec{j})$; unité graphique : 2cm ; on notera $f_n{}'$ la dérivée de f_n.

1) Soit g_n la fonction définie sur $]-\frac{1}{2};+\infty[$ par $g_n(x) = n\ln(x+\frac{1}{2})+\frac{2x-1}{2x+1}$

a)Etudier les variations de la fonction g_n

b) Calculer $g_n(\frac{1}{2})$ et déterminer le signe de g_n sur $]-\frac{1}{2};+\infty[$

2)a)Pour tout $x\epsilon]-\frac{1}{2};+\infty[$; montrer que :

(i) $f_1{}' = g_1(x)$

(ii) $f_n{}'(x) = \left(x-\frac{1}{2}\right)^{n-1}.g_n(x)$.

b) On suppose que n est impair, étudier les variations de f_n et dresser son tableau de variation

c) On suppose que n est pair, étudier les variations de f_n et dresser son tableau de variation

3) On note T la translation du plan de vecteur $\frac{-1}{2}\vec{\imath}$. On note (E_n) l'image de $(\mathcal{C}_n)$ par la translation T. Déterminer une équation cartésienne de (E_n)

4) a)Etudier les positions relatives de $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$

b) Tracer la courbe $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ sur une même figure

PARTIE II

On considère la suite (v_n) définie par :

$$v_n=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right)^n \ln\left(x+\frac{1}{2}\right) dx$$

1) Montrer que pour tout $n\geq 1$, $0\leq v_n\leq \frac{ln2}{n+1}$.

En déduire la limite de la suite (v_n)

2) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $v_n=\frac{ln2}{n+1}-\frac{2^{-n}}{n+1}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{(2x-1)^{n+1}}{2x+1}dx$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

3) On pose pour tout $n\geq 1$ et $\frac{1}{2}\leq x\leq\frac{3}{2}$, $S_n(x)=1-\left(x-\frac{1}{2}\right)+\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+(-1)^n\left(x-\frac{1}{2}\right)^n$

a)Montrer que : $S_n(x)=\frac{2}{2n+1}+\left(\frac{-1}{2}\right)^n\frac{(2x-1)^{n+1}}{2x+1}$.

b) Déduire que : $v_n=\frac{ln2}{n+1}-\frac{(-1)^{n-1}}{n+1}\left[ln2-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\right]$.

On donne ln2 = 0,69 ; ln3 =1,1 ; ln5 =1,61.

BACCALAUREAT SESSION 2018

Exercice 1

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal (o ;$\vec{u}$; $\vec{v}$) ; unité graphique : 2cm. On considère l'application h du plan P privé du point O qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z'= h(z) telle que h(z) $= \frac{2z-2}{z}$. Soient A et B deux points d'affixes respectives a et b avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$

1) Démontrer que pour tout complexe $z \neq 0$, $h(z) - h(a) = 2\left(\frac{z-a}{az}\right)$

En déduire que pour tout z différent de 0, de a et de b $\frac{h(z)-h(b)}{h(z)-h(a)} = \frac{a}{b}\left(\frac{z-b}{z-a}\right)$

2) Dans toute la suite de l'exercice, on prend a= 1-i et b = $\bar{a}$

a) Vérifier que h(a) = a et h(b) = b

b) En déduire que pour tout complexe z non nul différent de a et b, on a $\frac{h(z)-b}{h(z)-a} = -i\left(\frac{z-b}{z-a}\right)$

3) On pose z_0 = i et pour tout entier naturel n, z_{n+1}= h(z_n).On désigne par M_n le point d'affixe z_n.

a) Calculer $\frac{AM_0}{BM_0}$, z_1 et z_2

b) Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence que $\frac{AM_n}{BM_n} = \sqrt{5}$ pour tout naturel n

4) On pose pour tout point M du plan et f une application du plan P dans $\mathbb{R}$:

f(M) = AM^2 -5BM^2

a) Déterminer l'affixe du point G barycentre du système :$\{(A, 1); (B, -5)\}$

b) Calculer f(G)

Exercice 2

L'espace ε est muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ orthonormal.

On donne A,B,C,D,E des points de ε définis respectivement par les triplets de coordonnées suivants : A(1 ; −1 ;0), B(2 ;0 ;1), C(−1 ;1 ;0) et D(−2 ;0 ;1).

Soient a et b deux nombres réels. On désigne par le barycentre des points A et B affectés respectivement des coefficients −1−a et a.

Enfin on appelle G le barycentre des points P et Q affecté respectivement des coefficients $1+b$ et $1-b$

1) a) Calculer, en fonction de a les coordonnées des points P et Q

b) Montrer que G a pour coordonnées (a+b ; a−b ; ab)

2) a) Le réel a étant supposé fixé (a$\neq$ 0), montrer que l'ensemble des points G obtenus quand b varie est une droite (D'_a dont on donnera les équations paramétrées en fonction de a et un vecteur directeur

b) Le réel b étant supposé fixé (b$\neq$ 0), montrer que l'ensemble des points G obtenus quand a varie est une droite (D'_b dont on donnera les équations paramétrées en fonction de b et un vecteur directeur

3) a) Montrer que l'ensemble S des points G obtenus lorsque (a,b)$\epsilon\mathbb{R}^2$ est partie de l'ensemble S' des points dont les coordonnées vérifient $x^2 - y^2 = 4z$

b) On désigne par P le plan d'équation z = 1

Déterminer la nature et l'excentricité de S'∩P

Problème

Partie A

On considère la fonction g définie sur $[0,+\infty[$ par g(x) =$\sqrt{e^{2x}-1}$.

1) Calculer g'(x) et étudier le sens de variation de g.

2) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x}$. Quelle conséquence graphique a-t-on ?

3) Dresser le tableau de variations de g

4) Montrer que g réalise une bijection de $[0,+\infty[$ vers un intervalle J que l'on précisera.

Tracer la courbe g et celle de g^{-1} dans un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$, g^{-1} étant la réciproque de g. Unité : 2cm.

Partie B

Soit G la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $G(x)=\int_0^x g(t)dt$

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $H(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$

a) Montrer que la fonction H est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer H'(x)

b) Calculer $(Hotan)'(x)$ pour tout $x \in]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$. En déduire que $(Hotan)'(x) = x$, pour tout $x \in]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$. Calculer H(1).

Pour tout $x \in [0,+\infty[$, on pose $F(x) = g(x) - (Hotan)(x)$

a)vérifier que F et G sont dérivable sur $]0,+\infty[$ et que pour tout $\in]0,+\infty[$, $F'(x) = G'(x)$

b) En déduire que $G(x) = F(x)$. calculer alors $I = \int_0^{\ln(2)} \sqrt{e^{2t}-1}\,dt$

Partie C

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = e^{2x} - 1$.

On pose : $\begin{cases} I_n = \int_0^{ln2} [f(x)]^{\frac{n}{2}} d(x) \\ I_0 = ln\sqrt{2} \end{cases}$ $\forall\, x\, n \in \mathbb{N}^*$

1) a Vérifier que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$et que pour tout $\in [0,+\infty[$,

$f'(x) = 2(1+f(x))$ (e_0).

b) En utilisant (e_0),montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n + I_{n+2} = \int_0^{\ln 2} \frac{1}{2} f'(x)dx$ puis en déduire que $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+2}$ (e_1) .

c)Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n}$. En déduire alors $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$ ((0,5 + 0,25) point)

2) On pose : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+4} - I_n$

a)En remplaçant n par n + 2 dans la relation (e_1), montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$U_n = \frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+2}$

B) En déduire l'expression de U_{4n+1} en fonction de n.

c) calculer $\sum_{n=0}^{p} U_{4n+1}$ en fonction de U_{4n+5} et de I_1.

d) Calculer alors la limite lorsque $p \to +\infty$ de la somme

$$S = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \ldots + \frac{-1}{4p+3} + \frac{1}{4p+5}$$

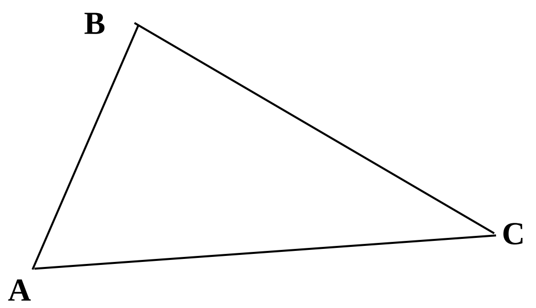
BACCALAUREAT SESSION 2017

Exercice 1

On donne dans l'espace trois points A(2 ;1 ;0), B$(-1;1;1)$ et C(1 ;2 ;3)

1) Calculer les coordonnées du barycentre H du système de points pondérés :
$\{(A;2);(B;1),(C,2)\}$

2) Reproduire cette figure et construire le point H



3) Montrer que le vecteur $2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-5\overrightarrow{MC}$ est indépendant du point M. Calculer ses coordonnées

4) Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que $\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=\|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-5\overrightarrow{MC}\|$

5)a) Vérifier que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

b) Vérifier que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\8\\-3\end{pmatrix}$ est vecteur normal au plan (ABC).

En déduire une équation de ce plan

c)Soit Q le plan dont une équation est : $5x+y+3=0$. Montrer que les plans Q et (ABC) sont perpendiculaires et déterminer leur intersection.

Exercice 2

Le plan P est rapporté à un repère orthonormal direct $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On note $(\mathcal{C})$ l'ensemble des points M (t) du plan dont les coordonnées en fonction de la variable réelle t sont définies par M(t) : $\begin{cases} x(t) = 2(\sin 2t + 2\sin t) \\ y(t) = 2\cos 3t \end{cases}$ **, t ∈ IR.**

1) Préciser la transformation ponctuelle associant pour tout réel t, le point M (t) à:

a)M (t +2π)

b) M$(-t)$

2) on désigne par $(\mathcal{C}_1)$ la partie de $(\mathcal{C})$ obtenue lors que t décrit [0; π]. Expliquer comment construire $(\mathcal{C})$ à partir de $(\mathcal{C}_1)$.

3) Etudier les variations des fonctions : t $\longmapsto x(t)$ et t t $\longmapsto y(t)$ sur $[\,0;\ \pi]$.

4) Tracer $(\mathcal{C})$. On admettra que la pente de la tangente à $(\mathcal{C})$ au point M $(\frac{\pi}{3})$ est $-\sqrt{3}$ et que la tangente à $(\mathcal{C})$ au point M(π) est verticale.

Problème

Partie A

1) Résoudre l'équation différentielle $y'' + y' ln2 = 0$.

2) On considère la fonction numérique d'une variable réelle t définie par u(t) = $e^{-t\,ln2}$. Déterminer la primitive de u qui prend la valeur 1 en 0.

3) Soit (V_n) la suite définie pour tout entier naturel non nul n par $V_n = \int_{n-1}^{n} u(t)\,dt$ et on pose : $S_n = V_1 + V_2 + \ldots + V_n$.

a)Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme

b) Calculer S_n et déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} S_n$

Partie B

1) Calculer $\int_0^x t\, e^t dt$ pour réel x.

2) Soit a une constante réelle et f la fonction définie de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par f(x) = x$e^x - a$.

Soit F la primitive de f qui s'annule en 0.

a) Exprimer F(x) à l'aide d'une intégrale.

b) En déduire F(x) en fonction de x.

3) Soit h la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} h'(x) = xe^x - 2\int_0^1 h(t)dt \text{ , } x \in \mathbb{R} \\ h(0) = 0 \end{cases}$$

Calculer $\int_0^1 h(x)dx$.

Partie C

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O,$\vec{u}$,$\vec{v}$). On note (Γ) l'ensemble des points du plan dont l'affixe z vérifie la relation : $5z\bar{z} + (z + \bar{z} + 1)^2 - 1 = 0$ ou $\bar{z}$ est le conjugué de z. Soit la similitude directe plane d'angle $\frac{\pi}{2}$, de rapport 2 et de centre O , g l'application de $\mathbb{C}$ $dans$ $\mathbb{C}$ qui à tout nombre complexe z, affixe d'un point M, associe le nombre g(z), affixe de f(M). On désigne par (Γ') l'image de (Γ) par f.

1) Démontrer que (Γ) est une ellipse et préciser ses foyers, ses directrices et son excentricité.

2) Donner g(z) en fonction de z.

3) Donner la nature exacte de (Γ').

BACCALAUREAT SESSION 2016

Exercice 1

Une urne contient sept boules numérotées de 1 à 7. Les boules portant un numéro pair sont de couleur blanche : les boules portant un numéro impair sont de couleur noire.

1) On suppose que lorsqu'on que, tire une boule de l'urne, et si l'on désigne par P_k la probabilité de tirer la boule numérotée k, alors on a : $P_1 = P_3 = P_5 = \alpha$ et $P_2 = P_4 = P_6 = 2\alpha$. On tire une boule de l'urne. Quelle est la probabilité de tirer :

a) une boule blanche ?

b) une boule noire ?

c) On tire une boule de l'urne. On note sa couleur et on la remet dans l'urne puis on tire une deuxième fois une boule de l'urne. On réalise ainsi deux tirages successifs que suppose indépendants. Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de boules blanches sorties au cours des deux tirages.

α) Quelle la loi de probabilité de la variable aléatoire X ?

β) Calculer l'espérance mathématique E(X) de X.

1) On tire simultanément deux boules de l'urne. On associe à cette épreuve un univers Ω dont les éventualités des paires de deux boules. On suppose que n est le nombre de boules figurant dans une paire et p la probabilité de l'événement réduit à cette paire, alors le rapport $\frac{p}{n+1}$ est le même pour toutes les éventualités de Ω. Calculer la probabilité l'événement : « tirer deux boules blanches ».

NB : Les questions 1) et 2) sont indépendantes.

Exercice 2

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

1) résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - (1+i)z + i = 0$

2) Soit θ un réel tel que $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - 2e^{i\theta}z\cos\theta + e^{i2\theta} = 0$

a)Déterminer l'ensemble des points B quand θ varie dans l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$

b) Déterminer l'affixe du point C pour que le quadrilatère OACB soit un losange.

c) Déterminer le(s) réel(s) θ pour que la mesure de l'aire du losange OACB soit égale à π

Problème

Le plan (P) est rapporté à un repère ortho normal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On désigne par (C_m) la courbe d'équation : $y^2 = mx^2 - (m-1)x - 3(3m+1)$, ou m est paramètre réel.

Partie 1

Montrer que quel que soit le réel m, la courbe (C_m) passe par un point fixe A dont on donnera les coordonnées.

2)On suppose que m est non nul.

a)Montrer que (C_m) est une conique à centre dont le centre I_m a pour coordonnées $\left(\frac{m-1}{2m}, 0\right)$

b) Préciser suivant les valeurs de m, si (C_m) est une ellipse ou une hyperbole.

c)Construire (C_1) et (C_{-1}) dans le même repère.

3) Soit (α, β) un couple de nombres complexes et f la transformation du plan (P) qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \alpha z + \beta$

a)Déterminer α et β sachant que les points A(3 ;0) et B (-3;0) ont pour images respectives les points $A'(3; -3)$ et $B'(-3; 3)$.

b) Donner la nature de f puis donner ses éléments caractéristiques.

Dans la suite du problème, f est la transformation ainsi déterminée.

4) Justifier que l'ensemble (C'_{-1}), image de (C_{-1}) par f est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

5) Soit M le point de coordonnées (x, y) et M' le point de coordonnées(x', y'), image de M par f

a) Exprimer x' et y' en fonction de x et y puis x' et y' en fonction de et y .

b) En déduire une équation cartésienne de (C'_1) image de (C_1) par f. (0,5point)

c)Construire (C'_1) dans le repère précédent.

Partie 2

Soit (D) la droite d'équation $5x - y - 21 = 0$

1) Déterminer une équation de (D') image de (D) ppar f. (0,5point)

2) E et F (F d'ordonnée positive) sont les points d'intersection de (C_1) et (D). E'et F' leurs images respectives par f .Déterminer les coordonnées des points E,F,E'et F'. (1point)

3)Soit S la surface délimitée par la courbe (C_1) et le segment [EF] et S' son image par f. Calculer l'aire A(S') de S' et en déduire l'aire A(S) de S. (1point)

Partie 3

On prend m= 0

1) Quelle est la nature de (C_0) ?

2) Tracer (C_0) dans un autre repère

3) Soit G le barycentre du système ((A,2),(B,1),(M,1)) où M est point de (C_0) et A et B des points définis dans la partie I. On note(Γ_0) la courbe décrite par G lorsque M parcourt la courbe (C_0)

Démontrer que (Γ_0) est l'image de (C_0) par une homothétie de centre K(1 ;0) dont on précisera le rapport.

BACCALAUREAT SESSION 2015

Exercice 1

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1cm. On définit la courbe $(\mathcal{C})$ paramétriquement par :
$$\begin{cases} x(t) = t + 2\sin t + \frac{1}{2}\sin 2t \\ y(t) = (1 + \cos t)^2 \end{cases}$$

1) Comparer la position des points M(t) et M (-t). En déduire un axe de symétrie à la courbe

2) Soit M un point de paramètre t et M' un point de paramètre $t + 2\pi$. Déterminer le vecteur$\overrightarrow{MM'}$. En déduire que est l'image M' de M par la translation d'un vecteur $\vec{u}$ que l'on précisera.

3)On appelle $(\mathcal{C}_1)$ l'arc de la courbe $(\mathcal{C})$ correspondant à t$\in [0, \pi]$ et $(\mathcal{C}_2)$ la partie de $(\mathcal{C})$ correspondant à $[-\pi, 3\pi]$. Montrer que $(\mathcal{C}_2)$ peut se déduire de $(\mathcal{C}_1)$ par une réflexion suivie de la translation de vecteur $\vec{u}$.

4) Etudier les variations de x et y sur $[0, \pi]$ et résumer les résultats dans un tableau de variation commun.

5) Tracer l'arc $(\mathcal{C}_1)$ de $(\mathcal{C})$. En déduire le tracer de la courbe $(\mathcal{C}_2)$

(On admettra qu'au point de paramètre π la tangente a pour vecteur directeur $\vec{i}$.)

Exercice 2

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.On considère le plan P passant par le point $B(-2, 1, 1)$ et de vecteur normal $\vec{n}(-2; 1; 1)$ et Q d'équation cartésienne $x - 2y + 4z - 9 = 0$

1a) Démontrer que P et Q sont perpendiculaires

b) Démontrer que l'intersection des plans P et Q est la droite (Δ) passant par le point $C(-7; -8; 0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(2; 3; 1)$

c)Soit le point $A(-5; 2; 1)$. Calculer les distances de A à P et de A à Q

d) Déterminer la distance de A à (Δ)

2a) Soit, pour tout nombre réel t, le point M_t de coordonnées $(-1+2t; 1+3t; 3+t)$. Déterminer en fonction de t, la longueur AM_t. On note $\varphi(t)$ cette longueur.

On définit ainsi une fonction φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

b)Etudier le sens de variation de φ sur $\mathbb{R}$ puis préciser son minimum

c)interpréter géométriquement la valeur de ce minimum.

Problème

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} (x+1)\sqrt{1-x} & si\ x \leq 1 \\ e^{x+1} + x - 2 & si\ x > 1 \end{cases}$

Partie A

1a) Etudier la continuité de f en1

b) Etudier la dérivabilité de f en 1

2a) Etudier$f'(x)$. Etudier son signe. En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation

b) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - 2$ est asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$ en $+\infty$

c)Représenter graphiquement $(\mathcal{C})$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 2cm).

3) Soit le domaine plan délimité par la courbe$(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -2$ et $x = -1$

Calculer le volume V, encm^3, engendré par la rotation de S autour de l'axe des abscisses

Partie B

Soit $(U_n)_{n\in IN}$ la suite définie par $U_n = \int_n^{n+1} e^{x+1}\ dx$

1a) Exprimer U_n en fonction de n

b) Quelle est la nature de la suite U_n ?

2) On pose $S_n = \sum_{1}^{n} U_n$ b) Calculer

a) Calculer S_n en fonction de n puis donner une interprétation géométrique de S_n

b) Calculer $\lim_{n \to +\infty} S_n$

Partie C

Soit T l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = z + 2 - i$

1) Donner la nature de T.

2) Déterminer une équation de la courbe $(\mathcal{C}')$ image de $(\mathcal{C})$ par T

3) Construire $(\mathcal{C}')$ dans le même repère que $(\mathcal{C})$

Données $\sqrt{2} = 1,4$ $\quad e^{-1} = 0,37$ $\quad e^{-2} = 0,13$

Exercice 2

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(o, \vec{u}, \vec{v})$, unité graphique 10cm.

Soit $\theta \in]0, 2\pi[$ et r $]0, 1[$.

On considère la suite de nombres complexes définie par :

$$\begin{cases} z_0 = 1 \\ |z^n| = r^n \quad \text{et} \arg\frac{z_n}{z_{n-1}} = \theta\ [2\pi] \text{ pour } n \geq 1. \end{cases}$$

On note A_n le point de z_n avec $n \in IN$

1) Représenter les cinq premiers termes de la suite (A_n) pour $\theta = \frac{\pi}{4}$ et $r = \frac{1}{2}$

2a) Que peut-on dire de la suite (z_n) ?

b) Calculer$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} |z_{k+1} - z_k|$.

En déduire la somme $A_0A_1 + A_1A_2 + \cdots + A_{n-1}A_n$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note G_n l'isobarycentre des points $A_0, A_1, \ldots, A_n$ et μ_n l'affixe de G_n.
Vérifier que $(n+2)\,\mu_{n+1} - (n+1)\mu_n = z_{n+1}$

4) Soit (β_n) la suite numérique définie par $\beta_n = |\mu_n|$.

a)Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $|1-(re^{i\theta})^{n+1}| \leq 2$

b) Montrer que $|1-re^{i\theta}| \geq 1 - r$

c)En déduire $0 \leq \beta_n \leq \frac{2}{(n+1)(1-r)}$ puis $\lim\limits_{n \to +\infty} \beta_n$

Exercice 2

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(o, \vec{i}, \vec{j})$ unité graphique 1cm.

On considère l'hyperbole $(\mathcal{C})$ d'équation $x^2 - 3y^2 = 3$ et la droite (D) d'équation $x = 2$

1a) Préciser les asymptotes et les sommets de $(\mathcal{C})$

b) tracer $(\mathcal{C})$et (D) dans le repère $(\mathrm{O}, \vec{\mathrm{i}}, \vec{\mathrm{j}})$

c)Interpréter graphiquement l'intégrale : $\mathrm{I} = \int_{\sqrt{3}}^{2} \sqrt{\frac{x^2}{3} - 1}\, dx$

Soit f la similitude directe de centre O, d'angle $\frac{\pi}{3}$ et rapport 2. On désigne par $(\mathcal{C}')$ et $(\mathcal{D}')$

Les images respectives de $(\mathcal{C})$et (D) par f.

a)Montrer que $(\mathcal{C}')$ est la représentation graphique de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{3}}(x + \frac{6}{x})$

b) Déterminer l'équation réduite (D')

c)Calculer les abscisses des points d'intersection de $(\mathcal{C}')$ et $(\mathcal{D}')$

d) Tracer $(\mathcal{C}')$ et $(\mathcal{D}')$ dans le repère précédent.

3a) calculer en cm² l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe $(\mathcal{C}')$ et la droite $(\mathcal{D}')$

b) En déduire la valeur exacte de l'intégrale I.

On donne $\sqrt{3} = 1,73$; $\sqrt{6} = 2,45$; $\sqrt{2} = 1,42$

Problème

Soit f la fonction définie sur$]-\infty, \pi]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} -2 - x + 2\ln\left(-\frac{x}{2}\right) & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{1-\cos x}{x} & \text{si } \in]0;\pi] \end{cases}$$

Soit $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan est rapporté à un repère orthonormal $(\mathrm{O}, \vec{\mathrm{i}}, \vec{\mathrm{j}})$.

Partie A

1) Soit g la fonction définie sur $[0;\pi]$ par $g(x) = x\sin x + \cos x - 1$

a) Etudier les variations de g sur $[0;\pi]$

b)Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α l'intervalle $]\frac{2\pi}{3};\pi[$

c)préciser le signe de g(x) suivants les valeurs de x

Partie B

1a) Etudier la continuité de f en 0

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0

2) Etudier les variations de f sur $[0;\pi]$

3a) Etudier les variations de f sur $]-\infty;0[$

b) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une solution unique β dans l'intervalle $]-\infty;0[$. Vérifier que β appartient à l'intervalle I= $[-1;0[$

4)a) Montrer que $f(\alpha) = \sin\alpha$

b) Dresser le tableau de variation de f.

c)Construire la courbe $(\mathcal{C})$.On donne : $\alpha = 2,34$ et $f(\alpha) = 0,72$

Partie C

Soit h : $x \mapsto (\frac{-2}{e})^{\frac{x}{2}}$

1) Montrer que $f(\beta) = 0$ équivaut à $h(\beta) = \beta$

2) Montrer que h(I) est inclus dans *I*.

3) Montrer que, tout x de I, $|h'(x)| \leq \frac{1}{e}$.

Préciser la position de (Δ)par rapport à (Γ)

4) Montrer que $g'(x) = \frac{f(x).e^x}{(e^x-1)^2}$ *pour tout* $x \neq 0$

On admet que $g'(0) = \frac{1}{2}$

5) Etudier les variations de g son de variations

6) Construire (Γ)

7)a) Montrer que g admet une bijection réciproque g^{-1}

b) Représenter graphique la courbe (Γ') de réciproque g^{-1} de g dans le même repère que $(\mathcal{C})$ et (Γ).

BACCALAUREAT SESSION 2013

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{e^{x-1}}$

On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan d'unité graphique 2cm.

1)a)Calculer les limites de t en $+\infty$ et en $-\infty$

b) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations

c) Tracer$(\mathcal{C})$.

2) Soit n un entier naturel non nul. Pour tout réel x, on pose:

$$\begin{cases} g_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n \\ S_n(x) = 1 + 2x + \cdots + nx^{n-1} \end{cases}$$

a)Exprimer pour tout $x \neq 1$, $g_n(x)$ en fonction de n et x, sous forme d'une fonction rationnelle.

b)En déduire une expression de $S_n(x)$ en fonction de n et x

3)Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $U_n = f(1) + f(2) + \cdots + f(n) = \sum_{k=1}^{n} f(k)$

a)Donner une expression de U_n en fonction de n.

b)Quelle est la limite de U_n quand n tend vers $+\infty$?

Exercice 2

On considère la transformation du plan qui à tout oint M d'affixe z associe le point M' d'affixe $f(z) = (\frac{1-i}{2})z - 2 + 2i$

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation f(z) = z

2) Donner la nature et préciser ses éléments caractéristiques

3)En posant z = x + iy et f(z) = X + iY, montrer que $\begin{cases} x = X - Y + 4 \\ z = \quad X + Y \end{cases}$

4) On considère la courbe $(\mathcal{C})$ d'équation $xy - 2x - 3y - 1 = 0$.

Montrer que l'image de $(\mathcal{C})$ par f est la courbe$(\mathcal{C}')$ d'équation$(X - \frac{1}{2})^2 - (Y - \frac{3}{2})^2 = 7$

5) Quelle est la nature de $(\mathcal{C}')$?

Préciser l'excentricité e

Problème

I) Soit g : $]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto x^3 + lnx - 1.$$

Etudier les variations de g. Calculer g(1). En déduire le signe de g(x) suivant les valeurs de x.

II) Soit f : $]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{x^2}{2} - 2 - \frac{lnx}{x}$$

a)Calculer les limites de f aux bornes de D_f.

b) Déterminer la fonction dérivée de f et montrer que $\forall x \in D_f$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

Donner le tableau de variation de f

III) Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité :2cm)

a) Etudier la position de $(\mathcal{C})$ar rapport à la parabole P d'équation $y = \frac{x^2}{2} - 2$

b) Calculer $\lim[f(x) - (\frac{x^2}{2} - 2)]$. Quelle est la conséquence graphique ?

c) Placer les points d'abscisses 0 ;4 ;2 ;3. Tracer $(\mathcal{C})$ et (P)

IV) Soit la partie du plan limitée par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations x = $\frac{1}{2}$ et x = 2.

On donne H(x) = $(lnx)^2$. Donner la fonction dérivée H' de H ; en déduire une primitive de f. Donner l'aire E en cm^2.

Données : ln(0,4) = $-0,31$; $\ln(2) = 0,69$; $\ln(3) = 1,09$.

BACCALAUREAT SESSION 2012

Exercice 1

On considère dans ℤ x ℤ l'équation (E) : $3x + 4y = -15$.

1)a)Vérifier que $(-1; -3)$ est solution de (E).)

b) Résoudre l'équation (E)

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère la droite (Δ) dont une équation est $3x + 4y + 15 = 0$ et on désigne par A le point de (Δ) d'abscisse -1.

a)montrer que si M est point de (Δ) à coordonnées entières alors AM est un multiple de 5

b) Soit N un point de (Δ) de coordonnées (x,y) ; vérifier que AN= $\frac{5}{4}\left|x+1\right|$

c)En déduire que si AN est multiple de 5 alors x et y sont entiers.

Exercice 2

Une boutique vend 1000sacs en cuir parmi lesquels certains un léger défaut. Ces sacs sont fabriqués par trois maroquiniers de Kaya : Ali, Boureima et Charles. Ali a livrés 200sacs dont 10 sont défectueux ; Boureima a livré 350 sacs dont 11 sont défectueux et Charles a livré le reste dont 2% sont défectueux. On choisit au hasard un sac parmi les 1000 et on considère les évènements suivants :

A : « Le sac choisi est fabriqué par Ali»

B : « Le sac choisi est fabriqué par Boureima»

C : « Le sac choisi est fabriqué par Charles»

D : « Le sac choisi est défectueux»

Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles

1)Déterminer P(A), P(B),P(C),P(C), P(D/A), P(D/B),P(D/C)

2) a)Prouver que $P(D \cap A) = \frac{1}{100}$

b) Calculer les probabilités suivantes : $P(D \cap B)$, $P(D \cap C)$ et $P(D)$

3) Sachant que le sac choisi n'est pas défectueux, quelle qu'il soit fabriqué par Ali ?

4) Le sac est vendu à 500F s'il est fabriqué par Ali, à 6000F s'il est fabriqué par Boureima et à 8000F s'il est fabriqué par Charles.

Une réduction de 30% est faite sur le prix de chaque sac défectueux. On désigne par X la variable aléatoire égale au prix final d'un sac choisi au hasard

a)Déterminer les valeurs prises par X

b) Déterminer la loi de probabilité de X

Problème

Le plan affine euclidien P est rapporté à un repère orthonormal direct $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$. θ est un nombre

Partie A

Pour tout nombre réel θ, on définit l'application f_θ de P dans qui, à tout M de coordonnées (x,y) associe le point M' de coordonnées (x', y') vérifiant $\begin{cases} x' = (\theta + 1)x + (\theta - 1)y \\ y' = (\theta + 2)y + (\theta - 2)y \end{cases}$

1) Déterminer les valeurs de θ pour lesquelles l'application f_θ est bijective.

2) On suppose que l'application f_θ est bijective.

a)déterminer l'application réciproque de f_θ, notée f_θ^{-1} en donnant les coordonnées de M en fonction de M'

b) Déterminer les valeurs de θ pour lesquelles l'application f_θ est involutive (c'est dire $f_\theta o f_\theta = id_p$)

3) Déterminer, suivants les valeurs de θ, l'ensemble des points invariants par f_θ

4) Déterminer la nature des éléments caractéristiques de f_θ pour $\theta = \frac{1}{2}$

5) Dans cette question, on prend $\theta = 0$ et on s'intéresse à l'application f_0.

a)Déterminer l'ensemble (Δ) des points M' qui sont images par f_0 d'au moins un point M de P.

b) Un point M' de (Δ) étant donné, déterminer l'ensemble des points M de P tel $f_0(M)=M'$

c)Montrer que f_0 est la composée d'une application et d'une homothétie dont précisera les éléments caractéristiques.

6) On pose $f_\theta^2 = f_\theta o f_\theta$ et, pour tout entier n supérieur à 2, $f_\theta^n = f_\theta o f_\theta^{n-1}$. Soit A_0 le point de coordonnées (1 ;1). On pose $A_1 = f_\theta(A_0)$ et, pour tout entier supérieur à 2, $A_n = f_\theta^n(A_0)$. On note $(x_{n,y_n)}$ les coordonnées les coordonnées de A_n. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $x_n = y_n = P_n(\theta)$, ou $P_n(\theta)$ est un polynôme en θ de degré n que l'on précisera.

Partie B

Dans cette partie, on prend θ dans l'intervalle] 0 ;π[. On considère la suite de points (M_n) de P définie de la manière suivante : $M_0 = 0$, M_1 a pour affixe 1 et pour tout entier naturel non nul n, $\begin{cases} M_nM_{n+1} = (\sin\theta)M_{n-1}M_n \\ \left(\overrightarrow{M_{n-1}M_n}, \ \overrightarrow{M_nM_{n+1}}\right) = \theta \end{cases}$

On note z_n l'affixe de M_n pour tout entier naturel n.

1a) Vérifier que le nombre complexe $(\sin\theta)e^{i\theta}$ n'est as un réel.

b) En déduire que $1-(\sin^n\theta)e^{i\theta} \neq 0$

2) Soit n un entier naturel. On pose $a_n = z_{n+1} - z_n$

a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $a_n = (\sin\theta)e^{i\theta}a_{n-1}$.

b) En déduire que : $a_n = (\sin^n\theta)e^{in\theta}$

3)a)Montrer, par récurrence que, que pour tout entier naturel nul n, $z_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}$

b) En déduire que pour tout entier naturel non nul n, $z_n = \frac{1}{1-\sin\theta\, e^{i\theta}} - \frac{(\sin^n\theta)e^{in\theta}}{1-\sin\theta\, e^{i\theta}}$

c)Vérifier que la relation $z_n = \frac{1}{1-\sin\theta\, e^{i\theta}} - \frac{(\sin^n\theta)e^{in\theta}}{1-\sin\theta\, e^{i\theta}}$ est valable pour $n = 0$

4) a) Montrer qu'il existe une unique similitude plane directe S telle que : $S(M_0) = M_1$ et $S(M_1) = M_2$

b) Déterminer les éléments caractéristiques de S

c) Montrer que pour tout entier naturel n, $S(M_n) = M_{n+1}$

NB : La partie A et la partie B sont indépendantes l'une de l'autre.

BACCALAUREAT SESSION 2011

Exercice 1

Le clavier d'un téléphone portable comporte dix touches numériques notées 0,1 ;2,… ;9.

Ce téléphone est activé par une puce électronique dont le code PIN de quatre chiffres deux à deux distincts, composés à partir du clavier, est imposé par l'opérateur de téléphonie mobile. Ce code secret peut-être par exemple 0425.

Le propriétaire a oublié le code secret de son téléphone.

1) Quelle est la probabilité qu'il ouvre le téléphone par hasard au premier essai ?

2) Un matin, on constate que la touche « 8 » est devenue défectueuse et ne s'affiche plus, de sorte que lors de la validation d'une combinaison contenant « 8 », le téléphone émette un signal sonore.

Quelle est la probabilité que le téléphone émette un signal sonore ?

3) Le clavier a été réparé et la touche « 8 » fonctionne maintenant à merveille.

a)Le propriétaire se rappelle que le code commence par un multiple non nul de 3. Quelle est la probabilité qu'il ouvre le téléphone au premier essai ?

b) On désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque combinaison testée par le propriétaire, donne de chiffres pairs non nuls contenus dans la combinaison.

Déterminer la loi de probabilité de X puis calculer l'espérance mathématique E(X), la variance mathématique V(X) et l'écart-type $\sigma(X)$ de X

Exercice 2

Soit r un réel positif et θ un réel appartenant à $]0\,;\pi[$. On considère la suite complexe (z_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $z_0 = re^{i\theta}$ et pour tout entier n, $z_{n+1}=\frac{1}{2}(z_n+|z_n|)$.

On pose : pour tout naturel n, $U_n = |z_n|$

1)a)Démontrer que la suite numérique (U_n) de terme général U_n est décroissante.

b) En déduire que la suite numérique (U_n) est convergente.

2) Soit X la variable aléatoire qui, à chaque partie du jeu, associe la somme algébrique des gains du joueur.

a)Déterminer les valeurs prises par X

b) Déterminer la loi de probabilité de X

c)Calculer l'espérance mathématique E(X), puis interpréter le résultat obtenu

Problème

On considère la fonction numérique de la variable réelle x définie sur]1 ;+∞[par :

$$f(x) = \begin{cases} -x + 4 + 2\ln(x-1), & si\ 1 < x < 2 \\ x - 1 + e^{2-x}, & si\ \ x \geq 2 \end{cases}$$

Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (o, $\vec{i}$, $\vec{j}$) d'unité graphique 2cm.

Partie A

1) Etudier la continuité de f en $x_0 = 2$

2) Etudier la dérivabilité de f en $x_0 = 2$, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu. Sur quel ensemble D de $\mathbb{R}$ f est-elle dérivable?

3)a)Calculer f'(x) pour tout x de D

b) Etudier le signe de f'(x) sur D puis déduire le sens de variations de f

c)Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition

d) dresser le tableau de variations de f

4)a)Montrer que la courbe $(\mathcal{C})$ admet une asymptote oblique (Δ) en $+\infty$ dont on précisera une équation.

b) Etudier la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à (Δ)

5) Tracer la courbe $(\mathcal{C})$,ses démies tangentes et ses asymptotes dans le repère (o, $\vec{i}$, $\vec{j}$).

Partie B

Soit g la restriction de f à l'intervalle] 1 ;2].

1) Montrer que g réalise une bijection de]1 ;2] vers un intervalle que l'on précisera.

2)a)Sans expliciter la bijection réciproque g^{-1} de g , dresser son tableau de variations.

b) Construire en pointillés la courbe (Γ) de g^{-1} dans le repère précédent. On justifiera la construction de (Γ).

Partie C

1)Soit λ un réel strictement supérieur à 2. On note A(λ) l'aire du domaine plan : l'ensemble des points M(t) vérifiant $\begin{cases} 2 \leq x \leq \lambda \\ x-1 < y < f(x) \end{cases}$

Calculer A(λ) puis la limite de $A(\lambda)$ quand λ tend vers $+\infty$

2)On considère dans le plan un point mobile dont les coordonnées sont données en fonction du temps t par :

$$\begin{cases} x = t+2 \\ y = t+1+e^{-t} \end{cases} \quad (t \geq 0)$$

a) Déterminer l'équation de la trajectoire du point M

b) En déduire que la trajectoire de M est une partie de $(\mathcal{C})$ que l'on déterminera.

BACCALAUREAT SESSION 2010

Exercice 1

Le plan P est muni d'un repère orthonormal direct $(o, \vec{u}, \vec{v})$. A tout point M du plan P de coordonnées $(x; y)$, on associe son affixe z= $x + iy$. On appelle (Γ) l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z satisfait la relation $\left|\frac{z+i\bar{z}}{2}\right| = \left|z - \frac{1}{2}(1+i)\right|$.

1) Déterminer une équation cartésienne de (Γ) de le repère $(o, \vec{u}, \vec{v})$.

2) Soit $(o, \vec{a}, \vec{b})$ le repère image du repère $(o, \vec{u}, \vec{v})$ dans la rotation de centre o et d'angle de mesure $\frac{\pi}{4}$. On désigne par (x ; y) les coordonnées d'un point M dans $(o, \vec{u}, \vec{v})$ et par (X,Y) les coordonnées de M dans $(o, \vec{a}, \vec{b})$.

(a)Exprimer x *et* y en fonction de X et Y.

(b)Déterminer une équation de (Γ) dans le repère $(o, \vec{a}, \vec{b})$.

3) (a)Montrer que (Γ) est une parabole de sommet Ω dont on précisera les coordonnées dans $(o, \vec{a}, \vec{b})$.

(b)Donner les coordonnées du foyer et une équation cartésienne de la directrice dans le repère $(\Omega, \vec{a}, \vec{b})$.

(c)Construire (Γ) ; on donne $\| \vec{u} \|$=5cm.

Exercice 2

Dans un repère orthonormal $(o, \vec{i}, \vec{j})$ du plan, on considère la courbe $(\mathcal{C})$ de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{cost} \\ y(t) = 1 - tan^2 x \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

1) (a)Pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$, comparer les points M(t+2π) et M(t), puis les points M(t) et M($-t$).

(b)On note $(\mathcal{C}_1)$ la partie de $(\mathcal{C})$ obtenue lorsque t décrit l'ensemble $[0;\frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2};\pi]$. Quelle relation y a-t-il entre$(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}_1)$.

2) (a)Pour tout $t\epsilon\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\epsilon\mathbb{Z}\right\}$, comparer les points M$(\pi-t)$ et M(t).

(b)Soit $(\mathcal{C}_2)$ la partie de $(\mathcal{C})$ obtenue lorsque t décrit $[0;\frac{\pi}{2}[$. Comment obtient-on $(\mathcal{C}_1)$ à partir de $(\mathcal{C}_2)$?

3) (a) Dresser le tableau de variation conjoint des fonctions $x: t\longmapsto\frac{1}{cost}$ et y : $t\longmapsto 1-tan^2x$ sur l'intervalle $[0;\frac{\pi}{2}[$.

(b)Montrer que $(\mathcal{C}_2)$ est une partie de la parabole (P) d'équation y= $2-x^2$ que l'on précisera.

2) Déterminer une équation de la tangente à $(\mathcal{C})$ au point de paramètre $\frac{\pi}{4}$.

3) Construire la courbe$(\mathcal{C})$.

Problème

Partie A

Soit m un entier naturel non nul. On considère la fonction f_m définie sur $[0,+\infty[$ par :
$f_m(x)= e^x-\frac{x^m}{m!}$

1) (a)Montrer que f_1 est croissante sur $[0,+\infty[$

(b)Calculer $f_1(0)$ puis en déduire que, pour tout x de $[0,+\infty[$, $f_1(x)>0$

2) Montrer par récurrence sur m que : $\forall m\in\mathbb{N}^*, (\forall m\in[0,+\infty[, f_m(x)>0)$

3) En déduire que réel $x\geq 0$, on a$e^x\geq\frac{x^4}{24}$

Partie B

F est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par par f(x)= $\frac{e^x-x^2}{e^x}$

1) Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variations

2) Montrer que l'équation f(x) admet une solution unique réelle α . Vérifier que $-0,71 < \alpha < -0,70$.

3) On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(o,\vec{i},\vec{j})$,unité :2cm

(a)Calculer $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} \frac{f(x)}{x}$ .Quelle conclusion en tirer our $(\mathcal{C})$?

(b)Tracer $(\mathcal{C})$

4)λ est un réel strictement positif. On note D le domaine limité par la droite d'équation y= 1, la courbe$(\mathcal{C})$, les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = 0$. On note A(λ), laire en cm^2 du domaine D.

(a)Montrer que l'on a : $\frac{A(\lambda)}{4} = \int_0^{\lambda} x^2 e^{-x} d(x)$

(b)Sans Calculer l'intégrale montrer que :

i) $\int_0^{\lambda} x^2 e^{-x} d(x) \leq 1$

ii) $\int_1^{\lambda} x^2 e^{-x} d(x) \leq 24\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \leq 24$, pour $\lambda \geq 1$

(c) En déduire que pour tout $\lambda > 0$, A(λ) ≤ 100

Partie C

1) Vérifier que, pour tout réel x, on a $f'(x)+f(x) = -2xe^{-x} + 1$

(a) A l'aide d'une intégration par parties exprimer l'intégrale $\int_1^{x} te^{-t}dt$ en fonction de x.

(b) On note F la primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f qui s'annule pour $x = 0$. Déduire des questions précédentes l'expression de F(x) pour tout réel x.

2) On se propose de calculer l'équation différentielle : $y'(x) + y(x) = -2xe^{-x} + 1$ (E_1)

(a)Résoudre l'équation $y'+y = 0$ (E_2)

(b)Soit g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

Démontrer que g est une solution de (E_1) si et seulement si $g - f$ est solution de (E_2).

(c) en déduire l'ensemble des solutions de (E_1)

On donne : $e^{0,71} = 2,03$ **et** $e^{0,7} = 2,01$.

PAIX – TRAVAIL- PATRIE

SUJETS DES BACCALAUREATS DU CAMEROUN

BACCALAURÉAT SESSION 2019

EXERCICE 1 :

Dans l'espace orienté et rapporté à un repère orthonormé direct (O ;$\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}$), A, B, C et D sont 4 points tels que A, B et C soient non alignés. On pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

1. **Déterminer l'ensemble (Γ) des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} = 0$.**
2. **On donne pour toute la suite de l'exercice : A(1 ;2 ;1), B(2 ;1 ;1), C(0 ;1,-1) et D(4 ;2 ;1).**
   - **a- Montrer que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires**
   - **b- Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).**
   - **c- Déterminer l'expression analytique de la réflexion par rapport au plan (ABC).**

EXERCICE 2 :

1. **Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation : $z^2 - (1 - 2i)z + 1 + 5i = 0$.**
2. **On suppose le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O ; $\vec{u}, \vec{v}$).**

   A et B sont les points d'affixes respectives $z_A = 2 - 3i$ et $z_B = -1 + i$.

a- Soient (C) le cercle de centre A et de rayon 7 et (C') le cercle de centre B et de rayon 1.

- **i. Montrer que tout point de (C') est intérieur à (C).**
- **ii. Soit (C'') un cercle de centre Ω, extérieurement tangent à (C') et intérieurement tangent à (C'). Justifier que $\Omega A + \Omega B = 8$.**

b- O' désigne le milieu du segment [AB] ; On pose $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{BA}}{AB}$ et on désigne par $\vec{\jmath}$ le vecteur unitaire tel que (O'; $\vec{\imath},\vec{\jmath}$) soit un repère orthonormé direct auquel le plan est maintenant rapporté.

On pose $\overrightarrow{O'\Omega} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ où $x \in [-4; 4]$ et on désigne par (D), la droite d'équation : $x = \frac{32}{5}$

- **i. Justifier que $= \sqrt{\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + y^2}$, $\Omega B = \sqrt{\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + y^2}$.**
- **ii. Montrer que : $\Omega A + \Omega B = 8 \;\Rightarrow\; \Omega A = -\frac{5}{8}x + 4$.**

iii. En déduire que si $\Omega A + \Omega B = 8$ alors $\frac{\Omega A}{d(\Omega,(D))} = \frac{5}{8}$ et donner la nature de la conique à laquelle Ω appartient.

EXERCICE 3 :

Une urne contient 7 boules noirs et 7 boules jaunes indiscernables au toucher. On tire au hasard et successivement avec remise, n boules de cette urne avec n >1.

1- **Calculer la probabilité d'obtenir des boules de même couleur.**
2- **Justifier que la probabilité p d'obtenir exactement une boule noire est : $p = \frac{n}{2^n}$.**
3- **On désigne par (U_n) la suite définie par $U_n = \frac{n}{2^n}$ avec n>1. Soit n un entier strictement supérieur à 1 :**
   a. **Calculer $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ et en déduire que la suite (U_n) est décroissante.**
   b. **Montrer que la suite (U_n) converge vers 0.**

PROBLÈME :

On considère la fonction g définie dans l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = x^2 + \ln x$.

<u>Partie A</u> :

(E_0) et (E) sont les équations différentielles définies par : $(E_0): v(x) + xv'(x) = 0$; $(E): v(x) + xv'(x) = 3x^2 + \ln x + 1$ où v est une fonction définie et dérivable dans l'intervalle $]0\,;+\infty[$ et v' sa dérivée.

1- **Vérifier que g est une solution de (E) et justifier que la fonction u définie dans $]0\,;+\infty[$ par $u(x) = \frac{1}{x}$ est une solution de (E_0).**

2- **Soit w une autre solution de (E_0) et k la fonction définie dans l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $k(x) = \frac{w(x)}{u(x)}$.**

   Montrer que k est une fonction constante et en déduire toutes les solutions de (E_0).
3- **Soit h une fonction définie et dérivable dans $]0\,;+\infty[$.**
   a. **Montrer que h est solution de (E) si et seulement si $h - g$ est solution de (E_0).**

b. Déduire la forme générale des solutions de (E).

<u>Partie B</u> :

1- Etudier les variations de la fonction g.

2- En déduire que :

a. L'équation $g(x) = 0$ admet sur $]0\,;+\infty[$ une unique solution α et justifier que $\alpha_0 = 0,65$ est une valeur approchée de α à 10^{-2} près par défaut.

b. $g(x) > 0 \Leftrightarrow x > \alpha$.

<u>Partie C</u> :

Pour toute la suite, f est la fonction définie dans l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x^2 + ln^2(x)}$ et on désigne par (C_f), sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O ; $\vec{i}, \vec{j}$). La fonction g reste la même.

1- Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

2- Déterminer f' et vérifier que pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = \frac{g(x)}{xf(x)}$.

3- Dresser le tableau de variation de f.

4- a. Montrer que la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique à (C_f) en $+\infty$.

b. Tracer (C_f) avec soin. (Unité d'axe : 1,5 cm ; prendre $\alpha = 0,6$).

5- Soit M (x ; y) un point de la courbe représentative de la fonction : $x \mapsto ln\, x$.

a. Justifier que $OM = f(x)$.

b. En déduire l'abscisse du point M en lequel la distance OM est minimale.

6- Soit x un réel strictement positif,

a. Justifier que $x \leq f(x)$.

b. Montrer que $\sqrt{x^2 + ln^2(x)} - x \leq \frac{ln^2(x)}{2x}$.

7- a. Déduire que : $\frac{3}{2} \leq \int_1^2 f(x)dx \leq \frac{1}{6}\, ln^3(2) + \frac{3}{2}$.

b. En déduire en unité d'aire, une valeur approchée à 10^{-1} près par défaut de l'aire de la portion du plan constitué des points M (x ; y) tels que : $\begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$.

EXERCICE 1 : *Série C uniquement*

Soit p un entier relatif. On pose $a = 4p + 3$ et $b = 5p + 1$. Soit (E) l'équation $87x + 31y = 2$ dans $\mathbb{Z}^2$. On désigne par $(\mathcal{D})$ la droite d'équation $87x + 31y - 2 = 0$ dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. (a) En utilisant l'égalité de Bézout, démontrer que a et b sont premiers entre eux.

(b) En déduire que 87 et 31 sont premiers entre eux.

(c) Trouver un couple (u_0, v_0) d'entiers relatifs tels que $87u_0 + 31v_0 = 2$.

2. Utiliser les questions précédentes pour résoudre (E).

3. Déterminer les points de $(\mathcal{D})$ dont les coordonnées (x, y) vérifient les conditions suivantes :

(i) x et y sont des entiers naturels.

(ii) $0 \leq x \leq 100$.

***Indication* : On pourra remarquer que $M\binom{x}{y}$ appartient à (D) si, et seulement si $(x, -y)$ est solution de (E).**

EXERCICE 1 : *Série E uniquement*

Un test de recrutement dans une entreprise est constitué de questions. Pour chaque candidat, on attribue +2 points pour une réponse juste et -2 points pour une réponse fausse ou non donnée. On note n le nombre de réponses justes données par un candidat.

1. (a) Montrer que la note N d'un candidat à la fin du test est : $N = 4n - 10$.

(b) En déduire l'ensemble des notes possibles qu'un candidat à ce test peut avoir.

2. Le candidat Eya trouve les réponses exactes des deux premières questions. Il répond au hasard aux trois dernières questions. On admet que sa réponse est juste avec la probabilité de $\frac{1}{3}$ et pour tout autre candidat la probabilité de donner une réponse juste à une des cinq questions est de $\frac{1}{2}$.

(a) Déterminer l'ensemble des notes que Eya peut avoir à la fin du test.

(b) Pour être admis à l'école, un candidat doit obtenir à l'issue du test une note supérieure ou égale à 6.

Quelle est la probabilité pour que :

A : << Eya réussisse au test >>.

B : << Un candidat autre que Eya réussisse au test >>.

EXERCICE 2 :

L'espace orienté est muni d'un repère orthonormé direct (O ; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$). On donne les points :

A (2 ;0 ;1), B (3 ; -2 ;0) et C (2 ;8,-4).

1. Soit $M(x, y, z)$ un point. Exprimer en fonction de x, y et z les coordonnées du produit vectoriel $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{BM}$.
2. Résoudre le système $\begin{cases} -x+y-2z=-4 \\ -x-y-z=-11 \\ 2x+y-z=8 \end{cases}$. On fera figurer les étapes de la résolution sur la copie.
3. Démontrer qu'il existe un unique point N vérifiant $\overrightarrow{AN} \wedge \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{CN}$ et donner les coordonnées de N.
4. On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par la formule $\mathscr{V} = \frac{1}{3}\mathscr{B}h$ où $\mathscr{B}$ représente l'air d'une base et h la hauteur relativement à cette base.
   (a) Le point N étant défini à la question précédente, montrer que le volume du tétraèdre $ABCN$ est égal à $\frac{1}{6}CN^2$.
   (b) Calculer l'aire du triangle ABC.
   (c) Utiliser les résultats précédents pour calculer la distance du point N au plan (ABC).

PROBLÈME :

Partie A :

1. (a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - 3z + 4 = 0$.

(b) Déterminer le module de chaque racine de cette équation.

2. Le plan est rapporté au repère orthonormé (O ; $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$). z désigne un nombre complexe

non nul de partie imaginaire positive. On considère les points A, B et C d'affixes respectives 1, z et z^2 et on note S le système de points pondérés $\{(A,4),(B,-3),(C,1)\}$. Ce système est tel que O est son barycentre.

(a) Démontrer que z est solution de (E) .

(b) En déduire les coordonnées de B et C.

3. (a) k désignant un nombre réel, on pose $= \frac{3+i\sqrt{7}}{2}$. Précisez suivant les valeurs de k l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que $4MA^2 - 3MB^2 + MC^2 = k$.

(b) On suppose $k = 89$. Donner alors une équation cartésienne de (Γ),puis tracer(Γ).

<u>Partie B</u> :

On considère l'équations différentielle (E'): $y'' + 4y' + 4y = 0$ et les fonctions f et g, de la variable réelle x définie respectivement par : $f(x) = xe^{-2x} + x - \frac{5}{4}ln2$ et $g(x) = 1 + (-2x+1)e^{-2x}$.

On note (C_f) la courbe représentative de f dans le plan rapporté au repère orthonormé (O ; $\vec{i}, \vec{j}$)
(unité de longueur sur les axes : 2cm).

1. (a) Dresser le tableau de variation de g.

(b) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x

2. (a) Calculer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$, puis la dérivée de f.

(b) Dresser le tableau de variation de f.

3. (a) Calculer $f(ln2)$.

(b) Démontrer que la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = x - \frac{5}{4}ln2$ est asymptote à (C_f).

Etudier la position de la courbe (C_f) par rapport à la droite $(\mathscr{D})$. Tracer $(\mathscr{D})$ et (C_f).

4. (a) Déterminer la forme générale des solutions de (E').

(b) Déterminer la solution de (E') dont la courbe admet une tangente en O parallèle à la droite d'équation $y = x + 1$.

(c) Démontrer que la fonction f est solution de l'équation différentielle :

$$y'' + 4y' + 4y = 4x - 5ln2 + 4.$$

5. Soit λ un réel strictement positif et (D_λ) la partie du plan comprise entre les droites $x = 0$, $x = \lambda$, $y = x - \frac{5}{4}ln2$ et la courbe (C_f).

(a) En utilisant une intégration par parties, calculer, en cm^2, l'aire de (D_λ) en fonction de λ.

(b) Calculer la limite de cette aire lorsque λ tend vers $+\infty$.

BACCALAURÉAT SESSION 2017

EXERCICE 1

1. a) Vérifier que le couple $(5;-7)$ est une solution de l'équation $(E): 13x + 7y = 16$.

b) Déterminer les couples d'entiers relatifs $(x; y)$ vérifiant l'équation (E).

2. a) Démontrer que pour tout entier naturel n, $4^{2n} \equiv 1[5]$.

b) Déterminer le reste de la division euclidienne de 2014^{2015} par 5.

3. p désigne un entier naturel supérieur à 1. Une urne contient $2p$ boules numérotées de 1 à , toutes indiscernables au toucher. Un joueur tire successivement, sans remise 2 boules de cette urne.

a) Quel est le nombre de résultats possibles ?

Si les boules tirées portent des numéros pairs, il gagne 800 F CFA. Si les boules tirées sont de parités différentes, il gagne 400 F CFA et il perd 800 FCFA si elles portent les numéros impairs. On désigne par X le gain algébrique du joueur à l'issue de chaque épreuve.

b) Déterminer la loi de probabilité de X en fonction de p.

c) Calculer l'espérance mathématique de X en fonction de .

d) Calculer p pour que l'espérance de gain du joueur soit de 240 FCFA.

EXERCICE 2

E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ dont une base est $\mathcal{B} = (\vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$. Soit f l'endomorphisme de E qui à tout vecteur $\vec{u}(x; y; z)$ de E associe le vecteur $f(\vec{u}) = (-x - y + 2z)\vec{\imath} + (2x - y + z)\vec{\jmath} + (x - 2y + 3z)\vec{k}$.

1. **Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.**
2. **a) Déterminer le noyau $Ker\ f$ de f (on donnera une base de $r\ f$)**

   b) En déduire la dimension de $Im\ f$, image de f.

   c) f est-elle bijective ? Justifier votre réponse.
3. **On considère les vecteurs $\vec{e_1} = 2\vec{\jmath} - \vec{k}$; $\vec{e_2} = 3\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$ et $\vec{e_3} = \vec{\imath} - \vec{k}$.**

   a) Démontrer que la famille $\mathcal{B}' = (\vec{e_1}; \vec{e_2}; \vec{e_3})$ est une base de l'espace vectoriel E.

   b) Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.

EXERCICE 3

Soit $ABCD$ un carré de sens direct et de centre .

A. Soient r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$, t la translation du vecteur $\overrightarrow{AC}$ et S la symétrie centrale de centre C c'est-à-dire $r = R_{(A;\frac{\pi}{2})}$; $t = t_{\overrightarrow{AC}}$ et $S = S_C$.

1. a) Déterminer la droite (Δ) telle que $r = S_{(\Delta)} \circ S_{(AD)}$.

b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de $t \circ r$.

2. a) Déterminer $(S \circ t \circ r)(A)$ et $(S \circ t \circ r)(D)$.

b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de $S \circ t \circ r$.

B. Soient M un point de la droite (DC), N le point d'intersection de la droite (BC) avec la perpendiculaire à la droite (AM) passant par A, J le milieu du segment $[MN]$. r' est la rotation de centre A telle que

$B = r'(D)$; S' la similitude directe de centre A telle que $I = S'(D)$.

1. Montrer que $= r'(M)$. En déduire la nature du triangle AMN.

2. a) Déterminer l'image de C par S'.

b) Démontrer que $= S'(M)$.

c) Déduire le lieu géométrique des points , l'orque M décrit la droite (DC) .

3. a) Donner la nature de l'ensemble (T) des points M du plan tels que $d(M;C) = \frac{1}{\sqrt{2}} d(M;(BD))$

b) Donner la nature, l'excentricité, une directrice et un foyer de l'image (T') de (T) par S'.

PROBLEME :

A. On se place dans l'espace (ε) muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v}; \vec{w})$. On considère les points $A(1;6;4)$, $B(2;5;3)$, $C(3;1;1)$ et $D(8;1;7)$. On pose $\vec{N} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

1. a) Déterminer les coordonnées de $\vec{N}$. En déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b) Déterminer l'aire du triangle ABC.

2. Soit (Δ) la droite passant par le point D et de vecteur directeur $\vec{t}(2;-1;3)$.

a) Démontrer que la droite (Δ) est orthogonale au plan (ABC) .

b) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ).

d) Déterminer les coordonnées du point K, intersection de la droite (Δ) et du plan (ABC) .

3. On note H le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC).

a) On pose $\overrightarrow{DH} = \alpha\vec{N}$. Calculer .

b) En déduire la distance DH le volume du tétraèdre $ABCD$.

4. Soient (P_1) le plan d'équation $x + y + z - 6 = 0$ et (P_2) le plan d'équation $x + 4y - 7 = 0$.

a) Démontrer que les plans (P_1) et (P_2) sont sécants.

b) Vérifier que la droite (d) , intersection des plans (P_1) et (P_2) a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = -4t - 1 \\ y = t + 2 \\ z = 3t + 5 \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

c) La droite (d) et le plan (ABC) sont-ils sécants ou parallèles ?

5. Démontrer que la courbe (S) d'équation $x^2 - 2x + y^2 - 4y + z^2 - 4 = 0$ est une sphère

de (ε) dont on précisera les éléments caractéristiques.

B. Soit (P) le plan de l'espace (ε) d'équation $z = 0$, rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$. Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x) = 2\ln x - \frac{3}{x} + 3$.

(C_f) est la courbe représentative de f dans le repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

1. a) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

b) Etudier les variations de f et en déduire son signe.

c) Tracer la courbe (C_f) de f dans le repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$ du plan.

2. On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$

a) Calculer u_1; u_2 et u_3 (on donnera l'arrondi d'ordre 2).

b) Démontrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

c) Démontrer que pour tout entier naturel n, $2 \leq u_n \leq 6,5$.

d) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

3. Soient les équations différentielles $(E) : y'' + y' = 0$ et $(E') : y'' + y' = \frac{(2x-3)(x+1)}{x^3}$.

a) Montrer que f est solution sur $]0;+\infty[$ de (E').

b) Résoudre (E) sur $]0;+\infty[$.

c) Montrer qu'une fonction g est solution de (E') si et seulement si $g - f$ est solution de (E).

d) Résoudre alors (E') sur $]0; +\infty[$.

BACCALAURÉAT SESSION 2016

EXERCICE 1 :

Une urne contient 5 jetons portant les réels :$-\sqrt{2}$; $-1; 0; 1$ et $\sqrt{2}$. On tire successivement et avec remise deux jetons de l'urne. On appelle x le numéro du premier jeton et y celui du deuxième jeton et on construit le nombre complexe $z = x + iy$.

1. **Combien de nombres complexes peut-on ainsi construire ?**
2. **Quelle est la probabilité d'obtenir :**
   a. **Un nombre complexe de module $\sqrt{2}$?**
   b. **Un nombre complexe dont un argument est $\frac{\pi}{2}$?**
3. **On effectue trois fois de suite le tirage successif et avec remise de 2 jetons de l'urne et on désigne par**

X la variable aléatoire qui, à l'issue de ces trois tirages associe le nombre de nombres complexes de module $\sqrt{2}$. Déterminer la loi de probabilité de X

EXERCICE 2 :

On considère dans un repère orthonormé direct $\left(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k}\right)$ de l'espace, les surfaces (S) et (S') d'équations respectives $z = (x - y)^2$ et $z = xy$. On prendra 1 cm comme unité.

I . 1. Déterminer le vecteur $\vec{\imath} \wedge \vec{\jmath} \wedge 2\vec{k}$

2. On note (I_2) l'intersection de (S') avec le plan (P_1) d'équation $z = 0$. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de (I_2).

3. On note (I_3) l'intersection de (S) et de la surface (S'') d'équation $z = -2xy + 4 + 2y^2$. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques du projeté orthogonal de (I_3) sur le plan $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

II. (Série C uniquement)

On note (I_4) l'intersection de (S) et de la surface (S'). Dans cette partie, on veut démontrer que le seul point de (I_4) dont les coordonnées sont des entiers naturels est le point $O(0; 0; 0)$. On suppose qu'il existe un point M appartenant à (I_4) et dont les coordonnées x, y et z sont des entiers naturels.

1. **Montrer que si $x = 0$, alors le point M est le point O.**

2. On suppose désormais que l'entier x n'est pas nul.

a. Montrer que les entiers x et y vérifient $x^2 - 3xy + y^2 = 0$. En déduire qu'il existe alors deux entiers naturels x' et y' premiers entre eux tels que $x'^2 - 3x'y' + y'^2 = 0$.

b. Montrer que x' divise y'^2, puis que x' divise y'.

c. Établir que $x = 0$ et conclure.

III. (Série E uniquement)

$ABCO$ est un tétraèdre régulier d'arête égale à 2. L'arête $[OB]$ est portée par l'axe des ordonnées. C est un point du plan $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ d'abscisse égale à $\sqrt{3}$.

1. a. Faire un schéma.

b. Montrer que les coordonnées *positives* des points A, B et C dans le repère $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$ sont respectivement $(\frac{\sqrt{3}}{3}; 1; \frac{2\sqrt{6}}{3})$; $(0;\ 2;\ 0)$ et $(\sqrt{3};\ 1;\ 0)$.

2. En déduire le volume du tétraèdre $ABCO$.

PROBLEME : *Le problème comporte deux parties A et B.*

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$. On considère l'ensemble (E) des points $M(x;\ y)$

tels que $\sqrt{|x| + |y|} = 1$.

On va déterminer toutes les isométries du plan qui laissent (E) globalement invariant.

Partie A :

Soit f la fonction numérique d'une variable réelle x définie par $f(x) = (1 - \sqrt{|x|})^2$ pour tout x appartenant à $[-1 ; 1]$. On note (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

On prendra 3 cm comme unité sur les axes.

1. a. Déterminer la parité de .

b. Quelle conséquence géométrique peut-on en déduire ?

2. Soient g la restriction de f à $[0;\ 1]$ et t la fonction définie sur $[0, 1]$ par $t(x) = g(x^2)$.

a. Vérifier que $g(x) = (1 - \sqrt{x})^2$ pour tout $x \in [0;\ 1]$.

b. Etudier la dérivabilité de g à droite en 0. Que peut-on conclure pour la courbe (C) de f.

c. Montrer que pour tout $x \in]0;\ 1]$, $g'(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$.

d. Dresser le tableau de variation de g.

e. Montrer que t est solution de l'équation différentielle $y'' - 2 = 0$ sur $[0;\ 1]$.

3. a. Représenter soigneusement dans le repère $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$, la courbe (C) de la fonction f .

b. Déterminer l'aire du domaine limité par l'axe des abscisses et la courbe (C) de .

4. Soit h la fonction définie sur $[-1;\ 1]$ par $f\ (x) = -h(x)$.

Déduire de (C) la courbe (C') de h dans le même repère $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

5. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

a. Vérifier que la suite (u_n) est bien définie.

b. Montrer que (u_n) n'est ni croissante ni décroissante.

<u>Partie B</u> :

On note (I) l'ensemble des isométries du plan qui laissent (E) globalement invariant.

1. Montrer que pour tout point $M(x;\ y)$ appartenant à (E), on a :$-1 \leq x \leq 1$.
2. Montrer que (E) est la réunion des courbes (C) et (C').
3. On considère dans le repère $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ les points $I(1;\ 0)$; $J(0;\ 1)$; $K(-1;\ 0)$ et $L(0; -1)$.
   a. Déterminer l'ensemble des couples $(A;\ B)$ de points de (E) tels que $d(A;\ B) = 2$.
   b. Soit S une isométrie du plan laissant (E) globalement invariant.
      Montrer que $S(O) = O$.
   c. En déduire toutes les natures possibles de l'isométrie S.
4. Soit r un déplacement laissant globalement invariant (E).
   a. Vérifier que r est soit une rotation de centre O et d'angle non nul, soit l'application identique du plan.
   b. En déduire par leurs éléments caractéristiques tous les déplacements laissant (E) globalement invariant.
5. Soit $S_{(\Delta)}$ une réflexion du plan d'axe (Δ) laissant (E) globalement invariant.
   a. Vérifier que $O \in (\Delta)$.
   b. En déduire par leurs éléments caractéristiques toutes les réflexions qui laissent (E) globalement invariant.
6. Écrire alors en extension l'ensemble (I).

BACCALAURÉAT SESSION 2015

EXERCICE 1 :

Soit à résoudre le système : $\begin{cases} x = \sqrt{2y+3} \\ y = \sqrt{2z+3} \\ z = \sqrt{2x+3} \end{cases}$ **où x; y et z sont des nombres réels.**

1. Première approche : **Série E uniquement.**

a) **Montrer que le triplet $(3;3;3)$ est une solution de ce système.**

b) **Montrer que si le triplet $(x;y;z)$ est une solution de ce système, alors on ne peut pas avoir**
$x < 3$

c) **Montrer que si le triplet $(x;y;z)$ est une solution de ce système, alors on ne peut pas avoir**
$x > 3$

d) **Déduire alors l'ensemble solution de ce système.**

2. Deuxième approche : **Série C uniquement.**

a) **Montrer que si le triplet $(x;y;z)$ est solution de ce système, alors x; y et z sont solutions de l'équation : $t^8 - 12t^6 + 30t^4 + 36t^2 - 128t - 183 = 0$**

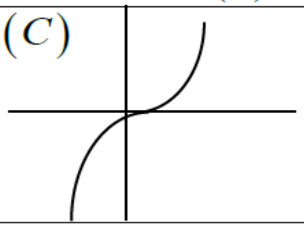
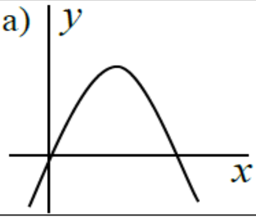
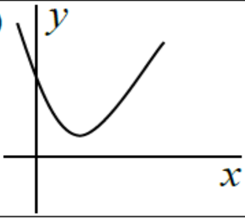
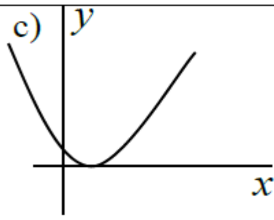
b) **En déduire les valeurs rationnelles de x; y et z.**

EXERCICE 2 :

(i) **On dit que deux suites (u_n) et $v_n)$ sont adjacentes lorsque : l'une est croissante, l'autre est décroissante et $u_n - v_n$tend vers 0 quand n vers $+\infty$.**

(ii) **Si (u_n) et $v_n)$ sont deux suites adjacentes telles que (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$.**

1. **Compléter les phrases ci-après avec le mot qui convient :**
   a) **Toute suite croissante et majorée est ……………………………..**
   b) **Toute suite décroissante et …………………… est convergente.**
2. **Indiquer si la proposition ci-après est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse indiquée : « Deux suites adjacentes sont convergentes et elles ont la même limite ».**

Colonne (I)	Colonne (II)
(C) 	a)  b)  c) 

3. **Relier en justifiant votre choix la courbe (C) de la colonne (I) à la courbe (C') de sa fonction dérivée dans la colonne (II).**

EXERCICE 3 :

On désigne par $(\mathbb{R}^2)$, la famille des endomorphismes f_λ de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice relativement à la base canonique ($\vec{i}$; $\vec{j}$) de $\mathbb{R}^2$ est de la forme : $\begin{bmatrix} -1+\lambda & 1+\lambda \\ \lambda(1-\lambda) & \lambda \end{bmatrix}$ où λ est un réel.

1. **À quelle conditions sur λ, f_λ est-il un automorphisme ?**
2. **Une boîte Ω contient 5 boules numérotées -2; -1; 0; 1 et , toutes indiscernables au toucher. On tire au hasard successivement et sans remise deux boules de Ω et on note $(p;q)$ le couple de numéros obtenus.**

On désigne par X l'aléa numérique qui à tout couple $(p;q)$ associe la valeur :

- **-2 si aucun des f_p et f_q n'est un automorphisme ;**
- **1 si un seul parmi f_p et f_q est un automorphisme ;**
- **3 si les deux f_p et f_q sont des automorphismes.**

  (a) Déterminer la loi de probabilité de X.

  (b) Calculer l'espérance et l'écart-type de X

3. **Déterminer une équation cartésienne du noyau et de l'image de f_{-2}**
4. **Soit g l'application linéaire définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par : $g(x;y) = \frac{1}{2}\left(-x+3y; \frac{1}{2}x+y\right)$.**

g appartient-elle à $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$? Justifier.

PROBLEME :

Ce problème comporte trois parties indépendantes A, B et C.

Partie A :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

On considère l'équation $(E): z^3 + 64i = 0$.

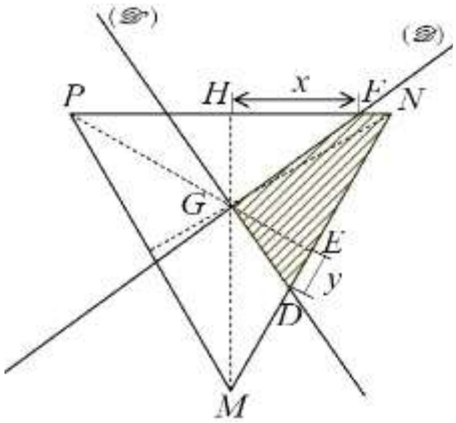
1. Déterminer une solution z_0 de (E) telle que : $\overline{z_0} = -z_0$
2. Déterminer les deux autres solutions z_1 et z_2 de (E) où z_1 a une partie réelle négative. Les points $A; B$ et C ont pour affixes respectives : $-2\sqrt{3} - 2i$; $2\sqrt{3} - 2i$ et $4i$.

   Déterminer la nature du triangle ABC et montrer que les points $A; B$ et C appartiennent à une conique dont on précisera la nature et les éléments caractéristiques.
3. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation f du plan qui à $M(z)$ associe $M'(z')$ tel que $(z' - 4i) = re^{i\theta}(z - 4i)$ et qui transforme le point A en B; r et θ étant des nombres réels.

<u>Partie B</u> :

Un triangle équilatéral MNP de côté 2 est divisé en quatre parties par deux droites perpendiculaires passant par son centre de gravité G (voir figure ci-contre)

On se propose de déterminer la valeur maximale de l'aire $\mathcal{A}$ de la partie hachurée.



1. Démontrer que $\mathcal{A} = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6}(x - y)$
2. Démontrer que $y = \frac{3x-1}{3(x+1)}$
3. En déduire la valeur maximale de $\mathcal{A}$.
4. L'espace est associé à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. On donne $M(0; 2; 0)$; $N(\sqrt{3}; 1; 0)$ et $P\left(\frac{\sqrt{3}}{3}; 1; \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$.

Déterminer un système d'équations cartésiennes de la perpendiculaire au triangle MNP en son centre de gravité.

<u>Partie c :</u>

f est la fonction numérique d'une variable réelle x définie par $f(x) = e^{2e^x}$. On pose : $g(x) = \ln f(x)$.

Montrer que g est solution d'une équation différentielle du premier ordre que l'on précisera.

BACCALAURÉAT SESSION 2014

EXERCICE 1 :

1. **Dans l'espace muni d'un repère orthonormé (O ;$\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$), on considère les points A(1; −1; 0) ;**

   B(3; 0; 1) ; C(1; 2; −1) et D(1; 0; 0).

2. **Démontrer que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.**

   (a) Ecrire une équation cartésienne du plan (ABC).

   (b) Calculer le volume du tétraèdre ABCD.

   (c) Déterminer l'expression analytique de la réflexion f par rapport au plan (ABC).

3. **Soit (S) la sphère de centre D passant par B.**

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'image (S') de (S) par f.

EXERCICE 2:

1. **On considère les équations différentielles suivantes :**

$(E): y'' - 4y' + 4y = 2cosx + sinx$ **et**

$(E_0): y'' - 4y' + 4y = 0.$

(a) Déterminer les réels a et b pour lesquels la fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = a\cos x + b\sin x$ est solution de (E).

(b) Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est une solution de (E) si et seulement si $f - g$ est solution de (E_0).

(c) Résoudre (E_0) et en déduire la forme générale des solutions de (E).

2. **Soit la fonction h définie dans $[0; \pi]$ par $h(x) = \frac{2}{5}cosx - \frac{1}{5}sinx$.**

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O ;\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

(a) Calculer pour tout x de $[0; \pi[$, $h'(x)$ et $h''(x)$.

(b) Etudier les variations de h' sur $[\frac{\pi}{2}; \pi[$, et en déduire que l'équation $h'(x) = 0$ dans $[\frac{\pi}{2}; \pi[$ admet une unique solution α avec $2,6 < \alpha < 2,7$.

(c) Montrer que : $h'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]0;\ \pi[$ et dresser le tableau de variation de h.

(d) Tracer (C). (Prendre $\alpha = 2,6$ et pour unité de longueur sur les axes : 1,5 cm).

EXERCICE 3 :

1. Soit a un réel strictement positif.

   (a) Montrer que $1 - a < \frac{1}{1+a} < 1$.

   (b) En déduire que $a - \frac{a^2}{2} < \ln(1+a) < a$.

2. Soit n un entier naturel non nul, on pose $p_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \dots \left(1 + \frac{n}{n^2}\right)$.

   (a) Justifier que $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

   (b) Montrer que $\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{12}\frac{(n+1)(2n+1)}{n^3} < \ln p_n < \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

   (c) En déduire que la suite (p_n) converge et déterminer sa limite.

PROBLÈME :

Dans le plan (P) rapporté à un repère orthonormé d'origine O, on considère l'application Ψ définie par :

$\Psi(O) = O$ et pour tout point M distinct de O, $\Psi(M) = M'$ tel que $\overrightarrow{OM'} = \frac{4}{OM^2}\overrightarrow{OM}$.

Partie A :

1. (a) Montrer que pour tout point M de *(P)*, $\Psi o \Psi(M) = M$.

   (c) Justifier que l'ensemble des points M de (P) distincts de O tels que $\Psi(M) = M$ est le cercle de centre O et de rayon 2.

Pour toute la suite, (d) est une droite quelconque de (P), D est un point fixé de (d) distinct de O ; $\vec{u}$ est un vecteur directeur de (d). On pose $\vec{e_2} = \frac{\vec{u}}{||\vec{u}||}$ et on suppose le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$. On donne $\overrightarrow{OD} = a\vec{e_1} + b\vec{e_2}$.

2. Justifier que (d) est l'ensemble des points M d'affixe z tels que $z = a + it$ où $t \in \mathbb{R}$.
3. Soient M et M' deux points de (P) tous distincts de O et d'affixes respectifs z et z'.

   (a) Montrer que : $\Psi(M) = M' \Leftrightarrow z' = \frac{4}{\bar{z}}$.

   (b) En posant $\overrightarrow{OM} = a\vec{e_1} + t\vec{e_2}$ et $\overrightarrow{OM'} = x'\vec{e_1} + y'\vec{e_2}$,

montrer que : $\Psi(M) = M' \Leftrightarrow x' = \frac{4a}{a^2+t^2}$ et $y' = \frac{4t}{a^2+t^2}$.

(c) Vérifier que dans ce cas $(x'-\frac{2}{a})^2+y'^2=\frac{4}{a^2}$.

(d) En déduire que si M appartient à (d), alors $\Psi(M)$ appartient au cercle (C_1) de diamètre $[OH']$ où H' est l'image par Ψ du projeté orthogonal H de O sur (d).

4. Soit h l'application affine qui à tout point M(x; y) associe $M_1(x_1, y_1)$ tel que
$\begin{cases} x_1 = x \\ y_1 = \frac{2}{3}y \end{cases}$.

Montrer que l'image de (C_1) par h est une ellipse dont on donnera l'excentricité.

Partie B :

Dans le plan vectoriel $(\vec{P})$ associé à (P), on considère l'application φ telle que :

$$\varphi(\vec{0}) = \vec{0} \text{ et } \varphi(\vec{u}) = \frac{4}{||\vec{u}||^2}\vec{u} \text{ si } \vec{u} \neq \vec{0}.$$

1. Soit $\vec{v}$ un vecteur non nul, exprimer $\varphi\left(\frac{4}{||\vec{v}||^2}\vec{v}\right)$ en fonction de $\vec{v}$ et en déduire que φ n'est pas linéaire.

2. (a) Déterminer l'ensemble $Inv(\varphi)$ des vecteurs $\vec{u}$ de $(\vec{P})$ tels que $(\vec{u}) = \vec{u}$.

   (b) Soient $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ deux vecteurs de $(\vec{P})$ tels que $||\vec{u_1}|| = ||\vec{u_2}|| = 2$ et $Mes(\widehat{\vec{u_1}, \vec{u_2}}) = \frac{\pi}{3}$.

   Calculer $||\vec{u_1}+\vec{u_2}||$ et en déduire que $Inv(\varphi)$ n'est pas un sous espace vectoriel de $(\vec{P})$.

3. Soit $Opp(\varphi)$ l'ensemble des vecteurs de $(\vec{P})$ tels que $\varphi(\vec{u}) = -\vec{u}$.

Déterminer $Opp(\varphi)$ et montrer que $Opp(\varphi)$ est un sous espace vectoriel de $(\vec{P})$.

BACCALAURÉAT SESSION 2013

EXERCICE 1 (série C uniquement).

N désigne un entier naturel dont l'écriture en base 10 est $N = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}$.

1. **Démontrer que le reste de la division de N par 100 est l'entier r dont l'écriture en base 10 est $r = \overline{a_1 a_0}$**
2. **Application : Démontrer que le chiffre des unités et le chiffre des dizaines du nombre $N = 7^{7^{7^7}}$ sont respectivement 3 et 4.**

EXERCICE 1 (Série E uniquement).

Soit f une fonction numérique continue sur [0;1] telle que pour tout réel $x \in [0;1]$, $\int_x^1 f(t)dt \geq \frac{1-x^2}{2}$.

Soit F une primitive de f sur [0;1].

1. **(a) En intégrant par partie l'intégrale $I = \int_0^1 f(x)dx$, montrer que : $F(1) = \int_0^1 xf(x)dx + \int_0^1 F(x)dx$.**

   (b) En déduire que $\int_0^1 xf(x)dx \geq \frac{1}{3}$.

2. **(a) Développer et réduire $(f(x) - x)^2$.**

   (b) Déduire que $\int_0^1 [f(x)]^2 dx \geq \frac{1}{3}$.

EXERCICE 2

λ désigne un nombre réel strictement positif. On donne dans l'espace un triangle ABC rectangle en A tel que $AB = 2\lambda$, et $AC = \lambda$.

1. **Construire le barycentre G des points A, B et C affectés respectivement des coefficients 3, -1 et 2.**
2. **Déterminer l'ensemble (Γ) des points M de l'espace vérifiant : $3MA^2 - MB^2 + 2MC^2 = 5\lambda^2$.**
3. **On suppose l'espace rapporté à un repère orthonormé $(A, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On donne $B(0, 4, 0)$ et $C(0, 0, 2)$.**

(a) Déterminer les coordonnées de G.

(b) Ecrire des équations cartésiennes du plan (ABC) et de (Γ).

(c) Préciser l'intersection de (ABC) et (Γ).

EXERCICE 3

α désigne un réel de l'intervalle $]0; \frac{\pi}{2}[$. Le plan complexe orienté est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. $\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 \cos^2 \alpha - z \sin 2\alpha + 1 = 0$.

   On note z_1 et z_2 les solutions de cette équation ; z_1 désigne la solution dont la partie imaginaire est positive. A et B désignent les points d'affixes respectives z_1 et z_2.
2. Quelle est la nature du triangle OAB ? Justifier votre réponse.

3. (a) Calculer une mesure en radians de l'angle $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA})$.

   (b) En déduire une mesure en radians de l'angle $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BO})$.

4. Résoudre l'équation différentielle $(\cos^2\alpha)f'' - (\sin 2\alpha)f' + f = 0$ sachant que f est une fonction numérique d'une variable réelle x vérifiant $f(0) = 1$ et $f'(0) = -\tan\alpha$.

PROBLEME :

Dans tout le problème, on note :

– f la fonction définie dans l'intervalle $]-2; +\infty[$ par $f(x) = \ln(x + 2)$;

– g la fonction définie dans l'intervalle $]0; +\infty[$ par $g(x) = \ln x$;

– (C_f) et (C_g) les courbes représentatives de f et g dans un repère orthonormé, l'unité de longueur sur les axes étant égale à 2cm.

On appelle :

(D) la droite d'équation $y = x$ dans le repère précédent ;

(u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$;

(v_n) la suite numérique définie par $v_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = g(v_n)$.

1. (a) Dresser les tableaux de variation de f et g.

   (b) Démontrer que (C_f) et (D) se coupent en deux points M_1 et M_2 dont les abscisses x_1 et x_2 vérifient $-2 < x_1 < -1$ et $1 < x_2 < 2$.

   (c) Etudier suivant les valeurs de x les positions relatives de (C_f) et (D).

   (d) Tracer (C_f), (C_g) et (D) après avoir étudier les branches infinies de (C_f) et (C_g).

2. Démontrer (C_f) est l'image de (C_g) par la translation de vecteur $-2\vec{\imath}$.

3. On note (Γ) la partie du plan définie par les droite d'équation $x = -1$; $x = 1$; (C_f) et (D).

   Calculer à l'aide d'une intégration par parties, la valeur exacte de l'aire de (Γ).

4. On note α et β deux réels tels que Démontrer que $x_1 < \alpha < x_2 < \beta$.

   Démontrer que $x_1 < f(\alpha) < x_2 < f(\beta)$.

5. (a) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

   (b) Démontrer que la suite (v_n) est décroissante.

   (c) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n < x_2 < v_n \leq 2$.

6. On note I l'intervalle $[1; 2]$.

   (a) Démontrer que, pour tout x de I, $\frac{1}{4} \leq f'(x) \leq \frac{1}{3}$.

   (b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $0 < f(v_n) - f(u_n) < \frac{1}{3}(v_n - u_n)$.

7. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $0 < v_n - u_n \leq (\frac{1}{3})^n$.

   (c) En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et ont même limite.

BACCALAURÉAT SESSION 2012

EXERCICE 1 (série E uniquement).

Soit f la fonction définie sur $]0;\pi[$ par : $f(x)=\frac{1}{sinx}$.

1. **Etudier la fonction f et construire sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.**
2. **Montrer que la restriction g de f à l'intervalle $]0;\pi[$ possède une fonction réciproque g^{-1} dans le même repère que (C).**

3. **Soit $y=g^{-1}(x)$.**

   Montrer que $\sin y=\frac{1}{x}$ et que $\cos y=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$.
4. **En déduire que pour tout x de $]1;+\infty[$, $(g^{-1})'(x)=-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.**

5. **En se servant des résultats précédents, calculer $=\int_{2\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{2}}\frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}}$.**

EXERCICE 1 (Série C uniquement).

1. **Soit N un entier relatif impair.**

   Montrer que $N^2\equiv 1[8]$.
2. **Montrer que si un entier relatif M est tel que $M^2\equiv 1[8]$ alors M est impair.**

3. **Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $x^2=8y+1$.**

4. **Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $y=\frac{x^2-1}{8}$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan P passe par une infinité de points à coordonnées entières.**

EXERCICE 2

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère l'équation (E) :

$z^3+(3-d^2)z+2i(1+d^2)=0$, où d est un nombre complexe donné de module 2.

1. **(a) Vérifier que $2i$ est une solution de l'équation (E).**

(b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

2. **Dans le plan complexe P, on considère les points A, B, M, et N d'affixes respectives :**
3. **$2i$, $-i$, $-i+d$ et $-i-d$.**

   (a) Calculer MN et déterminer le milieu de [MN].

   (b) En déduire que lorsque d varie dans $\mathbb{C}$, les points M et N appartiennent à un cercle fixe que l'on précisera.

   (c) Dans le cas où AMN est un triangle, montrer que O est le centre de O est le centre de gravité du triangle AMN.

   (d) En déduire les valeurs de d pour lesquelles le triangle AMN est isocèle de sommet principal A.

PROBLEME :

Le problème comporte trois parties A, B et C. Les parties A et B sont liées.

<u>Partie A</u> :

Soit l'équation différentielle (E): $y'' + (2ln2)y' + (ln2)^2y = 0$.

1. **(a) Résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{R}$.**

(b) Déterminer la solution g de (E) vérifiant :$g(0) = 0$ et $g'(0) = 1$.

2. **On considère la fonction numérique u définie pour tout réel x par $(x) = \frac{x}{2^x}$. On note (C) la courbe représentative de u dans un repère orthonormé du plan.**

   (a) Montrer que la fonction dérivée u' est définie sur $\mathbb{R}$ par $u'(x) = (1 - xln2)e^{-xln2}$.

   (b) Dresser le tableau de variation de u.

   (c) Préciser les branches infinies de (C).

   (d) Tracer (C) et sa tangente (T_0) au point d'abscisse 0. (Prendre 2cm comme unité sur les axes des coordonnées).

3. (a) Prouver que u est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

   (b) En déduire la valeur du nombre réel $(ln2)^2 \times \int_0^1 u(x)dx$.

Partie B :

On définit la suite numérique (V_n) par : $\begin{cases} V_0 = 1 \\ V_{n+1} = \frac{1}{2}(V_n + 2^{-n}) \end{cases}$

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $V_n = u(n)$.

2. Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} V_k$.

   (a) Démontrer par récurrence que $S_n = (\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}) - \frac{n+1}{2^n}$ pour tout entier naturel n.

   (b) Calculer la limite de la suite (S_n).

Partie C :

Dans le plan orienté et muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère les vecteurs

$\overrightarrow{e_1} = \frac{1}{2}\vec{\imath} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\jmath}$;

$\overrightarrow{e_2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\imath} + \frac{1}{2}\vec{\jmath}$.

1. Démontrer que $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est un repère orthonormé du plan.

2. Déterminer les éléments caractéristiques de la rotation qui transforme $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ en$(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

3. Une conique dans le repère $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ a pour équation cartésienne $13X^2 + 7Y^2 + 6\sqrt{3}XY = 16$.

   (a) Ecrire l'équation cartésienne réduite de cette conique dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

   (b) En déduire sa nature et son excentricité.

BACCALAURÉAT SESSION 2011

EXERCICE 1

Pour tout entier naturel n, on considère $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{nx}{2}} sinx dx$ et $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{nx}{2}} cosx dx$.

1. En utilisant une intégration par parties montrer que $2I_n + nJ_n = 2$ et $n I_n - 2 J_n = -2e^{-\frac{n\pi}{4}}$.

2. Déduire de 1. les expressions de I_n et J_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.

3. Les suites (I_n) et (J_n) sont-elles convergentes

EXERCICE 2

L'espace est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne les points

$A(-1, 2, 1)$; $B(1, -6, -1)$; $C(2, 2, 2)$ et $I(0, 1, -1)$.

1.(a) Calculer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

(b) Déterminer une équation cartésienne du plan (P) contenant les points A, B et C.

2.(a) Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal de I sur le plan (P).

(b) (S) est la sphère de centre I et de rayon 3 ; déterminer l'intersection du plan (P) et de la sphère (S).

EXERCICE 3

Le plan complexe est muni d'un repère orthogonal $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ A et B sont deux points du plan tels que $AB = 6c\,m$. r_1 est la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$; r_2 est la rotation de centre B et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$, ${r_2}^{-1}$est la transformation réciproque de r_2. Si M est un point du plan, on note M_1 l'image du point M par r_1 et M_2 l'image du point M par r_2.

1. On pose $f = r_1 o {r_2}^{-1}$.

(a) Montrer que f est une symétrie centrale et déterminer $f(M_2)$.

(b) En déduire que le milieu I du segment $[M_1 M_2]$ est le centre de la symétrie

f.

2. On suppose que A et B ont pour affixes respectives -3 et $+3$; on note z, z_1 et z_2 les affixes respectives des points M, M_1 et M_2.

(a) Exprimer z_1 et z_2 en fonction de z.

(b) Montrer que si M est distinct de A et de B, on a : $\frac{z_2-z}{z_1-z} = i\sqrt{3}\,\frac{z-3}{z+3}$.

(c) En déduire que : $(\overrightarrow{MM1};\overrightarrow{MM2}) \equiv (\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}) + \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$.

(d) Déterminer et construire l'ensemble (T) des points M du plan tels que M, M_1 *et* M_2 soient alignés.

PROBLEME

On considère la famille de fonctions f_λ définies par $f_\lambda(x) = 1 + ln(1 + \lambda x)$ où λ est un réel non nul ; ln désigne le logarithme népérien, (C_λ)la courbe de f_λ et (D) la droite d'équation $y = x$ dans le plan muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

<u>Partie A</u> : *Recherche des points d'intersection de* (C_λ)*et* (D).

1. Déterminer l'ensemble de définition de f_λ.

On pose $\phi_\lambda(x) = f_\lambda(x) - x$.

2. On suppose $\lambda < 0$. Etudier les variations de ϕ_λ et dresser son tableau de variations.

En déduire le nombre de points d'intersection de (C_λ)et (D).

3.(a) On suppose $\lambda > 0$. Etudier les variations de ϕ_λ et dresser son tableau de variations. Etablir que la plus grande valeur prise par ϕ_λ quand x décrit l'ensemble de définition est

$$m(\lambda) = \frac{1}{\lambda} + ln\lambda.$$

(b) Etudier les variations de m sur $]0;+\infty[$; en déduire le signe de $m(\lambda)$.

(c) Déterminer le nombre de points communs à (C_λ) et (D) lorsque λ est positif.

<u>Partie B</u> : *Etude du cas particulier* $\lambda = 1$.

1. (a) Soit (Γ) la courbe de la fonction logarithme népérien ; trouver une

translation qui transforme (Γ) en (C_1).

(b) Représenter graphiquement (C_1)et la droite (D). ***On prendra pour unité 3cm sur les axes.***

2. On appelle P et Q les points d'intersection de (C_1)et (D) ; P est le point d'abscisse négative p et Q est le point d'abscisse positive q.

Démontrer que $2 < q < 3$.

3. L'unité d'aire étant le cm^2calculer en fonction de p et q l'aire du domaine compris entre (C_1), (D) et les droites d'équations $x = p$, $x = q$. ***On pourra utiliser une intégration par parties.***

<u>Partie C</u> **:** ***Valeur approchée de q.***

On se propose de calculer une valeur approchée de q ; on définit la suite (u_n) par :$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f_1(u_n) \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Représenter à l'aide de la courbe (C_1) les termes u_1 et u_2 sur $(O, \vec{\imath})$.

2. Montrer que la suite (u_n) est croissante et majorée par q.

3. Montrer en utilisant l'inégalité des accroissements finis que :

$$q - u_{n+1} \leq \frac{1}{3}(q - u_n) \text{ pour tout entier naturel}$$

4. En déduire que pour tout entier naturel n : $q - u_n \leq \frac{q-u_0}{3^n}$ et que la suite (u_n) converge vers q.

5. Déterminer une valeur approchée u_k *de* q à 10^{-1} près en utilisant la suite (u_n).

BACCALAURÉAT SESSION 2010

EXERCICE 1

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé directe (O, $\vec{\imath},\vec{\jmath}$) ; (unité d'axe : 1, 5 cm). On considère l'équation d'inconnue z ;

(E) : $z^3 - 7i\,z^2 - 15z + 25i = 0$ définie dans $\mathbb{C}$.

1.(a) Montrer que l'équation (E) admet le nombre complexe $z_0 = 5i$ comme solution.

(b) Résoudre l'équation (E).

2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $2 + i$; $5i$ et $-2+i$.

La droite (D) d'équation $y = 2$ rencontre la droite (AB) en K et la droite (OA) en L.

Γ et Γ' sont les cercles circonscrits aux triangles OAB et ALK respectivement.

Soit S la similitude plane directe qui transforme B en O et K en L soit Ω le centre de S.

(a) Montrer que Ω appartient à Γ et Γ' et qu'il est distinct de A.

(b) Donner l'écriture complexe de S et en déduire l'affixe de Ω.

EXERCICE 2

$(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est un repère du plan. On appelle (E) la conique de foyer O de directrice (Δ): $y = 2$ et d'excentricité $\frac{1}{2}$.

1. Montrer que (E) a pour équation $12X^2 + 9Y^2 = 16$ par rapport à un repère que l'on précisera. Quelle est la nature de (E) ?

2. Soit φ l'application qui à tout point M de coordonnées x et y associe le point M' de coordonnées x' et y' tels que : $\begin{cases} x' = x \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{2-\sqrt{3}}{3} \end{cases}$

(a) Donner une équation cartésienne de l'image (E') de (E) par φ.

(b) Construire (E) et (E').

EXERCICE 3

Sur la figure ci-dessous, $CABD$ est un tétraèdre régulier (toutes les faces sont des triangles équilatéraux) ; G et H sont des points tels que :

$\overrightarrow{CG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{CH} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CB}$ et L le milieu du segment [C D].

1. Montrer que les droites (GH) et (AB) sont sécantes en un point qu'on appellera I.

$\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ sont des vecteurs unitaires, respectivement colinéaires et de même sens que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AC}$. On suppose que l'espace est rapporté au repère $(A, \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$ et que $AC = 4$.

2. Déterminer les coordonnées des points G, H et I, dans le repère $(A, \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$

3. Soit E l'espace vectoriel associé à l'espace affine ci-dessus ;$(\vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$ est une base de E. f est l'endomorphisme de E tel que $f(\vec{\imath}) = \vec{\jmath}; f(\vec{\jmath}) = 2\vec{\jmath}$ et $f(\vec{k}) = \vec{k}$.

(a) Justifier que f n'est pas un isomorphisme de E.

(b) Déterminer le noyau et l'image de f ; on donnera une base pour chacun d'eux.

PROBLEME

Le problème comporte deux parties A et B.

Partie A

I. Soient les équations différentielles (E): $y' + y = 0$ et (E'): $y' + y = -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} - 2$.

1. Montrer qu'il existe une fonction h définie par $h(x) = pe^{-\frac{x}{2}} + q$ solution de (E'), p et q étant des nombres réels que l'on déterminera ..

2. Montrer qu'une fonction $f = g + h$ est solution de (E') si et seulement si g est solution de (E).

3. Résoudre (E), puis en déduire les solutions de (E').

II. Soit la fonction numérique d'une variable réelle définie par : $f(x) = e^{-x} - e^{-\frac{x}{2}} - 2$ (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ (unité sur les axes : 1cm).

1. Montrer que la fonction f vérifie l'équation (E') ci-dessus.

2. Etudier les variations de f, puis dresser son tableau de variation.

3. (a) Etudier les branches infinies de la courbe (C_f).

   (b) Tracer la courbe (C_f).

4. (a) Calculer le réel $A(\alpha) = \int_{ln4}^{\alpha}[-2 - f(x)]dx$ où α est un réel supérieur à

$ln4$.

(b) Calculer $\lim_{\alpha \to +\infty} A(\alpha)$. Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

Partie B

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $u_0 = 1$ et

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} + u_n = -\frac{1}{2}e^{-\frac{n}{2}} - 2\ (1)$.

1. Déterminer une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier n par : $a_n = be^{-\frac{n}{2}} + c$ telle que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la propriété (1) (b et c étant des nombres réels).

2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - a_n$.

Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et raison.

3. Exprimer v_n, puis u_n en fonction de n.

4. On pose $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

Calculer S_n en fonction de n; la suite (S_n) est-elle convergente ?

RÉPUBLIQUE DE CÔTE D'IVOIRE

SUJETS DES BACCALAUREATS DE COTE D'IVOIRE

BACCALAUREAT SESSION 2019

EXERCICE 1

L'unité de longueur est le centimètre.

Dans le plan orienté, on considère un carré ABCD de centre K tel que $AB = 3$.

On note E le milieu du segment $[BC]$ et G le barycentre des points pondérés $(A, 4), (B, -1) et\ (D, -1)$.

1. **a) Démontre que A est le milieu du segment $[KG]$**

   b) Justifie que : $GB^2 = \frac{45}{2}$

   c) Justifie que :$GB = GD$

   d) Détermine et construis l'ensemble (Γ_1) des points M du plan tels que :

$$4MA^2 - MB^2 - MD^2 = 9$$

2. **a) Justifie que : $AE = \frac{3\sqrt{5}}{2}$**

   b) Démontre que pour tout point M du plan :

$$3MA^2 - 2MB^2 - MD^2 = -27 + 4\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AE}$$

   c) Détermine et construis l'ensemble (Γ_2) des points M du plan tels que :

$$3MA^2 - 2MB^2 - MD^2 = 63$$

EXERCICE 2

On considère un entier naturel m dont l'écriture dans le système décimal est $\overline{abc}$.

(on rappelle que $m = 10^2a + 10b + c$)

Partie A

1. **Écris l'entier naturel m en base 2 dans le cas où : $a = 1; b = 2\ et\ c = 1$.**
2. **On suppose que : $m \equiv 0[27]$.**
   1. **Démontre que : $m = 10^2a + 10\overline{bc} \equiv 0[27]$**
   2. **Déduis-en que : $10\overline{bc} + a \equiv 0[27]$**
   3. **Justifie que l'entier $\overline{bca}$ est divisible par 27.**

Partie B

Dans cette partie on suppose que $a > c$.

On pose : $p = \overline{cba}$; $u = a$ et $d = m - p$.

1. Justifie que : $d = 99u$
2. Déduis de la question précédente que l'entier naturel d ne peut être le carré d'un entier naturel.
3. On suppose que : $b = a + c$
   i. Justifie que : $d = 3^2 \times 11b$
   ii. Justifie que : $m = 110b + 101c$.
   iii. Démontre que les entiers naturels m qui ne sont pas premiers avec d sont ceux qui vérifient à la fois : $b \neq 0$; $c \neq 0$, $b + c$ n'est pas divisible par 3; b et c sont premiers entre eux.
   iv. Déduis des questions précédentes, tous les entiers naturels m premiers avec d.

PROBLÈME

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique est le centimètre.

Pour tout entier naturel n non nul, on considère les fonctions f_n et F_n continues sur $\mathbb{R}$ et définie par : $f_n(x) = \frac{x^{2n}}{\sqrt{1+x^2}}$ et $F_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n}}{\sqrt{1+t^2}} dt$

On note $(\mathcal{C}_n)$ la courbe représentative de la fonction F_n dans le repère (O,I,J).

On se propose dans ce problème de donner, pour tout entier naturel n non nul, l'allure de la courbe $(\mathcal{C}_n)$.

Partie A.

On considère de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $(x) = ln(x + \sqrt{1 + x^2}\ )$.

On désigne par la courbe $(\mathcal{C})$ de la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère (O,I,J).

1. Démontre que f est une fonction impaire
2. a) Calcule la limite $f(x)$ puis $\frac{f(x)}{x}$ quand x tend vers $+\infty$.

   b) Donne une interprétation graphique des résultats de la question précédente.
3. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

   a) Justifie que : $\forall\ x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

   b) Détermine le sens de variation de f sur $[0; +\infty[$.

c) Dresse le tableau de variation de f sur $[0;+\infty[$.

4. Détermine une équation de la tangente (Δ) à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0.

5. On note g la fonction dérivable $\mathbb{R}$ et définie par : $(x) = -x + \ ln(x + \sqrt{1+x^2}\ )$.

   a) Détermine le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$.

   b) Détermine les positions relatives de $(\mathcal{C})$ et (Δ). (On pourra calculer $g(0)$.)

6. Construis la courbe $(\mathcal{C})$ et la droite (Δ) dans le plan muni d'un repère (O,I,J).

7. On note A l'aire en cm² de la partie du plan délimitée par la courbe $(\mathcal{C})$, la droite (OI) et les droites d'équations $x = 0\ et\ x = 1$.

   Calcule A à l'aide d'une intégration par parties.

Partie B

1. a) Justifie que F_n est définie sur $\mathbb{R}$

   b) Démontre que F_n est une fonction impaire.

   c) Étudie le sens de variation de F_n sur $[0;+\infty[$.

2. Soit (I_n) la suite numérique définie par :

$$I_0 = ln\left(1+\sqrt{2}\right)\ et\ \forall\ n\ \epsilon\mathbb{N}^*, I_n = \int_0^1 \frac{t^{2n}}{\sqrt{1+t^2}}dt$$

a) Démontre que : $\forall\ n\ \epsilon\mathbb{N}, I_n \geq 0$

b) Démontre que la suite (I_n) est décroissante.

c) Démontre que la suite (I_n) est convergente. *(On ne demande pas de calculer la limite de* (I_n)*).*

d) Vérifie que pour tout entier naturel n non nul et pour tout nombre réel t positif, on a : $t^{2n}\sqrt{1+t^2} = \frac{t^{2n}}{\sqrt{1+t^2}} + \frac{t^{2n+2}}{\sqrt{1+t^2}}$

e) A l'aide d'une intégration par paries, justifie que :

$\forall\ n\ \epsilon\mathbb{N}^*, I_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2n+2} - \frac{2n+1}{2n+2}I_n$.

$(On\ remarquera\ que\ pour\ tout\ nombre\ réel\ t, \frac{t^{2n+2}}{\sqrt{1+t^2}} = t^{2n+1}\frac{t}{\sqrt{1+t^2}})$

On admet que : $I_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}I_0$

f) Calcule I_1 et I_2

3. a) Démontre que : $\forall\, x \in \mathbb{R}, F_n(x) = I_n + \int_1^x \frac{t^{2n}}{\sqrt{1+x^2}}dt$

b) Démontre que :

$\forall\, t \geq 1, \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{t} \leq \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$

$\forall\, n \in \mathbb{N}^* \;\; et\; \forall\, x \geq 1, \frac{1}{2\sqrt{2}} \times \frac{1}{n}(x^{2n} - 1) \leq \int_1^x \frac{t^{2n}}{\sqrt{1+x^2}}dt$

c) Déduis-en la limite de $F_n(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$

d) Démontre que, pour tout entier naturel non nul n, $(\mathcal{C}_n)$ admet une branche parabolique de direction celle de la droite (OJ) en $+\infty$.

e) Construis la courbe $(\mathcal{C}_2)$ dans le plan muni du repère (O,I,J).

BACCALAUREAT SESSION 2018

Exercice 1

L'unité graphique est le centimètre.

Dans le plan orienté, on considère un losange OABC tel que :

$$OA = 7 \ \ et \ Mes(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC}}) = \frac{\pi}{3}.$$

E est le point du segment $[OB]$ tel que : $OE = OA$.

F est le point de la demi-droite $[OC)$ tel que : $CF = EB \ et \ C\epsilon[OF]$.

On désigne par I, J, K et L les milieux respectif des côtés $[OA], [AB], [BC] \ et \ [OC]$.

On désigne par (Δ) la médiatrice du segment $[OA]$ et par (Δ') celle de $[BC]$.

1. **Fais une figure.**
2. **a) Justifie que les droites $(\Delta) et \ (\Delta')$ sont parallèles.**

   b) Justifie que le triangle AOC est équilatéral.

   c) Justifie que : $OB = OF$.
3. **Soit R_1 la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$ et R_2 la rotation de centre A et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.**

On pose : $f = R_1 o \ R_2$

a) Détermine $f(O) et \ f(A)$

b) Démontre que f est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

c) Déduis de ce qui précède que $(EF) \perp (OA) et EF = OA$.

d) Construis le centre Ω de f.

4. **a) Justifie qu'il existe une isométrie g et une seule telle que : $g(O) = A, g(A) = C$ et $g(C) = B$.**

b) Justifie que g est un antidéplacement

c) Démontre que g est une symétrie glissée.

5. **Dans cette partie, on se propose de caractériser la symétrie glissée g.**

Soit R la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{3}$ et S la symétrie orthogonale d'axe (Δ).

a) Démontre que : $g = RoS$

b) Détermine l'axe de la symétrie orthogonale S_1 telle que $R = S_{(AB)}oS_1$.

c) Déduis de ce qui précède que : $g = S_{(AB)}ot_{\vec{u}}$ où $\vec{u}$ est un vecteur que l'on caractérisera.

d) En utilisant la relation $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{JB}$, détermine les éléments caractéristiques de g.

Exercice 2

Dans tout cet exercice, n est un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Démontre que n et $2n + 1$ sont premiers entre eux.
2. On pose : $A = n + 3, B = 2n + 1$ et $d = PGCD(A; B)$.

a) Calcule $2A - B$ et déduis-en les valeurs possibles de d.

b) Démontre que A et B sont multiples de 5 si et seulement si $n - 2$ est multiple de 5.

c) Soient $S = n^3 + 2n^2 - 3n$ et $P = 2n^2 - n - 1$.

Justifie que S et P sont divisibles par $n - 1$.

3. On pose : $\delta = PGCD(n(n + 3); 2n + 1)$

a) Démontre que d divise δ

b) Démontre que δ et n sont premiers entre eux.

c) Déduis des questions 3-a) et 3-b) que δ est égal à d.

d) Détermine le $PGCD(S; P)$ en fonction de n.

4. Détermine $PGCD(S; P)$ pour $n = 2016$ puis pour $n = 2017$.

Problème

Soit n un entier naturel non nul et g_n la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $g_n(t) = (-\frac{2}{t} + lnt)^n$.

On note (C_n) la courbe représentative de la fonction g_n dans le plan muni d'un repère orthogonal (O,I,J). Unités graphiques : $OI = 2cm$ et $OJ = 0,5cm$.

Partie A

1. a) Calcule la limite de g_1 en 0.

   b) Interprète graphiquement ce résultat.

2. a) Calcule la limite de g_1 en $+\infty$.

   b) Justifie que (C_1) admet une branche parabolique de direction celle de (OI) en $+\infty$.

3. On suppose que g_1 est dérivable sur]0 ;+∞[.

a) Démontre que g_1 est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

On admet que l'équation $t \in]0;+\infty[$, $g_1(t) = 0$ admet une solution unique α telle que : $2,3 < \alpha < 2,4$.

b) Justifie que l'équation $t \in]0;+\infty[$, $g_1(t) = 1$ admet une solution unique β telle que : $4,3 < \beta < 4,4$.

4. Soit t un nombre réel strictement positif.

Démontre que :

   a) $g_1(t) < 0 \Leftrightarrow t \in]0;\alpha[$;

   b) $g_1(t) > 0 \Leftrightarrow t \in]\alpha;+\infty[$.

Partie B

Dans cette partie, on suppose que n est supérieur ou égal à 2.

1. a) Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} g_n(t)$.

b) Démontre que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{g_n(t)}{t} = 0$ (On pourra poser : $x = t^{\frac{1}{n}}$).

c) Interprète graphiquement les résultats précédents.

2. On suppose que n est pair.

a) Calcule $\lim\limits_{x \to 0} g_n(t)$.

b) Interprète graphiquement ce résultat.

3. On suppose que n est impair.

a) Calcule $\lim_{x \to 0} g_n(t)$.

b) Soit t un nombre réel strictement positif.

Justifie que :

i) $g_n(t) < 0 \Leftrightarrow t \in]0; \alpha[$;

***ii*) $g_n(t) > 0 \Leftrightarrow t \in]\alpha; +\infty[$.**

($On\ pourra\ utiliser\ la\ question$ 4 $de\ la\ partie\ A$).

4. **On suppose que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, g_n est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on désigne par g'_n sa fonction dérivée.**

a) Démontre que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 et pour tout nombre réel strictement positif t, $g'_n(t) = ng'_1(t) \times g_{(n-1)}(t)$.

b) étudie suivant la parité de n, le signe de g'_n sur $]0; +\infty[$.

c) Dresse suivant la parité de n, le tableau de variation de g_n.

Partie C

Soient n et p deux entiers naturels et t un nombre réel strictement positif.

1. **a) Exprime $g_{(n+p)}(t)$ en fonction de $g_n(t)$ et $g_p(t)$**

b) Déduis de ce qui précède que : $g_{(n+p)}(t) - g_n(t) = (g_p(t) - 1) \times g_n(t)$

Dans toute la suite du problème, on suppose que n est pair

2. **justifie que :**

   a) (C_n) est au-dessus de (C_{n+1}) sur $]0; \beta[$;

   ***b*) (C_n) est au-dessous de (C_{n+1}) sur $]\beta; +\infty[$**

   (On pourra utiliser la question 3 de la partie A).

3. **Construis (C_2) et (C_3) dans le même repère (O,I,J).**

   ***On prendra :* $\alpha = 2,35$ *et* $\beta = 4,35$.**

4. **Soit A_n l'aire, en unité d'aire, de la partie du plan limité par $(C_n), (C_{n+1})$ et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$.**

a) Justifie que, pour tout entier naturel n pair et non nul,

$$A_n = \int_1^2 (1 - g_1(t)) \times g_n(t)dt$$

b) A l'aide d'une intégration par partie, calcule $\int_1^2 \left(1 - g_1(t)\right) dt$.

c) Démontre que pour tout entier naturel n pair et non nul,

$$2g_n(2) \leq A_n \leq 2g_n(1)$$

d) Déduis de ce qui précède que pour tout entier naturel n pair et non nul,

$$2(1 - ln2)^n \leq A_n \leq 2^{n+1}$$

BACCALAUREAT SESSION 2017

EXERCICE 1

On désigne par Y une variable aléatoire vérifiant les conditions suivantes :

- **Y prend les valeurs $1, -1$ *et* 2 avec les probabilités respectives e^a, e^b *et* e^c où a, b *et* c sont des termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison r tels que : $a = b - r$ et $c = b + r$.**
- **L'espérance mathématique $E(Y)$ de Y est égale à 1.**

1. a) Justifie que le couple (b, r) est solution du système (S) $\begin{cases} e^b e^{-r} + e^b + e^b e^r = 1 \\ e^b e^{-r} - e^b + 2e^b e^r = 1 \end{cases}$

b) Résous le système (S).

c) Déduis de ce qui précède que : $a = ln\left(\frac{1}{7}\right)$ et $c = ln\left(\frac{4}{7}\right)$.

2. Justifie que la variance $V(Y)$ de Y est égale à $\frac{12}{7}$.

3. On marque sur une droite graduée (D) les points A, B *et* C d'abscisses respectives $1\ ;\ -1$ *et* 2.

On désigne par G le barycentre des points pondérés $(A,1), (B,2)$ *et* $(C,4)$.

On note (Γ) l'ensemble des points M de la droite (D) tels que : $MA^2 + 2MB^2 + 4MC^2 = 187$ et on pose : $h(M) = \frac{1}{7}(MA^2 + 2MB^2 + 4MC^2)$.

a) Calcule l'abscisse du point G.

b) Démontre que : $h(G) = V(Y)$.

c) Détermine l'ensemble (Γ).

EXERCICE 2

Dans le plan orienté, on considère un triangle OIJ tel que : OI = OJ et $Mes(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OJ}) = \frac{\pi}{2}$

A, B *et* C sont les milieux respectifs des segments [IJ], [JO] et [OI].

Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et t la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{IJ}$.

On pose : F = rot et G = tor.

1. Fais une figure. (*On prendra : OI = 8 cm*).

2. a) Détermine F(C) et G(B).

b) Déduis de ce qui précède la nature et les éléments caractéristiques de chacune des transformations F et G.

3. On désigne par F^{-1} la réciproque de la transformation F.

a) Détermine la nature de la transformation GoF^{-1}.

b) Détermine (GoF^{-1})(O), puis caractérise la transformation GoF^{-1}.

c) Détermine (GoF)(I) puis déduis-en la nature et les éléments caractéristiques de la transformation GOF.

4. On munit le plan du repère orthonormé (O, I, J) tel que défini précédemment.

Soit h l'homothétie de centre B et de rapport -2. On pose : $S = hor$.

a) Écris l'affixe de chacun des points A , B et C.

b) Détermine l'écriture complexe de h et celle de r.

c) Soit g l'application complexe associée à S.

Démontre que : $\forall z \in \mathbb{C}, g(z) = -2iz - 2 + \frac{3}{2}i$.

d) Déduis de ce qui précède la nature et les éléments caractéristiques de S.

PROBLÈME

On considère la suite (tn) définie sur ℕ∗ par : $t_n = n - (n + \frac{1}{2})ln(n) + ln\,(n!)$.

Le but de ce problème est d'étudier la convergence de la suite (tn) *et de démontrer que :*

$\lim\limits_{x \to +\infty} t_n = \ln(\sqrt{2\pi})$

Partie I : Étude de la convergence de la suite (t_n)

Soit n un entier naturel non nul et ψ la fonction définie sur $]-n\,;+\infty[$ par : $\psi(t) = ln(1 + \frac{t}{n}) - \frac{t}{n}$.

On suppose que ψ est dérivable sur $]-n\,;+\infty[$ et on note ψ' sa fonction dérivée.

1. a) Justifie que : $\forall\, t \in]-n\,;+\infty[, \psi'(t) = \frac{-t}{n^2(1+\frac{t}{n})}$.

b) Calcule $\psi(0)$.

c) Dresse le tableau de variation de la fonction ψ (*On ne calculera pas les limites*).

d) Déduis de ce qui précède que : $\forall\, t \in]-n\,;+\infty[, ln\,(1 + \frac{t}{n}) \leq \frac{t}{n}$.

2. a) En utilisant la question 1. d) et en effectuant un changement de variable, démontre que : $\forall x \in \mathbb{R}^*{}_+,\ lnx \leq x - 1$.

b) Démontre que : $\forall\, k \in \mathbb{N}*, \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \left(\frac{x}{k} - 1\right) dx = 0$

c) Déduis des questions 2. a) et 2. b) que : $\forall\, k \in \mathbb{N}*, \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} ln\left(\frac{x}{k}\right) dx \leq 0$

d) Justifie alors que : $\forall\, k \in \mathbb{N}*, \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} ln(x)dx \leq \ln(k)$

e)En utilisant la relation de Chasles, démontre que : $\int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} ln(x)dx \leq \ln(n!)$

3. a) En utilisant une intégration par parties, démontre que :

$$\forall n \in \mathbb{N}*, n - (n+\frac{1}{2})ln(n+\frac{1}{2}) + ln\,(n!) \geq ln\,(\sqrt{2}).$$

b) Démontre que : $\forall\, n \in \mathbb{N}*, t_n \geq ln\,(\sqrt{2})$.

4. On définit la fonction *f* sur l'intervalle$]\,0\,;\,1[$ par : $f(x) = \frac{1}{2x}\, ln\,(\frac{1+x}{1-x})$.

On admet que : $\forall\, x \in]0\,;\,1[\,, f(x) \geq 1\; et\; \forall\, n \in \mathbb{N}*, t_{n+1} - t_n = 1 - f(\frac{1}{2n+1})$.

a) Détermine le sens de variation de la suite (t_n).

b) Déduis des questions précédentes la convergence de la suite (t_n).

Partie II : Calcul de la limite de la suite (t_n)

On définit la suite (w_n) par : $w_n = \frac{\pi}{2}\; et\; \forall\, n \in \mathbb{N}^*, w_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n(t)\, dt.$

1. a) Calcule w_1.

b) Démontre que la suite (w_n) est décroissante et positive. On admettra que la suite (w_n) est à termes strictement positifs.

c) A l'aide d'une intégration par parties, démontre que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, w_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} w_n$.

On remarquera que : $sin^{\,n+2}(t) = sin(t) \times sin^{n+1}(t)$.

d) En utilisant les questions 1. b) et 1. c) de la partie II, justifie que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \frac{n+1}{n+2} \leq \frac{w_{n+1}}{w_n} \leq 1.$$

e) Déduis de ce qui précède $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{w_{n+1}}{w_n}$

2. On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N},\; y_n = (n+1)w_{n+1} \times w_n$.

a) Démontre que la suite (y_n) est constante.

b) Déduis de ce qui précède que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\; y_n = \frac{\pi}{2}$.

c) Détermine $\lim\limits_{x\to+\infty} n\,(w_n)^2$.

(On remarquera que :$n(w_n)^2 = \frac{n}{n+1} \times y_n \times \frac{w_n}{w_{n+1}}$)

d) Déduis de ce qui précède que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{n} w_n = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$.

3. On admet dans toute la suite du problème que, si une suite (a_n) converge vers l, alors la suite (a_{2n}) converge aussi vers l.

a) Déduis de la question $2.c)$ de la partie II la limite de la suite (nw_{2n}^2)

(*On remarquera que* : $nw_{2n}^2 = \frac{1}{2}(2nw_{2n}^2)$.

b) En utilisant la question $1.c)$ de la partie II, démontre par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_{2n} = \frac{(2n!)}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2}$$

c) Démontre que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ e^{t_n} = n!\ (\frac{e}{n})^n \times \frac{1}{\sqrt{n}}$.

d) En admettant que : $\forall n \in \mathbb{N}*, e^{t_{2n}-2t_n} = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\sqrt{2nw_{2n}^2}$ **, détermine la limite de la suite (t_n).**

BACCALAUREAT SESSION 2016

EXERCICE 1

On considère la suite (u_n) définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{ln(n+1)+ln(n+2)+\cdots+ln(n+n)-nln(n)}{n}$

1- Démontrer que pour tout entier naturel n non nul,

$$u_n = \frac{1}{n}\left[ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+ln\left(1+\frac{2}{n}\right)+\cdots+ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]$$

2- *a)* Démontrer que pour tout entier naturel k tel que $0 \leq k \leq n-1$,

$$\frac{1}{n}ln\left(1+\frac{k}{n}\right) \leq \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} ln(x)dx \leq ln\left(1+\frac{k+1}{n}\right)$$

(*On pourra utiliser un encadrement de* $ln(x)$ *sur l'intervalle* $\left[1+\frac{k}{n}; 1+\frac{k+1}{n}\right]$).

b) En déduire que pour tout entier naturel n non nul : $u_n - \frac{1}{n}ln2 \leq \int_1^2 lnxdx \leq u_n$

3- Sachant que $\int_1^2 lnxdx = 2ln(2) - 1$, déduire de ce qui précède la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 2

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$. L'unité graphique est 2 cm.

1- On note (C) l'ensemble des points M du plan d'affixe z ($z = x + iy$ *avec* $(x,y)\in\mathbb{R}^2$) tels que $14z\bar{z} + 16i(z-\bar{z}) = z^2 + \bar{z}^2$

Démontrer que M appartient à (C) si et seulement si :$3x^2 + 4y^2 - 8y = 0$.

2- *a)* Justifier que (C) est une ellipse. On note Ω son centre.

b) Préciser les coordonnées de Ω.

c) Déterminer une équation de l'axe focal de (C).

d) On note A, A', F et F' les points d'affixes respectives

$\frac{-2\sqrt{3}}{3} + i$, $\frac{2\sqrt{3}}{3} + i$, $-\frac{\sqrt{3}}{3} + i$ *et* $\frac{\sqrt{3}}{3} + i$

Justifier que A et A' sont les sommets de (C) situés sur son axe focal.

Justifier que F et F' sont les foyers de (C).

3- Construire l'ellipse (C).

4- On considère l'hyperbole (H) de foyers A et A' et de sommets F et F'.

***a)* Démontrer qu'une équation cartésienne de (H) dans le repère $(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$ est : $3x^2 - y^2 = 1$**

***b)* Tracer les asymptotes de (H).**

***c)* Construire (H).**

PROBLEME

Partie A

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ tel que :$\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 2cm$

On considère la fonction dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et définie par : $f(x) = x - 4 + \frac{1}{4}ln|x|$.

1- *a)* Calculer la limite de f *en* 0.

***b)* Calculer les limites de f *en* $+\infty$ *et en* $-\infty$.**

***c)* Démontrer que f est strictement croissante sur chacun des intervalles $\left]-\infty;-\frac{1}{4}\right[$ *et* $]0;+\infty[$ et strictement décroissante sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{4};0\right[$. .**

***d)* Dresser le tableau de variations de *f*.**

2- Démontrer que l'équation $x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$ admet une unique solution α telle que : $3 < \alpha < 4$.

3- Démontrer que : $\forall\, x \in\,]-\infty;0[\, \cup\,]0;\alpha[\; f(x) < 0$;

$\forall\, x \in]\alpha;+\infty[\; f(x) > 0$.

Partie B

On considère la fonction *h* dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} \forall\, x \in \mathbb{R}^*, h(x) = x + 1 - \dfrac{31}{16}x^2 - \dfrac{1}{8}x^2 ln|x| \\ h(0) = 1 \end{cases}$$

1- *a)* Démontrer que *h* est dérivable en 0.

***b)* Démontrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R}^*, h'(x) = xf(\frac{1}{x})$.**

***c)* Démontrer en utilisant A-3) que : $\forall\, x \in\,]-\infty;0[\, \cup \left]0;\frac{1}{\alpha}\right[\; h'(x) > 0$;**

$$\forall\, x \in \left]\frac{1}{\alpha};+\infty\right[\; h'(x) < 0.$$

2- On *note* (Γ) la courbe représentative de la restriction de *h* à l'intervalle $[-1\,;\,\frac{3}{2}]$ dans le plan muni du repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

_a)_ Tracer la tangente à (Γ) en son point d'abscisse 0.

_b)_ Construire la courbe (Γ). (_On prendra :_ $\alpha = 3,6$).

3- λ est un nombre réel appartenant à l'intervalle]0 ; 1[.

_a)_ En utilisant une intégration par parties, démontrer que : $\int_{\lambda}^{1} x^2 ln(x)dx = -\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\lambda^3 - \frac{1}{3}\lambda^3 ln(\lambda)$.

_b)_ On note $A(\lambda)$ l'aire en centimètre carré de la partie du plan limitée par la courbe (Γ), la droite de repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ et les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = 1$.

Déduire de la question précédente que :

$A(\lambda) = (\frac{125}{36} - 4\lambda - 2\lambda^2 + \frac{91}{36}\lambda^3 + \frac{1}{6}\lambda^3 ln(\lambda))\ cm^2$.

_c)_ Calculer la limite de $A(\lambda)$ quand λ tend vers 0 par valeurs supérieures.

Partie C

On se propose de calculer une valeur approchée de α à $0,01$ près.

1- Soit g la fonction dérivable sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ et définie par : $g(x) = 4 - \frac{1}{4}ln(x)$.

_a)_ Étudier les variations de g.

_b)_ Démontrer que l'image de l'intervalle [3 ; 4] par g est contenue dans l'intervalle $[3\ ;\ 4]$.

_c)_ Démontrer que α est l'unique solution de l'équation : $x \in]0\ ;\ +\infty[, g(x) = x$.

2- On considère la suite (_un_) définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$

_a)_ Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n, 3 \leq u_n \leq 4$.

_b)_ Démontrer que, pour tout entier naturel n, $(u_n - \alpha)$ _et_ $(u_{n+1} - \alpha)$ sont de signes contraires.

_c)_ Démontrer que, pour tout _x_ élément de $[3\ ;\ 4]$, on a : $|g'(x)| \leq \frac{1}{12}$

En déduire que, pour tout entier naturel _n_, $|u_{n+2} - u_{n+1}| \leq \frac{1}{12}|u_{n+1} - u_n|$ puis que $|u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{12^n}$

_d)_ Démontrer que pour tout entier naturel _n_, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{12^n}$

En déduire une valeur approchée de α à 0,01 près.

BACCALAUREAT SESSION 2015

EXERCICE 1

Dans un quartier d'affaires d'une ville, la Mairie a créé des parkings payants pour les véhicules. Le prix du stationnement dans ces parkings est de 2000 F par jour. Par ailleurs le stationnement en tout autre endroit est interdit et l'amende à payer liée à cette infraction est égale à 5.000 F.

On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles

Partie I

Pour encourager les automobilistes à utiliser ses parkings, la mairie organise, dans le cadre d'une promotion, une loterie. Cette loterie est constituée de dix tickets identiques disposés dans une urne dont deux sont gagnants.

Chaque automobiliste qui désire se gare dans un des parkings, effectue le tirage d'un ticket, note le résultat, le remet dans l'urne puis effectue le deuxième tirage.

- **Si les deux tickets tirés sont gagnants alors le client stationne gratuitement.**
- **Si un seul numéro des deux tickets est gagnant alors le client stationne à 1 000 F.**
- **Si aucun des deux tickets tirés n'est gagnant alors le client stationne à 2 000 F.**

Un automobiliste se présente et effectue les deux tirages.

1 Calculer la probabilité de stationner gratuitement

2 Justifier que la probabilité de payer la moitié du prix du stationnement est égale à $\frac{8}{25}$

3 Calculer la probabilité de payer au moins 1 000 F pour le stationnement

Partie II

La probabilité pour un automobiliste d'être interpellé par la police Municipale pour stationnement interdit et d'avoir alors à payer l'amende est égale à $\frac{4}{5}$.

Un automobiliste se gare n fois en stationnement interdit. Les risques d'amende sont indépendants d'un stationnement interdit à l'autre.

1 a) Calculer la probabilité q_n de payer l'amende au plus une fois

b) Démontrer que la probabilité P_n qu'il paye au moins une fois l'amende est $P_n = 1 - \frac{1}{5^n}$

c) Déterminer le plus petit entier naturel n pour que $P_n \geq 0,99$

2 Monsieur Riko, exerçant dans ce quartier, paye en moyenne 4800 F pour trois jours de stationnement par semaine dans les parkings payants. Il estime que les stationnements payants reviennent trop chers et prend le risque de se garer en stationnement interdit trois fois dans la semaine.

Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur le montant total des amendes qu'il peut payer dans la semaine.

a) Détermine la loi de probabilité de X

b) Monsieur Riko a-t-il intérêt à se garer en stationnement interdit ?

Justifie ta réponse.

EXERCICE 2

Partie I

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$. L'unité graphique est 2 cm.

On note A,B et C les points d'affixes respectives $2i$; $\sqrt{3} + i$ et $\sqrt{3} + 2i$

1. a) Calculer le module et l'argument principal de $\frac{z_A}{z_B}$ où z_A et z_B sont les affixes respectives des points A et B.

b) En déduire que le triangle OAB est équilatéral

2. On note P et Q les milieux respectifs des segments $[OB]$ et $[AB]$.

r est la rotation de centre J d'affixe i et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et t la translation de vecteur $\overrightarrow{PQ}$.

On pose : $f = t \circ r$

a) Détermine l'image par f du point O.

b) Démontrer que f est une rotation dont on donnera l'angle.

c) Construire le centre K de f

Partie II

1. **Soit M un point du plan d'affixe z. On pose $z = x + iy$, où x et y des nombres réels. On note H le point d'affixe $x + 3i$.**

Soit (Γ) l'ensemble des points M du plan tels que :$2|z| = |y - 3|$.

a) Démontrer que : $M \epsilon (\Gamma) \Leftrightarrow \frac{MO}{MH} = \frac{1}{2}$.

b) Justifier que (Γ) est une ellipse dont on précisera l'excentricité, un foyer et la directrice (D) associée

c) Démontrer que $M \epsilon (\Gamma) \Leftrightarrow \frac{x^2}{3} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$

d) Préciser les coordonnées du centre Ω de (Γ) et les coordonnées des sommets de (Γ) dans le repère $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

e) Tracer (Γ).

2. **Soit (Γ') est l'image de (Γ) par f.**

a) Démontrer que (Γ') est une ellipse d'excentricité $\frac{1}{2}$

b) Préciser un foyer et la directrice associée.

PROBLEME

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique est 10 cm.

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \left(e^{-x^2} - 1\right)lnx \ \ si\ x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

On note (C) la courbe représentative de la fonction f dans le plan du repère (O,I,J).

On se propose dans ce problème de trouver un encadrement de $\int_0^1 f(x)dx$.

Partie A

O considère les fonctions h et g dérivables et définies sur $]0; +\infty[$ par : $h(x) = lnx + e^x + 1$ et $g(x) = xlnx + e^x - 1$.

On admet qu'il existe un nombre réel $\alpha \epsilon]0; 1[$ tel que :

$$\begin{cases} \forall\, x \in \,]0;\alpha[, h(x) < 0 \\ \forall\, x \in \,]\alpha,+\infty[, h(x) > 0 \\ h(\alpha) = 0 \end{cases}$$

1. **Calculer les limites de g en 0 et en $+\infty$**
2. **Justifier que :** $\forall\, x \in \,]\alpha,+\infty[, g'(x) = h(x)$.
3. **a) Etudier les variations de g sur l'intervalles $]0,+\infty[$.**

   b) Dresser le tableau de variation de g.
4. **a) Démontrer que l'équation : $x \in \,]0,+\infty[, g(x) = 0$ admet une solution de β.**

   b) Justifier que : $\beta \in \,]0,3;0,4[$.

   c) Démontrer que : $\forall\, x \in \,]0;\beta[, g(x) < 0;\ \ \forall\, x \in \,]\beta,+\infty[, g(x) > 0$.

Partie B

1. **Démontrer que f est continue en 0.**
2. **Justifier que f est dérivables en 0.**
3. **a) Calculer** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

   b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$

   c) Donner une interpretation graphique des résultats des limites des questions $a)$ et $b)$
4. **on admet que f est dérivable sur $]0;+\infty[$**

   a) Démontrer que : $\forall\, x \in \,]0,+\infty[, f'(x) = -\frac{e^{-x^2}}{x} g(x^2)$.

   b) Déterminer lez variations de f sur $[0;+\infty[$.

   c) Dresser le tableau de variation de f.
5. **a) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1.**

   b) Tracer (C) et (T) dans le plan muni repère (O,I,J).

   On prendra $\beta = 0,31$.

Partie C

1. **Sachant que :** $\forall\, x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x$.

   a) Démontrer que : $\forall\, x \in \,]0;+\infty[, -1 \leq -e^{-x} \leq -1 + x$

   b) Démontrer que : $\forall\, x \in \,]0;+\infty[, 1 - x \leq e^{-x} \leq 1 - x + \frac{x^2}{2}$
2. **Soit t un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0;1]$.**

On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, I_n(t) = \int_t^1 x^n \ln x dx$.

a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer $I_n(t)$.

b) Démontre que : $\forall\, t \in \,]0;1], -I_2(t) + \frac{1}{2}I_4(t) \leq \int_t^1 f(x)dx \leq -I_2(t)$.

3. On pose : $S = \int_0^1 f(x)dx$.

a) Donner une interpretation géométrique de S.

b) On admet que : $\lim\limits_{t\to 0} \int_t^1 f(x)dx = S$

Déterminer un encadrement de S.

BACCALAUREAT SESSION 2014

EXERCICE 1

I-

1. **Démontrer qu'il existe un couple $(a; b)$ d'entiers relatifs tel que $45a - 16b = 1$**
2. **Soit l'équation (E) : $45x - 16y = 2$ où x *et* y sont des entiers relatifs.**

   a) Justifier que le couple $(10; 28)$ est une solution particulière de (E).

   b) Résoudre (E)

II- Deux navires A et B accostent régulièrement et périodiquement dans un port pour décharger et charger des marchandises.

Les navires A accoste tous les 90 jours et B accoste tous les 32 jours.

Le navire A accoste un jour J_0 au port quatre jours plus tard, B accoste à son tour.

On note J_1 le jour de la prochaine entrée simultanée des deux navires au port.

1. **Soient u *et* v le nombre d'entrées au port effectuées régulièrement par A et entre J_0 et J_1 (J_0 non compris)**

   Démontrer que le couple $(u; v)$ est une solution de (E).
2. **Déterminer le couple $(U; v)$**
3. **Calculer le nombre de jours qui s'écoulent entre J_0 et J_1 (J_0 non compris).**

EXERCICE 2

L'unité de longueur est le centimètre.

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC rectangle en A tel que :

$$Mes\ \left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right) = -\frac{\pi}{2} \text{ et } Mes\ \left(\widehat{\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}}\right) = -\frac{\pi}{6}$$

I-

1. **On considère la similitude directe S qui transforme A en B et C en A.**

   a) Faire une figure en prenant $AC = 7$ *(On complètera la figure au fur à mesure)*

   b) Justifier que S n'est pas une translation

   c) Justifier que l'angle de la similitude directe de S est $-\frac{\pi}{2}$.

   d) Détermine le rapport de S

2. On note W le centre de S

   a) Démontrer que W appartient aux cercles (C') et (C) de diamètres respectifs $[AB]$ *et* $[AC]$

   b) Justifier que W est le projeté orthogonal de A sur la droite (BC)

3. Soit (D) une droite passant par A et ne passant pas par W.

   (D') est la perpendiculaire à (D) passant par C. On appelle B' et C' les projetés orthogonaux respectifs de B et C sur (D).

   a) Déterminer les images respectives de (D) et (D') par S.

   b) En déduire l'image du point C' par S

   c) Déduire de ce qui précède que le cercle de diamètre $[B'C']$ passe par un point fixe lorsque la droite (D) varie. Préciser ce point fixe.

II-

1. Placer le point I de la demi-droite $[AC)$ tel que : $AB = AI$
2. Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(A, \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AB})$.

   a) Démontrer que l'affixe du point C est $\sqrt{3}$

   b) Soit M un point d'affixe z et M' le point d'affixe z', image de M par S.

   Justifier que : $z' = -i\frac{\sqrt{3}}{3}z + i$.

   c) Déterminer l'affixe du centre W de S.

3. a) Déterminer l'ensemble (G) des points M d'affixe z tel que $|z'| = 1$

   b) Tracer (G)

PROBLEME

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O,I,J). L'unité graphique est égale à 2cm.

Partie A

Soit f la fonction dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2(1 - 2\ln x), \ si\ x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On note (C_f) sa représentation graphique dans le plan muni du repère (O,I,J).

1. démontrer que f est continue en 0.

2. Justifier que le courbe (C_f) admet en sont point d'abscisse 0, une tangente horizontale.

3. a) Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$

   b) Interpréter graphiquement les résultats de la question 3-a).

4. a) Démontrer que pour tout x élément de l'intervalle $]0;+\infty[, f(x) = -4xlnx$.

   b) Étudier les variations de f sur $]0;+\infty[$, puis dresser son tableau de variation.

   c) Calculer $f(\sqrt{e})$ et justifier que : $\begin{cases} \forall\ x \in \left]0;\sqrt{e}\right[, \mathbf{0 \leq f(x) \leq 1} \\ \forall\ x \in \left]\sqrt{e};+\infty\right[, \mathrm{f(x)} < 0 \end{cases}$

5. a) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C_f) en son point d'abscisse $\sqrt{e}$.

   b) Tracer $(T) et\ (C_f)$.

Partie B

α est un élément de $\left]0;\sqrt{e}\right[\cup \left]\sqrt{e};+\infty\right[$ est x est un nombre réel strictement positif.

On pose : $S = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt$.

1. A l'aide d'une intégration par partie, démontrer que : $S = \frac{x^3}{3}\left(\frac{5}{3} - 2lnx\right) - \frac{\alpha^3}{3}\left(\frac{5}{3} - 2ln\alpha\right)$

2. On note $A(\alpha)$ l'aire en cm² de la partie du plan limitée par (C_f) et les droites d'équations $y = 0, x = \alpha\ \ et\ x = \sqrt{e}$

   a) Démontrer que : $A(\alpha) = (4\int_{\alpha}^{\sqrt{e}} f(t)dt)cm^2$

   (On distinguera les cas $\alpha > \sqrt{e}$ et $\alpha < \sqrt{e}$)

   b) On suppose dans cette question que $\alpha < \sqrt{e}$.
   Calculer la limite de $A(\alpha)$ lorsque α tend vers 0. (On admettra que cette limite est l'aire en cm² de la partie de plan limitée par la courbe (C) et les droites d'équations $x = 0; x = \sqrt{e}\ et\ y = 0$)

   c) On suppose dans cette question que $\alpha > \sqrt{e}$.

   Déterminer la valeur de α pour laquelle $A(\alpha) = (\frac{8}{9}e\sqrt{e})cm^2$.

3. Déduire de ce qui précède que l'aire en cm² de la partie du plan comprise entre la courbe (C_f), la droite (OI) et les droites d'équations $x = 0\ et\ x = e^{\frac{5}{6}}$ est égale à : $\frac{16}{9}e\sqrt{e}$.

Partie C

n est un entier naturel.

Soit f_n la fonction dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$ et définie par :

$$\begin{cases} f_n(x) = x^2(n-2lnx)e^{\frac{1-n}{2}} \; si \; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On donne (C_n) la représentation graphique de f_n dans le plan muni du repère (O,I,J).

1. **Démontrer que (C_n) est l'image de (C_1) par l'homothétie de centre O et de rapport $e^{\frac{n-1}{2}}$**
   On remarquera que $(C_1) = (C_f)$
2. **a) Construire la courbe (C_2) et ses tangentes aux points d'abscisses respectives 0 et e.**
   b) Déterminer en cm², l'aire de la partie du plan limitées par la courbe (C_2), les droites (OI) , (OJ) et les droites d'équation : $x = e$.
3. **Déterminer l'aire en cm² de la partie du plan comprise entre la courbe (C_2), la droite (OI) et les droites d'équations : $x = 0 \; et \; x = e$.**

BACCALAUREAT SESSION 2013

EXERCICE 1

a est un nombre réel strictement positif et différent de 1. On considère la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et définie par : $f(x) = \sqrt{1 + ax^2}$

On admettra que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^*$.

Soit la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

1. On suppose que : $0 < a < 1$.

   a) Démontrer par récurrence que :

   i) Pour tout n élément de $\mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{\sqrt{1-a}}$;

   ii) La suite (u_n) est croissante.

   b) Démontrer que la suite (u_n) est convergente puis détermine sa limite.

2. On suppose que : $a > 1$.

Soit la suite (v_n) définie par : $v_n = (u_{n+1})^2 - (u_n)^2$ pour tout entier naturel n.

   a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

   b) En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $v_n = (u_{n+1})^2 - (u_n)^2 = a^n$

   c) On pose : $S_0 = 1$ *et* $S_n = 1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

   Justifier que : $S_n = \frac{1-a^n}{1-a}$

   d) En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{S_n}$.

EXERCICE 2

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, d'unité 1 cm, on considère les points $A(-1; 0)$ *et* $I(4; 0)$.

On note (E) l'ellipse de centre I dont un sommet est A et un foyer est le point O.

1. a) Démontrer les coordonnées des trois autres sommets de (E) dans le repère $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

b) Justifier que l'excentricité de (E) est égale à $\frac{4}{5}$.

c) Donner une équation de la directrice (D) de l'ellipse (E) associée au foyer O dans le repère $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

2. a) Démontrer qu'une équation de (E) dans le repère $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est: $\frac{(x-4)^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

b) Construire (E).

3. on considère l'équation :

$$(E_\alpha): z \in \mathbb{C}, \qquad z^2 - 2(4 + 5cos\alpha)z + (4cos\alpha + 5)^2 = 0 \ avec \ \alpha \in [0; \pi].$$

a) Justifier que le discriminant de (E_α) est $\Delta = (6isin\alpha)^2$

b) Résoudre l'équation (E_α).

On notera z_1 la solution dont la partie imaginaire est strictement positive et z_2 l'autre solution.

c) On note M_1 le point d'affixe z_1 et M_2 le point d'affixe z_2 dans le repère $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

Démontrer que M_1 et M_2 appartiennent à (E) lorsque α décrit l'intervalle $[0; \pi]$.

PROBLEME

Partie A

On considère la fonction dérivable sur $]0; +\infty[$ et définie par : $f(x) = \frac{lnx}{1+x^2}$

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthogonal (O,I,J). Unités : OI=2cm et OJ=4cm

I- Soit la fonction u dérivable sur $]0; +\infty[$ et définie par : $u(x) = 1 + x^2 - 2x^2 lnx$.

1. Calculer $\lim_{x\to 0} u(x)$ et $\lim_{x\to +\infty} u(x)$
2. a) Etudier les variations de u sur $]0; +\infty[$ puis dresser son tableau de variation.

b) Démontrer que l'équation : (E) : $x \in]0; +\infty[, u(x) = 0$ admet une solution unique α.

c) Démontrer que : $1,89 < \alpha < 1,9$

d) Justifier que : $\begin{cases} si \ x \in]0; \alpha[, alors \ u(x) > 0 \\ si \ x \in]\alpha; +\infty[, alors \ u(x) \leq 0 \end{cases}$

II-

1. calculer $\lim_{x\to 0} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$
2. a) Démontrer que pour tout x élément de $]0;+\infty[$, $f'(-x) = \frac{u(x)}{x(1+x^2)^2}$

   b) Démontrer que $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2}$

   c) Etudier les variations de f sur $]0;+\infty[$ puis dresser le tableau de variation de f.
3. a) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de (C) et (OI).

   b) Déterminer suivant les valeurs de x, le signe de $f(x)$ pour tout x élément de $]0;+\infty[$.
4. Tracer (C) dans le plan muni du repère (O,I,J).

Partie B

On donne F la fonction dérivable sur $]0;+\infty[$ et définie par : $F(x) = \int_1^x \frac{lnt}{1+t^2}dt$

1. a)Déterminer le signe de F sur $]0;+\infty[$.

   b) Calculer F'(x) pour tout nombre réel x élément de $]0;+\infty[$.
2. On note φ la bijection réciproque de la fonction tangente sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.

   a) Démontrer qque pour tout x élément de $]0;+\infty[$, $\varphi'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

   b) Soit h la fonction définie par : $\begin{cases} \forall\ x\ \epsilon\ ]0;+\infty[, \mathrm{h(x)} = \frac{\varphi(x)}{x} \\ h(0) = 1 \end{cases}$

   Démontrer que h est continue en 0.
3. a) Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que :

   $\forall\ x\ \epsilon\ ]0;+\infty[, F(x) = \varphi(x)lnx - \int_1^x h(t)dt$

   b) En utilisant la question 2-b) de la partie B, démontrer que

   $\lim_{x\to 0} \varphi(x)lnx = 0$
4. on admettra que F est prolongeable par continuité en 0 et que :

   $\forall\ x\ \epsilon\ ]0;+\infty[, F(x) = F\left(\frac{1}{x}\right)$. Soit G le prolongement par continuité de F en 0. On pose $G(0) = l$ $(l\ \epsilon\ \mathbb{R})$.

   G est définie par : $\begin{cases} \forall\ x\ \epsilon\ ]0;+\infty[, G(x) = F(x) \\ G(0) = l \end{cases}$

On désigne par (Γ) sa courbe représentative dans le repère (O,I,J).

a) Démontrer que : $\lim_{x\to+\infty} G(x) = l$

b) Étudier les variations de G sur $]0;+\infty[$ puis dresser son tableau de variation

5. On pose :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$

On admet que $|l - v_n| < \frac{1}{(2n+3)^2}$

a) Justifier que : $v_2 = \frac{209}{225}$

b) Déterminer le plus petit entier naturel n tel que : $\frac{1}{(2n+3)^2} < 25.10^{-3}$

c) En déduire une valeur approchée de l à 25.10^{-3} près.

d) Donner l'allure de (Γ) dans le plan muni du repère (O,I,J).

BACCALAUREAT SESSION 2012

EXERCICE 1

L'ARETI est une association au sein de laquelle les hommes sont plus nombreux que les femmes. Les cotisations mensuelles sont de 900 FCFA pour les hommes et 700F CFA pour les femmes.

Pour sa fête annuelle, le parrain de l'ARETI désire offrir des tee-shirts aux hommes et des pagnes aux femmes. Malheureusement, il ne connaît pas le nombre de femmes et d'hommes de cette association. Cependant, il sait que les cotisations mensuelles de tous les membres de l'ARETI s'élèvent à 20 000F CFA.

L'objectif de cet exercice est de déterminer le nombre d'hommes et le nombre de femmes de cette association.

1. **On considère l'équation (E) : $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, 9x + 7y = 1$.**

   a) soit (x, y) un couple d'entiers relatifs solution de (E).

   Démontrer que $2x \equiv 1[7]$.

   b) Résoudre dans $\mathbb{Z}$, l'équation $2x \equiv 1[7]$.

   c) En déduire que l'ensemble des solutions de (E) est $\{4 + 7k; -5 - 9k), k \in \mathbb{Z}\}$.
2. **Résoudre l'équation (E'): $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, 9x + 7y = 200$.**
3. **En déduire le nombre d'hommes et le nombre de femmes de cette association.**

EXERCICE 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ tel que $\|\overrightarrow{e_1}\| = \|\overrightarrow{e_2}\| = 2cm$. K est le pont de coodronnées $(-1; 0)$.

Soit (Γ) l'ensemble des points M du plan de coordonnées (x, y) vérifiant :

$$3x^2 + 4y^2 + 6x - 9 = 0.$$

1. **Justifie que (Γ) est une ellipse**
2. **On note :**
   - **F' et F les foyers de (Γ);**
   - **A' et A les sommets de (Γ) situés sur l'axe focal. L'abscisse de A' est négative. B' et B sont des deux sommets de l'ellipse**

a) Justifier que les coordonnées respectives F et F' dans le repère $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ sont $(0; 0)$ et $(-2; 0)$

b) Déterminer les coordonnées de A', A, B' et B dans le repère $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$.

c) Construire (Γ) dans le plan muni du repère $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$.

3. Soit M un point quelconque de (Γ).

a) Construire le point N tel que KMN soit un triangle rectangle isocèle en N de sens indirect puis, construire le point P symétrique de K par rapport à N.

b) Justifier que P est l'image de M par une similitude directe s de centre K dont on précisera le rapport et l'angle.

c) On admettra que l'image d'une conique par une similitude directe est une conique de même nature

Déterminer et construire l'ensemble (C) des points P lorsque M décrit (Γ).

4. a) Démontrer que l'écriture complexe de la similitude directe S est $z' = (1 - i)z - i$.
Z étant l'affixe d'un point M quelconque du plan et z' l'affixe du point M', l'image de M par s.

b) On note G' et G les images respectives par s des foyers F' et F de (Γ).
Déterminer les coordonnées des points G' et G dans le repère $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$.

c) Démontrer qu'une équation cartésienne de (C) dans le repère $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ est :
$7x^2 + 7y^2 + 2xy + 14x + 2y - 41 = 0$

PROBLEME

Soit (u_n) la suite définie, pour tout entier naturel n nonnul, par : $u_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

Le but de ce problème est de déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Partie A

Soit f la fonction dérivable sur $]0; +\infty[$ *et* définie par : $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3} - lnx$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O,I,J).

Unité graphique : 2cm

1. a) Démontrer que la droite (OJ) est une asymptote à la courbe (C).

b) Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ *puis* $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpreter graphiquement ces résultats.

2. a) Calculer $f'(x)$ pour tout x élément de $]0; +\infty[$.

b) En déduire les variations de f.

c) Dresser le tableau de variation de f.

3. Construirs (C) dans le plan muni du repère (O,I,J).

Partie B

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. A l'aide d'une intégration par partie, calculer $\int_{\frac{1}{n}}^{1} lnt dt$

2. On pose $A_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)dt$.

a) Interpreter graphiquement A_n.

b) Vérifier que $A_n = \frac{3}{4} - \frac{2}{3n} - \frac{1}{12n^4} - \frac{ln(n)}{n}$

c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} A_n$.

3. a) Soit k un entier naturel tel que $1 \leq k \leq n-1$

Démontrer que : $\forall\, t \in \left[\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}\right]$, on a : $\frac{1}{n} f(\frac{k+1}{n}) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt \leq \frac{1}{n} f(\frac{k}{n})$

b) En déduire que :

$$\frac{1}{n}\left[f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{3}{n}\right) + \cdots + f(\frac{n}{n})\right] \leq A_n \leq \frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + f(\frac{n-1}{n})\right]$$

4. on pose : $S_n = \frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + f(\frac{n}{n})\right]$

a) Démontrer que $A_n \leq S_n \leq A_n + \frac{1}{n} f(\frac{1}{n})$

b) En déduire que : $\lim\limits_{x\to+\infty} S_n = \frac{3}{4}$.

Partie C

1. Démonter par récurrence que pour tout entier naturel non nul, $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

2. a) Justifier que pour tout entier naturel non nul n,

$ln\left(\frac{1}{n}\right) + ln\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + ln\left(\frac{n}{n}\right) = ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)$

b) En déduire que pour tout entier naturel n Supérieur ou égal à 2,

$S_n = \frac{1}{12n^4}[n(n+1)]^2 - \frac{1}{n} ln\left(\frac{n!}{n^n}\right) - \frac{1}{3}$

c) En déduire que: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{n}\, ln\left(\frac{n!}{n^n}\right) = -1$

3. a) Justifier que pour tout entier naturel non nul n, $ln(u_n) = \frac{1}{n} ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)$

b) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

BACCALAUREAT SESSION 2011

EXERCICE 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$.

A tout point M d'affixe z, on fait correspondre le point M' d'affixe z' telle que $z' = z^2 - 4z$

1. **calculer les coordonnées (x', y') du point M' en fonction des coordonnées $(x; y)$ du point M.**
2. **Démontrer que l'ensemble (H) des points M du plan tels que z' soit imaginaire pur est une hyperbole.**
   Préciser dans le repère $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$, les coordonnées du centre Ω, celles des sommets et les équations des asymptotes de (H).
3. **Construire (H)**
4. **Soit P le point d'affixe $-\frac{5}{2} - 2i$**

Déterminer les points M du plan tels que le quadrilatère OMM'P soit un parallélogramme.

EXERCICE 2

Un livreur de pain fait son service à moto, dont servir tous les jours un client à 20 heures précise. La livraison de pain chez ce client est indépendante d'un à l'autre.

Habituellement, le livreur met 10 minutes de la boulangerie à domicile de ce client ; mais la mairie a fait installer sur son trajet deux feux tricolores non synchronisé et indépendants.

- **S'il arrive à un feu orange, il s'arrête 60 secondes et repart**
- **S'il arrive à un feu rouge, il s'arrête 30 secondes et repart**

Pour chaque feu :

- **La probabilité d'être vert à l'arrivée est $\frac{1}{2}$**
- **La probabilité d'être orange à l'arrivée est $\frac{1}{4}$**

On note X la variable aléatoire égale au temps mis en minutes par le livreur pour arriver au domicile du client.

1. a) Justifier que l'ensemble des valeurs prises par X est $\{\mathbf{10}; \mathbf{10}, \mathbf{5}; \mathbf{11}; \mathbf{11}, \mathbf{5}; \mathbf{12}\}$

   b) Justifier que $P(x = 11) = \frac{5}{16}$

   c) Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Calculer l'espérance mathématique de X. Interpréter ce résultat
3. Le livreur part à 19h49min de la boulangerie

   a) Calculer la probabilité qu'il arrive à 20heures précise chez le client.

   b) Calculer la probabilité qu'il arrive en retard chez le client.
4. Pour cette question on donnera l'arrondi d'ordre 3 de chaque résultat

   a) Calculer la probabilité pour que le pain soit livré exactement trois fois à 20 heures précises au cours d'une semaine

   b) Calculer la probabilité pour que le pain soit livré au moins une fois à 20 heures précises au cours d'une semaine

PROBLEME

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O,I,J). L'unité graphique est 2cm.

Soit $k$un nombre réel non nul.

On considère la fonction f_k dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $f_k(x) = (2x + 2k)e^{-\frac{x}{2k}} - x$

On note (C_k) la courbe représentative de la fonction f_k.

Le but du problème est d'étudier les fonctions f_k, de construire la courbe (C_1) et de donner un programme de construction de (C_k) pour k différent de 1.

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit h la fonction numérique dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $h(x) = x + e^{\frac{x}{2}}$

1. Étudier le sens de variation de h
2. Calculer les limites de h en $-\infty$ et en $+\infty$

   a) Démontrer que l'équation $h(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α tel que : $-0,71 < \alpha < -0,70$

   b) En déduire que :

   $\forall\, x \in\,]-\infty; \alpha[, h(x) < 0$ et $\forall\, x \in\,]\alpha; +\infty[, h(x) > 0$

Partie B : Étude de la fonction f_1

Pour tout nombre réel $x, f_1(x) = (2x+4)e^{-\frac{x}{2}} - x$

1. a) Démontrer que $f_1(\alpha) = -2 - \alpha - \frac{4}{\alpha}$

   b) En déduire un encadrement de $f_1(\alpha)$ d'amplitude $0,1$.

2. a) Pour tout réel x, calculer $f'_1(x)$ et démontrer que $f'_1(x) = -h(x)e^{-\frac{x}{2}}$

   b) En déduire les variations de f_1.

3. a) Calculer la limite quand x terd vers $-\infty$ de $f_1(x)$ puis la limite quand x tend vers $-\infty$ de $\frac{f_1(x)}{x}$

   Interpréter graphiquement ces résultats

   b) Calculer la limite quand x tend vers $+\infty$ de $f_1(x)$.

   c) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = -x$ est une asymptote à (C_1) en $+\infty$.

4. a) Dresser le tableau de f_1.

   b) Construire la droite (D) et la courbe (C_1) dans le plan muni du repère (O,I,J)

5. a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer pour tout nombre réel x :

   $I(x) = \int_0^x (2t+4)e^{-\frac{t}{2}}\, dt$

   b) En déduire en cm² l'aire de A_1 de la partie du plan délimité par la courbe (C_1);la droite (D) ; la droite (OJ) et la droite d'équation $x = 2$.

Partie C : Étude de la fonction f_k

1. a) Démontrer que pour tout nombre réel x : $f'_k(x) = -h(\frac{1}{k}x)e^{-\frac{x}{2k}}$

   b) En utilisant la partie A, étudier les variations de f_k suivant le signe de k.

   c) Vérifier que $f_k(ka) = kf_1(\alpha)$

   d) Dresser le tableau de variation de f_k suivant le signe de k. *(On ne demandera pas de calculer les limites de f_k).*

2. a) Démontrer que (C_k) est l'image de (C_1) par l'homothétie de centre O et de rapport k.

   b) En déduire la construction de $(C_{\frac{-1}{2}})$ dans le même repère que (C_1).

3. On note A_k, l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C_k) ; la droite (D), la droite (OJ) et la droite $x = 2k$.

   Déterminer en cm², A_k en fonction de k.

BACCALAUREAT SESSION 2010

EXERCICE 1

On se propose d'étudier la suite (U_n) de nombres réels, définie par : $U_1 = 1 + \frac{1}{e}$ et pour tout entier naturel non nul n, $U_{n+1} = (1 + \frac{1}{e^{n+1}})U_n$.

Dans cet exercice, on admettra que pour tout nombre réel t strictement positif, on a :

$t - \frac{t^2}{2} < \ln(1+t) < t \quad (1)$

Soit f la fonction numérique dérivable sur R et définie par : $f(x) = ln(1 + e^{-x})$

1- En utilisant l'inégalité (1), justifier que : $\forall\, x \in \mathbb{R}, e^{-x} - \frac{e^{-2x}}{2} < f(x) < e^{-x}$

2- Démontrer que la suite (U_n) est strictement croissance.

3- Démontrer par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, ln(U_n) = f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$.

4- On pose : $a_n = \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} + \cdots + \frac{1}{e^n}$ et $b_n = \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^4} \ldots + \frac{1}{e^{2n}}$

a) A l'aide des questions 1) et 3), démontrer que : $a_n - \frac{1}{2}b_n < ln(U_n) < a_n$

b) Justifier que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{1-e^{-n}}{e-1}$

c) Démontrer que la suite $n\ U$ est majorée.

En déduire que la suite est convergente.

d) On note l la limite de la suite (U_n)

Démontrer que : $\frac{2e+1}{2(e^2-1)} \leq lnl \leq \frac{1}{e-1}$ puis en déduire une valeur approché de l à 0.1 près

EXERCICE 2

Un jeu consiste à lancer trois fois un dé cubique équilibré à 6 faces, numérotées de 1 à 6 et on observe successivement les chiffres obtenus sur la face supérieure :

1. démontrer que la probabilité d'obtenir 3 identiques est $\frac{1}{36}$
2. Calculer la probabilité d'obtenir 3 chiffres dont la somme est égale à 6.
3. Démontrer que la probabilité d'obtenir exactement deux chiffres identiques est $\frac{5}{12}$
4. Le droit de participation au jeu est de 3.000 francs.
   - Si le joueur obtient 3 chiffres identiques, il reçoit 5000 francs ;
   - S'il obtient 3 chiffres deux à deux distincts, il reçoit 3000 francs ;

- **S'il obtient exactement deux chiffres identiques, il ne reçoit rien.**

Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique d'un joueur au cours d'une partie. On appelle gain algébrique d'un joueur la différence entre ce qu'il reçoit et sa mise :

a) Déterminer les valeurs prises par X

b) Déterminer la loi de probabilité de X

c) Déterminer le gain moyen d'un joueur au cours d'une partie. Le jeu est-il équitable ?

PROBLEME

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J). L'unité graphique est le centimètre.

Partie A

Soient f *et* g les fonctions numériques dérivables sur $\mathbb{R}$ et définies pour tout réel x par :

$f(x) = \frac{1}{3}\left(-5x + 4\sqrt{x^2 + 15}\right)$ *et* $g(x) = \frac{1}{3}\left(-5x - 4\sqrt{x^2 + 15}\right)$

On note (C) et (C') les courbes représentatives des fonctions f *et* g.

1. **a) Calculer les limites de f en $-\infty$ *et en* $+\infty$**

   b) Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = -\frac{1}{3}x$ est asymptote à (C) en $+\infty$.

   c) Justifier que la courbe (C) est au dessus de la droite (Δ).

   Dans la suite du problème, on admettra que la droite (Δ') d'équation $y = -3x$ est une asymptote à (C) en $-\infty$ et que la courbe (C) est au dessus de la droite (Δ').
2. **a) Calculer $f'(x)$ pour tout réel x**

   b) Déterminer que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, puis dresser son tableau de variation.
3. **Déterminer les points d'intersection de la courbe (C) avec les droites (oI)*et* (OJ).**
4. **a)Construire $(\Delta), (\Delta')$ et la courbe (C) dans le plan muni du repère (O, I, J).**

   b) Démonter que la courbe (C') dans le même repère que (C).

Partie B

Dans cette partie, on admettra que l'image d'une hyperbole (H) de foyers F et F' de sommet A et A' une similitude s, est une hyperbole (H') de foyer $s(F) et\ s(F')$ de sommets $s(A) et\ s(A')$.

On note (H) la courbe d'équation : $3x^2 + 3y^2 + 10xy - 80 = 0$

1. **Démontrer que $(H) = (C) \cup (C')$**
2. **Soit s la similitude directe de centre O et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $\frac{-\pi}{4}$**

Soit $x, x', y\ et\ y'$ des nombres réels. Pour tout point M du plan d'affixe $z = x + iy$ on note M' le point d'affixe $z' = x' + iy'$ tel que $M' = s(M)$

   a) Déterminer l'écriture complexe de s

   b) Justifier que $x' = \frac{1}{2}(x + y)$ et $y' = \frac{1}{2}(-x + y)$

   c) En déduire que M appartient à (H) si et seulement si M' appartient à la courbe (Γ) d'équation $4x'^2 - y'^2 = 20$

3. **a) Justifie que (Γ) et une hyperbole puis déterminer les coordonnées de ses foyers et de ses sommets**

   b) Déterminer l'excentricité de (Γ)

   c) Construire (Γ) et ses asymptotes dans le même repère que (H). (On utilisera deux couleurs différentes (H) et (Γ)

4. **Déduire des questions précédentes que (H) est une hyperbole dont on précisera les foyers et le sommet.**

UNION – TRAVAIL – JUSTICE

SUJETS DES BACCALAUREATS DU GABON

BACCALAUREAT SESSION 2019

EXERCICE 1 : QUESTIONS A CHOIX MULTIPLES(Q.C.M)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.

Pour chacune des cinq questions, une seule des trois réponses est exacte. Aucune justification n'est demandée. Pour chaque réponse, vous indiquerez sur votre copie le numéro de la question et le code (A, B ou C) correspondant à la réponse choisie. (Exemple 3.A).

Une bonne réponse vaut 1 point, une mauvaise réponse fait perdre 0,5 point. L'absence de réponse n'ajoute ni ne retranche aucun point, si le total des points est négatif, la note est ramenée à zéro.

1. **Dans un repère orthonormal, la parabole (P) a pour équation $y = 3x^2$. Alors :**

Réponse A	Réponse B	Réponse C
Le foyer de (P) a pour coordonnées $(\frac{1}{12}, 0)$	Le foyer de (P) a pour coordonnées $(0,\frac{1}{12})$ et sa directrice a pour équation $y = -\frac{1}{12}$	Le foyer de (P) a pour coordonnées $(0,\frac{1}{12})$ et sa directrice a pour équation $y = \frac{1}{12}$

2. **Soit (E) l'ensemble des entiers naturels écrit en base 10, sous la forme $\overline{abba}$ ou a est un chiffre supérieur ou égal à 2 et b un chiffre quelconque. Le nombre d'éléments de (E) est :**

Réponse A	Réponse B	Réponse C
8	18	80

3. **Soit (u_n) la suite définie par son 1^{er} terme u_0 et pout tout n ∈ ℕ, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$.**

Réponse A	Réponse B	Réponse C
Si (u_n) converge, sa limite est 8.	Si $u_0 \in [6 ; +\infty[$, la suite (u_n) est croissante	Si $u_0 \in [6 ; +\infty[$, la suite (u_n) est décroissante et minorée.

4. **Z est un nombre complexe non nul. On pose $Z = 1 + e^{i\theta}$ avec $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ Alors :**

Réponse A	Réponse B	Réponse C
arg $(\overline{Z}) \equiv \pi - \frac{\theta}{2}$ $[2\pi]$	arg $(\overline{Z})$ = $-\frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$	arg $(\overline{Z}) = \pi + \frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$

5. Soit A et B deux évènements de probabilité non nulle d'une expérience aléatoire.

Réponse A	Réponse B	Réponse C
$P_A(B)$ et $P_A(\overline{B})$ dont des probabilités d'évènements contraires.	P (A U B) = P(A) + P(B)	P (A ∩ B) = P(A) x P(B)

EXERCICE 2 : ETUDE DE FONCTION

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

On considère la fonction définie sur [0 ; + ∞ [par $f(x) = \frac{1}{X+3}$ x $\ln(x + 3)$

1. a. Justifier que f est dérivable sur [0 ; +∞ [.

   b. Etudier la limite de f en + ∞.

   c. Déterminer f'(x), ou f' désigne la fonction dérivée de f sur D_f.

   d. En déduire le sens de variation de f sur [0 ; +∞ [.

   e. Démontrer que pour tour x ∈ [0 ; +∞ [, f(x) > 0.

2. On définit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ par $u_n = \int_n^{n+1} f(x)dx$.

   a. Démontrer que pour tout $x \in$ [n ; n+1 [, f (n+1) ≤ f(x) ≤ f(n).

   b. Démontrer que pour tout n ∈ ℕ, f (n+1) ≤ u_n ≤ f(n).

   c. En déduire que la suite (u_n) est décroissante, puis qu'elle est convergente et déterminer sa limite.

3. On pose pour tout entier naturel n, $I_n = \int_0^n f(x)dx$.

   Démontrer que, pour tout entier naturel n, $I_n = \frac{(\ln(n+3))^2}{2} - \frac{(\ln 3)^2}{2}$.

4. Pour tout entier naturel n ≥ 1, on donne : $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1}$.

   a. Justifier que, pour tout entier naturel n ≥ 1 ; $I_n = S_n$.

   b. En déduire la limite de la suite $\left(\frac{1}{n^2} S_n\right)_{n\geq 1}$.

EXERCICE 3 : ROTATION COMPOSEES DE REFLEXION D'AXES SECANTS

Dans le plan orienté, on considère un triangle OAB rectangle et isocèle en O tel que $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}})$ est orienté dans le sens direct.

On donne R_A et R_B les rotations de centres respectifs A et B et d'angle $\frac{\pi}{2}$, S_O la symétrie de centre O.

On place un point C n'appartenant pas à (AB) dans le demi-plan de frontière (AB) contenant le point O.

1. a) **Construire les carrés BEDC ET ACFG directs.**

   b) **Donner les mesures de $(\widehat{\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BC}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AG}})$.**

   c) **Déterminer R_A o R_B(E).**

2. a) **Donner la nature et les éléments caractéristiques de $S_{(Ao)}$ o $S_{(AB)}$ composée de réflexions d'axe (AB) et (AO).**

   b) **Ecrire R_B comme composée de deux réflexions.**

   c) **Démontrer que R_A o R_B = S_o.**

3. **Justifier que O est le milieu du segment [EG].**

4. **On note R_F et R_D les rotations de centres respectifs F et D et de même angle $\frac{\pi}{2}$.**

   a) **Déterminer l'image de C par la transformation R_F o S_o o R_D.**

   b) **Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation R_F o S_o o R_D.**

5. **Soit H le symétrique de D par rapport à O.**

   a) **Placer H.**

   b) **Démontrer que R_F(H) = D.**

   c) **Démontrer que le triangle FOD est rectangle et isocèle en O.**

EXERCICE 4 : APPLICATION DE L'ESPACE

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$.

1. **Soit (D) la droite passant par E (1 ; 1 ; 0) et de vecteur directeur $\vec{u}$(1 ; 0 ; 1).**

Justifier que pour tout point M de l'espace, M (x ; y ; z) ∈ (D) ⇔ $\begin{cases} x = t+1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$

2. **Soit M (x ; y ; z) un point de l'espace et M' (x' ; y' ; z') sont symétriques par rapport à la droite (D). K le milieu de [MM'].**
   a) **Démontrer que le point K appartient à (D) si et seulement s'il existe un nombre réel t tel que : $\begin{cases} x' = 2t+2-x \\ y' = 2-y \\ z' = 2t-z \end{cases}$**
   b) **Démontrer que (MM') ⊥ (D) si et seulement si (x' – x) + (z' – z) = 0**
   c) **En déduire que l'expression analytique de S_D est : $\begin{cases} x' = z+1 \\ y' = 2-y \\ z' = x-1 \end{cases}$**
3. **Soient (π) un plan orthogonal à (D) au point E (1 : 1 ; 0) et S_π la réflexion de plan (π)**
   a) **Déterminer l'équation cartésienne de (π).**
   b) **Justifier que l'expression analytique de S_π est : $\begin{cases} x' = -z+1 \\ y' = y \\ z' = -x+1 \end{cases}$**
   c) **Soit (x ; y ; z), M_1 (x_1 ; y_1 ; z_1) et M' (x' ; y' ; z') trois points de l'espace E tels que $M_1 = S_\pi(M)$ et $M' = S_D(M_1)$. Déterminer l'expression analytique de S_D o S_π.**
   d) **Soit M (x ; y ; z) un point de l'espace E et M' (x' ; y' ; z') son image par S_E. Déterminer l'expression analytique de S_E.**
   e) **Que pouvez-vous conclure ?**

BACCALAUREAT SESSION 2018

EXERCICE 1 : QUESTIONS A CHOIX MULTIPLE (Q.C.M)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.

Pour chacune des cinq questions, une seule des trois réponses est exacte. Aucune justification n'est demandée. Pour chaque réponse, vous indiquerez sur votre copie le numéro de la question et le code (A, B ou C) correspondant à la réponse choisie. (Exemple 3.A).

Une bonne réponse vaut 1 point, une mauvaise réponse fait perdre 0,5 point. L'absence de réponse n'ajoute ni ne retranche aucun point, si le total des points est négatif, la note est ramenée à zéro.

1. Quel est l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|\overline{z} + i| = |i - 1|$.

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse C
Le cercle de centre A et d'affixe i et de rayon 2.	Le cercle de centre A d'affixe – i et de rayon 2.	Le cercle de centre A et d'affixe i et de rayon $\sqrt{2}$	Le cercle de centre A et d'affixe – i et de rayon $\sqrt{2}$.

2. La courbe paramétrée (ς) définie par : $\left\{\begin{matrix} x(t) = t^2 - 2t \\ y(t) = t^2 + t \end{matrix}\right. (t \in \mathbb{R}\}$ admet au point (M_1) une tangente dont un vecteur directeur est $\vec{u}$. Quelle sont les coordonnées du vecteur $\vec{u}$.

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse C
(0 ; 1)	(-1 ; 2)	(-1 ; 0)	(1 ; 1)

3. Soit X la variable aléatoire dont la fonction de répartition est représentée ci-dessous. (question annulée) +1 à tous candidats présents.

4. On considère une parabole (P) définie dans un repère orthonormé par (O ; $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$) par : y = $\frac{1}{4}x^2 - 2x + 1$. Quelles sont les coordonnées du foyer F de la parabole (P) dans le repère (O,$\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) ?

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
(4 ; - 3)	(0 ; 1)	($\frac{1}{4}$; - 2)	(4 ; - 2)

5. **On considère un plan (P) d'équation cartésienne $x + y - 1 = 0$, un point A(1 ; - 1 ; 2) de l'espace et H son projeté orthogonal sur le plan (P), laquelle des affirmations suivantes est correcte ?**

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
La droite (AH) a pour coefficient directeur le vecteur $\vec{u}(-1 ; 1 ; -1)$	$AH = \sqrt{6}$	Le point H a pour coordonnées (1 ; 1 ; -1)	Le point B (1 ; 1 ; 1) appartient à (P) $\cap$(AH).

EXERCICE 2 : ARITHMETIQUE ET CRYPTOGRAPHIE

Le but de cet exercice est de déterminer, à partir des propriétés des congruences et des propriétés de divisibilité dans Z, une procédure de cryptage et de décryptage d'un message donné.

A. Résolution d'une équation diophantienne

1. **On considère l'équation (E_1) : $17x + 27y = 1$ ou x et y désignent deux entiers relatifs :**
   a) **Justifier que l'équation (E_1) admet au moins une solution.**
   b) **En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer un couple d'entiers relatifs ($x_0 : y_0$) solution de (E_1).**
   c) **Vous devez ensuite résoudre l'équation (E_1).**
2. **a) Déterminer une solution particulière de l'équation (E) : $17x - 27y = m$ ou m est un entier relatif.**
   b) **Résolvez alors l'équation.**

B. Application : Cryptographie

On assimile chaque lettre de l'alphabet à un nombre entier comme l'indique le tableau ci-dessous :

A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**	**J**	**K**	**L**	**M**
0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
N	**O**	**P**	**Q**	**R**	**S**	**T**	**U**	**V**	**W**	**X**	**Y**	**Z**
13	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**

La procédure de cryptage d'une lettre assimilée à un entier x compris entre 0 et 25 est la suivante :

Tape 1 : On calcule $17x + 5$

Etape 2 : On calcule le reste m de la division euclidienne de $17x + 5$ par 27.

Etape 3 : On détermine à l'aide du tableau précèdent la lettre correspondant à m.

1. **En utilisant cette procédure de codage, codez le mot « B A C ».**
2. **Dans cette question on se propose de déterminer une procédure de décodage.**
   a) **Montrez que pour tous les nombres entiers relatifs x et m, $17x \equiv m$ [27] équivaut à $x \equiv 8m$ [27].**
   b) **Déduisez-en que x est le reste de la division euclidienne de $8m - 40$ par 27.**
   c) **Décodez alors le mot de trois lettres « W F M ».**

EXERCICE 3 : ISOMETRIE DU PLAN

Soit ABCD un carré de sens direct tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et (Δ) la médiatrice du segment [BC].

Soir f une isométrie distincte de la symétrie orthogonale S_Δ, telle que : $\begin{cases} f(B) = C \\ f(D) = A \end{cases}$

1. **Faite une figure soignée.**
2. **Soit O le milieu du segment [BD].**
   a) **Montrez que O est l'unique point du plan invariant par f.**
   b) **Déduisez-en la nature et les éléments caractéristiques de f.**
3. **Soit g et h des applications du plan définies respectivement par $g = f \circ S_\Delta$ et $h = S_\Delta \circ f$.**
   a) **Déterminer g(A) et g(C), et déduisez que $g = S_{(AC)}$**

b) Montrez que $h = S_{(BD)}$.

4. Déterminez-la nature et les éléments caractéristiques de *goh*

EXERCICE 4 : ETUDE D'UNE FONCTION LOGARITHME NEPERIEN-CALCUL D'AIRE

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égale à 1 ;

Partie A : Encadrement d'une intégrale

Soit g la fonction numérique définie sur l'intervalle$]0 ; +\infty[$ par : $g(x) = \frac{\ln x}{x}$

1. a) Etudiez le sens de variation de la fonction g.

   Déduisez-en que pour $n \geq 3$ et $n \leq x \leq n + 1$, on a : $0 < g(n+1) \leq g(x) \leq g(n)$.

2. On pose pour $n > 1$, $a_n = \int_n^{n+1} g(x)dx$.

   a) A l'aide d'une intégration par partie, calculer a_n.

   b) Montrez que pour tout $n \geq 3$ et $0 \leq a_n \leq g(n)$, puis déduisez la limite de a_n en $+\infty$.

Partie B : Etude d'une fonction – Calcul d'aire.

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle$]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{\ln x}{x} - 1$ et (ξ) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'unité graphique 2cm.

1. a) Justifiez que f est dérivable sur$]0, +\infty[$, puis calculer $f'(x)$.

   b) Montrez que la fonction f admet un minimum que l'on précisera, puis déduisez le signe de $f'(x)$.

   c) Dressez le tableau de variation de *f*.

2. a) Montrez que (ξ) admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote (D) dont on précisera l'équation.

   b) Déterminez les positions relatives de (ξ) et (D).

3. Calculez l'aire de la partie du plan délimitée par (ξ), (D) et les droites d'équation $x = n$ et $x = n + 1$.

4. Quelle est la limite de cette aire quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 1 : QUESTIONS A CHOIX MULTIPLES (Q.C.M)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.

Pour chacune des cinq questions, une seule des quatre réponses est exacte. Aucune justification n'est demandée. Pour chaque réponse, vous indiquerez sur votre copie le numéro de la question et le code (A, B ou C) correspondant à la réponse choisie. (Exemple 3.A).

Une bonne réponse vaut 1 point, une mauvaise réponse fait perdre 0,5 point. L'absence de réponse n'ajoute ni ne retranche aucun point, si le total des points est négatif, la note est ramenée à zéro.

1. **On donne l'équation différentielle (E_1) : $y'' + 2y' + y = x + 1$.**

   a) **La solution de l'équation homogène (E_0) : $y'' + 2y + y = 0$ sont des fonctions de $\mathbb{R}$ cers $\mathbb{R}$.**

Réponse A_1	Réponse A_2	Réponse A_3	Réponse A_4
$x \longrightarrow (Ax + B)e^{-x}$ avec $(A ; B) \in \mathbb{R}^2$	$x \longrightarrow Ae^{-x} + Be^{-x}$ avec $(A; B) \in \mathbb{R}^2$	$x \longrightarrow e^{-x}[A\cos(x) + B\sin(x)]$ avec $(A; B) \in \mathbb{R}^2$	Aucunes des quatr réponses n'est jus

   b) **Une solution de l'équation (E_1) est définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.**

Réponse B_1	Réponse B_2	Réponse B_3	Réponse B_4
$x \longrightarrow (x + 1)e^{-x} + x - 1$.	$x \longrightarrow e^{-x} + x + 1$	$e^{-x}[\cos(x) + \sin(x)] + x - 1$	Aucunes des quatr réponse n'est just

2. **L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. $A(3 ; -2 ; 1)$, $B(-1 ; 2 ; -1)$ et $M(x ; y ; z)$ trois points de l'espace.**

   a) **La norme $\|\overrightarrow{AB}\|$ du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est égale à :**

Réponse A_1	Réponse A_2	Réponse A_3	Réponse A_4
$2\sqrt{2}$	4	6	Aucunes des quatre réponses n'est juste.

b) L'ensemble Γ des points M de l'espace tels que $\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{MB}\| = 12$ est :

Réponse B_1	Réponse B_2	Réponse B_3	Réponse B_4
Ø	Est le cercle de diamètre [AB]	Est le cylindre d'axe (AB) et de rayon 2	Aucunes des quatre réponses n'est juste

3. Soit A et B deux points du plan, r (A ;$\frac{\pi}{3}$) et r' (B ;$\frac{5\pi}{3}$) deux rotations.

a) L'application du plan dans lui-même f = ror' est :

Réponse A_1	Réponse A_2	Réponse A_3	Réponse A_4
Une rotation	Une translation	Une symétrie orthogo-nale	Aucunes des quatre ré ponses n'est juste

b) L'ensemble Ψ des points invariants de f est :

Réponse B_1	Réponse B_2	Réponse B_3	Réponse B_4
Ø	Est un singleton	Est une droite	Aucune des quatre réponses n'est juste

4. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$

a) (u_n) est une suite :

Réponse A_1	Réponse A_2	Réponse A_3	Réponse A_4
Constante	Décroissante	Croissante	Aucunes des quatre réponses n'est juste.

b) (U_n) est une suite qui :

Réponse B_1	Réponse B_2	Réponse B_3	Réponse B_4
Converge vers - 1	Diverge	Converge vers 4	Aucunes des quatre réponses n'est juste.

EXERCICE 2 : ARITHMETIQUE

Soient *a*, *b* et *x* trois entiers non nuls avec $a = \overline{x432}^5$ et $b = \overline{11}^5$.

1. **Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $a \equiv 0[b]$.**
2. **Déterminer l'expression de a et b dans la base décimale.**
3. **Démontrer que : *PGCD* (a ; b) = PGCD (5*x*+3 ; 6).**
4. **Donner l'ensemble des diviseurs de 6. Pour quelles valeurs de *x*, les nombres a et b soient premiers ?**

EXERCICE 3 : EQUATION DANS $\mathbb{C}$ ET SIMILITUDE DIRECTE PLANE

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A : Equation dans $\mathbb{C}$

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : z^3- (3 + 3i)z^2 + (- 6 +4i)z +10 – 14i = 0.

1. **Démontrer que le nombre complexe z_1 = 1 – i est une solution de (E).**
2. **Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : z^2- (2 + 4i)z -12 +2i = 0.**
3. **Developer expression *p*(z) = (z – 1 + i)[z^2-(2 + 4i)z -12 +2i]. En déduire toutes les solutions de l'équation (E).**

Partie B : Nombres complexes et géométrie

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$) d'unité graphique 1 cm. On donne les points A, B, et M d'affixe respectives z_A = -2 + 2i, z_B = 4 +2i et z_M = 1 – i.

1. **Placer les points A, B et M dans le repère (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$).**
2. **Déterminer la forme exponentielle du nombre complexe $\frac{z_A - z_M}{z_B - z_M}$. En déduire la nature du triangle AMB.**
3. **Soit f une transformation du plan dans le plan vérifiant : f(A) = A et f(M) = M' ou M'est le centre de gravité du triangle de sens direct AMB.**

   3.1.Déterminer l'affixe du point M'.

   3.2.Démontrer que pour M ≠ A, cos $(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}})$ = $\frac{2\sqrt{5}}{5}$, sin $(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}})$ = $\frac{\sqrt{5}}{5}$ et $\frac{AM}{AM'}$ = $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

   3.3.En déduire la nature et les éléments caractéristiques de la transformation f.

EXERCICE 4 : ETUDE D'UNE FAMILLE DE FONCTION

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A : Etude de fonction

n est un entier naturel non nul. Soit f_n la fonction définie sur]0 ; +∞[par $f_n(x) = \frac{(\ln x)^n}{x}$.

On note (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O ; I ; J) d'unité graphique 2cm.

1.1. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} f_n(x)$. Puis donner une interprétation graphique du résultat. (On discutera suivant la parité de n).

1.2. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x)$. Puis donner une interprétation graphique du résultat ?

2. **2.1. Calculer $f'_n(x)$ ou f'_n désigne la dérivée de la fonction f_n et montrer que $f'_n(x)$ est du signe de $(n - \ln x)(\ln x)^{n-1}$ pour tout x élément de D_f.**

   2.2. Etudier le signe $f'_n(x)$ puis dresser le tableau de variation de f_n sur D_f. (On discutera suivant la parité de n).

3. **Démontrer que pour n non nul, les courbes (C_n) se coupent en deux points A et B dont on déterminera les coordonnées. ($x_A < x_B$).**
4. **Tracer dans le repère (O, I, J) les courbes (C_1) et (C_2).**

Partie B : Calcul d'intégrale

Pour n≥, on pose : $u_0 = 1$ et $u_n = \int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x}\,dx$

1. **Calculer u_n.**
2. **On pose $S_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (\frac{1}{k+1})^2 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$**

   2.1. Calculer S_1 et S_2.

   2.2. Démontrer par récurrence que :

   Pour tout n≥1 , $\frac{\pi^2}{6}\left(\frac{2n}{2n+1}\right)\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right) < \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < \frac{\pi^2}{6}\left(\frac{2n}{2n+1}\right)\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)$

   2.3. Etudier la convergence de la suite (S_n) et précisez sa limite.

EXERCICE 1 : SIMILITUDES

Dans le plan orienté, on considère deux points A et B (On prendra AB = 6 cm pour la figure).

1. **Déterminer et représenter l'ensemble (∑) des points M du plan tels que $\frac{MA}{MB} = 3$.**
2. **Déterminer et représenter l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que : Mes $(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) = \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$**
3. **3.1. Placer le point C image de E par la rotation r de centre A et d'angle orienté de mesure $\frac{2\pi}{3}$.**

   3.2. Placer le point D tel que $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.
4. **On désigne par S la similitude directe du plan qui transforme A en B et C en D. On note Ω le centre de S.**

   4.1. Déterminer le rapport et l'angle de S

   4.2. Exprimer ΩB en fonction de ΩA et donner une mesure de l'angle orienté $\widehat{\overrightarrow{\Omega A}; \overrightarrow{\Omega B}}$.

   4.3. En déduire la position de Ω et placer le sur la figure.

   4.4. Démontrer que les points Ω, A, C et D sont cocycliques.

EXERCICE 2 : PROBABILITE

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules indiscernables au toucher.
U_1 contient 7 boules bleues et 3 boules rouges.
U_2 contient 2 boules bleues et 1 boule rouge.
On tire au hasard une boule de U_1 et on la met dans U_2, puis on tire au hasard une boule de U_1 et on le met dans U_2. L'ensemble de ces opérations constitue une épreuve.

1. **On considère les évènements suivants :**
   - **A (après l'épreuve les urnes se retrouvent dans leur configuration).**
   - **B (après l'épreuve, l'urne U_2 contient une seule boule bleu.**

On note p(A) la probabilité de l'évènement A et p(B) la probabilité B. Vérifier que p(A) = $\frac{22}{40}$ et calculer p(B).

2. Un joueur mise 200 F CFA et effectue une épreuve. A l'issue de cette épreuve, on compte le nombre de boules bleues contenues dans U_2.

   Si U_2 contient une seule boule bleue, le joueur reçoit 600 F CFA.

   Si U_2 contient deux boules bleues, le joueur ne reçoit rien.

   Si U_2 contient trois boules bleues, le joueur reçoit 2000 F CFA.

On appelle gain algébrique la différence (positive ou négative) entre la somme reçue par le joueur et la mise. Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

2.1. Déterminer les valeurs prises par X.

2.2. Déterminer la loi de probabilité.

2.3. Monter que l'espérance mathématique E(X) est égale à -75 et calculer la variance V(X) et l'écart type δ(X).

3. MBADINGA joue cinq fois de suite à ce jeu. Calculer, à 10^{-3} près par excès, la probabilité qu'il obtienne au moins un gain strictement positif à l'issue des cinq épreuves.

EXERCICE 3 : FAMILLE DE FONCTION

Partie A : Recherche d'une limite particulière $\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)$

Pour tout entier n, soit f_n la fonction définie sur l'intervalle K = [0 ; +∞ [.

Par $\left\{\begin{array}{l} f_n(x) = \frac{x^n}{n!}e^{-x} \quad n \neq 0 \\ f_0 = e^{-x} \end{array}\right\}$

Soit α un élément non nul fixé dans K. Pour tout entiers naturel n, on pose : $I_n(\alpha) = \int_0^{\alpha} f_n(x)dx$

1. Justifier l'existence de $I_n(\alpha)$. Calcule $I_0(\alpha)$.
2. 2.1. Montrer que ∀ x ∈ K et ∀ n ∈ $\mathbb{N}^*$, $f'_n(x) = f_{n-1}(x) - f_n(x)$ et $f_n(0) = 0$.

   2.2.En déduire : ∀ n ∈ $\mathbb{N}^*$, $I_n(\alpha) - I_{n-1}(a) = -\frac{\alpha^n}{n!}e^{-\alpha}$

   2.3.Ensuite, en déduire que : ∀ n ∈ $\mathbb{N}^*$, $I_n(\alpha) = 1 - \sum_k^n\left(\frac{\alpha^k}{n!}\right)e^{-a}$
3. Dans cette question, on pose : α = 1.

On appelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie par $u_n = 1 - (\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!})e^{-1} = \int_0^1 f_n(x)dx$

On note (C_n) la courbe représentative de f_n dans le repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$ l'unité graphique étant égale à 3cm.

3.1. Montrer que : $\forall$ n $\in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq 0$. Puis donner une interprétation géométrique de u_n.

3.2. Montrer que : $\forall$ n $\in \mathbb{N}^*$, et $\forall$ x $\in$ [0 ; 1], $0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{n!} x^n$

3.3. En déduire que : $\forall$ n $\in \mathbb{N}^*$, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{(n+1)!}$. Déterminer la limite de u_n en $+\infty$.

3.4. En déduire que e = $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}$

Partie B : Etude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur [0 ; +∞ [par : $f(x) = \ln(e^x + e^{-x})$, (C) sa courbe représentative.

1. 1.1. Déterminer la limite de f en +∞.

1.2. Montrer que : $\forall$ $x \geq 0$, $f(x) = x + \ln(1+e^{-2x})$

1.3.En déduire que la courbe (C) admet pour asymptote la droite (Δ) d'équation $y = x$.

1.4. Etudier la position relative de (C) et (Δ).

2. 2.1. Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variations.

2.2. Construire (C) et (Δ) dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$

Partie C : Etude d'une fonction définie par une intégrale et suite intégrale.

Pout tout x élément de [0, +∞ [, on pose : $F(x) = \int_0^x \ln(1 + e^{-2t})\, dt$.

On ne cherche pas à calculer $F(x)$.

1. 1.1. Montrer que F est bien définie et positive sur [0 ; +∞ [.

1.2. Soit λ un réel strictement positif, en utilisant la question 1. De la partie B, interpréter graphiquement $F(x)$.

2. 2.1. Justifier que F est dérivable sur D_f et calculer $F'(x)$.

2.2. Etudier le sens de variation de F sur D_f.

3. Soit α un réel strictement positif.

3.1.Montrer que : $\forall$ t $\in$ [1 ; 1+α], on a $\frac{1}{1+\alpha} \leq \frac{1}{t} \leq 1$

3.2.En appliquant le théorème de l'inégalité des accroissements finis à la fonction ln, établir que $\frac{1}{1+\alpha} \leq \ln(1 + \alpha) \leq \alpha$

4. Soit x un nombre réel strictement positif.

4.1.Déduire de la question 3 que : $\int_0^x \frac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}} dt \leq F(x) \leq \int_0^0 e^{-2t} dt$

4.2.Ensuite que : $\frac{1}{2} ln2 - \frac{1}{2}\ln(1+e^{-2x}) \leq F(x) \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2x}$.

5. On admet que la limite de F en +∞ existe et est le nombre réel k. Etablir que : $\frac{1}{2} ln2 \leq k \leq \frac{1}{2}$.

6. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \int_n^{n+1} \ln(1+e^{-2t})\, dt$.

6.1.La question 3.2. de la partie C, montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $0 \leq v_n \leq \frac{(1-e^{-2})e^{-2n}}{2}$.

6.2.Déterminer la limite de v_n **en +∞.**

BACCALAUREAT SESSION 2015

EXERCICE 1 : NOMBRES COMPLEXES ET SUITES

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(o\,;\vec{u}\,;\vec{v})$ d'unité graphique 1cm, on considère les points M_0, M_1, et M_2 d'affixes respectives $z_0 = -4+i$, $z_1 = -2 - 3i$ et $z_2 = 1 + 4i$.

1. 1.1. Justifier l'existence d'une unique similitude direct S telle que : $S(M_0)= M_1$ et $S(M_1)= M_2$.

   1.2. Etablir que l'écriture complexe de S est : $z' = \frac{1+i}{2}z + \frac{1-3i}{2}$.

   1.3. En déduire le rapport, l'angle ω du centre de Ω de la similitude S.

   1.4. On considère le point M, d'affixe z avec $z \neq 0$, et son image $M' = S(M)$ d'affixe z'. Vérifier la relation $\omega - z' = -i(z-z')$. En déduire la nature du triangle $\Omega MM'$.

2. Pour tout entier naturel n, le point M_n a pour affixe z_n. Et le point M_{n+1} est défini par $M_{n+1}= S(M_n)$ et on pose $u_n= M_nM_{n+1}$.

   2.1.Placer les points M_0, M_1, M_2 et construire géométriquement les points M_4, M_5 et M_6.

   2.2.Démontrer que la suite (u_n) est géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. La suite (v_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = u_0 + u_1 + ... + u_n = \sum_{i=0}^{n} u_1$.

   3.1.Exprimer v_n en fonction de n.

   3.2.Déterminer la limite de la suite (v_n).

4. 4.1. Calculer, en fonction de n, la longueur ΩM_n, noté r_n.

   4.2. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $r_n<0,001$.

EXERCICE 2 : ARITHMETIQUE

1. On considère l'équation (E) : $10x + 11y + 12z = 95$, ou x, y et z sont des entiers relatifs.

   1.1.Déterminer un couple d'entier relatif $(u\,;v)$ vérifiant $10x + 11y = 1$; en déduire une solution particulière $(x_0\,;y_0)$ de l'équation (E') : $11x +11y = 95$.

   1.2.Déterminer les couples entiers relatifs solution de l'équation (E').

2. Soit (O, I, J, K) un repère orthonormé de l'espace.

   On considère le plan (P) d'équation : $10x + 11y\ 12z = 95$.

   On considère les points du plan (P) qui appartiennent aussi au plan (O, I, J).

   Montrer qu'un seul de ces points a pour coordonnées des entiers naturels ; déterminer les coordonnées de ce point.

3. On considère un point M du plan (P) dont les coordonnées x, y et z sont des entiers naturels.

   3.1.Montrer que l'entier y est impair.

   3.2.On pose $y = 2p + 1$ ou p est un entier naturel. Montrer qu'on a : $p + z \equiv 2[5]$.

   3.3.On pose $p + z = 5q + 2$ ou q est un entier naturel. Montrer que les entiers naturels x, p et q vérifiant la relation : $x + p + 6q = 6$. En déduire que q prend la valeur 0 ou 1.

   3.4.En déduire les coordonnées de tous les points de (P) dont les coordonnées sont des entiers naturels.

EXERCICE 3 : FAMILLE DE FONCTION

On désigne par n un entier supérieur ou égal à 2 et on considère les fonctions, notées f_n, qui sont définies pour x appartenant à l'intervalle] 1 ; +∞ [par $f_n(x)\ \frac{1+n\ln(x-1)}{(x-1)^2}$.

Partie A : Etude de la fonction f.

1. Calculer $f'_n(x)$ et démontrer que l'on peut écrire le résultat sous la forme d'un quotient dont le numérateur est n-2-2nln(x-1).
2. Résoudre l'inéquation $f'_n(x) \geq 0$. En déduire le signe de $f'_n(x)$.
3. Déterminer les limites de f_n en 1 et en +∞.
4. 4.1. Démontrer que pour tout n entier supérieure ou égale à 2 : $f_n\left(e^{\frac{n-2}{2n}} + 1\right) = \frac{n}{2}e^{\frac{2-n}{n}}$.

   4.2.Etablir le tableau de variation de la fonction f_n et calculer sa valeur maximale en fonction de n.

Partie B : Représentation graphique de quelques fonctions f_n.

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, I, J) (unité graphique : 5cm) on note (C_n) la courbe représentative de la fonction f_n dans ce repère.

1. Construire (C_2) et (C_3).

2. **2.1. Calculer $f_{n+1}(x) - f_n(x)$. En déduire que pour tout n entier supérieure ou égale à 2 : $f_n(x) = n(f_3(x)-f_2(x)) + \frac{1}{(x-1)^2}$**

   2.2.Expliquez comment il est possible de construire point par points la courbe (C_4) à partir de (C_2) et (C_3).

Partie C : Calcul d'aires

1. **Calculer l'aire, en unité d'aire, du domaine plan limité par les courbes (C_{n+1}) et (C_n) et les droites d'équations $x = 3$ et $x = e+1$.**

   1.1.Calculer A_n

   1.2.Déterminer la nature de la suite (A_n).

BACCALAUREAT SESSION 2014

EXERCICE 1 : GEOMETRIE DE L'ESPACE

L'espace est rapporté au repère orthonormal direct (o, $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$). On considère les points A (3 ; 0 ; 6) et I (0 ; 0 ; 6) et (D) la droite passant par A et par I. On appelle (P) le plan d'équation :

2y + z – 6 = 0 et (Q) est le plan d'équation y – 2z +12 = 0.

1. **Démontrer que les plans (P) et (Q) sont perpendiculaires.**
2. **Démontrer que l'intersection des plans (P) et (Q) est la droite (D).**
3. **Les plans (P) et (Q) coupent l'axe (O ; $\vec{\jmath}$) respectivement en B et C. Déterminer les coordonnées des points B et C.**
4. **Trouver une équation du plan (T) passant par le point B et de vecteur normal $\overrightarrow{AC}$.**
5. **Calculer l'aire du triangle ABC.**

EXERCICE 2 : ARITHMETIQUE ET ISOMETRIE

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A : Equation avec congruence

Déterminer les entiers tels que : $\begin{cases} 4n + 4 \equiv 0[5] \\ -3n + 2 \equiv 0[5] \end{cases}$

Partie B : Application

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal (o ; $\vec{u}$; $\vec{v}$).

On considère l'application f qui au point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe z' tel que :

$$Z' = \frac{3+4i}{5}\bar{z} + \frac{1-2i}{5}$$

1. **On note par x et x', et y et y' les parties réelles respectivement les parties imaginaires de z et z'. Démontrer que :** $\begin{cases} x' = \frac{3x+4y+1}{5} \\ y' = \frac{4x-3y-2}{5} \end{cases}$.
2. **2.1. Montrer que l'ensemble des points invariants par f est la droite (D) d'équation : 2x -4y – 1 = 0.**

2.2. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ à une direction fixe et que la droite (D) est la médiatrice du segment [MM'].

2.3. Quelle est alors la nature de l'application f ?

3. Déterminer l'ensemble (Γ) des points M d'affixe z tels que z' soit un réel.
4. On cherche à déterminer les points de (Γ) dont les coordonnées sont des entières.

4.1.Donner une solution (x_0 ; y_0) appartenant à $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $4x – 3y = 2$.

4.2.Déterminer l'ensemble des solutions appartenant à $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $4x – 3y = 2$.

5. On considère les points M d'affixe z = x + iy tel que x =1 et y ∈ ℤ. Le point M' = f(M) a pour affixe z'. Déterminer les entiers y tels que Re(z) et Im(z') soit entiers.

EXERCICE 3 : EQUATION DIFFRENTIELLE ET SUITES

Partie A : Equation différentielle avec second membre

Soit l'Equation différentielle (E) : $y' + y = e^{-x}$

1. Résoudre l'équation différentielle (E_1) : $y' + y = 0$.
2. Déterminer un polynôme p du premier degré tel que $g(x) = P(x)e^{-x}$ soit une solution de (E) vérifiant la conditio $g(0) = 1$.
3. Montrer que f est une solution de (E) si et seulement si $f – g$ est une solution de (E_1).
4. En déduire la solution de (E) qui s'annule en 0.

Partie B : Encadrement d'une suite convergente.

On considère la fonction f définie sur ℝ par : $f(x) = xe^{-x}$. (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

1. Dresser le tableau complet de variation de la fonction f. (Limites aux bornes, signe de $f'(x)$ et extremum).
2. On suppose que pour tout entier naturel n≥2 : $I_n = \int_1^n f(x)dx$.

2.1.Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 : $I_n = \frac{2}{e} - (n+1)e^{-n}$

2.2.En déduire la limite de I_n.

3. **3.1. Montrer que la restriction *h* de la fonction *f* sur [1 ; ∞ [réalise une bijection de**

   [1 ; +∞ [vers un intervalle J à préciser.

   3.2.Sur le même graphique construire (C’) la courbe représentative de la fonction h^{-1}, fonction réciproque de *f*.

4. **Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul n par :**

   $U_n = \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} = \sum_{k=1}^{n} f(K)$. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

5. **5.1. Soit k un entier naturel non nul. Montrer que si $k \leq t \ll k+1$ alors :**

   $f(k+1) \leq \int_{k}^{k+1} f(t)dt \leq f(K)$.

   5.2.En déduire que: $ne^{-n} + \int_1^n f(t)dt \leq u_n \leq e^{-1} + \int_1^n f(t)dt$.

   5.3.Prouver alors que la suite (u_n) est convergente et encadrer sa limite.

BACCALAUREAT SESSION 2013

EXERCICE 1 : QUESTIONS AU CHOIX MULTIPLE (Q.C.M)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.

Pour chacune des cinq questions, une seule des quatre réponses est exacte. Aucune justification n'est demandée. Pour chaque réponse, vous indiquerez sur votre copie le numéro de la question et le code (A, B ou C) correspondant à la réponse choisie. (Exemple 3.A).

Une bonne réponse vaut 1 point, une mauvaise réponse fait perdre 0,5 point. L'absence de réponse n'ajoute ni ne retranche aucun point, si le total des points est négatif, la note est ramenée à zéro.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal (O, $\vec{i}$,$\vec{j}$, $\vec{k}$), on donne le point S(1, -2, 0) et (P) le plan d'équation x + y -3z +4 = 0.

1. **Une représentation paramétrique de la droite (D) passant par le point S et perpendiculaire au plan (P).**

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
D : $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 2t, t \in \mathbb{R} \\ z = -3 \end{cases}$	D : $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + t, \in \mathbb{R} \\ z = -3t \end{cases}$	D : $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t, t \in \mathbb{R} \\ z = -3 - 3t \end{cases}$	D : $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t, t \in \mathbb{R} \\ z = 1 - 3t \end{cases}$

2. **Les coordonnées du point d'intersection H de la droite D avec le plan P sont :**

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
D : (-4, 0, 0)	D : $(\frac{6}{5}, \frac{-9}{5}, \frac{3}{5})$	D : $(\frac{7}{9}, \frac{-2}{3}, \frac{1}{3})$	D : $(\frac{8}{11}, \frac{-25}{11}, \frac{9}{11})$

3. **La distance du point S au plan (P) est égale :**

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$\frac{\sqrt{11}}{3}$	$\frac{3}{\sqrt{11}}$	$\frac{9}{\sqrt{11}}$	$\frac{9}{11}$

EXERCICE 2 : ARITHMETIQUE

Les questions de 1 à 3 sont indépendantes.

1. **Soit α, a et b trois entiers naturels non nuls tels que : α = PGCD (a, b). Montrer que α divise λa + μb avec λ et μ deux entiers relatifs.**
2. **Soit a = $5n^2 +7$ et b = $n^2 +2$.**

   2.1.Démontrer que PGCD (a, b) divise 3.

   2.2.Montrer que si le reste de la division euclidienne de n par 3 est 2, alors PGCD (a, b) = 3
3. **Démontrer que pour tout entiers naturels n, $16 \times 17^{2n} - 28 \times 3^{2n+3}$ est divisible par 5.**

EXERCICE 3 : SUITE DEFINIE PAR UNE INTEGRALE – VOLUME D'UN SOLIDE ENGENDRE

Partie A : Etude de la fonction *f*.

Soit f la fonction définie sur]0 ; +∞ [par : $f(x) = (1 - \ln x)^2$

1. **Etudier les variations de *f*.**
2. **2.1. Soit g la restriction de *f* à l'intervalle [e, +∞ [. Montrer que *g* réalise une bijection de [e, +∞ [sur]0, +∞ [.**

   2.2.Démontrer que pour tout *x* de [0, +∞ [, on a : $g^{-1}(x) = e^{1-\sqrt{x}}$.
3. **Tracer la courbe (*C*) de *f* et celle de (*C'*) de g^{-1} dans un repère orthonormé $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Unité graphique 1cm sur chaque axe.**

Partie B : Suite intégrale

Pour tout n ∈ $\mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_1^e (1 - \ln x)^n dx$.

1. **Justifier l'existence de I_n.**
2. **Calculer I_1.**
3. **En utilisant une intégration par partie, démontrer que : ∀ n ∈ $\mathbb{N}^*$: $I_{n+1} = -1 + (n+1)I_n$.**
4. **On désigne par A et B les points de (C) d'abscisse 1 et e. Soit V le volume du solide de révolution engendré par la rotation de l'arc AB de la courbe (C) autour de l'axe $(O, \vec{\imath})$. Calculer V.**
5. **Montrer que (I_n) est décroissante et que pour tout n ∈ $\mathbb{N}^*$, on a : $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n}$**
6. **Montrer que (I_n) converge. En déduire la limite de I_n lorsque n tend vers +∞.**

EXERCICE 4 : NOMBRES COMPLEXES ET

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé (O ; $\vec{u}, \vec{v}$). L'unité graphique est 2cm. On désigne par m un nombre réel. On considère la transformation T_m du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' défini par :

$$z' = (m + i)z + m - 1 - i$$

1. **Peut-on choir m de telle sorte que T_m soit une translation ?**
2. **Déterminer le réel m de telle sorte que T_m soit une rotation. Précisez alors le centre et l'angle de cette rotation.**
3. **Dans la suite de l'exercice on pose m = 1.**

   3.1.Calculer l'affixe du point Ω invariant par T_m.

   3.2.Pour tout nombre complexe z différent de 1, calculer $\frac{z'-1}{z-1}$. En interprétant géométriquement le module et un argument de $\frac{z'-1}{z-1}$, démontrer que T_1 est une similitude directe dont on précisera les éléments caractéristiques.

   3.3.Démontrer que, pour tout nombre z on a :
   $z' - z = i(z - 1)$. En déduire que si M est distinct de Ω, alors le triangle ΩMM' est rectangle isocèle en M.
4. **On définit dans le plan une suite (M_n) de points en posant : $M_0 = O$, $M_1 = T_1(M_0)$, pour tout entier naturel n non nul : $M_n = T_1(M_{n-1})$.**

   4.1.Placer les oints M_1, M_2, M_3, M_4 dans le plan muni du repère (o, $\vec{u}, \vec{v}$).

   4.2.Pour tout entier naturel n, on pose $d_n = \Omega M_n$. Démontrer que la suite (d_n) est une suite géométrique, puis exprimer le terme général de cette suite en fonction de n. Converge-t-elle ?

BACCALAUREAT SESSION 2012

EXERCICE 1 : COURBES PARAMETREES ET CONIQUE

Le plan est rapporté d'un repère orthonormé $(0 ; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

On considère la courbe paramétrée (C) définie par :

$\left\{\begin{array}{l} x(t) = e^t - e^{-t} \\ y(t) = e^t + e^{-t} \end{array}\right., (t \in \mathbb{R}\}$ et M(t) est le point de coordonnées (x(t) ; y(t)).

1. 1.1 Démontrer, en comparant M(-t) et M(t), que la courbe admet un axe de symétrie.

   1.2. Etudier les variations des fonctions x et y sur [0 ; +∞ [.

   1.3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe (C) au point A(x(0) ; y(0)).

2. 2.1. Calculé $x(t)^2 - y(t)^2$

   2.2. En déduire que la courbe (C) est une partie d'une conique (H).

   2.3. Déterminer les asymptotes, l'axe focal, les foyers et l'excentricité de (H).

3. Tracer (C) et (H) sur la même figure.

EXERCICE 2 : APPLICATION DE L'ESPACE

Soit f une application de l'espace E dans E d'expression analytique :

$$\left\{\begin{array}{l} x' = \frac{1}{3}(-x + 2y - 2z - 2) \\ y' = \frac{1}{3}(2x + 2y + z + 1) \\ z' = \frac{1}{3}(-2x + y + 2z - 1) \end{array}\right\}$$

1. Démontrer que l'ensemble des points invariants par f est le plan (P) d'équation : $2x - y + z + 1 = 0$.

2. Soit M$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un point de l'espace, et M'$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ son image.

   2.1. Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ garde une direction fixe.

   Indication : On peut montrer que : $\overrightarrow{MM'} = \lambda(2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k})$ ou λ est un réel.

2.2. En déduire la position relative de la droite (MM’) et le plan (P).

2.3. Démontrer que le milieu I du segment [MM’] appartient à (P).

2.4. Déterminer : $f \circ f(M)$.

2.5. En déduire des questions précédentes la nature de f.

3. On considère le plan (Q) d’équation cartésienne : $x + y - z + 2 = 0$.

3.1. Justifier que les plans (Q) et (P) sont perpendiculaires.

3.2. Soit (Δ) la droite d’intersection des plans (P) et (Q). Déterminer une équation paramétrique de (Δ).

4. Soit s la symétrie orthogonale par rapport au plan (Q). On pose : $g = f \circ s$.

4.1. Soit $A\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$. Vérifier que A est un point de (Q).

4.2. Montrer que g est un demi-tour dont on précisera l’axe.

4.3. Déterminer les coordonnées de A’, ou A’=g(A).

EXERCICE 3 : FAMILLE DE FONCTION

n est un entier naturel non nul. On considère la famille de fonction f_n définie sur $]0 ; +\infty[$. Par :

$f_n(x) = (x - 1)^n \ln x$. Et on note (C_n) la courbe représentative de f_n dans le plan muni d’un repère orthonormé $(O ; \vec{\imath} ; \vec{\jmath})$ d’unité graphique : 2 cm.

Partie A : Etude d’une fonction auxiliaire.

n est un entier naturel non nul. On considère la famille de fonction g_n définie sur le même intervalle que f_n, on a $g_n(x) = \ln x + \frac{x-1}{x}$.

1. Etudier les variations de la fonction g_n sur D_g.
2. 2.1. Calculer la limite de g_n sur D_g.

   2.2. Calculer $g_n(1)$ et en déduire le signe de $g_n(x)$.

   2.3. Dresser le tableau de variation de g_n.

Partie B : Etude de la fonction f_n.

1. Vérifier que toutes les courbes (C_n) passent par un même point dont on déterminera les coordonnées.
2. 2.1. Justifier la dérivabilité de f_n sur D_f.

2.2. Soit f'_n la fonction dérivée de f_n. Déterminer $f'_n(x)$ pour $x \in$ à D_f. et montrer que : $f'_n(x) = (x-1)^{n-1}g_n(x)$.

3. En utilisant la partie A :

3.1. Déterminer les variations de f_n.

3.2. Déterminer les limites de f_n en 0 et en $+\infty$.

3.3. Dresser le tableau de variation de f_n.

4. Construire (C_2).

Partie C : Etude d'une suite intégrale.

Pour tout entier naturel n non nul, on note : $I_n = \int_1^2 f_n(x)dx$.

1. Démontrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et qu'elle converge.

2. 2.1. Démontrer que pour tout $x \in [1 ; 2]$: $\ln x \leq x$.

Indication : on pourra étudier la fonction : $x \to \ln x - x$.

2.2. En déduire que pour tout $x \in [1 ; 2]$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) \leq x(x-1)^n \leq 2(x-1)^n$.

2.3. En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

BACCALAUREAT SESSION 2011

EXERCICE 1 : NOMBRES COMPLEXES ET CONIQUES

1. **Soit le polynôme P défini par :**

   $P(z) = z^4 + (-6 + i)z^3 + (17 - 7i)z^2 + (-26 + 14i)z + 20(1 - i)$.

1.1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation: $Z^2 = -5 + 12i$.

1.2. Vérifier que : $p(z) = [z^2 - (4 - i)z + 5 - 5i][z^2 - 2z + 4]$.

1.3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $p(z) = 0$.

2. **Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A, B ? C et Ω d'affixe respectives 4 ; $1 + i\sqrt{3}$, $1 - \sqrt{3}$ et 1.**

   Soit E l'ellipse de centre Ω passant par les points A et B, et d'axe focal l'axe des abscisses.

2.1. Déterminer A' tel que [AA'] soit le grand axe de (E).

2.2. Démontrer que B et C sont des sommets de €.

2.3. Trouver les foyers, les directrices associées et l'excentricité de (E).

2.4. Déterminer une équation cartésienne de (E).

2.5. Déterminer les coordonnées des points d'intersections de (E) avec l'axe des ordonnées.

2.6. Tracer (E).

3. **Soit f l'application affine du plan dans le plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = (1 - i)z + i$.**

3.1. Déterminer la nature exacte de f, puis précisez ses éléments caractéristiques.

3.2. Déterminer l'expression analytique de f.

3.3. Démontrer que f est bijective.

3.4. Déterminer la nature exacte de (E') image de (E) par f.

3.5. Déterminer les foyers, les directrices associées, les sommets, l'axe focal et l'excentricité de (E').

EXERCICE 2 : ARITHMETIQUE

Partie A :

1. **On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation suivante d'inconnue x : (E) : $3x^2 + 6x + 5 \equiv 0\ [7]$.**

   1.1.Montrer que l'équation (E) est équivalent à l'équation (E') ou :

   (E') : $3x(x + 2) \equiv 2\ [7]$.

   1.2.Recopier et compléter le tableau des congruences modulo 7.

x	0	1	2	3	4	5	6
$3x$							
$x + 2$							
$3x(x + 2)$							

   1.3.En déduire les solutions de l'équation (E).

2. **Un entier naturel A s'écrit $\overline{361}^{\beta}$ dans le système de numération de base β et a pour reste 3 dans la division euclidienne par 7.**

   2.1.Démontrer que : $3\beta^2 + 6\beta - 2 \equiv 0\ [7]$.

   2.2.En déduire l'ensemble des valeurs possibles de β.

3. **Vérifier que 8 est une valeur possible de β.**

Partie B :

On se propose de résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation d'inconnue (x ; y) suivante :

$$F(x) : x^2 + 10x = y^2 + 46.$$

1. **Vérifier que l'équation (F) est équivalente à : $(x + 5)^2 - y^2 = 71$.**
2. **Démontrer que 71 est premier.**
3. **Déterminer alors l'ensemble des solutions de (F).**

EXERCICE 3 : ETUDE DE FONCTION TRIGO - NOMETRIQUE

Partie A : Déterminer la fonction dérivée d'une bijection réciproque.

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle I = $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x) = \tan x$

1. **Etudier la dérivabilité de f.**
2. **Calculer $f'(x)$ ou f' désigne la fonction dérivé de f ; puis vérifier que $f'(x) = 1 + [f(x)]^2$.**
3. **3.1. Calculer les limites de f aux bornes de son D_f.**

   3.2.Dresser le tableau complet de variation de f.

   3.3.Démontrer que f est une bijection de $]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$ sur un intervalle J à préciser.
4. **4.1. On désigne par g la bijection réciproque de f. Démontrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que l'on a :**

   $g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ **ou g' désigne la fonction dérivée de g.**

   4.2.Dresser le tableau complet de variation de g sur $\mathbb{R}$.

Partie B : Déterminer la limite d'une fonction définie par une intégrale et donner du sens à la notation $\int_0^{+\infty} f(x)dx$.

1. **Soit h la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \frac{1}{4+x^4}$. Vérifier que pour tout réel x, on a :**

   $h(x) = \frac{1}{8} \times \frac{x+2}{x^2+2x+2} - \frac{1}{8} \times \frac{x-2}{x^2-2x+2}$
2. **Pour tout réel x de $\mathbb{R}$, on pose :**

   $H_1(x) = \frac{1}{8} g(x+1)$ **et** $H_2(x) = \frac{1}{8} g(x-1)$

2.1.Etudier la dérivabilité des fonctions H_1 et H_2.

2.2.Calculer $H'_1(x)$ et $H'_2(x)$ ou H'_1 et H'_2 désignent respectivement les dérivées des fonctions H_1 et H_2.

3. **Soit G la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :**

   $G(x) = \int_0^x \frac{1}{t^4+4}$

3.1.Démontrer que G est impair.

3.2.Etudier la dérivabilité de G, puis calculer G'(x) ou G' désigne la fonction dérivée de G.

3.3.Etudier le sens de variation de G sur $\mathbb{R}$.

4. **En remarquant que :**

$$x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1$$
$$x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$$
$$x + 2 = (x+1) + 1$$
$$x - 2 = (x-1) - 1$$

Démontrer que l'on a :

G(x) = $\frac{1}{16}\ln\left(\frac{x^2+2X+1}{x^2-2X+1}\right)+\frac{1}{8}g(x+1)+\frac{1}{8}g(x-1)$

5. On définit $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^4+4}dx$ par :

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^4+1}dx=\lim_{x\to+\infty}\int_0^{x}\frac{1}{t^4+4}dt$$

Calculer alors : $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^4+4}dx$

Partie C : Etude d'une suite numérique

1. O désigne par (U_n) la suite définie pour tout entier n≥ 1 par :

$$U_n=\int_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+1}$$

1.1 Donner la valeur exacte de U_1 et U_2.

1.2 Déterminer le signe de (U_n).

1.3 Etudier le sens de variation de (U_n).

2. En exploitant le sens de variation de φ définie sur ℝ par φ(x) = $\frac{1}{1+x^2}$, démontrer que pour tout entier naturel n et tout réel x de l'intervalle [n ; n+1], on a :

$$\int_n^{n+1}\frac{1}{(n+1)^2+1}dx\leq\int_n^{n+1}\frac{1}{x^2+1}dx\leq\int_n^{n+1}\frac{1}{n^2+1}dx$$

En déduire que : $U_n\leq\int_0^{n}\frac{1}{x^2+1}dx$

3. Démontrer que la suite (U_n) est convergente et que :

$$\lim_{n\to+\infty}U_n\leq\frac{\pi}{2}$$

BACCALAUREAT SESSION 2010

EXERCICE 1 : SUITE INTEGRALE

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies sur $[0 ; \frac{\pi}{2}]$ par : $\begin{Bmatrix} f_n(x) = \frac{\sin nt}{\sin t}, si\ n \neq 0 \\ f_0 = n \end{Bmatrix}$

1. **Vérifier que f_n est continue en 0.**
2. **Etudier la continuité de f_n ; puis justifier l'existence de : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)dt$.**
3. **On définit pour n ∈ ℕ : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin nt}{\sin n}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)dt$.**

   On rappelle que : sin p – sin q = 2 sin $(\frac{p-q}{2})\cos(\frac{p+q}{2})$

   $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne la suite définie par $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)dt$.

   3.1. Démontrer que, pour tout entier n, que : $I_{n+1} - I_n = \frac{2}{n+1}\sin(n+1)\frac{\pi}{2}$.

   3.2. En déduire que pour tout entier n non nul : $I_{2n+1} - I_{2n-1} = 0$.

   3.3. Calculer I_1, puis déduire la valeur de I_{2n+1}.
4. **On rappelle que pour tout entier naturel k on a : $\sin(2k-1)\frac{\pi}{2} = (-1)^{k+1}$.**

   4.1. Prouver à partir de 3.1. que : $I_{2n} - I_{2n-2} = \frac{2}{2n-1} \times (-1)^{n+1}$.

   4.2. Démontré alors que $I_{2n} = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{K+1}}{2k-1}$
5. **On admet que $\lim\limits_{n\to+\infty} (I_{2n+1} - I_{2n} = 0$. En déduire la limite de la suite $(I_n)_{2n\in\mathbb{N}}$.**

EXERCICE 2 : CONIQUE

Le plan (P) est muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{\imath} ; \vec{\jmath})$. (Γ) désigne l'ensemble des points M(x ; y) tel que : $x^2 - y^2 = 1$.

1. **1.1. Quelle est la nature exacte de (Γ) ? Donner les éléments caractéristiques de (Γ) : centre. Asymptote et sommet.**

   1.2. Représenter graphiquement (Γ) dans (P).
2. **On désigne par (Γ_1) la partie de (Γ) formée des points qui ont une abscisse strictement positive**

2.1.Démontrer que si M(x ; y) appartient à (Γ_1), alors $x \geq 1$.

2.2.Soit M(x ; y) démontrer que si M(x ; y) appartient à (Γ_1) alors on a

$x + \sqrt{x^2 - 1} > 0$ et $1 - \sqrt{x^2 - 1} > 0$.

2.3.En déduire que M(x ; y) ∈ (Γ_1) alors : x + y > 0 et x – y > 0.

2.4.Démontrer que si M(x ; y) ∈ (Γ_1) alors il existe un réel t tel que :

$$\begin{cases} x + y = e^t \\ x - y = e^{-t} \end{cases}$$

2.5.Inversement, démontrer que s'il existe un réel t tel que : $\begin{cases} x + y = e^t \\ x - y = e^{-t} \end{cases}$ alors M(x ; y) ∈ (Γ_1).

2.6.Déterminer alors une représentation paramétrique de (Γ_1).

3. **Soit f la transformation du plan qui à tout point M(x ;y) associe le point M'(x' ; y') tel que :**

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y \end{cases}$$

Donner l'écriture complexe de f, précisez la nature exacte ainsi que ses éléments caractéristiques.

4. **On pose (Γ_2) = f ((Γ_1)).**

Déterminer une équation cartésienne, puis représenter graphiquement dans un repère orthonormé direct (Γ_2).

EXERCICE 3 : ETUDE D'UNE FAMILLE DE FONCTION

Le plan est rapporté au repère (o ; $\vec{i}$,$\vec{j}$) d'unité graphique 1cm sur l'axe des abscisses et 5cm sur l'axe des ordonnées. Pour tout réel x >0, on pose : $g_n(x) = \frac{(\ln x)^n}{1+x^2} = \frac{ln^n x}{1+x^2}$; n ∈ $\mathbb{N}^*$. On note (C_n) la courbe représentative de g_n.

1. **En tenant compte de la parité de n, calculer $\lim_{x\to 0} g_n(x)$.**
2. **Pour tout x > 0 et posant x = e^t, montrer que : $\lim_{x\to\infty} g_n(x) = \lim_{x\to+\infty} g_n(x) = \frac{t^n}{1+e^{2t}}$. En déduire $\lim_{x\to+\infty} g_n(t)$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.**
3. **3.1. Montrer que pour tout n appartenant à $\mathbb{N}^*$, g_n est dérivable sur]0 ; +∞ [, puis calculer $g'_n(x)$.**

3.2. On pose pour tout x >0 : $\varphi_n(x) = n(1 + \frac{1}{x^2}) - 2\ln x$. Montrer que pour tout x> 0 :

$$g'(x) = \frac{x(\ln x)^{n-1}}{(1+ x^2)^2}\ \varphi_n(x).$$

3.3. Etudier le de variation de φ_n sur]0 ; +∞ [. Calculer ses limites sur son D_f, puis dresser son tableau de variation.

3.4. Montrer que l'équation $\varphi_n(x) = 0$ admet une solution unique sur]0 ; +∞ [notée α_n. Vérifier que : $\alpha_n \in [e^{\frac{n}{2}}, e^n]$. En déduire le signe de φ_n sur]0 ; +∞ [.

4. Déduire de la question précédente les variations de g_n. On donnera le tableau son tableau de variation suivant la parité de n.
5. Etudier les positions relatives entre (C_n) et (C_{n+1}) suivant la parité de n.
6. 6.1. Soit α_1 l'unique solution sur]0 ; +∞ [de l'équation $\varphi_1(x) = 0$. Vérifier que $\alpha_1 \in [\frac{3}{2} ; 2]$, puis donner un encadrement de α_1 d'amplitude 10^{-2}.

   6.2. Vérifier que $\alpha_2 \in [3 ; 3,2]$, puis donner un encadrement de α_2 d'amplitude 10^{-2}. On admettra que $\alpha_3 \in\ ]4,78 ; 4,79[$.
7. Représenter (C_1), (C_2) et (C_3) sur le même graphique.

TRAVAIL – JUSTICE – SOLIDARITÉ

SUJETS DES BACCALAUREATS DE GUINEE CONAKRY

BACCALAUREAT SESSION 2019

Exercice 1 :

Les suites d'entiers naturels x_n et y_n sont définies sur par:

$$\begin{cases} x_0 = 3 \ et \ x_{n+1} = 2x_n - 1 \\ y_0 = 1 \ et \ y_{n+1} = 2y_n + 3 \end{cases}$$

1) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $x_n = 2^{n+1} + 1$

2) a)Calculer le PGCD de $x_8 \ et \ x_9$ puis celui de $x_{2002} \ et \ x_{2003}$. Que peut-on déduire pour $x_8 \ et \ x_9$ d'une part $x_{2002} \ et \ x_{2003}$ d'autre part?

b) $x_{n+1} \ et \ x_n$ sont-ils premiers entre eux pour tout entier naturel ?

3) a) Démontrer que pour tout entier naturel$n$, $2x_n - y_n = 5$,

b) Exprimer y_n en fonction de .

c) En utilisant les congruences modulo 5, étudier suivant les valeurs de l'entier naturel p le reste de la division euclidienne de 2^p par 5.

d) On note d_n le PGCD de $x_n \ et \ y_n$ pour tout entier naturel . Démontrer que l'on a $d_n = 1$ ou $d_n = 5$; en déduire l'ensemble des entiers naturels tels que $x_n \ et \ y_n$ soient premiers entre eux.

Exercice 2 :

A- Une urne contient n boules blanches ($n \in N \ et \ n \geq 2$), 5 boules rouges et 3 boules vertes. On tire simultanément et au hasard deux boules de l'urne.

1) Quelle est la probabilité de tirer deux boules blanches ?

2) On note $p(n)$ la probabilité de tirer deux boules de même couleur.

Montrer que $p(n) = \frac{n^2-n+26}{(n+8)(n+7)}$

B- Pour les questions suivantes $n = 4$,

1) Calculer $p(4)$

2) Un tirage consiste à tirer simultanément et au hasard deux boules de l'urne. Un joueur effectue deux tirages indépendants, en remettant dans l'urne avant le second tirage les deux boules tirées la première fois.

Il mise au départ la somme de francs.

Pour chaque tirage :

-Si les deux boules sont de même couleur il reçoit alors 40 francs ;

-Si elles sont de couleurs différentes, il reçoit alors 5 francs;

On appelle gain du joueur la différence, à l'issue des deux tirages, entre la somme perçue par le joueur et sa mise initiale (ce gain peut être positif ou négatif).

On désigne par X la variable aléatoire égale au gain du joueur.

a) **Quelles sont les valeurs prises par X?**

b) **Déterminer la loi de probabilité de .**

c) **Calculer l'espérance de .**

PROBLEME

Partie A :

La fonction g est définie sur R par : $f(x) = 2e^{x} + 2x + 7$

1) Etudier les limites de g en $-\infty$ $et\ en + \infty$.

2) Etudier le sens de variation de la fonction $g\ sur\ R$ et dresser son tableau de variation.

3) Justifier que l'équation $g(x) = 0$ admet dans R une solution unique α tel que: $0,940 < \alpha < 0{,}941$. Etudier le signe de g sur R.

Partie B :

La fonction f est définie sur R par : $f(x) = (2x - 5)(1 - e^{x})$.

On note (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

1) Etudier le signe de f sur R.

2) Etudier les limites de f en $-\infty$ $et\ en + \infty$.

3) Calculer $f'(x)$, où f' désigne la fonction dérivée de f , et vérifier que et ont le même signe. Dresser le tableau de variation de .

4-a) Démontrer l'égalité : $f\ (\alpha) = \frac{(2\alpha-5)^2}{2\alpha-7}$

a) **Etudier le sens de variation de la fonction $h: x \to \frac{(2\alpha-5)^2}{2\alpha-7}\ sur\ l'intervalle \left]-\infty; \frac{5}{2}\right[$. En déduire, à partir de l'encadrement de α obtenu dans la partie A, en encadrement d'amplitude $10^{-2}\ de\ f(\alpha)$.**

1) **Démontrer que la droite (D) d'équation $y = 2x - 5$, est l'asymptote à (C) en $+\infty$. Préciser la position relative de $(c)\ par\ rapport$ à (D).**

2) **Tracer la droite (D) et la courbe (C) dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.(unité graphique 2cm)**

Partie C :

A l'aide d'une intégration par parties, calculer en cm^2 l'aire A de la portion du plan délimitée par la

Courbe (C) , l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \frac{5}{2}$.

Partie D :

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à , on considère les points A_n, B_n et C_n et d'abscisse

n appartenant respectivement à l'axe des abscisses, à la droite (D) et à la courbe (C) ;

Soit u_n le réel défini par : $u_n = \frac{C_nB_n}{A_nB_n}$

1- Démontrer que pour tout entier naturel supérieur ou égal à 3, on a : $u_n = \frac{2n-5-f(n)}{2n-5}$

2- a) Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

b) Calculer la limite de la suite $u_n)$. Pouvait-on prévoir ce résultat ?

BACCALAUREAT SESSION 2018

Exercice 1 :

1- a- Calculer $(1+\sqrt{6})^2$; $(1+\sqrt{6})^4$; $(1+\sqrt{6})^6$

b- Appliquer l'algorithme à 847 *et* 342. Que peut-on en déduire ?

2- Soit n un entier naturel non nul. On note a_n *et* b_n les entiers naturels tels que :

$(1+\sqrt{6})^6 = a_n + \sqrt{6}b_n$. Que valent a_1 et b_1

D'après les calculs de la question 1)a) donner d'autres valeurs de a_n *et* b_n

a- Calculer a_{n+1} *et* b_{n+1} en fonction de a_n *et* b_n

b- Démontrer que si 5 ne divise pas $a_n + b_n$, alors 5 ne divise pas $a_{n+1} + b_{n+1}$

En déduire que quel que soit n entier naturel non nul ; 5 ne divise pas $a_n + b_n$

c- Démontrer que si a_n *et* b_n sont premiers entre eux, alors $a_{n+1} + b_{n+1}$ sont premiers entre eux

En déduire que quel que soit n entier naturel non nul a_n *et* b_n sont premiers entre eux.

Exercice 2 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\overrightarrow{e_1};\ \overrightarrow{e_2})$

A tout point M d'affixe z, on fait correspondre le point M' d'affixe z' telle que : $z' = z^2 - 4z$

1- Calculer les coordonnées $(x';y')$ du point M' en fonction des coordonnées $(x;y)$ du point M

2- a- Démontrer que l'ensemble (H) des points M du plan tels que z' soit un nombre imaginaire pur est une hyperbole

b- Préciser dans le repère $(O\,;\overrightarrow{e_1};\ \overrightarrow{e_2})$, les coordonnées du centre Ω, celles des sommets et les équations des asymptotes de (H)

3- Soit P le point d'affixe $-\frac{5}{2} - 2i$

Déterminer les points M du plan tels que le quadrilatère $OMM'P$ soit un parallélogramme.

PROBLEME :

Etude préliminaire :

On considère la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ *par* $g(x) = ln(1+x) - x$

1- Etudier le sens de variations de g

2- En déduire que pour tout réel a positif ou nul, $ln(1 + a) \leq a$

Partie A :

On considère la fonction $f_1(x)$ définie sur [0;+∞[par $f_1(x) = ln(e^x + x) - x$

1- Calculer $f_1{}'(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$ et en déduire le sens de variation de f_1

2- Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$;

$f_1(x) = ln(1 + \frac{x}{e^x})$. En déduire la limite de $f_1(x)$ en $+\infty$

3- Dresser le tableau de variation de $f_1(x)$

Partie B : On considère la fonction $f_k(x)$ définie sur [0;+∞[par $f_k(x) = ln(e^x + kx) - x$

Soit (C_k) la courbe représentative de la fonction f_k dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O; i; j)$ (unités graphiques : $OI = 5cm$ et $OJ = 10cm$)

1- Calculer $f'_k(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$ et en déduire le sens de variation de f_k

2- Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$;

$f_k(x) = ln(1 + k\frac{x}{e^x})$. En déduire la limite de $f_k(x)$ en $+\infty$

3- a- Dresser le tableau de variation de $f_k(x)$

b- Montrer que pour tout réel x de $[0; +\infty[$, on a : $f_k(x) \leq \frac{k}{e}$

4- Déterminer l'équation de la tangente (Tk) à (Ck) au point O

5- Soit p et m deux réels strictement positifs tels que $p < m$. Etudier la position relative de (C_p) et (C_m)

6- Tracer les courbes (C_1) et (C_2) ainsi que leurs tangentes respectives (T_1) et (T_2) en O.

Partie C :

Soit λ un réel strictement positif, on note $A(\lambda)$ l'aire, en unité d'aires du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe (C_k) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$

1- Sans calculer $A(\lambda)$, montrer que $A(\lambda) \leq k\int_0^\lambda xe^{-x}dx$.(On pourra utiliser l'inégalité de la question préliminaire)

2- A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale $\int_0^\lambda xe^{-x}dx$

3- On admet $A(\lambda)$ a une limite en $+\infty$. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} A(\lambda) \leq k$

Interpréter graphiquement ce résultat

BACCALAUREAT SESSION 2017

Exercice 1 :

Soit f la fonction définie sur ℝ+ par : $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$

3) **Déterminer une primitive de f sur ℝ +**

4) **Soit la suite (un) définie pour n>0 par: $un = \int_{\ln(n)}^{\ln(n+1)} f(x)dx$**

Exprimer (u_n) en fonction de n

5) **Montrer que (u_n) est une suite décroissante positive. Que peut-on en déduire ?**

Calculer la limite un lors que n tend vers $+\infty$

6) **On pose $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$**

c) **Calculer S_1, S_2, S_3 et exprimer S_n en fonction de n**

d) **Calculer la limite sn lors que n $tend$ $vers$ $+\infty$.**

Exercice 2 :

Une variable aléatoire X prend les 1 ; -1 et 2 avec les probabilités respectives e^a, e^b, e^c où a, b et c sont en progression arithmétique.

On suppose que l'espérance mathématique (X) est égale à 1

1- **Calculer a, b et c et la variance $V(X)$**

2- **Soit A, B et C trois points d'abscisses respectives $1, -1$ et 2 d'une droite graduée (Δ)**

a) **Calculer l'abscisse du point G barycentre de $\{(A,1),(B,2),(C,4)\}$**

b) **On pose : $\varphi(M) = \frac{1}{7}(MA^2 + 2MB^2 + 4MC^2)$,où M est un point de (Δ). Montrer que $\varphi(G) = V(X)$**

c) **Déterminer l'ensemble (Γ) des points M de (Δ) tels que (M)=3**

PROBLEME :

PARTIE A :

On considère la fonction f définie sur R par : $f(x) = e^{-x}ln(1+e^x)$. On note par (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthogonal (O, I, J). L'unité graphique est 1cm sur l'axe des abscisses et 10cm sur l'axe des ordonnées

1) a. On rappelle que $\lim\limits_{h\to 0} \frac{ln(1+h)}{h} = 1$. Déterminer la limite de f en $-\infty$

b. Vérifier que pour tout réel x : $f(x) = \frac{x}{e^x} + e^{-x}ln(1+e^{-x})$

Déterminer la limite de f en $+\infty$

c. En déduire que la courbe (C) admet deux asymptotes que l'on précisera

2) On considère la fonction g définie sur $]-1;+\infty[$ par : $g(t) = \frac{t}{t+1} - ln(1+t)$

a. Démontrer que la fonction g est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$

b. En déduire le signe de $g(t)$ lors que $t > 0$

3) a. Calculer $f'(x)$ et l'exprimer en fonction de la fonction $g(e^x)$, $f'(x)$ désignant la fonction dérivée de f

b. En déduire le sens de variation de la fonction f puis dresser son tableau de variation

4) Tracer les asymptotes à la courbe (C) et la courbe (C).

PARTIE B

Soit F la fonction définie sur R par : $F = \int_0^x f(t)dt$

1) Etudier le sens de variation de la fonction F

2) a) Vérifier que pour tout nombre réel t : $\frac{1}{1+e^x} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x}$ et $\int_0^x \frac{dt}{1+e^t}$

b) En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, le calcul de F(x)

c) Vérifier que $F(x)$ peut s'écrire sous forme suivantes :

$$F(x) = x - ln(1+e^x) - f(x) + 2ln2 \ (1)$$

$$F(x) = ln(\frac{e^x}{1+e^x}) - f(x) + 2ln2 \ (2)$$

3) Déterminer $\lim_{x \to +\infty} F(x)$

4) Déterminer $\lim_{x \to +\infty} (F(x) - x)$. Donner une interprétation graphique de ce résultat.

On donne : $ln2 \approx 0,69$

BACCALAUREAT SESSION 2016

Exercice 1 :

Dans une urne il y'a n boules rouges et $2n$ boules blanches

On tire simultanément p boules de l'urne $p < n$

1) **Si $n = 5$ et $p = 4$; calculer les probabilités des évènements suivants :**

   A : Obtenir deux boules blanches et deux boules rouges

   B : Obtenir au moins une blanche

   (On donnera les résultats sous la forme de fractions irréductibles)

2) **On suppose que $p = 2$ et n un entier naturel quelconque tel que : $n \geq 2$**

a) **Calculer la probabilitéP_n d'obtenir deux boules de même couleur**

b) **Démontrer que la suite $(P_n)n \geq 2$ est majorée par 1**

   Quel est le sens de variations de $(P_n)n \geq 2$?

c) **Déduire de la question précédente que (P_n)≥2 est convergente et calculer sa limite.**

EXERCICE 2 :

Partie A :

I-1) n étant un entier relatif quelconque, on pose $A = n - 1$ et $B = n^2 - 3n + 6$

a) Montrer que le $PGCD$ de A et B est égal au $PGCD$ de A et 4

b) Déterminer, suivants les valeurs de n, le $PGCD$ de A et B

2) Pour quelles valeurs de l'entier relatif n, le nombre $\frac{n^2-3n+6}{n-1}$ est-il un entier relatif ?

II) Pour tout couple $(a ; b)$ d'entiers naturels, on désigne δ $leur$ $PPCM$ et μ $leur$ $PGCD$

1) Déterminer les couples d'entiers naturels (a ; b) tels que : $3\delta + 2\mu = 11$

2) Dresser la liste des diviseurs de 108.

Déterminer les couples d'entiers naturels tels que : $\mu - 3\delta = 108$ et $10 < \delta < 15$.

Partie B :

On considère trois points non alignés A, B et C de l'espace

On désigne par G_1 le barycentre des points pondérés $(A, 3)$; $(B, 2)$ et $(C, -1)$ et par G_2 le barycentre des points pondérés (A,2);(B,1) et (C,1)

4) a) Calculer $\overrightarrow{G_1G_2}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

b) En déduire que $G1 \neq G2$

5) A tout point M de l'espace on fait correspondre le point M_1 *tel que* :

$\overrightarrow{MM_1} = 3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$ et le point M_2 *tel que*: $\overrightarrow{MM_2} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$

c) Démontrer que si M décrit une droite (D) de l'espace, $M1$ décrit la droite (Δ) par une homothétie que l'on précisera

d) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$ reste constant quand M décrit R

6) Déterminer l'ensemble (S) des points M de l'espace tels que : $\overrightarrow{MM_1} \times \overrightarrow{MM_2} = 0$

PROBLEME :

Partie A : Dans tout le problème, les fonctions étudiées sont dérivables sur $]0;+\infty[$

On considère la fonction h définie sur $]0;+\infty[$ par : $h(x) = 1 + \frac{1}{X^2} - 2lnx$

1) Calculer les limites de h *en* $+\infty$ et à droite en 0

2) On note h' la dérivée de h ; démontrer que : $\forall x \in]0;+\infty[; h'(x) = -\frac{2(1+x^2)}{x^3}$

3) Démontrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique x_0 *dans* $]1;+\infty[$.

En déduire le signe de h

Partie B :

On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ *par* : $g(x) = x^2(1 - lnx) + 1 + lnx$

1- Calculer les limites de g *en* $+\infty$ et à droite en 0

2- On note g' la dérivée de g; démontrer que : $\forall x \in]0;+\infty[; g'(x) = xh(x)$

Démontrer que $g(x0) > 0$

3- Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution uniquex_1 *dans* $]0;\ 1[$.

4- On admet que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique x_2 *dans* $]x_0;+\infty[$.

a) Déterminer le signe de g

b) Démontrer que $x_1 \in]0,3;0,4[$ *et* $x_2 \in]3,3;3,4[$

Partie C : On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ *par* : $f(x) = \frac{x\ln x}{1+x^2}$

1) Démontrer que f est continue à droite en 0 mais non dérivable en 0

2) Calculer la limite de f *en* $+\infty$ puis interpréter graphiquement ce résultat

3) On note f' la dérivée de f ; démontrer que : $\forall x \in]0;+\infty[; f'(x) = \frac{g(x)}{(1+x^2)^2}$

4) Dresser le tableau de variation de f

5) **Démontrer que si α est solution de l'équation $g(x) = 0$ $alors\ ln\alpha = \frac{\alpha^2+1}{\alpha^2-1}$ et en déduire $f(\alpha)$**

6) **En déduire que $f(x_1) < 0$ et $f(x_2) > 0$. Vérifier que $f(1) = 0$ puis en déduire le signe de f**

7) **Tracer la courbe représentative (Cf) de f dans le plan muni du repère orthogonal**
On prendra pour unités : 3cm en abscisses, 8cm en ordonnées, $x_1 \approx 0,35$ et $x_2 \approx 3,35$

BACCALAUREAT SESSION 2015

Exercice 1 :

1) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}*$, on a : $\sum_{k=1}^{n} k(n-k) = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}$

2) Démontrer que pour tout entier naturel n : $10^{9n+2} + 10^{6n+1} + 1$ est divisible par 111

3) a) Décomposer 469 en produit de facteurs premiers

b) Résoudre dans N^2 l'équation :$x^3 - y^3 = 469$

Exercice 2 :

Le plan complexe est muni du repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ direct

Soit $Z \in C$ où C désigne l'ensemble des nombres complexes. Posons $Z = x + iy$; x et y réels

1) **Soit $M(Z)$ un point du plan complexe et $M'(z')$ l'image de M par la rotation de centre O et d'angle θ Exprimer Z'en fonction de Z et θ**
2) **On considère dans C l'équation d'inconnue Z qui suit : (E): $\frac{1}{2}Z^2 + 4Z\sqrt{3} + 32 = 0$**

   Résoudre l'équation (E)
3) **On considère A et B d'affixes respectives $a = -4\sqrt{3} - 4i$ et $b = -4\sqrt{3} + 4i$**

   Calculer OA , OB et AB. En déduire la nature du triangle OAB
4) **On considère par C le point d'affixe $c = \sqrt{3} + i$ et par D son image par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Déterminer l'affixe du point D**
5) **On appelle G le barycentre des points pondérés $(O, 1)$; $(D, -1)$ et $(B, -1)$**

a- **Montrer que le point G a pour affixe $g = -4\sqrt{3} + 6i$**

b- **Placer les points A, B, C et G sur une figure (Unité graphique : 1cm)**

6) **Déterminer une mesure en radians de l'angle $(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GC})$. En déduire la nature du triangle GAC**

Problème :

Partie A : Soit la fonction numérique dérivable sur $]0; +\infty[$ et définie par : $g(x) = -\frac{2x+1}{x^2} + lnx$

1) a) Calculer $\lim_{x \to +\infty} g(x)$ b) Calculer $\lim_{x \to 0^+} g(x)$

2) a) Démontrer que : $\forall x \in]0, +\infty[, g'(x) = \frac{x^2+2x+2}{x^3}$

b) En déduire le sens de variation de g.

c) Dresser le tableau de variations de la fonction g

3) a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0, \forall x \in]0, +\infty[$ admet une solution unique α

b) Justifier que $2,55 < \alpha < 2,56$

c) Démontrer que : $\begin{cases} \forall x \in]0, \alpha[, g(x) < 0 \\ \forall x \in]\alpha, +\infty[, g(x) > 0 \end{cases}$

Partie B :

On considère la fonction numérique dérivable sur $]0; +\infty[$ et définie par : $f(x) = (\frac{1}{x} - lnx)e^{-x}$

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J)

Unités graphiques : $OI = 2cm\ et\ OJ = 10cm$

1) a) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^>} f(x)$ puis donner une interprétation graphique du résultat

b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ puis donner une interprétation graphique du résultat

2) Démontrer que : $f(\alpha) = -\frac{1+\alpha}{\alpha^2} e^{-\alpha}$

3) a) Démontrer que : $\forall x \in]0, +\infty[, f'(x) = e^{-x} g(x)$

b) Utiliser la partie A, déterminer les variations de f

c) Dresser le tableau de variation de f

4) Démontrer qu'une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 1 est $y = -\frac{3}{e} x + \frac{4}{e}$

5) Construire la droite (T) et la courbe (C) dans le plan muni du repère (O, I, J), on prendra : $\alpha = 2,6$

Partie C :

1) Soit h la fonction dérivable sur $]0, +\infty$ [et définie par : $h(x) = e^{-x} lnx$

Démontrer que h est une primitive de f sur $]0, +\infty[$

2) Soit λ un nombre réel tel que $\lambda > 3$

a) Calculer, en cm² et en fonction de l'aire (λ) de la partie du plan comprise entre $(C), (OI)$ et les droites d'équation $x = 3\ et\ x = \lambda$

b) Calculer $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} A(\lambda)$

BACCALAUREAT SESSION 2014

Exercice :

A. On considère trois nombres entiers naturels a , b et c qui s'écrivent dans base n : $a = 111$; $b = 114$ et $c = 13054$

1) Sachant que $c = ab$, déterminer n puis l'écriture de chacun des nombres dans le système décimal

2) Vérifier en utilisant l'algorithme d'Euclide, que a et b sont premiers entre eux.

En déduire les solutions dans Z^2 de l'équation : $ax + by = 1$

B. Une variable aléatoire X prend les 1 ; -1 et 2 avec les probabilités respectives e^a, e^b et e^c où a, b et c sont en progression arithmétique.

On suppose que l'espérance mathématique $E(X)$ est égale à 1

1) Calculer a, b et c et la variance $V(X)$

2) Soit A, B et C trois points d'abscisses respectives $1, -1$ et 2 d'une droite graduée (Δ)

a- Calculer l'abscisse du point G barycentre de $\{(A, 1), (B, 2), (C, 4)\}$

b- On pose : $\varphi(M) = \frac{1}{7}(MA^2 + 2MB^2 + 4MC^2)$, où M est un point de (Δ). Montrer que $\varphi(G) = V(X)$

c- Déterminer l'ensemble (Γ) des points M de (Δ) tels que $\varphi(M) = 3$

Problème :

Partie A : On considère la fonction g dérivable sur R et définie par : $g(x) = (1 - x)e^{1-x} - 1$

1) a) Justifier que la limite de g en $+\infty$ est -1

b) Déterminer la limite de g en $-\infty$

2) a) Démontrer que, pour tout x élément de R, $g'(x) = (x - 2)e^{1-x}$

b) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation

3) a) Démontrer que l'équation $x \in R;$ $g(x) = 0$ admet une unique solution α

b) Justifier que : $0,4 < \alpha < 0,5$

4) En déduire que : $\begin{cases} \forall\, x \in]-\infty; \alpha[, g(x) > 0 \\ \forall\, x \in]\alpha; +\infty[, g(x) < 0 \end{cases}$

Partie B : On considère la fonction f dérivable sur R et définie par : $f(x) = xe^{1-x} - x + 2$

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique : 2cm

1) Déterminer la limite de f en $-\infty$ *et en* $+\infty$

2) a) Démontrer que f est une primitive de g

b) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation

3) a) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = -x + 2$ est une asymptote oblique à (C) *en* $+\infty$

b) Etudier la position relative de (D) *et* (C)

4) Démontrer que (C) admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction (OJ)

5) Déterminer une équation de la tangente (T)à (C) au point d'abscisse 1

6) Démontrer que $f(\alpha) = 1 - \alpha + \frac{1}{1-\alpha}$

7) Justifier que, pour tout nombre réel x, $f(-x+2) = e^{x-1}f(x)$

8) On admet que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions

On appelle β l'une de ces solutions. Démontrer que $-\beta$+2 est l'autre solution

9) Tracer $(D), (T)$ *et* (C).*On prendra* $\alpha = 0,4$ *et* $\beta = 2,5$

Partie C :

Soit λ un nombre réel strictement positif et $A(\lambda)$ l'aire en cm^2 de la partie du plan délimitée par (C) , la droite (D) d'équation $y = -x + 2$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ *et* $x = \lambda$

1) Calculer $A(\lambda)$ à l'aide d'une intégration par parties

2) Déterminer la limite de $A(\lambda)$ lors que λ tend vers$+\infty$

BACCALAUREAT SESSION 2013

Exercice 1 :

1) On considère l'équation (E) : $8x + 5y = 1$; $(x; y) \in Z^2$

a- Donner une solution particulière de (E)

b- Résoudre l'équation (E)

2) Soit N un entier naturel tels qu'il existe un couple $(a\,; b)$ de nombres entiers naturels vérifiant : $\begin{cases} N = 8a + 1 \\ N = 5b + 2 \end{cases}$

a- Montrer que le couple $(a\,; -b)$ est solution de (E)

b- Quel est le reste de la division de N par 40 ?

3) Résoudre l'équation $8x + 5y = 100$; $(x; y) \in Z^2$

Exercice 2 : On considère dans un plan un triangle ABC rectangle en A tel que $AB = 2a \; et \; AC = a$, où a est un nombre réel positif donné.

1- a) Déterminer et construire le barycentre G des points pondérés $(A, 1)$; $(B, -1) \; et \; (C, 1)$

b) Déterminer et construire l'ensemble (C) des points M du plan tels que :

$$\left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\right\|$$

2- On désigne par H le point du plan tel que : $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

Démontrer que H est le barycentre des points A, B et C affectés des coefficients respectifs 3 ; $1 \; et \; -2$

Problème : On considère la fonction f définie par : $f(x) = x^2 2 + x - 2x ln x \; si \; x \in]0; +\infty[\; et \; f(0) = 0$

On appelle (C) la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J)

A. On considère la fonction numérique g définie sur $]0\,; +\infty[$ par : $g(x) = x - 1 - 2ln x$

1) Calculer les limites respectives de g à droite en 0 et en $+\infty$

2) On admet que la fonction g est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on note g' sa dérivée. Déterminer g' et étudier son signe. En déduire le sens de variation de g et dresser son tableau de variations. Vérifier que : $g(1) = 0$

3) Démontrer qu'il existe un unique réel α tel que $\alpha \in]3; 4[\; et \; g(\alpha) = 0$

4) **Déduire des questions précédentes le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x**

B. **On considère la fonction numérique h définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ par : $h(x) = 2lnx + 1$**

1) Démontrer que : $\forall x \in]3;4[, h(x) \in]3;4[$

2) On considère la suite $(U_n)n \in N$ définie par : $\begin{cases} U_0 = 3,5 \\ U_{n+1} = h(U_n) \end{cases}$

a) Démontrer que : $\forall n \in N, U_n \in]3;4[$

b) Calculer l'arrondi d'ordre 3 de U_1. Démontrer par récurrence que la suite $(un)\in N$ est croissante

c) En déduire que la suite $(U_n)n \in N$ est convergente. (On admettra que $(U_n)n \in N$ converge vers la valeur α précédente et on prendra $= 3,5$)

C-) 1) Démontrer que la fonction f est continue à droite en 0

2) La fonction f est-elle dérivable à droite en 0 ? Justifier votre réponse. En donner une interprétation graphique

3) Calculer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$

4) Calculer la limite de $\frac{f(x)}{x}$ quand x tend vers $+\infty$ puis interpréter graphiquement ce résultat

5) La fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et on note f' sa dérivée. Démontrer que : $\forall x \in]0;+\infty[, f'(x) = g(x)$

6) En utilisant les résultats de A-) déterminer le signe de f'(x) et dresser le tableau et variation de f. Tracer la courbe (C)

7) Soit t un nombre réel tel que : $0 < t < 1$. En utilisant une intégration par parties, calculer l'aire $A(t)$ de la partie du plan comprise entre la courbe (C), la droite (OI) et les droites d'équations $x = t$ et $x = 1$. Calculer la limite de $A(t)$ quand t tend vers 0.

BACCALAUREAT SESSION 2012

Exercice 1 :

1- Calculer le PGCD de $4^5 - 1$ *et* $4^6 - 1$

2- Soit (U_n) la suite numérique définie par : $U0$=1 ; $U1$=1 *et* pour tout entier naturel n $Un + 2 = 5Un + 1 - 4Un$. Calculer les termes $U2$; $U3$ *et*$U4$ de la suite Un

3-a) Montrer que la suite Un vérifie pour tout entier naturel n $Un + 1 = 4Un + 1$.

b) Montrer que pour tout entier naturel n Un est un entier naturel.

c)En déduire ; pour tout entier naturel n, le PGCD de Un *et* $Un + 1$

4) Soit (V_n) la suite définie pour tout entier naturel n par : $Vn = Un + \frac{1}{3}$

a- Montrer que V_n est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme $V0$

b- Exprimer V_n puis U_n en fonction de n

c- Déterminer, pour tout entier naturel, le PGCD de $4^{n+1} - 1$ *et* $4^n - 1$.

Exercice 2 : A tout point M du plan de coordonnées $(x; y)$ on associe son affixe $Z = x + iy$

Soit S l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe Z associe le point M_1 d'affixe Z_1 telle que : $Z_1 = (-1 + i)Z + 1 + 4i$

1- Donner la nature de S et ses éléments caractéristiques

2- Calculer les coordonnées x et y du point M en fonction des coordonnées x_1 et y_1 du point M_1

3- Déterminer les équations des transformées par S de la droite d'équation x=0 et de la droite (D') d'équation y=x−1

Problème :

A- On considère la fonction g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ *par* :

$g(0) = 1$ *et* $\forall x \in]0; +\infty[\ g(x) = 1 + x - x\ln x$

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de g en 0

2) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation

3) a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\beta \in]0; +\infty[$

b) Justifier que $3,5 < \beta < 3,6$

4) Tracer (C_g)

B- On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{lnx}{x+1} + 2$, $\forall x \in]0;\ +\infty[$

1) a) Démontrer que, $\forall x \in]0;\ +\infty[, f'(x) = \frac{g(x)}{x(1+x)^{2}}$

b) Dresser le tableau de variations de f

2) Déterminer les coordonnées du point d'intersection A de la courbe (Cf)avec la droite (D) d'équation $y = 2$

3) Construire la courbe (Cf) dans le même repère (O, I, J)

C- a) Justifier que : $ln\beta = \frac{\beta+1}{\beta}$

b) A l'aide d'une intégration par partie, démontrer que : $\int_1^\beta xlnxdx = \frac{(\beta+1)^2}{4}$

BACCALAUREAT SESSION 2011

A- Dans un système de numération de base a, on considère les nombres : $A = \overline{211}, B = \overline{312}$ et $C = \overline{133032}$

1- Expliquer pourquoi a doit être supérieur à 3

2- Sachant que $C = A \times B$

a- Montrer que $a^3 - 3a^2 - 2a - 8 = 0$. En déduire que a divise 8.

b- Déterminer alors a

3- L'écriture d'un nombre dans le système décimal est 214, écrire ce nombre dans la base 4

4- Dans cette question, on suppose que $a = 4$

a) Ecrire A, B et C dans le système décimal.

b) Montrer alors que $C = A \times B = PPCM(A; B)$. En déduire que l'équation $Ax + By = 1$ a des solutions dans Z^2.

5- On considère dans Z^2 l'équation : $37x + 54y = 1$. Vérifier que $(19; -13)$ est une solution de cette équation. Résoudre cette équation.

B- Deux chasseurs Moussa et Mamadou, aperçoivent ensemble un lièvre et tirent simultanément.

1- Sachant que Moussa atteint et tue d'habitude 5 lièvres sur 6 et Mamadou 4 sur 5, quelle est la probabilité pour que le lièvre soit tué ?

2- En fait, Mamadou a tiré le premier.

a- Quelle est la probabilité pour que moussa tue le lièvre sachant que, si Mamadou tire et manque, les chances normales pour moussa d'atteindre le lièvre se trouvent diminuées de moitié ?

b- Dans ces conditions ? Mamadou a tiré le premier, puis Moussa, quelle est la probabilité pour le lièvre d'en échapper sain et sauf ?

C- Soit g la fonction définie par : $g(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$

1-a) Déterminer l'ensemble de définition D_g de g et demontrer que $\forall\, x \in D_g, g(x) > x + |x|$.

b) En déduire le signe de g sur D_g

2- Etudier g et tracer sa courbe représentative.

3- Soit φ la fonction définie par : $\varphi(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

a- Résoudre l'équation : $\varphi(x) = -\ln(3-2\sqrt{2})$ et démontrer que φ est impaire.

b- Etudier φ et tracer sa courbe représentative.

c- Démontrer que φ est une bijection de R dans R et que : $\forall\, n \in Z\ \varphi\left(\frac{e^{n}-e^{-n}}{2}\right) = n$

4- Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on considère l'intégrale I_n définie par : $I_n = \int_1^2 \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} dx$

a- Calculer I_2 et démontrer, à l'aide d'une intégration par partie que pour tout entier naturel $n \geq 2$, $I_{n+1} = e - \frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} + (1-n)I_n$

b- Etablir que pour tout nombre réel $x \in [1,2], 0 \leq \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} \leq \frac{e}{x^n}$

c- En déduire un encadrement de I_n, puis étudier la limite éventuelle de la suite (I_n)

D- Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct. Soit S la similitude directe de centre I transformant les points A et B d'affixes respectives $3+i$ et $3-i$ en A' et B' d'affixes respectives $2+5i$ et $4+3i$

1) Déterminer les éléments caractéristiques de S

2) Déterminer le barycentre des points I, A et B affectés respectivement des coefficients 6 ; 1 ; et 1. En déduire le barycentre des points I, A' et B' affectés de même coefficients.

BACCALAUREAT SESSION 2010

Exercice 1 :

· **Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, on a : $\sum_{k=1}^{n} k\,2^{k-1} = (n-1)2^n + 1$**

[- **Soit l'équation : $661x - 991y = 1$**

a- **Résoudre dans Z^2**

b- **Soit (U_n) *et* (V_n) les suites arithmétiques définies par :**

$$\begin{cases} U_0 = 3\ ;\ V_0 = 2 \\ \forall n \in N,\ \ U_{n+1} = U_n + 991 \\ \forall n \in N,\ \ V_{n+1} = V_n + 661 \end{cases}$$

Déterminer tous les couples (p, q) d'entiers naturels inférieurs à 2000 tels que : $U_p = V_q$

[I- **Soit ABCD un parallélogramme. P est un point tel que $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$; Q est le symétrique du milieu de $[AD]$ par rapport à A. Démontrer que les points P, Q, C sont alignés.**

Exercice 2 :

Soit la fonctions définie sur R_+ par : $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$

1- **Déterminer une primitive de f *sur* R_+**

2- **Soit la suite (U_n) définie pour $n > 0$ par : $U_n = \int_{\ln(n)}^{\ln(n+1)} f(x)dx$**

a- **Calculer U_1 *et* U_2. Exprimer U_n en fonction de n**

b- **Que représente graphiquement le nombre U_n ?**

3- **Montrer que (U_n) est une suite décroissante positive. Que peut-on en déduire. Calculer la limite de cette suite.**

4- **On pose $S_n = U_1 + U_2 + \cdots + U_n$**

a- **Calculer S_1, S_2, S_3 et exprimer S_n en fonction de n.**

b- **Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$**

Problème

· **Soit la fonction définie par :** $\begin{cases} f(0) = 0 \\ \forall\ x \in R_+\ \ f(x) = \frac{x\ln x}{x+1} \end{cases}$

1- **Etudier le sens de variation de f et la derivabilité de f en 0**

2- **Soit φ la fonction derivable sur $]0; +\infty[$ et définie par : $\varphi(x) = \ln x + x + 1$**

a- **Etudier le sens de variation de φ.**

b- Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution unique β tel que : $0,27 \leq \beta \leq 0,28$; avec $\varphi(0,27) = -0,04$ et $\varphi(0,28) = 0,007$

3- Exprimer $f'(x)$ en fonction de $\varphi(x)$.

a- En déduire les variations de f

b- Vérifier que : $f(\beta) = -\beta$

c- Calculer la limite de f en $+\infty$. Dresser le tableau de variation de f.

4- Tracer la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On placera en particulier les points d'abscisses : $1, 2, 4, e^2$.

On prendra : $ln0,27 \approx -1,31$; $ln0,28 \approx -1,27$ $ln2 \approx 0,7$; $ln3 \approx 1,1$; $ln5 \approx 1,6$

[- 1-a) Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[3; 4]$. On prendra $f(3) \approx 0,82$ et $f(4) \approx 1,1$

b) Démontrer que les équations : $f(x) = 1$ et $e^{1+\frac{1}{x}} = x$ sont équivalentes.

2- Soit g la fonction dérivable sur $[0; +\infty[$ et définie pour tout réel strictement positif x par : $g(x) = e^{1+\frac{1}{x}}$

Soit (U_n) la suite définie par : $U_0 = 3$ et la relation de récurrence : $U_{n+1} = g(U_n)$.

Démontrer par récurrence que : $\forall\, n \in N, U_n \in [3; 4]$; sachant que $x \in [3; 4]$, $g(x) \in [3; 4]$

UN PEUPLE – UN BUT – UNE FOI

SUJETS DES BACCALAUREATS DU MALI

BACCALAUREAT SESSION 2019

Exercice 1

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct (O; $\vec{u}$, $\vec{v}$) (unité graphique: 5cm), on considère les points A et B d'affixes respectives : $z_A = 1 + i$ et $z_B = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

On désigne par (C) le cercle de centre O et de rayon 1.

Donne la forme trigonométrique de z_A et celle de z_B.

Dans la suite de l'exercice, M désigne un point de(C) d'affixe $e^{i\alpha}$,$\alpha \in [0 ; 2\pi[$ .On considère l'application f qui à tout point M de (C), associe f(M) = MA × MB.

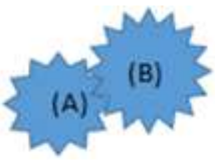
Montre, pour tout $\alpha \in R$, l'égalité suivante :$e^{i2\alpha} - 1 = 2ie^{i\alpha}\sin\alpha$.

Montre l'égalité suivante : $f(M) = \left|e^{i2\alpha} - 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\right)e^{i\alpha}\right|$

En déduis l'égalité suivante: $f(M) = \sqrt{\frac{1}{4} + \left(-\frac{3}{2} + 2\sin\alpha\right)^2}$.

a. En utilisant 2.c., montre qu'il existe deux points M de(C), dont on donnera les coordonnées, pour lesquels f(M) est minimal. Donne cette valeur minimale.

b. En utilisant 2.c., montre qu'il existe un seul point M de(C), dont on donnera les coordonnées, pour lequel f(M) est maximal. Donne cette valeur maximale.



I. Une roue d'engrenage (A) a douze dents.

a. Elle est en contact avec une roue (B) de 18 dents. Au bout de combien de tours de chacune d'elles seront-elles de nouveau, et pour la première fois, dans la même position ?

b. (A) est maintenant en contact avec une roue dentée (C), ayant plus de 12 dents. Après 10 tours de (A), les deux roux sont, de nouveau pour la première fois, dans la même position.

Détermine le nombre de dents de la roue (C).

I. On considère un triangle ABC du plan.

1. a. Détermine et construis le point G, barycentre de $\{(A;1);(B;-1);(C;1)\}$.

b. Détermine et construis le point G', barycentre de $\{(A;1);(B;5);(C;-2)\}$.

2. a. Soit J le milieu de $[AB]$.

Exprime $\overrightarrow{GG'}$ et $\overrightarrow{JG'}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et en déduis l'intersection des droites (GG') et (AB).

b. Montre que le barycentre I de $\{(B;2);(C;-1)\}$ appartient à (GG').

3. Soit D un point quelconque du plan. Soient O le milieu de $[CD]$ et K le milieu de $[OA]$. Détermine trois réels a, d et c tels que K soit barycentre de $\{(A;a);(D;d);(C;c)\}$.

Problème

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

L'unité graphique est 4 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2+\cos x)e^{1-x}$.

On note C la courbe représentative de f dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. Montre que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x)>0$.
2. a. Montre que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = \cos x + \sin x$.

   b. En déduis que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $2+\cos x+\sin x>0$.

   c. Montre que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
3. a. Montre que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $e^{1-x} \leq f(x) \leq 3e^{1-x}$.

   b. En déduis les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

   c. Interprète géométriquement le résultat obtenu lors du calcul de la limite de f en $+\infty$.
4. a. Montre que, sur l'intervalle $[0;\pi]$, l'équation $f(x)=3$ admet une solution unique α.

   b. Donne un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
5. Représente la courbe C sur $[0;4]$.

Partie B

On veut calculer l'aire A, exprimée en unités d'aire, du domaine limité par la courbe C, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x=1$.

1. Montre que $A = 2e - 2 + \int_0^1 (e^{1-t}\cos t)\,dt$.
2. On pose $I = \int_0^1 (e^{1-t}\cos t)\,dt$ et $J = \int_0^1 (e^{1-t}\sin t)\,dt$.

   a. À l'aide de deux intégrations par parties, montre que :
   $I = e - J - \cos 1$ et $J = I - \sin 1$.

b. **En déduis la valeur de I.**

3. **Détermine la valeur exacte de A en unités d'aire, puis donne une valeur approchée de A à 10^{-2} près par défaut.**

Partie C

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -1 - \frac{\sin x}{2+\cos x}$.

1. **a. Montre que la fonction h admet des primitives sur $\mathbb{R}$.**

   b. Calcule la primitive H de la fonction h, qui prend en 0 la valeur $(1 + \ln 3)$.

2. **a. Détermine $\ln(f(x))$ pour tout x de $\mathbb{R}$.**

   b. Étudie le sens de variation de la fonction H.

   c. Détermine le tableau de variation de H.

3. **On appelle Γ la courbe représentative de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :**

$x \mapsto 1 - x + \ln(2 + \cos x)$. On ne demande pas de représenter Γ. On appelle Δ la droite d'équation $y = -x + 1$.

a. Étudie la position relative de Γ et de Δ.

b. Détermine les abscisses des points communs à Γ e t Δ.

4. **a. Établis une équation de la tangente T à Γ au point d'abscisse 0.**

   b. Étudie la position relative de Γ et T.

5. **Montre que la courbe Γ est contenue dans une bande du plan limité par deux droites parallèles dont on donnera des équations.**

BACCALAUREAT SESSION 2018

Exercice 1 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$(unité grahique 1 cm).

On considère dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation (E) d'inconnue z suivante :

$$z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i = 0.$$

Partie A:

1. Montre que $-i$ est solution de (E).

2. Détermine les nombres réels a, b, c tels que :

$$z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i = (z^2+i)(az^2 + bz + c)$$

3. Résous l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.

Partie B:

On appelle A, B et C les points d'affixes respectives $4+i$; $4-i$; $-i$

1. Place les points sur une figure que l'on complétera dans la suite de l'exercice.

2. Soit r l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = iz - 2i + 2$.

Le point Ω est le point d'affixe 2. On appelle S l'image de A par r.

Calcule l'affixe s de S.

3. Démontre que les points B, A, S, C appartiennent à un même cercle C dont on déterminera le centre et le rayon. Trace C.

4. Á tout point M d'affixe $z \neq 2$, on associe le point M' d'affixe : $z' = \frac{iz+10-2i}{z-2}$.

a. Détermine les affixes des points A', B', C' associés respectivement aux points A, B et C.

b. Vérifier que A', B', C' appartiennent à un cercle C de centre P, d'affixe i. Détermine son rayon et trace C'.

c. Pour tout nombre complexe $z \neq 2$, exprime $|z' - i|$en fonction de z.

d. Soit M un point d'affixe z appartenant au cercle C. Démontre que $|z' - i| = 2\sqrt{5}$.

e. En déduis à quel ensemble appartiennent les points M' associés aux points du cercle C.

Exercice 2 :

I. On considère l'équation (E) : $8x + 5y = 1$, où (x, y) est un couple de nombres entiers relatifs.

1. a. Donne une solution particulière de l'équation (E).

b. Résous l'équation (E).

2. Soit N un entier naturel tel qu'il existe un couple (a, b) de nombres entiers vérifiant :

$$\begin{cases} N = 8a + 1 \\ N = 5b + 2 \end{cases}$$

a. Montre que le couple $(a\ , -b)$ est solution de (E).

b. Quel est le reste, dans la division de N par 40?

3. a. Résous l'équation $8x + 5y = 100$, où (x, y) est un couple de nombres entiers relatifs.

b. Au VIIIe siècle, un groupe composé d'hommes et de femmes a dépensé 100 pièces de monnaie dans une auberge.

Les hommes ont dépensé 8 pièces chacun et les femmes 5 pièces chacune.

Combien pouvait-il y avoir d'hommes et de femmes dans le groupe ?

II. On se propose de résoudre l'équation différentielle : $y' - 2y = \frac{-2}{1+e^{-2x}}\,(E)$

1. Soit g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et f la fonction définie par : $f\,(x) \;= e^{2x}g(x)$.

Montre que f est solution de (E) si, et seulement si $g'(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$.

2. En déduis toutes les solutions de (E).

A. 1. On définit la fonction g sur l'intervalle $]1; +\infty[$par : $g(x) = 2x - (x-1)\ln(x-1)$.

a. On admet le résultat suivant : $\lim\limits_{x \to 0} x\ln x = 0$. En déduis la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers 1.

b. Calcule $g'(x)$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]1; +\infty[$.

c. Résous l'inéquation : $1 - \ln(x-1) > 0$, d'inconnue x appartenant à l'intervalle $]1; +\infty[$..

d. Étudie le sens de variation de g sur l'intervalle $]1; +\infty[$..

e. Montre que l'équation $g(x) = 0$ une solution unique notée α, dans l'intervalle $[e + 1\,; e^3 + 1]$ puis étudie le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]1; +\infty[$..

2 . Soit φ la fonction définie sur l'intervalle $]1; +\infty[$ par $\varphi\,(x) = \frac{\ln(x^2-1)}{x}$

a. Détermine $\lim\limits_{x \to 1} \varphi(x)$ et prouve que $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) \;= 0$.

b. Calcule $\varphi'(x)$ et montre que $\varphi'(x)$ est du signe de $g(x^2)$ sur l'intervalle $]1;+\infty[$.

c. Montre que φ est croissante sur l'intervalle $]1;\sqrt{\alpha}]$ et décroissant sur l'intervalle $[\sqrt{\alpha};+\infty[$.

B. On définit la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.par $f\ (x) = \frac{\ln(e^{2x}-1)}{e^x}$.

1. Vérifie que, pour tout x appartenant à l''intervalle $]0;+\infty[$, on a $f\ (x) = \varphi(e^x)$.

2. En déduis :

a. la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 ;

b. la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers +∞ ;

c. le sens de variation de f sur l'intervalle et le fait que f admet un maximum en $\ln(\sqrt{\alpha}\ )$.

3. Montre que, pour tout x de l'intervalle $]0;+\infty[$, $f(x)\ \leq \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$

4. Reproduis et complète le tableau suivant en donnant des valeurs approchées à 10^{-2}près.

x	$0,1$	$0,5$	1	$1,5$	2	3
$f(x)$						

5. Représente graphiquement f dans un repère orthogonal, d'unités 5cm en abscisse, 10 cm en ordonnée. On prendra 10 comme valeur approchée de α.

BACCALAUREAT SESSION 2017

Exercice 1 :

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct (O , $\vec{u}, \vec{v}$,) , on considère les points M_n d'affixes : $Z_n = (\frac{1}{2}i)^n(1 + i\sqrt{3})$ où n est un entier naturel.

1) ExprimeZ_{n+1} en fonction de Z_n , puis Z_n en fonction de Z_0 et .

2) Donne Z_0 , Z_1 , Z_2 , Z_3 et Z_4 sous forme algébrique et sous forme trigonométrique .

3) Place les points M_0, M_1, M_2 , M_3 et M_4 (unité : 4cm)

4) Détermine la distance OM_n en fonction de .

5)a) Montre que $M_nM_{n+1} = \frac{\sqrt{5}}{2^n}$ pour tout $\in \mathbb{N}$.

b) On pose $L_n = \sum_{k=0}^{n} M_kM_{k+1}$ (c'est-à-dire $L_n = (M_0M_1 + M_1M_2 + \cdots . + M_nM_{n+1})$. Détermine L_n en fonction de , puis la limite de L_n quand n tend vers $+\infty$.

6) Détermine une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OM_o}, \overrightarrow{OM_n})$ en fonction de n .

7) Pour quelles valeurs de n les points O , M_0 et M_n sont ils alignés ? .

Exercice 2

I) Dans le plan affine, on considère le triangle ABC rectangle en A , I le milieu du segment [AB] et J le centre de gravité de ABC .

Pour tout réel , différent de $-\frac{1}{3}$, on note G_m le barycentre du système de points pondérés : $S_n = \{(A;1), (B;m), (C;2m)\}$.

Pour tout point M du plan on note $\overrightarrow{V_M} = 3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$.

1) Montre que G_1 est le milieu du segment [CI] .

2) Montre que les points G_1 , J et C sont alignés .

3) Montre que pour tout point M , $\overrightarrow{V_M} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$.

4) Montre que pour tout réel m distinct de $-\frac{1}{3}$, $\overrightarrow{AG_m}$ est colinéeaire à $\overrightarrow{AG_{-1}}$.

5) Montre que le triangle I B $G_{-1/2}$ est un triangle rectangle.

II) Dans le plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé , on considère l'application affine f définie par : $\begin{cases} x' = \frac{1}{5}(-3x + 4y + 4) \\ y' = \frac{1}{5}(4x + 3y - 2) \end{cases}$

1) Démontre que f est une isométrie .

2) Trouve l'ensemble des points invariants par f .

3) Caractérise géométriquement l'application f .

Problème

A) Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $f(x) = xe^{-2x} + e^{-2x} + 1 - x$

On appelle (C) la courbe représentative de f .

1)a) Calcule la fonction dérivée de f .

b) Dresse le tableau de variation de f ' sur $[0;+\infty[$ puis en déduis le signe de f ' sur $[0,+\infty[$.

c) Dresse le tableau de variation de f sur $[0,+\infty[$.

d) Montre que (C) admet une asymptote (D) que l'on déterminera

e) Construis (C) et (D) sur un même graphique .

2) a) Établis que l'équation $f(x) = 0$ admet sur $[0,+\infty[$ une solution et une seule , notée α .

b) Justifie l'encadrement : $1 \leq \alpha \leq 2$.

B) Soit la fonction g définie sur l'intervalle J= $[1,+\infty[$ par : $g(x) = xe^{-2x} + e^{-2x} + 1$.

1) Étudie les variations de g sur J puis en déduis que pour tout $x \in J$, $g(x) \in J$

2) Montre que pour tout $x \in J$, on a : $|g'(x)| \leq \frac{3}{e^2}$

En déduis que pour tout $\in J$, on a : $|g(x) - \alpha| \leq \frac{3}{e^2}|x - \alpha|$.

3) Soit (U_n) la suite d'éléments de J définie par : U_0 =1 et U_{n+1}= g(U_n) pour tout entier n positif ou nul .

a) Montre que pour tout entier n , positif ou nul on a : $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{3}{e^2}|U_n - \alpha|$.

b) En déduis que pour tout entier n , positif ou nul on a : $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{3}{e^2}\right)^n$.

c)Détermine la limite de la suite(U_n) .

d) Détermine un entier p pour lequel on est sûr d'avoir $|U_p - \alpha| \leq 10^{-3}$.

Calcule U_p à 10^{-3} près.

BACCALAUREAT SESSION 2016

Exercice 1

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct (A ; $\vec{u}$; $\vec{v}$), unité graphique 1cm. On considère les points B, D et C définis par : $\overrightarrow{AB} = 2\vec{u}$, $\overrightarrow{AD} = 2\vec{v}$ tel que $ABCD$ soit un rectangle.

1°/ Faire une figure qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice. (0,5pt)

2°/ Soit E l'image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{DB}$. Détermine l'affixe Z_E de E. Construis E.

3°/ Détermine les nombres réels a et b tels que le point F d'affixe $Z_F = 6 - 4i$ soit le barycentre des points A, B et C affectés respectivement des coefficients a, b et 1.

4°/ On considère la similitude directe S qui transforme A en E et B en F.

a-/ Exprime Z' en fonction de Z où Z' est l'affixe du point M' image de M par S.

b-/ Détermine le centre Ω, l'angle θ et le rapport k de la similitude S. (1pt)

c-/ Détermine les images de C et D par S.

d-/ Calcule l'aire de l'image par S du rectangle $ABCD$.

Exercice 2

I-/ On veut entourer avec un minimum d'arbres un champ rectangulaire ayant pour dimensions 525m et 285m. Les arbres seront régulièrement espacés, de plus, il y aura un arbre à chaque sommet du rectangle. Calcule :

1°/ La distance comprise entre deux arbres.

2°/ Le nombre d'arbres nécessaires pour entourer le champ.

II-/ On considère l'équation (E) : $11x - 26y = 1$, où x et y désignent deux nombres entiers relatifs.

1°/ Vérifie que le couple $(-7 ; -3)$ est une solution de (E).

2°/ Résous alors l'équation (E).

3°/ En déduis le couple d'entiers relatifs (p, q) solution de (E) tel que : $0 \leq p \leq 25$.

Problème

A-// A l'instant $t = 0$ (t est exprimé en heures), on injecte dans le sang par piqûre intraveineuse une dose de 2,5 unités d'une substance médicamenteuse. On suppose que

la substance se répartit instantanément dans le sang et qu'elle est ensuite progressivement éliminée.

On note Q(t) la quantité de substance présente dans le sang à l'instant t, exprimée en unités adaptées. On admet que le processus d'élimination peut être représenté mathématiquement par l'équation différentielle : Q'(t) = – β.Q(t), où β est un nombre qui sera déterminé expérimentalement.

1°/ Montre qu'on a $Q(t) = 2{,}5e^{-\beta t}$.

2°/ Calcule la valeur de β, sachant qu'au bout d'une heure la quantité de substance présente dans le sang a diminué de 30%. On donnera d'abord la valeur exacte puis une valeur décimale approchée à 10^{-4} près.

3°/ Etudie le sens de variation de Q pour $t \geq 0$, détermine sa limite en $+\infty$, et trace la courbe représentative (Γ) de Q dans le plan P.

4°/ Au bout de combien de temps la quantité de substance présente dans le sang a-t-elle été réduite de moitié ?

On donnera la valeur exacte et une valeur décimale approchée à 10^{-2} près.

B-// Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$f(x) = -\frac{x}{2} + \ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$

1°/ Détermine l'ensemble de définition de f.

2°/ Etudie les variations de f.

3°/ Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ (unité 2cm).

Montre que (C) admet une asymptote oblique dont précisera l'équation puis préciser la position de (C) par rapport à l'asymptote oblique.

4°/ Montre que le point $I(\frac{1}{2};-\frac{1}{4})$ est centre de symétrie pour (C)

5°/ Donne une équation de la tangente en I à (C).

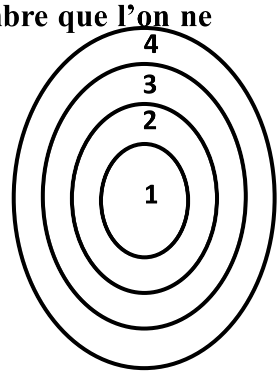
6°/ Construis (C)

BACCALAUREAT SESSION 2015

Exercice 1 :

I. Une cible est constituée de cercles concentriques de rayons respectifs 1, 2, 3, 4 déterminant 4 zones numérotées (1), (2), (3), (4) (chaque zone est une couronne), on considère l'extérieur de la cible comme une 5$^{\text{ème}}$ zone.

1. Un joueur lance une flèche. La probabilité d'atteindre l'une des zones 1, 2, 3, 4 est proportionnelle à l'aire de cette zone. (Rappel : l'aire d'un disque de rayon r est A= πr^2). Montrez que les probabilités p_1, p_2, p_3, p_4 d'atteindre respectivement les zones (1), (2), (3), (4) sont égales à K, 3K, 5K, 7K où K est un nombre que l'on ne demande pas de calculer dans cette question.



2.
   - Si la flèche touche la zone (1), le joueur gagne 4 000 FCFA
   - Si la flèche touche la zone (2), le joueur gagne 3 000 FCFA
   - Si la flèche touche la zone (3), le joueur gagne 2000F CFA
   - Si la flèche touche la zone (4), le joueur gagne 1 000 FCFA
   - Si la flèche touche la zone (5), le joueur perd 30 000 FCFA.

   On suppose que l'espérance mathématique de X est nulle.

   On appelle X le gain obtenu à l'issue d'une partie (lancée d'une flèche)

   a. Déterminez les probabilités p_1, p_2, p_3, p_4 et la probabilité p_5 de manquer la cible.

   b. Donnez sous forme de tableau la loi de probabilité de X.

II. Trois villages désignés par les lettres A, B et C sont disposés en triangle comme suit : le village A est à 4 km de B, à 3 km de C et le village B est à 5 km de C.

Ces trois villages décident de creuser un forage situé à égale distance des villages, déterminez son emplacement en précisant la distance qui le sépare de chacun des villages.

Exercice 2 :

I. α et β sont deux entiers naturels et $N = 2^{\alpha} \times 3^{\beta}$ tels que le nombre de diviseurs de N^2 est le triple du nombre de diviseurs de N.

1. Prouvez que $(\alpha - 1)(\beta - 1) = 3$.
2. Déduisez en les valeurs de N.

II. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\vec{v})$ et C désigne l'ensemble des nombres complexes. Soient A, B et C trois points d'affixes respectives $a = -1 + 3i, b = -4 + 2i$ et $c = 1 + 4i$.

Soit f la transformation du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = (2 - 2i)z + 1$.

1. Déterminez la nature et les éléments caractéristiques de f.
2. Déterminez l'affixe du point B' image de B par la transformation f. vérifiez que les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CB'}$ et orthogonaux.
3. Soit $M(x\ ; y)$ où x et y sont des entiers relatifs et M' son image par f. Montrez que les vecteurs $\overrightarrow{CM'}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont orthogonaux si et seulement si $x + 3y = 2$.
4. Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $x + 3y = 2$ et en déduire l'ensemble des points M dont les coordonnées sont des entiers appartenant à $[-5\ ;\ 5]$

Problème :

A. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ; \vec{\jmath})$.

1. On désigne par $M(x\ ;\ y)$ un point du plan, $M_1(x_1\ ;\ y_1)$ son image par la symétrie orthogonale d'axe la droite d'équation $y = x$ et $M'(x'\ ;\ y')$ l'image de M_1 par la symétrie orthogonale d'axe $(O\ ;\ \vec{\imath})$.
   a. Exprimez x' et y' en fonction de x et y.
   b. Caractérisez l'application qui transforme M en M'
   c. On désigne par r l'application qui au point M$(x\ ;\ y)$ associe le point $M''(x''\ ;\ y'')$ définies par $\begin{cases} x'' = 1 + y \\ y'' = 1 - x \end{cases}$. Montrez que r est une rotation dont on précisera le centre Ω et l'angle θ.
2. Lorsque le point M décrit la droite d'équation $y = x$, déterminez l'ensemble décrit par le point M''ainsi que l'ensemble décrit par le milieu du segment $[M\ M'']$.
3. Au point $M(x\ ;\ y)$ on associe le point $M_2(x_2\ ;\ y_2)$ définies par $\begin{cases} x_2 = 1 + 3y \\ y_2 = 1 - 2x \end{cases}$
   a. Quelle est la nature de l'ensemble (E) des points M_2 lorsque M décrit le cercle unité de centre O ?
   b. Caractériser l'image de (E) par la rotation r définie en 1°/- c)

B. Soit la fonction numérique f à variable réelle x définie par : $f(x) = (2x-1)\sqrt{\frac{x+1}{2}}$.

1. Etudiez les variations de f et tracez sa courbe (C_f) dans le plan muni du repère orthonormé$(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$. Précisez les tangentes à (C_f) aux points d'abscisses -1 et $-\frac{1}{2}$.
2. Soit (C'_f) la courbe image de (C_f) par la symétrie orthogonale par rapport $(O\ ;\ \vec{\imath})$. On pose $= \left(C_f\right) \cup \left(C'_f\right)$. Tracez Γ dans le même repère que (C_f).
3. On considère le point $A(-1;\ 0)$ et la droite Δ d'équation $x = -2$. Soit m un paramètre non nul, D la droite d'équation $y = mx$ et D' la droite orthogonale à D en $O(0\ ;\ 0)$. Les droites D et D' coupent Δ en P et P' respectivement. Soit K le milieu du segment $[P\ P']$, la droite (AK) coupe D et D' en M et M' respectivement.
   a. Déterminez les coordonnées de M et M' en fonction de m. (1,5pt)
   b. On appelle l'ensemble des points M lorsque $m \in \mathbb{R}$ et Γ'_1 celui des points M' lorsque $m \in \mathbb{R}$. Trouvez une relation entre Γ_1 et Γ'_1

BACCALAUREAT SESSION 2014

Exercice 1 :

On se propose de résoudre dans Z le système(S) : $\begin{cases} x \equiv 10[23] \\ x \equiv 4[7] \end{cases}$

1°/ Déterminez un couple (α ; β) d'entiers relatifs solution de l'équation 23α +7 β = 1

2°/En déduire un couple (u_0 ; v_0) solution de l'équation (E): 23u –7 v = – 6. Résoudre complètement l'équation (E)

3°/ Démontrez que *x* est solution de l'équation (S) si et seulement si il existe un couple (u ; v) d'entiers relatifs vérifiant : $\begin{cases} 23\boldsymbol{u} - \boldsymbol{7v} = \boldsymbol{-6} \\ x = 10 + 23\boldsymbol{u} \end{cases}$ **.**

En déduire l'ensemble des solutions de (S).

4°/ Déterminez la plus petite solution (entier naturel) de (S) divisible par 16.

Exercice 2

Les points A, B, M et M' du plan complexe ont pour affixes respectives: 2 – 4i, –i,

z et z' avec z' = $\frac{-iz-2+4i}{z+i}$

1°/ Exprimez les coordonnées (*x*', *y*') de M' en fonction de celles (*x* ; *y*) de M.

2°/ Déterminez et représentez l'ensemble des points M tels que :

a) z' soit réel.

b) z' soit imaginaire pur.

3°/ On pose Z = z + i et Z' = z' + i. Vérifiez que ZZ' = –3 + 4i.

Puis calculez |ZZ'|.

4°/ a) Déterminez l'ensemble des ponts M' lorsque M décrit un cercle de centre B et de rayon r > 0.

b) Déterminez r pour que M et M' soient sur le même cercle.

Problème

A// Soit la fonction *f* de IR vers IR qui à *x* associe *f*(*x*) = $e^{2x} - 2e^{x}$

1°/ Vérifiez que le tableau de variation de *f* est bien le suivant :

X	$-\infty$		0		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$	0	↘	-1	↗	0	↗	$+\infty$

2°/ Donnez une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse $-\ln 2$.

3°/ Soit g la fonction de IR vers IR définie par $g(x) = f(x) + \frac{1}{2}(x + \ln 2) + \frac{3}{4}$

a) Déterminez $g'(x)$ et $g''(x)$ pour tout réel x.

b) Du signe de $g''(x)$ déduire celui de $g'(x)$ puis celui de $g(x)$

c) Etudiez la position de (C) par rapport à (T).

4°/ Tracez (T) et (C) dans le plan muni d'un repère orthonormé unité 1cm

B// Pour tout entier naturel n, on pose f_n la fonction de IR vers IR définie par :

$f_n(x) = \frac{e^x}{(x+1)^n}$ et (C_n) sa courbe représentative. Prouvez que toutes les courbes (C_n) passent par un même point A dont on déterminera les coordonnées.

C// On considère la fonction numérique h de la variable x définie par

$h(x) = \frac{1}{e-1}e^x - x - \frac{1}{e-1}$. On désigne par (H) la représentation graphique de h dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ (unité 2cm)

1°/ a) Calculez $h(0)$, $h(1)$, $h(2)$

b) Dresser le tableau de variation de h.

c) Prouvez que la courbe (H) admet une asymptote dont on précisera l'équation d) Utilisez les variations de h pour déterminer le signe de $h(x)$ selon les valeurs de x

2°/ Tracez la courbe (H).

3°/On considère la fonction numérique φ de la variable réelle x définie par :

$\varphi(x) = e^x - x - \frac{1}{2} - \frac{1}{e-1}$. On note (Γ) la courbe représentative de φ dans le repère précédent.

a) Etudiez le sens de variation de φ en précisant les limites aux bornes de l'intervalle de définition.

b) Prouvez que la courbe (Γ) admet une asymptote dont on précisera l'équation

c)Etudiez les positions relatives des courbes (H) et (Γ).

d) Tracez la courbe (Γ) dans le même repère que (H)

4°/ a)Etablir que pour tout réel x $\varphi(x) = \int_x^{x+1} h(t)\,dt$

b) Donnez une interprétation géométrique de φ(0).

BACCALAUREAT SESSION 2014 (Sujet de Remplacement)

Exercice 1

I-//

On se place dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes, pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$\forall z \in \mathbb{C}$, $h_n(z) = z^n(1 - z)$.

1-/ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, résoudre l'équation $h_n(z) = h_0(z)$.

2-/ On se propose de résoudre le système suivant : (1) $\begin{cases} h_n(z) = 1 \\ |z| = |1 - z| \end{cases}$

a-/ Montrez que l'équation $|z| = |1 - z|$ a une infinité de solutions.

b-/ Soit z_0 l'une de ces solutions, calculez, en fonction du module ρ et l'argument θ de z_0, l'argument de $1 - z_0$; le module et l'argument de $z_0^n\,(1 - z_0)$.

c-/ En déduire que le système (1) n'admet de solution que si $n \equiv 1[6]$.

Quel est l'ensemble des solutions du système ?

II-//

1-/ On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) : $11x + 8y = 79$.

a-/ Montrez que si $(x ; y)$ est solution de (E) alors $y \equiv 3[11]$

b-/ Résoudre alors l'équation (E). (0,5pt)

2-/ Le prix total de 41 pièces détachées réparties en trois lots est de 48000F.

Le prix d'une pièce du 1er lot est 4800F ; le prix d'une pièce du 2ème lot est 3600F et le prix d'une pièce du 3ème lot est 400F.

Déterminez le nombre de pièces de chaque lot.

NB: On pourra utiliser l'équation (E). Les parties I/ et II/ sont indépendantes

Exercice 2

I./ Dans une classe de terminale, la taille moyenne des élèves est de 167 cm. La taille moyenne des filles est de 160 cm et la taille moyenne des garçons est de 173,5 cm.

Quelle est l'effectif de la classe sachant qu'il est compris entre 50 et 60.

II./ Le vieux Yara a laissé son héritage dans un coffre dont la combinaison comporte les cinq chiffres *x, y, z, t* et *h* dans cet ordre, du système décimal. Il a mentionné sur son testament que sa fortune reviendrait à celui de ses héritiers qui trouverait la combinaison à partir des données suivantes :

- **Le 1er chiffre est pair ;**
- **La somme des deux premiers chiffres est 15 ;**
- **Le troisième est la différence des deux premiers (le 1er moins le 2ème) ;**
- **Le 1er chiffre est le produit du troisième par le quatrième ;**
- **Le nombre est divisible par 9.**

Quelle est la combinaison cherchée ?

NB: Les parties I./ et II./ sont indépendantes.

Problème

A// Soit φ la fonction définie sur IR par $\varphi(x) = (x^2 + x + 1)\, e^{-x} - 1$

1-/ a-/ Déterminez les limites de φ en $-\infty$ puis en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat de $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x)$

b-/ Calculez $\varphi'(x)$ et étudiez son signe. Dressez le tableau de variation de φ. (1,5pt)

2-/ Démontrez que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet deux solutions dans IR, dont l'une notée α est dans $[1\,;+\infty[$. Vérifiez que $1{,}79 < \alpha < 1{,}80$

3-/ En déduire le signe de φ sur IR.

B-// On donne les fonctions f et g définies par $f(x) = (2x + 1)e^{-x}$ et $g(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$ Leurs courbes sont respectivement notées (C_f) et (C_g)

1-/ Déterminez les domaines de définition de f et de g puis calculez leurs limites aux bornes de ces domaines de définition.

2-/ Montrez que (C_f) et (C_g) admettent au point A(0 ; 1) une tangente commune (T). Donnez une équation cartésienne de (T). (1,5pt)

3-/ a-/ Vérifiez que pour tout $x \in$IR, $f(x) - g(x) = \frac{(2x+1)\phi(x)}{x^2+x+1}$ où φ est la fonction définie dans la partie A

b-/ Étudiez le signe de $f(x) - g(x)$ pour $x \in$IR.

c-/ En déduire la position relative des courbes (C_f) et (C_g)

4-/ a-/ Déterminez une primitive G de la fonction g sur IR.

b-/ Déterminez les réels a et b tels que la fonction F définie par $F(x) = (ax + b)\, e^{-x}$ soit une primitive de f sur IR.

c-/ Déduire une primitive H de $f - g$ sur IR.

d-/ Calculez l'aire, en unité d'aire, de la partie du plan délimitée par les courbes (C_f) et (C_g) et les droites d'équations : $x = -\frac{1}{2}$ et $x = 0$

NB : Les tracés de (C_f) et (C_g) ne sont pas demandés

BACCALAUREAT SESSION 2013

Exercice 1

I-/ 1°/ Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation $x^3 - y^3 = 631$.

2°/ a) Trouvez le reste de la division euclidienne de 111 par7 et de 10^n par7 suivant les valeurs de l'entier naturel *n*

b) Soit l'entier naturel N = 999 888 777 666 555 444 333 222 111.

– Montrez que N peut s'écrire en fonction de 111.

– Quel est le reste de la division euclidienne de N par 7 ?

II-/ Le plan P est rapporté à un repère orthonormé $(O ;\vec{u};\vec{v})$. Soit Tα l'application de P vers P qui à tout point M(x ; y) associe le point M'(x' ; y') telles que $\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x - \alpha y \\ y' = \alpha x - \frac{1}{2}y \end{cases}$ où

α est un paramètre réel.

1°/ Montrez que, pour tout α, Tα est bijective et admet un unique point invariant que l'on précisera.

2°/ Montrez qu'il existe une valeur unique de α pour laquelle Tα est une homothétie H dont on précisera le centre et le rapport.

3°/ Montrez qu'il existe 2 valeurs de α pour lesquelles Tα est une isométrie. Vérifiez que ces deux isométries sont réciproques l'une de l'autre. On les note R et R^{-1}.

Exercice 2

Une substance est injectée par voie intramusculaire. Elle passe du muscle au sang et est éliminée par les reins. Après étude, on constate que la quantité de substance contenue dans le sang à un instant *t* est donnée approximativement par la fonction *q* définie par :

$q(t) = q_0(e^{-0,5t} - e^{-t})$ où $t \geq 0$ est le temps exprimé en heure, q_0 la quantité de substance injectée en milligramme.

1°/ Etablir le tableau de variation de *q*.

2°/ On désire contrôler les effets de cette substance. Pour cela il faut que la quantité de ce médicament contenue dans le sang soit comprise entre 2 valeurs q_m et q_M.

q_m = 1,2 mg est le seuil d'efficacité et q_M = 2,6 mg est le seuil de toxicité.

Déduire du tableau de variation de q, les valeurs qu'on peut donner à q_0 pour qu'à aucun moment, la quantité de substance dans le sang ne soit toxique.

3°/ On pose $q_0 = 10$

a) Tracez soigneusement la courbe de q dans un repère de votre choix.

b) Déterminez graphiquement l'intervalle de temps durant lequel le médicament est efficace.

TSVP ☞ 🕮

Problème

Pour tout entier n strictement positif on considère la fonction f_n définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f_n(x) = \frac{(\ln x)^n}{x^2}$. On note (C_n) la courbe représentative de f_n dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ (unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées).

A-// Etude de f_1

1°/ Déterminez $\lim\limits_{x\to 0} f_1(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f_1(x)$ Que peut-on en déduire pour (C_1) ?

2°/ Étudiez le sens de variation de f_1 et donnez le tableau de variation de f_1.

3°/ Donnez une équation de la tangente au point d'abscisse 1 à (C_1).

4°/Déterminez $\lim\limits_{x\to 0} f_2(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f_2(x)$. Que peut-on en déduire pour (C_2) ?

5°/ Calculez $f'_2(x)$ et donnez le tableau de variations de f_2.

B-// 1°/ Étudiez le signe de $f_1(x) - f_2(x)$; en déduire la position relative de (C_1) et (C_2)

2°/ Tracez (C_1) et (C_2) dans le même repère orthogonal.

C-// m étant un entier naturel non nul, on pose $I_m = \int_1^e f_m(x)dx$.

1°/ On pose $F(x) = \frac{1+\ln x}{x}$. Calculez $F'(x)$. En déduire I_1.

2°/ En utilisant une intégration par parties, montrez que $I_{m+1} = -\frac{1}{e} + (m+1)\, I_m$

3°/ Calculez I_2 puis l'aire en cm^2 du domaine compris entre (C_1) et (C_2) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

BACCALAUREAT SESSION 2012

Exercice 1 :

A/. Soit f la fonction numérique à variable réelle x définie par :

$$f(x) = \frac{x^3+2x+2}{1-x^2}$$

1°/ Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.

2°/ Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout x de D_f on ait

$$f(x) = ax + \frac{b}{1-x} + \frac{c}{1+x}$$

3°/ En déduire l'ensemble des primitives de f sur D_f

B/. Deux commerçantes, Awa et Fanta se rendent au marché pour acheter des mangues. Chaque mangue coute 5F l'unité. Awa dit à Fanta, je dispose d'un montant égal à m_1 Francs et Fanta répond, moi aussi j'ai une somme égale à m_2 Francs.

L'entier m_1 s'écrit $m_1 = 1x00y2$ dans le système de numération de base huit

et m_2 s'écrit $m_2 = x1y003$ dans le système de numération de base sept

1°/ Déterminer les chiffres x et y pour que chacune des deux commençantes puisse, avec la totalité de son argent, acheter un nombre maximum de mangues.

2°/ Déterminer le montant que dispose chacune des commerçantes. En déduire le nombre de mangues que chacune d'elles peut acheter.

3°/ a-) Décomposer m_1 et m_2 en produit de facteurs premiers

b-) En déduire le nombre de diviseurs de m_1 et m_2 puis le pgcd(m_1 ; m_2).

4°/ Résoudre dans Z l'équation : $m_1u + m_2v = 5$ où u et v sont deux entiers relatifs.

Exercice 2

I/ On considère le complexe Z défini par $Z = \frac{z^2}{z+i}$ où $z = x + yi$, avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

1°/ On note $Z = X + Yi$, $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$ Ecrire X et Y en fonction de x et y.

2°/ Au complexe z on associe le point $M(x, y)$ d'un plan rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$. Déterminer l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que Z soit imaginaire pur non nul.

3°/ Résoudre dans C l'équation $z^2 + 2iz - 2 = 0$. Montrer que les images des solutions de cette équation appartiennent à l'ensemble (Γ).

II/ 1°/ On désigne respectivement par *a* et *b* (entiers naturels non nuls) la longueur et la largeur mesurées en mètres d'un rectangle. Sachant que *a* = 72 et que le plus petit multiple commun à *a* et *b* est 216, quelles sont les valeurs possibles de *b* ?

2°/ Trouver les diviseurs dans N de l'entier 240. Calculer l'entier naturel *n* tel que $n^2 - 240$ est un carré parfait.

Problème

Soit *f* la fonction de [0 ; +∞[vers R définie par $f(x) = \frac{8}{x+\sqrt{x^2+8}}$.

1°/ a-) Etudier le sens de variation de *f*.

b-) Etudier la limite de *f* en +∞. Interpréter graphiquement le résultat.

c-) Dresser le tableau de variation de *f*.

2°/ On désigne par (C) la courbe représentative de *f* dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$: 1cm sur l'axe des abscisses et 2cm sur l'axe des ordonnées.

a-) Donner une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse nulle.

b-) Tracer (T) et (C).

3°/ En utilisant les variations de *f*, démontrer que $\forall x \in [1 ; 2]$, $1 \leq f(x) \leq 2$

4°/ a-) Démontrer que pour tout réel *x* de [1 ; 2], on a : $| f'(x) | \leq \frac{2}{3}$

b) En utilisant le théorème des inégalités des accroissements finis, montrer que pour tout *x* de [1 ; 2] on a : $| f(x) - 2 | \leq \frac{2}{3}| x - 1|$. En déduire un encadrement de *f* sur [1 ; 2] par deux fonctions affines que l'on précisera sur la figure.

BACCALAUREAT SESSION 2011

Exercice 1

Dans le plan muni d'un repère orthonormal (O ; $\vec{u}$,$\vec{v}$) on donne le point A(12 ; 18). On désigne par B un point de l'axe (O ; $\vec{u}$) et C un point de (O ;$\vec{v}$) tels que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{2}$. On appelle x l'abscisse de B et y l'ordonnée de C.

1°/ Démontrer que le couple (x ; y) est solution de l'équation

(E) : $2x + 3y = 78$

2°/ On se propose de trouver tous les couples de points (B ; C) ayant pour coordonnées des nombres entiers relatifs.

a°/ Montrer que l'on est ramené à l'équation (E), avec x et y appartenant à l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs.

b°/ A partir de la définition de B et de C trouver une solution particulière

(x_0 ; y_0) de (E

c°/ Démontrer qu'un couple (x ; y) est solution de (E) si et seulement si

$(x ; y) = (12 + 3k ; 18 – 2k)$ où k est un entier relatif.

d°/ Combien y a-t-il de couples de points (B ; C) ayant pour coordonnées des nombres entiers relatifs, tels que : $–6 \le x \le 21$ et $–5 \le y \le 14$?

Exercice 2

1°/ Le plan P est rapporté au repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$,$\vec{\jmath}$). On considère l'application affine f de P dans P qui à tout point M(x ; y) associe le point M'(x' ; y') telles que :

$$\begin{cases} x' = -\frac{6}{5}x + \frac{8}{5}y - \frac{8}{5} \\ y' = \frac{8}{5}x + \frac{6}{5}y - \frac{1}{5} \end{cases}$$

et $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes

1°/ a°/ f est-elle bijective ? Justifiez votre réponse

b°/ Déterminer l'ensemble des points invariants par f.

c°/ Quelle est l'image par f de la droite D d'équation $y = 2x + 1$?

2°/ On désigne par M(x ; y) le point d'affixe z et par M' le point d'affixe z' où z et z' sont deux nombres complexes

a°/ Sachant que f(M) = M', exprimer z' en fonction de z.

b°/ En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f

Problème

A.// Soit la fonction numérique f définie par : $f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O ; $\vec{i}, \vec{j}$). Unité 2cm

1°/ Déterminer l'ensemble de définition de f.

2°/ Démontrer que (C) admet deux asymptotes dont on précisera les équations.

3°/ Calculer $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f.

4°/ a°/ Démontrer que (C) admet un point d'inflexion I dont on déterminera les coordonnées. Donner l'équation de la tangente (T) à (C) au point I

b°/ Etudier la position de (C) par rapport à (T)

5°/ Tracer (C) et (T) dans le même repère (O ; $\vec{i}, \vec{j}$) du plan.

6°/ a°/ A l'aide d'une intégration par parties calculer l'intégrale I $= \int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(x)dx$ (*1pt*)

b°/ Calculer en cm² l'aire de la partie du plan limitée par (C), (T) et la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$

B.// Soit h la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $]0 ; \frac{\pi}{2}]$ par $h(x) = \frac{1}{2}f(\cos x)$ où f est la fonction définie en A.//

1°/ Vérifier que h est la primitive qui s'annule en $\frac{\pi}{2}$ de la fonction g définie par , $g(x) = \frac{1}{\sin x}$

2°/ Calculer l'intégrale K $= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x}dx$

3°/ Soit $(I_n)_{n\in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $I_n = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x}{\sin x}dx$

a°/ Calculer I_0 et I_1

b°/ Calculer l'intégrale $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \sin x \, dx$

c°/ En déduire l'expression de $I_n - I_{n+2}$ en fonction de n puis calculer I_2, I_3, I_4 et I_5

BACCALAUREAT SESSION 2010

Exercice 1

On considère l'équation d'inconnue complexe z,

(E) : $z^4 + 5z^3 + (11 - 3i)z^2 + (10 - 10i)z - 8i = 0$.

1°/ Montrer que l'équation (E) admet une solution imaginaire pure z_0 que l'on déterminera.

2°/ Montrer que l'équation (E) admet une solution réelle que l'on déterminera.

3°/ Achever la résolution dans l'ensemble C des nombres complexes de l'équation (E).

4°/ En désignant par z_1 la solution non imaginaire pure qui a une partie imaginaire positive, par z_2 la solution réelle et par z_3 la 4ème solution de (E), montrer que z_0, z_1, z_2 et z_3 sont dans cet ordre les termes consécutifs d'une suite géométrique dont on précisera la raison.

5°/ Donner le module et un argument de chacune des solutions de (E)

Exercice 2

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j})$.On désigne par S la réflexion d'axe la droite (D) d'équation $y = x$ et par σ la réflexion d'axe $(O\ ;\vec{i})$.

1°/ Soit M un point du plan et M_1 son image par S; on pose M'= σ(M_1)

a) Calculer les coordonnées x' et y' de M' en fonction des coordonnées x et y de M.

b) Caractériser la transformation qui fait passer de M à M'.

c) Au point M(x ; y) on associe maintenant le pont N(X ; Y) telles que:

$\begin{cases} X = 1 + y \\ Y = 1 - x \end{cases}$ **Montrer que cette transformation est une rotation dont on précisera le centre Ω et l'angle θ.**

2°/ Le point M décrivant la droite d'équation $y = x$, déterminer l'ensemble décrit par N Quel est l'ensemble décrit par le milieu du bipoint (M, N)

Problème

A// Soit g la fonction numérique définie sur ℝ par $g(x) = 2e^{x} - x - 2$.

1°/ Déterminer la limite de g en $-\infty$ puis en $+\infty$.

2°/ Etudier le sens de variation de g puis dresser son tableau de variation.

3°/ On admet que l'équation $g(x) = 0$ a exactement deux solutions réelles.

a)Vérifier que 0 en est une.

b) L'autre solution est appelé α. Montrer que –1,6 < α <–1,5

4°/ Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs du réels x.

B// Soit f la fonction numérique définie sur ℝ par $f(x) = e^{2x} - (x + 1)e^{x}$

1°/ Déterminer la limite de f en – ∞ puis en + ∞. (On pourra mettre e^{2x}en facteur pour calculer la limite en + ∞)

2°/ Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe (g étant la fonction définie dans la partie A//) Etudier le sens de variation de f.

3°/ Montrer que $f(\alpha) = \frac{-(\alpha^2+2\alpha)}{4}$où α est la solution de l'équation $g(x) = 0$ de la partie1.

En déduire un encadrement de $f(\alpha)$. (On rappelle que –1,6 < α <–1,5

4°/ Etablir le tableau de variation de f.

5°/ Tracer la courbe (C) représentant les variations de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (unité graphique 2cm).

C// Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \int_0^{\pi} e^x \cos(nx)dx$

1°/ Montrer que pour tout entier naturel n, $\cos(n\pi) = (-1)^n$ et que $\sin(n\pi) = 0$.

2°/ A l'aide d'une intégration par parties montrer que $I_n = \frac{(-1)^n e^{\pi}-1}{1+n^2}$. (*1pt*)

3°/ Montrer que, pour tout entier naturel n, $|I_n| \leq \frac{e^{\pi}+1}{1+n^2}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

$|I_n|$ désigne la valeur absolue de I_n

NB : La parie C// est indépendante des parties A// et B//

HONNEUR – FRATERNITÉ – JUSTICE

SUJETS DE BACCALAUREATS DE MAURITANIE

BACCALAUREAT SESSION 2019

Exercice 1 :

1. **On considère dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation (E) : $7x - 5y = 1$**
   a) **Justifier que le couple (3 ;4) est solution de (E) puis résoudre (E).**
   b) **Montrer que si(x ; y) est une solution (E) alors** $\begin{cases} x \equiv 3[5] \\ y \equiv 4[7] \end{cases}$
2. **Dance cette question on se propose de déterminer l'ensemble S des entiers relatifs A tels que** $\begin{cases} A \equiv 4[5] \\ A \equiv 3[7] \end{cases}$
   a) **Soit A un élément de S. Démontrer qu'il existe un couple d'entiers (x ; y) tel que $A + 7X + 3 + 5Y + 4$ où (x ; y) est une solution de (E).**
   b) **En déduire que $A \in S$ si et seulement si $A \equiv 24[35]$.**
   c) **Soit n et a deux entiers naturels (0 < n < 9) et B un entier qui s'écrit, en base n, sous la forme $\overline{374a}$. Déterminer n puis en déduire l'écriture décimale de l'entier B sachant qu'il appartient à S.**

Exercice 2 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$).

1. **Pour tout nombre complexe z on pose $P(z) = z^3 - (4 + 4i)z^2 + (7 + 10i)z + 5 - 10i$.**
   Calculer P(i) puis déterminer les solutions z_0; z_1 *et* z_2 de l'équation P(z) = 0 avec $Re(z_0) < Re(z_1) < Re(z_2)$.
2. **On considère les points A, B et C d'affixes respectives z_0, z_1 *et* z_2.**
   a) **Déterminer la nature du triangle ABC.**
   b) **Soit G le barycentre du système $\{(A, 13); (B, -3); (C, 2)\}$. Déterminer l'affixe de G.**
   c) **Déterminer et construire l'ensemble Γ des points M du plan tels que $13MA^2 - 3MB^2 + 2MC^2 = 12$.**
3. **On considère l'hyperbole H de centre G qui passe par C et dont A est un sommet.**
   a) **Déterminer le 2ème sommet de H.**
   b) **Vérifier que l'équation de h peut s'écrire sous la forme $x^2 - 3(y - 2)^2 = -3$.**
   c) **Donner l'équation réduite de H puis déterminer ses foyers, ses asymptotes et son excentricité et la construire.**

Exercice 3 :

On considère la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = x^3 - x\ln x$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).

1. a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f à droite de 0.

   b) Calculer et interpréter graphiquement $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.

2. a) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ et montrer que (C) admet un point d'inflexion A dont on précisera les coordonnées.

   b) Etudier les variations de f' et en déduire le signe de $f'(x)$.

   c) Dresser le tableau de variation de f.

3. a) Montrer que f réalise une bijection de $[0\,;+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

   b) Etudier la position relative entre (C) et (C') et justifier qu'elle se coupent en trois points dont l'un est d'abscisse α avec $0,45 \leq \alpha \leq 0,46$ ((C') étant la courbe de la réciproque f^{-1} de f).

4. Tracer dans le repère (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$) les courbes (C) et (C').

5. a) A l'aide d'une intégration par partie déterminer la primitive F qui s'annulle en 1 de la fonction f sur $]0\,;+\infty[$.

   b) Exprimer en fonction de n et α les intégrales $K = \int_{\alpha}^{1} f(t)dt$ et $I(n) = \int_{\frac{1}{n}}^{\alpha} f(t)dt$. Calculer $\lim_{n\to+\infty} I(n)$.

   c) Déduire l'aire S du domaine plan fermé par les courbes (C) et (C').

Exercice 4 :

On considère un triangle équilatéral directe ABC de côté a (a > 0). Soient D, E et F les milieux respectifs des cotés $[BC], [CA]$ et $[AB]$. On construit le carré directe AGHD de centre O.

Soient I, J et K les milieux respectifs des segments $[EC], [GH]$ et $[AD]$.

1. Faire une figure illustrant les données qu'on complétera au fur et à mesure.

2. a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement f qui transforme A en C et E en D.

   b) Montrer que f est une symétrie glissante et donner sa forme réduite.

3. a) Montrer qu'il existe une unique rotation r transformant H en B et D en E. préciser son angle. Soit Ω son centre.

   b) Montrer que Ω appartient à la droite (CF) et au cercle de diamètre $[AB]$.

   c) En utilisant les angles $(\overrightarrow{D\Omega}; \overrightarrow{DE})$ et $(\overrightarrow{DE}; \overrightarrow{DG})$ montrer que $\Omega \in (DG)$. Placer Ω.

4. a) Montrer qu'il existe une similitude directe S et une seule qui transforme B en D et D en I.

   b) Soit S' la similitude directe de centre A, de rapport $\frac{\sqrt{3}}{2}$ $et\ d'angle \frac{\pi}{6}$. Déterminer S'(B) et S'(D). Caractériser S.

5. On considère la suite (M_n) définie par $M_0 = B\ et\ M_{n+1} = S(M_n)$.

   a) Démontrer que le triangle AM_nM_{n+1} est rectangle.

   b) Déterminer la nature du triangle ABM_{2019} et calculer son aire en fonction de a.

Exercice 5 :

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}$.

1. Etudier les variations de f et tracer sa courbe **Γ** dans un repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}; \vec{\jmath}$).
2. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution **α** et que 0,7 < **α** < 0,8.
3. Soit A l'aire du domaine délimité par **Γ**, (ox) et les droites d'équations x = **α** et x = ln3.

   a) Montrer que $A = \int_{\alpha}^{\ln 3} \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$.

   b) En posant $t = \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}.\ montrer\ que\ A = \int_{\alpha}^{\frac{1}{2}} \frac{2dt}{t^2-1}$.

   c) Déterminer les réels a et b tels que $\frac{2}{t^2-1} = \frac{a}{t-1} + \frac{b}{t+1}$ et en déduire la valeur de A.

4. Soit (I_n) la suite définie pour tout n ∈ $\mathbb{N}^*$ par $I_n = \int_{\alpha}^{ln3} f(t)^{2n}dt$ et

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} I_k = I_1 + I_2 + \cdots + I_3.$$

a) **Montrer que pour tout n ∈ $\mathbb{N}^*$ que** $\frac{ln3-\alpha}{2^{2n}} \leq I_n \leq (ln3-\alpha)\alpha^{2n}$ **puis en déduire** $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

b) **Montrer que** $\forall x \in \mathbb{R}, 2f'(x) = \left(f(x)\right)^3 - f(x) \quad (1)$.

c) **En déduire que** $\forall x \in \mathbb{R}, \left(f(x)\right)^2 = 1 + 2\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)$ *puis en déduire* I_1.

5. **a) Montrer à l'aide de l'égalité (1) que** $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_{n+1} - I_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2^{2n}} - \alpha^{2n}\right)$.

b) Montrer que $I_{n+1} = ln\left(\frac{3e^{-\alpha}}{4\alpha^2}\right) + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2^{2k}} - \alpha^{2k}\right)$.

c) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(\alpha^{2k} - \frac{1}{2^{2k}}\right)\right) = ln\left(\frac{3}{4(1-\alpha^2)}\right)$.

BACCALAUREAT SESSION 2018

Exercice 1 :

1. **On considère l'équation (E) : $25x - 49y = 5$, où x et y sont des entiers relatifs.**
   a) **Déterminer le pgcd de 49 et 25 à l'aide de l'algorithme d'Euclide et en déduire que l'équation (E) admet des solutions entières.**
   b) **Vérifier que le couple (10 ; 5) est une solution particulière de (E). Résoudre l'équation (E).**
   c) **Montrer qu'il existe un unique entier p compris entre 1960 et 2018 tel que : $25p \equiv 5[49]$.**
2. **a) Justifier que si (x ; y) est une solution de (E) alors $5x \equiv 1[7]$ *et* $y \equiv 0[5]$.**
   b) Montrer que $5x \equiv 1[7]$ *si et seulement si* $x \equiv 3[7]$.
3. **a) Soit x un entier relatif. Quel sont les restes de x^2 dans la division euclidienne par 7 ?**
   b) Existe-t-il un couple (x ; y) d'entiers relatifs tels que $(x^2; y^2)$ soit solution de (E).

Exercice 2 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Pour tout nombre complexe z on pose : $p(z) = z^3 - (1+4i)z^2 - (9-i)z - 6 + 18i$.

1. **a) Calculer P(3i) et déterminer les nombres a et b tels que $\forall e \in \mathbb{C} : P(z) = (z - 3i)(z^2 + az + b)$.**
   b) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation P(z) = 0.
   c) On considère les points A, B et C images des solutions de l'équation P(z) = 0 tels que $|z_C| \leq |z_B| \leq |z_A|$. Placer les points A, B et C et déterminer la nature du triangle ABC.
   d) Soit $A' = bar\{(A; -5), (B; 6), (C; 12)\}$. Vérifier que l'affixe de $A' est\ z_{A'} = -3 + i$. Placer A'.
2. **On considère l'ellipse Γ de sommet A, A' et B.**
   a) **Déterminer le centre I et l'excentricité de Γ.**
   b) **Ecrire une équation cartésienne de Γ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$**
   c) **Précisez les points d'intersections de Γ avec l'axe (O*x*).**
   d) **Déterminer les foyers et les directrices de Γ puis construire Γ.**

Exercice 3 :

ABCD un parallélogramme tel que $(\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{4}\ \ et\ AB = 2AD$.

On définit les points E, F, G et H tels que AFEB et ADGH soient des carrés directs0

Soit I, J et K les milieux respectifs des segments $[EC], [CG]\ et\ [GA]$.

1. Représenter les données précédentes sur une figure qui sera complétée au fur et à mesure.
2. Soit R_Δ la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$, T la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}\ et$

$f = T\ o\ R_\Delta$.

a) Quelle est la nature de f.

b) Déterminer f(D) puis caractériser f. Quelle est l'image du point F par f.

c) Justifier que les segments $[DF]\ et\ [CG]$ sont perpendiculaires et de même longueur.

3. a) Comparer les vecteurs $\overrightarrow{DF}\ et\ \overrightarrow{CE}$ puis en déduire que le triangle ECG est rectangle isocèle directe en C.

   b) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement g qui transforme E en C et C en G.

   c) Vérifier que g est une symétrie glissante dont on donnera les forme réduite.
4. Soit S la similitude directe qui transforme B en A et A en D.
   a) Déterminer le rapport de S et une mesure de l'angle de S.
   b) Montrer que le centre Ω de S appartient aux cercles $\Gamma_1\ et\ \Gamma_2$ circonscrit respectivement aux carrés AFEB et ADGH. Placer Ω.
   c) Montrer que S(F) = G puis en déduire que $S(\Gamma_1) = \Gamma_2$.
   d) Soit M un point de Γ_1 et $M' = S(M)$. Montrer que les points A, M et M' sont alignés.

Exercice 4 :

1. a) Résoudre l'équation différentielle $(E) : y'' - 6y' + 8y = 0$.

   b) Déterminer la solution y_0 de (E) dont la courbe passe par le point A(0 ; -1) et admet en ce point une tangente horizontale.
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{4x} - 2e^{2x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$)

a) Calculer et interpréter les limites suivantes $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$

b) Dresser le tableau de variation de f.

3. Soit g la restriction de f sur l'intervalle I =]-∞ ; 0].

a) Montrer que g réalise une bijection de l'intervalle I sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Calculer et interpréter $\lim\limits_{x\to-1} \frac{g^{-1}(x)}{x}$ où g^{-1} *est la réciproque de* g.

c) Soit (C') la courbe de g^{-1}. Montrer que les courbes (C) et (C') se coupent en un unique point B d'abscisse α tel que -0,6 < α < -0,5.

d) Tracer dans le même repère les courbes (C) et (C').

e) Donner l'expression de $g^{-1}(x)$.

4. Soit S l'aire de la partie du plan délimitée par les courbes (C) et (C') et les axes de coordonnées.

a) Montrer que $S = 2\int_{\alpha}^{0}(x - f(x))dx$.

b) Calculer la valeur de S en fonction de α et en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

Exercice 5 :

Partie A :

Soit f la fonction définie sur]-1 ; +∞[par $f(x) = \frac{x}{x+1} - (x+1)\ln(x+1)$.

On note (C) la courbe représentative de f ans un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).

1. Montrer que $\lim\limits_{x\to} f(x) = -\infty$ *puis* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement.
2. a) Calcul $f'(x)$ *et* $f''(x)$ puis étudier les variations de f'.

   b) Calculer $f'(0)$ *et en déduire* f'.
3. a) Dresser le tableau de variation de f.

   b) Tracer la courbe (C).
4. a) Calculer $\int_0^x \frac{t}{t+1}dt$ et à l'aide d'une intergration par partie, calculer $\int_0^x (t+1)\ln(1+t)\,dt$.

   b) En déduire la primitive F de f sur]-1 ; +∞[qui s'annule en 0.

   c) Calculer l'aire A_n du domaine plan délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives x = 0 et x = n, pour n un entier naturel n ≥ 1.

Partie B :

Soit (U_n) la suite définie $\forall n \geq 1$ ***par*** $U_n = \frac{1}{2}f(1) + \frac{1}{3}f(2) + \frac{1}{4}f(3) + \cdots + \frac{1}{n}f(n-1) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} f(k)$.

1. **Posons** $\forall n \geq 1 :\ V_n = \frac{1}{n+1} f(n)$.

   a) ***Vérifier que*** $\forall n \geq 1, V_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} - \ln(n+1)$.

   b) ***En déduire que*** $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - \ln(n!)$.

2. **Notons** $\forall n \geq 1, S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ ***et*** $S'_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

   a) **Montrer que** $\forall k \geq 1;\ \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}$ ***puis en déduire que*** $\frac{1}{n} + \ln n \leq S_n \leq 1 + \ln n$.

   b) ***Montrer que*** $\forall k \geq 1;\ \frac{1}{(k+1)^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^2} \leq \frac{1}{k^2}$ ***puis en déduire que*** $1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \leq S' \leq 2 - \frac{1}{n}$

   c) **En déduire que** $\forall n \geq 1$; $\frac{2}{n} - 2 \leq U_n + \ln((n-1)!) \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n^3}$.

BACCALAUREAT SESSION 2017

Exercice 1 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé (O ;$\vec{u}$; $\vec{v}$).

1. **a) soit a un nombre réel, résoudre dans l'ensemble de nombres complexes l'équation d'inconnue z : $(1+i)z^2 - 2(a+1)z - (-1+i)(a^2+1) = 0$.**

   b) Soit f et g les transformations données par leurs expressions complexes : f : $z' = 1 - iz$ et $g : z \to z'' = z - i$. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de chacune des transformations f et g.

   Dans le reste de l'exercice on considère les points I, M_1 et M_2 d'affixes respectives $z_0 = 1 - i, z_1 = 1 - ia$ et $z_2 = a - i$ où $a = e^{i\alpha}, \alpha \in]0; 2\pi[$l'intervalle $]0 ; \pi[$.

   c) Ecris z_1 et z_2.

2. **a) Montrer que le triangle IM_1M_2 est rectangle en I, isocèle et directe.**

   b) Précisez les lieux géométriques de chacun des points M_1 et M_2 lorsque α décrit l'intervalle $]0 ; 2\pi[$.

   c) Ecrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle pour α appartenant à l'intervalle $]0 ; \frac{\pi}{2}[$.

3. **Soit M_3 le point d'affixe $z_. = i\sin\alpha + ia$ et soit G l'isobarycentre des points M_1, M_2 et M_3.**

   a) Vérifier que $z_G = \frac{1+\cos\alpha}{3} + i\frac{-1+2\sin\alpha}{3}$ puis montrer que, pour $\alpha \in]0 ; \pi[$ le point G appartient à une ellipse Γ dont on donnera une équation.

   b) Précisez les sommets et l'excentricité de Γ puis la construire dans le repère précédent.

Exercice 2 :

ABC est un triangle équilatérale directe de côté 4cm, et de cercle circonscrit Γ, les points I, J et K sont les milieux respectifs des segments $[BC], [CA]$ et $[AB]$. On pose $A' = s_B(A)$.

1. **a) Faire une figure illustrant les données que l'on complètera au fur et à mesure. On prendra (AB) horizontale.**

   b) Montrer qu'il existe un unique déplacement g vérifiant g(B) = A et g(A') = B. Vérifier que g est une symétrie glissante et donner sa forme réduite.

   c) Soir r la rotation qui transforme C en B et J en K. Déterminer un angle et le centre de r.

2. Soit s la similitude directe qui transforme A en B et C en I, et on pose h = s o r.
   a) Déterminer le rapport et une mesure de l'angle de s.
   b) Soit Ω le centre de s. Montrer Ω ∈ Γ et que les points Ω, A et I sont alignés. Placer alors Ω.
   c) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de h.
3. Soit M un point de Γ distinct de Ω, on pose $M' = s(M)$ *et* $M_1 = r(M)$.
   a) Montrer que le triangle ΩMM' est rectangle.
   b) Montrer que la droite (MM') passe par un point fixe que l'on déterminera.
   c) Montrer que les points M_1, M et M' sont alignés.
4. On pose $M_0 = A$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}, M_{n+1} = s(M)$.
   a) Déterminer M_1 et construire M_2.
   b) Vérifier que $M_{2017} \in (\Omega B)$.
   c) Pour tout entier naturel n , on pose $I_n = M_n M_{n+1}$ *et* $S_n = \sum_{k=0}^{n} L_k$, exprimer S_n en fonction de n, puis déterminer $\lim_{x\to+\infty} S_n$.

Exercice 3 :

Pour tout entier naturel n on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}$ et soit (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).

1. Montrer que toutes les courbes (C_n) passent par un point fixe à déterminer.
2. a) Dresser le tableau de variation de f_0.
   b) On considère les points M et N de la courbe (C_0) d'abscisse respectives x et –x. Déterminer les coordonnées de A, milieu de $[MN]$, que représente A pour (C_0) ?
3. a) Montrer que les courbes (C_0) et (C_1) sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.
   b) Déduire le tableau de variation de f_1.
   c) Construire (C_0) et (C_1) dans le même repère.
4. On suppose que n est strictement supérieure à 1.
   a) Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$ *et* $\lim_{x\to-\infty} f_n(x) = +\infty$ *puis calculer* $\lim_{x\to-\infty} \frac{f_n(x)}{x}$. Interpréter.
   b) Calculer f'_n et dresser le tableau de variation de f_n.
5. Soit (u_n) la suite définie par : $u_n = \int_0^1 f_n(x)dx, n \in \mathbb{N}$.
   a) Justifier l'existence de (u_n) puis vérifier que $u_0 = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$.

b) Vérifier que $u_0 + u_1 = 1$ *et que* $u_{n+1} + u_n = \frac{1-e^{-n}}{n}$ puis déduire u_1 *et* u_2.

c) Montrer que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 4 :

Soit f la fonction définie sur $]0\ ;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$

1. a) Dresser le tableau de variation de f.

   b) Déduire que pour tout entier $n \geq 6$, l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet dans l'intervalle $[1\ ;\sqrt{e}]$ une seule solution notée a_n.

   c) Prouver que la suite (a_n) est décroissante, en déduire qu'elle converge.

2. a) Montrer que pour tout entier k strictement supérieur à 1, on a : $\frac{\ln(k+1)}{(k+1)^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{\ln x}{x^2}\,dx \leq \frac{\ln k}{k^2}$.

   b) Utiliser une intégration par partie pour exprimer en fonction de n l'intégrale : $\int_2^n \frac{\ln x}{x^2}\,dx, n \geq 2$.

3. Pour tout entier n supérieure strictement à 1, on pose : $S_n = \frac{\ln 2}{2^2} + \frac{\ln 3}{3^2} + \frac{\ln 4}{4^2} + \cdots + \frac{\ln n}{n^2}$

   a) Montrer que $S_n - \frac{\ln(2)}{(2^2)} \leq \int_2^n \frac{\ln x}{x^2}\,dx \leq S_n - \frac{\ln(n)}{(n^2)}$

   b) En déduire que $\frac{1+\ln 2}{2} - \frac{n+(n-1)\ln(n)}{n^2} \leq S_n \leq \frac{2+3\ln 2}{4} - \frac{1+\ln(n)}{n}$

4. Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(\ln 2)^{k-1}}{k!}$ *et* $I_n = \frac{1}{n!}\int_1^2 \frac{(\ln x)^2}{x^2}\,dx$.

   a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*/0 \leq I_n \leq \frac{(\ln 2)^2}{n!}$ En déduire la limite de I_n.

   b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_{n+1} = I_n - \frac{1}{2}\frac{(\ln 2)^{n+1}}{(n+1)!}$

   c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{\ln 2}{1!} + \frac{(\ln 2)^2}{2!} + \cdots + \frac{(\ln 2)^n}{n!}\right]$

   d) Exprimer (u_n) en fonction de I_n. En déduire la limite de (u_n).

BACCALAUREAT SESSION 2016

Exercice 1 :

On considère l'équation (E) : $5x - 3y = 17$, où x et y sont den entiers relatifs.

1. a) justifier que l'équation (E) admet des solutions entières et vérifier que le couple (4 ; 1) est une solution particulière de (E).
   c) Déterminer l'ensemble des solutions de (E).
2. Soir (x ; y) une solution de (E).
   a) Montrer que si x est un diviseur de y, alors x est un diviseur de 17.
   b) Soit m un entier relatif. Trouver les valeurs de m telles que le quotidien $\frac{1+5m}{4+3m}$ soit un entier relatif.

Exercice 2 :

Le plan complexe est muni d'un repère (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$). Pour tout nombre complexe z on pose : $P(z) = z^3 - (4+8i)z^2 + (-14+24i)z + 32 + 4i$.

1. a) Calculer P(2i) et déterminer deux ombres a et b tels que pour tout nombres complexe z on a : $P(z) = (z-2i)(z^2 + az + b)$.

   b) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation P(z) = 0. On note z_1; z_2 et z_3 ses solutions avec $|z_1| < |z_2| < |z_3|$

   c) Soit A, B et les points d'affixes respectives z_1, z_2 et z_3. Déterminer l'affixe du point G barycentre du système $\{(O; 5); (A; -7); (C; 4)\}$. Placer A, B, C et G sur la figure.

2. Pour tout nombre complexe z on pose : $Q(z) = z^2 - (4+6i)z - 2 + 16i$.
   On note Γ l'ensemble des points M d'affixe z tels que $Q(z)$ soit imaginaire pur (ou nul).
   a) En posant $z = x + iy$, donner une équation cartésienne de Γ et montrer que Γ est une conique de centre G.
   b) Précisez les sommets et l'excentricité de Γ puis la construire dans le repère précédent.

Exercice 3 :

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = xe^{\frac{1}{x}} \ si \ x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).

a) Montrer que $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0$ *et que* $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$. Interpréter.

b) Calculer et interpréter les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{f(x)}{x}$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(f(x) - (x+1)\right)$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - (x+1)\right)$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

d) Construire dans le repère précédent le courbe (C).

2. On définit pour tout entier n ∈ $\mathbb{N}^*$ la fonction f_n par : $\begin{cases} f_n(x) = xe^{\frac{n}{x}} \; si \; x \neq 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$

Soit (C_n) la courbe représentative de f_n dans le repère précédent.

a) Montrer que (C_n) est l'image de (C) par une homothétie h_n de centre O dont on précisera le rapport.

b) Montrer que tous les points M_n de (C_n) en lesquels la tangente est horizontale sont situés sur une même droite Δ dont on donnera une équation.

c) Sans étudier f_2, déduire de ce qui précède le tableau de variation de f_2, et la construction de sa courbe (C_2) dans le même repère. Justifier.

Exercice 4 :

Soit la fonction f définie sur]-1 ; +∞[par $f(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$. Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$)

1. a) Montrer que $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ *puis caculer* $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter.

b) Dresser le tableau de variation de f.

2. a) Calculer $\int_0^x \ln(1+t)dt$ et déterminer la primitive F de f sur]-1 ; +∞[. Qui s'annule en O (on pourra écrire $f(x) = \ln(x+1) - 1 + \frac{1}{x+1}$

b) Pour tout entier naturel n ≥ 1, on note A_n l'aire du domaine plan délimté par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives c = 0 et x = $\frac{1}{n}$

donner l'expression de A_n en fonction de n.

3. Dans la suite de l'exercice on prendra x réel tel que x ∈]0 ; 1[et n un entier natirel non nul.

a) Montrer que pour tout n : $\frac{1}{1+x} = \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}x^{k-1} + \frac{(-1)^{n+2}x^{n+3}}{1+x}$.

b) En déduire que : $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^k}{k} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t} dt$.

c) En utilisant a) et b) ; montrer que : $f(x) = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \frac{1-k}{k} x^k + \frac{(-1)^{n+2} x^{n+2}}{x+1} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{1^{n+1}}{1+t} dt$.

d) Montrer que : $0 \leq \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t} dt \leq \frac{x^{n+2}}{n+2}$.

e) En déduire que : $f(x) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \frac{1-k}{k} x^k$.

Exercice 5:

Dans le plan orienté, on considère le carré direct ABCD de centre O et de côté a (a > 0). I, J, K et L sont les milieux respectifs des cotés $[AB], [BC], [CD]$ et $[DA]$. Les points E et F tels que LDEF soit un carré direct.

1. a) Faire une figure illustrant les données précédentes que l'on complétera au fur at à mesure.

   b) Montrer qu'il existe une unique rotation r qui transforme A en D et L en E.

   c) Déterminer un angle et le centre de cette rotation.

2. a) Montrer qu'il existe une unique similitude directe s_1 qui transforme J en O et C en D.

   b) Déterminer l'angle et le rapport de s_1

   c) Déterminer $s_1(B)$ que peut-on en déduire à propos du carré de s_1.

   d) Déterminer $s_1(O)$ puis construire l'image du carré ABCD par s_1. Justifier la construction.

3. Soit s_2 la similitude directe de centre A, de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$. Déterminer $s_2(O)$ et $s_2(C)$.

4. On pose $f = s_2 \, o \, s_1^{-1}$ et pour tout point M du plan, on note $M_1 = s_1(M), M_2 = s_2(M)$

   a) Déterminer f(D) et caractériser f.

   b) Montrer que si $M_1 \neq M_2$ alors la droite (M_1M_2) passe par un point fixe que l'on déterminera.

   c) Déterminer l'ensemble Γ_1 des points M du plan pour lesquels les points M, M_1 et M_2 sont alignés. (on pourra utiliser l'angle $(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB})$.

5. a) Vérifier que O est le barycentre du système $\{(A; 1); (D; 3); (E; -2)\}$.

   b) Déterminer les ensembles Γ_2 et Γ_3 des points M du plan tels que :

$\boldsymbol{M \in \Gamma_2 \Leftrightarrow 2MA^2 + 6MD^2 - 4ME^2 = a^2}$,

$\boldsymbol{M \in \Gamma_3 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MK} - \overrightarrow{ME}\right)\left(2\overrightarrow{ML} + 2\overrightarrow{MK} - \overrightarrow{MB}\right) = 0}$. **Que peut-on remarquer ?**

BACCALAUREAT SESSION 2015

Exercice 1 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$).

1. **On pose : $P(z) = z^3 - (11+6i)z^2 + (28+38i) - 12 - 60i$ où z est un nombre complexe.**
   a) **Calculer P(3) et déterminer les nombres a et b tels que pour tout z de $\mathbb{C}$:**
   $$P(z) = (z-3)(z^2 + az + b).$$
   b) **Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation P(z) = 0.**
   c) **Soient les points A, B et C images des solutions de l'équation P(z) = 0 avec $Im(z_A) < Im(z_B) < Im(z_C)$. Calculer l'affixe du point G barycentre du système $\{(A;2),(B;-2),(C;2)\}$ et placer les points A, B, C et G.**
2. **Pour tout réel k différent de 2, on définit l'application f_k du plan P dans lui-même qui à tout point M du plan associe le point M' tel que :**
   $$\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + (3-k)\overrightarrow{MC}.$$
   a) **Pour quelles valeurs de k, l'application f_k est une translation ? Déterminer alors son vecteur.**
   b) **On suppose que k ∈ $\mathbb{R}$-$\{2;3\}$. Montrer que f_k admet un unique point invariant Ω_k. reconnaitre alors f_k et donner ses éléments caractéristiques en fonction de f_k.**
   c) **Déterminer et construire le lieu géométrique des points Ω_k lorsque k décrit $\mathbb{R}$-$\{2;3\}$. Reconnaitre Ω_1.**
   d) **Pour k = 1 ; déterminer et construire le lieu géométrique du point R centre de gravité du triangle AMM' lorsque M décrit le cercle Γ de centre G passant par C.**
3. **Pour tout point M du plan on pose φ(M) = $2MA^2 - 2MB^2 + 2Mc^2$ et Γ_m l'ensemble des points M tels que φ(M) = m, où m est un réel.**
   a) **Discuter suivant les valeurs de m, la nature de Γ_m.**
   b) **Déterminer et construire Γ_m pour m = 10.**

Exercice 2 :

Dans le plan orienté o considère un rectangle direct ABCD de longeur AD tel que AB = a et AD = 2a, (a > 0). Soient I, J, K et L les milieux respectifs des segments $[AB],[BC],[CD]$ *et* $[DA]$. Soit O le centre du rectangle ABCD.

1. a) Faire une figure illustrant les données précédentes.

   b) Montrer qu'il existe une unique rotation r qui transforme B en C et J en D. Préciser le centre et un angle de r.

2. a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement qui transforme I en C et A en K.

   b) Montrer que g est une symétrie glissante et vérifier que $g = t_{\overrightarrow{IC}}\ o\ S_{AB}$.

   c) Déterminer une droite Δ telle que $t_{\overrightarrow{BC}} = S_{\Delta}\ o\ S_{BC}$. En déduire la forme réduite de g, (on pourra remarquer que $t_{\overrightarrow{IC}} = t_{\overrightarrow{IB}}\ o\ t_{\overrightarrow{BC}}$).

3. a) Montrer qu'il existe une unique similitude directe s qui transforme A en C et B en L. Déterminer l'angle et le rapport de s. Montrer que s(J) = B.

   b) Soient Γ_1 le cercle de centre A passant par B, et Γ_2 le cercle de centre C passant par L. Justifier que $s(\Gamma_1) = \Gamma_2$.

4. On désigne par P le centre de s.

   a) Montrer que P est situé sur les cercles Γ_1 et Γ_2. Préciser P.

   b) Vérifier que P est le symétrie de L par rapport à (AC).

   c) Soit E le symétrique de L par rapport à D. Vérifier que P est situé sur la droite (BE).

5. a) Soir R le symétrique de L par rapport à J. Montrer que s(L) = R.

   b) Soit M un point de Γ_1 distinct de P. O note s(M') = M''. Montrer que :

      i. La droite (MM') passe par un point fixe que l'on précisera.

      ii. Le triangle MM'M'' est rectangle isocèele.

6. Soit Γ la parabole de foyer L et de directrice (BC).

   a) Montrer que Γ passe par A, O et D.

   b) Préciser la tangente à Γ en A et tracer Γ.

   c) Déterminer et construire le foyer et la directrice de $\Gamma' = s(\Gamma)$.

Exercice 3 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. a) Justifier que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1\ et\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Interpréter graphiquement.

   b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on déterminera. Donner l'expression de sa réciproque $f^{-1}(x)$. On note (C') la courbe de f^{-1} dans le même repère.

2. a) Vérifier que le point $\Omega(0\ ;\frac{1}{2})$ est un centre de symétrie de la courbe (C).

   b) Montrer que les courbes (C) et (C') se coupent en un seul point d'abscisse α telle que $0{,}4 < \alpha < 0{,}5$.

   c) Tracer les courbes (C) et (C').

   d) Calculer, en fonction de α, l'aire A du domaine plan limité par les courbes (C) et (C'), et les axes des coordonnées (On pourra remarquer que $\frac{1}{e^x+1} = \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$).

3. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, *on pose* $I_n = \int_0^{\alpha} f^n(t)dt$ où α est le réel trouvé en 2.b)

   a) Justifier que $I_1 = \alpha + ln\,(2\alpha)$.

   b) Vérifier que pour tout réel x : $f'(x) = f^2(x) - f(x)$.

   c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $I_{n+1} - I_n = \frac{1}{n}\left(\alpha^n - \frac{1}{2^n}\right)$.

   d) Montrer que la suite (I_n) est décroissante et positive. Que peut-on en déduire ?

4. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\alpha^{n+1} \leq I_n \leq \frac{\alpha}{2^n}$. *En déduire* $\lim\limits_{x\to+\infty} I_n$.

   b) Montrer que $I_n = \alpha + ln\,(2\alpha) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\left(\alpha^k - \frac{1}{2^k}\right)$. *En déduire* $\lim\limits_{x\to+\infty} \sum_{k=1}^{n-1}\left(\alpha^k - \frac{1}{2^k}\right)$.

Exercice 4 :

1. On considère la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}^*$ *par* :

$$g(x) = \frac{3x^2 - 12x^2 + 19x - 10}{x^3 - 4x^2 + 5x}$$

   a) Déterminer a, b et c tels que pour tout x de R^* : $g(x) = \frac{(x-1)(ax^2+bx+c)}{x(x^2-4x+5)}$

   b) Etudier le signe de g(x) sur R^*.

2. On considère la fonction numérique définie sur R^* par :

$$f(x) = 3x - 3 + ln\left(\frac{x^2 - 4x + 5}{x^2}\right)$$

   Et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, interpréter graphiquement.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

c) **Montrer que (C) admet deux asymptotes dont l'une, noté D, est oblique. Etudier la position relative de (C) et de D.**

3. **a) Vérifier que $f'(x) = g(x)$ où g est la fonction définie en 1), et dresser le tableau de variation de f.**

   b) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dont on donnera un encadrement d'amplitude 5×10^{-1}.

   c) Construire (C).

4. **On se propose dans cette question de calculer l'aire S du domaine délimité par la courbe (C) et les droites d'équations respectives : $y = 3x - 3, x = 3$ *et* $x = 2 + \sqrt{3}$.**

   a) Vérifier que pour tout réel x on a : $\frac{2x^2-4x}{x^2-4x+5} = 2\left(1 + \frac{2x-4}{x^2-4x+5} - \frac{1}{1+(x-2)^2}\right)$.

   b) Calculer $A = \int_3^{2+\sqrt{3}} \frac{2x-4}{x^2-4x+5} dx$.

   c) En posant $x = 2 + \tan t$ *pour tout* $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; calculer

   $B = \int_3^{2+\sqrt{3}} \frac{1}{1+(x-2)^2} dx$.

   d) En utilisant une intégration par partie, calculer $J = \int_3^{2+\sqrt{3}} \ln(x^2 - 4x + 5) dx$ et $K = 2\int_3^{2+\sqrt{3}} \ln x dx$. En déduire le calcul d'aire S exprimée en unité d'aire.

BACCALAUREAT SESSION 2014

Exercice 1 :

Pour tout nombre complexe z on pose : $P(z) = z^3 + (1-2i)z^2 + (1-2i)z - 2i$.

1. **Calculer P(2i) et déterminer les solutions z_0, z_1 et z_2 de l'équation $P(z) = 0$ sachant que Im $z_0 \geq$ Im $z_1 \geq$ Imz_2.**
2. **Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$). On considère les points A, B et C d'affixes respectives.**
   a) **Vérifier qu'une équation cartésienne de la droite (BC) est $2x + 1 = 0$**
   b) **Démontrer que si M décrit la droite (BC) privée de B et C, alors M' est situé sur l'axe des abscisses (on pourra remarquer que $z^2 + z + 1 = \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$).**
3. **a) Démontrer que si $|z| = 1$, alors $f(z) = \frac{\bar{z}}{1+z+\bar{z}}$**
   b) Vérifier que si $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in \left[-\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right]$, alors $f(z) = \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{1+2\cos\theta}$
4. **a) Démontrer que si M décrit le cercle d'unité privé de A et C, alors M est situé sur la courbe Γ d'équation cartésienne $x^2 + y^2 = (2x-1)^2$ dans le repère (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$).**
   b) Démontrer que Γ est une hyperbole. Déterminer le centre et es sommets puis calculer l'excentricité de Γ. Construire Γ dans le repère précédent.

Exercice 2 :

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x$. Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).

1. **a) Dresser le tableau de variation de f.**
   b) Tracer la courbe (C).
   c) Vérifier que la fonction f est solution de l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = 0$.
   d) Calculer l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 0 et x = 1.
2. **On considère la suite numérique (I_n) définie pour tout entier naturel n ≥ 1 par $I_n = (-1)^n \int_0^1 x^n e^x dx$.**
   a) **Montrer que $I_1 = -1$.**
   b) **Montrer que pour tout entier n ≥ 1, $\frac{1}{n+1} \leq |I_n| \frac{e}{n+1}$. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} I_n$.**

c) Montrer, à l'aide d'une intégration par partie que pour tout entier n ≥ 1 :

$$I_{n+1} = (-1)^{n+1}e + (n+1)I_n.$$

d) En déduire le calcul de l'intégrale $J = \int_0^1 \frac{(x^3+4x^2-3x-6)e^x}{x+1} dx$. Donner la valeur de J sous la forme $ae + b$ où a *et* b *sont des entier relatifs*.

Exercice 3 :

1. On considère la fonction numérique f définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right), x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

a) Montrer que f est continue à droite de zéro (on pourra écrire $f(x) = x\ln(x+1) - x\ln x$).

b) Etudier la dérivabilité de f à droite de zéro. Donner une interprétation graphique.

c) Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$ $\left(\text{on pourra poser } t = \frac{1}{t}\right)$. Interpréter graphiquement.

2. a) Vérifier que $f''(x) = \frac{1}{x(x+1)^2}$. En déduire le signe de $f'(x)$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Construire la courbe de f.

3. Pour tout entier naturel n ≥ 1 ; on pose : $\begin{cases} f_n(x) = x^n\ln\left(1+\frac{1}{x}\right), x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$

Et $A_n = \int_0^1 f_n(x)dx$.

a) Montrer que l'écriture précédente définit bien une suite numérique (A_n).

b) Montrer que pour tout x ∈ $[0;1]$, *on a* $0 \le x^{n-1}f(x) \le x^{n-1}$ où f est la fonction définie dans la question 1).

c) Justifier que $0 \le A_n \le \frac{1}{n}$. *En déduire* $\lim_{x\to+\infty} A_n$.

4. On pose $I_n(\alpha) = \int_\alpha^1 x^n \ln x\,dx$, $I_n = \lim_{x\to+0^+} I_n(\alpha)$ *et* $J_n = \int_0^1 x^n\ln(x+1)dx$.

a) A l'aide d'un intégration par partie, exprimer $I_n(\alpha)$ en fonction de α et de n.

b) Montrer que $\lim_{x\to0^+} I_n(\alpha) = \frac{-1}{(n+1)^2}$.

c) En utilisant une intégration par partie, montrer que $J_{n+1} = \frac{2ln2}{n+2} - \frac{1}{(n+2)^2} - \frac{n+1}{n+2}J_n$

Exercice 4 : (les deux parties de l'exercice peuvent-être traités indépendamment)

Partie A :

Dans le plan orienté on considère un carré direct ABCD de centre O et de coté a, (a > 0). Soient K et L les milieux respectifs des segments $[CD]$ et $[DA]$.

1. Faire une figure illustrant les données précédentes.
2. Montrer qu'il existe une unique rotation r qui transforme A en B et K en L. Préciser le centre et un angle de r.
3. a) Prouver qu'il existe une unique similitude directe f_1 qui transforme D en L et B en O. Déterminer le rapport et un angle de f_1.

   b) Soit P le centre de la similitude f_1. Vérifier que le point P est commun aux cercles de diamètres $[AB]$ et $[OD]$ puis le préciser. Vérifier que P est aussi le point d'intersection des deux droites (BL) et (AK).
4. a) Soit f_2 la similitude directe qui transforme B en D et O en L. Préciser son angle et son rapport.

   c) Montrer que le centre de la similitude f_2 est le point P : même centre de f_1.
5. a) soit $h = f_1 \; o \; f_2$. Montrer que h est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport. En déduire deux réels β et γ tels que $P = bar\{(B;\ \beta); (L;\ \gamma)\}$.

   b) Déterminer deux réels α et λ tels que $P = bar\{(A;\ \alpha); (K;\ \lambda)\}$.

Partie B :

On se place maintenant dans l'espace et on construit sur le carré précédent un cube ABCDEFGH (En dessous). On note : s_1 la réflexion de plan (ABCD) ; s_2 la réflexion de plan (AEHD) ; s_3 la réflexion de plan (ABFE) et s_4 la réflexion de plan (DCGH). Soit

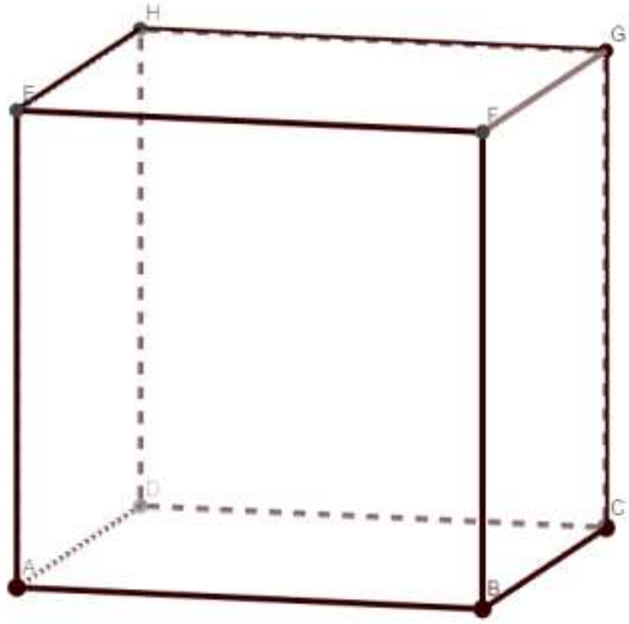
$f = s_1 \; o \; s_2 \; o \; s_3 \; o s_4$; $r = s_1 \; o \; s_2$; $t = s_3 \; o \; s_4$.

On ne demande de reproduire la figure.

a) Montrer que r est un demi-tour dont on précisera l'axe.

b) Montrer que t est une translation dont on précisera le vecteur.

c) Reconnaitre et caractériser.


H
G
E
F
D
C
A
B

BACCALAUREAT SESSION 2013

Exercice 1 :

On considère l'équation (E) : $25x - 9y = 5$, où x et y sont des entiers relatifs.

1. **a) En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer deux entiers relatifs u et v tels que $25u - 9v = 1$. En déduire une solution particulière (x_0 ; y_0) de (E).**

   b) Déterminer l'ensemble des solutions de (E).

2. **On désigne par d le PGCD de x et y où (x ; y) est une solution particulière de (E).**
   - **a) Quelles sont les valeurs possibles de d ?**
   - **b) Quelles sont les solutions (x ; y) de (E) telles que x et y soient premiers entre eux ?**
   - **c) Peut-on trouver un couple (x ; y) d'entiers relatifs tel que (x^2 ; y^2) soit solution de (E) ? Justifier votre réponse.**

Exercice 2 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$). Pour tout nombre complexe on pose : $P(z) = z^3 - (9 - i)z^2 + (28 - 5i)z - 32 + 4i$.

1. **a) Calculer P(4) et déterminer deux nombres a et b tels que pour tout nombres complexes z on a : $P(z) = (z - 4)(z^2 + az + b)$.**

   b) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation P(z) = 0.

2. **On considère les points A, B et C images des solutions de l'équation P(z) = 0 tels que $z_A = 4, Imz_B > 0$ et $Imz_C < 0$.**
   - **a) Donner l'expression complexe de la similitude directe s de centre C qui transforme A en B.**
   - **b) Déterminer le rapport et un angle de s.**

3. **Pout tout nombre complexe z o pose : $Q(z) = z^2 - (5 - i)z + 8 - i$.**

   On note Γ l'ensemble des points M d'affixs z tels que Q(z) soit imaginaire pur (ou nul).
   - **a) En posant $z = x + iy$, donner une équation cartésienne de Γ et montrer que Γ est une hyperbole de centre $\Omega(\frac{5}{2}; -\frac{1}{2})$.**
   - **b) Préciser les sommets et les asymptotes de Γ puis la construire.**

Exercice 3 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (3 - x)e^x$. Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).

1. a) Justifier et interpréter graphiquement les limites suivantes :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \ et \ \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$$

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Tracer la courbe (C).

d) Vérifier que la fonction f est solution de l'équation différentielle $y' - y = e^{-x}$ et calculer l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 0 et x = 3.

2. On considère la suite numérique (U_n) définie pour tout entier naturel n ≥ 1 par : $U_n = \frac{3^n}{n!}$

a) Montrer que pour tout entier naturel n ≥ 3, $0 \leq \frac{U_{n+1}}{U_n} \leq \frac{3}{4}$.

b) Montrer que pour tout entier naturel n ≥ 3, $0 \leq U_n \leq \frac{9}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-3}$. En déduire $\lim_{n \to +\infty} U_n$.

3. Pour tout entier naturel n ≥ 3 ; on pose $I_n = \frac{1}{n!}\int_0^3 (3-x)^n e^x dx$ et

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k!} = 1 + 3 + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^2}{3!} + \cdots + \frac{3^n}{n!}.$$

a) Justifier que $I_1 = e^3 - 4$.

b) Montrer que pour tout entier naturel n ≥1, $0 \leq I_n \leq (e^3 - 1)U_n$. En déduire $\lim_{n \to +\infty} U_n$.

c) En utilisant une intégration par partie, montrer que $I_{n+1} = I_n - U_{n+1}$.

d) Démontrer par récurrence que pur tout entier naturel n ≥1,

$e^3 = 1 + 3 + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^2}{3!} + \cdots + \frac{3^n}{n!} + I_n$. En déduire que $\lim_{n \to +\infty} S_n = e^3$.

Exercice 4 :

1. On considère la fonction g définie sur [0 ; +∞[par

$$\begin{cases} g(x) = x + x^3 - 3x^3 lnx, si\ x > 0 \\ g(0) = 1 \end{cases}$$

a) Montrer que g est continue en 0⁺ et que $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.

b) Dresser le tableau de variation de g.

c) Montrer que l'équation g(x) = 0admet dans]0 ; +∞[une unique solution α et que $1 < \alpha < 2$. En déduire le signe de g(x) sur [0 ; +∞[.

2. On considère la fonction f définie sur]0 ; +∞[par $f(x) = \frac{\ln x}{1+x^3}$.

a) Calculer $\lim_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim_{x\to +\infty} f(x)$.

b) Vérifier que pour tout x ∈]0 ; +∞[; $f'(x) = \frac{g(x)}{x(1+x^3)^2}$. En déduire le tableau de variation de f.

3. Pour tout x ∈]1 ; +∞[, on pose $F(x) = \int_1^x f(t)dt$.

a) Montrer que F est dérivable sur [1 ; +∞[. Calculer $F'(x)$ et déterminer le sens de variation de F.

b) Vérifier que pour tout t de [1 ; +∞[, on a : $\frac{\ln t}{(1+t)^3} \leq f(t) \leq \frac{\ln t}{t^3}$

c) En utilisant une intégration par partie, calculer $\int_1^x \frac{\ln t}{t^3} dt$.

d) Déterminer le réels a, b et c tels que pour tout t > 0 ;

$$\frac{1}{t(1+t)^2} = \frac{a}{t} + \frac{b}{1+t} + \frac{c}{(1+t)^2}$$

4. a) En utilisant les résultats précédentes, déduire que pour tout x ∈]1 ; +∞[:

$$\frac{-\ln x}{2(1+x)^2} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1-2\ln 2}{4} \leq F(x) \leq \frac{1}{4} - \frac{1}{4x^2} - \frac{\ln x}{2x^2}$$

b) On admet que $\lim_{x\to+\infty} F(x) = l$. Montrer que : $-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\ln 2 \leq l \leq \frac{1}{4}$.

c) Tracer l'allure générale de la courbe de F.

Exercice 5 :

Dans le plan orienté, on considère le carré direct ABCD de centre O et de côté a (a > 0). I, J, K et L les milieux respectifs des cotés $[AB], [BC], [CD]$ et $[DA]$.

1. a) Faire une figure illustrant les données précédentes que l'on complétera au fur et à mesure.

b) Montrer qu'il existe une unique rotation r qui transforme C en O et K en I.

c) Déterminer un angle et le centre de cette rotation.

2. Soit $f = S_{IJ} \circ S_{JO} \circ S_{OK}$.

a) Vérifier que $f = r \circ S_{OK}$ et déterminer $f(D), f(K)$ et $f(O)$.

b) **Précisez la nature et les éléments caractéristiques de la transformation f et donner sa forme réduite.**

3. **a) Montrer qu'il existe une unique similitude directe s_1 qui transforme B en I et L en A puis déterminer le rapport λ_1 de s_1.**

   b) Soit α une mesure de l'angle s_1. Montrer que $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

   c) Soit P le centre de s_1. E le symétrique de C par rapport à B. Montrer que le point P est situé sur les cercles circonscrits aux triangles BEI et BAL. Préciser P et le place sur la figure.

   d) Montrer que $(\overrightarrow{PI}, \overrightarrow{PA}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$. En déduire que les points A, P et E sont alignés.

4. **Soit s_2 la similitude directe de centre R qui transforme C en L. On note β une mesure de son angle. Soit $g = s_1 \circ s_2$.**

   a) **Justifier que g est une similitude directe et déterminer g(B) et g(C).**

   b) **Montrer que $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}[2\pi]$. En déduire que le centre Q de g est situé sur deux cercles que l'on déterminera. Placer Q sur la figure.**

   c) **Justifier que g(O) = P. En déduire la construction de l'image du carré ABCD par g.**

BACCALAUREAT SESSION 2012

Exercice 1 :

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x ln(e^x + 1)$. Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

1. **Justifier et interpréter graphiquement les limites suivantes :**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \;\; et \;\; \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty.$$

2. **a) Dresser le tableau de variation de f.**

   b) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

   c) Tracer la courbe (C).

3. **On pose $I = \int_0^1 f(x)dx$. On se propose de calculer I par deux méthodes.**

   Méthode a : Déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout réel x :

   $f'(x) = f(x) + ae^x + b + \frac{ce^{-x}}{1+e^{-x}}$. En déduire I.

   Méthode b : En posant $t = e^x + 1$, utiliser une intégration par partie pour calculer I.

Exercice 2 :

L'espace est rapporté à un repère orthnormal (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$; $\vec{k}$). On considère les points A(2 ; 1 ; 3), B(3 ; 2 ; 1), C(4 ; 1 ; 4), D(5 ; 3 ; -2) et E(6 ; -2 ; -4).

1. **a) Calculer $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{DE}$. Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{DE}$ est normal au plan (ABC).**

   b) Déterminer une équation cartésienne de plan (ABC).

   c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (DE).

   d) Déterminer les coordonnées du point F projeté orthogonal de D sur le plan (ABC).

   Déterminer un réel k tel que $\overrightarrow{EF} = k\overrightarrow{DF}$.

2. **a) Calculer le volume V du tétraèdre ABCD. (On rappelle que $V = \frac{1}{3}Base \times Hauteur$).**

   b) Déterminer les deux ensembles Γ_1 et Γ_2 des points M de l'espace définis par :

$$M \in \Gamma_1 \Leftrightarrow 11MD^2 - ME^2 = -30$$

$$M \in \Gamma_1 \Leftrightarrow MD^2 - ME^2 = -36.$$

Exercice 3 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$).

Dans $\mathbb{C}$, on considère l'équation E_θ: $z^2 - (6cos\theta)z + 4 + 5cos^2\theta = 0, \theta \in [0; 2\pi]$.

1. a) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation E . On note z_1 *et* z_2 les solutions de E_θ avec $Im(z_1) \geq \theta$ si $\theta \in [0 ; \pi[$.

   b) Préciser les vecteurs de θ et les solutions de E_θ dans les cas suivants :

   - l' équation E_θ admet des solutions doubles. Dans ce cas on note A_1 et A_2 les points d'affixes respectives z_1, z_2 avec $Re(z_1) \geq 0$.
   - L'équation E_θ admet deux solutions imaginaires pures. Dans ce cas onte B_1 et B_2 les points d'affixes respectives z_1, z_2 avec $Im(z_1) \geq 0$.

2. Dans ce cas général on note M_1 et M_2 les points d'affixes respectives z_1, z_2.

   a) Déterminer le lieu géométrique Γ des points M_1 et M_2 lorsque θ décrit $\theta \in [0 ; 2\pi[$.

   b) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble Γ et le construire.

3. On définit l'application f qui à tout points M d'affixe z associe le point M' d'affixe z', barycentre du système $\{(A_1, -4); (B_1, 2); (M, 3)\}$.

   a) Ecrire z' en fonction de z puis reconnaitre f et donner ses éléments caractéristiques.

   b) Donner une équation cartésienne de $\Gamma' = f(\Gamma)$. Dooner les éléments caractéristiques de Γ' dans (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$).

Exercice 4 :

On se propose dans cet exercice de calculer la limite de la suite numérique de terme général $U_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}, n \geq 2$.

On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x - lnx$.

1. Dresser le tableau de variation de f.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$; *on pose* $I(\lambda) = \int_\lambda^1 f(x)dx$.

   a) En utilisant une intégration par partie, calculer $\int_\lambda^1 lnx\, dx$.

   b) En déduire le calcule de $I(\lambda)$ puis $\lim_{\lambda \to +\infty} I(\lambda)$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2; k \in \mathbb{N}$ *tel que* $1 \leq k \leq n$ *on pose*: $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

a) Montrer que : $\frac{1}{n}f(\frac{k+1}{n}) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt \leq \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$; *pour* $1 \leq k \leq n-1$.

b) En déduire que : $S_n - \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right) \leq I\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n$ *puis que* : $I\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n \leq I\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)$.

c) En utilisant 3.b) montrer que $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{3}{2}$.

4. a) Montrer que : $\sum_{k=1}^{n} ln\left(\frac{k}{n}\right) = ln\left(\frac{n!}{n}\right)$ *et que* $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

b) En déduire que : $S_n = \frac{n^2+n}{2n^2} - lnU_n$.

c) En déduire de ce qui précède $\lim_{n\to\infty} U_n$.

Exercice 5 :

Dans le plan orienté on considère un triangle équilatéral direct ABC de côté a, (a > 0), de centre G. Soient I, J et K les milieux respectifs des segments $[BC], [CA]$ *et* $[AB]$. Le point E est le symétrique de K par rapport à I.

1. Faire une figure illustrant les données précédentes que l'on complétera au fur et à mesure.
2. a) Montrer qu'il existe une unique rotation r_1 qui transforme B en I et J en A.

   b) Déterminer les éléments caractéristiques de r_1.
3. Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{AJ}$. On pose : $r_2 = t \; o \; r_1$ *et* $f = S_{JC} \; o \; S_{JE} \; o \; S_{KE}$.

   a) Déterminer $r_2(J)$ et préciser r_2.

   b) Déterminer deux droites Δ_1 et Δ_2 telle que $r_1 = S_{KC} \; o \; S_{\Delta_1}$ *et* $r_2 = S_{JC} \; o \; S_{\Delta_2}$. En déduire que $f = t_{\overrightarrow{AJ}} \; o \; S_{KC}$.

   c) Déterminer l'image du triangle BIK par f. Justifier que f est une symétrique glissante et sonner sa forme réduite.
4. a) Montrer qu'il existe une unique similitude directe s qui transforme E en I et C en G.

   b) Déterminer un angle et la rapport de s.

   c) Montrer que le centre de s est situé sur les cercles circonscrits aux triangles BCG et BEI. Préciser ce centre.
5. Dans cette question M est un point variable du cercle Γ de diamètre $[BC]$. On note s(M) = M'.

   a) Déterminer le lieu géométrique Γ' du point M' lorsque M décrit Γ.

b) Montrer que pour tout point M de **Γ** distinct de B, la droite (MM') passe par le point K.

c) En déduire un programme de construction de M' à partir d'une position de M sur **Γ**. Placer M et M' en supposant que les points B, M et C se succèdent dans le sens trigonométrique sur **Γ**.

6. Pour tout entier naturel, n ≥2 ; on pose : $s^2 : s\ o\ s\ et\ s^n = s\ o\ s^{n-1}$. On définit une suite de point (M_n) par $M_0 = E$; $M_1 = s(M_0)\ et\ \ M_n = s^n(M_n)$.

a) Sur une nouvelle figure, placer les points B, M_0, M_1, M_2, M_3 (pour la construction on pourra prendre la droite (BE) verticalement avec BE = 6cm).

b) Calculer en fonction de n et a la somme : $s_n = M_0M_1 + M_1M_2 + \cdots + M_nM_{n+1}$.

c) Calculer la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n\ et\ interpréter$.

d) Justifier que : $M_{1960} \in (BM_4)\ et\ M_{2012} \in (BG)$.

BACCALAUREAT SESSION 2011

Exercice 1 :

Pour, tout nombres complexes z on pose : $P(z) = z^3 - (1 + 2\cos\theta)z^2 + (1 + 2\cos\theta)z - 1$ où $\theta \in [0\,;2\pi[$.

1. Calculer P(1) puis déterminer les solutions z_0, z_1 et z_2 de l'équation P(z) = 0 sachant que z_0 est réel, et $\mathrm{Im}(z_1) \geq 0$ si $\sin\theta \geq 0$.
2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{u};\,\vec{v})$ on considère les points M_0, M_1 et M_2 d'affixes respectives z_0 ; z_1 et z_2. Déterminer, lorsque θ décrit l'intervalle $[0\,;2\pi[$, le lieu géométrique Γ_1 des points M_1 et M_2.
3. Soit le point G barycentre du système $S = \{(M_0, 1); (M_1, 1); (M_2, -3)\}$.
   a) Démontrer que si θ décrit l'intervalle $[0\,;2\pi[$, alors le lieu géométrique Γ du point G est une ellipse dont on donnera une équation cartésienne.
   b) Déterminer, dans le repère $(O\,;\vec{u};\,\vec{v})$, les coordonnées du centre et des sommets, puis calculer l'excentricité de l'ellipse Γ. Construire Γ dans ce repère.
4. On suppose dans cette question que $\theta = \frac{\pi}{2}$.
   a) Déterminer les coordonnées des points M_0, M_1, M_2 et G. Placer ces points sur la figure précédentes. Quelle est la particularité de G dans ce cas ?
   b) Déterminer puis construire l'ensemble Γ' des points M du plan tels que :

$$MM_0{}^2 + MM_1{}^2 - 3MM_2{}^2 = 6$$

Exercice 2 :

Soit f la fonction numérique définie par : $\begin{cases} f(x) = x(1 - \ln x);\, x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{u};\,\vec{v})$.

1. a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f à droite de $x_0 = 0$, interpréter graphiquement.

   b) Dresser le tableau de variation f.

   c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$. Construire la courbe (C).
2. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose : $\begin{cases} f_n(x) = x^n(1 - \ln x);\, x > 0 \\ f_n(x) = 0 \end{cases}$

Soit (C_n) la courbe représentative de la fonction f_n dans le repère orthonormal (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$).

a) Pour $n \geq 2$, étudier la dérivabilité de f_n à droite de $x_0 = 0$. Interpréter graphiquement.

b) Dresser le tableau de variation de f_n.

3. a) Montrer que toutes les courbes (C_n) passent par trois points communs que l'on déterminera.

b) Etudier la position relative (C_n) et (C_{n+1}).

4. Pour tout entier naturel $n \geq 1$ on pose : $U_n = \int_{\frac{1}{e}}^{1} f_n(x)dx$.

a) Donner une interprétation géométrique de l'intégrale U_n.

b) Justifier sans calcul, que la suite (U_n) est positive et décroissante.

c) Donner l'expression de U_n en fonction de n et calculer $\lim_{n\to+\infty} U_n$.

Exercice 3 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

1. a) Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement.

b) Vérifier que f est impaire, puis dresser son tableau de variation.

c) Tracer la courbe représentative (C) de f dans un repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$) d'unité 1cm.

d) Calculer l'aire A du domaine plan limité par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation x = 0 et x = ln3.

2. On considère la suite numérique (U_n) définie par :

$U_0 = ln3$ et pour tout entier naturel $n \geq 1$: $U_n = \int_0^{ln3} (f(t))^n dt$.

a) Calculer U_1.

b) Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $0 \leq U_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n ln3$. En déduire $\lim_{n\to+\infty} U_n$.

c) Vérifier que pour tout $x \geq 0$ on a : $1 - f'(x) = \left(f(x)\right)^2$.Montrer que pour tout $n \geq 0$:

$$U_{n+1} - U_n = \frac{-1}{n+1}\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}.$$

d) En déduire pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$\begin{cases} U_{2p} = ln3 - \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{2p-1}\left(\frac{4}{5}\right)^{2p-1} \\ U_{2n+1} = ln\frac{5}{3} - \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{2p}\left(\frac{4}{5}\right)^{2p} \end{cases}$$

e) Pour tout entier naturel n ≥ 1, on pose :

$$S_n : \frac{4}{5} + \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{4}{5}\right)^3 + \cdots + \frac{1}{2n}\left(\frac{4}{5}\right)^{2n} = \sum_{p=1}^{2n} \frac{1}{p}\left(\frac{4}{5}\right)^p .$$

Calculer $\lim\limits_{N \to +\infty} S_n$.

Exercice 4 :

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC équilatéral directe de centre G et de coté a, (a > 0). Soient I, J et K les milieux respectifs des segments $[BC], [CA]$ et $[AB]$. L'objectif de cet exercice est l'étude de quelques propriétés de la configuration précédente.

1. a) Faire une figure illustrant les données précédentes que l'on complétera au fur et à mesure. (On pourra prendre la droite (AB) horizontale)

   b) Montrer qu'il existe une unique rotation r_1 qui transforme I en A et B en J.

   c) Déterminer un angle de r_1 et préciser son centre.

2. On considère la rotation r_2 de centre I et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

   a) Déterminer $r_2(C)$, $r_2(J)$.

   b) En enduire l'image de la droite (AC) par r_2 puis la construire.

3. Soit h l'homothétie de centre G et de rapport $k = -\frac{1}{2}$. On pose $s = r_1 \circ h$.

   a) Quelle est l'image du triangle ABC par h ?

   b) Montrer que s est une similitude directe et donner son rapport et son angle.

   c) Déterminer s(A). Que peut-on conclure ?

   d) Donner la forme réduite de s.

4. On pose $s^I = s$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $s^{n+1} = s \circ s^n$.

   a) Caractériser s^3.

   b) Soit $p = 10^{2011}$. Montrer que s^{p-1} est une homothétie de rapport négatif.

5. Pour tout point M du plan, on pose : $r_1(M) = M_1$, $r_2(M) = M_2$ et $s(M) = M'$.

a) **Déterminer M_1, M_2 dans chacune des positions suivantes de M : M est en I ; en K, où en A.**

b) **Montrer que, pour tout M distincts de A, le triangle AMM' est rectangle.**

c) **Déterminer l'ensemble Γ des points M du plan tels que M, M_1 et M_2 soient alignés. (on pourra considérer les triangles IMM_2, KMM_1 et l'angle** $(\overrightarrow{MK};\ \overrightarrow{MI})$.

6. **On suppose dans cette question que M est situé sur le cercle de diamètre $[AC]$, M est distinct du point A. Montrer que :**

a) **La droite (M_1M_2) passe par un point fixe que l'on déterminera.**

b) **La droite (MM') passe par un point fixe que l'on déterminera.**

c) **L'angle $(\overrightarrow{M_1M_2};\ \overrightarrow{MM'})$ à une mesure constante α modulo π que l'on déterminera.**

BACCALAUREAT SESSION 2010

Exercice 1 :

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^x - x - 1$.
   a) Dresser le tableau de variation de f.
   b) En déduire que pour tout réel x : $e^x \geq x + 1$.
2. a) Montrer que pour tout réel x > - 1 : $ln\,(1 + x) \leq x$.
   b) Montrer que pour tout réel x < 1 : $ln\,(1 - x) \leq -x$.
3. On considère la suite numérique (S_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par son terme général :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \text{ c'est-à-dire } S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

a) En utilisant la question 2, montrer que pour tout $n \geq 1$: $S_n \geq ln(n + 1)$.
b) En déduire $\lim_{n \to +\infty} S_n$.

4. Pour tout entier naturel $n \geq 1$ on pose : $U_n = S_n - ln\, n$.
   a) Montrer que pour tout n > 1 : $U_n - U_{n-1} = \frac{1}{4} + ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$. En déduire le sens de variation de (U_n).
   b) En déduire que la suite (U_n) est convergente vers un réel γ, puis vérifier que : $0 < \gamma < 1$ (γ est appelé la constante d'Euler).

Exercice 2 :

Pour tout nombre complexe z on pose : $P(z) = z^3 - (6\cos\theta + i)z^2 + (4 + 5\cos^2\theta + 6i\cos\theta)z - (4 + 5\cos^2\theta)i$ où $\theta \in [0; 2\pi]$.

1. a) Vérifier que $z_0 = 1$ est une solution de l'équation $P(z) = 0$. Déterminer deux nombres a et b tels que pour tout nombre complexe z on a : $P(z) = (z - i)(z^2 + az + b)$.
   b) Déterminer les deux autres solutions z_1 et z_2 de l'équation $P(z) = 0$ sachant que si $\sin\theta > 0, Im z_1 \geq 0$.
2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{u}; \vec{v})$ on considère les points M_0, M_1 et M_2 d'affixes respectives z_0, z_1 et z_2. Soit G le centre de gravité du triangle $M_0M_1M_2$.
   a) Démontrer que si θ décrit l'intervalle $[0; 2\pi]$, alors l'affixe du point G est $z_G = 2\cos\theta + \frac{1}{3}i$.

b) Déterminer puis construire le lieu géométrique **Γ** du point G.

3. a) Démontrer que si **θ** décrit l'intervalle $[0; 2\pi]$, alors le lieu géométrique **Γ'** des points M_1 et M_2 est une ellipse dont on déterminera une équation cartésienne.

   b) Déterminer le centre et les sommets puis calculer l'excentricité de l'ellipse **Γ'**. Construire **Γ'** dans le repère précédent.

Exercice 3 :

1. On considère la fonction u définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $u(x) = x - 2 + lnx$.
   a) Dresser le tableau de variation de la fonction u.
   b) Montrer que u réalise une bijection de $]0 ; +\infty[$ sur un intervalle que l'on déterminera.
   c) Montrer que l'équation u(x) = 0 admet une unique solution **α** puis vérifier que : $1 \leq \alpha \leq 2$.
   d) En déduire le signe de u(x) sur $]0 ; +\infty[$.
2. Soit f la fonction numérique définie par : $\begin{cases} f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + x - \frac{1}{2}x^2 lnx, x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$)d'unité 1 cm.

a) Démontrer que f est continue à droite $x_0 = 0$.

b) Démontrer que f est à droite de $x_0 = 0$. Préciser $f'_d(0)$ et interpréter graphiquement.

c) Montrer que pour tout réel x strictement positif on a : $f'(x) = xu\left(\frac{1}{x}\right)$; où u est la fonction définie la question 1. En déduire le signe de $f'(x)$.

d) Dresser le tableau de variation de f. Montrer que l'équation f(x) = 0 admet dans l'intervalle $]0 ; +\infty[$ une unique solution **β** et vérifier que : $1 \leq \beta \leq 2$.

e) Tracer la courbe (C).

3. Pour tout entier naturel n ≥ 1 on pose : $I_n = \int_{\frac{1}{n}}^{\beta} f(x)dx$.
   a) Exprimer I_n en fonction de **β** et de n. (on pourra utiliser une intégration par partie).
   b) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$ et donner une interprétation graphique de cette limite.

Exercice 4 :

Dans le plan orienté on considère un carré direct ABCD de coté a, (a > 0). Soient I, J, K et L les milieux respectifs des segments $[AB], [BC], [CD]$ et $[DA]$. Le point E est le symétrique de C par rapport à D et F celui de B par rapport à A.

1. **Faire une figure illustrant les données précédentes.**
2. **a) Montrer qu'il existe une unique rotation r qui transforme D en F et C en E. Préciser son angle et Son centre.**

   b) Déterminer deux droites Δ_1 et Δ_2 telle que $r = s_{\Delta_1}\ o\ s_{AC}$ et $r = s_{AB}\ o\ s_{\Delta_2}$.

   c) Déterminer la nature de la composée $\sigma = s_{AB}\ o\ s_{AD}\ o\ s_{AC}$. Puis la carétériser.
3. **a) Prouver qu'il existe une unique similitude s_1 qui transforme D en L et C en D. Préciser son angle et son rapport.**

   b) Soit R le centre de la similitude s_1. Vérifier que R est commun aux cercles de diamètres $[DI]$ et $[CD]$ puis le préciser. Vérifier que R est le point d'intersection des deux droites (CL) et (DI).

   c) On considère l'homothétie h de centre C et de rapport $\frac{1}{2}$. Soit $f = h\ o\ r$. Préciser la nature de f et déterminer f(D) et f(C). Que peut-on remarquer ?

   d) Donner la forme réduite de la similitude s_1.
4. **On considère la similitude directe s_2 qui transforme F en B et B en C.**
   a) **Déterminer l'angle et le rapport de s_2.**
   b) **Soit Q le centre de s_2. Vérifier que Q est le point d'intersection de deux droites (CL) et (BK).**
5. **Soient les points : P intersections des droites (AJ) et (BK) ; S intersections de (AJ) et (DI).**
   a) **Démontrer que : $Q = bar\{(A; -1); (B, 2); (C, 1); (D; 3)\}$.**
   b) **Donner des expressions semblables pour les points P, R et S.**
   c) **Démontrer que PQRS est un carré puis calculer son aire en fonction de a.**
6. **Soit Γ l'ensemble des similitudes directes de centre O (centre du carré ABCD), et qui transforme ABCD au carré PQRS.**
   a) **Prouver que ces similitudes sont de même rapport puis le déterminer.**
   b) **Soit g une similitude de l'ensemble Γ dont l'angle $\theta \in]0 ; \frac{2}{\pi}[$. Donner les valeurs exactes de chacun des nombres $sin\theta$ et $cos\theta$.**
   c) **Donner en fonction de θ les angles possibles des autres éléments de l'ensemble Γ.**

FRATERNITÉ – TRAVAIL - PROGRÈS

SUJETS DES BACCALAUREATS DU NIGER

BACCALAUREAT SESSION 2019

Exercice 1 :

On considère la suite des entiers 31, 331, 3331,…..et on appelle U_n l'écriture de la suite dont l'écriture comporte n fois le chiffre 3.

1) **A l'aide de la somme des termes d'une suite géométrique, démontrer que :**

$$U_n = \frac{1}{3}(10^{n+1} - 7)$$

2) **Cas où n=8,**

a) **Vérifier que $10^2 \equiv -2\ [(17)]$. En déduire le reste dans la division de 10^9 par 17.**

Démontrer que U_8 est divisible par 17.

b) **Justifier que $10^{10} \equiv 1\,[17]$. En déduire que pour tout entier naturel U_{16k+8} est divisible par 17.**

3) **Cas où n=11**

a) **Vérifier que $10^2 \equiv +5\ [19]$. En déduire le reste dans la division de 10^{12} par 19.**

Démontrer que U_{11} est divisible par 19.

b) **Justifier que $10^{18} \equiv 1\,[19]$. En déduire que pour tout entier naturel U_{18k+11} est divisible par 19.**

Exercice 2 :

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel non nul. Pour tout n, on pose :

$$I_n = \frac{(-1)^n}{n!}\int_1^n (lnt)^n\, dt$$

1. a) **A l'aide d'une intégration par partie, montrer que $I_1 = -1$**

 b) **Démontrer que, pour tout n, on a : $I_{n+1} = I_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}e$**

 c) **Prouver que, pour tout n, on a : $I_n = e\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right) - 1$**

2. a) **Démontrer que : $0 \le \int_1^e (lnt)^n\, dt \le e - 1$**

 b) **En déduire que $|I_n| \le \frac{e-1}{n!}$**

 c) **Que peut-on déduire pour la suite (I_n) ?**

2. **Pour tout n on pose :**

$$S_n = \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}$$

Déduire des questions précédentes la limite de la suite (S_n)

Problème :

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

1) A tout point m du plan, on associe le point μ symétrique de m par rapport à la droite Δ d'équation $y = x$, puis m' symétrique de μ par rapport à la droite d'équation : $y = 0$.

f désigne l'application qui à m associe le point m'.

a) Démontrer que si m a pour coordonnées (x, y), m'a pour coordonnées $(y, -x)$.

b) Démontrer que O est le seul point invariant par f.

c) Démontrer que lorsque m est distant de O, Om=Om' et $\left(\overrightarrow{Om}, \overrightarrow{Om'}\right) = -\frac{\pi}{2}$.

En déduire la nature de f.

d) Retrouver la nature de f par des considérations géométriques (sans calcul).

2) T_1 est l'application qui au point m (x, y) associe le point M (X, Y) tel que :

$$\begin{cases} X = 1 + y \\ Y = 1 - x \end{cases}$$

a) Montrer que $T_1 = t \circ f$ où t désigne une translation dont vous précisez le vecteur.

b) Déduisez-en que T_1 est une rotation ; préciser son angle et son centre ω.

c) Le point m décrit la droite Δ, quel est l'ensemble des points M ? Construisez-le.

d) Le point m décrit le cercle C d'équation $x^2 + y^2 = 2$. Quel est l'ensemble des point M ? Construisez-le.

Partie B

1) A tout point m (x, y), l'application T_1 associe le point M'(X', Y') tel que :

$$\begin{cases} X' = x\sin(\theta) + y\cos(\theta) \\ Y' = -x\cos(\theta) + y\sin(\theta) \end{cases} \quad (\theta \text{ désigne un réel quelconque})$$

Montrer que T_1 est une rotation dont on précisera le centre et l'angle. Quelle est l'application T_1 lorsque $\sin(\theta) = 1$?

2) A tout point m (x, y), l'application T_1 associe le point M''(X'', Y'') tel que :

$$\begin{cases} X'' = \alpha + x\sin(\theta) + y\cos(\theta) \\ Y'' = \alpha - x\cos(\theta) + y\sin(\theta) \end{cases} \quad (\alpha \text{ et } \theta \text{ sont des réels quelconques, } \alpha \text{ non nul})$$

a) Montrer que $T_1 = t' \circ T_2$ où t' désigne une translation.

b) Etudier le cas $sin(\theta) = 1$

c) On suppose que $sin(\theta) \neq 1$. Montrer que T_1 est une rotation. Préciser son angle et les coordonnées (x_0, y_0) de son centre Ω.

BACCALAUREAT SESSION 2018

Exercice 1 :

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère n sacs de jetons $S_1, S_2, \dots. S_n$. Au départ le sac S_1 contient 2 jetons noirs et 1 blanc et chacun des autres sacs contient 1 jeton noir et 1 blanc. On se propose d'étudier l'évolution des tirages successifs d'un jeton de ces sacs effectués de la façon suivante :

- **Premier étape : on tire au hasard un jeton de S_1**
- **Deuxieme étape : on place ce jeton dans S_2 et on tire au hasard un jeton dans ce sac**
- **Troisième étape : après avoir placé dans S_3 le jeton sorti de S_2, on tire au hasard un jeton de S_3, et ainsi de suite.**

1) a) Calculer $P(B_1)$ et les probabilités conditionnelles $P_{B_1}(B_2)$, $P_{\overline{B}_1}(B_2)$.

b) En déduire $P(B_2)$

2) Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, la probabilité de B_k est notée p_k

Justifier la relation suivante : $p_{k+1} = \frac{1}{3}p_k + \frac{3}{2}$

3) Etude de la suite (U_k)

On note la suite (U_k) définie par : $\begin{cases} U_0 = \frac{1}{3} \\ U_{k+1} = \frac{1}{3}U_k + \frac{1}{3} \end{cases}$

a) On considère la suite (V_k) définie par $V_k = U_k - 0,5$, pour tout k non nul de N.

Démontrer que la suite (V_k) est géométrique en précisant la raison et le premier terme.

b) En déduire l'expression de V_k puis de U_k en fonction de k.

c) Montrer que la suite (U_k) est convergente et préciser sa limite.

d) On suppose que n=10

Démontrer pour quelle valeur de k on a : $0,499 \leq p_k \leq 0,5$

Exercice 2 :

Dans le plan orienté , ABC est un triangle rectangle en A tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$ et $AC = 2AB$. C_1 Est le cercle de centre B, de rayon AB. C_2 Le cercle de centre C, de rayon AC. Ces deux cercles passent par A. On appelle E leur second point d'intersection.

1. Soit S une similitude directe transformant C_1 en C_2

a) Quelle est le rapport de la similitude S ?

b) Si I désigne le centre de S, quelle est la valeur du rapport $\frac{IC}{IB}$?

c) Quel est l'ensemble F des centres I des similitudes directes transformant C_1 en C_2

2. Soit S_A la similitude directe de centre A transformant B en C.

Démontrer que l'image de E par S_A est le point F diamétralement opposé à E sur C_2.

Problème :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

Soit la fonction *f* définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = x - 2\sqrt{x} + 1$

1. Etudier les variations de la fonction *f*.
2. Démontrer que, pour tout $x \in [0, 1]$, $(f \circ f)(x) = x$. Que peut-on en déduire pour la courbe de *f* ?
3. Construire la courbe C de *f*. (unité graphique : 10 cm)

Partie B

Dans le plan, on considère les points $A_\lambda\left(\frac{1}{2} + \lambda,\ 0\right)$ et $B_\lambda\left(0,\ \frac{1}{2} - \lambda\right)$ où λ est un réel de $\left[-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right]$

On note D_λ la droite déterminée par les points A_λ et B_λ

1. Déterminer une équation de D_λ sous la forme $a(\lambda)x + b(\lambda)y + c(\lambda) = 0$, ou a, b et c sont trois fonctions dérivables de la variable λ que l'on déterminera.
2. Soit D'_λ la droite d'équation $a'(\lambda)x + b'(\lambda)y + c'(\lambda) = 0$, ou a', b' et c' désignent les fonctions dérivées respectives des fonctions a, b et c.

a) Vérifier que, pour toute valeur λ de $\left[-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right]$, D_λ et D'_λ sont sécantes en un point N_λ.

b) Démontrer que les coordonnées (x_λ, y_λ) de N_λ sont : $\begin{cases} x_\lambda = \left(\frac{1}{2} + \lambda\right)^2 \\ y_\lambda = \left(\frac{1}{2} - \lambda\right)^2 \end{cases}$

3. Démontrer que lorsque λ décrit $\left[-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right]$, le point N_λ décrit la courbe C définie dans la partie A.
4. Démontrer que, pour tout λ de $\left[-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right]$, la droite D_λ est tangente en N_λ à la courbe C.

Partie C

A tout point M du plan de coordonnées (x, y) on associe son affixe $z = x + iy$.

On appelle Γ l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie :

$$\left\lceil \frac{z+i\bar{z}}{2} \right\rceil = \left| z - \frac{1}{2}(1+i) \right|$$

1) Démontrer que Γ admet pour équation dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$:

$$x^2 + y^2 - 2xy - 2x - 2y + 1 = 0$$

2) Démontrer que la courbe C définie dans la partie A est incluse dans la courbe Γ

3) Dans cette question, le plan est supposé orienté et $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est un repère orthonormé direct.

Soit $\left(O, \vec{\imath'}, \vec{\jmath'}\right)$ le repère image de $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ dans la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

a) Déterminer une équation de Γ dans le repère $\left(O, \vec{\imath'}, \vec{\jmath'}\right)$.

b) Quelle est la nature de Γ ? quels sont ses éléments caractéristiques ?

BACCALAUREAT SESSION 2017

Exercice 1 :

On rappelle Ω le produit cartésien : $z/5z \times z/5z$ P(Ω) l'ensemble des parties de Ω. Soit p la probabilité définie sur $(\Omega, \mathrm{P}(\Omega))$ pour laquelle tous les événements élémentaires de Ω sont équiprobable.

1. **Déterminer les éléments de Ω.**
2. **Déterminer la probabilité de l'événement E, ensemble des $(x$, y) appartenant à Ω tels que :**

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + 3y = 0 \end{cases}$$

3. **Déterminer la probabilité de l'événement F, ensemble des $(x$, y) appartenant à Ω tels que :**

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + 3y = 0 \end{cases}$$

Exercice 2 :

Pour tout $n \geq 1$, on pose $\mathrm{U}_0 = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{\frac{t}{2}}\,\mathrm{dt}$ et $\mathrm{U_n} = \frac{1}{2^{n+1}n!}\int_0^1 (1-t)^n e^{\frac{t}{2}}\,\mathrm{dt}$

1. **Calculer U_0, U_1 à l'aide d'une intégration par partie.**

Démontrer que pour tout entier n , on a : $\mathrm{U_{n+1}} = \mathrm{U_n} - \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}$

2. **En déduire par récurrence que pour tout entier n**

$$\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{1!} + \frac{1}{2^2}\frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{2^n}\frac{1}{n!} + \mathrm{U_n}$$

3. **a. Montrer que pour tout $t \in [0,1]$ et pour tout entier $0 \leq (1-t)^n e^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{e}$.**

   b. En déduire que pour tout entier n, $0 \leq U_n \leq \frac{1}{2^{n+1}n!}\sqrt{e}$

   c. En déduire la limite quand n tend vers $+\infty$ *de* $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k k!}$

Problème :

Partie A

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère les points : A (a, 0) ; B (0, 2) et C $(0, -2a)$ où a est un réel non nul.

1. **Justifier que (O ; A ; B) est un repère du plan.**

2. Soit f_a l'application affine de P dans P telle que : $f_a(\text{A}) = \text{A}$; $f_a(\text{B}) = \text{B}$ et $f_a(\text{C}) = \text{C}$
   a. Soit M un point de la droite (AB). Exprimer M comme barycentre de A et B.
   b. En déduire que tout point (AB) est invariant par f_a
3. On considère φ_a l'application linéaire associée à f_a
   a. Démontrer que $\varphi_a(\vec{\imath}) = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$ et $\varphi_a(\vec{\jmath}) = (a+1)\vec{\jmath}$.
   b. En déduire l'expression de f_a
4. a. Calculer les coordonnées de $f_a \circ f_a(M)$ où M est un point de coordonnées (x, y).
   b. Montrer qu'il existe une unique valeur a_0 de a pour laquelle $f_a \circ f_a = Idp$
   c. Quel est l'ensemble D des points invariants par f_{a_0} ?
   d. Montrer que pour tout M de P et M'son image par f_{a_0}, $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire à $\vec{\jmath}$ et le milieu de $[\overrightarrow{MM'}]$ appartient à D.
   e. En déduire la nature exacte de f_{a_0}
5. On suppose que a appartient à $\mathbb{R}^*$ et $a \neq 1$. Montrer que f_a est bijective.
6. Soit M (x, y) un point quelconque n'appartenant pas à la droite (AB) et M'son image par f_a

a. Déterminer une équation de la droite (AB).

b. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MM'}$. En déduire que M et M'sont distincts et que $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe.

c. Déterminer les coordonnées de H point d'intersection des droites (MM') et (AB).

d. Déterminer le nombre réel k tel que : $\overline{HM} = k\overline{HM'}$ et montrer que k est indépendant de M.

e. Caractériser f_a(On distinguera les cas $a = -1$ et $a \neq -1$).

Partie B

Soit u l'application de $\mathbb{R}^*_+$ vers $\mathbb{R}$ définie par $u(x) = x + 2 + \frac{lnx}{x}$ et (C) sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. a) Etudier les variations de la fonction v définie par $v(x) = x^2 + 1 - lnx$.
   b) En déduire le signe de v suivant x.
2. a) Etudier les variations de u et dresser son tableau de variation.
   b) Montrer que la courbe (C) admet une asymptote oblique (Δ) au voisinage de $+\infty$.

Etudier la position de la courbe (C) par rapport à (Δ).

c) Tracer (Δ) et (C).

3. **On appelle (C) la transformée de (C) par f_{-2}.**

   a) **Représenter (C') à partir de (C).**

   b) **Ecrire l'équation de la courbe (C) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.**

BACCALAUREAT SESSION 2016

Exercice 1 :

Soit b un entier naturel donné strictement supérieur à 1.

On rappelle que $b^2 - 1 = (b+1)(b-1)$

1) **Quel est le plus grand diviseur commun de b² et b − 1 ?**
2) **Quel est l'ensemble des solutions appartenant à z² de l'équation** $b^2x + (b-1)y = 1$?
3) **Résoudre dans z² l'équation** $9x + 2y = 1$

Exercice 2 :

Soit P le plan affine euclidien rapporté à un repère$(O, \vec{u}, v)$**. Soit A et B deux points de P, on notera** $d(A, B)$ **la distance euclidienne de ces deux points.**

Soit (Γ) l'ensemble des points M de P vérifiant la condition : $\mathrm{d(M,F) + d(M,F') = 4}$ **ou F désigne le point de coordonnées** $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ **et F' le point de coordonnées** $\left(\frac{1}{2}, -2\right)$**.**

1) **Vérifier que (Γ) contient A, B, C, D et E de coordonnées respectives :**

$\left(\frac{1}{2}, -3\right)$; $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$; $(-1, -2)$; $(-1, 0)$ et $(2, 0)$

2) **Quelle est la nature de (Γ) ? Montrer qu'une équation cartésienne de (Γ) dans le repère**

$(O, \vec{u}, v)$ **est** $\dfrac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}{3} + \dfrac{(y+1)^2}{4} = 1$

3) **a) Représenter la courbe (Γ) et les points A, B, C, D et E.**

   b) Soit Mo un point de P de coordonnées (x_o, y_o) **qui n'appartient à la droite (BC) ni à la tangente en B à (Γ) .**

Déterminer les coordonnées du point P d'intersection des droites (DE) et (BMo) ainsi que les coordonnées du point Q d'intersection des droites (AE) et (CMo).

En déduire que les points Mo appartient à (Γ) si et seulement si les points p et G ont la même abscisse.

Problème :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$**. (Unité : 2 cm). On donne le point A de coordonnées (1, 1).**

I. 1) **α étant un réel non nul, soit D la droite d'équation** $x = \alpha$

Montrer qu'il existe une application affine f_α de P dans P, et une seule, que l'on déterminera, qui satisfait aux deux conditions : $f_\alpha(0) = A$ et $\forall M \in D$,$\overrightarrow{Mf_\alpha(M)} = \vec{\imath}$

2) On considère l'application affine f qui, au point M de coordonnées (x, y) de P, fait correspondre le point M'de coordonnées (x', y') de P telles que :

$x' = x + 1$ **et** $y' = x + y + 1$

Vérifier que $f = f_\alpha$ dans le cas $\alpha = -1$. Montrer que f est une bijection du plan.

Y'a-t-il des points invariants par f ? quelle est la matrice de l'endomorphisme φ associé à f ?

3) a. Vérifier sue, quel que soit le réel λ, les vecteurs $\vec{\imath} + \lambda\vec{\jmath}$ et $\varphi(\vec{\imath} + \lambda\vec{\jmath})$ forment une famille libre.

b. Soit Δ une droite du plan ; donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'elle soit parallèle à son image $f(\Delta)$.

4) Chercher l'image $f(\Delta)$ de droite Δ dans chacun des cas suivants :

a) Δ a pour équation $x = k$.

b) Δ a pour équation $y = k$.

c) Δ a pour équation $y = tx$; calculer dans ce cas les coordonnées du point f' d'intersection des droites (Δ) et $f(\Delta)$ en fonction de t. Quel est l'ensemble π décrit par P lorsque t décrit ℝ ?

Tracer les droites (Δ) et $f(\Delta)$; dans le cas des droites Δ ayant respectivement pour équation :

$x = 1$; $y = -1$; $y = -2x$

5) On pose $M_0 = 0$, $M_1 = f(M_0)$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $M_n = f(M_{n-1})$

Soit (x_n, y_n) les coordonnées de M_n

a) Exprimer x_n et y_n en fonction de x_{n-1} et y_{n-1}. En déduire x_n et y_n en fonction de n.

b) Vérifier que $\forall n \in N$, M_n appartient à la courbe (C') d'équation $y = \frac{x(x+1)}{2}$.

6) Si une courbe Γ a pour équation $y = h(x)$, montrer que son image $f(\Gamma)$ a pour équation : $y = h(x - 1) + x$

II. On considère l'application h_0 de ℝ dans ℝ définie par $h_0(x) = e^{-x} - 1$; soit Γ_0 sa représentation graphique.

1) Montrer que son image $f(\Gamma_0)$ est la représentation graphique de l'application h_1 de ℝ dans ℝ définie par $h_1(x) = e^{1-x} - 1 + x$

2) a) Etudier les variations des applications h_0 et h_1.

b) Représenter sur la même figure Γ_0 et $f(\Gamma_0)$ en désignant soigneusement l'asymptote de chacune d'elles.

3) λ étant un réel supérieur à 1, calculer en fonction de λ l'aire $A(\lambda)$ de la partie du plan limitée par les droites d'équation $x = 1$ et $x = \lambda$, la courbe $f(\lambda_0)$ et son asymptote.

Calculer la limite de $A(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

BACCALAUREAT SESSION 2015

Exercice 1 :

Dans l'exercice, on donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

Une urne contient trois boules noires et une boule blanche. On considère l'expérience suivante : On lance un jeton parfaitement équilibré, présentant une face noire et une face blanche. Si le jeton tombe sur la face blanche on ajoute une boule blanche dans l'urne ; Si le jeton tombe sur une face noire on ajoute une boule noire dans l'urne. Puis, on tire simultanément et au hasard, trois boules de l'urne.

1) On considère les événements suivants :

E_0 : aucune boule blanche ne figure parmi les boules tirées.

B : le jeton est tombé sur la face blanche.

a) Calculer $P(E_0 \cap B), P(E_0 \cap \overline{B})$ puis $P(E_0)$.

b) On tire trois boules de l'urne, aucune boule blanche ne figure dans ce tirage. Quelle est la probabilité que le jeton soit tombé sur la face noire.

2) On appelle E_1 l'événement : une boule blanche et une seule figure parmi les trois boules tirées et B l'événement : le jeton est tombé sur la face blanche.

a) Calculer la probabilité de l'événement E_1

b) On effectue successivement quatre fois l'expérience décrite au début, qui consiste à lancer le jeton, puis à tirer les trois boules de l'urne.

Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois, une et une seule boule blanche ?

Exercice 2 :

Soit E l'ensemble des éléments de $\mathbb{Z}$ tels que, simultanément : $\begin{cases} x \equiv 2\ (mod.3) \\ x \equiv 2\ (mod.5) \\ x \equiv 2\ (mod.5) \\ x \equiv 2\ (mod.9) \end{cases}$

1. Préciser l'ensemble E, déterminer les éléments de E compris entre -1000 et -500.

2. Déterminer le PGCD des deux éléments consécutifs de E.

3. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $943x + 628y = 5$

Problème :

Le plan affine euclidien P étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

A. 1) Soit $F_{a,b}$ l'application de P vers P qui, au point M de coordonnées d'affixe $z = x + iy$ associe le point M' dont l'affixe $z' = x' + iy'$ $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

a) Etablir les formules qui expriment les coordonnées (x', y') de M'en fonction des coordonnées (x, y) de M.

b) Suivant les valeurs de a et b, recherche les points invariants de $F_{a,b}$.

c) Si $|a| \neq -1$, établir que $F_{a,b}$ est la composée de la symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $y = \frac{b}{a+1}$ par une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.

2) Soit $G_{c,d}$ l'application de p vers P qui, au point N de coordonnées d'affixe $z = x + iy$, associe le point N'd'affixe $z' = x' + iy'$ est définie par : $z' = cz + id$, $(c, d) \in \mathbb{R}^*$

Déterminer suivant les valeurs de c et d, la nature de $G_{c,d}$

B. 1) Dans cette question $|a| \neq 1$ et le point M_1 d'affixe $u_1 = x + iy$. On pose $M_2 = F_{a,b}(M_1)$ et plus généralement pour n entier strictement positif, $M_{n+1} = F_{a,b}(M_n)$.

a. Montrer que M_n à pour affixe $u_n = a^n + ib\dfrac{1-(-a)^n}{1+a}$

b. Montrer que les points u_n appartient à la réunion de deux droites dont l'une D_1 passe par le point A $\left(0, \frac{b}{1+a}\right)$ et M_1, alors que l'autre D_2 est la transformée de D_1 par $F_{a,b}$.

2) Dans cette question on pose $c \neq 1$ et le point N_1 d'affixe $u_1 = c + id$

On pose $N_2 = G_{c,d}(N_1)$ et plus généralement pour n entier strictement positif, $N_{n+1} = G_{c,g}(N_n)$

Montrer que N_n a pour affixe $v_n = c^n + id\dfrac{1-(c)^n}{1-c}$

a. Montrer que les points N_n, n éléments de $\mathbb{N}^*$, appartiennent à une droite A passant par le point B $\left(0, \frac{d}{1-c}\right)$ et N_1

3) On considère le cas particulier $d = -a$ et $d = b$ avec $|a| \neq 1$. Montrer que A =D_2.

C. Soit ϕ_1 la fonction numérique définie par $\phi_1(x) = xe^{\frac{1}{x}} - 2$

1) Etudier les variations de ϕ_1 et construire sa courbe représentative (C_1) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On montrera que la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote à (C_1).

2) On considère $c = 2$ et $d = 1$. Pour tout n, entier naturel, on note ϕ_{n+1} la fonction dont la courbe représentative C_{n+1} est l'image de la courbe (C_n) de ϕ_n par $G_{1,2}$.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\phi_n(x) = xe^{\frac{2^{n-1}}{x}} - 2^{n-1} - 1$

3) a) Montrer que pour tout n, entier naturel non nul, les courbes (C_n) ont même asymptotes.

b) Soit S_n le point de (C_n) en lequel la tangente a la direction définie par $\vec{\imath}$, montrer que l'ensemble de ces points, lorsque n décrit N, est inclus dans une droite passant par B(0, -1).

BACCALAUREAT SESSION 2014

Exercice 1 :

Une urne contient deux jetons : sur l'un est inscrit le nombre 2 et sur l'autre le nombre -4.

On tire trois fois de suite un jeton de l'urne en remettant dans l'urne le jeton tiré précédemment.

Si a, b, c désignent les nombres obtenus dans cet ordre, au triplet (a, b, c) on associe l'équation dans R : $ax^2 + bx + c = 0 \quad (E)$

On suppose que tous les triplets ont la même probabilité d'être obtenus. On désigne par Ω l'univers des éventualités.

1) **Déterminer les éléments de Ω**
2) **On définit sur Ω la variable aléatoire X qui, à un élément de Ω, associe le nombre de solutions de l'équation (E).**

a) **Déterminer la loi de probabilité de X.**
b) **Calculer l'espérance mathématique et l'écart type de X.**
c) **Définir et représenter la fonction de répartition F de X.**

Exercice 2 :

Etant donné deux nombres complexes a et b tels que a ≠ 0 , a ≠ 1 et b ≠ 0, on définit la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **par :** $\begin{cases} z_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ z_{n+1} = az_n + b \end{cases}$

Dans un plan P rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$**, on notera Mn le point d'affixe** z_n

1) **Montrer par récurrence que, pour tout** $n \geq 1$**, on a :**

$$z_n = \frac{b(1 - a^n)}{1 - a}$$

2) **P étant un entier naturel supérieur ou égal à 2, on pose dans cette question**

$$a = cos\left(\frac{2\pi}{p}\right) + isin\left(\frac{2\pi}{p}\right)$$

Montrer qu'alors la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **est périodique de période p.**

3) **A étant un réel donné différent de** $k\pi$ **quel que soit l'entier k, on pose dans cette équation**

a = $cos2\alpha + isin2\alpha$

b = $2sin\alpha$

a) Quelle est la nature de l'application F qui au point M du plan P d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = az + b$? Préciser les éléments caractéristiques de F.

b) En déduire que les points Mn sont sur un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

c) Faire une figure pour $\alpha = \frac{\pi}{6}$ et placer les points M_0, M_1, M_2, M_3, M_4 dans ce cas particulier.

Problème :

Le plan affine euclidien P étant rapporté à un repère cartésien orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère l'application affine T de P qui, au point M de coordonnées (x, y), associe le point M' de coordonnées (x', y') défini par : $x' = (2n + 1)x - 2ny$, $y' = 2nx + (1 - 2n)y$ où n désigne un paramètre élément de Z.

A) 1) Montrer que T_n est une bijection de P sur P.

2) On se propose d'étudier T_1 correspond à la valeur n=1 du paramètre.

a) Déterminer l'ensemble de point de P invariants par T_1.

b) Lorsque M'est distant de M, établir que (MM') a une direction fixe que l'on précisera.

c) Soit S la symétrie ponctuelle par rapport à la droite (D) d'équation $y = x$ suivant la direction définie par $\vec{\jmath}$. Démontrer que $T_1 = S'°S$ où S désigne une application affine que l'on déterminera par ses équations.

d) L'applicationT_1 est-elle involutive ?

B) Soit T l'ensemble des applications T_n.

1) a et b étant deux entiers relatifs. Montrer que $T_a°T_b = T_{a+b}$

2) pour tout entier naturel n strictement supérieur à 1, on pose :

$T_1° T_1 = T_1^2$; $T_1° T_1^2 = T_1^3$; … ; $T_1° T_1^{n-1} = T_1^n$;

Montrer que $T_1^n = T_1$

En déduire que tout ensemble de point globalement invariant par T_1 est globalement invariant par n.

C) Dans cette partie, on suppose que M décrit la courbe (H) dont l'équation cartésienne dans le repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est $y^2 - 3x^2 = 1$

1) Quelle est la nature de la courbe (H) ? Préciser ses asymptotes, son centre et ses sommets.

2) Déterminer l'équation cartésienne de l'image (H') de (H) par T_1. Nature de (H') ?

Préciser ses asymptotes, son centre et ses sommets.

3) Tracer (H) et (H') dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Montrer que (H') est aussi l'image de (H) par la symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $y = x$

D) Soit r la rotation de centre O dont une détermination de la mesure de l'angle est α.

1) Définir analytiquement cette isométrie dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

2) Déterminer une équation cartésienne de l'image (H'') de (H) par r.

3) Dans le cas particulier où $= -\frac{\pi}{6}$, écrire l'équation cartésienne de (H'') sous la forme $y = f(x)$.

4) Etudier la variation de la fonction g de ℝ vers ℝ définie par :

$$g(x) = \frac{1 + 2x^2}{2\sqrt{3}x}$$

Construire la courbe représentative de g dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. (Faire une autre figure).

On prendra 2 cm par unité sur chacun des axes de coordonnées.

BACCALAUREAT SESSION 2013

Exercice 1 :

1) Un nombre s'écrit $\overline{x43y}$ dans le système de numérotation dont la base est 7.

Déterminer x et y de manière que ce nombre soit divisible par 6.

2) Trouver le reste du nombre 564^{2013} lorsqu'on le divise par 31.

3) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $546x + 905y = 186$.

Exercice 2 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{xln2} + \frac{1}{4} e^{-xln2}$

1) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

2) Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité 1 cm).

Tracer la courbe (C).

3) Calculer l'aire A de la partie du plan comprise entre la courbe (C), les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Problème :

Soit P le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

A) 1) Soit ϕ l'application de p dans P qui au point M (x, y) associe le point M'(x', y') tel que :

$$\begin{cases} x' = y - 4 \\ y' = x + 4 \end{cases}$$

Montrer que ϕ est une isométrie de P que l'on précisera.

2) Soit a un paramètre réel appartenant à $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$ et f_a la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$f_a(x) = \frac{(a+2)x}{x + 2 - a}$$

On appelle (C_a) la courbe représentative de f_a dans le repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

a) Montrer que pour a de $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$, (C_a) est globalement invariante par ϕ

b) Montrer que toutes les courbes (C_a) passent par deux points indépendants de a

c) Etudier les variations de f_a.

B) Soit Ω_α le point de coordonnées $(\alpha - 2, \alpha + 2)$ dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de P et les vecteurs :

$$\vec{\mathrm{I}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{\imath} - \vec{\jmath}) \quad \text{et} \quad \vec{\mathrm{J}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{\imath} + \vec{\jmath})$$

1) **Montrer que $\left(\Omega_{\alpha}, \vec{\mathrm{I}}, \vec{\mathrm{J}}\right)$ est un repère orthonormé de P.**

2) **Déterminer une équation de (C_a) dans le repère $\left(\Omega_{\alpha}, \vec{\mathrm{I}}, \vec{\mathrm{J}}\right)$. En déduire que (C_a) est une hyperbole équilatère.**

3) **a) Soit (D) la droite d'équation $y = x + 4$ dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Montrer que pour tout point M de (D), à l'exclusion d'un seul que l'on précisera, passe une courbe (C_a) unique.**

b) Montrer que (C_a) a ses sommets sur (D) si et seulement si $|a| > 2$.

C) Dans cette partie on suppose que $\alpha \in [0,\ 2\alpha]$.

Soit (U_n) la suite numérique définie par son premier terme U_0 et la relation de récurrence :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{U}_{n+1} = f(\mathrm{U}_n)$. On suppose que $\mathrm{U}_0 \in [0,\ 2\alpha]$.

1) **Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{U}_0 \in [0,\ 2\alpha]$. En déduire que la suite (U_0) est partout définie dans $\mathbb{N}$**

2) **On suppose que U_0 est différent de 0 et de 2α.**

a) **Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{U}_n \neq 0$ et $\mathrm{U}_n \neq 2$**

b) Soit $(\mathrm{V_n})$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $\mathrm{V}_n = \dfrac{\mathrm{U}_n}{\mathrm{U}_n - 2\alpha}$

Montrer que $(\mathrm{V_n})$ est une suite géométrique dont on précisera la raison en fonction de α.

BACCALAUREAT SESSION 2012

Exercice 1 :

Soit, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$; les ensembles (Γ_1) et (Γ_2) des points de M d'affixe 2 satisfaisant respectivement aux conditions :

$$(\Gamma_1) : \ |z - 3 - 2i| = \frac{1}{\sqrt{3}} \left| \frac{z - \bar{z} - 8i}{2} \right| \quad ; \quad (\Gamma_2) : \ |z - 3 - 2i| = \sqrt{3} \left| \frac{z - \bar{z} - 8i}{2} \right|$$

$\bar{z}$ Désigne-le conjugué de z.

1) **Déterminer la nature de (Γ_1) et construire (Γ_1).**
2) **Déterminer la nature et les éléments caractéristiques (centre, foyers et asymptotes éventuellement) de (Γ_2)**

Exercice 2 :

1) **Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 1 - xe^{-x}$.**

Etudier les variations de g et en déduire que g est strictement positive sur $\mathbb{R}$

2) **Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - 1 + (x+1)e^{-x}$.**

Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

3) **Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité 1 cm).**

Tracer la courbe (C).

4) **Calculer l'aire A de la partie du plan comprise entre la courbe (C), la droite d'équation $y = x - 1$, les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$**

Problème :

Soit P le plan vectoriel euclidien muni de la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, P le plan affine euclidien muni du repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit S l'application affine du plan qui au point M $(x$, y) associe le point M'(x_1, y_1) tel que :

$$\begin{cases} x_1 = x \\ y_1 = x - y \end{cases}$$

A) 1) Montrer que S est la symétrie affine par rapport à la droite affine (Δ) d'équation : $x - 2y = 0$, suivant la droite vectorielle (D) de base $\vec{\jmath}$. Soit σ l'endomorphisme associé à S.

On appelle F l'ensemble des applications affines bijectives f de P dans P telle que $f \circ S = S \circ f$

2) Soit g la fonction de P dans P qui au point M (x, y) associe le point M'(x', y') tel que :

$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x + 1 \\ y_1 = -\frac{3}{4}x + y + \frac{1}{2} \end{cases}$$

Montrer que $g \in F$

3) Soit f une application affine bijective de P dans P d'endomorphisme associée à ϕ

a) Démontrer que f est un élément de F si et seulement si les trois conditions suivantes sont réalisées simultanément :

$$\begin{cases} f(0) \in (\Delta) \\ \forall a \in \mathbb{R}^*, \ \phi(2\,\vec{\imath} + \vec{\jmath}) = a(2\,\vec{\imath} + \vec{\jmath}) \\ \forall b \in \mathbb{R}^*, \quad \varphi(\vec{\jmath}) = b(\vec{\jmath}) \end{cases}$$

b) Ecrire alors en fonction de a et b la matrice A de ϕ dans la base ($\vec{\imath}, \vec{\jmath}$).

4) a) Préciser les couples (a, b) pour que f soit une homothétie.

b) Préciser les couples (a, b) pour que f soit une translation.

5) On appelle F_1 le sous ensemble des éléments de F dont l'endomorphisme associé ϕ vérifie $\varphi(\vec{\jmath}) = \vec{\jmath}$

a) Soit f_1 un élément de F_1

Démontrer que M de coordonnées (x, y) a pour image de coordonnées $f_1(M) = M'(x', y')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = ax + 2\alpha \\ y_1 = \dfrac{a-1}{2}x + y + \alpha \end{cases} \qquad \text{avec } a \in \mathbb{R}^* \ \ et \ \ \alpha \in \mathbb{R}^*$$

Quel est l'ensemble des points invariants par f_1 ? (On discutera suivant les valeurs de a et α).

b) Vérifier que l'application g proposé au point 2) est un élément de F_1

On note $M' = g(M)$

c) Déterminer l'ensemble (E) des points invariants par g.

d) Si M n'est pas invariant par g, montrer que la droite (MM') garde une direction indépendante de M que l'on précisera.

e) Calculer alors les coordonnées du point M_1 commun à la droite (MM') et à (E).

f) Comparer $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{M_1M}$.

B) On considère H la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$H(x) = e^x + \frac{1}{2}x$ et (Γ) sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

1) Soit f_1 un élément quelconque de M_1

Déterminer une équation de l'image de (Γ) par f_1.

2) Soit $(m, p) \epsilon \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ et $(C_{m,p})$ la courbe d'équation : $y = e^{mx+p} + \frac{1}{2}x$ dans le repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Montrer que $(C_{m,p})$ est l'image de (Γ) par une application appartenant à F_1.

BACCALAUREAT SESSION 2011

Exercice 1 :

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} xe^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x^2 \ln x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1. **f est-elle dérivable au point $x = 0$?**
2. **Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.**
3. **Soit Γ la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité 2 cm).**

Montrer que la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote à Γ. Tracer Γ

4. **Soit $\alpha \in]0, 1]$. Calculer l'aire $A(\alpha)$ de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = \alpha$ et $x = 1$ et la courbe Γ. (on pourra utiliser une intégration par parties). Calculer la limite de $A(\alpha)$ lorsque α tend vers zéro.**

Exercice 2 :

On considère les trois entiers naturels a, b, c qui s'écrivent dans la base n

$a = 111.$ $\qquad$ $b = 114.$ $\qquad$ $c = 13054.$

1. **Sachant que $c = ab$, déterminer n, puis l'écriture de chacun des nombres a, b, c dans le système décimal.**
2. **Vérifiez, en utilisant l'algorithme d'Euclide, que a et b sont premiers entre eux.**

En déduire les solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $ax + by = 1$

Problème :

A) **Le plan affine euclidien P est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, a, b, c étant tris réels donnés. T est l'application affine de P dans P qui associe au point M de coordonnées (x, y) le point M'=T(M) de coordonnées $x' = x$, $y' = ax + by + c$**

1. **Quelle est la nature de T dans les cas particuliers suivants :**
   a) $a = c = 0$, $b = 1$
   b) $a = 0$, $b = 1$, $c \neq 0$
   c) $b = 0$
2. **a) Ecrire la matrice de l'application linéaire associée à T dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.**

   b) A quelle condition doivent satisfaire les réels a, b, c pour que T soit bijective ?

   c) A quelle condition doivent satisfaire les réels a, b, c pour que T soit involutive ?

3. Déterminer l'ensemble I des points invariants de P par T. (On distinguera la nature de I suivant les paramètres (a, b et c).

4. On suppose que les réels a, b, c sont tels que T est involutive et que l'ensemble I des points invariants est une droite. Soit Mo un point de P n'appartenant pas à I, $M'_0 = T(M_0)$, M est un point de P tel que la droite (MM_0) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées et $M' = T(M)$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que les deux droites, (MM_0) , (M'_0M') soient parallèles.

5. Montrer que la transformée T est déterminée si l'on suppose qu'elle admet pour ensemble i des points invariants la droite d'équation $y = x + 1$ et que le point M_0 de coordonnées (3, -2) à pour image M'_0 de coordonnées (3, 1). (Pour ce faire on déterminera les réels a, b, c correspondants à T).

Vérifier que dans ce cas T est bijective.

B) On suppose les réels a, b, c donnés avec $b \neq 0$. On désigne par t la translation de P de vecteur $-\vec{\imath}$, f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et Γ la courbe d'équation $y = f(x)$ dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Montrer que si f est telle que $T(\Gamma) = t(\Gamma)$ alors $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+1) = ax + bf(x) + c$
2. Soit β un réel. Déterminer les fonctions g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ deux fois dérivables et telles que :

$\forall x \in \mathbb{R}, g''(x) = g''(0)e^{\beta x}$. (On distinguera deux cas : $\beta = 0$ et $\beta \neq 0$).

3. On suppose $b > 0$ et on se propose de déterminer les applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ deux fois dérivables satisfaisant à la condition :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x+1) = ax + bf(x) + c \quad \text{et telle que } \forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = f(0)e^{x\ln b}$$

En utilisant les résultats de la question 2 précédente, montrer que les fonctions solutions sont telles que :

a) Si $b = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{a}{2}x^2 + \left(c - \frac{a}{2}\right)x + f(0)$

b) Si $b \neq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{a}{1-b} + \left[\frac{c}{1-b} - \frac{a}{(1-b)^2}\right]\left(1 - e^{x\ln b}\right)x + f(0)e^{x\ln b}$

BACCALAUREAT SESSION 2010

Exercice 1 :

1) Etudier l'application f de $\mathbb{R}$ dans l'intervalle $]-1,1[$ définie par :

$$f(x)=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$

Tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

2) Expliquer pourquoi f admet une application réciproque g. Pour y donné dans $]-1,1[$, calculer $g(y)$.

3) Montrer que g est dérivable sur l'intervalle $]-1,1[$ et calculer $g'(y)$.

4) Quelle est la valeur de l'intégrale

$$I=\int_{1}^{\frac{1}{3}}\frac{dt}{1-t^2}$$

Exercice 2 :

n étant un entier naturel, on pose : $A_n=2^n+2^{2n}+2^{3n}$.

1) Montrer que, pour tout n, A_{n+1} est congru à A_n modulo 7.

En déduire les entiers n tels que A_n soit divisible par 7.

2) Les nombres qui, dans le système de numération à base 2 s'écrivent :

a) 1110 b) 1010100 c) 1001001000

Sont-ils divisibles par 7 ?

Problème :

Le plan affine euclidien P est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. Soient T_1 et T_2 les transformations de P vers P, telles que si (x, y) sont les coordonnées d'un point quelconque m de P, $(x_2,\ y_2)$ celles de $M_1=T_1(M)$ et $(x_2,\ y_2)$ celles de $M_2=T_2(M)$, on a :

$$\begin{cases} x_1=x \\ y_1=-\sqrt{2}x-y \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=-x-\sqrt{2}y \\ y_2=y \end{cases}$$

1) On étudie l'ensemble des points m de $P-\{O\}$, c'est-à-dire l'ensemble des points P distincts de l'origine, tels que $\overrightarrow{OM_1}=\lambda_1\,\overrightarrow{OM}$, λ_1 désigne un nombre réel.

a) Montrer qu'il n'existe que deux valeurs possibles pour λ_1 afin que cette condition soit satisfaite : $\lambda'_1=+1$ et $\lambda''_1=-1$

b) Déterminer l'ensemble Δ'_1 des points M tels que $\overrightarrow{O\mathrm{M}_1} = \overrightarrow{\mathrm{OM}}$, et l'ensemble Δ''_1 des points M tels que $\overrightarrow{O\mathrm{M}_1} = -\overrightarrow{\mathrm{OM}}$.

c) Montrer qu'à tout point M de P, un couple unique de points $(\mathrm{M}'_1, \mathrm{M}''_1), \mathrm{M}'_1 \in \Delta'_1$ et $\mathrm{M}''_1 \in \Delta''_1$ tel que $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{O\mathrm{M}'_1} + \overrightarrow{O\mathrm{M}''_1}$

2) On étudie la même façon l'ensemble des points M de $P - \{O\}$, tels que $\overrightarrow{O\mathrm{M}_2} = \lambda_2\,\overrightarrow{\mathrm{OM}}$, où λ_2 est un réel.

a) Montrer qu'il n'existe que deux valeurs possibles pour λ_2 : λ'_2 et λ''_2.

b) Déterminer les ensembles Δ'_2 et Δ''_2 telles que $\overrightarrow{O\mathrm{M}_2} = \lambda'_2\,\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ et $\overrightarrow{O\mathrm{M}_2} = \lambda''_2\,\overrightarrow{\mathrm{OM}}$

c) Montrer qu'à tout point M de P, correspondent de manière unique deux points : $\mathrm{M}'_2 \in \Delta'_2$ et $\mathrm{M}''_2 \in \Delta''_2$, tels que $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{O\mathrm{M}'_2} + \overrightarrow{O\mathrm{M}''_2}$

d) Déterminer la nature de la transformation T.

A. On pose $\mathrm{T} = \mathrm{T}_1 \circ \mathrm{T}_2$, $\mathrm{P} = \mathrm{T}(\mathrm{M}) = \mathrm{T}_1(\mathrm{T}_2(\mathrm{M}))$. On désigne par (u, v) le couple des coordonnées de P.

1) Calculer u et v en fonction de x et y, puis x et y en fonction de u et v.

2) a) Montrer analytiquement que l'image par T d'une droite est une droite (on se donnera une droite par une équation cartésienne $ax + by + c = 0$).

b) Une droite peut-elle être parallèle à sa transformée ? orthogonale à sa transformée ?

$B.\ \vec{I} = \vec{\imath} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\vec{\jmath}$ et $\vec{J} = \vec{\imath} - \sqrt{2}\vec{\jmath}$

1) Montrer que $\vec{I}$ est un vecteur directeur d'une droite dont les points sont invariants par T_1 et que $\vec{J}$ est un vecteur directeur d'une droite dont les points sont invariants par T_2.

2) Soient (X, Y) le couple de coordonnées de M et (U, V) le couple de coordonnées de $\mathrm{P} = \mathrm{T}(\mathrm{M})$ dans le repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Calculer U et V en fonction de X et Y, puis X et T en fonction de U et V.

3) Soit (H) l'hyperbole d'équation XY=K (k le nombre réel fixé) dans le nouveau repère $(O, \vec{I}, \vec{J})$.

Soit (C) la transformée de (H) par T.

a) Déterminer les équations de (C)=T(H), d'une part dans le nouveau repère $(O, \vec{I}, \vec{J})$ et d'autre part dans l'ancien repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

b) Montrer que la courbe (C) admet deux asymptotes qui sont les transformées par T des asymptotes de (H).

UNITÉ – TRAVAIL - PROGRÈS

SUJETS DES BACCALAUREATS DE LA REPUBLIQUE DU CONGO

BACCALAUREAT SESSION 2019

Exercice 1 :

On considère l'équation (E) : $109x - 226y = 1$ où x et y sont des entiers relatifs.

1) **Déterminer le PGCD de 109 et 226.**
2) **Que peut-on conclure pour l'équation (E) ?**
3) **Vérifier que 141 est l'inverse de 109 modulo 226.**
4) **a. Montrer que l'équation (E) est équivalente à l'équation (E') : $109x \equiv 1[226]$.**

   b. Résoudre l'équation (E').

   c. En déduire les solutions de (E).

Exercice 2 :

Dans le plan orienté, on considère un carré ABCE de sens direct, de centre O.

D est le symétrique orthogonal du point O par rapport à la droite (BC). K et O′ sont les milieux respectifs des segments [BD] et [BC].

On désigne par G le symétrique du point C par rapport à B.

1) **Faire une figure. On disposera [BC] horizontalement, et on prendra BC = 6 cm.**
2) **Soit f la rotation qui transforme O en D et A en C.**

   a. **Déterminer le centre de la rotation f.**

   b. **Déterminer une mesure θ de l'angle de f.**

   c. **Prouver que $f^{-1} = S(BO) \circ S(BA)$ où $S(BO)$et $S(BA)$ désignent respectivement les symétries orthogonales d'axes (BO) et (BA), est la réciproque de f.**
3) **Soitg $= S(OD)$ $R_{(B,\pi/2)}$, $R_{(B,\frac{\pi}{2})}$ désigne la rotation de centre B et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$.**

   a. **Justifier que g est une symétrie glissée.**

   b. **Déterminer g(B) et g(C).**

   c. **En calculant $(g \circ g)(B)$, montrer que le vecteur de g est $\vec{u} = \overrightarrow{BO}$.**

   d. **En déduire que l'axe de g est la droite (KO′).**

   e. **Déterminer l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que: $g(M) = f^{-1}(M)$.**
4) **Soit $(\mathcal{H})$ l'hyperbole d'excentricité $e = 2$, de foyer C et de directrice associée (BA).**

   a. **Soit J le point du plan, tel que $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.**

Montrer que G et J sont les sommets de $(\mathcal{H})$.

b. Placer le centre Ω de $(\mathcal{H})$.

c. Tracer les asymptotes (Δ_1) et (Δ_2) de $(\mathcal{H})$.

d. Tracer $(\mathcal{H}_0)$, la branche de l'hyperbole dont le sommet est J.

e. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(B, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$.

En utilisant la définition monofocale de $(\mathcal{H})$ appliquée au foyer C, montrer qu'une équation cartésienne de $(\mathcal{H})$ dans ce repère est: $3x^2 + 2x - y^2 - 1 = 0$.

Exercice 3 :

1) Résoudre l'équation différentielle $(E) y'' + 3y' + 2y = 0$.

2) Déterminer la solution particulière h de (E) qui admet en x = 0 un extremum égal à 1.

3) Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -e^{-2x} + 2e^{-x}$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(0; \vec{i}\,; \vec{j}\,)$

a. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. On admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

b. Déterminer la dérivée f' de f.

c. Étudier le sens de variation de f.

d. Dresser le tableau de variation de f.

e. Trouver le point d'intersection de la courbe (C) avec l'axe des abscisses.

f. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$.

g. Tracer (C).

Exercice 4 :

On dispose de deux urnes U_1 et U_2. L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires. L'urne U_2 contient deux boules blanches et deux boules noires. Dans chacune des urnes, les boules sont indiscernables au toucher.

On lance sur une table un dé cubique non truqué, dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

- **le nombre apparu sur la face supérieure du dé est inférieur ou égal à 2, on tire une boule dans l'urne U_1;**
- **Si le nombre apparu sur la face supérieure du dé est strictement supérieur à 2, on tire une boule dans l'urne U_1**

On note u_1 et u_2 les événements suivants:

u_1: « le tirage s'effectue dans l'urne U_1 »

u_2: « le tirage s'effectue dans l'urne U_2 »

B: « Obtenir une boule blanche »

N: « Obtenir une boule noire »

1) **a. Montrer que la probabilité de l'événement u_1 est $\frac{1}{3}$.**

   b. En déduire la probabilité de l'événement U_2.
2) **Traduire par un arbre de probabilités, les données de l'énoncé.**
3) **Montrer que la probabilité de tirer une boule noire est égale à $\frac{8}{15}$.**
4) **On a tiré une boule noire. Calculer la probabilité qu'elle provienne de l'urne U_1.**

BACCALAUREAT SESSION 2018

Exercice 1 :

On considère le système d'équation (S) défini par:

$$(S) : \begin{cases} x \equiv 2[36] \\ x \equiv 3[25] \end{cases}$$

1) **Montrer que le système (S) est équivalent à l'équation $(E) : 36a - 25b = 1$ où a et b désignent des entiers relatifs.**
2) **Vérifier que le couple $(-9, -13)$ est une solution de (E).**
3) **Montrer que l'équation (E) est équivalente à l'équation $(E') : 36a \equiv 1\,[25]$.**
4) **Donner l'inverse modulo 25 de 36.**
5) **En déduire les solutions de (E').**
6) **a. Déterminer les solutions de l'équation (E).**

   b. En déduire les solutions du système (S) telles que $0 < x < 50$.

Exercice 2 :

Dans le plan orienté $(\mathbb{P})$, on considère un carré ABCD de centre O tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$.

E, F, G et H désignent les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD], [DA].

(C_1) est le cercle circonscrit au triangle ABD.

I est le symétrique de O par rapport à G.

1) **Faire une figure que l'on complétera. On prendra AB = 4 cm et on placera (AB) horizontalement.**
2) **Soit (Γ) l'hyperbole de rectangle fondamental le carré ABCD et d'axe non focal la droite (EG).**
   a. **Préciser le foyer J de (Γ) situé sur la demi-droite [OF).**
   b. **Préciser la directrice $(\mathcal{D})$ de (Γ) associée au foyer J.**
   c. **Construire le point K de (Γ) situé sur le segment [JB].**
   d. **Déterminer la demi-droite asymptote de (Γ) située dans la portion du plan délimitée par les demi-droites [OF) et [OG).**

e. **Construire la branche (Γ_0) de (Γ) située dans la portion du plan délimitée par les demi-droites [OF) et [OG).**

3) **Soit S la similitude plane indirecte d'axe la droite (AC) de rapport 2, qui transforme le point F en le point I.**

Démontrer que son centre est O.

4) **Soit (Γ') l'image de (Γ) par S.**

a. **Montrer que (Γ') est une hyperbole équilatère**

b. **Trouver l'excentricité de (Γ').**

c. **Construire le cercle principal (C_2) de (Γ').**

d. **Démontrer que (Γ) et (Γ') ont les mêmes asymptotes.**

e. **Déterminer l'axe focal de (Γ').**

f. **Construire l'image J' du foyer J de (Γ).**

g. **Construire l'image (C_1') du cercle (C_1) par S.**

h. **Construire l'image (Γ_0') de (Γ_0) par S.**

Exercice 3 :

Partie A :

Soit g la fonction numérique définie sur $]0;\ +\infty[$ par: $g\,(x) = xe^x - 1$.

1) **Calculer la dérivée g' de g.**

2) **Dresser le tableau de variation de g. On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.**

3) **a. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α appartenant à l'intervalle $\left]\frac{1}{2};1\right[$.**

b. En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0;\ +\infty[$.

Partie B :

Soit f la fonction définie sur $]0;\ +\infty[$ par $f\,(x) = e^x - \ln x$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(0, \vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath}\,)$.

4) **Calculer les limites de f en 0^+ et $+\infty$.**

5) **Montrer que la dérivée f' de f est $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$.**

6) a. Dresser le tableau de variation de f. On admet que la courbe (C) admet une branche parabolique de direction (Oy).

b. Montrer que f admet un minimum $f(\alpha) = \alpha + \frac{1}{\alpha}$.

7) Tracer la courbe (C). On prendra $\alpha = 0,6$ et $f(\alpha) = 2,3$.

Exercice 4 :

Soit la série statistique à deux caractères (X, Y) donnée par le tableau à double entrée ci-dessous:

X \ Y	-1	2	3
2	2	0	3
3	1	3	4

1) Déterminer les séries marginales de X et Y.

2) Déterminer les coordonnées $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ du point moyen G du nuage statistique.

3) On admet que la variance de X est $\frac{10}{169}$ et celle de Y est 2, 59.

a. Montrer que la covariance de X et Y est égale à $\frac{29}{169}$.

b. Montrer que la droite de régression linéaire de Y en X est: $Y = \frac{29}{40}X - \frac{1}{20}$

BACCALAUREAT SESSION 2017

Exercice 1 :

On considère l'équation (E) dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$: $48x + 35y = 1$.

1) **Justifier à l'aide du théorème de Bézout que l'équation (E) admet des solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$**
2) **Justifier que les entiers 48 et -8 sont inverses modulo 35.**
3) **En remarquant que (E) peut s'écrire $48x \equiv 1[35]$, déterminer une solution particulière $(x_0;\ y_0)$.**
4) **Achever la résolution de l'équation (E).**

Exercice 2 :

Le plan est orienté. Soit ABC un triangle équilatéral de sens direct, de centre de gravité E.

1) **Faire une figure. On prendra AB = 4 cm.**
2) **Construire le cercle (C) de centre A passant par B.**
3) **Construire le point F symétrique de A par rapport à E.**
4) **Montrer que les droites (CF) et (CA) sont perpendiculaires.**
5) **Soit (Γ) l'hyperbole de cercle principal (C) et dont une directrice est la droite (BC). Montrer que F est un foyer de (Γ). Préciser son axe focal.**
6) **On désigne par G le projeté orthogonal de F sur la droite (BC), et H le point de l'axe focal tel que $\overrightarrow{AH} = 3\,\overrightarrow{AG}$.**
   a. **Construire H.**
   b. **On pose AF = c et AB = a. Que représente le rapport $\frac{AF}{AB}$ pour (Γ) ?**

   Montrer que ce rapport est égal à $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.
7) **Construire le point I du plan tel que $\overrightarrow{GI} = \frac{c}{a}\overrightarrow{GH}$.**
8) **Soit (d) la perpendiculaire à l'axe focal passant par H. Construire le point J de (Γ) situé sur (d) et situé dans le demi plan délimité par la droite (AH) contenant le point C.**
9) **On note S le sommet de (Γ) associé au foyer F.**
   Construire l'arc $(\mathscr{H})$ de (Γ) d'extrémités J et S.

10) On désigne par s la similitude plane indirecte définie par : $s = h \circ S_{(BC)}$ où h est l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$ et $S_{(BC)}$ la symétrie orthogonale d'axe (BC).

a. Déterminer l'axe (Δ) et le centre (Ω) de s.

b. Construire l'arc $(\mathcal{H}')$, image de $(\mathcal{H})$ par s.

c. Déterminer l'excentricité de $(\Gamma 0)$ image de (Γ) par s.

Exercice 3 :

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $I = [0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = (x-1)\ln(x+1)$.

On pose pour tout $x \geq 0$, $F(x) = \int_1^x f(x)\,dx$.

1) a. Prouver que F est dérivable sur I et que pour tout $x \in I$; $F'(x) = f(x)$.

b. En déduire le sens de variation de F sur I.

2) On admet que pour tout $x \geq 2$, on a $f(x) \geq x - 1$.

a. Prouver que pour tout $x \geq 2$, $F(x) \geq F(2) + \frac{x^2}{2} - x$.

b. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{F(x)}{x}$.

c. Dresser le tableau de variation de F.

d. Donner l'allure de la courbe (C) représentant la fonction F dans un repère orthonormal $(0, \vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath}\,)$ d'unité graphique 2 cm. On donne F (0) = 0,13 ; F (2) = 0,5.

3) Soit la suite numérique (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = \int_n^{n+1} f(t)\,dt$.

a. Vérifier que $u_n = F(n+1) - F(n)$.

b. En utilisant le théorème des inégalités des accroissements finis sur l'intervalle [n ; n + 1], montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f(n) \leq u \leq f(n+1)$.

Exercice 4 :

Jean s'amuse régulièrement sur un terrain de football avec le gardien de but. L'épreuve consiste à tirer au but et à observer le résultat obtenu. On admet que :

- la probabilité que Jean réussisse le premier tir au but est de 0,7 ;

- **s'il réussit le premier tir, alors la probabilité de réussir le second est de 0,8 ;**
- **s'il manque le premier tir, la probabilité de réussir le second est de 0,4.**
- **On note R_1 l'événement « premier tir au but est réussi »et R_2 l'événement « le second tir au but est réussi ».**

1) **Construire l'arbre de probabilité correspondant à cette expérience.**
2) **Calculer la probabilité pour que les deux tirs au but soient réussis.**
3) **Calculer la probabilité pour que le second tir au but soit réussi.**
4) **On note A, l'événement « Jean a réussi exactement un tir au but ». Calculer P(A).**

BACCALAUREAT SESSION 2016

Exercice 1 :

On donne dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $2688x + 3024y = -3360$.

1) **Déterminer le PGCD (2688, 3024), puis en déduire que l'équation (E) admet des solutions $\mathbb{Z}^2$.**

2) **Montrer que l'équation (E) est équivalente à l'équation (E_1) : $8x + 9y = -10$.**

3) **a. Montrer que l'équation (E_1) peut s'écrire (E_2) : $8x \equiv -10\ [9]$.**

   b. Résoudre l'équation (E_2).

   c. En déduire les solutions de l'équation (E).

Exercice 2 :

Le plan est orienté.

ABCD est un rectangle tel que $\left(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA}\right) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$. On considère le losange BDEG tel que $\left(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA}\right) = \left(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BE}\right)[2\pi]$.

Dans cet exercice, S_Δ et $t_{\vec{u}}$ désignent respectivement la symétrie orthogonale d'axe la droite (Δ) et la translation de vecteur $\vec{u}$.

On considère la transformation $f = S_{(AD)} \circ S_{(AB)} \circ S_{(BD)}$.

1) **Faire la figure. On prendra AB = 4 cm et on disposera (AB) horizontalement.**
2) **Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $g = S_{(AB)} \circ S_{(BD)}$.**
3) **R désigne la rotation de centre B et d'angle de mesure. Déterminer la nature exacte de la transformation $S_{(AD)} \circ R$..**
4) **On désigne par F le milieu du segment [BG].**
   a. **Démontrer que $S_{(AD)} \circ R = t_{\overrightarrow{BF}} \circ S_{(AC)}$.**
   b. **En déduire les éléments caractéristiques de $S_{(AD)} \circ R$.**
5) **Soit $(\mathcal{P})$ la parabole dont une tangente est la droite (EF), la normale associée est la droite (GB) et l'axe focal est la droite (EB).**

Démontrer que A est le foyer de la parabole $(\mathcal{P})$.

6) **Soit H le milieu du segment [EG] et L celui du segment [ED]. Déterminer la directrice (d) de la parabole $(\mathcal{P})$.**
7) **Construire le point I de $(\mathcal{P})$ tel que [IF] soit une corde focale.**
8) **Construire la corde focale [JK] de $(\mathcal{P})$ où J appartient au segment [AD].**
9) **Construire l'arc d'extrémités J et F de $(\mathcal{P})$.**
10) **Soit $(\mathcal{P}')$ l'image de $(\mathcal{P})$ par la transformation f.**
    a. **Déterminer le foyer de la parabole $(\mathcal{P}')$.**
    b. **Déterminer l'axe focal de $(\mathcal{P}')$.**

Exercice 3 :

1) **Déterminer la solution particulière f de l'équation différentielle : $(E) : y'' + 2y' + 2y = 0$ vérifiant les conditions initiales suivantes : $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{-\frac{\pi}{2}}$ et $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -e^{-\frac{\pi}{2}}$**
2) **On pose $f(x) = e^{-x} \sin x$.**
    a. **Déterminer les réels A et B pour que $F(x) = e^{-x}(A \cos x + B \sin x)$ soit une primitive de f sur R.**
    b. **Calculer l'intégrale $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(x)\, dx$.**
3) **Soit (v_n) la suite numérique définie pour tout entier naturel n par :**

$$v_n = \frac{e^{-\pi}+1}{2}(-e^{-\pi})^n \ ; n \in \mathbb{N}.$$

    a. **Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.**
    b. **Calculer la somme des termes $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ en fonction de n, puis en déduire la limite de S_n en $+\infty$.**

Exercice 4 :

Soit le tableau statistique à double entrée suivant :

$X \backslash Y$	-1	2	3
1	2	1	1
2	2	3	1

1) **Convertir ce tableau en un tableau linéaire.**
2) **Déterminer le coefficient de corrélation $\rho_{X,Y}$ des caractères X et Y.**

   On donne $X = 1,6$ et $Y = 1$.
3) **Donner une interprétation géométrique de cette corrélation.**

BACCALAUREAT SESSION 2015

Exercice 1 :

Le but de l'exercice est de résoudre l'équation (E) : $21x - 17y = 4$.

1) a. **Montrer que cette équation admet au moins une solution.**

   b. **Montrer que l'équation (E) est équivalente à l'équation (E') : $21x \equiv 4[17]$.**

2) **On se propose de résoudre l'équation (E'). On rappelle qu'un entier relatif a est l'inverse modulo n ($n \in \mathbb{N}$) d'un entier relatif b si $ab \equiv 1[n]$.**

   a. **Déterminer l'inverse modulo 17 de 21.**

   b. **Montrer que les solutions de l'équation (E') sont les entiers relatifs x tels que $x = 1 + 17k$; $k \in \mathbb{Z}$.**

3) **En déduire l'ensemble des solutions de (E).**

Exercice 2 :

Dans le plan orienté, on considère le carré ABCD de centre O tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. Soit I et J les milieux respectifs des segments [DC] et [AD].

On prendra AB = 4 cm.

1) **Faire une figure.**

2) **On considère l'ellipse (E) de centre Ω, d'excentricité $\frac{1}{2}$ dont un foyer est B et une directrice (AD). Quel est l'axe focal de (E) ?**

3) **Soit S_1 et S_2 les points de (E) situés sur la droite (AB).**

   a. **Montrer que $BS_1 = \frac{1}{3}BA$ et $BS_2 = -BA$.**

   b. **Placer S_1 et S_2.**

4) **Tracer le cercle principal (C_P) de (E).**

5) **Tracer le cercle secondaire (C_S) de (E).**

6) **Tracer le cercle directeur (C_d) de (E) ayant pour centre le foyer B.**

7) **Construire le point de (E) situé sur la demi-droite [BC).**

8) **Tracer l'arc de (E) balayé par l'angle $(\overrightarrow{\Omega S_3}, \overrightarrow{\Omega B})$ où S_3 est un sommet de (E) situé sur l'axe non focal et du même côté que C.**

9) **Soit f la transformation plane définie par : $f = S_{(AC)} \circ t_{\overrightarrow{DC}}$.**

   a. **Qu'appelle-t-on symétrie glissée ?**

b. Montrer que f est une symétrie glissée. Déterminer son vecteur et son axe.

c. Tracer (E') l'image de (E) par f.

Exercice 3 :

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{1-x\ln x}{x}$.

On admet que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $I = \left[\frac{3}{2}; 2\right]$.

Le but de cet exercice est de donner une valeur approchée de α.

Soit g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $g(x) = e^{\frac{1}{x}}$.

On définit la suite numérique (u_n) telle que : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$

1) Sachant que $f(\alpha) = 0$, montrer que α est solution de l'équation $g(x) = x$.
2) Montrer par récurrence que pour tout entier n, $u_n \in I$.
3) On suppose que pour tout x de I, $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$. En appliquant le théorème de l'inégalité des accroissements finis, montrer que : $\forall x \in I,\ |g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}\,|x - \alpha|$.
4) a. Montrer que : $\forall n \geq 0, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}\,|u_n - \alpha|$.

   b. En déduire que $\forall n \geq 0, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

   c. Montrer que la suite (u_n) converge vers α.
5) a. Déterminer un entier n_0 tel que $|u_{n_0} - \alpha| \leq 10^{-1}$.

   b. Déterminer la valeur approchée u_{n_0} de α.

Exercice 4 :

Une maladie atteinte 3 % d'une population. Un test de dépistage donne les résultats suivants :

- hez les individus malades, 95 % de tests sont positifs et 5 % sont négatifs.
- hez les individus non malades, 1 % de tests sont positifs et 99 % négatifs.

On note :

- M l'évènement : « être malade » et,

- T l'évènement : « le test est positif ».

1) **Construire un arbre pondéré correspondant à cette expérience aléatoire.**

2) **Donner la probabilité de l'évènement « M ∩ T », puis celle de « $\overline{M} \cap \overline{T}$ ».**

3) **Déterminer P (T) et P ($\overline{T}$).**

4) **a. Calculer la probabilité de ne pas être malade sachant que le test est positif.**

   b. Calculer la probabilité d'être malade sachant que le test est négatif.

BACCALAUREAT SESSION 2014

Exercice 1 :

1) Soit (E) l'équation d'inconnue Z : $Z^2 - (2i\, e^{i\theta}\cos\theta)Z - e^{i2\theta} = 0$ où $\theta \in \mathbb{R}$

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). On présentera les solutions sous forme exponentielle.

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}\,;\, \vec{v})$, A et B sont les points d'affixes respectives $Z_A = e^{i\frac{\pi}{2}}$ et $Z_B = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2\theta\right)}$. On note Z_0 l'affixe de O.

   a. Exprimer $\arg\left(\frac{Z_B - Z_0}{Z_A - Z_0}\right)$ en fonction de θ.

   b. En déduire l'ensemble des valeurs de θ pour lesquelles $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

   c. On suppose que $\leq \theta < \frac{\pi}{2}$. Écrire le conjugué de $Z_A + Z_B$ sous forme exponentielle.

Exercice 2 :

On considère un triangle ABC isocèle rectangle en A de sens direct tel que AC = 6 cm. On désigne par D, E et F les milieux respectifs des segments [BC], [AB] et [BD].

1) Faire la figure.
2) Soit $(\mathcal{P})$ la parabole de foyer B et de directrice la droite (AC).
   a. Qu'appelle-t-on pas ou paramètre d'une parabole ?
   b. Déterminer le pas α de $(\mathcal{P})$.
3) Soit G le symétrique de A par rapport à la droite (BC).
   a. Démontrer que la droite (AG) est une tangente à $(\mathcal{P})$ en un point à déterminer.
   b. Construire le point H de $(\mathcal{P})$ situé sur la médiatrice du segment [EB].
   c. Construire l'arc $(\mathcal{P}_0)$ de $(\mathcal{P})$ de corde focale le segment [GI] où I est le symétrique de G par rapport à la droite (AB).

Soit $(\mathcal{P}')$ la parabole de foyer B et de directrice (AG).

4) Déterminer le centre Ω, le rapport K et une mesure de l'angle de la similitude plane directe S qui transforme $(\mathcal{P}')$ en $(\mathcal{P})$.
5) Construire l'antécédent J de G par S.
6) Construire l'arc $(\mathcal{P}'_0)$ qui a pour image $(\mathcal{P}_0)$ par S.

On désigne par A'_0 l'aire de la portion $(\mathcal{E}'_0)$ du plan limité par les droites (JB), (EF) et $(\mathcal{P}'_0)$, et par A_0 celle de la portion du plan $(\mathcal{E}_0)$ image de $(\mathcal{E}'_0)$ par S.

7) Démontrer que $A_0 = 2A'_0$.
8) Déterminer l'aire A de $S \circ S \circ S \circ S(\mathcal{E}'_0)$ en fonction de A_0.

Exercice 3 :

Soit la fonction :

$$f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow f_n(x) = e^{-x}x^{n+1} \quad \text{Où } n \in \mathrm{N}$$

1) Déterminer l'ensemble de définition E_{f_n} de f_n.

2) On suppose que n est impair.

   a. Calculer la dérivée de f_n et étudier le signe de cette dérivée.
   b. Calculer les limites de f_n aux bornes de E_{f_n}.
   c. Dresser le tableau de variation de f_n.

3) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_{n,p} = \int_0^p f_n(x)\,dx$ et $J_n = \lim\limits_{p \to +\infty} I_{n,p}$.

   a. En intégrant $I_{n,p}$ par parties, montrer que $J_{n+1} = (n+2)J_n$.
   b. En déduire l'expression de J_n en fonction de n et J_0.

Exercice 4 :

Dans une urne contenant quatre jetons numérotés 1, 2, 3 et 4 indiscernables au toucher, on extrait successivement sans remise deux jetons.
La variable aléatoire X est celle qui détermine «la valeur absolue de la différence des deux numéros sortis »

1) Déterminer la loi de probabilité de X.

2) Calculer l'espérance mathématiques, la variance et l'écart-type de X.

BACCALAUREAT SESSION 2013

Exercice 1 :

On considère l'équation complexe (E) telle que : $(E): Z^3 - \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)Z^2 - \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)Z + 1 = 0.$

1) Montrer que -1 est solution de (E).
2) Démontrer que si Z_0 est solution de (E) alors son inverse $\frac{1}{Z_0}$ est aussi solution de (E).
3) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E') telle que $(E'): Z^2 - \left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i\right)Z + 1 = 0.$
4) Déterminer toutes les solutions de l'équation (E).

Exercice 2 :

X	-2	-2	-1	-2	-1	0	-1	-2	-1	-2	0	-1	-1	-1
Y	-1	2	2	-1	2	2	0	-1	0	2	-1	-1	0	-1

Les caractères X et Y sont distribués suivants le tableau ci-dessous.

1) Transformer ce tableau en un tableau à double entrées d'effectifs n_i.
2) Déterminer le point moyen $G(\overline{X}, \overline{Y})$.
3) Calculer les variances V(X) et V (Y) de X et Y.
4) Calculer la covariance Cov (X, Y) et le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y.

Problème :

On considère un carré ABCD de centre O tel que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) = 90°$ et AD = 2. On désigne par $(\mathcal{P}_1)$ la parabole de directrice la droite (AD) et tangente en C à la droite (AC).

1) Démontrer que le foyer de $(\mathcal{P}_1)$ est B.

Soit $(\mathcal{P}_2)$ la parabole de foyer B et tangente à la droite (AD) en D, E le symétrique de B par rapport à A, F le symétrique de D par rapport à la droite (AB).

2) Démontrer que la droite (EF) est la directrice de $(\mathcal{P}_2)$.
3) Construire le deuxième point H de $(\mathcal{P}_2)$ appartenant à la droite (DB).

4) Comment appelle-t-on le segment [DH] pour la parabole ($\mathcal{P}_2$) ? Justifier la réponse.

5) Démontrer que le point I symétrique de C par rapport à (BE) appartient à ($\mathcal{P}_1$).

6) Construire les arcs des paraboles ($\mathcal{P}_1$) et ($\mathcal{P}_2$) de cordes respectives [CI] et [DH].

Soit S la similitude plane directe qui transforme ($\mathcal{P}_2$) en ($\mathcal{P}_1$).

7) Déterminer une mesure θ de l'angle de S. Justifier la réponse.

8) Déterminer son rapport k. Justifier la réponse.

9) Déterminer son centre. Justifier la réponse.

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(\mathrm{J}, \overrightarrow{\mathrm{JB}}, \overrightarrow{\mathrm{JO}})$ où J est le milieu de [AB], on considère la fonction f définie par : $f(x) = 2\sqrt{x} + \ln(x+1)$.

(C) désigne sa courbe représentative dans le repère $(\mathrm{J}, \overrightarrow{\mathrm{JB}}, \overrightarrow{\mathrm{JO}})$.

10) Dresser le tableau de variation de f.

11) Étudier la branche infinie de (*C*).

12) Construire (*C*) dans le repère $(\mathrm{J}, \overrightarrow{\mathrm{JB}}, \overrightarrow{\mathrm{JO}})$.

13) Calculer l'aire de la portion du plan ($\mathcal{E}$) limitée par les droites (JO), (BC) et les courbes (C) et ($\mathcal{P}_1$). On montrera que l'équation cartésienne de ($\mathcal{P}1$)) dans le repère $(\mathrm{J}, \overrightarrow{\mathrm{JB}}, \overrightarrow{\mathrm{JO}})$ est $y^2 = 4x$.

BACCALAUREAT SESSION 2012

Exercice 1 :

1) **Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $Z^4 - \sqrt{2}Z^3 - 4\sqrt{2}Z - 16 = 0$ sachant qu'elle admet deux solutions imaginaires pures.**
2) **On considère dans le plan complexe muni d'un repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ les points A, B, C et D d'affixes respectives : $Z_A = 2i$; $Z_B = -\sqrt{2}$; $Z_C = -2i$ et $Z_D = 2\sqrt{2}$.**
3) **Représenter les points A, B, C et D dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.**
4) **Montrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle (C) dont on précisera le rayon et le centre.**

Exercice 2 :

Pour tout entier naturel non nul n, on considère la suite (I_n) définie par :

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

1) **Calculer I_1.**
2) **Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, I_n \geq 0$.**
3) **Par une intégration par parties, montrer que $I_n = -e^{-\frac{1}{2}} + (n-1)I_{n-2}$. (On pourra écrire $x^n = x^{n-1}.x$).**
4) **Étudier le sens de variation de la suite (I_n). En déduire que la suite (I_n) est convergente et converge vers une limite l.**
5) **Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$.**

   Calculer l.

Problème :

Le plan $\mathbb{P}$ est orienté. ABCD est un carré de sens direct, de centre O.
I, J, K et Le sont les milieux respectifs des segments [AD], [AB], [BC] et [CD].

1) **E est le point du plan tel que le triangle IDE soit rectangle isocèle en D et de sens direct. Montrer que IE = AO.**

2) En déduire qu'il existe une rotation r transformant I en A et E en O. Préciser une mesure θ de l'angle de la rotation r.

3) Construire Ω le centre de la rotation r.

4) On désigne par Ω_1, le point d'intersection des droites (IE) et (OA). Montrer que les points Ω, E, O, Ω_1 sont situés sur un cercle (C) que l'on tracera.

5) Montrer que $A\Omega_1 I\Omega$ est un carré.

6) Donner les caractéristiques de la similitude plane directe S qui transforme le carré ABCD en $A\Omega_1 I\Omega$.

7) Placer $K' = S(K)$ puis $L' = S(L)$.

8) Soit $\overline{S} = h\left(Q, \frac{1}{2}\right) o\, S_{(OD)}$, Q étant un point de la droite (OD). Caractériser $\overline{S}$.

9) On se propose de construire Q sachant que $\overline{S}(C) = J$.

   a. Montrer que si $\overline{S}(C) = J$ alors $\overrightarrow{QJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{QA}$.

   b. Construire alors le point Q.

10) Soit f l'application de $\mathbb{P}$ dans $\mathbb{P}$ qui à tout point M associe M' tel que $\overrightarrow{HM'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HM}$.

   H étant le projeté orthogonal de M sur la droite (OE).

   a. Caractériser f.

   b. Tracer (C') l'image de (C) par f.

   c. Donner la nature de la courbe (C').

BACCALAUREAT SESSION 2011

Exercice 1 :

On pose $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2 x\,dx$, $B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin^2 x\,dx$.

1) Calculer $A + B$.
2) Calculer $A - B$ à l'aide d'une intégration par parties.
3) Déduire des questions 1 et 2, les valeurs de A et B.

Exercice 2 :

On donne en milliers de francs CFA le bénéfice d'une ferme avicole qui importe des poussins sur une période de 5 mois.

x_i (en mois)	1	2	3	4	5
y_i (en milliers de francs)	96,1	63,5	49,2	41,5	35,7

1) Représenter graphiquement cette série statistique par un nuage de points dans un repère orthogonal d'unités : 2 cm pour 1 mois en abscisses et 2 cm pour 5 milliers de francs en ordonnées.
2) Donner une équation de la droite de régression de y en x.
3) Tracer cette droite sur le graphique.
   Estimer le bénéfice de la ferme avicole au 6ème mois.

Problème :

Le plan est orienté. Soit ABC un triangle tel que $AC = 2\,AB$ et $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$. On prendra AB = 3 cm et AC = 6 cm. On construit à l'extérieur de ce triangle, les carrés ACFG et ABDE tels que $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AG}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

K est le point tel que $\overrightarrow{GK} = \overrightarrow{AE}$.

Les droites (AK) et (BC) se coupent en I.

Les droites (AB) et (KG) se coupent en J.

<u>Partie A</u> :

1) **Faire une figure.**
2) **Démontrer qu'il existe une rotation R_1 qui transforme le triangle ABC en triangle EAK.**

   On note Ω_1 son centre. Construire Ω_1. Donner l'angle de R_1.
3) **Démontrer qu'il existe une rotation R_2 qui transforme le triangle ABC en triangle GKA. Donner l'angle de R_2.**

   On note Ω_2 son centre. Construire Ω_2.
4) **a. On considère l'application $f = R_1 \circ R_2$. Montrer que f est une translation.**

   b. Calculer $f\,(C)$. En déduire le vecteur de translation de f.
5) **Démontrer que les points A, B, I et Ω_1 sont situés sur un même cercle (C) de centre O, milieu du segment [AB].**
6) **Démontrer que les points A, G, J et Ω_2 sont situés sur un même cercle (C') de centre O', milieu du segment [AG].**

Partie B :

On rapporte maintenant le plan au repère orthonormal direct $(A, \vec{u}, \vec{v})$ avec $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = -\overrightarrow{AE}$.

Soit S la similitude plane directe de centre A qui transforme (C) en (C').

7) **Donner les éléments caractéristiques de S.**
8) **Donner l'écriture complexe de la similitude S.**
9) **Exprimer x et y en fonction de x' et y'.**

Partie C :

Soit ($\mathcal{E}$) l'ellipse d'équation $4x^2 + y^2 = 4$.

10) **Construire ($\mathcal{E}$) tout en précisant son centre, ses sommets et foyers.**
11) **Déterminer une équation de $(\mathcal{E}')$ image de ($\mathcal{E}$) par S.**

BACCALAUREAT SESSION 2010

Exercice 1 :

1) a. Montrer que les équations $x^2 \equiv -1\ [25]$ et $x2 = -1 + 25k$ où $k \in \mathbb{Z}$ sont équivalentes.

   b. Pour $k = 2$, résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $x^2 \equiv -1\ [25]$.

2) a. Trouver suivant les valeurs de l'entier naturel n, les restes de la division euclidienne de $2^n - 4$ par 5.

   b. En déduire le reste de la division euclidienne de $2^{2010} - 4$ par 5. Que peut-on alors dire de la divisibilité de $2^{2010} - 4$ par 5 ?

Exercice 2 :

Dans le plan orienté $(\mathbb{P})$, on considère un carré ABCD de sens direct, de centre O. I et J sont des milieux respectifs des segments [CD] et [AD].

1) Construire l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MC}) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

2) On note $(\mathcal{D})$ la droite passant par A telle que $\left(\overline{(AC), (\mathcal{D})}\right) = \frac{\pi}{3}\ [\pi]$. $(\mathcal{D})$ coupe (Γ) en E.

   a. Montrer que le triangle EAC est équilatéral.

   b. En déduire qu'il existe une rotation r de centre E qui transforme A en C.

3) On désigne par H le centre de gravité du triangle EAC. La parallèle à la droite (AC) passant par H coupe (EA) et (EC) respectivement en G et F.

   a. Montrer que $\frac{EG}{EA} = \frac{EF}{EC} = \frac{2}{3}$.

   b. Montrer qu'il existe une homothétie de centre E qui transforme A en G et C en F.

   c. En déduire qu'il existe une similitude plane directe S de centre E qui transforme A en F.

Problème :

__Partie A__ :

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' + \pi^2 y = 0$.

2) Déterminer la solution particulière g vérifiant $g(0) = 0$ et $g'(0) = 2\pi$.

__Partie B__ :

On considère la fonction numérique f à variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 2\sin \pi x & si - 4 \leq x \leq 0 \\ f(x) = x^2\left(\frac{1}{2} - \ln x\right) & si\ x > 0 \end{cases}$$

(C) désigne la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}\ ; \vec{\jmath}\ )$ d'unité graphique 2cm.

3) a. Déterminer l'ensemble de définition E_f de f.

   b. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en $x = 0$.

   c. Montrer que l'étude de f peut être réduite sur l'intervalle $\mathrm{I} = [-2;\ +\infty[$.

4) a. Étudier les variations de f sur I. On dressera un tableau résumant les variations de f.

   b. Étudier la branche infinie de (C) et tracer (C) sur son ensemble de définition.

5) Calculer l'aire A_0 du domaine plan ($\mathcal{D}$) limité par la courbe (C), l'axe (Ox) des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \sqrt{e}$.

<u>Partie C</u> :

6) Soit S la similitude plane directe de centre O, de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

   Pour $x > 0$, construire l'image (C') de (C) par S.

7) On définit la suite $(D_n)_{n \in N}$ par : $\begin{cases} D_0 = D \\ D_{n+1} = S(D_n) \end{cases}$

   a. Exprimer l'aire A_n du domaine (D_n) en fonction de n et A_0.

   b. Exprimer la somme $S_n = A_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_n$ en fonction de n et A_0.

   c. Calculer la limite de S_n quand n tend vers $+\infty$.

UN PEUPLE – UN BUT – UNE FOI

SUJETS DES BACCALAUREATS DU SENEGAL

BACCALAUREAT SESSION 2019

Exercice 1

Pour tout couple d'entiers relatifs non (a, b) on note $pgcd(a, b)$ le plus grand diviseur commun de a et b. Le plan est muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1. a. Montrer que si (x, y) est un couple d'entiers relatifs, alors l'entier $35x - 30y$ est divisible par 5

b. Existe-t-il un point de la droite d'équation $y = \frac{7}{6}x - \frac{2}{5}$ dont les coordonnées sont deux entiers relatifs ? Justifier.

Etant donnés deux entiers relatifs p et q premiers entre eux, on considère la droite $(D_{p,q})$ d'équation $y = \frac{7}{6}x - \frac{p}{q}$

On dit que $(D_{p,q})$ est une droite rationnelle.

Le but de l'exercice est de trouver une condition nécessaire et suffisante sur p et q pour que la droite rationnelle $(D_{p,q})$ comporte au moins un point dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

2. On suppose ici, que la droite $(D_{p,q})$ comporte un point de coordonnées (x_0, y_0) où x_0 et y_0 sont des entiers relatifs.

a. Démontrer que q divise le produit 6p

b. En déduire que q divise 6

3. Réciproquement, on suppose que q divise 6 et on souhaite trouver un couple (x_0, y_0) d'entiers relatifs tels que $y_0 = \frac{7}{6}x_0 - \frac{p}{q}$

a. On pose $6 = qr$ où r est un entier relatif. Démontrer qu'on peut trouver deux entiers relatifs u et v tels que : $7u - qrv = 1$

b. En déduire qu'il existe un couple (x_0, y_0) d'entiers relatifs tels que $y_0 = \frac{7}{6}x_0 - \frac{p}{q}$

4.a Soit (Δ) la droite d'équation $y = \frac{7}{6}x - \frac{8}{3}$. Cette droite possède-t-elle un point dont les coordonnées sont des entiers relatifs ?

b. Déterminer tous les points de (Δ) à coordonnées entières

Exercice 2

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(0, 0, 3\sqrt{2})$, $B(4, 0, -\sqrt{2})$, $C(-2, -2\sqrt{3}, -\sqrt{2})$ et $D(-2, 2\sqrt{3}, -\sqrt{2})$

1 .a. Montrer que ABC est un triangle équilatérale.

b. Montrer que les points A, B, C et D sont non coplanaires puis démontrer que ABCD est un tétraèdre régulier.

c. Calculer le volume du tétraèdre ABCD.

2. On note P, Q, R et S les milieux respectifs des arêtes [AC], [AD], [BD] et [BC]

a. Déterminer la nature exacte du quadrilatère PQRS.

b. Calculer l'aire du quadrilatère PQRS.

3. Le tétraèdre qui est parfaitement équilibré, a une face numérotée 0, une face numérotée 1 et deux faces numérotées 2. On lace deux fois de suite et on lit à chaque les chiffres apparus sur les trois faces visibles.

Calculer la probabilité des évènements suivants :

E : « le produit des six chiffres apparus est non nul »

F : « la somme des six chiffres apparus est supérieure ou égale à 8 »

4. On note X la variable aléatoire qui à chaque série de deux lancers associe la somme des chiffres apparus sur les faces visibles.

a. Donner la loi de probabilité de X et calculer l'espérance mathématique de X.

b. On effectue n fois de suite de manière indépendantes l'expérience qui consiste à lancer deux fois de suite le tétraèdre.

Calculer la probabilité p_n que l'évènement F soit réalisé au moins une fois.

c. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$

Problème :

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(x)=\sqrt{1-e^{-x}}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, unité graphique 2cm.

1. a. Etudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 0. Interpréter géométriquement le résultat.

b. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation

c. Vérifier que pour tout réel $x>\frac{1}{2}$, $f'(x)<1$

Montrer que l'équation $f(x)=x$, admet dans l'intervalle $]\frac{1}{2},+\infty[$ une unique solution α et que

$$0,7<\alpha<0,8$$

d. Tracer $\mathcal{C}_f$

2. a. Montrer que f admet une fonction réciproque g définie sur un ensemble J que l'on précisera

b. Démontrer que l'équation $g(x) = x$ admet dans J une solution unique égale à α. Tracer la courbe de g

c. Expliciter $g(x), x \in J$

Partie B

Pour tout entier naturel n non nul, on pose

$$\forall x \in J\,, F_n(x) = \int_0^{g(x)} [f(t)]^n\, dt \;\; et\; I_n = F_n(\alpha)$$

1. Montrer que pour tout $x \in J$, $F_2(x) = g(x) - x^2$. Exprimer alors I_2 en fonction de α

2. a. Montrer que F_n est dérivable dans J et que pour tout x appartenant à J,

$$F_n'(x) = \frac{2x^{n+1}}{1 - x^2}$$

b. Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout réel x distinct de 1 et de -1 on ait :

$$\frac{2x^2}{1 - x^2} = a + \frac{b}{1 - x} + \frac{c}{1 + x}$$

c. Pour $x \in J$, expliciter $F_1(x)$. Exprimer alors I_1 en fonction de α

d. Déterminer en fonction de α l'aire du domaine plan délimité par $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0\; et\; x = \alpha$

Partie C

1. a. Montrer que : $F_{n+2}(x) - F_n(x) = -\frac{2}{n+2} x^{n+2}$

b. En déduire que : $I_{n+2} - I_n = -\frac{2}{n+2}\alpha^{n+2}$

2. Montrer que

$$\forall n \in \mathrm{IN}, \quad I_{2n} = \alpha - \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha^2 k}{k} \quad et\;\; \forall n \in \mathrm{IN}, \quad I_{2n+1} = \ln\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right) - 2\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^{2k+1}}{2k+1}$$

3. a. Montrer que pour tout $n \in \mathrm{IN}^*$, $0 \leq I_n \leq \alpha^{n+1}$

b. En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} I_n\,, \quad \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha^{2k+1}}{k}, \quad \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha^{2k+1}}{2k+1}$$

BACCALAUREAT SESSION 2018

Exercice 1

Le téléphone portable de Babou contient en mémoire un répertoire de 1500 chansons dont 700 dans la catégorie mbalax, 100 dans la catégorie zouk, 200 dans la catégorie techno et 500 dans la catégorie taxourane. Une des fonctionnalités du téléphone permet d'écouter de la musique en mode « lecture aléatoire » : Les chansons ecoutées sont choisies au hasard et de façon équiprobable.

40% des chansons du répertoire sont interprétées en Sérère et 28% des chansons de la catégorie mbalax sont interprétées en Sérère.

Au cours de son footing journalier, Babou écoute une chanson grâce à ce mode de lecture.

On note :

M l'évènement « La chanson écoutée est de la catégorie mbalax »

S l'évènement : « La chanson écoutée est interpréter en Sérère »

1. **Calculer p(M)**
2. **a. Déterminer p(S) et p(S/M)**

b. Calculer la probabilité que la chanson écoutée soit une chanson de la catégorie mbalax interpréter en Sérère.

c. Calculer p(M/S).

En fait, Babou écoute de cette même façon aléatoire une chanson de son répertoire lors de son footing le matin, à la prise du petit déjeuner, sur le chemin de l'école, au déjeuner et le soir avant d'aller au lit. Son cousin Bachir, fin mathématicien, lui dit qu'il a [$496 \times (0.4)^3$] % de chances d'écouter au moins trois chansons Sérère a` la fin de la journée. Dire en le justifiant si Bachir a raison ou pas.

Exercice 2

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.On considère l'application f de P dans P qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = e^{i|z|}z$.

1. Déterminer l'affixe des points A' et B' images respectifs du point A d'affixe π et du point B d'affixe 2π
2. Montrer qu'un point M est invariant par f si et seulement s'il existe un entier naturel k tel que $OM = 2k\pi$. En déduire l'ensemble $\mathcal{E}$ des points invariants par f.
3. Soit C le point d'affixe $1 + i\sqrt{3}$ et Δ la demi-droite d'origine O passant par C et ne contenant pas le point O (Demi-droite ouverte]OC)), M un point de Δ d'affixe z et d'image M' par f

Déterminer |z| pour que M et M' soient symétriques par rapport à l'axe $(O;\vec{u})$

4. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{C}_f$ le cercle de centre O et de rayon $2k\pi$, $\mathcal{D}_k$ la couronne délimitée par les cercles $\mathcal{C}_k$ *et* $\mathcal{C}_{k+1}$ et a_k l'aire de la couronne D_k

a. Calculer a_k

b. Déterminer la nature de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

c. Calculer la limite de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

5. Soit $k \in \mathbb{N}^*$

a. Déterminer les points de $\Delta \cap \mathcal{D}_k$ qui sont symétriques avec leur image par rapport à l'axe $(O;\vec{u})$

b. Montrer que tout point de $\mathcal{D}_k$ a son image par f dans $\mathcal{D}_f$

Problème :

Partie A

1. Résoudre l'équation différentielle : $y' + y = 0$

Soit φ une application dérivable de IR_+^* dans IR, et soit g l'application numérique définie sur IR_+^* par $g(x) = \varphi(x)e^x$

2. a. Vérifier que g est dérivable en tout point x de IR_+^* et démontrer que, pour que φ vérifie :

$$\forall x \in IR_+^*, \varphi'(x) + \varphi(x) = -\frac{1}{x} - lnx \quad (1)$$

Il faut et il suffit que g soit une primitive de l'application $x \mapsto -e^x lnx - \frac{e^x}{x}$

b. Quel est l'ensemble des primitives de la fonction $x \mapsto -e^x lnx - \frac{e^x}{x}$?

c. En déduire que l'ensemble des applications dérivables de IR_+^* dans IR vérifiant (1) est l'ensemble des applications $x \mapsto ae^{-x} - lnx$ où a désigne une constante réelle.

Partie B

Soit f l'application de IR_+^* dans IR définie par : $\forall x \in IR_+^*, f(x) = e^{1-x} - lnx$

1. a. Etudier les variations de f et construire sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

Déterminer que l'équation $f(x) = 0$, admet une unique solution c et que $c \in]1; 2[$

b. Calculer $m \lim_{x \to 0^+} xf(x)$

c. Soit x un élément de l'intervalle $]0; 1]$

Calculer l'intégrale $F(x) = \int_x^1 f(t)dt$ en fonction de x.

Montrer que lorsque x tend vers 0, $F(x)$ tend vers e

2. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

a. Montrer que, pour tout entier k tel que : $1 \leq k \leq n-1$ et pour tout réel t tel que :

$$\frac{k}{n} \leq t \leq \frac{k+1}{n}, \qquad on\ a : f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq f(t) \leq f\left(\frac{k}{n}\right)$$

b. Montrer alors que :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq F\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

En déduire que

$$F\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}\leq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\leq F\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)$$

3. a. Déduire des questions précédentes que, lorsque n tend vers , $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ admet une limite et calculer cette limite.

b. Etablir les égalités :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{\left(1-\frac{k}{n}\right)}=(e-1)\frac{1}{n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)}\quad et\quad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right)=\frac{1}{n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)$$

c. Utiliser les résultats précédents pour démontrer que les deux suites définies par :

$u_n=\frac{1}{n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)$ $et\ v_n=\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ ont des limites lorsque n tend vers l'infini et calculer ces limites.

Partie C

1. a. Déterminer le sens de variation de f' dans l'intervalle $[1;2]$. Soit P l'application de IR_+^* dans IR définie par : $\forall x\in\mathrm{IR}_+^*$, $P(x)=x-\frac{f(x)}{f'(1)}$

b. Etudier les variations de P dans l'intervalle $[1;2]$. Montrer que P réalise une bijection de $[1;c]$ sur un intervalle J contenu dans $[1;c]$.

En déduire que l'on définit bien une suite c_n d'éléments de $[1;c]$ en posant $c_0=1$ et pour tout entier naturel n, $c_{n+1}=P(c_n)$

2. a. Montrer que pour tout $x\in[1;c]$, $0\leq P'(x)\leq P'(2)\leq\frac{7}{12}$

b. En utilisant le théorème de des accroissements finis, vérifier que pour tout entier n,

$$|c_{n+1}-c_n|\leq\frac{7}{12}|c_n-c|$$

En déduire que la suite (c_n) est convergente et déterminer sa limite

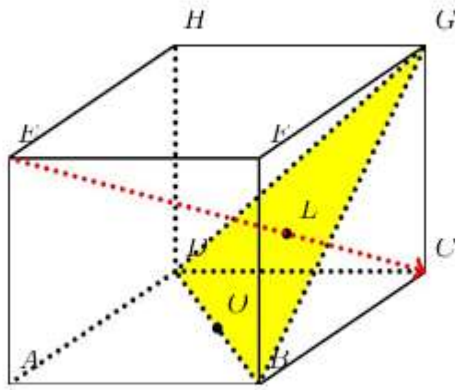
c. Quelle valeur suffit-il de donner à n pour que c_n soit une valeur approchée de c à 10^{-2} près ?

BACCALAUREAT SESSION 2017

Exercice 1

$ABCEDFGH$ est un cube d'arête 1. On rapporte l'espace au repère orthonormé direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1. a) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BD} \wedge \overrightarrow{BG}$.
   b) En déduire une équation cartésienne su plan (BGD).
   c) Vérifier que la droite (EC) est orthogonale au plan (BGD).
2. Donner une équation de la sphère (S) de centre C et tangente au plan (BGD).
3. A tout α appartenant à l'intervalle $[0; 1]$, on associe le point M de coordonnées $(\alpha, \alpha, 1 - \alpha)$.
   a) Montrer que M est un point du segment $[EC]$.
   b) Montrer que la distance du point M à la droite (BD) est égale à $\sqrt{3\alpha^2 - 4\alpha + \frac{3}{2}}$
   c) Déterminer α pour que la distance de M à la droite (BD) soit minimale.
   Soit L le point associé à cette valeur de α.
   d) Vérifier que L est le centre de gravité du triangle BGD.
4. Soit h l'homothétie de centre E et des rapport $k \in [0; 1]$.
   a) Déterminer l'expression analytique de h.
   b) Vérifier que $h(C) = M$.
   c) Déterminer une équation de (S') image de (S) par h.



Exercice 2

Soit a un entier naturel non nul et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_n = pgcd(n; a)$

1. a) Pour a = 15, calculer les 3 premiers termes de la suite (u_n).
   b) Pour a = 4, soient m et n des entiers naturels tels que $u_m = u_n = 2$.
   Montrer que $u_{m+n} = 4$
2. a) Soit b un entier naturel. Démontrer que pour tout entier relatif q on a
   $$: pgcd(a, b) = pgcd(a, b - qa)$$
   b) Calculer u_0 et u_a.
   c) Démontrer que $u_{n+a} = u_n$.
   Quelle est la propriété de la suite (u_n) mise en jeu ?
3. Pour $a = 15$, calculer u_n avec $n = 15^{21} + 2$.

Problème

Le plan orienté P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (unité graphique $4cm$)

n étant un entier naturel non nul, on s'intéresse aux solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation d'inconnue x : $(E_n): x + e^x - n = 0$

Soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = x + e^x - n$

On note C_{f_n} la courbe représentative de f_n dans le repère.

PARTIE A :

1. **a) Vérifier que pour tout réel x strictement positif, $\ln x - x < 0$.**

   b) Montrer que l'équation (E_n) possède une solution unique u_n et que u_n appartient à l'intervalle $\left]\ln\frac{n}{2}; \ln n\right[$.

   c) En déduire les limites suivantes : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\ln n}$.

   d) Calculer u_1.

2. **Dans cette question et celles qui suivent, on pourra au besoin se servir de l'équivalence suivante :**

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{x} + \mathrm{e}^{\mathrm{x}} - n = 0 \Leftrightarrow e^x = n - x$$

   a) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e^{u_{n+1}}}{e^{u_n}}$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} - u_n = 0$.

   b) A l'aide des variations de l'application f_n, étudier celle de la suite (u_n).

   c) On note A_n l'aire du domaine plan délimité par les droites d'équations $x = u_{n+1}$, $x = u_n$, l'axe des abscisses et la courbe C_{f_n}. Montrer que :

$$A_n = \frac{1}{2}\left(u_{n+1}^2 - u_n^2\right) - (n+1)(u_{n+1} - u_n) + 1$$

   Vérifier que pour tout x appartenant à l'intervalle fermé d'extrémités u_{n+1} et u_n, on a : $0 \le f_n(x) \le 1$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n$

3. **a) En utilisant la définition de la dérivée d'une fonction en un point, vérifier qu'il existe une fonction ε définie dans un intervalle ouvert contenant 0 telle que pour tout h dans cet intervalle, on ait :**

$$\ln(1+h) = h + h\varepsilon(h) \quad et \quad \lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$$

   b) On pose : $\alpha_n = \frac{u_n}{\ln n} - 1$ c'est-à-dire que $u_n = \ln n + \alpha_n \ln n$.

   Quelle est la limite de (α_n) ?

   d) Déterminer une suite (y_n) telle que $u_n = \ln n + \ln(1 + y_n)$

   Déduire alors de la question (3 a.) qu'il existe une suite βn ayant pour limite 0 telle que : $u_n = \ln n - \frac{\ln n}{n} + \beta_n \frac{\ln n}{n}$

PARTIE B :

Dans cette partie, on s'intéresse à u_2.

D'après la première partie, u_2 appartient à l'intervalle $[0, \ln 2]$. On note g l'application de [0,1] dans R telle que $\forall x \in [0,1], g(x) = \ln(2-x)$ et on pose : $b = \frac{2}{3}\ln 2$ et $a = g(b)$.

1. **a) Montrer que u_2 est le seul point fixe de g et que u_2 appartient à l'intervalle $I = [a, b]$.**

   b) Prouver que g est dérivable sur I et $\forall x \in I, |g'(x)| \leq |g\ (b)|$.

   Enoncer clairement le théorème qui permet d'en déduire que

   $$\forall x, y \in I, |g(x) - g(y)| \leq |g'(b)||x - y|$$

   c) Vérifier que $g(I) \subset I$

1. **On pose, $a_0 = b$ et pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = g(a_n)$.**

   a) **Démontrer que la suite (a_n) est bien définie (c'est-à-dire démontrer que pour tout entier naturel n, a_n appartient à l'ensemble de définition de g) et pour tout entier naturel n, a_n appartient à I.**

   b) **Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n - u_2| \leq |g'(b)|^n(b - a)$**

      En déduire que la suite (a_n) est convergente et calculer sa limite.

   c) **Quelle valeur suffit-il de donner à n pour que a_n soit une valeur approchée de u_2 à 10^{-3} ?**

2. **Représenter sur un même graphique, les restrictions de g, f_2 à l'intervalle $[0; 1]$, le domaine A_2, la droite d'équation $y = x$ les points de coordonnées respectives $(a, 0)$, $(b, 0)$, $(u_2, 0)$, $(u_3, 0)$.**

BACCALAUREAT SESSION 2016

Exercice 1

Le plan orienté P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des points de P dont l'affixe z vérifie :

$$jz^2 + \overline{jz^2} - \frac{10}{3} z\bar{z} + 192 = 0$$

et f l'application de P dans lui-même associant à tout point M d'affixe z le point M' d'affixe $z' = \frac{1}{3}j^2 z$ avec $j = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

On rappelle que $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}, |j| = 1 = j^3 = j\bar{j}$.

1. **Montrer que f est une similitude plane directe dont on donnera les éléments géométriques caractéristiques.**
2. **a) Vérifier qu'un point M′ d'affixe z′ appartient `a $f(\mathcal{E})$ si et seulement si**

$$3z'^2 + 3\overline{z'^2} - 10z'\bar{z} + 64 = 0$$

Montrer que l'équation $x^2 + 4y^2 = 18$ est une équation cartésienne de $f(\mathcal{E})$.

b) Montrer que $\mathcal{E}$ est une conique dont on précisera les sommets, les foyers, les directrices et l'excentricité.

3. **Représenter graphiquement $f(\mathcal{E})$, $\mathcal{E}$, leurs foyers, leurs directrices et leurs axes.**

Exercice 2

n étant un entier naturel non nul, on place dans une urne n boules rouges, $8 + n$ boules noires et 20 boules blanches. Un joueur tire une boule de l'urne ; on suppose tous les tirages équiprobables.

S'il tire une boule rouge, il perd.

S'il tire une boule noire, il gagne.

S'il tire une boule blanche, il remet cette boule dans l'urne et éffétue un nouveau tirage, toujours avec équiprobabilité. S'il tire alors une noire, il gagne sinon il perd.

1. **a) Démontrer que la probabilité que ce joueur a de gagner est $f(n)$ ou` f est l'application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ par : $f(n) = \frac{(n+8)(n+24)}{2(n+14)^2}$**

b) Déterminer l'entier n pour que cette probabilité soit maximale. Calculer alors cette probabilité.

c) Déterminer l'entier n pour que cette probabilité soit minimale. Calculer alors cette probabilité.

2. Dans cette question, on suppose que $n = 16$. Pour jouer, le joueur a misé 8 unités monétaires. p et q étant des entiers naturels tels que $p > q > 8$, s'il gagne à l'issue du premier tirage, on lui remet p unités monétaires et s'il gagne à l'issue du deuxième tirage, on lui remet q unités monétaires. S'il perd il ne reçoit rien.

   Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

   a) Déterminer la loi de X en fonction de p et q ainsi que son espérance mathématique.

   b) On suppose que p et q sont tels que le jeu est équitable c'est é dire l'espérance mathématique du gain algébrique est nulle. Montrer alors que $3p + q = 60$.
   Déterminer les couples (p, q) possibles pour que le jeu soit équitable.

   c) Pour $p = 16$ et $q = 12$, calculer l'espérance mathématique et l'écart-type X.

PROBLEME

PARTIE A : Introduction d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

1. a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln x \leq x - 1$.

   En déduire que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln \frac{x}{k} \leq 0$.

   b) Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \ln x \, dx - \ln(n!) \leq 0$.

   c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(n!) + n - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(n + \frac{1}{2}\right) - \ln\sqrt{2} \geq 0$

2. Soit g eyt f les fonctions numériques définies sur $I = [0; 1[$ par :

$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{1}{1 - x^2} \\ f(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x g(t)\,dt \quad si\ x \neq 0\ et\ f(0) = 0 \end{cases}$$

   a) Dresser le tableau de variations de g.

   b) Montrer que $\forall x \in]0; 1[, 1 \leq f(x) \leq g(x)$. (On pourra au besoin appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction $u \xrightarrow{h} \int_0^u g(t)\,dt$ dans l'intervalle $[0; x]$ ou utiliser la valeur moyenne de la fonction g sur l'intervalle $[0; x]$.)
   f est-elle continue en 0 ?

   c) Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que $\forall t \in I, g(t) = \frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t}$.
   En déduire que $\forall x \in [0; 1[, f(x) = \frac{1}{2x} \ln \frac{1+x}{1-x}$.

3. Soit la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \ln(n!) + n - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n$$

   a) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = 1 - f\left(\frac{1}{2n+1}\right)$; en déduire le sens de variation de la suite (u_n).

b) **Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq \ln\sqrt{2}$.**

c) **Montrer que la suite (u_n) est convergente.**

PARTIE B : Dans cette partie, on se propose de trouver la limite de la suite (u_n).

On admettra que si une suite (α_n) a pour limite ℓ, alors la suite (α_{2n}) a aussi pour limite ℓ.

Soit (v_n) la suite d´efinie par : $v_0 = \frac{\pi}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\, dt$.

1. **a) Calculer v_1 puis montrer que la suite (v_n) est croissante et positive.**

   b) En intégrant par partie, prouver que :

$$(E): \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} v_n$$

   c) Montrer alors que $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n+1}{n+2} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n} \leq 1$ et alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n}$.

   d) Démontrer que la suite (a_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = (n+1)v_{n+1}v_n$$

   Est constante. (Indication : on pourra calculer $\frac{a_{n+1}}{a_n}$). Déterminer cette constante.

   d) **Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}, nv_n^2 = \frac{n}{n+1} a_n \frac{v_n}{v_{n+1}}$**

   En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} nv_n^2 = \frac{\pi}{2}$.

2. **Pour tout entier naturel n, on pose $b_n = v_{2n}$.**

   a) **Quelle est la limite de (nb_n^2).**

   b) **En utilisant la relation (E), démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, b_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{\pi}{2}$.**

3. **a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, e^{u_n} = n! \left(\frac{e}{n}\right)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$.**

   b) Déterminer une constante A telle que pour tout entier naturel n non nul :

   $e^{u_{2n}-2u_n} = A\sqrt{nb_n^2}$, en déduire les limites des suites (u_n) et (e^{u_n}).

BACCALAUREAT SESSION 2015

Exercice 1

Soit Γ l'ensemble des triplets $T=(p,\ q,\ r)$ d'entiers relatifs, avec r non nul, vérifiant :

$$(E):\ p^2+q^2=r^2$$

L'espqce euclidien orienté est muni d'un repère orthonormé direct. On fait correspondre à tout triplet $(p,\ q,\ r)$ de Γ le point M de coordonnées $(p,\ q,\ 0)$.

Un element $(p,\ q,\ r)$ de Γ est dit non trivial si p et q sont non nuls.

1.
   a. **Montrer que $T'=(3,\ 4,\ 5)$ et $T''=(5,\ 12,\ 13)$ sont des elements de Γ.**

   b. **Soit k un entier relatif non nul. Montrer que $T=(p,\ q,\ r)$ est un élément de Γ si et seulement si $kT=(kp,\ kq,\ kr)$ est un élément de Γ.**

   Un élément $(p,\ q,\ r)$ non trivial de Γ est dit irréductible si $p,\ q$ et r sont premiers entre eux

2. **Soit T_1 et T_2 dx éléments irréductibles de Γ, M_1 et M_2 leurs points correspondants respectifs.**

   a. **Montrer alors que le triplet $\left(\left|\overrightarrow{OM_1}.\overrightarrow{OM_2}\right|,\ \left\|\overrightarrow{OM_1}\wedge\overrightarrow{OM_2}\right\|,\ \left\|\overrightarrow{OM_1}\right\|\times\left\|\overrightarrow{OM_2}\right\|\right)$ est un élément de Γ.**

   Dans la suite, ce triplet est noté $T_1 * T_2$

   b. **Vérifier que le triplet $T_1 * T_2$ est trivial si et seulement si les droites (OM_1) et (OM_2) sont confondues ou perpendiculaires.**

   c. **En utilisant T' et T'', déduire de la question 2.a trois autres solutions irréductibles de l'équation (E).**

Exercice 2

O **et** A **sont deux points distincts du plan euclidien orienté.** (C) **est le cercle de centre** O **et de rayon** OA**.** M **est un point de** (C)**. On pose** $\theta = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$**.**

On note B **et** C **les points de** (C) **tels que** $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \theta + \frac{\pi}{2}[2\pi]$ **et** $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) = 2\theta + \pi[2\pi]$**.**

1. **On note** A' **le symétrique de** A **par rapport à la droite** (OM)**. Montrer que** A' **et** C **sont symétrique par rapport à** O**. En déduire une onctruction de** C**.**
   Faire une figure que l'on completera au fur et à mesure.

On prend OA **comme unité et on pose** $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$**. Soit** $\vec{v}$ **le vecteur tel que** $(O, \vec{u}, \vec{v})$ **soit un repère orthonormé direct. Dans la suite le plan est supposé rapporté à ce repère.**

On note z, b **et** c **les affixes respectives des points** M, B **et** C**.**

2. **A**
   a. **Ecrire** z, b **et** c **sous forme exponentielle puis vérifier que** $b = iz$ **et** $c = -z^2$**.**
   Soit H **le point d'affixe** $h = 1 + b + c$**.**
   b. **Soit** N **le point d'affixe** $1 + b$**. Construire** N **puis déduire une construction de** H**.**

3. **Désormais on suppose que** $\theta \neq \frac{\pi}{2}[\pi]$**.**
   a. **Justifier que les points** A, B **et** C **sont distincts deux à deux.**
   Montrer que $\frac{z_{\overrightarrow{AH}}}{z_{\overrightarrow{CB}}} = \frac{z_{\overrightarrow{CH}}}{z_{\overrightarrow{BA}}} = \frac{1+iz}{1-iz}$**. Vérifier que** $\frac{1+iz}{1-iz}$ **est un imaginaire pur. En déduire que** H **est l'hortocentre du triangle** ABC**.**
   b. **Résoudre dans** $\mathbb{C}$ **l'équation** $z^2 - iz - 1 = 0$**. On donnera les solutions sous forme exponentielle.**
   Déterminer l'affixe du centre de gravité du triangle ABC **en fonction de** b **et** c**.**

En déduire les valeurs de θ pour que H soit centre de gravité du triangle ABC. Quelle est alors la nature du triangle ABC ?

4. Vérifier que lorsque le point M dérit le cercle (C) privé des points d'affixes i et $-i$, le point H appartient à la courbe $(\hbar)$ d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x(t) = 1-\sin t - \cos 2t \\ y(t) = \cos t - \sin 2t \end{cases}$$

Probleme

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique $2\ cm$.

Partie A

Soit f la fonction définie sur $[0, 1[$ par :

$f(x) = 1 - x^2 + \ln(1-x)$

1. A
   a. Etudier la fonction f et représenter graphiquement sa courbe (C_f) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
   b. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α. Vérifier que $\alpha \in \left[\frac{1}{2}, \beta\right]$ avec $\beta = 1 - \frac{1}{e}$.
2. A
   a. Soient p et q les fonctions définies sur $\left[\frac{1}{2}, \beta\right]$ respectivement par :
   $$p(x) = |f'(x)| \text{ et } q(x) = |f''(x)|.$$
   Etudier les variations de p et q et dresser leurs tableaux de variations.
   b. En déduire que : $\forall x, y \in \left[\frac{1}{2}, \beta\right], \frac{|f''(x)|}{|f'(y)|} \leq M$ avec $M = \frac{e^2+2}{3}$.
3. Soit t un élément de $]\alpha, 1[$.
   a. Calculer $\int_\alpha^t \ln(1-x)\,dx$.

b. **Calculer** $\int_{\alpha}^{t} f(x)dx$ **et montrer que** $\lim_{x\to 1^-}\int_{\alpha}^{t} f(x)dx = P(\alpha)$ **ou** P **est un polynome à déterminer.**

Partie B

Les questions 1. et 2. sont *independantes.*

1. **Soient** u **et** v **deux reels tels que** $u < v$.

   Soit h **une fonction définie dans un intervalle ouvert contenant l'intervalle** $J = [u, v]$**, dérivable jusqu'à l'ordre 2 et ayant** u **omme unique zéro dans** J**. On suppose que** h **est négative sur** J **ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre 2 et que**

   $$\forall x \in J,\ h'(x) \neq 0.$$

   On considère la fonction T **définie sur** J **par** $T(x) = x - \dfrac{h(x)}{h'(x)}$.

   a. **Soit** a **un élément de** J **et** A **le point d'abscisse** a **de la courbe** (C_h) **représentative de** h **dans le repère** $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

   Vérifier que $T(a)$ **est l'abscisse du point d'intersection de la tangente à** (C_h) **en** A **avec l'axe des abscisses.**

   Montrer que T **est dérivable dans** J **et monotone ; dresser son tableau de variations. En déduire que** $T(J) \subset J$.

   On pose $x_0 = v$ **et pour tout entier naturel** n**,** $x_{n+1} = T(x_n)$

   b. **Montrer que la suite** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **est bien définie et bornée.**

   Vérifier qu'elle est monotone, en déduire qu'elle est convergente et calculer sa limite.

2. **Soient** a **et** b **deux reels tels que** $a < b$.

   Soit g **une fonction définie sur l'intervalle** $[a, b]$ **et deux fois dérivable.**

   Soit k **un reel fixé, on considère la fonction** G **définie sur** $[a, b]$ **par :**

   $$\forall x \in [a, b],\ G(x) = g(a) - g(x) - (a-x)g'(x) - \frac{1}{2}k(a-x)^2.$$

   a. **Calculer** $G(a)$**. Déterminer** k **pour que** $G(b)$ **soit égal à 0.**

Désormais k prend cette valeur.

b. En appliquant le théorème des accroissements finis à G dans l'intervalle $[a, b]$, montrer qu'il existe un réel c dans $]a, b[$ tel que $G'(c)=0$.

En déduire que : $g(a)=g(b)+(a-b)g'(b)+\frac{1}{2}(a-b)^2 g''(c)$.

Partie C : Application à la fonction f.

1.

a. Démontrer que la fonction f satisfait dans l'intervalle $[\alpha, \beta]$, aux hypothèses faites sur la fonction h de la Partie B.

On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par son premier terme $x_0=\beta$ et pour tout entier naturel n,

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

b. Démontrer que pour tout entier naturel n, il existe un reel c_n dans $]\alpha, x_n[$ tel que

$$f(\alpha)=f(x_n)+(\alpha-x_n)f'(x_n)+\frac{1}{2}(\alpha-x_n)^2 f''(c_n).$$

c. En déduire que $(x_{n+1}-\alpha)=(x_n-\alpha)^2\frac{f''(c_n)}{2f'(x_n)}$ **et** $x_{n+1}-\alpha\leq\frac{M}{2}(x_n-\alpha)^2$.

2. Pour tout entier naturel n, on pose $\delta_n=\frac{M}{2}(x_n-\alpha)$.

a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a :

$\delta_n\leq\delta_0^{2^n}\leq\left(\frac{M}{4}\right)^{2^n}$ **(Remarque que** $\delta_0=\frac{M}{2}(\beta-\alpha)\leq\frac{M}{4}$**)**

b. Déterminer un entier naturel n tel que $x_n-\alpha$ soit inférieur à 10^{-5} et une valeur approchée de α à 10^{-5} près par excès.

BACCALAUREAT SESSION 2014

Exercice 1

Une urne contient 9 boules identiques indiscernables au toucher de couleur noire, blanche ou rouge. Il y a au moins deux boules de chaque couleur dans l'urne. On tire au hasard simultanément deux boules dans l'urne et on note leurs couleurs. Soit G l'évènement : « Obtenir deux boules de même couleur. »

On note n, b et r le nombre de boules respectivement noires, blanches et rouges figurant dans l'urne.

1. **On note $g(n,b,r)$ la probabilité en fonction de n, b et r de l'évènement G.**

   Démontrer que $g(n,b,r)=\frac{1}{72}\left[n(n-1)+b(b-1)+r(r-1)\right]$

2. **Le but de cette question est de trouver les valeurs de n, b et r pour lesquelles la probabilité $g(n,b,r)$ est minimale.**

   L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. Soient les points N, B et R de coordonnées respectives $(9,0,0)$, $(0,9,0)$ et $(0,0,9)$. Soit M le point de coordonnées (n,b,r).

   a. **Justifier qu'une équation cartésienne du plan (NBR) est :** $x+y+z-9=0$.

   b. **En déduire que M est un point du plan (NBR).**

   c. **Démontrer que** $g(n,b,r)=\frac{1}{72}\left(OM^2-9\right)$.

   d. **Déterminer les coordonnées de H, projeté orthogonal du point O sur le plan (NBR).**

   e. **En déduire les valeurs de n, b et r pour lesquelles la probabilité $g(n,b,r)$ est minimale.**

      Justifier alors que cette probabilité minimale est égale à $\frac{1}{4}$.

3. On suppose que le nombre de boules de chaque couleur a été choisi par l'organisateur d'un jeu, de telle sorte que la probabilité de l'évènement G soit $\frac{1}{4}$.

Un joueur mise $1000 \ francs$ puis tire au hasard simultanément deux boules dans l'urne. S'il obtient deux boules de la même couleur, il reçoit $k \ francs$. Sinon, il ne reçoit rien.

On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

a. Calculer l'espérance $E(X)$ de la variable X en fonction de k.

b. Déterminer la valeur de k pour que le jeu soit équitable, c'est à dire pour que $E(X)=0$.

Exercice 2

1. Soient a, b, c des enteirs relatifs et n un entier naturel non nul.

a. Démontrer que a et b sont premiers entre eux si et seulement si a et b^n sont premiers entre eux.

b. En déduire que si a et b sont premiers entre eux et si a divise $b^n c$, alors a divise c.

2. On se propose dans cette question de déterminer les solutions rationnelles de lequation suivante : $(E):\ 7x^3+2x^2+2x-5=0$.

a. Démontrer que lequation (E) admet une solution réelle unique appartenant à l'intervalle $]0, 1[$.

b. En utilisant les résultats de la question 1.b, démontrer que si (E) admet une solution rationnelle $\frac{p}{q}$ ou p et q sont des entiers premiers entre eux, alors p divise 5 et q divise 7.

c. Résoudre l'equation (E) dans $\mathbb{Q}$ ensemble des rationnels.

3. Résoudre l'equation (E) dans $\mathbb{C}$ ensemble des nombres complexes.

Probleme

Le plan est rapporté à un repere orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique $2\ cm$. Dans tout le problème I désigne l'intervalle $]0, +\infty[$

Partie A

Soit f_0 la fonction définie sur I par $f_0(x) = \frac{1}{x}$.

Pour tout entier naturel n et tout $x \in I$, on pose $f_{n+1}(x) = \frac{1}{x}\int_1^x f_n(t)\,dt$ et on note (C_n) la courbe représentative de la fonction f_n dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1.
   a. **Montrer que pour tout element x de I, $f_1(x) = \frac{\ln x}{x}$.**

   b. **Etudier les variations de f_0 et de f_1 et dresser leur tableau de variations.**
2. **Déterminer suivant les valeurs de x, les positions relatives de (C_0) et (C_1).**
3. **Construire (C_0) et (C_1) dans le meme repère.**
4. **Calculer l'aire du domaine plan délimité par les courbes (C_0), (C_1) et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = e^2$.**

Partie B

Pour tout entier naturel n et tout $x \in I$, on pose $F_n(x) = \int_1^x \frac{f_n(t)}{t}\,dt$.

1.
   a. **Démontrer par recurrence que pour tout entier naturel n la fonction f_n est dérivable sur I.**

   b. **Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in I$, $f'_{n+1}(x) = \frac{-f_{n+1}(x) + f_n(x)}{x}$.**
2.
   a. **En utilisant la question précédente, montrer que pour tout entier naturel n et pour tout x dans I,**

$$F_n(x)-F_{n+1}(x)=f_{n+1}(x)$$

b. Vérifier alors que pour tout entier naturel p **et tout** $x\in I$ **on a :**

$$\sum_{n=0}^{p} f_n(x)=f_0(x)+F_0(x)-F_p(x)$$

3.

a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n **et tout** $x\in I$**,**

$$f_n(x)=\frac{\ln^n x}{n!x}$$

b. Démontrer que pour tout entier naturel n **et tout** $x\in[1,e]$**,**

$$|f_n(x)|\leq\frac{1}{n!}$$

En déduire que la suite $(F_n(e))_{n\in\mathbb{N}}$ **est convergente et calculer sa limite.**

c. Déduire de la question 2.b $\lim\limits_{p\to+\infty}\sum_{n=0}^{p}\frac{1}{n!}$ **.**

BACCALAUREAT SESSION 2013

Exercice 1

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.

Soit K le point du plan tel que $OIKJ$ soit carré.

Soit M un point quelconque de la droite (OK) différent de O et s la similitude plane directe de centre J qui transforme O en M. On note m l'affixe du point M, I' et M' les images respectives de I et de M par s.

1. **Montrer que $|m-1| = |m-i|$ et que les complexes $(m-1)(m-i)$ et $n(1+i)$ sont imaginaires purs.**

   Indication : M étant un point de la première bissectrice diffèrent de O, il existe un réel x non nul tel que $m = x + ix$.
2. **a) Vérifier que le rapport de s est $|m-i|$, calculer alors $M'I'$ en fonction de m.**

   b) Calculer le rapport de $s \circ s$. En déduire que $M'J = |m-i|^2$.

   c) Démontrer que $M'I' = M'J$.
3. **a) Démontrer que l'écriture complexe de s est $z' = (1+im)z + m$**

   En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{II'}$ et $\overrightarrow{M'I'}$ ont pour affixes respectives : $m(1+i)$ et $-i(m-i)(m-1)$

   b) Prouver alors que I' est le projeté orthogonal de M' sur la droite (IK).

   c) Déduire de la relation de la question 2. c) que lorsque le point M parcourt la droite (OK) privée du point O, le point M appartient à une parabole dont on précisera le foyer et la directrice.

   Placer toutes les données précédentes sur une figure.

Exercice 2

Dans un plan P de l'espace, on considère un cercle C de diamètre [AB]. Soit (Δ) la droite passant par A et orthogonale `a P et S un point de (Δ) distinct de A. On note I le projeté orthogonal de A sur (BS). Pour tout point M du cercle C on note H le projeté orthogonal de A sur la droite (MS).

1. Placer les données précédentes sur une figure, (Δ) étant tracée verticalement.

2. Prouver que H appartient `a la sphère Σ de diamètre [AS].

3. Dans cette question, on suppose que M est distinct de A et de B. Prouver que la droite (MB) est orthogonale au plan (AMS).

En déduire que la droite (AH) est orthogonale au plan (BMS).

4. Montrer que H appartient au plan Π passant par I et orthogonal a` la droite (BS).

5. Déterminer l'intersection Γ de la sphère Σ et du plan Π.

Problème

Le plan est muni d'un repère orthonormé $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

PARTIE A

1. a) Soit m un réel strictement positif. Déterminer en fonction de m, des réels a, b, c, α, β tel que pour tout réel x on ait :

$$\int_0^x ue^{-mx}\,du = (\alpha x + \beta)e^{-mx} + \frac{1}{m^2} \text{ et } \int_0^x u^2 e^{-mx}\,du = \left(ax^2 + bx + c\right)e^{-mx} + \frac{2}{m^3}$$

b) Calculer alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x ue^{-mx}\,du$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x u^2 e^{mx}\,du$

c) Montrer que les deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \int_0^x \frac{u}{e^u + e^{-u}}\,du \text{ et } g(x) = \int_0^x \frac{u^2}{e^u + e^{-u}}du$$

Sont positives, dérivables et croissantes sur $[0; +\infty[$.

Après avoir vérifié que $\forall u \in \mathbb{R}_+, \frac{1}{2}.\frac{1}{e^u} \leq \frac{1}{e^u+e^{-u}} \leq \frac{1}{e^u}$, déduire du b) que quand x tend vers $+\infty$, elles ont des limites respectives l et s appartenant à $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ et $[1; 2]$.

Indication : On admettra qu'une fonction continue, croissante et majorée sur [0,+∞[, admet une limite finie à $+\infty$.

d) Montrer que la fonction f est paire (faire le changement de variable t = −u).

2. En vue de l'étude d'éventuels points d'inflexions de la courbe C_f représentant la fonction f dans le repère R, montrer que la fonction h définie sur I par :

$$h(x) = (1 - x)e^x + (1 + x)e^{-x}$$

est dérivable sur I et s'annule en un unique point x_0 appartenant à]1; 1,3[.

3. a) Montrer que pour tout réel $\in \mathbb{R}$, $e^x > x$. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) < 0$.

b) Soit x un réel non nul. En appliquant le théorème des accroissements finis à f dans l'intervalle d'extrémités 0 et x, étudier les positions relatives de la courbe Cf et la première bissectrice. En déduire que l'équation $f(x) = x$ a pour unique solution 0.

PARTIE B :

1. a) Soit x un réel positif. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a :

$$f(x) - \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \int_0^x ue^{-(2p+1)u}\,du = (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{ue^{-(2n+2)u}}{e^u + e^{-u}}du$$

(On convient que $(-1)^0 = 1$)

En déduire que pour tout entier naturel n :

$$\left| l - \sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^2} \right| \leq \frac{1}{(2p+3)^2}$$

(Utiliser la question 1.b) de la partie A)

2. En procédant par une intégration par parties, vérifier que pour tout réel positif λ :

$$\int_0^{\lambda} \big(f(\lambda) - f(x)\big)\, dx = g(\lambda)$$

En déduire que $g(\lambda)$ et s peuvent être interpréter comme aires de domaines que l'on déterminera.

3. Représenter la courbe C_f

On prendre $x_0 = 1{,}2$ et $f(x_0) = 0{,}2$. On représentera en particulier l'asymptote horizontale, la tangente horizontale, les points d'inflexions et les tangentes à C_f en ces points et le domaine plan dont une mesure de l'aire est g(3).

NB. On rappelle que si une fonction est deux fois dérivable en un point x_0 et si sa dérivée seconde s'annule en x_0 en changeant de signe, alors le point de sa courbe d'abscisse x_0 est un point d'inflexion.

4. Soit a un réel strictement positif. On pose $a_0 = a$ et pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = f(a_n)$

a. Démontrer que la suite (a_n) est positive et monotone.

b. En d´eduire que la suite (a_n)est convergente. Calculer alors sa limite.

PARTIE C

On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$F(0) = l$ et pour tout réel x strictement positif $F(x) = f(\ln x)$.

1. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$.

Montrer que F est continue en 0.

2. a) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $F'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

La fonction F est-elle dérivable au point 0 ?

b) Déduire du a) que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, F(x) = \int_1^x \frac{\ln u}{1+u^2}\, du$$

BACCALAUREAT SESSION 2012

Exercice 1

Dans un plan affine euclidien, on donne une droite (D) et deux points distincts F et A, symétriques par rapport à (D).

On désigne par (H) l'hyperbole d'excentricité 2 qui admet F pour foyer et (D) pour directrice associée à F.

1. Montrer que A est un sommet de (H). Déterminer l'autre sommet A' en exprimant AA' en fonction de $\overrightarrow{AF}$.

Construire géométriquement les directrices de (H), ses foyers, ses sommets et son centre et donner l'allure de (H).

2. Soit (C) un cercle passant F et centre en un point O de (D) non situe sur l'axe focal.

Construire (*C*) sur la figure.

On se propose de montrer que (H) ∩ (C) = { *A*, M_1, M_2, M_3 } où M_1, M_2, M_3 sont les sommets d'un triangle équilatéral.

On rapporte le plan à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j}\,)$ choisi de façon que $(O,\vec{i}\,)$ soit un repère de (D).

A chaque point M du plan correspondant ainsi son affixe z = x + iy ; on désigne par a l'affixe de F.

a. Montrer que M (z) appartient à (C) si et seulement si : $z\bar{z}-a\bar{a}=0$ (On pourra interpréter géométriquement $z\bar{z}-a\bar{a}$).

Montrer de même que M(z) appartient a (*H*) si et seulement si : $(z-a)(\bar{z}-\bar{a})(z-\bar{z})^2=0$

b. En déduire que (C) ⋂ (H) est l'ensemble des points du plan don les affixes de z vérifient une équation de la forme : $(z-\bar{a})(z^3-k)=0$ ou k est un nombre complexe qu'on exprimera en fonction de a.

c. Montre que $k=r^3e^{i\theta}$ ou r est le module de θ un argument de a.

Résoudre alors l'équation $(z-\bar{a})(z^3-k)=0$ et conclure par rapport au problème pose.

Exercice 2

On considère la suite (u_n) definie pour tout entier natureln non nul par :

$$u_n = 2_n + 3 \times 7_n + 14_n$$

1.a. Calculer u_3

b. Montrer que, tout entier n nul, u_n est pair

c. On note (E) l'ensemble des nombres premiers qui divisent au moins un terme de la suite (u_n).

Les réels 2, 3, 5 et 7 appartient- ils l'ensemble (E).

2. On rappelle le petit théorème de Fermat : Si p est un nombre et q un entier naturel premier avec p, alors $q_{p-1} \equiv 1[p]$.)

Soit p un nombre premier strictement supérieur a 7.

Soient m et n deux entiers naturels tels que 14=mn.

a. Quelles sont les valeurs possibles de m ?

Montrer que 14× $m_{p-2} \equiv n(\text{ modulo } p)$

déduire p appartient – il a l'ensemble E ?

Déterminer E.

Problème :

On considère la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} & x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

C désigne la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

Etudier la continuité de f.

2.a. Démontrer que pour tout réel x non nul de l'intervalle $]-1, +\infty[$ on a :

$$0 \leq \frac{1}{x}\int_0^x \frac{u^2}{1+u} du \leq x \int_0^x \frac{1}{1+u} du$$

(On pourra montrer ce résultat pour x appartenant a $]0, +\infty[$ et pour x appartenant a $]-1, 0]$).

Vérifie que $\forall u \in]-1, +\infty[$, $\frac{1}{1+u} = 1 - u + \frac{u^2}{1+u}$

En déduire que : $\forall x \in]-1, +\infty[$, $x \neq 0 \Rightarrow f(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{x}\int_0^x \frac{u^2}{1+u} du$.

En exploitant les résultats des questions précédentes, montrer que f est derivable aupoint 0.

Déterminer une équation de la tangente a C au point d'abscisse 0 et étudier la position de C par rapport a cette tangente.

Etudier la dérivabilité de f.

3. a. Soit g l'application définie sur $]-1,+\infty[$ par $g(x) = ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$

Etudier les variations de g et déterminer le signe de g(x) suivant les valeurs de x.

b. En déduire le sens de variation de f.

4. Etudier les limites de f aux bornes de l'intervalle $]-1,+\infty[$.

5. Déterminer les droites asymptotes `a C et préciser la position de C par rapport à l'axe des abscisses.

6. Construire la courbe C.

Partie B

1. Justifier que pour tous réels a et b de $]-1,+\infty[$ tels que $a < b$ on a :

$$(b-a)f(b) \leq \int_a^b f(x)dx \leq (b-a)f(a)$$

En déduire un encadrement de l'aire de la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe

C et les droites d'équations respectives x = 0 et x = 1 ; on utilisera les nombres $0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$ *et* 1.

2. a. En utilisant la fonction g, montrer que pour $tout\ x > 0, f(x) - \frac{1}{x+1} \geq 0$

b. En déduire la limite lorsque t tend vers $+\infty$ de la fonction : t→ $\int_0^t f(x)dx$

3. a. Soit h l'application définie sur $]-1,0]$ $par\ h(x) = x + 1 - (x+1)\,ln(x+1)$.

Calculer h′(x) pour x appartenant a] − 1, 0] et montrer que pour tout réel x de cet intervalle

on a h(x) ∈]0, 1].

b. Montrer que : $\forall x \in \left]-1,\frac{1}{2}\right], 0 \leq f(x) \leq -2ln(x+1)$

En déduire que la fonction F : t $\rightarrow \int_t^{\frac{-1}{2}} f(x)dx$ est majoree dans $\left]-1, \frac{1}{2}\right]$

c. On considère la suite $(v_n)_{n>0}$ de terme général $v_n = \int_{-1+\frac{1}{n}}^{0} f(x)dx$

Etudier le sens de variation de la suite $(v_n)_{n>0}$. En déduire que cette suite est convergente.

Baccalaureat session 2011

Exercice 1

On considère la suite u_n dentiers naturels définie par :

$$u_0 = 27$$
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n - 4$$

1. **Calculer u_1, u_2 , u_3, et u_4**

Quelle conjecture peut-on émettre concernant les derniers chiffres de u_n ?

2. **Montrer que tout entier naturel n, $u_{n+2} \equiv u_n[8]$.**

En déduire que pour tout entier naturel , $u_{2n} \equiv 3[8]$ $u_{2n+1} \equiv 5[8]$.

3. **Pour tout entier naturel n, on pose : $v_n = u_n - 2$.**

Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.

En déduire que pour tout entier naturel n, $2u_n = 50 \times 3^n + 4$.

4. **Montrer que pour tout entier naturel n, $2u_n \equiv 54[100]$.**

Déterminer les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de u_n suivant les valeurs de n.

5. **Montrer que deux termes consécutifs de la suite (u_n) sont premiers entre eux.**

Exercice 2

L'espace orienté ε est rapporté à un repère orthogonal direct $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Soit l'application de ε dans ε qui à tout point M de coordonnées (x, y, z) associe le point M' de coordonnées (x', y', z') tel que :

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = z + 1 \\ z' = x - 1 \end{cases}$$

1. **a) Montrer que f est une isomérie, (c'est-à-dire que f conserve la distance.)**

   b) Montrer que l'ensemble des points invariants par f est la droite (Δ) passant par le point A de coordonnées $(0, 0, -1)$ et de vecteurs directeur $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$

2. **Soit P le plan perpendiculaire à (Δ) en A.**

   a) **Montrer que le point I de coordonnées $(-1, 0, 0)$ appartient à P.**

   b) **Prouver que $I' - f(I)$ appartient a P.**

3. **Déterminer la nature de f et ses éléments géométriques caractéristiques.**

4. **Déterminer l'ensemble des points M de ε d'images M' tels que le milieu J de $[MM']$ appartient :**

   a) **au plan Q d'équation cartésienne : $2x + y + z = 0$**

   b) **a la droite (D) dont un système d'application cartésienne est : $x = y = z$**

Problème

Soit f une fonction numérique définie sur l'intervalle $I = [-1; 1]$ et admettant sur I une dérivée troisième f''' continue. Soit a un point de I , $a \neq 0$

1.a) Dire pourquoi f'''est bornée (c'est-à-dire il existe deux réels m et M tel pour tout $x \in I$, $m \leq f'''(x) \leq M$ ou il existe un réel $K > 0$ tel que tout $x \in I$ $|f'''(x)| \leq K$.)

En déduire $\lim\limits_{a\to 0} \frac{1}{a^2}\int_0^a (a-x)^2 f'''(x)dx$.

b) Soit g une fonction numérique définie sur I et en admettant sur I une dérivée troisième g''' continue.

Quelle est la dérivée de $f''g'' - f'g''$?

En déduire que

(0.1) $\int_0^a f'(x)g'''(x)dx = [(f'g'' - f''g'(x)] + \int_0^a f'''(x)g'(x)dx.$

1. **On a prend $g(x) = \frac{1}{6}(a-x)^3$**

a) **Après avoir calculer $g'(x), g''(x),$ et $g'''(x)$ pour $x \in I$, montrer en utilisant la relation (0.1)**

que $f(a) = f(0) + f'(0)a + \frac{1}{2}f''(0)a^2 + \frac{1}{2}\int_0^a (a-x)^2 f'''(x)dx$

b) **Application**

En choisissant pour f la fonction $x \to e^x$, calculer $\lim\limits_{a\to 0} \frac{e^a - a - 1}{a^2}$

2. **Dans le plan P muni repère orthonormé $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ on considère la courbe G de système d'équations paramétriques :**

$$\begin{cases} x(t) = \frac{t}{e^t - 1} \\ y(t) = \frac{t}{e^t - 1}e^t \end{cases} \quad \text{si } t > 0 \quad et \quad x(0) = y(0) = 1$$

a) **Montrer que les fonctions x et y sont continues au point 0.**

b) **Vérifier qu'elles sont dérivables en 0. Quelle est la tangente T_B à G au point B de coordonnées (1, 1) ?**

Pour tout entier non nul n on considère la fonction numérique f_n definie sur $[0;+\infty[$ par : $f_n = e^{\sqrt{x}} - \left(e+\frac{1}{n}\right)\sqrt{x}$. C_n est sa courbe representative dans le P muni d'un repere orthonorme $(0,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (unite graphique 2cm)

1.a) Justifier la dérivabilité de f_n sur $[0;+\infty[$ et calculer $f'_n(x)$ pour $x > 0$.

La fonction f_n est – elle derivable au point 0 ? (On pourra utiliser 2.b de la partie A)

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f_n(x)}{x}$ et dresser le tableau de variations de f_n.

c) Construire dans le repère, la courbe C_1 sa demi – tangente au point d'abscisse 0 et sa tangente au point d'abscisse $[\ln(e+1)]^2$.

2.a) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet deux solutions α_n et β_n telles que $0 < \alpha_n < 1 < \beta_n$

b) Soit b un réel positif ou nul. Montrer que $\int_0^b e^{\sqrt{x}}dx = 2 + 2(\sqrt{b}-1)e^{\sqrt{b}}$. Pour cela, on pourra utiliser la formule d'intégration par parties :

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)] - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

en prenant $u(x) = \sqrt{x}$

Pour tout entier naturel n *on pose* : $I_n = \int_0^{\alpha_n} f_n(x)dx$

c)Vérifier que $I_n = 2 + 2(e+\frac{1}{n})\sqrt{\alpha_n}\left(\sqrt{\alpha_n} - \frac{1}{3}\alpha_n - 1\right)$

3. **Pour tout entier $\in \mathbb{R}_+^*$, on pose : $\varphi(x) = \frac{e^x}{x}$**

   a) **Démontrer que les restrictions h_1 *et* h_2, *de* φ respectivement a chacun des intervalles $V_1 =]0,1]$ *et* $V_2 = [1,+\infty[$ sont des bijections de V_1 et de V_2 respectivement sur des intervales à déterminer.**

On pose $h = {h_2}^{-1} o h_1$ et on désigne par C_h la courbe de h dans le repère.

On ne cherchera pas l'expression de $h(x)$ en fonction x.

   b) **Vérifie que tout entier $n \geq 1$, $e + \frac{1}{n} = h_1(\sqrt{\alpha_n})$; en deduire que la suite $(\alpha_n)_{n\geq1}$ est convergente et calculer sa limite. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.**

   c) **Déterminer de même la limite de la suite $(\beta_n)_{n\geq1}$**

4.Pour tout entier naturel non nul n, on note M_n le point du plan de coordonnées $(\sqrt{\alpha_n}, \sqrt{\beta_n})$.

a) Pour tout entier naturel non nul n, le point M_n appartient a C_h (c'est-à-dire $\left(h\sqrt{\alpha_n}\right) = \sqrt{\beta_n}$).

b) Déterminer les limites de h aux bornes de son ensemble de définition.

Montrer que la fonction h est décroissante.

a) **Démontrer que h est dérivable dans** $]0,1[$

En remarquant que

$\varphi(x) = \varphi(h(x))$

pour tout x appartient a V_1**, établir que** $\forall\, x \in]0,1[,\ h'(x) = \frac{x-1}{x} \times \frac{h(x)}{h(x)-1}$

5.a) Soit $M(x,y)$ **un point de** C_h**. On pose** $t = \ln(\frac{y}{x})$

En utilisant la relation(0.2)**, montrer que :**

$$\begin{cases} \frac{y}{x} = e^t \\ y - x = t \end{cases}$$

En déduire que M est le point G de paramètre t.

b) Réciproquement, vérifier que tout point de G appartient a C_h.

c) Donner une équation de T_A**, tangente a** C_h **au point A d'abscisse 0,4 (On prendra 2 comme valeur approchée de** $h(0,4)$.

Représenter la courbe de C_h**ainsi que les tangentes** T_A **et** T_B.

BACCALAUREAT SESSION 2010

Exercice 1 :

Dans le plan orienté, on considère deux points distincts A et B. Sur la figure, on prendra 8 cm comme longueur du segment $[AB]$.

1. Etudier et construire l'ensemble (E) des points M du plan tels que $\frac{MA}{MB} = 4$.

(0.5pt + 0.25 pt)

2. Etudier et construire l'ensemble (F) des points M du plan tels que $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$

(0.5pt + 0.25 pt)

3. Soit C l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{3\pi}{4}$ et D l'image de B par l'homotothie de centre A et de rapport $\frac{3}{4}$. On désigne par s la similitude directe transformant A en B et C en D.

a) Déterminer le rapport et l'angle de s.

b) On note I le centre de la similitude s. Exprimer IB en fonction de IA et donner une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}\right)$. En déduire la position du point I et le placer sur la figure.

c) Démontrer que I appartient au cercle circonscrit au triangle ACD

Exercice 2 :

On rappelle la propriété connue sous le nom de *petit théorème de Fermat* : '' Si p est un nombre premier et a un entier naturel premier avec p, alors $a^{p-1} \equiv 1[p]$ ''.

1. a) Démontrer que 193 est un nombre premier.

b) Soit a un entier naturel inférieur à 192. Montrer que $a^{192} \equiv 1[193]$

2. On considère l'équation

(E) : $83x - 192y = 1$ où x et y sont des entiers relatifs.

a) Vérifier que le couple $(155, 67)$ est solution de (E).

b) Résoudre l'équation (E).

3. On note A l'ensemble des 193 entiers naturels inférieur où égaux à 192 et on considère les deux fonctions f et g définie de la manière suivante :

à tout entier a de A, f associe le reste de la division euclidienne de a^{83} par 193.

à tout entier a de A, g associe le reste de la diviion euclidienne de a^{155} par 193.

a) Démontrer que $g\left(f(a)\right) = a^{83\times155}[193]$. En déduire que pour tout $a \in A$ on a :

$g\left(f(a)\right) = a$.

Déterminer $f \circ g$.

Probleme

PARTIE A

Soit a un réel non nul, u et v deux fonctions dérivables sur et telles que :

(0.1) $$\begin{cases} u' = v \\ v' = au \end{cases}$$

1.a) Montre que u et v vérifient l'équation différentielle

(0.2) $$y'' - ay = 0$$

b) Résoudre l'équation (0.2) selon les valeurs de a

2) On suppose que $a = 1$. Déterminer u et v sachant que $u(0) = 3$ et $v(0) = 0$

PARTIE B

Le plan (P) est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (Unitégraphique 2 cm).

Soit $\left(\Gamma\right)$ l'ensemble des points M de (P) dont les coordonnées $\left(x, y\right)$ vérifient :

(0.3) $$\begin{cases} x(t) = \dfrac{3}{2}\left(e^{t} + e^{-t}\right) \\ y(t) = \dfrac{3}{2}\left(e^{t} - e^{-t}\right) \end{cases} \quad t \geq 0$$

L'objet de cette partie est de calculer l'aire du domaine plan délimité par $\left(\Gamma\right)$ et les droites d'équations $y = 0, \quad x = 3 \quad et \quad x = 5$.

1.a) Démontrer que $\left(\Gamma\right)$ est une partie de la conique dont une équation est :

(0.4) $$x^2 - y^2 - 9 = 0$$

b) Préciser la nature de cette conique ainsi que ses éléments caractéristiques.

Construire (Γ)**.**

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to x - \sqrt{x^2 - 9}$ **et** $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $x \to \dfrac{x}{2} + \dfrac{9}{2x}$

a) Etudier les variations de la fonction f **.**

b) Montrer que la restriction de f **à l'intervalle** $I = [3, +\infty[$ **est une bijection de** I **sur un intervalle** J **à préciser. On note** φ **cette restriction.**

c) Démontrer que pour tout x **élément de** J**, on a** $\varphi^{-1}(x) = g(x)$**.**

d) Tracer (C_φ)**, la courbe représentative de de** φ **dans le repère** $(O, \vec{i}, \vec{j})$**. Explique comment obtenir** $(C_{\varphi^{-1}})$**,courbe représentative de** φ^{-1} **dans ce repère, à partir de** (C_φ)**.**

Tracer $(C_{\varphi^{-1}})$**.**

3. Soit β **un élément de** $]0, 3[$ **et** $\alpha = g(\beta)$

a) Calculer $\int_\beta^3 g(x)dx$ **et en déduire que** $\int_3^\alpha f(x)dx = \dfrac{\beta^2}{4} - \dfrac{9}{4} - \dfrac{9}{2}\ln\left(\dfrac{\beta}{3}\right)$**.**

Indication : [On pourra nterpréter ces deux intégrales comme des aires]

b) En déduire l'aire du domaine plan délimité par (Γ) **et les droites d'équation**

$y = 0, \quad x = 3 \quad et \quad x = 5$.

PARTIE C

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **telle que :**

(0.5) $$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases} \quad si \quad n \in \mathbb{N}$$

On se propose de calculer de trois façons différentes la limite de la suite (u_n)**.**

1.a) Etudier les variations de g **puis montrer que**

$$\forall n \in \mathbb{N},_n \quad u_n \succ 3 \quad et\, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{g(u_n) - g(u_{n-1})}{u_n - u_{n-1}} \succ 0.$$

b) Déterminer le signe de $u_1 - u_0$ **puis montrer que la suite** (u_n) **est monotone.**

c) En déduire que la suite (u_n) **est convergente et déterminer sa limite.**

2. a) En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction g **dans un intervalle approprié, montrer que**

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \frac{g(u_n)-3}{u_n-3} \prec \frac{1}{2}$$

En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n - 3 \prec \frac{1}{2^{n-1}}$$

Montrer que la suite (u_n) **est convergente et déterminer sa limite.**

b) Déterminer une valeur possible de n **pour que** $u_n - 3 \prec 10^{-3}$

3. Pour tout $\forall n \in \mathbb{N}$ **on pose :** $v_n = \dfrac{u_n - 3}{u_n + 3}$

a) Montrer que $(\ln v_n)$ **est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.**

b) Exprimer alors u_n **en fonction de** n **et calculer la limite de** (u_n).

LIBERTE – L'ORDRE – JUSTICE

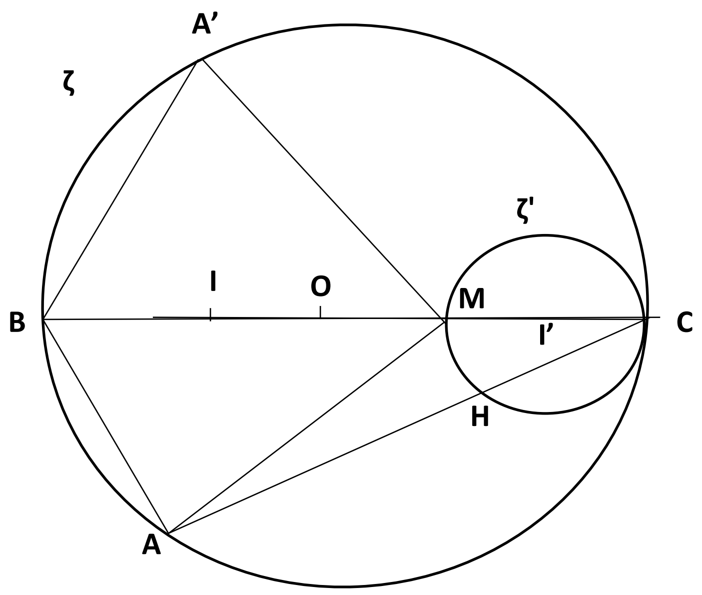
SUJETS DES BACCALAUREATS DE TUNISIE

BACCALAUREAT SESSION 2019

Exercice 1 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct. Dans la figure ci-dessous.

$\mathcal{C}$ est le cercle de centre O et de diamètre $[BC]$. M est le point de $[BC]$ tel que $CM = \frac{1}{3}BC$ et $\mathcal{C}$' est le cercle de diamètre $[CM]$. I et I' sont les milieux respectifs des segments $[BM]$ *et* $[CM]$. A et A' sont deux points de cercles $\mathcal{C}$ tels que AMA'B est un losange et $\left(\widehat{\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. La droite (AC) recoupe le cercle $\mathcal{C}$' en H.



1. **a) Montrer que les droites (AB) et (HM) sont parallèles.**

   b) En déduire que les points H, M et A' sont alignés.

   c) Montrer que $HM = \frac{1}{3}AB$ *et que* $HA^2 = AB^2 - HM^2$.

2. **On désigne par S la similitude directe de centre H qui envoie A en M.**

   a) Préciser l'angle de S et montrer que son rapport est égal à $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

   b) Déterminer les images par S des droites (AI) et (MH). En déduire S(A').

3. **Montrer que S(I) = I' et en déduire que (HI) est tangente en H au cercle $\mathcal{C}$'.**

4. **On pose $S' = S_{(AH)}\ o\ S\ o\ S_{(AH)}$.**

   a) Vérifier que S' est une similitude directe dont on précisera le centre I et le rapport.

b) La droite (A'M) recoupe le cercle $\mathcal{C}$ en N et montrer que le triangle MCN est isocèle de sommet principal C.

c) Déterminer S'(A). En déduire alors l'angle de S'.

Exercice 2 :

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\ ;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath};\ \vec{k})$.

On considère les points A(2, 0, 1), B(-2, 0, 1), C(1, 1, 1) et D(-4, 0 , -1).

1. a) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

   b) On désigne par P le plan (ABC). Montrer que P est d'équation $z = 1$.

2. Soit S l'ensemble des points M(x ; y ; z) de l'espace tels que $x^2 + y^2 + z^2 - 4z - 1 = 0$.

   a) Montrer que S est une sphère dont on précisera le rayon et les coordonnées du centre Ω.

   b) Soit le point I(0, 0, 1), montrer que S et P se coupent suivant le cercle $\mathcal{C}$ de centre I et de rayon 2.

3. Soit $\lambda \in \mathbb{R} - \{2\}, \Omega(0,0,\lambda)$ et $R_\lambda = \sqrt{(\lambda - 1)^2 + 4}$.

   a) Montrer que la sphère S_λ de centre Ω_λ et de rayon R_λ coupe P suivant le cercle $\mathcal{C}$.

   b) Déterminer λ_0 pour que $D \in S_{\lambda_0}$.

   c) Déterminer les homothéties de l'espace transformant S en S_{λ_0}.

Exercice 3 :

1. On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) : $29x - 13y = 6$.

   a) Vérifier que (2 ; 4) est une solution de (E).

   b) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E).

Soit dans $\mathbb{Z}$ l'équation (E') : $x^{19} \equiv 1[29]$.

2. Justifier que $2^{28} \equiv 1[29]$ et en déduire que -8 est solution de (E').

3. Soit x_0 une solution de (E').

   a) Montrer que x_0 n'est pas un multiple de 29 et en déduire alors $x_0^{28} \equiv 1[29]$.

   b) Montrer que $x_0^{57} \equiv 1[29]$.

   c) En déduire l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}$ de l'équation (E').

   d) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(x - 3)^{19} \equiv -2[29]$.

4. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système $\begin{cases} (x-3)^{19} \equiv -2[29] \\ (x-3)^{13} \equiv -2[13] \end{cases}$

Exercice 4 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

On considère la fonction f définie sur [0 ; +∞[par $f(x) = \sqrt{1-e^{-x}}$.

1. a) Montrer que f possède une fonction réciproque g définie sur [0 ; 1[.

   b) Montrer que pour tout $x \in [0;1[; g'(x) = -ln(1-x^2)$.

   c) Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet une solution α *sur* $[07,0,8]$.

   d) On donne en annexe la représentation graphique $\mathcal{C}$ de la fonction f dans le repère (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

   La première bissectrice Δ et le point A(**α** ; **α**).

   On désigne par $\mathcal{C}$' la courbe de g. Tracer $\mathcal{C}$' dans le même repère.

2. Soit **φ** la fonction définie sur [0 ; 1[par : $\varphi'(x) = \int_0^{g(x)} f(t)dt$.

   a) Montrer que **φ** est dérivable sur [0 ; 1[et que $\varphi'(x) = \frac{2x^2}{1-x^2}$.

   b) Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout x appartenant à [0 ; 1[,

   $\frac{2x^2}{1-x^2} = a + \frac{b}{1-x} + \frac{c}{1-x}$.

   c) En déduire que $\varphi(x) = -2x + ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), x \in [0;1[$.

   d) On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire de la région du plan située entre les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$' et les droites d'équations respectives x = 0 et x = **α**.

3. Soit (u_n), la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k.3^k}$

   Soit n ≥ 1. On pose pour tout $e \in [0;1[, S_n(t) = 2\sum_{k=1}^{n} t^{2k-1}$.

   a) Montrer que $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} S_n(t)dt = u_n$.

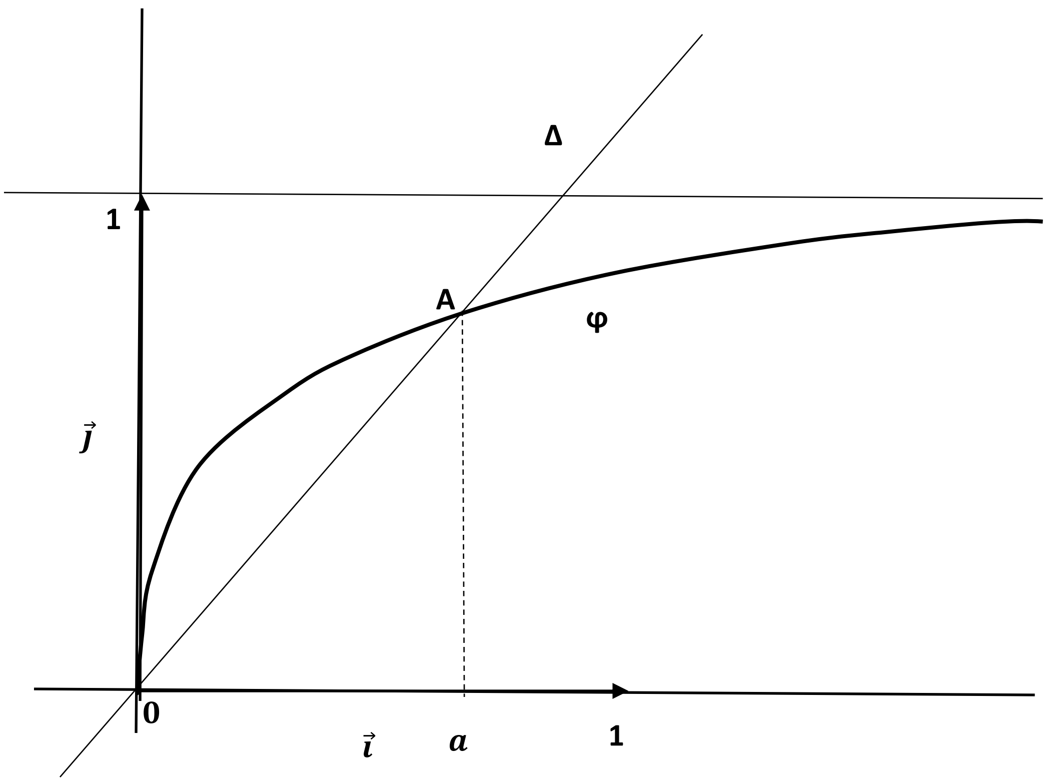
   b) Montrer que pour tout t ∈ [0 ; 1[, $S_n(t) = (1-t^{2n})g'(t)$, où g' est la dérivée de la fonction g sur [0 ; 1[.

   c) Montrer que pour tout $0 \leq t \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\left(1-\frac{1}{3^n}\right)g'(t) \leq S_n(t) \leq g'(t)$.

   d) En déduire que $\left(1-\frac{1}{3^n}\right)g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \leq u_n \leq g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

4. Montrer alors que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

Annexe

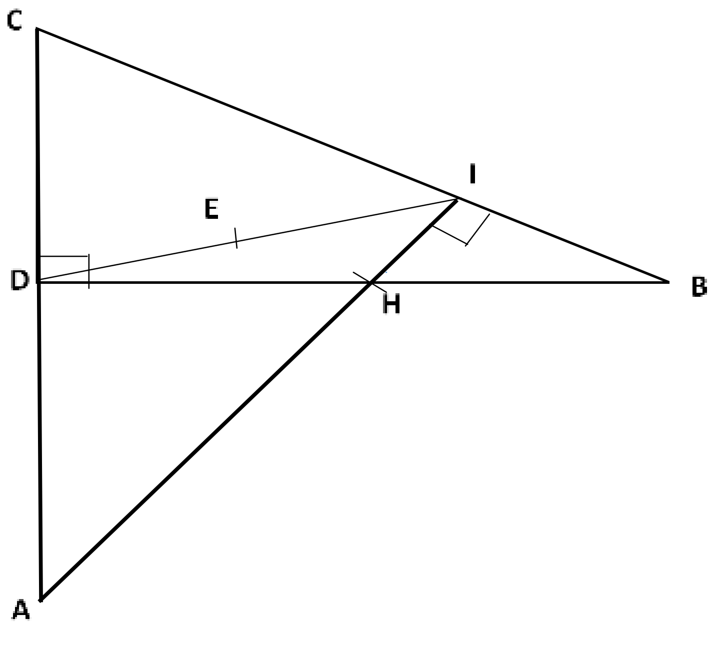


BACCALAUREAT SESSION 2018

Exercice 1 :

Le plan est orienté. Dans la figure ci-contre,

- **DBC est un triangle rectangle en D tel que** $\left(\widehat{\overrightarrow{DB};\ \overrightarrow{DC}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ $et\ DB = 2DC$.
- **Le point H est le milieu du segment** $[DB]$;
- **Le point I est le projeté orthogonal du point H sur la droite (BC) ;**
- **Le point E est le milieu du segment** $[ID]$.
- **Les droites (IH) et (CD) se coupent au point A.**



1. **Soit R la rotation de centre H et d'angle** $\frac{\pi}{2}$.
   a) **Calculer** $tan(\widehat{CBD})$. $En\ déduire\ que \frac{IH}{IB} = \frac{1}{2}$.
   b) **Montrer alors que R(I) = E.**
2. **Soit h l'homothétie de centre D et de rapport 2. On pose** $f = h\ o\ R$.
   a) **Déterminer f(H).**
   b) **Montrer que F(I) = I.**
   c) **Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.**
   d) **Montrer que f(C) = A.**

3. a) La droite (CH) coupe la droite (AB) en un point F.

   Justifier que les points B, I, H et F sont sur le cercle de diamètre $[BH]$. En déduire que $\left(\widehat{\overrightarrow{IH};\ \overrightarrow{IF}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$.

   b) Montrer alors que l'image par f de la droite (ID) est la droite (IF).

   c) La droite (ID) coupe les droites (CF) et (AB) respectivement en J et Ω. Montrer que f(J) = F.

   d) Montrer que f(F) = Ω.

4. Montrer que le triangle CAΩ est rectangle.

Exercice 2 :

Soit θ un réel non nul.

Dans la figure 1 de l'annexe jointe.

- (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$) est un repère orthonormé direct.
- $\mathcal{C}$ est le cercle de centre O et de rayon 1.
- E est le point de $\mathcal{C}$ tel que $\left(\widehat{\vec{u};\ \overrightarrow{OE}}\right) \equiv \theta[2\pi]$;
- F et G sont les points d'affixes, respectives, -1 *et* $1+\sqrt{2}$;
- Γ est le demi-cercle de diamètre $[FG]$
- D est le point d'intersection de Γ et l'axe $(O;\ \vec{u})$

1. a) Vérifier que $OD^2 = 1+\sqrt{2}$.

   b) Soit A le point d'affixes $z_A = i\sqrt{1+\sqrt{2}}\,e^{i\theta}$. $vérifier\ que\ z_A = OD\ e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}$. Construire alors le point A.

2. On considère, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E): $z^2 + \frac{\sqrt{2}}{i\sqrt{1+\sqrt{2}}}e^{i\theta}z + e^{2i\theta} = 0$.

   a) Vérifier que z_A est une solution de l'équation (E).

   b) On désigne par B le point d'affixe z_B, où z_B est la deuxième solution de (E). Déterminer z_B.

3. a) Montrer que les points O, A et B sont alignés.

   b) Placer les points C d'affixes $z_C = OD\ e^{i\theta}$.

   c) Montrer que $\frac{Aff(\overrightarrow{AC})}{Aff(\overrightarrow{AB})} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$.

   En déduire que le triangle ABC est isocèle et que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$.

   d) Construire alors le point B.

Exercice 3 :

A. On considère la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $\begin{cases} f(x) = x\ln x, \ si\ x > 0, \\ f(0) = 0 \end{cases}$

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,; \vec{i}; \vec{j})$.

1. a) Vérifier que f est continue à droite de 0.

   b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter graphiquement.

   c) Dresser le tableau de variation de f.

2. Dans la figure 2 de l'annexe jointe, on a tracé dans un repère orthonormé précédent. La courbe Γ de la fonction $x \longmapsto e^x$ et les droites Δ et Δ' d'équations respectives y = x et y = - x.

a) Construire les points A et B de (C_f) d'abscisse respectives e et $\frac{1}{e}$

b) Déterminer la position relative de (C_f) et Δ puis la position relative de (C_f) et Δ'.

c) Tracer la courbe (C_f).

3. Soit S la partie du plan limitée par la courbe (C_f) et les droites Δ et Δ'.

   Montrer que l'aire de la partie S est égale à $\frac{1}{4}\left(e^2 - \frac{1}{e^2}\right)$.

B. Soit n un entier naturel

On pose $u_n = \int_{\frac{1}{e}}^{1} t^n e^t dt \ \ et\ v_n = \int_{\frac{1}{e}}^{1} t^n e^t f(t) dt$.

1. a) Montrer que $u_n \geq 0$.

   b) Montrer que $0 < u_n \leq \frac{e}{n+1}$. *En déduire* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

   c) Montrer alors que $u_{n+1} = e - \frac{e^{\frac{1}{e}}}{e^{n+1}} + (n+1)u_n$.

   d) Montrer alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1)u_n = e$.

2. a) Montrer que $\frac{u_n}{e} \leq v_n \leq 0$. Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

   b) vérifier que pour tout $t \in]0\,;+\infty[$, $f(t) = tf'(t) - t$.

   Montrer alors que $v_n = \int_{\frac{1}{e}}^{1} t^{n+1} e^t f'(t) dt - U_{n+1}$.

   c) A l'aide d'une intégration par partie montrer que $(n+2)v_n = \frac{e^{\frac{1}{e}}}{e^{n+2}} - v_{n+1} - u_{n+1}$.

   d) Montrer alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+2)v_n = 0$.

3. a) Montrer qu'il existe un seul réel α_n appartenant à l'intervalle $\left[\frac{1}{e};1\right]$ *tel que* $f(\alpha_n) = \frac{v_n}{u_n}$.

   b) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{v_n}{u_n} = 0$.

   c) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n$.

Exercice 4 :

A. soit q un entier naturel.

1. Montrer que q^2 est paire si et seulement si q est impaire.
2. Montrer que si q est impaire alors $q^2 \equiv 1(mod\ 8)$.

B. On se propose de déterminer l'ensemble A des triplets d'entiers naturels non nuls (m, n, q) tels que $2^{2m} + 3^{2n} = q^2$.

1. Vérifier que le triplet (2 ; 1 ; 5) est un élément de A.

   Dans la suite de l'exercice on suppose que (m, n, q) est un élément de A.
2. a) Montrer que q est impaire.

   b) Montrer que $q^2 - 3^{2n} \equiv 0(mod\ 8)$.

   c) Montrer alors que m est différent de 1.
3. On suppose que m ≥ 2.

   a) Justifier que les entiers $(q - 3^n)$ et $(q + 3^n)$ *sont paires*.

   b) Soit $d = (q - 3^n) \wedge (q + 3^n)$.

   Montrer que d divise 2q et que d divise 2^{2m}. En déduire que d = 2.

   c) Montrer que $q - 3^n = 2$ *et que* $q + 3^n = 2^{2m-1}$.

   En déduire que $q = 2^{2m-2} + 1$ *et que* $3^n = 2^{2m-2} - 1$.
4. Déterminer n et q lorsque m = 2.
5. On suppose que m ≥ 3.

   a) Montrer que $3^n \equiv -1(mod\ 16)$.

   b) Déterminer, suivant les valeurs de l'entier naturel k, les restes possibles de 3^k dans la division euclidienne par 16.

   c) Déterminer l'ensemble A.

Annexe

Figure 1

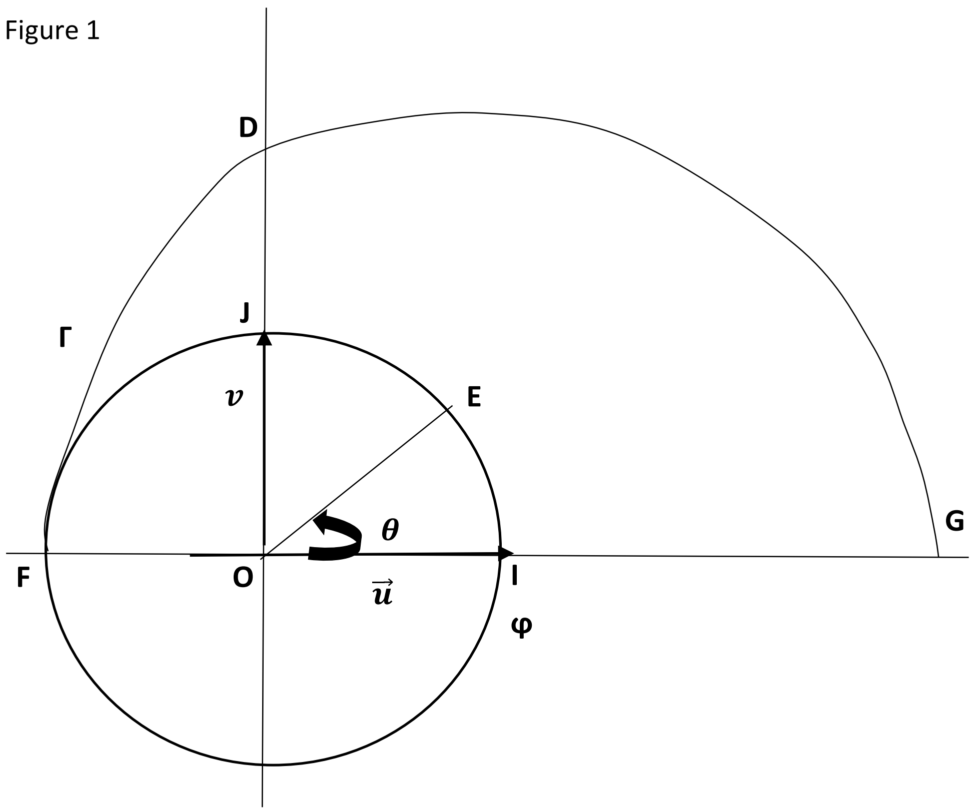
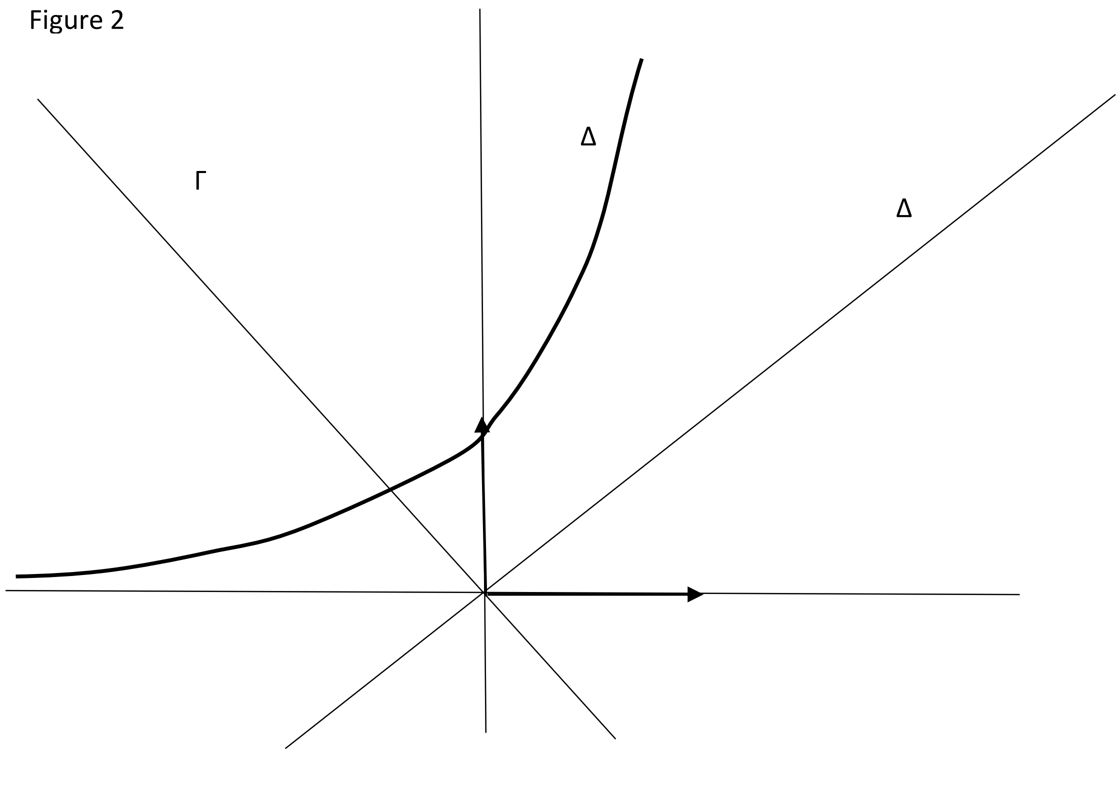


Figure 2



BACCALAUREAT SESSION 2017

Exercice 1 :

Le pan est orienté.

Dans la figure 1 de l'annexe 1 jointe.

ABC est un triangle équilatérale tel que $\left(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA}\right) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

Ω est un point inférieur au triangle ABC tel que $\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{A\Omega}\right) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$.

I et J sont les projetés orthogonaux de Ω respectivement sur les droites (AB) et (AC) ; D est le point de la droite (AC) tel que DA = DΩ.

1. **Montrer que** $\left(\overrightarrow{\Omega J}; \overrightarrow{\Omega D}\right) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$.
2. **Soit** $R = S_{(\Omega D)}\ o\ S_{(\Omega J)}$.
   a) **Justifier que R est la rotation de centre Ω et d'angle** $\frac{2\pi}{3}$.
   b) **Soit** $F = R(J)$.
   Montrer que F est un point de la demi-droite [ΩI). Construire le point F.
3. **Soit h l'homothétie de centre Ω et telle que** $h(F) = I. On\ pose\ f = h\ o\ R$.
   a) **Vérifier que f(J) = I.**
   b) **Montrer que f est une similitude directe dont on précisera le centre et l'angle.**
   c) **Calculer** $\frac{\Omega I}{\Omega A}\ et\ \frac{\Omega A}{\Omega J}$. $\left(on\ donne\ sin\ \left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right)$.
   En déduire que le rapport de f est égal à $1 + \sqrt{3}$.
4. **Soit g la similitude indirecte de centre Ω telle que g(J) = I.**
   a) **Montrer que** $g = f\ o\ S_{(\Omega J)}$.
   b) **Déterminer le rapport de g.**
   c) **Montrer que l'axe g est la droite (ΩD).**
   d) **Montrer que** $g = h\ o\ S_{(\Omega D)}$.
   e) **La droite (ΩD) coupe la droite (BC) en un point K. On pose** $k' = g(k)$.
   Vérifier que $h(k) = k'$. **Construire alors le point** k'.

Exercice 2 :

L'espace est orienté.

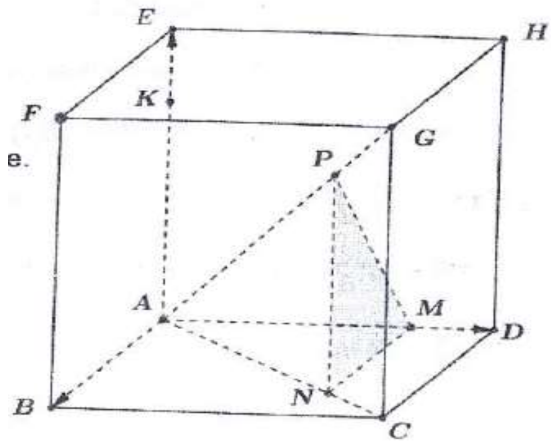
Dans la figure ci-contre ABCDEFGH est un cube d'arrêt 1.

$\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$ **est un repère orthonormé direct de l'espace.**

1. **a) Montrer que** $\overrightarrow{EC} \wedge \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{AH}$.

b) Montrer que l'aire du triangle ECD est égale à $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

c) Calculer le volume du tétraèdre AECD.



2. Soit h l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{3}{4}$.

   On pose $M = h(D)$.

   a) Le plan passant par M et parallèle au plan (DCG) coupe les segments $[AC]$ et $[AG]$ respectivement en N et P. Montrer que $h(C) = N$ et $h(G) = P$.

   b) Le plan passant par M et parallèle au plan (ECD) coupe la droite (AE) en un point K. Calculer le volume du tétraèdre AKNM.

3. Soit (S) la sphère de centre le point I $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ $et\ de\ rayon\ R = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

   a) Montrer que la sphère (S) coupe le plan (DCG) suivant un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

   b) Soit (S') l'image de la sphère (S) par l'homothétie h.

   Montrer que (S') coupe le plan (MNP) suivant un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 3 :

1. Soit x un entier non nul premier avec 53.

   a) Déterminer le reste modulo 53 de x^{52}.

   b) En déduire que pour tout entier naturel k, $x^{52k+1} \equiv x(mod\ 53)$.

2. Soit l'équation (E_1) : $x^{29} \equiv 2(mod\ 53)$, où $x \in \mathbb{Z}$.

   Montrer que 2^9 est une solution de (E_1).

3. Soit x une solution de l'équation (E_1)

   a) Montrer que x est premier avec 53.

b) Montrer que $x^{261} \equiv x(mod\ 53)$.

c) En déduire que $x \equiv 2^9(mod\ 23)$.

4. a) Montrer que $2^9 \equiv 35(mod\ 53)$.

   b) Donner alors l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}$ de l'équation (E_1).

5. On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E_2) : $71u - 53v = 1$

   a) Vérifier que (3 ; 4) est une solution de l'équation (E_2).

   b) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E_2).

6. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système $\begin{cases} x \equiv 34\ (mod\ 71) \\ x^{29} \equiv 2\ (mod\ 53) \end{cases}$

Exercice 4 :

Soit f la fonction définie sur $[0\ ;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{e^x - 1}$.

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\ ;\vec{i};\ \vec{j})$.

1. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement.

2. a) Montrer que $\lim_{x\to0^+} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. Interpréter graphiquement.

   b) Montrer que pour tout $x \in]0;\ +\infty[$, $f'(x) = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}}$.

   c) Dresser le tableau de variation de f.

   d) En déduire que $e^x - 1 \leq \sqrt{e^x - 1}$, si et seulement si, $x \leq ln(2)$.

3. Montrer que le point B(ln2 ; 1) est un point d'inflexion de (C_f).

4. Dans la figure 2 de l'annexe 2 jointe, on a tracé dans le repère $(O\ ;\vec{i};\ \vec{j})$l= la courbe f de la fonction $x \longmapsto e^x - 1$.

   a) Etudier la position relative de (C_f) par rapport à Γ.

   b) Tracer la courbe (C_f) .

5. Soit g la fonction définie sur $[0\ ;\frac{\pi}{2}[$, par : $g(x) = tan(x)$.

   a) Montrer que g réalise une bijection de $[0\ ;\frac{\pi}{2}[$ sur $[0\ ;+\infty[$. On note g^{-1} sa fonction réciproque.

   b) Calculer $(g^{-1})(0)$ et $(g^{-1})(1)$.

   c) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $[0\ ;+\infty[$ et que $(g^{-1})'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

   d) Démontrer que $\lim_{x\to0^+} \frac{g^{-1}(x)}{x} = 1$.

6. On pose pour tout $x \in [0;\ +\infty[$, $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ et $G(x) = 2(2f(x) - (g^{-1}\ o\ f)(x).)$

a) Montrer que pour tout $x \in]0;\ +\infty[, F'(x) = G'(x)$.

b) En déduire que pour tout $x \in]0;\ +\infty[, F(x) = G(x)$.

c) Soit A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C_f), la courbe Γ et les droites d'équations x = 0 et x = ln2.

7. Soit n un entier naturel tel que n ≥ 2.

On désigne par f_n la fonction définie sur [ln(n) ; +∞[par $f_n(x) = \sqrt{e^x - n}$.

On note (C_n) sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).

a) Soit G_n la fonction définie sur [ln(n) ; +∞[par : $G_n(x) = 2\left(f_n(x) - \sqrt{n}g^{-1}\left(\frac{f_n(x)}{\sqrt{n}}\right)\right)$.

Montrer que pour tout $x \in [ln(n);\ +\infty[, G_n(x) = \int_{ln(n)}^{x} f_n(t)dt$.

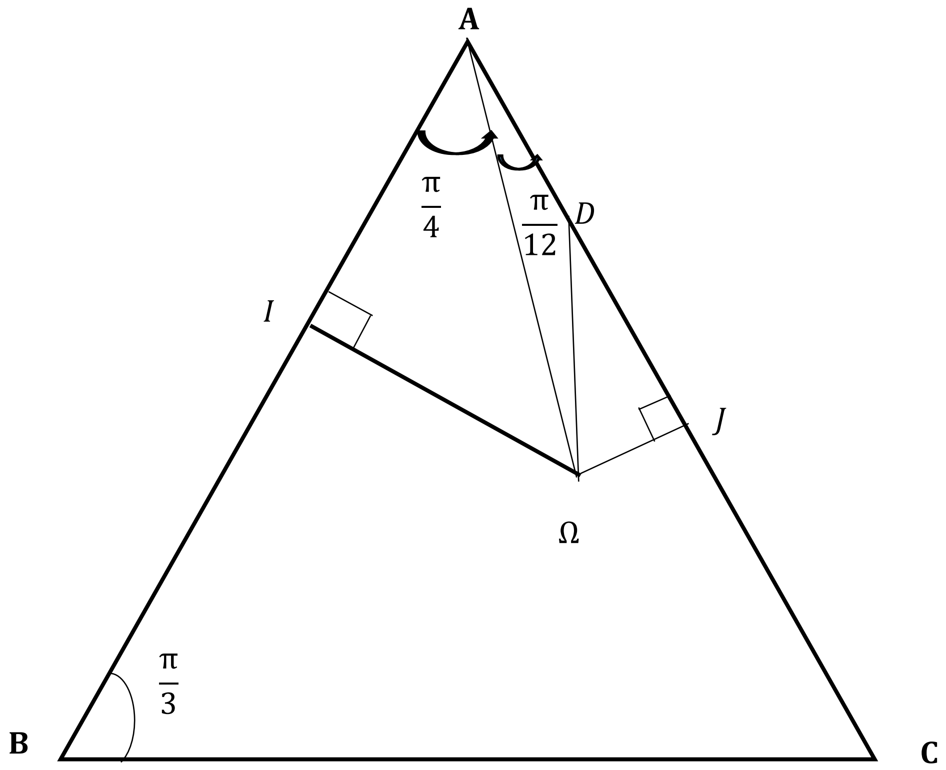
b) Vérifier que pour tout $x \geq ln(n), \sqrt{e^x - n} < \sqrt{e^x - 1}$.

En déduire que pour tout $x \geq ln(n), f_n(x) \leq e^x - 1$.

c) Soit A_n l'aire de la partie du domaine limitée par la courbe (C_n), la courbe Γ et les droites d'équations x = ln(n) et x = ln(n + 1). Montrer que $A_n = 2\sqrt{n}\, g^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) + ln\left(\frac{n}{n+1}\right) - 1$.

d) Déterminer $\lim_{n \to +\infty} A_n$.

Annexe



BACCALAUREAT SESSION 2016

Exercice 1 :

Le plan est orienté.

Dans la figure 1 de l'annexe jointe, ABC est un triangle directe rectangle en A tel que AB < AC.

La médiatrice du segment $[BC]$ coupe les droites (AB), (AC) et (BC) respectivement en E, F et G.

1. **Soit f la similitude directe de centre A et telle que f(B) = F.**
   a) **Déterminer l'angle de f.**
   b) **Montrer que l'image de la droite (BC) par f est la droite (GF).**
   c) **Déterminer f(C).**
2. **Le cercle $\mathcal{C}_1$ de diamètre $[BC]$ et le cercle $\mathcal{C}_2$ de diamètre $[EF]$ se coupent en A et H.**
   a) **Montrer que f($\mathcal{C}_1$) = $\mathcal{C}_2$.**
   b) **Soit I = f(H). Construire I.**
   c) **Montrer que le quadrilatère HEIF est un rectangle.**
   d) **La droite (FI) coupe a droite (AE) en un point J. Montrer que f(F) = J.**
3. **Soit la similitude indirecte de centre A et telle que g(B) = F.**
   a) **Montrer que $g = S_{(AC)}\ o\ f$.**
   b) **Soit E'= f(E). Montrer que E' est un point de la droite (AC).**
   c) **Soit F' = g(F) et H' = g(H). construire l'image par g du rectangle FHEI.**

Exercice 2 :

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2-(1+2i)mz-(1-i)m^2=0$, où m est un nombre complexe non nul, d'argument $\theta \in]0\,;\pi[$.

1. **a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).**
   on note z_1 et z_2 les solutions de l'équation (E).
   b) **Montrer que (z_1z_2 est un réel strictement positif) si et seulement si $\left(\theta=\frac{5\pi}{8}\right)$.**
   Dans la suite de l'exercice on prend $\theta=\frac{5\pi}{8}$.
2. **Vérifier que $z_1z_2=|m|^2\sqrt{2}$.**

3. Soit t un réel strictement positif et $m = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt[4]{2}} e^{i\frac{5\pi}{8}}$. On se propose de construire les points M_1 et M_2.

Image des solutions z_1 *et* z_2 de l'équation (E), correspondant au nombre complexe m.

Dans la figure 2 de l'annexe jointe, (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$) est un repère orthonormé direct.

B et C sont les points d'affixes respectives $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ *et* t;

E est le point d'intersection du demi-cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[BC]$ *avec l'axe*$(O, \vec{v})$.

a) Montrer que $OE^2 = OB.OC$.

b) En déduire que $|m| = OE$.

4. a) Construire le point A d'affixe m.

c) En déduire une construction des points M_1 et M_2 images des solutions z_1 et z_2 de l'équation (E). (On convient que $|z_1| < |z_2|$).

Exercice 3 :

1. Soit a un entier tel que $a \equiv 1(mod\ 2^4)$ *et* $a \equiv 1(mod\ 5^4)$. Montrer que $a \equiv 1(mod\ 10^4)$.
2. Soit $b = (9217)^2$. Montrer que $b \equiv 1(mod\ 5)$ *et* $b \equiv 1(mod\ 2^4)$.
3. Pour tout entier naturel n, on pose $b_n = b^{5^n} - 1$.

a) Montrer que pour tout entier naturel n, $b_{n+1} = (b_n + 1)^5 - 1$.

b) En déduire que pour tout entier naturel n, $b_{n+1} = b_n^5 + 5b_n^4 + 10b_n^3 + 10b_n^2 + 5b_n$.

4. a) Montrer que si 5^{n+1} *divise* b_n *alors* 5^{n+2} *divise* b_n^5.

b) Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $b_n \equiv 0(mod\ 5^{n+1})$.

5. a) Montrer que $(9217)^{500} \equiv 1(mod\ 625)$.

b) Montrer que $(9217)^{500} \equiv 1(mod\ 10000)$.

c) Trouver un entier dont le cube est congru à 9217 modulo 10000.

Exercice 4 :

A. On considère la fonction f définie sur $]0\ ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$.

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).

1. a) Calculer $\lim_{x \to 0^+} f(x)$. Interpréter graphiquement.

b) Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement.

2. a) Montrer que pour tout x ∈]0 ; +∞[, $f'(x) = \frac{(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}}}{2x\sqrt{x}}$.

   b) Dresser le tableau de variation de f.

   c) Tracer la courbe (C_f).

3. Soit **λ** un réel de]0 ; 1[. On désigne par S_λ l'aire de la partie du plan limitée par (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations x = **λ** et x = 1.

   Calculer S_λ en fonction de **λ** et déterminer $\lim_{\lambda \to 0^+} S_\lambda$.

B. 1. Soit g_1 et g_2 les restrictions de f respectivement à chacun des intervalles]0, 1] et [1 ; +∞[.

Montrer que g_1 réalise une bijection de]0 ; 1] sur un intervalle I quel l'on déterminera et que g_2 réalise une bijection de [1 ; +∞[sur l'intervalle I.

2. Soit n un entier naturel non nul.

   a) Montrer que l'équation $f(x) = e + \frac{1}{n}$ admet dans]0 ; +∞[exactement deux solutions notées α_n et β_n telle que $0 < \alpha_n < 1 < \beta_n$.

On définit ainsi, pour tout entier naturel non nul n, deux suites réelles (α_n) et (β_n).

   b) Montrer que les suites (α_n) et (β_n) sont convergentes et déterminer leur limites.

3. On considère la fonction h définie sur [0 ; +∞[par

$$\begin{cases} h(x) = \sqrt{x}\left(f(x) - (e + \frac{1}{n})\right) & si\ x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On note (C_h) sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).

a) Montrer que h est continue à droite en 0.

b) Déterminer le signe de h(x) pour tout x ∈ [0 ; +∞[.

4. Soit H la primitive de h sur [0 ; +∞[qui s'annule en 0.

a) Justifier que les fonctions $u : x \mapsto \int_0^x e^{\sqrt{t}} dt$ et $v : x \mapsto 2 + 2(\sqrt{x} - 1)e^{\sqrt{x}}$ sont continues sur [0 ; +∞[et dérivables sur]0 ; +∞[.

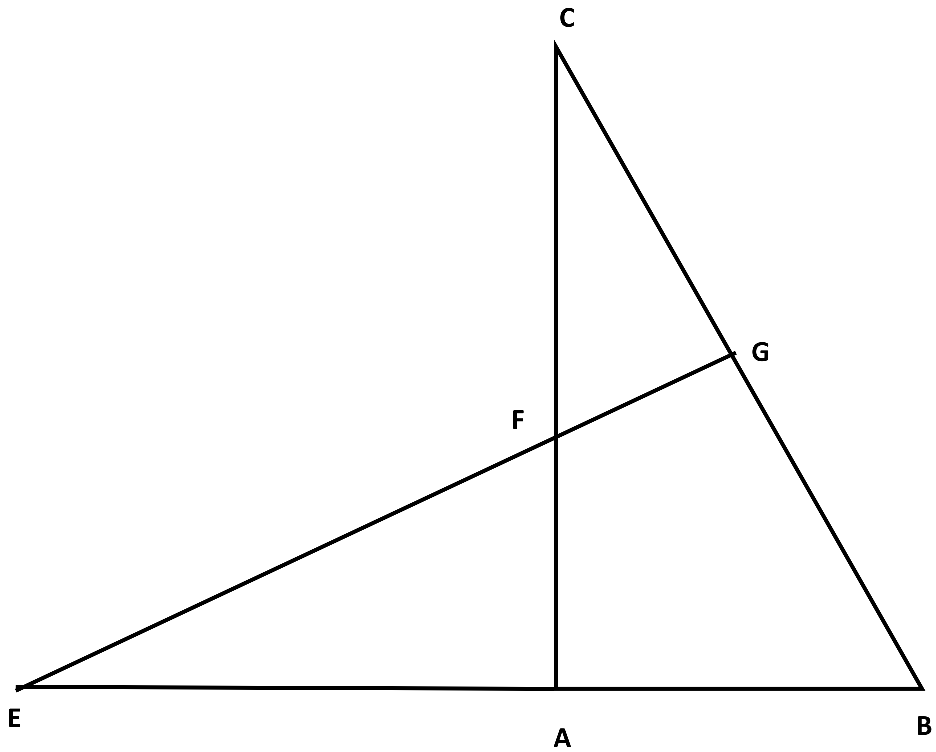
b) Montrer que pour tout x ≥ 0, $u(x) = v(x)$.

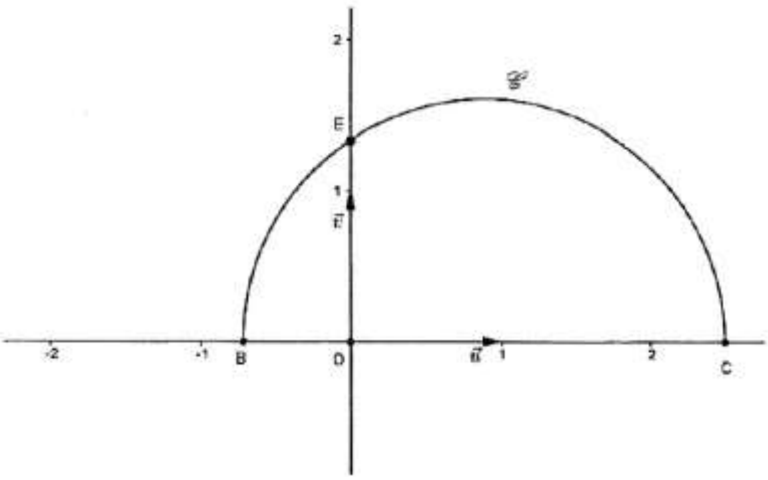
c) Donner l'expression de H(x) pour tout x ∈ [0 ; +∞[.

5. Soit $\mathcal{A}_n$ l'aire de la partie du plan limitée par (C_n), l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 0 et x = β_n. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathcal{A}_n = 2 - \frac{2}{3}e$.

Annexe

Figure 1





BACCALAUREAT SESSION 2015

Exercice 1 :

1. **a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - 2z + 4 = 0$**

   b) Déterminer une écriture exponentielle de chacune des solutions de (E).

2. **Dans le repère rapporté à un repère orthonormé directe (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$), on considère le cercle (Γ) de centre O et de raton 2 et le point A d'affixe 2.**

   Placer les points B et C d'affixes respectives $e^{\frac{i\pi}{3}}$ $et\ 2e^{-\frac{i\pi}{3}}$.

3. **Soit θ ∈]-π ; π] et M le point du cercle (Γ) d'affixe $2e^{i\theta}$.**

   On désigne par N le point de (Γ) tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{ON}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. Justifier que N a pour affixe $2e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)}$.

4. **Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.**

a) **Vérifier que la rotation r a pour expression complexe** : $z' = e^{\frac{i\pi}{3}}z + 2 - 2e^{\frac{i\pi}{3}}$.

b) **Soit F et K les milieux respectifs des segments $[BM]\ et\ [CN]$. Montrer que r(F) = K.**

c) **En déduire la nature du triangle AFK.**

5. **a) Montrer que $AF^2 = 4 - 2\sqrt{3}cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$.**

   b) En déduire l'affixe du point M pour laquelle AF est maximale et construire le triangle AFK correspondant.

Exercice 2 :

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]\ et\ \left(\widehat{\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

1. **Soit f la similitude directe de centre A qui envoie B sur C. Déterminer l'angle et le rapport de f.**
2. **Soit g la similitude indirecte de centre A qui envoie C sur B.**

a) **Déterminer le rapport de g.**

b) **Déterminer l'axe de Δ de g.**

c) **Soit D le point définie par $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.Montrer que g(B) = D et en déduire que $[BD]$ est la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{ABC}$.**

3. **a) Montrer que $f\ o\ g$ est une symétrie axiale et préciser son axe.**

   b) On pose $D' = f(D)$. Montrer que D' est le symétrique de B par rapport à A.

4. La bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{CAD'}$ coupe la droite (CD') en un point J.

   Soit le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC. Déterminer f(I).

Exercice 3 :

1. On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) : $47x + 53y = 1$.
   a) Vérifier que (-9 ; 8) est une solution de (E).
   b) Résoudre l'équation (E).
   c) Déterminer l'ensemble des inverses de 47 modulo 53.
   d) En déduire que 44 est le plus petit inverse positif de 47 modulo 53.
2. a) Justifier que $45^{53} \equiv 1(mod\ 53)$.
   b) Déterminer alors le reste de $45^{106}\ modulo\ 53$.
3. Soit $N = 1 + 45 + 45^2 + \cdots + 45^{105} = \sum_{k=0}^{k=105} 45^k$
   a) Montrer que $44N \equiv 10(mod\ 53)$.
   b) En déduire le reste de $N\ modulo\ 53$.

Exercice 4 :

I. Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,\pi]$ par $f(x) = e^{sinx}$.On désigne par (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).

1. a) Déterminer la dérivée f' et dresser le tableau de variation de f sur $[0\,;\,\pi]$.b) Montrer que la droite $\Delta : x = \frac{\pi}{2}$ est u axe de symétrie de la courbe (C_f)c) Soit (T) la tangente à (C_f) au point d'abscisse 0. Justifier que (T) a pour équation $y = x + 1$.
2. Soit la fonction g définie sur $[0\,;\,1]$ par $g(x) = e^x\sqrt{1 - x^2} - 1$.On donne ci-contre le tableau de variation de g.

a) Justifier que l'équation $g(x) = 0$ admet dans l'intervalle $]0,1[$ une solution unique α.

b) En déduire le signe de g(x) sur $[0\,,1]$.

x	0		$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$		1
g(x)		+		-	
g(x)		↗	$g(\frac{-1+\sqrt{5}}{2})$	↘	
	0				-1

3. On se propose de déterminer la position relative de (C_f) et de sa tangente (T) au point d'abscisse 0 sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Soit la fonction h définie sur $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$ par $\boldsymbol{f(x) = e^{sinx} - (x+1)}$.

a) Vérifier que pour tout x ∈ $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$, $\boldsymbol{h'(x) = g(\sin x)}$.

b) Montrer qu'il existe un unique réel **β** dans $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\boldsymbol{\sin\beta = \alpha}$.

c) Déterminer alors l'image par la fonction sinus de chacun des intervalle $[0;\ \beta]$ *et* $\left[\beta;\frac{\pi}{2}\right]$.

d) Dresser le tableau de variation de h.

e) En déduire que pour tout x de $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, $\boldsymbol{f(x) \geq x+1}$. Conclure.

II.

1. a) Montrer que pour tout réel x ≥ 0, $\boldsymbol{\sin x \leq x}$.

b) Déduire alors que pour tout réel $\boldsymbol{x} \in \left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$, $\boldsymbol{f(x) \leq e^x}$.

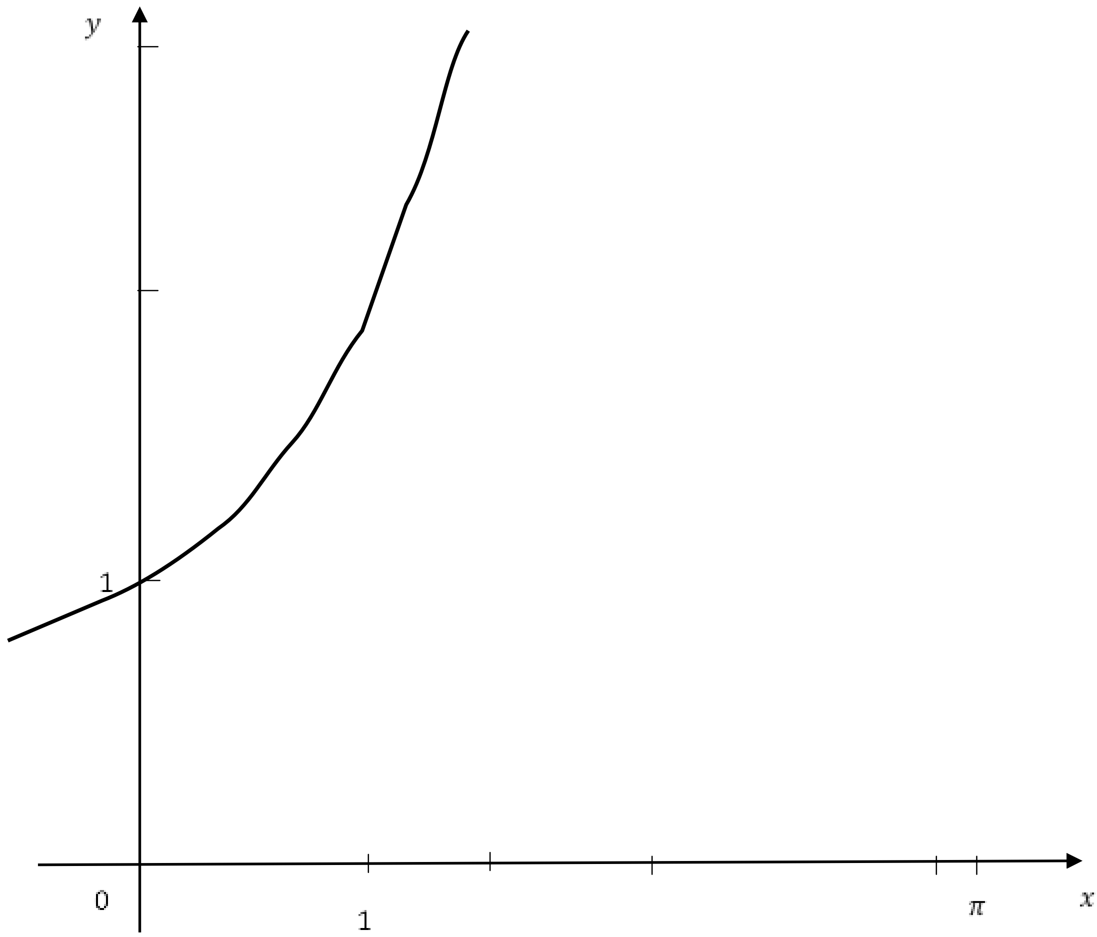
c) Dans l'annexe ci-jointe, on a tracé la courbe de la fonction $\boldsymbol{x \longmapsto e^x}$.

Tracer la droite (T) et la courbe (C_f).

2. a) Montrer que $\int_0^1 f(x)dx \leq e-1$ *et que* $\int_1^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx \leq e\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$.

b) Soit A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C_f), l'axe $(O\ ;\ \vec{\imath})$ et les droites d'équations x = 0 et x = **π**. Montrer que $\frac{\pi^2}{2}+\pi \leq A \leq e\pi - 2$.

Annexe



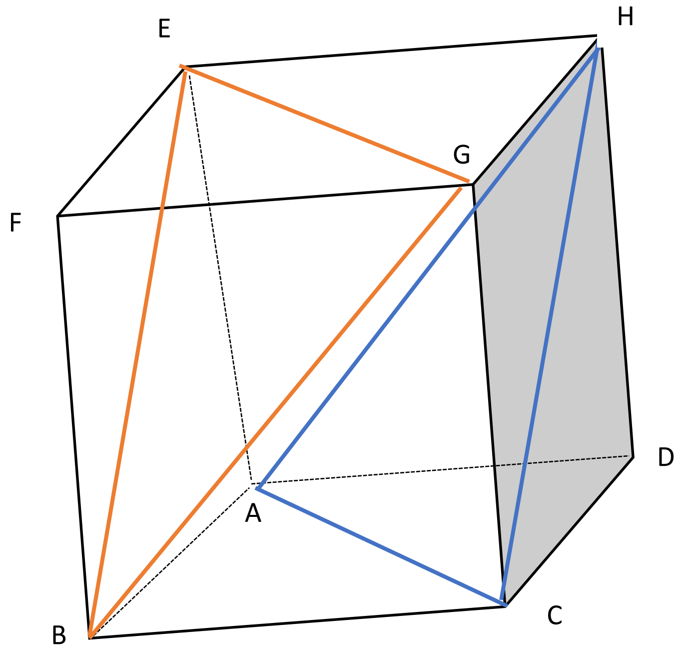
BACCALAUREAT SESSION 2014

Exercice 1 :

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct O ;$(\vec{\imath};\ \vec{\jmath};\ \vec{k})$

Soit ABCDEFGH le cube tel que

$$\overrightarrow{AB} = 6\vec{\imath}, \overrightarrow{AD} = 6\vec{\imath}\ et\ \vec{\jmath} = 6\vec{k}.$$



b) En déduire une équation du plan P.

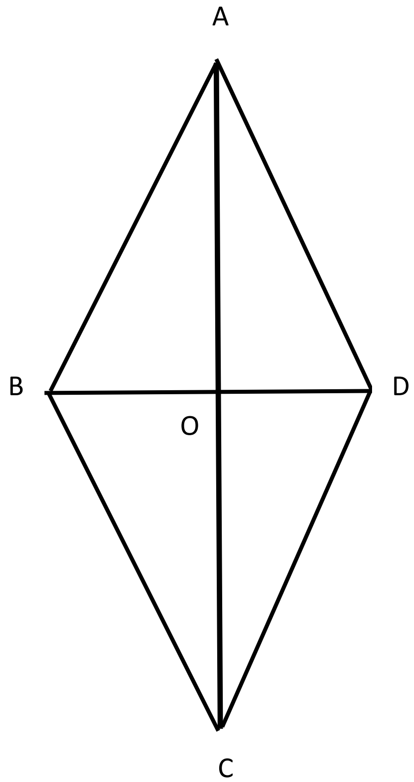
c) Montrer que les P et Q sont parallèles et donner une équation du plan Q.

1. **Soit S la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2z = 0$.**
   a) **Déterminer le rayon de S et les coordonnées de son centre I.**
   b) **Soit J le projeté orthogonal de A sur le plan Q. Montrer que $[AJ]$ est un diamètre de S.**
   c) **Montrer que la sphère S est tangente à chacun des deux plans P et Q.**
2. **Soit t la translation de vecteur $\vec{U} = 2\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 2\vec{k}$.**
   a) **Soit A' et J' les images respectives de A et J par t. Déterminer les coordonnées de A' et J'.**
   b) **Déterminer S' l'image de la sphère S par t.**
   c) **Montrer que S'est tangente aux deux plans P et Q et déterminer leurs points de contact.**

Exercice 2 :

Le plan est orienté dans le sens direct.

Dans la figure ci-contre, ABCD est un losange de centre O tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{OA};\ \overrightarrow{OB}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$ $et\ AC = 3BD$.



1. **Soit f la similitude directe qui envoie A en B et C en D.**
   a) **Déterminer le rapport et l'angle de f.**
   b) **Montrer que O est le centre de f.**
2. **a) Soit D' l'image de D par f. Montrer que D'est l'orthocentre du triangle ABD et que OA = 9OD'.**
   b) Soit B' l'image de D par f. Montrer que BB'DD' est un losange.
3. **Soit** $g = f\ o\ S_{(AC)}$.
   a) **Déterminer la nature de g.**
   b) **Déterminer les images des points O, A, B, C et D par g.**
   c) **Déterminer l'axe Δ de g.**
   d) **La droite Δ coupe les droites (AB), (BD'), (DB') et (CD) respectivement en M, N, P et Q. Montrer que MQ = 3 NP.**

Exercice 3 :

1. Soit a un entier tel que $a \equiv 1(mod\ 10)$.
   a) Montrer que $a^9 + a^8 + \cdots a + 1 \equiv 0(mod\ 10)$.
   b) En déduire que $a^{10} \equiv 1(mod\ 10^2)$
2. Soit b un entier.
   a) Déterminer les restes possibles de b^4 dans la division euclidienne par 10.
   b) En déduire que $b^4 \equiv 1(mod\ 10)$ si et seulement si b est premier avec 10.
3. Soit b un entier premier avec 10.
   a) Montrer que $b^{40} \equiv 1(mod\ 10^2)$.
   b) Déterminer les deux derniers chiffres de 67^{42}.

Exercice 4 :

Soit f la fonction définie sur $]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$ par $f(x) = ln\,(1 + tan\,x)$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).

1. a) Montrer que $\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{4}\right)^+} f(x) = -\infty$ *et* $\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)_-} f(x) = +\infty$.

   b) Calculer $f'(x)$ pour tout x ∈ $]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}[$.

   c) Dresser le tableau de variation de f.
2. a) Vérifier que les points O, A$\left(\frac{\pi}{4}, ln2\right)$ *et* $I(\frac{\pi}{8}, \frac{ln2}{2})$ sont des points de (C).

   (on donne $tan\,\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2} - 1$.

   b) Montrer que $f\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = ln2 - f(x)$ pour tout x ∈ $]-\frac{\pi}{4};[$

   (On rappelle que $tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1 - tan\,x}{1 + tan\,x}$)

   c) Justifier que le point I est un centre de symétrie de la courbe (C).

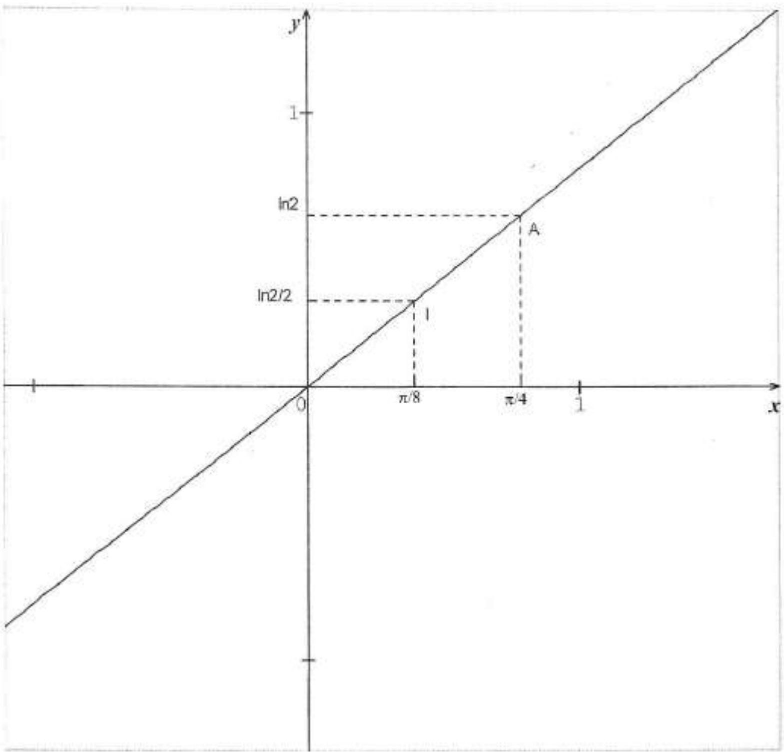
   Dans l'annexe ci-jointe, on a placé les points I et dans le repère (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).
3. Tracer la courbe (C) dans le repère (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$) en précisant sa tangente au point O.
4. On désigne par S_1 la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite (OC) et les droites d'équations x = 0 et x = $\frac{\pi}{8}$. Et on désigne par S_2 la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite (OA) et les droites d'équations x = $\frac{\pi}{8}$ et x = $\frac{\pi}{4}$.
   a) Justifier que les surfaces S_1 et S_2 ont la même aire.
   b) Calculer alors $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + tanx)dx$.

5. a) Montrer que la fonction f réalise une bijection de l'intervalle $]-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}[$ sur un intervalle J que l'on précisera. On note f^{-1} la réciproque de f.

b) Justifier que f^{-1} est dérivable sur J et donner l'expression de $(f^{-1})'(x)$ pour tout x appartenant à J.

c) Donner la valeur de $\int_0^{ln2} \frac{e^x}{1+(e^x-1)^2} dx$.

Annexe



BACCALAUREAT SESSION 2013

Exercice 1 :

Pour chacune des affirmations (A_1), (A_2), (A_3) et (A_4) ci-dessous, répondre par vrai ou faux en justifiant votre réponse.

1. **(A_1) : soit n un entier. 'si $33n \equiv 0 (mod\ 2013)\ alors\ n \equiv 0 (mod\ 64)$'**

   (A_2) : 'l'équation $33x + 11y = 2013$ admet des solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$'.

2. **Soit F la fonction définie par $F(x) = \int_1^{lnx} \frac{e^t}{1+t^2}$.**

   (A_3) : 'F est définie et dérivable sur $]0\ ; +\infty[$'.

   (A_4) : 'Pour tout x de l'ensemble de dérivabilité de F, $F'(x) = \frac{x}{1+(lnx)^2}$'.

Exercice 2 :

Le plan est orienté.

Dans l'annexe ci-jointe (Figure 1), OAB est un triangle rectangle en B de sens direct tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}}\right) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$.

A. **Soit f la similitude directe de centre O qui envoie B en A.**
   1. **Donner une mesure de l'angle de f et montrer que le rapport de f est égal à 2.**
   2. **Soit C l'image de A par f.**
      a) **Montrer que le triangle OCA est rectangle en A de sens direct et que AC = 2AB.**
      b) **Placer le point C.**

B. **Soit g la similitude indirecte qui envoi B en A et A en C. On note Ω le centre de g.**
   1. **a) Montrer que Ω vérifie la relation $\overrightarrow{\Omega C} = 4\overrightarrow{\Omega B}$.**
      b) Placer le point Ω.
   2. **Soit G le barycentre des points pondérés (A, 1) et (B, 2) et H son image par g.**
      a) **Vérifier que $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ et en déduire que $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.**
      b) **Montrer que $\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{\Omega B}$; puis montrer que G est le milieu du segment $[\Omega H]$.**
      c) **Montrer que la droite (GH) est l'axe de g.**

Exercice 3 :

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$; $\vec{w}$).

On considère les points I(1, 1, 0), J(0, 1, 1) et K(1, 0, -1)

1. a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{IJ} \wedge \overrightarrow{IK}$.

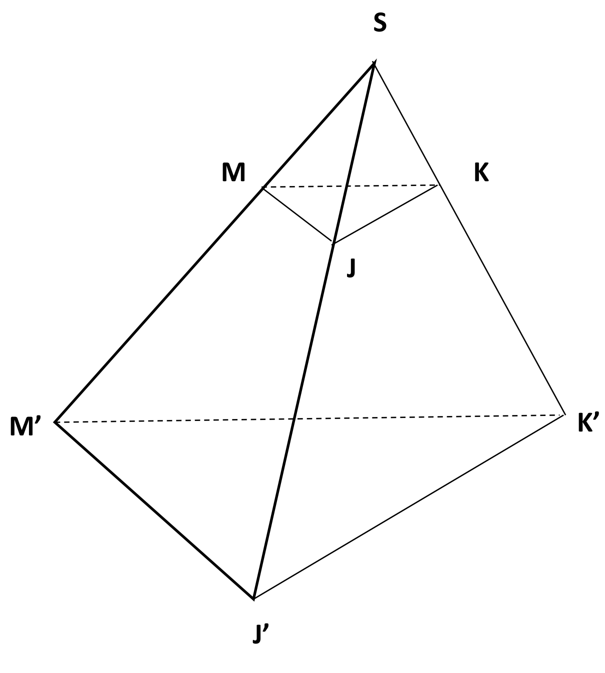
   b) En déduire que les points I, J et K déterminent un plan P dont une équation est $x - y + z = 0$.

2. Soit le point S(1, -1, 1). Montrer que le volume du tétraèdre SIJK est égal à $\frac{1}{2}$.

3. Soit la droite Δ passant par I et parallèle à la droite (JK) et soit M un point quelconque de Δ.

   a) Montrer que $\overrightarrow{MJ} \wedge \overrightarrow{MK} = \overrightarrow{IJ} \wedge \overrightarrow{IK}$.

   b) Déterminer alors le volume du tétraèdre SMJK



4. Soit h l'homothétie de centre S et de rapport 2.

   a) Déterminer une équation du plan P' image du plan P par h.

   b) Le plan P' coupe les demi-droites [SM), [SJ) et [SK) respectivement en M', J' et K'.

   Montrer que le volume du solide MJKM'J'K'.

Exercice 4 :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$), on considère les points E et F d'affixes respectives 1 et i.

On désigne par C_1 et C_2 les cercles de centres respectives E et F et le meme rayon 1.

Soit θ un réel de l'intervalle $[0; 2\pi]$, M le point d'affixe $1 + e^{i\theta}$ et N le point d'affixe $i(1 + e^{i\theta})$.

1. **a) Calculer $Aff(\overrightarrow{EM}) et\ Aff(\overrightarrow{FN})$.**

   b) Montrer que, lorsqueθ varie dans [0 ; 2π[, M varie sur C_1 et N varie sur C_2.

   c) Montrer que les droites (EM) et (FN) sont perpendiculaires.

2. **Soit P le point d'affixe $z_p\ telle\ que\ z_p = (1 - i)sin\theta.e^{i\theta}$.**

   a) Montrer que $\frac{Aff(\overrightarrow{EP})}{Aff(\overrightarrow{EM})} = sin\theta - cos\theta\ et\ calculer\ \frac{Aff\ (\overrightarrow{FP})}{Aff(\overrightarrow{FN})}$.

   b) Montrer que P est le point d'intersection des droites (EM) et (FN).

Exercice 5 :

I. Soit la fonction φ définie sur $\mathbb{R}^*$ par $\varphi(x) = \frac{e^x}{e^x-1}$ et (C_φ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).

1. **a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x)\ et\ \lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x)$. Interpréter graphiquement les résultats trouvés.**

   b) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} \varphi(x)\ et\ \lim\limits_{x\to0^-} \varphi(x)$. Interpréter graphiquement les résultats trouvés.

   c) Montrer que φ est strictement décroissante sur chacun des intervalles]-∞ ; 0[et]0 ; +∞[.

2. **Montrer que l'équation $\varphi(x) = x$ admet une solution α dans l'intervalle]-∞ ; 0[et une solution unique β dans l'intervalle]0 ; +∞[.**

II. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x$ et al fonction g définie sur]0 ; +∞[par $g(x) = 1 - x + lnx$.

On se propose dans cette partie de déterminer les tangentes communes aux deux courbes C_f et C_g des fonctions φ, f et g et la droite d'équation $y = x$.

1. **Soit a un réel et b un réel strictement positif.**

On désigne par Δ_a la tangente à la courbe C_f au point A d'abscisse a et par D_b la tangente à la courbe C_g au point B d'abscisse b ;

a) **Donner une équation de Δ_a et équation de D_b.**

b) **Montrer que : (Δ_a et D_b sont parallèles) si et seulement si ($b = e^{-a}$)**

Dans la suite on se propose que Δ_a et D_b sont parallèles, c'est-à-dire $b = e^{-a}$)

2. **a) Montrer que : (Δ_a et D_b sont confondues) si et seulement si ($a \neq 0$ et $a = \frac{e^a}{e^a - 1}$)**

   b) En déduire que Δ_α est tangente à la courbe C_f et à la droite C_g respectivement aux points A(a ; f(a)) et B($e^{-a}, g(e^{-a})$). (α étant la valeur définie dans I.2)).

   c) Montrer que C_f et C_g admettent une deuxième tangente commune que l'on précisera.

3. **a) Construire dans l'annexe ci-jointe (Figure 2), le point A(α ; f(α)).**

   b) Vérifier que $e^{-\alpha} = f(-\alpha) - \alpha$ puis construire $B\left(e^{-\alpha}, g(e^{-\alpha})\right)$.

   c) Tracer Δ_α.

Annexe

Figure 1

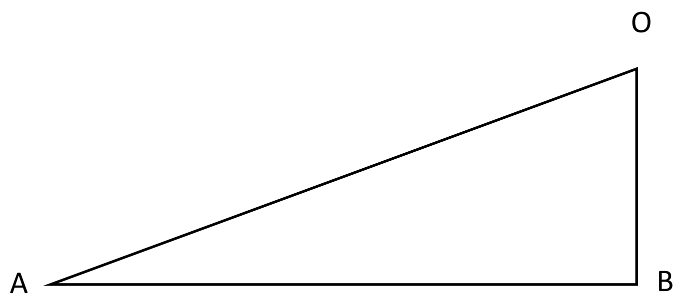
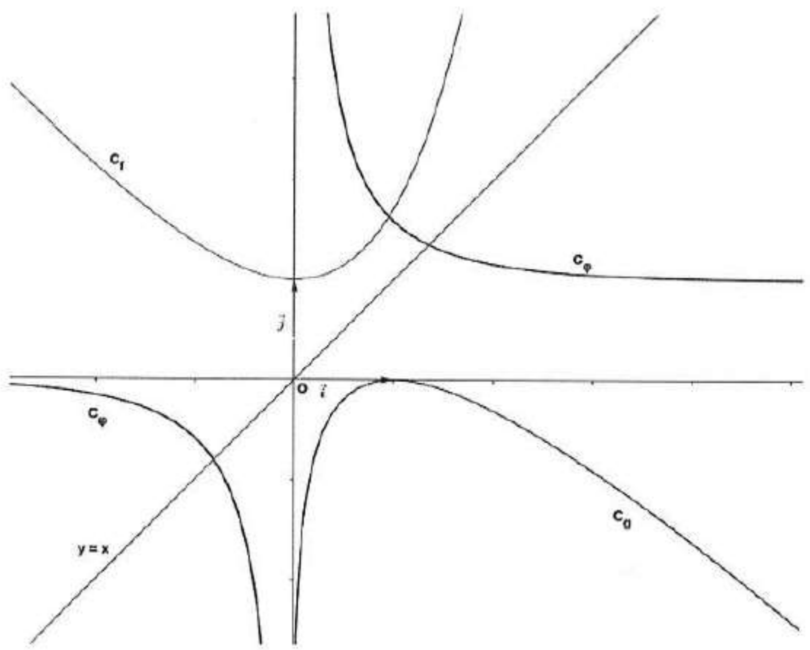


Figure 2

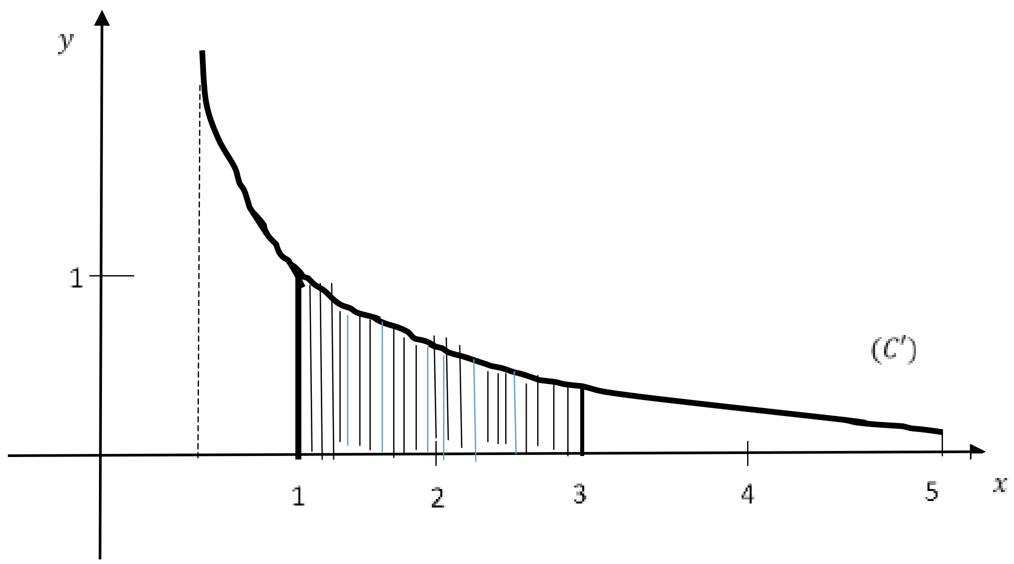


BACCALAUREAT SESSION 2012

Exercice 1 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\left[\frac{1}{2};5\right]$telle que sa courbe représentative (C) passe par les points A(1, 0) et B(3,1). Dans la figure ci-contre, on a représenté la courbe (C') de la dérivée f' de la fonction f.



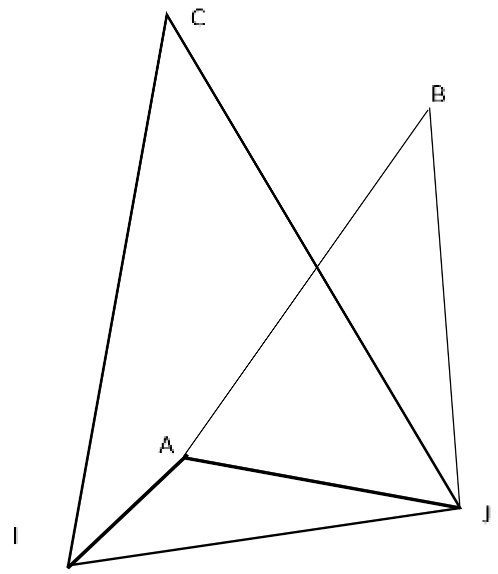
Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. **(C) admet une tangente de coefficient directeur -1.**
2. **L'aire de la partie hachurée est égale 1.**
3. **(C) admet une tangente de coefficient directeur $\frac{1}{2}$.**
4. **Pour tout a et b de $[1,2]$, $|f(b)-f(a)| \leq |b-a|$.**

Exercice 2 :

Dans le plan orienté, AIJ est triangle quelconque, BAJ et CIJ sont des triangles isocèles respectivement en B et C tels que $\left(\widehat{\overrightarrow{BA};\ \overrightarrow{BJ}}\right) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{CI};\ \overrightarrow{CJ}}\right) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$.

On désigne par t la translation de vecteur $\overrightarrow{IA}$ $et\ pae\ r_B\ et\ r_C\ les\ rotation\ de\ meme\ angle$ $\frac{\pi}{6}$ et de centre respectifs B et C.



1. a) Déterminer $r_C(I)$.

   b) Montrer que $r_B \circ t(I) = J$.

   c) En déduire que $r_B \circ t = r_C$.

2. Soit $K = t(C)$.

   Montrer que $BC = BK$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BK}}\right) \equiv -\frac{\pi}{6} [2\pi]$.

3. Soit D le point du plan tel que le triangle DIA est isocèle en D et $\left(\widehat{\overrightarrow{DI}\,; \overrightarrow{DA}}\right) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$.

   a) Soit O le milieu de $[AC]$.
   Montrer que l'image du triangle DIA par la symétrie centrale de centre O est le triangle BKC.

   b) Montrer que ABCD est un parallélogramme.

Exercice 3 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,; \vec{u}; \vec{v})$.

On désigne par A le point de coordonnés (3, 2).

Soit N un point de l'axe $(O\,; \vec{u})$ et P le point de l'axe $(O\,; \vec{v})$ tel que ANP est un triangle rectangle en A.

1. a) Soit les points E(3, 0) et F(0, 2).

   Montrer qu'il existe une unique similitude dircete S de centre A qui transforme E en F.

   Donner son rapport et son angle.

   b) Déterminer l'image de l'axe (O ; $\vec{u}$) par S.

   c) En déduire que S(N) = P.

   d) Soit M un point d'affixe z et M' le point d'affixe z' tel que $M' = S(M)$.

   Montrer que $z' = -\frac{3}{2}iz + \frac{13}{2}i$.

2. a) on note x l'abscisse du point N et y l'ordonnée du point P.

   montrer que $3x + 2y = 13$.

   b) Déterminer les points N et P dont les coordonnées sont des entiers.

Exercice 4 :

Un laboratoire de sciences physique dispose d'un ensemble d'oscilloscope de même modèle. La durée de vie, en nombre d'années d'un oscilloscope est une variable aléatoire notée X qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,125.

1. a) Montrer que $p(X > 10) = 0,286$.

   b) Calculer la probabilité qu'un oscillographe ait une durée de vie inférieure à 6 mois.

2. Le responsable du laboratoire veut commander n oscilloscopes ($n \geq 2$).

   On suppose que la durée de vie d'un oscilloscope est indépendante de celle des autres.

   On note P_1 la probabilité qu'au moins un oscilloscope ait une durée de vie supérieure à 10 ans.

   a) Exprimer p_1 en fonction de n.

   b) Combien d'oscilloscope au minimum, devrait commander le responsable pour que p_1 soit supérieure à 0,999 ?

Exercice 5 :

I. On considère la fonction f_2 définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f_2(x) = x^2 - lnx$ et on désigne par (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).

1. a) Calculer $\lim_{x \to 0^+} f_2(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} f_2(x)$.

b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f_2(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat.

c) Dresser le tableau de variation de f_2.

2. Dans l'annexe ci-jointe on a tracé, dans le repère (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$), la courbe (L) de la fonction ln et la courbe (C) d'équation $y = x^2$.

   a) Soit x > 0. On considère les points M et M_2 de même abscisses x et appartenant respectivement à (L) et (C). Vérifier que $MM_2 = f_2(x)$.

   b) Construire alors dans l'annexe les points de la courbe (Γ) d'abscisse respective $2, \frac{1}{e}$ *et* $\sqrt{\frac{1}{2}}$.

   c) Tracer la courbe (Γ) dans le repère (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$) de l'annexe.

II. 1) Soit k un supérieure ou égal à 2.

On considère la fonction f_k définie sur]0 ; +∞[par $f_k = x^k - lnx$.

a) Déterminer f'_k la fonction dérivée de f_k.

b) Montrer que f_k admet un minimum en $\sqrt[k]{\frac{1}{k}}$ égal à $\frac{1+ln\,k}{k}$.

c) Pour tout réel x > 0, on considère les points $M_k(x, x^k)$ *et* $M(x; lnx)$.

Déterminer la valeur minimale de la distance MM_k.

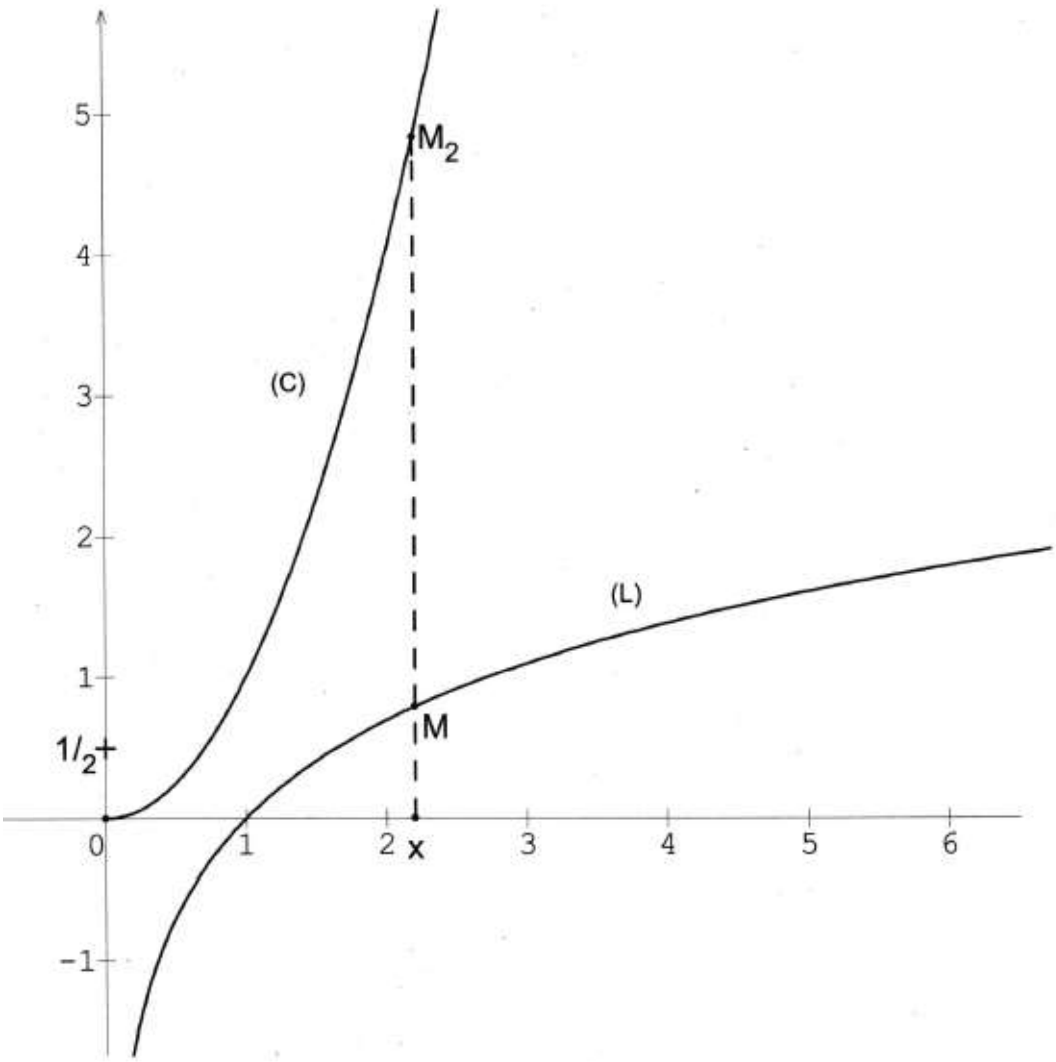
2. Pour tout entier k ≥ 2, on pose $u_k = \sqrt[k]{\frac{1}{k}}$.

a) Vérifier que $lnu_k = -\frac{ln\,k}{k}$ *et en déduire la limite de* (u_K).

b) Soit A (1, 0) et A_k le point de coordonnées (u_k ; $f_k(u_k)$).

Calculer la limite de la distance AA_k lorsque k tend vers +∞.

Annexe



BACCALAUREAT SESSION 2011

Exercice 1 :

Dans ce qui suit x et y désignent des entiers.

Répondre par vrai ou faux en justifiant votre réponse.

a) $x^3 \equiv x(mod\ 2)$.

b) $si\ x \equiv 2(mod\ 14) alosr\ x \equiv 0(mod\ 5)$.

c) $si\ 4x \equiv 10y(mod\ 5)\ alors\ x \equiv 0(mod\ 5)$.

d) $si\ \begin{cases} x \equiv 4(mod\ 5) \\ y \equiv 5(mod\ 8) \end{cases}$ Alors $8x - 5y = 7$.

Exercice 2 :

I. **Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{-x}$ et (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).**

1. **Déterminer une équation de la tangente à (Γ) au point d'abscisse 0.**
2. **a) Montrer que pour tout $x \geq 0$, $1 - x \leq e^{-x} \leq 1$.**

   b) En déduire que pour tout $x \geq 0$, $x - \frac{x^2}{2} \leq 1 - e^{-x} \leq x$.

II. **On considère la fonction f définie sur $[0\ ;+\infty[$ par $\begin{cases} f(x) = e^{-\frac{1}{x}}\ si\ x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$**

(C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

1. a) Calculer la limite de f(x) lorsque x tend vers $+\infty$.

b) Etudier la continuité et la dérivabilité de f à droite de 0.

c) Dresser le tableau de variation de f.

2. a) Montrer que le point $I\left(\frac{1}{2};\frac{1}{e^2}\right)$ est un point d'inflexion à la courbe ©.

b) Donner une équation de la tangente T à la courbe (C) au point I.

3. Dans la figure 1 de l'annexe ci-jointe, on a représenté la courbe (Γ) dans le repère.

a) Construire I.

b) Construire la tangente T.

c) Tracer la courbe (C).

4. Soit A_k l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), la droite d'équation y = 1 et les droites d'équations x = k et x = k + 1 où k est un entier naturel non nul.

a) En utilisant I.2.b. montrer que $ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right] \leq A_k \leq ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$.

b) Calculer $\lim\limits_{k \to +\infty} A_k$.

5. Pour tout n ≥ 1, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} A_k$.

a) Interpréter graphiquement S_n.

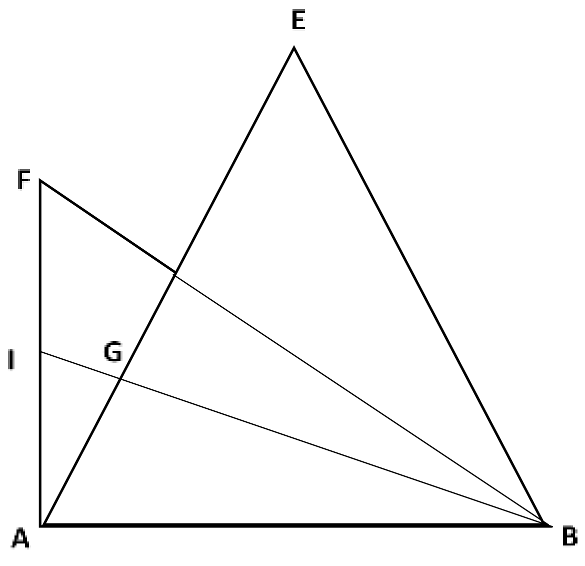
b) Montrer que $ln(n+1) - \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{n+1}\right] \leq S_n \leq ln(n+1)$.

c) En déduire les limites de S_n et de $\frac{S_n}{ln(n)}$, quand n tend vers l'infinie.

Exercice 3 :

Dans la figure ci-contre, ABF est un triangle rectangle isocèle tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AF}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

I est le milieu de $[AF]$. Les droites (IB) et (AE) se coupent en G et EGB est un triangle isocèle en G.



1. Soit f la similitude directe de centre N, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Déterminer les images des points E et F par f.

2. Soit g la similitude directe qui envoie A en F et F en B.

   a) Montrer que g est de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$.

   b) Déterminer la nature de g o g et préciser son rapport et son angle.

   c) Montrer que $tan\widehat{ABI} = \frac{1}{2}$. En déduire que $GB + 2GA$.

   d) En déduire que G est le centre de g.

3. Soit $r = g\ o\ f$.

   a) Montrer que r est la rotation de centre F et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

   b) Déterminer r(E). En déduire que EFGH est un carré, où H est le milieu de $[EB]$.

Exercice 4 :

Dans le plan complexe rapporté à un repère direct (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$), on considère le point A d'affixe (-1) et les points M, N et P d'affixes respectives $z, z^2\ et\ z^3\ o$ù z est un nombre complexe non nul différent de (-1) et de 1.

1. a) Montrer que :

   (le triangle MNP est rectangle en P) si et seulement si ($\frac{1+z}{z}$ $est\ imaginaire\ pur$)

   b) On pose $z = x + iy$ où x et y sont des réels. Montrer que $\frac{1+z}{z} = \frac{x^2+y^2+x-iy}{x^2+y^2}$

   c) En déduire que l'ensemble des points M tels que le triangle MNP soit un triangle rectangle en P est le cercle (Γ) de diamètre $[OA]$, privé des points O et A.

2. Dans la figure 2 de l'annexe jointe, on a tracé le cercle (Γ) et on a placé un point M d'affixe z sur (Γ) et son projeté orthogonal H sur l'axe (O ; $\vec{u}$).

   On se propose des construire les points M et N d'affixes respectives $z^2\ et\ z^3$ tels que MNP soit rectangle en P.

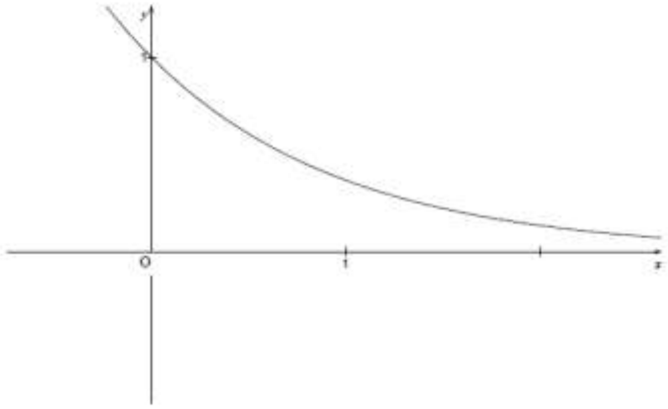
   a) Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{ON}}\right) \equiv \left(\widehat{\vec{u}; \overrightarrow{OM}}\right) [2\pi]\ puis\ que\ \left(\widehat{\overrightarrow{ON}; \overrightarrow{OP}}\right) \equiv \left(\widehat{\vec{u}; \overrightarrow{OM}}\right) [2\pi]$.

   b) Montrer que $OH = OM^2$.

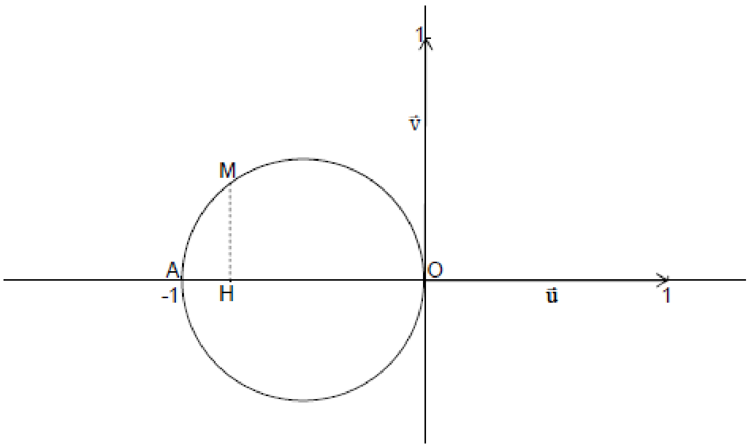
   c) Donner un procédé de construction des points N et P puis les construire.

Annexe

Exercice 2 : figure 1



Exercice 4 : figure 4



BACCALAUREAT SESSION 2010

Exercice 1 :

Répondre par vrai ou faux. Aucune justification n'est demandée.

1. **Le quotient de (-23) par (-5) est 4.**
2. **Si a et b sont deux entiers tels que $64a + 9b = 1$ alors les entiers b et 64 sont premiers entre eux.**
3. $\mathbf{147^{146} \equiv 2(mod\ 12)}$.
4. $\mathbf{x^2 \equiv 0(mod\ 8)}$ **équivaut à** $\mathbf{x \equiv 0(mod\ 8)}$.
5. ***si*** $\begin{cases} x \equiv 3(mod\ 4) \\ x \equiv 4(mod\ 5) \end{cases}$ Alors $x \equiv 19(mod\ 20)$.
6. **Si p est un entier premier distinct de 2 alors** $\mathbf{p^2 \equiv 1(mod\ 4)}$.

Exercice 2 :

Le plan est orienté dans le sens direct.

Dans la figure (1) de l'annexe ci-jointe, $[AB]$ *et* $[IJ]$ sont deux diamètres perpendiculaires du cercle (C), M est un point variable du cercle (C) tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et MBEN et MKFA sont des carrés de sens direct.

1. **Montrer que les points E, F et M sont alignés.**
2. **On désigne par r_1 et r_2 les rotations d'angles $\frac{\pi}{2}$ et de centre respectives A et B.**
   a) **Montrer que r_1 o r_2 est la symétrie centrale de centre I.**
   b) **Déterminer r_1 o r_2 (E). En déduire que lorsque M varie, la droite (EF) passe par un point fixe que l'on déterminera.**
3. **Soit S la similitude du=directe de centre A, d'angle $\frac{\pi}{4}$ *et de rapport* $\sqrt{2}$.**
   a) **Déterminer S(M).**
   b) **Construire le point G image de F par S.**
   c) **Montrer que F est le milieu du segment $[KG]$.**
   d) **En déduire que lorsque M varie, la droite (KF) passe par un point fixe P. Construire P.**

Exercice 3 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$).

On note A le point d'affixe -2.

On considère l'équation $(E) : 3z^3 - 2z^2 + 4z + 16 = 0$.

Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et M, N et P les points d'affixes $\alpha, \frac{3}{2}\alpha^2 \; et \; \frac{8}{\alpha}$

1. Montrer que si $\alpha \in \mathbb{R}^*$ alors les points M, N et P sont alignés.

   Dans la suite de l'exercice on suppose que $\alpha \notin \mathbb{R}^*$
2. Montrer que si MNAP est un parallélogramme, alors α est une solution de l'équation (E).
3. Dans cette question on prend $\alpha = 1 + i\sqrt{3}$.
   a) Donner l'écriture exponentielle de chacun des nombres complexes $\alpha, \frac{3}{2}\alpha^2 \; et \; \frac{8}{\alpha}$

   Placer dans le repère précédent les points A, M, N et P.

   b) Donner l'écriture algébrique de chacun des nombres complexes $\frac{3}{2}\alpha^2 \; et \; \frac{8}{\alpha}$

   Montrer que le quadrilatère MNAP est un parallélogramme.
4. a) Montrer que si α est un solution de (E) alors $\overline{\alpha}$ est une solution de (E).

   b) En déduire les affixes des points M pour lesquels MNAP est un parallélogramme.

Exercice 4 :

1. Soit la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = lnx - xlnx + x$.
   a) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$

   b) Montrer que pour tout x > 0, $f'(x) = \frac{1}{x} - lnx$.
2. Dans la figure (2) de l'annexe jointe, Cg et C_h sont les courbes représentatives dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ des fonctions g et h définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{x}$ et $h(x) = lnx$.

   C_g et C_h se coupent en un point d'abscisse β.

   a) Par une lecture graphique donner le signe de $f'(x)$.

   b) En déduire le sens de variation de f.

   c) Montrer que $f(\beta) = \beta + \frac{1}{\beta} - 1$.
3. On désigne par C_f la courbe représentative de f dans le repère $(O ; \vec{i}; \vec{j})$.
   a) Etudier la position relative des courbes C_f et C_h.

   b) Montrer que la courbe C_f coupe l'axe des abscisses en deux points d'abscisses respectives x_1 et x_2 telle que $0 < x_1 < 0{,}5 \;\; et \; 3{,}8 < x_2 < 3{,}9$.

c) Placer dans le repère précédent les points A($\boldsymbol{\beta}$; 0) et B(0 ; $\frac{1}{\beta}$) et en déduire une construction du point de coordonnées ($\boldsymbol{\beta}$; f($\boldsymbol{\beta}$)).

d) Tracer C_f.

4. Pour tout réel t de $]0\ ;+\infty[$ - $\{\beta\}$, on désigne par $\mathcal{A}$(t) l'aire de la partie du plan S(t) limitée par les courbes C_g et C_h et la droite d'équation x = t.

a) Montrer que pour tout réel $\boldsymbol{t} \in]\mathbf{0};\ +\infty[-\{\boldsymbol{\beta}\}, \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\beta}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})$.

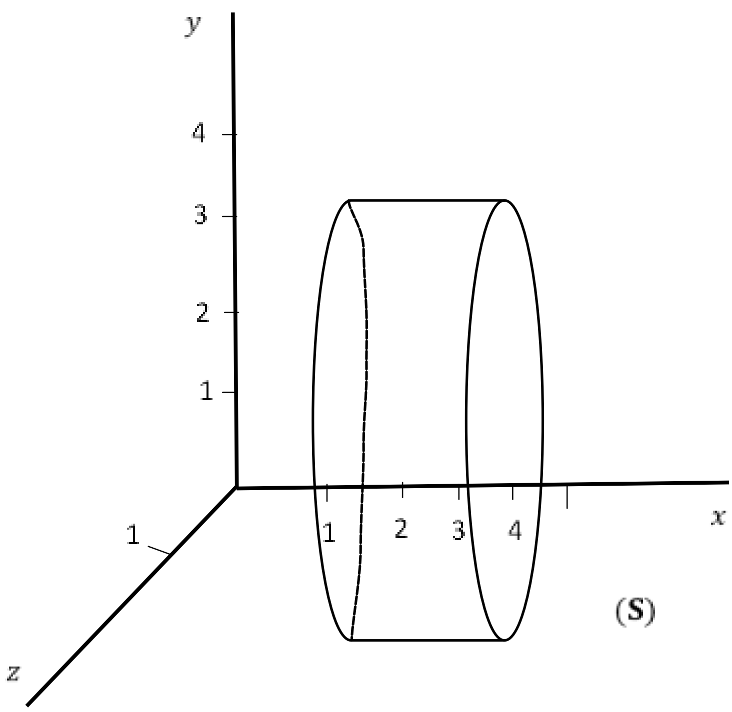
b) Soit $t_0 > \boldsymbol{\beta}$. Hachurer S(t_0).

c) Montrer qu'il existe un réel unique t_1 dans $]0\ ;\boldsymbol{\beta}[$ tel que $(t_1) = (t_0)$.

Exercice 5 :

Dans la figure ci-contre, le solide de résolution (S) est obtenu en faisant tourner la portion de la courbe d'équation $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}^{\sqrt{x}}, \boldsymbol{x} \in [\mathbf{1}, \mathbf{2}]$ autour de l'axe (Ox).

Le but de cet exercice est de calculer le volume v de ce solide.



1. **Soit F la fonction définie sur [1 : +∞[par** $F(x) = \int_1^x e^{\sqrt{4t}} dt$.

   Vérifier que $v = \pi F(2)$.

2. **Soit G la fonction définie sur [1 ; +∞[par** $G(x) = \int_1^{\sqrt{4x}} te^t dt$.

   a) **Montrer que G est dérivable sur [1 ; +∞[et que** $G'(x) = 2F'(x)$.

   b) **En déduire que pour tout réel x de [1 ; +∞[,** $2F(x) = G(x) - G(1)$.

3. **a) Montrer que pour tout réel x de [1 ; +∞[,** $G(x) = \left(\sqrt{4x} - 1\right)e^{\sqrt{4x}}$.

   b) Calculer alors v.

Annexe

Figure 1

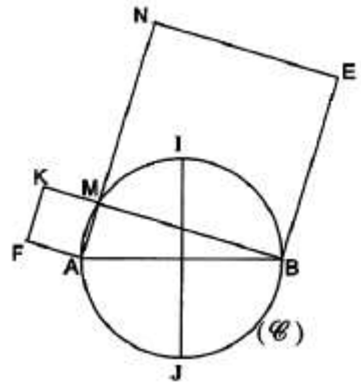
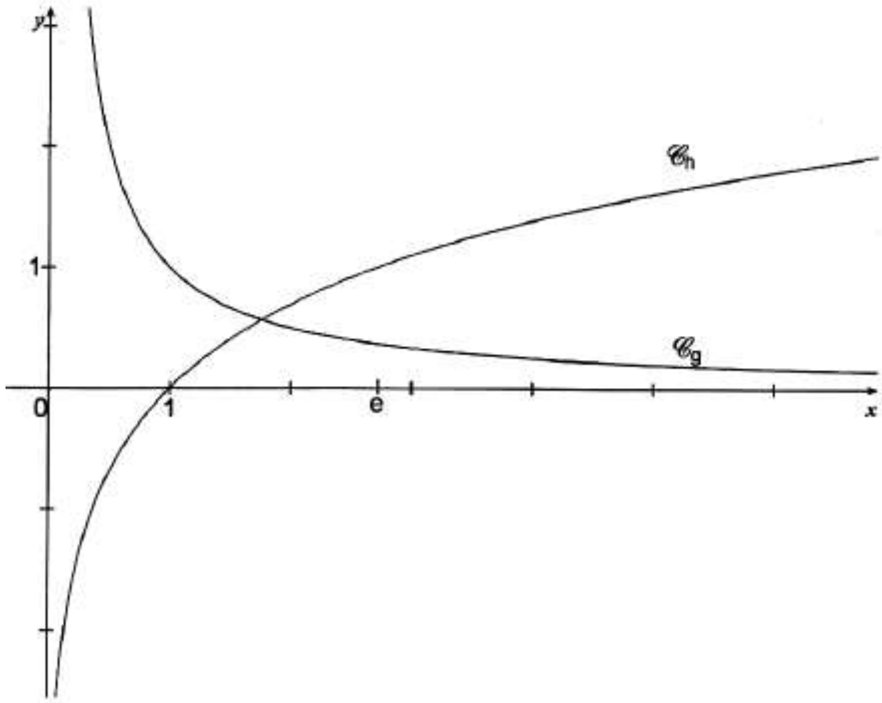


Figure 2



TRAVAIL – LIBERTÉ – PATRIE

SUJETS DES BACCALAUREATS DU TOGO

BACCALAUREAT SESSION 2019

Exercice 1 :

Soit (C) l'ensemble des fonctions numériques continues sur IR_+^*. Pour tout f de (C), on définit la fonction F sur IR_+^* par $F(x) = \int_{3x}^{x} \frac{f(t)}{t} dt$.

1- Montrer que F est dérivable sur IR_+^* puis calculer sa fonction dérivée F'.

2-a) Montrer que si f est une fonction constante alors F est aussi une fonction constante puis définir F dans ce cas.

b) Définir la fonction F pour $f: t \mapsto \frac{1}{t}$.

Dans la suite de l'exercice f est la fonction : $t \mapsto cost$.

3-a) Déterminer les signes de $F\left(\frac{\pi}{6}\right)$ et $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

b) Montrer que pour tout t de IR_+^*, $\frac{f(t)}{t} \leq \frac{1}{t}$ et que F est une fonction bornée.

c) Démontrer que pour tout x de IR_+^*, $sinx \leq x$.

d) Démontrer que pour tout x de IR_+^*, $F(x) + ln3 = -2\int_{3x}^{x} \frac{sin^2\frac{t}{2}}{t} dt$ et que $0 \leq F(x) + 3 \leq 2x^2$.

En déduire la limite de F à droite en 0.

4-a) Etablir, en utilisant la méthode d'intégration par parties que $\forall x \in IR_+^*$, $\left|F(x) - \frac{3sinx - sin3x}{3x}\right| \leq \frac{2}{3x}$ et en déduire la limite de F en $+\infty$.

b) Montrer que $\forall x \in IR_+^*, F'(x) = \frac{4cosxsin^2x}{x}$.

5- Soit F_1 la restriction de F à $]0; 2\pi]$.

a) Dresser le tableau de variation de F_1.

b) Montrer que l'équation $x \in \left]\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right[, F_1(x) = 0$ admet une unique solution.

Exercice 2 :

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 2 cm). Soit A_0 le point d'affixe 2 et A'_0 le point d'affixe $1 - i\sqrt{3}$ et A_1 le milieu du segment $[A_0A'_0]$. Plus généralement si A_n est un point d'affixe z_n on désigne par A'_n le point d'affixe $\left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)z_n$ et par A_{n+1}, le milieu du segment $[A_nA'_n]$. On note r_n et θ_n, le module et l'argument de z_n.

1- Déterminer les affixes des points A_1; A'_1; A_2 et A'_2.

2-a) Pour tout entier naturel n, exprimer z_{n+1} en fonction de z_n.

En déduire l'expression de z_n en fonction de n.

Montrer que A_{n+1} est l'image de A_n par une similitude directe dont on précisera les éléments caractéristiques.

b) Etablir les expressions de r_n et θ_n en fonction de n.

c) Déterminer la limite de r_n lorsque n tend vers $+\infty$, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.

d) Comparer les modules et les arguments de z_n et z_{n+6}.

3-a) Etablir que $A_nA_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{2}A_{n-1}A_n$.

b) Déterminer en fonction de n, la longueur d_n de la ligne brisée $A_0A_1 \dots\dots..A_{n-1}A_n$.

c) Calculer la limite de d_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Problème :

Dans ce problème, on se propose d'étudier l'ensemble (Γ) des points de l'espace équidistants de deux droites (D) et (D') non coplanaires et orthogonales.

Partie A

1-a) Donner une condition nécessaire et suffisante qu'une symétrie orthogonale par rapport à un plan ε laisse invariante une droite donnée.

b) Démontrer qu'il existe deux symétries orthogonales par rapport à un plan et deux seulement qui laissent simultanément invariantes les droites (D) et (D').

On note (P) le plan contenant la droite (D) et orthogonale à (D') en B. (P') le plan contenant la droite (D') et orthogonale à (D) en A.

2-a) Déterminer l'intersection des plans (P) et (P').

b) Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs directeurs de (D) et (D') respectivement.

Que peut-on dire de la droite (AB) et du vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$?

3- Montrer que (Γ) admet les plans (P) et (P') comme plans de symétrie et la droite (AB) comme axe de symétrie.

4- Montrer que l'intersection de (Γ) avec l'un quelconque des plans (P) et (P') est une parabole dont on précisera le foyer et la directrice.

Dans la suite, l'espace est rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Partie B

La droite (D) passe par le point A de coordonnées $(0, 0, 1)$ et admet comme vecteur directeur $\vec{u}$ tel que $\vec{u} = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$. La droite (D') passant par B de coordonnées $(0, 0, -1)$ et admet comme vecteur directeur $\vec{v}$ tel que $\vec{v} = \vec{\imath} - \vec{\jmath}$.

1-a) Vérifier que (D) et (D') sont orthogonales et non coplanaires.

Montrer que le point O appartient à (Γ).

b) Montrer qu'une représentation paramétrique de (D) est :

$$\begin{cases} x = t \\ y = t, t \in IR \\ y = 1 \end{cases}$$

Soit M un point de coordonnées (x, y, z) et Q un point de (D).

Exprimer MQ^2. Soit la fonction : $t \mapsto MQ^2$, en déduire la distance de M à (D).

c) Calculer de même la distance du point M à la droite (D').

d) En déduire que M appartient à (Γ) si et seulement si on a : $xy + 2z = 0$.

2- Déduire de cette relation :

a) Que les intersections de (Γ) avec le plan orthogonal à la droite (AB) sont en général des hyperboles. Préciser le cas d'exception.

b) La nature des intersections de (Γ) avec les plans orthogonaux à l'axe $(O, \vec{\imath})$ ou à l'axe $(O, \vec{\jmath})$.

Partie C

Soit $(M(t)$ le point de (Γ) d'abscisse $(x(t)$ et d'ordonnées $y(t)$ dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ avec $x(t) = 4cost$ et $y(t) = sin2t$.

Lorsque t varie sur IR, le point M décrit une courbe (C) incluse dans (Γ).

1-a) Montrer que la courbe (C_z) projeté orthogonal de (C) sur le plan d'équation $z = 0$ a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) = 4cost \\ y(t) = sin2t \quad (t \in IR) \text{ dans le repère } (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}). \end{cases}$$

b) Etudier les positions des points $M(t)$ et $M(\pi - t)$.

c) Construire (C_z). On prendra 2 cm comme unité.

2- On désigne par (C_x) le projeté orthogonal de (C) sur le plan d'équation $x = 0$ et par (C_y) le projeté orthogonal de (C) sur le plan d'équation $y = 0$.

Construire ces courbes après avoir donné une représentation paramétrique de chacune d'elles.

Une étude préalable de leurs éventuels éléments de symétrie facilitera leur étude et leur construction.

BACCALAUREAT SESSION 2018

Exercice 1 :

I- Une urne contient quatre jetons numérotés $1; 2; 3$ *et* 4.

On tire au hasard un premier jeton de l'urne. On note a le numéro porté par ce jeton par ce jeton puis on le remet dans l'urne. On tire un deuxième jeton de l'urne et on note b le numéro qu'il porte.

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé direct de l'espace. On y considère les vecteurs $\vec{u}(a;\ -1; 1-a)$ et $\vec{v}(b-5; 1; 4-b)$.

1-a) Montrer que $\vec{u}$ vectoriel $\vec{v}$ est égal à $(a+b-5)\vec{w}$ où $\vec{w}$ est un vecteur à déterminer.

b) Trouver une relation entre a et b pour que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.

2-a) Dans le cas où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, déterminer l'équation cartésienne du plan Q passant par $A(-2, 1, 3)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

b) Montrer que la probabilité pour que ces vecteurs soient colinéaires est $1/4$.

II- Deux joueurs A et B jouent à un jeu constitué d'un certain nombre de parties identiques décrites ci-après :

Au cours d'une partie, chaque joueur effectue le tirage décrit en I-. Si A obtient des vecteurs colinéaires et B non, alors A gagne la partie et le jeu s'arrête. Si non, si B obtient des vecteurs colinéaires et A non, B gagne la partie et le jeu s'arrête. Dans tous les autres cas les joueurs entreprennent une nouvelle partie, le jeu continue.

Soit A_n l'événement : « A gagne la nième partie »

B_n l'événement : « B gagne la nième partie »

C_n l'événement : « le jeu continue ».

1- Calculer les probabilités $p(A_1)$; $p(B_1)$; $p(C_1)$.

2- Exprimer $p(C_n)$ en fonction de $p(C_{n-1})$ puis en fonction de n.

3-a) Exprimer $p(A_n)$ en fonction de $p(C_{n-1})$ puis en fonction de n.

b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} p(A_n)$.

c) Déterminer le plus petit entier n_0 tel que $p(A_{n0}) \leq 10^{-2}$.

Exercice 2 :

I- Soit la fonction numérique f définie sur $]-1\ ; +\infty[$ par : $f(x) = \int_0^x \frac{e^t}{t+1} dt$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1-a) Démontrer que : $\forall x \in [0\ ; +\infty[, \frac{e^x - 1}{x+1} \leq f(x) \leq e^x - 1$.

b) En déduire la limite de $f(x)$ et de $\frac{f(x)}{x}$ quand x tend vers $+\infty$. Que peut-on dire de la courbe (C) ?

2-a) Démontrer que : $\forall x \in]-1\,;0]$, $\ln(x+1) \leq f(x) \leq e^x \ln(x+1)$.

b) En déduire la limite de f en -1.

3- Etudier le sens de variation de la fonction f puis dresser son tableau de variation.

4-a) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.

b) Démontrer que : $\forall t > -1, e^t - t - 1 \geq 0$.

c) En déduire la position de (C) par rapport à (T) puis tracer (C) dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

II- Soit la fonction g définie par : $g(x) = \frac{e^x}{x+1}$.

1-a) Etudier le sens de variation de g sur $[0, +\infty[$.

b) Puis en déduire que : $\forall n \in IN, \frac{e^n}{n+1} \leq \int_n^{n+1} g(t)dt \leq \frac{e^{n+1}}{n+2}$.

2-a) Montrer que l'équation $g(x) = \int_n^{n+1} g(t)dt$ admet dans $[n\,; n+1]$ une unique solution $\propto_n$.

b) Montrer que la suite $\left(\frac{\propto_n}{n}\right)_{n>0}$ est une suite convergente dont on précisera la limite.

Problème :

A- Le plan P est rapporté au repère orthonormé (O, I, J). On considère les points $A\binom{1-\lambda}{-\lambda}$ et $B\binom{\lambda}{1+\lambda}$ où λ est un réel non nul. Soit f_λ l'application affine du plan telle que :

$f_\lambda(0) = 0, f_\lambda(I$à $= A$ et $f_\lambda(J) = B$.

1-a) Montrer que f_λ est une transformation affine.

b) Soit $g_\lambda: M\binom{x}{y} \mapsto M'\binom{x'}{y'}$ l'application affine d'expression analytique :

$$\begin{cases} x' = (1-\lambda)x + \lambda y \\ y' = -\lambda x + (1+\lambda)y \end{cases}$$

Montrer que les applications g_λ et f_λ sont égales.

c) Comparer $f_{-\lambda}$ et l'application réciproque de f_λ notée f_λ^{-1}.

2- On considère l'application θ_λ de P dans IR qui, au point $M\binom{x}{y}$ associe le réel $(1-\lambda)x^2 + (1+\lambda)y^2$.

a) Démontrer que : $\forall \lambda \in IR^*, \theta_{-\lambda}$ o $\mathrm{f}_\lambda = \theta_\lambda$.

b) En déduire l'application $\theta_\lambda\ o\ f_{-\lambda}$.

3-a) On note $C_{(\lambda,k)}$ l'ensemble des points M du plan tels que $\theta_\lambda(M) = k,\ k \in IR$.

Démontrer que $f_\lambda\left(C_{(\lambda,k)}\right) = C_{(-\lambda,k)}$.

b) Représenter sur le même graphique $C_{\left(-\frac{5}{13},\frac{72}{13}\right)}$ et sa transformée par $f_{-\frac{5}{13}}$.

c) a étant un réel strictement positif, déterminer suivant les valeurs de λ la nature de $C_{(\lambda,a)}$.

4- A chaque réel λ, on associe la droite (D_λ) d'équation $(1-\lambda)x + ((1+\lambda)y = 0$.

Montrer que : $\forall\ \lambda \in IR$, la droite (D_λ) n'a jamais la direction du vecteur $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$.

5- Soit S_λ la symétrie d'axe (D_λ) et de direction $\vec{u}$ qui, à tout point $M\binom{x}{y}$ on associe $M'\binom{x'}{y'}$.

a) Montrer que l'expression analytique de S_λ est : $\begin{cases} x' = \lambda x - (1+\lambda)y \\ y' = (\lambda - 1)x - \lambda y \end{cases}$

b) Montrer que $C_{(\lambda,k)}$ est globalement invariant par S_λ.

c) Donner les éléments caractéristiques de $f_\lambda\ o\ S_\lambda$.

d) On note $S = f_\lambda\ o\ S_\lambda$, montrer que l'écriture complexe associée à S est : $z \mapsto -i\bar{z}$.

B- Soit f l'application du plan dont l'écriture complexe est : $z \mapsto \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\bar{z}$.

1-a) Montrer que f est involutive.

b) Montrer que $f\ o\ S$ est une rotation dont on donnera les éléments caractéristiques où S est l'application définie en A5-c.

2- On considère l'application g qui à tout point M d'affixe z associe le point M'' d'affixe z'' tel que : $z'' = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\bar{z} - \sqrt{3} - 3i$.

a) Montrer que $g = T\ o\ f$ où T est une translation dont on précisera le vecteur $\vec{v}$.

b) Déterminer l'écriture complexe associée à $f\ o\ T$; que peut-on dire de $T\ o\ f$ et $f\ o\ T$?

3- $\forall\ n \in IN^* \setminus \{1\}$, on note $g\ o\ g\ o \ldots\ldots\ldots o\ g = g^n$ composée de g n fois.

a) Donner la nature des applications g^{2n} et g^{2n+1} puis caractériser g^{2n}.

b) Mettre sous forme trigonométrique l'affixe z_0 de $g^{2n}(0)$.

BACCALAUREAT SESSION 2017

Exercice 1 :

Le plan P est muni du repère orthonormal (O, I, J), α étant un nombre réel. Soit f_α l'application de P dans P transformant I en $A\binom{\alpha+1}{\alpha+2}$, J en $B\binom{-1}{-2}$ et laissant invariant O.

1-a) Montrer que f_α est une application affine.

b) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles f_α est bijective.

On note l_α son application linéaire associée et on pose : $\vec{\imath} = \overrightarrow{OI}$, $\vec{\jmath} = \overrightarrow{OJ}$.

c) Déterminer $l_\alpha(\vec{\imath})$ et $l_\alpha(\vec{\jmath})$. En déduire l'expression analytique de f_α dans le repère (O, I, J).

2- Déterminer α pour que l'on ait $f_\alpha o f_\alpha = Id_P$ où Id_P est l'application identique du plan.

3- Déterminer l'ensemble des points invariants par f_α. (on discutera suivant les valeurs de α).

4- Quelle est la nature géométrique de f_1 ? $\alpha = 1$). Quels sont ses éléments caractéristiques ?

5- Etude de f_0 $(\alpha = 0)$.

a) Déterminer l'ensemble (Δ) des points M' qui sont images par f_0 d'au moins un point M de P.

b) Soit la symétrie de centre O. Montrer que $f_0 = p\ o\ s$ où p est une projection dont on précisera les éléments caractéristiques.

Exercice 2 :

Un sac contient 30 boules indiscernables au toucher dont α noires, β blanches et γ rouges. On suppose qu'il y a au moins deux boules de chaque couleur. On tire au hasard et simultanément deux boules du sac. Soit l'événement E « Obtenir deux boules de même couleur ».

1- Calculer en fonction de α, β et γ la probabilité $P(\alpha, \beta, \gamma)$ de l'événement E.

2- On se propose de déterminer α, β et γ afin que $P(\alpha, \beta, \gamma)$ soit minimale. Pour cela on munit l'espace affine affine ε d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ et on considère les points $A(30\,;0\,;0)$; $B((0\,;30\,;0)$ et $C(0\,;0\,;30)$. Soit le point $M(\alpha, \beta, \gamma)$ de ε.

a) Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $x + y + z - 30 = 0$.

b) En déduire que M appartient au plan (ABC).

c) Démontrer que $870\ P(\alpha, \beta, \gamma) + 30 = OM^2$.

d) Soit H le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC). Déterminer les coordonnées du point H.

e) En déduire les valeurs de α, β et γ qui rendent minimale $P(\alpha, \beta, \gamma)$, puis calculer la probabilité $P(\alpha, \beta, \gamma)$ correspondante.

3- Le sac contient désormais 10 boules noires, 10 boules blanches et 10 boules rouges. Soit n et k deux entiers naturels supérieur ou égal à 2.

Un joueur mise n francs et tire simultanément deux boules du sac.

- ✓ S'il obtient deux boules de même couleur, il reçoit k fois sa mise et le jeu est terminé.
- ✓ S'il obtient deux boules de couleurs différentes, il remet les deux boules tirées dans le sac et tire à nouveau simultanément deux boules.
- ✓ S'il obtient deux boules de même couleur, il reçoit $(k-1)$ fois sa mise, sinon il perd sa mise et le jeu est terminé.

Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

a) Montrer que la probabilité pour que le joueur ait un gain algébrique égal à $kn - n$ est $\frac{9}{29}$.

b) Déterminer la loi de probabilité de X.

c) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ en fonction de k et n.

Problème :

Partie A

Soit f la fonction numérique d'une variable réelle définie par : $f(x) = ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$.

1- Préciser l'ensemble de définition de f.

2- Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.

3- Construire la courbe (C) de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie B

On considère l'application T_k du plan dans lui-même d'expression analytique :

$$\begin{cases} x' = kx - y + 1 \\ y' = -x - ky + 1 \end{cases}$$ où k est un réel.

1- T_k est-elle une transformation du plan ?

2- En discutant suivant les valeurs de k, déterminer l'ensemble des points invariants par T_k.

3- Déterminer l'écriture complexe associée à T_k.

4- Caractériser $T_k\ o\ T_k$ suivant les valeurs de k.

5-a) Caractériser T_0 puis déterminer l'équation de la courbe (Γ) image de (C) par T_0.

b) Tracer (Γ) dans le même repère que (C).

Partie C

Pour tout réel $x \in \left[-\frac{\pi}{2};0\right[$ on pose : $g(x) = f(cosx)$.

1- Montrer que g est une primitive sur $\left[-\frac{\pi}{2};0\right[$ de $x \mapsto \frac{C}{sinx}$ où C est un réel à déterminer.

2- $\forall\ a \in \left[-\frac{\pi}{2};0\right[$, $\forall n \in IN^*$, on pose : $I_n(a) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{a} \frac{-cos^{2n}t}{sint} dt$.

Montrer que : $0 \leq I_n(a) \leq \frac{cos^{2n}a}{-sina}\left(a+\frac{\pi}{2}\right)$.

En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n(a) = 0$.

3- Pour tout entier naturel non nul n, on définit la fonction F_n sur $\left[-\frac{\pi}{2}, a\right]$ par :

$F_n(t) = cost + \frac{cos^3t}{3} + \frac{cos^5t}{5} + \cdots + \frac{cos^{2n-1}t}{2n-1}$.

a) Montrer que F_n est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2}, a\right]$ et que $\forall t \in \left[-\frac{\pi}{2}, a\right]$, $F'_n(t) = \frac{-1+cos^{2n}t}{sint}$.

Calculer $F_n\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

b) En intégrant la relation précédente entre $-\frac{\pi}{2}$ et a, montrer que

$F_n(a) = \frac{-g(a)}{C} - I_n(a)$, où C est le réel déterminé dans la question C.1. En déduire

$\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(a)$.

Partie D

Dans cette partie $x \in]0\,;1[$; $t \in]0, x[$ et $n \in IN^*$.

1- Vérifier que : $\sum_{k=0}^{2n-1} x^k = \frac{1-x^{2n}}{1-x}$ $\quad(1)\quad$ et que $\sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^k x^k = \frac{1+(-1)^{2n-1}x^{2n}}{1+x}$ $\quad(2)$

2-a) Démontrer que : $1 < \frac{1}{1-t^2} < \frac{1}{1-x^2}$.

En déduire que : s$0 < \frac{x^{2n+1}}{2n+1} < \int_0^x \frac{t^{2n}}{1-t^2} dt < \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1-x^2)}$.

b) Utiliser les relations (1) et (2) pour montrer que :

$-\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^{2n}}{2n} + \int_0^x \frac{t^{2n}}{1-t} dt$ et

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{2n-1}\frac{x^{2n}}{2n} + (-1)^{2n}\int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t} dt$.

c) En déduire que $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \int_0^x \frac{t^{2n}}{1-t^2} dt$.

3- Des questions D.1 et 2, trouver deux fonctions U et V sans intégrales telles que : $U(x) < f(x) < V(x)$.

BACCALAUREAT SESSION 2016

Exercice 1 :

1- En notant $p(A/B)$ la probabilité de l'événement « A sachant B » et $\overline{B}$ l'événement contraire de B, démontrer que : $p(A/\overline{B}) = \frac{p(A)-p(A/B).p(B)}{1-p(B)}$.

2- Lors d'une récente saison de chasse (période durant laquelle la chasse est autorisée dans une région donnée), on a pu établir les statistiques suivantes : 30% des renards sont enragés ; parmi les renards abattus, 40% étaient enragés.

a) En désignant par b $(b \neq 1)$ la probabilité pour qu'un renard soit abattu lors de la saison de chasse, calculer en fonction de b la probabilité p pour qu'un renard survivant soit enragé

(Durant la période considérée, on négligera les autres causes de décès ainsi que les nouveaux cas de rage).

b) Quelle est la plus petite valeur b pour que p soit inférieure ou égale à $0,1$?

c) A l'issue d'une saison de chasse, la probabilité pour qu'un territoire soit décontaminé de la rage est égale à $1/3$. Une chasse est divisée en 10 territoires et on désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de territoires décontaminés après la saison de chasse.

Quelle est, dans les conditions précédentes, et en supposant que les résultats sont indépendants d'un territoire à l'autre, la probabilité d'avoir décontaminé au moins huit territoires sur les dix à l'issue de la saison ?

Exercice 2 :

On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arrête 1.

1-a) Exprimer plus simplement le vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$.

b) En déduire que le produit scalaire $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BD}$ est nul.

c) Démontrer de même que le produit scalaire $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BE}$ est nul.

d) Démontrer que la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE).

2- Soit I le centre de gravité du triangle BDE.

Déduire de 1.a) que le point I est le point d'intersection de la droite (AG) et du plan (BDE) ; préciser la position du point I sur le segment $[AG]$.

3- Dans cette question, l'espace est rapporté au repère orthonormé direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

a) Ecrire une équation du plan (BDE).

b) Ecrire une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par le point H et orthogonale au plan (BDE).

c) Déterminer les coordonnées du point d'intersection J de la droite (Δ) avec le plan (BDE).

d) Calculer $\overrightarrow{BD} \wedge \overrightarrow{BE}$.

e) En déduire la distance du point H au plan (BDE), puis le volume du tétraèdre $HBDE$.

Rappel : Volume du tétraèdre : $\frac{1}{3}b \times h$, *où b est la surface de base et h la hauteur.*

Problème :

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Unité graphique : $2\ cm$.

Soit f la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x - 1 + e^x \quad si\ x < 0 \\ f(0) = 0 \\ f(x) = \frac{-x^2 lnx}{1+x} \quad si\ x > 0. \end{cases}$$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Partie A

1- Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.

2- Soit k la fonction numérique définie par : $k(x) = (x+2)lnx + x + 1$.

a) Etudier le sens de variation de la dérivée k' de k.

b)

b_1)Montrer que l'équation $k(x) = 0$ admet une unique solution $\propto$.

b_2)Déterminer un encadrement de $\propto$ d'amplitude 10^{-1}.

En déduire le signe de $k(x)$ suivant les valeurs de x.

3- Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation. (On pourra utiliser les questions 1 et 2).

4-a) Etudier les branches infinies de (C).

b) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse $x_0 = 1$.

c) Tracer (C) et (T) dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

5- Soit F l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui à tout point M de coordonnées (x, y) associe le point M' de coordonnées (x', y') telles que :

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -2x + y \end{cases}$$

a) Montrer que F est une bijection de $\mathcal{P}$ et que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ garde une direction fixe à préciser.

b) Déterminer l'ensemble des points invariants par F.

c) Déterminer l'ensemble des milieux de $[MM']$ quand M décrit $\mathcal{P}$.

d) Montrer que F est une affinité que l'on caractérisera.

e) Soit M un point de (C), déterminer les équations de l'ensemble (C') décrit par son image M' par l'application F.

Partie B

On pose sur $[0,1]$,

$$\begin{cases} g_n(t) = -t^n \ln t \,,\, t \neq 0 \,;\, n \in IN^*. \\ g_n(0) = 0 \end{cases}$$

$$J_n = \int_0^1 g_n(t)dt \quad et \quad J = \int_0^1 f(t)dt.$$

1-a) Montrer que J_n existe.

b) En admettant que $J_n = \lim\limits_{x \to 0} \int_0^1 g_n(t)dt$ pour $x \in]0,1]$, calculer J_n.

2- Soit t un nombre réel et $n \in IN^*$.

a) Calculer le produit : $P_n(t) = (1+t)(1-t+t^2-t^3+\cdots+(-1)^{n-1}t^{n-1})$.

b) Montrer que : $\forall\, t \in [0,1]$,

$g_2(t) - g_3(t) + g_4(t) \ldots\ldots\ldots.. + (-1)^{n-1}g^{n+1}(t) + (-1)^n \frac{g_{n+2}(t)}{1+t} = f(t)$ puis que :

$J = J_2 - J_3 + J_4 - \cdots + (-1)^{n-1}J_{n+1} + (-1)^n \int_0^1 \frac{g_{n+2}(t)}{1+t}dt.$

c) En s'aidant d'une majoration de $\frac{g_{n+2}(t)}{1+t}$, démontrer que : $0 \leq \int_0^1 \frac{g_{n+2}(t)}{1+t}dt \leq \frac{1}{(n+3)^2}$.

3- Soit n un entier naturel strictement positif. On pose :

$S_n = \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots + (-1)^{n-1}.\frac{1}{(n+2)^2}$. Montrer que $\lim S_n = J$.

BACCALAUREAT SESSION 2015

Exercice 1 :

On place dans un sac six jetons indiscernables au toucher, marqué : -3 ; -2 ; -1 ; 1 ; 2 ; 3. On tire un jeton du sac, on note « a » son numéro. On le remet dans le sac, puis on tire un deuxième jeton et on note « b » son numéro.

Au couple (a, b) obtenu, on associe l'ensemble $(E_{a,b})$ des points M dont les coordonnées (x, y) dans le plan (P) rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ vérifient l'équation : $bx^2 + ay^2 - bx + ay + \frac{a+b-4ab^2}{4} = 0$.

1- Démontrer que pour tout couple (a, b), l'ensemble $(E_{a,b})$ est une conique à centre. Préciser les coordonnées du centre.

2- Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

C : « $(E_{a,b})$ est un cercle ».

E : « $(E_{a,b})$est une ellipse non réduite à un cercle ».

H : « $(E_{a,b})$ est une hyperbole ».

H' : « $(E_{a,b})$ est une hyperbole équilatère ».

3- On donne $a = 3$ et $b = 2$.

Déterminer les éléments géométriques de $(E_{3,2})$: axe focal, foyers, sommets.

4- On donne $a = -3$ et $b = 2$.

Déterminer les éléments géométriques de $(E_{-3,2})$: axe focal, foyers, sommets.

5- Construire $(E_{3,2})$; $(E_{-3,2})$ et $(E_{2,2})$ dans un même repère.

Exercice 2 :

Dans un plan $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère l'application f qui à tout point M d'affixe z associe le point M_1 d'affixe z_1 tel que : $z_1 = i\bar{z} + a + ib$; où a et b sont deux réels quelconques donnés.

On appelle A le point de coordonnées (a, b).

1- Montrer que f est une isométrie.

2- Comment faut-il choisir le point A pour que f soit une symétrie orthogonale. Donner la caractéristique de cette symétrie.

3- On choisit A de telle sorte que f ne soit pas une symétrie orthogonale.

a) Quelle est la nature de f ? Préciser les éléments qui définissent f.

b) On pose $f_{-1} = f$ et pour tout entier naturel $n \geq 2, f^n = f^{n-1}\ o\ f$.

Montrer que pour tout entier naturel p non nul, f^{2p} est une translation dont on donnera le vecteur.

Quelle est la nature de f^{2p+1} ?

Problème :

I- Soit f la fonction numérique définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = \frac{-x+sinx}{x}$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$.

1- Déterminer les nombres réels x de $[0,+\infty[$ tels que $f(x) = -1$.

2-a) Prouver que pour tout réel x positif non nul, $\frac{-x-1}{x} \leq f(x) \leq \frac{1-x}{x}$.

En déduire la limite de f en $+\infty$.

b) Déterminer les nombres réels x tels que $f(x) = \frac{1-x}{x}$ et ceux tels que $f(x) = \frac{-1-x}{x}$.

c) En déduire dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, la position relative de la courbe représentative (C) de (f)et des courbes (γ_1) et (γ_2) représentatives des fonctions $x \longmapsto \frac{-1-x}{x}$ et $\frac{1-x}{x}$ respectivement.

3- Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer la dérivée de f sur cet intervalle.

4-a) Etudier le signe de $tan\, x - x$ sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et en déduire le signe de f' sur cet intervalle.

b) Prouver que pour tout k appartenant à IN^*, il existe un élément x_k et un seul de $\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi\,;\frac{\pi}{2} + k\pi\right[$ tel que $tan\, x_k = x_k$; montrer que $x_k > k\pi$.

c) En déduire le signe de f' sur $]0,x_1[$ puis sur chaque intervalle $]x_k\,; x_{k+1}[$, où $k = 1,2,\ldots$ (On distinguera k pair et k impair).

5-a) Prouver que, pour tout nombre réel x positif ou nul, $0 \leq x - sinx \leq \frac{x^3}{6}$.

(Pour cela, on introduira la fonction φ définie sur $[0,+\infty[$ par $\varphi(x) = sinx - x + \frac{x^3}{6}$.

On calculera les dérivées $\varphi', \varphi'', \varphi'''$ et on déduire le signe de φ).

b) Prouver que f est dérivable en 0.

6-a) Dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0,3\pi]$.

b) Tracer sur une même figure les courbes $(\gamma_1),(\gamma_2)$ et (C) en se limitant à l'intervalle $[0,3\pi]$. On utilisera les valeurs approchées $x_1 \approx 4,49$ et $x_2 \approx 7,73$.

(Unité graphique : $2\ cm$ sur l'axe des abscisses et $6\ cm$ sur l'axe des ordonnées).

II- On considère l'intégrale $J = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(f(x) + 1)dx$.

1- Pour tout élément u de $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, on pose : $F(u) = \int_{\frac{u}{2}}^{u} \frac{sint}{t} dt$ et pour tout x de $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, on pose : $G(x) = \int_0^x \frac{sin\pi t}{1-t} dt$.

Prouver que pour tout élément x de $\left[0, \frac{1}{2}\right]$; $G(x) = F(\pi) - F(\pi(1-x))$.

En déduire que $J = \int_0^{1/2} \frac{sin\pi t}{1-t} dt$.

2- Soit (U_n) la suite définie par : $U_0 = \int_0^{1/2} sin\pi t dt$ et $U_n = \int_0^{1/2} t^n sin\pi t\, dt$ si $n \geq 1$.

a) Prouver que, pour tout $n \geq 1, J = U_0 + U_1 + \cdots + U_{n-1} + r_n$, où $r_n = \int_0^{1/2} \frac{t^n sin\pi t}{1-t} dt$.

b) Etablir que, pour tout élément t de $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, $\frac{t^n sin\pi t}{1-t} \leq 2t^n$.

En déduire une majoration simple de r_n.

c) Montrer que $J = \lim_{n \to +\infty} (U_0 + U_1 + \cdots + U_{n-1})$.

3-a) Calculer U_0 et U_1.

b) Etablir que, pour tout entier $n \geq 2$, $U_n = \frac{1}{\pi^2}\left[\frac{n}{2^{n-1}} - n(n-1)U_{n-2}\right]$.

4- A partir des résultats obtenus au $II-2$ et $II-3$, indiquer une méthode de calcul d'une valeur approchée de J à la précision 10^{-2}. (On ne demande pas d'effectuer ce calcul).

BACCALAUREAT SESSION 2014

Exercice 1 :

On considère un dé cubique non pipé ayant deux faces numérotées 2 et quatre faces numérotées 3, et un dé tétraédrique régulier ayant deux faces numérotées 2 et deux faces numérotées 4.

On lance simultanément les deux dés, on désigne par « a » le numéro apparu sur la face supérieur du dé cubique et « b » celui sur la face cachée du dé tétraédrique.

On considère l'équation différentielle $(E): y'' + ay' + by = 0$ et on désigne par X la variable aléatoire prenant la valeur $a^2 - 4b$

1-a) Déterminer la loi de probabilité de X

b) En déduire la probabilité pour que (E) admette pour solution générale une fonction non sinusoïdale.

2- On lance n fois de suite les deux dés. On désigne par Y le nombre de fois que l'équation (E) admet une solution générale, une fonction non sinusoïdale.

Déterminer le plus petit entier n pour que la probabilité de l'évènement $\{(Y \geq 1)\}$ soit supérieure ou égale à $0,999$.

3- On pose (a, b) – (3 ; 2) et on considère l'équation différentielle

$(E'): y'' + 3y' + 2y = \frac{x-1}{x^2} e^{-x}$.

a) Vérifier que la fonction f définie pour tout $x \in IR_+^*$, par $f(x) = e^{-x} ln(x)$ est solution de (E).

b) Résoudre l'équation $\left(E_{(3;2)}\right): y'' + 3y' + 2y = 0$.

c) Soit g une fonction deux fois dérivables sur IR_+^*, montrer que g est solution de (E') si et seulement si $g - f$ est solution de $\left(E_{(3;2)}\right)$.

d) En déduire toute les solutions de l'équation (E').

Exercice 2 :

Le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique $2cm$.

Soit les points A, A' et F d'affixe respectives : $Z_A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$; $Z_{A'} = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}i$ et $Z_F = 1$.

On désigne par (E) l'ensemble des points M de (P) dont l'affixe Z vérifie la relation : $|Z - i\overline{Z} + 2 - 2i| = 4|Z - 1|$ où $\overline{Z}$ est le conjugué de Z.

1- On considère l'application g du plan (P) dans lui-même, qui au point M d'affixe

$Z = x + iy$ associe le point H d'affixe $Z' = x' + iy'$ telle que $Z' = \frac{1}{2}(Z + i\overline{Z}) + i - 1$ avec x, y, x', y' des réels.

a) Exprimez les coordonnées (x', y')du point H en fonction des coordonnées (x, y) du point M.

b) Soit (D) l'ensemble des points invariants par g. Détermine une équation cartésienne de (D).

c) Démontrer que pour tout point M de P d'image H par g on a : $H \in (D)$ et que (MF) est perpendiculaire à (D).

d) Déduire de ce qui précède, la nature et les éléments caractéristiques de l'application g.

2-a) Démontrer que pour tout complexe Z on a : $Z - Z' = \frac{1}{2}(Z - i\overline{Z} + 2 - 2i)$.

b) Soit M un point de (E) et H son image par g.

Détermine une relation entre MF et MH.

En déduire que (E) est une ellipse de foyer F, de directrice (D) et d'excentricité $e = \frac{1}{2}$.

3-a) Préciser l'axe focal (Δ) de (E) et vérifier que les points A et A' sont les sommets situés sur (Δ).

b) Construire $(D), (\Delta), A, A'$ et F.

c) Après avoir déterminer géométriquement les autres sommets B et B', construire (E).

Problème :

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Partie A

A tout réel $\propto$ strictement positif, on associe la fonction numérique $f_\propto$ définie sur IR_+^*, par $f_\propto(x) = \frac{ln(x)}{x^\propto} + 1 - x$.

1-a) Montrer que $f_\propto$ est dérivable sur son ensemble de définition et que, sa dérivée, $f'_\propto$ est telle que $f'_\propto = \frac{N(x)}{x^{\propto+1}}$ où N est une fonction numérique que l'on déterminera.

b) Etudier le sens de variation de N, puis calculer $N(1)$.

c) En déduire les sens de variation de $f_\propto$ et les coordonnées du point de $C_\propto$ d'ordonnée maximale.

2- On note A_λ l'aire, exprimée en unité d'aire, de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe $C_{\frac{1}{2}}$ les droites d'équation : $x = \lambda$ et $x = 1$, $\lambda \in]0, 1[$

a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer A_λ.

b) Calculer $\lim\limits_{\substack{\lambda \to 0 \\ >}} A_\lambda$.

Partie B

Soit g, la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \frac{lnx}{\sqrt{x}}$

1- Etudier les variations de g puis représenter sa courbe (C) dans le repère (O,$\vec{\imath},\vec{\jmath}$)

2- On pose $\vec{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{\imath} + \vec{\jmath})$ et $\vec{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\vec{\imath} + \vec{\jmath})$.

a) Montrer que $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est un repère orthonormé du plan.

b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application R du plan (P) dans lui-même qui transforme le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ au repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$

c) Déterminer les images (D'_1) et (D'_2) respectives des droites d'équation : $x = 1$ et $x = e^2$ par R

3- Soit S la symétrie orthogonale d'axe la droite Δ passant par O et dirigé par $\vec{u}$ et on pose $H = S\ o\ R$

a) Montrer que l'écriture complexe associée à H est : $Z' = e^{-i\frac{\pi}{4}}\bar{z}$

b) Construire dans les mêmes repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, les courbes $C_1 = R(C)$ puis $C_2 = H(C)$

c) Vérifier que (D'_1) et (D'_2) sont orthogonales à (Δ) puis justifier que l'aire du domaine (T) limité par les courbes C_1 , C_2 , (D'_1) et (D'_2) est en unité d'aire : $2\int_1^{e^2} g(x)dx$.

Que vaut cette aire ?

Partie C

Pour tout entier n supérieur ou égale à 10, on pose : $U_n = g(10) + g(11) + \cdots + g(n)$ et $V_n = U_n - \int_{10}^{n+1} g(t)dt$.

1- Soit k un entier supérieur ou égal à 10.

a) Démontrer que $g(k+1) \leq \int_k^{k+1} g(t)dt \leq g(k)$.

b) En déduire que, pour tout entier n supérieur ou égale à 10,

$U_{n+1} - g(10) \leq \int_{10}^{n+1} g(t)dt \leq U_n$.

c) En utilisant le sens de variation de (U_n), montrer que

$U_n - g(10) \leq \int_{10}^{n+1} g(t)dt \leq U_n$.

2-a) Montrer que (V_n) est bornée

b) en utilisant 1-a), démontrer que (V_n) est croissante. En déduire que (V_n) converge

BACCALAUREAT SESSION 2013

Exercice 1

1-Résoudre dans le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation : $4z^4 + 3z^2 + 1 = 0$. Montrer que les solutions sont conjuguées deux à deux.

2-Ecrire le polynôme $4z^4 + 3z^2 + 1$ sous la forme d'un produit de deux trinômes du second degré à coefficients réels.

3-En déduire que dans tout système de numération de base b supérieure ou égal à cinq, le nombre $\overline{40301}$ est multiple de $\overline{211}$ (ces deux nombres sont écrits en base b).

On prend b égal à neuf ; écrire dans cette base le quotient de $\overline{40301}$ par $\overline{211}$.

Exercice 2

Le plan (P) est rapporté au repère orthonormé direct (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$).

Soit u un nombre réel et f_u l'application de (P) dans (P) qui à tout point M de (P) de coordonnées (x, y) associe le point M' dont les coordonnées (x', y')sont :

$$\begin{cases} x' = x+2u \\ y' = ux+y+u^2 \end{cases}$$

1. Démontrer que f_u est bijective ; déterminer f_u^{-1}.

2. Démontrer que la parabole Γ, d'équation $y = \frac{x^2}{4}$ est globalement invariante par f_u.

3. On défini une suite $(M_n)_{n \in IN*}$ de point de (P) de la façon suivante :

$M_1 = f_{\frac{1}{2}}(O)$; $M_2 = f_{\frac{1}{2^2}}(M_1), \ldots, M_n = f_{\frac{1}{2^n}}(M_{n-1})$.

a/ Justifier que, pour tout entier naturel n, $M_n \in \Gamma$.

b/ Exprimer les coordonnées (x_n, y_n) de M_n en fonction de n.

c/ Le point M_n a-t-il une position limite lorsque n tend vers $+\infty$? Déterminer cette position.

d/Soit G_n l'isobarycentre des points $M_1, M_2, \ldots, M_n$. Exprimer en fonction de n les coordonnées (Xn, Yn) de G_n.

e/ Le point G_n a-t-il une position limite lorsque n tend vers $+\infty$? Déterminer cette position.

4- Soit I_n le point d'intersection des tangentes à Γ aux points M_n et M_{n+1}

a/ Exprimer, en fonction de n, les coordonnées $(X'n, Y'n)$ de I_n.

b/ Justifier que pour tout $n \in IN*$, $\frac{1}{2^{2n+1}} = \frac{2}{9}(X'_n - 2)^2$.

c/ Montrer que, pour tout entier non nul n, le point I_n appartient à une parabole Γ'.

d/ Déterminer les éléments caractéristiques de Γ'

Problème

On considère la fonction numérique g définie par :

$$\begin{cases} g(x) - (1-e^{-x})\ln x \ \forall x \in]0;1] \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

I.

1) **Démontrer que $\lim \frac{1-e^{-x}}{x} = 1$**
2) **Démontrer que g est continue sur $[0;1]$.**

3) **Etudier la dérivabilité de g sur $[0;1]$ et montrer que pour tout x de $]0;1]$, $g'(x) = \frac{e^{-x}}{x}(xlnx + e^x - 1)$.**

4) **Soit f la fonction numérique définie sur $]0;1]$ par $f(x) = xlnx + e^x - 1$.**

   a/ Etudier le sens de variation de f' et démontrer que f' s'annule une seule fois sur $]0;1]$ en un point x_0 (on ne calculera pas x_0) .

   b/ En déduire le signe de $f'(x)$ puis démontrer que f s'annule une seule fois sur $]x_0\,;1]$ pour une valeur x_1(On ne calculera pas x_1).

5) **Dresser le tableau de variation de g.**

6) **Construire la courbe de g dans le plan muni d'un repère orthonormé $(0,\vec{i},\vec{j})$ (unité : 10cm) ; on prendra $x_1 = 0,31$.**

II. Soit n un entier naturel, on définit sur $[0;1]$les fonctions φi , $i \in IN$ par :

$\varphi_0(x) = 1$; $\varphi_1(x) = 1 - x$; $\varphi_2(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2!}$ Et pour tout entier n strictement supérieur à 2, $\varphi_n(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!}$.

Démontrer que pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel x de $[0;1]$ on a $\varphi'_n(x) = -\varphi_{n-1}(x)$.

On se propose de démontrer que pour tout entier naturel n et pour tout réel x de $[0;1]$;

$\varphi_{2n+1}(x) \le e^{-x} \le \varphi_{2n}(x)$.

a/ Soit Φ et Ψ deux fonctions continues sur $[0;1]$ et dérivable sur $]0;1]$telles que $\Phi(0) = \Psi(0)$.

Démontrer que si pour tout réel x de $]0;1]$ $\Phi'(x) \le \Psi'(x)$ alors pour tout x de $[0;1]$ $\Phi(x) \le \Psi(x)$.

b/ Démontrer par récurrence et en utilisant deux fois la question 2.a/ que pour tout x de [0 ; 1] et pour tout entier naturel , $\varphi_{2n+1}(x) \le e^{-x} \le \varphi_{2n}(x)$.

c/ Pour tout entier naturel n, déduire de la question précédente un encadrement de la fonction g sur $]0;1]$ faisant intervenir les fonctions φ_{2n} *et* φ_{2n+1}.

III. On considère Δ l'ensemble des points M du plan de coordonnées $(x;y)$ dans le repère orthonormé $(0,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ vérifiant $0 \le x \le 1$ *et* $g(x) \le v \le 0$. On se propose de déterminer l'aire de Δ.

1- **Soit n une entier naturel et $\propto$un réel tel que $0 < \propto \le 1$. On pose $I_n(\propto) = \int_{\propto}^{1} x^n lnx\, dx$. Calculer $I_n(\propto)$ en utilisant une intégration par parties.**

2- **Calculer $\lim\limits_{\substack{\propto \to 0 \\ \propto > 0}} I_n(\propto)$.**

3- **En utilisant la question II.2.c/ donner un encadrement de $\int_{\propto}^{1} g\,(x)dx$ au moyen des intégrales de type $I_n(\propto)$ En déduire un encadrement de $\int_0^1 g\,(x)dx$.**

4- **Donner un encadrement de l'aire de Δ en cm² d'amplitude 10^{-1} près.**

Indication : **Soit** $\varepsilon \epsilon]a;b]$ **si** $\lim\limits_{\varepsilon \to \propto} \int_{\varepsilon}^{b} f(x)dx$ **existe dans** $\mathbb{R}$ **alors** $\lim\limits_{\varepsilon \to \propto} \int_{\varepsilon}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx$.

BACCALAUREAT SESSION 2012

Exercice 1 :

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules indiscernables au toucher.

U_1 contient n boules blanches et 3 boules noires,

U_2 contient 2 boules blanches et 1 boule noire.

On tire au hasard et simultanément deux boules de U_1 et on les met dans U_2, puis on tire au hasard et simultanément deux boules de U_2 et on les met dans U_1 ; l'ensemble de ces opérations constitue une épreuve.

1- On considère l'évènement A : « après l'épreuve, les urnes se retrouvent chacune dans leur configuration de départ »

Montrer que la probabilité $p(A)$ de l'évènement A peut s'écrire : $p(A) = \frac{3n^2+15n+9}{5(n+3)(n+2)}$.

2- On considère l'évènement B : « après l'épreuve, l'urne U_2 contient une seule boule blanche »

Calculer la probabilité $p(B)$ de l'évènement B.

3- Un joueur mise 200 francs et effectue une épreuve. A l'issue de cette épreuve, on désigne par $\propto$ le nombre de boules blanches contenues dans U_2.

Le joueur reçoit $10n(3-\propto)$ francs.

a) Expliquer pourquoi le joueur n'a aucun intérêt à jouer tant que n ne dépasse pas 6.

Dans la suite, on considère $n > 6$ et on introduit la variable aléatoire X qui prend pour valeurs les gains algébrique du joueur.

b) Détermine la loi de probabilité de X.

c) Calculer l'espérance mathématique de X.

Exercice 2 :

On considère la suite (U_n) définie pour tout entier naturel n par : $U_0 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$ et, pour $n > 0$, $U_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx$.

1-a) Soit f la fonction numérique définie sur $[0\,;1]$ par $f(x) = ln(x + \sqrt{1+x^2})$

Calculer la dérivée f' de f. En déduire U_0.

b) Calculer U_1.

2-a) Prouver que la suite (U_n) est décroissante. En déduire que la suite (U_n) est convergente.

b) Montrer que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;1]$ et pour tout entier $n \geq 1$. On a : $\frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$ (1)

Déterminer alors la limite de (U_n).

3- pour tout $n \geq 3$, on a : $I_n = \int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1+x^2}dx$.

a) Vérifier que pour tout entier n$\geq$ 3, on a : $U_n + U_{n-2} = I_n$

par une intégration par parties portant sur In, montrer que pour tout entier $n \geq 3$, on a :

$nU_n + (n-1)U_{n-2} = \sqrt{2}$.

b) En déduire que pour tout entier $n \geq 3$, on a : $(2n-1)U_n \leq \sqrt{2}$ (2).

c) A l'aide des inégalités (1) et (2), montrer que la suite (nU_n) est convergente et calculer sa limite

Problème :

Soit dans le plan P muni d'un repère orthonormé directe $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ les points A, B et C d'affixes respectives : $Z_A = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$; $Z_B = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}$ et $Z_C = 1$.

A-

1- Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application affine f de P dans P qui laisse invariant les points A et B et transforme O en C.

2- Pour tout point M du plan, exprimer les coordonnées $((x', y')$ et $(f(M)$ en fonction des coordonnées (x, y) de M puis l'affixe Z de M.

3- Déterminer l'image par f du cercle γ de centre C et de rayon 1. Soit y' cette image.

B/ On considère l'application F de P dans P qui à tout point m d'affixe Z associe le point M d'affixe $Z = z^2 + 1$.

1-a/ Déterminer les images par F des points A, B et O.

b) Déterminer les points invariants par F.

2-a) Démontrer que tout point M et P, à l'exception d'un seul que l'on précisera, admet par F deux antécédents distincts m_1 et m_2 symétriques par rapport à O.

b) Soit M un point de P distinct de C et z_1 et z_2 les affixes respectives de m_1 et m_2. Démontre que :

$b_1)$ $Om_1^2 = Om_2^2 = CM$ où m_1 et m_2 sont les antécédents de M par F.

$b_2)$ $ang\ z_1 = \frac{\alpha}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ et $ang\ z_2 = \frac{\alpha}{2} + \pi + 2k'\pi, k' \in \mathbb{Z}$.

Où α est une mesure de l'angle $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{CM})$

c) On se propose de construire géométriquement m_1 et m_2

Soit (D) la droite passant par O et de vecteur directeur $\vec{u}$ tel que $\frac{\alpha}{2}$ soit une mesure de l'angle $(\overrightarrow{e_1}, \vec{u})$.

Soit (D') la perpendiculaire à (D) en O. sur (D') de part et d'autre de O, on place les points N et Q tel que $OQ = 1$ et $ON = CM$.

Soit (Γ) le cercle de diamètre $[QN]$. Démontre que (Γ) coupe (D) en m_1 et m_2

3- Déterminer $F(\gamma')$.

4-a) Pour tout m de coordonnées (x, y), on note (X, Y) les coordonnées du point $M = F(m)$

Exprimer X et Y en fonction de x et y.

b) Déterminer l'image par F de l'axe des abscisses puis de l'axe des ordonnées

c) Déterminer l'ensemble des points du plan dont l'image par F appartient à l'axe des abscisses

5- (Δ) désigne la droite d'équation $y = 2$.

a) Démontrer que l'image de (Δ) par F est la courbe (C) d'équation $y^2 = 16(x+3)$.

b) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de cette courbe : axe, sommet, foyer, directrice

c) Construire (C).

BACCALAUREAT SESSION 2011

Exercice 1 :

Pour tout entier naturel non nul n, on considère les deux entiers M et N tels que :

$M = 11n + 3$ **et** $N = 13n - 1$.

1- Démontre que tout diviseur de M et de N est un diviseur de 50.

2- Soit l'équation (E) : $(x, y) \in IN^* \times IN^*, 50x - 11y = 3$.

a) Montrer que si un couple (x_0, y_0) **d'entiers naturels est solution de** $((E)$ **alors l'entier** $11y_0 + 3$ **est un multiple de 50.**

b) Résoudre l'équation (E).

c) Déduire de ce qui précède les valeurs de n **pour lesquels** M **et** N **ont 50 pour plus grand commun diviseur.**

Exercice 2 :

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, λ **est un réel quelconque et** k **un réel strictement positif quelconque.** $C_{\lambda,k}$ **désigne la courbe dont une équation dans** $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ **est :**

$(1 + \lambda)x^2 + (1 - \lambda)y^2 = k.$

1- Etudier les courbes $C_{0,k}$, $C_{1,k}$ **et** $C_{-1,k}$.

2-a) Montrer que les deux coniques d'équations $3x^2 + y^2 = 12$ **et** $33x^2 - y^2 = 6$ **sont des courbes** $C_{\lambda,k}$.

b) Identifier ces deux coniques et représenter les sur deux figures distinctes.

3- On suppose λ **différent de – 1, 0 et 1. Le réel** k **étant fixé, montrer que** $C_{\lambda,k}$ **est une conique. Précisez alors, selon les valeurs de** λ, **son axe focal et son excentricité.**

Problème :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{k})$. **Soit** α **un nombre réel et** T_α **l'application de p dans p qui à tout point** M **de coordonnée** (x, y) **associe le point M'**$\binom{x'}{y'}$ **tel que :** $x' = \alpha x$ **et** $y' = 2\alpha x + y$.

A/

1- Déterminer suivant les valeurs de α, **l'ensemble** E, **des points invariants par** T_α

2- Montrer que pour tout point M **n'appartenant pas à** E, **le vecteur** $\overrightarrow{MM'}$ **a une direction fixe.**

3- On pose $\alpha = 0$, **caractérise** T_α

4- Montrer que T_{-1} est une symétrie axiale dont on précisera les éléments caractéristiques.

5- Si $\alpha \in$ IR* \ $\{-1\,;1\,\}$, montrer que T_α, est une affinité dont précisera les éléments caractéristiques.

B/ Dans cette partie on pose $\alpha = 1$; $M_0\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$ et $M_n = f(M_{n-1}\ \forall\ n \in IN^*$ avec $M_0\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$.

1- Exprimer x_n et y_n en fonction de x_{n-1} ety_{n-1}.

2- En déduire une expression de x_n et y_n en fonction de x_0 , y_0 et n.

3- Montrer que les points M_n appartiennent à une droite fixe dont on précisera l'équation.

4- Montrer que la droite d'équation : $x = k$ est globalement invariante par T_1.

C/ On pose $\alpha = -1$.

Soit la fonction

$f: IR \rightarrow IR$

$x \rightarrow x + 1 - ln|x + \ sin\,x|$

1- Montrer que pour tout x élément de IR^* la fonction f est définie.

2- Trouver les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition

3- Etudier les variations de la fonction g définie sur $[0;\pi]$ par $g(x) = x - 1 + sinx - cosx$

4- Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α appartement à $\left[\frac{\pi}{4}\ ;\ \frac{\pi}{3}\right]$

5- En utilisant les questions précédentes, dresser le tableau de variation de la fonction f.

6- Que représente la droite d'équation $y = x$ pour la courbe (C_f) de f

7- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique appartenant à $\left]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{6}\right[$

8- Comment peut – on construire l'image d'un point de (C_f) par T_{-1} ?

9- Construire (C_f) puis l'image d'un point de (C_f) par T_{-1}

D/ Dans cette partie, α appartient à un sous ensemble de IR

1- Trouver les entiers relatifs α tels que 4α soit un multiple de 8.

2- Montrer que l'ensemble des solutions appartenant à $[-10; 10]$ est :

$B = \{-10\ ;\ -8\ ;\ -6\ ;\ -4\ ;\ -2\ ; 0\ ; 2\ ; 4\ ; 6\ ; 8\}$

3- Sur des jetons indiscernables au toucher on inscrit chaque élément de l'ensemble B, qu'on place dans une urne.

On tire simultanément quatre jetons de l'urne. Soit X la variable aléatoire réelle égale au nombre de transformation (T_α) obtenues lors du tirage de quatre jetons. ($\alpha \in B$).

a) Déterminer la loi de probabilité de X

b) Calculer l'espérance mathématique de X

4- Dans cette question, on tire successivement dix jetons de l'urne en remettant chaque fois le jeton tiré.

a) Calculer la probabilité qu'on ait exactement trois fois une transformation lors des dix tirages.

b) Soit y la variable aléatoire réelle égale au nombre de transformation obtenues lors des dix tirages.

Calculer l'espérance mathématique puis la variance de y.

BACCALAUREAT SESSION 2010

Exercice1

On considère les fonctions numériques f, g et h définis par :

$\begin{cases} f(X) = (X^2 + X)ln|X| \; si \; X \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} g(X) = \frac{\ln(X^2+1)}{X} \\ g(0) = 0 \end{cases}$ Si $X \neq 0$; $\begin{cases} h(X) = 1 - e^{\frac{-1}{x^2}} \\ h(0) = 1 \end{cases}$ Si $X \neq 0$

I. 1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f, g et h au point x_0=0

2) Montrer que $\forall X \geq 0$, $\ln(X^2+1) \leq X^2$. En déduire que : $\forall X \in [0,1]$, $g(x) \leq x$

II. Lors d'un examen oral de mathématique, chaque candidat devra tirer une des trois enveloppes identiques dans une urne. Les trois enveloppes contiennent, l'une la fonction f, l'autre la fonction g et la troisième la fonction h. Le candidat étudiera la continuité et la dérivabilité en $X_0 = 0$ de la fonction qu'il aura choisie. On suppose les tirages équiprobables.

1. Calculer la probabilité pour qu'un candidat donné tire une enveloppe contenant une fonction continue et dérivable en $X_0 = 0$.
2. Au tour d'un candidat Lamda, connu déjà de son examinateur qu'il ne peut répondre qu'à la question concernant la fonction f, il lui est accordé de procéder par tirage successifs sans remise jusqu'à obtenir la fonction f. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre d'essais effectués par le fameux candidat.
   a- Déterminer la loi de probabilité de X
   b- Calculer l'espérance mathématique et la variance de X
   c- Construire la courbe de la fonction de répartition de X

Exercice2

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul. Pour tout n, on pose :

$I_n = \frac{(n-1)^2}{n\,!} \int_1^e (\ln t)^2 \, dt$

1. a/ Montrer que $I_1 = -1$

   b/ Démontrer que pour tout n, on a : $I_{n+1} = I_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$ e c/ Prouver alors que, pour tout n, on a :

$$\text{In} = \left(\frac{I}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right) e - 1$$

2. a/ Démontrer que $0 \leq \int_1^e (\ln t)^n \text{ dt } \leq e - 1$

   b/ En déduire que | In| $\leq \frac{e-1}{n!}$

   c/ Que peut-on déduire pour la suite (In)

3. pour tout n, on pose : S= $\frac{I}{0!} + \frac{-1}{11} + \frac{1}{2!}$ - … + $\frac{(-1)^n}{n!!}$

Déduire des questions précédentes la limite de la suite (S_n)

Problème :

Soit P un plan orienté et soit R = (O, $\overrightarrow{OU}$, $\overrightarrow{OV}$) un repère orthonormal direct et de P. On considère l'application f_a de P dans P qui, au point M d'affixe Z, associe le point M' d'affixe Z' avec :

Z' = $a^2 + \bar{z} +$ ai où a est un nombre complexe non nul et $\bar{z}$ le nombre complexe conjugué de z. On appelle A le point d'affixe a et on note $|z|$ le module du nombre complexe z.

A. Le but de cette partie est d'étudier f_a dans le cas où $|a|$ = 1

On pourra poser : a = cos θ + sin θ où θ appartient à l'intervalle $[0, 2\pi[$.

1- A partir du point A, construire le point O' tel que O' = $f_a(O)$ et montrer que le milieu I du bipoint (O, O') est invariant par f_a
2- Montrer que f_a est la composée de la symétrie orthogonal par rapport à la droite (OU) et d'un déplacement. Quelle est alors la nature de f_a ?
3- Lorsque θ varie dans l'intervalle $[0, 2\pi[$, déterminer :
   a- L'ensemble des points I (milieu de$[OO']$)
   b- L'ensemble des ponts A' - $f_a(A)$
   c- L'ensemble des valeurs prises par la norme de $\overrightarrow{IU}$

B. On étudie le cas où $|a|$ est diffèrent de 1.

1. On appelle g_al'application de P dans P qui, au point M d'affixe z, associe le point M_1 d'affixe z_1 avec$z_1 = a^2\bar{z}$. SoitS_a, la symétrie orthogonale par rapport à la droite (OA).

a- Montrer que l'affixe z_2 du point $M_2 = S_a$ (M) est définis en fonction de l'affixe z de M par : $z_2 = \frac{a}{\bar{a}}\ \bar{z}$

b- Déterminer la nature de l'application $g_a 0 S_a$. En déduire une décomposition de g_a sous la forme d'une composée d'une symétrie orthogonale et d'une homothétie.

2. Soit M_0 un point de P distinct de O. On définit dans P, une suite de points M_n Par :

Pour tout entier naturel n, $M_{n+1}= g_a(M_n)$. Montrer que l'ensemble des points M_n est contenu dans la réunion de deux demi-droites.

Trouver une relation entre $\|\overrightarrow{OM_{n+1}}\|$ et $\|\overrightarrow{OM_n}\|$ puis exprimer $\|\overrightarrow{OM_n}\|$ en fonction de $\|\overrightarrow{OM_0}\|$.

Etudier suivant la position de A dans le plan P, la limite éventuelle de $\|\overrightarrow{OM_n}\|$ quand n tend vers $+\infty$.

3. a/ Montrer que f_a admet un unique point invariant $\cap_a$ dont on déterminera l'affixe

b/ Montrer que $\cap_a$ est un point du segment$[OO']$, (en notant O'= $f_a(O)$).

Montrer que f_a est une composée de l'homothétie de centre $\cap_a$ et de rapport $|a^2|$ et d'une symétrie orthogonal que l'on précisera.

4. Etant donné un nombre réel positif L, peut-on déterminer $|a|$ pour que l'on ait $\|\overrightarrow{O\cap_a}\| = L$?

A PRESENT, NOUS SOMMES EN PLEINE ELABORATION DES CORRIGES. TOUS CEUX QUI VEUILLENT PARTICIPER SONT PRIES DE CONTACTER LES NUMEROS QUI SONT A LA PAGE 1