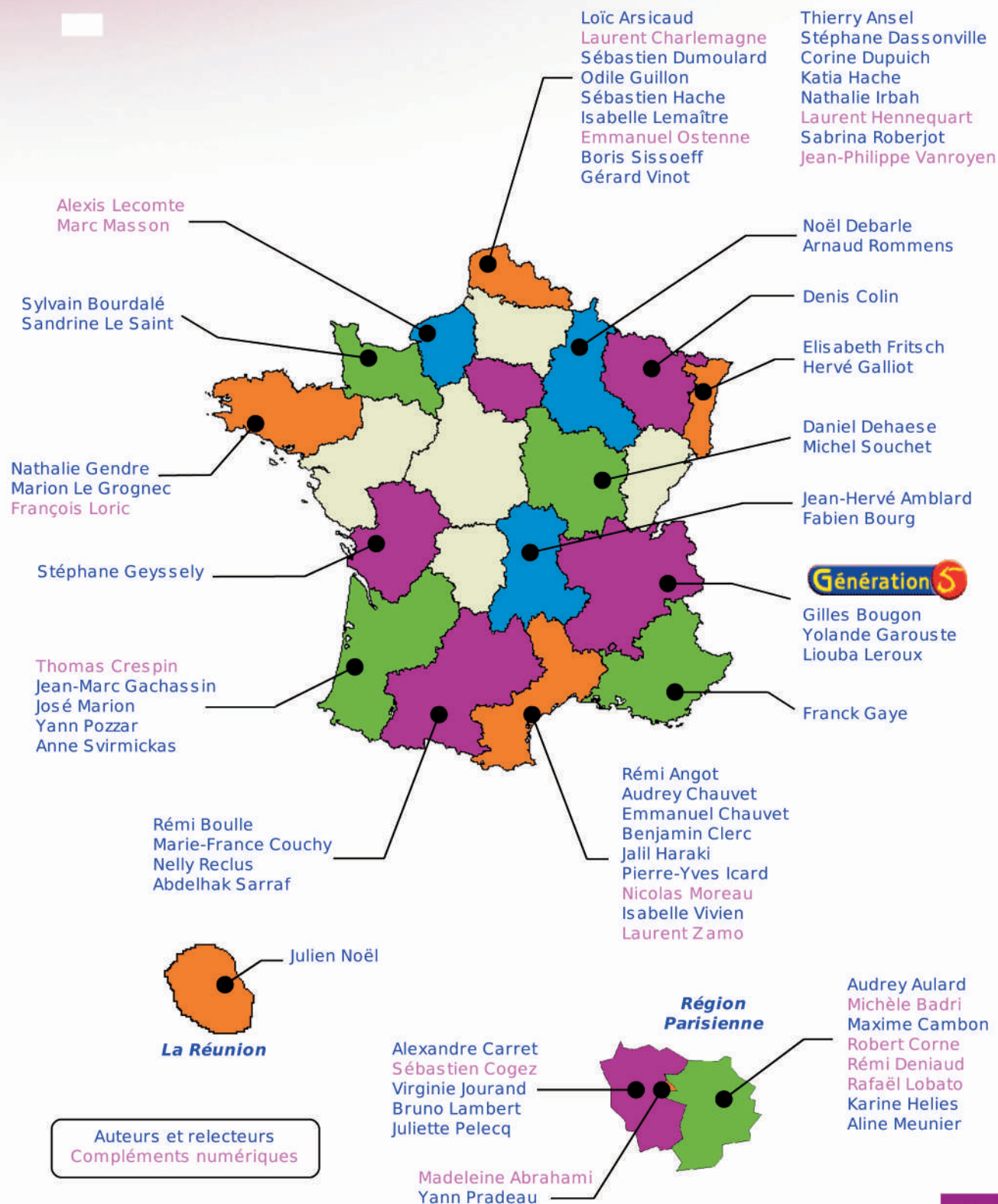


Le Manuel

SÉSAMATH



Auteurs et relecteurs
Compléments numériques

Préface

Suivant la même ligne éditoriale que le manuel de cinquième paru l'an dernier, et tout naturellement afin de poursuivre la réalisation de son projet, **Sésamath** vient de publier son manuel de quatrième. Cet ouvrage, conçu selon les mêmes principes et visant les mêmes objectifs, ne nous déçoit pas. La contextualisation y est toujours présente ainsi que l'intégration des TICE, réalisée d'une manière pertinente, c'est-à-dire non plaquée mais reposant sur une vraie nécessité.

Le découpage du volume se fait d'abord selon les deux grandes parties du programme : géométrie et calcul. Dans chacune d'elles, les chapitres sont organisés en rubriques, à l'image de ce qui était pratiqué dans l'ouvrage précédent. Le lecteur y trouve en conséquence un grand confort. Activités de découverte, méthodes et notions essentielles, exercices d'entraînement puis d'approfondissement et enfin propositions de travail en groupe se retrouvent et donnent à l'ouvrage une grande clarté, ce qui facilite son utilisation.

Ce manuel est lui aussi le fruit d'un travail collectif et d'une expérience partagée. On sent bien, quand on le parcourt, que les propositions d'exercices ont été mûries et les énoncés testés. Chaque professeur pourra y trouver, selon ses besoins, matière à construire, et chaque élève, guidé par son professeur, l'utilisera de manière personnalisée avec profit.

Pour ces raisons, je souhaite à **Sésamath 4^e** le grand succès qu'il mérite.

Claudine Ruget
Inspectrice Générale de Mathématiques

»» Sommaire

TRAVAUX NUMÉRIQUES

N1 : RELATIFS.....	9
N2 : NOMBRES EN ÉCRITURE FRACTIONNAIRE.....	25
N3 : PUISSANCES.....	43
N4 : CALCUL LITTÉRAL.....	61
N5 : EQUATIONS, ORDRE.....	77
N6 : PROPORTIONNALITÉ.....	93
N7 : STATISTIQUES.....	107
OUTILS POUR RAISONNER EN MATHÉMATIQUES.....	119
LES OUTILS LOGICIELS SÉSAMATH.....	130

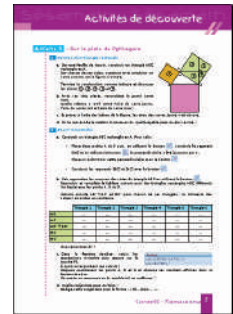
TRAVAUX GÉOMÉTRIQUES

G1 : TRIANGLE RECTANGLE.....	135
G2 : TRIANGLES ET PARALLÈLES.....	155
G3 : DISTANCES ET TANGENTES.....	173
G4 : COSINUS.....	187
G5 : PYRAMIDES ET CÔNES.....	199
EXERCICES DE SYNTHÈSE.....	213
CORRECTIONS DES EXERCICES « A TOI DE JOUER ».....	221
L'ESSENTIEL DES PROPRIÉTÉS UTILES AUX DÉMONSTRATIONS.....	231
LEXIQUE : L'ESSENTIEL DES NOTIONS.....	239
COMMENT UTILISER CE MANUEL À LA MAISON.....	244
FORMULAIRE.....	245

Chaque chapitre de ce manuel comporte cinq rubriques :

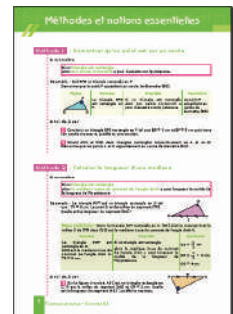
LES PAGES
« **ACTIVITÉS** »

Les activités font découvrir à l'élève de nouvelles notions sur le chapitre en cours. Elles s'appuient sur les savoirs des années précédentes et utilisent souvent les T.I.C.E. (Technologies de l'Information et de la Communication pour l'Éducation).



LES PAGES
« **MÉTHODES** »

Dans cette rubrique, une synthèse du cours et des méthodes à retenir sont proposées. Des exemples illustrent les savoirs présentés et des exercices d'application sont proposés et corrigés en fin de manuel.



LES PAGES
« **EXERCICES** »

« **S'ENTRAÎNER** » : Des exercices d'application pour mettre en pratique les méthodes du cours sont regroupés par séries.

« **APPROFONDIR** » : Des exercices de réinvestissement plus complexes sont présentés dans des contextes variés.

Les exercices tirés du Brevet et les exercices portant sur les thèmes de convergence se repèrent facilement grâce à un fond de couleur.



LES PAGES
« **TRAVAILLER EN GROUPE** »

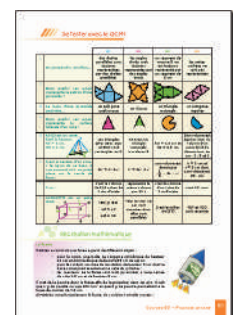
Des travaux à faire en petits groupes sont proposés pour apprendre à travailler, réfléchir et s'organiser ensemble.



LES PAGES
« **LA FOIRE AUX MATHS** »

« **SE TESTER AVEC LE QCM** » : Un questionnaire à choix multiples pour faire le point de ses connaissances en fin de chapitre.

« **RÉCRÉATION MATHÉMATIQUE** » : Un problème ludique pour se distraire en utilisant les connaissances du chapitre.





Pour faciliter l'utilisation du livre et des T.I.C.E. avec les élèves, le Manuel Sésamath 4^e est accompagné de compléments gratuits, libres et accessibles, par chapitre ou par page, à l'adresse :

<http://manuel.sesamath.net/>

Les compléments du Niveau 4e

Les compléments par chapitre

Cliquez sur le chapitre dont vous voulez les compléments :

N1 : Relatifs	G1 : Triangles rectangles
N2 : Fractions	G2 : Triangles et parallèles
N3 : Puissances	G3 : Distances et tangentes
N4 : Calcul littéral	G4 : Cosinus
N5 : Equations, ordre	G5 : Pyramides et cônes
N6 : Proportionnalité	
N7 : Statistiques	

Autres compléments

Outils pour raisonner en mathématiques	Exercices de synthèse
Diaporamas du manuel Sésamath 4e	Divers compléments
Diaporamas des Cahiers Mathenpoche 4e	Testes officiels

Accès par page aux compléments du manuel Sésamath 4e

Indiquez la page dont vous voulez les compléments :

Ces compléments se déclinent de la façon suivante :

RUBRIQUE
« **ACTIVITÉS** »

Un grand nombre d'activités utilisent ou sont illustrées par les outils Mathenpoche tels que TracenPoche pour la géométrie dynamique, CasenPoche pour le tableur et InstrumenPoche pour la géométrie à l'aide des instruments virtuels.

RUBRIQUE
« **MÉTHODES** »

Tous les exercices « À toi de jouer » sont également corrigés par animations que l'on peut dérouler à son rythme.

Méthodes et notions essentielles

Méthode 2 : Multiplier plusieurs nombres relatifs

2 Quel est le signe du produit
 $C = 9 \times (-9) \times (-9) \times 9 \times (-9) \times (-9) \times (-9) ?$

Solution

3 Calcule :
 $D = -25 \times (-9) \times (-4)$ $E = 0,5 \times 6 \times (-20) \times 8$

Solution

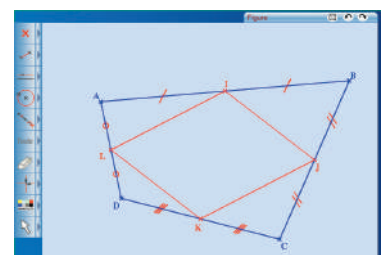
RELATIFS - CHAPITRE N1

RUBRIQUE
« **EXERCICES** »

Les exercices du manuel ont été conçus en parallèle avec les exercices du logiciel MathenPoche. Tous les exercices (et les activités) du manuel sont également disponibles sur le site <http://manuel.sesamath.net/> sous forme de diaporamas.

RUBRIQUE
« **TRAVAILLER EN GROUPE** »

Des documents à imprimer, pour conserver les traces écrites ou pour guider les élèves lors de l'utilisation d'un logiciel, sont mis à disposition.



1 Qu'est-ce qu'une narration de recherche ?

C'est, avant toute chose, un problème. Tu en trouveras sur la page de titre de chaque chapitre, présenté comme celui-ci :



Narration de recherche

Prince dispose de feuilles de papier de forme carrée. Il les découpe de telle façon que tous les morceaux obtenus soient des carrés.

Peut-il avoir deux morceaux ? Trois morceaux ? Quatre morceaux ? Cinq morceaux ?
Cherche le plus grand nombre de morceaux possibles.

L'objectif d'une narration de recherche est de découvrir la recherche mathématique et de la vivre à ton tour. On cherche, on ne trouve pas toujours du premier coup, mais chacun peut apporter ses idées et ainsi faire avancer vers la solution. Grâce à ce type d'exercice, tu t'apercevras que tu es capable de trouver beaucoup de bonnes idées si tu t'en donnes le temps et l'énergie. Ton professeur pourra ainsi mieux te connaître et apprécier tes efforts.

Ces exercices sont choisis pour être faciles à chercher mais il est souvent plus difficile de trouver leur solution. Des dessins, des calculs et des essais simples à mettre en oeuvre permettent de progresser vers le résultat mais, pour cela, il faut être persévérant.

L'important ici n'est pas de trouver « LA » solution mais de raconter en détail toutes les démarches entreprises pour la trouver ou tenter de la trouver. Dans une narration de recherche, tu décris précisément tes essais et toutes les pistes que tu as essayées même celles qui n'ont pas abouti. Les chapitres n'ont souvent qu'un lointain rapport avec les narrations. Pas de panique si tu ne maîtrises pas tout le chapitre ! Chacun peut chercher !

N'oublie pas ! Ce n'est pas une rédaction de français, tu n'as donc rien à inventer et les erreurs de grammaire ou d'orthographe ne te pénaliseront pas. Il suffit simplement de chercher la solution et d'expliquer par écrit ce que tu as fait pour essayer d'y parvenir !

Les narrations de recherche demandent une phase d'apprentissage et ce n'est probablement qu'après deux ou trois devoirs de ce type que tu te sentiras plus à l'aise. Tu comprendras alors mieux ce qu'attend de toi ton professeur. Profite bien des discussions en classe, des corrections, des remarques sur tes copies et sur celles de tes camarades pour progresser.

2 Ce que tu dois retenir

0. La qualité narrative. Le lecteur de ton travail doit immédiatement sentir qu'une recherche a eu lieu. Il doit comprendre pourquoi certaines pistes explorées ont été abandonnées ou comment une solution a peu à peu germé dans ton esprit. Si une personne de ton entourage (parent, ami, professeur...) t'a apporté une piste ou une solution, le lecteur doit être averti car cela fait partie de la recherche ! Aucune pénalité ne sera donnée.

1. La vérification des idées. Chaque fois que cela est possible, tu dois essayer de trouver des moyens de vérifier tes calculs, tes idées. Même si tu ne parviens pas à écrire une véritable démonstration, tu dois chercher au moins s'il n'existe pas quelques contre-exemples évidents. Tu indiqueras dans ta rédaction tous les éléments qui t'ont permis de faire évoluer ton point de vue ou au contraire qui t'ont conforté dans tes choix. Si quelqu'un t'a aidé, tu dois pouvoir vérifier la piste ou la solution, expliquer pourquoi cela fonctionne et ce que cette aide t'a apporté.

2. L'explication à un camarade. À la fin de la narration, dans une deuxième partie, le professeur peut te demander d'effectuer une synthèse de tes travaux, comme si tu avais à expliquer le résultat de tes recherches (fructueuses ou non) à un ami.

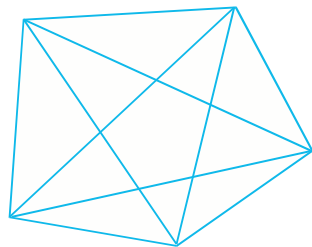
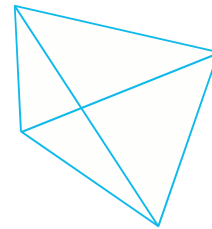
3. La richesse de la recherche. N'oublie pas ! Ton professeur évaluera toujours de manière positive un élève qui essaie plusieurs pistes avec ténacité, même s'il ne trouve aucune solution satisfaisante. Il vaut mieux jouer l'honnêteté et raconter tout simplement ce qui s'est passé plutôt que d'essayer de trouver la solution « à tout prix » !

3 Un autre exemple

Voici un autre énoncé de narration de recherche. Tu remarqueras ici les consignes du professeur qui expliquent clairement les objectifs de l'exercice.

Énoncé :

Nous savons qu'un polygone à quatre côtés possède deux diagonales.



Un polygone à cinq côtés possède cinq diagonales.

- Dessine un polygone à six côtés. Combien possède-t-il de diagonales ?
- Dessine un polygone à sept côtés. Combien possède-t-il de diagonales ?
- Dessine un polygone à huit côtés. Combien possède-t-il de diagonales ?
- Combien de diagonales possède un polygone à neuf côtés ? A dix côtés ?
- Peux-tu déterminer le nombre de diagonales que possède un polygone à cent huit côtés ?
- Si n est un entier, combien de diagonales possède un polygone à " n " côtés ?

Tu pourras chercher la solution seul(e) ou à plusieurs (à condition de l'écrire explicitement au début de ta copie) mais ta rédaction devra dans tous les cas être personnelle.

Tu devras :

1. Raconter les différentes étapes de ta recherche (tu peux expliquer dans quelles conditions tu as cherché, joindre tes brouillons...), les observations que tu as faites et qui t'ont permis de progresser ou de changer de méthode si une piste ne menait à rien.
2. Expliquer ta solution à un(e) camarade que tu dois convaincre.

L'évaluation de ce travail portera essentiellement sur ton récit, la richesse de ta réflexion. La qualité de la langue (orthographe, grammaire,...) ainsi que la qualité de la solution trouvée au problème (solution juste, fausse, incomplète...) seront très secondaires dans cette évaluation.

Nous tenons à remercier :

- le groupe Géométrie de l'IREM de Montpellier pour avoir fait naître cette approche et avoir produit de nombreux documents sur le sujet ;
- l'ensemble des groupes IREM qui se sont saisis de cet outil pour le faire vivre.

UN PROJET DE L'ASSOCIATION SÉSAMATH

Le **manuel Sésamath** est un des projets soutenus par l'association Sésamath. L'ensemble des projets est consultable sur le site :

<http://www.sesamath.net/>

UN TRAVAIL COLLABORATIF

L'équipe de rédaction est une équipe ouverte que tout collègue peut rejoindre. Les échanges se font par listes de diffusion et au moyen d'une interface de travail sur Internet. Celle-ci permet aux différents membres de l'équipe d'accéder à l'ensemble des documents du manuel et ainsi le travail s'organise naturellement.

Le graphisme, le format des documents et le contenu de chaque page ont donc été l'objet de multiples discussions, relectures et améliorations.

UN TRAVAIL LIBRE

L'**association Sésamath** étant attachée aux valeurs du logiciel libre, l'intégralité de ce manuel a été réalisée à l'aide du logiciel OpenOffice, libre et téléchargeable gratuitement sur le site <http://www.openoffice.org>, ainsi que de l'éditeur d'équations Dmaths, téléchargeable sur le site <http://www.dmaths.org>.

L'intégralité du manuel est libre et téléchargeable gratuitement sur le site <http://manuel.sesamath.net/>.

UN SITE RICHE EN COMPLÉMENTS

Sur le site <http://manuel.sesamath.net/>, des compléments axés sur les T.I.C.E. (Technologies de l'Information et de la Communication pour l'Éducation) ont été créés par une seconde équipe d'enseignants. Pour réaliser ces animations, ces enseignants ont utilisé différents logiciels tels que :

- InstrumenPoche : <http://instrumenpoche.sesamath.net/> ;
- TracenPoche : <http://tracenpoche.sesamath.net/> ;
- CasenPoche : <http://casenpoche.sesamath.net/>.

L'utilisation du manuel peut aussi être prolongée par l'utilisation

- des cahiers MathenPoche 4^e : <http://manuel.sesamath.net/> ;
- du logiciel MathenPoche 4^e : <http://mathenpoche.sesamath.net/>.

AU-DELÀ DE SÉSAMATH

Ce projet n'a pu voir le jour que grâce à l'investissement de l'ensemble des participants, qui ont bien souvent dû solliciter leur entourage pour mener leur action à terme. Toute l'équipe du manuel les en remercie.

UN PARTENAIRE ÉDITORIAL

L'**éditeur Génération 5** suit depuis plusieurs années l'association Sésamath dans les différents projets qu'elle entreprend.

- Direction éditoriale : Alain Laurent
- Suivi du projet : Aurore Morfin, Séverine Lacombe, Armelle Ronco
- Infographie : Dominique Sénon
- Maquette et montage : Génération 5
- Illustrations : Fabien Bourg (Sésamath)



Narration de recherche

Sujet : Les 7 familles

Nous sommes des points et nous habitons tous dans un rectangle dont les sommets ont pour coordonnées : $(-7; 10)$ $(7; 10)$ $(7; -10)$ $(-7; -10)$. Voici nos adresses :

Famille 1 : Notre ordonnée est l'opposée de notre abscisse.

Famille 2 : En divisant notre abscisse par 2 et en retranchant 5 au résultat, on trouve notre ordonnée.

Famille 3 : En multipliant notre abscisse par -3 et en retranchant 7 au résultat, on trouve notre ordonnée.

Famille 4 : Notre ordonnée est égale au carré de notre abscisse divisé par 2.

Famille 5 : Notre ordonnée est égale au cube de notre abscisse divisé par -4 .

Famille 6 : Le produit de notre abscisse et de notre ordonnée est toujours égal à 4.

Famille 7 : La somme du carré de notre abscisse et du carré de notre ordonnée est toujours égale à 25.

1°) Pour chaque famille, trouve 4 points de la famille.

2°) Donne l'adresse de chaque famille sous la forme d'une relation qui lie l'abscisse x et l'ordonnée y des points de la famille.

3°) Représente les 7 familles.

4°) Pour chaque famille, trouve les coordonnées des points qui habitent sur les bords du rectangle.

5°) Pour chaque famille, trouve les coordonnées des points qui habitent sur les axes.

6°) Quels sont les points qui appartiennent à plusieurs familles ?

Extrait de *Les nombres relatifs au collège* (Septembre 1996) avec l'aimable autorisation de l'IREM de Poitiers.

Activité 1 : Produit d'un nombre négatif par un nombre positif

On considère l'expression $B = (-2) + (-2) + (-2) + (-2)$.

1. Quelle est la valeur de B ?

On va revenir sur le sens de la multiplication :

$20 + 20 + 20$ est la somme de trois termes tous égaux. On peut donc écrire cette somme sous la forme du produit 20×3 qui se lit « 20 multiplié par 3 ».

2. Écris B sous la forme d'un produit.

3. Écris les expressions suivantes sous la forme d'une somme et calcule-les :

$$C = (-6) \times 3$$

$$D = (-22) \times 5$$

$$E = (-7) \times 7$$

$$F = (-1,5) \times 6$$

4. Conjecture la manière dont on calcule le produit d'un nombre négatif par un nombre positif.

Activité 2 : Conjecture sur le produit

1. Voici une table de multiplication :

a. Recopie-la sur ton cahier et complète la partie qui concerne le produit de deux nombres positifs (en haut à droite).

b. D'après le résultat de l'activité 1, complète la partie qui concerne le produit d'un nombre négatif par un nombre positif (en bas à droite).

c. Observe les régularités dans cette table de multiplication et complète-la entièrement, en expliquant tes choix.

d. À l'aide d'un tableur, crée cette table de multiplication et vérifie que les résultats obtenus sont les mêmes que les tiens.

×	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
5											
4											
3											
2											
1											
0											
-1											
-2											
-3											
-4											
-5											

2. Application sur quelques exemples :

a. En t'aidant de la table, donne le résultat pour chaque calcul suivant :

$$A = (-5) \times 4$$

$$B = 3 \times (-2)$$

$$C = 5 \times (-4)$$

$$D = (-1) \times (-3)$$

b. En t'inspirant de ce qui précède, propose un résultat pour les calculs suivants :

$$E = (-9,2) \times 2$$

$$F = 1,5 \times (-8)$$

$$G = (-3,14) \times 0$$

$$H = (-1,2) \times (-0,1)$$

c. Vérifie ces résultats à la calculatrice.

3. Propose une règle qui permet, dans tous les cas, de calculer le produit de deux nombres relatifs.

Activité 3 : Justification du produit de deux nombres relatifs

Le but de cette activité est de justifier que le produit de deux nombres de signes contraires est un nombre négatif et que celui de deux nombres négatifs est un nombre positif.

1. Calcul de $(-3,5) \times 1,2$:

On considère l'expression $Z = 3,5 \times 1,2 + (-3,5) \times 1,2$.

a. En utilisant la distributivité, factorise par 1,2 et calcule la valeur de Z.

b. Que peut-on en déduire pour les nombres $3,5 \times 1,2$ et $(-3,5) \times 1,2$? Déduis-en la valeur de $(-3,5) \times 1,2$.

2. Calcul de $(-7) \times (-5)$:

a. En t'inspirant de l'activité 1, retrouve le résultat de $(-7) \times 4$.

b. Effectue les calculs donnés dans le cadre ci-contre puis poursuis-les jusqu'à $(-7) \times (-5)$.

$$(-7) \times 4 = \dots$$

$$(-7) \times 3 = \dots$$

$$(-7) \times 2 = \dots$$

$$(-7) \times 1 = \dots$$

$$(-7) \times 0 = \dots$$

3. Calcul de $(-1,5) \times (-0,8)$:

On considère l'expression $N = (-1,5) \times 0,8 + (-1,5) \times (-0,8)$.

En t'inspirant de la méthode de la première partie, retrouve la valeur de $(-1,5) \times (-0,8)$.

Activité 4 : Produit de plusieurs nombres relatifs

1. Calcule ces expressions et déduis-en une règle pour trouver rapidement chaque résultat :

$$A = (-1) \times (-1)$$

$$B = (-1) \times (-1) \times (-1)$$

$$C = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1)$$

$$D = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1)$$

$$E = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1)$$

2. On sait que $(-4) = (-1) \times 4$ et $(-2) = (-1) \times 2$.

a. Complète alors le calcul suivant :

$$(-4) \times (-2) \times (-5) = (-1) \times \dots \times (-1) \times \dots \times (-1) \times \dots$$

$$= (-1) \times (-1) \times (-1) \times \dots \times \dots \times \dots$$

b. Déduis-en une méthode pour trouver le résultat de $(-4) \times (-2) \times (-5)$.

3. Inspire-toi de la question précédente pour effectuer le calcul suivant :

$$(-2) \times (-3) \times 5 \times (-4) \times 6 \times (-5).$$

4. Propose une méthode pour multiplier plusieurs nombres relatifs.

Activité 5 : Un cas particulier de la distributivité

Le but de cette activité est de simplifier une expression ayant un signe « - » devant une parenthèse ou un crochet.

1. 1^{re} approche

On considère l'expression : $A = 4 - 8 - 5 - (4 - 5 + 2)$.

- Calcule cette expression en respectant les priorités de calcul.
- On désire supprimer les parenthèses. On peut écrire A sous la forme :

$$A = 4 - 8 - 5 + (-1) \times (4 - 5 + 2)$$

Développe A en distribuant le facteur - 1 puis effectue les produits. Tu obtiens ainsi une écriture simplifiée de A. Compare-la avec l'expression de départ.

2. 2^e approche

Soustraire $(4 - 5 + 2)$, c'est ajouter son opposé.

Écris comme une somme de trois termes l'opposé de $(4 - 5 + 2)$ et retrouve ainsi l'écriture simplifiée de A trouvée au 1.

3. Calculs astucieux

- Simplifie l'écriture de $B = 7,34 + 1,28 + 1,235 - 3,93 - (1,28 + 3 - 3,93 + 7,34)$ et de $C = 18 + 73 - 25 - (-27 + 75 - 82)$ puis effectue les calculs.

Quels intérêts présente la simplification d'écriture dans ces cas ?

- Simplifie l'écriture de $D = 14,7 + 18,9 - 4,7 - (12 + 5,3 - 9,9)$ puis effectue le calcul. La simplification d'écriture présente-t-elle un intérêt dans ce cas ?

Activité 6 : Quotient de nombres relatifs

Revenons sur le sens de la division :

Écrire $3 \times 5 = 15$ revient à écrire $3 = 15 \div 5$ ou $5 = 15 \div 3$.

- Retrouve les nombres manquants de ces opérations à trous :

- $$\begin{aligned} 4 \times \dots &= 12 \\ (-5) \times \dots &= 130 \\ 8 \times \dots &= (-16) \\ \dots \times (-3) &= (-27) \end{aligned}$$

- Écris ces nombres manquants sous forme de quotient.

- Que dire du quotient de deux nombres relatifs ?

- On considère l'expression $K = \frac{(-3) \times (-5) \times 2 \times (-1)}{(-1) \times 8 \times 5 \times (-5)}$.

- Quel est le signe du numérateur de K ?
- Quel est le signe du dénominateur de K ?
- Déduis-en le signe de K puis calcule K.

Méthode 1 : Multiplier deux nombres relatifs

À connaître

Pour multiplier deux nombres relatifs, on multiplie les distances à zéro et on applique la **règle des signes** :

- le produit de deux nombres relatifs de **même signe** est **positif** ;
- le produit de deux nombres relatifs de **signes contraires** est **négatif**.

Exemple 1 : Effectue la multiplication : $A = (-4) \times (-2,5)$.

Le résultat est positif car c'est le produit de deux nombres négatifs.

$$A = 4 \times 2,5$$

$$A = 10$$

Exemple 2 : Effectue la multiplication : $B = 0,2 \times (-14)$.

Le résultat est négatif car c'est le produit d'un nombre positif par un nombre négatif.

$$B = -(0,2 \times 14)$$

$$B = -2,8$$

À toi de jouer

1 Effectue les multiplications suivantes :

$$C = (-7) \times (-8)$$

$$D = (-9) \times 6$$

$$E = 10 \times (-0,8)$$

$$F = -5 \times (-11)$$

$$G = -8 \times 0,5$$

$$H = (-7) \times 0$$

Méthode 2 : Multiplier plusieurs nombres relatifs

À connaître

- Le produit de plusieurs nombres relatifs est **positif** s'il comporte un nombre **pair** de **facteurs négatifs**.
- Le produit de plusieurs nombres relatifs est **négatif** s'il comporte un nombre **impair** de **facteurs négatifs**.

Exemple 1 : Quel est le signe du produit : $A = -6 \times 7 \times (-8) \times (-9)$?

Le produit comporte trois facteurs négatifs. Or 3 est impair donc A est négatif.

Exemple 2 : Calcule le produit : $B = 2 \times (-4) \times (-5) \times (-2,5) \times (-0,8)$.

Le produit comporte quatre facteurs négatifs. Or 4 est pair donc B est positif.

$$B = 2 \times 4 \times 5 \times 2,5 \times 0,8$$

$$B = (2 \times 5) \times (4 \times 2,5) \times 0,8$$

$$B = 10 \times 10 \times 0,8$$

$$B = 80$$

À toi de jouer

2 Quel est le signe du produit $C = 9 \times (-9) \times (-9) \times 9 \times (-9) \times (-9) \times (-9)$?

3 Calcule :

$$D = -25 \times (-9) \times (-4)$$

$$E = 0,5 \times 6 \times (-20) \times 8$$

Méthode 3 : Diviser deux nombres relatifs

À connaître

Pour diviser deux nombres relatifs non nuls, on divise les distances à zéro et on applique la **règle des signes** :

- le quotient de deux nombres relatifs de **même signe** est **positif** ;
- le quotient de deux nombres relatifs de **signes contraires** est **négatif**.

Exemple 1 : Effectue la division suivante : $A = 65 \div (-5)$.

Le résultat est négatif car c'est le quotient d'un nombre positif par un nombre négatif.

$$A = -(65 \div 5)$$

$$A = -13$$

Exemple 2 : Quelle est l'écriture décimale du quotient $B = \frac{-30}{-4}$?

Le résultat est positif car c'est le quotient de deux nombres négatifs.

$$B = \frac{30}{4}$$

$$B = 7,5$$

À toi de jouer

4 Quel est le signe des quotients suivants ?

$$C = \frac{56}{-74}$$

$$D = \frac{-6}{5}$$

$$E = -\frac{9}{13}$$

$$F = -\frac{7}{-45}$$

$$G = -\frac{-8}{-9}$$

5 Calcule de tête :

$$H = 45 \div (-5)$$

$$I = (-56) \div (-8)$$

$$J = -59 \div (-10)$$

$$K = -14 \div 4$$

Méthode 4 : Effectuer des calculs avec des nombres relatifs

À connaître

Dans une suite d'opérations avec des nombres relatifs, on effectue **dans l'ordre** : d'abord les calculs entre parenthèses, puis les multiplications et divisions, et enfin les additions et soustractions.

Exemple : Effectue le calcul suivant : $A = -4 - 5 \times (-2 - 6)$.

$$A = -4 - 5 \times (-2 - 6)$$

$$A = -4 - 5 \times (-8)$$

$$A = -4 + 40$$

$$A = 36$$

À toi de jouer

6 Effectue les calculs :

$$B = (-3 - 6) \times (6 - 8)$$

$$C = 12 - (-21) \times 7$$

$$D = -15 + (6 - 9) \times (-4)$$



Additionner et soustraire

1 Effectue les additions suivantes :

- a.** $(+ 4) + (+ 9)$ **d.** $(+ 1) + (- 7)$
b. $(- 2) + (+ 3)$ **e.** $(- 10) + (+ 10)$
c. $(- 4) + (- 11)$ **f.** $(- 40) + (+ 20)$

2 Transforme les soustractions suivantes en additions puis effectue-les :

- a.** $(+ 9) - (+ 12)$ **d.** $(- 13) - (- 5)$
b. $(- 10) - (+ 6)$ **e.** $(+ 8) - (- 1)$
c. $(- 2) - (- 17)$ **f.** $0 - (- 72)$

3 Effectue les calculs suivants :

- a.** $(+ 13,2) + (+ 12,8)$ **d.** $(+ 17,4) - (+ 12,6)$
b. $(- 25,5) + (+ 11,7)$ **e.** $(- 3,9) - (- 11,1)$
c. $(+ 2,3) + (- 1,5)$ **f.** $(- 100) - (+ 13)$

4 Effectue les calculs suivants :

- a.** $4 - 12$ **e.** $55 - 32$
b. $9 - 11$ **f.** $- 2,2 - 2,7$
c. $- 2 - 2$ **g.** $- 6,7 + 2,4$
d. $- 6 + 8$ **h.** $1,2 - 2,9$

5 Calcule en regroupant les termes de même signe :

$$A = 15 + 3 - 6 + 2 - 7$$

$$B = - 8 + 4 - 5 - 6 + 11$$

$$C = (+ 10) - (- 4) + (- 1) + (+ 5) - (+ 9)$$

$$D = (- 15) - (+ 14) + (+ 30) + (- 15) - (- 20)$$

6 Regroupe les termes astucieusement puis calcule :

$$E = 22 + 25 + 8 - 25$$

$$F = - 1,5 + 5,7 - 3,6 + 0,3 + 1,5$$

7 Remplace les pointillés par le nombre qui convient :

- a.** $(- 10) + \dots = 25$
b. $(+ 16) - \dots = 42$
c. $(+ 25) - (- 13) + (- 5) + \dots = 26$
d. $(- 63) + (- 8) - \dots + (+ 18) = 21$

Multiplier

8 Complète :

a. $A = (- 4) + (- 4) + (- 4) + (- 4) + (- 4)$

$$A = (- 4) \times \dots$$

$$A = \dots$$

b. $B = (- 8,2) + (- 8,2) + (- 8,2)$

$$B = (- 8,2) \times \dots$$

$$B = \dots$$

c. $C = (- 1,7) + (- 1,7) + (- 1,7) + (- 1,7)$

$$C = (- 1,7) \times \dots$$

$$C = \dots$$

9 Sans les calculer, donne le signe de chacun des produits suivants :

a. $(- 12) \times (+ 2)$

c. $(- 10,3) \times (- 46)$

b. $(+ 34) \times (- 28)$

d. $(+ 12,5) \times (+ 3,1)$

10 Sans les calculer, donne le signe de chacun des produits suivants :

a. $- 36 \times (- 1)$

c. $2,3 \times (- 2,3)$

b. $(- 2) \times (+ 24)$

d. $- 9,1 \times 6$

11 Quel est le signe du résultat quand on...

a. ...multiplie un nombre négatif par un nombre positif ?

b. ...multiplie quatre nombres négatifs entre eux ?

c. ...multiplie un nombre positif et deux nombres négatifs ?

d. ...multiplie un nombre relatif par lui-même ?

e. ...multiplie trois nombres négatifs entre eux ?

12 Relie chaque calcul à son résultat :

$(+ 5) \times (- 4)$	•
$(- 5) \times (- 3)$	•
$(- 3) \times (+ 4)$	•
$(+ 4) \times (+ 4)$	•
$(- 4) \times (- 3)$	•
$(- 5) \times (- 4)$	•
$(- 5) \times (+ 3)$	•
$(- 4) \times (+ 4)$	•

•	- 15
•	- 20
•	- 12
•	+ 12
•	- 16
•	+ 20
•	+ 15
•	+ 16

13 Calcule mentalement :

- a. $(-8) \times (+2)$ f. $(-1,5) \times (+20)$
 b. $(-2) \times (+5)$ g. $(-0,25) \times (-4)$
 c. $(-4) \times (-8)$ h. $(+0,8) \times (-3)$
 d. $(+9) \times (+10)$ i. $(-3,2) \times (+4)$
 e. $(+191) \times (+0,1)$ j. $(-1) \times (-17)$

14 Calcule, sachant que $11,2 \times 2,5 = 28$:

- a. $11,2 \times (-2,5)$ b. $-11,2 \times (-2,5)$

15 Un produit peut en cacher un autre...

a. Calcule le produit $7,5 \times 0,2$.

b. Effectue alors les calculs suivants :

$A = 7,5 \times (-0,2)$ $C = (-75) \times (+0,2)$

$B = (-0,2) \times (-7,5)$ $D = (-7,5) \times (-20)$

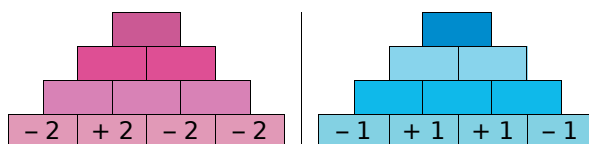
16 Relie les expressions dont les produits sont égaux :

$(+5) \times (-12)$	•	•	$(-1) \times (+20)$
$(-8) \times (-3)$	•	•	$(+12) \times (+5)$
$(+4) \times (-6)$	•	•	$(+2) \times (+12)$
$(+5) \times (-4)$	•	•	$(+5) \times (+4)$
$(+2) \times (+10)$	•	•	$(-3) \times (+20)$
$(-2) \times (-30)$	•	•	$(-12) \times (+2)$

17 Complète cette table de multiplication :

\times	-3	+5	-9	+6	-8
-1					
+4					
-7					
0					

18 Complète les « pyramides » suivantes sachant que le nombre contenu dans une case est le produit des nombres contenus dans les deux cases situées en dessous de lui :



19 Donne le signe de chacun des produits suivants :

$A = 5,4 \times (-3,2) \times (+4) \times (-5,1)$

$B = (-0,5) \times (-9) \times 0 \times 7 \times (-1,4) \times (-1)$

$C = -6 \times (-10) \times 4 \times (-9) \times (-3) \times (-4,1)$

20 Effectue les calculs suivants :

$A = (-2) \times (-3) \times (+5)$

$B = (-3) \times (-2) \times (-4)$

$C = (+6) \times (-1) \times (+3)$

21 Effectue les calculs suivants :

$A = (-3,2) \times (-10) \times (+2) \times (-0,5)$

$B = (-75) \times (-0,25) \times (+4) \times (+2)$

$C = (-3) \times (-0,1) \times (+5) \times (+4)$

$D = (-1,5) \times (+4) \times (-1) \times (+0,8) \times (-3)$

$E = (+2) \times (-10) \times (+3) \times (-1) \times (-1)$

22 Calcule astucieusement :

$A = (-2) \times (-1,25) \times (-2,5) \times (-8)$

$B = (-75) \times (-0,25) \times (+2) \times (+4)$

$C = (+0,01) \times (-25) \times (-13,2) \times 4 \times (-3)$

23 Complète par le nombre qui convient :

a. $(-4) \times \diamond = 20$

c. $\diamond \times 7 = -42$

b. $(-13) \times \diamond = -39$

d. $\diamond \times (-11) = 121$

24 Complète par le nombre qui convient :

a. $(+4) \times \diamond = -100$

c. $\diamond \times 17 = -17$

b. $(-2,9) \times \diamond = 29$

d. $\diamond \times (-3) = -99$

25 Suite logique de nombres

Donne le signe de chacun des produits suivants :

$A = (-1) \times 2 \times (-3) \times 4 \times \dots \times (-9)$

$B = (-1) \times (-2) \times (-3) \times (-4) \times \dots \times (-12)$

$C = (-4) \times (-3) \times (-2) \times \dots \times 3 \times 4 \times 5$

$D = 5 \times (-10) \times 15 \times (-20) \times \dots \times (-100)$

$E = 1 \times (-2) \times 4 \times (-8) \times \dots \times 1\,024$



26 Températures

Il fait 0°C et la température chute de deux degrés toutes les heures.

- a. Combien de temps faudra-t-il pour que la température atteigne -10°C ?
 b. Quelle sera la température dans huit heures ?

27 Calcule dans chaque cas le produit xy :

- a. $x = 5$ et $y = -3$ c. $x = -2$ et $y = -5$
 b. $x = +4$ et $y = -11$ d. $x = -0,5$ et $y = -5,2$

28 Complète le tableau suivant :

a	b	c	ab	$(-a) \times c$	$-(ac)$	abc
-5	6	-4				
-1	-2	-3				
-2,1	-4	+3				

29 Décompositions...

- a. Trouve toutes les façons de décomposer le nombre -20 en produit de deux nombres entiers relatifs.
 b. Trouve toutes les façons de décomposer le nombre 24 en produit de trois nombres entiers relatifs.

30 Les phrases suivantes sont-elles vraies pour tout nombre relatif a ? Justifie tes réponses.

- a. Le produit $(-4) \times a$ est négatif.
 b. a^2 est positif.
 c. Le produit de a par son opposé est négatif.
 d. Le double de a est positif.

31 Calcule :

$A = -5 + 3 \times 5$ $C = 18 - 7 \div 4$
 $B = 7 - 4 \times 6$ $D = -2 \times 6 + 3 \times (-8)$

32 Calcule les expressions suivantes :

$A = 3 - 4 \times (5 - 2)$ $D = -3 + (1 - 5) \times (-6)$
 $B = 3 \times 4 - 2 \times (4 - 1)$ $E = 1 - 2 \times 3 + 4 \times (-5)$
 $C = 5 - 2 \times 3 + 2 \times 7$ $F = 1 + (-2)^2 - (-3)^2$

Diviser

33 Complète chaque égalité et écris chaque facteur manquant \diamond sous la forme d'un quotient :

- a. $(+6) \times \diamond = +18$ donc $\diamond = \dots$
 b. $(+5) \times \diamond = -20$ donc $\diamond = \dots$
 c. $\diamond \times (-7) = +14$ donc $\diamond = \dots$
 d. $(-2) \times \diamond = +12$ donc $\diamond = \dots$
 e. $\diamond \times (-10) = -130$ donc $\diamond = \dots$

34 Sans les calculer, donne le signe de chacun des quotients suivants :

- a. $(-3) \div (-8)$ c. $(-4) \div (-5)$
 b. $(+1) \div (-2)$ d. $(-3,7) \div (+5,1)$

35 Calcule mentalement :

- a. $64 \div (-8)$ f. $-35 \div 7$
 b. $42 \div (-6)$ g. $(-54) \div (-6)$
 c. $-24 \div (-3)$ h. $25 \div (-5)$
 d. $81 \div (+9)$ i. $(-4) \div (+4)$
 e. $-17 \div (-1)$ j. $(-29) \div (+1)$

36 Calcule mentalement :

- a. $(-100) \div (+25)$ d. $(+55) \div (+5)$
 b. $(-42) \div (-4)$ e. $(-24) \div (-5)$
 c. $(+54) \div (-3)$ f. $(-13) \div (-10)$

37 Parmi les nombres de la liste suivante, recopie ceux qui sont positifs :

$$\frac{-9}{+3} ; -\frac{-3}{+7} ; -\frac{5}{-2} ; -\frac{+1}{-10}$$

38 Pour chaque fraction, trouve l'écriture la plus simple possible :

Exemple : $\frac{-2}{+9} = -\frac{2}{9}$

- a. $-\frac{+4}{+5}$ d. $-\frac{-8}{11}$
 b. $-\frac{-1}{-5}$ e. $-\frac{1}{-10}$
 c. $\frac{7}{-3}$ f. $-\frac{5}{-15}$

39 Sans calculatrice, donne l'écriture décimale de chacun des nombres suivants :

a. $-\frac{3}{-10}$

c. $\frac{-50}{+100}$

b. $-\frac{-64}{-8}$

d. $\frac{-3}{-2}$

40 Utilise ta calculatrice pour donner l'écriture décimale des nombres suivants :

a. $\frac{-5}{-40}$

c. $-\frac{-125}{-625}$

b. $-\frac{172}{-5}$

d. $\frac{-0,235}{+0,8}$

41 Calcule les expressions suivantes :

$A = \frac{11}{2-5}$ $B = \frac{-6-3}{2+7}$ $C = \frac{-2-(-4)}{6-7}$

42 Dans chaque cas, calcule le quotient de x par y :

a. $x = -15$ et $y = -3$ d. $x = -2,4$ et $y = 1,2$

b. $x = +64$ et $y = -8$ e. $x = y = -2,3$

c. $x = -36$ et $y = 12$ f. $x = 0$ et $y = -5$

43 Complète le tableau suivant et donne le résultat sous forme décimale :

a	b	c	$a \div b$	$(-b) \div c$	$c \div (-a)$
-5	4	-4			
-2,5	-1	+20			
+8	-4	-0,5			
-2,4	-1,2	-24			

44 Donne, à l'aide de ta calculatrice, l'arrondi à l'unité de chacun des nombres suivants, comme dans l'exemple :

Exemple : $A = \frac{-153}{23}$.

La calculatrice donne $A \approx -6,652173913$.

On a donc : $-7 < A < -6$.

L'arrondi à l'unité de A est -7 car A est plus proche de -7 que de -6 .

$B = \frac{39}{-9}$

$C = \frac{-17}{-7}$

$D = \frac{-28}{51}$

Calculs variés

45 Pour chacun des calculs suivants, indique s'il s'agit d'une somme ou d'un produit puis donne le résultat :

a. $-4 \times (+9)$

e. $-8 + (+6)$

b. $-3 - (+8)$

f. $+9 \times (+3)$

c. $-7 + (-5)$

g. $-5 - (-16)$

d. $+3 \times (-7)$

h. $-11 \times (-4)$

46 Sans les calculer, donne le signe de chacun des calculs suivants :

a. $(-4) \times (-12)$

e. $(+7) \times (+8)$

b. $(+15) + (-22)$

f. $(-7) + (+8)$

c. $(-45) - (-51)$

g. $(-3,12) \times (-2,5)$

d. $(-37) \times (+51)$

h. $(-3,17) - (+3,7)$

47 Calcule mentalement :

a. $8 \times (-8)$

d. $-5 - (+17)$

b. $-22 + (-6)$

e. $(-34) + (-19)$

c. -14×3

f. $-15 \times (-5)$

48 Calcule mentalement :

a. $(-4) \times (-2,5)$

e. $(+2,6) \times (-3)$

b. $(+3,5) + (-2,2)$

f. $(-7,15) - (-2,2)$

c. $(-3,9) + (-5,4)$

g. $(-3,12) \times (-10)$

d. $(-3) \times (+4,2)$

h. $(-0,7) - (+1,17)$

49 Pour chaque égalité suivante, remplace le symbole \diamond par le signe opératoire qui convient :

a. $(-3) \diamond (-2) = -5$

c. $(-2) \diamond (-2) = +4$

b. $(-3) \diamond (-2) = +6$

d. $(-2) \diamond (-2) = -4$

e. $(-5) \diamond (+4) = (-12) \diamond (+8)$

50 Logique !

Complète chaque suite de nombres :

a. $3 ; 1 ; -1 ; \dots ; \dots ; \dots$

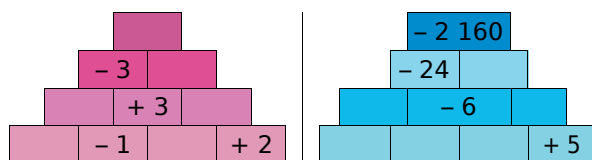
b. $1 ; -2 ; +4 ; \dots ; \dots ; \dots$

c. $-16 ; 8 ; -4 ; \dots ; \dots ; \dots$

d. $0,5 ; -5 ; 50 ; \dots ; \dots ; \dots$



51 Complète les « pyramides » suivantes sachant que le nombre contenu dans une case est le produit des nombres contenus dans les deux cases situées en dessous de lui :



52 Effectue les calculs suivants en soulignant, à chaque étape, le calcul en cours :

$$A = 7 + (-6) \times (-6)$$

$$B = 13 - (+3) \times (-4) - 8$$

$$C = -30 \div (-9 + 15)$$

$$D = -3 - 9 \times (-3)$$

$$E = -3 \times 6 \times (-2 + 8)$$

53 Effectue les calculs suivants en soulignant, à chaque étape, le calcul en cours :

$$A = -22 + (13 - 5) \times (-5)$$

$$B = (-2) \times (-8) + 2 \times (-20) \div 4$$

$$C = -28 + (5 - 2) \times (-4)$$

$$D = 7 \times (-7) + 3 \times (-25) \div (-5)$$

$$E = -3,2 \times (-6) + (-2,3 - 7,7)$$

$$F = 150 \div (-1,2 - 9 \times 3,2)$$

54 *Vocabulaire*

- a.** Traduis les phrases suivantes par un calcul :
- La somme du produit de 4 par -5 et de -6.
 - Le produit de la somme de 7 et de -8 par la somme de 8 et de -2.

b. Effectue ces calculs.

55 *Vocabulaire (bis)*

a. Traduis les expressions mathématiques suivantes par des phrases :

Exemple : $(-2) \times 3 + 1$ se traduit par :

« La somme du produit de (-2) par 3 et de 1. »

$$A = 5 \times (-7) + 3 \quad D = (2 - 3) \times (-1 - 2)$$

$$B = 3 + \frac{2}{-4} \quad E = \frac{1 - 7}{2 + 5}$$

$$C = 7 - 4 \times (-10) \quad F = -2 + (-6) \times (-6) - 9$$

b. Effectue ces calculs.

56 En détaillant les étapes, calcule :

a. $A = 3x - 7$ pour $x = +2$;

b. $B = -2x - 9$ pour $x = -5$;

c. $C = x^2 + 2$ pour $x = -1$.

57 Sachant que $a = 5$, $b = -3$ et $c = -10$, calcule les expressions suivantes :

$$D = -2a \quad F = -3c + a \quad H = \frac{c}{a} + 2b$$

$$E = a - b \quad G = b - a - c$$

58 Calcule $b^2 - 4ac$ dans les cas suivants :

1^{er} cas : $a = 2$; $b = 3$ et $c = 5$.

2^e cas : $a = -1$; $b = 2$ et $c = 3$.

3^e cas : $a = 3$; $b = -2$ et $c = 2$.

59 Complète le tableau suivant :

a	b	c	$ab - c$	$(a - b)c$
2	3	5		
-1	5	6		
3	-5	-7		
-8	2	-6		

60 Pour $a = 3$, $b = -4$, $c = -5$ et $d = 7$, calcule les expressions suivantes :

$$E = a - b + c \quad H = -5ac + bd$$

$$F = 2a - 3b \quad I = 2(a - b) + d$$

$$G = ac - bd \quad J = 5(b - a) \div d$$

61 Complète le tableau suivant :

a	b	c	ab	$(-a) \times c$	$-(ac)$	abc
-5		+4	10			
		2			-12	-36

62 Supprime les parenthèses dans chaque expression puis calcule sans calculatrice :

$$A = [(-5) + 6 - (-1) - 7] - [(-5) + 6 - (-1) - 7]$$

$$B = [(-5) + 6 - (-1) - 7] - [(-5) + 6 - (-1) + 7]$$

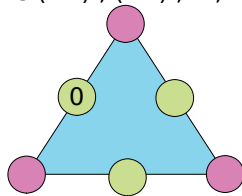
$$C = -18,1 + 2,8 - 7 + (-2,8 + 18,1 - 7)$$

$$D = 18,1 + 2,8 - 7 - (2,8 + 18,1 + 7)$$

63 La différence $a - b$ est égale à 12. On augmente a de 3 et on diminue b de 4. Combien vaut la différence entre ces deux nouveaux nombres?

64 *Triangle magique*

La somme des nombres de chaque côté du triangle est 2. Remplis les cases vides avec les nombres relatifs (-2) ; (-1) ; 1 ; 2 et 3 .



65 *Le nombre - 21...*

- Écris le nombre -21 comme somme de deux nombres entiers relatifs consécutifs.
- Écris le nombre -21 comme différence de deux carrés.

66 Complète les phrases suivantes :

- -21 est la moitié de...
- -21 est le triple de...
- -21 est l'opposé de...

67 *Choisir deux nombres*

- Trouve deux nombres relatifs dont le produit est positif et la somme est négative.
- Trouve deux nombres relatifs dont le produit est négatif et la somme est positive.
- Trouve deux nombres relatifs dont le produit et la somme sont positifs.
- Trouve deux nombres relatifs dont le produit et la somme sont négatifs.

68 *Énigme*

Sachant que le produit de deux nombres A et B est positif et que leur somme est négative, quels sont les signes de A et de B ?

69 *Calculatrice*

Effectue à la calculatrice les calculs suivants :

- $13\,857 \times (-253)$
- $\frac{-44\,980}{8\,996 - 10\,380}$
- $312 - 123 \times (-734)$
- $\frac{-34 \times (-713)}{-68}$

70 Complète les carrés magiques suivants :

a. Pour l'addition :

	-9	-2
	-4	
-6		

b. Pour l'addition :

1,6		
	-5,4	
-4,4		-12,4

c. Pour la multiplication :

	36	-3
	6	
-12		

71 *Signe*

A est le produit de 24 nombres (non nuls) comportant 23 facteurs négatifs.

B est le produit de 13 nombres (non nuls) comportant 11 facteurs négatifs.

Donne, si c'est possible, le signe de :

- $A \times B$
- $A \div B$
- $A - B$
- A^2
- $A + B$

72 *Coup de froid*

Chaque matin de la 1^{re} semaine du mois de février, Julie a relevé la température extérieure puis a construit le tableau suivant :

Jour	Lu	Ma	Me	Je	Ve	Sa	Di
Température (en °C)	-4	-2	-1	+1	0	+2	-3

Calcule la moyenne des températures relevées par Julie.



73 Calcule les expressions suivantes en respectant les priorités :

$$A = \frac{7 - 7 \times 5}{6 \times 2 - 5}$$

$$B = (4 - 6) \times [5 + (3 - (-2)) \times 2]$$

$$C = \frac{-7 \times (-3) - (-3) \times (-5)}{12 \div (-3) - 2}$$

74 Effectue de deux manières différentes les calculs suivants :

$$A = (-3) \times (5 - 7)$$

$$C = (-7 - 2) \times (-3)$$

$$B = 5 \times (-4 - 3)$$

$$D = -3 \times ((-4) + (-2))$$

75 *Extrait du Brevet*

a. Soit $D = (2x + 3)^2 + (2x + 3)(7x - 2)$.

Calculer D pour $x = -4$.

b. Soit $E = 36 - (3x + 5)^2$.

Calculer E pour $x = -2$.

76 *Le compte est bon pour quatre joueurs !*

La construction du jeu :

Dans une feuille de format A4, découpez 28 carrés de 4 cm de côté.

Au stylo bleu, fabriquez 21 cartes « Nombre » avec tous les nombres entiers de -10 à 10.

Remarque : Soulignez les nombres 6 et 9 pour ne pas les confondre.

Au stylo rouge, fabriquez sept cartes « Compte » portant les nombres -30 ; -20 ; -10 ; 0 ; 10 ; 20 et 30.

La règle du jeu :

Un joueur tire cinq cartes au hasard parmi les cartes « Nombre ». Le joueur à sa gauche tire une carte « Compte ».

En trois minutes, chacun doit utiliser les nombres présents sur les cartes « Nombre » pour obtenir un résultat égal ou le plus proche possible du nombre indiqué sur la carte « Compte ».

Si un joueur obtient le bon résultat, il gagne 1 point. Sinon c'est le joueur qui s'en approche le plus qui gagne le point.

En cas d'égalité, c'est celui qui a utilisé le moins de nombres qui remporte le point.

Jouez plusieurs parties et écrivez chaque calcul gagnant sous la forme d'une suite d'opérations utilisant éventuellement des parenthèses.

Le vainqueur est le joueur qui obtient le premier cinq points.

77 *Conversion*

Aux États-Unis, la température T est mesurée en degrés Fahrenheit. Voici la formule pour convertir une température $T_{\text{°F}}$ exprimée en degrés Fahrenheit (°F) en une température $T_{\text{°C}}$ équivalente exprimée en degrés Celsius (°C) :

$$T_{\text{°C}} = \frac{(T_{\text{°F}} - 32) \times 5}{9}$$

a. À New-York est annoncée une température de 68°F. Convertis cette température en degrés Celsius à l'aide de la formule.

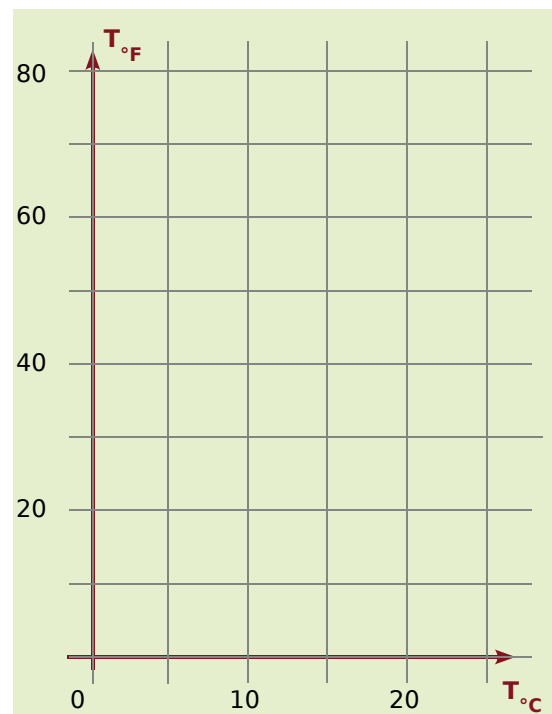
b. Même question pour une température de 23°F.

c. Voici la formule pour convertir une température exprimée en degrés Celsius (°C) en une température équivalente exprimée en degrés Fahrenheit (°F) : $T_{\text{°F}} = T_{\text{°C}} \times 1,8 + 32$.

Recopie puis complète le tableau suivant :

$T_{\text{°C}}$	0	5	10	15	20
$T_{\text{°F}}$					

d. Place les données du tableau dans un repère similaire à celui ci-dessous.



e. À la vue du graphique, peut-on dire que les deux unités de température sont proportionnelles ? Justifie ta réponse.

1 Le bon produit

1^{re} partie : La construction du jeu

a. Avec du papier épais ou du carton, fabriquez 66 cartes à jouer.

b. Au stylo bleu, fabriquez les 38 cartes « facteur » :

- deux portent le nombre 0 ;
- trois exemplaires pour chacun des nombres : - 9 ; - 6 ; - 4 ; - 3 ; - 2 ; - 1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 et 9.

Remarque : Soulignez les 6 et les 9 pour éviter de les confondre.

c. Au stylo rouge, fabriquez les 28 cartes « produit » :

- deux portent le nombre 0 ;
- les autres sont toutes différentes et portent les nombres : - 54 ; - 36 ; - 27 ; - 24 ; - 18 ; - 16 ; - 12 ; - 9 ; - 8 ; 6 ; - 4 ; - 3 ; - 2 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 9 ; 12 ; 16 ; 18 ; 24 ; 27 ; 36 et 54.

2^e partie : Les règles du jeu

Chaque joueur reçoit six cartes « facteur » puis pioche une carte « produit ». Celui qui a le plus grand nombre joue en premier (en cas d'égalité, les joueurs ex-aequo piochent une deuxième carte produit). On tourne ensuite dans le sens des aiguilles d'une montre.

Les cartes « produit » piochées sont posées face visible. On complète de façon à en avoir 10 en tout sur la table.

Le joueur dont c'est le tour pioche une carte « produit » et la pose sur la table avec les autres.

Si, avec deux de ses cartes facteurs, il peut obtenir un des produits visibles, il écarte les trois cartes (les deux cartes « facteur » et la carte « produit »).

S'il ne peut pas, il pioche deux cartes « facteur » et regarde à nouveau s'il peut obtenir un produit.

S'il propose une combinaison et qu'il a fait une erreur de calcul, il pioche également deux cartes « facteur ».

C'est alors au tour du joueur suivant.

Lorsqu'un joueur a écarté toutes ses cartes « facteur », il a gagné.

2 Expressions littérales

1^{re} partie : Résolution d'énigmes

Dans chaque cas, retrouvez les valeurs de chacune des inconnues pour que l'égalité soit vérifiée sachant qu'elles sont données dans le désordre.

Exemple : Pour le problème :

$a(b-c) - de = -5$	4	-1	-3	-2	1
--------------------	---	----	----	----	---

Une solution est : $a = -3$; $b = 1$; $c = -2$; $d = 4$ et $e = -1$. En effet :

$$-3 \times (1 - (-2)) - 4 \times (-1) = -9 + 4 = -5.$$

a. Niveau 1 : trois inconnues

$a + b - c = 3$	-2	4	-3
$a + bc = 1$	-1	3	4
$a - (b - c) = 1$	-5	2	8
$\frac{a}{-b + c} = -1,5$	3	1	-3
$a + \frac{b}{c} = 3$	-1	2	5

b. Niveau 2 : quatre inconnues

$(a + b)(c + d) = -60$	-9	-4	-3	9
$\frac{a - b}{c + d} = 3$	-9	-3	9	9
$a(b - c) - d = 17$	4	-5	7	-8
$ab - cd = 1$	-3	-5	5	8
$a - \frac{b}{c} - d = -7$	-6	-10	5	3

c. Niveau 3 : cinq inconnues

$a(b + c) - de = 19$	-1	3	2	5	-6
$\frac{a}{b + c} - \frac{d}{e} = -1$	-1	3	8	2	4
$a(b + c) - a(d - e) = 1$	2	4	-1	-2	3

2^e partie : À vous de faire les énigmes

Maintenant, construisez des énigmes sur le modèle précédent : deux de niveau 1, deux de niveau 2 et une de niveau 3.

Les énigmes seront ensuite rassemblées au tableau et chaque groupe devra essayer d'en résoudre le plus grand nombre possible.

Se tester avec le QCM!

		R1	R2	R3	R4
1	$-7 \times (-3) = \dots$	- 10	- 21	10	21
2	$(-10) + 15 = \dots$	- 5	- 150	5	- 25
3	$4 \times (-3) = \dots$	1	- 12	- 7	12
4	$-15 \div (-5) = \dots$	$\frac{-15}{-5}$	- 3	$15 \div 5$	3
5	$4 \times (-4) = \dots$	0	- 8	16	- 16
6	$-10 \div 10 = \dots$	- 0	1	0	- 1
7	Le produit de l'opposé de - 6 par l'opposé de 7 vaut...	42	- 42	- 1	$\frac{6}{-7}$
8	Pour tout nombre relatif a , le nombre $-a$ est...	négatif	l'opposé de a	positif ou négatif suivant le signe de a	égal à $(-1) \times a$
9	$-6 + 6 \times (-10) = \dots$	0	120	66	- 66
10	- 12 est le résultat de...	$3 + 3 \times (-2)$	$5 \times (-3) + 3$	$(-12 + 5) \div 5$	$-8 + 4 \div (2 - 3)$
11	Pour tous nombres relatifs u et v , le produit $-u \times v \times u \times v$ est...	nul	positif	négatif	de signe impossible à déterminer
12	Le produit de 108 facteurs égaux à - 1 est égal à...	- 108	0	- 1	1
13	x est le relatif tel que $x \times (-3) = -10$ donc...	$x = -7$	$x = 3,33$	$x = \frac{10}{3}$	$x = -\frac{10}{3}$
14	a est un nombre négatif donc...	a^2 est négatif	$-a^2$ est négatif	$(-a)^2$ est négatif	$\frac{a}{-a} = 0$
15	Dans un produit de 90 facteurs...	un facteur est égal à 0 donc ce produit est égal à 0	il y a deux fois plus de facteurs positifs donc ce produit est positif	il n'y a que des facteurs négatifs donc ce produit est négatif	on remplace la moitié des facteurs par leurs opposés donc le signe du produit change

Pour aller plus loin

Des signes...

- a , b et c sont trois nombres relatifs dont le produit est négatif et b est le double de a . Quel est le signe de c ?
- x , y et z sont trois nombres relatifs tels que :
 - $x \times y$ et $x \times z$ ont le même signe ;
 - y et $y \times z$ ont le même signe ;
 - y et $x \times y \times z$ ont des signes différents.

Quels sont les signes de x , y et z ?

- Pour quelles valeurs de m , le produit de m par $m - 1$ est-il négatif ?
- Donne le signe de $x - 1$ en fonction des valeurs de x . Étudie le signe du produit $x(x - 1)(x - 2)$ en fonction des valeurs de x .



La danse des signes

Certains nombres relatifs ont perdu leur signe et il peut manquer des signes d'opérations ! A toi de les retrouver !

$$(-2) \times (\dots 3) - (-8) \times (\dots 2) = 22 ;$$

$$(-2) \times (\dots 3) - (-8) \div (\dots 2) = 2 ;$$

$$(-2) \dots (\dots 3) - (-8) \times (\dots 2 \dots 4) = -10.$$

Que de signes !

Détermine le signe du produit suivant :

$$(-343) \times (-344) \times (-345) \times \dots \times (-999).$$

Qui suis-je ?

- Ce nombre est très bizarre : que je le multiplie par -2 ou par -7 , j'obtiens le même résultat ! Quel est ce nombre ?
- Quand je me multiplie par moi-même, cela donne mon opposé ! Qui suis-je ?



Pour aller plus loin

Des signes, toujours des signes...

a et b sont des nombres relatifs. Étudie leurs signes dans chacun des cas suivants :

- $a + b$ est un nombre négatif et $a \times b$ est un nombre positif ;
- $a + b$ et $a \times b$ sont des nombres négatifs.

Les nombres négatifs dans l'histoire

Les nombres négatifs font aujourd'hui partie de notre environnement. Nous les considérons comme des nombres à part entière.

Pourtant, leur introduction dans les mathématiques fut lente, difficile et maintes fois remise en cause. Ils naissent à travers les calculs de gains et de dettes. On attribue aux Chinois les premières utilisations de quantités négatives au premier siècle de notre ère.

Voici ce que disait, en 1803, le mathématicien et ingénieur Lazare Carnot (1753 - 1823) à leur propos :

« Pour obtenir réellement une quantité négative isolée, il faudrait retrancher une quantité effective de zéro, ôter quelque chose de rien : opération impossible. Comment donc concevoir une quantité négative isolée ? ».

Voici deux autres citations de mathématiciens :

Pascal (1623 - 1662), dans ses « Pensées » :

« Trop de vérité nous étonne ; j'en sais qui ne peuvent comprendre que, qui de zéro ôte 4, reste zéro. ».

(Image : Pascal, source Wikipédia)



Arnauld (un ami de Pascal), à propos de l'égalité $\frac{-1}{1} = \frac{1}{-1}$:

« Comment un nombre plus petit pourrait-il être à un plus grand comme un plus grand à un plus petit ? ».

a. Explique ces phrases et commente-les.

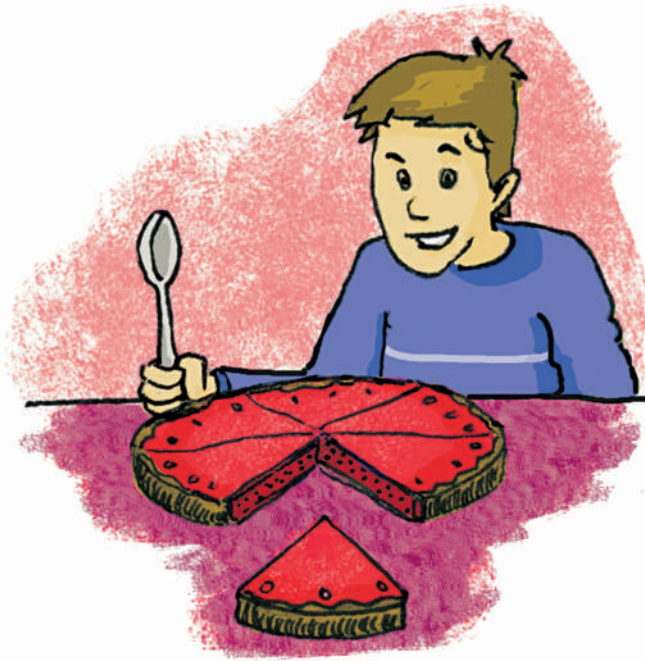
b. Et que penser de la réflexion suivante de Wallis (1616 - 1703) ?

« a étant un nombre positif, le quotient $\frac{a}{0}$ est infini. Comme $\frac{a}{-1}$ est plus grand, le dénominateur étant plus petit, il est plus grand que l'infini tout en étant inférieur à zéro car le résultat est négatif. »



Nombres en écriture fractionnaire

N2



Narration de recherche

Sujet :

Pour chacune des fractions $\frac{3}{5}$; $\frac{4}{7}$ et $\frac{6}{11}$ trouve une écriture fractionnaire égale telle que :

- le dénominateur de la fraction égale à $\frac{3}{5}$ soit égal au numérateur de la fraction égale à $\frac{4}{7}$,
- et que le dénominateur de la fraction égale à $\frac{4}{7}$ soit égal au numérateur de la fraction égale à $\frac{6}{11}$.

Est-il toujours possible de faire la même chose si l'on choisit trois fractions au hasard ?

Activité 1 : Q.C.M.

1. Parmi les nombres suivants, quelles sont les fractions ?

a. $\frac{3}{11}$	b. $\frac{1,2}{1,7}$	c. $\frac{121}{3}$	d. $\frac{3}{0,8}$
-------------------	----------------------	--------------------	--------------------
2. Quels sont les nombres égaux à $\frac{2}{5}$?

a. 2,5	b. 0,4	c. $\frac{6}{15}$	d. $\frac{24}{54}$
--------	--------	-------------------	--------------------
3. Quelles sont les fractions que l'on ne peut plus simplifier ?

a. $\frac{2}{7}$	b. $\frac{120}{55}$	c. $\frac{99}{117}$	d. $\frac{33}{100}$
------------------	---------------------	---------------------	---------------------
4. Quels sont les nombres supérieurs à $\frac{19}{9}$?

a. $\frac{19}{8}$	b. $\frac{22}{9}$	c. 2	d. 3
-------------------	-------------------	------	------
5. Quelle est la somme de $\frac{1}{7}$ et $\frac{1}{14}$?

a. $\frac{11}{714}$	b. $\frac{2}{21}$	c. $\frac{3}{14}$	d. $\frac{3}{7}$
---------------------	-------------------	-------------------	------------------
6. Quel est le produit de $\frac{8}{9}$ par $\frac{3}{4}$?

a. $\frac{24}{36}$	b. $\frac{2}{3}$	c. $\frac{32}{27}$	d. $\frac{32 \times 27}{36}$
--------------------	------------------	--------------------	------------------------------

Activité 2 : Signes de quotients

1. a. Calcule les quotients : $(-3) \div 4$; $3 \div (-4)$ et $-(3 \div 4)$.
 b. Qu'en déduis-tu pour les nombres $\frac{-3}{4}$; $\frac{3}{-4}$ et $-\frac{3}{4}$?
2. De la même façon, que dire des nombres $\frac{-2,5}{-3,2}$; $\frac{2,5}{3,2}$; $-\frac{-2,5}{3,2}$; $-\frac{2,5}{-3,2}$? Justifie.
3. On veut calculer le produit de $\frac{-3}{5}$ par $\frac{7}{-8}$.

1^{re} méthode : on détermine d'abord le signe de ce produit

- a. Détermine le signe de chacun des deux nombres. Puis déduis, à l'aide de la règle des signes, le signe du produit des deux nombres.
- b. Termine le calcul.

2^e méthode : on applique la règle de la multiplication de deux fractions

- c. Sachant que $\frac{-3}{5} \times \frac{7}{-8} = \frac{(-3) \times 7}{5 \times (-8)}$, calcule le numérateur et le dénominateur du quotient.
- d. Termine le calcul.

Activité 3 : Produits en croix avec tableur

1. Écris trois fractions égales à $\frac{3}{5}$ autres que $\frac{9}{15}$.

Dans un tableur, remplis les cellules comme ci-contre :

	A	B	C
1	Fraction a/b	Fraction c/d	
2			
3	3	9	
4	5	15	
5			

2. Programme en C2 le produit de A4 par B3 et en C5 le produit de A3 par B4.

3. Teste dans le tableur les trois fractions trouvées au 1.. Que remarques-tu dans les cellules C2 et C5 ?

4. En te servant du tableur, trouve parmi les nombres en écriture fractionnaire suivants ceux qui sont égaux à $\frac{3}{5}$: $\frac{301}{501}$; $\frac{192}{320}$; $\frac{8,1}{13,5}$; $\frac{2\ 500}{4\ 000}$.

5. Un nombre en écriture fractionnaire égal à $\frac{3}{5}$ s'écrit sous la forme $\frac{3k}{5k}$ où k est un nombre non nul. Démontre que leurs produits en croix sont égaux.

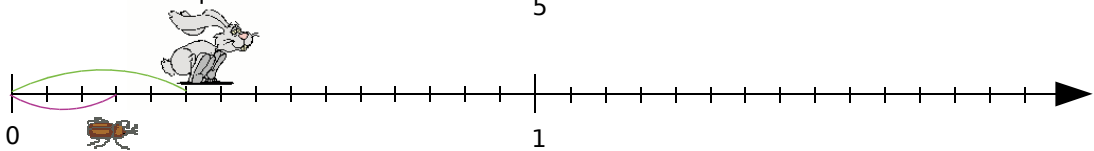
6. On veut déterminer la fraction de dénominateur 120 égale à la fraction $\frac{3}{5}$. Remplis les cellules du tableur que l'on connaît et programme en B3 le nombre cherché.

7. De la même façon, trouve les nombres manquants : $\frac{3}{5} = \frac{\dots}{75}$; $\frac{3}{5} = \frac{\dots}{125}$; $\frac{3}{5} = \frac{\dots}{0,25}$.

Activité 4 : Comparaison dans tous les cas

1. Première partie : Dénominateurs n'ayant pas de diviseur commun autre que 1

Corentin le lapin et Luce la puce décident de faire une course. Corentin fait des bonds de $\frac{1}{3}$ de mètre tandis que Luce fait des bonds de $\frac{1}{5}$ de mètre.



a. Quand Corentin fait deux bonds, Luce en fait trois. Reproduis la demi-droite graduée ci-dessus représentant la course, puis place les points C et L pour indiquer les positions de Corentin et de Luce.

b. Complète les phrases suivantes :

« Corentin a parcouru $\frac{\dots}{\dots}$ de mètre, ce qui équivaut à $\frac{\dots}{15}$ de mètre. »

« Luce a parcouru $\frac{\dots}{\dots}$ de mètre, ce qui équivaut à $\frac{\dots}{15}$ de mètre. »

c. En t'aidant de la question b., indique lequel des deux a parcouru la plus grande distance. Parmi les fractions $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{5}$, laquelle est la plus grande ?

2. Deuxième partie : Dénominateurs ayant plusieurs diviseurs communs

Lola la tortue et Jeannot le lièvre décident de faire une course sur une demi-droite graduée. Le point de départ est l'origine de la demi-droite. Lola parcourt $\frac{5}{4}$ d'unité et Jeannot parcourt $\frac{7}{6}$ d'unité.

- Trace une demi-droite et gradue-la pour y placer les points L et J indiquant les positions de Lola et Jeannot.
- Lequel des deux a parcouru le plus grand trajet ? Parmi les fractions $\frac{5}{4}$ et $\frac{7}{6}$, laquelle est la plus grande ?

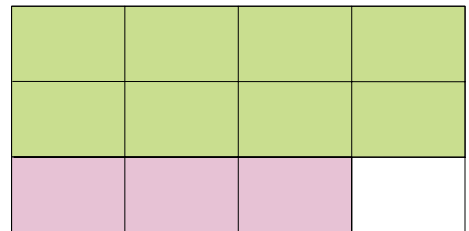
3. Troisième partie : Bilan

- Énonce une règle qui permet de comparer des fractions de dénominateurs différents.
- Applique la règle que tu as trouvée pour comparer : $\frac{7}{5}$ et $\frac{13}{11}$ puis $\frac{3}{25}$ et $\frac{1}{10}$.

Activité 5 : Additions et soustractions

1. Première partie : Dénominateurs n'ayant pas de diviseur commun autre que 1

- Complète les phrases suivantes :
 - L'aire de la région verte représente $\frac{2}{\dots}$ de l'aire totale ;
 - L'aire de la région rose représente $\frac{1}{\dots}$ de l'aire totale.



- Quel calcul permet d'obtenir l'aire que représente la région coloriée par rapport à l'aire totale ?
- En t'aidant du dessin, complète l'égalité : $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{\dots}{\dots}$.
- Comment retrouver ce résultat par le calcul ?

2. Deuxième partie : Dénominateurs ayant plusieurs diviseurs communs

- On veut colorier, en bleu, $\frac{1}{8}$ de l'aire d'un rectangle et, en orange, $\frac{5}{6}$ de l'aire du même rectangle. Quelles dimensions minimales peux-tu donner à ce rectangle pour que ce partage soit facile à effectuer ? Fais une figure.
- Reprends les questions **b.** à **d.** de la première partie.

3. Troisième partie : Bilan

- Énonce une règle qui permet d'additionner ou de soustraire des fractions de dénominateurs différents.
- Applique cette règle pour effectuer les calculs suivants : $\frac{1}{5} + \frac{7}{2}$ et $\frac{7}{10} - \frac{11}{15}$.

Activité 6 : Inverses

1. Quelle est la longueur du côté d'un carré d'aire 1 unité d'aire ?
2. On considère plusieurs rectangles qui ont tous la même aire de 1 U.A.. Recopie puis complète le tableau suivant par les nombres qui conviennent :

	Rectangle 1	Rectangle 2	Rectangle 3	Rectangle 4	Rectangle 5	Rectangle 6
Longueur	2			3		$\frac{4}{3}$
Largeur		0,1	0,25		$\frac{1}{7}$	

- a. Que dire de la longueur de ces rectangles ? Et de la largeur ?
- b. Quel lien y a-t-il entre la longueur et la largeur de ces rectangles ?

On dit que deux nombres sont inverses l'un de l'autre quand leur produit est égal à 1.

- c. Recopie et complète : les nombres 2 et ... sont inverses l'un de l'autre, ainsi que 0,1 et ... ; 0,25 et ... ; 3 et ... ; $\frac{1}{7}$ et ... ; $\frac{4}{3}$ et
Que peux-tu dire pour le nombre 1 ?
- d. Soit x un nombre non nul, quel est l'inverse de x ? Justifie.
- e. Soient a et b deux nombres non nuls, quel est l'inverse de $\frac{a}{b}$? Justifie.

Activité 7 : Divisions

1. Sachant que pour tous nombres a et b non nuls : $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$, décompose de la même

façon le quotient $\frac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{3}}$.

2. Que peux-tu dire du nombre $\frac{1}{\frac{5}{3}}$? Déduis-en une fraction égale à ce nombre .

3. Transforme alors le quotient $\frac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{3}}$ en produit et complète la phrase suivante :
« Diviser par une fraction, c'est ... ».

4. Termine alors le calcul du quotient de $\frac{3}{2}$ par $\frac{5}{3}$.

5. Applique cette règle pour effectuer les calculs suivants : $\frac{\frac{10}{11}}{\frac{7}{8}}$; $\frac{\frac{4}{7}}{\frac{5}{9}}$; $\frac{\frac{2}{5}}{\frac{14}{3}}$.

Méthode 1 : Utiliser l'égalité

À connaître

Si on multiplie (ou si on divise) le numérateur et le dénominateur d'un nombre en écriture fractionnaire par un même nombre non nul alors on obtient un quotient égal.

Remarque : $\frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$ et $\frac{2}{-3} = \frac{-2}{3} = -\frac{2}{3} = -\frac{-2}{-3}$.

Exemple 1 : Simplifie la fraction $\frac{42}{-140}$.

$$\frac{42}{-140} = -\frac{42}{140} = -\frac{3 \times 2 \times 7}{10 \times 7 \times 2} = -\frac{3}{10}$$

Exemple 2 : Détermine le nombre manquant $\frac{-1,2}{6} = \frac{\dots}{18}$.

$$\frac{-1,2}{6} = \frac{\dots}{18}$$

$\begin{array}{c} \curvearrowright \times 3 \\ \times 3 \curvearrowleft \end{array}$

Pour passer de 6 à 18, on multiplie par 3, donc pour trouver le nombre manquant, on multiplie $-1,2$ par 3, ce qui donne $-3,6$.

À connaître

Pour réduire des nombres en écriture fractionnaire au même dénominateur, on cherche un multiple commun non nul aux dénominateurs (le plus petit possible) et on détermine les nombres en écriture fractionnaire ayant ce nombre pour dénominateur.

Exemple 3 : Réduis les fractions au même dénominateur : $A = \frac{2}{7}$ et $B = \frac{3}{8}$.

Les dénominateurs 7 et 8 n'ont aucun diviseur commun autre que 1. Le plus petit multiple commun est donc $7 \times 8 = 56$, donc $A = \frac{2 \times 8}{7 \times 8} = \frac{16}{56}$ et $B = \frac{3 \times 7}{8 \times 7} = \frac{21}{56}$.

Exemple 4 : Compare les fractions : $C = \frac{1}{24}$ et $D = \frac{5}{16}$.

On réduit d'abord au même dénominateur. Les dénominateurs 24 et 16 ont des diviseurs communs, donc on cherche un multiple non nul commun à 16 et 24.
 Multiples de 24 : 24 ; **48** ; 72 ; 96... Multiples de 16 : 16 ; 32 ; **48** ; 64 ...
 Le plus petit multiple commun à 16 et 24 est 48.

Il suffit ensuite d'appliquer l'exemple 2 : $C = \frac{1 \times 2}{24 \times 2} = \frac{2}{48}$ et $D = \frac{5 \times 3}{16 \times 3} = \frac{15}{48}$.

Or $\frac{2}{48} < \frac{15}{48}$ donc $\frac{1}{24} < \frac{5}{16}$.

À toi de jouer

1 Simplifie les écritures fractionnaires :

$$E = \frac{-85}{-150} \quad F = \frac{-3 \times 4 \times (-7)}{-5 \times 2 \times 7}$$

$$G = \frac{4,5}{0,05} \quad H = -\frac{-10,5}{-0,15}$$

2 Compare les nombres suivants :

a. $\frac{5}{12}$ et $\frac{1}{3}$

b. $\frac{4}{3}$ et $\frac{5}{4}$

c. $\frac{9}{10}$ et $\frac{11}{12}$

d. $\frac{19}{20}$ et $\frac{31}{32}$

Méthode 2 : Utiliser les produits en croix

À connaître

Si deux nombres en écriture fractionnaire sont égaux, alors leurs produits en croix sont égaux.
Réciproquement, si les produits en croix de deux nombres en écriture fractionnaire sont égaux, alors ces deux nombres sont égaux.

Remarque : En particulier, pour démontrer que deux nombres en écriture fractionnaire ne sont pas égaux, il suffit de démontrer que leurs produits en croix ne sont pas égaux.

Exemple : Les nombres $\frac{2,1}{3,5}$ et $\frac{4,1}{6,9}$ sont-ils égaux ? Justifie.

$$\begin{aligned} 2,1 \times 6,9 &= 14,49 \\ 3,5 \times 4,1 &= 14,35 \end{aligned}$$

→ On calcule les produits en croix et on les compare.

$$14,49 \neq 14,35$$

→ Les produits en croix ne sont pas égaux donc les nombres ne sont pas égaux.

À toi de jouer

3 Les nombres $\frac{-7}{6}$ et $\frac{-6}{-5}$ sont-ils égaux ? Et les nombres $\frac{14,5}{25}$ et $\frac{-11,6}{-20}$?

Méthode 3 : Additionner ou soustraire

À connaître

Pour additionner (ou soustraire) des nombres en écriture fractionnaire :

- on réduit les nombres au même dénominateur ;
- on additionne (ou on soustrait) les numérateurs et on garde le dénominateur commun.

Exemple : Calcule l'expression $A = -1 + \frac{13}{30} - \frac{-11}{12}$.

Multiples de 30 : 30 ; 60 ; 90 ; 120 ...

Multiples de 12 : 12 ; 24 ; 36 ; 48 ; 60 ...

→ On cherche le plus petit multiple commun non nul à 30 et 12.

$$A = \frac{-60}{60} + \frac{13 \times 2}{30 \times 2} + \frac{11 \times 5}{12 \times 5}$$

→ On réduit les fractions au même dénominateur 60.

$$A = \frac{-60}{60} + \frac{26}{60} + \frac{55}{60}$$

→ On additionne les numérateurs et on garde le dénominateur.

$$A = \frac{-60 + 26 + 55}{60}$$

$$A = \frac{21}{60} = \frac{7}{20}$$

→ On simplifie si possible.

À toi de jouer

4 Calcule et donne le résultat sous la forme d'une fraction la plus simple possible :

$$B = 1 - \frac{-7}{3} \quad C = \frac{-2}{3} + \frac{7}{8} - \frac{5}{6} \quad D = \frac{-2}{10} + \frac{7}{25} \quad E = \frac{3}{7} - \frac{7}{10}$$

Méthode 4 : Trouver l'inverse d'un nombre

À connaître

Deux nombres sont inverses l'un de l'autre si leur produit est égal à 1.

Tout nombre x non nul admet un inverse (noté x^{-1}) qui est le nombre $\frac{1}{x}$.

Tout nombre en écriture fractionnaire $\frac{a}{b}$ ($a \neq 0$ et $b \neq 0$) admet un inverse qui est le nombre $\frac{b}{a}$.

Remarques : Zéro est le seul nombre qui n'admet pas d'inverse.

Un nombre et son inverse ont toujours le même signe.

L'inverse de l'inverse d'un nombre est ce nombre lui-même.

Exemple : Donne les inverses des nombres 3 et $\frac{-7}{3}$.

L'inverse de 3 est $3^{-1} = \frac{1}{3}$.

L'inverse de $\frac{-7}{3}$ est $\frac{1}{\frac{-7}{3}} = \frac{3}{-7} = \frac{-3}{7}$

À toi de jouer

5 Donne les inverses des nombres suivants : -6 ; $3,5$; $\frac{-15}{4}$; $\frac{1}{4}$.

Méthode 5 : Diviser

À connaître

Diviser par un nombre non nul, c'est multiplier par son inverse.

Exemple 1 : Calcule $A = \frac{-8}{7} \div \frac{5}{-3}$ et donne le résultat en simplifiant le plus possible.

$A = + \left(\frac{8}{7} \div \frac{5}{3} \right)$ \longrightarrow On s'occupe d'abord du signe : le résultat est positif car il y a un nombre pair de facteurs négatifs.

$A = \frac{8}{7} \times \frac{3}{5}$ \longrightarrow On multiplie par l'inverse de la deuxième fraction.

$A = \frac{8 \times 3}{7 \times 5} = \frac{24}{35}$ \longrightarrow On multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux en simplifiant si possible.

À toi de jouer

6 Calcule et donne le résultat sous la forme d'une fraction la plus simple possible.

$$B = \frac{-7}{3} \div \frac{-21}{6} \qquad \left| \qquad C = \frac{-4}{7} \div \frac{3}{3} \qquad \left| \qquad D = \frac{-4}{7} \div \frac{3}{-5}$$



Comparaison

1 Signes

Donne le signe des nombres suivants :

$$\frac{-5,2}{4,23} ; \frac{5}{-2,1} ; \frac{472}{23} ; \frac{-8,9}{-45} ; -\frac{12}{13} ; -\frac{11}{-5,2}$$

2 Indique les nombres égaux parmi ceux de la liste ci-dessous :

$$\frac{-8}{9} ; -\frac{8}{9} ; \frac{-8}{-9} ; -\frac{8}{-9} ; \frac{8}{-9} ; -\frac{-8}{9} ; \frac{8}{9}$$

3 Encadrement

a. On considère la fraction $\frac{56}{21}$.

Effectue la division euclidienne de 56 par 21 et déduis-en un encadrement de la fraction par deux nombres entiers consécutifs.

b. Encadre $\frac{-89}{15}$ puis $\frac{47}{59}$ par deux nombres entiers consécutifs.

c. Encadre respectivement $\frac{-47}{25}$ et $\frac{13}{-4}$ par deux nombres entiers consécutifs et déduis-en la comparaison de ces deux fractions.

d. Peux-tu appliquer la même méthode pour comparer $\frac{25}{3}$ et $\frac{90}{11}$?

4 Avec des valeurs approchées

Soient deux nombres : $a = \frac{816}{577}$ et $b = \frac{577}{408}$.

a. Donne la valeur arrondie de a et celle de b au millième. Peux-tu en déduire la comparaison de a et de b ?

b. Donne des valeurs approchées de a et b qui permettent de les comparer. Compare a et b .

5 Égalités

Recopie et complète chacune des égalités suivantes :

a. $\frac{\dots}{-5} = \frac{10}{20}$

b. $\frac{2}{3} = \frac{\dots}{27}$

c. $\frac{-15}{45} = \frac{-5}{\dots}$

d. $\frac{\dots}{-18} = \frac{7}{6}$

e. $3 = \frac{\dots}{4}$

f. $-2,1 = \frac{-21}{\dots}$

6 Dans chaque cas, à partir des égalités données et en utilisant seulement les quatre nombres qui apparaissent, écris toutes les égalités d'écritures fractionnaires possibles :

a. $7 \times (-8) = -4 \times 14$ c. $2,1 \times 12 = 9 \times 2,8$

b. $-3 \times (-1) = 2 \times 1,5$ d. $-4 \times 9 = 12 \times (-3)$

7 Produits en croix

Recopie et complète les égalités suivantes en justifiant par un calcul :

a. $\frac{-5}{12} = \frac{\dots}{18}$ c. $\frac{4}{\dots} = \frac{5}{7}$

b. $\frac{\dots}{-2,4} = \frac{0,8}{3,2}$ d. $\frac{-819}{195} = \frac{63}{\dots}$

8 Égalité ?

Recopie et complète en utilisant = ou \neq , en justifiant dans chaque cas :

a. $\frac{-9,1}{5,2} \dots \frac{79,8}{-45,6}$ c. $\frac{17,36}{-22,32} \dots \frac{28,7}{36,9}$

b. $\frac{-5}{-3} \dots \frac{-3,5}{2,1}$ d. $\frac{-56}{-57} \dots \frac{57}{58}$

9 Avec un dénominateur entier positif

Réécris chacune des écritures fractionnaires suivantes avec un dénominateur entier positif :

$$\frac{4}{-5} ; \frac{-8}{-7} ; -\frac{5,2}{-7} ; \frac{7}{-2,1} ; \frac{8,2}{0,12} ; -\frac{-1}{-3,54}$$

10 Même dénominateur positif

a. Recopie et complète la phrase suivante : « Deux nombres en écriture fractionnaire de même dénominateur positif sont rangés... ».

b. Compare les nombres suivants :

$$\frac{-7,5}{3} \text{ et } \frac{-7,49}{3} \quad \left| \quad -\frac{0,74}{5} \text{ et } \frac{-0,7309}{5}$$

$$\frac{4,05}{2,1} \text{ et } \frac{4,2}{2,1} \quad \left| \quad \frac{8}{-5,23} \text{ et } \frac{-7,9}{5,23}$$

11 Avec le même numérateur

a. Recopie et complète la phrase suivante : « Deux nombres positifs en écriture fractionnaire de même numérateur sont rangés... »

b. Compare les nombres suivants :

$$\frac{3,5}{8,2} \text{ et } \frac{3,5}{8,15} \quad \left| \quad -\frac{1}{6} \text{ et } \frac{1}{5,7}$$

12 Avec le même numérateur (bis)

Compare les nombres suivants en commençant par comparer leurs opposés :

a. $\frac{1}{-5}$ et $\frac{1}{-7}$	c. $-\frac{5,23}{14,5}$ et $-\frac{5,23}{14,6}$
b. $\frac{-3}{8}$ et $\frac{-3}{8,2}$	d. $\frac{-7,5}{0,23}$ et $\frac{75}{-2,4}$

13 Dans chaque cas, réécris les nombres avec le même dénominateur positif puis compare-les :

a. $\frac{-5}{4}$ et $\frac{-9}{8}$	d. $-\frac{2}{11}$ et $\frac{-5}{33}$
b. $\frac{2,7}{-9}$ et $\frac{-1}{3}$	e. $\frac{7}{2,5}$ et $\frac{20,5}{7,5}$
c. 3 et $-\frac{20,9}{-7}$	f. $\frac{13}{-27}$ et $\frac{-79}{162}$

14 Multiple commun

a. Quels sont les dix premiers multiples de 12 ? Ceux de 18 ? Déduis-en le plus petit multiple non nul commun à 12 et 18, puis un dénominateur commun positif des fractions :

$$\frac{-7}{12} \text{ et } \frac{-11}{18}$$

Compare alors ces deux nombres.

b. La méthode précédente permet-elle de trouver rapidement un dénominateur commun aux nombres :

$$\frac{8}{11} \text{ et } \frac{10}{13} ?$$

Comment en trouver un alors rapidement ? Compare ces deux nombres.

15 Dans chaque cas, réécris les nombres avec le même dénominateur positif, puis compare-les :

a. $\frac{-5}{8}$ et $\frac{-3,8}{6}$	c. $\frac{3}{-50}$ et $-\frac{4}{75}$
b. $\frac{14}{5}$ et $\frac{20}{7}$	d. $\frac{54,5}{0,27}$ et $\frac{-2,62}{-0,13}$

16 Compare en justifiant :

a. $-\frac{12}{18}$ et $\frac{399}{-300}$	d. $-\frac{5}{6}$ et $-\frac{15}{14}$
b. $\frac{2}{57}$ et $\frac{1}{28,4}$	e. $\frac{6}{13}$ et $\frac{29}{65}$
c. $\frac{-75}{11}$ et $\frac{31}{-15}$	f. $\frac{3}{-22}$ et $\frac{4,5}{33}$

17 Dans l'ordre

a. Range les nombres suivants dans l'ordre croissant sans utiliser de valeurs approchées :

$$\frac{7}{-15} ; \frac{7}{3} ; \frac{490}{420} ; \frac{-5}{12} ; \frac{-24}{-18} ; 2,5.$$

b. Range les nombres suivants dans l'ordre décroissant :

$$\frac{-29}{100} ; \frac{7}{-25} ; -0,285 ; -\frac{1}{5} ; \frac{13}{-50} ; 0 ; \frac{-1}{2,5}.$$

18 Trajet

Quatre amis font un voyage en trois jours. Le premier jour, ils parcourent 40 % du trajet total ; le deuxième jour, un quart et le dernier jour, $\frac{7}{20}$ du trajet total.

Quel jour ont-ils parcouru la plus grande distance ?

Peux-tu calculer la distance parcourue chaque jour ?

Additions, soustractions

19 La règle

Calcule les sommes et les différences suivantes en respectant les étapes :

$$\frac{-4}{5} + \frac{7}{5} = \frac{\dots + \dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$$

a. $\frac{9}{7} + \frac{-8}{7}$	f. $\frac{-1}{3} - \frac{2}{3}$
b. $\frac{5,2}{41} + \frac{8,56}{41}$	g. $\frac{-5}{14} - \frac{-2}{14}$
c. $\frac{-5}{3} + \frac{-6}{3}$	h. $\frac{1}{8} - \frac{9}{8}$
d. $-\frac{7}{15} - \frac{7}{15}$	i. $\frac{5}{12} + \frac{11}{12} - \frac{7}{12}$
e. $\frac{56}{57} - \frac{58}{57}$	j. $\frac{-1}{25} - \frac{-11}{25} + \frac{-8}{25}$

20 Dénominateurs positifs

Calcule en réécrivant dans chaque cas les fractions avec le même dénominateur positif :

a. $\frac{8}{-5} + \frac{7}{5}$	c. $\frac{5}{6} - \frac{7}{-6}$
b. $\frac{-4}{-15} + \frac{1}{-15}$	d. $\frac{-9}{17} + \frac{1}{-17}$

21 Même dénominateur

Écris les nombres suivants, si c'est possible, sous la forme $\frac{a}{30}$, où a est un nombre décimal relatif :

$$\frac{3}{10} ; \frac{1}{-3} ; -2 ; \frac{2,1}{0,6} ; \frac{-18}{90} ; \frac{1}{7} ; \frac{1}{-60}.$$

22 Avec un multiple

a. On remarque que $3 \times 8 = 24$;

Calcule : $\frac{-5}{24} + \frac{1}{3}$ en écrivant les fractions avec le même dénominateur positif.

b. Combien de quart(s) faut-il pour faire une unité ? Calcule $1 - \frac{5}{4}$ en écrivant les fractions avec le même dénominateur positif.

c. Complète : $-3 = \frac{\dots}{1} = \frac{\dots \times \dots}{1 \times \dots} = \frac{\dots}{8}$.

Calcule $-3 + \frac{5}{-8}$ en écrivant les fractions avec le même dénominateur positif.

23 Effectue les calculs suivants en détaillant les étapes :

a. $\frac{5}{6} + \frac{-1}{3}$

b. $\frac{7}{9} - \frac{1}{-27}$

c. $\frac{-8}{5} + \frac{23}{50}$

d. $\frac{45}{15} - \frac{7}{3}$

e. $\frac{4}{11} + 2$

f. $\frac{8}{-91} + \frac{-1}{7}$

g. $\frac{5}{2} - \frac{-45}{4} + \frac{2}{8}$

h. $4 - \frac{5}{-49} + \left(-\frac{8}{7}\right)$

24 Trouver un dénominateur commun

a. Écris la liste des premiers multiples de 8 puis celle des premiers multiples de 6. Trouve le plus petit multiple non nul commun à 8 et 6.

Utilise alors ce nombre pour écrire les fractions $\frac{-5}{8}$ et $\frac{7}{6}$ avec le même dénominateur positif et calcule : $\frac{-5}{8} + \frac{7}{6}$.

b. Cette méthode permet-elle de trouver rapidement un dénominateur commun pour calculer :

$$\frac{5}{17} + \frac{1}{50} ?$$

Quel dénominateur commun choisir alors ? Calcule cette somme.

25 Effectue les calculs suivants en détaillant les étapes :

a. $\frac{-7}{50} + \frac{2}{75}$

b. $\frac{1}{5} + \frac{-2}{3}$

c. $\frac{1}{12} - \frac{1}{9}$

d. $\frac{4}{18} + \frac{5}{27}$

e. $\frac{17}{-24} + \left(-\frac{5}{36}\right)$

f. $\frac{3}{16} - \frac{-1}{12}$

g. $\frac{8}{-17} - \left(-\frac{1}{15}\right)$

h. $\frac{2}{5} + \frac{-2}{15} - \frac{7}{12}$

26 Effectue les calculs suivants en détaillant les étapes et donne les résultats sous la forme d'une fraction irréductible :

a. $\frac{42}{75} - \left(-\frac{22}{30}\right)$

b. $\frac{85}{4} + \frac{25}{-5}$

c. $\frac{-12}{25} - 8$

d. $-\frac{14}{27} + \frac{-5}{108}$

e. $\frac{9}{-55} - \frac{-7}{44}$

f. $\frac{-9}{-18} - \frac{5}{30} + \left(-\frac{9}{6}\right)$

g. $\frac{1}{15} + \left(-\frac{1}{18}\right)$

h. $\frac{3}{-7} + \frac{2}{5} - \frac{4}{3}$

27 Héritage

Après de longues négociations, il a été convenu que Léa héritera de deux quinzièmes de la fortune de son oncle du bout du monde ; Florian, d'un neuvième de cette fortune ; Jean et Justine se partageront équitablement le reste.

Quelles seront les parts respectives de Jean et Justine ?

28 Opposés

Complète les égalités suivantes et écris, dans chaque cas, trois phrases utilisant le mot « opposé(s) » :

a. $\frac{-2}{5} + \dots = 0$

b. $\dots + \frac{7}{-8} = 0$

c. $\dots + \frac{-12}{-8} = 0$

d. $\left(-\frac{4}{5}\right) + \frac{9,6}{12} = \dots$

29 Avec des lettres

On donne : $a = \frac{-8}{28}$; $b = \frac{1}{35}$ et $c = \frac{45}{-21}$.

a. Calculer $a - b + c$ et $b - a - c$.

b. Que remarques-tu ?

Multiplications

30 La règle et les signes

Effectue les produits suivants :

a. $\frac{3}{2} \times \frac{5}{7}$

b. $\frac{-4}{11} \times \frac{1}{-3}$

c. $3 \times \frac{-7}{5}$

d. $\frac{5}{-4} \times \frac{5}{-2}$

e. $\frac{8}{17} \times \frac{5}{-3}$

f. $-\frac{13}{5} \times \left(-\frac{2}{11}\right)$

g. $\left(-\frac{7}{15}\right) \times (-8) \times \frac{2}{3}$

h. $\frac{-1}{2} \times \frac{5}{-4} \times \frac{-3}{2}$

31 Toujours plus simple

Simplifie, si possible, les écritures fractionnaires suivantes :

a. $\frac{-5 \times 2}{2 \times 7}$

b. $\frac{-5 + 2}{7 + 2}$

c. $\frac{4 \times (-11)}{4 \times (-11) \times 3}$

d. $\frac{8 \times (-3) \times 7 \times 5}{3 \times 5 \times 8 \times 7}$

e. $\frac{-5 \times 8}{2 \times (-7)}$

f. $\frac{5 \times (-9) \times 2}{-7 \times 10 \times (-1)}$

32 Calculer en simplifiant

Pour chacun des produits suivants, applique la règle de multiplication sans effectuer les calculs, simplifie lorsque cela est possible et donne alors le résultat sous la forme d'une fraction irréductible :

a. $\frac{8}{5} \times \frac{5}{7}$

b. $\frac{-3}{10} \times \frac{-11}{3}$

c. $\frac{-2}{3} \times \frac{-5}{2} \times \frac{3}{-7}$

d. $\frac{5}{-7} \times \left(-\frac{7}{5}\right)$

e. $-15 \times \frac{2}{15}$

f. $\left(-\frac{8}{3}\right) \times \left(-\frac{1}{5}\right) \times 3$

33 Complète les égalités suivantes :

a. $\frac{8}{\dots} \times \frac{7}{3} = -\frac{8}{3}$

b. $\frac{-5}{3} \times \frac{7}{\dots} = \frac{7}{6}$

c. $\frac{6}{5} \times \dots = -6$

d. $\left(-\frac{8}{21}\right) \times \frac{\dots}{\dots} = 1$

e. $\frac{\dots}{10} \times \frac{7}{\dots} = -5$

f. $\frac{\dots}{-9} \times \frac{2}{\dots} = \frac{4}{15}$

g. $\frac{-5}{\dots} \times \frac{3}{-14} \times \frac{\dots}{25} = \frac{-2}{7}$

34 Simplifier avant de calculer

a. Écris 15 sous la forme d'un produit de deux nombres entiers. Décompose de même 20 en produit de nombres entiers positifs les plus petits possibles.

b. Recopie et complète les égalités suivantes :

$$\frac{15}{7} \times \frac{11}{20} = \frac{\dots \times \dots}{\dots \times \dots} = \frac{(\dots \times \dots) \times \dots}{\dots \times (\dots \times \dots \times \dots)}$$

c. Simplifie l'expression obtenue et donne le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

35 Calcule les produits suivants en simplifiant, puis donne les résultats sous la forme d'une fraction irréductible :

a. $\frac{-7}{25} \times \frac{-5}{8}$

b. $\frac{18}{-49} \times \frac{14}{27}$

c. $\frac{45}{28} \times \frac{7}{-15}$

d. $\frac{-2}{6} \times \left(-\frac{21}{11}\right)$

e. $\frac{21}{32} \times \frac{108}{49}$

f. $-26 \times \frac{-5}{39}$

g. $\frac{8}{5} \times \frac{-5}{21} \times \left(-\frac{9}{16}\right)$

h. $\frac{56}{-5} \times \frac{30}{21} \times \frac{7}{10}$

36 Avec la calculatrice

Utilise ta calculatrice pour effectuer les produits suivants et donne les résultats sous la forme d'une fraction irréductible :

a. $\frac{686}{-153} \times \frac{-99}{-196}$

b. $\frac{2,1}{12,5} \times \left(-\frac{6,25}{0,49}\right)$

37 Calcule mentalement :

a. les trois quarts de 400 ;

b. le double de $\frac{-7}{15}$;

c. les cinq septièmes des six cinquièmes de l'unité ;

d. les $\frac{7}{10}$ de $\frac{9}{10}$.

38 Dépense

Abdel dépense les $\frac{5}{12}$ de son argent de poche, puis les trois quarts de ce qu'il lui reste alors.

a. Quelle fraction de son argent de poche a-t-il dépensée la deuxième fois ?

b. Le montant de son argent de poche étant de 72 €, combien a-t-il dépensé au total ?

Divisions

39 Inverses

Recopie et complète les égalités suivantes et écris, dans chaque cas, trois phrases utilisant le mot « inverse(s) » :

a. $4 \times \frac{1}{\dots} = 1$	e. $\frac{3}{4} \times \frac{\dots}{\dots} = 1$
b. $\dots \times 0,25 = 1$	f. $\frac{\dots}{-25} \times \frac{\dots}{7} = 1$
c. $\frac{1}{\dots} \times (-3) = 1$	g. $\dots \times \left(-\frac{8}{5}\right) = 1$
d. $\dots \times \left(-\frac{1}{15}\right) = 1$	h. $-0,01 \times \dots = 1$

40 Ne pas confondre !

a. Recopie et complète les égalités suivantes :

$$\left(\frac{9}{-14}\right) \times \dots = 1 \text{ et } \left(\frac{9}{-14}\right) + \dots = 0.$$

Écris deux phrases, l'une utilisant le mot « opposé(s) » et l'autre, le mot « inverse(s) ».

b. Trouve deux nombres qui sont leur propre inverse. Trouve un nombre qui est son propre opposé.

c. Tous les nombres ont-ils un inverse ? Un opposé ?

d. Quel est l'opposé de l'inverse de 4 ? Quel est l'inverse de l'opposé de 4 ?

41 Notations x^{-1} et $\frac{1}{x}$

a. Que désignent les notations ci-dessus ?

b. Recopie et complète le tableau ci-dessous avec des écritures fractionnaires.

x	7	$\frac{-3}{5}$	$-\frac{8}{9}$	-0,6	1,25
x^{-1} ou $\frac{1}{x}$					

c. Détermine l'inverse de l'inverse de chaque nombre. Que remarques-tu ?

42 Mentalement

a. Effectue mentalement les calculs suivants : $16 \div 2$; $100 \times 0,25$; $16 \times 0,5$; $100 \div 4$.

b. Justifie les résultats égaux avec la règle de division.

43 La règle

Applique dans chaque cas la règle de division puis effectue les calculs :

a. $\frac{2}{3} \div 5$	d. $8 \div \frac{1}{8}$
b. $\frac{-5}{7} \div (-4)$	e. $\frac{-3}{2} \div \frac{-5}{7}$
c. $\frac{5}{6} \div \frac{7}{-11}$	f. $\frac{1}{10} \div \left(-\frac{7}{9}\right)$

44 Trait de fraction

Écris les quotients suivants en utilisant le symbole \div puis effectue le calcul :

$$A = \frac{2}{\frac{3}{5}} ; B = \frac{\frac{2}{3}}{5} ; C = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{7}{11}}.$$

45 Division et simplification

Applique la règle de division, simplifie puis effectue les calculs et donne les résultats sous la forme d'une fraction irréductible :

a. $\frac{8}{-15} \div \frac{-4}{5}$	d. $\frac{-5}{6} \div \left(-\frac{15}{18}\right)$
b. $\frac{9}{10} \div (-3)$	e. $12 \div \frac{3}{-4}$
c. $\frac{-4}{45} \div \frac{16}{15}$	f. $1 \div \left(\frac{-7}{4}\right)$

46 Partage

a. Calcule la moitié de $\frac{-5}{12}$.

b. Il reste les $\frac{7}{8}$ d'un gâteau.

Trois amis décident de se partager équitablement ce reste : quelle fraction du gâteau aura chacun d'entre eux ?

47 Avec des lettres

a. Sachant que $a = \frac{-2}{21}$ et $b = \frac{5}{-7}$, calcule :

$$\frac{a}{b} ; \frac{b}{a} ; a \times b ; a + b \text{ et } a - b.$$

Tu donneras les résultats sous la forme d'une fraction irréductible.

b. Même consigne avec $a = \frac{5}{24}$ et $b = \frac{-35}{18}$.

48 Priorités opératoires

Effectue les calculs suivants en respectant les priorités opératoires :

$$\begin{array}{l} A = \frac{1}{5} \times \frac{-4}{3} + \frac{7}{2} \\ B = \frac{4}{5} \div \left(-\frac{3}{7}\right) - \frac{7}{10} \\ C = \frac{13}{7} + \left(-\frac{8}{7}\right) \div \left(-\frac{4}{5}\right) \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} D = \frac{7}{3} + \frac{3}{2} \times \frac{-10}{21} \\ E = \frac{5}{8} + \left(-\frac{3}{4}\right) \div \left(-\frac{9}{16}\right) \\ F = \frac{6}{5} - \left(-\frac{1}{9}\right) \times \left(-\frac{3}{4}\right) \end{array} \right.$$

49 Priorités opératoires (bis)

Effectue les calculs suivants en respectant les priorités opératoires :

$$\begin{array}{l} A = \left(\frac{3}{2} + \frac{3}{5}\right) \left(\frac{5}{4} - \frac{4}{3}\right) \\ B = \left(\frac{4}{3} - \frac{5}{2}\right) \div \left(-\frac{2}{3} + \frac{3}{4}\right) \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} C = \frac{3}{2} + \frac{3}{5} \times \frac{5}{4} - \frac{4}{3} \\ D = \frac{4}{3} - \frac{5}{2} \div \left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{3}{4} \end{array} \right.$$

50 Extrait du Brevet

a. Soit $A = \frac{8}{3} - \frac{5}{3} \div \frac{20}{21}$. Calculer A en détaillant les étapes du calcul et écrire le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

b. Effectuer le calcul suivant. Le résultat sera donné sous la forme d'un entier.

$$B = \left(2 + \frac{2}{3}\right) \div \left(\frac{4}{5} - \frac{2}{3}\right).$$

51 Parenthèses et fractions

a. Calcule de deux manières différentes les expressions suivantes :

$$A = -2 \left(\frac{3}{4} + \frac{2}{5}\right) + \frac{3}{2} \quad B = 4 \left(\frac{3}{4} - \frac{-1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{-6}\right)$$

b. Donne l'arrondi au centième puis la troncature au centième de chaque résultat.

52 Égalités et fractions

a. L'égalité $3x^2 + 5x - 3 = 6x + 1$ est-elle vraie pour $x = \frac{4}{3}$?

b. Teste l'égalité $\frac{x-1}{2x+5} = \frac{-3x+2}{x-3}$ dans le cas où $x = -\frac{1}{4}$.

53 Calcul littéral et fractions

Calcule les expressions suivantes lorsque :

$$a = \frac{2}{3}; \quad b = -\frac{3}{2}; \quad c = \frac{-3}{4}.$$

$$\begin{array}{ll} \text{a. } 3a - b - c & \text{d. } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \\ \text{b. } -2a + 4b - 5c & \text{e. } \frac{a+c}{a-b} \\ \text{c. } 6b^2 - 3a + 5 & \end{array}$$

54 Quotient de quotients...

Calcule puis simplifie au maximum le résultat :

$$\begin{array}{ll} A = \frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{3}}{\frac{3}{4} + \frac{2}{3}} & D = \frac{7}{5} + \frac{\frac{15}{2}}{\frac{2}{3}} - \frac{19}{2} \\ B = 2 + \frac{\frac{2}{7}}{\frac{5}{14}} & E = \frac{3 - \frac{7}{5}}{1 - \frac{9}{10}} \\ C = -\frac{3}{14} - \frac{3}{\frac{7}{5}} + 2 & F = \frac{7}{-8} + \frac{5}{\frac{6}{4}} - 1 \end{array}$$

55 Sois malin !

Calcule les expressions suivantes :

$$\begin{array}{l} A = \frac{\left(1 - \frac{1}{5}\right) \left(1 - \frac{2}{5}\right) \left(1 - \frac{3}{5}\right) \left(1 - \frac{4}{5}\right) \left(1 - \frac{5}{5}\right)}{3 - \frac{2}{7}} \\ B = \frac{25}{8} \times \frac{\left(\frac{23}{4} - 13 \times \frac{27}{19}\right)}{\frac{23}{4} - 13 \times \frac{27}{19}} \div \frac{35}{8} \\ C = \frac{12}{9 + \frac{\frac{8}{7} + \frac{6}{7}}{7 + \frac{\frac{4}{5} + \frac{2}{5}}{5 + \frac{2}{3 + \frac{2}{1+1}}}}} \\ D = \left(2 + \frac{3}{4}\right) \times \frac{1}{2 + \frac{3}{4}} - \frac{\frac{3}{7} - \frac{8}{9}}{\frac{8}{9} - \frac{3}{7}} \\ E = \frac{\left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{2}{2}\right) \left(1 - \frac{3}{2}\right) \left(1 - \frac{4}{2}\right) \left(1 - \frac{5}{2}\right) \left(1 - \frac{6}{3}\right)}{1 - \frac{1}{2}} \end{array}$$



56 Comptes de Marseillais...

Voici un extrait de MARIUS, une oeuvre de Marcel Pagnol (Acte II) :

César : « ...Eh bien, pour la dixième fois, je vais t'expliquer, le picon-citron-curaçao. Approche-toi ! Tu mets d'abord un tiers de curaçao. Fais attention : un tout petit tiers. Bon. Maintenant, un tiers de citron. Un peu plus gros. Bon. Ensuite, un bon tiers de Picon. Regarde la couleur. Regarde comme c'est joli. Et à la fin un grand tiers d'eau. Voilà.

Marius : - Et ça fait quatre tiers.

César : - Exactement. J'espère que cette fois, tu as compris.

Marius : - Dans un verre, il n'y a que trois tiers.

César : - Mais imbécile, ça dépend de la grosseur des tiers !...

Marius : - Eh non, ça ne dépend pas. Même dans un arrosoir, on ne peut mettre que trois tiers.

César (trionphal) : - Alors, explique-moi comment j'en ai mis quatre dans ce verre. »

a. Que penses-tu de cette scène ? Comment expliques-tu la réaction de Marius ?

b. Pourquoi est-il indiqué « César (trionphal) » à la fin du texte ?

57 À chacun sa part !

Boris a gagné au jeu « Megariche » le week-end dernier. Il décide de partager la somme avec ses amis. Il donne un huitième des gains à Marc et un sixième à Fabrice. Il propose un cinquième de ce qu'il n'a pas encore distribué à Bruno. Le reste, il le garde pour lui.

Quelle fraction du gain reste-t-il à Boris ?

58 Sens de l'amitié : oui, mais !

Anne-Cécile rend visite à plusieurs amis à son retour d'Australie. A chaque fois, ses amis lui offrent gentiment un morceau de son gâteau préféré.

Le premier jour, gourmande, elle mange un demi-gâteau chez Sophie. Le lendemain, Marie lui donne un quart de gâteau. Plus raisonnable, le troisième jour, elle prend juste un huitième de gâteau avec Mathieu et le quatrième jour, un seizième avec Franck.

Le cinquième jour, elle prend juste un trente deuxième de gâteau chez Hafid, pour lui faire plaisir.

a. Quelle proportion de gâteau a-t-elle mangée en cinq jours ?

b. En continuant ainsi, parviendra-t-elle à manger un gâteau entier ?

59 Extrait du Brevet

$$A = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \frac{4}{7} \qquad B = \frac{6}{5} \div \left(\frac{1}{15} - \frac{1}{5} \right)$$

a. Calculer A et écrire la réponse sous la forme d'une fraction irréductible.

b. Calculer B et écrire la réponse sous la forme d'un entier.

60 Extrait du Brevet

a. Effectuer le calcul suivant et donner le résultat sous forme d'une fraction irréductible :

$$A = \frac{1}{9} + \frac{1}{12}$$

b. En électricité, pour calculer des valeurs de résistances, on utilise la formule :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Sachant que $R_1 = 9$ ohms et que $R_2 = 12$ ohms, déterminer la valeur exacte de R.

61 Volume d'un tonneau

Le volume V d'un tonneau est donné par la formule suivante :

$$V = \pi L \left[\frac{d}{2} + \frac{2}{3} \left(\frac{D}{2} - \frac{d}{2} \right) \right]^2$$

a. Calcule le volume de ce tonneau en m^3 . Tu donneras la valeur approchée à $0,001 m^3$ par excès, puis en litres à 1 litre par excès, sachant que :

$$L = 1,60 \text{ m} \qquad d = 0,85 \text{ m} \qquad D = 1,34 \text{ m}$$

b. Un viticulteur décide d'utiliser ce tonneau pour faire fermenter son raisin. Combien de bouteilles de 75 cl pourra-t-il remplir pour commercialiser son vin rouge ?

62 Géométrie et fractions

La longueur et la largeur d'un rectangle ont été multipliées respectivement par $\frac{7}{5}$ et $\frac{2}{3}$.

a. Par quel nombre a été multipliée l'aire du rectangle initial (tu donneras le résultat sous la forme d'une fraction) ?

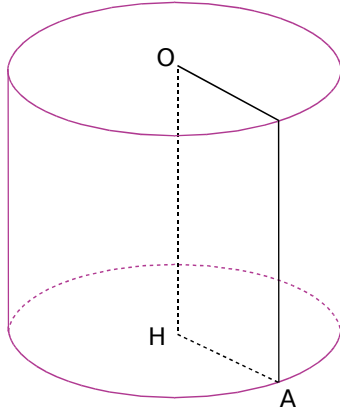
b. Par quelle fraction a été multiplié le périmètre du rectangle initial, sachant que sa longueur mesure 7 cm et sa largeur mesure 4 cm ?

63 Espace et fractions

On considère le cylindre de révolution \mathcal{C} suivant de hauteur OH :

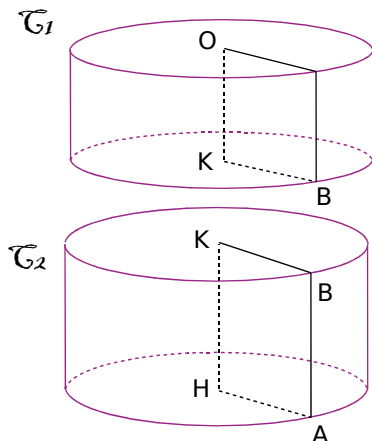
$$OH = \frac{4}{3} \text{ dm}$$

$$AH = \frac{3}{2} \text{ dm}$$



- Calcule OA en justifiant ta réponse.
- Calcule le volume V de \mathcal{C} . Tu donneras le résultat sous la forme $k\pi$ où k est un nombre entier.

On coupe le cylindre \mathcal{C} aux neuf seizièmes de sa hauteur en partant du point O. On obtient alors deux cylindres de révolution \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 , comme le montre le schéma ci-dessous (les dimensions ne sont pas respectées) :



- Quelle est la mesure de la hauteur [OK] de \mathcal{C}_1 ? Déduis-en la mesure de la hauteur [KH] de \mathcal{C}_2 .
- Quelle est la mesure du rayon de la base de \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 ?
- Calcule le volume V_1 de \mathcal{C}_1 . Tu donneras le résultat sous la forme $p\pi$ où p est une fraction la plus simple possible.
- Calcule et simplifie le rapport $\frac{V_1}{V}$.
Que remarques-tu ?

64 Années bissextiles et calendriers

Nos ancêtres s'intéressaient déjà il y a 8 000 ans au mouvement des étoiles afin de prévoir le retour des saisons.

Depuis plus de 2 000 ans, les astronomes savent que les saisons se reproduisent environ tous les 365,25 jours (on appelle année tropique cette durée de 365,25 jours).

- Quelle est la différence entre une année tropique et une année « civile » de 365 jours ? Que devient cette différence au bout de 4 ans ?
- Recopie et complète l'égalité suivante :

$$365,25 = 365 + \frac{\dots}{\dots}$$

L'astronome Sosigène conseilla donc à Jules César de suivre la règle suivante pour mettre au point le *Calendrier Julien* :

Chaque année compte 365 jours, sauf les années multiples de 4, qui durent 366 jours.

- Ces années de 366 jours sont appelées années bissextiles. Parmi les années suivantes, quelles sont les années bissextiles : 396 ; 744 ; 1492 ; 1515 ?

Les mesures et les calculs devenant de plus en plus précis, on sait maintenant qu'une année tropique dure en réalité 365,24219 jours au lieu de 365,25 jours.

- En 400 ans, combien de jours représente cette imprécision du Calendrier Julien ? Recopie et complète l'égalité suivante :

$$365,24219 \approx 365 + \frac{\dots}{\dots} - \frac{\dots}{400}$$

Cette imprécision a provoqué en seize siècles un décalage des saisons, si bien qu'en 1582, le pape Grégoire XIII décida que le jeudi 4 octobre serait immédiatement suivi par le vendredi 15 octobre ! Grégoire XIII décida aussi de corriger l'imprécision du Calendrier Julien en mettant au point le *Calendrier Grégorien* (notre calendrier actuel) :

Chaque année compte 365 jours, sauf les années multiples de 4, qui durent 366 jours.
Exceptions : les années multiples de 100 mais non multiples de 400 durent 365 jours.

- En utilisant le résultat de la question d., explique l'intérêt de faire de telles exceptions.
- En histoire, on parle toujours de la révolution d'Octobre, lorsqu'on étudie la naissance de l'URSS. Pourtant, les Russes célèbrent cet événement début novembre. Peux-tu, à partir des informations précédentes, en deviner la raison ? Tu pourras t'aider d'une encyclopédie si tu en as besoin.



1 Dominos en fractions

Vous allez créer un jeu de dominos utilisant des fractions.

a. Répartissez-vous le travail pour compléter le tableau ci-dessous. La première ligne (cases A1 à F1) contient les résultats des calculs situés dans les lignes 2 à 7.

	A	B	C	D	E	F
1	$\frac{5}{3}$	$\frac{-3}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{-9}{4}$	$\frac{2}{7}$	3
2	$\frac{1}{3} + \frac{4}{3}$	$\frac{-4}{5} + \frac{1}{5}$				
3	$\frac{7}{3} - \frac{4}{6}$	$\frac{2}{15} - \frac{1}{5} - \frac{8}{15}$				
4	$\frac{2}{3} + 1$	$\frac{12}{5} - 3$				
5						
6						
7						

Quelques exemples (cases A2, B2, A3, B3, A4, B4) ont été donnés à titre indicatif. Pour chaque colonne, il faut trouver :

- ligne 2 : une somme algébrique de fractions de même dénominateur ;
- ligne 3 : une somme algébrique de fractions de dénominateurs différents ;
- ligne 4 : une somme algébrique d'un nombre entier et d'une fraction ;
- ligne 5 : un produit de deux fractions ;
- ligne 6 : un produit de trois fractions ;
- ligne 7 : un quotient de deux fractions.

b. Créez le jeu de dominos en respectant le plan suivant (à chaque fois, il faut remplacer le nom de la case par son contenu).

Taille d'un domino : 6 cm sur 2 cm.

A1	A2	A3	B1	A4	C2
A5	D3	A6	E4	A7	F5
B2	B3	B4	C1	B5	D2
B6	E3	B7	F4	C3	C4
C5	D1	C6	E2	C7	F3
D4	D5	D6	E1	D7	F2
E5	E6	E7	F1	F6	F7

c. Découpez les dominos et échangez votre jeu avec un autre groupe. Il ne vous reste plus qu'à jouer en accolant deux cases de même valeur.

2 Fractions en tableur

a. Calculez puis donnez le résultat sous forme d'une fraction la plus simple possible :

$$A = \frac{-3}{7} \times \frac{5}{2} ; \quad B = \frac{2}{3} \times \frac{9}{2}$$

$$C = \frac{2}{3} + \frac{3}{4} ; \quad D = \frac{5}{6} + \frac{3}{8}$$

b. Vous allez créer un modèle de fichier tableur permettant de trouver le produit de deux fractions :

	A	B	C	D	E
1	-3	*	5	=	
2	7		2		

- Recopiez les cellules ci-dessus ;
- Dans la cellule E1, tapez « =A1*C1 » ;
- Dans la cellule E2, tapez « =A2*C2 » ;
- Utilisez cette feuille de calcul pour vérifier le résultat du calcul B (question a.). Que remarquez-vous ?

c. Sur le même fichier, vous allez maintenant construire un outil permettant de calculer la somme de deux fractions.

4	2	+	3	=	
5	3		4		

- Recopiez les cellules ci-dessus ;
- Que faut-il taper comme formules dans les cellules E4 et E5 ?
- Utilisez cette feuille de calcul pour vérifier le résultat du calcul D (question a.). Que remarquez-vous ?

d. Procédez de la même façon pour construire sur le même fichier quatre outils permettant :

- de calculer le produit de trois fractions ;
- de calculer la différence de deux fractions ;
- de calculer la somme de trois fractions ;
- de calculer le quotient de deux fractions.

e. Construisez un nouvel outil permettant de calculer la somme de deux fractions en faisant apparaître les étapes intermédiaires.

f. Refaites tous les calculs avec le fichier tableur qui se trouve en complément. Quelle est la nouveauté apportée par ce fichier par rapport au vôtre ?

g. Dans quels cas, les deux fichiers donnent-ils des résultats identiques ?

Se tester avec le QCM!

		R1	R2	R3	R4
1	La valeur arrondie au dixième de $\frac{2}{3}$ est...	0	1	0,6	0,7
2	Une valeur approchée de $\frac{19}{13}$ au millième près est...	1,46	1,461	1,462	1,4615
3	$\frac{-24}{-18} = \dots$	$\frac{20}{15}$	$-\frac{4}{3}$	1,33	$\frac{4}{3}$
4	L'opposé de $\frac{4}{5}$ est...	$\frac{5}{4}$	$-\frac{4}{-5}$	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{4}{5}$
5	$\left(\frac{4}{5}\right)^{-1} = \dots$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{4}{-5}$	$\frac{5}{4}$	$-\frac{4}{5}$
6	$\frac{37}{15}$ est supérieur à...	2	$\frac{77}{30}$	$\frac{598}{599}$	$\frac{25}{10}$
7	$\frac{-14}{5}$ est inférieur à...	$\frac{14}{-5}$	-2	$-\frac{14}{3}$	son inverse
8	$\frac{17}{24}$ est le résultat de...	$\frac{10}{12} + \frac{7}{12}$	$\frac{5}{24} + \frac{1}{2}$	$16 + \frac{1}{24}$	$\frac{15}{8} - \frac{7}{6}$
9	$\frac{-5}{6}$ est le résultat de...	$-\frac{1}{3} \times \frac{-5}{2}$	$-\frac{5}{11} \times \frac{11}{6}$	$\frac{-30}{36} \div 6$	$-5 \times \frac{1}{6}$
10	$-\frac{7}{5} \div \frac{2}{-3} = \dots$	2,1	$\frac{10}{21}$	$\frac{3,5}{1,6}$	$-\frac{21}{10}$
11	$\frac{2}{\frac{3}{4}} = \dots$	$2 \div 3 \div 4$	$\frac{8}{3}$	$\frac{2}{12}$	On ne peut pas calculer
12	$\frac{3}{2} + \frac{-3}{2} \times \frac{5}{6} = \dots$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{-33}{12}$	$\frac{-12}{14}$
13	L'inverse de $\frac{3}{5} + \frac{3}{11}$ est...	$\frac{16}{3}$	$\frac{55}{48}$	$\frac{16}{6}$	$\frac{48}{55}$
14	$\frac{3}{4}$ est égal...	au double de $\frac{3}{8}$	à la moitié de $\frac{63}{42}$	à $\frac{3+13}{4+13}$	à $\frac{-3}{x} \div \frac{-4}{x}$ pour tout nombre x

Récréation mathématique

Étourdi !

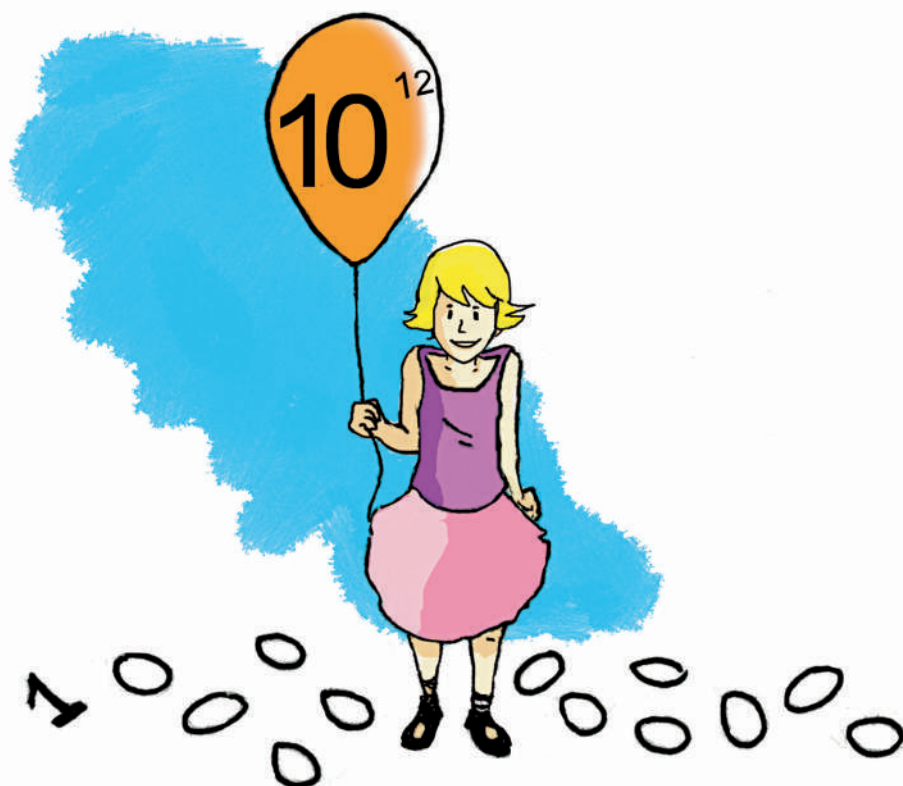
Un abreuvoir est alimenté par deux robinets. Lorsque le robinet d'évacuation est fermé, le premier robinet seul le remplit en 4 heures. Le deuxième robinet seul le remplit en 3 heures.

Lorsque l'abreuvoir est plein, le robinet d'évacuation le vide en 2 heures.

Alors que l'abreuvoir est vide, l'éleveur ouvre les deux robinets pour le remplir, mais oublie de fermer le robinet d'évacuation !

L'abreuvoir va-t-il quand même se remplir ?
Si oui, en combien de temps ?





Narration de recherche

1^{er} sujet :

Si je calcule 7^1 , le chiffre des unités est 7.

Si je calcule 7^2 , le chiffre des unités est 9.

Compare le chiffre des unités de 7^{1000} et de 3^{1000} d'une part, de 7^{1001} et de 3^{1001} d'autre part.

2^e sujet :

Si on calcule la différence $324 - 89$, on obtient 235.

La somme des chiffres de 235 est $2 + 3 + 5 = 10$.

Calcule la somme des chiffres des différences : $10^2 - 2$; $10^{10} - 10$; $10^{2002} - 2002$.

Activité 1 : Le triangle de Sierpinski

1. Répondre avec des 3 et des \times uniquement !

La figure de départ est un triangle équilatéral violet. On construit à l'intérieur de celui-ci un triangle bleu obtenu en joignant les milieux des côtés du triangle de départ.

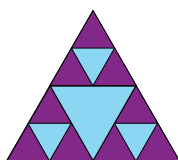
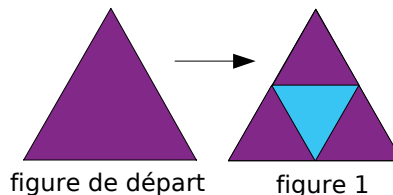


figure 2

a. De la même façon, on construit un petit triangle bleu dans chacun des triangles violets de la figure 1. Combien obtient-on de triangles violets dans la figure 2 ?

b. Imaginons que l'on continue à construire des triangles bleus dans les triangles violets. Combien a-t-on de triangles violets dans la figure 4 ? Puis dans la figure 7 (en n'utilisant encore que des 3 et des signes \times) ? Et dans la figure 20 ?

2. Une nouvelle notation : la notation « puissance »

La notation « puissance » est utilisée pour remplacer des produits comme dans les exemples suivants :

- $9 = \underbrace{3 \times 3}_{2 \text{ facteurs}} = 3^2$ qui se lit « 3 au carré » ou « 3 puissance 2 » ou « 3 exposant 2 »,
- $81 = \underbrace{3 \times 3 \times 3 \times 3}_{4 \text{ facteurs}} = 3^4$ qui se lit « 3 puissance 4 » ou « 3 exposant 4 ».

a. Écris, à l'aide de la notation « puissance », le nombre de triangles violets qu'il y a dans la figure 7 puis calcule ce nombre. Recommence pour la figure 20.

b. À l'aide de ta calculatrice, indique combien il y a de triangles violets dans la figure 13, la figure 18, la figure 10 et enfin dans la figure 15. Existe-t-il un moyen d'effectuer ces calculs facilement avec ta calculatrice ?

Activité 2 : Des produits avec 2, 3 et 5

1. Nous allons exprimer certains nombres sous la forme de produits. Dans cette activité, les seuls facteurs autorisés sont : 2 ; 3 et 5. Nous utiliserons la notation « puissance » dès que cela est possible.

Exemples : $25 = 5 \times 5$ peut s'écrire $25 = 5^2$;
 $48 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$ peut s'écrire $48 = 2^4 \times 3$;
 $90 = 2 \times 3 \times 3 \times 5$ peut s'écrire $90 = 2 \times 3^2 \times 5$.

a. Exprime de la même façon les nombres 4 ; 12 ; 27 ; 30 ; 45 et 108. Peut-on exprimer le nombre 26 de la même façon ? Justifie.

b. Un élève a écrit l'égalité suivante : $54 = 2^1 \times 3^3$. En considérant que sa réponse est bonne, combien vaut 2^1 ?

c. Un élève a écrit l'égalité suivante : $50 = 2^1 \times 3^0 \times 5^2$. En considérant que sa réponse est bonne, combien vaut 3^0 ?

d. Réécris les trois exemples du départ puis les nombres de la question a. sous la forme $2^a \times 3^b \times 5^c$ (a , b et c sont des nombres entiers, éventuellement égaux à 0 ou 1).

e. Trouve le plus possible de nombres inférieurs à 100 qui peuvent s'exprimer sous la forme d'un produit ne comportant que des 2, des 3 et des 5.

- 2.** On peut programmer un tableur pour qu'il calcule un produit lorsqu'on lui indique combien celui-ci comporte de 2, de 3 et de 5.
- a.** À l'aide du tableur, vérifie les résultats que tu as obtenus à la question **1.e.** puis poursuis ta recherche.
- b.** Comment être certain d'avoir terminé cette recherche ?

	A	B	C	D	E
1	2	Puissance	1 =		2
2	3	Puissance	1 =		3
3	5	Puissance	1 =		5
4					
5		Produit final	=		30

Activité 3 : Avec un exposant négatif

- 1.** En utilisant le fait que $5^5 = 3\,125$, Camille sait calculer 5^6 à l'aide de sa calculatrice, sans utiliser la touche « puissance ».
- a.** Comment fait Camille ? Calcule 5^6 avec sa méthode puis 5^7 et 5^8 .
- b.** En utilisant à nouveau le fait que $5^5 = 3\,125$, calcule maintenant 5^4 ; 5^3 et 5^2 le plus facilement possible (sans faire de multiplication, ni de calcul de puissance). Combien valent 5^1 et 5^0 ?
- 2.** En utilisant à nouveau sa calculatrice, Camille a découvert que $5^{-1} = 0,2$.
- a.** Vérifie à l'aide de ta calculatrice, puis essaie d'expliquer pourquoi ce résultat était prévisible. Écris 0,2 sous la forme d'une fraction irréductible.
- b.** À l'aide de divisions, calcule 5^{-2} et 5^{-3} et écris chaque nombre sous la forme d'une fraction. Que remarques-tu ?
- c.** Sans utiliser ta calculatrice, écris chaque nombre 2^{-1} ; 2^{-2} et 2^{-3} sous la forme d'une fraction.
- d.** Sans utiliser ta calculatrice, écris chaque nombre 7^{-4} ; 7^{-20} et 7^{-1000} sous la forme d'une fraction (tu peux utiliser la notation « puissance » au dénominateur).

Activité 4 : Écriture décimale d'une puissance de 10

- 1.** Donne l'écriture décimale des nombres suivants : 10^3 ; 10^5 et 10^9 .
- 2.** Recopie puis complète : « L'écriture décimale de 10^{12} est un 1 suivi de ... zéros. »
- 3.** Écris sous la forme d'une puissance de 10 les nombres suivants : 100 ; 1 000 000 et 1 000 000 000 000 000 000.
- 4.** Donne l'écriture décimale des nombres suivants : 10^{-2} ; 10^{-6} et 10^{-8} .
- 5.** Recopie puis complète : « L'écriture décimale de 10^{-12} comporte ... zéros suivis d'un 1 (la virgule étant placée après le premier ...). »
- 6.** Écris sous la forme d'une puissance de 10 les nombres suivants : 0,001 ; 0,000 000 01 et 0,000 000 000 000 000 1.

Activité 5 : Opérations avec des puissances de 10

1. Produit de puissances de 10

$$10^2 \times 10^3 = \underbrace{10 \times 10}_{\text{... facteurs}} \times \underbrace{10 \times 10 \times 10}_{\text{... facteurs}} = 10^{\dots} \quad 10^5 \times 10^4 = \underbrace{10 \times \dots \times 10}_{\text{... facteurs}} \times \underbrace{10 \times \dots \times 10}_{\text{... facteurs}} = 10^{\dots}$$

... facteurs au total

- Recopie puis complète les expressions ci-dessus.
- Calcule de la même façon : $10^5 \times 10^8$ et $10^7 \times 10^6$.
- Complète alors la formule suivante :
Pour tous nombres entiers positifs n et p : $10^n \times 10^p = 10^{\dots}$.

2. Quotient de puissances de 10

- Si on décompose $\frac{10^5}{10^2}$, on obtient $\frac{10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10}{10 \times 10}$.
Simplifie cette fraction et donne le résultat sous la forme d'une puissance de 10.
- Recommence avec les fractions suivantes : $\frac{10^7}{10^5}$ et $\frac{10^3}{10^2}$.
- Complète alors la formule suivante :
Pour tous nombres entiers positifs n et p : $\frac{10^n}{10^p} = 10^{\dots}$.

3. Puissance de puissances de 10

- Compte le nombre de facteurs 10 contenus dans l'écriture décomposée de $(10^2)^3$
- Recommence avec $(10^3)^5$. Combien aurait-on de facteurs 10 dans $(10^5)^8$?
- Complète alors la formule suivante :
Pour tous nombres entiers positifs n et p : $(10^n)^p = 10^{\dots}$.

- Les formules obtenues précédemment sont-elles encore valables pour n et p entiers négatifs ? Justifie.

Activité 6 : Toutes sortes de puissances

1. Des chinois sous différentes formes

La Chine compte actuellement environ 1 300 000 000 habitants. Donne le nombre d'habitants de la Chine en milliards ? Combien cela fait-il en millions ? Et en milliers ?

Complète : $1\,300\,000\,000 = \dots \times 10^9 = \dots \times 10^6 = \dots \times 10^3$.

2. Distances astronomiques

Dans le domaine de l'astronomie, le parsec sert à mesurer de très grandes distances entre les astres. Un parsec correspond à environ $3,086 \times 10^{16}$ m.

Complète : $1 \text{ parsec} = 3,086 \times 10^{16} \text{ m} = \dots \text{ cm} = \dots \text{ km} = \dots \text{ mm}$.

3. Globules rouges

La taille moyenne d'un globule rouge est 7×10^{-6} m.

Complète : $7 \times 10^{-6} \text{ m} = \dots \text{ cm} = \dots \text{ mm}$.

Activité 7 : Une nouvelle écriture d'un nombre

1. Des nombres de plus en plus grands

- À l'aide de ta calculatrice, détermine la valeur du produit suivant : $32\,768 \times 15\,625$.
- Détermine, sans utiliser ta calculatrice, l'écriture décimale de $327\,680 \times 156\,250$ (pense à utiliser le résultat précédent).
- Vérifie le résultat obtenu ci-dessus à l'aide de ta calculatrice. Obtiens-tu le même résultat ?
- Détermine, toujours sans utiliser ta calculatrice, l'écriture décimale de $327\,680\,000 \times 1\,562\,500$.
- Vérifie le résultat obtenu ci-dessus à l'aide de ta calculatrice. Obtiens-tu le même résultat ?

2. La notation scientifique des grands nombres

- Effectue les calculs suivants à l'aide de la calculatrice :

$$A = 9\,620\,000\,000 + 9\,870\,000\,000 ; B = 262\,144 \times 3\,906\,250 \text{ et } C = 30^9.$$

Trop de chiffres composent ces nombres pour que la calculatrice les affiche tous. Dans ce cas, la calculatrice affiche le produit d'un nombre par une puissance de 10. Il s'agit ici de l'écriture scientifique du nombre.

- Quels résultats affiche la calculatrice lorsqu'on lui fait calculer les produits suivants :

$$D = 791 \times 10^{15} \text{ et } E = 1\,298,4 \times 10^{13} ?$$

- Dans les écritures scientifiques obtenues précédemment, comment semble être le nombre affiché par la calculatrice avant la puissance de 10 ? Vérifie ta conjecture sur d'autres exemples et affine un encadrement de ce nombre.

Activité 8 : L'infiniment petit

Les experts de la physique rencontrent bien souvent dans leurs recherches des objets (que l'on appelle particules) invisibles à l'oeil nu. Pour les mesurer, ils utilisent des unités spécifiques aux petites mesures.

- Recherche au C.D.I. ou sur Internet à quoi correspondent : un micromètre, un nanomètre, un picomètre et un femtomètre. Quelles abréviations correspondent à ces unités ?
- Combien de micromètres forment un millimètre ? Combien de nanomètres forment un micromètre ? Que remarques-tu ?
- Un cheveu mesure environ 80 micromètres de diamètre. Convertis cette mesure en mètre.
- Le virus du SIDA mesure approximativement 100 nanomètres. Convertis cette mesure en mètre.
- L'une des petites particules qu'étudient les physiciens est le proton dont la mesure est approximativement 0,8 femtomètre. Convertis cette mesure en mètre.
- En micro-électronique, on utilise des composants appelés transistors. De nos jours, les plus petits transistors mesurent 0,065 micromètre. Sont-ils plus petits ou plus grands que le virus du SIDA ?

Méthode 1 : Utiliser les notations a^n et a^{-n}

À connaître

Pour tout nombre relatif a non nul et tout nombre entier n positif non nul :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ facteurs}} \quad \text{et} \quad a^{-n} = \frac{1}{\underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ facteurs}}} = \frac{1}{a^n}.$$

En particulier : $a^1 = a$ et $a^{-1} = \frac{1}{a}$. Par convention : $a^0 = 1$.

Exemple 1 : Donne l'écriture décimale des nombres : 2^4 et 10^{-3} .

$$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16 \quad \left| \quad 10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1\,000} = 0,001.$$

Exemple 2 : Donne l'écriture décimale des nombres : $3^2 \times 3^3$ et $\frac{2^3}{2^5}$.

$$3^2 \times 3^3 = (3 \times 3) \times (3 \times 3 \times 3) = 3^5 = 243 \quad \left| \quad \frac{2^3}{2^5} = \frac{2 \times 2 \times 2}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

À toi de jouer

1 Donne l'écriture décimale des nombres : $A = 3^4$; $B = (-10)^5$; $C = 2^{-5}$.

2 Donne l'écriture décimale des nombres : $D = \frac{7^5}{7^3}$; $E = (5 \times 3)^2$; $F = 2^7 \times 5^7$.

Méthode 2 : Appliquer les définitions pour des calculs simples

Exemple 1 : Donne l'écriture décimale du nombre $A = 4^3 + 250 \times 2^{-1} - 7$.

$$A = 4^3 + 250 \times 2^{-1} - 7$$

$$A = 64 + 250 \times \frac{1}{2} - 7 \quad \longrightarrow \quad \text{On calcule les puissances, qui sont prioritaires, en utilisant leur définition.}$$

$$A = 64 + 125 - 7 \quad \longrightarrow \quad \text{On effectue ensuite la multiplication.}$$

$$A = 182 \quad \longrightarrow \quad \text{On termine par l'addition et la soustraction.}$$

Exemple 2 : Donne l'écriture décimale du nombre $B = (3 - 1)^3 - (3 \times 4)^2$.

$$B = (3 - 1)^3 - (3 \times 4)^2$$

$$B = 2^3 - 12^2 \quad \longrightarrow \quad \text{On effectue d'abord les calculs entre parenthèses.}$$

$$B = 2 \times 2 \times 2 - 12 \times 12 \quad \longrightarrow \quad \text{On applique la définition des puissances.}$$

$$B = 8 - 144 \quad \longrightarrow \quad \text{On effectue ensuite les multiplications prioritaires.}$$

$$B = -136 \quad \longrightarrow \quad \text{On termine par la soustraction.}$$

À toi de jouer

3 Calcule : $C = 3 + 5 \times 2^3$; $D = 3 - 5 + 2^3$; $E = 3 + (5 \times 2)^3$; $F = (3 - 5) \times 2^3$.

Méthode 3 : Déterminer les signes des puissances...

À connaître

Pour tout nombre entier relatif n ,

- Si a est **positif** alors a^n est **positif**.
- Si a est **négatif** alors a^n est **positif** lorsque l'**exposant** n est **pair**, et **négatif** lorsque l'**exposant** n est **impair**.

Exemple : Quel est le signe de $A = (-3)^4$ et de $B = (-2)^{-5}$?

- Comme -3 est négatif et l'exposant 4 est pair, **A est un nombre positif**.
- Comme -2 est négatif et l'exposant -5 est impair, **B est un nombre négatif**.

À toi de jouer

4 Donne le signe de chacune des expressions suivantes :

$$C = (-15)^6$$

$$E = 15^{-6}$$

$$G = (-1)^3$$

$$I = 12^{-2}$$

$$D = -15^6$$

$$F = (15)^{-6}$$

$$H = -5^{-4}$$

$$J = -(-3)^{-2}$$

Méthode 4 : Multiplier par une puissance de 10

À connaître

Pour tout nombre entier positif n :

$$10^n = \underbrace{10 \times 10 \times \dots \times 10}_n = \underbrace{10 \dots 0}_n ; 10^{-n} = \underbrace{0,0 \dots 01}_n \text{ et } 10^0 = 1.$$

Multiplier un nombre par 10^n revient à décaler la virgule de n rangs vers la droite (on complète par des zéros si nécessaire).

Multiplier un nombre par 10^{-n} revient à décaler la virgule de n rangs vers la gauche (on complète par des zéros si nécessaire).

Remarque : **Multiplier** par 10^{-n} revient à **diviser** par 10^n .

Exemple 1 : Donne l'écriture décimale des nombres $208,641 \times 10^2$ et $37,1 \times 10^{-3}$.

$$208,641 \times 10^2 = 208,641 \times 100 = 20\,864,1 \quad | \quad 37,1 \times 10^{-3} = 37,1 \times 0,001 = 0,0371$$

Exemple 2 : Par combien faut-il multiplier 7,532 pour obtenir 75 320 ; par combien faut-il multiplier 7 pour obtenir 0,007 ?

- Pour passer de 7,532 à 75 320, on décale la virgule de 4 rangs à droite, donc il faut multiplier 7,532 par 10^4 pour obtenir 75 320.
- Pour passer de 7 à 0,007, on décale la virgule de 3 rangs vers la gauche, donc il faut multiplier 7 par 10^{-3} pour obtenir 0,007.

À toi de jouer

5 Donne l'écriture décimale des nombres :

$$A = 32,48 \times 10^6 ; B = 0,78 \times 10^2 ; C = 401 \times 10^{-2} ; D = 94,6 \times 10^{-4}.$$

6 Par combien faut-il multiplier :

- 234,428 pour obtenir 0,002 344 28 ?
- 5 000 pour obtenir 0,005 ?
- 0,3 pour obtenir 3 000 ?
- 3,4324 pour obtenir 343 240 ?

Méthode 5 : Appliquer les règles sur les puissances de 10

À connaître

Pour tous nombres entiers relatifs m et p :

$10^m \times 10^p = 10^{m+p}$ règle du **produit** de deux puissances de 10

$\frac{10^m}{10^p} = 10^{m-p}$ règle du **quotient** de deux puissances de 10

$(10^m)^p = 10^{m \times p}$ règle des **puissances** de puissance de 10

Exemple 1 : Donne l'écriture décimale du nombre $A = 10^4 \times 10^3$.

$$A = 10^4 \times 10^3 = 10^{4+3} = 10^7 = 10\,000\,000$$

Exemple 2 : Écris le nombre $B = \frac{10}{10^{-3}}$ sous la forme d'une seule puissance de 10.

$$B = \frac{10^1}{10^{-3}} \longrightarrow \text{On remarque que } 10 = 10^1.$$

$$\begin{aligned} B &= 10^{1 - (-3)} \\ B &= 10^{1+3} \end{aligned} \longrightarrow \text{On applique la règle du quotient de deux puissances de 10 (attention aux signes moins !).}$$

$$B = 10^4 \longrightarrow \text{On donne l'écriture demandée par l'énoncé.}$$

À toi de jouer

7 Écris sous la forme d'une seule puissance de 10 les expressions suivantes :

$$C = 10^6 \times 10^{-8}; \quad D = (10^{-1})^{-3}; \quad E = \frac{10^{-2}}{10^2}; \quad F = 10^2 \times 10^{-3} \times 10.$$

Méthode 6 : Écrire en notation scientifique

À connaître

Tout nombre décimal non nul peut être écrit en **notation scientifique**, c'est-à-dire sous la forme $a \times 10^n$, où a est un nombre décimal dont la distance à zéro est comprise entre 1 et 10 (10 exclu), c'est-à-dire **ayant un seul chiffre non nul avant la virgule**, et où n est un nombre **entier relatif**.

Le nombre a est appelé : **mantisse**.

Exemple : Écris le nombre $A = 6\,430$ en notation scientifique.

$$A = 6\,430$$

$$A = 6,43 \times 10^3 \longrightarrow \text{On déplace la virgule de manière à obtenir un nombre ayant un seul chiffre non nul avant la virgule, puis on multiplie par la puissance de 10 de manière à avoir égalité.}$$

L'écriture scientifique de A est donc **$6,43 \times 10^3$** .

À toi de jouer

8 Donne l'écriture scientifique des nombres suivants :

$$B = 21\,600; \quad C = 0,012; \quad D = 58,4 \times 10^2; \quad E = 0,147 \times 10^{-1}.$$

Méthode 7 : Multiplier ou diviser avec des puissances de 10

À connaître

Dans un calcul ne comportant que des multiplications et divisions, on **regroupe** les nombres écrits sous la forme de **puissances de 10** d'un côté et **les autres nombres** de l'autre côté, puis on calcule avec les règles habituelles.

Exemple :

Donne l'écriture décimale du nombre $A = \frac{14 \times 10^{-3} \times 5 \times 10^6}{2 \times 10^4}$.

$$A = \frac{14 \times 5}{2} \times \frac{10^{-3} \times 10^6}{10^4} \longrightarrow \text{On regroupe les puissances de 10.}$$

$$A = 35 \times \frac{10^{-3+6}}{10^4} \longrightarrow \text{On calcule l'écriture fractionnaire et on applique la règle du produit de deux puissances de 10 (voir la méthode 5).}$$

$$A = 35 \times \frac{10^3}{10^4}$$

$$A = 35 \times 10^{3-4} \longrightarrow \text{On applique la règle du quotient de deux puissances de 10 (voir la méthode 5).}$$

$$A = 35 \times 10^{-1}$$

$$A = 3,5 \longrightarrow \text{On donne l'écriture demandée par l'énoncé.}$$

L'écriture décimale de A est donc **3,5**.

À toi de jouer

9 Calcule et donne le résultat en écriture décimale puis en écriture scientifique de :

$$B = \frac{5 \times 10^2 \times 9 \times 10^{-5}}{2 \times 10^{-6}} \quad \left| \quad C = \frac{3 \times 10^5 \times 2 \times 10^{-2}}{8 \times 10^4} \quad \left| \quad D = \frac{3 \times 10^2 \times 1,2 \times 10^{-5}}{15 \times 10^2}$$

Méthode 8 : Comparer en utilisant l'écriture scientifique

À connaître

Pour **comparer** deux nombres, on peut comparer leurs **ordres de grandeur** à l'aide de leurs **écritures scientifiques**.
En cas d'égalité des exposants, on compare alors les mantisses.

Exemple : Compare $A = 1,7 \times 10^3$ et $B = 2,5 \times 10^{-2}$ puis compare $C = 12,4 \times 10^3$ et $D = 3,1 \times 10^4$.

- L'ordre de grandeur de A est 10^3 alors que B est de l'ordre de 10^{-2} . Donc **A > B**.
- On écrit C en notation scientifique : $C = 1,24 \times 10 \times 10^3 = 1,24 \times 10^4$.
L'ordre de grandeur de C est donc 10^4 tout comme l'ordre de grandeur de D.
Mais comme $1,24 < 3,1$, alors $1,24 \times 10^4 < 3,1 \times 10^4$ et donc **C < D**.

À toi de jouer

10 Range dans l'ordre croissant les nombres suivants :

$$E = 33,5 \times 10^{-3} ; F = 7,2 \times 10^3 ; G = 0,02 \times 10^{-2} ; H = 99,1 \times 10^{-4}$$

Puissance d'un nombre

1 Voici une liste de mots : exposant, puissance, facteurs, produit. Recopie chaque phrase en la complétant par le mot qui convient.

- a. 3^7 se lit « 3 ... 7 ».
 b. 5^4 est le ... de quatre ... tous égaux à 5.
 c. 8 est l'... de 6^8 .
 d. Le ... de six ... égaux s'écrit sous la forme d'une ... d'... 6.

2 D'une écriture à l'autre

- a. Écris en toutes lettres : 3^4 ; 2^3 ; $7,1^9$ et $(-4)^2$.
 b. Écris en expressions mathématiques :
 • huit puissance neuf • trois puissance cinq
 • quatre au cube • sept au carré

3 Recopie et complète chaque expression par l'exposant manquant :

- a. $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^{\dots}$
 b. $(-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) = (-5)^{\dots}$
 c. $0,1 \times 0,1 \times 0,1 = 0,1^{\dots}$

4 Décompose chaque nombre comme dans l'exercice 3 :

- a. 9^4 c. 5^7 e. $5,3^4$
 b. 2^3 d. $(-7)^5$ f. $(-0,8)^3$

5 Quels sont les nombres négatifs :

- a. $(-6)^4$ d. $(-12)^{15}$ g. $-(-35)^7$
 b. 6^8 e. $(-3)^7$ h. -87^4
 c. -132^{51} f. $(-3,6)^{100}$ i. $-(-13^8)$

6 Puissance de 1 ou de -1

Calcule :

- a. 1^{12} c. $(-1)^8$ e. -1^7 g. $(-1)^9$
 b. 1^0 d. $(-1)^0$ f. -1^6 h. -1^0

7 Exposant 0 ou 1

Calcule :

- a. 4^0 c. $(-6)^0$ e. $0,5^1$ g. $(-1,8)^1$
 b. $0,5^1$ d. $1,2^1$ f. -5^1 h. -7^0

8 Décompose puis donne l'écriture décimale en calculant à la main :

- a. 2^4 c. $0,1^5$ e. $(-3)^4$ g. $(-6)^3$
 b. 7^2 d. $1,2^2$ f. -3^4 h. $-1,1^3$

9 Donne l'écriture décimale en calculant à la calculatrice :

- a. 2^{14} c. 8^{11} e. -3^{10} g. $(-0,4)^5$
 b. 17^7 d. $1,2^6$ f. $(-11)^8$ h. $-6,6^4$

10 Écris les nombres suivants sous la forme d'un produit :

- a. de puissances de 2 et de 5 :
 $A = 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5$
 $B = 25 \times 10 \times 5 \times 8$ $C = 625 \times 512$
 b. de puissances de 2, de 3 et de 7 :
 $D = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 7 \times 7$ $F = 12 \times 21 \times 49$
 $E = 32 \times 21 \times 12$ $G = 42$

11 Recopie et complète :

- a. $12^{-5} = \frac{1}{12^{\dots}}$ d. $\frac{1}{9^{\dots}} = 9^{-23}$ g. $1,5^2 = \frac{1}{1,5^{\dots}}$
 b. $7^{\dots} = \frac{1}{7^5}$ e. $\frac{1}{8^{\dots}} = 8$ h. $(-7)^3 = \frac{1}{(-7)^{\dots}}$
 c. $8^{-6} = \frac{1}{8^{\dots}}$ f. $\frac{1}{21^{\dots}} = 21^{15}$ i. $(-3)^{-8} = \frac{1}{(-3)^{\dots}}$

12 Décompose puis donne l'écriture fractionnaire en calculant à la main :

- a. 2^{-5} c. 4^{-3} e. $(-3)^{-4}$ g. $-1,1^{-3}$
 b. 5^{-1} d. $0,1^{-2}$ f. -3^{-4} h. $(-20)^2$

13 Donne l'écriture décimale en calculant à la calculatrice :

- a. 2^{-14} c. 8^{-7} e. $(-11)^{-4}$ g. -4^{-10}
 b. 17^{-3} d. 3^{-10} f. $(-1,2)^{-6}$ h. $-0,6^{-7}$

14 Écris sous la forme d'un produit :

- a. de puissances de 2 et de 5 :
 $A = \frac{2 \times 2 \times 2}{5 \times 5 \times 5 \times 5}$ $B = \frac{25}{16}$
 b. de puissances de 2, de 3 et de 7 :
 $C = \frac{2 \times 3 \times 7}{3 \times 3 \times 7 \times 7}$ $D = \frac{1}{49 \times 32 \times 27}$

15 Inverse ou opposé ?

Recopie chaque phrase en la complétant par le mot qui convient.

- a. 7^{-5} est l'... de 7^5 d. 5^3 est l'... de 5^{-3}
 b. -6^2 est l'... de 6^2 e. 3^{-4} est l'... de -3^{-4}
 c. 0,1 est l'... de 10 f. -5 est l'... de 5.

16 Avec des fractions

Écris chaque nombre sous la forme d'une fraction irréductible :

$$A = \left(\frac{3}{5}\right)^2 \quad C = -\left(\frac{-3}{10}\right)^5 \quad E = \left(\frac{5}{2}\right)^{-3}$$

$$B = \left(\frac{-1}{4}\right)^3 \quad D = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \quad F = \left(\frac{-1}{2}\right)^{-4}$$

Calculs avec des puissances

17 Calcule, sans calculatrice, les expressions suivantes :

$$A = 3 \times 2^4 + 5 \times 4^3$$

$$B = 1 + 10 + 10^2 + 10^3 + 10^4 + 10^5$$

$$C = 1 - 3^2 \times (-5)^2$$

$$D = 2^3 \times (-9) + 3^3 - (5^2 + 2^{-1})$$

18 Calcule les expressions suivantes en utilisant ta calculatrice :

a. $25^3 - (5 + 11)^{-5}$ c. $\frac{(2+7)^5}{5 - (-2)}$ d. $\left(\frac{-3}{8}\right)^4$
 b. $\frac{17}{2 + 2^{-3}}$

19 Voici deux expressions :

$$A = 2x^3 - 7x^2 + 6 \text{ et } B = 5x^4 + 6x - 7.$$

Calcule A et B :

- a. pour $x = 3$; c. pour $x = 0,2$;
 b. pour $x = -5$; d. pour $x = 0$.

20 Extrait du Brevet

Compléter après avoir effectué les calculs.

a	2a	a ²	2a ²	(2a) ²
2				
-3				

21 Écris sous la forme d'une puissance :

a. $3^4 \times 3^2$	d. $\frac{2^4}{2^5}$	f. $(7^2)^3$	i. $7^5 \times 2^5$
b. $4^3 \times 4^{-5}$		g. $(4^{-2})^3$	j. $3^{-4} \times 5^{-4}$
c. $(-5)^4 \times (-5)^3$	e. $\frac{3^2}{3^{-3}}$	h. $((-1)^2)^{-3}$	k. $8^3 \times 4^3$

22 Calcule astucieusement :

$$A = 2^4 \times 0,026 \times 5^4 \quad C = 2^{-3} \times 5^{-3} \times 2\,500$$

$$B = 5^{-2} \times 2^{-2} \times 84 \quad D = 2^6 \times 36 \times 5^5$$

Puissances de 10

23 Donne l'écriture décimale des nombres :

- a. 10^4 c. 10^8 e. 10^5 g. $(-10)^1$
 b. 10^6 d. 10^0 f. -10^0 h. $(-10)^{10}$

24 Écris à l'aide d'une puissance de 10 :

- a. 10 000 ; 10 000 000 ; 1 000 000 ; 1 000.
 b. cent ; cent mille ; un milliard ; mille milliards.

25 Donne l'écriture décimale des nombres :

- a. 10^{-1} b. 10^{-4} c. -10^{-3} d. $(-10)^{-3}$

26 Écris à l'aide d'une puissance de 10 :

- a. 0,01 ; 0,000 0001 ; 0,001.
 b. un dixième ; un millième ; un millionième.
 c. $\frac{1}{10\,000}$; $\frac{1}{1\,000\,000}$; $\frac{1}{100\,000\,000}$.

27 Produit de puissances

Exprime sous la forme d'une puissance de 10 :

- a. $10^5 \times 10^7$ d. $10^{-11} \times 10^3 \times 10^2$
 b. $10^4 \times 10^{-12}$ e. 10×10^5
 c. $10^{-8} \times 10^9$ f. $10^{-6} \times 10^6$

28 Quotient de puissances

Exprime sous la forme d'une puissance de 10 :

- a. $\frac{10^8}{10^4}$ c. $\frac{10^{-7}}{10^{-2}}$ e. $\frac{10}{10^{-2}}$ g. $\frac{10^{-3}}{10^3}$
 b. $\frac{10^5}{10^{-4}}$ d. $\frac{10^{-3}}{10^9}$ f. $\frac{10^3}{10^3}$ h. $\frac{10^{-5}}{10^{-3}}$

29 Puissance de puissances

Exprime sous la forme d'une puissance de 10 :

- a. $(10^3)^7$ c. $(10^6)^{-3}$ e. $(10^{-8})^{25}$
 b. $(10^{-8})^2$ d. $(10^{-9})^{-7}$ f. $(10^{-10})^{-10}$

30 Méli-mélo

Écris chaque expression sous la forme d'une puissance de 10 :

- a. $(10^9)^4$ f. $10^{-9} \times 10^{12}$
 b. $\frac{10^{-4}}{10^9}$ g. $\frac{10^{-7}}{10^8}$
 c. $10^{12} \times 10^{-8} \times 10^5$ h. $(10^{-3})^{-6}$
 d. $\frac{10^{-6}}{10^6}$ i. $\frac{10^{10}}{10^{-5}}$
 e. $\frac{10^{41} \times 10^7}{10^{-39}}$ j. $\frac{10^{21}}{10^{-4} \times 10^{-18}}$

31 Recopie et complète par l'exposant manquant. Tu indiqueras sur ton cahier l'opération que tu as effectuée pour trouver ce nombre :

- a. $10^4 \times 10^{\dots} = 10^7$ c. $10^8 \times 10^{\dots} = 10^{-12}$
 b. $10^{\dots} \times 10^{-7} = 10^{-5}$ d. $10^8 \times 10^{\dots} = 10^4$

32 Extrait du Brevet

Calculer :

- a. 10^2 ; 2^3 puis $10^2 + 2^3$
 b. 10^3 ; 10^{-2} puis $10^3 \times 10^{-2}$

Avec des puissances de 10

33 Complète les phrases suivantes :

- a. Lorsque je multiplie un nombre positif par 10^2 , j'obtiens un résultat ... fois plus ... que le nombre de départ.
 b. Lorsque je multiplie un nombre positif par 10^{-3} , j'obtiens un résultat ... fois plus ... que le nombre de départ.
 c. Lorsque je multiplie un nombre positif par 10^6 , j'obtiens un résultat ... fois plus ... que le nombre de départ.
 d. Lorsque je multiplie un nombre positif par 10^{-1} , j'obtiens un résultat ... fois plus ... que le nombre de départ.

34 Parmi les nombres suivants, quels sont ceux écrits en notation scientifique ?

- a. $5,23 \times 10^{12}$ d. $-1,47 \times 10^6$
 b. $72,43 \times 10^{-8}$ e. $0,251 \times 10^3$
 c. $2,45 \times 100^{-9}$ f. $-7,6$

35 Associe à chaque nombre de gauche son écriture scientifique :





45,68	•	•	$4,568 \times 10^{-1}$
456,8	•	•	$4,568 \times 10^1$
0,4568	•	•	$4,568 \times 10^{-3}$
0,004568	•	•	$4,568 \times 10^2$

36 Écris les nombres suivants en notation scientifique :

- a. 7 283 d. 12,47 g. $0,67 \times 10^2$
 b. 25 000 e. 0,005 8 h. 159×10^{-5}
 c. 654,98 f. 0,000 149 i. $0,009 \times 10^{-7}$

37 Avec la calculatrice

Voici plusieurs écrans de calculatrice. Écris sur ton cahier l'écriture décimale correspondant à chaque affichage :

- a.  b. 
 c.  d. 

38 Voici quatre nombres :

- a. 270 000 000 000 000 000
 b. $-369\,000\,000\,000$
 c. 0,000 000 000 745
 d. $-0,000\,000\,692\,98$

Pour chacun de ces nombres, recopie l'affichage de ta calculatrice si tu choisis le mode scientifique.

39 Extrait du Brevet

Calculer et donner le résultat sous la forme d'une écriture scientifique, puis décimale :

- a. $150 \times 10^3 \times 8 \times 10^5$ d. $2 \times 10^9 \times 7 \times 10^{-6}$
 b. $2 \times 10^3 \times 5 \times (10^{-5})^2$ e. $3 \times 10^2 \times 1,2 \times 10^{-5}$
 c. $3 \times 10^8 \times 4 \times 10^{-5}$ f. $5 \times 10^2 \times 0,3 \times 10^{-6}$



40 Le cerveau humain est composé de 100 milliards de neurones. À partir de 30 ans, ce nombre de neurones baisse d'environ 100 000 par jour. En considérant qu'une année contient 365 jours, donne l'écriture décimale puis scientifique du nombre de neurones d'un humain de 40 ans.

41 La lumière est composée de photons qui se déplacent à la vitesse moyenne de 300 000 km par seconde. Une année-lumière correspond à la distance parcourue par un de ces photons en une année.

a. À quelle distance en km correspond une année-lumière? Tu écriras la réponse en notation scientifique.

b. La distance du centre du soleil au centre de la terre est $1,5 \times 10^8$ km. Exprime cette distance en année-lumière.

42 *Extrait du Brevet*

a. Calcule A et donne le résultat sous forme fractionnaire la plus simple possible :

$$A = \frac{14 \times 10^5 \times 35 \times 10^{-3}}{21 \times 10^3}$$

b. Écris B sous la forme $a \times 10^n$ où a est un nombre entier et n un nombre entier relatif :

$$B = \frac{35 \times 10^{-3} \times 3 \times 10^5}{21 \times 10^{-1}}$$

c. Calcule et donne le résultat en écriture scientifique de : $C = \frac{5 \times 10^{-3} \times 12 \times 10^6}{15 \times 10^2 \times 8 \times 10^{-5}}$

d. Donne les écritures décimale et scientifique de : $D = \frac{3 \times 10^2 \times 1,2 \times (10^{-3})^4}{0,2 \times 10^{-7}}$

43 *Notation ingénieur*

Un nombre en notation ingénieur est un nombre qui s'écrit sous la forme $a \times 10^p$ où a est un nombre décimal relatif compris entre 1 et 1000 ou entre -1000 et -1 et p est un multiple de 3.

Écris les nombres suivants en notation ingénieur :

- | | |
|---------------------|------------------------------------|
| a. 5 600 000 | f. 14×10^{-7} |
| b. 0,1257 | g. $0,000\ 458 \times 10^4$ |
| c. 450 000 | h. $0,257 \times 10^{-4}$ |
| d. 98,62 | i. $-1\ 400 \times 10^{-5}$ |
| e. 0,000 587 | j. $-2,7 \times 10^5$ |

44 Complète le tableau suivant :

écriture décimale	notation scientifique	notation ingénieur	notation $a \times 10^p$ où a est un entier le plus petit possible et p un entier relatif
583 000			
27,235			
0,00584			
			234×10^4
	$7,2 \times 10^{-5}$		

45 *Extrait du Brevet*

Le cœur humain effectue environ 5 000 battements par heure.

- Écrire 5 000 en notation scientifique.
- Calculer le nombre de battements effectués en un jour, sachant qu'un jour dure 24 heures.
- Calculer le nombre de battements effectués pendant une vie de 80 ans. On considère qu'une année correspond à 365 jours. Donner la réponse en notation scientifique.

46 *Ordre de grandeur*

Donne un encadrement par deux puissances de 10 consécutives :

- en nombre d'années, de l'âge de la Terre qui est d'environ 4,5 milliards d'années.
- en mètre, de la largeur d'une bactérie qui peut atteindre $3 \mu\text{m}$.
- en Hertz, de la fréquence d'un processeur tournant à 4,1 GHz.

47 On considère un cube de volume $19\ 683 \times 10^{12} \text{ mm}^3$.

- Donne la notation scientifique de ce volume.
 - Convertis ce volume en mètre cube.
 - Détermine la longueur de l'arête du cube.
- Indication : Tu peux écrire le volume sous la forme d'un produit de puissances de 2, 3 et 5.

48 *Extrait du Brevet*

La masse d'un atome de carbone est égale à $1,99 \times 10^{-26} \text{ kg}$. Les chimistes considèrent des paquets contenant $6,022 \times 10^{23}$ atomes.

- Calculer la masse en grammes d'un tel paquet d'atomes de carbone.
- Donner une valeur arrondie de cette masse à un gramme près.

49 La numération moderne

$3 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 4 \times 10^0$ est la décomposition en base « dix » de 3 234. Décompose les nombres 4 367 214 et 5,348 en base « dix ».

50 Les limites de la calculatrice

a. Avec la calculatrice, donne un ordre de grandeur du produit de 987 654 par 876 534.

b. Calcule le résultat exact de ce produit.

51 Multiple et diviseur

a. Retrouve les nombres entiers positifs non nuls n , m et p tels que :

$$349\,272 = 2^n \times 3^m \times 7^p \times 11$$

b. Retrouve les nombres entiers positifs non nuls r , s et t tels que :

$$36\,288 = 2^r \times 3^s \times 7^t$$

c. On considère :

$$N = 2^3 \times 3^3 \times 7$$

Sans calculer la valeur de N , montre que N est un diviseur commun à 349 272 et à 36 288.

d. On considère :

$$M = 2^6 \times 3^4 \times 7^2 \times 11$$

Sans calculer la valeur de M , montre que M est un multiple commun à 349 272 et à 36 288.

52 Coupe de la Terre

La structure interne de la Terre a été découpée en plusieurs couches en fonction des différentes densités de matière calculées :

- la croûte terrestre qui est épaisse d'une centaine de km ;
- le manteau supérieur qui s'enfonce jusque - 650 km ;
- le manteau inférieur qui s'étale sur près de 2 200 km ;
- le noyau externe qui s'étale sur presque 2 300 km ;
- le noyau interne.

b. Le rayon de la Terre étant de 6 400 km environ, exprime l'étendue de chaque couche en écriture scientifique (on donnera le résultat en km, puis un ordre de grandeur en cm).

c. Dessine la coupe de la structure de la Terre à l'échelle 1/100 000 000.

53 Échelle des temps géologiques

a. L'histoire de la Terre se divise en quatre éons : les trois éons précambiens de - 4 500 millions d'années à - 550 millions d'années, puis l'éon phanérozoïque qui s'étale jusqu'à nos jours. Dessine une frise chronologique (1 cm pour 250 000 000 années) et repère, en couleur, les quatre éons.

b. Le dernier éon se décompose en quatre ères :

- l'ère primaire de $- 5,42 \times 10^8$ (années) à $- 2,54 \times 10^8$;
- l'ère secondaire de $- 2,5 \times 10^8$ à $- 7 \times 10^7$;
- l'ère tertiaire de $- 7 \times 10^7$ à $- 1,8 \times 10^6$;
- l'ère quaternaire de $- 1,8 \times 10^6$ à nos jours.

Dessine un zoom du dernier éon en prenant 5 cm pour 100 000 000 années. Repère, en couleur, sur cette échelle les trois premières ères. Quelle est la durée de l'ère tertiaire ?

c. On considère, ci-dessous, les dates de quelques événements majeurs (M signifie « millions d'années ») :

- 4 550 M : solidification de la croûte terrestre
- 2 500 M à - 2 000 M : apparition de l'oxygène
- 542 M à - 500 M : premières algues
- 443 M à - 419 M : premières plantes terrestres
- 339 M à - 303 M : premiers reptiles
- 251 M à - 203 M : premiers dinosaures
- 161 M à - 150 M : premiers oiseaux
- 99 M à - 70 M : extinction des dinosaures
- 56 M à - 37 M : apparition des premiers mammifères modernes
- 1,8 M à - 0,1 M : évolution de l'homme moderne

- 11 400 années : sédentarisation de l'homme

Place ces événements sur les deux frises. Quelles difficultés rencontres-tu ? Quel nouveau zoom proposes-tu pour repérer les derniers événements ?

54 Range dans l'ordre croissant les masses des planètes suivantes exprimées en kg :

Mercure	$3,302 \times 10^{23}$	Vénus	$4,8685 \times 10^{24}$
Terre	$5,973 \times 10^{24}$	Mars	$6,4185 \times 10^{23}$
Jupiter	$1,8986 \times 10^{27}$	Saturne	$5,6846 \times 10^{26}$
Uranus	$8,6832 \times 10^{25}$	Neptune	$1,0243 \times 10^{26}$

55 Planètes du système solaire

a. Écris en notation scientifique puis donne un ordre de grandeur des distances moyennes suivantes du Soleil aux planètes :

SP₁ : 4 498,253 × 10⁶ km ;

SP₂ : 108 208 930 km ;

SP₃ : 57 909,18 × 10³ km ;

SP₄ : 227 936,640 × 10³ km ;

SP₅ : 77,84 × 10⁷ km ;

SP₆ : 149,597 89 × 10⁶ km ;

SP₇ : 28,709 722 20 × 10⁸ km ;

SP₈ : 1,426 725 × 10⁹ km.

b. À l'aide d'une encyclopédie ou autre, retrouve le nom de chaque planète.

c. Sur un axe gradué ayant pour origine la position du Soleil, et à l'échelle 1/15 000 000 000 000, représente la position de chaque planète.

56 L'échiquier et les grains de blé

Scheran, monarque indien, promet à Sissa, l'inventeur du jeu d'échec, de lui donner tout ce qu'il voudrait en guise de récompense. Sissa répondit : "Que votre Majesté daigne me donner un grain de blé pour la première case de l'échiquier, deux pour la seconde, quatre pour la troisième, et ainsi de suite, en doublant jusqu'à la soixante-quatrième case."

a. Penses-tu, comme le monarque, que cette demande est ridiculement modeste ?

b. Combien de grains de blé seront-ils donnés pour la 2^e case ? Pour la 3^e ? Pour la 5^e ? Pour la 10^e ? Pour la 20^e ? Pour la 30^e ? Pour la 64^e ?

c. Vérifie les égalités suivantes :

$$2^0 + 2^1 = 2^2 - 1 ; \quad 2^0 + 2^1 + 2^2 = 2^3 - 1 ;$$

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 = 2^4 - 1.$$

En utilisant la dernière égalité, démontre que

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 2^5 - 1.$$

En déduire le nombre total de grains réclamés par Sissa.

d. Arthur désire savoir à quoi correspond concrètement cette quantité. Il se procure donc des grains de blé, en compte 1 000 et les pèse. Il en déduit qu'en moyenne, un grain pèse 50 mg. Estime en g, en kg et en t, la masse totale des grains réclamés par Sissa.

e. Selon la FAO (Organisation des Nations Unies pour l'alimentation et l'agriculture), la France a produit en 2004 près de 40 millions de tonnes de blé. Combien d'années équivalentes à 2004 seraient nécessaires pour que les producteurs français puissent honorer la promesse du monarque ?

57 L'unité d'enregistrement informatique

En informatique, on utilise une unité d'enregistrement appelée « octet ».

Calcule, en octets, la valeur des expressions suivantes :

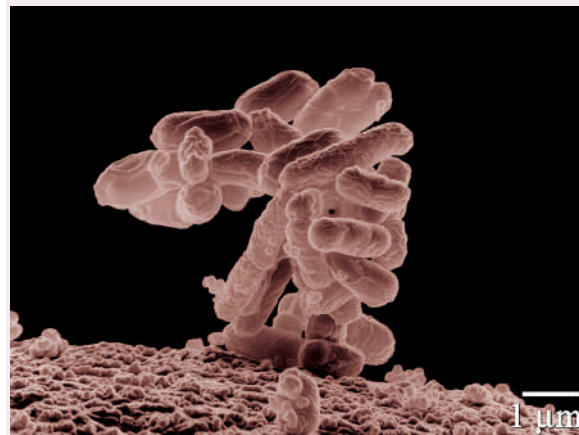
$$A = 2^{10} \text{ octets}, B = 2^{20} \text{ octets}, C = 2^{30} \text{ octets}.$$

Explique pourquoi l'expression A est généralement appelée « 1 kilooctet ». On note $A \approx 1 \text{ ko}$ (10³ octets). Par approximation, on écrit $A = 1 \text{ ko}$.

De même, B est appelé « 1 Mégaoctet » (1 Mo) et C « 1 Gigaoctet » (1 Go). Indique par quelles puissances de 10, se traduisent les préfixes « méga » et « giga » ?

58 La Bactérie Escherichia coli

a. Un micromètre, noté 1 μm, vaut 10⁻⁶ m. Donne l'écriture décimale d'un micromètre exprimé en m.



http://en.wikipedia.org/wiki/Image:E_coli_at_10000x%2C_original.jpg

b. Grâce à l'unité indiquée sur la photographie, retrouve l'échelle de ce grossissement : $\times 10^4$. Mesure la taille de cette bactérie (un bâtonnet) sur la photographie et déduis-en la taille réelle, en mètre, de la bactérie.

c. Dans un milieu riche, à 37°C, une population de cette bactérie peut doubler en 20 minutes. Dans ces conditions optimales, combien de bactéries peut-on obtenir, en une journée, à partir d'une population initiale de 100 individus ? Après combien de temps cette population dépasse-t-elle le million d'individus ?

d. Recherche en quoi cette bactérie est à la fois nuisible et nécessaire pour la santé humaine.

e. Plusieurs méthodes de conservation des aliments sont utilisées. Retrouves-en quelques unes et explique pourquoi ces méthodes évitent ou ralentissent la multiplication des bactéries.

59 Énergie

L'E.I.A. (Energy Information Administration) publie régulièrement les productions mondiales moyennes journalières de pétrole.

Production moyenne en milliers de barils par jour :

	1970	2004
États-Unis	11 673	8 700
Monde	48 986	83 005

a. Calcule les productions annuelles américaines et mondiales en milliers de barils par jour pour ces deux dates et donne un ordre de grandeur du résultat.

b. Calcule la part des États-Unis, en pourcentage, dans la production mondiale pétrolière en 1970 et en 2004.

Voici maintenant les consommations mondiales moyennes journalières de pétrole (source : BP Statistical Review of World Energy, June 2006) :

Consommation moyenne en milliers de barils par jour :

	1970	2004
États-Unis	14 710	20 732
Monde	46 103	81 444

c. Reprends les questions **a.** et **b.** mais cette fois avec les consommations pétrolières.

60 L'eau : de l'atome aux océans

L'unité de masse atomique unifiée (symbole u) est une unité de mesure standard, utilisée pour mesurer la masse des atomes : $1 u = 1,66054 \times 10^{-27} \text{ kg}$ (valeur fournie par le Bureau International des Poids et Mesures). La masse d'un atome d'hydrogène est $1 u$ et celle d'un atome d'oxygène est $16 u$.

a. Une molécule d'eau est constituée d'un atome d'oxygène et de deux atomes d'hydrogène. Calcule la masse théorique d'une molécule d'eau.

b. On admet qu'un litre d'eau pèse 1 kg . Calcule le nombre théorique de molécules d'eau dans un litre.

c. Une estimation du volume total des océans est de $1,370$ milliard de km^3 . Donne un ordre de grandeur du nombre théorique de molécules d'eau présentes dans les océans.

d. Le débit moyen de la Seine à Paris est d'environ 250 m^3 par seconde. Donne une estimation du nombre de molécules d'eau qui passe sous le pont de l'Alma chaque seconde, puis chaque année.

61 Les molécules H_2O , O_2 et H_2

Une molécule d'eau est composée de 2 atomes d'hydrogène, notés H , et d'un atome d'oxygène, noté O . Par électrolyse de l'eau, des chimistes cassent les liaisons entre les atomes. Il est alors possible de former des molécules de dihydrogène notées H_2 et de dioxygène notées O_2 . À l'état libre, le rayon d'un atome d'oxygène est de $15,2 \text{ nm}$ et celui d'un atome d'hydrogène est de 12 nm .

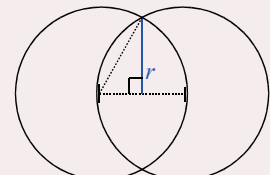
a. Donne en écriture scientifique la taille d'un atome d'oxygène (1 nanomètre, noté 1 nm vaut $0,000\,000\,001 \text{ m}$). Convertis en mètre.

b. Quelle est la distance théorique qui sépare deux atomes d'oxygène à l'état libre collés l'un à l'autre ?

c. Dans la molécule de dioxygène O_2 , la distance entre les centres des atomes d'oxygène est de $14,6 \text{ nm}$. Cette proximité des centres est due à des forces électrostatiques qui rendent la molécule très stable.



Molécule de dioxygène (fig. 1) Coupe des deux atomes d'oxygène (fig. 2)



Retrouve le rayon r du « disque d'intersection » des deux atomes d'oxygène (fig. 2).

d. Recherche pourquoi ce gaz, le dioxygène, est si important pour l'Homme.

62 Énergie électrique

En 2005, la production totale nette d'électricité en France s'élève à $549,4 \text{ TWh}$. Elle se répartit en $430,0 \text{ TWh}$ pour les centrales nucléaires, $57,2 \text{ TWh}$ pour les parcs hydrauliques et éoliens et $62,2 \text{ TWh}$ pour les différentes productions thermiques classiques.

Source : DGEMP / Observatoire de l'énergie.

a. Que représente un TWh ? Écris chaque valeur en Wh .

b. Calcule la part, en pourcentage, de chaque catégorie dans la production totale nette d'électricité.

c. Dessine un diagramme circulaire mettant en valeur la part de chaque catégorie dans la production totale nette d'électricité en France pour l'année 2005.

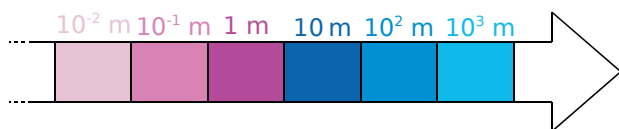
1 Si j'étais une fourmi...

1^{re} Partie : Référentiel

Voici une liste de seize êtres ou objets :

Diamètre du soleil	Cellule humaine
Électron	Noyau d'un atome
Fourmi	Une année-lumière
Enfant	Diamètre d'un cheveu
Tour Eiffel	Tour de Pise
Ballon	Atome
Bactérie	Diamètre de la galaxie
Bille	Distance Terre/Soleil

a. Construisez une frise graduée de 10^{-15} m à 10^{20} m selon le modèle ci-dessous, puis placez chacun de ces êtres ou objets dans une des cases de la frise :



b. Répondez alors aux questions suivantes :

- Par combien sont multipliées les distances si vous passez d'une case à la case située à sa droite ?
- Expliquez comment on doit procéder sur la frise pour trouver un objet mille fois plus petit qu'un objet donné.

c. Complétez les phrases suivantes :

- Un ballon est ... fois plus petit que la Tour Eiffel.
- Une fourmi est ... fois plus grande qu'une cellule humaine.
- ... est 1 000 fois plus petit qu'une bille.
- ... est 100 fois plus grand qu'une bactérie.

d. Construisez quatre autres phrases sur le modèle de la question précédente.

2^e Partie : Relativité

e. Complétez :

« Si un enfant était une fourmi, alors un ... lui semblerait aussi grand qu'une montagne. ».

f. Construisez quatre autres phrases sur ce modèle.

g. **Défi** : Choisissez un des êtres ou objet et construisez cinq questions sur le modèle suivant :

« Si un enfant était ... alors ... ».

h. Échangez ces questions avec un autre groupe et répondez-y.

2 Dans le cœur des micros

1^{re} Partie : Parlons chiffre

En informatique, on utilise seulement des 0 et des 1 pour coder les nombres. On travaille avec un système de numération binaire.

Écriture binaire	Écriture décimale	Lien entre les deux écritures
1	1	1×2^0
10	2	$1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$
11	3	$1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$
100	4	$1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0$

a. Observez bien la table de correspondance précédente puis déterminez l'écriture en binaire des entiers inférieurs à 10.

b. Reproduisez la feuille de calcul suivante sur un tableur :

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Nombre en binaire							
2	0	1	1	1	1	1	0	1
3	Nombre en écriture décimale						...	

Programmez en G3 le calcul nécessaire pour obtenir l'écriture décimale d'un nombre en binaire.

2^e Partie : La table ASCII

L'unité d'enregistrement en informatique est le **bit**, symbolisé par un 0 ou un 1. Un **octet** correspond à une suite de huit bits, par exemple 0100 1101.

c. Combien de nombres peut-on écrire avec un octet ?

Pour coder la centaine de caractères présents sur un clavier, on les numérote de 0 à 255 et on les code à l'aide d'un octet. La table qui permet de mettre en correspondance un caractère et le nombre entre 0 et 255 s'appelle la **table ASCII**. Récupérez-la sur le site des compléments du manuel.

d. Retrouvez l'écriture décimale du nombre 0100 0001. À quelle lettre correspond-il ?

e. À l'aide de la question a., retrouvez l'écriture en binaire des codes des autres lettres de l'alphabet.

f. Choisissez alors quatre mots de moins de dix lettres, codez-les en binaire puis demandez aux autres groupes de les retrouver. Faites de même avec les mots qui vous auront été donnés.

		R1	R2	R3	R4
1	$5^3 = \dots$	15	8	125	$\frac{1}{125}$
2	$-2^4 = \dots$	$-2 \times 2 \times 2 \times 2$	$(-2)^4$	-8	-16
3	$(-1)^{123} = \dots$	-123	-1	1	0
4	$10^{-3} = \dots$	un millième	0,010	0,001	$\frac{1}{10^3}$
5	$2^{-3} = \dots$	0,125	-6	$(-3) \times (-3)$	3^{-2}
6	$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \dots$	$-\frac{2}{4}$	$\frac{1^2}{2}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$
7	Fin 2006, la population mondiale était d'environ 6 500 000 000 habitants. Ce nombre peut s'écrire...	65×10^{-8}	$6,5 \times 10^9$	65×10^8	$0,65 \times 10^{10}$
8	$6,4 \times 10^7 = \dots$	$6,4^7$	6,400 000 00	64 000 000	0,000 000 64
9	$873 \times 10^{-6} = \dots$	0,000 873	873 millionièmes	0,000 000 873	873^{-6}
10	La taille d'une bactérie est 0,000 000 003 m, c'est-à-dire...	3^{-9} m	$\frac{3}{100\,000\,000}$ m	3×10^{-9} m	3×10^{-10} m
11	L'écriture scientifique de 0,000 045 9 est...	4,59	459×10^{-7}	$0,459 \times 10^{-4}$	$4,59 \times 10^{-5}$
12	Dans l'écriture décimale de $10^{-5} \times (10^7)^3$, il y a...	16 zéros	5 zéros	16 chiffres dont 15 zéros	d'autres chiffres que des « 0 » et des « 1 »
13	Mille milliards de mille sabords est égal, en sabords, à...	$10^3 \times 10^9 \times 10^3$	1^{15}	10^{81}	10^{15}
14	$10^6 + 10^4 = \dots$	1 010 000	10^{10}	10^{24}	$1,01 \times 10^6$
15	$\frac{76 \times 10^5}{5 \times 10^{-5}} = \dots$	15,2	$1,52 \times 10^{11}$	$1,52 \times 10^9$	$15,2 \times 10^{-25}$
16	$4 + 2 \times 5^3 = \dots$	14^3	1 004	254	6×15



Récréation mathématique

Curiosité...

Montre que la différence $10^3 - 6^3$ est un carré (c'est-à-dire qu'elle peut s'écrire n^2 , n étant un entier) et que la différence $10^2 - 6^2$ est un cube (c'est-à-dire qu'elle peut s'écrire m^3 , m étant un entier).
En fait, 6 et 10 sont les deux plus petits nombres qui sont tels que la différence de leurs cubes est un carré et la différence de leurs carrés, un cube !

Calcul impossible ?

6 103 515 625 est une puissance de 5 et 16 777 216, une puissance de 2 : avec ta calculatrice, trouve lesquelles !
Calcule $6\,103\,515\,625 \times 16\,777\,216$ sans utiliser la calculatrice cette fois !!

Je cherche !

Quel est le chiffre des unités de 13^1 ?
Celui de 13^2 ? De 13^3 ? De 13^4 ? De 13^5 ?
Quel est le chiffre des unités de 13^{2000} ?



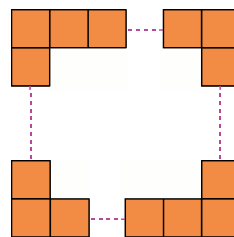
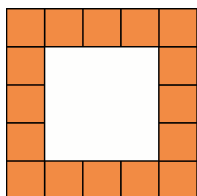
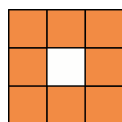
Narration de recherche

Sujet :

- Deux nombres ont pour somme 300.
De combien augmente leur produit, si j'ajoute 7 à chacun d'eux ?
- Deux nombres ont pour somme le nombre a .
De combien varie leur produit, si je soustrais b à chacun d'eux ?

Activité 1 : Écrire une expression littérale

Avec des petits carrés identiques, disposés comme le montrent les figures ci-dessous, on constitue un nouveau carré.



- Réalise une figure avec quatre petits carrés sur un côté. Indique le nombre total de carrés coloriés.
Recommence avec une figure de six petits carrés de côté.
S'il y a 100 petits carrés sur le côté, combien y-a-t-il de carrés coloriés au total ?

- On appelle n le nombre de petits carrés d'un côté. On veut obtenir une formule en fonction de n qui donne le nombre total de carrés coloriés dans le nouveau carré.

- Chloé dit : « *Je pense que la formule est $4n$!* ». Sofiane lui répond alors : « *Mais non ! Tu en as trop !* ». Justifie la réponse de Sofiane et établis une première formule.

- Sur les cahiers de trois élèves, on observe les schémas suivants :

Schéma de Jean

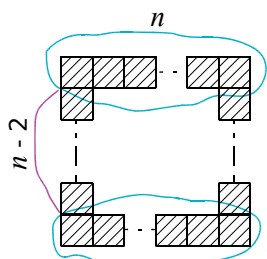


Schéma de Fatima

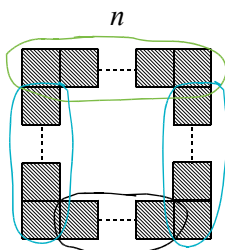
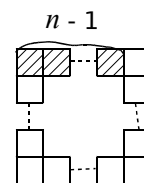


Schéma de Bakari



En suivant les découpages de Jean et de Fatima, établis deux nouvelles formules.

À l'aide de son schéma, Bakari remarque que le nombre de carrés coloriés est un multiple de 4.

Justifie sa remarque et déduis-en une quatrième formule.

- En utilisant chacune de ces quatre formules, calcule le nombre total de carrés coloriés lorsqu'il y en a 15 sur un côté. Les résultats trouvés étaient-ils prévisibles ?
- Développe et réduis chacune des trois dernières formules en utilisant la propriété de distributivité. Qu'as-tu démontré ?
 - L'unité d'aire est la surface d'un des petits carrés coloriés utilisés pour constituer le nouveau carré.
 - En considérant des aires, établis une cinquième formule donnant le nombre total de carrés coloriés en fonction de n .
 - Utilise cette nouvelle formule pour calculer le nombre total de carrés pour $n = 4$; $n = 6$; $n = 15$ et $n = 100$. Les résultats obtenus sont-ils cohérents ? Pourquoi ?
 - En utilisant les résultats des questions précédentes, démontre que $(n - 2)^2 = n^2 - 4n + 4$.

Activité 2 : Supprimer des parenthèses

1. Un signe « + » devant des parenthèses

- a. Complète : $4x + (3 - 7x) = 4x + ((+ \dots) + (- \dots))$.
Écris alors cette expression sans parenthèse puis rédige une règle pour ajouter une somme algébrique. Que peut-on dire de parenthèses précédées d'un signe + ?
- b. Écris l'expression suivante sans parenthèse : $G = 5 + (-6x + 1)$.

2. Un signe « - » devant des parenthèses

- a. Quel est l'opposé de 5 ? Et celui de -6,5 ? Que vaut la somme de deux nombres opposés ? Que peut-on dire de deux nombres dont la somme est égale à 0 ?

b. Complète :

$-3 + \dots = 0$ donc l'opposé de -3 est \dots ;	$-3x^2 + \dots = 0$ donc l'opposé de $-3x^2$ est \dots ;
$\dots + 5 = 0$ donc l'opposé de 5 est \dots ;	$3 + x + \dots = 0$ donc l'opposé de $3 + x$ est \dots ;
$-x + \dots = 0$ donc l'opposé de $-x$ est \dots ;	$-2x + 1 + \dots = 0$ donc l'opposé de $-2x + 1$ est \dots ;
$\dots + 2x = 0$ donc l'opposé de $2x$ est \dots ;	$2 - x^2 + \dots = 0$ donc l'opposé de $2 - x^2$ est \dots .

c. Rappel : $a - b = a +$ opposé de b .

Complète : $F = 2x - (3 + x) = 2x + (\dots)$.
Dédus-en l'expression de F sans parenthèse.

- d. De la même façon, écris sans parenthèse $G = 4 - (2 - x^2)$ et $H = 2x + 3 - (-2x + 1)$.
Rédige une règle pour soustraire une somme algébrique.

Activité 3 : Conjecturer, démontrer

On considère le programme de calculs suivant :

Étape 1 : Choisir un nombre ;
Étape 2 : Lui ajouter 2 ;
Étape 3 : Multiplier cette somme par le nombre de départ ;
Étape 4 : Retrancher au résultat le carré du nombre de départ et annoncer le résultat obtenu.

1. Effectue le programme en choisissant 5 comme nombre de départ puis -8 et enfin 3,45. Quelle remarque peux-tu faire ?

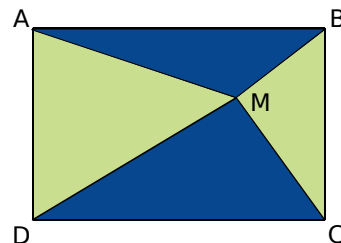
2. Dans un tableur, reproduis le tableau ci-contre. Complète la première ligne avec les nombres entiers de 1 à 10 puis programme les cellules pour qu'elles affichent les résultats pour chaque étape du programme de calculs. Que remarques-tu ?

	A	B	C
1	Étape 1		
2	Étape 2		
3	Étape 3		
4	Étape 4		

3. Remplace les nombres de la première ligne par des nombres entiers négatifs puis par des nombres décimaux relatifs. Que remarques-tu ?
4. On appelle x le nombre de départ. Écris les étapes en fonction de x et retrouve alors ce que tu as remarqué aux questions 2. et 3..

Activité 4 : En géométrie

On considère un rectangle ABCD et un point M placé à l'intérieur de ce rectangle comme le montre la figure ci-contre. On s'intéresse aux aires des triangles bleus.



1. On suppose que $AB = 10$ cm et $AD = 6$ cm.

- Calcule l'aire du rectangle ABCD.
- Construis une figure et calcule l'aire de la figure bleue, en effectuant les mesures et les calculs nécessaires.
Recommence en modifiant la position du point M. Que remarques-tu ?

2. Avec Tracenpoche

- Construis un rectangle ABCD, place un point M et trace les triangles MAB et MCD.
- Dans la fenêtre *Analyse*, tape les expressions ci-contre et appuie sur la touche F9.
- Déplace le point M à l'intérieur du rectangle. Que remarques-tu ?
- Modifie les dimensions du rectangle ABCD. Déplace à nouveau le point M. La remarque faite à la question c. reste-t-elle valable ?
- Quelles conjectures peux-tu faire ?

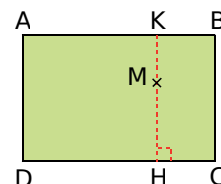
Analyse

aire (ABCD) =
aire (MAB) =
aire (MCD) =
calc (aire (MAB) + aire (MCD)) =

3. La démonstration

On pose : $AD = l$, $AB = L$ et $MH = x$.

- Exprime MK en fonction de x et de l .
- Exprime les aires des triangles MDC et MAB en fonction de x , de l et de L .
- Démontre les conjectures que tu as faites à la question 2. e..
Cette propriété est-elle vraie uniquement pour un point M à l'intérieur du rectangle ? Justifie ta réponse.



Activité 5 : Développer $(a + b)(c + d)$

1. On considère le produit $P = 86 \times 53$. Justifie les égalités suivantes :
 $P = 86 \times 50 + 86 \times 3$ puis $P = 80 \times 50 + 6 \times 50 + 80 \times 3 + 6 \times 3$.
 Déduis-en l'égalité : $(80 + 6) \times (50 + 3) = 80 \times 50 + 6 \times 50 + 80 \times 3 + 6 \times 3$ puis calcule P sans poser de multiplication (et sans calculatrice !).

2. Complète : $(a + b)(c + d) = \dots \times (c + d) + \dots \times (c + d) = \dots + \dots + \dots + \dots$.
 Quelle propriété as-tu utilisée ? Combien de fois ? En quoi a été transformé le produit initial ?

3. a. Complète : $(3x - 2)(5x + 4) = (\dots + \dots) \times (\dots + \dots)$.

b. Déduis-en le développement de ce produit.

c. Procède de même avec le produit $(2 - y)(2y - 5)$.

4. Pour développer le produit $(2a + 3)(3a - 4)$, on peut poser la multiplication comme indiqué ci-contre.

Effectue-la sans oublier le décalage.

$$\begin{array}{r} 2a \quad + 3 \\ \times \quad 3a \quad - 4 \\ \hline \end{array}$$

Méthode 1 : Écrire et simplifier une expression littérale

À connaître

Pour simplifier l'écriture d'une expression littérale, on peut supprimer le symbole \times devant une lettre ou une parenthèse.

Remarque : On ne peut pas supprimer le signe \times entre deux nombres.

Exemple : Simplifie l'expression suivante : $A = -5 \times x + 7 \times (3 \times x - 2) \times (-4)$.

$A = -5 \times x + 7 \times (3 \times x - 2) \times (-4)$	→ On repère tous les signes \times .
$A = -5x + 7 \times (-4)(3x - 2)$	→ On supprime les signes \times placés devant une lettre ou une parenthèse.
$A = -5x - 28(3x - 2)$	→ On calcule si possible.

À connaître

Pour tout nombre a , on peut écrire : $a \times a = a^2$ (qui se lit « a au carré ») ;
 $a \times a \times a = a^3$ (qui se lit « a au cube »).

À toi de jouer

1 Simplifie en supprimant le signe \times lorsque cela est possible :

$$B = -3 \times x \times (-5 \times x) + 2 \times x \times (-7y)$$

$$C = 2t^2 \times t + 5t \times (-4t)$$

$$D = (2 \times 4 \times a + 5) \times (3 - 7 \times a)$$

2 Remplace dans chacune des expressions tous les signes \times sous-entendus :

$$E = 3x^2 + 5x - 10$$

$$F = 4y(21 - 3y)$$

$$G = (2z - 1)(5 - z)$$

Méthode 2 : Supprimer des parenthèses

À connaître

L'opposé d'une somme algébrique est égal à la somme des opposés de chacun de ses termes.

Exemple 1 : Quel est l'opposé de la somme algébrique $a + b - 2ab$?

$$\text{L'opposé de } a + b - 2ab \text{ est } -(a + b - 2ab) = -a + (-b) + 2ab = -a - b + 2ab.$$

Remarque : Cette propriété permet de supprimer des parenthèses précédées d'un signe « $-$ » dans une expression.

Exemple 2 : Supprime les parenthèses dans l'expression $A = 3x - (-2x^2 - 5xy + 4)$:

$A = 3x - (-2x^2 - 5xy + 4)$	→ On additionne les opposés.
$A = 3x + (+2x^2) + (+5xy) + (-4)$	
$A = 3x + 2x^2 + 5xy - 4$	→ On simplifie l'expression.

À toi de jouer

3 Supprime les parenthèses dans les expressions suivantes :

$$B = x^2 - (4xy - 5y - 4x) ; C = (2a + 5b - 4) - (a^2 - b^2 + 1) ; D = -(-2x - 5) + (5 - 2x).$$

Méthode 3 : Factoriser

À connaître

Pour tous nombres relatifs k , a et b :

$$k \times a + k \times b = k \times (a + b)$$

$$k \times a - k \times b = k \times (a - b)$$

Exemple : Factorise les expressions suivantes : $A = 14a - 7b$ puis $B = -x^2 + 3x$.

Cas où le facteur commun est un nombre :

$$A = 7 \times 2a - 7 \times b$$

→ On met en évidence le facteur commun : **7**

$$A = 7 \times (2a - b)$$

→ On met en facteur le nombre **7** puis on regroupe les facteurs restants.

Cas où le facteur commun est une lettre :

$$B = (-x) \times x + 3 \times x$$

→ On remplace les signes \times sous-entendus dans l'expression et on repère le facteur commun : **x** .

$$B = x(-x + 3)$$

→ On met en facteur la lettre **x** puis on regroupe les facteurs restants.

À toi de jouer

4 Fais apparaître le facteur commun :

$$C = 3x^2 + 5xy$$

$$D = 25ab - 10a^2 + 30a$$

$$E = 4x(5 + 3x) + 7(5 + 3x)$$

5 Factorise les expressions suivantes :

$$F = x - 5x^2$$

$$G = 7uv + 21u^2$$

$$H = 2(3x - 2) - 9x(3x - 2)$$

Méthode 4 : Développer

À connaître : La distributivité simple

Pour tous nombres relatifs k , a et b :

$$k \times (a + b) = k \times a + k \times b$$

$$k \times (a - b) = k \times a - k \times b$$

Exemple : Développe l'expression suivante : $A = -3,5(x - 2)$.

$$A = -3,5 \times (x - 2)$$

→ On remplace le signe \times dans l'expression.

$$A = (-3,5) \times x + (-3,5) \times (-2)$$

→ On distribue le facteur **$-3,5$** aux termes x et -2 .

$$A = -3,5x + 7$$

→ On calcule et on simplifie l'expression.

À toi de jouer

6 Complète les développements :

$$B = x(3 + 2x) = x \times \dots + \dots \times 2x = \dots + \dots$$

$$C = 3a(4b - \dots) = \dots - 15a^2$$

$$D = 5x(3y - \dots) = \dots xy - 20x$$

7 Développe les expressions :

$$E = 3(a - 6b + 9)$$

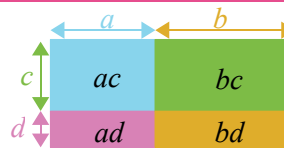
$$F = -2t(5t - 4)$$

$$G = x^2(7x - 8)$$

À connaître : La double distributivité

Pour tous nombres relatifs a, b, c et d :

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$



Exemple : Développe et réduis l'expression suivante : $A = (3x + 1)(y - 4)$.

$$A = 3x \times y + 3x \times (-4) + 1 \times y + 1 \times (-4)$$

→ On applique la double distributivité.

$$A = 3xy - 12x + y - 4$$

→ On calcule les produits.

À toi de jouer

8 Développe les expressions suivantes :

$$B = (x + 7)(4y - 5) ; C = (x + 3)^2 ; D = (a + b)(x - y) ; E = \left(\frac{x}{2} + 5\right)\left(2z + \frac{3}{2}\right).$$

Méthode 5 : Réduire une somme algébrique

À connaître

Réduire une somme algébrique, c'est l'écrire avec **le moins de termes** possibles.

Exemple 1 : Réduis l'expression : $E = 5x^2 + (3x - 4) - (2x^2 - 3) + 2x$.

$$E = 5x^2 + 3x - 4 - 2x^2 + 3 + 2x$$

→ On supprime les parenthèses.

$$E = 5x^2 - 2x^2 + 3x + 2x - 4 + 3$$

→ On regroupe les termes.

$$E = (5 - 2)x^2 + (3 + 2)x - 1$$

→ On factorise les termes en x et en x^2 .

$$E = 3x^2 + 5x - 1$$

→ On simplifie.

Exemple 2 : Développe et réduis l'expression : $A = 7x(x - 6) + (3x - 2)(4x + 5)$.

$$A = 7x(x - 6) + (3x - 2)(4x + 5).$$

→ On développe.

$$A = 7x \times x - 7x \times 6 + (3x \times 4x + 3x \times 5 - 2 \times 4x - 2 \times 5)$$

$$A = 7x^2 - 42x + 12x^2 + 15x - 8x - 10$$

→ On supprime les parenthèses.

$$A = 7x^2 + 12x^2 - 42x + 15x - 8x - 10$$

→ On regroupe les termes en x et en x^2 .

$$A = (7 + 12)x^2 + (-42 + 15 - 8)x - 10$$

$$A = 19x^2 - 35x - 10$$

→ On simplifie en ordonnant.

À toi de jouer

9 Réduis les expressions suivantes : $E = 3a - (6 + 7a^2) + 4a - 5$;

$$F = 4x(3x - 6) - (2x - 1)(3 + 5x).$$

Méthode 6 : Substituer

À connaître

Une expression littérale peut avoir plusieurs formes d'écriture :

- une forme réduite ;
- une forme factorisée ;
- ou toute autre forme.

Pour calculer la valeur numérique d'une expression, on substitue à l'inconnue sa valeur numérique. Mais avant la substitution, il est judicieux de choisir la forme la plus simple pour effectuer les calculs.

Remarque : Pour calculer la valeur numérique d'une expression littérale, il faut parfois faire apparaître le signe \times .

Exemple : On propose de calculer $A = (x + 3)(3x - 1) + 5(x + 3)$ pour $x = 2$.

La forme réduite de A est : $3x^2 + 13x + 12$.

La forme factorisée de A est : $(x + 3)(3x + 4)$.

À l'aide de la forme initiale :	La forme réduite :	La forme factorisée :
$A = (x + 3)(3x - 1) + 5(x + 3)$	$A = 3x^2 + 13x + 12$	$A = (x + 3)(3x + 4)$
$A = (2 + 3)(3 \times 2 - 1) + 5 \times (2 + 3)$	$A = 3 \times 2^2 + 13 \times 2 + 12$	$A = (2 + 3)(3 \times 2 + 4)$
7 opérations	5 opérations	4 opérations
$A = 5 \times 5 + 5 \times 5$	$A = 3 \times 4 + 26 + 12$	$A = 5 \times 10$
$A = 50$	$A = 50$	$A = 50$

On constate que le calcul de A pour $x = 2$ est **plus simple** avec la forme factorisée.

À toi de jouer

10 On considère l'expression B écrite sous trois formes différentes :

La forme initiale :

$$B = (x - 5)^2 + 8x - 40$$

La forme réduite :

$$B = x^2 - 2x - 15$$

La forme factorisée :

$$B = (x - 5)(x + 3)$$

a. Calcule l'expression B en utilisant les trois formes proposées d'abord pour $x = 5$, puis pour $x = 0$ et enfin pour $x = -3$.

b. Parmi les trois écritures de l'expression B, quelle est celle qui permet d'arriver au résultat en faisant le moins d'opérations pour $x = 5$? Pour $x = 0$? Et pour $x = -3$?

11 On considère l'expression $C = 5x + x(1 - 2x) + x^2$.

a. Développe l'expression C.

b. Factorise l'expression C trouvée au **a.**

c. Donne la forme permettant de trouver le résultat en faisant le moins d'opérations : d'abord pour $x = 0$, puis pour $x = 6$, et enfin pour $x = -4$.



Supprimer les parenthèses

1 Supprime les parenthèses puis réduis les expressions suivantes :

$$\begin{array}{l|l} A = 5 + (2x + 3) & D = (4x + 2) + (-6x - 2) \\ B = 5x - (3 - 4x) & E = -(-3x - 1) + (x - 3) \\ C = (x - 4) - 6 & F = 8x - (5x + 2) + (3 - 4x) \end{array}$$

2 Supprime les parenthèses puis réduis les expressions suivantes :

$$\begin{array}{l|l} A = (x + 3) + (4x - 5) & D = (3y + 7) + (-5y + 3) \\ B = 6 - 2t - (4t - 8) & E = 5z - 6 - (7 - 2z) + 3z \\ C = -(8a + 3) - 4a & F = (3 - 4x) - (-2x + 8) \end{array}$$

3 Relie les expressions qui sont égales puis trouve l'intruse :

$(4x + 3) - (x + 5)$	•	•	$3x + 3$
$7x - (3 + 4x)$	•	•	$-3x - 5$
$(3 + 4x) - 7x$	•	•	6
$6x - 3 - (3x - 6)$	•	•	$3x - 2$
$-(4x + 5) - (-x)$	•	•	$-3x + 3$
$5x + 3 - (-3 + 5x)$	•	•	$3x - 3$

4 Supprime les parenthèses puis réduis les expressions suivantes :

$$\begin{array}{l} A = 3x + \frac{1}{4} - (3 - 2x) \\ B = -\left(\frac{1}{3}x + 2\right) + (5x - 3) \\ C = \left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{5}{6} + \frac{2}{6}x\right) \\ D = \frac{1}{2} + 2x - \left(x - \frac{3}{2}\right) \end{array}$$

Factoriser

5 Quelles sont les expressions factorisées ?

a. $4x^2 + 8x + 4$	d. $3x + 6$
b. $3(x - 5)$	e. $4x(x + 2)$
c. $x + (3x + 2)$	f. $3x - (x - 4)$

6 Factorise les expressions suivantes :

A. $16x + 4$	D. $-6x - 18$
B. $9 - 72x$	E. $9x + 6$
C. $12 - 8x$	F. $42 - 14x$

7 Factorise les expressions suivantes :

A. $54 - 18a$	E. $3x^2 + x$
B. $-49 + 21x$	F. $8t^2 + 2t$
C. $-36z + 63$	G. $-x + 3x^2$
D. $5b + 25$	H. $3y^2 + 9y^2$

8 Factorise les expressions suivantes :

A. $4x^2 + 4x + 4$	C. $9y^2 - 3y + 27$
B. $-5x^2 + 10x + 15$	D. $3y^3 + y^2$

Réduire

9 Réduis, si possible, les expressions suivantes :

a. $x + x$	d. $3x + 2$	g. $0 \times x$	j. $5x \times 6x$
b. $x \times x$	e. $2x \times x$	h. $1 + 2x$	k. $4 \times x \times 5$
c. $2x + x$	f. $x^2 + x$	i. $0 + x$	l. $x \times x + x$

10 Factorise par x puis réduis les expressions suivantes :

a. $5x + 3x$	c. $-4x + 15x$
b. $3x - 8x$	d. $-9x - 6x$

11 Réduis et ordonne, si possible, chacune des expressions suivantes :

a. $12x - y + 2$	d. $8 - x + x^2 + 5x$
b. $7y + 12 - 13y$	e. $3t - 12t + t^2 - 7$
c. $10 - 8d + 3$	f. $a^2 + b - a + 3b$

12 Réduis les expressions suivantes :

a. $\frac{3x}{2} + \frac{x}{4}$	c. $3 + \frac{x-1}{5}$
b. $\frac{5x}{6} + \frac{x-4}{3}$	d. $-5x - \frac{3x-2}{4} + 3$

Développer

13 Développe les expressions suivantes :

$$\begin{array}{l|l} A = 3(x + 6) & D = -8(-5 - 3y) \\ B = 5(6 - y) & E = 6(4x - 9) \\ C = -7(2z - 3) & F = -12(-5 + 3z) \end{array}$$

14 Développe les expressions suivantes :

$$\begin{array}{l|l} A = (-3 + y) \times 9 & D = -8(9 - 7x) \\ B = -6(2x - 7) & E = -8z(4 - 3z) \\ C = (3t + 2) \times 8 & F = 3y(-4 + 6y) \end{array}$$

15 Développe les expressions suivantes :

$$\begin{array}{l|l} A = x(x + 4) & C = -8z(4 - 3z) \\ B = 3y(-4 + 6y) & D = (9 - 3t) \times 4t \end{array}$$

16 Développe et réduis les expressions :

$$\begin{array}{l|l} A = 11 + 2(x - 6) & D = -15 - 9(-5 + 3b) \\ B = -3(2y - 4) - 2y & E = -5(6 - 3z) - 9 + z \\ C = 7 - 4(8 - 2a) + a & F = 12x - 4(6 - 3x) \end{array}$$

17 Développe et réduis les expressions :

$$\begin{array}{l} A = 3x - 5 + 5(2x - 2) \\ B = 4y - 6(3 - 2y) + 4(y - 1) \\ C = 5t^2 + 3(2t - 3) - 2t(t - 5) \end{array}$$

18 Développe et réduis les expressions :

$$\begin{array}{l} A = 11 + 2(x - 6) + 4(-3x - 6) \\ B = -2(x - 5) - 3(7 - 4x) \\ C = 8 + 2y - 5(2y - 6) + 4 \\ D = -7y - 4(3y - 6) + 3 + 2(3y - 7) \\ E = -5z + 5z(z - 3) - 7(6 - 8z) \end{array}$$

19 Développe et réduis les expressions :

$$\begin{array}{l|l} A = 3\left(\frac{1}{4} + x\right) - \frac{1}{4} & C = \frac{3}{4}(x - 5) + \frac{1}{2} \\ B = \frac{2}{3}x + 5\left(x - \frac{1}{6}\right) & D = 2 + 3\left(\frac{1}{5}x - \frac{1}{3}\right) \end{array}$$

Double distributivité

20 Développe et réduis les expressions suivantes :

$$\begin{array}{l|l} A = (x + 4)(x + 3) & C = (3z + 4)(5 - 6z) \\ B = (y + 3)(2y + 8) & D = (-7t + 8)(3 - 5t) \end{array}$$

21 Développe et réduis les expressions suivantes :

$$\begin{array}{l|l} A = (7 - 3x)(9x - 3) & C = (4a + 6)(-3 - 5a) \\ B = (-2 - 3y)(4 - 8y) & D = (5z - 7)(8z + 2) \end{array}$$

22 Développe et réduis les expressions suivantes :

$$\begin{array}{l|l} A = (a + 1)^2 & C = (3y - 4)^2 \\ B = (5x + 2)^2 & D = (4 - x)^2 \end{array}$$

23 Développe et réduis les expressions suivantes :

$$\begin{array}{l|l} A = 3(x + 1)(x - 5) & C = -(y + 5)(3y - 6) \\ B = 2(-3 - t)(t - 7) & D = x(2x - 5)(2 - x) \end{array}$$

24 Extrait du Brevet

On considère les expressions :

$$A = (x + 2)(x - 3) + (x - 3) \text{ et } B = (2x - 3)^2.$$

- Développer et réduire les deux expressions.
- Calculer A pour $x = 3$.
- Calculer B pour $x = 1,5$.

25 On considère le rectangle ci-dessous. Exprime en fonction de x :



- son périmètre sous la forme d'une expression réduite ;
- son aire sous la forme d'une expression factorisée ;
- son aire sous la forme d'une expression développée et réduite.

26 Parmi les expressions suivantes, retrouve celles qui sont égales et justifie ta réponse :

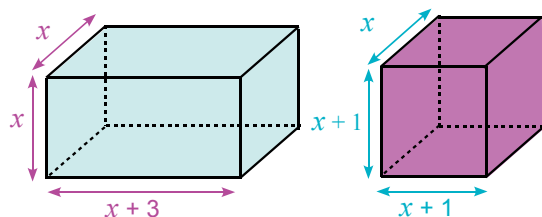
$$A = 16 - 4x^2$$

$$B = (4 - 2x)^2$$

$$C = (4 - 2x)(4 + 2x)$$

$$D = 4x^2 - 16x + 16$$

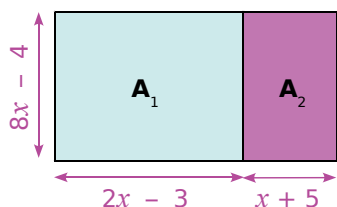
27 On considère les deux parallélépipèdes rectangles suivants :



a. Calcule les deux volumes pour $x = 1$. Que remarques-tu ?

b. Exprime, en fonction de x , les deux volumes. Que remarques-tu ? Comment expliquer alors le résultat de la question **a.** ?

28 On considère la figure suivante (x désigne un nombre supérieur ou égal à 2) :



a. Exprime en fonction de x les aires A_1 et A_2 .

b. Dédus-en une expression de l'aire totale A de la figure.

c. Calcule A_1 , A_2 et A pour $x = 6$.

Substitution

29 Recopie les expressions suivantes en rajoutant les signes \times sous-entendus puis calcule-les pour $x = 2$:

$$A = 2x$$

$$B = 4x + 5$$

$$C = 4(x - 3)(x + 8)$$

$$D = 3x - 2(5x - 15)$$

$$E = 9x^2$$

$$F = 7 - 2x$$

$$G = 2(3x - 2)$$

$$H = x(x + 2) - 4x$$

$$I = 4x^2 - 2x(4 - x)$$

$$J = -3x^2 + 5x - 4$$

30 Recopie et complète le tableau suivant :

	$x = 4$	$x = 0$	$x = -2$
$3(2x - 7) - 5x$			
$(x - 4)(x - 2)$			
$(2 - x)^2$			

31 Calcule les expressions suivantes :

$$A = 3t^2 + 6t - 8 \quad \text{pour } t = 3 ;$$

$$B = 5x^2 - 3x + 7 \quad \text{pour } x = -2 ;$$

$$C = -3y^2 - 5y - 8 \quad \text{pour } y = -3.$$

Synthèse

32 Développe et réduis les expressions suivantes :

$$A = 3(2x - 6) - (3 - 5x)$$

$$B = (5 - 2y) - (-3y + 7)$$

$$C = 4(6 + z) + (z - 3)(2 - z)$$

$$D = (2t - 5)(3t + 2) - (t^2 + 6)$$

33 Développe et réduis les expressions suivantes :

$$A = 3(-2x + 5) + (-2x + 5)(x - 3)$$

$$B = (2a - 5)(3 - 4a) - 2(5 - a)$$

$$C = -(3 - 4z)(z - 2)$$

$$D = -5r(2 - 3r) + (-r - 2)(2r + 5)$$

Programme de calculs

34 Exprime en fonction de x les expressions suivantes (x étant non nul) :

a. l'opposé de x ;

b. l'inverse de x ;

c. l'opposé du carré de x ;

d. le carré de l'opposé de x ;

e. l'opposé de l'inverse de x ;

f. le carré de l'inverse de x .

35 Si on note z l'âge en années d'Alexis aujourd'hui, comment note-t-on :

- l'âge qu'il aura dans deux ans ?
- le double de son âge ?
- le triple de l'âge qu'il avait il y a quatre ans ?
- la moitié de l'âge qu'il aura dans cinq ans ?
- son année de naissance ?

36 Relie chaque phrase de la première colonne avec l'expression qui lui correspond où y est le prix d'achat de l'article en euros :

L'article est revendu cinq fois plus cher.	• $y + 5$
L'article est revendu 5 € de plus.	• $2y$
Le prix est augmenté de 100 %.	• $3y$
Le prix est augmenté de 200 %.	• $5y$

37 Soient les deux programmes de calculs suivants :

Programme 1 :

- Choisis un nombre ;
- Ajoute 6 à ce nombre ;
- Multiplie le résultat par -2 ;
- Ajoute le quadruple du nombre choisi au départ.

Programme 2 :

- Choisis un nombre ;
- Soustrais 3 à ce nombre ;
- Multiplie le résultat par 4 ;
- Soustrais le double du nombre choisi au départ.

- Teste ces deux programmes de calculs en choisissant 2 puis -3 et enfin 4 comme nombre initial.
- Que remarques-tu ?
- Si l'on note x le nombre choisi au départ, écris une expression A qui traduit le programme 1.
- De la même manière, écris une expression B pour le programme 2.
- Comment peux-tu expliquer la remarque faite à la question **b.** ?

Problèmes

38 Isabelle achète t kilogrammes d'oignons à 3,20 € le kilo et elle achète le double en masse de tomates à 2,30 € le kilo. Exprime, en fonction de t , le montant de ses achats en euros.

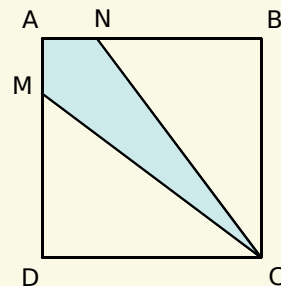
39 Adeline achète 5 CD et 3 DVD. On notera x le prix en euros d'un CD. Un DVD coûte 10 euros de plus qu'un CD.

- Écris, en fonction de x , la dépense d'Adeline en euros. Développe et réduis l'expression trouvée.
- En utilisant l'expression obtenue au **a.**, calcule, en euros, la dépense d'Adeline si un CD coûte 15 €.

40 Extrait du Brevet

La figure ci-dessous représente un carré de 6 cm de côté. M est un point de [AD] et N est un point de [AB] tels que :

$AM = AN = x$ (x est un nombre strictement positif).



- Calcule, en fonction de x , les aires des triangles MDC et NBC.
- Calcule, en fonction de x , l'aire du quadrilatère AMCN.
- Calcule ces trois aires pour $x = 2$ cm.

41 Une salle de concert peut contenir 600 places. Il y a x places assises et les autres sont debout. Les places debout coûtent 15 € et les places assises 25 €.

- Que représentent les expressions suivantes : $600 - x$; $25x$ et $15(600 - x)$?
- Exprime, en fonction de x , la recette totale en euros si toutes les places sont prises.
- Calcule cette recette si $x = 200$.



42 Distributivité à gogo

a. On veut développer l'expression $A = 2(5x + 2)(3x + 1)$. Pour cela, développe d'abord l'expression $2(5x + 2)$ puis termine le développement de A .

b. Développe le produit $(x + 2)(3x + 2)$ et déduis-en le développement de :

$$B = (x + 2)(3x + 2)(x + 4).$$

c. En t'inspirant des questions précédentes, développe les expressions suivantes :

$$C = 4(5x - 1)(3x + 3) ;$$

$$D = (1 - x)(1 + x)(2x + 1).$$

43 Idée fausse

a. On considère les expressions $A = (2x + 3)^2$ et $B = (2x)^2 + 3^2$. Calcule ces expressions pour $x = 0$ et pour $x = 10$. Qu'en déduis-tu ?

b. Peut-on dire que pour tout nombre a et tout nombre b non nuls, les expressions $(a + b)^2$ et $a^2 + b^2$ sont égales ? Justifie. Développe alors l'expression $(a + b)^2$.

c. On considère les expressions $C = (2x + 3)(2x - 3)$ et $D = (2x)^2 - 3^2$. Calcule ces expressions pour $x = 0$ puis pour $x = 10$. Qu'en déduis-tu ? Démontre-le.

d. Développe alors l'expression : $(a + b)(a - b)$.

44 Calcul mystère

a. Calcule les expressions $2001 \times 1999 - 2000^2$ et $47 \times 45 - 46^2$. Que remarques-tu ?

b. Développe et réduis l'expression suivante :

$$(x + 1)(x - 1) - x^2$$

c. Les résultats obtenus à la question a. étaient-ils prévisibles ? Justifie.

d. Écris d'autres expressions du même style et donne leurs résultats sans poser d'opération.

45 Petites démonstrations

a. Que dire de la somme de deux nombres pairs ? De deux nombres impairs ? Pourquoi ?

b. La somme de deux nombres consécutifs est-elle paire ou impaire ? Justifie.

c. Que dire du produit de deux nombres pairs ? De deux nombres impairs ? De deux nombres consécutifs ? Pourquoi ?

46 On désigne par k un nombre entier. Marc, Vincent, Akim et Jules se partagent un sac de billes. Marc prend k billes. Vincent en reçoit 4 de moins que Marc. Akim a deux fois plus de billes que Marc et 8 de moins que Jules.

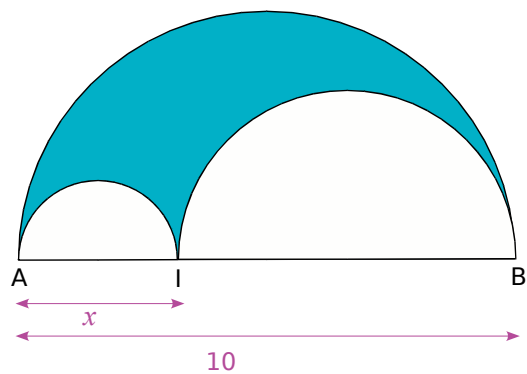
a. Calcule le nombre de billes des autres garçons si Marc en prend 7.

b. Exprime, en fonction de k , le nombre de billes des autres garçons.

c. En utilisant les expressions de la question b., déduis-en, en fonction de k , le nombre total de billes. Réduis l'expression trouvée.

d. En utilisant l'expression trouvée au c., calcule le nombre total de billes si Marc en prend 7.

47 Le tricerclé de Mohr



La figure ci-dessus est constituée de trois demi-cercles dont les centres appartiennent au segment $[AB]$.

a. Réalise cette figure pour $x = 3$. Dans ce cas-là, calcule la longueur de chacun des trois demi-cercles (tu donneras la valeur arrondie des résultats au dixième).

Quel est alors le périmètre de la figure bleue délimitée par les trois demi-cercles ?

b. Même question pour $x = 8$.

c. Que remarques-tu ?

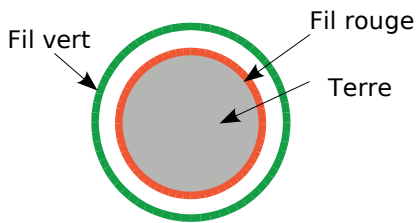
d. Exprime, en fonction de x et de π , la longueur de chacun des trois demi-cercles.

e. Déduis-en une expression du périmètre de la figure bleue en fonction de x et de π .

Que peux-tu dire de ce périmètre ? Justifie.

f. Utilise le résultat de la question précédente pour déterminer le périmètre de la figure bleue lorsque $x = 1$, puis pour $x = 5$ et enfin pour $x = 8,7$.

48 Tour de taille



- On veut dérouler un fil rouge autour de la Terre au niveau de l'équateur. En supposant qu'on assimile la Terre à une sphère et qu'on note r son rayon, exprime la longueur L_r du fil rouge en fonction de r .
- On veut dérouler, cette fois-ci, un fil vert à un mètre au dessus du fil rouge. Exprime la longueur L_v du fil vert en fonction de r .
- Calcule et réduis l'expression $L_v - L_r$. Cette expression dépend-elle du rayon ? Qu'en déduis-tu ?
- Sachant que le rayon de la Terre est d'environ 6 500 km, calcule la longueur du fil rouge puis déduis-en par une simple addition, la longueur du fil vert.

49 Au XVII^e siècle, les physiciens et les astronomes effectuaient des calculs très complexes à la main. Le mathématicien anglais Hörner a mis au point une méthode efficace pour économiser des opérations, méthode encore utilisée de nos jours en informatique.

- On considère les expressions $A = 2x^2 + 3x - 2$ et $B = -2 + x(3 + 2x)$. Pour une valeur de x donnée, indique le nombre de multiplications et d'additions à effectuer pour trouver le résultat dans chacune des deux expressions. Démontre ensuite que $A = B$. Quel est alors l'intérêt de l'expression B par rapport à l'expression A ?
- Transforme l'expression $C = 5x^2 - 6x - 4$ pour qu'elle contienne moins d'opérations à effectuer.
- Démontre que pour tous nombres a , b et c :

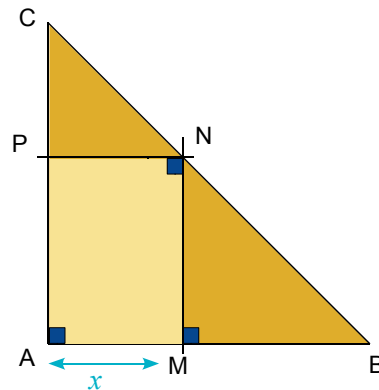
$$ax^2 + bx + c = x(ax + b) + c$$
- Transforme les expressions suivantes en utilisant plusieurs fois la même technique :

$$D = 4x^3 - 5x^2 + 6x - 1$$

$$E = 4x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 6x + 2$$
- Calcule chacune des expressions D et E de deux façons différentes pour $x = 4$. Quelle est la méthode la plus rapide ? Pourquoi ?

50 Optimisation

Soit ABC un triangle rectangle et isocèle en A tel que $AB = 10$ cm.



- Quelle est la nature du quadrilatère AMNP ? Justifie. Démontre que les triangles CPN et MNB sont isocèles.
- Quelles valeurs peut prendre le nombre x ?
- Exprime la longueur AP en fonction de x et déduis-en l'aire du rectangle AMNP en fonction de x .
- À l'aide d'un tableur, programme les cellules pour compléter automatiquement la feuille de calculs suivante :

	A	B	C	D	...	K	L
1	Valeur de x (en cm)	0	1	2	...	9	10
2	Aire de AMNP (en cm ²)				...		

- Où semble se trouver le point M quand l'aire de AMNP est maximale ? Que dire alors de cette aire par rapport à l'aire du triangle ABC ?
 - Pour quelle(s) valeur(s) de x , l'aire de AMNP est-elle égale à 10 cm² (tu donneras un encadrement à l'unité) ?
- À l'aide du tableur, affine la (les) valeur(s) de x trouvée(s) au dixième puis au centième.
- Vérifie graphiquement les résultats trouvés aux questions e. et f..

Pour cela, tu construiras un repère avec les unités suivantes :

- en abscisse : 1 cm pour une unité ;
- en ordonnée : 1 cm pour cinq unités.

Puis tu représenteras l'aire en fonction de x dans ce repère.

1 Des phrases et des expressions littérales

1^{re} Partie : Programmes de calculs

a. Voici un programme de calculs :

- Choisir un nombre ;
- Lui ajouter 1 ;
- Multiplier le résultat par 3 ;
- Ajouter 4 au résultat.

Appliquez ce programme au nombre 2.

b. Omar a appliqué ce programme pour un certain nombre et a trouvé 28. Laura dit alors que, pour retrouver le nombre de départ, il suffit de « remonter » le programme de calculs en partant de la fin. Expliquez ce que veut dire Laura. Combien trouve-t-elle ?

c. Voici un autre programme de calculs :

- Choisir un nombre ;
- Lui ajouter 3 ;
- Multiplier le résultat par 2 ;
- Ajouter le nombre du départ ;
- Enlever 6 au résultat.

Appliquez ce programme au nombre 5.

d. La méthode de Laura fonctionne-t-elle encore ? Pourquoi ?

e. Marc a trouvé une méthode pour trouver directement le nombre de départ, connaissant le résultat de la fin du programme. Expliquez cette méthode.

f. Construisez quatre programmes différents (dont au moins deux comme le programme de la question c.) qui transforment un nombre en un nombre quatre fois plus grand.

2^e Partie : En français dans le texte

Avant l'invention de l'algèbre, les mathématiciens utilisaient le langage courant pour écrire certaines propriétés, on pouvait énoncer la règle suivante :

« Soit un nombre entier. Si on ajoute le nombre qui le précède et le nombre qui le suit, on obtient le double du nombre ».

g. En appelant n le nombre, écrivez une égalité qui traduit cette phrase.

h. Procédez de la même façon pour le texte suivant : « La différence des carrés de deux nombres entiers consécutifs est égale au double du plus petit augmenté de 1. ».

i. Développez et réduisez : $(x - 1)(x + 1)$

Chaque membre du groupe écrit en français un texte décrivant l'égalité obtenue.

j. Comparez vos textes. Écrivez ensemble celui qui vous paraît le plus clair.

2 Le Mistigri des expressions littérales

1^{re} Partie : Préparation du jeu

a. On commence par préparer un jeu de vingt et une cartes. Sur chaque carte est écrit une expression ci-dessous :

$3x(2x - 5)$	$5(x - 3)$	$(x - 1)(x + 2)$
$(x - 3)(x - 2)$	$5(x - 5)$	$7x + 14$
$3x - (2x - 1)$	$x - (x + 1)$	$4(3x^2 - 2x + 1)$
$x^2 + x - 2$	$x^2 - 5x + 6$	$7(x + 2)$
$x + 1$	$6x^2 - 15x$	$x^2 - 1$
$(x + 1)(x - 1)$	$12x^2 - 8x + 4$	$5x - 15$
$5x - 25$	$x^2 + 1$	-1

b. Préparez ensemble une feuille contenant côte à côte les expressions qui sont égales. Une expression n'est égale à aucune autre : c'est le Mistigri. La feuille servira de référence en cas de désaccord pendant la partie mais elle devra rester cachée. Les joueurs n'ont pas le droit de l'utiliser.

2^e Partie : On joue

c. Un joueur distribue toutes les cartes en commençant par son voisin de gauche.

d. Chaque joueur regarde dans son jeu s'il possède une paire, autrement dit deux cartes comportant des expressions égales. Tout au long de la partie, si un joueur a une paire, il l'écarte de son jeu en la posant face visible sur la table. Les autres joueurs vérifient que la paire est correcte.

e. Le donneur prend une carte au hasard au joueur qui est à sa gauche, puis regarde s'il possède une nouvelle paire qu'il écarte alors de son jeu. Puis le joueur à la droite du donneur prend une carte au hasard au donneur et ainsi de suite.

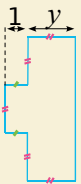
f. Le gagnant est le joueur qui se débarrasse le premier de toutes ses cartes. Le perdant est celui qui a le mistigri en main lorsque toutes les paires ont été formées.

Remarque : il est fortement conseillé aux joueurs de s'aider d'un brouillon.

3^e Partie : Fabrication d'un nouveau jeu

g. À vous maintenant de créer un jeu de Mistigri sur le même principe que précédemment mais avec d'autres expressions.

h. Jouez avec votre jeu mais cette fois-ci sans utiliser de feuille contenant les « paires ». À la fin de votre partie, échangez votre jeu avec un autre groupe avant de rejouer.

		R1	R2	R3	R4
1	Pour $x = -2$, $3x + 5$ vaut...	- 1	11	- 11	6
2	Lorsqu'on substitue -3 à x dans $x^2 - 5x$, on obtient...	$-3^2 - 5 - 3$	$(-3)^2 - 5 \times (-3)$	$x^2 - 5 \times (-3)$	$-3^2 - 5 \times -3$
3	L'expression $n - 5n$ est égale à...	$-5n^2$	$n(1 - 5)$	on ne peut pas la réduire	$-4n$
4	L'expression $4x(x - 2)$ est...	une différence	une forme factorisée de $4x^2 - 8x$	la forme réduite de $4x^2 - 8x$	égale à $4x \times x - 2$
5	$15a^2 - 5a$ est égale à...	$5(3a^2 - a)$	$15(a^2 - 5a)$	$5a(3a - 1)$	$5a(3a - 5)$
6	La forme réduite de $15 - 4x - 5 + 2x$ est...	$10 - 6x$	$-2x + 10$	$8x$	$-2x - 20$
7	La forme réduite de $3(x - 2) - (-3x + 8)$ est...	2	$6x + 2$	$6x - 14$	$6x^2 - 14$
8	La forme réduite de $(-b + 5) - 2(4 - 3b)$ est...	$5b - 3$	$-7b$	$-7b - 3$	$-4b - 3$
9	La forme développée de $(5x - 2)(2x - 3)$ est...	$10x^2 - 12x - 6$	$10x - 15x - 4x - 6$	$10x^2 - 19x + 6$	$10x^2 - 11x + 6$
10	Le produit du double d'un nombre t et de son triple peut s'écrire...	$t^2 \times t^3$	$5t$	$2t \times 3t$	$6t$
11	« Choisir un nombre x , faire la somme de son quotient par 3 et de 2 et multiplier le tout par 5 ».	$x + \frac{3}{2} \times 5$	$\frac{x}{3} + 2 \times 5$	$\frac{5(x+2)}{3}$	$5\left(\frac{x}{3} + 2\right)$
12	Cette figure constituée de rectangles est la base d'un prisme droit de hauteur y . 	Son aire, en fonction de y , est $3y^2 + y$	Son périmètre, en fonction de y , est $8y$	Son aire, en fonction de y , est $3y(y + 1) - 2y$	Le volume, en fonction de y , du prisme droit est $3y^3 + y^2$

Récréation mathématique

Mentalement !

Calcule $1\ 234\ 567\ 895 \times 1\ 234\ 567\ 892 - 1\ 234\ 567\ 890 \times 1\ 234\ 567\ 896$... sans calculatrice !

Magique ?

Un magicien demande à une personne du public de choisir un nombre entier, de l'augmenter de un, d'élever le résultat au carré, puis de retirer au nombre obtenu le produit du nombre de départ par son suivant augmenté de un. Le magicien se concentre et annonce le résultat : « 1 ! ». Mais est-ce vraiment magique ?



Petite démonstration...

Si on soustrait à un nombre la somme de ses chiffres, alors on obtient un multiple de 9 ! Vérifie-le sur des exemples numériques. Démontre-le dans les cas de nombres à deux chiffres puis trois...

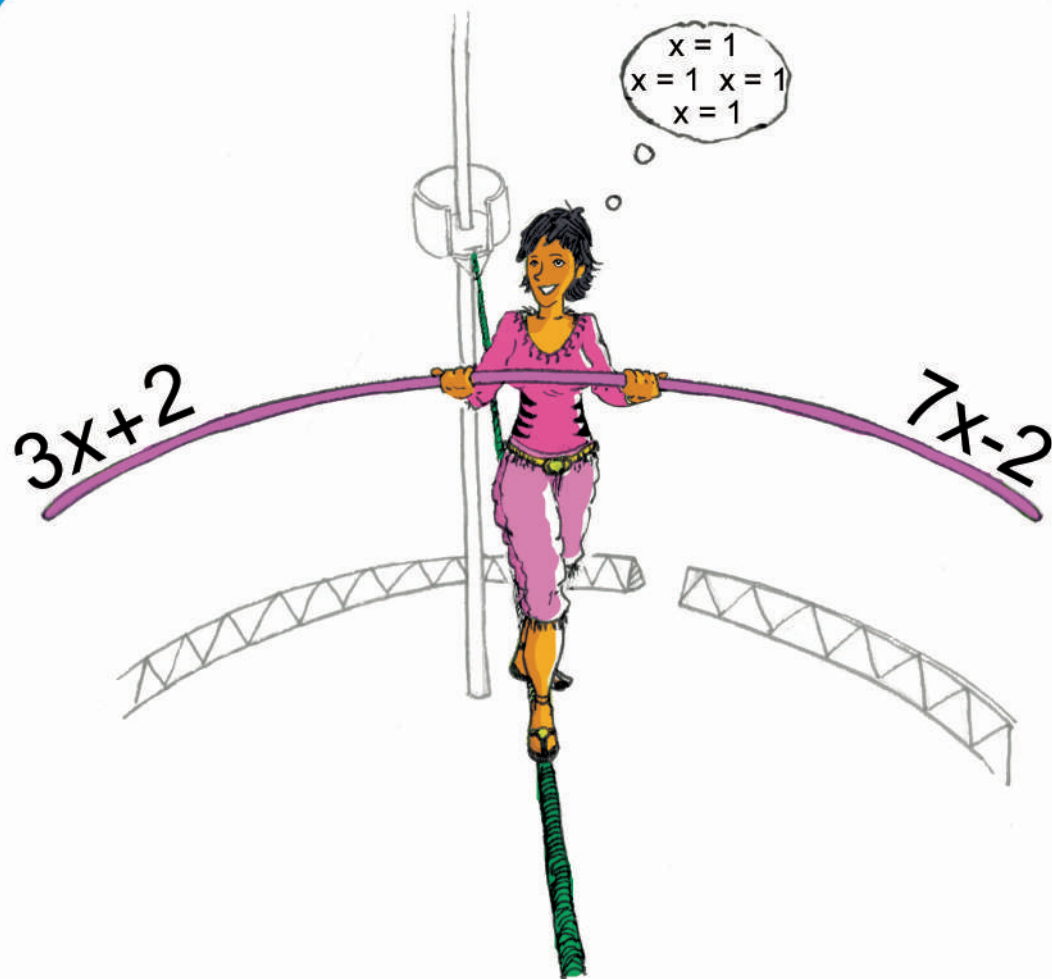
Inflation dans un carré !

On augmente de 5 cm la longueur du côté d'un carré. Les augmentations de son périmètre et de son aire dépendent-elles de la longueur initiale du côté du carré ?



Équations, ordre

N5



Narration de recherche

Sujet :

Où faut-il couper un triangle équilatéral par une parallèle à un côté pour que les deux morceaux aient le même périmètre ?

Activité 1 : Tout un programme

1. Trois programmes de calculs

Alice et Bertrand saisissent le même nombre de départ sur leurs calculatrices puis effectuent les programmes de calculs suivants :

- Alice multiplie le nombre de départ par 8 puis ajoute 7 au résultat obtenu.

- Bertrand multiplie le nombre de départ par 6 puis ajoute 13 au résultat obtenu.

Ils s'aperçoivent alors que leurs calculatrices affichent le même résultat.

a. Le nombre 1 est-il leur nombre de départ ? Justifie tes calculs.

b. Et le nombre 2 ? Poursuis jusqu'à ce que tu trouves le nombre solution.

Chloé effectue avec le même nombre de départ qu'Alice et Bertrand le programme de calculs suivant :

- Chloé multiplie le nombre de départ par 3 puis ajoute 30 au résultat obtenu.

c. Trouve-t-elle le même résultat qu'Alice et Bertrand ? Justifie.

2. Avec un tableur

Chaque programme de calculs précédent débute maintenant par un même nombre.

a. Dans un tableur, construis le tableau ci-dessous. Programme la cellule B2 en fonction de la cellule B1 pour obtenir le résultat de la suite de calculs d'Alice. Copie alors cette formule dans les cellules C2 à L2.

Procède de la même façon pour les programmes de calculs de Bertrand et Chloé.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Nombre de départ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	Alice											
3	Bertrand											
4	Chloé											

b. Retrouve la valeur solution de la question **b.** de la partie **1.**

Alice et Chloé cherchent quel nombre afficher sur leurs calculatrices pour trouver le même résultat.

c. En t'aidant du tableur, indique les résultats obtenus par Alice et Chloé à la fin de leurs programmes de calculs si elles affichent, sur leurs calculatrices, le nombre 4 au départ. Même question avec le nombre 5. Déduis-en un encadrement du nombre cherché par deux entiers consécutifs.

d. Poursuis en remplaçant les valeurs de la ligne 1 par des valeurs bien choisies puis détermine le nombre solution à afficher sur la calculatrice.

Bertrand et Chloé cherchent quel nombre afficher sur leurs calculatrices pour trouver le même résultat.

e. Procède de la même façon que précédemment pour déterminer un encadrement du nombre solution au millième près. Penses-tu que cette méthode permet de trouver la valeur exacte de ce nombre ?

f. Invente un programme de calculs et cherche, à l'aide du tableur, quel nombre commun afficher sur ta calculatrice et celle de Chloé pour trouver le même résultat.

Activité 2 : Égalité et opérations

Ali et Sonia ont le même nombre de billes.

1. Si tu donnes autant de billes à l'un qu'à l'autre, auront-ils toujours le même nombre de billes ?
2. Si tu prends des billes à Ali, que dois-tu faire pour qu'ils aient toujours le même nombre de billes ?
3. Sonia double son nombre de billes en jouant. Que doit faire Ali pour conserver le même nombre de billes que Sonia ?
4. Ali partage équitablement son paquet de billes en trois paquets et n'en garde qu'un seul, donnant les autres à ses camarades. Sonia décide de faire la même chose. Ali et Sonia ont-ils toujours le même nombre de billes ?
5. Énonce les propriétés que tu viens de mettre en évidence.

Activité 3 : Techniques de résolution d'équations

1. Recopie puis transforme chaque égalité en une égalité équivalente.

$$\begin{array}{c} +8 \quad x = 6 \quad +8 \\ \leftarrow \quad \quad \quad \rightarrow \\ \square \end{array}$$

$$\begin{array}{c} +2,5 \quad x = -4 \quad +2,5 \\ \leftarrow \quad \quad \quad \rightarrow \\ \square \end{array}$$

$$\begin{array}{c} -2,3 \quad x = 1,2 \quad -2,3 \\ \leftarrow \quad \quad \quad \rightarrow \\ \square \end{array}$$

$$\begin{array}{c} x(-9) \quad x = 7 \quad x(-9) \\ \leftarrow \quad \quad \quad \rightarrow \\ \square \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \div 5 \quad x = 2,5 \quad \div 5 \\ \leftarrow \quad \quad \quad \rightarrow \\ \square \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \div 7 \quad x = -3 \quad \div 7 \\ \leftarrow \quad \quad \quad \rightarrow \\ \square \end{array}$$

2. Le but est de déterminer x dans chacune des équations suivantes. Recopie puis détermine l'opérateur.

$$\begin{array}{c} \dots \quad x + 5 = -2 \quad \dots \\ \leftarrow \quad \quad \quad \rightarrow \\ \square \quad x = \dots \end{array}$$

On rédige de la façon suivante :

$$\begin{aligned} x + 5 &= -2 \\ x + 5 - 5 &= -2 - 5 \\ x &= -7 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} \dots \quad 3x = 7 \quad \dots \\ \leftarrow \quad \quad \quad \rightarrow \\ \square \quad x = \dots \end{array}$$

On rédige de la façon suivante :

$$\begin{aligned} 3x &= 7 \\ \frac{3x}{3} &= \frac{7}{3} \\ x &= \frac{7}{3} \end{aligned}$$

3. Utilise d'abord les opérateurs pour résoudre les équations suivantes puis rédige comme ci-dessus. Vérifie ensuite que ta solution est juste.

a. $x - 5,2 = 2,6$

b. $-6,5x = -14,2$

c. $-x = 7,2$

4. De la même façon mais en deux étapes, résous les équations suivantes :

a. $2x + 3 = 5$

b. $7x - 6 = -1$

c. $2,6 - 5x = -1,4$

Activité 4 : Choix de l'inconnue

Trois personnes se partagent la somme de 316 €. On veut trouver la part de chacune sachant que la seconde a 32 € de plus que la première et que la troisième a 15 € de plus que la seconde.

1. Soit x la part de la première personne. Mets ce problème en équation puis résous-le.
2. Soit x la part de la deuxième personne. Mets ce problème en équation puis résous-le.
3. Y a-t-il une autre possibilité pour le choix de l'inconnue ? Si oui, mets ce problème en équation à partir de ce choix puis résous-le.
4. Conclus.

Activité 5 : Mise en équation

On reprend les programmes de calculs des trois camarades de l'**activité 1** :

• Alice multiplie un nombre par 8 puis ajoute 7 au résultat obtenu ;

• Bertrand multiplie un nombre par 6 puis ajoute 13 au résultat obtenu ;

• Chloé multiplie un nombre par 3 puis ajoute 30 au résultat obtenu.

1. On appelle x le nombre de départ affiché sur les calculatrices d'Alice et Bertrand. Écris l'équation que doit vérifier x pour que leurs résultats soient les mêmes après avoir effectué chacun leur programme de calculs puis résous-la.
2. On appelle y le nombre de départ affiché sur les calculatrices d'Alice et Chloé. Écris l'équation que doit vérifier y pour que leurs résultats soient les mêmes après avoir effectué chacun leur programme de calculs puis résous-la.
3. On appelle z le nombre de départ affiché sur les calculatrices de Bertrand et Chloé. Écris l'équation que doit vérifier z pour que leurs résultats soient les mêmes après avoir effectué chacun leur programme de calculs.

Activité 6 : Interprétation du résultat

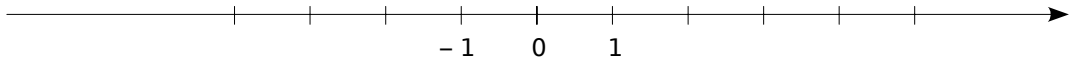
Problème 1 : Sylvia a sept ans de plus que sa soeur Rose. Dans 10 ans, Sylvia aura le double de l'âge de Rose. Quel est l'âge de Rose ? Appelle x l'âge de Rose.

Problème 2 : En 2000, Paul avait 10 ans et Louis 17 ans. En quelle année, l'âge de Louis a-t-il été le double de l'âge de Paul ? Appelle x la différence entre cette année et 2000.

1. Mets ces deux problèmes en équation. Que remarques-tu ?
2. Résous l'équation.
3. Déduis-en la solution de chaque problème.
4. Conclus.

Activité 7 : Sur une droite graduée

Trace six droites graduées les unes en dessous des autres comme celle ci-dessous :



1. Sur la première, place les points : C d'abscisse 2, L d'abscisse -3 et A d'abscisse x tel que $-3 < x < 2$. Quel mot lis-tu ?
2. Sur la deuxième, on ajoute 4 à chacune des abscisses précédentes et on obtient les points C_1 , L_1 et A_1 . Lis-tu le même mot ? Donne alors un encadrement de $x + 4$.
3. Sur la troisième, on retranche 3 à chacune des abscisses du **a.** et on obtient les points C_2 , L_2 et A_2 . Lis-tu le même mot ? Donne alors un encadrement de $x - 3$.
4. Même question si on multiplie chaque abscisse par 2. Déduis alors un encadrement en fonction de x .
5. Même question que **3.** si on multiplie chaque abscisse par $-1,5$. Déduis alors un encadrement en fonction de x .
6. En procédant de cette façon, déduis un encadrement de $3x$ puis de $3x - 5$.

Activité 8 : Ordre et opérations

1. Reproduis et complète le tableau, suivant le modèle :

a	b	Comparaison de a et b	$a - b$	Signe de $a - b$
3	4	$3 < 4$	$3 - 4 = -1$	$3 - 4 < 0$
-2	-5			
8,3	-3,7			
$-\frac{2}{3}$	$\frac{5}{9}$			

2. En observant le tableau, complète les propriétés suivantes que l'on admettra :
Pour tous nombres a et b :

- Si $a > b$ alors... et si $a < b$ alors... .
- Si $a - b > 0$ alors... et si $a - b < 0$ alors... .

3. m , n et p sont des nombres tels que $m > n$.

- a. Calcule la différence de $m + p$ et de $n + p$.
Déduis-en la comparaison de $m + p$ et de $n + p$.
- b. Compare $m - p$ et $n - p$ en procédant de la même façon.
- c. k est un nombre non nul. Compare $m \times k$ et $n \times k$ en factorisant $m \times k - n \times k$ puis en étudiant le signe du produit obtenu.
- d. Énonce les règles que tu viens de démontrer.

Méthode 1 : Tester si un nombre est solution d'une équation

À connaître

$2x^2 - 5 = x + 10$ est une équation où l'**inconnue** est désignée par la lettre x .
 Cette équation a deux membres : $2x^2 - 5$ et $x + 10$.
 Les solutions de l'équation $2x^2 - 5 = x + 10$ sont les valeurs du nombre x pour lesquelles l'égalité $2x^2 - 5 = x + 10$ est vérifiée.

Exemple : 3 est-il une solution de l'équation $2x^2 - 5 = x + 10$?

Pour $x = 3$, on calcule séparément $2x^2 - 5$ et $x + 10$.

$$2x^2 - 5 = 2 \times 3^2 - 5 = 2 \times 9 - 5 = 18 - 5 = 13 \quad | \quad x + 10 = 3 + 10 = 13$$

On constate que, pour $x = 3$, $2x^2 - 5 = x + 10$. Il y a égalité entre les deux membres donc 3 est une solution de l'équation $2x^2 - 5 = x + 10$.

À toi de jouer

- 1** Les nombres 3, -2 et 5 sont-ils solutions de l'équation $x^2 + 4 = 3x + 14$?
- 2** Parmi les nombres entiers de 0 à 10, existe-t-il une solution de l'équation $4(x + 3) = 6x + 2$?

Méthode 2 : Résoudre une équation du premier degré

À connaître

- Une égalité reste vraie **en ajoutant ou en soustrayant un même nombre** à ses deux membres.
- Une égalité reste vraie **en multipliant ou en divisant ses deux membres par un même nombre non nul**.

Exemple : Résous l'équation suivante : $7x + 2 = 4x + 9$.

$$7x + 2 = 4x + 9$$

$$7x + 2 - 4x = 4x + 9 - 4x \quad \longrightarrow$$

On cherche à éliminer les termes en x dans le membre de droite en retranchant $4x$ aux deux membres.

$$3x + 2 = 9 + 0x$$

$$3x + 2 - 2 = 9 - 2 \quad \longrightarrow$$

On cherche à isoler le terme inconnu dans le membre de gauche en retranchant 2 aux deux membres.

$$3x = 7$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{7}{3}$$

$$x = \frac{7}{3}$$

On cherche la valeur de l'inconnue x en divisant les deux membres par 3 .

Ainsi $7x + 2 = 4x + 9$ pour $x = \frac{7}{3}$. On vérifie ensuite que $\frac{7}{3}$ est une solution effective de l'équation initiale $7x + 2 = 4x + 9$ en appliquant la **méthode 1**.

À toi de jouer

- 3** Résous les équations : $3x + 5 = 4$; $7x + 8 = 14x$ et $5x - 3 = 7 + 5x$.

Méthode 3 : Simplifier une équation

Exemple : Simplifie l'équation suivante : $5\left(\frac{2}{3}x + 1\right) = 7 + \frac{8x}{5} - 4$.

On développe d'abord puis on réduit chacun des deux membres de l'équation :

$$5\left(\frac{2}{3}x + 1\right) = 5 \times \frac{2}{3}x + 5 \times 1 = \frac{10}{3}x + 5 \quad \Bigg| \quad 7 + \frac{8x}{5} - 4 = \frac{8x}{5} + 7 - 4 = \frac{8x}{5} + 3. \text{ Soit :}$$

$$\frac{10}{3}x + 5 = \frac{8}{5}x + 3 \quad \longrightarrow \quad \text{On réduit d'abord chaque terme de l'équation au même dénominateur, ici 15.}$$

$$\frac{50}{15}x + \frac{75}{15} = \frac{24}{15}x + \frac{45}{15} \quad \longrightarrow \quad \text{On multiplie chaque membre par 15 pour simplifier l'équation.}$$

$$50x + 75 = 24x + 45 \quad \longrightarrow \quad \text{Il reste à résoudre l'équation } 50x + 75 = 24x + 45$$

À toi de jouer

4 Simplifie les équations suivantes puis résous-les :

a. $7(2x + 3) - 23 = -x + 5(2x + 1)$ b. $\frac{x}{3} + 2 = \frac{5x}{6} - 1$ c. $(x + 1)(x - 2) = x^2 + 2$

Méthode 4 : Comparer des nombres

À connaître

- $x > 0$ se lit « **x est un nombre strictement positif** »
et $x < 0$ se lit « **x est un nombre strictement négatif** ».
 - Si $x > y$ alors $x - y > 0$. Réciproquement, si $x - y > 0$ alors $x > y$.
- Des règles analogues existent aussi pour les symboles $<$, \leq et \geq .

À connaître

- On ne change pas le sens d'une inégalité **en ajoutant ou en soustrayant** un même nombre à ses deux membres.
- On ne change pas le sens d'une inégalité **en multipliant ou en divisant** ses deux membres par un même nombre **positif** non nul.
- On change le sens d'une inégalité **en multipliant ou en divisant** ses deux membres par un même nombre **négatif** non nul.

Exemple : On sait que $-2,5 < a$. Que peux-tu dire de $-3a - 7$ et $2a$?

$$a < -2,5 \quad \longrightarrow \quad \text{On multiplie par } -3 \text{ qui est un nombre négatif donc le sens de l'inégalité change.}$$

$$-3a > -3 \times (-2,5)$$

$$-3a - 7 > 7,5 - 7$$

$$-3a - 7 > 0,5 \quad \longrightarrow \quad \text{On retranche } 7.$$

$$a < -2,5$$

$$2a < 2 \times (-2,5)$$

$$2a < -5 \quad \longrightarrow \quad \text{On multiplie par } 2 \text{ qui est un nombre positif donc le sens de l'inégalité ne change pas.}$$

À toi de jouer

5 Comme $3,14 < \pi < 3,15$, encadre le nombre $7\pi - 22,3$ et compare 7π et $22,3$.

Méthode 5 : Résoudre un problème à l'aide d'une équation

À connaître

Mettre en équation un problème, c'est traduire son énoncé par une égalité mathématique.

Remarque : Lorsque la résolution d'un problème par l'arithmétique devient fastidieuse voire impossible, utiliser une équation s'avère souvent nécessaire.

Exemple : Trouve le nombre tel que son quintuple augmenté de 7 soit égal à son double diminué de 3.

Étape n°1 : Choisir l'inconnue

Soit x le nombre cherché.

→ **On repère la grandeur non connue** parmi celles exprimées dans l'énoncé. On la note généralement x et on l'appelle « inconnue ».

Étape n°2 : Mettre en équation

Le quintuple du nombre augmenté de 7 est $5x + 7$.

Le double du nombre diminué de 3 est $2x - 3$.

→ **On exprime les informations données** dans l'énoncé en fonction de x .

$$5x + 7 = 2x - 3$$

→ La phrase de l'énoncé se traduit donc par l'égalité ci-contre.

Étape n°3 : Résoudre l'équation

$$5x + 7 = 2x - 3$$

$$5x + 7 - 2x = 2x - 3 - 2x$$

$$3x + 7 = -3$$

$$3x + 7 - 7 = -3 - 7$$

$$3x = -10$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{-10}{3}$$

$$x = -\frac{10}{3}$$

→ **On résout l'équation** à l'aide des propriétés de la **méthode 2**.

Étape n°4 : Vérifier que la valeur trouvée est solution du problème

Le quintuple de $-\frac{10}{3}$ augmenté de 7 :

$$5 \times \left(-\frac{10}{3}\right) + 7 = -\frac{50}{3} + \frac{21}{3} = -\frac{29}{3}$$

Le double de $-\frac{10}{3}$ diminué de 3 :

$$2 \times \left(-\frac{10}{3}\right) - 3 = -\frac{20}{3} - \frac{9}{3} = -\frac{29}{3}$$

Ainsi le quintuple de $-\frac{10}{3}$ augmenté de 7 est égal au double de $-\frac{10}{3}$ diminué de 3.

Étape n°5 : Conclure

Le nombre cherché est donc $-\frac{10}{3}$.

À toi de jouer

6 Que vaut le nombre x si le triple de la différence de x et de 7 est égal à la moitié de la somme de x et de 1 ?

7 J'ai deux ans de plus que Julie et Marc a le double de mon âge. À nous trois, nous avons 110 ans. Quel est mon âge ?

Solutions d'une équation

1 Vocabulaire

$$9x + 2 = 39 \qquad 4y + 8 = y^2 + 3$$

Pour chaque équation, indique :

- l'inconnue ;
- le ou les termes comportant l'inconnue ;
- le ou les termes constants ;
- les membres de l'équation.

2 Être solution ou non ?

a. Le nombre -5 est-il solution de l'équation $5 - 4x = 19$? Et le nombre -6 ?

b. Le nombre 8 est-il solution de l'équation $5y - 3 = 2y + 2$? Et le nombre -3 ? Et $\frac{5}{3}$?

c. Parmi les nombres 5 , -3 et 2 , lesquels sont solutions de l'équation $z^2 + z - 6 = 0$?

3 Parmi les équations suivantes, quelles sont celles qui admettent pour solution celle de l'équation $7y + 5 = 3y + 8$. Justifie.

- | | |
|----------------------|-------------------------|
| a. $4y + 5 = 3y + 8$ | c. $14y + 10 = 6y + 16$ |
| b. $7y = 3y + 4$ | d. $7y - 5 = 3y + 1$ |

Résoudre des équations

4 Équations du type $x + a = b$

Résous les équations suivantes :

- | | |
|------------------|----------------------|
| a. $x + 6 = 8$ | f. $x - 5,3 = -3,2$ |
| b. $t - 7 = 3$ | g. $y + 15,7 = -30$ |
| c. $y + 11 = 10$ | h. $-5,4 + t = 4,85$ |
| d. $1 + x = -2$ | i. $x + 7 = -1,2$ |
| e. $t - 5 = -3$ | j. $y - 59,7 = -100$ |

5 Équations du type $ax = b$

Résous les équations suivantes :

- | | | |
|--------------|----------------|------------------|
| a. $3x = 9$ | d. $-2z = -8$ | g. $-y = 15,7$ |
| b. $5y = 3$ | e. $7x = 4$ | h. $4,4z = 0$ |
| c. $4z = -7$ | f. $-y = -7,2$ | i. $2,7x = -1,2$ |

6 Équations du type $ax + b = c$

Résous les équations suivantes :

- | | |
|-------------------|------------------------|
| a. $2x - 2 = 2$ | f. $6 - y = -2,3$ |
| b. $3z - 10 = 11$ | g. $7 - 3x = -22$ |
| c. $1 - y = 0$ | h. $5 + 6z = -11$ |
| d. $1 + 5x = -39$ | i. $-x - 9 = 11,2$ |
| e. $2 + 3z = 9$ | j. $9,7y - 5,7 = -1,7$ |

7 Équations du type $ax + b = 0$

a. Résous les équations suivantes :

$4x - 12 = 0$	$4x + 1 = 0$
$2x - 3 = 0$	$2 - 3x = 0$

b. On considère l'équation $ax + b = 0$ où a et b sont des nombres relatifs, a étant non nul. Exprime la solution x de cette équation en fonction de a et de b .

Vérifie alors tes résultats précédents.

c. Déduis-en directement la solution de chacune des équations suivantes :

$2x + 8 = 0$	$2 - 7x = 0$
$3x - 1 = 0$	$7x + 8 = 0$
$11x + 1 = 0$	$2,8 - 4x = 0$

8 Méli mélo

a. Résous les équations suivantes :

$7x = 28$	$x - 7 = -28$
$7 + x = 28$	$7 + x = -28$
$-7x = -28$	$x - 7 = 28$
$7x = -28$	$-7x = 28$
$7 - x = 28$	$7 - x = -28$

b. Regroupe les équations qui ont la même solution et explique pourquoi.

c. Sans faire de calculs et en justifiant, donne la solution de chacune des équations suivantes :

$-x - 7 = 28$	$-x - 7 = -28$
---------------	----------------

9 Solutions particulières

Résous les équations suivantes :

a. $6x = 6x + 1$	b. $3n = 0$	c. $0y = 0$
------------------	-------------	-------------

10 Équations du type $ax + b = cx + d$

Résous les équations suivantes :

- a. $5x = 3x + 3$ f. $5 + 6x = -x - 9$
 b. $8x = 12x + 4$ g. $11x + 3 = 8x + 7$
 c. $4 - 7y = 10y$ h. $5,5x + 1,5 = 9x + 6$
 d. $7x + 1 = -4 - x$ i. $7 - 3,3x = 2x - 9,7$
 e. $2 + 3x = 7 - 3x$ j. $5,1 - x = -8x + 1,7$

11 Plus complexe

Résous les équations suivantes :

- a. $4(x + 5) = 10x + 3$ b. $3(x - 2) = 6(x + 4)$
 c. $7x - (5x + 3) = 5(x - 3) + 2$
 d. $7(n + 2) - 3 = 25 - (3n + 4)$
 e. $4y + 3(4y - 2) = 3(y + 1)$

Avec des fractions

12 Résous les équations suivantes :

- a. $x - \frac{5}{4} = \frac{4}{3}$ d. $\frac{1}{3} - x = -\frac{2}{9}$
 b. $x + \frac{7}{3} = \frac{5}{7}$ e. $\frac{5}{18} - x = \frac{11}{45}$
 c. $x - \frac{5}{8} = \frac{3}{12}$ f. $x - \frac{12}{25} = -\frac{11}{15}$

13 Équations du type $ax = b$

Résous les équations suivantes :

- a. $\frac{z}{5} = \frac{3}{4}$ d. $\frac{x}{-8} = \frac{8}{9}$ g. $\frac{2x}{9} = -\frac{7}{27}$
 b. $\frac{x}{7} = \frac{7}{6}$ e. $-\frac{x}{12} = \frac{7}{3}$ h. $\frac{-3x}{7} = \frac{7}{8}$
 c. $\frac{x}{11} = -\frac{2}{13}$ f. $\frac{7x}{2} = \frac{1}{4}$ i. $\frac{-11}{9}x = -\frac{1}{5}$

14 Équations du type $ax + b = c$

Résous les équations suivantes :

- a. $\frac{7}{9}y + 5 = 8$ c. $\frac{1}{4}x - \frac{3}{8} = \frac{2}{3}$
 b. $\frac{1}{16}x - 2 = \frac{5}{8}$ d. $\frac{3}{7}y - \frac{5}{35} = -\frac{8}{14}$

15 Résous les équations suivantes :

- a. $\frac{x}{3} = \frac{x}{4} - \frac{6}{5}$ c. $\frac{2x}{7} + \frac{3}{14} = \frac{x}{7} - \frac{1}{14}$
 b. $\frac{5x}{8} - \frac{3}{10} = \frac{7x}{40}$ d. $\frac{2}{5}x - \frac{1}{9} = \frac{3}{9}x + \frac{4}{5}$

Comparaison

16 Sachant que m et n sont deux nombres tels que $m < n$, compare quand c'est possible :

- a. $m + 2$ et $n + 2$ d. $n + 4$ et $m + 4$
 b. $m + 14$ et $14 + n$ e. $m + 15,5$ et $n + 16$
 c. $m - 5$ et $n - 5$ f. $m - 165$ et $n - 160$

17 Sachant que p et r sont deux nombres tels que $p > r$, compare quand c'est possible :

- a. $-p$ et $-r$ c. $-\frac{p}{8}$ et $-\frac{r}{8}$ d. $\frac{p}{15}$ et $\frac{r}{16}$
 b. $6p$ et $5r$

18 Que de neufs !

- a. Compare 9,99 et 9,909.
 b. Compare alors $9,99\pi$ et $9,909\pi$.

19 Sachant que a , t et s sont des nombres tels que $t \leq s$, compare les nombres suivants :

- a. $5s$ et $5t$ d. $s + \pi$ et $t + \pi$
 b. $6t$ et $6s$ e. $t + a$ et $s + a$
 c. $3,4s$ et $3,4t$ f. $-5s$ et $-5t$

20 Sachant que a est un nombre tel que $a < 5$, recopie et complète :

- a. $a + 18 \dots$ d. $5a \dots$ g. $3a + 1 \dots$
 b. $a - 21 \dots$ e. $-a \dots$ h. $1,5a - 8 \dots$
 c. $2a \dots$ f. $-11a \dots$ i. $-9a + 5 \dots$

21 Sachant que b est un nombre tel que $b \geq 2$, recopie et complète :

- a. $b + 30 \dots$ c. $4b \dots$ e. $b - \sqrt{2} \dots$
 b. $b - 7 \dots$ d. $b + \pi \dots$ f. $0,5b \dots$

22 Compare sans calculatrice :

- a. $\frac{2}{9} + 7$ et $9 + \frac{2}{9}$ c. $\frac{7}{4} + \pi$ et $\frac{11}{8} + \pi$
 b. 4π et 5π d. $8\sqrt{3} - 1$ et $8\sqrt{3} - 2$

Encadrement

23 Valeurs approchées et arrondies

- a. Donne les valeurs approchées indiquées par la calculatrice pour : $\frac{355}{113}$, $\sqrt{10}$ et π .
 b. Donne un encadrement au dixième de $\sqrt{10}$.
 c. Donne l'arrondi au millième de $\frac{355}{113}$.
 d. Donne la valeur approchée de π à 0,001 près par défaut puis celle à 0,01 près par excès.
 e. Compare π avec $\frac{355}{113}$ puis avec $\sqrt{10}$.

24 Encadrements

- a. Donne l'encadrement de π au dixième.
 b. Déduis-en un encadrement de :
 $\pi + 1,5$ | 4π | $6\pi - 5$ | $(2 + \pi) \div 5$
 c. Donne un encadrement d'amplitude 0,01 du périmètre d'un cercle de rayon 4 cm.

25 Trouve un encadrement des expressions suivantes, sachant que $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$:

- a. $\sqrt{2} - 3$ | b. $3\sqrt{2}$ | c. $3 - 8\sqrt{2}$ | d. $\frac{-2 + \sqrt{2}}{3}$

26 Le nombre d'or Φ

L'une des deux solutions de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$ est un nombre non nul appelé « nombre d'or » et noté Φ .

- a. Montre que $\Phi^2 = \Phi + 1$.
 b. Montre que $\frac{1}{\Phi} = \Phi - 1$.
 c. Sachant que $1,618 < \Phi < 1,619$, déduis-en un encadrement de 2Φ , Φ^2 et $\frac{1}{\Phi}$.
 d. Fais des recherches sur ce nombre et trouve ses applications dans les arts.

Problèmes

27 Dans ma classe

Il y a 28 élèves. Le jour où Lucas était absent, il y avait deux fois plus de filles que de garçons. Combien y a-t-il de filles dans ma classe ?

28 Nombres consécutifs

- a. Trouve trois nombres entiers consécutifs dont la somme vaut 513.
 b. Peux-tu trouver trois nombres entiers consécutifs dont la somme vaut 200 ? Justifie.
 c. Trouve quatre nombres entiers consécutifs dont la somme vaut 1 254.
 d. Invente un problème pour trouver cinq nombres entiers consécutifs.

29 Argent de poche

Mes parents me donnent de l'argent de poche depuis que j'ai 12 ans. Mon père m'a donné la première année 5 € par semaine. Il augmente cette somme tous les ans de 5 €. Ma mère me donne le double de mon père. À quel âge aurai-je 60 € par semaine ?

30 Extrait du Brevet

Un marchand dépense 75 € par semaine pour confectionner ses glaces. Sachant qu'une glace est vendue 2,50 €, combien doit-il vendre au minimum de glaces dans la semaine pour avoir un bénéfice supérieur à 76 € ?

31 Programmes de calculs

Alice et Bertrand affichent un même nombre sur chacune de leurs calculatrices.

- Alice multiplie le nombre affiché par 3 puis ajoute 4 au résultat obtenu.
- Bertrand multiplie le nombre affiché par 2 puis ajoute 7 au résultat obtenu.

À la fin, ils s'aperçoivent que leurs calculatrices affichent exactement le même résultat. Quel nombre ont-ils affiché au départ ?

32 Le nombre cherché

Joey pense à un nombre, lui ajoute 11, multiplie le tout par 3 et au résultat obtenu il retranche 3. Joey obtient 51. Quel est ce nombre de départ ?

33 Problème d'âges

Mickaël a 18 ans et son père a 46 ans. Dans combien d'années le père de Mickaël aura-t-il le double de son âge ?

34 Moyenne de Maths

Hervé a obtenu lors des trois premiers devoirs les notes suivantes : 8 ; 5 et 14. Quelle note minimale doit-il obtenir au dernier devoir pour avoir la moyenne ce trimestre ?

35 Sécurité routière

$$E_c = \frac{1}{2}MV^2$$

- M est la masse (en kg)
- V est la vitesse (en m/s)

$$E_p = Mgh$$

- $g = 9,81$ (en $N.kg^{-1}$)
- h est l'altitude (en m)

Pour évaluer les forces d'impact, on calcule l'énergie cinétique E_c (énergie liée au mouvement) et l'énergie potentielle de pesanteur E_p (énergie liée à l'altitude).

- Un véhicule de 900 kg roule à 60 $km.h^{-1}$. Sachant que $60 km.h^{-1} \approx 16,7 m.s^{-1}$, calcule son énergie cinétique E_c .
- À quelle hauteur doit être placé ce véhicule pour que son énergie potentielle E_p soit égale à l'énergie cinétique trouvée en **a.** ?
- Reprends les questions **a.** et **b.** avec un véhicule qui roule deux fois plus vite.

36 Impôts sur le revenu

Le calcul de l'impôt I pour un revenu annuel imposable R (abattement des 10 % inclus) compris entre 11 198 € et 24 872 € est basé sur la relation suivante : $I = \frac{14}{100}R - 857$.

Quel est le revenu annuel imposable R d'un individu qui paie 1 040 € d'impôts ?

37 J'ai 180 € de plus que toi.

Si je te donnais 41 € alors j'aurais deux fois plus d'argent que toi. Combien avons-nous chacun ?

38 Pièces

Avec 25 pièces toutes de 1 € et 2 €, j'ai une somme de 38 €. Combien ai-je de pièces de chaque sorte ?

39 Le concert

La grande Halle d'Auvergne peut accueillir 8 500 spectateurs. Lors d'un concert, toutes les places debout à 25 € et toutes les places assises à 44 € ont été vendues. Le montant de la recette était ce soir-là de 312 725 €. Quel était le nombre de spectateurs debout ?

40 La réunion

Dans une salle, on dispose en carré un nombre minimum de tables de façon à en réserver une pour chaque participant.

- Fais un dessin pour illustrer la situation.
- De combien de tables sera composé un côté de ce carré si le nombre de participants prévus est 24 ? 134 ?

41 Extrait du Brevet

Le ciné-club d'un village propose deux tarifs : Tarif A : une carte d'adhésion pour l'année coûtant 21 euros, puis 1,5 euros par séance ; Tarif B : 5 euros par séance sans carte d'adhésion.

- Calculer, pour chaque tarif, le prix payé pour 8 séances.
- On appelle x le nombre de séances. Exprimer en fonction de x le prix payé avec le tarif A, puis avec le tarif B.
- Quel est le nombre de séances pour lequel le tarif A est égal au tarif B ?

Problèmes de géométrie

42 Bouteille

Une bouteille de forme cylindrique contient 2 litres d'eau. Le rayon de sa base mesure 10 cm. Détermine la hauteur de la bouteille. Arrondis ton résultat au dixième de centimètre.

43 On transforme un carré en un rectangle

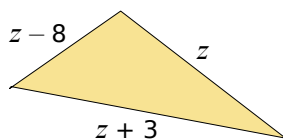
en ajoutant 4,5 cm à la longueur d'un de ses côtés et en retranchant 2 cm à la longueur d'un autre.

- Quelles doivent être les dimensions du carré initial pour que le double de son périmètre soit égal au périmètre du rectangle ?
- Quelles doivent être les dimensions du carré initial pour que son aire et celle du rectangle soient égales ?



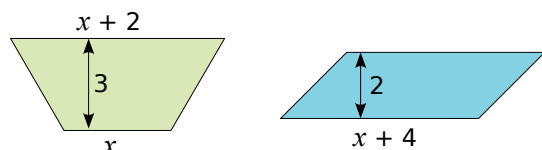
44 Périmètre d'un triangle

Trouve la valeur de z sachant que le périmètre du triangle ci-contre vaut 61. Les mesures sont dans la même unité.



45 Surfaces égales

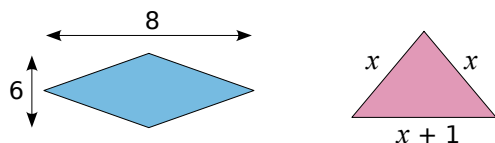
Soient le trapèze et le parallélogramme ci-dessous. Les mesures sont dans la même unité.



Quelle doit être la valeur de x pour que le trapèze ait la même surface que le parallélogramme ?

46 Histoire de périmètres

Soient le losange et le triangle isocèle ci-dessous. Les mesures sont dans la même unité.



Trouve la valeur de x telle que le périmètre du losange soit égal au double de celui du triangle.

Problèmes avec fractions

47 Trouve une fraction égale à $\frac{4}{3}$ dont la somme du numérateur et du dénominateur est égale à 63 (tu appelleras x le numérateur de la fraction recherchée).

48 Extrait du Brevet

Les longueurs sont données en cm et les aires en cm^2 .

L et l désignent respectivement la longueur et la largeur d'un rectangle. On sait que l'aire de ce rectangle mesure 230,4 et que $\frac{L}{l} = \frac{5}{2}$.

- Calculer les mesures exactes de la longueur et de la largeur de ce rectangle.
- Calculer la mesure exacte du périmètre de ce rectangle.

49 Extrait du Brevet

Si on retranche un même nombre au numérateur et au dénominateur de la fraction $\frac{4}{5}$, on obtient la fraction $\frac{5}{4}$.

Trouver ce nombre.

50 Extrait du Brevet

On considère trois nombres notés, dans cet ordre, x , y et z . Le quart du premier est égal au cinquième du second qui est lui-même égal au sixième du troisième. De plus, la somme de ces trois nombres est égale à 600.

- Calculer y et z en fonction de x .
- En déduire la valeur de ces trois nombres.

Problèmes d'encadrement

51 Longueur d'un terrain



Le périmètre du terrain rectangulaire ci-dessus est compris entre 286 m et 288 m. Détermine un encadrement de la longueur de ce terrain.

52 La rentrée

Le prix d'un cahier est compris entre 1,40 € et 3 € et celui d'un paquet de feuilles entre 3 € et 4,50 €. Aline a besoin de cinq cahiers et de quatre paquets de feuilles pour la rentrée.

- Donne un encadrement du prix des cahiers.
- Trouve un encadrement du prix des feuilles.
- Déduis-en un encadrement du coût des fournitures achetées par Aline.

53 Bébé deviendra grand

La taille d'un bébé à la naissance est comprise entre 40 et 55 cm. La plupart des enfants grandissent de 13 à 17 cm par an les trois premières années. Détermine un encadrement de la taille en cm d'un enfant de 3 ans.

54 Quitte ou double

À un jeu télévisé, la première bonne réponse rapporte 100 €. Le gain double à chaque bonne réponse. Le candidat veut gagner plus de 100 000 €. À combien de questions doit-il répondre au minimum ? Détaille tes recherches.

55 Optimisation de la recherche

Femme : $P_F = T - 100 - [T - 150] / 2$

Homme : $P_H = T - 100 - [T - 150] / 4$

La formule de Lorentz permet d'associer la masse corporelle théorique P (en kg) d'un adulte en fonction de sa taille T (en cm), si celle-ci est comprise entre 140 et 220 cm.

a. Quelle est la masse corporelle théorique d'une femme mesurant 1,50 m ? 1,60 m ? Quelle est la taille idéale d'une femme dont la masse est 51 kg ?

b. Quelle est la masse corporelle théorique d'un homme mesurant 1,50 m ? 1,90 m ? Quelle est la taille idéale d'un homme dont la masse est 62 kg ?

56 Résolution graphique

On recherche la(les) valeur(s) approchée(s) du(des) nombre(s) dont le carré vaut 0,5.

a. Recopie et complète le tableau suivant :

x	-1	-0,9	-0,8	-0,7	...	0,7	0,8	0,9	1
x^2									

b. Place dans un repère les points précédents en mettant x en abscisse et x^2 en ordonnée (tu prendras 10 cm pour une unité sur chaque axe).

c. Détermine graphiquement la(les) valeur(s) approchée(s) de x pour laquelle(lesquelles) $x^2 = 0,5$. Que remarques-tu ?

57 Énergie électrique

Relations électriques

$E = Pt$ • E : Énergie électrique (en Wh)
 • t : Temps de fonctionnement (en h)
 • P : Puissance consommée (en watts)

$P = UI$ • U : Tension (en volts)
 • I : Intensité (en ampères)

$U = RI$ • R : Résistance (en ohms)

Calcule la résistance d'un appareil fonctionnant sous une tension de 220 volts pendant 45 min et consommant une énergie de 1 125 Wh.

58 Sécurité routière et distance d'arrêt



fr.wikipedia.org

a. Temps de réaction et distance parcourue :

$$V = \frac{d_R}{t}$$

- V est la vitesse (en $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$)
- d_R est la distance de réaction (en m)
- t est le temps de réaction (en s)

Le temps de réaction d'un conducteur vigilant est d'environ 0,75 s. Calcule la distance parcourue par un véhicule roulant à $100 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ ($27,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$) pendant ce temps de réaction.

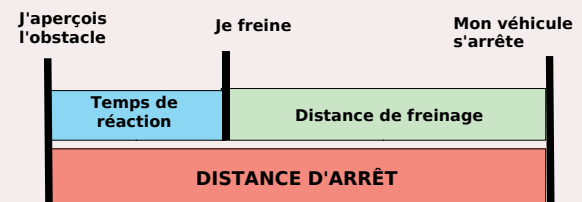
b. Distance de freinage :

$$D_F = \frac{V^2}{2gA}$$

- D_F : distance de freinage (en m)
- V : vitesse (en m/s)
- $g = 9,81$ (en $\text{N}\cdot\text{kg}^{-1}$)
- A : coefficient d'adhérence

Calcule la distance de freinage d'un véhicule roulant à 100 km/h sur route sèche (coefficient d'adhérence $A = 0,6$). À quelle vitesse doit rouler ce même véhicule sur chaussée humide (coefficient d'adhérence $A = 0,4$) pour que sa distance de freinage reste inchangée.

c. Distance d'arrêt :



Calcule la distance d'arrêt d'un véhicule roulant à 100 km/h , dans la situation optimale (route sèche, plate et en bon état, freins performants, conducteur vigilant).

d. Autre méthode :

$$D = \left(\frac{V}{10}\right)^2$$

V est la vitesse exprimée en km/h

Estime cette distance d'arrêt dans la situation optimale en utilisant la relation écrite ci-dessus.



1 A l'assaut des carrés magiques !

1^{re} Partie : Le principe

• Voici un carré magique d'ordre 3. « Être magique » suppose que la somme des nombres en ligne, en colonne et en diagonale soit la même. Vérifiez que ce carré est bien magique.

6	7	2
1	5	9
8	3	4

Voici une méthode pour construire des carrés magiques d'ordre 4 :

a		$a + 1$	b
	$a + 11$	$a - 2$	
	$a - 3$	$b + 3$	$a + 4$
		$a + 7$	

• Soit S la somme commune aux lignes, aux colonnes et aux diagonales. Exprimez S en fonction de a et de b .

• Complétez toutes les cases du carré pour qu'il soit magique.

2^e Partie : Jouons !

• Choisissez des valeurs de a et b afin de construire un carré magique. Enlevez certaines cases (attention, il faut que toutes les cases du carré puissent être complétées) et faites l'échange avec un autre groupe.

• Complétez le carré magique que vous avez reçu.

3^e Partie : Avec un tableur

• Dans un tableur, programmez les cellules pour obtenir un carré magique comme au c. en fonction des cellules A1 et D1.

• À l'aide du tableur, trouvez le carré magique dans chacun des cas suivants :

- la cellule A2 contient 17 et A3 contient 10 ;
- la cellule D2 contient 14 et $S = 56$;
- la cellule B4 contient 4 et $S = 59$.

• Retrouvez ces résultats par le calcul.

2 Nombre mystère

1^{re} Partie : Un premier nombre mystère

• Déterminez le nombre entier pour lequel tous les indices suivants sont valables :

x vérifie l'inégalité $x + 2 > -2$.	x est un nombre positif.	x ne vérifie pas l'inégalité $2x < 12$.
x vérifie l'inégalité $-x > -8$.	$x - 7$ est un nombre négatif ou nul.	x n'est pas un multiple de 5.
x ne vérifie pas l'inégalité $x + 5 \leq 6$.	x est un nombre pair.	x n'est pas le carré d'un nombre entier.
x est un multiple de 3.	x ne vérifie pas l'inégalité $3x > 30$.	x vérifie l'inégalité $-2x < -6$.

• Est-ce que tous les indices sont nécessaires pour trouver la valeur de x ? Trouvez un nombre minimum d'indices qui permettent à eux seuls de déterminer x .

2^e Partie : Inventez vos indices

• Dans votre groupe, choisissez un nombre entier et inventez une liste de douze indices qui permettent de déterminer le nombre, en vous inspirant de la première partie. Tout comme dans la première partie, six indices au moins doivent utiliser une inégalité et aucun indice ne doit permettre de trouver immédiatement le nombre.

• Fabriquez un jeu de quinze cartes avec vos indices. Recommencez l'opération avec un nouveau nombre. Vous aurez donc construit deux jeux de cartes.

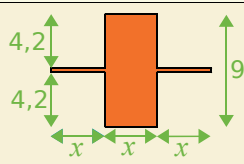
3^e Partie : Jouez !

• Utilisez un jeu de cartes construit par un autre groupe. Un joueur distribue les cartes de manière à ce que chacun en ait le même nombre.

• Le joueur à la gauche du donneur commence à jouer. C'est le détective. Il étudie ses cartes et propose à voix haute un nombre qui, selon lui, peut être le nombre mystère. Les autres joueurs étudient leurs cartes.

• Si un joueur trouve dans son jeu un indice qui prouve que le nombre choisi n'est pas le nombre mystère, il dit : « Erreur ! » et montre son indice au détective.

• C'est alors le joueur à gauche du détective qui devient détective à son tour. Si aucun joueur n'a d'indice qui prouve que le nombre choisi n'est pas le nombre mystère, le détective a gagné.

		R1	R2	R3	R4
1	Les équations sont :	$A = 3x + 4$	$5x^2 + 6x - 3 = 0$	$6a + 1 = a - 2$	$6y + 7$
2	$x = -3$ donc...	$4x > 0$	$2x + 5 = \frac{2x}{3} + 1$	$x^2 + 6x + 9 = 0$	$x + 7 = -21$
3	-8 est la solution de l'équation...	$2a + 17 = 1$	$(8 + x)(x + 3) = 0$	$0x = 0$	$n^2 = 64$
4	$3x - 4 = -2x + 11$ donc...	$-1x = 9x$	$5x = 7$	$x = 3$	$5x - 15 = 0$
5	L'équation $2x - 6 = 2(-2 + x)$...	admet 0 pour solution	n'a pas de solution	a les mêmes solutions que $0x = 2$	est impossible
6	$4a + 5 = a + 15$ donc...	$3a = 10$	$a = 1,3333$	$a = 4$	$a = \frac{3}{10}$
7	« Le double de la somme d'un nombre et de 3 est égal à la moitié de ce nombre, augmentée de 5 »	$\frac{x}{2} + 3 = 2x + 5$	$2x + 3 = \frac{x}{2} + 5$	$2(x + 3) = \frac{x + 5}{2}$	ce nombre n'a pas d'écriture décimale
8		Le périmètre de la figure est, en fonction de x : $3x + 9$	On peut trouver x pour que la figure ait le même périmètre qu'un carré de côté x	Pour la figure, l'équation $6x + 18 = 10,2x$ a un sens	L'aire de la figure est en fonction de x : $10,2x$
9	$a - b$ est négatif ou nul donc...	a peut être égal à b	a et b sont négatifs	$a < b$	a est inférieur ou égal à b
10	$x < y$ donc...	$12x < 12y$	$-x < -y$	$2x - 5 > 2y - 5$	$x^{-1} < y^{-1}$
11	$4x + 3 < 9$ donc...	$4x > 9 - 3$	$\frac{4x + 3}{9} < 1$	x peut être égal à 10	$x < 1,5$
12	$5,6 < c < 8,1$ donc...	$c - 8,5 > 0$	la circonférence d'un cercle de rayon c est comprise entre $11,2\pi$ et $16,2\pi$	le périmètre d'un rectangle de dimensions c et $3c$ est compris entre 44,8 et 64,8	$3c - 5$ peut être égal à 10,9

Récréation mathématique

Quel âge ?

Dialogue entre un père et son fils.
 Le fils : « Nous avons 27 ans de différence ! ».
 Le père : « Et j'ai le quadruple de l'âge que tu avais quand j'avais l'âge que tu as ! ».
 Mais quel âge ont-ils ?

À la ferme

Le fermier a compté 83 têtes et 236 pattes.
 Combien cela fait-il de bipèdes et de quadrupèdes ?
 Combien de poules a-t-il ?
 Quel âge a le fermier ?

Et ainsi de suite...

Démontrez que les nombres suivants $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{4}{5}$; ... ; $\frac{n}{n+1}$; ... sont rangés dans l'ordre croissant et sont tous inférieurs à 1 !



Narration de recherche

Sujet :

Dans un jardin, deux escargots partent au même instant : le premier du carré de salades vers les courgettes, le second des courgettes vers le carré de salades.

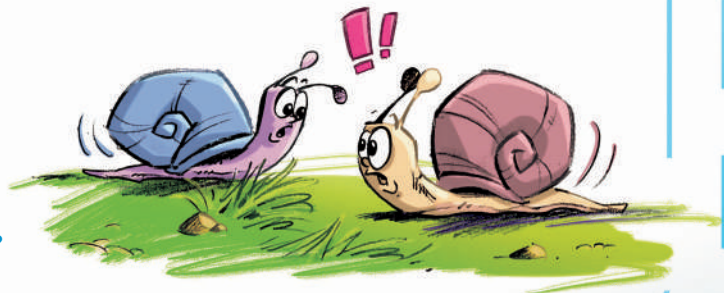
Chacun avance à une vitesse constante.

Lorsqu'ils se rencontrent, le premier a parcouru 2 m de plus que le second.

Ils reprennent leur chemin un peu découragés de voir leur objectif certainement déjà bien mangé. Ils se pressent moins et diminuent leur vitesse de moitié.

Après leur rencontre, il faut 8 minutes au premier pour arriver aux courgettes et 18 minutes au second pour arriver au carré de salades.

Quelle distance y-a-t-il entre les courgettes et le carré de salades ?



Activité 1 : Représentations graphiques et tableaux

Les tableaux et graphiques suivants concernent des conversions de mesures de grandeurs :

Tableau 1

Température en °F	14	32	41	59	95
Température en °C	-10	0	5	15	35

Tableau 2

Prix en €	5	10	15	20
Prix en F	32,8	65,6	98,4	131,2

Tableau 3

Distance en ft	0	5	10	15
Distance en m	0	1,524	3,048	4,572

Tableau 4

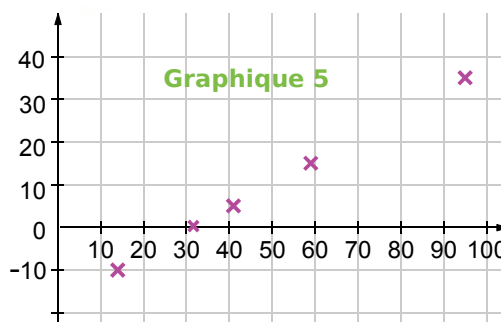
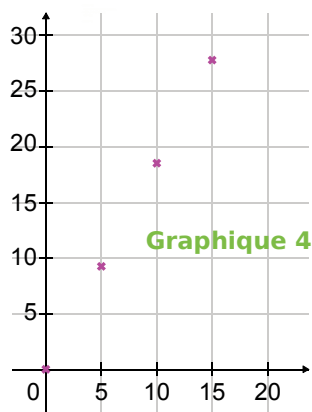
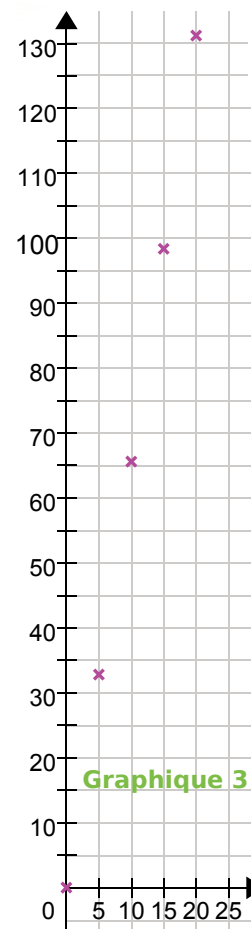
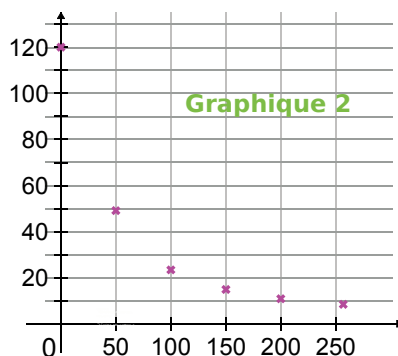
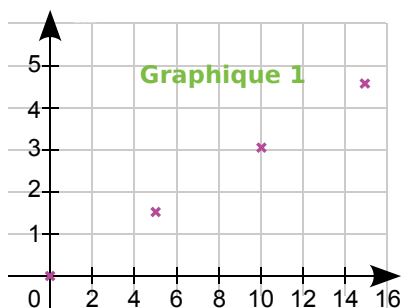
Distance en M	0	5	10	15
Distance en km	0	9,26	18,52	27,78

Tableau 5

* V = 40, B = 0

Valeur de R (codage RVB*)	0	50	100	150	200	255
Valeur de H (codage HSI)	120	49,1	23,4	14,9	10,9	8,4

Le mille marin M est une unité de mesure utilisée dans la marine.
Le degré Fahrenheit (°F) est une unité de mesure de température et le pied (ft) est une unité de mesure de longueur, utilisées au Royaume-Uni. Les codages RVB et HSI sont des codages de couleur : R indique la valeur du Rouge, H la valeur de la teinte (Hue en anglais).



1. Associe chaque graphique au tableau qui lui correspond.
2. Parmi les conversions proposées précédemment, quelles sont celles qui correspondent à des situations de proportionnalité ?
3. Qu'ont en commun les graphiques qui correspondent à des situations de proportionnalité ?
4. Recopie et complète la phrase suivante : « Si une situation est de proportionnalité alors elle est représentée graphiquement par... ».

Activité 2 : Représentation graphique et proportionnalité

- Comment peux-tu construire facilement la représentation graphique d'une situation de proportionnalité ?
- Fin novembre 2006, le cours de l'euro en dollar des États-Unis s'établit comme suit : 1 € = 1,32 \$ USD. En prenant en abscisse 1 cm pour 1 € et en ordonnée 1 cm pour 1 \$ USD, et en plaçant un point bien choisi, représente graphiquement la conversion euro-dollar USD.
- À l'aide du graphique, donne une valeur approchée en \$ USD de 6 € puis de 7 €.
- À l'aide du graphique, donne une valeur approchée en € de 3 \$ USD puis de 15 \$ USD.
- Recopie puis complète le tableau suivant avec les valeurs exactes ou arrondies au centième :

Euro (€)	6			7		100
Dollar USD (\$ USD)		3	15		100	

source : Banque de France <http://www.banque-france.fr/>.

- Compare avec ce que tu as trouvé au 2. et au 3..

Activité 3 : Quatrième proportionnelle

- Réduction à l'unité**
 - 6 kg de pommes coûtent 9,60 €. Calcule le prix d'un kilogramme de pommes.
 - Combien coûtent 7 kg de ces mêmes pommes ?
- Utilisation de la proportionnalité**
 - Six cédéroms coûtent 102 €. Combien coûtent trois de ces mêmes cédéroms ?
 - Combien coûtent neuf de ces mêmes cédéroms ?

3. Produits en croix

- Écrire que le tableau ci-contre est un tableau de proportionnalité revient à dire que les produits en croix $a \times d$ et $b \times c$ sont égaux. Calcule les produits en croix pour les tableaux suivants et dis si ce sont des tableaux de proportionnalité :

Grandeur 1	a	c
Grandeur 2	b	d

Masse en kg	15	33,75
Prix en €	4	9

Distance en m	3	4,5
Durée en min	12,2	18,4

Volume en L	4	5,2
Prix en €	5,5	7,15

- Complète les tableaux de proportionnalité en utilisant l'égalité des produits en croix :

Masse en kg	11	...
Prix en €	4	15,2

Distance en m	3	4,5
Durée en min	12,87	...

Volume en L	...	5,4
Prix en €	23,4	17,55

4. Au choix !

Complète les tableaux de proportionnalité suivants en utilisant la méthode de ton choix :

Masse en kg	11	...
Prix en €	4	12

Distance en m	3,9	4,5
Durée en min	23,01	...

Volume en L	...	6
Prix en €	21	18

Activité 4 : Calculs faisant intervenir des pourcentages

1. Les soldes

- a. Début janvier, les soldes d'hiver commencent ! Une paire de chaussures à 100 € est soldée à 50 %. Je n'ai malheureusement pas assez d'argent pour me l'acheter ! Une semaine plus tard je retourne au magasin et je suis très content de voir qu'il est écrit : « Deuxième démarque, 20 % sur le prix soldé ! ». J'ai 32 € en poche. Vais-je pouvoir m'acheter la paire de chaussures tant convoitée ?
- b. J'ai acheté une paire de chaussures soldée que j'ai payée 48 € mais je n'ai pas regardé quel était le pourcentage de réduction accordé par le magasin. Je sais pourtant qu'initialement la paire de chaussures était affichée à 80 €. Peux-tu m'aider à retrouver ce pourcentage de réduction ?

2. Chômage

- a. Au journal télévisé du 31 octobre 2006, le présentateur annonce : « Le nombre de demandeurs d'emploi a baissé de 10,1 % en un an et s'élève aujourd'hui à 2 188 104. ». Quel était le nombre de chômeurs au 31 octobre 2005 ?
- b. Ce même jour, le présentateur annonce que le taux de chômage en France s'établit alors à 8,8 %. Quel est le nombre de personnes ayant un travail ?

Activité 5 : Vitesse moyenne

L'unité de vitesse la plus couramment utilisée en France est le $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$. Cette unité n'est pas la plus adaptée en diverses situations.

1. L'escargot sprinter

- a. Un escargot très pressé se dirige vers une salade à la vitesse de $0,006 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$.

Recopie et complète :

$$\frac{0,006 \text{ km}}{1 \text{ h}} = \frac{\dots \text{ m}}{1 \text{ h}} = \frac{\dots \text{ m}}{\dots \text{ min}} = \frac{\dots \text{ cm}}{\dots \text{ min}}$$

Quelle est sa vitesse en $\text{m}\cdot\text{h}^{-1}$? En $\text{m}\cdot\text{min}^{-1}$? En $\text{cm}\cdot\text{min}^{-1}$?

- b. Utilise l'unité de vitesse la plus adaptée pour répondre aux questions :

- Combien de temps mettra l'escargot pour atteindre une salade située à 9 m ?
- Combien de temps mettra l'escargot pour atteindre une salade située à 70 cm ?

2. Au Royaume-Uni

- a. Après avoir traversé le tunnel sous la Manche avec ma voiture, je me rends à Liverpool en empruntant l'autoroute. La vitesse limite sur autoroute au Royaume-Uni est de 70 mph (miles per hour). Sachant que 1 mile = 1,609344 km, quelle vitesse limite en $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ est autorisée sur autoroute au Royaume-Uni ?
- b. Après quelques jours passés à Liverpool, je désire me rendre à Glasgow. J'ai appris sur Internet que la distance Liverpool-Glasgow était de 225 miles. Sachant que je compte m'y rendre en voiture et qu'il y a une autoroute entre Liverpool et Glasgow, quel temps minimal mettrai-je en respectant la limitation de vitesse ?
- c. J'ai en fait roulé à 62 mph en moyenne pour faire Liverpool-Glasgow, je me suis ensuite rendu à Édimbourg, distant de 46 miles de Glasgow. Sachant que j'ai roulé en moyenne à 54 mph sur ce trajet, quelle a été ma vitesse moyenne en mph pour faire Liverpool-Glasgow-Édimbourg ? Donne un arrondi de cette vitesse moyenne en $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$.

Méthode 1 : Caractériser graphiquement la proportionnalité

À connaître

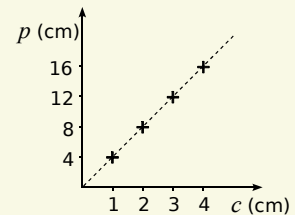
Si on représente, dans un repère, une situation de proportionnalité alors **on obtient des points alignés avec l'origine du repère.**

Exemple 1 : Le périmètre p d'un carré est proportionnel à son côté c puisqu'on a $p = 4c$. Représente graphiquement le périmètre en fonction du côté.

1. On **choisit** des valeurs pour le côté c .
2. On **calcule** les valeurs correspondantes du périmètre p .

côté c (en cm)	1	2	3	4
périmètre p (en cm)	4	8	12	16

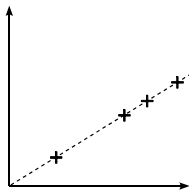
3. On **place** les points dans un repère comme ci-contre.



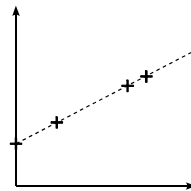
À connaître

Si une situation est représentée par des points alignés avec l'origine du repère alors **c'est une situation de proportionnalité.**

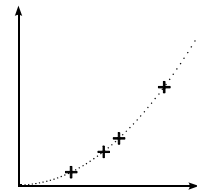
Exemple 2 : Ces graphiques représentent-ils des situations de proportionnalité ? Justifie.



Oui, car les points sont alignés avec l'origine du repère.



Non, car les points sont alignés, mais pas avec l'origine du repère.



Non, car les points ne sont pas alignés.

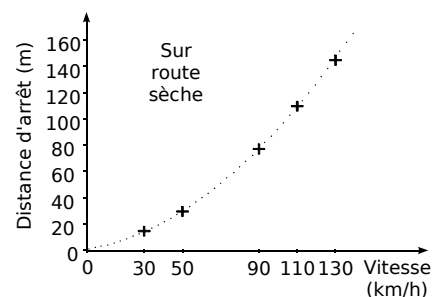
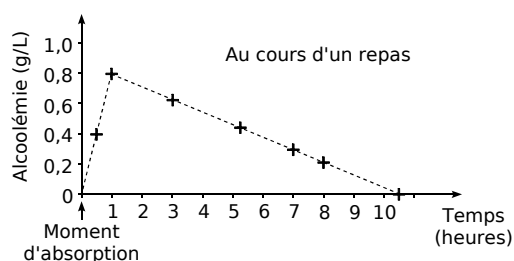
À toi de jouer

1 A la halle aux fruits, le kilogramme de clémentines est vendu 2,20 €. Représente graphiquement le prix à payer en fonction de la masse de clémentines achetées (prends 1 cm pour 1 kg en abscisse et 1 cm pour 1 € en ordonnée).

2 A l'aide des graphiques et en justifiant, réponds aux questions suivantes :

a. L'alcoolémie (la concentration d'alcool dans le sang) est-elle proportionnelle au temps ?

b. La distance d'arrêt est-elle proportionnelle à la vitesse ?



Méthode 2 : Déterminer une quatrième proportionnelle

À connaître

Dans une situation de proportionnalité, la **quatrième proportionnelle** est le quatrième nombre (x) calculé à partir de trois autres nombres déjà connus (a , b et c).

Le tableau ci-contre est un tableau de proportionnalité.

Donc on a : $\frac{b}{a} = \frac{x}{c}$.

Et donc : $a \times x = b \times c$ (égalité des produits en croix).

a	c
b	$x ?$

a , b et c sont différents de zéro.

Exemple : Calcule le prix x de trois baguettes grâce au tableau de proportionnalité suivant :

Le prix du pain est proportionnel au nombre de baguettes achetées. L'égalité des produits en croix donne :

Donc : $x = \frac{4,25 \times 3}{5} = \frac{12,75}{5} = 2,55 \text{ €}.$

Nombre de baguettes	5	3
Prix en €	4,25	$x ?$

À toi de jouer

3 Calcule x , y et z dans le tableau de proportionnalité ci-dessous :

Taille d'un fichier (en Mo)	x	2,75	740	z
Durée de téléchargement (en s)	208	44	y	10

Méthode 3 : Utiliser ou déterminer un pourcentage

Exemple : 25 filles et 20 garçons de deux classes de 4^e ont effectué un devoir commun. 60 % des filles et 50 % des garçons ont obtenu la moyenne. Calcule le pourcentage d'élèves qui ont obtenu la moyenne dans l'ensemble de ces deux classes.

1. On calcule le nombre de filles qui ont obtenu la moyenne :

$$\frac{60}{100} \times 25 \text{ filles} = \frac{60 \times 25}{100} \text{ filles} = 15 \text{ filles.}$$

2. On calcule le nombre de garçons qui ont obtenu la moyenne :

$$\frac{50}{100} \times 20 \text{ garçons} = \frac{50 \times 20}{100} \text{ garçons} = 10 \text{ garçons.}$$

3. On calcule le nombre total d'élèves dans les deux classes : $25 + 20 = 45$ élèves.

On calcule le nombre d'élèves ayant eu la moyenne : $15 + 10 = 25$ élèves.

Nombre d'élèves qui ont obtenu la moyenne	25	$n ?$
Nombre TOTAL d'élèves	45	100

Pour connaître le pourcentage ...

L'égalité des produits en croix donne :

$$45 \times n = 25 \times 100$$

$$\text{Donc : } n = 25 \times 100 \div 45$$

$$n \approx 56$$

Donc environ 56 % des élèves des deux classes ont obtenu la moyenne.

À toi de jouer

4 Pour faire un gâteau, je fais fondre une tablette de 100 g de chocolat dont la teneur en cacao est de 70 % avec une tablette de 200 g dont la teneur en cacao est de 85 %.

- Calcule la masse de cacao contenue dans le mélange ainsi constitué.
- Quel est le pourcentage de cacao dans ce mélange ?

Méthode 4 : Utiliser les formules de la vitesse

À connaître

Si un mobile parcourt une **distance d** en un **temps t**

alors la **vitesse moyenne v** de ce mobile est le **quotient de d par t** : $v = \frac{d}{t}$.

On a aussi, d'après l'égalité des produits en croix : $d = vt$.

Exemple 1 : Sur un parcours de 60 km, la vitesse moyenne d'un cycliste est de 30 km/h à l'aller et de 20 km/h au retour. Calcule sa vitesse moyenne V sur le trajet aller-retour.

$d = d_1 + d_2 = 60 \text{ km} + 60 \text{ km} = 120 \text{ km}$. → On calcule la distance d aller-retour.

$d_1 = v_1 t_1$ donc $t_1 = \frac{d_1}{v_1} = \frac{60 \text{ km}}{30 \text{ km/h}} = 2 \text{ h}$. → On calcule la durée t_1 du trajet aller.

$d_2 = v_2 t_2$ donc $t_2 = \frac{d_2}{v_2} = \frac{60 \text{ km}}{20 \text{ km/h}} = 3 \text{ h}$. → On calcule la durée t_2 du trajet retour.

$t = t_1 + t_2 = 3 \text{ h} + 2 \text{ h} = 5 \text{ h}$. → On calcule la durée t de l'aller-retour.

$V = \frac{d}{t} = \frac{120 \text{ km}}{5 \text{ h}} = \frac{120}{5} \text{ km/h} = 24 \text{ km/h}$. → On calcule la vitesse moyenne V sur le trajet aller-retour.

À connaître

$$1 \text{ h} = 3\,600 \text{ s}$$

$$1 \text{ km} = 1\,000 \text{ m}$$

Exemple 2 : Convertis 54 km/h en m/s et 2,5 m.s⁻¹ en km.h⁻¹.

54 km/h signifie que l'on parcourt...

	54 km	en	1 h	
	54 000 m	en	1 h	
÷3600	15 m	en	1 s	÷3600

Donc : 54 km/h = 15 m/s.

2,5 m.s⁻¹ signifie que l'on parcourt...

	2,5 m	en	1 s	
	0,002 5 km	en	1 s	
×3600	9 km	en	1 h	×3600

Donc : 2,5 m.s⁻¹ = 9 km.h⁻¹.

À toi de jouer

5 Un TGV a parcouru 540 km à 240 km/h de moyenne. Calcule la durée du trajet.

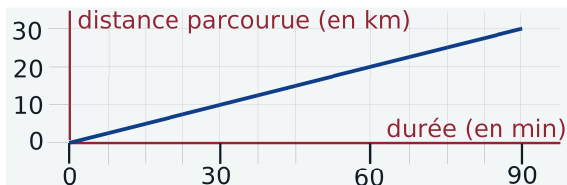
6 En France, la vitesse maximale autorisée sur autoroute est 130 km/h. Convertis cette vitesse en m/s.

7 Après 10 min de vol, la fusée Ariane 5 atteint 8 112 m.s⁻¹. Convertis cette vitesse en km.h⁻¹.

Caractérisation graphique

1 Promenade

a. Ce graphique illustre-t-il une situation de proportionnalité ?



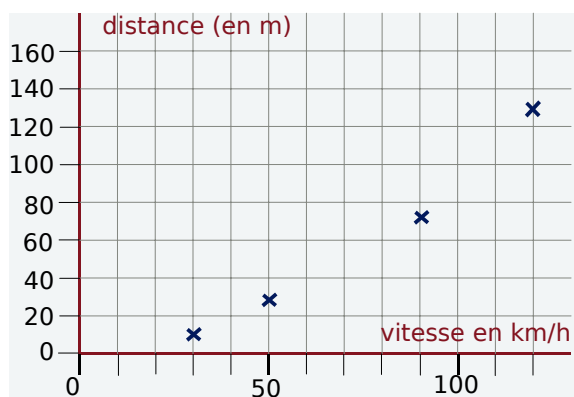
b. La promenade dure 3 h et s'effectue à la même vitesse. Complète le tableau suivant :

Distance (en km)		40	
Durée (en min)	45		165

2 Distance d'arrêt

La distance d'arrêt d'une voiture est-elle proportionnelle à sa vitesse ?

Justifie ta réponse à l'aide du graphique suivant qui représente la distance d'arrêt d'une voiture en fonction de sa vitesse :



3 Rémi

Ce tableau indique la taille de Rémi en fonction de son âge.

Âge (en années)	2	5	10	12
Taille (en cm)	80	100	125	150

a. Est-ce une situation de proportionnalité ?

b. Représente graphiquement l'évolution de la taille de Rémi en fonction de son âge. Peux-tu répondre à la question a. sans faire de calculs ? Justifie.

Quatrième proportionnelle

4 Impact

Un automobiliste n'échappe pas aux lois de la physique. Ainsi la force d'impact d'un véhicule lancé à 120 km/h est 16 fois plus grande que celle d'un véhicule qui roule à 30 km/h.



<http://commons.wikimedia.org>

La force d'impact d'un véhicule est-elle proportionnelle à sa vitesse ?

5 Fusibles

Une installation électrique correctement conçue est protégée par des fusibles dont la valeur limite est donnée en ampères (A). La valeur limite d'un fusible est proportionnelle à la puissance maximale en watts (W) supportée par l'installation. Ainsi un fusible de 16 A peut supporter une puissance maximale de 3 500 W.



a. Quelle puissance maximale peut supporter un fusible de 30 A ?

b. Quelle doit être la valeur limite d'un fusible pour une puissance maximale de 5 250 W ?

6 Au marché

Lucie achète 1,2 kg de carottes et paye 1,02 €.

a. Combien coûtent 2 kg de carottes ?

b. Quelle masse de carottes peut-elle acheter avec 1,36 € ?

7 Fuite

Une chasse d'eau qui fuit dans la maison de Gérard laisse échapper 15 L d'eau en 3 h.

a. Quelle quantité d'eau est perdue en une semaine ?

b. 1 m³ d'eau coûte 5,20 €. Que coûtera cette fuite à Gérard au bout d'un an s'il ne la répare pas ?

8 Bien manger

Un patient obèse typique verra son poids augmenter de quelques 20 kg en 10 ans. Ceci signifie un excès d'apport quotidien de 30 à 40 kilocalories au début du processus d'obésité [...]. Un excès quotidien de cette ampleur correspond initialement à moins d'un demi-sandwich. (Per Björntorp. Obesity. The Lancet, 1997)



Entre quelles valeurs se situe l'apport calorique quotidien de deux sandwiches ?



9 Tabagisme

Les jeunes de 12 à 25 ans qui fument régulièrement consomment en moyenne 10 cigarettes par jour.
(source : www.tabac-info-service.fr)

Fumer peut entraîner une mort lente et douloureuse

- En supposant qu'un fumeur commence à l'âge de 14 ans à ce rythme, et continue jusqu'à 25 ans, combien de cigarettes aura-t-il fumées ?
- Le prix moyen d'une cigarette est 0,25 € en 2006. Quelle est la somme consacrée par ce fumeur à l'achat de ses cigarettes en 2006 ?

10 Pâte à crêpes

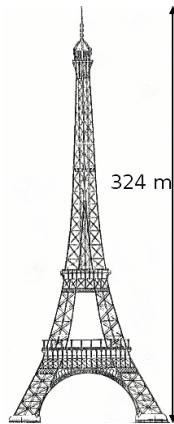
Les ingrédients pour 8 personnes : 500 g de farine, 6 oeufs, un litre de lait et 50 g de sucre.

- Quelle est la liste des ingrédients pour douze personnes ?
- Marie dispose de 700 g de farine, de 9 oeufs, de 2 litres de lait et de 100 g de sucre. Pour combien de personnes au maximum peut-elle préparer de la pâte à crêpes ?

11 Tour Eiffel

Claude a acheté une maquette de la Tour Eiffel à l'échelle 1/600. Il veut vérifier que cette maquette a bien les mêmes proportions que l'originale. Il décide donc de mesurer la hauteur totale de sa maquette.

Quel est le raisonnement de Claude ?



Pourcentages

12 Prix

- Julien obtient une réduction de 15 % sur un vélo valant 158 €. Quel est le montant de la réduction obtenue par Julien ?
- Patrick a obtenu une réduction de 27 € sur une console de jeu qui valait 225 €. Quel pourcentage de réduction a-t-il obtenu ?
- Saïd a obtenu une baisse de 45 € sur un appareil photo, soit une baisse de 30 % du prix initial. Quel était le prix initial de l'appareil photo ?

13 Placement

Luc a placé un capital de 1 500 € à sa banque le 1^{er} janvier 2007 à un taux d'intérêts annuel de 6 %. Cela signifie que chaque année la banque rajoute au capital 6 % de ce capital.

- Quel sera le capital de Luc le 01/01/2008 ?
- Quel sera le capital de Luc le 01/01/2009 ?
- Quel pourcentage de son capital de départ Luc aura-t-il gagné en deux ans ?

14 Biodiversité

Le Brésil est considéré comme représentant les 20 % de la biodiversité mondiale, avec 50 000 espèces de plantes, 5 000 vertébrés, 10 à 15 millions d'insectes et des millions de micro-organismes.
(source : fr.wikipedia.org)



Calcule le nombre estimé d'espèces de plantes, de vertébrés et d'insectes sur Terre.

15 Énergies renouvelables

Le bois est une énergie peu coûteuse et très répandue. En France, en 2005, le chauffage au bois produit l'équivalent de 9 millions de tonnes de pétrole (Mtep) par an, soit 3,3 % des besoins en énergie. Il faut savoir qu'il existe aussi une nouvelle génération de chaudières à bûches pour le chauffage central [...] qui présentent de multiples avantages notamment des émissions polluantes réduites [...]. En 2005, la part des énergies renouvelables dans la consommation d'énergie est de 6,3 %. (source : www.ciele.org)

- Quels étaient les besoins énergétiques en Mtep (arrondis à l'unité) en France en 2005 ?
- Quelle quantité les énergies renouvelables représentent-elles en France en 2005 en Mtep ?

16 Crue

Lors de la crue de l'Ouvèze (affluent du Rhône) qui fit 42 morts le 22 septembre 1992, on a estimé que le débit de cette rivière avait atteint un maximum de $1\,100\text{ m}^3\cdot\text{s}^{-1}$ alors que le débit moyen est de $5,2\text{ m}^3\cdot\text{s}^{-1}$. Quel pourcentage d'augmentation cela représente-t-il ?

17 Économie d'énergie

À la suite de travaux d'isolation dans sa maison, d'un montant de 1 470 €, Yann calcule qu'il gagnera 15 % sur sa facture annuelle de chauffage. Sa facture précédente était de 980 €.

- Au bout de combien d'années, si ses besoins en chauffage restent constants, Yann aura-t-il amorti ses travaux ?
- Quelle sera l'économie réalisée sur 20 ans ?

18 Consommation d'essence

La voiture de Samy consomme 8 L d'essence à 100 km/h et 10 L d'essence à 120 km/h.

- De 100 km/h à 120 km/h, quel est le pourcentage d'augmentation de la vitesse ?
- De 100 km/h à 120 km/h, quel est le pourcentage d'augmentation de la consommation ?

19 Multiples

Parmi tous les nombres entiers compris entre 0 et 1 000 (0 et 1 000 inclus) combien, en pourcentage, sont des multiples de 13 ?

20 Crédit

Lucien veut emprunter 3 000 €. À quelle banque va-t-il s'adresser ?

Banque du Nord	Banque du Sud
Coût du crédit : 2,5 % du capital emprunté	Coût du crédit : 3,2 % du capital emprunté
Assurance : 200 €	Assurance : 155 €

Vitesse

21 Records

- Le record du monde du 100 m est détenu au 15/06/2006 par Asafa Powell en 9,77 s. Quelle a été sa vitesse en m/s lors de sa course ?
- Le record du monde du 10 000 m est détenu au 26/08/2005 par Kenenisa Bekele en 26 min 17,53 s. Quelle a été sa vitesse en m/s puis en km/h lors de sa course ?

22 En route vers les vacances

Cynthia est partie de chez elle à 8 h 30 et est arrivée à son lieu de vacances à 16 h 50 après avoir parcouru 625 km en voiture. Quelle a été la vitesse moyenne du trajet ?

23 Le lièvre et la tortue

Jeannot Lapin et Louise Tortue décident de faire une course sur une distance de 500 m. Jeannot, sûr de lui, laisse partir Louise et décide de ne s'élancer à 50 km/h que quand Louise partie à 2 km/h sera à 20 m de la ligne d'arrivée. Que va-t-il se passer ?

24 L'éruption du Mont Saint Helens 1980

Une nuée ardente composée de gaz surchauffés, de cendre, de pierre ponce et de roche pulvérisée s'échappe latéralement à une vitesse initiale de 350 km/h et accélère rapidement pour atteindre les 1 080 km/h. (<http://fr.wikipedia.org>)



Quelle distance (en km) la nuée ardente a-t-elle parcourue en 30 s à sa vitesse maximale ?

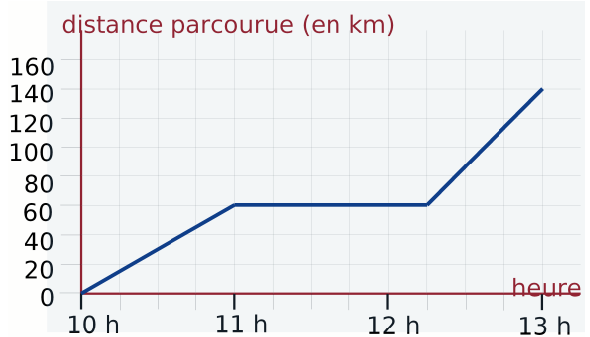
25 Histoire de trains

Le TGV « Nord » part de Lille à 10 h 20 vers Paris à la vitesse de 227 km.h⁻¹ et le TGV « Sud » part de Paris à 10 h 30 vers Lille à la vitesse de 239 km.h⁻¹. La distance Lille-Paris est environ de 220 km par le train. Ces deux trains vont-ils se croiser avant 10 h 53 ?

26 Vitesse de la lumière

Des réflecteurs posés sur le sol lunaire en 1969 servent à mesurer le temps mis par la lumière pour faire un aller-retour de la Terre à la Lune. Des mesures récentes montrent que la lumière met en moyenne 2,564 s pour faire ce trajet alors que la distance Terre-Lune est d'environ 384 402 km. Calcule une valeur approchée de la vitesse de la lumière.

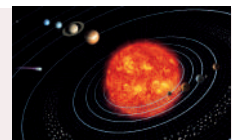
27 Un camion a effectué un trajet illustré par le graphique ci-dessous :



- Quelle est la durée totale de son trajet? Quelle distance totale a-t-il parcourue ?
- Calcule sa vitesse moyenne sur tout le trajet.

28 Terre

La vitesse orbitale de la Terre autour du Soleil est environ 29,783 km/s. ([source : fr.wikipedia.org](http://fr.wikipedia.org))



Quelle distance parcourt la Terre autour du Soleil en un an (environ 365,256 96 jours) ?



29 Fractions et pourcentages

Quel pourcentage représentent les $\frac{9}{50}$ des $\frac{2}{3}$ d'une quantité donnée ?

30 Croissants et chocolatinnes

Deux croissants et cinq chocolatinnes coûtent 4,50 €. Quatre croissants et neuf chocolatinnes coûtent 8,28 €.

- Combien coûtent quatre croissants et dix chocolatinnes ?
- En déduire le prix d'une chocolatinne puis celui d'un croissant.

31 Et de trois

- J'ai acheté 12 m de ruban pour 5,40 €. Combien coûtent 7 m de ruban ?
- J'ai utilisé 50 kg de semences pour un terrain de 1 600 m². Quelle surface aurais-je pu ensemercer avec 90 kg de semences ?
- En roulant à une vitesse moyenne de 72 km/h, quelle est la distance parcourue en 25 min ?

32 Unités américaines

Aux États-Unis, les températures se mesurent en degrés Fahrenheit (°F) et les distances routières en miles (mi).

- 77°F équivaut à 25°C et 86°F équivaut à 30°C. Les mesures des températures dans ces deux unités sont-elles proportionnelles ?
- 250 mi représentent une distance de 402,336 km. 1250 mi représentent une distance de 2 011,68 km. Les mesures des distances dans ces deux unités sont-elles proportionnelles ?

33 Extrait du Brevet

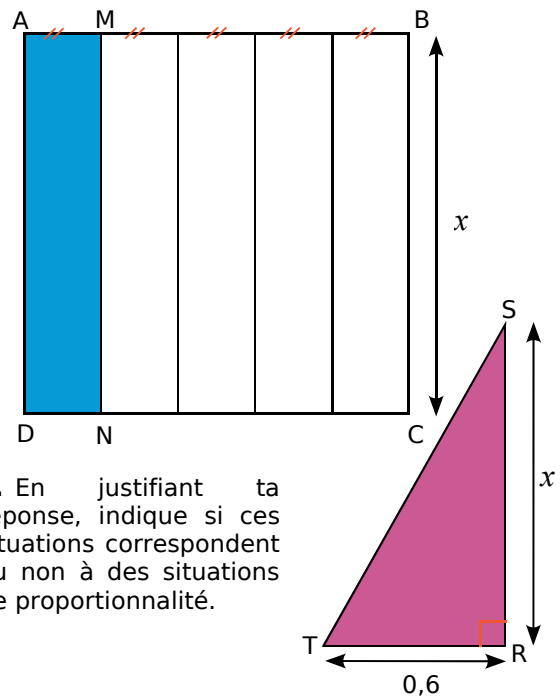
Le 1^{er} octobre 1993, le débit de la Durance (un affluent du Rhône) était de x m³ par seconde. Après une semaine de pluie, le débit augmentait de 30 %.

- Sachant que le débit était alors de 143 m³ par seconde, calculer le débit initial x .
- Une semaine après, le débit baissait de 30 %. Calculer le nouveau débit.

34 Situations de proportionnalité ?

a. Sachant que ABCD est un carré, complète ce tableau permettant de calculer l'aire du rectangle AMND et l'aire du triangle SRT rectangle en R. Écris sur ton cahier les calculs nécessaires.

Dimension x	1	2	3	4	5
Aire de AMND (en cm ²)	0,2	0,8			
Aire de SRT (en cm ²)	0,3	0,6			



- En justifiant ta réponse, indique si ces situations correspondent ou non à des situations de proportionnalité.
- Représente graphiquement l'aire de AMND en fonction de x (en abscisse : 1 cm représente une valeur de 1 cm pour x , en ordonnée : 1 cm représente une aire de 1 cm²).
- Représente graphiquement l'aire de SRT en fonction de x (en abscisse : 1 cm représente une valeur de 1 cm pour x , en ordonnée : 1 cm représente une aire de 1 cm²).

35 Mercure

Le mercure est un métal liquide à température ambiante. Un centimètre-cube de mercure pèse 13,6 g.

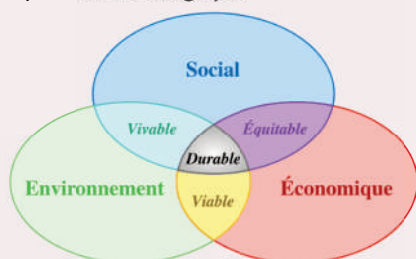
- Combien pèsent 24 m³ de mercure ? Donne ton résultat dans une unité adaptée.
- Peut-on faire tenir 10 kg de mercure, dans une bouteille vide de contenance 1 L ?

36 Densité de population

La densité de population mesure le nombre moyen d'habitants par km^2 . En France métropolitaine, en 2006, elle est de 109 habitants au km^2 , pour une superficie de 547 030 km^2 .

- Quel est le nombre d'habitants en France métropolitaine en 2006 ?
- La densité de population, en 2006, à Monaco est 16 239 habitants au km^2 . Quel serait le nombre d'habitants en France métropolitaine avec la même densité de population que Monaco ?
- La superficie de Monaco est 1,95 km^2 . Quel serait le nombre d'habitants à Monaco si ce pays avait la même densité de population que la France métropolitaine ?

37 Empreinte écologique

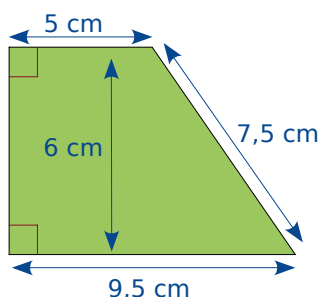


L'empreinte écologique a pour objectif d'évaluer la charge écologique correspondant à une activité, une population, une nation... En d'autres termes, la surface et les ressources nécessaires pour maintenir un niveau de vie constant et assurer l'élimination des déchets produits. Elle se calcule en hectares. Si l'on considère la superficie totale de la Terre, on peut utiliser 1,5 ha par personne (pour 6 milliards de personnes). Un Européen a besoin de 5 ha pour maintenir son niveau de vie. (source : <http://fr.wikipedia.org>)

Si tout le monde consommait comme un Européen, combien faudrait-il de planètes supplémentaires ?

38 Sur un plan

Cette figure représente un terrain à l'échelle 1/1 000.



- Quelle est l'aire réelle de ce terrain ?
- On souhaite clôturer ce terrain avec un grillage. Quelle longueur de grillage faut-il prévoir ?
- Réalise un dessin de ce terrain à l'échelle 1/1 250.

39 Effet de serre

À Kyoto, en juillet 2006, 156 états se sont engagés à réduire leurs émissions de six gaz à effet de serre de 5,2 % entre 2008 et 2012 par rapport au niveau de 1990. Le protocole de Kyoto n'a pas été ratifié par les États-Unis et l'Australie. Les États-Unis sont pourtant le premier émetteur mondial (20 % des émissions de gaz à effet de serre). (source : <http://fr.wikipedia.org>)

Si les États-Unis réduisaient leurs émissions de gaz à effet de serre de 5,2 %, quelle serait la baisse des émissions de gaz à effet de serre sur la Terre ?

40 Géométrie

- On augmente de 20 % la longueur d'un carré de côté 8 cm. De quel pourcentage augmente alors son aire ?
- On augmente de 15 % la longueur et de 30 % la largeur d'un rectangle de dimensions 30 cm sur 20 cm. De quel pourcentage augmente alors son aire ?
- On augmente de 20 % la longueur et on diminue de 20 % la largeur d'un rectangle de dimensions 30 cm sur 20 cm. Quelle est, en pourcentage, la variation de son aire ?

41 Sur autoroute

François part de Valenciennes en direction de Reims par autoroute à 10 h en roulant à une vitesse constante de 102 km/h. Nathalie prend le même parcours 25 minutes plus tard en roulant à une vitesse constante de 126 km/h.

- À quelle distance de Valenciennes se trouvent François et Nathalie à 11 h ?
- À quelle heure et à quelle distance de Valenciennes Nathalie va-t-elle rattraper François ?

42 Histoire de trains (bis)

Un train A roule à la vitesse moyenne de 100 km/h. Un train B roule à la vitesse moyenne de 120 km/h.

À 9 h, le train A part de Lille pour Lyon et le train B part de Lyon pour Lille.

La distance Lille-Lyon est 660 km par le train.

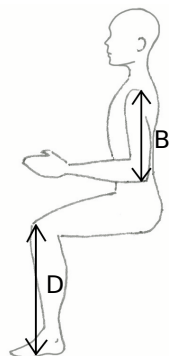
- À quelle distance de Lille se trouveront ces trains à 11 h ? À 11 h 30 ?
- À quelle heure les trains A et B vont-ils se croiser ?
- À quelle distance de Lyon se trouveront alors les trains ?

1 Biométrie



Vous allez travailler sur deux relations biométriques. Les variables étudiées sont des longueurs du corps humain qui seront mesurées à l'aide des schémas fournis ci-contre.

Les mesures seront effectuées sur chaque élève du groupe.



1^{re} partie : Étude d'une relation biométrique

On considère **la longueur A** de votre épaule au bout de votre majeur et **la longueur B** de votre épaule à la pointe de votre coude.

Une étude statistique a montré que la longueur A est approximativement égale à la longueur B multipliée par 1,65.

a. Calculez et reportez dans un tableau les valeurs de la variable A, pour B variant de 25 à 40 cm avec un pas de 1 cm. Que pouvez-vous dire de ce tableau ?

b. Mesurez sur votre corps la longueur B en centimètres puis estimez chaque longueur A associée à l'aide du tableau de proportionnalité. Comparez-la alors à la longueur A mesurée sur votre corps.

2^e partie : Recherche d'une relation biométrique

On considère maintenant **la longueur C** de votre hanche au sol et **la longueur D** de la partie supérieure de votre genou au sol.

c. Mesurez sur votre corps les longueurs C et D puis calculez le rapport $\frac{C}{D}$.

d. Calculez le rapport $\frac{C}{D}$ moyen du groupe puis comparez-le à la moyenne nationale qui vaut 1,86.

e. Représentez graphiquement l'égalité $C = 1,86 \times D$ en plaçant la variable D en abscisse et la variable C en ordonnée.

f. Placez sur ce même graphique le point correspondant aux mesures des variables C et D de chacun d'entre vous.

Interprétez sa position par rapport à la courbe tracée en **e.** en écrivant une phrase du type : « *Proportionnellement à la taille de ma jambe, mon tibia est plus/moins long que la moyenne de la population.* ».

2 Population mondiale

1^{re} partie : Indice d'évolution

Le tableau ci-dessous indique l'évolution du nombre d'humains (en millions d'habitants) par continent et en fonction des années.

Régions/Dates	500	1000	1500	1800	1900	2000
Asie	120	155	243	646	902	3631
Europe	41	43	84	195	422	782
Afrique	32	40	86	101	118	800
Amérique	15	18	42	24	165	819
Océanie	1	1	3	2	6	30
Total mondial	209	257	458	968	1613	6062

a. Quel est le continent où la population a « le plus augmenté » entre 1800 et 2000 ? Justifiez. Comparez aux réponses des autres groupes.

b. Pour interpréter et comparer plus facilement l'évolution de la population par rapport à une année de référence, on va utiliser ce que les statisticiens appellent des indices.

	1800	1900	2000
Population mondiale	968	1613	6062
Indice	100	x	y

• Si on considère qu'il y a 100 habitants en 1800, combien y en a-t-il en 1900 ? Ce nombre d'habitants est l'**indice** de la population mondiale en 1900, sur la base 100 en 1800.

• Calculez l'indice de la population mondiale en 2000 sur la base 100 en 1800.

• Choisissez un continent différent des autres groupes et complétez la phrase suivante : « La population de ce continent a augmenté de ... % entre 1800 et 1900 et de ... % entre 1800 et 2000. ».

• Mettez en commun les résultats pour chaque continent puis répondez une nouvelle fois à la question **a.**

À l'aide du cours d'histoire-géographie, commentez les résultats observés.

2^e partie : Pronostics

c. Construisez et complétez un tableau similaire à celui de la question **b.** en prenant 1900 comme année de référence sur la base 100. Déduisez-en le pourcentage d'augmentation de la population mondiale entre 1900 et 2000.

d. En supposant que la progression de la population mondiale sera la même pour les siècles à venir que celle du siècle passé, pronostiquez le nombre d'humains sur Terre en l'an 2100 puis en l'an 2200 et enfin en l'an 3000.

e. À l'aide d'un tableur, pronostiquez avec les mêmes hypothèses la population en l'an 5000.

		R1	R2	R3	R4																						
1	Il y a proportionnalité entre...	la taille et l'âge d'un homme ou d'une femme	la circonférence d'un cercle et son rayon	l'aire d'un disque et son rayon	un prix en dollars et ce même prix en euros																						
2	Dans quel(s) cas a-t-on un tableau de proportionnalité ?	<table border="1"> <tr><td>2</td><td>x</td></tr> <tr><td>3</td><td>y</td></tr> </table> avec $x = \frac{2}{3}y$	2	x	3	y	<table border="1"> <tr><td>AD</td><td>AE</td><td>DE</td></tr> <tr><td>AB</td><td>AC</td><td>BC</td></tr> </table> sachant que $D \in [AB]$, $E \in [AC]$, $(DE) \parallel (BC)$	AD	AE	DE	AB	AC	BC	<table border="1"> <tr><td>2</td><td>4</td><td>6</td></tr> <tr><td>3</td><td>5</td><td>7</td></tr> </table>	2	4	6	3	5	7	<table border="1"> <tr><td>a</td><td>b</td><td>c</td></tr> <tr><td>d</td><td>e</td><td>f</td></tr> </table> avec $ae = bd$ et $af = dc$	a	b	c	d	e	f
2	x																										
3	y																										
AD	AE	DE																									
AB	AC	BC																									
2	4	6																									
3	5	7																									
a	b	c																									
d	e	f																									
3	<table border="1"> <tr><td>32</td><td>8</td></tr> <tr><td>x</td><td>3</td></tr> </table> est un tableau de proportionnalité. On a alors...	32	8	x	3	$32 = 8 + 24$ donc $x = 3 + 24$	$32 = 8 \times 4$ donc $x = 3 \times 4$	$x = \frac{32 \times 8}{3}$	$x = \frac{3}{8} \times 32$																		
32	8																										
x	3																										
4	v est la vitesse moyenne, d la distance parcourue et t le temps de parcours donc...	$v = \frac{t}{d}$	$d = v \times t$	$t = d \times v$	$t = \frac{d}{v}$																						
5	Un escargot parcourt 2,4 m à la vitesse moyenne de 1 m.h^{-1} en...	2,4 h	2 h 40 min	2 h 24 min	2 h 4 min																						
6	Un automobiliste parcourt 230 km en 2 h 30 min. Sa vitesse moyenne est...	100 km.h^{-1}	92 km.h^{-1}	environ $25,6 \text{ m.s}^{-1}$	$25,555 \text{ m.s}^{-1}$																						
7	Un cycliste roule 21 min à la vitesse moyenne de 20 km.h^{-1} . Pour calculer la distance parcourue en km, on effectue...	21×20	$0,21 \times 20$	$\frac{21}{60} \times 20$	$20 \div 0,35$																						
8	Augmenter un prix de 100 % revient à...	le multiplier par 2	lui ajouter 100	lui ajouter ce prix lui-même	le multiplier par 100																						
9	Lors d'une assemblée générale, 847 personnes ont adopté les comptes. Cela représente 77 % du nombre total N de votants.	N est égal à 77 % de 847	$\frac{77}{100} N = 847$	$\frac{N}{77} = \frac{847}{100}$	$\frac{847}{N} = \frac{77}{100}$																						
10	Dans un magasin, le prix d'un article augmente de 20 % puis quelques temps plus tard baisse de 20 %. Finalement...	son prix n'a pas changé	son prix a augmenté de 4 %	son prix a baissé de 4 %	on ne peut rien dire : cela dépend du prix initial																						

Récréation mathématique

À vélo

Un cycliste sait qu'il va deux fois plus vite en descente que sur du plat mais par contre qu'il va deux fois moins vite en montée que sur du plat. Pour aller au même endroit, il a le choix entre deux trajets de même longueur : l'un tout plat, l'autre, moitié en montée, moitié en descente.

A-t-il raison de penser qu'il mettra le même temps sur les deux trajets ?

Rendez-vous

Abdel et Justine ont rendez-vous à égale distance de leurs domiciles respectifs. Abdel part à 15 heures de chez lui et roule à la vitesse moyenne de 70 km.h^{-1} . Justine part 12 minutes plus tard et roule à la vitesse moyenne de 90 km.h^{-1} .

Ils arrivent en même temps !
À quelle heure ?



Narration de recherche

Sujet :

Nous sommes quelques jours avant le conseil de classe.

Dominique et Catherine ont, durant tout le trimestre, obtenu les mêmes notes à chaque devoir, en Anglais et en Espagnol ! Leurs camarades les appellent « les télépathes ».

Ils comparent leurs moyennes en langues vivantes et trouvent deux résultats différents. Après vérification, ils s'expliquent :

Dominique : – J'ai calculé mes moyennes en Anglais et en Espagnol puis j'ai fait la moyenne des deux moyennes.

Catherine : – Moi, j'ai fait la moyenne de toutes mes notes de langues vivantes, sans chercher à savoir si c'était Anglais ou Espagnol.

Thibault : – L'année dernière, avec Ophélie, on était dans le même cas : toutes nos notes étaient les mêmes et on a calculé comme vous de deux façons différentes. Mais on avait trouvé la même moyenne finale !

1°) Imagine les notes qu'ont pu avoir Dominique et Catherine d'une part, Thibault et Ophélie d'autre part (de nombreuses réponses sont possibles).

2°) Quand les deux méthodes donnent-elles le même résultat ? Quand donnent-elles des résultats différents ? Comment peut-on calculer à coup sûr la moyenne de toutes ses notes si on n'en a plus le détail mais qu'on a les moyennes « partielles » pour chaque langue ?

Activité 1 : Vers la moyenne...

	A	B	C	D
1	Mois	Production réelle	Production uniforme	Variation
2	Janvier	2 304		
3	Février	1 660		
4	Mars	2 952		
5	Avril	2 592		
6	Mai	2 808		
7	Juin	2 016		
8	Juillet	3 668		
9	Août	2 592		
10	Septembre	2 808		
11	Octobre	2 016		
12	Novembre	2 664		
13	Décembre	2 736		
14	Total année	30 816		

Voici le nombre de pièces produites mois par mois dans une usine d'aéronautique (colonne B) au cours de l'année.

Afin de gérer au mieux son personnel, le chef d'entreprise souhaiterait produire, l'année suivante, le même nombre de pièces chaque mois tout en gardant le même nombre total de pièces.

On a donc programmé ci-contre une feuille de calculs dans un tableur de telle sorte que les cellules C3 à C13 affichent toutes le même nombre que la cellule C2 et que la cellule C14 soit la somme de ces douze cellules.

- Détermine, en testant des valeurs, le nombre à saisir en C2 pour répondre au problème.
- Comment obtenir cette valeur directement par un calcul ?
Ce nombre est la production moyenne de cette pièce par mois au cours de l'année.
- Détermine alors la formule à saisir dans les cellules de la colonne D pour savoir de combien la production de cette pièce doit être réduite ou augmentée chaque mois.

Activité 2 : Moyenne de moyennes

Le tableau suivant récapitule la répartition de la population en Languedoc-Roussillon (*source INSEE*) :

Département	Nombre d'habitants	Superficie en km ²
Lozère	73 509	5 167
Gard	623 125	5 853
Hérault	896 441	6 101
Aude	309 770	6 139
Pyrénées-Orientales	392 803	4 116

- Pour chacun de ces départements, calcule le nombre moyen d'habitants au km² (arrondi au dixième).
- Quel est le nombre d'habitants et la superficie du Languedoc-Roussillon ? Déduis-en le nombre moyen d'habitants au km² de la région Languedoc-Roussillon (arrondi au dixième).
- Calcule la moyenne des moyennes obtenues à la question 1.. Que remarques-tu ?
- Comment peux-tu expliquer cette différence ?

Activité 3 : Autour des valeurs extrêmes

1. Le tableau suivant donne les températures moyennes en degrés Celsius relevées dans les villes de MathCity et de StatCity :

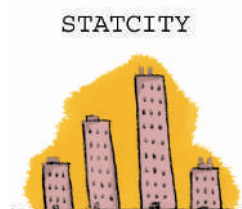
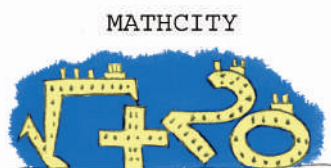
Mois	Jan.	Fév.	Mar.	Avr.	Mai	Juin	Juil.	Août	Sept.	Oct.	Nov.	Déc.
MathCity	0	3	6	13	21	26	30	30	22	15	9	5
StatCity	2	9	13	17	19	21	22	22	21	18	12	4

- Pour chacune des deux villes, donne les températures extrêmes et calcule la moyenne de ces valeurs.
- Calcule la moyenne annuelle des températures pour chacune de ces deux villes.
- Que dire de la moyenne des valeurs extrêmes d'une série statistique par rapport à la moyenne de celle-ci ?

2. Le tableau suivant concerne la ville de ZéroCity où les températures extrêmes ont été relevées en Janvier et en Août, la moyenne annuelle étant égale à 15°C :

Mois	Jan.	Fév.	Mar.	Avr.	Mai	Juin	Juil.	Août	Sept.	Oct.	Nov.	Déc.
ZéroCity	...	3	7	13	20	24	29	...	23	16	9	4

- Détermine par le calcul les températures extrêmes de cette ville en Janvier et en Août. Que remarques-tu ?
Donne alors tous les couples de solutions entières possibles. Que dire de la moyenne de ces couples ? Justifie.
- Si de plus on impose que l'écart entre ces deux températures soit égal à 30°C, quelle est l'unique solution ?



Activité 4 : Moyenne pondérée

On a demandé, à un groupe de 50 étudiants, le montant mensuel (en euros) de leur abonnement de téléphone portable. En voici le détail :

23	14	14	36	36	36	41	18	36	18
23	32	23	41	18	18	36	27	36	27
23	32	18	32	27	36	36	36	36	32
41	14	41	23	14	41	18	27	36	41
14	14	36	32	27	14	36	27	27	27

- Calcule le montant mensuel moyen, en euros, de l'abonnement téléphonique de ces 50 étudiants.
- Construis et remplis un tableau pour lire plus facilement ces données.
- Comment calculer le montant mensuel moyen, en euros, de l'abonnement téléphonique de ce groupe d'étudiants à partir de ce tableau ? Justifie.

Activité 5 : Le baccalauréat

1. Au cours de l'année de terminale...

Au cours du premier trimestre, Noémie a déjà fait trois « Devoirs Surveillés » chacun coefficienté 4 (notes : 10, 14 et 8) et cinq « Devoirs Maison » (notes : 11, 13, 16, 11 et 8).

- a. Le professeur hésite entre deux méthodes pour calculer la moyenne trimestrielle :
- Méthode 1 : compter chaque « Devoir Maison » coefficient 1 ;
 - Méthode 2 : faire la moyenne des « Devoirs Maison » pour obtenir une note D_m de travail à la maison à laquelle il affectera le coefficient 1.

Quelle est la moyenne de Noémie dans chacun des deux cas ? Quel coefficient doit donner le professeur à la note D_m pour que les deux moyennes soient égales ?

Le professeur choisit d'appliquer la méthode 1 pour faire sa moyenne.

- b. En fin de trimestre, le professeur fait une interrogation surprise. Sachant que cette note ne change pas la moyenne de Noémie, indique combien elle a obtenu à cette interrogation. Le coefficient donné à cette interrogation modifie-t-il ta réponse ? Justifie.

Le professeur décide de lui affecter un coefficient 2.

- c. Avant l'arrêt des notes, le professeur donne un dernier « Devoir Maison », qu'il coefficientera comme les autres. Combien doit-elle obtenir si elle veut augmenter sa moyenne de deux dixièmes de point ?

2. À la fin de l'année de terminale...

Au mois de juillet, Noémie, élève en Terminale S spécialité Mathématiques, a reçu son relevé de notes du baccalauréat qu'elle a passé au mois de juin :

Matière	Coefficient	Note	Total matière
Mathématiques	9	13,00	117,00
Physique-chimie	6	8,00	48,00
SVT	6	11,00	66,00
Français	4	12,00	48,00
Philosophie	3	8,00	24,00
Histoire-géographie	3	9,00	27,00
LV1	3	11,00	33,00
LV2	2	7,00	14,00
EPS	2	11,00	22,00
Total des coefficients :	38	Total à l'examen :	399,00
		Moyenne à l'examen	10,5

- a. Calcule la moyenne de ses notes. Correspond-elle à la moyenne indiquée en bas du relevé ? Pourquoi ?
- b. Que signifie le terme « Coefficient » ? Explique alors comment on a rempli la colonne « Total matière ».
- c. À quoi sert la colonne « Total des coefficients » ? Propose alors un calcul permettant de retrouver la moyenne à l'examen.
- d. Jérôme a passé le même baccalauréat et a obtenu : 8 en Mathématiques, 11 en Physique-chimie, 10 en SVT, 8 en Français, 5 en Philosophie, 13 en Histoire-géographie, 10 en LV1, 9 en LV2 et 14 en Éducation physique et sportive. A-t-il eu son baccalauréat ? Si non, quelle note aurait-il dû avoir au minimum en Mathématiques pour l'avoir ?

Méthode 1 : Calculer la moyenne d'une série statistique

À connaître

Pour calculer la **moyenne** M d'une série statistique :

- on additionne toutes les valeurs du caractère de la série ;
- on divise la somme obtenue par le nombre de valeurs de la série.

Si x_1, x_2, \dots, x_p représentent les valeurs des caractères de la série, on a alors :

$$M = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_p}{p}$$

Exemple : Sophie a calculé le temps qu'elle a passé devant la télévision la semaine dernière. Voici ses résultats :

Jour	Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi	Samedi	Dimanche
Temps en min	62	57	110	60	46	122	131

Calcule le temps moyen passé par Sophie devant la télévision.

On calcule la moyenne : $M = \frac{62+57+110+60+46+122+131}{7} = \frac{588}{7} = 84$ min.

Sophie a passé, en moyenne, 84 min (soit 1 h 24 min) par jour devant la télévision la semaine dernière.

À toi de jouer

1 Un commercial a relevé la distance qu'il a parcourue chaque jour lors de sa dernière semaine de travail. Voici ce qu'il a noté :

Jour	Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi
Distance parcourue (en km)	253	346	186	419	265

Quelle est la distance moyenne parcourue par jour par ce commercial lors de sa dernière semaine de travail ?

2 Voici un tableau donnant la production française de quelques produits agricoles entre 2000 et 2004 (en millions de tonnes) :

	2000	2001	2002	2003	2004
Blé tendre	35,7	30,2	37,3	29,0	35,6
Maïs	16,0	16,4	16,4	12,0	16,4
Bœuf, veau	1,8	1,8	1,9	1,9	1,8
Fromages	1,9	1,9	1,9	1,9	2,0

(source INSEE)

a. Calcule la production moyenne de blé tendre en France entre 2000 et 2004.

b. Quelle est la production moyenne de maïs en France entre 2002 et 2004 ?

3 Revenu moyen des couples selon le nombre d'enfants en euros et par an.

	2002	2003	2004
Couple sans enfant	30 541	30 980	30 865
Couple avec un enfant	38 040	37 359	37 551
Couple avec deux enfants	40 949	41 336	41 337
Couple avec trois enfants et plus	44 311	43 924	43 457

(source INSEE)

À l'aide du tableau, calcule quel était, en moyenne, le revenu annuel d'un couple avec un enfant de 2002 à 2004.

Méthode 2 : Calculer la moyenne pondérée d'une série statistique

À connaître

Pour calculer la **moyenne pondérée** M d'une série statistique :

- on additionne les produits des effectifs par les valeurs associées du caractère ;
- on divise la somme obtenue par l'effectif total de la série.

Si n_1, n_2, \dots, n_p sont les effectifs du caractère, x_1, x_2, \dots, x_p les valeurs associées et N l'effectif total, alors :
$$M = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_p x_p}{N} .$$

Exemple : Chaque élève de 4^eB du collège de Potigny a indiqué le nombre de livres qu'il a lus durant le mois de septembre. Voici les résultats de l'enquête :

Nombre de livres lus	0	1	2	3	7	8	15
Effectifs	12	4	3	3	1	1	1

Calcule le nombre de livres lus, en moyenne, par les élèves de 4^eB durant le mois de septembre.

$$M = \frac{0 \times 12 + 1 \times 4 + 2 \times 3 + 3 \times 3 + 7 \times 1 + 8 \times 1 + 15 \times 1}{25} = \frac{49}{25} = 1,96 .$$

Les élèves de 4^eB de ce collège ont lu, en moyenne, 1,96 livres au mois de Septembre.

À toi de jouer

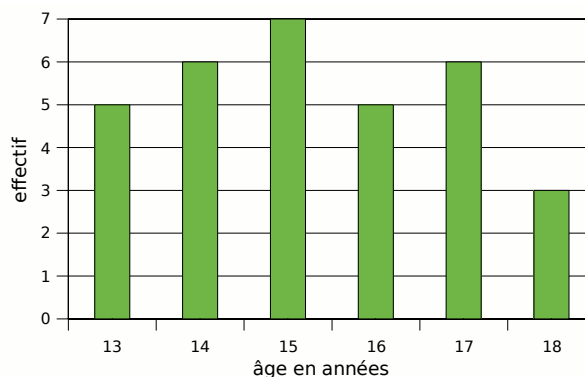
4 Voici les notes obtenues par une classe de 4^e lors d'un contrôle de géométrie :

15,5 10,5 4,5 4,5 13 4,5 10,5 14,5 9,5 9,5 10,5 9,5
15,5 4,5 14,5 9,5 4,5 10,5 11 15,5 11 13 13 14,5

a. Classe les informations précédentes dans un tableau.

b. Calcule la moyenne de la classe pour ce devoir.

5 Voici la répartition par âge des membres d'un club d'échec à Caen :



a. Complète le tableau suivant :

Âge en années						
Effectif						

b. Calcule l'âge moyen des membres de ce club d'échec.



Moyenne

1 Donne, sans effectuer de calcul, la moyenne des nombres suivants :

a. 150 100 50 75 125

b. 12 10 8 9 14 11 6

2 *Calcul mental*

Calcule la moyenne des séries statistiques suivantes :

a. 15 20 5 10

b. 8 22 30 4 16

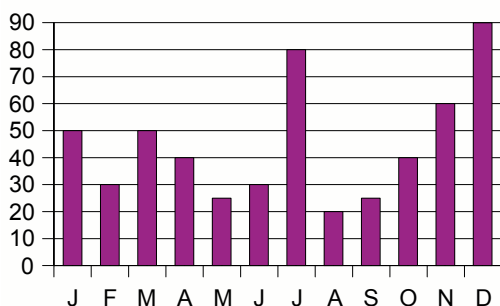
c. 3 21 17 5 9

3 Calcule la moyenne de la série statistique suivante :

156 75 89 142 27 98 12 48 55

4 *Avec un graphique*

Voici le nombre de prospectus publicitaires reçus par un habitant de Lille chaque mois de l'année 2006.



Calcule le nombre moyen de publicités reçues par mois durant l'année 2006.

5 *Précipitations*

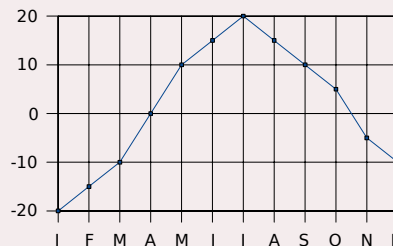
Le tableau suivant récapitule les précipitations, en mm, tombées en 2005 à Brest :

Mois	J	F	M	A	M	J
Précipitations	64,2	57,2	33,6	130,8	69,2	58
Mois	J	A	S	O	N	D
Précipitations	92,8	40,8	47,8	116	142,6	166,8

a. Représente cette série statistique à l'aide d'un diagramme en bâtons.

b. Calcule la moyenne annuelle des précipitations tombées à Brest en 2005.

6 Voici les températures (en °C) relevées en Russie, à Perm, pendant une année :



Calcule la température moyenne annuelle.

7 Au premier trimestre, Adrien a obtenu 10 de moyenne en Mathématiques. Ses parents examinent ses résultats. Voici les notes relevées par Adrien :

11 8 12 13 9 10

a. Calcule la moyenne des notes relevées par Adrien. Est-elle la même que celle de son bulletin ?

b. Adrien a oublié d'écrire une note. Aide-le à la retrouver.

8 Recherche sur ta calculatrice (à l'aide de son manuel d'utilisation) la fonction permettant de calculer une moyenne.

Calcule alors la moyenne arrondie à l'unité de la série statistique suivante :

430 560 853 125 175 248 359 520
899 523 742 152 451 725 654 598

9 *Pourcentage de fumeurs parmi la population âgée de 15 à 24 ans en 2001*

Belgique	36,5
Danemark	28,9
Allemagne	36,4
Grèce	40,7
Espagne	33,8
Irlande	27,3
Italie	29,2
Autriche	45,7
Portugal	19,8
Suède	38,7

a. Représente cette série statistique à l'aide d'un diagramme en bâtons.

b. Calcule la moyenne arrondie au dixième de ces valeurs. Quelles remarques peux-tu faire ?

10 Part des énergies renouvelables dans la consommation d'électricité dans l'Union Européenne sur 10 ans

Cet indicateur est le rapport entre l'électricité produite à partir de sources d'énergie renouvelables et la consommation nationale brute d'électricité calculée pour une année civile (Source Eurostat).

	UE	France	Norvège	Royaume-Uni
1994	14,2	19,7	99,5	2,1
1995	13,7	17,8	104,6	2
1996	13,4	15,3	91,4	1,6
1997	13,8	15,2	95,3	1,9
1998	14	14,4	96,2	2,4
1999	14	16,5	100,7	2,7
2000	14,7	15,1	112,2	2,7
2001	15,2	16,3	96,2	2,5
2002	13,5	13,7	107,3	2,9
2003	13,7	13	92,2	2,8
2004	14,7	12,9	89,8	3,7

Calcule la moyenne sur 10 ans de cet indicateur pour l'Union Européenne puis pour la France, la Norvège et le Royaume-Uni. Compare tes résultats.

Moyenne pondérée

11 Moyenne de la classe

Une classe de 27 élèves a obtenu les notes suivantes à un devoir :

12 7 8 10 16 15 16 12 10 7
 12 10 16 17 5 8 5 10 11 13
 11 7 9 16 11 12 9

- Regroupe ces données dans un tableau d'effectifs.
- Calcule la moyenne de la classe pour ce devoir (arrondie au dixième).
- Combien d'élèves ont eu au moins cette moyenne ?

12 Calcule, à l'aide de ta calculatrice, la moyenne arrondie au dixième de la série :

Valeurs	26	33	152	45	89	78	45
Coefficients	2	5	3	4	8	10	6

13 Dans une classe, on relève la durée, en minutes, du trajet maison-collège. Les données, par élève, sont les suivantes :

30 45 10 30 50 20 25 25 60 30 20
 25 20 25 5 10 45 30 20 25 5 10
 25 45 10

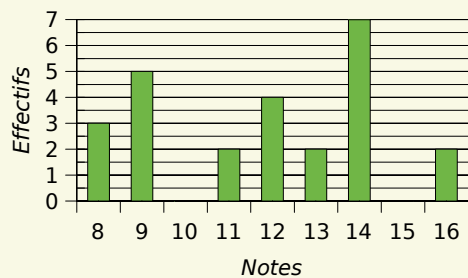
a. Complète le tableau statistique suivant (les valeurs de la série seront rangées dans l'ordre croissant) :

Durée du trajet										
Effectif										

b. Calcule la durée moyenne du trajet des élèves de cette classe.

14 Extrait du Brevet

Voici le diagramme en barres représentant la répartition des notes obtenues à un contrôle de mathématiques par une classe de 3e.



- Calculer la moyenne de la classe à ce devoir.
- Calculer le pourcentage d'élèves ayant obtenu une note supérieure à 10.

15 Dans une classe, on relève le temps (en minutes) consacré par les élèves à faire leurs devoirs à la maison :

15 20 30 40 10 50
 40 15 5 10 20 30
 30 40 40 30 50 70
 50 30 30 40 10 15
 40 15 30 20 40 10

- Regroupe ces données dans un tableau d'effectifs. Quelles sont les valeurs extrêmes de cette série ?
- Calcule le temps moyen (arrondi à la minute) consacré aux devoirs par ces élèves.
- Que devient cette moyenne si on supprime les valeurs extrêmes de cette série ?



16 Frères et sœurs

Dans un groupe de personnes, on considère le nombre de frères et sœurs. On relève les données statistiques dans le tableau suivant :

Nombre de frères et sœurs	0	1	2	3	4	5	6	7
Effectif	3	6	7	9	5	2	1	1

- Donne l'effectif total de cette série.
- Combien de personnes ont quatre frères et sœurs ? Combien de personnes ont au moins trois frères et sœurs ?
- Calcule le nombre moyen de frères et sœurs.

17 Moyenne et coefficients

En Mathématiques, Adélaïde a des notes de contrôles en classe (coefficient 2) et des notes de devoirs maison (coefficient 1).

Voici les notes d'Adélaïde pour un trimestre :

En contrôle : 7 9 11 9,5 10,5 8

En devoir maison : 13 14 12 11

- Recopie et complète la phrase suivante :
La note 7 en contrôle compte ... fois dans la moyenne.
- Pour calculer sa moyenne du trimestre, par quel nombre faudra-t-il diviser ? Calcule cette moyenne.
- Pour augmenter sa moyenne, est-il préférable d'avoir 3 points de plus à un devoir maison ou 2 points de plus à un contrôle ?

18 Voici le résultat d'une enquête réalisée auprès de 250 personnes pour connaître le temps passé devant la télévision par jour :

Temps en h	[0 ; 1[[1 ; 2[[2 ; 3[[3 ; 4[[4 ; 5[
Effectifs	28	66	98	43	15
Fréquences en %					

- Recopie et complète le tableau ci-dessus.
- Combien de personnes interrogées regardent la télévision plus de 3 heures par jour ? Quel pourcentage cela représente-t-il ?
- Combien de personnes regardent la télévision au moins 2 heures par jour ?
- Construis l'histogramme des effectifs.
- Calcule le temps moyen, en heures, passé devant la télévision par ces personnes (arrondi au dixième).

Moyennes de moyennes

19 Moyenne annuelle et trimestrielle

Voici les notes obtenues par Aurélie pendant une année en Mathématiques :

T 1	10	9	11	12	11,5	14	12
T 2	9,5	11	12,5	8	13	14	
T 3	7,5	9	14	12	10	13	11,5

Toutes les notes ont le même coefficient.

- Calcule la moyenne de toutes les notes de l'année.
- Calcule la moyenne de chaque trimestre.
- Calcule la moyenne des moyennes trimestrielles. Compare-la avec la première moyenne calculée. Que peut-on dire de ces deux résultats ? Pourquoi ?
- Construis une série de notes de manière à ce que la moyenne des notes de l'année soit supérieure à la moyenne des trois trimestres.
- Construis une série de notes de manière à ce que la moyenne des notes de l'année soit inférieure à la moyenne des trois trimestres.

20 Répartition des internautes par continents (Effectifs estimés en millions pour l'année 2006)

	Internautes	Population totale	Fréquence en %
Amérique du Nord	242	329	
Amérique latine	47,3	559	
Afrique/Moyen-Orient	31,2	906	
Asie/Pacifique	375	3 952	
Europe	252,5	730	
Monde	948	6 476	

- Complète les fréquences en pourcentage (arrondies au dixième).
- Quelle partie du monde possède le plus fort taux d'internautes ? Le plus faible ?
- Calcule la moyenne des fréquences des continents.
- Compare cette moyenne avec la fréquence mondiale. Comment peux-tu expliquer cette différence ?

21 Le tableau ci-dessous reprend les résultats du recensement de 1999 :

Tranche d'âges	Hommes	Femmes
Ensemble	28 419 419	30 101 269
0 à 14 ans	5 348 053	5 101 286
15 à 29 ans	5 978 189	5 843 236
30 à 44 ans	6 356 531	6 466 582
45 à 59 ans	5 452 586	5 496 098
60 à 74 ans	3 672 160	4 301 056
75 à 94 ans	1 591 135	2 802 439
95 ans ou plus	20 765	90 572

a. Calcule le pourcentage de la population que représente chacune de ces classes d'âges.

b. Réalise un tableau qui te permettra de répondre aux questions suivantes :

- Combien d'hommes sont âgés de plus de 15 ans ?
- Combien d'hommes sont âgés de plus de 45 ans ?
- Combien d'hommes sont âgés de plus de 60 ans ?

c. De même, réalise un tableau qui te permettra de répondre aux questions suivantes :

- Quel est le pourcentage de femmes âgées de moins de 14 ans ?
- Quel est le pourcentage de femmes âgées de moins de 29 ans ?
- Quel est le pourcentage de femmes âgées de moins de 59 ans ?

d. Dans le premier cas, on a cumulé les effectifs et dans le deuxième, les pourcentages. Complète le tableau suivant :

Tranche d'âges	Moins de 14 ans	Moins de 29 ans	Moins de 44 ans	Moins de 59 ans	Moins de 74 ans	Moins de 94 ans	Total
Pourcentage de français							

e. Est-il correct de dire que plus de la moitié des français sont âgés de 45 ans et plus ? Ta réponse est-elle vraie pour les deux sexes ?

f. Retrouve sur le site de l'INSEE le résultat du recensement de 1990 et compare avec ce que tu viens de trouver.

22 *Produit Intérieur Brut*

Recherche les informations utiles dans un dictionnaire, une encyclopédie, sur Internet...

a. Qu'est-ce que le « Produit Intérieur Brut » (PIB en abrégé) d'un pays ? Qu'est-ce alors que le « PIB par habitant » ? Détermine ensuite, par calcul, le PIB par habitant de la France.

b. Trouve les PIB et les populations des pays membres de l'Union Européenne puis regroupe ces données dans une feuille de calculs comme celle-ci :

	A	B	C	D
1	PAYS	PIB	Population	PIB par habitant
...				
...				
29	Moyenne			

c. Programme les cellules de la colonne D pour calculer le PIB par habitant de chaque pays.

d. Parmi les calculs suivants, lequel donnera le PIB moyen par habitant de l'Union Européenne ?

- moyenne des PIB divisée par la moyenne des populations ;
- moyenne des valeurs de la colonne D ;
- somme des PIB divisée par la somme des populations.

Programme alors en D29 la bonne formule.

e. Quel serait le PIB moyen par habitant si l'on ne tenait pas compte des deux états qui ont le plus fort PIB par habitant et des deux états qui ont le plus faible PIB par habitant ?

f. À titre de comparaison, quel est le PIB par habitant des États-Unis ?

g. Les États-Unis comportent 50 états. Quel est alors le PIB moyen par habitant d'un de ces états ? Combien d'états européens ont un PIB supérieur à ce dernier ?

23 *Écotaxe*

a. Une loi de 2006 impose aux distributeurs de réfrigérateurs d'appliquer une écotaxe de 13 € sur chaque appareil vendu afin de financer le recyclage ultérieur de ces appareils.

Si le prix moyen d'un réfrigérateur était de 590 € avant l'instauration de cette taxe, que deviendra le prix moyen de ces appareils lors de l'application de cette taxe ? Justifie.

b. Quel serait le prix moyen des réfrigérateurs si cette écotaxe représentait 1 % du prix ? Justifie ta réponse.

1 Le Sésa Code

Une technique simple de cryptage consiste à décaler les lettres. Par exemple, on remplace le A par le D, le B par le E et ainsi de suite, le décalage étant toujours le même. Cette technique est connue sous le nom de « code César ».

1^{re} Partie : Encodons

a. Utilisez cette technique pour coder le message : « Demain, grande boum chez Benjamin. ».

b. Décodez ensuite le message : « SUHQHC XQH IHXLOOH SRXU OH FRQWUROH VXUSULVH ! ».

2^e Partie : Analysons

Cette technique se décode aisément, pour peu que l'on sache quel est le décalage des lettres. Pour décoder de tels codes, nous allons nous appuyer sur les fréquences d'apparition des lettres dans le message.

c. Que signifie pour vous « fréquence moyenne d'apparition d'une lettre » ?

d. Selon vous, quelle est la lettre qui apparaît en moyenne le plus fréquemment dans un texte en français ?

e. Sur le site <http://fr.wikipedia.org>, retrouvez alors les fréquences d'apparition moyenne des lettres dans un texte en français.

3^e Partie : Décodons

f. Sur le site des compléments du manuel, chargez le décodeur César.

On a intercepté trois messages codés à l'aide d'un même code César.

g. Chargez ces trois messages dans le décodeur puis faites déterminer pour chacun d'eux la fréquence d'apparition des lettres.

h. À l'aide du classement trouvé à la question e., pouvez-vous déterminer par quelle lettre on a remplacé la lettre A ? Utilisez le décodeur pour vérifier votre proposition.

i. Quelles sont en moyenne les dix lettres les plus fréquentes dans ces trois messages ? Est-ce que cela vous aide pour décoder les messages ? Utilisez alors ces informations pour retrouver les messages initiaux.

4^e Partie : Encodons avec l'ordinateur

j. Sur Internet ou au CDI, recherchez trois poèmes que vous coderez à l'aide du décodeur puis que vous transmettez à un autre groupe.

k. Décodez les poèmes qui vous ont été transmis à l'aide du décodeur.

2 Poupées russes

Dans toute cette activité, la « longueur d'un mot » désigne le nombre de lettres qui le constituent. Par exemple, la longueur du mot « David » est 5.

1^{re} Partie : Mise en place

a. Saisissez, dans une feuille de calculs, la liste des prénoms des membres du groupe. C'est l'échantillon n°1.

La colonne B indique à chaque fois la longueur du prénom saisi dans la colonne A.

Trouvez la fonction permettant de faire ce calcul automatiquement ou bien remplissez vous-même cette colonne en comptant les lettres.

	A	B
1	Prénom	Longueur du prénom
2		
...		

b. À l'aide du tableur, calculez la moyenne des longueurs des prénoms pour l'échantillon n°1.

c. Reproduisez le tableau ci-dessous puis remplissez la colonne concernant l'échantillon n°1 :

Échantillon	1	2	3	4	5
Nombre de prénoms					
Moyenne					

2^e Partie : Déployons

d. Chaque membre du groupe saisit, à la suite de sa feuille de calculs, cinq autres prénoms qui ne sont pas dans la classe. C'est l'échantillon n°2. Procédez ensuite comme aux questions b. et c..

e. Chaque membre du groupe inscrit à la suite de la dernière liste dix autres prénoms différents des précédents. C'est l'échantillon n°3. Complétez alors le tableau.

3^e Partie : Regroupons

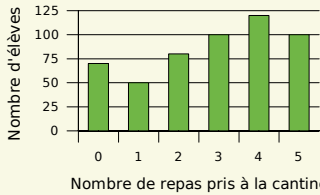
f. Récupérez la liste d'un des autres groupes et ajoutez-la à la vôtre. À l'aide des fonctions de tri du tableur, supprimez éventuellement les doublons. C'est l'échantillon n°4.

g. Récupérez ensuite toutes les listes. Supprimez les doublons. C'est l'échantillon n°5.

h. Complétez le tableau pour les échantillons n°4 et n°5.

4^e Partie : Interprétons

i. Mettez en commun les tableaux des différents groupes. Que remarquez-vous ?

		R1	R2	R3	R4										
1	Les tailles des joueurs du cinq majeur d'une équipe de basket sont, en cm : 189 ; 198 ; 205 ; 207 et 211.	La taille moyenne des joueurs est de 2,05 m	C'est comme si tous les joueurs mesuraient 2,02 m	La taille moyenne des joueurs est, en cm : $\frac{189 + 211}{2}$	La taille moyenne des joueurs est de 2,02 m										
2	Avec quatre notes, la moyenne de Louise en Mathématiques est de 12.	Elle a pu avoir trois fois la note 16	Elle a eu autant de notes au dessus de 12 qu'en dessous	Ses trois premières notes ont pu être 8,5 ; 10 et 11,5	Elle a pu avoir une moyenne de 11 sur ses trois premières notes et 13 pour la dernière										
3	En une semaine : 	Il y a autant d'élèves qui prennent 3 repas que d'élèves qui prennent 5 repas par semaine	1 490 repas sont pris par les élèves en une semaine	En une semaine, un élève prend en moyenne environ 2,8 repas	Un peu plus d'un élève sur 10 ne mange pas à la cantine										
4	Voici une partie du relevé de notes (sur 20) de Mourad ainsi que leur coefficient : <table border="1" data-bbox="204 1078 536 1164"> <tr> <td>notes</td> <td>14</td> <td>16</td> <td>8</td> <td>15</td> </tr> <tr> <td>coef.</td> <td>2</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> </tr> </table>	notes	14	16	8	15	coef.	2	1	2	3	C'est comme s'il avait eu deux fois la note 14, une fois 16, deux fois 8 et trois fois 15	Sa moyenne sur ces quatre notes est de 13,25	Un bonus de 2 points sur sa note de 8 sur 20 augmente sa moyenne de 0,5 point	Pour que sa moyenne augmente de 1 point, il doit avoir au moins 18 au prochain devoir, coefficient 1
notes	14	16	8	15											
coef.	2	1	2	3											
5	Vrai ou faux ?	Une moyenne est comprise entre les valeurs extrêmes d'une série statistique	Si la moitié des valeurs d'une série augmentent de 1 et si celles de l'autre moitié diminuent de 1, la moyenne ne change pas	La moyenne des vitesses moyennes sur les deux parties d'un trajet est égale à la vitesse moyenne sur tout le trajet	x_1 et x_2 sont les valeurs d'une série, n_1 et n_2 , les effectifs. Si x_1 augmente de 1, la moyenne augmente de $\frac{n_1}{n_1 + n_2}$										

Récréation mathématique

Des notes, toujours...

Sur ses six premiers devoirs, tous de coefficient 1, Marie obtient 15 sur 20 de moyenne. Ambitieuse, elle vise une moyenne de 18. Peut-elle l'obtenir avec le prochain devoir, coefficient 2 ? Finalement, elle obtient cette moyenne avec un 20 ! Mais quel était le coefficient de cette note ?

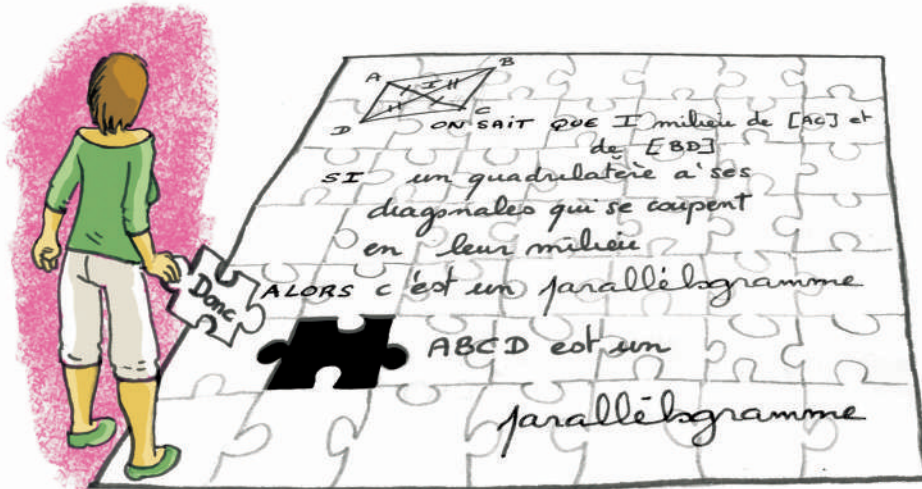
Dans un élevage

Dans une contrée lointaine, il y a un élevage de schmulls et de gruchs. En tout, il y a 300 bêtes. Le schmull mange en moyenne 1,2 kg de grains par jour alors que la consommation journalière moyenne du gruch, plus gourmand, est de 2,1 kg. L'éleveur, lui, constate une consommation moyenne de 1,5 kg de grains par jour et par bête. Combien y-a-t-il de schmulls et combien y-a-t-il de gruchs ?





Des outils pour raisonner



Narration de recherche

1^{er} sujet :

Un petit garçon raconte ses vacances :

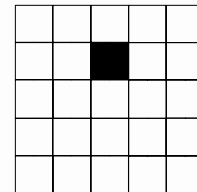
– Il y a eu 11 jours de pluie. Pendant ces 11 jours, quand il pleuvait le matin, il faisait beau l'après-midi. Et s'il pleuvait l'après-midi, il faisait beau le matin suivant.



Au total, ce petit garçon a eu 9 matinées et 12 après-midi sans pluie.

Combien a-t-il eu de jours de vacances ?

2^e sujet :

On considère un plateau carré dont les côtés sont formés de n carreaux (sur le dessin, par exemple, $n = 5$). Une des cases de ce plateau est noircie : on ne pourra pas l'utiliser.



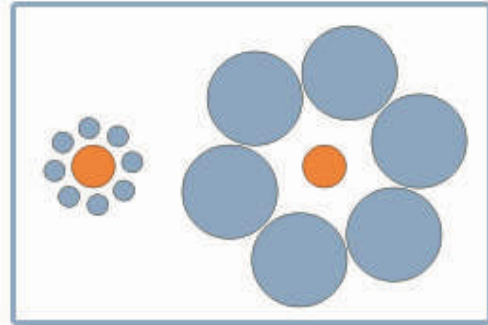
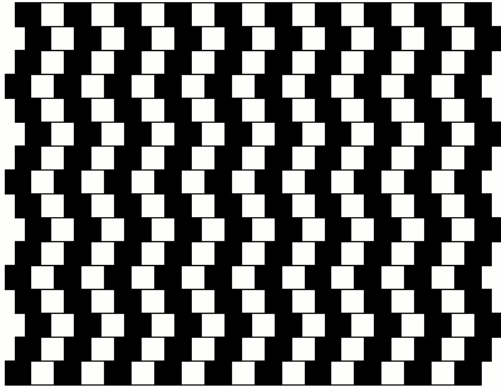
Un domino est un jeton qui a la taille de deux cases du plateau collées par un bord :  ou .

Dans quels cas peut-on réussir à paver entièrement le plateau (sauf la case noire) avec des dominos ?

Vous pourrez essayer différentes tailles de plateau et différentes positions pour la case noire.

Avec l'aimable autorisation de l'ERTÉ "Maths à modeler" de l'Université Joseph Fourier de Grenoble (<http://www.mathsamodeler.net/>)

Activité 1 : Il faut se méfier de ce que l'on voit

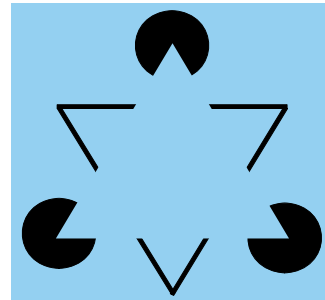
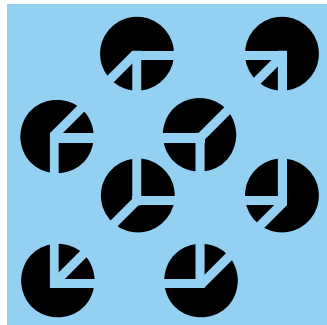


Illusion de Titchener

1. Comment semblent les lignes de la première image ? Et pourtant...
2. Que dire des deux disques oranges de la deuxième image ? Et pourtant...
3. Trace précisément deux cercles concentriques de rayons 2 cm et 2,2 cm. À côté, trace deux autres cercles concentriques de rayons 1,8 cm et 2 cm. Que vois-tu ?
4. Essaie de trouver ou de fabriquer d'autres illusions d'optique que tu montreras à tes camarades.

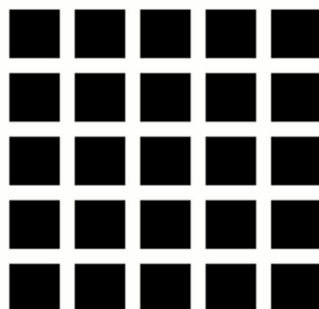
Activité 2 : Il faut se méfier de ce qui n'existe pas

1. Que vois-tu ?

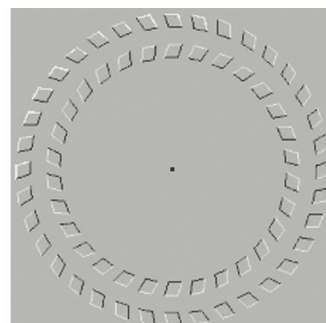


Illusion de Kanizsa

2. Qu'aperçois-tu à l'intersection des lignes ? Est-ce réel ? Reproduis ce dessin en prenant 1 cm pour mesure du côté du carré.



3. Fixe bien le point au centre de l'image tout en t'approchant et en t'éloignant de la page. Un effet surprenant se produira...



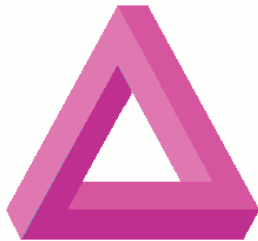
*Baingio
Pinna*

Activité 3 : Il faut se méfier des évidences

1. Petits problèmes :

- a. Une bouteille d'huile d'olive coûte 6 €. L'huile d'olive coûte 5 € de plus que la bouteille. Combien coûte la bouteille vide ?
- b. Le prix d'un meuble est diminué de 50 % puis augmenté de 50 %. Quel est alors son prix ? Vérifie en prenant 400 € pour prix de départ.

2. Que peux-tu dire à propos du *triangle de Penrose* ci-dessous ?



- 3. Fais des recherches sur les oeuvres du dessinateur M.C. Escher et en particulier sur les lithographies intitulées « *Belvédère* », « *Montée et descente* », « *Mouvement perpétuel* ». Ces dessins paraissent normaux au premier coup d'oeil mais, en y regardant de plus près, que constates-tu ?

Activité 4 : Instruments ou calculs ?

1. Construis un triangle TUC tel que $UC = 7$ cm, $\widehat{TUC} = 54^\circ$ et $\widehat{TCU} = 35^\circ$.

2. En utilisant tes instruments de géométrie, détermine la nature du triangle TUC.

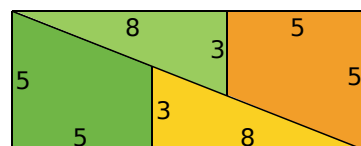
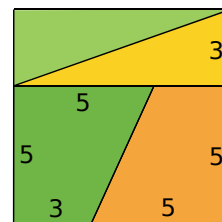
- 3. À l'aide d'un calcul, détermine la mesure de l'angle \widehat{UTC} . Compare avec ce que tu as trouvé à la question 2..

Activité 5 : Pourquoi démontrer ?

1. Construis un carré de 8 cm de côté puis découpe-le en quatre pièces comme ci-contre :

2. Assemble ces quatre pièces comme ci-contre. Est-ce le puzzle d'un rectangle selon toi ?

3. Calcule l'aire du carré et du rectangle. Conclue.



Activité 6 : Soyons critiques

- Le professeur présente un énoncé mathématique :
« Dans une division euclidienne, le quotient est toujours supérieur au reste. ».
- Ingrid dit : « Cet énoncé est vrai, ça marche pour tous les exemples que j'ai pris. ».
- Stéphane dit : « Cet énoncé est parfois vrai, parfois faux. C'est vrai pour $16 \div 3$ mais c'est faux pour $26 \div 11$. ».
- Stella dit : « Cet énoncé est donc faux car il y a un exemple qui ne marche pas. ».
- À ton avis, qui a raison et qui a tort ?

Activité 7 : Si... alors...

1. Recopie chacune des propriétés suivantes puis souligne en vert la condition pour l'utiliser et en rouge ce qu'elle permet de montrer (la conclusion).

<p>a. <u>Si</u> un nombre est divisible par 9 <u>alors</u> il est divisible par 3.</p> <p>b. <u>Si</u> un nombre se termine par 0 ou 5 <u>alors</u> il est divisible par 5.</p> <p>c. <u>Si</u> un nombre entier est impair <u>alors</u> son carré est impair.</p> <p>d. <u>Si</u> on ajoute deux nombres opposés <u>alors</u> leur somme est nulle.</p>	<p>e. <u>Si</u> deux droites sont parallèles à une même troisième <u>alors</u> elles sont parallèles entre elles.</p> <p>f. <u>Si</u> un point appartient à la médiatrice d'un segment <u>alors</u> il est équidistant des extrémités de ce segment.</p> <p>g. <u>Si</u> un quadrilatère est un parallélogramme <u>alors</u> ses diagonales ont le même milieu.</p>
--	---
2. Donne un exemple pour chaque propriété numérique et illustre par un dessin chaque propriété géométrique.

Activité 8 : Un exemple, oui mais...

1. Recopie et complète le tableau suivant :

x	0	1	2	3	4	5	10
$2x + 3x$							
$2 + 3x$							
$5x$							

2. a. L'égalité $2 + 3x = 5x$ est-elle vraie pour une valeur de x ?
b. Cette égalité est-elle vraie pour n'importe quelle valeur de x ?
 3. a. L'égalité $2x + 3x = 2 + 3x$ est-elle vraie pour une valeur de x ?
b. Cette égalité est-elle vraie pour n'importe quelle valeur de x ?
 4. a. L'égalité $2x + 3x = 5x$ est-elle vraie pour une valeur de x ?
b. Cette égalité est-elle vraie pour n'importe quelle valeur de x ?
- Les calculs du tableau suffisent-ils pour répondre à cette question ? Pourquoi ?
Que dois-tu utiliser pour y répondre ?

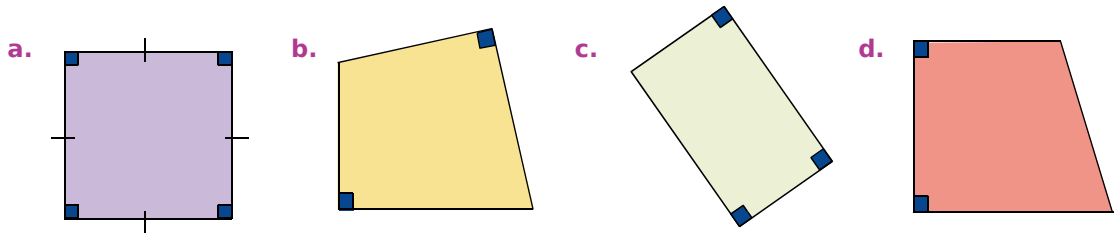
Activité 9 : Autour du contre-exemple

1. Voici plusieurs énoncés faux. Écris ce que doit vérifier un contre-exemple de chacun d'entre eux :

- **Si** un quadrilatère a deux côtés parallèles **alors** c'est un parallélogramme.
- **Si** les diagonales d'un quadrilatère ont la même longueur **alors** c'est un rectangle.
- Le carré d'un nombre entier est pair.
- L'opposé d'un nombre est négatif.
- **Si** une fraction est inférieure à 1 **alors** son numérateur est supérieur à son dénominateur.

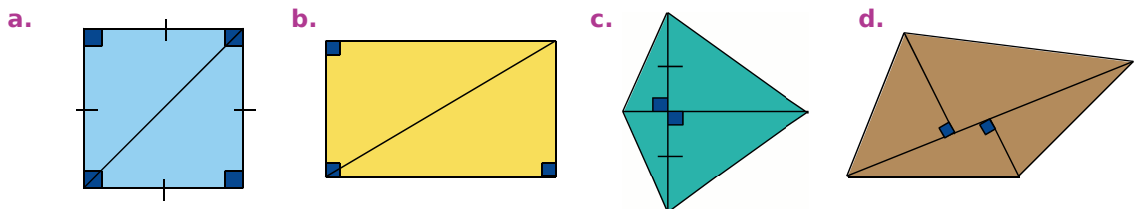
2. Quelle(s) figure(s) est(sont) un(des) contre-exemple(s) de l'énoncé :

- **Si** un quadrilatère a deux angles droits **alors** c'est un rectangle.



3. Quelle(s) figure(s) est(sont) un(des) contre-exemple(s) de l'énoncé :

- Chaque diagonale partage un quadrilatère en deux triangles de même aire.



4. Quels sont les contre-exemples de l'énoncé :

- **Si** un nombre est supérieur à 16 **alors** il est supérieur à 18.

a. 12,3 b. 15 c. 16,5 d. 17 e. 17,9 f. 19 g. 27

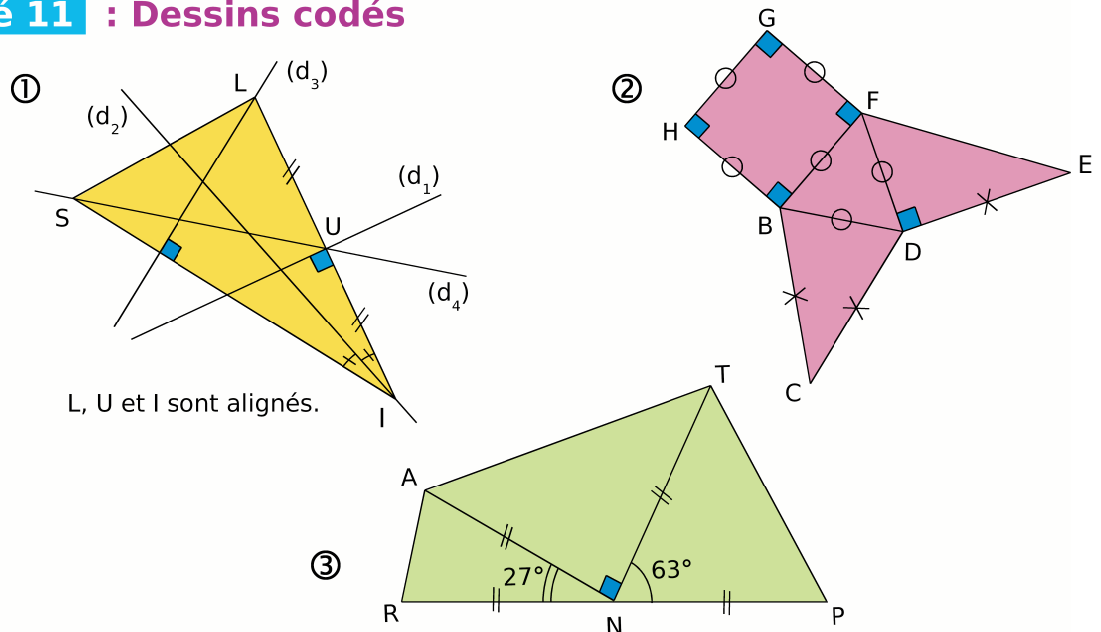
5. Modifie les énoncés des questions **1.**, **2.**, **3.** et **4.** pour qu'ils soient vrais.

Activité 10 : Vrai ou faux

Voici plusieurs énoncés. Indique dans chaque cas s'il est vrai ou faux. Dans le cas où il est faux, donne un contre-exemple pour justifier ta réponse :

- a. **Si** deux droites sont parallèles et si une troisième est perpendiculaire à l'une **alors** elle est perpendiculaire à l'autre.
- b. **Si** un quadrilatère a deux côtés opposés parallèles et de même longueur **alors** c'est un parallélogramme.
- c. **Si** un triangle a deux angles égaux **alors** il est équilatéral.
- d. **Si** $3x + 2y = 67$ **alors** $x = 11$ et $y = 17$.
- e. **Si** $3x + 1 = 7$ **alors** $x = 2$.
- f. Le carré d'un nombre est toujours positif.

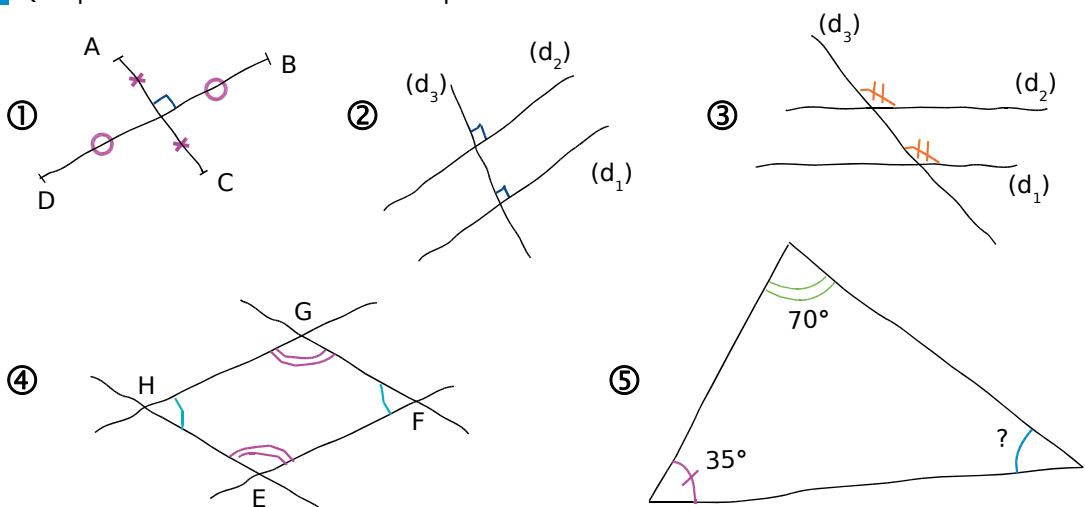
Activité 11 : Dessins codés



1. Pour chaque dessin, indique toutes les informations fournies par le codage.
2. Dans le dessin ①, que représente chaque droite pour le triangle LIS ? Précise la définition pour chaque réponse.
3. Quelles sont les natures des quadrilatères et des triangles particuliers dans le dessin ② ? Précise la définition pour chaque réponse.
4. A propos du dessin ③, quelle question peut-on poser ?

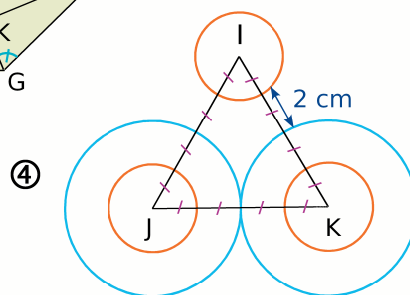
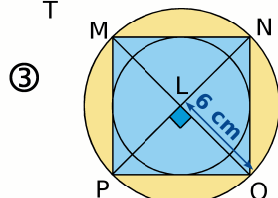
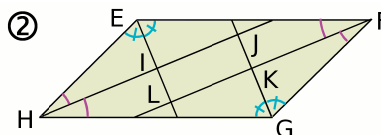
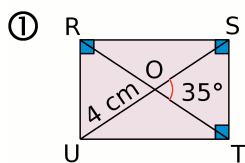
Activité 12 : Dessins et propriétés

1. Pour chacun des dessins codés, énonce une propriété que l'on peut appliquer.
2. Que peux-tu en conclure dans chaque cas ?



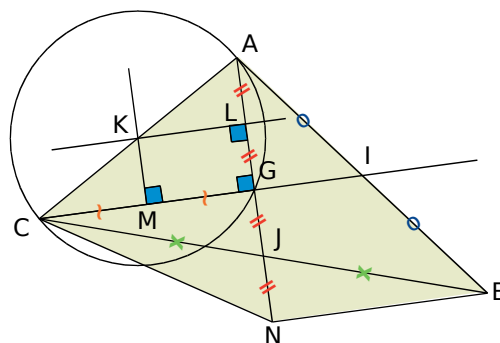
Activité 13 : Dessins téléphonés

1. Écris sur une feuille un programme de construction pour chacun des dessins ci-dessous.



2. Échange ta feuille avec un de tes camarades puis trace les dessins à partir des informations qu'il a écrites.

Activité 14 : Faire le bon choix !



1. Trace à main levée et code en vert une partie du dessin ci-dessus qui permet d'appliquer chacune des propriétés suivantes. Tu coderas ensuite sur ce même dessin, en rouge, la conclusion qui s'en déduit.

- Si** un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu **alors** c'est un parallélogramme.
- Si** deux droites sont perpendiculaires à une même troisième **alors** elles sont parallèles entre elles.
- Les médiatrices d'un triangle sont concourantes en un point qui est le centre du cercle circonscrit au triangle.
- Si** un quadrilatère a trois angles droits **alors** c'est un rectangle.
- Si** un point appartient à la médiatrice d'un segment **alors** il est situé à égale distance des extrémités de ce segment.
- Les médianes d'un triangle sont concourantes en un point qui est le centre de gravité du triangle.

2. Quelle propriété utiliser pour démontrer que :

- $(CG) \parallel (NB)$?
- $\widehat{AKL} = \widehat{KCM}$?

Activité 15 : Dans la vie courante !

1. Voici deux phrases :

- S'il pleut **alors** il y a des nuages.
- S'il y a des nuages **alors** il pleut.

Comment construit-on une phrase à partir de l'autre ?
Que penses-tu de ces deux phrases ?

2. De la même façon, transforme les phrases suivantes :

- a. Si j'ai 10 € **alors** je peux acheter un livre à 8,50 €.
- b. Si j'ai 18 ans **alors** je suis majeur.
- c. Si c'est un oiseau **alors** il pond des oeufs.
- d. Si ce n'est pas rouge ou vert **alors** c'est bleu.
- e. Si c'est un chien **alors** il a des plumes.

3. Les phrases du 2. et celles que tu as écrites sont-elles vraies ou fausses ?



Activité 16 : Réciproque d'une propriété

1. Pour chacun des énoncés suivants, dis s'il est vrai ou faux puis énonce sa réciproque et dis si elle est vraie ou fausse :

- a. Si un nombre se termine par 3 **alors** il est divisible par 3.
- b. Si $x = 3$ **alors** $x^2 = 9$.
- c. Si un nombre est divisible par 3 **alors** il est divisible par 9.
- d. Si un nombre est pair **alors** il se termine par 2.
- e. Si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu **alors** c'est un parallélogramme.
- f. Si un quadrilatère est un carré **alors** il a ses quatre côtés de même longueur.

2. Réponds par vrai ou faux aux affirmations suivantes, en justifiant :

- a. La réciproque d'un énoncé vrai est toujours vraie.
- b. La réciproque d'un énoncé faux est toujours fausse.
- c. La réciproque d'un énoncé vrai est toujours fausse.
- d. La réciproque d'un énoncé faux est toujours vraie.

3. Trouve deux énoncés vrais dont les réciproques sont fausses et deux énoncés faux dont les réciproques sont vraies.

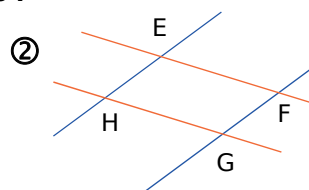
Activité 17 : Propriété directe ou réciproque ?

Voici cinq propriétés :

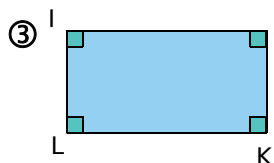
- a. **Si** un parallélogramme a deux côtés consécutifs de même longueur **alors** c'est un losange.
- b. **Si** un quadrilatère a quatre angles droits **alors** c'est un rectangle.
- c. **Si** un losange a un angle droit **alors** c'est un carré.
- d. **Si** un losange a ses diagonales de la même longueur **alors** c'est un rectangle.
- e. **Si** un quadrilatère est un parallélogramme **alors** ses côtés opposés sont parallèles deux à deux.

Voici les données :

① ABCD est un losange.



Les droites parallèles sont codées de la même couleur.



④ MNOP est un losange tel que $MO = NP$.

1. Pour chacune des données, on ne peut appliquer qu'une seule propriété énoncée ci-dessus ou la réciproque de l'une d'entre elles. Précise laquelle dans chaque cas.

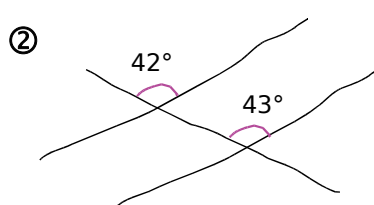
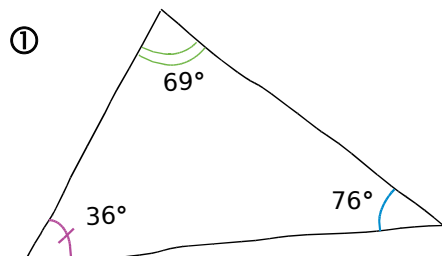
2. Donne, ensuite, la conclusion qui s'en déduit.

Activité 18 : Contraposée

1. Énonce la négation de la réciproque des énoncés suivants puis indique, dans chaque cas, si elle est vraie ou fausse. Que remarques-tu alors ?

- a. Deux triangles symétriques ont la même aire.
- b. **Si** un quadrilatère a ses diagonales qui ne se coupent pas en leur milieu **alors** c'est un parallélogramme.
- c. Deux fractions sont égales si leurs produits en croix sont égaux.
- d. La somme de deux nombres opposés est non nulle.

2. Dans chaque cas, écris la contraposée d'une propriété que l'on peut appliquer et la conclusion qui en découle :



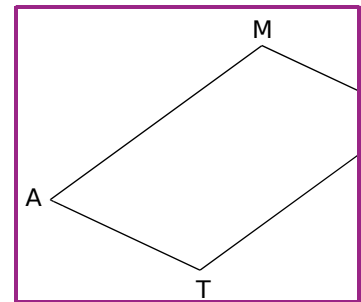
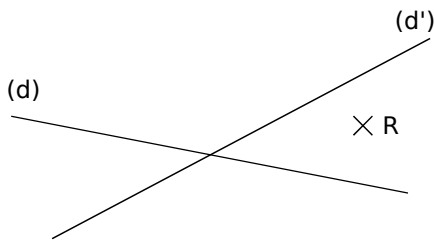
③

2	3	4
3	4	5

Activité 19 : Raisonner pour construire

Dans chaque cas, trace un dessin à main levée puis énonce une propriété qui te permet de le construire. Réalise, ensuite, ce dessin en vraie grandeur.

1. Construis un triangle ABC isocèle en A tel que $\widehat{BAC} = 32^\circ$ et $BC = 4,2$ cm.
2. Construis un carré DEFG tel que $DF = 5,6$ cm.
3. Trace deux droites sécantes (d) et (d'). Place un point R non situé sur ces droites. Place les points A et T tels que les droites (d) et (d') soient les médiatrices du triangle RAT.



4. Place les points M, A et T comme ci-contre. Sachant que MATH est un parallélogramme, trace la droite (AH) sans sortir du cadre.
5. Trace un triangle REG. Construis un autre triangle BIL tel que R soit le milieu de [BI], E celui de [IL] et G celui de [LB].

Activité 20 : Enchaînement de démonstrations

Voici deux propriétés :

Propriété 1 : Si, dans un triangle, une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un deuxième côté alors elle coupe le troisième côté en son milieu.

Propriété 2 : Si, dans un triangle, une droite passe par les milieux de deux côtés alors elle est parallèle au troisième côté.

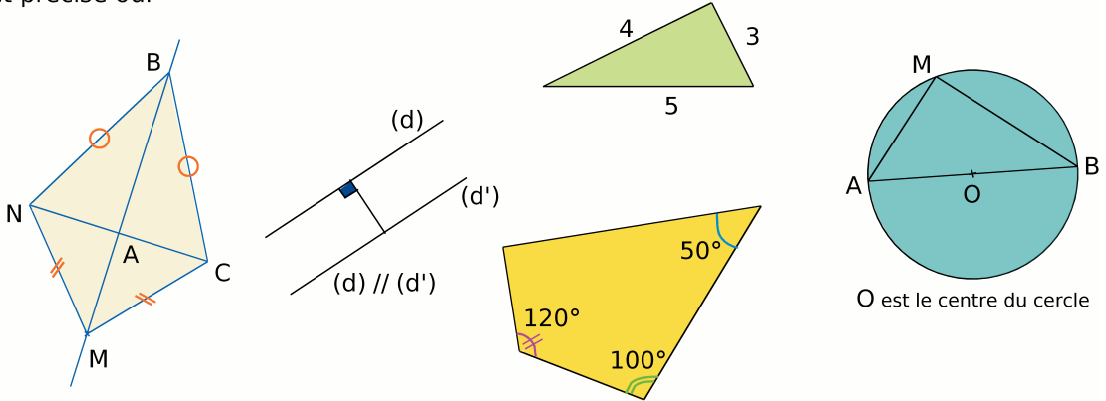
Voici l'exercice :

On considère un triangle ABC tel que J soit le milieu de [AC] et K celui de [AB]. Soient M un point quelconque appartenant au segment [BC] et N le point d'intersection de (AM) et (KJ).

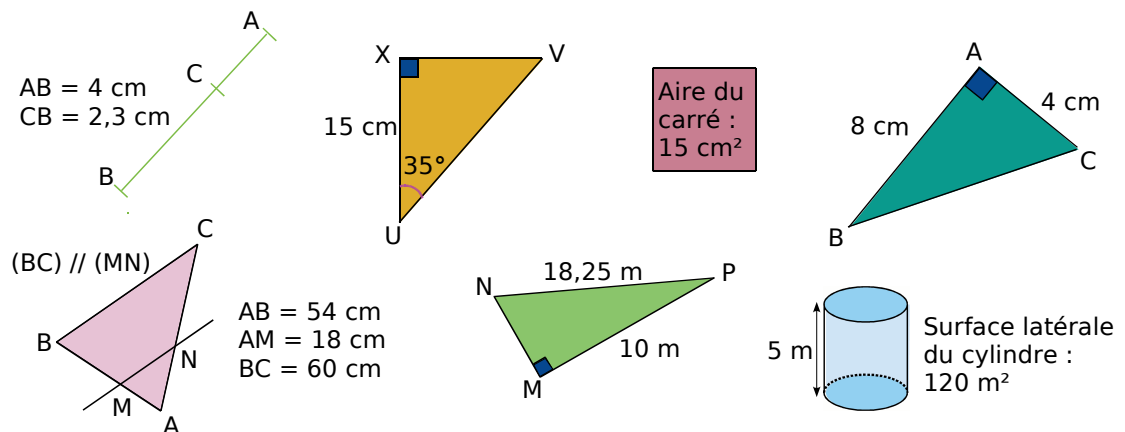
1. Réalise un dessin à main levée et code-le en vert.
2. Nomme tous les triangles que tu vois sur ce dessin.
3. Indique le triangle dans lequel tu peux d'emblée utiliser l'une des deux propriétés et précise laquelle. Justifie. Code alors en rouge ce que tu peux démontrer.
4. Existe-t-il des triangles dans lesquels tu peux utiliser l'autre propriété ? Si oui, nomme-les. Justifie. Que peux-tu alors démontrer ?
5. Ecris, à la suite des données de départ, les questions que tu peux poser à un élève.

Activité 21 : Différentes propriétés pour une même conclusion

1. Dans chaque cas, cite la propriété que tu utilises pour démontrer qu'il y a un angle droit et précise où.



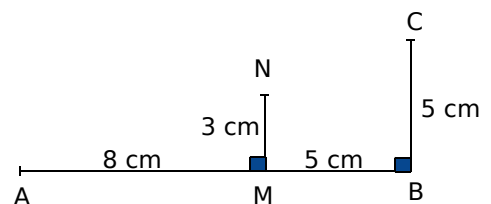
2. Dans chaque cas, indique d'abord la longueur que tu peux calculer puis calcule-la en citant la propriété utilisée (donne la valeur arrondie au dixième si nécessaire).



3. Parmi toutes les propriétés que tu connais, cite celles que tu peux utiliser pour déterminer la mesure d'un angle.

Activité 22 : Reasonner par l'absurde

- Réalise ce dessin en vraie grandeur.
- Que penses-tu des points A, N et C ?
- Une première démonstration :**
Calcule l'aire des triangles rectangles AMN et ABC puis l'aire du trapèze MBCN.
- Que penses-tu de ta réponse faite à la question 2. ?
- Une autre démonstration :**
Si les points A, N et C étaient alignés, quelle propriété pourrais-tu alors appliquer ? Justifie. Applique-la. Que constates-tu ? Conclus.



Le manuel **Sésamath** a été conçu en liaison avec différents outils intégrés. Tous ces outils ont été créés par des professeurs de mathématiques en exercice. Ce sont des outils librement utilisables en ligne et téléchargeables. Issus de la même équipe, ils sont naturellement complémentaires et homogènes entre eux.

LE TABLEUR



LA GÉOMÉTRIE DYNAMIQUE



LES INSTRUMENTS VIRTUELS



L'EXERCISEUR



Les 4 pages qui suivent présentent chacun de ces outils individuellement.

Le tableur de MathenPoche

UN TABLEUR POUR TOUS LES NIVEAUX

Le logiciel **CasenPoche** est un tableur facile à manipuler et adapté au programme du collège.

Conçu par des enseignants, il possède la plupart des fonctions de base d'une feuille de calcul mais aussi de nombreuses particularités qui en font l'outil idéal pour accompagner l'élève au cours de sa scolarité.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Tables de multiplications :										
2		x	2	3	4	5	6	7	8	9	
3		2	4	6	8	10	12	14	16	18	
4		3	6	9	12	15	18	21	24	27	
5		4	8	12	16	20	24	28	32	36	
6		5	10	15	20	25	30	35	40	45	
7		6	12	18	24	30	36	42	48	54	
8		7	14	21	28	35	42	49	56	63	
9		8	16	24	32	40	48	56	64	72	
10		9	18	27	36	45	54	63	72	81	

Comme les autres outils de la suite **MathenPoche**, **CasenPoche** est libre, gratuit et téléchargeable à l'adresse :

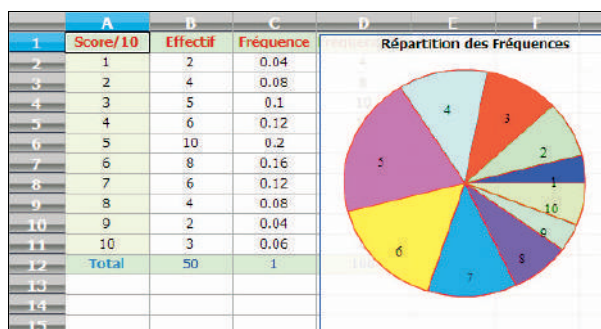
<http://www.casenpoche.net/>

Comme tout tableur, **CasenPoche** permet de manipuler des tableaux de nombres. Il est ainsi possible d'effectuer des opérations entre les contenus des cellules, des lignes ou des colonnes. Ce logiciel permet aussi d'effectuer des calculs exacts, de simplifier des fractions ou d'utiliser le calcul littéral.

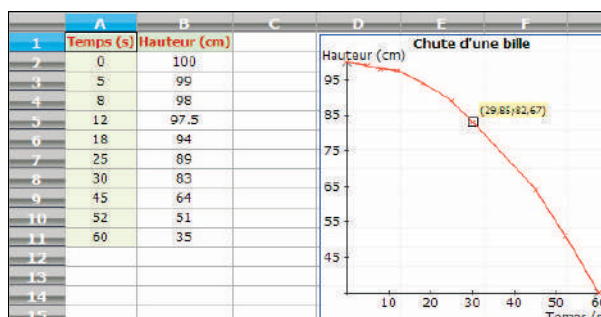
	A	B	C	D	E
1	Numérateur	Dénominateur	Quotient	Fraction	Simplifié
2	3	9	0.3333333333	3/9	1/3
3					
4	a	b	a+b simplifié	axb simplifié	
5	3/9	4/3	5/3	4/9	

CasenPoche couvre de nombreuses notions du programme : statistiques, fonctions, activités multi-disciplinaires. Ce logiciel est un outil transversal.

UN OUTIL AUX MULTIPLES FACETTES

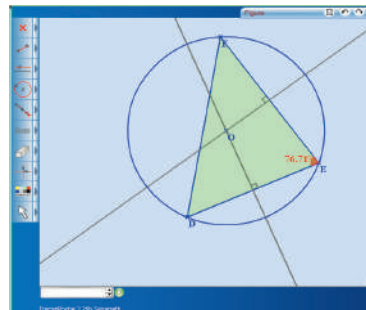


CasenPoche permet également de mettre en forme des cellules pour améliorer la présentation des feuilles de calculs.



UN LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE DYNAMIQUE POUR TOUS LES NIVEAUX

Le logiciel **TracenPoche** est un logiciel de géométrie dynamique qui permet de construire une figure mais aussi de déplacer les éléments mobiles de celle-ci. Son interface interactive est totalement paramétrable. Son utilisation est aisée au collège, comme à l'école et au lycée, car le logiciel **TracenPoche** intègre toutes les notions de géométrie étudiées dans l'enseignement primaire et secondaire.



TracenPoche offre des possibilités de visualisation qui ne sont pas réalisables sur du papier ou sur un tableau avec les outils de construction traditionnels.

Il permet une découverte active des notions mathématiques. Pouvant être utilisé de façon autonome ou coopérative, **TracenPoche** est destiné à la fois aux élèves et aux enseignants.

Comme les autres outils de la suite **MathenPoche**, ce logiciel est accessible gratuitement à l'adresse :

<http://www.tracenpoche.net/>

UNE INTERFACE CONVIVIALE

La convivialité de l'interface réside non seulement en ses boutons, d'une utilisation très intuitive, mais aussi en la facilité d'améliorer la mise en forme des objets et le codage des figures.

TracenPoche se distingue également des autres logiciels de géométrie dynamique par la fenêtre Script qui permet de programmer directement le programme de tracé d'une figure.

Script

@options;

@figure;

```
A = point( -5.58 , 5.2 );
B = point( -4.11 , 1.17 );
C = point( 0.31 , 2.86 );
sAC = segment( A , C );
dAB = droite( A , B );
ceCB = cercle( C , B );
```

Analyse

angle(ABC)=90° ;
nature(ABC)= rectangle ;

En utilisant la fenêtre Analyse de **TracenPoche**, il est possible d'étudier les propriétés de la figure telles que « Quelle est la nature du triangle ABC ? » ou « Quelle est la mesure d'un angle ? ».

Les trois fenêtres (Figure, Script et Analyse) sont réactualisées en temps réel.

UN SITE RICHE EN RESSOURCES

TracenPoche offre aussi la possibilité d'insérer les figures construites dans un document texte pour une impression d'une qualité maximum.

Grâce aux différents modules de **TracenPoche** disponibles sur le site, des figures dynamiques peuvent être facilement insérées dans une page web ou dans une animation.

UNE VERSION SUR CD-ROM

Génération 5 propose également une version sur CD-ROM de **TracenPoche**. Pour plus de renseignements consulter le site :

<http://www.generation5.fr/mathenpoche/>

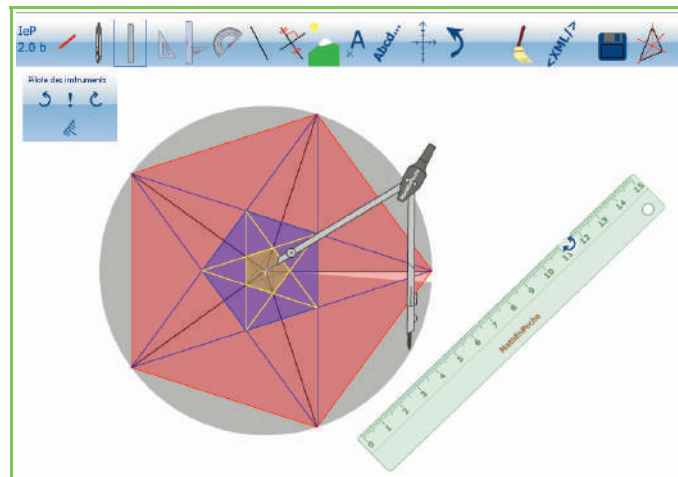
UN LOGICIEL DE CONSTRUCTION PAS À PAS

InstrumentPoche est un logiciel permettant de construire des figures à l'aide d'instruments virtuels. Il regroupe dans une même interface les outils de géométrie utilisés au collège tout en proposant d'autres fonctionnalités (repère, insertion d'image...). Les constructions géométriques réalisées peuvent être enregistrées à la manière d'un petit film pour être visionnées ultérieurement.

Comme les autres outils de la suite **MathenPoche**, ce logiciel est libre, gratuit et téléchargeable à l'adresse :

<http://www.instrumenpoche.net/>

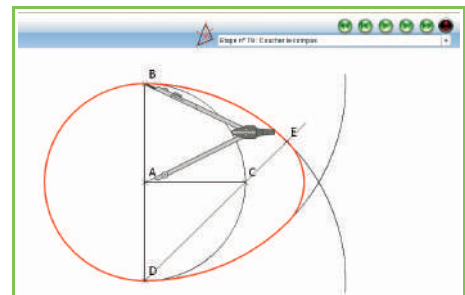
InstrumentPoche peut être utilisé en vidéoprojection ou sur un tableau interactif afin d'illustrer une méthode de tracé. Les élèves peuvent également l'utiliser seuls sur un ordinateur, pour se familiariser d'une manière ludique avec les outils utilisés en géométrie, tout en étant libérés de certaines contraintes liées aux objets réels.



DE MULTIPLES POSSIBILITÉS D'UTILISATION

Grâce aux différentes options de mise en forme (choix de la couleur et du style des traits...) et aux possibilités de codage, les figures construites sont claires et soignées. Elles peuvent alors être imprimées directement ou exportées vers un traitement de texte.

L'interface permettant le défilement des constructions enregistrées est très simple d'utilisation. Elle permet d'avancer en mode normal, en mode par étape ou bien d'aller directement à la figure totalement construite.



UN SITE RICHE EN RESSOURCES

De nombreuses animations sont visibles sur le site d'**InstrumentPoche**, dans la rubrique « Bibliothèque ». Vous pouvez les visionner et proposer celles que vous avez construites.

Un logiciel pour travailler au rythme des élèves

UN LOGICIEL RICHE EN CONTENU

Le logiciel **MathenPoche 4^e** propose des centaines d'activités : découvertes, démonstrations, QCM, exercices d'application, géométrie avec instruments virtuels, géométrie dynamique, travaux de synthèse...

Le logiciel **MathenPoche 4^e** est libre, gratuit et téléchargeable à l'adresse :

<http://mathenpoche.net/>

UN ESPACE DE TRAVAIL POUR L'ÉLÈVE

Le logiciel **MathenPoche 4^e** couvre intégralement le niveau 4^e avec 495 exercices comportant chacun 5 ou 10 questions. L'élève travaille à son rythme et différents outils sont mis à sa disposition pour progresser :

- un didacticiel intégré permet d'apprendre à utiliser les fonctionnalités du logiciel ;
- une aide animée, par exercice, reprend les notions de base du cours et les applique sur un exemple ;
- les exercices sont auto-correctifs et peuvent être refaits à volonté (les données sont aléatoires) ;

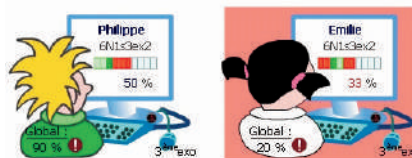


- l'élève est encouragé à chaque bonne réponse, et la correction est affichée dans tous les cas ;
- l'élève est guidé dans sa progression. À la fin de chaque exercice, on lui conseille de recommencer ou de passer à l'activité suivante.

En s'inscrivant sur l'interface réservée aux professeurs, l'enseignant programme une séance sur mesure en sélectionnant des exercices ou en créant ses propres activités à l'aide des outils TracenPoche et CasenPoche. Les avantages sont multiples :

UNE INTERFACE SPÉCIFIQUE POUR L'ENSEIGNANT

- Une fois la séance programmée, l'enseignant consacre davantage de temps aux élèves.
- L'enseignant suit à distance le travail des élèves en temps réel.
- Les scores sont enregistrés et sont consultables par l'élève et par l'enseignant.



Poche Léa - en cours : 4G2s3ex6, moyenne : 8 / 10, minimum : 2 / 10, maximum : 10 / 10	
• "Calcul du côté adjacent" (4G2s3ex5)	5 / 5 (05 min. 26 s.)
• "Calculer le cosinus d'un angle" (4G2s3ex1)	9 / 10 (02 min. 31 s.)
• "Calculer la mesure de l'angle" (4G2s3ex2)	8 / 10 (03 min. 10 s.)
• "Synthèse (calculatrice)" (4G2s3ex3)	2 / 10 (00 min. 23 s.)
• "Calcul de l'angle" (4G2s3ex4)	5 / 5 (03 min. 20 s.)

- L'enseignant récupère et exploite le bilan de chaque séance sous forme de fichiers tableurs.

UNE VERSION SUR CD-ROM

Génération 5 propose également une version sur CD-ROM du logiciel **MathenPoche 4^e**. Pour plus de renseignements consulter le site : <http://www.generation5.fr/mathenpoche/>.



Triangle rectangle

G1



Narration de recherche

1^{er} sujet :

On appelle carré parfait un entier qui est le carré d'un autre entier.
Écrire tous les entiers de 1 à 15 côte à côte, de façon à ce que la somme de deux nombres voisins soit un carré parfait.

2^e sujet :

Question 1 :

Un plumeau de 8 dm de hauteur a été brisé par le vent. Le sommet touche la terre à 4 dm de la tige restée verticale. A quelle hauteur a-t-il été brisé ?



Question 2 :


Un autre plumeau a été brisé. Il mesurait 15 dm de haut et son sommet touche la terre à 9 dm de la tige. A quelle hauteur a-t-il été brisé ?



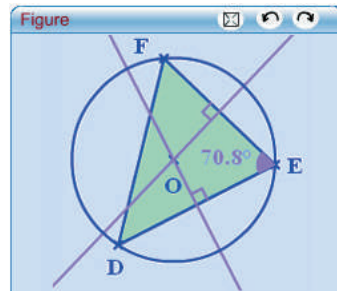
Activité 1 : Cercle circonscrit d'un triangle rectangle

1. Conjecture avec TracenPoche

a. Construis un triangle DEF. Construis ensuite son cercle circonscrit en utilisant les boutons  et .

À l'aide du bouton , fais apparaître la mesure de l'angle \widehat{DEF} .

b. En déplaçant le point de ton choix, fais varier la mesure de l'angle \widehat{DEF} . Observe la position du centre du cercle circonscrit quand l'angle est aigu, quand il est obtus et quand il est droit. Que constates-tu ?



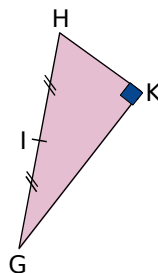
2. Démonstration

a. Trace un triangle GHK, rectangle en K. Soit I le milieu de l'hypoténuse [GH]. On veut montrer que I est le centre du cercle circonscrit à GHK.

b. Soit L le symétrique de K par rapport à I. Quelle est la nature du quadrilatère GKHL ? Explique pourquoi.

c. Que peut-on en déduire sur les longueurs IG, IH et IK ? Quel est le centre du cercle circonscrit au triangle GHK ?

d. Écris la propriété que tu viens de démontrer.




Activité 2 : Triangle inscrit dans un cercle

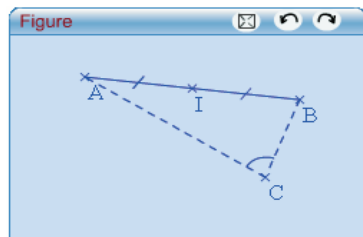
1. Conjecture avec TracenPoche

a. Construis un segment [AB] puis place son milieu I. Place un point libre C et trace les segments [CA] et [CB] en pointillés. Dans la fenêtre *Analyse*, fais afficher AI, BI et CI.

b. Place le point C de manière à t'approcher de l'égalité $AI = BI = CI$.

Avec le bouton , fais afficher alors la mesure de l'angle \widehat{ACB} . Que constates-tu ?

c. Construis le cercle de centre I passant par A puis place un point D sur ce cercle en utilisant le bouton . Dans la fenêtre *Analyse*, fais apparaître la mesure de l'angle \widehat{ADB} . Déplace le point D sur le cercle et observe la mesure de l'angle. Ce que tu as constaté au **b.** semble-t-il se confirmer ?



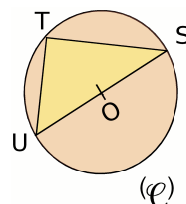
2. Démonstration

a. Trace un cercle (\mathcal{C}) de centre O. Place sur le cercle (\mathcal{C}) trois points distincts S, T et U tels que [SU] soit un diamètre du cercle. Trace le triangle STU. On veut montrer que c'est un triangle rectangle.

b. Place T', symétrique de T par rapport à O. Quelle est la nature du quadrilatère UTST' ? Justifie.

c. Que peut-on en déduire sur la nature du triangle STU ?

d. Écris la propriété que tu viens de démontrer.

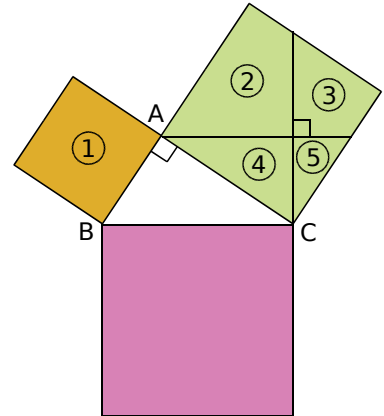


Activité 3 : Sur la piste de Pythagore

1. Partons d'un triangle rectangle

- a. Sur une feuille de dessin, construis un triangle ABC rectangle en A. Sur chacun de ses côtés, construis avec précision un carré comme sur la figure ci-contre.





Termine la construction comme indiqué et découpe les pièces ①, ②, ③, ④ et ⑤.




- b. Avec ces cinq pièces, reconstitue le grand carré rose. Quelle relation y a-t-il entre l'aire du carré jaune, l'aire du carré vert et l'aire du carré rose ?
- c. Exprime, à l'aide des lettres de la figure, les aires des carrés jaune, vert et rose.
- d. En te servant de la relation trouvée au b., quelle égalité peux-tu alors écrire ?

2. Avec TracenPoche

- a. Construis un triangle ABC rectangle en A. Pour cela :

- Place deux points A et B puis, en utilisant le bouton , construis le segment [AB] et en utilisant le bouton , la perpendiculaire à [AB] passant par A. Place un point C sur cette perpendiculaire avec le bouton .
- Construis les segments [BC] et [AC] avec le bouton .

- b. Fais apparaître les mesures des côtés du triangle ABC en utilisant le bouton . Reproduis et complète le tableau suivant pour des triangles rectangles ABC différents (tu déplaceras les points A, B et C).

Calcule ensuite $AB^2 + AC^2$ et BC^2 pour chacun de ces triangles : tu donneras des valeurs arrondies au centième.

	Triangle 1	Triangle 2	Triangle 3	Triangle 4	Triangle 5	Triangle 6
AB
AC
$AB^2 + AC^2$
BC
BC^2

Que remarques-tu ?

- c. Dans la fenêtre *Analyse*, saisis les expressions ci-contre puis appuie sur la touche F9.

À quoi correspondent ces calculs ?

Déplace maintenant les points A, B et C et observe les résultats affichés dans la fenêtre *Analyse*.

Ce que tu as remarqué au b. semble-t-il se confirmer ?

- d. Quelle conjecture peux-tu faire ?

Rédige cette conjecture sous la forme : « Si... alors... ».

Analyse

calc (AB*AB+AC*AC) =
calc (BC*BC) =

Activité 4 : Démonstration du théorème de Pythagore

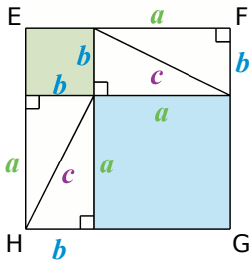
1. À partir de quatre triangles rectangles identiques, on obtient la figure ci-contre, sur laquelle A, M, B ; B, N, C ; C, O, D et D, P, A sont alignés.

a , b et c désignent les longueurs des côtés des triangles rectangles. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ? Justifie.

2. Démontre que l'angle \widehat{PMN} est un angle droit. Déduis-en la nature du quadrilatère MNOP ?

3. Exprime l'aire de MNOP en fonction de c .

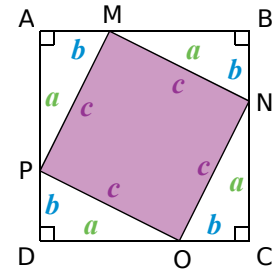
4. On dispose, à présent, les quatre triangles rectangles comme sur la figure ci-contre afin que EFGH soit un carré. Explique pourquoi les carrés ABCD et EFGH ont la même aire.



5. Que dire alors des aires des carrés bleu et vert par rapport à l'aire du carré rose ?

6. Déduis-en une relation entre a , b et c .

7. Écris la propriété que tu viens de démontrer. C'est le **théorème de Pythagore**.



Activité 5 : Racine carrée

1. Recopie et complète le tableau suivant :

AB = 8 m	SD = 1,3 dm	ZE =	FG =	UT =
AB ² =	SD ² =	ZE ² = 36 cm ²	FG ² = 81 m ²	UT ² = 1,69 m ²

2. Valeur exacte, valeur approchée

a. Le nombre positif dont le carré est 841 se note $\sqrt{841}$ et se lit « racine carrée de 841 ».

Trouve, sur ta calculatrice, la touche $\sqrt{\quad}$ et le moyen de saisir la séquence $\sqrt{841}$.

Quel résultat obtiens-tu avec la calculatrice ? Quel calcul te permet de vérifier que ce résultat est la valeur exacte de $\sqrt{841}$?

b. x est un nombre positif tel que $x^2 = 50$. Comment notes-tu la valeur de x ?

Fais le calcul à la calculatrice puis recopie la valeur affichée.

Si tu calcules le carré de cette valeur en posant l'opération, quel est le premier chiffre à droite que tu écriras dans le résultat ?

Déduis-en que la valeur donnée par la calculatrice n'est pas la valeur exacte de x .

Donne un encadrement de x à 0,01 près puis, en utilisant le symbole \approx , sa valeur arrondie au centième.

c. Donne la valeur exacte (en utilisant le signe =) quand c'est possible ou la valeur arrondie au dixième (en utilisant le signe \approx) de chacune des longueurs dont les carrés sont donnés ci-dessous :

FR ² = 156,25	NL ² = 85,87	EU ² = 2,5	GB ² = (2,365) ²	XY ² = - 9	CZ ² = 1,52399025
--------------------------	-------------------------	-----------------------	--	-----------------------	------------------------------

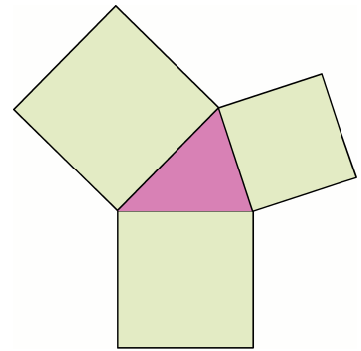
Activité 6 : Et si $c^2 = a^2 + b^2$...

1. Avec des ciseaux

Sur une feuille de dessin, construis et découpe dix carrés dont les mesures des côtés sont entières et valent de 1 cm à 10 cm.

À l'intérieur de chacun d'eux, indique son aire en cm^2 .

Choisis-en trois et assemble-les de façon à former un triangle dont les mesures des côtés sont les mesures des côtés des carrés utilisés, comme le montre l'exemple ci-contre.



- Lorsque tu choisis trois carrés au hasard, peux-tu toujours construire un triangle ?
- Exprime les aires des trois carrés en fonction des longueurs des côtés du triangle construit.
- Parmi tes dix carrés, choisis-en trois tels que la somme des aires des deux plus petits soit égale à l'aire du plus grand.
Quelle relation y-a-t-il alors entre les longueurs des côtés du triangle obtenu ?
Quelle semble être alors la nature de ce triangle ?
- Reprends la question c. avec trois autres carrés que tu as découpés.

2. Recherche de nombres entiers positifs a , b et c tels que $c^2 = a^2 + b^2$

- Avec un tableur, construis un tableau comme ci-contre, avec des valeurs allant jusqu'à 16 sur la ligne 1 et dans la colonne A.

On veut maintenant remplir chaque cellule avec la somme des carrés du nombre correspondant à sa ligne et du nombre correspondant à sa colonne comme le montre l'exemple ci-contre.

Pour cela, saisis dans la cellule B2 la formule : « = \$A2*\$A2+B\$1*B\$1 ». Trouve l'utilité du signe « \$ » dans cette formule.

Copie cette formule dans toutes les cellules de ton tableau et vérifie, dans quelques cellules, les résultats obtenus.

	A	B	C	D	E	F
1		1	2	3	4	5
2	1					
3	2					
4	3					
5	4					
6	5					

cellule C4 : résultat de $3^2 + 2^2$

- Sur la même feuille de tableur, construis un autre tableau permettant d'avoir les valeurs des carrés des nombres entiers de 1 à 23.

19	c	1	2	3	4	5	6
20	c^2						

- En utilisant les résultats obtenus dans les deux tableaux, trouve plusieurs triplets de nombres a , b et c tels que $c^2 = a^2 + b^2$ (il y a 6 solutions possibles).
Construis maintenant les triangles dont les mesures sont les triplets trouvés.
Quelle relation vérifient les mesures des côtés de ces triangles ?
Quelle semble être la nature de chacun de ces triangles ?

Bilan : Quelle conjecture peux-tu faire alors ?

On admet que cette conjecture est vraie. C'est la **réci-proque du théorème de Pythagore**. Énonce-la sous la forme : « Si... alors... ».

3. Rectangle ou non ?

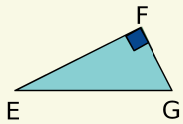
- Trace un triangle RST tel que $RS = 4,8$ cm, $ST = 6,4$ cm et $RT = 8,1$ cm. Quelle semble être sa nature ?
- Calcule la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les deux côtés de l'angle droit mesurent 4,8 cm et 6,4 cm.
- Le triangle RST est-il rectangle ?

Méthode 1 : Démontrer qu'un point est sur un cercle

À connaître

Si un **triangle est rectangle** alors **son cercle circonscrit** a pour diamètre son hypoténuse.

Exemple : Soit EFG un triangle rectangle en F. Démonstre que le point F appartient au cercle de diamètre [EG].

Figure	Données	Propriété	Conclusion
	Le triangle EFG est rectangle en F.	Si un triangle est rectangle alors son cercle circonscrit a pour diamètre son hypoténuse.	Le point F appartient au cercle de diamètre [EG].

À toi de jouer

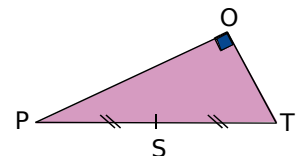
- 1 Construis un triangle EFG rectangle en F tel que $EG = 8$ cm et $EF = 5$ cm puis trace son cercle circonscrit. Justifie ta construction.
- 2 Soient ABC et BCD deux triangles rectangles respectivement en A et en D. Démonstre que les points A et D appartiennent au cercle de diamètre [BC].

Méthode 2 : Calculer la longueur d'une médiane

À connaître

Si un **triangle est rectangle** alors **la médiane issue du sommet de l'angle droit** a pour longueur la moitié de la longueur de l'hypoténuse.

Exemple : Le triangle POT est un triangle rectangle en O tel que $TP = 8$ cm. Le point S est le milieu du segment [TP]. Quelle est la longueur du segment [SO] ?

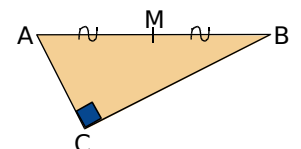


Étape préliminaire : Dans le triangle POT rectangle en O, [OS] joint le sommet O et le milieu S de [TP] donc [OS] est la médiane issue du sommet de l'angle droit O.

Données	Propriété	Conclusion
Le triangle POT est rectangle en O, [OS] est la médiane issue du sommet de l'angle droit O, $TP = 8$ cm.	Si un triangle est rectangle alors la médiane issue du sommet de l'angle droit a pour longueur la moitié de la longueur de l'hypoténuse.	$OS = \frac{1}{2} TP$ $OS = \frac{1}{2} \times 8 \text{ cm}$ $OS = 4 \text{ cm}$

À toi de jouer

- 3 Sur la figure ci-contre, ABC est un triangle rectangle en C, M est le milieu du segment [AB] et $CM = 2$ cm. Quelle est la longueur du segment [AB] ? Justifie ta réponse.



Méthode 3 : Démontrer qu'un triangle est rectangle

À connaître

Si un triangle est inscrit dans un cercle de diamètre l'un de ses côtés alors ce triangle est rectangle et admet ce diamètre pour hypoténuse.

Remarque : Voici une autre formulation possible de cette propriété :

Si on joint un point d'un cercle aux extrémités d'un diamètre de ce cercle alors le triangle ainsi formé est rectangle en ce point.

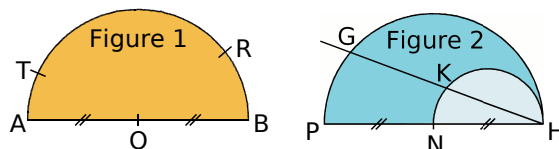
Exemple : Trace le cercle de diamètre [SR] tel que $SR = 7$ cm puis place sur ce cercle un point H tel que $RH = 4$ cm.
Démontre que le triangle RHS est rectangle en H.

Données	Propriété	Conclusion
Le point H appartient au cercle de diamètre [SR].	Si un triangle est inscrit dans un cercle de diamètre l'un de ses côtés alors ce triangle est rectangle et admet ce diamètre pour hypoténuse.	Le triangle SHR est rectangle en H.

À toi de jouer

4 Trace un cercle de diamètre [AB] puis place sur ce cercle un point C tel que $\widehat{BAC} = 50^\circ$. Calcule les mesures des angles \widehat{ACB} et \widehat{ABC} en justifiant tes réponses.

5 Dans chacune des figures ci-contre, nomme tous les triangles rectangles non tracés en utilisant les points donnés. Justifie tes réponses.

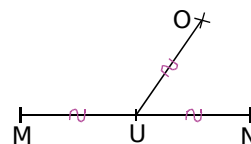


À connaître

Si, dans un triangle, la longueur de la médiane relative à un côté est égale à la moitié de la longueur de ce côté alors ce triangle est rectangle et admet ce côté pour hypoténuse.

Exemple : MON est un triangle, U est le milieu de [MN] et on a : $MN = 8$ cm ; $OU = 4$ cm.

Démontre que le triangle MON est rectangle en O.



Étape préliminaire : Dans le triangle MNO, [OU] joint le sommet O et le milieu U de [MN] donc [OU] est la médiane relative au côté [MN].

Données	Propriété	Conclusion
Dans le triangle MNO, [OU] est la médiane relative au côté [MN], $MN = 8$ cm et $OU = 4$ cm.	Si, dans un triangle, la longueur de la médiane relative à un côté est égale à la moitié de ce côté alors ce triangle est rectangle et admet ce côté pour hypoténuse.	Le triangle MNO est rectangle en O.

À toi de jouer

6 Soit RST un triangle isocèle en T et soit U le symétrique du point R par rapport au point T. Démontre que le triangle RSU est rectangle en S.

Méthode 4 : Calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle

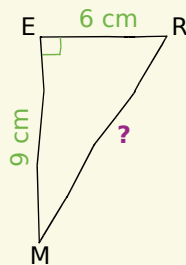
À connaître : Théorème de Pythagore

Si un triangle est rectangle alors le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.

Exemple 1 : Calcul de la longueur de l'hypoténuse

Soit MER un triangle rectangle en E tel que ME = 9 cm et ER = 6 cm. Calcule la valeur exacte de MR puis donne la valeur arrondie au millimètre.

Figure à main levée :



Le triangle MER est rectangle en E, son hypoténuse est le côté [MR]. Donc, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$MR^2 = ME^2 + ER^2$$

$$MR^2 = 9^2 + 6^2$$

$$MR^2 = 81 + 36$$

$$MR^2 = 117$$

La longueur MR est positive donc $MR = \sqrt{117}$ cm (valeur exacte).

(On utilise ensuite la calculatrice et la touche $\sqrt{\quad}$ pour obtenir une valeur de $\sqrt{117}$.

La calculatrice affiche alors : 10,81665383.

On a donc : $10,8 < \sqrt{117} < 10,9$.

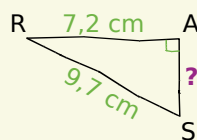
Ainsi 10,8 et 10,9 sont deux valeurs approchées de $\sqrt{117}$ à un dixième près. 10,8 est la valeur la plus "proche" de la valeur affichée par la calculatrice)

Donc $MR \approx 10,8$ cm (**valeur arrondie au millimètre**).

Exemple 2 : Calcul de la longueur d'un côté de l'angle droit

Soit RAS un triangle rectangle en A tel que RS = 9,7 cm et RA = 7,2 cm. Calcule AS.

Figure à main levée :



Le triangle RAS est rectangle en A, son hypoténuse est le côté [RS]. Donc, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$RS^2 = RA^2 + AS^2$$

$$9,7^2 = 7,2^2 + AS^2$$

$$AS^2 = 9,7^2 - 7,2^2$$

$$AS^2 = 94,09 - 51,84$$

$$AS^2 = 42,25$$

La longueur AS est positive donc $AS = \sqrt{42,25}$ cm.

(La valeur obtenue avec la calculatrice pour $\sqrt{42,25}$ est 6,5. C'est une valeur exacte car $6,5^2 = 42,25$)

Donc $AS = 6,5$ cm (**valeur exacte**).

À toi de jouer

7 TER est un triangle rectangle en T tel que TE = 6 m et TR = 4 m. Calcule la valeur exacte de ER puis donne la valeur arrondie au centimètre.

8 ARC est un triangle rectangle en A tel que RC = 13 m et AR = 5 m. Calcule la longueur AC.

Méthode 5 : Démontrer qu'un triangle n'est pas rectangle

Exemple : NUL est un triangle tel que $NU = 42$ cm ; $LU = 46$ cm et $LN = 62$ cm.
Démontre que NUL n'est pas un triangle rectangle.

Remarque préliminaire : si ce triangle est rectangle, seul le côté [LN] peut être son hypoténuse car c'est le côté le plus long.

Dans le triangle NUL, le plus long côté est [LN] donc on **calcule séparément** LN^2 et $LU^2 + NU^2$:

$$\begin{aligned} \text{D'une part, } LN^2 &= 62^2 \\ LN^2 &= 3\,844 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{D'autre part, } LU^2 + NU^2 &= 46^2 + 42^2 \\ LU^2 + NU^2 &= 2\,116 + 1\,764 \\ LU^2 + NU^2 &= 3\,880 \end{aligned}$$

On constate que $LN^2 \neq LU^2 + NU^2$.

Or si le triangle était rectangle, d'après le théorème de Pythagore, il y aurait égalité.
Comme ce n'est pas le cas, le triangle NUL n'est pas rectangle.

À toi de jouer

9 Soit DEF un triangle tel que $DE = 11$ cm ; $EF = 13$ cm et $DF = 15$ cm.
Construis le triangle DEF puis démontre que ce n'est pas un triangle rectangle.

Méthode 6 : Démontrer qu'un triangle est rectangle à l'aide de la réciproque du théorème de Pythagore

À connaître : Réciproque du théorème de Pythagore

Si, dans un triangle, le carré de la longueur du plus grand côté est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés alors **ce triangle est rectangle** et admet ce plus grand côté pour hypoténuse.

Exemple : NEZ est un triangle tel que $NE = 75$ cm ; $EZ = 45$ cm et $NZ = 60$ cm. Démontre que ce triangle est rectangle.

Dans le triangle NEZ, le plus long côté est [NE] donc on **calcule séparément** NE^2 et $EZ^2 + NZ^2$:

$$\begin{aligned} \text{D'une part, } NE^2 &= 75^2 \\ NE^2 &= 5\,625 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{D'autre part, } EZ^2 + NZ^2 &= 45^2 + 60^2 \\ EZ^2 + NZ^2 &= 2\,025 + 3\,600 \\ EZ^2 + NZ^2 &= 5\,625 \end{aligned}$$

On constate que $NE^2 = EZ^2 + NZ^2$.

Donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle NEZ est rectangle en Z.

À toi de jouer

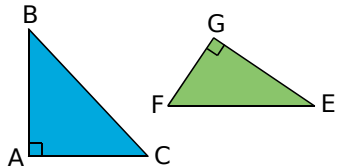
10 Soit XYZ un triangle tel que $XY = 32$ cm ; $YZ = 40$ cm et $XZ = 24$ cm.
Démontre que le triangle XYZ est rectangle. Tu préciseras en quel point.

11 Soit UVW un triangle tel que $UV = 20$ dm ; $UW = 2,1$ m et $VW = 290$ cm.
Démontre que le triangle UVW est rectangle. Tu préciseras en quel point.

Triangle rectangle et cercle

1 Vocabulaire

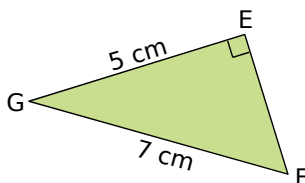
On considère les triangles rectangles suivants :



IJK est un triangle rectangle tel que :
 $IJ = 12$ cm ;
 $IK = 13$ cm et
 $JK = 5$ cm.

- Écris trois phrases avec l'expression « ... est rectangle en ».
- Écris trois phrases avec l'expression « ... est l'hypoténuse de ... ».
- Pour chaque triangle, précise où se situe le centre de son cercle circonscrit et calcule son rayon.

2 Médiane



- Construis ce triangle puis la médiane issue du sommet E et celle issue du sommet F.
- Construis son cercle circonscrit et calcule son rayon.

3 À partir d'un rectangle

BIEN est un rectangle de centre M.

- Que représente le point M pour le segment [EB] ? Justifie.
- Quel est le centre du cercle circonscrit au triangle BIE ? Pourquoi ?
- Pourquoi N appartient-il aussi à ce cercle ?

4 À partir d'un triangle isocèle

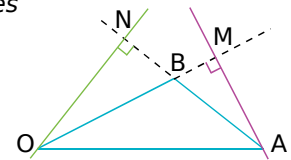
- Trace un triangle ART isocèle en A. On appelle S le milieu de [RT].
- Montre que le triangle TAS est rectangle en S.
- Montre que les cercles (\mathcal{C}) de diamètre [AR] et (\mathcal{C}') de diamètre [AT] se coupent en S.

5 Construis un cercle (\mathcal{C}) de centre I et de rayon 5 cm. Place un point P sur (\mathcal{C}) et trace un diamètre [MN] de (\mathcal{C}).

Quelle est la nature du triangle MNP ? Pourquoi ?

6 Points cocycliques

$BO = 4$ cm ;
 $OA = 6$ cm ;
 $BA = 3$ cm.



- Fais une figure en vraie grandeur.
- Démontre que le point M appartient au cercle de diamètre [OA].
- Démontre que les points M, O, N et A sont sur un même cercle dont tu préciseras le centre et le rayon.

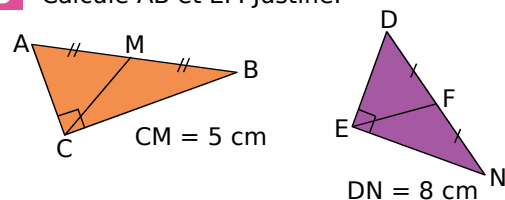
7 (\mathcal{C}) est un cercle de centre O. A et M sont deux points de (\mathcal{C}) non diamétralement opposés. La perpendiculaire en M à (AM) recoupe (\mathcal{C}) en B.

- Fais une figure.
- Démontre que O est le milieu de [AB].
- N est un autre point du cercle. Démontre que ANB est un triangle rectangle.

8 R, I et O sont trois points alignés dans cet ordre. (\mathcal{C}) est le cercle de diamètre [RI] et (\mathcal{C}') est le cercle de diamètre [IO]. Soit A un point de (\mathcal{C}) différent de I et R. La droite (AI) coupe (\mathcal{C}') en B.

- Fais une figure.
- Démontre que les droites (RA) et (BO) sont parallèles.

9 Calcule AB et EF. Justifie.



10 À partir d'un triangle rectangle

Soit IBC un triangle rectangle en C. Soit M le milieu de [IB].

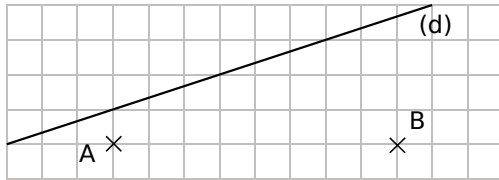
Quelle est la nature du triangle MIC ? Justifie ta réponse.

11 À partir d'un losange

ABCD est un losange de centre O et de périmètre 20 cm. I est le milieu du côté [AB]. Calcule OI. Justifie.

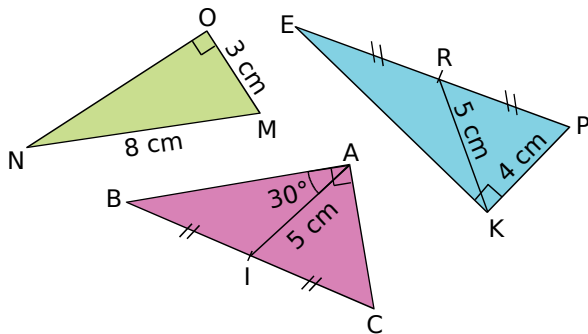


12 Avec un quadrillage



- Reproduis la figure ci-dessus sur du papier quadrillé.
- Place sur la droite (d) les points M et N tels que les triangles AMB et ANB soient rectangles respectivement en M et N. Justifie.

13 Triangles rectangles à gogo



- Construis ces triangles sans utiliser l'équerre.
- Décris et justifie ta construction dans chacun des cas.

14 Triangles encerclés

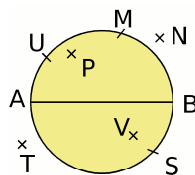
Pour chaque question, trace un cercle de rayon 3 cm puis inscris dans celui-ci un triangle :

- isocèle ;
- équilatéral ;
- rectangle ;
- rectangle isocèle.

Explique chacune de tes constructions.

15 [AB] est un diamètre du cercle.

- Indique les triangles rectangles d'hypoténuse [AB]. Cite la propriété du cours que tu utilises.



- Explique pourquoi le triangle APB ne peut pas être dans ta liste précédente.

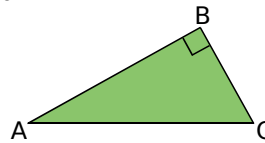
Théorème de Pythagore

16 Écrire la relation

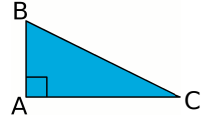
Pour chacun des triangles suivants, recopie et complète la phrase : « Le triangle est rectangle en ..., son hypoténuse est donc d'après le théorème de Pythagore :

$$...^2 = ...^2 + ...^2 ».$$

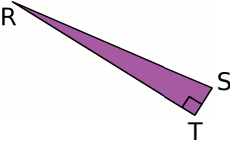
a.



c.



b.



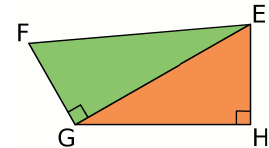
d. XYZ tel que :

$$(XY) \perp (YZ).$$

e. MNP avec :

$$\widehat{MNP} = 90^\circ.$$

17 Relations



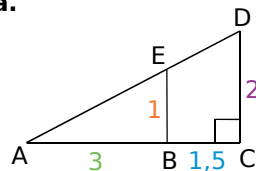
En utilisant les données de la figure ci-dessus, recopie et complète les égalités suivantes :

$EF^2 = ...^2 + ...^2$	$FG^2 = ...^2 - ...^2$	$EG^2 = ...^2 - ...^2$
$EG^2 = ...^2 + ...^2$	$GH^2 = ...$	$EH^2 = ...$

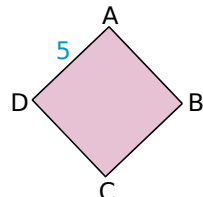
18 Le théorème, dans quel triangle ?

Pour chacune des figures suivantes, indique en expliquant ta réponse, les triangles dans lesquels le théorème de Pythagore peut s'appliquer et quelle(s) longueur(s) tu peux alors calculer (les mesures données sont en cm).

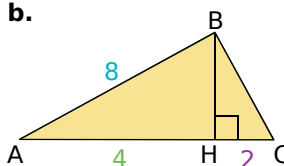
a.



c.

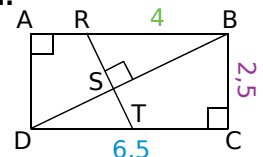


b.



ABCD est un carré.

d.



A, H et C sont alignés.

19 Carré, racine carrée

ABC est un triangle rectangle en A tel que :
 $AB = 3 \text{ cm}$ et $AC = 1 \text{ cm}$.

a. Joseph a écrit : « $BC^2 = 6 + 2$; $BC^2 = 8$ donc $BC = 4 \text{ cm}$ ».

Indique et analyse ses erreurs.

b. Calcule BC^2 puis en utilisant la touche racine carrée $\sqrt{\quad}$ de ta calculatrice, donne la valeur de BC approchée par défaut au millimètre près.

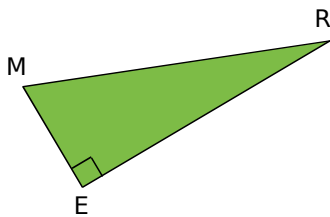
20 Soit un triangle EDF rectangle en D.

a. Écris l'égalité de Pythagore pour ce triangle.

b. On donne : $EF = 450 \text{ mm}$ et $DF = 360 \text{ mm}$. Calcule ED^2 puis, en utilisant la touche racine carrée de ta calculatrice, la longueur ED.

c. Calcule DF avec $EF = 4,5 \text{ dm}$ et $ED = 2,7 \text{ dm}$.

21 MER est un triangle rectangle en E.



a. Écris l'égalité de Pythagore pour ce triangle.

b. Le tableau suivant présente plusieurs cas de dimensions du triangle MER.

Recopie et complète-le en écrivant le détail de tes calculs (tu arrondiras au dixième si nécessaire) :

	n°1	n°2	n°3	n°4	n°5
MR	5,3 cm	9,1 cm	7 m
RE	15 cm	7,7 cm	...	9 cm	... m
ME	8 cm	36 dm	2,8 cm	...	53 cm

22 ABC est un triangle rectangle en A tel que : $AB = 48 \text{ mm}$ et $AC = 64 \text{ mm}$.

a. Construis ce triangle en vraie grandeur.

b. Quelle longueur peux-tu calculer avec le théorème de Pythagore ?

Calcule cette longueur en rédigeant. Vérifie la cohérence de ton calcul sur ta figure.

c. Reprends les questions précédentes avec le triangle MOT rectangle en M tel que $TO = 7,4 \text{ cm}$ et $MT = 2,4 \text{ cm}$.

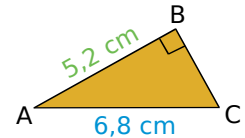
23 Je rédige et je calcule

a. Le triangle MNP est rectangle en M avec $MN = 5,2 \text{ m}$ et $MP = 4,8 \text{ m}$.

Calcule la valeur de NP arrondie au dixième.

b. Calcule RT dans le triangle RST, rectangle en T tel que : $ST = 60 \text{ mm}$ et $RS = 10,9 \text{ cm}$.

c. Calcule BC. Donne la valeur approchée par excès au centième près.



24 Calcule la valeur arrondie au millimètre de :

a. la longueur de la diagonale d'un carré de côté 5 cm ;

b. la longueur de la diagonale d'un rectangle dont les dimensions sont 8,6 cm et 5,3 cm ;

c. la longueur du côté d'un carré de diagonale 100 m.

25 Saut d'obstacle

Théo veut franchir, avec une échelle, un mur de 3,50 m de haut devant lequel se trouve un fossé rempli d'eau, d'une largeur de 1,15 m.

a. Fais un schéma de la situation.

b. Il doit poser l'échelle sur le sommet du mur. Quelle doit être la longueur minimum de cette échelle ? Arrondis au cm.

26 Jardinage

Un massif de fleurs a la forme d'un triangle rectangle et le jardinier veut l'entourer d'une clôture. Au moment de l'acheter, il s'aperçoit qu'il a oublié de mesurer un des côtés de l'angle droit.

Les deux autres mesures dont il dispose sont, en mètres : 6,75 et 10,59.

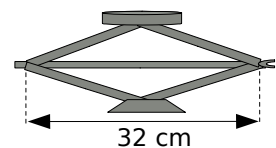
a. A-t-il besoin d'aller mesurer le côté manquant ?

b. Aide-le à calculer la longueur de la clôture qu'il doit acheter.

27 Le cric

Le cric d'une voiture a la forme d'un losange de 21 cm de côté.

À quelle hauteur soulève-t-il la voiture lorsque la diagonale horizontale mesure 32 cm ? Arrondis au mm.

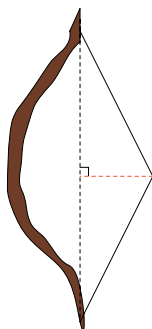


28 L'arc pour enfant

La corde élastique a une longueur de 60 cm au repos.

a. Quelle est la nouvelle longueur de la corde si on l'écarte de 11 cm en la tirant par son milieu ? Arrondis au cm.

b. Il est conseillé de ne pas tirer la corde de plus de 8 cm. Quel est, en cm, l'écartement maximal conseillé ?

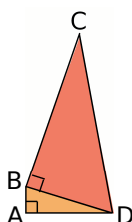


29 Sur la figure ci-contre :

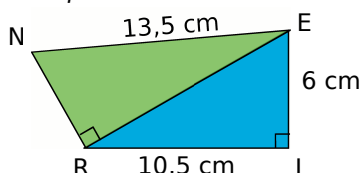
$AB = 1,5$ cm ; $AD = 6$ cm et $BC = 12$ cm.

a. Calcule la valeur arrondie au mm de BD .

b. Calcule, en justifiant, la valeur exacte de DC .



30 Dans un quadrilatère



Démontre que $NR = EI$. Justifie toutes les étapes.

31 TSF est un triangle isocèle en S tel que $ST = 4,5$ cm et $TF = 5,4$ cm.

a. Calcule la longueur de la hauteur relative à la base [TF].

b. Déduis-en l'aire de ce triangle.

32 Calcule la mesure, approchée par excès au dixième près, de la hauteur d'un triangle équilatéral de côté 7 cm. Déduis-en son aire.

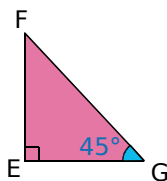
33 Avec des angles

Le triangle EFG est rectangle en E :

$EG = 7$ cm et $\widehat{FGE} = 45^\circ$.

a. Calcule la mesure de l'angle \widehat{EFG} .

b. Calcule, en justifiant, EF et FG (tu arrondiras au mm).



34 Rectangle ou non ?

a. Le triangle XYZ est tel que $XY = 29,8$ cm ; $YZ = 28,1$ cm ; $XZ = 10,2$ cm.

Explique pourquoi il n'est pas rectangle.

b. Soit le triangle ALE tel que : $AL = 13,1$ cm ; $LE = 11,2$ cm ; $EA = 6,6$ cm.

Construis ce triangle en vraie grandeur.

Est-il rectangle ? Justifie ta réponse.

Réciproque

du théorème de Pythagore

35 Soit le triangle MNP tel que $MN = 3$ cm ; $NP = 5$ cm et $PM = 4$ cm.

a. Construis ce triangle en vraie grandeur.

b. En utilisant ton équerre, peux-tu affirmer que ce triangle est rectangle ?

c. Fais les calculs nécessaires pour pouvoir conclure. Écris le théorème utilisé.

36 Donne tous les triangles rectangles dont les mesures des côtés sont parmi les valeurs suivantes :

6 cm ; 8,2 cm ; 10 cm ; 1,8 cm ; 5 cm ; 8 cm.

37 Dans chacun des cas ci-dessous :

- Identifie le plus long côté du triangle EFG ;
- Calcule, d'une part, le carré de la longueur de ce côté ;
- Calcule, d'autre part, la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés ;
- Compare les résultats obtenus et conclus.

a. $EF = 4,5$ cm ; $FG = 6$ cm ; $EG = 7,5$ cm.

b. $EF = 3,6$ cm ; $FG = 6$ cm ; $EG = 7$ cm.

c. $FG = 64$ mm ; $EF = 72$ mm ; $EG = 65$ mm.

d. $EF = 3,2$ dam ; $FG = 25,6$ m ; $EG = 19,2$ m.

38 Apprendre à rédiger

Dans chacun des cas suivants, démontre que le triangle ABC est un triangle rectangle. Précise à chaque fois en quel point.

a. $AB = 52$ cm ; $AC = 39$ cm et $BC = 65$ cm.

b. $AB = 3,25$ m ; $AC = 3,97$ m et $BC = 2,28$ m.

c. $AC = 8,9$ dm ; $AB = 3,9$ dm et $CB = 80$ cm.

d. $CB = 33$ mm ; $AC = 65$ mm et $AB = 56$ mm.

39 Jouer au professeur !

Voici l'énoncé d'un problème :

ABC est un triangle tel que $BC = 25$ cm ; $AB = 24$ cm et $AC = 7$ cm. Démontre que le triangle ABC est un triangle rectangle.

Quentin a rédigé sur sa copie le texte :

Je sais que dans le triangle ABC, [BC] est le plus long côté donc :
 $BC^2 = AB^2 + AC^2$
 $25^2 = 24^2 + 7^2$
 $625 = 576 + 49$
 $625 = 625$
 Comme $BC^2 = AB^2 + AC^2$, le triangle ABC est bien rectangle en A.

- Explique pourquoi le raisonnement de Quentin est faux.
- Recopie la démonstration de Quentin en la corrigeant.

40 Comparaison

Voici ce que l'on peut voir sur une copie :

$$\begin{array}{l|l} \ll AB^2 = 3,64^2 & AC^2 + BC^2 = 0,27^2 + 3,65^2 \\ AB^2 = 13,2496 & AC^2 + BC^2 = 0,0729 + 13,3225 \\ & AC^2 + BC^2 = 13,3954 \end{array}$$

Donc $AB^2 \neq AC^2 + BC^2$. D'après le théorème de Pythagore, ABC n'est pas rectangle. »

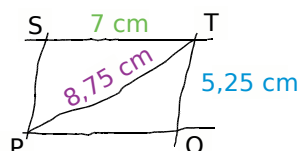
Est-ce juste ? Justifie ta réponse et corrige cette copie le cas échéant.

41 Le triangle OUI est tel que : $UI = 5$ cm ; $UO = 1,4$ cm et $OI = 4,8$ cm.

- Construis ce triangle en vraie grandeur.
- Par la symétrie de centre O, construis les points T et N symétriques respectifs des points U et I.
- Quelle semble être la nature de NUIT ? Démontre ta conjecture.

42 Du parallélogramme au rectangle

On considère le parallélogramme STOP ci-contre dessiné à main levée.

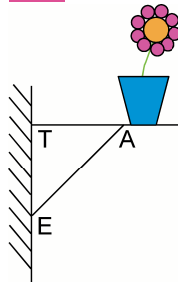


Démontre que le parallélogramme STOP est un rectangle.

43 Du parallélogramme au losange

LOSA est un parallélogramme tel que : $LO = 58$ mm ; $LS = 80$ mm et $OA = 84$ mm. Démontre que LOSA est un losange.

44 Fleurs sur une étagère

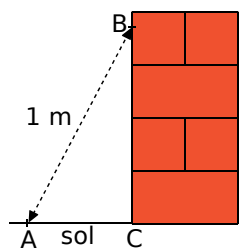


Sur un mur vertical, Arnaud a installé une étagère pour y poser des pots de fleurs. Les mesures qu'il a utilisées sont les suivantes : $AT = 42$ cm ; $AE = 58$ cm et $TE = 40$ cm.

L'étagère d'Arnaud est-elle horizontale ? Justifie.

45 Construction d'un mur

Pour apprendre son métier, un apprenti maçon a monté un mur en briques de 0,90 m de hauteur. Son patron arrive pour vérifier son travail : il marque un point B sur le mur à 80 cm du sol et un point A à 60 cm du pied du mur. Il mesure alors la distance entre les points A et B et il obtient 1 m.



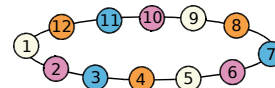
L'apprenti a-t-il bien construit son mur perpendiculaire au sol ? Justifie.

46 Droites perpendiculaires

Deux droites (d_1) et (d_2) sont sécantes en O ; M est un point de (d_1) tel que : $OM = 11,9$ cm et N est un point de (d_2) tel que : $ON = 12$ cm. On sait d'autre part que : $MN = 16,9$ cm.

Démontre que les droites (d_1) et (d_2) sont perpendiculaires.

47 Le collier de Clémence

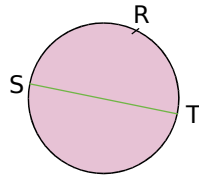


Clémence possède un collier qui contient 12 perles espacées régulièrement. Elle affirme pouvoir vérifier à l'aide de son collier qu'un triangle est rectangle. Pour cela, elle a besoin de former un triangle et de tendre son collier. Elle numérote ses perles de 1 à 12.

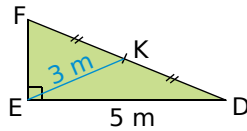
- Dessine le collier de Clémence dans une position qui lui permet d'obtenir un angle droit.
- Explique et justifie ton choix.



48 [ST] est un diamètre du cercle ; $RS = 5,4$ cm et $ST = 7,2$ cm. Calcule RT en justifiant (tu arrondiras au mm).



49 Calcule, en justifiant, la valeur approchée par défaut de EF au centième près.



50 Points cocycliques ?

Le triangle ROD est tel que $RD = 8,5$ cm ; $RO = 1,3$ cm et $DO = 8,4$ cm.

- Fais une figure en vraie grandeur. Ce triangle est-il rectangle ? Justifie ta réponse.
- Place un point N tel que $RN = 7,7$ cm et $DN = 3,6$ cm. Les points R, O, N et D sont-ils sur un même cercle ? Justifie ta réponse.

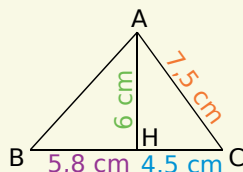
51 ABC est un triangle rectangle en B tel que : $AB = 5$ cm et $AC = 8$ cm.

- Calcule BC (arrondis au mm).
- D est un point tel que : $CD = 20$ cm et $BD = 19$ cm. D est-il unique ?
- Montre que le triangle BCD est rectangle. Précise en quel point.
- Déduis-en que les points A, B et D sont alignés.

52 Extrait du Brevet

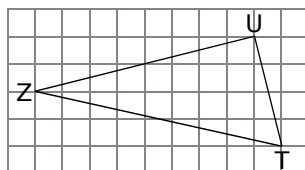
ABC est un triangle tel que : $AC = 7,5$ cm ; $BH = 5,8$ cm ; $CH = 4,5$ cm et $AH = 6$ cm, avec $H \in [BC]$.

- Faire une figure en vraie grandeur.
- Démontrer que ACH est rectangle en H.
- Calculer le périmètre et l'aire du triangle ABC.



53 Quadrillage

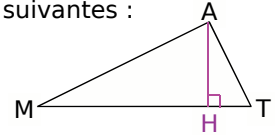
Le triangle ZUT est-il rectangle ? Si oui, précise en quel point et justifie ta réponse.



54 Attention aux valeurs utilisées !

La figure ci-dessous n'est pas en vraie grandeur, les points M, H et T sont alignés et on dispose des longueurs suivantes :

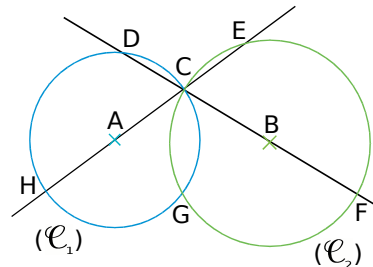
$AH = 46$ mm ;
 $HT = 23$ mm ;
 $MH = 92$ mm.



- Calcule la longueur AT puis la longueur AM.
- Démontre que le triangle MAT est rectangle en A.
- Calcule l'aire du triangle MAT de deux façons différentes.

55 Avec l'intersection de deux cercles

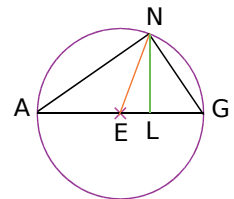
On considère deux cercles (\mathcal{C}_1) et (\mathcal{C}_2) de centres respectifs A et B. Les points C et G sont leurs deux points d'intersection. La droite (AC) recoupe le cercle (\mathcal{C}_1) en H et le cercle (\mathcal{C}_2) en E. La droite (BC) recoupe (\mathcal{C}_1) en D et (\mathcal{C}_2) en F.



- Démontre que les droites (HG) et (GC) sont perpendiculaires. De même, que peux-tu dire des droites (GF) et (GC) ?
- Démontre que les points H, G et F sont alignés.
- Quelle est la nature de HDF ? Justifie.
- Démontre que les points D, E, F et H sont cocycliques, c'est-à-dire situés sur un même cercle (tu préciseras un diamètre de ce cercle).

56 Avec des angles

[AG] est un diamètre du cercle circonscrit au triangle ANG, [NE] est une médiane et [NL] une hauteur de ce triangle.



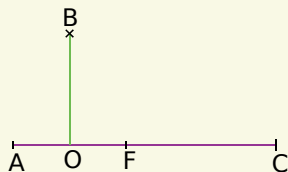
On sait d'autre part que : $\widehat{AGN} = 55^\circ$.

Donne, en justifiant, la mesure de chacun des angles suivants :

\widehat{LNG} ; \widehat{GAN} ; \widehat{ANE} ; \widehat{AEN} ; \widehat{NEL} .

57 Extrait du Brevet

Les points A, O, F et C sont alignés.
 $AC = 15$ cm ; $AO = OF = 3$ cm ; $BO = 6$ cm.
 Les droites (AC) et (BO) sont perpendiculaires.



- Construire la figure en vraie grandeur.
- Montrer que $AB^2 = 45$ et que $BC^2 = 180$.
- Montrer que les droites (AB) et (BC) sont perpendiculaires.
- Tracer le cercle de diamètre [FC], il coupe (BC) en H.
- Montrer que le triangle FHC est rectangle.
- Montrer que les droites (AB) et (FH) sont parallèles.

58 Histoire de cercles

[AB] est un segment de 6 cm de longueur et O est son milieu. M et N sont deux points tels que OBM soit un triangle équilatéral et B est le milieu de [ON].

- Fais la figure en vraie grandeur.
- Montre que OMN est un triangle rectangle.
- Calcule la valeur arrondie de MN au centième de cm.
- Construis le cercle circonscrit à chacun des triangles AMB et OMN. On note L le deuxième point d'intersection de ces cercles.
- Montre que OMBL est un losange.

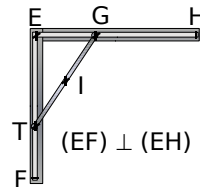
59 Extrait du Brevet

ABC est un triangle tel que $AB = 4,2$ cm ; $AC = 5,6$ cm et $BC = 7$ cm.

- Démontrer que ABC est un triangle rectangle.
- Calculer son aire.
- On sait que si R est le rayon du cercle circonscrit à un triangle dont les côtés ont pour longueurs a , b , c données en cm, l'aire de ce triangle est égale à $\frac{abc}{4R}$.
 En utilisant cette formule, calculer le rayon du cercle circonscrit à ABC.
- Pouvait-on prévoir ce résultat ? Justifier.

60 La tige

La tige [TG] mesure 10 cm. Elle se déplace lorsque T glisse le long de [EF] et G le long de [EH].



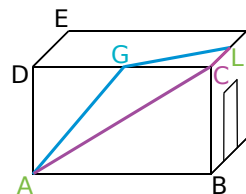
- Quel est le centre du cercle circonscrit au triangle GET ?
- Quelle figure décrit le point I, milieu de [TG], lorsque la tige [TG] se déplace ?

61 Longueur de câble

Une pièce d'une maison a la forme d'un pavé droit dont les dimensions sont : $AB = 5$ m ; $BC = 2,5$ m et $DE = 4$ m.

Un bricoleur doit amener un câble du point A au point L, milieu de [CF].

Il hésite entre les deux possibilités marquées en couleur sur la figure, sachant que G est le milieu de [DC] :



- en bleu, de A vers G puis de G vers L ;
- en violet, de A vers C puis de C vers L.

- Dans lequel des deux cas utilisera-t-il le moins de câble ? Justifie.
- Construis sur une même figure, à l'échelle 1/100, les faces ABCD et CDEF. Représente les deux possibilités pour le passage du câble.
- Le bricoleur veut utiliser le moins de câble possible. Sur la figure précédente, représente le passage du câble de longueur minimum. Justifie ton tracé et calcule cette longueur.

62 Agrandissement, réduction

a. Démontre que le triangle AMI tel que : $AM = 6$ cm ; $MI = 10$ cm et $AI = 8$ cm est rectangle.

b. On multiplie les trois mesures du triangle par 0,8 pour avoir le triangle A'M'I'. Le triangle obtenu est-il rectangle ? Même question si les mesures de AMI sont multipliées par 3.

c. Soit un triangle rectangle dont les mesures, dans une même unité, sont notées a , b et c . On suppose que : $a > b > c$.
 Quelle relation a-t-on entre a , b et c ?

d. Démontre que, si on multiplie a , b et c par un même nombre positif non nul k , le triangle obtenu est encore rectangle.



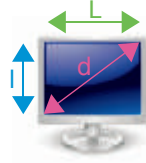
63 Le bon format

Pour répertorier ses moniteurs, un brocanteur relève leurs caractéristiques, notamment leurs longueurs et leurs largeurs :

$L_1 = 30,6$ cm et $l_1 = 23$ cm ;

$L_2 = 34,6$ cm et $l_2 = 26$ cm.

Or, dans son logiciel, la taille des moniteurs est répertoriée selon la diagonale des écrans en pouces.



a. Sachant qu'un pouce (noté 1") vaut 2,54 cm, retrouve les tailles d_1 et d_2 des moniteurs, en pouces, arrondies à l'unité.

b. Le brocanteur va recevoir un nouveau moniteur de 21". Il veut retrouver ses dimensions l et L . Son employé lui dit : « C'est simple car il n'existe qu'un seul rectangle de diagonale donnée. ». Prouve qu'il a tort. On sait d'autre part que :

$$L = \frac{4}{3}l \text{ (tu pourras utiliser } \frac{4}{3} \approx 1,33\text{).}$$

Trouve alors les valeurs l et L .

c. Aide le brocanteur à créer un fichier "Calculateur de dimensions" avec un tableur pour renseigner :

1) la largeur l et la longueur L en cm et on obtiendrait la diagonale d en cm puis en pouces ;

2) la diagonale d en pouces et on obtiendrait les dimensions l et L en cm d'un moniteur $4/3$.

d. Trouve les dimensions en cm de l'écran 13,3" d'un ordinateur ultraportable puis la taille en pouces d'un écran de 29 cm par 38,6 cm.

64 Lieu de points

Avec un logiciel de géométrie de ton choix, construis deux points A et O puis le cercle (\mathcal{C}) de centre O qui passe par A. Place un point B sur le cercle (\mathcal{C}) et construis le segment [AB]. Place le point M milieu du segment [AB]. Fais apparaître la figure que décrit le point M lorsque le point B parcourt le cercle (\mathcal{C}) . Démontre le résultat obtenu.

65 Soit un segment [AB] de longueur 8 cm.

a. M est un point vérifiant $MA^2 + MB^2 = 64$. Démontre que AMB est rectangle en M puis que M appartient au cercle de diamètre [AB].

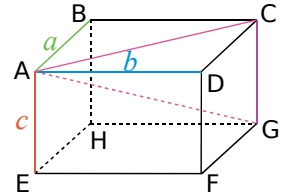
b. Soit N un point du cercle de diamètre [AB]. Démontre qu'alors $NA^2 + NB^2 = 64$.

c. Construis le segment [AB] et tous les points P vérifiant $PA^2 + PB^2 = 64$. Justifie ta construction.

66 ABCDEFGH est un pavé droit tel que $AB = a$, $AD = b$ et $AE = c$, en cm. On admet que le triangle ACG est rectangle en C.

a. Montre que :
 $AC^2 = a^2 + b^2$ et
 $AG^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

b. Calcule AG pour :
 $a = 6$ cm, $b = 3$ cm
 et $c = 4$ cm.



c. Cette fois, ABCDEFGH est un cube d'arête d . Déduis de **a.** que $AC^2 = 2d^2$ et que $AG^2 = 3d^2$. Calcule AG pour $d = 5$ m.

67 ABC est un triangle quelconque. A' est le milieu de [BC], B' celui de [AC] et C' celui de [AB]. O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

a. Démontre que A, B', O et C' sont cocycliques.

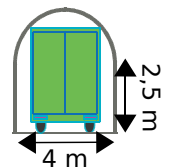
b. Prouve que les cercles circonscrits aux triangles AB'C', BA'C' et CA'B' ont un point commun que tu préciseras.

68 Tunnel

Un tunnel, à sens unique, d'une largeur de 4 m est constitué de deux parois verticales de 2,5 m de haut, surmontées d'une voûte semi-circulaire de 4 m de diamètre.

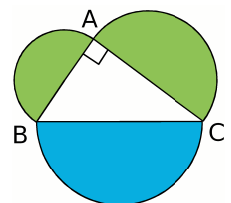
Un camion de 2,6 m de large doit le traverser.

Quelle peut être la hauteur maximale de ce camion ?



69 Les lunules d'Hippocrate

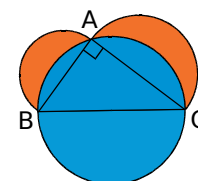
ABC est un triangle rectangle en A. On a construit les demi-cercles de diamètres [AB], [AC] et [BC] comme le montre la figure ci-contre.



a. Exprime l'aire totale de la figure en fonction de AB, AC et BC.

b. Montre que l'aire du **demi-disque bleu** est égale à la somme des aires des **demi-disques verts**. Déduis-en que l'aire totale de la figure est égale à la somme des aires du triangle ABC et du disque de diamètre [BC].

c. Montre que l'aire des **lunules (les parties en orange ci-contre)** est égale à l'aire du triangle ABC.



1 Quiz pythagoricien

1^{re} partie : Trois questions

Par groupe, en vous documentant, répondez aux questions suivantes :

- Où et à quelle époque Pythagore a-t-il vécu ?
- Quels sont les domaines dans lesquels Pythagore et les pythagoriciens ont travaillé ?
- Est-ce Pythagore qui a démontré le premier le théorème qui porte son nom ?
- Comparez les réponses de chaque groupe.

2^e partie : Trouvez les questions

En groupe, choisissez un thème parmi les quatre suivants :

- La vie de Pythagore ;
- Pythagore et l'astronomie ;
- Pythagore et la musique ;
- Pythagore et les mathématiques.

Documentez-vous en consultant Internet, le CDI de votre collège, etc...

Construisez alors un questionnaire et préparez, sur une autre feuille, les réponses à celui-ci.

3^e partie : Recherche

Chaque élève choisit le questionnaire d'un autre groupe pour ensuite y répondre en travail à la maison.

4^e partie : Mise en commun

En classe entière, on étudie les questions posées sur chaque thème ainsi que les réponses apportées par chacun.



Pythagore. Détail de L'école d'Athènes de Raphaël, 1509. Source Wikipedia Commons.

2 Le jeu du triplet

1^{re} partie : Qu'est-ce qu'un triplet pythagoricien ?

Un triplet pythagoricien est un triplet d'entiers naturels non nuls (x, y, z) vérifiant la relation de Pythagore : $x^2 + y^2 = z^2$.

Vérifiez que $(3, 4, 5)$ est un triplet pythagoricien.

Le triplet $(4, 5, 6)$ est-il pythagoricien ?

2^e partie : Réalisation des cartes

Découpez douze cartes dans une feuille puis écrivez chacun des nombres ci-dessous sur une face :

3	4	5	5	6	8	8	10	12	13	15	17
---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----

3^e partie : Action !

Maintenant que le jeu est construit, vous allez pouvoir jouer par groupes de trois.

Mélangez puis distribuez toutes les cartes faces cachées. Appliquez alors les règles suivantes :

- Si un (ou plusieurs) joueur a un triplet pythagoricien : il dit « triplet », marque un point et pose le triplet en dehors du jeu. On mélange à nouveau et on redistribue les cartes ;
- Si aucun joueur n'a de triplet, chaque joueur passe la carte de son choix à son voisin de gauche et regarde à nouveau s'il a un triplet ;
- Si un joueur dit « triplet » et qu'il s'est trompé, il perd un point ;
- Le gagnant est celui qui atteint 3 points.

4^e partie : Action avec des décimaux !

Refaites 12 cartes en mettant à présent les nombres suivants :

0,5	1	1,2	1,2	1,3	1,6
1,6	2	2,4	2,6	3	3,4

Faites alors une nouvelle partie avec ce jeu !

5^e partie : À vous de faire le jeu !

Lorsqu'on connaît un triplet pythagoricien, on peut en obtenir d'autres en multipliant les trois nombres par un même coefficient.

Par exemple, à partir du triplet $(3, 4, 5)$, on obtient en multipliant chaque nombre par 15 le triplet $(45, 60, 75)$.

Trouvez ainsi d'autres triplets pythagoriciens puis construisez un nouveau jeu de 12 cartes. Testez votre nouveau jeu en faisant une partie.

Se tester avec le QCM!

	R1	R2	R3	R4	
1	Si I est le centre du cercle circonscrit au triangle quelconque ABC alors...	I est à égale distance de A, B et C	I est le point d'intersection des médiatrices des côtés de ABC	I est le milieu du plus grand côté de ABC	A et B appartiennent au cercle de centre I passant par C
2	Si EDF est rectangle en D et O est le milieu de [EF] alors...	O est à égale distance de E, D et F	$OE = \frac{EF}{2}$	$OD = \frac{EF}{2}$	O est le centre du cercle circonscrit à EDF
3	Si MNP est rectangle en M alors...	M appartient au cercle de diamètre [NP]	N appartient au cercle de diamètre [MP]	MNP est inscrit dans le cercle de diamètre [NP]	son cercle circonscrit a pour diamètre [MP]
4	Si F appartient au cercle de diamètre [GH] alors...	$FG = GH$	$\widehat{GFH} = 90^\circ$	$\widehat{FGH} + \widehat{FHG} = 90^\circ$	H appartient au cercle de diamètre [FG]
5	Si RKE est rectangle en K alors...	$RK^2 = RE^2 + EK^2$	$EK^2 = ER^2 + RK^2$	$RE^2 = RK^2 + KE^2$	$KE^2 = RE^2 - RK^2$
6	Si $(OI) \perp (EI)$ avec $OI = 2,03$ cm et $EI = 3,96$ cm alors...	$OE \approx 4,45$ cm	$OE = 19,8025$ cm	$OE = 5,99$ cm	$OE = 4,45$ cm
7	ABC est rectangle en A ; $AB = 5$ et $BC = 7$ (en cm). L'arrondi au dixième de AC est...	8,6 cm	4,8 cm	4,89 cm	4,9 cm
8	$XY = 8,4$; $YZ = 1,3$ et $XZ = 8,5$ (en cm). On a alors...	$(XY) \perp (ZY)$	$(XZ) \perp (ZY)$	$\widehat{YXZ} = 90^\circ$	\widehat{YXZ} et \widehat{YZX} sont complémentaires
9	Si V n'appartient pas au cercle de diamètre [RT] alors...	VRT n'est pas rectangle	VRT peut être rectangle	VRT n'est pas rectangle en V	VRT est rectangle en R ou en T
10	Si le triangle ALF est rectangle en L alors...	$AL^2 \neq AF^2 + LF^2$	$LF^2 - LA^2 = AF^2$	$LF^2 = LA^2 - AF^2$	$AL^2 = LF^2 + AF^2$
11	Si $ST^2 = SU^2 + UT^2$ alors...	$(SU) \perp (ST)$	$SU^2 \neq ST^2 + UT^2$	$\widehat{SUT} = 90^\circ$	$SU = UT$
12	Si $KG^2 \neq KC^2 + CG^2$ alors...	KCG n'est pas rectangle	KCG peut être rectangle	KCG n'est pas rectangle en C	KCG est quelconque

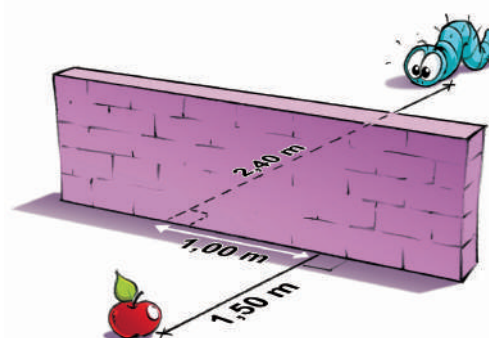
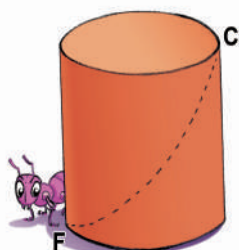
Récréation mathématique

La fourmi

Une fourmi se trouvant en F sur un pot cylindrique veut manger de la confiture se trouvant en C.

Le pot mesure 15 cm de haut et a pour diamètre 10 cm.

Trouve pour la fourmi pressée la trajectoire la plus courte ainsi que sa longueur (un patron peut être utile...).

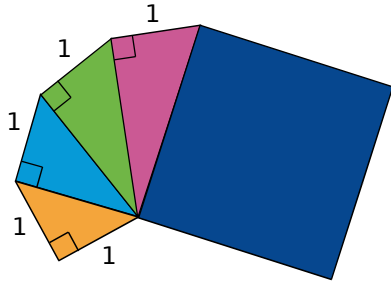


La chenille

Le mur a une hauteur de 1,40 m et une épaisseur de 20 cm. La chenille étant obligée de passer « par-dessus le mur », trouve la longueur du plus court trajet pour aller déguster la pomme.



Avec l'escargot de Pythagore



Les mesures de la figure sont en cm (la figure n'est pas en vraie grandeur).

- Quelle est l'aire du carré bleu ?
- Procède de la même façon pour construire un carré d'aire 10 cm^2 .

Le carré

Calcule $5^2 + 6^2$.

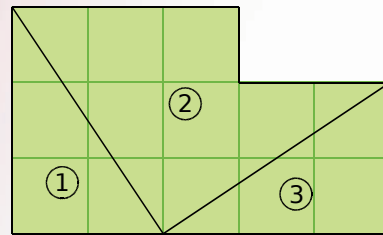
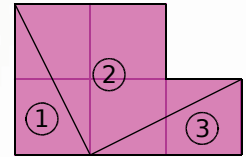
Construis un carré d'aire 61 cm^2 sans connaître la longueur de son côté.

Même question avec une aire de 50 cm^2 (trouve deux façons différentes).

Avec des carrés d'aire 1 cm^2

- Reproduis, découpe et assemble les trois pièces de chaque figure pour construire un carré. Donne l'aire de chacun d'eux.

Chaque carré fait 1 cm de côté.



- Procède de la même façon pour construire un carré d'aire 10 cm^2 puis un autre carré d'aire 17 cm^2 .
- Peux-tu utiliser cette méthode pour construire un carré d'aire 11 cm^2 ?
- Pour quels autres nombres cette méthode fonctionne-t-elle ?



Pour aller plus loin

Une très longue corde

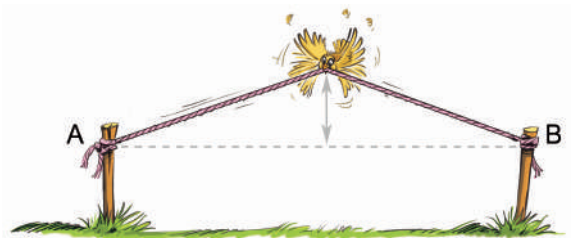
Une corde de longueur L (en mètres) est tendue horizontalement entre deux points A et B.

On ajoute 1 mètre à cette corde : elle n'est donc plus tendue entre les points A et B. On la retend en la tirant par son milieu vers le haut.

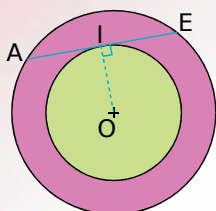
On s'intéresse à la hauteur qu'atteint le milieu de la corde allongée quand elle est retendue.

Montre sur plusieurs exemples (valeurs de L) que plus la proportion de corde ajoutée (1 mètre) par rapport à la longueur de corde initiale (L) diminue, plus cette hauteur augmente.

(Tu exprimeras cette proportion sous forme de pourcentage.)



La couronne



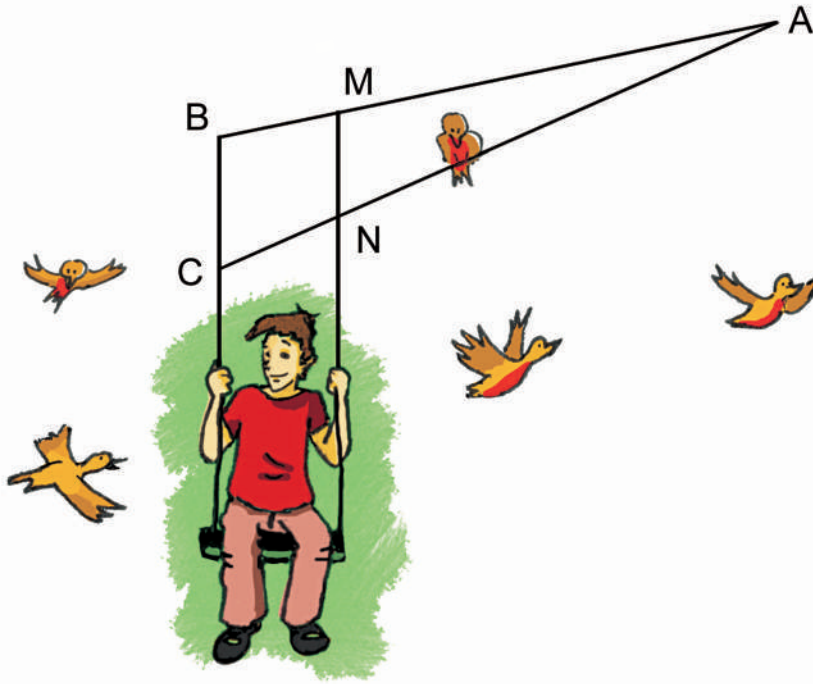
Les deux cercles ont le même centre. A, I et E appartiennent aux cercles. (AE) est perpendiculaire à (OI).

- Calcule la valeur exacte de l'aire de la couronne rose sachant que $AE = 40 \text{ mm}$.
- Calcule $29^2 - 21^2$ et $25^2 - 15^2$. Dédus-en la construction de deux couronnes ayant la même aire que celle du a..
- Quelle est la condition sur les rayons des cercles pour qu'une couronne ait la même aire que les précédentes ?
- À quelle condition deux couronnes ont-elles la même aire ?



Triangles et Parallèles

G2

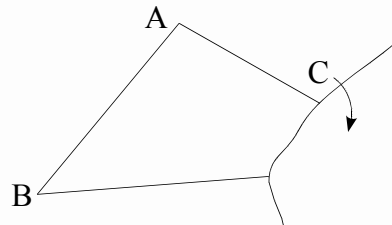


Narration de recherche

Sujet :

La feuille sur laquelle a été tracé ce triangle est déchirée.


Comment construire le centre de gravité de ABC sans déborder de la feuille ?




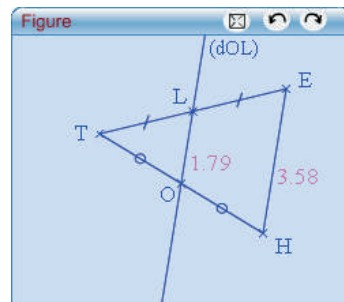
Activité 1 : Un triangle et deux milieux

1. Conjecture avec TracenPoche

a. Construis un triangle THE.

En utilisant le bouton , place le point O milieu de [TH] et le point L milieu de [TE]. Trace la droite (OL).

À l'aide du bouton , fais apparaître les longueurs des segments [OL] et [HE].

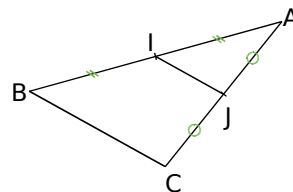


- b. Déplace les sommets du triangle et note, sur ton cahier, les longueurs OL et HE pour quatre triangles différents. Que remarques-tu ?
- c. Déplace les sommets du triangle. Comment semblent être les droites (OL) et (HE) ? Dans la fenêtre *Analyse*, saisis : « position(OL,HE) = » puis appuie sur la touche F9. Déplace à nouveau les sommets du triangle. Qu'indique Tracenpoche ?

2. Démonstration

a. Trace un triangle ABC, place I le milieu de [AB] et J le milieu de [AC].

On souhaite montrer que les droites (IJ) et (BC) sont parallèles et que la longueur du segment [IJ] est égale à la moitié de celle du segment [BC].

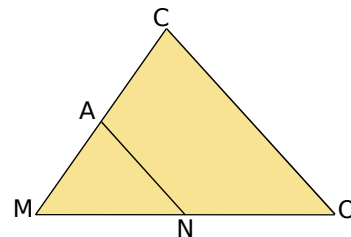
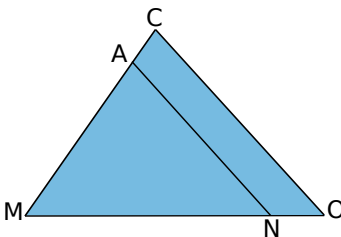
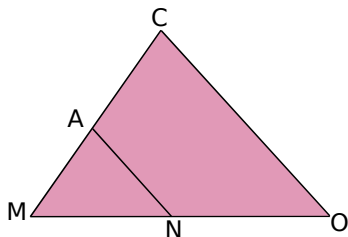


- b. Construis le point K symétrique de I par rapport à J. Montre que le quadrilatère AKCI est un parallélogramme. Que peux-tu en déduire pour les droites (KC) et (AI) ? Pour les segments [KC] et [AI] ?
- c. Que peux-tu dire des segments [AI] et [IB] ? En utilisant le fait que les points A, I et B sont alignés et la question b., que peux-tu dire des segments [IB] et [KC] ? Montre que le quadrilatère IKCB est un parallélogramme.
- d. Dédus-en que les droites (IJ) et (BC) sont parallèles. Montre que $IJ = \frac{1}{2} BC$.
- e. Écris les deux propriétés que tu viens de démontrer.

Activité 2 : Dans l'autre sens

1. Écris le théorème réciproque du théorème suivant : "Si, dans un triangle, une droite passe par les milieux de deux côtés alors elle est parallèle au troisième côté."

2. Observe les figures suivantes, pour chacune d'elles (AN) et (CO) sont parallèles. Le théorème réciproque écrit à la question 1. semble-t-il vérifié ?






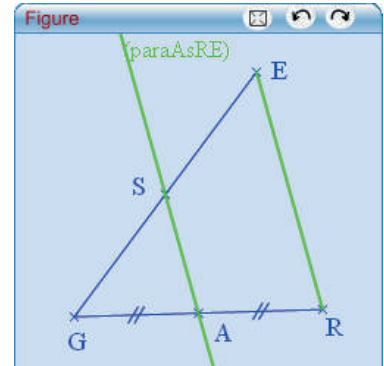
3. Peux-tu faire une figure sur laquelle, A est le milieu de [MC], les droites (AN) et (CO) sont parallèles mais N n'est pas le milieu de [MO] ?

4. Quelle donnée faut-il ajouter pour que ce théorème soit vrai ?

Activité 3 : Un triangle, un milieu et des parallèles

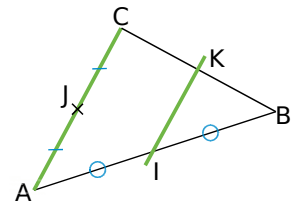
1. Conjecture avec TracenPoche

- Construis un triangle GRE et A milieu de [GR]. En utilisant le bouton  construis la droite parallèle au segment [RE] passant par le point A. À l'aide du bouton , nomme S le point d'intersection de cette droite avec [GE]. À l'aide du bouton , fais apparaître les longueurs des segments [GS] et [SE].
- Déplace les sommets du triangle et observe la position du point S. Que constates-tu ?



2. Démonstration

- Trace un triangle ABC, place le point I milieu du côté [AB] et le point J milieu du côté [AC]. La parallèle au côté [AC] passant par I coupe le côté [BC] en K. Le but est de montrer que le point K est le milieu du côté [BC].
- Montre que les droites (IJ) et (BC) sont parallèles et $IJ = \frac{BC}{2}$.
- Montre que IJCK est un parallélogramme.
- Déduis-en que $IJ = KC$ puis que K est le milieu de [BC].
- Écris la propriété que tu viens de démontrer.



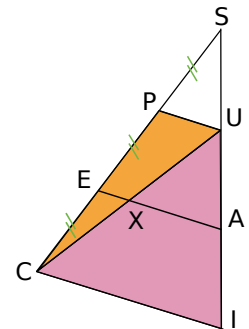
Activité 4 : Et avec le tiers ?

- Reproduis la figure ci-contre, avec $SC = 9$ cm ; $SI = 6,3$ cm et telle que les droites (PU), (EA) et (CI) sont parallèles.

- Mesure les segments [SU], [UA] et [AI]. Que remarques-tu ?

3. Démonstration

- En te plaçant dans le triangle SEA, montre que le point U est le milieu du segment [SA].
- On appelle X le point d'intersection des segments [EA] et [CU]. En te plaçant dans le triangle PUC, montre que X est le milieu du segment [CU].
- En te plaçant dans le triangle UCI, montre que le point A est le milieu du segment [UI].
- Que peux-tu alors affirmer pour les longueurs SU, UA et AI ?

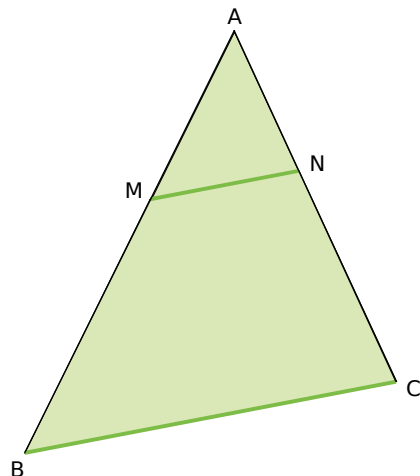


4. Une autre écriture

- Quelle fraction de la longueur SC représente la longueur SP ?
- Donne alors les valeurs exactes des rapports $\frac{SP}{SC}$ et $\frac{SU}{SI}$.
- Que peux-tu dire des rapports $\frac{SP}{SC}$ et $\frac{SU}{SI}$?


Activité 5 : Un cas plus général

1. Sur la figure ci-contre, le point M appartient au segment [AB], N appartient au segment [AC] et les droites (MN) et (BC) sont parallèles.



- En mesurant les longueurs des segments [AM] et [AB], donne la valeur du rapport $\frac{AM}{AB}$.
- Mesure les segments [AN] et [AC] puis donne la valeur du rapport $\frac{AN}{AC}$.
- Mesure les segments [MN] et [BC] puis donne la valeur de $\frac{MN}{BC}$.
- Que constates-tu ? Pouvais-tu prévoir ce résultat ?

2. Que dit Tracenpoche ?

- Construis un triangle ABC. À l'aide du bouton , place un point M sur le segment [AB]. Construis la droite parallèle au côté [BC] passant par M. Appelle N le point d'intersection de cette parallèle et du côté [AC].
- Dans la fenêtre *Analyse*, saisis les expressions ci-contre puis appuie sur la touche F9. Quels calculs sont effectués ? Que permettent-ils de conjecturer ?
- Déplace les points de la figure de manière à faire varier le rapport $\frac{AM}{AB}$. Que constates-tu pour les autres rapports ?

```

Analyse
calc(AM/AB) =
calc(AN/AC) =
calc(MN/BC) =
    
```

Activité 6 : Le même dessin... à un détail près !

1. On considère un triangle POT tel que $\widehat{POT} = 47^\circ$, $\widehat{PTO} = 33^\circ$ et $\widehat{TPO} = 100^\circ$.

- Ce triangle est-il constructible ? Justifie ta réponse.
- Construis-le et compare ton dessin avec celui de ton voisin. Sont-ils identiques ?
- Avec ton voisin, complète le tableau suivant :

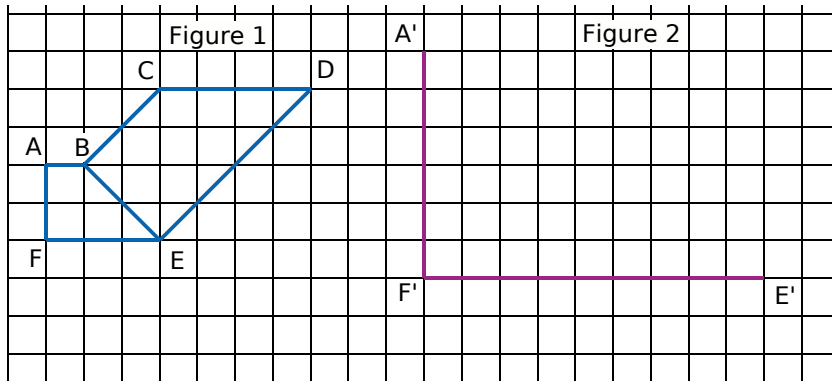
	PO	OT	TP
Longueur des côtés de ton triangle			
Longueur des côtés du triangle de ton voisin			

d. Est-ce un tableau de proportionnalité ?

2. Que dois-tu vérifier pour dire qu'une figure est un agrandissement ou une réduction d'une autre figure ?

Activité 7 : Agrandissements et réductions

1. La figure 2 est le début d'un agrandissement de la figure 1. Reproduis la figure 2 et complète-la. Tu la nommeras A'B'C'D'E'F'.

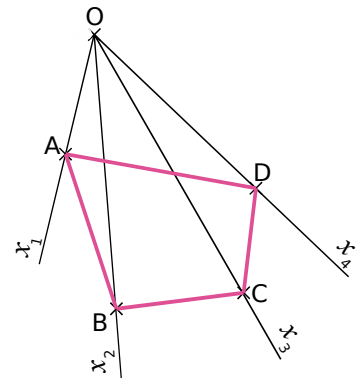


2. Étude des mesures d'angles

- a. Mesure \widehat{EDC} et $\widehat{E'D'C'}$. Compare-les. Que peux-tu en déduire sur l'agrandissement ?
- b. Quelles sont les mesures des angles \widehat{CBE} et $\widehat{C'B'E'}$? Compare-les. Qu'en déduis-tu sur l'agrandissement ?
3. Donne les positions relatives des droites (BC) et (DE) puis des droites (B'C') et (D'E'). Qu'en déduis-tu sur l'agrandissement ?

Activité 8 : Prenons de la hauteur

1. Pour obtenir une figure semblable à celle ci-contre, place un point O puis trace quatre demi-droites d'origine O : $[Ox_1]$; $[Ox_2]$; $[Ox_3]$ et $[Ox_4]$. Place un point A sur $[Ox_1]$ tel que $OA = 2$ cm. Place des points B, C et D sur les demi-droites $[Ox_2]$; $[Ox_3]$ et $[Ox_4]$.



2. Place un point A' sur $[Ox_1]$ tel que $OA' = 7$ cm.

3. Construction de la figure

- a. Trace la parallèle à (AB) passant par A'. Elle coupe $[Ox_2]$ en B'. Trace la parallèle à (BC) passant par B'. Elle coupe $[Ox_3]$ en C'. Trace la parallèle à (DC) passant par C'. Elle coupe $[Ox_4]$ en D'.
- b. Comment semblent être les quadrilatères ABCD et A'B'C'D' ?

4. Étude de la figure

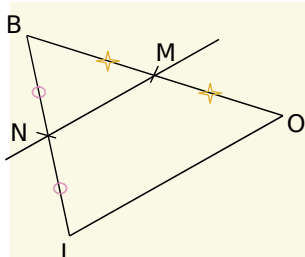
- a. Exprime sous la forme d'une fraction le rapport $\frac{OA}{OA'}$. Déduis-en les rapports $\frac{OB}{OB'}$; $\frac{AB}{A'B'}$ et $\frac{AD}{A'D'}$. Justifie.
- b. Procède de la même façon pour les rapports $\frac{OC}{OC'}$ et $\frac{BC}{B'C'}$; $\frac{OD}{OD'}$ et $\frac{DC}{D'C'}$.
- c. Qu'en déduis-tu pour la figure A'B'C'D' ?

Méthode 1 : Montrer que des droites sont parallèles

À connaître

Si, dans un **triangle**, une droite passe par les **milieux** de deux côtés du triangle alors elle est **parallèle** au troisième côté.

Exemple : On donne la figure codée ci-dessous. Démontre que la droite (MN) est parallèle à la droite (OL).

	Données	Propriété	Conclusion
	Les codages nous permettent d'affirmer que dans le triangle BOL, M est le milieu de [BO] et N est le milieu de [BL].	Si, dans un triangle, une droite passe par les milieux de deux côtés alors elle est parallèle au troisième côté.	La droite (MN) est ainsi parallèle au troisième côté du triangle donc (MN) est parallèle à (OL).

À toi de jouer

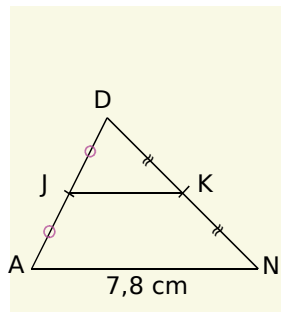
1 ABCD est un parallélogramme de centre O. On appelle M le milieu de [AB]. Démontre que (OM) est parallèle à (BC).

Méthode 2 : Calculer une longueur connaissant des milieux

À connaître

Si, dans un **triangle**, un segment joint les **milieux** de deux côtés alors sa longueur est **égale à la moitié** de celle du troisième côté.

Exemple : On donne la figure codée ci-dessous. Calcule la longueur JK.

	Données	Propriété	Conclusion
	Les codages nous permettent d'affirmer que dans le triangle DAN, J et K sont les milieux respectifs de [DA] et [DN] et que AN = 7,8 cm.	Si, dans un triangle, un segment joint les milieux de deux côtés alors sa longueur est égale à la moitié de celle du troisième côté.	Le segment [JK] a donc pour longueur la moitié de celle du troisième côté [AN] : $JK = \frac{AN}{2} = \frac{7,8}{2} = 3,9.$ Donc JK = 3,9 cm.

À toi de jouer

2 Soit ABC un triangle. E est le symétrique de A par rapport à B et F est le symétrique de A par rapport à C. Démontre que $BC = \frac{EF}{2}$.

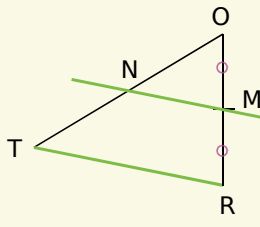
3 Deux cercles de rayons respectifs 3 cm et 4 cm et de centres respectifs O et O' distants de 5 cm, se coupent en deux points A et B. On trace le diamètre [AC] de l'un et le diamètre [AD] de l'autre. Calcule la longueur CD.

Méthode 3 : Montrer qu'un point est le milieu d'un segment

À connaître

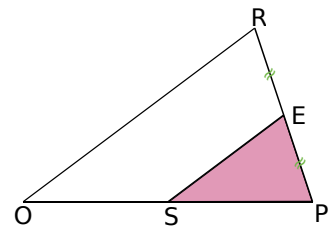
Si, dans un triangle, une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un second côté alors elle passe par le milieu du troisième côté.

Exemple : Soit TOR un triangle tel que M soit le milieu de [RO]. La parallèle à [TR] passant par M coupe [OT] en N. Démontre que N est le milieu de [OT].

	Données	Propriété	Conclusion
 <p>les droites en vert sont parallèles entre elles</p>	<p>Dans le triangle TOR, on sait que M est le milieu du côté [RO] et que la droite (MN) est parallèle à la droite (TR).</p>	<p>Si, dans un triangle, une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un second côté alors elle passe par le milieu du troisième côté.</p>	<p>La droite (MN) coupe le troisième côté [OT] du triangle en son milieu, donc N est le milieu de [OT].</p>

À toi de jouer

4 Sur la figure ci-contre, les droites (ES) et (RO) sont parallèles. Démontre que S est le milieu de [OP].



Méthode 4 : Calculer une longueur avec des rapports égaux

À connaître

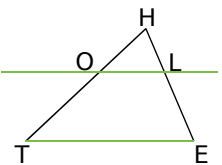
Proportionnalité des longueurs dans un triangle :

Si, dans un triangle ABC, M est un point de [AB], N un point de [AC] et (MN) est parallèle à (BC) alors $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.

Remarque : On appelle parfois cette propriété la (petite) propriété de Thalès.

Exemple : Sur la figure suivante, les droites (OL) et (TE) sont parallèles.

On donne HE = 5 cm, HL = 2 cm, TE = 7 cm et HO = 3 cm. Calcule les longueurs HT et OL.



Dans le triangle HTE : $O \in [HT]$, $L \in [HE]$ et $(OL) \parallel (TE)$. D'après la propriété de proportionnalité des longueurs dans un triangle : $\frac{HO}{HT} = \frac{HL}{HE} = \frac{OL}{TE}$ soit $\frac{3}{HT} = \frac{2}{5} = \frac{OL}{7}$.

• D'une part, $2 \times HT = 3 \times 5$ soit $HT = \frac{3 \times 5}{2} = 7,5$ donc HT = 7,5 cm.

• D'autre part, $5 \times OL = 2 \times 7$ soit $OL = \frac{2 \times 7}{5} = 2,8$ donc OL = 2,8 cm.

À toi de jouer

5 Dans le triangle DST, E est un point de [DS] et F un point de [DT] tels que DS = 6,3 cm ; EF = 2,9 cm ; ST = 8,7 cm et DF = 1,8 cm. De plus, (EF) et (ST) sont parallèles. Calcule DE et DT.

Méthode 5 : Aggrandir, réduire dans le plan

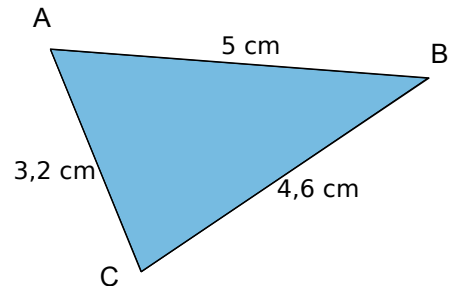
À connaître

Quand deux figures ont la **même forme** et des **longueurs proportionnelles**, on dit que l'une est l'agrandissement ou la réduction de l'autre.
 Dans un agrandissement ou une réduction, les **mesures des angles**, la **perpendicularité** et le **parallélisme** sont conservés.

Remarques : Si F est un agrandissement de F' alors F' est une réduction de F.

Le coefficient de proportionnalité est le rapport d'agrandissement ou de réduction.

Exemple 1 : Le triangle AEF est un agrandissement de rapport 1,2 du triangle ABC de la figure ci-contre tel que E appartienne à [AB) et F appartienne à [AC). Calcule les longueurs des côtés du triangle AEF.



Comme AEF est un agrandissement de ABC de rapport 1,2 alors ses dimensions sont 1,2 fois celles du triangle ABC.

On en déduit alors que :

$$AE = 1,2 \times AB = 1,2 \times 5 = 6 \text{ soit } AE = 6 \text{ cm.}$$

$$AF = 1,2 \times AC = 1,2 \times 3,2 = 3,84 \text{ soit } AF = 3,84 \text{ cm.}$$

$$EF = 1,2 \times BC = 1,2 \times 4,6 = 5,52 \text{ soit } EF = 5,52 \text{ cm.}$$

Exemple 2 : Le triangle GRD est rectangle en R tel que GR = 6 cm et RD = 8 cm. Le triangle PTI est une réduction de rapport 0,5 du triangle GRD, tel que l'angle \widehat{PTI} soit la réduction de l'angle \widehat{GRD} . Quelle est la nature du triangle PTI ? Calcule TP et TI.

Comme PTI est une réduction de GRD de rapport 0,5 alors les mesures d'angles sont conservées : $\widehat{PTI} = \widehat{GRD} = 90^\circ$. Donc le triangle PTI est rectangle en T.

De plus, ses dimensions sont 0,5 fois celles du triangle GRD :

On en déduit alors que :

$$TP = 0,5 \times GR = 0,5 \times 6 = 3 \text{ soit } TP = 3 \text{ cm.}$$

$$TI = 0,5 \times RD = 0,5 \times 8 = 4 \text{ soit } TI = 4 \text{ cm.}$$

À toi de jouer

6 Le triangle BEC est une réduction de rapport 0,75 du triangle TOP de côtés 3,6 cm ; 5,2 cm et 7,2 cm. Donne les longueurs du triangle BEC puis construis-le.

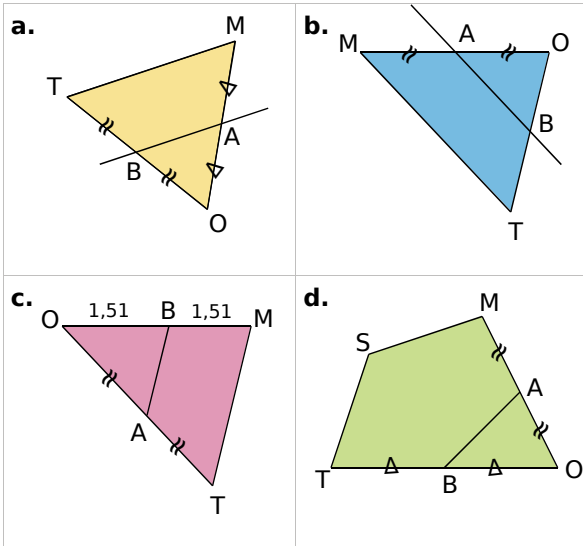
7 Donne les dimensions d'un agrandissement de rapport 2,5 du triangle PAS tel que $\widehat{APS} = 100^\circ$, $\widehat{SAP} = 50^\circ$ et PA = 3 cm.

8 Soit un rectangle BLEU de longueur 5 cm et de largeur 4 cm. Soit ROSE une réduction de BLEU de rapport $\frac{3}{5}$. Quelle est la nature du quadrilatère ROSE ? Justifie ta réponse puis construis ROSE.



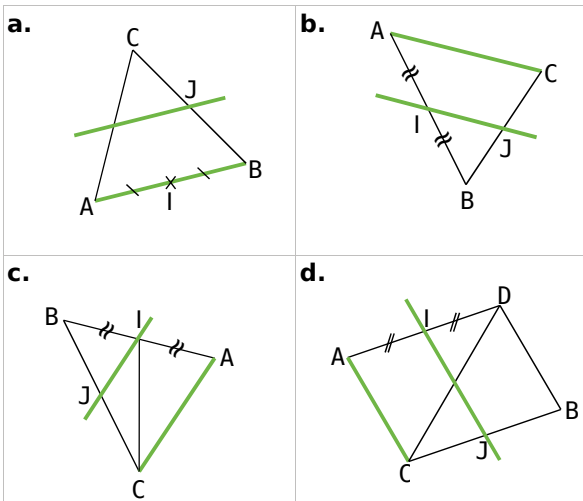
Théorèmes des milieux

1 Dans quelle(s) figure(s) peux-tu démontrer que les droites (AB) et (MT) sont parallèles ? Justifie tes réponses.



2 Dans quelle(s) figure(s) peux-tu démontrer que le point J est le milieu de [BC] ? Justifie tes réponses.

Les droites vertes sont parallèles.



3 Construis le triangle TOC tel que $TO = 5,8 \text{ cm}$; $TC = 4,3 \text{ cm}$ et $\widehat{CTO} = 55^\circ$.

Place les points A et B milieux respectifs des côtés [OT] et [OC].

Calcule la longueur AB en justifiant clairement la démarche utilisée.

4 Dans chaque cas, en t'aidant d'un dessin à main levée, recopie et complète les démonstrations suivantes :

a. Dans le triangle HLP, on sait que E est le milieu de [HL] et S est le milieu de [HP]. Or si dans un triangle une droite passe par les milieux de deux côtés alors elle est parallèle au troisième côté.

Donc ...

b. Dans le triangle AMI, on sait que T est le milieu de [AM] et ...

Or si dans un triangle, une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un second côté alors elle coupe le troisième côté en son milieu.

Donc U est le milieu de [AI].

c. Dans le triangle POT, on sait que I est le milieu de [PO] et N est le milieu de [PT].

Or si ...

$$\text{Donc } IN = \frac{OT}{2}.$$

5 Anita doit montrer que le point R est le milieu du segment [CD]. Voici ce qu'elle a écrit :

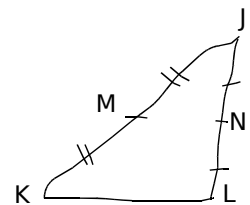
« Dans le triangle ECD, on sait que P est le milieu de [CE], que R est un point de [CD] et que (PR) et (ED) sont parallèles.

Or si dans un triangle une droite passe par les milieux de deux côtés alors elle est parallèle au troisième côté. Donc R est le milieu de [CD]. »

Que penses-tu du raisonnement d'Anita ? Corrige-le si tu estimes que cela est nécessaire.

6 Observe le dessin de Paul. Dans le triangle KJL, il veut montrer que les droites (KL) et (MN) sont parallèles.

À l'aide du codage du dessin, rédige une démonstration.



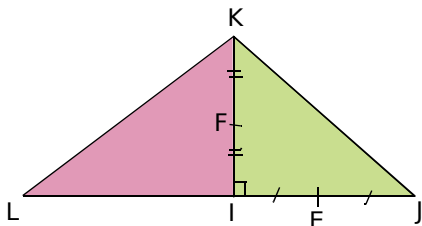
7 RST est un triangle tel que $RS = 8 \text{ cm}$, $RT = 6 \text{ cm}$ et $TS = 7 \text{ cm}$. P est le milieu de [RT] et F est le milieu de [TS].

a. Fais un dessin à main levée et code-le.

b. Montre que (RS) et (PF) sont parallèles.

c. Calcule PF en justifiant la démarche utilisée.

8 Le professeur a donné un exercice à faire à la maison avec le dessin suivant mais Rafiq n'a pas eu le temps de tout noter et a juste écrit à côté de son dessin : (FE) ? FE ?



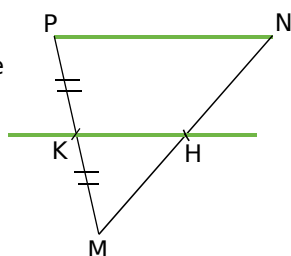
- Saurais-tu retrouver les questions posées par le professeur ?
- À toi maintenant de résoudre cet exercice.

9 AOR est un triangle rectangle en O tel que $AO = 5$ cm et $OR = 3,5$ cm. Soit L le milieu de [AO] et S le milieu de [AR].

- Fais un dessin en vraie grandeur et code-le.
- Montre que (LS) est parallèle à (OR).
- Déduis-en que (LS) est perpendiculaire à (AO).

10 Les droites vertes sont parallèles.

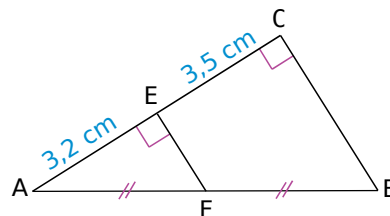
Démontre que H est le milieu de [MN].



11 ABC est un triangle tel que $AC = 6$ cm ; $AB = 4$ cm et $BC = 3,5$ cm. ACD est le triangle tel que $AD = 5$ cm ; $CD = 4$ cm et B et D ne sont pas du même côté de la droite (AC). E est le milieu de [AB] et F est le milieu de [AC]. La parallèle à (CD) passant par F coupe (AD) en G.

- Fais un dessin en vraie grandeur et code-le.
- Montre que (EF) est parallèle à (BC).
- Montre que G est le milieu de [AD].
- Montre que (EG) et (BD) sont parallèles.
- Calcule les longueurs EF et FG. Justifie.
- Calcule le périmètre de AEF.

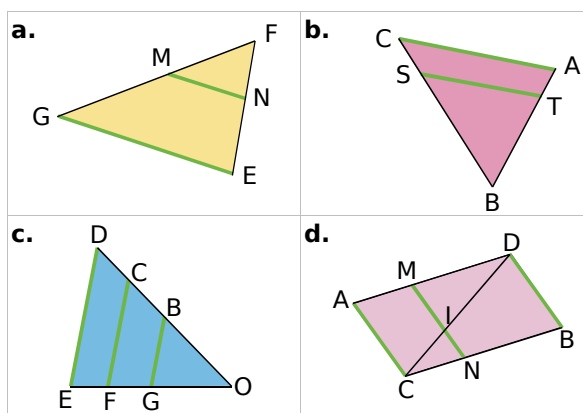
12 Jonathan a construit la figure suivante :



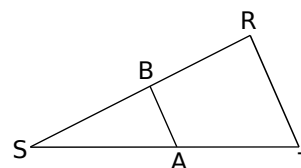
Explique pourquoi sa figure est fautive.

Proportionnalité dans le triangle

13 Écris toutes les égalités des rapports de longueurs dans chacun des cas suivants. Les droites vertes sont parallèles.



14 Sur la figure ci-dessous, les droites (AB) et (TR) sont parallèles. On donne $SA = 4$ cm ; $ST = 15$ cm ; $AB = 2,4$ cm et $SR = 7,5$ cm.

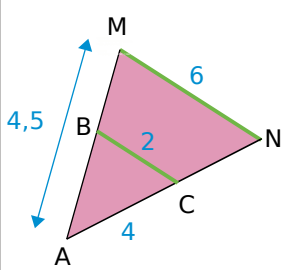
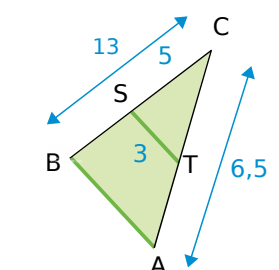
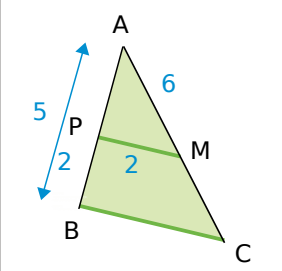
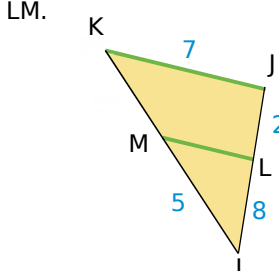


- Reporte les données sur un croquis.
- Pour calculer SB et RT, recopie et complète :
Dans le triangle ... , on sait que $A \in [ST]$, $B \in [SR]$ et $(AB) \parallel (TR)$ donc d'après la proportionnalité des longueurs dans un triangle :
 $\frac{SA}{ST} = \frac{SB}{SR} = \frac{AB}{TR}$ soit $\frac{4}{15} = \frac{SB}{7,5} = \frac{2,4}{TR}$.
Termine la démonstration pour calculer SB et RT (*aide : méthode 4*).

15 Construis le triangle OAB tel que $OA = 6$ cm ; $OB = 9$ cm et $AB = 4,5$ cm. Place sur $[OA]$ le point E tel que $OE = 5$ cm. La parallèle à la droite (AB) passant par E coupe (OB) en F.

- Trace en couleur les droites parallèles. Écris les égalités des rapports de longueurs
- Calcule EF et OF.

16 Dans chacun des cas suivants, les droites vertes sont parallèles.

<p>a. Calcule AN et AB.</p> 	<p>b. Calcule CT et AB.</p> 
<p>c. Calcule AC et BC.</p> 	<p>d. Calcule IK, MK et LM.</p> 

17 Soit un parallélogramme SAIN tel que $SA = 2,8$ cm ; $SN = 4$ cm et $\widehat{ASN} = 40^\circ$. Le point M appartient à $[NS]$ tel que $NM = 7$ cm. La droite (MA) coupe la droite (NI) en T.

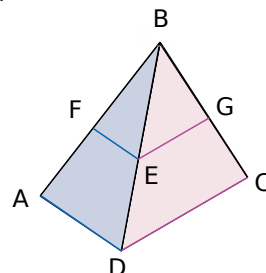
- Construis la figure.
- Calcule NT.
- Déduis-en IT.

18 Construis un triangle ABC rectangle en B tel que $AB = 4$ cm ; $BC = 3$ cm et $AC = 5$ cm. Sur la demi-droite $[BA]$, place le point E tel que $BE = 8,8$ cm. Trace la droite parallèle à (AC) passant par E, elle recoupe la droite (BC) en F.

- Calcule EF.
- Calcule BF.

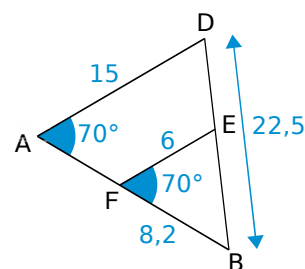
19 Sur la figure ci-dessous : $EF = 3$ cm ; $BG = 4$ cm et $GC = 2$ cm. Les droites (FE) et (AD) sont parallèles et les droites (EG) et (DC) sont parallèles.

- Calcule $\frac{BE}{BD}$.
- Déduis-en AD.



20 On considère la figure suivante :

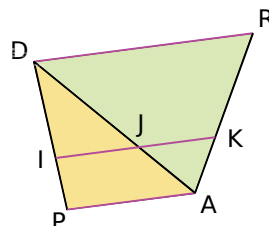
Calcule BE et AB.



21 Construis un parallélogramme ABCD tel que $AB = 6$ cm ; $AD = 4$ cm et $BD = 5$ cm. Place un point O sur $[BD]$ tel que $BO = 2$ cm. Construis la parallèle à (AB) passant par O, elle coupe la droite (BC) en P.

- Calcule BP.
- Calcule OP.

22 On considère le trapèze DRAP tel que : (AP) soit parallèle à (DR) et à (IJ), $AP = 32$ mm ; $DR = 48$ mm ; $DA = 45$ mm ; $DI = 15$ mm et $IP = 5$ mm. Les points I, J et K sont alignés.



- Calcule IJ.
- Calcule DJ.
- Calcule la valeur exacte de $\frac{AJ}{AD}$.
- Déduis-en JK.

23 Construis le triangle FOT tel que FO = 6 cm ; OT = 8 cm et FT = 5,6 cm.

Place le point R sur [FO] tel que $FR = \frac{5}{4} FO$.

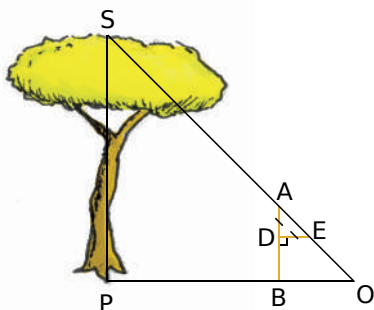
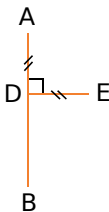
La parallèle à la droite (OT) passant par R coupe (FT) en E.

- Calcule RE.
- Calcule TE.

24 Mesurer des hauteurs inaccessibles

L'instrument de Gerbert est constitué de deux bâtons [AB] et [ED] perpendiculaires tels que AD = ED.

Soit S le sommet de l'arbre. Pour mesurer sa hauteur, il faut se placer de telle sorte que les points S, A et E soient alignés.



On veut mesurer la hauteur SP de l'arbre (on considérera qu'il est perpendiculaire au sol).

L'instrument est planté verticalement, c'est-à-dire que (AB) est perpendiculaire à (OB). On sait que AD = 0,40 m ; AB = 1,50 m et BP = 8 m. Le triangle ADE est rectangle et isocèle en D.

- Calcule la distance OB. Déduis-en la nature du triangle ABO.
- Démontre que (AB) et (SP) sont parallèles.
- Démontre que le triangle SPO est rectangle isocèle en P.
- Déduis-en la hauteur SP de l'arbre.
- Quelles sont les seules mesures utiles pour utiliser l'instrument de Gerbert, une fois bien positionné comme sur le dessin ?
- Quel calcul doit-on faire pour trouver la hauteur de l'objet ?

Agrandissements et réductions

25 Reconnaître une situation de réduction ou d'agrandissement

Parmi les images ci-dessous, quelles sont celles qui sont des réductions, des agrandissements de l'arbre ci-contre et celles qui ne sont ni l'une ni l'autre ?

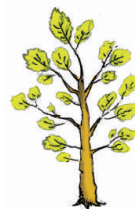


Fig 1



Fig 2



Fig 3

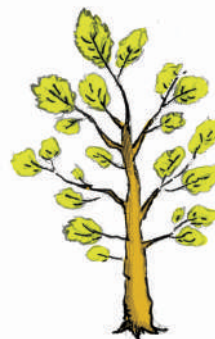


Fig 4

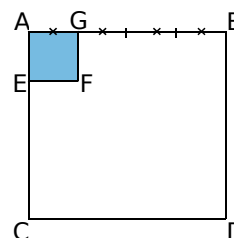


Fig 5

26 Agrandissement ou réduction de figures

Rédige dans chaque cas, deux phrases : une avec les mots « ... est un agrandissement de rapport ... de ... » et l'autre avec « ... est une réduction de rapport ... de ... ».

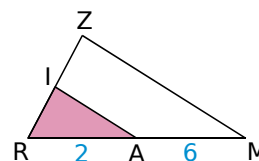
a. AGFE et ABDC sont des carrés.



b.



c. Les droites (AI) et (MZ) sont parallèles.



27 Agrandissement ou réduction ?

- a.** Sur ton cahier, construis un triangle DEF tel que $EF = 4$ cm ; $\widehat{FED} = 80^\circ$ et $\widehat{EFD} = 60^\circ$.
- b.** Sur ton cahier, construis un triangle GHI tel que $GH = 10$ cm ; $\widehat{IGH} = 80^\circ$ et $\widehat{GIH} = 40^\circ$.
- c.** Réalise les dessins des questions **a.** et **b.** avec le logiciel Tracenpoche.
Dans la fenêtre *Analyse*, saisis le texte ci-dessous puis appuie sur la touche F9.

```

Analyse
calc(DE/GI)=
calc(EF/GH)=
calc(DF/IH)=
    
```

Le triangle DEF semble-t-il être un agrandissement ou une réduction du triangle GHI ? Si c'est le cas, que représentent les nombres calculés dans la fenêtre *Analyse* ?

28 Agrandissement ou non

- a.** Construis un parallélogramme ABCD tel que $AB = 3$ cm ; $BC = 5$ cm et $\widehat{ABC} = 55^\circ$.
- b.** Construis un parallélogramme EFGH tel que $EF = 2AB$; $FG = 2BC$ et qui soit un agrandissement du parallélogramme ABCD de rapport 2. Écris la propriété utilisée.
- c.** Construis un parallélogramme IJKL tel que $IJ = 2AB$; $JK = 2BC$ et qui ne soit pas un agrandissement de ABCD. Explique pourquoi ce n'est pas un agrandissement.

29 Agrandissement ou non (bis)

- a.** Construis deux quadrilatères ayant leurs angles respectifs de même mesure et qui pourtant ne sont pas un agrandissement (ou une réduction) l'un de l'autre.
- b.** Peux-tu répondre à la même question avec des triangles à la place des quadrilatères ?

30 Agrandissement et parallélisme

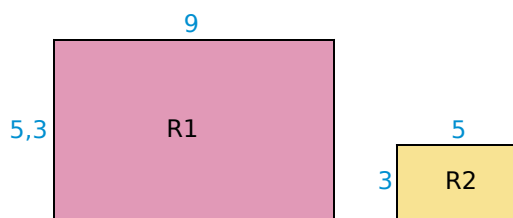
- a.** Construis un triangle ABC tel que $AB = 3,4$ cm ; $AC = 2,5$ cm et $BC = 7$ cm.
- b.** Construis un triangle CDE qui soit un agrandissement de rapport 2 du triangle ABC et tel que D appartienne à la demi-droite [CA) et E appartienne à la demi-droite [CB).
- c.** Démontre que (DE) et (AB) sont parallèles.

31 Réduction et trapèze

- a.** Construis un trapèze ABCD rectangle en D tel que (AB) soit parallèle à (CD), $AB = 3,9$ cm ; $CD = 6,6$ cm et $AD = 4,5$ cm.
- b.** Construis une figure qui soit une réduction de rapport $\frac{2}{3}$ du trapèze ABCD.
- c.** Quelle est la nature du quadrilatère obtenu ? Justifie ta réponse.

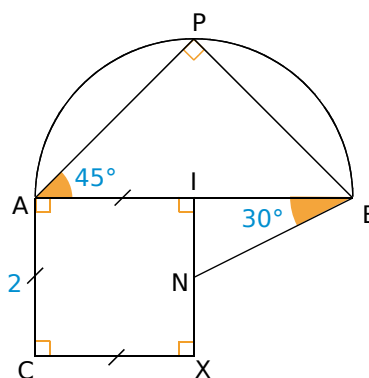
32 Réduction ?

Soit deux rectangles R1 et R2. Le rectangle R2 est-il une réduction du rectangle R1 ? Justifie ta réponse.



33 Construction et agrandissement

Construis un agrandissement de rapport $\frac{11}{5}$ du dessin ci-contre. Explique ta démarche. L'unité de longueur est le centimètre.



34 Constructions et démonstration

- a.** Construis un triangle ABC quelconque. Place un point O extérieur à ABC. Sur la demi-droite [OA), place le point A' tel que $OA' = 3OA$. Trace la parallèle à (AB) passant par A', elle coupe (OB) en B'. Construis la parallèle à (AC) passant par A', elle coupe (OC) en C'.
- b.** Que peux-tu dire du triangle A'B'C' par rapport au triangle ABC ? Démontre-le.

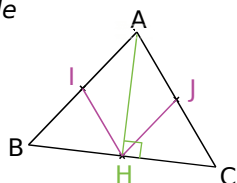
35 Dans un triangle rectangle

a. GAZ est un triangle rectangle en A. Les points F, E et R sont les milieux respectifs de [AZ], [GZ] et [GA]. Fais une figure.

b. Quelle est la nature du quadrilatère FERA ? Prouve-le.

36 Dans un triangle isocèle

ABC est un triangle isocèle en A. [AH] est la hauteur issue de A. Les points I et J sont les milieux respectifs de [AB] et [AC].



Quelle est la nature de AIHJ ?

37 Avec une médiatrice

SEL est un triangle quelconque. Les points I, M et A sont les milieux respectifs de [LS], [SE] et [EL]. La médiatrice de [LE] coupe la droite (IM) en O.

a. Fais une figure.

b. Que représente (AS) pour le triangle IMA ? Prouve-le.

38 Avec une médiane

a. Construis un triangle EAU quelconque.

b. Construis la médiane [EL].

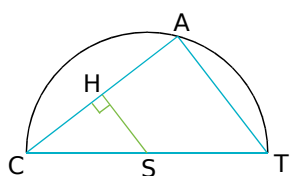
Place N milieu de [AE] et M milieu de [EU]. O est le point d'intersection de (EL) et de (MN).

c. Est-il vrai que (OL) est une médiane du triangle LMN ? Justifie ta réponse.

39 Dans un demi-cercle

Sur la figure ci-contre, le point A appartient au cercle de diamètre [CT] et de centre S.

Les droites (HS) et (CA) sont perpendiculaires.



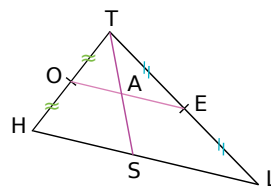
Montre que H est le milieu du segment [CA].

40 ABC est un triangle quelconque. R est un point de [BC]. On appelle S, T, M et N les milieux respectifs de [BR], [RC], [AB] et [AC].

a. Montre que (NT) est parallèle à (MS).

b. Montre que MNTS est un parallélogramme.

41 Sur la figure suivante, THL est un triangle quelconque, O est le milieu du segment [TH], E celui de [TL] et S est un point de [HL].



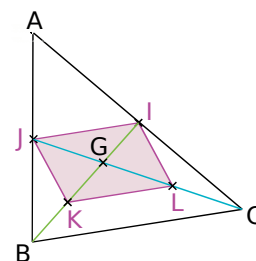
a. Montre que les angles \widehat{SAE} et \widehat{TSH} ont la même mesure.

b. Montre que A est le milieu de [TS].

42 ABC est un triangle quelconque. [BI] et [CJ] sont deux médianes, elles se coupent en G. On désigne par K le milieu de [BG] et L celui de [CG].

a. Quelle est la nature du quadrilatère IJKL ? Prouve-le.

b. Que peut-on dire de la position du point G sur chacune des médianes [BI] et [CJ] ?



43 Dans un parallélogramme

ABCD est un parallélogramme tel que $DC = 6,3$ cm et $BC = 3$ cm.

D' est le point tel que A soit le milieu de [DD'].

E est le point du segment [AB] tel que $AE = 2,1$ cm.

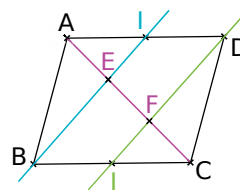
La droite (ED') coupe la droite (CD) en F.

a. Construis une figure en vraie grandeur.

b. Montre que E est le milieu de [FD'].

c. Déduis-en DF et montre que $FC = \frac{1}{3} DC$.

44 ABCD est un parallélogramme. I est le milieu de [AD] et J le milieu de [BC].



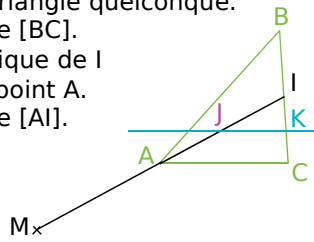
a. Démontre que BJD I est un parallélogramme.

b. Est-il vrai que les droites (BI) et (DJ) divisent la diagonale [AC] en trois parties égales ? Justifie ta réponse (ce problème est posé par Euclide dans le Livre III de ses « Éléments »).



45 ABC est un triangle quelconque.

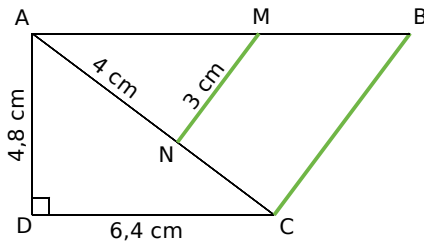
- I est le milieu de [BC].
- M est le symétrique de I par rapport au point A.
- J est le milieu de [AI].



La parallèle à (AC) passant par J coupe (BC) en K.

- Démontre que K est le milieu de [IC].
- Démontre que les droites (AK) et (MC) sont parallèles.
- Que représente le point d'intersection des droites (CA) et (MK) pour le triangle MIC ?

46 Sur la figure ci-dessous, les droites (MN) et (BC) sont parallèles et $AB = 10$ cm.



- Calcule BC.
- Démontre que le triangle ABC est rectangle.

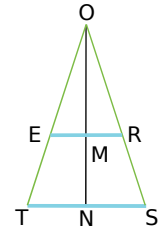
47 Sur une droite (d), on considère trois points A, B et C tels que B soit le milieu de [AC]. Sur une droite (d'), on considère un point A'. B' est le point d'intersection de (d') et de la parallèle à (AA') passant par B. C' est le point d'intersection de (d') et de la parallèle à (AA') passant par C.

- Construis cette figure.
- Que dire de B' ? Prouve-le.

48 Construction

- Construis un triangle BAO rectangle en A avec $AB = 4$ cm et $AO = 5$ cm.
- Place le point C, symétrique de A par rapport au point O.
- Sur la demi-droite [BO), place le point D tel que $BD = 8$ cm.
- Place les points I, J, K et L milieux respectifs de [AB], [BC], [CD] et [DA].
- IJKL est-il un losange ? Justifie ta réponse.

49 Sur la figure ci-dessous, qui n'est pas à l'échelle, $RE = 8$ cm ; $OM = 5$ cm et $ON = 25$ cm. Les droites (RE) et (ST) sont parallèles. On souhaite calculer ST.



- Montre que $\frac{OE}{OT} = \frac{OM}{ON}$.
- Montre que $\frac{OE}{OT} = \frac{ER}{TS}$.
- Que peux-tu en déduire pour $\frac{OM}{ON}$ et $\frac{ER}{TS}$?
- Calcule ST.

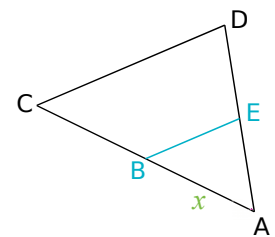
50 Extrait du Brevet

Dans cet exercice, l'unité de longueur est le centimètre.

- Tracer un rectangle ABCD tel que $AB = 8$ et $BC = 4$. Placer le point I sur le segment [AB] tel que $AI = 6$ puis le point J, milieu du segment [BC]. Tracer la parallèle à la droite (IJ) passant par A : cette parallèle coupe le segment [DC] en K et la droite (BC) en H.
- Calculer BH, en citant le théorème utilisé.
- Quelle est la nature du triangle ABH ?
- Préciser la position du point K sur le segment [DC]. Que peut-on en déduire pour les droites (KJ) et (DB) ? Justifier la réponse.

51 Avec x

Sur la figure ci-contre : (CD) est parallèle à (BE) ; $BC = 5$ cm ; $CD = 19$ cm ; $BE = 7$ cm et on désigne par x la longueur de [AB] en cm.



- Calcule x.
- Le triangle ABE est-il une réduction du triangle ACD ? Si oui, quel en est le coefficient ?

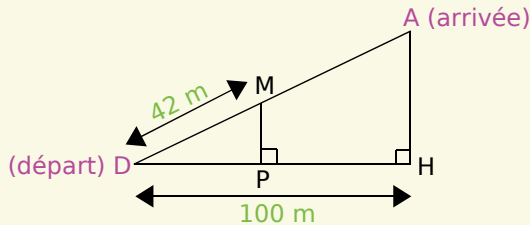
52 Trapèze

ABCD est un trapèze de bases [AB] et [CD]. $AB = 6$ cm ; $CD = 10$ cm ; $BC = 5$ cm et $AD = 4$ cm.

- Les droites (AD) et (BC) se coupent en E.
- Fais un schéma à main levée.
 - Prouve que le triangle DCE est isocèle.
 - Construis ABCD en vraie grandeur.

53 Extrait du Brevet

Funiculaire : chemin de fer à traction par câble pour la desserte des voies à très forte pente.



La longueur AD de la voie du funiculaire est de 125 m.

a. De quelle hauteur AH s'est-on élevé à l'arrivée ?

Lorsque le funiculaire a parcouru 42 m, il s'est élevé d'une hauteur MP.

b. Faire un dessin à l'échelle 1/1 000.

c. Que peut-on dire des droites (MP) et (AH) ? Justifier la réponse.

d. Calculer MP.

54 Réduire sans mesurer

a. Construis un triangle ABC tel que $AB = 6$ cm ; $BC = 10$ cm et $CA = 8$ cm. Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifie ta réponse.

b. Place un point O à l'extérieur de ABC tel que $OA = 4$ cm puis le point A' appartenant à la demi-droite [OA) tel que $OA' = 1$ cm.

Le but des questions suivantes est de construire une réduction de rapport 1/4 du triangle ABC sans utiliser la règle graduée.

c. Construis la droite parallèle à (AB) passant par le point A'. Elle coupe la droite (OB) en B'.

d. Le triangle A'B'C' étant une réduction du triangle ABC, quelle doit être la mesure de l'angle $\widehat{C'A'B'}$?

e. Déduis-en la position du point C' et construis-le sans utiliser la règle graduée.

55 RST est un triangle tel que : $RS = 4$ cm ; $ST = 6$ cm et $TR = 7$ cm.

M est un point du segment [RS] et la parallèle à (ST) passant par M coupe [RT] en N.

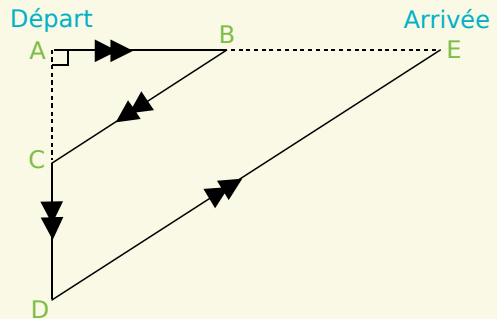
On désigne par x la longueur de [MS].

a. Calcule x pour que le triangle SMN soit isocèle en M.

b. Dans ce cas, que représente la droite (SN) dans le triangle RST ? Justifie ta réponse.

56 Extrait du Brevet

Des élèves participent à un cross. Avant l'épreuve, un plan leur a été remis. Il est représenté ci-après :



On peut y lire les indications suivantes :

$AB = 400$ m ; $AC = 300$ m ; l'angle \widehat{CAB} est droit ; $BE = 2AB$ et les droites (BC) et (DE) sont parallèles.

a. Calculer BC.

b. Calculer AD puis CD.

c. Calculer DE.

d. Vérifier que la longueur du parcours ABCDE est 3 000 m.

57 Avec des aires

a. Le triangle T_1 dont les mesures sont, en mètres : 8,5 ; 8,4 et 1,3 est-il un agrandissement du triangle T_2 dont les mesures sont, en cm : 680 ; 672 et 104 ? Si oui, quel est le coefficient d'agrandissement ?

b. Démontre que ces triangles sont rectangles et calcule le rapport $\frac{\text{aire du triangle } T_1}{\text{aire du triangle } T_2}$.

c. Calcule la racine carrée de ce rapport. Que remarques-tu ?

58 Agrandir, réduire

a. Si tu réduis deux fois une figure puis que tu réduis à nouveau la figure obtenue trois fois, de combien auras-tu réduit la figure initiale ?

b. Un microscope grossit vingt fois. Si tu places sous ce microscope une loupe qui grossit deux fois, quel grossissement obtiens-tu ?

c. Le triangle ABC dont les mesures sont $AB = 8$ cm ; $BC = 10$ cm et $AC = 6$ cm est rectangle (vérifie-le !).

On augmente chacun de ses côtés de 5 cm.

Démontre de deux façons différentes que le triangle obtenu n'est pas un agrandissement du triangle ABC.



1 Le quadrilatère de Varignon

1^{re} partie : Recherche en groupe

Chaque membre du groupe se choisit un rôle parmi les suivants : les historiens, les traceurs et les démonstrateurs.

Plusieurs élèves peuvent avoir le même rôle mais chaque rôle doit avoir un représentant dans chaque groupe.

Les historiens

Vous allez vous documenter (Internet, le CDI...) pour trouver des informations sur M. Varignon et sur son quadrilatère.

En particulier, vous chercherez à quelle époque M. Varignon a vécu, dans quel domaine il a travaillé. Vous pourrez également expliquer ce qu'était l'Académie royale des sciences.

Les démonstrateurs

Vous allez étudier le quadrilatère de Varignon.

Sur une feuille de papier, chacun trace un quadrilatère quelconque nommé ABCD, puis le « quadrilatère des milieux », c'est-à-dire le quadrilatère dont les sommets sont les milieux des côtés de ABCD. Ce quadrilatère des milieux sera nommé IJKL. Montrez que le périmètre du quadrilatère IJKL est égal à $AC + BD$.

Les traceurs

a. Avec TracenPoche, faites la même construction que les démonstrateurs. Quelle semble être la nature du quadrilatère IJKL ?

b. Démontrez cette conjecture.

c. Faites calculer à TracenPoche l'aire du quadrilatère ABCD et celle du quadrilatère IJKL. Quelle nouvelle conjecture pouvez-vous faire ?

2^e partie : Mise en commun

Dans chaque équipe, tous les groupes mettent leur travail en commun pour réaliser un panneau sur lequel seront collés les résultats de leurs recherches.

3^e partie : Exposé

Chaque équipe présente son exposé.



Source : fr.wikipedia.org

2 J'veux du soleil !

On veut calculer la hauteur d'un bâtiment ou d'un arbre que l'on ne peut pas mesurer sans instruments professionnels. Cet exercice nécessite de travailler un jour de beau temps et si possible en soleil rasant. Tu dois connaître ta taille pour faire cet exercice.

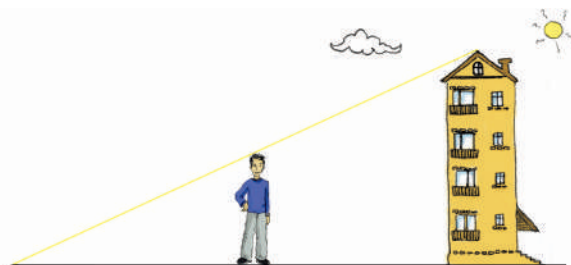
a. Constituez des groupes. Munissez-vous d'une feuille de papier, d'un décimètre ou à défaut d'une corde de longueur connue, et d'une calculatrice.

b. Dans la cour du collège ou dans la rue, repérez un bâtiment (mairie, église, beffroi, tour, etc...), ou un arbre assez haut puis repérez la position du soleil et placez-vous dans l'alignement du bâtiment et de son ombre.

c. Faites coïncider le sommet de votre ombre avec le sommet de l'ombre du bâtiment. Mesurez alors la longueur de votre ombre et la distance entre vous et le bâtiment.

d. Calculez la hauteur du bâtiment en appliquant la propriété de proportionnalité des longueurs dans un triangle et en vous inspirant du dessin ci-dessous.

e. Recommencez l'opération pour d'autres bâtiments puis, de retour en classe, comparez vos résultats avec les autres groupes.



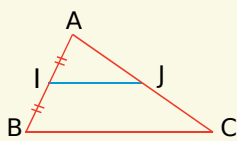
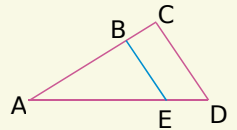
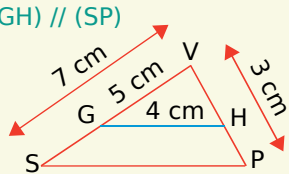
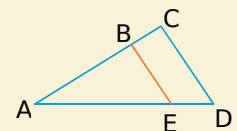
3 Agrandir et réduire des solides

a. En groupe, chacun d'entre vous construit un prisme droit à base polygonale non régulière.

b. Vous donnez tous vos prismes à un autre groupe.

c. Dans chaque groupe, choisissez ensemble un coefficient d'agrandissement ou de réduction et construisez l'agrandissement ou la réduction du prisme que vous avez reçu puis rendez le couple de prismes à l'équipe initiale.

d. Chaque groupe doit retrouver le coefficient d'agrandissement ou de réduction choisi par l'autre groupe.

		R1	R2	R3	R4
1		(IJ) // (BC) donc $IJ = \frac{BC}{2}$	(IJ) // (BC) donc AJ = JC	J est le milieu de [AC] donc (IJ) // (BC) et BC = 2 × IJ	IJ = 5 cm donc BC = 10 cm
2	Avec la même figure :	AJ ≠ JC donc (IJ) n'est pas parallèle à (BC)	Il est possible que (IJ) // (BC) et AJ ≠ JC	$\widehat{AJI} = \widehat{ACB}$ donc J est le milieu de [AC]	(IJ) // (BC) donc l'aire du triangle AIJ vaut la moitié de celle de ABC
3		$\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AD}$	(BE) // (CD) donc $\frac{CA}{BA} = \frac{DA}{EA}$	(BE) // (CD) donc $\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AD}$	(BE) // (CD) donc ABE est une réduction de ACD
4	Avec la figure précédente, (EB) // (DC), AB = 3 cm et BC = 1 cm donc...	$\frac{AE}{AD} = \frac{1}{3}$	$\frac{CD}{BE} = \frac{4}{3}$	$\frac{AE}{AD} = 0,75$	$\frac{CD}{BE} = 1,3$
5	(GH) // (SP) 	VH = $\frac{5}{7}$ VP et SP = 1,4 GH	VH = 2,1 cm et SP = 5,6 cm	VH = $\frac{15}{7}$ cm et SP = $\frac{28}{5}$ cm	VSP est un agrandissement de coefficient $\frac{5}{7}$ de VGH
6		$\frac{AB}{AC} \neq \frac{AE}{AD}$ donc (BE) et (CD) ne sont pas parallèles	$\frac{AB}{AC} \neq \frac{BE}{CD}$ donc (BE) et (CD) ne sont pas parallèles	$\frac{BE}{CD} \neq \frac{AE}{AD}$ donc (BE) et (CD) ne sont pas parallèles	On peut avoir $\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AD}$ et (BE) et (CD) sécantes
7	Un rectangle R ₁ est une réduction de coefficient k d'un rectangle R ₂ donc...	k peut être égal à 1,05	le périmètre et l'aire de R ₁ sont égaux à ceux de R ₂ multipliés par k	R ₂ est un agrandissement de R ₁ de coefficient $\frac{1}{k}$	le rapport longueur largeur peut être différent dans R ₁ et R ₂

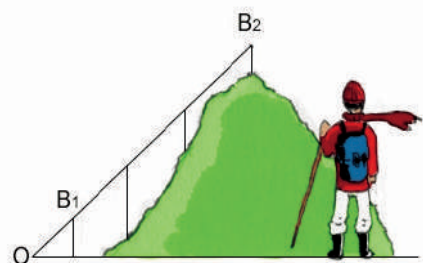
Récréation mathématique

Hauteur d'une colline

Un jeune mathématicien veut mesurer la hauteur d'une colline. Pour cela, il place un premier bâton de 2 mètres au pied de cette colline et y monte progressivement en plantant des bâtons de différentes hauteurs et en vérifiant bien leur alignement. Le dernier bâton se trouve au sommet de la colline.

La corde reliant tous les bâtons peut alors être considérée comme un segment : elle est tendue du point O en passant par le point B₁ au sommet du premier bâton jusqu'au point B₂ au sommet du dernier bâton.

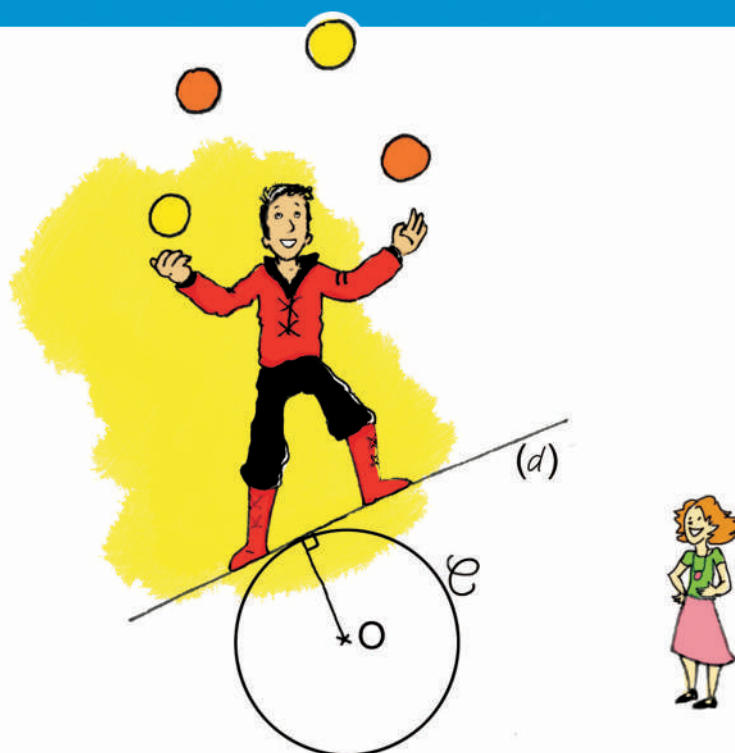
Le dernier bâton mesure 2,5 mètres, OB₁ = 4 m et B₁B₂ = 66 m. Avec ces données relevées par le jeune mathématicien, aide-le à calculer la hauteur de la colline.





Distances et tangentes

G3



Narration de recherche

Question 1 :

Un camarade trace sur ta feuille un cercle.

Il te donne la mesure d'un angle saillant (différent de 0° et de 180°).

Comment construire à coup sûr un angle de cette mesure dont les côtés soient tangents au cercle tracé par ton camarade ?

Question 2 :

Cette fois, ton camarade trace sur ta feuille un angle saillant (différent de 0° et de 180°). Il te donne aussi la mesure en cm d'un rayon.

Comment construire à coup sûr un cercle de ce rayon, qui soit tangent aux deux côtés de l'angle tracé ?

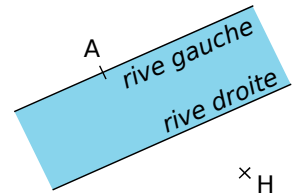
Dans tout ce problème, afin d'être le plus précis possible, une droite ne pourra être construite que si on a auparavant construit deux de ses points et un cercle ne sera construit que si on connaît son centre et un de ses points.

En particulier, on s'interdira de construire une droite "telle qu'elle touche le cercle en un seul point" sans connaître le point de contact à l'avance.

Activité 1 : Trouve le plus court chemin

1. Conjecture

- a. De la rive gauche d'un fleuve, Alexia crie à Hamid qui est assis de l'autre côté du fleuve qu'elle ne sait pas nager. Trop éloigné d'elle, Hamid l'entend très mal. Reproduis le schéma ci-contre en plaçant Hamid (représenté par le point H) sur la rive droite au plus près d'Alexia.



- b. Explique précisément comment tu as placé le point H sur ton schéma.

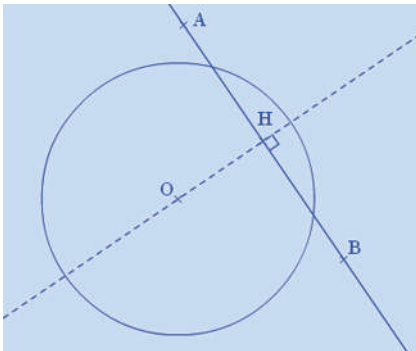
2. Démonstration et définition


- a. Sur le schéma précédent où H est placé comme indiqué à la question 1., place sur la rive droite un point L distinct de H. Quelle est la nature du triangle AHL ?
- b. Que peux-tu en déduire concernant les longueurs des segments [AH] et [AL] ? Justifie.
- c. Recopie et complète les phrases suivantes :

« La distance d'un point A à une droite (d) est la longueur du segment [AH] où H est le pied de la ... à ... passant par C'est la plus courte des distances entre ... et »


Activité 2 : Prends la tangente !

1. Au voisinage d'un cercle et d'une droite



- a. Avec TracenPoche, à l'aide du bouton , trace un cercle (C) de centre O et de rayon deux unités de longueur puis trace une droite (AB). Construis la perpendiculaire à (AB) passant par O et nomme H le point d'intersection de ces deux droites.

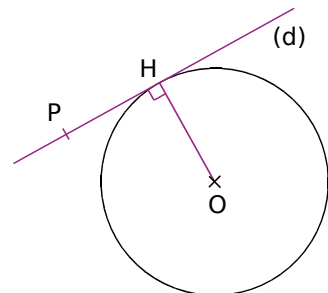
- b. Selon toi, combien de points communs peuvent avoir le cercle (C) et la droite (AB) ? De quoi cela dépend-il ? Cite alors tous les cas possibles en précisant à chaque fois la position du point H par rapport au cercle.

- c. En utilisant le bouton , indique combien semblent valoir les distances de O à la droite (AB) dans chacun de ces cas ?

2. Etude du cas limite, définition

Dans cette seconde partie, on se place dans le cas où H appartient au cercle (C).

- a. Soit un point P, distinct de H, sur la droite (d). Explique pourquoi $OH < OP$.
- b. Le point P peut-il être sur le cercle (C) ? Justifie. De combien de points est constituée l'intersection de la droite (d) et du cercle (C) ?
- c. Soient (C) un cercle de centre O et H un point de (C). Recopie et complète les phrases suivantes :



« La tangente à (C) en H est la droite perpendiculaire au rayon [OH] passant par H. Le point H est le seul point On dit que H est le point de contact de la ... et du »



Activité 3 : De qui est-ce la trace ?

Dans cette activité, tu vas manipuler la figure TracenPoche disponible à l'adresse : <http://manuel.sesamath.net> dans les compléments du niveau 4^e.

1. Nature d'une trace

- Quel point peux-tu déplacer sur cette figure ? Quels points bougent alors automatiquement ? Comment, selon toi, a-t-on obtenu les points F et G ? Vérifie avec Tracenpoche.
- Lorsqu'on déplace le point M, il laisse parfois une trace rouge. Pour quelles positions du point M cela se produit-il ? Vérifie avec TracenPoche. Déplace le point M afin d'avoir la plus grande trace rouge possible.


2. Une conjecture

- À l'aide du bouton , trace la bissectrice de \widehat{xAy} . Que remarques-tu ?
- Place un point N sur la bissectrice de \widehat{xAy} en utilisant le bouton .
- Une fois les constructions nécessaires effectuées, fais afficher les distances de N à chacun des deux côtés de l'angle. Que remarques-tu lorsque tu déplaces N ?
- Complète les deux propriétés suivantes (qu'on utilise dans la Méthode 3 et qu'on démontre dans l'exercice 38.) :

« Si un point est situé ... des côtés d'un angle alors il appartient à ... »,
et réciproquement : « Si un point appartient à ... alors il est situé ... de cet angle. ».

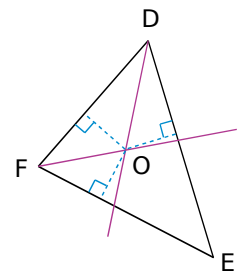
Activité 4 : Un cercle bien calé

1. Construction et observation

- Avec TracenPoche, à l'aide du bouton , construis un cercle de centre O et de rayon trois unités de longueur. Place trois points A, B et C sur ce cercle, trace les trois rayons [OA], [OB] et [OC] puis les trois tangentes au cercle en ces points.
- Déplace si besoin A, B et C afin que ces trois tangentes forment un triangle contenant le cercle. Nomme D, E et F les trois sommets de ce triangle.
- Utilise TracenPoche pour dire si le triangle DEF peut posséder un angle obtus. Peut-il être rectangle ? Peut-il être équilatéral ? Précise alors la position du centre du cercle.
- O est-il plus proche de (DE) ou de (DF) ? Justifie. Que peut-on en déduire concernant le point O et l'angle \widehat{EDF} ? Et que dire du point O et des angles \widehat{DFE} et \widehat{FED} ? Vérifie ta réponse à l'aide de TracenPoche en effectuant les tracés nécessaires.

2. Mise en situation et démonstration

- Sur ton cahier, trace un grand triangle DEF puis les bissectrices des angles \widehat{EDF} et \widehat{DFE} qui se coupent en O.
- Démontre que O est équidistant des trois côtés du triangle DEF.
- Comment tracer la bissectrice de \widehat{FED} en n'utilisant que ta règle non graduée ? Justifie.
- En t'inspirant de la première partie, trace un cercle particulièrement intéressant !



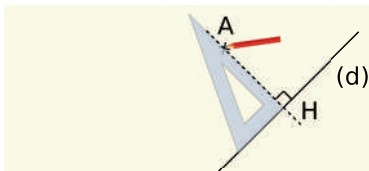
Méthode 1 : Déterminer l'ensemble des points situés à une même distance d'une droite

À connaître : Distance d'un point à une droite

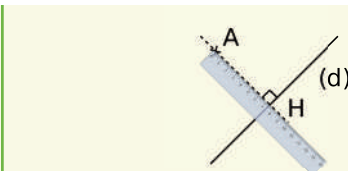
Soit une droite (d) et un point A n'appartenant pas à (d) , la **distance du point A à la droite (d)** est égale à AH où H désigne le pied de la perpendiculaire à (d) passant par A .

Remarque : La longueur AH est alors la plus courte distance entre le point A et tous les points de la droite (d) .

Exemple 1 : Soit (d) une droite et A un point n'appartenant pas à (d) . Mesure la distance du point A à la droite (d) .



On trace la droite perpendiculaire à (d) qui passe par le point A .

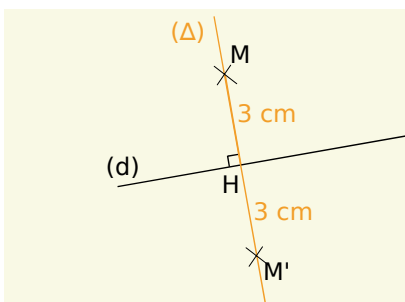


On mesure la longueur AH où H est le pied de la perpendiculaire à (d) .

À connaître

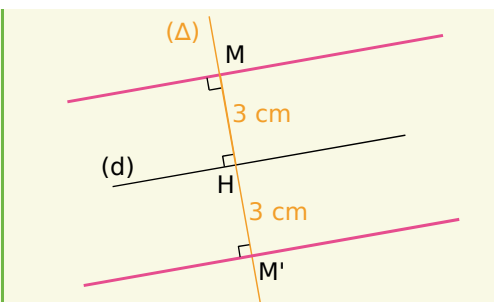
L'ensemble des **points situés à une même distance d'une droite (d)** est défini par deux droites parallèles à (d) situées de part et d'autre de (d) .

Exemple 2 : Soit (d) une droite. Construis en rose l'ensemble des points situés à 3 cm de la droite (d) .



On trace (Δ) une perpendiculaire à (d) .
On appelle H le point d'intersection des deux droites.

On place un point M sur (Δ) tel que $MH = 3$ cm et un point M' de l'autre côté de (d) tel que $M'H = 3$ cm.



On trace les parallèles à (d) qui passent respectivement par M par M' .

L'ensemble recherché est constitué des deux droites roses.

À toi de jouer

1 Construis un triangle OMN , rectangle en O , tel que $MN = 6,5$ cm et $ON = 2,5$ cm.

a. Calcule la distance du point M à la droite (ON) .

b. Peux-tu trouver un point P sur la droite (ON) tel que $MP = 5,8$ cm ? Pourquoi ?

2 Soit (Δ) une droite. Construis en rouge l'ensemble des points situés à 26 mm de (Δ) .

3 Soit (Δ) une droite. Colorie en bleu l'ensemble des points situés à moins de 1,4 cm de (Δ) .

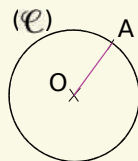
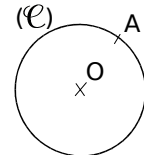
Méthode 2 : Utiliser la tangente à un cercle en un point

À connaître : Tangente à un cercle

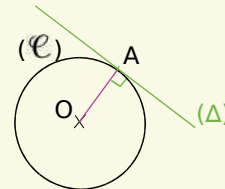
La tangente à un cercle (\mathcal{C}) de centre O en un point A de (\mathcal{C}) est la droite passant par A et perpendiculaire au rayon $[OA]$.

Remarque : La distance entre le centre d'un cercle et toute tangente à ce cercle est égale au rayon.

Exemple 1 : Soit (\mathcal{C}) un cercle de centre O et A un point de ce cercle. Trace la droite (Δ) tangente au cercle (\mathcal{C}) en A .



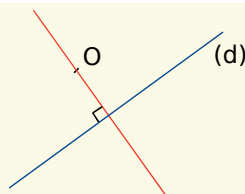
On trace le rayon $[OA]$.



On trace la droite (Δ) perpendiculaire en A à la droite (OA) .

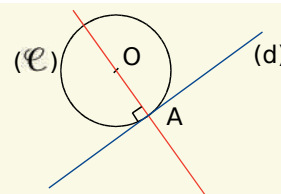
La droite (Δ) est la tangente en A au cercle (\mathcal{C}) .

Exemple 2 : On considère une droite (d) et un point O extérieur à la droite (d) . Construis le cercle (\mathcal{C}) de centre O et tel que la droite (d) soit tangente à (\mathcal{C}) .



Comme (d) est tangente au cercle (\mathcal{C}) , le point de contact de (d) et de (\mathcal{C}) est le pied de la perpendiculaire à (d) passant par O .

On trace la droite perpendiculaire à (d) qui passe par O .



On appelle A le pied de la perpendiculaire à (d) passant par O .

On trace le cercle (\mathcal{C}) de centre O et de rayon OA .

À toi de jouer

4 Trace un cercle (\mathcal{C}) de centre O et de rayon 2 cm. Place trois points M , N et P sur le cercle puis construis les tangentes à (\mathcal{C}) en M , N et P .

5 Soit (\mathcal{C}) un cercle de diamètre $[AB]$. Trace (Δ) et (d) les tangentes au cercle (\mathcal{C}) respectivement en A et B . Démontre que les droites (Δ) et (d) sont parallèles.

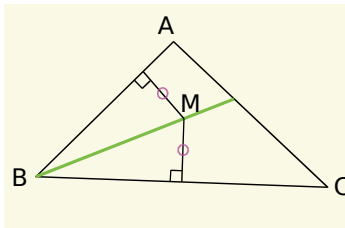
6 Soit (\mathcal{C}) un cercle de centre O et de rayon 3 cm. (d) est la tangente à (\mathcal{C}) en un point K . La demi-droite $[Oy)$ telle que $\widehat{yOK} = 50^\circ$ coupe (d) en R . Calcule, en justifiant, la longueur OR .

Méthode 3 : Utiliser les propriétés de la bissectrice d'un angle

À connaître : Propriétés de la bissectrice d'un angle

- Si un point est situé à la même distance des côtés d'un angle alors il appartient à la **bissectrice** de cet angle.
- Réciproquement, si un point appartient à la bissectrice d'un angle alors il est situé à **la même distance des côtés de cet angle**.

Exemple 1 : Soit un triangle ABC. Place à l'intérieur du triangle un point M afin qu'il soit à égale distance des côtés [AB] et [BC].



Le point M se situe à égale distance des côtés [AB] et [BC].

Or, si un point est situé à la même distance des côtés d'un angle, alors il appartient à la bissectrice de cet angle.

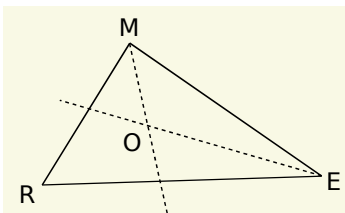
Donc le point M se situe sur la bissectrice de l'angle \widehat{ABC} formé par les segments [AB] et [BC].

À connaître : Centre du cercle inscrit dans un triangle

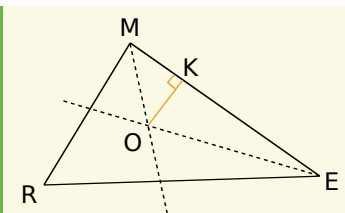
Les trois bissectrices des angles d'un triangle sont concourantes. Leur point de concours est le **centre du cercle inscrit** dans le triangle.

Remarque : Les trois côtés d'un triangle sont tangents au cercle inscrit dans ce triangle.

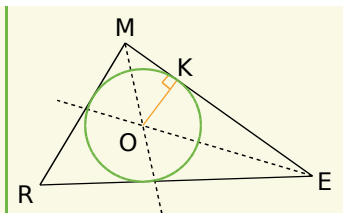
Exemple 2 : Construis un triangle MER et son cercle inscrit de centre O.



On trace les bissectrices de deux des trois angles du triangle MER. Elles se coupent en O, le centre du cercle inscrit.



On trace la perpendiculaire à (ME) passant par le point O. Elle coupe [ME] en K. On obtient ainsi un rayon [OK] du cercle inscrit dans le triangle MER.



On trace le cercle de centre O passant par K.

À toi de jouer

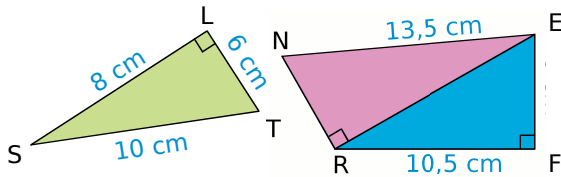
- 7 Construis un triangle BON. On note d_1 la droite (BO), d_2 la droite (ON) et d_3 la droite (BN). Place le point U afin qu'il soit équidistant des droites d_1 et d_3 et équidistant des droites d_1 et d_2 .
- 8 Construis un triangle RAS tel que $RA = 7$ cm ; $AS = 8$ cm et $RS = 9$ cm puis son cercle inscrit.
- 9 Soit un cercle (\mathcal{C}) . Trace un triangle ILE tel que (\mathcal{C}) soit inscrit dans le triangle ILE.



Distance

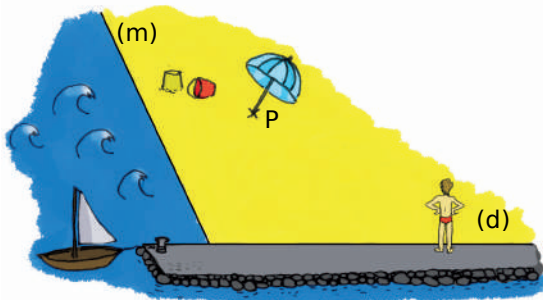
d'un point à une droite

1 Observe, recopie et complète :



- La distance du point S à la droite (LT) est ...
- La distance du point T à la droite ... est 6 cm.
- Le point ... est situé à 10,5 cm de la droite ...
- Le point ... est situé à ... de la droite (RF).
- La distance du point E à la droite (NR) est comprise entre ... et ...

2 Aïe, aïe, aïe...



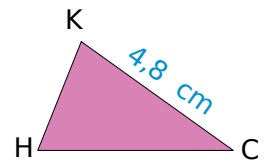
- Sur ton cahier, trace deux droites (m) et (d) ainsi qu'un point P, comme sur le dessin.
- Jean, debout sur la digue, veut aller se baigner mais il doit d'abord passer par le parasol (au point P) pour prévenir ses parents. Représente sur ton schéma le trajet que Jean doit emprunter afin de marcher le moins longtemps sur le sable rendu brûlant par les rayons du Soleil.

3 Aires de triangles

- Trace un segment [MN] de longueur 7 cm.
- Place trois points S, T et U situés à 5 cm de la droite (MN) et tels que les triangles MNS, MNT et MNU soient respectivement rectangle, quelconque et isocèle.
- Calcule l'aire de chacun de ces triangles.

4 Un point M étant donné, construis trois droites (d₁), (d₂) et (d₃) telles que M soit situé à 4 cm de chacune d'entre elles.

5 Calcule la distance du point H à la droite (KC) sachant que l'aire du triangle CHK vaut 7,2 cm².



6 Construis le triangle EFG tel que EG = 5 cm, FG = 6 cm et $\widehat{EGF} = 68^\circ$.

- Construis le point S équidistant de F et G, le plus proche possible du point E.
- Démontre que les droites (ES) et (FG) sont parallèles.

7 Soient une droite (d) et un point E situé à 2 cm de (d).

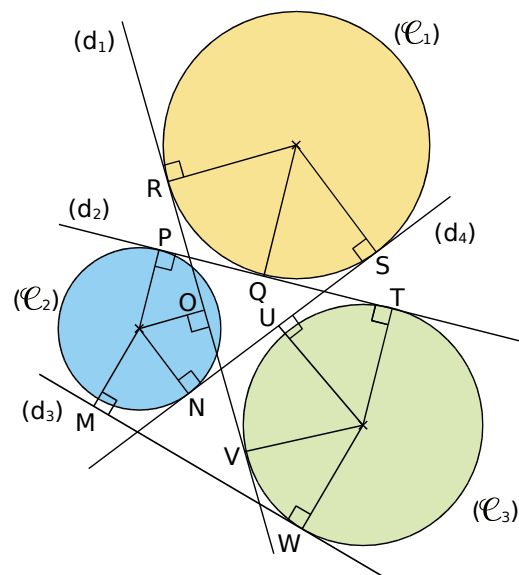
Fais une figure puis place tous les points situés à la fois à 4 cm de (d) et à 3 cm du point E.

8 Soient une droite (d) et un point T appartenant à la droite (d).

Fais une figure puis colorie en bleu la région du plan contenant les points situés à la fois à plus de 2 cm de (d) et à moins de 3 cm de T.

Tangente à un cercle

9 Observe la figure ci-dessous et en te référant au codage, indique pour chacune des droites (d₁), (d₂), (d₃) et (d₄) à quel cercle et en quel point elles sont tangentes.



10 Un cercle et trois tangentes

- a. Trace un cercle (\mathcal{C}) de rayon 3,5 cm, trace un diamètre $[AB]$ de ce cercle puis place un point M sur (\mathcal{C}) à 4 cm de B .
- b. Construis trois tangentes ((d_A) , (d_B) et (d_M)) en A , B et M au cercle (\mathcal{C}).

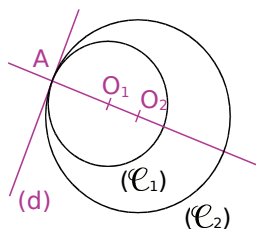
11 Distances et tangentes

- a. Trace une droite (d) et place un point E à 5 cm de (d) puis trace le cercle (\mathcal{C}_1) de diamètre 5 cm, passant par E et dont la droite (d) est une tangente.
- b. Peux-tu tracer un cercle (\mathcal{C}_2) de diamètre 4,6 cm passant par E et dont la droite (d) est une tangente ? Justifie.

- 12 Trace deux droites parallèles (d) et (d') . Construis un cercle (\mathcal{C}) tel que (d) et (d') soient toutes les deux tangentes à (\mathcal{C}). Quelle est la position de son centre ?

13 Cercles tangents intérieurement

Une droite (d) est tangente en un point A à deux cercles distincts (\mathcal{C}_1) et (\mathcal{C}_2), situés du même côté de (d) . O_1 et O_2 sont les centres respectifs des cercles (\mathcal{C}_1) et (\mathcal{C}_2).



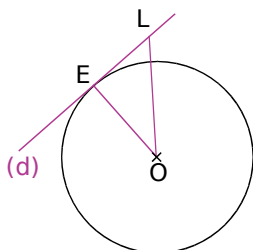
Démontre que les trois points A , O_1 et O_2 sont alignés.

14 Un quadrilatère bien connu

- a. Trace un cercle (\mathcal{C}) de centre O et deux rayons $[OA]$ et $[OB]$ perpendiculaires. Trace les tangentes à (\mathcal{C}) passant par A et B et place M , leur point d'intersection.
- b. Quelle est la nature du quadrilatère $OAMB$? Justifie.

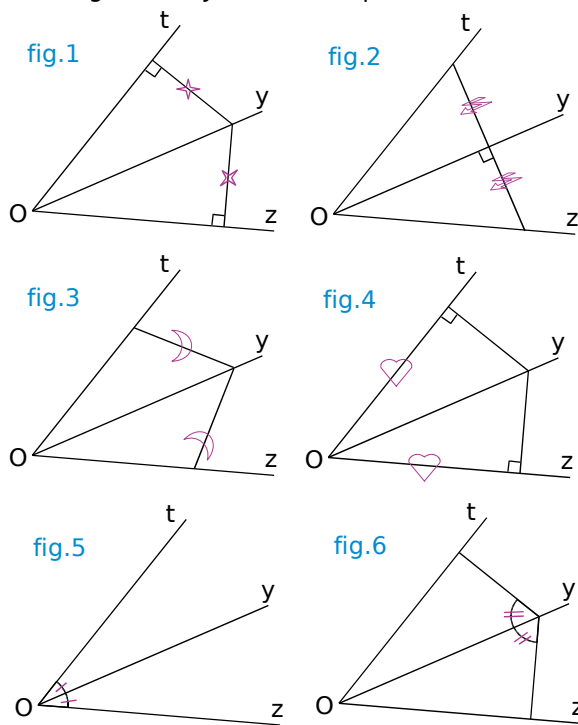
- 15 Sur la figure ci-contre, (d) est la tangente en E au cercle (\mathcal{C}) de centre O et L est un point appartenant à (d) tel que $\widehat{EOL} = 38^\circ$.

Calcule, en justifiant, la mesure de l'angle \widehat{OLE} .

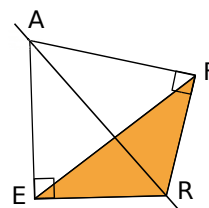


Bissectrices et cercle inscrit

- 16 Pour chacune des six figures ci-dessous, indique si la demi-droite $[Oy)$ est la bissectrice de l'angle \widehat{tOz} . Justifie tes réponses.

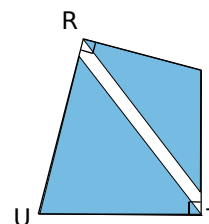


- 17 Sur la figure ci-contre, la droite (AR) est la bissectrice de l'angle \widehat{EAF} . Démontre que le triangle FER est isocèle en R .



- 18 Deux triangles isocèles bleus de sommets principaux S et U recouvrent presque entièrement le quadrilatère $RSTU$.

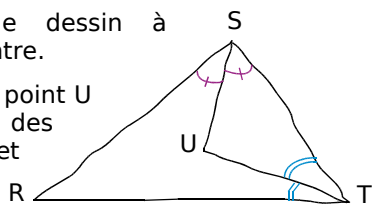
Le point U appartient-il à la bissectrice de \widehat{RST} ? Justifie.



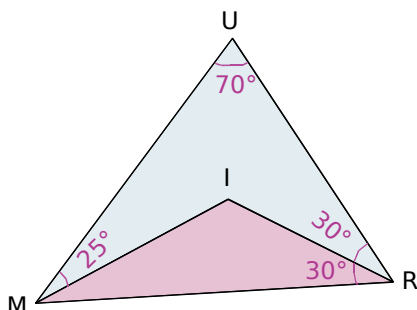
- 19 Trace un cercle (\mathcal{C}) de centre O puis place deux points A et B non diamétralement opposés sur ce cercle. Trace les tangentes en A et en B au cercle (\mathcal{C}) et place M , leur point d'intersection. Démontre que le point O appartient à la bissectrice de l'angle \widehat{AMB} .

20 Observe le dessin à main levée ci-contre.

Démontre que le point U est équidistant des droites (RS) et (RT).



21 Une histoire d'angles



a. Détermine, en justifiant, la mesure de l'angle \widehat{IMR}

b. Que représente le point I pour le triangle MUR ? Justifie.

c. Déduis-en les mesures des angles \widehat{MUI} et \widehat{MIU} .

22 Cercle inscrit

Dans chaque cas, construis le triangle ABC puis son cercle inscrit.

a. $AC = 8$ cm, $\widehat{BAC} = 60^\circ$ et $\widehat{ACB} = 50^\circ$.

b. $AC = 10$ cm, $AB = 8$ cm et $\widehat{BAC} = 45^\circ$.

c. ABC est isocèle en A tel que $AB = 9$ cm et $BC = 6$ cm.

d. ABC est un triangle équilatéral de côté 7,5 cm.

23 Trace un triangle dont le cercle inscrit a un rayon de 2,7 cm.

24 Une histoire d'angles (bis)

a. Trace un triangle ABC rectangle en A tel que $AB = 8$ cm et $\widehat{ABC} = 30^\circ$.

Trace les bissectrices des angles \widehat{ABC} et \widehat{ACB} .

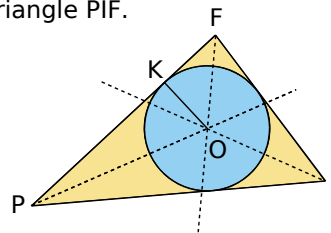
b. On appelle I le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC. Calcule, dans cet ordre, les angles \widehat{ABC} , \widehat{ICA} , \widehat{CAI} et \widehat{AIC} .

25 Une histoire d'angles (ter)

Dans la figure ci-dessous, K est le point de contact du segment [PF] et du cercle de centre O, inscrit dans le triangle PIF.

$$\widehat{KPO} = 23^\circ$$

$$\widehat{KOF} = 38^\circ$$



a. Calcule la mesure de l'angle \widehat{OFK} . Justifie.

b. Déduis-en la mesure de l'angle \widehat{OIF} . Justifie.

26 Soient ABC un triangle isocèle en A et M le centre du cercle (\mathcal{C}) , inscrit dans le triangle ABC.

On note m la mesure en degrés de l'angle \widehat{BAM}

a. Fais une figure et place J le point de contact du segment [AB] avec le cercle (\mathcal{C}) .

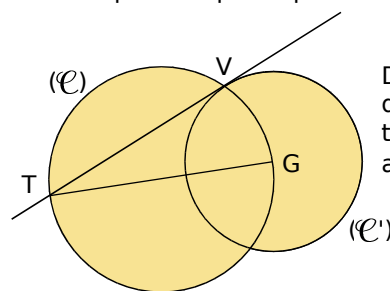
b. Démontre que $\widehat{AMJ} = 90 - m$.

c. Démontre que $\widehat{ABC} = \frac{180 - 2m}{2}$.

d. Déduis-en que $\widehat{AMJ} = \widehat{ABC}$.

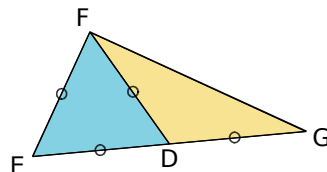
Exercices de synthèse

27 (\mathcal{C}) est un cercle de diamètre [GT] et V est un point de ce cercle. (\mathcal{C}') est le cercle de centre G passant par le point V.



Démontre que la droite (VT) est tangente en V au cercle (\mathcal{C}) .

28 Sachant que le périmètre du triangle DEF ci-dessous est égal à 18 cm, détermine à 0,01 cm près la distance du point G à la droite (EF). Justifie.



29 Construire une tangente... sans équerre !

But : Un cercle de centre O et passant par A étant donné, on souhaite construire la tangente en A au cercle sans utiliser l'équerre.

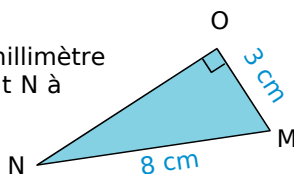
a. Fais une figure et place un point M sur le cercle tel que $AM = OM$.

b. Construis le point N symétrique de O par rapport M .

Démontre que la droite (AN) est la tangente cherchée.

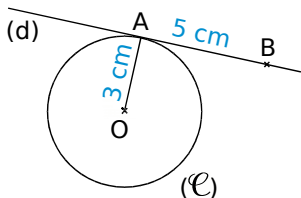
30 On considère le triangle rectangle NOM représenté ci-contre.

Calcule l'arrondi au millimètre de la distance du point N à la droite (OM) .



31 Dans la figure ci-dessous, la droite (d) est la tangente en A au cercle (\mathcal{C}) de centre O et de rayon 3 cm. D'autre part, $AB = 5$ cm.

Calcule la longueur OB , arrondie au millimètre.



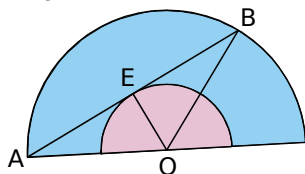
32 Soit (\mathcal{C}) un cercle de diamètre $[AB]$. E est un point de (\mathcal{C}) distinct de A et de B . On appelle (\mathcal{C}') le cercle de diamètre $[AE]$ et (d) la tangente en A au cercle (\mathcal{C}') .

a. Fais une figure.

b. Démontre que les droites (d) et (EB) sont parallèles.

33 Dans la figure ci-dessous, un segment $[AB]$ de longueur 15 cm a ses extrémités sur un demi-cercle de centre O et de rayon $8,5$ cm. Le milieu E de $[AB]$ appartient au demi-cercle de centre O et de rayon 4 cm.

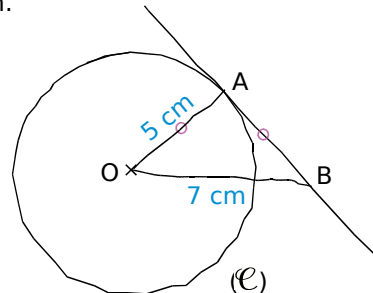
Démontre que la droite (AB) est tangente au cercle de centre O et de rayon 4 cm.



34 ULM est un triangle tel que $LM = 28$, $UL = 45$ et $UM = 53$.

Quelle est la distance du point U à la droite (LM) ? Justifie.

35 Dans le dessin à main levée suivant, A est un point d'un cercle (\mathcal{C}) de centre O et de rayon 5 cm. Le point B est tel que $AB = OA$ et $OB = 7$ cm.



a. Fais une figure en vraie grandeur. Quelle conjecture peut-on faire au sujet de la droite (AB) et du cercle (\mathcal{C}) ?

b. Cette conjecture est-elle vraie ? Justifie.

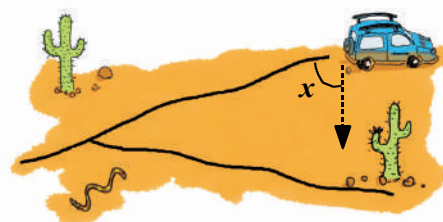
36 Construis un cercle (\mathcal{C}) de centre P et de rayon 24 mm et place B un point de (\mathcal{C}) .

a. Trace (d) , la tangente en B au cercle (\mathcal{C}) et place un point M sur (d) tel que $\widehat{BPM} = 66^\circ$.

b. Calcule PM et donne son arrondi au mm.

c. Déduis-en la mesure arrondie au mm du segment $[MB]$.

37 Lors d'un rallye dans le désert, un copilote n'a pas vu qu'il fallait prendre à droite à une bifurcation.



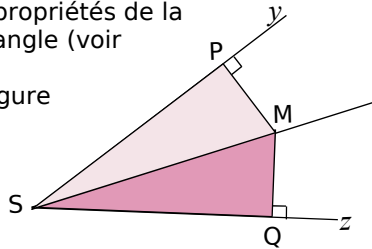
Les deux pistes sont rectilignes.

Ils se rendent compte de l'erreur et s'arrêtent après avoir parcouru 43 km sur la mauvaise piste. Leur carte indique qu'ils se trouvent à 14 km de la bonne. Calcule la mesure de l'angle x , qui donne la direction permettant de rejoindre la bonne piste en effectuant le moins de chemin possible.



38 Propriétés de la bissectrice

Démontrons les propriétés de la bissectrice d'un angle (voir Méthode 3).
Considérons la figure ci-contre :



Propriété directe

Dans cette première partie, M est situé à la même distance des côtés $[Sy)$ et $[Sz)$ de l'angle.

- Démontre que les longueurs des côtés des triangles PSM et MSQ sont identiques.
- Que peut-on en déduire concernant les mesures des angles \widehat{PSM} et \widehat{MSQ} ? Où se trouve alors le point M ?
- Écris la propriété que tu viens de démontrer.

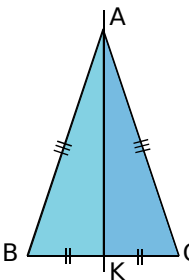
Propriété réciproque

Dans cette seconde partie, on considère la même figure de départ mais on suppose dorénavant que (SM) est la bissectrice de \widehat{PSQ} .

- Démontre que $\widehat{PSM} = \widehat{MSQ}$ et déduis-en que $\widehat{SMP} = \widehat{SMQ}$.
- Que peut-on en déduire concernant les triangles PSM et MSQ ? Que peut-on alors dire de PM et QM ?
- Écris la propriété que tu viens de démontrer.

39 Droites remarquables et triangle isocèle

Dans la figure ci-dessous, ABC est un triangle isocèle en A et K est le milieu de [BC].



- Rappelle la définition d'une médiane d'un triangle. La droite (AK) est-elle une médiane de ABC ? Justifie.
- Rappelle la définition de la médiatrice d'un segment. La droite (AK) est-elle la médiatrice du segment [BC] ? Justifie.

c. Rappelle la définition d'une hauteur dans un triangle. La droite (AK) est-elle une hauteur de ABC ? Justifie.

d. La droite (AK) est-elle la bissectrice issue de A dans le triangle ABC ? Justifie.

e. Dans un triangle isocèle, que dire de la droite passant par le sommet principal et par le milieu de la base ?

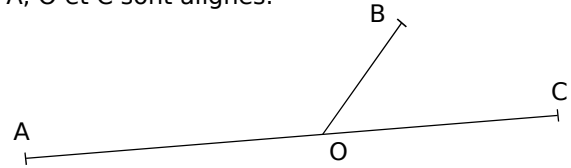
40 À la recherche du sommet perdu



Reproduis une figure analogue à la figure ci-dessus puis construis le point C tel que P soit le centre du cercle inscrit au triangle ABC. Justifie.

41 En angle droit

a. Reproduis la figure ci-dessous dans laquelle A, O et C sont alignés.



Trace $[Oy)$ et $[Oz)$, les bissectrices respectives des angles \widehat{AOB} et \widehat{BOC} .

b. Que peut-on dire de ces deux bissectrices ? Justifie ta réponse.

c. Place un point P sur $[OB]$. La perpendiculaire à (OB) passant par P coupe respectivement $[Oy)$ et $[Oz)$ en R et S. La perpendiculaire à (AC) passant par R coupe (AC) en M. La parallèle à (RM) passant par S coupe (AC) en N. Place les points R, S, M et N.

d. Démontre que $RM + SN = RS$.

42 Des bissectrices aux fractions

a. Trace un triangle ABC tel que $AB = 5$ cm, $AC = 3$ cm et $BC = 6,4$ cm. Trace la bissectrice issue de A du triangle ABC qui coupe $[BC]$ au point K.

Le but de cet exercice est de démontrer que $BK = 4$ cm.

b. Trace la demi-droite $[Bx)$ contenant le point A puis trace (d) la bissectrice de l'angle \widehat{CAx} . Démontre que (d) et (AK) sont perpendiculaires (tu peux t'inspirer de l'exercice 41).

c. Trace la parallèle à (AK) passant par C. Elle coupe $[Bx)$ en M. Démontre que (d) est la hauteur issue de A du triangle AMC.

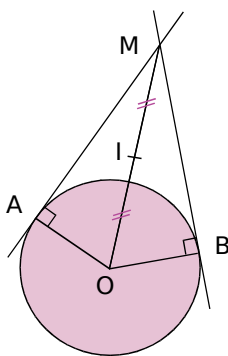
d. Déduis-en que AMC est un triangle isocèle en A.

e. Démontre que $\frac{BK}{BC} = \frac{BA}{BM}$. Déduis-en la valeur de BK.

43 Cercle tangent à une droite en un point donné et passant par un autre point donné

- Trace un triangle EFG tel que $EF = 5,5$ cm, $FG = 4,8$ cm et $EG = 7,3$ cm.
- Trace un cercle (\mathcal{C}) de centre O, tangent à (EF) en E et passant par le point G. Précise la position du point O. Justifie.
- Démontre que les droites (FG) et (OE) sont parallèles.

44 Quatre points « cocycliques »



A et B sont deux points distincts non diamétralement opposés d'un cercle (\mathcal{C}) de centre O. Le point M est le point d'intersection des tangentes à (\mathcal{C}) en A et B. Soit I le milieu du segment [OM]. Démontre que les points O, A et B appartiennent au cercle de centre I passant par M.

45 Tangentes passant par un point donné

- Trace un cercle (\mathcal{C}) de centre O et place un point M à l'extérieur du disque.
- Construis les deux tangentes à (\mathcal{C}) passant par M (tu peux t'inspirer de l'exercice 44). Justifie.

46 Un problème d'optimisation

Construction et conjecture

- Soit ABC un triangle rectangle en A et soit P un point du segment [BC]. Les parallèles à (AB) et (AC) passant par P coupent respectivement [AC] et [AB] en M et N. Construis cette figure à l'aide du logiciel TracenPoche. Trace le segment [MN].
- En utilisant le bouton « règle », affiche la longueur MN. Bouge le point P et détermine sa position pour que la longueur MN soit la plus petite possible. Affiche la mesure de l'angle \widehat{APB} pour cette position de P.
- Quelle conjecture peux-tu faire ?

Démonstration

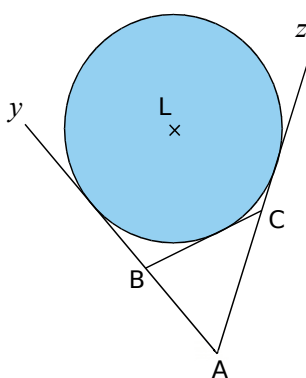
- Détermine la nature du quadrilatère MANP.
- Chercher à minimiser la longueur de [MN] revient à minimiser une autre longueur, laquelle ? Justifie.
- Démontre la conjecture faite au c. ci-dessus.

47 Cercles tangents extérieurement

- Trace un segment [AB] de longueur 6 cm et place un point P sur ce segment. Trace les cercles (\mathcal{C}_A) et (\mathcal{C}_B) de centres respectifs A et B passant par P.
- Démontre que P est le seul point commun aux cercles (\mathcal{C}_A) et (\mathcal{C}_B). On dit que ces cercles sont tangents extérieurement en P.
- Construis un cercle (\mathcal{C}_M) de centre M et de rayon 25 mm tangent extérieurement aux cercles (\mathcal{C}_A) et (\mathcal{C}_B).
- Quel est le périmètre du triangle MAB ?

48 Pour aller plus loin...

Cercles exinscrits à un triangle



Étant donné un triangle ABC, tout cercle tangent à l'un de ses côtés et aux prolongements des deux autres est appelé **cercle exinscrit au triangle**.

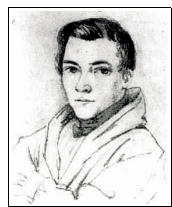
Ci-contre, on a tracé le cercle exinscrit relatif au côté [BC].

- En t'inspirant de la partie 2 de l'activité 4 de ce chapitre, démontre qu'il existe un seul cercle exinscrit relatif au côté [BC] dans le triangle ABC et précise la position du centre de ce cercle.

- Combien de cercles exinscrits totalise un triangle ?

Construction avec TracenPoche

- Avec le logiciel TracenPoche, trace trois droites sécantes deux à deux et formant un triangle ABC. Construis le cercle inscrit à ABC et les cercles exinscrits à ABC.
- Toujours dans TracenPoche, place M_A , M_B et M_C , les milieux respectifs des segments [BC], [AC] et [AB] puis construis le cercle circonscrit au triangle $M_A M_B M_C$. Quelle particularité semble posséder ce dernier cercle ?



Remarque : Cette conjecture a été prouvée par Karl Feuerbach (mathématicien allemand, 1800 - 1834).

(source : <http://fr.wikipedia.org>)

1 Plan de ville

Utiliser la carte à l'échelle 1/ 5 000 disponible à l'adresse : <http://manuel.sesamath.net> dans les compléments du niveau 4^e.

1^{re} partie : Trouver un lieu

Vous devez retrouver sur la carte les emplacements des lieux décrits ci-dessous.

- Le lieu de rendez-vous de Chaema et Abel : à 200 mètres de l'écluse de Condé, à 625 mètres du collège et à 400 mètres du poste de police.
- La maison de quartier : à 200 mètres au nord de la route de Saint-Gilles et à 325 mètres du château.
- La demeure de Callista : à 350 mètres du poste de police, le long de la rue tangente au gros rond-point.
- L'épicerie : à égale distance du canal, de la route de Saint-Gilles et de l'avenue principale.
- L'emplacement de pêche de Philippe : sur la rive sud de la Naise, à 200 mètres à l'est du point de cette rive qui est le plus près du centre d'équitation.

2^e partie : Repérer un lieu

f. Choisissez un nouveau lieu sur la carte et mesurez les distances entre ce lieu et les trois maisons A, B et C. Convertissez ces trois mesures en distances réelles et notez-les sur une feuille.

Échangez ensuite les mesures avec celles d'un autre groupe puis retrouvez le lieu repéré par les coordonnées.

g. Choisissez un autre lieu sur la carte et mesurez les distances entre ce lieu et la Naise, l'avenue principale et la route de Saint-Gilles. Convertissez ces trois mesures en distances réelles et notez-les sur une feuille.

Échangez ensuite les mesures avec celles d'un autre groupe puis retrouvez le lieu repéré par les coordonnées.

h. Choisissez un dernier lieu sur la carte, mesurez les distances entre ce lieu et :

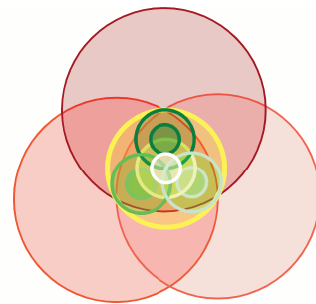
- la cabane,
- la bissectrice de la Naise et du canal, ne coupant pas l'avenue principale,
- la tangente au rond-point, passant par le poste de police et la plus proche de la caserne de pompiers.

Échangez ensuite les mesures avec celles d'un autre groupe puis retrouvez le lieu repéré par leurs mesures.

2 Belles figures


1^{re} partie : Suivre un programme de tracé

L'ensemble de la construction pourra soit être faite sur papier au crayon soit à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

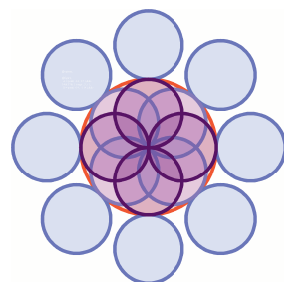
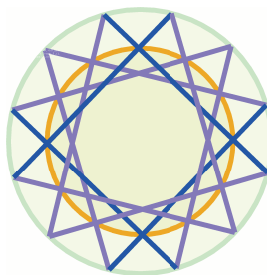


- Construisez un triangle équilatéral ABC puis tracez les trois cercles ayant pour centre chacun des sommets et passant par les autres sommets.
- Tracez les trois bissectrices de ce triangle. Les bissectrices issues de A, B et C coupent les côtés opposés respectivement en I, J et K.
- Tracez le cercle inscrit dans le triangle ABC puis en remarquant que les bissectrices du triangle sont aussi les médiatrices, tracez le cercle circonscrit au triangle ABC.
- Tracez les triangles équilatéraux AJK, IKB, CIJ et IJK. Tracez leurs cercles inscrits et circonscrits.
- Repassez les cercles de votre figure en couleur, effacez les segments et les points puis coloriez la figure à votre convenance.

2^e partie : Editer un programme de tracé

f. Choisissez une figure parmi celles proposées à l'adresse : <http://manuel.sesamath.net> dans les compléments du niveau 4^e. Puis, en vous aidant du bouton  du sixième menu du logiciel Tracenpoche, écrivez un programme de tracé de la figure.

La couleur des objets vous indique la chronologie du tracé, allant du rouge au violet dans l'ordre des couleurs de l'arc-en-ciel.



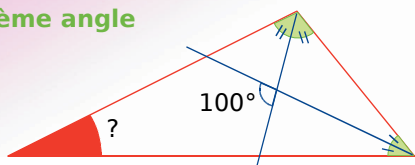
g. Échangez ensuite avec le programme de construction d'un autre groupe et tracez la figure du programme reçu sur papier ou à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

Se tester avec le QCM!

		R1	R2	R3	R4
1		La distance de A à la droite (BC) est [AB]	La distance de C à la droite (AB) est BC	La distance de C à la droite (AB) est AC	$M \in (BC)$ donc $AM \geq AB$
2	La longueur PH est la distance de P à la droite (d) dans le(s) cas suivant(s) :	$(PH) \perp (d)$			
3	Les points à égale distance d'une droite (Δ) se trouvent sur...	une droite unique	deux droites parallèles à (Δ)	deux droites perpendiculaires à (Δ)	un cercle
4	La droite (RT) est la tangente en T à un cercle de centre O donc...	le triangle RTO est rectangle en T	la droite (RT) touche le cercle en plusieurs points	pour tout point M de (RT), distinct de T, $OM > OT$	la distance de O à la droite (RT) est OT
5	Une droite et un cercle ont...	au plus deux points d'intersection	au moins deux points d'intersection	parfois un seul point d'intersection	parfois aucun point d'intersection
6	(GE) est la tangente en G au cercle de centre K passant par G dans les cas suivants :				
7	(d) est la bissectrice de l'angle \widehat{ABC} .	$M \in (d)$ donc $MA = MB$	M est à égale distance de (AB) et de (BC) donc $M \in (d)$	(d) passe par le milieu de [AC]	$M \in (d)$ donc M est à égale distance de (BA) et de (BC)
8		$UL = UK$ donc (UV) est la bissectrice de \widehat{LVK}	La droite (LV) est tangente au cercle de centre U passant par K	Les droites (UK) et (UL) sont tangentes au cercle de diamètre [UV]	(UV) est la bissectrice de \widehat{LVK} donc $\widehat{KUV} = \widehat{LUV}$
9	X est le centre du cercle inscrit dans le triangle WYZ donc...	X est à égale distance des trois côtés du triangle WYZ	X est le point d'intersection des médiatrices du triangle WYZ	(WX) est la bissectrice de l'angle \widehat{YWZ}	$WX = YX = ZX$

Récréation mathématique

Troisième angle



Quadrilatère particulier ?

Quelle est la nature du quadrilatère formé par l'intersection des bissectrices des angles d'un parallélogramme ?

Et si le parallélogramme est particulier ?

Pour aller plus loin

Égale distance

A, B et C sont trois points non alignés. Construis une droite passant par A qui soit à égale distance des points B et C. Y a-t-il plusieurs solutions ?



Narration de recherche

Domitille m'a dit ce matin avoir trouvé une formule "étonnante" :

– Avec aucun autre chiffre que des zéros et sans division, j'arrive à obtenir $\frac{1}{2}$, a-t-elle dit.

Elle a écrit la formule sur un papier en notant les chiffres "zéro" au crayon et les autres symboles de la formule à l'encre.

J'ai mis le papier dans ma poche pour le regarder plus tard. Mais ce soir, avec la pluie, l'encre était partie. Il ne restait que les chiffres au crayon. J'ai réussi à déchiffrer en tout soixante chiffres "zéro".

Quelle était la formule de Domitille ?

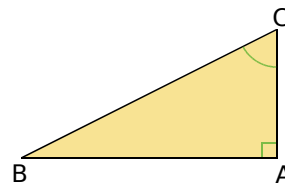
Lorsque vous l'aurez trouvée, vous constaterez qu'avec le même principe, elle aurait pu trouver le même résultat en utilisant moins de chiffres "zéro".

Quel est le nombre minimum de chiffres "zéro" à utiliser ?

Activité 1 : Les mots pour le dire...

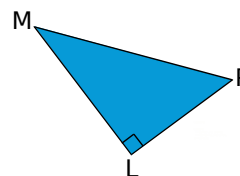
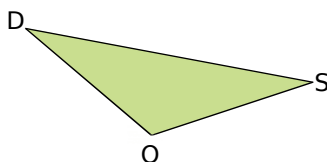
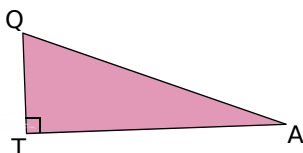
1. Vocabulaire

- Sur ton cahier, trace une figure analogue à celle ci-contre et repasse en rouge les côtés de l'angle \widehat{ACB} .
- Quelle est la nature du triangle ABC ? Comment s'appelle le côté [BC] ?
- Le côté [AC] est appelé le côté adjacent à l'angle \widehat{ACB} . Nomme le côté adjacent à l'angle \widehat{ABC} .



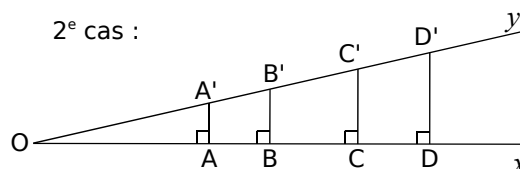
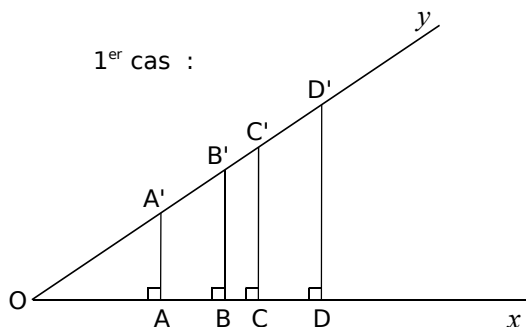
2. Côté adjacent

Pour les trois triangles ci-dessous, écris le plus de phrases possibles contenant le mot « hypoténuse » puis fais de même avec l'expression « côté adjacent ».



Activité 2 : Cosinus d'un angle aigu

Les perpendiculaires en A, B, C et D à la demi-droite [Ox) coupent la demi-droite [Oy) respectivement en A', B', C' et D'.



Pour chaque cas :

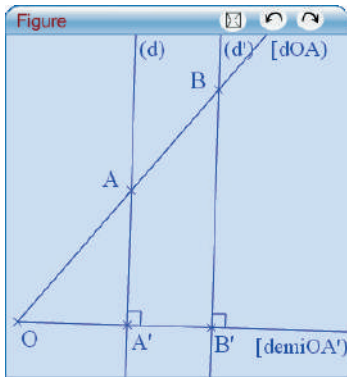
- Complète le tableau suivant :

OA =	OB =	OC =	OD =
OA' =	OB' =	OC' =	OD' =
$\frac{OA}{OA'}$ =	$\frac{OB}{OB'}$ =	$\frac{OC}{OC'}$ =	$\frac{OD}{OD'}$ =

- Que dire des rapports $\frac{OA}{OA'}$; $\frac{OB}{OB'}$; $\frac{OC}{OC'}$ et $\frac{OD}{OD'}$? Ces rapports dépendent-ils des points A, B, C et D choisis sur la demi-droite [Ox) ? De quoi dépendent-ils alors ?
- Mesure l'angle \widehat{xOy} puis tape sur ta calculatrice (fais attention qu'elle soit en mode degrés) $\cos \widehat{xOy}$ en remplaçant \widehat{xOy} par la valeur mesurée. Que remarques-tu ?

Activité 3 : En route vers la preuve !

1. Conjecture avec TracenPoche



- Trace une demi-droite $[OA')$ puis construis la perpendiculaire à $[OA')$ passant par A' . Place un point A sur cette perpendiculaire. Trace la demi-droite $[OA]$. Choisis un point B sur $[OA]$ puis nomme B' l'intersection de $[OA')$ et de la perpendiculaire à $[OA)$ passant par B .
- Que dire des triangles OAA' et OBB' ? Que dire des angles $\widehat{AOA'}$ et $\widehat{BOB'}$? Justifie. Affiche la mesure de cet angle dans TracenPoche.
- À l'aide de la fenêtre *Analyse*, affiche les valeurs des rapports $\frac{OA'}{OA}$ et $\frac{OB'}{OB}$.

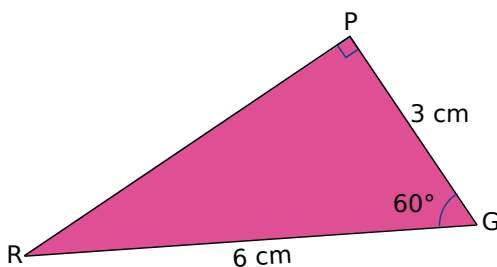
d. Déplace le point A . Que remarques-tu ? Déplace le point B . Que remarques-tu ?

2. Démonstration

- À l'aide des informations portées sur la figure, démontre que $(AA') \parallel (BB')$.
- Démontre alors que $\frac{OA'}{OB'} = \frac{OA}{OB}$ et complète l'égalité $OA' \times OB = \dots$
- Démontre que $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB}$. Qu'en conclus-tu ?
- Ce rapport est appelé le cosinus de l'angle $\widehat{AOA'}$. Dans le triangle rectangle OAA' , exprime le cosinus de l'angle $\widehat{AOA'}$ en fonction de son hypoténuse et du côté adjacent à cet angle.

Activité 4 : Cosinus et calculatrice

1. À partir des mesures



- Quelle est l'hypoténuse du triangle rectangle GRP ? Quel est le côté adjacent à l'angle \widehat{PGR} ?
- Exprime le cosinus de l'angle \widehat{PGR} en fonction des longueurs GP et GR puis calcule-le.
- En utilisant la calculatrice, calcule $\cos \widehat{PGR}$ en remplaçant \widehat{PGR} par sa mesure. Que constates-tu ?

2. À l'aide de la calculatrice

Complète le tableau suivant à l'aide de la calculatrice. Tu donneras la valeur arrondie du cosinus de l'angle à 0,01 près et la valeur arrondie de l'angle au degré près.

x	25°	1°			60°		45°
$\cos x$			0,78	0,99		0,45	

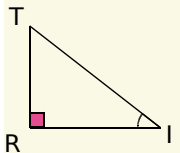
Méthode 1 : Écrire la relation liant angle et longueurs à l'aide du cosinus

À connaître :

Dans un **triangle rectangle**, le **cosinus d'un angle aigu** est le quotient de la longueur du côté adjacent à cet angle par la longueur de l'hypoténuse.

Remarque : Le cosinus d'un angle aigu est toujours compris entre 0 et 1.

Exemple : Le triangle TRI est rectangle en R. Écris la formule donnant le cosinus de l'angle \widehat{TIR} .

	<p>L'hypoténuse est le côté opposé à l'angle droit. Dans le triangle TRI l'hypoténuse est donc [IT].</p> <p>Le côté adjacent à l'angle \widehat{TIR} est le côté joignant le sommet de l'angle droit au sommet de l'angle \widehat{TIR}. Le côté adjacent à l'angle \widehat{TIR} est donc [RI].</p>	<p>Le triangle TRI est rectangle en R donc</p> $\cos \widehat{TIR} = \frac{\text{côté adjacent à } \widehat{TIR}}{\text{hypoténuse}}$ $\cos \widehat{TIR} = \frac{RI}{TI}.$
---	---	---

À toi de jouer

1 ALI est un triangle rectangle en L. Écris les rapports de longueurs donnant $\cos \widehat{IAL}$ et $\cos \widehat{AIL}$.

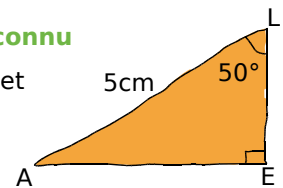
2 ZOE est un triangle rectangle en Z. Les rapports suivants sont-ils les cosinus d'un angle aigu de ZOE et si oui lesquels : $\frac{OZ}{OE}$; $\frac{EO}{EZ}$; $\frac{EZ}{EO}$ et $\frac{ZO}{ZE}$?

Méthode 2 : Calculer des longueurs

Exemple 1 : Calcul de la longueur du côté adjacent à l'angle connu

On considère un triangle LEA rectangle en E tel que $LA = 5 \text{ cm}$ et $\widehat{ELA} = 50^\circ$.

Calcule la longueur du côté [LE] arrondie au millimètre.



Le triangle LEA est rectangle en E donc

→ On cite les hypothèses : un triangle rectangle.

$$\cos \widehat{ELA} = \frac{\text{côté adjacent à } \widehat{ELA}}{\text{hypoténuse}}$$

→ On écrit le cosinus d'un angle : la longueur cherchée doit apparaître dans le rapport.

$$\cos \widehat{ELA} = \frac{EL}{LA}$$

$$EL = LA \times \cos \widehat{ELA}$$

→ On applique la règle des produits en croix.

$$EL = 5 \times \cos 50^\circ$$

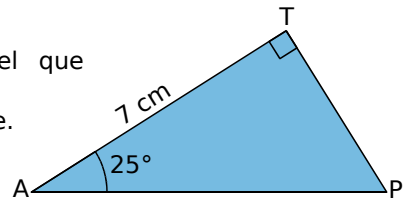
→ On vérifie que la calculatrice est en degrés. On saisit $5 \times \cos 50$.

$$EL \approx 3,2 \text{ cm}$$

→ EL est inférieur à l'hypoténuse : le résultat est cohérent.

Exemple 2 : Calcul de la longueur de l'hypoténuse

On considère PAT un triangle rectangle en T tel que $AT = 7$ cm et $\widehat{PAT} = 25^\circ$.
Calcule la longueur du côté $[PA]$ arrondie au millimètre.



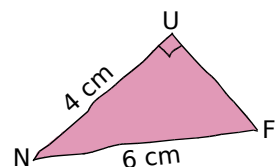
Le triangle PAT est rectangle en T donc	→	On cite les hypothèses : un triangle rectangle.
$\cos \widehat{PAT} = \frac{\text{côté adjacent à } \widehat{PAT}}{\text{hypoténuse}}$	→	On écrit le cosinus de l'angle connu.
$\cos \widehat{PAT} = \frac{AT}{PA}$		
$PA = \frac{AT}{\cos \widehat{PAT}}$	→	On applique la règle des produits en croix.
$PA = \frac{7}{\cos 25^\circ}$	→	On vérifie que la calculatrice est en degrés. On saisit $7 \div \cos 25$
$PA \approx 7,7$ cm	→	PA est supérieure à AT : le résultat est cohérent.

À toi de jouer

- 3** Le triangle NIV est rectangle en N , $VI = 10$ cm et l'angle \widehat{VIN} mesure 12° . Donne la valeur arrondie au dixième de la longueur NI .
- 4** Le triangle AUE est rectangle en U : $UA = 3$ cm et $\widehat{EAU} = 19^\circ$. Donne la valeur arrondie au dixième de la longueur de $[EA]$.

Méthode 3 : Calculer la mesure d'un angle

Exemple : Soit FUN un triangle rectangle en U tel que $NF = 6$ cm et $UN = 4$ cm.
Calcule la mesure de l'angle \widehat{UNF} arrondie au degré. Déduis-en la valeur approchée au degré près de la mesure de l'autre angle aigu du triangle.



Le triangle FUN est rectangle en U donc	→	On cite les hypothèses : un triangle rectangle.
$\cos \widehat{UNF} = \frac{\text{côté adjacent à } \widehat{UNF}}{\text{hypoténuse}}$	→	On écrit le cosinus de l'angle cherché.
$\cos \widehat{UNF} = \frac{UN}{NF}$		
$\cos \widehat{UNF} = \frac{4}{6}$	→	On vérifie que la calculatrice est en degrés. On saisit $\cos^{-1}(4 \div 6)$
$\widehat{UNF} \approx 48^\circ$		

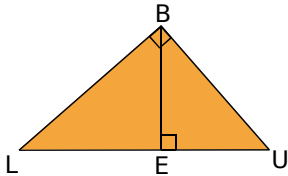
Dans un triangle rectangle, les angles aigus sont complémentaires.
Ainsi $\widehat{UNF} + \widehat{NFU} = 90^\circ$ soit $\widehat{NFU} \approx 90^\circ - 48^\circ \approx 42^\circ$.

À toi de jouer

- 5** Le triangle EXO est rectangle en X : $OX = 3$ cm et $OE = 7$ cm. Calcule les valeurs arrondies au degré de la mesure des angles \widehat{EOX} et \widehat{XEO} .

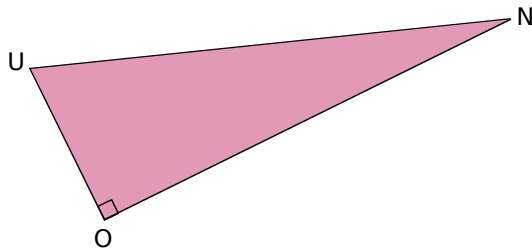
Écrire le cosinus

1 Attention au triangle !



- Dans le triangle rectangle BEU :
 - quelle est l'hypoténuse ?
 - quel est le côté adjacent à l'angle \widehat{BUE} ?
 - quel est le côté adjacent à l'angle \widehat{EBU} ?
- Dans le triangle rectangle BEL :
 - quelle est l'hypoténuse ?
 - quel est le côté adjacent à l'angle \widehat{BLE} ?
 - quel est le côté adjacent à l'angle \widehat{EBL} ?
- Dans le triangle rectangle BLU :
 - quelle est l'hypoténuse ?
 - quel est le côté adjacent à l'angle \widehat{BLU} ?
 - quel est le côté adjacent à l'angle \widehat{BUL} ?

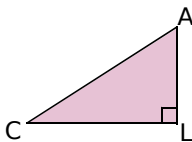
2 Histoire d'angles



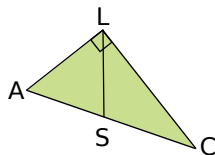
- Dans le triangle ONU :
 - quel est le côté adjacent à l'angle \widehat{ONU} ?
 - quel est le côté adjacent à l'angle \widehat{OUN} ?
- Écris le cosinus de l'angle \widehat{ONU} et le cosinus de l'angle \widehat{OUN} .

3 Dans chaque cas, écris, si possible, le cosinus de l'angle \widehat{LAC} .

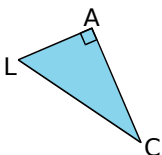
a.



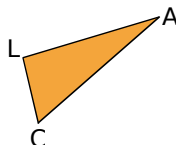
b.



c.



d.



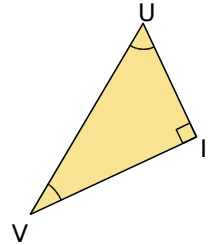
4 SEL est un triangle rectangle en S. Écris le cosinus de l'angle \widehat{SEL} .

5 Quelle écriture pour quel angle ?

De quel angle calcule-t-on le cosinus lorsqu'on écrit :

a. $\frac{UI}{UV}$?

b. $\frac{VI}{VU}$?



Avec la calculatrice

6 À l'aide de ta calculatrice, donne l'arrondi au centième des cosinus suivants :

$\cos 78^\circ$ $\cos 35^\circ$ $\cos 56^\circ$ $\cos 12^\circ$

7 À l'aide de ta calculatrice, donne, si possible, l'arrondi à l'unité des angles dont le cosinus vaut :

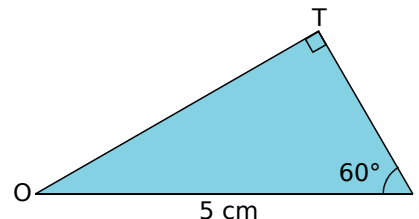
0,5 0,1 0,78 1,7

8 Complète le tableau suivant avec des tronçures au dixième :

Angle (en degrés)	26			72
Cosinus de l'angle		0,7	0,01	

Calculs de longueurs

9 Calcul de la longueur du côté adjacent

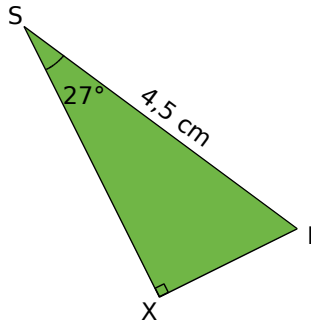


- Écris le cosinus de l'angle \widehat{TIO} .
- Déduis-en la longueur TI.
- Quelle est la mesure de l'angle \widehat{TOI} ?
- Écris le cosinus de l'angle \widehat{TOI} .
- Déduis-en la longueur TO.

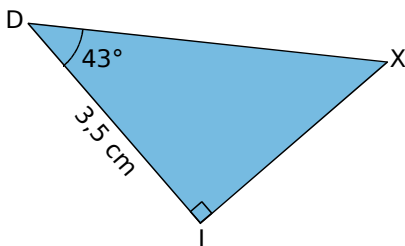


10 Calcul de la longueur du côté adjacent, (bis)

- Écris le cosinus de l'angle \widehat{ISX} .
- Déduis-en la longueur SX , au millimètre près.

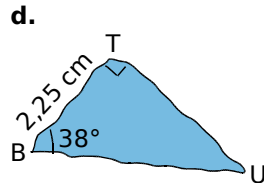
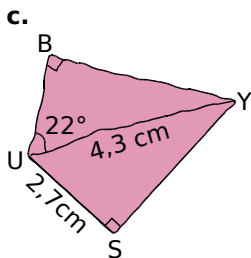
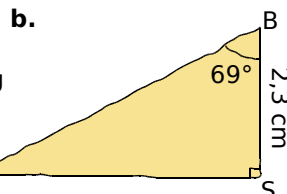
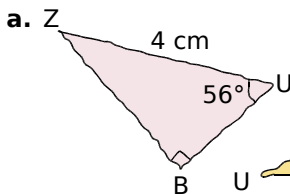


11 Calcul de l'hypoténuse



- Écris le cosinus de l'angle \widehat{IDX} .
- Déduis-en l'arrondi au dixième de la longueur DX .

12 Dans chaque cas, calcule BU (donne l'arrondi au dixième).



13 BON est un triangle rectangle en O tel que $ON = 4$ cm et $\widehat{ONB} = 40^\circ$. Donne la troncature au centième de BN .

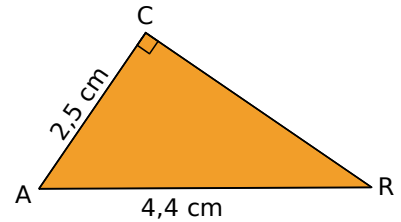
14 TER est un triangle rectangle en E tel que $TR = 6$ cm et $\widehat{TRE} = 50^\circ$. Donne l'arrondi au centième de ER .

Calculs

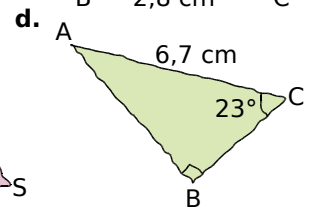
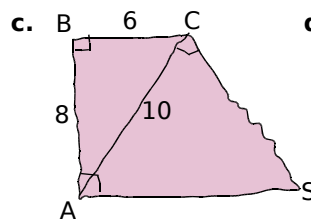
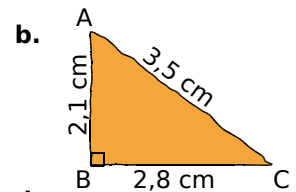
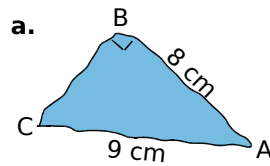
de la mesure d'un angle

15 Quand les côtés de l'angle sont connus

- Écris le cosinus de l'angle \widehat{CAR} .
- Déduis-en la mesure arrondie au degré de l'angle \widehat{CAR} .



16 Dans chaque cas, calcule la mesure de l'angle \widehat{BAC} , si possible (donne l'arrondi à l'unité).

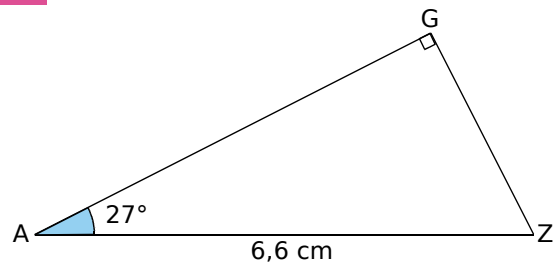


17 FER est un triangle rectangle en E tel que $FE = 3$ cm ; $ER = 4$ cm et $FR = 5$ cm. Donne la troncature au dixième des angles de ce triangle.

Calculs

d'angles et de longueurs

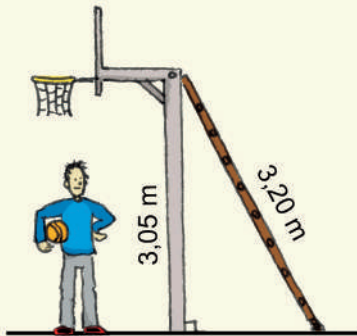
18 Dans le GAZ !



- Détermine la valeur de \widehat{GZA} .
- Donne l'arrondi au dixième de GZ .

19 Extrait du Brevet

a. Paul veut installer chez lui un panier de basket. Il doit le fixer à 3,05 m du sol. L'échelle dont il se sert mesure 3,20 m de long. À quelle distance du pied du mur doit-il placer l'échelle pour que son sommet soit juste au niveau du panier? Donner une valeur approchée au cm près.



b. Calculer l'angle formé par l'échelle et le sol. Donner une valeur approchée au degré près.

20 Histoire de bougies !

a. Sur le gâteau d'anniversaire de Luc, une bougie de 5 cm de hauteur n'était pas verticalement plantée. Elle a déposé de la cire à 1 cm de son pied. Quel est son angle d'inclinaison par rapport à l'horizontale ?



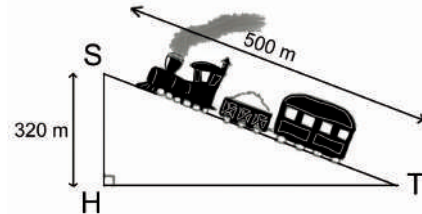
b. Le support plastique de la bougie a un rayon de 0,4 cm. De combien peut-on, au maximum, incliner la bougie pour que la cire ne tombe pas sur le gâteau ?

21 Coup de vent !

Une bille roule sur la largeur d'une table rectangulaire de 80 cm de large. Lorsque la bille arrive au milieu de la largeur de la table, un ventilateur la dévie de son parcours d'un angle de 20° . Quelle longueur parcourt finalement la bille ?

22 A toute vapeur !

Pour s'élever de 320 m, un train parcourt une montée de 500 m.

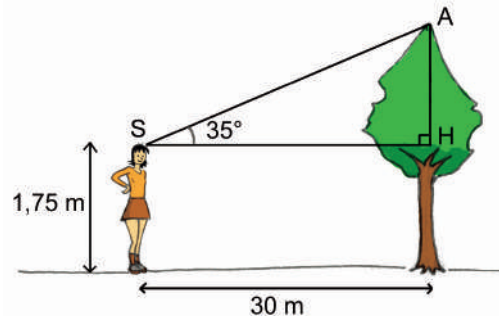


a. Détermine l'arrondi à l'unité de la mesure de l'angle \widehat{TSH} .

b. Déduis-en l'arrondi à l'unité de l'inclinaison de la pente par rapport à l'horizontale.

23 Hauteur d'un arbre

Sophie, qui mesure 1,75 m est à 30 m d'un arbre. L'angle entre l'horizontale et le sommet de l'arbre est de 35° .

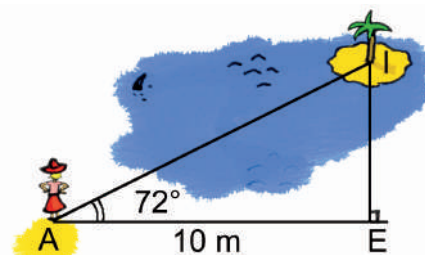


a. Donne l'arrondi au centième de la longueur AH.

b. Déduis-en la hauteur de l'arbre.

24 Enchaînement de calculs

Pour connaître la distance qui la sépare d'une île (I), Armelle vise un arbre de deux endroits distants de 10 m sur une berge. Elle a pris les mesures données sur le dessin suivant :



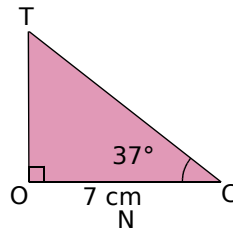
a. Calcule la troncature à l'unité de la longueur AI.

b. Déduis-en la troncature à l'unité de la longueur IE.



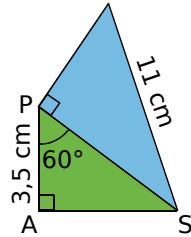
25 Calcul en deux temps

- Calcule la longueur TC, arrondie au dixième.
- Déduis-en la longueur TO, arrondie au millimètre.



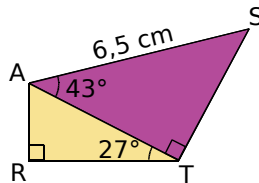
26 Avec deux triangles

- Calcule la longueur PS.
- Déduis-en les mesures des angles \widehat{PSN} et \widehat{PNS} arrondies au degré.

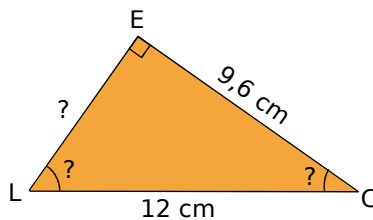


27 Avec deux triangles (bis)

- Calcule AT. Tu en donneras l'arrondi au millimètre.
- Déduis-en la mesure de RT arrondie au millimètre.



28 Données manquantes



Calcule les mesures manquantes de la figure. Arrondis les mesures des angles au degré.

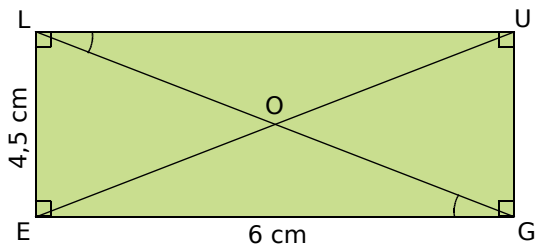
29 Dans un cercle

- Trace un segment [AB] qui mesure 8 cm. Construis le cercle (\mathcal{C}) de diamètre [AB]. Place un point N sur (\mathcal{C}) tel que AN = 7 cm.
- Montre que le triangle BAN est rectangle.
- Calcule les mesures des angles \widehat{BAN} et \widehat{ABN} arrondies au degré.

30 Avec Pythagore

- Construis un triangle GAO tel que GA = 10,5 cm ; OG = 8,4 cm et AO = 6,3 cm.
- Quelle est la nature de GAO ? Justifie.
- Calcule la mesure de l'angle \widehat{AGO} arrondie au degré.

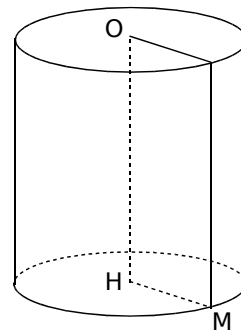
31 Dans un rectangle



Calcule les mesures des angles \widehat{LGE} et \widehat{GLU} . Tu arrondiras les résultats au degré.

32 Dans l'espace

On a représenté ci-dessous un cylindre de révolution de rayon de base HM = 9 cm et de hauteur OH = 17 cm.



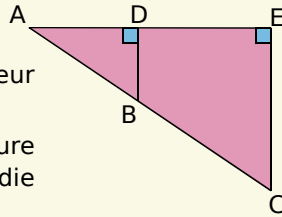
- Que peux-tu dire du triangle OMH ? Pourquoi ?
- Calcule, en justifiant, la longueur OM.
- Déduis des questions précédentes, la mesure de l'angle \widehat{HOM} . Tu donneras le résultat arrondi au degré.

33 Extrait du Brevet

- Construire le triangle EFG tel que EF = 12 cm, EG = 5 cm et FG = 13 cm.
- Prouver que le triangle EFG est rectangle en E.
- Calculer la mesure de l'angle \widehat{EFG} . Le résultat sera arrondi au degré.
- Placer le point B sur le segment [EF] tel que EB = 7 cm. Tracer la droite passant par B et parallèle au côté [FG]. Elle coupe le côté [EG] en M.
- Calculer la valeur exacte de BM puis donner l'arrondi au millimètre.

34 Extrait du Brevet

Les points A, B et C sont alignés ainsi que les points A, D et E. Les droites (BD) et (CE) sont perpendiculaires à la droite (AE). On a $AB = 2,5$ cm ; $BD = 1,5$ cm et $CE = 4,5$ cm.



- Calculer la longueur AD. Justifier.
- Déterminer la mesure de l'angle \widehat{BAD} arrondie au degré. Justifier.
- Calculer les longueurs AC et AE. Justifier.

35 Une course mythique

Lors d'une étape du Tour de France, les coureurs ont dû franchir le col du Tourmalet, situé à 2 115 m d'altitude. Le début de la montée commence à Sainte Marie de Campan à 857 m de haut. La distance parcourue par les cyclistes est alors de 17 km.



(On suppose que la route est en ligne droite.)

Calcule au degré près la mesure de l'angle \widehat{TSH} .

36 Influence du courant

Une personne traverse une rivière et est déportée par le courant d'un angle de 20° . Calcule la longueur L, arrondie au dixième, parcourue par ce nageur lorsqu'il traverse cette rivière large de 45 m. Tu feras un schéma pour représenter la situation.

(On suppose que les rives sont parallèles.)



37 Pentagone régulier

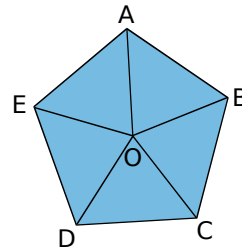
On veut calculer le périmètre du pentagone régulier ci-dessous.

Ce polygone est constitué de cinq triangles isocèles tels que :

$$OA = OB = OC = OD = OE ;$$

$$AB = BC = CD = DE = EA.$$

On sait aussi que $OA = 8$ cm et $\widehat{AOB} = 72^\circ$.

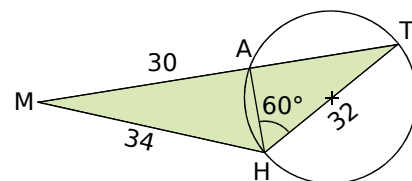


- Trace le triangle ABO sur une feuille blanche.
- Trace la bissectrice de l'angle \widehat{AOB} . Elle coupe [AB] en H. Quelle est la mesure des angles \widehat{AHO} et \widehat{AOH} ? Pourquoi ?
- Explique pourquoi H est le milieu de [AB].
- Calcule la mesure de [OH] arrondie au centième.
- Déduis-en la mesure de [AH] arrondie au centième.
- À l'aide des résultats des questions c. et e., calcule le périmètre du pentagone au millimètre près.

38 Questions enchaînées

Les longueurs sont exprimées en cm.

Le triangle AHT est inscrit dans un cercle de diamètre [HT]. Les points M, A et T sont alignés.



- Quelle est la nature du triangle AHT ? Justifie ta réponse.
- Calcule la longueur AH.
- Quelle est la nature du triangle MAH ? Pourquoi ?
- Calcule la mesure de l'angle \widehat{AMH} arrondie au degré.
- Calcule la longueur AT arrondie au dixième, de deux manières différentes.

1 Méthode d'Ératosthène

1^{re} partie : Historique

Faites une recherche afin de déterminer qui était Eratosthène, quand et où il a vécu et pourquoi son nom est connu.

2^e partie : Diamètre de la Terre

Pour résoudre ce problème, vous pouvez essayer toutes les méthodes qui vous viennent à l'esprit. Vous écrirez au fur et à mesure les détails de vos recherches.

Problème :

Eratosthène a réussi à calculer une approximation du diamètre de la Terre. Ci-dessous, des extraits d'un de ses manuscrits datant de 200 avant J.C. :

« Un jour dans l'année à Syène, le Soleil se reflète complètement dans l'eau d'un puits. Je peux donc considérer que les rayons du Soleil sont verticaux. »

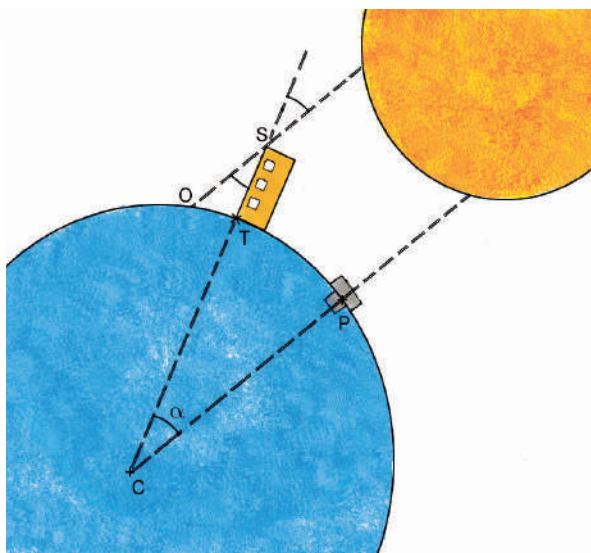
« Durant cette même journée à Alexandrie, un obélisque haut de 50 coudées fait une ombre horizontale de 6 coudées $\frac{1}{3}$. »

« J'estime la distance entre Syène et Alexandrie à 5 000 stades. »

Voici un schéma de la Terre retrouvé dans un parchemin d'Eratosthène. On y voit un puits dans la ville de Syène et un obélisque dans la ville d'Alexandrie.

a. Calculez une approximation du diamètre de la Terre à partir de ces données, sachant qu'un stade mesure 157,5 mètres.

b. Faites des recherches sur la valeur exacte du diamètre de la Terre. Qu'en pensez-vous ?



2 Théodolite

1^{re} partie : Qu'est ce que c'est ?

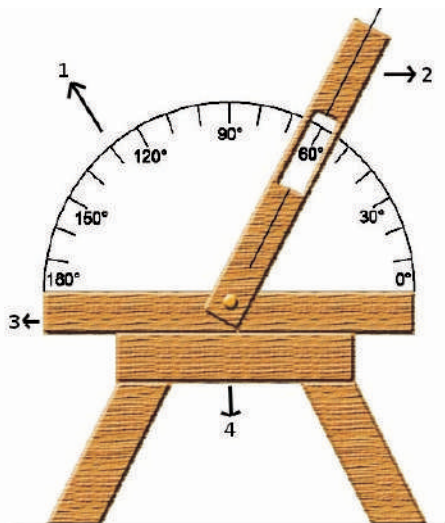
Au CDI, recherchez la définition d'un théodolite. À quoi sert-il ? Dans quels domaines l'utilise-t-on ?

2^e partie : Construction

a. Construisez un théodolite à l'aide des quelques indications ci-dessous.

Matériel : carton, attaches parisiennes, ciseaux, rapporteur, petit bâton de bois.

- La pièce 1 est un demi-cercle en carton sur lequel on colle une photocopie d'un rapporteur.
- La partie 2 est composée d'un morceau de carton avec une ouverture afin de lire l'angle exprimé en degré. Le trait correspond au viseur (utilisez le bâton en bois).
- Les parties 3 et 4 constituent la base et le trépied afin de pouvoir poser le théodolite à la verticale (la pièce 4 est optionnelle).

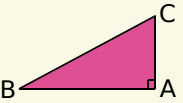
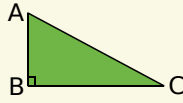
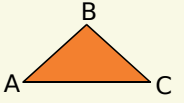
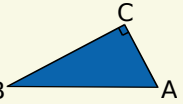
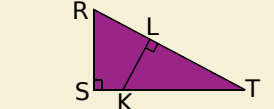
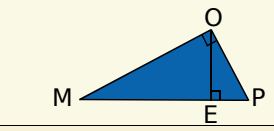


3^e partie : Utilisation

b. Sortez dans la cour de l'établissement.

- Placez votre théodolite sur un trépied. Il doit être à la fois parfaitement à la verticale (utilisez un fil à plomb) et à l'horizontale (utilisez un niveau à bulle).
- Mesurez la distance du théodolite au pied du bâtiment du collège. Mesurez la hauteur du théodolite par rapport au sol.
- À l'aide de votre instrument, mesurez l'angle formé entre l'horizontale et le haut du collège.
- Avec toutes ces données, calculez la hauteur du collège.

Se tester avec le QCM!

		R1	R2	R3	R4
1	[AB] est le côté adjacent à l'angle aigu \widehat{ABC} dans le triangle rectangle...				
2	PIE est rectangle en I donc...	$\cos \hat{E} = \frac{PI}{PE}$	$PE^2 = PI^2 + IE^2$	$\cos \hat{P} = \frac{PI}{PE}$	$\cos \hat{I} = \frac{IP}{IE}$
3	$6 = \frac{x}{7}$ donc...	$x = \frac{7}{6}$	$6 \times x = 7$	$x = 6 \times 7$	$\frac{7}{x} = \frac{1}{6}$
4	$0,7 = \frac{5}{a}$ donc...	$\frac{a}{5} = \frac{10}{7}$	$a \times 0,7 = 5$	$a = \frac{5}{0,7}$	$a = 7,1$
5	Dans le triangle FGH rectangle en G, on a...	$\cos \hat{F} = \frac{FH}{FG}$	$FG = FH \times \cos \hat{F}$	$FH = HG \times \cos \hat{H}$	$FH = \frac{FG}{\cos \hat{F}}$
6		$\cos \hat{T} = \frac{TL}{TK}$	$\cos \hat{T} = \frac{TR}{TS}$	$\frac{TL}{TK} = \frac{TS}{TR}$	$\cos \widehat{LRK} = \frac{LR}{KR}$
7	Avec la figure précédente, $\hat{T} = 25^\circ$, $TK = 8$ cm et $SK = 1,5$ cm donc...	$LT = 7,25$ cm	$LK = 8 \times 65^\circ$	$RT \times LT = 76$	$RL \approx 3,23$ cm
8	EDF est un triangle rectangle en D tel que $EF = 2,6$ cm et $DF = 1$ cm. On a alors...	$ED = 1$ cm	$\widehat{DEF} = 110^\circ$	$\cos \hat{E} = \frac{12}{13}$	$\hat{F} = 67^\circ$
9		$\frac{OE}{OM} = \frac{OM}{OP}$	$ME = 4$ cm et $OE = 3$ cm donc $\widehat{OME} \approx 37^\circ$	$PM = 9$ cm et $PO = 4$ cm donc $\widehat{MPO} = 63^\circ$	Les cosinus de \widehat{POE} et \widehat{OME} sont égaux
10	Vrai ou faux ?	$\cos 60^\circ = 0,5$	$\cos 70^\circ$ est le double de $\cos 35^\circ$	$\cos 50^\circ$ est la somme de $\cos 20^\circ$ et de $\cos 30^\circ$	Le cosinus d'un angle peut être égal à 1,2

Pour aller plus loin

Formule

Avec ta calculatrice, calcule $(\cos 30^\circ)^2 + (\cos 60^\circ)^2$ puis $(\cos 20^\circ)^2 + (\cos 70^\circ)^2$. Quelle conjecture peux-tu faire ?

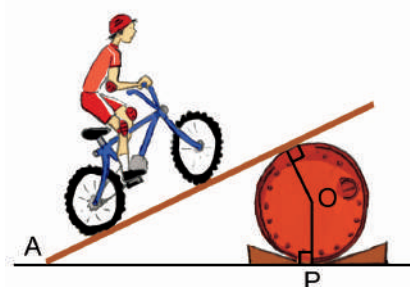
Démontre que cette conjecture est vraie.

Aide : travaille dans un triangle rectangle et utilise la définition du cosinus d'un angle aigu.



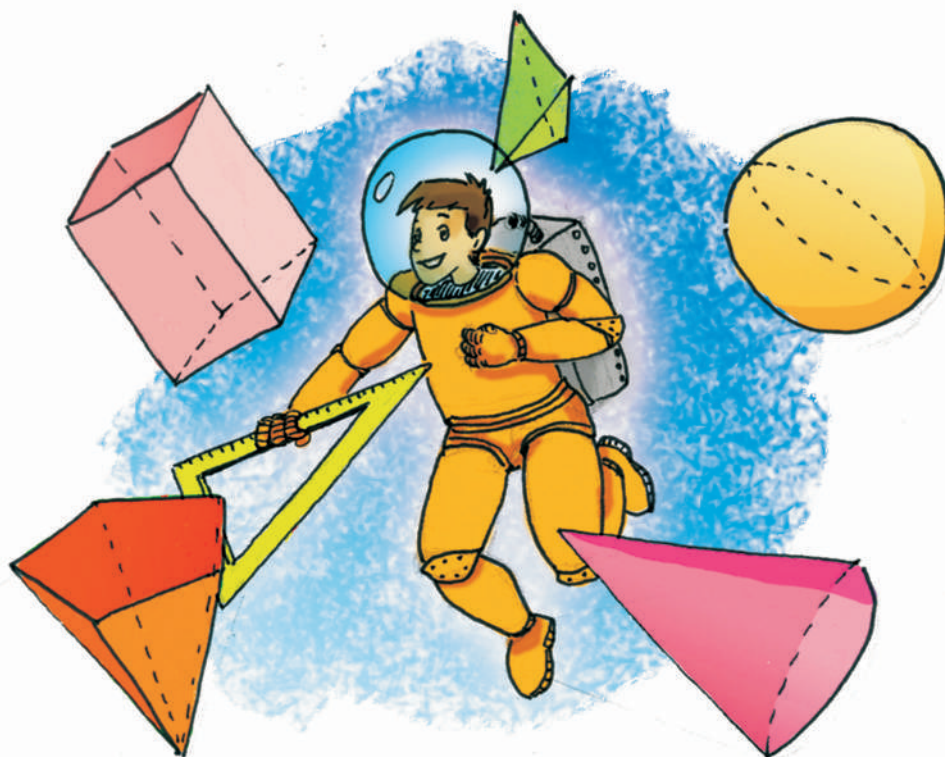
Pierre a fait un tremplin pour sauter avec son vélo : il a posé une planche sur un tonneau renversé. On donne $AP = 7$ m et $OP = 30$ cm.

Quelle est la mesure de l'angle formé par la planche et le sol ?



Pyramides et cônes

G5

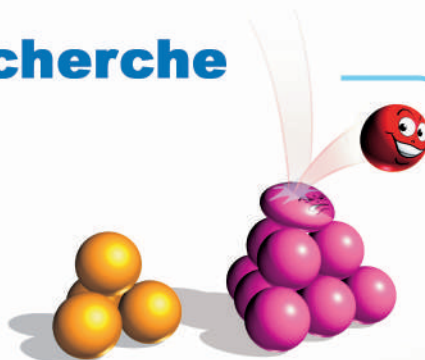


Narration de recherche

Sujet :

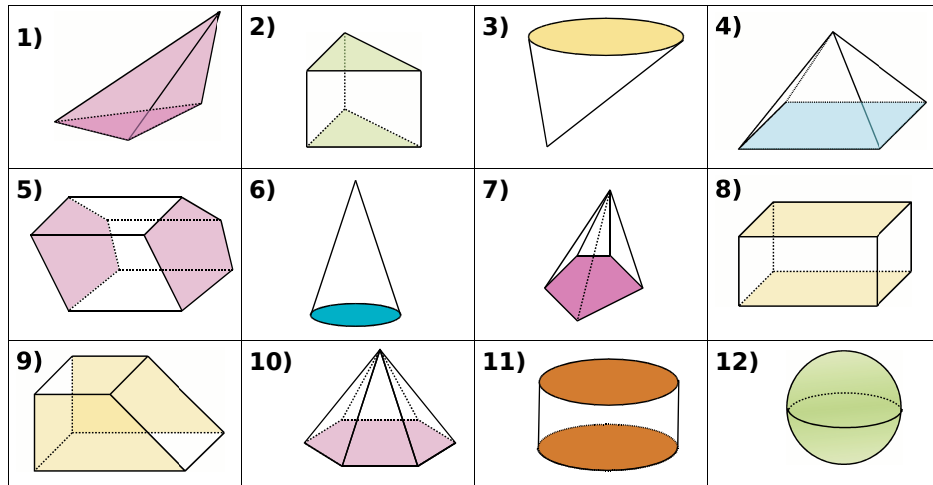
On construit des "tétraèdres" avec des billes.

Combien de billes faut-il pour faire un
"tétraèdre" à 3 étages ? À 5 étages ?
À 7 étages ? À 100 étages ?



Activité 1 : De l'ancien vers le nouveau

On a représenté, ci-dessous, des solides en perspective cavalière.

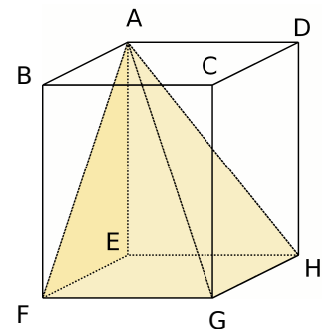


1. Certains ont déjà été étudiés. Décris-les de façon précise.
2. Les solides 1, 4, 7 et 10 sont des pyramides. Quels sont leurs caractères communs ?
3. As-tu déjà rencontré des pyramides dans une autre matière ? Laquelle des pyramides ci-dessus leur ressemble le plus ? Quelle est la nature de sa base ? De ses faces latérales ?
4. Les solides 3 et 6 sont des cônes. Donne des exemples de solides ayant la forme de cônes dans la vie courante.

Activité 2 : Patron sans calcul

On a représenté ci-contre, en couleur, une pyramide construite à partir de certains sommets du pavé droit. Le point A est le sommet de la pyramide et le quadrilatère EFGH est sa base. On veut construire le patron de cette pyramide. On donne $AB = 3$ cm, $AE = 5$ cm et $AD = 4$ cm.

1. Quelle est la nature du quadrilatère EFGH ? Construis-le sur une feuille de papier blanc.
2. Quelle est la nature du triangle AFE ? Du triangle AHE ? Justifie tes réponses. Construis les deux triangles sur ta feuille de papier blanc en partant des points E, F et H déjà placés.
3. En utilisant la propriété de l'espace, encadrée ci-dessous, détermine la nature des triangles AGH et AFG puis complète ta figure en reportant les longueurs AH et AF déjà présentes sur la figure.



Si une droite est perpendiculaire en un point à deux droites sécantes d'un plan, alors elle est perpendiculaire à toutes les droites du plan passant par ce point.

4. Découpe le patron obtenu en mettant éventuellement des languettes et vérifie qu'il s'agit bien d'un patron de la pyramide A-EFGH.

Activité 3 : Patron en calculant

On voudrait construire une maquette de la pyramide de Mykérinos.

1. C'est une pyramide régulière à base carrée. Quelle est la nature de ses faces latérales ?
2. Sachant que les côtés de sa base mesurent 105 m et sa hauteur 66 m, représente cette pyramide en perspective cavalière. Nomme S son sommet et ABCD sa base. Soit O le centre de la base. Trace la hauteur de la pyramide et le segment joignant le sommet de la pyramide au milieu I du côté [BC].
3. Quelle est la nature du triangle SOI ? Calcule l'arrondi au mètre de la longueur SI.
4. Réalise un patron de cette pyramide à l'échelle 1/1 500.



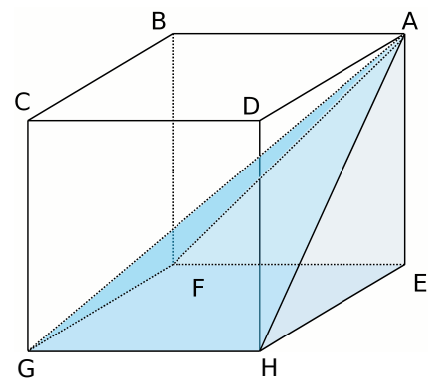
Pyramide de Mykérinos
(source : <http://fr.wikipedia.org>)

Activité 4 : Silence, on tourne

1. Sur du carton fin, construis un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent respectivement 7 cm et 5 cm. Découpe-le et, à l'aide d'un ruban adhésif, colle un des côtés de l'angle droit le long d'un crayon. Fais tourner rapidement le crayon sur son axe. Quelle forme vois-tu apparaître dans l'espace ?
2. Représente en perspective cavalière les deux cônes de révolution qui peuvent être engendrés en faisant tourner le triangle rectangle précédent autour d'un des côtés de l'angle droit. Ce côté s'appelle la hauteur du cône et l'hypoténuse est une génératrice du cône.

Activité 5 : À trois, ça fait du volume

1. Réalise, sur une feuille de papier A4, un patron de la pyramide AEFHG représentée ci-contre en perspective cavalière, sachant que ABCDEFGH est un cube d'arête 8 cm.
2. Vérifie qu'en assemblant trois pyramides on peut obtenir un cube d'arête 8 cm. Quel est alors le volume d'une des trois pyramides ?
3. Quelle relation peux-tu écrire entre le volume d'une pyramide, l'aire de sa base et sa hauteur ?



Activité 6 : Volume du cône

- On admet que pour calculer le volume d'un cône on applique la même formule que pour une pyramide, à savoir : $\frac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$.
1. Calcule le volume d'un cône dont la base a pour rayon 3 cm et dont la hauteur mesure 10 cm. Donne la valeur exacte en fonction de π puis l'arrondi au mm^3 .

Méthode 1 : Pyramide et cône de révolution en perspective

À connaître

Une **pyramide** est un solide dont :

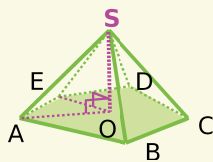
- une face est un polygone : c'est la **base** de la pyramide.
- les autres faces, appelées **faces latérales**, sont des triangles qui ont un sommet commun. C'est le **sommet** de la pyramide.

La **hauteur** d'une pyramide est le segment issu de son sommet et perpendiculaire à la base.

Les **arêtes latérales** sont les segments joignant les sommets de la base au sommet de la pyramide.

Remarque : Une **pyramide régulière** est une pyramide dont la base est un polygone régulier (par exemple un triangle équilatéral ou un carré) et dont les faces latérales sont des triangles isocèles superposables.

Exemple 1 : Trace une pyramide en perspective et décris les éléments de ce solide.



Le **sommet** de cette pyramide est le point S.

La **base** de cette pyramide est le pentagone ABCDE.

Les **faces latérales** sont : SAB, SBC, SCD, SDE, SEA.

Les **arêtes latérales** sont : [AS], [BS], [CS], [DS], [ES].

La **hauteur** de la pyramide est le segment [OS].

À connaître

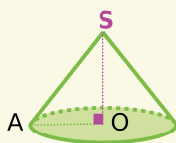
Un **cône de révolution** est un solide qui est généré par un triangle rectangle en rotation autour d'un des côtés de son angle droit.

La **base** du cône de révolution est un disque.

La **hauteur** du cône de révolution est le segment qui joint le centre de ce disque au sommet du cône ; il est perpendiculaire au disque de base.

Remarque : La **surface latérale** d'un cône, appelée aussi **développement**, est générée par l'hypoténuse du triangle rectangle. Elle a la forme d'un secteur de disque.

Exemple 2 : Trace un cône en perspective et décris les éléments de ce solide.



Le **sommet** du cône est le point S.

La **base** de ce cône est le disque de centre O : on la représente en perspective par un ovale (une ellipse) car elle n'est pas vue de face.

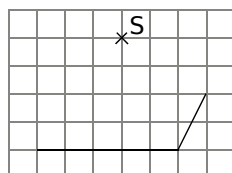
La **hauteur** du cône est le segment [OS].

Le triangle AOS, rectangle en O, génère le cône en tournant autour de (OS).

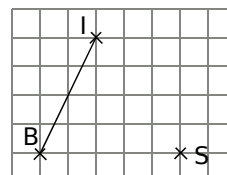
À toi de jouer

1 Complète les tracés en perspective ci-après pour obtenir un solide de sommet S :

a. une pyramide à base rectangulaire :

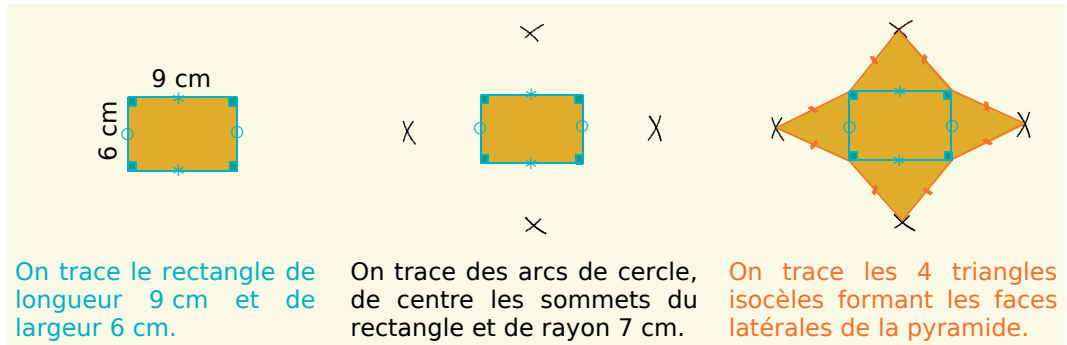


b. un cône de révolution ayant pour diamètre de base le segment [IB] :



Méthode 2 : Tracer le patron d'une pyramide

Exemple : Dessine le patron d'une pyramide dont la base est un rectangle de longueur 9 cm et de largeur 6 cm et dont chaque arête latérale mesure 7 cm.



À toi de jouer

2 Trace le patron de la pyramide dont la base est un carré de côté 5 cm et dont chaque arête latérale mesure 6,5 cm puis code les longueurs égales.

Méthode 3 : Calculer des volumes

À connaître

Pour **calculer le volume d'une pyramide ou d'un cône de révolution**, on calcule le tiers du produit de l'aire de la base par la hauteur :

$$V = \frac{\text{Aire de la base} \times \text{Hauteur}}{3}$$

Remarque : Le volume d'un cône de hauteur h et de rayon de base r est : $V = \frac{\pi \times r^2 \times h}{3}$.

Exemple 1 :

Calcule le volume d'une pyramide de hauteur 2,50 m ayant pour base un losange de diagonales 4 m et 4,20 m.

On calcule l'aire du losange de base :

$$A = \frac{D \times d}{2} = \frac{4 \times 4,2}{2} = 8,4 \text{ m}^2.$$

Puis, on calcule le volume :

$$V = \frac{\text{Aire de la base} \times \text{Hauteur}}{3} = \frac{8,4 \times 2,5}{3} = 7 \text{ m}^3.$$

Donc le volume de la pyramide vaut 7 m³.

Exemple 2 :

Calcule le volume d'un cône de révolution de hauteur 25 cm ayant pour base un disque de rayon 9 cm.

On utilise la formule :

$$V = \frac{\pi \times r^2 \times h}{3} = \frac{\pi \times 9^2 \times 25}{3}$$

$$V = \pi \times 27 \times 25 = 675\pi \text{ cm}^3.$$

Donc le volume exact du cône vaut 675π cm³.

À toi de jouer :

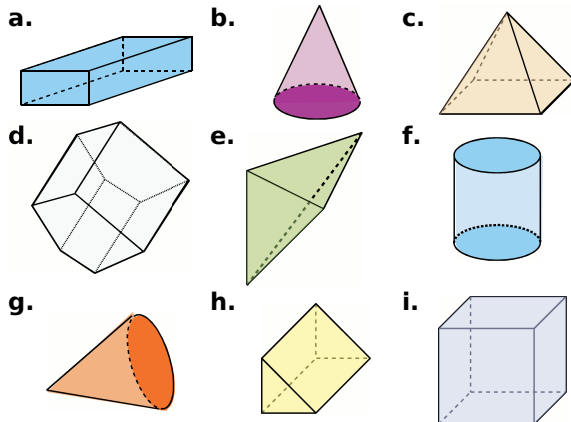
3 Calcule le volume d'une pyramide de hauteur 10 m ayant pour base un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent 4,5 m et 6 m.

4 Calcule le volume d'un cône de hauteur 12 cm ayant pour base un disque de diamètre 8 cm.

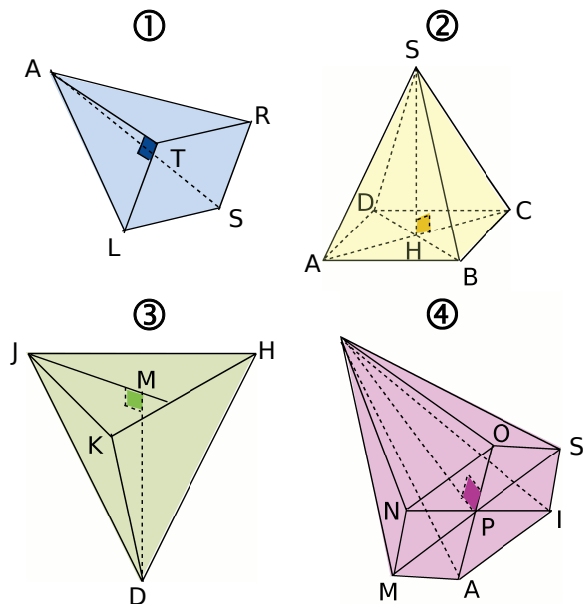
Perspectives cavalières

1 Reconnaître un solide

Nomme chaque solide représenté ci-dessous.



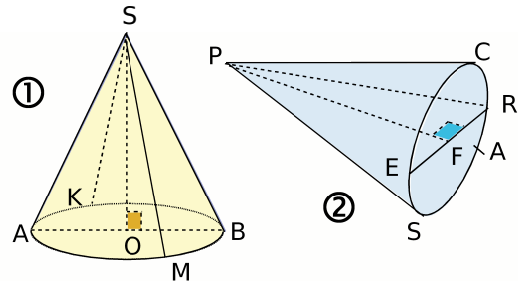
2 Pyramides en vrac !



Recopie et complète le tableau ci-dessous :

	①	②	③	④
Sommet				
Nature de la base				
Nom de la base				
Hauteur				
Nombre d'arêtes				
Nombre de faces				

3 Cônes de révolution en vrac !



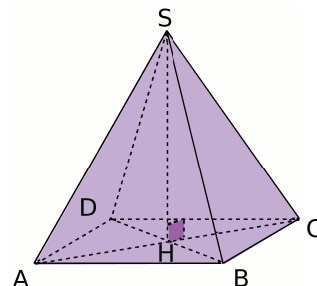
a. Pour chaque cône de révolution, nomme :

- son sommet ;
- le centre et des diamètres de sa base ;
- sa hauteur ;
- tous les segments représentant des génératrices.

b. Quelle est la nature de SKO et KSM dans le dessin ① ? Et celle de PAF dans le dessin ② ?

4 Pyramide régulière à base carrée

SABCD est une pyramide régulière à base carrée telle que $SA = 7,3$ cm et $AB = 5$ cm.



a. Nomme le sommet et la base de cette pyramide.

b. Que représente le segment [SH] pour la pyramide ? Justifie.

c. Indique, en centimètres, la longueur de chacune des arêtes de cette pyramide. Justifie.

d. Quelle est la nature du triangle ADC ? Justifie. Construis-le en vraie grandeur.

e. Quelle est la nature du triangle SAB ? Justifie. Construis-le en vraie grandeur.

5 Perspective cavalière et cône

Un cône de révolution de hauteur 8,2 cm a pour base un disque de rayon 3,5 cm.

À main levée, dessine une représentation de ce cône de révolution en perspective cavalière puis code ton dessin.

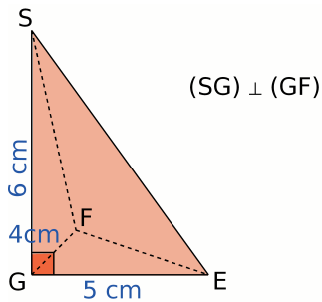


6 Perspective cavalière et pyramide

Une pyramide régulière de hauteur 7 cm a pour base un carré de côté 5 cm.

- À main levée, dessine une représentation de cette pyramide en perspective cavalière puis code ton dessin.
- Construis à la règle une représentation en perspective cavalière de cette pyramide.

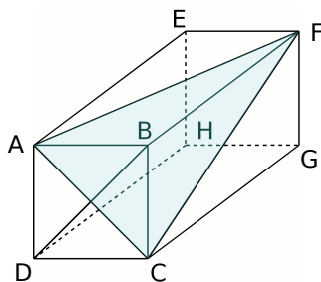
7 Pyramide à base triangulaire



- Donne le nom de cette pyramide.
- Quelle est la hauteur de cette pyramide ?
- Quelle est la nature de la face SGF ?
- Construis, en vraie grandeur, les faces SGF et SGE.
- Déduis-en la construction, en vraie grandeur, de la face SFE.

8 Pyramide dans un pavé droit

ABCDEFGH est un pavé droit. Sa base est le carré ABCD tel que $AB = 5$ cm et $AE = 8,5$ cm.

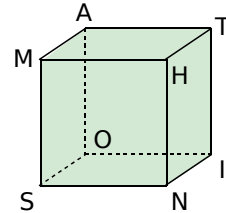


- Donne la nature du triangle FBA. Justifie.
- Précise la hauteur de la pyramide FABC si l'on prend pour base : ABC, BFC ou ABF.
- Quelle est la nature du triangle FAC ? Justifie.
- Construis, en vraie grandeur, la base de la pyramide FABC de sommet F.
- Construis, en vraie grandeur, la face ABF puis la face FAC.

9 Solides dans un cube

MATHSOIN est un cube de côté 6 cm. Pour chaque solide, donne sa nature puis construis-en une représentation en perspective cavalière.

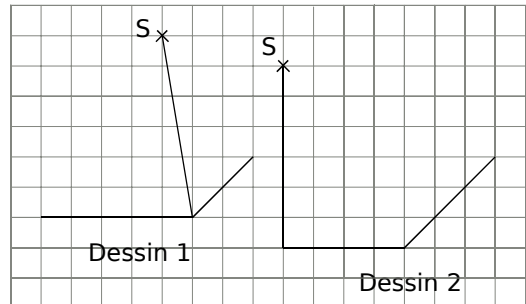
- NMHT
- SOMNIH
- ATOS
- ASNIO



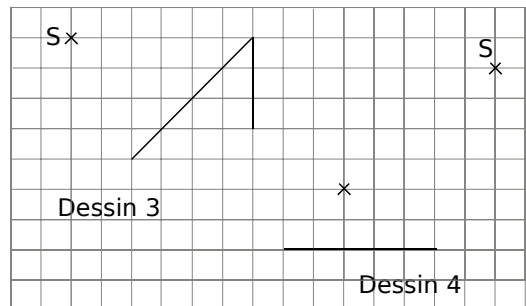
10 Constructions en perspective cavalière 1

Complète les dessins suivants pour obtenir des représentations en perspective cavalière d'une pyramide de sommet S :

- de base rectangulaire.

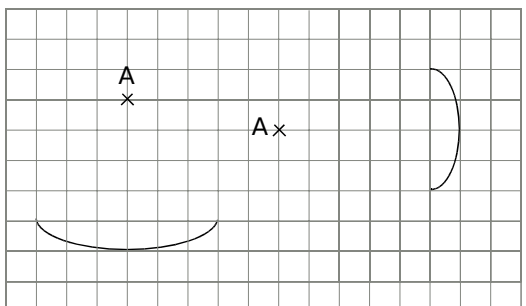


- de base triangulaire.



11 Constructions en perspective cavalière 2

Complète les dessins suivants pour obtenir des représentations en perspective cavalière d'un cône de révolution de sommet A.

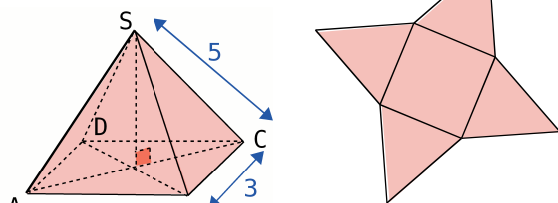


Patrons

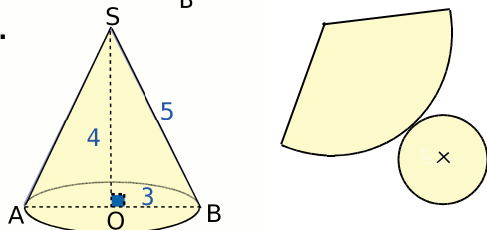
12 Coder un dessin

On a dessiné un solide en perspective cavalière puis son patron. Reproduis, à main levée, le patron. Indique dessus, les points et les longueurs que tu connais et code les segments de même longueur :

a. ABCD est un carré.

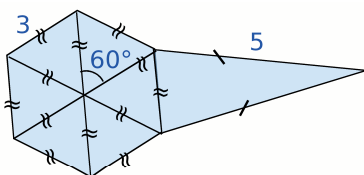


b.



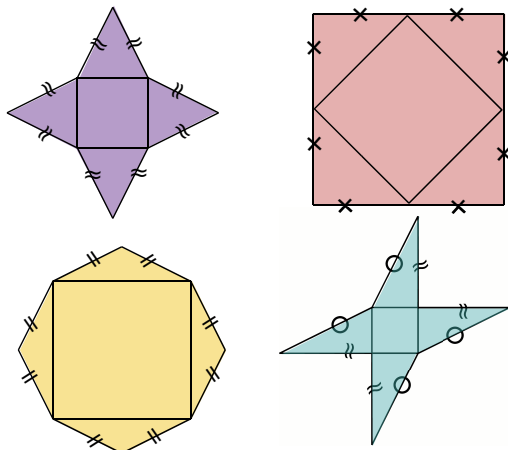
13 Pyramide à base hexagonale

Reproduis en vraie grandeur le dessin et complète-le pour qu'il représente le patron d'une pyramide régulière à base hexagonale.



14 Pyramides à base carrée ?

Quels sont les patrons d'une pyramide à base carrée ?



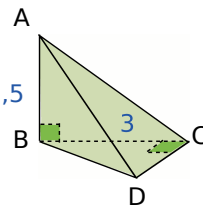
15 Tétraèdre régulier

Un tétraèdre régulier est une pyramide dont toutes ses faces sont des triangles équilatéraux.

Trace le patron d'un tétraèdre régulier d'arête 5,5 cm.

16 Pyramide à base triangulaire

ABCD est une pyramide dont la base est un triangle rectangle isocèle en C telle que $AB = 2,5$ cm et $BC = 3$ cm.



Trace le patron de cette pyramide.

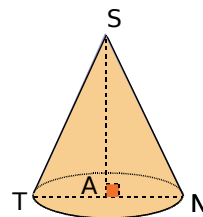
17 Patron d'un cône de révolution

Pour calculer la mesure de l'angle du développement d'un cône, on utilise la formule :

$$\hat{\alpha} = \frac{360^\circ \times R}{g}$$

où R est le rayon du disque de base et g la longueur de la génératrice du cône.

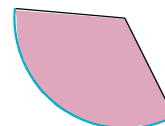
a. Calcule la mesure de l'angle du développement du cône représenté ci-contre où $SN = 6,5$ cm et $AN = 2,6$ cm.



b. Trace le patron de ce cône.

18 Rayon de la base

La longueur de l'arc bleu du développement d'un cône de révolution est de 28,4 cm. Donne la valeur arrondie au millimètre du rayon de sa base.



Calculs de volumes

19 Conversions

Complète :

- a. 5,4 m = ... cm
- b. 3 263 m = ... km
- c. 14,7 m² = ... cm²
- d. 254 320 m² = ... hm²
- e. 5,68 L = ... mL
- f. 230 000 cm³ = ... m³
- g. 504,2 cL = ... L
- h. 6,3 dm³ = ... m³
- i. 5 362 dm³ = ... cm³
- j. 0,07 m³ = ... dm³
- k. 2 500 cm³ = ... L
- l. 9,1 cL = ... cm³

20 Volumes de pyramides

a. Calcule le volume d'une pyramide SABCD, de hauteur 6,3 cm et de base rectangulaire ABCD telle que $AB = 4,2$ cm et $BC = 3,5$ cm. Donne le résultat en cm^3 puis en mm^3 .

b. Calcule le volume d'une pyramide MATH de base ATH, de hauteur MA, rectangle isocèle en A et telle que $AT = 3$ cm et $MA = 4$ cm.

21 Volume d'un cône de révolution 1

Calcule le volume d'un cône de révolution, de hauteur 1,5 dm et dont le rayon de la base est 8 cm. Donne la valeur arrondie au cm^3 .

22 Volume d'un cône de révolution 2

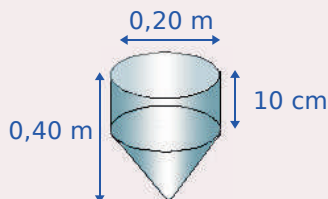
Ben s'est assis sur un siège dont la partie principale est en forme de cône. Le diamètre de la base est de 4 dm et la hauteur de 50 cm.

Calcule le volume de cette partie du siège. Donne la valeur exacte en fonction de π puis la valeur arrondie au dixième de dm^3 .



23 En lien avec les S.V.T.

Un pluviomètre est constitué d'une partie cylindrique surmontant une partie conique.



Calcule le volume d'eau qu'il peut recueillir. Donne la valeur arrondie au dL.

24 Pyramide de Khéops

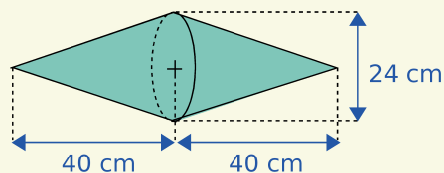
Pour construire la pyramide de Khéops, les égyptiens ont utilisé un volume d'environ 2 643 000 m^3 de pierres. La hauteur de la pyramide est de 146 m. Calcule le côté du carré constituant la base de la pyramide. Arrondis ton résultat au mètre.



(source : <http://fr.wikipedia.org>)

25 Extrait du Brevet

La société Truc fabrique des enseignes publicitaires composées de deux cônes de révolution de même diamètre 24 cm et de même hauteur 40 cm.



a. Calculer le volume d'une enseigne. En donner la valeur exacte puis la valeur arrondie au dm^3 .

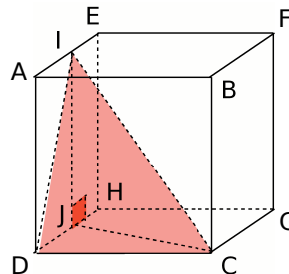
b. Pour le transport, chaque enseigne est rangée dans un étui en carton ayant la forme d'un cylindre le plus petit possible et ayant la même base que les cônes.

Calculer le volume de cet étui en négligeant l'épaisseur du carton. En donner la valeur exacte en cm^3 puis la valeur arrondie au dm^3 .

26 Pyramide à base triangulaire

ABCDEFGH est un cube de côté 6 cm.

I et J sont les milieux respectifs de [AE] et de [DH].



a. Trace un patron de la pyramide IDJC.

b. Calcule le volume de cette pyramide.

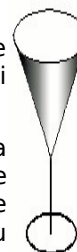
27 Boisson

Une flûte a la forme d'un cône de génératrice 14,5 cm et dont le diamètre de la base est 4,8 cm.

a. Calcule la hauteur de la flûte sans le pied du verre puis son volume arrondi au dixième de cm^3 .

b. On remplit entièrement d'eau la flûte. On verse cette eau dans un verre cylindrique, de hauteur 9 cm et dont le rayon de la base est 18 mm. L'eau va-t-elle déborder ?

Si non, quelle hauteur, arrondie au mm, va-t-elle atteindre dans le verre ?



Calculs de longueurs

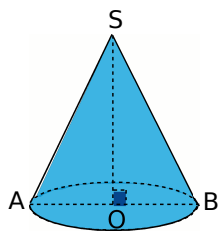
28 Cône de révolution 1

On considère un cône tel que $SO = 5$ cm et $\widehat{OSA} = 40^\circ$.

Calcule la longueur de la génératrice $[SA]$ du cône arrondi au mm.

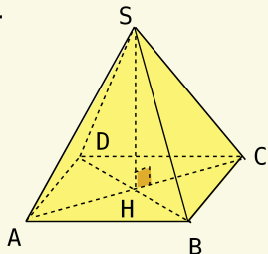
a. Calcule le rayon du disque de base arrondi au mm.

b. Calcule le volume du cône arrondi au cm^3 .



29 Extrait du Brevet

La pyramide régulière à base carrée $SABCD$ ci-dessous a une base de 50 cm^2 et une arête $[SA]$ de 13 cm.

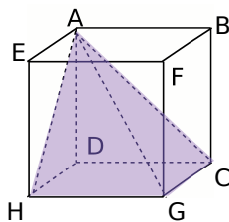


a. Calculer la valeur exacte de AB puis démontrer que : $AC = 10$ cm.

b. Soit H le centre de $ABCD$. On admet que (SH) est perpendiculaire à (AC) . Démontrer que : $SH = 12$ cm puis calculer le volume de $SABCD$.

30 Pyramide à base carrée

$ACDHG$ est une pyramide inscrite dans un cube de côté 4 cm.



a. Calcule le volume de cette pyramide, arrondi au cm^3 .

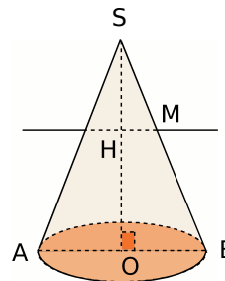
b. Calcule les longueurs AH , DG et AG , arrondies au millimètre.

c. Calcule la mesure, arrondie au degré, de l'angle \widehat{AHD} .

d. Construis un patron de cette pyramide.

31 Cône de révolution 2

On considère le cône tel que $OB = 6$ cm, $SB = 10$ cm.



a. Calcule la hauteur SO du cône.

b. Calcule le volume de ce cône. Donne la valeur exacte en fonction de π puis la valeur arrondie au cm^3 .

c. Soit M un point de la génératrice $[SB]$ tel que $SM = 4$ cm. On trace une droite parallèle à (OB) passant par M , elle coupe $[SO]$ en H . Montre que les droites (SO) et (HM) sont perpendiculaires.

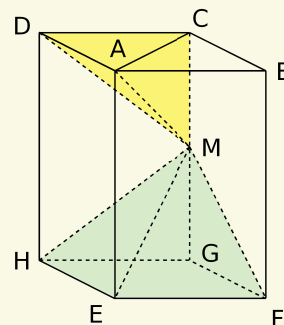
d. Calcule HM et SH .

e. Calcule la mesure, arrondie au degré, de l'angle \widehat{OSB} .

32 Extrait du Brevet

Un bien étrange sablier...

$ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle tel que $AB = 8$ cm, $BC = 6$ cm et la hauteur $AE = 12$ cm. Le point M est situé sur l'arête $[CG]$ et on a : $CM = 7$ cm.



a. Calculer l'aire du triangle rectangle DAC .

b. Calculer le volume V_1 de la pyramide $MADC$.

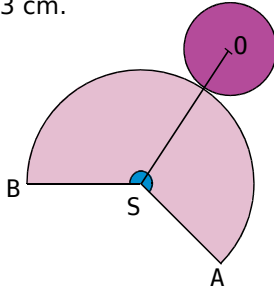
c. Calculer la longueur GM puis calculer le volume V_2 de la pyramide $MEFGH$.

d. On remplit complètement la partie haute $MADC$ du sablier avec du sable. Lorsque le sable aura fini de s'écouler, la partie basse sera-t-elle pleine ? Et si non, quel volume restera-t-il ?



33 Patron d'un cône de révolution

On a représenté à main levée, le patron d'un cône de révolution. Les génératrices mesurent 5 cm. Le disque de base, de centre O, a pour rayon $R = 3$ cm.



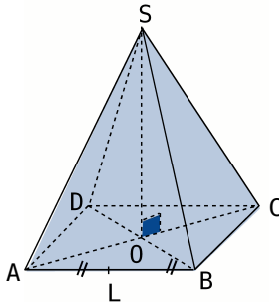
- Nomme une génératrice de ce cône. Calcule la valeur exacte de la circonférence du grand cercle ayant pour rayon la longueur de cette génératrice et pour centre le point S.
- Détermine la valeur exacte de la circonférence du cercle de base.
- Quelle est la valeur exacte de la longueur de l'arc de cercle \widehat{AB} ? Justifie.
- On admet qu'il y a proportionnalité entre la mesure de l'angle au centre $\alpha = \widehat{BSA}$ et la longueur de l'arc \widehat{AB} qui l'intercepte. Calcule α en utilisant le tableau suivant :

	Longueur	Mesure de l'angle
Grand cercle		360°
Arc de cercle		α

- À partir des résultats précédents, construis en vraie grandeur le patron de ce cône.

34 Aire latérale d'une pyramide

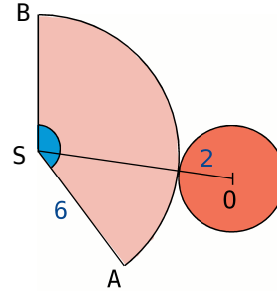
SABCD est une pyramide régulière à base carrée ABCD telle que $AB = 14$ dm et $SA = 25$ dm. Le point L est le milieu de [AB].



- Calcule SL. Justifie.
- Calcule l'aire du triangle SAB.
- Déduis-en l'aire latérale de la pyramide puis son aire totale.

35 Aire latérale d'un cône de révolution

On a représenté, à main levée, le patron d'un cône de révolution.



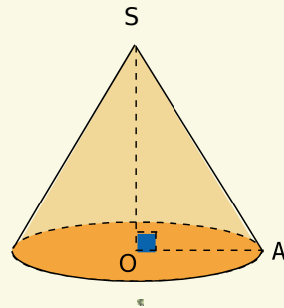
- Calcule le volume de ce cône arrondi au cm^3 .
- On admet qu'il y a proportionnalité entre l'aire d'un secteur angulaire et la mesure de l'angle au centre qu'il intercepte. Calcule cette aire, arrondie au cm^2 , en utilisant le tableau suivant :

	Aire	Mesure de l'angle
Grand disque		360°
Secteur angulaire		$\widehat{ASB} = 114^\circ$

- Déduis-en l'aire totale de ce cône arrondie au cm^2 .

36 Extrait du Brevet

La figure ci-dessous représente un cône de révolution (\mathcal{C}) de hauteur $SO = 20$ cm et de base le cercle de rayon $OA = 15$ cm.



- Calculer en cm^3 le volume de (\mathcal{C}), on donnera la valeur exacte sous la forme $k\pi$, k étant un nombre entier.
- Montrer que $SA = 25$ cm.
- L'aire latérale d'un cône de révolution est donnée par la formule $\pi \times R \times SA$ (R désignant le rayon du cercle de base). Calculer en cm^2 l'aire latérale de (\mathcal{C}).

On donnera une valeur exacte sous la forme $n\pi$ (n étant un nombre entier) puis une valeur approchée à 10^{-1} près.

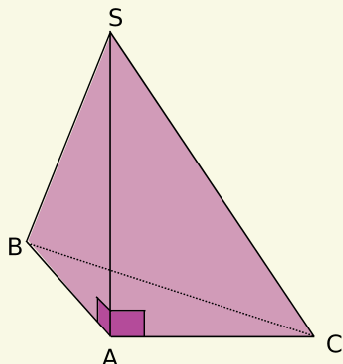
37 Extrait du Brevet

Soit la pyramide $SABC$ de sommet S et de base ABC .

Les triangles SAB et SAC sont rectangles en A .

Les dimensions sont données en millimètres :

$AS = 65$; $AB = 32$; $AC = 60$; $BC = 68$.



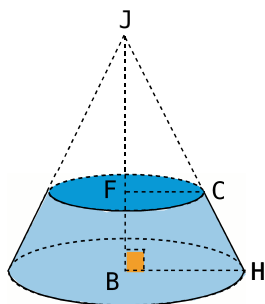
- Démontrer que le triangle ABC est rectangle.
- Calculer le volume de la pyramide $SABC$.
- Tracer un patron de cette pyramide.

38 Tronc de cône

Un tronc de cône est déterminé par un cône (\mathcal{C}) duquel on retire un autre cône (\mathcal{C}').

Le tronc de cône représenté ci-dessous est défini par un cône (\mathcal{C}_1) de sommet J et de base le disque de rayon $[BH]$ et par un cône (\mathcal{C}_2) de sommet J et de base le disque de rayon $[FC]$.

On sait que : $BJ = 18$ dm ; $FJ = 14,4$ dm et $BH = 12,5$ dm. Les droites (FC) et (BH) sont parallèles.



- Calcule, en justifiant, la longueur FC .
- Calcule le volume V_1 du cône (\mathcal{C}_1) en fonction de π .
- Calcule le volume V_2 du cône (\mathcal{C}_2) en fonction de π .
- Calcule le volume V_3 du tronc de cône en fonction de π . Donne la valeur arrondie au dm^3 .

39 Extrait du Brevet

Dans tout le problème, les unités employées sont le cm , le cm^2 et le cm^3 .

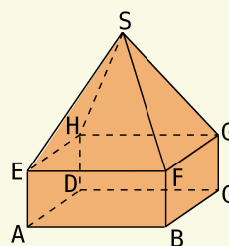
Partie I

On considère le solide représenté ci-dessous :

- $ABCDEFGH$ est un pavé droit de base carrée $ABCD$ avec $AB = 1,5$ et de hauteur $AE = x$;

- $SEFGH$ est une pyramide régulière de hauteur 4 cm .

On appelle V_1 le volume du solide représenté ci-dessous.



- Démontrer que $V_1 = 2,25x + 3$.
- Le volume V_1 est-il proportionnel à la hauteur x ? Justifier.

Partie II

On considère un cylindre de révolution dont la base est un disque d'aire 3 cm^2 et dont la hauteur variable est notée x . On appelle V_2 le volume d'un tel cylindre.

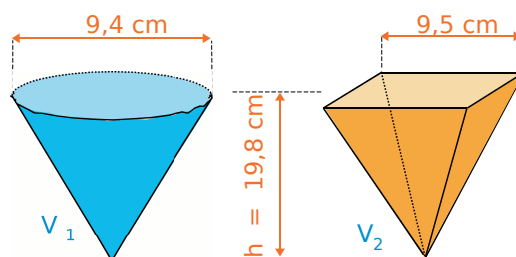
- Exprimer le volume V_2 en fonction de x .
- Le volume V_2 est-il proportionnel à la hauteur x ? Justifier.

Partie III

Pour quelle valeur de x les deux solides ont-ils le même volume ? Quel est ce volume ?

40 Déborde ou pas ?

On considère deux vases, l'un ayant la forme d'une pyramide régulière à base carrée et l'autre celle d'un cône de révolution.



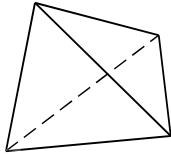
On transvase l'eau du vase V_1 dans le vase V_2 vide, le liquide débordera-t-il ?



1 Formule magique ?

1^{re} partie : Formule d'Euler-Poincaré

a. Voici une pyramide à base triangulaire (encore appelée tétraèdre) :



Donnez le nombre de faces, d'arêtes et de sommets de ce solide.

b. Construisez à main levée une pyramide à base carrée. Combien a-t-elle de faces, d'arêtes et de sommets ?

c. Recopiez et complétez le tableau suivant :

Nombre de côtés de la base	Nombre de faces	Nombre d'arêtes	Nombre de sommets
3			
4			
...			
8			

d. Déterminez une formule entre le nombre de faces F , le nombre d'arêtes A et le nombre de sommets S .

Cette formule s'appelle la formule d'Euler-Poincaré.

e. Testez la formule pour un cube. Est-elle encore valable ? Et pour un prisme à base triangulaire ?

2^e partie : Démonstration (pyramides)

f. Soit n le nombre de côtés de la base d'une pyramide. Exprimez F , S et A en fonction de n .

g. Dans ce cas particulier, démontrez la formule d'Euler-Poincaré.

2 Nécropole d'Abousir

a. Qu'est-ce qu'une nécropole ?

b. Faites des recherches sur la Nécropole d'Abousir. Où se trouve-t-elle ? À quelle période a-t-elle été construite ?

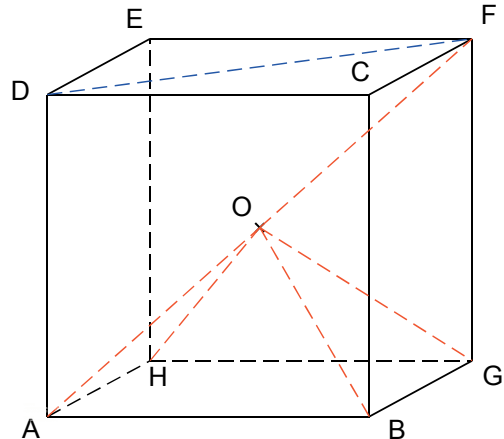
c. Recherchez également les dimensions originelles des pyramides de Niouserrê, Néferirkarê et Sahourê. Choisissez une échelle adéquate pour construire des maquettes de ces pyramides puis construisez-les.

d. Calculez les volumes de chaque pyramide originelle et de la maquette correspondante.

3 Dodécaèdre Rhombique

1^{re} partie : Calculs préliminaires

a. ABCDEFGH est un cube. O est le milieu de $[AF]$.



Quelle est la nature du triangle DFA ? Justifiez.

b. Sachant que $AB = 6$ cm, donnez la valeur approchée par excès au mm près de DF , AF et AO .

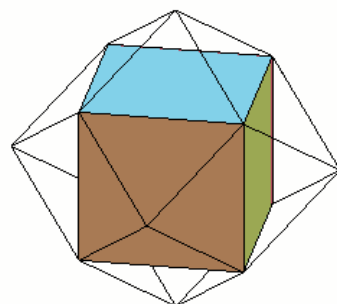
c. Expliquez pourquoi $AO = BO = GO = HO$. Quelle est la nature du solide OABGH ?

2^e partie : Construisons !

d. Construisez un patron de OABGH puis découpez-le et collez-le pour obtenir la pyramide.

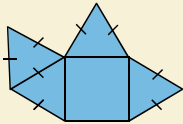
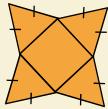
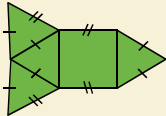
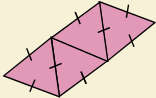




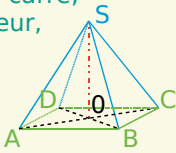
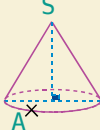
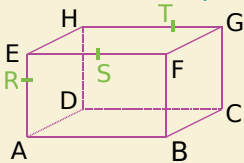
e. Faites cinq autres exemplaires de cette pyramide. Avec les six pièces ainsi constituées, essayez de reformer le cube ABCDEFGH.

f. Construisez un patron du cube ABCDEFGH, collez chacune des pyramides sur une face du cube. Assemblez ensuite le cube en plaçant les pyramides à l'extérieur.



g. Le solide obtenu s'appelle un dodécaèdre rhombique car chacune de ses faces est un losange (du grec « rhombos » qui veut dire losange). Combien a-t-il de faces ? Quel est son volume ?

h. Construisez un patron du dodécaèdre rhombique et assemblez-le directement.

		R1	R2	R3	R4
1	En perspective cavalière...	des droites parallèles sont toujours représentées par des droites parallèles	les angles droits sont toujours représentés par des angles droits	un segment de mesure 5 cm est toujours représenté par un segment de 5 cm	les arêtes cachées ne sont pas représentées
2	Dans quel(s) cas a-t-on représenté le patron d'une pyramide ?				
3	La base d'une pyramide peut être...	un polygone quelconque	un disque	un triangle rectangle	un octogone régulier
4	Dans quel(s) cas a-t-on représenté la surface latérale d'un cône ?				
5	ABCD est un carré, [SO] la hauteur, AB = 5 cm, SO = 6 cm. 	Les triangles SAO, SBO, SCO et SDO sont rectangles en O	ABC est un triangle rectangle isocèle en B	AO ≈ 3,5 cm et SA ≈ 6,9 cm	Son volume est égal au tiers du volume d'un pavé droit de dimensions, en cm : 5 ; 5 et 6
6	h est la hauteur du cône et r le rayon de sa base 	$SA^2 = h^2 + r^2$	$h^2 = SA^2 + r^2$	son volume est donné par $\frac{1}{3} \times SA \times r^2$	$h = 5$ cm et $r = 3$ cm donc son volume est 15π cm ³
7	1 m ³ ...	c'est le volume de 100 cubes de 1 dm d'arête	représente le même volume que 10 L	c'est le volume d'un cube de 1 m d'arête	c'est 10 ⁹ mm ³
8	ABCDHEFG est un pavé droit. 	(EH) // (BC) HF = AC AG = HB	(GC) et (AD) ne sont pas sécantes donc elles sont parallèles	S est le milieu de [RT]	(RS) et (DC) sont sécantes

Récréation mathématique

La fusée

Mathieu a construit une fusée à partir de différents objets :

- pour le corps, une boîte de conserve cylindrique de hauteur 10 cm et dont le disque de base a un rayon de 5 cm ;
- pour le cockpit, un cône de révolution de hauteur 5 cm dont la base correspond exactement à celle du cylindre ;
- les réacteurs de la fusée sont trois pyramides à base carrée de côté 1,5 cm et de hauteur 2 cm.

Il met de la poudre dans la fusée afin de la propulser dans les airs. Il sait que 1 g de poudre occupe 250 mm³ et que 5 g de poudre permettent à la fusée de monter de 7,5 cm.

Si Mathieu remplit totalement la fusée, de quelle hauteur va-t-elle monter ?





1 Des bases en calcul numérique (relatifs, fractions, puissances)

$$A = (-1 + 4) \times (-1 - 2) - 10 \div (-5) \qquad B = \frac{7}{5} + \frac{6}{5} \times \frac{2}{3} \qquad C = \frac{3 \times 10^2 \times 4 \times 10^{-9}}{25 \times 10^{-3}}$$

- Calculer A en détaillant les étapes intermédiaires.
- Calculer B en détaillant les calculs et en donnant le résultat sous forme simplifiée.
- En détaillant les calculs, donner l'écriture décimale et l'écriture scientifique de C.

2 Des bases en calcul numérique (relatifs, fractions, puissances), bis

$$M = (-3)^2 - [2 - 5 \times (3 - 7)] \qquad N = \frac{5}{7} - \frac{2}{7} \div (-3) \qquad P = \frac{5 \times 10^{-3} \times 1,2 \times 10^5}{2 \times 10^{-1} \times 1,5 \times 10^6}$$

- Calculer M en détaillant les étapes intermédiaires.
- Calculer N en détaillant et en donnant le résultat sous forme de fraction.
- En détaillant les calculs, donner l'écriture décimale et l'écriture scientifique de P.

3 Des calculs numériques au Brevet (fractions, puissances, Groupe Nord, septembre 2005)

$$R = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \qquad S = \frac{2 - \frac{1}{3}}{3 + \frac{1}{4}} \qquad T = \frac{3 \times 10^4 \times 10^{-2} \times 5}{10^{-1}}$$

- Calculer R et S en détaillant et en donnant les résultats sous forme simplifiée.
- En détaillant les calculs, donner l'écriture scientifique de T.

4 Des calculs numériques pour approfondir (relatifs, fractions, puissances)

$$E = \frac{14}{15} - \frac{1}{21} \times \frac{1}{\frac{9}{7} - \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}} \qquad F = \frac{3,5 \times 10^{-11} \times 2 \times 10^8}{0,2 \times (10^{-3})^3} \qquad G = (4 \times 10^6)^{-2} \qquad H = \frac{15 \times 10^{-4}}{42 \times 10^{-3}}$$

- Démontrer que E est un nombre entier.
- En détaillant les calculs, donner l'écriture scientifique de F puis celle de G.
- Calculer H sous forme de fraction simplifiée.

5 Remplacer dans une expression

- Calculer $M = x^2 - 5x + 1$ pour $x = 0$ puis pour $x = -3$ et enfin pour $x = \frac{3}{5}$.
- Calculer $N = -3x^2 + 6x - 4$ pour $x = -1$ puis pour $x = -0,1$ et enfin pour $x = -\frac{1}{3}$.
- Calculer $P = 1 + 2a - a^2$ pour $a = -10$ puis pour $a = 10^3$ et enfin pour $a = -10^{-2}$.
- Calculer $R = 1 - \frac{1}{y} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{y^3}$ pour $y = -\frac{2}{3}$ puis pour $y = 10^{-1}$.

6 Développements, réductions et calculs numériques

$$E = (2x + 3)(5 - x) \qquad F = (1 - 3x)(2x - 1) + 3x(1 - 4x)$$

Développer et réduire E puis F. En choisissant ensuite l'écriture la plus adaptée, calculer E et F pour $x = -2$ puis pour $x = 5$ et enfin pour $x = \frac{1}{2}$.

7 Développer puis réduire afin de simplifier

- a. Développer puis réduire $P = (2n + 1)(2n - 1) - 4n(1 + n)$.
 b. En déduire un moyen astucieux pour calculer $2001 \times 1999 - 4000 \times 1001$.

8 Développer, réduire puis calculer (vers une certaine maîtrise)

$$R = 5x(2 - x) + (2x - 3)(4 - 7x) \quad S = 2(4 + a)(1 - 3a) - (7a + 2)(5 - a) \quad T = (5y - 1)^2 - 4y(4y - 7)$$

- a. Développer et réduire R, S puis T (pour T, utiliser la définition du carré d'un nombre).
 b. Calculer R pour $x = -10$ puis S pour $a = \frac{1}{5}$ et enfin T pour $y = \frac{-5}{3}$.

9 Développement avec des coefficients fractionnaires

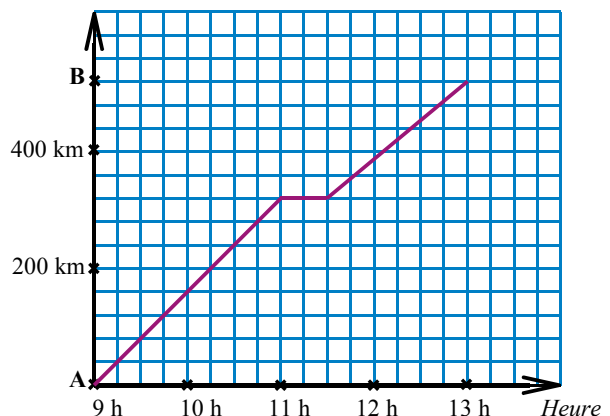
Développer puis réduire $F = \frac{1}{3}\left(4x - \frac{6}{5}\right) - \left(\frac{3x}{5} - \frac{1}{2}\right)\left(4 - \frac{2}{3}x\right)$ puis calculer F pour $x = -\frac{5}{2}$.

10 À toute vitesse

Partie A : Le graphique suivant représente la distance parcourue par un train entre deux villes A et B en fonction de l'heure.

- a. Donner l'heure de départ et d'arrivée du train ainsi que la distance entre les villes A et B.
 b. Quelle distance parcourt-il entre 9 h et 11 h ? Et entre 11 h 30 min et 13 h ? Que s'est-il passé entre 11 h et 11 h 30 min ?
 c. Calculer la vitesse moyenne en $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ du train entre 9 h et 11 h puis sa vitesse moyenne entre 11 h 30 min et 13 h.
 d. Calculer sa vitesse moyenne en $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ entre 9 h et 13 h.
 e. Ce train effectue le trajet retour à la vitesse moyenne de $160 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ sans faire d'arrêt. Quelle est la durée du trajet retour ?
 f. Calculer la vitesse moyenne du train en $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ sur le parcours aller-retour (arrondir le résultat au dixième).

Distance parcourue



Partie B : Un autre train effectue le trajet retour à la vitesse moyenne de $160 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ sans faire d'arrêt.

Il poursuit ensuite son parcours en campagne pendant 1 h 35 min à une vitesse de $96 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$.

- g. Calculer la durée du trajet en zone urbaine puis la longueur du trajet en campagne.
 h. Calculer la vitesse moyenne du train sur l'ensemble du parcours (zone urbaine plus campagne).



11 Des statistiques en vitesse

La course des 24 heures du Mans consiste à effectuer en 24 heures le plus grand nombre de tours d'un circuit. Le tableau ci-dessous donne la répartition du nombre d'équipes ayant réussi à faire plus de 310 tours en 2003.

Nombre n de tours	$310 \leq n < 320$	$320 \leq n < 330$	$330 \leq n < 340$	$340 \leq n < 350$	$350 \leq n \leq 360$
Effectif	10	6	7	6	3

- Donner l'effectif total de la série statistique ainsi définie.
- Calculer le nombre d'équipes ayant parcouru au moins 320 tours.
- Calculer la fréquence des équipes ayant parcouru plus de 320 tours.
- Calculer le pourcentage d'équipes ayant parcouru moins de 320 tours.
- Calculer le nombre moyen de tours par équipe (ici c'est une estimation puisque les données sont regroupées en classes).
- Le tour du circuit des 24 heures du Mans est long de 13 650 m.
 - Calculer, en km, la distance parcourue par un véhicule ayant fait 336 tours.
 - Calculer, en $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$, sa vitesse moyenne lors de cette course.
- Une équipe avait fait 360 tours en 2002 contre seulement 342 tours en 2003 suite à des problèmes mécaniques. Exprimer en pourcentage la diminution du nombre de tours par rapport à l'année 2002.
- Une autre équipe a vu au contraire son nombre de tours de 2002 augmenter de 4 % pour atteindre 338 tours en 2003. Combien de tours avait faits cette équipe en 2002 ?

12 Statistiques, proportionnalité et graphiques, équation

Dans une bibliothèque, on a comptabilisé, jour par jour, le nombre de livres prêtés au cours d'une semaine et on a obtenu les résultats consignés dans le tableau suivant :

	mardi	mercredi	jeudi	vendredi	samedi
Nombre de livres prêtés	61	121	42	59	82

- Calculer le nombre moyen de livres prêtés par jour durant cette période.
- Calculer le pourcentage, arrondi à l'unité, de livres prêtés le mercredi par rapport à la semaine entière.
- Sur une année, la bibliothèque propose deux tarifs différents pour l'emprunt de ses livres :
 - le tarif plein : 0,90 € par livre emprunté ;
 - le tarif abonné : cotisation annuelle de 10 € à laquelle s'ajoute 0,50 € par livre emprunté.

Quel est le prix à payer suivant chaque tarif pour 5 livres ? 10 livres ? 20 livres ? 35 livres ? x livres ? Rassembler les résultats dans un tableau.

d. Représenter graphiquement le prix à payer suivant les deux tarifs en fonction du nombre de livres empruntés (en abscisses, prendre 1 cm pour 5 livres empruntés, et en ordonnées, 1 cm pour 2 €).

e. Le prix tarif plein est-il proportionnel au nombre de livres empruntés ? Et le prix tarif abonné ? Expliquer en utilisant le graphique puis des calculs.

f. Déterminer graphiquement le nombre de livres pour lequel les deux tarifs sont équivalents puis retrouver ce résultat par le calcul.

g. Le prix de la cotisation annuelle (10 €) est en baisse de 20 % par rapport à l'année dernière. Quel était le prix de la cotisation l'année dernière ?



13 Synthèse : proportionnalité, statistiques (les deux parties du problème sont indépendantes)

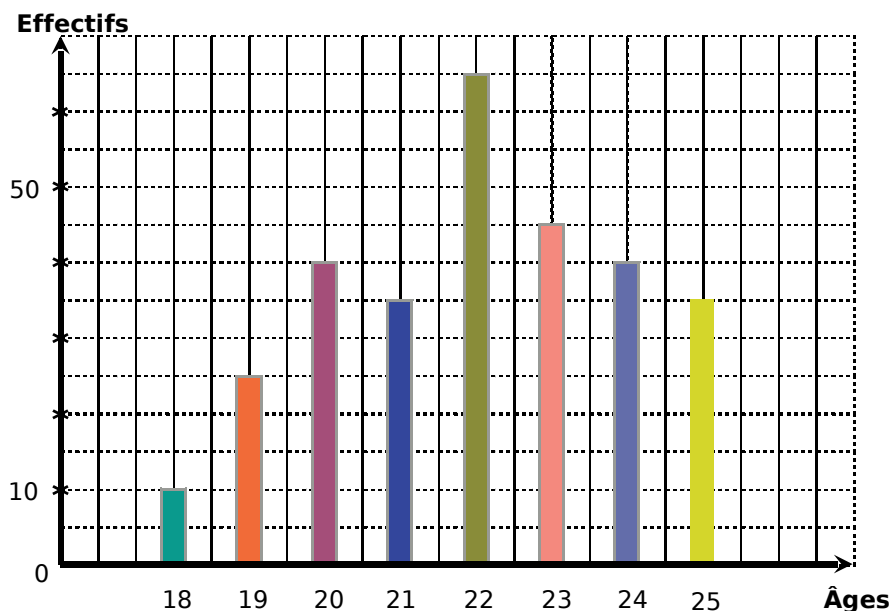
Trois amis, Pierre, Paul et Jacques, partent ensemble en vacances avec la voiture de Paul.

Partie A :

- a. Le réservoir peut contenir jusqu'à 45 L et la jauge indique qu'il n'y a qu'un tiers du réservoir rempli. Paul fait alors le plein. À 1,25 € le litre, combien paie-t-il ?
- b. Pierre et Jacques décident chacun de rembourser à Paul les deux cinquièmes du montant payé pour le plein. Combien Paul reçoit-il ?
- c. Le trajet à effectuer fait 189 km. Au bout de 40 min, ils s'arrêtent. Ils ont fait 42 km. Calculer leur vitesse moyenne en $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ sur ce début de trajet.
- d. Après une pause de 1 h 10 min, ils poursuivent leur trajet à $63 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ de moyenne. Combien de temps mettront-ils pour finir le trajet (donner le résultat en heure-minute) ?
- e. Calculer leur heure d'arrivée sachant qu'ils étaient partis à 11 h 30 min.
- f. Ils louent un vélo pour trois pendant leur séjour pour un prix total de 43,20 €. Paul l'a utilisé quatre jours, Pierre cinq jours et Jacques les trois derniers jours. Comment doivent-ils se répartir équitablement le paiement ?
- g. Ils paient chacun 48,60 € par jour pour leur demi-pension. Contents de leur séjour, ils souhaitent réserver pour leurs prochaines vacances. Le restaurateur leur fera une remise de 5 %. Combien paieront-ils par jour leur demi-pension lors de ces prochaines vacances ?
- h. L'année dernière la demi-pension coûtait 45 € par jour. De quel pourcentage le prix a-t-il augmenté entre l'année dernière et cette année ?

Partie B :

Durant leur séjour, ils ont participé à une soirée 18-25 ans. Le diagramme suivant donne la répartition des participants à cette soirée suivant leurs âges.



- a. Calculer l'effectif total des participants à cette soirée.
- b. Calculer le pourcentage, arrondi à l'unité, des participants âgés de 21 ans.
- c. Combien de participants avaient au moins 21 ans ? Quelle est la fréquence correspondante ?
- d. Calculer l'âge moyen des participants à cette soirée.

14 Triangles rectangles (Pythagore, cercle), parallélogramme, droites remarquables (d'après Brevet des Collèges, Paris, 2001)

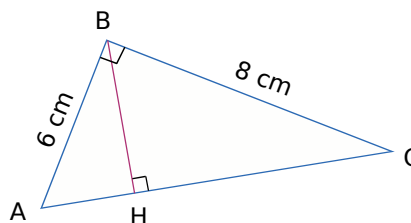
- Tracer un segment $[BC]$ tel que $BC = 15$ cm.
Placer un point A tel que $AB = 9$ cm et $AC = 12$ cm. Démontrer que ABC est un triangle rectangle.
- Placer le milieu M de $[BC]$. Tracer le cercle de diamètre $[AB]$.
Ce cercle recoupe le segment $[BC]$ en D et le segment $[AM]$ en E .
Démontrer que les triangles ABE et ABD sont rectangles.
- Construire le point F , symétrique du point E par rapport au point M .
Démontrer que le quadrilatère $BECF$ est un parallélogramme.
En déduire que les droites (BE) et (CF) sont parallèles, et que les droites (AF) et (CF) sont perpendiculaires.
- Soit H le point d'intersection des droites (AD) et (BE) et K celui des droites (AD) et (CF) .
Que représentent les droites (AD) et (BE) pour le triangle ABM ?
En déduire que les droites (HM) et (AB) sont perpendiculaires.
Démontrer de même que les droites (KM) et (AC) sont perpendiculaires.
- On appelle I le point d'intersection des droites (AB) et (MH) .
On appelle J le point d'intersection des droites (AC) et (KM) .
Démontrer que le quadrilatère $AIMJ$ est un rectangle. En déduire que le triangle HMK est rectangle.

15 Triangle rectangle (Pythagore, cercle), Thalès, droites remarquables

- Soit $[RS]$ un diamètre d'un cercle de centre O et de rayon $4,5$ cm.
 T est un point de ce cercle tel que $RT = 6$ cm.
Quelle est la nature du triangle RST ? En déduire la distance ST (arrondir le résultat au mm).
- La médiane issue de S dans le triangle RST coupe $[OT]$ en G et $[RT]$ en I .
Que représente le point G pour le triangle RST ? En déduire la distance TG .
- La parallèle à (RS) passant par G coupe $[RT]$ en J et $[TS]$ en K . Calculer TJ . Calculer JK .
- La perpendiculaire à (RS) passant par I coupe la droite (ST) en H . Démontrer que : $(RH) \perp (IS)$.

16 Un triangle rectangle dans tous ses états...

- Calculer l'aire du triangle ABC .
- Calculer AC .
- Calculer BH en utilisant les résultats précédents.
- Calculer alors AH et HC .
- Calculer la mesure au degré près de l'angle \widehat{CBH} .
- Préciser la position du point M centre du cercle circonscrit au triangle ABC puis calculer son rayon.
- On note G le point de $[BM]$ tel que $BG = \frac{10}{3}$ cm. Que représente G pour ABC ? Et (AG) ?



17 Pythagore, Thalès, cosinus

ABC est un triangle tel que $BC = 6$ cm ; $AC = 7,5$ cm et $AB = 4,5$ cm.
 E est le point de $[AB]$ tel que $AE = 1,2$ cm. La perpendiculaire à (AB) en E coupe (AC) en F .

- Prouver que le triangle ABC est rectangle.
- Calculer l'arrondi au degré de la mesure de l'angle \widehat{BAC} .
- Démontrer que les droites (EF) et (BC) sont parallèles puis calculer EF et l'aire du triangle ABF .
- Calculer BF (arrondir au dixième).

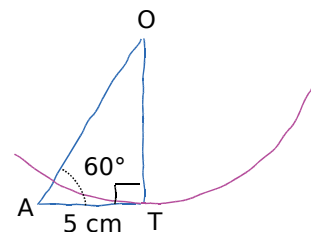
18 Pythagore, Thalès, cosinus, milieux, droites remarquables

- Tracer un demi-cercle (\mathcal{C}) de centre O et de diamètre [AB] tel que $AB = 6$ cm. Placer M sur (\mathcal{C}) tel que $BM = 3,6$ cm. Justifier la nature du triangle ABM puis calculer AM.
- Calculer la valeur arrondie au degré de la mesure de l'angle \widehat{ABM} .
- Placer P sur [AB] tel que $PA = 4,5$ cm. La parallèle à (BM) passant par P coupe [AM] en R. Calculer AR et RP.
- On note I le milieu de [AM]. Que peut-on dire des droites (OI) et (PR) ? Justifier.
- (OM) et (BI) se coupent en G. Calculer MG.

19 Cercle circonscrit à un triangle rectangle, cosinus, tangente.

On considère un triangle OAT tel que $AT = 5$ cm et $\widehat{OAT} = 60^\circ$. (AT) est la tangente au cercle de centre O passant par T.

- Calculer AO.
- Calculer OT (arrondir au mm).
- On note I le milieu de [OA]. Calculer IT.



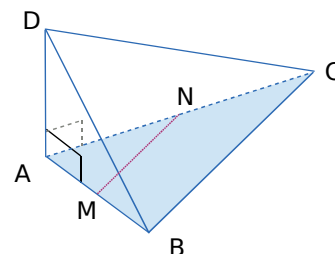
20 Triangles et cercle, Pythagore, tangente à un cercle, centre de gravité, droites des milieux

- Construire un cercle (\mathcal{C}) de centre O et de rayon 3,2 cm. Noter [AB] un diamètre. Tracer un triangle OAT avec $AT = 6$ cm et $OT = 6,8$ cm.
- Que représente (AT) pour le cercle (\mathcal{C}) ? Justifier.
- On note E le point d'intersection du cercle (\mathcal{C}) avec [OT] puis F le symétrique de A par rapport à E. Démontrer que (OE) et (FB) sont parallèles.
- Quelle est la nature du triangle AEB ? Pourquoi ? En déduire la distance EB arrondie au dixième.
- On note G le point d'intersection de (OF) et (EB). Prouver que (AG) coupe [BF] en son milieu.

21 Tétrahédre (volume, patron), Pythagore, cosinus, milieux, utilisation du volume d'une pyramide

La pyramide étudiée dans cet exercice est un tétraèdre. On peut considérer que le triangle ABC est une base et que [AD] est alors la hauteur.

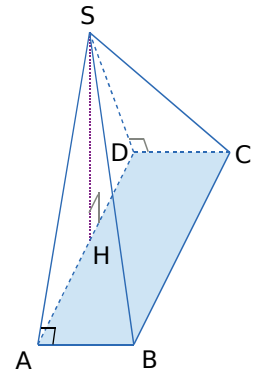
- On donne $AC = 4$ cm, $BC = 3,2$ cm et $AB = 2,4$ cm. Préciser, en justifiant, la nature du triangle ABC puis calculer son aire.
- Calculer, au degré près, la mesure de l'angle \widehat{ACB} .
- On donne $AD = 2$ cm.
 - Calculer le volume du tétraèdre DABC.
 - Dessiner un patron de ce tétraèdre en vraie grandeur. Comment semble être la face BCD ?
- Calculer DC^2 ainsi que DB^2 . Justifier alors la nature du triangle BCD.
- On note M le milieu du segment [AB] et N celui du segment [AC]. Calculer MN puis le volume du tétraèdre DAMN.
- Calculer le volume de la pyramide DMNCB en remarquant qu'elle s'obtient en ôtant au tétraèdre DABC le tétraèdre DAMN.
- Retrouver alors l'aire de la base de la pyramide DMNCB en utilisant la formule de son volume.





22 Pyramides (volume, patron), Pythagore, cosinus

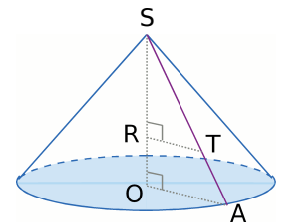
La pyramide ci-contre a pour base un rectangle ABCD.
 On donne $AB = 1$ cm et $BC = 10$ cm.
 Les faces SAB et SDC sont deux triangles rectangles superposables.
 Le triangle SAD est isocèle en S avec $SA = 7$ cm.



- Calculer la mesure arrondie au mm de la hauteur SH de cette pyramide (on remarquera que H est le milieu de [AD]).
- Calculer l'arrondi au degré de la mesure de l'angle \widehat{SAH} .
- En sachant que $SH \approx 4,9$ cm, calculer la valeur approchée du volume de cette pyramide au cm^3 près.
- Réaliser un patron à l'échelle $\frac{1}{2}$ de cette pyramide.
- Calculer SB (ou SC) puis préciser la nature du triangle SBC.

23 Cône de révolution, volume, Pythagore, cosinus, Thalès

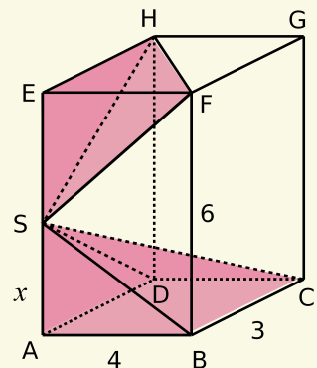
On considère un cône de révolution de sommet S, de base le disque de rayon $OA = 12$ cm et de hauteur $OS = 15$ cm.



- Donner la valeur exacte de son volume en cm^3 en fonction de π . Donner la valeur approchée de ce volume au cl près.
- Calculer AS (arrondir au mm).
- Calculer, au degré près, la mesure de l'angle \widehat{OSA} .
- Calculer RT sachant que $OR = 5$ cm.

24 Pyramides, volumes en fonction de x , équation, patron, Pythagore (d'après Brevet des Collèges, Afrique 2001)

ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle (ou pavé droit).
 On donne $AB = 4$ cm, $BC = 3$ cm et $AE = 6$ cm.
 Un point quelconque S de l'arête [AE] permet de définir :
 - une pyramide SABCD de hauteur [SA] et de base le rectangle ABCD ;
 - une pyramide SEFH de hauteur [SE] et de base le triangle rectangle EFH.



Partie A :

Dans cette partie on pose $SA = x$ cm ($0 \leq x \leq 6$).

- Exprimer en fonction de x le volume V_1 de la pyramide SABCD en cm^3 .
- Exprimer en fonction de x la longueur SE.
- Démontrer que le volume V_2 en cm^3 de la pyramide SEFH est $12 - 2x$.
- Déterminer la valeur de x pour laquelle $V_1 = V_2$ puis la valeur commune de ces volumes.

Partie B :

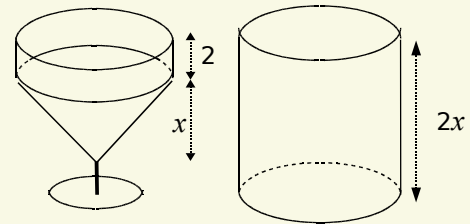
Dans cette partie $x = 6$ cm, donc le point S est confondu avec le point E. On considère à présent la pyramide EABCD de hauteur [EA] et de base le rectangle ABCD.

- Calculer son volume V_3 en cm^3 .
- Réaliser un patron de cette pyramide.
- Calculer la longueur de ses arêtes latérales au millimètre près.

25 Cône, cylindres, volumes, équation (d'après Brevet des Collèges, Polynésie, septembre 2000)

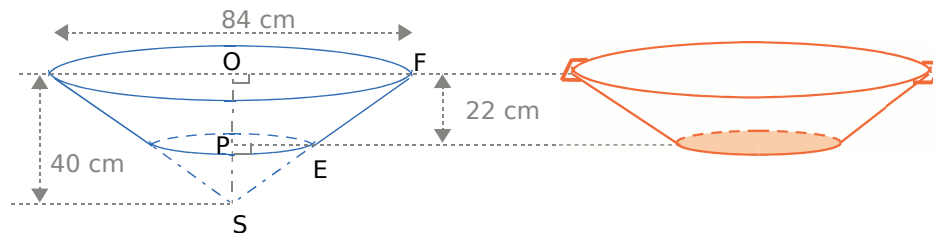
Dans tout ce problème, les longueurs sont exprimées en cm, les aires en cm^2 et les volumes en cm^3 . On considère les deux verres représentés ci-après. Celui de droite est un cylindre de révolution dont l'aire de base est 30 et dont la hauteur mesure $2x$ (où x est un nombre positif, $x \leq 4$). Celui de gauche est constitué d'un cône dont l'aire de base est 30 et dont la hauteur mesure x , surmonté d'un cylindre d'aire de base 30 et de hauteur 2.

- Exprimer V_1 , le volume du verre de droite, en fonction de x , puis V_2 , celui du verre de gauche, lui aussi en fonction de x .
- V_1 est-il proportionnel à x ? Et V_2 ? Justifier les réponses.
- Déterminer la valeur de x pour laquelle $V_1 = V_2$ puis la valeur commune de ces volumes.
- Déterminer une valeur arrondie au mm du rayon commun à ces deux verres.



26 Cône de révolution, volume, Pythagore, cosinus, Thalès. Pourcentages, vitesse, équation (les deux parties de ce problème sont indépendantes).

M. Gourmand utilise une bassine en cuivre pour cuire des fruits mélangés avec du sucre afin de faire de la confiture. On peut imaginer la bassine constituée ainsi : à un grand cône de sommet S et de base le disque de rayon [OF], on enlève le petit cône de sommet S et de base le disque de rayon [PE] (la partie restante formant la bassine s'appelle un tronc de cône).



Partie A :

- Démontrer par le calcul que $SF = 58$ cm.
- Préciser la position de (OF) par rapport à (PE) puis calculer PE.
- Calculer l'arrondi au degré de la mesure de l'angle \widehat{OSF} .
- Calculer, en cm^3 , le volume V du grand cône, et le volume V' du petit cône (donner des résultats exacts en fonction de π).
- En déduire une valeur approchée arrondie au cl du volume de la bassine.

Partie B :

- En cuisant, les fruits perdent 35 % de leur masse. Quelle masse reste-t-il si on cuit 4 kg de fruits ?
- Lorsqu'on rajoute le sucre, la masse augmente de 20 %. M. Gourmand a fait 4,2 kg de confiture. Quelle masse de fruits cuits avait-il avant l'ajout du sucre ?
- Pour acheter le sucre, il est allé au supermarché distant de 28 km. Il a mis 35 min pour y aller. Calculer la vitesse moyenne de M. Gourmand en $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$.
- M. Gourmand a cherché la recette de la confiture sur Internet. Son fournisseur d'accès lui propose deux tarifs :
 - Tarif 1 : une formule sans abonnement à 0,04 € la minute de connexion ;
 - Tarif 2 : un abonnement mensuel de 20 € puis 0,02 € la minute de connexion.

On note x le nombre de minutes de connexion dans le mois.

Exprimer en fonction de x le coût mensuel pour Internet suivant les deux tarifs puis déterminer la durée de connexion dans le mois pour laquelle les deux tarifs sont équivalents.

Chapitre N1 Nombres Relatifs

1 Effectue les multiplications suivantes :

$$\begin{aligned} C &= (-7) \times (-8) = +56 & D &= (-9) \times 6 = -54 \\ E &= 10 \times (-0,8) = -8 & F &= -5 \times (-11) = +55 \\ G &= -8 \times 0,5 = -4 & H &= (-7) \times 0 = 0 \end{aligned}$$

2 Quel est le signe du produit ?

$C = 9 \times (-9) \times (-9) \times 9 \times (-9) \times (-9) \times (-9)$
Le produit comporte cinq facteurs négatifs. Or cinq est impair donc A est **négatif**.

3 Calcule :

$$\begin{aligned} D &= -25 \times (-9) \times (-4) = -25 \times 4 \times 9 = -100 \times 9 \\ D &= -900 \\ E &= 0,5 \times 6 \times (-20) \times 8 = -0,5 \times 20 \times 6 \times 8 \\ E &= -10 \times 48 \\ E &= -480 \end{aligned}$$

4 Quel est le signe des quotients suivants ?

$$\begin{aligned} C &= \frac{56}{-74} : \text{négatif} & D &= \frac{-6}{5} : \text{négatif} \\ E &= -\frac{9}{13} : \text{négatif} & F &= -\frac{7}{-45} : \text{positif} \\ G &= -\frac{8}{-9} : \text{négatif} \end{aligned}$$

5 Calcule de tête :

$$\begin{aligned} H &= 45 \div (-5) = -9 & I &= (-56) \div (-8) = +7 \\ J &= -59 \div (-10) = +5,9 & K &= -14 \div 4 = -3,5 \end{aligned}$$

6 Effectue les calculs :

$$\begin{aligned} B &= (-3-6) \times (6-8) & C &= 12 - (-21) \times 7 \\ B &= (-9) \times (-2) & C &= 12 - (-147) \\ B &= +18 & C &= 12 + 147 \\ & & C &= +159 \\ D &= -15 + (6-9) \times (-4) \\ D &= -15 + (-3) \times (-4) \\ D &= -15 + 12 \\ D &= -3 \end{aligned}$$

Chapitre N2 Nombres en écriture fractionnaire

1 Simplifie les écritures fractionnaires :

$$\begin{aligned} E &= \frac{-85}{-150} = \frac{-5 \times 17}{-5 \times 30} = \frac{17}{30} \\ F &= \frac{-3 \times 4 \times (-7)}{-5 \times 2 \times 7} = -\frac{3 \times 2}{5} = -\frac{6}{5} \\ G &= \frac{4,5}{0,05} = \frac{4,5 \times 100}{0,05 \times 100} = \frac{450}{5} = 90 \\ H &= -\frac{-10,5}{-0,15} = -\frac{1050}{15} = -70 \end{aligned}$$

2 Compare les nombres suivants :

$$\text{a. } \frac{1}{3} = \frac{4}{12} \quad \text{or} \quad \frac{5}{12} > \frac{4}{12} \quad \text{donc} \quad \frac{5}{12} > \frac{1}{3}$$

$$\text{b. } \frac{4}{3} = \frac{16}{12} \quad \text{et} \quad \frac{5}{4} = \frac{15}{12} \quad \text{or} \quad \frac{16}{12} > \frac{15}{12} \quad \text{donc} \quad \frac{4}{3} > \frac{5}{4}$$

$$\text{c. } \frac{9}{10} = \frac{54}{60} \quad \text{et} \quad \frac{11}{12} = \frac{55}{60} \quad \text{or} \quad \frac{54}{60} < \frac{55}{60} \quad \text{donc} \quad \frac{9}{10} < \frac{11}{12}$$

$$\text{d. } \frac{19}{20} = \frac{152}{160} \quad \text{et} \quad \frac{31}{32} = \frac{155}{160} \quad \text{or} \quad \frac{152}{160} < \frac{155}{160} \quad \text{donc} \quad \frac{19}{20} < \frac{31}{32}$$

3 Produits en croix

$$\begin{aligned} -\frac{6}{-5} &= \frac{-6}{5} ; -7 \times 5 = -35 \quad \text{et} \quad 6 \times (-6) = -36 \\ \text{donc} \quad \frac{-7}{6} &\neq \frac{-6}{-5} \\ 14,5 \times (-20) &= -290 \quad \text{et} \quad 25 \times (-11,6) = -290 \\ \text{donc} \quad \frac{14,5}{25} &= \frac{-11,6}{-20} \end{aligned}$$

4 Calcule et donne le résultat sous la forme d'une fraction la plus simple possible :

$$\begin{aligned} B &= 1 - \frac{-7}{3} = \frac{3}{3} - \frac{-7}{3} = \frac{3 - (-7)}{3} = \frac{10}{3} \\ C &= \frac{-2}{3} + \frac{7}{8} - \frac{5}{6} \end{aligned}$$

Le dénominateur commun est le plus petit multiple commun non nul à 3 ; 8 et 6 :

multiples de 3 : 3 ; 6 ; 9 ; 12 ; 15 ; 18 ; 21 ; 24 ; 27 ;
multiples de 8 : 8 ; 16 ; 24 ; 32 ;
multiples de 6 : 6 ; 12 ; 18 ; 24 ; 30 ;

$$\begin{aligned} C &= \frac{-2 \times 8}{3 \times 8} + \frac{7 \times 3}{8 \times 3} - \frac{5 \times 4}{6 \times 4} = \frac{-16}{24} + \frac{21}{24} - \frac{20}{24} \\ C &= \frac{-16 + 21 - 20}{24} = \frac{-15}{24} = -\frac{5}{8} \end{aligned}$$

$$D = \frac{-2}{10} + \frac{7}{25} = \frac{-10}{50} + \frac{14}{50} = \frac{4}{50} = \frac{2}{25}$$

$$E = \frac{3}{7} - \frac{7}{10} = \frac{30}{70} - \frac{49}{70} = \frac{-19}{70}$$

5 Donne l'inverse de chaque nombre :

$$\text{Inverse de } -6 : (-6)^{-1} = -\frac{1}{6}$$

$$\text{Inverse de } 3,5 : 3,5^{-1} = \frac{1}{3,5} = \frac{2}{7}$$

$$\text{Inverse de } \frac{-15}{4} : \left(\frac{-15}{4}\right)^{-1} = -\frac{4}{15}$$

$$\text{Inverse de } \frac{1}{4} : \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} = \frac{4}{1} = 4$$

6 Calcule et donne le résultat sous la forme d'une fraction la plus simple possible :

$$B = \frac{-7}{3} \div \frac{-21}{6} = \frac{7}{3} \times \frac{6}{21} = \frac{7 \times 6}{3 \times 21} = \frac{2}{3}$$

$$C = \frac{-4}{7} \div \frac{3}{7} = -4 \times \frac{3}{7} = \frac{-4 \times 3}{7} = -\frac{12}{7}$$

$$D = \frac{-4}{7} \div \frac{3}{-5} = \frac{-4}{7} \times \frac{-5}{3} = \frac{4 \times 5}{7 \times 3} = \frac{20}{21}$$

Chapitre N3 Puissances

1 Donne l'écriture décimale des nombres :

$$A = 3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = \mathbf{81}$$

$$B = (-10)^5 = (-10) \times (-10) \times (-10) \times (-10) \times (-10)$$

$$B = \mathbf{-100\ 000}$$

$$C = 2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2} = \frac{1}{32} = \mathbf{0,03125}$$

2 Donne l'écriture décimale des nombres :

$$D = \frac{7^5}{7^3} = 7^{5-3} = 7^2 = 7 \times 7 = \mathbf{49}$$

$$E = (5 \times 3)^2 = 15^2 = 15 \times 15 = \mathbf{225}$$

$$F = 2^7 \times 5^7$$

$$F = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$$

$$F = 2 \times 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5$$

$$F = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$$

$$F = \mathbf{10\ 000\ 000}$$

3 Calcule :

$$C = 3 + 5 \times 2^3 = 3 + 5 \times 2 \times 2 \times 2 = 3 + 5 \times 8$$

$$C = 3 + 40 = \mathbf{43}$$

$$D = 3 - 5 + 2^3 = 3 - 5 + 2 \times 2 \times 2 = 3 - 5 + 8$$

$$D = -2 + 8 = \mathbf{6}$$

$$E = 3 + (5 \times 2)^3 = 3 + 10^3 = 3 + 10 \times 10 \times 10$$

$$E = 3 + 1\ 000 = \mathbf{1\ 003}$$

$$F = (3 - 5) \times 2^3 = (-2) \times 2^3 = -2 \times 2 \times 2 \times 2 = \mathbf{-16}$$

4 Donne le signe de chacune des expressions :

$$C = (-15)^6$$

$$C = (-15) \times (-15) \times (-15) \times (-15) \times (-15) \times (-15) :$$

il y a six facteurs négatifs donc C est **positif**.

$$D = -15^6 = -(15 \times 15 \times 15 \times 15 \times 15 \times 15) :$$

donc D est **négatif**.

$$E = 15^{-6} = \frac{1}{15^6} :$$

donc E est **positif** car il n'y a aucun facteur négatif.

$$F = (15)^{-6} = \frac{1}{(15)^6} = \frac{1}{15^6} :$$

donc F est **positif** car il n'y a aucun facteur négatif.

$$G = (-1)^3 = (-1) \times (-1) \times (-1) :$$

il y a trois facteurs négatifs donc G est **négatif**.

$$H = -5^{-4} = -(5^{-4}) = -\frac{1}{5^4} = -\frac{1}{5 \times 5 \times 5 \times 5} :$$

il y a un seul facteur négatif donc H est **négatif**.

$$I = 12^{-2} = \frac{1}{12^2} :$$

il n'y a aucun facteur négatif donc I est **positif**.

$$J = -(-3)^{-2} = -\frac{1}{(-3)^2} = -\frac{1}{(-3) \times (-3)} = -\frac{1}{9} :$$

J est **négatif**.

5 Donne l'écriture décimale des nombres :

$$A = 32,48 \times 10^6 = 32,48 \times 1\ 000\ 000 = \mathbf{32\ 480\ 000}$$

$$B = 0,78 \times 10^2 = 0,78 \times 100 = \mathbf{78}$$

$$C = 401 \times 10^{-2} = 401 \times 0,01 = \mathbf{4,01}$$

$$D = 94,6 \times 10^{-4} = 94,6 \times 0,000\ 1 = \mathbf{0,009\ 46}$$

6 Par combien multiplier ?

a. $234,428 \times 10^{-5} = 0,002\ 344\ 28$

b. $5\ 000 \times 10^{-6} = 0,005$

c. $0,3 \times 10^4 = 3\ 000$

d. $3,4324 \times 10^5 = 343\ 240$

7 Écris sous la forme d'une seule puissance de 10 les expressions suivantes :

$$C = 10^6 \times 10^{-8} = 10^{6+(-8)} = 10^{6-8} = \mathbf{10^{-2}}$$

$$D = (10^{-1})^{-3} = 10^{(-1) \times (-3)} = \mathbf{10^3}$$

$$E = \frac{10^{-2}}{10^2} = 10^{-2-2} = \mathbf{10^{-4}}$$

$$F = 10^2 \times 10^{-3} \times 10 = 10^2 \times 10^{-3} \times 10^1 = 10^{2-3+1}$$

$$F = \mathbf{10^0}$$

8 Donne l'écriture scientifique des nombres suivants :

$$B = 21\ 600 = \mathbf{2,16 \times 10^4}$$

$$C = 0,012 = \mathbf{1,2 \times 10^{-2}}$$

$$D = 58,4 \times 10^2 = 5,84 \times 10^1 \times 10^2 = 5,84 \times 10^{1+2}$$

$$D = \mathbf{5,84 \times 10^3}$$

$$E = 0,147 \times 10^{-1} = 1,47 \times 10^{-1} \times 10^{-1}$$

$$E = 1,47 \times 10^{-1+(-1)} = \mathbf{1,47 \times 10^{-2}}$$

9 Calcule et donne le résultat, en écriture décimale puis en écriture scientifique, de :

$$B = \frac{5 \times 10^2 \times 9 \times 10^{-5}}{2 \times 10^{-6}} = \frac{45 \times 10^{2-5}}{2 \times 10^{-6}} = \frac{45 \times 10^{-3}}{2 \times 10^{-6}}$$

$$B = \frac{45}{2} \times \frac{10^{-3}}{10^{-6}} = 22,5 \times 10^{-3-(-6)}$$

$$B = 22,5 \times 10^{-3+6} = 22,5 \times 10^3 = 22,5 \times 1\ 000$$

$$B = \mathbf{22\ 500}$$
 (écriture décimale)

$$B = \mathbf{2,25 \times 10^4}$$
 (écriture scientifique)

$$C = \frac{3 \times 10^5 \times 2 \times 10^{-2}}{8 \times 10^4} = \frac{6 \times 10^{5+(-2)}}{8 \times 10^4} = \frac{6 \times 10^3}{8 \times 10^4}$$

$$C = \frac{6}{8} \times \frac{10^3}{10^4} = \frac{3}{4} \times 10^{3-4} = 0,75 \times 10^{-1}$$

$$C = 0,75 \times 0,1 = \mathbf{0,075}$$
 (écriture décimale)

$$C = \mathbf{7,5 \times 10^{-2}}$$
 (écriture scientifique)

$$D = \frac{3 \times 10^2 \times 1,2 \times 10^{-5}}{15 \times 10^2} = \frac{3,6 \times 10^{2-5}}{15 \times 10^2}$$

$$D = \frac{3,6}{15} \times \frac{10^{-3}}{10^2} = 0,24 \times 10^{-3-2} = 0,24 \times 10^{-5}$$

$$D = \mathbf{0,000\ 002\ 4}$$
 (écriture décimale)

$$D = \mathbf{2,4 \times 10^{-6}}$$
 (écriture scientifique)

10 Range dans l'ordre croissant les nombres suivants :

Pour comparer les nombres, on les écrit en notation scientifique :

$$E = 33,5 \times 10^{-3} = 3,35 \times 10^{-2}$$

$$F = 7,2 \times 10^3 = 7,2 \times 10^3$$

$$G = 0,02 \times 10^{-2} = 2 \times 10^{-4}$$

$$H = 99,1 \times 10^{-4} = 9,91 \times 10^{-3}$$

$$2 \times 10^{-4} < 9,91 \times 10^{-3} < 3,35 \times 10^{-2} < 7,2 \times 10^3$$

soit : $\mathbf{G < H < E < F}$

Chapitre N4 Calcul littéral

1 Simplifier une expression

$$B = -3 \times x \times (-5 \times x) + 2x(-7y)$$

$$B = -3x(-5x) + 2x(-7y) = \mathbf{15x^2 - 14xy}$$

$$C = 2t^2 \times t + 5t \times (-4t) = \mathbf{2t^3 - 20t^2}$$

$$D = (2 \times a + 5) \times (3 - 7 \times a) = \mathbf{(2a + 5)(3 - 7a)}$$

2 Replacer le signe \times

$$E = 3x^2 + 5x - 10 = \mathbf{3 \times x \times x + 5 \times x - 10}$$

$$F = 4x(21 - 3x) = \mathbf{4 \times x \times (21 - 3 \times x)}$$

$$G = (2x - 1)(5 - x) = \mathbf{(2 \times x - 1) \times (5 - x)}$$

3 Supprimer les parenthèses

$$B = x^2 - (4xy - 5y - 4x)$$

$$B = x^2 + (-4xy) + (+5y) + (+4x)$$

$$B = \mathbf{x^2 - 4xy + 5y + 4x}$$

$$C = (2a + 5b - 4) - (a^2 - b^2 + 1)$$

$$C = 2a + 5b - 4 + (-a^2) + (+b^2) + (-1)$$

$$C = \mathbf{2a + 5b - 4 - a^2 + b^2 - 1}$$

$$D = -(2x - 5) + (5 - 2x)$$

$$D = (-2x) + (+5) + (+5) + (-2x)$$

$$D = \mathbf{-2x + 5 + 5 - 2x}$$

4 Facteur commun

$$C = 3x^2 + 5xy = \mathbf{x \times 3 \times x + x \times 5 \times y}$$

$$D = 25ab - 10a^2 + 30a$$

$$D = \mathbf{5 \times a \times 5 \times b - 5 \times a \times 2 \times a + 5 \times a \times 6}$$

$$E = 4x(5 + 3x) + 7(5 + 3x)$$

$$E = 4x \times \mathbf{(5 + 3x)} + 7 \times \mathbf{(5 + 3x)}$$

5 Factoriser

$$F = 6x - 5x^2 = \mathbf{x \times 6 - x \times 5x = x(6 - 5x)}$$

$$G = 7uv + 21u^2 = \mathbf{7u \times v + 7u \times 3u = 7u(v + 3u)}$$

$$H = 2(3x - 2) - 9x(3x - 2) = \mathbf{(3x - 2)(2 - 9x)}$$

6 Compléter un développement

$$B = x(3 + 2x) = x \times \mathbf{3} + x \times 2x = \mathbf{3x + 2x^2}$$

$$C = 3a(4b - 5a) = \mathbf{12ab - 15a^2}$$

$$D = 5x(3y - 4) = \mathbf{15xy - 20x}$$

7 Développer

$$E = 3(a - 6b + 9) = 3 \times a - 3 \times 6b + 3 \times 9$$

$$E = \mathbf{3a - 18b + 27}$$

$$F = -2t(5t - 4) = -2t \times 5t - (-2t) \times 4 = \mathbf{-10t^2 + 8t}$$

$$G = x^2(7x - 8) = x^2 \times 7x - x^2 \times 8 = \mathbf{7x^3 - 8x^2}$$

8 Développer les expressions suivantes

$$B = (x + 7)(4y - 5) = x \times 4y - x \times 5 + 7 \times 4y - 7 \times 5$$

$$B = \mathbf{4xy - 5x + 28y - 35}$$

$$C = (x + 3)^2 = (x + 3)(x + 3)$$

$$C = x^2 + x \times 3 + 3 \times x + 3 \times 3 = x^2 + 3x + 3x + 9$$

$$C = \mathbf{x^2 + 6x + 9}$$

$$D = (a + b)(x - y) = \mathbf{ax - ay + bx - by}$$

$$E = \left(\frac{x}{2} + 5\right)(2z + \frac{3}{2})$$

$$E = \frac{x}{2} \times 2z + \frac{x}{2} \times \frac{3}{2} + 5 \times 2z + 5 \times \frac{3}{2}$$

$$E = \mathbf{xz + \frac{3x}{4} + 10z + \frac{15}{2}}$$

9 Réduire les expressions suivantes

$$E = 3a - (6 + 7a^2) + 4a - 5 = 3a - 6 - 7a^2 + 4a - 5$$

$$E = \mathbf{-7a^2 + 7a - 11}$$

$$F = 4x(3x - 6) - (2x - 1)(3 + 5x)$$

$$F = 4x \times 3x - 4x \times 6 - (2x \times 3 + 2x \times 5x - 1 \times 3$$

$$\quad - 1 \times 5x)$$

$$F = 12x^2 - 24x - 6x - 10x^2 + 3 + 5x = \mathbf{2x^2 - 25x + 3}$$

10 La meilleure écriture

a.

Expressions de B	$x = 5$	$x = 0$
$(x - 5)^2 + 8x - 40$	$(5 - 5)^2 + 8 \times 5 - 40 = 0 + 40 - 40 = \mathbf{0}$	$(0 - 5)^2 + 8 \times 0 - 40 = 25 + 0 - 40 = \mathbf{-15}$
$x^2 - 2x - 15$	$5^2 - 2 \times 5 - 15 = 25 - 10 - 15 = \mathbf{0}$	$0^2 - 2 \times 0 - 15 = \mathbf{-15}$
$(x - 5)(x + 3)$	$(5 - 5)(5 + 3) = 0 \times 8 = \mathbf{0}$	$(0 - 5)(0 + 3) = (-5) \times 3 = \mathbf{-15}$

Expressions de B	$x = -3$
$(x - 5)^2 + 8x - 40$	$(-3 - 5)^2 + 8 \times (-3) - 40 = 64 - 24 - 40 = \mathbf{0}$
$x^2 - 2x - 15$	$(-3)^2 - 2 \times (-3) - 15 = 9 + 6 - 15 = \mathbf{0}$
$(x - 5)(x + 3)$	$(-3 - 5)(-3 + 3) = -8 \times 0 = \mathbf{0}$

b. Lorsque $x = 5$ et $x = -3$, c'est l'**expression factorisée** qui permet d'arriver au résultat avec le minimum d'opérations.

Lorsque $x = 0$, ce sont les expressions **développées et factorisées** qui permettent de parvenir au résultat avec le minimum d'opérations.

11 La meilleure écriture (bis)

a. $C = 5x + x(1 - 2x) + x^2 = 5x + x \times 1 - x \times 2x + x^2$
 $C = x^2 - 2x^2 + 6x = \mathbf{-x^2 + 6x}$

b. $C = -x^2 + 6x = x \times (-x) + x \times 6 = \mathbf{x(-x + 6)}$

c. Pour $x = 0$:

$$5x + x(1 - 2x) + x^2 = 5 \times 0 + 0(1 - 2 \times 0) + 0^2 = \mathbf{0}$$

$$-x^2 + 6x = -0^2 + 6 - 0 = \mathbf{0}$$

$$x(-x + 6) = 0(-0 - 6) = \mathbf{0}$$

Pour $x = 6$:

$$5x + x(1 - 2x) + x^2 = 5 \times 6 + 6(1 - 2 \times 6) + 6^2$$

$$= 30 + 6(-11) + 36 = \mathbf{0}$$

$$-x^2 + 6x = -6^2 + 6 \times 6 = \mathbf{0}$$

$$x(-x + 6) = 6(-6 + 6) = \mathbf{0}$$

Correction des exercices "À toi de jouer"

Pour $x = -4$:

$$\begin{aligned} 5x + x(1 - 2x) + x^2 &= 5 \times (-4) + (-4) \times (1 - 2 \times (-4)) + (-4)^2 \\ &= -20 + (-4) \times 9 + 16 = -20 - 36 + 16 = -40 \\ -x^2 + 6x &= -(-4)^2 + 6 \times (-4) = -16 - 24 = -40 \\ x(-x + 6) &= -4(-(-4) + 6) = -4(4 + 6) = -4 \times 10 \\ &= -40 \end{aligned}$$

Lorsque $x = 0$, $x = 6$ et $x = -4$, c'est l'expression **factorisée** et l'expression **développée** qui permettent d'arriver au résultat avec le minimum d'opérations.

Chapitre N5 Équations et Ordre

1 Tester si un nombre est solution d'une équation

x	$x^2 + 4$	$3x + 14$	x est-il solution ?
3	$3^2 + 4 = 13$	$3 \times 3 + 14 = 23$	NON
-2	$(-2)^2 + 4 = 8$	$3 \times (-2) + 14 = 8$	OUI
5	$5^2 + 4 = 29$	$3 \times 5 + 14 = 29$	OUI

2 Tester si un nombre est solution d'une équation

x	$4(x + 3)$	$6x + 2$	x est-il solution ?
0	$4(0 + 3) = 12$	$6 \times 0 + 2 = 2$	NON
1	$4(1 + 3) = 16$	$6 \times 1 + 2 = 8$	NON
2	$4(2 + 3) = 20$	$6 \times 2 + 2 = 14$	NON
3	$4(3 + 3) = 24$	$6 \times 3 + 2 = 20$	NON
4	$4(4 + 3) = 28$	$6 \times 4 + 2 = 26$	NON
5	$4(5 + 3) = 32$	$6 \times 5 + 2 = 32$	OUI
6	$4(6 + 3) = 36$	$6 \times 6 + 2 = 38$	NON
7	$4(7 + 3) = 40$	$6 \times 7 + 2 = 44$	NON
8	$4(8 + 3) = 44$	$6 \times 8 + 2 = 50$	NON
9	$4(9 + 3) = 48$	$6 \times 9 + 2 = 56$	NON
10	$4(10 + 3) = 52$	$6 \times 10 + 2 = 62$	NON

3 Résoudre une équation du premier degré

$$\begin{aligned} 3x + 5 &= 4 & 3x &= 4 - 5 \\ 3x &= -1 & x &= \frac{-1}{3} \end{aligned}$$

La solution de cette équation est $\frac{-1}{3}$.

$$\begin{aligned} 7x + 8 &= 14x & 7x - 14x &= -8 \\ -7x &= -8 & x &= \frac{-8}{-7} = \frac{8}{7} \end{aligned}$$

La solution de cette équation est $\frac{8}{7}$.

$$\begin{aligned} 5x - 3 &= 7 + 5x & 5x - 5x &= 7 + 3 \\ 0x &= 10 & \text{Cette équation n'a pas de} & \\ & & \text{solution.} & \end{aligned}$$

4 Simplifie les équations suivantes puis résous-les

$$\begin{aligned} \text{a. } 7(2x + 3) - 23 &= -x + 5(2x + 1) \\ 14x + 21 - 23 &= -x + 10x + 5 & 14x - 2 &= 9x + 5 \\ 14x - 9x &= 5 + 2 & 5x &= 7 \\ x &= \frac{7}{5} \end{aligned}$$

La solution de cette équation est $\frac{7}{5}$.

$$\begin{aligned} \text{b. } \frac{x}{3} + 2 &= \frac{5x}{6} - 1 \\ \frac{2x}{6} + \frac{12}{6} &= \frac{5x}{6} - \frac{6}{6} & 2x + 12 &= 5x - 6 \\ 2x - 5x &= -6 - 12 & -3x &= -18 \\ x &= \frac{-18}{-3} = 6 \end{aligned}$$

La solution de cette équation est 6.

$$\begin{aligned} \text{c. } (x + 1)(x - 2) &= x^2 + 2 \\ x^2 - 2x + x - 2 &= x^2 + 2 & x^2 - x - 2 &= x^2 + 2 \\ x^2 - x^2 - x &= 2 + 2 & -x &= 4 \\ x &= -4 \end{aligned}$$

La solution de cette équation est -4.

5 Comparer des nombres

$$\begin{aligned} 3,14 &< \pi < 3,15 \\ 7 \times 3,14 &< 7\pi < 7 \times 3,15 \\ 21,98 &< 7\pi < 22,05 \\ 21,98 - 22,3 &< 7\pi - 22,3 < 22,05 - 22,3 \\ -0,32 &< 7\pi - 22,3 < -0,25 \end{aligned}$$

On en déduit que $7\pi - 22,3$ est négatif, donc

$$7\pi < 22,3.$$

6 Résoudre un problème à l'aide d'une équation

Le triple de la différence de x et de 7 est : $3 \times (x - 7)$.
La moitié de la somme de x et de 1 est : $\frac{x+1}{2}$.

$$\begin{aligned} \text{D'où l'équation : } 3 \times (x - 7) &= \frac{x+1}{2} \\ 3x - 21 &= \frac{x+1}{2} & \frac{6x - 42}{2} &= \frac{x+1}{2} \\ 6x - 42 &= x + 1 & 6x - x &= 1 + 42 \\ 5x &= 43 & x &= \frac{43}{5} \end{aligned}$$

Le nombre qui vérifie les conditions de l'énoncé est $\frac{43}{5}$ soit 8,6.

7 Résoudre un problème à l'aide d'une équation

Soit x mon âge.

Julie a 2 ans de moins que moi. Elle a : $x - 2$
 Marc a le double de mon âge. Il a : $2 \times x = 2x$.
 À nous trois, nous avons 110 ans :

$$x + (x - 2) + 2x = 110$$

$$x + x - 2 + 2x = 110 \quad 4x - 2 = 110$$

$$4x = 110 + 2 \quad 4x = 112$$

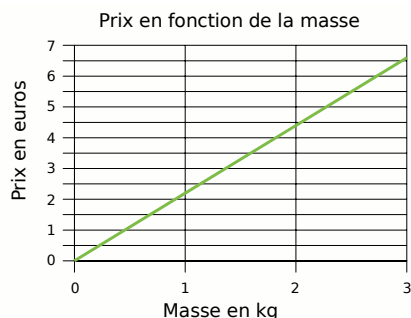
$$x = \frac{112}{4} = 28$$

J'ai donc 28 ans.

Chapitre N6 Proportionnalité

1 Représenter une situation de proportionnalité

Nous sommes dans une situation de proportionnalité. Donc la représentation graphique sera une droite passant par l'origine du repère. Pour tracer cette droite, il nous suffit d'un autre point. L'énoncé nous donne ses coordonnées car « le kilogramme de clémentines est vendu 2,20 € ». La droite passera donc par le point de coordonnées (1 ; 2,2). On obtient la représentation graphique suivante (les unités ne sont pas respectées pour des raisons de mise en page) :



2 Situations proportionnelles ?

En observant les deux courbes, on remarque qu'elles sont formées par des points qui ne sont pas alignés avec l'origine du repère. **L'alcoolémie n'est donc pas proportionnelle au temps et la distance d'arrêt n'est pas proportionnelle à la vitesse.**

3 Quatrième proportionnelle

C'est une situation de proportionnalité, on a donc :

$$\frac{x}{208} = \frac{2,75}{44} \text{ donne } x = \frac{208 \times 2,75}{44} \text{ soit } x = 13 \text{ Mo}$$

$$\frac{740}{y} = \frac{2,75}{44} \text{ donne } y = \frac{740 \times 44}{2,75} \text{ soit } y = 11\,840 \text{ s}$$

$$\frac{z}{10} = \frac{2,75}{44} \text{ donne } z = \frac{10 \times 2,75}{44} \text{ soit } z = 0,625 \text{ Mo}$$

4 Cacao et pourcentage

a. 70% de cacao signifie que pour 100 g, il y a 70 g de cacao.
 85% de cacao signifie que pour 100 g, il y a 85 g de cacao. On en déduit immédiatement que dans une tablette de 200 g, il y a $85 \times 2 = 170$ g de cacao. Au total, il y a donc : **$70 + 170 = 240$ g** de cacao pour 300 g de chocolat.

b. Utilisons un tableau de proportionnalité pour déterminer le pourcentage de cacao dans ce mélange :

Masse de chocolat en g	240	p
Masse totale en g	300	100

On « passe » de la deuxième colonne à la troisième en divisant par 3. Donc $p = \frac{240}{3} = 80$.

Le pourcentage de cacao dans le nouveau mélange est de 80%.

5 Durée d'un trajet

Un TGV a parcouru 540 km à 240 km/h de moyenne. Cela signifie qu'en 1 heure, il a parcouru 240 km. Reportons ces données dans un tableau :

Distance parcourue en km	540	240
Durée en heures	x	1

On obtient : $x = \frac{540 \times 1}{240} = 2,25$. Convertissons 0,25 heure en minutes : $0,25 \text{ h} = 0,25 \times 60 = 15 \text{ min}$.

Donc le TGV a mis 2h15min pour parcourir les 540 km.

6 Conversion de vitesse

130 km/h signifie qu'en 1 heure, soit 3 600 secondes, on parcourt 130 km, soit 130 000 m. Calculons la distance parcourue en 1 seconde :

Distance parcourue en m	130 000	d
Durée en s	3 600	1

On obtient : $d = \frac{130\,000 \times 1}{3\,600} = \frac{325}{9} \approx 36,1 \text{ m}$.

À 130 km/h, un véhicule parcourt environ 36,1 mètres en une seconde.

7 Conversion de vitesse (bis)

Après 10 minutes de vol, la fusée Ariane 5 atteint $8\,112 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Cela signifie qu'en 1 s, elle avance de 8 112 m. Il nous faut maintenant calculer combien de mètres elle parcourt en 3 600 s. Reportons ces données dans un tableau.

Durée en s	1	3 600
Distance parcourue en m	8 112	d

On obtient : $d = 3\,600 \times 8\,112 = 29\,203\,200 \text{ m}$ soit **$29\,203,2 \text{ km}$** . **Après 10 min de vol, la fusée Ariane 5 a donc une vitesse de $29\,203,2 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$.**

Chapitre N7 Statistiques

1 Distance moyenne

Pour calculer la distance moyenne parcourue par jour, on additionne toutes les distances puis on divise la somme obtenue par le nombre de jours de la série (ici 5) :

$$M = \frac{253 + 346 + 186 + 419 + 265}{5} = 293,8$$

Ce commercial a donc parcouru, en moyenne, **293,8 km** par jour lors de sa dernière semaine de travail.

2 Production moyenne

a. Pour calculer la production moyenne de blé tendre en France entre 2000 et 2004, il faut ajouter les productions annuelles et diviser par le nombre total d'années (ici 5) :

$$M = \frac{35,7+30,2+37,3+29+35,6}{5} = \mathbf{33,56}.$$

La production moyenne de blé tendre en France entre 2000 et 2004 a donc été de 33,56 millions de tonnes.

b. Pour déterminer la production moyenne de maïs en France entre 2002 et 2004, il faut ajouter les productions annuelles des trois années concernées (2002, 2003 et 2004) et diviser par le nombre total d'année (ici 3) :

$$M = \frac{16,4+12+16,4}{3} \approx \mathbf{14,93}.$$

La production moyenne de maïs en France entre 2002 et 2004 a donc été d'environ 14,93 millions de tonnes.

3 Revenu moyen

Pour déterminer quel était, en moyenne, le revenu annuel d'un couple avec un enfant entre 2002 et 2004, on calcule :

$$M = \frac{38\,040+37\,359+37\,551}{3} = \mathbf{37\,650 \text{ euros}}.$$

Le revenu annuel moyen d'un couple avec un enfant est de 37 650 euros.

4 Moyenne pondérée

a. Classons les informations données dans un tableau :

Notes	4,5	9,5	10,5	11	13	14,5	15,5
Effectif	5	4	4	2	3	3	3

b. En multipliant chaque note par l'effectif correspondant et en divisant par l'effectif total (ici 24 élèves), on obtiendra la moyenne de la classe à ce devoir :

$$M = \frac{4,5 \times 5 + 9,5 \times 4 + 10,5 \times 4 + \dots + 15,5 \times 3}{24} = \frac{253,5}{24}$$

$$M \approx \mathbf{10,56}$$

La moyenne de la classe à ce devoir est environ 10,56.

5 Moyenne pondérée

a. Complétons le tableau à partir du graphique :

Âge en années	13	14	15	16	17	18
Effectif	5	6	7	5	6	3

b. Calculons l'âge moyen des membres de ce club d'échec en multipliant chaque âge par l'effectif correspondant et en divisant par le nombre total de membres (ici 5 + 6 + 7 + 5 + 6 + 3 soit 32) :

$$M = \frac{13 \times 5 + 14 \times 6 + 15 \times 7 + 16 \times 5 + 17 \times 6 + 18 \times 3}{32}$$

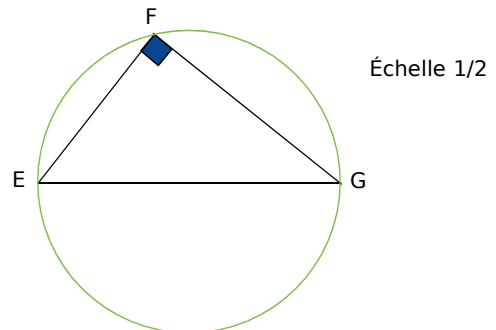
$$M = \frac{490}{32} \approx \mathbf{15,3}$$

L'âge moyen des membres est donc de 15,3 ans environ.

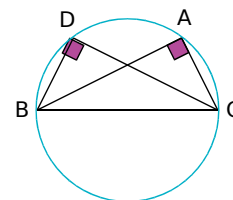
Chapitre G1 Triangles rectangles

1 Construire le cercle circonscrit d'un triangle rectangle

Le triangle EFG est rectangle en F, donc son cercle circonscrit a pour diamètre son hypoténuse [EG].



2 Démontrer qu'un point est sur un cercle



Le triangle ABC est rectangle en A, donc son cercle circonscrit a pour diamètre son hypoténuse [BC]. Le triangle BCD est rectangle en D, donc son cercle circonscrit a pour diamètre son hypoténuse [BC]. Ainsi **les points A et D appartiennent bien au même cercle de diamètre [BC]**.

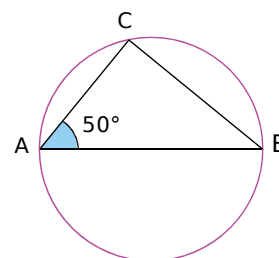
3 Calculer la longueur d'une médiane

Dans le triangle ABC, M est le milieu du segment [AB] et C est un sommet, donc (CM) est une médiane. Dans le triangle ABC rectangle en C, (CM) est une médiane.

Or, dans un triangle rectangle, la médiane issue du sommet de l'angle droit a pour longueur la moitié de la longueur de l'hypoténuse.

Donc $AB = 2 \times CM = 2 \times 2 = \mathbf{4 \text{ cm}}$.

4 Démontrer qu'un triangle est rectangle



Le point C appartient au cercle de diamètre [AB].

Or si on joint un point d'un cercle aux extrémités d'un diamètre de ce cercle alors le triangle ainsi formé est un triangle rectangle en ce point.

Donc $\widehat{ACB} = \mathbf{90^\circ}$.

Correction des exercices "À toi de jouer"

Dans un triangle rectangle, les deux angles aigus sont complémentaires, donc $\widehat{ABC} = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$.

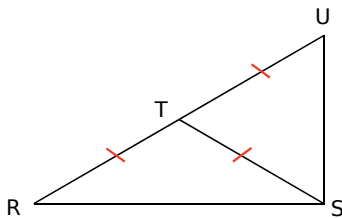
5 Démontrer qu'un triangle est rectangle

On utilise la propriété : « Si on joint un point d'un cercle aux extrémités d'un diamètre de ce cercle alors le triangle ainsi formé est un triangle rectangle en ce point ».

Figure 1 : **ATB** et **ARB**

Figure 2 : **PGH** et **NKH**

6 Démontrer qu'un triangle est rectangle



U est la symétrique du point R par rapport au point T, donc T est le milieu de [RU].

Le triangle RST est isocèle en T, donc $TR = TS$. On a donc $TS = TR = TU$.

Dans le triangle RSU, [ST] joint le sommet S et le milieu T de [RU] donc [ST] est la médiane relative au côté [RU].

Or, si dans un triangle, la longueur de la médiane relative à un côté est égale à la moitié de la longueur de ce côté, alors ce triangle est rectangle et admet ce côté pour hypoténuse.

Donc **le triangle RSU est rectangle en S**.

7 Calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle

Le triangle TER est rectangle en T, son hypoténuse est le côté [ER].

Donc, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$ER^2 = ET^2 + TR^2$$

$$ER^2 = 6^2 + 4^2 = 36 + 16 = 52$$

$$ER = \sqrt{52} \text{ m (valeur exacte)}$$

$$ER \approx 7,21 \text{ m (valeur arrondie à 1 cm près)}$$

8 Calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle

Le triangle ARC est rectangle en A, son hypoténuse est le côté [RC].

Donc, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$RC^2 = RA^2 + AC^2 ;$$

$$13^2 = 5^2 + AC^2 ;$$

$$169 = 25 + AC^2 ;$$

$$AC^2 = 169 - 25 = 144 ;$$

$$AC = \sqrt{144} = 12 \text{ m.}$$

La valeur obtenue est une valeur exacte car $12^2 = 144$.

9 Démontrer qu'un triangle n'est pas rectangle

Dans le triangle DEF, le côté le plus long est [DF].

$$DF^2 = 15^2 = 225$$

$$DE^2 + EF^2 = 11^2 + 13^2 = 121 + 169 = 290$$

On constate que $DF^2 \neq DE^2 + EF^2$

Or si le triangle était rectangle, d'après le théorème de Pythagore, il y aurait égalité.

Comme ce n'est pas le cas, **le triangle DEF n'est pas rectangle**.

10 Démontrer qu'un triangle est rectangle à l'aide de la réciproque du théorème de Pythagore

Dans le triangle XYZ, le côté le plus long est [YZ].

$$YZ^2 = 40^2 = 1600$$

$$YX^2 + XZ^2 = 32^2 + 24^2 = 1024 + 576 = 1600$$

On constate que $YZ^2 = YX^2 + XZ^2$.

Donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, **le triangle XYZ est rectangle en X**.

11 Démontrer qu'un triangle est rectangle à l'aide de la réciproque du théorème de Pythagore

On écrit les données dans la même unité : $UV = 20 \text{ dm} = 200 \text{ cm}$; $UW = 2,1 \text{ m} = 210 \text{ cm}$ et $VW = 290 \text{ cm}$.

Dans le triangle UVW, le côté le plus long est [VW].

$$VW^2 = 290^2 = 84\,100$$

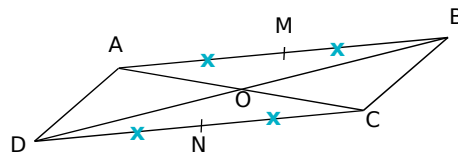
$$VU^2 + UW^2 = 200^2 + 210^2 = 40\,000 + 44\,100 = 84\,100$$

On constate que $VW^2 = VU^2 + UW^2$.

Donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, **le triangle UVW est rectangle en U**.

Chapitre G2 Triangles et parallèles

1 Démontrer que deux droites sont parallèles



ABCD est un parallélogramme de centre O.

Or, si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses diagonales se coupent en leur milieu.

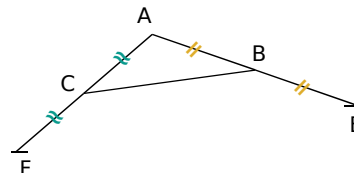
Donc O est le milieu de [AC].

Dans le triangle ABC, O est le milieu de [AC] et M est le milieu de [AB].

Or si, dans un triangle, une droite passe par les milieux de deux côtés alors elle est parallèle au troisième côté.

(MO) passe par les milieux de deux côtés du triangle ABC. On a donc : **(OM) // (BC)**.

2 Démontrer une égalité de longueur



D'après la définition d'une symétrie centrale, dans le triangle AFE, C et B sont les milieux respectifs de [AF] et [AE].

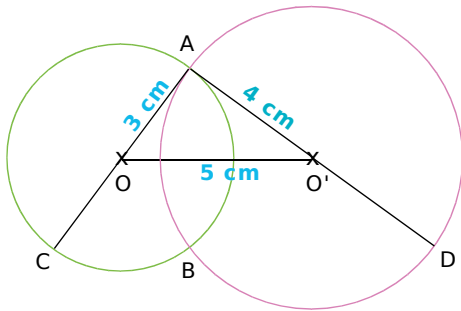
[BC] joint les milieux de deux côtés du triangle AEF.

Or si, dans un triangle, un segment joint les milieux de deux côtés, alors sa longueur est égale à la moitié de celle du troisième côté.

$$\text{Donc : } BC = \frac{EF}{2} .$$

3 Calculer une longueur

La figure ci-dessous est à l'échelle 1/2.

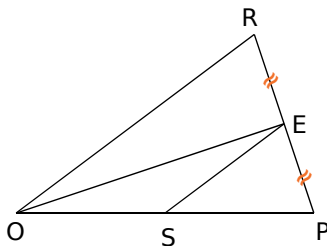


Dans le triangle ADC, O et O' sont les milieux respectifs de [AC] et [AD]. D'après la construction, [OO'] joint les milieux de deux côtés de ADC. Or si dans un triangle un segment joint les milieux de deux côtés, alors sa longueur est égale à la moitié de celle du troisième côté.

$$\text{Donc } OO' = \frac{CD}{2}.$$

On en déduit que : $CD = 2 \times OO' = 10 \text{ cm}$.

4 Démontrer qu'un point est le milieu d'un segment



Dans le triangle OPR, la droite (ES) passe par le milieu du côté [RP] et est parallèle au deuxième côté [OR]. Or si, dans un triangle, une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un autre côté, alors elle passe par le milieu du troisième côté. Donc (ES) passe par le milieu du troisième côté [OP]. **S est donc le milieu de [OP].**

5 Calculer des longueurs

On sait que dans le triangle DST :

E est un point de [DS], F un point de [DT] et les droites (EF) et (ST) sont parallèles. D'après la propriété de proportionnalité des longueurs :

$$\frac{DE}{DS} = \frac{DF}{DT} = \frac{EF}{ST}$$

soit, en remplaçant par les longueurs connues :

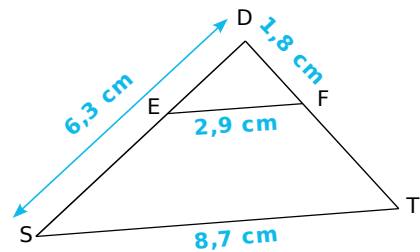
$$\frac{DE}{6,3} = \frac{1,8}{8,7} = \frac{2,9}{DT}$$

En utilisant l'égalité $\frac{1,8}{DT} = \frac{2,9}{8,7}$, on obtient

$$DT = \frac{1,8 \times 8,7}{2,9} \text{ soit } DT = 5,4 \text{ cm.}$$

De même, l'égalité $\frac{DE}{6,3} = \frac{2,9}{8,7}$ aboutit à

$$DE = 6,3 \times \frac{2,9}{8,7} \text{ soit } DE = 2,1 \text{ cm.}$$



6 Dimensions d'un triangle

Le triangle BEC étant une réduction de rapport 0,75 du triangle TOP, il suffit de multiplier la dimension des côtés de TOP par 0,75 pour obtenir celles de BEC. On obtient donc que BEC a pour dimensions :
 $3,6 \times 0,75 = 2,7 \text{ cm}$;
 $5,2 \times 0,75 = 3,9 \text{ cm}$;
 $7,2 \times 0,75 = 5,4 \text{ cm}$.

7 Dimensions d'un agrandissement

Dans un agrandissement les mesures des angles sont conservées.

Les agrandissements des angles \widehat{APS} et \widehat{SAP} auront la même mesure que \widehat{APS} et \widehat{SAP} soit respectivement 100° et 50° .

Dans un agrandissement de rapport 2,5, il suffit de multiplier les longueurs par 2,5. L'agrandissement de PA aura pour mesure $3 \times 2,5 = 7,5 \text{ cm}$.

8 Nature d'une réduction

Une réduction conserve la mesure des angles.

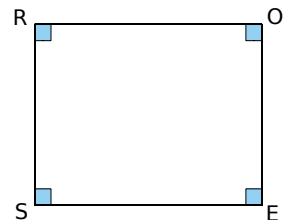
ROSE est une réduction du rectangle BLEU. Donc ROSE aura quatre angles droits.

ROSE sera donc aussi un rectangle.

Dans un agrandissement de rapport $\frac{3}{5}$, il suffit de multiplier les longueurs par $\frac{3}{5}$. Donc les dimensions du rectangle ROSE sont :

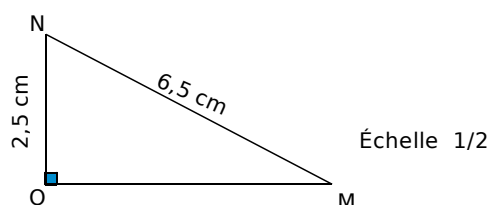
$$RO = 5 \times \frac{3}{5} = 3 \text{ cm.}$$

$$OS = 4 \times \frac{3}{5} = 2,4 \text{ cm.}$$



Chapitre G3 Distances et tangentes

1 Distance d'un point à une droite



Échelle 1/2

Correction des exercices "À toi de jouer"

a. La distance du point M à la droite (ON) est la distance MO.

Dans le triangle MON rectangle en O, d'après le théorème de Pythagore :

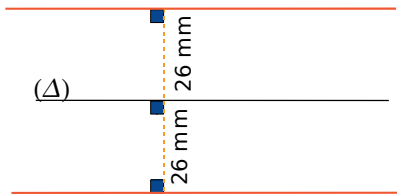
$$MN^2 = MO^2 + ON^2 \quad 6,5^2 = MO^2 + 2,5^2$$

$$MO^2 = 6,5^2 - 2,5^2 = 36 \quad MO = \sqrt{36} = 6$$

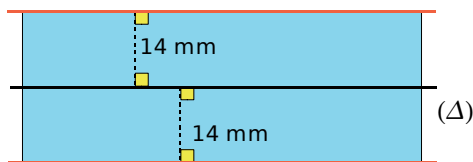
La distance du point M à la droite (ON) est 6 cm.

b. La longueur OM est la plus courte distance entre le point M et n'importe quel autre point de la droite (ON), donc on ne peut pas trouver de point P sur la droite (ON) tel que MP = 5,8 cm.

2 Distance d'un point à une droite

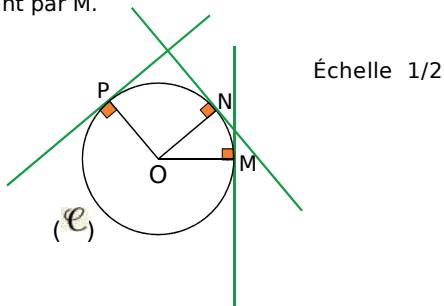


3 Distance d'un point à une droite

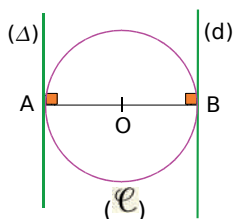


4 Tangentes à un cercle

Pour tracer la tangente à (C) passant par M, on trace d'abord le rayon [OM] puis la perpendiculaire à (OM) passant par M.



5 Tangentes à un cercle



(Δ) est la tangente en A au cercle (C).

Or la tangente à un cercle de centre O en un point A est la droite perpendiculaire en A au rayon [OA].

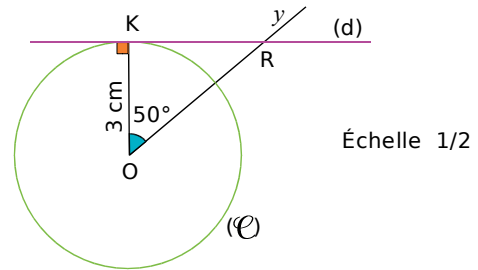
Donc les droites (Δ) et (OA) sont perpendiculaires.

De même, (d) est la tangente en B au cercle (C) donc les droites (d) et (OB) sont perpendiculaires. Les droites (Δ) et (d) sont perpendiculaires à la même droite (AB).

Or, si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième, alors elles sont parallèles entre elles.

Donc les droites (Δ) et (d) sont parallèles.

6 Tangente à un cercle



(d) est la tangente au cercle (C) en K.

Or la tangente à un cercle de centre O est la droite perpendiculaire en K au rayon [OK]. Donc (d) est perpendiculaire à (OK).

Dans le triangle OKR rectangle en K, on a :

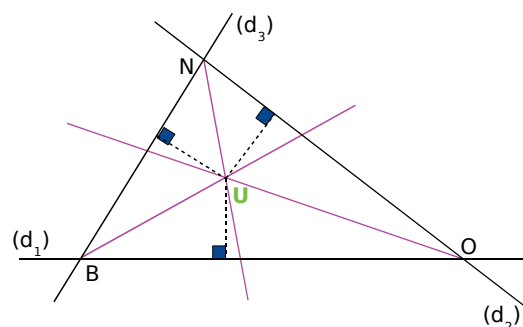
$$\cos \widehat{KOR} = \frac{OK}{RO} \text{ soit } \cos 50^\circ = \frac{3}{RO}$$

$$RO = \frac{3}{\cos 50^\circ} \approx 4,7$$

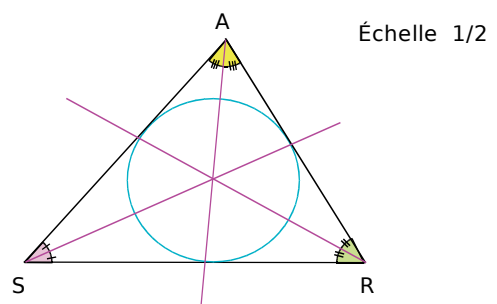
La longueur de RO vaut environ 4,7 cm.

7 Point équidistant des côtés d'un triangle

Le point d'intersection des bissectrices est le centre du cercle inscrit dans le triangle, il est donc équidistant des côtés du triangle.

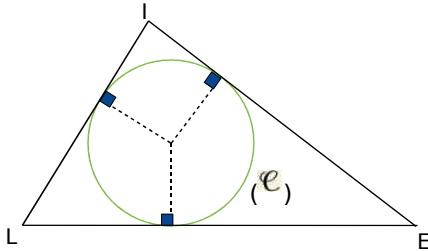


8 Cercle inscrit



9 Triangle circonscrit

On choisit trois points quelconques sur le cercle (C). On trace les tangentes au cercle en ces points.



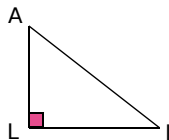
Chapitre G4 Cosinus

1 Triangle rectangle et cosinus

Dans le triangle ALI rectangle en L :

$$\cos \widehat{IAL} = \frac{AL}{AI}$$

$$\cos \widehat{AIL} = \frac{IL}{AI}$$



2 Cosinus ou pas ?

$\frac{OZ}{OE}$: OZ est la longueur du côté adjacent à l'angle $\widehat{ZO E}$ et OE est la longueur de l'hypoténuse du triangle ZOE rectangle en Z. **Donc $\frac{OZ}{OE}$ est le cosinus de $\widehat{ZO E}$.**

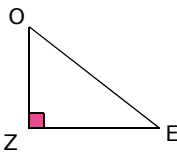
$\frac{EO}{EZ}$: EO est la longueur de l'hypoténuse du triangle ZOE rectangle en Z. Elle est le numérateur de cette

fraction et non le dénominateur.

Donc $\frac{EO}{EZ}$ n'est pas le cosinus d'un angle du triangle ZOE.

$\frac{EZ}{EO}$: EZ est la longueur du côté adjacent à l'angle \widehat{OEZ} et OE est la longueur de l'hypoténuse du triangle ZOE rectangle en Z. **Donc $\frac{EZ}{EO}$ est le cosinus de \widehat{OEZ} .**

$\frac{ZO}{ZE}$: la longueur de l'hypoténuse OE du triangle ZOE rectangle en Z ne figure pas dans ce quotient. **Donc $\frac{ZO}{ZE}$ n'est pas le cosinus d'un angle du triangle ZOE rectangle en Z.**



3 Calcul de longueur

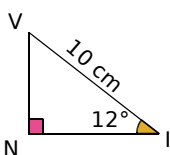
La figure ci-contre n'est pas dessinée à l'échelle.

VIN est rectangle en N donc :

$$\cos \widehat{NIV} = \frac{IN}{IV}$$

$$\text{soit } \cos 12^\circ = \frac{IN}{10}$$

$$IN = 10 \times \cos 12^\circ \approx \mathbf{9,8 \text{ cm.}}$$



4 Calcul de longueur

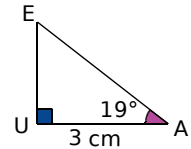
La figure ci-contre n'est pas dessinée à l'échelle.

EAU est rectangle en U donc :

$$\cos \widehat{EAU} = \frac{UA}{AE}$$

$$\text{soit } AE = \frac{UA}{\cos \widehat{EAU}}$$

$$AE = \frac{3}{\cos 19^\circ} \approx \mathbf{3,2 \text{ cm.}}$$

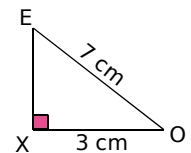


5 Mesure d'un angle

La figure ci-contre n'est pas dessinée à l'échelle.

EXO est rectangle en X donc :

$$\cos \widehat{XOE} = \frac{XO}{OE} = \frac{3}{7}$$



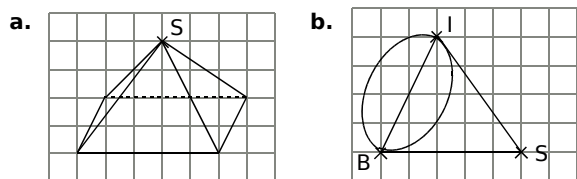
À l'aide de la calculatrice, on obtient : $\widehat{XOE} \approx \mathbf{65^\circ}$.

Par ailleurs, dans le triangle EXO rectangle en X, \widehat{XOE} et \widehat{XEO} sont complémentaires donc :

$$\widehat{XEO} = 90^\circ - 65^\circ = \mathbf{25^\circ}$$

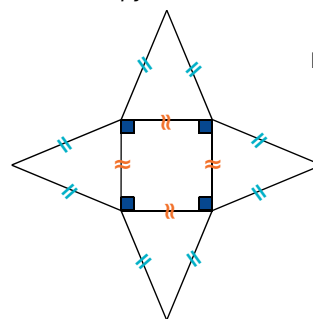
Chapitre G5 Pyramides et cônes

1 Compléter les tracés en perspective



2 Patron d'une pyramide à base carrée

Échelle 1/4



3 Calculer le volume d'une pyramide

$$\text{Aire de la base} : \frac{L \times l}{2} = \frac{4,5 \text{ m} \times 6 \text{ m}}{2} = 13,5 \text{ m}^2.$$

$$\text{Volume} : \frac{\text{Aire de la base} \times \text{hauteur}}{3} = \frac{13,5 \text{ m}^2 \times 10 \text{ m}}{3}$$

donc le volume de la pyramide est **45 m³**.


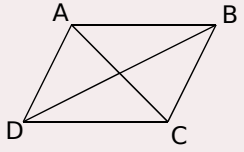
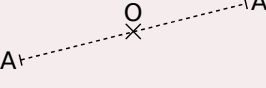
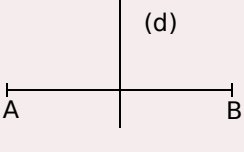
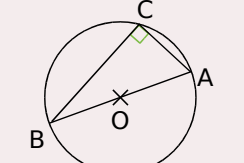
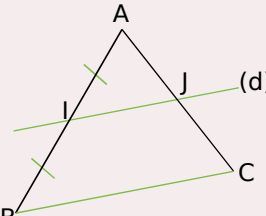
4 Calculer le volume d'un cône

rayon = diamètre : 2 = 8 cm : 2 = 4 cm.

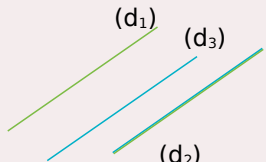
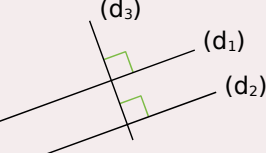
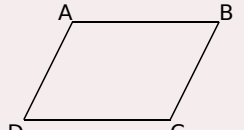
$$\text{Volume} : \frac{\pi \times r^2 \times h}{3} = \frac{\pi \times (4 \text{ cm})^2 \times 12 \text{ cm}}{3} = 64 \text{ cm}^3.$$

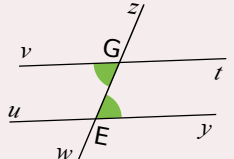
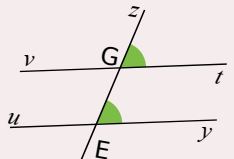
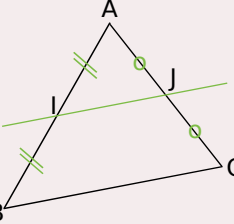
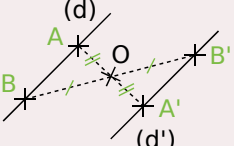
Donc le volume du cône est **64 cm³**.

Démontrer qu'un point est le milieu d'un segment

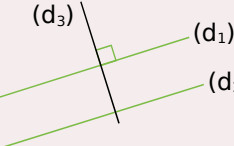
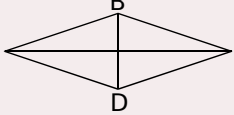
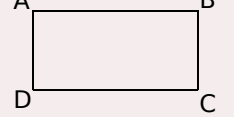
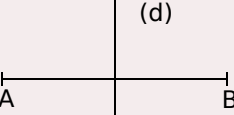
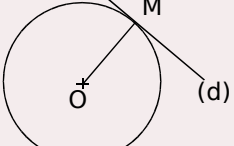
<p>P 1 Si un point est sur un segment et à égale distance de ses extrémités alors ce point est le milieu du segment.</p>		<p>O appartient à [AB] et $OA = OB$ donc O est le milieu de [AB].</p>
<p>P 2 Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses diagonales se coupent en leur milieu. (Ceci est aussi vrai pour les losanges, rectangles et carrés qui sont des parallélogrammes particuliers.)</p>		<p>ABCD est un parallélogramme donc ses diagonales [AC] et [BD] se coupent en leur milieu.</p>
<p>P 3 Si A et A' sont symétriques par rapport à un point O alors O est le milieu du segment [AA'].</p>		<p>A et A' sont symétriques par rapport au point O donc le point O est le milieu de [AA'].</p>
<p>P 4 Si une droite est la médiatrice d'un segment alors elle coupe ce segment en son milieu.</p>		<p>(d) est la médiatrice du segment [AB] donc (d) coupe le segment [AB] en son milieu.</p>
<p>P 5 Si un triangle est rectangle alors son cercle circonscrit a pour centre le milieu de son hypoténuse.</p>		<p>ABC est un triangle rectangle d'hypoténuse [AB] donc le centre de son cercle circonscrit est le milieu de [AB].</p>
<p>P 6 Si dans un triangle une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un second côté alors elle passe par le milieu du troisième côté.</p>		<p>Dans le triangle ABC, I est le milieu de [AB] et la parallèle (d) à (BC) coupe [AC] en J donc J est le milieu de [AC].</p>

Démontrer que deux droites sont parallèles

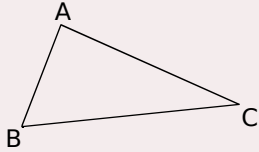
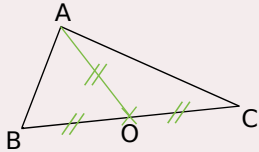
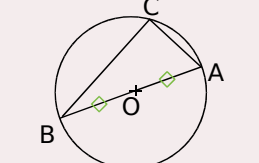
<p>P 7 Si deux droites sont parallèles à une même troisième droite alors elles sont parallèles entre elles.</p>		<p>$(d_1) \parallel (d_2)$ et $(d_2) \parallel (d_3)$ donc $(d_1) \parallel (d_3)$.</p>
<p>P 8 Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième droite alors elles sont parallèles entre elles.</p>		<p>$(d_1) \perp (d_3)$ et $(d_2) \perp (d_3)$ donc $(d_1) \parallel (d_2)$.</p>
<p>P 9 Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses côtés opposés sont parallèles. (Ceci est aussi vrai pour les losanges, rectangles et carrés qui sont des parallélogrammes particuliers.)</p>		<p>ABCD est un parallélogramme donc $(AB) \parallel (CD)$ et $(AD) \parallel (BC)$.</p>

<p>P 10 Si deux droites coupées par une sécante forment des angles alternes-internes de même mesure alors ces droites sont parallèles.</p>		<p>Les droites (vt) et (uy) sont coupées par la sécante (zw), \widehat{vGw} et \widehat{zEy} sont alternes-internes et de même mesure donc $(vt) \parallel (uy)$.</p>
<p>P 11 Si deux droites coupées par une sécante forment des angles correspondants de même mesure alors ces droites sont parallèles.</p>		<p>Les droites (vt) et (uy) sont coupées par la sécante (zw), \widehat{zGt} et \widehat{zEy} sont correspondants et de même mesure donc $(vt) \parallel (uy)$.</p>
<p>P 12 Si dans un triangle, une droite passe par les milieux de deux côtés alors elle est parallèle au troisième côté.</p>		<p>Dans le triangle ABC, I est le milieu de [AB] et J est le milieu de [AC] donc (IJ) est parallèle à (BC).</p>
<p>P 13 Si deux droites sont symétriques par rapport à un point alors elles sont parallèles.</p>		<p>Les droites (d) et (d') sont symétriques par rapport au point O donc $(d) \parallel (d')$.</p>

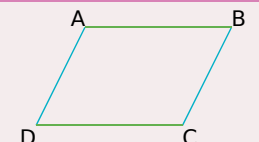
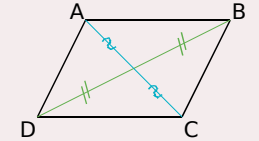
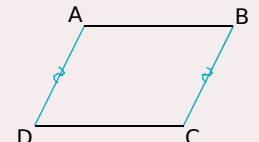
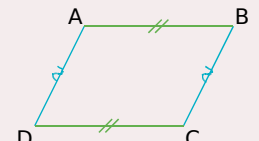
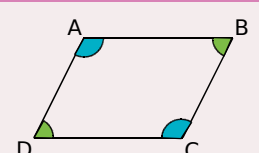
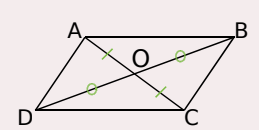
Démontrer que deux droites sont perpendiculaires

<p>P 14 Si deux droites sont parallèles et si une troisième droite est perpendiculaire à l'une alors elle est perpendiculaire à l'autre.</p>		<p>$(d_1) \perp (d_3)$ et $(d_1) \parallel (d_2)$ donc $(d_2) \perp (d_3)$.</p>
<p>P 15 Si un quadrilatère est un losange alors ses diagonales sont perpendiculaires. (Ceci est aussi vrai pour le carré qui est un losange particulier.)</p>		<p>ABCD est un losange donc $(AC) \perp (BD)$.</p>
<p>P 16 Si un quadrilatère est un rectangle alors ses côtés consécutifs sont perpendiculaires. (Ceci est aussi vrai pour le carré qui est un rectangle particulier.)</p>		<p>ABCD est un rectangle donc $(AB) \perp (BC)$, $(BC) \perp (CD)$, $(CD) \perp (AD)$ et $(AD) \perp (AB)$.</p>
<p>P 17 Si une droite est la médiatrice d'un segment alors elle est perpendiculaire à ce segment.</p>		<p>(d) est la médiatrice du segment [AB] donc (d) est perpendiculaire à [AB].</p>
<p>P 18 Si une droite est tangente à un cercle en un point alors elle est perpendiculaire au rayon de ce cercle qui a pour extrémité ce point.</p>		<p>(d) est tangente en M au cercle de centre O donc (d) est perpendiculaire à [OM].</p>

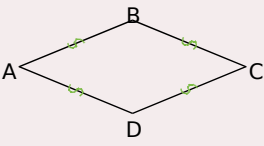
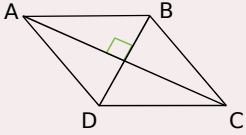
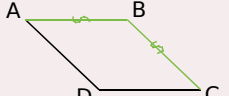
Démontrer qu'un triangle est rectangle

<p>P 19 <u>Réciproque du théorème de Pythagore :</u> Si dans un triangle le carré de la longueur du plus grand côté est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés alors le triangle est rectangle et il admet ce plus grand côté pour hypoténuse.</p>		<p>Dans le triangle ABC, $BC^2 = AB^2 + AC^2$ donc le triangle ABC est rectangle en A.</p>
<p>P 20 Si, dans un triangle, la longueur de la médiane relative à un côté est égale à la moitié de la longueur de ce côté alors ce triangle est rectangle et il admet ce côté pour hypoténuse.</p>		<p>Dans le triangle ABC, O est le milieu de [BC] et $OA = \frac{BC}{2}$ donc le triangle ABC est rectangle en A.</p>
<p>P 21 Si un triangle est inscrit dans un cercle de diamètre l'un de ses côtés alors il est rectangle et il admet ce diamètre pour hypoténuse.</p>		<p>C appartient au cercle de diamètre [AB] donc ABC est un triangle rectangle en C.</p>

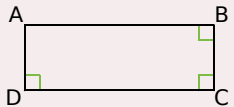
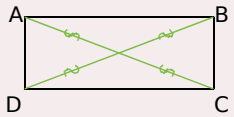
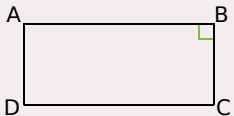
Démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme

<p>P 22 Si un quadrilatère a ses côtés opposés parallèles deux à deux alors c'est un parallélogramme.</p>		<p>Dans le quadrilatère ABCD, (AB) // (CD) et (AD) // (BC) donc ABCD est un parallélogramme.</p>
<p>P 23 Si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu alors c'est un parallélogramme.</p>		<p>Dans le quadrilatère ABCD, les diagonales [AC] et [BD] se coupent en leur milieu. Donc ABCD est un parallélogramme.</p>
<p>P 24 Si un quadrilatère non croisé a deux côtés opposés parallèles et de même longueur alors c'est un parallélogramme.</p>		<p>Dans le quadrilatère non croisé ABCD, (AD) // (BC) et AD = BC donc ABCD est un parallélogramme.</p>
<p>P 25 Si un quadrilatère non croisé a ses côtés opposés de la même longueur deux à deux alors c'est un parallélogramme.</p>		<p>Dans le quadrilatère non croisé ABCD, AB = CD et AD = BC donc ABCD est un parallélogramme.</p>
<p>P 26 Si un quadrilatère non croisé a ses angles opposés de la même mesure alors c'est un parallélogramme.</p>		<p>Dans le quadrilatère non croisé ABCD, $\hat{A} = \hat{C}$ et $\hat{B} = \hat{D}$ donc ABCD est un parallélogramme.</p>
<p>P 27 Si un quadrilatère non croisé a un centre de symétrie alors c'est un parallélogramme.</p>		<p>O est centre de symétrie du quadrilatère ABCD donc ABCD est un parallélogramme.</p>

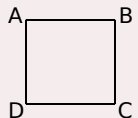
Démontrer qu'un quadrilatère est un losange

<p>P 28 Si un quadrilatère a ses côtés de la même longueur alors c'est un losange.</p>		<p>Dans le quadrilatère ABCD $AB = BC = CD = DA$ donc ABCD est un losange.</p>
<p>P 29 Si un parallélogramme a ses diagonales perpendiculaires alors c'est un losange.</p>		<p>ABCD est un parallélogramme et $(AC) \perp (BD)$ donc ABCD est un losange.</p>
<p>P 30 Si un parallélogramme a deux côtés consécutifs de la même longueur alors c'est un losange.</p>		<p>ABCD est un parallélogramme et $AB = BC$ donc ABCD est un losange.</p>

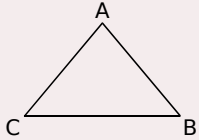
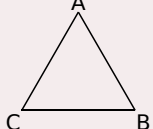
Démontrer qu'un quadrilatère est un rectangle

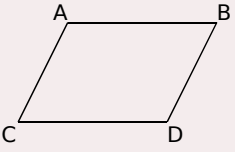
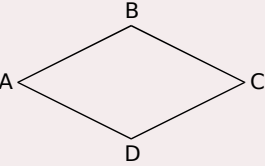
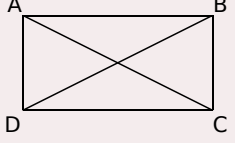
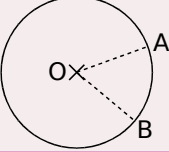
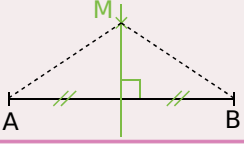
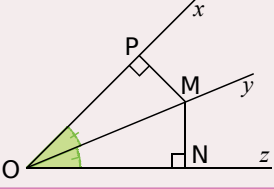
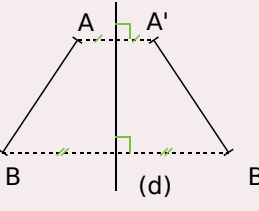
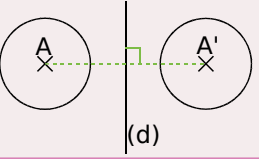
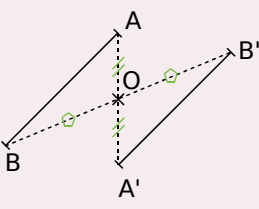
<p>P 31 Si un quadrilatère possède trois angles droits alors c'est un rectangle.</p>		<p>ABCD possède trois angles droits donc ABCD est un rectangle.</p>
<p>P 32 Si un parallélogramme a ses diagonales de la même longueur alors c'est un rectangle.</p>		<p>ABCD est un parallélogramme et $AC = BD$ donc ABCD est un rectangle.</p>
<p>P 33 Si un parallélogramme possède un angle droit alors c'est un rectangle.</p>		<p>ABCD est un parallélogramme et $(AB) \perp (BC)$ donc ABCD est un rectangle.</p>

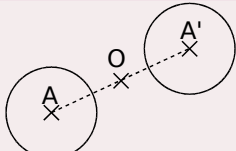
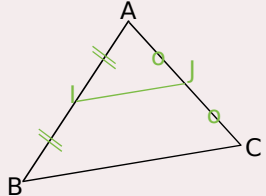
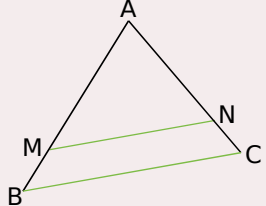
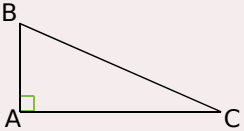
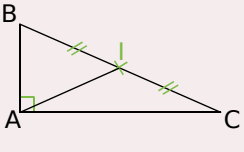
Démontrer qu'un quadrilatère est un carré

<p>P 34 Si un quadrilatère vérifie à la fois les propriétés du losange et du rectangle alors c'est un carré.</p>	
---	--

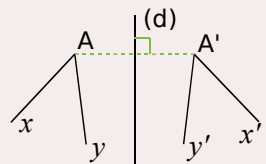
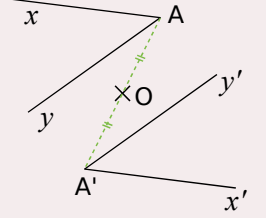
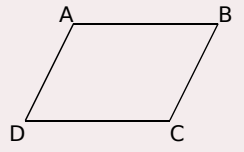
Déterminer la longueur d'un segment

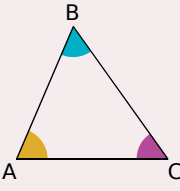
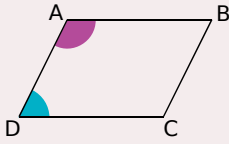
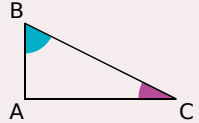
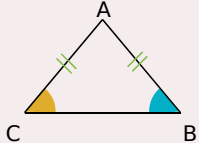
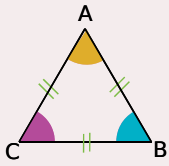
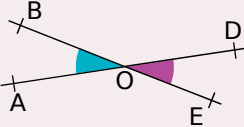
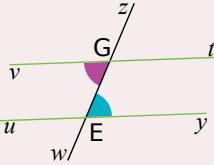
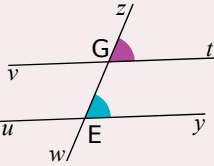
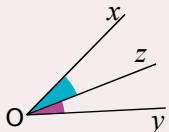
<p>P 35 Si un triangle est isocèle alors il a deux côtés de la même longueur.</p>		<p>ABC est isocèle en A donc $AB = AC$.</p>
<p>P 36 Si un triangle est équilatéral alors il a tous ses côtés de la même longueur.</p>		<p>ABC est équilatéral donc $AB = AC = BC$.</p>

<p>P 37 Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses côtés opposés ont la même longueur. (C'est également vrai pour les rectangles, les losanges et les carrés qui sont des parallélogrammes particuliers.)</p>		<p>ABCD est un parallélogramme donc $AB = CD$ et $AC = BD$.</p>
<p>P 38 Si un quadrilatère est un losange alors tous ses côtés sont de la même longueur. (C'est également vrai pour les carrés qui sont des losange particuliers.)</p>		<p>ABCD est un losange donc $AB = BC = CD = DA$.</p>
<p>P 39 Si un quadrilatère est un rectangle alors ses diagonales ont la même longueur. (C'est également vrai pour les carrés qui sont des losange particuliers.)</p>		<p>ABCD est un rectangle donc $AC = BD$.</p>
<p>P 40 Si deux points appartiennent à un cercle alors ils sont équidistants du centre de ce cercle.</p>		<p>A et B appartiennent au cercle de centre O donc $OA = OB$.</p>
<p>P 41 Si un point appartient à la médiatrice d'un segment alors il est équidistant des extrémités de ce segment.</p>		<p>M appartient à la médiatrice de [AB] donc $MA = MB$.</p>
<p>P 42 Si un point appartient à la bissectrice d'un angle alors il est situé à la même distance des côtés de cet angle.</p>		<p>M appartient à la bissectrice de l'angle \widehat{xOz} donc $MN = MP$.</p>
<p>P 43 Si deux segments sont symétriques par rapport à une droite alors ils ont la même longueur.</p>		<p>Les segments [AB] et [A'B'] sont symétriques par rapport à l'axe (d) donc $AB = A'B'$.</p>
<p>P 44 Si un cercle est l'image d'un autre cercle par une symétrie alors ils ont le même rayon.</p>		<p>Les cercles de centres A et A' sont symétriques par rapport à (d) donc ils ont le même rayon.</p>
<p>P 45 Si deux segments sont symétriques par rapport à un point alors ils ont la même longueur.</p>		<p>Les segments [AB] et [A'B'] sont symétriques par rapport au point O donc $AB = A'B'$.</p>

<p>P 46 Si deux cercles sont symétriques par rapport à un point alors ils ont le même rayon.</p>		<p>Les cercles de centre A et A' sont symétriques par rapport au point O donc ils ont le même rayon.</p>
<p>P 47 Si dans un triangle, un segment joint les milieux de deux côtés alors sa longueur est égale à la moitié de celle du troisième côté.</p>		<p>Dans le triangle ABC, I est le milieu de [AB] et J est le milieu de [AC] donc $IJ = \frac{BC}{2}$.</p>
<p>P 48 <u>Théorème de proportionnalité des longueurs dans un triangle.</u></p>		<p>Dans le triangle ABC, M est un point de [AB], N un point de [AC] et (MN) est parallèle à (BC) donc : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.</p>
<p>P 49 <u>Théorème de Pythagore :</u> Si un triangle est rectangle alors le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.</p>		<p>ABC est un triangle rectangle en A donc $BC^2 = AB^2 + AC^2$.</p>
<p>P 50 Si un triangle est rectangle alors la longueur de la médiane issue de l'angle droit a pour longueur la moitié de la longueur de l'hypoténuse.</p>		<p>ABC est un triangle rectangle en A et I est le milieu de [BC] donc $AI = \frac{BC}{2}$.</p>

Déterminer la mesure d'un angle

<p>P 51 Si deux angles sont symétriques par rapport à une droite alors ils ont la même mesure.</p>		<p>\widehat{xAy} et $\widehat{x'A'y'}$ sont symétriques par rapport à l'axe (d) donc $\widehat{xAy} = \widehat{x'A'y'}$.</p>
<p>P 52 Si deux angles sont symétriques par rapport à un point alors ils ont la même mesure.</p>		<p>\widehat{xAy} et $\widehat{x'A'y'}$ sont symétriques par rapport au point O donc $\widehat{xAy} = \widehat{x'A'y'}$.</p>
<p>P 53 Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses angles opposés ont la même mesure. (C'est également vrai pour les losanges, les rectangles et les carrés qui sont des parallélogrammes particuliers.)</p>		<p>ABCD est un parallélogramme donc $\widehat{ABC} = \widehat{CDA}$ et $\widehat{DAB} = \widehat{BCD}$.</p>

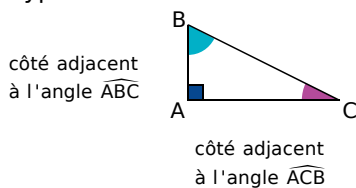
<p>P 54 Dans un triangle, la somme des mesures des angles est égale à 180°.</p>		<p>Dans le triangle ABC, $\widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180^\circ$.</p>
<p>P 55 Si un quadrilatère est un parallélogramme alors deux de ses angles consécutifs sont supplémentaires.</p>		<p>ABCD est un parallélogramme donc $\widehat{CDA} + \widehat{DAB} = 180^\circ$.</p>
<p>P 56 Si un triangle est rectangle alors ses angles aigus sont complémentaires.</p>		<p>ABC est un triangle rectangle en A donc $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 90^\circ$.</p>
<p>P 57 Si un triangle est isocèle alors ses angles à la base ont la même mesure.</p>		<p>ABC est un triangle isocèle en A donc $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$.</p>
<p>P 58 Si un triangle est équilatéral alors ses angles mesurent 60°.</p>		<p>ABC est un triangle équilatéral donc $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 60^\circ$.</p>
<p>P 59 Si deux angles sont opposés par le sommet alors ils ont la même mesure.</p>		<p>Les angles \widehat{AOB} et \widehat{DOE} sont opposés par le sommet donc $\widehat{AOB} = \widehat{DOE}$.</p>
<p>P 60 Si deux droites parallèles sont coupées par une sécante alors les angles alternes internes qu'elles forment sont de même mesure.</p>		<p>Les angles alternes internes sont déterminés par les droites (vt) et (uy) qui sont parallèles et la sécante (zw) donc $\widehat{vGw} = \widehat{zEy}$.</p>
<p>P 61 Si deux droites parallèles sont coupées par une sécante alors les angles correspondants qu'elles forment sont de même mesure.</p>		<p>Les angles correspondants sont déterminés par les droites (vt) et (uy) qui sont parallèles et la sécante (zw) donc $\widehat{zGt} = \widehat{zEy}$.</p>
<p>P 62 Si une droite est la bissectrice d'un angle alors elle partage l'angle en deux angles adjacents de même mesure.</p>		<p>La droite (Oz) est la bissectrice de l'angle \widehat{xOy} donc $\widehat{xOz} = \widehat{zOy}$.</p>

Démontrer avec les droites remarquables du triangle

<p>P 63 Si deux points sont symétriques par rapport à une droite alors cette droite est la médiatrice du segment ayant pour extrémités ces deux points.</p>		<p>M' est le symétrique de M par rapport à la droite (d) donc (d) est la médiatrice du segment $[MM']$.</p>
<p>P 64 Si un point est équidistant des extrémités d'un segment alors il est situé sur la médiatrice de ce segment.</p>		<p>$MA = MB$ donc M appartient à la médiatrice du segment $[AB]$.</p>
<p>P 65 Si dans un triangle, une droite passe par un sommet et est perpendiculaire au côté opposé alors c'est une hauteur du triangle.</p>		<p>Dans le triangle ABC, (d) passe par le sommet C et est perpendiculaire au côté opposé $[AB]$ donc (d) est une hauteur du triangle ABC.</p>
<p>P 66 Si dans un triangle, une droite passe par un sommet et par le milieu du côté opposé alors c'est une médiane du triangle.</p>		<p>Dans le triangle ABC, (d) passe par le sommet C et par le milieu du côté opposé $[AB]$ donc (d) est une médiane du triangle ABC.</p>
<p>P 67 Si une droite partage un angle en deux angles égaux alors cette droite est la bissectrice de l'angle.</p>		<p>$\widehat{xOy} = \widehat{yOz}$ donc (Oy) est la bissectrice de l'angle \widehat{xOz}.</p>
<p>P 68 Si un point est situé à la même distance des côtés d'un angle alors il appartient à la bissectrice de cet angle.</p>		<p>$MP = MN$ donc M appartient à la bissectrice de l'angle \widehat{xOz}.</p>

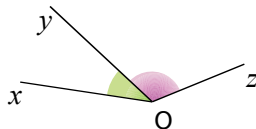
A Adjacent (côté)

Dans un triangle rectangle, le côté adjacent à un angle aigu est le côté de cet angle qui n'est pas l'hypoténuse.



Adjacents (angles)

Deux angles adjacents sont deux angles qui ont un sommet commun, un côté commun et qui sont situés de part et d'autre de ce côté commun.



Agrandissement

Si deux figures (F) et (F') sont de même nature et que les longueurs des côtés de (F') sont proportionnelles à celles de (F) de rapport k avec $k > 1$ alors (F') est un agrandissement de (F). Dans un agrandissement les mesures des angles, la perpendicularité et le parallélisme sont conservés.



figure (F)

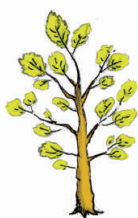
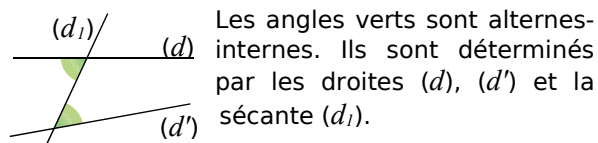
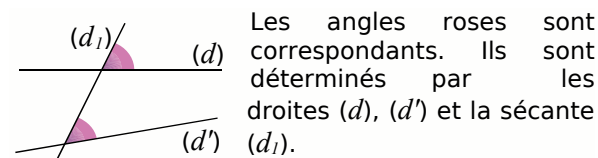


figure (F')

Angles alternes-internes

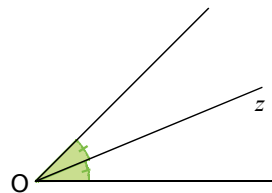


Angles correspondants



B Bissectrice

La bissectrice d'un angle est la demi-droite qui partage cet angle en deux angles adjacents de même mesure. C'est l'axe de symétrie de l'angle.

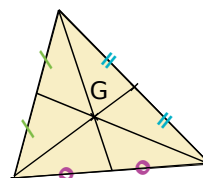


C Carré

Un carré est à la fois un rectangle et un losange. C'est donc un quadrilatère qui a ses quatre angles droits et ses quatre côtés de même longueur.

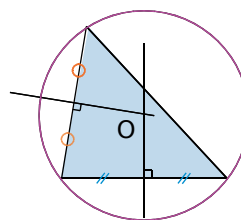
Centre de gravité

Dans un triangle, le centre de gravité est le point d'intersection des médianes.



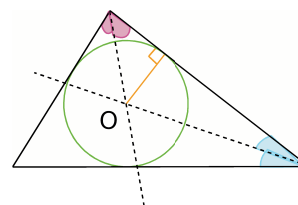
Cercle circonscrit

Le cercle circonscrit à un triangle est le cercle qui passe par les trois sommets de ce triangle. Son centre est le point de concours des médiatrices de ce triangle.



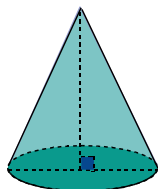
Cercle inscrit

Le cercle inscrit à un triangle est le cercle tangent intérieurement aux trois côtés de ce triangle. Son centre est le point de concours des bissectrices de ce triangle.



Cône

Un cône de révolution est un solide qui est généré par un triangle rectangle tournant autour d'un des côtés de son angle droit. La base du cône de révolution est un disque.



Concourantes (droites)

Des droites concourantes sont des droites qui se coupent en un même point.

Conjecture

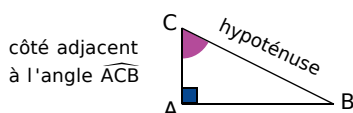
Émettre une conjecture, c'est résumer dans un énoncé court et précis une idée que l'on pense être vraie mais qui n'a pas encore été démontrée. Après démonstration, la conjecture devient propriété.

Contre-exemple

Un contre-exemple est un exemple qui vérifie les données d'une conjecture mais pas sa conclusion. L'existence d'un contre-exemple pour une conjecture prouve que celle-ci est fausse.

Cosinus d'un angle aigu

Dans un triangle rectangle, le cosinus d'un angle aigu est le quotient de la longueur du côté adjacent à cet angle par la longueur de l'hypoténuse.



$$\cos \widehat{ACB} = \frac{\text{côté adjacent à l'angle } \widehat{ACB}}{\text{hypoténuse}}$$

D

Développer

Développer un produit, c'est le transformer en une somme algébrique.

Différence

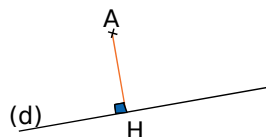
La différence est le résultat d'une soustraction.

Distance à zéro

La distance à zéro d'un nombre relatif est le nombre sans son signe.

Distance d'un point à une droite

Soient une droite (d) et un point A n'appartenant pas à (d). La distance du point A à la droite (d) est égale à AH où H désigne le pied de la perpendiculaire à (d) passant par A.



Distributivité

Les formules sont :

- Pour la distributivité simple :

$$k \times (a + b) = k \times a + k \times b$$

$$k \times (a - b) = k \times a - k \times b$$
- Pour la double distributivité :

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Donnée

On appelle donnée toute information fournie dans l'énoncé de l'exercice (texte, codage de la figure, etc).

E

Écriture scientifique d'un nombre

L'écriture scientifique d'un nombre décimal est de la forme $a \times 10^n$ où la distance à zéro de a est un nombre décimal compris entre 1 et 10 (10 exclu) et n un nombre entier relatif.

Effectif du caractère

L'effectif d'un caractère est le nombre d'individus qui possèdent ce caractère donné.

Effectif total

L'effectif total est le nombre total d'individus de la population étudiée lors d'une enquête statistique.

Encadrement

Réaliser l'encadrement d'un nombre x , c'est trouver deux nombres a et b tels que $a \leq x \leq b$. On peut aussi utiliser le symbole « $<$ » pour l'écrire. L'amplitude de l'encadrement est $b - a$.

Équation (résoudre une)

Résoudre une équation, c'est chercher toutes les valeurs possibles du ou des nombres inconnus pour que l'égalité soit vraie.

Exposant

Pour tout nombre a non nul et tout nombre entier relatif n , l'exposant de a^n est n .

F Factoriser

Factoriser une somme algébrique, c'est la transformer en un produit.

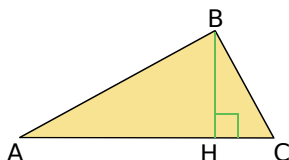
Fréquence

La fréquence d'un caractère est le quotient de l'effectif du caractère par l'effectif total.

$$\text{Soit : fréquence} = \frac{\text{effectif du caractère}}{\text{effectif total}}$$

H Hauteur d'un triangle

Dans un triangle, une hauteur est une droite qui passe par un sommet du triangle et qui est perpendiculaire au côté opposé à ce sommet.



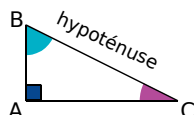
Hauteur (d'une pyramide, d'un cône)

La hauteur d'une pyramide ou d'un cône est le segment issu de son sommet et perpendiculaire à sa base.



Hypoténuse

Dans un triangle rectangle, l'hypoténuse est le côté opposé à l'angle droit. C'est aussi le plus grand côté.



I Inégalité

Une inégalité est une relation d'ordre entre deux grandeurs.

Par exemple : $a > b$ ou $a \leq b$.

Inverse

L'inverse d'un nombre relatif a ($a \neq 0$) est le nombre qui multiplié par a donne 1.

Notation : Il se note $\frac{1}{a}$ ou a^{-1} .

Irréductible (fraction)

Une fraction irréductible, c'est une fraction que l'on ne peut plus simplifier.

L Littéral (calcul)

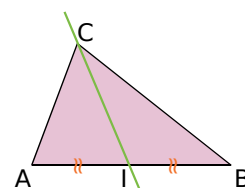
C'est un calcul avec des lettres.

Losange

Un losange est un quadrilatère qui a ses quatre côtés de la même longueur.

M Médiane (dans un triangle)

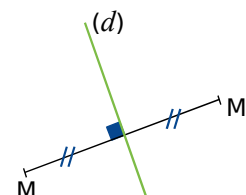
Dans un triangle, une médiane est une droite qui passe par un sommet du triangle et par le milieu du côté opposé à ce sommet.



Médiatrice

La médiatrice d'un segment est la droite qui coupe ce segment perpendiculairement en son milieu.

La médiatrice d'un segment est un axe de symétrie de ce segment.



Mouvement uniforme

On dit qu'un mouvement est uniforme lorsque la distance parcourue est proportionnelle à la durée du trajet. Le déplacement est effectué à allure constante.

Moyenne

Pour calculer la moyenne d'une série statistique :

- on additionne toutes les valeurs du caractère de la série ;
- on divise la somme obtenue par le nombre de valeurs de la série.

Moyenne pondérée

Pour calculer la moyenne pondérée d'une série statistique :

- on additionne les produits des effectifs par les valeurs associées du caractère ;
- on divise la somme obtenue par l'effectif total de la série.

O

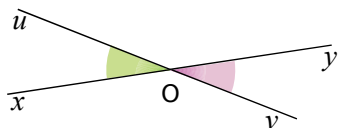
Opposé

L'opposé d'un nombre relatif est le nombre qui a la même distance à zéro que ce nombre et le signe contraire.

La somme d'un nombre et de son opposé est égale à 0.

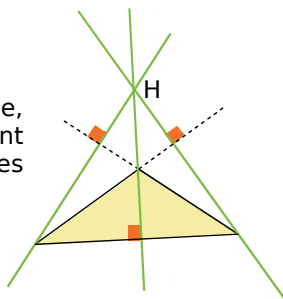
Opposés (angles)

Deux angles opposés par le sommet sont deux angles qui ont un sommet commun et qui ont leurs côtés dans le prolongement l'un de l'autre.



Orthocentre

Dans un triangle, l'orthocentre est le point de concours des hauteurs.



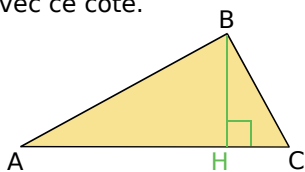
P

Parallélogramme

Un parallélogramme est un quadrilatère qui a ses côtés opposés parallèles deux à deux.

Pied (de la hauteur)

Dans un triangle, on appelle pied de la hauteur relative à un côté, le point d'intersection de cette hauteur avec ce côté.



Polygone

Un polygone est une figure fermée à plusieurs côtés.

Produit

Le produit est le résultat d'une multiplication.

Propriété

Une propriété est une règle connue (démontrée ou admise) présentée souvent sous la forme "Si... alors...".

Puissance

- Pour tout nombre relatif a et tout nombre entier n positif non nul :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ facteurs}}$$

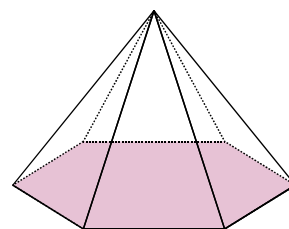
- Pour tout nombre relatif a : $a^0 = 1$; $a^1 = a$.
- Pour tout nombre relatif a non nul et tout nombre entier n positif non nul :

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Pyramide

Une pyramide est un solide dont :

- une face est un polygone : c'est la base de la pyramide ;
- les autres faces, appelées faces latérales, sont des triangles qui ont un sommet commun : le sommet de la pyramide.



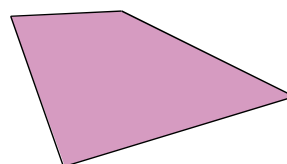
Q

Quotient

Le quotient d'un nombre a par un nombre b non nul est le nombre qu'il faut multiplier par b pour obtenir a . On le note : $a : b$ ou $\frac{a}{b}$.

Quadrilatère

Un quadrilatère est un polygone à quatre côtés.



R Rectangle

Un rectangle est un quadrilatère qui a quatre angles droits.

Réduction

Si deux figures (F) et (F') sont de même nature et que les longueurs des côtés de (F') sont proportionnelles à celles de (F) de rapport k avec $0 < k < 1$ alors (F') est une réduction de (F). Dans une réduction les mesures des angles, la perpendicularité et le parallélisme sont conservés.

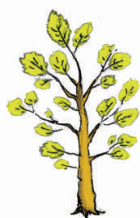


figure (F)



figure (F')

S Somme

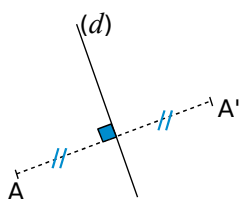
La somme est le résultat d'une addition.

Simplifier une fraction

Simplifier une fraction, c'est la transformer en une fraction égale de telle sorte que le numérateur et le dénominateur soient des nombres entiers les plus petits possible.

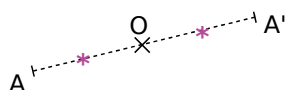
Symétrie axiale

Le point A' est l'image du point A par la symétrie axiale d'axe (d) si (d) est la médiatrice du segment [AA'].



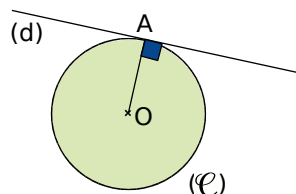
Symétrie centrale

Le point A' est l'image du point A par la symétrie centrale de centre O si O est le milieu de [AA'].



T Tangente (à un cercle)

La tangente à un cercle (C) de centre O en un point A de ce cercle est la droite passant par A et perpendiculaire au rayon [OA]. Elle a un unique point d'intersection avec le cercle.



Trapèze

Un trapèze est un quadrilatère qui a deux côtés opposés parallèles.

Triangle équilatéral

Un triangle équilatéral est un triangle qui a ses trois côtés de la même longueur.

Triangle isocèle

Un triangle isocèle est un triangle qui a deux côtés de la même longueur.

Triangle rectangle

Un triangle rectangle est un triangle qui a un angle droit.

V Vitesse moyenne

La vitesse moyenne est le quotient de la distance par le temps : $\text{vitesse} = \frac{\text{distance}}{\text{temps}}$.

1 Je relis les **méthodes et notions essentielles** pour rafraîchir mes connaissances ou revoir ce que je ne maîtrise pas.

Méthode 1 : Montrer que des droites sont parallèles

A connaître
Si, dans un triangle, une droite passe par les milieux de deux côtés alors elle est parallèle au troisième côté.

Exemple : On donne la figure codée ci-dessous. Démontrer que la droite (MN) est parallèle à la droite (OL).

Données	Propriété	Conclusion
Les codages de la figure nous permettent d'affirmer que dans le triangle BOL, M est le milieu de [BO] et N est le milieu de [BL].	Si, dans un triangle, une droite passe par les milieux de deux côtés alors elle est parallèle au troisième côté.	La droite (MN) est ainsi parallèle au troisième côté du triangle, c'est-à-dire (OL).

Méthodes et notions essentielles

Méthode 1 : Montrer que des droites sont parallèles

A connaître
Si, dans un triangle, une droite passe par les milieux de deux côtés du triangle, alors elle est parallèle au troisième côté.

Exemple : On donne la figure codée ci-dessous. Démontrer que la droite (MN) est parallèle à la droite (OL).

Données	Propriété	Conclusion
Les codages nous permettent d'affirmer que dans le triangle BOL, M est le milieu de [BO] et N est le milieu de [BL].	Si, dans un triangle, une droite passe par les milieux de deux côtés alors elle est parallèle au troisième côté.	La droite (MN) est ainsi parallèle au troisième côté du triangle, c'est-à-dire (OL).

A toi de jouer
1 ABCD est un parallélogramme de centre O. On appelle M le milieu de [AB]. Démontrer que (OM) est parallèle à (BC).

Méthode 2 : Calculer une longueur connaissant des milieux

A connaître
Si, dans un triangle, un segment joint les milieux de deux côtés alors sa longueur est égale à la moitié de celle du troisième côté.

Exemple : On donne la figure codée ci-dessous. Calcule la longueur JK.

Données	Propriété	Conclusion
Les codages nous permettent d'affirmer que dans le triangle DAN, J et K sont les milieux de [DA] et [DN] et que AN = 7,8 cm.	Si, dans un triangle, un segment joint les milieux de deux côtés alors sa longueur est égale à la moitié de celle du troisième côté.	Le segment [JK] a donc pour longueur la moitié de celle du troisième côté [AN] : $JK = \frac{AN}{2} = \frac{7,8}{2} = 3,9$. Donc JK = 3,9 cm.

A toi de jouer
2 Soit ABC un triangle. E est le symétrique de A par rapport à B et F est le symétrique de A par rapport à C. Démontrer que $BC = \frac{EF}{2}$.
3 Deux cercles de rayons respectifs 3 cm et 4 cm et de centres respectifs O et O' distants de 5 cm, se coupent en deux points A et B. On trace le diamètre [AC] de l'un et le diamètre [AD] de l'autre. Calcule la longueur CD.

TRIANGLES ET DROITES PARALLÈLES – CHAPITRE G2

2 Je m'entraîne avec les exercices « **A toi de jouer** » (ils sont corrigés à la fin du manuel).

A toi de jouer

2 Soit ABC un triangle. E est le symétrique de A par rapport à B et F est le symétrique de A par rapport à C. Démontrer que $BC = \frac{EF}{2}$.

3 Deux cercles de rayons respectifs 3 cm et 4 cm et de centres respectifs O et O' distants de 5 cm, se coupent en deux points A et B. On trace le diamètre [AC] de l'un et le diamètre [AD] de l'autre. Calcule la longueur CD.

3 Je n'hésite pas à consulter le **lexique** en fin de manuel, quand je ne connais pas bien un terme, ou que je veux retrouver une propriété utile aux démonstrations géométriques.

L'essentiel des propriétés utiles aux démonstrations

P.27 Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses côtés opposés ont la même longueur. (C'est également vrai pour les rectangles, les losanges et les carrés qui sont des parallélogrammes particuliers.)		ABCD est un parallélogramme donc : AB = CD et AC = BD.
P.28 Si un quadrilatère est un losange alors tous ses côtés sont de la même longueur. (C'est également vrai pour les carrés qui sont des losange particuliers.)		ABCD est un losange donc : AB = BC = CD = DA.
P.29 Si un quadrilatère est un rectangle alors ses diagonales ont la même longueur. (C'est également vrai pour les carrés qui sont des losange particuliers.)		ABCD est un rectangle donc : AC = BD.
P.10 Si deux points appartiennent à un cercle alors ils sont équidistants du centre de ce cercle.		A et B appartiennent au cercle de centre O donc : OA = OB.
P.11 Si un point appartient à la médiatrice d'un segment alors il est équidistant des extrémités de ce segment.		M appartient à la médiatrice de [AB] donc : MA = MB.
P.13 Si un point appartient à la bissectrice d'un angle alors il est situé à la même distance des côtés de cet angle.		M appartient à la bissectrice de l'angle (O) donc : MO = MP.

L'essentiel des notions

A Adjacent (côté)
Dans un triangle rectangle, le côté adjacent à un angle aigu est le côté qui n'est pas l'hypoténuse.

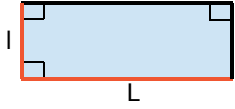
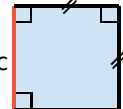
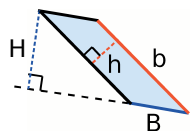
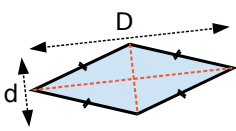
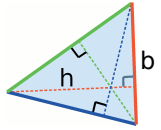
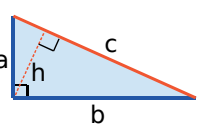
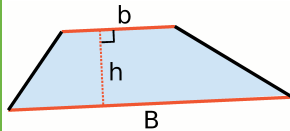
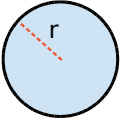
B Bissectrice
La bissectrice d'un angle est la demi-droite qui partage cet angle en deux angles adjacents de même mesure. C'est l'axe de symétrie de l'angle.

C Carré
Un carré est à la fois un rectangle et un losange. C'est donc un quadrilatère qui a ses quatre angles droits et ses quatre côtés de même longueur.
Centre de gravité
Dans un triangle, le centre de gravité est le point d'intersection des médianes.

Aggrandissement
Si deux figures (F) et (F') sont de même nature et que les longueurs des côtés de (F') sont proportionnelles à celles de (F) de rapport k avec k > 1 alors (F') est un aggrandissement de (F). Dans un aggrandissement les mesures des angles, la perpendicularité et le parallélisme.

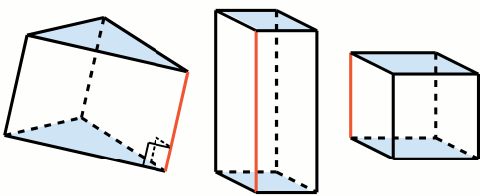
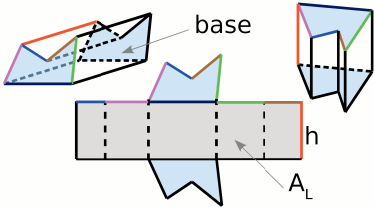
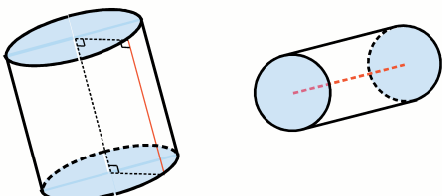
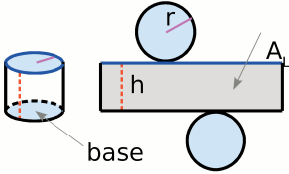
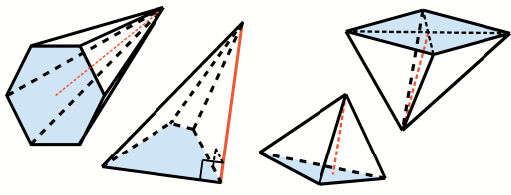
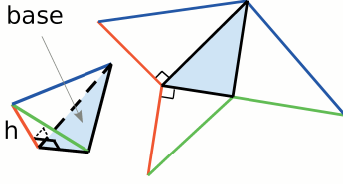
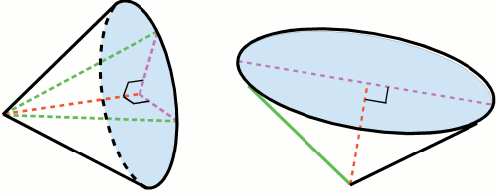
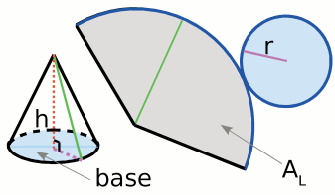
Aires A et périmètres P

Deux exemples de conversions : $25,4 \text{ cm}^2 = 2\,540 \text{ mm}^2$; $50 \pi \text{ m}^2 = 0,5 \pi \text{ hm}^2$ (ou ha) $\approx 1,6 \text{ ha}$.

	Rectangle $A = L \times l$ $P = 2L + 2l = 2(L + l)$		Carré $A = c \times c = c^2$ $P = 4c$
	Parallélogramme $A = B \times H = b \times h$		Losange $A = \frac{D \times d}{2}$
	Triangle $A = \frac{b \times h}{2}$		Triangle rectangle $A = \frac{a \times b}{2} = \frac{c \times h}{2}$
	Trapèze $A = \frac{B + b}{2} \times h$		Disque $A = \pi r^2$ $P = 2\pi r$

Volumes V, aires latérales A_L et patrons

Deux exemples de conversion : $2\,534 \text{ cm}^3 = 2,534 \text{ dm}^3$ ou L ; $12 \pi \text{ cm}^3 = 0,012 \pi \text{ L} = 1,2 \pi \text{ cL} \approx 4 \text{ cL}$.

		Prisme droit $V = \text{Aire base} \times h$ $A_L = \text{Périmètre base} \times h$
		Cylindre de révolution $V = \text{Aire base} \times h$ $V = \pi r^2 \times h$ $A_L = \text{Périmètre base} \times h$ $A_L = 2\pi r \times h$
		Pyramide $V = \frac{\text{Aire base} \times h}{3}$
		Cône de révolution $V = \frac{\text{Aire base} \times h}{3}$ $V = \frac{\pi r^2 \times h}{3}$

Imprimé en France par ACTIS
Dépôt légal : mai 2007

Génération 5 - Sésamath
ISBN : 978-2-952417-44-0